



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude des files d'attente avec clients impatients

Pascal Moyal

► **To cite this version:**

Pascal Moyal. Contributions à l'étude des files d'attente avec clients impatients. Mathematics [math].  
Télécom ParisTech, 2005. English. NNT : . pastel-00001340

**HAL Id: pastel-00001340**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001340>**

Submitted on 21 Jul 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contributions à l'étude des files d'attente avec  
clients impatientes

Pascal Moyal



# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Définitions et notations</b>	<b>11</b>
2.1	La file d'attente avec clients impatientes . . . . .	11
2.2	Disciplines de service temps-réel . . . . .	15
2.3	Variables remarquables et processus de performances . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Problématique et résultats existants</b>	<b>21</b>
3.1	La file FCFS : résultats et méthodes existants . . . . .	22
3.2	Comparaison des disciplines de service . . . . .	25
3.3	La file EDF : problématique probabiliste . . . . .	26
3.3.1	Description du système . . . . .	26
3.3.2	Calcul numérique des performances d'EDF . . . . .	27
3.3.3	Le descripteur à valeurs mesures ponctuelles . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Stabilité</b>	<b>33</b>
4.1	Introduction . . . . .	33
4.2	Régénérativité dans le cas $GI/GI/1/1 + GI$ . . . . .	34
4.2.1	Comparaison avec la file « délai pur » . . . . .	34
4.2.2	Résultat de régénérativité . . . . .	35
4.3	Stationnarité pour la file $G/G/1/1 + G$ . . . . .	36
4.3.1	Un résultat de stationnarité . . . . .	36
4.3.2	Application à la file $G/G/1/1 + G$ . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Probabilité de perte</b>	<b>53</b>
5.1	Deux encadrements . . . . .	54
5.1.1	Encadrement à forte charge . . . . .	54
5.1.2	Cas $GI/M/1/1 + D - FIFO (EDF)$ . . . . .	56
5.2	Comparaison entre disciplines de service . . . . .	60
5.2.1	Cas général $G/M/1/1 + G$ . . . . .	60
5.2.2	Cas $M/M/1/1 + G$ . . . . .	69

<b>6</b>	<b>Limites fluides des processus de transport</b>	<b>75</b>
6.1	Préliminaires . . . . .	77
6.1.1	Les processus à valeurs mesures . . . . .	77
6.1.2	L'équation de transport intégrale dans $\mathcal{D}_{\infty, S'}$ . . . . .	82
6.2	Processus des profils de la file EDF . . . . .	85
6.3	Les processus de transport renormalisés . . . . .	90
6.4	Lois des grands nombres . . . . .	96
6.4.1	Première renormalisation . . . . .	96
6.4.2	Deuxième renormalisation . . . . .	106
6.5	Théorème central limite fonctionnel . . . . .	111
6.5.1	Résultat préliminaire . . . . .	112
6.5.2	Première normalisation . . . . .	116
6.5.3	Deuxième normalisation . . . . .	127
6.6	Application aux files EDF . . . . .	128
6.6.1	File $M/M/1/1 + GI - EDF$ à charge quelconque . . . . .	129
6.6.2	File $M/M/1/1 + GI - EDF$ à charge unité . . . . .	134
6.6.3	File $M/M/s/s + GI - EDF$ à charge quelconque . . . . .	136
6.6.4	File $M/M/s/s + GI - EDF$ à charge unité . . . . .	137
6.7	Application aux files FIFO / FCFS . . . . .	137
6.8	Application à la file $M/GI/\infty$ . . . . .	139
6.9	Commentaires . . . . .	140
6.9.1	Généralisation aux fonctions tests indicatrices . . . . .	140
6.9.2	Temps de vidage . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>145</b>
<b>A</b>	<b>Deux résultats de théorie ergodique</b>	<b>149</b>
<b>B</b>	<b>Applications de la <i>Swiss army formula</i></b>	<b>151</b>
B.1	Formules . . . . .	151
B.2	Applications aux files avec clients impatients . . . . .	152
<b>C</b>	<b>Convergence en loi</b>	<b>155</b>

# List of Figures

5.1	Busy period pour EDF et FIFO . . . . .	67
6.1	Dynamique du processus des profils . . . . .	87



# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce travail nous étudions le modèle probabiliste de la *file d'attente avec clients impatientes*.

Le modèle classique de la *file d'attente* consiste en un système dans lequel des serveurs sont soumis à un flux de requêtes qu'ils doivent traiter. Il a un grand nombre d'applications dans les réseaux de télécommunications, dans les réseaux informatiques, les analyses de trafic routier ou même dans de « vraies » files d'attente, au magasin, au cinéma... Il permet de répondre à des questions de temps de traitement, de structuration de réseaux ou de dimensionnement.

Le développement du temps-réel est aujourd'hui une préoccupation majeure dans les réseaux de télécommunication. Dans le contexte multimédia notamment, on cherche à transmettre les données en un temps très bref. Des flux de données de types parfois très différents doivent cohabiter, l'intégrité de ces flux doit être respectée et les réseaux qui les transmettent doivent être à la fois flexibles et rapides. Toute donnée doit alors avoir une « durée de vie » très limitée dans le système, puisque son traitement doit être instantané.

Pour rendre compte de la contrainte du temps-réel dans les réseaux, on doit enrichir le modèle classique de la file d'attente par un nouveau paramètre, le *délai* des requêtes qui entrent dans la file. On considère qu'une requête est perdue dès qu'elle dépasse ce délai sans avoir commencé son traitement. En termes idéalistes, on parle de *files d'attente avec clients impatientes*. Les clients ont une patience pour entrer en service, au delà de laquelle ils choisissent de quitter la file. Ce modèle a initialement été construit pour décrire les réseaux téléphoniques où les clients mis en attente raccrochaient au bout d'un certain temps si leur appel n'était pas pris en compte. On comprend qu'il est pertinent, plus largement, pour décrire les réseaux dits « temps-réel ».

