



**HAL**  
open science

# Modélisation stochastique de champs de vitesse géophysique en exploration pétrolière

David Geraets

► **To cite this version:**

David Geraets. Modélisation stochastique de champs de vitesse géophysique en exploration pétrolière. Sciences of the Universe [physics]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002. English. NNT: . pastel-00001236

**HAL Id: pastel-00001236**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001236>**

Submitted on 30 May 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THESE

en vue de l'obtention du grade de  
**Docteur de l'Ecole des Mines de Paris**  
Spécialité « **Géostatistique** »

présentée et soutenue publiquement

par

**David Geraets, Ir.**

le 21 Octobre 2002

**Modélisation stochastique de champs  
de vitesse géophysique en exploration pétrolière**

*Directeur de thèse : Alain Galli*

*Jury*

MM. Gilles	Lambaré	Président
Serge	Shapiro	Rapporteur externe
Pierre	Thore	Rapporteur externe
Alain	Galli	Examineur
Christian	Lajaunie	Examineur
Paolo	Ruffo	Examineur



## Remerciements

Il me faut tout d'abord remercier Alain Galli, pour avoir été l'initiateur de cette recherche, avant de me laisser une grande liberté quant aux choix d'orientation du travail. Je remercie aussi Christian Lajaunie, pour lui avoir succédé lors de son départ vers d'autres cieux.

Je voudrais remercier très franchement Bertrand Iooss, mon prédécesseur à ce poste. Son aide et son soutien tout au long de la thèse m'auront ouvert de nombreuses portes, et permis de découvrir les mystères de la propagation d'onde en milieu aléatoire.

Il me faut aussi remercier P. Ruffo, de ENI-Agip Division, pour le soutien accordé durant cette recherche, ainsi qu'à sa promotion, tant en interne qu'au sein de la communauté scientifique.

Je voudrais ici remercier le Professeur Shapiro, rapporteur de cette thèse, pour l'intérêt qu'il a manifesté pour notre travail, ainsi que du soutien discret dont il a fait preuve lors de nos diverses rencontres.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble des membres du Centre de Géostatistique, pour m'avoir permis de réaliser ce travail de recherche, et accepté de me confier diverses tâches d'enseignement, tant aux étudiants de l'Ecole des Mines que du DEA de Méthodes Quantitatives et Modélisation des Bassins Sédimentaires. Un merci tout particulier à Hélène Beucher, Nathalie Dietrich, François Geffroy, Françoise Poirier et Isabelle Schmitt, pour leur gentillesse.

Je voudrais aussi associer à ces remerciements l'ensemble des membres du Centre de Géophysique, dont le soutien lors des congrès - et en des circonstances parfois fort agitées - ont permis de relativiser un stress pourtant bien présent. J'adresse une pensée très reconnaissante à Mathias (collègue de navette durant ces trois années), Philippe, Sylvain, Réda, Gilles, Adam, Viktor et les autres...

Je voudrais enfin remercier mes lecteurs et correcteurs, pour avoir eu la patience de lire ce travail sans pour autant toujours y trouver un réel intérêt. Merci donc à Papa, Eric, Christophe, Benoit ...

Je voudrais à présent remercier l'ensemble de mes amis et de ma famille - à distance pour la plupart - pour m'avoir soutenu au cours de cette longue épreuve.

Je pense particulièrement à Ben et Anva (et bientôt ...), Alain et Edith, Jim, Anne-Cecile, Vince... Sans votre support, je n'aurais sans doute jamais pu venir à bout de ce travail. Celui-ci est un petit peu le vôtre aussi, même si je crains que le contenu ne vous en laisse indifférent. Et puis un bisou particulier à Alice, la plus belle...

Je voudrais aussi remercier la très internationale collectivité de la Maison des Etudiants du Canada. Les années passées au sein de cette superbe demeure ont été les plus heureuses passées à Paris... Vivement une vraie découverte de ce pays immense, mais totalement inconnu encore...

Au sein de la Cité Universitaire, je voudrais aussi saluer l'Orchestre de la Cité, pour les moments de travail et de musique partagés en *professional*...

Je voudrais aussi remercier les jeunes - thésards et stagiaires - de l'Ecole des Mines avec lesquels nous avons partagé des moments de doute et d'enthousiasme durant ces années de recherche. Certains

ont déjà eu la chance d'en finir (Nico et Lolo, mes collègues de bureau durant les deux premières années), d'autres y travaillent toujours... Bon courage donc...

Je voudrais finalement remercier Jeffrey Yarus et Richard Chambers, pour le compte desquels je devrais bientôt partir travailler... Cette perspective m'a grandement aidé à trouver toute l'énergie pour finir ce travail.

# Table des matières

Introduction	1
<b>I Description et établissement de la méthodologie</b>	<b>5</b>
<b>1 Description générale des concepts géophysiques utilisés</b>	<b>7</b>
1.1 Acquisition et traitement géophysiques . . . . .	7
1.1.1 Modélisation des incertitudes . . . . .	8
1.2 Modèles de vitesse . . . . .	9
1.2.1 Définition des différents concepts de vitesse . . . . .	9
1.2.2 Covariance du modèle de vitesse . . . . .	12
1.3 Présentation du modèle d'expérimentation . . . . .	13
1.3.1 Propagation d'onde par différences finies . . . . .	15
1.3.2 Mesure des temps d'arrivée . . . . .	17
<b>2 Modélisation physique de la propagation d'ondes acoustiques en milieu aléatoire</b>	<b>21</b>
2.1 Propagation des ondes . . . . .	22
2.1.1 Equation d'onde . . . . .	22
2.1.2 Propagation en milieu hétérogène . . . . .	24
2.2 Méthodes perturbatives . . . . .	25
2.2.1 Méthode de perturbation de Born . . . . .	25
2.2.2 Méthode de perturbation de Rytov . . . . .	26
2.2.3 Approximation parabolique . . . . .	27
2.2.4 Méthode de perturbation de Rytov dans l'approximation parabolique . . . . .	30
2.3 Approximation asymptotique haute fréquence . . . . .	31
2.3.1 Equation eikonale et théorie des rais . . . . .	31
2.3.2 Approximations Rai + Born et Rai + Rytov . . . . .	34
2.3.3 Estimation des temps de trajet à partir de l'équation eikonale . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Outils de caractérisation stochastique des milieux traversés</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	38
3.2	Variance des temps d'arrivée en collection iso-offset . . . . .	38
3.3	Covariance des vitesses de sommation . . . . .	39
3.3.1	Covariance des temps d'arrivée . . . . .	40
3.3.2	Covariance des lenteurs de sommation . . . . .	42
3.3.3	Covariance des vitesses de sommation . . . . .	48
3.3.4	Comparaison des résultats synthétiques obtenus par ces diverses méthodes . . . . .	50
3.4	Extensions des modèles vers des cas complexes . . . . .	53
3.4.1	Variance des collections iso-offset de temps d'arrivée dans le cas de variation latérale de vitesse . . . . .	53
3.4.2	Covariance des vitesses de sommation dans un milieu à croissance linéaire de la vitesse moyenne avec la profondeur . . . . .	56
3.4.3	Extension au cas multi-couches . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Simulation conditionnelle d'un champ de vitesse</b>	<b>65</b>
4.1	Simulation markovienne conditionnelle . . . . .	66
4.1.1	Simulations par chaînes de Markov . . . . .	66
4.1.2	Echantillonneur de Gibbs . . . . .	67
4.1.3	Dynamique de Metropolis-Hastings . . . . .	68
4.1.4	Recuit Simulé . . . . .	70
4.2	Simulation markovienne d'un champ de vitesse instantanée . . . . .	72
4.2.1	Fonction d'anamorphose . . . . .	72
4.2.2	Modèle factorisé . . . . .	73
4.2.3	Simulation initiale . . . . .	75
4.2.4	Echantillonneur de Gibbs bloc . . . . .	75
4.2.5	Echantillonneur de Gibbs bloc avec pas variable . . . . .	77
<b>II</b>	<b>Applications sur un jeu de données réelles</b>	<b>79</b>
<b>5</b>	<b>Présentation des données</b>	<b>81</b>
5.1	Description des ensembles de données . . . . .	81
5.2	Pointé des données sismiques avant-sommation . . . . .	83
5.3	Données de vitesse de sommation HVA . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Inférence du modèle de covariance du champ de vitesse</b>	<b>89</b>
6.1	Estimation de la longueur de corrélation verticale du champ de vitesse instantanée . . . . .	90
6.2	Comparaison des estimations obtenues à partir des deux familles de méthodes . . . . .	95
6.3	Extensions vers le milieu multi-couches . . . . .	100

6.4	quantification de l'incertitude d'estimation en fonction de la qualité du pointé . . . .	107
<b>7</b>	<b>Simulation du champ de vitesse</b>	<b>113</b>
7.1	Choix du repère . . . . .	114
7.2	Passage des données en temps . . . . .	116
7.3	Description du champ aléatoire . . . . .	118
7.4	Modélisation des données $W$ . . . . .	123
7.5	Préparation des données de vitesses de sommation . . . . .	125
7.6	Application réelle à notre ensemble de données . . . . .	135
7.6.1	Choix des paramètres généraux . . . . .	135
7.6.2	Choix de la fonction d'anamorphose . . . . .	136
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>
	<b>Annexes</b>	<b>157</b>
<b>A</b>	<b>Description des principaux concepts géophysiques</b>	<b>157</b>
A.1	Acquisition des données . . . . .	158
A.1.1	Dispositif d'acquisition . . . . .	158
A.2	Traitement ( <i>processing</i> ) . . . . .	160
A.2.1	Pré-traitement . . . . .	160
A.2.2	Imagerie . . . . .	163
A.3	Interprétation . . . . .	165
<b>B</b>	<b>Equation d'onde</b>	<b>167</b>
B.1	Notions générales de mécanique des milieux continus . . . . .	167
B.2	Milieu élastique isotrope . . . . .	169
B.3	Milieu isotrope acoustique . . . . .	171
B.4	Fonction de Green . . . . .	172
<b>C</b>	<b>Solution du champ d'onde dans le cadre de l'optique géométrique</b>	<b>175</b>
C.1	Onde plane . . . . .	176
C.2	Onde sphérique . . . . .	178
C.3	Velocity shift . . . . .	179
<b>D</b>	<b>Covariance des temps de trajet</b>	<b>181</b>



<b>E</b>	<b>Covariance des vitesses de sommation dans un champ de vitesse croissant linéairement avec la profondeur</b>	<b>187</b>
<b>F</b>	<b>Propagation dans un milieu multi-couches</b>	<b>191</b>
<b>G</b>	<b>Covariance entre temps d'arrivée à offset nul, obtenus par analyse de vitesse</b>	<b>195</b>
<b>H</b>	<b>Krigeage avec un modèle de covariance factorisé</b>	<b>197</b>
	H.1 Matrice de krigeage . . . . .	197
	H.2 Krigeage d'un point . . . . .	198
	H.3 Grille non régulière . . . . .	199

# Table des figures

1.1	Exemples de milieux de vitesse aléatoire, avec $a = 250m$ et $b = 50m$ . . . . .	14
1.2	Sismogramme généré par l'algorithme d'approximation de l'équation d'ondes aux différences finies . . . . .	17
1.3	Comparaison en collection point de tir des temps d'arrivée . . . . .	18
1.4	Comparaison des collections offset commun de temps d'arrivée . . . . .	19
2.1	Description de la séparation du champ d'onde en fonction des rétro-propagations subies . . .	28
2.2	Définition du rai et du front d'onde . . . . .	33
3.1	Schéma du dispositif d'acquisition . . . . .	40
3.2	Covariance des temps de première arrivée à offset constant ((a) $h = 0m$ et (b) $h = 300m$ ), en fonction de la distance entre sources . . . . .	41
3.3	Covariance des temps de première arrivée à offset constant ((a) $h = 0m$ et (b) $h = 300m$ ), en fonction de la distance entre sources . . . . .	42
3.4	Covariance des temps de première arrivée à distance entre sources constante ((a) $\Delta S = 0m$ et (b) $\Delta S = 300m$ ), en fonction de l'offset . . . . .	43
3.5	Modèles de covariances de carrés de lenteurs pour (a) 51 et (b) 101 récepteurs . . . . .	45
3.6	Modèles de covariances de carrés de lenteurs . . . . .	46
3.7	Résultats dans le cas gaussien, pour (a) 51 et (b) 101 récepteurs, avec les longueurs de corrélation $a = 500m$ et $b = 50m$ . . . . .	46
3.8	Résultats dans le cas gaussien, pour (a) 51 et (b) 101 récepteurs, avec les longueurs de corrélation $a = 250m$ et $b = 50m$ . . . . .	47
3.9	Modèle de vitesse synthétique (covariance gaussienne, $a = 0.4$ km, $b = 0.1$ km) . . . . .	50
3.10	(a) Variance des temps en fonction de l'offset : courbe expérimentale et ajustements polynomiaux et (b) inversion de la longueur de corrélation du modèle de covariance de vitesse . . .	51
3.11	(a) Profil de vitesses de sommation et (b) Covariance des vitesses de sommation : courbe expérimentale et ajustement . . . . .	52
3.12	Modèle de vitesse synthétique (covariance gaussienne, $a = 0.4$ km, $b = 0.1$ km) . . . . .	54
3.13	Modèle de vitesse estimé par tomographie classique . . . . .	55

3.14	(a) Variance des temps relatifs en fonction de l'offset : courbe expérimentale et ajustement polynomial et (b) inversion de la longueur de corrélation du modèle de covariance de vitesse	56
3.15	Schéma d'un rayon dans un milieu à vitesse croissante	57
3.16	Trajectoires des tirs pour (a) $L = 1500m$ , $v(z = 0) = 1800m/s$ et $v(z = L) = 2800m/s$ , et (b) $L = 1500m$ , $v(z = 0) = 1300m/s$ et $v(z = L) = 3300m/s$	58
3.17	Variogrammes théorique et expérimental de vitesses de sommation pour une série (a) de 10000 tirs et (b) de 1000 tirs	59
3.18	Trajectoires des rayons lors d'un tir dans un milieu à deux couches, dont une à vitesse constante	62
3.19	Variogrammes résiduels pour la seconde couche, dans le cas d'une série (a) de 10000 tirs et (b) de 1000 tirs	63
3.20	Variogrammes théorique et expérimental de vitesses de sommation pour une série (a) de 10000 tirs et (b) de 1000 tirs	64
4.1	Exemple de transformation par anamorphose	73
4.2	Krigeage d'un point dans le cas d'un modèle de covariance factorisé	74
5.1	Plan de position des données	82
5.2	Section iso-offset le long de la ligne sismique 4	83
5.3	Détails de la section iso-offset le long de la ligne sismique 4	84
5.4	Détails de points de tir le long de la ligne sismique 1, autour des deux horizons pointés	86
5.5	Profil HVA le long de l'horizon supérieur, avec pointé automatique du maximum de cohérence	86
5.6	Profil HVA le long de l'horizon inférieur, avec pointé automatique du maximum de cohérence	87
5.7	Plan de position des vitesses de sommation pour les horizons (a) inférieur et (b) supérieur	87
5.8	Plan de position des profondeurs pour les horizons (a) inférieur et (b) supérieur	88
6.1	(a) Enregistrements de logs soniques, en fonction de la profondeur et (b) régressions linéaires correspondantes	90
6.2	Log sonique le long du puits B, et ajustement proposé entre les surfaces pointées	91
6.3	Résidus de vitesse, pour les puits A, B, C et D	92
6.4	Variogrammes de vitesses pour les différents puits	93
6.5	(a) Variogrammes de vitesses pour les différents puits, et variogramme moyen, en négligeant le puits A, et (b) ajustement du variogramme moyen	94
6.6	(a) Log de vitesse pour la seconde couche, au puits B, et (b) ajustement du variogramme	94
6.7	Collections iso-offset de temps d'arrivée, pour le réflecteur profond	95
6.8	Collections iso-offset de temps d'arrivée, après retrait du temps zero-offset, pour le réflecteur profond	96
6.9	Temps d'arrivée le long (a) de la ligne 5 et (b) de la ligne 4	97
6.10	Variance normalisée des temps d'arrivée pour les sections choisies des lignes 4 et 5, et ajustement proposé	97

6.11 (a) Vitesses de sommation et (b) variogrammes correspondants, pour les sections de lignes sismiques 4 et 5 . . . . .	98
6.12 Ajustement du variogramme expérimental moyen par une courbe théorique . . . . .	99
6.13 Profil des vitesses de sommation et variogrammes, pour le réflecteur supérieur . . . . .	100
6.14 Ajustement du variogramme, pour le réflecteur supérieur . . . . .	101
6.15 (a) Profils des vitesses de sommation, pour le réflecteur inférieur, et (b) variogrammes correspondants . . . . .	102
6.16 (a) Variogrammes des vitesses de sommation, pour le réflecteur inférieur, avec modèle de variogramme dû à la contribution de la première couche, et (b) variogramme résiduel obtenu par soustraction du variogramme théorique correspondant à la contribution de la première couche au variogramme expérimental . . . . .	103
6.17 (a) Variogrammes des vitesses de stack, pour le réflecteur supérieur, avec le nouveau modèle de variogramme, et (b) variogramme résiduel pour l'estimation du modèle de variogramme pour la couche inférieure . . . . .	104
6.18 Variogramme des vitesses de stack, pour le réflecteur inférieur, avec le modèle de variogramme	104
6.19 Profils des vitesses de stack, pour le réflecteur inférieur, après édition . . . . .	105
6.20 (a) Variogramme des vitesses de stack, pour le réflecteur inférieur, après édition, avec le nouveau modèle de variogramme, et (b) variogramme résiduel pour l'estimation du modèle de variogramme pour la couche inférieure . . . . .	105
6.21 Variogrammes des vitesses de stack, pour le réflecteur inférieur, après édition, en considérant les deux directions orthogonales, et variogrammes moyens . . . . .	106
6.22 Profils de vitesses de sommation, pour les deux horizons . . . . .	107
6.23 Histogrammes des incréments de vitesses de sommation le long des différents profils . . . . .	109
6.24 Nuages de corrélations entre vitesses de sommation pour les deux horizons . . . . .	110
6.25 Variogrammes expérimentaux des vitesses de sommation et ajustement par le modèle théorique	111
7.1 Transformation des données du domaine spatial au domaine temporel . . . . .	116
7.2 Enregistrements de logs soniques, dans le repère temporel . . . . .	117
7.3 Enregistrements de logs soniques, dans le repère temporel, avec un pas de temps réduit . . . . .	118
7.4 Dérive verticale de logs soniques, dans le repère temporel . . . . .	119
7.5 Graphe croisé des valeurs expérimentales de $V$ et $W$ , pour les quatre puits disponibles . . . . .	120
7.6 Graphe croisé des valeurs expérimentales de $R$ en fonction des valeurs de $W$ , pour les quatre puits disponibles . . . . .	121
7.7 Résidus de vitesse, pour les puits A, B, C et D, dans le domaine temporel . . . . .	122
7.8 Variogramme vertical du champ de vitesse instantanée . . . . .	123
7.9 Variogramme vertical du champ de vitesse instantanée . . . . .	124
7.10 Fonction de probabilité cumulée des incréments de vitesses de sommation . . . . .	127
7.11 Variogrammes moyens le long des lignes d'acquisition, et pseudo-variogramme croisé . . . . .	130
7.12 Profils de vitesses de sommation, pour les deux horizons, après ajustement des biais . . . . .	131
7.13 Ajustement d'un modèle pour les variogrammes de vitesses de sommation . . . . .	132

7.14	Profils de vitesses de sommation, pour les deux horizons, après extraction du bruit de mesure	133
7.15	Plan de position des échantillons de données utilisés pour la simulation	134
7.16	(a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la fonction d'anamorphose 1	137
7.17	(a) Croissance du carré de la vitesse instantanée en fonction du temps de propagation et (b) régression linéaire	138
7.18	(a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la fonction d'anamorphose 2	138
7.19	(a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la variable $W$	139
7.20	Comparaison entre les vitesses de convergences des algorithmes	140
7.21	(a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la fonction d'anamorphose 2	140
7.22	(a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la variable $W$	141
7.23	Comparaison entre les vitesses de convergences des algorithmes	141
A.1	Dispositif d'acquisition terrestre	159
A.2	Acquisition marine	159
A.3	Passage en collection point-milieu commun	161
A.4	Stack	162
A.5	Expérience synthétique définissant les ondes NIP et N pour un point de réflexion R	165
A.6	Définition d'un prospect pétrolier	166
D.1	Passage en coordonnées polaires	184
E.1	Définition de l'ensemble des paramètres	188
F.1	Illustration d'un tir dans un milieu à quatre couches, à vitesses variables	193
H.1	Disposition des points	198
H.2	Disposition des points pour l'exemple	200

# Introduction

La progression des technologies d'exploration pétrolière permet depuis plus d'un siècle la découverte de nouveaux gisements d'hydrocarbures à mesure que de nouveaux domaines d'exploration sont rendus disponibles.

Cette expansion des zones de recherche arrive à son terme, et il devient nécessaire de concentrer les efforts d'exploration dans des zones déjà visitées, à la recherche de gisements dont le potentiel aurait été mésestimé, rendant insatisfaisante voire incertaine la rentabilité, ou dont la géométrie complexe aurait limité l'exploitation.

Le développement de technologies d'imagerie de plus en plus sophistiquées répond à ce besoin, pour permettre une meilleure compréhension des systèmes pétroliers étudiés, et la détection de prospects de moindre ampleur, situés dans des zones complexes. Les recherches en mécanique des sols permettent aussi d'accroître la précision des forages, réalisant des prouesses techniques impensables il y a quelques années. L'épaisseur des cibles atteintes à l'horizontale est aujourd'hui de quelques mètres.

La complexité de toutes ces nouvelles techniques d'exploration et d'exploitation demande de la part des utilisateurs l'adoption d'une quantité importante d'hypothèses de modélisation, ainsi que la réalisation de choix stratégiques dans la sélection des méthodes utilisées pour imager le sous-sol.

Il est essentiel pour la réalisation de ces choix d'envisager l'ensemble des options possibles, et d'évaluer l'apport de chacune. Il convient aussi d'en connaître les défauts et les limites.

La quantification des biais et incertitudes attenants aux différentes méthodes utilisées entre dans cette réflexion. Sa finalité est de permettre une sélection objective et responsable des technologies adoptées, et la mesure des approximations commises à chacune des étapes de modélisation.

En prenant aussi en compte les incertitudes de mesure dues aux appareillages utilisés lors de l'acquisition des données, cette démarche permettra l'estimation des risques d'exploitation.

La quantification des incertitudes attachées aux hypothèses est souvent présentée comme une estimation qualitative de la fiabilité des méthodes utilisées. Les techniques complexes développées actuellement pour cette quantification permettent cependant l'estimation objective des incertitudes présentes lors de l'évaluation d'hypothèses, pour autant que l'utilisateur ait donné une description objective et précise des choix réalisés au cours de la modélisation du sous-sol. Il est impératif que cette quantification soit réalisée conjointement à l'avancée de la modélisation, et que l'utilisateur soit impliqué dans sa réalisation. Idéalement, on suggérera qu'une partie des démarches soit réalisée

directement par l'utilisateur lui-même.

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans cette démarche de précision du modèle. Ils sont consacrés à la caractérisation des champs de vitesse de propagation des ondes sismiques. Ceux-ci constituent un paramètre essentiel du traitement des données géophysiques, et la précision de leur connaissance conditionne les prévisions de profondeur et de géométrie des réflecteurs géologiques.

Leur estimation est réalisée à partir de nombreuses informations collectées à diverses étapes du processus de modélisation de la géologie du sous-sol. Il convient d'établir un modèle de vitesse optimal, qui s'appuie sur l'ensemble des données disponibles, en prenant en compte les caractéristiques de chacune d'entre elles.

La description du champ de vitesse au moyen de méthodes statistiques permet la réalisation d'un tel objectif, et ce dans des délais raisonnables. De plus, ces techniques statistiques permettent de mesurer l'impact sur le modèle final des approximations commises lors de sa constitution.

Dans une seconde phase, nous nous intéressons à la simulation de champs de vitesse conditionnés aux données disponibles. Ceci permet d'obtenir un ensemble de champs possibles, conditionnés par les données enregistrées. Il est ainsi possible de visualiser le champ des valeurs réelles théoriquement satisfaisantes, et par là de mesurer la précision des estimations réalisées. Cette technique permet également de quantifier la fiabilité du champ de vitesse généré, et la distribution d'incertitudes qui y est attachée. Ici aussi, le processus de génération des simulations aléatoires gagne à être supervisé par l'utilisateur final, afin qu'il puisse le cas échéant rejeter des simulations pour lesquelles des informations non introduites dans la modélisation altèrent la pertinence.

Ce manuscrit présente les résultats obtenus au cours de trois années de recherche de thèse au sein du Centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris. Le travail a été entrepris dans le cadre d'un contrat de recherche dirigé par la compagnie italienne ENI-Agip Division. Il fait suite à deux thèses défendues précédemment (Touati, 1996) (Iooss, 1998b) consacrées à la modélisation stochastique des milieux de vitesse, dont il reprend partiellement les résultats.

De commun accord avec la compagnie, nous avons tenu à obtenir des résultats applicables aux situations industrielles réelles. Les méthodes développées antérieurement étant peu satisfaisantes de ce point de vue, nous avons travaillé à concevoir une nouvelle technique d'estimation des caractéristiques stochastiques des champs de vitesse, ne s'appuyant que sur les informations disponibles, et pouvant être effectuée parallèlement à un processus de traitement traditionnel.

Ce travail est partagé en deux grandes parties, l'une théorique, qui présente la méthodologie, l'établissement des résultats théoriques ainsi que leur validation par des exemples synthétiques, et l'autre expérimentale, qui décrit l'application de l'ensemble des méthodes développées à un ensemble réel de données.

Le premier chapitre de ce manuscrit présente une large introduction aux concepts utilisés par la

suite. Le lecteur y trouvera une description précise des différents concepts de vitesse utilisés dans le monde de la géophysique pétrolière, ainsi qu'une présentation des multiples utilisations des paramètres que nous nous efforçons d'estimer dans la suite du manuscrit. Le lecteur peu familier avec les concepts d'exploration pétrolière pourra se référer à l'annexe A afin de préciser les notions utilisées dans cette partie.

Mentionnons que le manuscrit a été rédigé pour un public au fait des techniques et de la terminologie statistiques et géostatistiques. Le lecteur non averti pourra se rapporter à des ouvrages de référence (Goovaerts, 1997) (Chilès et Delfiner, 1999) pour leurs définitions.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons au problème de la propagation des ondes dans un milieu perturbé. La résolution explicite de l'équation des ondes s'avère possible uniquement dans le cas d'un milieu homogène infini, et nous présentons plusieurs techniques approchées permettant de décrire la propagation du champ d'onde dans des cas réalistes. Cette étude permet enfin de caractériser le champ d'onde propagé à partir des paramètres stochastiques du champ de vitesse.

Le troisième chapitre est consacré à l'inversion de ce phénomène de propagation dans un champ de vitesse aléatoire. Il présente les techniques de tomographie statistique pré-stack - à partir des statistiques sur les temps de trajets - et post-stack - basée sur les statistiques des vitesses de sommation - développées pour estimer les caractéristiques stochastiques du champ de vitesse. La méthode pré-stack ayant été développée lors des travaux antérieurs (Touati, 1996) (Iooss, 1998b), nous nous concentrerons principalement sur la méthode de tomographie post-stack, développée dans le cadre de cette thèse. Les méthodes sont validées au moyen de tests synthétiques, et les différents développements permettant la prise en compte de cas réalistes sont décrits.

Le quatrième chapitre présente la conception d'un algorithme de simulation conditionnelle markovienne du champ de vitesses. Celui-ci s'intéresse ensuite aux problèmes particuliers rencontrés lors de l'application de ces méthodes à la problématique des champs de vitesse.

La deuxième partie de ce travail présente l'application à un gisement réel des techniques développées, et permet ainsi de mettre en évidence les problèmes se posant pour l'industrialisation des méthodes présentées. Cette partie se décompose en trois chapitres : le chapitre 5 présente les données utilisées, le chapitre 6 illustre l'inférence du modèle de corrélation du champ de vitesse instantanée, et finalement le chapitre 7 présente la simulation markovienne du champ de vitesse, conditionnée aux données de puits et de sommation.

En conclusion de ces travaux, nous mettons en exergue les atouts des différentes techniques présentées, et nous proposons quelques pistes pour des développements futurs.





Première partie

Description et établissement de la  
méthodologie



# Chapitre 1

## Description générale des concepts géophysiques utilisés

### Sommaire

*Dans cette partie, nous présentons les divers outils de modélisation géophysique utilisés dans l'ensemble du manuscrit. Nous insisterons sur la spécificité de chacune des différentes notions décrites par le terme générique de vitesse, et préciserons leurs applications. Enfin, nous présenterons le modèle d'expérimentation sur lequel seront basés les développements ultérieurs.*

*We define in this chapter various geophysical modelling tools that will be used throughout this work. We emphasise the specificities of each notion included in the velocity term, and specify their application precisely. We then present the synthetic experimentation model that will be used to test the theoretical results.*

---

### 1.1 Acquisition et traitement géophysiques

La géophysique est la discipline scientifique qui s'attache à l'étude des phénomènes physiques affectant le globe terrestre et son atmosphère (Dictionnaire Universel Francophone, Hachette). Elle permet la description du sous-sol, à partir de mesures télémétriques.

Parmi les techniques utilisées à grande échelle pour caractériser le sous-sol, on trouve des mesures gravimétriques, électromagnétiques et sismiques. Les premières s'intéressent aux variations locales du champ de pesanteur, significatives d'une variation de la densité des roches sous-jacentes; les secondes travaillent sur la variation du champ magnétique terrestre (mesures du champ rémanent), ou

du paramètre de conductivité électrique du sous-sol (mesures du champ induit). Enfin, les mesures sismiques dépendent des caractéristiques de propagation des ondes des roches traversées. On trouve ici aussi deux grandes familles de disciplines, travaillant soit au moyen de signaux naturels (ex: les tremblements de terre), soit de signaux générés (par explosion ou vibration du sol).

A plus petite échelle, de multiples techniques existent, pour caractériser différentes propriétés des roches. Ainsi, le grand nombre d'outils de sondage de puits (*logging*) existant actuellement illustre la quantité importante de méthodes concevables.

Ces différentes techniques sont appliquées en exploration pétrolière, en fonction de l'état d'avancement de la recherche en cours. Les techniques gravimétrique et électromagnétique sont utilisées à l'échelle du bassin sédimentaire, pour une première définition des prospectifs envisageables. Les techniques sismiques (avec signal généré) permettent une imagerie précise de la géométrie des couches sédimentaires, et une localisation des pièges potentiels. Enfin, les sondages de puits conduisent à un ajustement fin des modèles de remplissage, et au calibrage des modèles de propagation des fluides.

Dans cette thèse, nous nous intéresserons particulièrement aux mesures réalisées en expérimentation sismique pétrolière. Celles-ci subissent un traitement numérique complexe qui conduit des signaux vibratoires enregistrés à la représentation géométrique des couches géologiques, avec une description partielle de leur remplissage<sup>1</sup>.

### 1.1.1 Modélisation des incertitudes

L'étude des incertitudes attachées au modèle de gisement proposé fait à présent partie du processus d'évaluation des prospectifs pétroliers. Il s'agit d'étudier les différentes erreurs, approximations, et omissions commises afin d'en connaître l'impact sur le modèle final.

La stratégie utilisée consiste à lister l'ensemble des facteurs au sein du processus de modélisation qui sont entachés d'incertitude, puis à en modéliser l'influence conjointe. Etant donné le nombre important de facteurs concernés, il est d'usage de n'en considérer que les principaux, ceux dont l'influence sur le modèle final est majeure. Cette sélection est réalisée durant une étape intermédiaire. On remarque que, dans le processus d'acquisition, les principales sources d'incertitudes sont dues à un mauvais positionnement des éléments du dispositif : en particulier, le suivi de la position des flûtes est difficile. Une imprécision des mesures provient aussi de la sensibilité imparfaite des capteurs utilisés (le pas de temps minimum est de 2 ms). Enfin, quelques problèmes peuvent provenir de défaillances du matériel - très sensible, donc fragile -, qui conduisent à négliger les traces erronées enregistrées.

Au cours des différentes étapes du traitement, on utilise de nombreuses approximations, qui permettent de modéliser les phénomènes réels au moyen d'équations simples.

---

<sup>1</sup>L'ensemble de ce traitement est décrit de façon synthétique dans l'annexe A. Il est recommandé au lecteur non avisé d'en parcourir le contenu, les principaux concepts nécessaires à la compréhension de la suite du manuscrit y étant précisés.

Chacune de ces étapes de modélisation est entachée d'une incertitude. Celle-ci peut être due à son expression théorique approximée - par exemple, on considère l'absence de bruit, lors de la déconvolution de la source, on utilise une expression hyperbolique pour la correction NMO -, elle peut aussi provenir de la qualité de son application par l'utilisateur - les vitesses de stack  $v_{nmo}$  sont généralement pointées sur des graphes de cohérence, et cette étape peut s'avérer délicate, dans le cas de données de mauvaise qualité, ou situées dans des zones géologiquement compliquées. Matheron (1991) puis Touati *et al.* (1999) ont développé une méthode d'estimation des incertitudes attachées à l'étape de migration profondeur.

Les principales variables retenues par Thore *et al.* (2002) pour l'étude des incertitudes liées à la géométrie des corps géologiques sont liées au pointé des horizons et des failles, ainsi qu'au modèle de vitesse utilisé au cours du traitement géophysique des données sismiques. Les autres sources d'incertitudes sont négligées, leur impact potentiel sur le résultat étant d'un ordre de grandeur inférieur. Il apparaît essentiel de pouvoir modéliser les incertitudes attachées au modèle de vitesse. De plus, devant la complexité des interactions entre variables impliquées, il n'est en général pas possible de réaliser une dérivation directe de la loi de distribution des volumes de roche. On utilise une démarche par simulation pour fournir cette distribution.

## 1.2 Modèles de vitesse

### 1.2.1 Définition des différents concepts de vitesse

Diverses notions de vitesses sont utilisées en géophysique, et apparaîtront dans ce manuscrit. Il semble opportun de préciser ici la définition de chacune d'entre elles, ainsi que leurs domaines d'application.

#### Champ de vitesse instantanée

Le champ de vitesse instantanée, introduit en particulier par Al-Chalabi (1997a), représente le champ des vitesses de propagation des ondes de pression en tout point du demi-espace considéré. Sa description suppose la connaissance de la vitesse de propagation des ondes de pression en chaque point de l'espace, définie comme la dérivée de la distance parcourue par rapport au temps de parcours :

$$v_{inst}(z) = \frac{dz}{dt} \quad .$$

Il s'agit du modèle de vitesse de référence par rapport auquel nous allons nous situer. Nous allons dans les chapitres suivants montrer comment en inférer les paramètres statistiques, et développer ensuite une technique permettant de le simuler.

### Vitesse d'intervalle

Le temps de trajet vertical pour une onde se propageant entre les profondeurs  $z_1$  et  $z_2$  s'exprime sous la forme de l'intégrale

$$T_{1 \rightarrow 2} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{d\zeta}{v_{inst}(\zeta)} \quad .$$

La vitesse moyenne pour un intervalle  $[z_1, z_2]$  se définit donc comme

$$v_{moy,1 \rightarrow 2} = \frac{z_2 - z_1}{\int_{z_1}^{z_2} \frac{d\zeta}{v_{inst}(\zeta)}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v_{inst}(\tau) d\tau}{t_2 - t_1} \quad .$$

Elle est appelée vitesse d'intervalle, ou encore vitesse de tranche.

Le terme **vitesse moyenne** est généralement réservé pour la vitesse moyenne depuis la surface :

$$v_{moy}(z) = \frac{z}{T(z)} = \frac{z}{\int_0^z \frac{d\zeta}{v_{inst}(\zeta)}} \quad .$$

### Mesure de vitesse de puits

L'outil de diaggraphie sonique mesure le temps de propagation d'une onde sonore entre deux points - l'émetteur et le récepteur - situés à distance fixe l'un de l'autre. Les mesures sont réalisées de façon régulière.

Pour les faibles profondeurs l'estimation de la vitesse moyenne à partir des mesures de diaggraphie de puits n'est pas possible directement : il faut recourir à une mesure directe de la vitesse moyenne  $v_{moy}(z)$ , au moyen d'un sismosondage<sup>2</sup>. Ensuite, pour les profondeurs plus importantes, l'estimation de la vitesse moyenne peut être réalisée par intégration des enregistrements soniques, le temps moyen ainsi estimé est appelé **sonique intégré**. L'expérience montre cependant que le sonique intégré présente un effet de dérive : il fournit le plus souvent des temps inférieurs aux temps fournis par d'éventuels autres points de sismosondages. Il convient de recalibrer le sonique intégré au moyen de sismosondages avant de l'utiliser pour estimer la vitesse moyenne  $v_{moy}(z)$ .

### Lois de vitesses de couches

La vitesse d'intervalle permet de définir un "macro-modèle" de vitesses par couches décrivant la vitesse avec un seul paramètre pour chaque couche, ce qui est généralement une approximation grossière. Il est nécessaire en pratique d'élaborer des modèles équivalents de vitesses de propagation par couche plus réalistes, pour décrire l'augmentation de la vitesse avec la profondeur liée au phénomène de compaction des roches, au sein des couches sédimentaires.

---

<sup>2</sup>Les sismosondages sont réalisés en positionnant un sismographe dans le puits à la profondeur désirée, puis en mesurant le temps mis par une onde émise en surface pour atteindre le récepteur. Le temps enregistré doit encore être corrigé pour le déport (Cordier, 1983).

De nombreux modèles sont utilisés, avec leurs avantages propres :

- $v(z) = az^b$  loi bilogarithmique de Faust, à deux paramètres
- $v(z) = v_0 e^{kz}$  loi de Chiarelli-Serra à deux paramètres
- $v(z) = v_0 + kz$  loi classique linéaire, à deux paramètres
- $v(z) = \left( \frac{1}{v_{matrice}} + \left( \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_{matrice}} \right) e^{-kz} \right)^{-1}$  loi de Beaufort à trois paramètres, pour la vitesse dans un milieu composé d'incrustations dans une matrice totalement compactée.

La loi de Faust donne une valeur nulle de la vitesse à la surface, ce qui n'est pas réaliste. On ne l'utilisera qu'à partir d'une profondeur minimum. Les autres lois donnent la valeur  $v_0$  à profondeur nulle, ce qui permet aisément de calibrer ce paramètre. Toutes ces lois, sauf celle de Beaufort, tendent vers l'infini avec la profondeur, ce qui n'est pas réaliste non plus. Il convient de leur associer une profondeur maximale de validité.

Ces différentes lois ont généralement été obtenues à partir de cas concrets. Marsden *et al.* (1995) donne un exemple de construction d'une loi en fonction du modèle géologique sous-jacent.

### Vitesse RMS

Dans le cas d'un milieu tabulaire horizontal, et pour de petits offsets, les temps d'arrivée peuvent être approximés comme une fonction polynômiale de l'offset  $x$

$$T^2(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + \dots \quad ,$$

dont les termes impairs s'annulent par symétrie<sup>3</sup>, et où  $C_0 = T^2(0)$  est le temps à offset nul,  $C_2 = 1/v_{inst}^2$ ,  $C_4 = \frac{1}{4T_0^2} \left( \frac{v_{inst}^2 - v_{inst}^4}{v_{inst}^4} \right)$  etc.

L'approximation limitée aux deux premiers termes de ce développement décrit le temps de trajet comme une fonction hyperbolique de l'offset, les paramètres d'ajustement étant le temps à offset nul  $T_0$  et la **vitesse quadratique moyenne**<sup>4</sup>  $v_{inst}^2$ .

Lorsque les pendages sont faibles et les couches sont homogènes, on peut obtenir la vitesse d'intervalle à partir de la vitesse quadratique moyenne, grâce à la formule de Dix (1955) (cfr. annexe A, page 163). Il convient toutefois de faire attention à la propagation des éventuelles erreurs au cours de ce processus d'estimation itératif, comme l'illustre l'étude sur les incertitudes dans l'estimation de vitesse d'intervalle réalisée par Hajnal et Serana (1981).

<sup>3</sup>La démonstration est reproduite dans Cordier (1983), pages 36-37.

<sup>4</sup>La moyenne  $v_{inst}^2$  est définie en temps.



## Vitesse de sommation

Lors du traitement des données sismiques, la vitesse de sommation est obtenue par ajustement d'une hyperbole à l'ensemble des temps d'arrivée pour des enregistrements correspondant à un même point réfléchant et à des offsets croissants.

Dans le cas de réflecteurs géologiques tabulaires horizontaux, la vitesse de sommation donne une très bonne estimation de la vitesse RMS, pour de faibles valeurs du rapport longueur du dispositif / profondeur du réflecteur (Al-Chalabi, 1973). En général, la différence entre vitesse de sommation et vitesse quadratique moyenne dépend de l'hétérogénéité de la vitesse au sein des couches traversées, ainsi que de la longueur du dispositif d'acquisition utilisé (Al-Chalabi, 1974).

Dans le cas de réflecteurs pentés, la vitesse de sommation doit être réduite d'un facteur  $\cos \alpha$ , où  $\alpha$  représente le pendage du réflecteur.

### 1.2.2 Covariance du modèle de vitesse

Une partie importante de ce manuscrit est consacrée à la caractérisation stochastique du champ de vitesse instantanée. Notre attention va principalement se porter sur l'estimation de ses paramètres de corrélation. Nous allons présenter ici les principales applications pour lesquelles la connaissance de ces paramètres est essentielle.

Pour plusieurs étapes du traitement sismique, la connaissance précise du champ de vitesse joue un rôle primordial. Historiquement, la description de celui-ci s'est progressivement raffinée, d'une représentation par une valeur constante par couche géologique à un modèle tri-dimensionnel, avec variation dans chacune des directions de l'espace.

Afin de permettre une application optimale des algorithmes géophysiques, il est impératif d'obtenir le modèle de vitesse le plus précis possible. A cet effet, il est intéressant de pouvoir utiliser l'ensemble des informations caractérisant - directement ou indirectement - le champ de vitesse instantanée.

Ces informations de sources différentes, avec des supports variables peuvent être combinées grâce aux méthodes géostatistiques, pour lesquelles il est nécessaire de disposer d'un modèle de caractérisation statistique du champ de vitesse instantanée.

L'étude des incertitudes sur les estimations de volumes d'hydrocarbures exploitables, importante étape de l'évaluation économique des prospectus pétroliers, requiert l'estimation initiale des volumes de roche imprégnée, et donc des incertitudes sur la géométrie des gisements visés.

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.1.1, les incertitudes provenant du modèle de vitesse instantanée peuvent être importantes, et leur impact est essentiel. En effet, une représentation erronée de la croissance du champ de vitesse avec la profondeur modifie la géométrie du réservoir pétrolier, et, par une simple variation de la profondeur à laquelle celui-ci se trouve, peut dramatiquement réduire le volume estimé de roche imprégnée en hydrocarbure, la profondeur du contact eau-hydrocarbure (WOC) étant généralement connue avec précision.

Afin de pouvoir fournir une distribution statistique des volumes de roche imprégnée attendus, l'utilisation de l'outil géostatistique de simulation est essentielle. A cet effet, la construction d'un algorithme de simulation du champ de vitesse instantanée calibré aux informations de puits et aux paramètres sismiques de vitesses de sommation, est un apport important dans l'ensemble de la démarche de simulation. La connaissance des paramètres de corrélation du champ de vitesse est indispensable dans le cadre de l'application de cet algorithme.

L'étude du comportement de l'attribut sismique d'**amplitude** des ondes réfléchies permet la caractérisation des changements lithologiques au sein d'une même couche sismique. Plus finement, la variation de ce caractère au sein d'un bloc de données sismiques avant-sommation permet de détecter une variation de la composition du fluide présent au sein de la roche. Les études "Amplitude-versus-offset" (AVO) et "Amplitude-versus-angle" ont pour objectif de parvenir à cette analyse (Thierry *et al.*, 2000).

Shapiro et Kneib (1993) montrent que la propagation des ondes au sein d'un champ de vitesse hétérogène altère les caractéristiques AVO des enregistrements. Ils donnent de plus l'expression de la correction à appliquer pour corriger cet effet, et revenir aux valeurs d'amplitudes qui auraient été obtenues par la traversée d'un champ de vitesse non perturbé, de même moyenne.

La tomographie sismique est un processus général d'inversion du modèle sismique (Tarantola, 1987), qui permet d'obtenir une image sismique optimale ainsi que le modèle de vitesse, par minimisation d'une fonction de coût. Bosch *et al.* (2002) propose d'incorporer la description statistique du modèle de vitesse dans cette fonction de coût, de façon à ce que le champ de vitesse produit par les différentes itérations de l'inversion présente l'aspect structural prévu a priori, correspondant aux hypothèses géologiques. Le passage de cette information dans le modèle d'inversion se fait au moyen de la fonction de corrélation du champ de vitesse.

### 1.3 Présentation du modèle d'expérimentation

Dans les prochains chapitres, nous présentons plusieurs méthodes théoriques permettant d'inférer le modèle de covariance des perturbations du champ de vitesse. Afin de montrer leur pertinence et l'efficacité de leur mise en application, nous illustrerons les résultats obtenus par ces méthodes sur des cas synthétiques, et finalement sur des données réelles.

Nous présentons ici les modèles synthétiques utilisés pour la validation des méthodes présentées.

Dans un premier temps, nous utiliserons un modèle géologique mono-couche, et de densité constante. Nous considérons un réflecteur horizontal situé à une profondeur de 1500m, et surmonté par une couche géologique au modèle de vitesse hétérogène. La densité au sein de cette couche géologique est constante, fixée par simplicité à l'unité. Le modèle de vitesse utilisé est composé d'une composante constante, fixée à 3000 m/s, à laquelle s'ajoute une composante aléatoire, obtenue par simulation d'une variable gaussienne, de moyenne nulle et d'écart-type égal à 20m/s, et de modèle

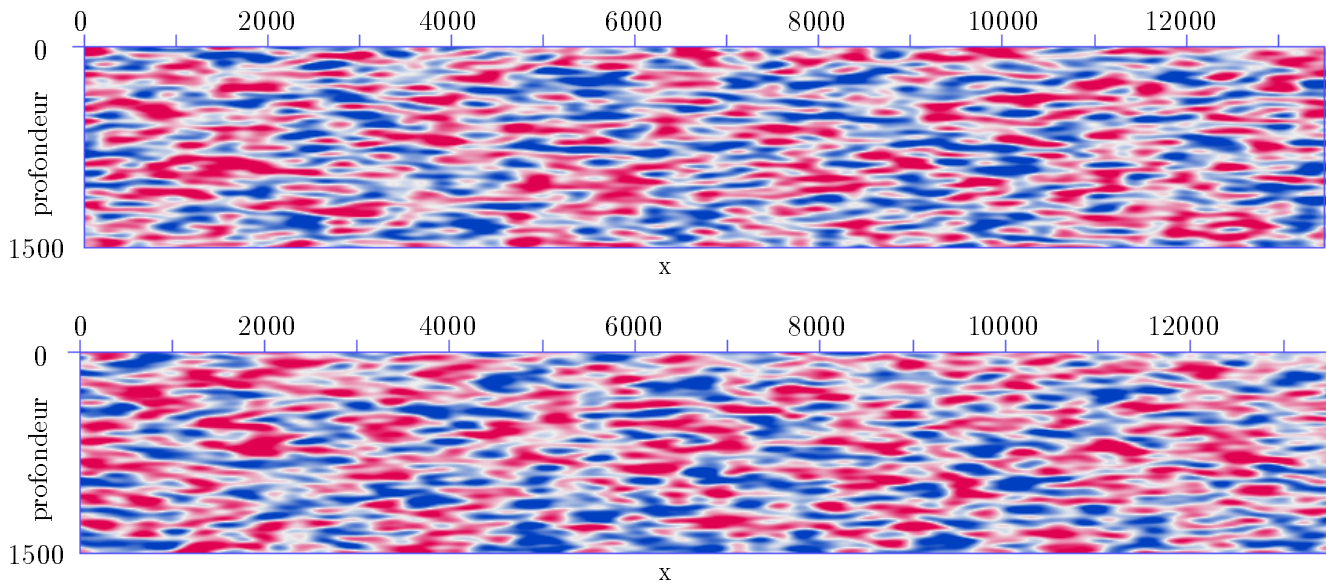


FIG. 1.1 – Exemples de milieux de vitesse aléatoire, avec  $a = 250m$  et  $b = 50m$

La profondeur et l'abscisse sont exprimés en mètres, la vitesse oscille entre 2920 (rouge) et 3080 (bleu) m/s

de corrélation gaussien, avec des paramètres de longueur de corrélation horizontale  $a$  et verticale  $b$  variables. Une majeure partie du travail présenté ici est consacrée à l'inférence de ces deux paramètres  $a$  et  $b$ . De façon générale, on considérera la longueur de corrélation horizontale supérieure à la longueur de corrélation verticale. Cette hypothèse d'anisotropie est adoptée afin de se rapprocher d'un modèle de dépôt sub-horizontale, pour lequel la continuité entre éléments appartenant à des dépôts synchrones est supposée supérieure à celle mesurée entre dépôts asynchrones. Un couple de valeurs - types pour les deux paramètres de longueurs de corrélation est  $a = 250m$  et  $b = 50m$ , soit un rapport d'anisotropie de 5. Deux exemples de milieux générés avec ces paramètres sont présentés à la figure 1.1. La maille utilisée est de 2,5m en vertical par 5m en horizontal. Les dimensions de cette maille sont assez fines, de manière à avoir plusieurs échantillons de vitesse par longueur de corrélation.

Les modèles de vitesse aléatoires utilisés pour réaliser ces expériences synthétiques ont été obtenus au moyen de l'algorithme de simulation "bandes tournantes" (Matheron, 1972) (Matheron, 1973), grâce à un code fourni par Lantuéjoul (1994). On simulera ainsi plusieurs champs aléatoires de vitesse instantanée, pour un ensemble de paramètres de continuité.

Les modèles de vitesses obtenus sont alors utilisés pour y simuler une acquisition sismique. On utilise une acquisition avec un dispositif en tir au centre, avec 101 géophones répartis tous les 20

mètres. Les tirs sont espacés de 10 mètres, la source étant disposée à une profondeur de 10 mètres. L'offset maximum de ce dispositif est donc de 1000m, correspondant à un angle d'incidence de 18.5 degrés<sup>5</sup>.

L'estimation des temps d'arrivée a été initialement réalisée au moyen du code aux différences finies proposé par Virieux (1986), en adaptant le système de pointé automatique développé par Iooss (1998b) au problème d'une longue suite de tirs. Devant le temps important demandé par cette méthode, on a souhaité tester des méthodes alternatives pour estimer le temps d'arrivée. Le code d'approximation du temps d'arrivée par tracé de rais, ainsi qu'une simple approximation par intégration des vitesses le long des rayons non perturbés, ont été testés et comparés au premier algorithme. Dans ces deux cas, on observe que les approximations obtenues semblent d'un ordre équivalent au pas de temps adopté pour le modèle de propagation aux différences finies. L'utilisation de ces approximations, dans le cas d'un milieu de vitesse faiblement perturbé, n'implique pas de perte de précision dans les estimations, et permet un gain substantiel de temps calcul. Nous présenterons plus longuement ces différentes méthodes dans les sections suivantes.

### 1.3.1 Propagation d'onde par différences finies

La méthode utilisée est basée sur le développement de l'équation d'onde acoustique, qui exprime les relations entre vitesse des particules et pression. Les équations sont ensuite approximées par différences finies en utilisant un schéma explicite du premier ordre par rapport à la vitesse (schéma d'ordre deux par rapport au déplacement). Les interfaces internes ne sont pas traitées par cet algorithme: elles sont modélisées par de brusques modifications de la densité et des paramètres élastiques. De façon à éviter les problèmes d'effets de bord, les surfaces latérales du champ de vitesse sont prolongées par des zones tampons, où les perturbations sont absorbées. Le milieu est au repos à l'état initial.

Le code numérique a été écrit par Doerfinger (1991), puis adapté aux acquisitions sismiques multi-traces par Faily-Berthet (1996). Diverses modifications ont été apportées, pour permettre le choix d'une onde source sphérique ou plane et l'enregistrement par une grille 2D de récepteurs. On peut de plus sélectionner le type d'ondelette émise : gaussienne, dérivée d'une gaussienne ou Ricker. Les paramètres à fournir sont les grilles de densité, de vitesses P et S, ainsi que les paramètres du dispositif d'acquisition sismique, décrits précédemment. Pour modéliser une propagation acoustique, il suffit de donner une vitesse des ondes S partout égale à zéro. Afin de mettre en évidence les modifications dues aux variations de vitesse, nous avons choisi d'utiliser une densité constante pour le milieu.

Pour les approximations, nous utiliserons une longueur d'onde dominante de l'ordre de 50m, correspondant, dans le cas d'un champ de vitesse moyenne  $v_0$  égale à 3000 m/s, à une fréquence

---

<sup>5</sup>La direction de propagation reste proche de la verticale, et nous restons bien dans le champ de l'hypothèse de faibles angles d'incidence.

caractéristique fixée à une valeur sismique typique :  $f_c = 40 \text{ Hz}$ <sup>6</sup>. La stabilité spatiale de la propagation est conditionnée par l'utilisation d'une grille suffisamment fine par rapport à la longueur d'onde et à la taille des hétérogénéités de vitesse. Classiquement, on considère que le dixième de la longueur d'onde correspond à une limite supérieure pour la discrétisation spatiale. Dans notre cas, nous utiliserons la moitié de cette valeur limite pour la grille de calcul, soit une grille définie par des pas de 2.5m en  $x$  et en  $z$ .

Le choix du paramètre de discrétisation en temps doit être fait de manière à ne pas avoir de temps de calcul prohibitif, tout en veillant à éviter les problèmes de dispersion numérique. La stabilité temporelle de l'algorithme est garantie pour un pas de temps  $dt$  respectant la condition  $dt < dx/(\sqrt{2}v_p)$  (Virieux, 1986), où  $v_p$  est la vitesse maximale des ondes de pression dans le milieu (environ 3100 m/s, dans notre cas)<sup>7</sup>.

L'algorithme génère des sismogrammes correspondant à l'enregistrement des déplacements aux différents récepteurs, à chaque pas d'échantillonnage. Un exemple de tel sismogramme est présenté à la figure 1.2. Le volume de données que représente une telle figure est important. Afin d'éviter les problèmes de stockage inutile d'information, et puisque nos travaux ultérieurs ne portent que sur les temps de première arrivée, nous sommes intéressés par un algorithme permettant de pointer automatiquement ceux-ci.

Iooss (1998b) a proposé un algorithme de pointé automatique de ces sismogrammes. Le pointé du maximum de la première phase ainsi réalisé ne fonctionne que dans le cas d'un milieu faiblement perturbé (l'ondelette  $y$  est faiblement déformée). On constate à la figure 1.2 que celui-ci ne pose pas de problème particulier (le front d'onde est encore parfaitement régulier). On constate aussi que la forme de l'onde de première arrivée varie peu entre les différents offsets. Ceci nous permet d'appliquer une méthode simple pour corriger les temps d'arrivée pointés par rapport au moment de la première arrivée: le simple décalage de l'ensemble des valeurs mesurées d'une valeur de 12ms (valeur moyenne entre la première arrivée et le maximum de la première phase, pour une propagation dans un milieu homogène) permet de corriger cet effet.

L'implémentation de cet algorithme a été transformée, de façon à pointer directement les enregistrements sans étape de sauvegarde, permettant ainsi la simulation de ligne sismique de longueur illimitée.

L'algorithme tel qu'il a été utilisé demande simplement de la part de l'utilisateur le pointé initial d'une phase sur un sismogramme, puis propage ce pointé au fur et à mesure des différents tirs. Cette méthode très efficace permet de réaliser des calculs durant de longues périodes de temps, pour obtenir de grandes séries de tirs sismiques.

Pour information, la propagation d'un tir en utilisant une machine du type Sun Ultra10, avec une horloge à 440 MHz, prend environ 50 minutes. La réalisation d'une série de 800 tirs successifs de-

---

<sup>6</sup>Ces valeurs sont reliées par les relations  $\lambda = \lambda_c/\sqrt{2}$ , où  $\lambda_c$  désigne la longueur d'onde caractéristique,  $f = \sqrt{2}f_c$ , et  $\lambda = v_0/f$ .

<sup>7</sup>Nous utilisons un pas de temps de 0.405 ms, calculé comme  $dx/(2v_p)$ . Pour se rapprocher d'une acquisition sismique traditionnelle, on utilise un pas d'échantillonnage plus réduit, égal à quatre fois le pas de temps. Les mesures sont donc enregistrées tous les 1.62 ms.

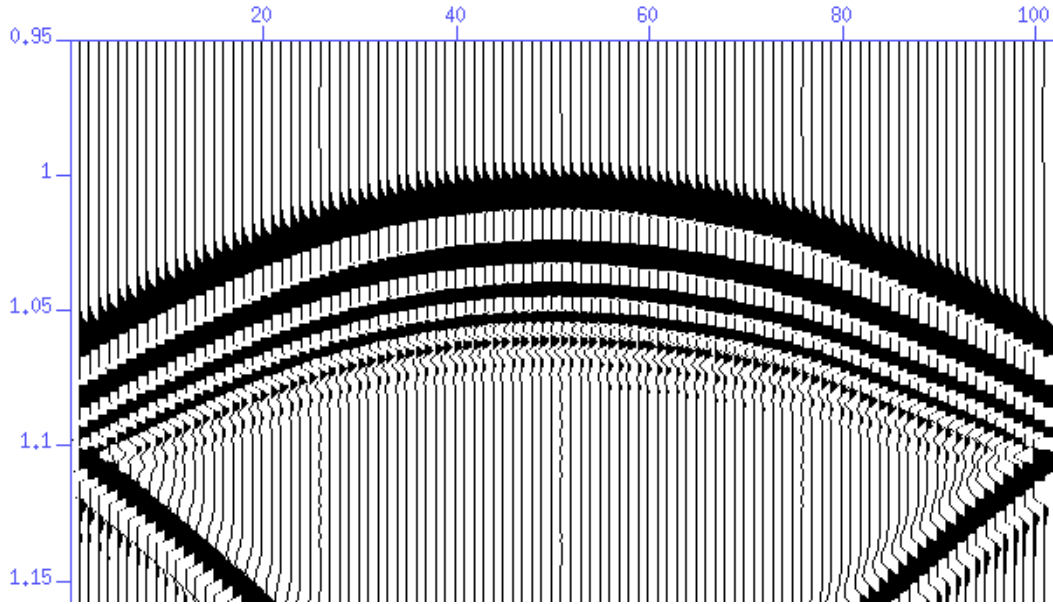


FIG. 1.2 – Sismogramme généré par l'algorithme d'approximation de l'équation d'ondes aux différences finies

mande donc un temps de l'ordre de 28 jours - en considérant une utilisation 24h/24, ce qui est peu conforme à un partage des ressources existantes. L'utilisation de plusieurs machines en parallèle pour réaliser des simulations indépendantes permet de réduire ce temps d'attente. Ces ordres de grandeurs permettent néanmoins de comprendre pourquoi seules trois séries de huit cents points de tirs ont été réalisées<sup>8</sup>.

Nos modélisations ne concernent que les temps d'arrivée, nous n'avons pas travaillé à partir des paramètres d'amplitude. Au vu de ces chiffres, les méthodes simplifiées, par approximations, nous fournissent des résultats amplement suffisants. Ce sont celles-ci que nous allons décrire dans la section suivante.

### 1.3.2 Mesure des temps d'arrivée

Au vu des faibles perturbations des temps de trajet au cours de la traversée du milieu aléatoire, il apparaît que les rayons ont suivi une trajectoire très proche de la trajectoire rectiligne, correspondant à une propagation dans un milieu non perturbé (Rytov *et al.*, 1987) (Matheron, 1991). Aldridge (1994) montre que l'approximation des temps de trajets par les temps obtenus lors d'un parcours rectiligne est correcte au premier ordre, et donc acceptable dans le cas de milieux faible-

<sup>8</sup> Au moyen de six machines, et en considérant une utilisation seulement nocturne, cela revient finalement à une durée de calcul d'environ dix jours par simulation.

ment perturbés. Spiesberger et Worcester (1983) illustrent l'utilisation de cette approximation dans le cas d'ondes propagées dans l'eau, avec des résultats relativement satisfaisants.

Elle correspond à l'équation

$$T = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n_T} \frac{\Delta z}{v_i \cos \alpha} \quad ,$$

où  $L$  représente la profondeur du réflecteur,  $\Delta z$  représente la taille de la maille verticale du champ de vitesse, en profondeur, et  $\alpha$  représente l'angle d'incidence du rayon par rapport à la surface.

La figure 1.3 permet de comparer les temps de trajets obtenus au moyen de cette approximation (matérialisés par des points rouges) aux temps calculés par l'algorithme de différences finies (représentés par les croix bleues). On constate que la correspondance est presque parfaite, et que l'erreur commise par cette approximation est d'amplitude inférieure à la résolution de l'algorithme de différences finies.

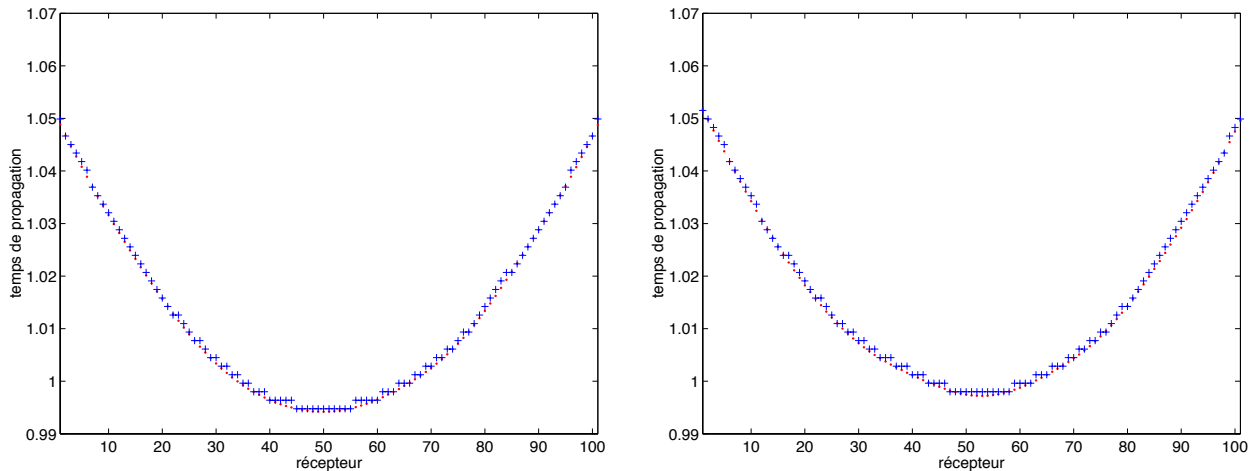


FIG. 1.3 – Comparaison en collection point de tir des temps d'arrivée obtenus par l'algorithme d'approximation de l'équation d'ondes aux différences finies (croix bleues) et par intégration le long du trajet rectiligne (points rouges) pour deux points de tirs différents

Sur les figures 1.4, on voit plus nettement l'effet lissé obtenu lors de l'utilisation de l'approximation par intégration rectiligne. On remarque ici aussi la faible différence entre collections de valeurs considérées, à l'offset nul (a) comme à l'offset maximal (b).

Finalement, remarquons que plusieurs approximations de l'équation des ondes ont été développées de manière à obtenir une estimation des temps de trajet plus exacte que la méthode simpliste utilisée ici : méthode des tracés de rais développée par Virieux *et al.* (1988), méthode de Huygens développée par Vidale (1988) et Podvin et Lecomte (1991).

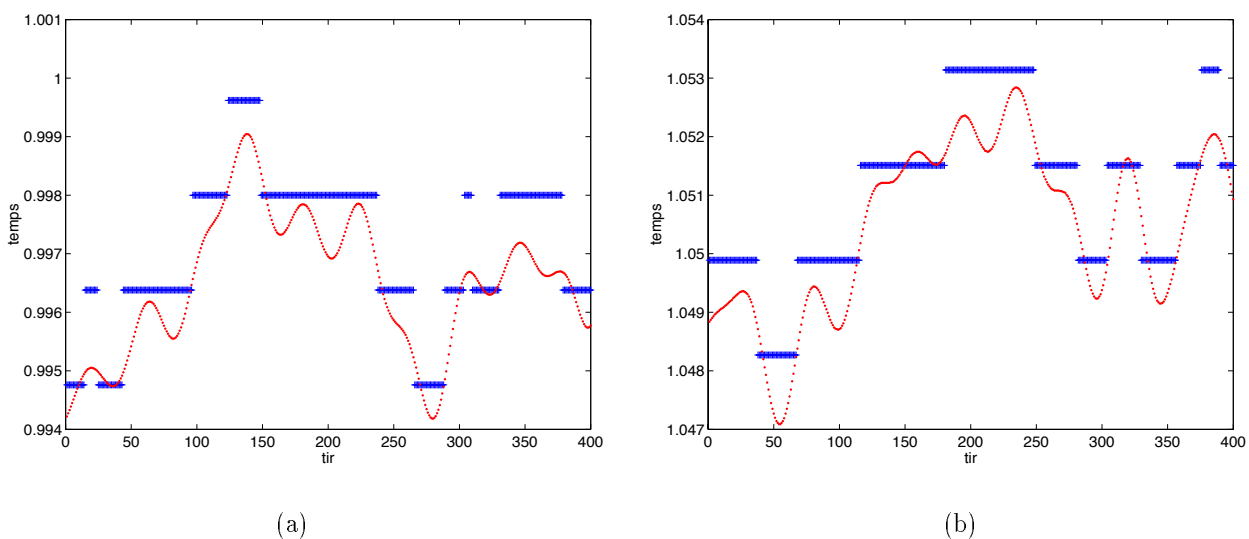


FIG. 1.4 – Comparaison des collections offset commun de temps d'arrivée obtenus par l'algorithme d'approximation de l'équation d'ondes aux différences finies (croix bleues) et par intégration le long du trajet rectiligne (points rouges) : (a) offset 0m (b) offset -1000m

On notera que celles-ci n'apportent pas une précision supérieure à la méthode décrite précédemment dans le cas peu perturbé qui est le nôtre, et qu'elles souffrent de limitations dans les cas où l'hétérogénéité du champ de vitesse devient plus importante. Leur utilisation ne semble pas représenter un apport par rapport à la méthode proposée ici, dont la rapidité permet une utilisation à très grande échelle.





## Chapitre 2

# Modélisation physique de la propagation d'ondes acoustiques en milieu aléatoire

### Sommaire

*Dans ce deuxième chapitre, nous aborderons la modélisation de la propagation des ondes au sein d'un milieu de vitesse aléatoire. Notre description sera centrée sur les ondes acoustiques, la valeur de la densité étant considérée constante sur le champ. Partant de l'équation d'onde, nous allons montrer comment les principales équations de la propagation en milieu hétérogène peuvent être dérivées, moyennant des hypothèses que nous préciserons.*

*Notre présentation se concentre sur les solutions intégrales du champ d'onde. Après avoir introduit les solutions approchées par méthodes perturbatives, nous allons en dériver une solution asymptotique, pour finalement aboutir au cadre de l'optique géométrique.*

*In this second chapter, we introduce the modelling of the wave propagation through a random velocity field. Our description is centred on acoustic waves, as the density is assumed constant on the field. From the most general wave equation, we derive the equation for wave propagation in heterogenous media.*

*Our presentation focuses on the integral solutions of the wave field. Using a perturbation method to introduce an approximate solution, we derive an asymptotic solution, and eventually end up into the geometrical optic framework.*

## 2.1 Propagation des ondes

### 2.1.1 Equation d'onde

La propagation des ondes dans un matériau élastique isotrope est décrite par l'équation des ondes. Cette équation découle directement des grandes lois de la physique. Le lecteur trouvera en annexe B un résumé des principales étapes de modélisation permettant d'obtenir celle-ci.

La résolution analytique de cette équation est possible par l'introduction de fonctions de Green, mais l'obtention de solutions explicites n'est en général pas possible, dès que l'on se trouve en présence de milieu complexe.

Dans le cas d'un milieu aléatoire, plusieurs approximations de l'équation des ondes permettent de décrire de façon approchée la propagation des ondes au travers d'un milieu isotrope non homogène. Elles sont fondées sur l'équation de propagation des ondes dans un milieu élastique, et reposent sur différents types d'approximations. Nous allons nous intéresser ici à la propagation des ondes acoustiques, et montrer comment les différentes approximations de l'équation des ondes acoustodynamique ont été définies. Nous tâcherons de préciser les hypothèses faites pour obtenir chacune des différentes approximations, afin de mettre clairement en évidence leurs domaines d'application.

L'ensemble des développements présentés se base sur l'expression générale de l'équation de l'acoustodynamique :

$$\frac{\partial^2 P(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{\rho} \Delta P(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t) \quad ,$$

où  $g(\mathbf{r}, t)$  est le terme source en pression,  $P(\mathbf{r}, t)$  la pression au point  $\mathbf{r}$  et au temps  $t$ ,  $\lambda$  le premier paramètre de Lamé, et la densité  $\rho$  a été supposée constante<sup>9</sup>.

