



HAL
open science

A priori and a posteriori error analysis of mixed and non-conforming finite element methods

Linda El Alaoui Lakhnati

► **To cite this version:**

Linda El Alaoui Lakhnati. A priori and a posteriori error analysis of mixed and non-conforming finite element methods. Mathematics [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2005. English. NNT : . pastel-00001267

HAL Id: pastel-00001267

<https://pastel.hal.science/pastel-00001267>

Submitted on 3 Jun 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSÉES**

Spécialité : Mathématiques et Informatique

par

Linda EL ALAOUI LAKHNATI

Sujet : *Analyse d'erreur a priori et a posteriori
pour des méthodes d'éléments finis mixtes non-conformes*

soutenue le 25 janvier 2005 devant le jury composé de :

Président :	Yvon Maday
Rapporteurs :	Mohamed Amara Rüdiger Verfürth
Examineurs :	Christine Bernardi Erik Burman Jean-Pierre Croisille
Directeur de thèse :	Alexandre Ern

Remerciements

Les premières lignes de cette page s'adressent naturellement à Alexandre Ern qui a dirigé ma thèse avec une attention constante. De ses larges connaissances scientifiques, de sa rigueur et de son sens pédagogique j'ai beaucoup appris. La patience et la disponibilité qu'il a eues à mon égard m'ont permis d'avoir de nombreuses discussions dont le fruit est ce mémoire. Je voudrais lui exprimer ici ma profonde gratitude.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à Rüdiger Verfürth et Mohamed Amara pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant la lourde tâche de rapporteur.

Je suis également très honorée que Yvon Maday ait accepté de présider mon jury et que Christine Bernardi ait accepté d'y participer.

Je voudrais remercier chaleureusement Jean-Pierre Croisille, qui tout au long de ces années m'a toujours encouragée et conseillée notamment lors de notre collaboration avec Isabelle Greff. Je lui suis également reconnaissante de sa participation à mon jury.

Merci à Erik Burman pour les fructueuses discussions que nous avons eues et pour sa présence dans mon jury.

Je voudrais remercier Jean-Luc Guermond pour sa confiance et Zoubida Mghazli pour ses encouragements.

Merci à Philippe Ackerer qui a eu la gentillesse de suivre le début de cette thèse. Ce travail a été supporté par le GDR MoMas (CNRS-2439, ANDRA, BRGM, CEA, EdF) dont je voudrais saluer le dynamisme de ses membres.

Ces trois années au Cermics ont été l'occasion de nombreux échanges, que toutes les personnes que j'ai pu solliciter se voient ici remerciées. Je voudrais remercier plus particulièrement Tony Lelièvre qui a toujours répondu à mes multiples questions, Laetitia Andrieu pour son oreille attentive, Héloïse Beaugendre et à Adel Ben Haj Yedder pour leur soutien et pour avoir toujours pris le temps de m'écouter. Merci à Sylvie Berte et Khadija El Ouali pour tous les services rendus et leur bonne humeur.

Je terminerais cette page en remerciant mes proches qui ont toujours su être là et qui m'ont permis de puiser en moi l'énergie nécessaire pour mener à bien ce travail.

*A mes parents,
pour leur d evouement sans égal et
leur affection sans limite,*

Résumé

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'analyse d'erreur *a priori* et *a posteriori* de méthodes d'éléments finis mixtes et non-conformes. Nous considérons en particulier les équations de Darcy à perméabilité fortement variable et les équations de convection–diffusion–réaction en régime de convection dominante.

Nous discrétisons les équations de Darcy par une méthode d'éléments finis mixtes non-conformes de type Petrov–Galerkin appelée schéma boîte. Les techniques d'estimations d'erreur *a posteriori* par résidu et hiérarchique conduisent à des estimateurs d'erreur *a posteriori* fiables et optimaux indépendamment des fluctuations de la perméabilité. Les résultats théoriques sont validés numériquement sur différents cas tests présentant de forts contrastes de perméabilité. Enfin, nous montrons comment les indicateurs d'erreur obtenus permettent de générer des maillages adaptatifs

Nous discrétisons les équations de convection–diffusion–réaction par des éléments finis non-conformes. Deux méthodes de stabilisation sont étudiées : la stabilisation par viscosité de sous-maille, conduisant à un schéma boîte et la méthode de pénalisation sur les faces. Nous montrons que les deux schémas ainsi obtenus ont les mêmes propriétés de convergence que les approximations par éléments finis conformes. Grâce aux techniques d'estimations d'erreur par résidu nous obtenons des estimateurs d'erreur *a posteriori* fiables et optimaux. Certains des indicateurs d'erreur sont robustes au sens de Verfürth, c'est à dire que le rapport des constantes intervenant dans les inégalités de fiabilité et d'optimalité explose en au plus l'inverse du nombre de Péclet. Les résultats théoriques sont validés numériquement et les indicateurs d'erreur *a posteriori* obtenus permettent de générer des maillages adaptatifs sur des problèmes présentant des couches intérieures.

Abstract

In this thesis we present *a priori* and *a posteriori* error analysis of mixed and nonconforming finite element methods. In particular, we consider the Darcy equations with variable permeability and the convection–diffusion–reaction equation in the convection–dominated regime.

We discretize the Darcy equations by the mixed nonconforming Petrov–Galerkin method known as the finite volume box scheme. Residual and hierarchical techniques lead to reliable and efficient *a posteriori* error estimators which are applicable no matter the variation of the permeability. Finally, we present numerical results which confirm the theory and we use the error indicators obtained to generate adaptive meshes.

We discretize the convection–diffusion–reaction equations by nonconforming finite elements. We investigate two different methods of stabilization : the subgrid method, leading to a finite volume box scheme and the face penalty method. We prove that the derived schemes have the same convergence properties as conforming finite element approximations. Owing to the residual *a posteriori* error estimation techniques we obtain reliable and efficient *a posteriori* error estimators. Some of these estimators are robust in the sense defined by Verfürth, where the estimates are optimal if the local Peclet number is sufficiently small. Finally, to numerically illustrate the theory we consider test cases with an interior layer and we use the error indicators to generate adaptive meshes.

Sommaire

1	Introduction	1
1.1	Motivations	1
1.2	Ecoulements darcéens en milieu poreux	4
1.2.1	Le problème modèle	4
1.2.2	Le cadre mathématique	4
1.2.3	Approximation par éléments finis	6
1.3	Transport de polluants	10
1.3.1	Le problème modèle	10
1.3.2	Le cadre mathématique	11
1.3.3	Approximation dans un cadre conforme	12
1.3.4	Approximations mixtes et non-conformes	15
1.4	Les estimations d'erreur <i>a posteriori</i>	20
1.4.1	Les estimateurs de type résidu	21
1.4.2	Les estimateurs de type hiérarchique	23
1.4.3	Autres estimateurs	25
1.5	Plan du mémoire	27
2	L'équation de Darcy à perméabilité variable	31
2.1	Introduction	31
2.2	Schéma boîte et analyse d'erreur <i>a priori</i>	32
2.2.1	Hypothèses et caractère bien posé	32
2.2.2	Le schéma boîte	34
2.2.3	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	39
2.3	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i> de type résidu	41
2.3.1	Résultats préliminaires	41
2.3.2	Estimateur basé sur la formulation mixte	43

2.3.3	Estimateurs basés sur la formulation primale	45
2.4	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i> de type hiérarchique	53
2.4.1	Estimateurs hiérarchiques nécessitant l'hypothèse de saturation . . .	54
2.4.2	Estimateur hiérarchique contournant l'hypothèse de saturation . . .	61
2.5	Résultats numériques	64
2.5.1	Milieu homogène	64
2.5.2	Milieu hétérogène	71
2.5.3	Adaptation de maillage	76
2.6	Conclusions	86
3	Convection–diffusion : stabilisation par viscosité de sous-maille	89
3.1	Introduction	89
3.2	Stabilisation par viscosité de sous-maille	90
3.2.1	Préliminaires	91
3.2.2	Le schéma discret	93
3.2.3	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	98
3.3	Formulation sur les échelles résolues	102
3.3.1	Le problème approché	102
3.3.2	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	103
3.4	Formulation mixte	105
3.5	Schéma boîte	108
3.6	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i>	113
3.7	Résultats numériques	121
3.7.1	Cas test 1	122
3.7.2	Adaptation de maillage	126
3.7.3	Cas test 2	130
3.8	Conclusions	133
4	Convection–diffusion : stabilisation par pénalisation sur les faces	135
4.1	Introduction	135
4.2	Le cadre discret	137
4.3	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	139
4.4	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i>	146
4.5	Résultats numériques	156
4.5.1	Cast test 1	156

4.5.2	Cas test 2	161
4.5.3	Adaptation de maillage	164
4.6	Conclusions	166
5	Conclusions et perspectives	169
A	Résultats techniques	171
A.1	Maillages	171
A.2	Opérateurs d'interpolation	171
A.3	Espaces d'éléments finis	173
A.3.1	Le Patch-test	173
A.3.2	L'espace d'éléments finis de Crouzeix–Raviart	173
A.3.3	L'espace d'éléments finis de Raviart–Thomas de plus bas degré . . .	174
A.4	Fonctions bulles	176
A.4.1	Bulles conformes sur les éléments	176
A.4.2	Bulles non-conformes sur les éléments	176
A.4.3	Bulles conformes sur les faces	177
A.5	Autres résultats	179
B	Adaptation de maillage	181
B.1	Fonctionnement général du mailleur	181
B.2	Algorithme de raffinement adaptatif	182
B.3	Extension au cas multi-domaines	182

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivations

Aujourd'hui l'étude expérimentale des processus (physiques, chimiques, biologiques, ...) intervenant dans les sciences de l'ingénieur n'est plus le seul moyen de comprendre et de prédire ces processus. En effet, avec le développement de méthodes numériques performantes, la simulation numérique est devenu pour l'ingénieur un outil d'une importance considérable. De nombreux domaines d'application utilisent ces méthodes. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons plus spécifiquement aux processus de transports dans les écoulements en milieu poreux.

Ces écoulements s'inscrivent dans le cadre de problèmes environnementaux qui suscitent actuellement un grand intérêt. En particulier, l'utilisation durant ces vingt dernières années de matière nucléaire pour la production d'énergie pose aujourd'hui le problème du stockage des déchets et notamment du stockage en couche géologique profonde. Une question naturelle se pose : quel va être le comportement de ces déchets une fois qu'ils auront migré à travers les barrières ouvragées pour le confinement des alvéoles de stockage et qu'ils se retrouveront relâchés dans le milieu naturel ? La simulation numérique du transport des radio-nucléides dans les écoulements souterrains permet de prévoir ce qui pourrait se passer dans des milliers d'années.

Les modèles physiques relatifs au transport advectif-diffusif-réactif des radio-nucléides dans les écoulements souterrains peuvent être très complexes. Leur approximation numérique doit être précise et fiable. De plus, la mise en œuvre sur ordinateur ne doit pas être trop coûteuse en temps de calcul. Une stratégie intéressante afin d'optimiser les calculs consiste à adapter le maillage à la solution calculée. Grâce à ces techniques, le temps de calcul

peut être réduit. La figure 1.1 représente la géométrie du cas test Couplex I, [BKST04]. La profondeur du domaine est de 695 m et sa longueur de 25000 m. Le sol est constitué de quatre couches géologiques (marne, argile, calcaire et dogger) et la conductivité hydraulique présente de fort contrastes entre les différentes couches. Au sein de la couche de calcaire se trouve positionnée une coupe bi-dimensionnelle d'une alvéole de stockage. L'objectif de ce cas test est de simuler le transport de déchets radioactifs par un écoulement dans le sol constitué de ces différentes couches géologiques. La figure 1.2, qui présente un zoom du maillage au voisinage de l'alvéole de stockage, montre comment le maillage peut être adapté en fonction du calcul de la charge hydraulique dans l'écoulement.

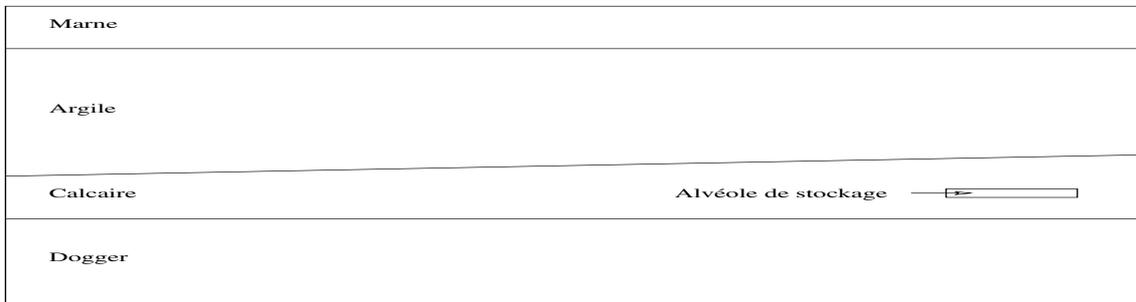


FIG. 1.1: Géométrie du cas test Couplex I

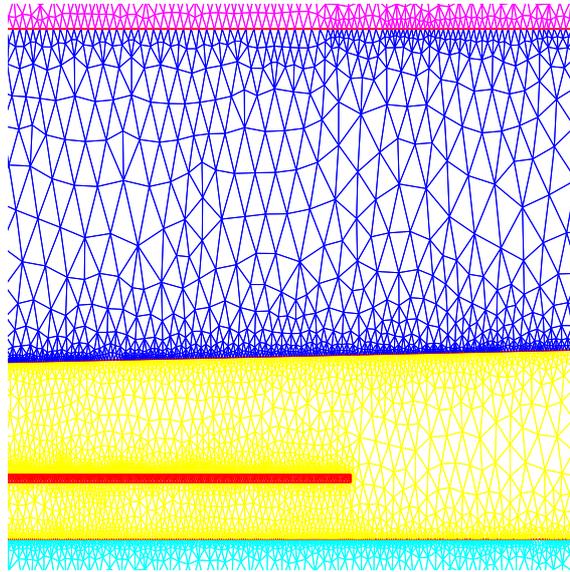


FIG. 1.2: Raffinement de maillage (zoom autour d'une l'alvéole de stockage)

Dans ce chapitre, nous présentons les problèmes modèles de l'écoulement et du transport en milieu poreux saturé; modèles que nous étudierons dans les chapitres suivants. Nous présentons également les approximations de ces modèles les plus rencontrées dans la littérature et celles que nous avons développées dans le cadre de cette thèse. Nous rappelons également le principe général des estimation d'erreur *a posteriori* et les différentes techniques existantes.

Nous considérons tout au long de ce document un maillage \mathcal{T}_h d'un domaine Ω de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ étant la dimension de l'espace. En dimension deux, nous supposons que Ω est un polygone et en dimension trois que Ω est un polyèdre. On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω et n la normale extérieure. Les éléments du maillage sont des triangles ou des tétraèdres. Par abus de langage, \mathcal{T}_h est appelée une triangulation de Ω et les éléments de \mathcal{T}_h sont appelés des triangles quelque soit la dimension d'espace considérée. Nous désignons respectivement par \mathcal{F}_h , \mathcal{F}_h^i et \mathcal{F}_h^∂ l'ensemble des faces, des faces intérieures et des faces extérieures (situées sur la frontière) de \mathcal{T}_h . Le diamètre maximal des éléments de la triangulation est noté h .

Considérons le problème linéaire abstrait suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in W, \end{cases} \quad (1.1)$$

où V et W sont des espaces de Hilbert respectivement munis des normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$, $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur $V \times W$ et $f(\cdot)$ est une forme linéaire sur W .

On dit que le problème (1.1) est bien posé s'il admet une et une seule solution. Le théorème de Banach–Necăs–Babuška (ou théorème BNB) donne des conditions *nécessaires et suffisantes* pour montrer que le problème (1.1) est bien posé; voir [EG04, p. 85].

Théorème 1.1.1 (Banach–Necăs–Babuška). *Le problème (1.1) est bien posé si et seulement si*

$$\exists \alpha > 0, \quad \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha, \quad (\text{BNB1})$$

$$\forall w \in W, \quad \{\forall v \in V, a(v, w) = 0\} \Rightarrow \{w = 0\}. \quad (\text{BNB2})$$

La terminologie BNB provient du fait que du point de vue de l'analyse fonctionnelle, le théorème 1.1.1 est une simple reformulation du théorème de l'image fermée et du théorème de l'application ouverte dus à Banach. Le théorème 1.1.1 a été énoncé sous cette forme par Necăs en 1962 [Neča62]; son importance fondamentale dans le contexte de la méthode des éléments finis a été soulignée par Babuška en 1972 [BA72].

1.2 Écoulements darcéens en milieu poreux

Dans cette section, nous décrivons le modèle de Darcy pour les écoulements stationnaires en milieu poreux saturé. Nous en présentons quelques formulations mathématiques et leurs approximations numériques.

1.2.1 Le problème modèle

L'écoulement stationnaire dans un milieu poreux saturé peut être modélisé par les équations de Darcy :

$$\begin{cases} \sigma + k \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \sigma = f & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

où σ est le vecteur vitesse, k la conductivité hydraulique (ou la perméabilité) qui est uniformément minorée par un réel strictement positif, u la pression (ou la charge hydraulique à une transformation affine près), et f le terme source représentant les sources ou puits de masse dans le domaine Ω . Le coefficient k est également appelé perméabilité. La première équation dans (1.2) est la loi phénoménologique de Darcy, introduite par H. Darcy dans [Dar56], et la seconde équation exprime la conservation de la masse. Le problème (1.2) est posé dans un domaine Ω et est fermé par des conditions sur la frontière $\partial\Omega$ qui portent sur le flux ou sur la pression. L'élimination de la vitesse conduit au problème elliptique suivant :

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = f, \quad (1.3)$$

avec des conditions limites de Dirichlet ou de Neuman sur la pression. Pour simplifier, on se restreint par la suite à des conditions de Dirichlet homogènes. On suppose également que la conductivité hydraulique est dans $L^\infty(\Omega)$ et que la donnée f est dans $L^2(\Omega)$.

1.2.2 Le cadre mathématique

La formulation faible de (1.3) consiste à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.4)$$

Par ailleurs, plusieurs formulations faibles du problème (1.2) peuvent être considérées. D'une part, on peut considérer deux formulations symétriques dans laquelle l'espace de solution pour les inconnues (σ, u) est le même que l'espace des fonctions tests. Ces deux

formulations symétriques diffèrent du fait que soit la vitesse soit la pression est cherchée dans un espace présentant plus de régularité. D'autre part, il est également possible de considérer une formulation non-symétrique dans laquelle l'espace de solution et l'espace des fonctions tests sont différents. Décrivons brièvement ces différentes formulations.

- Formulation symétrique dans $H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$.

L'intégration par parties de la loi de Darcy conduit à la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau - \int_{\Omega} k u \nabla \cdot \tau = 0 \quad \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega), \\ \int_{\Omega} v \nabla \cdot \sigma = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où $H(\text{div}; \Omega) = \{ \sigma \in [L^2(\Omega)]^d, \nabla \cdot \sigma \in L^2(\Omega) \}$. Des conditions aux bords sur le flux peuvent être imposées en considérant un sous-espace de $H(\text{div}; \Omega)$. L'équation de conservation de la masse a été conservée telle quelle.

- Formulation symétrique dans $[L^2(\Omega)]^d \times H_0^1(\Omega)$.

L'intégration par parties de l'équation de conservation de la masse conduit à la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in [L^2(\Omega)]^d \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau + \int_{\Omega} k \tau \cdot \nabla u = 0 \quad \forall \tau \in [L^2(\Omega)]^d, \\ - \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Dans cette formulation, c'est l'équation de Darcy qui a été conservée telle quelle.

- Formulation non-symétrique dans $H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $[L^2(\Omega)]^d \times L^2(\Omega)$.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à une formulation de ce type dans laquelle les espaces de solution pour la pression et pour la vitesse ont plus de régularité que les espaces des fonctions tests. Cette formulation a été considérée dans [TT99, Cro00].

La formulation faible de (1.2) consiste à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau + \int_{\Omega} k \tau \cdot \nabla u = 0 \quad \forall \tau \in [L^2(\Omega)]^d, \\ \int_{\Omega} v \nabla \cdot \sigma = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (1.7)$$

On remarquera qu'aucune intégration par parties n'a été effectuée. Dans cette formulation, l'équation de Darcy et l'équation de conservation de la masse ont donc été conservées telles quelles. On observe qu'une autre formulation non-symétrique, duale de (1.7), consiste à chercher $(\sigma, u) \in [L^2(\Omega)]^d \times L^2(\Omega)$ et à prendre les fonctions

test dans $H(\operatorname{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$, [Cro00]. Dans ce cas, l'équation de Darcy et l'équation de conservation de la masse doivent être intégrées par parties. Cette formulation ne sera pas considérée dans cette thèse.

La caractéristique bien posé des formulations présentées ci-dessus, notamment de (1.7) peut se montrer en utilisant le théorème BNB ; voir le chapitre 2.

1.2.3 Approximation par éléments finis

Nous rappelons dans cette section les approximations par éléments finis de plus bas degré des formulations faibles ci-dessus. Avant de faire cette présentation, non-exhaustive, définissons pour une fonction \mathbb{R} -valuée, v , continue par morceaux le saut de v à travers une face intérieure de la triangulation F de \mathcal{F}_h^i par

$$[v]_F = v|_{T_1} n_1 + v|_{T_2} n_2,$$

où T_1 et T_2 sont les deux éléments de \mathcal{T}_h partageant la face F de normales extérieures respectives n_1 et n_2 (voir figure 1.3). Dans le cas d'une face F sur le bord $\partial\Omega$ on définit le saut de v à travers F par

$$[v]_F = v|_T n,$$

où T est l'élément de \mathcal{T}_h qui contient la face F . De même pour une fonction \mathbb{R}^d -valuée, τ , continue par morceaux le saut de τ à travers une face intérieure F de \mathcal{F}_h^i est défini par

$$[\tau]_F = \tau|_{T_1} \cdot n_1 + \tau|_{T_2} \cdot n_2,$$

et dans le cas d'une face F sur le bord $\partial\Omega$ on définit le saut de τ à travers F par :

$$[\tau]_F = \tau|_T \cdot n.$$

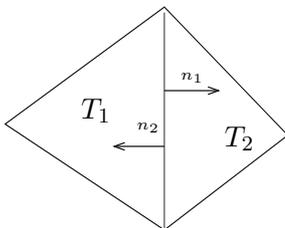


FIG. 1.3: Deux triangles partageant une face intérieure

On désigne par $P^k(T)$ l'ensemble des polynômes sur $T \in \mathcal{T}_h$ de degré total inférieur ou égal à k , avec $k \geq 0$. Enfin, l'espace $P^k(\mathcal{T}_h)$ désigne l'ensemble des fonctions dont la restriction à chaque triangle T de \mathcal{T}_h est dans $P^k(T)$.

On peut distinguer deux approximations par éléments finis de (1.4) de degré un. La première est une approximation conforme de la pression, c'est-à-dire que l'on cherche la solution approchée dans l'espace des fonctions continues qui sont linéaires sur chaque élément du maillage et qui s'annulent au bord. Cette formulation s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} k \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h), \end{cases} \quad (1.8)$$

où

$$P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h) = \{ v_h \in H_0^1(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P^1(T) \}. \quad (1.9)$$

La deuxième approximation est une approximation non-conforme de la pression, c'est-à-dire que l'on cherche la pression dans l'espace des fonctions linéaires sur chaque élément du maillage qui sont uniquement continues aux barycentres des faces et qui sont en moyenne nulles sur les faces du bord. Cet espace est l'espace d'éléments finis de Crouzeix–Raviart, noté $P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$ et défini par [CR73]

$$P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h) = \{ v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P^1(T); \forall F \in \mathcal{F}_h, \int_F [v_h]_F = 0 \}. \quad (1.10)$$

Ainsi, l'approximation non-conforme de (1.4) consiste à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T k \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h). \end{cases} \quad (1.11)$$

Intéressons-nous maintenant aux approximations du problème mixte (1.2).

- Approximation de la formulation symétrique dans $H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$.

On approche la vitesse σ par une fonction linéaire sur chaque élément de la triangulation et de composante normale continue au milieu des faces. Pour cela, on introduit l'espace d'éléments finis de Raviart–Thomas de plus bas degré $RT^0(\mathcal{T}_h)$, [RT77], défini comme suit

$$RT^0(\mathcal{T}_h) = \{ \tau_h \in [L^2(\Omega)]^d; \forall T \in \mathcal{T}_h, \tau_h|_T \in RT^0(T); \forall F \in \mathcal{F}_h, \int_F [\tau_h]_F = 0 \}, \quad (1.12)$$

où $RT^0(T)$ est l'espace des polynômes en x de la forme $\alpha x + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^d$. La pression u est approchée dans l'espace des fonctions constantes par

morceaux $P^0(\mathcal{T}_h)$. Ainsi, le problème discret consiste à :

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\sigma_h, u_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times P^0(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau_h - \int_{\Omega} k u_h \nabla \cdot \tau_h = 0 & \forall \tau_h \in RT^0(\mathcal{T}_h), \\ \int_{\Omega} v_h \nabla \cdot \sigma_h = \int_{\Omega} f v_h & \forall v_h \in P^0(\mathcal{T}_h). \end{cases} \quad (1.13)$$

L'équation de conservation de la masse discrète est équivalente à

$$\nabla \cdot \sigma_h = f_h,$$

où $f_h = \Pi^0 f$, Π^0 étant l'opérateur de projection L^2 -orthogonale sur $P^0(\mathcal{T}_h)$. On obtient donc une conservation locale de la masse sur chaque maille. Par contre, la loi de Darcy n'est satisfaite qu'au sens des distributions. On utilise une technique d'hybridation pour réduire le coût de calcul du problème (1.13); voir par exemple [BF91].

- Approximation de la formulation symétrique dans $[L^2(\Omega)]^d \times H_0^1(\Omega)$.

On cherche la vitesse approchée dans $[P^0(\mathcal{T}_h)]^d$ et la pression dans $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$, ce qui conduit au problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\sigma_h, u_h) \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d \times P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau_h + \int_{\Omega} k \tau_h \cdot \nabla u_h = 0 & \forall \tau_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d, \\ - \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h & \forall v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h). \end{cases} \quad (1.14)$$

La solution approchée u_h est solution du problème (1.8) et on a une reconstruction locale de la vitesse. Par contre, l'équation de conservation de la masse n'est satisfaite qu'au sens des distributions. Une autre approximation également rencontrée dans la littérature repose sur une l'approximation non-conforme de la pression. Le problème discret consiste à

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\sigma_h, u_h) \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d \times P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T k \tau_h \cdot \nabla u_h = 0 & \forall \tau_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d, \\ - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \sigma_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h & \forall v_h \in P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h). \end{cases} \quad (1.15)$$

La solution approchée de (1.15) est solution du problème non-conforme (1.11). Cette approximation conduit aussi à une reconstruction locale de la vitesse. L'équation de conservation de la masse n'est satisfaite qu'au sens des distributions.

- Approximation de la formulation non-symétrique dans $H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $[L^2(\Omega)]^d \times L^2(\Omega)$.

La vitesse et la pression sont approchées, respectivement, dans l'espace de Raviart–Thomas de plus bas degré, $RT^0(\mathcal{T}_h)$, et dans l'espace de Crouzeix–Raviart, $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$. Cette formulation discrète non–conforme de type Petrov–Galerkin s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma_h, u_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \tau_h \cdot \nabla u_h = 0 \quad \forall \tau_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d, \\ \int_{\Omega} v_h \nabla \cdot \sigma_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in P^0(\mathcal{T}_h). \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Le schéma discret (1.16) est intéressant car les fonctions tests sont localisées aux éléments du maillage. Ainsi, ce schéma peut être interprété comme une méthode de volumes finis et est souvent appelé schéma boîte (finite volume box scheme, en anglais). Pour les équations de Darcy, le schéma boîte de plus bas degré a été introduit dans [CC98] et une interprétation en degré de libertés dans le cadre de la méthode des éléments finis est donnée dans [Cro00]. Des versions de plus haut degré sont analysées dans [CG02, Gre03]. Le schéma boîte (1.16) est doté de trois propriétés importantes :

- Sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h , on a la reconstruction locale de la vitesse approchée suivante :

$$\sigma_h|_T = -k|_T \nabla u_h|_T + \frac{1}{d} f_h|_T \pi_h^1|_T, \quad (1.17)$$

où π_h^1 est le polynôme de degré un par morceaux tel que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in T$, $\pi_h^1(x) = (x_1 - G_{T,1}, \dots, x_d - G_{T,d})$, où $(G_{T,1}, \dots, G_{T,d})$ sont les coordonnées cartésiennes du barycentre G_T de T . Pour simplifier on a supposé que la conductivité hydraulique k est constante par morceaux, mais une formule de reconstruction existe également si k est variable dans T .

- Pour $T \in \mathcal{T}_h$, on a la conservation de la masse discrète suivante

$$\nabla \cdot \sigma_h = f_h. \quad (1.18)$$

- La pression approchée u_h est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T k \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f_h v_h \quad \forall v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h). \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Une conséquence importante de cette propriété est que pour obtenir la solution (σ_h, u_h) de (1.16), il suffit de résoudre le problème (1.19) puis de reconstruire le champ σ_h selon (1.17).

Achdou et al. proposent dans [ABC03] une formulation mixte symétrique de l'équation de Poisson avec des conditions de Neumann imposées sur la vitesse. Deux schémas de discrétisation sont proposés et les auteurs montrent qu'en fait chaque schéma est équivalent à un schéma de volumes finis. De nombreux schémas de volumes finis ont été développés et analysés pour l'étude de l'équation de Darcy. On pourra se référer à [EGH00] pour une introduction aux méthodes de volumes finis. Les liens entre les méthodes d'éléments finis et de volumes finis ont été étudiés dans plusieurs travaux, tels que [BSW83, GP99, ABC03].

1.3 Transport de polluants

Dans cette section, nous présentons l'équation de convection–diffusion–réaction modélisant le transport de polluants. Nous en présentons quelques formulations mathématiques et leurs approximations numériques.

1.3.1 Le problème modèle

Le transport d'un polluant peut être modélisé par l'équation de convection–diffusion–réaction. Notons par D l'opérateur différentiel du second ordre $D = -\Delta(\cdot)$ et par A l'opérateur différentiel du premier ordre $A = \beta \cdot \nabla(\cdot) + \nu(\cdot)$, avec $\beta \in [\mathbf{L}^\infty(\Omega)]^d$, $\nabla \cdot \beta \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ et $\nu \in [\mathbf{L}^\infty(\Omega)]^d$. Avec ces notations, l'équation de convection–diffusion–réaction s'écrit

$$\epsilon Du + Au = f. \quad (1.20)$$

L'inconnue u représente, par exemple, la concentration d'une espèce chimique transportée par le champ d'advection β , ϵ est le coefficient de diffusion, ν le coefficient de réaction et f le terme source. Le problème (1.20) est posé dans un domaine Ω et est fermé par des conditions sur le bord $\partial\Omega$ qui portent sur la concentration ou sur le flux de celle-ci.

Effectuons tout d'abord un changement de variable afin d'obtenir des coefficients et un domaine Ω adimensionnés. Soit $C_\Omega > 0$ la constante de Poincaré définie par

$$C_\Omega = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla v\|_{0,\Omega}}{\|v\|_{0,\Omega}}.$$

Définissons la longueur l_Ω par

$$l_\Omega = C_\Omega^{-1}.$$

Par le changement de variable $x' = \frac{1}{l_\Omega}x$ pour $x \in \Omega$, le problème (1.20) s'écrit

$$-\epsilon' \Delta u' + \beta' \cdot \nabla u' + \nu' u = f' \quad \text{dans } \Omega', \quad (1.21)$$

1.3. Transport de polluants

où Ω' est l'image Ω par le changement de variable considéré ci-dessus. Pour $x \in \Omega$ et $x' \in \Omega'$,

$$u'(x') = u(x), \quad f'(x') = \frac{1}{\beta_{\infty, \Omega}} f(x),$$

où $\beta_{\infty, \Omega}$ est la norme L^∞ de β sur Ω . De plus, les paramètres adimensionnés ϵ' , β' et ν' sont définis par

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{l_\Omega \beta_{\infty, \Omega}}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\beta_{\infty, \Omega}}, \quad \nu' = \frac{\nu l_\Omega}{\beta_{\infty, \Omega}}.$$

Notons que le coefficient ϵ' peut s'interpréter comme l'inverse du nombre de Péclet. Par la suite, nous omettons le signe $'$ et il sera donc implicitement entendu que les coefficients sont adimensionnés.

Dans de nombreuses applications, il est intéressant de connaître le flux de polluant. Pour cela, introduisons la variable auxiliaire $\sigma = -\nabla u$. Nous obtenons alors la formulation mixte suivante de (1.20) :

$$\begin{cases} \sigma = -\nabla u & \text{dans } \Omega, \\ \epsilon \nabla \cdot \sigma + \beta \cdot \nabla u + \nu u = f & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

1.3.2 Le cadre mathématique

Pour simplifier cette présentation, nous imposons des conditions limites de Dirichlet homogènes. Considérons la formulation faible de (1.20) :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = (f, v)_{0, \Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.23)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u + \nu u) v.$$

On suppose qu'il existe une constante $\sigma_0 > 0$ telle que $\sigma = \nu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \sigma_0$ p.p dans Ω , si bien que le problème (1.23) admet une et une seule solution. Si $\nu = 0$ et $\nabla \cdot \beta = 0$, le problème (1.23) admet une et une seule solution si β est un champ remplissant, i.e., si pour presque tout x dans Ω , il existe une courbe caractéristique qui atteint $\partial\Omega$ en temps fini [Aze95].

Dans cette thèse, nous nous intéressons également à la formulation non-symétrique de (1.22) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau + \int_{\Omega} \tau \cdot \nabla u = 0 \quad \forall \tau \in [L^2(\Omega)]^d, \\ \int_{\Omega} \epsilon(\nabla \cdot \sigma v) + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v + \int_{\Omega} \nu uv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Au chapitre 3, nous montrons le caractère bien posé du problème (1.24). L'intérêt de cette formulation est qu'elle sert de base à la construction d'un schéma boîte pour approcher le problème de convection–diffusion–réaction (1.23).

1.3.3 Approximation dans un cadre conforme

Soit X_h un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie. La discrétisation de (1.23) par la méthode de Galerkin standard s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in X_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0, \Omega} \quad \forall v_h \in X_h. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Le problème (1.25) admet une et une seule solution si et seulement si il existe une constante $\alpha_h > 0$ telle que :

$$\inf_{w_h \in X_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{a(w_h, v_h)}{\|w_h\|_{1, \Omega} \|v_h\|_{1, \Omega}} \geq \alpha_h,$$

où $\|\cdot\|_{s, \Omega}$ désigne la norme canonique de H^s , avec $s \geq 0$. De plus, pour obtenir des estimations d'erreur optimales il faut que la constante α_h soit minorée par une constante indépendante de h . Malheureusement, il existe en général deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$c_1 h \leq \inf_{w_h \in X_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{a_1(w_h, v_h)}{\|w_h\|_{1, \Omega} \|v_h\|_{0, \Omega}} \leq c_2 h, \quad (1.26)$$

où $a_1(w_h, v_h) = \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w_h) v_h$; voir [EG04, p222] pour une preuve en dimension un. En régime d'advection dominante, i.e. $\epsilon \ll 1$, ce résultat se traduit par l'apparition d'oscillations non-physiques dans la solution approchée de (1.25). Pour remédier à ce problème différentes méthodes de stabilisation ont été introduites. Nous en présentons une revue non-exhaustive.

- La méthode de Galerkin/Moindres carrés (GaLS, de l'anglais Galerkin Least-Squares) Dans [BH82] les auteurs stabilisent la formulation de Galerkin (1.25) en ajoutant un terme de diffusion dans la direction des lignes de courant. Cette méthode est aussi

1.3. Transport de polluants

appelée *streamline diffusion method*. En notant h_T le diamètre du triangle T de \mathcal{T}_h et en posant $A_\epsilon = \epsilon D + A$, le problème discret s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in X_h \text{ tel que pour tout } v_h \in X_h \\ a(u_h, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta(h_T)(A_\epsilon u_h, A_\epsilon v_h)_{0,T} = (f, v_h)_{0,\Omega} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta(h_T)(f, A_\epsilon v_h)_{0,T}, \end{array} \right. \quad (1.27)$$

où $\delta(h_T)$ est une fonction dépendant de ϵ et de h_T pouvant par exemple être choisie comme suit :

$$\delta(h_T) = \left(\frac{1}{h_T} + \frac{\epsilon}{h_T^2} \right)^{-1}.$$

On pourra se référer à [JNP84, Joh87, Cod98, RST96, QA97] pour l'analyse numérique de (1.27). L'inconvénient de cette méthode est que le paramètre de stabilisation dépend du coefficient de diffusion et de la taille du maillage.

- La méthode de viscosité de sous-maille

La méthode de stabilisation par viscosité de sous-maille a été introduite par Guermont dans [Gue99] pour un problème du premier ordre et généralisée à un problème du second ordre dans [Gue01].

On considère un espace de dimension finie X_h que l'on enrichit comme suit :

$$X_h^e = X_h \oplus X_h^f. \quad (1.28)$$

Alors, tout élément u_h^e de X_h^e se décompose de façon unique dans $X_h \oplus X_h^f$ comme suit :

$$u_h^e = u_h + u_h^f.$$

On dit que X_h est l'espace des échelles résolues et X_h^f l'espace des échelles fluctuantes. On dit que u_h est la composante de u_h^e aux échelles résolues et u_h^f la composante aux échelles fluctuantes. L'enrichissement de X_h peut se faire soit en augmentant le nombre de degré de libertés soit en considérant une triangulation de taille plus petite. Supposons que les espaces X_h^e et X_h sont tels que

$$\exists \alpha > 0, \quad \inf_{u_h \in X_h} \sup_{v_h^e \in X_h^e} \frac{a_1(u_h, v_h^e)}{\|u_h\|_{1,\beta} \|v_h^e\|_{0,\Omega}} \geq \alpha, \quad (1.29)$$

uniformément en h . Ici nous avons posé $\|\cdot\|_{1,\beta} = \|\cdot\|_{0,\Omega} + \|\beta \cdot \nabla(\cdot)\|_{0,\Omega}$. L'hypothèse (1.29) permet de contrôler $\|u_h\|_{1,\beta}$, mais il manque encore le contrôle de $\|u_h^f\|_{1,\beta}$. Une façon simple de contrôler cette quantité consiste à ajouter un terme de viscosité artificielle n'agissant que sur la fluctuation u_h^f .

Dans le cas des équations de convection–diffusion–réaction, ce terme peut être choisi pour tout $u_h^f, v_h^f \in X_h^f$ comme suit :

$$b_h(u_h^f, v_h^f) = c_b h \int_{\Omega} \nabla u_h^f \cdot \nabla v_h^f \quad \text{ou} \quad b_h(u_h^f, v_h^f) = c_b h \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h^f)(\beta \cdot \nabla v_h^f), \quad (1.30)$$

où c_b est une constante indépendante de h et de ϵ . Ainsi, le problème (1.25) stabilisé par la méthode de viscosité de sous-maille s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in X_h^e \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h^e) + b_h(u_h^f, v_h^f) = (f, v_h^e)_{0,\Omega} \quad \forall v_h^e \in X_h^e. \end{cases} \quad (1.31)$$

Dans le terme $b_h(\cdot, \cdot)$ il apparaît une constante c_b qui ne dépend ni de h ni de ϵ . Brezzi et al. [BKR00] montrent que le choix de cette constante n'est pas sans incidence sur la qualité des résultats numériques; en particulier, ceux-ci sont améliorés en considérant un algorithme itératif permettant de calculer cette constante sur chaque élément de la triangulation.

- La méthode de pénalisation sur les faces

Burman et al. [BH04, Bur04] se sont inspirés des travaux présentés dans [DD76] pour proposer une méthode de pénalisation sur les faces permettant de stabiliser des approximations par éléments finis des équations de convection–diffusion en régime de convection dominante. Cette méthode présente l'avantage d'être moins coûteuse que les méthodes d'approximation de Galerkin discontinues qui, elles aussi reposent sur une pénalisation des sauts à travers les faces. Dans [BH04] les auteurs considèrent la formulation de Galerkin (1.25) avec $X_h = P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ à laquelle ils ajoutent le terme de pénalisation sur les faces intérieures défini pour tout $u_h, v_h \in X_h$ par

$$J(u_h, v_h) = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \gamma h_F^2 [\nabla u_h]_F \cdot [\nabla v_h]_F,$$

où γ désigne une constante indépendante de h et ϵ . Ainsi, le schéma considéré est

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in X_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + J(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in X_h. \end{cases} \quad (1.32)$$

L'inconvénient des méthodes de pénalisation sur les faces est l'élargissement du stencil de discrétisation, ce qui se traduit par une augmentation des termes non nuls dans la matrice de rigidité.

Parmis les autres méthodes de stabilisation on peut citer la une méthode appelée Residual Free Bubbles [BR94] dans laquelle ne figure pas de paramètre dépendant de ϵ et h . Cette méthode a été reprise dans [FR96, BFR98, BKR00]. Enfin, des approximations de l'équation de convection–diffusion par schéma boîte en une dimension d'espace ont été analysées dans [Cro02, Gre03, CG04].

1.3.4 Approximations mixtes et non–conformes

La formulation mixte de problèmes elliptiques a été très étudiée ces dernières années. Par contre un nombre relativement moins important de travaux a été consacré à l'étude de la formulation mixte des problèmes de type convection-diffusion-réaction. Dans [Jaf84, Daw93, DA99], il est proposé diverses méthodes de décentrement permettant d'obtenir une approximation stable et convergente. L'inconvénient des méthodes mixtes est le coût de calcul associé à la résolution du système linéaire. Une méthode d'éléments finis mixtes hybrides est introduite dans [SMA97] conduisant à une réduction significative du coût de calcul. Plus récemment, dans [BEG04] les auteurs considèrent une formulation de type Petrov–Galerkin discontinue qui est en fait une formulation duale hybride qui, après condensation statique, devient une formulation non–conforme primale. Cette dernière formulation est alors stabilisée par une technique de décentrement et l'approximation du flux convectif–diffusif est obtenu par post–processing.

Un des objectifs de notre étude sur les équations de convection–diffusion–réaction est d'une part de préserver la continuité du flux à travers les interfaces des éléments de la triangulation et d'autre part de disposer d'une reconstruction locale du flux discret. Pour simplifier, supposons que $\nu = 0$ (le cas $\nu \neq 0$ est considéré au chapitre 3). Considérons le schéma boîte suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma_h, u_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \tau_h \cdot \nabla u_h + t_{1,h}(u_h, \tau_h) = 0 \quad \forall \tau_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d, \\ \int_{\Omega} \epsilon(\nabla \cdot \sigma_h) v_h + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u_h) v_h + t_{2,h}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in P^0(\mathcal{T}_h), \end{array} \right. \quad (1.33)$$

où $t_{1,h}(\cdot, \cdot)$ et $t_{2,h}(\cdot, \cdot)$ sont deux formes bilinéaires respectivement définies sur $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \times [P^0(\mathcal{T}_h)]^d$ et $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \times P^0(\mathcal{T}_h)$. La démarche consiste à éliminer le flux discret en posant $\tau_h = \epsilon \nabla v_h$ pour $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ afin d'obtenir une formulation en la variable primale sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) + s_h(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h). \end{array} \right. \quad (1.34)$$

La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est définie par :

$$\forall v_h, w_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h), \quad a_h(v_h, w_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h) v_h,$$

et la forme bilinéaire $l(\cdot)$ ne dépend pas de la solution approchée u_h . La forme bilinéaire $s_h(\cdot, \cdot)$ est quant à elle, déduite de façon univoque des forme bilinéaires $t_{1,h}(\cdot, \cdot)$ et $t_{2,h}(\cdot, \cdot)$. Pour plus de détails nous renvoyons à la section 3.5.

Réciproquement, partons du problème approché (1.34) et supposons que $s_h(\cdot, \cdot)$ se localise comme suit :

$$s_h(v_h, w_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [s_{1,T}(v_h, \Pi^0 w_h) + s_{2,T}(v_h, \pi_h^1 \cdot \nabla w_h)],$$

où $s_{1,T}(\cdot, \cdot)$ et $s_{2,T}(\cdot, \cdot)$ sont deux formes bilinéaires. Alors, on montre (voir section 3.5) qu'il existe $\sigma_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$ vérifiant une formule de reconstruction locale tel que (σ_h, u_h) est solution du schéma boîte (3.45). Ces considérations montrent qu'obtenir un schéma boîte du type (1.33) revient à obtenir une approximation stabilisée de (1.25) dans un cadre non-conforme. Avant de présenter les deux schémas obtenus dans cette thèse, faisons un bref état de l'art sur la stabilisation des approximations par éléments finis des équations de convection–diffusion–réaction dans un cadre non-conforme.

La principale difficulté d'une approximation non-conforme de (1.25) est le contrôle du terme convectif. En effet, en intégrant par parties ce terme sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h nous obtenons pour tout $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla v_h) v_h = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{1}{2} \int_F \beta \cdot [v_h^2]_F. \quad (1.35)$$

Pour que le schéma soit stable, il faut contrôler ce terme. Dans [JMT97], dans le cadre d'une approximation dans $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$, les auteurs proposent différentes méthodes de stabilisation de type GaLS auxquelles ils ajoutent le terme suivant de saut sur les faces :

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \sigma_F \int_F [u_h]_F \cdot [v_h]_F. \quad (1.36)$$

Le coefficient σ_F est choisi en fonction de h et de ϵ . Dans [JMST98], toujours dans le cadre d'une approximation dans $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$, les auteurs analysent une méthode de stabilisation de type GaLS à laquelle ils ajoutent un terme de saut sur les faces, mais cette fois, le terme de saut ne fait pas intervenir de coefficient dépendant de h et de ϵ . Le terme de saut considéré est

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \beta \cdot [u_h]_F \{v_h\}_F + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F |\beta|_F [u_h]_F \cdot [v_h]_F, \quad (1.37)$$

où la valeur moyenne de v_h à travers la face F est définie par $\{v_h\}_F = \frac{1}{2}(v_h|_{T_1} + v_h|_{T_2})$, et $|\beta|_F = |\beta \cdot n_F|$, où n_F est un des deux vecteurs normal à F . Le premier terme de (1.37) permet d'assurer la stabilité du problème discret et le second terme la convergence de l'erreur de consistance uniformément en ϵ . Néanmoins, dans cette méthode, il reste à choisir le paramètre venant de la stabilisation GaLS qui dépend de h et de ϵ .

Stynes et al. [ST01] montrent que dans le cas de l'élément fini rotationnel rectangulaire, on peut s'affranchir du terme de saut sur les faces pour obtenir la stabilité du problème. Knobloch et al. [KT03] construisent un nouvel élément fini non-conforme d'ordre 1 de sorte que la méthode GaLS ne soit pas modifiée par l'ajout d'un terme de saut sur les faces. L'inconvénient de cet élément est qu'il est de dimension égale à deux fois la dimension de l'espace de Crouzeix–Raviart.

Dans ce travail, nous proposons deux nouvelles méthodes de stabilisation de l'équation de convection–diffusion–réaction. La première est une méthode de stabilisation par viscosité de sous-maille dans un cadre non-conforme qui s'inspire de la méthode présentée et analysée dans [Gue01] dans un cadre conforme. La seconde est une méthode de stabilisation par pénalisation sur les faces qui s'inspire de la méthode présentée et analysée dans [Bur04, BH03].

- Stabilisation par viscosité de sous-maille.

Nous considérons cette méthode pour l'équation (1.20) avec des conditions de Dirichlet homogènes. Pour l'espace des échelles résolues nous choisissons l'espace d'éléments finis de Crouzeix–Raviart $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$. Pour l'espace des échelles fluctuantes, nous choisissons l'espace de Fortin–Soulié $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$ défini par

$$\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h) = \text{vect}_{T \in \mathcal{T}_h} \{b_T^{\text{nc}}\}, \quad (1.38)$$

où

$$\begin{cases} b_T^{\text{nc}}|_T = 2 - (d+1) \sum_{i=0}^d \lambda_{i,T}^2, \\ b_T^{\text{nc}}|_{\Omega \setminus T} = 0, \end{cases} \quad (1.39)$$

où $\{\lambda_{i,T}\}_{0 \leq i \leq d}$ sont les coordonnées barycentriques de T . Posons

$$X_h^e = P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \oplus \mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h).$$

Alors, le problème discret que nous considérons est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h^e \in X_h^e \text{ tel que} \\ \Theta_h(u_h^e, v_h^e) = (f, v_h^e) \quad \forall v_h^e \in X_h^e, \end{cases} \quad (1.40)$$

où nous avons posé

$$\Theta_h(u_h^e, v_h^e) = a_h(u_h^e, v_h^e) + \epsilon d_h(u_h^e, v_h^e) + b_h(u_h^f, v_h^f) + J_0(u_h^e, v_h^e), \quad (1.41)$$

avec

$$\begin{aligned} a_h(u_h^e, v_h^e) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h^e + \nu u_h^e) v_h^e, & d_h(u_h^e, v_h^e) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h^e \cdot \nabla v_h^e, \\ b_h(u_h^f, v_h^f) &= c_b \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \int_T \nabla u_h^f \cdot \nabla v_h^f \quad \text{avec } c_b > 0, \\ J_0(u_h^e, v_h^e) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} J_{0,F}(u_h^e, v_h^e) \quad \text{avec } J_{0,F}(u_h^e, v_h^e) = - \int_F \beta \cdot [u_h^e]_F (v_h^e)^\downarrow, \end{aligned}$$

où v_h^\downarrow est la valeur aval de v_h définie pour $F \in \mathcal{F}_h^i$ et pour presque tout $x \in F$ par $v_h^\downarrow(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} v_h(x + \gamma\beta)$. Au chapitre 3, nous présentons une analyse d'erreur *a priori* et *a posteriori* de ce schéma ainsi qu'une réinterprétation en un schéma posé sur les échelles résolues.

- Stabilisation par pénalisation sur les faces.

Pour cette méthode, plutôt que d'imposer des conditions limites de Dirichlet homogènes nous allons imposer des conditions de Robin sur le bord rentrant $\partial\Omega_{\text{in}}$ et des conditions de Neumann homogènes sur sortant $\partial\Omega_{\text{out}}$, où $\partial\Omega_{\text{in}}$ et $\partial\Omega_{\text{out}}$ sont définis par :

$$\partial\Omega_{\text{in}} = \{x \in \partial\Omega : \beta \cdot n < 0\} \quad \text{et} \quad \partial\Omega_{\text{out}} = \{x \in \partial\Omega : \beta \cdot n \geq 0\},$$

si bien que $\partial\Omega = \partial\Omega_{\text{out}} \cup \partial\Omega_{\text{in}}$.

Avec des conditions mixtes de Robin et Neuman, le problème (1.20) s'écrit

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \nu u = f & \text{dans } \Omega, \\ -\epsilon \nabla u \cdot n + \beta \cdot n u = g & \text{sur } \partial\Omega_{\text{in}}, \\ \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{\text{out}}, \end{cases} \quad (1.42)$$

où g est un terme source. Introduisons l'espace $P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$:

$$P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h) = \{v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P^1(T); \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \int_F [v_h]_F = 0\}.$$

Le schéma que nous considérons est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que pour tout } v_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h) \\ a_h(u_h, v_h) + J_0(u_h, v_h) + J_1(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} - (g, v_h)_{0,\partial\Omega_{\text{in}}}, \end{cases} \quad (1.43)$$

où

$$\begin{aligned}
 a_h(u_h, v_h) = & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_{\Omega} \tau u_h v_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u_h \beta \cdot \nabla v_h \\
 & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [u_h v_h]_F + \int_{\partial \Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) u_h v_h, \tag{1.44}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 J_0(u_h, v_h) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} J_{0,F}(u_h, v_h), \quad J_{0,F}(u_h, v_h) = - \int_F \beta \cdot [u_h]_F v_h^\downarrow, \\
 J_1(u_h, v_h) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} J_{1,F}(u_h, v_h), \quad J_{1,F}(u_h, v_h) = \int_F \frac{h_F^2}{\beta_{\infty,F}} [\beta \cdot \nabla u_h]_F \cdot [\beta \cdot \nabla v_h]_F. \tag{1.45}
 \end{aligned}$$

On conviendra que $J_{1,F}(u_h, v_h) = 0$ si $\beta_{\infty,F} = 0$.

L'avantage du schéma (1.43) par rapport aux méthodes existantes dans le cas non-conforme réside dans le fait qu'il n'y a pas de terme dépendant de ϵ et h à choisir. Pour l'analyse d'une méthode de stabilisation par pénalisation sur les faces dans un cadre non-conforme où les conditions limites sont imposées faiblement on pourra se référer à [Bur04].

L'implémentation numérique des termes de pénalisation $J_0(\cdot, \cdot)$ et $J_1(\cdot, \cdot)$ nécessite la connaissance des faces voisines au sens décrit à la figure 1.4.

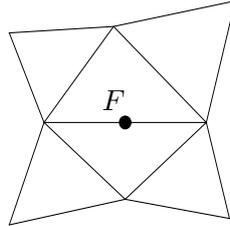


FIG. 1.4: Faces voisines de la face F

La structure de la matrice de rigidité en est alors modifiée. En dimension 2, la matrice de rigidité d'un problème posé sur $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ contient cinq éléments non nuls sur chaque ligne de la matrice (trois pour les faces du bord). En introduisant les termes de pénalisation $J_0(\cdot, \cdot)$ et $J_1(\cdot, \cdot)$, il y a treize éléments non nuls par lignes (sept pour les faces de bord).

1.4 Les estimations d'erreur *a posteriori*

Les estimations d'erreur *a posteriori* ont été introduites en 1978 par Babuška et Rheinbolt [BR78a, BR78b]. A la différence des estimations d'erreur *a priori*, les estimations d'erreur *a posteriori* permettent de contrôler l'erreur exacte par une quantité ne dépendant que de la triangulation, des données du problème (membre de droite, conditions limites, paramètres du modèles physiques) et de la solution approchée (donc connue). Depuis les travaux de Babuška et Rheinbolt, l'intérêt pour de telles estimations s'est considérablement accru. Cet intérêt est principalement dû à la nécessité d'obtenir des résultats numériques précis sans que le coût de calcul soit trop élevé. En effet, l'analyse d'erreur *a posteriori* permet de déterminer explicitement si la solution approchée est une approximation de la solution exacte u suffisamment précise pour les besoins de l'ingénieur. De plus, afin d'optimiser les calculs, les estimations d'erreur *a posteriori* permettent de raffiner certaines parties de la triangulation en fonction de la solution approchée.

En notant $e(u_h)$ et $\eta(u_h)$, respectivement l'erreur exacte et l'estimateur *a posteriori* de cette erreur, on souhaite obtenir des inégalités du type

$$\underline{c}\eta(u_h) \leq e(u_h) \leq \bar{c}\eta(u_h),$$

avec des constantes \underline{c} et \bar{c} indépendantes de la taille des triangles de \mathcal{T}_h . Ces inégalités signifient que l'erreur est globalement équivalente à l'estimateur d'erreur *a posteriori*. La majoration indique que $\eta(u_h)$ est fiable et la minoration que $\eta(u_h)$ est optimal. La notion de *fiabilité* permet d'apporter une garantie à la précision des calculs. Par ailleurs, en localisant l'estimateur $\eta(u_h)$, on peut générer un nouveau maillage sur lequel on espère que l'erreur soit plus petite et ainsi obtenir une solution approchée plus précise. La notion d'optimalité est importante car elle garantit que l'erreur obtenue est petite sans que le coût de calcul ne soit trop important.

En pratique, on localise l'erreur et l'estimateur d'erreur *a posteriori*, sous la forme

$$e(u_h) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} e_T(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \eta(u_h) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La quantité $\eta_T(u_h)$ est appelée indicateur d'erreur local. On souhaiterait obtenir une équivalence entre l'erreur locale $e_T(u_h)$ et l'indicateur local $\eta_T(u_h)$ c'est-à-dire que sur tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\underline{c}\eta_T(u_h) \leq e_T(u_h) \leq \bar{c}\eta_T(u_h).$$

Lorsque l'erreur s'exprime en fonction de l'inverse d'un opérateur différentiel il n'est pas possible d'obtenir une majoration locale de l'erreur. Dans la plupart des cas, on obtient une majoration globale de l'erreur du type

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} e_T(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{c} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et une minoration locale de l'erreur de la forme

$$c\eta_T(u_h) \leq \left(\sum_{T \in \Delta_T} e_T(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + P(\mathcal{T}_h, \Delta_T, f),$$

où Δ_T est un patch d'éléments autour du triangle T et $P(\mathcal{T}_h, \Delta_T, f)$ est une perturbation soit négligeable, soit du même ordre que l'erreur $\sum_{T \in \Delta_T} e_T(u_h)$.

Lorsque l'indicateur local est jugé trop grand sur un élément de la triangulation, alors cet élément est raffiné, et, inversement, lorsque l'indicateur est jugé suffisamment petit sur un patch d'éléments, ceux-ci sont déraffinés. L'annexe B présente un algorithme d'adaptation de maillage.

1.4.1 Les estimateurs de type résidu

Pour des raisons de clarté, plaçons-nous dans le cadre du problème de Poisson avec des conditions limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.46)$$

où f est dans $L^2(\Omega)$. La formulation faible du problème (1.46) dans $H_0^1(\Omega)$ est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = (f, v)_{0, \Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.47)$$

où la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$. Par le théorème de Lax-Milgram, il est clair que le problème (1.47) admet une et une seule solution. L'approximation par des éléments finis P^1 -conformes de la formulation faible (1.47) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0, \Omega} \quad \forall v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h). \end{cases} \quad (1.48)$$

Grâce à la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, il est clair que pour $u \in H_0^1(\Omega)$ et $u_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$, respectivement, solutions de (1.47) et (1.48), on a

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_{1,\Omega} &\leq \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|_{1,\Omega}} \\ &\leq \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle \Delta(u - u_h), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}}{\|v\|_{1,\Omega}} \\ &\leq \|f + \Delta u_h\|_{-1,\Omega}, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{-1,\Omega}$ désignent respectivement le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ et la norme canonique de $H^{-1}(\Omega)$. L'inégalité ci-dessus est bien une estimation d'erreur *a posteriori* de l'erreur $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$, mais la norme $\|\cdot\|_{-1,\Omega}$ n'est pas facile à évaluer en pratique et n'est pas localisable. Néanmoins, l'idée d'intégration par parties pour éliminer la solution exacte u est à retenir. En intégrant par parties sur chaque élément de la triangulation \mathcal{T}_h , on évite la norme $\|\cdot\|_{-1,\Omega}$ et on localise l'estimateur d'erreur *a posteriori*.