On représente usuellement le comportement des files d'attente par des processus stochastiques qui les décrivent de manière exhaustive. On cherche

alors à savoir à quelle condition ces processus atteignent le régime stationnaire et leurs comportements asymptotiques permettent souvent de calculer les « performances » des systèmes (temps de réponse, probabilité de perte pour des files à capacité limitée...).

Dans le cas particulier de la file d'attente avec clients impatientes, le modèle probabiliste comporte un paramètre supplémentaire avec le délai des clients. La première question sur ce nouveau modèle est de savoir si les processus qui décrivent habituellement les files d'attente classiques y sont adaptés et sinon, de les représenter différemment. On cherchera ensuite à répondre aux questions suivantes :

- **stabilité**: à quelle condition sur ses paramètres la file d'attente atteint-elle un régime stationnaire ?
- **calcul des performances** : comment calculer les différents indicateurs des performances du système, au premier rang desquels, la probabilité de perte d'un client en fonction des paramètres du système?
- **dimensionnement** : comment mieux dimensionner la file (nombre de serveurs, vitesse d'exécution) pour diminuer cette perte ?
- **choix de la discipline de service** : suivant quelle discipline servir les clients pour améliorer ces performances et en particulier, pour en perdre le moins possible ?

### Angle d'approche

Dans la littérature, les résultats sont déjà nombreux dans les cas où on a pu rapprocher le modèle de la file d'attente avec clients impatientes à celui de la file d'attente classique (sans délais). Essentiellement, cela n'est possible que lorsque la discipline de service est *premier entré, premier servi* (FCFS). Mais une grande quantité de modèles, parmi lesquels tous ceux où la discipline de service dépend du délai des clients, ne peut être étudié par ces méthodes classiques. Dans ces cas, les processus décrivant habituellement les systèmes (congestion de la file d'attente, charge de travail des serveurs) ne satisfont plus d'équations markoviennes et les arguments habituels sont inadaptés.

Comme on va le voir, certaines de ces disciplines de service présentent cependant un intérêt crucial dans la pratique. Comment décrire de manière satisfaisante les modèles correspondants ? La littérature est jusqu'ici assez réduite sur le sujet.

L'objectif de ce travail est donc de contribuer à la construction d'une théorie spécifique aux files d'attente avec clients impatientes, en proposant des descriptions originales adaptables au plus grand nombre possible de modèles. Notre préoccupation est donc autant théorique qu'applicative : nous calculons dans certains cas précis, les performances par des techniques *ad hoc*, et

tâchons par ailleurs de donner des méthodes d'étude générales, adaptées aux particularités de la file d'attente avec clients impatient.

## Plan du document

Le chapitre 2 est dévolu à la description du modèle des files d'attente avec clients impatient. Nous y introduisons les principales définitions et notations que nous utilisons tout au long de cette thèse. En particulier, nous définissons les processus stochastiques décrivant le système et les disciplines de services que nous étudions.

Le chapitre 3 est consacré à la problématique d'ensemble et aux résultats et méthodes existants sur la stabilité et les performances des files d'attente avec clients impatient. Nous commençons par rappeler les résultats de stabilité, de congestion à l'état stationnaire, de temps d'attente pour des files d'attente dirigées par la discipline FCFS et rappelons les formules analytiques existantes pour le calcul de la probabilité de perte et du temps d'attente des clients.

Ensuite, nous mettons l'accent sur la comparaison des performances entre les différentes disciplines de services et en particulier sur l'optimalité de la discipline EDF (*Earliest Deadline First*).

Enfin, après avoir pointé l'impossibilité d'appliquer la méthodologie adaptée aux files FCFS dans le cas où la discipline est EDF, nous décrivons une méthode originale existant dans la littérature pour décrire l'évolution d'un système soumis à EDF, mais sans perte de clients.

Tous les chapitres suivants sont dévolus à nos contributions.

Dans le chapitre 4, nous complétons les résultats de stabilité existants et décrits dans le chapitre 3 pour une discipline de service quelconque et dans un cadre plus général pour les lois des paramètres du système. Nous mettons en outre en évidence une méthode ergodique adaptée du calcul de Palm, pour déterminer à quelle condition le système atteint le régime stationnaire.

Dans le chapitre 5, nous nous intéressons au calcul de la probabilité de perte et à la comparaison entre les disciplines de service de ce point de vue. Nous donnons deux encadrements pour la probabilité de perte, dans le cas  $M/G/1$  à forte charge avec délais quelconques et dans le cas  $G/M/1$  avec délais déterministes. Nous donnons ensuite une nouvelle preuve de l'optimalité de la discipline EDF pour la comparaison stochastique sur la perte des clients, montrons l'optimalité d'EDF en terme de probabilité de perte, et donnons un majorant du gain d'EDF pour la probabilité de perte.

Nous prouvons par ailleurs que la discipline de service LDF (*Latest Deadline First*) est la « moins bonne » discipline de service suivant ces critères.

Dans le chapitre 6, nous donnons une description nouvelle de la file avec clients impatients régie par EDF en introduisant un processus markovien à valeurs mesures ponctuelles : le processus des *profils*, qui garde en mémoire les délais résiduels de tous les clients présents dans le système, ou déjà perdus.