Il s'agit d'une équation d'onde, de vitesse  $v = \sqrt{\lambda/\rho}$ . On montre dans l'annexe B comment cette équation peut être dérivée, à partir des lois essentielles de la mécanique des roches et de la physique thermodynamique, et en se plaçant dans le cadre de la propagation acoustique.

Il est classique de s'intéresser à l'expression fréquentielle de cette équation.

Soit  $u$  la transformée de Fourier du champ d'onde,  $u(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt$ , où  $\omega$  représente la pulsation de l'onde.

Dans le domaine fréquentiel, l'équation acoustodynamique s'exprime comme

$$\Delta u(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{r}, \omega)} u(\mathbf{r}, \omega) = -S(\mathbf{r}, \omega) \quad , \quad (2.1)$$

où  $S(\mathbf{r}, \omega)$  représente l'expression en fréquence du terme source.

Cette expression est connue sous le nom d'**équation d'Helmholtz**.

---

<sup>9</sup>Cette hypothèse est pertinente dans la mesure où les matériaux considérés en exploration pétrolière présentent de faibles variations de densité au sein des couches, relativement aux variations des autres paramètres (vitesse des ondes P et S).

En l'absence de terme source, et dans le cas d'un milieu infini, les ondes planes

$$u_0(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad ,$$

où  $\mathbf{k}$  représente le nombre d'onde ( $k = \omega/v_0 = 2\pi/\lambda$ ), ainsi que les ondes sphériques<sup>10</sup>

$$u_0(\mathbf{r}) = V(kr)e^{ikr}, \quad \text{avec } V(kr) \text{ paramètre normalisateur } \quad V(kr) = \begin{cases} \frac{2i\pi}{k} & \text{en } 1D \\ \frac{i}{4}e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} & \text{en } 2D \\ \frac{1}{4\pi r} & \text{en } 3D \end{cases} \quad (2.2)$$

forment des familles de solutions (Aki et Richards, 1980).

En espace libre, on peut donner une solution générale à l'équation de Helmholtz, au moyen d'une **équation intégrale**

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + \int \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')S(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad , \quad (2.3)$$

où la contribution  $u_0$  correspond au champ d'onde en l'absence de perturbation, et  $\mathbf{G}(\mathbf{r})$  est une **fonction de Green**, que nous devons évaluer.

Si l'on considère une source ponctuelle  $S(t) = \delta(t)\delta(x)$ , la fonction de Green utilisée dans la solution (2.3) de ce problème s'écrit comme

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = V(kr)e^{ikr} \quad .$$

En dehors du point source, elle vérifie l'équation d'onde scalaire homogène

$$\frac{1}{v^2}\mathbf{G}(\mathbf{r}, \omega) = \Delta\mathbf{G}(\mathbf{r}, \omega) \quad .$$

Remarquons qu'en présence de conditions aux frontières - donc a fortiori dans tout cas réel -, l'expression de la solution devient nettement plus complexe, et il n'est en général plus possible de l'exprimer analytiquement. Il faut alors recourir à des solutions numériques ou approchées.

---

<sup>10</sup>Dans le cas 2D, cette solution est une approximation asymptotique de la solution exacte  $u_0(\mathbf{r}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr)$ , où  $H_0^{(1)}(kr)$  représente la fonction de Hankel de premier sorte et d'ordre zéro au point  $kr$ , en supposant que la longueur d'onde est petite devant la distance de propagation.

### 2.1.2 Propagation en milieu hétérogène

Négligeons à présent le terme source, pour nous intéresser au cas particulier d'un milieu au champ de vitesse hétérogène en espace libre.

Supposons que le champ du carré de la lenteur s'exprime comme la somme d'une partie constante  $\frac{1}{v_0^2}$  et d'une perturbation locale  $\epsilon(\mathbf{r})$ ,

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{v_0^2}(1 + \epsilon(\mathbf{r})) \quad .$$

L'équation d'Helmholtz (2.1) devient

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2(1 + \epsilon(\mathbf{r})) u(\mathbf{r}) = 0 \quad ,$$

où  $k = \omega/v_0 = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde et  $\lambda$  la longueur d'onde.

Cette équation est une EDP de type elliptique, qui n'est généralement pas soluble analytiquement. Dans le cas général, une solution peut être donnée par la fonction de Green définie par

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad .$$

Dans le cadre déterministe, de nombreuses approches permettent de calculer le champ d'onde  $u(\mathbf{r}, t)$  à partir de l'équation des ondes ou de l'équation de Helmholtz : méthodes intégrales (par fonction de Green), méthodes hautes fréquences (optique géométrique), méthodes de perturbation ou méthodes numériques (approximations aux différences finies, éléments finis).

Nous présentons dans la suite les méthodes perturbatives de Born et Rytov, qui permettent d'obtenir la solution intégrale décrivant le champ d'onde. Remarquons que l'évaluation des fonctions de Green présentes dans leurs solutions peut elle aussi être réalisée de diverses façons. Nous avons montré au paragraphe précédent que, dans des cas simplistes - et très peu réalistes -, une solution analytique peut être trouvée. Sinon, on utilise des solutions approchées : nous allons montrer au paragraphe 2.2.3 comment calculer la fonction de Green par approximation asymptotique, et au paragraphe 2.3.2<sup>11</sup> comment la calculer dans le cadre de l'optique géométrique -, ou par des méthodes numériques (Crase *et al.*, 1997).

Dans le cadre stochastique, le champ de perturbations  $\epsilon(\mathbf{r})$  est un champ spatial aléatoire, et les équations d'ondes sont stochastiques.

La solution du problème consiste à décrire la densité de probabilités ou les moments du champ  $u(\mathbf{r})$ , en fonction de la densité de probabilités ou des moments du champ de perturbation  $\epsilon(\mathbf{r})$ . Cette modélisation permet de caractériser statistiquement le champ propagé, lorsque le milieu est trop complexe pour que soient appliquées les méthodes déterministes.

Nous allons présenter ici les principales méthodes perturbatives, pour ensuite utiliser leurs résultats afin de permettre la caractérisation stochastique du champ de perturbations  $\epsilon(\mathbf{r})$  à partir des mesures obtenues du champ d'onde  $u(\mathbf{r}, t)$ .

---

<sup>11</sup>Le raisonnement plus complet pour atteindre cette expression peut être trouvé en annexe C.

## 2.2 Méthodes perturbatives

Dans cette section, nous allons suivre les raisonnements présentés dans (Rytov *et al.*, 1987).

### 2.2.1 Méthode de perturbation de Born

La méthode des faibles perturbations de Born suppose que les perturbations du champ de vitesse sont d'amplitude faible :

$$\sigma_\epsilon \ll 1 \quad ,$$

où  $\sigma_\epsilon$  représente l'écart-type du champ des perturbations  $\epsilon$ .

Born et Wolf (1980) propose d'exprimer le développement du champ d'onde  $u(\mathbf{r})$  en puissances de  $\epsilon$  :

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + u_1(\mathbf{r}) + u_2(\mathbf{r}) \dots$$

où  $u_i(\mathbf{r})$  est d'ordre  $\epsilon^i$ , et de négliger les contributions au champ d'onde d'ordre  $\epsilon$  supérieur ou égal à deux.

En utilisant la notation par fonction de Green, on exprime la première approximation du champ d'onde de Born par la relation

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + u_1(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad . \quad (2.4)$$

On voit que  $u_0(\mathbf{r})$  correspond à la composante déterministe du champ de vitesse, et peut être déterminée comme solution de l'équation de propagation dans le milieu homogène

$$\Delta u(\mathbf{r}, w) + \frac{\omega^2}{v_0^2} u(\mathbf{r}) = 0 \quad .$$

$u_1(\mathbf{r})$  correspond à l'approximation au premier ordre en  $\epsilon$  des contributions dues aux perturbations de vitesse. On peut aussi obtenir son expression analytique en approximant la solution de l'équation d'onde

$$\Delta[u(\mathbf{r}, w) - u_0(\mathbf{r}, w)] + k^2[u(\mathbf{r}, w) - u_0(\mathbf{r}, w)] = -k^2 \epsilon(\mathbf{r}, w) u(\mathbf{r}, w) \quad .$$

En utilisant la notation par fonction de Green, celle-ci s'écrit

$$u(\mathbf{r}) - u_0(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) + u_2(\mathbf{r}) + \dots = -k^2 \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad .$$

La première approximation du champ d'onde de Born s'obtient en remplaçant le champ d'onde  $u(\mathbf{r}, \omega)$  dans le terme source par le champ d'onde associé au modèle homogène. On retrouve ainsi l'équation (2.4).

Négliger les termes d'ordre supérieur à un en  $\epsilon$  revient à ignorer les diffractions multiples. Cette approximation est très utilisée dans les applications d'imagerie sismique (Thierry, Lambaré, Podvin,

et Noble, 1999), car elle donne une relation linéaire entre perturbation du modèle et perturbation du champ d'onde. Elle n'est valide que lorsque l'intensité des perturbations de vitesse est faible, et lorsque la longueur de corrélation des perturbations de vitesses est petite par rapport aux longueurs d'onde propagées.

### 2.2.2 Méthode de perturbation de Rytov

La méthode de Rytov propose de représenter le champ d'onde au moyen de l'exponentielle complexe

$$u(\mathbf{r}) = \exp(\Psi(\mathbf{r})) \quad \text{avec} \quad \Psi(\mathbf{r}) = \log[A(\mathbf{r})] + iS(\mathbf{r}) \quad , \quad (2.5)$$

avec  $A(\mathbf{r})$  l'amplitude du champ d'onde, et  $S(\mathbf{r})$  sa phase.

En appelant  $A_0(\mathbf{r})$  et  $S_0(\mathbf{r})$  les amplitudes et phase du champ d'onde en milieu homogène, l'équation précédente peut être réécrite comme

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \exp(\Psi'(\mathbf{r})) \quad \text{avec} \quad \Psi'(\mathbf{r}) = \log\left[\frac{A(\mathbf{r})}{A_0(\mathbf{r})}\right] + i[S(\mathbf{r}) - S_0(\mathbf{r})] \quad . \quad (2.6)$$

En utilisant cette représentation du champ d'onde dans l'équation de l'acoustodynamique, on trouve<sup>12</sup>

$$\Delta[u(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r})] + k^2 u(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) = -u_0(\mathbf{r}) \left( [\nabla\Psi'(\mathbf{r})]^2 + k^2 \epsilon(\mathbf{r}) \right) \quad , \quad (2.7)$$

qui est une équation équivalente à l'équation intégrale. Sa solution s'exprime comme

$$u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) = - \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[ [\nabla\Psi'(\mathbf{r}')]^2 + k^2 \epsilon(\mathbf{r}') \right] u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad .$$

En négligeant le terme en  $[\nabla\Psi'(\mathbf{r})]^2$ , on trouve l'expression de la première approximation de Rytov<sup>13</sup>

$$\Psi'(\mathbf{r}) = - \frac{k^2}{u_0(\mathbf{r})} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad . \quad (2.8)$$

---

<sup>12</sup>En divisant par  $e^{\Psi'(\mathbf{r})}$ , on trouve d'abord

$$\Delta u_0(\mathbf{r}) + 2\nabla u_0(\mathbf{r}) \cdot \nabla \Psi'(\mathbf{r}) + u_0(\mathbf{r}) \Delta \Psi'(\mathbf{r}) + u_0(\mathbf{r}) [\nabla \Psi'(\mathbf{r})]^2 + k^2 u_0(\mathbf{r}) + k^2 u_0(\mathbf{r}) \epsilon(\mathbf{r}) = 0$$

et donc

$$2\nabla u_0(\mathbf{r}) \cdot \nabla \Psi'(\mathbf{r}) + u_0(\mathbf{r}) \Delta \Psi'(\mathbf{r}) = -u_0(\mathbf{r}) [\nabla \Psi'(\mathbf{r})]^2 - k^2 u_0(\mathbf{r}) \epsilon(\mathbf{r})$$

En utilisant l'équation de Helmholtz  $\Delta(u_0(\mathbf{r})) + k^2 u_0(\mathbf{r}) = 0$  on obtient l'équation (2.8) annoncée.

<sup>13</sup>On peut trouver un résultat équivalent en utilisant l'approximation au premier ordre de la loi exponentielle autour de 1 :

$$\Delta[u_0(\mathbf{r})e^{\Psi'(\mathbf{r})}] + k^2 u_0(\mathbf{r})e^{\Psi'(\mathbf{r})} + k^2 \epsilon(\mathbf{r})u_0(\mathbf{r})e^{\Psi'(\mathbf{r})} = 0$$

devient

$$\begin{aligned} \Delta u_0(\mathbf{r}) + \Delta[u_0\Psi'(\mathbf{r})] + k^2 u_0(\mathbf{r}) + k^2 u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) &= -k^2 \epsilon(\mathbf{r})u_0(\mathbf{r}) - k^2 \epsilon(\mathbf{r})u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) \\ \Delta[u_0\Psi'(\mathbf{r})] + k^2 u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) &= -k^2 \epsilon(\mathbf{r})u_0(\mathbf{r}) - k^2 \epsilon(\mathbf{r})u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Cette approximation n'est valide que si  $[\nabla\Psi'(\mathbf{r})]^2 \ll k^2\epsilon(\mathbf{r})$ .

Cette condition est moins intuitive que celle de Born, mais on peut montrer qu'elle dépend principalement du caractère basse fréquence des perturbations du champ de lenteur. En effet, l'existence de forts gradients de lenteur compromet la validité de la linéarisation effectuée.

Remarquons que cette approximation nous permet directement d'avoir une estimation du temps de trajet des ondes pour atteindre un point. Dans le cas général, le temps de trajet pour une onde mono-chromatique varie en fonction de la fréquence. Lorsque le champ d'onde est faiblement perturbé, le temps d'arrivée  $T(\mathbf{r})$  de l'énergie d'une impulsion peut être approximé<sup>14</sup> par la phase de l'onde mono-chromatique à la fréquence dominante (Samuelides, 1998) :

$$T(\mathbf{r}) = \frac{S(\mathbf{r})}{kv_0} \quad . \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Approximation parabolique

On considère à présent un milieu dont le champ de vitesse est hétérogène, avec des perturbations lisses comparativement à la longueur d'onde. Formellement, ceci demande

$$\lambda \ll l_{\parallel} \text{ et } \lambda \ll l_{\perp} \quad ,$$

où  $l_{\parallel}$  et  $l_{\perp}$  représentent la taille des hétérogénéités de vitesse dans les directions parallèle et perpendiculaire à la propagation.

Dans ce cas, les ondes diffractées sont concentrées dans un cône, d'angle  $\theta$  de l'ordre de  $\lambda/l_{\perp} \ll 1$ , c'est à dire qu'elles se propagent essentiellement dans la même direction que l'onde principale, raison pour laquelle nous pouvons négliger les phénomènes de diffraction multiple.

En repartant de la solution générale de l'équation d'onde en milieu perturbé, on propose de séparer les champs d'onde arrivant au point  $\mathbf{r}$  entre ondes se propageant dans la direction de l'onde centrale, et ondes se dirigeant dans la direction opposée à la direction de l'onde centrale. Cette séparation est illustrée par la figure 2.1.

$$u(\mathbf{r}) = u(\rho, z) = u_0(\rho, z) - k^2 \int_0^z \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\epsilon(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')d\rho dz - k^2 \int_z^{\infty} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\epsilon(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')d\rho dz \quad .$$

La première intégrale correspond à des ondes ayant été rétropropagées un nombre pair de fois (cas (a) et (c) dans la figure 2.1), tandis que la seconde correspond à celles ayant été rétropropagées un

---

En négligeant  $\Psi'(\mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r})$  devant  $\epsilon(\mathbf{r})$ , on retrouve une équation intégrale

$$\Delta[u_0\Psi'(\mathbf{r})] + k^2u_0(\mathbf{r})\Psi'(\mathbf{r}) = -k^2\epsilon(\mathbf{r})u_0(\mathbf{r})$$

dont la solution est la première approximation de Rytov.

Remarquons que cette méthode de dérivation ne permet pas d'obtenir l'expression du domaine de validité de l'approximation de Rytov.

<sup>14</sup>Quand le champ d'onde est fortement perturbé, il n'est en général plus possible de définir la notion de temps d'arrivée. La notion de temps d'arrivée n'est définie au sens strict que dans le cadre de l'optique géométrique.



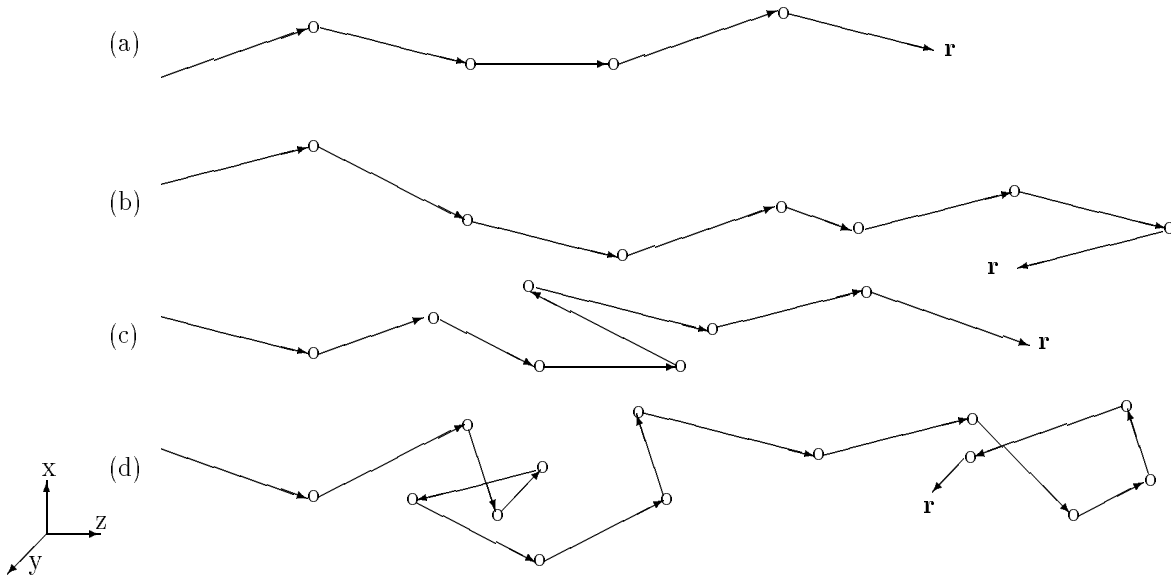


FIG. 2.1 – Description de la séparation du champ d'onde en fonction des rétro-propagations subies

nombre impair ( $\geq 1$ ) de fois avant d'atteindre  $\mathbf{r}$  (cas (b) et (d) dans la figure 2.1).

Dans les conditions du milieu, l'énergie des ondes s'étant rétropropagées est faible, et la partie du champ d'onde correspondant à la seconde intégrale peut donc être négligée par rapport au champ d'onde correspondant aux ondes n'ayant pas subi de rétro-propagation, ou ayant subi un nombre pair de rétro-propagations.

Décrivons à présent l'ensemble du champ d'onde par son approximation

$$u(\mathbf{r}) = u(\rho, z) = u_0(\rho, z) - k^2 \int_0^z \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\rho dz' \quad . \quad (2.10)$$

Remarquons que, puisque cette expression s'applique en tout point  $\mathbf{r}$ , cela revient désormais à négliger l'ensemble des phénomènes de rétro-propagation, et donc à ne plus considérer que les ondes s'étant propagées dans la direction de l'onde centrale (cas (a) dans la figure 2.1).

Rytov *et al.* (1987) donne une expression plus précise du domaine de validité de cette approximation :

$$\pi^2 k^2 z \int_{k\sqrt{2}}^{2k} \Phi_\epsilon(\kappa) \kappa d\kappa \ll 1 \quad , \quad (2.11)$$

où  $\Phi_\epsilon(\kappa)$  représente la densité spectrale du champ de perturbation  $\epsilon$ . L'expression du champ d'onde peut encore être simplifiée à partir de l'hypothèse de "négligeabilité" de l'angle de diffraction. En effet, puisque les ondes décrites se situent toutes dans le cône d'angle  $\theta$ , et pour une onde centrale

se propageant dans la direction de l'axe  $z$ , on trouve

$$\frac{|\rho - \rho'|}{|z - z'|} \simeq \frac{\lambda}{l_{\perp}} \ll 1 \quad , \quad (2.12)$$

et on peut exprimer la norme  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  comme

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (z - z') \sqrt{1 + \frac{|\rho - \rho'|^2}{(z - z')^2}} \\ &= (z - z') + \frac{1}{2} \frac{|\rho - \rho'|^2}{(z - z')} - \frac{1}{8} \frac{|\rho - \rho'|^4}{|z - z'|^3} + \dots \end{aligned}$$

La fonction de Green contenue dans la solution de l'équation d'onde dans un milieu ouvert 3D (équation (2.2)) dépend de la variation de phase  $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Le développement en série de Taylor peut être limité dans l'exponentielle aux deux premiers termes moyennant l'hypothèse

$$\frac{k |\rho - \rho'|^4}{8 |z - z'|^3} \ll 1 \quad .$$

En utilisant (2.12), on peut réécrire cette condition comme

$$\sqrt{\lambda z} \ll \frac{l_{\perp}^2}{\lambda} \quad .$$

Le fonction de Green devient

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi(z - z')} \exp \left[ ik(z - z') + \frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(z - z')} \right] \quad , \quad (2.13)$$

et l'approximation du champ d'onde est approchée par

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\rho, z) + \frac{k^2}{4} \int_0^z \frac{\exp[ik(z - z')]}{z - z'} \int \exp \left[ \frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(z - z')} \right] \epsilon(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') dp dz' \quad . \quad (2.14)$$

En dérivant cette équation par rapport à  $z$ , et en posant<sup>15</sup>  $u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \exp(ikz)$ , on obtient une équation parabolique

$$2ik \frac{\partial U(\rho, z)}{\partial z} + \Delta_{\perp} U(\rho, z) + k^2 \epsilon(\rho, z) U(\rho, z) = 0 \quad , \quad (2.15)$$

où le symbole  $\Delta_{\perp}$  représente le laplacien transverse :  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$ .

Rappelons que cette équation est valide moyennant les quatre conditions

$$\lambda \ll l_{\perp}, \quad \lambda \ll l_{\parallel}, \quad \sqrt{\lambda z} \ll \frac{l_{\perp}^2}{\lambda}, \quad \pi^2 k^2 z \int_{k\sqrt{2}}^{2k} \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa d\kappa \ll 1 \quad .$$

<sup>15</sup>La démonstration complète peut être trouvée dans Rytov *et al.* (1987), pages 42-43.

### 2.2.4 Méthode de perturbation de Rytov dans l'approximation parabolique

Nous pouvons utiliser une méthode de faibles perturbations pour approcher la solution de l'équation parabolique (2.15), comme nous l'avons fait dans le cadre de l'équation de Helmholtz au paragraphe 2.2.2. Soit à nouveau

$$u(\mathbf{r}) = \exp(\Psi(\mathbf{r})) \quad \text{et} \quad \Psi(\mathbf{r}) = \log[A(\mathbf{r})] + iS(\mathbf{r}) \quad , \quad (2.16)$$

avec  $A(\mathbf{r})$  l'amplitude du champ d'onde, et  $S(\mathbf{r})$  sa phase.

En appelant  $A_0(\mathbf{r})$  et  $S_0(\mathbf{r})$  les amplitude et phase du champ d'onde en milieu homogène, on retrouve l'expression

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \exp(\Psi'(\mathbf{r})) \quad \text{avec} \quad \Psi'(\mathbf{r}) = \log\left[\frac{A(\mathbf{r})}{A_0(\mathbf{r})}\right] + i[S(\mathbf{r}) - S_0(\mathbf{r})] \quad . \quad (2.17)$$

En utilisant cette notation dans l'équation parabolique (2.15), on trouve

$$2ik \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Psi(\rho, z) + (\nabla_{\perp} \Psi)^2 + k^2 \epsilon(\rho, z) = 0 \quad . \quad (2.18)$$

Contrairement à l'équation parabolique initiale (2.15), cette équation est non-linéaire. De plus, on remarque que le terme en  $\epsilon(\rho, z)$ , décrivant les perturbations du milieu de lenteur, intervient à présent de façon additive, et non plus comme un coefficient.

Nous allons rechercher des solutions à cette équation en développant le champ d'onde en puissance de  $\epsilon$ , soit sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) + \Psi_2(\mathbf{r}) + \dots \quad (2.19)$$

avec  $\Psi_i(\mathbf{r})$  d'ordre  $\epsilon^i$ .

En substituant (2.19) dans l'équation (2.18), on trouve le système

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial \Psi_1(\rho, z)}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Psi_1(\rho, z) &= -k^2 \epsilon(\rho, z) \\ 2ik \frac{\partial \Psi_2(\rho, z)}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Psi_2(\rho, z) &= (\nabla_{\perp} \Psi_1)^2 \\ 2ik \frac{\partial \Psi_3(\rho, z)}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Psi_3(\rho, z) &= 2\nabla_{\perp} \Psi_1 \nabla_{\perp} \Psi_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi_i(\rho, 0) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

puisque l'on néglige la rétro-propagation.

Les équations (2.20) diffèrent seulement par leurs membres de droite. Les solutions de ces différentes équations peuvent être écrites de façon générale comme

$$\Psi_i(\rho, z) = \int_0^z \int K(\rho - \rho', z - z') f_i(\rho', z') d\rho' dz' \quad , \quad (2.21)$$

où la fonction  $K(\rho, z)$  représente la fonction de Green de l'opérateur  $2ik\partial/\partial + \Delta_{\perp}$  et  $f_i(\rho', z')$  le membre de droite de l'équation (2.20) appropriée.

L'approximation de  $\Psi$  par son terme principal  $\Psi_1$  (afin d'éviter le calcul des fonctions  $\Psi_i$  par l'intégration (2.21)) est acceptable à la condition que

$$\mathbf{E}[(\lambda\nabla_{\perp}\Psi_1)^2] \ll \sigma_{\epsilon} \quad , \quad (2.22)$$

où la fonction  $\mathbf{E}[\dots]$  représente l'espérance mathématique.

Ces conditions impliquent que les variations transverses de  $\Psi_1$  sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde soient petites comparées à  $\epsilon$ . Il faut que  $\Psi_1$  varie de façon douce, raison pour laquelle la méthode de perturbation basée sur l'hypothèse de Rytov est généralement connue sous le nom de **méthode des perturbations lisses** (*method of smooth perturbations*).

## 2.3 Approximation asymptotique haute fréquence

### 2.3.1 Equation eikonale et théorie des rais

L'optique géométrique est une approximation asymptotique de l'approximation parabolique (domaine haute fréquence,  $\lambda L \ll l_{\perp}$  et  $\lambda L \ll l_{\parallel}$ ), qui néglige complètement les phénomènes de diffraction. Elle n'est valide que pour des trajets plus réduits. En notant  $L$  la distance de propagation, on suppose que  $\sqrt{\lambda L} \ll l_{\perp}$  et  $\sqrt{\lambda L} \ll l_{\parallel}$ .

Supposons que l'on peut écrire les solutions  $u(\mathbf{r}, \omega)$  sous la forme

$$u(\mathbf{r}, \omega) = A(\mathbf{r}, \omega)e^{i\omega T(\mathbf{r})} \quad , \quad (2.23)$$

où  $T(\mathbf{r})$  représente le temps de trajet, et que l'on peut écrire l'amplitude sous la forme d'une série de Taylor<sup>16</sup> en  $1/i\omega$

$$A(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{r})}{(i\omega)^n} \quad . \quad (2.24)$$

En introduisant cette forme de solution dans l'équation de Helmholtz (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{-\omega^2}{v^2(\mathbf{r})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{r})}{(i\omega)^n} &= -\omega^2 [\nabla T(\mathbf{r})]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{r})}{(i\omega)^n} \\ &+ i\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\nabla T(\mathbf{r})\nabla A_n(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})A_n(\mathbf{r})}{(i\omega)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta A_n(\mathbf{r})}{(i\omega)^n} \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Comme cette égalité est valide pour toutes les pulsations  $\omega$ , il faut que l'on ait égalité terme à terme entre les coefficients des différentes puissances de  $\omega$ . On peut donc réécrire cette équation sous la

<sup>16</sup>Ce développement est connu sous le nom d'*expansion de Debye*.

forme du système

$$\left\{ \begin{array}{lll} (i\omega)^2 & \frac{1}{v^2(\mathbf{r})} & = [\nabla T(\mathbf{r})]^2 \\ (i\omega)^1 & 0 & = 2\nabla T(\mathbf{r})\nabla A_0(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})A_0(\mathbf{r}) \\ (i\omega)^0 & 0 & = 2\nabla T(\mathbf{r})\nabla A_1(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})A_1(\mathbf{r}) + \Delta A_0(\mathbf{r}) \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ (i\omega)^{-n} & 0 & = 2\nabla T(\mathbf{r})\nabla A_{n+1}(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})A_{n+1}(\mathbf{r}) + \Delta A_n(\mathbf{r}) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

La première équation de ce système, qui ne fait intervenir que le temps de trajet, est connue sous le nom d'équation **eikonale** (du grec "image"). Les équations (2.26) sont connues sous le nom d'**équations de transport**.

L'**approximation de l'optique géométrique**, ou **approximation asymptotique haute fréquence** consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à un dans la série (2.24)<sup>17</sup>. On trouve alors

$$u(\mathbf{r}, \omega) = A_0(\mathbf{r})e^{i\omega T(\mathbf{r})} \quad .$$

La première équation de transport peut être réécrite comme

$$\operatorname{div}(A_0^2(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r})) = 0 \quad ,$$

et on voit qu'elle exprime la conservation du flux d'énergie à travers un tube de rais, c'est à dire que le transport de l'énergie a lieu dans la direction du rai à l'exclusion des autres directions de l'espace. Ceci justifie l'appellation de l'équation.

Remarquons aussi que l'amplitude  $A(\mathbf{r})$  est régulière comme  $\Delta T(\mathbf{r})$ . Les irrégularités du champ de lenteur sont intégrées dans les temps de parcours (équation eikonale), tandis qu'on les retrouve dérivées dans l'amplitude du rai<sup>18</sup>.

<sup>17</sup>Leur importance devient négligeable lorsque la fréquence tend vers l'infini :

$$A(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{r})}{(i\omega)^n} \rightarrow \frac{A_0(\mathbf{r})}{(i\omega)^0} = A_0 \quad \text{lorsque } \omega \rightarrow \infty.$$

<sup>18</sup>On peut accéder à ces équations par une démarche différente :

Si l'on injecte la solution (2.23) dans l'équation de Helmholtz, on trouve

$$\Delta A(\mathbf{r}, \omega) + 2i\omega\nabla A(\mathbf{r}, \omega)\nabla T(\mathbf{r}) + i\omega A(\mathbf{r}, \omega)\Delta T(\mathbf{r}) - \omega^2 A(\mathbf{r}, \omega)[\nabla T(\mathbf{r})]^2 + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{r}, \omega)}A = 0$$

En séparant les termes réel et imaginaire de cette équation, on trouve

$$\frac{\Delta A(\mathbf{r}, \omega)}{A(\mathbf{r}, \omega)\omega^2} + \frac{1}{v^2(\mathbf{r}, \omega)} = [\nabla T(\mathbf{r})]^2 \quad (2.27)$$

$$2\frac{\nabla A(\mathbf{r}, \omega)}{A(\mathbf{r}, \omega)}\nabla T(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.28)$$

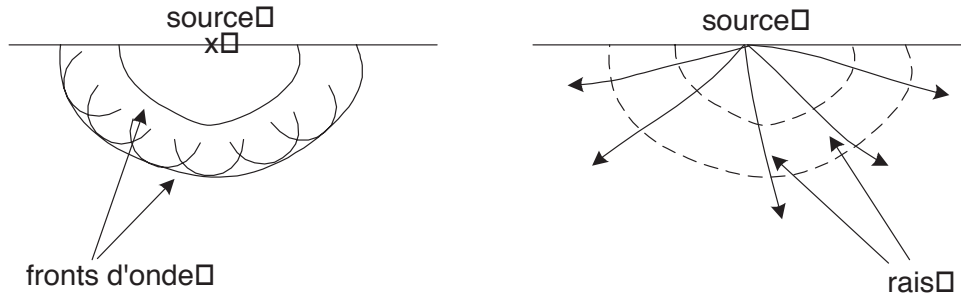


FIG. 2.2 – Définition du rai et du front d'onde

Définissons à présent la notion de front d'onde comme l'ensemble des courbes isochrones, c'est-à-dire telles que  $T(\mathbf{r}) = cst$ .

On définit alors les rai comme les trajectoires orthogonales aux fronts d'onde. Cette définition est illustrée par la figure 2.2, reproduite d'après (Lucio, 1996). Par définition du rai, on trouve

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = v(\mathbf{r}(s))\nabla T(\mathbf{r}(s)) \quad , \quad (2.30)$$

où  $s$  représente l'abscisse curviligne le long du rai  $\mathbf{r}(s)$ , et  $\mathbf{t}(s)$  le vecteur unitaire tangent au rai à l'instant  $s$ .

De l'équation (2.30), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{\mathbf{t}(s)}{v(\mathbf{r}(s))} \right) &= \frac{d}{ds} \nabla T(\mathbf{r}(s)) = \mathbf{t}(s) \nabla \nabla T(\mathbf{r}(s)) \\ &= v(\mathbf{r}(s)) \nabla T(\mathbf{r}(s)) \nabla \nabla T(\mathbf{r}(s)) \\ &= \frac{v(\mathbf{r}(s))}{2} \nabla [\nabla T(\mathbf{r}(s))]^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.31)$$

et, en utilisant l'équation de l'eikonale (2.29), on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{v(\mathbf{r}(s))} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{v(\mathbf{r}(s))}{2} \nabla \left( \frac{1}{v^2(\mathbf{r}(s))} \right) \quad . \quad (2.32)$$

La première équation est dite **hyper-eikonale**. En se plaçant dans l'approximation haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ), on voit que l'équation (2.27) redonne l'équation de l'**eikonale**

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{r}, \omega)} = [\nabla T(\mathbf{r})]^2 \quad (2.29)$$

On constate que, dans ce formalisme, le même résultat peut être obtenu sans hypothèse sur les fréquences, dans le cas où l'on suppose que les variations locales de courbure du front d'onde sont faibles ( $\frac{\nabla A(\mathbf{r}, \omega)}{A(\mathbf{r}, \omega)} \ll 1$ ).

La deuxième équation correspond aux équations de transport (2.26). On voit que la relation trouvée pour  $A_0$  est valable sans hypothèse sur la série de Laurent.

que l'on peut résoudre à partir des conditions initiales.

Ce sont les **équations du tracé de rais** que l'on présente souvent sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v(\mathbf{r})\mathbf{p}(s) \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla \left( \frac{1}{v(\mathbf{r}(s))} \right) \end{cases}, \quad (2.33)$$

où l'on a introduit la notation du vecteur lenteur  $\mathbf{p}(s) = \nabla T(\mathbf{r}(s)) = \frac{1}{v(\mathbf{r}(s))} \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s)$ .

Ces équations du tracé de rais (2.33) sont très utilisées en géophysique pétrolière pour calculer la propagation d'un champ d'onde dans un milieu hétérogène (Cerveny, 2001). Bien que les conditions d'application théoriques supposent que la longueur d'onde caractéristique de la source soit plus petite que l'ensemble des dimensions du milieu de propagation, l'expérience montre qu'en général la théorie des rais peut être appliquée dans la majorité des cas réels traités en exploration pétrolière (même dans des milieux fortement hétérogènes).

Remarquons finalement qu'à partir de l'équation de transport (2.26), on trouve une expression permettant d'estimer l'amplitude des ondes, qui s'exprime comme une loi de conservation de l'énergie de l'onde par unité de section de tube de rais. Ceci montre que la limitation la plus importante pour l'utilisation de l'optique géométrique sera le cas où la section du tube s'annule- et donc des rais se croisent, phénomène singulier appelé caustique.

### 2.3.2 Approximations Rai + Born et Rai + Rytov

Dans de nombreux cas - pour des opérations de propagation d'ondes telles que la migration -, on utilise des solutions de l'équation intégrale, obtenue par une approche perturbative de Born ou de Rytov.

Il faut toutefois remarquer que le calcul des fonctions de Green que l'on trouve dans ces solutions intégrales ne peut être que très rarement - et dans des cas non réalistes - résolu analytiquement. Elles doivent être évaluées par d'autres méthodes.

Dans le cas de l'approche par approximation de Born, diverses méthodes par différences finies (Cruse *et al.*, 1997) ainsi que par approximation asymptotique (Thierry, 1997) ont pu être mises en place. Dans le cas de l'approche par approximation de Rytov, seule une solution numérique par différences finies a été présentée (Woodward, 1992). Baina (1998) propose d'appliquer le formalisme des rais pour l'estimation de ces fonctions de Green, et présente, sur quelques exemples simples, une comparaison des résultats obtenus par cette méthode et par l'approximation de la théorie des rais.

Remarquons que les solutions obtenues en utilisant une approximation asymptotique des fonctions de Green (indépendamment de la méthode perturbative utilisée) sont plus riches que la solution obtenue en utilisant directement une approximation asymptotique du champ d'onde<sup>19</sup>.

---

<sup>19</sup>Cette solution asymptotique du champ d'onde représente la limite des solutions intégrales asymptotiques pour une fréquence tendant vers l'infini.

### 2.3.3 Estimation des temps de trajet à partir de l'équation eikonale

Il n'est en général pas possible de trouver une solution analytique à l'équation eikonale (2.29), pour un champ d'onde propagé dans un milieu aléatoire.

On peut en trouver une solution approchée en utilisant à nouveau une méthode perturbative : supposons que  $T(\mathbf{r})$ , le temps de trajet des rayons pour atteindre le point  $\mathbf{r}$ , puisse être représenté sous la forme d'une série asymptotique en  $\epsilon$  :

$$T(r) = T_0(r) + T_1(r) + T_2(r) + \dots \quad , \quad (2.34)$$

avec  $T_1$  terme du premier ordre en  $\epsilon$ ,  $T_2$  terme du second ordre en  $\epsilon$ , etc.

En utilisant cette définition dans l'équation de l'eikonale, et en regroupant les termes de même ordre en  $\epsilon$ , on trouve (Snieder et Aldridge, 1995)

$$\begin{aligned} (\nabla T_0)^2 &= \frac{1}{v_0^2} \\ 2(\nabla T_0 \nabla T_1) &= \frac{\epsilon}{v_0^2} \\ 2(\nabla T_0 \nabla T_2) &= -[\nabla T_1]^2 \\ (\nabla T_0 \nabla T_n) &= - \sum_{m=1}^{int(n/2)} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m, n-m}\right) \nabla T_m \nabla T_{n-m} \quad \text{pour } n \geq 3 \quad . \end{aligned}$$

La solution au premier ordre est donnée pour une onde sphérique par

$$T_0(\mathbf{r}) = \frac{r}{v_0} \quad (2.35)$$

$$T_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{2v_0} \int_0^r \epsilon\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) du \quad (2.36)$$

$$T_2(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8v_0} \int_0^r \epsilon^2\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) du - \frac{1}{8v_0} \int_0^r \left| \int_0^u \nabla_{\perp} \epsilon\left(\frac{v\mathbf{r}}{r}\right) dv \right|^2 du \quad , \quad (2.37)$$

en utilisant la notation  $r = |\mathbf{r}|$ . L'approximation au second ordre<sup>20</sup> est nécessaire dans les milieux fortement perturbés. En effet, le terme de second ordre prend en compte la modification de courbure des rais.

Snieder et Sambridge (1993) en proposent une expression plus générale, dérivée à partir de l'équation des rais (2.33). Ils montrent, en se plaçant dans un repère centré sur le rai, que la perturbation de second ordre des temps de première arrivée est une fonction de la perturbation au premier ordre de la position des rais. Pulliam et Snieder (1996) montrent l'importance de la présence

---

<sup>20</sup> Boyse et Keller (1995) donnent une expression légèrement différente de celle-ci, faisant uniquement intervenir un gradient transverse dans l'expression (2.37), obtenue en se basant sur une expression différente de la perturbation du champ de lenteur.



de ce terme en fonction des perturbations du champ de vitesse du milieu. Ils montrent que, dans le cas d'un milieu avec une perturbation déterministe du champ de lenteur d'une amplitude de l'ordre de quelques pourcents, l'erreur commise sur les temps de trajet est négligeable, tandis que lorsque l'amplitude de la perturbation devient plus importante (20 %), on ne peut plus négliger le terme d'ordre 2 dans l'approximation des temps.

On peut remarquer que l'espérance du temps de trajet pour la propagation au travers d'un milieu aléatoire sera inférieure au temps de trajet au travers du milieu homogène correspondant, puisque  $\mathbf{E}[T_1(\mathbf{r})] = 0$  et  $T_2(\mathbf{r}) < 0$ .

Ce biais correspond à l'espérance du terme de second ordre dans les temps d'arrivée :

$$\mathbf{E}[T(\mathbf{r})] - \frac{L}{v_0} = \mathbf{E}[T_0(\mathbf{r})] + \mathbf{E}[T_1(\mathbf{r})] + \mathbf{E}[T_2(\mathbf{r})] - \frac{L}{v_0} = \mathbf{E}[T_2(\mathbf{r})] \quad . \quad (2.38)$$

Roth *et al.* (1993), Samuelides (1998), Samuelides et Mukerji (1998) et Iooss (1998b) se sont intéressés à l'estimation de ce terme, qu'ils ont appelé **velocity shift**. Ils mettent en évidence la croissance de celui-ci en fonction de la profondeur du réflecteur, de la longueur de corrélation du champ de vitesse et du nombre d'onde. Nous reproduisons ce résultat dans l'annexe C. Shapiro *et al.* (1996) montre la dépendance du velocity shift en fonction de la fréquence de l'onde émise.

## Chapitre 3

# Outils de caractérisation stochastique des milieux traversés

### Sommaire

*Partant de la modélisation présentée dans le chapitre précédent pour l'estimation du temps de trajet d'une onde traversant un milieu hétérogène, nous allons présenter les différentes techniques permettant d'inférer les paramètres de corrélation du milieu traversé à partir des informations sismiques.*

*Dans une première partie, nous présenterons la tomographie statistique pre-stack, une méthode basée sur la variance des collections iso-offset de temps d'arrivée, développée par Touati (1996) et Iooss (1998b) durant leurs travaux de thèse au Centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines. Ensuite, nous présenterons la tomographie statistique post-stack, développée durant notre recherche. Cette méthode permet d'estimer les paramètres stochastiques du milieu de propagation à partir des collections de vitesses de sommation. Finalement, nous montrerons comment ces méthodes peuvent être adaptées à la modélisation de cas plus complexes, en introduisant le cas d'un milieu multi-couche, avec un gradient vertical dans le champ de vitesse moyen. Nous présenterons aussi les derniers résultats obtenus dans le cadre d'un milieu à variation latérale du champ de vitesse. L'ensemble des situations est étayé de résultats obtenus sur des jeux de données synthétiques. Les essais sur données réelles seront présentés dans la deuxième partie de cette thèse.*

*Starting from the modelling presented in the former chapter for the traveltimes estimation of a wave propagating through a random media, we present the various techniques developed to infer the correlation parameters of the velocity medium, using seismic information.*

*In the first section, we introduce the pre-stack statistical tomography, a method based on the variance of the iso-offset collections of traveltimes. This method has been developed*

by Touati (1996) and Iooss (1998b) during their thesis at the Centre de Géostatistique of the Ecole des Mines de Paris. We then present the post-stack statistical tomography, we developed in the last few years. This method makes possible to estimate the stochastic parameters of the propagation media using the stacking velocity sets. Introducing the modelling of a multi-layer medium, and vertically varying mean velocities, we eventually show how these techniques can be extended to more complex situations. We also present the results obtained in the case of a laterally varying velocity field. All the cases will be illustrated by results obtained using synthetic data. The results obtained using real data are presented in the second part of this document.

---

### 3.1 Introduction

Nous allons à présent nous intéresser à l'inférence des paramètres stochastiques du milieu de propagation. Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un milieu faiblement perturbé, et avec des longueurs de corrélation importantes par rapport à la longueur d'onde caractéristique du signal émis. Dans ces conditions, nous nous plaçons dans les hypothèses de l'optique géométrique. Nos développements se baseront sur les estimations des temps de trajet obtenues dans ce cadre (équations (2.35) et (2.36)). Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le cas d'une réflexion sur un réflecteur plan. Rappelons que le modèle de vitesse est décrit par l'équation

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{v_0^2} [1 + \epsilon(\mathbf{r})] \quad , \quad (3.1)$$

où le champ de perturbation du modèle de vitesse  $\epsilon(\mathbf{r})$  est d'espérance nulle et de paramètres du modèle de corrélation  $a$ , la longueur de corrélation horizontale,  $b$  la longueur de corrélation verticale et  $\sigma$  l'écart-type du champ de perturbation. Au premier ordre, cette expression est équivalente à

$$v(\mathbf{r}) = v_0 \left[ 1 + \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{2} \right] \quad . \quad (3.2)$$

### 3.2 Variance des temps d'arrivée en collection iso-offset

Partant de l'expression obtenue dans le cadre de l'optique géométrique pour estimer les temps de première arrivée au premier ordre<sup>21</sup>

$$T(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{v_0} + \int_0^{\mathbf{r}} \frac{\epsilon(\mathbf{r}')}{2v_0} d\mathbf{r}'$$

---

<sup>21</sup>On montre en annexe C comment obtenir cette expression pour des ondes planes et sphériques.

Iooss (1998b) et Touati (1996) estiment la covariance des temps de trajet pour une onde sphérique :

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(T(\rho_1, z), T(\rho_2, z)) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} \frac{bz}{\rho_\perp} \int_0^{\rho_\perp} \int_0^\infty C_0(\sqrt{u^2 + z'^2}) dz' du \quad , \\ \mathbf{Var}(T(0, z)) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} bz \int_0^\infty C_0(z'^2) dz' \quad ,\end{aligned}\tag{3.3}$$

où  $\rho = |\rho_2 - \rho_1|$ ,  $\rho_\perp$  représente le rapport  $\frac{\rho}{a}$ , et  $C_0$  le modèle de covariance standardisé des hétérogénéités de vitesse.

Pour une onde plane, ils trouvent

$$\mathbf{Cov}(T(\rho_1, z), T(\rho_2, z)) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2v_0^2} bz \int_0^\infty C_0(\sqrt{\rho_\perp^2 + z'^2}) dz' \quad .\tag{3.4}$$

De façon plus générale, ils donnent une expression normalisée de la variance des temps d'arrivées en  $x = a$  :

$$\frac{\mathbf{Var}[T(a)]}{\mathbf{Var}[T(0)]} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A_0} \int_0^1 \int_0^\infty C_0(\sqrt{u^2 + z^2}) dz du \quad ,\tag{3.5}$$

avec  $A_0$  la portée intégrale du modèle de covariance du champ de vitesse (une valeur constante, dépendant du modèle de covariance choisi : 0.875 pour un modèle gaussien, 0.911 pour un modèle exponentiel).

Ils proposent de comparer les courbes théoriques ainsi obtenues aux courbes expérimentales, et d'obtenir une estimation des paramètres stochastiques du milieu par ajustement de la courbe théorique. Sur un exemple synthétique, Iooss (1998a) montre que l'erreur commise en utilisant cette expression est au pire de 20 %. (Iooss, 1998b) inverse l'expression (3.3) au moyen d'une transformée de Abel. Pour une onde réfléchie, il obtient

$$C_0\left(\frac{x}{a}\right) = \left[ \int_x^\infty \frac{\nabla_\perp I_R(v)}{\sqrt{v^2 - x^2}} dv \right] / \left[ \int_0^\infty \frac{\nabla_\perp I_R(v)}{v} dv \right] \quad ,\tag{3.6}$$

avec  $I_R(v) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \{v \mathbf{Var}[T(v)]\}$ .

Cette méthode d'inversion de la longueur de corrélation horizontale du champ de vitesse instantanée a été baptisée **tomographie statistique prestack** par Müller *et al.* (1992).

### 3.3 Covariance des vitesses de sommation

Touati (1996) mentionne l'idée que la structure des profils de vitesse de sommation dépend du dispositif d'acquisition. Il remarque que la variance des vitesses de sommation est plus élevée lorsque la couverture est faible, et que les variogrammes des profils de vitesse de sommation ont une portée plus faible dans ce cas.

Nous avons voulu modéliser cette relation en développant au premier ordre l'expression de la corrélation entre carrés de lenteurs de sommations, puis entre vitesses de sommation.

L'obtention de cette expression demande dans un premier temps l'expression de la covariance des temps d'arrivée.

### 3.3.1 Covariance des temps d'arrivée

Nous allons utiliser le formalisme correspondant à celui d'une acquisition sismique : nous supposons que le réflecteur est situé à une profondeur  $L$ . Nous allons développer l'expression de la covariance des temps d'arrivée pour deux tirs, en fonction du modèle de covariance du champ de vitesse  $C(h)$ , dans le cas d'une acquisition sismique. Nous allons considérer les temps d'arrivées, pour deux tirs, de sources  $S_1$  et  $S_2$ , avec les offsets respectifs  $h_1$  et  $h_2$ . Le schéma considéré est illustré à la figure 3.1.

L'intégrale le long des rayons  $r_1$  et  $r_2$  peut être décomposée en la somme de quatre intégrales le long des quatre tronçons  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{21}$  et  $r_{22}$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[T(r_1), T(r_2)] &= \mathbf{Cov}[T(r_{11}), T(r_{21})] + \mathbf{Cov}[T(r_{11}), T(r_{22})] \\
&+ \mathbf{Cov}[T(r_{12}), T(r_{21})] + \mathbf{Cov}[T(r_{12}), T(r_{22})] \\
&= \mathbf{E}_{r_{11}, r_{21}} \left[ \int_{r_{11}, r_{21}} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1)}{2v_0} \frac{\epsilon(x_2(z_2), z_2)}{2v_0} dz_1 dz_2 \right] \\
&+ \mathbf{E}_{r_{11}, r_{22}} \left[ \int_{r_{11}, r_{22}} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1)}{2v_0} \frac{\epsilon(x_2(z_2), z_2)}{2v_0} dz_1 dz_2 \right] \\
&+ \mathbf{E}_{r_{12}, r_{21}} \left[ \int_{r_{11}, r_{22}} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1)}{2v_0} \frac{\epsilon(x_2(z_2), z_2)}{2v_0} dz_1 dz_2 \right] \\
&+ \mathbf{E}_{r_{12}, r_{22}} \left[ \int_{r_{12}, r_{22}} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1)}{2v_0} \frac{\epsilon(x_2(z_2), z_2)}{2v_0} dz_1 dz_2 \right] \quad . \quad (3.7)
\end{aligned}$$

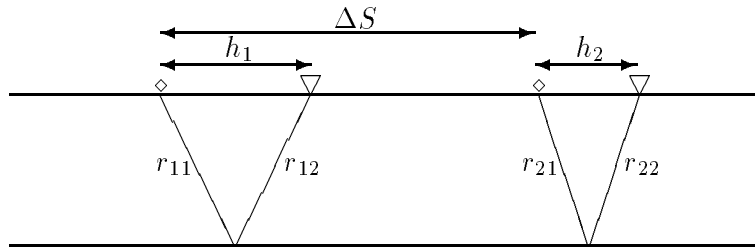


FIG. 3.1 – Schéma du dispositif d'acquisition

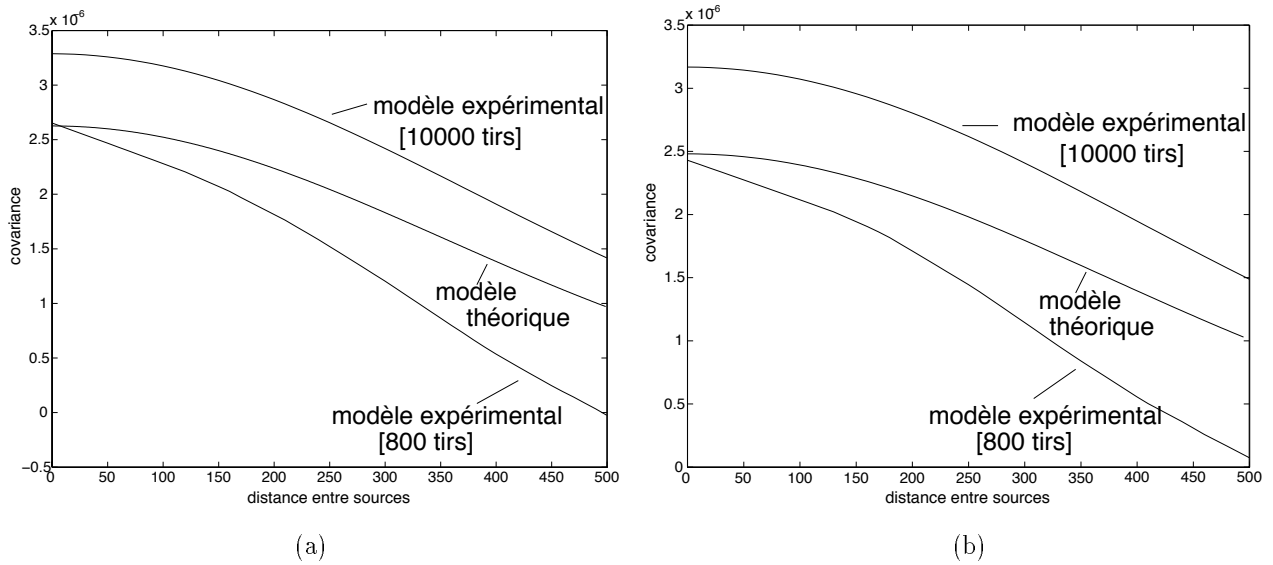


FIG. 3.2 – Covariance des temps de première arrivée à offset constant ((a)  $h = 0m$  et (b)  $h = 300m$ ), en fonction de la distance entre sources

On montre en annexe D comment l'expression de ces intégrales peut être simplifiée pour une évaluation optimale.

### Résultats synthétiques

Les modèles théoriques peuvent être comparés aux résultats synthétiques obtenus par les deux méthodes présentées au paragraphe 1.3.

On considère les temps d'arrivée pour une onde sphérique, renvoyée par un réflecteur horizontal situé à une profondeur de 1500m.

Dans les figures suivantes, on montre l'ajustement entre la courbe théorique obtenue au paragraphe précédent et les courbes générées au moyen des collections de données synthétiques. L'ajustement entre courbes est relativement satisfaisant.

Le graphe 3.2 illustre la covariance entre temps de trajet, en fonction de la distance  $\Delta S$  entre sources, pour des tirs (a) à offset  $h = h_1 = h_2$  nul et (b) à offset 300m. Les perturbations du champ de vitesse ont des longueurs de corrélation de  $a = 500m$  et  $b = 50m$ .

Le graphe 3.3 illustre la covariance entre temps de trajet, en fonction de la distance entre sources, pour des tirs (a) à offset nul et (b) à offset 300m. Les perturbations du champ de vitesse ont des longueurs de corrélation de  $a = 250m$  et  $b = 50m$ . On constate de façon plus nette dans ce cas le gain de précision obtenu en utilisant une importante collection de valeurs (10000 tirs). Remarquons

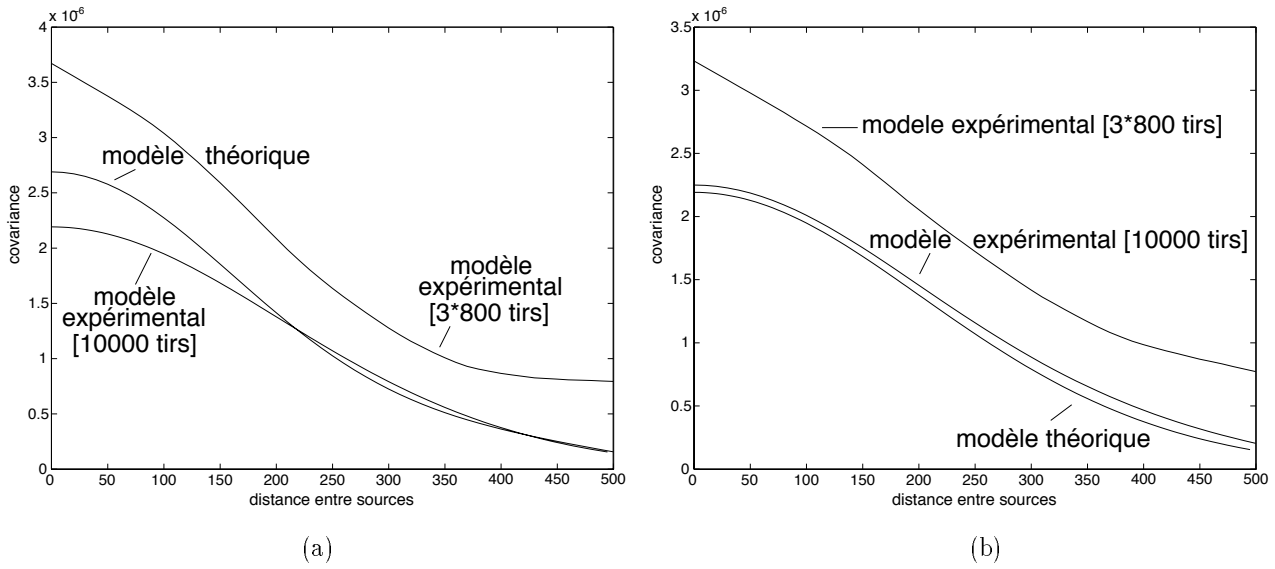


FIG. 3.3 – Covariance des temps de première arrivée à offset constant ((a)  $h = 0m$  et (b)  $h = 300m$ ), en fonction de la distance entre sources

toutefois le manque de réalisme d'une telle collection de tirs.

La figure 3.4 illustre la covariance entre temps de trajet, en fonction de l'offset  $h = h_1 = h_2$ , pour des tirs (a) issus de la même source et (b) issus de sources distantes de 250m. Remarquons que le premier cas correspond à la représentation de la variance des temps en fonction de l'offset.

L'aspect plus erratique de la courbe expérimentale obtenue pour la moyenne des trois séries de 800 tirs s'explique par la plus faible échelle verticale du graphe, la variation des valeurs présentées dans ce dispositif étant de plus faible amplitude. On remarque pour cette figure que la covariance entre tirs est plus forte pour des tirs à moyen offset, le recouvrement des zones traversées étant maximal pour les trajectoires correspondant à ces tirs.

### 3.3.2 Covariance des lenteurs de sommation

Nous nous basons sur la définition de la vitesse de sommation obtenue par ajustement hyperbolique

$$\frac{1}{V_{stack1}^2} = \frac{n \sum_{i=1}^n T_{1i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_{1i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (3.8)$$

où  $T_{1i}$  représente le temps d'arrivée correspondant au tir avec un offset  $x_i$ , dans l'estimation de la vitesse de sommation au cdp 1.

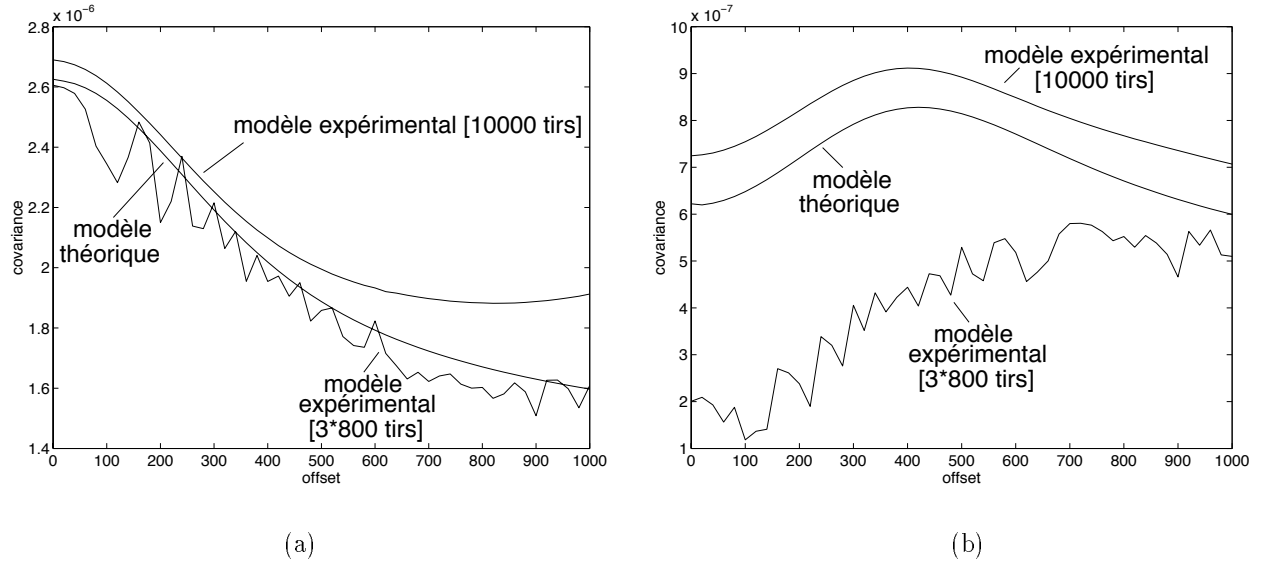


FIG. 3.4 – Covariance des temps de première arrivée à distance entre sources constante ((a)  $\Delta S = 0m$  et (b)  $\Delta S = 300m$ ), en fonction de l'offset

On peut exprimer la covariance des carrés de lenteurs par la relation (Geraets et Galli, 2002) :

$$\mathbf{Cov}\left[\frac{1}{V_{stack1}^2}, \frac{1}{V_{stack2}^2}\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2) \quad , \quad (3.9)$$

avec la fonction de pondération  $k(i, j, n)$  dépendant des paramètres du dispositif :

$$k(i, j, n) = \frac{n^2 x_i^2 x_j^2 - n x_j^2 (\sum_{k=1}^n x_k^2) - n x_i^2 (\sum_{k=1}^n x_k^2) + (\sum_{k=1}^n x_k^2) (\sum_{k=1}^n x_k^2)}{[n \sum_{k=1}^n x_k^4 - (\sum_{k=1}^n x_k^2) (\sum_{k=1}^n x_k^2)]^2} \quad . \quad (3.10)$$

En se plaçant à nouveau dans les hypothèses de l'Optique Géométrique, on peut exprimer

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2) &= \mathbf{E} \left[ \left( T_{1i}^2 - \mathbf{E}[T_{1i}^2] \right) \left( T_{2j}^2 - \mathbf{E}[T_{2j}^2] \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[ \left( \left( \int_{\mathbf{r}_1} \frac{1}{v_0} + \frac{\epsilon(z_1)}{2v_0} dz_1 \right)^2 - \mathbf{E} \left[ \left( \int_{\mathbf{r}_1} \frac{1}{v_0} + \frac{\epsilon(z_1)}{2v_0} dz_1 \right)^2 \right] \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \left( \int_{\mathbf{r}_2} \frac{1}{v_0} + \frac{\epsilon(z_2)}{2v_0} dz_2 \right)^2 - \mathbf{E} \left[ \left( \int_{\mathbf{r}_2} \frac{1}{v_0} + \frac{\epsilon(z_2)}{2v_0} dz_2 \right)^2 \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$



$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \left[ \left( \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{1}{v_0^2} + \frac{\epsilon(z_{1a})}{2v_0^2} + \frac{\epsilon(z_{1b})}{2v_0^2} + \frac{\epsilon(z_{1a})\epsilon(z_{1b})}{4v_0^2} dz_{1a} dz_{1b} \right) - \mathbf{E} \left( \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{1}{v_0^2} + \frac{\epsilon(z_{1a})\epsilon(z_{1b})}{4v_0^2} dz_{1a} dz_{1b} \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \int_{\mathbf{r}_2} \int_{\mathbf{r}_2} \frac{1}{v_0^2} + \frac{\epsilon(z_{2a})}{2v_0^2} + \frac{\epsilon(z_{2b})}{2v_0^2} + \frac{\epsilon(z_{2a})\epsilon(z_{2b})}{4v_0^2} dz_{2a} dz_{2b} \right) - \mathbf{E} \left( \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{1}{v_0^2} + \frac{\epsilon(z_{2a})\epsilon(z_{2b})}{4v_0^2} dz_{2a} dz_{2b} \right) \right] \\
&= \mathbf{E} \left[ \left( \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{\epsilon(z_{1a})}{v_0^2} dz_{1a} dz_{1b} \right) \left( \int_{\mathbf{r}_2} \int_{\mathbf{r}_2} \frac{\epsilon(z_{2a})}{v_0^2} dz_{2a} dz_{2b} \right) \right] \\
&\quad + \mathbf{E} \left[ \left( \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{\epsilon(z_{1a})\epsilon(z_{1b})}{4v_0^2} dz_{1a} dz_{1b} \right) \left( \int_{\mathbf{r}_2} \int_{\mathbf{r}_2} \frac{\epsilon(z_{2a})\epsilon(z_{2b})}{4v_0^2} dz_{2a} dz_{2b} \right) \right] \\
&\quad - \mathbf{E} \left[ \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{\epsilon(z_{1a})\epsilon(z_{1b})}{4v_0^2} dz_{1a} dz_{1b} \right] \mathbf{E} \left[ \int_{\mathbf{r}_2} \int_{\mathbf{r}_2} \frac{\epsilon(z_{2a})\epsilon(z_{2b})}{4v_0^2} dz_{2a} dz_{2b} \right] \\
&= \mathbf{E}[T_{1i}] \mathbf{E}[T_{2j}] \mathbf{E} \left[ \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_2} \frac{\epsilon(z_{1a})\epsilon(z_{2b})}{v_0^2} dz_{1a} dz_{2b} \right] + 16 \mathbf{Var}[T_{1i}] \mathbf{Var}[T_{2j}] \\
&= \mathbf{E}[T_{1i}] \mathbf{E}[T_{2j}] \mathbf{Cov}[T_{1i}, T_{2j}] \quad , \tag{3.12}
\end{aligned}$$

où le terme  $\mathbf{Var}[T_{1i}] \mathbf{Var}[T_{2j}]$  a été négligé car il est d'un ordre nettement inférieur au premier terme, dans l'expression obtenue.

En utilisant ces expressions, on trouve

$$\mathbf{Cov}\left(\frac{1}{V_1^2}, \frac{1}{V_2^2}\right) = 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{E}(T_{1i}) \mathbf{E}(T_{2j}) \mathbf{Cov}(T_{1i}, T_{2j}) \quad . \tag{3.13}$$

### Illustrations

A la figure 3.5 nous présentons diverses courbes théoriques de covariance des lenteurs. Les courbes sont présentées sous la forme de variogrammes, afin de rester dans le formalisme géostatistique traditionnel.

Elles correspondent aux analyses de vitesses pour les enregistrements réfléchis sur un réflecteur à 1500m, réalisées en utilisant soit un dispositif d'acquisition complet -101 récepteurs, pour un offset maximal de 1000m-, soit un dispositif d'acquisition réduit -51 récepteurs, pour un offset maximal de 500m.

On constate que la variance entre valeurs de lenteurs dans le cas des analyses de vitesses réalisées avec un dispositif complet est plus faible que lors de l'utilisation d'un dispositif réduit. Ceci correspond à l'idée que les profils d'analyses de vitesse sont plus continus et moins dispersés si le dispositif d'acquisition est plus important<sup>22</sup>.

Les courbes présentées à la figure 3.5 ont été obtenues en considérant plusieurs modèles de covariance des hétérogénéités de vitesse: gaussien, sphérique et exponentiel. La longueur de corrélation

---

<sup>22</sup>L'analyse de vitesse de sommation réalise un lissage entre les différentes valeurs de vitesse pour chaque offset. Ainsi, le filtre est d'autant plus étiré et possède un effet d'autant plus lissant que le nombre de valeurs utilisées est important.

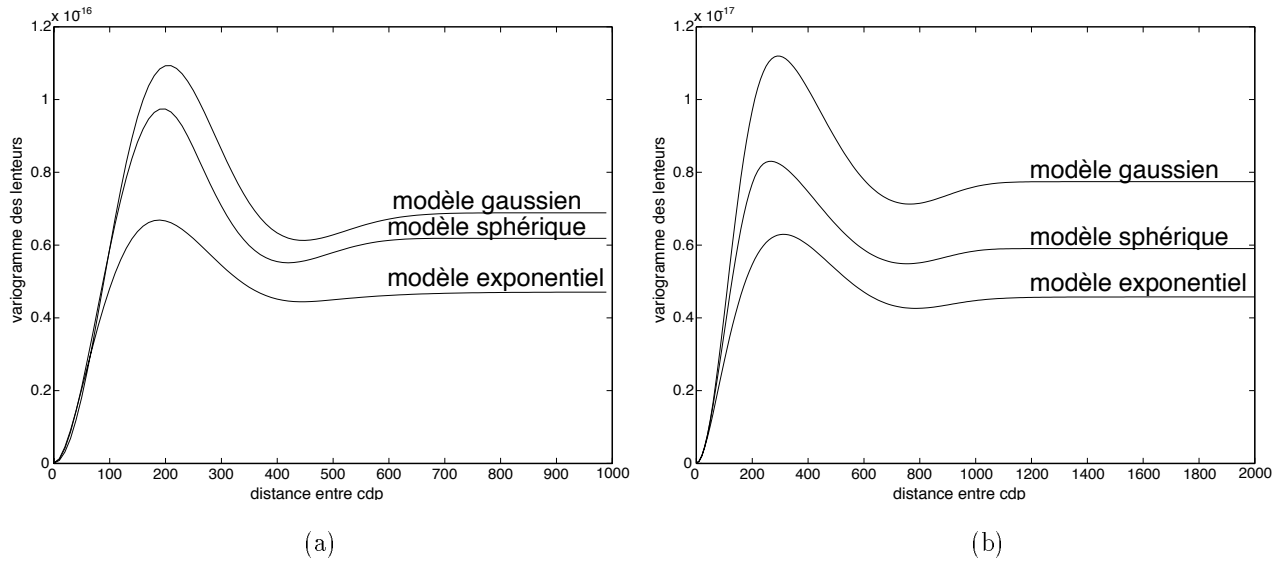


FIG. 3.5 – Modèles de covariances de carrés de lenteurs pour (a) 51 et (b) 101 récepteurs

horizontale de ces champs aléatoires d'hétérogénéités de vitesse est conservée égale à 250m. On constate que les différents modèles de covariance conduisent à des courbes relativement équivalentes: indépendamment du modèle choisi, les courbes de covariance des lenteurs de sommation ont un aspect parabolique autour de l'origine, passent par un sommet pour finalement redescendre et s'ajuster à une valeur de palier.