Proposition 1.4.1 (Fiabilité). *Soient u et u_h les solutions respectives de (1.47) et (1.48). Supposons que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est régulière. Alors il existe une constante c telle que :*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} e_T(u_h, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.49)$$

avec les indicateurs d'erreur locaux

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad e_T(u_h, f) = h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{\frac{1}{2}} \|[\nabla u_h]_F\|_{0,F}. \quad (1.50)$$

Pour la preuve de ce résultat, on renvoie à [Ver96]. Dans la littérature, la quantité $e_T(u_h, f)$ est appelé indicateur d'erreur par résidu car $f + \Delta u_h$ est le résidu de l'EDP $f = -\Delta u$. Une remarque importante est que la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ n'est pas utilisée dans la démonstration de la fiabilité, ce qui permet de généraliser la démonstration à des problèmes où la forme bilinéaire vérifie seulement une condition de type inf-sup. Le résultat suivant montre que l'indicateur d'erreur local $e_T(u_h, f)$ est optimal.

Proposition 1.4.2 (Optimalité). *Soit $l \in \mathbb{N}$ et posons $Z_{lh} = \{v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P^l(T)\}$. Supposons que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est régulière. Alors,*

il existe une constante c telle que

$$\|f + \Delta u_h\|_{0,T} \leq c \left(h_T^{-1} |u - u_h|_{1,T} + \inf_{v_h \in Z_{th}} \|f - v_h\|_{0,T} \right), \quad (1.51)$$

$$\|[\nabla u_h]_F\|_{0,F} \leq c \left(h_F^{-\frac{1}{2}} |u - u_h|_{1,\Delta_T} + h_T^{\frac{1}{2}} \inf_{v_h \in Z_{th}} \|f - v_h\|_{0,\Delta_F} \right), \quad (1.52)$$

$$e_T(u_h, f) \leq c (|u - u_h|_{1,\Delta_T} + h_T \|f - v_h\|_{0,\Delta_T}). \quad (1.53)$$

La preuve de l'optimalité des estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu est également due à Verfürth, voir [Ver96] et [EG04] pour $l \neq 0$.

Cette technique d'estimation d'erreur *a posteriori* étant peu coûteuse, elle est utilisée dans de nombreux domaines d'application. Pour les équations de Stokes, Verfürth dans [Ver89, Ver91] obtient un estimateur par résidu fiable et optimal. Babůska et al. [BDR92] s'intéressent aux calculs des constantes apparaissant dans la majoration et la minoration de l'erreur. Bernardi et Verfürth [BV00] établissent pour l'équation de Poisson à coefficients variables des opérateurs d'interpolation permettant d'obtenir des constantes dans les estimations d'erreur indépendantes du rapport entre le maximum du coefficient du coefficient de diffusion et le minimum. Achdou et al. dans [AB01, ABC03] proposent deux estimateurs par résidu pour les équations de Darcy à perméabilité variable. Les travaux de Carstensen [Car97] et ceux de Hoppe et Wohlmuth [HW97] analysent un estimateur par résidu pour une formulation mixte du problème de Poisson. Verfürth [Ver94] étudie des estimateurs d'erreur *a posteriori* pour des problèmes elliptiques non-linéaires. Pour les problèmes de convection-diffusion Verfürth [Ver98] présente un estimateur par résidu dit *robuste* au sens où le rapport des constantes intervenant dans les inégalités de fiabilité et d'optimalité explose au plus en l'inverse du nombre de Péclet en régime de convection dominante. Pousin et Rappaz [PR94] obtiennent un estimateur par résidu pour les équations de convection-diffusion non-linéaires. Schieweck [Sch02] propose un estimateur dans le cadre d'une méthode non-conforme pour la discrétisation du problème de Poisson. Ce type d'estimateur est également utilisé pour des discrétisations de type volumes finis. On pourra se référer à [ABMV03, ANT03] pour des problèmes elliptiques linéaires et à [BMV03, BM00] pour des problèmes non-linéaires.

1.4.2 Les estimateurs de type hiérarchique

Les estimateurs d'erreur *a posteriori* de type hiérarchique ont été introduits par Bank et Weiser [BW85]. Pour simplifier, on considère le même problème modèle que dans la section précédente.

Enrichissons l'espace $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ par $\widehat{X}_h \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ et \widehat{X}_h forment en somme directe, notée \overline{X}_h . L'enrichissement de $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ peut se faire de sorte que l'espace \overline{X}_h soit un espace d'éléments finis d'ordre plus élevé, par exemple $P_{c,0}^2(\mathcal{T}_h)$, ou bien de sorte que \overline{X}_h soit un espace d'éléments finis basé sur une triangulation plus fine, par exemple $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_{h/2})$.

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } \overline{u}_h \in \overline{X}_h \text{ tel que} \\ a(\overline{u}_h, \overline{v}_h) = (f, \overline{v}_h)_{0,\Omega} \quad \forall \overline{v}_h \in \overline{X}_h, \end{cases} \quad (1.54)$$

et le problème résiduel posé sur \widehat{X}_h

$$\begin{cases} \text{Chercher } \widehat{u}_h \in \widehat{X}_h \text{ tel que} \\ a(\widehat{u}_h, \widehat{v}_h) = (f, \widehat{v}_h)_{0,\Omega} - a(u_h, \widehat{v}_h) \quad \forall \widehat{v}_h \in \widehat{X}_h. \end{cases} \quad (1.55)$$

Supposons que les deux problèmes ci-dessus sont bien posés. L'hypothèse de saturation suivante signifie que \overline{u}_h est une meilleure approximation de u que u_h , autrement dit que \overline{u}_h converge plus vite vers u que u_h .

Hypothèse 1.4.3 (Hypothèse de saturation). *Il existe une constante $\beta \in]0, 1[$ indépendante de h telle que*

$$\|u - \overline{u}_h\|_{1,\Omega} \leq \beta \|u - u_h\|_{1,\Omega}. \quad (1.56)$$

C'est sous cette hypothèse que Bank et Weiser [BW85] montrent que dans le cas d'un problème elliptique, linéaire, symétrique et défini positif, l'erreur $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ est équivalente à $\|\widehat{u}_h\|_{1,\Omega}$, i.e.,

$$(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \|\widehat{u}_h\|_{1,\Omega} \leq \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \|\widehat{u}_h\|_{1,\Omega}.$$

Durán et Rodriguez ont montré dans [DR92] que l'estimateur ainsi obtenu était asymptotiquement exact. Ce résultat a été généralisé par Bank et Smith dans [BS93], en faisant l'hypothèse de Cauchy-Schwarz forte (appelée aussi inégalité CBS en référence à Cauchy–Bunyatowski–Schwarz) entre les espaces $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ et \widehat{X}_h .

Hypothèse 1.4.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz forte). *Il existe une constante $\gamma \in [0, 1[$ indépendante de h telle que*

$$\forall v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h), \forall \widehat{v}_h \in \widehat{X}_h, \quad a(v_h, \widehat{v}_h) \leq \gamma \|v_h\|_{1,\Omega} \|\widehat{v}_h\|_{1,\Omega}.$$

Une interprétation géométrique de cette inégalité est que l'angle entre les espaces $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ et \widehat{X}_h est strictement aigu uniformément en h . Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.4.5 (Fiabilité et optimalité).

$$(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \|\widehat{u}_h\|_{1,\Omega} \leq \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq (1 - \gamma)^{-1} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \|\widehat{u}_h\|_{1,\Omega}. \quad (1.57)$$

On remarquera qu'on obtient uniquement une majoration et une minoration globales de l'erreur. Dans [AABM98], Achchab et al. généralisent cette technique aux cas des éléments finis mixtes consistants ou non. Ils présentent un exemple sur la formulation mixte de Galerkin standard du problème de Poisson dans l'espace produit $RT^0(\mathcal{T}_h) \times P^0(\mathcal{T}_h)$. L'enrichissement de cet espace conduit à résoudre un problème résiduel global. Pour éviter ce coût élevé, Hoppe et Wohlmuth [WH99] proposent une méthode de décomposition permettant de résoudre uniquement des problèmes résiduels locaux.

Outre le fait que le problème résiduel doit être localisé pour que l'estimateur hiérarchique soit facilement calculable, il faut également vérifier l'hypothèse de saturation et l'inégalité de Cauchy-Schwarz forte. Cette dernière peut généralement être vérifiée par des considérations algébriques qui sont indépendantes du problème modèle considéré. Par contre, l'hypothèse de saturation n'est pas toujours vérifiée (notamment lorsque l'enrichissement se fait en raffinant la triangulation). Nochetto [Noc93] montre dans le cadre du problème de Poisson que l'hypothèse de saturation est inutile pour obtenir l'estimateur établi par Bank et Weiser [BW85] en montrant que ce dernier est équivalent à l'estimateur par résidu établi d'une part par Babuška et Rheinbolt [BR78a] et d'autre part par R. Verfürth dans [Ver96]. Dörfler et Nochetto, [DN02], toujours pour le problème de Poisson où l'espace $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ est enrichi de sorte que $\overline{X}_h = P_{c,0}^2(\mathcal{T}_h)$, montrent que si les oscillations de la donnée f sont suffisamment petites, l'hypothèse de saturation est vérifiée. Plus récemment, Achchab et al. [AAA03] construisent un estimateur d'erreur *a posteriori* hiérarchique pour un problème de perturbation singulière approché par des éléments finis P^1 -conformes ne nécessitant pas l'hypothèse de saturation, ni même l'inégalité de Cauchy-Schwarz forte. Dans le cadre du problème de Poisson dans lequel nous nous sommes placés, cette technique revient à construire un opérateur $\Pi : H_0^1(\Omega) \rightarrow P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ tel que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \forall v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h), \quad a(v_h, \Pi v) = a(v_h, v).$$

Ainsi, on obtient une équivalence entre l'erreur réelle et l'estimateur d'erreur *a posteriori* hiérarchique. Notons que dans [AAA03] le choix de \widehat{X}_h permet d'obtenir un estimateur hiérarchique local.

1.4.3 Autres estimateurs

- Estimation par résolution de problèmes locaux.

Ce type d'estimateur est basé sur la résolution de problèmes locaux non-couplés dont le second membre est le résidu (au sens faible). Les problèmes locaux sont résolus en utilisant un espace d'éléments finis de plus haut degré tout en ayant le moins de degré de liberté possible. Ces problèmes auxiliaires doivent être posés sur des sous-domaines $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ formant un recouvrement de Ω afin d'obtenir une information sur le comportement local de l'erreur. Enfin, la résolution des problèmes auxiliaires ne doit pas être plus coûteuse que la résolution du problème initial. L'estimateur d'erreur *a posteriori* s'exprime comme une certaine norme de la solution des problèmes locaux. Verfürth [Ver96] propose trois espaces d'éléments finis permettant de satisfaire les différentes conditions évoquées ci-dessus. Ainsi, il généralise au cas-bi-dimensionnel l'estimateur d'erreur obtenu dans [BR78a]. Il reprend l'estimateur d'erreur *a posteriori* obtenu par Bernardi et al. [BMV93] et en imposant des conditions de Neumann sur le bord de chaque sous-domaine Ω_i , il montre que l'estimateur obtenu est une modification de l'estimateur hiérarchique de Bank et Weiser. Verfürth dans [Ver98, Ver04] présente des estimateurs d'erreur *a posteriori* pour les équations de convection-diffusion.

- Estimation par résolution d'un problème dual.

Cette méthode, introduite par Johnson, [Joh93], permet de contrôler une fonctionnelle de l'erreur, ce qui dans certains domaines d'application, est plus intéressant que de contrôler l'erreur dans la norme d'énergie (ou de stabilité naturelle) du problème considéré. Les estimations d'erreur *a posteriori* s'obtiennent via la résolution d'un problème dual. L'estimateur s'exprime comme le résidu local de la solution approchée pondéré par des poids dépendant des dérivées secondes de la solution du problème dual. La solution duale apporte une information sur l'origine de l'erreur. Dans la pratique, on doit utiliser une approximation de la solution duale. Par exemple, Burman et al. [BEG04] établissent une estimation d'erreur *a posteriori* par cette méthode de dualité pour l'étude des flammes de bunsen. Dans [Ran98], Rannacher s'intéresse à des formulations d'éléments finis mixtes stabilisés par des moindres carrés tels que le problème de Poisson mixte, le problème de Stokes et le problème de convection-diffusion-réaction stabilisé par GaLS. On renvoie aux travaux de Becker et Rannacher pour plus de détails [BR96, BR01]. Kanschä et Suttmeier dans [KS99] ont étendu cette technique aux approximations par éléments finis dans un cadre non-conforme de l'équation de Darcy. Cette méthode a également été utilisée pour l'analyse *a posteriori* de la méthode de Galerkin discontinue pour les équations

de transport [SW03, BHL03, EP04]. Des estimateurs d'erreur *a posteriori* pour des problèmes paraboliques non-linéaires sont analysés dans [JR94, EJ95, EEHJ95].

- Estimation de l'erreur de modélisation.

Les estimateurs d'erreur *a posteriori* que nous avons vus jusqu'à maintenant permettent de contrôler l'erreur de discrétisation en une certaine norme. Pourtant une autre source d'erreur existe : l'erreur de modélisation. En effet, il est très fréquent que le modèle le plus approprié à la situation considérée et donc le plus précis ne puisse être simulé en raison des coûts de calcul prohibitifs qu'il engendre. Ainsi, un autre modèle plus simple et moins précis va être préféré, au moins dans certaines parties du domaine de calcul. Cependant, nous ne savons pas *a priori* quelles parties du domaine requièrent le modèle précis. Récemment Braack et Ern [BE03] ont proposé une méthode d'adaptation conjointe du modèle et du maillage basée sur la résolution d'un problème dual. Le problème dual permet de mesurer l'influence du modèle en une fonctionnelle de la solution approchée.

1.5 Plan du mémoire

Le reste de ce mémoire est composé de quatre chapitres et de deux annexes. Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'équation de Darcy dans un milieu poreux saturé hétérogène et les chapitres 3 et 4 sont consacrés à l'étude des équations de convection–diffusion–réaction. Le chapitre 5 présente les conclusions et les perspectives. L'annexe A rassemble divers résultats techniques utilisés dans ce mémoire. L'annexe B présente l'algorithme de raffinement adaptatif utilisé pour les simulations numériques. Enfin, les notations utilisées sont indiquées dans une nomenclature.

- **Chapitre 2.** Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la discrétisation de l'équation de Darcy (1.2) par le schéma boîte. Nous nous intéressons en particulier au cas où les contrastes de perméabilité sont très importants. Nous montrons le caractère bien posé de (1.16) et nous présentons une analyse d'erreur *a priori*. Une attention particulière est portée au fait que les constantes apparaissant dans les estimations sont indépendantes des fluctuations de la perméabilité. Nous présentons une analyse d'erreur *a posteriori*. Une première analyse *a posteriori* est faite en utilisant les techniques d'estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu. Cette analyse porte sur la formulation mixte (1.16) et également sur sa formulation primale équivalente en pression (1.11). Une deuxième analyse *a posteriori* est faite en utilisant les techniques

d'estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchiques pour la formulation primale en pression (1.11). Nous proposons trois estimateurs hiérarchiques. Un premier estimateur basé sur une hypothèse de saturation est obtenu par enrichissement de l'espace de Crouzeix–Raviart par des bulles non-conformes sur les éléments. Un deuxième estimateur également basé sur cette hypothèse de saturation et sur l'hypothèse de Cauchy–Schwarz forte est obtenu par enrichissement de l'espace de Crouzeix–Raviart par des bulles quadratiques sur les faces. Le dernier estimateur est obtenu par enrichissement de l'espace de Crouzeix–Raviart par des bulles quadratiques sur les faces. Ce dernier estimateur présente l'avantage de ne pas reposer sur une hypothèse de saturation. Nous terminons ce chapitre par des tests numériques illustrant les résultats théoriques.

- **Chapitre 3.** Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation de convection–diffusion–réaction avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Nous montrons le caractère bien posé du schéma non-conforme stabilisé par viscosité de sous-maille (1.40). Nous en faisons également l'analyse d'erreur *a priori* et montrons qu'il possède les mêmes propriétés de convergence que les schémas usuels. Par condensation des bulles non-conformes nous obtenons un problème équivalent posé sur l'espace des échelles résolues. Puis nous nous intéressons à la formulation mixte des équations de convection–diffusion–réaction (1.22). Nous montrons que la formulation mixte non-symétrique (1.24) est bien posée. Nous discrétisons cette formulation par un schéma boîte et montrons que celui-ci est équivalent au problème posé sur les échelles résolues et à une reconstruction du flux discret sur un patch d'éléments du maillage. Ensuite, nous présentons une analyse d'erreur *a posteriori* de (1.40) basé sur les techniques d'estimation d'erreur par résidu. Nous montrons que certains indicateurs sont robustes au sens de Verfürth [Ver98]. Pour finir, nous présentons des tests numériques illustrant les résultats théoriques.
- **Chapitre 4.** Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'équation de convection–diffusion–réaction avec des conditions aux limites mixtes de type Robin–Neuman. Nous montrons le caractère bien posé du schéma non-conforme stabilisé par pénalisation sur les faces (1.43). Nous en effectuons par la suite l'analyse d'erreur *a priori* et nous montrons qu'il possède les mêmes propriétés de convergence que les schémas usuels. Puis nous présentons une analyse d'erreur *a posteriori* basée sur la technique d'estimateur par résidu. Nous montrons que certains indicateurs d'erreur *a posteriori* sont

1.5. Plan du mémoire

robustes au sens de Verfürth. Nous terminons le chapitre par des tests numériques illustrant les résultats théoriques.

Les résultats présentés dans le chapitre 2 ont donné lieu à une publication [EAE04]. Les publications relatives aux résultats présentés dans les chapitres 3 et 4 sont en cours de rédaction.

Chapitre 2

L'équation de Darcy à perméabilité variable

2.1 Introduction

L'écoulement stationnaire dans un milieu poreux saturé est généralement modélisé par les équations de Darcy :

$$\begin{cases} \sigma + k \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \sigma = f & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où σ est le vecteur vitesse, k la conductivité hydraulique (ou la perméabilité) qui est uniformément minorée par un réel strictement positif, u la pression (ou la charge hydraulique à une transformation affine près), et f le terme source représentant les sources ou puits de masse dans le domaine Ω . La première équation dans (2.1) est la loi phénoménologique de Darcy et la seconde équation exprime la conservation de la masse. Le problème (2.1) est posé dans un domaine Ω et est fermé par des conditions sur la frontière $\partial\Omega$ qui portent sur le flux ou sur la pression. L'élimination de la vitesse conduit au problème elliptique suivant :

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = f. \quad (2.2)$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une formulation dans laquelle les espaces de solution pour la pression et pour la vitesse ont plus de régularité que les espaces des fonctions tests [CC98, Cro00]. Supposons pour simplifier que l'on impose des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur la pression, et supposons que la conductivité hydraulique k est dans $L^\infty(\Omega)$ et que la donnée f est dans $L^2(\Omega)$. Considérons la formulation faible de

(2.1) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau + \int_{\Omega} k \tau \cdot \nabla u = 0 \quad \forall \tau \in [L^2(\Omega)]^d, \\ \int_{\Omega} v \nabla \cdot \sigma = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où $H(\text{div}; \Omega) = \{ \sigma \in [L^2(\Omega)]^d, \nabla \cdot \sigma \in L^2(\Omega) \}$ et $d = 2, 3$ est la dimension de l'espace. Des conditions aux bords sur le flux peuvent être imposées en considérant un sous-espace de $H(\text{div}; \Omega)$. La formulation faible sur $H_0^1(\Omega)$ de (2.2) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ce chapitre est organisé comme suit. Le caractère bien posé de (2.3), l'approximation de (2.3) par un schéma boîte et l'analyse d'erreur *a priori* du schéma sont présentés à la section 2.2. Des estimations d'erreur *a posteriori* de type résidu sont étudiées à la section 2.3. Deux estimateurs sont établis, l'un basé sur la formulation mixte, l'autre basé sur une formulation primale équivalente pour la pression discrète. Des estimations de type hiérarchique sont analysées à la section 2.4. Des estimateurs utilisant des bulles non-conformes sur les éléments du maillage et des bulles conformes sur les faces du maillage sont considérés. Des résultats numériques sont présentés à la section 2.5, et on finira par quelques conclusions à la section 2.6.

2.2 Schéma boîte et analyse d'erreur *a priori*

Dans cette partie, nous précisons les hypothèses faites sur le modèle et montrons que le problème (2.3) est bien posé. Puis, nous décrivons le schéma boîte, schéma utilisé pour la discrétisation de (2.3), et nous présentons son analyse d'erreur *a priori*.

2.2.1 Hypothèses et caractère bien posé

Soit Ω un domaine polygonal dans \mathbb{R}^d , avec $d = 2$ ou 3 . Pour des raisons de simplicité, notre analyse est restreinte au cas d'un milieu isotrope dans lequel la conductivité hydraulique est un scalaire. Par contre, on s'intéresse à un milieu hétérogène dans lequel les variations de k peuvent être importantes. D'un point de vue géologique il est raisonnable de faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2.1. *Il existe une partition $\bar{\Omega} = \bigcup_{l=1}^L \bar{\Omega}_l$ avec $\Omega_l \cap \Omega_{l'} = \emptyset$ pour $l \neq l'$, tel que k soit égal à une constante positive k_l dans chaque sous-domaine Ω_l .*

Cette hypothèse sera toujours faite implicitement dans ce chapitre, hypothèse également utilisée dans [BV00, AB01].

On définit le nombre de conditionnement de k comme suit :

$$\varrho_{\Omega}(k) = \max_{\Omega} k / \min_{\Omega} k . \quad (2.5)$$

Pour des milieux fortement hétérogènes, ce nombre est très grand. Dans la pratique il est donc très important que les constantes intervenant dans les estimations d'erreur soient indépendantes de ce rapport. Pour cela des normes appropriées pour mesurer l'erreur ont été introduites dans [BV00]. Pour une région R et $\varphi \in L^2(R)$, $\|\varphi\|_{0,R}$ dénote la norme L^2 de φ sur R et $\|\varphi\|_{k^{\pm 1};0,R} = \|k^{\pm \frac{1}{2}}\varphi\|_{0,R}$. La même notation est utilisée si φ est une fonction vectorielle dans $[L^2(R)]^d$. Le produit scalaire usuel sur $L^2(R)$ est noté $(\cdot, \cdot)_{0,R}$. Pour $\varphi \in H^m(R)$, $m = 1, 2$, $|\varphi|_{m,R}$ dénote la semi-norme H^m de φ sur R . Pour $\varphi \in H^1(R)$, posons $|\varphi|_{k;1,R} = \|k^{\frac{1}{2}}\nabla\varphi\|_{0,R}$. Finalement, pour $\psi \in H(\text{div}; R)$, posons $\|\psi\|_{k^{-1};\text{div},R} = \|\psi\|_{k^{-1};0,R} + \|\nabla \cdot \psi\|_{k^{-1};0,R}$.

Posons $V = H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $W = [L^2(\Omega)]^d \times L^2(\Omega)$, munis respectivement des normes

$$\|(\sigma, u)\|_V = \|\sigma\|_{k^{-1};\text{div},\Omega} + |u|_{k;1,\Omega} \quad \text{et} \quad \|(\tau, v)\|_W = \|\tau\|_{k;0,\Omega} + \|v\|_{k;0,\Omega} . \quad (2.6)$$

Soit $B(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire définie sur $V \times W$ par

$$B((\sigma, u), (\tau, v)) = (\sigma, \tau)_{0,\Omega} + (v, \nabla \cdot \sigma)_{0,\Omega} + (k\nabla u, \tau)_{0,\Omega} . \quad (2.7)$$

Proposition 2.2.2. *Le problème (2.3) est bien posé.*

Démonstration. D'après le théorème de Banach–Necăs–Babuška (voir, e.g., [EG04, p. 85]), le problème (2.3) est bien posé si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\exists \alpha > 0, \quad \inf_{(\sigma, u) \in V} \sup_{(\tau, v) \in W} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\sigma, u)\|_V \|(\tau, v)\|_W} \geq \alpha, \quad (\text{BNB1})$$

$$\forall (\tau, v) \in W, \quad \{\forall (\sigma, u) \in V, B((\sigma, u), (\tau, v)) = 0\} \Rightarrow \{(\tau, v) = 0\} . \quad (\text{BNB2})$$

(1) Montrons que la condition (BNB1) est satisfaite.

Soit $(\sigma, u) \in V$ et posons $(\tau, v) = (k^{-1}\sigma + \nabla u, 2u + k^{-1}\nabla \cdot \sigma)$. Alors, $(\tau, v) \in W$ et

$$B((\sigma, u), (\tau, v)) = \int_{\Omega} (k^{-1}|\sigma|^2 + k|\nabla u|^2 + k^{-1}|\nabla \cdot \sigma|^2 + 2\sigma \cdot \nabla u + 2u \nabla \cdot \sigma) = \|(\sigma, u)\|_V^2 ,$$

puisque $\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla u + u \nabla \cdot \sigma = 0$. Soit C_{Ω} la constante de Poincaré telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{0,\Omega} \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|_{0,\Omega}$. Alors,

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|k^{\frac{1}{2}} u\|_{0,\Omega} \leq C_{\Omega} \varrho_{\Omega}(k)^{\frac{1}{2}} \|k^{\frac{1}{2}} \nabla u\|_{0,\Omega},$$

et ainsi,

$$\|(\tau, v)\|_W^2 \leq 4(\|\sigma\|_{k^{-1};\text{div},\Omega}^2 + 4\|u\|_{k;0,\Omega}^2 + \|\nabla u\|_{k;0,\Omega}^2) \leq 4(\|(\sigma, u)\|_V^2 + 4C_{\Omega}^2 \varrho_{\Omega}(k) \|u\|_{k;1,\Omega}^2).$$

Donc, la condition inf-sup (BNB1) est vérifiée avec $\alpha^{-1} = 2(1 + 4C_{\Omega}^2 \varrho_{\Omega}(k))^{\frac{1}{2}}$.

(2) Montrons que la condition (BNB2) est satisfaite.

Soit $(\tau, v) \in W$ tel que $\forall (\sigma, u) \in V$, $B((\sigma, u), (\tau, v)) = 0$. Soit $\widehat{v} \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de $\nabla \cdot k \nabla \widehat{v} = v$. Alors en posant $(\sigma, u) = (-k \nabla \widehat{v}, \widehat{v})$, il est clair que $(\sigma, u) \in V$ et

$$0 = B((\sigma, u), (\tau, v)) = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau + k \tau \cdot \nabla u + v \nabla \cdot \sigma = - \int_{\Omega} v^2,$$

ce qui implique $v = 0$. Finalement, en prenant $(\sigma, u) = (\tau, 0)$, on obtient $\tau = 0$.

□

Remarque 2.2.3. Comme $\varrho_{\Omega}(k) \geq 1$, la constante α dans (BNB1) peut toujours être minorée de la façon suivante : $\alpha \geq c \varrho_{\Omega}(k)^{-\frac{1}{2}}$ avec la constante c indépendante de k . Cette minoration sera utilisée par la suite.

Remarque 2.2.4. Lorsque chaque sous-domaine Ω_l a une intersection non-vide avec le bord de Ω la quantité $\varrho_{\Omega}(k)$ n'apparaît plus dans la constante de l'inégalité inf-sup associée à la forme bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$.

2.2.2 Le schéma boîte

Pour une famille régulière de triangulations $\{\mathcal{T}_h\}_h$ de Ω , l'hypothèse qui suit sera toujours faite dans ce chapitre.

Hypothèse 2.2.5. Pour tout h , la triangulation \mathcal{T}_h est compatible avec la partition $\overline{\Omega} = \cup_{l=1}^L \overline{\Omega}_l$ au sens où l'intérieur de chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ a une intersection non-vide avec seulement un des sous-domaines Ω_l .

Ainsi, la conductivité hydraulique k est constante sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h et sa valeur locale est notée k_T . Pour toute face intérieure $F \in \mathcal{F}_h^i$ telle que $F = T \cap T'$ avec T et T' dans

\mathcal{T}_h , posons $\{k\}_F = \frac{1}{2}(k_T + k_{T'})$, $k_F^* = \max(k_T, k_{T'})$, et $\varrho_F(k) = \max(k_T, k_{T'}) / \min(k_T, k_{T'})$. Pour toute face extérieure $F \in \mathcal{F}_h^\partial$, telle que $F \in \mathcal{F}_T$, posons $\{k\}_F = k_T$ et $\varrho_F(k) = 1$. Enfin, dans ce chapitre c dénote une constante positive indépendante de h et des rapports $\varrho_\Omega(k)$ et $\varrho_F(k)$, pouvant changer à chaque occurrence.

La vitesse discrète est cherchée dans l'espace d'éléments finis de Raviart–Thomas de plus bas degré $H(\text{div}; \Omega)$ -conforme, [RT77]

$$RT^0(\mathcal{T}_h) = \{q_h \in [L^2(\Omega)]^d; \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in RT^0(T); \forall F \in \mathcal{F}_h, \int_F [q_h]_F = 0\}, \quad (2.8)$$

avec $RT^0(T) = [P^0(T)]^d + xP^0(T)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_{k^{-1}; \text{div}, \Omega}$. La pression discrète est cherchée dans l'espace d'éléments finis non-conforme de Crouzeix–Raviart [CR73],

$$P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) = \{v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P^1(T); \forall F \in \mathcal{F}_h, \int_F [v_h]_F = 0\}, \quad (2.9)$$

où $P^n(T)$ est l'ensemble des polynômes de degré total inférieur ou égal n sur T , avec $n \geq 0$. Cet espace est muni de la norme brisée de l'énergie $|\cdot|_{k;1,h}$, définie pour $v \in H_0^1(\Omega) + P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ par

$$|v|_{k;1,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{k;1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

Les fonctions tests pour la pression et la vitesse sont prises dans l'espace des fonctions constantes par morceaux $P^0(\mathcal{T}_h)$. La discrétisation par éléments finis mixtes non-conformes de (2.3) correspond au schéma boîte qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\sigma_h, u_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ a(\sigma_h, \tau_h) + b_{1,h}(\tau_h, u_h) = 0 & \forall \tau_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d, \\ b_2(\sigma_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} & \forall v_h \in P^0(\mathcal{T}_h), \end{cases} \quad (2.11)$$

avec les formes bilinéaires

$$a(\sigma_h, \tau_h) = (\sigma_h, \tau_h)_{0,\Omega}, \quad b_{1,h}(\tau_h, u_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} k_T(\tau_h, \nabla u_h)_{0,T}, \quad (2.12)$$

et

$$b_2(\sigma_h, v_h) = (\nabla \cdot \sigma_h, v_h)_{0,\Omega}. \quad (2.13)$$

L'existence et l'unicité de la solution (σ_h, u_h) de (2.11) peuvent être prouvées comme dans [Cro00] pour un coefficient constant k . De la même façon, il est aisé de montrer

que le problème discret (2.11) est bien posé pour un coefficient variable k . L'existence et l'unicité peuvent également être établies en prouvant une condition inf-sup discrète; voir [EG04, p. 273] pour une preuve avec un coefficient constant k . Nous donnons ici l'extension immédiate de cette preuve au cas d'un coefficient k variable.

Proposition 2.2.6. *Si h est suffisamment petit le problème discret (2.11) est bien posé.*

Démonstration. Pour des raisons de clarté, introduisons les espaces suivants :

$$V_h = RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h), \quad W_h = [P^0(\mathcal{T}_h)]^d \times P^0(\mathcal{T}_h),$$

munis respectivement des normes

$$\|(\sigma_h, u_h)\|_{V_h} = \|\sigma_h\|_{k^{-1}, \text{div}, \Omega} + |u_h|_{k;1,h} \quad \text{et} \quad \|(\tau_h, v_h)\|_{W_h} = \|\tau_h\|_{k;0,\Omega} + \|v_h\|_{k;0,\Omega},$$

et la forme bilinéaire $B_h(\cdot, \cdot)$ définie sur $V_h \times W_h$ par

$$B_h((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)) = a(\sigma_h, \tau_h) + b_{1,h}(\tau_h, u_h) + b_2(\sigma_h, v_h).$$

D'après le théorème de Banach–Necăs–Babuška le problème discret (2.11) est bien posé si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\exists \alpha_h > 0, \quad \inf_{(\sigma_h, u_h) \in V_h} \sup_{(\tau_h, v_h) \in W_h} \frac{B_h((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h))}{\|(\sigma_h, u_h)\|_{V_h} \|(\tau_h, v_h)\|_{W_h}} \geq \alpha_h, \quad (\text{BNB1}_h)$$

$$\forall (\tau_h, v_h) \in W_h, \quad \{\forall (\sigma_h, u_h) \in V_h, \quad B_h((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)) = 0\} \Rightarrow \{(\tau_h, v_h) = 0\}. \quad (\text{BNB2}_h)$$

(1) Montrons que la condition (BNB1_h) est satisfaite.

Soit $(\sigma_h, u_h) \in V_h$. Soit $\nabla_h u_h$ tel que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, $\nabla_h u_h|_T = \nabla(u_h|_T)$ et soit Π^0 l'opérateur de projection L^2 -orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur l'espace des fonctions constantes par morceaux $P^0(\mathcal{T}_h)$.

Posons $\tau_h = k^{-1}\Pi^0\sigma_h + \nabla_h u_h$ et $v_h = 2\Pi^0 u_h + k^{-1}\nabla \cdot \sigma_h$. Remarquons que $(\tau_h, v_h) \in W_h$. De plus,

$$\begin{aligned} B_h((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)) &= (\sigma_h, k^{-1}\Pi^0\sigma_h)_{0,\Omega} \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(\sigma_h, \nabla u_h)_{0,T} + (\nabla u_h, \Pi^0\sigma_h)_{0,T} + k_T(\nabla u_h, \nabla u_h)_{0,T}] \\ &\quad + 2(\nabla \cdot \sigma_h, \Pi^0 u_h)_{0,\Omega} + (k^{-1}\nabla \cdot \sigma_h, \nabla \cdot \sigma_h)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Par définition de Π^0 , $(\sigma_h, k^{-1}\Pi^0\sigma_h)_{0,\Omega} = (\Pi^0\sigma_h, k^{-1}\Pi^0\sigma_h)_{0,\Omega}$. De plus $\nabla u_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d$, et $\nabla \cdot \sigma_h \in P^0(\mathcal{T}_h)$, donc $(\Pi^0\sigma_h, \nabla u_h)_{0,T} = (\sigma_h, \nabla u_h)_{0,T}$, et $(\nabla \cdot \sigma_h, \Pi^0 u_h)_{0,\Omega} = (\nabla \cdot \sigma_h, u_h)_{0,\Omega}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} B_h((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)) &= \|k^{-\frac{1}{2}}\Pi^0\sigma_h\|_{0,\Omega}^2 + \|k^{-\frac{1}{2}}\nabla\cdot\sigma_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|k^{\frac{1}{2}}\nabla u_h\|_{0,T}^2 \\ &\quad + 2 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\sigma_h, \nabla u_h)_{0,T} + 2(\nabla\cdot\sigma_h, u_h)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

En intégrant par parties le dernier terme du membre de droite de l'égalité précédente, et en utilisant le fait que la composante normale de $\sigma_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$ est continue à travers les faces intérieures de \mathcal{T}_h il vient

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\nabla\cdot\sigma_h, u_h)_{0,T} = - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\sigma_h, \nabla u_h)_{0,T} + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^i} \int_F \sigma_h \cdot [u_h]_F.$$

Le terme de bord de l'égalité ci-dessus s'annule puisque la composante normale de σ_h est dans $P^0(\mathcal{T}_h)$ et puisque $P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$ satisfait le Patch-test d'ordre 0, (A.15). Donc,

$$B_h((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)) = \|k^{-\frac{1}{2}}\Pi^0\sigma_h\|_{0,\Omega}^2 + \|k^{-\frac{1}{2}}\nabla\cdot\sigma_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|k^{\frac{1}{2}}\nabla u_h\|_{0,T}^2.$$

De plus pour tout $\tau_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$, on a (voir Annexe A.20)

$$\|\tau_h\|_{0,T} \leq \|\Pi^0\tau_h\|_{0,T} + c h_T \|\nabla\cdot\tau_h\|_{0,T}.$$

Ainsi,

$$B_h((\sigma_h, u_h), (\tau_h, v_h)) \geq c \|k^{-\frac{1}{2}}\sigma_h\|_{0,\Omega}^2 + (1 - c'h^2) \|k^{-\frac{1}{2}}\nabla\cdot\sigma_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|k^{\frac{1}{2}}\nabla u_h\|_{0,T}^2.$$

Si h est suffisamment petit, $(1 - c'h^2)$ est minoré par $\frac{1}{2}$. Soit C'_Ω la constante de Poincaré discrète (A.3.3) telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega) + P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$, $\|u\|_{0,\Omega} \leq C'_\Omega \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|\nabla u\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Alors,

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) + P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h), \quad \|k^{\frac{1}{2}}u\|_{0,\Omega} \leq C_\Omega \varrho_\Omega(k)^{\frac{1}{2}} |u|_{k;1,h}.$$

La stabilité L^2 de l'opérateur de projection Π^0 conduit à

$$\|(\tau_h, v_h)\|_{W_h} \leq 4(\|\sigma_h\|_{k^{-1},\text{div},\Omega}^2 + 4\|u_h\|_{k;0,\Omega}^2 + 4(C'_\Omega)^2 \varrho_\Omega(k) |u_h|_{k;1,h}^2).$$

Donc la condition inf-sup discrète (BNB1 $_h$) est vérifiée avec $\alpha_h^{-1} = 2(1 + 4(C'_\Omega)^2 \varrho_\Omega(k))^{\frac{1}{2}}$.

(2) Montrons que la condition (BNB2 $_h$) est satisfaite.

Les espaces V_h et W_h étant de dimension finie, les conditions (BNB1 $_h$) et (BNB2 $_h$) sont

équivalentes si et seulement si $\dim V_h = \dim W_h$. Notons respectivement par N_{el} , N_f et N_f^i le nombre d'éléments, le nombre de faces, et le nombre de faces intérieures de la triangulation. Alors, il est clair que $\dim V_h = N_f + N_f^i$ et $\dim W_h = (d+1)N_{\text{el}}$, ce qui par les relations d'Euler (voir Annexe A.1) conduit bien à $\dim V_h = \dim W_h$.

□

Pour terminer, remarquons que la solution du schéma boîte (2.11) satisfait trois propriétés importantes qui sont énoncées dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.7.

(i) La vitesse discrète σ_h satisfait l'équation de conservation de la masse

$$\nabla \cdot \sigma_h = f_h, \quad (2.14)$$

où $f_h = \Pi^0 f$.

(ii) La vitesse discrète σ_h peut être reconstruite localement grâce à l'expression suivante :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \sigma_h|_T = -k_T \nabla u_h|_T + \frac{1}{d} (f_h \pi_h^1)|_T, \quad (2.15)$$

où π_h^1 est un polynôme de degré un par morceaux tel que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in T$, $\pi_h^1(x) = (x_1 - G_{T,1}, \dots, x_d - G_{T,d})$, où $(G_{T,1}, \dots, G_{T,d})$ sont les coordonnées cartésiennes du barycentre G_T du triangle T .

(iii) la pression discrète u_h est aussi l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \Lambda_h(u_h, v_h) = (f_h, v_h)_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h), \end{cases} \quad (2.16)$$

avec

$$\Lambda_h(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} k_T (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,T}. \quad (2.17)$$

Le problème (2.16) sera appelé "formulation primale."

Remarque 2.2.8. La propriété (2.15) montre que le schéma boîte coïncide avec le post-processing de la méthode mixte classique dont il est question dans [AB85].

Démonstration. La propriété (i) découle directement de la seconde équation de (2.11). La propriété (ii) découle du fait que tout élément σ_h de $RT^0(\mathcal{T}_h)$ s'écrit sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, (A.19),

$$\sigma_h|_T = (\Pi^0 \sigma_h)|_T + \frac{1}{d} \nabla \cdot \sigma_h|_T \pi_h^1|_T.$$

On déduit de la première équation de (2.11) que $(\Pi^0 \sigma_h)|_T = k_T \nabla u_h$, puisque $k_T \nabla u_h \in P^0(\mathcal{T}_h)$, et on conclut grâce à la propriété (i). La propriété (iii) se vérifie comme dans [Cro00], en prenant comme fonction test dans la première équation de (2.11) $\tau_h = \nabla v_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d$, avec $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$. En effet, comme $(\sigma_h, u_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ est solution de (2.11), en intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (k \nabla u_h, \nabla v_h)_{0,T} &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\sigma_h, \nabla v_h)_{0,T} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \sigma_h, v_h)_{0,T} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\sigma_h \cdot n, v_h)_{0,\partial T}. \end{aligned}$$

Le terme de bord dans le membre de droite de l'expression ci-dessus est nul, comme nous avons pu le voir dans la démonstration de la proposition 2.2.6. Puisque $\sigma_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$ sa divergence est dans $P^0(\mathcal{T}_h)$, donc $(\nabla \cdot \sigma_h, v_h)_{0,\Omega} = (\nabla \cdot \sigma_h, \Pi^0 v_h)_{0,\Omega}$, et ainsi $(\nabla \cdot \sigma_h, v_h)_{0,\Omega} = (f, \Pi^0 v_h)_{0,\Omega} = (f_h, v_h)_{0,\Omega}$, ce qui termine la démonstration. \square

2.2.3 Analyse d'erreur *a priori*

Proposition 2.2.9. *Soient (σ, u) et (σ_h, u_h) respectivement l'unique solution de (2.3) et (2.11). Supposons $u|_T \in H^2(T)$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$. Alors, il existe une constante c telle que*

$$c|u - u_h|_{k;1,h} \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 k_T |u|_{2,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + h \|f - f_h\|_{k^{-1};0,\Omega}, \quad (2.18)$$

$$c\|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};0,\Omega} \leq |u - u_h|_{k;1,h} + h \|f_h\|_{k^{-1};0,\Omega}. \quad (2.19)$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle présentée dans [CC98] pour un coefficient constant k . Cette preuve est étendue ici au cas d'un coefficient k variable.

(1) Montrons tout d'abord l'inégalité (2.18). Il est clair que :

- (i) la forme bilinéaire $\Lambda_h(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$,
- (ii) la forme bilinéaire $\Lambda_h(\cdot, \cdot)$ est bornée sur $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$; puisque pour tout $u_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et pour tout $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$, $\Lambda_h(u_h, v_h) \leq |u_h|_{k;1,h} |v_h|_{k;1,h}$.

Alors, d'après le second lemme de Strang pour u et u_h respectivement solution de (2.16) et (2.4), on a l'estimation d'erreur suivante :

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq 2 \inf_{w_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)} |u - w_h|_{k;1,h} + \sup_{v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)} \frac{(f_h, v_h)_{0,\Omega} - \Lambda_h(u, v_h)}{|v_h|_{k;1,h}}.$$

- (a) Estimation de l'erreur d'approximabilité, $\inf_{w_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)} |u - w_h|_{k;1,h}$.
 Notons Π^1 l'opérateur de projection $L^2(\Omega)$ -orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $P_{\text{c},0}^1(\mathcal{T}_h)$.
 Comme $P_{\text{c},0}^1(\mathcal{T}_h) \subset P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$,

$$\inf_{w_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)} |u - w_h|_{k;1,h} \leq |u - \Pi^1 u|_{k;1,h} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 k_T |u|_{2,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- (b) Estimation de l'erreur de consistance, $\sup_{v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)} \frac{(f_h, v_h)_{0,\Omega} - \Lambda_h(u, v_h)}{|v_h|_{k;1,h}}$.
 En intégrant par parties $\Lambda_h(u, v_h)$, et en utilisant le fait que $-\nabla \cdot k \nabla u = f$, il vient

$$(f_h, v_h)_{0,\Omega} - \Lambda_h(u, v_h) = -(f - f_h, v_h)_{0,\Omega} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} k_T \int_{\partial T} \nabla u \cdot n v_h.$$

Le premier terme dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus est estimé comme suit

$$\begin{aligned} (f - f_h, v_h)_{0,\Omega} &= (f - f_h, v_h - \Pi^0 v_h)_{0,\Omega} \leq \|f - f_h\|_{k^{-1},0,\Omega} \|v_h - \Pi^0 v_h\|_{k;0,\Omega} \\ &\leq c h \|f - f_h\|_{k^{-1},0,\Omega} |v_h|_{k;1,h}. \end{aligned}$$

Comme $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ satisfait le Patch-test d'ordre 0 (A.3.1), en introduisant l'opérateur de projection L^2 -orthogonale Π_F^0 de $L^2(F)$ dans $P^0(F)$, il vient pour le second terme

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} k_T \int_{\partial T} \nabla u \cdot n v_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F k_T (\nabla u - \Pi_F^0(\nabla u)) \cdot n v_h.$$

et en utilisant maintenant l'inégalité d'interpolation de faces de Crouzeix–Raviart (A.16), il vient

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} k_T \int_{\partial T} \nabla u \cdot n v_h \right| \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T k_T |v_h|_{k;1,T} |u|_{2,T},$$

d'où l'estimation *a priori* (2.18).

- (2) Terminons la démonstration en montrant l'inégalité (2.19).

La formule de reconstruction locale de la vitesse discrète (2.15) et le fait que $\sigma = -k \nabla u$ conduisent à

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1},0,\Omega} \leq |u - u_h|_{k;1,h} + \frac{1}{2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|k^{-\frac{1}{2}} f_h \pi_h^1\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.3. Analyse d'erreur *a posteriori* de type résidu

De plus, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ $\|\pi_h^1\|_{0,T} \leq ch_T$. Ainsi puisque $f_h \in P^0(\mathcal{T}_h)$ il vient

$$\|f_h \pi_h^1\|_{0,T} \leq ch_T \|f_h\|_{0,T}.$$

D'où

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{k-1;0,\Omega} \leq |u - u_h|_{k;1,h} + ch \|f_h\|_{k-1;0,\Omega},$$

et donc l'estimation *a priori* (2.19) se déduit de (2.18).

La preuve est complète. \square

Remarque 2.2.10. Sans hypothèse supplémentaire de régularité sur f , la seule estimation pour la divergence de la vitesse est $\|\nabla \cdot (\sigma - \sigma_h)\|_{k-1;0,\Omega} \leq \|f - f_h\|_{k-1;0,\Omega}$. Ainsi, bien que $\|\sigma - \sigma_h\|_{k-1;0,\Omega}$ converge à l'ordre un en h grâce à (2.19), la même conclusion n'est pas nécessairement possible pour la convergence de $\|\sigma - \sigma_h\|_{k-1;\text{div},\Omega}$. Dans la plupart des applications, il est raisonnable de supposer que la donnée f a plus de régularité. Par exemple, si $f \in H^1(\mathcal{T}_h)$, on obtient également une convergence d'ordre un pour $\|\sigma - \sigma_h\|_{k-1;\text{div},\Omega}$.

Remarque 2.2.11. L'analyse *a priori* de (2.11) peut aussi être conduite dans l'esprit du Second lemme de Strang en considérant la formulation mixte. L'analyse peut être dérivée en étendant la preuve présentée dans [EG04, p. 273] au cas d'une conductivité variable. Si f est seulement dans $L^2(\Omega)$, l'espace d'élément fini de Raviart–Thomas ne donne pas de propriété d'approximabilité sur $\nabla \cdot \sigma$ et, il n'est donc pas possible de déduire que l'erreur converge vers zero dans la norme V . Si $f \in H^1(\mathcal{T}_h)$, l'analyse conduit à une convergence d'ordre un dans la norme V .

2.3 Analyse d'erreur *a posteriori* de type résidu

Dans cette section nous analysons deux estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu. Le premier est obtenu à partir de la formulation mixte (2.11) et le second à partir de la formulation primale (2.16). Le premier présente l'inconvénient que les constantes apparaissant dans les estimations dépendent du rapport $\varrho_\Omega(k)$; par contre, le second conduit à des constantes indépendantes de ce rapport.

2.3.1 Résultats préliminaires

Dans ce qui suit, l'analyse requiera l'hypothèse suivante, inspirée de [BV00, p. 590].

Hypothèse 2.3.1. *Pour toutes paires d'éléments de \mathcal{T}_h partageant un sommet, il existe un chemin connectant des éléments adjacents (adjacent signifie que les éléments correspondants partagent une face) tel que tous les éléments partagent le sommet en question et tel que la fonction k est monotone le long de ce chemin (voir figure 2.1).*

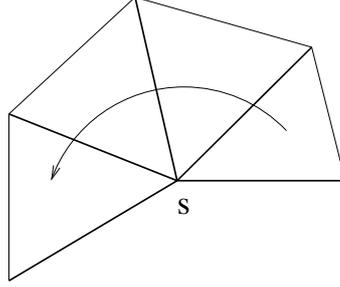


FIG. 2.1: Illustration de l'hypothèse 2.3.1

En dimension 2, une condition suffisante pour que l'hypothèse 2.3.1 soit satisfaite est qu'il y ait au plus trois sous-domaines partageant un point commun dans Ω et au plus deux sous-domaines partageant un point commun sur $\partial\Omega$. Il est possible de construire des contre-exemples à l'hypothèse 2.3.1 en utilisant par exemple quatre sous-domaines; on ne peut donc pas affirmer que cette hypothèse soit toujours satisfaite dans des situations réelles. Néanmoins cette hypothèse est nécessaire à la construction d'un opérateur d'interpolation conduisant à des propriétés d'approximation uniformes en la conductivité hydraulique.

- Sous l'hypothèse 2.3.1, il est prouvé dans [BV00, lemme 2.8] qu'il existe un opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_{\text{BV}} : L^2(\Omega) \rightarrow P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \|v - \mathcal{I}_{\text{BV}}v\|_{0,T} \leq ch_T(k_T)^{-\frac{1}{2}}|v|_{k;1,\Delta_T}, \quad (2.20)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \|v - \mathcal{I}_{\text{BV}}v\|_{0,F} \leq ch_F^{\frac{1}{2}}(k_F^*)^{-\frac{1}{2}}|v|_{k;1,\Delta_F}, \quad (2.21)$$

où $|v|_{k;1,\Delta_T}^2 = \sum_{T \in \Delta_T} \|\nabla v\|_{k;0,T}^2$ et $|v|_{k;1,\Delta_F}^2 = \sum_{T \in \Delta_F} \|\nabla v\|_{k;0,T}^2$.

- Soit $\mathcal{I}_{\text{Os}} : P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ l'opérateur d'interpolation de Oswald défini pour v_h dans $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ comme l'unique fonction de $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ tel que pour tout sommet intérieur $s \in \mathcal{S}_h^i$,

$$\mathcal{I}_{\text{Os}}v_h(s) = \frac{1}{\sharp(\mathcal{T}_s)} \sum_{T \in \mathcal{T}_s} v_h|_T(s), \quad (2.22)$$

où \mathcal{S}_h^i est l'ensemble des sommets intérieurs, \mathcal{T}_s l'ensemble des éléments de \mathcal{T}_h contenant le sommet s et $\sharp(\mathcal{T}_s)$ est le cardinal de cet ensemble. Si $s \in \partial\Omega$, $\mathcal{I}_{\text{Os}}v_h(s) = 0$.

2.3. Analyse d'erreur *a posteriori* de type résidu

L'opérateur d'interpolation de Oswald a été considéré dans [HW96, KP03, ABC03].

Lemme 2.3.2. *Sous l'hypothèse 2.3.1, il existe une constante c telle que pour tout v_h dans $P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$,*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad |v_h - \mathcal{I}_{Os} v_h|_{k;1,T} \leq c \left(\sum_{s \in \mathcal{S}_T} \sum_{F \in \mathcal{F}_s} \{k\}_F h_F^{-1} \|[v_h]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

Dans le cas où on n'impose pas de conditions de Dirichlet au bord, la majoration dans (2.23) n'inclut pas les faces de bord ; voir [Ber, KP03] pour la preuve. Dans le cas présent, la preuve est similaire, mais la majoration contient les faces de bord.

2.3.2 Estimateur basé sur la formulation mixte

Introduisons le rayon de gyration de T , $\rho_T = |T|^{-\frac{1}{2}} \|\pi_h^1\|_{0,T}$.

Proposition 2.3.3. *Soient (σ, u) et (σ_h, u_h) respectivement l'unique solution de (2.3) et (2.11). Alors, il existe une constante positive c telle que*

$$\begin{aligned} & |u - u_h|_{k;1,h} + \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},\Omega} \\ & \leq c \varrho_\Omega(k)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{1,T}(f)^2 + \inf_{v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)} |u_h - v_h|_{k;1,h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{P}_{1,T}(f) = \|f - f_h\|_{k^{-1};0,T} + \frac{1}{\rho_T} \|f_h\|_{k^{-1};0,T}. \quad (2.25)$$

Démonstration. Soit v_h une fonction arbitraire de $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ et soit $\sigma_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$ le champ de vitesse discret de la solution de (2.11). Comme $(\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ est solution de (2.3), pour tout $(\tau, v) \in [L^2(\Omega)]^d \times L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(\sigma_h - \sigma, \tau) + b_{1,h}(\tau, v_h - u) &= a(\sigma_h, \tau) + b_{1,h}(\tau, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (k_T \nabla v_h + \sigma_h) \cdot \tau \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h + k_T^{-1} \sigma_h\|_{k;0,T} \|\tau\|_{k;0,T}, \end{aligned}$$

et

$$b_2(\sigma_h - \sigma, v) = b_2(\sigma_h, v) - (f, v)_{0,\Omega} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\nabla \cdot \sigma_h - f) v \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \cdot \sigma_h - f\|_{k^{-1};0,T} \|v\|_{k;0,T}.$$

Grâce à la proposition 2.2.2, à la remarque 2.2.3, et en utilisant le fait que $(\sigma - \sigma_h, u - v_h) \in V$, il vient

$$c_{\varrho\Omega}(k)^{-\frac{1}{2}}(|u - v_h|_{k;1,h} + \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},\Omega}) \leq \sup_{(\tau,v) \in W} \frac{B((\sigma - \sigma_h, u - v_h), (\tau, v))}{\|\tau\|_{k;0,\Omega} + \|v\|_{k;0,\Omega}}.$$

Des estimations précédentes, du fait que $\nabla \cdot \sigma_h = f_h$ et de l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$\begin{aligned} c_{\varrho\Omega}(k)^{-\frac{1}{2}}(|u - v_h|_{k;1,h} + \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},\Omega}) &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|k_T^{-1} \sigma_h + \nabla v_h\|_{k;0,T}^2 + \|f - \nabla \cdot \sigma_h\|_{k^{-1};0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \left(|u_h - v_h|_{k;1,h}^2 + \|f - f_h\|_{k^{-1};0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|k_T^{-1} \sigma_h + \nabla u_h\|_{k;0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau l'inégalité triangulaire, et le fait que $\varrho_{\Omega}(k) \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{k;1,h} + \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},\Omega} &\leq c' \varrho_{\Omega}(k)^{\frac{1}{2}} \left(|u_h - v_h|_{k;1,h}^2 + \|f - f_h\|_{k^{-1};0,\Omega}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|k_T^{-1} \sigma_h + \nabla u_h\|_{k;0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

avec $c' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{c}$. Finalement, en utilisant la formule de reconstruction (2.15) on déduit (2.24). \square

Remarque 2.3.4. L'estimateur d'erreur *a posteriori* dans (2.25) est la somme d'un terme de pré-processing ne dépendant que du terme source f et du maillage, et d'un terme de post-processing dépendant de la pression discrète u_h .

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 2.3.2, de l'estimation (2.24), et de la régularité de la famille de triangulations $\{\mathcal{T}_h\}_h$.

Corollaire 2.3.5. *Soient (σ, u) et (σ_h, u_h) respectivement l'unique solution de (2.3) et (2.11). Alors, sous l'hypothèse 2.3.1, il existe une constante c telle que*

$$|u - u_h|_{k;1,h} + \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},\Omega} \leq c_{\varrho\Omega}(k)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{1,T}(f)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

$$\leq c_{\varrho\Omega}(k)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{1,T}(f)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \eta_{2,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.27)$$

2.3. Analyse d'erreur *a posteriori* de type résidu

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{1,T}(u_h) = |u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}} u_h|_{k;1,T}, \quad (2.28)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \eta_{2,F}(u_h) = \{k\}_F^{\frac{1}{2}} h_F^{-\frac{1}{2}} \|[u_h]_F\|_{0,F}. \quad (2.29)$$

Remarque 2.3.6. Les deux estimateurs dans (2.28) et (2.29) sont calculables explicitement. Leur coût de calcul est sensiblement équivalent; voir la section 2.5 pour une discussion plus détaillée.

Pour finir, étudions l'optimalité des indicateurs d'erreur ci-dessus.

Proposition 2.3.7. Soient (σ, u) et (σ_h, u_h) respectivement l'unique solution de (2.3) et (2.11). Alors, il existe une constante c telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{P}_{1,T}(f) \leq \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},T} + |u - u_h|_{k;1,T}, \quad (2.30)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \eta_{2,F}(u_h) \leq c \varrho_F(k)^{\frac{1}{2}} \sum_{T' \in \mathcal{T}_s} |u - u_h|_{k;1,T'}, \quad (2.31)$$

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{1,T}(u_h) \leq c \sum_{s \in \mathcal{S}_T} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \varrho_F(k)^{\frac{1}{2}} \sum_{T' \in \mathcal{T}_F} |u - u_h|_{k;1,T'}. \quad (2.32)$$

Démonstration. La formule de reconstruction locale de la vitesse discrète (2.15) ainsi que les équations (2.3) et (2.14) mènent à

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,T}(f) &= \|\nabla \cdot (\sigma - \sigma_h)\|_{k^{-1};0,T} + \|\sigma_h + k_T \nabla u_h\|_{k^{-1};0,T} \\ &\leq \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},T} + |u - u_h|_{k;1,T}. \end{aligned}$$

De plus, il existe une constante c telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h), \quad \forall F \in \mathcal{F}_h, \quad h_F^{-\frac{1}{2}} \|[v_h]\|_{0,F} \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_F} |v - v_h|_{1,T}. \quad (2.33)$$

L'estimation (2.33) est établie dans [ABC03, théorème 10] pour $F \in \mathcal{F}_h^i$, et la preuve pour $F \in \mathcal{F}_h^\partial$ est similaire. En utilisant (2.33), (2.31) est directement déduite. Finalement, (2.32) résulte de (2.23) et de (2.31). □

2.3.3 Estimateurs basés sur la formulation primale

Dans cette section, nous établissons un estimateur d'erreur *a posteriori* sur la pression basé sur la formulation primale et nous en déduisons un estimateur d'erreur *a posteriori*

sur la vitesse. L'analyse repose sur l'hypothèse 2.3.1, qui en dimension trois doit être complétée par l'hypothèse suivante (en dimension deux cette hypothèse découle directement de l'hypothèse 2.3.1).