Nous donnons une limite fluide et un théorème central limite pour tous les processus Markoviens à valeurs mesures ponctuelles présentant la même dynamique que le processus des profils (les *processus de transport*). Nous en déduisons l'approximation des processus de performances de la file EDF (processus de congestion, processus des pertes et des services) par des processus continus et déterministes, et l'estimation des fluctuations à ces limites par des processus de diffusion.

En outre, nous adaptons ces résultats à la file d'attente FIFO avec délais déterministes, qui peut être décrite par le même processus, ainsi qu'au processus des services résiduels de la file *délai pur*.

Nous concluons et donnons les perspectives de ces travaux en chapitre 7.

## Chapitre 2

# Définitions et notations

Nous introduisons ici les définitions que nous allons utiliser tout au long de ce travail. Nous définissons tout d'abord en partie 2.1, à partir de la définition générale d'une file d'attente, la *file d'attente avec clients impatientes*. Nous définissons en partie 2.2 la discipline de service EDF, qui jouera un rôle central par la suite. Nous évoquons enfin en partie 2.3 les différentes variables et processus *de performances*, qui permettront de décrire le comportement des différents modèles étudiés.

### 2.1 La file d'attente avec clients impatientes

Nous rappelons ici la définition générale du modèle probabiliste de la file d'attente, en introduisant les processus de base auxquelles nous ferons référence tout au long de cet travail.

#### File d'attente

Soient des clients qui entrent dans un magasin à des instants aléatoires, en demandant un service de durée aléatoire. Ces clients attendent dans une file d'attente que l'un des serveurs du magasin soit libre pour pouvoir être servis.

On se place sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . On appelle  $C_1, C_2, \dots$  les clients dans l'ordre de leurs arrivées, et on note pour tout  $n$ ,  $T_n$  l'instant d'arrivées de  $C_n$ , et  $\sigma_n$ , la durée du service demandé par  $C_n$ .

On suppose que p.s. les arrivées sont simples (un seul client entre à la fois), la suite des instants d'arrivées  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est donc une suite de variables aléatoires p.s. strictement croissante. On note  $(N_t, t \geq 0)$ , le processus stochastique qui compte, à chaque instant  $t$ , le nombre de clients entrés dans le système jusqu'à  $t$ . Autrement dit, pour tout  $t$ ,

$$N_t := \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

On notera par ailleurs  $U_1 := T_1$  et pour tout  $n \geq 1$ , la  $(n + 1)$ -ième *interarrivée*

$$U_{n+1} := T_{n+1} - T_n.$$

On dit alors que  $(N_t, t \geq 0)$  est le *processus des arrivées*,  $(U_n, n \in \mathbb{N}^*)$ , est la *suite des interarrivées* et  $(\sigma_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est la suite des *temps de services*. On suppose par ailleurs que les suites des interarrivées et des temps de services sont stationnaires et on note alors  $U$ , une variable aléatoire (v.a.) générique ayant pour loi la loi des interarrivées et  $\sigma$ , une v.a. ayant pour loi la loi des temps de services. On suppose de plus que ces v.a. sont intégrables :

$$\mathbf{E}[U] < \infty \text{ et } \mathbf{E}[\sigma] < \infty,$$

on note en outre

$$\lambda := (\mathbf{E}[U])^{-1} \text{ et } \mu := (\mathbf{E}[\sigma])^{-1}$$

et on définit la *charge*  $\rho$  du système par :

$$\rho := \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mathbf{E}[\sigma]}{\mathbf{E}[U]}.$$

La *file d'attente* correspondante est donc l'objet probabiliste entièrement déterminé par ce processus des entrées, par cette suite des temps de service, et par les propriétés du « magasin ». Nommément, ces propriétés sont le nombre de serveurs, la capacité de la file d'attente (ou *buffer*), c'est à dire, le nombre de clients qui peuvent être mis en même temps en attente, et sa *discipline de service*, *i.e.* le critère suivant lequel les serveurs choisissent le client prioritaire à servir lorsqu'ils sont disponibles et qu'il y a des clients en attente. Les disciplines de service les plus usuelles sont :

- *FCFS* (*First come, First served*) si on sert toujours le plus ancien client arrivé. En particulier, si il n'y a qu'un serveur, la discipline revient à *FIFO* (*First in, First out*), puisqu'alors un client entré avant un autre sort forcément avant lui sous FCFS,
- *LCFS* (*Last come, First served*) si on sert toujours le dernier client arrivé. En particulier, si il y a un serveur, la discipline revient à *LIFO* (*Last in, First out*),
- *RANDOM* si on sert les clients au hasard suivant un tirage uniforme sur la population de la file d'attente,
- *PS* (*Processor Sharing*) si un « serveur » sert simultanément tous les clients présents dans le système, à une vitesse divisée par le nombre de clients servis à chaque instant,

- *Files avec priorités* : les clients sont des représentants de différentes classes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$  et le serveur, si il a le choix, sert un client de la classe  $\mathcal{C}_i$  avant un client de la classe  $\mathcal{C}_j$  si  $i < j$ .

Dans toutes les disciplines de services exceptée FCFS et PS, un client qui est déjà dans le système peut voir entrer après lui un client qui lui est prioritaire. On dira alors qu'un serveur sert de façon *préemptive* si il peut interrompre le service d'un client pour commencer à en servir un autre qui lui est prioritaire, *non-préemptive* sinon.