Nous pouvons en conclure que la méthode présentée ici ne permettra pas de discerner entre les différents modèles de covariance. Par contre, on constate directement l'influence du changement de dispositif d'acquisition sur la courbe théorique générée: on voit que la position (en distance et en valeur de variogramme) du premier pic de cette courbe a changé, par simple modification du dispositif d'acquisition.

A la figure 3.6, nous précisons cette remarque en comparant diverses courbes théoriques de covariance des lenteurs, dans le cas d'un milieu gaussien. Nous utilisons désormais un dispositif d'acquisition complet, composé de 101 géophones. En faisant varier les paramètres de longueurs de corrélation des hétérogénéités de vitesses, on voit l'influence des deux paramètres  $a$  et  $b$ : la longueur de corrélation verticale  $b$  sert de facteur multiplicatif à la courbe obtenue, tandis que la longueur de corrélation horizontale  $a$  influe sur la distance à l'origine à laquelle se trouve le premier pic de la courbe, ainsi que sur la hauteur de la courbe (de plus grandes longueurs de corrélation des hétérogénéités de vitesse génèrent des courbes d'analyse de vitesse moins dispersées).

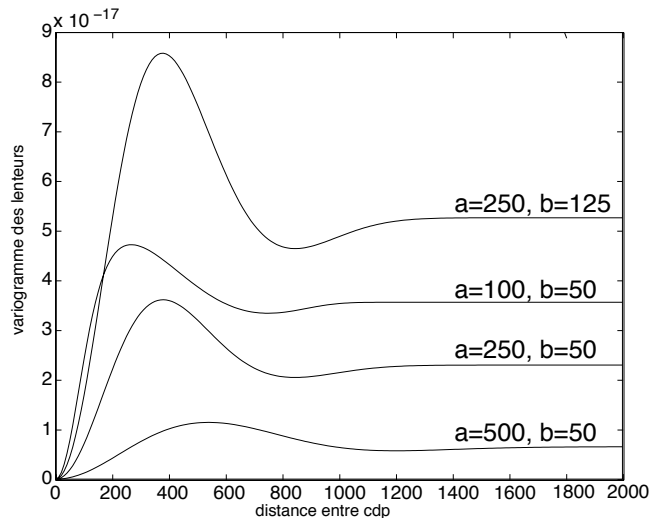
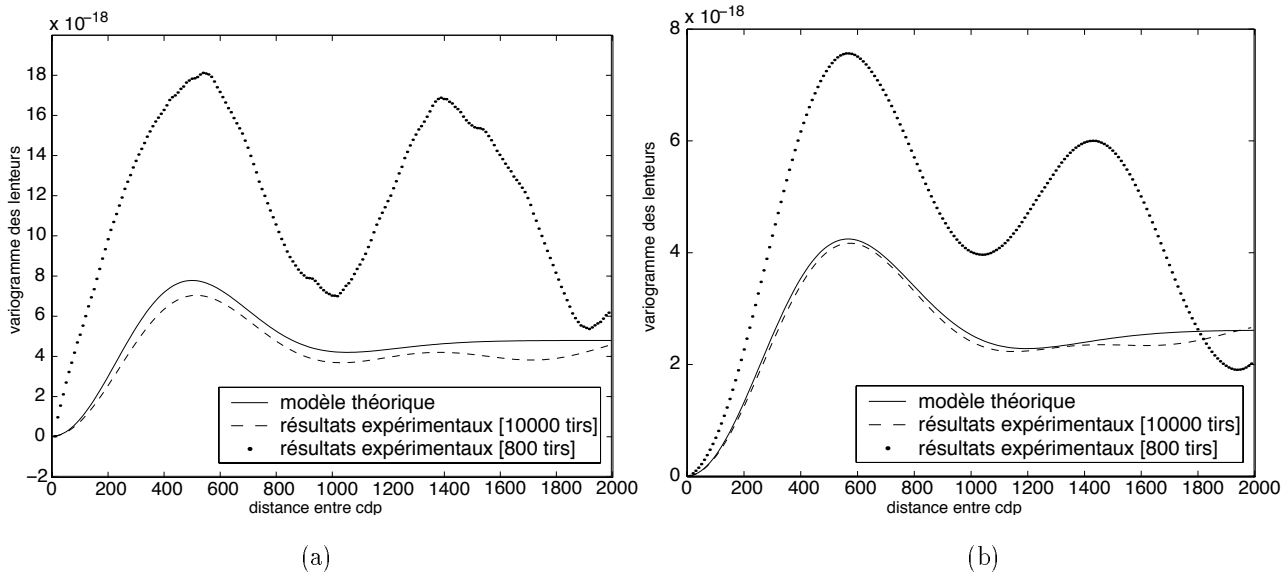


FIG. 3.6 – Modèles de covariances de carrés de lentours

FIG. 3.7 – Résultats dans le cas gaussien, pour (a) 51 et (b) 101 récepteurs, avec les longueurs de corrélation  $a = 500m$  et  $b = 50m$

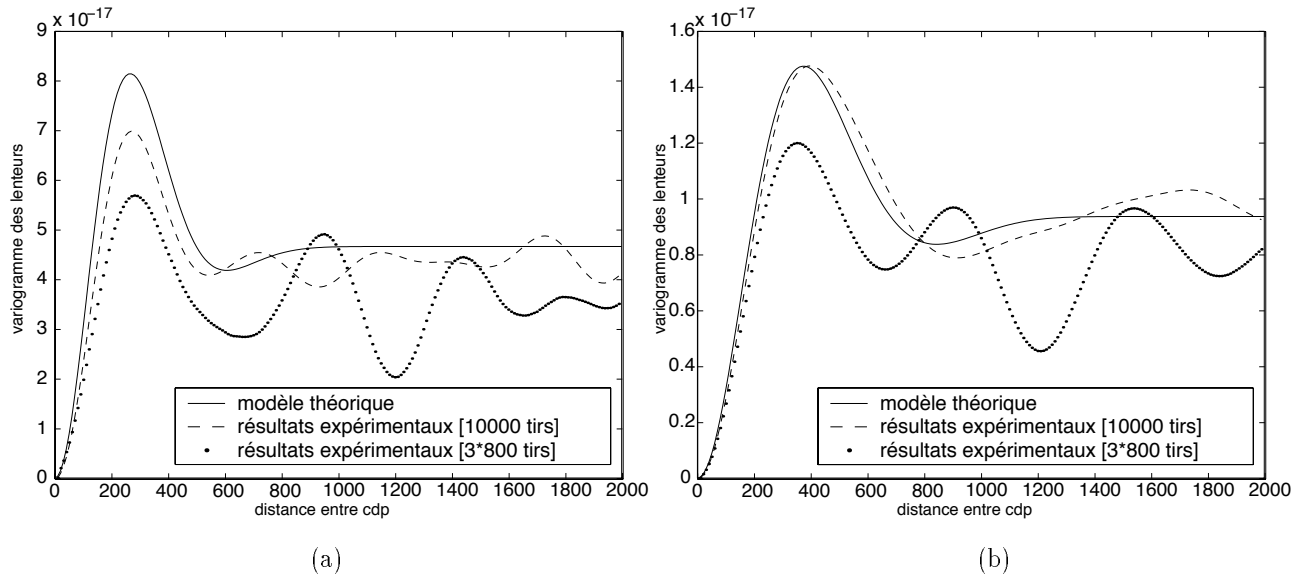


FIG. 3.8 – Résultats dans le cas gaussien, pour (a) 51 et (b) 101 récepteurs, avec les longueurs de corrélation  $a = 250m$  et  $b = 50m$

### Résultats synthétiques

A la figure 3.7 nous comparons les résultats théoriques et synthétiques pour l'estimation de la covariance du carré de la lenteur. On présente les courbes obtenues dans le cas d'un dispositif d'acquisition complet -101 récepteurs-, et dans le cas d'un dispositif d'acquisition réduit -51 récepteurs-. Cette dernière collection de valeurs est obtenue en négligeant les enregistrements de grands offsets ( $h > 500m$ ) lors de l'analyse de vitesse.

On voit qu'une série de 800 tirs n'est pas suffisante pour nous fournir une courbe de corrélation proche de la courbe théorique. L'utilisation d'une série de 10000 tirs nous permet d'obtenir une courbe de covariance des carrés de lenteur très proche de la courbe théorique, indépendamment du dispositif d'acquisition utilisé pour les deux cas présentés.

On remarque néanmoins que la position du premier pic de la courbe de variogramme obtenue avec un nombre réduit de valeurs - 800 tirs nous permettent d'obtenir 700 analyses de vitesses en utilisant 101 récepteurs, et 750 analyses de vitesses en utilisant 51 récepteurs - se trouve relativement bien située.

On constate que l'estimation de la longueur de corrélation horizontale ( $a = 500m$ ) peut être réalisée efficacement, par l'ajustement de ce premier pic. C'est ce critère que nous utiliserons ultérieurement pour réaliser l'ajustement.

On présente à la figure 3.8 des résultats équivalents obtenus dans le cas d'un milieu de vitesses dont

les perturbations ont une longueur de corrélation de 250m. On constate à nouveau que les courbes obtenues en utilisant une série de 10000 tirs sont très proches des courbes théoriques.

En utilisant cette fois la valeur moyenne des variogrammes correspondant aux analyses de vitesses pour trois séries de 800 tirs, on constate que l'on retrouve une courbe s'approchant des résultats théoriques. Cette situation - la possession de plusieurs profils de valeurs d'une longueur de quelques kilomètres - est nettement plus proche de situations réelles, et nous voyons que la méthode suggérée dans ce paragraphe peut efficacement être appliquée dans des cas réalistes.

### 3.3.3 Covariance des vitesses de sommation

Repartant de l'expression de la vitesse de sommation obtenue par approximation hyperbolique des temps de trajet, on trouve

$$\begin{aligned} V_{stack} &= \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n T_i^2 x_i^2 + n \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}} \\ &= \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}} \end{aligned}$$

Au premier ordre<sup>23</sup>, on peut approximer la vitesse de sommation par

$$\begin{aligned} V_{stack} &= \left[ \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[n \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2][n \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2]}{[n \sum_{i=1}^n T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2]^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{V_{stack}^2 - V_{stack}^2 \frac{[n \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2]}{[n \sum_{i=1}^n T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2]}} \\ &= \overline{V_{stack}} \sqrt{1 - \frac{[n \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2]}{[n \sum_{i=1}^n T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2]}} \\ &\simeq \overline{V_{stack}} \left( 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{n \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n T_i^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} \right] \right) \end{aligned}$$

<sup>23</sup> On utilise les approximations au premier ordre suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b + \Delta b} &= \frac{a}{b} - \frac{\frac{a\Delta b}{b}}{b + \Delta b} \simeq \frac{a}{b} - \frac{a\Delta b}{b^2} \\ \sqrt{1 - \epsilon} &\simeq 1 - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Nous trouvons que la covariance des vitesses de sommation peut être approximée par

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(V_{stack1}, V_{stack2}) &= \overline{V_{stack}}^2 \mathbf{Cov}\left(1 - \frac{1}{2}\left[\frac{n \sum_{i=1}^n \Delta T_{1i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_{1i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n T_{1i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_{1i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}\right], \right. \\
&\quad \left. 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{n \sum_{i=1}^n \Delta T_{2i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_{2i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n T_{2i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_{2i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}\right]\right) \\
&= \frac{\overline{V_{stack}}^2}{4} \frac{\mathbf{Cov}(n \sum_{i=1}^n \Delta T_{1i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_{1i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2, n \sum_{i=1}^n \Delta T_{2i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n \Delta T_{2i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2)}{[n \sum_{i=1}^n T_{1i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_{1i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2][n \sum_{i=1}^n T_{2i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_{2i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2]} \\
&= \frac{\overline{V_{stack}}^2}{4} \left[ \frac{n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 x_j^2 \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2) - n(\sum_{k=1}^n x_k^2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2)}{[n \sum_{i=1}^n T_{1i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_{1i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2][n \sum_{i=1}^n T_{2i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^n T_{2i}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{n(\sum_{k=1}^n x_k^2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2) + (\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{l=1}^n x_l^2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2)}{[n \sum_{k=1}^n T_{1k}^2 x_k^2 - \sum_{k=1}^n T_{1k}^2 \sum_{l=1}^n x_l^2][n \sum_{k=1}^n T_{2k}^2 x_k^2 - \sum_{k=1}^n T_{2k}^2 \sum_{l=1}^n x_l^2]} \right] \\
&= \frac{\overline{V_{stack}}^2}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n^2 x_i^2 x_j^2 - n(\sum_{k=1}^n x_k^2) x_i^2 - n(\sum_{k=1}^n x_k^2) x_j^2 + (\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{l=1}^n x_l^2)}{[n \sum_{k=1}^n T_{1k}^2 x_k^2 - \sum_{k=1}^n T_{1k}^2 \sum_{l=1}^n x_l^2][n \sum_{k=1}^n T_{2k}^2 x_k^2 - \sum_{k=1}^n T_{2k}^2 \sum_{l=1}^n x_l^2]} \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2) \\
&= \frac{\overline{V_{stack}}^6}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n^2 x_i^2 x_j^2 - n(\sum_{k=1}^n x_k^2) x_i^2 - n(\sum_{k=1}^n x_k^2) x_j^2 + (\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{l=1}^n x_l^2)}{[n \sum_{k=1}^n x_k^4 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{l=1}^n x_l^2]^2} \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2) \\
&= \frac{\overline{V_{stack}}^6}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2) \quad ,
\end{aligned}$$

et on trouve une expression proche de celle obtenue dans le cas de la covariance des carrés de lenteurs :

$$\mathbf{Cov}(V_{stack1}, V_{stack2}) = \overline{V_{stack}}^6 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{E}(T_{1i}) \mathbf{E}(T_{2j}) \mathbf{Cov}(T_{1i}, T_{2j}) \quad (3.14)$$

avec à nouveau

$$k(i, j, n) = \frac{n^2 x_i^2 x_j^2 - n x_j^2 (\sum_{k=1}^n x_k^2) - n x_i^2 (\sum_{k=1}^n x_k^2) + (\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{k=1}^n x_k^2)}{[n \sum_{k=1}^n x_k^4 - (\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{k=1}^n x_k^2)]^2} .$$

L'ensemble des illustrations présentées au paragraphe 3.3.2, dans le cas de la covariance des carrés de lenteur de sommation, peut être obtenu dans le cas présent, moyennant un changement d'échelle: les grandeurs traitées doivent être multipliées par un facteur  $\overline{V_{stack}}^6/4$  par rapport à l'échelle initiale des figures 3.6 à 3.8<sup>24</sup>.

<sup>24</sup>Cette multiplication permet de réaliser les ajustements sur des valeurs d'ordre de grandeur plus raisonnable.

### 3.3.4 Comparaison des résultats synthétiques obtenus par ces diverses méthodes

Nous avons voulu comparer les deux grandes familles de méthodes présentées ici dans un cas synthétique général.

On néglige les problèmes d'utilisation pratique des méthodes présentées sur des cas réels, afin de comparer les performances de celles-ci dans un cas idéal.

Cette comparaison est présentée plus complètement dans l'article (Iooss *et al.*, 2002). Nous allons en présenter ici les grandes lignes. On génère un champ aléatoire de vitesse instantanée, de moyenne 2000m/s. Les hétérogénéités de vitesse ont une covariance gaussienne, un écart-type  $\sigma_\epsilon = 4\%$ , et des longueurs de corrélation de 400m horizontalement et 100m verticalement. Le réflecteur est situé à une profondeur de 950m. La figure 3.9 présente le modèle de vitesse instantanée utilisé.

Une acquisition de 182 tirs est synthétisée, au moyen d'un algorithme de tracé de rai basé sur une

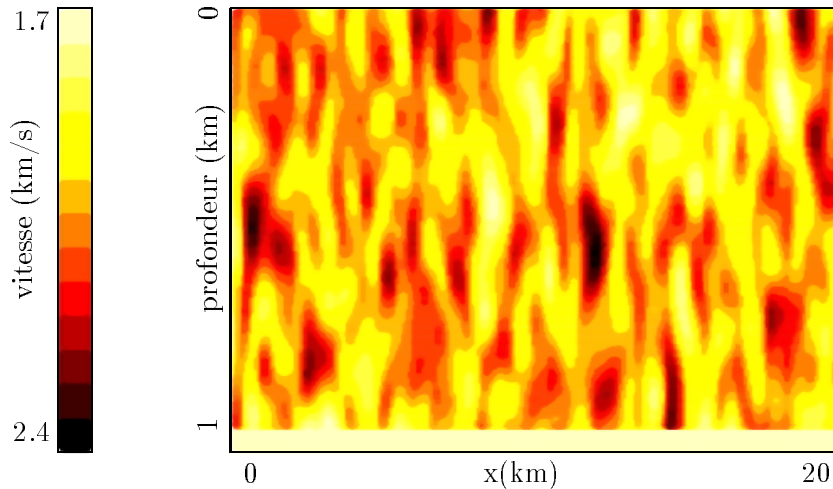


FIG. 3.9 – Modèle de vitesse synthétique (covariance gaussienne,  $a = 0.4$  km,  $b = 0.1$  km)

technique de *ray bending* (Jurado *et al.*, 1998). Le dispositif est en tir en bout, avec 16 géophones distants de 100m chacun - les offsets allant de 0 à 1.5km. Les tirs sont réalisés tous les 100m.

On a ajouté aux mesures de temps d'arrivée un bruit blanc d'écart-type 1ms afin de représenter l'erreur due au pas de temps des appareillages d'enregistrement.

A partir des collections de temps d'arrivée ainsi calculées, on va comparer les estimations obtenues pour la longueur de corrélation horizontale des hétérogénéités de vitesse  $a$ .

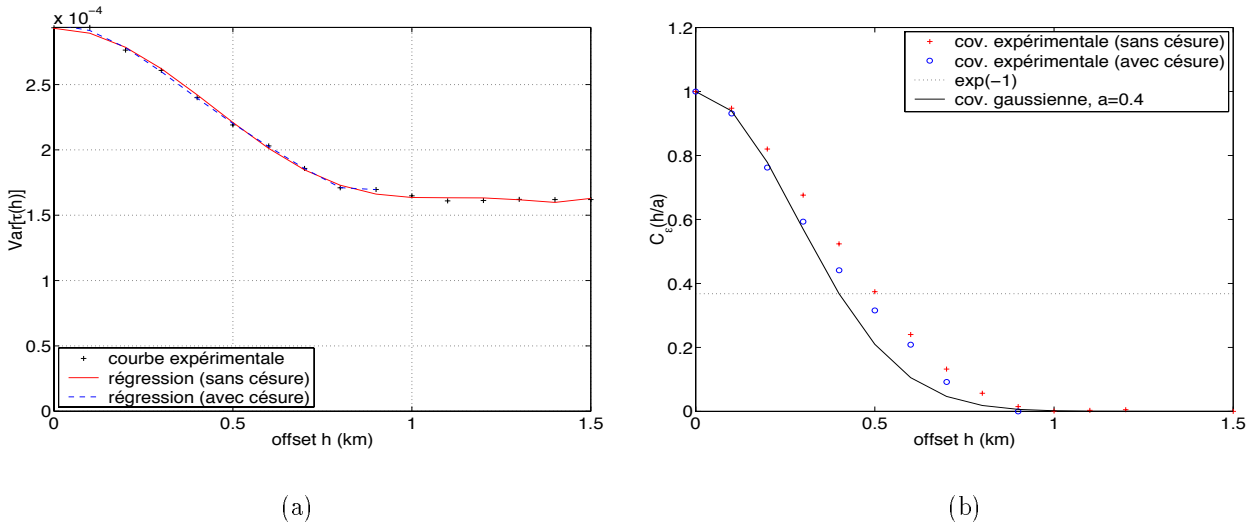


FIG. 3.10 – (a) Variance des temps en fonction de l'offset : courbe expérimentale et ajustements polynomiaux et (b) inversion de la longueur de corrélation du modèle de covariance de vitesse

L'application de la première méthode présentée, la tomographie statistique pre-stack, permet d'obtenir une estimation précise de la longueur de corrélation horizontale. Nous présentons à la figure 3.10a l'ajustement polynomial des variances de temps relatifs. La figure 3.10b présente la courbe de covariance expérimentale obtenue en normalisant ce polynôme. On constate que cette courbe est proche de la courbe de covariance théorique. L'estimation de  $a$  est réalisée en mesurant l'abscisse pour laquelle la courbe de covariance expérimentale vaut  $e^{-1}$ . On trouve une estimation de 500m pour la longueur de corrélation (soit une erreur d'estimation de 25 %).

Si l'on applique une césure à la courbe de variance des temps relatifs, et que l'on néglige pour l'ajustement polynomial les valeurs prises au delà de 950m (la profondeur du réflecteur)<sup>25</sup>, on obtient la courbe figurée en pointillés. L'estimation obtenue en utilisant ce polynôme est présentée à la figure 3.10b, on trouve une estimation de 460m (15 % d'erreur) pour le paramètre de longueur de corrélation horizontale  $a$ .

L'application de la méthode de tomographie statistique post-stack demande initialement le calcul des profils de vitesses de sommation, par ajustement hyperbolique. Celui-ci est présenté à la figure 3.11a.

On constate que, bien que les fluctuations de vitesse soient d'amplitude assez faible, les estimations de vitesses de sommation oscillent entre 1830 et 2230m/s. La covariance expérimentale obtenue à

<sup>25</sup>Ceci correspond à négliger les valeurs obtenues pour des offsets à relativement grands angles, pour lesquels les formules cessent d'être applicables.



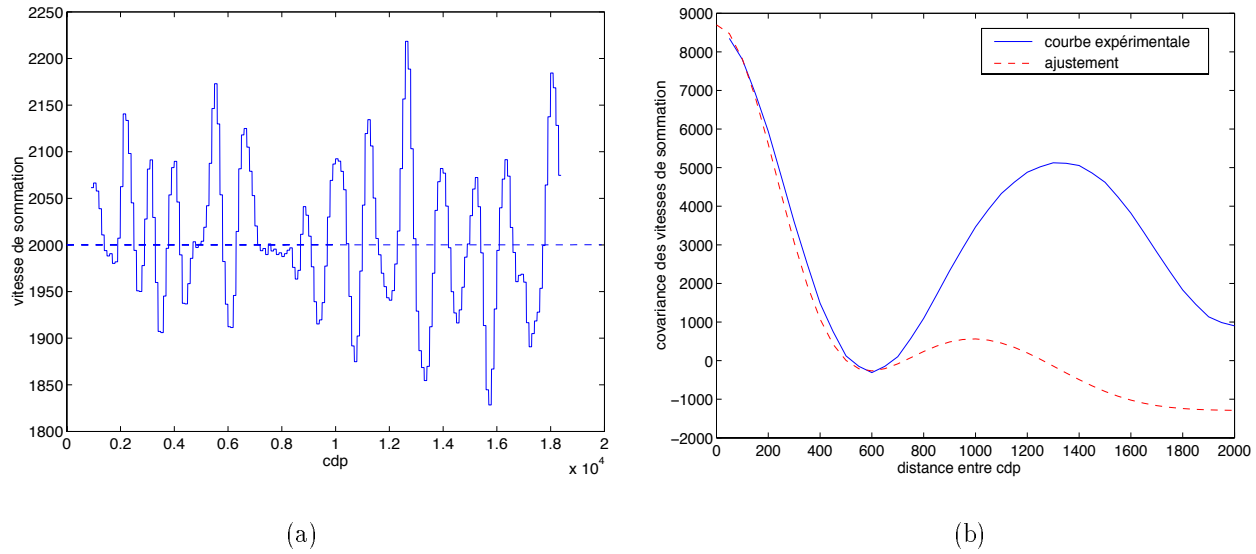


FIG. 3.11 – (a) Profil de vitesses de sommation et (b) Covariance des vitesses de sommation : courbe expérimentale et ajustement

partir de ce profil de vitesses de sommation est présentée à la figure 3.11b, avec l'ajustement par une courbe théorique calculée à partir de l'équation (3.14). On trouve dans ce cas une estimation du paramètre de longueur de corrélation de 320m (soit une erreur d'estimation de 20 %).

On constate que la précision obtenue au moyen de la méthode pré-stack est légèrement supérieure. Toutefois, sa mise en application requiert la connaissance précise des temps d'arrivée avant-stack, et nous verrons au chapitre 6, en traitant des données réelles, que cette exigence constitue une forte limitation à l'application de la méthode.

### 3.4 Extensions des modèles vers des cas complexes

#### 3.4.1 Variance des collections iso-offset de temps d'arrivée dans le cas de variation latérale de vitesse

La méthode de tomographie statistique prestack présentée initialement suppose que le milieu de vitesse sous-jacent est stationnaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de variation latérale ou verticale de la valeur moyenne du champ de vitesse:

$$\mathbf{E}[v(x, z)] = v_0 \quad \forall x, z \quad .$$

Iooss *et al.* (2002) a récemment étendu les résultats présentés au paragraphe 3.2 au cas plus général de la présence d'une variation latérale du champ de vitesse :

$$\mathbf{E}[v(x, z)] = v_0(x) \quad \forall x, z \quad .$$

Il suppose que les variations moyennes du champ de vitesse sont connues - par tomographie classique, par exemple -, et qu'elles sont suffisamment faibles pour considérer qu'il n'y a pas de variation de la vitesse le long d'un tir<sup>26</sup>.

La covariance des temps de trajets peut s'exprimer dans ce cas

$$\mathbf{Cov}[T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)] = \frac{1}{v_0(\mathbf{r}_1)v_0(\mathbf{r}_2)} \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} \mathbf{Cov}[\epsilon(\frac{l_1}{r_1}\mathbf{r}_1), \epsilon(\frac{l_2}{r_2}\mathbf{r}_2)] dl_2 dl_1 \quad , \quad (3.15)$$

où  $v_0(\mathbf{r}_1)$  représente la vitesse moyenne le long du rayon  $\mathbf{r}_1$ .

On retire les effets des variations macro-modèle en divisant les temps d'arrivée par leur partie déterministe : on définit les temps d'arrivée relatifs (comme dans Klimes, 2002) par

$$\tau(\mathbf{r}) = \frac{T(\mathbf{r})}{T_0(\mathbf{r})} \quad , \quad (3.16)$$

de sorte que la covariance des temps d'arrivée relatifs peut être donnée par l'expression

$$\mathbf{Cov}[\tau(\mathbf{r}_1), \tau(\mathbf{r}_2)] = \frac{1}{r_1 r_2} \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} \mathbf{Cov}[\epsilon(\frac{l_1}{r_1}\mathbf{r}_1), \epsilon(\frac{l_2}{r_2}\mathbf{r}_2)] dl_2 dl_1 \quad . \quad (3.17)$$

Cette formulation a l'avantage de ne plus dépendre des valeurs locales de la vitesse moyenne  $v_0(x)$ , et on peut alors réaliser le même type d'ajustement que précédemment.

---

<sup>26</sup>Cette hypothèse est réaliste si les offsets sont faibles.

### Résultats synthétiques

Nous allons illustrer l'application de cette méthode dans un cas utilisant le même dispositif qu'au paragraphe 3.3.4. Il s'agit à nouveau d'un dispositif en tir au bout, avec 16 récepteurs situés à 100m les uns des autres. Les tirs sont réalisés tous les 100m, et le réflecteur se trouve à une profondeur de 950m environ. Celle-ci varie légèrement, avec un gradient de 20m/km dans la première partie du champ, puis un gradient de -20m/km dans la seconde partie.

Le modèle de vitesse utilisé varie latéralement, il est présenté à la figure 3.12. La vitesse moyenne présente un gradient de -50 m/s par kilomètre, puis de +50 m/s par kilomètre. Les fluctuations de vitesse ont une structure gaussienne, d'écart-type 4% et de longueur de corrélation horizontale 400m.

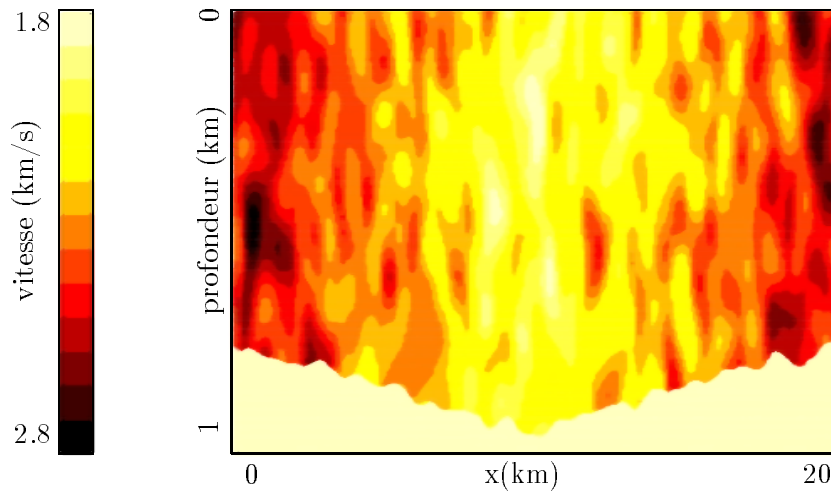


FIG. 3.12 – Modèle de vitesse synthétique (covariance gaussienne,  $a = 0.4$  km,  $b = 0.1$  km)

A la figure 3.13 on présente le modèle de vitesse estimé, obtenu par tomographie classique. On voit qu'il reproduit bien la tendance régionale du modèle de vitesse réel (figure 3.12), mais sans en présenter les variations de courtes longueurs d'ondes. Il en est de même pour l'estimation de la profondeur du réflecteur.

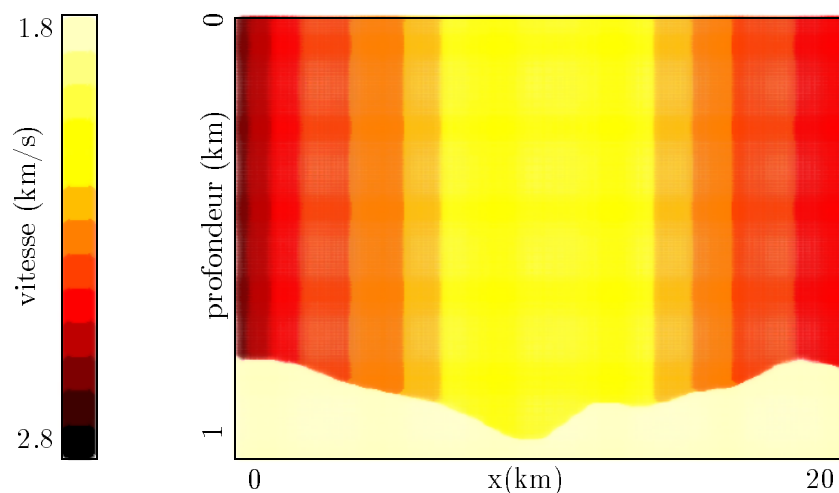


FIG. 3.13 – Modèle de vitesse estimé par tomographie classique

Grâce à ce modèle de vitesse lissé, nous estimons les temps d'arrivée  $T_0(\mathbf{r})$  puis les temps d'arrivée relatifs  $\tau(\mathbf{r})$ . Ensuite, nous en modélisons la variance en fonction de l'offset par un polynôme. Cette étape est présentée à la figure 3.14a. L'estimation de  $a$  est obtenue en mesurant l'abscisse pour laquelle le polynôme normalisé vaut  $e^{-1}$ . La valeur mesurée dans ce cas est très satisfaisante: l'inversion de la longueur de corrélation horizontale nous donne une valeur de  $370m$  (soit une erreur de 7.5%).

On constate que cette méthode d'estimation s'applique dans des cas complexes avec des résultats très satisfaisants. Il faut toutefois noter que la très grande qualité de l'estimation obtenue dans le cas présent est peut-être due à des effets de compensation entre facteurs perturbants, et il n'est donc pas garanti en général d'obtenir une estimation d'une telle précision.

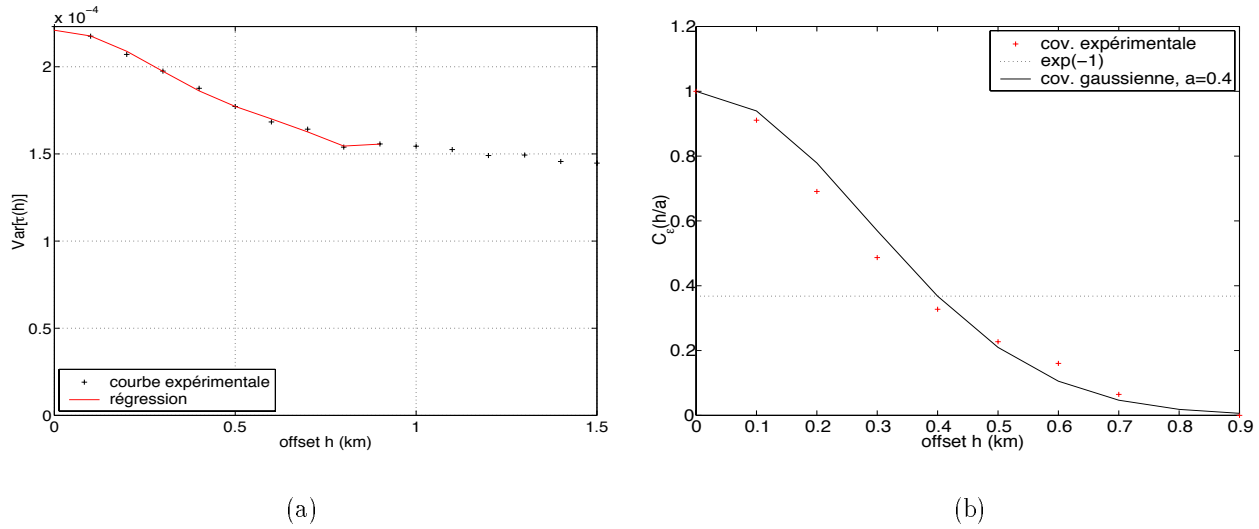


FIG. 3.14 – (a) Variance des temps relatifs en fonction de l'offset : courbe expérimentale et ajustement polynomial et (b) inversion de la longueur de corrélation du modèle de covariance de vitesse

### 3.4.2 Covariance des vitesses de sommation dans un milieu à croissance linéaire de la vitesse moyenne avec la profondeur

Afin de généraliser l'expression obtenue pour la covariance des vitesses de stack dans un milieu à moyenne stationnaire, il nous faut décrire la trajectoire moyenne que suivent les rayons dans le milieu considéré à présent.

Le modèle de vitesse est décrit en tout point  $(x, z)$  par :

$$\frac{1}{V(x, z)} = \frac{1 + \epsilon(x, z)/2}{v_0 + g_z z} ,$$

où  $g_z$  représente le gradient vertical de la vitesse moyenne.

A partir d'équations simples décrivant la géométrie du problème, on peut exprimer la trajectoire des rayons par les paramètres suivants (voir figure 3.15) :

$$\begin{aligned}\sin(\theta(z)) &= \frac{\sin(\theta_0)}{v_0}(v_0 + g_z z) \\ \tan(\theta_0) &= \frac{v_0 \sin(2\beta)}{v_f + v_0 \cos(2\beta)} \\ \tan(\theta_f) &= \frac{v_f \sin(2\beta)}{v_0 + v_f \cos(2\beta)} \\ \beta &= \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \quad ,\end{aligned}$$

où l'angle  $\beta$  est défini comme l'angle par rapport à la verticale formé par la droite joignant la source et le point réfléchant.

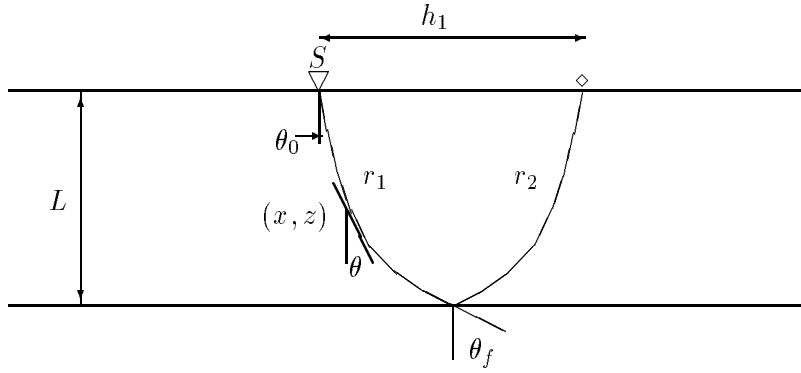


FIG. 3.15 – Schéma d'un rayon dans un milieu à vitesse croissante

La trajectoire suivie par les rayons dans le cas d'une vitesse moyenne augmentant linéairement avec la profondeur correspond à un arc de cercle, dont la courbure est d'autant plus forte que le gradient de vitesse est important. Ceci est illustré à la figure 3.16, où on montre les trajectoires des rayons à partir d'un tir central, pour deux valeurs de gradient de vitesse: (a) 0.333 m/s / m et (b) 0.666 m/s / m.

En utilisant la description des rayons ainsi obtenue, on peut estimer la covariance des temps d'arrivée par intégration le long des tirs :

$$\mathbf{Cov}(T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)) = \frac{1}{4} \int_{s(\mathbf{r}_1)} \int_{s(\mathbf{r}_2)} \frac{\mathbf{Cov}_\epsilon(x_1 - x_2, z_1 - z_2)}{[v_0 + g_z z_1][v_0 + g_z z_2]} dz_1 dz_2 \quad , \quad (3.18)$$

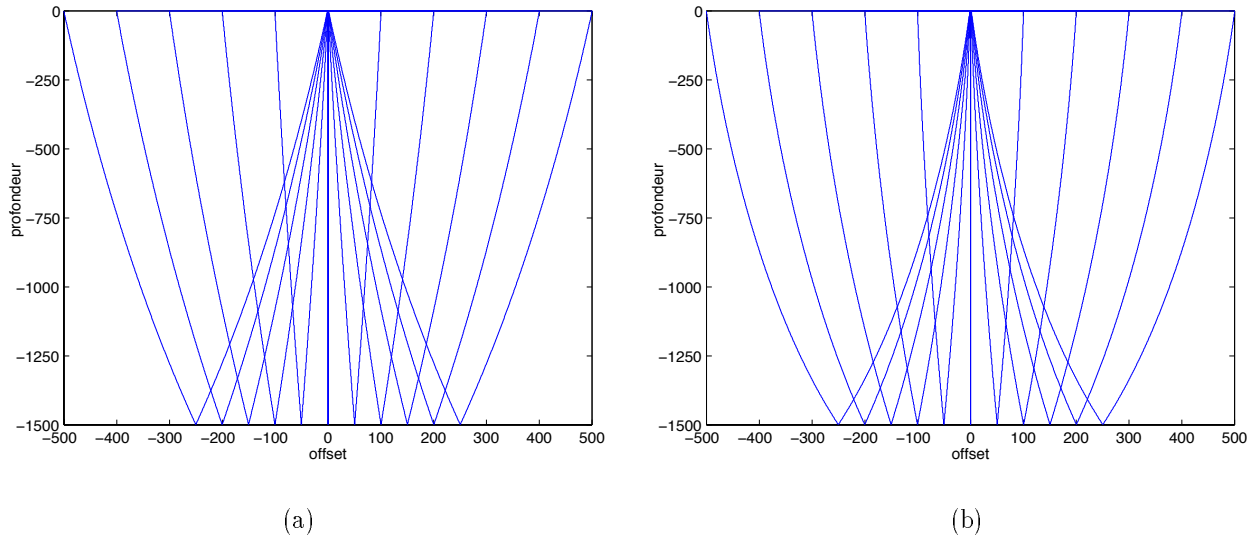


FIG. 3.16 – Trajectoires des tirs pour (a)  $L = 1500m$ ,  $v(z = 0) = 1800m/s$  et  $v(z = L) = 2800m/s$ , et (b)  $L = 1500m$ ,  $v(z = 0) = 1300m/s$  et  $v(z = L) = 3300m/s$

où  $s(\mathbf{r}_1)$  et  $s(\mathbf{r}_2)$  représentent les trajets moyens (non perturbés) suivis par les rayons  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Cette approximation peut être utilisée dans la formule pour l'estimation de la covariance des vitesses de stack. Ce développement est explicité en annexe E.

### Résultats synthétiques

L'algorithme présenté ici peut être testé sur données synthétiques. On génère un champ aléatoire avec une vitesse croissant linéairement depuis une valeur de 1800 m/s à la surface pour atteindre une vitesse de 3250 m/s à la profondeur du réflecteur, soit à 2060m. Les hétérogénéités de vitesse ont un modèle de covariance gaussien, avec une longueur de corrélation horizontale de 250m et une longueur de corrélation verticale de 50m.

On considère un dispositif de 101 géophones disposés à 20m de distance les uns des autres, avec la source au milieu du dispositif. Une acquisition est réalisée le long d'un profil sismique de 10 kilomètres, les tirs étant réalisés tous les 10m.

La figure 3.17 présente le variogramme des vitesses de sommation obtenues à partir des tirs synthétiques, ainsi que la courbe d'ajustement calculée au moyen des équations (3.18) et (3.14). La courbe expérimentale obtenue dans le cas d'une série de 10000 tirs (figure 3.17a) permet un ajustement à la courbe théorique relativement meilleur que celui obtenu en ne considérant qu'une série plus réduite de 1000 tirs (présenté à la figure 3.17b).

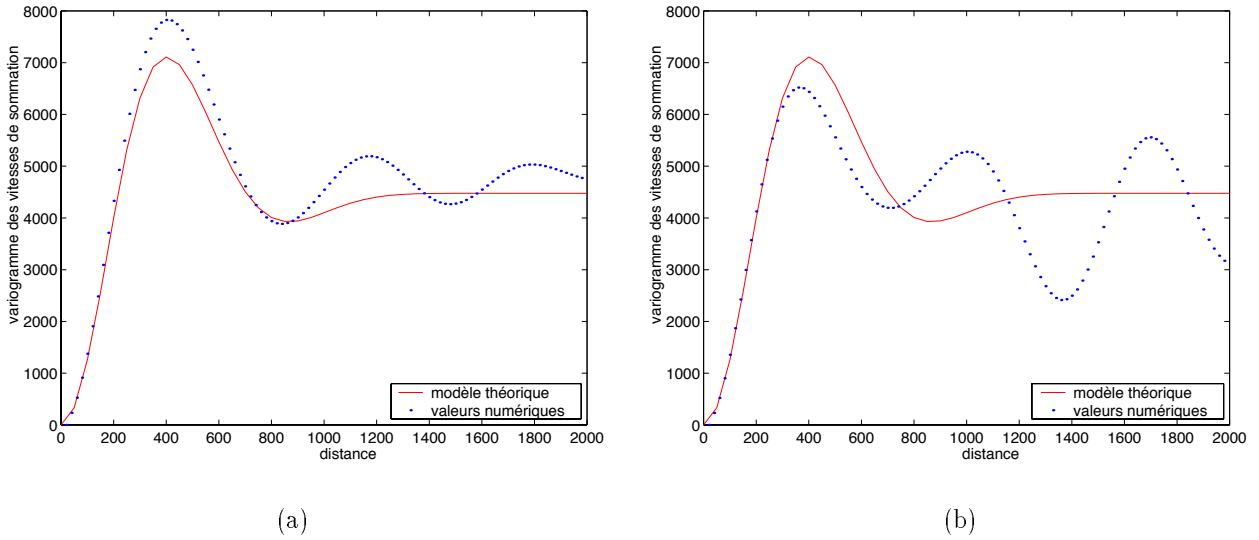


FIG. 3.17 – Variogrammes théorique et expérimental de vitesses de sommation pour une série (a) de 10000 tirs et (b) de 1000 tirs

### 3.4.3 Extension au cas multi-couches

Nous allons à présent étendre la méthode de tomographie post-stack au problème d'un modèle constitué de plusieurs couches.

Remarquons tout d'abord que, pour rester dans le cadre de l'optique géométrique, nous devons limiter le nombre d'interfaces considérées de façon à préserver un rapport suffisant entre épaisseurs de couches et taille des hétérogénéités considérées (il est important de garantir la traversée moyenne d'un certain nombre d'hétérogénéités par les rayons au sein des différentes couches). La première étape dans ce cas consiste à nouveau à reconstituer la trajectoire empruntée par un rayon non perturbé pour traverser l'ensemble des différentes couches géologiques -dont les champs de vitesse ont des propriétés statistiques propres-, se réfléchir sur le réflecteur basal et remonter à la surface.

La description de celle-ci peut se faire à partir de relations géométriques simples. A partir de la fonction décrivant le modèle de vitesse moyenne en fonction de la profondeur, et en appliquant la loi de Snell-Descartes aux interfaces<sup>27</sup>, on peut caractériser l'évolution du pendage du rayon au cours de son parcours de la source au réflecteur puis du réflecteur au récepteur.

Remarquons que, dès que l'on considère la traversée de plus de deux milieux de vitesse différents,

<sup>27</sup> Remarquons que cette fonction est généralement inférée à partir du log sonique, et que l'hypothèse de continuité de la fonction de vitesse moyenne en fonction de la profondeur, combinée à notre hypothèse de densité unitaire, conduit à l'absence de réflexion des ondes au passage des interfaces entre les différents milieux. On constate ici une contradiction qu'entraîne l'hypothèse forte prise sur les valeurs de densité.



l'expression des valeurs de pendage ne peut plus être donnée explicitement, et son évaluation demande la résolution de systèmes implicites. Cette situation est illustrée en annexe F, pour le cas d'un milieu à quatre couches.

La covariance des vitesses de stack pour les rayons renvoyés par un réflecteur  $m$  s'exprime toujours au moyen de l'équation (3.14). L'expression des covariances de temps d'arrivée est à présent mesurée le long des trajectoires des deux rayons considérés :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)] &= \mathbf{E} \left[ \int_{s(\mathbf{r}_1)} \int_{s(\mathbf{r}_2)} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1) \epsilon(x_2(z_2), z_2)}{v_0(z_1) v_0(z_2)} dz_1 dz_2 \right] \\
&= \sum_{\ell=1}^m \mathbf{E} \left[ \int_{s^{(\ell)}(\mathbf{r}_1)} \int_{s^{(\ell)}(\mathbf{r}_2)} \frac{\epsilon^{(\ell)}(x_1(z_1), z_1) \epsilon^{(\ell)}(x_2(z_2), z_2)}{v_0^{(\ell)}(z_1) v_0^{(\ell)}(z_2)} dz_1 dz_2 \right] \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^m \sum_{h=1, h \neq \ell}^m \mathbf{E} \left[ \int_{s^{(\ell)}(\mathbf{r}_1)} \int_{s^{(h)}(\mathbf{r}_2)} \frac{\epsilon^{(\ell)}(x_1(z_1), z_1) \epsilon^{(h)}(x_2(z_2), z_2)}{v_0^{(\ell)}(z_1) v_0^{(h)}(z_2)} dz_1 dz_2 \right] \\
&= \sum_{\ell=1}^m \int_{s^{(\ell)}(\mathbf{r}_1)} \int_{s^{(\ell)}(\mathbf{r}_2)} \frac{\mathbf{Cov}[\epsilon^{(\ell)}(x_1(z_1), z_1), \epsilon^{(\ell)}(x_2(z_2), z_2)]}{v_0^{(\ell)}(z_1) v_0^{(\ell)}(z_2)} dz_1 dz_2 \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^m \sum_{h=1, h \neq \ell}^m \int_{s^{(\ell)}(\mathbf{r}_1)} \int_{s^{(h)}(\mathbf{r}_2)} \frac{\mathbf{Cov}[\epsilon^{(\ell)}(x_1(z_1), z_1), \epsilon^{(h)}(x_2(z_2), z_2)]}{v_0^{(\ell)}(z_1) v_0^{(h)}(z_2)} dz_1 dz_2 \quad ,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

où  $s(\mathbf{r}_1)$  représente la trajectoire du rayon  $\mathbf{r}_1$ , et  $s^{(\ell)}(\mathbf{r}_1)$  la composante de celle-ci au travers du  $\ell^{\text{ème}}$  milieu de vitesse.

Dans notre cas, nous avons supposé que les longueurs de corrélations verticales  $b^{(\ell)}$  sont plus petites que les longueurs de corrélation horizontales  $a^{(\ell)}$ , et que ces grandeurs sont faibles par rapport aux épaisseurs des couches traversées.

Nous pouvons donc approcher l'expression (3.19) en négligeant les termes de covariances croisées entre couches. Cela revient à considérer que les champs de perturbations de vitesse correspondant aux couches successives sont indépendants les uns des autres. Cette approximation nous permet d'obtenir une expression de la covariance des temps comme la somme de contribution de covariance au sein des différentes couches:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)] &= \sum_{\ell=1}^m \int_{s^{(\ell)}(\mathbf{r}_1)} \int_{s^{(\ell)}(\mathbf{r}_2)} \frac{\mathbf{Cov}[\epsilon^{(\ell)}(x_1(z_1), z_1), \epsilon^{(\ell)}(x_2(z_2), z_2)]}{v_0^{(\ell)}(z_1) v_0^{(\ell)}(z_2)} dz_1 dz_2 \\
&= \sum_{\ell=1}^m \mathbf{Cov}[T^{(\ell)}(\mathbf{r}_1), T^{(\ell)}(\mathbf{r}_2)] \quad .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

L'expression de la covariance des carrés de temps d'arrivée peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(T_{1i}^2, T_{2j}^2) &= 4\mathbf{E}(T_{1i})\mathbf{E}(T_{2j})\mathbf{Cov}(T_{1i}, T_{2j}) \\ &= \sum_{\ell=1}^m 4\mathbf{E}(T_{1i})\mathbf{E}(T_{2j})\mathbf{Cov}[T_{1i}^{(\ell)}, T_{2j}^{(\ell)}] \quad , \end{aligned} \quad (3.21)$$

et on trouve aisément

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(V_{stack1}, V_{stack2}) &= V_{stack}^6 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{E}(T_{1i}) \mathbf{E}(T_{2j}) \mathbf{Cov}(T_{1i}, T_{2j}) \\ &= V_{stack}^6 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{E}(T_{1i}) \mathbf{E}(T_{2j}) \sum_{\ell=1}^m \mathbf{Cov}[T_{1i}^{(\ell)}, T_{2j}^{(\ell)}] \\ &= \sum_{\ell=1}^m V_{stack}^6 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{E}(T_{1i}) \mathbf{E}(T_{2j}) \mathbf{Cov}[T_{1i}^{(\ell)}, T_{2j}^{(\ell)}] \\ &= \sum_{\ell=1}^m \mathbf{Cov}^{(\ell)}(V_{stack1}, V_{stack2}) \quad , \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec toujours

$$k(i, j, n) = \frac{n^2 x_i^2 x_j^2 - n x_j^2 (\sum_{k=1}^n x_k^2) - n x_i^2 (\sum_{k=1}^n x_k^2) + (\sum_{k=1}^n x_k^2) (\sum_{k=1}^n x_k^2)}{[n \sum_{k=1}^n x_k^4 - (\sum_{k=1}^n x_k^2) (\sum_{k=1}^n x_k^2)]^2} .$$

On constate qu'à partir de l'hypothèse d'indépendance entre champs de perturbations pour les différentes couches traversées, la covariance entre vitesses de stack peut être décomposée en une somme de termes décrivant la contribution des différentes couches géologiques.

Cette expression est très intéressante, car elle nous permet de réaliser la modélisation d'un milieu composé d'un nombre important de couches par ajustement itératif: l'estimation de paramètre caractérisant la  $m^{\text{ème}}$  couche est réalisée en utilisant les paramètres estimés pour modéliser les  $m - 1$  premières couches. Nous allons définir la **covariance résiduelle**<sup>28</sup> comme la covariance expérimentale obtenue en ôtant de la covariance des vitesses de stack pour la  $m^{\text{ème}}$  couche les contributions à cette covariance provenant de la traversée des  $m - 1$  premières couches -dont les paramètres caractéristiques ont été définis précédemment. Cette méthode nous permet de mettre en évidence la contribution de la couche à modéliser, de façon à simplifier l'ajustement de cette contribution par l'utilisateur.

L'ajustement de la dernière contribution permet aussi à l'utilisateur, en imaginant de repositionner le dispositif d'acquisition à la profondeur du  $m - 1^{\text{ème}}$  réflecteur, de se remettre dans les conditions de l'estimation de la covariance entre vitesses de sommation dans le cas d'une seule couche, pour

---

<sup>28</sup> Dans la seconde partie de cette thèse, on parlera plus volontiers de **variogramme résiduel**, la notion sous-jacente étant la même.

laquelle nous avons présenté dans les paragraphes 3.3.1 et 3.4.2 des approximations permettant un calcul très rapide.

Enfin, remarquons que Iooss (1998b) présente une extension de la méthode de tomographie pre-stack au cas multi-couches. Il retrouve des expressions du type de l'équation (3.20), dans le cas où  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ .

### Résultats synthétiques

Nous allons illustrer l'utilisation du variogramme résiduel dans un cas bi-couche, en rajoutant une couche d'une épaisseur de 2540m sous la couche modélisée lors de l'exemple du paragraphe précédent. Nous supposons que la valeur moyenne de la vitesse instantanée au sein de cette seconde couche est constante, d'une valeur de 3250m/s. Les hétérogénéités de vitesse ont des longueurs de corrélation horizontale de 500m et verticale de 50m.

On présente à la figure 3.18 les trajectoires suivies par les rayons dans le cas que nous considérons (figure de gauche), ainsi que dans le cas où l'on considère un gradient de vitesse double au sein de la première couche (figure de droite). On remarque que dans ce dernier cas la courbure des rayons au sein de la première couche est nettement plus forte que dans la figure de gauche.

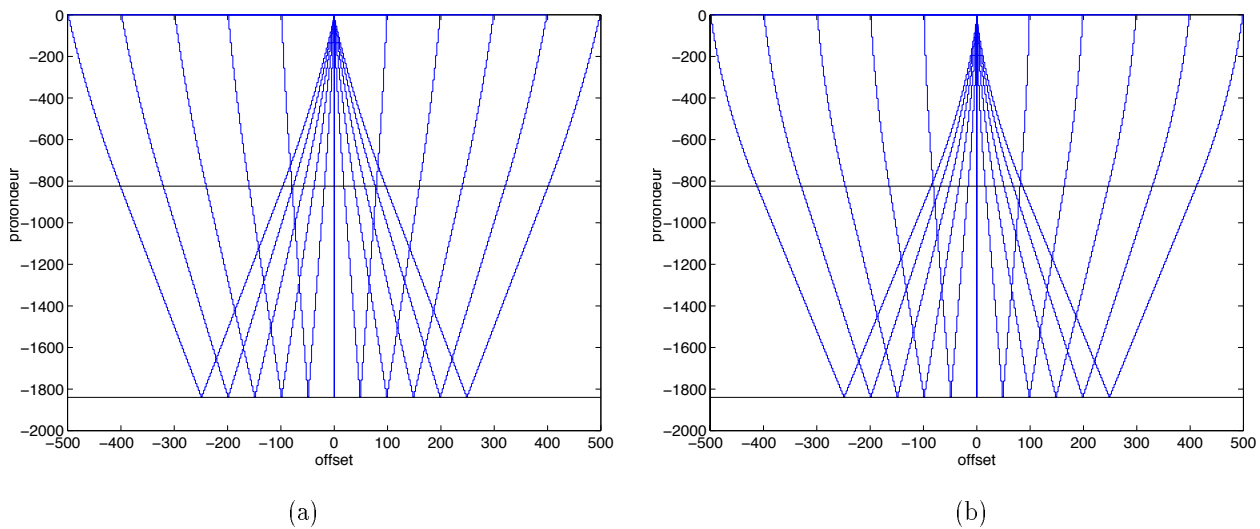


FIG. 3.18 – Trajectoires des rayons lors d'un tir dans un milieu à deux couches, dont une à vitesse constante. La figure (b) illustre le cas d'un milieu à gradient double de la figure (a)

Nous simulons à nouveau une série de 10000 tirs au sein du milieu de vitesse aléatoire. Le profil d'analyses de vitesses correspondant à la réflexion sur la seconde couche va nous permettre de modéliser les paramètres stochastiques de cette couche, en nous appuyant sur la modélisation déjà effectuée de la première couche.

On calcule le variogramme des vitesses de sommation, et on en déduit la contribution théorique à ce variogramme provenant de la traversée de la première couche.

On présente à la figure 3.19a ce variogramme résiduel pour la seconde couche, qui correspond selon la notation précédente à

$$\gamma^{(2)}[V_{stack1}, V_{stack2}] = \gamma[V_{stack1}, V_{stack2}]_{\text{expérimental}} - \gamma^{(1)}[V_{stack1}, V_{stack2}]_{\text{estimé}}$$

On voit que la contribution expérimentale de la seconde couche au variogramme des vitesses de sommation est très clairement mise en évidence.

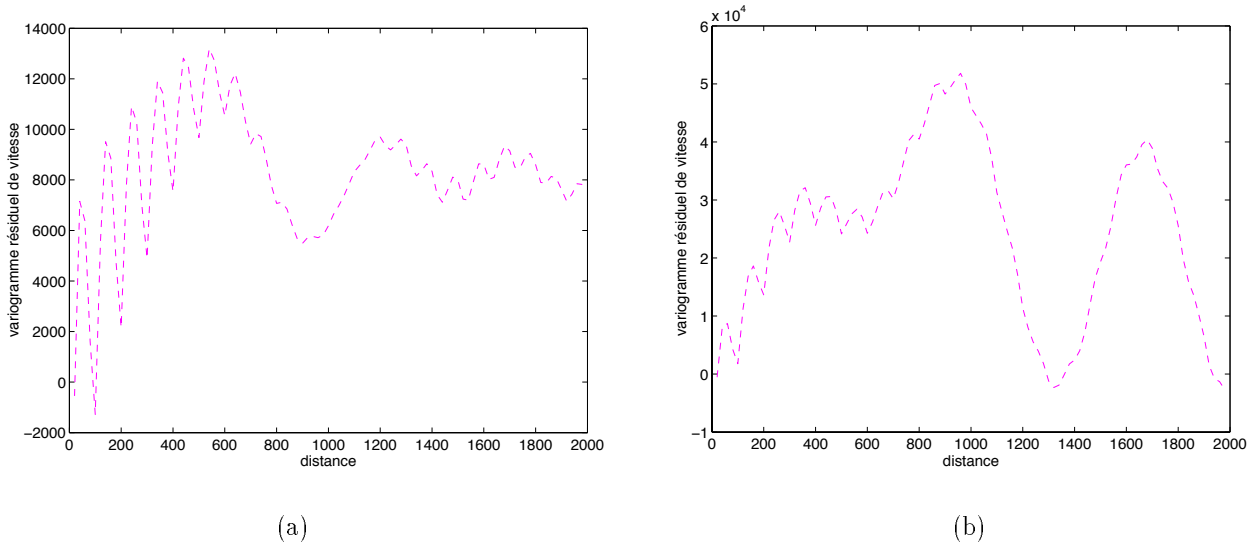


FIG. 3.19 – Variogrammes résiduels pour la seconde couche, dans le cas d'une série (a) de 10000 tirs et (b) de 1000 tirs

Le même processus est réalisé en ne considérant qu'une série plus réduite de 1000 tirs, de façon à illustrer les problèmes pouvant survenir lors de l'utilisation de cette méthode dans un cas réel. Le variogramme résiduel obtenu dans ce cas est présenté à la figure 3.19b. On constate que l'utilisation d'une série réduite de tirs diminue fortement la lisibilité du graphe obtenu, à cause des forts rebonds obtenus lors de la soustraction de la composante théorique correspondant à la première couche du variogramme des vitesses de sommation. On constate que ce variogramme ne peut être

utilisé au delà de quelques centaines de mètres. Vers 1200m, il passe même par des valeurs négatives, incompatibles avec sa définition théorique.

La figure 3.20 présente les variogrammes de vitesse de sommation obtenus pour les deux séries de données synthétiques considérées. On voit que, malgré les problèmes rencontrés pour la modélisation de la seconde couche, le variogramme complet (sommant l'ensemble des contributions) reste assez stable.

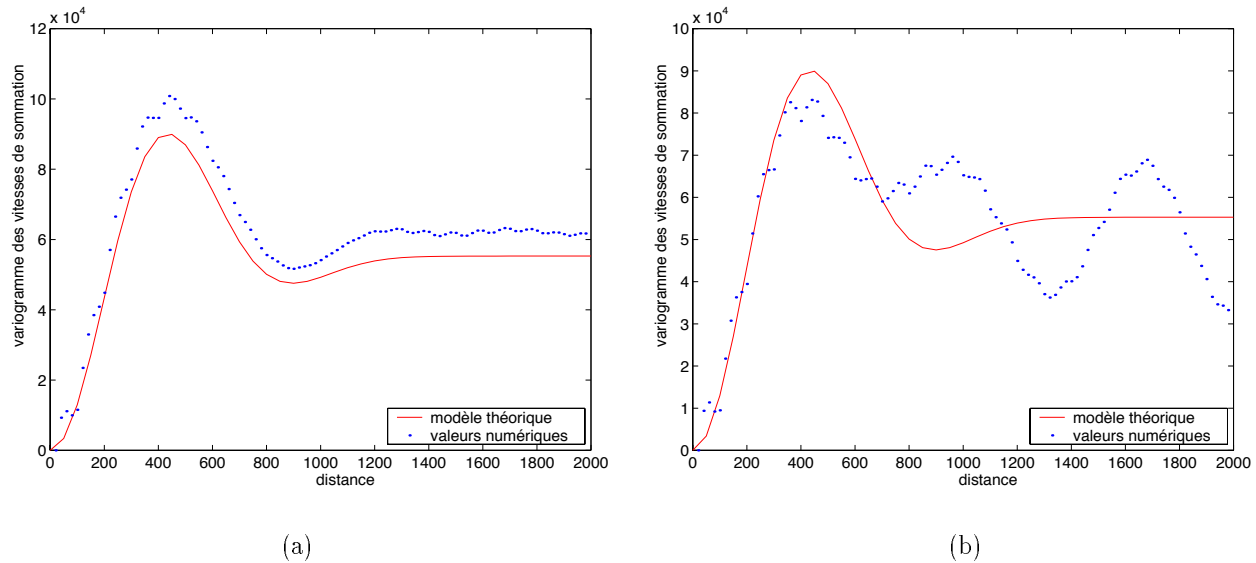


FIG. 3.20 – Variogrammes théorique et expérimental de vitesses de sommation pour une série (a) de 10000 tirs et (b) de 1000 tirs

## Chapitre 4

# Simulation conditionnelle d'un champ de vitesse

### Sommaire

*Nous avons montré, dans la première partie de ce manuscrit, comment le modèle de covariance du champ de vitesse instantané pouvait être inféré, à partir des profils de vitesses de stack. Nous allons présenter un algorithme de simulation pour ce champ de vitesse, qui respecte l'ensemble des données de vitesse disponibles.*

*La complexité du problème posé et l'importance du volume des données conditionnantes doivent être combinées à l'impératif de conserver un temps de calcul raisonnable par simulation. Une méthode de simulation itérative est présentée, qui concilie ces différentes exigences.*

*In the first part of this work, we have shown how the covariance model of the instantaneous velocity field can be recovered, using the stacking velocity profiles. We now present a simulation algorithm for this velocity field, matching all the available velocity information.*

*The complexity of the problem and the amount of conditioning data must be combined with the requirement of maintaining a reasonable computation time per simulation. An iterative simulation method is used for this aim.*

## 4.1 Simulation markovienne conditionnelle

Nous allons présenter une méthode itérative pour générer des champs aléatoires conditionnés. Elle est basée sur un algorithme de chaîne de Markov, avec une fonction de transition de Metropolis-Hastings. Cette technique va nous permettre de générer une chaîne de simulations du champ de vitesse conditionnées aux valeurs mesurées aux puits.

L'utilisation d'un processus de recuit simulé nous permet ensuite d'influencer l'évolution de la chaîne de simulations générée, afin de la faire converger vers une chaîne de simulations conditionnées aussi par les données de vitesses de sommation. Dans la première partie, nous introduisons les concepts théoriques importants de la méthode de simulation par chaîne de Markov. Ensuite, nous décrivons l'application de ces techniques pour la simulation initiale du champ de vitesse conditionné aux informations aux puits, la définition de la fonction de transition permettant la génération des simulations suivantes -en préservant le conditionnement par les valeurs aux puits-, puis enfin l'utilisation d'une fonction de pénalité permettant d'obtenir une convergence vers les valeurs de vitesses de sommation. Les notions présentées ici sont reproduites d'après (Lajaunie, 1998), (Lajaunie, 1999), (Lantuéjoul, 2002), (Gilks, Richardson, et Spiegelhalter, 1996) et (Guyon, 1999).

### 4.1.1 Simulations par chaînes de Markov

Nous allons présenter ici le cadre général des simulations par Chaînes de Markov. Le problème posé est la simulation d'une variable aléatoire  $X$ , de distribution aléatoire  $\pi$  dans l'espace d'états  $\mathcal{X}$ . Comme la quantité de contraintes à respecter est importante, et que leur expression est non-linéaire, on ne connaît pas de méthode de simulation directe efficace pour résoudre ce problème. Une méthode de simulation itérative doit être construite.

Supposons que l'espace d'état  $\mathcal{X}$  soit composé de vecteurs de dimension  $D$ . Par exemple,  $\{0, 1\}^D$  (pour la simulation d'une image noire et blanche) ou  $\mathcal{R}^D$  sont des cas possibles.

On définit une loi de transition  $P_{ij}$  décrivant la probabilité de passer d'un état  $\mathbf{x}_i$  à un état  $\mathbf{x}_j$  :  $P_{ij} = P(X_{k+1} = \mathbf{x}_j | X_k = \mathbf{x}_i)$ .

L'idée est de générer itérativement une **chaîne de Markov**<sup>29</sup>  $X_0, X_1, X_2 \dots$  telle que, pour  $n$  assez grand, la distribution de  $X_n$  soit très proche de la loi  $\pi$ , quel que soit le choix de l'état initial  $X_0$ . On dit qu'une telle loi de transition  $P_{ij}$  est **ergodique**.

Le problème de simulation est alors résolu si l'on peut :

- (1) définir une loi de transition  $P_{ij}$  telle que la distribution de  $X_n$  converge vers  $\pi$ , pour tout  $X_0$  ;
- (2) définir un critère de satisfaction, qui permette de déterminer à quel moment le nombre d'étapes de la chaîne est suffisant.

---

<sup>29</sup>L'hypothèse de Markov suppose que la probabilité de transition d'un état  $X_k$  à un état  $X_{k+1}$  est indépendante de tous les états précédents :  $P(X_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} | X_k = \mathbf{x}_k, X_{k-1} = \mathbf{x}_{k-1}, X_{k-2} = \mathbf{x}_{k-2}, \dots, X_0 = \mathbf{x}_0) = P(X_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} | X_k = \mathbf{x}_k)$ , de sorte qu'il est possible de définir une loi de transition  $P_{ij}$  telle que  $P_{ij} = P(X_{k+1} = j | X_k = i)$ .

La première de ces deux obligations peut être remplie en s'appuyant sur le théorème suivant, dans le cas où l'espace d'état est fini :

**Théorème 1** *Convergence d'une Chaîne de Markov*

Si la loi de transition  $P$  d'une chaîne de Markov est

– **réversible** relativement à la distribution  $\pi$ , i. e.  $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \quad \forall i, j$

– **irréductible** : il y a toujours une probabilité positive de passer d'un état  $X_i$  à tout autre état  $X_j$  en un nombre fini d'itérations, i.e.  $\forall i, j \quad \exists n > 0$  tel que  $P_{ij}^n > 0$

– **apériodique** : le plus grand commun diviseur des  $n$  tels que  $P_{ij}^n > 0$  pour tous les états  $i$  et  $j$  est 1

alors la distribution de  $X_n$  tend<sup>30</sup> vers  $\pi$  comme  $n \rightarrow \infty$ , indépendamment de l'état initial  $X_0 = x$ .

