



HAL
open science

Dynamical monitoring of structures using continuous wavelet analysis

Tien-Phu Le

► **To cite this version:**

Tien-Phu Le. Dynamical monitoring of structures using continuous wavelet analysis. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2003. English. NNT: . pastel-00000640

HAL Id: pastel-00000640

<https://pastel.hal.science/pastel-00000640>

Submitted on 2 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : *Structures et Matériaux*

présentée par

Thien-Phu LE

Sujet de la thèse :

**Auscultation dynamique des structures à l'aide de
l'analyse continue en ondelettes**

soutenue le 28 novembre 2003
devant le jury composé de :

Président :	A. DE STEFANO
Rapporteurs :	J.C. GOLINVAL S. BELLIZZI
Examineurs :	P. ARGOUL O. ABRAHAM
Directeur de thèse :	D. DUHAMEL

*A ma famille,
A Trung Kien, mon village natal.*

Remerciements

J'exprime toute ma profonde reconnaissance à Pierre ARGOUL, qui a dirigé mon travail de thèse et qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique. Sans lui, la thèse n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie Denis DUHAMEL d'avoir accepté de prendre la direction de cette thèse en collaboration avec Pierre ARGOUL. Je tiens à rendre hommage à ses qualités pédagogiques et scientifiques.

Je remercie également les deux directeurs successifs du LAMI (Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification), Alain EHRLACHER et Karam SAB de m'avoir accueilli dans leur laboratoire avec de bonnes conditions de travail et un environnement de recherche exceptionnel autant du point de vue des qualités humaines que scientifiques.

Ma gratitude va ensuite, à Odile ABRAHAM pour l'intérêt avec lequel, elle a suivi cette étude. Ses conseils, son dynamisme et ses encouragements constants m'ont été d'un grand soutien tout au long de ces trois ans.

Messieurs Sergio BELLIZZI et Jean-Claude GOLINVAL ont accepté de me consacrer leur temps en rapportant cette thèse. J'en suis honoré et je les en remercie sincèrement.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Alessandro DE STEFANO pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Stéphane HANS et à Vincent LENAERTS pour leurs données expérimentales, qui m'ont permis de valider et de développer ce travail.

Je voudrais remercier chaleureusement tous les membres du LAMI, permanents, doctorants ou stagiaires, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces trois années une belle étape de ma vie.

Mes études en français et en France ont été possibles grâce à des aides financières de l'AUPEL-UREF. Je lui exprime ici mes remerciements sincères.

Je remercie aussi tous mes amis pour la motivation que leur amitié et leur amour m'ont apportée pendant ces années d'études à l'étranger.

Enfin et avant tout, je tiens à remercier du fond du coeur, ma famille, qui a su me donner sans cesse son soutien, son amour et l'envie d'apprendre encore plus. Elle était et continuera d'être, je le sais, un soutien sans faille.

Table des matières

Acronymes	11
Introduction	13
I Étude bibliographique	15
1 Synthèse bibliographique et problématique générale	17
1.1 Introduction	17
1.2 Classification des techniques d'identification modale	17
1.3 Identification des systèmes mécaniques linéaires	19
1.3.1 Quelques techniques dans le domaine temporel	20
1.3.2 Quelques techniques dans le domaine des fréquences	20
1.3.3 Analyse temps-fréquence en identification modale des systèmes linéaires	21
1.4 Identification des systèmes mécaniques non-linéaires	22
1.4.1 Comportement des systèmes non-linéaires	22
1.4.2 Méthodes d'identification modale des systèmes non-linéaires	22
1.4.3 Analyse temps-fréquence en identification modale des systèmes non-linéaires	24
1.5 Amélioration de la méthode impact-écho	24
1.6 Conclusions	25
II Transformation en ondelettes	27
2 Signal et traitement du signal par la transformation en ondelettes	29
2.1 Introduction	29
2.2 Classification des signaux	29
2.2.1 Classification déterministe-aléatoire	29
2.2.2 Classification énergétique	30
2.2.3 Autres classifications	30
2.2.4 Quelques signaux particuliers	30

2.2.5	Représentation vectorielle des signaux	30
2.3	Transformation de Fourier	31
2.3.1	Définition	31
2.3.2	Propriétés de la transformation de Fourier	31
2.3.3	Signal modulé en amplitude et en fréquence, signal analytique	32
2.4	Analyse linéaire temps-fréquence	33
2.4.1	Le plan temps-fréquence	33
2.4.2	Transformation de Fourier à court terme	34
2.4.3	Transformation en ondelettes	35
2.5	Ondelettes mères	39
2.5.1	Ondelettes progressives	40
2.5.2	Études de trois ondelettes progressives représentatives	41
2.5.3	Choix des ondelettes	41
2.6	Conclusions	45
3	Calcul numérique de la transformation en ondelettes	47
3.1	Introduction	47
3.2	Algorithmes de calcul numérique de la transformation en ondelettes	47
3.2.1	Calcul par intégrale directe	47
3.2.2	Calcul par produit de convolution	48
3.2.3	Calcul par l'algorithme FFT	50
3.2.4	Calcul par l'algorithme CZT	50
3.3	Discussion sur les algorithmes	52
3.4	Effet de bords	52
3.4.1	Approche théorique	52
3.4.2	Illustration de l'effet de bords	57
3.5	Conclusion	57
4	Analyse des signaux modulés en amplitude et en fréquence	59
4.1	Introduction	59
4.2	Caractérisation des arêtes sur le plan temps-fréquence	59
4.2.1	Lignes spectrales	59
4.2.2	Signal modulé en amplitude et en fréquence	61
4.3	Choix de paramètres des ondelettes mères	63
4.4	Extraction des arêtes	64
4.4.1	Méthodes "Différentielles"	64
4.4.2	Méthodes "Intégrales"	66

4.4.3	Exemples numériques	68
4.4.4	Discussion sur les algorithmes	68
4.5	Conclusion	76
III Auscultation dynamique des structures		77
5	Identification modale des systèmes mécaniques linéaires	79
5.1	Introduction	79
5.2	Rappel sur le système mécanique linéaire discret	79
5.2.1	Système à un degré de liberté	79
5.2.2	Système à plusieurs degrés de liberté	80
5.3	Identification des paramètres modaux à l'aide de la transformation en ondelettes .	83
5.3.1	Formulation des critères d'identification	84
5.3.1.1	Systèmes à amortissement proportionnel	84
5.3.1.2	Systèmes à amortissement non proportionnel	85
5.3.2	Procédure complète d'identification basée sur la TO	87
5.4	Tests de validation	88
5.4.1	Tests numériques	88
5.4.1.1	Modélisation de la réponse libre	88
5.4.1.2	Test du système à 1DDL	89
5.4.1.3	Test du système à MDDL avec amortissement proportionnel . . .	93
5.4.1.4	Test du système à MDDL avec amortissement non-proportionnel .	98
5.4.2	Application sur les données réelles	99
5.4.2.1	Présentation des essais non destructifs	100
5.4.2.2	Résultats du test réel	102
5.5	Remarques et conclusions	103
6	Identification des systèmes mécaniques non-linéaires	105
6.1	Introduction	105
6.2	Méthodes d'identification du comportement non-linéaire	105
6.3	Application de la transformation en ondelettes à l'identification de non-linéarité . .	106
6.3.1	Principe de la méthode	106
6.3.2	Modèles des systèmes non-linéaires	107
6.3.3	Procédure d'identification de non-linéarité	109
6.4	Tests de validation	109
6.4.1	Tests numériques sur des oscillateurs	109
6.4.2	Tests réels, poutre non-linéaire	110
6.5	Conclusions	116

7 Amélioration de la méthode impact-écho	117
7.1 Introduction	117
7.2 Rappel sur la propagation des ondes dans un milieu élastique isotrope continu . . .	117
7.2.1 Équations fondamentales	117
7.2.2 Décomposition de Helmholtz	118
7.3 Méthode impact-écho	119
7.3.1 Principe de la méthode impact-écho	119
7.3.2 Ondes élastiques dans une dalle en béton	120
7.3.3 Mise en oeuvre expérimentale	123
7.3.4 Les efforts dans le développement de la méthode impact-écho	124
7.4 Problématique	125
7.5 Amélioration de la méthode impact-écho par la transformation en ondelettes . . .	128
7.5.1 Bases théoriques	128
7.5.2 Démarches pratiques	128
7.6 Validation de la méthode	129
7.6.1 Mesure d'épaisseur des dalles en béton	129
7.6.2 Détection de cavités	134
7.7 Conclusion	140
Conclusions & Perspectives	141
Annexes	145
A Ondelettes mères	145
B Signal analytique	151
C Oscillateur bilinéaire	153

Acronymes

TF	Transformation de Fourier
TO	Transformation en Ondelettes
TG	Transformation de Gabor
TL	Transformation de Laplace
TH	Transformation de Hilbert
\mathcal{H}^2	Seconde espace de Hardy
$H(\cdot)$	Distribution de Heaviside
$\delta(\cdot)$	Distribution de Dirac
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
MNN	Mode Normal Non-linéaire
DDL	Degré De Liberté
MDDL	Multiple Degrés De Liberté
Sgn	Fonction de Signe

Introduction

Les essais non destructifs en génie civil attirent de plus en plus l'attention des industriels à cause de leur utilité indéniable : tester sans détruire et évaluer l'aptitude au bon fonctionnement sans altérer la tenue de service des structures. Avec le développement rapide des technologies durant ces dernières décennies, ces essais peuvent être réalisés sous sollicitations soit par rayonnement électromagnétique, soit par vibration mécanique... La plupart des essais mécaniques non destructifs pratiqués sur les matériaux et les structures sont effectués au moyen d'une analyse dynamique. On peut classer ces essais en deux approches suivantes :

- Les essais sur les structures de grande dimension se font par l'analyse de leur comportement vibratoire. Les fréquences propres de ces structures sont généralement de l'ordre du Hertz ou de la dizaine de Hertz. Le défaut recherché peut être un défaut local ou global de la structure.
- Lorsque le défaut recherché est une dégradation plus ou moins localisée (délamination, cavité...), l'analyse par propagation des ondes est utilisée. Les fréquences mises en jeu doivent être suffisamment élevées pour que la longueur d'onde soit plus faible que la dimension caractéristique de la structure dans le sens de propagation.

Les essais dynamiques comprennent en général, deux étapes : les mesures in situ et le traitement des données. À la première étape, on cherche à avoir de "bonnes" données de mesure par des choix convenables : type d'essai, capteurs, excitation.... Dans la deuxième étape, ces mesures brutes sont traitées par des techniques de traitement du signal afin d'accéder à des informations pertinentes qui permettent d'évaluer ensuite, les caractéristiques mécaniques et la performance de la structure.

La technique de traitement du signal utilisée en essai dynamique classique se fait sur des données soit temporelles, soit fréquentielles. Récemment, avec la découverte de la transformation en ondelettes, l'analyse temps-fréquence a été étudiée et appliquée avec succès par les chercheurs dans le domaine de traitement du signal. L'analyse temps-fréquence a créé un outil performant particulièrement pour les signaux modulés en temps et en fréquence couramment rencontrés dans les essais de vibration des structures. Nous avons voulu, au cours de cette étude, appliquer l'analyse temps-fréquence et en particulier la transformation en ondelettes, à des essais dynamiques non destructifs.

La motivation principale de la thèse est d'exploiter les informations pertinentes obtenues à partir des données brutes traitées par la transformation en ondelettes. Ces informations "affinées" faciliteront la procédure d'identification des caractéristiques des structures. Par ailleurs, la représentation temps-fréquence des données peut permettre la compréhension du phénomène physique des essais dynamiques et les connaissances *a priori* des essais pourront être utiles et prises en compte dans le processus d'identification.

La thèse se compose de trois parties :

La première partie présente une synthèse bibliographique sur deux sujets : l'identification modale et la méthode impact-écho. Dans le contexte général des méthodes d'identification modale, les méthodes utilisant la transformation en ondelettes sont abordées. Des travaux existants sont recensés et on montre que des améliorations restent nécessaires pour aboutir à des procédures plus consistantes. Une idée d'amélioration de la méthode impact-écho est proposée après une brève analyse et on la développera plus en détail à la troisième partie.

La deuxième partie aborde la transformation en ondelettes continue et cherche à adapter l'analyse en ondelettes dans un but d'identification modale. Le chapitre 2 suppose que les signaux modulés en temps et en fréquence sont définis comme des fonctions. Un critère de choix des ondelettes "mères" est proposé. Le chapitre 3 passe à la version discrétisée de la transformation en ondelettes avec le calcul numérique. On s'intéresse à l'effet de bords pour les calculs des signaux discrets, de longueur finie et on propose une solution. Le chapitre 4 achève les discussions sur la transformation en ondelettes avec le choix des paramètres de définition pour deux ondelettes mères retenues : ondelette de Morlet et ondelette de Cauchy. Il présente également plusieurs algorithmes de caractérisation des informations contenues dans le signal. Ainsi, l'outil numérique de transformation en ondelettes est disponible à la fin de cette partie et la technique sera appliquée aux données de mesures dans la troisième partie.

La troisième partie applique la transformation en ondelettes dans les cas particuliers suivants : l'identification des paramètres modaux des systèmes mécaniques linéaires, la caractérisation des non-linéarités des systèmes mécaniques non-linéaires (approche vibratoire) et l'amélioration de la méthode impact-écho (approche par propagation d'onde mécanique). Le chapitre 5 a pour but de mettre en oeuvre une procédure d'identification modale des systèmes mécaniques linéaires avec la prise en compte de différents modèles d'amortissement. Le chapitre 6 utilise la capacité de détecter l'évolution des fréquences instantanées pour identifier la non-linéarité. Une procédure d'identification est également proposée. Le chapitre 7 s'appuie sur la densité spectrale locale combinée avec l'algorithme de recuit simulé afin d'améliorer la méthode impact-écho.

Finalement, des conclusions importantes sur les résultats obtenus sont tirées et on propose des idées pour une poursuite de ce travail.

Première partie

Étude bibliographique

Chapitre 1

Synthèse bibliographique et problématique générale

1.1 Introduction

L'objectif de la thèse est d'appliquer l'analyse en ondelettes à l'auscultation des structures vibrantes avec les réponses seules des structures (excitation non ou incomplètement mesurée). Deux applications sont envisagées : l'identification des paramètres du comportement vibratoire et la détection des défauts par la propagation des ondes. En ce qui concerne l'identification des paramètres modaux, ce chapitre présente brièvement l'analyse modale des systèmes mécaniques linéaires et non-linéaires avec quelques méthodes représentatives. Quant à la détection des défauts, une méthode d'auscultation des dalles en béton est abordée : la méthode impact-écho. Ce chapitre comprend cinq sections. Dans la première section, on se place dans le contexte général des méthodes d'identification modale, pour situer la méthode utilisant l'analyse temps-fréquence. Une telle classification permet aussi d'examiner les méthodes de même catégorie et ainsi d'en discuter. Les sections 1.3 et 1.4 abordent respectivement l'identification des systèmes mécaniques linéaires et non-linéaires. Les différentes techniques en temps, en fréquence et en temps-fréquence sont analysées. Les dernières sont proches de celle basée sur l'analyse en ondelettes. La section 1.5 propose une idée pour améliorer la méthode impact-écho. Grâce à la répartition énergétique de la transformation en ondelettes, on pourra détecter les fréquences utiles dans le signal mesuré. Enfin, quelques conclusions sont tirées.

1.2 Classification des techniques d'identification modale

Les méthodes d'identification modale ont pour objectif d'identifier les propriétés dynamiques d'une structure à partir des réponses vibratoires.

Depuis les années soixante-dix, beaucoup de techniques d'identification ont été proposées. Parallèlement au développement des technologies, des méthodes performantes ont été commercialisées, donnant non seulement des résultats des paramètres modaux mais encore d'autres résultats de type post-processing tels que : animation des modes, prédiction des modifications structurales... La classification d'un si grand nombre de méthodes est très difficile, celle que nous présentons en figure 1.1 est inspirée de Maia *et al.* [116].

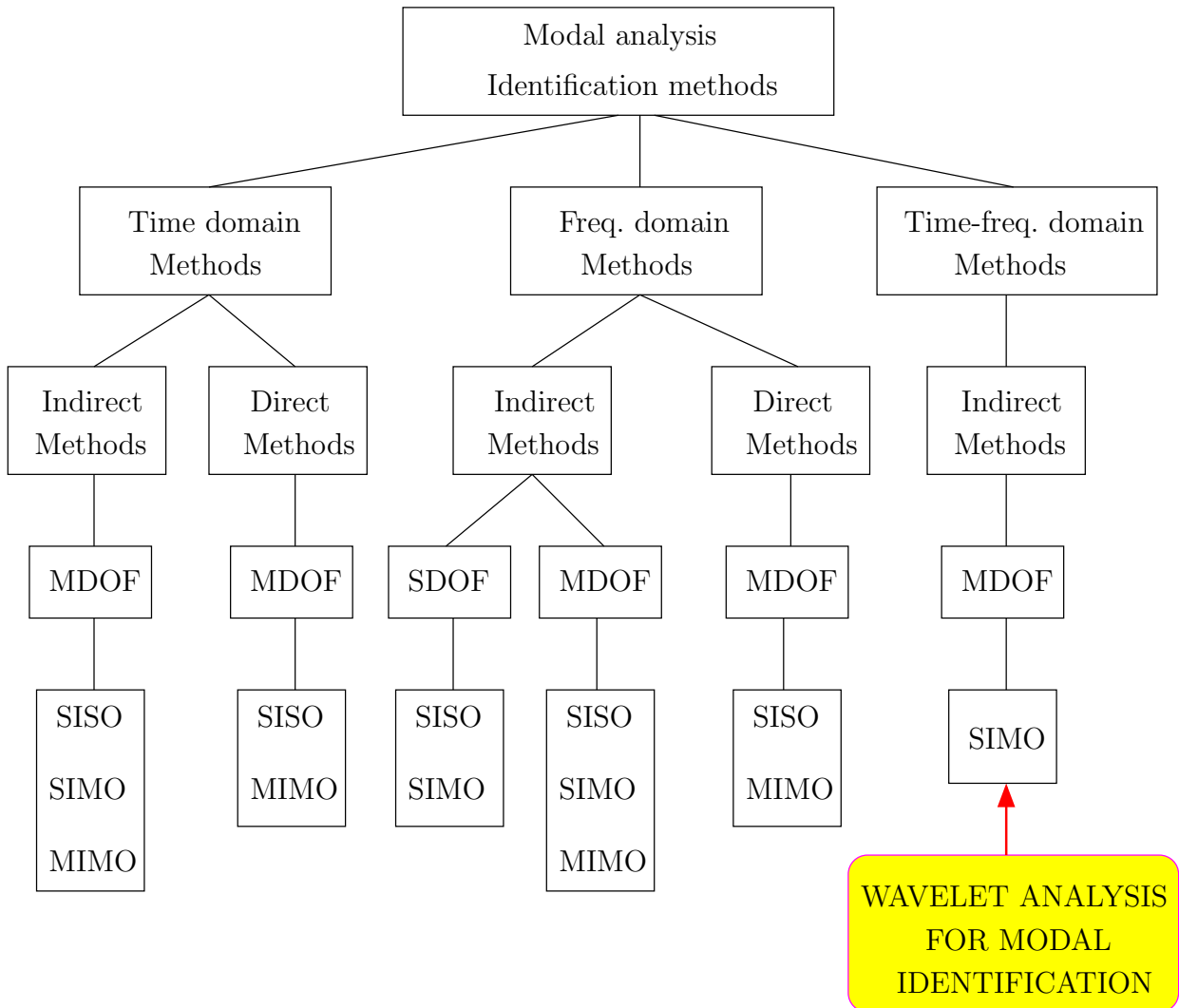


FIGURE 1.1. Contexte de la méthode d'identification modale basée sur la TO proposée

La classification traditionnelle s'effectue suivant le domaine où les données sont traitées i.e., temps ou fréquence. Quelques méthodes travaillent dans le domaine fréquentiel mais des problèmes associés à l'évaluation de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF), existent tels que : résolution fréquentielle, fuites (leakage)... De même, la Fonction de Réponse Impulsionnelle (FRI) de la structure est souvent obtenue par la transformation de Fourier discrète inverse `ifft` ; ce qui provoque le problème de fuites sur les signaux de longueur finie. Pour ces raisons, certaines méthodes utilisent directement les données brutes pour éviter le problème de fuites.

En général, les modèles temporels ont tendance à donner de meilleurs résultats quand une large plage de fréquence ou plusieurs modes existent dans les données, tandis que les modèles dans le domaine fréquentiel ont tendance à donner de meilleurs résultats quand la plage de fréquence ou le nombre de modes est relativement limité. Toutefois, les méthodes en temps ne peuvent estimer que les modes dans la gamme de fréquence d'analyse et elles ne prennent pas en compte les effets résiduels des modes hors de la plage en question. C'est la raison pour laquelle depuis quelques années, la recherche se dirige vers le domaine fréquentiel avec des techniques qui améliorent la

précision du résultat en tenant compte des effets résiduels.

Les méthodes dans le domaine temporel et fréquentiel peuvent encore être divisées en méthodes indirectes (méthodes modales) et en méthodes directes. La qualification indirecte signifie que l'identification est basée sur le modèle modal, i.e., sur les paramètres modaux (fréquences naturelles, taux d'amortissement, constantes modales et leurs phases). La méthode directe désigne la procédure d'identification reliée au modèle spatial, i.e., l'équation matricielle d'équilibre à partir de laquelle toutes les méthodes sont déduites. Quelques méthodes dans cette catégorie cherchent à évaluer les matrices référant à l'équation d'équilibre et la résolution du problème de valeurs propres associées à ces matrices donne les paramètres modaux.

Une division supplémentaire concerne le nombre de modes qui peuvent être analysés. Si un seul mode est considéré dans l'analyse, c'est l'analyse à un Degré De Liberté (1DDL). Si plusieurs modes sont pris en compte, c'est l'analyse à Multiple Degrés De Liberté (MDDL). Dans le domaine temporel, il n'a y que l'analyse MDDL mais dans le domaine fréquentiel, il existe les deux types d'analyse : 1DDL et MDDL. La méthode directe ne travaille que sur l'analyse MDDL.

Habituellement, quand la structure est testée, non seulement les réponses brutes sont enregistrées mais les FRFs sont aussi calculées par l'analyseur à partir des réponses et excitations mesurées. Les méthodes d'analyse modale qui s'appliquent seulement à une seule FRF chaque fois, sont appelées méthodes à une FRF ou à une entrée - une sortie (SISO : single input-single output). D'autres méthodes permettent l'analyse simultanée de quelques FRFs avec les réponses mesurées à différents endroits de la structure soumise à la même excitation. Elles sont appelées méthodes globales ou une entrée - multiple sorties (SIMO : single input-multi output). La philosophie de ces méthodes est que les fréquences naturelles et les taux d'amortissement sont des propriétés globales et ne varient pas d'une FRF à une autre. Ils doivent être consistants et égaux pour chaque FRF. Finalement, il existe d'autres méthodes qui peuvent traiter en même temps toutes les FRFs possibles qui sont obtenues à partir de différents endroits d'excitation et de réponses de la structure. Elles sont appelées polyréférence ou multiple entrée - multiple sorties (MIMO : multi input-multi output).

En se référant à la classification de Maia *et al.* [116], l'analyse modale dans le domaine temps-fréquence par transformation en ondelettes (wavelet analysis for modal identification) est rajoutée sur le schéma en figure 1.1. Cet outil de traitement temps-fréquence permet l'identification modale avec le modèle indirect, de type MDDL et SIMO. On se limite par la suite aux signaux de réponse libre de la structure. Ce choix est justifié puisque l'on se place dans le contexte d'excitation non connue ou mal connue dans les applications. Ce sont soit l'excitation par choc, soit l'excitation ambiante, soit par l'arrêt de l'excitation sinusoïdale. À noter que l'identification modale à partir des réponses seules attirent beaucoup l'attention des chercheurs à ce jour grâce à un large champ d'applications : identification modale "online" par excitation ambiante, excitation par choc non-destructif... Ce sont des tests faciles à réaliser.

1.3 Identification des systèmes mécaniques linéaires

Il existe beaucoup de techniques d'identification des systèmes linéaires. On recense ici les méthodes les plus courantes. Ces techniques sont répertoriées en temps, en fréquence ou en temps-fréquence. Les discussions principales se trouvent dans le paragraphe sur les méthodes d'identification temps-fréquence. Dans l'article d'Allemang *et al.* [9], les auteurs ont essayé d'unifier les différentes techniques d'identification basées sur l'approche polynomiale qu'elles soient en temps ou

en fréquence. Ils ont profondément analysé les similarités et les différences entre les différentes algorithmes. Ils relèvent aussi que la plupart des algorithmes passent par deux étapes. La première étape consiste à déterminer les fréquences propres et les vecteurs de participation modale. La deuxième étape a pour but de déterminer les déformées modales. Les différences entre les algorithmes se trouvent principalement dues aux méthodes de traitement des données mesurées redondantes. Une représentation sur un espace caractéristique de trois dimensions (deux dimensions spatiales : entrée, sortie et la troisième dimension : soit temporelle, soit fréquentielle) est également proposée. Cette représentation est utile pour la compréhension de l'organisation des données mesurées et favorise ainsi le choix d'un algorithme d'identification approprié.

1.3.1 Quelques techniques dans le domaine temporel

Deux méthodes souvent étudiées dans le domaine temporel sont la méthode d' "Ibrahim Time Domain" (ITD) et la méthode de "Least Squares Complex Exponential" (LSCE).

- *Méthode d'Ibrahim Time Domain* : Elle est proposée par Ibrahim [57]. La méthode est appliquée aux réponses libres de la structure. C'est une méthode indirecte, MDDL et SIMO. Elle se base sur la matrice du système reliant la réponse libre de la structure au temps t à celle au temps $(t + \Delta t)$. Les valeurs propres de cette matrice du système donnent les fréquences propres et les taux d'amortissement tandis que les vecteurs propres associés sont les déformées modales. La vérification des modes peut se faire par le Facteur de Confiance Modal (FCM) pour éliminer les modes non-physiques. Les avantages de cette méthode sont l'efficacité de calcul pour les systèmes avec les modes proches et la vérification de qualité de calcul via le FCM. L'inconvénient de la méthode est la sensibilité aux signaux bruités, en ce qui concerne la détermination des taux d'amortissement.
- *Méthode de Least-Squares Complex Exponential* : Elle est introduite comme une extension de la méthode de Prony dans la référence [23]. La méthode de Prony ou la méthode Exponentielle Complexe (CE) est une méthode indirecte, MDDL et SISO. Elle travaille sur une FRI tandis que la méthode LSCE utilise plusieurs FRIs en même temps et donc de type SIMO. Partant du modèle modal de FRI dans le temps, la méthode de Prony détermine les coefficients d'un polynôme dont les solutions sont les exponentielles des pôles du système multipliés par Δt . La prise en compte de plusieurs FRIs dans la méthode LSCE conduit à l'obtention de ces coefficients au sens de moindres carrés. Comme la méthode CE, la difficulté de la méthode LSCE consiste dans l'estimation correcte du nombre de modes.

1.3.2 Quelques techniques dans le domaine des fréquences

Les méthodes en fréquence utilisent souvent les FRFs pour l'identification des paramètres modaux. Les méthodes bien connues de type 1DDL comme Peak Picking, Circle fitting ... En ce qui concerne le type MDDL et SIMO, une méthode représentative est présentée ici :

- *Méthode de Global Rational Fraction Polynomial (GRFP)* : C'est une extension de la méthode Rational Fraction Polynomial (RFP) qui est appliquée sur une seule FRF [96]. La FRF dans la méthode RFP s'écrit sous forme d'un rapport de deux polynômes dont le numérateur a les coefficients a_k et le dénominateur a les coefficients b_k . La minimisation entre la FRF du modèle et la FRF mesurée permettra de déterminer les coefficients a_k et b_k . À partir des b_k , on déduit les fréquences propres et les taux d'amortissement. À partir des a_k et des pôles précédemment déterminés, on trouve les constantes modales et les phases. La méthode GRFP combine plusieurs

FRFs mesurées afin d'estimer les paramètres modaux. À noter que les fréquences propres et les taux d'amortissement sont égaux pour les différentes FRFs (les propriétés globales); par contre, les constantes modales et les phases dépendent de chaque FRF (les propriétés locales). La méthode GRFP cherche d'abord les propriétés globales i.e, les coefficients b_k en groupant toutes les FRFs et puis les propriétés locales sont déterminées sur chaque FRF indépendamment.

1.3.3 Analyse temps-fréquence en identification modale des systèmes linéaires

Les techniques de traitement du signal temps-fréquence ont été appliquées en identification modale à partir des années 90. On peut citer ici entre autres, la transformation de la classe de Cohen utilisée par De Stéfano *et al.* [20, 21, 38], la transformation en ondelettes par Ruzzene *et al.* [99], par Staszewski [110], par Argoul *et al.* [11, 12, 14, 126], par Lardies *et al.* [48, 65].

La transformation de la classe de Cohen est une transformation bi-linéaire permettant l'obtention des composantes spectrales qui correspondent à l'énergie de chaque mode de vibration du signal. La procédure proposée dans les références [20, 38] utilise un filtre pour séparer les modes et un algorithme spécial pour déterminer les différences de phase entre les différents capteurs. Une amélioration de la méthode est proposée dans la référence [21] simplifiant la procédure précédente avec l'utilisation de l'auto-transformée et de la transformée croisée de la classe de Cohen des réponses. L'effet du bruit est réduit dans la transformée croisée grâce aux propriétés du filtrage. Les auteurs montrent que la procédure convient bien aux signaux non-stationnaires comme la réponse des structures sous excitation ambiante. Des test numériques ont été utilisés pour la validation.

La transformation en ondelettes est une transformation linéaire et ainsi, appropriée au signal de multi-composantes, ce qui est souvent rencontré dans la réponse libre des structures en vibration. Staszewski [110] propose trois méthodes de détermination de taux d'amortissement basées sur la transformation en ondelettes. La robustesse des méthodes est testée sur les signaux simulés (FRI et réponse libre). La modulation de la fréquence et de l'amplitude d'un signal à une composante peut être caractérisée par la transformation de Hilbert. Le traitement d'un signal à plusieurs composantes par cette technique nécessite un filtre pour séparer ses composantes. Ruzzene *et al.* [99] démontre que la transformation en ondelettes améliore la technique utilisant la transformation de Hilbert grâce au rôle du filtre de l'ondelette mère. Le signal du test réel sous excitation ambiante a été utilisé pour la validation. Les signaux bruts sont traités par la méthode de décrétement aléatoire pour avoir la réponse libre de la structure qui sera effectivement traité par la transformation en ondelettes. Les fréquences propres et les taux d'amortissement sont extraits et donnent une bonne concordance avec d'autre méthode. Argoul *et al.* [11, 12] utilise les réponses libres d'un test réel par choc et propose la procédure de détermination des fréquences propres, des taux d'amortissement et des déformées modales. Lardies *et al.* [48, 65] applique la technique de la transformation en ondelettes à l'identification des paramètres modaux d'une tour de TV sous excitation ambiante. La réponse libre est aussi obtenue par la méthode du décrétement aléatoire.

On constate que l'application effective de la transformation en ondelettes est sur la réponse libre de la structure. Une fois que la procédure d'identification des paramètres modaux basée sur la transformation en ondelettes est établie, elle peut être appliquée sur le test sous excitation ambiante (par l'intermédiaire de la méthode de décrétement aléatoire) ou par choc, ou par la coupure d'une excitation sinusoidale. Évidemment, la procédure est aussi efficace avec les FRIs mais comme on suppose que l'excitation est mal mesurée ou inconnue, notre choix est cohérent et le long de la thèse, on ne considère que la réponse libre de la structure.

1.4 Identification des systèmes mécaniques non-linéaires

Les systèmes mécaniques non-linéaires ont des particularités par rapport aux systèmes linéaires. Il est utile de donner ici quelques caractéristiques du comportement vibratoire d'un système mécanique non-linéaire. Ces indications de l'existence de non-linéarité pourront conduire à une méthode d'identification de non-linéarités.

1.4.1 Comportement des systèmes non-linéaires

- *Inobservance du principe de superposition* : au contraire aux systèmes linéaires, la plupart des systèmes non-linéaires ne vérifie pas le principe de superposition, i.e, le déplacement est proportionnel à la charge appliquée. De plus, le principe de réciprocité de Maxwell-Betti valable pour les systèmes linéaires ne l'est plus pour les systèmes non-linéaires.
- *Génération d'harmoniques, inter-modulations* : une excitation sinusoïdale sur un système linéaire produira la réponse stationnaire sinusoïdale à la même fréquence que celle de l'excitation. Cependant, une telle excitation sur un système non-linéaire générera la réponse non seulement à la même fréquence que celle de l'excitation mais à d'autres tels que sous ou super harmoniques de la fréquence d'excitation. Il arrive des cas où l'excitation comprenant deux fréquences fait apparaître de nouvelles fréquences dans la réponse. Ce phénomène est appelé inter-modulations.
- *Modulation de fréquences et résonances* : la fréquence fondamentale d'un système non-linéaire n'est pas constante mais elle varie en fonction de l'amplitude du mouvement dans le cas de raideur non-linéaire. Quand le système vibre suffisamment proche d'un point d'équilibre, la fréquence fondamentale du système revient à celle du système linéaire associé.

Lorsqu'il existe des harmoniques dans la réponse du système non-linéaire, la résonance observée peut être, soit la résonance primaire, i.e, la fréquence d'excitation coïncide avec une fréquence propre ; soit résonance secondaire, i.e, une harmonique est approximativement égale à une fréquence propre ; soit résonance interne, i.e, la fréquence d'excitation est égale à une fréquence propre et son harmonique coïncide avec une autre fréquence propre et ces deux modes du système interagissent avec un phénomène de battement.

- *Influence de la nature de l'excitation* : Les systèmes non-linéaires présentent la dépendance de la réponse vis à vis de l'excitation, par exemple, pour une excitation de balayage sinusoïdal d'amplitudes différentes, les FRFs sont différentes. Ce phénomène est connu par le nom "distorsion de FRF". Cela n'existe pas pour un système linéaire.

1.4.2 Méthodes d'identification modale des systèmes non-linéaires

Quelques méthodes ont été proposées pour détecter la non-linéarité des structures. Il faut noter que toutes ces méthodes sont loin d'être à maturité. On note ici les méthodes les plus courantes.

- *Distorsion de FRF* : c'est une notion étendue de la FRF définie pour un système linéaire. Elle est aussi appelée FRF au premier ordre en considérant seulement la composante de fréquence fondamentale dans la réponse et en supprimant l'influence des harmoniques. La distorsion de la FRF est une indication pour la détection de la non-linéarité. Généralement, la FRF au premier ordre sous excitation sinusoïdale, transitoire, et aléatoire est différente.
- *Détection de la présence des harmoniques* : le transfert de l'énergie de la fréquence fondamentale aux harmoniques peut être mesuré par la différence entre l'énergie totale du signal et l'énergie dis-

tribuée à la composante fondamentale. Plus l'ordre de la non-linéarité est élevé, plus la différence est élevée.

- *Les FRFs d'ordre plus élevé* : cette approche se base sur le développement en séries de Volterra pour représenter un système non-linéaire. L'identification des noyaux différents permet l'identification de non-linéarité [10, 117].
- *Les spectres d'ordre plus élevés* : l'utilisation d'un spectre d'ordre élevé permet de caractériser l'inter-modulation de la réponse d'un système non-linéaire qui génère une fréquence égale à la somme de deux fréquences dans le signal d'entrée. Le bi-spectre et le tri-spectre ont été utilisés [35].
- *Utilisation de la transformation de Hilbert* : cette technique peut s'appliquer dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporel, on peut avoir la fréquence instantanée et l'enveloppe du signal qui servent ensuite à identifier un modèle non-linéaire. Dans le domaine fréquentiel, la différence entre la FRF au premier ordre et la transformée de Hilbert renseigne sur la présence de non-linéarités.
- *Utilisation du modèle de mode "normal" non-linéaire (MNN)* : c'est une notion étendue des modes normaux d'un système linéaire. Dans ce contexte, un mode normal non-linéaire d'un système conservatif est défini par une oscillation périodique où tous les points du système atteignent leur valeur extrême ou passent par zéro en même temps. Le concept de MNN a été introduit par Rosenberg [98] pour un système non-linéaire de n masses inter-connectées. Shaw et Pierre [103, 104] proposent la définition de MNN dans l'espace bi-dimensionnel de phase. Dans la référence [121], Vakakis présente une rétrospective de l'utilisation des modes normaux non-linéaires en théorie de vibration. Bellizzi et Bouc [17, 18] développent le concept de Modes Non-linéaires Couplés (MNCs) d'un système non-linéaire avec une faible dissipation. La réponse libre d'un tel système peut être approchée par la combinaison linéaire des termes harmoniques avec les conditions initiales quelconques [18].
- *Utilisation de la décomposition en modes propres orthogonaux* : La technique aussi appelée la transformation de Karhunen-Loeve, se base sur la décomposition de données en modes propres orthogonaux (POD). Elle permet l'extraction des informations spatiales d'un ensemble de données temporelles disponibles dans un certain domaine. Son application à l'identification de non-linéarités a été beaucoup étudiée par le Groupe Vibrations et Identification des Structures de Université de Liège [59, 60, 61, 69, 70, 68]. En effet, la POD est souvent utilisée pour déterminer le nombre de variables d'état actives dans un système, c'est-à-dire la dimension de l'espace d'état. La relation entre cette caractérisation topologique du système et la structure spatiale des vibrations décrit les modes propres orthogonaux (POM). C'est ainsi que la technique permet d'obtenir des modèles dynamiques réduits de systèmes continus, caractérisés par seulement quelques degrés de liberté. Une fois cette information caractéristique du système extraite des données, elle sera comparée avec celle obtenue à l'aide d'un modèle théorique pour le recalage. L'efficacité de la méthode a été comparée avec la méthode "conditioned reserve path" (CRP) [70].
- *Utilisation de l'analyse temps-fréquence* : la modulation des fréquences est facilement détectée par l'analyse temps-fréquence. On peut trouver entre autres, la transformation de Wigner-Ville, transformation de Gabor, transformation en ondelettes. Une discussion plus détaillée sera présentée à la section suivante.

1.4.3 Analyse temps-fréquence en identification modale des systèmes non-linéaires

L'idée d'utiliser l'analyse temps-fréquence est assez récente. On peut citer ici l'article de Galleani *et al.* [46] qui utilisent la transformation de Wigner-Ville pour déterminer la réponse fondamentale instantanée. Staszewski utilise la transformation en ondelettes au lieu de la transformation de Wigner-Ville dans le même but [111]. Bellizzi *et al.* [18] proposent l'utilisation de la transformation de Gabor en considérant le modèle des modes normaux couplés. Argoul *et al.* [13] introduisent quatre indicateurs calculés à partir de la transformation en ondelettes mères de Cauchy afin de caractériser le comportement d'un système mécanique en vibration. Toutes ces méthodes ont exploité la modulation de la fréquence en temps pour détecter et identifier la non-linéarité. Toutefois, la transformation de Wigner-Ville n'est pas une transformation linéaire, donc l'extraction de la fréquence fondamentale n'est pas facile et la transformée peut être biaisée à cause des harmoniques. La transformation de Fourier à court terme a les résolutions absolues en temps et en fréquence égales pour tout le plan temps-fréquence. Cependant, quand on cherche à caractériser la variation des fréquences dans le temps, la résolution fréquentielle relative (i.e, le rapport entre la résolution fréquentielle absolue et la fréquence) constante est plus significative que la résolution fréquentielle absolue constante. La résolution fréquentielle relative constante est donnée par la transformation en ondelettes.

Toutefois, les méthodes d'utilisation de la transformation en ondelettes ne peuvent pas encore bien être définies puisque le résultat dépend du choix des ondelettes et des effets de bords du problème numérique.

1.5 Amélioration de la méthode impact-écho

Un des problèmes majeurs des ouvrages d'art est la vérification des épaisseurs des dalles en béton, l'existence éventuelle des cavités et la détection de vide dans les gaines de pré-contrainte. Les méthodes couramment utilisées pour leur détection sont la radiographie X et la gammagraphie. Ces techniques requièrent malheureusement des zones de protection étendues contre les radiations.

Depuis la fin des années 80, la méthode impact-écho a été proposée et développée au National Institut of Standards (États-Unis) et à l'université Cornell (États-Unis). Cette méthode repose sur l'approche de propagation des ondes et sur l'analyse fréquentielle de la réponse d'une structure soumise à un choc. La méthode impact-écho est bien adaptée à la mesure d'épaisseur de dalles et à la recherche de délaminages ou, plus généralement, à la détection de contrastes d'impédance mécanique. Toutefois, beaucoup de facteurs peuvent perturber les évaluations par la méthode impact-écho, par exemple : la source de choc, le bruit ambiant, plusieurs pics sur le plan fréquentiel... Cependant, les techniques pour l'amélioration de la méthode impact-écho par différents outils de traitement du signal ne sont pas très nombreuses. Par ailleurs, elles n'ont pas encore exploité les informations préalablement connues, par exemple : la source, les caractéristiques des fréquences utiles... Donc, leur utilisation reste encore limitée.

En tenant compte de la possibilité de détection de densité spectrale locale, on va appliquer la transformation en ondelettes au signal impact-écho et utiliser les informations *a priori* pour faciliter l'interprétation des résultats. Une analyse complète des méthodes existantes et une proposition d'amélioration de la méthode impact-écho sont données au chapitre 7.

1.6 Conclusions

Un aperçu rapide des méthodes d'identification modale a été présenté. L'application de transformation en ondelettes est comparée avec les autres méthodes d'analyse temps-fréquence de même catégorie. Il en résulte que cette technique est prometteuse mais nécessite d'être approfondie et améliorée pour arriver à des procédures sans ambiguïtés. On a aussi choisi le type du signal à considérer : la réponse libre de la structure, ce qui est donnée par plusieurs types d'essais non-destructifs. Enfin, une tentative d'amélioration de la méthode impact-écho sera proposée en utilisant la transformation en ondelettes.

Deuxième partie

Transformation en ondelettes

Chapitre 2

Signal et traitement du signal par la transformation en ondelettes

2.1 Introduction

Ce chapitre aborde les notions et les propriétés les plus importantes sur le signal et le traitement du signal. Ces rappels ne sont pas exhaustifs mais ils sont sélectionnés suivant les besoins pour la suite. Une classification sommaire des signaux est donnée à la section 2.2. L'analyse harmonique des signaux par la transformation de Fourier est présentée dans la section 2.3 afin de repérer les notions importantes du plan fréquentiel. L'analyse temps-fréquence est ensuite présentée à la section 2.4 en mettant l'accent sur la transformation en ondelettes. Référant au traitement du signal réel de déplacement/vitesse/accélération, une discussion sur trois ondelettes "mère"s est donnée à la section 2.5. La comparaison entre ces trois ondelettes mères permet de retenir les ondelettes appropriées.

2.2 Classification des signaux

On classe les signaux suivant différents critères : propriété, représentation ... On liste quelques possibilités dans cette partie.

2.2.1 Classification déterministe-aléatoire

- **Déterministes** : Ce sont les signaux dont l'évolution en fonction du temps est prévisible par un modèle mathématique approprié (signaux de test, d'étalonnage, etc.). On peut diviser cette classe en des sous-classes :
 - Signal périodique
 - Signal transitoire
- **Aléatoires** : Ces signaux ont un caractère non-reproductible et imprévisible. Par exemple : la parole,...Donc ce type de signal est caractérisé par les quantités de probabilité.

2.2.2 Classification énergétique

- L'énergie et la puissance d'un signal : On peut associer à un signal $u(t)$ quelconque des valeurs scalaires non négatives E_u (énergie) et P_u (puissance moyenne) si elles existent par les relations :

$$E_u = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt \quad (2.1)$$

$$P_u = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |u(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

- Signaux à énergie finie : E_u est bornée. Soit : $E_u < +\infty$, donc $u(t) \in L^2(\mathbb{R})$. C'est le cas courant des signaux physiques réels.
- Signaux à énergie infinie : Inversement au signal d'énergie finie, E_u n'est plus bornée. C'est le cas des signaux périodiques ou des signaux aléatoires permanents.

2.2.3 Autres classifications

On peut encore classer le signal soit suivant sa représentation continue/discrète soit suivant sa valeur réelle/complexe. On va voir ultérieurement qu'il est intéressant de travailler avec les signaux complexes.

2.2.4 Quelques signaux particuliers

- La distribution de Dirac et le peigne de Dirac : La distribution de Dirac $\delta(t)$ a son support réduit à $t = 0$ et associe à toute fonction continue f sa valeur en $t = 0$:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{si } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0) \quad (2.3)$$

Le peigne de Dirac :

$$III_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (2.4)$$

L'utilisation de distribution de Dirac et de peigne de Dirac permettent de faire la transition entre des fonctions d'une variable réelle et des suites discrètes. Par exemple, la version discrète u_d d'un signal continu $u(t)$ échantionné suivant la période T peut être écrite :

$$u_d = u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = u(t) \times III_T(t) \quad (2.5)$$

- La distribution de Heaviside : $H(t) = 0$ si $t < 0$, $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(0) = \frac{1}{2}$.

2.2.5 Représentation vectorielle des signaux

Cette représentation permet de développer linéairement le signal $u(t)$ sur une base de fonctions connues. C'est la structure d'espace vectoriel : le signal apparaît comme un vecteur de cet espace vectoriel. En choisissant les différentes bases, on aura différentes représentations (espace de Hilbert) et cela rendra les calculs considérablement plus simple.

2.3 Transformation de Fourier

2.3.1 Définition

Soit un signal $u(t) \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est définie par :

$$\hat{u}(\omega) = TF[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.6)$$

\hat{u} est continue, bornée et nulle à l'infini. La formule d'inversion admet la forme :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.7)$$

ω est la fréquence angulaire ou pulsation et la valeur $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est appelée la fréquence du signal. L'extension de la transformation de Fourier aux fonctions $u(t) \in L^2(\mathbb{R})$ est présentée en détails dans les références [74] et [25]. Pour une fonction $u(t) \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $u(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier n'est pas calculable par l'intégrale (2.6). Elle est définie comme limite de transformées de Fourier de fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Les propriétés de la transformation de Fourier sont citées ci-dessous en supposant évidemment que les intégrales existent.

2.3.2 Propriétés de la transformation de Fourier

- *Linéarité*

$$TF \left[\sum_{i=1}^N u_i \right] = \sum_{i=1}^N TF [u_i] \quad (2.8)$$

- *Transposition, conjugaison*

$$TF [u(-t)] (\omega) = \hat{u}(-\omega) \quad (2.9)$$

- *Changement d'échelle*

$$TF [u(at)] (\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{u}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{avec } a \neq 0 \quad (2.10)$$

- *Translation*

$$TF [u(t - c)] (\omega) = e^{-i\omega c} \hat{u}(\omega) \quad (2.11)$$

- *Modulation*

$$TF [e^{-i\omega_0 t} u(t)] (\omega) = \hat{u}(\omega - \omega_0) \quad (2.12)$$

- *Dérivation par rapport à la variable temporelle*

$$TF [u^{(m)}(t)] (\omega) = (i\omega)^m \hat{u}(\omega) \quad (2.13)$$

• *Formulation de Parseval-Plancherel*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\bar{v}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega)\bar{\hat{v}}(\omega)d\omega \quad (2.14)$$

Un cas particulier important est $v = u$, soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.15)$$

2.3.3 Signal modulé en amplitude et en fréquence, signal analytique

Soit un signal réel d'énergie finie $u(t)$, si on arrive à écrire de façon naturelle sous forme $u(t) = A(t) \cos(\alpha(t))$, où $A(t)$ et $\alpha(t)$ sont respectivement amplitude et phase du signal, on peut alors introduire naturellement une notion de fréquence instantanée, définie par :

$$\omega_u = \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (2.16)$$

Un choix possible est celui du "couple canonique" proposé par J. Ville en se basant sur le signal analytique à l'aide de la transformation de Hilbert (TH),

$$TH[u](t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t')}{t' - t} dt'. \quad (2.17)$$

Le **signal analytique** associé $Z_u(t)$ se définit par

$$Z_u = [1 + iTH].u \quad (2.18)$$

Alors, la transformation de Fourier du signal analytique

$$\hat{Z}_u = 2H(\omega)\hat{u}(\omega) \quad (2.19)$$

Pour mémoire, $H(\cdot)$ est la fonction Heaviside. L'amplitude $A(t)$ et la phase $\alpha(t)$ du signal s'écrivent

$$A(t) = |Z_u| \quad \text{et} \quad \alpha(t) = \angle Z_u \quad (2.20)$$

D'où, le signal réel $u(t)$

$$u(t) = \text{Re}(Z_u) = \text{Re}\left(A(t)e^{i\alpha(t)}\right) = A(t) \cos(\alpha(t)) \quad (2.21)$$

Maintenant, si le signal $u(t)$ a la forme $u(t) = A(t) \cos(\alpha(t))$, le signal analytique associé est souvent différent du modèle complexe associé $A(t)e^{i\alpha(t)}$. Toutefois, dans les cas où la fonction $u(t) = A(t) \cos(\alpha(t))$ est telle que les variations relatives de $A(t)$ sont très lentes par rapport à celles de la phase $\alpha(t)$, c'est-à-dire $|\dot{\alpha}(t)| \gg \left|\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}\right|$, on peut voir que le modèle exponentiel $A(t)e^{i\alpha(t)}$ constitue une excellente approximation du signal analytique Z_u . On est alors dans le cas des **signaux** dits **asymptotiques** [118]

■ THEOREME 2.1 (FACTIONARISATION)

Soient deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ qui ont respectivement les spectres $\hat{S}_1(\omega)$ et $\hat{S}_2(\omega)$. On veut calculer le signal analytique du produit de deux signaux $s_1 s_2(t)$. A est l'opérateur de signal analytique, le théorème de factionarisation s'énonce comme suit [33],

$$A[s_1 s_2] = s_1 A[s_2] \quad \text{si} \quad \hat{S}_1(\omega) = 0 \quad \forall \omega < -\omega_1 \quad \text{et} \quad \widehat{A[s_2]}(\omega) = 0 \quad \forall \omega < \omega_1 \quad (2.22)$$

REMARQUE 2.3.1

L'espace des fonctions d'énergie finie et nulles pour les fréquences négatives est appelé seconde espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \leq 0 \right\} \quad (2.23)$$

□

Ainsi les signaux analytiques Z_u appartiennent à l'espace $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$.

2.4 Analyse linéaire temps-fréquence

La transformation de Fourier repose sur la décomposition d'une fonction comme une superposition de sinus et de cosinus qui ont une durée infinie, donc elle perd la notion temporelle. Cette lacune nous a conduit à l'analyse temps-fréquence. Il existe dans la littérature, beaucoup de transformations mathématiques qui permettent ce type d'analyse. On se restreint dans la thèse à l'analyse linéaire temps-fréquence dont la transformation en ondelettes. Les ondelettes sont des fonctions oscillantes bien localisées en temps et en fréquence qui sont utilisées pour représenter des signaux ou d'autres fonctions. La transformation en ondelettes reprend la même idée que la transformation de Fourier en adoptant une approche multi-résolution : si nous regardons un signal avec une large fenêtre, nous pourrions distinguer des détails grossiers. De façon similaire, des détails de plus en plus petits pourront être observés en raccourcissant la taille de la fenêtre. L'objectif de l'analyse en ondelettes est donc de réaliser une sorte de microscope mathématique réglable. La transformation de Fourier à court terme est aussi présentée pour comparaison.

2.4.1 Le plan temps-fréquence

Pour conserver les informations locales ce que l'analyse par transformation de Fourier classique ne peut pas faire, on prend une fonction analysante ψ à qui on demande d'être bien localisée à la fois en temps et en fréquence. On décompose ainsi un signal en "atome" temps-fréquence. Chaque atome se représente symboliquement sur le plan temps-fréquence, par un rectangle dont l'abscisse est l'intervalle temporel et l'ordonnée est l'intervalle fréquentiel.

Soit ψ , une fonction analysante, la localisation en temps et en fréquence de cette fonction se définit par le centre temporel t_ψ , le centre fréquentiel ω_ψ , la résolution temporelle Δt_ψ et la résolution fréquentielle $\Delta \omega_\psi$.

- **Temps et fréquence moyens**

$$\begin{cases} t_\psi &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \\ \omega_\psi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} d\omega \end{cases} \quad (2.24)$$

- **Résolution temps-fréquence**

$$\begin{cases} \Delta t_\psi &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\psi)^2 \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ \Delta \omega_\psi &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_\psi)^2 \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.25)$$

Ainsi, le rectangle de localisation temps-fréquence de la fonction $\psi(t)$ a le centre au point (t_ψ, ω_ψ) avec les arêtes de $2\Delta t_\psi$ et $2\Delta\omega_\psi$.

- **Principe d'incertitude de Heisenberg**

$$\mu_\psi = \Delta t_\psi \Delta\omega_\psi \geq \frac{1}{2} \quad (2.26)$$

2.4.2 Transformation de Fourier à court terme

L'idée de base est de prendre la transformation de Fourier mais localisée dans le temps en remplaçant la fonction analysée par un produit de celle-ci par une fenêtre convenablement choisie au préalable possédant de bonnes propriétés de localisation. Cette méthode a été proposée par D. Gabor et s'appelle aussi transformation de Gabor. Si l'on note $g(t)$ la fenêtre et $u(t)$ le signal à analyser, le résultat est alors la collection de nombres :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)g(t-b)e^{-i\omega t} dt \quad (2.27)$$

Pour des raisons pratiques, il est plus intéressant de considérer les coefficients :

$$TG[u](b, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\bar{g}(t-b)e^{-i\omega(t-b)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\bar{g}_{b,\omega}(t) dt \quad (2.28)$$

Les nouveaux coefficients forment la transformée de Gabor $TG[u](b, \omega)$ de $u(t)$ et s'expriment par

$$TG[u](b, \omega) = \langle u, g_{b,\omega} \rangle \quad \text{où} \quad g_{b,\omega}(t) = g(t-b)e^{i\omega(t-b)} \quad (2.29)$$

$g_{b,\omega}(t)$ sont appelées gaborettes. Ces gaborettes sont construites à partir de la fenêtre $g(t)$ par des translations et modulations (i.e, des translations en fréquence). Nous avons la transformée de Fourier :

$$\hat{g}_{b,\omega}(\xi) = e^{-i\xi b} \hat{g}(\xi - \omega) \quad (2.30)$$

Les coefficients $TG[u](b, \omega)$ fournit une information de $u(t)$ au voisinage du point $t = t_g + b$ et de

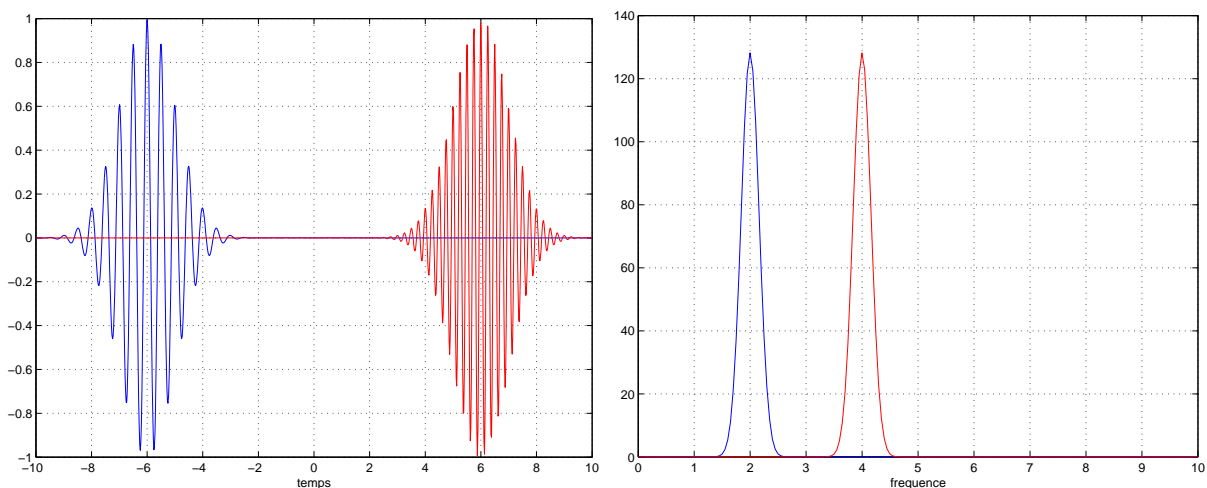


FIGURE 2.1. Localisations temporelles (les parties réelles) et fréquentielles (les modules) de deux gaborettes

la fréquence $\xi = \omega_g + \omega$. Autrement dit, si $t_g = \omega_g = 0$, $TG[u](b, \omega)$ sélectionne le “contenu” de $u(t)$

au voisinage du point de coordonnées (b, ω) dans le plan temps-fréquence. La figure 2.1 représente deux gaborettes localisées à deux temps différents et à deux fréquences différentes. On voit bien l'effet de translation en temps et en fréquence de ces deux gaborettes. À la figure 2.3, le symbole rectangulaire de localisation temps-fréquence ne change pas d'un point à l'autre sur le plan temps-fréquence.

2.4.3 Transformation en ondelettes

On constate que les fenêtres dans la transformation de Fourier à court terme sont des fonctions de taille constante et ne permettent donc pas d'obtenir une résolution temporelle aussi élevée que nécessaire [118]. Ce défaut a été remédié avec la transformation en ondelettes (TO). Soit une fonction $\psi(t)$ bien localisée en temps et en fréquence, on lui associe une famille d'ondelettes $\psi_{(b,a)}(t)$ engendrée par des dilatations et translations de $\psi(t)$:

$$\psi_{(b,a)}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.31)$$

où a et b sont des paramètres relatifs respectivement à l'échelle (inverse de fréquence) et au temps. On note \mathbb{H} , l'espace des paramètres :

$$\mathbb{H} = \{(b, a) : b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^*\} \quad (2.32)$$

Les ondelettes sont donc de forme constante mais de taille variable proportionnelle au paramètre de dilatation a . La transformation en ondelettes d'un signal d'énergie finie peut se définir de différentes façons. La définition suivante est celle utilisée par Carmona *et al.* [25]

- **Définition**

Soit le signal $u(t)$ d'énergie finie et continu par morceaux sur t , la transformation en ondelettes de ce signal est donnée par l'intégrale

$$T_\psi[u](b, a) = \langle u, \psi_{(b,a)}(t) \rangle = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (2.33)$$

où $\psi(\cdot)$ est la fonction analysante de carré intégrable et continue par morceaux, appelée ondelette "mère".

- **Condition d'admissibilité**

La fonction $\psi(t)$ est candidat pour une ondelette "mère" si le coefficient C_ψ défini par

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \left| \widehat{\psi}(a\omega) \right|^2 \frac{da}{a} \quad (2.34)$$

est fini, non nul et indépendant de ω réel. Cette condition implique que $\widehat{\psi}(\omega)$ est égale à zéro à l'origine, i.e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.35)$$

Cela signifie que $\psi(t)$ doit nécessairement posséder certaines oscillations.

- **Formule de reconstruction**

Une fois que cette condition d'admissibilité est vérifiée, le signal $u(t)$ peut être reconstruit par

$$u(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_\psi[u](b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da}{a} db \quad (2.36)$$

• **Localisation temps-fréquence de la transformée en ondelettes**

La valeur de $T_\psi[u](b, a)$ contient les informations de $u(t)$ à l'échelle a autour de la position en temps b . On constate que les résolutions locales de la transformation en ondelettes sont reliées aux effets de translation (paramètre b) et de dilatation (paramètre a) et les résolutions de l'ondelette "mère" définies à la relation (2.25).