Hypothèse 2.3.8. *Tous les éléments de \mathcal{T}_h ayant un sommet sur le bord peuvent être connectés à un élément ayant une face sur le bord le long d'un chemin parcourant des éléments adjacents contenant ce sommet et le long duquel la fonction k est croissante.*

Proposition 2.3.9. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, sous les hypothèses 2.3.1 et 2.3.8, il existe une constante c telle que*

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{2,T}(f)^2 + \inf_{v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)} |u_h - v_h|_{k;1,h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.34)$$

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{P}_{2,T}(f) &= h_T \|f - f_h\|_{k^{-1};0,T} + h_T \|f_h\|_{k^{-1};0,T} \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^i} h_F^{\frac{1}{2}} (k_F^*)^{-\frac{1}{2}} \|[f_h \pi_h^1]_F\|_{0,F}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Démonstration. Soit v_h une fonction arbitraire de $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$. En posant $w = u - v_h$, il vient

$$|u - v_h|_{k;1,h}^2 = \Lambda_h(u - u_h, w) + \Lambda_h(u_h - v_h, w).$$

(1) Estimation *a posteriori* de $\Lambda_h(u - u_h, w)$ pour $w \in H_0^1(\Omega)$.

En intégrant par parties ce terme, il vient

$$\begin{aligned} \Lambda_h(u - v_h, w) &= \int_{\Omega} f w + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T \nabla \cdot k \nabla u_h w - \int_{\partial T} k \nabla u_h \cdot n w \right] \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f w - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F [k \nabla u_h]_F w. \end{aligned}$$

Considérons maintenant une fonction arbitraire de $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$, notée w_h . Alors

$$\Lambda_h(u - u_h, w_h) = (f - f_h, w_h)_{0,\Omega},$$

et donc, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\Lambda_h(u - u_h, w) = \Lambda_h(u - u_h, w - w_h) - (f - f_h, w_h)_{0,\Omega}.$$

2.3. Analyse d'erreur *a posteriori* de type résidu

Ainsi,

$$\Lambda_h(u - u_h, w) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(w - w_h) - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F [k \nabla u_h]_F (w - w_h) - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - f_h) w_h.$$

Les deux premiers termes du membre de droite de l'égalité ci-dessus s'estiment grâce aux techniques classiques des estimations *a posteriori* par résidu, voir par exemple [Ver96, BV00]. En effet, en prenant $w_h = \mathcal{I}_{\text{BV}} w$, les inégalités (2.20) et (2.21) conduisent à

$$\begin{aligned} \int_T f(w - w_h) &\leq ch_T k_T^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{0,T} |w|_{k;1,\Delta_T}, \\ \int_F [\nabla u_h]_F (w - w_h) &\leq ch_F^{\frac{1}{2}} (k_F^*)^{-\frac{1}{2}} \|[\nabla u_h]_F\|_{0,F} |w|_{k;1,\Delta_F}. \end{aligned}$$

Grâce à la formule de reconstruction (2.15) et au fait que pour tout $F \in \mathcal{F}_h^i$ et tout $\sigma_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$, $[\sigma_h]_F = 0$, on a $[k \nabla u_h]_F = \frac{1}{d} [f_h \pi_h^1]_F$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(w - w_h) - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F [k \nabla u_h]_F (w - w_h) &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 k_T^{-1} \|f\|_{0,T}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{d^2} h_F (k_F^*)^{-1} \| [f_h \pi_h^1]_F \|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |w|_{k;1,\Omega}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à estimer $(f - f_h, w_h)_{0,\Omega}$. Pour cela, utilisons le fait que $f_h \in P^0(\mathcal{T}_h)$ et l'estimation d'erreur de projection (A.9), pour obtenir

$$(f - f_h, w_h)_{0,T} = (f - f_h, w_h - \Pi^0 w_h)_{0,T} \leq ch_T \|f - f_h\|_{k^{-1},0,T} \|\nabla w_h\|_{k;0,T}.$$

La stabilité H^1 de l'opérateur d'interpolation \mathcal{I}_{BV} , établie ci-dessous au lemme 2.3.11, mène à

$$(f - f_h, w_h)_{0,T} \leq ch_T \|f - f_h\|_{k^{-1},0,T} \|\nabla w\|_{k;0,\Delta_T}.$$

D'où

$$(f - f_h, w_h)_{0,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f - f_h\|_{k^{-1},0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |w|_{k;1,h}.$$

Donc,

$$\Lambda_h(u - u_h, w) \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{2,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} |w|_{k;1,h}.$$

(2) Estimation *a posteriori* de $\Lambda_h(u_h - v_h, w)$ pour $w \in H_0^1(\Omega)$.

Il est clair que

$$\Lambda_h(u_h - v_h, w) \leq |u_h - v_h|_{k;1,h} |w|_{k;1,h}.$$

(3) Les deux étapes précédentes conduisent à

$$|u - v_h|_{k;1,h} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{2,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + |u_h - v_h|_{k;1,h}.$$

(4) Finalement, par l'inégalité triangulaire on obtient

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq |u - v_h|_{k;1,h} + |u_h - v_h|_{k;1,h},$$

ce qui termine la preuve. □

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 2.3.2), de l'estimations (2.24), et de la régularité de la famille de triangulations $\{\mathcal{T}_h\}_h$.

Corollaire 2.3.10. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Ainsi, sous les hypothèses 2.3.1 et 2.3.8, il existe une constante c telle que*

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{2,T}(f)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

$$\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{2,T}(f)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \eta_{2,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

Lemme 2.3.11. *Sous les hypothèses 2.3.1 et 2.3.8, il existe une constante c telle que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad |\mathcal{I}_{\text{BV}} v|_{k;1,T} \leq c |v|_{k;1,\Delta_T}. \quad (2.38)$$

Démonstration. Pour un ensemble mesurable ω et une fonction $v \in L^1(\omega)$, notons $\mu_\omega(v)$ la valeur moyenne de v sur ω .

(1) Prouvons tout d'abord que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \forall F \in \mathcal{F}_h^i, F = T_1 \cap T_2, \quad \|\mu_{T_1}(v) - \mu_{T_2}(v)\|_{0,T_1 \cup T_2} \leq ch_F \|\nabla v\|_{0,T_1 \cup T_2}. \quad (2.39)$$

2.3. Analyse d'erreur *a posteriori* de type résidu

Posons $\delta_1 = v - \mu_{T_1}(v)$, $\delta_2 = v - \mu_{T_2}(v)$, et $\delta_{12} = v - \mu_{T_1 \cup T_2}(v)$. Grâce à l'inégalité de Poincaré–Wirtinger appliquée sur T_1 , T_2 , et $T_1 \cup T_2$ et un argument de scaling, il vient

$$\|\delta_1\|_{0,T_1} + \|\delta_2\|_{0,T_2} + \|\delta_{12}\|_{0,T_1 \cup T_2} \leq c(h_{T_1} + h_{T_2}) \|\nabla v\|_{0,T_1 \cup T_2}. \quad (2.40)$$

De plus,

$$\delta_{12} = \delta_1 + \frac{|T_2|}{|T_1| + |T_2|} (\mu_{T_1}(v) - \mu_{T_2}(v)) = \delta_2 + \frac{|T_1|}{|T_1| + |T_2|} (\mu_{T_2}(v) - \mu_{T_1}(v)).$$

En particulier ceci conduit à $|\mu_{T_1}(v) - \mu_{T_2}(v)| \leq c(|\delta_{12}| + |\delta_1|)$ sur T_1 , et $|\mu_{T_1}(v) - \mu_{T_2}(v)| \leq c(|\delta_{12}| + |\delta_2|)$ sur T_2 . Ainsi, l'estimation (2.39) résulte de (2.40) et de la régularité de la famille de triangulations.

(2) Pour un sommet $s \in \mathcal{S}_h^i$, soit ω_s le support de la fonction de base nodale φ_s , i.e., l'union de tous les éléments dans \mathcal{T}_h qui ont s comme sommet. Soit $l(s) \in \{1, \dots, L\}$ un entier tel que s soit contenu dans $\overline{\Omega}_{l(s)}$ et que $k|_{\Omega_{l(s)}}$ soit maximal parmi tous les $k|_{\Omega_j}$ tel que $\overline{\Omega}_j$ contienne s . L'opérateur \mathcal{I}_{BV} est défini comme suit [BV00] :

$$\forall v \in L^2(\Omega), \quad \mathcal{I}_{\text{BV}} v = \sum_{s \in \mathcal{S}_h^i} \mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v) \varphi_s.$$

(3) Soit $T \in \mathcal{T}_h$ et supposons tout d'abord que tous les sommets de T sont dans \mathcal{S}_h^i . Alors,

$$\nabla \mathcal{I}_{\text{BV}} v|_T = \sum_{s \in T \cap \mathcal{S}_h^i} \mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v) \nabla \varphi_s|_T = \sum_{s \in T \cap \mathcal{S}_h^i} (\mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v) - \mu_T(v)) \nabla \varphi_s|_T. \quad (2.41)$$

Notons $T_1, \dots, T_{k(s)}$ les triangles dans $\omega_s \cap \Omega_{l(s)}$. Ainsi,

$$\mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v) - \mu_T(v) = \frac{1}{|T_1| + \dots + |T_{k(s)}|} \left(\sum_{i=1}^{k(s)} |T_i| (\mu_{T_i}(v) - \mu_T(v)) \right).$$

Grâce à la régularité de la famille de triangulations,

$$|\mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v) - \mu_T(v)| \leq c \sum_{T_1, T_2} |\mu_{T_1}(v) - \mu_{T_2}(v)|,$$

où \sum_{T_1, T_2} dénote une somme finie sur les paires de triangles partageant une face. De plus, grâce à l'hypothèse 2.3.1 et au choix de $\Omega_{l(s)}$, les paires peuvent toujours être choisies de sorte que $k_{T_1} \geq k_T$ et $k_{T_2} \geq k_T$. Donc, l'égalité (2.39) mène à

$$k_T^{\frac{1}{2}} |\mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v) - \mu_T(v)| \leq ch_T |\omega_s|^{-\frac{1}{2}} |v|_{k;1,\omega_s}. \quad (2.42)$$

Finalement, (2.41) et (2.42) impliquent

$$|\mathcal{I}_{\text{BV}}v|_{k;1,T} \leq ch_T |\omega_s|^{-\frac{1}{2}} |v|_{k;1,\omega_s} \left(\sum_{s \in T \cap \mathcal{S}_h^i} \|\nabla \varphi_s\|_{0,T} \right) \leq c|v|_{k;1,\omega_s} \leq c|v|_{k;1,\Delta_T},$$

puisque $\omega_s \subset \Delta_T$.

(4) Finalement, si un sommet s de T appartient au bord, l'inégalité (2.42) est aussi satisfaite pour $\mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v) = 0$. En effet, supposons tout d'abord que T a une face sur le bord. Alors, en procédant comme dans l'Étape 1 en prolongeant v par zéro en dehors de Ω , on montre que $\|\mu_T(v)\|_{0,T} \leq ch_T \|\nabla v\|_{0,T}$, ce qui conduit à (2.42). Si T a moins d'une face sur le bord, l'hypothèse 2.3.8 permet de considérer un chemin menant à un triangle ayant une face sur le bord, le long duquel la fonction k est croissante (voir figure 2.2), ce qui conduit de nouveau à (2.42) avec $\mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v) = 0$. La conclusion de la preuve est maintenant immédiate en remplaçant dans (2.41) la quantité $\mu_{\omega_s \cap \Omega_{l(s)}}(v)$ par 0 pour tous les sommets de T se trouvant sur le bord.

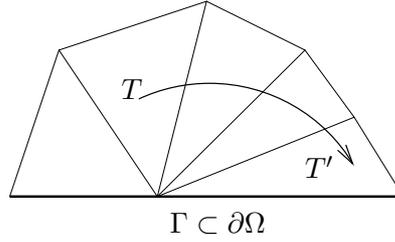


FIG. 2.2: Chemin connectant T à T' le long duquel la fonction k est croissante

□

Nous allons maintenant étudier l'optimalité des indicateurs d'erreur établis ci-dessus. Grâce à la proposition 2.3.7, nous avons seulement à prouver l'optimalité de $\mathcal{P}_{2,T}(f)$.

Proposition 2.3.12. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{P}_{2,T}(f) \leq c(|u - u_h|_{k;1,\Delta_T} + h_T \|f - f_h\|_{k^{-1};0,\Delta_T}). \quad (2.43)$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{P}_{2,T}(f) = h_T \|f - f_h\|_{k^{-1};0,T} + h_T \|f_h\|_{k^{-1};0,T} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^i} h_F^{\frac{1}{2}} (k_F^*)^{-\frac{1}{2}} \|[fh\pi_h^1]_F\|_{0,F}.$$

2.3. Analyse d'erreur *a posteriori* de type résidu

Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Estimons chacun des termes de $\mathcal{P}_{2,T}(f)$ par les techniques classiques utilisées par exemple dans [Ver96, BV00].

(1) Majoration de $h_T \|f_h\|_{k-1;0,T}$.

Posons $w_T = f_h|_T b_T^c$, où $b_T^c \in H_0^1(T)$ est la bulle cubique conforme décrite dans la définition A.22. Puisque $w_T \in P^3(T)$, on a $c \|f_h\|_{0,T}^2 \leq (f_h, w_T)_{0,T}$, (voir lemme A.4.2). De plus, pour tout $v_h \in P^1(T)$, $\int_T \nabla v_h \cdot \nabla w_T = 0$ car $w_T \in H_0^1(T)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} c \|f_h\|_{0,T}^2 &\leq \int_T f_h w_T = \int_T f w_T + \int_T (f_h - f) w_T \\ &= \int_T f w_T - \int_T k \nabla u_h \cdot \nabla w_T + \int_T (f_h - f) w_T \\ &= \int_T k \nabla (u - u_h) \cdot \nabla w_T + \int_T (f_h - f) w_T \\ &\leq k_T^{\frac{1}{2}} |u - u_h|_{k;1,T} |w_T|_{1,T} + \|f - f_h\|_{0,T} \|w_T\|_{0,T}. \end{aligned}$$

Par le lemme A.4.2, on a $|w_T|_{1,T} \leq c h_T^{-1} \|f_h\|_{0,T}$ et $\|w_T\|_{0,T} \leq c \|f_h\|_{0,T}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|f_h\|_{0,T}^2 &\leq c \left(h_T^{-1} k_T^{\frac{1}{2}} |u - u_h|_{k;1,T} \|f_h\|_{0,T} + \|f - f_h\|_{0,T} \|f_h\|_{0,T} \right) \\ &\leq c \|f_h\|_{0,T} \left(h_T^{-1} k_T^{\frac{1}{2}} |u - u_h|_{k;1,T} + \|f - f_h\|_{0,T} \right), \end{aligned}$$

et donc,

$$h_T \|f_h\|_{k-1;0,T} \leq c (|u - u_h|_{k;1,T} + h_T \|f - f_h\|_{k-1;0,T}).$$

(2) Majoration de $h_F^{\frac{1}{2}} (k_F^*)^{-\frac{1}{2}} \|[f_h \pi_h^1]_F\|_{0,F}$ pour $F \in \mathcal{F}_h^i \cap \mathcal{F}_T$.

Rappelons que la formule de reconstruction (2.15) conduit à $\frac{1}{d} [f_h \pi_h^1]_F = [k \nabla u_h]_F$ pour tout $F \in \mathcal{F}_h^i$.

Pour $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et pour $F \in \mathcal{F}_h^i$, notons $P_F[\nabla v_h]_F$ le prolongement continu de $[\nabla v_h]_F$ à \mathcal{T}_F . Posons $w_F = P_F[\nabla u_h]_F b_F^c$, où $b_F^c \in H_0^1(\mathcal{T}_F)$ est la bulle quadratique conforme décrite dans la définition A.4.4. Ainsi,

$$\begin{aligned} c \|[k \nabla u_h]_F\|_{0,F}^2 &\leq \int_F [k \nabla u_h]_F w_F = \sum_{T \in \mathcal{T}_F} \int_T f w_F + k \nabla (u - u_h) \cdot \nabla w_F \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_F} (\|f\|_{0,T} \|w_F\|_{0,T} + |u - u_h|_{k;1,T} |w_F|_{1,T}). \end{aligned}$$

Par le lemme A.4.5, on a $|w_F|_{1,T} \leq c h_F^{-\frac{1}{2}} \|[k \nabla u_h]_F\|_{0,F}$ et $\|w_F\|_{0,T} \leq c h_F^{\frac{1}{2}} \|[k \nabla u_h]_F\|_{0,F}$.

Ainsi,

$$\|[k\nabla u_h]_F\|_{0,F}^2 \leq c \|[k\nabla u_h]_F\|_{0,F} \sum_{T \in \mathcal{T}_F} \left(h_F^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{0,T} + h_F^{\frac{1}{2}} |u - u_h|_{k;1,T} \right),$$

et donc pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{\frac{1}{2}} (k_F^*)^{-\frac{1}{2}} \|[k\nabla u_h]_F\|_{0,F} \leq c (|u - u_h|_{k;1,T} + h_T \|f - f_h\|_{k^{-1},0,T}).$$

La preuve est complète. \square

Remarque 2.3.13. Si $f \in H^1(\mathcal{T}_h)$, $h_T \|f - f_h\|_{k^{-1},0,T}$ est d'un ordre un plus élevé que $|u - u_h|_{k;1,T}$.

Un des importants avantages du schéma boîte est que les estimations d'erreur sur la vitesse peuvent être déduites des estimations d'erreur sur la pression.

Proposition 2.3.14. Soient (σ, u) et (σ_h, u_h) respectivement l'unique solution de (2.3) et (2.11). Supposons qu'il existe un indicateur d'erreur sur la pression $\eta_T(\mathcal{T}_h, f, u_h)$ dépendant seulement du maillage \mathcal{T}_h , de la donnée f , et de la pression discrète u_h tel que

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq \chi^* \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(\mathcal{T}_h, f, u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.44)$$

et

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \chi_* \eta_T(\mathcal{T}_h, f, u_h) \leq |u - u_h|_{k;1,\Delta_T}, \quad (2.45)$$

pour des constantes χ_* et χ^* . Alors,

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1},\text{div},\Omega} \leq 2 \left((\chi^*)^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(\mathcal{T}_h, f, u_h)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{1,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.46)$$

et

$$\chi_* \eta_T(\mathcal{T}_h, f, u_h) + \mathcal{P}_{1,T}(f) \leq 3|u - u_h|_{k;1,\Delta_T} + 2\|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1},\text{div},T}. \quad (2.47)$$

Démonstration. La formule de reconstruction locale (2.15) mène à

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1},0,\Omega}^2 \leq 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(|u - u_h|_{k;1,T}^2 + \frac{1}{d^2} \rho_T^2 \|f_h\|_{k^{-1},0,T}^2 \right).$$

De plus, $\nabla \cdot (\sigma - \sigma_h) = f - f_h$. D'où

$$\|\nabla \cdot (\sigma - \sigma_h)\|_{k-1;0,\Omega}^2 + \|\sigma - \sigma_h\|_{k-1;0,\Omega}^2 \leq 2 \left((\chi^*)^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(\mathcal{T}_h, f, u_h)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{1,T}(f)^2 \right),$$

ce qui conduit à l'estimation (2.46). Pour montrer (2.47), notons tout d'abord que

$$\mathcal{P}_{1,T}(f)^2 \leq 2 \left(\|\nabla \cdot (\sigma - \sigma_h)\|_{k-1;0,T}^2 + \frac{1}{d^2} \rho_T^2 \|f_h\|_{k-1;0,T}^2 \right),$$

et grâce à la formule de reconstruction locale (2.15),

$$\frac{1}{d^2} \rho_T^2 \|f_h\|_{k-1;0,T}^2 \leq 2 \left(\|\sigma - \sigma_h\|_{k-1;0,T}^2 + \|\nabla(u - u_h)\|_{k;0,T}^2 \right).$$

Donc,

$$\mathcal{P}_{1,T}(f)^2 \leq 4 \left(\|\sigma - \sigma_h\|_{k-1;\text{div},T}^2 + \|u - u_h\|_{k;1,T}^2 \right),$$

et (2.47) en découle aisément. \square

2.4 Analyse d'erreur *a posteriori* de type hiérarchique

Dans cette section on analyse un estimateur d'erreur *a posteriori* hiérarchique sur la pression dans le cadre de la formulation primale (2.16). Un estimateur d'erreur *a posteriori* sur la vitesse en est alors aisément déduit grâce à la proposition 2.3.14. Dans la première partie de cette section, on établit une majoration globale et une minoration locale de l'erreur en pression en utilisant les techniques classiques reposant sur une hypothèse de saturation et sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz forte, [BS93, AABM98]. Dans la deuxième partie, les techniques présentées dans [AAA03] dans un cadre conforme sont étendues à un cadre non-conforme afin d'obtenir un estimateur d'erreur *a posteriori* hiérarchique ne nécessitant pas l'hypothèse de saturation.

Pour enrichir l'espace $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.4.1. *Il existe un espace $\widehat{X}_h \subset H^1(\mathcal{T}_h)$ tel que :*

- (i) $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et \widehat{X}_h forment une somme directe, désormais notée \overline{X}_h ;
- (ii) $\forall \widehat{x}_h \in \widehat{X}_h, \forall F \in \mathcal{F}_h, \int_F [\widehat{x}_h]_F = 0$.

Considérons les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \text{Chercher } \bar{u}_h \in \overline{X}_h \text{ tel que} \\ \Lambda_h(\bar{u}_h, \bar{v}_h) = (f_h, \bar{v}_h)_{0,\Omega} \quad \forall \bar{v}_h \in \overline{X}_h, \end{cases} \quad (2.48)$$

et

$$\begin{cases} \text{Chercher } \widehat{u}_h \in \widehat{X}_h \text{ tel que} \\ \Lambda_h(\widehat{u}_h, \widehat{v}_h) = (f_h, \widehat{v}_h)_{0,\Omega} - \Lambda_h(u_h, \widehat{v}_h) \quad \forall \widehat{v}_h \in \widehat{X}_h, \end{cases} \quad (2.49)$$

où u_h est l'unique solution de la formulation primale (2.16). Grâce à l'hypothèse 2.4.1, $|\cdot|_{k;1,h}$ est une norme sur \widehat{X}_h . Donc, les problèmes (2.48) et (2.49) admettent une unique solution.

Remarque 2.4.2. *Dans la pratique il convient de choisir \widehat{X}_h de sorte que le problème résiduel (2.49) puisse être localisé.*

2.4.1 Estimateurs hiérarchiques nécessitant l'hypothèse de saturation

Deux estimateurs d'erreur *a posteriori* sont établis dans cette section, l'un est basé sur des bulles conformes sur les faces, et l'autre sur des bulles non-conformes sur les éléments. Les deux estimateurs reposent sur l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.4.3 (Hypothèse de Saturation). *Il existe une constante $\beta \in (0, 1)$ indépendante de h et de $\rho_\Omega(k)$ tel que*

$$|u - \bar{u}_h|_{k;1,h} \leq \beta |u - u_h|_{k;1,h}. \quad (2.50)$$

L'inégalité (2.50) signifie que la solution \bar{u}_h de (2.48) converge plus vite vers la solution u de (2.4) que la solution u_h de (2.16).

Hypothèse 2.4.4. *Il existe une constante $\gamma \in [0, 1)$ indépendante de h telle que*

$$\forall v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h), \forall w_h \in \widehat{X}_h, \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (\nabla v_h, \nabla w_h)_{0,T} \leq \gamma |v_h|_{1,T} |w_h|_{1,T}. \quad (2.51)$$

Clairement, l'hypothèse 2.4.4 implique l'inégalité de Cauchy–Schwarz forte

$$\forall v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h), \forall w_h \in \widehat{X}_h, \quad \Lambda_h(v_h, w_h) \leq \gamma |v_h|_{k;1,h} |w_h|_{k;1,h}. \quad (2.52)$$

L'inégalité (2.52) signifie que l'angle entre les espaces $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et \widehat{W}_h est strictement aigu uniformément en h .

Proposition 2.4.5. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, sous les hypothèses 2.4.1, 2.4.3, et 2.4.4, il existe une constante c telle que*

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq (1 - \beta)^{-1} (1 - \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} |\widehat{u}_h|_{k;1,h}. \quad (2.53)$$

2.4. Analyse d'erreur *a posteriori* de type hiérarchique

Démonstration. La preuve est une extension immédiate au cas non-conforme de l'analyse présentée dans [BS93] pour le cas conforme.

Soit \bar{u}_h la solution (2.48). Posons $\bar{u}_h = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et $u_2 \in \widehat{X}_h$. Pour $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \subset \bar{X}_h$,

$$\Lambda_h(\bar{u}_h - u_h, v_h) = 0,$$

et pour tout $\widehat{v}_h \in \widehat{X}_h \subset \bar{X}_h$,

$$\Lambda_h(\bar{u}_h - u_h, \widehat{v}_h) = \Lambda_h(\widehat{u}_h, \widehat{v}_h).$$

Ainsi, en prenant $v_h = u_1 - u_h$ et $\widehat{v}_h = u_2$ dans les équations ci-dessus il vient

$$|\bar{u}_h - u_h|_{k;1,h}^2 = \Lambda_h(\widehat{u}_h, u_2),$$

et par l'inégalité de Cauchy–Schwarz (standard), $|\bar{u}_h - u_h|_{k;1,h}^2 \leq |\widehat{u}_h|_{k;1,h} |u_2|_{k;1,h}$. De plus, grâce à (2.52),

$$|u_1 - u_h|_{k;1,h}^2 + |u_2|_{k;1,h}^2 - |\bar{u}_h - u_h|_{k;1,h}^2 = 2\Lambda_h(u_2, u_h - u_1) \leq 2\gamma |u_2|_{k;1,h} |u_h - u_1|_{k;1,h}.$$

Donc, $(1 - \gamma^2) |u_2|_{k;1,h}^2 \leq |\bar{u}_h - u_h|_{k;1,h}^2$, ce qui implique $|u_h - \bar{u}_h|_{k;1,h} \leq (1 - \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} |\widehat{u}_h|_{k;1,h}$. Une combinaison des inégalités ci-dessus et l'utilisation de l'inégalité triangulaire mènent à

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq |u - \bar{u}_h|_{k;1,h} + (1 - \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} |\widehat{u}_h|_{k;1,h}.$$

L'hypothèse 2.4.3 nous permet de conclure. \square

2.4.1.1 Estimateur hiérarchique basé sur des bulles conformes sur les faces

Soit un simplexe $T \in \mathcal{T}_h$ dont les faces sont numérotées par $\{F_i\}_{0 \leq i \leq d}$. Pour $0 \leq i \leq d$, soit $\lambda_{i,T}$ la coordonnée barycentrique associée au sommet de T opposé à F_i . Soit T'_i le simplexe dont les sommets sont le barycentre de T et les d sommets de F_i (voir figure de gauche de 2.3).

Pour $F \in \mathcal{F}_h^i$, $F = T_1 \cap T_2$, notons i_1 et i_2 l'indice local de F dans T_1 et T_2 , respectivement (voir figure de droite 2.3). Posons $\widetilde{\Delta}_F = T'_{i_1} \cup T'_{i_2}$ et introduisons les bulles conformes sur les faces b'_F définies comme suit :

$$\begin{cases} b'_F|_{T'_{i_m}} = d^d \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i_m}}^{j=d} (\lambda_{j,T_m} - \lambda_{i_m,T_m}), & m = 1, 2, \\ b'_F|_{\Omega \setminus \widetilde{\Delta}_F} = 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

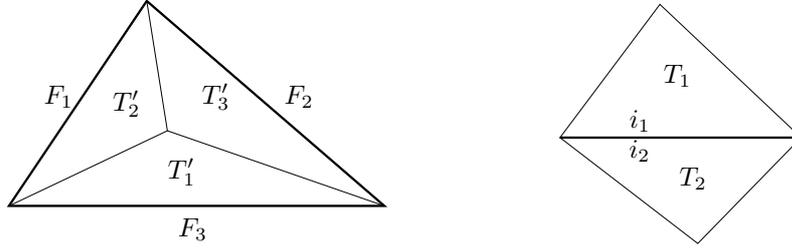


FIG. 2.3: Gauche : numérotation des faces du triangle T et des triangles construits à partir du barycentre et des sommets de T ; droite : numérotation locale de la face F dans les triangles T_1 et T_2

Finalement, posons

$$\widehat{X}_h = \mathcal{B}_c(\mathcal{T}_h) = \text{vect}_{F \in \mathcal{F}_h^i} \{b'_F\} . \quad (2.55)$$

L'hypothèse 2.4.1 est clairement satisfaite.

Remarquons que ce choix pour \widehat{X}_h permet de localiser le problème résiduel (2.49) puisque les bulles $\{b'_F\}_{F \in \mathcal{F}_h^i}$ sont à support deux à deux disjoints.

Proposition 2.4.6. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, sous les hypothèses 2.4.3 et 2.4.4, il existe une constante c telle que*

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \mathcal{P}_{3,F}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (2.56)$$

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \mathcal{P}_{3,F}(f) = \frac{|(f_h, b'_F)_{0, \widetilde{\Delta}_F} - \frac{1}{d} [f_h \pi_h^1]_F \int_F b'_F|}{|b'_F|_{k;1, \widetilde{\Delta}_F}} . \quad (2.57)$$

Démonstration. Montrons que

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad |\widehat{u}_h|_{k;1, \widetilde{\Delta}_F} = \mathcal{P}_{3,F}(f) , \quad (2.58)$$

où $|\widehat{u}_h|_{k;1, \widetilde{\Delta}_F} = \left(\sum_{T' \in \widetilde{\Delta}_F} |\widehat{u}_h|_{k;1, T'}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Prenons b'_F comme fonction test dans (2.49). Une

intégration par parties et la formule de reconstruction locale (2.15) conduisent à

$$\begin{aligned} \sum_{T' \in \tilde{\Delta}_F} (k_T \nabla \hat{u}_h, \nabla b'_F)_{0,T'} &= (f, b'_F)_{0, \tilde{\Delta}_F} - \sum_{T' \in \tilde{\Delta}_F} (k_T \nabla u_h, \nabla b'_F)_{0,T'} \\ &= (f, b'_F)_{0, \tilde{\Delta}_F} - \int_F [k \nabla u_h]_F b'_F \\ &= (f, b'_F)_{0, \tilde{\Delta}_F} - \frac{1}{d} [f_h \pi_h^1]_F \int_F b'_F. \end{aligned}$$

Posons $\hat{u}_h|_{\tilde{\Delta}_F} = \alpha_F b'_F$ avec $\alpha_F \in \mathbb{R}$. Alors, $\sum_{T' \in \tilde{\Delta}_F} (k_T \nabla \hat{u}_h, \nabla b'_F)_{0,T'} = \alpha_F |b'_F|_{k;1, \tilde{\Delta}_F}^2$, ce qui mène à

$$\alpha_F = \frac{(f_h, b'_F)_{0, \tilde{\Delta}_F} - \frac{1}{d} [f_h \pi_h^1]_F \int_F b'_F}{|b'_F|_{k;1, \tilde{\Delta}_F}^2},$$

et (2.58) résulte du fait que $|\hat{u}_h|_{k;1, \tilde{\Delta}_F} = |\alpha_F| |b'_F|_{k;1, \tilde{\Delta}_F}$. Finalement, l'estimation (2.56) résulte directement de (2.53) et (2.58). \square

Remarque 2.4.7. L'estimateur d'erreur *a posteriori* (2.58) fait intervenir uniquement un terme de pré-processing.

En dimension deux, il est assez immédiat de vérifier l'inégalité de Cauchy–Schwarz forte.

Lemme 2.4.8. *Supposons $d = 2$. Alors, il existe une constante positive $\gamma < 1$ telle que l'inégalité (2.51) est vérifiée.*

Démonstration. La “preuve” consiste en une vérification numérique plutôt qu'en une démonstration mathématique formelle.

(1) Pour $T \in \mathcal{T}_h$, soit $\mathcal{B}_c(T) = \text{vect}_{F \subset \partial T} \{b'_F|_T\}$ et soit

$$\gamma_T = \max_{u \in P^1(T), v \in \mathcal{B}_c(T)} \frac{(\nabla u, \nabla v)_{0,T}}{\|\nabla u\|_{0,T} \|\nabla v\|_{0,T}}.$$

Il est aisé de vérifier que $\gamma_T = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \frac{x^t A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} x}{x^t A_{11} x}$, où A_{11} , A_{12} , A_{21} , et A_{22} sont des blocs 3×3 de la matrice de rigidité locale A relative aux fonctions de base de $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et $\mathcal{B}_c(\mathcal{T}_h)$; voir, e.g., [AO00, p. 97] ou [EG04, p. 441].

(2) Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Grâce à l'isotropie et à l'invariance d'échelle, on peut supposer que deux des sommets du triangle T ont comme coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 0)$ et paramétrer le triangle T par ses angles (α, β) (voir le dessin de gauche de la figure 2.4). Pour chaque couple (α, β) , on résout numériquement le problème aux valeurs propres ci-dessus. Ainsi on construit la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \gamma_T$. De la même façon, par isotropie et invariance d'échelle, le même

résultat est obtenu pour γ_T si les deux angles sont pris dans l'ensemble $\{\alpha, \beta, \pi - \alpha - \beta\}$ quel que soit l'ordre. Donc l'étude peut être restreinte au domaine

$$D = \{(\alpha, \beta); \alpha \geq \beta; \alpha + 2\beta \geq \pi; \alpha + \beta \leq \pi\}.$$

Le triangle ombré au centre de la figure 2.4 illustre ce domaine. Les isocontours de la fonction $(\alpha, \beta) \in D \mapsto \gamma_T$ sont représentés à droite de la figure 2.4. La valeur minimale pour γ_T est 0.4 et est atteinte pour le triangle équilatéral (coin gauche du triangle ombré). La valeur maximale, 0.75, correspond à $\alpha \rightarrow \pi$. Il est donc possible de majorer γ_T par une constante $\gamma < 1$. \square

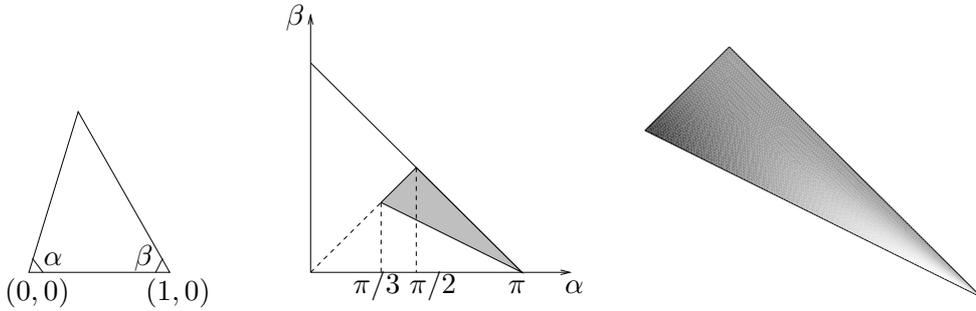


FIG. 2.4: Gauche : triangle T d'angles α et β ; centre : domaine D (triangle ombré) pour les couples (α, β) ; droite : fonction $(\alpha, \beta) \in D \mapsto \gamma_T$ (dans la table des couleurs, les valeurs noires correspondent à 0.4 et les valeurs blanches à 0.75)

Pour finir, étudions l'optimalité de l'indicateur d'erreur (2.57).

Proposition 2.4.9. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \mathcal{P}_{3,F}(f) \leq |u - u_h|_{k;1,\tilde{\Delta}_F} + ch_F \|f - f_h\|_{k-1;0,\tilde{\Delta}_F}. \quad (2.59)$$

Démonstration. Comme \hat{u}_h est solution (2.49) et $\hat{X}_h \subset H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |\hat{u}_h|_{k;1,\tilde{\Delta}_F}^2 &= \sum_{T' \in \tilde{\Delta}_F} \int_{T'} k |T'| \nabla(u - u_h) \cdot \nabla \hat{u}_h + \int_{\tilde{\Delta}_F} (f_h - f) \hat{u}_h \\ &\leq |u - u_h|_{k;1,\tilde{\Delta}_F} |\hat{u}_h|_{k;1,\tilde{\Delta}_F} + \|f - f_h\|_{0,\tilde{\Delta}_F} \|\hat{u}_h\|_{0,\tilde{\Delta}_F}. \end{aligned}$$

Comme $\|b'_F\|_{0,\tilde{\Delta}_F} \leq ch_F \|\nabla b'_F\|_{0,\tilde{\Delta}_F}$ et \hat{u}_h est proportionnel à b'_F et $\tilde{\Delta}_F$, l'estimation énoncée est vérifiée. \square

2.4.1.2 Estimateur hiérarchique basé sur des bulles non-conformes sur les éléments

Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Considérons la bulle non-conforme sur l'élément b_T^{nc} introduite par Fortin–Soulié dans [FS83] telle que

$$\begin{cases} b_T^{\text{nc}}|_T = 2 - (d+1) \sum_{i=0}^d \lambda_{i,T}^2, \\ b_T^{\text{nc}}|_{\Omega \setminus T} = 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Remarquons que les bulles non-conformes sur les éléments sont telles que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall F \in \mathcal{F}_h, \int_F b_T^{\text{nc}} = 0. \quad (2.61)$$

En effet, en dimension deux, b_T^{nc} s'annule aux deux points de Gauß de coordonnées barycentriques sur les arêtes $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$ alors qu'en dimension trois, b_T^{nc} s'annule aux trois points de Gauß de coordonnées barycentriques sur les faces $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Finalement, posons

$$\widehat{X}_h = \mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h) = \text{span}_{T \in \mathcal{T}_h} \{b_T^{\text{nc}}\}. \quad (2.62)$$

L'hypothèse 2.4.1 est clairement satisfaite.

Lemme 2.4.10.

(i) L'inégalité de Cauchy–Schwarz forte est satisfaite pour les espaces $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$ avec $\gamma = 0$.

(ii) Soit $\bar{u}_h = u_1 + u_2$ l'unique décomposition de la solution \bar{u}_h de (2.48) avec $u_1 \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et $u_2 \in \mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$. Alors $u_1 = u_h$ est l'unique solution de (2.16) et $u_2 = \hat{u}_h$ est l'unique solution de (2.49).

Démonstration. (i) Soit v_b une fonction arbitraire dans $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$ et soit v_h une fonction arbitraire dans $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$. Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Une intégration par parties conduit à

$$(\nabla v_b, \nabla v_h)_{0,T} = \sum_{F \in \partial T} \nabla v_h \cdot n_F \int_F v_b,$$

et le membre de droite s'annule grâce à (2.61). Ceci implique que l'inégalité de Cauchy–Schwarz forte est satisfaite pour les espaces $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$ avec $\gamma = 0$.

(ii) Soit $\bar{u}_h = u_1 + u_2$ l'unique décomposition de la solution \bar{u}_h de (2.48) avec $u_1 \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et $u_2 \in \mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$. Pour tout $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$,

$$(f_h, v_h)_{0,\Omega} = \Lambda_h(\bar{u}_h, v_h) = \Lambda_h(u_1, v_h) + \Lambda_h(u_2, v_h),$$

et par la première partie de la preuve, il vient $\Lambda_h(u_2, v_h) = 0$. Ainsi, $\Lambda_h(u_1, v_h) = (f_h, v_h)_{0,\Omega}$, i.e., u_1 est l'unique solution de (2.16), ce qui implique que u_2 est l'unique solution de (2.49). \square

Proposition 2.4.11. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, sous l'hypothèse 2.4.3,*

$$\frac{1}{1+\beta} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{4,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |u - u_h|_{k;1,h} \leq \frac{1}{1-\beta} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{4,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.63)$$

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{P}_{4,T}(f) = \frac{(f_h, b_T^{\text{nc}})_{0,T}}{|b_T^{\text{nc}}|_{k;1,T}}. \quad (2.64)$$

Démonstration.

(1) Soit \bar{u}_h l'unique solution de (2.48). En utilisant le lemme 2.4.10, posons $\bar{u}_h = u_h + \hat{u}_h$. Ainsi,

$$|\hat{u}_h|_{k;1,h} = |\bar{u}_h - u_h|_{k;1,h} \leq |u - \bar{u}_h|_{k;1,h} + |u - u_h|_{k;1,h} \leq (1+\beta)|u - u_h|_{k;1,h},$$

grâce à l'hypothèse 2.4.3. De plus, comme la constante γ dans l'hypothèse 2.4.4 est égale à 0, la proposition 2.53 mène à $|u - u_h|_{k;1,h} \leq \frac{1}{1-\beta} |\hat{u}_h|_{k;1,h}$. D'où,

$$\frac{1}{1+\beta} |\hat{u}_h|_{k;1,h} \leq |u - u_h|_{k;1,h} \leq \frac{1}{1-\beta} |\hat{u}_h|_{k;1,h}.$$

(2) Pour conclure la preuve, montrons que $|\hat{u}_h|_{k;1,T} = \mathcal{P}_{4,T}(f)$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$. En prenant $\hat{v}_h = b_T^{\text{nc}}$ in (2.49) et en utilisant le fait que $(\nabla u_h, \nabla b_T^{\text{nc}})_{0,T} = 0$, il vient

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad k_T(\nabla \hat{u}_h, \nabla b_T^{\text{nc}})_{0,T} = (f_h, b_T^{\text{nc}})_{0,T}.$$

Posons $\hat{u}_h|_T = \alpha_T b_T^{\text{nc}}$ pour $\alpha_T \in \mathbb{R}$. Comme $(\nabla \hat{u}_h, \nabla b_T^{\text{nc}})_{0,T} = \alpha_T |b_T^{\text{nc}}|_{1,T}^2$, on en déduit que $\alpha_T = \frac{(f_h, b_T^{\text{nc}})_{0,T}}{|b_T^{\text{nc}}|_{k;1,T}^2}$, et ainsi $|\hat{u}_h|_{k;1,T} = \mathcal{P}_{4,T}(f)$. \square

Remarque 2.4.12. Comme \bar{u}_h peut être calculé sans résoudre le problème (2.48), il est aisé de vérifier numériquement si l'hypothèse de saturation est satisfaite.

Remarque 2.4.13. L'estimateur d'erreur *a posteriori* dans (2.64) ne fait intervenir qu'un terme de pré-processing.

Remarque 2.4.14. En choisissant d'enrichir $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ par l'espace engendré par les bulles cubiques conformes sur les éléments (voir Annexe A.22), on obtiendrait également l'indicateur $\mathcal{P}_{4,T}(f)$ en remplaçant b_T^{nc} dans 2.64 par b_T^c . Pour les cas tests considérés à la section 2.5, l'hypothèse de saturation n'a pas été satisfaite numériquement.

2.4.2 Estimateur hiérarchique contournant l'hypothèse de saturation

Dans cette section on établit un estimateur d'erreur *a posteriori* hiérarchique contournant les hypothèses 2.4.3 et 2.4.4. Nous considérons le cas $\widehat{X}_h = \mathcal{B}_c(\mathcal{T}_h)$.

Proposition 2.4.15. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, sous les hypothèses 2.3.1 et 2.3.8, il existe une constante c telle que*

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \mathcal{P}_{3,F}(f)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{5,T}(f)^2 + \inf_{v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)} |u_h - v_h|_{k;1,h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.65)$$

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{P}_{5,T}(f) = h_T \|f\|_{k-1;0,T} + h_T \|f - f_h\|_{k-1;0,T}. \quad (2.66)$$

Démonstration.

(1) Soit $\Pi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}_c(\mathcal{T}_h)$ l'opérateur d'interpolation défini pour $v \in H_0^1(\Omega)$ par

$$\Pi v = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \left(\frac{\int_F v}{\int_F b'_F} \right) b'_F. \quad (2.67)$$

Une intégration par parties montre que $\Lambda_h(v_h, v) = \Lambda_h(v_h, \Pi v)$ pour tout $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$. De plus, l'opérateur Π est doté de la propriété de stabilité suivante : il existe une constante c telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\|\Pi v\|_{1,T} \leq ch_T^{-\frac{1}{2}} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|v\|_{0,F}, \quad (2.68)$$

$$\|\Pi v\|_{0,T} \leq ch_T^{\frac{1}{2}} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|v\|_{0,F}. \quad (2.69)$$

L'inégalité (2.68) est établie dans [AAA03, lemme 2.2]. Pour établir (2.69), notons tout d'abord que grâce à la régularité de $\{\mathcal{T}_h\}_h$ et à la construction des bulles conformes

sur les faces b'_F , il existe une constante positive c telle que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et $F \in \mathcal{F}_T$, $|F|^{\frac{1}{2}} \|b'_F\|_{0,T} \leq ch_T^{\frac{1}{2}} \int_F b'_F$ où $|F|$ est la $(d-1)$ -mesure de F . En utilisant (2.67) et l'inégalité de Cauchy–Schwarz, il vient

$$\|\Pi v\|_{0,T} \leq \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|v\|_{0,F} \frac{|F|^{\frac{1}{2}}}{\int_F b'_F} \|b'_F\|_{0,T} \leq ch_T^{\frac{1}{2}} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|v\|_{0,F}.$$

(2) Soit $v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ et soit $w = u - v_h$. Alors, on a

$$|u - v_h|_{k;1,h}^2 = \Lambda_h(u - u_h, w) + \Lambda_h(u_h - v_h, w).$$

(a) Estimation de $\Lambda_h(u - u_h, w)$ pour $w \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \Lambda_h(u - u_h, w) &= \Lambda_h(u, w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w) + \Lambda_h(u, \mathcal{I}_{\text{BV}}w) - \Lambda_h(u_h, w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w) - \Lambda_h(u_h, \mathcal{I}_{\text{BV}}w) \\ &= (f, w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w)_{0,\Omega} + (f - f_h, \mathcal{I}_{\text{BV}}w)_{0,\Omega} - \Lambda_h(u_h, \Pi(w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w)). \end{aligned}$$

Comme \hat{u}_h est la solution du problème (2.49) et $\Pi(w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w) \in \mathcal{B}_c(\mathcal{T}_h)$,

$$\begin{aligned} \Lambda_h(u - u_h, w) &= (f, w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w)_{0,\Omega} - (f_h, \Pi(w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w))_{0,\Omega} \\ &\quad + \Lambda_h(\hat{u}_h, \Pi(w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w)) + (f - f_h, \mathcal{I}_{\text{BV}}w)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Localisons et majorons les quatre termes du membre de droite de l'égalité ci-dessus. Grâce à (2.20),

$$(f, w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w)_{0,T} \leq ch_T \|f\|_{k-1;0,T} |w|_{k;1,\Delta_T}.$$

De plus, (2.21) et (2.69) conduisent à

$$\begin{aligned} (f_h, \Pi(w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w))_{0,T} &\leq c \|f_h\|_{0,T} h_T^{\frac{1}{2}} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w\|_{0,F} \\ &\leq ch_T \|f_h\|_{0,T} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} (k_F^*)^{-\frac{1}{2}} |w|_{k;1,\Delta_F} \\ &\leq ch_T \|f_h\|_{k-1;0,T} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} |w|_{k;1,\Delta_F}. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant (2.21) et (2.68), il vient

$$\begin{aligned} k_T (\nabla \hat{u}_h, \nabla \Pi(w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w))_{0,T} &\leq c \|\nabla \hat{u}_h\|_{k;0,T} k_T^{\frac{1}{2}} h_T^{-\frac{1}{2}} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|w - \mathcal{I}_{\text{BV}}w\|_{0,F} \\ &\leq c |\hat{u}_h|_{k;1,T} k_T^{\frac{1}{2}} h_T^{-\frac{1}{2}} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{\frac{1}{2}} (k_F^*)^{-\frac{1}{2}} |w|_{k;1,\Delta_F} \\ &\leq c |\hat{u}_h|_{k;1,T} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} |w|_{k;1,\Delta_F}. \end{aligned}$$

2.4. Analyse d'erreur *a posteriori* de type hiérarchique

Finalement, en utilisant la propriété de stabilité (2.38) établie au lemme 2.3.11, on déduit que

$$\begin{aligned} (f - f_h, \mathcal{I}_{\text{BV}} w)_{0,T} &= (f - f_h, \mathcal{I}_{\text{BV}} w - \Pi^0(\mathcal{I}_{\text{BV}} w))_{0,T} \leq ch_T \|f - f_h\|_{k^{-1},0,T} |\mathcal{I}_{\text{BV}} w|_{k;1,T} \\ &\leq ch_T \|f - f_h\|_{k^{-1},0,T} |w|_{k;1,\Delta_T}. \end{aligned}$$

(b) Estimation de $\Lambda_h(u_h - v_h, w)$ pour $w \in H_0^1(\Omega)$.

Il est clair que

$$\Lambda_h(u_h - v_h, w) \leq |u_h - v_h|_{k;1,h} |w|_{k;1,h}.$$

(c) En rassemblant les estimations ci-dessus et en utilisant (2.58), il vient

$$|u - v_h|_{k;1,h} \leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \mathcal{P}_{3,F}(f)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{5,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + |u_h - v_h|_{k;1,h}. \quad (2.70)$$

(d) Finalement, par l'inégalité triangulaire il vient

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq |u - v_h|_{k;1,h} + |u_h - v_h|_{k;1,h}.$$

La preuve est complète. \square

Remarque 2.4.16. Si f est régulière, le second terme du membre de droite de (2.66) est d'un ordre plus élevé que le premier.

Les résultats qui suivent sont une conséquence directe du lemme 2.3.2 et de l'estimation (2.65).

Corollaire 2.4.17. Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, sous les hypothèses 2.3.1 et 2.3.8, il existe une constante c telle que

$$|u - u_h|_{k;1,h} \leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \mathcal{P}_{3,F}(f)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{5,T}(f)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.71)$$

$$\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \mathcal{P}_{3,F}(f)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{5,T}(f)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \eta_{2,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.72)$$

Pour finir, on étudie l'optimalité des indicateurs d'erreur locaux ci-dessus. Grâce aux propositions 2.3.7 et 2.4.9, nous avons seulement à prouver l'optimalité de $\mathcal{P}_{5,T}(f)$.

Proposition 2.4.18. *Soient u et u_h respectivement l'unique solution de (2.4) et (2.16). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{P}_{5,T}(f) \leq c (|u - u_h|_{k;1,T} + h_T \|f - f_h\|_{k^{-1};0,T}) . \quad (2.73)$$

Démonstration. Le terme $h_T \|f\|_{k^{-1};0,T}$ se majore comme dans la preuve de la proposition 2.3.12. \square

Remarque 2.4.19. Il n'est pas immédiat de construire un estimateur d'erreur *a posteriori* hiérarchique basé sur des bulles non-conformes sur les éléments contournant l'hypothèse de saturation. En effet, la preuve de la proposition 2.4.15 repose sur la construction d'un opérateur Π tel que $\Lambda_h(v_h, v) = \Lambda_h(v_h, \Pi v)$ pour tout $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$. Or, si Πv est dans $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$, par le lemme 2.4.10 on a $\Lambda_h(v_h, \Pi v) = 0$.

2.5 Résultats numériques

Cette section présente les résultats numériques dans des milieux homogènes et hétérogènes pour les estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu et les estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchiques établis ci-dessus. Les solutions discrètes sont obtenues à partir de la formulation primale (2.16) et de la formule de reconstruction (2.15).

2.5.1 Milieu homogène

Considérons le carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et une conductivité hydraulique constante $k = 1$. La donnée f est choisie de sorte que la solution exacte de (2.4) soit $u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$. Deux familles de triangulations non-structurées sont considérées. La première famille consiste en une triangulation quasi-uniforme de taille $h_i = h_0 2^{-i}$, avec $h_0 = 0.2$ et $i \in \{0, \dots, 4\}$. La seconde famille n'est pas uniforme, la taille des triangles au bord est toujours h_i avec $i \in \{0, \dots, 4\}$, alors que la taille des triangles est dix fois plus petite au voisinage du point $(0.5, 0.5)$. Une triangulation de chaque famille est représentée à la figure 2.5.

2.5. Résultats numériques

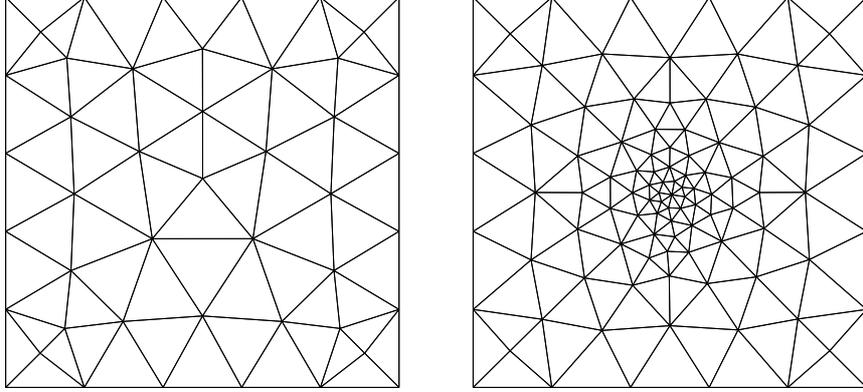


FIG. 2.5: A gauche : triangulation quasi-uniforme de taille h_0 ; à droite : triangulation non-uniforme de taille h_0

Les tableaux 2.1 et 2.2 présentent les résultats obtenus pour l'erreur réelle en pression en norme $|\cdot|_{k;1,h}$ et en vitesse en norme $\|\cdot\|_{k^{-1};\text{div},\Omega}$ sur les différentes triangulations (on entend par erreur réelle la différence entre la solution analytique et la solution approchée). Les coefficients α et ω indiquent l'ordre de convergence de l'erreur. Le coefficient α est défini par $\alpha = \log(\frac{e_i}{e_{i+1}})/\log(\frac{h_i}{h_{i+1}})$ et le coefficient ω est défini par $\omega = 2 \log(\frac{e_i}{e_{i+1}})/\log(\frac{Na_{i+1}}{Na_i})$ où e_i est l'erreur sur la triangulation de taille h_i et Na_i est le nombre d'arêtes sur cette triangulation. Les résultats présentés aux tableaux 2.1 et 2.2 sont en accord avec l'analyse *a priori* de la proposition 2.2.9.

Na	h	$ u - u_h _{k;1,h}$	α	$\ \sigma - \sigma_h\ _{k^{-1};\text{div},\Omega}$	α
115	0.2	1.9105	-	13.5440	-
374	0.1	0.9881	0.95	7.3536	0.88
1441	0.05	0.4954	1.00	3.6228	1.02
5621	0.025	0.2482	1.00	1.8040	1.00
22330	0.0125	0.1238	1.00	0.9010	1.00

TAB. 2.1: Erreur réelle en pression et en vitesse, et ordres de convergence sur les triangulations quasi-uniformes

Na	$\sqrt{\frac{Na_{i+1}}{Na_i}}$	$ u - u_h _{k;1,h}$	ω	$\ \sigma - \sigma_h\ _{k^{-1};\text{div},\Omega}$	ω
274	-	1.5613	-	10.4427	-
1034	1.94	0.8134	1.01	5.8178	0.54
3052	1.72	0.4227	1.21	3.0459	1.09
16517	2.33	0.2087	0.83	1.4656	0.86
67132	2.02	0.1034	1.00	0.7287	0.99

TAB. 2.2: Erreur réelle en pression et en vitesse, et ordres de convergence sur les triangulations non-uniformes

Na	$\mathcal{P}_1(f)$	$\mathcal{P}_2(f)$	$\eta_1(u_h)$	$\eta_2(u_h)$	I_1	I_3	I_5
115	13.4550	15.9078	2.1158	1.1552	1.01	9.45	2.04
374	7.3136	8.5318	1.1289	0.7285	1.01	9.78	2.03
1441	3.6023	4.1730	0.5737	0.4061	1.01	9.58	2.03
5621	1.7938	2.0763	0.2867	0.2104	1.01	9.52	2.02
22330	0.8959	1.0338	0.1430	0.1069	1.01	9.50	2.02

TAB. 2.3: Estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu et indice d'efficacité sur les triangulations quasi-uniformes

Na	$\mathcal{P}_1(f)$	$\mathcal{P}_2(f)$	$\eta_1(u_h)$	$\eta_2(u_h)$	I_1	I_3	I_5
274	10.3648	12.2677	1.8008	0.8980	1.01	9.01	2.03
1034	5.7813	6.7212	0.9509	0.6035	1.01	9.43	2.03
3052	3.0276	3.5276	0.4848	0.3536	1.01	9.49	2.03
16517	1.4563	1.7097	0.2403	0.1833	1.01	9.34	2.03
67132	0.7239	0.8481	0.1200	0.0939	1.01	9.36	2.03

TAB. 2.4: Estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu et indices d'efficacité sur les triangulations non-uniformes

Les tableaux 2.3 et 2.4 présentent les différents estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu

établis dans la section 2.3. Les termes de pré-processing $\mathcal{P}_1(f)$ et $\mathcal{P}_2(f)$ sont définis par

$$\mathcal{P}_1(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{1,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{P}_2(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{2,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.74)$$

avec les indicateurs d'erreur définis en (2.25) et (2.35), respectivement, et les termes de post-processing sont définis par

$$\eta_1(u_h) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_2(u_h) = \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \eta_{2,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.75)$$

avec les indicateurs d'erreur définis en (2.28) et (2.29), respectivement. Par abus de langage, nous appelons $\mathcal{P}_1(f)$, $\mathcal{P}_2(f)$, $\eta_1(u_h)$ et $\eta_2(u_h)$ des estimateurs d'erreur. Les tableaux 2.3 et 2.4 montrent que les termes de pré-processing $\mathcal{P}_1(f)$ et $\mathcal{P}_2(f)$ dominent les termes de post-processing $\eta_1(u_h)$ et $\eta_2(u_h)$. Ces tableaux présentent également quelques indices d'efficacité pour les estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu. Les indices d'efficacité pour l'estimateur d'erreur en pression-et-vitesse basé sur la formulation mixte sont définis par (voir corollaire 2.3.5)

$$I_i = \frac{\eta_i(u_h) + \mathcal{P}_1(f)}{|u - u_h|_{k;1,h} + \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},\Omega}}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.76)$$

Les indices d'efficacité pour l'estimateur d'erreur en pression basé sur la formulation primale sont définis par (voir corollaire 2.3.10)

$$I_{2+i} = \frac{\eta_i(u_h) + \mathcal{P}_2(f)}{|u - u_h|_{k;1,h}}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.77)$$

Ces indices sont proches de 1 si le terme $\mathcal{P}_2(f)$ n'est pas inclus. Les indices d'efficacité pour l'estimateur d'erreur par résidu en pression-et-vitesse basé sur la formulation primale sont définis par (voir corollaire 2.3.10)

$$I_{4+i} = \frac{\eta_i(u_h) + \mathcal{P}_1(f) + \mathcal{P}_2(f)}{|u - u_h|_{k;1,h} + \|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},\Omega}}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.78)$$

Finalement, les indices d'efficacité pour l'estimateur d'erreur en vitesse basé sur la formulation primale, définis par (voir corollaire 2.3.10 et proposition 2.3.14)

$$I_{6+i} = \frac{\eta_i(u_h) + \mathcal{P}_1(f) + \mathcal{P}_2(f)}{\|\sigma - \sigma_h\|_{k^{-1};\text{div},\Omega}}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2.79)$$

sont compris entre 2 et 2.3, indiquant que l'erreur réelle en vitesse coïncide approximativement avec $\mathcal{P}_1(f)$. Donc, pour un milieu homogène, l'estimateur d'erreur en vitesse basé sur la formulation mixte conduit à des bornes plus fines que celles obtenues par l'estimateur d'erreur basé sur la formulation primale et sur la formule de reconstruction locale (2.15). Les estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu et l'erreur réelle sont présentés à la figure 2.6 en échelle logarithmique en fonction du nombre de degrés de liberté de la formulation primale (2.16). Sur cette figure est également présenté l'estimateur d'erreur pour la vitesse

$$\eta(\sigma_h) = \eta_2(u_h) + \mathcal{P}_1(f) + \mathcal{P}_2(f), \quad (2.80)$$

résultant du corollaire 2.3.10 et de la proposition 2.3.14 en prenant les constantes égales à un. Les estimateurs d'erreur *a posteriori* convergent bien à l'ordre un, conformément à l'analyse *a posteriori*.