Remarquons que la propriété de réversibilité d'une chaîne de Markov implique que  $\pi$  est une distribution stationnaire pour la chaîne (si  $X_n$  suit la distribution  $\pi$ ,  $X_{n+1}$  en fait autant) :

$$\sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j \quad . \quad (4.1)$$

Enfin, notons que le théorème 1 assure seulement la convergence de la chaîne vers la distribution  $\pi$ , mais ne donne aucune information quant à la vitesse de convergence. Dès lors, certaines lois de transition seront plus efficaces que d'autres dans le contexte de simulations d'un champ aléatoire de grande taille.

### 4.1.2 Echantillonneur de Gibbs

Nous allons présenter ici une méthode permettant la définition très générale de fonctions de transitions. Nous l'utiliserons pour la simulation d'une chaîne de simulations du champ de vitesse conditionnées aux données de puits. Rappelons que nous appelons  $D$  la dimension de l'espace d'états. Dans un objectif de simplicité, nous allons définir une nouvelle notation: soit  $X$  la variable aléatoire d'intérêt. Nous pouvons indexer ses composantes :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_D\} = \{x_i; i = 1, \dots, D\} \quad (4.2)$$

Pour une composante  $j$ , nous écrivons  $x^j$  la variable composée de toutes les composantes  $x_i$  de  $X$ , excepté la  $j^{\text{ème}}$  :

$$x^j = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_D\} = \{x_i; i = 1, \dots, D; i \neq j\} \quad (4.3)$$

---

<sup>30</sup>En norme de variation totale.



Nous devons sélectionner un schéma de visite  $1 \rightarrow 12 \rightarrow 43 \rightarrow \dots \rightarrow D \rightarrow \dots \rightarrow 3$  couvrant l'ensemble des composantes de  $X$ . Une façon simple de constituer un tel schéma de visite consiste à sélectionner aléatoirement une série de composantes de  $X$ .

Alors, l'algorithme **échantillonneur de Gibbs** propose de générer l'état suivant de la chaîne de Markov au moyen de la boucle suivante :

**Algorithme 1** *échantillonneur de Gibbs*

- soit  $j$  l'état suivant du schéma de visite, s'intéresser à la composante  $x^j$
- Simuler  $x_j^{new}$ , la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $X$ , suivant la distribution conditionnelle de  $x_j$  sachant  $x^j$
- définir la nouvelle variable  $X$  en laissant les autres composantes inchangées :

$$X^{new} = \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^{new}, x_{j+1}, \dots, x_D\}$$

Cette boucle doit être reproduite un nombre suffisant de fois (en sélectionnant chaque fois aléatoirement une nouvelle valeur pour  $j$ ), afin que la convergence soit obtenue.

Il a été montré que l'on peut utiliser d'autres schémas de visite : au lieu d'utiliser un chemin visitant aléatoirement l'ensemble des coordonnées, il est par exemple possible d'utiliser une stratégie de visite systématique de l'ensemble des coordonnées. Le schéma utilisé peut dans ce cas être présenté comme une permutation de l'ensemble des indices de composantes.

On peut aussi choisir d'attribuer à chaque composante une probabilité propre de sélection lors du tirage aléatoire du chemin de visite, et ainsi d'influencer la fréquence à laquelle cette composante est visitée. Une telle technique permet de modifier préférentiellement les composantes critiques de la variable aléatoire à simuler.

Remarquons que l'algorithme d'échantillonnage de Gibbs est d'autant plus performant que les différentes composantes  $x_i$  du vecteur  $X$  sont décorrélées les unes par rapport aux autres (par exemple, on constate trivialement que cet algorithme ne sera pas efficace pour la simulation d'un vecteur aléatoire  $X = (x_1, x_2)$  tel que  $x_1 = x_2$ ). Pour cela, l'utilisation d'une version bloc de l'algorithme de simulation peut être préférée dans le cas où certaines composantes de  $X$  sont fortement corrélées.

### 4.1.3 Dynamique de Metropolis-Hastings

Il s'agit d'un algorithme très général, valable pour tout espace d'états  $E$ . Il permet la sélection des transitions, en fonction d'un critère d'acceptation.

Supposons que nous connaissions une loi de transition irréductible et apériodique  $Q$  sur  $E$ , et une fonction d'**acceptation**

$$a : E \times E \rightarrow ]0, 1] : (x, y) \rightarrow a(x, y) \quad ,$$

où  $a(x, y)$  décrit pour chaque couple d'états  $(x, y)$  la probabilité d'acceptation de la transition  $x \rightarrow y$ .

L'algorithme d'acceptation-rejet fonctionne en deux étapes :

**Algorithme 2** *Acceptation-rejet*

- Proposer une transition  $x \rightarrow y$  suivant la loi  $Q(x, \cdot)$
- Accepter cette transition avec la probabilité  $a(x, y)$ , sinon, rester à  $x$ .

La loi de transition  $P$  correspondant à cet algorithme peut être représentée comme

$$P(x, y) = \begin{cases} Q(x, y)a(x, y) & \text{si } x \neq y \\ Q(x, x) + \sum_{y \neq x} Q(x, y) [1 - a(x, y)] = 1 - \sum_{y \neq x} Q(x, y) a(x, y) & \text{sinon} \end{cases}, \quad (4.4)$$

et il y a deux variables aléatoires indépendantes à tirer: l'une selon la loi de transition  $Q$  sur  $E$ , et la seconde selon une loi uniforme  $U$  sur  $[0, 1]$ ; si  $U \leq a(x, y)$  la transition  $x \rightarrow y$  est acceptée. Sinon, la transition n'a pas lieu.

Comme  $Q$  est irréductible et apériodique,  $P$  l'est aussi.

A condition que la fonction d'acceptation  $a(x, y)$  soit choisie telle que la loi de transition  $P$  soit  $\pi$ -réversible,  $P$  est ergodique, de sorte que  $X_n$  converge vers  $\pi$  pour tout état initial  $X_0$ .

La fonction d'acceptation  $a(x, y)$  doit vérifier

$$\forall x, y \in E, x \neq y : \pi(x)Q(x, y)a(x, y) = \pi(y)Q(y, x)a(y, x) \quad , \quad (4.5)$$

ou, en d'autres termes,

$$\frac{a(x, y)}{a(y, x)} = \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)} \quad . \quad (4.6)$$

Quelques fonctions d'acceptation classiques sont

la dynamique de Barker :  $a(x, y) = \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y) + \pi(y)Q(y, x)}$

la dynamique de Metropolis :  $a(x, y) = \min\{1, \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\}$ , nécessitant que  $Q$  soit symétrique

la dynamique de Metropolis-Hastings :  $a(x, y) = \min\{1, \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)}\}$

Ce dernier algorithme laisse à l'utilisateur un large degré de liberté dans le choix de  $Q$ . Un bon choix doit consister à effectuer un compromis entre faible taux de rejet, visite rapide de l'ensemble de l'espace d'état et simplicité calculatoire.

**Algorithme 3** *Metropolis-Hastings*

1. Proposer une transition  $x \rightarrow y$  selon la loi  $Q(x, \cdot)$
2. si  $\pi(y)Q(y, x) \geq \pi(x)Q(x, y)$ , garder  $y$
3. si  $\pi(y)Q(y, x) \leq \pi(x)Q(x, y)$ , tirer  $u$  selon une loi uniforme sur  $[0, 1]$  :
  - si  $u \leq \frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)}$  conserver  $y$
  - sinon conserver  $x$ .

L'algorithme de Metropolis-Hastings est souvent utilisé conjointement avec un schéma de recuit simulé. Il va nous permettre d'accepter préférentiellement les transitions générant des simulations se rapprochant des contraintes. Cet algorithme permet donc de faire converger les simulations successives (conditionnées aux puits) vers le conditionnement par les vitesses de sommation.

**4.1.4 Recuit Simulé**

Les schémas de recuit sont utilisés pour résoudre des problèmes d'optimisation (minimiser une fonction coût  $J$  sur un espace d'état  $X$ ) et de simulation conditionnelle.

Nous allons nous intéresser au problème de simulation conditionnelle sur un espace d'état fini. L'idée est d'obtenir le conditionnement d'une simulation en minimisant une fonction de distance  $J$  décrivant l'éloignement entre la simulation actuelle et les contraintes à respecter. Pour notre problème, nous allons utiliser une somme quadratique de la distance entre valeurs de vitesses de sommation données et sommes quadratiques des vitesses :

$$J = \sum_x \left( V_{stack}^2(x) - \frac{1}{N_t} \sum_{t=1}^{N_t} V_{inst}^2(x, t) \right)^2, \quad ,$$

où  $x$  représente les différentes positions pour lesquelles la vitesse de sommation est connue.

La fonction d'acceptation définie dans le paragraphe précédent va être adaptée pour prendre en compte cette notion de proximité: les transitions sont d'autant plus facilement acceptées qu'elles conduisent à des simulations avec une valeur réduite de la fonction objectif, i. e. plus proche du conditionnement.

La présentation du conditionnement des simulations sous forme de minimisation d'une fonction objectif est une méthode très efficace mais, dans le cas de contraintes très complexes (non-linéaires), il est important d'éviter que le processus de minimisation ne s'arrête dans un minimum local de la fonction coût. Pour ce faire, il est recommandé d'accepter, durant les étapes initiales, des transitions qui augmentent la valeur de la fonction coût (et donc éloignent la simulation des contraintes) de façon

à garantir une couverture complète de l'espace d'état. L'idée est d'associer à la fonction objectif un paramètre  $\theta$ , qui va être utilisé pour ajuster l'impact des contraintes sur la fonction d'acceptation. Ce paramètre  $\theta$ , appelé **température** du schéma de recuit simulé, définit la distribution de Gibbs associée à la température comme

$$g_\theta(x) = C(\theta)^{-1} \exp\left\{-\frac{J(x)}{\theta}\right\} \quad , \quad (4.7)$$

où  $C(\theta) = \sum_x \exp\left\{-\frac{J(x)}{\theta}\right\}$  est une constante de normalisation.

On peut montrer que, lorsque  $\theta \rightarrow 0$ , cette distribution tend vers la distribution uniforme sur l'espace d'état conditionné.

L'algorithme consiste à décroître graduellement  $\theta$ , et pour chaque température, à simuler une chaîne de Markov ayant  $g_\theta$  pour distribution stationnaire.

Afin d'obtenir un bon respect des contraintes par la simulation finale, la valeur de  $\theta_n$  doit être petite pour de grandes valeurs de  $n$ . Toutefois, différentes stratégies peuvent être utilisées pour son évolution : il peut par exemple être conservé constant durant une première partie de la simulation, de façon à conserver constant le rapport entre transitions "éloignantes" acceptées et rejetées.

La simulation contrainte de la distribution  $\pi(x)$  est obtenue pour la distribution de Gibbs

$$g_\theta(x) = C(\theta)^{-1} \exp\left\{-\frac{J(x)}{\theta}\right\} \pi(x) \quad . \quad (4.8)$$

Dans le cas d'un espace d'état fini, la distribution de Gibbs  $g_\theta(x)$  tend vers la distribution contrainte quand  $\theta \rightarrow 0$  :

$$\pi_{\mathcal{D}}(x) = \frac{1}{\pi(\mathcal{D})} \mathbb{1}_{x \in \mathcal{D}} \pi(x) \quad , \quad (4.9)$$

où  $\mathcal{D}$  représente l'espace d'état contraint.

## 4.2 Simulation markovienne d'un champ de vitesse instantanée

Nous avons présenté dans la première partie de ce chapitre un algorithme très général permettant la réalisation efficace de simulations, prenant en compte des contraintes non linéaires.

Dans cette partie, nous allons discuter quelques éléments algorithmiques, permettant une implantation optimale de l'outil de simulation au problème spécifique de la simulation du champ de vitesse instantanée.

### 4.2.1 Fonction d'anamorphose

Dans la version originale de l'algorithme, nous supposons que la distribution du carré des vitesses instantanées doit être gaussienne. La validité de cette hypothèse peut être mesurée au moyen d'un graphique quantile contre quantile, en mettant en vis-à-vis les distributions de valeurs de puits et d'une variable gaussienne.

Comme cette hypothèse n'est pas toujours confirmée par les données disponibles, nous transformons la distribution de la variable d'intérêt en une variable distribuée selon la loi normale. De façon à pouvoir utiliser l'algorithme en toutes circonstances, la transformation de la variable d'intérêt en variable normale<sup>31</sup> est réalisée de façon systématique.

La transformation est réalisée au moyen d'une fonction d'**anamorphose**<sup>32</sup>.

L'usage d'une fonction d'anamorphose nous autorise à utiliser notre algorithme de simulation, même lorsque la distribution des carrés de vitesses instantanées semble éloignée d'une distribution normale.

Dans le cas stationnaire - sans gradient vertical de vitesse - la distribution du carré des vitesses présente un aspect gaussien. Dans ce cas, la fonction d'anamorphose utilisée pour obtenir une variable normale  $Y$  est une simple fonction linéaire de la variable gaussienne  $Z$  :  $Y = \varphi^{-1}(Z) = \frac{Z - \mu_W}{\sigma_W}$ , avec  $\mu_W$  la moyenne des carrés de vitesses instantanées le long des puits, et  $\sigma_W$  l'écart-type.

---

<sup>31</sup>Gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire.

<sup>32</sup>Il est en général possible de transformer une variable aléatoire  $Z$  en une variable aléatoire  $Y \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} N(0, 1)$ , de fonction de distribution normale.

Nous appelons fonction d'**anamorphose** la fonction  $\varphi$  définie de telle façon que  $Z = \varphi(Y)$ . Cette fonction associe chaque point  $z$  de l'histogramme de  $Z$  à un point  $y$  de l'histogramme de  $Y$ , de sorte que  $F(z) = G(y)$ . Elle met en relation les quantiles équivalents des distributions des variables aléatoires  $Y$  et  $Z$ .

Nous pouvons écrire  $\varphi : \varphi(z) = y = F^{-1} \circ G(z)$ .

D'un point de vue numérique, la fonction de transformation inverse  $\varphi^{-1}$  ( $(Y = \varphi^{-1}(Z))$ ) peut être approchée au moyen de polynômes d'Hermite.

Nous utilisons la fonction d'anamorphose pour transformer une variable quelconque en une variable aléatoire de distribution normale, ensuite procédons à la simulation au moyen de la nouvelle variable (normale), et appliquons la transformation inverse à la simulation obtenue (grâce à cette variable normale) de façon à l'obtenir dans l'espace de la variable aléatoire initiale.

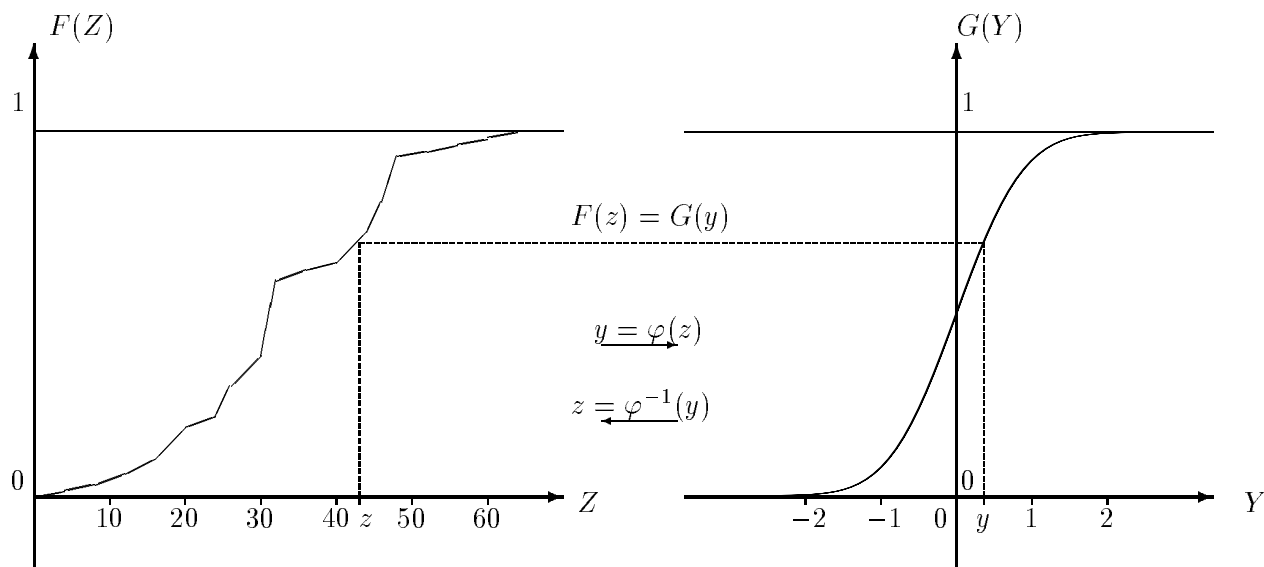


FIG. 4.1 – Exemple de transformation par anamorphose

Comme nous allons le voir au chapitre 7.6, la définition d'une fonction d'anamorphose dans le cas non stationnaire est plus difficile, puisque plusieurs possibilités co-existent pour modéliser proprement l'accroissement linéaire du champ de vitesse instantanée avec la profondeur.

#### 4.2.2 Modèle factorisé

Nous allons supposer pour notre algorithme de simulation que le modèle de covariance du champ de vitesse instantanée  $Y$  peut être factorisé i. e. qu'il peut être réécrit comme

$$C(x, \tau) = \rho(x)h(\tau) \quad , \quad (4.10)$$

où  $C(x, \tau)$  est le modèle de covariance du champ vitesse instantanée,  $\rho(x)$  est le modèle de covariance horizontal du champ de vitesse instantanée, qui est une fonction de la distance horizontale  $x$ ,  $h(\tau)$  est le modèle de covariance vertical du champ de vitesse instantanée, qui est une fonction de la distance verticale (normalisée)  $\tau$ .

Le krigeage d'une variable aléatoire modélisée par une fonction de covariance factorisée  $C(x, \tau)$  possède une propriété intéressante : dans le cas d'une grille de données complète, les poids de krigeage sont non nuls seulement le long d'un système d'axes centré au point  $(x, \tau)$ . Cette propriété est démontrée dans l'annexe H.

Dans le cas d'un nouveau puits à la position  $x_0$ , le krigeage des valeurs au temps  $t$  peut être réalisé à partir des valeurs aux puits environnants<sup>33</sup>, en utilisant les données obtenues pour la même valeur

<sup>33</sup>En faisant un parallèle avec la réalité géologique sous-jacente, nous utiliserons la terminologie **puits** pour parler des éléments du champ aléatoire appartenant aux mêmes coordonnées  $x, y$ , suivant en cela Haas et Dubrule (1994).

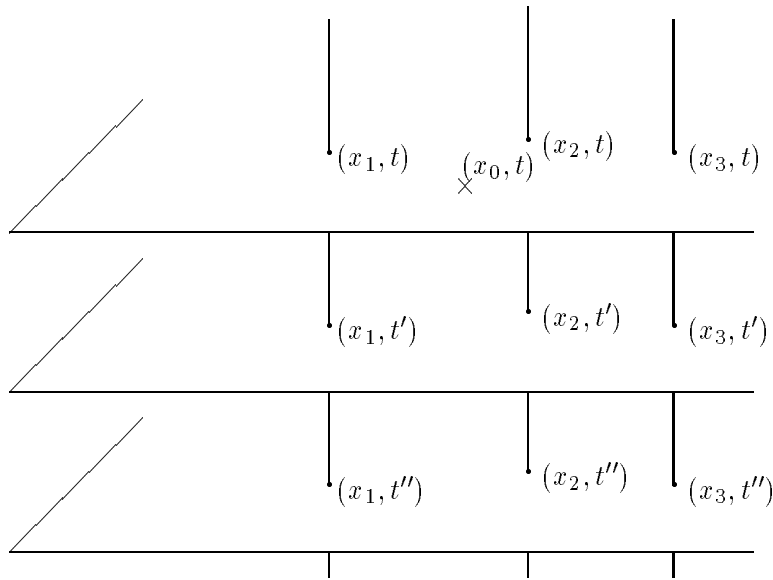


FIG. 4.2 – Krigage d'un point dans le cas d'un modèle de covariance factorisé

de  $t$  (Chilès et Delfiner, 1999). Les poids de krigage ne sont fonction que d'une seule coordonnée :

$$Y(x_0, t)^K = \sum_i \lambda_i(x_i) Y(x_i, t) \quad , \quad (4.11)$$

avec  $\lambda_i(x_i)$  les poids de krigage pour les données  $Y(x_i, t)$ .

On l'illustre à la figure 4.2 (reproduite d'après (Chilès et Delfiner, 1999)) : le krigage du nouveau point  $(x_0, t)$  est réalisé en utilisant uniquement les valeurs issues de données situées sur le même plan horizontal (au même temps  $t$ ), soient  $(x_1, t)$ ,  $(x_2, t)$  et  $(x_3, t)$ . La simulation d'un processus au modèle factorisé et de distribution gaussienne peut être réalisée très efficacement au moyen de la propriété suivante : si  $F(x)$  et  $H(\tau)$  sont deux processus indépendants avec respectivement les modèles de covariance  $\rho(x)$  et  $h(\tau)$  (et des distributions quelconques), le produit  $Z(x, \tau) = F(x)H(\tau)$  a la covariance désirée, mais n'a pas la distribution souhaitée.

La simulation obtenue n'est pas satisfaisante, et doit être corrigée en sommant plusieurs composantes indépendantes :

$$Z(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N F_k(x) H_k(\tau) \quad , \quad (4.12)$$

avec  $F_k(x)$  (resp.  $H_k(\tau)$ ) sont des processus indépendants de modèle de covariance  $\rho(x)$  (resp.  $h(\tau)$ ), et  $N$  est supposé être assez important (relativement à la taille de la simulation).

### 4.2.3 Simulation initiale

La première simulation est réalisée de façon à être conditionnée aux puits, et à avoir les propriétés statistiques requises (distribution et modèle de covariance).

De façon à générer une simulation conditionnelle  $Y_C$ , une simulation non-conditionnelle  $Y_{NC}$  est générée et elle est conditionnée par l'ajout d'un résidu correctif, obtenu par krigeage des résidus (décalages entre simulation non-conditionnelle et valeurs mesurées) aux points de données :  $Y_C(x) = Y_{NC}(x) + (Y_x - Y_{NC}(x))^K$ .

Ce processus peut être réécrit comme  $Y_C(x) = Y_x^K + R_{NC}(x)$ , où un résidu aléatoire (simulé) est ajouté au krigeage des données<sup>34</sup>.

Le modèle de covariance utilisé pour la simulation des résidus est calculé par Lajaunie (1999) dans le cas d'un modèle de covariance factorisé. Il s'agit d'un autre modèle factorisé, défini par

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(R_{NC}(x, t), R_{NC}(y, t')) &= \mathbf{Cov}(R_{NC}(x, t), Y(y, t')) \\ &= (\rho(x - y) - \sum_i \lambda_i(x) \rho(x_i - y)) h(t - t') \\ &= \Sigma_c(x, y) h(t - t') \quad , \end{aligned} \tag{4.13}$$

où  $\Sigma_c = \rho(J, J) - \rho(J, I) \rho(I, I)^{-1} \rho(I, J)$ ,  $\rho(I, I)$  représente la matrice de covariance entre données aux puits,  $\rho(I, J)$  représente la covariance entre données aux puits et puits krigés, et  $\rho(J, J)$  représente la covariance entre puits krigés.

La simulation initiale est réalisée en se basant sur l'équation (4.12), avec le modèle de covariance défini en (4.13).

L'inversion de la matrice  $\rho(I, I)$  est réalisée après factorisation de Cholesky, et il a été trouvé qu'une valeur réduite pour  $N$  s'avère suffisante pour obtenir un résultat de simulation satisfaisant. Lajaunie (1999) trouve qu'une valeur de  $N = 10$  est suffisante pour la simulation d'un champ de dimension  $N_t = 35 \times N_x = 471$ .

### 4.2.4 Echantillonneur de Gibbs bloc

Nous utilisons l'algorithme d'échantillonnage de Gibbs pour générer les simulations successives, en préservant le conditionnement aux données de puits. Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 4.1.2, l'algorithme d'échantillonnage de Gibbs est très efficace quand les différentes coordonnées du vecteur aléatoire  $X$  sont faiblement corrélées (Galli et Gao, 2001), i. e. quand la simulation de  $x_j^{new}$ , selon la distribution conditionnelle de  $x_j$  sachant  $x^j$ , permet de visiter l'ensemble de l'espace d'états assez rapidement.

---

<sup>34</sup>Par définition, ce résidu est égal à  $R_{NC}(x) = Y_{NC}(x) - Y_{NC}(x)^K$ , et on voit directement qu'aux points de données, le résidu est nul (puisque le krigeage est exact), de sorte que la simulation respecte les valeurs connues.



Dans le cas de la simulation du champ de vitesse instantanée, la quantité de points est vraiment importante. Aussi, au vu de l'analyse structurale, nous savons que la corrélation entre valeurs du même puits va être nettement plus importante que pour les valeurs de puits différents<sup>35</sup>.

Pour cela, nous proposons d'utiliser une version bloc de l'algorithme d'échantillonneur de Gibbs pour transformer le champ aléatoire initial et progressivement respecter les contraintes, i.e. les données de vitesses de sommation. Les étapes de l'algorithme d'échantillonneur de Gibbs bloc se réalisent en suggérant des modifications de blocs de variables. Dans notre cas, nous allons travailler en considérant les valeurs réunies selon leurs coordonnées géographiques ( $x$  et  $y$ ), c'est à dire par puits.

En prenant avantage de la méthode de simulation par puits que nous avons proposée

$$Y_C(x) = Y_x^K + R_{NC}(x) \quad ,$$

nous obtenons l'algorithme de simulation bloc suivant :

**Algorithme 4** *Echantillonneur de Gibbs bloc*

- Choisir un puits  $Y_x$  parmi l'ensemble des puits
- Calculer le krigeage  $Y_x^K$  de ce puits connaissant les valeurs aux autres puits
- Simuler le résidu de krigeage  $R_{NC}(x)$
- Remplacer le puits initial  $Y_x$  par la somme du krigeage  $Y_x^K$  et du résidu simulé  $R_{NC}(x)$

L'échantillonneur de Gibbs bloc est simplifié par le fait que tous les poids de krigeage et les variances de krigeage peuvent être obtenues au prix d'une seule inversion de la matrice de covariance horizontale (en voisinage unique) : soit  $S$  l'inverse de la matrice de covariance 2-D entre puits (sa dimension est le carré de la dimension horizontale du champ aléatoire, de sorte que le coût de l'inversion est limité). Les poids de krigeage et la variance de krigeage pour l'estimation du puits  $j$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_i(x_j) &= -S_{ij}/S_{jj} \quad (i \neq j) \\ \sigma_K^2 &= 1/S_{jj} \quad . \end{aligned} \tag{4.14}$$

---

<sup>35</sup>Remarquons aussi que, pour des raisons d'utilisation ultérieure des réalisations dans des outils du type simulateur de flot, le maillage est nettement plus dense dans la direction verticale - temporelle- que dans les directions horizontales  $x, y$  .

Une étape de l'algorithme d'échantillonneur de Gibbs bloc peut être décrite par l'expression

$$Y_{n+1}(x_j, t) = - \sum_{i \neq j} \frac{S_{ij}}{S_{jj}} Y_n(x_i, t) + \frac{1}{\sqrt{S_{jj}}} \eta_{n+1}(t) \quad , \quad (4.15)$$

où  $Y_{n+1}(x_j, t)$  représente la nouvelle valeur  $Y$  au puits  $x_j$  et à la profondeur  $t$ ,  $S$  est l'inverse de la matrice de covariance 2-D entre puits, et  $\eta_{n+1}(t)$  est un champ aléatoire 1-D gaussien, indépendant de  $Y_k$ ,  $k \leq n$ , avec pour modèle de covariance  $h$ .

### 4.2.5 Echantillonneur de Gibbs bloc avec pas variable

Dans notre algorithme de simulation du champ de vitesse instantanée par échantillonneur de Gibbs, le conditionnement par les données de vitesses de sommation est réalisé par recuit simulé. Nous allons modifier l'algorithme d'échantillonnage présenté pour obtenir une convergence plus efficace des itérations vers une simulation conditionnelle.

L'échantillonneur de Gibbs décrit dans le paragraphe précédent génère de nouveaux puits qui n'ont pas de raison particulière d'être plus proches des contraintes que les précédents. Ainsi, si le puits initial est relativement proche du conditionnement, la probabilité de trouver un nouveau puits plus proche du conditionnement est très faible, et un grand nombre de puits simulés risquent d'être rejetés avant de générer un puits améliorant le respect du conditionnement. La tendance à rejeter de nouveaux puits augmente comme

- les valeurs du puits précédent satisfont le conditionnement avec une bonne précision,
- la température  $\theta$  est faible.

Le résultat de ce phénomène est une perte d'efficacité de l'algorithme par une croissance du taux de rejet.

Lajaunie (1999) propose dès lors d'influer sur ce taux de rejet, en générant de nouveaux puits qui sont d'autant plus proche du précédent que celui-ci respecte le conditionnement. Ceci est obtenu en ajoutant un paramètre de **pas variable** pour ajuster l'amplitude des modifications proposées par l'échantillonneur de Gibbs.

Comme pour tout  $n$  les simulations  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$  ont la même distribution, les deux résidus indépendants  $\tilde{R}_n = Y_n(x_j, \cdot) - Y_n(x_j, \cdot)^K$  et  $R_{n+1} = Y_{n+1}(x_j, \cdot) - Y_n(x_j, \cdot)^K$  ont la même distribution gaussienne, de moyenne nulle et de covariance  $\frac{1}{S_{jj}}h(t)$ .

Comme ces deux résidus sont aussi indépendants de  $Y_n(x_i)$  pour  $i \neq j$ , le vecteur

$$\alpha R_{n+1} + \sqrt{1 - \alpha^2} \tilde{R}_n \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

a la même distribution que les résidus, et est indépendant de  $Y_n(x_i)$  pour  $i \neq j$ .

Un échantillonneur de Gibbs à pas variable peut être défini comme

$$Y_{n+1}(x_j, t) = - \sum_{i \neq j} \frac{S_{ij}}{S_{jj}} Y_n(x_i, t) + \alpha_n \frac{1}{\sqrt{S_{jj}}} \eta_{n+1}(t) + \frac{1}{\sqrt{S_{jj}}} \sqrt{1 - \alpha_n^2} \tilde{R}_n \quad . \quad (4.16)$$

Si  $\alpha_n = 1$ , le processus est un simple échantillonneur de Gibbs (comme décrit à l'équation 4.15), tandis que si  $\alpha_n = 0$ , il reste invariablement au même état  $Y$ .

Dès lors, le paramètre  $\alpha_n$  va être ajusté pour adapter les modifications proposées à la situation : si la simulation  $Y_i$  est proche des contraintes (la valeur de la fonction de pénalité est faible), il est plus indiqué de donner à  $\alpha_n$  une valeur proche de zéro - qui va permettre de générer une nouvelle simulation  $Y_{i+1}$  légèrement modifiée par rapport à la simulation précédente  $Y_i$ , tandis que si la simulation  $Y_i$  est éloignée des contraintes, proposer une variation de grande amplitude permet d'investiguer rapidement l'ensemble de l'espace de variabilité possible, et d'augmenter la rapidité de convergence de l'algorithme jusqu'à une solution acceptable. Dans ce cas, il est plus indiqué d'avoir une valeur de  $\alpha_n$  proche de l'unité.

L'algorithme que nous avons développé dans ce chapitre permet la simulation itérative d'un champ aléatoire conditionné par des contraintes linéaires et non-linéaires. Le noyau de transition présenté (par échantillonneur de Gibbs bloc) permet la simulation d'une chaîne de simulations conditionnées aux valeurs de vitesses aux puits, l'adjonction d'un processus de recuit simulé permettant d'obtenir le conditionnement par les valeurs de vitesses de sommation. Nous montrons dans la seconde partie différents éléments permettant de l'appliquer pour la simulation du champ de vitesse instantanée, et nous l'illustrons au moyen de l'ensemble des données réelles.

## Deuxième partie

# Applications sur un jeu de données réelles



# Chapitre 5

## Présentation des données

### Sommaire

*Nous présentons l'ensemble des données disponibles pour réaliser nos tests expérimentaux. Elles proviennent d'un champ pétrolier exploité par ENI-Agip Division. Pour les différents ensembles d'informations reçus, nous décrivons le sens, la quantité et la qualité des informations disponibles.*

*We present the available data set used to perform our experimental tests. It comes from an oil field exploited by ENI-Agip Division. For the different data sets, we describe the meaning, the amount and the quality of the information.*

---

### 5.1 Description des ensembles de données

L'ensemble des développements théoriques présentés dans les précédentes parties de ce manuscrit a été testé sur un jeu de données réelles. Il s'agit d'enregistrements géophysiques provenant d'un gisement appartenant à ENI-Agip Division. Ce gisement est de taille pluri-kilométrique, et les formations géologiques dans la zone considérée sont tabulaires, sub-horizontales.

Les données présentées ont été récoltées au cours des différents séjours au sein de la compagnie italienne, ce qui explique leur utilisation progressive pour les différents tests décrits. Leur utilisation ayant orienté le développement des méthodes au cours du travail de recherche, leur présentation ici suivra le cheminement temporel de leur utilisation, elle-même fonction de leur disponibilité progressive.

La figure 5.1 présente la disposition générale des données au sein du champ. On voit que sept lignes

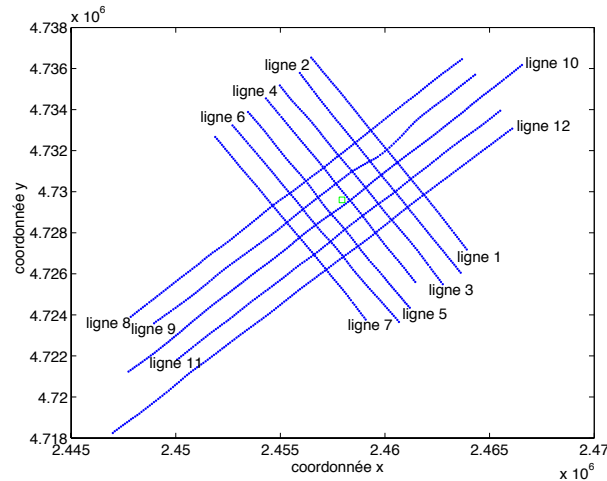


FIG. 5.1 – Plan de position des données

Le numéro des lignes sismiques est disposé à l'extrémité correspondant au premier point acquis  
 Le carré vert représente la position du puits A, au croisement des lignes 4 et 10

sismiques ont été acquises dans la direction SE-NO, et cinq lignes dans la direction SO-NE. Le gisement se situe dans la zone de croisement de ces lignes. Remarquons que, dans cette figure, le numéro d'identification des lignes sismiques est positionné à l'extrémité de la ligne à partir de laquelle l'acquisition a débuté (le lecteur peut ainsi identifier les directions d'avancement des différentes acquisitions de ligne).

Le gisement est situé en zone maritime peu profonde (inférieure à la centaine de mètres). L'acquisition des lignes sismiques a été réalisée avec une structure maritime. Les tirs sont réalisés tous les 50 mètres, les 46 hydrophones sont disposés le long de la flûte unique à des distances de 50m les uns des autres. Le premier récepteur se situe à 350m de la source. Plusieurs puits ont été forés dans la zone d'intérêt. Nous avons pu utiliser l'enregistrement sonique complet provenant de l'un d'entre eux, le puits A, situé au croisement des lignes sismiques 4 et 10 (représenté par le carré vert sur la figure 5.1).

Nous disposons également des enregistrements soniques pour trois puits (B, C et D) provenant de champs proches. L'un de ces enregistrements est réalisé jusqu'à la profondeur de 4600m.

La première partie des essais a été réalisée grâce aux mesures obtenues par un pointé semi-automatique sur les collections d'enregistrements avant sommation. Nous avons pu utiliser cette information pour comparer les méthodes de tomographie statistique avant et après sommation. Les résultats de cette comparaison ont été présentés dans le cadre de la conférence internationale de la SEG à San Antonio (Geraets *et al.*, 2001).

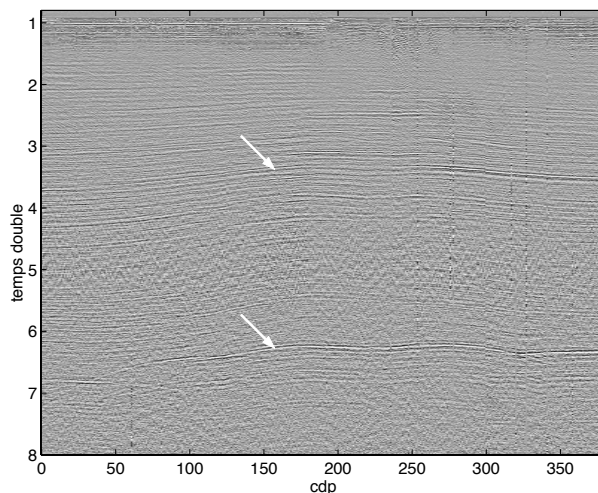


FIG. 5.2 – Section iso-offset le long de la ligne sismique 4

Ensuite, nous avons utilisé l'ensemble des profils de vitesses de sommation issus de ce pointé pour évaluer la performance des diverses extensions proposées pour la tomographie statistique post-stack (paragraphe 3.4.2 et 3.4.3). Les résultats développés ici correspondent à ceux présentés lors de la conférence internationale de l'EAGE à Florence (Geraets *et al.*, 2002).

Enfin, une nouvelle collection de données, provenant d'un pointé automatique de vitesses de sommation le long de deux horizons, nous a permis de quantifier l'erreur de modélisation pouvant provenir d'un pointé de moindre qualité, dans le cas d'un jeu de données réel complet.

Ces données sont finalement utilisées pour conditionner les simulations du champ de vitesse instantanée, réalisées à partir de l'algorithme de simulation conditionnelle markovienne décrit au chapitre 4.

## 5.2 Pointé des données sismiques avant-sommation

Le premier jeu de données a été réalisé par pointé semi-automatique du cube de données sismiques. Nous avons pointé deux horizons le long des lignes 3, 4, 5, 8 et 9. On montre à la figure 5.2 une section iso-offset le long de la ligne 4. Les deux horizons pointés sont mentionnés par les flèches. La figure 5.3 présente des vues de détails autour de ces deux horizons. On voit que les données, qui n'ont subi qu'un prétraitement, sont fortement bruitées. La qualité du pointé réalisé pâtit de cette caractéristique.

Nous avons utilisé un algorithme de pointé glouton, disponible en interne au sein de la compagnie ENI-Agip Division. Il a été développé à l'Université Polytechnique de Milan, et est basé sur des



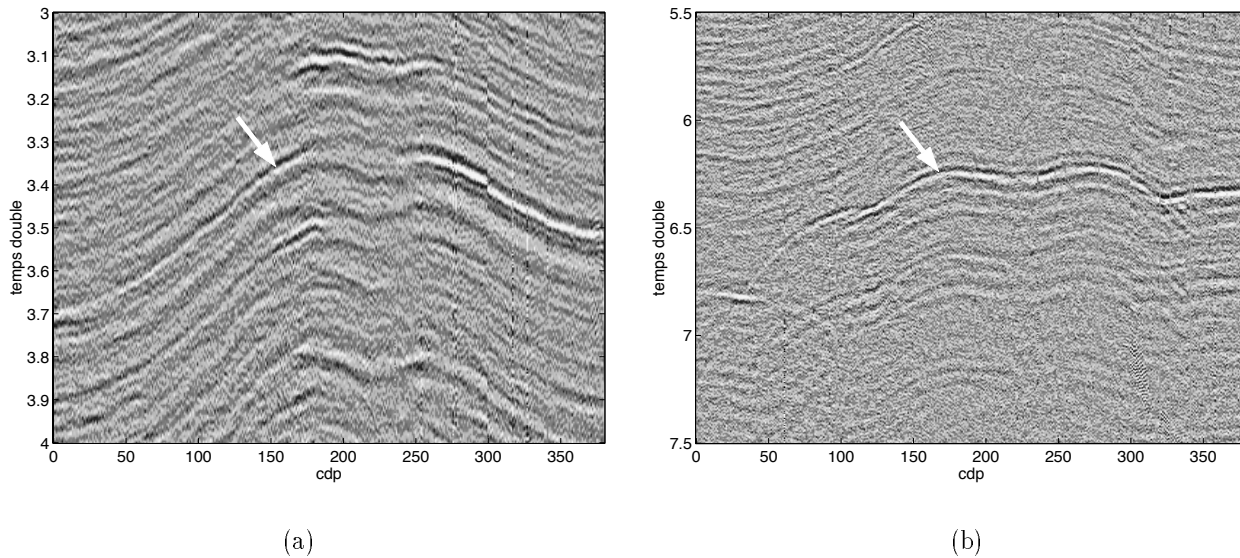


FIG. 5.3 – Détails de la section iso-offset le long de la ligne sismique 4  
autour (a) de l'horizon supérieur et (b) de l'horizon inférieur

modèles de Markov cachés (Bethel et Paras, 1994). Le pointé progresse par sélection des données pour lesquelles la cohérence du signal pressenti est maximale.

Il faut fournir au pointé divers paramètres concernant la forme de l'ondelette recherchée, la taille de la fenêtre de recherche (sur laquelle la corrélation croisée entre signal recherché et signal potentiel est réalisée), l'incrément maximum toléré (d'une trace sismique à l'autre).

Divers problème se posent lors de l'utilisation du pointé : le bruit important présent dans les enregistrements empêche parfois la reconnaissance d'une phase, dans la partie profonde du signal - pour des temps doubles supérieurs à cinq secondes. La plus forte corrélation des données iso-offset (et l'absence d'implantation du caractère hyperbolique attendu dans les collections cdp en fonction de l'accroissement de l'offset) favorise une croissance de la zone pointée dans la direction iso-offset plutôt que dans la direction des offsets croissants. Il est rare que le signal puisse être suivi par l'algorithme de pointé jusqu'aux enregistrements d'offset maximum, la croissance de la parabole étant très importante entre deux enregistrements contigus, pour de tels offsets. Le long des lignes SO-NE, il a ainsi été impossible d'obtenir un pointé satisfaisant<sup>36</sup> pour l'horizon inférieur.

On présente à la figure 5.4 les traces sismiques pour deux cdp successifs, le long de la ligne sismique 1. On voit que la qualité du signal autour de l'horizon inférieur, vers 7 secondes temps double, est

<sup>36</sup>Progressant dans la direction des offsets de plus de trois enregistrements, et permettant ainsi d'avoir une surface pointée de plusieurs centaines de traces, à partir d'un germe donné.

assez faible pour ces enregistrements.

L'absence d'un tir - due à un problème lors de l'acquisition des données - arrête la progression de l'algorithme de pointé automatique, qui est incapable de franchir la frontière créée.

A cause de ces différentes causes d'arrêt de la croissance de la zone pointée (perte du signal ou absence d'un tir), il est en général nécessaire de donner plusieurs germes de croissance du pointé le long d'une même ligne sismique. L'affichage des sections iso-offset pointées n'ayant pas été disponible lors de l'utilisation de cet algorithme de pointé, certains pointés sont décalés d'une phase par rapport aux autres, à cause d'un choix erroné de germe de "second départ".

On verra les conséquences de tels problèmes pour l'étude des sections iso-offsets présentée au paragraphe 6.2.

### 5.3 Données de vitesse de sommation HVA

Nous avons reçu, durant la dernière période du travail de recherche, un nouveau jeu de données, constitué de mesures de vitesses de sommation et d'estimations de profondeurs le long de deux horizons, pour l'ensemble des lignes.

Il s'agit de profils d'analyse automatique et non-corrélée de la vitesse de sommation optimale pour chaque cdp, le long d'un horizon pointé (*Horizon Velocity analysis*, HVA).

Les figures 5.5 et 5.6 présentent les spectres de vitesses de sommation. Ceux-ci représentent, pour les profils de cdp et en fonction de la vitesse de sommation proposée, la valeur de la corrélation entre enregistrements d'une même collection cdp, corrigés pour l'effet de déport. La corrélation est figurée au moyen d'une échelle de couleur, et on voit s'afficher le pointé joignant les valeurs maximales de cette fonction, qui détermine ainsi le profil de vitesses de sommation qui donnera l'image après-sommation contenant le maximum d'énergie (de contrastes) possible. Les profils qui nous ont été communiqués correspondent à cette information. On voit que l'absence de corrélation entre pointés génère des profils dont la rugosité sera directement fonction de la qualité du réflecteur suivi. Les profils reçus sont de ce point de vue très différents: ceux correspondant au réflecteur supérieur sont relativement lisses tandis que ceux correspondant au réflecteur inférieur sont nettement plus erratiques.

On présente aux figures 5.7 les plans de position des vitesses de sommation obtenus par cette méthode, pour les deux horizons. La figure 5.8 présente les profondeurs auxquelles les horizons ont été pointés.

Les deux horizons pointés se trouvent à des profondeurs respectives de 1300 et 2000m environ. Ils ne correspondent pas aux horizons utilisés lors des essais précédents -dont les profondeurs moyennes sont 2500 et 4600m. Les profils de profondeurs ne sont pas disponibles pour les lignes 8 à 12, pour le second horizon.

On peut constater à partir des figures 5.7 et 5.8 quelques tendances générales à l'échelle de la zone:

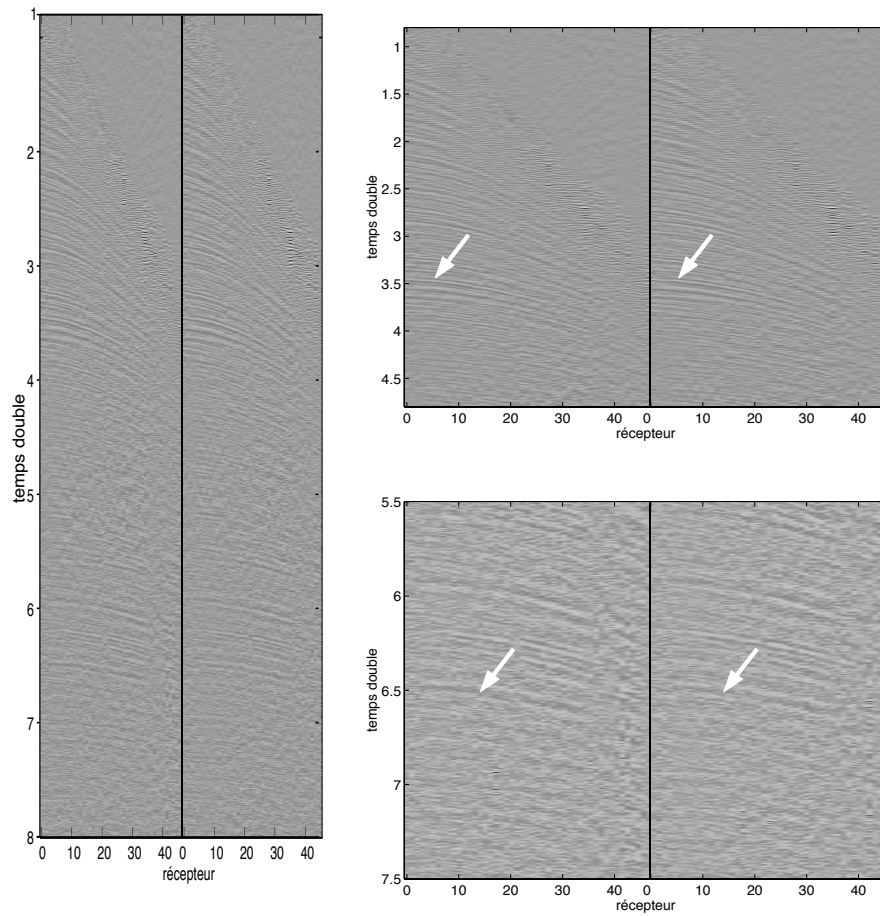


FIG. 5.4 – Détails de points de tir le long de la ligne sismique 1, autour des deux horizons pointés

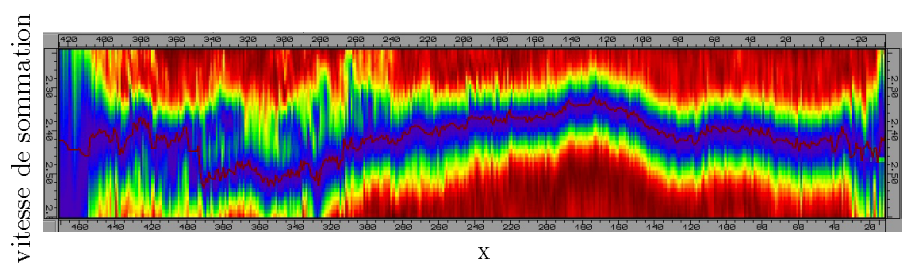


FIG. 5.5 – Profil HVA le long de l'horizon supérieur, avec pointé automatique du maximum de cohérence

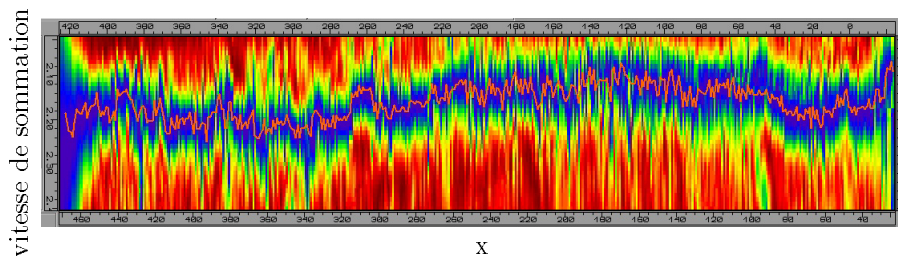


FIG. 5.6 – Profil HVA le long de l'horizon inférieur, avec pointé automatique du maximum de cohérence

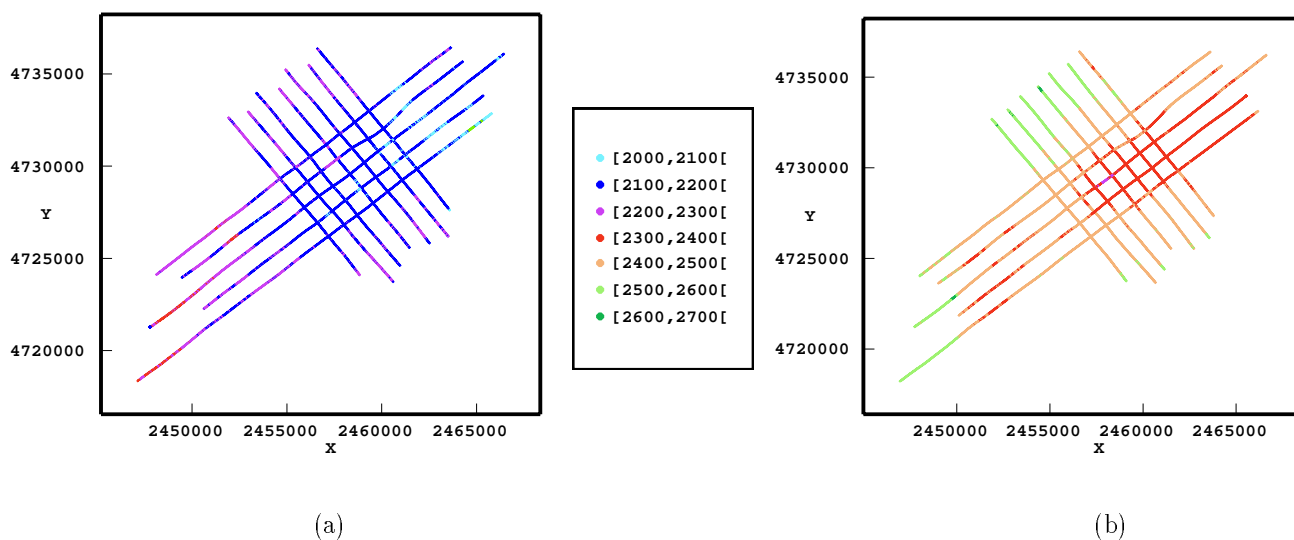


FIG. 5.7 – Plan de position des vitesses de sommation pour les horizons (a) inférieur et (b) supérieur on constate sur les figures de vitesses que la zone du gisement correspond à une zone de vitesses moins importantes. L'horizon 1 semble légèrement penté, avec une direction de pente du Sud-Est au Nord-Ouest. Il est difficile de préciser si ce phénomène se retrouve sur l'horizon suivant, comme les données disponibles sont moins nombreuses.

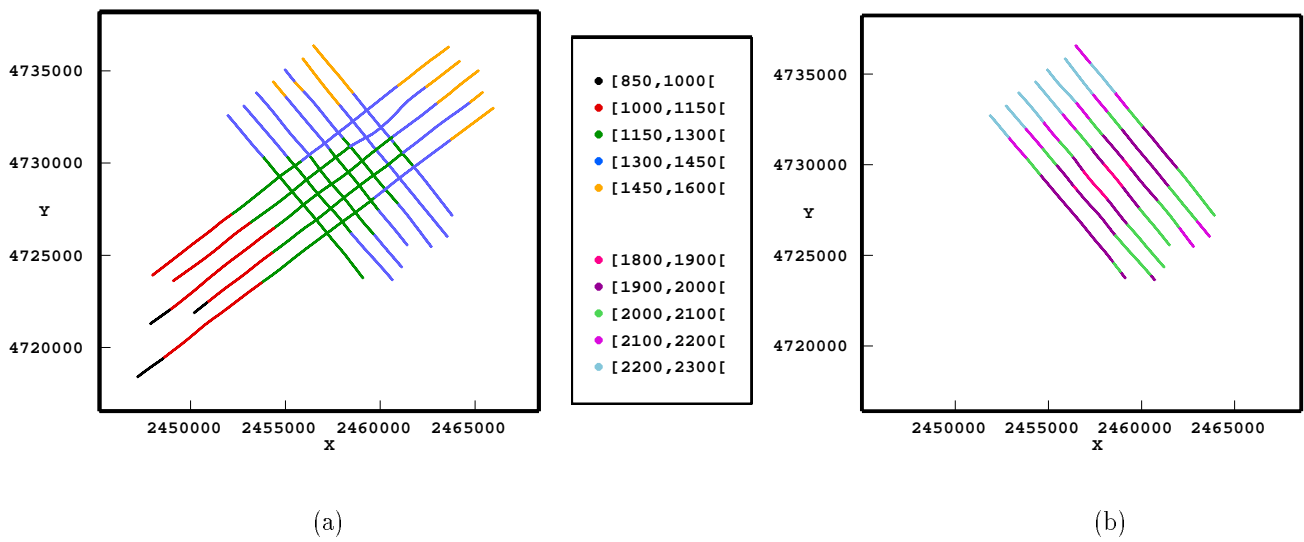


FIG. 5.8 – Plan de position des profondeurs pour les horizons (a) inférieur et (b) supérieur

## Chapitre 6

# Inférence du modèle de covariance du champ de vitesse

### Sommaire

*Nous allons tester l'ensemble des méthodes présentées aux chapitres précédents dans le cas d'un jeu de données réelles. Nous allons tout d'abord comparer les méthodes de tomographie statistique pre-stack et post-stack sur un échantillon de nos données. Ces deux méthodes donnent des estimations comparables, la robustesse de la seconde permettant une plus simple utilisation.*

*Ensuite, à partir des enregistrements aux puits, on modélise la variation du champ de vitesse en fonction de la profondeur, et son découpage en couches géologiques. Au moyen du jeu de données complet, on estime les paramètres de corrélation pour les deux couches géologiques considérées.*

*L'utilisation d'un ensemble de mesures de vitesses de sommation obtenues par Horizontal Velocity Analysis (HVA) permet finalement la comparaison entre estimations pour les paramètres d'une même couche, en fonction de la qualité des données utilisées. Ceci nous permet de quantifier l'incertitude attachée à nos estimations, en fonction de la qualité générale des données utilisées.*

*The methods presented in the former chapters are tested using a real data set. We first compare the pre-stack and post-stack stochastic tomographies on a sampler of our data set. The two methods lead to similar results, the latter being more robust and therefore easier to apply in practical situations.*

*Using the well logs, we then model the depth variation of the velocity field, and its slicing in geological layers. From the full data set, we are able to estimate the correlation parameters for the two geological layers we have considered.*

*The use of a set of stacking velocity measurements obtained by Horizontal Velocity Ana-*

lysis (HVA) permits eventually the comparison between parameter estimations for a particular layer, depending upon the quality of the data set. This enables us to quantify the uncertainty attached to our estimations, as a function of the general quality of the data.

## 6.1 Estimation de la longueur de corrélation verticale du champ de vitesse instantanée

Nous disposons de données d'enregistrements soniques le long de quatre puits. Ces quatre logs atteignent la profondeur correspondant au premier réflecteur, seul le puits B se prolongeant jusqu'au second réflecteur pointé.

On montre à la figure 6.1a les logs soniques en fonction de la profondeur, pour l'intervalle situé entre la surface et le premier réflecteur. A la figure 6.1b figurent les régressions linéaires de ces courbes soniques. On constate que la vitesse mesurée aux puits présente dans cet intervalle une dérive linéaire en fonction de la profondeur. Il semble de plus raisonnable de considérer une stationnarité horizontale de cette dérive au sein du champ (la dérive mesurée semble stable, indépendante de la position géographique du puits considéré).

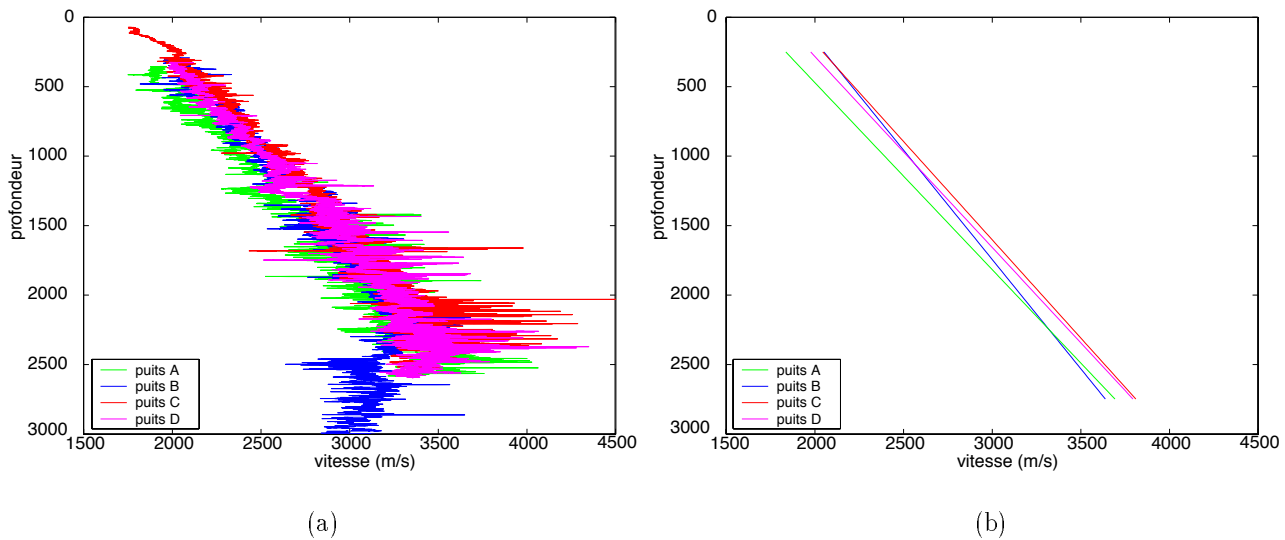


FIG. 6.1 – (a) Enregistrements de logs soniques, en fonction de la profondeur et (b) régressions linéaires correspondantes

La figure 6.2 présente le log de vitesse obtenu au puits B, se poursuivant jusqu'au second réflecteur pointé. On constate que dans cette seconde couche une modélisation de la vitesse instantanée par une valeur constante estimée à 3250 m/s semble satisfaisante. Nous allons utiliser les logs fournis

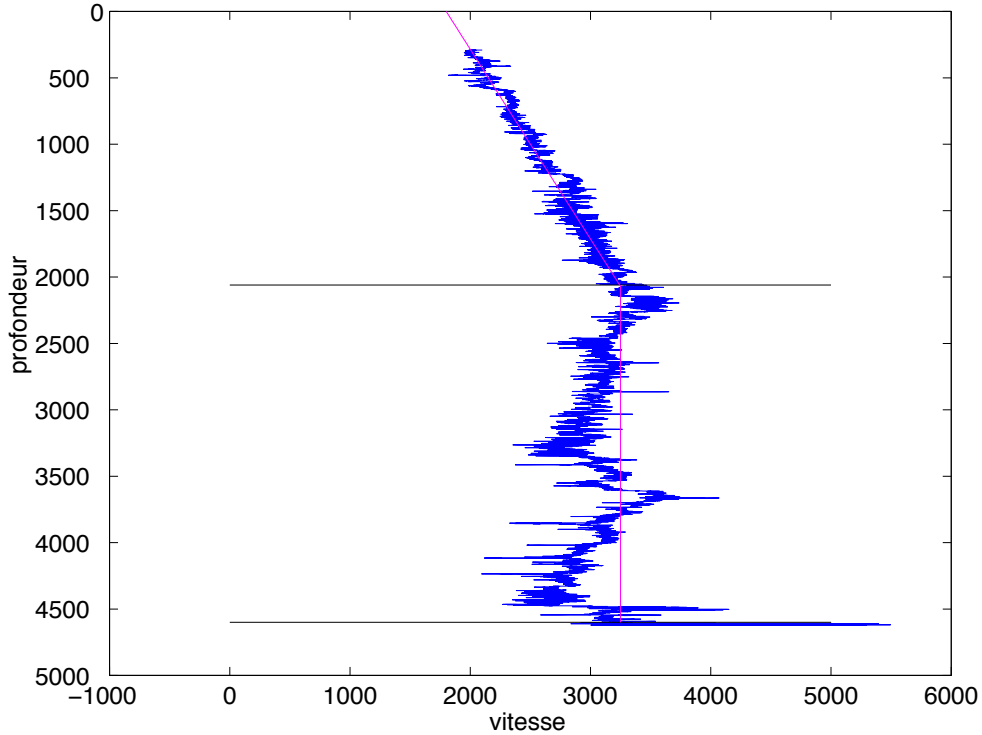


FIG. 6.2 – Log sonique le long du puits B, et ajustement proposé entre les surfaces pointées

par Agip afin d'obtenir une estimation de la longueur de corrélation verticale de la vitesse instantanée.

Dans la couche supérieure, nous avons étudié la structure des courbes résiduelles obtenues en ôtant des courbes de vitesses mesurées la dérive de vitesse en fonction de la profondeur.

Les quatre profils obtenus sont présentés à la figure 6.3.



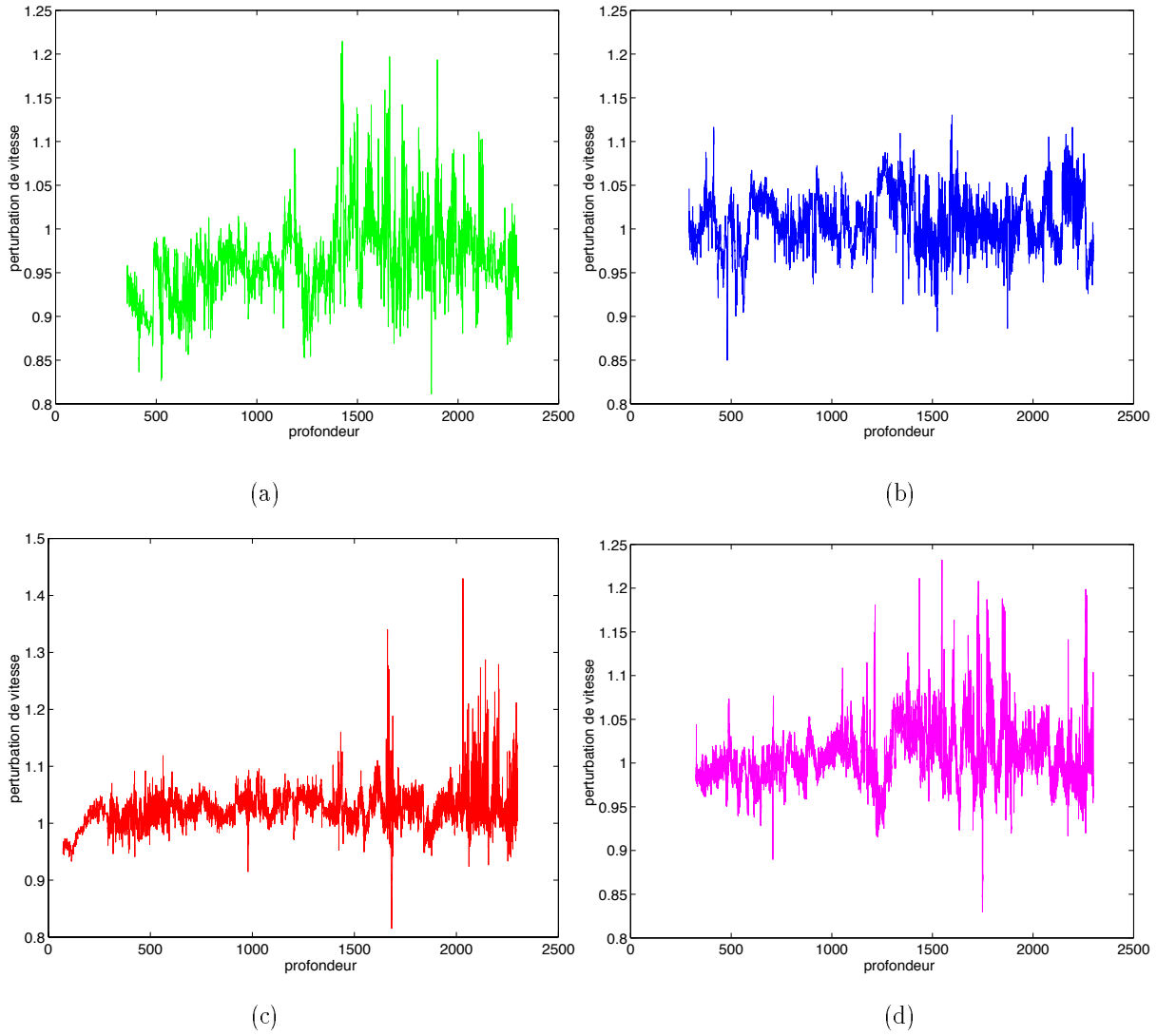


FIG. 6.3 – Résidus de vitesse, pour les puits A, B, C et D

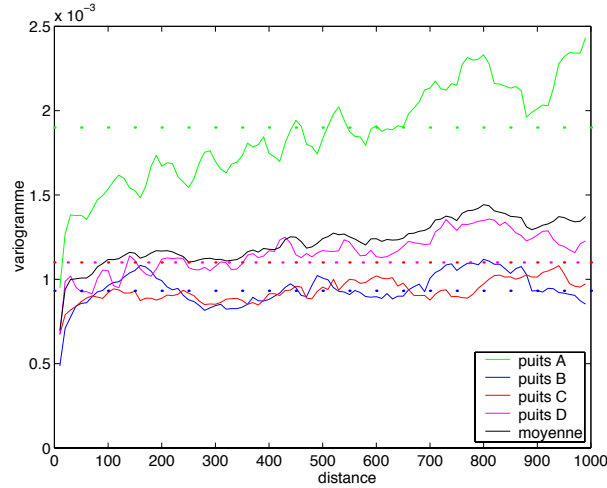


FIG. 6.4 – Variogrammes de vitesses pour les différents puits

On présente à la figure 6.4 les variogrammes correspondant à ces quatre profils. Le variogramme du puits A présentant un comportement légèrement différent des trois autres, nous avons choisi de ne pas le retenir pour la suite de la modélisation.

On présente à la figure 6.5 les variogrammes de vitesse correspondant aux trois autres puits, ainsi que l'ajustement obtenu pour le variogramme moyen. Il se compose d'un effet de pépité de  $2.8 \cdot 10^{-4}$  et d'un modèle exponentiel de portée 80m et de palier  $7 \cdot 10^{-4}$  (ce qui correspond à une perturbation de vitesse de 2.6 %).

Pour la seconde couche, on considère un modèle de variogramme constitué d'un effet de pépité de  $1.2 \cdot 10^{-3}$ , et d'une structure sphérique, de portée 480m et de palier  $4.8 \cdot 10^{-3}$ . Cet ajustement est présenté à la figure 6.6. Ceci correspond à une valeur de perturbation de vitesse de 7 %.

Notons que l'utilisation d'une dérive nulle pour cet intervalle nous donne un profil de vitesse présentant des fluctuations importantes, assimilables à des dérives différentes selon des couches géologiques. L'importance de la perturbation de vitesse mesurée et la portée plus grande proviennent en partie de cet effet. Toutefois, lors du pointé, nous n'avons pas pu mettre en évidence de réflecteur aux profondeurs correspondantes, et nous modéliserons cet ensemble relativement hétérogène comme une couche géologique unique.