◦ *Effet de translation* : En considérant seulement l'effet de b , la propriété (2.11) donne

$$\psi_b(t) = \psi(t - b) \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_b(\omega) = e^{-i\omega b} \hat{\psi}(\omega) \quad (2.37)$$

Donc, si l'ondelette mère se localise autour de l'instant $t = t_\psi$, avec la résolution temporelle Δt_ψ , l'effet de translation donne la localisation temporelle de $\psi_b(t)$ autour de $t = b + t_\psi$ avec la même résolution temporelle Δt_ψ .

◦ *Effet de dilatation* : Au lieu de modifier la localisation fréquentielle de la fonction analysante à l'aide d'une translation (grâce à la modulation en temps) comme dans le cadre de la transformation de Fourier à court terme, la localisation fréquentielle de l'ondelette mère est obtenue par l'effet de dilatation (propriété 2.10)

$$\psi_a(\cdot) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{\cdot}{a}\right) \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_a(\omega) = \hat{\psi}(a\omega) \quad (2.38)$$

Ainsi, si l'ondelette $\psi(\cdot)$ se localise autour de t_ψ et ω_ψ avec les résolutions temporelle et fréquentielle respectives Δt_ψ , $\Delta\omega_\psi$, la version dilatée de l'ondelette $\psi_a(\cdot)$ se concentre autour de $t = at_\psi$ et $\omega = \frac{\omega_\psi}{a}$ avec les résolutions temporelle et fréquentielle respectives $a\Delta t_\psi$ et $\frac{\Delta\omega_\psi}{a}$.

En combinant les deux effets, l'ondelette $\psi_{(b,a)}(t)$ se concentre sur le plan temps-fréquence $t - \omega$ autour de

$$\begin{cases} t &= b + at_\psi \\ \omega &= \frac{\omega_\psi}{a} \end{cases} \quad (2.39)$$

avec les résolutions

$$\begin{cases} \Delta t &= a\Delta t_\psi \\ \Delta\omega &= \frac{\Delta\omega_\psi}{a} \end{cases} \quad (2.40)$$

L'incertitude sera

$$\mu_{\psi_{(b,a)}} = \Delta t \Delta\omega = \Delta t_\psi \Delta\omega_\psi = \mu_\psi \quad (2.41)$$

Ainsi, le domaine de localisation de la transformée en ondelettes sur le plan temps-fréquence au point $(b + at_\psi, \omega = \frac{\omega_\psi}{a})$ sera

$$[b + at_\psi - a\Delta t_\psi, b + at_\psi + a\Delta t_\psi] \times \left[\frac{\omega_\psi}{a} - \frac{\Delta\omega_\psi}{a}, \frac{\omega_\psi}{a} + \frac{\Delta\omega_\psi}{a} \right] \quad (2.42)$$

Deux ondelettes sont présentées sur la figure 2.2. On constate que l'allure des ondelettes (le nombre d'oscillations) ne change pas mais elle est compressée (resp. dilatée) en temps et dilatée (resp. compressée) en fréquence. Une comparaison des localisations temps-fréquence entre la TG et TO est donnée à la figure 2.3. Pour une fréquence faible, l'ondelette a une bonne précision en fréquence ($\Delta\omega_\psi$ faible) et pour une fréquence élevée, l'ondelette a une bonne précision en temps (Δt_ψ faible). Cette propriété est appréciée en analyse du signal puisqu'à la fréquence élevée, la précision temporelle est plus importante que la précision fréquentielle et vice-versa.

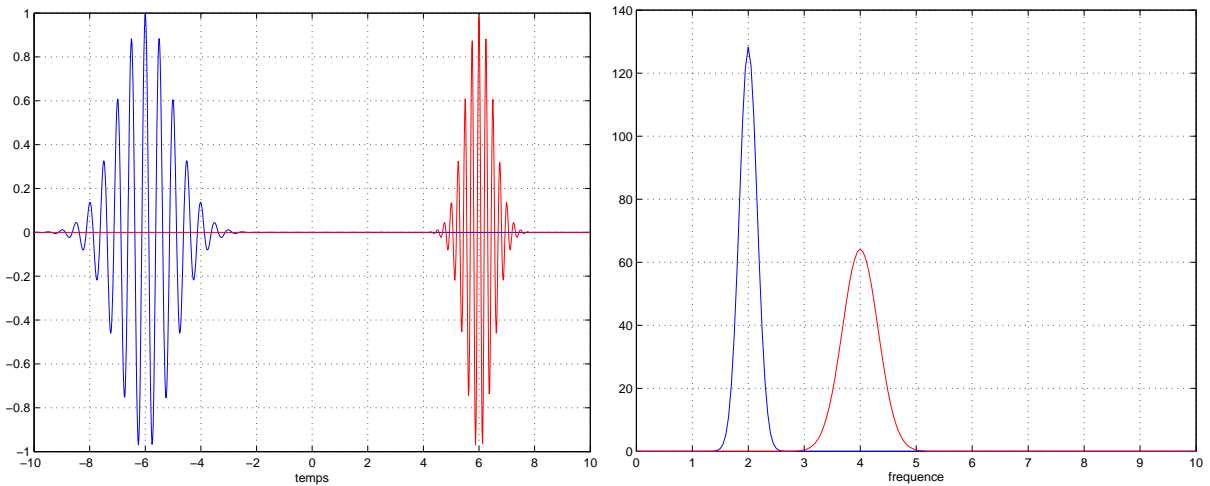


FIGURE 2.2. *Localisations temporelles (les parties réelles) et fréquentielles (les modules) de deux ondelettes*

En se référant à l'analyse fréquentielle, l'analyse en ondelettes peut être comparée à un filtre avec le facteur de qualité Q défini par le rapport entre le centre de fréquence et la bande de fréquence

$$Q = \frac{\frac{\omega_\psi}{a}}{2\frac{\Delta\omega_\psi}{a}} = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi} \quad (2.43)$$

Le facteur Q est ainsi indépendant de a et il dépend seulement de l'ondelette mère choisie $\psi(t)$.

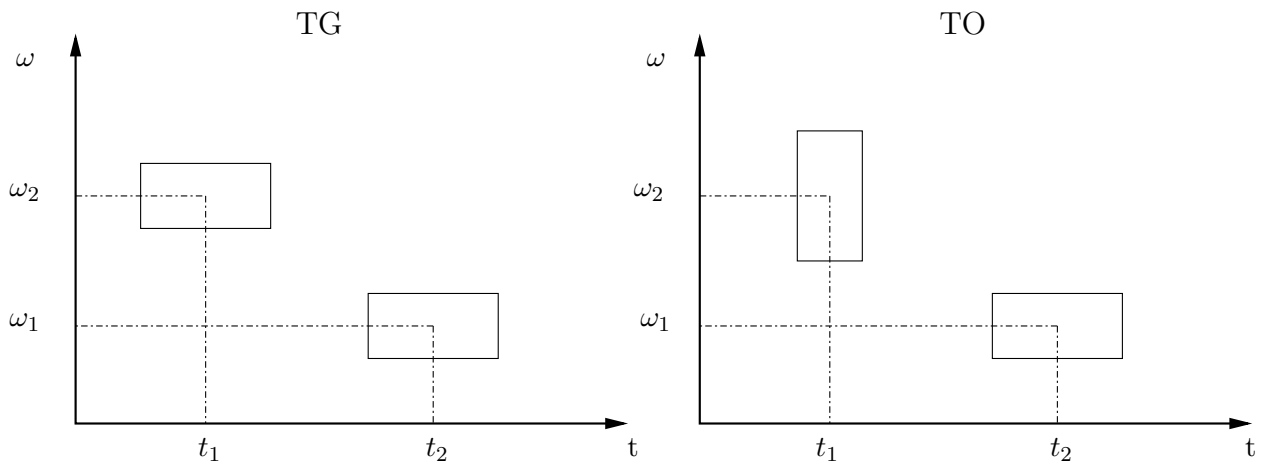


FIGURE 2.3. *Comparaison de localisation temps-fréquence entre la TG et la TO*

• Études sur la répartition de l'énergie de la transformée en ondelettes

La transformation en ondelettes nous permet d'avoir des informations temporelles et fréquentielles d'un signal. Nous nous intéressons, dans cette partie, à la densité spectrale locale (ou l'énergie spectrale locale) de la transformation en ondelettes $\tilde{E}(t, \omega)$ et à la liaison entre $\tilde{E}(t, \omega)$ et la densité spectrale : $E(\omega)$ du signal.

◦ Rappel sur l'énergie d'un signal

Nous considérons un signal réel $u(t)$ à variable réelle t . En combinant la formule d'énergie du

signal (2.1) et la relation (2.15), on pose la quantité :

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} |\hat{u}(\omega)|^2$$

$E(\omega)$ est la densité spectrale, l'énergie totale sera :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{+\infty} E(\omega) d\omega \quad (2.44)$$

(A cause de la propriété hermitienne du signal réel)

◦ **Transformation en ondelettes avec la normalisation de $\psi_{(b,a)}(t)$ $L^1(\mathbb{R})$**

La définition de la TO avec $\psi_{(b,a)}(t)$ normée en $L^1(\mathbb{R})$

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.45)$$

La formule de Parseval-Plancherel nous permet d'écrire la TO d'une autre façon :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega) \bar{\hat{\psi}}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{u}(\omega) \bar{\hat{\psi}}(a\omega)] e^{i\omega b} d\omega \quad (2.46)$$

avec l'ondelette mère progressive qui appartient à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |T_\psi[u](b, a)|^2 db = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [|\hat{u}(\omega) \bar{\hat{\psi}}(a\omega)|]^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [|\hat{u}(\omega)| |\bar{\hat{\psi}}(a\omega)|]^2 d\omega \quad (2.47)$$

L'énergie totale calculée à partir de la transformée en ondelettes [25]

$$E = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |T_\psi[u](b, a)|^2 \frac{da}{a} db \quad (2.48)$$

Le facteur d'échelle a a pour valeur $a = \frac{\omega_\psi}{\omega}$, donc, la formule précédente devient :

$$E = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|T(b, \frac{\omega_\psi}{\omega})|^2}{\omega} d\omega db \quad (2.49)$$

Nous arrivons à des résultats de densité spectrale locale de la TO :

$$\begin{cases} \tilde{E}(t, \omega) &= \frac{1}{C_\psi \omega} |T_\psi[u](t, \frac{\omega_\psi}{\omega})|^2 \\ \tilde{E}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(t, \omega) dt \\ E &= \int_0^{+\infty} \tilde{E}(\omega) d\omega \end{cases} \quad (2.50)$$

En se basant sur les études précédentes, nous avons la relation entre $\tilde{E}(k)$ et $E(\omega)$ comme suit :

$$\tilde{E}(k) = \frac{1}{C_\psi k} \int_0^{+\infty} E(\omega) \left| \hat{\psi}\left(\frac{\omega_\psi \omega}{k}\right) \right|^2 d\omega \quad (2.51)$$

◦ **Transformation en ondelettes avec la normalisation de $\psi_{(b,a)}(t)$ sur $L^2(\mathbb{R})$**

La définition de la TO avec $\psi_{(b,a)}(t)$ normée en $L^2(\mathbb{R})$

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.52)$$

De façon analogue, la formule de Parseval-Plancherel est appliquée :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} e^{i\omega b} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\sqrt{a} \hat{u}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)}] e^{i\omega b} d\omega \quad (2.53)$$

avec l'ondelette mère progressive

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |T_\psi[u](b, a)|^2 db = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sqrt{a} \left| \hat{u}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \right| \right]^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[\sqrt{a} \left| \hat{u}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \right| \right]^2 d\omega \quad (2.54)$$

L'énergie total calculée à partir de la transformée en ondelettes :

$$E = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |T(b, a)|^2 \frac{da}{a^2} db \quad (2.55)$$

Nous arrivons à des résultats de densité spectrale locale de la TO avec le changement de variable $a = \frac{\omega_\psi}{\omega}$,

$$\begin{cases} \tilde{E}(t, \omega) &= \frac{1}{C_\psi \omega_\psi} |T_\psi[u](t, \frac{\omega_\psi}{\omega})|^2 \\ \tilde{E}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(t, \omega) dt \\ E &= \int_0^{+\infty} \tilde{E}(\omega) d\omega \end{cases} \quad (2.56)$$

et la relation entre $\tilde{E}(k)$ et $E(\omega)$ sera :

$$\tilde{E}(k) = \frac{1}{C_\psi k} \int_0^{+\infty} E(\omega) \left| \hat{\psi} \left(\frac{\omega_\psi \omega}{k} \right) \right|^2 d\omega \quad (2.57)$$

2.5 Ondelettes mères

Comme nous avons vu, la transformée en ondelettes dépend fortement des ondelettes mères. Il en résulte que la réussite des techniques utilisant la transformation en ondelettes dépend du choix des ondelettes mères. Cette section est dédiée à la discussion sur le choix des ondelettes dans le contexte des signaux modulés en temps et en fréquence qui sont les signaux que l'on traitera dans la partie suivante.

La définition de l'ondelette mère nécessite seulement qu'elle appartienne à $L^2(\mathbb{R})$, mais pour des raisons pratiques, la fonction $\psi(t)$ étant une fenêtre, il est exigé [25],[31],[110]

$$\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad (2.58)$$

Cette condition assure que l'ondelette mère est bornée et la transformée en ondelettes l'est aussi. Les réponses libres que l'on enregistre sont soit le déplacement, soit la vitesse, soit l'accélération. Ils sont des signaux amortis et bornés. La relation entre leurs transformées en ondelettes sera évidemment utile. Si $\psi(t)$ and $u(t)$ sont continues et différentiables par morceaux, l'intégrale par partie de la définition de la transformation en ondelettes (2.33) nous donne

$$T_\psi[\dot{u}](b, a) = \frac{1}{a} \left[u(t) \overline{\hat{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \dot{\hat{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right)} dt \right] \quad (2.59)$$

De plus, quand $\dot{\psi} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\dot{u} \in L^2(\mathbb{R})$, la transformation en ondelettes de $\dot{u}(t)$ avec l'ondelette mère ψ sera reliée à la transformation en ondelettes de $u(t)$ avec $\dot{\psi}(t)$

$$T_\psi[\dot{u}](b, a) = -\frac{1}{a} T_{\dot{\psi}}[u](b, a)$$

Démonstration.

Il suffit de démontrer $u(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ soit $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) - \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) = 0$. D'une part, nous avons $|u(t)| \leq C < +\infty \quad \forall t$, où C est une constante positive puisque le signal $u(t)$ est borné.

D'autre part, $\psi(t)$ est une fonction fenêtre i.e, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t)| = \lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)| = 0$. Donc, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| u(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) \right| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left| u(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) \right| = 0$ d'où $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) = 0$. C'est ce qu'il faut démontrer.

□

Cette relation peut facilement être étendue aux signaux d'énergie finie \ddot{u} quand $\dot{\psi} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{T_{\psi}[\ddot{u}](b, a) = -\frac{1}{a} T_{\dot{\psi}}[\dot{u}](b, a) = \frac{1}{a^2} T_{\dot{\psi}}[u](b, a)} \quad (2.60)$$

Cela signifie que les résultats des transformées en ondelettes de déplacement, de vitesse, d'accélération sont reliées au moyen des ondelettes mères et de leurs dérivées au premier et au deuxième ordres.

REMARQUE 2.5.1

Notons que les expressions de $T_{\dot{\psi}}[\dot{u}]$ et de $T_{\dot{\psi}}[u]$ dans le domaine fréquentiel [voir équations (2.46) et (2.53)], $\widehat{\dot{\psi}}(\omega)$ et $\widehat{\psi}(\omega)$ peuvent être remplacées par $-i\omega \widehat{\psi}(\omega)$ et $-\omega^2 \widehat{\psi}(\omega)$ respectivement.

□

2.5.1 Ondelettes progressives

Les ondelettes progressives sont des ondelettes appartenant à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$. Ces ondelettes sont évidemment des fonctions analysantes complexes et elles sont très importantes dans le contexte de traitement des signaux modulés en temps et en fréquence. Les deux raisons suivantes sont données dans la référence [25]. Premièrement, elles facilitent la reconstruction du signal réel grâce à la symétrie du spectre hermitien. Deuxièmement, elles permettent de faire la connection entre la transformation en ondelettes du signal réel $u(t)$ et celle du signal analytique $Z_u(t)$

$$T_{\psi}[u](b, a) = \langle u, \psi_{b,a}(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle Z_u, \psi_{b,a}(t) \rangle = \frac{1}{2} T_{\psi}[Z_u](b, a) \quad (2.61)$$

Dans le cas de signal multi composantes $u(t) = \sum_k A_k(t) \cos(\alpha_k(t)) = \sum_k u_k(t)$, la propriété linéaire de la transformation en ondelettes donne

$$T_{\psi}[u](b, a) = T_{\psi} \left[\sum_k u_k \right] (b, a) = \sum_k T_{\psi}[u_k](b, a) \quad (2.62)$$

En utilisant la propriété de filtre passe-bande de l'ondelette mère, on peut sélectionner une composante du signal et puis accéder à l'évolution temporelle de son module et de sa phase à l'aide du signal analytique associé. En outre, les ondelettes mères progressives facilitent aussi les études de la répartition de l'énergie du signal sur le plan temps-fréquence grâce à la densité spectrale locale. Tenant compte de ces remarques, nous n'utiliserons dans la suite que les ondelettes complexes et progressives.

2.5.2 Études de trois ondelettes progressives représentatives

On étudie, dans le cadre de la thèse, trois ondelettes mères complexes représentatives : la première est l'ondelette mère très connue : l'ondelette de Morlet, utilisée par plusieurs auteurs par exemple Torrèsani, Carmona *et al.* [118, 25], Staszewski [110]... ; la deuxième est l'ondelette de Cauchy, utilisée par Argoul *et al.* [12, 13] et par plusieurs auteurs dans la mécanique quantique [88] et la dernière est l'ondelette harmonique proposée par Newland [81, 82, 83] et prise par Tang pour traiter les signaux avec une décroissance exponentielle [115].

TABLEAU 2.1. *Trois ondelettes mères complexes*

	Ondelette Morlet	Ondelette Cauchy	Ondelette harmonique
$\psi(t)$	$e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} e^{i\beta t}$	$\left(\frac{i}{t+i}\right)^{n+1}$	$\frac{e^{i2n\pi t} - e^{i2m\pi t}}{i2\pi(n-m)t}$
$\hat{\psi}(\omega)$	$\delta\sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\omega-\beta)^2\delta^2}{2}}$	$\frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} H(\omega)$	$\frac{H[(\omega-m2\pi)(n2\pi-\omega)]}{(n-m)2\pi}$
$C_\psi :$	∞	$4\pi^2 \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2}$	$\frac{1}{4\pi^2(n-m)^2} \ln\left(\frac{n}{m}\right)$
t_ψ	0	0	0
ω_ψ	β	$n + \frac{1}{2}$	$(n+m)\pi$
$\Delta\omega_\psi :$	$\frac{1}{\delta\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$	$(n-m)\pi$
$\Delta t_\psi :$	$\frac{\delta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$	∞
$\mu_\psi :$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{2n-1}}$	∞
$Q = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi}$	$\frac{\beta\delta}{\sqrt{2}}$	$\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2n+1}}$	$\frac{(n+m)}{2(n-m)}$

Les propriétés suivantes sont examinées : admissibilité, la résolution temporelle et la résolution fréquentielle. Les définitions complètes en temps et en fréquence de ces trois ondelettes mères et les formules importantes sont données sur le tableau 2.1. À noter que dans le tableau 2.1, la formule de l'ondelette harmonique citée est celle de Newland qui a utilisé la transformation de Fourier inverse $w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$, qui est différente à une constante $\frac{1}{2\pi}$ près de la formule (2.7). Les détails du calcul analytique sont donnés dans l'annexe.

2.5.3 Choix des ondelettes

Le choix des ondelettes mères est un problème très important mais très peu d'auteurs ont abordé ce problème. Nous proposons ici un choix d'ondelette mère dans le contexte de traitement des signaux réels modulés en amplitude et en fréquence.

■ PROPOSITION 2.1 (CHOIX D'ONDELETTE MÈRE)

L'ondelette mère optimale pour le traitement des signaux réels modulés en temps et en fréquence doit satisfaire les conditions suivantes :

1. être admissible
2. être progressive

3. avoir une bonne localisation en temps et en fréquence
4. faciliter le calcul de la relation (2.60)

Nous insistons sur le fait que les conditions données par la proposition précédente sont des conditions suffisantes. Ainsi, nous allons maintenant vérifier ces trois ondelettes mères à la lumière de

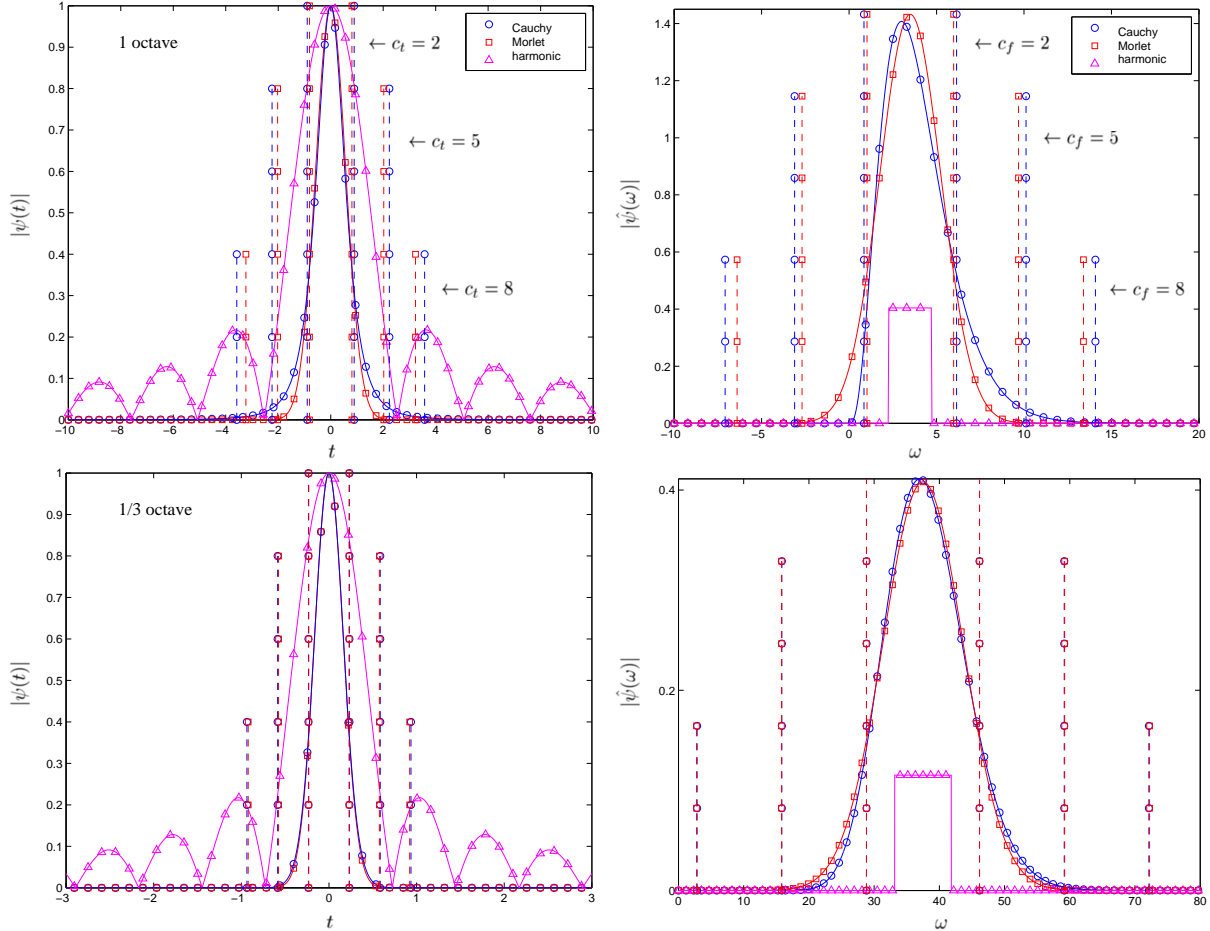


FIGURE 2.4. Modules des ondelettes mères en temps (gauche) et en fréquence (droite) correspondant à différentes valeurs de Q [tableau 2.2]. Lignes verticales correspondant aux c_t et c_f introduits au chapitre 3.

ces critères. La première et la deuxième conditions sont bien vérifiées par l'ondelette de Cauchy et l'ondelette harmonique. L'ondelette de Morlet n'est strictement ni admissible, ni progressive, mais elle est numériquement admissible et progressive si le produit $\beta\delta$ est assez grand ($\beta\delta \geq 5$ en pratique). Suivant la troisième condition, l'ondelette mère de Morlet a la meilleure localisation temps-fréquence avec l'incertitude $\mu_\psi = \frac{1}{2}$ (la plus petite valeur donnée par l'inéquation (2.26)). L'incertitude de l'ondelette de Cauchy tend asymptotiquement vers cette limite quand n tend vers $+\infty$. L'ondelette harmonique a une incertitude infinie, mais son support dans le domaine fréquentiel est compact. Cette propriété est intéressante à propos de la séparation des composantes de fréquences très voisines. Newland [83] propose de fenêtrer le spectre de l'ondelette afin d'améliorer la localisation temporelle, toutefois, ce procédé est plus compliqué que la transformation en ondelettes proprement dite. La dernière condition est facilement vérifiée par l'ondelette de Cauchy. Les dérivées au premier et au deuxième ordre de l'ondelette de Cauchy sont aussi des

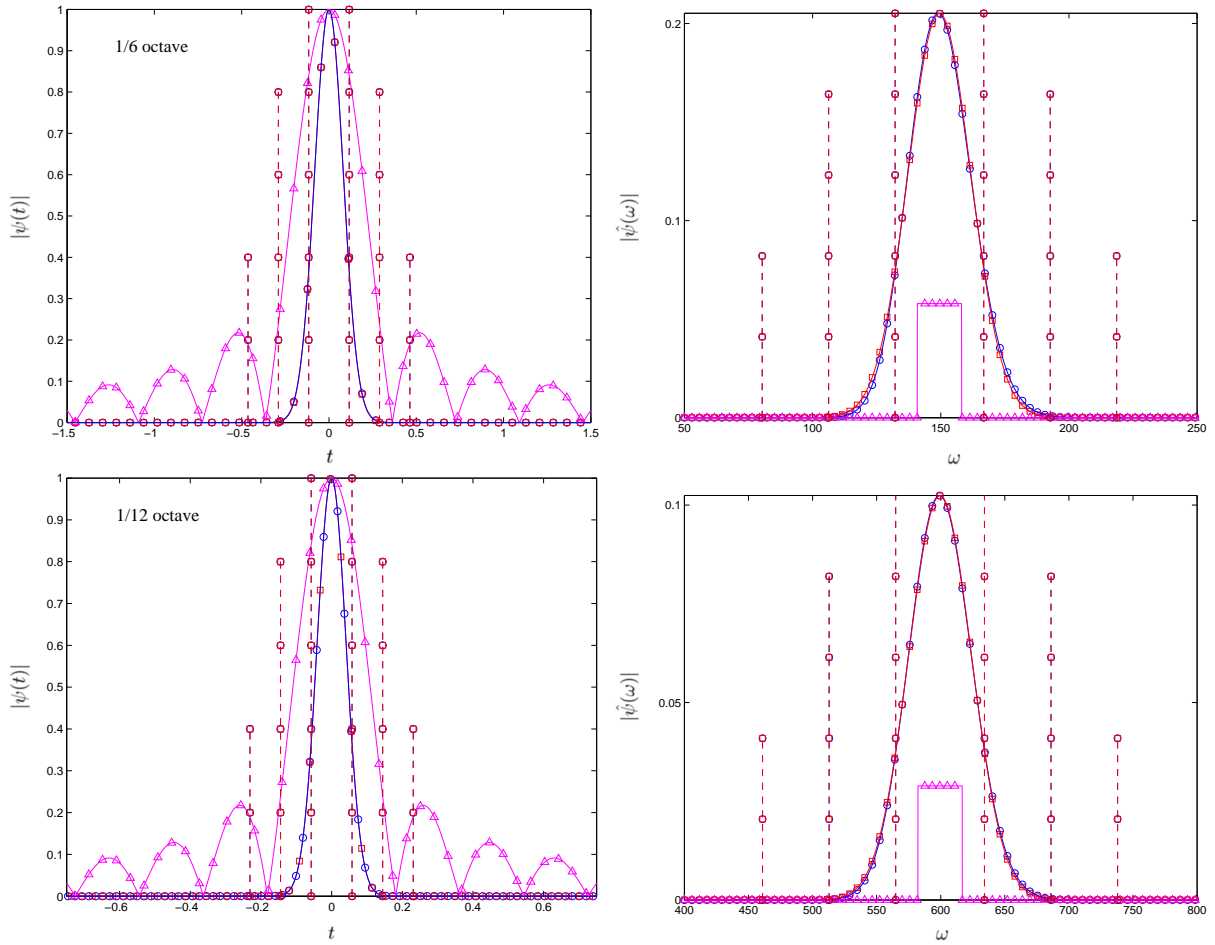


Figure 2.4 suite.

ondelettes de Cauchy :

$$\dot{\psi}_n(t) = i(n+1)\psi_{(n+1)}(t) \quad \text{et} \quad \ddot{\psi}_n(t) = -(n+1)(n+2)\psi_{(n+2)}(t) \quad (2.63)$$

Les dérivées au premier et au deuxième ordre de l'ondelette de Morlet satisfont la dernière condition mais elles ne sont plus des ondelettes de Morlet et leurs localisations temps-fréquence ne sont plus aussi bonnes que celles de l'ondelettes de Morlet. Les dérivées de l'ondelette harmonique sont admissibles et progressives donc, vérifient la formule (2.60). Toutefois, elles n'ont pas de bonne localisation en temps. De plus, elles n'appartiennent pas à l'espace $L^1(\mathbb{R})$, la condition pour une fonction fenêtre en pratique [31]. On constate que chaque ondelette mère dépend d'un ou de deux paramètres de définition donc, les propriétés de ces ondelettes sont difficiles de comparer de façon quantitative. Nous choisissons alors Q , défini à la formule (2.43) comme le facteur caractéristique de l'ondelette mère. Ce choix est justifié puisque le rôle de l'ondelette mère ressemble à un filtre passe-bande. Gram-Hansen *et al.* [49] associent les valeurs de Q avec les bandes de fréquence en octave, une notion classique en acoustique. A noter que, une bande de $(1/N)^{th}$ octave de fréquence centrale ω_ψ est une bande $[\omega_1, \omega_2]$ tel que $\omega_1 = 2^{-\frac{1}{2N}}\omega_\psi$ et $\omega_2 = 2^{\frac{1}{2N}}\omega_\psi$. Ainsi, la relation entre Q et N est la suivante :

$$Q = \frac{1}{2^{\frac{1}{2N}} - 2^{-\frac{1}{2N}}} \quad (2.64)$$

Pour illustrer la localisation des ondelettes, le facteur Q est utilisé de telle manière qu'elles ont les mêmes valeurs de Q et de ω_ψ (ce qui entraîne la même valeur de $\Delta\omega_\psi$). Les ondelettes mères

en temps et leurs transformées de Fourier sont représentées sur la figure 2.4 correspondant aux différentes valeurs de bande de $(1/N)^{th}$ octave qui est directement liée à Q par l'expression (2.64). Le tableau 2.2 donne N, Q et les valeurs correspondant des paramètres de définition des ondelettes mères.

TABLEAU 2.2. Les paramètres des ondelettes mères en relation avec Q et N

Filtre Octave	Q	ondelette de Morlet		ondelette de Cauchy	ondelette harmonique	
		β	δ	n	n	m
1	1.4142	3.5	0.5714	3	0.7540	0.3601
1/3	4.3185	37.5	0.1629	37	6.6593	5.2773
1/6	8.6514	149.5	0.0818	149	25.1688	22.4185
1/12	17.3099	559.5	0.0408	559	98.1694	92.6574

On peut retirer quelques remarques suivantes :

(1) pour l'ondelette de Morlet, $\hat{\psi}(0) \neq 0$, mais $\hat{\psi}(0)$ tend vers 0 quand le produit $\beta\delta$ croît. De plus, à une fréquence ω_j , la localisation en temps et en fréquence seront obtenues par l'équation (2.40) et égales respectivement : $\Delta t_{\omega_j} = \frac{\beta\delta}{\omega_j\sqrt{2}}$ et $\Delta\omega_{\omega_j} = \frac{\omega_j}{\beta\delta\sqrt{2}}$. Ces propriétés de l'ondelette de Morlet ne dépendent que du produit $\beta\delta$, donc, sans perte de généralité, on peut imposer $\delta = 1$ et faire varier β pour atteindre la valeur espérée de Q .

(2) plus Q augmente, plus les courbes de l'ondelette de Morlet et de l'ondelette de Cauchy coïncident.

(3) l'ondelette harmonique a une localisation en temps très "pauvre", et présente des phénomènes de Gibbs à cause de discontinuités en fréquence. En outre, elle n'est pas absolument intégrable. Pour toutes ces raisons, la transformation en ondelettes continue avec l'ondelette harmonique n'est pas retenue dans le contexte de traitement des signaux modulés en temps et en fréquence. Cette remarque s'accorde bien avec la conclusion de Tang [115] quand il la compare avec la transformation de Fourier à court terme.

(4) Quand Q est petit ($\beta\delta = \beta < 5$, i.e $Q < \frac{5}{\sqrt{2}}$), il est naturel d'utiliser l'ondelette de Cauchy au lieu de l'ondelette de Morlet. Et quand $Q \geq \frac{5}{\sqrt{2}}$ (i.e, $\beta \geq 5$ et $n \geq 25$), l'ondelette de Cauchy a l'incertitude : $\mu_\psi \sim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2n-1} + o\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 \right)$. Cela montre que μ_ψ tend vite vers $\frac{1}{2}$ et cette variation en fonction de Q est représentée sur la figure 2.5. En acceptant une localisation temps-fréquence "plus mauvaise" que pour l'ondelette de Morlet, de moins de 2%, l'utilisation de l'ondelette de Cauchy est encore performante.

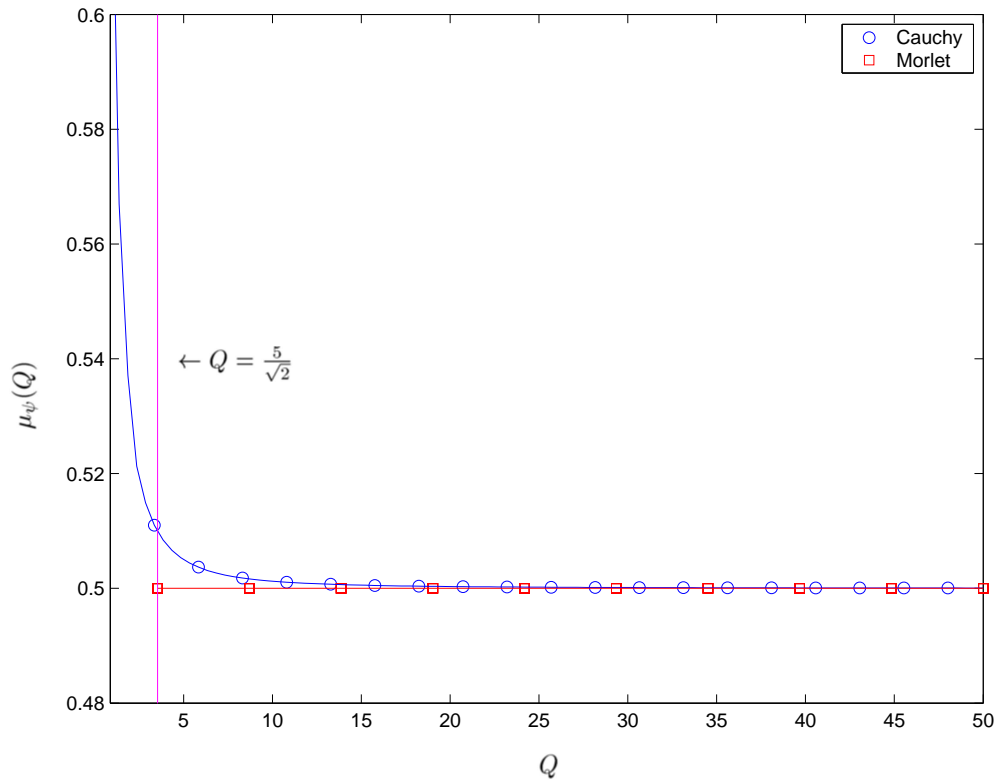


FIGURE 2.5. Incertitude de l'ondelette de Morlet et de l'ondelette de Cauchy.

2.6 Conclusions

Ce chapitre a sommairement donné des notions importantes pour le traitement du signal en général et le traitement en ondelettes en particulier. En se basant sur les propriétés des signaux à traiter, on a proposé un ensemble de critères afin de choisir les ondelettes mères les plus convenables. Trois ondelettes complexes représentatives sont comparées et deux ondelettes mères sont retenues : ondelette de Morlet et ondelette de Cauchy. Le facteur Q a été choisi pour caractériser l'ondelette mère. Il permet la comparaison entre les ondelettes et la suppression d'ambiguïtés sur l'ondelette de Morlet : on peut imposer $\delta = 1$. Toutes les discussions supposent que le signal et l'ondelette mère sont en version continue de variable réelle : le temps. Les chapitres suivants travailleront sur la version discrète du signal (i.e, signal échantillonné).

Chapitre 3

Calcul numérique de la transformation en ondelettes

3.1 Introduction

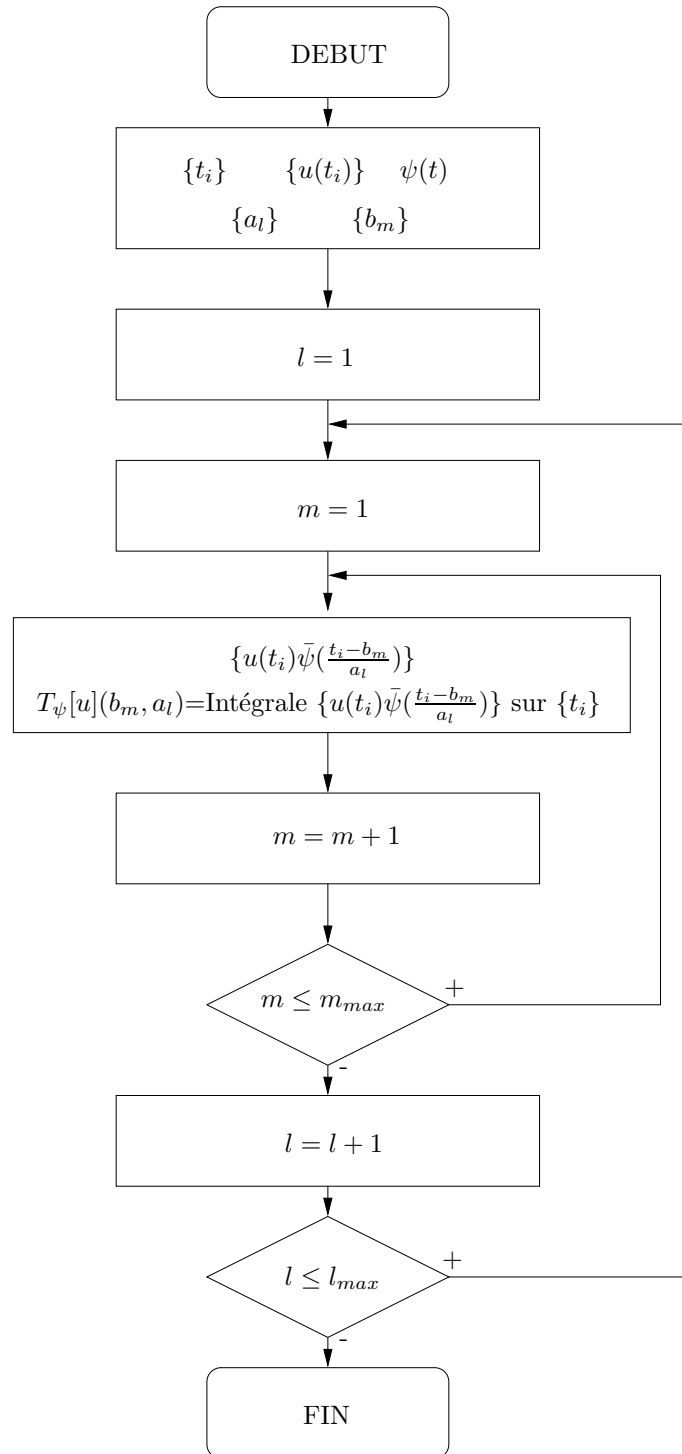
Le chapitre précédent a supposé que les signaux sont des fonctions continues, or en réalité, les signaux que nous étudions sont des suites finies de nombres qui proviennent de mesures que l'on effectue à l'aide d'une procédure d'enregistrement. Donc, le calcul numérique de la transformation en ondelettes est nécessaire et important. Ce chapitre est réservé à la recherche des algorithmes convenables et à la mise à jour des problèmes liés aux signaux discrets et finis. La section 3.2 aborde les différentes possibilités de calcul de la transformée en ondelettes. Puis, une discussion sur ces algorithmes est présentée à la section 3.3. On met ensuite l'accent sur le problème de l'effet de bords à la section 3.4 et on propose finalement de déterminer un domaine où l'effet de bords peut être négligé.

3.2 Algorithmes de calcul numérique de la transformation en ondelettes

Les algorithmes présentés sont basés sur des arguments différents. Chaque argument reflète un point de vue de la définition de la transformation en ondelettes. Tous ces algorithmes sont programmés sous MATLAB. Afin de vérifier la performance de chaque algorithme, un signal cosinus simple est utilisé comme test.

3.2.1 Calcul par intégrale directe

La définition de la transformation en ondelettes se présente sous forme d'une intégrale. Le calcul direct est intuitif et correspond à la discrétisation de l'intégrale. L'algorithme du calcul direct est présenté sur le diagramme 3.1. Cet algorithme est assez coûteux en temps de calcul. Pour le signal de 512 points en temps et 100 points en échelle, cette procédure a besoin de 133 secondes sur le CPU CELERON (500/128).

FIGURE 3.1. *Algorithme pour calcul direct de la TO*

3.2.2 Calcul par produit de convolution

On peut voir la définition de la transformation en ondelettes comme le produit de convolution entre le signal et l'ondelette dilatée. La définition du produit de convolution est écrite sous la forme :

$$s(t) = f * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (3.1)$$

L'expression de la TO peut être ré-écrite :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \bar{\psi}\left(-\frac{b-t}{a}\right) dt \quad (3.2)$$

Si l'on pose l'opérateur de parité : $P : s \mapsto Ps$ tel que $(Ps)(t) = s(-t)$, la restriction de $T_\psi[u](\cdot, a)$ est le produit de convolution de $u(t)$ avec $P\bar{\psi}_a$.

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{a} [u * P\bar{\psi}_a(b)] \quad (3.3)$$

Cette remarque nous conduit à l'utilisation de l'algorithme de convolution `conv` disponible dans `MATLAB`. Le schéma de calcul est présenté sur la figure 3.2. Pour le même test, cette procédure a besoin de 4.34 secondes de calcul.

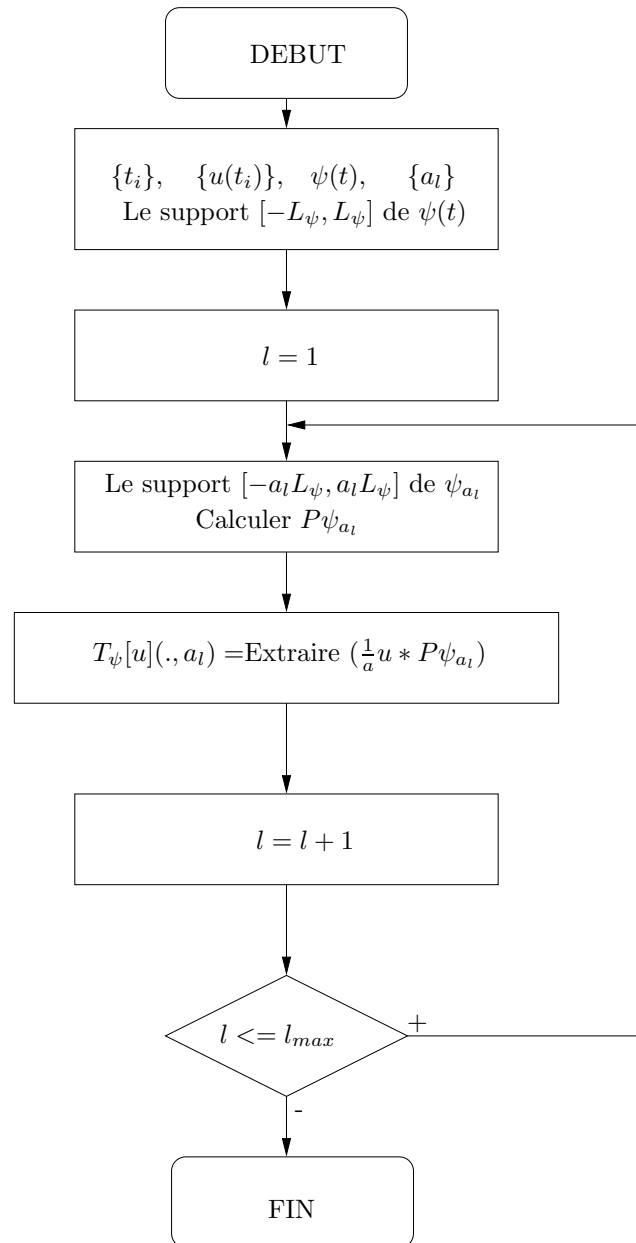


FIGURE 3.2. Algorithme pour calculer la TO par "convolution"

3.2.3 Calcul par l'algorithme FFT

En transposant le calcul de la TO dans le domaine fréquentiel grâce à la formule de Parseval, on obtient :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega) \bar{\hat{\psi}}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (3.4)$$

On peut voir cette formule comme la transformation de Fourier inverse du produit $\hat{u}(\omega)\hat{\psi}(a\omega)$. Ce résultat peut être obtenu à partir de la formule de convolution (3.3). Dans le plan fréquentiel, le produit de la convolution devient le produit direct : $\hat{T}_\psi[u](\omega, a) = \hat{u}(\omega)\hat{\psi}_a(a\omega)$. En utilisant l'algorithme `fft` et `ifft` de MATLAB, on a l'algorithme adapté comme le montre la figure 3.3. L'exécution du test proposé dure 0.3 seconde !

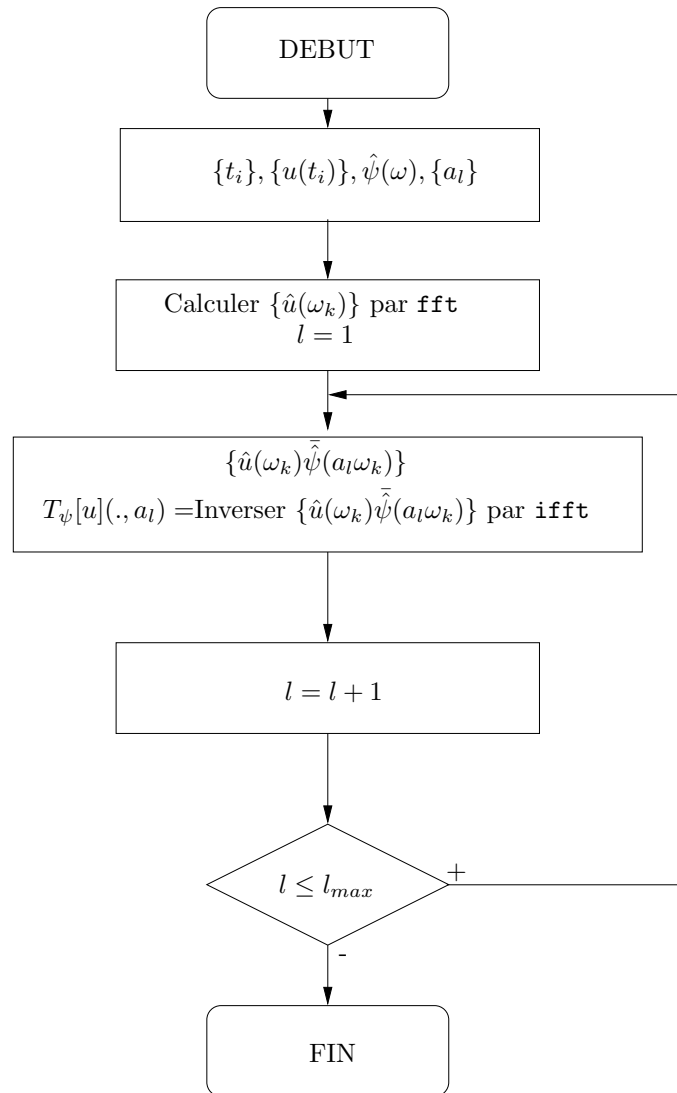


FIGURE 3.3. Algorithme pour calculer la TO avec "FFT et IFFT"

3.2.4 Calcul par l'algorithme CZT

On peut aussi voir la transformation en ondelettes comme le produit scalaire entre le signal avec l'ondelette mère. Cela nous permet d'utiliser l'algorithme `czt` existant dans l'outil de traitement

du signal de MATLAB. La transformation en Z (TZ) se définit comme suit :

$$TZ[g] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (3.5)$$

où $g(k)$ est la version échantillonnée du signal $g(t)$. On essaie de calculer la transformation en ondelettes via la TZ. En effet, si l'on arrive à écrire la transformation en ondelettes de la même forme que (3.5), on peut utiliser l'algorithme `czf`. On présente ici deux exemples pour la démonstration :

- **Ondelette mère de Morlet** : On commence par la discrétisation de l'intégrale de la transformation en ondelettes d'une part :

$$T_{\psi}[u](b, a) = \frac{1}{a} T \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \bar{\psi}\left(\frac{kT-b}{a}\right) \quad (3.6)$$

et d'autre part :

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\beta t} \quad (3.7)$$

Il en résulte que :

$$\bar{\psi}\left(\frac{kT-b}{a}\right) = e^{-\frac{(kT-b)^2}{2a^2}} e^{-i\beta\frac{(kT-b)}{a}} = e^{-\frac{b^2}{a^2} + i\beta\frac{b}{a}} e^{-\frac{(kT)^2}{a^2}} \left[e^{-i\beta\frac{T}{a} + 2\frac{Tb}{a^2}} \right]^k \quad (3.8)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} T_{\psi}[u](b, a) &= \frac{1}{a} T \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \bar{\psi}\left(\frac{kT-b}{a}\right) = \frac{1}{a} T e^{-\frac{b^2}{a^2} + i\beta\frac{b}{a}} \sum_{k=0}^{\infty} u(k) e^{-\frac{(kT)^2}{a^2}} \left[e^{i\beta\frac{T}{a} - 2\frac{Tb}{a^2}} \right]^{-k} = \\ &= C(b, a) \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = C(b, a) TZ\{g(k)\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où :

$$C(b, a) = \frac{1}{a} T e^{-\frac{b^2}{a^2} + i\beta\frac{b}{a}}, \quad g(k) = u(k) e^{-\frac{(kT)^2}{a^2}} \quad \text{et} \quad z = e^{i\beta\frac{T}{a} - 2\frac{Tb}{a^2}}$$

- **Ondelette mère de Cauchy** : Il n'est pas possible d'appliquer directement l'écriture (3.5) mais cela est facile dans le domaine fréquentiel en se référant à la relation (3.4).

$$T_{\psi}[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} W \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}(kW) \bar{\hat{\psi}}(akW) e^{ikWb} \quad (3.10)$$

où W est l'intervalle de fréquence. En remplaçant l'expression de la transformation de Fourier de l'ondelette de Cauchy :

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} H(\omega) \quad (3.11)$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} W \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}(kW) \bar{\hat{\psi}}(akW) e^{ikWb} &= \frac{1}{2\pi} W \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}(kW) \frac{2\pi(akW)^n e^{-akW}}{n!} H(akW) e^{ikWb} = \\ &= W \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}(kW) \frac{(akW)^n}{n!} [e^{W(a-ib)}]^{-k} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalement :

$$T_{\psi}[u](b, a) = W \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}(kW) \frac{(akW)^n}{n!} [e^{W(a-ib)}]^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = TZ\{g(k)\}$$

où :

$$g(k) = W \hat{u}(kW) \frac{(akW)^n}{n!} \quad \text{et} \quad z = e^{W(a-ib)}$$

Ainsi, avec les deux ondelettes mères retenues : Morlet et Cauchy, on peut appliquer l'algorithme de transformation en Z. Le test sur le signal sinusoïdal dure 1.34 secondes de calcul.

3.3 Discussion sur les algorithmes

On a présenté ci-dessus différentes méthodes pour le calcul numérique de la transformation en ondelettes. Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients. L'analyse de ces algorithmes nous permet de bien choisir, pour chaque type du signal, l'algorithme approprié. Le calcul direct est toujours valable et très général, même dans le cas où le signal enregistré n'est pas échantillonné avec des instants régulièrement espacés égaux (c'est très rare!). Cette méthode a un gros défaut de temps de calcul donc, elle n'est pas utilisée en réalité.

Le calcul de la TO à l'aide de FFT et IFFT améliore beaucoup le temps de calcul ; de plus, il périodise le signal à partir de son enregistrement, et ce type de calcul est parfaitement adapté aux signaux périodiques. Toutefois, il ne convient pas aux signaux non-périodiques, particulièrement aux signaux amortis. Il est possible d'ajouter pour ce type de signaux des zéros (zéro padding) afin d'améliorer le résultat mais le temps de calcul est multiplié.

Le calcul par la convolution consomme un temps de calcul un peu plus élevé que celui avec la FFT et IFFT. Il convient bien au cas du signal amorti, mais il devient peu intéressant si le signal est périodique puisque l'algorithme considère que le signal est nul hors de l'intervalle d'enregistrement.

Finalement, le calcul via CZT est possible, mais il est difficile de généraliser pour toutes les ondelettes mères (sauf lorsque l'on considère FFT et IFFT comme un cas particulier de CZT ¹). L'utilisation de ce dernier est toujours effectuée avec précaution car il est possible que le calcul soit numériquement divergent. A noter que la convergence est assurée par le critère de la TZ ².

En conclusion, nous retenons dans la suite pour les signaux d'applications deux algorithmes : calcul par transformation de Fourier rapide et calcul par convolution.

3.4 Effet de bords

3.4.1 Approche théorique

Le signal mesuré $u(t)$ est en général, échantillonné sur une durée finie L . Chaque point de mesure est espacé d'une valeur T , la période d'échantillonnage. Le contenu fréquentiel de cette version discrète est limité par la fréquence de Nyquist $f_{Nyquist} = \frac{1}{2T}$. Puisque le signal est de durée finie et échantillonné avec une période d'échantillonnage non nulle, il existe une anomalie aux bords appelée : l'effet de bords. La définition de la transformation en ondelettes est sur tout \mathbb{R} , donc, le signal réel dans les algorithmes de calcul numérique est, soit périodisé par l'algorithme `fft` (avec ou non zéro padding), soit mis à zéro hors de l'enregistrement. Toutes ces "astuces" ne peuvent pas enlever cet effet gênant de bords sauf si le signal est parfaitement périodique et que la longueur d'enregistrement est un nombre multiple de la période. Cette situation est rare voire impossible en réalité. Le problème de l'effet de bords a aussi été abordé par Slavic *et al.* [108].

¹si $z = 1.\exp(-j*2*\pi/M)$, le CZT rend le même résultat que FFT, avec le nombre de points enregistrés M

² r : rayon de convergence :

$$|z| > \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{g_{k+1}}{g_k} \right| = r$$

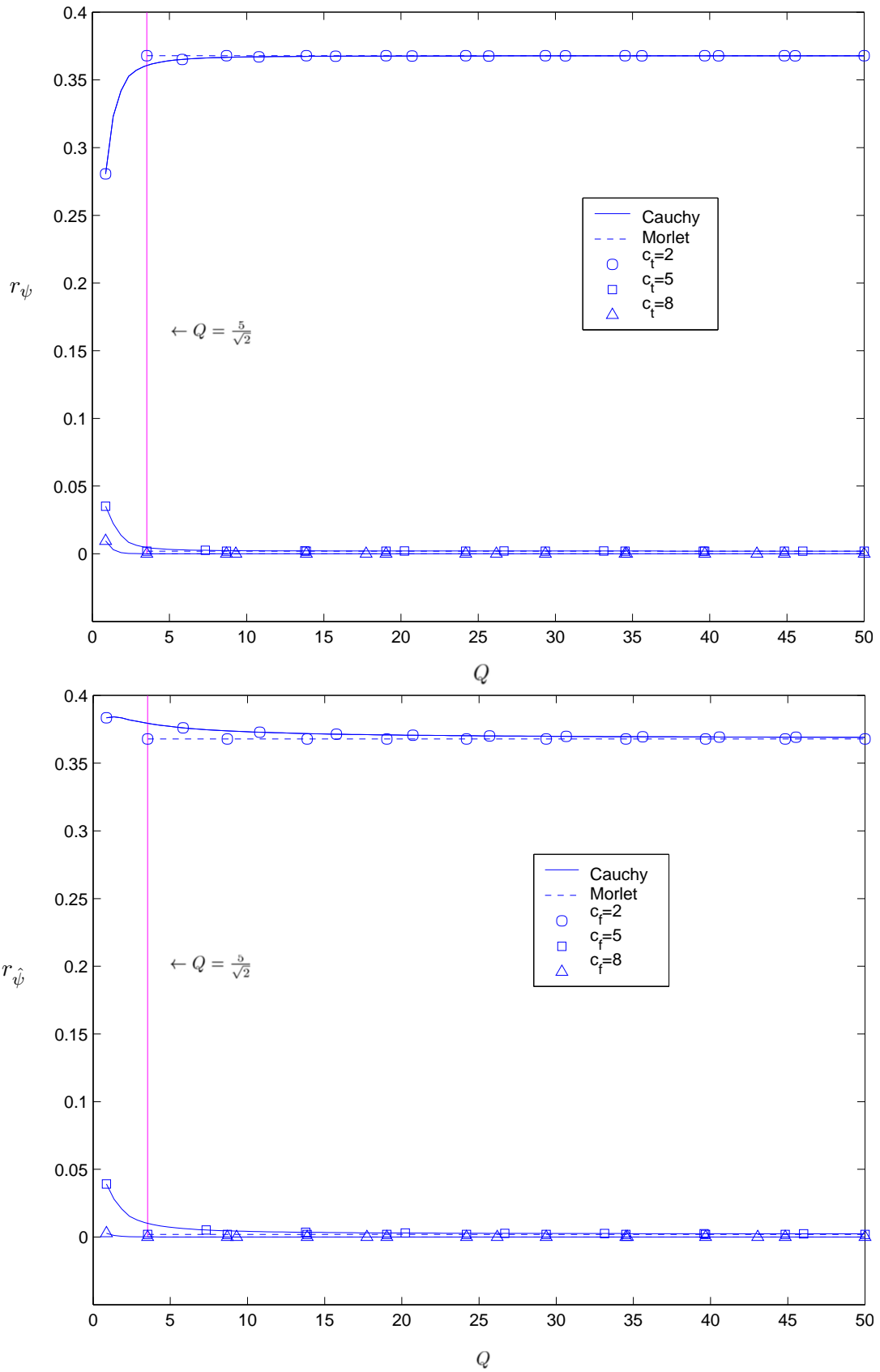


FIGURE 3.4. Localisation étendue des ondelettes mères en temps (haut) et en fréquence (bas).