Les lois de probabilités et les valeurs des paramètres qui caractérisent entièrement une file d'attente sont résumés par la *nomenclature de Kendall*, notation universellement reconnue dans la théorie des files d'attente quelconques :

**Definition 2.1.1**

*Une file d'attente est entièrement caractérisée par le quintuple  $A/S/s/s + B - X$  où:*

- *A représente la loi de la suite des interarrivées  $(U_n, n \in \mathbb{N}^*)$ ,*
- *S représente la loi de la suite  $(\sigma_n, n \in \mathbb{N}^*)$  des temps de services demandés par les clients,*
- *s représente le nombre (éventuellement infini) de serveurs,*
- *B est la taille (éventuellement infinie) du buffer (nombre de clients maximal qu'il peut contenir),*
- *X représente la discipline de service.*

En particulier, les deux premiers paramètres  $A$  et  $S$  caractérisant les lois des suites des interarrivées et des temps de services prennent essentiellement les valeurs suivantes :

- *G (general)* si la suite est stationnaire ergodique ,
- *GI (general independent)* si elle est i.i.d,
- *M (memoryless)* si la suite est i.i.d. de loi exponentielle (si  $A = M$ , le processus des entrées est donc un processus de Poisson),
- *D (deterministic)* si la suite est déterministe et constante.

En général, si aucune ambiguïté n'est possible, on notera  $././s$ , une file avec  $s$  serveurs, de buffer de capacité infinie, régie par la discipline FCFS. Par exemple, la file  $M/M/1$  est la file d'attente où les clients entrent suivant un processus de Poisson, en demandant un service de loi exponentielle, avec un serveur, un buffer de taille infinie et traitée en FIFO.

### Modèle avec clients impatientes

Pour modéliser le transfert de données en temps-réel, on doit ajouter une contrainte au système en spécifiant que les tâches sont perdues si le temps qu'elles passent dans le système est plus grand qu'un délai qui leur est alloué.

Le modèle que nous considérons est donc une file d'attente où les clients ont un *délai* (ou *patience*) pour être servis, au delà duquel ils sortent du magasin sans avoir été satisfaits. Autrement dit, le  $n$ -ième client  $C_n$  entre dans la file d'attente affecté du délai  $D_n$ , qui est une variable aléatoire p.s. strictement positive. Si il n'a pas pu atteindre le serveur à la fin de sa patience (*i.e.* à l'instant  $T_n + D_n$ ), il est éliminé du système. Les délais seront donc considérés *éliminatoires et jusqu'au début du service*.

Par ailleurs, la suite  $(D_n, n \in \mathbb{N}^*)$  sera toujours supposée stationnaire de loi générique la loi de  $D$ . On supposera de plus que

$$\mathbf{E}[D] < \infty$$

et on notera

$$\Gamma := (\mathbf{E}[D])^{-1}.$$

Par ailleurs, si le client  $C_n$  est toujours dans le système à l'instant  $t$ , on appellera son *délai résiduel à  $t$*   $DR_n(t)$  le temps restant à  $t$  avant l'expiration de son délai. On a alors :

$$DR_n(t) = D_n - (t - T_n).$$

On peut décrire la *file d'attente avec clients impatientes* avec la nomenclature suivante, introduite par Barrer ([Bar57]) :

#### Definition 2.1.2

*Une file d'attente avec clients impatientes est caractérisée par la donnée de  $A/S/s/s + D - X$ , où :*

- *$A, S$  et  $s$  représentent, comme dans la nomenclature de Kendall, respectivement la loi du processus des arrivées, des temps de services et le nombre de serveurs,*
- *$D$  représente la loi générique des délais des clients, éliminatoires et jusqu'au début du service,*

- *X est la discipline de service.*

**Remarque 2.1.1** Si le contraire n'est pas précisé, on supposera toujours que la discipline de service est non-préemptive.

La définition précédente indique que l'on suppose toujours que le buffer est de taille infinie. Le paramètre aléatoire  $D$  (le délai) remplace alors dans la nomenclature de Kendall classique le paramètre  $B$  (la taille du buffer) comme facteur limitant la capacité du système. La file d'attente avec clients impatientes est donc un modèle à perte, au même titre par exemple qu'une file à buffer fini  $G/G/s/s + B$  (où un client est perdu si il entre dans le système alors que le buffer est déjà plein).

Il est par ailleurs à noter que dans la littérature, les délais peuvent aussi ne pas être éliminatoires (auquel cas ils ne servent qu'à donner des priorités aux clients). Un client reste alors dans le système après expiration de sa patience, même si il n'a pas atteint le serveur.

Enfin, les délais peuvent aussi être éliminatoires, mais *jusqu'à la fin du service* : dans ce cas un client est éliminé si il n'a pas *terminé* son service à l'instant  $T_n + D_n$ . Mais nous nous limiterons dans ce travail aux cas précisés dans la définition 2.1.2

## 2.2 Disciplines de service temps-réel

Les disciplines de services mentionnées dans la partie précédente sont bien sûr applicable à une file d'attente avec clients impatientes. La dynamique de la file d'attente est alors celle d'une file d'attente classique, modifiée par les éliminations de clients, qui ne sont plus à servir.

Ceci étant, aucune d'entre elles ne tient *a priori* compte des délais des clients. Nous présentons ici deux disciplines de services, définies dans le cas où les clients sont affectés de délais et qui joueront un rôle central dans cette étude : les disciplines *EDF* et *LDF*.