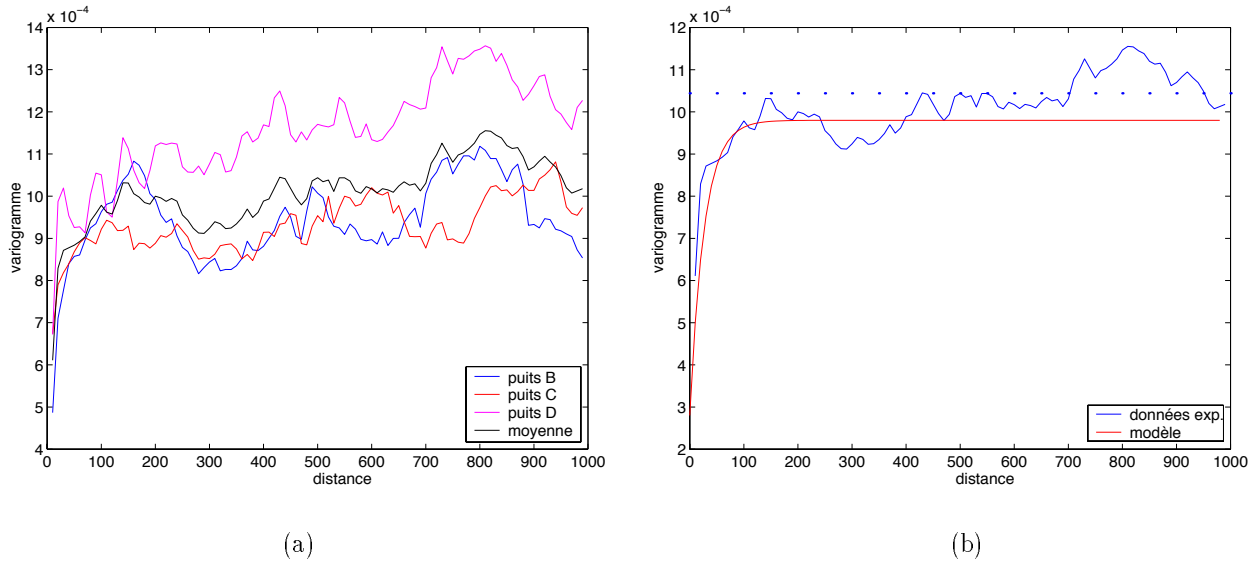


FIG. 6.5 – (a) Variogrammes de vitesses pour les différents puits, et variogramme moyen, en négligeant le puits A, et (b) ajustement du variogramme moyen

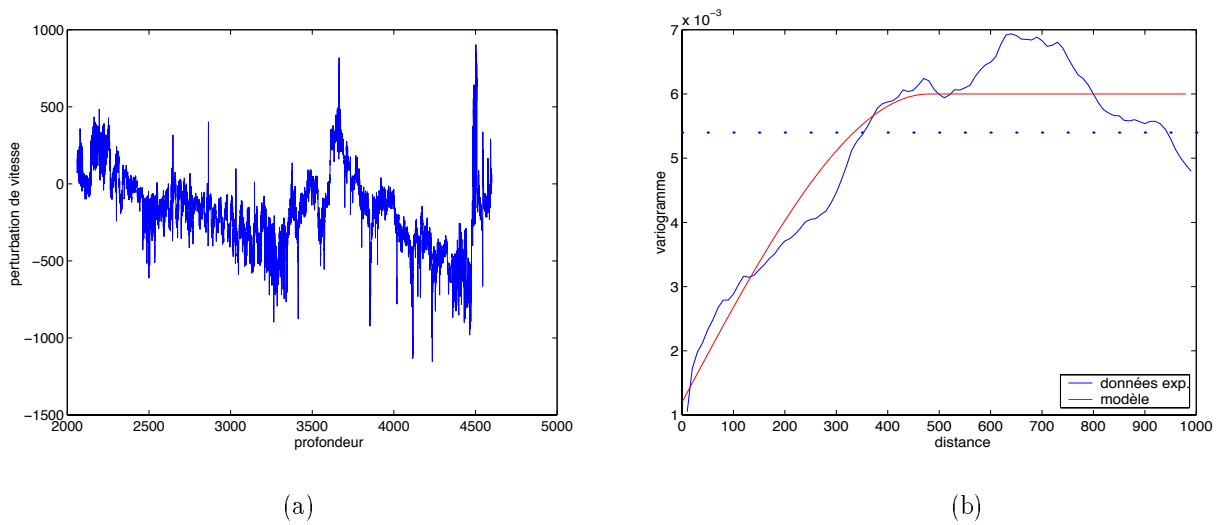


FIG. 6.6 – (a) Log de vitesse pour la seconde couche, au puits B, et (b) ajustement du variogramme

## 6.2 Comparaison des estimations obtenues à partir des deux familles de méthodes

La première série de tests vise à comparer les estimations obtenues à partir des méthodes de tomographie statistique avant-stack (présentée au paragraphe 3.2) et après-stack (paragraphe 3.3), pour un échantillon du jeu de donnée avant-stack. Pour cette comparaison, on néglige la croissance verticale du champ de vitesse.

L'application de la méthode de tomographie statistique avant-stack pose de nombreux problèmes: la présence de légères variations de la profondeur du réflecteur génère une surestimation de la variance des temps d'arrivée. La figure 6.7a présente le pointé de différents offsets, pour un morceau de réflecteur penté. On peut remarquer au passage l'absence de certaines valeurs pour les courbes de plus grands offsets. On voit à la figure adjacente 6.7b la courbe expérimentale de variance des temps d'arrivée en fonction de l'offset. Les valeurs atteintes sont très importantes.

La correction des temps d'arrivée pour cet effet n'offre pas encore un résultat entièrement satis-

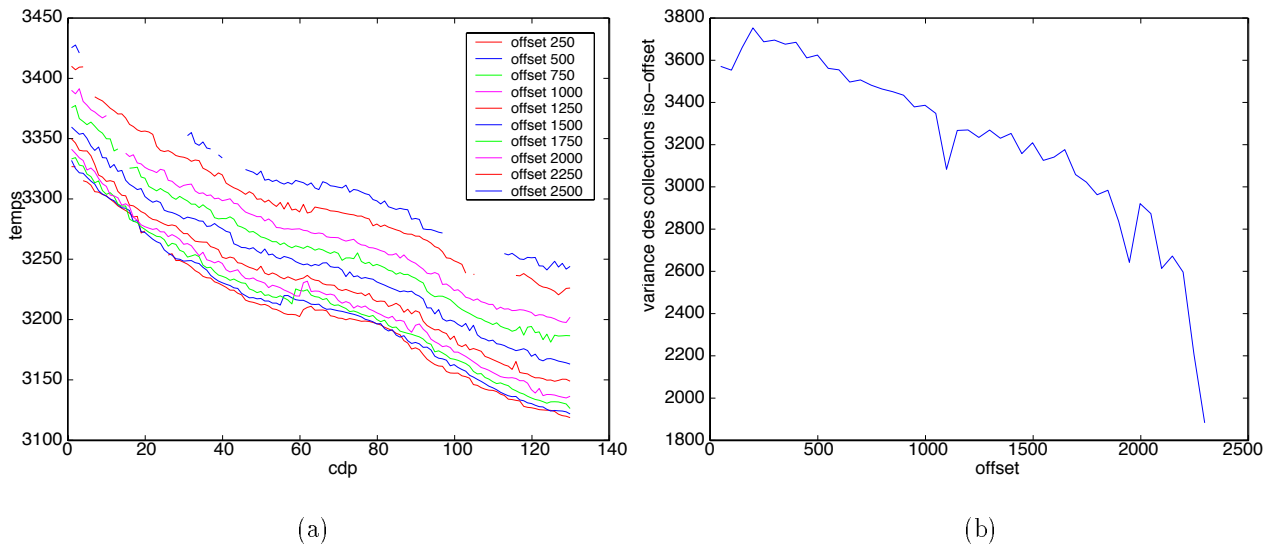


FIG. 6.7 – Collections iso-offset de temps d'arrivée, pour le réflecteur profond

faisant. On voit à la figure 6.8a les courbes de temps d'arrivée obtenues en supprimant l'effet de dérive. La figure 6.8b présente la courbe de variance correspondante: on obtient logiquement une croissance de la variance en fonction de l'offset, soit un effet contraire à celui prédit par les méthodes théoriques développées.

La stratégie du pointé -qui néglige l'hyperbolicité de la courbe des temps d'arrivée en fonction de l'offset- est telle que l'imprécision sur la position du réflecteur à grand offset est nettement supé-

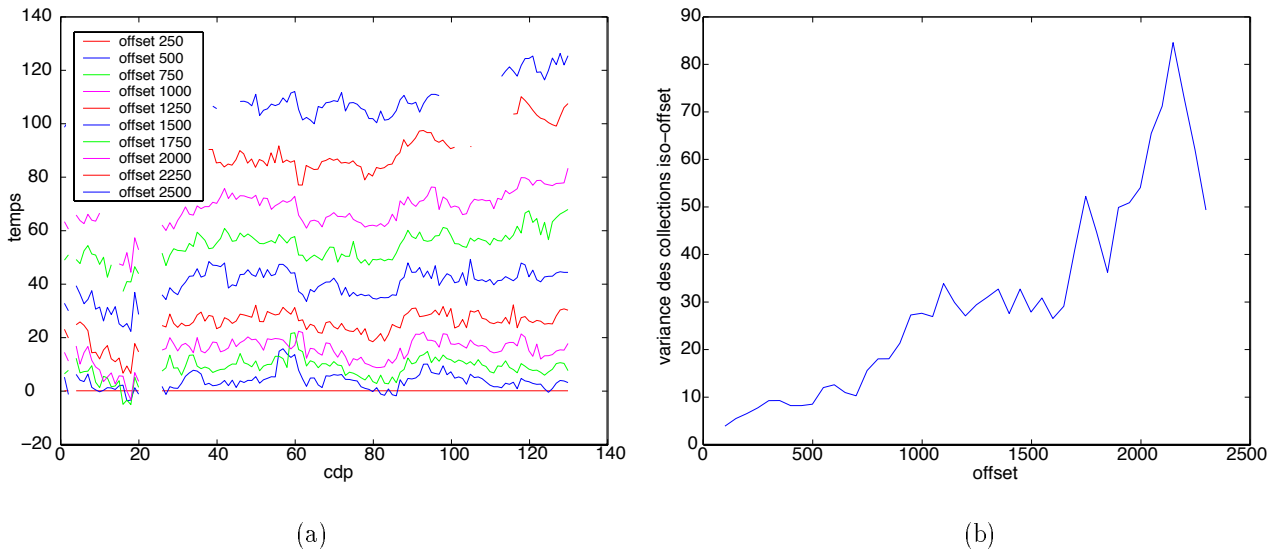


FIG. 6.8 – Collections iso-offset de temps d'arrivée, après retrait du temps zero-offset, pour le réflecteur profond

rière à celle constatée à faible offset. Ce phénomène prend une ampleur notable dans le cas présent du fait de la qualité réduite des données sismiques.

Pour plusieurs lignes sismiques, on constate que la variance des temps d'arrivée croît en fonction de l'offset -de façon comparable au résultat présenté à la figure 6.8b, au contraire de ce qui est théoriquement prévu. C'est pour cette raison que la comparaison présentée ci-après se base seulement sur les zones pointées issues des deux lignes sismiques 4 et 5.

Pour ces morceaux de lignes sismiques, le pointé est de qualité satisfaisante, ce qui nous permet d'obtenir des courbes de variance présentant la tendance générale attendue. Malheureusement, la taille réduite des échantillons utilisés limite la précision des estimations obtenues.

On présente à la figure 6.9a les courbes de temps d'arrivée pour les différents offsets, le long de la ligne 5. On voit que le réflecteur semble relativement horizontal dans la partie droite du graphique, pour les cdp compris entre 80 et 130. La figure 6.10 présente la courbe de variance des temps d'arrivée en fonction de l'offset obtenue en ne considérant que cette portion du pointé. On y a adjoint la courbe obtenue en réalisant le même travail de sélection sur une portion de pointé le long de la ligne 4, présentée à la figure 6.9b.

Les deux courbes de variance (figure 6.10) présentent un aspect proche de celui prédit par la théorie. On remarquera tout de même que la variance des temps croît de l'offset 0 à l'offset 500 environ. Ce phénomène est provoqué par la méthode de propagation utilisée pour le pointé, qui sous-estime la variance entre valeurs à faible offset. L'ajustement de ces deux courbes par une courbe théorique

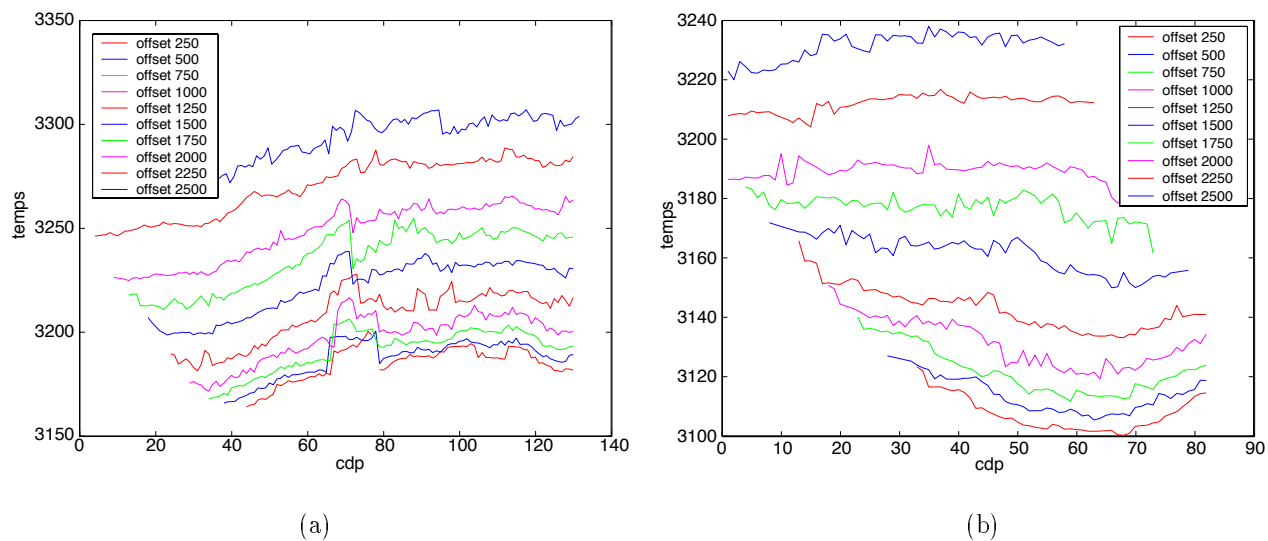


FIG. 6.9 – Temps d'arrivée le long (a) de la ligne 5 et (b) de la ligne 4

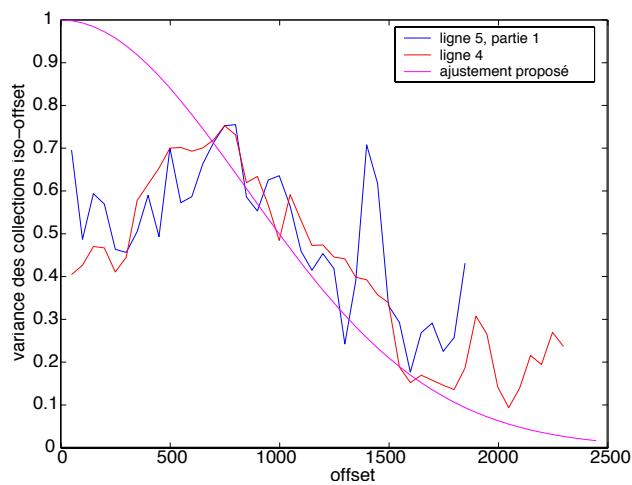


FIG. 6.10 – Variance normalisée des temps d'arrivée pour les sections choisies des lignes 4 et 5, et ajustement proposé

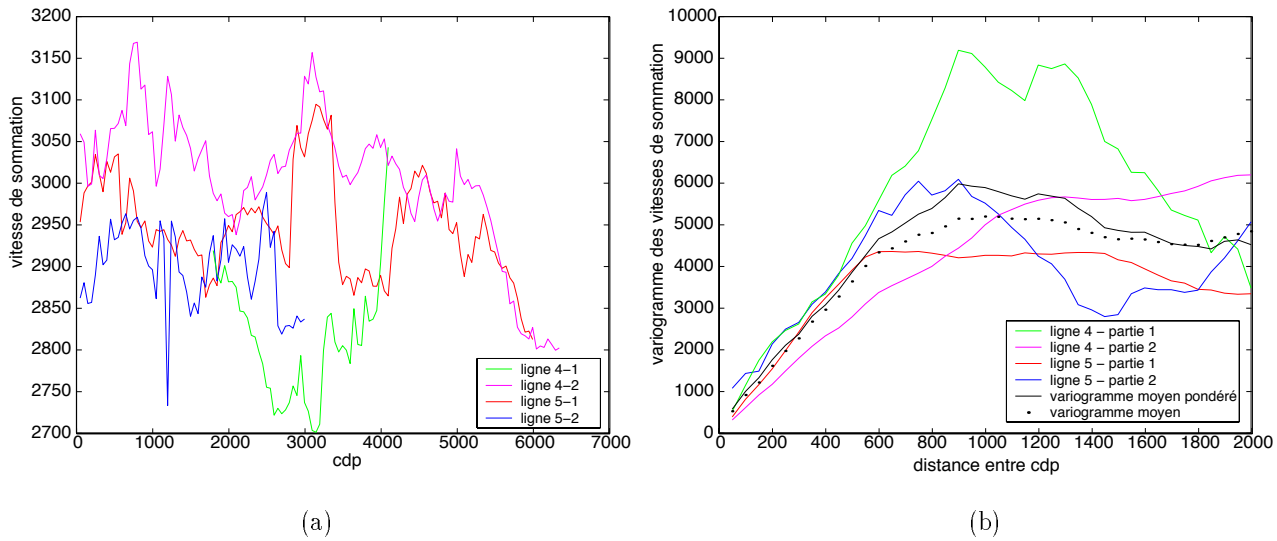


FIG. 6.11 – (a) Vitesses de sommation et (b) variogrammes correspondants, pour les sections de lignes sismiques 4 et 5

est obtenu en utilisant un modèle de covariance gaussien, de longueur de corrélation horizontale  $a = 1200m$ . On voit que l'ajustement est assez satisfaisant, si l'on néglige les valeurs aux plus faibles offsets. On remarquera que le fait de ne pas faire confiance à ces valeurs initiales nous oblige à supposer la valeur réelle de la variance à offset nul, dont nous avons besoin pour normaliser les valeurs de variance. Ceci génère une incertitude supplémentaire dans le processus d'estimation.

L'application de la méthode de tomographie statistique post-stack est plus simple, la supervision requise de la part de l'utilisateur étant moins importante.

On présente à la figure 6.11a les profils de vitesses de sommation obtenus par ajustement hyperbolique des temps d'arrivée. Pour les quatre sections sismiques, les courbes considérées varient assez fortement, mais sans tendance à grande échelle. Les variogrammes de ces quatre courbes sont présentés à la figure 6.11b, ainsi que la courbe moyenne.

Le variogramme expérimental ainsi généré correspond de façon très satisfaisante à la courbe théorique obtenue en considérant un milieu de covariance gaussienne, avec une longueur de corrélation horizontale  $a = 800m$ . L'ajustement entre ces deux courbes est présenté à la figure 6.12.

En conclusion, on constate que les deux méthodes peuvent être assez facilement mises en oeuvre, et aboutissent à des estimations de même ordre de grandeur. La méthode pré-stack demande la supervision de l'utilisateur pour la sélection des sections de données utilisées, tandis que la méthode post-stack utilise l'ensemble des lignes sismiques disponibles. La première méthode peut en général

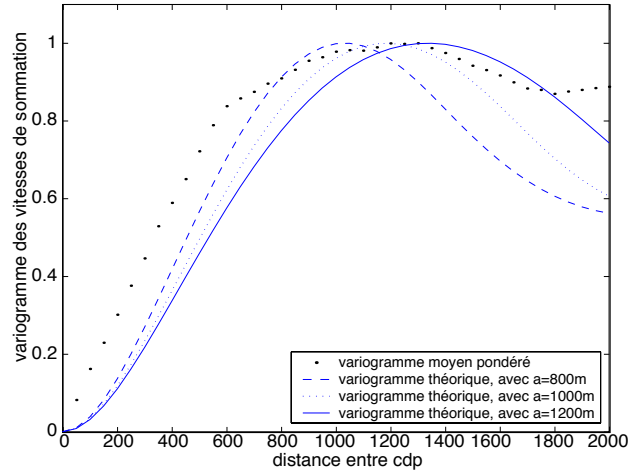


FIG. 6.12 – Ajustement du variogramme expérimental moyen par une courbe théorique

réaliser l'estimation de la longueur de corrélation horizontale  $a$  de façon automatique (au moyen de l'équation (3.6)), tandis que la méthode post-stack impose de réaliser l'ajustement interactif de la courbe expérimentale par essai-erreur. Dans le cas présenté, la méthode pré-stack demande aussi cet ajustement interactif, le bruit dans le pointé des données réelles empêchant l'utilisation de l'équation (3.6). Cette sensibilité à la qualité du pointé pré-stack rend la méthode globalement plus laborieuse et moins robuste que la méthode post-stack.

Remarquons que Thore et Juliard (1999) donnent une expression quantitative de cet effet, et montrent que la précision des analyses de vitesse est limitée par la taille de la zone de Fresnel à la profondeur investiguée.



### 6.3 Extensions vers le milieu multi-couches

Les développements apportés à la méthode d'estimation post-stack permettent d'affiner l'estimation de la longueur de corrélation, en tenant à présent compte de la croissance de la vitesse moyenne au sein de la première couche.

Nous allons modéliser notre champ de vitesse sous la forme de deux couches géologiques distinctes, dont les réflecteurs se situent à des profondeurs respectives de 2060 et 4600 mètres environ. Le profil de la valeur de vitesse moyenne  $v_0(z)$  en fonction de la profondeur est obtenu à partir de l'enregistrement sonique de puits présenté à la figure 6.2. La croissance de la vitesse moyenne au sein de la première couche est égale à  $0.7m/s$  par mètre de profondeur. On remarquera que l'ensemble de ces valeurs correspond à celles utilisées pour les cas synthétiques présentés pour illustrer les paragraphes 3.4.2 et 3.4.3.

A la figure 6.13a sont illustrés les trois profils de vitesses de stack obtenus à partir des temps pointés le long du réflecteur horizontal situé à une profondeur de 2060m. La qualité moyenne de pointé nous donne des profils erratiques.

Les variogrammes correspondant à ces profils sont présentés à la figure 6.13b, avec la courbe de

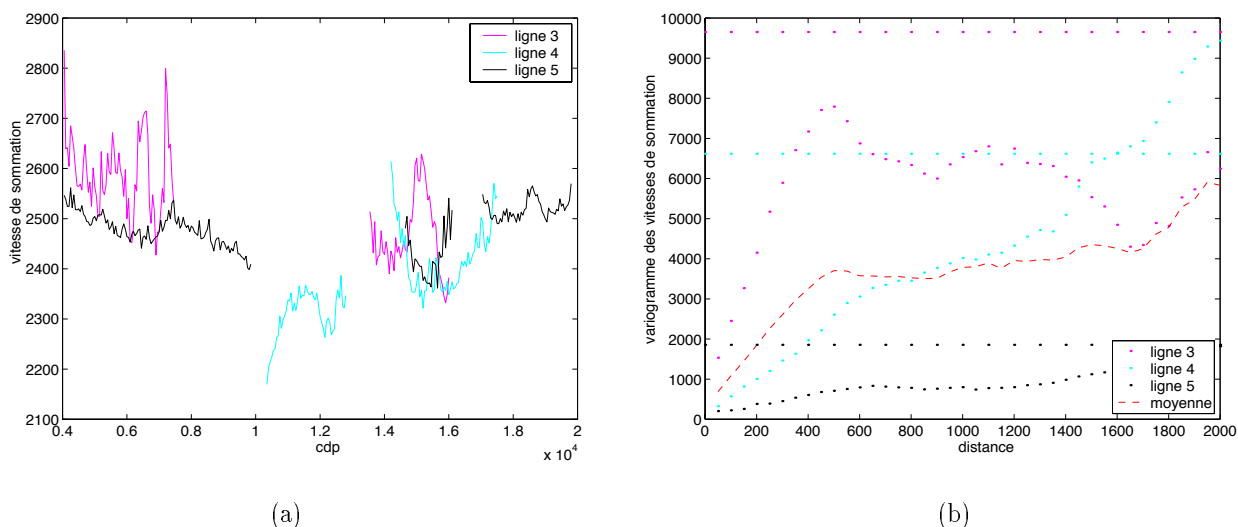


FIG. 6.13 – Profil des vitesses de sommation et variogrammes, pour le réflecteur supérieur

variogramme moyen. On peut remarquer que les variances des trois collections de vitesses de sommation sont d'ordres assez différents.

L'ajustement obtenu en utilisant un modèle théorique est présenté à la figure 6.14. Il est réalisé en modélisant la covariance du champ de vitesse instantanée par une structure gaussienne de longueur

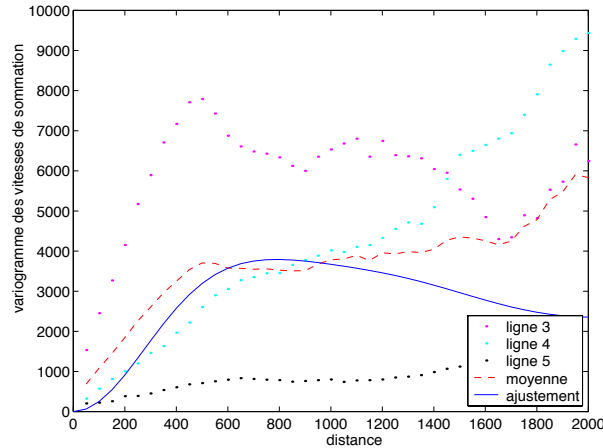


FIG. 6.14 – Ajustement du variogramme, pour le réflecteur supérieur

de corrélation horizontale 350m, et une amplitude des perturbations  $\sigma_\epsilon$  égale à 3 %. Remarquons que le rapport d'anisotropie<sup>37</sup> entre longueurs de corrélation horizontale et verticale est de l'ordre de 4. On peut utiliser cette estimation des paramètres de la couche supérieure pour permettre la modélisation des paramètres de covariance de la couche inférieure.

On présente à la figure 6.15a les cinq profils de vitesses de sommation obtenus à partir des temps pointés le long de l'horizon inférieur. La qualité du pointé semble meilleure que pour le réflecteur supérieur (voir figure 6.13), permettant d'obtenir des profils nettement plus longs, même si quelques valeurs erratiques perturbent toujours ceux-ci.

Les variogrammes correspondants à ces profils sont présentés à la figure 6.15b. Les variances pour les différents profils sont aussi présentées sur ce graphique, on constate qu'elles sont toutes dans la même gamme de valeurs.

La figure 6.16a présente à nouveau les variogrammes expérimentaux des vitesses de stack correspondant au réflecteur inférieur. Nous y avons ajouté le variogramme théorique correspondant à la contribution de la première couche.

Nous remarquons que, dans sa première partie ( $h < 1500m$ ), ce variogramme théorique a des valeurs plus élevées que le variogramme expérimental moyen. Ceci correspond à l'obtention d'un variogramme résiduel négatif, comme l'illustre la figure 6.16b. L'ajustement du variogramme des vitesses de sommation pour le réflecteur inférieur est donc impossible dans de telles conditions, et il est nécessaire de modifier la modélisation adoptée pour la couche supérieure.

<sup>37</sup>On obtient une estimation de la longueur de corrélation horizontale égale à 350m et de la longueur de corrélation verticale égale à 80m.

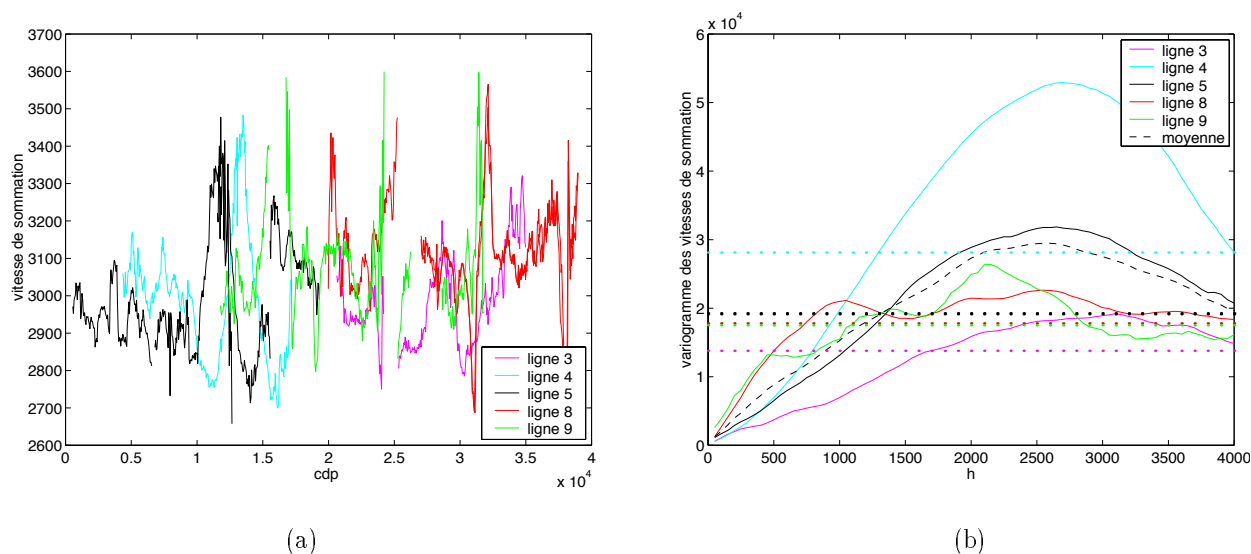


FIG. 6.15 – (a) Profils des vitesses de sommation, pour le réflecteur inférieur, et (b) variogrammes correspondants

L'obtention d'un variogramme résiduel négatif signifie que les paramètres que nous avons adoptés pour la première couche impliquent une trop grande variabilité. Nous proposons de réaliser l'ajustement en ne considérant que le ligne 4, pour laquelle la variance est la plus faible.

Cet ajustement est présenté à la figure 6.17a, le modèle utilisé est constitué d'une structure gaussienne avec une longueur de corrélation horizontale de 350m, et un écart-type  $\sigma_\epsilon$  des perturbations de vitesse égal à 1.33 %. On constate que cette nouvelle modélisation ne modifie que le paramètre  $\sigma_\epsilon$  par rapport à la précédente modélisation.

De plus, pour un meilleur ajustement de la courbe théorique à la courbe expérimentale, nous avons ajouté dans le modèle de covariance des vitesses du milieu un effet de pépité, d'une valeur de 30% de la variance totale. Cette valeur, correspondant à l'effet de pépité obtenu lors de l'ajustement de la covariance verticale du champ de vitesse, nous donne un effet de pépité pour le modèle de covariance des vitesses de 20%, qui s'ajuste très bien aux valeurs expérimentales.

A la figure 6.17b, on montre le variogramme résiduel obtenu en considérant cette nouvelle paramétrisation de la couche supérieure. Il est à présent confiné dans la partie positive de l'espace. Il est modélisé par une structure gaussienne de longueur de corrélation horizontale de 2800m, et avec un écart-type des perturbations de vitesse<sup>38</sup>  $\sigma_\epsilon$  estimé à 27%. Finalement, on montre l'ajustement obtenu pour le variogramme des vitesses de sommation de la couche inférieure, en utilisant l'ensemble

<sup>38</sup>Remarquons que la valeur obtenue pour ce dernier paramètre sort des hypothèses initiales de modélisation de la perturbation de vitesse (approximation au premier ordre).

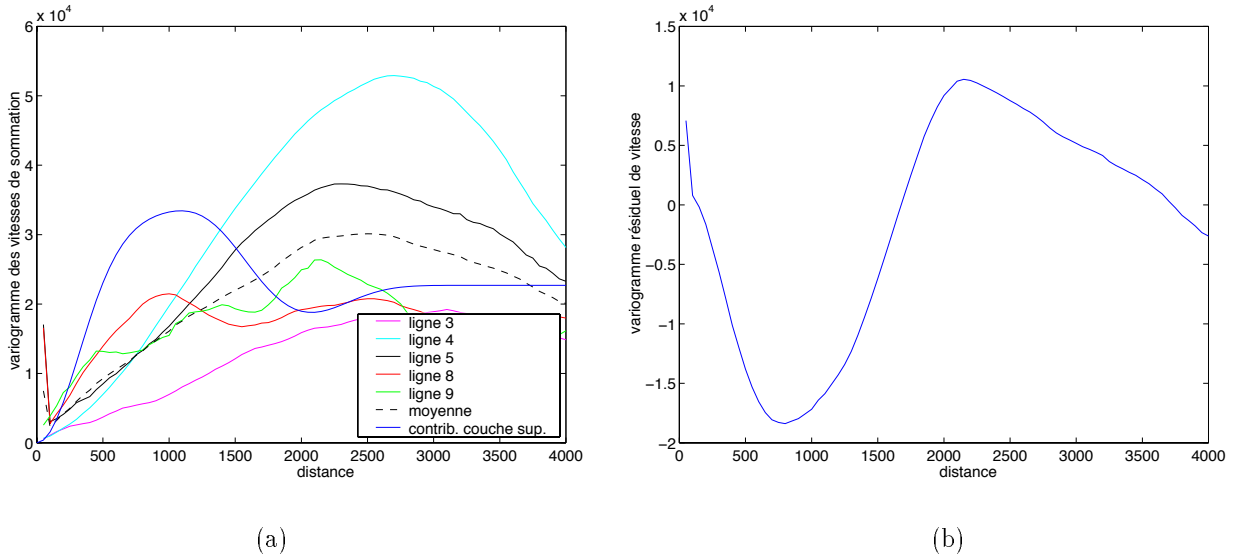


FIG. 6.16 – (a) Variogrammes des vitesses de sommation, pour le réflecteur inférieur, avec modèle de variogramme dû à la contribution de la première couche, et (b) variogramme résiduel obtenu par soustraction du variogramme théorique correspondant à la contribution de la première couche au variogramme expérimental

des paramètres de modélisation. Ce résultat est présenté à la figure 6.18.

La robustesse de l'estimation peut être testée en étudiant la variation qu'induit sur les paramètres estimés une modification du jeu de données utilisé.

Une telle expérience peut simplement être réalisée en négligeant les valeurs apparemment aberrantes remarquées le long des profils de vitesses de sommation. L'extraction de ces valeurs peut se faire de manière manuelle (édition des valeurs le long des profils) ou par seuillage (rejet des valeurs supérieures à  $3200\text{m/s}$  ou inférieures à  $2800\text{m/s}$ ). On constate que les résultats obtenus par ces deux méthodes sont sensiblement équivalents.

Les variogrammes des vitesses de stack ainsi obtenus présentent un palier moins élevé, ce qui s'explique par la suppression des valeurs les plus éloignées de la moyenne. La modélisation du nouveau variogramme résiduel nous fait conserver les structures précédemment définies, mais avec une variance réduite. L'écart-type des perturbations de vitesse représente à présent 16% des valeurs de vitesse<sup>39</sup>. Ces nouveaux résultats sont illustrés aux figures 6.19 et 6.20. Nous pouvons conclure ce paragraphe en remarquant que la méthode mise au point permet la modélisation des paramètres stochastiques du milieu multi-couches. La méthode d'ajustement itératif nous permet un ajustement efficace couche par couche, en modifiant ainsi un ensemble réduit de paramètres. L'utilisation

<sup>39</sup>Cette valeur cadre mieux avec l'hypothèse de faibles perturbations utilisée lors de la modélisation théorique.

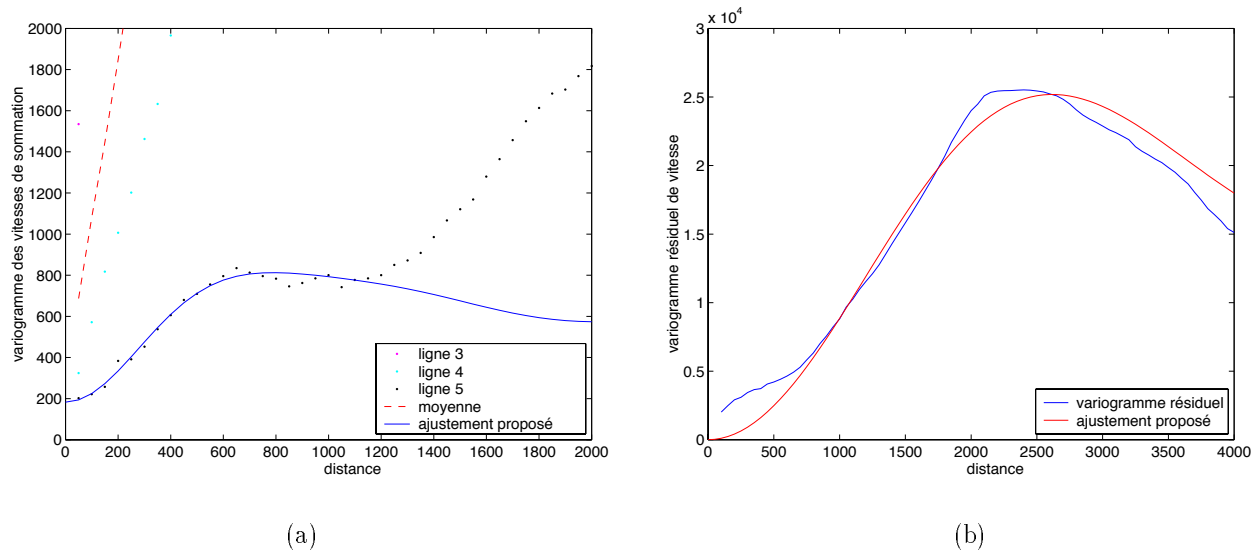


FIG. 6.17 – (a) Variogrammes des vitesses de stack, pour le réflecteur supérieur, avec le nouveau modèle de variogramme, et (b) variogramme résiduel pour l'estimation du modèle de variogramme pour la couche inférieure

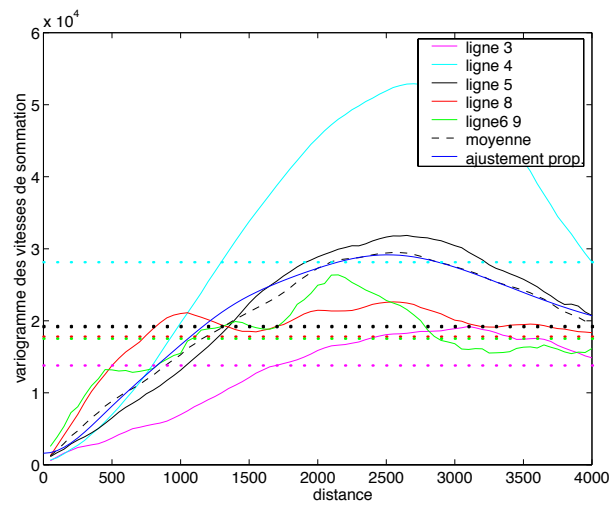


FIG. 6.18 – Variogramme des vitesses de stack, pour le réflecteur inférieur, avec le modèle de variogramme

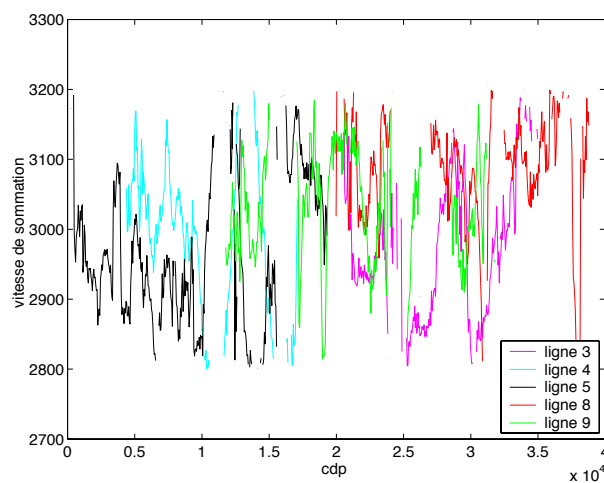


FIG. 6.19 – Profils des vitesses de stack, pour le réflecteur inférieur, après édition

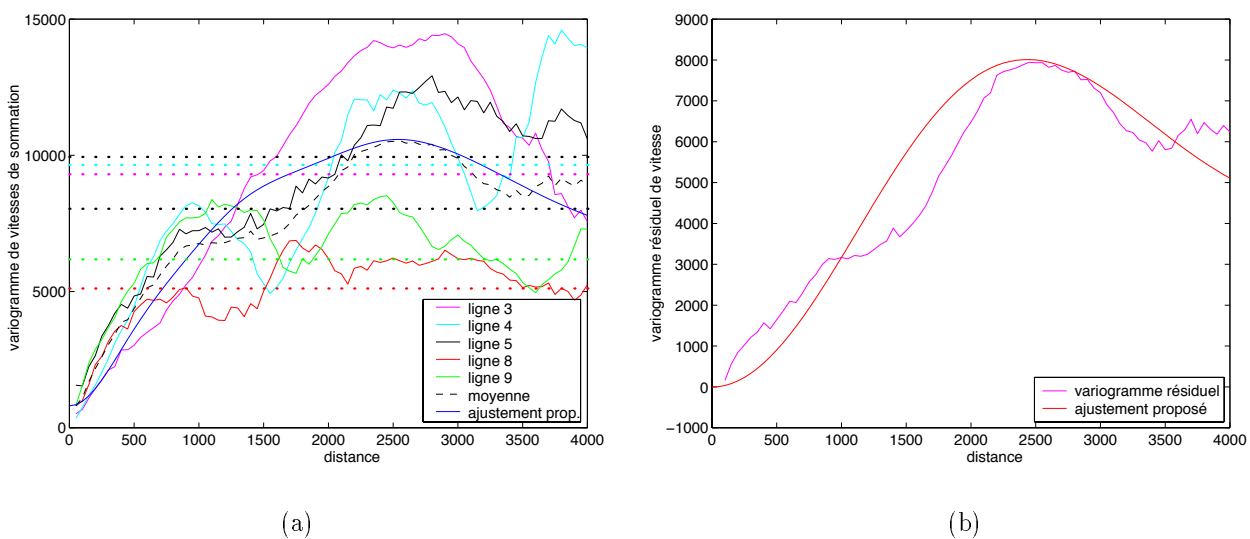


FIG. 6.20 – (a) Variogramme des vitesses de stack, pour le réflecteur inférieur, après édition, avec le nouveau modèle de variogramme, et (b) variogramme résiduel pour l'estimation du modèle de variogramme pour la couche inférieure

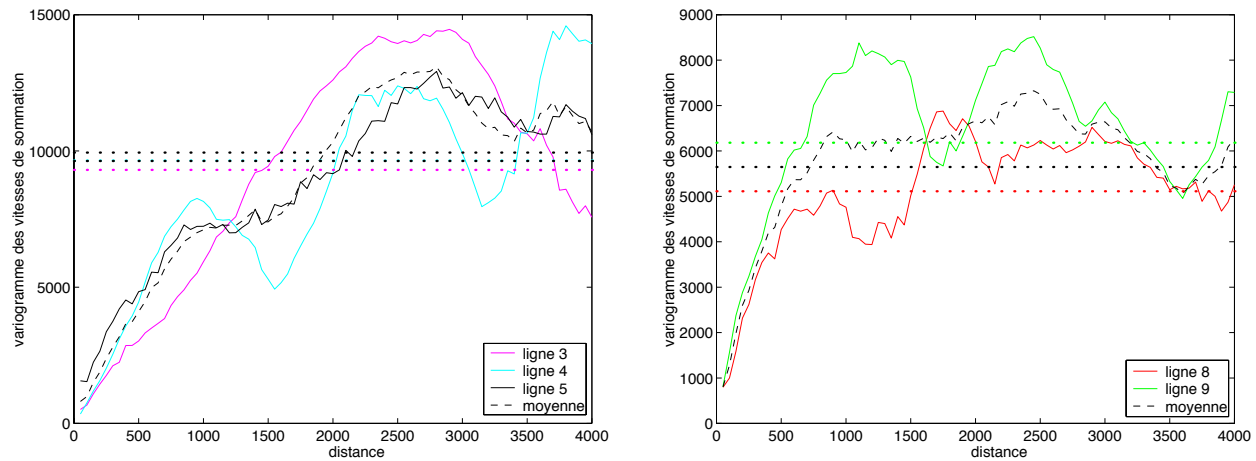


FIG. 6.21 – Variogrammes des vitesses de stack, pour le réflecteur inférieur, après édition, en considérant les deux directions orthogonales, et variogrammes moyens

du variogramme résiduel permet de mettre en évidence des problèmes dans l'ajustement dus à une modélisation erronée des couches sus-jacentes.

Remarquons finalement que nous n'avons pas évoqué dans cette section la présence éventuelle d'une anisotropie horizontale du champ des perturbations de vitesse. Il est difficile en effet, à partir des données présentées ici, de mettre en évidence une différence notable entre les variogrammes expérimentaux correspondant aux lignes 8 et 9, orientées NO-SE, et ceux des lignes 3, 4, 5, orientées NE-SO. Le calcul séparé des variogrammes expérimentaux moyens pour ces deux séries de lignes, présenté à la figure 6.21, semble suggérer la possible présence d'un tel caractère anisotrope du champ de perturbations de vitesse.

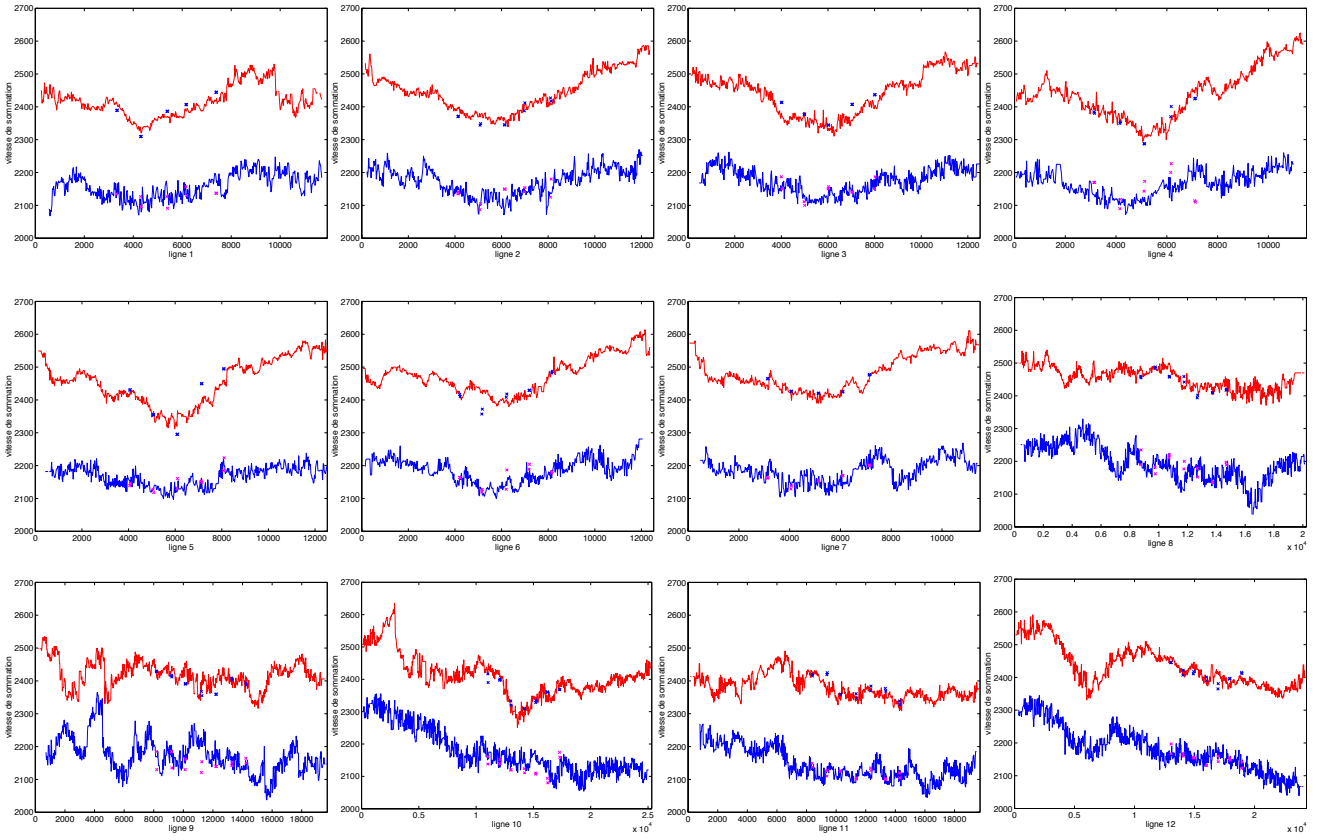


FIG. 6.22 – Profils de vitesses de sommation, pour les deux horizons  
 Les profils 1 à 7 sont orientés SE-NO, les profils 8 à 12 SO-NE

## 6.4 quantification de l'incertitude d'estimation en fonction de la qualité du pointé

Nous allons utiliser le nouvel ensemble de données pour valider l'estimation obtenue pour la longueur de corrélation horizontale. Les profils de vitesses de sommation sont présentés à la figure 6.22. Ils proviennent de deux réflecteurs situés à des profondeurs de 1500 et 2000m. Ces deux réflecteurs se trouvant dans la première couche géologique considérée, la différence enregistrée entre les estimations obtenues reflète l'impact de la qualité du pointé sur l'estimation.

Les points isolés figurant sur les profils représentent les projections des valeurs prises le long des lignes sismiques croisées. Les décalages aux croisements sont d'une amplitude non négligeable. Nous reviendrons sur ce point à la section 7.5, dans le cadre de la simulation du champ de vitesse.



On remarque sur les profils de la figure 6.22 la plus grande volatilité caractérisant les vitesses de sommation de l'horizon supérieur, représentées en bleu, et que nous désignerons "horizon 1". Cette particularité n'apparaît pas dans les tableaux de statistiques 6.1 et 6.2 décrivant les mesures de vitesse de sommation. Cette particularité peut être mise en évidence par une étude des distributions

ligne	nbre de données	vit. som. moyenne ( $m/s$ )	variance ( $m^2/s^2$ )	écart-type ( $m/s$ )
1	446	2158.6	1449.9	38.08
2	496	2171.5	1686.3	41.06
3	482	2174.7	1437.1	37.91
4	439	2166.8	1508.4	38.84
5	484	2166.8	865.7	29.42
6	476	2186.3	1375.7	37.09
7	438	2184.2	1236.3	35.16
8	781	2195	2889.2	53.75
9	758	2174.2	3030.1	55.05
10	990	2178.1	4903.2	70.02
11	751	2145	2247.8	47.41
12	944	2181.3	4558.1	67.51
total	7485	2176.5	2715.3	52.11

TAB. 6.1 – Statistiques des vitesses de sommation pour l'horizon 1

ligne	nbre de données	vit. som. moyenne ( $m/s$ )	variance ( $m^2/s^2$ )	écart-type ( $m/s$ )
1	456	2416.4	2149.5	46.36
2	489	2447.2	3695.5	60.79
3	495	2442.4	4249.6	65.19
4	455	2440.5	6034	77.68
5	496	2455.8	4780.4	69.14
6	494	2476.3	2984.1	54.63
7	458	2484	2995.6	54.73
8	790	2454.6	1049.4	32.39
9	777	2419.8	1718.6	41.46
10	1020	2413.3	4529	67.3
11	782	2381	1227.3	35.03
12	966	2436	3690.1	60.74
total	7450	2436.4	3878.6	62.28

TAB. 6.2 – Statistiques des vitesses de sommation pour l'horizon 2

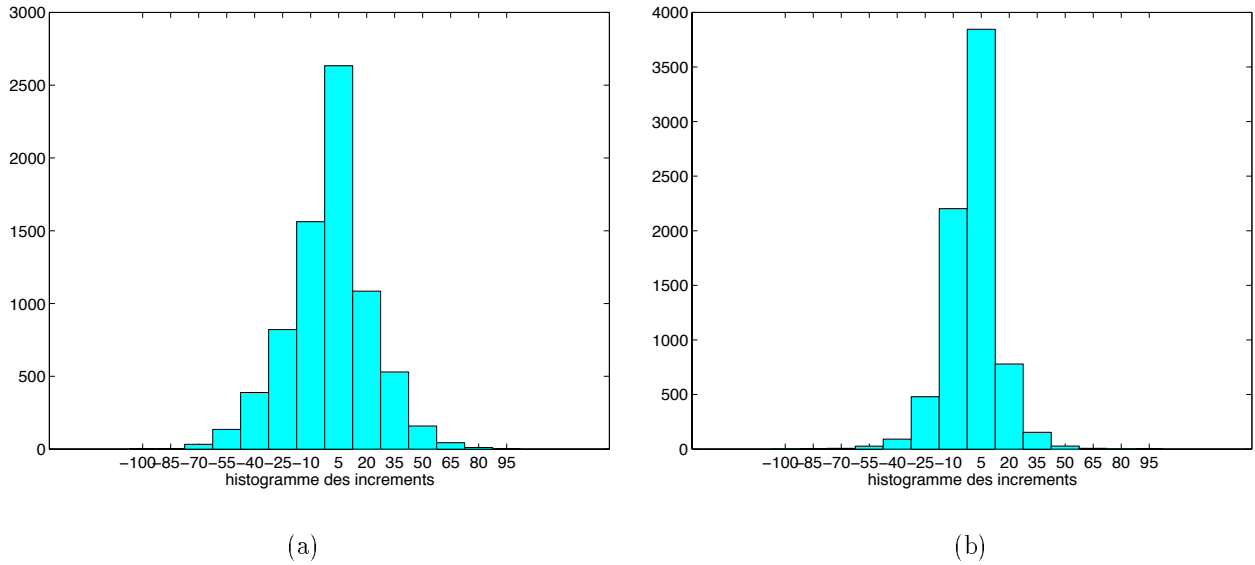


FIG. 6.23 – Histogrammes des incréments de vitesses de sommation le long des différents profils pour (a) l’horizon 1 et (b) l’horizon 2

d’incrément de vitesse le long des profils. La comparaison des histogrammes d’incrément présentés aux figures 6.23 montre la plus grande variance des incréments pour l’horizon 1. Thore et Juliard (1999) montrent que les fluctuations de taille inférieure à la zone de Fresnel (130 et 170m pour les deux horizons étudiés) ne peuvent être discernées par l’outil d’analyse de vitesse, raison pour laquelle ces auteurs proposent de lisser les horizons avec un filtre correspondant à la taille de la zone de Fresnel.

Les profils de vitesses de sommation présentés à la figure 6.22 peuvent donner l’impression que les analyses de vitesse entre les deux réflecteurs sont corrélées. La présence d’un phénomène à l’échelle régionale - une zone de faible vitesse dans la zone centrale du dispositif - se reproduisant sur les deux horizons renforce cette impression.

Les valeurs numériques nuancent cette appréciation : les valeurs de corrélation mesurées oscillent entre 0.2137 et 0.8378, correspondant aux lignes sismiques 9 et 12. On présente à la figure 6.24 les nuages de corrélation entre horizons pour ces deux lignes sismiques.

La présence de cette corrélation positive confirme la pertinence de notre choix de modélisation par une couche géologique unique.

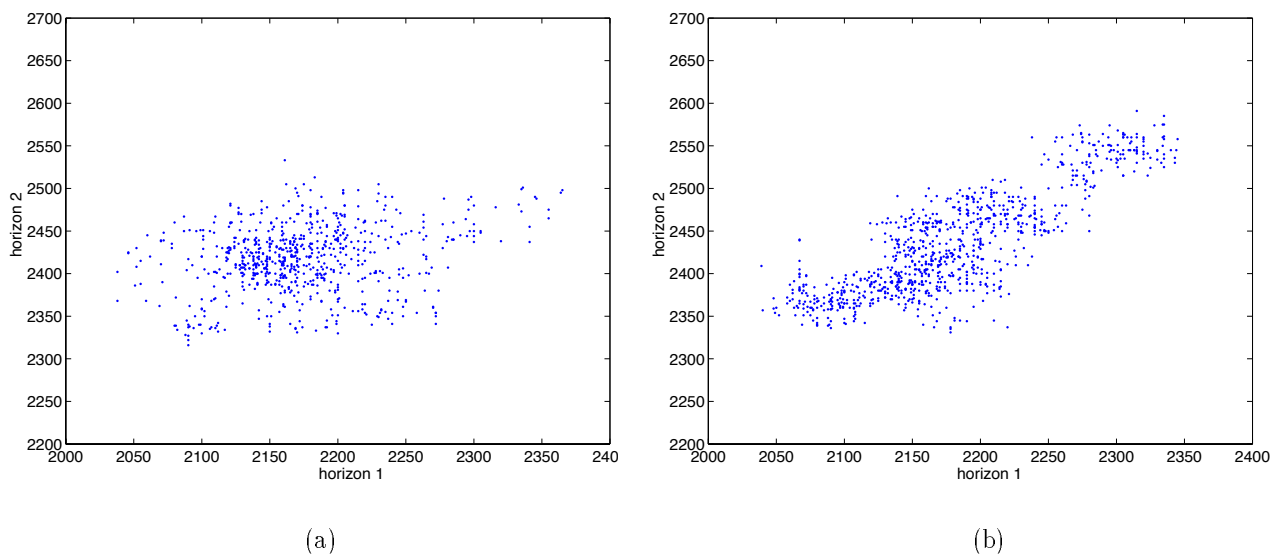


FIG. 6.24 – Nuages de corrélations entre vitesses de sommation pour les deux horizons pour (a) la ligne sismique 9 et (b) la ligne sismique 12

On calcule ensuite les variogrammes expérimentaux de ces profils de vitesses de sommation. Ils sont présentés à la figure 6.25. On remarque que le variogramme correspondant au premier horizon ne semble pas se stabiliser à un palier. Cet effet est causé par le gradient important présent dans la direction SO-NE. Un variogramme réalisé en ne prenant en compte que les données situées dans la zone centrale présentera néanmoins le même aspect général pour les distances inférieures à 6000m, les distances supérieures à cette valeur ne pouvant être décrites dans ce cas.

On a ajouté sur les graphes 6.25 l’ajustement obtenu en utilisant le modèle développé dans ce manuscrit.

Le milieu de vitesse instantanée est décrit par un modèle composé d’une structure gaussienne de longueur de corrélation horizontale<sup>40</sup> de 4600m et d’un effet de pépite de 5 %. Pour le variogramme correspondant au premier horizon, on ajoute un effet de pépite de 30 % dû au pointé. Les variances expérimentales figurent aussi sur les graphes. Elles valent respectivement  $2820 (m/s)^2$  et  $3868 (m/s)^2$ . On constate que les ajustements sont très satisfaisants, même s’il a été impossible au

<sup>40</sup>La longueur de corrélation verticale étant fixée à 80m - valeur obtenue précédemment à partir des variogrammes des vitesses soniques.

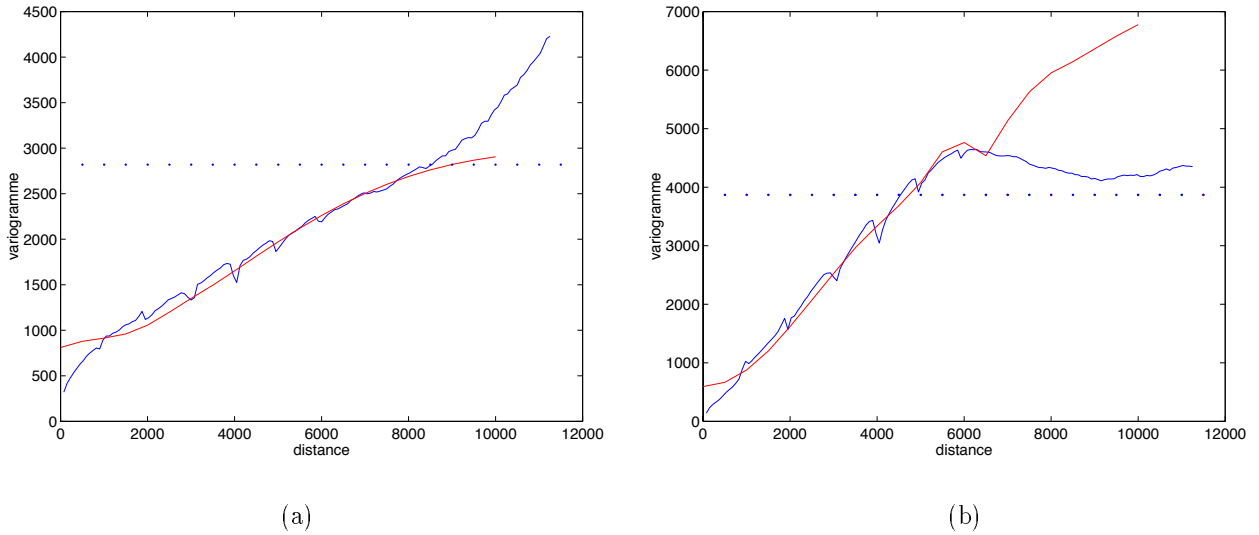


FIG. 6.25 – Variogrammes expérimentaux des vitesses de sommation et ajustement par le modèle théorique pour les horizons (a) 1 et (b) 2

moyen des modèles utilisés d'obtenir une courbe théorique qui s'ajuste aux très petites distances avec la courbe expérimentale.

Il est important de noter que l'utilisation de deux réflecteurs nous permet dans ce cas d'identifier la portion d'effet de pépité mesurée sur le variogramme des vitesses de stack qui provient du bruit dans les opérations de pointé, par rapport à l'effet de pépité présent dans le modèle de corrélation du champ de vitesse instantanée<sup>41</sup>.

<sup>41</sup>L'effet de pépité du champ de vitesse instantanée est intégré le long des parcours de rayons, dans l'équation (D.1) pour l'estimation de la covariance des temps de trajet  $Str(T_1, T_2)$ .

Si l'on représente le modèle de covariance des temps d'arrivée pointés par la somme des composantes

$$\mathbf{Cov}[T_1, T_2] = P_{ep} + Str(T_1, T_2) \quad ,$$

où  $P_{ep}$  représente l'effet de pépité dû à l'incertitude du pointé, on trouve directement

$$\mathbf{Cov}[T_1^2, T_2^2] = 4\mathbf{E}[T_1] \mathbf{E}[T_2] P_{ep} + 4\mathbf{E}[T_1] \mathbf{E}[T_2] Str(T_1, T_2) \quad ,$$

Remarquons finalement que, pour répondre au problème de la dérive régionale de vitesse, nous avons proposé de modéliser la covariance entre temps d'arrivée à offset nul obtenus lors de l'analyse de vitesse. Les profils de temps d'arrivée à offset nul peuvent être reconstitués par le rapport des profils de vitesses de sommation et d'estimation de profondeur

$$t_0 = \frac{V_{stack}}{profondeur} \quad .$$

L'expression de la covariance que nous avons obtenue est présentée à titre indicatif en annexe G. Cependant, cette modélisation n'a pas été effectuée dans le cadre du présent travail de recherche.

---

et la covariance des vitesses de sommation peut s'exprimer comme la somme des termes

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}[V_{stack1}, V_{stack2}] &= V_{stack}^6 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{E}[T_{1i}] \mathbf{E}[T_{2j}] P\epsilon p \\ &\quad + V_{stack}^6 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k(i, j, n) \mathbf{E}[T_{1i}] \mathbf{E}[T_{2j}] Str(T_{1i}, T_{j2}) \quad . \end{aligned}$$

La première composante représente l'effet de pépite des vitesses de sommation dû aux incertitudes de pointé, la deuxième composante représente la structure de la covariance des vitesses de sommation.

## Chapitre 7

# Simulation du champ de vitesse

### Sommaire

*Nous voulons réaliser une simulation conditionnelle du champ de vitesse instantanée, qui respecte les différentes informations de vitesse disponibles : les vitesses mesurées par les enregistrements au puits (log soniques), et les vitesses de stack, pointées lors du traitement des données sismiques.*

*La complexité du problème posé, l'importance du volume des données conditionnantes ainsi que l'impératif de conserver un temps calcul raisonnable par simulation nous ont amené à adopter une méthode de simulation itérative, basée sur les chaînes de Markov. Nous avons présenté cet algorithme au chapitre 4. Nous y avons introduit également quelques hypothèses permettant d'en accroître l'efficacité numérique.*

*Nous allons présenter ici les différentes hypothèses faites lors de la modélisation, qui permettent d'utiliser le formalisme présenté précédemment au cas de la simulation du champ de vitesse instantanée. Enfin, quelques résultats illustrant la réalisation de simulations conditionnelles du champ de vitesse instantanée démontrent la performance de l'algorithme présenté dans le cas d'un jeu de données complet.*

*We want to obtain a conditional simulation of the instantaneous velocity field, matching all the available information : the velocity measurements at the wells (sonic logs), and the stacking velocities picked during the seismic data processing.*

*The complexity of this problem, the amount of conditioning data and the computation time limitation have driven us to use an iterative simulation method based on Markov chains. This algorithm has been presented on chapter 4. We have also introduced some hypothesis increasing its numerical efficiency.*

*Eventually, few results showing the realisation of conditional simulations of the instantaneous velocity field demonstrates the performance of the proposed algorithm in the case of complete data sets.*

## 7.1 Choix du repère

Avant de débiter la modélisation, nous devons choisir le repère dans lequel nous allons effectuer celle-ci. Comme dans le cas de l'étape de migration lors du traitement des données sismiques, la représentation du champ de vitesse peut être donnée en profondeur ou en temps. Ainsi, notre modélisation peut être réalisée de façon équivalente dans un repère temporel ou dans un repère métrique. Nous avons choisi de réaliser les simulations dans un repère temporel. Ce choix est dirigé par la simplicité de l'expression des contraintes dans ce repère, comme nous allons le montrer dans ce paragraphe.

La vitesse étant par définition<sup>42</sup> une quantité positive finie, elle nous permet de trouver une bijection entre les représentations temporelle et spatiale du domaine étudié :

$$\text{soient } z, t \in [0, +\infty[ \text{ définis comme } t = \int_0^z \frac{1}{v(z')} dz' \text{ et } z = \int_0^t v(t') dt' \quad .$$

Si le domaine est limité par un réflecteur au temps  $T$ , nous pouvons nous intéresser au sous-domaine des valeurs de temps  $t \in [0, T]$ , dont l'image dans le domaine spatial sera notée  $[0, D]$ .

Les variables de vitesse moyenne et moyenne quadratique s'expriment comme

$$\overline{V_T} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \quad (7.1)$$

$$\overline{V_T^2} = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt \quad . \quad (7.2)$$

Par construction, ces variables sont additives dans l'espace temporel. Ainsi, si le domaine  $[0, T]$  est subdivisé en cellules temporelles  $[t_i, t_{i+1}[$  de durée  $\Delta t$ , on trouve pour chaque cellule

$$\begin{aligned} \overline{V_i(i)} &= \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt \\ \overline{V_t^2(i)} &= \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v^2(t) dt \quad , \end{aligned} \quad (7.3)$$

et l'additivité des variables  $\overline{V_T}$  et  $\overline{V_T^2}$  s'exprime comme

$$\begin{aligned} \overline{V_T} &= \frac{1}{N_t} \sum_i \overline{V_i(i)} \\ \overline{V_T^2} &= \frac{1}{N_t} \sum_i \overline{V_t^2(i)} \quad . \end{aligned}$$

---

<sup>42</sup>On définit la vitesse instantanée par la relation  $v(z) = \frac{dz}{dt}$ , ou  $v(t) = \frac{dz}{dt}$  dans le domaine temporel.

La profondeur  $D$  du réflecteur s'exprime directement au moyen de la variable  $\overline{V_T}$  :

$$D = \int_0^T v(t) dt = T \overline{V_T} \quad .$$

On constate que le couple de variables  $\overline{V_T}$  et  $\overline{V_T^2}$  permet une description simple de notre modèle, puisque les données de vitesses de sommation s'apparentent à  $\overline{V_T^2}$ , et que la vitesse  $\overline{V_T}$  permet d'obtenir la profondeur du réflecteur.