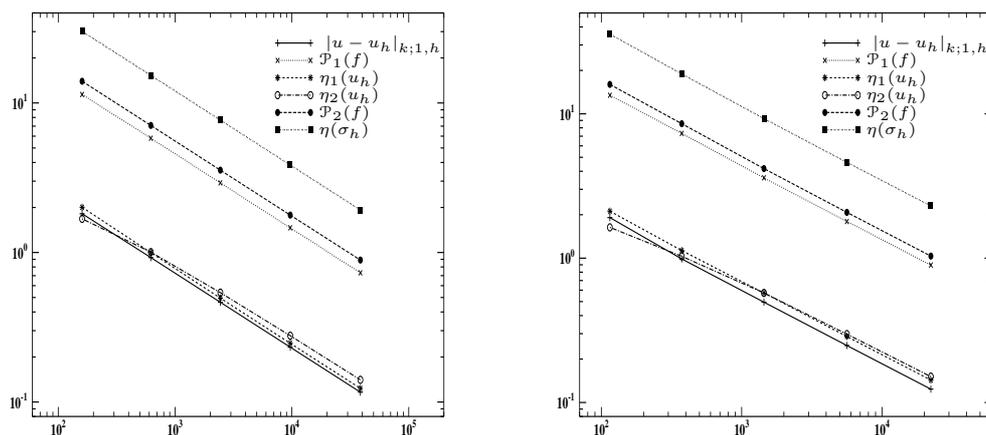


FIG. 2.6: Erreur réelle et estimateurs d'erreur par résidu en fonction du nombre de faces de la triangulation. Gauche : triangulations quasi-uniformes ; droite : triangulations non-uniformes

Les termes de post-processing dans (2.74) et (2.75) peuvent être évalués en bouclant une ou deux fois sur les éléments de la triangulation ; ainsi, leur évaluation requiert asymptotique le même coût, i.e., un coût proportionnel au nombre de degrés de liberté du problème discret en pression. Notons que ce coût est inférieur au coût associé à la résolution de la formulation primale (2.16).

Pour illustrer l'optimalité des estimateurs d'erreur par résidu, la figure 2.7 présente

2.5. Résultats numériques

l'erreur locale en pression $\|u - u_h\|_{k;1,T}$ et l'indicateur d'erreur local $\eta_{1,T}(u_h)$ sur chaque triangle T de la triangulation quasi-uniforme de taille h_1 . La distribution spatiale des deux quantités montre une physionomie analogue, en particulier en ce qui concerne la localisation des maxima.

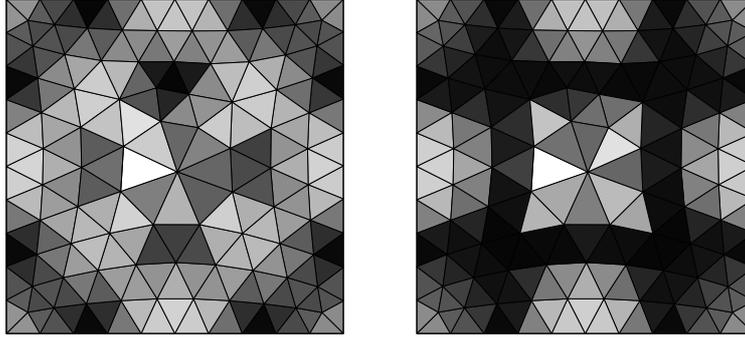


FIG. 2.7: Localisation de l'erreur réelle (gauche) et de l'estimateur d'erreur par résidu $\eta_1(u_h)$ (droite) pour la triangulation quasi-uniforme de taille $h = \frac{h_0}{2}$

Les tableaux 2.5 et 2.6 présentent les résultats numériques pour les estimateurs hiérarchiques obtenus à la section 2.4, ainsi que leurs indices d'efficacité.

Na	$\mathcal{P}_3(f)$	$\mathcal{P}_5(f)$	$\mathcal{P}_4(f)$	β	I_9	I_{10}	I_{12}
115	0.2427	8.7543	1.0080	0.86	0.13	5.82	3.77
374	0.1436	4.3564	0.5675	0.82	0.14	5.69	3.20
1441	0.0726	2.0595	0.2827	0.82	0.15	5.46	3.17
5621	0.0368	1.0161	0.1430	0.82	0.15	5.40	3.20
22330	0.0184	0.5003	0.0713	0.82	0.15	5.34	3.20

TAB. 2.5: Estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchiques et indice d'efficacité sur les triangulations quasi-uniformes

Na	$\mathcal{P}_3(f)$	$\mathcal{P}_5(f)$	$\mathcal{P}_4(f)$	β	I_7	I_8	I_{10}
274	0.1982	6.6865	0.8005	0.86	0.13	5.56	3.66
1034	0.1121	3.3859	0.4410	0.84	0.14	5.47	3.39
3052	0.0602	1.7702	0.2345	0.83	0.14	5.48	3.26
16517	0.0294	0.8729	0.1142	0.84	0.14	5.47	3.42
67132	0.0142	0.4303	0.0552	0.85	0.14	5.46	3.56

TAB. 2.6: Estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchique et indice d'efficacité sur les triangulations non-uniformes

Les termes de pré-processing sont définis par :

$$\mathcal{P}_3(f) = \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \mathcal{P}_{3,F}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{P}_4(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{4,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{P}_5(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_{5,T}(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec les indicateurs d'erreur locaux définis en (2.57), (2.64), et (2.66), respectivement. Nous ferons le même abus de langage que précédemment en appelant $\mathcal{P}_3(f)$, $\mathcal{P}_4(f)$ et $\mathcal{P}_5(f)$ estimateurs d'erreur. Les indices d'efficacité pour les estimateurs d'erreur en pression basés sur les bulles conformes sur les faces reposant ou non sur l'hypothèse de saturation sont respectivement définis par (voir propositions 2.4.6 et 2.4.15) :

$$I_9 = \frac{\mathcal{P}_3(f)}{|u - u_h|_{k;1,h}}, \quad (2.81)$$

et

$$I_{9+i} = \frac{\mathcal{P}_3(f) + \mathcal{P}_5(f) + \eta_i(u_h)}{|u - u_h|_{k;1,h}}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.82)$$

L'estimateur $\mathcal{P}_3(f) + \mathcal{P}_5(f) + \eta_i(u_h)$, $i \in \{1, 2\}$, présente l'avantage théorique de contourner l'hypothèse de saturation, mais son indice d'efficacité est compris entre 5.3 et 6.0. L'indice d'efficacité de l'estimateur d'erreur *a posteriori* basé sur les bulles non-conformes sur les éléments (voir proposition 2.4.11) est défini par :

$$I_{12} = \frac{1}{1 - \beta} \frac{\mathcal{P}_4(f)}{|u - u_h|_{k;1,h}}. \quad (2.83)$$

Pour les bulles non-conformes sur les éléments, l'hypothèse de saturation a été vérifiée numériquement comme le montrent les résultats présentés aux tableaux 2.5 et 2.6. Bien que l'hypothèse de saturation ne soit pas vérifiée théoriquement pour les bulles conformes

2.5. Résultats numériques

sur les faces, on peut remarquer que l'estimateur $\mathcal{P}_3(f)$ produit des résultats satisfaisants sur les triangulations quasi-uniformes et non-uniformes. L'erreur réelle en pression et les estimateurs hiérarchiques sont représentés à la figure 2.8 en échelle logarithmique en fonction du nombre de degrés de liberté du problème primal (2.16) sur les triangulations quasi-uniformes et non-uniformes. Dans les deux cas, les estimateurs d'erreur *a posteriori* convergent bien à l'ordre un.

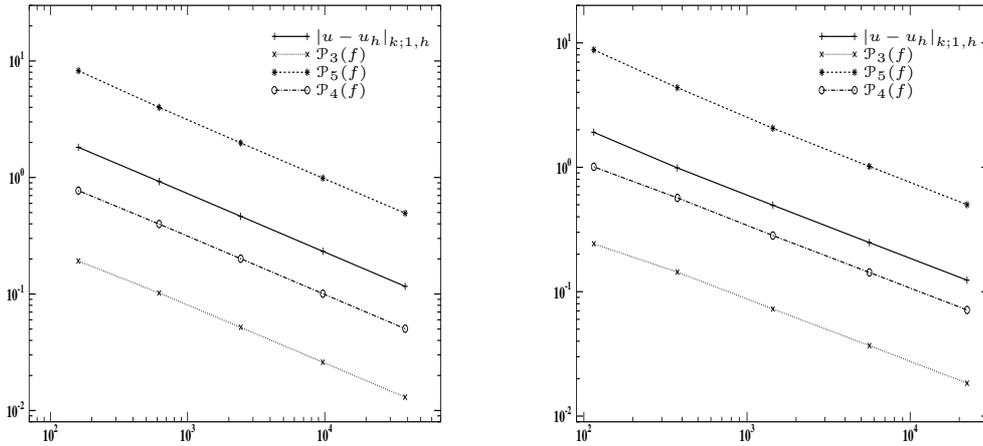


FIG. 2.8: Erreur réelle et estimateurs d'erreur hiérarchiques en fonction du nombre de faces de la triangulation. Gauche : triangulations quasi-uniformes; droite : triangulations non-uniformes

2.5.2 Milieu hétérogène

Considérons le carré $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$ avec des conditions limites de Dirichlet homogènes. Le domaine Ω est découpé en quatre sous-domaines Ω_l , $l \in \{1, \dots, 4\}$, qui sont des carrés de côté de longueur 1. Les sous-domaines sont numérotés dans le sens trigonométrique en commençant par le sous-domaine en haut à droite. Sur chaque sous-domaine Ω_l , $l \in \{1, \dots, 4\}$, la conductivité hydraulique est prise égale à $k_l = \kappa^{l-1}$, où κ est un réel positif. Notons que les variations de k sont en accord avec l'hypothèse 2.3.1. Comme chaque sous-domaine Ω_l a une intersection non-vide avec le bord de Ω , l'estimateur d'erreur en pression-et-vitesse basé sur la formulation mixte ne dépend pas de $\varrho_\Omega(k)$ (voir la remarque 2.2.4); néanmoins, la minoration locale concernant $\eta_{1,T}(u_h)$ et $\eta_{2,F}(u_h)$ dépend toujours de $\varrho_F(k)$. On considère deux valeurs pour le paramètre κ : $\kappa = 10$ induisant à un

contraste maximal de la conductivité de $\rho_\Omega(k) = 10^3$; $\kappa = 100$ induisant à un contraste maximal de la conductivité de $\rho_\Omega(k) = 10^6$. Dans les deux cas, la donnée f est telle que $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ de sorte que sur chaque sous-domaine Ω_l , la solution exacte est $u(x, y)|_{\Omega_l} = \frac{1}{k_l} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Notons que la solution exacte présente une singularité \mathcal{C}^1 aux interfaces entre les sous-domaines.

Les résultats sont présentés sur une famille de triangulations non-structurées quasi-uniformes avec une taille de maillage $h_i = h_0 2^{-i}$, $h_0 = 0.2$ et $i \in \{0, \dots, 4\}$. Les triangulations restent compatibles avec les sous-domaines Ω_l , en accord avec l'hypothèse 2.2.5. Les tableaux 2.7 et 2.8 présentent les résultats obtenus pour l'erreur réelle en pression et en vitesse. Les ordres de convergence des erreurs sont bien en accord avec l'analyse *a priori*.

Na	h	$ u - u_h _{k;1,h}$	α	$\ \sigma - \sigma_h\ _{k^{-1};\text{div},\Omega}$	α
440	0.2	0.4966	-	1.8853	-
1456	0.1	0.2614	0.92	0.9915	0.92
5684	0.05	0.1310	0.99	0.4844	1.03
22321	0.025	0.0655	1.00	0.2421	1.00
88961	0.0125	0.0327	1.00	0.1209	1.00

TAB. 2.7: Erreur réelle en pression et en vitesse, et ordres de convergence lorsque $\rho_\Omega(k) = 10^3$

Na	h	$ u - u_h _{k;1,h}$	α	$\ \sigma - \sigma_h\ _{k^{-1};\text{div},\Omega}$	α
440	0.2	0.4735	-	1.7976	-
1456	0.1	0.2493	0.92	0.9454	0.92
5684	0.05	0.1249	0.99	0.4619	1.03
22321	0.025	0.0625	1.00	0.2308	1.00
88961	0.0125	0.0312	1.00	0.1153	1.00

TAB. 2.8: Erreur réelle en pression et en vitesse, et ordres de convergence lorsque $\rho_\Omega(k) = 10^6$

2.5. Résultats numériques

Na	$\mathcal{P}_1(f)$	$\mathcal{P}_2(f)$	$\eta_1(u_h)$	$\eta_2(u_h)$	I_1	I_3	I_5
440	3.5075	5.6169	0.5334	1.9876	1.70	12.39	4.05
1456	1.8437	2.8631	0.2954	0.7793	1.71	12.08	3.99
5684	0.8990	1.3705	0.1509	0.3001	1.71	11.61	3.93
22321	0.4491	0.6790	0.0757	0.1158	1.71	11.52	3.91
88961	0.2244	0.3374	0.0377	0.0460	1.71	11.47	3.90

TAB. 2.9: Estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu et indices d'efficacité lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$

Na	$\mathcal{P}_1(f)$	$\mathcal{P}_2(f)$	$\eta_1(u_h)$	$\eta_2(u_h)$	I_1	I_3	I_5
440	3.5075	5.6155	0.5086	61.6208	1.77	12.93	4.24
1456	1.8437	2.8621	0.2817	23.6439	1.78	12.61	4.17
5684	0.8990	1.3699	0.1439	8.7840	1.78	12.12	4.11
22321	0.4491	0.6787	0.0721	3.1831	1.78	12.01	4.09
88961	0.2244	0.3372	0.0360	1.1380	1.78	11.96	4.08

TAB. 2.10: Estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu et indices d'efficacité lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^6$

Les tableaux 2.9 et 2.10 présentent les mêmes estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu que ceux présentés dans les tableaux 2.3 et 2.4. On remarquera qu'aucune dégradation de l'indice d'efficacité n'est observée lorsqu'on passe de $\varrho_\Omega(k) = 10^3$ à $\varrho_\Omega(k) = 10^6$. Ceci confirme que les variations de l'estimateur d'erreur en pression sont indépendantes des fluctuations de k . La figure 2.9 présente l'erreur réelle en pression en échelle logarithmique ainsi que les mêmes estimateurs d'erreur par résidu qu'à la figure 2.6 en fonction du nombre de degrés de liberté du problème primal. Le graphe de gauche de la figure 2.9 présente le cas $\varrho_\Omega(k) = 10^3$ et le graphe de droite présente le cas $\varrho_\Omega(k) = 10^6$. Dans les deux cas, le bon ordre de convergence est obtenu sauf pour $\eta_2(u_h)$ qui exhibe une super-convergence. Les valeurs prises par $\eta_2(u_h)$ sont plus grandes quand $\varrho_\Omega(k) = 10^6$ puisque les sauts de pression sont maximaux aux interfaces des sous-domaines où la moyenne $\{k\}_F$ de la conductivité hydraulique à travers la face F peut être très grande. La figure 2.10 représente l'erreur locale en pression $\|u - u_h\|_{k;1,T}$, l'indicateur d'erreur local $\eta_{1,T}(u_h)$ et l'indicateur d'erreur local $\mathcal{P}_{3,T}(f)$. Il apparaît sur cette figure que $\eta_{1,T}(u_h)$ prend ses valeurs les plus grandes

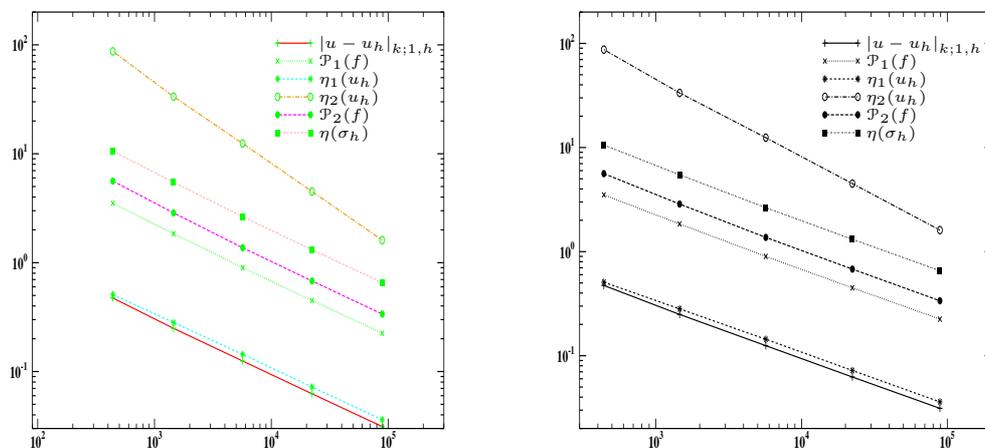


FIG. 2.9: Erreur exacte et estimateurs d'erreur par résidu en fonction de nombre de faces du maillage. Gauche : $\varrho_{\Omega}(k) = 10^3$; droite : $\varrho_{\Omega}(k) = 10^6$

aux interfaces entre les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 d'une part, et entre les sous-domaines Ω_1 et Ω_4 d'autre part. L'indicateur d'erreur local $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ prend ses valeurs les plus grandes au centre du sous-domaine Ω_1 . L'erreur, quant à elle, prend ses valeurs les plus grandes au centre du sous-domaine Ω_1 d'une part, ainsi qu'aux interfaces entre les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , et Ω_1 et Ω_4 d'autre part. Ceci montre que l'indicateur d'erreur $\eta_{1,T}(u_h)$ est sensible aux grandes variations de la conductivité, alors que l'indicateur d'erreur $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ qui ne dépend pas de la solution approchée, n'est pas sensible à ces variations.

2.5. Résultats numériques

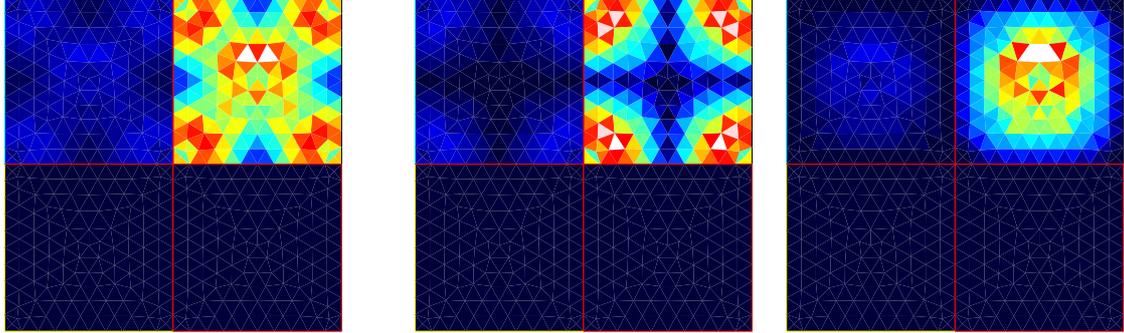


FIG. 2.10: Localisation de l'erreur réelle (gauche), localisation de l'estimateur d'erreur par résidu $\eta_1(u_h)$ (centre) et localisation de l'estimateur d'erreur hiérarchique $\mathcal{P}_3(f)$ (droite) pour une triangulation de taille $h = \frac{h_0}{2}$ et $\varrho_\Omega(k) = 10^6$

Na	$\mathcal{P}_3(f)$	$\mathcal{P}_5(f)$	$\mathcal{P}_4(f)$	β	I_9	I_{10}	I_{12}
440	0.0755	2.3385	0.2988	0.80	0.15	5.93	3.01
1456	0.0394	1.1535	0.1537	0.81	0.15	5.69	3.09
5684	0.0194	0.5424	0.0754	0.82	0.15	5.44	3.2
22321	0.0097	0.2665	0.0376	0.82	0.15	5.37	3.19
88961	0.0048	0.1319	0.0188	0.82	0.15	5.33	3.19

TAB. 2.11: Estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchiques et indices d'efficacité lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$

Na	$\mathcal{P}_3(f)$	$\mathcal{P}_5(f)$	$\mathcal{P}_4(f)$	β	I_9	I_{10}	I_{12}
440	0.0720	2.2298	0.2849	0.80	0.15	5.93	3.01
1456	0.0375	1.0999	0.1466	0.81	0.15	5.69	3.09
5684	0.0185	0.5171	0.0719	0.82	0.15	5.44	3.2
22321	0.0093	0.2541	0.0359	0.82	0.15	5.37	3.19
88961	0.0046	0.1258	0.0179	0.82	0.15	5.33	3.19

TAB. 2.12: Estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchiques et indices d'efficacité lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^6$

Les tableaux 2.11, 2.12 et la figure 2.11 présentent les mêmes estimateurs d'erreur

hiérarchiques qu'aux tableaux 2.5, 2.6 et qu'à la figure 2.8. Les mêmes conclusions que pour les estimateurs par résidu peuvent être tirées. Les résultats indiquent en particulier que pour les cas tests que nous avons considérés, la constante de saturation β ne dépend pas de $\varrho_\Omega(k)$.

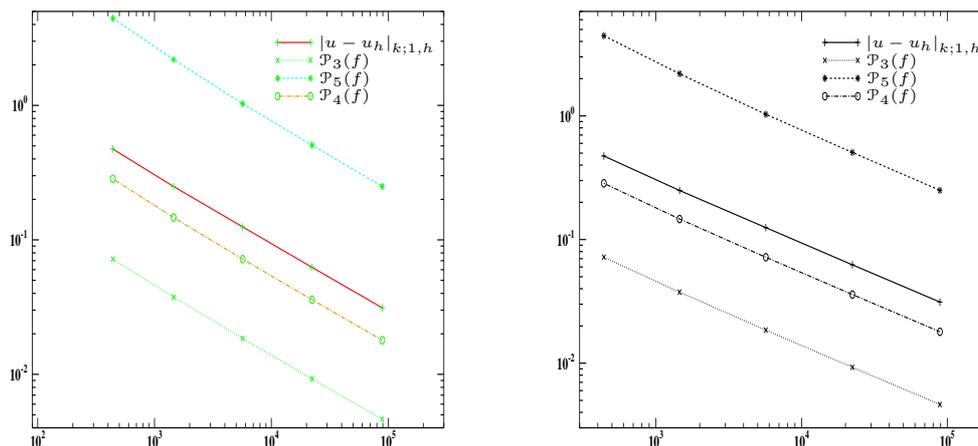


FIG. 2.11: Erreur exacte et estimateurs d'erreur hiérarchiques en fonction du nombre de faces du maillage. Gauche : $\varrho_\Omega(k) = 10^3$; droite : $\varrho_\Omega(k) = 10^6$

2.5.3 Adaptation de maillage

Une des applications des estimateurs d'erreur *a posteriori* étant d'adapter la triangulation à la solution calculée, cette section est consacrée à la construction de triangulations de façon adaptative. L'algorithme utilisé dans cette section est celui présenté en B.

2.5.3.1 Milieu homogène

On considère d'abord le cas test de la section 2.5.1. Les histogrammes 2.12 et 2.13 présentent, respectivement, la répartition des triangles et de l'erreur en pression $|u - u_h|_{k;1,h}$ en fonction de la taille des triangles lorsque la triangulation est générée de façon adaptative en utilisant $\eta_{1,T}(u_h)$ comme indicateur d'erreur. Ces deux histogrammes montrent qu'initialement tous les triangles ont sensiblement la même taille mais que l'erreur n'est pas uniformément répartie. Au cours des itérations, ce phénomène s'inverse et on voit que les triangles sont de taille différente, alors que l'erreur s'équilibre sur l'ensemble des triangles. Sur le maillage le plus fin les variations de taille de triangles est importante, alors que

2.5. Résultats numériques

l'erreur est uniforme. La figure 2.14 montre la triangulation initiale et les triangulations générées avec $\eta_{1,T}(u_h)$ et $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ après six itérations.

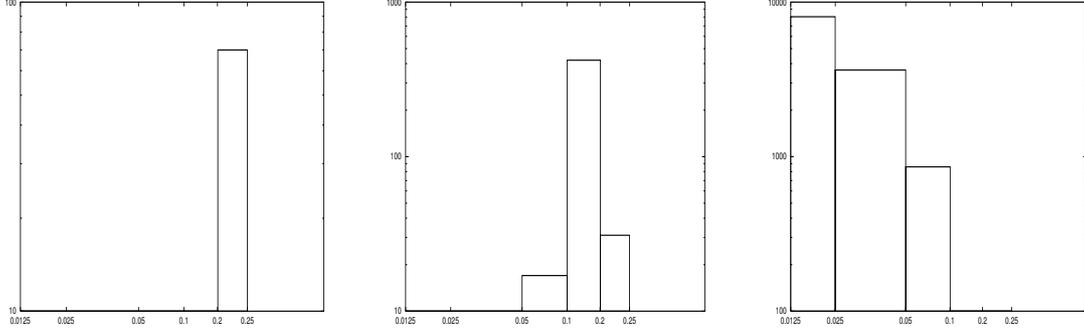


FIG. 2.12: Répartition des triangles par leur taille sur des triangulations générées de façon adaptative en utilisant $\eta_{1,T}(u_h)$ comme indicateur d'erreur. A gauche : sur la triangulation initiale ; au centre : sur la triangulation générée de façon adaptative après 3 itérations ; à droite : sur la triangulation générée de façon adaptative après 6 itérations

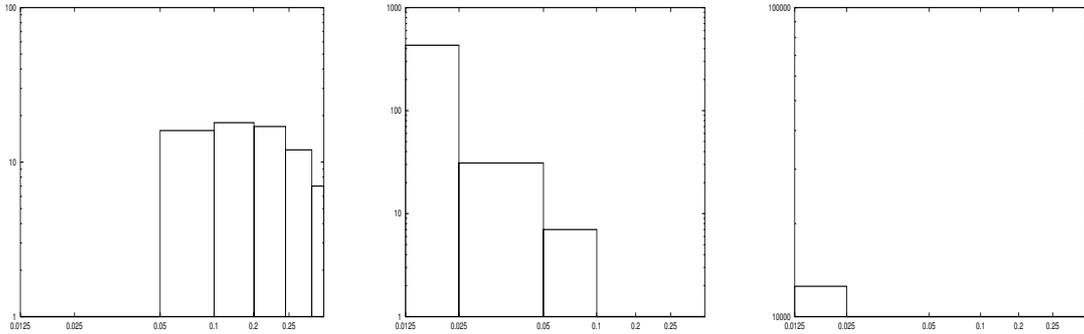


FIG. 2.13: Répartition des erreurs en pression sur des triangulations générées de façon adaptative en utilisant $\eta_{1,T}(u_h)$ comme indicateur d'erreur. A gauche : sur la triangulation initiale ; au centre : sur la triangulation générée de façon adaptative après 3 itérations ; à droite : sur la triangulation générée de façon adaptative après 6 itérations

On remarquera que lorsque la triangulation est générée de façon adaptative avec l'indicateur d'erreur local $\mathcal{P}_{3,T}(f)$, la constante β de l'hypothèse de saturation 2.4.3 tend vers 1, ce qui implique une dégradation de l'indice d'efficacité I_{12} .

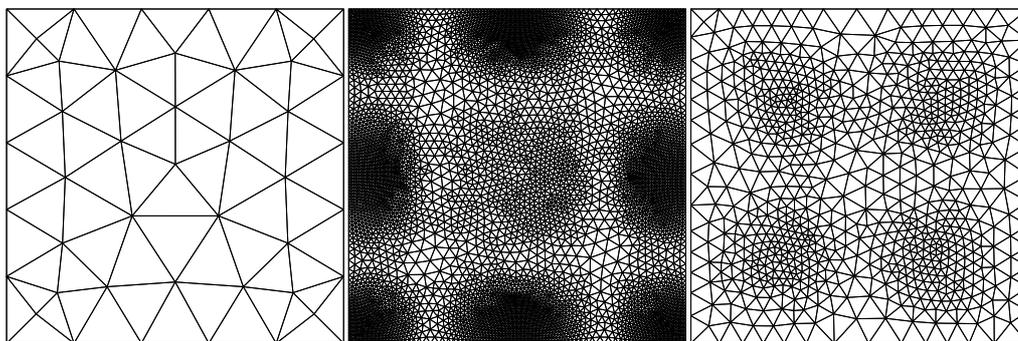


FIG. 2.14: A gauche : triangulation initiale de taille h_0 ; au centre : triangulation générée de façon adaptative après 6 itérations en utilisant $\eta_{1,T}(u_h)$ comme indicateur d'erreur ; à droite : triangulation générée de façon adaptative après 6 itérations en utilisant $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ comme indicateur d'erreur

Les figures 2.15 et 2.16 présentent les erreurs réelles et les estimateurs d'erreur par résidu et hiérarchique en fonction du nombre d'arêtes sur des triangulations raffinées de façon adaptative en utilisant les indicateurs d'erreur $\eta_{1,T}(u_h)$ et $\mathcal{P}_{3,T}(f)$. Ces figures montrent que l'ordre de convergence de l'erreur et des estimateurs est assez bien conservé.

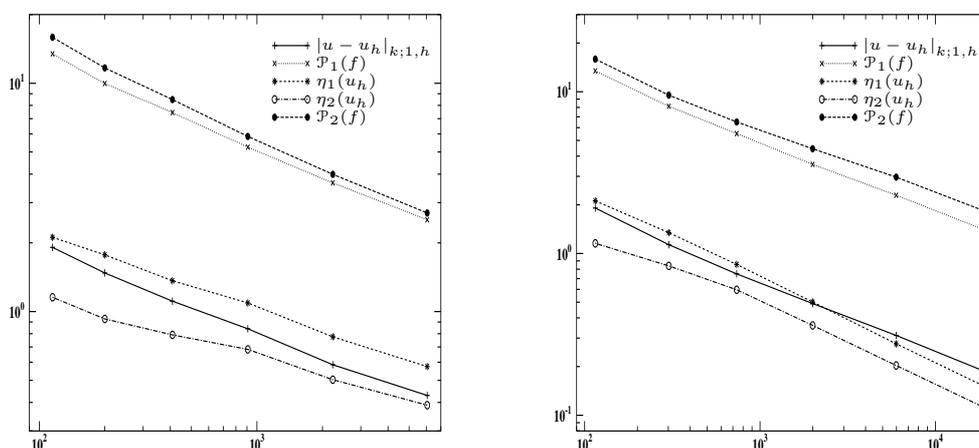


FIG. 2.15: Erreur réelle et estimateurs d'erreur par résidu en fonction du nombre de faces du maillage sur la triangulation raffinée de façon adaptative en utilisant $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ (à gauche) ou $\eta_{1,T}(u_h)$ (à droite)

2.5. Résultats numériques

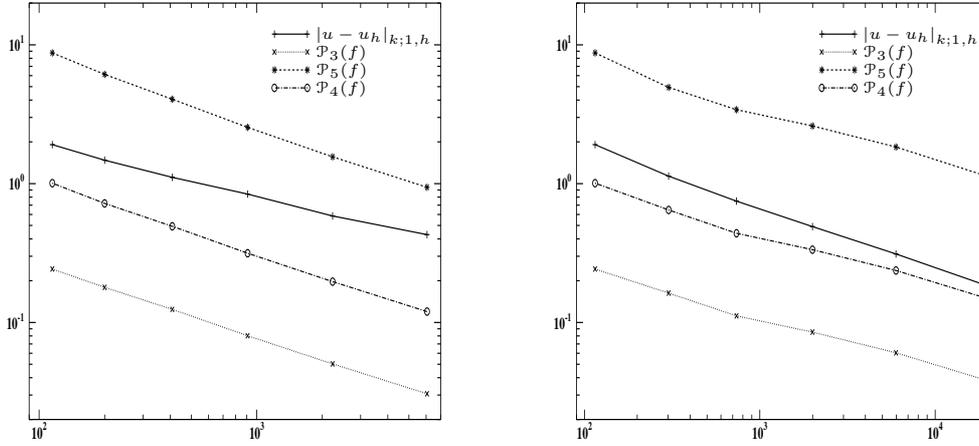


FIG. 2.16: Erreur réelle et estimateurs d'erreur par résidu en fonction de nombre de faces du maillage sur les triangulations raffinées de façon adaptative en utilisant $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ (à gauche); $\eta_{1,T}(u_h)$ (à droite)

Les tableaux 2.13 et 2.14 présentent les résultats obtenus pour l'erreur réelle en pression sur les triangulations raffinées de façon adaptative en utilisant d'une part $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ et d'autre part $\eta_{1,T}(u_h)$. On voit que l'ordre de convergence de l'erreur réelle est proche de 1 dans les deux cas. Les tableaux 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 et 2.18 présentent les résultats obtenus pour les estimateurs d'erreur pour les mêmes triangulations que celles des tableaux 2.13 et 2.14. On constate que l'indice d'efficacité n'est pas dégradé excepté I_{12} qui se dégrade à mesure que la constante de saturation β tend vers 1.

Na	$\sqrt{\frac{Na_{i+1}}{Na_i}}$	$ u - u_h _{k;1,h}$	ω	$\ \sigma - \sigma_h\ _{k^{-1};\text{div},\Omega}$	ω
115	-	1.9105	-	13.5440	-
200	1.32	1.4764	0.91	10.0530	1.08
409	1.43	1.1105	0.79	7.5057	0.82
908	1.50	0.8409	0.68	5.3058	0.83
2231	1.57	0.5850	0.81	3.7011	0.79

TAB. 2.13: Erreur en pression et en vitesse sur les triangulations générées de façon adaptative par $\mathcal{P}_{3,T}(f)$

Na	$\sqrt{\frac{Na_{i+1}}{Na_i}}$	$ u - u_h _{k;1,h}$	ω	$\ \sigma - \sigma_h\ _{k^{-1};\text{div},\Omega}$	ω
115	-	1.9105	-	13.5440	-
302	1.62	1.1330	1.07	8.1824	1.04
736	1.56	0.7481	0.93	5.5397	0.88
1996	1.65	0.4906	0.84	3.5704	0.87
5974	1.73	0.3116	0.82	2.2962	0.80

TAB. 2.14: Erreur en pression et en vitesse sur les triangulations générées de façon adaptative par $\eta_{1,T}(u_h)$

Na	$\mathcal{P}_1(f)$	$\mathcal{P}_2(f)$	$\eta_1(u_h)$	$\eta_2(u_h)$	I_1	I_3	I_5
115	13.4550	15.9078	2.1158	1.1552	1.01	9.44	2.04
200	9.9770	11.6731	1.7721	0.9286	1.02	9.11	2.03
409	7.4442	8.4841	1.3648	0.7905	1.02	8.87	2.01
908	5.2512	5.8495	1.0911	0.6830	1.03	8.25	1.98
2231	3.6615	3.9926	0.7753	0.5033	1.03	8.15	1.97

TAB. 2.15: Estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu et indice d'efficacité sur les triangulations générées de façon adaptative par $\mathcal{P}_{3,T}(f)$

Na	$\mathcal{P}_1(f)$	$\mathcal{P}_2(f)$	$\eta_1(u_h)$	$\eta_2(u_h)$	I_1	I_3	I_5
115	13.4550	15.9078	2.1158	1.1552	1.01	9.44	2.04
302	8.1334	9.5175	1.3456	0.8384	1.02	9.59	2.04
736	5.5105	6.5039	0.8558	0.5968	1.01	9.84	2.05
1996	3.5563	4.4418	0.5013	0.3595	1.00	10.1	2.09
5974	2.2905	2.9652	0.2766	0.2031	0.99	10.4	2.12

TAB. 2.16: Estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu et indice d'efficacité sur la triangulation générée de façon adaptative par $\eta_{1,T}(u_h)$

2.5. Résultats numériques

Na	$\mathcal{P}_3(f)$	$\mathcal{P}_5(f)$	$\mathcal{P}_4(f)$	β	I_9	I_{10}	I_{12}
115	0.24275	8.75426	1.00804	0.86	0.13	5.82	3.77
200	0.17908	6.12566	0.72100	0.88	0.12	5.47	4.07
409	0.12422	4.05849	0.49299	0.90	0.11	5.00	4.44
908	0.08024	2.54404	0.31547	0.93	0.10	4.42	5.36
2231	0.05026	1.56065	0.19687	0.94	0.08	4.10	5.61

TAB. 2.17: Estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchique et indice d'efficacité sur les triangulations générées de façon adaptative par $\mathcal{P}_{3,T}(f)$

Na	$\mathcal{P}_3(f)$	$\mathcal{P}_5(f)$	$\mathcal{P}_4(f)$	β	I_9	I_{10}	I_{12}
115	0.2426	8.7543	1.0080	0.86	0.13	5.82	3.77
302	0.1628	4.9367	0.6463	0.83	0.14	5.69	3.35
736	0.1116	3.4100	0.4392	0.81	0.15	5.85	3.10
1996	0.0852	2.6052	0.3344	0.73	0.17	6.5	2.52
5974	0.0605	1.8377	0.2368	0.65	0.19	6.98	2.17

TAB. 2.18: Estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchique et indice d'efficacité sur la triangulation générée de façon adaptative par $\eta_{1,T}(u_h)$

2.5.3.2 Milieu hétérogène

Reprenons le cas hétérogène considéré dans la section 2.5.2 avec $\varrho_\Omega(k) = 10^3$, et utilisons les indicateurs d'erreur locaux $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ et $\eta_{1,T}(u_h)$ pour raffiner la triangulation de façon adaptative. La figure 2.17 montre la triangulation initiale et la triangulation adaptative obtenue après six itérations. On observe que la triangulation générée par $\eta_{1,T}(u_h)$ est raffinée le long des interfaces des sous-domaines, particulièrement le long de l'interface entre les sous-domaines Ω_1 et Ω_4 , à travers laquelle le saut du coefficient k est maximal. Par contre, la triangulation générée par $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ est raffinée aux centres des sous-domaines Ω_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ et plus particulièrement au centre du sous-domaine Ω_1 .

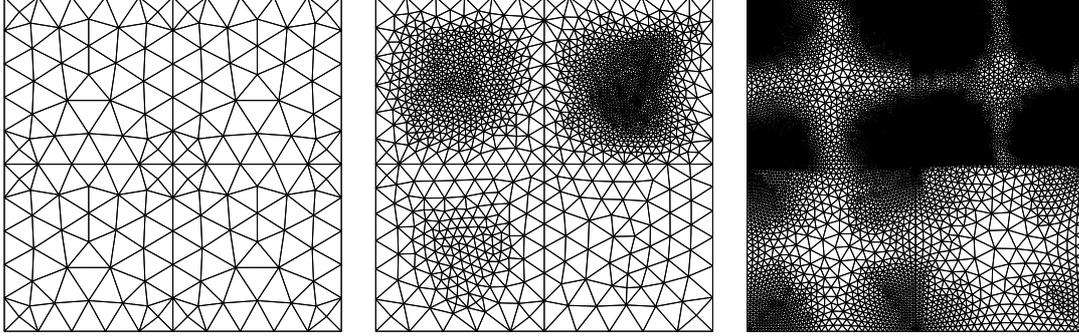


FIG. 2.17: Gauche : triangulation initiale (440 faces) ; centre : triangulation raffinée de façon adaptative en utilisant $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ (14395 faces) ; droite : triangulation raffinée de façon adaptative en utilisant $\eta_{1,T}(u_h)$ (54738 faces)

Les tableaux 2.19 et 2.20 présentent l'erreur réelle en pression et en vitesse. L'ordre de convergence de l'erreur réelle en pression et en vitesse se dégrade lorsque la triangulation est raffinée avec $\mathcal{P}_{3,T}(f)$. Par contre, l'ordre de convergence de ces erreurs est préservé lorsque la triangulation est raffinée avec $\eta_{1,T}(u_h)$. Ceci montre que la prise en compte des singularités de la solution aux interfaces entre les sous-domaines est essentielle pour obtenir une bonne approximation de la solution exacte sur un maillage adaptatif.

Na	$\sqrt{\frac{Na_{i+1}}{Na_i}}$	$ u - u_h _{k;1,h}$	ω	$\ \sigma - \sigma_h\ _{k-1;\text{div},\Omega}$	ω
440	-	0.4966	-	1.8853	-
593	1.16	0.4173	0.64	1.4611	1.71
977	1.28	0.3671	0.39	1.1893	0.84
2096	1.46	0.2786	0.37	0.9154	0.69
5295	1.59	0.2087	0.32	0.6771	0.65
14395	1.65	0.1577	0.28	0.4804	0.69

TAB. 2.19: Erreur réelle en pression et en vitesse, et ordres de convergence sur les triangulations générées de façon adaptative par $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$

2.5. Résultats numériques

Na	$\sqrt{\frac{Na_{i+1}}{Na_i}}$	$ u - u_h _{k;1,h}$	ω	$\ \sigma - \sigma_h\ _{k^{-1};\text{div},\Omega}$	ω
440	-	0.4966	-	1.8853	-
926	1.45	0.2966	1.38	1.1005	1.14
2368	1.60	0.1736	1.14	0.6060	1.27
6271	1.63	0.1105	0.92	0.3807	0.87
17919	1.70	0.0695	0.87	0.2462	0.82
54738	1.75	0.0405	0.97	0.1517	0.86

TAB. 2.20: Erreur en pression et en vitesse sur les triangulations générées de façon adaptative par $\eta_{1,T}(u_h)$ lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$

Sur la triangulation contenant 14395 faces, l'erreur réelle en pression $|u - u_h|_{k;1,h}$ est de 0.1577; sur la triangulation ayant 54738 faces, elle est de 0.0405; sur la triangulation la plus fine, raffinée uniformément et considérée dans la section précédente, cette erreur est à peine plus petite que 0.033, mais le maillage contient 88961 faces.

A la figure 2.18, on voit que les termes de pré-processing sont sous-optimaux. L'erreur est également sous-optimale lorsque la triangulation est raffinée de façon adaptative avec $\mathcal{P}_{3,T}(f)$. Ceci peut s'expliquer par le fait que le maillage issu de cette adaptation n'est pas raffiné là où la solution exhibe une singularité. Sur les triangulations raffinées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(u_h)$, l'erreur réelle exhibe bien un ordre de convergence de un comme on peut le voir à la figure 2.19.

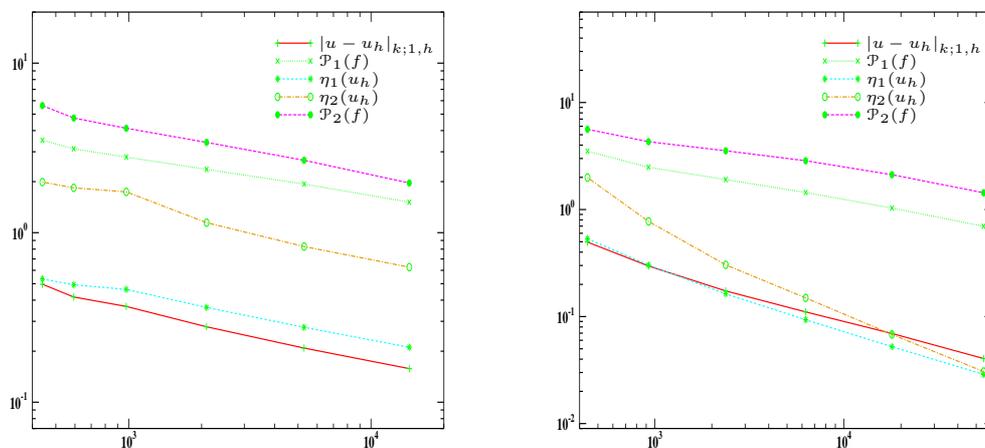


FIG. 2.18: Erreur exacte et estimateurs d'erreur par résidu en fonction de nombre de faces du maillage lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$ sur les triangulations raffinées de façon adaptative en utilisant $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ (à gauche) ou $\eta_{1,T}(u_h)$ (à droite)

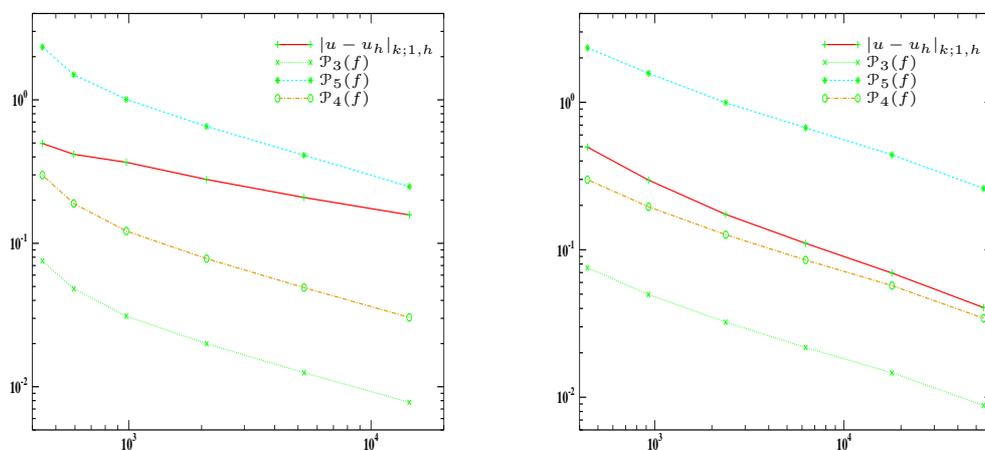


FIG. 2.19: Erreur exacte et estimateurs d'erreur par résidu en fonction du nombre de faces du maillage lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$ sur les triangulations raffinées de façon adaptative en utilisant $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ (à gauche) ou $\eta_{1,T}(u_h)$ (à droite)

Pour finir, les tableaux 2.21, 2.22, 2.23 et 2.24 présentent les résultats obtenus pour les estimateurs d'erreur *a posteriori* considérés dans les sections précédentes. Seuls les

2.5. Résultats numériques

indices d'efficacité I_3 , I_5 et I_{12} sont dégradés lorsque la triangulation est générée avec $\eta_{1,T}(u_h)$. La dégradation des deux premiers indices est due à la sous-optimalité des termes de pré-processing $\mathcal{P}_1(f)$ et $\mathcal{P}_2(f)$. On remarquera que la quantité $\eta_1(u_h)/|u - u_h|_{k;1,h}$ reste comprise entre 0.7 et 1.07. La dégradation de I_{12} est quant à elle due au fait que β tend vers 1 au cours des itérations.

Na	$\mathcal{P}_1(f)$	$\mathcal{P}_2(f)$	$\eta_1(u_h)$	$\eta_2(u_h)$	I_1	I_3	I_5
440	3.5075	5.6169	0.5334	1.9876	1.70	12.4	4.05
593	3.1234	4.7436	0.4925	1.8383	1.92	12.5	4.45
977	2.7903	4.1286	0.4629	1.7398	2.09	12.5	4.74
2096	2.3622	3.4081	0.3622	1.1454	2.28	13.5	5.14
5295	1.9352	2.6723	0.2765	0.8282	2.50	14.1	5.51
14395	1.5128	1.9643	0.2108	0.6262	2.70	13.8	5.78

TAB. 2.21: Estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu et indice d'efficacité sur les triangulations générées de façon adaptative par $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$

Na	$\mathcal{P}_1(f)$	$\mathcal{P}_2(f)$	$\eta_1(u_h)$	$\eta_2(u_h)$	I_1	I_3	I_5
440	3.5075	5.6169	0.5334	1.9876	1.70	12.4	4.05
926	2.4856	4.3024	0.3025	0.7747	1.99	15.5	5.07
2368	1.9048	3.5406	0.1631	0.3043	2.65	21.3	7.19
6271	1.4423	2.8577	0.0934	0.1494	3.13	26.7	8.94
17919	1.0322	2.1160	0.0523	0.0680	3.43	31.2	10.1
54738	0.6975	1.4342	0.0288	0.0306	3.78	36.1	11.1

TAB. 2.22: Estimateurs d'erreur *a posteriori* de type résidu et indice d'efficacité sur les triangulations générées de façon adaptative par $\eta_{1,T}(u_h)$ lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$

Na	$\mathcal{P}_3(f)$	$\mathcal{P}_5(f)$	$\mathcal{P}_4(f)$	β	I_9	I_{10}	I_{12}
440	0.0755	2.3385	0.2988	0.80	0.15	5.93	3.01
593	0.0482	1.4973	0.1894	0.89	0.11	4.88	4.13
977	0.0310	1.0074	0.1217	0.94	0.08	4.09	5.52
2096	0.0199	0.6529	0.0781	0.96	0.07	3.71	7.01
5295	0.0125	0.4106	0.0491	0.97	0.06	3.35	7.84
14395	0.0078	0.2486	0.0304	0.98	0.05	2.96	9.63

TAB. 2.23: Estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchique et indice d'efficacité sur les triangulations générées de façon adaptative par $\mathcal{P}_{3,T}(f)$ lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$

Na	$\mathcal{P}_3(f)$	$\mathcal{P}_5(f)$	$\mathcal{P}_4(f)$	β	I_9	I_{10}	I_{12}
440	0.0755	2.3385	0.2988	0.80	0.15	5.93	3.01
926	0.0497	1.5742	0.1955	0.75	0.17	6.55	2.64
2368	0.0323	0.9936	0.1264	0.69	0.19	6.99	3.47
6271	0.0217	0.6714	0.0852	0.64	0.20	7.34	2.96
17919	0.0146	0.4404	0.0572	0.57	0.21	7.61	1.91
54738	0.0088	0.2603	0.0343	0.53	0.22	7.72	1.82

TAB. 2.24: Estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchique et indice d'efficacité sur les triangulations générées de façon adaptative par $\eta_{1,T}(u_h)$ lorsque $\varrho_\Omega(k) = 10^3$

On vérifie que numériquement l'hypothèse de saturation est satisfaite pour les bulles non-conformes sur les éléments, alors que pour les bulles conformes sur les faces, si l'hypothèse de saturation est satisfaite, la constante β est estimée être plus grande que 0.8.

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse d'erreur *a priori* et *a posteriori* d'une méthode d'éléments finis non-conforme pour approcher un problème elliptique à coefficients variables. Nous avons porté une attention particulière sur le fait que les estimations d'erreur *a priori* et *a posteriori* font intervenir des constantes qui sont indépendantes des fluctuations de la perméabilité. Ce type de résultat est important dans le cas des milieux poreux très hétérogènes comme ceux intervenant dans l'étude des écoulements souter-

rains. Tous les estimateurs d'erreur *a posteriori* ont été évalués numériquement sur des cas tests où la perméabilité est constante, variable et fortement variable. Nous avons étudié deux exemples montrant comment l'estimateur d'erreur peut être localisé pour raffiner le maillage de façon adaptative.

D'un point de vue pratique, nous pouvons tirer les conclusions suivantes. Les estimateurs par résidu et hiérarchiques ont un coût de calcul comparable. Celui-ci est proportionnel aux degrés de liberté de la formulation primale (2.16). Ce coût est donc considérablement moins élevé que le coût de la résolution de la formulation primale. Certains des estimateurs d'erreur *a posteriori* hiérarchiques ne font intervenir que des termes de pré-processing, mais la difficulté liée à ces estimateurs est que l'hypothèse de saturation n'est pas toujours vérifiée. En utilisant des bulles conformes sur les faces, un estimateur hiérarchique ne nécessitant pas l'hypothèse de saturation a été établi. Cet estimateur est plus précis que l'estimateur par résidu basé sur la formulation primale. Ces deux estimateurs requièrent une reconstruction conforme de la pression discrète; une façon efficace de réaliser cette reconstruction consiste à utiliser l'opérateur d'interpolation de Oswald. Ceci conduit à l'indicateur d'erreur local $\eta_{1,T}(u_h)$. Cet indicateur est plus précis que l'indicateur d'erreur local $\eta_{2,F}(u_h)$ et est donc recommandé pour des évaluations numériques. De plus, dans les cas tests étudiés dans ce chapitre, on peut observer que l'indicateur d'erreur local $\eta_{1,T}(u_h)$ seul (i.e. sans ajout des termes de pré-processing requis par la théorie) peut être utilisé pour estimer l'erreur en pression et générer une triangulation raffinée de façon adaptative. Finalement, l'estimateur d'erreur pour la vitesse basé sur la formulation mixte est plus précis que celui basé sur la formulation primale et la reconstruction locale de la vitesse; cependant le premier estimateur peut dépendre des fluctuations du coefficient k , contrairement au deuxième.

Chapitre 3

Convection–diffusion : stabilisation par viscosité de sous-maille

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'équation de convection–diffusion–réaction avec des conditions limites de Dirichlet homogènes. Le problème que nous considérons est le suivant :

$$\begin{cases} -\epsilon\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \nu u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce problème intervient par exemple dans la modélisation du transport advectif–diffusif–réactif d'un soluté dans un écoulement. L'inconnue u représente la concentration, ϵ le coefficient de diffusion, β le vecteur vitesse, ν le coefficient de réaction, et f le terme source. On suppose que Ω est un polygone de \mathbb{R}^2 ou un polyèdre de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$. Dans ce chapitre, on fera les hypothèses minimales suivantes :

- ϵ est un réel strictement positif,
- β est dans $[W^{1,\infty}(\Omega)]^d$, $d = 2, 3$ étant la dimension d'espace,
- ν est dans $L^\infty(\Omega)$,
- f est dans $L^2(\Omega)$,
- il existe $\sigma_0 > 0$ tel que $\sigma = \nu - \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta \geq \sigma_0$ p.p dans Ω .

Considérons la formulation faible de (3.1) suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a_0(u, v) + a_1(u, v) + \epsilon d(u, v) = (f, v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega} \nu uv, \quad a_1(u, v) = \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v, \quad d(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Proposition 3.1.1. *Le problème (3.2) admet une et une seule solution.*

Démonstration. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. En intégrant par parties le terme convectif, il vient

$$a_1(v, v) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v^2,$$

et en utilisant le fait que $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, on obtient

$$a_0(v, v) + a_1(v, v) + \epsilon d(v, v) \geq \min(\epsilon, \sigma_0) \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

On conclut grâce au lemme de Lax–Milgram. \square

Dans de nombreux problèmes physiques, tels les écoulements en milieu poreux, il est souhaitable de préserver la continuité du flux à travers les éléments de la triangulation. Pour cela, il est préférable d’écrire le problème sous forme mixte en introduisant la variable auxiliaire $\sigma = -\nabla u$:

$$\begin{cases} \sigma = -\nabla u & \text{dans } \Omega, \\ \epsilon \nabla \cdot \sigma + \beta \cdot \nabla u + \nu u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

La formulation faible de (3.3) est présentée et analysée dans la section 3.4.

Ce chapitre est organisé comme suit. La section 3.2 est consacrée à une discrétisation de (3.2) stabilisée par viscosité de sous-maille dans un cadre non-conforme. Nous présentons également une analyse d’erreur *a priori* du schéma. Une interprétation sur les échelles résolues de cette formulation est donnée à la section 3.3. L’étude d’une formulation faible non-symétrique de (3.3) est présentée à la section 3.4 et sa discrétisation par un schéma boîte, équivalente à l’approximation non-conforme sur les échelles résolues de la variable primale, est présentée à la section 3.5. A la section 3.6, nous effectuons une analyse d’erreur *a posteriori* de la méthode d’approximation décrite dans la section 3.2. Enfin, la section 3.7 présente les résultats numériques.

3.2 Stabilisation par viscosité de sous-maille

Dans ce qui suit, c désigne une constante générique indépendante de h et ϵ et dont la valeur peut changer à chaque occurrence. Comme nous l'avons précisé dans le chapitre d'introduction, les coefficients sont adimensionnés de sorte que β est d'ordre 1 et on suppose qu'il n'y a pas de couche advective-réactive si bien que ν est au plus d'ordre 1. Dans les estimations d'erreur présentées ci-dessous, la dépendance des constantes en β et ν ne sera pas explicitée.

L'analyse qui suit requiert les hypothèses suivantes :

- la solution u de (3.2) est dans $H^2(\Omega)$,
- le vecteur β est dans $[P^0(\mathcal{T}_h)]^d$ et $\nabla \cdot \beta = 0$,
- la famille de triangulation $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ est quasi-uniforme,
- la taille h de la triangulation \mathcal{T}_h et le coefficient de diffusion ϵ sont tels que $h \leq 1$ et $\epsilon \leq 1$. Le problème étant adimensionné, cette hypothèse peut se faire sans perte de généralité.

Remarque 3.2.1. L'hypothèse $\nabla \cdot \beta = 0$ implique en particulier que la composante normale de β est uni-valuée sur \mathcal{F}_h^i et que $\nu \geq \sigma_0 > 0$ p.p dans Ω .

Remarque 3.2.2. On peut faire seulement l'hypothèse de régularité sur la famille $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$. Moyennant certaines complications techniques, on peut montrer sous cette seule hypothèse que l'analyse présentée ci-dessous reste valable ; voir [Gue01].