### Definition 2.2.1

1. *La discipline de service d'une file d'attente avec clients impatientes est dite EDF (Earliest Deadline First) non préemptive (notée EDF) si à chaque fin de service, le serveur sert le client dont le délai résiduel à cet instant est le plus court. Il sert alors ce client jusqu'à complétion de son service.*

2. *La discipline de service est dite EDF préemptive (notée EDFp) si le serveur sert à chaque instant le client dont le délai résiduel à cet instant est le plus court.*
3. *La discipline est dite LDF (Largest Deadline First) non-préemptive (LDF) si le serveur sert à chaque fois qu'il complète un service le client dont le délai résiduel à cet instant est le plus long.*
4. *La discipline est dite LDF préemptive (LDFp) si le serveur sert à chaque instant le client dont le délai résiduel à cet instant est le plus long.*

Comme nous l'avons précisé dans la remarque précédente, nous n'étudierons en détail que les disciplines de services non-préemptives, notées ici *EDF* et *LDF*. Nous reviendrons largement par la suite sur les propriétés de ces disciplines de service et sur les problèmes que pose l'étude des files d'attente correspondantes.

## 2.3 Variables remarquables et processus de performances

Définissons ici les différentes variables aléatoires et processus stochastiques caractérisant une file d'attente avec clients impatientes.

- le *temps d'attente proposé*  $W_n$  au client  $C_n$  est le temps qu'aura à attendre  $C_n$  avant d'être servi. Ce temps peut être supérieur à  $D_n$ , auquel cas  $C_n$  est perdu (il n'a pas pu atteindre le serveur),
- le *temps d'attente*  $\mathcal{T}_n^a$  d'un client  $C_n$  est le temps effectivement passé par  $C_n$  dans le buffer :

$$\mathcal{T}_n^a = W_n \mathbf{1}_{\{W_n < D_n\}} + D_n \mathbf{1}_{\{W_n \geq D_n\}},$$

- le *temps de séjour*  $\mathcal{T}_n^s$  du client  $C_n$  est le temps que passe effectivement  $C_n$  dans le système (buffer + service) :

$$\mathcal{T}_n^s = (W_n + \sigma_n) \mathbf{1}_{\{W_n < D_n\}} + D_n \mathbf{1}_{\{W_n \geq D_n\}}.$$

Pour tout système de files d'attente à perte, la *probabilité de perte*  $\pi_k$  du client  $C_k$  est la probabilité que ce client soit perdu. Par exemple, pour une file d'attente classique à buffer fini  $M/M/1/1+B$ , cette probabilité serait donnée par la probabilité qu'il y ait  $1+B$  clients dans le système à l'entrée de  $C_k$ . Dans le cas d'une file d'attente avec clients impatientes, la condition

de perte est plus complexe :  $\pi_k$  est donnée par la probabilité que  $C_k$  se voit proposer un temps d'attente supérieur à son délai :

$$\pi_k = \mathbf{P}[C_k \text{ est perdu}] = \mathbf{P}[W_k > D_k]. \quad (2.1)$$

Définissons maintenant les *processus de performances* :

- le *processus de congestion*  $(X_t, t \geq 0)$ <sup>1</sup> est le processus comptant le nombre de clients dans le système à chaque instant  $t$ ,
- le *processus d'affluence du buffer*  $(Q_t, t \geq 0)$  est le processus qui compte le nombre de clients dans le buffer à l'instant  $t$ . Ainsi, pour tout  $t$  :

$$Q_t = (X_t - s)^+,$$

- pour tout  $n \geq 1$ , on note par  $\tilde{T}_n$ , le  $n$ -ième instant de sortie du serveur, c'est-à-dire, l'instant de la  $n$ -ième fin de service. Le *processus des fins de services*  $(S_t, t \geq 0)$  est alors le processus ponctuel (à trajectoires p.s. càdlàg) comptant le nombre de services terminés jusqu'à  $t$ . Autrement dit, pour tout  $t$  :

$$S_t = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\tilde{T}_n \leq t},$$

- pour tout  $n \geq 1$ , on note par  $\tilde{\sigma}_n$ , la durée du  $n$ -ième service *rendu par le serveur*, i.e. la durée du service qui se termine à  $\tilde{T}_n$ ,
- pour tout  $n \geq 1$ , on note par  $\tilde{T}_n$ , le  $n$ -ième instant où un client est perdu. Le *processus des pertes*  $(P_t, t \geq 0)$  est alors le processus càdlàg comptant le nombre de pertes jusqu'à  $t$ . Pour tout  $t$  :

$$P_t = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\tilde{T}_n \leq t},$$

- le *processus des départs* du système  $(D_t, t \geq 0)$  est le processus comptant les instants de sorties du système (services ou pertes) jusqu'à  $t$ . Autrement dit, pour tout  $t$  :

$$D_t := S_t + P_t.$$

Si on réordonne les délais résiduels des  $Q_t$  clients présents dans le buffer à  $t$  par ordre croissant (pour les servir en *EDF*, donc), on note ces délais résiduels:

$$R_1(t) < R_2(t) < \dots < R_{Q_t}(t).$$

---

<sup>1</sup>lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous noterons par exemple  $X$  pour le processus  $(X_t, t \geq 0)$

$R_1(t)$  est donc le *plus petit délai résiduel* à l'instant  $t$ . A un instant de fin de service  $\tilde{T}_n$ , le serveur sert donc en *EDF* le client de délai résiduel  $R_1(\tilde{T}_n)$ . On notera également le *délai initial du client prioritaire* à l'instant  $t$  par  $D(t)$ . Supposons que la file est traitée en EDF. Soit  $n_0$ , le numéro du client prioritaire à l'instant  $t$  dans l'ordre des arrivées (ce client est donc  $C_{n_0}$ ). On a alors :

$$R_1(t) = DR_{n_0}(t) \quad \text{et} \quad D(t) = D_{n_0} = R_1(t) + t - T_{n_0}.$$

On notera également

$$Z_t := R_{Q_t}(t),$$

le *plus grand délai résiduel* à  $t$  d'un client dans le buffer à  $t$ . A chaque fin de service  $\tilde{T}_n$ , on sert donc en *LDF* le client dont le délai résiduel à  $\tilde{T}_n$  est  $Z_{\tilde{T}_n}$ . Le processus  $(Z_t, t \in \mathbb{R}^+)$  est donc le *processus des délais résiduels maximaux*.