Si nous décrivons le problème étudié dans le domaine spatial, nous n'allons pas retrouver une telle simplicité du modèle. Les deux variables à considérer dans ce cas sont

$$\begin{aligned} \overline{V_D} &= \frac{1}{D} \int_0^D v(z) dz \\ \overline{S_D} &= \frac{1}{D} \int_0^D \frac{1}{v(z)} dz \quad . \end{aligned}$$

Ces deux variables sont additives dans le domaine spatial. Nous pouvons retrouver l'expression du temps d'arrivée au réflecteur comme

$$T = \int_0^D \frac{1}{v(z)} dz = D \overline{S_D} \quad ,$$

et les vitesses de sommation s'expriment au moyen du couple de variables spatiales comme

$$V_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^D v(z)^2 \frac{dt}{dz} dz = \frac{1}{T} \int_0^D v(z) dz = \frac{\overline{V_D}}{\overline{S_D}} \quad . \quad (7.4)$$

Si l'on définit, comme à l'équation 7.3, les variables  $\overline{V_D}$  et  $\overline{S_D}$  obtenues pour des cellules spatiales  $[z_i, z_{i+1}[$  de longueur  $\Delta z$  :

$$\begin{aligned} \overline{V_z(i)} &= \frac{1}{\Delta z} \int_{z_i}^{z_{i+1}} v(z) dz \\ \overline{S_z(i)} &= \frac{1}{\Delta z} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{1}{v(z)} dz \quad , \end{aligned}$$

l'additivité des variables  $V_D$   $S_D$  permet d'exprimer la contrainte (7.4) comme

$$V_{rms}^2 = \frac{\sum_i \overline{V_z(i)}}{\sum_j \overline{S_z(j)}} \quad .$$



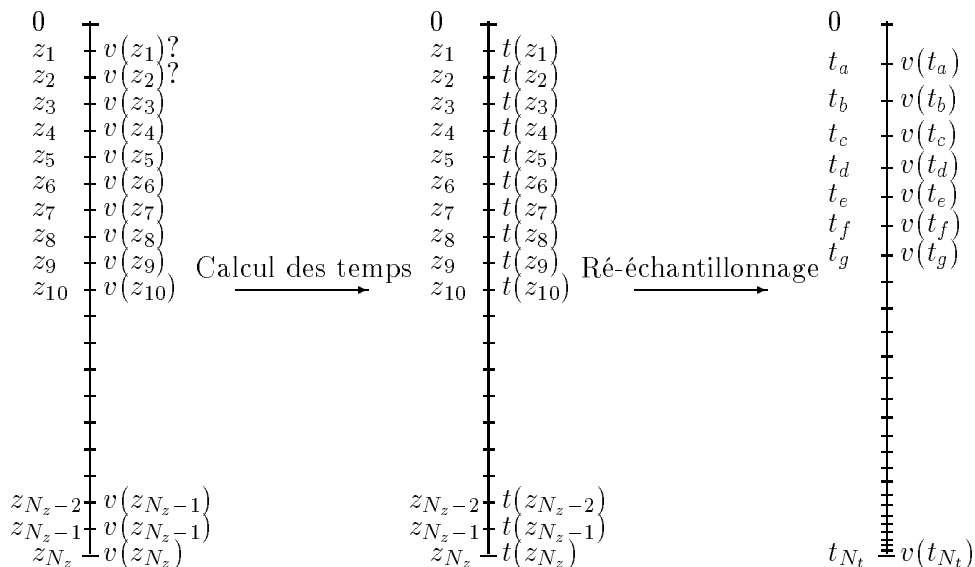


FIG. 7.1 – Transformation des données du domaine spatial au domaine temporel

Cette expression n'est guère pratique à utiliser dans l'algorithme.

La modélisation étant plus directe au moyen de la description temporelle, par les équations (7.1) et (7.2), nous adopterons cette description pour la réalisation de la simulation conditionnelle. Il nous faut transformer les ensembles de mesures de vitesses le long du puits pour les passer dans ce repère temporel. C'est ce que nous présentons dans la section suivante.

## 7.2 Passage des données en temps

Les données soniques ont été enregistrées selon un pas spatial régulier  $\Delta z$  de 15cm (un demi pied). Il faut disposer ces valeurs selon une grille temporelle, en transformant la coordonnée utilisée. La méthode consiste à calculer le temps de propagation mis pour atteindre chacune des profondeurs de mesures, puis à ré-échantillonner l'ensemble des données, suivant l'équation (7.3). Cette transformation est illustrée à la figure 7.1. Le pas de grille temporel  $\Delta t$  doit être choisi par l'utilisateur. Notre ensemble de mesures présente un problème pour cette transformation : les enregistrements de vitesses ne sont disponibles qu'à partir d'une profondeur d'environ 350m, les mesures n'ayant pas été effectuée dans la zone altérée.

Pour pallier ce manque d'information, nous avons choisi de supposer que la dérive verticale mesurée au sein de la couche supérieure, de l'ordre de 0.7m/s par mètre de profondeur, se prolonge jusqu'à la surface. Le lecteur remarquera que cette hypothèse détermine la définition de la transformation spatio-temporelle, et donc influence l'ensemble les données utilisées ultérieurement.

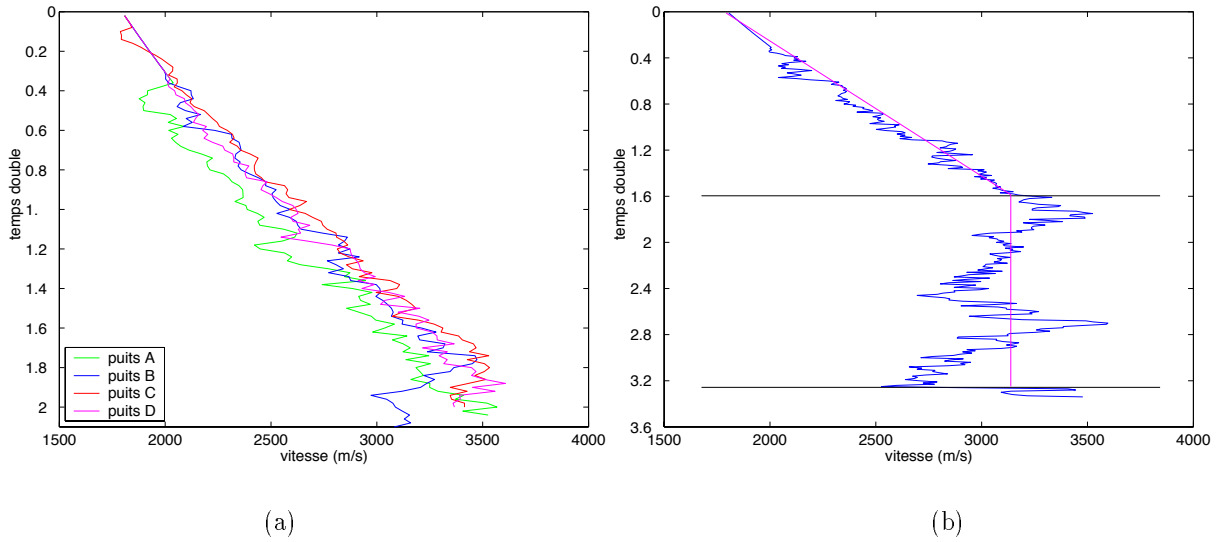


FIG. 7.2 – Enregistrements de logs soniques, dans le repère temporel

Comme l'information disponible en temps est très dense, nous proposons de choisir une taille de grille de dix milli-secondes. Ceci correspond à une épaisseur de couche d'environ 15 mètres près de la surface, jusqu'à 30 mètres à la profondeur du réflecteur. Une telle taille de cellule de simulation semble raisonnable au vu des exigences présentées pour les utilisations ultérieures du champ de vitesse instantanée.

La figure 7.2a présente les profils de vitesse obtenus dans ce nouveau repère. On peut remarquer que le ré-échantillonnage des données a pour effet de lisser fortement la courbe, en supprimant les valeurs erratiques trouvées dans la figure 6.1a. La figure 7.2b présente, pour le puits B, les valeurs obtenues dans la deuxième couche.

Pour comparaison, la figure 7.3 présente les profils de vitesse obtenus dans le repère temporel, si l'on considère une maille temporelle réduite de moitié, soient des intervalles de 0.005 secondes. On voit que le profil de vitesses présente un comportement légèrement plus erratique que celui obtenu à la figure 7.2a. La taille spatiale des cellules utilisées varie dans ce cas entre 9 et 18m. Pour les simulations, nous n'utiliserons pas ce maillage plus fin, mais resterons avec un pas de temps de  $\Delta t = 10ms$ .

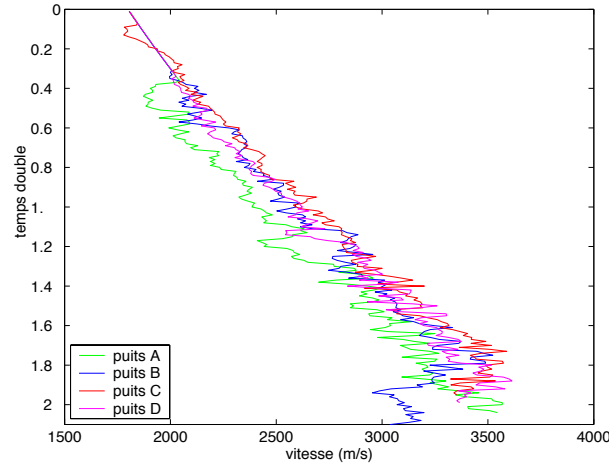


FIG. 7.3 – Enregistrements de logs soniques, dans le repère temporel, avec un pas de temps réduit

Remarquons finalement que la dérive linéaire du champ de vitesse en fonction de la profondeur s'est transformée en une dérive en fonction du temps. La figure 7.2a semble à nouveau suggérer l'utilisation d'une dérive linéaire. Nous adopterons cette hypothèse pour notre modélisation<sup>43</sup>. La figure 7.4 illustre les droites de dérive s'ajustant aux différents logs soniques dans le domaine temporel. On mesure une dérive moyenne de la vitesse  $g_t$  de  $8.85\text{m/s}$  par  $0.01$  seconde de propagation (temps double).

### 7.3 Description du champ aléatoire

L'hypothèse initiale sur laquelle s'opère notre modélisation est que le champ de vitesse instantanée correspond à la réalisation d'une variable aléatoire  $v(x, t)$  de distribution gaussienne<sup>44</sup>, dont le modèle de variogramme peut être inféré au moyen des méthodes présentées dans les chapitres précédents.

La simulation des vitesses est effectuée en temps, la modélisation de la contrainte par les vitesses de sommation étant nettement plus directe dans ce repère, comme nous l'avons montré précédemment.

<sup>43</sup>Bien que cette hypothèse vienne contredire l'hypothèse de dérive linéaire en fonction de la profondeur, utilisée lors des modélisations précédentes.

<sup>44</sup>Cette hypothèse n'est pas strictement nécessaire pour l'inférence du modèle de corrélation, même si elle est implicitement acceptée puisque l'on suggère que le champ de vitesse instantanée peut être décrit au travers de ses seuls paramètres d'espérance et de covariance.

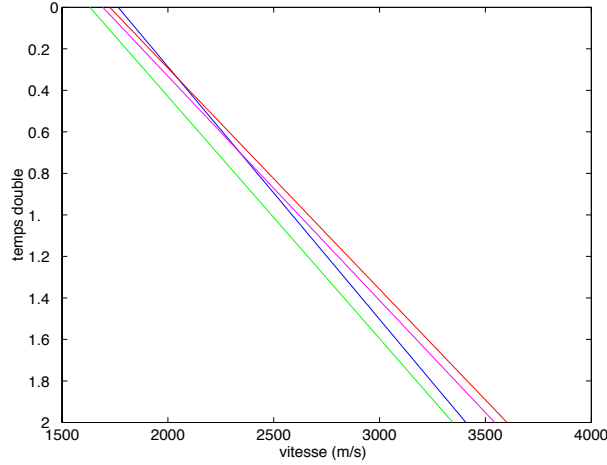


FIG. 7.4 – Dérive verticale de logs soniques, dans le repère temporel

Sur le support choisi pour la simulation, nous devons réaliser la co-simulation des champs aléatoires  $V(x, t)$  et  $W(x, t)$  définis comme

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(x, \tau) d\tau \\ W(x, t)^2 &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(x, \tau)^2 d\tau \quad , \end{aligned}$$

où  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  représente le pas de grille en temps sur lequel la simulation est effectuée.

La co-simulation des champs  $V(x, t)$  et  $W(x, t)$  permet la description complète du champ de vitesse instantanée  $v(x, t)$ . L'expression du conditionnement par les données de vitesse au puits est directe pour la variable  $V(x, t)$ , tandis que le conditionnement par les vitesses de stack s'exprime très clairement au moyen de la variable  $W(x, t)$ .

Observons la corrélation entre les deux champs aléatoires à simuler,  $V(x, t)$  et  $W(x, t)$ . La figure 7.5 présente un graphique croisé des valeurs expérimentales de  $V^2$  et  $W^2$ .

Il apparaît très clairement que ces deux variables sont fortement corrélées; la valeur de la corrélation expérimentale est trouvée égale à 1.0000.

Nous allons prendre avantage de cette particularité des champs aléatoires à co-simuler pour construire un algorithme de simulation plus rapide, sans perte de précision. Nous allons simuler l'un des deux variables,  $V(x, t)^2$ , par régression linéaire à partir de la valeur simulée pour la seconde,  $W(x, t)^2$ . Définissons  $\mu_1 = \mathbf{E}[V(x, t)^2]$  et  $\mu_2 = \mathbf{E}[W(x, t)^2]$ .

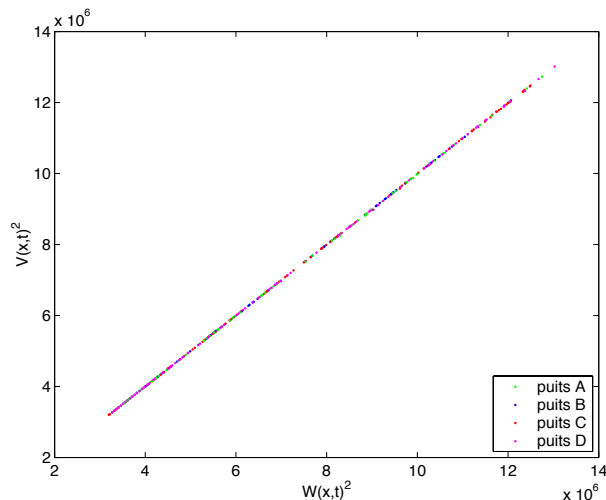


FIG. 7.5 – Graphe croisé des valeurs expérimentales de  $V$  et  $W$ , pour les quatre puits disponibles

Le coefficient de régression linéaire  $r$  est défini<sup>45</sup> par la relation

$$\mathbf{E}[V(x,t)^2|W(x,t)^2] = \mu_1 + r(W(x,t)^2 - \mu_2) \quad .$$

Sur nos données expérimentales, on trouve une valeur de  $r = 0.9985$ .

En notant  $R(x,t)$ , l'erreur commise en remplaçant la variable  $V(x,t)^2$  par sa régression à partir de la variable  $W(x,t)^2$ , on trouve directement

$$R(x,t) = V(x,t)^2 - \mathbf{E}[V(x,t)^2|W(x,t)^2] = V(x,t)^2 - \mu_1 - rW(x,t)^2 + r\mu_2 \quad , \quad (7.5)$$

et la variable  $R(x,t)$  a par définition les propriétés suivantes:

$$\mathbf{E}[R(x,t)] = 0 \quad \mathbf{E}[R(x,t)W(x,t)^2] = 0 \quad \mathbf{Cov}[R(x,t), W(x,t)^2] = 0 \quad . \quad (7.6)$$

La figure 7.6 présente les valeurs expérimentales de  $R(x,t)$  en fonction de la variable  $W(x,t)^2$ .

---

<sup>45</sup>Cela revient à poser  $r = \frac{\mathbf{Cov}(V(x,t)^2, W(x,t)^2)}{\mathbf{Var}(W(x,t)^2)}$ .

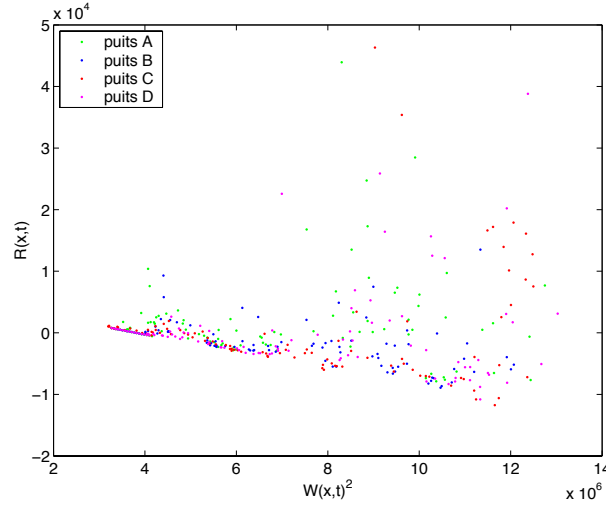


FIG. 7.6 – Graphe croisé des valeurs expérimentales de  $R$  en fonction des valeurs de  $W$ , pour les quatre puits disponibles

Remarquons que si l'on appelle  $S(x, t)^2$  la variance interne du champ de vitesse au sein d'une cellule de simulation

$$S(x, t)^2 = W(x, t)^2 - V(x, t)^2 = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_i-1}^{t_i} [v(x, \tau) - V(x, t)]^2 d\tau \quad , \quad (7.7)$$

l'expression de la variable  $R(x, t)$  peut être réécrite comme

$$R(x, t) = (1 - r) W(x, t)^2 - S(x, t)^2 - \mu_1 + r\mu_2 \quad ,$$

qui se simplifie en

$$R(x, t) = \mu_2 - \mu_1 - S(x, t)^2$$

dans le cas particulier où  $r = 1$ .

La co-simulation sera notablement simplifiée en utilisant les propriétés (7.6) de la variable  $R(x, t)$ . En admettant que la variable aléatoire  $R(x, t)$  suive une distribution gaussienne, on peut se contenter de simuler le champ de vitesse  $W(x, t)^2$ , puis le champ  $R(x, t)$  indépendamment du premier. Le champ de vitesse  $V(x, t)^2$  est ensuite reconstitué suivant la relation

$$V(x, t)^2 = R(x, t) + \mu_1 + rW(x, t)^2 - r\mu_2 \quad , \quad (7.8)$$

déduite directement de la définition de  $R(x, t)$  (7.5).

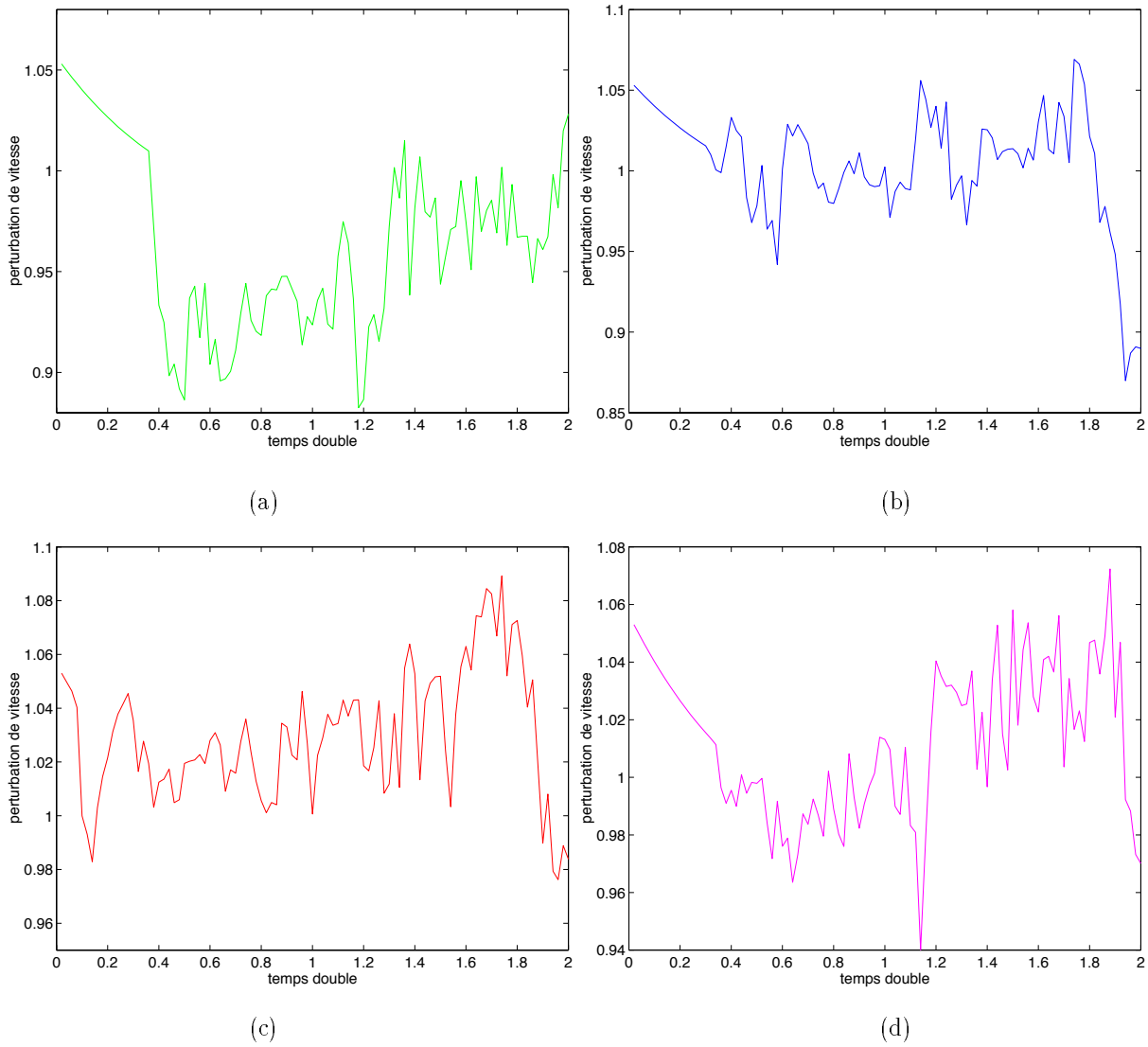


FIG. 7.7 – Résidus de vitesse, pour les puits A, B, C et D, dans le domaine temporel

## 7.4 Modélisation des données $W$

Dans la section 6.3, nous avons obtenu une estimation de la longueur de corrélation horizontale du champ de vitesse instantanée. Pour obtenir celle-ci, nous avons utilisé un modèle spatial pour la profondeur.

Dans cette section, nous réalisons l'estimation temporelle de la longueur de corrélation verticale, à partir des données du log sonique exprimées dans ce nouveau repère.

Nous présentons à la figure 7.7 les profils de résidus de vitesse, après extraction de la dérive linéaire en fonction du temps de propagation mesurée à la figure 7.4.

On présente à la figure 6.4 les variogrammes de perturbations de vitesse correspondant à ces quatre profils. Le variogramme du puits A présentant un comportement légèrement différent des trois autres, nous avons choisi de ne pas le retenir pour la suite de la modélisation.

Pour la première couche, nous présentons à la figure 7.8a le variogramme des perturbations de

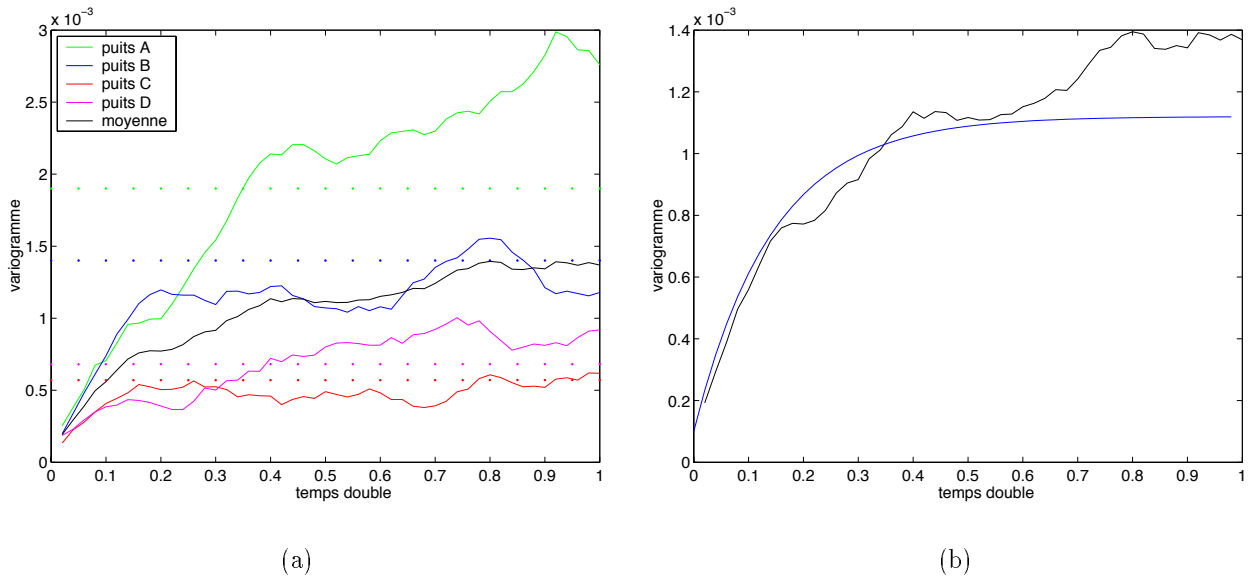


FIG. 7.8 – Variogramme vertical du champ de vitesse instantanée  
 (a) données expérimentales pour les quatre puits et variogramme moyen, et  
 (b) modélisation proposée (en rouge) pour le variogramme moyen

logs soniques pour les quatre puits donnés, après extraction de la dérive linéaire en fonction du temps. Une modélisation du variogramme moyen est donnée à la figure 7.8b. Elle est composée d'une structure exponentielle, d'une portée de 0.43 secondes, et d'un palier de  $10^{-3}$ , et d'un effet de pépite de 10 % de ce palier.



Comme dans le cas des logs soniques présentés en profondeur, à la section 6.1, nous trouvons que le variogramme pour le log sonique A ne semble pas atteindre son palier. A la figure 7.9, on réalise la même modélisation que dans ce cas, en négligeant le puits incriminé. La modélisation est obtenue dans ce dernier cas au moyen d'une structure sphérique, de portée 0.2 seconde, et de palier  $0.6 \cdot 10^{-3}$ , avec un effet de pépite de 14 %.

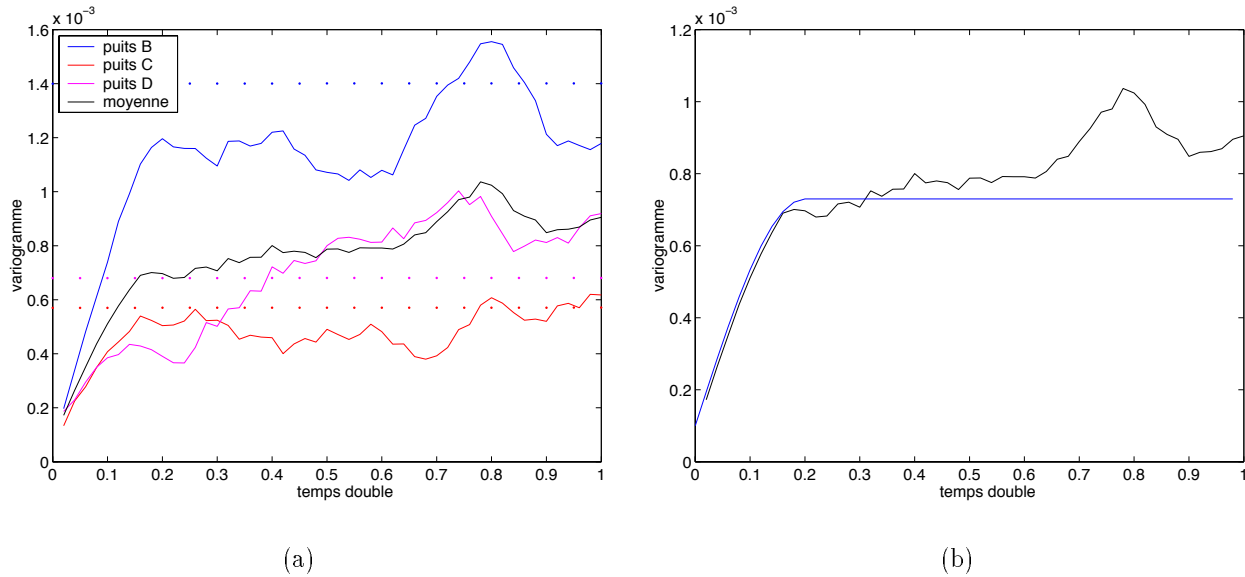


FIG. 7.9 – Variogramme vertical du champ de vitesse instantanée

- (a) variogramme des données expérimentales des puits 1,2 et 4 et variogramme moyen, et  
 (b) modélisation proposée (en rouge) pour le variogramme moyen

## 7.5 Préparation des données de vitesses de sommation

Nous allons nous intéresser à la répartition des données de vitesses de sommation. Celles-ci ne sont pas disposées uniformément dans l'espace, mais sont au contraire regroupées le long des différentes lignes sismiques. Ceci correspond à un phénomène que nous n'avons pas évoqué jusqu'à présent : l'échantillonnage est très dense le long des lignes sismiques, et absent dans le reste de la zone considérée.

Nous allons modéliser la variable de vitesse de sommation, afin de pouvoir travailler sur un sous-échantillonnage de nos données en perdant un minimum d'information. Pour ceci, nous allons estimer par krigeage la variable, en fonction de nos données.

Remarquons aussi que les vitesses de sommation estimées aux points de croisements de lignes sismiques perpendiculaires s'ajustent rarement. Cela a déjà été mentionné précédemment, au paragraphe 6.4. Nous allons tout d'abord nous intéresser à modéliser les décalages aux croisements, afin de pouvoir corriger les données pour cet effet. Les vitesses de sommation mesurées aux intersections sont données aux tables 7.1 et 7.2, pour les deux horizons.

Une étude statistique réalisée sur ces points particuliers montre que le phénomène n'est pas négligeable: comme le défaut d'ajustement est nettement plus important que l'écart-type des distributions d'incrément le long des profils de vitesses de stack, nous pouvons conclure que les erreurs aux croisements ne correspondent pas simplement aux incertitudes attachées à chaque analyse de vitesse.

La figure 7.10 compare les distributions de probabilité cumulées expérimentales de ces distributions d'incrément. On remarque que la variance mesurée sur les incréments le long des lignes est nettement inférieure à la variance des erreurs aux croisements entre lignes sismiques.

Plusieurs hypothèses ont été testées pour expliquer ces différences aux croisements. Elles sont résumées au tableau 7.3.

Dans un premier test, nous avons voulu étudier la possibilité de présence d'une dérive des outils d'acquisition ou de traitement entre lignes NO-SE et lignes NE-SO. Aux différents croisements, nous calculons la différence entre valeurs encadrant l'intersection. Les valeurs moyennes obtenues pour les deux horizons sont négatives, ce qui semble indiquer que les valeurs mesurées le long des horizons 1 à 7 sont légèrement inférieures aux valeurs mesurées le long des horizons 8 à 12. Remarquons que l'écart-type des décalages vaut 34 m/s pour le premier horizon, et 25 m/s pour le second.

On peut estimer la valeur de vitesse de sommation au point de croisement des deux lignes sismiques par interpolation linéaire entre les valeurs encadrant l'intersection. La différence entre ces valeurs est présentée comme deuxième essai, et on trouve à nouveau des valeurs négatives.

Ces résultats sont contredits par un troisième test. On fait la différence entre les deux valeurs des lignes NO-SE encadrant le croisement et leurs plus proches voisins le long de la ligne croisée. La valeur moyenne trouvée pour le premier horizon semble de l'ordre de zéro.

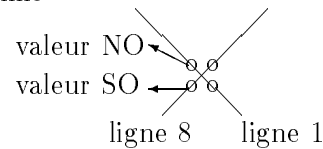
Le tableau 7.4 présente les valeurs de décalages moyens par ligne. On voit que ces valeurs peuvent avoir une amplitude significative, et que les écarts-types de décalage par ligne sont en général com-

ligne	1		2		3		4		5		6		7	
8	2189	2137	2135	2180	2152	2187	2177	2224	2220	2224	2182	2182	2235	2202
	2137	2197	2125	2136	2151	2179	2114	2200	2185	2211	2178	2162	2200	2190
9	2150	2130	2142	2154	2139	2140	2121	2227	2162	2149	2185	2204	2130	2170
	2157	2164	2141	2152	2141	2140	2200	2154	2153	2130	2189	2135	2169	2185
10	2159	2127	2094	2150	2110	2150	2124	2143	2120	2130	2139	2128	2161	2155
	2091	2174	2149	2080	2157	2107	2173	2111	2161	2120	2187	2152	2153	2138
11	2105	2096	2100	2105	2127	2100	2101	2118	2127	2118	2110	2128	2137	2138
	2127	2120	2087	2102	2111	2135	2090	2105	2128	2124	2120	2127	2129	2149
12	2142	2135	2154	2135	2143	2187	2132	2170	2155	2139	2168	2164	2197	2162
	NaN	2123	2140	2147	2150	2160	2170	2131	2147	2155	2164	2160	2163	2167

TAB. 7.1 – Valeurs de vitesses de sommation aux croisements entre lignes sismiques, pour le premier horizon

Les valeurs à l'intersection entre les lignes 1 et 8 sont présentées comme

ligne	1	
8	valeur NO	valeur NE
	valeur SO	valeur SE



où les valeurs NO et SE proviennent de la ligne 1, tandis que les valeurs SO et NE proviennent de la ligne 8.

ligne	1		2		3		4		5		6		7	
8	2420	2445	2410	2427	2402	2437	2459	2426	2457	2495	2484	2487	2455	2491
	2432	2417	2427	2409	2439	2394	2424	2442	2499	2460	2482	2488	2477	2460
9	2387	2407	2408	2412	2360	2408	2368	2401	2392	2450	2417	2430	2428	2425
	2415	2394	2388	2402	2389	2359	2370	2355	2455	2390	2429	2412	2431	2430
10	2368	2387	2360	2345	2335	2335	2308	2288	2320	2310	2397	2408	2390	2435
	2387	2369	2345	2361	2345	2328	2287	2310	2296	2333	2418	2401	2421	2417
11	2328	2310	2377	2349	2384	2378	2361	2354	2360	2355	2419	2372	2415	2427
	2329	2339	2344	2369	2370	2370	2350	2347	2345	2357	2357	2425	2430	2421
12	2412	2391	2395	2370	2381	2409	2401	2384	2418	2438	2407	2417	2446	2460
	2390	2415	2372	2397	2414	2365	2380	2390	2431	2411	2410	2422	2465	2445

TAB. 7.2 – Valeurs de vitesses de sommation aux croisements de lignes sismiques, pour le second horizon, avec la même représentation

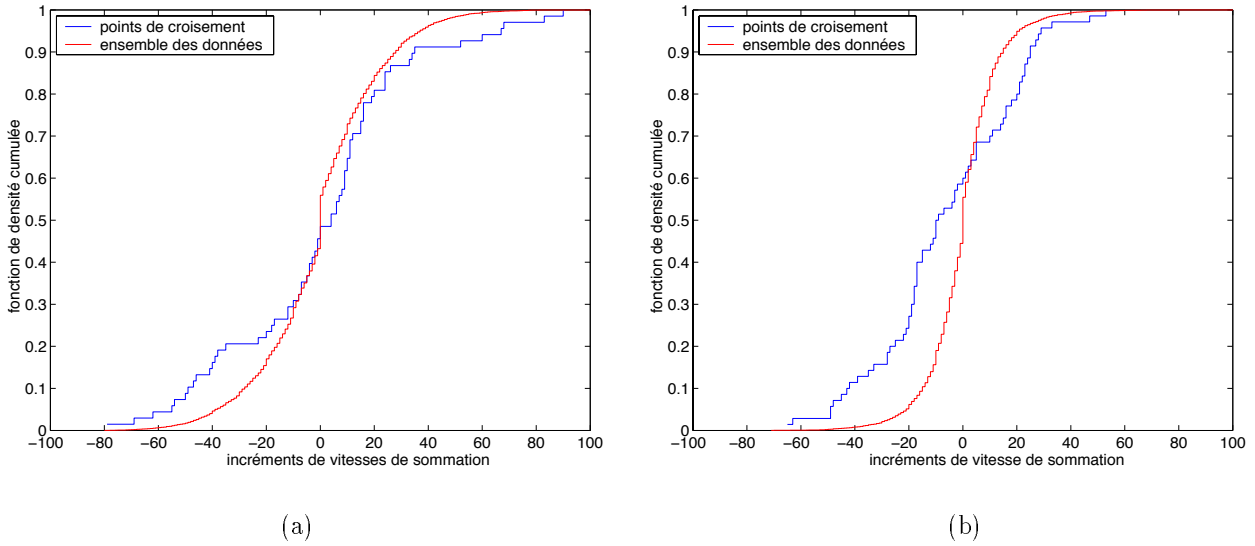


FIG. 7.10 – Fonction de probabilité cumulée des incréments de vitesses de sommation pour les horizons (a) 1 et (b) 2

pris entre 20 m/s et 50 m/s.

Nous avons voulu montrer que la présence d'une dérive N-S ou E-O ne pouvait être responsable de l'organisation des décalages. Le test 4 présente les différences entre valeurs en prenant en compte l'orientation E-O des décalages, tandis que le test 5 présente les différences en considérant l'orientation N-S. Les valeurs obtenues dans ces cas restent très faibles.

Finalement, nous avons envisagé que la direction d'acquisition des tirs soit responsable d'un biais dans les estimations de vitesse de sommation, dû à la pente des réflecteurs. Le sixième test est réalisé

test	description du test	horizon 1	horizon 2
1	valeur NO + SE - NE - SO	-2.86	-5.19
2	différence entre valeurs interpolées linéairement	-4.31	-4.55
3	valeur NO - {plus proche d'entre NE et SO } +valeur SE - {plus proche d'entre NE et SO}	-0.01	-6.16
4	valeur NO + NE - SO - SE	2.34	0.34
5	valeur NO + SO - NE - SE	4.57	3.76
6	(valeur NO + SE - NE - SO) × sens de l'acquisition des lignes 8 à 12	5.53	-4.27

TAB. 7.3 – Hypothèses d'explication de l'organisation spatiale des décalages

ligne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
moyenne hor. 1	32	-12.4	-8.2	-15.9	-1	-12.4	4.8	-18.1	16.8	18.9	-5.3	1.8
moyenne hor. 2	-4.4	11.9	-24.6	7.7	-17.6	6.2	-15.5	15.8	22	0.7	-14.4	1.9
écart-type hor. 1	38.2	34.3	30.0	57.2	19.2	28.1	21.2	44.9	33.9	40.3	15.8	21.2
écart-type hor. 2	20.7	17.0	34.8	20.8	38.1	26.7	22.6	22.8	27.3	18.7	29.2	22.5

TAB. 7.4 – Décalages moyens mesurés aux points de croisement, par ligne

en prenant en compte cette direction. Les valeurs moyennes obtenues ne semblent pas significatives d'un tel biais.

Au vu des résultats de ces tests, nous constatons que la distribution des décalages ne semble pas correspondre à une dérive spatiale des mesures.

L'amplitude des décalages moyens par ligne nous suggère de modéliser les décalages sous forme d'un bruit de mesure propre à chaque ligne, mais décorrélé d'une ligne à l'autre.

Nous proposons donc de prendre en compte ce phénomène en modélisant les variable de vitesse mesurées de la façon suivante :

$$X_{\text{mesuré}}(x_\alpha) = X_{\text{réel}}(x_\alpha) + \mu_i(x_\alpha) + \epsilon(x_\alpha) \quad , \quad (7.9)$$

où  $\epsilon(x_\alpha)$  représente le bruit de mesure non-corrélé, et  $\mu_i(x_\alpha)$  représente le bruit corrélé pour des valeurs au sein de la ligne  $i$ .

On suppose que la variable  $\mu_i(x_\alpha)$  est indépendante de la vraie valeur de vitesse  $X_{\text{réel}}(x_\alpha)$ .

Nous proposons de modéliser le bruit de mesure non corrélé par une variable aléatoire gaussienne centrée, dont l'écart-type - correspondant à l'amplitude du bruit de mesure - est obtenu à partir de la variance de la distribution des incréments de vitesse.

Pour des valeurs  $X_{\text{mesuré}}(x_\alpha)$  et  $X_{\text{mesuré}}(x_\beta)$  mesurées le long de la même ligne d'acquisition (et pour des points  $x_\alpha$  et  $x_\beta$  successifs, donc proches), et en supposant  $X_{\text{réel}}(x_\alpha) \simeq X_{\text{réel}}(x_\beta)$  (la valeur du champ de vitesse variant peu sur la distance d'un incrément), on trouve en effet

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{\text{mesuré}}(x_\alpha) - X_{\text{mesuré}}(x_\beta)] &= \mathbf{E}[X_{\text{réel}}(x_\alpha) - X_{\text{réel}}(x_\beta)] + \mathbf{E}[\mu_i(x_\alpha) - \mu_i(x_\beta)] + \mathbf{E}[\epsilon(x_\alpha) - \epsilon(x_\beta)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[X_{\text{mesuré}}(x_\alpha) - X_{\text{mesuré}}(x_\beta)] &= \mathbf{Var}[X_{\text{réel}}(x_\alpha) - X_{\text{réel}}(x_\beta)] + \mathbf{Var}[\mu_i(x_\alpha) - \mu_i(x_\beta)] \\ &\quad + \mathbf{Var}[\epsilon(x_\alpha) - \epsilon(x_\beta)] \\ &= 2\mathbf{Var}[\epsilon(x_\alpha)] \quad . \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues pour les différentes lignes sont présentées au tableau 7.4. Elles valent environ  $400(m/s)^2$  pour le premier horizon, et  $100(m/s)^2$  pour le second.

line	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
hor. 1	468.1	437.7	519.0	495.9	359.3	389.0	455.8	546.0	558.6	527.7	452.0	491.2
hor. 2	154.0	109.3	180.8	214.1	119.7	98.6	113.9	190.7	290.3	186.5	198.7	164.7

TAB. 7.5 – Variance de la distribution des incréments, par ligne

La variable  $\mu_i(x_\alpha)$  représente le bruit corrélé au sein de chaque ligne, que nous allons décrire à présent.

On peut trouver l'amplitude prise par cette variable en étudiant la variance des différences entre valeurs proches issues de lignes différentes. Si  $x_\alpha$  se situe sur la ligne  $i$  et  $x_\beta$  se trouve sur la ligne  $j$ , on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{\text{mesuré}}(x_\alpha) - X_{\text{mesuré}}(x_\beta)] &= \mathbf{E}[X_{\text{réel}}(x_\alpha) - X_{\text{réel}}(x_\beta)] + \mathbf{E}[\mu_j(x_\alpha) - \mu_i(x_\beta)] + \mathbf{E}[\epsilon(x_\alpha) - \epsilon(x_\beta)] \\ &= \mathbf{E}[\mu_j(x_\alpha)] - \mathbf{E}[\mu_i(x_\beta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[X_{\text{mesuré}}(x_\alpha) - X_{\text{mesuré}}(x_\beta)] &= \mathbf{Var}[X_{\text{réel}}(x_\alpha) - X_{\text{réel}}(x_\beta)] + \mathbf{Var}[\mu_i(x_\alpha) - \mu_j(x_\beta)] \\ &\quad + \mathbf{Var}[\epsilon(x_\alpha) - \epsilon(x_\beta)] \\ &= 2\mathbf{Var}[\epsilon(x_\alpha)] + 2\mathbf{Var}[\mu_i(x_\alpha)] \quad . \end{aligned}$$

Le tableau 7.5 donne l'ensemble des valeurs expérimentales obtenues pour estimer ces valeurs.

L'estimation du biais moyen entre les lignes 1 et 8 pour l'horizon 1 est de 32 m/s, et nous pouvons donner un intervalle de confiance autour de cette valeur au moyen de l'écart-type : la valeur possède 95 % de probabilité d'être comprise dans l'intervalle [ 32 - 38.2, 32 + 38.2 ] .

La variance atteinte par les variables  $\mu_i(x_\alpha)$  est estimée à 625  $(m/s)^2$  pour le premier horizon, et 400  $(m/s)^2$  pour le second. La portée de la structure correspondante peut être mise en évidence grâce aux graphes 7.11. On y a représenté, pour les deux horizons, les variogrammes moyens obtenus le long des lignes 1 à 7 et 8 à 12, ainsi que la courbe de moyenne géométrique de ces deux variogrammes. Dans l'hypothèse où les structures des vitesses le long des deux familles de lignes sont équivalentes, cette courbe correspond au variogramme croisé entre valeurs issues des lignes 1 à 7 et 8 à 12 :

$$\gamma_1(h) = \mathbf{E}[(X_{\text{mesuré}}(x_\alpha) - X_{\text{mesuré}}(x_\alpha + h))^2] + \mathbf{E}[(\mu_i(x_\alpha) - \mu_i(x_\alpha + h))^2] \quad .$$

On y a ajouté une courbe présentant la moyenne du carré de l'écart entre valeurs issues de lignes perpendiculaires, en fonction de la distance

$$f(h) = \frac{1}{N} \sum [X_{\text{mesuré}}(x_\alpha) - X_{\text{mesuré}}(x_\alpha + h)] \quad ,$$

pour des couples de points  $x_\alpha$  et  $x_\alpha + h$  issus de lignes perpendiculaires.

On constate que les courbes se rejoignent aux distances de 700m pour le premier horizon, et 300m pour le second horizon. Ceci signifie que l'effet de la structure des variables  $\mu u_i(x_\alpha)$  s'estompe à cette distance. Nous allons utiliser cette valeur comme estimation pour la longueur de corrélation pour la structure des bruits corrélés  $\mu_i(x_\alpha)$  (Rivoirard *et al.*, 1993).

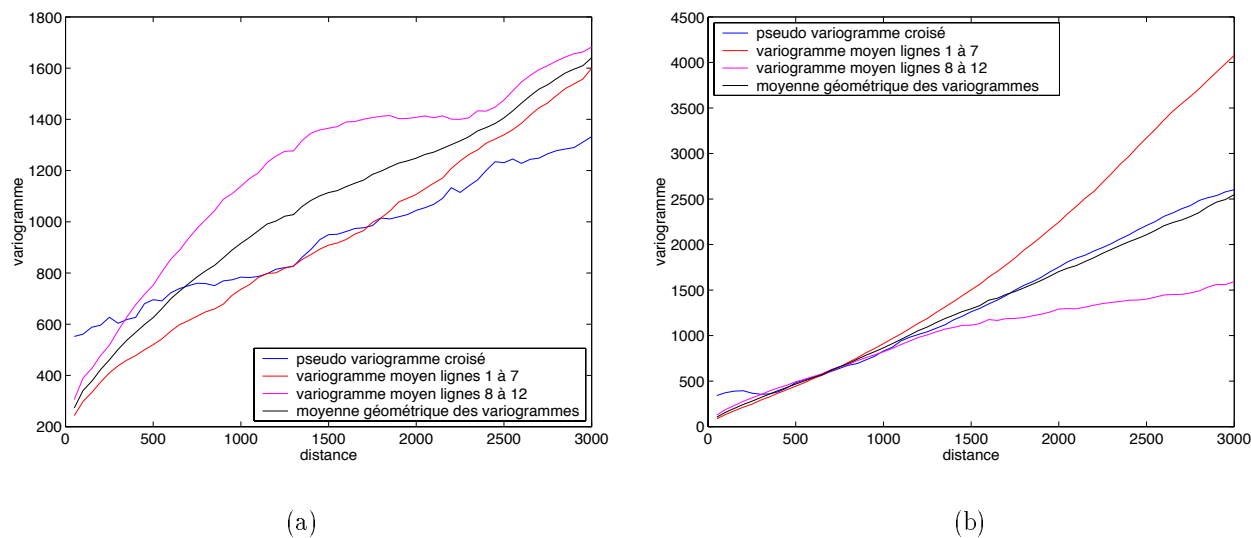


FIG. 7.11 – Variogrammes moyens le long des lignes d'acquisition, et pseudo-variogramme croisé entre valeurs issues de lignes différentes, pour les horizons (a) 1 et (b) 2

Cette modélisation se rapproche de celle présentée par Haas (1991), qui suggère de résoudre la problématique des décalages aux croisements par ajustement d'une variable par profil ou groupe de profils, dont la valeur est estimée par minimisation - par moindres carrés- des écarts résiduels.

On va donc kriger les données de vitesses de sommation modélisées par l'équation (7.9), en filtrant les composantes  $\mu$  et  $\epsilon$ , de façon à obtenir des valeurs d'estimation de  $X_{\text{réel}}$ , disposées selon une grille relativement homogène. Comme notre ensemble de données de vitesses de sommation est très dense le long des lignes sismiques, cette étape nous permet de réduire le nombre de puits à simuler, et d'obtenir une grille de taille plus réaliste.

Haas (1991) suggère alternativement de résoudre la problématique des décalages aux croisements entre profils par un simple co-krigeage des données le long des profils. Cette technique a l'avantage de fournir des données de vitesses de sommation disposées selon une grille  $x, y$  régulière. Ceci permet la simulation de champs de vitesses à maille régulière, en généralisant ainsi les possibilités d'utilisation ultérieure.

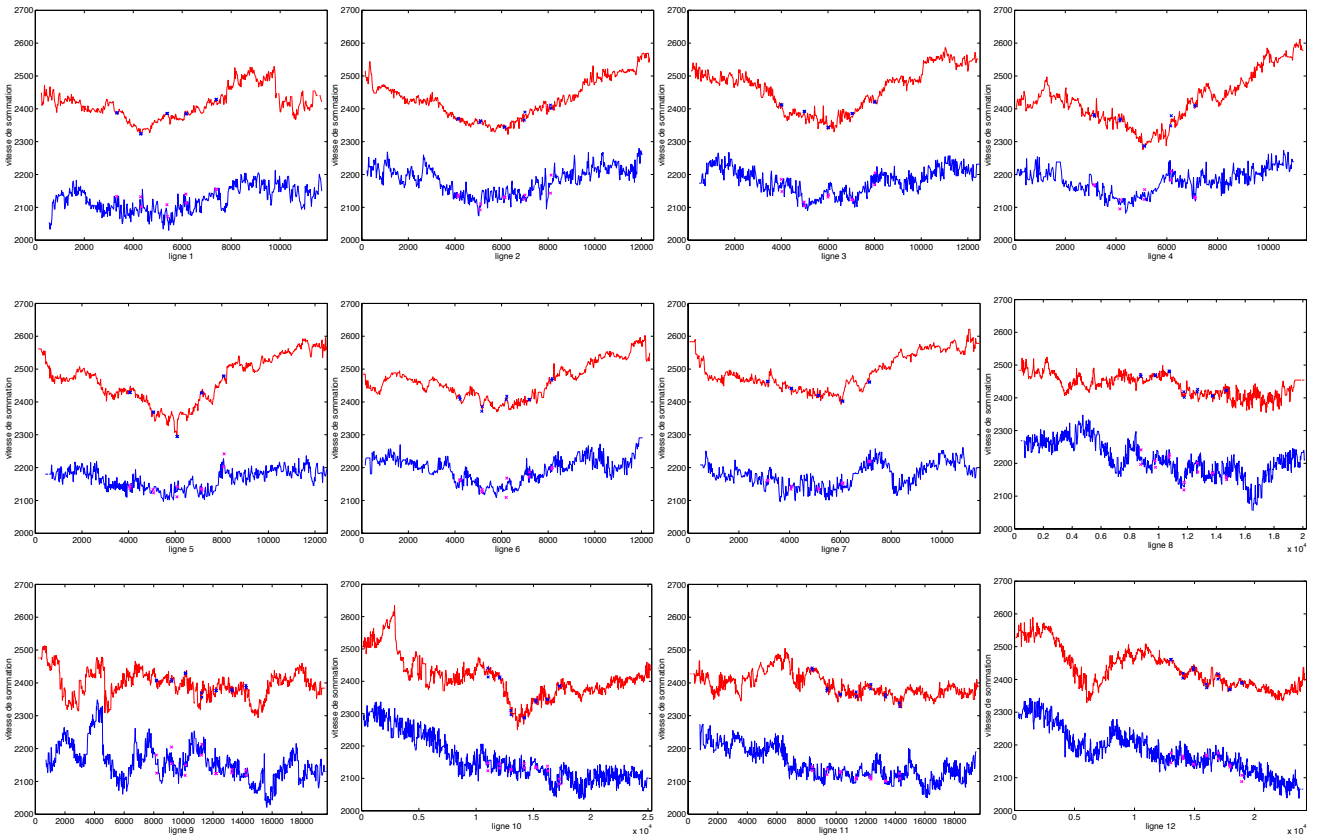


FIG. 7.12 – Profils de vitesses de sommation, pour les deux horizons, après ajustement des biais  
 les profils 1 à 7 sont orientés SE-NO, les profils 8 à 12 SO-NE

De façon à pouvoir utiliser efficacement les informations de vitesses de sommation, nous devons obtenir la valeur de  $\mathbf{E}[X_{\text{réel}}]$  aux différents points de données. Pour cela, nous devons retirer de chacun des points de données la contribution des variables  $\mu_i$ , que nous pouvons estimer par krigeage à partir des données (réparties le long des croisements). La structure utilisée est une structure gaussienne, de longueur de corrélation  $700m$  pour le premier horizon et  $400m$  pour le second. Ceci nous permet d'obtenir des profils se croisant parfaitement, comme l'illustrent les figures 7.12. Le filtrage du bruit non corrélé est réalisé par krigeage ordinaire, en filtrant la composante d'effet de pépite correspondant.



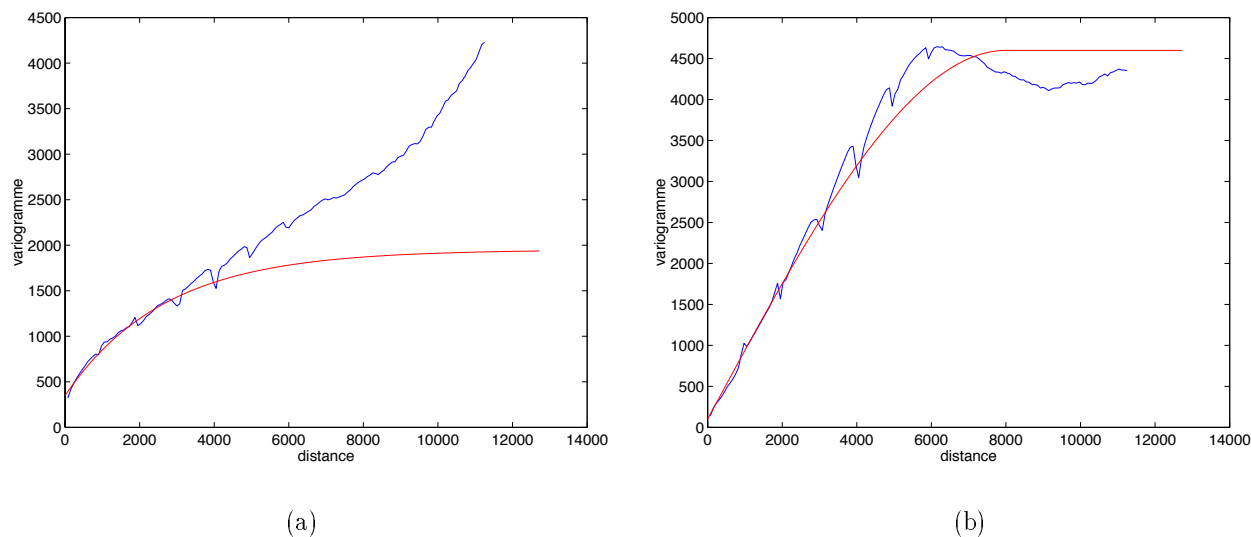


FIG. 7.13 – Ajustement d'un modèle pour les variogrammes de vitesses de sommation pour (a) l'horizon 1 et (b) l'horizon 2

Les ajustements des variogrammes de profils de vitesse de sommation pour les deux horizons sont présentés aux figures 7.13.

Pour le premier horizon (figure 7.13a), on a utilisé une structure exponentielle de portée 8000m et de palier 1500  $(m/s)^2$ , avec un effet de pépité de 400  $(m/s)^2$ . Pour le second, on a utilisé une structure sphérique de portée 8000m et de palier 4500  $(m/s)^2$ , avec un effet de pépité de 100  $(m/s)^2$ . Le filtrage est réalisé en voisinage glissant. Une taille de voisinage de 50m a été adoptée après essai.

Notons que le choix du type de structure intervient peu ici, l'aspect linéaire de ces deux modèles de variogrammes à courtes distances étant primordial pour la répartition des poids de krigeage.

On obtient des horizons lissés, qui ont été surimposés aux précédents dans les figures 7.14.

On se contente pour la suite d'un sous-échantillonnage des données, réalisé en ne prenant en compte qu'une estimation de vitesse de sommation sur 30. La plan de position des valeurs utilisées pour la simulation est présenté à la figure 7.15. On y a ajouté la position des puits existants. Notons que seul le puits A provient réellement du champ considéré, les puits B, C et D proviennent de champs pétroliers environnants. Ils ont été disposés dans le champ de façon à illustrer la méthode de simulation, leur position géographique ayant été choisie sans raison particulière.

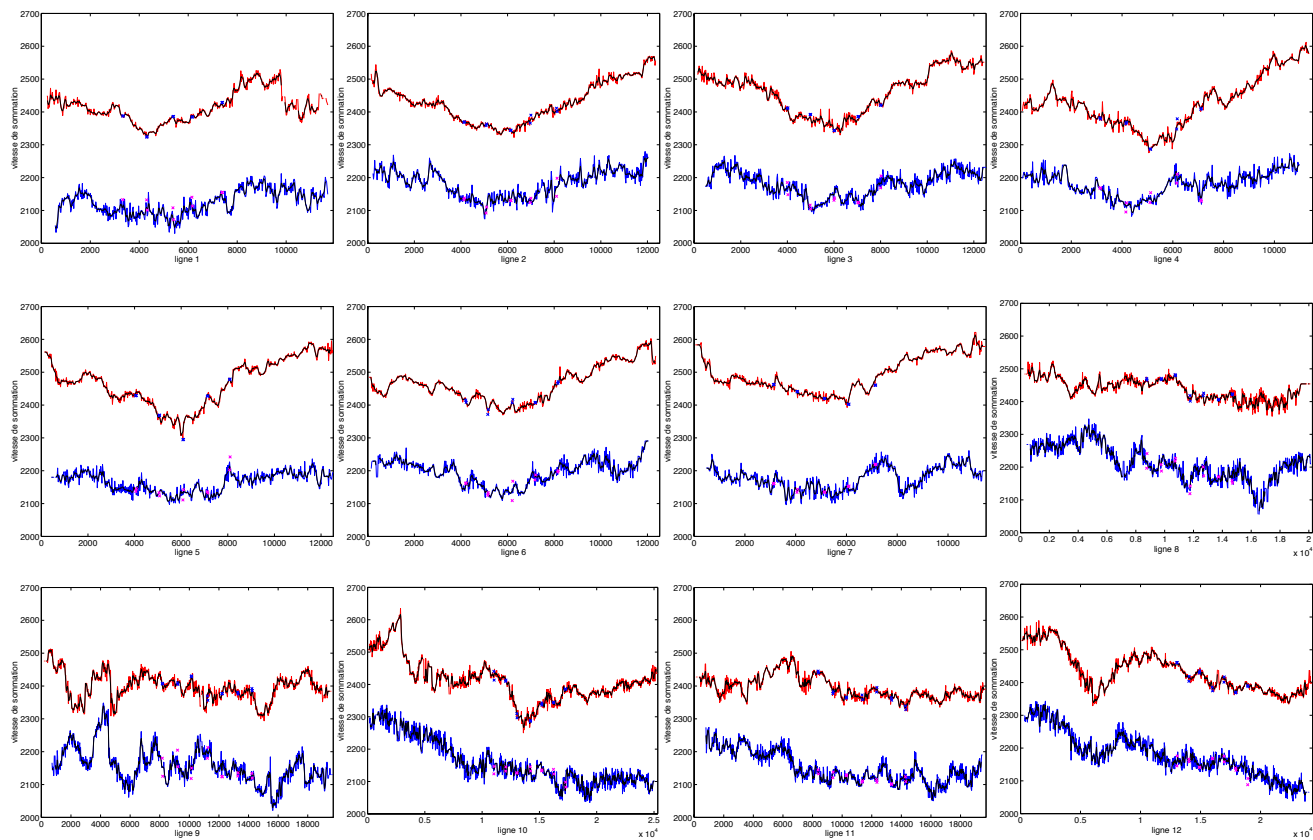


FIG. 7.14 – Profils de vitesses de sommation, pour les deux horizons, après extraction du bruit de mesure  
 les profils 1 à 7 sont orientés SE-NO, les profils 8 à 12 SO-NE

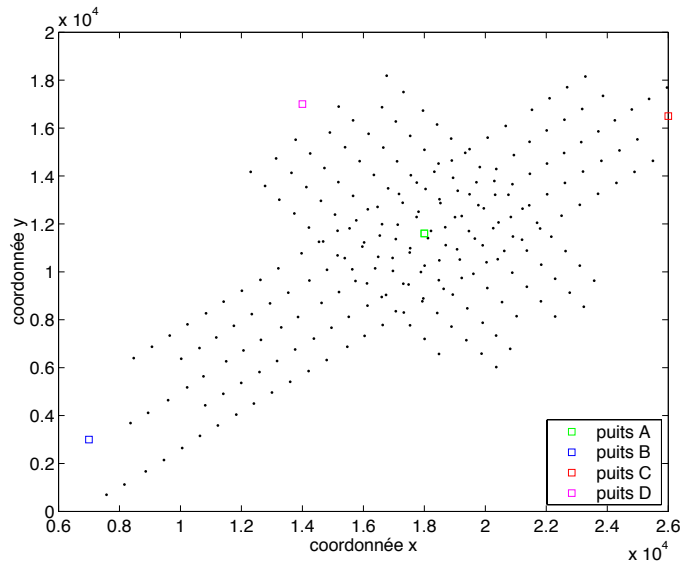


FIG. 7.15 – Plan de position des échantillons de données utilisés pour la simulation

Remarquons enfin que l'estimation des variables  $\mu$  a toujours été réalisée sur des incréments de cette variable, et que nous n'avons pas pu mettre en évidence un éventuel biais global dans notre estimation de  $X_{\text{réel}}$ . On dispose d'une information pouvant nous renseigner sur la présence éventuelle de ce biais: la vitesse de sommation estimée à partir des mesures au puits A doit correspondre aux valeurs obtenues le long des lignes sismiques, à proximité de ce puits.

La profondeur des réflecteurs est estimée (à partir des profils HVA) à 1456 et 2256 mètres. Ces valeurs correspondent, sur l'enregistrement du log de puits, à des temps doubles de propagation de 1.33 secondes et 1.86 secondes. Nous pouvons estimer à partir de l'enregistrement sonique en temps la vitesse quadratique moyenne au puits A au niveau de ces deux réflecteurs. Les valeurs de vitesses quadratiques obtenues par ce procédé sont égales à  $2198.8 \text{ m/s}$  et  $2474 \text{ m/s}$ .

En comparant ces valeurs aux valeurs de vitesse de sommation à proximité du puits A, on trouve un léger biais : les valeurs de vitesse de sommation le long de la ligne 10 valent  $2151 \text{ m/s}$  et  $2310 \text{ m/s}$ .

Nous avons choisi de décaler l'ensemble des valeurs de vitesses de sommation le long des deux réflecteurs de la valeur de ce biais. Remarquons que la méthode de simulation que nous illustrerons à la section suivante converge, même en présence de ce biais, le nombre d'itérations demandé étant légèrement supérieur au nombre d'itérations requises pour le cas présenté.

## 7.6 Application réelle à notre ensemble de données

### 7.6.1 Choix des paramètres généraux

Quelques derniers paramétrages doivent être réalisés avant de simuler le champ aléatoire de vitesse instantanée.

Nous avons expliqué que le schéma de visite de l'algorithme d'échantillonnage de Gibbs peut être modifié par l'utilisateur. Comme dans notre cas l'éloignement au conditionnement est fort différent d'un puits à l'autre, il a été décidé d'utiliser une sélection aléatoire du puits suivant, avec une probabilité plus importante accordée aux puits dont la contribution à la fonction de pénalité est la plus importante. L'utilisation d'une telle stratégie nous permet d'obtenir une descente plus régulière de la valeur de la fonction  $J$  que dans le cas d'une visite systématique des puits.

Quand le conditionnement est atteint - la valeur prise par la fonction de pénalité est inférieure à un seuil défini par l'utilisateur -, un nombre fixe d'itérations "secondaires" est réalisé, avec dans ce cas visite systématique de l'ensemble des puits du domaine de simulation. Ceci est réalisé afin de limiter l'effet de sélection aléatoire préférentielle des puits, qui tend à générer une distribution uniforme des erreurs aux puits  $J(x_i)$ .

Plusieurs stratégies peuvent être utilisées pour le processus de refroidissement de la température du recuit simulé.

L'option la plus simple consiste à utiliser une fonction décroissante du nombre d'itérations,

$$\theta_n = \theta_0 \frac{1}{1+n} \quad ,$$

par exemple.

Toutefois, cette solution ne prend pas en compte la proximité entre les solutions proposées  $X_n$  et les contraintes. De plus, des tests montrent que cette évolution lente de la température ne suit pas l'évolution très rapide de la simulation : la convergence de la simulation vers le conditionnement est réalisée de façon nettement plus rapide que cette fonction de décroissance.

Comme dans le cas d'un milieu stationnaire (sans prise en compte de variation locale de la vitesse moyenne, la fonction d'anamorphose est monotone, continue et illimitée), l'expression de la fonction de pénalité est linéaire elle aussi :

$$J(x_i) = V(x_i)^2 - \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} \Phi(Y(x_i, t_k)) \quad ,$$

et il est impossible de converger vers un minimum local de la fonction de pénalité, durant le processus de minimisation. Pour cette raison, la valeur initiale donnée à la variable de température  $\theta_0$  peut être prise assez faible.

Lajaunie (1999) suggère l'utilisation comme température du second moment de la distribution des erreurs de vitesses de sommation :

$$\theta_k = (redEct)^2 \frac{1}{N_x} J(x_i)^2 \quad ,$$

où *redEct* représente le facteur de réduction de l'écart-type, un paramètre défini par l'utilisateur pour caractériser la précision du conditionnement à laquelle il veut arriver.

Dans notre implémentation de l'algorithme, la valeur du pas de l'échantillonneur de Gibbs  $\alpha_n$  est adaptée à la proximité des différents puits sélectionnés par rapport à leur conditionnement: cette valeur est ajustée de façon à obtenir un rapport d'acceptation constant, que nous fixons égal à 0.3. De cette façon, approximativement un tiers des propositions de l'échantillonneur de Gibbs doivent être acceptées.

Durant les itérations secondaires, la valeur du paramètre  $\alpha_n$  est conservée égale à la dernière valeur prise durant la première partie du processus de simulation.

### 7.6.2 Choix de la fonction d'anamorphose

Nous avons utilisé l'algorithme tel que nous l'avons présenté jusqu'à présent, en utilisant la variable  $W_i^2$  comme variable d'intérêt, et en modélisant la relation entre vitesse instantanée et temps par une relation linéaire. Ceci nous impose de travailler avec une fonction d'anamorphose non linéaire :

$$\begin{aligned} Y &= anamInv_1(Z) = \frac{(\sqrt{Z} - v_0 - g_t \text{ temps\_double})^2 - \mu_W}{\sigma_W} \\ Z &= anam_1(Y) = (\sqrt{Y * \sigma_W + \mu_W} + v_0 + g_t \text{ temps\_double})^2 \quad , \end{aligned}$$

où  $v_0$  représente la valeur de la vitesse à la surface,  $g_t$  représente le gradient de vitesse vertical,  $\mu_W$  représente la valeur moyenne des valeurs de vitesses après retrait de l'effet de croissance linéaire, et  $\sigma_W$  représente l'écart-type de la distribution des valeurs de vitesses après retrait de l'effet de croissance linéaire.

Nous présentons à la figure 7.16a les valeurs de vitesses obtenues pour différents puits, en fonction du temps de propagation, ainsi que les valeurs de puits de données. La figure 7.16b illustre le conditionnement des données de vitesses instantanées par les vitesses de sommation.

Pour des raisons d'instabilité numérique de la fonction d'anamorphose - il est nécessaire de garantir la positivité de  $(Y * \sigma_W + \mu_W)$  -, il faut réduire la valeur expérimentale de  $\sigma_W$  d'un facteur 20. La convergence de l'algorithme est assez lente, comme l'illustre la figure 7.20a. L'objectif est atteint après 2459 itérations.

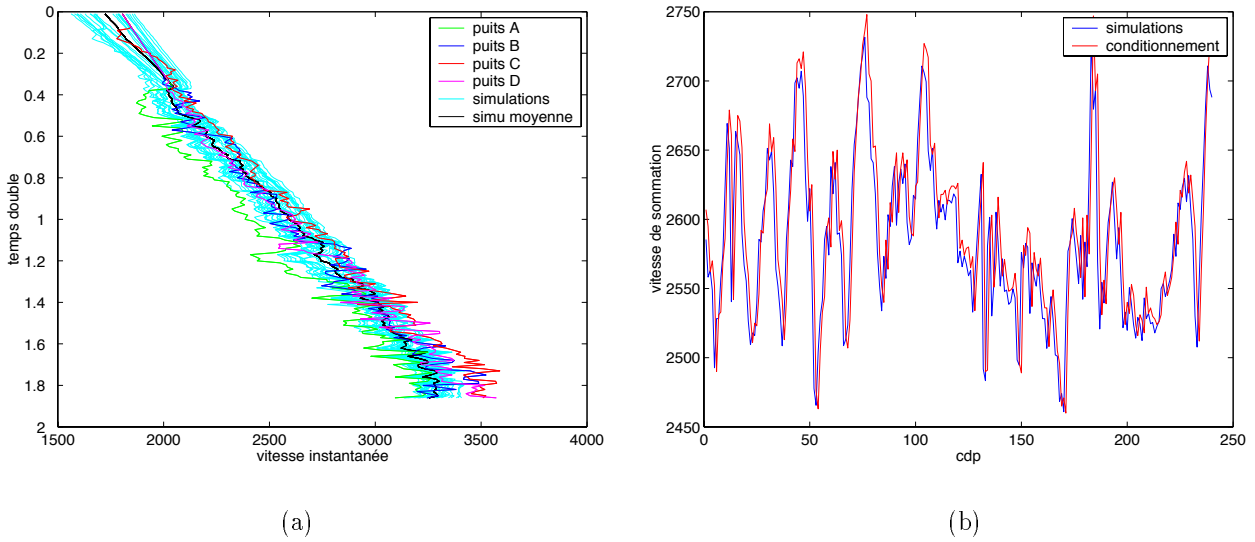


FIG. 7.16 – (a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la fonction d’anamorphose 1

Afin de remédier à ce problème, nous proposons de modifier la relation que nous avons utilisée pour décrire la croissance de la vitesse en fonction du temps de propagation. La figure 7.17 présente la croissance des valeurs de carrés de vitesses en fonction du temps de propagation. Il semble raisonnable de modéliser cette relation par une régression linéaire.