3.2.1 Préliminaires

Dans cette section, on s'intéresse à une approximation de (3.2) stabilisée par viscosité de sous-maille dans un cadre non-conforme. Soient X_h^e un sous-espace de $H^1(\mathcal{T}_h)$, X_h un sous-espace de X_h^e , et $P_h : X_h^e \rightarrow X_h$ un opérateur linéaire L^2 -stable. On suppose que P_h est un projecteur. Notons $X_h^f = (I - P_h)X_h^e$ où I est l'identité de X_h^e ; autrement dit,

$$X_h^e = X_h \oplus X_h^f. \quad (3.4)$$

Par la suite, on dira que X_h est l'espace des échelles résolues et X_h^f l'espace des échelles fluctuantes. Pour tout élément v_h^e de X_h^e , posons

$$v_h = P_h v_h^e \quad \text{et} \quad v_h^f = v_h^e - v_h.$$

On dit que v_h la composante résolue de v_h^e et v_h^f la composante fluctuante. Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où

$$X_h = P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \quad \text{et} \quad X_h^f = \mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h).$$

Rappelons que $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ désigne l'espace de Crouzeix–Raviart défini par

$$P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) = \{ v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P^1(T); \forall F \in \mathcal{F}_h, \int_F [v_h]_F = 0 \},$$

et que $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$ désigne l'espace engendré par les bulles quadratiques non-conformes de Fortin–Soulié défini par

$$\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h) = \text{vect}_{T \in \mathcal{T}_h} \{ b_T^{\text{nc}} \}, \quad (3.5)$$

où

$$\begin{cases} b_T^{\text{nc}}|_T = 2 - (d+1) \sum_{i=0}^d \lambda_{i,T}^2, \\ b_T^{\text{nc}}|_{\Omega \setminus T} = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $\lambda_{i,T}$, $i \in \{0, \dots, d\}$, sont les coordonnées barycentriques de T . La stabilité L^2 de l'opérateur P_h résulte de l'indépendance linéaire des fonctions de base de $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ et de $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$ (voir [Gue99, Proposition 4.1]). Rappelons quelques propriétés vérifiées par les éléments de $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)$.

Lemme 3.2.3. *Il existe deux constantes γ_1 et γ_2 indépendantes de h telles que*

$$\int_T b_T^{\text{nc}} = \gamma_1 |T| \quad \text{et} \quad \|b_T^{\text{nc}}\|_{0,T}^2 = \gamma_2 |T|. \quad (3.7)$$

Posons $V(h) = H_0^1(\Omega) + X_h^e$ et introduisons les normes brisées sur $V(h)$:

$$|v|_{1,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad |v|_{\beta,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\beta \cdot \nabla v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

Introduisons la forme bilinéaire $a_{1,h}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}(V(h) \times V(h); \mathbb{R})$ définie par

$$a_{1,h}(v, w) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla v) w. \quad (3.9)$$

On a le résultat suivant :

Lemme 3.2.4. *Il existe une constante c telle que*

$$\forall v_h \in X_h, \quad \sup_{v_h^e \in X_h^e} \frac{a_{1,h}(v_h, v_h^e)}{\|v_h^e\|_{0,\Omega}} \geq c |v_h|_{\beta,h}. \quad (3.10)$$

Démonstration.

3.2. Stabilisation par viscosité de sous-maille

- (i) Définissons l'opérateur linéaire Π de $L^2(\Omega)$ dans X_h^f tel que pour tout $v \in L^2(\Omega)$ et pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\Pi v|_T = \frac{\int_T v}{\int_T b_T^{\text{nc}}} b_T^{\text{nc}}.$$

En utilisant les relations (3.7) et l'inégalité de Cauchy–Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \|\Pi v\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T v \right)^2 \left(\int_T b_T^{\text{nc}} \right)^{-2} \int_T (b_T^{\text{nc}})^2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \|v\|_{0,T}^2 (\gamma_1)^{-2} |T|^{-2} \gamma_2 |T| \\ &\leq c^{-1} \|v\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

L'opérateur Π est donc $L^2(\Omega)$ -stable. De plus, par construction on a

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in L^2(\Omega), \quad \int_T (v - \Pi v) = 0.$$

- (ii) Soit $v_h \in X_h$. Le vecteur β étant constant par morceaux, $\beta \cdot \nabla v_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d$. Ainsi,

$$a_{1,h}(v_h, v - \Pi v) = 0,$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \forall v_h \in X_h, \quad \sup_{v_h^e \in X_h^e} \frac{a_{1,h}(v_h, v_h^e)}{\|v_h^e\|_{0,\Omega}} &\geq \sup_{v \in L^2(\Omega)} \frac{a_{1,h}(v_h, \Pi v)}{\|\Pi v\|_{0,\Omega}} \geq c \sup_{v \in L^2(\Omega)} \frac{a_{1,h}(v_h, v)}{\|v\|_{0,\Omega}} \\ &\geq c \frac{a_{1,h}(v_h, \beta \cdot \nabla v_h)}{|v_h|_{\beta,h}} \geq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\beta \cdot \nabla v_h\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La preuve est complète. \square

Remarque 3.2.5. Si $\beta \in C^1(\overline{\Omega})$ on peut montrer une inégalité inf-sup du type (3.10); voir [Gue99].

3.2.2 Le schéma discret

Rappelons quelques notations. Soit $F \in \mathcal{F}_h^i$ telle que $F = T_1 \cap T_2$, où T_1 et T_2 sont des éléments de \mathcal{T}_h dont les normales extérieures sont notées n_1 et n_2 , respectivement. Pour un champ de vecteurs \mathbb{R}^d -valué, q , définissons $|q|_F = |q \cdot n_F|$, où n_F est un des deux vecteurs normal à F . Pour $F \in \mathcal{F}_h^\partial$, on pose $|q|_F = |q \cdot n|$ (on rappelle que n désigne la normale

extérieure à Ω). En d'autres termes, $|q|_F$ désigne la valeur absolue de la composante normale de q sur F . Pour une face intérieure $F \in \mathcal{F}_h^i$ et une fonction v continue par morceaux sur Ω , on note par v^\downarrow et v^\uparrow la valeur aval et amont de v respectivement. Ces valeurs sont définies pour presque tout $x \in F$ par

$$v^\downarrow(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} v(x + \gamma\beta) \quad \text{et} \quad v^\uparrow(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} v(x - \gamma\beta). \quad (3.11)$$

Pour une région R , $v_{\infty,R}$ désigne la norme de v dans $L^\infty(R)$ ou dans $[L^\infty(R)]^d$.

La formulation discrète de (3.2) stabilisée par viscosité de sous-maille est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h^e \in X_h^e \text{ tel que} \\ \Theta_h(u_h^e, v_h^e) = (f, v_h^e)_{0,\Omega} \quad \forall v_h^e \in X_h^e, \end{cases} \quad (3.12)$$

où $\Theta_h(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}(V(h) \times V(h); \mathbb{R})$ est définie par

$$\Theta_h(u_h^e, v_h^e) = a_h(u_h^e, v_h^e) + \epsilon d_h(u_h^e, v_h^e) + b_h(u_h^f, v_h^f) + J_0(u_h^e, v_h^e), \quad (3.13)$$

avec

$$a_h(u_h^e, v_h^e) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h^e + \nu u_h^e) v_h^e = a_{1,h}(u_h^e, v_h^e) + a_0(u_h^e, v_h^e), \quad (3.14)$$

$$d_h(u_h^e, v_h^e) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h^e \cdot \nabla v_h^e, \quad (3.15)$$

$$b_h(u_h^f, v_h^f) = c_b \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \int_T \nabla u_h^f \cdot \nabla v_h^f \quad \text{avec } c_b > 0, \quad (3.16)$$

$$J_0(u_h^e, v_h^e) = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} J_{0,F}(u_h^e, v_h^e) \quad \text{avec } J_{0,F}(u_h^e, v_h^e) = - \int_F \beta \cdot [u_h^e]_F (v_h^e)^\downarrow, \quad (3.17)$$

avec la convention que pour $F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}$, $\beta \cdot [u_h^e]_F (v_h^e)^\downarrow = (\beta \cdot n) u_h^e v_h^e$. Introduisons sur $V(h) \times V(h)$ la forme bilinéaire symétrique définie positive, $a_s(\cdot, \cdot)$, définie par

$$a_s(v, w) = \frac{1}{2} (a_h(v, w) + J_0(v, w) + a_h(v, w) + J_0(v, w)). \quad (3.18)$$

Introduisons les normes suivantes sur $V(h)$:

$$\|v\|_J = \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \|\beta|_F^{\frac{1}{2}} [v]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

$$\|v\|_A = \|v\|_{0,\Omega} + \|v\|_J + \epsilon^{\frac{1}{2}} |v|_{1,h} + h^{\frac{1}{2}} |v|_{\beta,h}, \quad (3.20)$$

$$\|v\|_{h,\frac{1}{2}} = \|v\|_A + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \|v\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Lemme 3.2.6. *Il existe une constante c telle que*

$$\forall v_h^e \in X_h^e, \quad a_s(v_h^e, v_h^e) \geq c \left(\|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + \|v_h^e\|_J^2 \right). \quad (3.22)$$

Démonstration. Soit $v_h^e \in X_h^e$. En intégrant par parties le terme convectif de $a_h(\cdot, \cdot)$ et en utilisant le fait que $\nabla \cdot \beta = 0$, il vient

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \int_T v_h^e \beta \cdot \nabla v_h^e = \frac{1}{2} \int_{\partial T} (\beta \cdot n) (v_h^e)^2.$$

Soit $F \in \mathcal{F}_h^i$ telle que $F = T_1 \cap T_2$ où T_1 et T_2 sont les deux éléments dans \mathcal{T}_h partageant la face F . Soit n_i la normale sortante à T_i , et posons $v_i^e = v_h^e|_{T_i}$, $i \in \{1, 2\}$. Supposons par exemple que $\beta \cdot n_1 > 0$ (même raisonnement si $\beta \cdot n_1 < 0$ et résultat trivial si $\beta \cdot n_1 = 0$). Alors, $(v_h^e)^\downarrow = v_2^e$ si bien que

$$\begin{aligned} \beta \cdot [(v_h^e)^2]_F &= \beta \cdot n_1 (v_1^e)^2 + \beta \cdot n_2 (v_2^e)^2 = \beta \cdot n_1 ((v_1^e)^2 - (v_2^e)^2), \\ \beta \cdot [v_h^e]_F (v_h^e)^\downarrow &= \beta \cdot (n_1 v_1^e + n_2 v_2^e) v_2^e = \beta \cdot n_1 (v_1^e - v_2^e) v_2^e. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} \beta \cdot [(v_h^e)^2]_F - \beta \cdot [v_h^e]_F (v_h^e)^\downarrow = \frac{1}{2} \beta \cdot n_1 (v_1^e - v_2^e)^2,$$

et donc

$$\frac{1}{2} \int_F \beta \cdot [(v_h^e)^2]_F - \int_F \beta \cdot [v_h^e]_F (v_h^e)^\downarrow = \frac{1}{2} \int_F |\beta|_F [v_h^e]_F^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} a_s(v_h^e, v_h^e) &\geq \sigma_0 \|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F |\beta|_F [v_h^e]_F^2 + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\partial} \int_F |\beta \cdot n| (v_h^e)^2 \\ &\geq c (\|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + \|v_h^e\|_J^2), \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. \square

Le caractère bien posé et l'analyse de convergence du problème (3.12) repose de manière fondamentale sur la condition inf-sup suivante.

Lemme 3.2.7. *Il existe une constante c telle que*

$$\forall v_h^e \in X_h^e, \quad \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A} \geq c \left(\|v_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |v_h^f|_{1,h} \right). \quad (3.23)$$

Démonstration. Soit $v_h^e \in X_h^e$. Par la coercivité des formes bilinéaires $d_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$, il vient

$$a_s(v_h^e, v_h^e) + \epsilon |v_h^e|_{1,h}^2 + c_b h |v_h^f|_{1,h}^2 \leq \Theta_h(v_h^e, v_h^e). \quad (3.24)$$

(a) Supposons $h \leq \epsilon$. Il est clair que $h^{\frac{1}{2}} |v_h^e|_{\beta,h} \leq c \epsilon^{\frac{1}{2}} |v_h^e|_{1,h}$. Par suite,

$$\|v_h^e\|_A^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2 \leq c \left(\|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + \|v_h^e\|_J^2 + \epsilon |v_h^e|_{1,h}^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2 \right).$$

En utilisant les inégalités (3.22) et (3.24), on déduit que

$$\Theta_h(v_h^e, v_h^e) \geq c \left(\|v_h^e\|_A^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2 \right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A} &\geq \frac{\Theta_h(v_h^e, v_h^e)}{\|v_h^e\|_A} \geq \frac{\Theta_h(v_h^e, v_h^e)}{\|v_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |v_h^f|_{1,h}} \\ &\geq c \left(\|v_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |v_h^f|_{1,h} \right). \end{aligned}$$

(b) Supposons $\epsilon \leq h$. D’après la condition inf-sup (3.10) on a

$$c_1 |v_h|_{\beta,h} \leq \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{a_{1,h}(v_h, w_h^e)}{\|w_h^e\|_{0,\Omega}},$$

où c_1 est une constante indépendante de h et de ϵ . Or,

$$\begin{aligned} a_{1,h}(v_h, w_h^e) &= \Theta_h(v_h^e, w_h^e) - a_{1,h}(v_h^f, w_h^e) - a_0(v_h^e, w_h^e) \\ &\quad - J_0(v_h^e, w_h^e) - \epsilon d_h(v_h^e, w_h^e) - b_h(v_h^f, w_h^e). \end{aligned}$$

D’une part, on a

$$|a_{1,h}(v_h^f, w_h^e)| \leq c |v_h^f|_{1,h} \|w_h^e\|_{0,\Omega},$$

et

$$|a_0(v_h^e, w_h^e)| \leq c \|v_h^e\|_{0,\Omega} \|w_h^e\|_{0,\Omega}.$$

D’autre part, l’inégalité de trace discrète (A.14) et la quasi-uniformité du maillage mènent à

$$|J_0(v_h^e, w_h^e)| \leq c h^{-\frac{1}{2}} \|v_h^e\|_J \|w_h^e\|_{0,\Omega},$$

3.2. Stabilisation par viscosité de sous-maille

et grâce à l'inégalité inverse (A.12), on obtient

$$\epsilon |d_h(v_h^e, w_h^e)| \leq c\epsilon h^{-1} |v_h^e|_{1,h} \|w_h^e\|_{0,\Omega}.$$

Enfin, par la stabilité $L^2(\Omega)$ de P_h et par l'inégalité inverse (A.12), il vient

$$\begin{aligned} |b_h(v_h^f, w_h^f)| &\leq c_b h |v_h^f|_{1,h} |w_h^f|_{1,h} \leq c |v_h^f|_{1,h} \|w_h^f\|_{0,\Omega} \\ &\leq c |v_h^f|_{1,h} \|w_h^e\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Donc,

$$c_1 |v_h|_{\beta,h} \leq \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)}{\|w_h^e\|_{0,\Omega}} + c_2 \left(\|v_h^e\|_{0,\Omega} + |v_h^f|_{1,h} + h^{-\frac{1}{2}} \|v_h^e\|_J + \epsilon h^{-1} |v_h^e|_{1,h} \right),$$

où c_2 est une constante indépendante de h et ϵ . En élevant cette inégalité au carré et en multipliant le résultat par $\frac{h}{2}$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{2} h |v_h|_{\beta,h}^2 &\leq \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)^2}{h^{-1} \|w_h^e\|_{0,\Omega}^2} + 2c_2^2 \left(h \|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2 + \|v_h^e\|_J^2 + \epsilon^2 h^{-1} |v_h^e|_{1,h}^2 \right) \\ &\leq \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)^2}{h^{-1} \|w_h^e\|_{0,\Omega}^2} + 2c_2^2 \left(\|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2 + \|v_h^e\|_J^2 + \epsilon |v_h^e|_{1,h}^2 \right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

puisque $\epsilon \leq h \leq 1$. De (3.22) et (3.24), on déduit que

$$c_3 \Theta_h(v_h^e, v_h^e) \geq \|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + \|v_h^e\|_J^2 + \epsilon |v_h^e|_{1,h}^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2,$$

où c_3 désigne une constante indépendante de h et de ϵ . En combinant cette dernière inégalité avec (3.25), il vient

$$\|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + \|v_h^e\|_J^2 + \epsilon |v_h^e|_{1,h}^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2 + h |v_h|_{\beta,h}^2 \leq c \left(\sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)^2}{h^{-1} \|w_h^e\|_{0,\Omega}^2} + \Theta_h(v_h^e, v_h^e) \right).$$

Comme $|v_h^e|_{\beta,h} \leq |v_h|_{\beta,h} + c |v_h^f|_{1,h}$, on a

$$\|v_h^e\|_A^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2 \leq \|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + \|v_h^e\|_J^2 + \epsilon |v_h^e|_{1,h}^2 + ch (|v_h^f|_{1,h}^2 + |v_h|_{\beta,h}^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|v_h^e\|_A^2 + h |v_h^f|_{1,h}^2 &\leq c \left(\sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)^2}{h^{-1} \|w_h^e\|_{0,\Omega}^2} + \frac{\Theta_h(v_h^e, v_h^e)}{\|v_h^e\|_A} \|v_h^e\|_A \right) \\ &\leq c \left(\sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)^2}{h^{-1} \|w_h^e\|_{0,\Omega}^2} + \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)}{\|w_h^e\|_{0,\Omega}} \|v_h^e\|_A \right). \end{aligned}$$

L'inégalité (A.26) conduit à

$$\|v_h^e\|_A^2 + h|v_h^f|_{1,h}^2 \leq c \left(\sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)^2}{h^{-1}\|w_h^e\|_{0,\Omega}^2} + \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)^2}{\|w_h^e\|_A^2} \right).$$

D'une part, grâce à l'inégalité inverse (A.12) on a $h|w_h^e|_{\beta,h}^2 \leq h^{-1}\|w_h^e\|_{0,\Omega}^2$ et du fait que $\epsilon \leq h$ on a $\epsilon|w_h^e|_{1,h}^2 \leq ch^{-1}\|w_h^e\|_{0,\Omega}^2$. D'autre part, grâce à l'inégalité de trace discrète (A.14) on a $\|w_h^e\|_J^2 \leq h^{-1}\|w_h^e\|_{0,\Omega}^2$. Ceci conduit à

$$\|w_h^e\|_A^2 \leq c(1 + h^{-1})\|w_h^e\|_{0,\Omega}^2 \leq ch^{-1}\|w_h^e\|_{0,\Omega}^2,$$

puisque $h \leq 1$. Donc,

$$\|v_h^e\|_A^2 + h|v_h^f|_{1,h}^2 \leq c \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)^2}{\|w_h^e\|_A^2}.$$

La preuve est complète. □

Corollaire 3.2.8. *Le problème (3.12) admet une et une seule solution.*

3.2.3 Analyse d'erreur *a priori*

Lemme 3.2.9 (Continuité). *Il existe une constante c telle que*

$$\forall (v, w) \in H_0^1(\Omega) \times V(h), \quad a_h(v, w) + \epsilon d_h(v, w) \leq c\|v\|_{h,\frac{1}{2}}\|w\|_A. \quad (3.26)$$

Démonstration. Soient $v \in H_0^1(\Omega)$ et $w \in V(h)$. Remarquons tout d'abord que

$$a_h(v, w) = 2a_s(v, w) - a_0(w, v) - a_{1,h}(w, v) - J_0(w, v),$$

puisque $J_0(v, w) = 0$.

Estimons chacun des termes du membre de droite de l'égalité ci-dessus. La forme bilinéaire $a_s(\cdot, \cdot)$ étant symétrique définie positive, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient

$$a_s(v, w) \leq a_s(v, v)^{\frac{1}{2}} a_s(w, w)^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs,

$$a_s(v, v) = \|\nu^{\frac{1}{2}}v\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_J^2 \leq c\|v\|_A^2.$$

Donc,

$$a_s(v, w) \leq c\|v\|_A\|w\|_A \leq c\|v\|_{h,\frac{1}{2}}\|w\|_A.$$

3.2. Stabilisation par viscosité de sous-maille

De plus,

$$a_0(w, v) \leq c \|w\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega},$$

et

$$\begin{aligned} a_{1,h}(w, v) &\leq |w|_{\beta,h} \|v\|_{0,\Omega} \leq \left(h^{\frac{1}{2}} |w|_{\beta,h} \right) \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|w\|_A \|v\|_{h,\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} J_0(w, v) &\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \|\beta^{\frac{1}{2}} [w]_F\|_{0,F}^2 \right) \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \|v\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|w\|_A \|v\|_{h,\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De plus, il est clair que

$$\epsilon d_h(v, w) \leq \epsilon^{\frac{1}{2}} |v|_{1,h} \epsilon^{\frac{1}{2}} |w|_{1,h} \leq \|v\|_{h,\frac{1}{2}} \|w\|_A.$$

En rassemblant les inégalités ci-dessus, on obtient (3.26). \square

Lemme 3.2.10 (Estimation d'erreur). *Posons*

$$R_h(u) = \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{a_h(u, w_h^e) + \epsilon d_h(u, w_h^e) - (f, w_h^e)_{0,\Omega}}{\|w_h^e\|_A}. \quad (3.27)$$

Alors, il existe une constante c telle que

$$\|u - u_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |u_h^f|_{1,h} \leq c \left(\|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} + R_h(u) \right), \quad (3.28)$$

où Π_h est la projection $L^2(\Omega)$ -orthogonale sur $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$.

Démonstration. Il est clair que

$$\|u - u_h^e\|_A \leq \|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} + \|\Pi_h u - u_h^e\|_A.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\|\Pi_h u - u_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |u_h^f|_{1,h} \leq c \left(\|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} + R_h(u) \right).$$

Puisque $\Pi_h u \in X_h$ n'a pas de composante aux échelles fluctuantes et que $[\Pi_h u]_F = 0$ pour tout $F \in \mathcal{F}_h$, on a

$$\begin{aligned} \forall w_h^e \in X_h^e, \quad \Theta_h(u_h^e - \Pi_h u, w_h^e) &= (f, w_h^e)_{0,\Omega} - a_h(u, w_h^e) - \epsilon d_h(u, w_h^e) \\ &\quad + a_h(u - \Pi_h u, w_h^e) + \epsilon d_h(u - \Pi_h u, w_h^e). \end{aligned}$$

La condition inf-sup (3.23) conduit à

$$\begin{aligned} \|u_h^e - \Pi_h u\|_A + h^{\frac{1}{2}} |u_h^f|_{1,h} &\leq c \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(u_h^e - \Pi_h u, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A} \\ &= c \sup_{w_h^e \in X_h^e} \left[\frac{(f, w_h^e)_{0,\Omega} - a_h(u, w_h^e) - \epsilon d_h(u, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_h(u - \Pi_h u, w_h^e) + \epsilon d_h(u - \Pi_h u, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A} \right]. \end{aligned}$$

Par le lemme 3.2.9 de continuité de $a_h(\cdot, \cdot) + \epsilon d_h(\cdot, \cdot)$ sur $H_0^1(\Omega) \times V(h)$, il vient

$$\begin{aligned} \|u_h^e - \Pi_h u\|_A + h^{\frac{1}{2}} |u_h^f|_{1,h} &\leq c \left(\sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{(f, w_h^e)_{0,\Omega} - a_h(u, w_h^e) - \epsilon d_h(u, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A} + \|u - \Pi_h u\|_{h, \frac{1}{2}} \right) \\ &\leq c \left(\|u - \Pi_h u\|_{h, \frac{1}{2}} + R_h(u) \right). \end{aligned}$$

La preuve est complète. \square

Lemme 3.2.11 (Approximabilité). *Il existe une constante c telle que*

$$\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \|v - \Pi_h v\|_{h, \frac{1}{2}} \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}) \|v\|_{2,\Omega}. \quad (3.29)$$

Démonstration. Soit $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Puisque $v - \Pi_h v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h v\|_{h, \frac{1}{2}} &= \|v - \Pi_h v\|_{0,\Omega} + \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(v - \Pi_h v)\|_{0,\Omega} + h^{\frac{1}{2}} \|\beta \cdot \nabla(v - \Pi_h v)\|_{0,\Omega} \\ &\quad + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|v - \Pi_h v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \|v - \Pi v\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par les propriétés d'approximation de Π_h , on obtient

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h v\|_{0,\Omega} + \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(v - \Pi_h v)\|_{0,\Omega} + h^{\frac{1}{2}} \|\beta \cdot \nabla(v - \Pi_h v)\|_{0,\Omega} &\leq ch(h + \epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}) \|v\|_{2,\Omega} \\ &\leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}) \|v\|_{2,\Omega}, \end{aligned}$$

3.2. Stabilisation par viscosité de sous-maille

puisque $h \leq 1$. De plus,

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|v - \Pi_h v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch^{\frac{3}{2}} \|v\|_{2,\Omega},$$

et par l'inégalité de trace continue (A.13),

$$\left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \|v - \Pi_h v\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch^{\frac{3}{2}} \|v\|_{2,\Omega}.$$

La preuve est complète. \square

Lemme 3.2.12 (Consistance). *Soit u l'unique solution de (3.2). Alors, il existe une constante c telle que*

$$R_h(u) \leq c\epsilon^{\frac{1}{2}} h \|u\|_{2,\Omega}. \quad (3.30)$$

Démonstration. Soit $w_h^e \in X_h^e$. En intégrant par parties $d_h(u, w_h^e)$ et en utilisant le fait que u est solution de (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} a_h(u, w_h^e) + \epsilon d_h(u, w_h^e) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u \cdot \nabla w_h^e + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u + \nu u) w_h^e \\ &= \int_{\Omega} (-\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \nu u) w_h^e + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \epsilon (\nabla u \cdot n) w_h^e \\ &= (f, w_h^e)_{0,\Omega} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \epsilon \nabla u \cdot [w_h^e]_F. \end{aligned}$$

L'espace X_h^e satisfait le Patch-test d'ordre 0, donc

$$a_h(u, w_h^e) + \epsilon d_h(u, w_h^e) - (f, w_h^e)_{0,\Omega} = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \epsilon (\nabla u - \Pi_F^0(\nabla u)) \cdot [w_h^e]_F,$$

où on rappelle que Π_F^0 désigne l'opérateur de projection L^2 -orthogonale de $[L^2(F)]^d$ dans $[P^0(F)]^d$. Par l'inégalité d'interpolation de faces de Crouzeix–Raviart (A.16), il vient

$$a_h(u, w_h^e) + \epsilon d_h(u, w_h^e) - (f, w_h^e)_{0,\Omega} \leq c\epsilon h \|u\|_{2,\Omega} |w_h^e|_{1,h}.$$

On en déduit (3.30). \square

Théorème 3.2.13 (Convergence). *Soit u l'unique solution de (3.2). Soit u_h^e l'unique solution de (3.12). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\|u - u_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}}|u_h^f|_{1,h} \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}})\|u\|_{2,\Omega}. \quad (3.31)$$

Démonstration. Par les lemmes 3.2.10, 3.2.11 et 3.2.12, il vient

$$\begin{aligned} \|u - u_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}}|u_h^f|_{1,h} &\leq c\left(\|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} + R_h(u)\right) \\ &\leq c\left(\|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}}h\|u\|_{2,\Omega}\right) \\ &\leq ch(h^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}})\|u\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

La preuve est complète. □

3.3 Formulation sur les échelles résolues

Dans cette section, on s'intéresse à une formulation sur les échelles résolues obtenue par condensation des bulles $\{b_T^{\text{nc}}\}_{T \in \mathcal{T}_h}$ dans le problème (3.12).

3.3.1 Le problème approché

Lemme 3.3.1. u_h^e est solution de (3.12) si et seulement si

(i) sa composante aux échelles résolues u_h est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \delta_h(u_h, v_h) + r_h(u_h, v_h) + J_0(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} + l(v_h) \quad \forall v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h), \end{cases} \quad (3.32)$$

(ii) sa composante aux échelles fluctuantes u_h^f est telle que

$$u_h^f = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{(f, b_T^{\text{nc}})_{0,T} - a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} b_T^{\text{nc}}, \quad (3.33)$$

où nous avons défini

$$\begin{aligned} \delta_h(u_h, v_h) &= a_h(u_h, v_h) + \epsilon d_h(u_h, v_h), \\ r_h(u_h, v_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}}) a_h(b_T^{\text{nc}}, v_h)}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})}, \\ l(v_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{(f, b_T^{\text{nc}})_{0,T} a_h(b_T^{\text{nc}}, v_h)}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})}. \end{aligned}$$

3.3. Formulation sur les échelles résolues

Démonstration. La solution $u_h^e \in X_h^e$ de (3.12) se décompose comme suit :

$$u_h^e = u_h + u_h^f = u_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_T b_T^{\text{nc}},$$

où $\alpha_T \in \mathbb{R}$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$.

(i) Prenons comme fonction test dans (3.12) $v_h^e = b_{T'}^{\text{nc}}$ où $T' \in \mathcal{T}_h$. Alors,

$$\delta_h(u_h, b_{T'}^{\text{nc}}) + J_0(u_h, b_{T'}^{\text{nc}}) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_T \Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_{T'}^{\text{nc}}) = (f, b_{T'}^{\text{nc}})_{0,\Omega}.$$

Puisque pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$, $d_h(v_h, b_T^{\text{nc}}) = 0$ et $J_0(v_h, b_T^{\text{nc}}) = 0$, et puisque $\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_{T'}^{\text{nc}}) = 0$ si $T \neq T'$, on en déduit

$$a_h(u_h, b_{T'}^{\text{nc}}) + \alpha_{T'} \Theta_h(b_{T'}^{\text{nc}}, b_{T'}^{\text{nc}}) = (f, b_{T'}^{\text{nc}})_{0,T'}.$$

Ceci conduit à

$$\alpha_T = \frac{(f, b_T^{\text{nc}})_{0,T} - a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.34)$$

On en déduit l'expression de u_h^f donnée en (3.33).

(ii) Prenons comme fonction test dans (3.12) $v_h^e = v_h$. On a $d_h(u_h^f, v_h) = 0$ et $J_0(u_h^f, v_h) = 0$. Comme v_h n'a pas de composante aux échelles fluctuantes, on obtient

$$\delta_h(u_h, v_h) + J_0(u_h, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_T a_h(b_T^{\text{nc}}, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega},$$

et grâce à l'expression de α_T donnée dans (3.34), on obtient bien (3.32).

La preuve est complète. \square

3.3.2 Analyse d'erreur *a priori*

L'objectif de cette section est l'analyse d'erreur *a priori* de (3.32) à partir de l'analyse d'erreur *a priori* du problème (3.12). Introduisons sur X_h^e la norme suivante :

$$\|v_h^e\|_{A,f} = \|v_h^e\|_A + (h^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}}) |v_h^f|_{1,h}. \quad (3.35)$$

Lemme 3.3.2. *Il existe une constante c telle que*

$$\forall v_h^e \in X_h^e, \quad c \|v_h^e\|_{A,f} \leq \|v_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |v_h^f|_{1,h}. \quad (3.36)$$

Démonstration. Soit $v_h^e \in X_h^e$. Comme $(\nabla v_h, \nabla v_h^f)_{0,T} = 0$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, il vient

$$|v_h^e|_{1,h}^2 = |v_h|_{1,h}^2 + |v_h^f|_{1,h}^2 \geq |v_h^f|_{1,h}^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|v_h^e\|_A^2 + h|v_h^f|_{1,h}^2 &\geq \frac{1}{2}\|v_h^e\|_A^2 + \frac{\epsilon}{2}|v_h^e|_{1,h}^2 + h|v_h^f|_{1,h}^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|v_h^e\|_A^2 + \frac{1}{2}(\epsilon + h)|v_h^f|_{1,h}^2 \\ &\geq c\|v_h^e\|_{A,f}^2. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Proposition 3.3.3. *Il existe une constante c telle que*

$$\forall v_h^e \in X_h^e, \quad \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)}{\|v_h^e\|_A} \geq c\|v_h^e\|_{A,f}. \quad (3.37)$$

Démonstration. Du lemme 3.3.2 et de la condition inf-sup du lemme 3.2.7 on déduit pour tout $v_h^e \in X_h^e$,

$$\begin{aligned} \|v_h^e\|_{A,f} &\leq c \left(\|v_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}}|v_h^f|_{1,h} \right) \\ &\leq c \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A}. \end{aligned}$$

La preuve est complète. □

Théorème 3.3.4 (Convergence). *Soit u l'unique solution de (3.2). Soit u_h l'unique solution de (3.32). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\|u - u_h\|_A \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}})\|u\|_{2,\Omega}. \quad (3.38)$$

Démonstration. L'inégalité triangulaire conduit à

$$\|u - u_h\|_A \leq \|u - \Pi_h u\|_A + \|\Pi_h u - u_h^e\|_A + \|u_h^f\|_A.$$

(1) Montrons que

$$\|\Pi_h u - u_h^e\|_A + \|u_h^f\|_A \leq c\|\Pi_h u - u_h^e\|_{A,f}. \quad (3.39)$$

Puisque $u_h^f = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \alpha_T b_T^{\text{nc}}$, avec $\alpha_T \in \mathbb{R}$, et puisque $\|b_T^{\text{nc}}\|_{0,T} \leq ch_T^{\frac{1}{2}}|b_T^{\text{nc}}|_{1,T}$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a

$$\|u_h^f\|_{0,\Omega} \leq h^{\frac{1}{2}}|u_h^f|_{1,h}.$$

3.4. Formulation mixte

De plus, par l'inégalité de trace discrète (A.14) et par l'inégalité ci-dessus, il vient

$$\|u_h^f\|_J \leq h^{\frac{1}{2}} |u_h^f|_{1,h}.$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_A$, on obtient

$$\|u_h^f\|_A \leq c(h^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}}) |u_h^f|_{1,h}.$$

Comme $\Pi_h u$ n'a pas de composantes aux échelles fluctuantes, on en déduit (3.39).

(2) Grâce à la condition inf-sup (3.37), on a

$$\|\Pi_h u - u_h^e\|_{A,f} \leq \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(\Pi_h u - u_h^e, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A}.$$

Le membre de droite de l'inégalité ci-dessus se majore comme dans la preuve du lemme 3.2.10. Ainsi, grâce aux lemmes 3.2.11 et 3.2.12,

$$\|\Pi_h u - u_h^e\|_{A,f} \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}) \|u\|_{2,\Omega},$$

si bien que

$$\|\Pi_h u - u_h^e\|_A + \|u_h^f\|_A \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}).$$

(3) En procédant comme dans le lemme 3.2.12 pour majorer $\|u - \Pi_h u\|_A$ et en utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient (3.38).

La preuve est complète. □

3.4 Formulation mixte

Considérons la formulation faible non-standard de (3.3) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \tau = 0, \quad \forall \tau \in [L^2(\Omega)]^d, \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma v + \int_{\Omega} \epsilon^{-1} (\beta \cdot \nabla u) v + \int_T \epsilon^{-1} \nu u v = \int_{\Omega} \epsilon^{-1} f v, \quad \forall v \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Introduisons les espaces $L = [L^2(\Omega)]^d \times L^2(\Omega)$, $W = H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ et $V = H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Equippons ces espaces des normes suivantes :

$$\forall (\tau, v) \in L, \quad \|(\tau, v)\|_L = \|\tau\|_{0,\Omega} + \|v\|_{0,\Omega}, \quad (3.41)$$

$$\forall (\sigma, u) \in V, \quad \|(\sigma, u)\|_V = \|\sigma\|_{0,\Omega} + \|\nabla \cdot \sigma\|_{0,\Omega} + \|\nabla u\|_{0,\Omega}. \quad (3.42)$$

Proposition 3.4.1. *Le problème (3.40) admet une et une seule solution.*

Démonstration. Considérons la forme bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$ définie sur $V \times L$ par :

$$B((\sigma, u), (\tau, v)) = (\sigma, \tau)_{0,\Omega} + (\nabla u, \tau)_{0,\Omega} + (\nabla \cdot \sigma, v)_{0,\Omega} + (\epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u, v)_{0,\Omega} + (\epsilon^{-1} \nu u, v)_{0,\Omega}. \quad (3.43)$$

D’après le théorème de Banach–Necăs–Babuška, le problème (3.40) est bien posé si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\exists \alpha_\epsilon > 0, \quad \inf_{(\sigma, u) \in V} \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\sigma, u)\|_V \|(\tau, v)\|_L} \geq \alpha_\epsilon, \quad (\text{BNB1})$$

$$\forall (\tau, v) \in L, \quad \{\forall (\sigma, u) \in V, B((\sigma, u), (\tau, v)) = 0\} \Rightarrow \{(\tau, v) = 0\}. \quad (\text{BNB2})$$

La condition inf-sup (BNB1) n’étant pas utilisée dans ce chapitre pour obtenir des estimations d’erreur uniformes en ϵ , on acceptera que la constante α_ϵ dépende de ϵ . Pour vérifier les deux conditions ci-dessus, procédons de la même façon que pour les systèmes de Friedrichs ; voir [EG04, p. 226].

(1) Montrons que la condition (BNB1) est satisfaite.

- (a) Commençons par montrer que la forme bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$ est L^2 -coercive sur V , c’est-à-dire qu’il existe une constante c_ϵ (dépendant de ϵ) telle que pour tout $(\tau, v) \in V$,

$$B((\tau, v), (\tau, v)) \geq c \|(\tau, v)\|_L^2.$$

En utilisant le fait que $(\beta \cdot \nabla v, v)_{0,\Omega} = 0$ puisque $\nabla \cdot \beta = 0$ et $v \in H_0^1(\Omega)$, il vient

$$B((\tau, v), (\tau, v)) = \|\tau\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon^{-1} \|\nu v\|_{0,\Omega}^2 + (\nabla v, \tau)_{0,\Omega} + (\nabla \cdot \tau, v)_{0,\Omega}.$$

On conclut en observant que $(\nabla v, \tau)_{0,\Omega} + (\nabla \cdot \tau, v)_{0,\Omega} = 0$.

(b) Pour tout $(\sigma, u) \in V$, on a

$$\begin{aligned}
 \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\tau, v)\|_L} &\geq \sup_{(\tau, v) \in V} \frac{(\nabla u, \tau)_{0, \Omega} + (\nabla \cdot \sigma, v)_{0, \Omega} + (\epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u, v)_{0, \Omega}}{\|(\tau, v)\|_L} \\
 &\quad - \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{(\sigma, \tau)_{0, \Omega} + (\epsilon^{-1} \nu u, v)_{0, \Omega}}{\|(\tau, v)\|_L} \\
 &\geq \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{(\nabla u, \tau)_{0, \Omega} + (\nabla \cdot \sigma, v)_{0, \Omega} + (\epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u, v)_{0, \Omega}}{\|(\tau, v)\|_L} \\
 &\quad - \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{\|\sigma\|_{0, \Omega} \|\tau\|_{0, \Omega} + \epsilon^{-1} \|\nu u\|_{0, \Omega} \|v\|_{0, \Omega}}{\|(\tau, v)\|_L} \\
 &\geq \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{(\nabla u, \tau)_{0, \Omega} + (\nabla \cdot \sigma, v)_{0, \Omega} + (\epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u, v)_{0, \Omega}}{\|(\tau, v)\|_L} \\
 &\quad - c_\epsilon (\|\sigma\|_{0, \Omega} + \|u\|_{0, \Omega}) \\
 &\geq \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{(\nabla u, \tau)_{0, \Omega} + (\nabla \cdot \sigma, v)_{0, \Omega} + (\epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u, v)_{0, \Omega}}{\|(\tau, v)\|_L} \\
 &\quad - c_\epsilon \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\tau, v)\|_L},
 \end{aligned}$$

grâce à la L^2 -coercivité de $B(\cdot, \cdot)$ sur V . Ainsi,

$$\sup_{(\tau, v) \in L} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\tau, v)\|_L} \geq \|\nabla u\|_{0, \Omega} + \|\nabla \cdot \sigma + \epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u\|_{0, \Omega} - c_\epsilon \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\tau, v)\|_L}.$$

Par l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned}
 \|\nabla \cdot \sigma\|_{0, \Omega} &= \|-\epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u + \nabla \cdot \sigma + \epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u\|_{0, \Omega} \\
 &\leq \epsilon^{-1} \beta_{\infty, \Omega} \|\nabla u\|_{0, \Omega} + \|\nabla \cdot \sigma + \epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u\|_{0, \Omega},
 \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$(1 + \epsilon^{-1} \beta_{\infty, \Omega})^{-1} (\|\nabla u\|_{0, \Omega} + \|\nabla \cdot \sigma\|_{0, \Omega}) \leq \|\nabla u\|_{0, \Omega} + \|\nabla \cdot \sigma + \epsilon^{-1} \beta \cdot \nabla u\|_{0, \Omega}.$$

Donc,

$$\sup_{(\tau, v) \in L} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\tau, v)\|_L} \geq c'_\epsilon (\|\nabla u\|_{0, \Omega} + \|\nabla \cdot \sigma\|_{0, \Omega}) - c_\epsilon \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\tau, v)\|_L}.$$

D'où

$$c''_\epsilon \sup_{(\tau, v) \in L} \frac{B((\sigma, u), (\tau, v))}{\|(\tau, v)\|_L} \geq \|\nabla u\|_{0, \Omega} + \|\nabla \cdot \sigma\|_{0, \Omega} + \|\sigma\|_{0, \Omega} = \|(\sigma, u)\|_V.$$

On en déduit (BNB1).

- (2) Montrons que la condition (BNB2) est satisfaite. Soit $(\tau, v) \in L$ tel que $\forall(\sigma, u) \in V$, $B((\sigma, u), (\tau, v)) = 0$. Alors, dans $[\mathcal{D}'(\Omega)]^d$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ respectivement, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\tau - \nabla v &= 0, \\ -\epsilon \nabla \cdot \tau - \beta \cdot \nabla v + \nu v &= 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que $(\tau, v) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$. Alors, en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ le produit de dualité entre les espaces $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, il vient

$$B((\sigma, u), (\tau, v)) = \langle \sigma \cdot n, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0.$$

Le champ σ dans l'égalité ci-dessus étant arbitraire, la surjectivité de l'application trace (voir A.5.1) implique que $v = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $v \in H_0^1(\Omega)$. On en déduit que $(\tau, v) \in V$. On a donc $B((\tau, v), (\tau, v)) = 0$. La L^2 -coercivité de $B(\cdot, \cdot)$ sur V implique $(\tau, v) = 0$. On en déduit (BNB2).

La preuve est complète. \square

3.5 Schéma boîte

L'écriture du schéma boîte pour les équations de convection–diffusion–réaction va nous conduire à une formule de décentrement local du flux sur chaque élément de la triangulation. Introduisons pour cela les notations suivantes.

Soit T un élément de \mathcal{T}_h de bord ∂T . Soit $v_h \in H^1(\mathcal{T}_h)$. On définit pour presque tout $x \in \partial T$

$$v_h^{\downarrow}(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in T}} v_h(y) \quad \text{et} \quad v_h^{\circ} = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \notin T}} v_h(y).$$

Par convention $v_h^{\circ} = 0$ sur le bord $\partial\Omega$. De plus, désignons par n_T la normale extérieure à T dans \mathcal{T}_h et posons

$$\partial T^{\text{in}} = \{x \in \partial T, \beta \cdot n_T < 0\}. \quad (3.44)$$

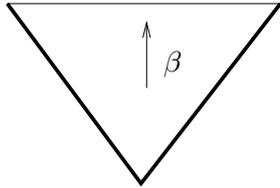


FIG. 3.1: L'ensemble ∂T^{in} est représenté par les faces en gras

3.5. Schéma boîte

Rappelons que Π^0 désigne l'opérateur de projection L^2 -orthogonale sur l'ensemble des fonctions constantes par morceaux $P^0(\mathcal{T}_h)$. Enfin, on note $f_h = \Pi^0 f$.

Le schéma boîte que nous considérons pour discrétiser (3.40) est une approximation non-conforme de type Petrov–Galerkin :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma_h, u_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \tau_h + \int_{\Omega} \nu \epsilon^{-1} u_h (\pi_h^1 \cdot \tau_h) + t_{1,h}(u_h, \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d, \\ \int_{\Omega} \epsilon (\nabla \cdot \sigma_h) v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h) v_h + \int_T \nu u_h v_h + t_{2,h}(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} + l(v_h), \quad \forall v_h \in P^0(\mathcal{T}_h), \end{array} \right. \quad (3.45)$$

où

$$t_{1,h}(u_h, \tau_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[-\frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}}) \hat{a}_h(b_T^{\text{nc}}, \tau_h)}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial T^{\text{in}}} |\beta \cdot n_T| (u_h^i - u_h^o) (\pi_h^1 \cdot \tau_h)|_T \right],$$

et

$$t_{2,h}(u_h, v_h) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \int_T \nu b_T^{\text{nc}} v_h,$$

avec

$$\hat{a}_h(b_T^{\text{nc}}, \tau_h) = -\frac{1}{\epsilon} \int_T (b_T^{\text{nc}} \beta - \nu b_T^{\text{nc}} \pi_h^1) \cdot \tau_h.$$

On rappelle que $\pi_h^1(x)|_T = (x_1 - G_{T,1}, \dots, x_d - G_{T,d})$, où $(G_{T,1}, \dots, G_{T,d})$ sont les coordonnées cartésiennes du barycentre du triangle T .

Remarquons que les relations d'Euler (A.1) garantissent qu'il y a autant d'équations que d'inconnues dans (3.45). Pour montrer la caractère bien posé de (3.45) une première possibilité consiste à prouver directement une condition inf-sup discrète. Une deuxième possibilité, qui est celle retenue ici, consiste à faire le lien avec l'approximation non-conforme aux échelles résolues.

Proposition 3.5.1. (σ_h, u_h) est solution de (3.45) si et seulement si

(i) u_h est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que} \\ \delta_h(u_h, v_h) + J_0(u_h, v_h) + r_h(u_h, v_h) = (f_h, v_h)_{0,\Omega} + l(\Pi^0 v_h), \quad \forall v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h). \end{array} \right. \quad (3.46)$$

(ii) σ_h vérifie la formule de reconstruction suivante pour tout $T \in \mathcal{T}_h$:

$$\begin{aligned} \sigma_h|_T &= -\nabla u_h|_T - \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\epsilon \Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \Pi^0(b_T^{\text{nc}}(\beta - \nu \pi_h^1)) - \frac{1}{\epsilon|T|} \int_{\partial T^{\text{in}}} |\beta \cdot n_T| (u_h^i - u_h^o) \pi_h^1|_T \\ &\quad + \frac{1}{d} \left(-\beta \cdot \nabla u_h|_T - \Pi^0(\nu u_h)|_T + \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \Pi^0(\nu b_T^{\text{nc}}) \right) \\ &\quad + f_h|_T + \frac{(f, b_T^{\text{nc}})_{0,T}}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \Pi^0(\nu b_T^{\text{nc}}) \pi_h^1|_T. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Démonstration.

(1) Montrons que si (σ_h, u_h) est solution de (3.45), alors u_h est solution de (3.46).

(a) Soit $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$. Il est clair que $\nabla v_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d$. Prenons $\tau_h = \epsilon \nabla v_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d$ dans la première équation de (3.45). Alors par intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \sigma_h \cdot \nabla v_h &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon (\nabla \cdot \sigma_h) v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \epsilon (\sigma_h \cdot n_T) v_h \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon (\nabla \cdot \sigma_h) v_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \epsilon \sigma_h \cdot \int_F [v_h]_F \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon (\nabla \cdot \sigma_h) v_h, \end{aligned}$$

puisque $\sigma_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$ et $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$. Par conséquent,

$$\int_{\Omega} \epsilon (\nabla \cdot \sigma_h) v_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nu u_h (\pi_h^1 \cdot \nabla v_h) + t_{1,h}(u_h, \epsilon \nabla v_h).$$

Prenons $\Pi^0 v_h \in P^0(\mathcal{T}_h)$ comme fonction test dans la seconde équation de (3.45).

Alors, on a

$$- \int_{\Omega} \epsilon (\nabla \cdot \sigma_h) \Pi^0 v_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T (\beta \cdot \nabla u_h) \Pi^0 v_h + \int_T \nu u_h \Pi^0 v_h \right] + t_{2,h}(u_h, \Pi^0 v_h) - (f, \Pi^0 v_h)_{0,\Omega} - l(\Pi^0 v_h).$$

De plus, $\nabla \cdot \sigma_h \in P^0(\mathcal{T}_h)$, donc $\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_h) v_h = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_h) \Pi^0 v_h$. ainsi en combinant les deux égalités ci-dessus il vient

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T (\beta \cdot \nabla u_h) \Pi^0 v_h + \nu u_h (\Pi^0 v_h + \pi_h^1 \cdot \nabla v_h) \right] \\ + t_{1,h}(u_h, \epsilon \nabla v_h) + t_{2,h}(u_h, \Pi^0 v_h) = (f, \Pi^0 v_h)_{0,\Omega} + l(\Pi^0 v_h). \end{aligned}$$

Comme $\beta \cdot \nabla u_h \in P^0(\mathcal{T}_h)$, $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h) \Pi^0 v_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h) v_h$. De plus, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et tout $v_h \in P^1(T)$, on a d'après (A.21) la décomposition suivante :

$$v_h|_T = \Pi^0 v_h|_T + \pi_h^1 \cdot \nabla v_h|_T. \quad (3.48)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h) v_h + \int_{\Omega} \nu u_h v_h + t_{1,h}(u_h, \epsilon \nabla v_h) + t_{2,h}(u_h, \Pi^0 v_h) \\ = (f, \Pi^0 v_h)_{0,\Omega} + l(\Pi^0 v_h). \end{aligned}$$

(b) Montrons que pour tout $v_h \in P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$,

$$t_{1,h}(u_h, \epsilon \nabla v_h) + t_{2,h}(u_h, \Pi^0 v_h) = r_h(u_h, v_h) + J_0(u_h, v_h).$$

D'une part, en intégrant par parties le terme convectif de $\hat{a}_h(\cdot, \cdot)$, il vient

$$\hat{a}_h(b_T^{nc}, \epsilon \nabla v_h) = \int_T (\beta \cdot \nabla b_T^{nc}) v_h + \int_T \nu b_T^{nc} \pi_h^1 \cdot \nabla v_h,$$

les termes de bords s'annulant puisque pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, $b_T^{nc} v_h \in P^3(T)$ et b_T^{nc} s'annule aux points de Gauß $(g_i)_{1 \leq i \leq 6}$ du triangle T . Par suite,

$$\frac{a_h(u_h, b_T^{nc}) \hat{a}_h(b_T^{nc}, \epsilon \nabla v_h)}{\Theta_h(b_T^{nc}, b_T^{nc})} = \frac{a_h(u_h, b_T^{nc}) [(\beta \cdot \nabla b_T^{nc}, v_h)_{0,T} + (\nu b_T^{nc}, \pi_h^1 \cdot \nabla v_h)_{0,T}]}{\Theta_h(b_T^{nc}, b_T^{nc})}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} t_{1,h}(u_h, \epsilon \nabla v_h) + t_{2,h}(u_h, \Pi^0 v_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{a_h(u_h, b_T^{nc})}{\Theta_h(b_T^{nc}, b_T^{nc})} \int_T [(\beta \cdot \nabla b_T^{nc}) v_h + \nu b_T^{nc} (\Pi^0 v_h + \pi_h^1 \cdot \nabla v_h)] \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (|\beta \cdot n_T| (u_h^i - u_h^o) (\pi_h^1 \cdot \nabla v_h)^i)|_T. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la décomposition (3.48), il vient

$$\nu b_T^{nc} (\Pi^0 v_h + \pi_h^1 \cdot \nabla v_h) = \nu b_T^{nc} v_h,$$

si bien que

$$\begin{aligned} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{a_h(u_h, b_T^{nc})}{\Theta_h(b_T^{nc}, b_T^{nc})} \int_T [(\beta \cdot \nabla b_T^{nc}) v_h + \nu b_T^{nc} (\Pi^0 v_h + \pi_h^1 \cdot \nabla v_h)] &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{a_h(u_h, b_T^{nc}) a_h(b_T^{nc}, v_h)}{\Theta_h(b_T^{nc}, b_T^{nc})} \\ &= r_h(u_h, v_h). \end{aligned}$$

D'autre part, la décomposition (3.48), le fait que $\beta \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d$ et le fait que $P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$ satisfait le Patch–test d'ordre 0 conduisent à

$$J_0(u_h, v_h) = - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \int_F \beta \cdot [u_h]_F (\pi_h^1 \cdot \nabla v_h)^\downarrow.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \frac{1}{2} |\beta \cdot n_T| (u_h^i - u_h^o) (\pi_h^1 \cdot \nabla v_h)|_T &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \int_F |\beta \cdot n| u_h (\pi_h^1 \cdot \nabla v_h) \\ &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [u_h]_F (\pi_h^1 \cdot \nabla v_h)^\downarrow \\ &= J_0(u_h, v_h). \end{aligned}$$

Donc,

$$t_{1,h}(u_h, \epsilon \nabla v_h) + t_{2,h}(u_h, \Pi^0 v_h) = r(u_h, v_h) + J_0(u_h, v_h).$$

(c) Finalement, il est clair que

$$(f, \Pi^0 v_h)_{0,\Omega} + l(\Pi^0 v_h) = (f_h, v_h)_{0,\Omega} + l(\Pi^0 v_h).$$

(d) Ceci montre que u_h est solution de (3.46).

(2) Montrons (3.47).

D'après (A.19), tout élément σ_h de $RT^0(\mathcal{T}_h)$ se décompose sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h comme suit :

$$\sigma_h|_T = \Pi^0 \sigma_h|_T + \frac{1}{d} (\nabla \cdot \sigma_h) \pi_h^1|_T. \quad (3.49)$$

(a) Calculons $\Pi^0 \sigma_h$.

Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Prenons $\tau_h = e_i 1_T$, $i \in \{1, \dots, d\}$, où e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d et 1_T l'indicatrice de T . Il vient

$$t_{1,h}(u_h, \tau_h) = \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\epsilon \Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \int_T b_T^{\text{nc}} (\beta - \nu \pi_h^1) \cdot e_i + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial T^{\text{in}}} |\beta \cdot n_T| (u_h^i - u_h^o) (\pi_h^1 \cdot e_i)|_T.$$

Posons $\zeta_T = \int_{\partial T^{\text{in}}} |\beta \cdot n_T| (u_h^i - u_h^o) \pi_h^1|_T \in \mathbb{R}^d$. Ainsi, la première équation de (3.45) conduit à

$$\int_T \left(\sigma_h + \nabla u_h + \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\epsilon \Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} b_T^{\text{nc}} (\beta - \nu \pi_h^1) + \frac{1}{\epsilon |T|} \zeta_T \right) \cdot e_i = 0.$$

On en déduit

$$\Pi^0 \sigma_h|_T = -\nabla u_h|_T - \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\epsilon \Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \Pi^0 (b_T^{\text{nc}} (\beta - \nu \pi_h^1)) - \frac{1}{\epsilon |T|} \zeta_T.$$

(b) Calculons $\nabla \cdot \sigma_h$.

Soit $T \in \mathcal{T}_h$ et prenons $v_h = 1_T$ dans la seconde équation de (3.45). Ceci conduit à

$$\int_T \left(\epsilon \nabla \cdot \sigma_h + \beta \cdot \nabla u_h + \nu u_h - \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \nu b_T^{\text{nc}} - f + \frac{(f, b_T^{\text{nc}})_{0,T}}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} (\beta \cdot \nabla b_T^{\text{nc}} - \nu b_T^{\text{nc}}) \right) = 0.$$

Ceci mène à

$$\begin{aligned} \epsilon \nabla \cdot \sigma_h|_T &= \left[-\beta \cdot \nabla u_h - \Pi^0(\nu u_h) + \frac{a_h(u_h, b_T^{\text{nc}})}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \Pi^0(\nu b_T^{\text{nc}}) \right. \\ &\quad \left. + f_h - \frac{(f, b_T^{\text{nc}})_{0,T}}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \Pi^0(\beta \cdot \nabla b_T^{\text{nc}} - \nu b_T^{\text{nc}}) \right] |_T. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $\Pi^0(\beta \cdot \nabla b_T^{\text{nc}}) = |T|^{-1} \int_T \beta \cdot \nabla b_T^{\text{nc}} = 0$.

(3) La réciproque se base sur les mêmes calculs.

La preuve est complète. \square

Remarque 3.5.2. Si $\nu = 0$, la formule de reconstruction du flux est :

$$\begin{aligned} \sigma_h|_T &= -\nabla u_h|_T + \beta \cdot \nabla u_h \left(\frac{\gamma_1^2 |T|}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} \frac{1}{\epsilon} \beta - \frac{1}{d} \pi_h^1 \right) |_T + \frac{1}{d} f_h \pi_h^1 \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial T^{\text{in}}} |\beta \cdot n_T| (u_h^i - u_h^o) (\pi_h^1 \cdot e_i) |_T, \end{aligned} \quad (3.50)$$

avec γ_1 définie en (3.7). Ce résultat s'obtient en remarquant d'une part que $\beta \cdot \nabla u_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d$ donc $a_h(u_h, b_T^{\text{nc}}) = \beta \cdot \nabla u_h \gamma_1 |T|$. D'autre part, on a $\Pi^0(\beta b_T^{\text{nc}}) = \beta \gamma_1$.

Remarque 3.5.3. On note qu'une différence importante par rapport à la formule de reconstruction locale du flux dans l'équation de Darcy est que la pénalisation des sauts aux interfaces induit une formule de reconstruction sur une maille $T \in \mathcal{T}_h$ qui combine des valeurs sur T et ses voisins amont.

3.6 Analyse d'erreur *a posteriori*

Cette section est consacrée à l'analyse d'erreur *a posteriori* par résidu de la méthode de stabilisation par viscosité de sous-maille dans un cadre non-conforme (3.12).

On utilisera l'opérateur de Oswald déjà considéré au chapitre 2 et dont on rappelle la définition. Soit $\mathcal{I}_{\text{Os}} : P^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ l'opérateur d'interpolation de Oswald tel que

pour v_h dans $P^1(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{I}_{\text{Os}}v_h$ est l'unique fonction de $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ telle que pour tout sommet intérieur $s \in \mathcal{S}_h^i$,

$$\mathcal{I}_{\text{Os}}v_h(s) = \frac{1}{\#\mathcal{T}_s} \sum_{T \in \mathcal{T}_s} v_h|_T(s), \quad (3.51)$$

et $\mathcal{I}_{\text{Os}}v_h(s) = 0$ si $s \in \partial\Omega$. Rappelons que pour un sommet s de \mathcal{S}_h , \mathcal{T}_s désigne l'ensemble des triangles de \mathcal{T}_h partageant le sommet s . Le cardinal de cet ensemble est noté $\#\mathcal{T}_s$. Notons par $\mathcal{F}_T^{\text{Os}}$ l'ensemble des faces du maillage contenant un sommet de $T \in \mathcal{T}_h$.