Nous essayons dans cette partie de déterminer le domaine D sur le plan $t - \omega$ où l'effet de bords peut être négligeable.

Nous introduisons deux coefficients réels c_t and c_f supérieurs ou égaux à 1 tel que : $t \notin I_{c_t} = [t_\psi - c_t \Delta t_\psi, t_\psi + c_t \Delta t_\psi]$ et $\omega \notin [\omega_\psi - c_f \Delta \omega_\psi, \omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi]$, $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(\omega)$ ont de bonnes propriétés de décroissance. Cela signifie que $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(\omega)$ sont nulles ou très "petites". L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre que quand t est hors de I_{c_t} et ω hors de I_{c_f} ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} - I_{c_t}} |\psi(t)|^2 dt &\leq \frac{1}{c_t^2} \|\psi\|_2^2 \\ \int_{\mathbb{R} - I_{c_f}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega &\leq \frac{1}{c_f^2} \|\hat{\psi}\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'effet des valeurs de c_t et c_f est illustré sur la figure 2.4 pour trois cas : $c_t = c_f = 2$, $c_t = c_f = 5$ et $c_t = c_f = 8$. Les lignes verticales désignent pour deux ondelettes Morlet et Cauchy les limites des intervalles I_{c_t} (en temps) et I_{c_f} (en fréquence). On note que plus Q augmente, plus ces lignes se rapprochent pour l'ondelette de Morlet et l'ondelette de Cauchy. Plus précisément, nous proposons les rapports r_ψ et $r_{\hat{\psi}}$

$$\begin{aligned} r_\psi &= \frac{|\psi(t_\psi + c_t \Delta t_\psi)|}{|\psi(t_\psi)|} \\ r_{\hat{\psi}} &= \frac{|\hat{\psi}(\omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi)|}{|\hat{\psi}(\omega_\psi)|} \end{aligned} \quad (3.14)$$

pour caractériser la décroissance de $\psi(t)$ et $\hat{\psi}(\omega)$. Nous avons démontré (voir l'annexe) que :

$r_\psi = r_\psi^* = e^{-\frac{c_t^2}{4}}$ et $r_{\hat{\psi}} = r_{\hat{\psi}}^* = e^{-\frac{c_f^2}{4}}$ pour l'ondelette de Morlet. Pour l'ondelette de Cauchy, $r_\psi(Q)$ et $r_{\hat{\psi}}(Q)$ tendent asymptotiquement quand Q tend vers $+\infty$ vers r_ψ^* et $r_{\hat{\psi}}^*$ respectivement. r_ψ et $r_{\hat{\psi}}$ sont tracés en fonction de Q sur la figure 3.4. Un compromis est fait sur le choix des c_t et c_f . Nous proposons de prendre $c_t = c_f = 5$. Et nous allons maintenant définir D comme un domaine de localisation "étendue" sur le plan temps-fréquence pour la transformation en ondelettes autour du point $(b_j, \omega_j = \frac{\omega_\psi}{a_j})$. C'est la version "étendue" de la formule (2.42). En combinant avec les coefficients c_t , c_f et la propriété progressive de l'ondelette mère, D devient :

$$\begin{aligned} [b_j + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi, \quad b_j + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi] \\ \times [\max(0, \omega_j (1 - c_f \frac{\Delta \omega_\psi}{\omega_\psi})), \quad \omega_j (1 + c_f \frac{\Delta \omega_\psi}{\omega_\psi})] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le domaine D doit être inclus dans $[0, L] \times [0, 2\pi f_{Nyquist}]$; cela amène au système d'inéquations suivant

$$\begin{cases} \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi \leq b_j \leq L - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} c_t \Delta t_\psi - \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi \\ 0 < \omega_j \leq \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f \frac{\Delta \omega_\psi}{\omega_\psi}} \end{cases} \quad (3.16)$$

Enfinement, par l'introduction de Q et de μ_ψ , en tenant compte de $t_\psi = 0$, ce qui est vrai pour les ondelettes de Morlet et de Cauchy, le système (3.16) devient :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_j} c_t 2Q \mu_\psi \leq b_j \leq L - \frac{1}{\omega_j} c_t 2Q \mu_\psi & a) \\ 0 < \omega_j \leq \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f \frac{1}{2Q}} & b) \end{cases} \quad (3.17)$$

Comme le montrent les inéquations (3.17), D est limité par deux hyperboles définies par : $\omega = \frac{1}{b} c_t 2Q \mu_\psi$ et $\omega = \frac{1}{L - b} c_t 2Q \mu_\psi$ et deux lignes horizontales dont les équations sont : $\omega = 0$ et

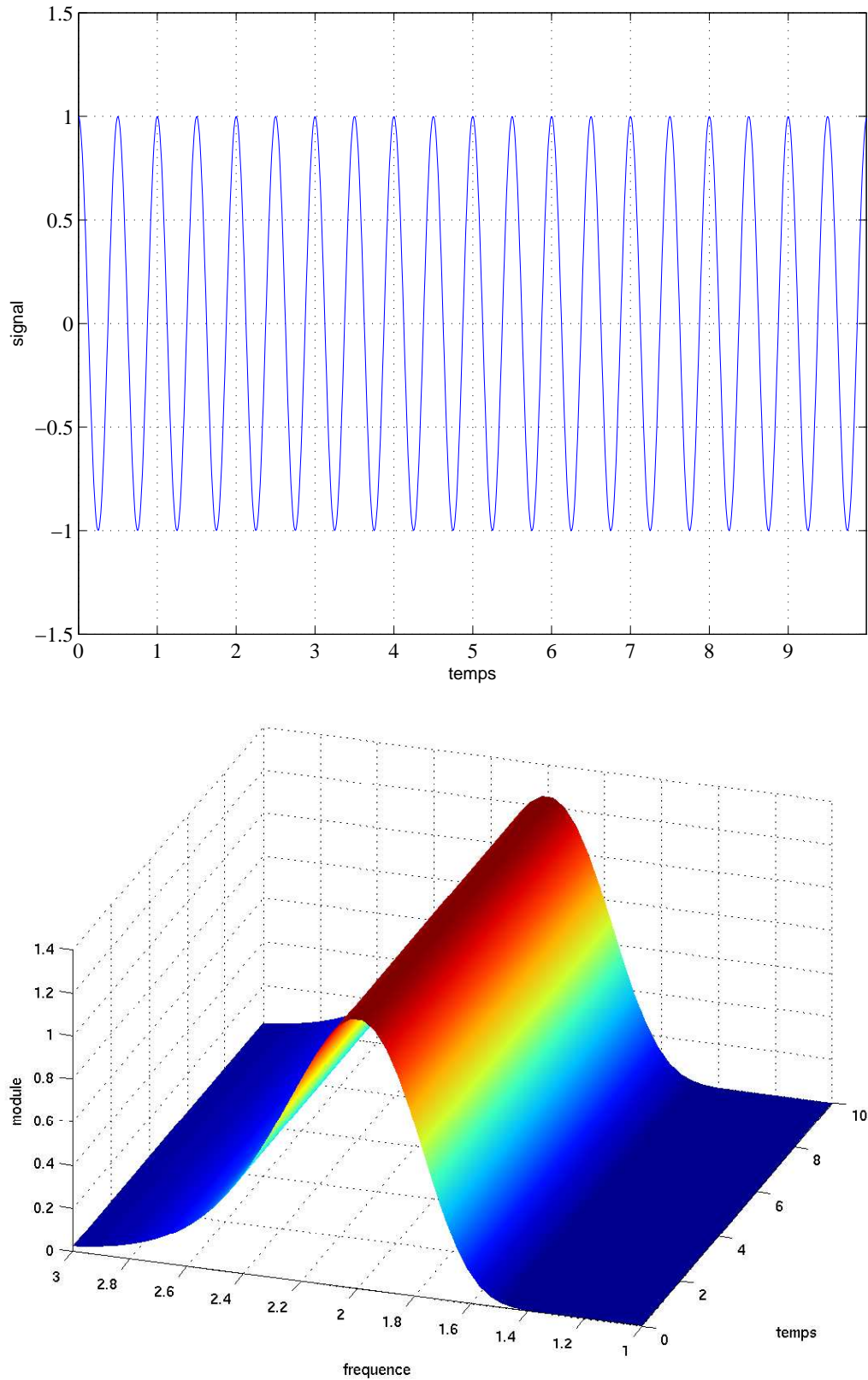


FIGURE 3.5. *Illustration de l'effet de bords. En haut : signal cosinus et en bas : transformation en ondelettes du signal infini.*

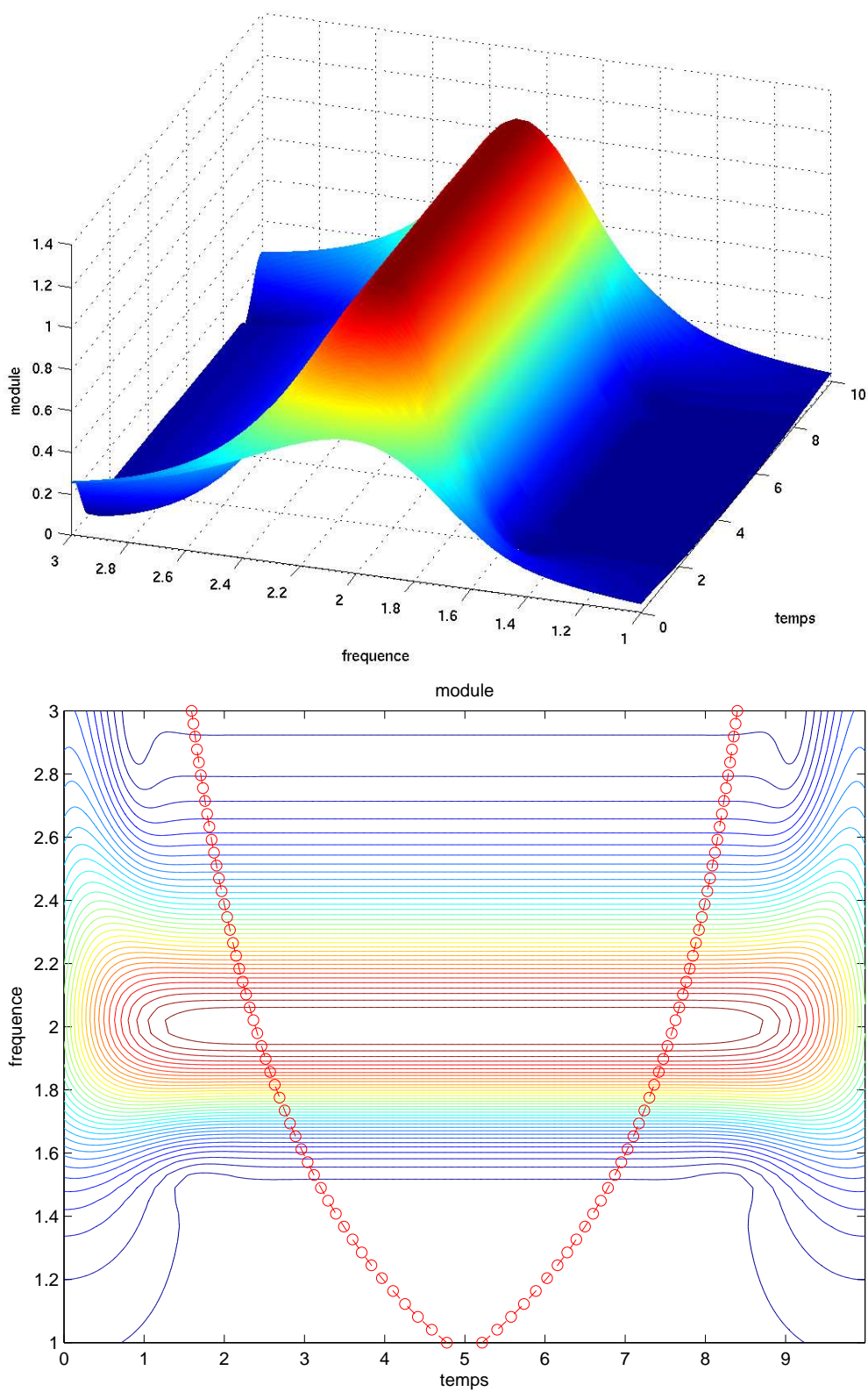


FIGURE 3.6. *Illustration de l'effet de bords. En haut : transformation en ondelettes du signal fini et en bas : le domaine D sur le plan temps-fréquence.*

$\omega = \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f \frac{1}{2Q}}$. Puisque les deux coefficients c_t et c_f sont supérieurs à 1, l'intervalle de temps utile est plus petit que la durée L et l'intervalle de fréquence utile est plus petit que la fréquence $f_{Nyquist}$.

3.4.2 Illustration de l'effet de bords

L'effet de bords est illustré par un exemple d'un signal cosinus : $u(t) = \cos(4\pi t)$. La transformation en ondelettes est calculée pour deux cas : signal infini et signal fini. Le module de la transformée en ondelettes est représenté sur le plan temps-fréquence aux figures 3.5 et 3.6. La transformation en ondelettes du signal infini est obtenue par l'algorithme de calcul de type `fft` et celle du signal fini est obtenue soit par l'algorithme de calcul `conv` ou par `fft` avec l'ajout des zéros. Pour le signal infini, la transformée en ondelettes est régulière sur tout l'intervalle de temps or celle du signal fini a des effets irréguliers sur les bords. Les paramètres d'échantillonnage du signal sont : longueur d'enregistrement $L = 10s$ avec le pas $T = 0.0098s$. Le domaine D est représenté sur le plan temps-fréquence à la figure 3.6. Les deux courbes hyperboliques sont présentes tandis que les deux droites $\omega = 0$ et $\omega = \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f \frac{1}{2Q}}$ sont absentes puisque l'une est trop basse et l'autre est trop haute sur le plan de la figure 3.6. À noter qu'on a $f_{Nyquist} = 51.2000(Hz)$ pour ce signal fini. Nous reviendrons sur la validité du domaine D proposé dans plusieurs exemples des chapitres suivants avec signaux multi-composantes, signaux amortis...

3.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté le calcul numérique de la transformation en ondelettes. Différents algorithmes de calcul sur MATLAB ont été étudiés. Le choix d'un algorithme est basé sur le type de signal analysé et le coût en temps de calcul. Les deux algorithmes les plus performants ont été retenus : calcul par transformation de Fourier rapide et celui de convolution. On a aussi abordé un problème fondamental pour la version échantillonnée des signaux étudiés : l'effet de bords. Un domaine D dont l'effet de bords est négligeable a été déterminé. Il sera utilisé pour la procédure d'identification dans les chapitres suivants. En effet, le traitement de données par la transformation en ondelettes comprend souvent deux étapes : le calcul de la transformation en ondelettes et la caractérisation des informations pertinentes du signal à partir de la transformée en ondelettes. La caractérisation des informations du signal à partir de la transformée en ondelettes est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Analyse des signaux modulés en amplitude et en fréquence

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de déterminer à partir de la transformée en ondelettes, les lois d'évolutions temporelles des amplitudes et des fréquences des signaux qui sont supposés asymptotiques. La représentation de la transformée en ondelettes sur le plan temps-fréquence a une particularité : elle se concentre le long des courbes appelées "arêtes". La restriction de la transformée en ondelettes aux arêtes, appelée "squelette", contient l'information maximale : elle est très proche du signal lui-même. Les définitions possibles des arêtes et les relations entre le signal et le squelette sont données à la section 4.2. La section 4.3 analyse le choix des paramètres d'ondelettes mères afin de séparer les fréquences voisines contenues dans un signal. A la suite de l'analyse des deux sections précédentes, la section 4.4 présente différents algorithmes d'extraction des arêtes. Ils sont tous programmés sous MATLAB. Leur validation numérique est donnée à l'aide d'exemples et une discussion sur les différents algorithmes est également présentée.

4.2 Caractérisation des arêtes sur le plan temps-fréquence

Afin d'obtenir des informations contenues dans un signal asymptotique, on essaie de les caractériser grâce aux coefficients de la transformation en ondelettes (transformée). Des travaux importants sur ce sujet ont été menés par le groupe de Marseille [40, 118] et Carmona *et al.* [25, 26, 27, 28]. Nous présentons brièvement, ici leurs résultats. Dans chaque cas concret, nous essayons d'améliorer si possible, le résultat en tenant compte des caractéristiques du signal considéré. Ce travail consiste, tout d'abord, à révéler les particularités des points qui forment les arêtes dans le plan temps-fréquence, puis à approximer ces coefficients aux arêtes (squelette) de façon analytique en relation avec le signal traité. On se restreint dans cette thèse, à une classe de signal asymptotique comme défini dans le chapitre précédent [voir la section 2.3.3] si l'on a besoin de la reconstruction du signal par le squelette.

4.2.1 Lignes spectrales

Le cas le plus simple est le cas des lignes spectrales. Ce sont les signaux à fréquence constante.

• *Une ligne spectrale :*

$$u(t) = A_1(t)e^{i\omega_1 t} \quad (4.1)$$

Si $A_1(t)$ est une constante, on a : $u(t) = A_1 e^{i\omega_1 t}$, dans ce cas la transformée en ondelettes vaut :

$$\begin{aligned} T_\psi[u](b, a) &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1 e^{i\omega_1 t} \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \\ &= A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_1) \overline{\psi}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega = A_1 \overline{\psi}(a\omega_1) e^{i\omega_1 b} \end{aligned} \quad (4.2)$$

On a alors les deux remarques suivantes :

- $|T_\psi[u](b, a)|_{\max} = |T_\psi[u](b, a_r)|$ avec $a_r = \frac{\omega_{\psi_0}}{\omega_1}$, où ω_{ψ_0} est la fréquence dont $|\hat{\psi}(\omega_{\psi_0})|$ est maximum
- Si $\hat{\psi}(\omega)$ est réelle (ce qui est vrai pour l'ondelette de Morlet et l'ondelette de Cauchy) et si l'on pose $\Psi(b, a) = \angle(T_\psi[u](b, a))$, alors, $\Psi(b, a) = \omega_1 b$ et $\frac{\partial \Psi(b, a)}{\partial b} = \omega_1$. Cela signifie que la fréquence instantanée de la transformée en ondelettes coïncide avec celle du signal.

Si l'amplitude du signal n'est plus une constante mais une fonction du temps $A_1(t)$, comme l'ondelette mère est supposée maximale à $t = t_\psi = 0$, on procède au développement de Taylor de $A_1(t)$ au voisinage de $t = b$:

$$A_1(t) = A_1(b) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-b)^k}{k!} \frac{d^k A_1(b)}{db^k} \quad (4.3)$$

En l'introduisant dans l'équation de transformation en ondelettes (2.33) et en passant dans l'espace de Fourier comme précédemment, nous avons :

$$T_\psi[u](b, a) = e^{i\omega_1 b} \left[A_1(b) \overline{\psi}(a\omega_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-ia)^k}{k!} \frac{d^k \overline{\psi}(a\omega_1)}{d\omega^k} \frac{d^k A_1(b)}{db^k} \right] \quad (4.4)$$

Puisque la dérivée au premier ordre de la transformée en ondelettes à ω_{ψ_0} est nulle : $\hat{\psi}(\omega_{\psi_0}) = 0$, donc, si l'on pose : $a_r = \frac{\omega_{\psi_0}}{\omega_1}$, on aura l'approximation de la TO :

$$T_\psi[u](b, a_r) \approx e^{i\omega_1 b} A_1(b) \overline{\psi}(\omega_{\psi_0}) \quad (4.5)$$

L'erreur de cette approximation est du second ordre par rapport au développement exact (4.4).

■ DÉFINITION 4.1 (ARÊTE AVEC LE MODULE)

L'arête est l'ensemble $A1$ des points $(b, a_r(b))$ sur le plan temps-fréquence tel que le module de la transformée en ondelettes à ces points est maximale

$$A1 = \left\{ (b, a_r(b)) \mid |T_\psi[u](b, a_r(b))| = \max_a |T_\psi[u](b, a)| \right\} \quad (4.6)$$

□

• *Plusieurs lignes spectrales :*

Le cas de plusieurs lignes spectrales peut être traité séparément comme celui d'une ligne spectrale lorsque ces fréquences sont assez éloignées les unes des autres. Le signal $u(t)$ s'écrit :

$$u(t) = \sum_k u_k(t) = \sum_k A_k(t) e^{i\omega_k t} \quad (4.7)$$

Comme la TO est une transformation linéaire, donc :

$$T_\psi[u](b, a) = \sum_k T_\psi[u_k](b, a) \approx \sum_k e^{i\omega_k b} A_k(b) \overline{\widehat{\psi}}(a\omega_k) \quad (4.8)$$

Si les fréquences ω_k sont proches, on peut espérer augmenter la résolution de l'ondelette "mère" dans le domaine de fréquence en choisissant de bonnes valeurs de paramètres de l'ondelette mère afin de sélectionner un composant $u_k(t)$. Toutefois, ce réglage entraîne aussi l'élargissement de la localisation temporelle, donc une augmentation de l'effet de bord. Un compromis doit être étudié et c'est l'objectif de la section 4.3.

REMARQUE 4.2.1

Pour le cas de plusieurs lignes spectrales, dans le plan temps-fréquence, il existe plusieurs arêtes et la définition de l'arête par rapport à celle d'une ligne spectrale, pour plusieurs lignes spectrales, ne change pas, on parle alors non pas de maximum global mais de maxima locaux.

□

4.2.2 Signal modulé en amplitude et en fréquence

C'est le cas général lorsqu'il existe une variation simultanée de l'amplitude et de la phase du signal. L'hypothèse que nous faisons, est celle du signal asymptotique, c'est à dire, la variation de la phase est beaucoup plus rapide que celle de l'amplitude. Dans ce cas, l'intégrale de la transformation en ondelettes devient l'intégrale oscillatoire rapide et le développement asymptotique permet d'approcher ce résultat par un modèle exploitable de la transformée en ondelettes [118].

$$u(t) = \sum_k A_k(t) \cos(\alpha_k(t)) \quad (4.9)$$

Le signal analytique associé $Z_{u_k}(t)$ de chaque composante $u_k(t)$ sera

$$Z_{u_k}(t) \approx A_k(t) e^{i\alpha_k(t)} \quad (4.10)$$

Pour simplifier, on considère le cas d'une seule composante. Ce choix est justifié puisqu'avec des valeurs convenables des paramètres de l'ondelette mère, on peut obtenir la transformée en ondelette d'une seule composante à partir du signal multi-composantes. La transformation en ondelettes de $u(t)$ sera $T_\psi[u](b, a)$:

$$T_\psi[u](b, a) = \langle u(t), \psi_{(b,a)}(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle Z_u(t), \psi_{(b,a)}(t) \rangle \quad (4.11)$$

L'approximation de cette intégrale se fait par la méthode de la phase stationnaire [40, 118]. Supposons que l'ondelette mère est une fonction de la forme : $\psi(t) = A_\psi(t) e^{i\phi_\psi(t)}$,

$$\begin{aligned} T_\psi[u](b, a) &= \frac{1}{2} \langle Z_u(t), \psi_{(b,a)}(t) \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} A_u(t) A_\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{i(\alpha_u(t) - \phi_\psi(\frac{t-b}{a}))} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} M_{(b,a)}(t) e^{i\Phi_{(b,a)}(t)} dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

où, $\Phi_{(b,a)}(t) = \alpha_u(t) - \phi_\psi(\frac{t-b}{a})$ et $M_{(b,a)}(t) = A_u(t) A_\psi(\frac{t-b}{a})$.

Lorsque l'on procède au développement de Taylor au point stationnaire t_s de la phase, c'est à dire, au point où il vérifie : $\dot{\Phi}(t_s) = 0$ soit,

$$\dot{\alpha}_u(t_s) = \frac{1}{a} \dot{\phi}_\psi\left(\frac{t_s-b}{a}\right) \quad (4.13)$$

Le premier terme de l'intégrale (4.12) vaut :

$$T_{(0)}[u](b, a) = \frac{M_{(b,a)}(t_s) e^{i\Phi_{(b,a)}(t_s)}}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{1}{2}(t-t_s)^2 \ddot{\Phi}_{(b,a)}(t_s)} dt \quad (4.14)$$

et il est ainsi de type Gaussien,

$$T_{(0)}[u](b, a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Z(t_s) \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t_s-b}{a}\right)}{\sqrt{\ddot{\Phi}_{(b,a)}(t_s)}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}([\ddot{\Phi}_{(b,a)}(t_s)])} \quad (4.15)$$

L'approximation de $T_\psi[u](b, a)$ par le premier terme (4.15) est proposée par Torrèsani [118]. Toutefois, elle ne donne de bons résultats que si l'ondelette "mère" est aussi asymptotique soit son amplitude varie très lentement au voisinage du point stationnaire t_s [40]. En général, ce n'est pas toujours vérifié, puisque l'amplitude $A_\psi(t)$ doit vite diminuer quand $t \rightarrow \infty$ pour avoir une bonne localisation en temps de l'ondelette. Pour cette raison, on tente dans cette partie de modifier l'approximation ci-dessus. On part de l'équation (4.12), en gardant $A_\psi(t)$, le développement asymptotique de $A_u(t) e^{i\Phi_{(b,a)}(t)}$ au voisinage de t_s . Le premier terme de l'intégrale (4.12) est :

$$\begin{aligned} T_{(0)}[u](b, a) &= \frac{1}{2a} A_u(t_s) e^{i\Phi_{(b,a)}(t_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} A_\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \\ &= \frac{1}{2} A_u(t_s) e^{i\Phi_{(b,a)}(t_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} A_\psi(t) dt = \frac{1}{2} Z_u(t_s) e^{-i\phi_\psi\left(\frac{t_s-b}{a}\right)} \|\psi\|_{L^1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

En imposant, $t_s = b$, on a une définition de l'arête

■ DÉFINITION 4.2 (ARÊTE AVEC LA PHASE)

L'arête est l'ensemble $A2$ des points $(b, a_r(b))$ sur le plan temps-fréquence où la fréquence instantanée de l'ondelette translatée et dilatée coïncide avec la fréquence instantanée du signal analysé

$$A2 = \left\{ (b, a_r(b)) \mid \dot{\alpha}_u(b) = \frac{\dot{\phi}_\psi(0)}{a_r(b)} \right\} \quad (4.17)$$

□

et ainsi le squelette sera approximé :

$$T_\psi[u](b, a_r(b)) \approx T_{(0)}[u](b, a_r(b)) = \frac{1}{2} Z_u(b) e^{-i\phi_\psi(0)} \|\psi\|_{L^1} \quad (4.18)$$

REMARQUE 4.2.2

On essaie de faire une majoration d'erreur $|r_1(b, a)|$ de l'approximation avec un seul premier terme (4.16). D'une part,

$$A_u(t) e^{i\Phi_{(b,a)}(t)} = A_u(t_s) e^{i\Phi_{(b,a)}(t_s)} + (t - t_s) F_1(x) \quad \text{avec} \quad |F_1(x)| \leq \sup_{x \in [t_s, t]} |(A_u(x) e^{i\Phi_{(b,a)}(x)})'| \quad (4.19)$$

où, le prime $(.)'$ désigne ici, l'opérateur $\frac{d}{dx}$.

$$\begin{aligned} |(A_u(x) e^{i\Phi_{(b,a)}(x)})'| &= |A'_u(x) e^{i\Phi_{(b,a)}(x)} + A_u(x) i\Phi'_{(b,a)}(x) e^{i\Phi_{(b,a)}(x)}| \leq \\ &\leq |A'_u(x)| + |A_u(x)| |\Phi'_{(b,a)}(x)| \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ainsi $|F_1(x)| \leq \sup_{x \in [t_s, t]} (|A'_u(x)| + |A_u(x)| |\Phi'_{(b,a)}(x)|)$.

D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(t - t_s) A_\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |(t-b) A_\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)| dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |t| |\psi(t)| dt = a^2 M \quad (4.21)$$

Finalement,

$$|r_1(b, a)| \leq \frac{aM}{2} \sup_{x \in [t_s, t]} \left(|A'_u(x)| + |A_u(x)| |\Phi'_{(b,a)}(x)| \right) \quad (4.22)$$

De façon plus précise, Delprat *et al.* [40] ont proposé l'approximation de la transformation en ondelettes avec l'ondelette mère de $A_\psi(t)$ Gaussienne et il conduit à des intégrales successives de type Gaussien.

□

il est facile d'étendre la relation (4.18) au cas d'un signal de multi-composantes

$$T_\psi \left[\sum_k u_k \right] (b, a_r) \approx \sum_k T_{(0)} [u_k] (b, a_r) = \frac{1}{2} \sum_k Z_{u_k}(b) e^{-i\phi(0)} \|\psi\|_{L^1} \quad (4.23)$$

Il reste le choix des paramètres de l'ondelette mère afin d'isoler chaque composante dans le cas des signaux multi-composantes, et ainsi l'approximation du squelette est la même que le cas de signal à une seule composante.

REMARQUE 4.2.3

Il est encore possible pour le signal modulé en temps et en fréquence, de prendre l'approximation donnée

sur la formule (4.4) [118] avec le paramètre $a_r(b) = \frac{\dot{\phi}_\psi(0)}{\dot{\alpha}_u(b)}$:

$$T_\psi [u] (b, a_r(b)) \approx \frac{1}{2} Z_u(b) \bar{\psi}(\dot{\phi}_\psi(0)) \quad (4.24)$$

□

Le tableau 4.1 donne les paramètres importants pour la caractérisation des arêtes et l'approximation de squelette.

TABLEAU 4.1. Paramètres utilisés dans les algorithmes

Ondelette mère	ω_{ψ_0}	$\phi_\psi(0)$	$\ \psi\ _{L^1}$	$\ \psi\ _{L^2}$
Morlet	β	β	$\sqrt{2\pi}$	$\sqrt{\pi}$
Cauchy	n	$n+1$	$\begin{cases} \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} \pi & \text{si } n \text{ impaire} \\ 2 \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} & \text{si } n \text{ paire} \end{cases}$	$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi$

On note que, pour l'ondelette de Morlet, l'approximation de la transformation en ondelettes ne change pas que ce soit selon la formule (4.23) ou selon la formule (4.24) puisque $\|\psi\|_{L^1} = \bar{\psi}(\dot{\phi}_\psi(0)) = \sqrt{2\pi}$.

4.3 Choix de paramètres des ondelettes mères

Comme il a été signalé dans la section ci-dessus, il est très important de choisir de bonnes valeurs pour les paramètres des ondelettes mères afin d'isoler les composantes d'un signal de

multi-composantes. Supposons que nous nous intéressons à une composante j quelconque avec une fréquence ω_j dans un signal de N composantes. La fréquence la plus proche à isoler est éloignée d'une quantité $d\omega_j$. Pour résoudre ce problème, on doit faire appel à la résolution fréquentielle de la transformée en ondelettes sur le plan temps-fréquence le long d'une arête de fréquence ω_j . D'après la formule (3.15), la localisation fréquentielle qui est $[\max(0, \omega_j(1 - c_f \frac{\Delta\omega_\psi}{\omega_\psi}), \omega_j(1 + c_f \frac{\Delta\omega_\psi}{\omega_\psi})]$ doit être incluse dans l'intervalle $[\omega_j - d\omega_j, \omega_j + d\omega_j]$. Il en résulte

$$Q \geq c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \quad (4.25)$$

Pour généraliser, nous notons $d\omega_j = \min((\omega_j - \omega_{j-1}), (\omega_{j+1} - \omega_j))$ pour $1 \leq j \leq N$ avec $\omega_0 = 0$, $\omega_{N+1} = 2\pi f_{Nyquist}$. Il est évident que plus la valeur de Q augmente, plus l'effet de découplage entre les composantes est bon mais plus l'effet de bord perturbe le plan temps-fréquence. Il faut que le domaine D défini à la relation (3.17) soit non vide. L'inégalité (3.17 b) est immédiatement vérifiée car $d\omega_j < \pi f_{Nyquist}$. Donc, il faut seulement que (3.17 a) ait un sens. En combinant avec l'inégalité de Heisenberg ($\mu_\psi \geq \frac{1}{2}$), nous avons la condition

$$Q \leq \frac{L\omega_j}{2c_t} \quad (4.26)$$

et finalement, le paramètre Q doit appartenir à l'intervalle

$$\boxed{c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \leq Q \leq \frac{L\omega_j}{2c_t}} \quad (4.27)$$

Une fois que Q est choisi, les paramètres des ondelettes de Morlet et de Cauchy sont déterminées en fonction de Q suivant les relations données dans le tableau 2.1. À la formule (4.27), L et $f_{Nyquist}$ sont obtenus à partir des mesures; les fréquences ω_j peuvent être évaluées grossièrement *a priori* par la transformation de Fourier rapide `fft` et classées en ordre croissant. Les coefficients c_t et c_f doivent satisfaire l'inéquation déduite de (4.27)

$$c_t c_f \leq L d\omega_j \quad (4.28)$$

Nous proposons de commencer avec $c_t = c_f = 5$; quand la relation (4.28) n'est pas vérifiée, c_t et c_f doivent être réduits tel que l'inéquation (4.28) soit satisfaite. Le choix de Q est libre dans l'intervalle donné par la relation (4.27) et dépend aussi du problème traité : plus la valeur de Q est élevée, plus l'effet de bord est significatif et moins l'effet de couplage est important. Dans le cas des modes sont très proches, i.e $d\omega_j$ faible, il est nécessaire que L doit être suffisamment longue pour que la valeur de Q existe suivant la condition (4.27).

4.4 Extraction des arêtes

Plusieurs algorithmes d'extraction des arêtes ont été proposés par Torrèsani, Carmona *et al.* [25, 26, 27, 28, 40, 118]. Nous présentons brièvement ici les algorithmes représentatifs dont les programmes implémentés sous MATLAB seront utilisés par la suite.

4.4.1 Méthodes "Différentielles"

La technique découle directement des deux définitions d'arêtes, soit par le module, soit par la phase de la transformée en ondelettes.

• **Maxima du module :**

- *Signal à une composante.* C'est le cas le plus simple. On cherche à chaque moment b , la valeur $a_r(b)$ de a tel que le module de la transformée en ondelettes est le maximum global.

$$|T_\psi[u](b, a_r(b))| = \max_a |T_\psi[u](b, a)| \quad (4.29)$$

- *Signal à plusieurs composantes.* L'application de la procédure de recherche du maximum global ne marche pas puisque soit il donne seulement une arête, soit il donne plusieurs segments de différentes arêtes. Une méthode alternative consiste à considérer les maximums locaux i.e, les points $a_r(b)$ tel que

$$\frac{\partial |T_\psi[u](b, a_r(b))|}{\partial a} = 0 \quad (4.30)$$

Il faut noter que cette méthode est instable au bruit qui créera des arêtes additionnelles. Pour déterminer les "vraies" arêtes, il faut alors bien distinguer les arêtes dues au bruit.

• **Stationnarité de phase :**

Le principe de la méthode vient de la définition de l'arête avec la phase : la fréquence instantanée de la version dilatée de l'ondelette mère coïncide avec la fréquence instantanée du signal. A partir des approximations de squelette (4.5),(4.8),(4.18),(4.23), on peut écrire sous forme générale

$$T_\psi[u_k](b, a_r(b)) \approx Z_{u_k}(b) \text{Corr}(b) \quad (4.31)$$

où la fonction correctrice $\text{Corr}(b)$ est soit une constante, soit une fonction de phase constante dans le temps. La fréquence instantanée de la transformée en ondelette est alors approximativement égale à la fréquence instantanée du signal i.e,

$$\frac{\partial \angle(T_\psi[u_k](b, a_r(b)))}{\partial b} \approx \dot{\alpha}_{u_k} \quad (4.32)$$

L'algorithme de point fixe a été proposé par Torrèsani *et al.* pour la caractérisation d'arête. Cet algorithme, aussi appelé *méthode de Marseille*, a quelques variantes. Nous présentons ici, celle de R. Kronland-Martinet

■ ALGORITHME 4.1 (ALGORITHME DE POINT FIXE DE PHASE)

- 1 Pour un point de temps b quelconque
- 2 Choisir une valeur initiale de l'échelle a_0 . L'itération est faite par

$$a_{k+1} = \frac{\dot{\phi}_\psi(0)}{\frac{\partial \angle(T_\psi[u](b, a_k))}{\partial b}} \quad (4.33)$$

- 3 L'itération est stoppée lorsque $|a_{k+1} - a_k| < \epsilon$ où ϵ est la précision pré-définie. Ainsi on a $a_r(b) = a_{k+1}$ et on passe ensuite à un temps suivant. Finalement les valeurs $a_r(b)$ sont déterminées.

□

REMARQUE 4.4.1

Dans la formule (4.33), il faut comprendre que $\frac{\partial \angle(T_\psi[u](b, a_r(b)))}{\partial b}$ est une fonction continue. Toutefois, par définition, cette quantité appartient toujours à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et cela créera des discontinuités. On peut utiliser l'option `unwrap` sous MATLAB pour supprimer ces discontinuités.

Dans le but d'augmenter la stabilité de l'algorithme, la fréquence moyenne locale de $T_\psi[u](b, a)$ peut être considérée au lieu de la fréquence instantanée

$$\Omega_a(b) = \frac{1}{T} \int_b^{b+T} \frac{\partial \angle(T_\psi[u](b, a))}{\partial b} db \quad (4.34)$$

□

4.4.2 Méthodes “Intégrales”

Les méthodes “Différentielles” marchent bien lorsque le signal est sans bruit ou peu bruité¹. Toutefois, il peut arriver dans les tests réels que le signal soit bruité. Il est donc crucial de trouver d’autres méthodes plus robustes pour traiter les signaux additionnés de bruit. Carmona *et al.* [25, 26, 27, 28] ont proposé des méthodes “Intégrales”. Elles utilisent d’autres informations *a priori* des arêtes. Outre que les arêtes doivent se concentrer dans les zones du plan temps-fréquence (ou temps-échelle) dont l’énergie est élevée, les arêtes du signal réel sont souvent lisses et varient lentement en temps. Ces raisonnements amènent tout à fait naturellement au problème d’optimisation. Parmi plusieurs algorithmes proposés dans les références [25, 26, 27, 28], on présente ici deux algorithmes. Le premier est destiné à déterminer une seule arête et le deuxième concerne le cas de plusieurs arêtes. Ces algorithmes reposent sur l’analogie de recuit simulé. Le principe de la méthode est le suivant [107] : le problème de l’optimisation d’un système complexe est assimilable à l’évolution d’un système désordonné vers un système ordonné. Ceci est analogue au comportement de la matière condensée lorsqu’elle passe d’un état liquide caractérisé par un grand désordre, à un état solide, bien ordonné, du type monocristal. Une telle évolution est obtenue en abaissant la température d’où l’idée d’utiliser des méthodes physiques, et plus particulièrement d’introduire la température comme paramètre de commande pour optimiser l’évolution d’un système. Il est bien connu qu’un abaissement rapide de la température se traduit par un gel du désordre existant, alors qu’une diminution lente de la température permet l’établissement d’un ordre supérieur. Dans la physique de la matière condensée, une telle procédure constitue en ce que l’on appelle un recuit. L’application de ce concept à tout problème d’optimisation, par simulation d’une baisse lente de température, est ainsi appelée “recuit simulé”.

• Méthode “Corona”

La méthode suppose qu’une arête lisse existe sur le plan temps-fréquence où la fonction coût (fonction objectif) $\mathcal{F}_u(a_r(b))$ est minimale. Cela se traduit par : $a_r(b) = \min_k \mathcal{F}_u(\varphi_k(b))$. La fonction coût sur une arête candidate $\varphi_k(b)$ s’écrit

$$\mathcal{F}_u(\varphi_k(b)) = - \int |T_\psi(b, \varphi_k(b))|^2 db + \int [\lambda \dot{\varphi}_k(b)^2 + \gamma \ddot{\varphi}_k(b)^2] db \quad (4.35)$$

Ainsi, la méthode Corona recherche $a_r(b)$ à partir des $\varphi_k(b)$ par optimisation qui donne $\mathcal{F}_u(\varphi_k(b))$ minimum. L’algorithme présenté ci-dessous est donné dans la référence [26]

■ ALGORITHME 4.2 (CORONA)

- 1 *Initialisation* : Choisir la température initiale T_0 et une candidate initiale de l’arête $\{\varphi_0(0), \varphi_0(1), \dots, \varphi_0(n-1)\}$ et calculer $\mathcal{F}_u(\varphi_0)$
- 2 *Itération k* : L’arête candidat à l’itération $k-1$ est connue : $\varphi_{k-1} = \{\varphi_{k-1}(0), \varphi_{k-1}(1), \dots, \varphi_{k-1}(n-1)\}$
 - Actualiser la température avec $T_k = \frac{T_0}{\ln(1+k)}$
 - Générer aléatoirement un entier $l \in [0, n-1]$ et un nombre $\epsilon = \pm 1$. L’arête candidat possible à l’itération k sera $\varphi_k^c = \{\varphi_{k-1}(0), \varphi_{k-1}(1), \dots, \varphi_{k-1}(l) + \epsilon, \dots, \varphi_{k-1}(n-1)\}$
 - Calculer la valeur fonction coût $\mathcal{F}_u(\varphi_k^c)$ et comparer avec $\mathcal{F}_u(\varphi_{k-1})$
 - + Si $\mathcal{F}_u(\varphi_k^c) \leq \mathcal{F}_u(\varphi_{k-1})$, actualiser l’arête avec une nouvelle arête : $\varphi_k := \varphi_k^c$
 - + Si $\mathcal{F}_u(\varphi_k^c) > \mathcal{F}_u(\varphi_{k-1})$, Générer aléatoirement un nombre σ entre 0 et 1
 - * Si $\sigma \leq e^{-\frac{\mathcal{F}_u(\varphi_k^c) - \mathcal{F}_u(\varphi_{k-1})}{T_k}}$, actualiser l’arête $\varphi_k := \varphi_k^c$
 - * Sinon retenir l’ancienne candidate de l’itération $k-1$: $\varphi_k := \varphi_{k-1}$

¹Le niveau du signal bruité est évalué à l’aide du Rapport Signal sur Bruit (RSB ou en anglais SNR) et définit comme $10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b} \right)$, où σ_u (resp. σ_b) est la variance du signal seul (resp. du bruit seul)

- 3 *Critère d'arrêt* : Soit après certaines itérations lors que l'arête ne change pas, soit quand la température est plus basse qu'une température pré-définie.

□

• **Méthode “Crazy climbers”**

La méthode Corona suppose qu'une seule arête est dans la représentation temps-fréquence. Dans le cas d'un signal bruité avec plusieurs arêtes à déterminer, la méthode “Crazy climbers” (voyageurs fous) plus performante est proposée pour capter ces arêtes. L'algorithme écrit ci-dessous est applicable pour les représentations énergétiques temps-fréquence $M(i, j)$ de signal $u(t)$ en général, avec le maillage : temps $i = 0, \dots, B-1$ (horizontale) et $j = 0, \dots, A-1$ (verticale). Comme les voyageurs se déplacent indépendamment entre eux et quelques voyageurs peuvent occuper le même site au même moment, il est suffisant de décrire le mouvement d'un voyageur X_α parmi V voyageurs.

■ ALGORITHME 4.3 (CRAZY CLIMBERS)

- 1 *Initialisation* : Choisir la température initiale T_0 et la position aléatoire de V voyageurs $X(0)$ sur le maillage $\Gamma = \{(i, j); i = 0, \dots, B-1, j = 0, \dots, A-1\}$.

- 2 *Itération k* :

- Actualiser la température avec $T_k = \frac{T_0}{\ln(1+k)}$
- La position à l'itération $k-1$ du voyageur X_α : $X_\alpha(k-1) = (i, j)$ est connue et la position à l'itération k : $X_\alpha(k) = (i', j')$ est déterminée par la règle suivante :
 - + Direction horizontale : mouvement possible dans les deux sens, sauf les deux extrémités.
 - * Si $1 \leq i \leq B-2$, alors $i' = i+1$ avec probabilité $1/2$ et $i' = i-1$ avec probabilité $1/2$.
 - * Si $i = 0$, alors $i' = 1$.
 - * Si $i = B-2$, alors $i' = B-1$.
 - + Direction verticale : mouvement possible $j' = j+1$ ou $j' = j-1$
 - * Si $M(i', j') \geq M(i', j)$, alors le mouvement vertical est accepté $X_\alpha(k) = (i', j')$.
 - * Si $M(i', j') < M(i', j)$, alors $X_\alpha(k) = (i', j')$ avec probabilité $p_t = \leq e^{-\left[\frac{M(i', j) - M(i', j')}{T_k}\right]}$
- Mesures d'occupation : deux mesures à prendre en compte

$$\begin{cases} \mu^{(0)}(k) &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \delta_{X_\alpha(k)} \\ \mu^{(k)} &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha} M(X_\alpha(k)) \delta_{X_\alpha(k)} \end{cases} \quad (4.36)$$

- 3 *Critère d'arrêt* : la température est plus basse qu'une température pré-définie, les voyageurs s'arrêtent.

- 4 *Mesures d'occupation intégrées* : Le nombre d'itération totale T

$$\begin{cases} \mu_T^{(0)} &= \frac{1}{T} \sum_k \mu^{(0)}(k) \\ \mu_T &= \frac{1}{T} \sum_k \mu(k) \end{cases} \quad (4.37)$$

□

Après avoir des mesures d'occupation, il faut passer au stade de chaînage des points sur le plan temps-fréquence. Le chaînage consiste en deux opérations principales : (1) fixer un seuil tel que si un point présente une valeur de mesure inférieure à ce seuil, on le force à prendre la valeur zéros en mesure d'occupation. (2) à partir des points retenus dont les mesures d'occupation sont supérieures au seuil, les arêtes sont formées en respectant des seuils en temps et en fréquence.

4.4.3 Exemples numériques

La robustesse des algorithmes est testée par des signaux modulés en temps et en fréquence.

- Signal à une composante :

- signal amorti de fréquence constante et sans bruit : $u(t) = e^{-0.4t} \cos(4\pi t)$.

L'application de deux algorithmes différentiels est montrée sur la figure 4.1 (méthode de module maximum) et sur la figure 4.2 (méthode de phase). Pour la méthode de maximum du module, on a pris 500 points d'échelle a . Deux types d'approximation ont été utilisés : soit avec la norme L^1 suivant la formule (4.23) (couleur violette et marqueur o), soit avec le maximum suivant la formule (4.24) (couleur rouge et marqueur x). Les ondelettes ont été utilisées avec $Q = 8$.

- signal amorti de fréquence instantanée variante avec bruit :

$u(t) = e^{-0.4t} \cos(4\pi t + \ln(1 + 5t)) + \text{bruit}$.

Le bruit est ajouté dans le signal de type bruit blanc. Le rapport signal sur bruit est égal à -0.92 dB. L'extraction de résultat se fait par la méthode Corona et se présente sur la figure 4.3 avec l'ondelette mère de Morlet. Le facteur Q est égal à 8. Le critère d'arrêt est soit la température inférieure à 10° , soit l'arête ne bouge pas après 100 itérations.

- Signal à deux composantes : $u(t) = e^{-0.4t} \cos(4\pi t) + e^{-0.4t} \cos(6\pi t) + \text{bruit}$.

Cet exemple peut être traité deux fois par la méthode Corona, mais ici nous appliquons l'algorithme "Crazy climbers" pour la recherche des fréquences dans le signal. La figure 4.4 présente le résultat de traitement de ce signal très bruité. La valeur de RSB est égale à 2.23 dB. L'ondelette mère de Cauchy a été utilisée avec $Q = 10$. Le chaînage est réalisé avec les tolérances : seuil de mesure intégrée 0.1 ; seuil en temps 0.1 (sec) et seuil en fréquence 0.1 (Hz) pour la liaison des arêtes. Le nombre de voyageurs est le même que le nombre de points d'enregistrement (512) sur le signal. Le traitement commence avec la température initiale de 80° et le critère d'arrêt est quand la température est inférieure à 10° .

4.4.4 Discussion sur les algorithmes

Ces algorithmes écrits sont ensuite appliqués dans les problèmes mécaniques. Ils méritent des commentaires à propos de leur utilité. Les méthodes différentielles sont très performantes quand le signal analysé est peu bruité. Même quand le RSB est égal à zéro, les méthodes différentielles donnent encore de bons résultats [118]. Un autre grand avantage de ces méthodes est qu'elles n'ont pas besoin de maillage en temps-fréquence très précis. On peut réduire une zone de plan temps-fréquence où se trouve une seule arête et appliquer ainsi plusieurs fois l'algorithme de point fixe. Cette manière de procéder permet d'éviter la recherche de plusieurs arêtes en même temps par la méthode différentielle en se servant de maximums locaux. Un dernier point à préciser pour la méthode différentielle est la valeur initiale de a_0 dans la méthode de phase. Normalement, cette valeur est déduite par la correspondance de la fréquence moyenne dans l'intervalle contenant l'arête. De façon plus précise, Delprat *et al.* [40] l'ont illustré dans le cas d'un signal de deux composantes d'amplitudes constantes :

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \quad (4.38)$$

Le calcul de la transformation en ondelettes donne :

$$\begin{aligned} T_\psi[u](b, a) &= \langle u(t), \psi_{b,a} \rangle = \frac{1}{2} \langle Z_{u(t)}, \psi_{b,a} \rangle = \\ &= \frac{A_1}{2} \overline{\psi}(a\omega_1) e^{i\omega_1 b} \left[1 + C(a) e^{i(\omega_2 - \omega_1)b + i\delta_2} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

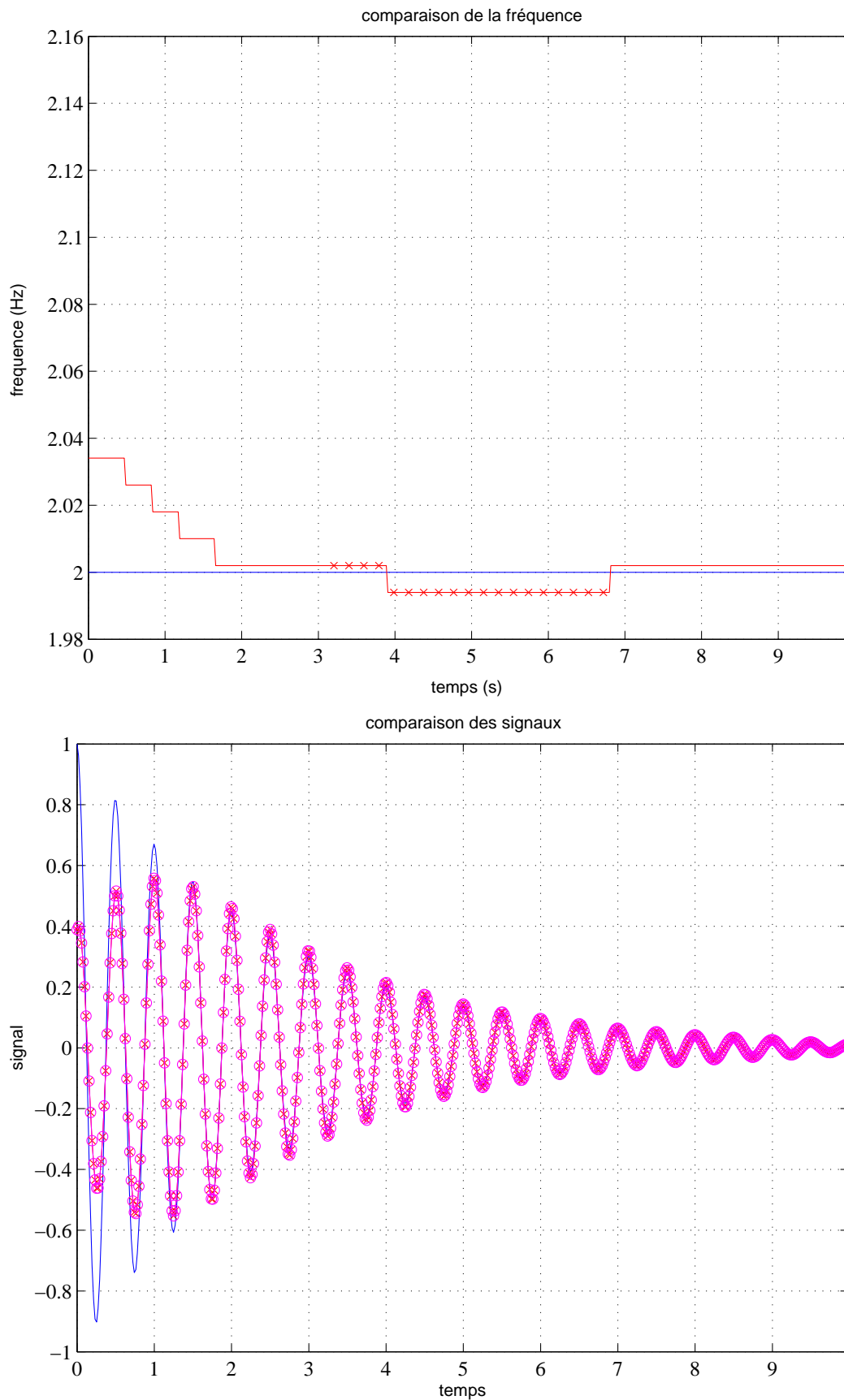


FIGURE 4.1. Comparaison entre le signal initial et le signal reconstruit à partir de l'arête et du squelette, méthode de module maximum.

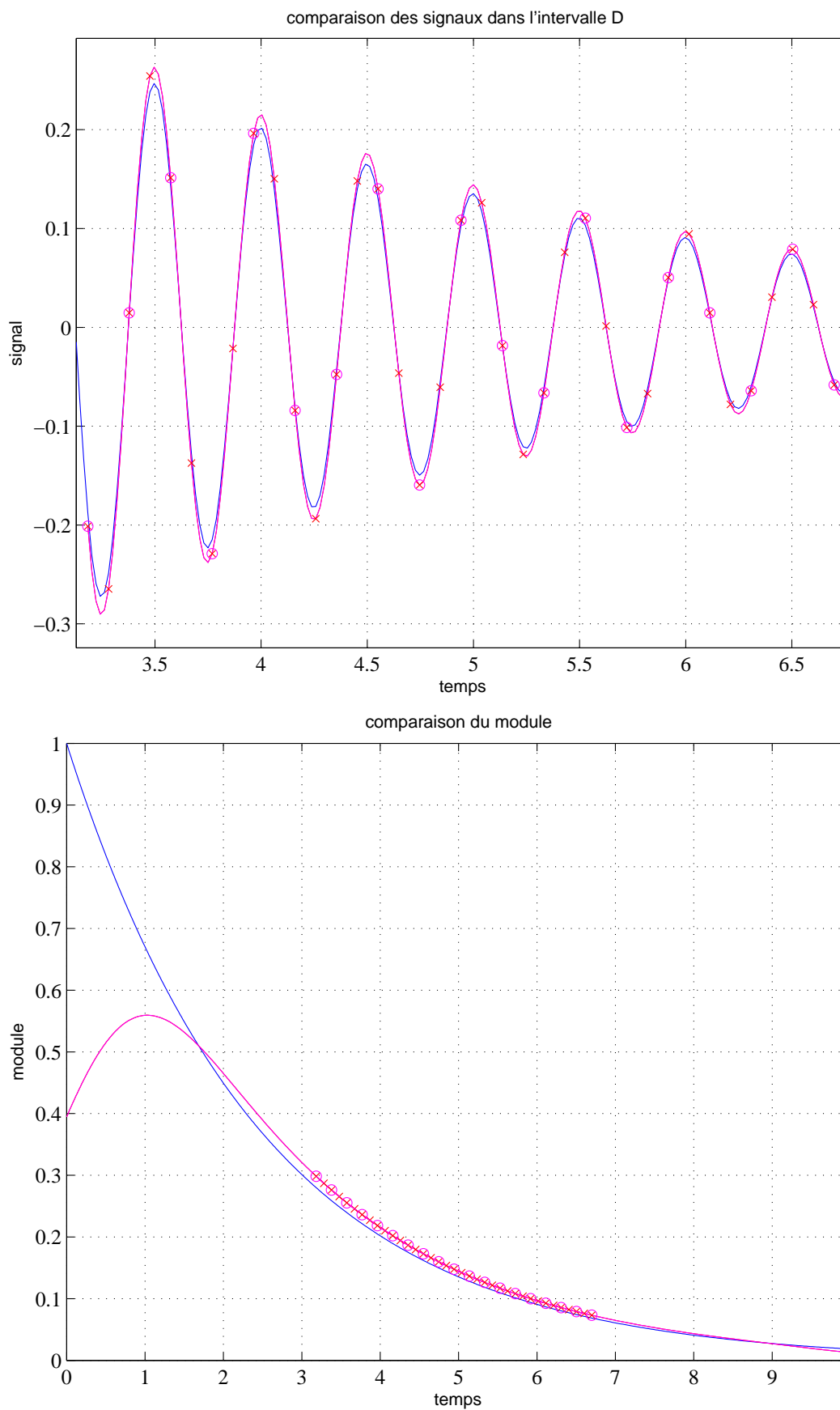


Figure 4.1 suite.

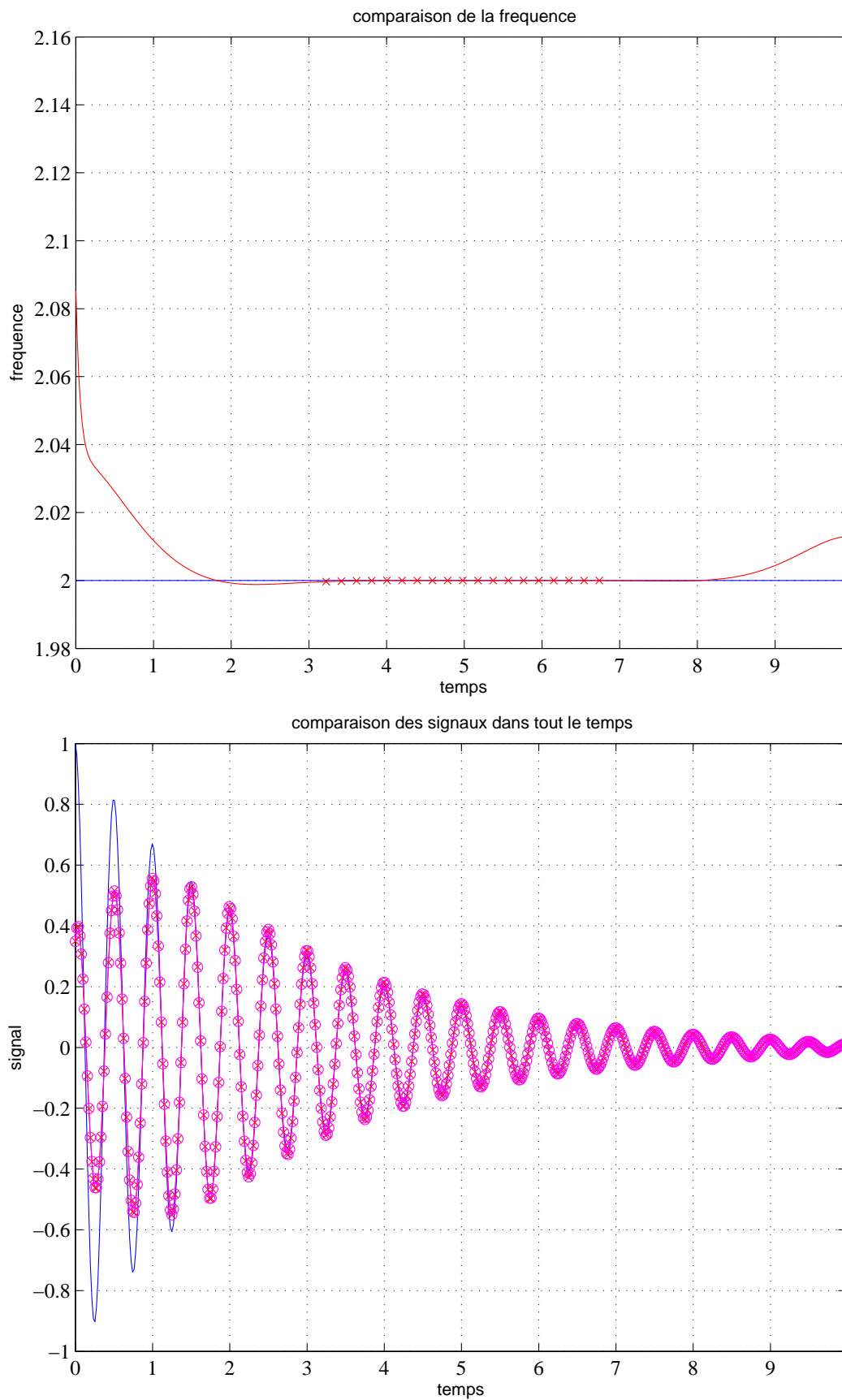


FIGURE 4.2. Comparaison entre le signal initial et le signal reconstruit à partir de l'arête et du squelette, méthode de la phase.