Ceci nous permet d’obtenir une expression linéaire de la fonction d’anamorphose, qui a de plus l’avantage de nous garantir une convergence vers une solution globale. La convergence obtenue dans ce cas est nettement plus rapide, comme l’illustre la figure 7.20b. L’objectif est atteint après 95 itérations. La fonction d’anamorphose utilisée dans ce cas s’exprime comme

$$Y = \text{anamInv}_2(Z) = \frac{(Z - v_0 - g_t \text{ temps\_double}) - \mu_W}{\sigma_W}$$

$$Z = \text{anam}_2(Y) = (Y * \sigma_W + \mu_W) + v_0 + g_t \text{ temps\_double} \quad ,$$

où  $v_0$  représente la valeur du carré de la vitesse à la surface,  $g_t$  représente le gradient vertical du carré de la vitesse,  $\mu_W$  représente la valeur moyenne des valeurs de carrés de vitesses après retrait de l’effet de croissance linéaire, et  $\sigma_W$  représente l’écart-type de la distribution des valeurs de carrés de vitesses après retrait de l’effet de croissance linéaire. Nous proposons alternativement d’utiliser l’expression initiale, mais en considérant comme variable d’intérêt la variable  $W$ , au lieu de la variable  $W^2$ . L’expression de la croissance linéaire de la vitesse en fonction du temps nous permet à nouveau d’obtenir une expression de la fonction d’anamorphose linéaire, ce qui nous permet

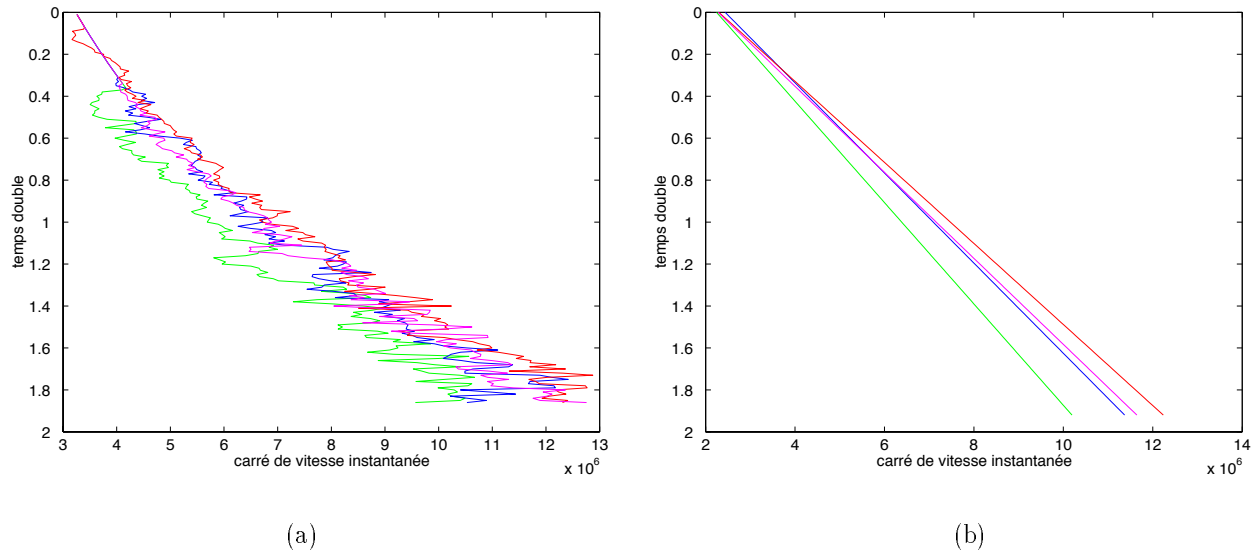


FIG. 7.17 – (a) Croissance du carré de la vitesse instantanée en fonction du temps de propagation et (b) régression linéaire

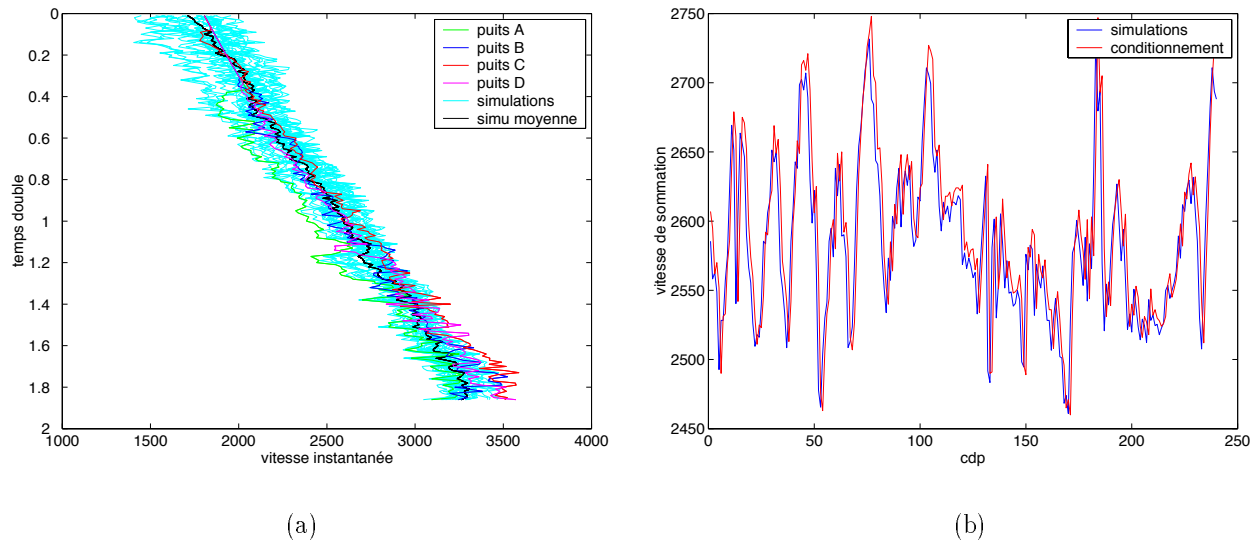


FIG. 7.18 – (a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la fonction d'anamorphose 2

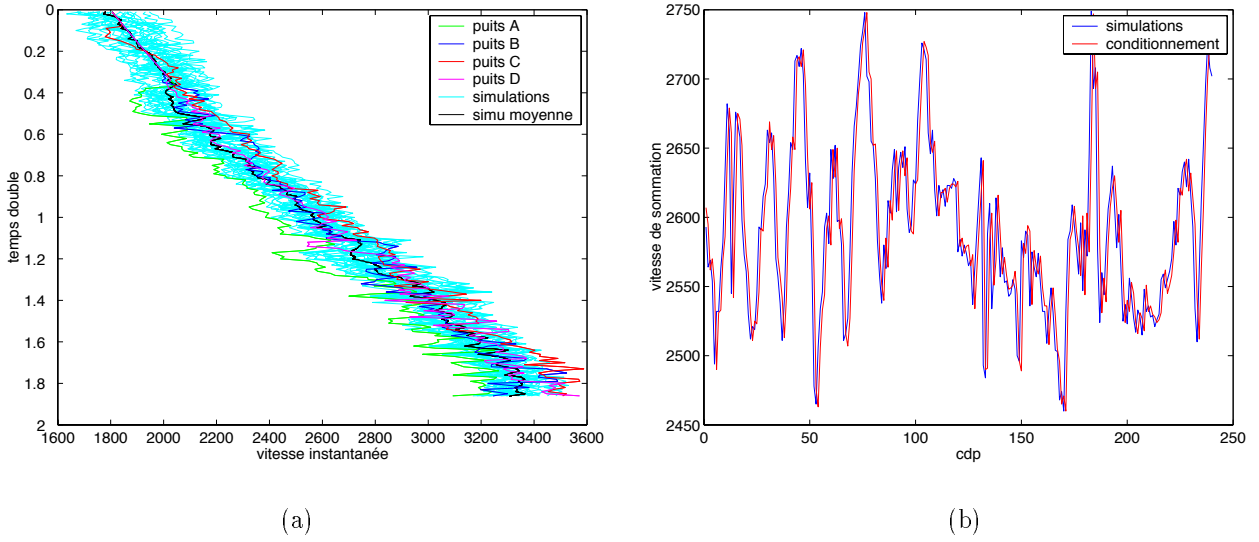


FIG. 7.19 – (a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la variable  $W$

d'obtenir une convergence rapide. Par contre, l'expression de la fonction de pénalité est à présent quadratique pour la variable simulée, ce qui signifie qu'il est possible dans ce cas que la convergence de l'algorithme nous fasse aboutir dans un minimum local de la fonction d'objectif.

Nous montrons à la figure 7.19 les simulations obtenues en utilisant cette méthode, ainsi que la vérification du conditionnement. L'objectif est atteint après 99 itérations, comme l'illustre la figure 7.20c.

Finalement, nous avons voulu améliorer l'algorithme présenté pour permettre la prise en compte des deux réflecteurs connus. Pour cela, nous avons modifié les fonctions de pénalité utilisées, afin de prendre en compte la distance au conditionnement aux deux niveaux considérés.

Les fonctions de pénalités s'écrivent à présent

$$J(x_i) = V(x_i)^2 - \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} \Phi(Y(x_i, t_k)) + V_{int}(x_i)^2 - \frac{1}{N_{tint}} \sum_{k=1}^{N_{tint}} \Phi(Y(x_i, t_k)) \quad ,$$

où  $V_{int}(x_i)$  représente la vitesse de sommation pour le réflecteur intermédiaire, et  $tint$  le temps double de propagation pour atteindre cet horizon. Dans le cas initial, la complexité de la fonction de pénalité ne permet plus à l'algorithme de converger en un temps raisonnable. Les résultats obtenus en utilisant les versions modifiées des deux algorithmes alternatifs proposés sont présentés aux figures 7.21 et 7.22.



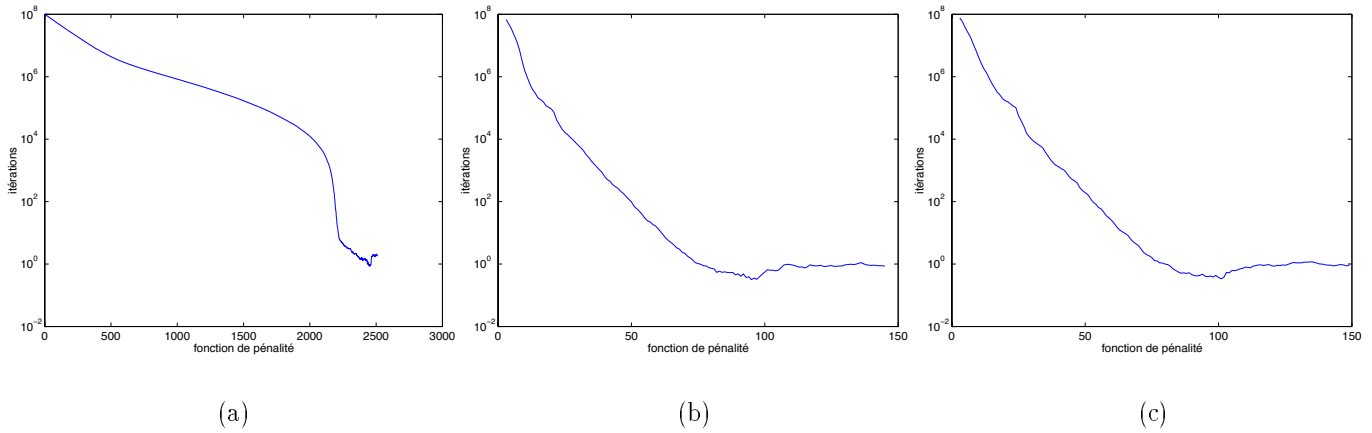


FIG. 7.20 – Comparaison entre les vitesses de convergences des algorithmes pour les fonctions d'anamorphoses (a) 1 (b) 2 et (c) 3

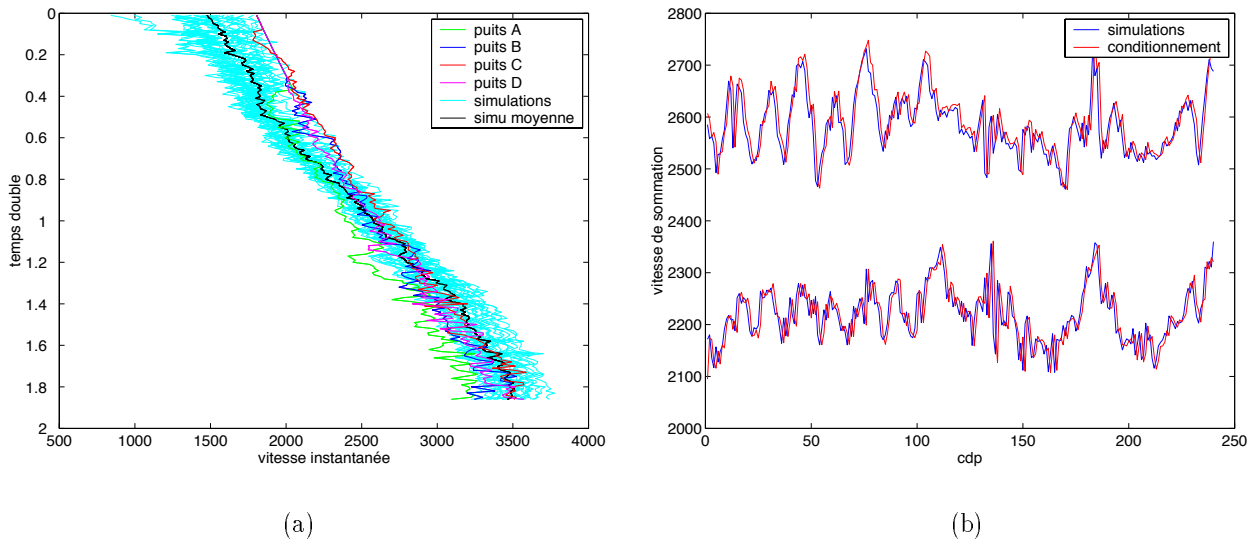


FIG. 7.21 – (a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la fonction d'anamorphose 2

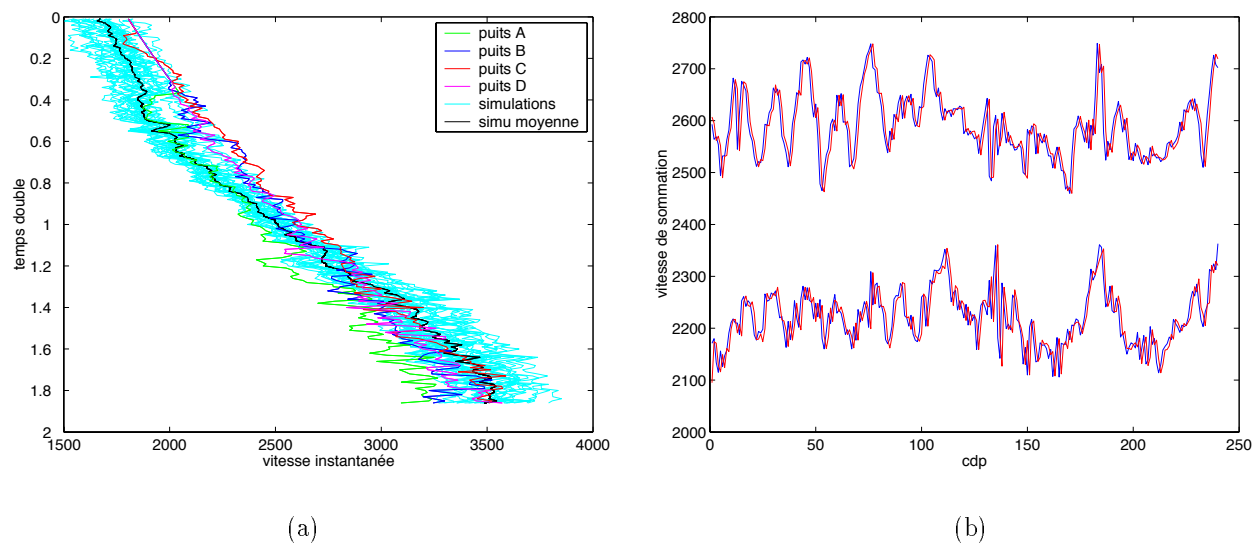


FIG. 7.22 – (a) Vitesse instantanée aux différents puits et (b) conditionnement par les vitesses de sommation, en utilisant la variable  $W$

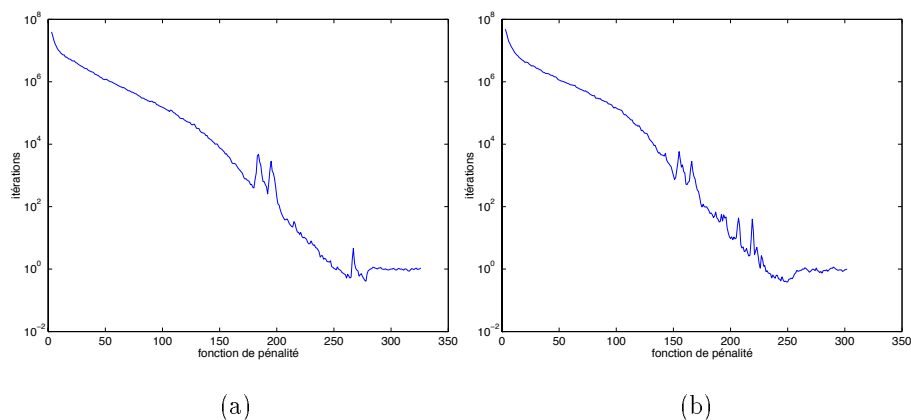


FIG. 7.23 – Comparaison entre les vitesses de convergences des algorithmes pour les fonctions d'anamorphoses (a) 2 et (b) 3, dans le cas multi-couches

Le premier algorithme converge après 276 itérations, le second en demande 252. Les vitesses de convergences sont représentées aux figures 7.23.

Nous constatons que l'algorithme développé nous permet de générer en un temps très court (inférieur à une minute) une simulation du champ de vitesse instantanée conditionnée par les vitesses de sommations le long de deux horizons différents. Cette efficacité de l'algorithme utilisé permet une génération rapide d'un nombre important de simulations conditionnées, en un temps raisonnable<sup>46</sup>.

---

<sup>46</sup>A titre indicatif, il est amusant de noter que l'algorithme converge sans difficulté si l'on inverse les deux horizons de vitesses de sommation. Ceci illustre la robustesse de l'algorithme développé.

# Conclusions et perspectives

La complexité croissante de la géométrie des gisements pétroliers explorés impose une constante amélioration de leurs modélisations.

L'estimation des volumes imprégnés d'hydrocarbures conditionne très tôt la poursuite de l'évaluation d'un prospect pétrolier. Lors de la mise en production, l'utilisation de techniques de forage complexes impose une précision pluri-métrique dans l'estimation de la profondeur des interfaces géologiques.

Cette précision est accessible par l'utilisation d'images de qualité optimale au vu des informations disponibles. Ces représentations du gisement sont obtenues par des méthodes d'imagerie géophysique, qui s'appuient sur l'étude des phénomènes de propagation des ondes dans ces milieux complexes. Elles requièrent la connaissance précise des caractéristiques physiques du matériau traversé, dont les champs de vitesses des ondes de pression et de cisaillement. La connaissance déterministe du champ de vitesse instantanée n'est malheureusement généralement pas accessible. On peut se contenter d'un modèle de faible définition, ou s'attacher à modéliser un niveau de détail plus important. Dans cette optique, il est particulièrement indiqué d'utiliser un formalisme statistique, qui décrive les caractéristiques statistiques du champ d'onde en fonction des propriétés du milieu.

L'adjonction d'un outil de mesure des incertitudes attachées aux estimations permet d'en quantifier la précision. A l'aide de cette information supplémentaire, le décideur pourra pondérer l'importance qu'il accorde aux estimations quantitatives, en fonction de l'avancement de l'évaluation du prospect et du raffinement du modèle le décrivant.

L'utilisation de méthodes géostatistiques se généralise au sein des compagnies pétrolières, pour permettre une telle évaluation des incertitudes attachées aux estimations de volumes imprégnés et de réserves. Les méthodes présentées ici s'appliquent dans le cadre de ce processus d'évaluation, afin d'éviter de mauvaises appréciations de la distribution des volumes possibles. Ces erreurs d'appréciation conduisent soit à la non-mise en production du gisement, dans le cas d'une sur-évaluation des incertitudes, soit au risque de non-rentabilité du gisement - par sur-évaluation des réserves -, dans le cas d'une sous-évaluation de ces incertitudes.

Les techniques présentées dans le cadre de ce manuscrit ont été développées dans une optique d'utilisation industrielle. Elles sont basées sur l'étude de cas canoniques simples, mais nous avons montré au travers d'un exemple réel que leur domaine d'application est assez général, et que leur mani-

pulation ne demande pas de compétence particulière de la part de l'utilisateur. Remarquons qu'il est primordial que celui-ci dispose de l'ensemble des informations décrivant les données utilisées, la pertinence de la modélisation en dépendant directement.

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressé à décrire les caractéristiques statistiques du champ de vitesse de propagation des ondes de pression dans le milieu. Nous avons développé différentes techniques permettant de les inférer à partir des mesures traditionnellement récoltées au cours d'une acquisition géophysique pétrolière.

En nous plaçant dans le cadre de l'optique géométrique, et en nous basant sur un modèle monocouche simpliste, nous avons montré que les paramètres de caractérisation du champ de vitesse peuvent être décrits à partir des collections d'information provenant du pointé avant-sommation des réflecteurs sismiques.

Cette technique, développée par M. Touati et B. Iooss au cours de leurs travaux de thèse, s'est révélée difficile à mettre en oeuvre dans le cas d'un jeu de données réelles. De plus, cette technique demande le pointé avant-sommation des données, information généralement indisponible, et dont la réalisation implique un surplus de travail pour l'utilisateur.

Nous nous sommes intéressé à développer une méthode alternative, utilisant un ensemble de données couramment disponibles, générées automatiquement lors d'un processus de traitement géophysique conventionnel. Nous avons pu mettre en évidence les relations liant la covariance des profils de vitesses de sommation aux caractéristiques statistiques du milieu. Cette relation est pondérée par une fonction dépendant principalement du dispositif d'acquisition utilisé : celle-ci décrit l'importance relative des différents temps d'arrivée ajustés lors de l'analyse de vitesse, en fonction des offsets auxquels ils correspondent.

A l'aide d'un exemple synthétique, puis d'un exemple réel, nous avons comparé les résultats obtenus au moyen de ces deux familles de méthodes. Si dans le cas de données faiblement perturbées, la méthode pré-stack semble plus précise - l'utilisation de l'information des vitesses de sommation dans le cas de la seconde méthode impliquant une forme de filtrage de l'information recherchée -, la méthode post-stack s'avère plus robuste pour l'utilisation sur données réelles. Pour cette raison, la nouvelle méthode semble nettement préférable pour une utilisation industrielle.

Afin de nous rapprocher de conditions plus réalistes, nous avons montré comment les méthodes présentées peuvent être étendues à l'étude des caractéristiques statistiques du champ d'onde dans des cas plus complexes. Nous avons ainsi illustré le cas d'un milieu dont le champ de vitesse moyen croît linéairement en fonction de la profondeur, et nous nous sommes intéressé au cas d'un milieu multi-couches. Nous avons développé pour ce dernier cas une méthode d'ajustement itérative, qui permet de réaliser l'ajustement pour un milieu multi-couches complexe comme une suite de multiples ajustements pour des situations simples. Cette technique a l'avantage de mettre clairement en évidence les éventuelles erreurs de modélisation commises pour les couches précédentes.

Enfin, en utilisant un jeu de données réelles, fourni par ENI-Agip Division, nous avons montré que l'utilisation de cette technique permet l'obtention d'un ajustement rapide et précis dans un cadre réaliste.

Nous nous sommes ensuite consacré à développer un outil de simulation, qui permette de générer aléatoirement des champs de vitesses instantanées correspondant à notre modélisation. En utilisant le formalisme statistique markovien, nous avons développé un algorithme de simulation conditionnelle performant, s'appuyant sur l'ensemble des informations de vitesses disponibles (enregistrements soniques aux puits et profils de vitesses de sommation).

L'application de cet algorithme de simulation de champs aléatoires de vitesse instantanée au jeu de données réelles nous a permis de mettre en évidence quelques éléments clefs de l'algorithme, auxquels l'utilisateur doit s'intéresser avant d'entreprendre la génération de multiples simulations. Nous avons ainsi développé un outil complet de simulation de champs de vitesse instantanée, dont les paramètres principaux peuvent être inférés au moyen des techniques développées dans la première partie du manuscrit. En comparant les résultats obtenus via ces différents champs de vitesse, l'utilisateur peut quantifier l'impact des informations de vitesses de définition supérieure à celle de son modèle déterministe.

Plusieurs pistes restent ouvertes pour de possibles développements des méthodes présentées ici. Les hypothèses de modélisation supposent que la taille des perturbations de vitesse est réduite par rapport à la trajectoire parcourue, et importante par rapport à la longueur d'onde principale du signal sismique. Ceci nous permet de nous placer dans le cadre haute fréquence de l'optique géométrique (longueur de corrélation grande devant la taille de la zone de Fresnel). Iooss (1998b) montre que la variance théorique des temps d'arrivée obtenus dans le cadre des hypothèses de l'approximation de Fraunhofer (domaine haute fréquence mais longueur de corrélation petite devant la taille de la zone de Fresnel) s'exprime de façon semblable au cadre de l'optique géométrique, mais avec une amplitude double. L'extension à ce cadre d'hypothèse des résultats théoriques présentés ici représente une piste importante restant à investiguer, ainsi que le domaine situé entre ces deux cadres de modélisation.

L'utilisation des champs de simili-vitesse de sommation générés par les méthodes d'imagerie CRS<sup>47</sup> ouvre d'autres voies de développements futurs. Ces champs de données présentent les valeurs d'ajustement permettant une sommation optimale des valeurs correspondant à un même point réfléchant. Comme l'étude de la covariance des profils de vitesses nous a permis d'évaluer les caractéristiques statistiques du milieu dans le cas d'un milieu faiblement perturbé, pour lequel le pointé des données sismiques permet la définition de profils de vitesses de sommation, l'étude de la corrélation de ces champs de vitesse représente une piste nouvelle pour l'inférence des paramètres de corrélation, dans des cas pour lesquels un pointé satisfaisant n'est plus disponible.

La prise en compte des perturbations du modèle de vitesse instantanée en tomographie classique impose une modification de la définition de la fonction d'objectif minimisée. Cette modélisation plus précise est possible en ajoutant au sein de cette fonction d'objectif un terme prenant en compte la corrélation du champ de vitesse instantanée (Bosch *et al.*, 2002). Finalement, remarquons que l'ensemble des modélisations réalisées dans le cadre de ce travail suppose que la distribution des

---

<sup>47</sup>Common Reflector Surface, voir annexe A.

perturbations considérées se répartit autour d'une taille principale de perturbations, que nous avons caractérisée. Il est alternativement possible d'utiliser un modèle aléatoire décrivant la distribution des perturbations en fonction de leurs tailles, toutes les tailles étant dans ce cas représentées. Klimes (2002) propose d'utiliser les fonctions aléatoires autosimilaires. Il pourrait être intéressant de voir dans quelle mesure les méthodes développées peuvent être étendues à ce modèle de description des perturbations.

# Bibliographie





# Références

- Aki, K. et P. G. Richards (1980). *Quantitative seismology : Theory and methods*: W. H Freeman & Co, New-York and San Francisco.
- Al-Chalabi, M. (1973). Series approximation in velocity and travelttime computations. *Geophysical Prospecting* 21, 783–795.
- Al-Chalabi, M. (1974). An analysis of staking, RMS, average and interval velocities over a horizontally layered ground. *Geophysical Prospecting* 22, 458–475.
- Al-Chalabi, M. (1997a). Instantaneous slowness versus depth functions. *Geophysics* 62(1), 270–273.
- Al-Chalabi, M. (1997b). Time-depth relationship for multilayer depth conversion. *Geophysical Prospecting* 45, 715–720.
- Al-Yahya, K. (1989). Velocity analysis by iterative profile migration. *Geophysics* 54, 718–729.
- Aldridge, D. (1994). Linearization of the ekoinal equation. *Geophysics* 59(10), 1631–1632.
- Alkhalifah, T. (2000). An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics* 65(4), 1239–1250.
- Armstrong, M. (1998). *Basic Linear Geostatistics*: Springer.
- Baina, R. (1998). *Tomographie sismique entre puits: mise en oeuvre de l'analyse a posteriori; vers une prise en compte de la bande passante*. Thèse, Université de Rennes 1.
- Bethel, R. et G. Paras (1994). A pdf multitarget tracker. *IEE Trans. Aerospace and Electronic Systems AES-30*(2), 386–403.
- Born, M. et E. Wolf (1980). *Principles of optics* (6<sup>th</sup> edition ed.): Pergamon Press.
- Bosch, M., P. Barton, et S. Singh (2002). Geostatistical tomography of short and long offset seismic data from the NE Atlantic Margin. *EAGE 64th Conference & Exhibition, Florence*.
- Boyse, W. et J. B. Keller (1995). Short acoustic, electromagnetic, and elastic waves in random media. *Journal of Optical Society of America* 12(2), 380–389.
- Cerveny, V. (2001). *Seismic Ray Theory*: Cambridge Univ. Press, New York.
- Chauris, H. (2000). *Analyse de vitesse par migration pour l'imagerie des structures complexes en sismique réflexion*. Thèse, École des Mines de Paris.

- Chernov, L. A. (1960). *Wave Propagation in a Random Media*: Mc Graw-Hill, New York.
- Chilès, J.-P. et P. Delfiner (1999). *Geostatistics, Modeling spatial uncertainty*: Wiley-Interscience.
- Claerbout, J. F. (1976). *Fundamentals of Geophysical Data Processing*: McGraw-Hill Book Co.
- Cordier, J. P. (1983). *Les Vitesses en Sismique Réflexion*: Tec & Doc, Paris.
- Cruse, E., C. Wideman, M. Noble, et A. Tarantola (1997). Non linear inversion of land seismic reflection data. *Journal of Geophysical Research* 97(34), 4685–4705.
- Dix, C. H. (1955). Seismic velocities from surface measurements. *Geophysics* 20, 68–86.
- Doerfinger, E. (1991). Propagation des ondes élastiques en milieu hétérogène bidimensionnel: Modélisation par différences finies. Rapport de D.E.A., Université de Montpellier.
- Duvaut, G. (1990). *Mécanique des milieux continus*: Masson, Paris.
- Fagin, S. (1998). *Model-based depth imaging*: Society of Exploration Geophysicists.
- Failly-Berthet (1996). *Etude quantitative de la résolution sismique par la réponse impulsionnelle*. Thèse, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- Fleche, J.-C. (1992). *Traitement sismique: notes de cours*: ENSPM, Paris.
- Galli, A. et H. Gao (2001). Rate of convergence of the Gibbs Sampler in the gaussian case. *Mathematical Geology* 33(6), 653–677.
- Geraets, D. et A. Galli (2002). Statistical travelttime tomography in terms of stacking velocity. *Pure and Applied Geophysics* 159(7-8), 1617–1636.
- Geraets, D., A. Galli, et P. Ruffo (2002). Estimating the covariance model of the random velocity field taking into account the linear vertical drift. *64th EAGE Conference & Exhibition, Florence, Expanded Abstracts*.
- Geraets, D., A. Galli, P. Ruffo, et E. D. Rossa (2001). Instantaneous velocity field characterization through stacking velocity variography. *71th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., San Antonio, Expanded Abstracts*.
- Gilks, W., S. Richardson, et D. Spiegelhalter (1996). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*: Chapman and Hall.
- Goovaerts, P. (1997). *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*: Oxford University Press.
- Guyon, X. (1999). Méthodes numériques par chaînes de markov. Notes de l'école d'été de Mathématiques, Merida, Venezuela.
- Haas, A. (1991). Harmonisation d'un ensemble de profils sismiques 2d. *Cahiers de géostatistique, Fascicule 1*, p. 19–36.
- Haas, A. et O. Dubrule (1994). Geostatistical inversion- a sequential method of stochastic modeling constrained by seismic data. *First Break* 12(11), 561–569.
- Hajnal, Z. et T. Serana (1981). Maximum uncertainty of interval estimates. *Geophysics* 46(11), 1543–1547.

- Hocht, G., E. de Bazelaire, P. Majer, et P. Hubral (1999). Seismics and optics: hyperbolae and curvatures. *Journal of Applied Geophysics* 42(Special Issue), 261–281.
- Iooss, B. (1998a). Seismic reflection traveltimes in two-dimensional statistically anisotropic random media. *Geophysical Journal international* 135, 999–1010.
- Iooss, B. (1998b). *Tomographie statistique en sismique réflexion: estimation d'un modèle de vitesse stochastique*. Thèse, Ecole des Mines de Paris.
- Iooss, B., P. Blanc-Benon, et C. Lhuillier (2000). Statistical moments of traveltimes at second order in isotropic and anisotropic random media. *Waves in Random Media* 10, 381–394.
- Iooss, B., D. Geraets, M. Touati, T. Mukerji, Y. Samuelides, et A. Galli (2002). Inferring the statistical distribution of velocity heterogeneities by statistical traveltime tomography. *Accepted by Geophysics*.
- Jurado, F., P. Lailly, et A. Ehinger (1998). Fast 3D two-point ray-tracing for traveltime tomography. *Proc. of SPIE, Mathematical Methods in Geophysical Imaging V*, p. 70–81.
- Klimes, L. (2002). Estimating the correlation function of a self-affine random medium. *Pure and Applied Geophysics* 159(7-8), 1833–1854.
- Lajaunie, C. (1998). Simulation of velocity fields under constraints on the stack value. Rapport Technique N-8/98/G, Centre de Géostatistique.
- Lajaunie, C. (1999). Simulation of velocity constrained by stack analysis: model, methods and case study. Rapport Technique N-20/99/G, Centre de Géostatistique.
- Lantuéjoul, C. (1994). Non conditional simulation of stationary isotropic multigaussian random functions. *Geostatistical simulations* (Kluwer, Dordrecht, Nederlands ed.), p. 147–177. M. Armstrong and P.A. Dowd.
- Lantuéjoul, C. (2002). *Geostatistical Simulation: Models and Algorithm*: Springer, Berlin.
- Lucio, P. S. (1996). *Simulateurs 2D et 3D de fonctions de Green asymptotiques pour des arrivées multiples par tracé de rais dynamiques*. Thèse, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Mann, J., R. Jager, T. Muller, G. Hocht, et P. Hubral (1999). Common-Reflection-Surface stack - a real data example. *Journal of Applied Geophysics* 42(Special Issue), 301–318.
- Mari, J.-L., F. Glangeaud, et F. Coppens (1997). *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens*: Editions Technip, Paris.
- Marsden, D., M. D. Bush, et D. S. Johng (1995). Analytic velocity functions. *The Leading Edge*, 775–782.
- Matheron, G. (1970). *La théorie des variables régionalisées, et ses applications*: Fascicule 5, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris.
- Matheron, G. (1972). Quelques aspects de la montée. Rapport Technique N-271, Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau.

- Matheron, G. (1973). The intrinsic random functions and their applications. *Adv. Appl. Prob.* 5, 439–468.
- Matheron, G. (1989). *Estimating and Choosing*: Springer, Berlin.
- Matheron, G. (1991). Géodésiques aléatoires: application à la prospection sismique. *Cahiers de Géostatistique Fascicule 1*.
- Müller, G., M. Roth, et M. Korn (1992). Seismic-wave traveltimes in random media. *Geophysical Journal International* 110, 29–41.
- Podvin, P. et I. Lecomte (1991). Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity models: a massively parallel approach and its associated tools. *Geophysical Journal International* 105, 271–284.
- Pulliam, J. et R. Snieder (1996). Fast, efficient calculation of rays and travel times with ray perturbation theory. *Journal of Acoustical Society of America* 99(1), 383–391.
- Rivoirard, J. (1984). *Le comportement des poids de krigeage*. Thèse, Ecole des Mines de Paris.
- Rivoirard, J., D. Renard, et M. Léger (1993). Quantification de l'incertitude sur les profondeurs estimées par sismique et par puits. Rapport Technique FSH 11/93/G, Centre de Géostatistique.
- Robein, E. (1999). *Vitesses et techniques d'imagerie en sismique réflexion*: Tec & Doc, Paris.
- Roth, M., G. Müller, et R. Snieder (1993). Velocity shift in random media. *Geophysical Journal International* 115, 552–563.
- Rytov, S. M., Y. A. Kravtsov, et V. I. Tatarskii (1987). *Principles of statistical radiophysics*: Springer, Berlin. Volume 4: Wave propagation through random media.
- Samuelides, Y. (1998). Velocity shift using the Rytov approximation. *Journal of Acoustical Soc. of America* 104(5), 2596–2603.
- Samuelides, Y. et T. Mukerji (1998). Velocity shift in heterogeneous media with anisotropic spatial correlation. *Geophysical Journal International* 87, 778–786.
- Shapiro, S. A. et G. Kneib (1993). Seismic attenuation by scattering: theory and numerical results. *Geophysical Journal International* 114(2), 373–391.
- Shapiro, S. A., R. Schwarz, et N. Gold (1996). The effect of random isotropic inhomogeneities on the phase velocity of seismic waves. *Geophysical Journal International* 127, 783–794.
- Snieder, R. et D. F. Aldridge (1995). Perturbation theory for travel times. *Journal of Acoustical Society of America* 98(3), 1565–1569.
- Snieder, R. et M. Sambridge (1993). The ambiguity in Ray Perturbation Theory. *Journal of Geophysical Research* 98(B12), 22021–22034.
- Spiesberger, J. L. et P. F. Worcester (1983). Perturbations in travel time and ray geometry due to mesoscale disturbance: comparaison of exact and approximate calculations. *Journal of Acoustical Society of America* 74(1), 219–225.

- Tarantola, P. (1987). *Inverse problem Theory : Methods for data fitting and model parameter estimation*: Elsevier.
- Thierry, P. (1997). *Migration/inversion 3D en profondeur à amplitude sismique préservée : application aux données sismiques réflexion avant sommation*. Thèse, Université Paris 7.
- Thierry, P., P. Jousset, R. Baina, A. Ribodetti, et F. Billette (2000). 3-D preserved amplitude processing sequence in a real case. *Expanded Abstracts*, p. 239–242. SEG.
- Thierry, P., G. Lambaré, P. Podvin, et M. Noble (1999). 3-D preserved amplitude prestack depth migration on a workstation. *Geophysics* 64(1), 222–229.
- Thomsen, L. (2002). Understanding seismic anisotropy in exploration and exploitation. Distinguished Instructor Series.
- Thore, P. et C. Juliard (1999). Fresnel zone effect on seismic velocity resolution. *Geophysics* 64(2), 593–603.
- Thore, P., A. Shtuka, M. Lecour, T. Ait-Ettajer, et R. Cognot (2002). Structural uncertainties : determination, management, and applications. *Geophysics* 67(3), 840–852.
- Touati, M. (1996). *Contribution géostatistique au traitement des données sismiques*. Thèse, Ecole des Mines de Paris.
- Touati, M., B. Iooss, et A. Galli (1999). Quantitative control of migration: a geostatistical attempt. *Mathematical Geology* 31(3), 277–295.
- Vidale, D. (1988). Finite-difference calculation of travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America* 78, 2062–2076.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* 51(4), 889–901.
- Virieux, J., V. Farra, et R. Madariaga (1988). Ray tracing for earthquake location in laterally heterogeneous media. *Journal of Geophysical Research* 93, 6585–6599.
- Woodward, M. J. (1992). Wave-equation tomography. *Geophysics* 57, 15–26.
- Yilmaz, O. (2001). *Seismic data analysis*: Society of Exploration Geophysics.
- Yilmaz, O. et R. Chambers (1984). Migration velocity analysis by wavefield extrapolation. *Geophysics* 49, 1664–1674.



# Annexes





## Annexe A

# Description des principaux concepts géophysiques

Cette annexe présente les principaux outils d'acquisition et de traitement des données sismiques utilisés dans le cadre de l'exploration pétrolière. Dans un souci de simplicité, cette présentation sera centrée sur l'acquisition de données à objectif pétrolier. Les nombreux autres dispositifs existants - permettant de mettre en lumière d'autres propriétés du sous-sol (par ex: les dispositifs plus larges, qui permettent de mesurer les ondes réfractées, et ainsi de localiser des réflecteurs plus profonds) - ne seront pas présentés ici.

Dans les pages qui vont suivre, nous allons souvent aborder le concept de **signal**, opposé au concept de **bruit**. Le signal constitue la partie intéressante de l'information acquise, celle qui correspond au phénomène que l'on souhaite étudier (les ondes réfléchies). Par opposition, le bruit constitue la partie des données qui nous empêche d'accéder directement et parfaitement à cette information (toutes les autres ondes : réfractions, ground roll; bruits aléatoires, multiples). On tentera donc à tout instant de concevoir nos appareillages et manipulations dans le but d'augmenter le **rapport signal sur bruit** (noté S/B, ou S/N).

L'enregistrement des ondes de pression et de cisaillement renvoyées par le sous-sol en réponse à un signal vibratoire émis, et le traitement de cette information, permettent d'obtenir des mesures de **contraste d'impédance**<sup>48</sup>, dont la géométrie reflète la structure des couches géologiques sous-jacentes.

Ce sont les différentes étapes de l'acquisition et du traitement de ces signaux que nous allons

---

<sup>48</sup>L'impédance est définie comme le produit de la vitesse des ondes par la densité de la roche : impédance = vitesse . densité ( $m/s.g/cm^3$ ).

Les ondes émises seront donc, lors du passage d'un milieu à un autre, transmises, réfléchies ou réfractées, en fonction du contraste d'impédance existant entre les deux milieux de propagation, et de l'angle d'incidence de l'onde par rapport à la frontière entre milieux (la loi de Snell-Descartes décrit les relations angulaires entre rayon émis et rayon réfléchi/réfracté).

brièvement présenter ci-dessous.

Cette section a été rédigée en s'appuyant sur les ouvrages (Yilmaz, 2001) (Fleche, 1992) (Mari *et al.*, 1997) (Robein, 1999). Le lecteur y trouvera des explications plus complètes sur les points résumés ici.

## A.1 Acquisition des données

### A.1.1 Dispositif d'acquisition

On distingue deux types d'acquisitions de données sismiques de surface, qui amènent à des données aux caractéristiques différentes : les acquisitions terrestres et les acquisitions marines. Les acquisitions terrestres consistent en l'enregistrement par des géophones (capteurs de vibrations) des ondes de pression (ondes P) et de cisaillement (ondes S) émises par une source, et propagées jusqu'au récepteur.

Une collection de géophones est disposée à la surface de la zone étudiée. Ceux-ci sont plantés dans le sol, de façon à d'obtenir un bon couplage entre le sol et l'instrument. Selon que l'on réalise une acquisition 2D ou 3D, on les place le long de la ligne d'acquisition, ou sur l'ensemble du champ. Ces capteurs peuvent être mono-composantes, auquel cas ils mesurent la vibration verticale du sol et permettent une étude sismique en ondes P, ou multi-composantes (en x, y et z), pour réaliser une acquisition en ondes P et S. La position de chacun des éléments du dispositif, nécessaire ultérieurement durant le traitement des données, est enregistrée précisément, au moyen de technologie GPS si possible.

La source utilisée pour générer la vibration du sous-sol est soit vibratoire, soit explosive. Dans le premier cas, un camion vibreur envoie dans le sol des ondes, selon un spectre de fréquences situé entre 8 Hz et 200 Hz, pour une durée de vibration (*sweep*) d'une vingtaine de secondes. La puissance émise est limitée par la masse du camion, et peut donc être augmentée si nécessaire en utilisant plusieurs camions synchronisés. Dans le cas d'une source explosive, le spectre généré par l'explosion couvre l'intégralité du spectre des fréquences, et la puissance dépend directement de la quantité d'explosif utilisée. La manipulation de ce type de source étant moins rapide - besoin de creuser un trou, d'y enfouir l'explosif, d'armer celui-ci - et plus dangereuse, on lui préférera généralement la méthode vibratoire, lorsqu'elle est applicable. La position de la source par rapport au dispositif d'enregistrement (aux géophones) peut soit être centrale (on parle alors de **tir au centre**), soit latérale (on parle alors de **tir en bout**). Par la suite, nous considérerons toujours être dans un dispositif en tir au centre (le dispositif en tir en bout est plus spécifiquement conçu pour le tir à grands offsets, pour l'étude de sismique réfraction par exemple).

Les vibrations provoquées par chaque tir sont enregistrées pour l'ensemble des géophones proches (en 2D, une centaine; en 3D, plusieurs milliers), durant 2 à 15 secondes (avec un pas de temps de 2 à 4 ms). On peut mesurer la taille gigantesque des jeux de données qui sont ainsi constitués, et seront manipulés par la suite.

Afin d'améliorer le rapport S/B dès l'acquisition, on peut reproduire les tirs, et moyenner les me-

sures enregistrées. Ceci n'est toutefois possible que dans le cas d'acquisitions terrestres, avec source vibratoire. De même, on peut disposer plusieurs géophones très proches l'un de l'autre, et en sommer (directement) les valeurs enregistrées (une disposition judicieuse permet le filtrage préférentiel de certaines fréquences lors de l'enregistrement; on peut ainsi dès l'acquisition atténuer voire supprimer complètement certaines formes de bruit). Ces pratiques sont utilisées aujourd'hui de manière générale.

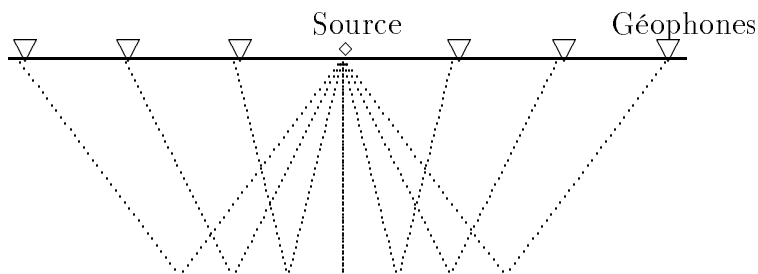


FIG. A.1 – Dispositif d'acquisition terrestre

L'acquisition marine fonctionne de façon assez différente, à cause du caractère mobile de l'acquisition. Le dispositif se compose dans ce cas de capteurs à pression (appelés **hydrophones**), et d'une source, qui peut de nouveau être explosive, ou pneumatique (air-gun). L'utilisation de cette dernière se généralise au détriment de la source explosive. Généralement, la source est située juste derrière le bateau.

De manière à les disposer selon une grille régulière, les capteurs sont placés le long de **flûtes** (*streamers*), tractées par le bateau-source, de manière à les maintenir à une profondeur de quelques mètres. La vitesse de l'acquisition est donc limitée par ces flûtes - en fonction de la mer et des courants, il est impératif d'éviter qu'elles ne s'emmêlent. En général, la vitesse atteint quelques noeuds. Actuellement, les bateaux les plus modernes peuvent tracter jusqu'à 16 flûtes, longues de plusieurs kilomètres chacune, et étalées sur une largeur de plusieurs centaines de mètres.

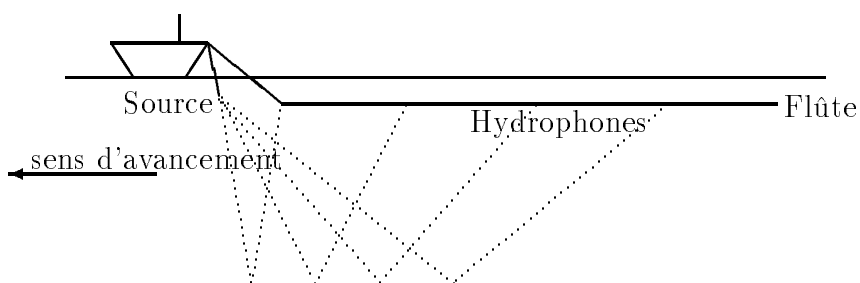


FIG. A.2 – Acquisition marine

Dans les milieux peu profonds (*shallow water*) ainsi que dans les milieux difficilement navigables - autour d'une plate-forme, en haute mer - , on adopte une technique particulière, appelée OBC (*Ocean Bottom Cable*). Il s'agit de déposer sur le fond de la mer un câble, dans lequel sont disposés les capteurs, pour ne le récupérer qu'après avoir procédé aux tirs. Les câbles sont équipés conjointement de capteurs à pression et de capteurs vibratoires, ce qui permet une acquisition "multi-composantes" et, dans les cas d'une acquisition *shallow water*, de faire la liaison entre des acquisitions terrestre et marine. Cette technique permet d'autre part, si le câble n'est pas remonté, une reproduction des enregistrements. Ainsi, si le laps de temps écoulé entre les différentes campagnes de tirs est suffisant, on peut observer l'évolution de la réponse sismique du gisement, pour guider le monitoring de la production des réserves. Cette démarche est utilisée sous le nom générique de **sismique 4D**.

## A.2 Traitement (*processing*)

### A.2.1 Pré-traitement

Afin de transformer les enregistrements obtenus en données utilisables, un certain nombre d'étapes de traitement numérique est nécessaire. Celles-ci demandent au géophysicien de fixer un nombre important de paramètres. A cause de la taille gigantesque des fichiers traités, on préférera souvent rechercher la valeur de ces différents paramètres, et les affiner précisément à partir d'un échantillon de l'ensemble des données (quelques lignes 2D, ou un sous-bloc 3D), avant d'appliquer la chaîne du processus à l'ensemble des données. Nous allons présenter ici les principales étapes du traitement sismique.

### Edition et correction des amplitudes

Cette étape consiste en l'édition de l'ensemble des **traces** (enregistrement réalisé par un capteur lors d'un tir), pour détecter visuellement et supprimer les traces erronées, aberrantes. On applique souvent - sauf dans les traitements en amplitudes préservées, pour l'AVO par exemple - un gain sur les amplitudes, afin de les corriger pour l'effet de divergence sphérique. Enfin, on dispose les traces en Collections-Points-Milieus (*CMP gather*), en réunissant les enregistrements correspondant à un même point central. Cette dernière étape est illustrée par la figure A.3.

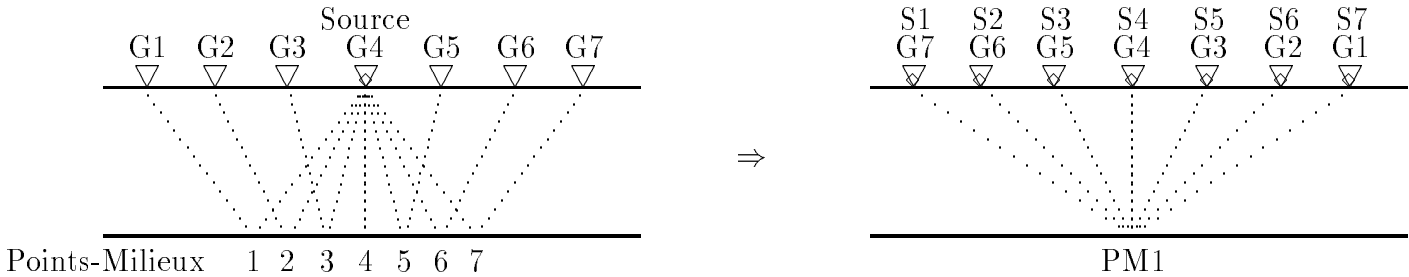


FIG. A.3 – Passage en collection point-milieu commun

### Déconvolution de la source (*source deconvolution*)

Le modèle convolutif, généralement adopté, décrit l'onde sismique  $s(t)$  émise par le sol (et enregistrée par le capteur) comme la convoluée de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du sol (à laquelle nous cherchons à accéder) et de la source  $e(t)$  émise. On a donc

$$s(t) = h(t) * e(t) + x(t)$$

où  $x(t)$  représente le bruit à l'enregistrement.

Si nous considérons le bruit négligeable, nous pouvons connaître la réponse impulsionnelle du sous-sol en déconvoluant les traces par rapport à la source. Ce traitement est fort différent s'il s'agit de données terrestres ou marines.

Il permet aussi de supprimer les réflexions multiples, provoquées par le rebondissement répété d'ondes entre des réflecteurs ou sur la surface de l'eau.

### Corrections statiques (*static correction*)

La correction dite "statique" consiste à recalculer les enregistrements par rapport à un niveau de référence, de manière à corriger les traces pour les effets dus au relief de surface. Pour cela, on les décale d'un temps dépendant des altitudes respectives de la source et du récepteur lors du tir. Cette correction exige de l'utilisateur une connaissance de la valeur de la vitesse de propagation des ondes proches de la surface, dans la **zone altérée** (*Weathered Zone*). Il lui faut donc réaliser, lors de l'acquisition, des expériences de sismique réfraction afin de pouvoir mesurer cette vitesse.

### Analyses de vitesses et corrections dynamiques (*Normal Move Out*)

La longueur du trajet réalisé par les ondes pour aller de la source au récepteur est fonction de la distance les séparant (l'**offset**). Il s'agit de corriger cet effet, en alignant les enregistrements d'une même collection CMP.

Dans le cas de réflecteurs plans horizontaux et d'un milieu de propagation homogène, la correction suit une loi de type hyperbolique. Ceci est également le cas au premier ordre pour des réflecteurs

faiblement pentés. Le travail du géophysicien est de trouver les valeurs de  $v_{nmo}$  et  $t_0$  permettant un ajustement optimal de l'hyperbole sur les arrivées sismiques, selon la loi

$$t_x^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{v_{nmo}^2} \quad ,$$

où  $x$  désigne l'offset,  $t_0$  le temps d'arrivée de l'onde pour la configuration à **offset nul** - qui correspond au cas où la source et le récepteur sont co-localisés - et  $v_{nmo}$  la **vitesse de sommation** (ou *vitesse de stack*).

La détermination de la vitesse de sommation est généralement réalisée par l'utilisation de panneaux de cohérence. Ils permettent de visualiser l'énergie obtenue lors de la sommation, pour diverses valeurs de vitesses. Le géophysicien peut alors pointer les vitesses de sommation utilisées effectivement, de façon à générer l'image ayant une énergie maximale. Ceci est réalisé au cours de l'étape d'analyse de vitesse.

Les valeurs ainsi trouvées pour  $v_{nmo}$  et  $t_0$  sont utilisées pour corriger les traces de leur effet de déport. On notera que d'autres lois existent (approximation à trois termes, par exemple, cf. (Al-Chalabi, 1997b)), mais leur interprétation en termes physiques est nettement moins évidente.

Quelquefois, on affinera l'alignement obtenu en procédant à nouveau à une étape de corrections statiques, dites alors corrections statiques résiduelles.

Les sections sismiques ainsi obtenues sont dites "sections NMO-stack".

### Sommation (*stack*)

On réalise alors une sommation des traces par collections-point-milieu. Ceci permet d'augmenter le rapport S/B. Actuellement, on réalise des acquisitions terrestres avec une couverture (quantité d'enregistrements correspondant au même point réflectant) qui peut aller jusqu'à 156, ce qui permet un gain notable sur la qualité de l'image sommée finale.

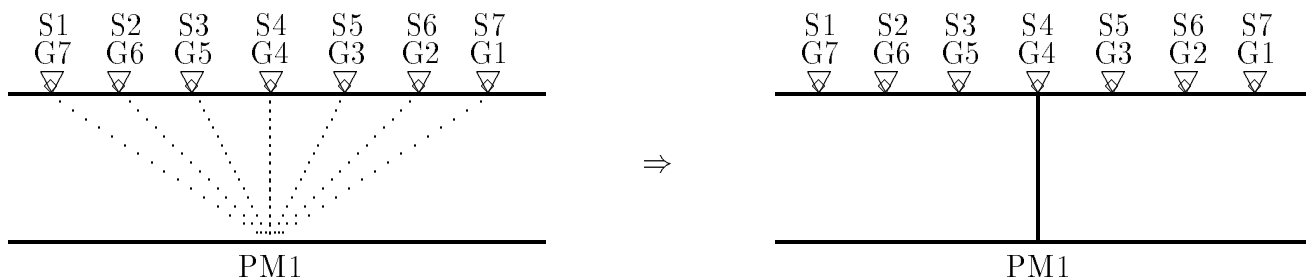


FIG. A.4 – Stack

### Modèle de vitesse

Plusieurs étapes du traitement nécessitent la connaissance du champ des vitesses des ondes. Une des méthodes les plus simples utilisées pour obtenir le champ de vitesses consiste à utiliser l'approximation de Dix (1955) qui lie la vitesse dans les couches géologiques à la vitesse RMS (*Root-Mean-Square*, équivalente au premier ordre à la vitesse  $V_{nmo}$ ) par

$$v_{RMS_{k+1}}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{k+1} v_{i \rightarrow i+1}^2 (t_{i+1} - t_i)}{\sum_{i=0}^{k+1} t_{i+1} - t_i} ,$$

où  $v_{k \rightarrow k+1}$  désigne la vitesse dans la couche géologique comprise entre les interfaces  $k$  et  $k + 1$ , et donc

$$v_{k \rightarrow k+1}^2 = \frac{v_{RMS_{k+1}}^2 t_{k+1} - v_{RMS_k}^2 t_k}{t_{k+1} - t_k} . \quad (\text{A.1})$$

Il est préférable d'utiliser un modèle de vitesse qui s'ajuste aux puits, de façon à obtenir une image finale qui cale aux puits elle aussi.

### A.2.2 Imagerie

L'étape d'imagerie permet la transformation des données sismiques pré-traitées en un ensemble d'informations d'impédance acoustique. Elle demande de repositionner les données, par une étape de migration, puis de transformer les sections sismiques en sections d'impédance acoustique, par inversion stratigraphique.

#### Migration

La migration consiste en un repositionnement des réflecteurs et des points diffractants en prenant en compte les lois de la propagation d'onde dans le milieu.

Diverses méthodes existent pour réaliser la migration : par le tracé de rayons (Kirchhoff), en domaine de Fourier (migration f-k, phase-shift), ou par continuation (Claerbout, 1976). Il faut remarquer que, indépendamment de la méthode adoptée, l'étape de migration demande un temps calcul considérable.

La migration de l'image sismique peut être effectuée dans le domaine temps, pour obtenir une image temps corrigée, ou en profondeur, pour obtenir une image profondeur.

Pour obtenir une meilleure qualité d'imagerie, on peut réaliser la migration avant-sommation (*pre-stack migration*). Ceci demande un temps calcul nettement plus important. Dans le cas de zones complexes, où des réflecteurs fortement pentés et/ou des failles sont présents, cette technique permet l'obtention in fine d'une image dont le rapport S/B est remarquablement amélioré (Fagin, 1998). On peut ajuster le champ de vitesse en fonction des résultats de la migration, au travers d'une analyse



de vitesse de migration (*Migration Velocity Analysis*) (Al-Yahya, 1989) (Yilmaz et Chambers, 1984) (Chauris, 2000).

On peut aussi, en utilisant le modèle de vitesses géologiques obtenu, améliorer les modèles utilisés plus tôt dans la chaîne du traitement. On choisit dans ce cas de recommencer le traitement au niveau des vitesses de stack, en appliquant ce nouveau - et plus précis - modèle de vitesse. On peut ainsi réaliser quelques itérations du traitement complet, en affinant le modèle de vitesse, pour améliorer la qualité de l'image finale obtenue.

### Inversion stratigraphique

L'inversion de données sismiques est basée sur la comparaison de données traitées avec des données synthétiques modélisées. Ces dernières sont obtenues par l'application d'un algorithme de lancé de rayons sur un modèle géologique donné a priori. Le but de l'inversion est de trouver les paramètres du modèle géologique tels que les temps théoriques soient les plus proches des temps mesurés. La convergence est obtenue par minimisation d'une fonction de coût, décrivant l'écart entre données synthétiques et données mesurées (Tarantola, 1987).

### Imaging

Une nouvelle technique générale a été récemment proposée (Hocht *et al.*, 1999) (Mann *et al.*, 1999). Elle permet de réaliser l'ensemble des étapes du traitement conventionnel, sans passer par le pointé - manuel, et assez fastidieux - des analyses de vitesses.

Cela consiste à collecter au sein des données les points correspondant au même point réflecteur.

En effet, ceux-ci sont disposés sur des surfaces appelées *Common-Reflection-Surface*, décrites par la relation (voir figure A.5)

$$t_{(x_m, h)}^2 = \left( t_0 + \frac{2 \sin \alpha}{v_0} (x_m - x_0) \right)^2 + \frac{2 t_0 \cos^2 \alpha}{v_0} \left( \frac{(x_m - x_0)^2}{R_N} + \frac{h^2}{R_{NIP}} \right) \quad ,$$

où  $x_m$  représente le point milieu,  $h$  représente le demi-offset entre la source et le récepteur,  $\alpha$  représente l'angle d'incidence du rayon normal au réflecteur,  $R_{NIP}$  représente la grandeur du rayon de l'onde NIP (obtenue par propagation d'une onde en positionnant une source au point R),  $R_N$  représente la grandeur du rayon de l'onde N (obtenue par propagation d'un réflecteur explosif à partir du point R), et  $v_0$  représente la vitesse des ondes près de la surface.

$R_N$ ,  $R_{NIP}$  et  $\alpha$  sont les paramètres spatiaux de la courbe, que l'on modifie de manière à maximiser la cohérence entre les données et la courbe théorique (et donc à améliorer le rapport S/B).

Du point de vue numérique, on réalise en général la maximisation multi-variable (en  $R_N$ ,  $R_{NIP}$  et  $\alpha$ ) en commençant par une maximisation mono-variable, plus rapide, et pouvant mener à une solution proche de l'optimale.

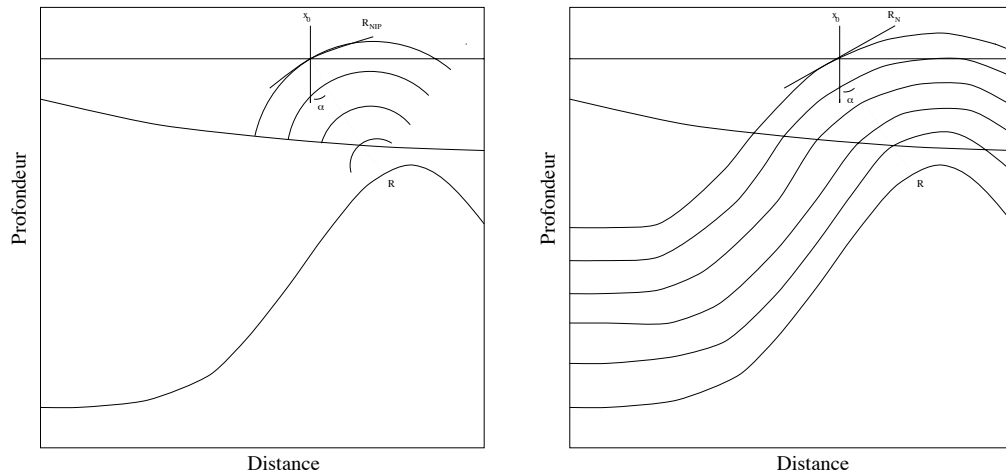


FIG. A.5 – Expérience synthétique définissant les ondes NIP et N pour un point de réflexion R

Par observation du champ de vitesse  $v_{nmo}$  “correspondant” obtenu (il ne s’agit pas à proprement parler d’un champ de vitesse, mais cela y correspond partiellement), on peut déterminer visuellement la présence de multiple, que l’on peut alors éliminer de l’image.

### A.3 Interprétation

L’ensemble des étapes de traitement décrites précédemment a pour objectif de permettre un pointé clair et précis de l’information contenue dans les enregistrements sismiques. Le pointé n’est donc pas à proprement parler une étape de traitement, mais l’efficacité avec laquelle il peut être réalisé dépend directement de la qualité de l’acquisition et du traitement des données sismiques.

Il s’agit de relever au sein de l’ensemble de données sismiques les marqueurs correspondant à des interfaces entre couches géologiques, pour aboutir à un modèle précisant la position des différents corps sédimentaires, ainsi que les failles et intrusions éventuelles.

L’interprétation géologique tient une part importante dans ce processus.

L’objectif de l’exploration pétrolière est de mettre en évidence des dispositions géologiques particulières, qui puissent piéger des hydrocarbures. Les présences conjointes d’une roche-mère mature - couche sédimentaire à importante concentration en matière organique -, d’un piège structural ou stratigraphique, d’une couche réservoir - couche sédimentaire de forte porosité - et d’un chemin de migration - drain permettant le transport du fluide de la couche mère à la couche réservoir - définissent un prospect pétrolier. Ces différents concepts sont illustrés à la figure A.6.

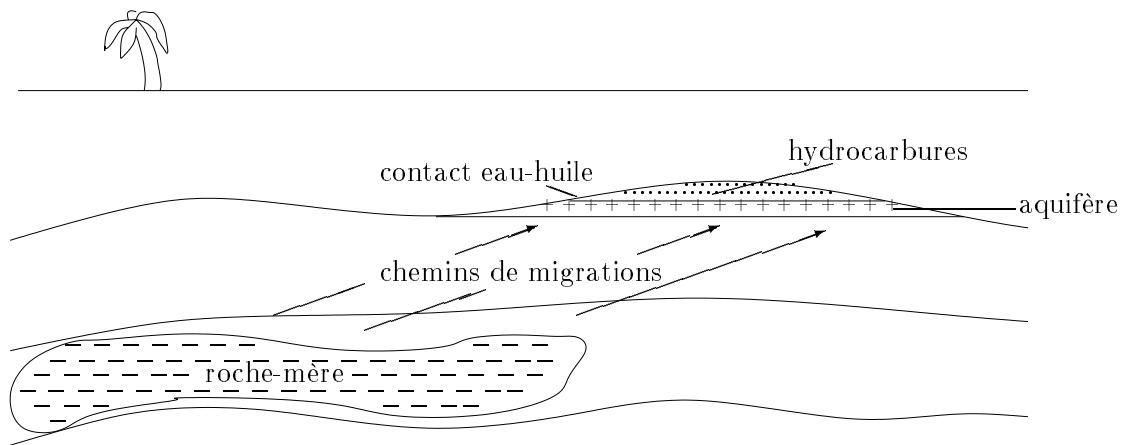


FIG. A.6 – Définition d'un prospect pétrolier

## Annexe B

# Equation d'onde

### B.1 Notions générales de mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus décrit le comportement mécanique de la matière, et en particulier la relation entre les contraintes au sein du milieu, et l'histoire des déformations induites dans le corps considéré. Nous avons voulu ici reproduire les principales étapes de modélisation qui conduisent à l'obtention de l'équation des ondes, dans le cas particulier considéré (isotrope et uniforme<sup>49</sup>). Pour de plus amples détails, le lecteur pourra par exemple se reporter à (Duvaut, 1990).

Nous allons modéliser les principales propriétés d'un matériau élastique. La propriété d'élasticité d'un matériau stipule qu'il existe un état de référence sans contrainte pour ce matériau, et qu'à chaque instant, son état de déformation  $\varepsilon(t)$  par rapport à cet état de référence dépend uniquement des contraintes  $\sigma(t)$  appliquées à cet instant  $t$ ,

$$\varepsilon(t) = f(\sigma(t)) \quad .$$

On peut à partir de cet état définir deux repères de coordonnées : les **coordonnées eulériennes**, conventionnellement représentées par un vecteur  $x$  en minuscule, qui définissent la position d'un point du matériau en fonction d'un repère fixe dans l'espace; et les **coordonnées lagrangiennes**, représentées par une majuscule  $X$ , qui décrivent la position d'un point du matériau au sein de celui-ci. Ce dernier repère est mobile, il suit le mouvement du corps étudié. Selon que l'on s'intéresse aux trajectoires des particules ou plutôt aux caractéristiques du mouvement en des positions fixes de l'espace, on utilisera l'une ou l'autre description du milieu.

On appelle **déplacement**, noté  $u$ , le vecteur liant la position d'un point à l'instant présent à sa position de référence initiale.

---

<sup>49</sup>C'est-à-dire dont les propriétés (telle la masse spécifique) dans la configuration de référence sont les mêmes partout.

La notion de déformation décrit la variation des distances entre points matériels au sein du matériau, au cours du temps. Le tenseur des déformations représente ces variations - et leurs couplages - pour chaque direction de l'espace.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad ,$$

où  $X_j$  représente les coordonnées lagrangiennes (mobiles) d'un point, et  $u_i$  représente le déplacement dans la direction  $i$ .

On se place dans l'**hypothèse des petites déformations**, ce qui signifie que le tenseur des déformations  $\varepsilon$  peut être approximé de façon satisfaisante par sa partie linéaire,  $\epsilon$ , en négligeant sa partie quadratique.