Lemme 3.6.1. *Il existe deux constantes c_1 et c_2 indépendantes de h telles que pour tout v_h dans $P^1(\mathcal{T}_h)$,*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \|v_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}v_h\|_{0,T} \leq c \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\text{Os}}} h_F^{\frac{1}{2}} \|[v_h]_F\|_{0,F}, \quad (3.52)$$

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad |v_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}v_h|_{1,T} \leq c \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\text{Os}}} h_F^{-\frac{1}{2}} \|[v_h]_F\|_{0,F}. \quad (3.53)$$

Démonstration. On pourra se référer à [KP03] pour la preuve de ce résultat. \square

Introduisons sur $V(h)$ la norme $\|\cdot\|_{\epsilon,\Omega}$ définie par

$$\|w\|_{\epsilon,\Omega} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|w\|_{0,\Omega}, \quad (3.54)$$

et localisons cette norme comme suit :

$$\|w\|_{\epsilon,\Delta} = \left(\sum_{T \in \Delta} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|w\|_{0,\Delta}, \quad (3.55)$$

où Δ est une union de triangles de \mathcal{T}_h , qui par la suite sera T , Δ_T ou Δ_F . On rappelle que Δ_T , respectivement Δ_F est l'union des éléments de \mathcal{T}_h qui partagent au moins un sommet avec T , respectivement avec F .

Théorème 3.6.2 (Fiabilité). *Soit u l'unique solution de (3.1). Soit u_h^e l'unique solution de (3.12). Alors il existe une constante c telle que*

$$\begin{aligned} \|u - u_h^e\|_{\epsilon,\Omega} &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, u_h^e)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \eta_{2,F}(u_h^e)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \inf_{v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h^e - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.6. Analyse d'erreur *a posteriori*

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{1,T}(f, u_h^e) &= \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T} \\ &+ \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f - f_h\|_{0,T} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^i} h_F \|\epsilon^{\frac{1}{2}} [\nabla u_h^e]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}, \quad \eta_{2,F}(u_h^e) = h_F^{-\frac{1}{2}} \|[u_h^e]_F\|_{0,F}, \quad (3.58)$$

et

$$\varrho_T(u_h^e - v_h) = \|u_h^e - v_h\|_{1,T}. \quad (3.59)$$

Démonstration. Soit $v_h \in X_h^e \cap H_0^1(\Omega) = P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$ et posons $w = u - v_h \in H_0^1(\Omega)$. En remarquant que $a_s(w, w) = a_h(w, w)$ puisque $J_0(w, w) = 0$, il vient

$$\begin{aligned} \|\nu^{\frac{1}{2}}(u - v_h)\|_{0,\Omega}^2 + \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u - v_h)\|_{0,\Omega}^2 &= a_s(u - v_h, w) + \epsilon d_h(u - v_h, w) \\ &= \delta_h(u - u_h^e, w) + \delta_h(u_h^e - v_h, w). \end{aligned}$$

(1) Estimons $\delta_h(u - u_h^e, w)$ pour $w \in H_0^1(\Omega)$.

En intégrant par parties le terme diffusif, il vient

$$\begin{aligned} \delta_h(u - u_h^e, w) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e, w)_{0,T} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F [\epsilon \nabla u_h^e]_F w \\ &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f - f_h, w)_{0,T}. \end{aligned}$$

Soit $w_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$. Puisque w_h n'a pas de composantes aux échelles fluctuantes,

$$\delta_h(u_h^e, w_h) + J_0(u_h^e, w_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} = \delta_h(u, v_h).$$

En d'autres termes,

$$\delta_h(u - u_h^e, w_h) = J_0(u_h^e, w_h).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \delta_h(u - u_h^e, w) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e)(w - w_h) + \int_T (f - f_h)(w - w_h) \\
 &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F [\epsilon \nabla u_h^e]_F (w - w_h) + J_0(u_h^e, w_h) \\
 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\|f_h - \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T} + \|f - f_h\|_{0,T}) \|w - w_h\|_{0,T} \\
 &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \|[\epsilon \nabla u_h^e]_F\|_{0,F} \|w - w_h\|_{0,F} + J_0(u_h^e, w_h).
 \end{aligned}$$

Prenons $w_h = \mathcal{C}_h w$ où \mathcal{C}_h désigne l'opérateur d'interpolation de Clément. Alors, grâce aux inégalités (A.6) et (A.7), il vient

$$\begin{aligned}
 \delta_h(u - u_h^e, w) &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \epsilon^{-1} h_T^2 \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T}^2 + \epsilon^{-1} h_T^2 \|f - f_h\|_{0,T}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} h_F^{-1} \|[\epsilon^{1/2} \nabla u_h^e]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\epsilon^{1/2} \nabla w\|_{0,\Omega} + J_0(u_h^e, w_h).
 \end{aligned}$$

Estimons le terme $J_0(u_h^e, w_h)$.

L'inégalité de trace discrète (A.14) et la L^2 -stabilité de \mathcal{C}_h , (A.4), conduisent à

$$\begin{aligned}
 J_0(u_h, w_h) &= - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \int_F |\beta|_F [u_h^e]_F w_h^\downarrow \leq c \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} h_F^{-\frac{1}{2}} \|[u_h^e]_F\|_{0,F} h_F^{\frac{1}{2}} \|w_h^\downarrow\|_{0,F} \\
 &\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} h_F^{-1} \|[u_h^e]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|_{0,\Omega} \\
 &\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{2,F}(u_h^e)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \delta_h(u - u_h^e, w) &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \epsilon^{-1} h_T^2 \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T}^2 + \epsilon^{-1} h_T^2 \|f - f_h\|_{0,T}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} h_F^{-1} \|[\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla u_h^e]_F\|_{0,F}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} h_F^{-1} \|[u_h^e]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon, \Omega} \\
 &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, u_h^e)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \eta_{2,F}(u_h^e)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon, \Omega}.
 \end{aligned}$$

(2) Estimons $\delta_h(u_h^e - v_h, w)$ pour $w \in H_0^1(\Omega)$.

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}
 \delta_h(u_h^e - v_h^e, w) &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u_h^e - v_h)\|_{0,T}^2 + \|\nabla(u_h^e - v_h)\|_{0,T}^2 + \|u_h^e - v_h\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,T}^2 + \|w\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h^e - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon, \Omega},
 \end{aligned}$$

puisque $\epsilon \leq 1$.

(3) Les deux étapes précédentes permettent d'écrire que

$$\|u - v_h^e\|_{\epsilon, \Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, u_h^e)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \eta_{2,F}(u_h^e)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h^e - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(4) Par l'inégalité triangulaire on a

$$\|u - u_h^e\|_{\epsilon, \Omega} \leq \|u - v_h\|_{\epsilon, \Omega} + \|v_h - u_h^e\|_{\epsilon, \Omega}.$$

On conclut en observant que $\|v_h - u_h^e\|_{\epsilon, \Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h^e - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ puisque $\epsilon \leq 1$.

La preuve est complète. \square

Corollaire 3.6.3. *Soit u l'unique solution de (3.1). Soit u_h^e l'unique solution de (3.12).*

Alors, il existe une constante c telle que

$$\|u - u_h^e\|_{\epsilon, \Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\eta_{1,T}(f, u_h^e)^2 + \eta_{3,T}(u_h^e)^2 + \eta_{4,T}(u_h^f)^2] + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \eta_{2,F}(u_h^e)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

$$\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\eta_{1,T}(f, u_h^e)^2 + \eta_{4,T}(u_h^f)^2] + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \eta_{2,F}(u_h^e)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \eta_{5,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.61)$$

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{3,T}(u_h) = \|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}} u_h\|_{1,T}, \quad (3.62)$$

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{4,T}(u_h^f) = \|u_h^f\|_{1,T}, \quad (3.63)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \eta_{5,F}(u_h) = h_F^{-\frac{1}{2}} \|[u_h]_F\|_{0,F}. \quad (3.64)$$

Démonstration.

(1) Il est clair que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et tout $v_h \in P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$

$$\varrho_T(u_h^e - v_h) \leq \|u_h - v_h\|_{1,T} + \|u_h^f\|_{1,T}.$$

L'inégalité (3.60) résulte directement du choix $v_h = \mathcal{I}_{\text{Os}} u_h$ dans l'inégalité ci-dessus.

(2) L'inégalité (3.61) résulte directement des inégalités (4.12) et (4.13). En effet,

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}} u_h\|_{1,T} &\leq c \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\text{Os}}} (h_F^{\frac{1}{2}} + h_F^{-\frac{1}{2}}) \|[u_h]_F\|_{0,F} \\ &\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\text{Os}}} \eta_{5,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

puisque $h \leq 1$.

La preuve est complète. \square

Proposition 3.6.4 (Optimalité). *Soit u l'unique solution de (3.2). Soit u_h^e (3.12). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{1,T}(f, u_h^e) \leq c(1 + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T) \|u - u_h^e\|_{\epsilon, \mathcal{T}_F} + \epsilon^{-1} h_T \|f - f_h\|_{0,T}, \quad (3.65)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}, \quad \eta_{2,F}(u_h^e) \leq c\epsilon^{-\frac{1}{2}} \|u - u_h^e\|_{\epsilon, \mathcal{T}_F}. \quad (3.66)$$

Démonstration.

(1) Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Estimons $\eta_{1,T}(f, u_h^e)$ en utilisant les techniques développées dans [Ver98].

(a) Estimation de $\epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T}$.

Rappelons que b_T^c désigne la bulle conforme définie en (A.22). Posons $w_T = b_T^c(f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e) \in H_0^1(T)$. Alors, en intégrant par parties le terme diffusif, il vient

$$\begin{aligned} \delta_h(u - u_h^e, w_T) &= \int_T \epsilon \nabla(u - u_h^e) \cdot \nabla w_T + \int_T (\beta \cdot \nabla(u - u_h^e) + \nu(u - u_h^e)) w_T \\ &= (f - f_h, w_T)_{0,T} + (f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e, w_T)_{0,T}, \end{aligned}$$

puisque $w_T \in H_0^1(T)$. D'après le lemme (A.4.2), $\|v\|_{0,T}^2 \leq c(v, b_T^c v)_{0,T}$ pour $v \in P^2(T)$. Donc,

$$\begin{aligned} c \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T}^2 &\leq (f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e, w_T)_{0,T} \\ &= \delta_h(u - u_h^e, w_T) + (f_h - f, w_T)_{0,T}. \end{aligned}$$

Majorons les deux termes du membre de droite de l'inégalité précédente. Comme $\|b_T^c v\|_{0,T} \leq c \|v\|_{0,T}$ et $|b_T^c v|_{1,T} \leq c h_T^{-1} \|v\|_{0,T}$ pour tout $v \in P^2(T)$, on obtient

$$\|w_T\|_{0,T} \leq c \|f_h + \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T},$$

et

$$|w_T|_{1,T} \leq c h_T^{-1} \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} \delta_h(u - u_h^e, w_T) &\leq c \left(\|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u - u_h^e)\|_{0,T}^2 + \|\nu^{\frac{1}{2}}(u - u_h^e)\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w_T\|_{0,T}^2 + (1 + \epsilon^{-1}) \|w_T\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\epsilon^{\frac{1}{2}} h_T^{-1} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \|u - u_h^e\|_{\epsilon\beta\sigma,T} \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T}. \end{aligned}$$

De plus,

$$(f - f_h, w_T)_{0,T} \leq c \|f - f_h\|_{0,T} \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T}.$$

En collectant les deux inégalités ci-dessus, on obtient

$$\|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T} \leq c \left[\left(\epsilon^{\frac{1}{2}} h_T^{-1} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \|u - u_h^e\|_{\epsilon\beta\sigma,T} + \|f - f_h\|_{0,T} \right],$$

et donc

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,T} \leq c (1 + \epsilon^{-1} h_T) \|u - u_h^e\|_{\epsilon\beta\sigma, T} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f - f_h\|_{0,T}.$$

(b) Estimation de $h_F^{\frac{1}{2}} \|[\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla u_h^e]_F\|_{0,F}$ pour $F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^i$.

Rappelons que b_F^c désigne la bulle conforme définie en (A.4.4). Pour $v_h^e \in X_h^e$ et pour $F \in \mathcal{F}_h$, notons par $P_F[\epsilon \nabla v_h^e]_F$ le prolongement continu de $[\epsilon \nabla v_h^e]_F$ à \mathcal{T}_F . Posons $w_F = b_F^c P_F(-[\epsilon \nabla u_h^e]_F) \in H_0^1(\mathcal{T}_F)$. Alors,

$$([\epsilon \nabla u_h^e]_F, w_F)_{0,F} = \delta_h(u_h^e, w_F) - \sum_{T \in \mathcal{T}_F} (-\epsilon \Delta u_h^e + \beta \cdot \nabla u_h^e + \nu u_h^e, w_F)_{0,T}.$$

D'après le lemme (A.4.5), $\|v\|_{0,F}^2 \leq c(v, b_F^c v)_{0,F}$ pour tout $v \in P^2(F)$. Donc

$$\begin{aligned} c \|[\epsilon \nabla u_h^e]_F\|_{0,F}^2 &\leq -([\epsilon \nabla u_h^e]_F, w_F)_{0,F} \\ &= \delta_h(u - u_h^e, w_F) \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_F} [(f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e, w_F)_{0,T} - (f - f_h, w_F)_{0,T}]. \end{aligned}$$

Majorons les trois termes du membre de droite de l'inégalité ci-dessus. D'une part, $\|b_F^c v\|_{0,\mathcal{T}_F} \leq c h_F^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,F}$ et $|b_F^c v|_{1,\mathcal{T}_F} \leq c h_F^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0,F}$ pour tout $v \in P^2(F)$. Ceci mène à

$$\|w_F\|_{0,\mathcal{T}_F} \leq c h_F^{\frac{1}{2}} \|[\epsilon \nabla u_h^e]_F\|_{0,F} \quad \text{et} \quad |w_F|_{1,\mathcal{T}_F} \leq c h_F^{-\frac{1}{2}} \|[\epsilon \nabla u_h^e]_F\|_{0,F}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta_h(u - u_h^e, w_F) &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_F} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla (u - u_h^e)\|_{0,T}^2 + \|\nu^{\frac{1}{2}} (u - u_h^e)\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_F} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w_F\|_{0,T}^2 + (1 + \epsilon^{-1}) \|w_F\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\epsilon^{\frac{1}{2}} h_F^{-\frac{1}{2}} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} \right) \|u - u_h^e\|_{\epsilon\beta\sigma, \mathcal{T}_F} \|[\epsilon \nabla u_h^e]_F\|_{0,F}. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la majoration de $\|f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,\mathcal{T}_F}$ obtenue ci-dessus pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et la régularité du maillage, il vient

$$\begin{aligned} (f_h + \epsilon \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e, w_F)_{0,\mathcal{T}_F} &\leq c h_T^{\frac{1}{2}} \|f_h + \Delta u_h^e - \beta \cdot \nabla u_h^e - \nu u_h^e\|_{0,\mathcal{T}_F} \|[\epsilon \nabla u_h^e]_F\|_{0,F} \\ &\leq c \left((\epsilon^{\frac{1}{2}} h_T^{-\frac{1}{2}} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T^{\frac{1}{2}}) \|u - u_h^e\|_{\epsilon\beta\sigma, \mathcal{T}_F} \right. \\ &\quad \left. + h_T^{\frac{1}{2}} \|f - f_h\|_{0,\mathcal{T}_F} \right) \|[\epsilon \nabla u_h^e]_F\|_{0,F}. \end{aligned}$$

3.7. Résultats numériques

De plus,

$$(f - f_h, w_F)_{0, \mathcal{T}_F} \leq ch_T^{\frac{1}{2}} \|f - f_h\|_{0, \mathcal{T}_F} \|[\epsilon \nabla u_h^e]_F\|_{0, F}.$$

Ainsi,

$$h_F^{\frac{1}{2}} \|[\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla u_h^e]_F\|_{0, F} \leq c \left((1 + \epsilon^{-1} h_T) \|u - u_h^e\|_{\epsilon \beta \sigma, \mathcal{T}_F} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f - f_h\|_{0, \mathcal{T}_F} \right).$$

(2) Estimation de $\eta_{2, F}(u_h^e)$ pour tout F dans $\mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}$.

Dans [ABC03, KP03] il est montré que pour tout F dans \mathcal{F}_h^i ,

$$\|[u_h^e]_F\|_{0, F} \leq ch_F^{\frac{1}{2}} \sum_{T \in \mathcal{T}_F} \|\nabla(u - u_h^e)\|_{0, T}.$$

Donc,

$$\eta_{2, F}(u_h^e) = h_F^{-\frac{1}{2}} \|[u_h^e]_F\|_{0, F} \leq \epsilon^{-\frac{1}{2}} \|u - u_h^e\|_{\epsilon, \mathcal{T}_F}.$$

Cette estimation reste également valable pour $F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}$.

La preuve est complète. \square

Remarque 3.6.5. Une inégalité du type $\eta_{4, T}(u_h^f) \leq \|u - u_h^e\|_{\epsilon, \Omega}$ n'est pas aisée à obtenir.

La seule inégalité obtenue est

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{4, T}(u_h^f) \leq \|u - u_h^e\|_{1, T} + \|u - u_h\|_{1, T}.$$

Cette inégalité ne permet pas de conclure quant à l'optimalité de l'indicateur $\eta_{4, T}(u_h^f)$ puisque le membre de droite ne fait pas apparaître $\|u - u_h^e\|_{\epsilon, \Omega}$.

La même remarque peut être faite pour $\eta_{5, F}(u_h)$.

3.7 Résultats numériques

Cette section présente les résultats numériques obtenus sur deux cas tests en dimension deux pour la méthode de stabilisation présentée ci-dessus. On résout la formulation sur les échelles résolues (3.32) et grâce à l'expression de u_h^f donnée en (3.33), on obtient la solution u_h^e .

Le premier cas test est construit de sorte à posséder une solution analytique exhibant une couche intérieure. Le deuxième cas test correspond à un problème où existe une couche intérieure résultant de la propagation d'un terme source dans la partie aval du domaine.

3.7.1 Cas test 1

Considérons le carré unité $]0, 1[\times]0, 1[$. La donnée f est choisie de sorte que la solution exacte de (3.1) soit

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \left(1 - \tanh\left(\frac{0.5-x}{a_w}\right) \right), \quad (3.67)$$

avec le paramètre $a_w = 0.05$. La solution exacte exhibe une couche intérieure en $x = 0.5$. On choisit $\beta = (1, 0)^T$ et $\nu = 1$. On considère ce cas test pour $\epsilon \in \{1, 10^{-2}, 10^{-4}\}$. La triangulation est quasi-uniforme et non-structurée de taille $h_i = h_0 2^{-i}$, avec $h_0 = 0.1$ et $i \in \{0, \dots, 4\}$. On choisit $c_b = 1$ dans l'expression de $b_h(\cdot, \cdot)$ donnée en (3.16). Dans les tableaux ci-dessous, nous donnons le nombre de faces Na et la taille h de la triangulation. Le coefficient α indique que l'erreur converge en $O(h^\alpha)$.

Le tableau 3.1 présente la norme $\|\cdot\|_A$ de l'erreur réelle (on entend par erreur réelle la différence entre la solution exacte et la solution approchée) pour les différentes valeurs du coefficient de diffusion ϵ et pour les différentes triangulations. L'erreur réelle en norme $\|\cdot\|_A$ lorsque $\epsilon = 1$ exhibe un ordre de convergence de 1. Lorsque $\epsilon = 10^{-2}$, l'erreur réelle en norme $\|\cdot\|_A$ converge approximativement en $O(h^{\frac{3}{2}})$ pour $\epsilon \leq h$ alors que pour $\epsilon > h$ l'ordre de convergence est proche de 1. Pour $\epsilon = 10^{-4}$, on a bien un ordre de convergence en $O(h^{\frac{3}{2}})$ sur l'ensemble des valeurs de h considérées. L'ensemble de ces résultats est en conformité avec l'analyse *a priori* du théorème 3.2.13.

Maillage		$\epsilon = 1$		$\epsilon = 10^{-2}$		$\epsilon = 10^{-4}$	
Na	h	$\ u - u_h^e\ _A$	α	$\ u - u_h^e\ _A$	α	$\ u - u_h^e\ _A$	α
374	0.1	0.9605	-	0.3222	-	0.2939	-
1441	0.05	0.4608	1.06	0.1232	1.39	0.1009	1.54
5621	0.025	0.2156	1.09	0.0470	1.40	0.0337	1.58
22330	0.0125	0.1028	1.07	0.0192	1.29	0.0118	1.51
88961	0.00625	0.0497	1.05	0.0085	1.17	0.0044	1.41

TAB. 3.1: Erreur réelle dans la norme $\|\cdot\|_A$ et ordres de convergence pour $\epsilon = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-4}$

Le tableau 3.2 présente la norme $\|\cdot\|_{\epsilon, \Omega}$ de l'erreur réelle pour les différentes valeurs du coefficient de diffusion ϵ et pour les différentes triangulations. Pour cette erreur, on observe un comportement analogue à celui observé pour $\|\cdot\|_A$ mais le changement de régime entre

3.7. Résultats numériques

la convergence en $O(h^{\frac{3}{2}})$ (advection dominante) et $O(h)$ (diffusion dominante) s'opère pour des valeurs plus grandes de h .

Maillage		$\epsilon = 1$		$\epsilon = 10^{-2}$		$\epsilon = 10^{-4}$	
Na	h	$\ u - u_h^e\ _{\epsilon, \Omega}$	α	$\ u - u_h^e\ _{\epsilon, \Omega}$	α	$\ u - u_h^e\ _{\epsilon, \Omega}$	α
374	0.1	0.7110	-	0.0813	-	0.0229	-
1441	0.05	0.3700	0.94	0.0375	1.12	0.0078	1.56
5621	0.025	0.1846	1.00	0.0174	1.10	0.0029	1.42
22330	0.0125	0.0920	1.00	0.0087	1.00	0.0012	1.21
88961	0.00625	0.0459	1.00	0.0048	0.86	0.0007	0.90

TAB. 3.2: Erreur réelle dans la norme $\|\cdot\|_{\epsilon, \Omega}$ et ordres de convergence pour $\epsilon = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-3}$

Les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5 présentent les résultats obtenus avec les estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu établis dans ce chapitre. Les termes $\eta_1(f, u_h^e)$, $\eta_2(u_h^e)$, $\eta_3(u_h)$ et $\eta_4(u_h^f)$ sont définis par :

$$\eta_1(f, u_h^e) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, u_h^e)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_2(u_h^e) = \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{2,F}(u_h^e)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.68)$$

$$\eta_3(u_h) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{3,T}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_4(u_h^f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{4,T}(u_h^f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.69)$$

avec les indicateurs définis en (3.57), (3.58), (3.62) et (3.63). Nous ferons le même abus de langage qu'au chapitre précédent en appelant $\eta_i(u_h^e)$, $i \in \{1, \dots, 3\}$ et $\eta_4(u_h^f)$ des estimateurs d'erreur. L'indice d'efficacité I

$$I = \frac{\eta_1(f, u_h^e) + \eta_2(u_h^e) + \eta_3(u_h) + \eta_4(u_h^f)}{\|u - u_h\|_{\epsilon, \Omega}},$$

est aussi présenté dans tableaux 3.3, 3.4 et 3.5. Dans le cas où $\epsilon = 1$, les estimateurs d'erreur *a posteriori* convergent tous à l'ordre 1 et l'indice d'efficacité I reste borné.

Na	h	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$	I
374	0.1	7.2634	0.6133	1.0385	0.4035	12.5
1441	0.05	3.3779	0.3673	0.5838	0.2478	12.3
5621	0.025	1.5504	0.1925	0.2920	0.1265	11.7
22330	0.0125	0.7324	0.0976	0.1450	0.0638	11.3
88961	0.00625	0.3563	0.0491	0.0725	0.0322	11.1

TAB. 3.3: Estimateurs d'erreur *a posteriori* et indices d'efficacité lorsque $\epsilon = 1$

Lorsque $\epsilon = 10^{-2}$, les estimateurs d'erreur *a posteriori* exhibent tous le bon ordre de convergence excepté $\eta_4(u_h^f)$ qui sous-converge. Cette sous-convergence n'affecte pas l'estimateur d'erreur *a posteriori* global qui est dominé par $\eta_{1,T}(f, u_h^e)$. L'indice d'efficacité I est indépendant de la taille du maillage.

Na	h	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$	I
374	0.1	1.5458	0.3101	0.5116	0.0055	29.2
1441	0.05	0.5195	0.1986	0.2905	0.0044	27.0
5621	0.025	0.1958	0.1281	0.1789	0.0037	28.9
22330	0.0125	0.0828	0.0774	0.1070	0.0028	31.0
88961	0.00625	0.0379	0.0433	0.0607	0.0013	29.8

TAB. 3.4: Estimateurs d'erreur *a posteriori* et indices d'efficacité lorsque $\epsilon = 10^{-2}$

Lorsque $\epsilon = 10^{-4}$, l'estimateur $\eta_1(f, u_h^e)$ super-converge alors que les autres estimateurs sous-convergent. L'indice d'efficacité décroît et ceci est dû à la super-convergence de $\eta_1(f, u_h^e)$ et au fait que $\eta_1(f, u_h^e)$ domine les autres estimateurs.

Na	h	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$	I
374	0.1	12.8271	0.2926	0.4950	0.0012	595.6
1441	0.05	2.9046	0.1134	0.1722	0.0003	409.0
5621	0.025	0.6478	0.0324	0.0496	$9.07 \cdot 10^{-5}$	251.7
22330	0.0125	0.1524	0.0115	0.0178	$3.75 \cdot 10^{-5}$	151.5
88961	0.00625	0.0406	0.0077	0.0111	$2.18 \cdot 10^{-5}$	84.9

TAB. 3.5: Estimateurs d'erreur *a posteriori* et indices d'efficacité lorsque $\epsilon = 10^{-4}$

3.7. Résultats numériques

Les estimateurs d'erreur *a posteriori* et l'erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$ sont représentés en échelle logarithmique en fonction du nombre de faces de la triangulation à la figure 3.9.

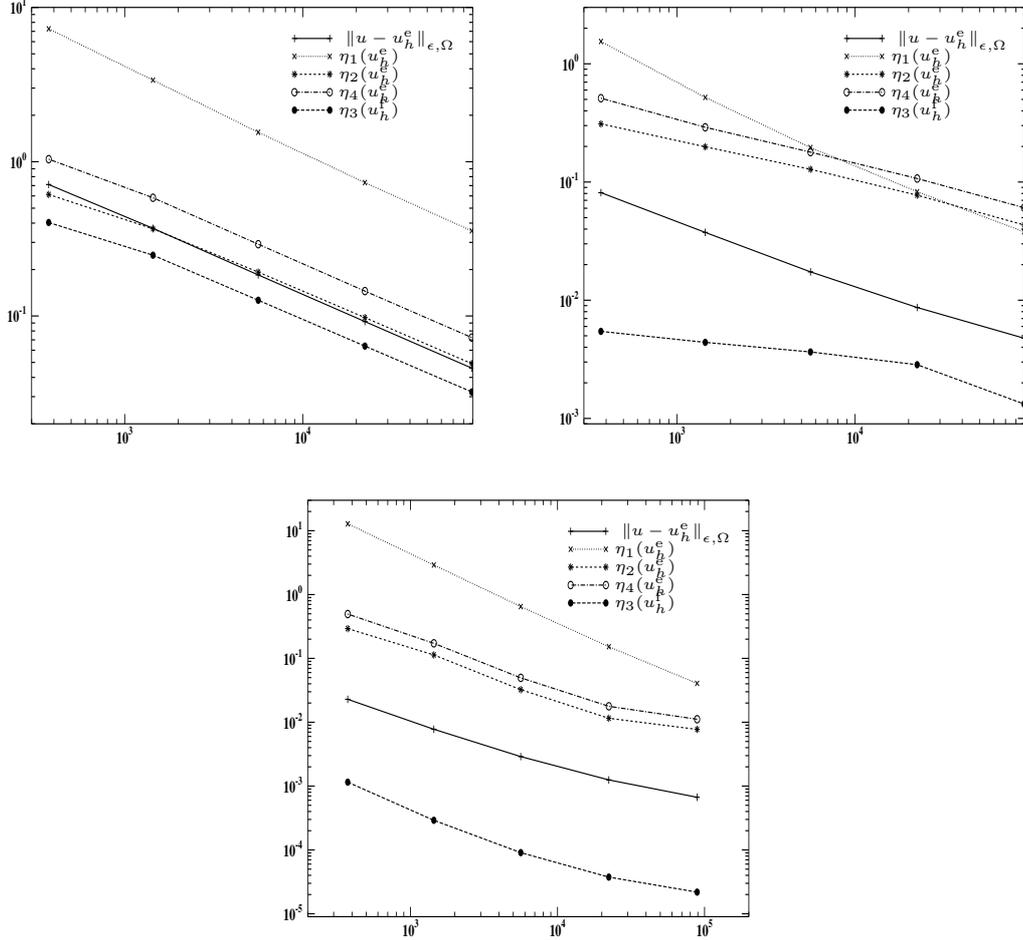


FIG. 3.2: Erreur réelle et estimateurs d'erreur *a posteriori* en fonction du nombre de faces de la triangulation. En haut à gauche : $\epsilon = 1$, en haut à droite : $\epsilon = 10^{-2}$ et en bas : $\epsilon = 10^{-4}$

Les figures 3.3 et 3.4 présentent la localisation de l'erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon,\Omega}$ et la localisation de l'indicateur d'erreur $\eta_1(f, u_h^e)$ lorsque $\epsilon = 1$ et $\epsilon = 10^{-4}$ sur la triangulation de taille h_3 . Ces deux figures montrent que les indicateurs d'erreur $\eta_{1,T}(f, u_h^e)$ prennent leurs valeurs les plus grandes là où l'erreur réelle prend ses valeurs les plus grandes. Pour $\epsilon = 10^{-4}$, les valeurs les plus grandes de $\eta_1(f, u_h^e)$ sont concentrées au centre du domaine.

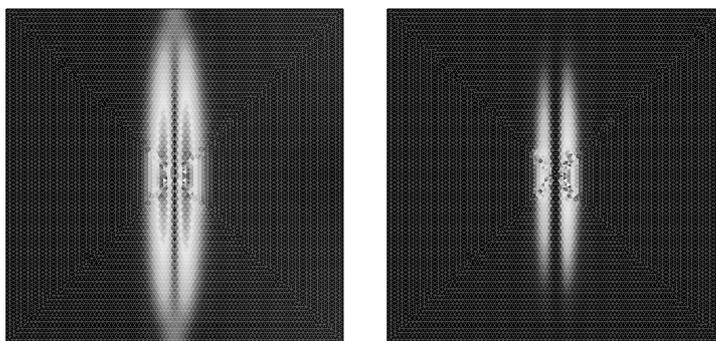


FIG. 3.3: Localisation de l’erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon,\Omega}$ (à gauche) et de l’estimateur d’erreur *a posteriori* $\eta_{1,T}(f, u_h^\epsilon)$ (à droite) lorsque $\epsilon = 1$ sur la triangulation de taille h_3

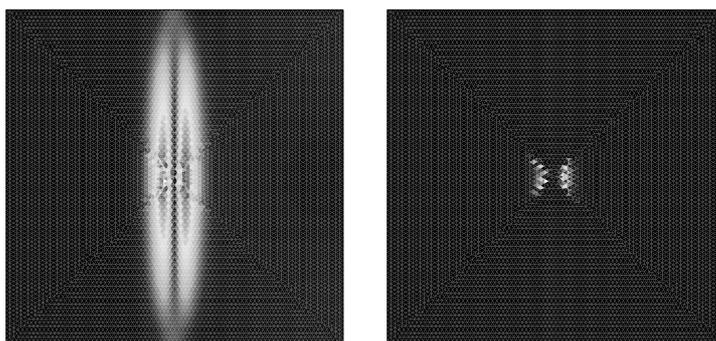


FIG. 3.4: Localisation de l’erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon,\Omega}$ (à gauche) et de l’estimateur d’erreur *a posteriori* $\eta_{1,T}(f, u_h^\epsilon)$ (à droite) lorsque $\epsilon = 10^{-4}$ sur la triangulation de taille h_3

3.7.2 Adaptation de maillage

Dans cette section nous montrons comment l’indicateur $\eta_{1,T}(f, u_h^\epsilon)$ permet de raffiner la triangulation. On considère le cas test de la section précédente. La figure 3.5 présente les triangulations raffinées de façon adaptative après six itérations de l’algorithme présenté dans l’annexe B pour les différentes valeurs de ϵ . On observe que la triangulation est raffinée là où la solution présente une couche intérieure.

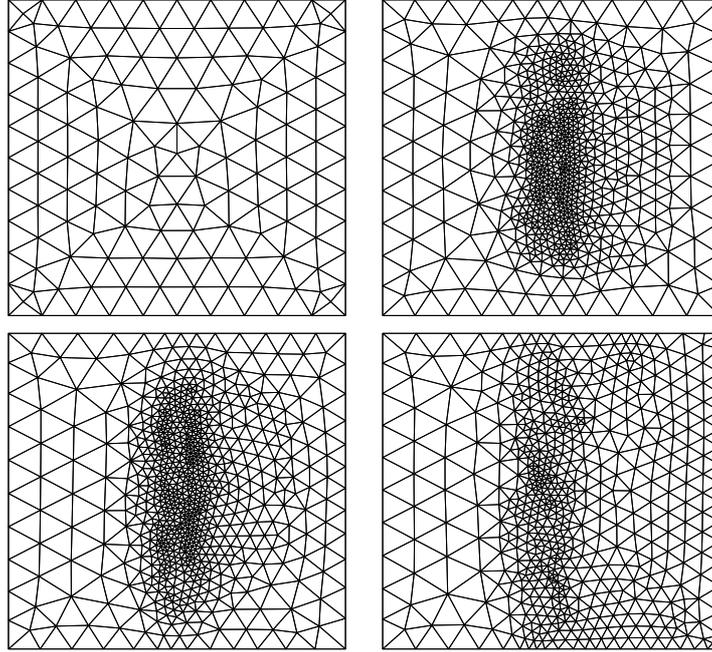


FIG. 3.5: Raffinement de maillage adaptatif en utilisant l'indicateur d'erreur $\eta_{1,T}(f, u_h)$. En haut à gauche : maillage initial (374 faces); en haut à droite : maillage adapté après 5 itérations pour $\epsilon = 1$; en bas à gauche : maillage adapté après 5 itérations pour $\epsilon = 10^{-2}$ (2202 faces); en bas à droite : maillage adapté après 5 itérations pour $\epsilon = 10^{-4}$ (1657 faces)

Na	$\ u - u_h^\epsilon\ _A$	ω	$\ u - u_h^\epsilon\ _{\epsilon, \Omega}$	ω
374	0.9605	-	0.7110	-
473	0.6692	2.76	0.5150	2.46
647	0.5158	1.66	0.4059	1.51
1116	0.3553	1.38	0.2894	1.25
2073	0.2774	0.81	0.2285	0.77

TAB. 3.6: Erreur réelle en norme $\|\cdot\|_A$ et en norme $\|\cdot\|_{\epsilon, \Omega}$ et ordres de convergence sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, u_h)$ lorsque $\epsilon = 1$

Les erreurs réelles en normes $\|\cdot\|_A$ et $\|\cdot\|_{\epsilon, \Omega}$ sur les triangulations raffinées de façon adaptative pour les différentes valeurs de ϵ sont indiquées dans les tableaux 3.6, 3.7 et

3.8. L'ordre de convergence de ces erreurs n'est pas dégradé ; on observe même une super-convergence.

Na	$\ u - u_h^e\ _A$	ω	$\ u - u_h^e\ _{\epsilon, \Omega}$	ω
374	0.3222	-	0.0813	-
434	0.2119	3.19	0.0589	2.45
667	0.1184	2.71	0.0365	2.23
1166	0.0775	1.52	0.0260	1.22
2202	0.0493	1.44	0.0180	1.17

TAB. 3.7: Erreur réelle en norme $\|\cdot\|_A$ et en norme $\|\cdot\|_{\epsilon, \Omega}$ et ordres de convergence sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, u_h)$ lorsque $\epsilon = 10^{-2}$

Na	$\ u - u_h^e\ _A$	ω	$\ u - u_h^e\ _{\epsilon, \Omega}$	ω
374	0.2939	-	0.0229	-
485	0.1748	3.97	0.0136	3.97
666	0.1144	2.70	0.0087	2.82
1088	0.0735	1.81	0.0057	1.71
1657	0.0489	1.97	0.0040	1.78

TAB. 3.8: Erreur réelle en norme $\|\cdot\|_A$ et en norme $\|\cdot\|_{\epsilon, \Omega}$ et ordres de convergence sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, u_h)$ lorsque $\epsilon = 10^{-4}$

Les estimateurs d'erreur *a posteriori* sur les différentes triangulations sont indiqués dans les tableaux 3.9, 3.10 et 3.11. Les indices d'efficacité ne sont pas dégradés. De plus, dans le cas $\epsilon = 10^{-4}$, l'indice d'efficacité I décroît et ceci est dû à la super-convergence de $\eta_{1,T}(f, u_h^e)$ qui domine les autres indicateurs d'erreur. Les autres estimateurs exhibent également une super-convergence. Comme on peut le voir à la figure 3.6, qui représente en échelle logarithmique les estimateurs en fonction du nombre de faces, l'ordre de convergence des estimateurs est le même que celui de l'erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon, \Omega}$.

3.7. Résultats numériques

Na	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$	I
374	7.2634	0.6133	1.0385	0.4035	13.11
473	4.9253	0.4829	0.7757	0.3120	12.61
647	3.5336	0.3847	0.6111	0.2262	11.72
1116	2.2647	0.2802	0.4351	0.1569	10.84
2073	1.5435	0.2173	0.3379	0.1090	9.66

TAB. 3.9: Estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, u_h^e)$ lorsque $\epsilon = 1$

Na	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$	I
374	1.5458	0.3101	0.5116	0.0055	29.19
434	0.9153	0.3017	0.4372	0.0048	28.16
667	0.5084	0.2035	0.3016	0.0038	27.87
1166	0.3207	0.1655	0.2400	0.0035	28.06
2202	0.2022	0.1270	0.1807	0.0031	28.50

TAB. 3.10: Estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, u_h^e)$ lorsque $\epsilon = 10^{-2}$

Na	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$	I
374	12.8271	0.2926	0.4950	0.0012	594.6
485	6.3990	0.2281	0.3562	0.0006	513.5
666	3.6850	0.1316	0.2116	0.0004	463.0
1088	2.0807	0.0908	0.1495	0.0002	407.2
1657	1.2289	0.0621	0.1053	0.0002	349.1

TAB. 3.11: Estimateurs d'erreur *a posteriori* par résidu sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, u_h^e)$ lorsque $\epsilon = 10^{-4}$

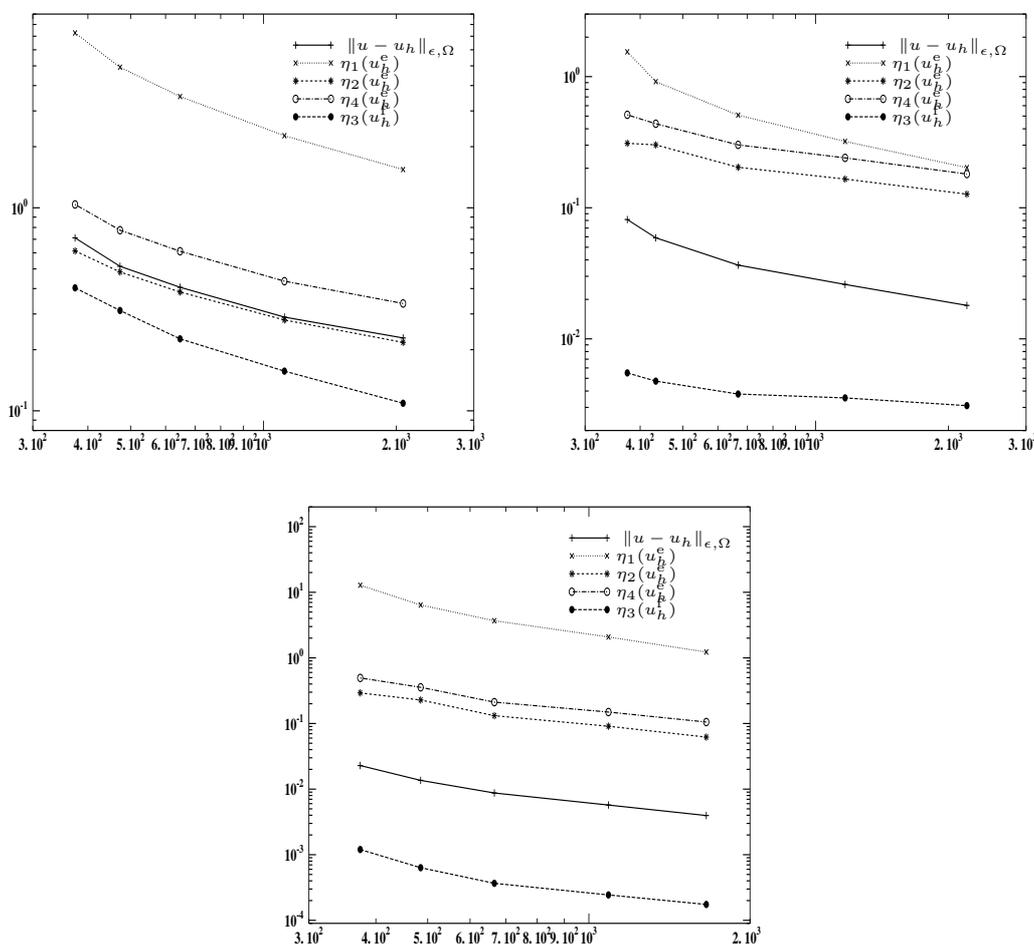


FIG. 3.6: Erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon, \Omega}$ et estimateurs d'erreur *a posteriori* en fonction du nombre de faces de la triangulation générée de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, u_h^c)$. En haut à gauche : $\epsilon = 1$; en haut à droite : $\epsilon = 10^{-2}$; en bas : $\epsilon = 10^{-4}$

3.7.3 Cas test 2

Ce cas test consiste en la résolution de l'équation de convection–diffusion–réaction dans le carré unité $]0, 1[\times]0, 1[$. Les données du problème sont telles que $f = 0$ dans Ω_1 et $f = 10^2$ dans Ω_2 ; voir la figure 3.7 pour une définition de Ω_1 et Ω_2 .

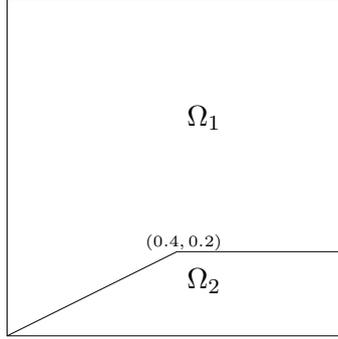


FIG. 3.7: Partition du domaine Ω en Ω_1 et Ω_2

On choisit $\beta = (2, 1)^T$ et $\nu = 1$. On impose des conditions de Dirichlet homogènes sur le côté horizontal en bas et sur le côté vertical gauche. Sur les deux autres côtés, on impose des conditions de Neumann homogènes. Comme pour le cas test précédent, on fait varier le coefficient de diffusion ϵ dans $\{1, 10^{-2}, 10^{-4}\}$ et on considère les mêmes triangulations. On prend $c_b = 1$.

La figure 4.3 présente les isovaleurs de la solution approchée sur la triangulation de taille h_3 pour les différentes valeurs prises par ϵ . On constate la formation de la couche intérieure induite par la propagation du terme source dans la partie aval du domaine à mesure que ϵ prend des valeurs de plus en plus petites.

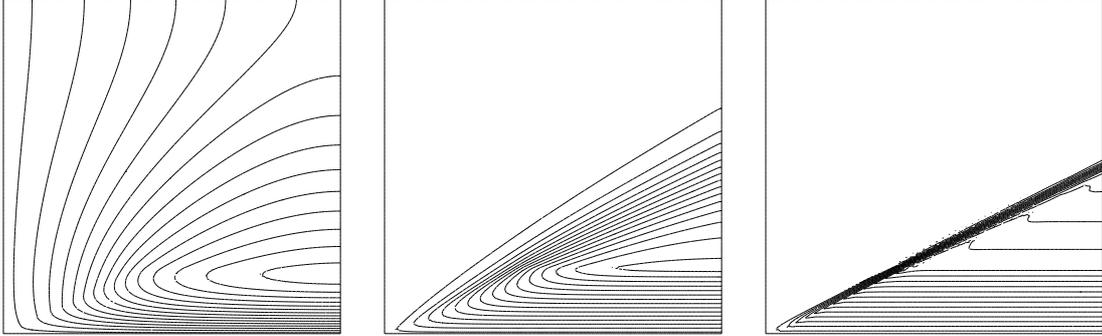


FIG. 3.8: Isovaleurs de la solution approchée lorsque $\epsilon = 1$ (à gauche); $\epsilon = 10^{-2}$ (au centre); $\epsilon = 10^{-4}$ (à droite) sur la triangulation de taille h_3 .

Les tableaux 3.12, 3.13 et 3.14 présentent les résultats obtenus pour les estimateurs d'erreur *a posteriori*. On observe que l'ordre de convergence des estimateurs décroît à mesure que ϵ est de plus en plus petit. La figure 4.4 représente les estimateurs d'erreur *a*

a posteriori en fonction de nombre de faces de la triangulation en échelle logarithmique. On observe une dégradation des résultats lorsque $\epsilon = 10^{-4}$.

Na	h	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$
395	0.1	4.2216	0.8333	1.2019	0.4599
1453	0.05	2.4887	0.3871	0.5783	0.2428
5594	0.025	1.4131	0.2050	0.2994	0.1292
22156	0.0125	0.8478	0.1030	0.1501	0.0655
88424	0.00625	0.5403	0.0506	0.0741	0.0328

TAB. 3.12: Estimateurs d’erreur *a posteriori* lorsque $\epsilon = 1$

Na	h	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$
395	0.1	1.8879	4.3634	6.8197	0.1166
1453	0.05	1.2776	3.0902	4.5066	0.1041
5594	0.025	0.8904	2.3469	3.3307	0.0939
22156	0.0125	0.6241	1.6289	2.3131	0.0758
88424	0.00625	0.4397	1.0137	1.4474	0.0532

TAB. 3.13: Estimateurs d’erreur *a posteriori* lorsque $\epsilon = 10^{-2}$

Na	h	$\eta_1(f, u_h^e)$	$\eta_2(u_h^e)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h^f)$
395	0.1	34.1937	5.7387	13.5865	0.0384
1453	0.05	25.4495	4.2222	7.2226	0.0238
5594	0.025	16.9353	4.0360	6.6320	0.0229
22156	0.0125	9.4421	3.5347	5.7025	0.0218
88424	0.00625	4.8404	2.4440	3.8544	0.0162

TAB. 3.14: Estimateurs d’erreur *a posteriori* lorsque $\epsilon = 10^{-4}$

3.8. Conclusions

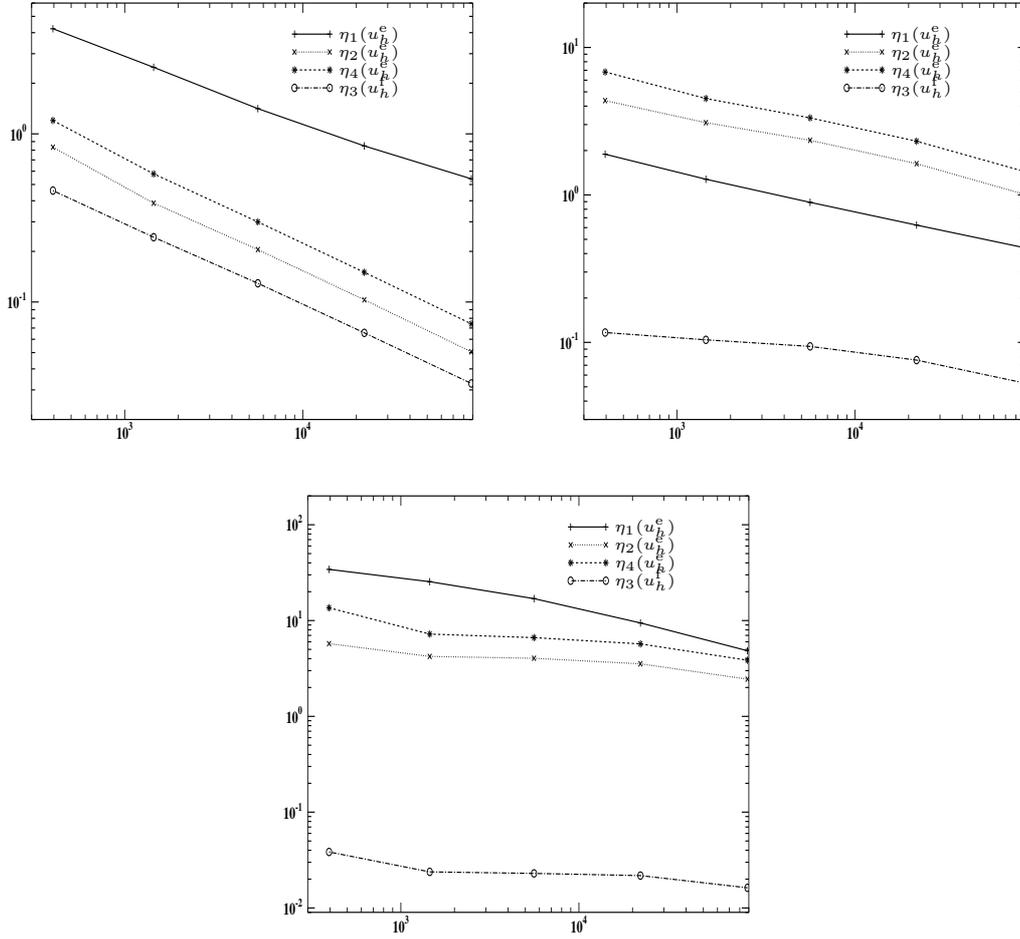


FIG. 3.9: Erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon,\Omega}$ et estimateurs d'erreur *a posteriori* en fonction du nombre de faces de la triangulation générée de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, u_h^e)$. En haut à gauche : $\epsilon = 1$; en haut à droite : $\epsilon = 10^{-2}$; en bas : $\epsilon = 10^{-4}$

3.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié un nouveau schéma de discrétisation non-conforme des équations de convection-diffusion-réaction stabilisé par viscosité de sous-maille. Outre le terme de viscosité de sous-maille considéré dans le cas conforme nous avons introduit un terme de pénalisation sur les faces. Nous avons montré la stabilité de ce schéma et les mêmes propriétés de convergence que les schémas existant dans la littérature. L'intérêt

théorique et pratique du schéma est que les termes de stabilisation ne font pas intervenir de coefficient dépendant de h et de ϵ . Nous avons réinterprété ce schéma en un problème posé dans l'espace des échelles résolues. Puis, nous avons étudié une formulation mixte non-symétrique des équations de convection–diffusion–réaction discrétisée par schéma boîte. Nous avons montré que ce schéma boîte peut être construit de manière à ce que :

- (i) la variable primale discrète soit solution du problème posé sur les échelles résolues, dont nous avons effectué une analyse d'erreur *a priori*,
- (ii) on dispose d'une formule de reconstruction du flux sur un patch d'éléments de la triangulation.

Enfin, nous avons présenté une analyse d'erreur *a posteriori* du schéma stabilisé par viscosité de sous-maille. Certains indicateurs sont robustes au sens de Verfürth, [Ver98]. Nous avons étudié le comportement de ces indicateurs sur deux cas tests et nous avons montré comment certains indicateurs peuvent être utilisés pour générer des maillages adaptatifs sur des problèmes de convection–diffusion–réaction présentant des couches intérieures.

Chapitre 4

Convection–diffusion : stabilisation par pénalisation sur les faces

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation de convection–diffusion–réaction avec des conditions aux limites mixtes de Neumann (homogène) et de Robin. Le problème que nous considérons est le suivant :

$$\begin{cases} -\epsilon\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \nu u = f & \text{dans } \Omega, \\ -\epsilon\nabla u \cdot n + \beta \cdot n u = g & \text{sur } \partial\Omega_{\text{in}}, \\ \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{\text{out}}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce problème intervient par exemple dans la modélisation du transport advectif–diffusif–réactif d'un soluté dans un écoulement. L'inconnue u représente la concentration, ϵ le coefficient de diffusion, β le vecteur vitesse, ν le coefficient de réaction, et f, g des termes source.

On suppose que le domaine Ω est un polygone de \mathbb{R}^2 ou un polyèdre de \mathbb{R}^3 . On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω et n la normale extérieure. On pose

$$\partial\Omega_{\text{in}} = \{x \in \partial\Omega : \beta \cdot n < 0\} \quad \text{et} \quad \partial\Omega_{\text{out}} = \{x \in \partial\Omega : \beta \cdot n \geq 0\},$$

si bien que

$$\partial\Omega = \partial\Omega_{\text{in}} \cup \partial\Omega_{\text{out}}.$$

Dans ce chapitre, on fera les hypothèses minimales suivantes :

- ϵ est un réel strictement positif,

- β est dans $[W^{1,\infty}(\Omega)]^d$, $d = 2, 3$ étant la dimension d’espace,
- ν est dans $L^\infty(\Omega)$,
- f et g sont respectivement dans $L^2(\Omega)$ et dans $L^2(\partial\Omega_{\text{in}})$,
- il existe un réel $\sigma_0 > 0$ tel que $\sigma = \nu - \frac{1}{2}\nabla\cdot\beta \geq \sigma_0$ p.p dans Ω .

Considérons la formulation faible de (4.1) suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = (f, v)_{0,\Omega} - (g, v)_{0,\partial\Omega_{\text{in}}} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \tau uv - \int_{\Omega} u(\beta \cdot \nabla v) + \int_{\partial\Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) uv, \quad (4.3)$$

et

$$\tau = \nu - \nabla \cdot \beta. \quad (4.4)$$

Proposition 4.1.1. *Le problème (4.2) admet une et une seule solution.*

Démonstration. Montrons que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Pour $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} v(\beta \cdot \nabla v) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) v^2,$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \epsilon \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}} v\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\beta \cdot n\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}^2 \|v\|_{0,\partial\Omega}^2 \\ &\geq \epsilon \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \sigma_0 \|v\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\beta \cdot n\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}^2 \|v\|_{0,\partial\Omega}^2. \end{aligned}$$

On conclut grâce au lemme de Lax–Milgram. \square

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 4.2, nous présentons un schéma de discrétisation de (4.2) dans un cadre non-conforme stabilisé par des termes de pénalisation sur les faces. Les termes de pénalisation portent d’une part sur les sauts de la solution discrète aux interfaces du maillage et d’autre part sur les sauts de la dérivée advective. Les sections 4.3 et 4.4 sont respectivement consacrées à l’analyse d’erreur *a priori* et *a posteriori* de ce schéma. Dans la section 4.5, nous présentons quelques résultats numériques.

4.2 Le cadre discret

Le problème (4.2) est approché par une méthode d'éléments finis non-conforme stabilisée par pénalisation sur les faces.

Rappelons que $P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$ désigne l'espace de Crouzeix-Raviart défini par

$$P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h) = \{ v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P^1(T); \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \int_F [v_h]_F = 0 \},$$

et rappelons quelques notations. Soit $F \in \mathcal{F}_h^i$ telle que $F = T_1 \cap T_2$, où T_1 et T_2 sont des éléments de \mathcal{T}_h dont les normales extérieures sont notées n_1 et n_2 , respectivement. Pour un champ de vecteurs \mathbb{R}^d -valué, q , définissons $|q|_F = |q \cdot n_F|$ où n_F est un des deux vecteurs normal à F . Pour $F \in \mathcal{F}_h^\partial$, on pose $|q|_F = |q \cdot n|$ (on rappelle que n désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$). En d'autres termes, $|q|_F$ désigne la valeur absolue de la composante normale de q sur F . Pour une face intérieure $F \in \mathcal{F}_h^i$ et une fonction v continue par morceaux sur Ω , on note la valeur aval et amont de v par v^\downarrow et v^\uparrow respectivement. Ces valeurs sont définies pour presque tout $x \in F$ par

$$v^\downarrow(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} v(x + \gamma\beta) \quad \text{et} \quad v^\uparrow(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} v(x - \gamma\beta). \quad (4.5)$$

Pour une région R , $v_{\infty,R}$ désigne la norme de v dans $L^\infty(R)$ ou dans $[L^\infty(R)]^d$.

Le problème discret que nous considérons est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que :} \\ a_h(u_h, v_h) + J_0(u_h, v_h) + J_1(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} - (g, v_h)_{0,\partial\Omega_{\text{in}}} \quad \forall v_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h), \end{cases} \quad (4.6)$$

où

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_\Omega \tau u_h v_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u_h (\beta \cdot \nabla v_h) \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [u_h v_h]_F + \int_{\partial\Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) u_h v_h, \end{aligned} \quad (4.7)$$

et

$$\begin{aligned} J_0(u_h, v_h) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} J_{0,F}(u_h, v_h), \quad J_{0,F}(u_h, v_h) = - \int_F \beta \cdot [u_h]_F v_h^\downarrow, \\ J_1(u_h, v_h) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} J_{1,F}(u_h, v_h), \quad J_{1,F}(u_h, v_h) = \int_F \frac{h_F^2}{\beta_{\infty,F}} [\beta \cdot \nabla u_h]_F \cdot [\beta \cdot \nabla v_h]_F, \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec la convention que $J_{1,F}(u_h, v_h) = 0$ si $\beta_{\infty,F} = 0$.

Posons $V(h) = [H^2(\mathcal{T}_h) \cap H^1(\Omega)] + P_{nc}^1(\mathcal{T}_h)$ et introduisons sur $V(h)$ les normes suivantes :

$$\|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|\sigma^{\frac{1}{2}} w\|_{0,\Omega} + \| |\beta \cdot n|^{\frac{1}{2}} w \|_{0,\partial\Omega}, \quad (4.9)$$

$$\|w\|_{A,\Omega} = \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \| |\beta|^{\frac{1}{2}} [w]_F \|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + J_1(w, w)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Lemme 4.2.1 (Stabilité).

- (i) La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est $\|\cdot\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$ -coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.
- (ii) La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot) + \sum_{i=0}^1 J_i(\cdot, \cdot)$ est $\|\cdot\|_{A,\Omega}$ -coercive sur $V(h) \times V(h)$.

Démonstration.