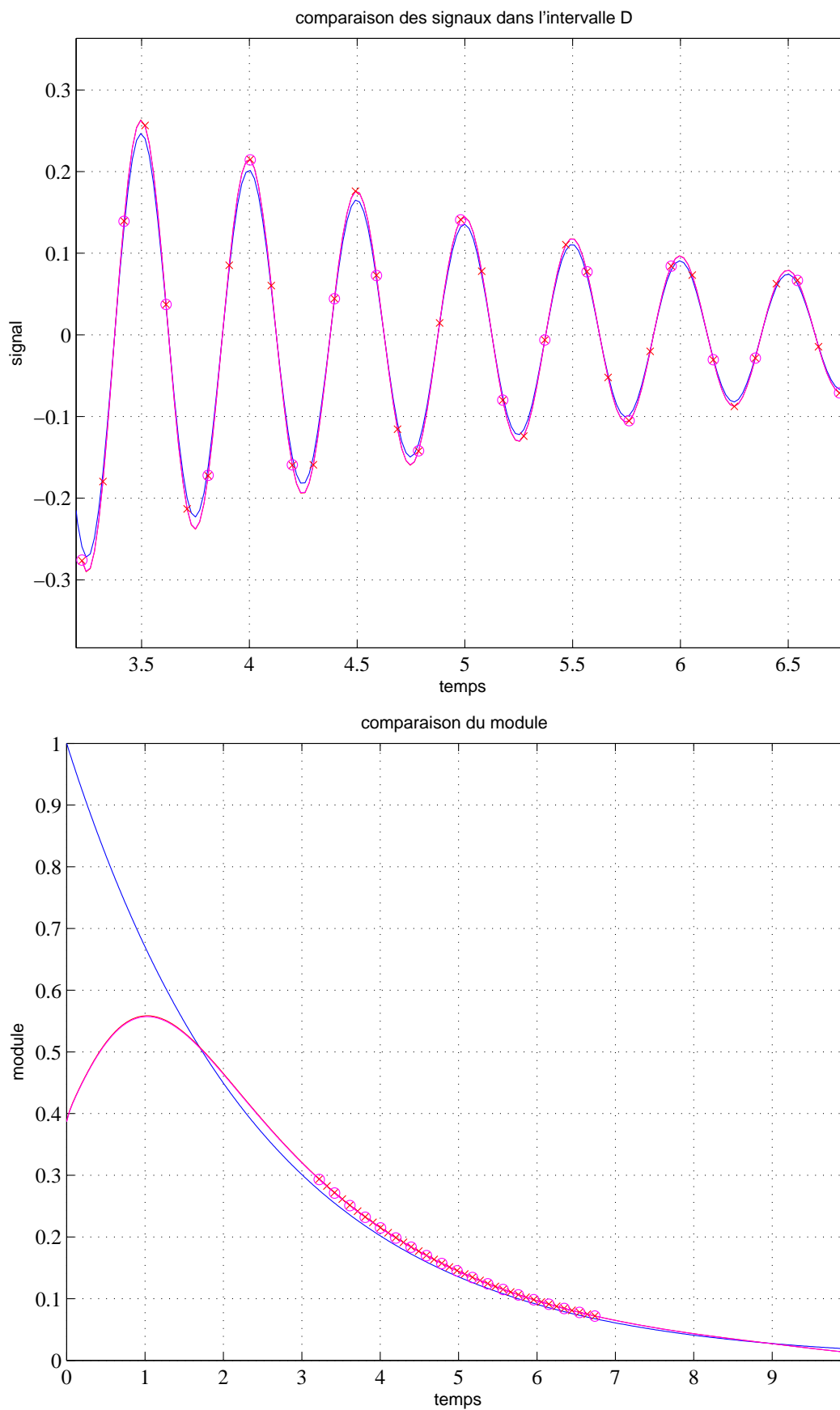


Figure 4.2 suite.

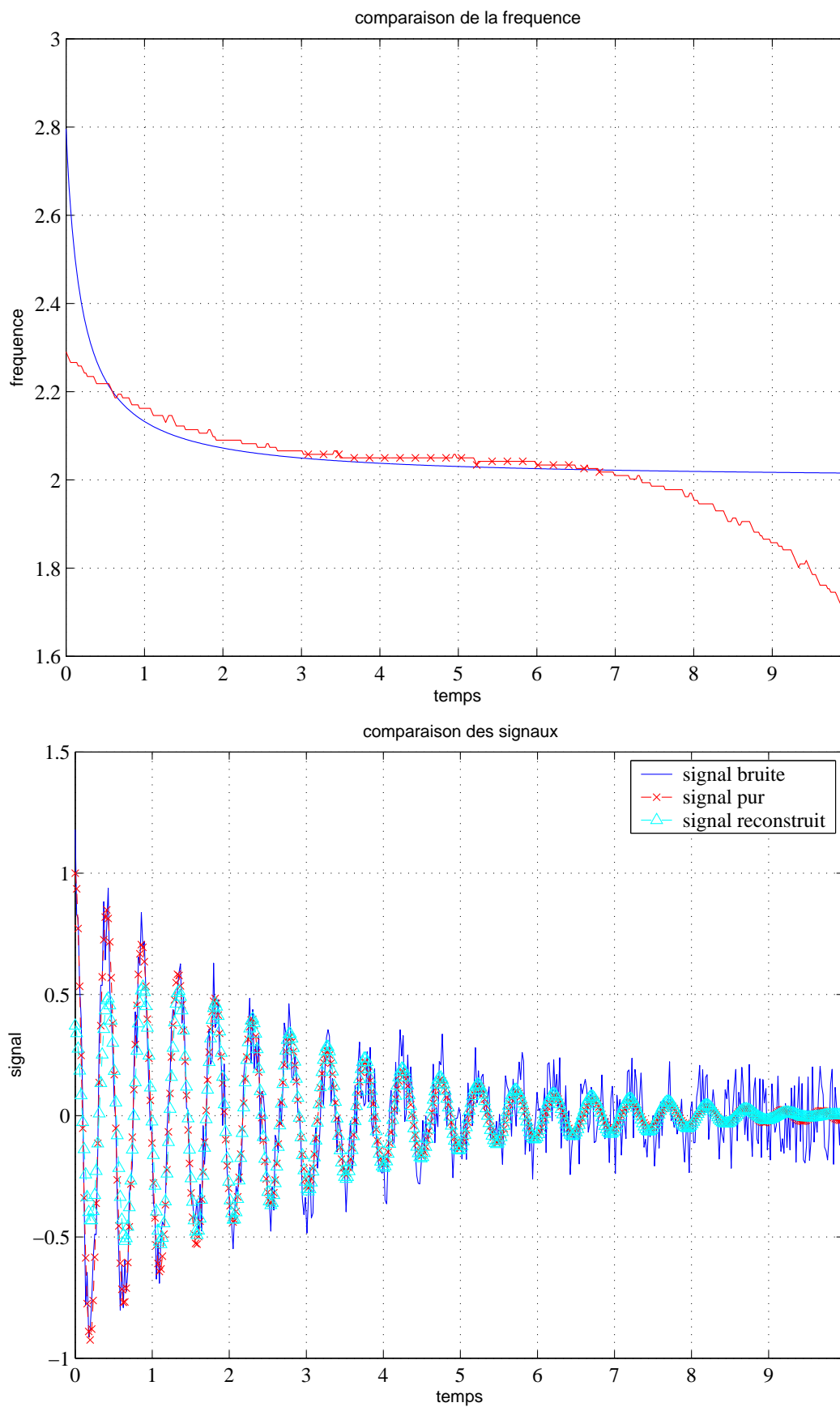


FIGURE 4.3. Comparaison entre signal initial et signal reconstruit à partir de l'arête et du squelette, méthode Corona.

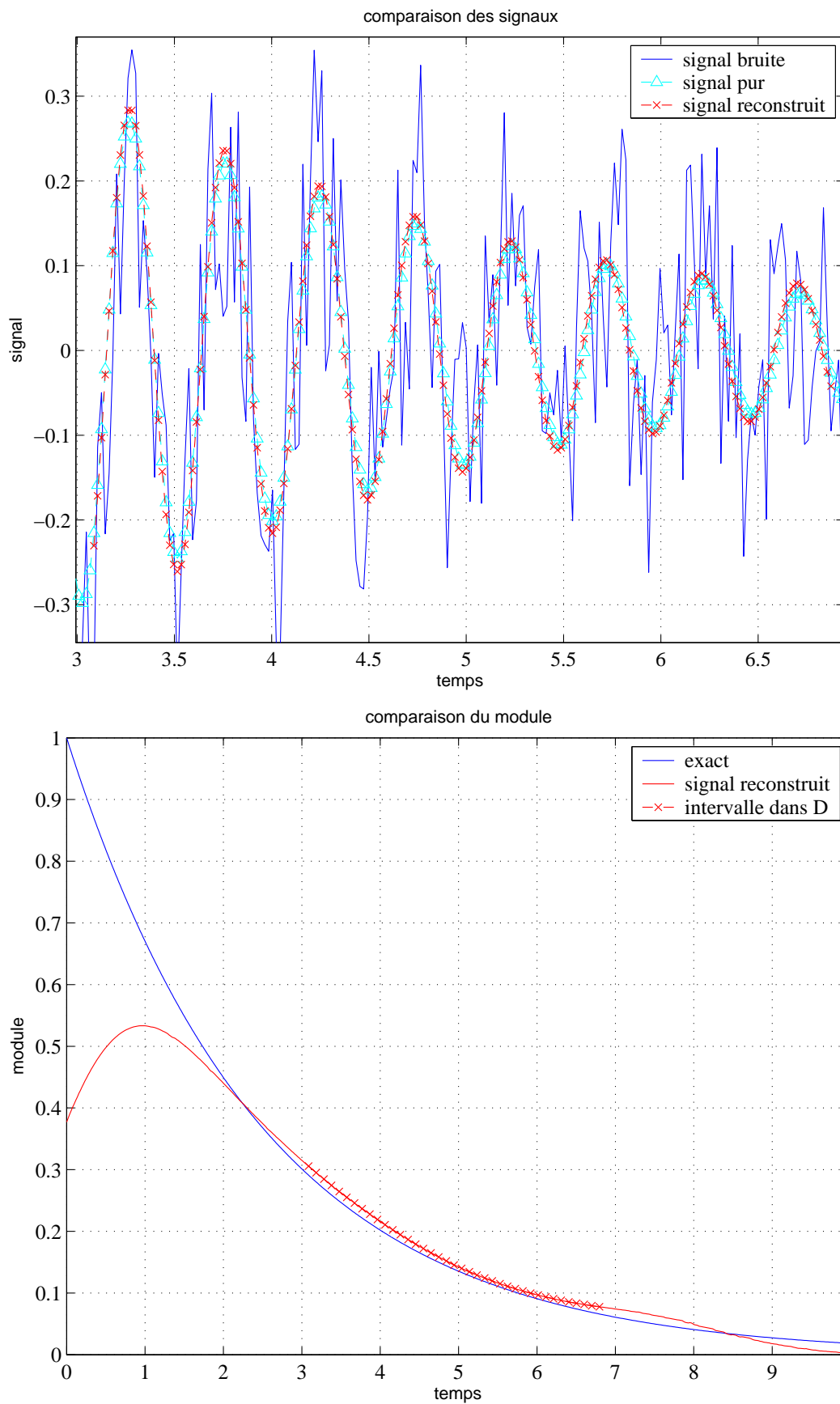


Figure 4.3 suite.

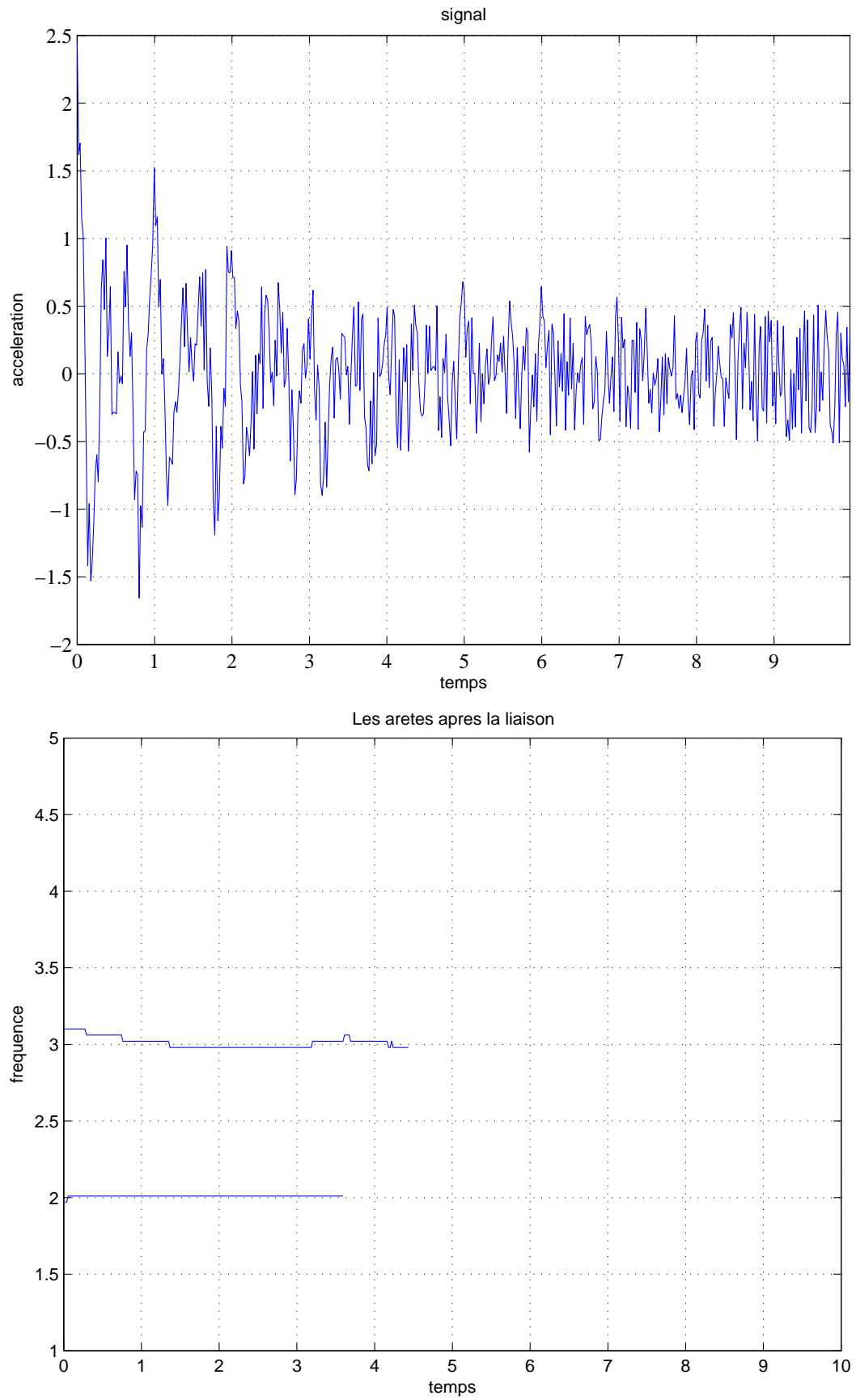


FIGURE 4.4. Fréquences déterminées par la méthode "Crazy climbers".

où $C(a) = \frac{A_2 \bar{\psi}(a\omega_2)}{A_1 \hat{\psi}(a\omega_1)}$. En posant $\epsilon < |\frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}|$, est un chiffre non négatif et $T = n|\frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}| + \epsilon$. La nouvelle fonction de a basée sur la régularisation de l'argument donné à la formule (4.34) devient

$$\Omega_a = \frac{1}{T} \int_{b_0}^{b_0+T} \frac{\partial \angle (T_\psi(b, a))}{\partial b} db \quad (4.40)$$

Les auteurs ont démontré que l'algorithme de point fixe converge vers $\Omega_a = \omega_1 + 0(\frac{\epsilon}{n})$ si $C(a) < 1$, et vers $\Omega_a = \omega_2 + 0(\frac{\epsilon}{n})$ si $C(a) > 1$. Comme l'erreur est proportionnelle à $\frac{\epsilon}{n}$, on peut augmenter n pour ne pas commettre des erreurs importantes. Quand le signal est bruité, il faut utiliser d'autres informations pour chercher les arêtes par exemple, courbe lisse, variation lente, ... Deux méthodes ont été présentées et nécessitent un maillage au préalable pour calculer la transformée en ondelettes. Les résultats des arêtes dépendent donc de la discrétisation. Une proposition sur ce point a été faite par Staszewski [110]. Notons que dans les cas très bruités, la formule classique de reconstruction du signal à partir de l'arête devient difficilement utilisable. On peut alors la remplacer par une stratégie de minimisation, faisant intervenir la dernière information *a priori* sur le signal que l'on n'a pas encore utilisée : la lenteur des variations relatives de l'amplitude du signal. Toutefois, dans cette thèse, on se limite à la recherche des arêtes quand on applique cet algorithme aux applications dans la troisième partie. Pour cette raison, on ne cite pas ici la procédure de reconstruction du signal à partir du squelette. Les descriptions en détails des algorithmes sont présentées dans les références [25, 118]

4.5 Conclusion

Cette partie a pour but de créer un outil numérique fiable de l'analyse temps-fréquence par transformation en ondelettes des signaux modulés en amplitude et en fréquence. On a réussi à implémenter les différents algorithmes pour obtenir la transformée en ondelettes et à caractériser des signaux à partir de la transformée en ondelettes obtenue. Un choix de la valeur Q de l'ondelette mère est proposée en se basant sur : l'effet de bord et la séparation des composantes. La partie suivante va relier les résultats de traitement du signal par l'analyse en ondelettes à un problème mécanique : l'auscultation des structures vibrantes à partir des signaux mesurés.

Troisième partie

**Auscultation dynamique des
structures**

Chapitre 5

Identification modale des systèmes mécaniques linéaires

5.1 Introduction

Ce chapitre porte sur l'identification modale d'un système linéaire à partir de réponses libres à l'aide de la représentation en ondelettes. Après un rappel succinct à la section 5.2 sur les notions du système à un Degré De Liberté (1DDL) et à Multiple Degrés De Liberté (MDDL), on présente les techniques d'identification des paramètres modaux par la transformation en ondelettes à la section 5.3. Ces techniques sont démontrées applicables dans les deux cas suivants : amortissement visqueux proportionnel et non-proportionnel. Des procédures détaillées d'identification des paramètres sont aussi établies. Les avantages de ces propositions sont testés sur des exemples tant numériques que réels à la section 5.4. Enfin, on arrive à des conclusions sur la performance et la robustesse de la méthode.

5.2 Rappel sur le système mécanique linéaire discret

5.2.1 Système à un degré de liberté

Considérons une masse m attachée à un appui fixe par un ressort de rigidité k . Le mécanisme de dissipation provenant d'origines diverses est modélisé par un amortisseur visqueux c . Ce système à un degré de liberté est schématisé sur la figure 5.1. Les oscillations de la masse soumise à une force externe $f(t)$ sont gouvernées par l'équation :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (5.1)$$

En absence de la force agissant $f(t)$, le mouvement libre ne dépend que des conditions initiales $u(0)$ et $\dot{u}(0)$ qui sont respectivement la position et la vitesse de la masse m à l'instant initial $t = 0$. Le rapport de l'amortissement c sur l'amortissement critique $c_c = 2\sqrt{mk}$ appelé taux d'amortissement ξ , décide d'un mouvement harmonique, harmonique amorti ou simplement le retour à la position d'équilibre statique. On s'intéresse seulement aux systèmes mécaniques sous amortis ($\xi < 1$), la réponse libre temporelle s'écrit :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left[u(0) \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) \right] \quad (5.2)$$

où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre (fréquence angulaire naturelle) de l'oscillateur sans amortissement tandis que $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ est la pseudo-pulsation propre du système avec amortissement.

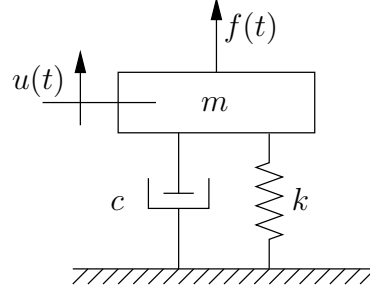


FIGURE 5.1. *Système mécanique à un Degré De Liberté (1DDL)*

Une autre forme de l'expression de déplacement (5.2) :

$$u(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cos(\tilde{\omega}t - \varphi) \quad (5.3)$$

avec les paramètres : $\rho = \sqrt{u^2(0) + \left[\frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\tilde{\omega}} \right]^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\tilde{\omega}u(0)}\right)$. Nous obtenons ainsi l'histoire de la vitesse et de l'accélération dans le temps en dérivant successivement le déplacement $u(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \rho\omega e^{-\xi\omega t} \left[-\xi \cos(\tilde{\omega}t - \varphi) - \sqrt{1-\xi^2} \sin(\tilde{\omega}t - \varphi) \right] \\ &= -\rho\omega e^{-\xi\omega t} \cos(\tilde{\omega}t - \varphi - \delta) = \rho\omega e^{-\xi\omega t} \cos(\tilde{\omega}t - \varphi - \delta + \pi) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= \rho\omega e^{-\xi\omega t} (-\xi\omega) \left[-\xi \cos(\tilde{\omega}t - \varphi) - \sqrt{1-\xi^2} \sin(\tilde{\omega}t - \varphi) \right] + \\ &\quad + \rho\omega e^{-\xi\omega t} \left[\xi\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t - \varphi) - \sqrt{1-\xi^2}\tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega}t - \varphi) \right] \\ &= \rho\omega^2 e^{-\xi\omega t} \left[(\xi^2 - (1-\xi^2)) \cos(\tilde{\omega}t - \varphi) + 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \sin(\tilde{\omega}t - \varphi) \right] \\ &= -\rho\omega^2 e^{-\xi\omega t} \cos(\tilde{\omega}t - \varphi + \theta) = \rho\omega^2 e^{-\xi\omega t} \cos(\tilde{\omega}t - \varphi + \theta + \pi) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Avec les déphasages : $\delta = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ et $\theta = \arctan\left(\frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{1-2\xi^2}\right)$. On note à travers les formules (5.3),(5.4) et (5.5) que l'amplitude de la vitesse et de l'accélération sont celle du déplacement multipliée respectivement par la fréquence angulaire naturelle ω et son carré. La phase de la vitesse et de l'accélération sont différenciées de la phase du déplacement par une quantité dépendant de l'amortissement ξ . A la limite $\xi = 0$, le déphasage vaut $\frac{\pi}{2}$ pour la vitesse et π pour l'accélération.

Dans le cas d'un mouvement forcé avec $f(t)$, une solution particulière sera ajoutée à la solution générale de l'équation homogène.

5.2.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Dans ce cas, nous n'avons plus seulement une masse mais également une matrice de masse $[M]$. Les rigidités et les amortissements sont aussi des matrices $[K]$ et $[C]$. Les positions des masses

et la force extérieure sont des vecteurs $\{U(t)\}$ et $\{F(t)\}$. Les systèmes d'équations régissant le mouvement des masses ont une forme semblable à (5.1) :

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [C]\{\dot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{F(t)\} \quad (5.6)$$

Considérons ici la vibration libre, i.e $\{F(t)\} = 0$

• **Systèmes à amortissement proportionnel** : Le système non amorti associé à l'équation (5.6) s'écrit :

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = 0. \quad (5.7)$$

Les pulsations propres $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ et les vecteurs propres $\{\phi_r\}$ ($r = 1, 2, \dots, N$) sont obtenus avec la matrice associée : $([K] - \omega^2[M])\{\phi_r\} = 0$. La matrice $[\Phi]$ composée de N vecteurs $\{\phi_r\}$ est appelée matrice modale. Elle diagonalise les matrices $[K]$ et $[M]$:

$$[\phi_r]^T [M] [\phi_s] = m_r \delta_{rs} \quad (5.8)$$

$$[\phi_r]^T [K] [\phi_s] = k_r \delta_{rs} \quad (5.9)$$

où δ_{rs} est le symbole de Kronecker. Lorsque la matrice d'amortissement $[C]$ peut être diagonalisée par $[\Phi]$, soit

$$[\phi_r]^T [C] [\phi_s] = c_r \delta_{rs} = 2\xi_r m_r \omega_r \delta_{rs}, \quad (5.10)$$

en posant $\{U(t)\} = [\Phi]\{q(t)\}$, les équations (5.7) peuvent être découplées grâce à la matrice modale $[\Phi]$. La réponse du système peut ainsi être considérée comme la somme des réponses de N oscillateurs de forme (5.3). Les composants $q_j(t)$ sont les coordonnées du déplacement dans l'espace modal,

$$q_j(t) = \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j) \quad (5.11)$$

ρ_j et φ_j se calculent de la même façon que dans le cas 1DDL et dépendent de la vitesse initiale et du déplacement initial dans l'espace modal $\dot{q}_j(0)$ et $q_j(0)$.

$$\omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j} \quad (5.12)$$

$$\tilde{\omega}_j = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (5.13)$$

$$\xi_j = \frac{c_j}{2m_j \omega_j} \quad (5.14)$$

Ainsi sur le degré de liberté k quelconque, la composante k du déplacement $\{U(t)\}$ sera

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N \phi_{kj} \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j) \quad (5.15)$$

Les modes $\{\phi_j\}$ déterminés à partir du système conservatif associé sont les modes normaux du système. Les amortissements traduits par la matrice $[C]$ qui peut être diagonalisée sont des amortissements proportionnels. Il existe deux hypothèses à propos d'amortissement proportionnel, celle de Rayleigh et celle de Basile. L'hypothèse de Rayleigh suppose que la matrice $[C]$ est linéaire par rapport à la masse et la rigidité, $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ et par conséquent, elle est diagonalisée par la matrice modale $[\Phi]$. L'hypothèse de Basile impose directement l'amortissement modal ξ_r sur chaque mode suivant la formule (5.10). Une approximation alternative est de supprimer les termes non diagonaux du produit $[\Phi]^T [C] [\Phi]$. Les modes normaux sont réels et non pas uniques. Chaque mode normal a le rapport entre ses composantes définis. Il peut être normalisé, soit par la masse i.e $[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$, soit par la composante maximum égal à l'unité. Les modes normaux sont représentés par les rapports entre les composantes.

- **Systèmes à amortissement non proportionnel** : En réalité, les structures présentent naturellement de l'amortissement non-proportionnel. La prise en compte du modèle avec l'amortissement non-proportionnel devient alors utile [58]. Considérons l'équation homogène associée à (5.6) avec le changement de variable $\{U(t)\} = \{\underline{X}\}e^{st}$

$$[s^2[M] + s[C] + [K]] \{\underline{X}\} = 0 \quad (5.16)$$

où $\{\underline{X}\}$ et s sont respectivement, un vecteur de composantes complexes et un nombre complexe. L'équation (5.16) constitue un problème de valeurs propres complexes. Une autre manière habituelle de résoudre ce problème est de considérer une nouvelle variable, le vecteur d'état :

$$\begin{aligned} \{W(t)\} &= \begin{Bmatrix} \{U(t)\} \\ \{\dot{U}(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\underline{X}\} \\ s\{\underline{X}\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{\phi'\} e^{st} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}}_{[A]} \{\dot{W}(t)\} + \underbrace{\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix}}_{[B]} \{W(t)\} &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Après remplacement et simplification,

$$[s[A] + [B]] \{\phi'\} = 0 \quad (5.18)$$

$[A]$ et $[B]$ sont réelles et symétriques d'ordre $2N$. Cette équation donne $2N$ valeurs propres soit réelles, soit complexes conjuguées. Nous nous intéressons au cas où la structure est sous amortie donc les valeurs propres sont N paires conjuguées s_r et \bar{s}_r . Les vecteurs propres correspondant à s_r et \bar{s}_r , sont respectivement $\{\phi'_r\}$ et $\{\bar{\phi}'_r\}$ complexes. Les formes de ces vecteurs propres sont les suivantes

$$\{\phi'_r\} = \begin{Bmatrix} \{\phi_r\} \\ \{\phi_r\} s_r \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \{\bar{\phi}'_r\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}_r\} \\ \{\bar{\phi}_r\} \bar{s}_r \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

où, $\{\phi_r\}$ et $\{\bar{\phi}_r\}$ sont les vecteurs propres complexes d'ordre $N \times 1$ correspondant aux coordonnées du vecteur d'espace $\{U(t)\}$. La matrice modale complexe $[\Phi']$ d'ordre $2N \times 2N$ permet de découpler le système des équations (5.17) grâce aux propriétés orthogonales des vecteurs propres en posant :

$$\{W(t)\} = [\Phi'] \{q(t)\} \quad (5.20)$$

Ainsi, $2N$ équations découplées sont :

$$\begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & a_j & \\ & & \diagdown \end{bmatrix} \{\dot{q}(t)\} + \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & b_j & \\ & & \diagdown \end{bmatrix} \{q(t)\} = \{0\} \quad (5.21)$$

Si la solution est recherchée sous la forme

$$q_j(t) = \underline{Q}_j e^{s_j t} \quad (5.22)$$

où \underline{Q}_j dépend de conditions initiales. La réponse du système sera

$$\{W(t)\} = \sum_{j=1}^{2N} \{\phi'_j\} \underline{Q}_j e^{s_j t} \quad (5.23)$$

avec $s_j = -\frac{b_j}{a_j}$. En résumé, le système présente N valeurs propres s_r correspondant à N vecteurs propres complexes $\{\phi_r\}$ et N valeurs propres \bar{s}_r correspondant à N vecteurs propres complexes $\{\bar{\phi}_r\}$. Ces valeurs propres et vecteurs propres doivent satisfaire l'équation (5.16)

$$[s_r^2[M] + s_r[C] + [K]] \{\phi_r\} = \{0\} \quad (5.24)$$

De façon similaire pour s_p et $\{\phi_p\}$

$$\{\phi_p\}^T [s_p^2[M] + s_p[C] + [K]] = \{0\}^T \quad (5.25)$$

En multipliant les deux membres par $\{\phi_r\}$

$$\{\phi_p\}^T [s_p^2[M] + s_p[C] + [K]] \{\phi_r\} = 0 \quad (5.26)$$

L'équation (5.24) après multiplication de deux côtés par $\{\phi_p\}^T$, devient

$$\{\phi_p\}^T [s_r^2[M] + s_r[C] + [K]] \{\phi_r\} = 0 \quad (5.27)$$

Simplifiant (5.26) et (5.27), on a

$$(s_r + s_p)\{\phi_p\}^T [M]\{\phi_r\} + \{\phi_p\}^T [C]\{\phi_r\} = 0 \quad (5.28)$$

et

$$s_r s_p \{\phi_p\}^T [M]\{\phi_r\} - \{\phi_p\}^T [K]\{\phi_r\} = 0 \quad (5.29)$$

La valeur propre complexe s_r peut être écrite sous forme $s_r = -\omega_r \xi_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$. En choisissant s_p égale au complexe conjugué de s_r , on a $s_p = \bar{s}_r = -\omega_r \xi_r - i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$ et $\{\phi_p\} = \{\bar{\phi}_r\}$. Il en résulte que :

$$\omega_r^2 = \frac{\{\bar{\phi}_r\}^T [K]\{\phi_r\}}{\{\bar{\phi}_r\}^T [M]\{\phi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} \quad (5.30)$$

$$2\omega_r \xi_r = \frac{\{\bar{\phi}_r\}^T [C]\{\phi_r\}}{\{\bar{\phi}_r\}^T [M]\{\phi_r\}} = \frac{c_r}{m_r} \quad (5.31)$$

Ainsi, on a réussi à rendre analogue un système à amortissement visqueux non-proportionnel à un système avec amortissement proportionnel. Les termes ω_r , ξ_r sont respectivement la pulsation propre sans amortissement et le taux d'amortissement associés au mode r .

5.3 Identification des paramètres modaux à l'aide de la transformation en ondelettes

La méthode d'identification modale proposée opère dans le domaine temps-fréquence. Le but de cette partie est d'établir une procédure d'identification des paramètres modaux d'un système mécanique linéaire en vibration libre i.e, les fréquences, les amortissements et les déformées modales, en utilisant les résultats de traitement des mesures par la transformation en ondelettes. On présente d'abord un développement théorique, puis on propose les démarches pratiques pour la procédure.

5.3.1 Formulation des critères d'identification

Les paramètres modaux sont obtenus par la minimisation de la différence au sens des moindres carrés entre la fonction $R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(t)$ et celle obtenue par les mesures $R^{measure}(t)$:

$$\min_{p_1 \in D_1, p_2 \in D_2, \dots, p_i \in D_i, \dots, p_n \in D_n} \|R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(t) - R^{measure}(t)\|_2^2 \quad (5.32)$$

où $D_1, D_2, \dots, D_i, \dots, D_n$ sont les domaines des paramètres $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$ respectivement. Les arguments R^{modele} sont proposés grâce aux résultats d'analyse théorique de la section précédente et les arguments $R^{measure}$ sont obtenus par les résultats de traitement des mesures par la transformation en ondelettes.

5.3.1.1 Systèmes à amortissement proportionnel

On récupère le signal de déplacement (et/ou de vitesse, et/ou d'accélération) enregistré par les capteurs. En se référant à l'équation (5.15), nous avons les modèles du signal d'un système linéaire à MDDL, sur le k ième DDL,

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N u_{kj}(t) = \sum_{j=1}^N \phi_{kj} \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j) \quad (5.33)$$

$$\dot{u}_k(t) = \sum_{j=1}^N \dot{u}_{kj}(t) = - \sum_{j=1}^N \phi_{kj} \rho_j \omega_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j - \delta_j) \quad (5.34)$$

$$\ddot{u}_k(t) = \sum_{j=1}^N \ddot{u}_{kj}(t) = - \sum_{j=1}^N \phi_{kj} \rho_j \omega_j^2 e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \theta_j) \quad (5.35)$$

ϕ_{kj} est le terme (k, j) de la matrice modale $[\Phi]$, avec k, j se référant respectivement à la position de la masse et au mode. Pour mémoire, la matrice modale se compose des modes notés $\{\phi_j\} = \{\phi_{1j}, \phi_{2j}, \dots, \phi_{Nj}\}^T$. $\omega_j, \tilde{\omega}_j$ et ξ_j sont respectivement la pulsation naturelle, la pulsation avec amortissement et le taux d'amortissement du mode j ;

$$\rho_j = \left\{ \left[\frac{\dot{Y}_j(0) + \xi_j \omega_j Y_j(0)}{\tilde{\omega}_j} \right]^2 + [Y_j(0)]^2 \right\}^{1/2} ; Y_j(0) \text{ et } \dot{Y}_j(0) \text{ sont le déplacement modal initial et la vitesse modale initiale du mode } j ;$$

$$\varphi_j = \arctan \left\{ \frac{c_{j0} + \xi_j}{\sqrt{1 - \xi_j^2}} \right\} \text{ avec } c_{j0} = \frac{\dot{Y}_j(0)}{\omega_j Y_j(0)}, \delta_j = \arctan \left\{ \frac{\sqrt{1 - \xi_j^2}}{\xi_j} \right\}$$

$$\text{et } \theta_j = \arctan \left\{ \frac{2\xi_j \sqrt{1 - \xi_j^2}}{1 - 2\xi_j^2} \right\}.$$

Les relations (5.33), (5.34) et (5.35) peuvent être ré-écrites sous forme générale : $\sum_{j=1}^N A_{kj}(t) \cos(\alpha_{kj}(t))$

où

$$\begin{cases} \alpha_{u_{kj}}(t) = \tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \frac{\pi}{2}(1 - \text{Sgn}(\phi_{kj})) \\ A_{u_{kj}}(t) = |\phi_{kj}| \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \end{cases} \text{ pour } u_k(t) \quad (5.36)$$

$$\begin{cases} \alpha_{\dot{u}_{kj}}(t) = \tilde{\omega}_j t - \varphi_j - \delta_j + \frac{\pi}{2}(1 + \text{Sgn}(\phi_{kj})) \\ A_{\dot{u}_{kj}}(t) = |\phi_{kj}| \rho_j \omega_j e^{-\xi_j \omega_j t} \end{cases} \text{ pour } \dot{u}_k(t) \quad (5.37)$$

$$\begin{cases} \alpha_{\ddot{u}_{kj}}(t) = \tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \theta_j + \frac{\pi}{2}(1 + \text{Sgn}(\phi_{kj})) \\ A_{\ddot{u}_{kj}}(t) = |\phi_{kj}| \rho_j \omega_j^2 e^{-\xi_j \omega_j t} \end{cases} \text{ pour } \ddot{u}_k(t) \quad (5.38)$$

Avec l'hypothèse de faible amortissement ($\xi_j \ll \frac{1}{\sqrt{2}}$), chaque composant de ces signaux est asymptotique et on peut alors approcher le signal analytique associé : $Z_{kj}(t) \approx A_{kj}(t)e^{i\alpha_{kj}(t)}$. En se basant sur l'analyse ci-dessus, nous proposons les arguments d'identification des paramètres modaux :

• **Fréquences :**

Quelques possibilités peuvent être envisagées. Elles sont classées suivant la commodité d'application :

- $R_{\tilde{\omega}_j}^{model}(t) = \tilde{\omega}_j$ et $R^{measure}(t) = \frac{K}{a_{rj}(t)}$ obtenu à partir de l'arête du mode j . La constante K dépend de l'approximation choisie (i.e, par module ou par phase).
- $R_{\tilde{\omega}_j, r_{kj}}^{model}(t) = \tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \frac{\pi}{2}(1 - \text{Sgn}(\phi_{kj})) = \tilde{\omega}_j t + r_{kj}$ et $R^{measure}(t) = \angle Z_{u_{kj}}(t)$ obtenu à partir du squelette du mode j du signal u enregistré sur le capteur k . On peut trouver une relation analogue pour la vitesse et l'accélération.
- $R_{\omega_j}^{model}(t) = \omega_j$ et $R^{measure}(t) = \frac{|Z_{\dot{u}_{kj}}(t)|}{|Z_{u_{kj}}(t)|} = \frac{|Z_{\ddot{u}_{kj}}(t)|}{|Z_{\dot{u}_{kj}}(t)|}$ obtenu à partir des squelettes du mode j à travers les TO : $T_\psi[u_k]$, $T_\psi[\dot{u}_k]$ et $T_\psi[\ddot{u}_k]$. Cette méthode donne directement la pulsation propre.

• **Amortissements :**

- $R_{\xi_j \omega_j, r'_{kj}}^{model}(t) = -\xi_j \omega_j t + \ln(|\phi_{kj}| \rho_j) = -\xi_j \omega_j t + r'_{kj}$ et $R^{measure}(t) = \ln(|Z_{u_{kj}}(t)|)$ obtenu à partir du squelette du mode j du signal u enregistré sur le capteur k . On peut trouver une relation analogue pour la vitesse et l'accélération.
- $R_{\xi_j}^{model}(t) = \xi_j$ et $R^{measure}(t) = |\cos(\angle Z_{u_{kj}}(t) - \angle Z_{\dot{u}_{kj}}(t))| = |\cos(\frac{\angle Z_{\ddot{u}_{kj}}(t) - \angle Z_{u_{kj}}(t)}{2})|$ obtenu à partir des squelettes du mode j à travers les TO : $T_\psi[u_k]$, $T_\psi[\dot{u}_k]$ et $T_\psi[\ddot{u}_k]$. Cette méthode donne directement l'amortissement.

- **Modes :** Choisissons la norme des modes tel que $\max_{k \in [1, N]} (\{\phi_{kj}\}) = \phi_{mj} = 1$, alors $\phi_{kj} = \frac{\phi_{kj}}{\phi_{mj}}$.

Pour fixer la référence m ,

$$m = \max_{k \in [1, N]} \sum |Z_{u_{k,j}}(t)| \quad (5.39)$$

Ainsi, $R_{\phi_{kj}}^{model}(t) = |\phi_{kj}|$ et $R^{measure}(t) = \frac{|Z_{u_{kj}}(t)|}{|Z_{u_{mj}}(t)|}$. Le signe de ϕ_{kj} est déterminé grâce à la différence de phase de deux DDLs k et m : $R_{\text{Sgn}(\phi_{kj})}^{model}(t) = \frac{\pi}{2}(1 - \text{Sgn}(\phi_{kj}))$ et $R^{measure}(t) = \angle Z_{u_{kj}}(t) - \angle Z_{u_{mj}}(t)$. Finalement, $\phi_{kj} = |\phi_{kj}| \text{Sgn}(\phi_{kj})$.

5.3.1.2 Systèmes à amortissement non proportionnel

Le modèle utilisé est celui précédemment abordé à la relation (5.23). On ré-écrit la formule :

$$\{W(t)\} = \sum_{j=1}^{2N} \{\phi'_j\} \underline{Q}_j e^{s_j t} \quad (5.40)$$

Considérons maintenant seulement le déplacement $\{U(t)\}$

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{2N} \{\phi_j\} \underline{Q}_j e^{s_j t} = \sum_{j=1}^N \left(\{\phi_j\} \underline{Q}_j e^{s_j t} + \{\bar{\phi}_j\} \underline{Q}'_j e^{\bar{s}_j t} \right) \quad (5.41)$$

$$= \sum_{j=1}^N \left(\{\phi_j\} \underline{Q}_j e^{-\omega_j \xi_j t + i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} + \{\bar{\phi}_j\} \underline{Q}'_j e^{-\omega_j \xi_j t - i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} \right) \quad (5.42)$$

$$= \sum_{j=1}^N \left(\{\phi_j\} \underline{Q}_j e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} + \{\bar{\phi}_j\} \underline{Q}'_j e^{-\omega_j \xi_j t} e^{-i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} \right) \quad (5.43)$$

Sur un capteur k quelconque,

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N \left(\phi_{kj} \underline{Q}_j e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} + \bar{\phi}_{kj} \underline{Q}'_j e^{-\omega_j \xi_j t} e^{-i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} \right) = \sum_{j=1}^N u_{kj}(t) \quad (5.44)$$

où chaque composante modale $u_{kj}(t)$:

$$u_{kj}(t) = \left(\phi_{kj} \underline{Q}_j e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} + \bar{\phi}_{kj} \underline{Q}'_j e^{-\omega_j \xi_j t} e^{-i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} \right) \quad (5.45)$$

En se basant sur l'hypothèse de faible amortissement, le signal analytique associé sera

$$\begin{array}{l} Z_{u_{kj}}(t) \approx 2 \left(|\phi_{kj}| |\underline{Q}_j| e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i(\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t + \angle \phi_{kj} + \angle \underline{Q}_j)} \right) \quad (a) \\ Z_{\dot{u}_{kj}}(t) \approx 2 \left(\omega_j |\phi_{kj}| |\underline{Q}_j| e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i(\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t + \angle \phi_{kj} + \angle \underline{Q}_j + \pi - \delta_j)} \right) \quad (b) \\ Z_{\ddot{u}_{kj}}(t) \approx 2 \left(\omega_j^2 |\phi_{kj}| |\underline{Q}_j| e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i(\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t + \angle \phi_{kj} + \angle \underline{Q}_j + \pi + \theta_j)} \right) \quad (c) \end{array} \quad (5.46)$$

Avec $\delta_j = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi_j^2}}{\xi_j}\right)$ et $\theta_j = \arctan\left(\frac{2\xi_j \sqrt{1-\xi_j^2}}{1-2\xi_j^2}\right)$

Démonstration.

Appelons A , l'opérateur analytique du signal ; s_1 et s_2 , deux signaux quelconques. D'après le théorème de factorisation [voir la section 2.3.3],

$$A[s_1 s_2] = s_1 A[s_2] \quad \text{si le spectre } \hat{S}_1(\omega) = 0 \quad \forall \omega < -\omega_1 \text{ et le spectre de } \widehat{A[s_2]}(\omega) = 0 \quad \forall \omega < \omega_1 \quad (5.47)$$

Nous avons

$$A[e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}] = 2e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} \quad \text{et} \quad A[e^{-i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}] = 0 \quad (5.48)$$

Considérons le cas $s(t) = s_1 s_2 = \underbrace{e^{-\omega_j \xi_j t}}_{s_1} \underbrace{e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}}_{s_2}$. Les spectres sont successivement,

$\hat{S}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + (\omega_j \xi_j)^2}} e^{-i \arctan(\frac{\omega}{\omega_j \xi_j})}$ et $\hat{S}_2(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2})$. On remarque que l'amplitude $|\hat{S}_1(\omega)|$ est symétrique, décroissante et tend vers 0 quand $\omega \rightarrow \infty$ donc $\hat{S}_1(\omega)$ n'est pas strictement une bande limitée mais on peut approximer la bande limitée à l'intervalle $(-\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2}, \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2})$ puisque $|\hat{S}_1(0)| = \frac{1}{\omega_j \xi_j}$ et $|\hat{S}_1(\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2})| = \frac{1}{\omega_j}$, d'où le rapport $\frac{|\hat{S}_1(\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2})|}{|\hat{S}_1(0)|} = \xi_j$. Si ξ_j est faible, on peut considérer que $\hat{S}_1(\omega)$ est négligeable hors de l'intervalle $(-\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2}, \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2})$ et ainsi, il satisfait le théorème de factorisation ci-dessus,

$$A[\underbrace{e^{-\omega_j \xi_j t}}_{s_1} \underbrace{e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}}_{s_2}] \approx e^{-\omega_j \xi_j t} A[e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}] = 2e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} \quad (5.49)$$

$$A[\underbrace{e^{-\omega_j \xi_j t}}_{s_1} \underbrace{e^{-i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}}_{s_2}] \approx e^{-\omega_j \xi_j t} A[e^{-i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}] = 0 \quad (5.50)$$

Sachant que A est l'opérateur linéaire, on en déduit le résultat de (5.46 a). Une évaluation de qualité d'approximation de (5.49) et (5.50) est donnée à l'annexe B.

D'une part,

$$A\left[\frac{d^n u_{kj}}{dt^n}\right] = \frac{d^n}{dt^n} A[u_{kj}]$$

D'autre part,

$$s_j = -\omega_j \xi_j + i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} = \omega_j e^{i(\pi - \delta_j)}$$

$$s_j^2 = \left(-\omega_j \xi_j + i\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}\right)^2 = -\omega_j^2 \left(1 - 2\xi_j^2 + i(2\xi_j \sqrt{1 - \xi_j^2})\right) = \omega_j^2 e^{i(\pi + \theta_j)} = \omega_j^2 e^{i(-2\delta_j)}$$

D'où les égalités (5.46 b) et (5.46 c).

□

On constate que les signaux analytiques à (5.46) sont reliés à la transformation en ondelettes comme dans le cas d'amortissement proportionnel. Les arguments d'identification pour les fréquences et les amortissements sont tout-à-fait similaires à ceux du système d'amortissement proportionnel décrit précédemment. L'identification des modes complexes est différente par rapport au système ayant un amortissement proportionnel (modes réels) et elle est présentée ci-dessous en détail.

- **Fréquences :**

Voir le système MDDL avec amortissement proportionnel.

- **Amortissements :**

Voir le système MDDL avec amortissement proportionnel.

- **Modes :** Choisissons un point de référence, par exemple, le point m tel que

$$m = \max_{k \in [1, N]} \sum |Z_{u_{k,j}}(t)| \quad (5.51)$$

et les modes complexes sont définis par les rapports : $\phi_{kj} = \frac{\phi_{kj}}{\phi_{mj}}$. Ainsi, $R_{\phi_{kj}}^{model}(t) = \phi_{kj}$ et $R^{measure}(t) = \frac{Z_{u_{kj}}(t)}{Z_{u_{mj}}(t)}$.

REMARQUE 5.3.1

La méthode ci-dessus est la plus rapide pour déterminer les modes complexes. On peut aussi utiliser la méthode précédente [voir 5.3.1.1] pour l'identification des modes complexes en modifiant comme suit :

- Rapport des composantes : Ainsi, $R_{\phi_{kj}}^{model}(t) = |\phi_{kj}|$ et $R^{measure}(t) = \frac{|Z_{u_{kj}}(t)|}{|Z_{u_{mj}}(t)|}$.
- Différences de phase : $R_{\angle \phi_{kj}}^{model}(t) = \angle \phi_{kj}$ et $R^{measure}(t) = \angle Z_{u_{kj}}(t) - \angle Z_{u_{mj}}(t)$.

Finalement, $\phi_{kj} = |\phi_{kj}| e^{-\angle \phi_{kj}}$. A noter que cette procédure est décrite pour l'entrée en déplacements mais elle est toute à fait applicable pour l'entrée en vitesses ou en accélérations.

□

5.3.2 Procédure complète d'identification basée sur la TO

Nous proposons ici, les différentes méthodes d'identification des paramètres modaux en utilisant la TO. Comme on a démontré au chapitre précédent, la transformation en ondelettes permet d'isoler une composante quelconque contenu dans le signal grâce au rôle de filtre de l'ondelette mère. C'est à partir des arêtes et des squelettes que l'on va identifier les paramètres modaux. Les démarches des méthodes d'identification sont les suivantes

- 1^{ère} étape : calculer la TO des signaux $u_k(t)$ (et/ou $\dot{u}_k(t)$ et/ou $\ddot{u}_k(t)$). A ce stade, le choix des paramètres d'ondelettes mères est important et il doit satisfaire l'inégalité (4.27). Il est toujours préférable de faire ce choix à l'aide de la transformation de Fourier.
- 2^e étape : extraire les arêtes et les squelettes par les algorithmes appropriés. Cette étape permet d'avoir les fréquences instantanées et les signaux analytiques associés, par exemple :

$$\dot{\alpha}_{kj}^{measure}(b) = \frac{\dot{\phi}_{\psi}(0)}{a_{rkj}(b)} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} Z_{u_{kj}}^{measure}(b) &= \frac{2}{\hat{\psi}(a_{rkj} \dot{\alpha}_{kj}^{measure})} T_{\psi}[u_{kj}^{measure}](b, a_{rkj}(b)) \\ &\approx \frac{2}{\hat{\psi}(\dot{\phi}_{\psi}(0))} T_{\psi}[u_k^{measure}](b, a_{rkj}(b)) \end{aligned} \quad (5.53)$$

- 3^e étape : identifier les paramètres modaux en utilisant les critères présentés sur la section précédente. Il faut bien noter que ces arguments sont classés suivant l'ordre de commodité décroissante. En pratique, on utilise souvent les premiers arguments. Ici, un compromis est à faire : si l'amortissement est proportionnel ou faible on peut considérer le modèle d'amortissement proportionnel sinon on doit utiliser le modèle d'amortissement non proportionnel avec les modes complexes.

5.4 Tests de validation

Les propositions ci-dessus seront corroborées par les essais numériques et les tests réels. Nous appliquons la procédure aux tests avec une complexité croissante : tout d'abord, un système à 1DDL pour illustrer les différentes techniques d'identification et l'effet de bords sur les paramètres modaux estimés. Deux systèmes à MDDL (avec amortissement proportionnel et non-proportionnel) sont ensuite considérés afin de valider la procédure complète : le choix de Q pour le découplage des modes, l'effet de Q sur le domaine réduit D d'identification et les modèles de modes (modes complexes et modes normaux). Enfin, un test réel est présenté.

5.4.1 Tests numériques

La première étape consiste à modéliser numériquement la réponse du système, soit sous choc, soit la vibration libre à partir de conditions initiales. La solution fait appel à deux techniques principales : la résolution numérique de l'équation différentielle du mouvement et la transformation de Fourier.

5.4.1.1 Modélisation de la réponse libre

Nous utilisons deux techniques pour générer les signaux numériques des systèmes mécaniques discrets dans le cadre des tests numériques. La première part de l'équation différentielle (5.17). La résolution de ces équations s'exécute par la méthode de Runge-Kutta sous MATLAB. La deuxième se base sur la transformation de Fourier inverse de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) du système. À préciser que le signal que l'on enregistre est réel et donc que le signal obtenu par la transformation de Fourier inverse est complexe. On utilise deux techniques inverses dans la thèse, soit par l'intermédiaire du signal analytique, soit par la propriété hermitienne du signal réel. Afin de valider les différentes techniques, nous prenons l'exemple d'un système à 1DDL avec une masse $m = 1(kg)$, une rigidité $k = 7(N/m)$ et un amortissement $c = 0.2(Ns/m)$, soumis à un choc de Dirac $\delta(0)$. La solution exacte de ce système est la réponse impulsionnelle. La transformation de Fourier inverse de la fonction de réponse en fréquence donne la vibration de ce système en temps. Deux techniques sont appliquées : soit par l'intermédiaire du signal analytique (IFFT 1), soit par l'intermédiaire de la propriété Hermitienne du signal réel (IFFT 2). La vibration du système est la même que la réponse libre avec la vitesse initiale $\dot{u}(0) = 1(m/s)$ et sans déplacement initial $u(0) = 0$. Les résultats de ces techniques sont présentés sur la figure 5.2 et montrent clairement la validité des techniques proposées pour simuler numériquement les réponses d'un système mécanique en vibration libre.