On a vu que, tout au long de ce travail, tous les processus et les suites de bases du modèle (entrées, services, délais) seront au moins considérés stationnaires. Ceci étant, rien ne dit pour l'instant que le système lui-même, et par-là même les variables de performances comme les temps d'attente et de séjour et les processus de performances  $X$  et  $Q$ , soient des processus stationnaires.

La *zone de stabilité* de la file d'attente est l'ensemble des valeurs des paramètres de la file d'attente (lois des arrivées, des demandes de services et des délais) telles que le système puisse atteindre le régime stationnaire (et dans ce cas, il l'atteindra forcément un jour). En particulier, la loi du processus  $X$  devient stationnaire, et un client qui entre dans le système trouve toujours le système à l'état stationnaire, sans perturber cet état. La *version stationnaire* de  $X$  est alors la loi de probabilité sur  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $t$  à partir de l'atteinte de l'état stationnaire,  $X_t$  soit distribué suivant cette loi.

On notera, à l'état stationnaire :

- $X_\infty$ , la version stationnaire de  $X_t$
- $Q_\infty$ , la version stationnaire de  $Q_t$ ,
- $\mathcal{T}^a$ , la version stationnaire du temps d'attente,
- $\mathcal{T}^s$ , la version stationnaire du temps de séjour.
- $W$ , la version stationnaire du temps d'attente proposé.

On appelle *point de construction* d'une file d'attente stable, un point de renouvellement pour son processus de congestion, c'est à dire, un instant où

un client entre dans un système vide. On appelle par ailleurs *busy cycle*, le temps qui s'écoule entre deux points de construction successifs. Un *busy cycle* se décompose en

$$\textit{busy cycle} = \textit{busy period} + \textit{idle period},$$

où la *busy period* est le temps passé entre le point de construction et le premier instant de vidage et l'*idle period* est le temps passé entre cet instant de vidage et le point de construction suivant. Par définition de la stabilité d'une file d'attente, une file d'attente stable a p.s. une infinité de points de construction, et les durées des *busy periods* successives forment une suite i.i.d., d'espérance finie.

A supposer que le système atteigne un jour l'état stationnaire, on définit un important indicateur de performances pour une file d'attente à perte, la probabilité de perte à l'état stationnaire, ou *probabilité de perte*.

**Definition 2.3.1**

*Pour toute file d'attente à perte, la probabilité de perte est donnée par :*

$$\pi := \mathbf{P} \left[ \textit{un client entrant dans le système} \right. \\ \left. \textit{à l'état stationnaire est perdu} \right]. \quad (2.2)$$

Pour une file d'attente avec clients impatientes,  $\pi$  est donnée par la probabilité à l'état stationnaire qu'un client doive attendre plus longtemps que son délai pour être servi :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} [W_n > D_n] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} [W_n > D] = \mathbf{P} [W > D]. \quad (2.3)$$



## Chapitre 3

# Problématique et résultats existants

Nous exposons ici les principaux résultats existants sur le sujet des files avec clients impatientes. Nous présentons en outre les difficultés méthodologiques soulevées par ce modèle, comme une introduction à nos contributions, qui suivront ce chapitre.

La littérature, abondante en ce qui concerne le domaine général des files d'attente, est en réalité assez réduite dès lors que l'on pose des limites sur le temps d'attente des clients. On distinguera ici trois types d'approches, auxquelles correspondront les trois parties de ce chapitre d'état de l'art du problème.

La première consiste à adapter la théorie classique des files d'attente FCFS au cas où les clients sont impatientes. On cherche dans ce cadre à savoir à quelles conditions les processus qui sont les métriques habituelles d'étude du système (congestion, charge de travail...) restent ergodiques et à en déduire les caractéristiques du système à l'état stationnaire. La théorie est assez robuste : en supposant au moins que les interarrivées, les temps de service et les délais forment des suites i.i.d., on peut adapter certaines descriptions de la file d'attente classique FCFS et donner des formules explicites pour la stabilité, la probabilité de perte ou le temps d'attente.

La deuxième approche pose le problème des files d'attente avec clients impatientes en terme d'ordonnancement : quelle discipline de service doit-on appliquer pour perdre le moins de clients possible ? Apparaît ici l'idée qu'une autre discipline de service que FCFS, qui prenne en compte les délais des clients, peut traiter la demande de manière plus performante.

Il émerge des travaux réalisés sur le sujet que la discipline de service EDF est optimale à plusieurs titres. Ceci étant, ces résultats sont pour l'heure,

soit posés en termes totalement déterministes (on connaît le scénario des requêtes, on ordonnance le traitement des tâches pour donner la meilleure réponse), soit purement expérimentaux : il apparaît que les arguments valables pour l'étude probabiliste d'une file avec clients impatientes gérée par FCFS ne sont pas adaptables à un système EDF par exemple.

Nous présentons donc une troisième approche, celle de la *Real Time Queueing Theory* (RTQT) ([DLS01]) : elle propose un processus stochastique original pour décrire une file d'attente avec délais non éliminatoires régie par EDF.