$\epsilon$  le **tenseur des déformations linéarisées**, s'écrit

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad ,$$

où  $X_j$  et  $x_j$  représentent respectivement les coordonnées lagrangiennes (mobiles) et eulériennes (fixes) d'un point, et  $u_i$  représente le déplacement dans la direction  $i$ .

Par définition, on voit directement que le tenseur  $\epsilon_{ij}$  est symétrique.

On définit  $\sigma$  le **tenseur des contraintes de Cauchy**. Sa composante  $\sigma_{ij}$  représente la contribution selon la direction  $i$  du vecteur contrainte appliqué sur la facette de normale  $j$ . Il s'agit d'un tenseur de second ordre, la conservation du moment cinétique total implique qu'il est symétrique :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Puisque la mécanique des milieux continus considère que l'on est en présence de petites déformations, on va supposer que les contraintes exercées sur le corps étudié sont des combinaisons linéaires des déformations de celui-ci. Cette hypothèse importante est connue sous le nom de **loi de Hooke** ou **loi de comportement**, et s'exprime comme<sup>50</sup>

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad . \quad (B.1)$$

Le tenseur d'élasticité  $C_{ijkl}$  comporte 81 composantes. Toutefois, par symétrie des tenseurs  $\sigma$  et  $\epsilon$ , seules 36 d'entre elles sont indépendantes.

---

<sup>50</sup>Nous utilisons dans ce paragraphe la notation de Einstein traditionnellement utilisée en mécanique des milieux continus, qui suppose que, lorsqu'un indice figure deux fois dans un monôme, il y a sommation (pour des valeurs de 1 à 3) sur cet indice, sans ajouter la présence d'un signe de sommation  $\sum$ .

Ainsi, on notera  $C_{ijx_j}$  pour  $\sum_{j=1}^3 C_{ijx_j}$ , l'indice muet  $j$  pouvant dans ce cas être remplacé par n'importe quelle lettre excepté  $i$ .

L'expression locale du premier principe de la thermodynamique décrit l'existence d'une énergie interne spécifique  $e$  fonction du seul tenseur des déformations linéarisées  $\epsilon$ , en l'absence d'effets thermiques (apport d'énergie thermique extérieure)

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \quad .$$

En supposant que  $e$  est fonction uniquement de  $\epsilon$ , et puisque cette relation est vraie à tout instant, on trouve

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial e}{\partial \epsilon_{ij}} \quad .$$

En tenant compte de B.1, on montre que

$$C_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 e}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \quad ,$$

et donc  $C_{ijkl} = C_{klij}$ .

On trouve que, dans le cas général, le tenseur d'élasticité  $C$  peut être décrit au moyen de 21 coefficients indépendants.

## B.2 Milieu élastique isotrope

Notre modélisation considère un milieu élastique **isotrope**, ce qui signifie que les propriétés d'élasticité du corps étudié sont invariantes par symétrie ou rotation, et donc que la vitesse  $P$  en un point  $x$  de l'espace est équivalente dans toutes les directions de l'espace : nous ne considérons pas la présence d'anisotropie de vitesse<sup>51</sup> (Thomsen, 2002). Dans ce cas, la matrice de Hooke prend une forme dégénérée : elle peut être décrite par deux paramètres indépendants, les paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

La loi de Hooke s'exprime dans ce cas

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad ,$$

en utilisant la notation  $\delta$  de Kronecker.

Ceci correspond à décomposer les contraintes en une composante correspondant aux déformations longitudinales  $\epsilon_{ll}$ , et une composante correspondant aux déformations transversales  $\epsilon_{ij}$ .

---

<sup>51</sup>Remarquons que le terme *anisotropie* est utilisé à plusieurs autres reprises dans ce manuscrit, pour se référer au rapport des longueurs de corrélation horizontale et verticale du champ de vitesse. Il caractérise alors la plus grande continuité horizontale des perturbations du champ de vitesses. Il s'agit cependant d'un concept complètement différent de celui évoqué ici.

On peut exprimer les coefficients  $C_{ijkl}$  de la loi de Hooke en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  par<sup>52</sup>

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad .$$

Nous allons utiliser cette expression de la loi de Hooke en combinaison avec les équations du mouvement pour obtenir une équation d'onde.

Le principe de conservation de la quantité de mouvement s'exprime localement comme

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad , \quad (\text{B.2})$$

où  $\rho$  représente la masse spécifique du corps, et  $f_i$  représente l'ensemble des forces de masse exercées sur le corps dans la direction  $i$ .

Cette équation est connue sous le nom d'**équation du mouvement** ou **équation élastodynamique** du milieu continu.

Si le corps est à l'équilibre ou en mouvement de translation uniforme, cette équation se simplifie pour donner

$$0 = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad .$$

En incorporant cette équation à la loi de Hooke, réécrite comme

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \end{aligned}$$

on trouve la relation

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} + \rho f_i \quad ,$$

connue sous le nom d'**équation des ondes**.

En effet, si l'on en cherche des solutions de la forme particulière

$$u(x, t) = g(x - vt)$$

---

<sup>52</sup>Dans le cas d'un milieu parfaitement homogène, on peut lier ces deux paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  au module d'Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$  par les lois

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

où  $g$  représente une fonction décrivant la forme de l'onde, on peut décomposer le champ d'onde en deux familles de contributions:

- les ondes de compression (ondes P), dont la direction de mouvement correspond à la direction de propagation.

En posant

$$\frac{\partial^2 g(x - vt)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \forall i \neq j \quad ,$$

on trouve que la vitesse des ondes de compression est définie comme<sup>53</sup>  $v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ;

- les ondes de cisaillement (ondes S), dont la direction de mouvement est orthogonale à la direction de propagation.

En posant

$$\frac{\partial^2 g(x - vt)}{\partial x_i^2} = 0 \quad \forall i \quad ,$$

on trouve que la vitesse des ondes de cisaillement est définie comme  $v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ .

### B.3 Milieu isotrope acoustique

Dans le cas acoustique, on néglige la présence des contraintes tangentielles, ce qui revient à prendre  $\nu = 0$  dans l'équation de l'élastodynamique (B.2). Ceci correspond à considérer que le milieu se comporte comme un fluide, sans propagation des ondes de cisaillement.

La relation de Hooke dans le cas isotrope acoustique devient

$$\sigma_{ij} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})\delta_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad .$$

Le tenseur des contraintes est diagonal, et indépendant du repère choisi.

En appelant  $P$  la pression définie comme

$$P = -\lambda \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ii} \quad ,$$

on peut réécrire l'équation dynamique comme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{f}{\rho} \quad .$$

---

<sup>53</sup>Dans le cas particulier où on considère le champ d'onde de la forme  $u(x, t) = g(x - vt)$  se propageant dans un milieu sans cisaillement ( $\mu = 0$  et donc  $E = 0$ ) équivalent, on trouve une vitesse  $v = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$ .

Dans le cas d'un milieu incompressible ( $\lambda = \infty$  et donc  $\nu = \frac{1}{2}$ ), cette contribution au champ d'onde s'annule.



Puis, on applique l'opérateur " $-\lambda\nabla$ ." pour obtenir l'équation de l'acoustodynamique

$$\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{\rho} \Delta P(x, t) = g(x, t) \quad ,$$

où  $g(x, t) = -\lambda\nabla \cdot \left(\frac{f}{\rho}\right)$  est le terme source en pression.

Il s'agit d'une nouvelle équation d'onde, de vitesse  $v = \sqrt{\lambda/\rho}$ . C'est à partir de cette dernière équation, obtenue dans le cas d'un matériau élastique isotrope et acoustique, que notre modélisation de la propagation des ondes dans un milieu hétérogène est réalisée.

Remarquons que l'ensemble des résultats présentés peut en général être développé dans le cas d'un milieu de propagation anisotrope, moyennant l'utilisation d'un formalisme adéquat. Alkhalifah (2000) présente une extension au cas d'un milieu transverse isotrope (VTI).

## B.4 Fonction de Green

On appelle fonction de Green de l'équation d'onde le champ scalaire qui est la réponse du milieu à l'excitation d'une source impulsionnelle en espace et en temps. Elle est définie par

$$\Delta \mathbf{G}(x, t; x_s, t_s) - \frac{1}{v^2(x)} \frac{\partial^2 \mathbf{G}(x, t; x_s, t_s)}{\partial t^2} = -4\pi \delta(x - x_s) \delta(t - t_s) \quad ,$$

ou, en domaine fréquentiel

$$\Delta \mathbf{G}(x, \omega; x_s) + \frac{\omega^2}{v^2(x)} \mathbf{G}(x, \omega; x_s) = -4\pi \delta(x - x_s) \quad .$$

Les fonctions de Green doivent de plus respecter les conditions initiales de causalité

$$\forall t < 0 \quad G(x, t; x_s, t_s) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G(x, t; x_s, t_s)}{\partial t} = 0$$

ainsi que les conditions aux frontières.

Les fonctions de Green vérifient les conditions d'invariance temporelle

$$\mathbf{G}(x, t; x_s, t_s) = \mathbf{G}(x, t - t_s; x_s, 0) \quad ,$$

et de réciprocité spatiale

$$\mathbf{G}(x, t; x_s, t_s) = \mathbf{G}(x_s, t; x, t_s) \quad .$$

Enfin, une propriété fondamentale des fonctions de Green est le principe de superposition. Il permet de décrire le champ de pression  $P(x, t)$  induit par une distribution de sources  $S(x_s, t)$  comme la somme des champs de pressions générés par chacune des sources.

On peut ainsi écrire

$$P(x, t) = \frac{-1}{4\pi} \int \mathbf{G}(x, t; x_s) * S(x_s, t) dx_s \quad ,$$

où le symbole  $*$  désigne la convolution temporelle.

Dans le cas où la distribution de sources se limite à une distribution ponctuelle

$$S(x_s, t) = \delta(x - x_s)S(t) \quad ,$$

on trouve

$$P(x, t) = \frac{-1}{4\pi} \mathbf{G}(x, t) * S(t) \quad .$$



## Annexe C

# Solution du champ d'onde dans le cadre de l'optique géométrique

On se place dans un cas 2D, les coordonnées s'expriment alors par le couple  $\mathbf{r} = (x, z)$ . Nous avons montré comment l'utilisation de l'approximation haute fréquence du champ d'onde

$$u(\mathbf{r}, \omega) = e^{i\omega T(\mathbf{r})} \quad ,$$

pour la résolution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{v_0^2} u(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{v_0^2} \epsilon(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad ,$$

nous conduit, pour le terme en  $\omega^2$ , à l'équation de l'eikonale

$$[\nabla T]^2 = \frac{1}{v_0^2} [1 + \epsilon(\mathbf{r})] \quad ,$$

et pour les termes en  $\omega^i$ , avec  $i \leq 1$ , aux équations de transport

$$2\nabla T \nabla A + A \Delta T = 0 \quad .$$

En posant les développements en série de  $\epsilon$

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + O(\epsilon^3) \quad (C.1)$$

$$A = A_0 + A_1 + O(\epsilon^2) \quad , \quad (C.2)$$

on trouve à partir de l'équation de l'eikonale les relations

$$\nabla T_0 \nabla T_0 = \frac{1}{v_0^2} \quad (C.3)$$

$$2\nabla T_0 \nabla T_1 = \frac{\epsilon}{v_0^2} \quad (\text{C.4})$$

$$2\nabla T_0 \nabla T_2 = -[\nabla T_1 \nabla T_1] \quad , \quad (\text{C.5})$$

et à partir des équations de transport

$$2\nabla T_0 \nabla A_0 + A_0 \Delta T_0 = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$2\nabla T_0 \nabla A_1 + A_1 \Delta T_0 = -2\nabla A_0 \nabla T_1 - A_0 \Delta T_1 \quad . \quad (\text{C.7})$$

Les résultats qui vont suivre sont obtenus en suivant la méthode proposée par Boyse et Keller (1995), et détaillée pour le cas de l'onde plane par Snieder et Aldridge (1995).

## C.1 Onde plane

Supposons que l'onde initiale propagée est une onde plane de direction de propagation verticale, c'est à dire telle que

$$\begin{cases} T(\mathbf{r}) = 0 \\ A(\mathbf{r}) = 1 \end{cases} \quad \text{pour } z = 0 \quad .$$

Ceci correspond à une onde provenant du demi-espace  $z < 0$ , au sein duquel la vitesse est définie par la relation  $\frac{1}{v(\mathbf{r})} = \frac{1}{v_0}$  et qui arrive dans la région  $z > 0$  pour laquelle la vitesse est définie par  $\frac{1}{v^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{v_0^2}[1 + \epsilon(\mathbf{r})]$ .

On trouve directement que

$$\begin{cases} T_0(\mathbf{r}) = T_1(\mathbf{r}) = T_2(\mathbf{r}) = 0 \\ A_0(\mathbf{r}) = 1 \\ A_1(\mathbf{r}) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } z = 0 \quad .$$

A partir de l'équation (C.3), on trouve deux possibilités:  $\nabla T_0(\mathbf{r}) = \pm \frac{1}{v_0}$ . On s'intéresse à l'onde se propageant vers les valeurs croissantes de  $z$ , et on obtient

$$T_0(\mathbf{r}) = \int_0^z \frac{1}{v_0} d\mathbf{r}' = \frac{z}{v_0} \quad .$$

Comme le rai central est perpendiculaire au front d'onde, le vecteur  $\mathbf{t}_0$  tangent à ce rai central est parallèle au gradient de l'eikonale de référence :  $\nabla T_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{v_0} \mathbf{t}_0$ .

L'équation (C.4) devient

$$\frac{1}{v_0} \frac{dT_1}{dz}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{2v_0^2}$$

et donc, en écrivant  $\mathbf{r} = (x, z)$ ,

$$T_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{2v_0} \int_0^z \epsilon(x, z') dz' \quad .$$

L'équation (C.5) devient

$$\frac{1}{v_0} \frac{dT_2}{dz}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} [\nabla T_1(\mathbf{r})]^2 \quad ,$$

et donc

$$T_2(\mathbf{r}) = -\frac{v_0}{2} \int_0^z |\nabla T_1(x, z')|^2 dz' \quad .$$

On peut décomposer le vecteur  $\nabla T_1(\mathbf{r})$  en ses composantes parallèles et orthogonales au front d'onde

$$\nabla T_1(\mathbf{r}) = \mathbf{t}_0 \frac{dT_1}{d\mathbf{r}}(\mathbf{r}) + \nabla_{\perp} T_1 = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{2v_0} \mathbf{t}_0 + \nabla_{\perp} T_1(\mathbf{r})$$

donc

$$|\nabla T_1(\mathbf{r})|^2 = \frac{\epsilon^2(\mathbf{r})}{4v_0^2} + |\nabla_{\perp} T_1(\mathbf{r})|^2 \quad ,$$

et on trouve

$$T_2(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8v_0} \int_0^z \epsilon^2(x, z') dz' - \frac{v_0}{2} \int_0^z |\nabla_{\perp} T_1(x, z')|^2 dz' \quad .$$

En utilisant l'expression de  $T_1(\mathbf{r})$ , on trouve

$$T_2(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8v_0} \int_0^z \epsilon^2(x, z') dz' - \frac{1}{8v_0} \int_0^z \left| \int_0^{z'} \nabla_{\perp} \epsilon(x, z'') dz'' \right|^2 dz' \quad ,$$

et donc

$$T(\mathbf{r}) = \frac{z}{v_0} + \frac{1}{2v_0} \int_0^z \epsilon(x, z') dz' - \frac{1}{8v_0} \int_0^z \epsilon^2(x, z') dz' - \frac{1}{8v_0} \int_0^z \left| \int_0^{z'} \nabla_{\perp} \epsilon(x, z'') dz'' \right|^2 dz' \quad . \quad (\text{C.8})$$

L'amplitude s'obtient à partir des équations de transport:

L'équation (C.6) devient  $\frac{dA_0}{dz}(\mathbf{r}) = 0$ , donc  $A_0(\mathbf{r}) = 1$ .

L'équation (C.7) devient  $\frac{2}{v_0} \frac{dA_1}{dz}(\mathbf{r}) = -A_0(\mathbf{r}) \Delta T_1(\mathbf{r}) = -\Delta T_1(\mathbf{r})$ , et, puisque

$$\Delta T_1(\mathbf{r}) = \frac{\nabla_{\parallel} \epsilon(\mathbf{r})}{2v_0} + \Delta_{\perp} T_1(\mathbf{r}) = \frac{\nabla_{\parallel} \epsilon(\mathbf{r})}{2v_0} + \frac{1}{2v_0} \int_0^z \Delta_{\perp} \epsilon(x, z'') dz'' \quad ,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
A_1(\mathbf{r}) &= -\frac{v_0}{2} \int_0^z \Delta T_1(x, z') dz' \\
&= -\frac{v_0}{2} \int_0^z \frac{\nabla_{\parallel} \epsilon(x, z')}{2v_0} dz' - \frac{1}{4} \int_0^z \left[ \int_0^{z'} \Delta_{\perp} \epsilon(x, z'') dz'' \right] dz' \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^z d\epsilon(x, z') - \frac{1}{4} \int_0^z \left[ \int_{z''}^z \Delta_{\perp} \epsilon(z') dz' \right] dz'' \quad .
\end{aligned}$$

Puisque  $\Delta_{\perp} \epsilon(\mathbf{r})$  varie peu entre  $\mathbf{r}''$  et  $\mathbf{r}$ , on peut approximer la solution par

$$\begin{aligned}
A_1(\mathbf{r}) &\simeq -\frac{1}{4} \left[ \epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon(0) + \int_0^z (z - z'') \Delta_{\perp} \epsilon(x, z'') dz'' \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ \epsilon(0) - \epsilon(\mathbf{r}) - \int_0^z (z - z'') \Delta_{\perp} \epsilon(x, z'') dz'' \right] \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$A(\mathbf{r}) = 1 + \frac{1}{4} \left[ \epsilon(0) - \epsilon(\mathbf{r}) - \int_0^z (z - z'') \Delta_{\perp} \epsilon(x, z'') dz'' \right] \quad . \quad (\text{C.9})$$

## C.2 Onde sphérique

Supposons à présent que l'onde initiale est une onde sphérique, c'est à dire telle que

$$\begin{cases} T(\mathbf{r}) = 0 & \text{pour } r = 0 \\ A(\mathbf{r}) \simeq \sqrt{\frac{1}{r}} & \text{pour } r \rightarrow 0 \end{cases} \quad ,$$

où l'on utilise la notation  $r = |\mathbf{r}|$ .

Ceci correspond à une onde provenant d'une source ponctuelle située à l'origine, et se propageant dans la région  $z > 0$  pour laquelle la vitesse est définie par  $\frac{1}{v^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{v_0^2} [1 + \epsilon(\mathbf{r})]$ .

On trouve directement que

$$\begin{cases} T_0(\mathbf{r}) = T_1(\mathbf{r}) = T_2(\mathbf{r}) = 0 & \text{pour } r = 0 \\ A_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{r}} & \text{pour } r \rightarrow 0 \\ A_1(\mathbf{r}) \simeq 0 & \end{cases} \quad .$$

Comme on s'intéresse à l'onde se propageant vers les valeurs croissantes de  $z$ , on trouve, à partir de l'équation (C.3),

$$T_0(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} \frac{1}{v_0} d\mathbf{r}' = \frac{r}{v_0} \quad .$$

Comme le rai central est perpendiculaire au front d'onde, le vecteur  $\mathbf{r}_0$  tangent à ce rai central est parallèle au gradient de l'eikonale de référence :  $\nabla T_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{v_0} \mathbf{r}_0$ .

L'équation (C.4) devient

$$\frac{1}{v_0} \frac{dT_1}{dr}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{2v_0^2} \quad ,$$

et donc

$$T_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{2v_0} \int_0^r \epsilon\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) du \quad .$$

L'équation (C.5) devient

$$\frac{1}{v_0} \frac{dT_2}{dr}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} [\nabla T_1(\mathbf{r})]^2 \quad ,$$

et donc

$$T_2(\mathbf{r}) = -\frac{v_0}{2} \int_0^r |\nabla T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right)|^2 du \quad .$$

On peut décomposer le vecteur  $\nabla T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right)$  en ses composantes parallèles et orthogonales au front d'onde

$$\nabla T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) = \nabla_{\parallel} T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) + \nabla_{\perp} T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{\epsilon(u\mathbf{r}/r)}{2v_0} + \nabla_{\perp} T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) \quad ,$$

donc

$$|\nabla T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right)|^2 = \frac{\epsilon^2(u\mathbf{r}/r)}{4v_0^2} + |\nabla_{\perp} T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right)|^2 \quad ,$$

et on trouve

$$T_2(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8v_0} \int_0^r \epsilon^2\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) du - \frac{v_0}{2} \int_0^r |\nabla_{\perp} T_1\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right)|^2 du \quad .$$

En utilisant l'expression de  $T_1(\mathbf{r})$ , on trouve

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{8v_0} \int_0^r \epsilon^2\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) du - \frac{1}{8v_0} \int_0^r \left| \int_0^u \nabla_{\perp} \epsilon\left(\frac{v\mathbf{r}}{r}\right) dv \right|^2 du \\ T(\mathbf{r}) &= \frac{r}{v_0} + \frac{1}{2v_0} \int_0^r \epsilon\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) du - \frac{1}{8v_0} \int_0^r \epsilon^2\left(\frac{u\mathbf{r}}{r}\right) du - \frac{1}{8v_0} \int_0^r \left| \int_0^u \nabla_{\perp} \epsilon\left(\frac{v\mathbf{r}}{r}\right) dv \right|^2 du \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

### C.3 Velocity shift

A partir des résultats présentés dans les deux cas ci-dessus, on peut s'intéresser aux différents moments statistiques des temps d'arrivée.

Pour rappel, nous supposons que les hétérogénéités des vitesses sont modélisées par une variable aléatoire centrée ( $\mathbf{E}(\epsilon) = 0$ ), dont nous définissons le modèle de covariance par

$$\mathbf{Cov}_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{E}[\epsilon(\mathbf{r})\epsilon(\mathbf{r}')] = \sigma_{\epsilon}^2 C_0 \left( \sqrt{\frac{(x-x')^2}{l_{\perp}^2} + \frac{(z-z')^2}{l_{\parallel}^2}} \right) \quad ,$$



où l'on représente par  $C_0$  le modèle de covariance utilisé (gaussien, exponentiel, sphérique etc.), et par  $l_{\parallel}$  et  $l_{\perp}$  les longueurs de corrélation dans les directions parallèle et perpendiculaire au rayon  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . On suppose que les directions des rayons  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  sont proches.

Par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(T(\mathbf{r})) = \mathbf{E}(T_0(\mathbf{r})) + \mathbf{E}(T_1(\mathbf{r})) + \mathbf{E}(T_2(\mathbf{r})) + O(\epsilon^3) \quad , \quad (\text{C.11})$$

et on trouve directement que

$$\mathbf{E}(T_0(\mathbf{r})) = \frac{r}{v_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(T_1(\mathbf{r})) = 0 \quad . \quad (\text{C.12})$$

L'expression du terme  $\mathbf{E}(T_2(\mathbf{r}))$  dépend du type d'onde considérée; pour une onde plane, son expression peut être réécrite comme

$$\mathbf{E}(T_2(\mathbf{r})) = \frac{-z}{8v_0} \sigma_{\epsilon}^2 - \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{16v_0} l_{\parallel} z^2 \left( \frac{1}{l_{\perp}^2} + \frac{1}{l_{\parallel}^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{C_0'(z')}{z'} dz' \quad . \quad (\text{C.13})$$

où l'on a utilisé l'approximation  $z \gg l_{\parallel}$ .

Si l'on néglige le premier terme dans l'expression de  $\mathbf{E}(T_2(\mathbf{r}))$ , on retrouve les expressions proposées par (Iooss, 1998b) et Iooss *et al.* (2000). Précisément, ceci suppose que l'on ait

$$\frac{l_{\parallel} z}{2} \left( \frac{1}{l_{\perp}^2} + \frac{1}{l_{\parallel}^2} \right) \left| \int_0^{\infty} \frac{C_0'(z')}{z'} dz' \right| \gg 1 \quad . \quad (\text{C.14})$$

Le terme dans l'intégrale est d'ordre de grandeur 1, et comme  $z \gg l_{\parallel}$ , on trouve que

$$\frac{2l_{\parallel} z}{2l_{\parallel}^2} \gg 1 \quad ,$$

de sorte que la condition C.14 est toujours respectée.

Dans les modèles classiques de covariance (gaussien, exponentiel, sphérique etc.), la covariance est décroissante, et donc l'intégrale dans l'expression de  $\mathbf{E}(T_2(\mathbf{r}))$  est négative.

On définit donc le **velocity shift** (biais de vitesse) comme la différence entre la vitesse effective de propagation du front d'onde  $v_{eff} = \mathbf{E} \left( \frac{\mathbf{r}}{T(\mathbf{r})} \right)$  et la vitesse moyenne des ondes dans le milieu  $v_0$ .

On trouve dans notre cas

$$v_{eff} - v_0 = \mathbf{E} \left( \frac{\mathbf{r}}{T_0(\mathbf{r}) + T_1(\mathbf{r}) + T_2(\mathbf{r})} \right) - v_0 \simeq \frac{r}{T_0(\mathbf{r})} - \frac{r}{T_0(\mathbf{r})} \mathbf{E} \left( \frac{T_1(\mathbf{r}) + T_2(\mathbf{r})}{T_0(\mathbf{r})} \right) - v_0 = -\frac{v_0^2}{r} \mathbf{E}[T_2(\mathbf{r})] \quad .$$

L'ampleur du velocity shift est fonction de l'amplitude des hétérogénéités de vitesses ( $\sigma_{\epsilon}^2$ ), du rapport des longueurs de corrélation dans les directions parallèle et perpendiculaire à la propagation ( $\frac{l_{\parallel}}{l_{\perp}}$ ) et de la distance de propagation ( $r$ ). Boyse et Keller (1995) remarquent que le velocity shift est trois fois supérieur dans le cas d'une onde plane par rapport à une onde sphérique. Shapiro *et al.* (1996) montre la variation du velocity shift en fonction de la fréquence du signal émis.

## Annexe D

# Covariance des temps de trajet

Nous allons montrer ici l'évaluation de la covariance des temps dans le cas d'un dispositif illustré à la figure 3.1.

On considère deux tirs depuis des sources  $S_1$  et  $S_2$ , se réfléchissant sur un réflecteur horizontal, pour être enregistrés par les réflecteurs  $R_1$  et  $R_2$ , avec des offsets  $h_1$  et  $h_2$ .

En décomposant les rayons  $r_1$  et  $r_2$  sous la forme de leurs parties descendantes -respectivement  $r_{11}$  et  $r_{21}$  - et montantes - $r_{12}$  et  $r_{22}$ -, on trouve

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cov}(T(r_1), T(r_2)) &= \mathbf{E}_{r_1, r_2} \left[ \int_{r_{11}, r_{21}} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1)}{2v_0} \frac{\epsilon(x_2(z_2), z_2)}{2v_0} dz_1 dz_2 \right. \\
 &\quad + \int_{r_{12}, r_{21}} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1)}{2v_0} \frac{\epsilon(x_2(z_2), z_2)}{2v_0} dz_1 dz_2 \\
 &\quad + \int_{r_{11}, r_{22}} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1)}{2v_0} \frac{\epsilon(x_2(z_2), z_2)}{2v_0} dz_1 dz_2 \\
 &\quad \left. + \int_{r_{12}, r_{22}} \frac{\epsilon(x_1(z_1), z_1)}{2v_0} \frac{\epsilon(x_2(z_2), z_2)}{2v_0} dz_1 dz_2 \right] \\
 &= \mathbf{Cov}[T(r_{11}), T(r_{21})] + \mathbf{Cov}[T(r_{11}), T(r_{22})] \\
 &\quad + \mathbf{Cov}[T(r_{12}), T(r_{21})] + \mathbf{Cov}[T(r_{12}), T(r_{22})] \\
 &= \frac{1}{4v_0^2} \int_0^L \int_0^L \mathbf{Cov}_\epsilon(\Delta S + \frac{h_2 z_2}{2L} - \frac{h_1 z_1}{2L}, z_1 - z_2) dz_1 dz_2 \\
 &\quad + \frac{1}{4v_0^2} \int_0^L \int_0^L \mathbf{Cov}_\epsilon(\Delta S - h_1 + \frac{h_2 z_2}{2L} + \frac{h_1 z_1}{2L}, z_1 - z_2) dz_1 dz_2 \\
 &\quad + \frac{1}{4v_0^2} \int_0^L \int_0^L \mathbf{Cov}_\epsilon(\Delta S + h_2 - \frac{h_2 z_2}{2L} - \frac{h_1 z_1}{2L}, z_1 - z_2) dz_1 dz_2 \\
 &\quad + \frac{1}{4v_0^2} \int_0^L \int_0^L \mathbf{Cov}_\epsilon(\Delta S - h_1 + h_2 - \frac{h_2 z_2}{2L} + \frac{h_1 z_1}{2L}, z_1 - z_2) dz_1 dz_2 \quad .
 \end{aligned}$$

En posant le changement de variable

$$\begin{cases} u = \frac{z_1 - z_2}{2} \\ v = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = u + v \\ z_2 = v - u \end{cases},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}[T(r_1), T(r_2)] &= \frac{2}{4v_0^2} \int \int_{Dom} [\mathbf{Cov}_\epsilon(\Delta S + u \frac{-h_2 - h_1}{2L} + v \frac{-h_1 + h_2}{2L}, 2u) \\ &\quad + \mathbf{Cov}_\epsilon(\Delta S - h_1 + u \frac{h_1 - h_2}{2L} + v \frac{h_2 + h_1}{2L}, 2u) \\ &\quad + \mathbf{Cov}_\epsilon(\Delta S + h_2 + u \frac{h_2 - h_1}{2L} + v \frac{-h_1 - h_2}{2L}, 2u) \\ &\quad + \mathbf{Cov}_\epsilon(\Delta S - h_1 + h_2 + u \frac{h_2 + h_1}{2L} + v \frac{h_1 - h_2}{2L}, 2u)] du dv \quad (D.1) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \int \int_{Dom} dudv = \int_0^{\frac{L}{2}} dv \int_{-v}^v du + \int_{\frac{L}{2}}^L dv \int_{v-L}^{L-v} du \quad .$$

L'approximation proposée par Chernov (1960) nous permet de changer les bornes des intégrales :

$$\int \int_{Dom} dudv = \int_0^{\frac{L}{2}} dv \int_{-v}^v du + \int_{\frac{L}{2}}^L dv \int_{v-L}^{L-v} du = \int_0^L dv \int_{-\infty}^{\infty} du \quad .$$

On peut donc exprimer la corrélation  $\mathbf{Cov}(T(r_1), T(r_2))$  comme une somme de quatre termes de la forme générale

$$\int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Cov}_\epsilon(a_0 + a_u u + a_v v, 2u) du dv \quad .$$

Dans le cas où le coefficient  $a_v$  est nul, l'intégrale devient

$$\int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Cov}_\epsilon(a_0 + a_u u, 2u) du dv = L \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Cov}_\epsilon(a_0 + a_u u, 2u) du \quad .$$

Sinon, on utilise le changement de coordonnées

$$\begin{cases} t = \frac{2u}{b} \\ s = \frac{a_0 + a_u u + a_v v}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{bt}{2} \\ v = \frac{2as - 2a_0 - a_u bt}{2a_v} \end{cases}$$

dont le Jacobien vaut  $\frac{2a_v}{ab}$ .

La covariance entre les temps de première arrivée se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Cov}_\epsilon(a_0 + a_u u + a_v v, 2u) dudv &= \frac{ab}{2a_v} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2a_0 + a_u bt}{2a}}^{\frac{2a_0 + 2a_v L + a_u bt}{2a}} \mathbf{Cov}_\epsilon(as, bt) ds dt \\ &= \frac{ab}{2a_v} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2a_0 + a_u bt}{2a}}^{\frac{2a_0 + 2a_v L + a_u bt}{2a}} \mathbf{Cov}_\epsilon(\sqrt{s^2 + t^2}) ds dt \quad . \end{aligned}$$

En posant le changement de coordonnées polaires illustré par la figure D.1

$$\begin{cases} t = \frac{2u}{b} \\ s = \frac{a_0 + a_u u + a_v v}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = r \cos(\theta) \\ s = r \sin(\theta) \end{cases}$$

et en notant

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2a_0}{\sqrt{4a^2 + a_u^2 b^2}} \\ x_2 = \frac{2a_0 + 2a_v L}{\sqrt{4a^2 + a_u^2 b^2}} \end{cases}$$

et  $min$  et  $max$  le minimum et le maximum de  $\{x_1, x_2\}$ , l'intégrale peut être simplifiée : dans le cas où  $x_1$  et  $x_2$  sont de même signe, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Cov}_\epsilon(a_0 + a_u u + a_v v, 2u) dudv &= \frac{ab}{2a_v} \int_{min}^{max} \int_{\arcsin(\frac{min}{r})}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{Cov}_\epsilon(r) r d\theta dr \\ &+ \frac{ab}{2a_v} \int_{max}^{\infty} \int_{\arcsin(\frac{min}{r})}^{\arcsin(\frac{max}{r})} \mathbf{Cov}_\epsilon(r) r d\theta dr \\ &= \frac{ab}{2a_v} \int_{min}^{max} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] \mathbf{Cov}_\epsilon(r) r dr \\ &+ \frac{ab}{2a_v} \int_{max}^{\infty} \left[ \arcsin\left(\frac{max}{r}\right) - \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] \mathbf{Cov}_\epsilon(r) r dr \quad . \end{aligned}$$

Si par contre  $x_1$  et  $x_2$  sont de signes opposés, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Cov}_\epsilon(a_0 + a_u u + a_v v, 2u) dudv &= \frac{ab}{2a_v} \int_0^{min} \int_0^{\pi} \mathbf{Cov}_\epsilon(r) r d\theta dr \\ &+ \frac{ab}{2a_v} \int_{min}^{max} \int_{-\arcsin(\frac{min}{r})}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{Cov}_\epsilon(r) r d\theta dr \end{aligned}$$

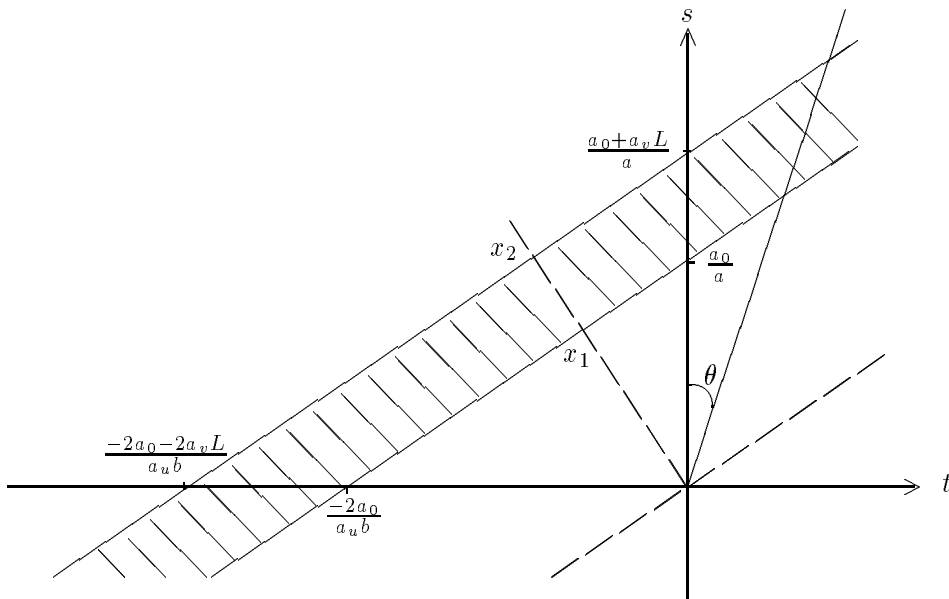


FIG. D.1 – Passage en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}
& + \frac{ab}{2a_v} \int_{max}^{\infty} \int_{-\arcsin(\frac{min}{r})}^{\arcsin(\frac{max}{r})} \mathbf{Cov}_{\epsilon}(r) r d\theta dr \\
= & \frac{ab}{2a_v} \int_0^{min} \pi \mathbf{Cov}_{\epsilon}(r) r dr \\
& + \frac{ab}{2a_v} \int_{min}^{max} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] \mathbf{Cov}_{\epsilon}(r) r dr \\
& + \frac{ab}{2a_v} \int_{max}^{\infty} \left[ \arcsin\left(\frac{max}{r}\right) + \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] \mathbf{Cov}_{\epsilon}(r) r dr \quad .
\end{aligned}$$

En conclusion, on peut donc écrire cette intégrale sous la forme générale

$$\int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Cov}_{\epsilon}(a_0 + a_v v + a_u u, 2u) du dv = \frac{ab}{2a_v} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(min, max, r) \mathbf{Cov}_{\epsilon}(r) r dr$$

avec le terme  $\varphi(min, max, r)$  égal à une somme d'indicatrices:

$$\begin{aligned}
& \varphi(min, max, r) = \\
& \left\{ \begin{array}{ll} 1_{[min, max]} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] + 1_{[max, \infty]} \left[ \arcsin\left(\frac{max}{r}\right) - \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] & \text{si } x_1 \cdot x_2 > 0, \\ 1_{[0, min]} [\pi] + 1_{[min, max]} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] + 1_{[max, \infty]} \left[ \arcsin\left(\frac{max}{r}\right) + \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] & \text{sinon.} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Si on considère un modèle de covariance gaussienne, on peut encore raffiner le résultat par quelques changements de variables

$$\begin{aligned}
I &= \int_{min}^{max} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{min}{r}\right) \right] e^{-r^2} r \, dr \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( -e^{-max^2} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{min}{max}\right) \right) \right) - \frac{min}{2} \int_{min^2}^{max^2} \frac{e^{-t}}{t\sqrt{t-min^2}} \, dt \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( -e^{-max^2} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{min}{max}\right) \right) \right) - \frac{min}{2} e^{min^2} \int_0^\infty \frac{e^{-ta^2}}{\sqrt{t+1}} \Gamma_{\frac{1}{2},1} \left( \frac{max^2 - min^2}{t+1} \right) \, dt \right] .
\end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture est son comportement plus stable pour l'évaluation numérique de l'intégrale; ceci n'a toutefois pas été vérifié expérimentalement.

A titre de remarque, on observera que, si la covariance n'est connue que sous forme spectrale, on préférera le développement spectral

$$\int_0^L \int_{-\infty}^\infty \mathbf{Cov}_\epsilon(a_0 + a_u u + a_v v, 2u) \, du \, dv = \int_0^L \int \int \int_{-\infty}^\infty \Phi_\epsilon(k_x, k_z) e^{i(a_0 + a_u u + a_v v)k_x + i2uk_z} \, dk_x \, dk_z \, du \, dv$$

qui nous donne le résultat

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(T(r_1), T(r_2)) &= \frac{1}{v_0^2} \int_0^L \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi_\epsilon(k_x, k_z) \cos\left(\left(\Delta S + \frac{h_2 - h_1}{2}\right)k_x + 2uk_z\right) \\
&\quad \cos\left(\left(\frac{-h_2}{2} + u\frac{-h_2}{2L} + v\frac{h_2}{2L}\right)k_x\right) \cos\left(\left(\frac{h_1}{2} + u\frac{-h_1}{2L} + v\frac{-h_1}{2L}\right)k_x\right) \, dk_x \, dk_z \, dv \, du .
\end{aligned}$$

Enfin, on observera que dans le cas particulier où  $h_1 = h_2 = h \neq 0$  et  $\Delta S = 0$ , on obtient le résultat

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(T(r)) &= \frac{1}{2v_0^2} \int \int_{Dom} [2\mathbf{Cov}_\epsilon\left(u\frac{h}{L}, 2u\right) + 2\mathbf{Cov}_\epsilon\left(h - v\frac{h}{L}, 2u\right)] \, du \, dv \\
&= \frac{L}{v_0^2} \left[ \int_{-\infty}^\infty \mathbf{Cov}_\epsilon\left(u\frac{h}{L}, 2u\right) \, du + \frac{ab}{h} \int_0^h \frac{\pi}{2} \mathbf{Cov}_\epsilon(r) \, r \, dr + \frac{ab}{h} \int_h^\infty \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) \mathbf{Cov}_\epsilon(r) \, r \, dr \right]
\end{aligned}$$

qui correspond à l'expression obtenue par Iooss (1998b).



## Annexe E

# Covariance des vitesses de sommation dans un champ de vitesse croissant linéairement avec la profondeur

Nous présentons ici de façon complète l'expression que prend l'équation (3.14) dans le cas d'un champ de vitesse avec croissance linéaire de la valeur moyenne  $v_0$  en fonction de la profondeur. Si l'on cherche à exprimer la covariance des temps d'arrivée dans le cas des tirs dans un milieu à vitesse linéairement croissante, on trouve directement :

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(T(r_1), T(r_2)) &= \mathbf{E} \left[ \int_{r_1, r_2} \frac{\epsilon(x_1, z_1)}{2 v(z_1)} \frac{\epsilon(x_2, z_2)}{2 v(z_2)} dz_1 dz_2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L \frac{\mathbf{Cov}_\epsilon(x_1 - x_2, z_1 - z_2)}{[v_0 + g_z z_1][v_0 + g_z z_2]} dz_1 dz_2 \quad .\end{aligned}$$

Cette intégrale doit être décrite pour les quatre tronçons qu'elle comprend. Les notations sont définies par la figure E.1.

Le long du tronçon  $r_{11}$ , on trouve

$$\begin{aligned}z_1 &: 0 \rightarrow L \\ \theta_1 &= \sin^{-1} \left[ \frac{\sin(\theta_{01})}{v_0} (v_0 + g_z z_1) \right] \\ x_1 &= S_1 + z_1 \tan \left( \frac{\theta_{01} + \theta_1}{2} \right) \quad ;\end{aligned}$$



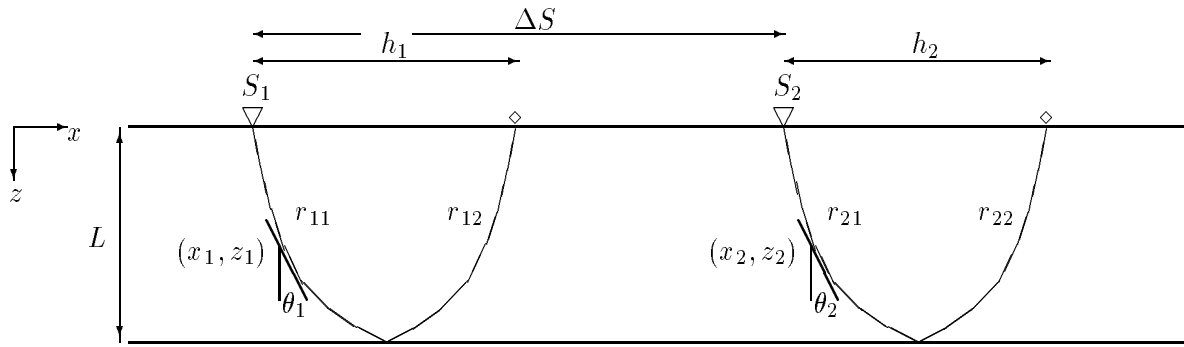


FIG. E.1 – Définition de l'ensemble des paramètres

le long du tronçon  $r_{12}$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 z_1 &: 0 \rightarrow L \\
 \theta_1 &= \sin^{-1} \left[ \frac{\sin(\theta_{01})}{v_0} (v_0 + g_z z_1) \right] \\
 x_1 &= S_1 + h_1 - z_1 \tan\left(\frac{\theta_{01} + \theta_1}{2}\right) \quad ;
 \end{aligned}$$

le long du tronçon  $r_{21}$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 z_2 &: 0 \rightarrow L \\
 \theta_2 &= \sin^{-1} \left[ \frac{\sin(\theta_{02})}{v_0} (v_0 + g_z z_2) \right] \\
 x_2 &= S_2 + z_2 \tan\left(\frac{\theta_{02} + \theta_2}{2}\right) \quad ;
 \end{aligned}$$

le long du tronçon  $r_{22}$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 z_2 &: 0 \rightarrow L \\
 \theta_2 &= \sin^{-1} \left[ \frac{\sin(\theta_{02})}{v_0} (v_0 + g_z z_2) \right] \\
 x_2 &= S_2 + h_2 - z_2 \tan\left(\frac{\theta_{02} + \theta_2}{2}\right) \quad ,
 \end{aligned}$$

avec les constantes

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \tan^{-1}\left(\frac{h_1/2}{L}\right) \\ \theta_{01} &= \tan^{-1}\left[\frac{v_0 \sin(2\beta_1)}{v_f + v_0 \cos(2\beta_1)}\right] \\ \beta_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{h_2/2}{L}\right) \\ \theta_{02} &= \tan^{-1}\left[\frac{v_0 \sin(2\beta_2)}{v_f + v_0 \cos(2\beta_2)}\right]\end{aligned}$$

De façon semblable à ce qui avait été remarqué lors de l'étude de la covariance des temps de trajet le long de rayons rectilignes, on peut trouver une expression simplifiée de ces intégrales lorsque l'on considère l'étude de la variance des temps d'arrivée.

On a dans ce cas (puisque  $h_1 = h_2 = h$  et  $\Delta S = 0$ )

$$\begin{aligned}\beta &= \tan^{-1}\left(\frac{h/2}{L}\right) \\ \theta_0 &= \tan^{-1}\left[\frac{v_0 \sin(2\beta)}{V_f + V_0 \cos(2\beta)}\right] \\ x_1 &= z_1 \tan\left(\frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) \\ x_2 &= z_2 \tan\left(\frac{\theta_0 + \theta_2}{2}\right) \\ \mathbf{Var}(T(r_1)) &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L \frac{\mathbf{Cov}_\epsilon(x_1 - x_2, z_1 - z_2) + \mathbf{Cov}_\epsilon(x_1 - h_1 + x_2, z_1 - z_2)}{[V_0 + g_z z_1][V_0 + g_z z_2]} dz_1 dz_2 \quad .\end{aligned}$$

Cette expression correspond à l'expression proposée par Iooss (1998b) pour la tomographie pre-stack dans le cas d'un champ de vitesse dont la valeur moyenne croît linéairement.



## Annexe F

# Propagation dans un milieu multi-couches

A titre illustratif, nous présentons ici la modélisation du parcours d'une onde au sein d'un milieu multicouches non perturbé (pour l'exemple, on a choisi  $m = 4$ ). La figure F.1 illustre la définition des différents paramètres du rayon.

Nous voulons principalement faire apparaître l'origine des différentes relations existant entre ces paramètres. Cela permet d'illustrer le caractère très général du formalisme utilisé, et de montrer que la méthode présentée dans un cas simple peut être utilisée dans un cas composé d'un plus grand nombre de couches.

Si l'on considère comme précédemment que la vitesse est continue au travers des différentes interfaces (et donc que, contrairement à la figure, il n'y a pas d'angularité aux interfaces)<sup>54</sup>, on obtient les équations suivantes:

- l'avancement au travers des différentes couches donne une relation entre les angles en entrée et sortie de couche, et l'épaisseur de la couche :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) &= \frac{l_1}{L_1} \\ \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) &= \frac{l_2}{L_2} \\ \tan\left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right) &= \frac{l_3}{L_3} \\ \tan\left(\frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right) &= \frac{l_4}{L_4} \quad ;\end{aligned}$$

---

<sup>54</sup>Voir remarque 27 page 59

- la symétrie du dispositif impose que la réflexion sur la dernière couche soit effectuée après un parcours correspondant à la moitié de l'offset :

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = \frac{h}{2} \quad ;$$

- les relations de Snell-Descartes donnent une relation entre angles aux interfaces, en fonction de la vitesse dans les couches :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\theta_0)}{v_0} &= \frac{\sin(\theta_1)}{v_0 + a_1 L_1} \\ \frac{\sin(\theta_1)}{v_0 + a_1 L_1} &= \frac{\sin(\theta_2)}{v_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2} \\ \frac{\sin(\theta_2)}{v_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2} &= \frac{\sin(\theta_3)}{v_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3} \\ \frac{\sin(\theta_3)}{v_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3} &= \frac{\sin(\theta_4)}{v_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + a_4 L_4} \end{aligned} .$$

Ceci constitue un système de neuf équations à neuf inconnues  $l_1, l_2, l_3, l_4, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ . Ce système ne peut être résolu de façon explicite, il faut donc le résoudre par méthode approchée.

Notons finalement qu'il faut s'attendre à voir ce système présenter un comportement fortement non linéaire, nécessitant l'utilisation d'algorithmes de résolution de systèmes non linéaires spécifiques, et en donnant une solution initiale peu éloignée de la solution réelle. Ceci peut être réalisé en résolvant le problème dans un cas simplifié (par exemple en supprimant une couche, ou en considérant une couche avec vitesse constante). Ainsi, en partant du cas simple (une couche constante), et en complexifiant progressivement le problème (ajout de couches et variation de la vitesse au sein des couches), on arrivera après plusieurs étapes à résoudre ce problème.

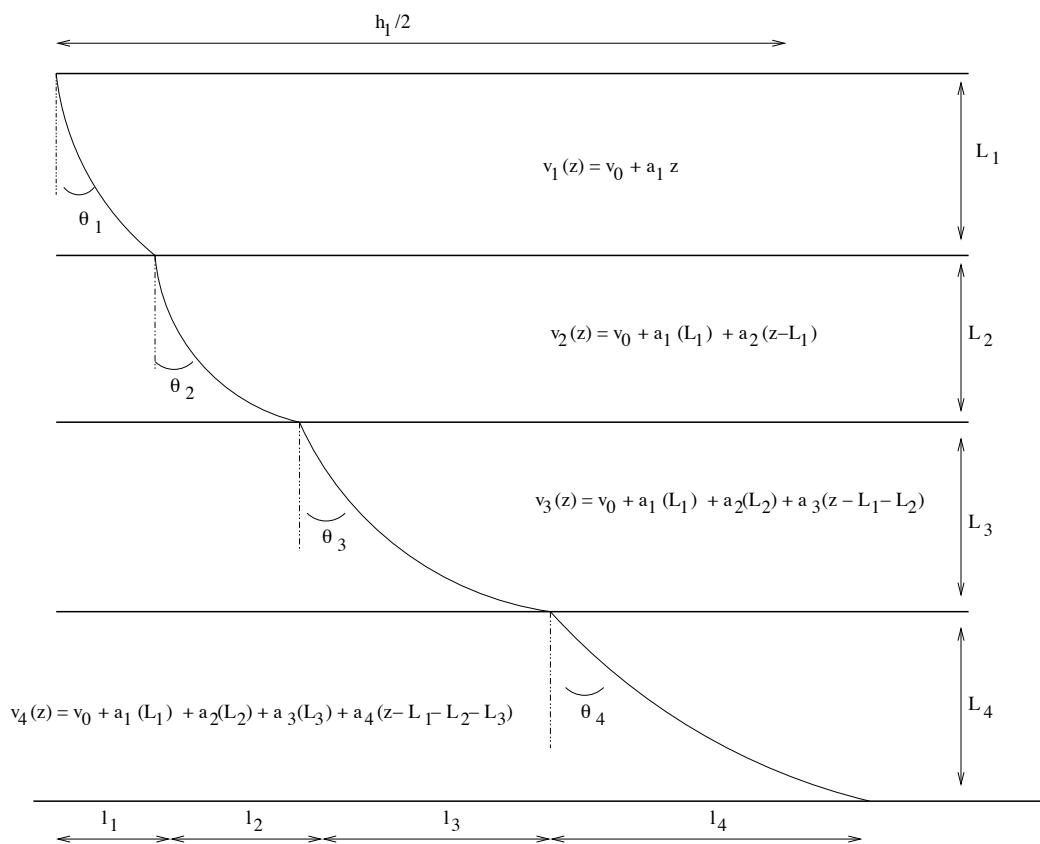


FIG. F.1 – Illustration d'un tir dans un milieu à quatre couches, à vitesses variables



## Annexe G

# Covariance entre temps d'arrivée à offset nul, obtenus par analyse de vitesse

Notre développement se base sur l'expression du temps d'arrivée à offset nul obtenue lors de l'ajustement hyperbolique des temps d'arrivée,

$$t_0^2 = \frac{(\sum_{i=0}^n T_i^2)(\sum_{i=0}^n x_i^4) - (\sum_{i=0}^n x_i^2)(\sum_{i=0}^n x_i^2 T_i^2)}{n (\sum_{i=0}^n x_i^4) - (\sum_{i=0}^n x_i^2) (\sum_{i=0}^n x_i^2)}$$

En approchant cette équation au premier ordre, on trouve

$$\begin{aligned} t_0^2 &= \frac{(\sum_{i=0}^n (T_i + \Delta T_i)^2) (\sum_{i=0}^n x_i^4) - (\sum_{i=0}^n x_i^2) (\sum_{i=0}^n x_i^2 (T_i + \Delta T_i)^2)}{n (\sum_{i=0}^n x_i^4) - (\sum_{i=0}^n x_i^2) (\sum_{i=0}^n x_i^2)} \\ &= \mathbf{E}[t_0^2] + \frac{(\sum_{i=0}^n 2 T_i \Delta T_i) (\sum_{i=0}^n x_i^4) - (\sum_{i=0}^n x_i^2) (\sum_{i=0}^n 2 x_i^2 T_i \Delta T_i)}{n (\sum_{i=0}^n x_i^4) - (\sum_{i=0}^n x_i^2) (\sum_{i=0}^n x_i^2)}, \end{aligned}$$

et en utilisant les mêmes approximations qu'à la remarque 23 de la section 3.3.3, on trouve

$$t_0 = \mathbf{E}[t_0] - \frac{(\sum_{i=0}^n 2 T_i \Delta T_i) (\sum_{i=0}^n x_i^4) - (\sum_{i=0}^n x_i^2) (\sum_{i=0}^n 2 x_i^2 T_i \Delta T_i)}{2 \mathbf{E}[t_0] [n (\sum_{i=0}^n x_i^4) - (\sum_{i=0}^n x_i^2) (\sum_{i=0}^n x_i^2)]},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}[t_{01}, t_{02}] &= \mathbf{Cov} \left[ \frac{(\sum_{i=0}^n 2 T_{1i} \Delta T_{1i}) (\sum_{k=0}^n x_k^4) - (\sum_{k=0}^n x_k^2) (\sum_{i=0}^n 2 x_i^2 T_{1i} \Delta T_{1i})}{\mathbf{E}[t_{01}] [n (\sum_{k=0}^n x_k^4) - (\sum_{k=0}^n x_k^2) (\sum_{k=0}^n x_k^2)]}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(\sum_{j=0}^n 2 T_{2j} \Delta T_{2j}) (\sum_{k=0}^n x_k^4) - (\sum_{k=0}^n x_k^2) (\sum_{j=0}^n 2 x_j^2 T_{2j} \Delta T_{2j})}{\mathbf{E}[t_{02}] [n (\sum_{k=0}^n x_k^4) - (\sum_{k=0}^n x_k^2) (\sum_{k=0}^n x_k^2)]} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathbf{E}[t_{01}] \mathbf{E}[t_{02}] [n(\sum_{k=0}^n x_k^4) - (\sum_{k=0}^n x_k^2)(\sum_{k=0}^n x_k^2)]^2} \\
&\quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{Cov}(T_{1i}, T_{2j}) \mathbf{E}(T_{1i}) \mathbf{E}(T_{2j}) \left[ \left( \sum_{k=0}^n x_k^4 \right) \left( \sum_{k=0}^n x_k^4 \right) - x_i^2 \left( \sum_{k=0}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=0}^n x_k^4 \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - x_j^2 \left( \sum_{k=0}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=0}^n x_k^4 \right) + x_i^2 x_j^2 \left( \sum_{k=0}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=0}^n x_k^2 \right) \right] .
\end{aligned}$$

## Annexe H

# Krigeage avec un modèle de covariance factorisé

### H.1 Matrice de krigeage

L'expression du krigeage lors de l'utilisation d'un modèle de covariance factorisée est particulière. On se place dans le cas de données disposées selon une grille complète - sans données manquantes - et de maille régulière.

Nous allons montrer que la matrice de krigeage peut être représentée sous une forme bloc très succincte, et dans le cas du krigeage simple sous la forme d'un produit tensoriel de deux matrices.

Nous supposons que le modèle de covariance peut être factorisé

$$C(x, y) = F(x) G(y) \quad ,$$

et nous écrivons le système de krigeage simple sous la forme conventionnelle

$$[C_{\alpha\beta}] [\lambda_\beta] = [C_{\alpha 0}] \quad ,$$

où  $[C_{\alpha\beta}]$  représente la matrice de krigeage, décrivant la covariance entre points de données,  $[\lambda_\beta]$  représente le vecteur colonne des poids de krigeage, et  $[C_{\alpha 0}]$  représente le vecteur colonne des covariances entre les données et le point à estimer.

On suppose que les données sont disposées selon une grille régulière et complète composée de  $n_x$  points espacés d'un pas  $\ell$  dans la direction  $x$ , et  $n_y$  points espacés d'un pas  $h$  dans la direction  $y$ . Les données sont numérotées comme les coordonnées d'une matrice, le point  $\alpha_{i,j}$  étant le  $i^{\text{ème}}$  point dans la direction  $x$  et le  $j^{\text{ème}}$  dans la direction  $y$ , comme le montre la figure H.1.

Les éléments de la matrice de krigeage simple  $[C_{\alpha\beta}]$  peuvent alors s'écrire comme

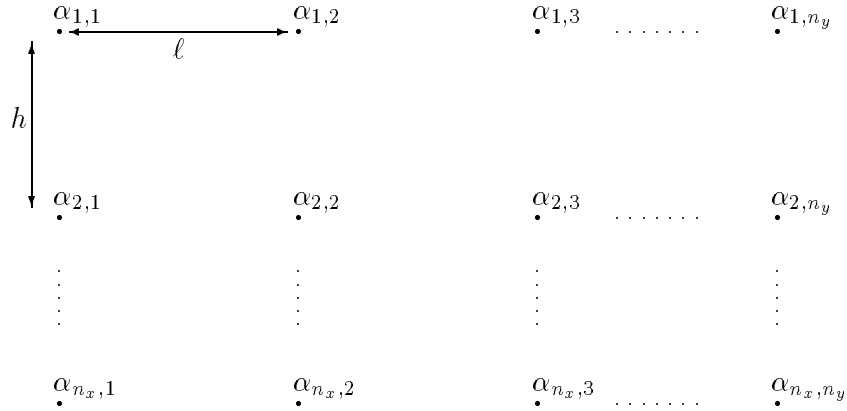


FIG. H.1 – Disposition des points

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha_{i,j}\beta_{k,n}} &= F(|x_{\alpha_{i,j}} - x_{\beta_{k,n}}|) G(|y_{\alpha_{i,j}} - y_{\beta_{k,n}}|) \\
 &= F(|(j-1)\ell - (n-1)\ell|) G(|(i-1)h - (k-1)h|) \\
 &= F(|j-n|\ell) G(|i-k|h) \quad .
 \end{aligned}$$

La matrice de krigeage peut s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel de deux matrices :

$$[C_{\alpha_{i,j}\beta_{k,n}}] = [F_{\alpha_{i,j}\beta_{k,n}}] \otimes [G_{\alpha_{i,j}\beta_{k,n}}] \quad , \quad (\text{H.1})$$

dont les éléments s'écrivent

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha_{i,j}\beta_{k,n}} &= F(|j-n|\ell) \\
 G_{\alpha_{i,j}\beta_{k,n}} &= G(|i-k|h) \quad .
 \end{aligned}$$

La matrice  $[F_{\alpha_{i,j}\beta_{k,n}}]$  est de dimension  $n_x \times n_x$ , la matrice  $[G_{\alpha_{i,j}\beta_{k,n}}]$  de dimension  $n_y \times n_y$ . Cette propriété de "factorisation" permet l'utilisation avantageuse de méthodes bloc lors de l'inversion de la matrice de krigeage simple  $[C_{\alpha\beta}]$ .

Pour les autres formes de krigeage, cette propriété permet une inversion bloc de la sous-matrice des covariances  $[C_{\alpha\beta}]$ , l'expression matricielle des conditions d'universalité ne pouvant être améliorée par la méthode présentée.

## H.2 Krigeage d'un point

Si l'on s'intéresse au krigeage d'un point se trouvant le long d'un des axes de données (ou dans son prolongement), mais tel qu'aucune donnée n'est disponible dans la direction orthogonale à cet

axe, on observe un effet d'écran particulier à ce dispositif.

Supposons que le point  $p$  à kriger se trouve sur la  $j^{\text{ème}}$  ligne de données, à droite du point  $i, j$  (à une distance  $m$  de ce point). Les composantes du membre de droite du système de krigeage s'écrivent

$$\begin{aligned} C_{\alpha_k, np} &= F(|(j-1)\ell + m - (n-1)\ell|) G(|k-j|h) \\ &= F(|(j-n)\ell + m|) G(|k-j|h) \quad , \end{aligned}$$

et ce membre de droite peut s'écrire sous la forme du produit tensoriel

$$[C_{\alpha p}] = [F_{\alpha p}] \otimes [G_{\alpha p}] \quad ,$$

où les matrices  $[F_{\alpha p}]$  et  $[G_{\alpha p}]$  sont de dimension  $1 \times n_x$  et  $1 \times n_y$ .

Le système de krigeage peut s'écrire

$$([F_{\alpha\beta}] \otimes [G_{\alpha\beta}]) \lambda_\beta = [F_{\alpha p}] \otimes [G_{\alpha p}]$$

et, en posant  $\lambda_i = 0 \quad \forall i > n_x$ , on trouve le système

$$[F_{\alpha\beta}][\lambda_\beta] = [F_{\alpha p}] \quad ,$$

qui admet la solution

$$[\lambda_\beta] = [F_{\alpha\beta}]^{-1}[F_{\alpha p}] \quad . \quad (\text{H.2})$$

On constate un effet d'écran (Rivoirard, 1984), l'ensemble des points appartenant aux autres lignes d'acquisition n'étant pas utilisé dans le krigeage du point  $p$ .

Ce résultat est valable indépendamment de la position du point  $p$ , pour autant que le point se situe le long d'une des lignes d'acquisition (ou dans son prolongement), mais non pas à un croisement.

### H.3 Grille non régulière

Dans le cas d'une grille de données complète à maille variable, l'ensemble des résultats obtenus est toujours valide. Les résultats présentés peuvent être généralisés, moyennant la définition des mailles  $\ell_i \times h_j$ .

Nous allons le montrer par un exemple.

On considère le dispositif présenté à la figure H.2. Il est constitué de 6 points de données  $\{a, b, c, d, e, f\}$  disposés de façon régulière ( $n_x = 3$  et  $n_y = 2$ ).

Dans ce cas, la matrice de krigeage simple s'exprime comme

$$[C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} & C_{ac} & C_{ad} & C_{ae} & C_{af} \\ C_{ba} & C_{bb} & C_{bc} & C_{bd} & C_{be} & C_{bf} \\ C_{ca} & C_{cb} & C_{cc} & C_{cd} & C_{ce} & C_{cf} \\ C_{da} & C_{db} & C_{dc} & C_{dd} & C_{de} & C_{df} \\ C_{ea} & C_{eb} & C_{ec} & C_{ed} & C_{ee} & C_{ef} \\ C_{fa} & C_{fb} & C_{fc} & C_{fd} & C_{fe} & C_{ff} \end{bmatrix}$$

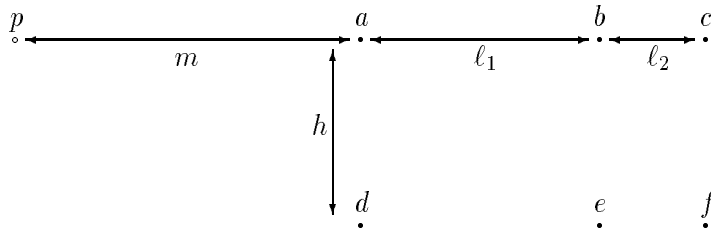


FIG. H.2 – Disposition des points pour l'exemple

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} F(0) G(0) & F(\ell_1) G(0) & F(\ell_1 + \ell_2) G(0) & F(0) G(h) & F(\ell_1) G(h) & F(\ell_1 + \ell_2) G(h) \\ F(\ell_1) G(0) & F(0) G(0) & F(\ell_2) G(0) & F(\ell_1) G(h) & F(0) G(h) & F(\ell_2) G(h) \\ F(\ell_1 + \ell_2) G(0) & F(\ell_2) G(0) & F(0) G(0) & F(\ell_1 + \ell_2) G(h) & F(\ell_2) G(h) & F(0) G(h) \\ F(0) G(h) & F(\ell_1) G(h) & F(\ell_1 + \ell_2) G(h) & F(0) G(0) & F(\ell_1) G(0) & F(\ell_1 + \ell_2) G(0) \\ F(\ell_1) G(h) & F(0) G(h) & F(\ell_2) G(h) & F(\ell_1) G(0) & F(0) G(0) & F(\ell_2) G(0) \\ F(\ell_1 + \ell_2) G(h) & F(\ell_2) G(h) & F(0) G(h) & F(\ell_1 + \ell_2) G(0) & F(\ell_2) G(0) & F(0) G(0) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F(0) & F(\ell_1) & F(\ell_1 + \ell_2) \\ F(\ell_1) & F(0) & F(\ell_2) \\ F(\ell_1 + \ell_2) & F(\ell_2) & F(0) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} G(0) & G(h) \\ G(h) & G(0) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

et on vérifie que la matrice de covariance s'exprime sous la forme d'un produit tensoriel de matrices. Nous pouvons à présent nous intéresser au krigeage simple du point  $p$ , disposé comme le présente la figure H.2.

Le membre de droite du système de krigeage, décrivant la covariance entre les points de données et le point  $p$  à estimer, s'écrit comme

$$[C_{\alpha p}] = \begin{bmatrix} C_{ap} \\ C_{bp} \\ C_{cp} \\ C_{dp} \\ C_{ep} \\ C_{fp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(m) & G(0) \\ F(m + \ell_1) & G(0) \\ F(m + \ell_1 + \ell_2) & G(0) \\ F(m) & G(h) \\ F(m + \ell_1) & G(h) \\ F(m + \ell_1 + \ell_2) & G(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(m) \\ F(m + \ell_1) \\ F(m + \ell_1 + \ell_2) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} G(0) \\ G(h) \end{bmatrix}.$$

On peut donc réécrire le système de krigeage

$$[C_{\alpha\beta}] [\lambda_\beta] = [C_{\alpha p}]$$

sous la forme

$$\left( \begin{bmatrix} F(0) & F(\ell_1) & F(\ell_1 + \ell_2) \\ F(\ell_1) & F(0) & F(\ell_2) \\ F(\ell_1 + \ell_2) & F(\ell_2) & F(0) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} G(0) & G(h) \\ G(h) & G(0) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_d \\ \lambda_e \\ \lambda_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(m) \\ F(m + \ell_1) \\ F(m + \ell_1 + \ell_2) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} G(0) \\ G(h) \end{bmatrix} .$$

En écrivant  $\mathbf{F}$  la matrice  $\begin{bmatrix} F(0) & F(\ell_1) & F(\ell_1 + \ell_2) \\ F(\ell_1) & F(0) & F(\ell_2) \\ F(\ell_1 + \ell_2) & F(\ell_2) & F(0) \end{bmatrix}$ , ce système peut se réécrire<sup>55</sup> sous la forme des deux équations

$$G(0) \mathbf{F} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} + G(h) \mathbf{F} \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_e \\ \lambda_f \end{bmatrix} = G(0) \begin{bmatrix} F(m) \\ F(m + \ell_1) \\ F(m + \ell_1 + \ell_2) \end{bmatrix}$$

$$G(h) \mathbf{F} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} + G(0) \mathbf{F} \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_e \\ \lambda_f \end{bmatrix} = G(h) \begin{bmatrix} F(m) \\ F(m + \ell_1) \\ F(m + \ell_1 + \ell_2) \end{bmatrix} .$$

En posant  $\lambda_d = \lambda_e = \lambda_f = 0$ , et à la condition triviale que  $G(0) \neq 0$ , on trouve le système

$$\begin{bmatrix} F(0) & F(\ell_1) & F(\ell_1 + \ell_2) \\ F(\ell_1) & F(0) & F(\ell_2) \\ F(\ell_1 + \ell_2) & F(\ell_2) & F(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(m) \\ F(m + \ell_1) \\ F(m + \ell_1 + \ell_2) \end{bmatrix} ,$$

et donc la solution

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(0) & F(\ell_1) & F(\ell_1 + \ell_2) \\ F(\ell_1) & F(0) & F(\ell_2) \\ F(\ell_1 + \ell_2) & F(\ell_2) & F(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F(m) \\ F(m + \ell_1) \\ F(m + \ell_1 + \ell_2) \end{bmatrix} .$$

Cette solution est unique, et on constate que l'effet d'écran observé dans le cas d'une maille régulière se retrouve dans le cas d'une maille variable.

<sup>55</sup>En considérant la notation bloc

$$(A \otimes \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = D \otimes \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} ,$$

nous nous intéressons aux systèmes

$$B_{11}AC_1 + B_{12}AC_2 = DE_1$$

$$B_{21}AC_1 + B_{22}AC_2 = DE_2 .$$