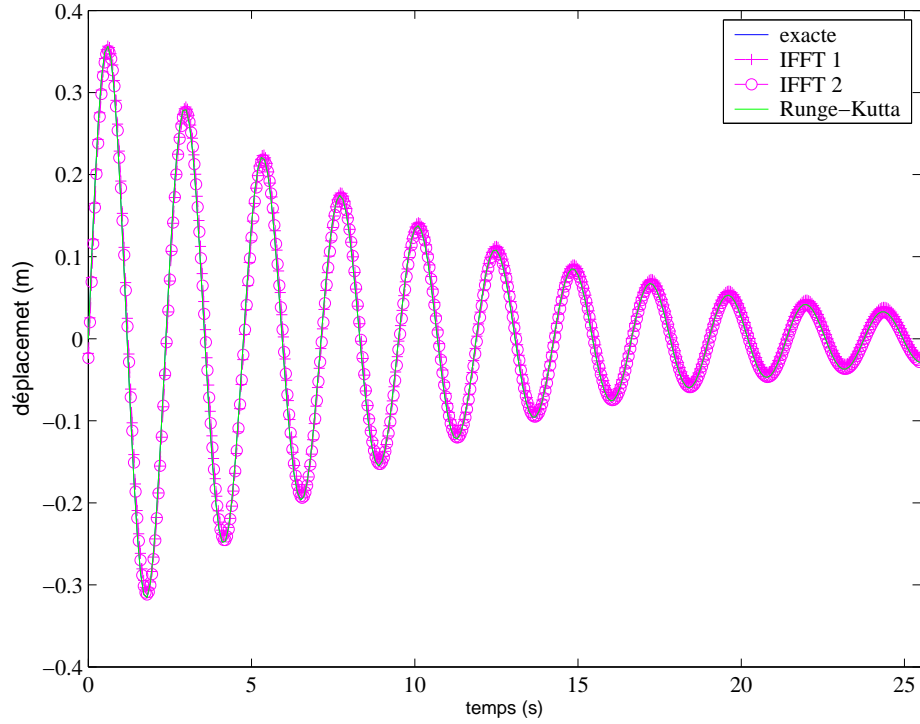


FIGURE 5.2. Validation de différentes méthodes pour modéliser la réponse numérique

5.4.1.2 Test du système à 1DDL

Ce simple test permettra de comparer les arguments proposés d'identification des paramètres modaux sauf les modes. Les caractéristiques de ce test sont les suivantes : la masse $m = 1(kg)$, la rigidité $k = 7000(N/m)$ et l'amortissement $c = 2(Ns/m)$. Les conditions initiales sont $\dot{u}(0) = 0$ et $u(0) = 1(m)$. La réponse libre en déplacement est obtenue par la méthode Runge-Kutta. La figure 5.3 présente le signal, sa TO ($Q = 4.3185$ soit 1/3 octave) et sa TF. La fréquence propre et l'amortissement du système sont déterminés par différentes méthodes. Les courbes présentant différentes fonctions $R^{mesure}(t)$ sont sur les figures 5.4, 5.5, 5.6 (pour la fréquence) et sur les figures 5.7, 5.8 (pour l'amortissement). On suppose que le signal obtenu pendant ce test n'est que le déplacement et les transformations en ondelettes $T_\psi[u]$, $T_\psi[\dot{u}]$ et $T_\psi[\ddot{u}]$ sont déduites par le calcul suivant la relation (2.60). On se trouve dans la situation "classique" la plus difficile, où le déplacement est connu mais non pas la vitesse et l'accélération. La figure 5.4 comprend trois courbes $R^{mesure}(t) = \frac{K}{a_r(t)}$ dont les arêtes sont extraites par $T_\psi[u]$, $T_\psi[\dot{u}]$ et $T_\psi[\ddot{u}]$. La figure 5.5 présente les phases $R^{mesure}(t) = \angle Z_u(t)$, $R^{mesure}(t) = \angle Z_{\dot{u}}(t)$ et $R^{mesure}(t) = \angle Z_{\ddot{u}}(t)$. Ces arguments donnent accès à l'identification de la pseudo fréquence tandis que les rapports des amplitudes $R^{mesure}(t) = \frac{|Z_{\dot{u}}(t)|}{|Z_u(t)|}$ et $R^{mesure}(t) = \frac{|Z_{\ddot{u}}(t)|}{|Z_{\dot{u}}(t)|}$ qui sont décrits sur la figure 5.6, peuvent s'utiliser pour identifier directement la fréquence naturelle. L'amortissement est aussi déterminé par différents chemins. Le premier résultat des amplitudes des signaux analytiques dont les arguments présentés sur la figure 5.7 se traduisent par $R^{mesure}(t) = \ln(|Z_u(t)|)$, $R^{mesure}(t) = \ln(|Z_{\dot{u}}(t)|)$ et $R^{mesure}(t) = \ln(|Z_{\ddot{u}}(t)|)$. Le deuxième se base sur les phases avec les arguments $R^{mesure}(t) = \cos(\angle Z_{u_{kj}}(t) - \angle Z_{\dot{u}_{kj}}(t))$, et $R^{mesure}(t) = \cos\left(\frac{\angle Z_{\ddot{u}_{kj}}(t) - \angle Z_{u_{kj}}(t)}{2}\right)$ qui sont tracés dans la figure 5.8

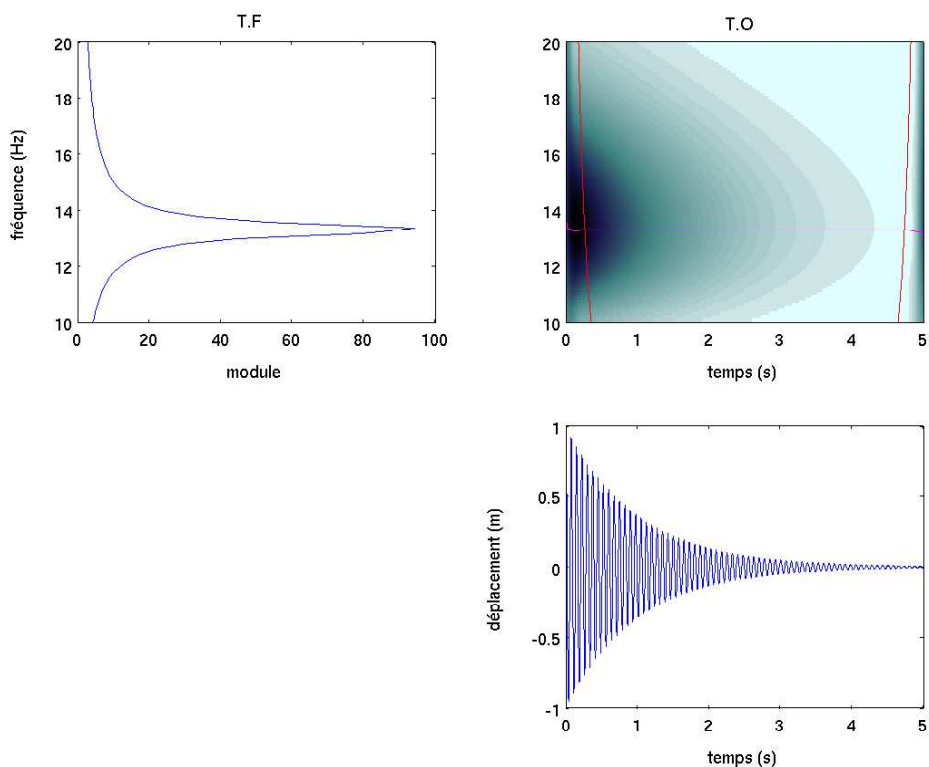


FIGURE 5.3. *TF, TO et l'arrêt du signal de déplacement du test 1DDL*

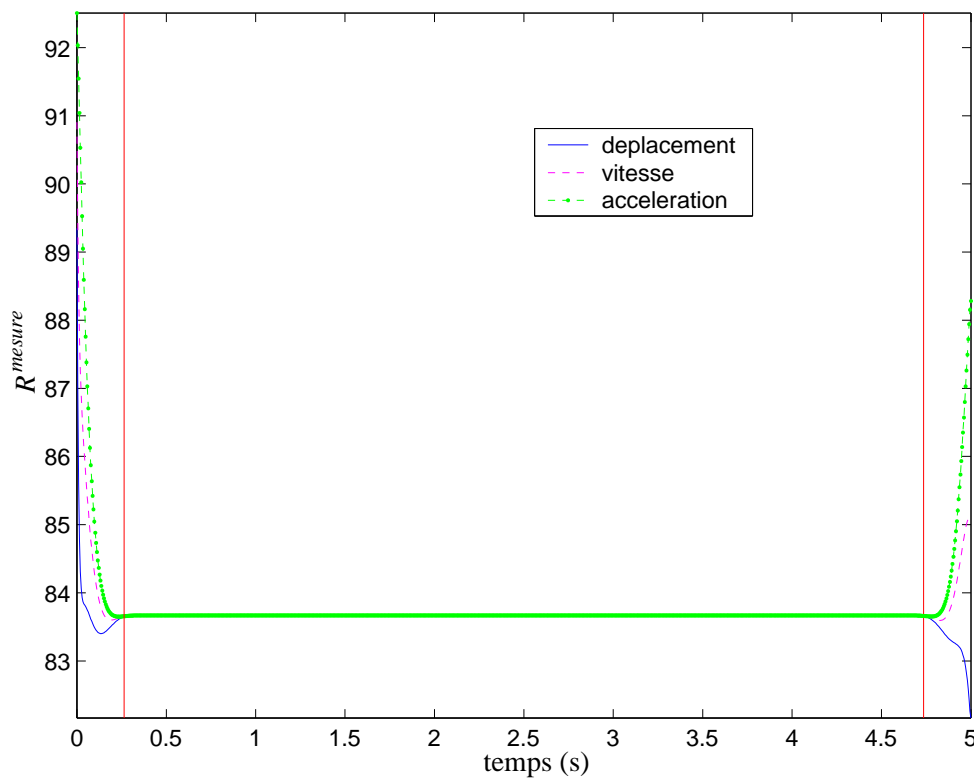


FIGURE 5.4. *Les arguments $R^{measure}(t)$ déterminés par arrêts*

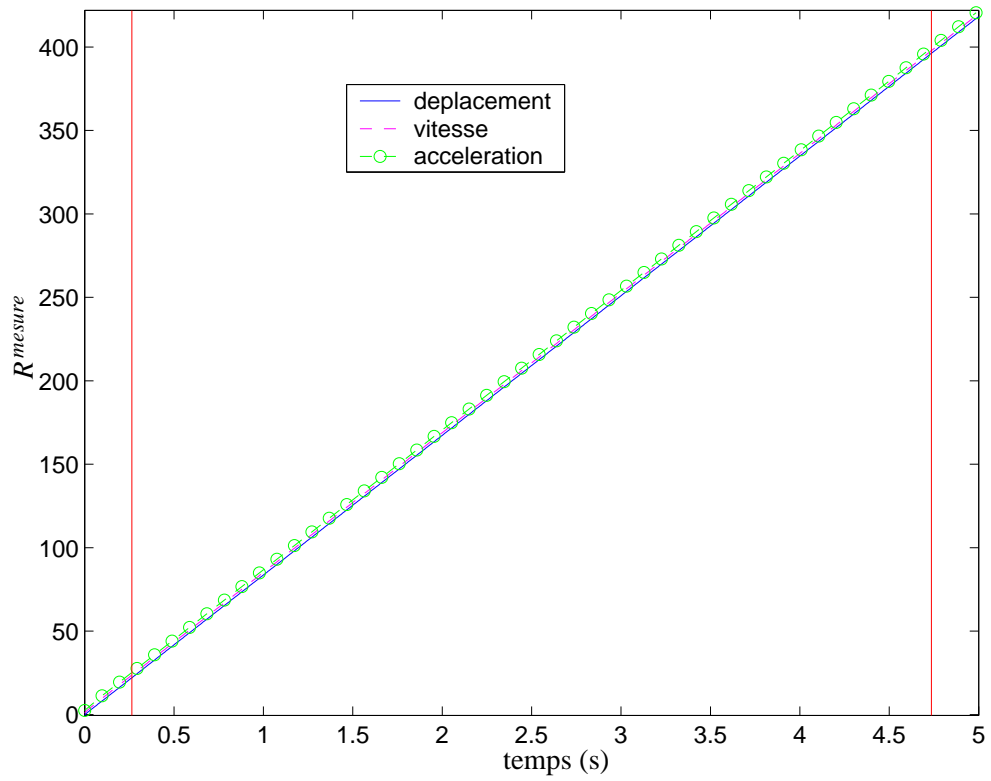


FIGURE 5.5. Les arguments $R^{mesure}(t)$ déterminés par phases

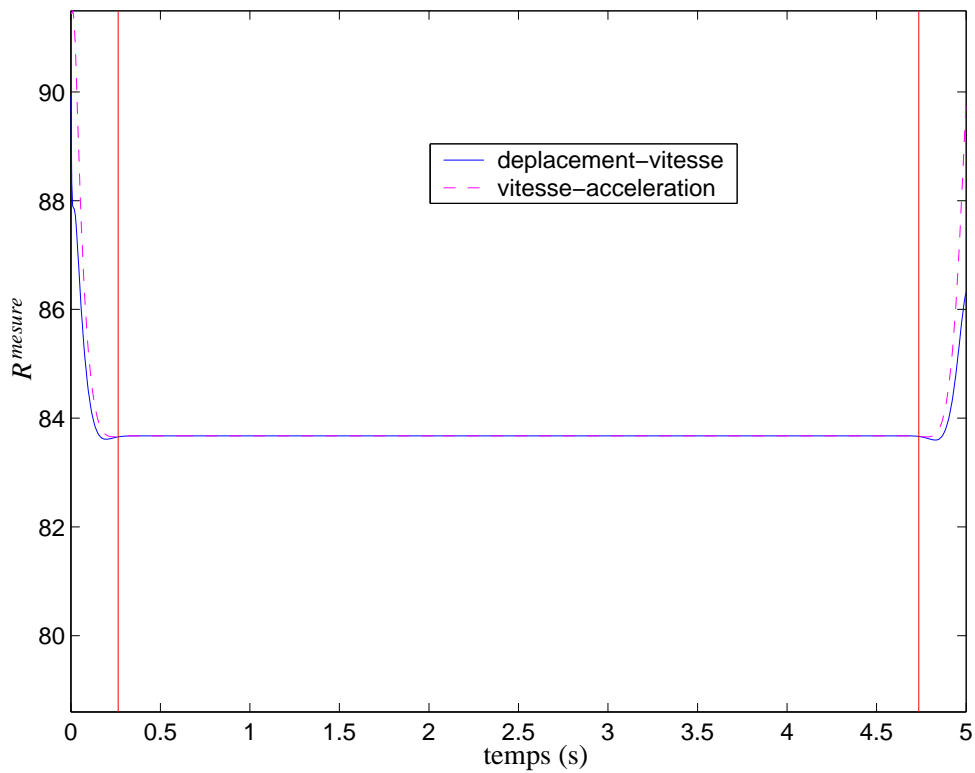


FIGURE 5.6. Les arguments $R^{mesure}(t)$ déterminés par rapports des amplitudes

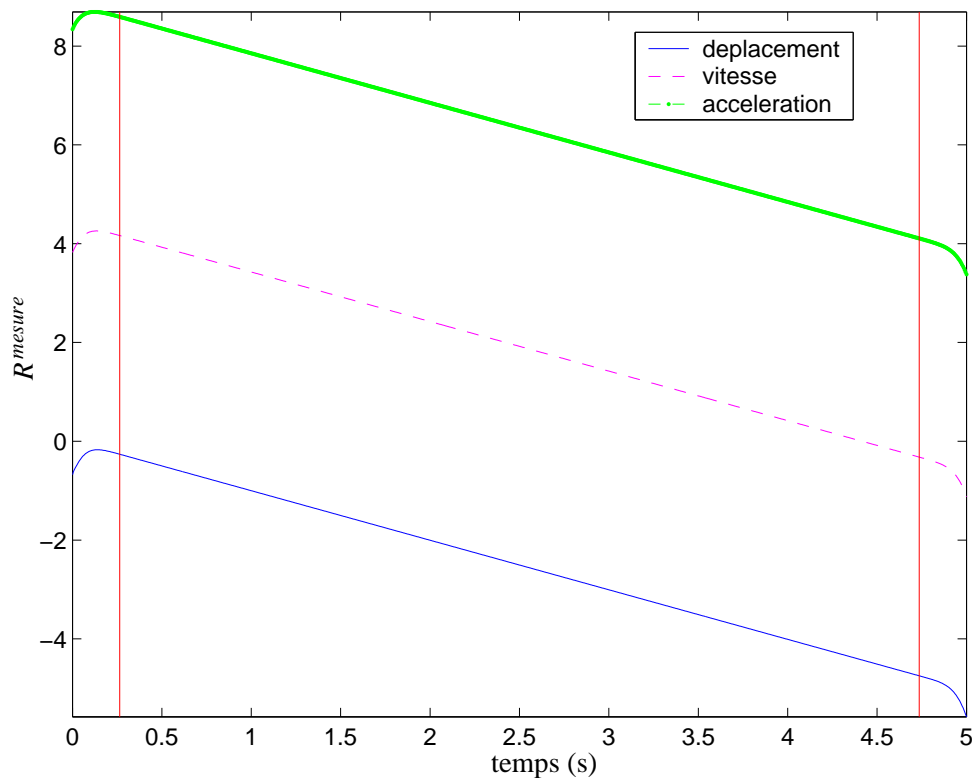


FIGURE 5.7. Les arguments $R^{mesure}(t)$ déterminés par des amplitudes

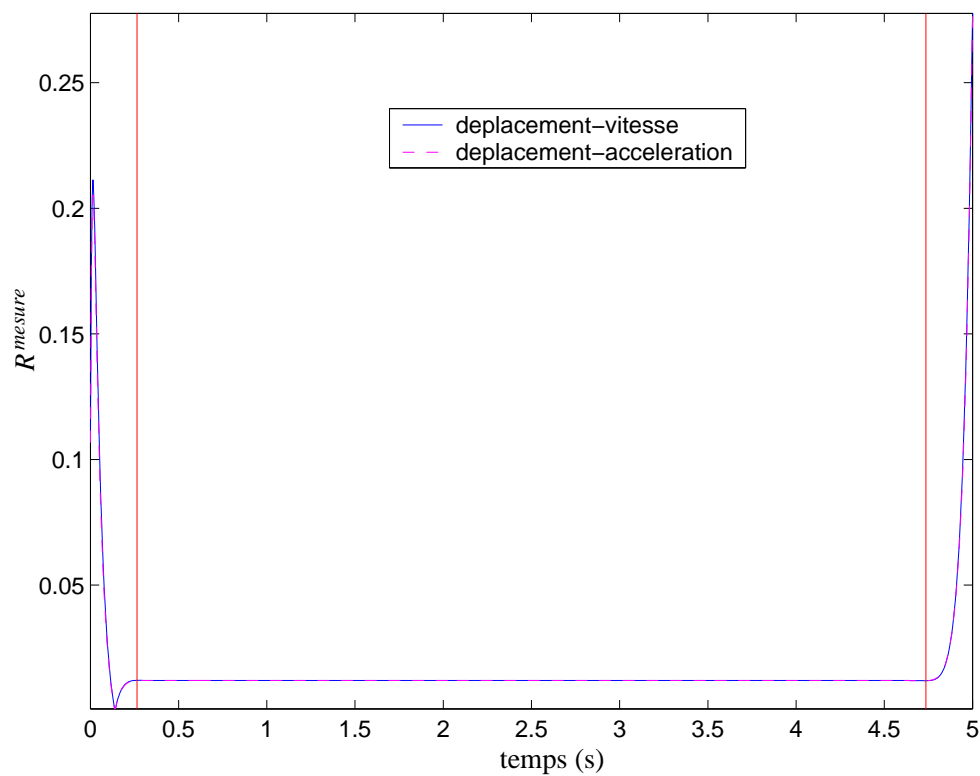


FIGURE 5.8. Les arguments $R^{mesure}(t)$ déterminés par des phases

TABLEAU 5.1. Paramètres modaux du système 1DDL

	pulsation naturelle			amortissement		
	$\omega(\text{rad/s})$			$\xi(\%)$		
exact	83.6660			1.20		
méthode	$T_\psi[u]$	$T_\psi[\dot{u}]$	$T_\psi[\ddot{u}]$	$T_\psi[\dot{u}]$	$T_\psi[u]$	$T_\psi[\ddot{u}]$
par arête	83.6739	83.6738	83.6739	1.20	1.20	1.20
par phase	83.6740	83.6740	83.6740	1.20	1.20	
par module	83.6738	83.6739		1.20	1.20	1.20

L'effet de bords est représenté dans toutes les figures par des lignes verticales qui permettent de voir son influence sur les courbes $R^{mesure}(t)$ donc, sur les valeurs modales identifiées. Les valeurs $c_t = c_f = 5$ ont été retenues. Les résultats des paramètres modaux du système sont introduits dans le tableau 5.1. Les résultats mis entre deux colonnes voisines signifient qu'ils sont déterminés par les TOs de ces deux colonnes par exemple, la pulsation trouvée par le rapport des modules de vitesse et de déplacement est entre la colonne de $T_\psi[u]$ et $T_\psi[\dot{u}]$. Une procédure similaire est aussi appliquée avec l'ondelette mère de Morlet et les résultats obtenus sont presque égaux, ce qui confirme notre analyse sur les ondelettes mères.

5.4.1.3 Test du système à MDDL avec amortissement proportionnel

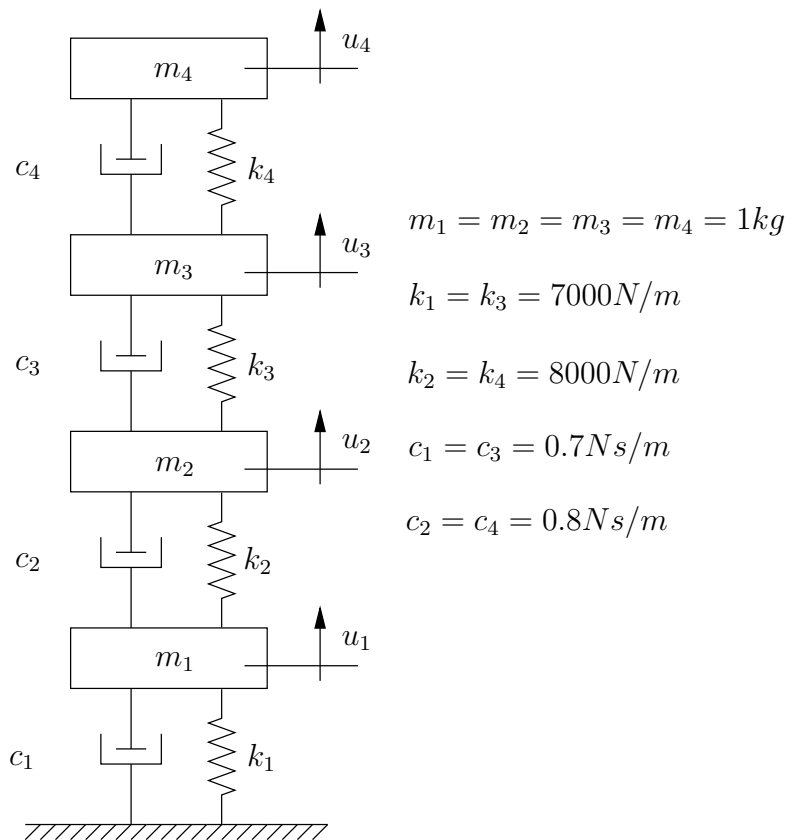


FIGURE 5.9. Test du système à amortissement proportionnel

Le modèle du test est présenté sur la figure 5.9. Ce système à 4 DDLs est supposé soumis à un déplacement initial $u(0) = [1.00, 0.75, 0.50, 0.25]^T$ sans vitesse initiale $\dot{u}(0) = 0$. Les déplacements sur les masses sont obtenus par la méthode Runge-Kutta avec les paramètres d'échantillonnage : période $\Delta t = 0.0049(sec)$ et longueur d'enregistrement $L = 5(sec)$ sur 1024 points. Les réponses sont incluses sur la figure 5.10. En appliquant la procédure proposée, trois valeurs de Q sont utilisées afin d'illustrer la validité de la méthode. Le choix de Q s'effectue à l'aide de la transformation de

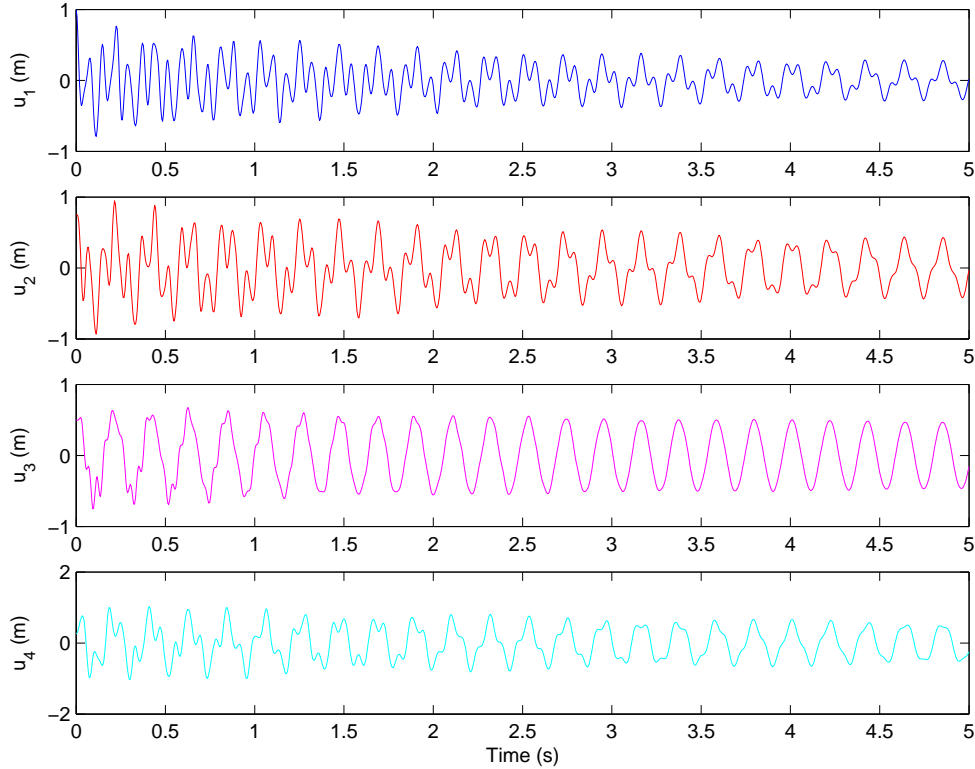


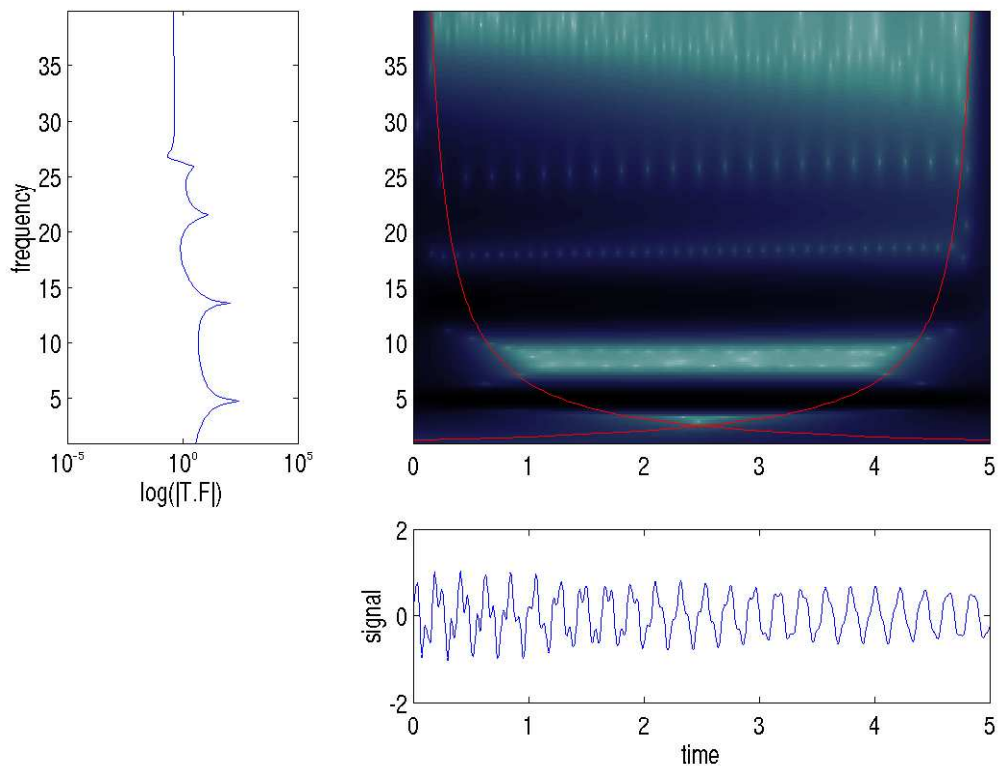
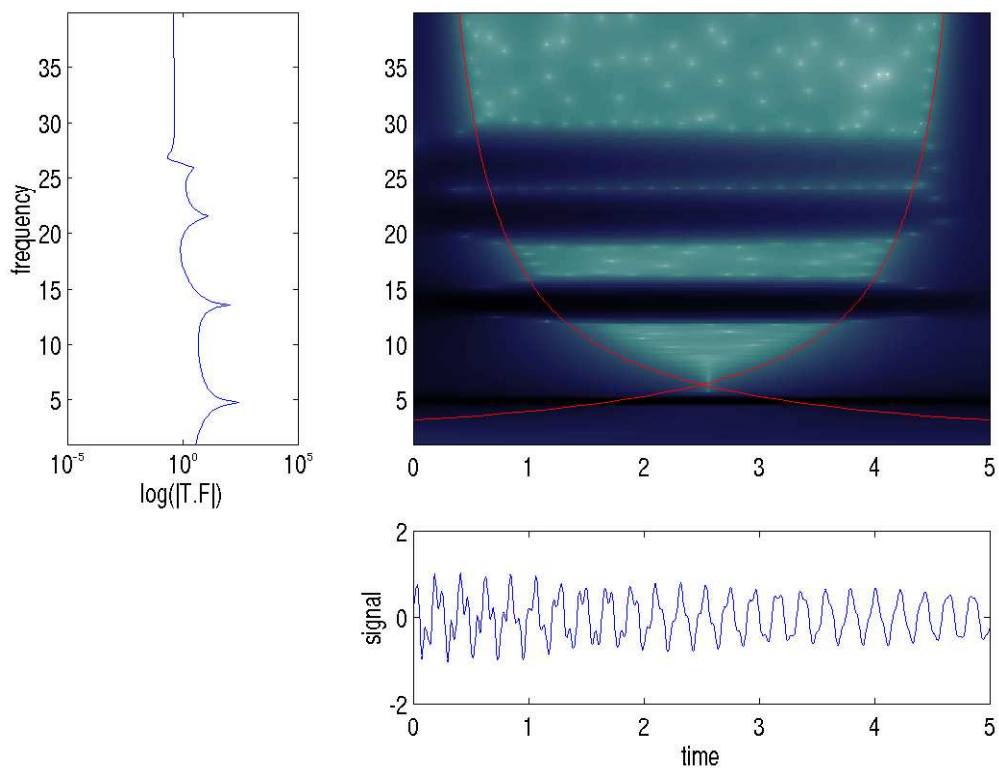
FIGURE 5.10. Réponse en déplacements

Fourier. Les intervalles proposés pour Q et les valeurs choisies sont sur le tableau 5.2. Les figures 5.11, 5.12 et 5.13 présentent la TO, la TF et le signal $u_4(t)$ où les TO sont calculées avec différentes valeurs de Q .

TABLEAU 5.2. Choix des valeurs de Q

ω_j	$d\omega_j$	$c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \leq Q \leq \frac{L\omega_j}{2c_t}$	$Q_{choisie}$
10π	10π	$2.500 \leq Q \leq 15.708$	8
27π	17π	$3.971 \leq Q \leq 42.412$	20
42π	10π	$10.5 \leq Q \leq 65.973$	30
52π	10π	$13.000 \leq Q \leq 81.681$	30

A partir des valeurs de Q choisies, les arêtes et les squelettes sont déterminés. Comme le premier test de 1DDL l'a démontré, le résultat d'identification des paramètres est presque identique pour

FIGURE 5.11. *Signal $u_4(t)$, TF et TO calculée avec $Q = 8$* FIGURE 5.12. *Signal $u_4(t)$, TF et TO calculée avec $Q = 20$*

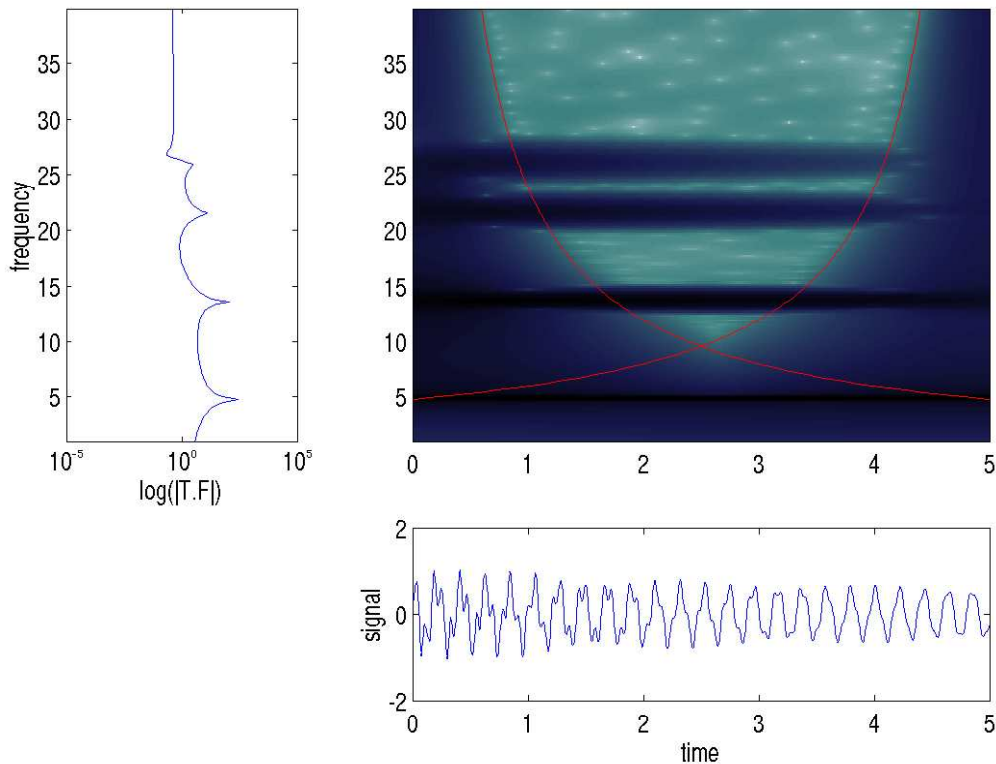


FIGURE 5.13. Signal $u_4(t)$, TF et TO calculée avec $Q = 30$

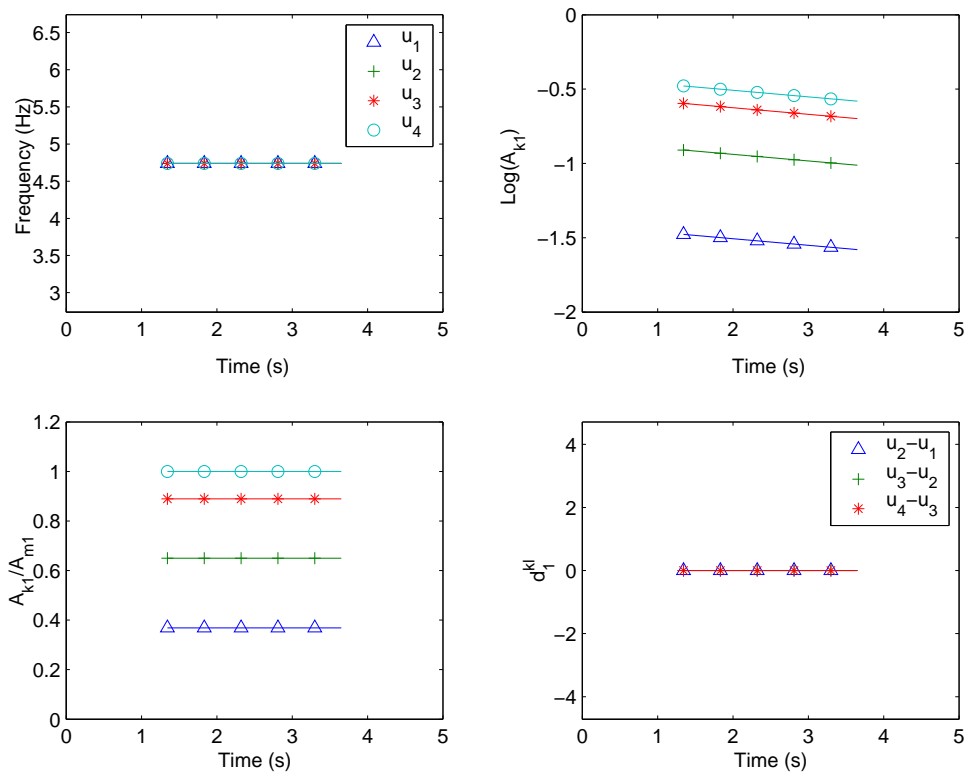


FIGURE 5.14. Traitement du premier mode

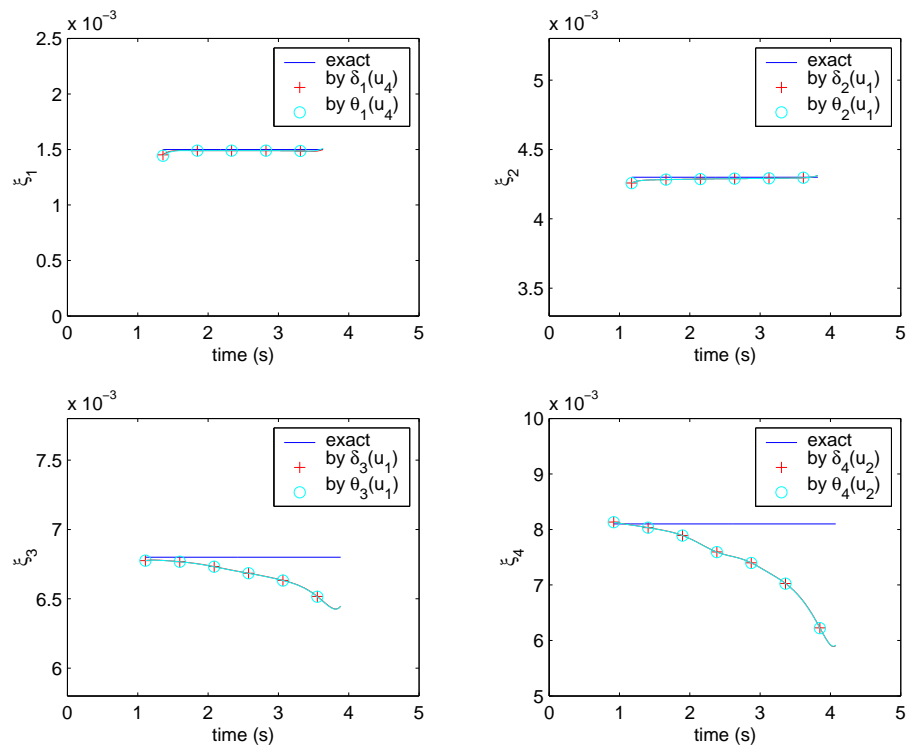


FIGURE 5.15. Les amortissement du système MDDL

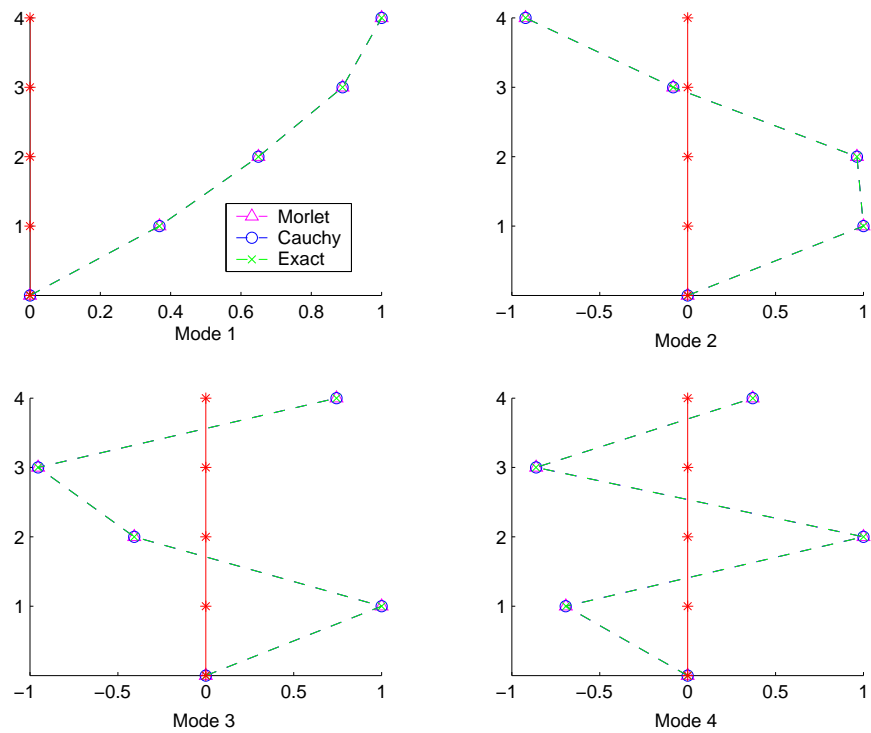


FIGURE 5.16. Les modes du système MDDL

TABLEAU 5.3. Paramètres modaux du système MDDL

Mode	Exact	Identifié		Exact	Identifié	
	fréquence (Hz)	fréquence (Hz) Morlet	Cauchy	amortissement (%)	amortissement (%) Morlet	Cauchy
1	4.7397	4.7397	4.7396	0.15	0.15	0.15
2	13.5900	13.5905	13.5906	0.43	0.43	0.43
3	21.5035	21.5146	21.5145	0.68	0.67	0.67
4	25.9414	25.9764	25.9797	0.81	0.75	0.75

tous les chemins. C'est pour cela que ici, l'identification de fréquences et d'amortissements se fait par la méthode courante i.e, fréquence par arête, amortissement par module. D'ailleurs, le but de ce test est de montrer la validité du choix de Q permettant l'isolation des modes et l'identification des modes $\{\phi_j\}$. La figure 5.14 traite le premier mode extrait avec les arêtes, le logarithme des modules, le rapport des modules du mode et la différence de phase entre les points de mesure. Tous les modes sont ainsi traités avec l'ondelette mère de Morlet et de Cauchy. La figure 5.15 présente le chemin direct aux amortissements par la phase. La figure 5.16 donne les configurations des modes du système à MDDL, exacts et identifiés par ondelette de Morlet et ondelette de Cauchy. Les valeurs de Q choisies sont assez élevées ($Q \geq 8$) et les résultats obtenus dans le tableau 5.3 sont très similaires. Les résultats des paramètres modaux identifiés s'accordent bien avec les valeurs exactes du système. Cela confirme la validité de la procédure d'identification sur le système avec un amortissement proportionnel.

5.4.1.4 Test du système à MDDL avec amortissement non-proportionnel

Ce test est pris avec le modèle utilisé par Hasselman et Jézéquel comme l'indique la figure 5.17. Le facteur γ sert à contrôler le niveau d'amortissement. Dans ce test numérique, la valeur de $\gamma = 1$ est utilisée. Les réponses impulsionnelles (voir la figure 5.18) sont enregistrées sur les masses en termes de déplacements obtenus par transformation de Fourier inverse.

TABLEAU 5.4. Paramètres modaux du système MDDL

Mode	Q_{choisi}	Exact	Identifié		Exact	Identifié	
		fréquence (Hz)	fréquence (Hz) Morlet	Cauchy	amortissement (%)	amortissement (%) Morlet	Cauchy
1	5	0.0745	0.0745	0.0745	0.45	0.44	0.45
2	15	0.1967	0.1967	0.1967	0.86	0.86	0.86
3	30	0.2778	0.2778	0.2778	1.48	1.47	1.47
4	30	0.4071	0.4071	0.4071	1.30	1.29	1.29

L'impulsion $\delta(0)$ est appliquée sur la masse m_1 . Les paramètres de l'échantillonnage sont $\Delta t = 0.2455(\text{sec})$ et 1024 points d'enregistrement. Les fréquences et amortissements (exacts et identifiés) sont donnés dans le tableau 5.4. Les modes complexes (exacts et identifiés) du système sont donnés dans le tableau 5.5. On constate une bonne concordance entre les valeurs exactes et les valeurs estimées par ondelettes Morlet et Cauchy. Les résultats obtenus confirment bien l'efficacité de la méthode proposée et le modèle d'amortissement non proportionnel utilisé.

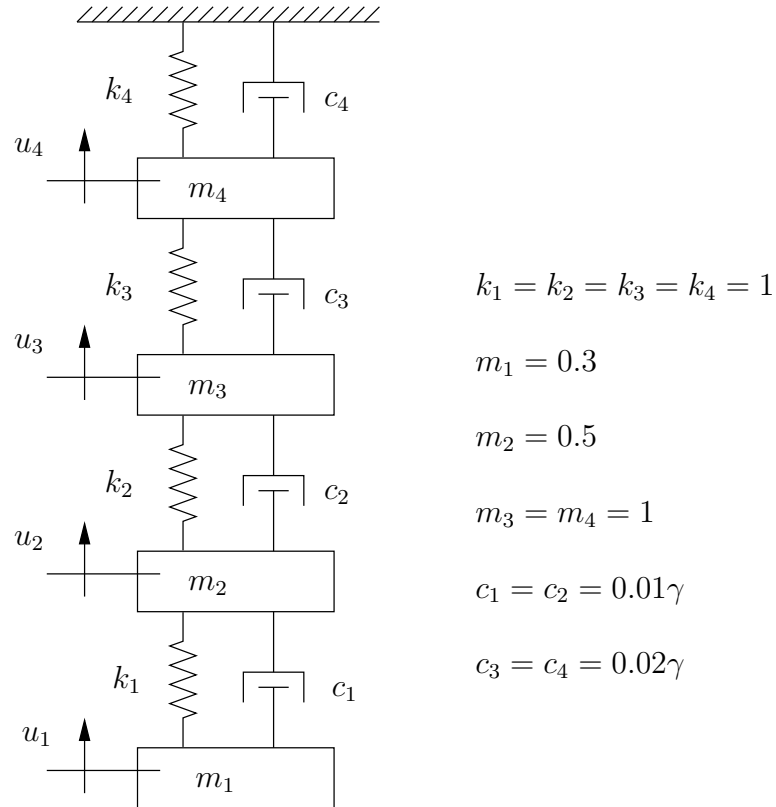


FIGURE 5.17. Test du système à l'amortissement non-proportionnel

TABLEAU 5.5. Modes complexes du système MDDL

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Exact	$0.9343 - 0.0003i$	$0.5418 - 0.0022i$	$0.0862 - 0.0111i$	$-0.9623 - 0.0007i$
	$0.7662 - 0.0010i$	$-0.3301 - 0.0047i$	$-0.9591 - 0.0069i$	$0.2227 + 0.0021i$
	$0.4302 - 0.0006i$	$-0.6978 + 0.0070i$	$0.9170 + 0.0209i$	$-0.0490 - 0.0022i$
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Morlet	$0.9343 - 0.0003i$	$0.5418 - 0.0022i$	$0.0866 - 0.0124i$	$-0.9617 - 0.0038i$
	$0.7662 - 0.0010i$	$-0.3301 - 0.0047i$	$-0.9587 - 0.0076i$	$0.2225 + 0.0031i$
	$0.4302 - 0.0006i$	$-0.6978 + 0.0069i$	$0.9165 + 0.0225i$	$-0.0489 - 0.0025i$
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Cauchy	$0.9343 - 0.0003i$	$0.5418 - 0.0022i$	$0.0866 - 0.0118i$	$-0.9614 - 0.0035i$
	$0.7662 - 0.0010i$	$-0.3301 - 0.0048i$	$-0.9586 - 0.0072i$	$0.2224 + 0.0030i$
	$0.4302 - 0.0006i$	$-0.6978 + 0.0069i$	$0.9163 + 0.0217i$	$-0.0489 - 0.0025i$

5.4.2 Application sur les données réelles

Les deux paragraphes précédents ont montré la validité de la procédure d'identification des paramètres modaux en utilisation la réponse libre du système quelque soit l'amortissement proportionnel ou non proportionnel. Dans ce paragraphe, la procédure sera appliquée sur un test réel de vulnérabilité sismique. Comme on ne connaît pas le modèle d'amortissement, les deux modèles proportionnel et non-proportionnel seront pris en compte.

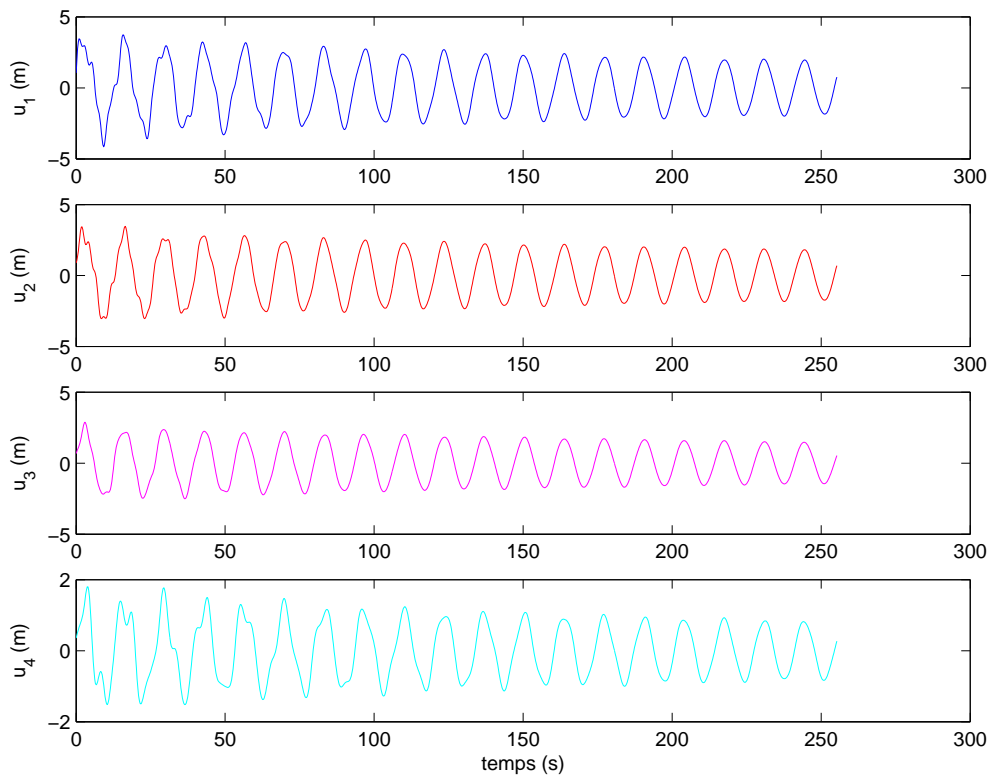


FIGURE 5.18. Déplacements du système MDDL de la figure 5.17, $\gamma = 1$

5.4.2.1 Présentation des essais non destructifs

Les essais de vulnérabilité de bâtiments dans cette section sont réalisés par S. Hans *et al.*. On présente ici brièvement la campagne d'essais. D'autres informations plus détaillées peuvent être trouvées aux références [12],[22] et [52].

- **Contexte expérimental**

Le risque naturel que représentent les séismes constitue une préoccupation importante pour les zones densément peuplées comme la Côte d'Azur. Ce risque concerne avant tout le parc des bâtiments précédant l'instauration des normes de constructions para-sismiques (normes PS 69). Dans le cadre d'un projet d'étude sur la vulnérabilité sismique du bâti existant initié à l'ENTPE par C. Boutin, une série d'expérimentations a été réalisée sur plusieurs bâtiments de la ville de Vaulx-en-Velin (69). Ces expérimentations in situ visent principalement à apporter des informations sur le comportement dynamique des structures réelles, encore assez mal connu, et à évaluer l'importance de phénomènes complexes comme l'interaction sol-structure ou structure-structure. L'objectif du projet est de fournir des outils destinés à l'auscultation des structures. A ce jour, sept bâtiments HLM de type courant, construits entre 1960 et 1980 ont été testés. Ils avaient un profil en plan simple, périodique en élévation. On présente un de ces bâtiments sur la figure 5.19 pour illustration.

- **Bâtiment de l'étude**

Le bâtiment, datant de 1970, est un bâtiment de sept étages dont les dimensions sont respectivement 30 m de longueur, 14 m de largeur et 22 m de hauteur. L'ossature est constituée par des voiles en béton banché faiblement armé et des planchers en béton armé, réalisés sur place par

coffrage tunnel. Des panneaux préfabriqués en béton faiblement armé ont ensuite été posés sur les deux façades. La plupart de ces panneaux sont percés d'une fenêtre, excepté deux rangées verticales en façade nord. Ce bâtiment présente une structure très régulière, chaque niveau est un assemblage de quatorze cellules identiques réparties symétriquement de part et d'autre du couloir central. Seule la présence de la cage d'escalier, des deux panneaux pleins en façade et des ouvertures dans un des voiles internes perturbe la périodicité en plan. En élévation, mis à part le rez-de-chaussée qui présente de légères différences, chaque étage est la reproduction d'un même motif.

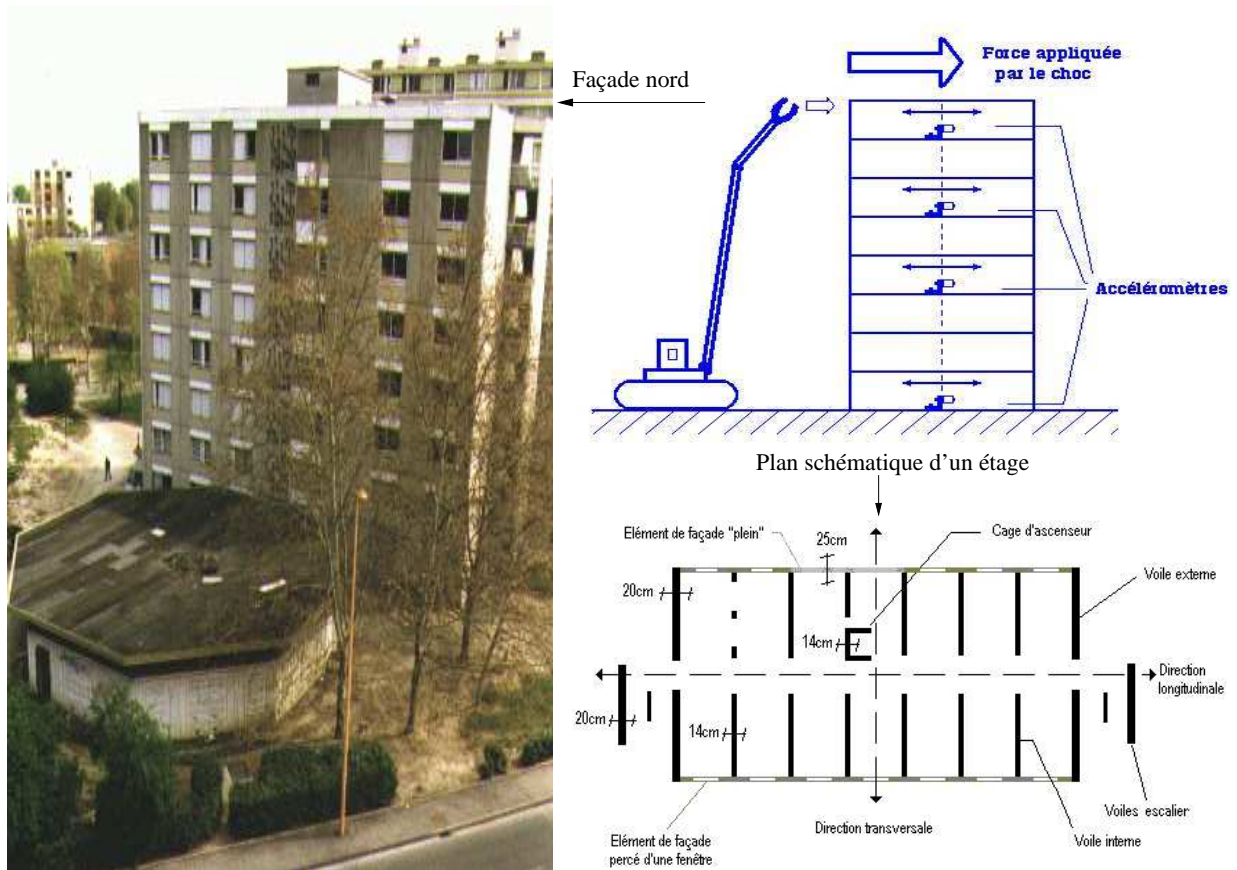


FIGURE 5.19. *Bâtiment et essai de choc*

- **Description des essais. Essai par chocs.**

La procédure expérimentale consiste à enregistrer les réponses accélérométriques du bâtiment à différents types d'excitation. Trois sortes d'excitation ont été utilisées, à savoir : (1) le bruit de fond mécanique, constamment présent et d'origine naturelle (vent, etc.) ou humaine (circulation automobile, etc.), (2) une force harmonique contrôlée en fréquence, amplitude et direction, produite à l'aide d'un excitateur à balourds fixé à l'intérieur de la structure, (3) des chocs appliqués par un engin mécanique. La technique utilisant l'analyse par ondelettes étant bien adaptée pour l'étude des signaux transitoires, seul l'essai de chocs est présenté et étudié ici. L'immeuble étudié devant être détruit, un engin de démolition a été utilisé pour appliquer en tête d'édifice des chocs (non quantifiés) sur la structure, dans les sens transversal et longitudinal. L'impulsion donnée est très brève et l'immeuble entre en oscillations libres. A préciser que même lorsqu'ils sont assez violents, les chocs n'occasionnent aucun dégât visible sur le bâtiment hormis dans une zone

très localisée autour du point d'impact. Des accéléromètres placés à différents étages permettent d'enregistrer la réponse du bâtiment. Les accélérations mesurées sont de l'ordre de $5.10^{-3}g$ à la base et $2.10^{-2}g$ en tête d'édifice, ce qui implique que le comportement de la structure se situe a priori dans le domaine quasi-élastique.

5.4.2.2 Résultats du test réel

Les tests par choc sont réalisés suivant deux directions : longitudinale et transversale. Afin de tester la méthode, on ne prend que les signaux du test longitudinal et ils sont tracés sur la figure 5.20. Les réponses en accélération sont notées de 1 à 4 suivant l'ordre des capteurs de haut en bas. On applique la procédure d'identification proposée sur ces tests afin d'estimer les paramètres

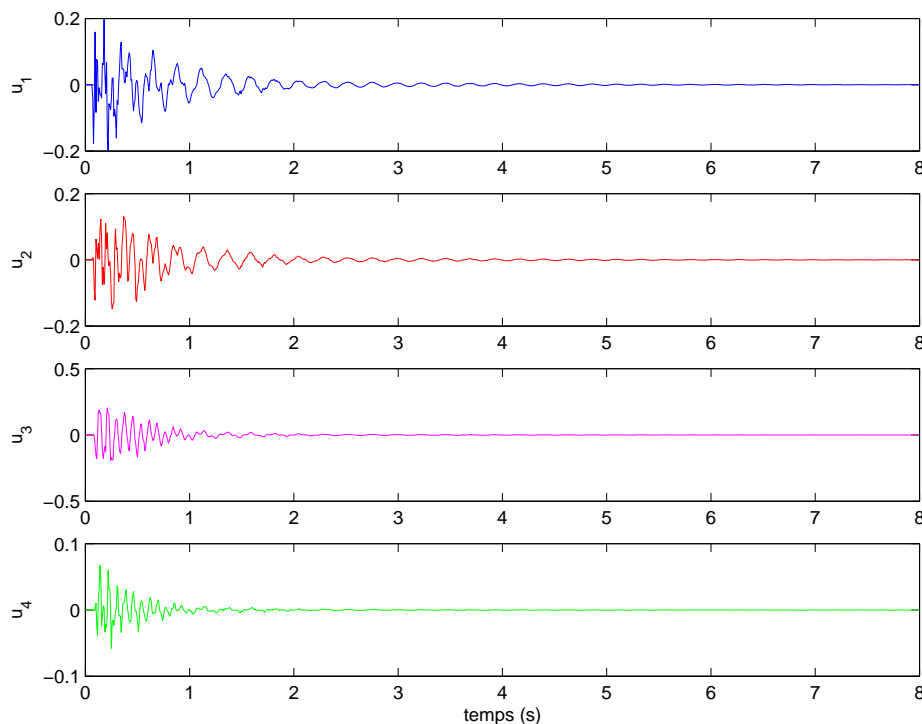


FIGURE 5.20. Réponses en accélération du test, direction longitudinale

modaux. Les modes sont identifiés par les deux approches : les modes normaux et les modes complexes.

TABLEAU 5.6. Paramètres modaux du bâtiment testé, direction longitudinale

Mode	Q_{choisi}	Cauchy		Morlet	
		fréquence (Hz)	amortissement (%)	fréquence (Hz)	amortissement (%)
1	15	4.27	2.23	4.27	2.23
2	45	13.40	1.17	13.40	1.16

Les fréquences sont évaluées par les arêtes et les amortissements sont déterminés par la pente des amplitudes des signaux analytiques. Le tableau 5.6 donne des estimations de fréquences propres et de taux d'amortissement pour les deux premiers modes. Les déformées modales de ces deux modes sont présentées dans le tableau 5.7 avec les modes complexes provenant de l'hypothèse d'amortissement non proportionnel et avec les modes normaux provenant de l'hypothèse d'amortissement proportionnel

TABLEAU 5.7. *Modes longitudinaux estimés sur le bâtiment*

	Modèle complexe		Modèle normal	
	Mode 1	Mode 2	Mode 1	Mode 2
Cauchy	1.0000	$-0.5268 + 0.0922i$	1.0000	-0.5357
	$0.7953 - 0.0244i$	$0.5713 + 0.0577i$	0.7956	0.5758
	$0.5116 - 0.0292i$	1.0000	0.5125	1.000
	$0.0798 - 0.0188i$	$0.1573 - 0.0778i$	0.0820	0.1758
Morlet	1.0000	$-0.5272 + 0.0911i$	1.0000	-0.5358
	$0.7953 - 0.0246i$	$0.5723 + 0.0526i$	0.7957	0.5755
	$0.5116 - 0.0294i$	1.0000	0.5124	1.0000
	$0.0798 - 0.0191i$	$0.1563 - 0.0796i$	0.0821	0.1757

On peut constater que les deux modèles donnent les déformées modales respectivement : imaginaires (amortissement non proportionnel) et réels (amortissement proportionnel). Toutefois, les parties imaginaires des déformées modales estimées sont assez faibles et leurs parties réelles sont presque égales aux modes normaux estimés. Cela confirme que le modèle d'amortissement proportionnel est encore tout-à-fait applicable quand les amortissements sont faibles et quand les modes sont assez éloignés les uns des autres comme le cas de ce bâtiment [47]. Les fréquences estimées ici sont proches avec celles déterminées par Boutin *et al.* dans la référence [22] quand ils utilisent d'autres techniques d'identification modale.

5.5 Remarques et conclusions

Dans ce chapitre on a appliqué les résultats de l'analyse en ondelettes des signaux modulés en temps et en fréquence à l'identification de paramètres modaux (fréquences propres, taux d'amortissement et les déformées modales) à des systèmes mécaniques linéaires. Une procédure complète a été établie en accord avec le choix des paramètres des ondelettes mères. L'étape d'identification peut se faire par différentes méthodes et dans le domaine où l'effet de bord est négligeable. Les tests numériques permettent de comparer les valeurs estimées par la procédure proposée et les valeurs exactes. La concordance entre les résultats théoriques et estimés montre bien la validité de cette méthode. La procédure prend aussi en compte deux modèles pour l'amortissement (proportionnel et non proportionnel). Elle est appliquée à un test réel de vulnérabilité des bâtiments et confirme la conclusion sur le modèle d'amortissement proportionnel à savoir qu'il est encore valable quand les amortissements sont faibles et que les fréquences sont assez éloignées.