Ce chapitre s'organise comme suit : en partie 3.1, nous passons en revue les résultats existants sur le problème de la file FCFS avec clients impatients. En partie 3.2, nous présentons l'état de l'art sur la question de la comparaison des performances entre les différentes disciplines de service et en particulier l'optimalité de l'algorithme EDF. En partie 3.3, nous présentons la problématique de l'étude probabiliste d'une file d'attente régie par EDF et la complexité de ce modèle. Nous voyons en section 3.3.2 les résultats expérimentaux existant sur le calcul des performances d'EDF et en section 3.3.3, nous évoquons brièvement la méthode originale de la RTQT et donnons l'intérêt théorique que cette méthode peut présenter dans le cadre de notre problème.

### 3.1 La file FCFS : résultats et méthodes existants

Depuis longtemps (Erlang, [Erl17] !), on sait étudier avec des processus markoviens simples, l'état stationnaire d'une file d'attente « classique »  $M/M/s/s + B$  gérée par FCFS où  $B$  est la taille, limitée et déterministe, du buffer. Ces modèles sont les modèles à pertes les plus simples. On décrit parfaitement le comportement du processus de congestion  $(X_t, t \geq 0)$  et on en déduit que le système atteint la stationnarité sans condition sur ses paramètres. Par ailleurs, la propriété PASTA avec l'ergodicité de  $X$  permet de donner la probabilité de perte à l'état stationnaire par la probabilité à l'état stationnaire qu'il y ait  $s + B$  clients dans le système.

Le délai (ou *patience*, suivant les auteurs) affecté aux clients apparaît comme une limitation (mais de taille aléatoire !) de la capacité du système. Barrer ([Bar57]) a, le premier, soulevé le problème pour une file d'attente  $M/M/s/s + D - FCFS$  : peut-on adapter le résultat précédent pour trouver la probabilité de perte d'un client ? La réponse est non, puisqu'alors le processus de congestion  $X$  n'est pas markovien. Barrer construit alors un modèle *ad hoc* pour lever cette indétermination. Ce faisant, il exhibe la loi stationnaire du nombre de clients dans le système et donne  $\pi$  la probabilité

de perte :

$$\pi = \frac{1}{s!} \rho^s e^{(\lambda - s\mu)d} \mathbf{P}[X_\infty = 0], \quad (3.1)$$

où  $d$  est la valeur des délais initiaux. Gnedenko et Kovalenko ([GK68]) ont pointé et corrigé des erreurs dans la preuve de (3.1), tout en validant la formule. Jurkevic ([Jur71]) a ensuite élargi ce résultat et donné la loi du nombre de clients à l'état stationnaire lorsque les délais sont le minimum d'une constante et d'une loi exponentielle. Par ailleurs, Finch a donné la loi du temps d'attente dans une file  $GI/M/1/1 + D - FIFO$  ([Fin60]). Des considérations du même type ont mené au calcul de la probabilité de perte d'une file  $M/G/1/1 + D - FIFO$  (Kok et Tijms, [DKT85a]) et d'une file  $M/G/1/1 + D - FIFO$  avec délais jusqu'à la fin du service ([DKT85b]). Citons encore [Coh68], [Gho63] et [Tak74] pour d'autres résultats sur des modèles de ce type.

Pour initier la généralisation de ces résultats à une file  $G/G/1/1 + G - FIFO$ , [LL73] donne une borne supérieure heuristique pour la probabilité de perte :

$$\pi \leq \mathbf{P}[\sigma > U]. \quad (3.2)$$

Pour une file d'attente classique  $G/G/1$  régie par FIFO, le descripteur d'état est la suite des temps d'attente proposés aux clients (ou *workload*)  $(W_n, n \in \mathbb{N})$ . L'équation de Lindley donne pour tout  $n$  :

$$W_{n+1} = [W_n - U_{n+1} + \sigma_n]^+. \quad (3.3)$$

L'étude de la stabilité de la file  $G/G/1$  due à Loynes ([Loy62]) utilise ce processus remarquable. Loynes prouve qu'à la condition

$$\mathbf{E}[U] > \mathbf{E}[\sigma], \quad (3.4)$$

le système atteint un régime stationnaire, et décrit le régime stationnaire du système avec  $W$ , la loi stationnaire du *workload*.

Revenons au temps-réel. Baccelli et Hébuterne ([BH81]) et Baccelli, Boyer et Hébuterne ([BBH84]) montrent que le *workload* d'une file d'attente  $GI/GI/1/1 + GI - FIFO$  est une chaîne de Markov à partir d'une observation simple : le *workload* est le même que celui d'un système où les clients, qui connaissent à leur arrivée la valeur du *workload* (*aware customers*), ne rentrent effectivement dans le système que si le *workload* est plus petit que leur délai (auquel cas ils seront forcément servis). Une file avec *aware customers* n'endure donc pas de perte de clients rentrés dans le système : un client peut savoir dès le début s'il pourra atteindre le service ou non avant l'expiration de son délai, et ne rentre pas si ça n'est pas le cas. Le *workload* de la file avec *aware customers* (et donc, celui de la file avec *unaware*

*customers*) vérifie alors une équation markovienne du même type que (3.3) :

$$\begin{cases} W_{n+1} = [W_n + \sigma_n - U_{n+1}]^+ & \text{si } D_n > W_n \\ W_{n+1} = [W_n - U_{n+1}]^+ & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est alors aisé de donner la condition pour l'atteinte du régime stationnaire :

**Theorème 3.1.1 (cf [BBH84])**

**A la condition  $\mathbf{P}[\sigma < U] > 0$ , la chaîne de Markov  $(W_n, n \in \mathbb{N})$  est ergodique si et seulement si :**

$$1 - \rho \left( 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \mathbf{P}[D > x]) \right) > 0.$$

**De plus, les périodes d'activité sont d'espérance finie.**

En particulier, ce théorème implique qu'à la condition  $\mathbf{P}[\sigma < U] > 0$ , si la loi des délais ne charge pas  $+\infty$ , la file est stable dans le sens où les périodes d'activité sont p.s. finies. Remarquons d'ailleurs que cette condition de stabilité est plus faible que la condition de Loynes (3.4), ce à quoi on pouvait s'attendre, puisque l'on perd des clients.