- (i) Montrons la $\|\cdot\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$ -coercivité de $a_h(\cdot, \cdot)$ sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Soit $w \in H^1(\Omega)$. Une intégration par parties du terme convectif de $a_h(w, w)$ mène à

$$\int_{\Omega} w \beta \cdot \nabla w = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) w^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) w^2.$$

De plus, il est clair que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) w^2 + \int_{\partial\Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) w^2 &= -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{\text{in}}} (\beta \cdot n) w^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) w^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| w^2. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [w^2]_F = 0$, on obtient

$$a_h(w, w) = \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,\Omega}^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}} w\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \| |\beta \cdot n|^{\frac{1}{2}} w \|_{0,\partial\Omega}^2,$$

et donc

$$a_h(w, w) \geq \frac{1}{6} \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}^2.$$

- (ii) Montrons la $\|\cdot\|_{A,\Omega}$ -coercivité de $a_h(\cdot, \cdot) + \sum_{i=0}^1 J_i(\cdot, \cdot)$ sur $V(h) \times V(h)$.

Soit $w_h \in V(h)$. Une intégration par parties du terme convectif de $a_h(w_h, w_h)$ mène à

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \int_T w_h \beta \cdot \nabla w_h = -\frac{1}{2} \int_T (\nabla \cdot \beta) w_h^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial T} (\beta \cdot n_T) w_h^2,$$

où n_T est la normale extérieure à T . Ainsi,

$$\begin{aligned} a_h(w_h, w_h) + \sum_{i=0}^1 J_i(w_h, w_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w_h\|_{0,T}^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}} w_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [w_h^2]_F - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{\text{in}}} (\beta \cdot n) w_h^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) w_h^2 - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [w_h]_F w_h^\downarrow + J_1(w_h, w_h). \end{aligned}$$

(a) Il est clair que

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{\text{in}}} (\beta \cdot n) w_h^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) w_h^2 = \frac{1}{2} \|\beta \cdot n\|_{\frac{1}{2}} w_h\|_{0,\partial\Omega}^2.$$

(b) Nous avons vu au chapitre précédent que pour tout $F \in \mathcal{F}_h^i$,

$$\frac{1}{2} \int_F \beta \cdot [w_h^2]_F - \int_F \beta \cdot [w_h]_F w_h^\downarrow = \frac{1}{2} \int_F |\beta|_F [w_h]_F^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} a_h(w_h, w_h) + \sum_{i=0}^1 J_i(w_h, w_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w_h\|_{0,T}^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}} w_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \|\beta\|_F^{\frac{1}{2}} [w_h]_F\|_{0,F}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\beta \cdot n\|_{\frac{1}{2}} w_h\|_{0,\partial\Omega}^2 + J_1(w_h, w_h), \end{aligned}$$

si bien que

$$a_h(w_h, w_h) + \sum_{i=0}^1 J_i(w_h, w_h) \geq \frac{1}{18} \|w_h\|_{A,\Omega}^2.$$

La preuve est complète. \square

Corollaire 4.2.2. *Le problème (4.6) admet une et une seule solution.*

4.3 Analyse d'erreur *a priori*

Dans ce qui suit, c désigne une constante générique indépendante de h et ϵ et dont la valeur peut changer à chaque occurrence. Comme nous l'avons précisé dans le chapitre d'introduction, les coefficients sont adimensionnés de sorte que β est d'ordre 1 et on suppose qu'il n'y a pas de couche advective-réactive si bien que ν est d'ordre au plus 1. Dans les

estimations d’erreur présentées ci-dessous, la dépendance des constantes en β et ν ne sera pas explicitée.

L’analyse qui suit requiert les hypothèses suivantes :

- la solution u de (4.2) est dans $H^2(\Omega)$,
- le vecteur β est dans $[P_c^1(\mathcal{T}_h)]^d$, c’est-à-dire que le champ β est continu et affine par morceaux,
- la famille de triangulations $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ est régulière,
- la taille h de la triangulation \mathcal{T}_h et le coefficient de diffusion ϵ sont tels que $h \leq 1$ et $\epsilon \leq 1$. Le problème étant adimensionalisé, ces hypothèses peuvent se faire sans perte de généralité.

Remarque 4.3.1. L’hypothèse $\beta \in [P_c^1(\mathcal{T}_h)]^d$ conduit à $\beta \cdot \nabla v_h \in P^1(\mathcal{T}_h)$ pour v_h dans $P_{nc}^1(\mathcal{T}_h)$, ce qui permet d’obtenir une analyse d’erreur *a priori* optimale. Cette hypothèse est classique dans les problèmes de convection–diffusion ; elle est par exemple utilisée dans [HSS02]. De plus, pour v dans $H^2(\Omega)$, la continuité de β implique la continuité de $\beta \cdot \nabla v$ au travers des faces du maillage, ce que nous utiliserons également dans l’analyse ci-dessous.

Aux chapitres précédents, nous avons considéré l’opérateur de Oswald $\mathcal{I}_{Os} : P^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$. Dans ce chapitre, on considère un opérateur légèrement modifié (pour simplifier, on conserve la même notation) $\mathcal{I}_{Os} : P^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow P_c^1(\mathcal{T}_h)$ défini comme suit :

$$\forall v_h \in P^1(\mathcal{T}_h), \forall s \in \mathcal{S}_h, \quad \mathcal{I}_{Os}v_h(s) = \frac{1}{\#\mathcal{T}_s} \sum_{T \in \mathcal{T}_s} v_h|_T(s), \quad (4.11)$$

où \mathcal{T}_s désigne l’ensemble des triangles de \mathcal{T}_h partageant le sommet s et $\#\mathcal{T}_s$ désigne le cardinal de cet ensemble. On utilise également une définition légèrement modifiée de \mathcal{F}_T^{Os} qui maintenant désigne l’ensemble des faces *intérieures* du maillage contenant un sommet de T .

Lemme 4.3.2. *Il existe deux constantes c_1 et c_2 indépendantes de h telles que*

$$\forall v_h \in P^1(\mathcal{T}_h), \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \|v_h - \mathcal{I}_{Os}v_h\|_{0,T} \leq c \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{Os}} h_F^{\frac{1}{2}} \|[v_h]_F\|_{0,F}, \quad (4.12)$$

$$\forall v_h \in P^1(\mathcal{T}_h), \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad |v_h - \mathcal{I}_{Os}v_h|_{1,T} \leq c \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{Os}} h_F^{-\frac{1}{2}} \|[v_h]_F\|_{0,F}. \quad (4.13)$$

Démonstration. On pourra se référer à [ABC03, KP03]. □

4.3. Analyse d'erreur *a priori*

Introduisons sur $V(h)$ la norme suivante :

$$\|w\|_{h,\frac{1}{2}} = \|w\|_{A,\Omega} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_{\infty,\Delta_T} h_T^{-1} \|w\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.14)$$

où Δ_T est l'union des éléments de \mathcal{T}_h partageant au moins un sommet avec $T \in \mathcal{T}_h$.

Posons $[P_c^1(\mathcal{T}_h)]^\perp = \left\{ v \in H^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h) : \forall v_h \in P_c^1(\mathcal{T}_h), (v, v_h)_{0,\Omega} = 0 \right\}$.

Lemme 4.3.3 (Continuité). *Il existe une constante c telle que pour tout $v \in [P_c^1(\mathcal{T}_h)]^\perp$ et pour tout $w_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$,*

$$a_h(v, w_h) + J_0(v, w_h) + J_1(v, w_h) \leq c \|v\|_{h,\frac{1}{2}} \|w_h\|_{A,\Omega}. \quad (4.15)$$

Démonstration.

(1) Estimation des termes de $a_h(v, w_h)$.

(a) Clairement, pour tout $v \in [P_c^1(\mathcal{T}_h)]^\perp$ et pour tout $w_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla v \cdot \nabla w_h + \int_{\Omega} \tau v w_h \leq c \|v\|_{\epsilon \beta \sigma, \Omega} \|w_h\|_{A,\Omega} \leq c \|v\|_{h,\frac{1}{2}} \|w_h\|_{A,\Omega}.$$

(b) Comme $v \in [P_c^1(\mathcal{T}_h)]^\perp$, $(v, \mathcal{I}_{\text{Os}}(\beta \cdot \nabla w_h))_{0,\Omega} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T v \beta \cdot \nabla w_h &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T v (\beta \cdot \nabla w_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}(\beta \cdot \nabla w_h)) \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{0,T} \|\beta \cdot \nabla w_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}(\beta \cdot \nabla w_h)\|_{0,T} \\ &\leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{0,T} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\text{Os}}} h_F^{\frac{1}{2}} \|[\beta \cdot \nabla w_h]_F\|_{0,F} \right) \\ &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_{\infty,\Delta_T} h_T^{-1} \|v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{h_F^2}{\beta_{\infty,F}} \|[\beta \cdot \nabla w_h]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|v\|_{h,\frac{1}{2}} J_1(w_h, w_h)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|v\|_{h,\frac{1}{2}} \|w_h\|_{A,\Omega}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité (4.12) et la régularité du maillage.

(c) Puisque $v \in H^1(\Omega)$, $[v]_F = 0$ pour tout $F \in \mathcal{F}_h^i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [w_h v]_F &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [w_h]_F v \\ &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_{\infty, \Delta_T} h_T^{-1} \|v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \|\beta^{\frac{1}{2}} [w_h]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|v\|_{h, \frac{1}{2}} \|w_h\|_{A, \Omega}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de trace discrète (A.14) et la régularité du maillage.

De même,

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{out}}} \int_F (\beta \cdot n) v w_h \leq c \|v\|_{h, \frac{1}{2}} \|w_h\|_{A, \Omega}.$$

(2) Estimations de $J_i(v, w_h)$ pour $i = 1, 2$.

Comme $v \in H^1(\Omega)$,

$$J_0(v, w_h) = 0.$$

Enfin, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$J_1(v, w_h) \leq J_1(v, v)^{\frac{1}{2}} J_1(w_h, w_h)^{\frac{1}{2}} \leq \|v\|_{h, \frac{1}{2}} \|w_h\|_{A, \Omega}.$$

En collectant les inégalités ci-dessus, on obtient bien (4.15). \square

Remarque 4.3.4. Si nous avons imposé des conditions aux limites de Dirichlet homogènes dans (4.2) de façon forte, nous aurions dû considérer l'opérateur $\mathcal{I}_{O_s} : P^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$. Ceci aurait conduit à introduire les faces de bord dans le terme de pénalisation $J_1(\cdot, \cdot)$, ce qui physiquement n'est pas réaliste. On peut imposer des conditions de Dirichlet de façon faible ; voir [Bur04] pour l'analyse de la méthode.

Lemme 4.3.5 (Estimation d'erreur). *On pose*

$$R_h(u) = \sup_{w_h \in P_{nc}^1(\mathcal{T}_h)} \frac{a_h(u, w_h) - (f, w_h)_{0, \Omega} + (g, w_h)_{0, \partial\Omega_{\text{in}}}}{\|w_h\|_{A, \Omega}}. \quad (4.16)$$

Alors, il existe une constante c telle que

$$\|u - u_h\|_{A, \Omega} \leq c \left(\|u - \Pi_h u\|_{h, \frac{1}{2}} + R_h(u) \right), \quad (4.17)$$

où Π_h est l'opérateur de projection L^2 -orthogonale sur $P_c^1(\mathcal{T}_h)$.

4.3. Analyse d'erreur *a priori*

Démonstration. Il est clair que

$$\|u - \Pi_h u\|_{A,\Omega} \leq \|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire on a

$$\|u - u_h\|_{A,\Omega} \leq \|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} + \|\Pi_h u - u_h\|_{A,\Omega}.$$

Posons $w_h = \Pi_h u - u_h$ et observons que $w_h \in V(h)$. Alors, par la $\|\cdot\|_{A,\Omega}$ -coercivité de $a_h(\cdot, \cdot) + \sum_{i=0}^1 J_i(\cdot, \cdot)$ (voir lemme 4.2.1) sur $V(h)$, il vient

$$c\|\Pi_h u - u_h\|_{A,\Omega}^2 \leq a_h(\Pi_h u - u_h, w_h) + J_0(\Pi_h u - u_h, w_h) + J_1(\Pi_h u - u_h, w_h).$$

De plus, comme $J_0(u, w_h) = J_1(u, w_h) = 0$, on a

$$\begin{aligned} a_h(\Pi_h u - u_h, w_h) + \sum_{i=0}^1 J_i(\Pi_h u - u_h, w_h) &= a_h(\Pi_h u - u, w_h) + \sum_{i=0}^1 J_i(\Pi_h u - u, w_h) \\ &\quad + a_h(u, w_h) - (f, w_h)_{0,\Omega} + (g, w_h)_{0,\partial\Omega_{\text{in}}}. \end{aligned}$$

Comme $\Pi_h u - u \in [P_c^1(\mathcal{T}_h)]^\perp$, nous déduisons du lemme 4.3.3 que

$$a_h(\Pi_h u - u, w_h) + \sum_{i=0}^1 J_i(\Pi_h u - u, w_h) \leq c\|\Pi_h u - u\|_{h,\frac{1}{2}}\|w_h\|_{A,\Omega}.$$

Donc,

$$c\|u - u_h\|_{A,\Omega} \leq \|\Pi_h u - u\|_{h,\frac{1}{2}} + \sup_{w_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)} \frac{a_h(u, w_h) - (f, w_h)_{0,\Omega} + (g, w_h)_{0,\partial\Omega_{\text{in}}}}{\|w_h\|_{A,\Omega}}.$$

La preuve est complète. \square

Lemme 4.3.6 (Approximabilité). *Il existe une constante c telle que pour tout $v \in H^2(\Omega)$,*

$$\|v - \Pi_h v\|_{h,\frac{1}{2}} \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}})\|v\|_{2,\Omega}. \quad (4.18)$$

Démonstration. Soit $v \in H^2(\Omega)$. Alors, en utilisant le fait que $\Pi_h v - v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h v\|_{h,\frac{1}{2}} &= \|\epsilon^{\frac{1}{2}}\nabla(v - \Pi_h v)\|_{0,\Omega} + \|\sigma^{\frac{1}{2}}(v - \Pi_h v)\|_{0,\Omega} + \| |\beta \cdot n|^{\frac{1}{2}}(v - \Pi_h v) \|_{0,\partial\Omega} \\ &\quad + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_{\infty,\Delta_T} h_T^{-1} \|v - \Pi_h v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + J_1(v - \Pi_h v, v - \Pi_h v)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par les propriétés d'approximation de Π_h , (A.9)-(A.10), on a pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - \Pi_h v)\|_{0,T} &\leq ch_T \|v\|_{2,T}, \\ \|v - \Pi_h v\|_{0,T} &\leq ch_T^2 \|v\|_{2,T}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(v - \Pi_h v)\|_{0,\Omega} + \|\sigma^{\frac{1}{2}}(v - \Pi_h v)\|_{0,\Omega} \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h) \|v\|_{2,\Omega}.$$

De plus,

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_{\infty, \Delta_T} h_T^{-1} \|v - \Pi_h v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch^{\frac{3}{2}} \|v\|_{2,\Omega}.$$

L'inégalité de trace continue (A.13) conduit pour tout $F \in \mathcal{F}_h^i$ à

$$\begin{aligned}\|[\beta \cdot \nabla(v - \Pi_h v)]_F\|_{0,F} &\leq c\beta_{\infty, F} \|\nabla(v - \Pi_h v)\|_{0, \mathcal{T}_F}^{\frac{1}{2}} \|\nabla(v - \Pi_h v)\|_{1, \mathcal{T}_F}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\beta_{\infty, F} \|\nabla(v - \Pi_h v)\|_{0, \mathcal{T}_F}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{2, \mathcal{T}_F}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\beta_{\infty, F} h_F^{\frac{1}{2}} \|v\|_{2, \mathcal{T}_F}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{h_F^2}{\beta_{\infty, F}} \|[\beta \cdot \nabla(v - \Pi_h v)]_F\|_{0,F}^2 \leq ch_F^3 \|v\|_{2, \mathcal{T}_F}^2,$$

si bien qu'en sommant sur $F \in \mathcal{F}_h^i$, il vient

$$J_1(v - \Pi_h v, v - \Pi_h v)^{\frac{1}{2}} \leq ch^{\frac{3}{2}} \|v\|_{2,\Omega}.$$

Finalement, en utilisant à nouveau l'inégalité de trace continue (A.13), il est clair que

$$\|[\beta \cdot n]^{\frac{1}{2}}(v - \Pi_h v)\|_{0, \partial\Omega} \leq ch^{\frac{3}{2}} \|v\|_{2,\Omega}.$$

En collectant les inégalités obtenues ci-dessus et en utilisant le fait que $h \leq 1$, on obtient (4.18). \square

Lemme 4.3.7 (Consistance). *Soit u l'unique solution de (4.1). Alors, il existe une constante c telle que*

$$|R_h(u)| \leq c\epsilon^{\frac{1}{2}} h \|u\|_{2,\Omega}. \quad (4.19)$$

4.3. Analyse d'erreur *a priori*

Démonstration. Soit $w_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$. Alors,

$$\begin{aligned} a_h(u, w_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u \cdot \nabla w_h + \int_{\Omega} \tau u w_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u \beta \cdot \nabla w_h \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [u w_h]_F + \int_{\partial \Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) u w_h. \end{aligned}$$

Puisque $u \in H^2(\Omega)$, une intégration par parties des termes diffusif et convectif conduit à

$$\begin{aligned} a_h(u, w_h) &= \int_{\Omega} (-\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \nu u) w_h \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \epsilon (\nabla u \cdot n_T) w_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\beta \cdot n_T) u w_h \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [u w_h]_F + \int_{\partial \Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n) u w_h \\ &= (f, w_h)_{0, \Omega} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \epsilon \nabla u \cdot [w_h]_F + \int_{\partial \Omega_{\text{in}}} (\beta \cdot n u - g) w_h - \int_{\partial \Omega_{\text{in}}} (\beta \cdot n) u w_h \\ &= (f, w_h)_{0, \Omega} - (g, w_h)_{0, \partial \Omega_{\text{in}}} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \epsilon \nabla u \cdot [w_h]_F. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a_h(u, w_h) - (f, w_h)_{0, \Omega} + (g, w_h)_{0, \partial \Omega_{\text{in}}} = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \epsilon \nabla u \cdot [w_h]_F.$$

Comme $P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$ satisfait le Patch-test d'ordre 0,

$$a_h(u, w_h) - (f, w_h)_{0, \Omega} + (g, w_h)_{0, \partial \Omega_{\text{in}}} = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \epsilon (\nabla u - \Pi_F^0(\nabla u)) \cdot [w_h]_F,$$

où $\Pi_F^0 : [L^2(F)]^d \rightarrow [P^0(F)]^d$ désigne la projection L^2 -orthogonale sur $[P^0(F)]^d$. Grâce à l'inégalité d'interpolation de face de Crouzeix–Raviart (A.16), on a

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall F \in \mathcal{F}_T, \quad \left| \int_F (\nabla u - \Pi_F^0(\nabla u)) w_h \right| \leq ch_T |w_h|_{1, T} |\nabla u|_{1, T}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |a_h(u, w_h) - (f, w_h)_{0, \Omega} + (g, w_h)_{\partial \Omega_{\text{in}}}| &\leq c \epsilon h \|u\|_{2, \Omega} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla w_h\|_{0, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \epsilon^{\frac{1}{2}} h \|u\|_{2, \Omega} \|w_h\|_{A, \Omega}, \end{aligned}$$

et on en déduit (4.19). □

Théorème 4.3.8 (Convergence). *Soit u l'unique solution de (4.2). Soit u_h l'unique solution de (4.6). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\|u - u_h\|_{A,\Omega} \leq ch \left(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \right) \|u\|_{2,\Omega}. \quad (4.20)$$

Démonstration. D'après le lemme 4.3.5,

$$\|u - u_h\|_{A,\Omega} \leq c \left(\|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} + R_h(u) \right).$$

Le premier terme de membre de droite s'estime grâce au lemme 4.3.6 et le second terme s'estime grâce au lemme 4.3.7. On obtient alors l'estimation (4.20). \square

4.4 Analyse d'erreur *a posteriori*

Dans cette section, on s'intéresse à l'analyse d'erreur *a posteriori* du problème (4.6). Pour tout $w \in V(h)$, localisons les normes $\|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$ et $\|w\|_{A,\Omega}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Delta} &= \left(\sum_{T \in \Delta} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|\sigma^{\frac{1}{2}} w\|_{0,\Delta} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{F}_h^\partial} \|\beta \cdot n\|^{\frac{1}{2}} w\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|w\|_{A,\Delta} &= \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Delta} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{F}_h^i} \|\beta\|_F^{\frac{1}{2}} [w]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_\Delta} J_{1,F}(w, w) \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où Δ est une union de triangles de \mathcal{T}_h , qui par la suite sera T , Δ_T ou Δ_F , et \mathcal{F}_Δ est l'ensemble des faces des éléments de Δ .

Lemme 4.4.1. *Soit u l'unique solution de (4.2). Soit u_h l'unique solution de (4.6). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\begin{aligned} c\|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, g, u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_h \in P_c^1(\mathcal{T}_h)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sup_{\substack{w \in H^1(\Omega), \\ w_h = \mathcal{C}_h w}} \frac{J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h)}{\|w_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $\mathcal{C}_h : L^1(\Omega) \rightarrow P_c^1(\mathcal{T}_h)$ est l'opérateur d'interpolation de Clément et où nous avons introduit

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \varrho_T(u_h - v_h) = \|u_h - v_h\|_{1,T} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \|u_h - v_h\|_{0,F}, \quad (4.22)$$

4.4. Analyse d'erreur *a posteriori*

et les indicateurs d'erreur locaux, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned}
\eta_{1,T}(f, g, u_h) &= \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \{\mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{out}}\}} h_F^{\frac{1}{2}} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} [\nabla u_h]_F\|_{0,F} \\
&+ \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} \|g_h + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h\|_{0,F} \\
&+ \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f - f_h\|_{0,T} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} \|g - g_h\|_{0,F}. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $v_h \in P_c^1(\mathcal{T}_h)$ et posons $w = u - v_h \in H^1(\Omega)$. En utilisant le lemme 4.2.1 (i), on obtient

$$c \|u - v_h\|_{\epsilon \beta \sigma, \Omega}^2 \leq a_h(u - u_h, w) + a_h(u_h - v_h, w). \tag{4.24}$$

(1) Estimation de $a_h(u - u_h, w)$ pour $w \in H^1(\Omega)$.

Soit $w_h \in P_c^1(\mathcal{T}_h)$. Alors,

$$\begin{aligned}
a_h(u - u_h, w) &= a_h(u - u_h, w - w_h) + J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(w - w_h) + \int_{\Omega} \tau(u - u_h)(w - w_h) \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (u - u_h) \beta \cdot \nabla(w - w_h) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \beta \cdot [(u - u_h)(w - w_h)]_F \\
&\quad + \int_{\partial \Omega_{\text{out}}} (\beta \cdot n)(u - u_h)(w - w_h) + J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h).
\end{aligned}$$

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}
a_h(u - u_h, w) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (-\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \nu u)(w - w_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \epsilon \nabla(u - u_h) \cdot n (w - w_h) \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h + \nu u_h)(w - w_h) - \int_{\partial \Omega} \beta \cdot n (u - u_h)(w - w_h) \\
&\quad + \int_{\partial \Omega_{\text{out}}} \beta \cdot n (u - u_h)(w - w_h) + J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h)(w - w_h) - \int_{\partial \Omega_{\text{in}}} (g + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h)(w - w_h) \\
&\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cap \mathcal{F}_h^{\text{out}}} \int_F [\epsilon \nabla u_h]_F (w - w_h) + J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h).
\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz mène à

$$\begin{aligned}
 a_h(u - u_h, w) &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T} \|w - w_h\|_{0,T} \\
 &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{out}}} \|[\epsilon \nabla u_h]_F\|_{0,F} \|w - w_h\|_{0,F} \\
 &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \|g + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h\|_{0,F} \|w - w_h\|_{0,F} \\
 &\quad + J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h).
 \end{aligned}$$

Prenons dans l'inégalité ci-dessus $w_h = \mathcal{C}_h w$, où \mathcal{C}_h désigne l'opérateur d'interpolation de Clément. Les inégalités (A.6)-(A.7) conduisent à

$$\begin{aligned}
 a_h(u - u_h, w) &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,\Delta_T} \right. \\
 &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{out}}} h_F^{\frac{1}{2}} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} [\nabla u_h]_F\|_{0,F} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,\Delta_F} \\
 &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} \|g + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h\|_{0,F} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,\Delta_F} \right) \\
 &\quad + J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h) \\
 &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \epsilon^{-1} h_T^2 \|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T}^2 + \epsilon^{-1} h_T^2 \|f - f_h\|_{0,T}^2 \right. \\
 &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{out}}} h_F \|\epsilon^{\frac{1}{2}} [\nabla u_h]_F\|_{0,F}^2 \\
 &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \epsilon^{-1} h_F \|g_h + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h\|_{0,F}^2 + \epsilon^{-1} h_F \|g - g_h\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} \\
 &\quad + \left(\sup_{\substack{w \in H^1(\Omega), \\ w_h = \mathcal{C}_h w}} \frac{J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h)}{\|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}} \right) \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} \\
 &\leq c \left(\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, g, u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{\substack{w \in H^1(\Omega), \\ w_h = \mathcal{C}_h w}} \frac{J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h)}{\|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}} \right) \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

(2) Estimation de $a_h(u_h - v_h, w)$ pour $w \in H^1(\Omega)$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et une intégration par parties du terme convectif mènent à

$$\begin{aligned}
 a_h(u_h - v_h, w) &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u_h - v_h)\|_{0,T} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,T} \\
 &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\sigma^{-\frac{1}{2}} (\beta \cdot \nabla(u_h - v_h) + \nu(u_h - v_h))\|_{0,T} \|\sigma^{\frac{1}{2}} w\|_{0,T} \\
 &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \|\beta|_F^{\frac{1}{2}}(u_h - v_h)\|_{0,F} \|\beta|_F^{\frac{1}{2}} w\|_{0,F} \\
 &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u_h - v_h)\|_{0,T}^2 + \|\sigma^{-\frac{1}{2}} (\beta \cdot \nabla(u_h - v_h) + \nu(u_h - v_h))\|_{0,T}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \|\beta|_F^{\frac{1}{2}}(u_h - v_h)\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,\Omega}^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}} w\|_{0,\Omega}^2 + \|\beta \cdot n|_F^{\frac{1}{2}} w\|_{0,\partial\Omega_{\text{in}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u_h - v_h)\|_{0,T}^2 + \|\nabla(u_h - v_h)\|_{0,T}^2 + \|u_h - v_h\|_{0,T}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \|\beta|_F^{\frac{1}{2}}(u_h - v_h)\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} \\
 &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}. \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

(3) Les inégalités (4.25) et (4.26) conduisent à

$$\begin{aligned}
 c\|u - v_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, g, u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sup_{\substack{w \in H^1(\Omega), \\ w_h = \mathcal{C}_h w}} \frac{J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h)}{\|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}}.
 \end{aligned}$$

(4) Par l'inégalité triangulaire on a

$$\|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} \leq \|u - v_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} + \|v_h - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega},$$

et on conclut en observant que $\|v_h - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

La preuve est complète. \square

Lemme 4.4.2. *Soit u l'unique solution de (4.2). Soit u_h l'unique solution de (4.6). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\sup_{\substack{w \in H^1(\Omega), \\ w_h = \mathcal{C}_h w}} \frac{J_0(u_h, w_h) + J_1(u_h, w_h)}{\|w\|_{\epsilon\beta\sigma, \Omega}} \leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{2,F}(u_h)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{3,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.27)$$

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \eta_{2,F}(u_h) = \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{3}{2}} \|[\beta \cdot \nabla u_h]_F\|_{0,F}, \quad (4.28)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \eta_{3,F}(u_h) = h_F^{-\frac{1}{2}} \|[u_h]\|_{0,F}. \quad (4.29)$$

Démonstration. Majorons successivement $J_0(u_h, w_h)$ et $J_1(u_h, w_h)$.

1. Majoration de $J_0(u_h, w_h)$.

Ce terme se majore comme au chapitre 3, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} J_0(u_h, w_h) &\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} h_F^{-1} \|[u_h]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\sigma^{\frac{1}{2}} w_h\|_{0,\Omega} \\ &\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{3,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon\beta\sigma, \Omega}. \end{aligned}$$

2. Majoration de $J_1(u_h, w_h)$.

L'inégalité de trace discrète, (A.14), et la régularité du maillage conduisent à

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \|[\beta \cdot \nabla w_h]_F\|_{0,F} \leq c \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{-\frac{1}{2}} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w_h\|_{0,\mathcal{T}_F}.$$

La H^1 –stabilité de \mathcal{C}_h , (A.5), mène à

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \epsilon \beta_{\infty, F}^{-2} h_F \|[\beta \cdot \nabla w_h]_F\|_{0,F}^2 \leq c \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,\Omega}^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 J_1(u_h, w_h) &\leq \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \epsilon^{-1} h_F^3 \|[\beta \cdot \nabla u_h]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{\epsilon h_F}{\beta_{\infty,F}^2} \|[\beta \cdot \nabla w_h]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \epsilon^{-1} h_F^3 \|[\beta \cdot \nabla u_h]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{0,\Omega} \\
 &\leq c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{2,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}.
 \end{aligned}$$

La preuve est complète. \square

Le théorème qui suit est une conséquence directe des lemmes 4.4.1 et 4.4.2.

Théorème 4.4.3 (Fiabilité). *Soit u l'unique solution de (4.2). Soit u_h l'unique solution de (4.6). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\begin{aligned}
 c\|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, g, u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_h \in P_c^1(\mathcal{T}_h)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varrho_T(u_h - v_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} [\eta_{2,F}(u_h)^2 + \eta_{3,F}(u_h)^2] \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

Corollaire 4.4.4. *Soit u l'unique solution de (4.2). Soit u_h l'unique solution de (4.6). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\eta_{1,T}(f, g, u_h)^2 + \eta_{4,T}(u_h)^2] + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} [\eta_{2,F}(u_h)^2 + \eta_{3,F}(u_h)^2] \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.31}$$

$$\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, g, u_h)^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} [\eta_{2,F}(u_h)^2 + \eta_{3,F}(u_h)^2] \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.32}$$

où nous avons introduit les indicateurs d'erreur locaux

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{4,T}(u_h) &= \|\nabla(u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}u_h)\|_{0,T} + \|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}u_h\|_{0,T} \\ &+ \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}u_h\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Démonstration.

- (1) La preuve de (4.31) est immédiate en prenant $v_h = \mathcal{I}_{\text{Os}}u_h$ dans l'expression de $\varrho_T(u_h - v_h)$ donnée en (4.22).
- (2) La preuve de (4.32) résulte du fait que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{4,T}(u_h)^2 \leq \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{3,F}(u_h)^2. \quad (4.34)$$

En effet, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, par les inégalités (4.12)-(4.13), on obtient

$$\|\nabla(u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}u_h)\|_{0,T} + \|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}u_h\|_{0,T} \leq c \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\text{Os}}} (1 + h_F) h_F^{-\frac{1}{2}} \|[u_h]_F\|_{0,F}.$$

En utilisant l'inégalité de trace discrète (A.14), la régularité du maillage et l'inégalité (4.12) pour tout $F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^{\text{in}}$, il vient

$$\|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}u_h\|_{0,F} \leq c h_F^{-\frac{1}{2}} \|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}u_h\|_{0,T} \leq c \sum_{F' \in \mathcal{F}_T^{\text{Os}}} \|[u_h]_{F'}\|_{0,F'}.$$

Ainsi,

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{4,T}(u_h) \leq c \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\text{Os}}} (h_F^{-\frac{1}{2}} + h_F^{\frac{1}{2}} + 1) \|[u_h]_F\|_{0,F}.$$

En utilisant le fait que $h \leq 1$, on obtient bien (4.34). □

Etudions maintenant l'optimalité des indicateurs d'erreur obtenus ci-dessus.

Proposition 4.4.5 (Optimalité). *Soit u l'unique solution (4.2). Soit u_h l'unique solution de (4.6). Alors, il existe une constante c telle que*

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_{1,T}(f, g, u_h) &\leq c \left((1 + \epsilon^{-1}h_T) \|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma, \Delta_T} \right. \\ &\left. + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f - f_h\|_{0,T} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} \|g - g_h\|_{0,F} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \eta_{3,F}(u_h) \leq c \epsilon^{-\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma, \mathcal{T}_F}. \quad (4.36)$$

Démonstration.

(1) Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Estimons $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$ en utilisant les techniques développées dans [Ver98].

(a) Estimation de $\epsilon^{-\frac{1}{2}}h_T\|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T}$.

Rappelons que b_T^c désigne la bulle conforme définie en (A.22). Posons $w_T = b_T^c(f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h) \in H_0^1(T)$. Alors, en intégrant par parties les termes diffusif et convectif, il vient

$$\begin{aligned} a_h(u - u_h, w_T) &= \int_T \epsilon \nabla(u - u_h) \cdot \nabla w_T - \int_T (u - u_h) \beta \cdot \nabla w_T + \int_T \tau(u - u_h) w_T \\ &= (f - f_h, w_T)_{0,T} + (f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h, w_T)_{0,T}, \end{aligned}$$

puisque $w_T \in H_0^1(T)$. D'après le lemme (A.4.2), $\|v\|_{0,T}^2 \leq c(v, b_T^c v)_{0,T}$ pour $v \in P^1(T)$. Donc,

$$\begin{aligned} c\|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T}^2 &\leq (f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h, w_T)_{0,T} \\ &= a_h(u - u_h, w_T) + (f_h - f, w_T)_{0,T}. \end{aligned}$$

Majorons les deux termes du membre de droite de l'inégalité précédente. Comme $\|b_T^c v\|_{0,T} \leq c\|v\|_{0,T}$ et $|b_T^c v|_{1,T} \leq ch_T^{-1}\|v\|_{0,T}$ pour tout $v \in P^1(T)$, on obtient

$$\|w_T\|_{0,T} \leq c\|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T} \quad \text{et} \quad |w_T|_{1,T} \leq ch_T^{-1}\|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} a_h(u - u_h, w_T) &\leq c \left(\|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u - u_h)\|_{0,T}^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}}(u - u_h)\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w_T\|_{0,T}^2 + (1 + \epsilon^{-1})\|w_T\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\epsilon^{\frac{1}{2}} h_T^{-1} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,T} \|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T}. \end{aligned}$$

De plus,

$$(f - f_h, w_T)_{0,T} \leq c\|f - f_h\|_{0,T} \|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T}.$$

En collectant les deux inégalités ci-dessus, on obtient

$$\|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T} \leq c \left[(\epsilon^{\frac{1}{2}} h_T^{-1} + \epsilon^{-\frac{1}{2}}) \|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,T} + \|f - f_h\|_{0,T} \right],$$

et donc

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}}h_T\|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,T} \leq c(1 + \epsilon^{-1}h_T) \|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,T} + \epsilon^{-\frac{1}{2}}h_T\|f - f_h\|_{0,T}.$$

(b) Estimation de $h_F^{\frac{1}{2}} \|[\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla u_h]_F\|_{0,F}$ pour F dans $\mathcal{F}_T \cap \{\mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{out}}\}$.

Rappelons que b_F^c désigne la bulle conforme définie en (A.4.4). Pour $v_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$ et pour $F \in \mathcal{F}_h$, notons par $P_F[\epsilon \nabla v_h]_F$ le prolongement continu de $[\epsilon \nabla v_h]_F$ à \mathcal{T}_F . Posons $w_F = b_F^c P_F(-[\epsilon \nabla u_h]_F) \in H_0^1(\mathcal{T}_F)$. Alors,

$$([\epsilon \nabla u_h]_F, w_F)_{0,F} = a_h(u_h, w_F) - \sum_{T \in \mathcal{T}_F} (\beta \cdot \nabla u_h + \nu u_h, w_F)_{0,T}.$$

D'après le lemme (A.4.5), $\|v\|_{0,F}^2 \leq c(v, b_F^c v)_{0,F}$ pour tout $v \in P^1(F)$. Donc

$$\begin{aligned} c \|[\epsilon \nabla u_h]_F\|_{0,F}^2 &\leq (-[\epsilon \nabla u_h]_F, w_F)_{0,F} \\ &= a_h(u - u_h, w_F) - \sum_{T \in \mathcal{T}_F} [(f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h, w_F)_{0,T} - (f - f_h, w_F)_{0,T}]. \end{aligned}$$

Majorons les trois termes du membre de droite de l'inégalité précédente. D'une part, $\|b_F^c v\|_{0,\mathcal{T}_F} \leq ch_F^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,F}$ et $|b_F^c v|_{1,\mathcal{T}_F} \leq ch_F^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0,F}$ pour tout $v \in P^1(F)$. Ceci mène à

$$\|w_F\|_{0,\mathcal{T}_F} \leq ch_F^{\frac{1}{2}} \|[\epsilon \nabla u_h]_F\|_{0,F} \quad \text{et} \quad |w_F|_{1,\mathcal{T}_F} \leq ch_F^{-\frac{1}{2}} \|[\epsilon \nabla u_h]_F\|_{0,F}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a_h(u - u_h, w_F) &\leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_F} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u - u_h)\|_{0,T}^2 + \|\sigma^{\frac{1}{2}}(u - u_h)\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_F} \|\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla w_F\|_{0,T}^2 + (1 + \epsilon^{-1}) \|w_F\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\epsilon^{\frac{1}{2}} h_F^{-\frac{1}{2}} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} \right) \|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma, \mathcal{T}_F} \|[\epsilon \nabla u_h]_F\|_{0,F}. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la majoration de $\|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,\mathcal{T}_F}$ obtenue ci-dessus pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et la régularité du maillage, il vient

$$\begin{aligned} (f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h, w_F)_{0,\mathcal{T}_F} &\leq ch_T^{\frac{1}{2}} \|f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h\|_{0,\mathcal{T}_F} \|[\epsilon \nabla u_h]_F\|_{0,F} \\ &\leq c \left((\epsilon^{\frac{1}{2}} h_T^{-\frac{1}{2}} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T^{\frac{1}{2}}) \|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma, \mathcal{T}_F} \right. \\ &\quad \left. + h_T^{\frac{1}{2}} \|f - f_h\|_{0,\mathcal{T}_F} \right) \|[\epsilon \nabla u_h]_F\|_{0,F}. \end{aligned}$$

De plus,

$$(f - f_h, w_F)_{0, \mathcal{T}_F} \leq ch_T^{\frac{1}{2}} \|f - f_h\|_{0, \mathcal{T}_F} \|[\epsilon \nabla u_h]_F\|_{0, F}.$$

Ainsi,

$$h_F^{\frac{1}{2}} \|[\epsilon^{\frac{1}{2}} \nabla u_h]_F\|_{0, F} \leq c \left((1 + \epsilon^{-1} h_T) \|u - u_h\|_{\epsilon \beta \sigma, \mathcal{T}_F} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f - f_h\|_{0, \mathcal{T}_F} \right).$$

(c) Estimation de $\epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} \|g_h + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h\|_{0, F}$ pour F dans $\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_h^{\text{in}}$.

Posons $w_F = b_F^c(g_h + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h)$. Alors,

$$\begin{aligned} (g_h + \epsilon \nabla \cdot u_h n - \beta \cdot n u_h, w_F)_{0, F} &= (f_h - \beta \cdot \nabla u_h - \nu u_h, w_F)_{0, T} - a_h(u - u_h, w_F) \\ &\quad + (f - f_h, w_F)_{0, T} + (g - g_h, w_F)_{0, F}. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations obtenues ci-dessus et la régularité du maillage, on obtient

$$\begin{aligned} \|g_h + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h\|_{0, F} &\leq c \left((\epsilon^{\frac{1}{2}} h_T^{-1} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T^{\frac{1}{2}}) \|u - u_h\|_{\epsilon \beta \sigma, T} \right. \\ &\quad \left. + h_T^{\frac{1}{2}} \|f - f_h\|_{0, T} + \|g - g_h\|_{0, F} \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T^{\frac{1}{2}} \|g_h + \epsilon \nabla u_h \cdot n - \beta \cdot n u_h\|_{0, F} &\leq c \left((1 + \epsilon^{-1} h_T) \|u - u_h\|_{\epsilon \beta \sigma, T} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T \|f - f_h\|_{0, T} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_T^{\frac{1}{2}} \|g - g_h\|_{0, F} \right). \end{aligned}$$

(2) Estimation de $\eta_{3, F}(u_h)$ pour tout F dans \mathcal{F}_h^i .

Dans [ABC03, KP03] il est montré que pour tout F dans \mathcal{F}_h^i ,

$$\|[u_h]_F\|_{0, F} \leq ch_F^{\frac{1}{2}} \sum_{T \in \mathcal{T}_F} \|\nabla(u - u_h)\|_{0, T}.$$

Donc,

$$\eta_{3, F}(u_h) = h_F^{-\frac{1}{2}} \|[u_h]_F\|_{0, F} \leq c \epsilon^{-\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{\epsilon \beta \sigma, \mathcal{T}_F}.$$

La preuve est complète. \square

Remarque 4.4.6. La proposition 4.4.5 montre que l'indicateur d'erreur $\eta_{1, T}(f, g, u_h)$ est robuste au sens énoncé dans [Ver98] ; c'est-à-dire que les bornes inférieures et supérieures de l'estimateur diffèrent d'un facteur $c + \epsilon^{-1}h$. Donc, si le nombre de Péclet est suffisamment petit, l'estimateur *a posteriori* est optimal.

Remarque 4.4.7. Il n'est pas clair que l'on puisse obtenir une inégalité du type $\eta_{2,F}(u_h) \leq c\|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$. On peut facilement obtenir une inégalité du type

$$\eta_{2,F}(u_h) = \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} J_{1,F}(u - u_h, u - u_h)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_F^{\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{A,\mathcal{T}_F},$$

mais cette inégalité ne permet pas de conclure à l'optimalité de l'indicateur $\eta_{3,F}(u_h)$ puisque le membre de droite ne fait pas apparaître $\|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$.

4.5 Résultats numériques

Cette section présente les résultats obtenus sur deux cas tests en dimension deux pour la méthode de stabilisation présentée dans ce chapitre. Un premier cas test est construit de sorte à posséder une solution analytique exhibant une couche intérieure. Le deuxième cas test ne possède pas de solution analytique et exhibe une couche intérieure résultant de la propagation d'une discontinuité dans les conditions limites d'entrée.

4.5.1 Cast test 1

Considérons la carré unité $]0, 1[\times]0, 1[$. Les données f et g sont choisies de sorte que la solution exacte de (4.1) soit

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{0.5-x}{a_w}\right) \right),$$

avec le paramètre $a_w = 0.05$. La solution analytique exhibe une couche intérieure en $x = 0.5$. On choisit $\beta = (1, 0)^T$ et $\nu = 1$. On considère ce cas test pour $\epsilon \in \{1, 10^{-2}, 10^{-4}\}$. Les triangulations sont quasi-uniformes et non-structurées de taille $h_i = h_0 2^{-i}$, avec $h_0 = 0.1$ et $i \in \{0, \dots, 4\}$. Le tableau 4.1 présente la norme $\|\cdot\|_{A,\Omega}$ de l'erreur réelle (on entend par erreur réelle la différence entre la solution analytique et la solution approchée) pour les différentes valeurs prises par le coefficient de diffusion ϵ sur les différentes triangulations. Le coefficient α dans ces tableaux indique que l'erreur converge en $O(h^\alpha)$.

4.5. Résultats numériques

Maillage		$\epsilon = 1$		$\epsilon = 10^{-2}$		$\epsilon = 10^{-4}$	
Na	h	$\ u - u_h\ _{A,\Omega}$	α	$\ u - u_h\ _{A,\Omega}$	α	$\ u - u_h\ _{A,\Omega}$	α
374	0.1	2.0918	-	0.7547	-	0.5290	-
1441	0.05	1.1176	0.90	0.4364	0.79	0.3040	0.80
5621	0.025	0.5313	1.07	0.1900	1.20	0.1345	1.18
22330	0.0125	0.2517	1.08	0.0748	1.34	0.0476	1.50
88961	0.00625	0.1200	1.07	0.0324	1.21	0.0165	1.53

TAB. 4.1: Erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{A,\Omega}$ et ordres de convergence pour $\epsilon = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-4}$.

L'erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{A,\Omega}$ converge à l'ordre 1 lorsque $\epsilon = 1$. Lorsque $\epsilon = 10^{-2}$, l'erreur converge approximativement en $O(h^{\frac{3}{2}})$ lorsque $\epsilon \leq h$ excepté pour le maillage de taille h_1 où l'ordre de convergence est inférieur à 1. Lorsque $\epsilon = 10^{-4}$, on obtient une convergence en $O(h^{\frac{3}{2}})$ pour $h \leq 1.25 \times 10^{-2}$.

Maillage		$\epsilon = 1$		$\epsilon = 10^{-2}$		$\epsilon = 10^{-4}$	
Na	h	$\ u - u_h\ _{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$	α	$\ u - u_h\ _{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$	α	$\ u - u_h\ _{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$	α
374.	0.10000	1.0817	0.93	0.4432	1.07	0.2385	1.36
1441.	0.05000	0.5667	0.93	0.2126	1.06	0.0928	1.39
5621.	0.02500	0.2878	0.98	0.0707	1.59	0.0248	1.90
22330.	0.01250	0.1445	0.99	0.0244	1.54	0.0052	2.25
88961.	0.00625	0.0727	0.99	0.0127	0.94	0.0014	1.89

TAB. 4.2: Erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$ et ordres de convergence pour $\epsilon = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-4}$.

Le tableau 4.2 présente la norme $\|\cdot\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$ de l'erreur réelle pour les différentes valeurs du coefficient de diffusion ϵ et pour les différentes triangulations. Pour cette erreur, on observe un comportement analogue à celui observé pour la norme $\|\cdot\|_{A,\Omega}$ lorsque $\epsilon = 1$ et $\epsilon = 10^{-2}$. En régime de diffusion dominante ($\epsilon = 10^{-4}$), on observe une super-convergence de l'erreur.

Les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 présentent les résultats obtenus pour les estimateurs par résidu

obtenus dans ce chapitre. Les termes $\eta_1(f, g, u_h)$, $\eta_2(u_h)$, $\eta_3(u_h)$ et $\eta_4(u_h)$ sont définis par

$$\eta_1(f, g, u_h) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,T}(f, g, u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_2(u_h) = \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{2,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.37)$$

$$\eta_3(u_h) = \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \eta_{3,F}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_4(u_h) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{4,T}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.38)$$

avec les indicateurs définis en (4.23), (4.28), (4.29) et (4.33) respectivement. Comme dans les deux chapitres précédents, nous ferons un abus de langage en appelant $\eta_1(f, g, u_h)$, $\eta_i(u_h)$, $i \in \{2, 3, 4\}$, des estimateurs d'erreur. L'indice d'efficacité I est défini par

$$I = \frac{\sum_{i=1}^4 \eta_i}{\|u - u_h\|_{\epsilon\beta\sigma, \Omega}}. \quad (4.39)$$

Lorsque $\epsilon = 1$, on observe que l'indice d'efficacité est indépendant du maillage et que la super-convergence de $\eta_2(u_h)$ n'affecte pas cet indice puisque cet estimateur est dominé par $\eta_1(f, g, u_h)$.

Na	h	$\eta_1(f, g, u_h)$	$\eta_2(u_h)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h)$	I
374	0.1	8.2335	0.1741	0.6282	0.9699	9.25
1441	0.05	3.9144	0.0599	0.4380	0.6321	8.9
5621	0.025	1.8557	0.0156	0.2426	0.3315	8.50
22330	0.0125	0.9094	0.0039	0.1248	0.1662	8.33
88961	0.00625	0.4806	0.0010	0.0630	0.0832	8.63

TAB. 4.3: Estimateurs d'erreur *a posteriori* et indices d'efficacité lorsque $\epsilon = 1$

Lorsque $\epsilon = 10^{-2}$, l'estimateur $\eta_1(f, g, u_h)$ domine les autres estimateurs pour les trois premières triangulations. Celui-ci étant super-convergent c'est l'estimateur $\eta_4(u_h)$ qui domine sur les deux dernières triangulations. La convergence de $\eta_4(u_h)$ étant en $O(h)$, ceci explique la légère dégradation de l'indice d'efficacité I sur la triangulation la plus fine.

4.5. Résultats numériques

Na	h	$\eta_1(f, u_h)$	$\eta_2(u_h)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h)$	I
374	0.1	3.0430	0.7252	0.4500	0.6725	11.03
1441	0.05	0.9623	0.3715	0.3239	0.4664	10.00
5621	0.025	0.2946	0.1349	0.1799	0.2462	12.10
22330	0.0125	0.1081	0.0379	0.0973	0.1297	9.97
88961	0.00625	0.0514	0.0097	0.0536	0.0708	14.60

TAB. 4.4: Estimateurs d'erreur *a posteriori* et indices d'efficacité lorsque $\epsilon = 10^{-2}$

Lorsque $\epsilon = 10^{-4}$, on observe une super-convergence des estimateurs conduisant à une décroissance de l'indice d'efficacité. Les valeurs prises par celui-ci restent toutefois relativement élevées, en accord avec les estimations d'optimalité qui se dégradent (à h fixé) en ϵ^{-1} pour $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$ et en $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ pour $\eta_3(u_h)$.

Na	h	$\eta_1(f, g, u_h)$	$\eta_2(u_h)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h)$	I
374	0.1	28.2494	7.4285	0.5404	0.8158	155.28
1441	0.05	7.7970	3.8835	0.4032	0.5905	136.57
5621	0.025	1.6272	1.4093	0.1666	0.2330	138.55
22330	0.0125	0.2577	0.3865	0.0398	0.0542	141.96
88961	0.00625	0.0508	0.0973	0.0118	0.0158	125.50

TAB. 4.5: Estimateurs d'erreur *a posteriori* et indices d'efficacité lorsque $\epsilon = 10^{-4}$

Les estimateurs *a posteriori* et l'erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$ sont présentés en échelle logarithmique en fonction du nombre de degrés de liberté du problème (4.6), c'est-à-dire du nombre de faces de la triangulation dans la figure 4.1

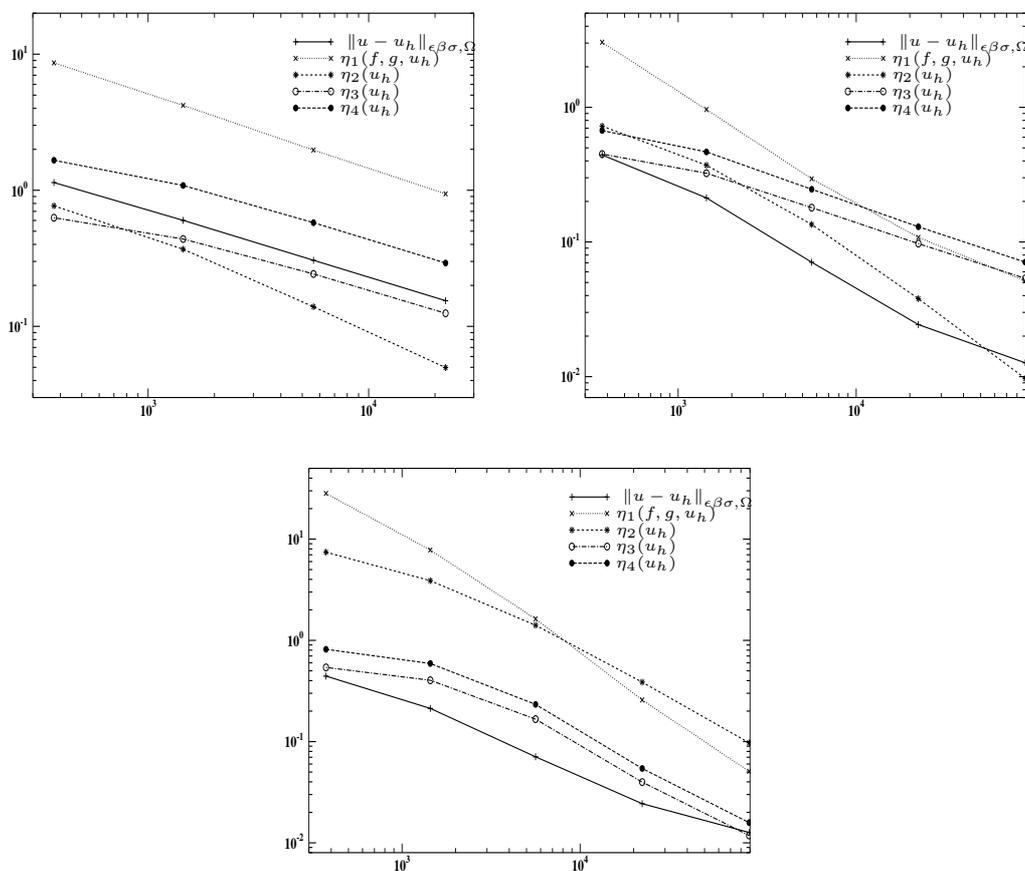


FIG. 4.1: Erreur réelle et estimateurs d’erreur *a posteriori* en fonction du nombre de faces de la triangulation. Gauche : $\epsilon = 1$; centre : $\epsilon = 10^{-2}$; droite : $\epsilon = 10^{-4}$

Le figure 4.1 montre que pour les trois valeurs de ϵ choisies, les estimateurs $\eta_1(f, g, u_h)$ et $\eta_2(u_h)$ ont un ordre de convergence supérieur à l’ordre de convergence de l’erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$. Lorsque $\epsilon = 10^{-2}$ et 10^{-4} , les estimateurs $\eta_3(u_h)$ et $\eta_4(u_h)$ sont sous-optimaux sur les maillages les plus grossiers. Dans les trois cas, on voit que les estimateurs dominant l’erreur réelle.

Terminons la présentation des résultats obtenus pour ce cas test avec la visualisation de la localisation de l’erreur réelle en norme $\|\cdot\|_{\epsilon\beta\sigma,\Omega}$ et de l’indicateur d’erreur $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$.

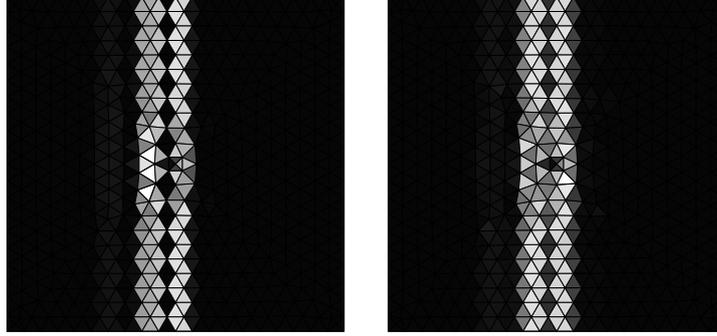


FIG. 4.2: Localisation de l'erreur réelle (à gauche) et de l'estimateur d'erreur *a posteriori* $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$ (à droite) sur la triangulation de taille h_2 pour $\epsilon = 10^{-2}$.

La figure 4.2 montre que les indicateurs d'erreur $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$ prennent bien leurs valeurs les plus grandes là où l'erreur réelle prend ses valeurs les plus grandes. Donc, en utilisant ces indicateurs d'erreur pour un raffinement adaptatif de maillage, ce dernier devrait être raffiné là où l'erreur est grande. Des maillages adaptatifs sont présentés pour le deuxième cas test dans la section 4.5.3.

4.5.2 Cas test 2

Ce deuxième cas test consiste en la résolution de l'équation de convection–diffusion–réaction dans le carré unité $]0, 1[\times]0, 1[$. Les conditions limites sont choisies de sorte que la solution présente une couche intérieure. Les données du problème sont $f = 0$, $\beta = (2, 1)^T$ et $\nu = 1$. On impose des conditions de Robin sur le côté horizontal en bas avec $g = 1$ et sur le côté vertical gauche avec $g = 0$. Sur les deux autres côtés, on impose des conditions de Neumann homogènes. Comme pour le cas test précédent, on fait varier le coefficient de diffusion ϵ dans $\{1, 10^{-2}, 10^{-4}\}$ et on considère les mêmes triangulations. Les conditions limites étant discontinues au point $(0, 0)$ la solution présente une singularité à l'origine qui se propage le long de la ligne de courant de direction β , formant ainsi une couche intérieure.

La figure 4.3, présente les isovaleurs de la solution approchée sur la triangulation de taille h_3 pour les différentes valeurs prises par ϵ . On constate la formation d'une couche intérieure induite par la singularité au point $(0, 0)$ à mesure que ϵ prend des valeurs de plus en plus petites.

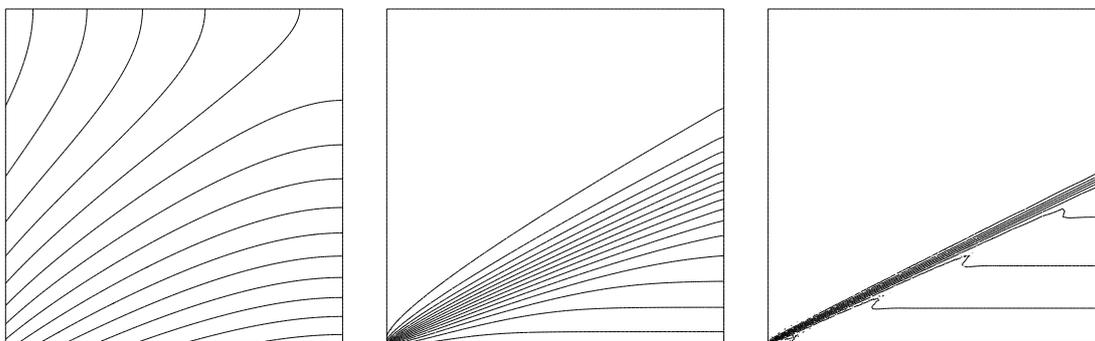


FIG. 4.3: Isovaleurs de la solution approchée, $\epsilon = 1$ (à gauche); $\epsilon = 10^{-2}$ (au centre); $\epsilon = 10^{-4}$ (à droite) sur la triangulation de taille h_3 .

Les tableaux 4.6, 4.7 et 4.8 présentent les résultats obtenus pour les estimateurs *a posteriori*.

Lorsque $\epsilon = 1$, l'estimateur $\eta_1(f, g, u_h)$ est sous-optimal et domine les autres estimateurs; ces derniers exhibent une convergence à l'ordre 1.