Chapitre 6

Identification des systèmes mécaniques non-linéaires

6.1 Introduction

La majorité des structures mécaniques est habituellement traitée en analyse modale par un modèle linéaire. Toutefois, quand la structure subit de grands déplacements, les effets de non-linéarité deviennent importants et le modèle linéaire n'est plus adéquat. Lorsque l'amplitude du déplacement reste faible, des distorsions peuvent encore apparaître, par exemple dues au frottement sec... Pour ces raisons, la recherche pour la caractérisation et l'identification des non-linéarités devient de plus en plus active.

Le chapitre précédent a traité complètement l'analyse modale d'un système linéaire par la transformation en ondelettes. Sachant que l'analyse temps-fréquence en ondelettes est très efficace pour le traitement des signaux modulés en temps et en fréquence, on essaie dans ce chapitre, d'étendre la technique pour la caractérisation, la classification et l'identification de non-linéarité d'un système mécanique. La section 6.2 présente brièvement les méthodes d'identification de non-linéarité et met en évidence l'utilisation de l'analyse temps-fréquence dont la transformation en ondelettes. La section 6.3 propose l'application de la transformation en ondelettes à l'identification des structures non-linéaires. Une procédure est établie afin de détecter, de classifier et d'identifier la non-linéarité. Des tests numériques et réels sont utilisés à la section 6.4 pour valider la procédure proposée. Finalement, des remarques et des conclusions sont tirées.

6.2 Méthodes d'identification du comportement non-linéaire

Dans la littérature, l'identification des non-linéarités fait souvent appel à des techniques de traitement du signal comme la transformation de Hilbert, les séries de Volterra ou les spectres d'ordre élevé. Feldman [43] et Galleani [46] proposent pour des oscillateurs non-linéaires, l'application de la transformation de Hilbert ou de celle de Wigner-Ville respectivement, afin d'obtenir la fréquence et l'amplitude instantanées de la réponse. La non-linéarité est ensuite identifiée en minimisant un critère fondé sur la dépendance entre la fréquence et l'amplitude de la réponse. Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté où la réponse est la somme des termes quasi-harmoniques [17, 18, 111], ces méthodes nécessitent un filtre passe-bande pour séparer chaque composante du

signal. La transformation en ondelettes, grâce à ses propriétés de filtrage, permet d'obtenir directement la fréquence et l'amplitude instantanées des composantes. L'application de cette technique à l'identification modale a déjà donné des résultats satisfaisants. Nous avons amélioré dans la deuxième partie, l'implémentation numérique en proposant un intervalle de variation pour le(s) paramètre(s) de définition de l'ondelette mère afin de supprimer deux effets gênants pour l'identification : l'effet de bords et l'effet de couplage entre deux modes voisins pour des systèmes de modes proches. Nous proposons ici, d'étendre l'utilisation de cette technique aux réponses libres de systèmes faiblement dissipatifs et faiblement non-linéaires afin de permettre une caractérisation des non-linéarités et une éventuelle identification. Des résultats récents quant aux systèmes non-linéaires ont été présentés aux références [111] et [13]. La procédure est d'abord présentée et appliquée au cas d'oscillateurs faiblement amortis avec des non-linéarités en déplacement. Trois cas sont étudiés : linéaire par morceaux, bilinéaire et cubique. Elle est enfin appliquée aux réponses libres d'une poutre métallique avec différentes non-linéarités.

6.3 Application de la transformation en ondelettes à l'identification de non-linéarité

Les systèmes mécaniques considérés sont faiblement dissipatifs et faiblement non-linéaires en déplacement. L'écart de l'oscillation libre est faible autour du point d'équilibre statique.

6.3.1 Principe de la méthode

- Détection de non-linéarité : La non-linéarité se présente par la variation des fréquences propres en fonction des amplitudes.
- Identification de non-linéarité : Partant de la formule générale de l'identification précédemment citée (5.32) :

$$\min_{p_1 \in D_1, p_2 \in D_2, \dots, p_i \in D_i, \dots, p_n \in D_n} \|R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(\cdot) - R^{mesure}(\cdot)\|_2^2 \quad (6.1)$$

où $D_1, D_2, \dots, D_i, \dots, D_n$ sont les domaines des paramètres $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$ respectivement. La méthode se base sur l'indication de détection de non-linéarité ci-dessus. Pour le cas des systèmes à 1DDL, c'est la fréquence fondamentale appelée $f_0(t)$ qui varie en fonction de l'amplitude $A(t)$. A noter que l'on ne considère ici que la non-linéarité en déplacement. La non-linéarité peut alors se déterminer en prenant :

$$R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A) = f_{0, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A) \quad \text{et} \quad R^{mesure} = f_0^{mesure}(A) \quad (6.2)$$

Pour le cas des systèmes à MDDL faiblement amortis et faiblement non-linéaires, une tentative similaire est faite sur le premier mode dans les tests de validation.

REMARQUE 6.3.1

Il est évident que l'identification de non-linéarité nécessite la connaissance du modèle, i.e,

$$R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A) = f_{0, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A) \quad (6.3)$$

Pourtant, si la formule analytique de cette expression est moins difficile dans le cas linéaire, ce n'est pas la même chose dans le cas d'un système non-linéaire. Alors, dans ce chapitre, on essaie de traiter les modèles non-linéaires courants de type 1DDL et puis, de les étendre dans le cas MDDL.

Afin de comparer les différents modèles de non-linéarité, il est possible d'utiliser les erreurs de corrélation

$$\mathcal{E} = \|R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A) - R^{mesure}(A)\|_2 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{E}} = \frac{\|R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A) - R^{mesure}(A)\|_2}{\|R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A)\|_2} \quad (6.4)$$

Le modèle le plus pertinent donnera la valeur de $\tilde{\mathcal{E}}$ la plus petite.

□

6.3.2 Modèles des systèmes non-linéaires

Cette section cherche à établir des relations : $R_{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A) = f_{0, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n}^{modele}(A)$ pour des systèmes non-linéaires en vibration étudiés. On commence ainsi par des oscillateurs (1DDL) avec les non-linéarités couramment rencontrées et puis, on fait des hypothèses sur des systèmes à MDDL pour que la méthode reste valable pour des cas faiblement non-linéaires et faiblement amortis.

• Oscillateurs non-linéaires

Un système à 1DDL est aussi appelé un oscillateur. Un oscillateur de masse m , ayant une non-linéarité en déplacement, est régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{u} + C(\dot{u}) + S(u) = 0. \quad (6.5)$$

où $C(\dot{u})$ est une force dissipative soit de type de frottement sec : $C(\dot{u}) = c\text{Sgn}(\dot{u})$, soit de type visqueux linéaire : $C(\dot{u}) = c\dot{u}$. La non-linéarité est caractérisée par la fonction $S(u)$. La figure 6.1 présente les trois types de non-linéarité considérés : (1) linéaire par morceaux, (2) bilinéaire et (3) cubique (Duffing). On se place dans le cas où le coefficient c de la force dissipative est "faible". On montre alors que la réponse libre $u(t)$ d'un tel oscillateur est au premier ordre asymptotique. Le tableau 6.1 donne l'expression analytique de la pulsation fondamentale $\omega_0^{modele}(A)$ ou de la période $T_0^{modele}(A)$ (i.e, la fréquence fondamentale) en fonction de l'amplitude pour les trois types d'oscillateurs conservatifs étudiés ($C(\dot{u}) = 0$) [figure 6.2]. Les résultats de la fréquence fondamentale du type 1 et type 3 sont trouvés dans la référence [80] et celle du type 2 est calculée à l'annexe C. A cause de la faible dissipativité du système, la fréquence fondamentale du système dissipatif est supposée égale à celle du système conservatif associé.

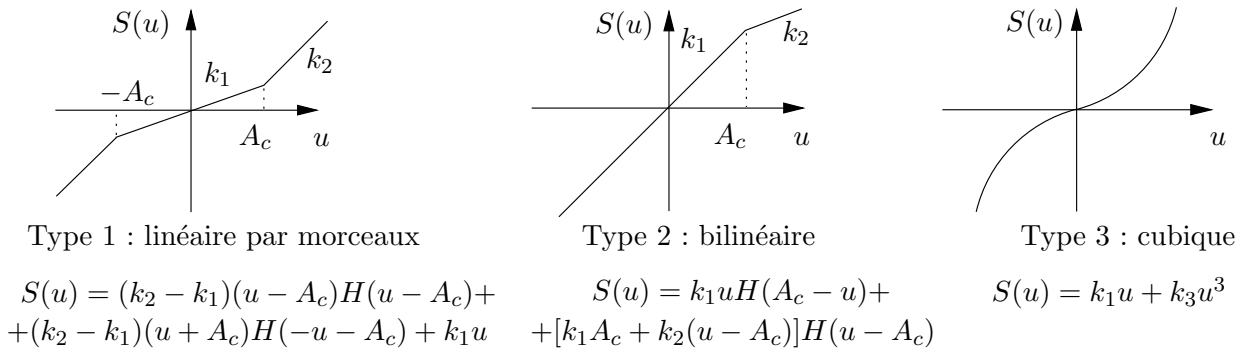


FIGURE 6.1. Différents types de non-linéarité.

• Système à multiple degrés de liberté non-linéaire

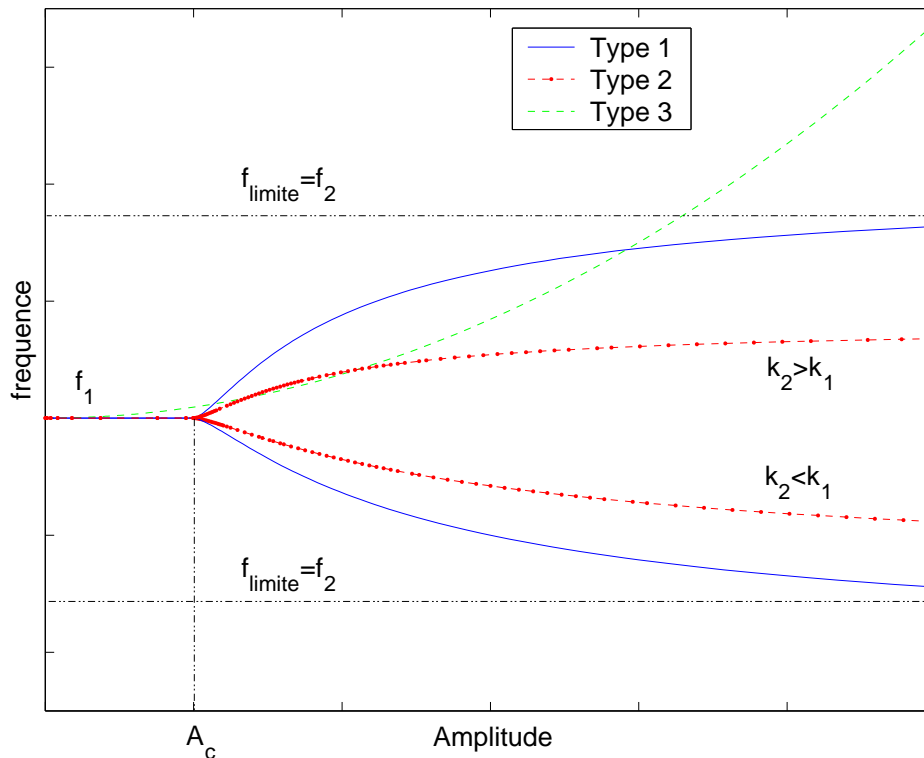
On a démontré au chapitre 5 que la réponse libre d'un système mécanique linéaire faiblement amorti est la somme des composantes asymptotiques. Quand le système a un comportement non-linéaire faible (approximation de première harmonique, voir la référence [17, 111]) ou quand le système oscille avec de petits écarts autour de la position d'équilibre, cette remarque est encore valable,

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N A_{kj}(t) \cos(\alpha_{kj}(t)) \quad (6.6)$$

Type de non-linéarité	Fréquence fondamentale approchée
Type 1	$\omega_0^2 = \frac{k_2}{m} - \frac{2}{\pi m} (k_2 - k_1) \left[\arcsin\left(\frac{A_c}{A}\right) + \frac{A_c}{A} \left(1 - \frac{A_c^2}{A^2}\right)^{1/2} \right] \text{ si } A > A_c$ $\omega^2 = \frac{k_1}{m} \text{ si } A \leq A_c$
Type 2	$\frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} + \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A}{A_c} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{A}{A_c} - 1\right) + 1}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} \arcsin\left(\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A}{A_c} - 1\right) + 1}\right) \text{ si } A > A_c$ $\frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} \text{ si } A \leq A_c$
Type 3	$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{k_3}{k_1} A^2\right)}$

TABLEAU 6.1. *Fréquences fondamentales approchées*

En appliquant la propriété de filtrage de la transformation en ondelettes, on peut obtenir les composantes $A_{kj}(t)$ et $\alpha_{kj}(t)$. La relation entre la fréquence fondamentale et son amplitude est déduite. L'identification de non-linéarité sera la même que le cas d'un système à 1DDL. Il est important de noter que les hypothèses faites sont : dissipation faible, non-linéarité faible et oscillation faible autour du point d'équilibre.

FIGURE 6.2. *Comportement de différents oscillateurs non-linéaires*

REMARQUE 6.3.2

Les arguments ci-dessus se réfèrent au déplacement, or en réalité, on se sert des accéléromètres pour mesurer les vibrations. La transformation en ondelettes, grâce à la propriété donnée dans l'expression (2.60) permet facilement d'obtenir les composantes en déplacements.

□

6.3.3 Procédure d'identification de non-linéarité

Nous appliquons les analyses ci-dessus à l'identification des paramètres d'un système non-linéaire par la TO. Le but est d'obtenir la composante fondamentale et à partir de là, l'identification de la non-linéarité est faite. Il est possible de classer les différents types de non-linéarité en comparant les différents valeurs de \mathcal{E} ou plus précisément $\tilde{\mathcal{E}}$. Les démarches de la méthode d'identification sont les suivantes :

- 1^{ère} étape : calculer la TO des signaux $u_k(t)$ soit directement (tests numériques) soit indirectement (tests réels par la relation (2.60)). Le choix des paramètres d'ondelettes mères est important et il doit satisfaire l'inégalité (4.27) pour pouvoir capter les composantes.
- 2^e étape : extraire les arêtes et les squelettes des composantes par les algorithmes appropriés. Cette étape permet d'avoir les fréquences instantanées $\dot{\alpha}_{kj}^{measure}(b)$ et les signaux analytiques associés $Z_{u_{kj}}^{measure}(b)$. L'approximation par la méthode de phase stationnaire est :

$$\dot{\alpha}_{kj}^{measure}(b) = \frac{\dot{\phi}_\psi(0)}{a_{rkj}(b)} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} Z_{u_{kj}}^{measure}(b) &= \frac{2}{\hat{\psi}(a_{rkj}\dot{\alpha}_{kj}^{measure})} T_\psi[u_{kj}^{measure}](b, a_{rkj}(b)) \\ &\approx \frac{2}{\hat{\psi}(\dot{\phi}_\psi(0))} T_\psi[u_k^{measure}](b, a_{rkj}(b)) \end{aligned} \quad (6.8)$$

- 3^e étape : identifier les paramètres de non-linéarité en utilisant le critère général avec la relation $\dot{\alpha}_{k1}^{measure}(|Z_{u_{k1}}^{measure}|)$, soit $f_0^{measure}(A^{measure})$ qui est déduite. Disons tout de suite que cette étape amène souvent aux problèmes d'identification non-linéaire des paramètres. La résolution se fait par le programme `lsqnonlin` disponible sous MATLAB.

REMARQUE 6.3.3

Argoul et Le ont proposée quatre indicateurs instantanés pour la caractérisation des systèmes non-linéaires : (1) fréquences instantanées, (2) différences de phases instantanées, (3) logarithme des amplitudes modales instantanées et (4) déformées modales instantanées en se basant sur une procédure d'identification analogue celle du système linéaire [13].

□

6.4 Tests de validation

6.4.1 Tests numériques sur des oscillateurs

Six exemples numériques d'oscillateurs sont envisagés suivant les trois types de non-linéarités combinés avec un amortissement soit de type frottement sec, soit visqueux et notés respectivement **E1S**, **E1V**, **E2S**, **E2V**, **E3S** et **E3V** et dont les paramètres de comportement sont donnés dans le tableau 6.2. La réponse libre $u(t)$ est obtenue numériquement par l'algorithme de Runge-Kutta (MATLAB) sur une longueur d'enregistrement $L = 10(s)$ et 1024 points de mesure avec les conditions initiales : $u(0) = 0.3(m)$ et $\dot{u}(0) = 0(m/s)$. La variation temporelle de $A(t)$ ou de $\ln A(t)$ permet d'estimer correctement, par régression linéaire, le coefficient de frottement sec ou visqueux respectivement. Les paramètres identifiés de $S(u)$ sont donnés dans le tableau 6.3 ainsi que l'erreur de minimisation normalisée : $\tilde{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}(p_i; A^{measure})}{\|\omega_{modele}(A)\|_2}$. La figure 6.3 illustre un exemple pour l'oscillateur E1V : la réponse libre, le module de la transformation de Fourier et le module de la transformation en ondelettes. La figure 6.4 donne le résultat de l'étape d'identification des paramètres par la TO

de cet exemple : une bonne concordance entre la courbe analytiquement approchée avec la courbe extraite à partir de la TO. L'estimation des paramètres initiaux est faite grâce au comportement non-linéaire de différents oscillateurs présenté à la figure 6.2.

TABLEAU 6.2. Paramètres de comportement pour les oscillateurs étudiés de masse $m = 1Kg$

	frottement sec	frottement visqueux
Type 1	$k_1 = 632N/m, k_2 = 158N/m$ $A_c = 0.1m, c = 1.0N$ (E1S)	$k_1 = 632N/m, k_2 = 158N/m,$ $A_c = 0.1m, c = 0.5Ns/m$ (E1V)
Type 2	$k_1 = 632N/m, k_2 = 1422N/m$ $A_c = 0.1m, c = 1.4N$ (E2S)	$k_1 = 632N/m, k_2 = 1422N/m$ $A_c = 0.1m, c = 1.0Ns/m$ (E2V)
Type 3	$k_1 = 632N/m, k_3 = 158N/m$ $c = 1.0N$ (E3S)	$k_1 = 632N/m, k_3 = 158N/m$ $c = 0.5Ns/m$ (E3V)

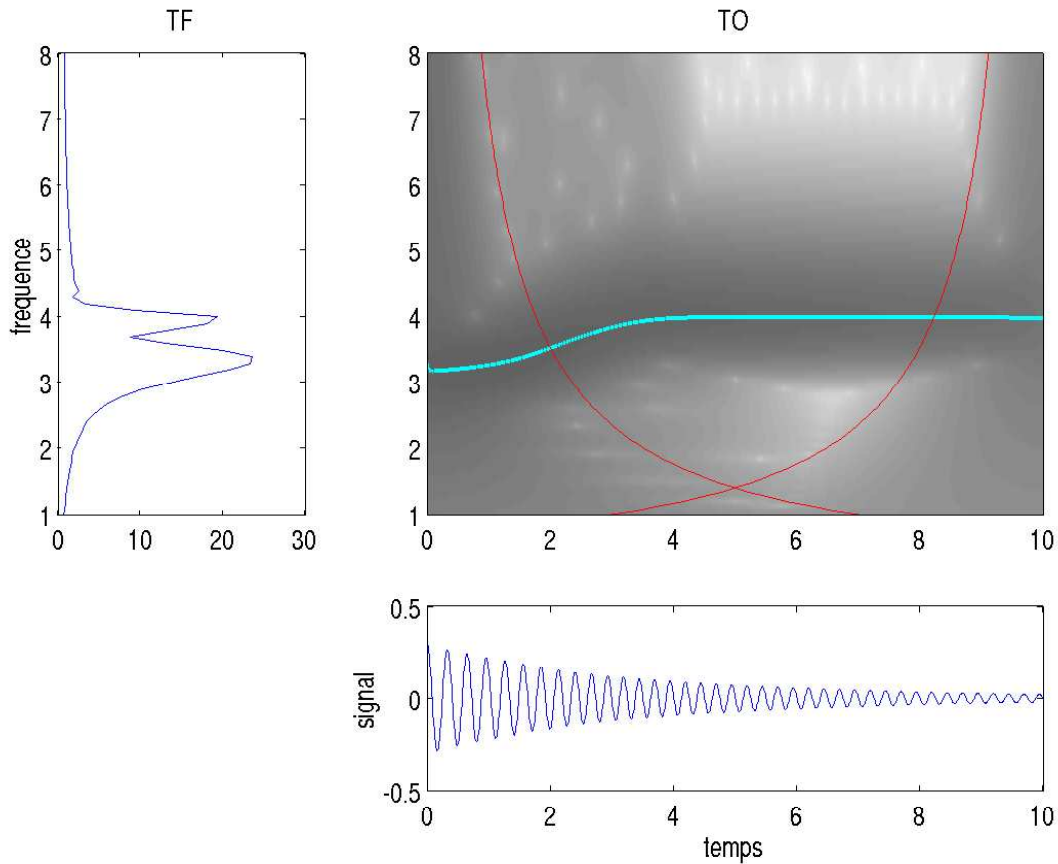


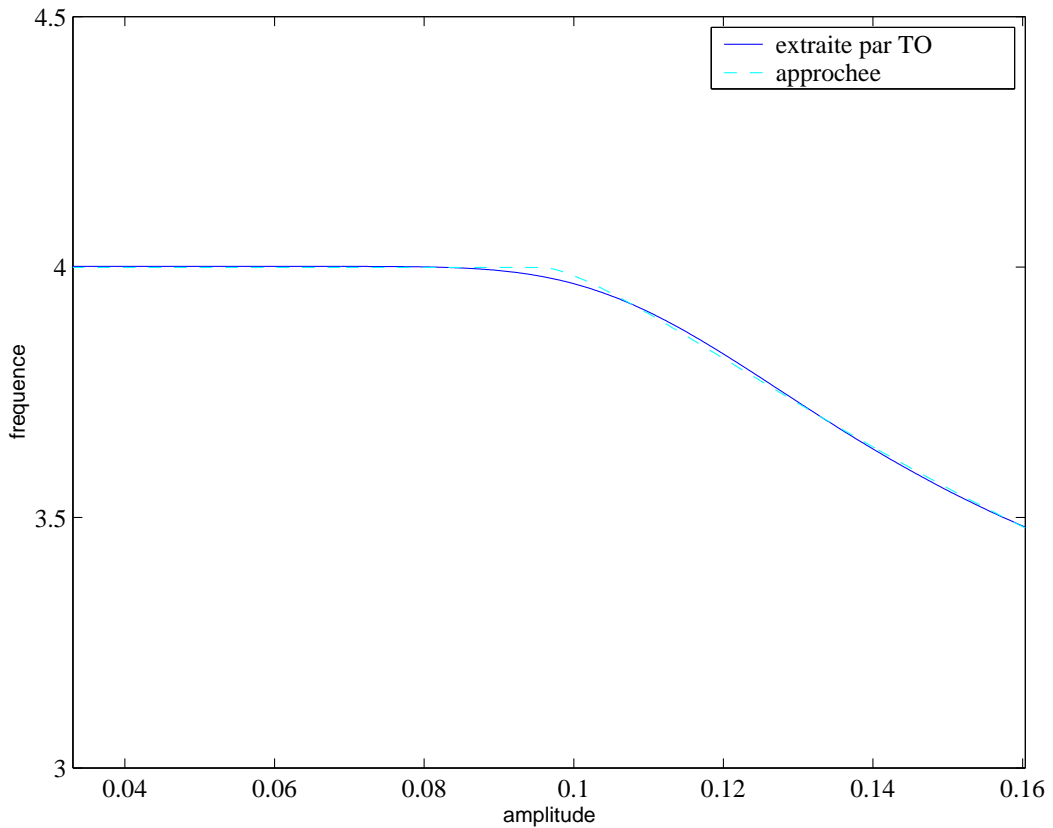
FIGURE 6.3. TF et TO de la réponse libre de l'oscillateur **E1V**

6.4.2 Tests réels, poutre non-linéaire

Les essais réalisés au département "Vibrations et Identification de Structures" du laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de Liège, consistent en la mesure des

TABLEAU 6.3. Résultats de la procédure d'identification

Exemple	Valeurs identifiées	Erreur $\tilde{\mathcal{E}}$
(E1S)	$\tilde{k}_1 = 629.1N/m, \tilde{k}_2 = 172.8N/m, \tilde{A}_c = 0.095m$	4.72×10^{-5}
(E1V)	$\tilde{k}_1 = 631.5N/m, \tilde{k}_2 = 94.1N/m, \tilde{A}_c = 0.096m$	4.74×10^{-5}
(E2S)	$\tilde{k}_1 = 633.4N/m, \tilde{k}_2 = 1333.0N/m, \tilde{A}_c = 0.1m$	5.53×10^{-5}
(E2V)	$\tilde{k}_1 = 632.3N/m, \tilde{k}_2 = 1160.8N/m, \tilde{A}_c = 0.1m$	3.89×10^{-5}
(E3S)	$\tilde{k}_1 = 631.3N/m, \tilde{k}_3 = 173.3N/m$	4.02×10^{-5}
(E3V)	$\tilde{k}_1 = 632.1N/m, \tilde{k}_3 = 164.4N/m$	1.43×10^{-11}

FIGURE 6.4. Identification de non-linéarité de l'oscillateur **E1V**

réponses vibratoires d'une poutre métallique à un choc produit par un marteau. La non-linéarité est créée par deux méthodes : soit par la lamelle non-linéaire, soit par les buttées.

- **Poutre avec lamelle** : Une description complète et détaillée du montage expérimental est fournie dans la thèse de Lenaerts [68]. La poutre est montée horizontalement avec une extrémité encastree et l'autre liée à un support fixe par une lamelle comme le montre la figure 6.5. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sont : longueur= $0.7m$, épaisseur= $0.014m$, masse volumique= $7850kg/m^3$ et module Young= $205GPa$. La lame en acier a une épaisseur= $0.5mm$ et une longueur= $40mm$. Sept accéléromètres également espacés sont collés sur la poutre. Une force impulsionnelle est appliquée au niveau de l'avant dernier capteur à l'aide d'un marteau d'impact. La procédure d'identification de non-linéarité a été appliquée. De plus,

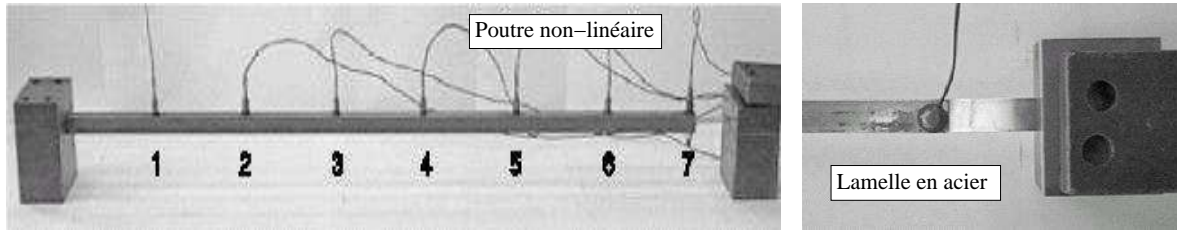


FIGURE 6.5. *Poutre non-linéaire avec lamelle [68].*

quatre indicateurs sont aussi calculés en considérant que le système est linéaire à chaque laps de temps. Puisque la réponse du test est l'accélération, l'utilisation de l'ondelette "mère" de Cauchy facilitera beaucoup de traitement du signal grâce à la relation (2.60). Le choix des valeurs de Q amène à des valeurs de n successivement : $n = 600$, 5660 , 8370 and 58270 pour récupérer les modes $k = 1, 2, 3$ et 4 . La figure 6.6 présente les fréquences instantanées qui varient au cours du temps. On constate que la fréquence fondamentale n'est pas constante mais elle évolue dans le

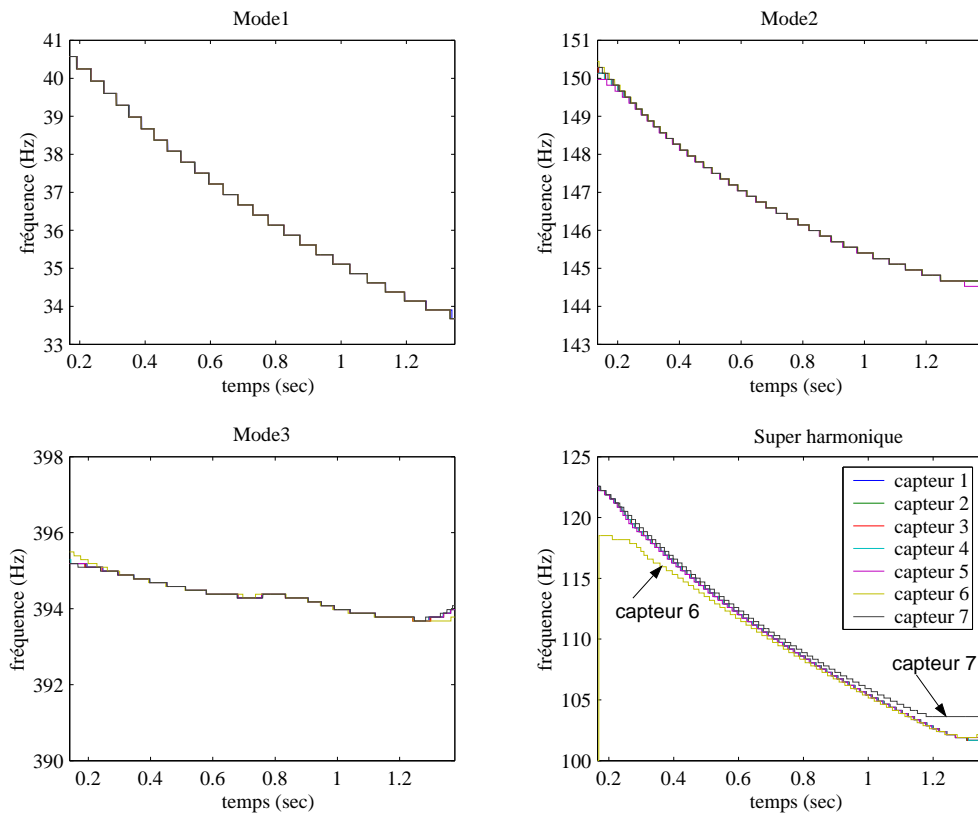


FIGURE 6.6. *Quatre premières fréquences instantanées $f_{jk}(t)$*

temps, par conséquent, c'est le signe d'un système non-linéaire. Les relations entre les fréquences et les amplitudes sont données sur la figure 6.7 et elles sont utilisées pour l'identification de non-linéarité. Le rapport entre la fréquence juste après la fondamentale et elle-même est presque égale à 3, donc, elle est la composante super harmonique. En utilisant le modèle de non-linéarité

de type Duffing, l'équation gouvernant la vibration libre d'un oscillateur est

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) + \beta\omega^2u^3(t) = 0 \quad (6.9)$$

La première approximation de $u(t)$ obtenue par la méthode de Krylov-Bogoliubov : $\tilde{u}(t)$

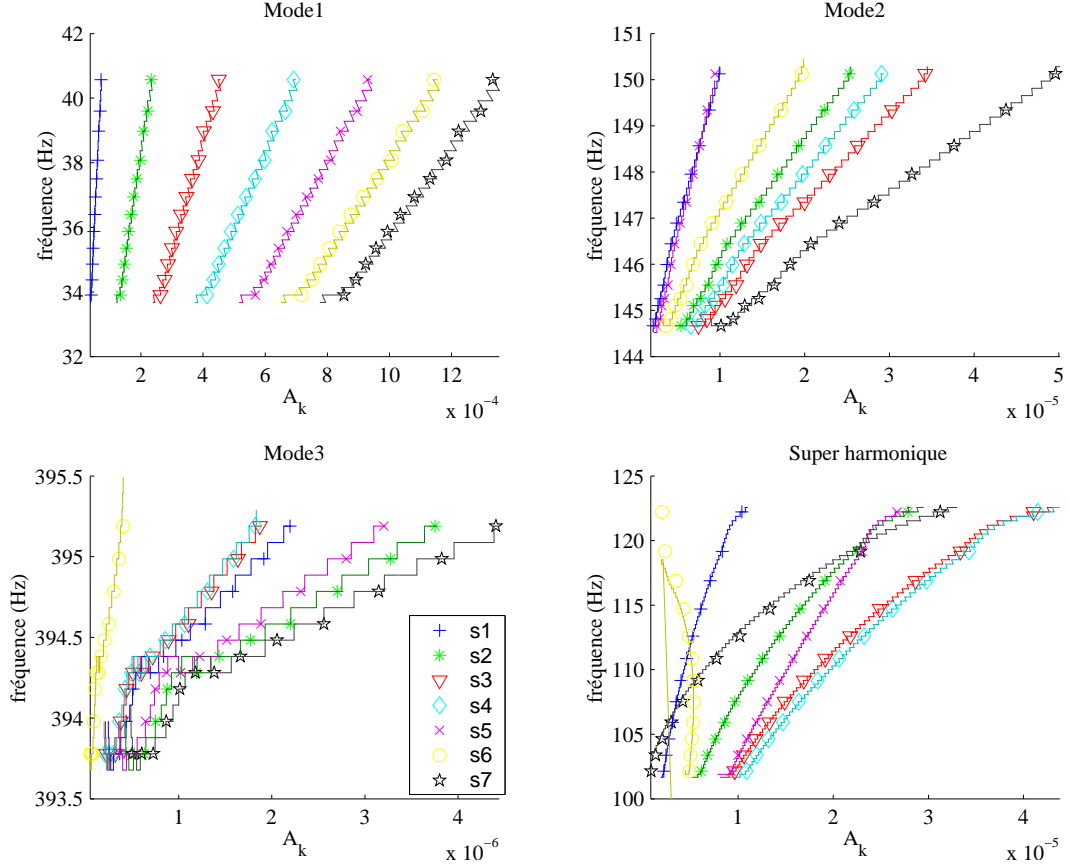


FIGURE 6.7. Relations $f_{jk}(A_{jk})$

$$\tilde{u}(t) = A(t) \cos(\alpha(t)) \quad (6.10)$$

avec l'amplitude instantanée : $A(t) = a_0 e^{-\xi\omega t}$ et la phase instantanée : $\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t + \frac{3\beta}{16\xi} a_0^2 (1 - e^{-2\xi\omega t})$. On obtient ainsi les relations de fréquence instantanée $f(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi} + \frac{3\beta}{8} \frac{\omega}{2\pi} a_0^2 e^{-2\xi\omega t}$ et de fréquence en fonction de l'amplitude : $f_0^{modele}(A) = \frac{\omega}{2\pi} + \frac{3\beta}{8} \frac{\omega}{2\pi} A^2$. A partir de la réponse du capteur 7, $f_{17}(A_{17})$ sont approximées par une courbe parabolique par régression linéaire : $f_{17}(A_{17}) = 29.76 + 5.9332 \times 10^6 A_{17}^2$. D'où les paramètres $\omega = 186.99$ (rds/sec) et $\beta = 5.3165 \times 10^5 \text{ m}^{-2}$. Il est facile de déduire ensuite $a_0 = 1.46 \times 10^{-3} (m)$ et $\xi = 0.23\%$ à partir de $A_{17}(t)$. Finalement, l'expression de la fréquence fondamentale $f(t)$ sera : $\tilde{f}(t) = 29.76 + 12.63e^{-0.86t}$. L'erreur d'approximation $\tilde{\mathcal{E}} = \frac{\|\tilde{f} - f_{17}\|_2}{\|f_{17}\|_2} = 9.6 \times 10^{-4}$ est petite et on peut conclure que le modèle non-linéarité de type Duffing de faible amortissement visqueux donne une bonne évaluation de la fréquence fondamentale. Les figures 6.9 et 6.8 présentent les quatre amplitudes et déformées modales instantanées. En considérant que le système est instantanément linéaire, les droites sur le plan des amplitudes logarithmiques confirment bien l'hypothèse d'amortissement visqueux.

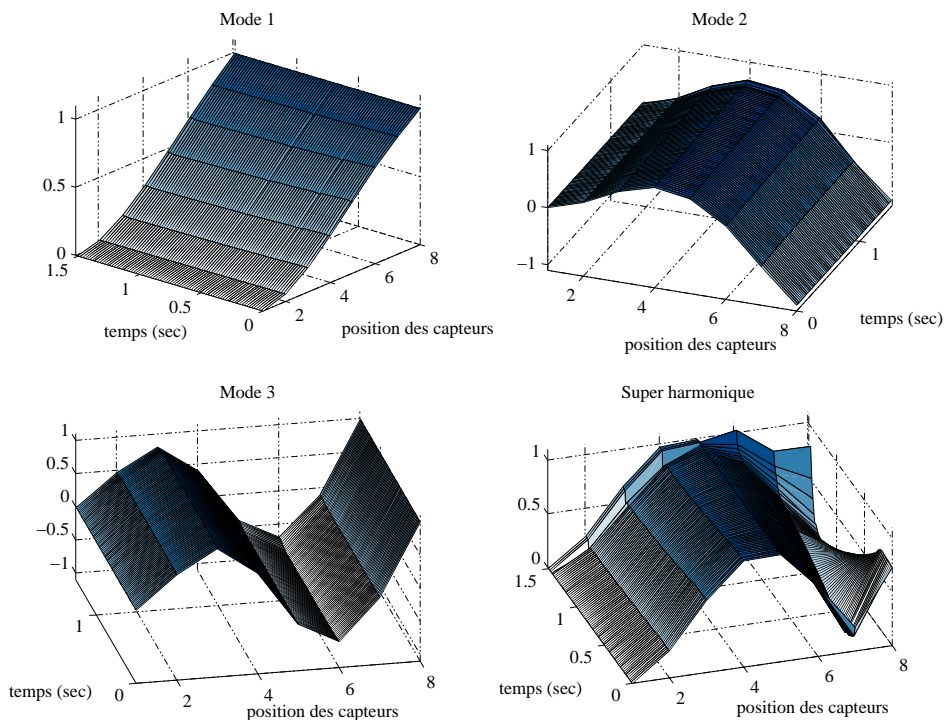


FIGURE 6.8. Quatre premières déformées modales instantanées

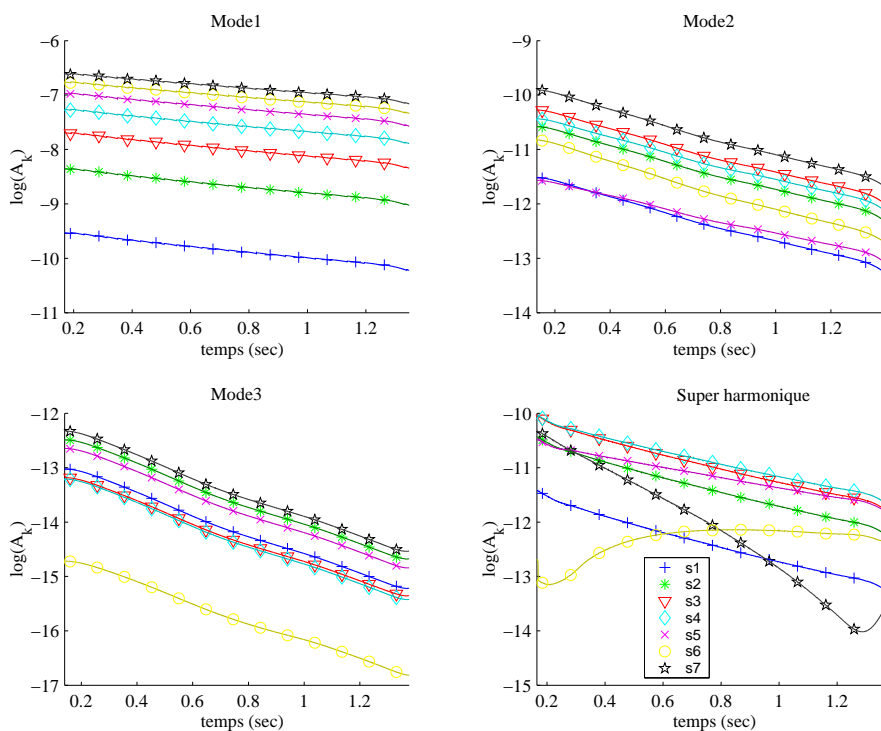


FIGURE 6.9. Logarithme des quatre premières amplitudes instantanées

- **Poutre avec butée**, la poutre est montée horizontalement en console avec les caractéristiques : longueur : $L = 0.49m$, largeur : $l = 0.051m$, épaisseur : $e = 0.0066m$, masse volumique : $\rho = 7850kg/m^3$ et de module d'Young $E = 205.10^9 Pa$. Sept accéléromètres, également espacés, sont collés sur la poutre à partir de l'extrémité libre. L'impact du marteau est appliqué à l'extrémité

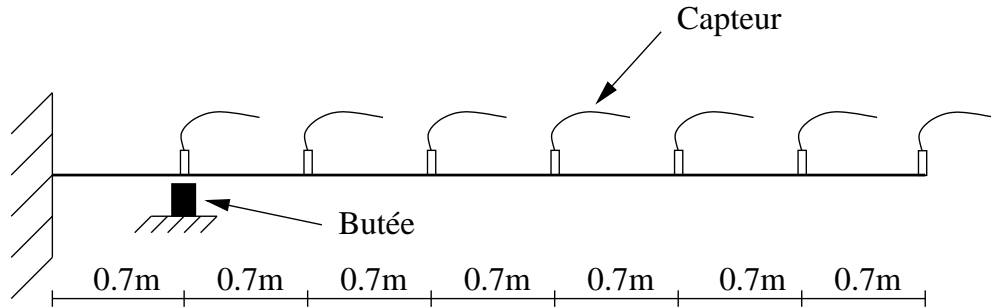
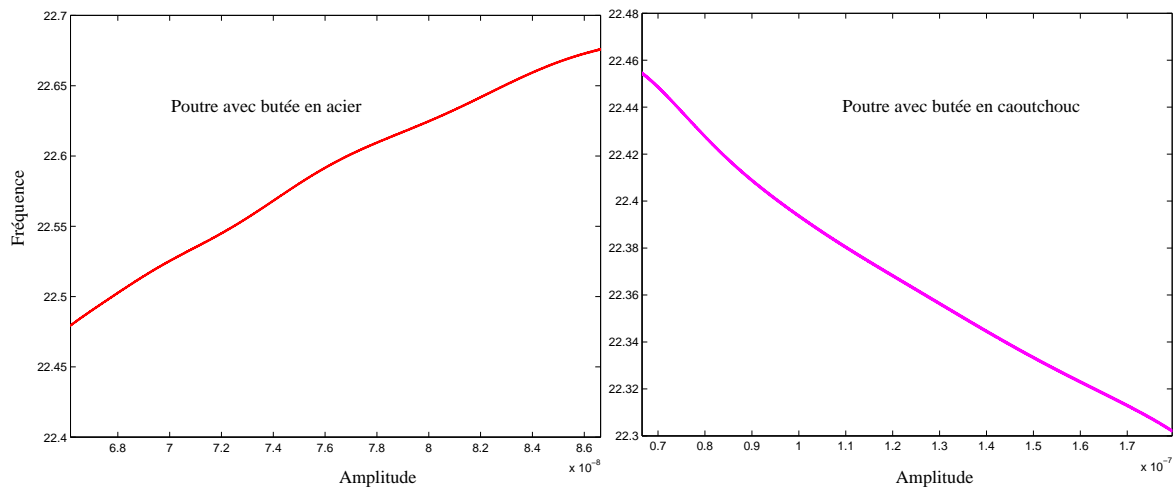


FIGURE 6.10. Poutre non-linéaire avec butée

libre. Une rigidité non linéaire peut être ajoutée à la poutre au moyen d'une butée qui peut être en caoutchouc ou en métal et qui est placée à la verticale du capteur situé à 7 cm du bord encasturé. Le schéma du test est donné à la figure 6.10. Trois séries de mesures ont été effectuées : sans la butée, avec la butée en caoutchouc et avec la butée métallique. Dans ce qui suit, on se limite à la composante fondamentale de la poutre dont la fréquence est notée $f(t)$. Pour le cas sans butée, le modèle de poutre droite d'Euler Bernoulli linéaire en vibrations de flexion donne : $f_{theo} = 22.69(Hz)$. La TF de la réponse libre mesurée sur les capteurs donne $f_{TF} = 21.88(Hz)$ par la méthode du peak picking. Avec la TO, on trouve $f(t)$ constante au cours du temps et égale à $f_{TO} = 21.82(Hz)$. Pour le cas avec butée, $f(t)$ varie en fonction du temps et la dépendance de f suivant l'amplitude est tracée sur la figure 6.11, indiquant la présence de la non-linéarité. On constate que la courbe $f(A)$ est croissante pour la butée en acier et décroissante pour la butée en caoutchouc.

FIGURE 6.11. Variation de la fréquence $f_{mesure}(A_{mesure})$ pour le cas de la poutre avec butée

En considérant le modèle d'oscillateur bilinéaire, le sens de variation de $f(A)$ correspond à un durcissement : $k_2 > k_1$ pour la butée acier et à un radoucissement : $k_2 < k_1$ pour la butée caoutchouc. L'application de la procédure d'identification sur la première composante, à partir du signal obtenu par le 4ème capteur donne : $\tilde{A}_c \approx 6 \times 10^{-8}(m)$, $\tilde{\omega}_1 = 141.25(rad/s)$ et $\tilde{\omega}_2 = 142.44(rad/s)$ avec erreur : $\tilde{\mathcal{E}} = 3.2 \times 10^{-3}$ pour le cas de la butée en acier et $\tilde{A}_c \approx 6.7 \times 10^{-8}(m)$,

$\tilde{\omega}_1 = 141.12(rad/s)$ et $\tilde{\omega}_2 = 140.12(rad/s)$ avec une erreur : $\tilde{\mathcal{E}} = 1.2 \times 10^{-3}$ pour le cas de la butée en caoutchouc. Ainsi, la première fréquence de la poutre seule peut être respectivement approchée : $\tilde{f}_{acier} = 22.48(Hz)$ (butée acier) et $\tilde{f}_{caoutchouc} = 22.46(Hz)$ (butée caoutchouc). Ces valeurs sont très proches de la valeur théorique et de celles précédemment déterminées par la TF et la TO.

6.5 Conclusions

L'application de la TO pour l'identification non-linéaire est étudiée et donne des résultats satisfaisants pour des oscillateurs faiblement dissipatifs avec différents types de non-linéarités en déplacement. Elle est aussi utilisée pour la caractérisation de la non-linéarité sur une poutre avec différentes non-linéarités, soit par lamelle non-linéaire soit par butées. La détection de non-linéarité est facile par la transformation en ondelettes grâce à son type d'analyse temps-fréquence. Le succès des choix des paramètres de l'ondelette mère proposés au chapitre précédent rend cette méthode d'identification de non-linéarité plus efficace et plus performante. Les premiers résultats obtenus sont encourageants quant à l'efficacité de la TO pour l'identification des effets non-linéaires. Évidemment, l'identification de la non-linéarité demande encore un modèle correct et la résolution analytique de ce modèle. De ce point de vue, la transformation en ondelettes est un outil très intéressant pour détecter, observer, vérifier et identifier la non-linéarité.

Chapitre 7

Amélioration de la méthode impact-écho

7.1 Introduction.

Ce chapitre présente la méthode impact-écho et une proposition d'amélioration de la méthode par la transformation en ondelettes. Après un rappel succinct sur la propagation des ondes dans un milieu élastique, linéaire, homogène et isotrope, le principe général de la méthode traditionnelle et les instruments de mesure seront décrits. Développée à partir des années 80s, cette méthode d'évaluation non destructive de structures en béton a suscité l'intérêt du monde industriel et scientifique grâce à la simplicité du test, à la nécessité d'accès à une seule surface et à son coût faible. Le cadre du travail de ce chapitre s'est inscrit dans le contexte de l'amélioration de la technique sous l'angle du traitement du signal impact-écho. Une procédure d'amélioration de la méthode par l'analyse en ondelettes est proposée. Elle sera validée sur des exemples numériques et avec des tests réels. Les notations que nous utiliserons ici sont indépendantes de celles utilisées dans les deux chapitres d'application précédents.

7.2 Rappel sur la propagation des ondes dans un milieu élastique isotrope continu

7.2.1 Équations fondamentales

- Équation d'équilibre du principe fondamental de la dynamique en l'absence de force appliquée au solide :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, T] \quad (7.1)$$

où ρ et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sont respectivement la densité et le vecteur de déplacement particulaire.

- Loi de comportement : Dans le milieu élastique linéaire isotrope, la relation entre contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ est linéaire :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (7.2)$$

où λ et μ sont les deux constantes de Lamé. La relation entre la déformation et le déplacement dans le cas de petites perturbations :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7.3)$$

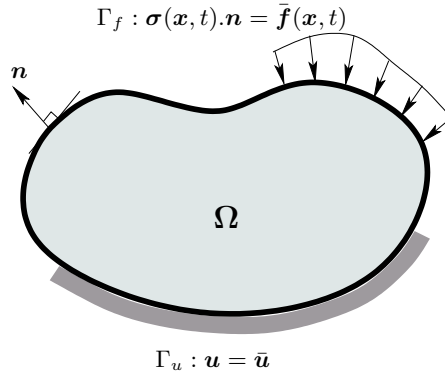


FIGURE 7.1. Conditions aux limites du problème dynamique

En remplaçant (7.2) et (7.3) dans l'équation (7.1) :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (7.4)$$

Sous une autre forme :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad (7.5)$$

- Les conditions aux limites (CL) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, T] \quad (7.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_f \times [0, T] \quad (7.7)$$

- Les conditions initiales (CI) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7.8)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7.9)$$

Le déplacement des particules $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est déterminé à partir des équations (7.4) (ou 7.5) combinées avec CL et CI. Une fois le champ de déplacement déterminé, le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ sera déduit à partir de la relation (7.2)

7.2.2 Décomposition de Helmholtz

La solution en déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est cherchée sous la forme : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$. Cette décomposition permet de découpler l'équation (7.5).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v_p^2 \Delta \phi = 0, \quad v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (7.11)$$

Ondes de compression : La fonction $\phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau} - v_p t)$ est la solution de (7.10) où f est une fonction régulière, $\boldsymbol{\tau}$ est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 . Le déplacement des particules associé : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t) = f'(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau} - v_p t) \boldsymbol{\tau}$. Il s'agit d'une onde progressive plane car $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{constante}$

sur les plans d'équation : $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau} = \text{constante}$. Cette onde se propage à la vitesse v_p dans la direction $\boldsymbol{\tau}$. Le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est parallèle à la direction de propagation. On l'appelle onde longitudinale, onde de compression ou onde P (à cause de son arrivée Première parmi les ondes : c'est l'onde la plus rapide).

Ondes de cisaillement : De façon analogue $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau} - v_s t)$ est la solution de (7.11) où \mathbf{F} est une fonction régulière à valeur dans \mathbb{R}^3 . Le déplacement associé : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{F}'(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau} - v_s t)$. C'est aussi une onde plane qui se propage avec la vitesse v_s dans la direction $\boldsymbol{\tau}$ mais le déplacement des particules $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est perpendiculaire à la direction de propagation d'onde. On l'appelle onde transversale, onde de cisaillement ou onde S (à cause de la Seconde arrivée parmi les ondes après l'onde de compression).

Ondes de surface : Sur la surface libre d'un demi-espace, il existe un autre type d'onde dont la vitesse v_r est la solution de l'équation Rayleigh. On l'appelle onde de Rayleigh ou onde R. C'est une onde cylindrique qui s'amortit exponentiellement avec la profondeur mais qui, à la surface d'un milieu homogène, isotrope, élastique représente 67% de l'énergie.

7.3 Méthode impact-écho

7.3.1 Principe de la méthode impact-écho

La méthode impact-écho est une méthode d'auscultation non-destructive des structures (appliquée généralement à des dalles en béton avec deux surfaces parallèles). Elle est fondée sur l'analyse fréquentielle de la réponse sismique de dalles soumises à un choc [101]. Le principe est que : l'onde de compression (onde P) se réfléchit périodiquement à la surface libre et à la surface des cavités ou plus généralement à l'interface de deux milieux d'impédances mécaniques différentes. Nous prenons un exemple sur une dalle d'épaisseur e possédant une cavité à la profondeur d comme sur la figure 7.2. Le capteur est posé à côté de l'impact. Les temps nécessaires pour un trajet aller-retour de l'onde P respectivement τ_e et τ_d sont donnés par les relations :

$$\tau_e = \frac{2e}{v_p} \quad (7.12)$$

$$\tau_d = \frac{2d}{v_p} \quad (7.13)$$

où v_p est la vitesse de l'onde de compression dans la dalle. Le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel à l'aide de transformation de Fourier (TF) donnera des pics de fréquences f_e et f_d .

$$f_e = \frac{v_p}{2e} \quad (7.14)$$

$$f_d = \frac{v_p}{2d} \quad (7.15)$$

On envisage deux possibilités :

- Soit l'épaisseur est connue à un endroit particulier de la dalle. L'équation (7.14) nous donne la valeur de v_p . La connaissance de f_d fournit la valeur de d .
- Soit on ne connaît pas la vitesse v_p , la TF donne des informations sur l'homogénéité de la dalle et détecte des zones "suspectes" en ce qui concerne son épaisseur. La variation du contenu fréquentiel peut indiquer aussi la présence de cavité.

Les principales limites de la méthode sont les suivantes :

- La nécessité d'avoir deux surfaces parallèles.

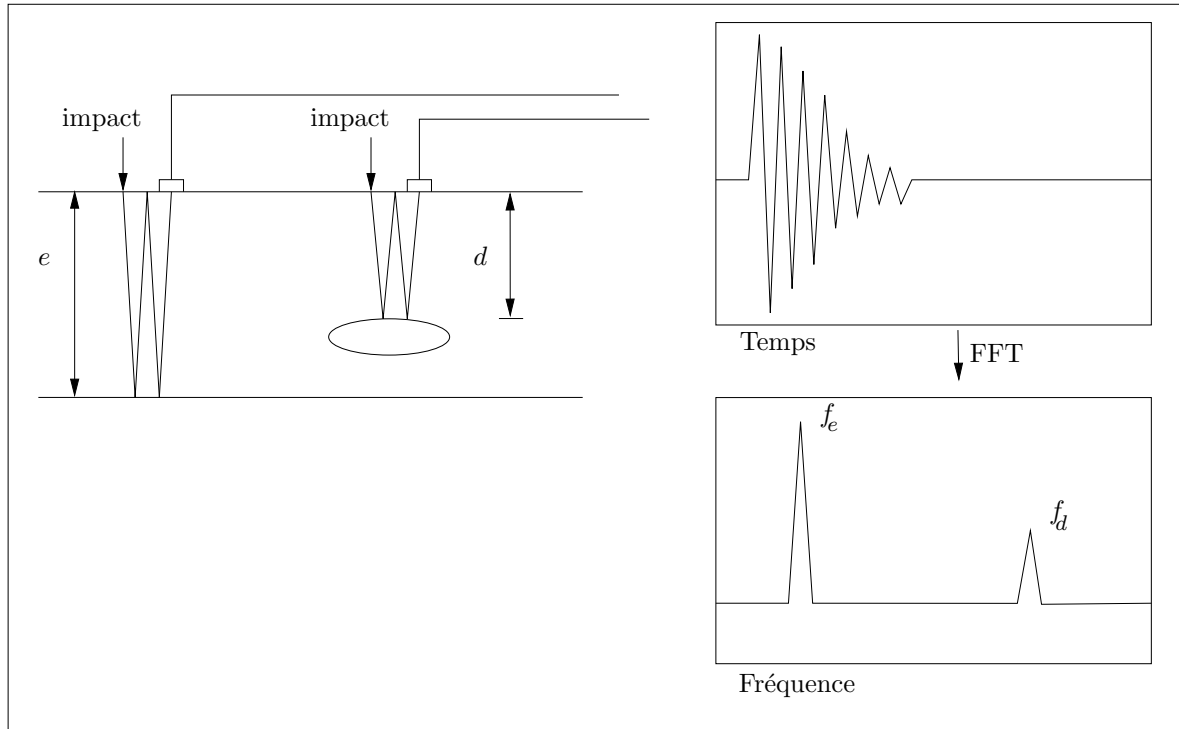


FIGURE 7.2. Schéma du test de la méthode impact-écho

- L'interprétation des pics dans le domaine de Fourier qui devient plus difficile en présence de bruit et de plusieurs ondes.

7.3.2 Ondes élastiques dans une dalle en béton

- **Propagation des ondes élastiques sous l'effet d'un impact**

Sous l'effet d'un impact, une onde de compression (onde P), une onde de cisaillement (onde S) et une onde de surface (onde R) se propagent dans la structure. La figure 7.3 représente à un instant donné, les déplacements dans une dalle de béton. Les vitesses des ondes v_p et v_s dans un milieu semi-infini élastique, homogène, isotrope s'expriment soit avec les deux constantes de Lamé comme sur les formules (7.10) et (7.11), soit avec le module Young $E(Pa)$ et le coefficient de Poisson ν ,

$$v_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (7.16)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (7.17)$$

le rapport entre les vitesses des ondes n'est que fonction du coefficient Poisson ν qui varie entre 0.18 et 0.30 pour béton [94]. Achenbach [6] donne la relation entre v_r et v_s

$$v_r = \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} v_s \quad (7.18)$$

La longueur d'onde λ d'une onde de fréquence f qui se propage dans un milieu avec la vitesse v est :

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (7.19)$$

L'interaction d'une onde avec les discontinuités dans la structure dépend de la relation entre la longueur d'onde λ et la dimension des discontinuités. En général, une onde de longueur d'onde λ sera réfléchiée par les discontinuités égales ou plus grandes que λ et diffractée par celles voisines de λ et plus petites que λ . Le béton contient toujours des discontinuités de l'ordre de quelques centimètres (micro-fissures, interfaces entre pâtes, granulats, et petites cavités d'air...). Les longueurs d'onde de 5cm et moins seront atténuées à cause de ces inhomogénéités et pénétreront difficilement dans la structure. Les impacts qui génèrent des ondes de fréquences inférieures à 80kHz (longueur d'onde environ 5cm et plus) sont bien adaptés pour la détection des fissures, des cavités, des délaminations... Dans ce cas, le béton peut être considéré comme un milieu homogène pour la propagation de ces ondes. L'amplitude de l'onde P est maximale à la verticale

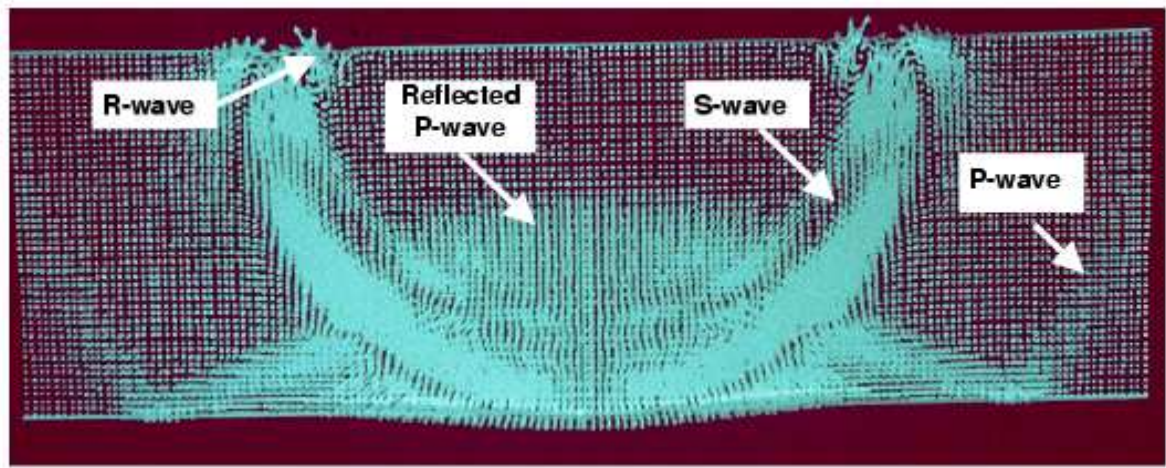


FIGURE 7.3. Surfaces des ondes simulées par éléments finis (d'après Carino [24]).

sous la source tandis que celle due à l'onde S est faible dans cette zone. La localisation de capteurs de déplacement sur la surface juste à côté de l'impact va maximiser les effets de l'onde P et minimiser l'influence de l'onde S [101].

- **Comportement des ondes à l'interface**

Quand une onde se propageant dans un milieu noté 1, arrive à l'interface avec un milieu noté 2, une partie de l'onde incidente est réfléchiée. L'amplitude de la réflexion est fonction de l'angle d'incidence et est maximum quand cet angle est égale à 90° (incidence normale).

TABLEAU 7.1. Impédance mécanique de quelques matériaux, d'après Carino [24]

matériau	Z $kg/(m^2s)$
air	0.4
eau	0.5×10^6
sol	$3 \times 10^6 - 4 \times 10^6$
béton	$7 \times 10^6 - 10 \times 10^6$
acier	47×10^6

Le coefficient de réflexion R dans le cas d'une incidence normale à l'interface dépend de l'impédance mécanique Z (produit de la masse volumique et la vitesse) ou plus précisément la différence re-

lative des impédances mécaniques :

$$R = \frac{(Z_2 - Z_1)}{(Z_2 + Z_1)} = \frac{A_{Réflexion}}{A_i} \quad (7.20)$$

où Z_1 et Z_2 sont respectivement des impédances mécaniques du matériau 1 et du matériau 2 ; $A_{Réflexion}$ et A_i sont des amplitudes de l'onde réfléchie et de l'onde incidente. Quelques valeurs approximatives de Z sont données au tableau 7.1. On rencontre souvent deux types d'interfaces dans le test impact-écho :

- *Interface solide-air* : sur cette frontière, il n'y a que la réflexion à cause de la grande différence d'impédance mécanique entre le béton et l'air. On a dans le béton, de multiples aller-retours d'ondes comme sur la figure 7.4 avec un changement de phase à chaque réflexion.

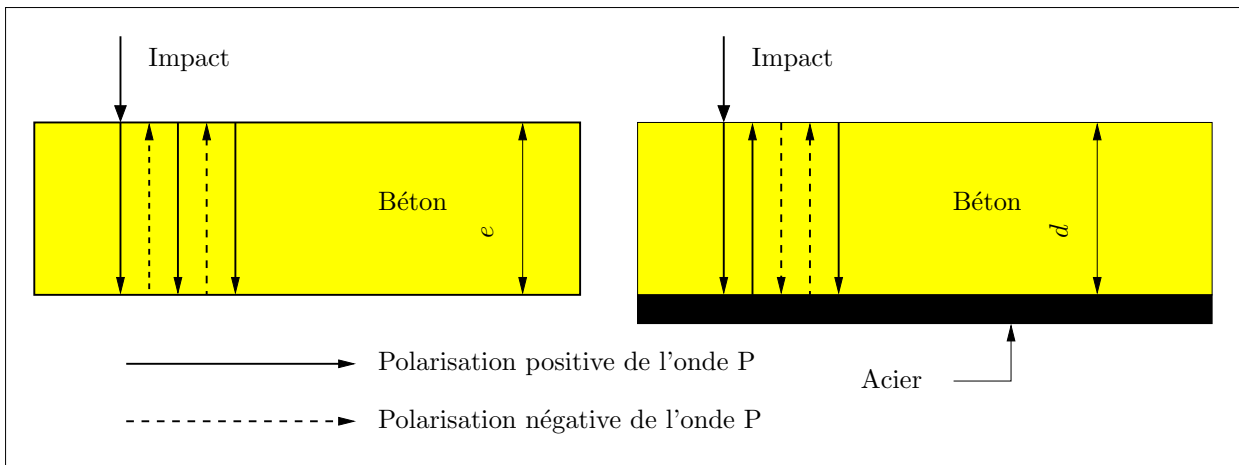


FIGURE 7.4. *Changement de phase à l'interface.*

- *Interface solide-solide* : dans ce cas, on a à la fois réflexion et réfraction. Les amplitudes des parties réfléchie $A_{Réflexion}$ et réfractée $A_{Réfraction}$ se distribuent suivant les impédances des milieux :

$$A_{Réflexion} = A_i \frac{(Z_2 - Z_1)}{(Z_2 + Z_1)} \quad (7.21)$$

$$A_{Réfraction} = A_i \frac{2Z_1}{(Z_2 + Z_1)} \quad (7.22)$$

- Si $Z_2 \ll Z_1$, $A_{Réflexion}$ tend vers $-A_i$ et $A_{Réfraction}$ s'approche de zéro. Le signe "moins" de l'amplitude signifie le changement de phase à la réflexion.
- Si $Z_2 \gg Z_1$, $A_{Réflexion}$ tend vers A_i et $A_{Réfraction}$ vers $2A_i$. C'est l'interface dont la première région est le béton et la deuxième est l'acier ou d'autres matériaux. Il n'y a pas le changement de phase à cette interface donc l'équation (7.15) deviendra :

$$f = \frac{v_p}{4d} \quad (7.23)$$

- Si $Z_2 \approx Z_1$, $A_{Réflexion}$ tend vers zéro et $A_{Réfraction}$ vers A_i . La majorité de l'énergie est transmise à travers l'interface. Des études numériques montrent que la valeur du coefficient R doit être supérieure à 0,24 pour que le déplacement de l'onde réfléchie soit "visible" dans le test impact-écho [101].

7.3.3 Mise en oeuvre expérimentale

• Impact

Les ondes élastiques dans le test impact-écho sont générées à l'aide des billes sphériques (typiquement de diamètre de 3mm à 16mm) en acier, tapant sur la surface. Les paramètres importants qui caractérisent l'impact comprennent : la durée de l'impact ou le temps de contact t_c , le diamètre D_{bille} et la valeur de l'énergie cinétique de la sphère au moment du contact. Les caractéristiques des ondes générées par l'impact détermine la capacité de leur propagation dans les matériaux et leur utilité pour l'auscultation des fissures ou des cavités dans la structure. La variation temporelle de la force d'impact est souvent numériquement modélisée par la moitié d'une courbe sinus [101] ou par une Gaussienne [4]. La durée de l'impact t_c est de l'ordre de $15\mu\text{s}$ à $100\mu\text{s}$. Pendant l'impact, une portion de l'énergie cinétique de la bille est transmise au béton. Le temps de contact t_c croît avec le diamètre D_{bille} et dépend faiblement de l'énergie cinétique. Le contenu fréquentiel de l'impact, dépend de la forme temporelle de l'impact et donc du diamètre D_{bille} de la bille. La figure (7.5) présente la fonction temporelle de l'impact et sa distribution fréquentielle

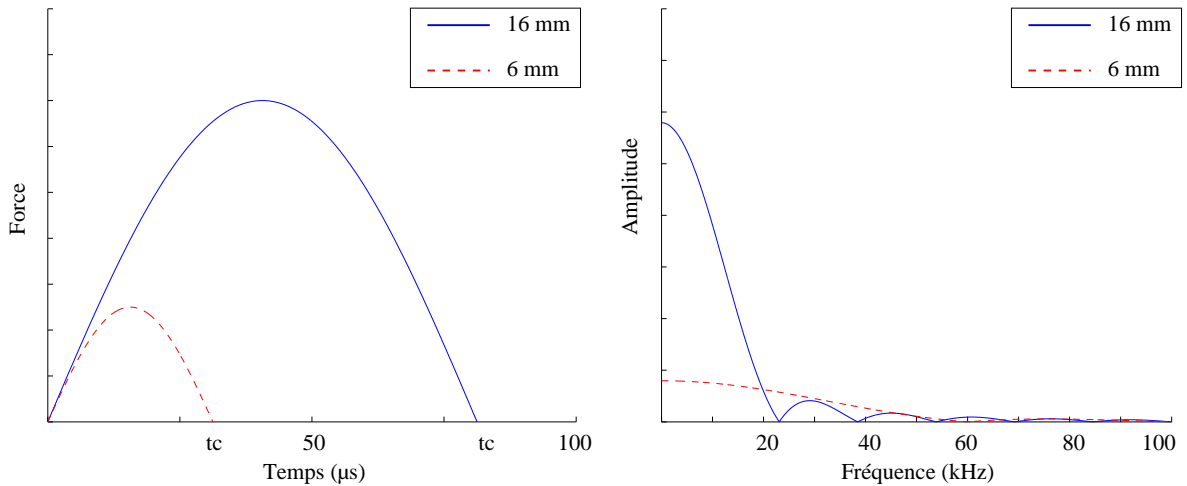


FIGURE 7.5. Fonction d'impact sinusoïdale avec des billes de différents diamètres

obtenue par la transformation de Fourier dans le cas d'un demi sinus. Les fréquences s'annulent à $1.5/t_c$, $2.5/t_c$, $3.5/t_c, \dots$. L'amplitude relative est très petite après le premier zéro. $f_{max} = 1.25/t_c$ est défini comme la fréquence maximale utile. Sansalone [101] propose les relations empiriques suivantes :

$$t_c = 0.0043D_{bille} \quad (7.24)$$

où t_c est exprimé en seconde et D_{bille} en mètre. On obtient par conséquent,

$$f_{max} = \frac{291}{D_{bille}} \quad (7.25)$$

• Acquisition des signaux

Les ondes provoquent à la surface des perturbations qui sont détectées par le capteur installé près de l'impact. Un système d'acquisition va les enregistrer et donnera le signal numérique. Deux paramètres importants, qui permettent d'optimiser l'acquisition des données de la structure testée sont : le pas d'échantillonnage Δt (l'intervalle de temps entre deux points enregistrés successifs) et le nombre de points enregistrés N (autrement dit, la longueur d'enregistrement).

- Le pas d'échantillonnage Δt est lié au théorème d'échantillonnage de Shannon. Il est conseillé d'échantillonner au moins dix échantillons par cycle à la fréquence la plus élevée avec le matériel impact-écho classique qui ne possède pas de filtre antirepliement, soit :

$$\Delta t_{min} = \frac{1}{10f_{max}} \quad (7.26)$$

- Nombre de points enregistrés N : ce choix influence la résolution fréquentielle. La résolution fréquentielle obtenue par l'algorithme fft est l'inverse de la durée d'enregistrement. Si dans le domaine Fourier on trouve un pic à la fréquence f_i , on a un voisinage d'incertitude de $(\pm \frac{\Delta f}{2})$.

7.3.4 Les efforts dans le développement de la méthode impact-écho

Durant les dix dernières années, beaucoup de contributions (de scientifiques, d'expérimentateurs, d'industriels...) ont vu le jour pour l'amélioration de la méthode impact-écho. Les recherches portent sur la théorie, la modélisation numérique, le traitement du signal, l'élaboration d'expériences sophistiquées. Sansalone les résume en quatre domaines clefs [101] :

- **Modélisation numérique par MEF¹ sur l'ordinateur** : La réussite de l'implémentation des modèles 2D et 3D des structures auscultées, sur l'ordinateur permet de mieux comprendre les phénomènes engendrés par la technique impact-écho. Ce résultat peut être comparé avec les solutions exactes qui utilisent la fonction de Green [94]. L'application de MEF aux structures complexes, est particulièrement utile pour la compréhension de la propagation des ondes et pour l'interprétation des résultats expérimentaux. En effet, les équations (7.14) et (7.15) ne sont valables que pour les plaques idéales qui ont les deux faces parallèles et dont les dimensions latérales sont suffisamment grandes pour que les réflexions depuis les bords ne parviennent pas au capteur durant le test. Sur une telle plaque, le déplacement est uniquement provoqué par les multiples réflexions entre les deux surfaces opposées.

En pratique, la fréquence mesurée ne correspond pas exactement aux équations (7.14) et (7.15). Martin [75] et Ohtsu [85] supposent que le résultat biaisé du test a pour origines : la dispersion tridimensionnelle à cause des agrégats et d'autres inhomogénéités, la ruine locale à la surface donc un temps de contact plus long, et le manque de sensibilité du capteur. Récemment, des études numériques [101] ont montré que la différence vient du fait que des réflexions multiples des ondes activent des modes de vibration de la dalle. Tenant compte de ce phénomène, on a une formule générale :

$$f = C \frac{v_p}{2e} \quad (7.27)$$

Le facteur C est le facteur de forme. Il est déterminé par la géométrie. Les simulations numériques [54], [101] et les solutions analytiques utilisant la fonction de Green [94] permettent de trouver les valeurs du facteur C pour chaque type de structure. Pour le cas d'une plaque, C vaut 0.96 et finalement dans le cas d'une interface béton-air,

$$f = \frac{0.96v_p}{2e} \quad (7.28)$$

- **Impact élastique "convenable" pour générer des ondes** : l'utilisation des billes en acier est convenable avec les structures "quotidiennes" et évite l'utilisation de traducteurs de faible fréquence pour générer les impulsions. Ces billes peuvent générer des ondes au critère fréquentiel inférieur à $80kHz$, et leur énergie est suffisante pour tester des dalles de quelques centimètres

¹Méthode des Éléments Finis

à 1.5m d'épaisseur. Maji [72] a utilisé des pistolets à billes pour augmenter la profondeur d'investigation et le domaine de fréquences utiles pour la détection des cavités. Il faut quand même vérifier la gamme de fréquence effectivement générée dans le milieu car les conditions de surface ont aussi une influence sur son contenu [85].

- **Capteur de déplacement sensible** : la sensibilité du capteur utilisé dans le test permet d'obtenir des résultats fidèles de déplacements / vitesses / accélérations des particules à la surface. Martin [75], Ohtsu [85] ont insisté sur la nécessité d'utiliser des capteurs large bande qui peuvent couvrir le domaine de fréquence attendue in situ. La sortie des capteurs est une tension proportionnelle au déplacement / vitesse / accélération des particules à sa position. Il apparaît parfois sur le résultat, des pics qui résultent de la résonance du capteur lui même [94] : il est donc primordial de distinguer ces pics des fréquences utiles.
- **Analyse fréquentielle** : Le signal mesuré lors du test est le signal temporel. La question est d'estimer soit τ_e et τ_d dans le domaine temporel, soit f_e et f_d dans le domaine fréquentiel. En pratique, il est difficile, voire impossible de mesurer directement τ_e et τ_d à cause de la superposition des arrivées des ondes. Dans le plan fréquentiel, on voit des pics représentant les composantes harmoniques contenues dans le signal. Toutefois, la participation de l'onde de Rayleigh (onde R), de la fonction d'impact et du bruit complique le choix des fréquences recherchées. Les essais impact-écho s'exécutent souvent en différents points de structures d'épaisseur variée avec des défauts à rechercher de diverse nature ; une technique automatique d'exploitation adaptée serait donc la bienvenue. Le problème qui se pose est : comment extrait-on les informations et comment les interprète-on ? C'est dans ce cadre que cette partie de la thèse va proposer une amélioration de interprétation des signaux impact-écho grâce à la transformation en ondelettes.

7.4 Problématique

Pour l'extraction des fréquences, plusieurs techniques de traitement du signal autres que la transformation de Fourier ont été testées. En effet, il est souvent recommandé d'utiliser une source avec une gamme de fréquence voisine de la fréquence à déterminer. L'utilisation d'une telle source lorsque la fréquence recherchée est élevée, entraîne toujours un phénomène de dissipation due à la diffraction et à l'atténuation rapide causée par les agrégats et les inhomogénéités du béton [4]. Une autre difficulté provient de l'onde R, qui renseigne sur le contenu fréquentiel de la source : son amplitude est souvent prépondérante sur le domaine de Fourier et peut masquer les pics utiles. Sansalone *et al.* [101] ont proposé la technique du "clipping" afin de réduire l'influence de l'onde R en supprimant une partie d'amplitude du signal dépassant une valeur préalablement choisie. Mais la non répétitivité de la source et des conditions expérimentales rendent cette technique arbitraire et introduisent des artefacts dans la transformation de Fourier (Gibbs). De plus, le signal du test impact-écho réel est souvent bruité et contient plusieurs fréquences. Ainsi l'amélioration de l'interprétation du signal nécessite un outil de traitement suffisamment puissant. On recense ici brièvement les techniques de traitement du signal autre que la transformation de Fourier utilisées dans le test impact-écho.

- **Amélioration par l'auto-corrélation et corrélation croisée** : Maji [72, 73] a amélioré le test par les fonctions "auto-corrélation" et "corrélation croisée" des signaux. L'auto-corrélation mesure la similarité du signal avec lui même mais déplacé dans le temps :

$$y_a(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} u(i)u(i + \tau) \quad (7.29)$$

où : τ est l'écart en temps, $u(i)$ est le signal échantillonné avec N points d'enregistrement. La représentation de $y_a(\tau)$ donne des pics. Le premier pic maximum est à l'origine et le deuxième pic correspond au période d'un aller-retour $2\tau_e$ et ainsi on peut déterminer l'épaisseur de la dalle. Pour la détection des défauts, l'auteur a proposé la fonction de corrélation croisée qui mesure la similarité de deux signaux :

$$y_c(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} u_1(i)u_2(i + \tau) \quad (7.30)$$

où u_1 et u_2 sont les signaux mesurés à différentes positions. Les capteurs sont disposés symétriquement par rapport à la position de l'impact. S'il y a des différences importantes de la fonction de corrélations croisées d'une paire de signaux par rapport aux autres paires, alors les défauts existent et ils causent des trajets différents (les variations de distance entre les deux). Le confinement des positions des capteurs en les déplaçant, permettront de localiser les défauts. L'auteur a aussi filtré les signaux de fréquences faibles (moins de $50kHz$) pour augmenter la visibilité des petites cavités. Cette proposition n'est pas très réaliste, puisque l'auto-corrélation est équivalente à l'analyse fréquentielle et l'utilisation de la fonction de corrélation croisée est une modification de la méthode traditionnelle mais ne donne pas une estimation quantitative de cavités comme la profondeur de cavité par exemple.

- **Amélioration par la technique "stack imaging of spectral amplitudes" :** Ohtsu *et al.* [85] expliquent que l'origine du facteur de forme dans la formule (7.28) vient de la dispersion des ondes dans un espace tridimensionnel. Ainsi, ils proposent de combiner la théorie élastodynamique tridimensionnelle et la technique "stack imaging of spectral amplitudes" pour interpréter les données du test impact-écho. Cette méthode est appliquée au test d'une poutre en béton armé pré-contrainte pour vérifier le remplissage de la gaine. La section de la poutre est d'abord maillée et forme des éléments en rectangle. Une fonction caractéristique d'un défaut est ensuite évaluée à chaque centre d'un élément. D'une part, les auteurs démontre que cette fonction peut être calculée à partir de la transformation de Fourier inverse des amplitudes du signal enregistré. D'autre part, le trajet impact-centre d'élément-capteur de longueur R contribue des fréquences de résonance dominantes égales $f_1 = \frac{2v_p}{R}$, $f_2 = \frac{v_p}{R}$, $f_3 = \frac{v_p}{2R}$ En prenant les amplitudes correspondant à ces fréquences dans le signal enregistré, les auteurs ont calculé la fonction caractéristique de tous les éléments. Cela explique le nom de la technique : stack imaging of spectral amplitudes. La représentation des amplitudes de la fonction caractéristique donnera une vision des défauts éventuels sur la section correspondant aux points d'amplitudes élevées. La taille optimale du maillage est aussi proposée :

$$\Delta x = \frac{v_p \Delta t}{2} \quad (7.31)$$

où Δt est la période d'échantillonnage du signal. La technique proposée a réussi à visualiser la gaine mais elle est difficile à généraliser dans le cas de dalle de béton où le maillage doit être adapté. De plus, la technique ne peut pas limiter l'influence de la source à travers l'onde R.

- **Amélioration par bispectre :** Xiang *et al.* [124] utilisent le bispectre pour le traitement du signal impact-écho. Le bispectre est connu par la capacité de supprimer l'influence du bruit de type Gaussien et préserver les informations de phase du signal. En effet, la transformation de Fourier de la fonction d'auto-corrélation d'un signal aléatoire donne la densité spectrale de puissance

$$C_2^x(\tau) = E(x(k)\bar{x}(k + \tau)) \quad (7.32)$$

et dans le domaine de Fourier :

$$C_2(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} C_2^x(\tau) e^{-i\omega\tau} = |X(\omega)|^2 \quad (7.33)$$

où $|\omega| \leq \pi$ et $X(\omega)$ est la transformée de Fourier de $x(k)$. On constate que l'équation (7.33) ne donne pas les informations sur la phase, donc, des signaux différents peuvent avoir le même $C_2(\omega)$. L'auto-corrélation au 3^e ordre est définie par

$$C_3^x[x(k)x(k+\tau_1)x(k+\tau_2)] = E(x(k)x(k+\tau_1)x(k+\tau_2)) \quad (7.34)$$

L'hypothèse de signal stationnaire donne

$$C_3^x(\tau_1, \tau_2) = E(x(k)x(k+\tau_1)x(k+\tau_2)) \quad (7.35)$$

Le bispectre est la transformée de Fourier en deux dimensions de $C_3^x(\tau_1, \tau_2)$

$$C(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{+\infty} C_3^x(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} \quad (7.36)$$

où $|\omega_1| \leq \pi$, $|\omega_2| \leq \pi$, $|\omega_1 + \omega_2| \leq \pi$. Le bispectre conserve à la fois les informations de phase et d'amplitude. Les auteurs ont calculé le bispectre des signaux impact-écho avec diverses géométries de défauts (cavités, délaminations...) soumis aux signaux sans bruit et bruités. Les résultats montrent que, l'influence du bruit est considérablement diminuée et ils sont très différents si différents types de défauts sont introduits. Cette remarque est ensuite utilisée pour établir un vecteur de critère dans la classification des défauts au moyen d'algorithmes neuronaux. Afin de réduire l'influence de l'impact, le signal est normalisé avant la procédure d'extraction. Les exemples montrent que la méthode permet de bien classifier les types de défauts mais aucun résultat quantitatif (la profondeur de défauts, épaisseurs...) n'est communiqué.

- **Amélioration par l'analyse temps-fréquence.** Cette idée est premièrement proposée par Abraham *et al.* [4] qui ont traité le signal impact-écho par la transformation de Fourier à court terme. La fenêtre mobile est utilisée pour choisir le moment de prépondérance de l'onde P dans une étude paramétrique de détectabilité d'épaisseurs et de cavités des dalles en béton. Les auteurs ont également abordé le phénomène "multiple" de fréquences obtenues. Shyu *et al.* [106] a utilisé la représentation de transformée en ondelettes pour faciliter le choix d'une fréquence de résonance de l'épaisseur.
- *Problématique :* Parmi les techniques de traitement du signal présentées, l'idée d'utiliser l'analyse temps-fréquence est très raisonnable puisqu'elle permet de tenir compte des informations en temps *a priori* du test impact-écho. Toutefois, l'analyse de type transformation de Fourier à court terme présente un point inadéquat : la même résolution en temps et en fréquence pour toutes les fréquences, or sur les fréquences élevées, la résolution temporelle est plus importantes que la résolution fréquentielle et vice-versa pour les fréquences basses. De plus, le choix de la taille de la fenêtre glissante n'est pas évident. Nous proposons donc d'utiliser la transformation en ondelettes pour y remédier. L'application de la transformation en ondelettes de Shyu *et al.* [106] ne s'intéresse qu'à la représentation du plan temps-fréquence pour aider le choix des fréquences. Avec les progrès en traitement du signal par la transformation en ondelettes, on va appliquer ici des algorithmes plus robustes pour trouver les fréquences importantes des tests impact-écho et combiner cette procédure avec le choix de Q précédemment décrit.

7.5 Amélioration de la méthode impact-écho par la transformation en ondelettes

7.5.1 Bases théoriques

La méthode proposée est fondée sur la répartition énergétique du signal dans le plan temps-fréquence par la densité locale spectrale. Comme on a vu dans la deuxième partie [voir la formule (2.50)], on peut définir la densité spectrale locale du signal par la transformation en ondelettes,

$$\tilde{E}_u(t, \omega) = \frac{1}{C_\psi \omega} |T(t, \frac{\omega \psi}{\omega})|^2 \quad (7.37)$$

D'où la densité spectrale :

$$\tilde{E}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(t, \omega) dt \quad (7.38)$$

et l'énergie totale :

$$E_u = \int_0^{+\infty} \tilde{E}(\omega) d\omega \quad (7.39)$$

La densité spectrale locale mesure la contribution à l'énergie totale provenant du voisinage du temps t et de la pulsation ω .

7.5.2 Démarches pratiques

La procédure proposée sera basée sur les critères suivants :

- L'énergie du choc portée par l'onde R domine d'abord puis elle diminue vite et l'énergie de l'onde P devient prépondérante.
- L'onde P est la plus rapide parmi les ondes dans le solide, donc son écho arrive le premier.
- L'énergie se concentre sur les fréquences prépondérantes de la source et des réflexions multiples et le contenu fréquentiel du bruit blanc peut être diminué en fixant un seuil d'énergie.
- Les fréquences des ondes dans le plan temps-fréquence varient lentement en temps.

Les étapes à suivre sont les suivantes :

- Calculer la transformation en ondelettes.
- Représenter $\tilde{E}_u(t, \omega)$ sur le plan temps-fréquence.
- Chercher les fréquences dont l'énergie est dominante sur le plan temps-fréquence. Plusieurs possibilités pourront se présenter :
 - La fréquence centrale de la source est voisine de la fréquence de résonance recherchée f_e , c'est le cas le plus favorable pour la méthode impact-écho. Les résultats sont totalement détectables par la TF mais aussi par la TO. Ce cas se traduit dans le plan (t, ω) par le fait qu'une fréquence de résonance est assez lisse et stable en temps.
 - La fréquence centrale de la source est assez différente de la fréquence de résonance recherchée f_e (mais il faut que cette dernière soit dans la gamme de fréquence d'excitation). Dans ce cas, il est difficile de trouver f_e par la TF. Le plan temps-fréquence peut donner des informations supplémentaires, e.g, la fréquence d'énergie dominante n'est plus lisse mais présente des sauts importants. Le premier saut après l'impact (énergie élevée au début) indique le moment où l'énergie de la source n'est plus dominante. Soit on détermine la fréquence f_e directement par la TO, soit on calcule la TF du signal fenêtré pour enlever la source (la fenêtre était déduite de la TO).

- Dans le cas où on souhaite identifier plusieurs fréquences, par exemple la fréquence de vide et de l'épaisseur, l'algorithme "crazy climbers" sera appliqué, particulièrement pour les signaux expérimentaux bruités. Dans ce cas, $\tilde{E}_u(t, \omega)$ jouera le rôle de la représentation énergétique $M(t, \omega)$ écrit dans l'algorithme 4.3.

REMARQUE 7.5.1 (ONDELETTE "MÈRE" CHOISIE)

Cette proposition demande la connaissance du coefficient C_ψ [voir formule (7.37)]. Pour cela, on utilise, pour tous les exemples, l'ondelette mère de Cauchy. Au point de vue des résolutions fréquentielle et temporelle, ce choix est justifié par rapport aux autres ondelettes mères car la valeur de Q utilisée est assez élevée ($Q = 6 - 10$). Une proposition de calcul numérique de C_ψ pour l'ondelette mère de Morlet a été donnée par Stazewski au voisinage de la fréquence centrale.

7.6 Validation de la méthode

La procédure décrite ci-dessus sera appliquée aux différents tests de validation tant sur des signaux numériques simulés à l'aide de la méthode des éléments finis que sur des signaux expérimentaux. Les signaux numériques sont générés à l'aide du code de calcul par éléments finis CESAR. Les signaux expérimentaux sont réalisés au LCPC Nantes. Ils sont fournis par O. Abraham. Toutes les descriptions de maillage, pas de calcul, impact, tests réels ... sont présentés par Abraham *et al.* dans la référence [4]. Les tests de validation de la transformation en ondelettes ci-après sont classés suivant deux catégories : mesure d'épaisseur des dalles et détection des vides.

7.6.1 Mesure d'épaisseur des dalles en béton

- **Signaux simulés numériques par MEF :** Ces signaux sont les réponses d'une dalle de 20cm en béton, dont les caractéristiques physiques et mécaniques sont données dans le tableau 7.2. Elle est soumise à différents impacts de forme Ricker (deuxième dérivée de la fonction Gaussienne). La vitesse de l'onde P est égale à $v_p = 4470m/s$.

TABLEAU 7.2. Les caractéristiques des tests simulés

source	10kHz	15kHz	20kHz	25kHz	30kHz	35kHz
masse volumique ρ				2400(kg/m ³)		
module d'Young E				$4.2 \times 10^{10}(Pa)$		
coefficient de Poisson ν				0.22		

La figure 7.6 donne les représentations énergétiques de deux exemples en complément de la transformation de Fourier et du signal temporel. On trace aussi sur la figure, la fréquence instantanée dont l'énergie est la plus élevée. Ces figures permettent une bonne explication du phénomène physique. Au début, l'énergie du signal est dominée par la fréquence centrale de la source (l'onde R) et puis les allers-retours de l'onde P dominant [101]. Cette remarque est observée clairement sur le plan temps-fréquence de la figure 7.6 dont la fréquence instantanée d'énergie dominante correspond à la courbe bleue aux marqueurs ronds. La fréquence f_e est ensuite calculée d'une part par la moyenne sur la partie stable de l'arête et d'autre part par le pic correspondant de la TF. Notons que la partie stable de l'arête est vérifiée par la valeur faible de la dérivée. Les résultats montrent bien que la précision donnée par TF est meilleure que celle de TO puisque la précision en fréquence de la TF est évidemment meilleure que celle de la TO. Toutefois, on a bien choisi le pic grâce à la TO. L'estimation d'épaisseur à partir des fréquences obtenues est

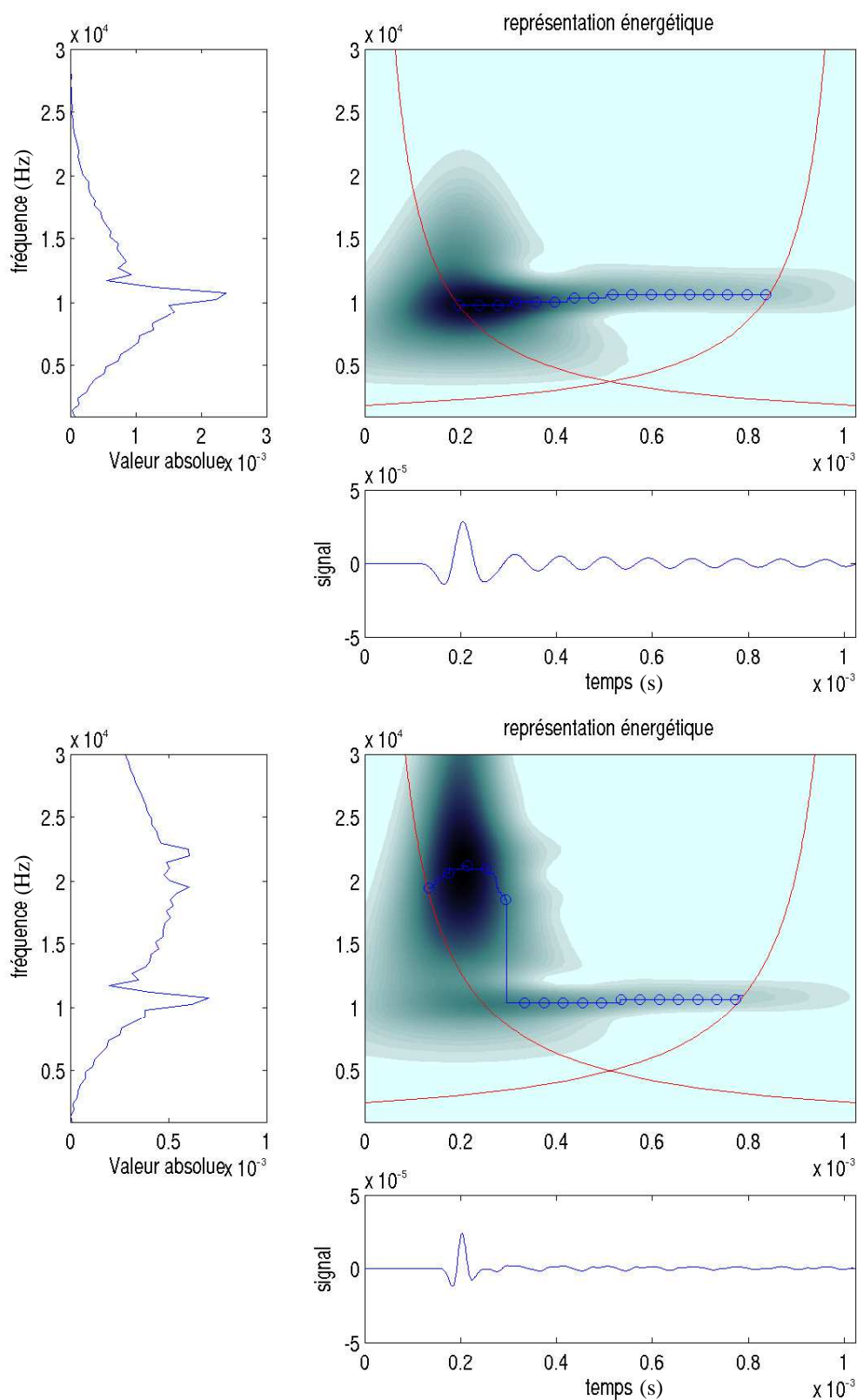


FIGURE 7.6. Représentation énergétique en complément de la fréquence d'énergie dominante du signal simulé. En haut : source de 10kHz, en bas : source de 20kHz. Signaux numériques pour la dalle de 20 cm d'épaisseur.

donnée au tableau 7.3. Les erreurs relatives pour la TF et pour la TO sont respectivement de l'ordre de 1.95% et 4.3%.

TABLEAU 7.3. Comparaison des résultats donnés par TF et TO

source (kHz)	TF (kHz)	épaisseur évaluée $\tilde{e}(cm)$	erreur %	TO (kHz)	épaisseur évaluée $\tilde{e}(cm)$	erreur %
10	10.742	20.39	1.95	10.667	20.53	2.65
15	10.742	20.39	1.95	10.497	20.87	4.35
20	10.742	20.39	1.95	10.496	20.87	4.35
25	10.742	20.39	1.95	10.498	20.86	4.30
30	10.742	20.39	1.95	10.500	20.86	4.30
35	10.742	20.39	1.95	10.510	20.86	4.30

- **Signaux expérimentaux :** Les réponses expérimentales sont enregistrées sur une dalle de 35cm d'épaisseur. Cette dalle est soumise à plusieurs impacts générés à l'aide des billes. La figure 7.7 présente un test avec la bille G. De façon similaire aux signaux numériques, la représentation énergétique temps-fréquence en complément de la TF et du signal temporel est tracée. Toutefois, en présence de plusieurs pics sur la représentation de TF, il est très difficile de déterminer la fréquence f_e . La représentation énergétique avec la fréquence d'énergie dominante est aussi ambiguë à cause du bruit ambiant. On utilise dans ce cas l'efficacité de l'algorithme "crazy climbers" décrit à la section 4.4.2 pour déterminer l'arête correspondant à l'épaisseur. Le nombre de voyageurs est égal au nombre de points d'enregistrement (2048). Le recuit se passe pendant le temps de diminution de température de 80° à 10°. Les arêtes sont cherchées dans l'intervalle de fréquence [3000 40000] (Hz). La fréquence correspondante à l'arête d'épaisseur est dessinée avec la couleur verte et les marqueurs ronds. Elle est choisie puisqu'elle varie lentement autour d'une fréquence et qu'elle a la plus petite valeur moyenne en fréquence. La fréquence moyenne sur cette arête est égale à 6.511 kHz et l'épaisseur évaluée \tilde{e} égale à 35.87 cm, soit 2.5% d'erreur relative. Ce résultat est très satisfaisant.

TABLEAU 7.4. Les fréquences déterminées sur les arêtes et épaisseurs estimées

Bille	E	F	G	H	I	J
f_e (kHz)	6.581	6.719	6.511	6.412	6.310	6.031
\tilde{e} (cm)	34.95	34.23	35.32	35.87	36.45	38.14

Afin de tester l'influence de la source i.e, le diamètre des billes, d'autres essais ont été menés sur cette dalle avec les billes : E,F,H,I,J. On constate que l'effet de la source (diamètre de billes) est net. Plus la bille est petite (de E à J), plus l'énergie s'étale vers les fréquences élevées et ainsi la gamme de fréquence utile augmente. Ce phénomène vérifie bien la formule (7.25) reliant la fréquence maximale avec le diamètre de la bille. La figure 7.8 présente le résultat d'un test avec la bille J avec l'intervalle de fréquence considéré [3000 80000] (Hz). La fréquence moyenne et l'épaisseur évaluée sont respectivement 6.031 kHz et 38.14 cm et ainsi l'erreur relative est égale 8.97%. Ce dernier test est trivial mais utile et il permet de confirmer l'utilité d'un bon choix de la source. Le tableau 7.4 donne les valeurs moyennes des arêtes d'épaisseurs des tests. Conformément au test présenté dans la référence [4], la vitesse de l'onde P est égale à $v_p = 4600(m/s)$. Les épaisseurs évaluées sont déduites et données dans le tableau 7.4. Le résultat

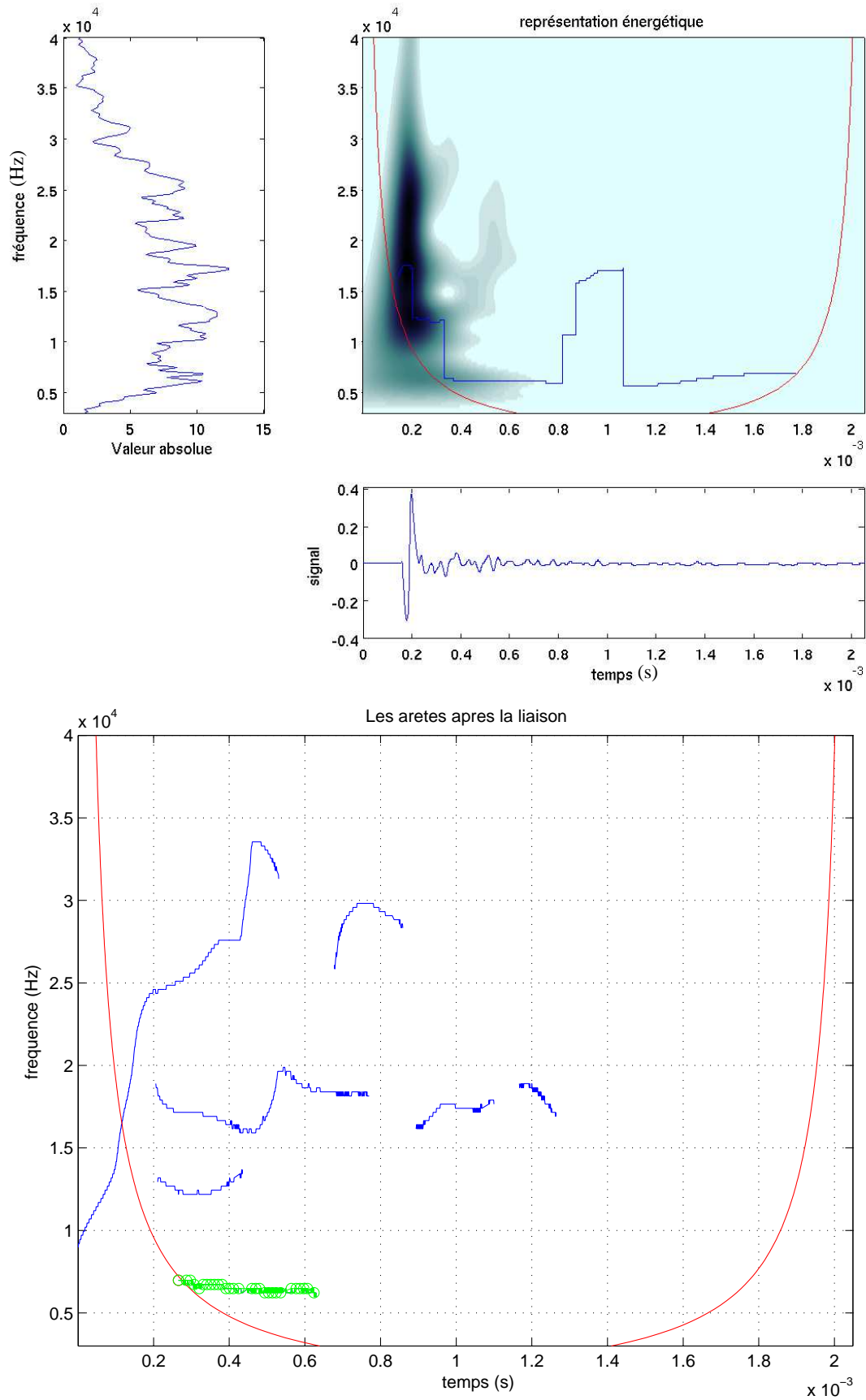


FIGURE 7.7. Dalle de 35 cm testée avec bille G. En haut : représentation énergétique avec fréquence d'énergie dominante, en bas : arêtes déterminées par l'algorithme "crazy climbers"

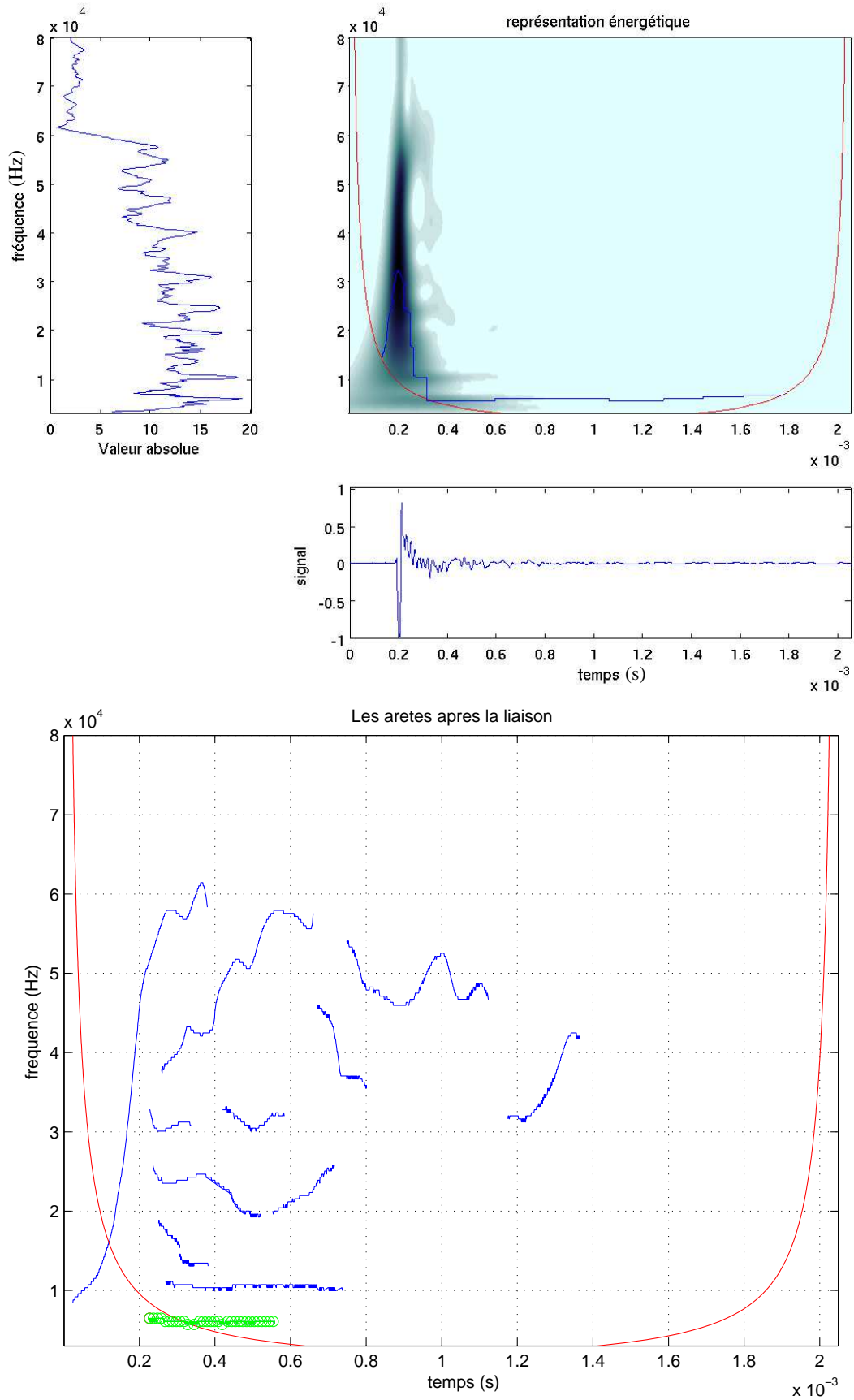


FIGURE 7.8. Dalle de 35 cm testée avec bille J. En haut : représentation énergétique avec fréquence d'énergie dominante, en bas : arêtes déterminées par l'algorithme "crazy climbers"

estimé sur dalle 35 cm est bon sauf le cas des billes I et J.

REMARQUE 7.6.1 (POINT DE COUPURE)

On peut aussi déterminer approximativement le moment à partir duquel l'onde R n'est plus dominante en se basant sur la courbe d'énergie maximale au point de saut en fréquence élevée. Ainsi, l'application de la technique de fenêtrage est valable et rend visible les informations importantes. Cette solution alternative est présentée dans la référence [3].

7.6.2 Détection de cavités

La méthode impact-écho sert aussi à détecter la présence de cavités. La figure 7.9 donne une synthèse de cette méthode quant à la détection de vides dans les gaines de précontrainte. Le déplacement du pic de résonance d'épaisseur signifie qu'un vide peut exister dans la dalle. Comme nous l'avons mentionné précédemment, la détection de vides de petite taille et de faible profondeur est difficile car la source doit avoir une gamme de fréquence élevée. L'énergie dans la gamme de fréquence qui correspond à la profondeur du trou est souvent faible et se dissipe vite. Dans cette

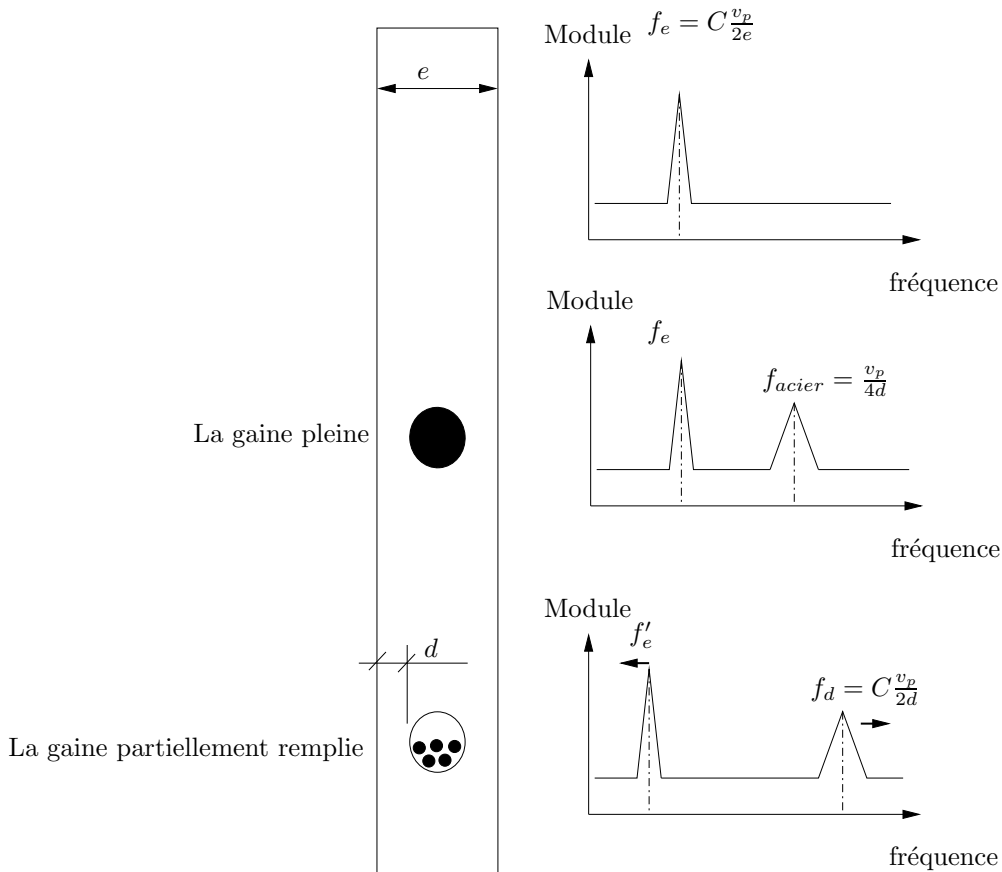


FIGURE 7.9. *Signe de présence de cavité*

section, on va aussi utiliser l'analyse temps-fréquence avec les informations supplémentaires de temps i.e, la domination de l'énergie de la source au début puis, celle des aller-retours de l'onde P et l'algorithme "crazy climbers" pour détecter plusieurs arêtes correspondant à la profondeur du vide et à l'épaisseur de la dalle dans les signaux expérimentaux.

Avant de commencer la validation de la procédure, il est utile de rappeler le principe de choix des arêtes importantes, particulièrement le choix de l'arête correspondant à la fréquence f_d . L'arête correspond à la fréquence f'_e est choisie de la même manière que le cas de fréquence d'épaisseur f_e . L'arête estimée \tilde{f}_d de f_d est déterminée dans un intervalle qui est régi par les conditions suivantes :

- La profondeur du tube peut varier de ± 2 cm par rapport à la valeur de dimensionnement, donc $d_{min}=d-2$ (cm) et $d_{max}=d+2$ (cm)
- La vitesse est calibrée avec 5% d'incertitude, soit $v_{pmin} = 0.95v_p$ et $v_{pmax} = 1.05v_p$.

D'où, on peut déduire f_{dmin} et f_{dmax} . L'arête f_d est cherchée dans l'intervalle $[f_{dmin}, f_{dmax}]$ et elle doit aussi satisfaire la condition de variation lente en fréquence.

- **Signaux simulés numériques par MEF** : Ils sont les réponses d'une dalle de 20cm soumise à différents impacts. Les mêmes caractéristiques que précédemment sont retenues (tableau 7.2) et un trou de diamètre D de 6cm et de profondeur d de 10 cm est introduit. Différentes fréquences centrales pour les impacts sont aussi appliquées. Comme nous avons besoin ici de déterminer plusieurs fréquences, la représentation énergétique en temps-fréquence avec la fréquence d'énergie dominante n'est plus suffisante. Elle ne donne que la présélection de la fréquence centrale de source, donc le recours aux algorithmes maximums locaux, ou recuit simulé est nécessaire. Puisque notre analyse sera appliquée aux signaux réels, on choisit ici l'algorithme "crazy climbers".

La figure 7.10 présente le traitement par TO d'un test simulé avec l'impact de fréquence centrale de 20 kHz. La figure 7.10 donne aussi des arêtes trouvées à l'aide de l'algorithme proposé. La ligne verte avec marqueurs ronds est l'arête correspondant à la fréquence f'_e puisqu'elle est assez lisse et a la plus petite valeur en fréquence. Dans cet exemple, on voit bien la source de 20 kHz au début. La ligne violette avec marqueurs triangulaires correspondant aux fréquences \tilde{f}_d . Elle est trouvée dans un intervalle suivant le principe précédemment mentionné, soit $17.694 \text{ kHz} \leq \tilde{f}_d \leq 29.334 \text{ kHz}$. Les résultats de f'_e et \tilde{f}_d de tous les tests, après avoir enlevé l'effet de bords, sont donnés dans le tableau 7.5.

TABLEAU 7.5. Les résultats extraits du test simulé

Source (kHz)	Épaisseur f'_e (kHz)	Vide \tilde{f}_d (kHz)
10	8.304	o
15	8.433	20.748
20	8.401	21.562
25	8.331	21.872
30	8.406	21.916
35	o	22.005

A noter que les valeurs théoriques sont successivement $f_e = 11.175$ (kHz) et $f_d = 22.350$ (kHz). On constate que ces résultats s'accordent bien avec la prédiction illustrée sur la figure 7.9. On observe le déplacement de la fréquence f_e vers la fréquence f'_e et on détecte de la fréquence du trou f_d . Le caractère "o" dans le tableau, signifie que la détection n'est pas réussie. Ces résultats ont aussi montré qu'il est nécessaire d'avoir une source convenable pour la détection des vides.

- **Signaux expérimentaux** : Trois séries de test T1, T2, T3 ont été menés sur des dalles contenant le tube de diamètres différents et mis à différentes profondeurs. Ces paramètres des trous relatifs aux dalles sont donnés dans la tableau 7.6. La valeur de la vitesse v_p est égale à 4600(m/s).

TABLEAU 7.6. *Les caractéristiques des tests expérimentaux*

test	épaisseur		diamètre du trou		Vide
	(cm)	f_e (kHz)	D (cm)	d (cm)	f_d (kHz)
T1	20	11.500	8.0	7.5	30.667
T2	35	6.571	12.5	11.5	20.000
T3	35	6.571	12.5	7.0	32.857

Les réponses des dalles aux billes I,J ont été enregistrées et traitées par la TF et TO. Ces signaux expérimentaux ne sont pas faciles à exploiter avec la TF à cause de plusieurs pics.

La représentation temps-fréquence avec la fréquence d'énergie dominante donne seulement des informations sur la présence de la source au début. Quant à la détermination des fréquences f'_e et \tilde{f}_d , on va utiliser l'algorithme recuit simulé comme les cas de signaux simulés précédents. Les figures 7.11 et 7.12 donnent des exemples de traitement du signal de test T1 avec deux billes I et J. La courbe verte avec les marqueurs ronds désigne l'arête d'épaisseur puisqu'elle est stable et qu'elle a la fréquence la plus faible parmi les arêtes retenues. La courbe violette avec les marqueurs triangulaires désigne l'arête du trou. Elle est choisie dans l'intervalle [23.000 43.909] kHz. Dans cet intervalle, on voit trois courbes, mais une seule courbe stable correspondant à la profondeur du trou est retenue. De plus, elle ne change pas quand on change quand l'excitation (bille I et bille J) change. Les valeurs de fréquences des tests sont présentées dans le tableau 7.7. Ces résultats sont proches des valeurs exactes. Les caractères "o" dans le tableau désignent l'échec de l'algorithme appliqué au test afin de trouver la fréquence correspondante puisque les arêtes dans l'intervalle en question ne sont pas stables.

Afin de tester l'influence de la source, d'autres billes plus grande (i.e plus basse fréquence) ont été utilisées, mais les résultats ne sont pas satisfaisants en valeurs des fréquences \tilde{f}_d . On retrouve ici la même conclusion en ce qui concerne la gamme de fréquence qu'une bille d'un diamètre fixé peut exciter. Plus la bille est petite, plus la valeur de f_{max} de la gamme effective est élevée et ainsi la détectabilité des cavités est élevée. Les résultats obtenus montre bien qu'un seul outil puissant de traitement du signal ne suffit pas. Il faut bien le combiner avec le choix correct des matériels des tests impact-écho.

TABLEAU 7.7. *Les résultats des tests expérimentaux*

Bille	Test					
	T1		T2		T3	
	f'_e (kHz)	\tilde{f}_d (kHz)	f'_e (kHz)	\tilde{f}_d (kHz)	f'_e (kHz)	\tilde{f}_d (kHz)
I	10.078	31.151	o	19.466	4.666	33.416
J	11.366	30.364	o	o	4.857	32.985

Finalement, on insiste sur la robustesse de l'algorithme recuit simulé appliqué à la densité locale spectrale $\tilde{E}(t, \omega)$ pour détecter les multi-arêtes sur les signaux expérimentaux puisque les signaux traités dans cette thèse ont été choisis tout à fait aléatoirement parmi les signaux enregistrés.

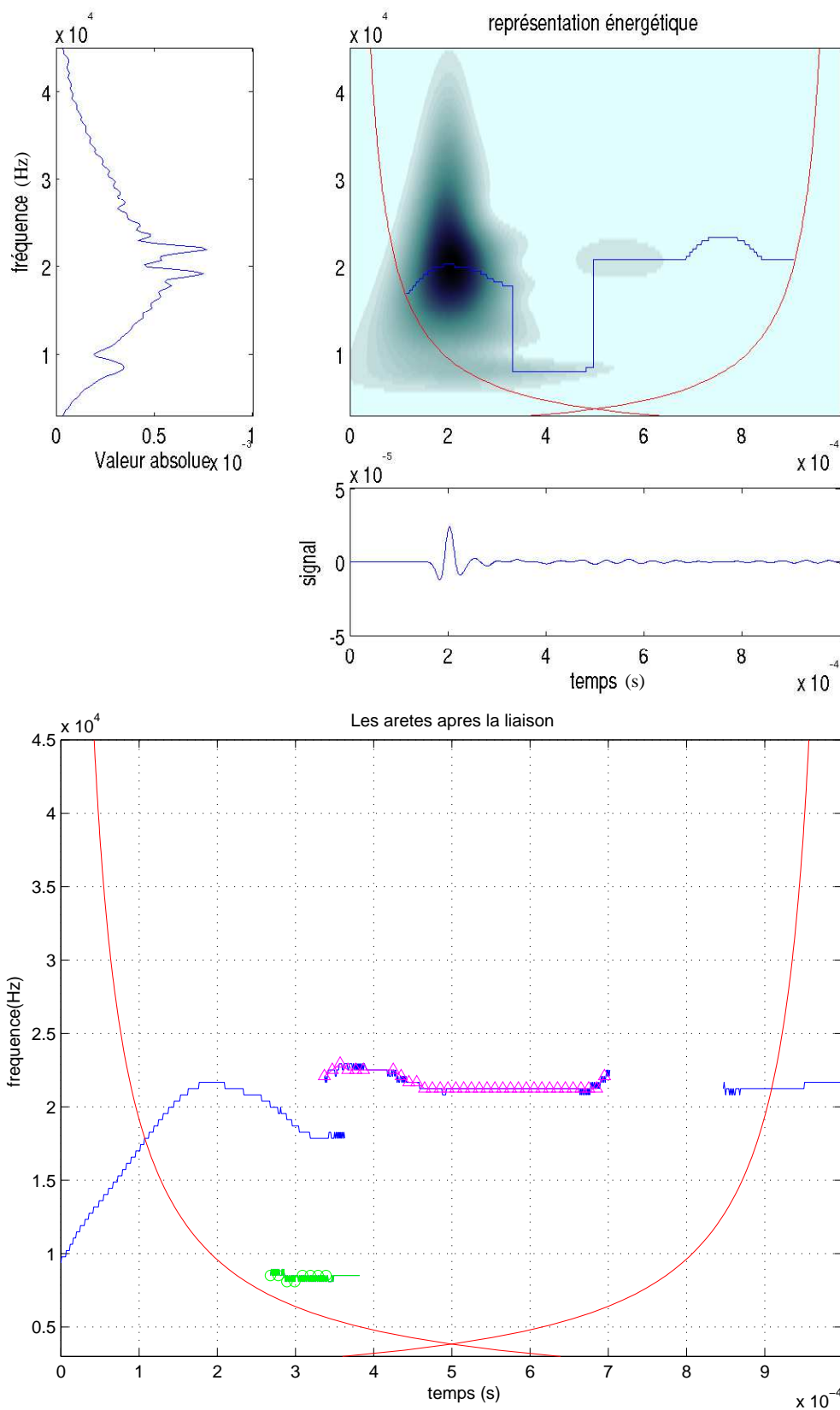


FIGURE 7.10. Signaux impact-écho simulés de la dalle de 20 cm. En haut : représentation énergétique, en bas : les arêtes déterminées par l'algorithme "crazy climbers". Cas de fréquence centrale de source égale à 20 kHz.