Na	h	$\eta_1(f, g, u_h)$	$\eta_2(u_h)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h)$
374	0.1	0.6725	0.0046	0.0170	0.0234
1441	0.05	0.4712	0.0013	0.0092	0.0124
5621	0.025	0.3283	0.0004	0.0049	0.0065
22330	0.0125	0.2300	0.0001	0.0025	0.0034

TAB. 4.6: Estimateurs d'erreur *a posteriori* lorsque $\epsilon = 1$

Lorsque $\epsilon = 10^{-2}$, on observe un comportement analogue au cas $\epsilon = 1$.

Na	h	$\eta_1(f, g, u_h)$	$\eta_2(u_h)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h)$
374	0.1	7.5674	0.2077	0.0676	0.0978
1441	0.05	5.3815	0.0981	0.0379	0.0459
5621	0.025	3.7998	0.0477	0.0197	0.0254
22330	0.0125	2.6717	0.0211	0.0099	0.0156

TAB. 4.7: Estimateurs d'erreur *a posteriori* lorsque $\epsilon = 10^{-2}$

Lorsque $\epsilon = 10^{-4}$, $\eta_1(u_h)$ et $\eta_2(u_h)$ ont un ordre de convergence proche de 1.

4.5. Résultats numériques

Na	h	$\eta_1(f, u_h)$	$\eta_2(u_h)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h)$
374	0.1	4.9970	2.0555	0.1158	1.5703
1441	0.05	2.5668	0.9154	0.0968	0.8855
5621	0.025	1.3503	0.4507	0.0780	0.4827
22330	0.0125	0.7107	0.2237	0.0593	0.2495

TAB. 4.8: Estimateurs d'erreur *a posteriori* lorsque $\epsilon = 10^{-4}$

La figure 4.4 représente en échelle logarithmique les estimateurs d'erreur *a posteriori* en fonction du nombre de faces de la triangulation.

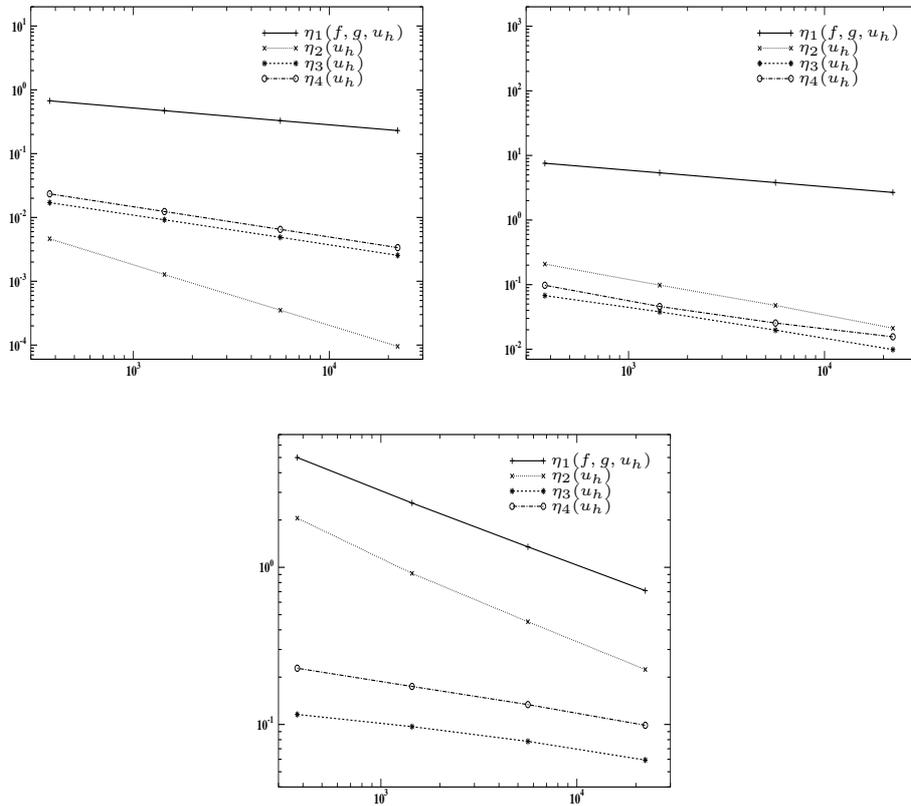


FIG. 4.4: Erreur réelle et estimateurs d'erreur *a posteriori* en fonction du nombre de faces de la triangulation. En haut à gauche : cas où $\epsilon = 1$; en haut à droite : $\epsilon = 10^{-2}$; en bas $\epsilon = 10^{-4}$

4.5.3 Adaptation de maillage

Dans cette section, nous montrons comment le maillage est raffiné à l’aide de certains des estimateurs d’erreur obtenus dans ce chapitre. Considérons le cas test 2 et utilisons l’algorithme d’adaptation de maillage décrit dans l’annexe B. La figure 4.6 présente le maillage initial et les maillages obtenus après cinq itérations lorsque pour $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-4}$. Lorsque $\epsilon = 10^{-2}$, le maillage est raffiné à l’origine et le long de la couche intérieure. Lorsque $\epsilon = 10^{-4}$, la zone où le maillage est raffiné est plus fine que pour $\epsilon = 10^{-2}$, en accord avec le fait que la couche intérieure est plus étroite.

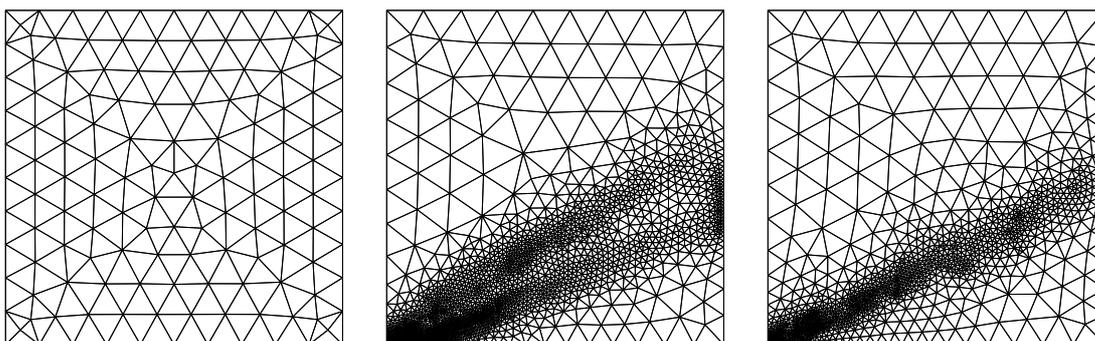


FIG. 4.5: Raffinement de maillage adaptatif en utilisant l’indicateur d’erreur $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$. A gauche : maillage initial ; au centre : maillage adapté après 5 itérations pour $\epsilon = 10^{-2}$; à droite : maillage adapté après 5 itérations pour $\epsilon = 10^{-4}$

Les tableaux 4.9 et 4.10 présentent les estimateurs d’erreur *a posteriori* sur les cinq triangulations raffinées de façon adaptative avec les indicateurs d’erreur $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$ pour $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-4}$, respectivement.

Lorsque $\epsilon = 10^{-2}$, l’ordre de convergence de $\eta_2(u_h)$ est plus grand que l’ordre de convergence de $\eta_1(f, g, u_h)$, $\eta_3(u_h)$ et $\eta_4(u_h)$.

4.5. Résultats numériques

Na	$\eta_1(f, u_h)$	$\eta_2(u_h)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h)$
374	0.646018	0.2077	0.2276	0.4269
622	0.416064	0.1088	0.1898	0.3189
1224	0.254349	0.0560	0.1368	0.2163
2474	0.154027	0.0292	0.1019	0.1515
5657	0.088210	0.0149	0.0724	0.1029

TAB. 4.9: Estimateurs *a posteriori* par résidu sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$ lorsque $\epsilon = 10^{-2}$

Lorsque $\epsilon = 10^{-4}$, $\eta_1(f, g, u_h)$ et $\eta_2(u_h)$ exhibent le même ordre de convergence alors que $\eta_3(u_h)$ et $\eta_4(u_h)$ sous sous-optimaux.

Na	$\eta_1(f, u_h)$	$\eta_2(u_h)$	$\eta_3(u_h)$	$\eta_4(u_h)$
374	4.996989	2.0555	0.1158	1.5703
641	2.507593	1.0641	0.1072	1.0055
1180	1.378212	0.5975	0.0851	0.5909
2118	0.795577	0.3709	0.0702	0.3615
3778	0.449918	0.2048	0.0502	0.1888

TAB. 4.10: Estimateurs *a posteriori* par résidu sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$ lorsque $\epsilon = 10^{-4}$

La figure 4.6 présente les estimateurs d'erreur *a posteriori* en fonction du nombre de faces des triangulations.

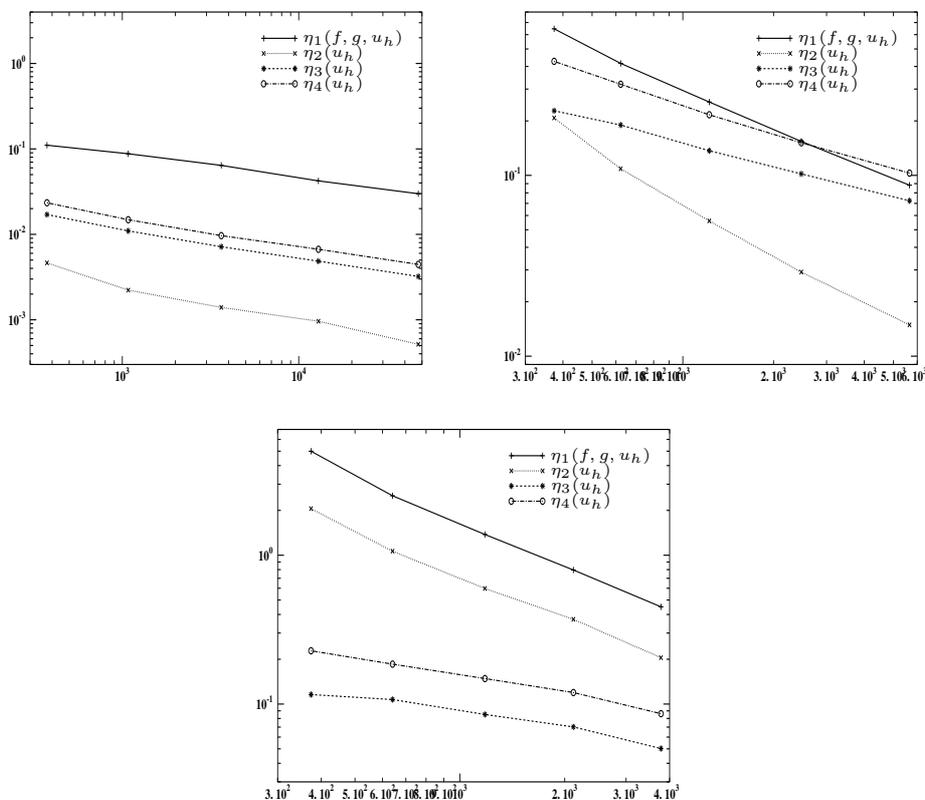


FIG. 4.6: Estimateurs d’erreur *a posteriori* par résidu sur les triangulations générées de façon adaptative avec $\eta_{1,T}(f, g, u_h)$ en fonction du nombre d’arêtes. En haut à gauche : $\epsilon = 1$; en haut à droite : $\epsilon = 10^{-2}$; en bas : $\epsilon = 10^{-4}$

Ces résultats montrent qu’en régime advectif dominant, la convergence des estimateurs est améliorée en raffinant le maillage de façon adaptative. Seul $\eta_3(u_h)$ et $\eta_4(u_h)$ présentent le même défaut de convergence.

En utilisant $\eta_i(u_h)$, $i \in \{2, 3\}$, pour générer de façon adaptative des maillages, on obtient des maillages raffinés similaires à ceux de la figure 4.6.

4.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau schéma de discrétisation de l’équation de convection–diffusion–réaction dans un cadre non-conforme. La stabilisation proposée se fait par pénalisation sur les faces intérieures, d’une part du saut de la solution discrète

4.6. Conclusions

et d'autre part du saut de la dérivée advective. Un intérêt théorique du schéma est que les termes de stabilisation ne font pas intervenir de coefficient dépendant de h et de ϵ . L'analyse d'erreur *a priori* conduit à des estimations d'erreur du même ordre que celles obtenues avec les méthodes de stabilisation usuelles. Certains des indicateurs d'erreur *a posteriori* obtenus sont robustes au sens défini dans [Ver98] et peuvent d'être utilisés pour générer des maillages adaptatifs sur des problèmes de convection–diffusion–réaction présentant des couches intérieures.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'erreur *a priori* et *a posteriori* de méthodes d'éléments finis mixtes et non-conformes pour les équations de Darcy et de convection–diffusion–réaction.

Dans le chapitre 2 nous avons présenté une analyse d'erreur *a priori* et une analyse d'erreur *a posteriori* d'une discrétisation par schéma boîte pour les équations de Darcy. Les techniques d'estimateurs par résidu et hiérarchique ont conduit à des indicateurs d'erreur fiables et optimaux. Ces estimateurs ont été évalués numériquement sur des cas tests où la perméabilité est constante, variable et fortement variable. Nous avons également montré sur des exemples numériques comment ces estimateurs permettent de raffiner le maillage de façon adaptative.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié un nouveau schéma de discrétisation non-conforme des équations de convection–diffusion–réaction stabilisé par viscosité de sous-maille. Outre le terme de viscosité de sous-maille classiquement considéré dans le cas conforme, nous avons introduit un terme de pénalisation du saut de la solution discrète sur les faces. Nous avons montré la stabilité de ce schéma et les mêmes propriétés de convergence que les schémas existant dans la littérature. Un intérêt théorique et pratique est que les termes de stabilisation ne font pas intervenir de coefficient dépendant de ϵ et de h . Nous avons réinterprété ce schéma en un problème posé dans l'espace des échelles résolues. Nous avons également étudié une formulation mixte non-symétrique des équations de convection–diffusion–réaction discrétisées par schéma boîte. Nous avons montré que ce schéma boîte est équivalent au problème en variable primale posé sur les échelles résolues et à une formule de reconstruction du flux sur un patch d'éléments de la triangulation. Nous avons effectué une analyse d'erreur *a posteriori* du schéma stabilisé

par viscosité de sous-maille. Certains indicateurs sont robustes au sens de Verfürth [Ver98] et nous avons étudiés sur deux cas tests le comportement de ces indicateurs.

Dans le chapitre 4, nous avons présenté un nouveau schéma de discrétisation de l'équation de convection-diffusion-réaction dans un cadre non-conforme. La stabilisation proposée se fait par pénalisation sur les faces intérieures d'une part du saut de la solution discrète et d'autre part du saut de la dérivée advective. Un intérêt théorique et pratique du schéma est que les termes de stabilisation ne font pas intervenir de coefficient dépendant de h et de ϵ . L'analyse *a priori* conduit à des estimations d'erreur du même ordre que celles obtenues avec les méthodes de stabilisation usuelles. Certains des indicateurs d'erreur *a posteriori* obtenus sont robustes au sens défini dans [Ver98] et peuvent être utilisés pour générer des maillages adaptatifs.

Les perspectives de ce travail sont :

- A court terme certains aspects de ces travaux méritent d'être complétés, notamment l'analyse d'erreur *a priori* de la formulation mixte des équations de convection-diffusion-réaction et l'analyse d'erreur *a posteriori* de type hiérarchique pour la méthode de stabilisation par viscosité de sous-maille.
- A plus ou moins long terme, on pourra appliquer ces méthodes à des problèmes concrets tels que le cas test Couplex I pour le stockage des déchets radioactifs ; ou à des modèles d'écoulement dans les bassins versants.

Annexe A

Résultats techniques

Dans cette annexe, nous rappelons quelques résultats utiles.

A.1 Maillages

Soit \mathcal{T}_h une triangulation d'un domaine Ω simplement connexe. Soient N_{el} le nombre d'éléments, N_f le nombre de faces, N_s le nombre de sommets et N_f^∂ le nombre situées sur la frontière de Ω . Alors, en dimension deux, on a les relations d'Euler suivantes :

$$\begin{cases} N_{\text{el}} - N_f + N_s = 1, \\ 2N_f - N_f^\partial = 3N_{\text{el}}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Définition A.1.1 (Régularité). Soit ρ_T le diamètre de la plus grande boule inscrite dans le triangle T . Alors la famille de maillages $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ est dite régulière s'il existe une constante σ_0 telle que

$$\forall h, \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma_0. \quad (\text{A.2})$$

Définition A.1.2 (Quasi-uniformité). Une famille de maillages $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ est dite quasi-uniforme si et seulement si elle est régulière et s'il existe une constante c telle que

$$\forall h, \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad h_T \geq c h. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Opérateurs d'interpolation

L'opérateur d'interpolation de Clément, \mathcal{C}_h , introduit par Clément dans [Clé75] satisfait les propriétés suivantes :

Lemme A.2.1.

(i) *Stabilité* : Soit $0 \leq m \leq 1$. Il existe une constante c telle que : $\forall h, \forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\|\mathcal{C}_h v\|_{0,\Omega} \leq c \|v\|_{0,\Omega}, \quad (\text{A.4})$$

$$\|\mathcal{C}_h v\|_{1,\Omega} \leq c \|v\|_{1,\Omega}. \quad (\text{A.5})$$

(ii) *Approximabilité* : Il existe une constante c telle que : $\forall h$,

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in H^1(\Delta_T), \quad \|v - \mathcal{C}_h v\|_{0,T} \leq c h_T \|v\|_{1,\Delta_T}, \quad (\text{A.6})$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \forall v \in H^1(\Delta_F), \quad \|v - \mathcal{C}_h v\|_{0,F} \leq c h_T^{\frac{1}{2}} \|v\|_{1,\Delta_F}. \quad (\text{A.7})$$

Pour la démonstration de ces inégalités, on pourra se référer à [Clé75, Ber89, BG98].

Introduisons l'opérateur de projection orthogonale pour le produit scalaire de $[L^2(\Omega)]^d$. Pour $k \geq 0$, $\Pi^k : [L^2(\Omega)]^d \rightarrow P^k(\mathcal{T}_h)$ est défini pour tout $v \in [L^2(\Omega)]^d$ et pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ par

$$\begin{cases} (\Pi^0 v)|_T \in [P^k(T)]^d, \\ \int_T (\Pi^k v - v) q = 0, \quad \forall q \in [P^k(T)]^d. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Lemme A.2.2. Il existe une constante c telle que : $\forall h, \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in [H^{k+1}(T)]^d$

$$\|v - \Pi^k v\|_{0,T} \leq c h^{k+1} |v|_{k+1,T}, \quad (\text{A.9})$$

$$|v - \Pi^k v|_{1,T} \leq c h^k |v|_{k+1,T}. \quad (\text{A.10})$$

Lemme A.2.3 (Inégalité inverse locale). Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de maillages. Soient l et m deux entiers tels que $0 \leq m \leq l$. Soit un entier $k \geq 1$. Alors, il existe une constante c telle que pour tout $v \in P^k(\mathcal{T}_h)$,

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \|v\|_{l,T} \leq c h_T^{m-l} \|v\|_{m,T}. \quad (\text{A.11})$$

Lemme A.2.4 (Inégalité inverse globale). Soient l et m deux entiers tels que $0 \leq m \leq l$. Soit un entier $k \geq 1$. Si la famille de maillages $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ est quasi-uniforme, alors il existe une constante c indépendante de h telle que pour tout $v \in P^k(\mathcal{T}_h)$,

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{l,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c h^{m-l} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{m,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.12})$$

Lemme A.2.5 (Inégalité de trace continue). Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de maillages. Alors, il existe une constante c telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in H^1(T), \quad \|v\|_{0,\partial T}^2 \leq c \|v\|_{0,T} \|v\|_{1,T}. \quad (\text{A.13})$$

Lemme A.2.6 (Inégalité de trace discrète). Soit un entier $k \geq 1$. Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de maillages. Alors, il existe une constante c telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in P^k(T), \quad \|v\|_{0,\partial T} \leq c h_T^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0,T}. \quad (\text{A.14})$$

A.3 Espaces d'éléments finis

A.3.1 Le Patch-test

Définition A.3.1. Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de maillages. Une fonction v_h dans $P^k(\mathcal{T}_h)$, avec $k \geq 1$, vérifie le Patch-test d'ordre $k - 1$ si

$$\forall q \in P^{k-1}(\mathcal{T}_h), \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \int_F [v_h]_F q = 0. \quad (\text{A.15})$$

On renvoie à [IR72, CR73] pour plus de détails.

A.3.2 L'espace d'éléments finis de Crouzeix–Raviart

L'espace d'éléments finis de Crouzeix–Raviart, $P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$, introduit dans [CR73], est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ affines sur chaque élément du maillage et continues aux barycentres des faces internes; autrement dit

$$P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h) = \{ v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in P^1(T); \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \int_F [v_h]_F = 0 \}.$$

Cet espace est également appelé espace P^1 non-conforme en référence au fait qu'il n'est pas $H^1(\Omega)$ -conforme. Cet espace satisfait le Patch-test d'ordre 0.

A.3.2.1 Degrés de liberté de $P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$

L'espace $P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$ est un espace vectoriel de dimension N_f dont les degrés de liberté sont les formes linéaires $(l_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$, avec pour tout $v_h \in P_{\text{nc}}^1(\mathcal{T}_h)$,

$$l_F(v_h) = \frac{1}{|F|} \int_F v_h.$$

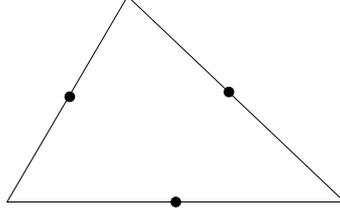


FIG. A.1: Degrés de liberté de l'élément fini de Crouzeix–Raviart

Lemme A.3.2 (Interpolation de faces de Crouzeix–Raviart). Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de maillages. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq k$. Alors, il existe une constante c telle que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$

$$\forall F \in \mathcal{F}_T, \forall \phi \in H^1(T), \forall v \in H^{m+1}(T), \quad \left| \int_F \phi(v - \Pi_F^k v) \right| \leq c h_T^{k+1} |\phi|_{1,T} |v|_{m+1,T}. \quad (\text{A.16})$$

On renvoie à [CR73] pour la preuve.

A.3.2.2 Inégalité de Poincaré discrète

Lemme A.3.3. Il existe une constante c ne dépendant que de Ω telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) + P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h), \quad \|v\|_{0,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.17})$$

On renvoie à [Tem77, CG02] pour la preuve.

A.3.3 L'espace d'éléments finis de Raviart–Thomas de plus bas degré

L'espace d'éléments finis de Raviart–Thomas, $RT^0(\mathcal{T}_h)$, introduit dans [RT77], est défini de la manière suivante :

$$RT^0(\mathcal{T}_h) = \{ q_h \in [L^2(\Omega)]^d; \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in RT^0(T); \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \int_F [q_h]_F = 0 \}, \quad (\text{A.18})$$

où pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, $RT^0(T)$ désigne l'espace des polynômes en x qui s'écrivent sous la forme $\alpha x + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^d$.

A.3.3.1 Degrés de liberté de $RT^0(\mathcal{T}_h)$

L'espace $RT^0(\mathcal{T}_h)$ est un espace vectoriel de dimension N_f dont les degrés de liberté sont les formes linéaires $(L_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$, avec pour tout $\tau_h \in RT^0(\mathcal{T}_h)$,

$$L_F(\tau_h) = \frac{1}{|F|} \int_F \tau_h \cdot n_F,$$

où n_F est un vecteur normal à la face F .

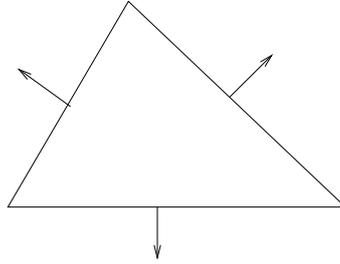


FIG. A.2: Degrés de liberté de l'élément fini de Raviart–Thomas

A.3.3.2 Caractérisation de $RT^0(T)$

Tout élément τ_h de $RT^0(\mathcal{T}_h)$ s'écrit sur chaque triangle T de \mathcal{T}_h comme suit, [Mar85],

$$\tau_h|_T = \Pi^0 \tau_h|_T + \frac{1}{d} (\nabla \cdot \tau_h)|_T \pi_h^1|_T, \quad (\text{A.19})$$

où π_h^1 est le polynôme de degré un par morceaux tel que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in T$, $\pi_h^1(x) = (x_1 - G_{T,1}, \dots, x_d - G_{T,d})$, où $(G_{T,1}, \dots, G_{T,d})$ sont les coordonnées cartésiennes du barycentre G_T de T . De cette égalité se déduit facilement que

$$\forall \tau_h \in RT^0(\mathcal{T}_h), \quad \|\tau_h\|_{0,T} \leq \|\Pi^0 \tau_h\|_{0,T} + c h_T \|\nabla \cdot \tau_h\|_{0,T}. \quad (\text{A.20})$$

Lemme A.3.4 (Décomposition hiérarchique d'un polynôme de degré 1).

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v_h \in P^1(T), \quad v_h|_T = \Pi^0(v_h) + \pi_h^1 \cdot \nabla v_h|_T. \quad (\text{A.21})$$

A.4 Fonctions bulles

A.4.1 Bulles conformes sur les éléments

Définition A.4.1. Soit $T \in \mathcal{T}_h$. La bulle cubique conforme sur T est définie par

$$\begin{cases} b_T^c|_T = (d+1)^{d+1} \prod_{i=0}^d \lambda_{i,T}, \\ b_T^c|_{\Omega \setminus T} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

La bulle conforme b_T^c s'annule sur le bord de T et prend la valeur un au barycentre de T . De plus, elle vérifie les propriétés suivantes (voir [Ver96, Lemme 3.3]).

Lemme A.4.2. Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille de maillages régulière. Alors, il existe une constante c indépendante de h_T telle que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $v \in P^k(T)$, $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,T}^2 &\leq c (v, b_T^c v)_{0,T}, \\ \|v b_T^c\|_{0,T} &\leq c \|v\|_{0,T}, \\ |v b_T^c|_{1,T} &\leq c h_T^{-1} \|v\|_{0,T}. \end{aligned}$$

A.4.2 Bulles non-conformes sur les éléments

La bulle non-conforme, notée b_T^{nc} , introduite par Fortin–Soulié dans [FS83], est définie par

Définition A.4.3.

$$\begin{cases} b_T^{\text{nc}}|_T = 2 - (d+1) \sum_{i=0}^d \lambda_{i,T}^2, \\ b_T^{\text{nc}}|_{\Omega \setminus T} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

En dimension deux, la bulle non-conforme b_T^{nc} est l'unique fonction de $P^2(T)$ (à une constante multiplicative près) s'annulant aux 6 points de Gauß du triangle T , voir figure A.3. De plus, elle prend la valeur -1 aux sommets de T et la valeur $\frac{1}{2}$ au milieu des faces de T .

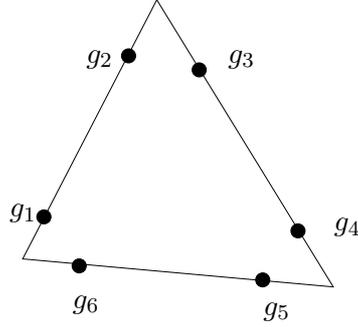


FIG. A.3: Points de Gauß $(g_i)_{1 \leq i \leq 6}$ du triangle T

A.4.3 Bulles conformes sur les faces

Soit $T \in \mathcal{T}_h$ et désignons par $\{F_i\}_{0 \leq i \leq d}$ ses faces. Pour $0 \leq i \leq d$, soit $\lambda_{i,T}$ la coordonnée barycentrique associée au sommet de T opposé à F_i . Pour $F \in \mathcal{F}_h^i$, $F = T_1 \cap T_2$, notons par i_1 and i_2 l'indice local de F dans T_1 et T_2 , respectivement.

A.4.3.1 Les bulles conformes sur les faces à support dans \mathcal{T}_F

Définition A.4.4. Soit $F \in \mathcal{F}_h^i$ telle que $F = T_1 \cap T_2$. La bulle quadratique conforme b_F^c sur la face F est définie par

$$\begin{cases} b_F^c|_{T_m} = d^d \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i_m}}^{j=d} \lambda_{i_m, T_m}, & m = 1, 2, \\ b_F^c|_{\Omega \setminus \mathcal{T}_F} = 0. \end{cases}$$

La bulle conforme b_F^c prend la valeur 1 au barycentre de la face F et vaut 0 aux sommets de cette face F .

La bulle conforme b_F^c vérifie les propriétés suivantes (voir [Ver96, Lemme 3.3]) :

Lemme A.4.5. Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille de maillages régulière. Alors, il existe une constante c indépendante de h_T telle que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ avec $F \in \mathcal{F}_T$ et pour tout

$v \in P^k(\mathcal{F}_h)$, $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,F}^2 &\leq c(v, b_F^c P_F v)_{0,F}, \\ \|P_F v b_F^c\|_{0,T} &\leq c h_F^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,F}, \\ |P_F v b_F^c|_{1,T} &\leq c h_F^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0,T}, \end{aligned}$$

où $P_F v : L^\infty(F) \longrightarrow L^\infty(T)$ est un opérateur de prolongement continu (voir [Ver96, p58] pour plus de précisions).

A.4.3.2 Les bulles conformes sur les faces à support dans $\tilde{\Delta}_F$

Posons $\tilde{\Delta}_F = T'_{i_1} \cup T'_{i_2}$ où T'_i est le simplexe dont les sommets sont le barycentre de T et les d sommets de F_i . La bulle conforme b'_F sur les faces est définie par

Définition A.4.6.

$$\begin{cases} b'_F|_{T'_{i_m}} = d^d \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i_m}}^{j=d} (\lambda_{j,T_m} - \lambda_{i_m,T_m}), & m = 1, 2, \\ b'_F|_{\Omega \setminus \tilde{\Delta}_F} = 0. \end{cases}$$

La zone ombrée représentée sur la figure A.4 représente le support de b'_F en dimension deux. Il est clair que $b'_F \in H_0^1(\tilde{\Delta}_F)$.

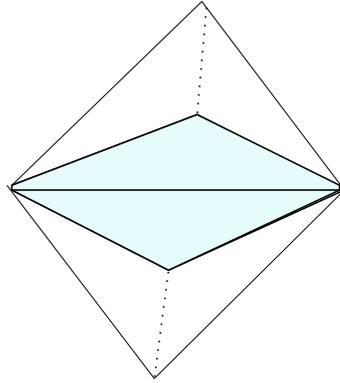


FIG. A.4: Support de la bulle conforme b'_F

La bulle conforme b'_F prend la valeur 1 au barycentre de la face F et vaut 0 aux sommets de cette face F .

A.5 Autres résultats

Théorème A.5.1 (Théorème de trace). *L'application $\gamma_0 : u \mapsto \gamma_0(u)$ qui à une fonction $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ associe sa trace sur $\partial\Omega$ se prolonge en une application continue et surjective de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Il existe donc une constante c telle que*

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0(v)\|_{\frac{1}{2}, \partial\Omega} \leq c\|v\|_{1, \Omega}. \quad (\text{A.24})$$

En particulier,

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0(v)\|_{0, \partial\Omega} \leq c\|v\|_{1, \Omega}. \quad (\text{A.25})$$

Lemme A.5.2. *Soient x et y deux réels. Alors, pour tout réel $\gamma > 0$ on a*

$$xy \leq \frac{\gamma}{2}x^2 + \frac{1}{2\gamma}y^2. \quad (\text{A.26})$$

Annexe B

Adaptation de maillage

Un des objectifs des estimateurs *a posteriori* est d'adapter le maillage. Nous décrivons ci-dessous l'algorithme d'adaptation de maillage utilisé pour les cas tests numériques présentés dans ce manuscrit.

B.1 Fonctionnement général du mailleur

On part du constat suivant :

1. Un domaine bidimensionnel est limité par sa courbe frontière.
2. La courbe frontière peut se partitionner en une union de lacets élémentaires (i.e., des segments de courbes paramétrées).
3. Chaque lacet élémentaire est limité par ses extrémités. Ces points sont appelés sommets de la frontière.

Nous considérons sont des maillages non-structurés de type quasi-Delaunay. Ils sont générés par une méthode frontale, basée sur l'algorithme de Bowyer–Watson [Bow81, Wat81] voir également [EG04, p348].

Pour mettre en œuvre une méthode frontale, il est nécessaire de spécifier le maillage sur la frontière du domaine. Pour cela, on se donne un *fichier de maillage frontalier*, qui, pour chaque lacet composant la frontière, contient le couple (h_i, s_i) où h_i est la taille imposée des mailles au voisinage de du point d'abscisse curviligne s_i du lacet en question. Dans la plupart des applications, on souhaite également imposer la taille de certaines mailles à l'intérieur du domaine. Pour cela, on utilise un *fichier de maillage intérieur* dans lequel figure un ensemble de triplets (h_i, x_i, y_i) où h_i est la taille désirée de la maille au voisinage du point de coordonnées (x_i, y_i) .

B.2 Algorithme de raffinement adaptatif

L'algorithme de raffinement adaptatif du maillage est le suivant :

- (i) Construire un premier maillage \mathcal{T}_h^0 . Poser $i = 0$.
- (ii) Résoudre le problème approché sur \mathcal{T}_h^i . On note u_h^i la solution approchée.
- (iii) Calculer $\eta_{T_i}(u_h^i)$, sur tout $T_i \in \mathcal{T}_h^i$ où $\eta_{T_i}(u_h^i)$ est un indicateur d'erreur local sur T_i .
- (iv) Si l'erreur globale est suffisamment petite, arrêter.
- (v) Sinon, calculer la taille $h_{T_{i+1}}$ des mailles du nouveau maillage à partir des indicateurs d'erreur locaux $\eta_{T_i}(u_h^i)$:

$$h_{T_{i+1}} = l(\eta_{T_i}(u_h^i)) h_{T_i},$$

avec par exemple $l(\eta_{T_i}(u_h^i)) = \frac{1}{2}$ si $\eta_{T_i}(u_h^i) \geq TOL$ et $l(\eta_{T_i}(u_h^i)) = 1$ sinon. La tolérance TOL est calculée en fonction de $\eta_{T_i}(u_h^i)$, sous la forme

$$TOL = \frac{1}{2nt_i} \sum_{T_i \in \mathcal{T}_h^i} \eta_{T_i}(u_h^i),$$

où nt_i est le nombre de triangles du maillage \mathcal{T}_h^i . Ce choix de calcul de la tolérance conduit à équi-répartir l'erreur sur les mailles au fil des itérations.

- (vi) Création du fichier de maillage frontalier en prescrivant sur chaque lacet composant la frontière la nouvelle taille $h_{T_{i+1}}$ des triangles ayant une arête sur le lacet en question.
- (vii) Création du fichier de maillage intérieur en prescrivant au barycentre des triangles intérieurs au domaine la nouvelle taille $h_{T_{i+1}}$. Afin que le nombre de points de triangles où on impose une nouvelle taille ne soit pas trop élevé, un test de fluctuation locale est effectué. Si pour deux triangles voisins T_1^i et T_2^i , on a $|\log(h_{T_1^i}/h_{T_2^i})| \geq \log \gamma$ avec par exemple $\gamma = 1.5$, alors $h_{T_1^i}$ et $h_{T_2^i}$ sont écrits dans le fichier de maillage intérieur. Sinon, une seule de ces quantités est écrite.
- (viii) Génération du maillage \mathcal{T}_h^{i+1} et retour à l'étape (ii).

B.3 Extension au cas multi-domaines

On considère le cas où le domaine Ω est constitué de nd sous-domaines, c'est-à-dire

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{nd} \Omega_m. \quad (\text{B.1})$$

Une première possibilité pour mailler un tel domaine est de procéder comme ci-dessus en maillant globalement le domaine Ω . Le maillage global ainsi généré n'a aucune raison d'être conforme à la décomposition (B.1). Or, si les sous-domaines présentent des forts contrastes au niveau des propriétés physiques (par exemple une perméabilité hydraulique fortement variable d'un sous-domaine à l'autre), cette méthode n'est pas adéquate car il est souhaitable qu'un triangle n'appartienne pas à deux sous-domaines. Dans ce type de situation, on va utiliser un algorithme de collage comme celui décrit ci-dessous :

1. Mailler les sous-domaines Ω_m en s'assurant que les interfaces sont maillées de la même façon.
2. Coller les m maillages des sous-domaines Ω_m afin de créer le maillage global de Ω .

Ainsi, pour raffiner le domaine Ω de manière adaptative, on applique l'algorithme de raffinement adaptatif décrit ci-dessus à chaque sous-domaine Ω_m puis on "colle" les maillages ainsi générés.

Nomenclature

Convention générale

Tout au long de ce document, c dénote une constante ne dépendant pas du maillage, et dont la valeur numérique peut changer à chaque occurrence. Ω désigne un ouvert, borné, connexe de \mathbb{R}^d . La frontière de Ω est noté $\partial\Omega$. On désigne par n la normale extérieure à Ω . Etant donné un champ de vecteur β défini sur $\overline{\Omega}$, on pose

$$\partial\Omega_{\text{in}} = \{x \in \partial\Omega : \beta \cdot n < 0\} \quad \text{et} \quad \partial\Omega_{\text{out}} = \{x \in \partial\Omega : \beta \cdot n \geq 0\},$$

si bien que $\partial\Omega = \partial\Omega_{\text{in}} \cup \partial\Omega_{\text{out}}$.

Opérateurs différentiels

(x_1, \dots, x_d)	Coordonnées cartésiennes dans \mathbb{R}^d
$\partial_i u$	Dérivée au sens des distributions de u par rapport à x_i , $1 \leq i \leq d$
∇u	Gradient : $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u)^T$ pour u \mathbb{R} -valuée
$\nabla \cdot u$	Divergence : $\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^d \partial_i u_i$ pour u \mathbb{R}^d -valuée
$\beta \cdot \nabla u$	Opérateur d'advection : β est \mathbb{R}^d -valué et $\beta \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^d \beta_i \partial_i u$
Δu	Laplacien : $\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{ii} u$ pour u \mathbb{R} -valuée
$ \alpha $	Longueur du multi-indice $\alpha = (\alpha_1 \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $ \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$
γ_0	Application trace

Symboles relatifs au maillage

h_T	Diamètre de $T \subset \mathbb{R}^d$
$(\mathcal{T}_h)_h$	famille de triangulations de Ω (en dimension $d = 3$, $T \in \mathcal{T}_h$ est un tétraèdre)
h	$\max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$
N_{el}	Nombre d'éléments
N_f, N_f^i, N_f^∂	Nombre de faces, de faces intérieures et de faces extérieures
$\mathcal{F}_h, \mathcal{F}_h^i, \mathcal{F}_h^\partial$	Ensemble des faces, des faces intérieures et des faces extérieures
$\mathcal{F}_h^{\text{out}}, \mathcal{F}_h^{\text{in}}$	Ensemble des faces contenues dans $\partial\Omega_{\text{out}}$ et $\partial\Omega_{\text{in}}$ respectivement
\mathcal{S}_h	Ensemble des sommets de \mathcal{T}_h
\mathcal{S}_h^i	Ensemble des sommets intérieurs de \mathcal{T}_h
\mathcal{S}_T	Ensemble des sommets de $T \in \mathcal{T}_h$
\mathcal{F}_T	Ensemble des faces de $T \in \mathcal{T}_h$
\mathcal{T}_F	Ensemble des éléments de \mathcal{T}_h contenant une face $F \in \mathcal{F}_h$
\mathcal{F}_s	Ensemble des faces de \mathcal{F}_h contenant un sommet $s \in \mathcal{S}_h$
\mathcal{T}_s	Ensemble des éléments de \mathcal{T}_h contenant un sommet $s \in \mathcal{S}_h$
Δ_T, Δ_F	Union des éléments $T \in \mathcal{T}_h$ partageant au moins un sommet avec $T \in \mathcal{T}_h$ et $F \in \mathcal{F}_h$, respectivement
n_T	Normale extérieure à $T \in \mathcal{T}_h$
$ T $	d -mesure de $T \in \mathcal{T}_h$
m_F	Barycentre de la face $F \in \mathcal{F}_h$

Fonctions

$u _E$	Restriction de la fonction u à l'ensemble E
$\{u\}_F$	Moyenne de u : $\{u\}_F = \frac{1}{2}(u _{T_1} + u _{T_2})$ si $F \in \mathcal{F}_h^i$ t.q. $F = T_1 \cap T_2$ et $\{u\}_F = u _T$ si $F \in \mathcal{F}_h^\partial \cap \mathcal{F}_T$ pour u \mathbb{R} -valué
$[u]_F$	Saut de u : $[u]_F = u _{T_1} n_{T_1} + u _{T_2} n_{T_2}$ si $F \in \mathcal{F}_h^i$ t.q. $F = T_1 \cap T_2$ et $[u]_F = u _T n_T$ si $F \in \mathcal{F}_h^\partial \cap \mathcal{F}_T$ pour u \mathbb{R} -valuée
$[\tau]_F$	Saut de τ : $[\tau]_F = \tau _{T_1} \cdot n_{T_1} + \tau _{T_2} \cdot n_{T_2}$ si $F \in \mathcal{F}_h^i$ t.q. $F = T_1 \cap T_2$ et $[\tau]_F = \tau _T n_T$ si $F \in \mathcal{F}_h^\partial \cap \mathcal{F}_T$ pour τ \mathbb{R}^d -valuée

Espaces de fonctions

$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$	Espace des fonctions k fois continument dérivables sur $\overline{\Omega}$
$L^2(\omega)$	Espace des fonctions de carré intégrable sur $\omega \subset \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R}
$[L^2(\omega)]^d$	Espace des fonctions de carré intégrable sur $\omega \subset \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R}^d
$H^s(\Omega)$	$\{v \in \mathcal{D}(\Omega); \alpha \leq s, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}, s \in \mathbb{N}, s \geq 1$
$H^s(\mathcal{T}_h)$	$\{v \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v _T \in H^s(T)\}, s \in \mathbb{N}, s \geq 1$
$H_0^1(\Omega)$	$\{v \in H^1(\Omega); \gamma_0(v) = 0\}$
$H^{-1}(\Omega)$	Espace dual de $H_0^1(\Omega)$
$H(\text{div}; \Omega)$	$\{\sigma \in [L^2(\Omega)]^d, \nabla \cdot \sigma \in L^2(\Omega)\}$
$P^k(\omega)$	Espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à k sur ω
$P^k(\mathcal{T}_h)$	Espace des fonctions dont la restriction à chaque élément $T \in \mathcal{T}_h$ appartient à $P^k(T)$
$(\cdot, \cdot)_{0,\omega}$	Produit scalaire dans $L^2(\omega), \omega$
$\ \cdot\ _{0,\omega}$	Norme canonique dans $L^2(\omega), \omega \subset \Omega$
$\ \cdot\ _{s,\omega}$	Norme canonique dans $H^s(\omega), \omega \subset \Omega, s \geq 1$
$ \cdot _{s,\omega}$	Semi-norme canonique dans $H^s(\omega), \omega \subset \Omega, s \geq 1$
$\ \cdot\ _{\text{div},\Omega}$	Norme dans $H(\text{div}; \Omega)$

Bibliographie

- [AAA03] B. Achchab, S. Achchab et A. Agouzal. Hierarchical robust a posteriori error estimator for a singularly perturbed problem. *C.R Acad. Paris*, vol. I, n° 336 : 95–100, 2003.
- [AABM98] B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger et J.F. Maitre. Estimateur d’erreur a posteriori hiérarchique. Application aux éléments finis mixtes. *Numer. Math.*, vol. 80 : 159–179, 1998.
- [AB01] Y. Achdou et C. Bernardi. Un schéma de volumes ou éléments finis adaptatif pour les équations de Darcy à perméabilité variable. *C.R Acad. Paris*, vol. I, 2001.
- [ABC03] Y. Achdou, C. Bernardi et F. Coquel. A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy’s equations. *Numer. Math.*, vol. 96, n° 1 : 17–42, 2003.
- [ABMV03] M. Afif, A. Bergam, Z. Mghazli et R. Verfürth. A posteriori estimators of the finite volume discretization of an elliptic problem. *Numer. Alg.*, vol. 34 : 127–136, 2003.
- [AO00] M. Ainsworth et J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley-Interscience Publication, 2000.
- [ANT03] M. Amara, L. Nadau et D. Trujillo. Estimateurs a posteriori pour une méthode de volumes finis appliquée à des équations linéaires elliptique et parabolique. Rapport technique, Université de Pau, 2003.
- [AB85] D.N. Arnold et F. Brezzi. Mixed and nonconforming finite element methods : implementation, postprocessing and error estimates. *Math. Mod. Numer. Anal. (M2AN)*, vol. 19, n° 1 : 7–32, 1985.
- [Aze95] P. Azerad. *Analyse des équations de Navier–Stokes en bassin peu profond et de l’équation de transport*. PhD thesis, Université de Neuchâtel, 1995.

-
- [BA72] I. Babuška et A. Aziz. Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method. *In The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press, New-York*, pages 1–359, 1972.
- [BDR92] I. Babuška, R. Durán et R. Rodriguez. Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 29 : 947–964, 1992.
- [BR78a] I. Babuška et W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptative finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 15, n° 4 : 736–754, august 1978.
- [BR78b] I. Babuška et W.C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 12 : 1597–1615, 1978.
- [BSW83] R. Bank, A. Sherman et A. Weiser. Some refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement. *IMACS/ North Holland*, 1983.
- [BS93] R. Bank et K. Smith. A posteriori estimates based on hierarchical bases. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 30, n° 4 : 921–935, 1993.
- [BW85] R.E. Bank et A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Math. Comp.*, vol. 44, n° 170 : 283–301, 1985.
- [BHL03] R. Becker, P. Hansbo et M.G. Larson. Energy norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 192 : 723–733, 2003.
- [BKR00] R. Becker, H. Kapp et R. Rannacher. Adaptative finite element methods for optimal control of partial differential equations : basic concept. *SIAM J. Control Optimization*, vol. 1 : 113–132, 2000.
- [BR96] R. Becker et R. Rannacher. A feed-back approach to error control in finite element methods : basic analysis and examples. *East-West J. Numer. Math.*, vol. 4 : 237–264, 1996.
- [BR01] R. Becker et R. Rannacher. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta numerica*, vol. 10 : 1–102, 2001.
- [BMV03] A. Bergam, Z. Mghazli et R. Verfürth. Estimations a posteriori d’un schéma de volumes finis pour un problème non linéaire. *Numer. Math.*, vol. 95 : 599–624, 2003.
- [Ber] C. Bernardi. private communication.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ber89] C. Bernardi. Optimal finite element interpolation on curved domain. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 26 : 1212–1240, 1989.
- [BG98] C. Bernardi et V. Girault. A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, n° 5 : 1893–1916, 1998.
- [BM00] C. Bernardi et B. Métivet. Indicateurs d’erreur pour l’équation de la chaleur. *Revue européenne des éléments finis*, vol. 9, n° 4 : 425–438, 2000.
- [BMV93] C. Bernardi, B. Métivet et R. Verfürth. Analyse numérique d’indicateurs d’erreur. Rapport technique, Université Paris 6, 1993.
- [BV00] C. Bernardi et R. Verfürth. Adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients. *Numer. Math.*, vol. 85, n° 4 : 579–608, 2000.
- [BKST04] A. Bourgeat, M. Kern, S. Schumacher et J. Talandier. Simulation of transport around a nuclear waste disposal site : The complex test cases. *Computational Geosciences*, vol. 1 : 1–79, 2004.
- [Bow81] A. Bowyer. Computing Dirichlet tessellations. *Comput. J.*, vol. 24 : 162–167, 1981.
- [BE03] M. Braack et A. Ern. A posteriori control of modelling errors and discretization errors. *SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation.*, vol. 1, n° 2 : 221–238, 2003.
- [BF91] F. Brezzi et M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [BFR98] F. Brezzi, L.P. Franca et A. Russo. Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 166 : 25–33, 1998.
- [BR94] F. Brezzi et A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, vol. 4 : 571–587, 1994.
- [BH82] A. Brooks et T. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 32 : 199–259, 1982.

-
- [Bur04] E. Burman. A new framework for stabilized finite element methods based on arbitrary approximation and interior penalty. *à paraître dans SIAM, J. Numer. Anal.*, 2004.
- [BEG04] E. Burman, A. Ern et V. Giovangigli. Bunsen flame simulation by finite elements on adaptively refined, unstructured triangulations. *Combust. Theory Modelling*, vol. 8 : 65–84, 2004.
- [BH03] E. Burman et P. Hansbo. Edge stabilization for galerkin approximations of the generalized stokes’ problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 2003. submitted.
- [BH04] E. Burman et P. Hansbo. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection–diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 2004. submitted.
- [Car97] C. Carstensen. A posteriori error estimate for the mixed finite element method. *Math. Comp.*, vol. 66, n° 218 : 465–476, 1997.
- [Clé75] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO, Anal. Numér.*, vol. 9, n° 77–84, 1975.
- [Cod98] R. Codina. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion–convection–reaction equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 156 : 185–210, 1998.
- [CC98] B. Courbet et J.-P. Croisille. Finite volume box schemes on triangular meshes. *Math. Mod. Numer. Anal. (M2AN)*, vol. 32, n° 5 : 631–649, 1998.
- [Cro00] J.-P. Croisille. Finite volume box schemes and mixed methods. *Math. Mod. Numer. Anal. (M2AN)*, vol. 31, n° 5 : 1087–1106, 2000.
- [Cro02] J.-P. Croisille. Keller’s box–scheme for the one–dimensional stationary convection–diffusion equation. *Computing*, vol. 68 : 37–63, 2002.
- [CG02] J.-P. Croisille et I. Greff. Some nonconforming mixed box schemes for elliptic problems. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, vol. 8, n° 3 : 355–373, 2002.
- [CG04] J.-P. Croisille et I. Greff. A box scheme for convection-diffusion equations with sharp contrasts in the diffusion coefficients. *to appear in Computers and Fluids*, 2004.

BIBLIOGRAPHIE

- [CR73] M. Crouzeix et P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming mixed finite element methods for solving the stationary Stokes equations I. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, vol. 3 : 33–75, 1973.
- [Dar56] H. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Dalmont, Paris, 1856.
- [Daw93] C. Dawson. Godunov mixed methods for advection–diffusion equations in multidimensions. *SIAM, J. Numer. Anal.*, vol. 30 : 1315–1332, 1993.
- [DA99] C. Dawson et V. Azinger. Upwind–mixed methods for transport equations. *Comp. Geosc.*, vol. 3 : 93–110, 1999.
- [DN02] W. Doerfler et R. Nocketto. Small data oscillation implies the saturation assumption. *Numer. Math.*, vol. 91 : 1–12, 2002.
- [DD76] J. Douglas et T. Dupont. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. *R. Glowinski and J.L. Lions (Eds), Computing Methods in Applied Sciences, Springer–Verlag, Berlin*, 1976.
- [DR92] R. Durán et R. Rodriguez. On the asymptotic exactness of Bank–Weiser’s estimator. *Numer. Math.*, vol. 62 : 297–303, 1992.
- [EAE04] L. El Alaoui et A. Ern. Residual and hierarchical a posteriori error estimates for nonconforming mixed finite element methods. *Math. Mod. Numer. Anal. (M2AN)*, vol. 38, n° 6 : 903–929, 2004.
- [EEHJ95] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo et C. Johnson. Introduction to adaptive methods for differential equations. *Acta Numerica*, pages 105–108, 1995. Cambridge University press.
- [EJ95] K. Eriksson et C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems IV : Nonlinear problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 32 : 1729–1749, 1995.
- [EG04] A. Ern et J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Series*. Springer, New-York, 2004.
- [EP04] A. Ern et J. Proft. A posteriori discontinuous Galerkin error estimates for a transient convection–diffusion equations. *Appl. Math. Letters.*, 2004. à paraître.
- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin. Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, vol. VII : 713–1020, 2000.
- [FS83] M. Fortin et M. Soulié. A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 19 : 505–520, 1983.

-
- [FR96] L.P. Franca et A. Russo. Deriving upwinding, mass lumping and selective reduced integration by RFB. *Appl. Math. Letters*, vol. 9 : 83–86, 1996.
- [GP99] J.-M. Ghidaglia et F. Pascal. Passerelles volumes finis - éléments finis. *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 328, n° I : 711–716, 1999.
- [Gre03] I. Greff. *Schémas boîte : Etude théorique et numérique*. PhD thesis, Université de Metz, 2003.
- [Gue99] J.-L. Guermond. Stabilization of Galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling. *Math. Mod. Numer. Anal. (M2AN)*, vol. 33, n° 6 : 1293–1316, 1999.
- [Gue01] J.-L. Guermond. Subgrid stabilization of Galerkin approximations of linear monotone operators. *IMA, Journal of Numerical Analysis*, vol. 21 : 165–197, 2001.
- [HW97] R. Hoppe et B. Wohlmuth. Adaptative multilevel techniques for mixed finite element discretizations of elliptic boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 34, n° 4 : 1658–1681, 1997.
- [HW96] R.H.W. Hoppe et B. Wohlmuth. Element-oriented and edge-oriented local error estimators for non-conforming finite element methods. *Math. Mod. Numer. Anal. (M2AN)*, vol. 30 : 237–263, 1996.
- [HSS02] P. Houston, C. Schwab et E. Süli. Discontinuous hp–finite element methods for advection–diffusion–reaction problems. *SIAM, J. Numer. Anal.*, vol. 39, n° 6 : 2133–2163, 2002.
- [IR72] B.M. Iron et A. Razzaque. Experience with the patch test for convergence of finite elements. *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, pages 557–587, 1972.
- [Jaf84] J. Jaffré. Décentrage et éléments finis mixtes pour les équations de convection–diffusion. *Calcolo*, vol. 2 : 171–197, 1984.
- [JMST98] V. John, G. Matthies, F. Schieweck et L. Tobiska. A streamline–diffusion method for nonconforming finite element approximations applied to convection–diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 166 : 85–97, 1998.
- [JMT97] V. John, J.M. Maubach et L. Tobiska. Nonconforming streamline–diffusion–finite–element–methods for convection–diffusion problems. *Numer. Math.*, vol. 78 : 165–188, 1997.

BIBLIOGRAPHIE

- [Joh87] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [Joh93] C. Johnson. A new paradigm for adaptive finite element methods. dans IN J. Whiteman, éditeur, *MAFELAP*. John Wiley, 1993.
- [JNP84] C. Johnson, U. Nävert et J. Pitkäranta. Finite element methods for linear hyperbolic equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 45 : 285–312, 1984.
- [JR94] C. Johnson et R. Rannacher. On error control in CFD. volume 47, pages 133–144. Int. Workshop Numerical methods for the Navier-Sokes equations, 1994.
- [KS99] G. Kanschat et F.-T. Suttmeier. A posteriori error estimates for non-conforming finite element schemes. *Calcolo*, vol. 36 : 129–141, 1999.
- [KP03] O. Karakashian et F. Pascal. A-posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 41, n° 6 : 2374–2399, 2003.
- [KT03] P. Knobloch et M. Tobiska. The P_1^{mod} element : a new nonconforming finite element for convection–diffusion problems. *SIAM, J. Numer. Anal.*, vol. 41, n° 2 : 436–456, 2003.
- [Mar85] L.D. Marini. An inexpensive method for the evaluation of the solution of the lowest order Raviart-Thomas mixed method. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 22, n° 3, 1985.
- [Neča62] J. Nečas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola. Norm Sup. Pisa*, vol. 16 : 305–326, 1962.
- [Noc93] R. Nochetto. Removing the saturation assumption in a posteriori error analysis. Rapport technique n° 127, Istit. Lombardo Acad. Sci. Lett. Rend., 1993.
- [PR94] J. Pousin et J. Rappaz. Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov–Galerkin methods applied to nonlinear problems. *Numer. Math.*, vol. 69 : 213–232, 1994.
- [QA97] A. Quarteroni et A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 159 of *Computational Mathematics*. Springer–Verlag, New-York, 1997.

-
- [Ran98] R. Rannacher. A posteriori error estimation in least-squares stabilized finite element schemes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 166, n° 1–2 : 99–114, 1998.
- [RT77] P.-A. Raviart et J.-M. Thomas. A mixed finite element method for second order elliptic problems. dans I. Galligani et E. Megenes, éditeurs, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, volume 606 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer–Verlag, New York, 1977.
- [RST96] H.-G. Roos, M. Stynes et L. Tobiska. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations – Convection-diffusion and flow problems*. Springer-Verlag, 1996.
- [Sch02] F. Schieweck. A posteriori error estimates with post-processing for nonconforming finite elements. *Math. Mod. Numer. Anal. (M2AN)*, vol. 36, n° 3 : 489–503, 2002.
- [SMA97] P. Siegel, R. Mose et PH. Ackerer. Solution of the advection-diffusion equation using a combination of discontinuous and mixed finite elements. *International journal numerical methods in fluids*, vol. 24 : 595–613, 1997.
- [ST01] M. Stynes et L. Tobiska. The streamline–diffusion method for nonconforming Q_1^{rot} elements on rectangular tensor–product meshes. *IMA, Journal of Numerical Analysis*, vol. 21 : 123–142, 2001.
- [SW03] S. Sun et M. Wheeler. A posteriori error analyses for symmetric discontinuous galerkin approximations of reactive transport problems. *soumis*, 2003.
- [Tem77] R. Temam. *Navier–Stokes equations*, volume 2. Studies in Mathematics and its Applications, North–Holland, 1977.
- [TT99] J.-M. Thomas et D. Trujillo. Mixed finite volume methods. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 9, n° 49 : 1351–1366, 1999.
- [Ver89] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations. *Numer. Math.*, vol. 55 : 309–325, 1989.
- [Ver91] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations II. Nonconforming discretizations. *Numer. Math.*, vol. 60 : 235–249, 1991.
- [Ver94] R. Verfürth. A posteriori error estimates for nonlinear problems. Finite element discretizations of elliptic equations. *Math. Comp.*, vol. 62, n° 206 : 445–475, 1994.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ver96] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptative mesh-refinement techniques*. Wiley, Chichester, England, 1996.
- [Ver98] R. Verfürth. A posteriori error estimators for convection–diffusion equations. *Numer. Math.*, vol. 80, n° 4 : 641–663, 1998.
- [Ver04] R. Verfürth. Robust a posteriori error estimates for stationary convection–diffusion equations. *soumis à SIAM, J. Numer. Anal.*, 2004.
- [Wat81] D. Watson. Computing the n –dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoï polytopes. *Comput. J.*, vol. 24, n° 167–172, 1981.
- [WH99] B.I. Wohlmuth et R.H.W. Hoppe. A comparison of a posteriori error estimators for mixed finite element discretizations by Raviart-Thomas. *Math. Comp.*, vol. 68, n° 228 : 1347–1378, 1999.