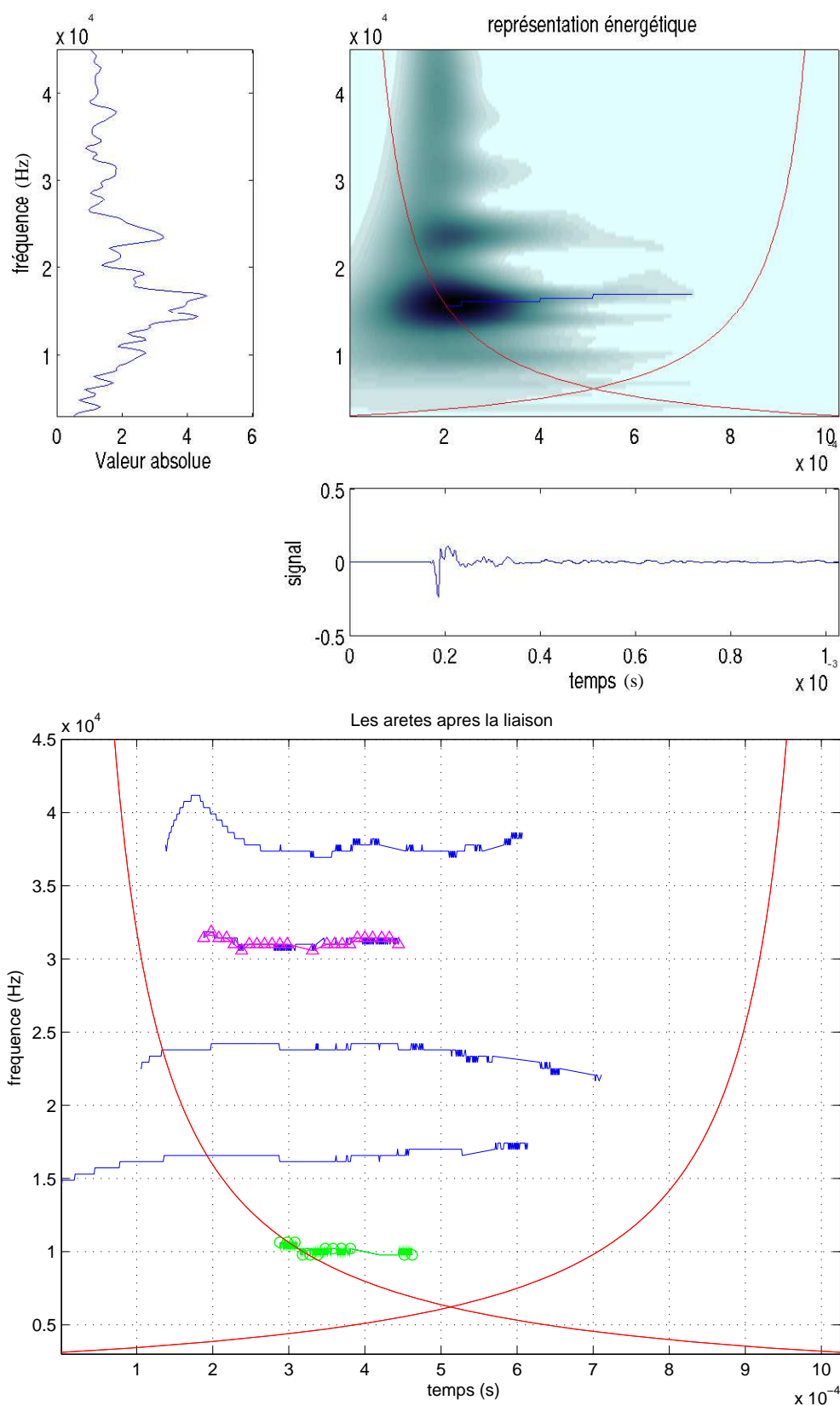


FIGURE 7.11. Signal expérimental du test T1 (tableau 7.6). En haut : représentation énergétique, en bas : arêtes déterminées par l'algorithme "crazy climbers". Cas de la bille I.

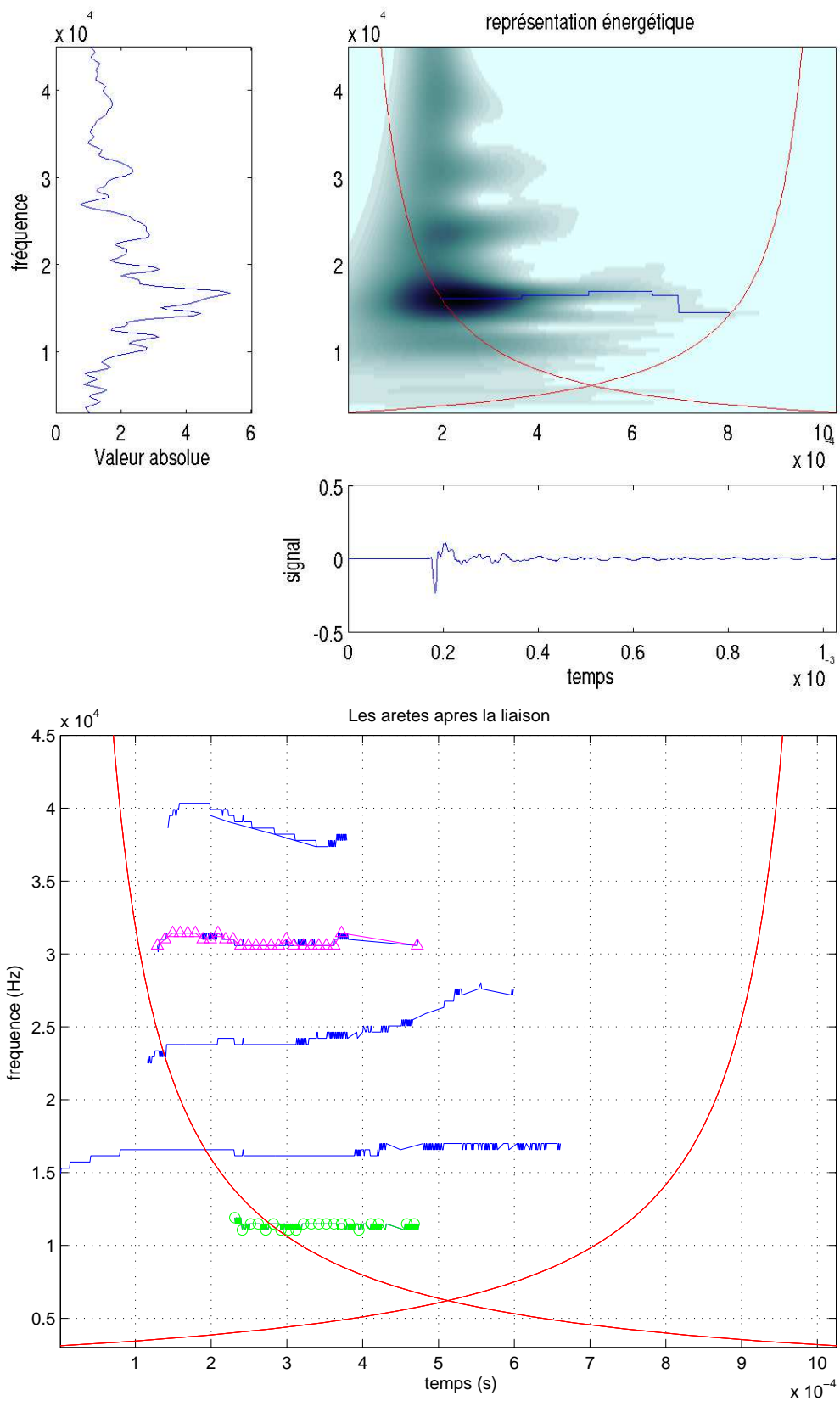


FIGURE 7.12. Signal expérimental du test T1 (tableau 7.6). En haut : représentation énergétique, en bas : arêtes déterminées par l’algorithme “crazy climbers”. Cas de la bille J.

7.7 Conclusion

Une amélioration de la méthode impact-écho par la TO a été présentée dans ce chapitre. Elle repose sur une analyse théorique et est suivie par des propositions et des démarches pratiques. Cette amélioration a été validée en l'appliquant à plusieurs cas possibles : dalles sans cavités, dalles avec cavités, signaux simulés, signaux expérimentaux. Une bonne compréhension du phénomène physique est possible grâce au plan temps-fréquence. L'algorithme "crazy climbers" a été mis en oeuvre et montre qu'il est efficace, particulièrement sur les signaux expérimentaux. Les résultats obtenus sont prometteurs et permettent de conclure que la TO est un outil utile pour la méthode impact-écho qu'elle soit utilisée indépendamment ou en complément avec la TF. L'utilisation de la TO sur les signaux expérimentaux est par conséquent très recommandée.

Conclusions & Perspectives

Conclusions

Certaines méthodes d'auscultation dynamique des structures ont été étudiées en utilisant la transformation en ondelettes continue. La transformation en ondelettes intervient lors de la représentation des signaux et elle va faciliter dans une étape suivante, l'identification paramétrique. Dans cette thèse, on a abordé ces deux étapes afin d'aboutir à des procédures d'identification performantes.

Une analyse détaillée sur la transformation en ondelettes continue a été examinée au point de vue analytique et numérique. D'un point de vue analytique, une relation entre la TO du déplacement, de la vitesse et de l'accélération est établie. Une discussion sur les ondelettes mères couramment utilisées a été faite afin de choisir les ondelettes mères les plus adaptées à l'identification modale des structures vibrantes. Le facteur Q a été choisi pour caractériser la transformation en ondelettes et évaluer la performance de l'ondelette mère. Deux ondelettes ont été retenues : l'ondelette de Morlet et l'ondelette de Cauchy. On a démontré que ces deux ondelettes ont un comportement asymptotique identique lorsque Q tend vers l'infini. D'un point de vue numérique, quatre méthodes de calcul numérique de la transformation en ondelettes ont été examinées et comparées, ce qui permet de sélectionner deux méthodes dont le coût de calcul est faible : l'algorithme de convolution et l'algorithme la transformation de Fourier rapide. Le calcul numérique a montré qu'il existe une zone dans le plan temps-fréquence où la transformation en ondelettes est biaisée à cause de la durée finie du signal et de l'échantillonnage. Un domaine D a été proposé et les exemples ont montré la validité de cette proposition. Le problème difficile du choix des paramètres des ondelettes mères a été résolu en proposant un intervalle de variation pour Q . Finalement, avec un choix de Q , un domaine D déterminé, l'outil de la transformation en ondelettes est prêt pour l'étape d'identification avec différents algorithmes d'extraction des informations à partir de transformées en ondelettes.

L'identification modale d'un système mécanique linéaire a été traitée avec la réponse libre. Plusieurs méthodes d'identification des paramètres ont été proposées en utilisant les propriétés potentielles de la transformée en ondelettes. Deux modèles d'amortissement ont été pris en compte : amortissement proportionnel et amortissement non-proportionnel. Une procédure d'identification a été établie.

L'identification des paramètres d'un système mécanique non-linéaire est étudiée. Elle repose sur l'hypothèse d'une non-linéarité de rigidité : la fréquence varie en fonction de l'amplitude du déplacement. Les études de différents oscillateurs non-linéaires sont faites et démontrent que l'analyse en ondelettes convient bien à l'identification de non-linéarité. Des tests réels ont été réalisés sur deux systèmes de non-linéarités différentes : non-linéarité de Duffing et non-linéarité bilinéaire. En combinant le choix des paramètres des ondelettes mères et le domaine D , une procédure d'identification de non-linéarité est mise au point. Quatre indicateurs instantanés du comportement

vibratoire d'un système mécanique non-linéaire sont aussi proposés.

L'amélioration de la méthode impact-écho a été réalisée à l'aide de la représentation énergétique de la transformée en ondelettes. Dans le cas d'ambiguïté, un algorithme robuste : "crazy climbers" est appliqué et donne des résultats exploitables.

Toutes ces analyses ont été programmées sous MATLAB et permettent de traiter automatiquement les problèmes d'auscultation des structures décrites ci-dessus.

Perspectives

L'application de l'analyse temps-fréquence à l'auscultation des structures par vibration est très intéressante. Pour la suite, il sera utile de développer dans cette optique, les autres propriétés de la transformation en ondelettes, particulièrement dans le cas de signaux mesurés très bruités. Une procédure comprenant la reconstruction des signaux à partir du squelette et une étape de "denoising" est à considérer.

Les paramètres du comportement des systèmes linéaires peuvent être identifiés par plusieurs techniques qui visent à déterminer les fréquences, les taux d'amortissement et les déformées modales. Toutefois, on ne traite ici que la réponse temporelle de la structure dont l'entrée a un rapport du signal sur bruit assez important. La procédure devra être modifiée dans les autres cas, par exemple pour l'excitation ambiante, il faut passer le signal par une étape préliminaire afin d'obtenir la réponse libre du système avant d'appliquer la procédure décrite dans la thèse, par exemple, par la méthode du décrétement aléatoire. Par ailleurs, une combinaison des résultats sur les différents capteurs pourrait être un sujet intéressant. La moyenne pondérée est une solution envisageable.

L'identification des systèmes non-linéaires nécessite la solution analytique du modèle utilisé, mais sa connaissance n'est pas toujours immédiate. Il est donc, important d'étudier les modèles appropriés et de déterminer leurs solutions analytiques pour chaque cas concret.

L'amélioration de la méthode impact-écho peut être approfondie en utilisant la procédure proposée sur une campagne d'essais pour une étude paramétrique. Cela permettrait de tracer une courbe fiable de détectabilité des cavités dans les dalles en béton.

Finalement, il serait très opportun d'insérer ces programmes dans les logiciels d'application aux essais réels de vibration. Ce nouvel outil qui serait testé à grande échelle, permettrait une analyse modale expérimentale fiable.

Annexes

Annexe A

Ondelettes mères

Cette annexe donne des remarques sur deux ondelettes utilisées dans la thèse : Ondelette Morlet et Ondelette Cauchy.

Localisation des ondelettes

Soit une fonction d'énergie finie $f(t)$, on dit que la fonction est bien localisée si elle présente un comportement de décroissance loin d'une valeur fixée, t_0 par exemple.

$$\text{Si } |f(t)| \leq K \frac{1}{(1 + (t - t_0)^2)^{\frac{N}{2}}}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

pour quelques constantes positives K et N , $f(t)$ est qualifiée *polynomialement* localisée en t_0 . De même,

$$\text{Si } |f(t)| \leq K e^{-\alpha|t-t_0|}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{A.2})$$

pour quelques constantes positives K et α , $f(t)$ est alors qualifiée *exponentiellement* localisée en t_0 . Dans le domaine de fréquence, la localisation est estimée de manière analogue.

• Ondelette de Morlet :

- Domaine temporel : $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\beta t}$

$$|\psi(t)| = e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{(t-0)^2}{2}} \leq K e^{-\alpha|t-0|} \quad (\text{A.3})$$

pour quelques valeurs de K et α positives, par exemple : $K = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ quand t est loin de 0. Ainsi, l'ondelette de Morlet est *exponentiellement* localisée en temps ($t_0 = 0$).

- Domaine fréquentiel : $\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\omega-\beta)^2}{2}}$

Il est intéressant de normer la fonction $\hat{\psi}(\omega)$ et il est évident que la normalisation ne change pas le comportement de la fonction analysante. On choisit la norme infinie, i.e :

$$\hat{\psi}(\omega)_\infty = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\max(|\hat{\psi}(\omega)|)} = e^{-\frac{(\omega-\beta)^2}{2}} \quad (\text{A.4})$$

De façon similaire, on arrive à la conclusion : l'ondelette de Morlet est *exponentiellement* localisée en fréquence ($\omega_0 = \beta$)

• Ondelette de Cauchy :

◦ Domaine temporel : $\psi(t) = \left(\frac{i}{t+i}\right)^{n+1} = \left[\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right]^{n+1} e^{i(n+1)\arctan(t)}$

$$|\psi(t)| = \left[\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right]^{n+1} = \frac{1}{[1+(t-0)^2]^{\frac{n+1}{2}}} \quad (\text{A.5})$$

Ainsi, l'ondelette de Cauchy est *polynomialement* localisée en temps ($t_0 = 0$).

◦ Domaine fréquentiel : $\hat{\psi}(\omega) = \frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} H(\omega)$

Comme $\max(|\hat{\psi}(\omega)|) = \hat{\psi}(n)$ d'où : $\hat{\psi}(\omega)_\infty = \left(\frac{\omega}{n}\right)^n e^{-(\omega-n)} H(\omega)$. Le comportement de cette fonction est examiné suivant deux côtés différents de $\omega_0 = n$.

* Pour $\omega \geq \omega_0 = n$,

On va démontrer que $\exists K, \alpha$ positives tel que

$$|\hat{\psi}(\omega)|_\infty = \left(\frac{\omega}{n}\right)^n e^{-(\omega-n)} H(\omega) = \left(1 + \frac{\omega-n}{n}\right)^n e^{-(\omega-n)} \leq K e^{-\alpha(\omega-n)} \quad \forall \omega \geq n \quad (\text{A.6})$$

Posons, $X = \omega - n$, la relation (A.6) est équivalente à :

$$\left(1 + \frac{X}{n}\right)^n e^{-X} \leq K e^{-\alpha X} \quad \forall X \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

On procède la démonstration comme suit : choisir une valeur de $\alpha \in (0, 1)$ et démontrer

$$\exists X_0(\alpha, n), \quad \forall X \geq X_0 \quad : \quad \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n e^{-X} \leq e^{-\alpha X} \quad (\text{A.8})$$

et la valeur de K est prise en combinant avec la connaissance de l'inéquation (A.8) dans l'intervalle $[0, X_0]$, par exemple $K = \max\left(1, \max\left(\left(1 + \frac{X}{n}\right)^n e^{-(1-\alpha)X}, \text{ avec } X \in [0, X_0]\right)\right)$.

Ainsi, il reste à démontrer (A.8). Un choix possible de X_0 : $X_0 = \max\left((n+1), \frac{(n+2)!}{(1-\alpha)^{n+2}}\right)$.

D'une part,

$$\left(1 + \frac{X}{n}\right)^n < (n+1)X^n < X^{n+1} \quad \text{puisque } X > (n+1). \quad (\text{A.9})$$

D'autre part,

$$e^{(1-\alpha)X} \geq \frac{(1-\alpha)^{n+2} X}{(n+2)!} X^{n+1} \geq X^{n+1} \quad \text{puisque } X > \frac{(n+2)!}{(1-\alpha)^{n+2}} \quad (\text{A.10})$$

D'où : $e^{(1-\alpha)X} \geq \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \quad \forall X \geq X_0$ (cqfd). L'ondelette de Cauchy est *exponentiellement* localisée à droite en fréquence quand ω tend vers $+\infty$, $\omega_0 = n$,

* Pour $\omega \leq n$: comme $|\hat{\psi}(\omega)|_\infty = \left(\frac{\omega}{n}\right)^n e^{-(\omega-n)} H(\omega)$, donc $|\hat{\psi}(\omega)|_\infty$ est nulle quand $\omega \leq 0$. il est encore intéressant de voir le comportement de $|\hat{\psi}(\omega)|_\infty$ quand $0 \leq \omega \leq n$. D'une part,

$$\left(\frac{\omega}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\omega-n}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{n-\omega}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{n-\omega}{n}\right)^n} \leq \frac{n^n}{(1+(n-\omega)^2)^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{A.11})$$

D'autre part, $e^{-(\omega-n)}$ est bornée, i.e, $e^{-(\omega-n)} \leq e^n$. Alors,

$$|\hat{\psi}(\omega)|_\infty \leq \frac{e^n n^n}{(1+(n-\omega)^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{K}{(1+(\omega-n)^2)^{\frac{N}{2}}} \quad (\text{A.12})$$

Ainsi, L'ondelette de Cauchy est *polynomialement* localisée à gauche en fréquence, $\omega_0 = n$ avec $K = e^n n^n$ et $N = \frac{n}{2}$.

Supports des ondelettes

On suppose que les supports sont numériquement admissibles et valent

$$I_\psi = [t_\psi - c_t \Delta t_\psi, t_\psi + c_t \Delta t_\psi] \quad \text{en temps} \quad (\text{A.13})$$

$$I_{\hat{\psi}} = [\omega_\psi - c_f \Delta \omega_\psi, \omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi] \quad \text{en fréquence} \quad (\text{A.14})$$

Les résultats d'investigation sont présentés ci-dessous.

• Ondelette de Morlet :

◦ Domaine temporel :

En sachant que $t_\psi = 0$ et $\Delta t_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, nous essayons d'évaluer le rapport : $r_\psi = \frac{|\psi(t_\psi + c_t \Delta t)|}{|\psi(t_\psi)|}$.

Alors $|\psi(t_\psi)| = 1$ et $|\psi(t_\psi + c_t \Delta t_\psi)| = e^{-\frac{c_t^2}{4}}$, et par conséquent,

$$r_\psi = \frac{|\psi(t_\psi + c_t \Delta t)|}{|\psi(t_\psi)|} = e^{-\frac{c_t^2}{4}} \quad (\text{A.15})$$

◦ Domaine fréquentiel :

$\omega_\psi = \beta$ et $\Delta \omega_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En remplaçant, $|\hat{\psi}(\omega_\psi)| = 1$, et $|\hat{\psi}(\omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi)| = e^{-\frac{c_f^2}{4}}$. Finalement,

$$r_{\hat{\psi}} = \frac{|\hat{\psi}(\omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi)|}{|\hat{\psi}(\omega_\psi)|} = e^{-\frac{c_f^2}{4}} \quad (\text{A.16})$$

• Ondelette de Cauchy :

◦ Domaine temporel :

Suivant le même raisonnement que le cas précédent, $t_\psi = 0$ et $\Delta t_\psi = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$, ainsi, $|\psi(t_\psi)| = 1$

et $|\psi(t_\psi + c_t \Delta t_\psi)| = \left[\frac{1}{\frac{c_t^2}{2n-1} + 1} \right]^{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{\left[\frac{c_t^2}{2n-1} + 1 \right]^{\frac{n+1}{2}}}$. Le rapport r_ψ est

$$r_\psi = \frac{|\psi(t_\psi + c_t \Delta t_\psi)|}{|\psi(t_\psi)|} = \frac{1}{\left[1 + \frac{c_t^2}{2n-1} \right]^{\frac{n+1}{2}}} \quad (\text{A.17})$$

Quand n tend vers $+\infty$ (i.e Q tend vers $+\infty$), on a la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{c_t^2}{2n-1} \right]^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left\{ \left[1 + \frac{1}{\frac{2n-1}{c_t^2}} \right]^{\frac{2n-1}{c_t^2}} \right\}^{\frac{c_t^2}{4}} \left[1 + \frac{c_t^2}{2n-1} \right]^{\frac{3}{4}}} = e^{-\frac{c_t^2}{4}} \quad (\text{A.18})$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_\psi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\psi(t_\psi + c_t \Delta t)|}{|\psi(t_\psi)|} = e^{-\frac{c_t^2}{4}} \quad (\text{A.19})$$

◦ Domaine fréquentiel :

$\hat{\psi}(\omega) = \frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} H(\omega)$, donc le rapport : $r_{\hat{\psi}} = \frac{|\hat{\psi}(\omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi)|}{|\hat{\psi}(\omega_\psi)|} = \left(\frac{\omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi}{\omega_\psi} \right)^n e^{-c_f \Delta \omega_\psi}$

Pour l'ondelette Cauchy : $\omega_\psi = n + \frac{1}{2}$ et $\Delta \omega_\psi = \frac{\sqrt{2n+1}}{2}$. En remplaçant ces valeurs, on obtient

$$r_{\hat{\psi}} = \underbrace{\left[\left(1 + c_f \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)^{-\frac{2n+1}{c_f}} e^{\sqrt{2n+1}} \right]^{-\frac{c_f}{2}}}_{G_1} \underbrace{\left(1 + c_f \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)^{-\frac{1}{2}}}_{G_2} \quad (\text{A.20})$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_2 = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} r_{\hat{\psi}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\left(1 + c_f \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)^{-\frac{2n+1}{c_f}} e^{\sqrt{2n+1}}}_{G_3} \right]^{-\frac{c_f}{2}} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} G_3 \right)^{-\frac{c_f}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Posons : $X = \sqrt{2n+1}$, $n \rightarrow +\infty$ correspond à $X \rightarrow +\infty$. Ainsi, on re-écrit $G_3 = \frac{e^X}{\left(1 + \frac{c_f}{X}\right)^{\frac{X^2}{c_f}}}$.

En posant de nouveau,

$$G_4 = \ln(G_3) = X - \frac{X^2}{c_f} \ln \left(1 + \frac{c_f}{X} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} G_4 = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[X - \frac{X^2}{c_f} \left(\frac{c_f}{X} - \frac{1}{2} \left(\frac{c_f}{X} \right)^2 + o \left(\frac{c_f}{X} \right)^3 \right) \right] = \frac{c_f}{2} \quad (\text{A.23})$$

donc,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} G_3 = e^{\frac{c_f}{2}}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_1 = e^{-\frac{c_f^2}{4}}$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{\hat{\psi}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega_{\psi} + c_f \Delta \omega_{\psi})|}{|\hat{\psi}(\omega_{\psi})|} = e^{-\frac{c_f^2}{4}} \quad (\text{A.24})$$

Ondelettes en norme L^1 et L^2

- **Ondelette de Morlet** : $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\beta t}$.

◦ en L^1

$$\|\psi(t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \quad (\text{A.25})$$

◦ en L^2

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.26})$$

- **Ondelette de Cauchy** : $\psi(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \right]^{n+1} e^{i(n+1) \arctan(t)}$

◦ en L^1

$$\|\psi(t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \right]^{n+1} dt = 2 \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \right]^{n+1} dt \quad (\text{A.27})$$

posons : $t = \tan \theta$, ainsi $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\|\psi(t)\|_{L^1} = 2 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(n-1)} \theta d\theta}_{I_n} \quad (\text{A.28})$$

* Si $n = 1$, $\|\psi(t)\|_{L^1} = \pi$.

* Si $n = 2$, $\|\psi(t)\|_{L^1} = 2$.

* Si $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(n-1)} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(n-2)} \theta d(\sin \theta) \\
 &= \cos^{(n-2)} \theta \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^{(n-3)} \theta d\theta \\
 &= (n-2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \cos^{(n-3)} \theta d\theta = (n-2)I_{n-2} - (n-2)I_n \quad (\text{A.29})
 \end{aligned}$$

Ainsi, $I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$.

- Si n est impaire : $I_n = \frac{(n-2) \times (n-4) \dots 3 \times 1}{(n-1) \times (n-3) \dots 4 \times 2} I_1 = \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} \frac{\pi}{2}$

- Si n est paire : $I_n = \frac{(n-2) \times (n-4) \dots 4 \times 2}{(n-1) \times (n-3) \dots 5 \times 3} I_2 = \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}$

Finalement,

$\|\psi(t)\|_{L^1} = \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} \pi$ si n est impaire

$\|\psi(t)\|_{L^1} = 2 \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}$ si n est paire.

o en L^2

De façon analogue, on peut facilement avoir :

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi \quad (\text{A.30})$$

Annexe B

Signal analytique

Soit deux signaux causaux : $u_1(t) = e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}$ et $u_2(t) = e^{-\omega_j \xi_j t} e^{-i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}$. L'approximation du signal analytique associée donnée par (5.49) et (5.50) :

$$A[u_1] = A[e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}] \approx 2e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} = 2u_1(t) \quad (\text{B.1})$$

$$A[u_2] = A[e^{-\omega_j \xi_j t} e^{-i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}] \approx 0 \quad (\text{B.2})$$

On essaie d'estimer la qualité de ces approximations. Sachant que le signal analytique $Z_u(t)$ d'un signal $u(t)$ peut être calculé par

$$Z_u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\hat{u}(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B.3})$$

- Première approximation : $A[u_1](t) = A[e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t}] \approx 2e^{-\omega_j \xi_j t} e^{i\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t} = 2u_1(t)$

Comme, $\hat{u}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega - \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2})^2 + (\omega_j \xi_j)^2}} e^{-i \arctan(\frac{\omega - \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2}}{\omega_j \xi_j})}$ et ainsi,

$$Z_{u_1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\hat{u}_1(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B.4})$$

L'énergie de la différence entre le signal analytique approché $A[u_1]$ et le signal analytique exact $Z_{u_1}(t)$ est ΔE ,

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z_{u_1}(t) - 2u_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |2\hat{u}_1(\omega) H(\omega) - 2\hat{u}_1(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 |\hat{u}_1(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.5})$$

En remplaçant, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 |\hat{u}_1(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(\omega - \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2})^2 + (\omega_j \xi_j)^2} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_j \xi_j} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi_j^2}}{\xi_j}\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

et $\lim_{\xi \rightarrow 0} \Delta E = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_j}$.

L'énergie totale du signal peut facilement se calculer : $E = \frac{1}{2\omega_j\xi_j}$ et ainsi, le rapport

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\sqrt{1-\xi_j^2}}{\xi_j}))}{\pi} \quad (\text{B.7})$$

et $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{E} = 0$.

- Deuxième approximation : $A[s_2](t) \approx 0$

Partons de la remarque : $\hat{S}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega + \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2})^2 + (\omega_j \xi_j)^2}} e^{-i \arctan(\frac{\omega + \omega_j \sqrt{1-\xi_j^2}}{\omega_j \xi_j})}$, on obtient,

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |\hat{S}_2(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_j \xi_j} (\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\sqrt{1-\xi_j^2}}{\xi_j})) \quad (\text{B.8})$$

et finalement, on peut retrouver le même résultat : $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{E} = 0$.

En conclusion, quand l'amortissement ξ est faible, les approximations donnent des résultats satisfaisants.

□

Annexe C

Oscillateur bilinéaire

Considérons la vibration libre d'un oscillateur conservatif, bilinéaire

$$m\ddot{u} + S(u) = 0 \tag{C.1}$$

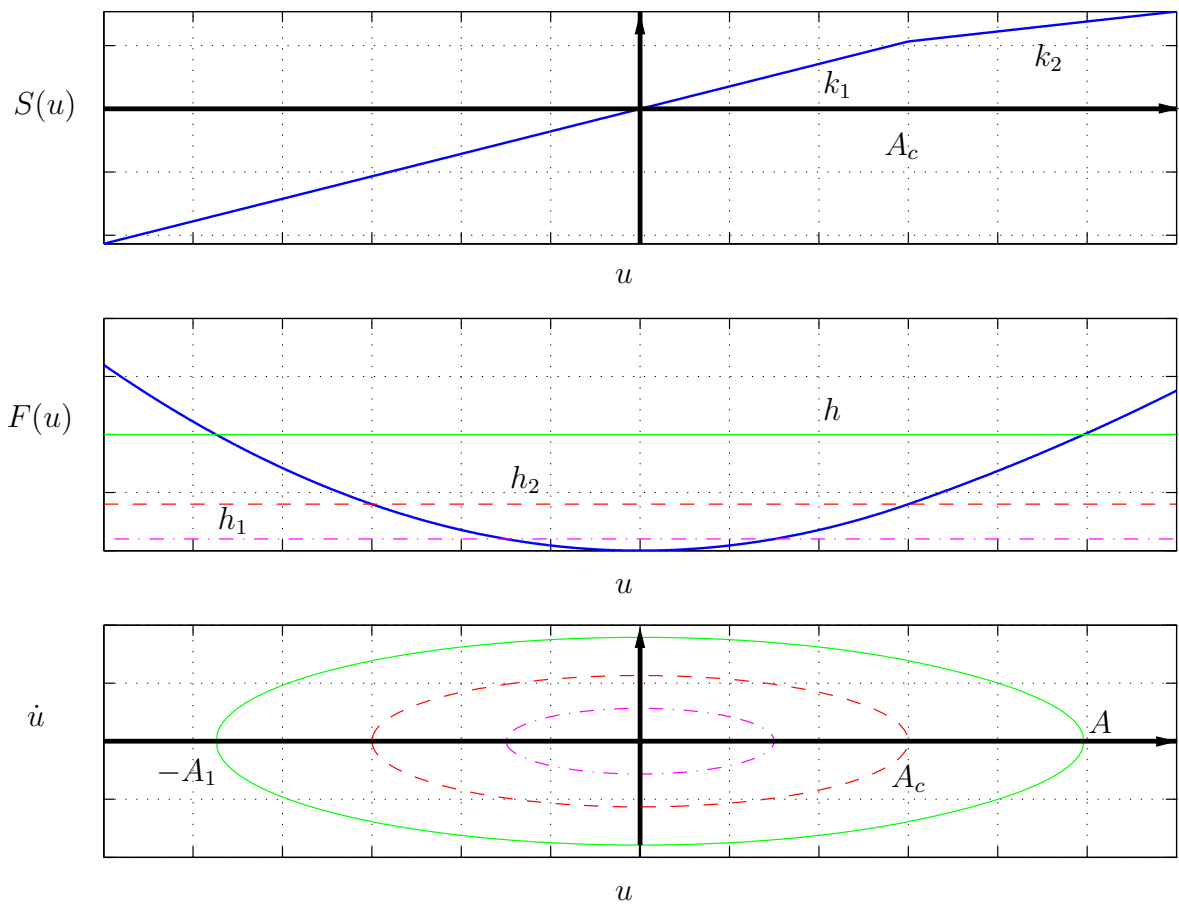


FIGURE C.1. *Oscillateur bilinéaire*

La masse est d'abord, supposée égale à unité. La période d'oscillation est calculée par :

$$T = 2 \int_{-A_1}^A \frac{du}{[2h - 2F(u)]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} \left[\underbrace{\int_{-A_1}^{A_c} \frac{du}{[h - F_1(u)]^{\frac{1}{2}}}}_{T_1} + \underbrace{\int_{A_c}^A \frac{du}{[h - F_2(u)]^{\frac{1}{2}}}}_{T_2} \right] \quad (\text{C.2})$$

Sachant que $F(u) = \int_0^u S(u)du$, on obtient :

$$F_1(u) = \int_0^u k_1 u du = \frac{k_1 u^2}{2} \quad \text{pour } u \leq A_c \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} F_2(u) &= \int_0^{A_c} k_1 u du + \int_{A_c}^u [k_1 A_c + k_2(u - A_c)] du \quad \text{pour } u > A_c \\ &= \frac{k_1 A_c^2}{2} + k_1 A_c(u - A_c) + \frac{k_2(u - A_c)^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Avec l'énergie potentielle h ,

$$h = \frac{k_1 A_1^2}{2} = \frac{k_1 A_c^2}{2} + k_1 A_c(A - A_c) + \frac{k_2(A - A_c)^2}{2} \quad (\text{C.5})$$

* Pour T_1

$$T_1 = \int_{-A_1}^{A_c} \frac{du}{[h - F_1(u)]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{k_1}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k_1}{2h}} u \right) \Big|_{-A_1}^{A_c} = \sqrt{\frac{2}{k_1}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{k_1}{2h}} A_c \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{C.6})$$

A partir de la relation (C.5), on a :

$$\sqrt{\frac{k_1}{2h}} A_c = \sqrt{\frac{\frac{k_1 A_c^2}{2}}{\frac{k_1 A_c^2}{2} + k_1 A_c(A - A_c) + \frac{k_2(A - A_c)^2}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2 \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right) + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right)^2}} \quad (\text{C.7})$$

* Pour T_2

$$T_2 = \int_{A_c}^A \frac{du}{[h - F_2(u)]^{\frac{1}{2}}} = \int_{A_c}^A \frac{du}{\left[H - \frac{k_2}{2} \left(u + A_c \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{C.8})$$

où

$$\begin{aligned} H &= h + \frac{k_1}{2} A_c^2 \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) = \frac{k_1 A_c^2}{2} + k_1 A_c(A - A_c) + \frac{k_2(A - A_c)^2}{2} + \frac{k_1}{2} A_c^2 \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2k_2} [k_1 A_c + k_2(A - A_c)]^2 = \frac{k_2}{2} \left[\frac{k_1}{k_2} A_c + (A - A_c) \right]^2 = \frac{k_2}{2} \left[A + \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) A_c \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \sqrt{\frac{2}{k_2}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k_2}{2H}} \left(u + A_c \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \right) \right) \Big|_{A_c}^A \\ &= \sqrt{\frac{2}{k_2}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{k_2}{2H}} \left(A + \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) A_c \right) \right) - \arcsin \left(\sqrt{\frac{k_2}{2H}} \left(\frac{k_1}{k_2} A_c \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Après simplification grâce à la relation (C.9),

$$T_2 = \sqrt{\frac{2}{k_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right) + 1} \right) \right) \quad (\text{C.11})$$

Finalement, la période de l'oscillateur bilinéaire vaut :

$$\begin{aligned} T = \sqrt{2}(T_1 + T_2) &= \frac{\pi}{\sqrt{k_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{k_2}} + \frac{2}{\sqrt{k_1}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right)^2 + 2 \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right) + 1}} \right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{k_2}} \arcsin \left(\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right) + 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

et pour la masse m ,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} + \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right)^2 + 2 \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right) + 1}} \right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} \arcsin \left(\frac{1}{\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A}{A_c} - 1 \right) + 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Bibliographie

- [1] O. Abraham and P. Cote. Thickness frequency profile for the detection of voids in tendon ducts. *ACI Structural Journal*, 99(239-247), 2002.
- [2] O. Abraham and P. Côte. Méthode impact-écho basse fréquence pour la détection de vide dans les gaines de précontrainte. *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, 239(41-50), 2003.
- [3] O. Abraham, T-P. Le, P. Côte, and P. Argoul. Two enhanced complementary impact echo approaches for the detection of void in tendon ducts. *First International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management, Barcelona, 2002*.
- [4] O. Abraham, C. Léonard, P. Côte, and B. Piwakowski. Time frequency analysis of impact-echo signals : Numerical modeling and experimental validation. *ACI Materials journal*, 97-M73(645-657), 2000.
- [5] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, Inc., 9th edition, 1972.
- [6] J.D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, 1973.
- [7] S. Adhikari and J. Woodhouse. Identification of damping : part 1, viscous damping. *Journal of Sound and Vibration.*, 243(43-61), 2001.
- [8] S. Adhikari and J. Woodhouse. Identification of damping : part 2, non-viscous damping. *Journal of Sound and Vibration.*, 243(63-88), 2001.
- [9] R. J. Allemang and D. L. Brown. A unified matrix polynomial approach to modal identification. *Journal of Sound and Vibration.*, 211(301-322), 1998.
- [10] P. Argoul. *Identification des structures vibrantes*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990.
- [11] P. Argoul, S. Hans, F. Conti, and C. Boutin. Time-frequency analysis of free oscillations of mechanical structures. application to the identification of the mechanical behavior of buildings under chocks. *Proceeding of the COST F3 conference : System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain.*, (283-292), 2000.
- [12] P. Argoul, S. Hans, T-P. Le, and C. Boutin. Analyse temps-fréquence de réponses de bâtiments à des essais de chocs. *Actes du 5^e Colloque Nationale en Calcul des Structures.*, 2(1057-1064), 2001.
- [13] P. Argoul and T-P. Le. Instantaneous indicators of structural behavior based on the continuous cauchy wavelet analysis. *Mechanical System and Signal Processing.*, 17(243-250), 2003.
- [14] P. Argoul and T-P. Le. Wavelet analysis of transient signals in civil engineering. *Novel approaches in civil engineering.*, in press, 2003.
- [15] E. Balmès. *Identification et Recalage*. École centrale Paris.

- [16] M. Bellanger. *Traitement numérique du signal*. MASSON, 1981.
- [17] S. Bellizzi and R. Bouc. Analysis of multi-degree of freedom strongly non-linear mechanical systems with random input. part i : nonlinear modes and stochastic averaging. *Probabilistic Engineering Mechanics.*, 14(229–244), 1999.
- [18] S. Bellizzi, P. Guillemain, and R. Kronland-Martinet. Identification of coupled non-linear modes from free vibration using time-frequency representations. *Journal of Sound and Vibration.*, 2(191–213), 2001.
- [19] B. Boashash and P O’shea. Use of the cross wigner-ville distribution for estimation of instantaneous frequency. *IEEE*, 41(1439–1445), 1993.
- [20] J. Bonato, R. Ceravolo, and A. De Stefano. Time-frequency and ambiguity function approaches in structural identification. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE).*, 123(1260–1267), 1997.
- [21] J. Bonato, R. Ceravolo, and A. De Stefano. Use of cross-time-frequency estimators for structural identification in non-stationary conditions and under unknown excitation. *Journal of Sound and Vibration.*, 237(775–791), 2000.
- [22] C. Boutin, S. Hans, I. Erdin, and M. Lorient. Projet : approche de la vulnérabilité sismique par l’étude du comportement de bâtiments réels. *Rapport de recherche.*, 1999.
- [23] D. L. Brown, R. J. Allemang, R. Zimmerman, and M. Mergeay. Parameter estimation techniques for modal analysis. *SAE Technical Paper series.*, 790221, 1979.
- [24] N. J. Carino. The impact-echo method : an overview. *Proceedings of the 2001 Structures Congress Exposition*, (18), 2001.
- [25] R. Carmona, W-H. Hwang, and B. Torrèsani. *Practical time-frequency analysis*. Academic Press, 1998.
- [26] R. Carmona, W-L. Hwang, and B. Torrèsanni. Identification of chirps with continuous wavelet transform. *Wavelet and Statistics*, (103), 1995.
- [27] R. Carmona, W-L. Hwang, and B. Torrèsanni. Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 10(45), 1996.
- [28] R. Carmona, W-L. Hwang, and B. Torrèsanni. Multi-ridge detection and time-frequency reconstruction. *IEEE Trans. Signal Processing*, (47), 1999.
- [29] M. Chati, R. Rand, and S. Mukherjee. Modal analysis of a cracked beam. *Journal of Sound and Vibration.*, 207(249–270), 1997.
- [30] Y. K. Cheung, S. H. Chen, and S. L. Lau. A modified lindstedt-poincaré method for certain strongly non-linear oscillators. *Int J. Non-linear Mechanics.*, 26(376–378), 1991.
- [31] K C. Chui. *An Introduction to wavelets*. Academic Press, 1992.
- [32] W. R. Clough. *Dynamique des structures, tome 1 : principes fondamentaux*. Éditions pluralis, 1980.
- [33] L. Cohen. *Time-frequency analysis*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [34] C. Colla, G. Schneider, and H Wiggenhauser. Automated impact-echo and method improvement : 2- an 3-d imaging of concrete elements. *Proc. Non-Destructive Testing in Civil Engineering 2000, editor : Taketo Uomoto. Tokyo, Japan*, 2000.
- [35] W. B. Collis, P. R. White, and J. K. Hammond. Higher-order spectra : the bispectrum and trispectrum. *Mechanical System and Signal Processing.*, 12(375–394), 1998.

- [36] C. Cremona, F. De Souza Barbosa, and A. Alvandi. Identification modale sous excitation ambiante : Application à la surveillance des ponts. *Mécanique & Industries.*, (in press), 2003.
- [37] I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localisation and signal analysis. *IEEE*, 36(961–1005), 1990.
- [38] A. De Stefano, R. Ceravolo, J. Bonato, and G. Gagliati. Analysis of ambient vibration data from queensboroug bridge using cohen class time-frequency distributions. *Proceedings 14th International Modal Analysis Conference.*, (470–476), 1996.
- [39] M. R. Dellomo and G. M. Jacyna. Wigner transforms, gabor coefficients, and weyl-heisenberg. *Acoustical Society of America*, 89(2355–2361), 1991.
- [40] N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, Kronland-Martinet, Ph. R. Tchamichian, and B. Torrèsanni. Asymptotic wavelet and gabor analysis : extraction of instantaneous frequencies. *IEEE.*, 38(644–664), 1992.
- [41] E.S. Eringen and A.C. Suhubi. *Elastodynamics. Vol. 2 - Linear theory.* Academic Press, 1975.
- [42] D. Euvrard. *Transformation de Fourier et Laplace.* ENSTA, 1978.
- [43] M. Feldman. Non-linear system vibration analysis using hilbert transform-i free vibration analysis method 'freevib'. *Mechanical System and Signal Processing.*, 8(119–127), 1994.
- [44] M. Feldman. Non-linear system vibration analysis using hilbert transform-ii forced vibration analysis method 'forcevib'. *Mechanical System and Signal Processing.*, 8(309–318), 1994.
- [45] M. Feldman. Non-linear free vibration identification via the hilbert transform. *Journal of Sound and Vibration.*, 208(475–489), 1997.
- [46] L Galleani, L Lo Presti, and A. De Stefano. A method for nonlinear system classification in the time-frequency plane. *Signal Processing.*, 65(147–153), 1998.
- [47] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures.* Masson, deuxième édition, 1996.
- [48] S. Gouttebroze and J. Lardies. On using the wavelet transform in modal analysis. *Mechanics Research Communications.*, 28(561–569), 2001.
- [49] K. Gram-Hansen and K. Dorize. On the choice of parameters for time-frequency analysis. *Proc. of Int. Conf. "Wavelets and Applications"*, (82–96), 1992.
- [50] K. Gram-Hansen and S. Gade. The analysis of nonstationary signals. *Sound and Vibration*, (40–97), 1997.
- [51] A. Grossmann and Morlet. J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 15(723–736), 1984.
- [52] S. Hans, E. Ibraim, C. Boutin, and C. H. Lamarque. Damping identification in mdof systems via a wavelet-logarithmic decrement. part 2 : study of a civil engineering building. *Journal of Sound and Vibration.*, 235(375–403), 2000.
- [53] W. Heylen, S. Lammens, and P. Sas. *Modal analysis theory and testing.* KU Leuven, 1997.
- [54] Y. Hsiao, C. Lin and S.K Tso. Nondestructive evaluation of concrete quality and integrity in composite columns. *NDT & E international*, 32(375–382), 1999.
- [55] D. Huang. Phase error in fast fourier transform analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9(113–118), 1995.
- [56] D. Huang. A wavelet-based algorithm for the hilbert transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(125–134), 1996.

- [57] S. R. Ibrahim and E. C. Mikulcik. A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. *The Shock and Vibration Bulletin.*, 47(183–198), 1977.
- [58] T. Kasai and M. Link. Identification of non-proportional modal damping matrix and real normal modes. *Mechanical System and Signal Processing.*, 16(921–934), 2002.
- [59] G. Kerschen and J. C. Golinval. Theoretical and experimental identification of a non-linear beam. *Journal of Sound and Vibration.*, 244(597–613), 2001.
- [60] G. Kerschen and J. C. Golinval. Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition. *Journal of Sound and Vibration.*, 249(849–865), 2002.
- [61] G. Kerschen, V. Lenaerts, and J. C. Golinval. Identification of a continuous structure with a geometrical non-linearity. part i : Conditioned reverse path method. *Journal of Sound and Vibration.*, 262(889–906), 2003.
- [62] W.-J. Kim and Y.-S. Park. Non-linearity identification and quantification using inverse fourier transform. *Journal of Sound and Vibration.*, 7(239–255), 1993.
- [63] M. E King and A. F. Vakakis. Asymptotic analysis of nonlinear mode localization in a class of coupled continuous structures. *Int.J.Solids Structures*, 32(1161–1177), 1995.
- [64] C. H. Lamarque, S. Pernot, and A. Cueur. Damping identification in mdof systems via a wavelet-logarithmic decrement. part 1 : theory. *Journal of Sound and Vibration.*, 235(361–374), 2000.
- [65] J. Lardies and S. Gouttebroze. Identification of modal parameters using the wavelet transform. *International Journal of Mechanical Sciences.*, 44(2263–2283), 2002.
- [66] T-P. Le and P. Argoul. Continuous wavelet transform for modal identification using free decay. *Journal of Sound and Vibration.*, *Accepté pour publication*, 2003.
- [67] T-P. Le and P. Argoul. Utilisation de la transformation en ondelettes pour l'identification des systèmes mécaniques non-linéaires en vibration. *16^e Congrès Français de Mécanique.*, *Accepté*, 2003.
- [68] V. Lenaerts. *Identification des modèles structuraux en dynamique non linéaire*. PhD thesis, Université de Liège, 2002.
- [69] V. Lenaerts, G. Kerschen, and J. C. Golinval. Proper orthogonal decomposition for model updating of nonlinear mechanical systems. *Mechanical System and Signal Processing.*, 15(31–43), 2001.
- [70] V. Lenaerts, G. Kerschen, and J. C. Golinval. Identification of a continuous structure with a geometrical non-linearity. part ii : Proper orthogonal decomposition. *Journal of Sound and Vibration.*, 262(907–919), 2003.
- [71] M-T. Liang and P-J Su. Detection of the corrosion damage of rebar in concrete using impact-echo method. *Cement and Concrete research*, 31(1427–1436), 2001.
- [72] A.K Maji and Wang M.L. Detection of small voids by impact-echo and signal processing. *Construction materials serviability/durability*, (1223–1232).
- [73] A.K Maji and Wang M.L. Improved impact-echo technique by signal processing. *Res Non-destr Eval*, 2(45–56), 1990.
- [74] S. Mallat. *Une Exploration des Signaux en Ondelettes*. Les Éditions de L'école Polytechniques, 2000.
- [75] J. Martin and al. Accuracy of nde in bridge assessment. *Engineering structures*, 20(979–984), 1998.

- [76] J. Martin and M.C Forde. Influence of concrete properties on impulse hammer spectrum and compression wave velocity. *Construction and building materials*, 9(245-255), 1995.
- [77] Y. V Mikhlin, A. F Vakakis, and G. Salenger. Direct and inverse problems encountered in vibro-impact oscillations of a discrete system. *Journal of Sound and Vibration.*, 216(227–250), 1998.
- [78] R. N. Miles. Spectral response of a bilinear oscillator. *Journal of Sound and Vibration.*, 163(319–326), 1993.
- [79] Bracewell Ronald N. *The Fourier transform and Its applications*. International student edition, 1978.
- [80] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Non-linear Oscillations*. Wiley, 1979.
- [81] N.E. Newland. Wavelet analysis of vibration, part 1 : Theory. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(409–416), 1994.
- [82] N.E. Newland. Wavelet analysis of vibration, part 2 : Wavelet maps. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(417–425), 1994.
- [83] N.E. Newland. Ridges and phase identification in the frequency analysis of transient signals by harmonic wavelets. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121(149–155), 1999.
- [84] V-H. Nguyen. *Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [85] M. Ohtsu and T Wantanabe. Stack imaging of spectral amplitudes based on impact-echo for flaw detection. *NDT & E International*, 35(189-196), 2002.
- [86] P. O'shea and B. Boashash. Instantaneous frequency estimation using the cross wigner-ville distribution with application to non-stationary transient detection. *IEEE*, 2(2887–2890), 1990.
- [87] K. C. Park and K. F. Alvin. Identification of structural dynamique models using wavelet-generated impulse response data. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120(261–266), 1998.
- [88] T. Paul. *Ondelettes et Mécanique Quantique*. PhD thesis, CPT Marseille, 1986.
- [89] S. Pernot. *Méthodes ondelettes pour l'étude des vibrations et de la stabilité des systèmes dynamiques*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2000.
- [90] V. Perrier, T. Philipovitch, and C. Basdevant. Wavelet spectra compared to fourier spectra.
- [91] S. Pessiki and Rowe M.H. Influence of steel reinforcing bars on the evaluation of the early-age concrete strength using the impact-echo method. *ACI Materials Journal*, 94(378-388), 1997.
- [92] B. Piombo, A. Fasana, S. Marchesiello, and M. Ruzzene. Modelling and identification of the dynamique response of a supported bridge. *Mechanical System and Signal Processing.*, 14(75–89), 2000.
- [93] R. Polikar. *The wavelet tutorial*. Rowan university.
- [94] J S Popovics. Effects of poisson's ratio on impact-echo test analysis. *Journal of engineering mechanics*, 123(843-851), 1997.
- [95] D. Pratt and M Sansalone. The use of a neural network for automating impact-echo signal interpretation. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, 10A, 1991.
- [96] M. H. Richardson and D. L. Formenti. Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials. *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference (IMAC I), Orlando, Florida, USA.*, (167–181), 1982.

- [97] F. Roddier. *Distributions et Transformation de Fourier*. Mc Graw Hill, 1981.
- [98] R. M. Rosenberg. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics.*, 29(7–14), 1962.
- [99] M. Ruzzene, A. Fasana, L. Garibaldi, and B. Piombo. Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform : application to real data. *Mechanical System and Signal Processing.*, 11(207–218), 1997.
- [100] D A. Sack and D Olson. Advanced ndt methods for evaluating concrete bridges and other structures. *NDT & E International*, 28(349-357), 1995.
- [101] M. Sansalone and W.B Streett. *Impact-echo : Nondestructive testing of concrete and masonry*. Bulbrier Press, Ithaca, N.Y.,USA, 1997.
- [102] J-M Sasalone, M. Lin and W-B Strett. A procedure for determining p-wave speed in concrete for use in impact-echo testing using a p-wave speed measurement technique. *ACI Materials Journal*, 94(531-539), 1997.
- [103] S. W Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration.*, 164(85–124), 1993.
- [104] S. W Shaw and C. Pierre. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration.*, 169(319–347), 1994.
- [105] F. Sheid. *Analyse Numérique*. Mc Graw Hill, 1987.
- [106] H-F. Shyu and Pai Y-D. Improving impact-echo method by wavelet transform for infrastructure inspection. *Proc of 11th Pacific Basin Nuclear Conference Banff, Canada*, 2(1649-1654), 1998.
- [107] P. Siarry and G. Dreyfus. *La méthode du recuit simulé : théorie et application*. I.D.S.E.T., Paris, 1988.
- [108] J. Slavic. Damping identification using a continuous wavelet transform : application to real data. *Journal of Sound and Vibration.*, 262(291–307), 2003.
- [109] W.J. Staszewski. Application of the wavelet transform to fault detection in a spur gear. *Mechanical System and Signal Processing.*, 8(289–307), 1994.
- [110] W.J. Staszewski. Identification of damping in mdof system using time-scale decomposition. *Journal of Sound and Vibration.*, 203(283–305), 1996.
- [111] W.J. Staszewski. Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of wavelet transform. *Journal of Sound and Vibration.*, 214(639–658), 1998.
- [112] W.J. Staszewski and G. R. Tomlinson. Local tooth fault detection in gearboxes using a moving windows procedure. *Mechanical System and Signal Processing.*, 11(331–350), 1997.
- [113] W.J. Staszewski, K. Worden, and G. R. Tomlinson. Time-frequency analysis in gearbox fault detection using the wigner-ville distribution and pattern recognition. *Mechanical System and Signal Processing.*, 11(673–692), 1997.
- [114] G.E Stavroulakis. Impact-echo from a unilateral interlayer crack. lcp-bem modelling and neural identification. *Engineering fracture mechanics*, 62(165-184), 1999.
- [115] S. K. Tang. On the time-frequency analysis of signals that decay exponentially with time. *Journal of Sound and Vibration.*, 234(241–258), 1999.
- [116] Nuno Manuel Mendes Maia *et al.* *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research studies press Ltd, 1986.

-
- [117] J-J. Thomas. *Contrôle non destructif des matériaux et des structures par analyse dynamique non linéaire*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1995.
- [118] B. Torrèsani. *Analyse continue par ondelettes*. InterÉdition/CNRS Édition, 1995.
- [119] B. Torrèsani. Time-frequency and time-scale analysis. *Signal Processing for Multimedia*, 1999.
- [120] F. Truchetet. *Ondelettes pour le signal numérique*. HERMES, 1998.
- [121] A. F. Vakakis. Non-linear normal mode (nnms) and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical System and Signal Processing.*, 11(3-22), 1997.
- [122] Y. Wang and Z. Wang. Periodic response of piecewise-linear oscillators using trigonometric collocation. *Journal of Sound and Vibration.*, 177(573-576), 1994.
- [123] J. Woodhouse. Linear damping models for structural vibration. *Journal of Sound and Vibration.*, 215(547-569), 1998.
- [124] Y. Xiang and S.K Tso. Detection and classification of flaws in concrete structure using bispectra and neural networks. *NDT & E international*, 35(19-27), 2002.
- [125] Meymer Y. *Les Ondelettes, algorithmes et applications*. Armand COLIN, 1992.
- [126] H-P. Yin and P. Argoul. Transformation intégrale et identification modale. *C. R. Acad. Sci. Paris.*, 327(777-783), 1999.
- [127] G-M Zhang. Optimal frequency-to-bandwidth ratio of wavelet in ultrasonic non-destructive evaluation. *Ultrasonics*, 39(13-17), 2001.

Résumé

AUSCULTATION DYNAMIQUE DES STRUCTURES A L'AIDE DE L'ANALYSE CONTINUE EN ONDELETTES

On étudie l'application de l'analyse continue en ondelettes à l'auscultation dynamique des structures à partir des réponses transitoires sous excitations imparfaitement connues (choc, ambiante...). L'outil numérique de la transformation continue en ondelettes est établi. Il est fondé sur l'ondelette mère (Morlet ou Cauchy) et sur un paramètre la caractérisant : le facteur Q de qualité du filtre. Il permet d'extraire les amplitudes et les fréquences instantanées contenues dans le signal. Un domaine du plan temps-fréquence où l'effet de bords est négligeable, et un encadrement de Q sont déterminés. Le traitement du signal réel modulé en amplitude et en fréquence par l'outil proposé facilite l'identification modale des structures (linéaires et non-linéaires) et permet une amélioration de la méthode impact-écho. Une procédure adaptée à chaque application est détaillée. Les résultats obtenus à partir des tests numériques et réels montrent l'efficacité de la méthode.

Mots clefs : auscultation dynamique, identification modale, transformation en ondelettes, signal asymptotique, vibration linéaire, oscillateur non-linéaire, poutre non-linéaire, méthode impact-écho.

Abstract

DYNAMICAL MONITORING OF STRUCTURES USING CONTINUOUS WAVELET ANALYSIS

The application of the continuous wavelet analysis is proposed for the dynamical monitoring of structures from transient responses under unknown excitations (shock, ambient ...). The numerical tool of the continuous wavelet transform is performed. It is based on the mother wavelet (Morlet or Cauchy) and on the quality factor Q characterizing the mother wavelet. This tool allows extracting instantaneous amplitudes and frequencies within a signal. A domain of the time-frequency plane where the edge effect is negligible, and bounds for Q are determined. The processing of the frequency modulated real signal by the proposed tool facilitates the modal identification of structures (linear and non-linear) and allows an improvement of the impact-echo method. An adapted procedure for every application is detailed. Results obtained from numerical and real tests show the efficiency of the method

Keywords : dynamical monitoring, modal identification, wavelet transform, asymptotic signal, linear vibration, non-linear oscillator, non-linear beam, impact-echo method.