L'étude du comportement stationnaire de la file donne aussi une relation simple entre la probabilité de perte de la file et la probabilité que le système soit vide à l'état stationnaire. [BBH84] montre que :

$$\pi = 1 - \frac{1}{\rho} + \frac{\mathbf{P}[X_\infty = 0]}{\rho}. \quad (3.5)$$

Considérons maintenant le cas  $M/M/s/s + G - FCFS$ . [BBH84] donne la loi du temps d'attente de la file  $M/M/s/s + GI - FCFS$  grâce à l'argument précédent. Récemment, des méthodes markoviennes nouvelles ont permis de donner des formules exactes pour des métriques de performance du système, telles que la probabilité de perte ou le nombre de clients à l'état stationnaire. Brandt et Brandt ([BB99]) et Movaghar ([Mov98]) donnent la loi du nombre de clients à l'état stationnaire  $X_\infty$  dans une file  $M/M/s/s + GI - FCFS$  (et même, où les paramètres des lois exponentielles des interarrivées et des services dépendent du nombre de clients dans le système, *state dependant imput*, [Mov98]). Ils utilisent un argument de « conservation de flux » (entrées en sorties) dû à Kleinrock ([Kle76]) : à l'état stationnaire, le nombre de clients dans le système a la même loi suivant qu'il est vu d'un client qui sort du système (éliminé ou servi) ou d'un client qui entre dans le système. Les calculs sont alors permis par des propriétés spécifiques du processus de Poisson (PASTA...). Ils donnent en particulier pour la file  $M/M/1/1 + GI - FIFO$  le terme  $\mathbf{P}[X_\infty = 0]$  par :

$$\mathbf{P}[X_\infty = 0] = 1 + \lambda \int_0^\infty e^{\lambda \int_0^y \mathbf{P}[D > x]} dx - \mu y \, dy, \quad (3.6)$$

ce qui avec (3.5) donne explicitement la probabilité de perte pour la file  $M/M/1/1+G-FIFO$  (notons que le résultat est généralisé à la file  $M/M/s/s+GI-FCFS$  pour  $s \geq 1$ ).

Dans le cas d'une file  $M/M/s/s+D-FCFS$  où les délais initiaux déterministes sont tous égaux à  $d$ , [CKC01] propose une approche sensiblement différente et notamment le calcul explicite de performances (probabilité de perte, temps d'attente...) par l'étude de la loi stationnaire du processus markovien d'*ancienneté*  $(K_t, t \geq 0)$ , à valeurs dans l'espace  $(\{0\} \times \{0, 1, \dots, s\}) \cup (\{1\} \times [0, d])$  :

$$\begin{cases} K_t := (0, c) & \text{si il y a } c \text{ clients dans le système, } c \leq s, \\ K_t := (1, Y_t) & \text{s'il y a au moins } s+1 \text{ clients dans le système,} \end{cases}$$

où  $Y_t$  est le temps passé dans le système à  $t$  par le client prioritaire à cet instant (le plus ancien). On peut alors calculer la loi stationnaire de  $(K_t, t \geq 0)$  et donc la densité  $f$  de la version stationnaire de  $Y$ . En vertu de la propriété PASTA, la probabilité de perte est alors donnée par :

$$\pi = \frac{f(d)}{\lambda} \quad (3.7)$$

où  $\lambda$  est l'intensité du processus des entrées, et on retrouve le résultat de Barrer, (3.1). Remarquons que le résultat précédent est généralisé à des délais courant jusqu'à la fin du service, où le modèle est adaptable.

## 3.2 Comparaison des disciplines de service

Voyons maintenant dans les grandes lignes où en est le spectre de la connaissance concernant la question suivante : étant fixé un scénario d'arrivées de requêtes, affectées de délais d'exécution donnés, comment ordonnancer le traitement des tâches de manière à obtenir de meilleures performances ?

Un scénario temps-réel (scénario de trafic avec délais) est dit *faisable* par un ordonnanceur s'il peut traiter toutes les requêtes sans en perdre une seule. Dertouzos [Der74] prouve alors le résultat suivant :

### Theorème 3.2.1 (cf [Der74])

*L'algorithme EDF est optimal en terme de faisabilité parmi tous les algorithmes préemptifs.*

L'optimalité d'EDF en termes de faisabilité signifie qu'il n'existe pas de scénario de trafic temps-réel faisable par un autre algorithme préemptif, mais

pas par EDF. D'autre part, Leboucher [Leb98] montre qu'EDF est également optimal en terme de faisabilité si on considère les délais jusqu'à la fin du service, et dans d'autres cas connexes.

En des termes probabilistes, les résultats sont très réduits. Comme on va le voir tout au long de ce travail, la dynamique du système sous EDF est très complexe. Panwar, Towsley et Wolf ([PT88]) montrent cependant le résultat suivant :

**Theorème 3.2.2 (cf [PT88])**

*Soit  $\gamma$ , une discipline de service quelconque. En notant  $P_t^\gamma$ , le nombre de clients perdus à  $t$  sous  $\gamma$ ,  $B_n^\gamma$ , la durée de la  $n$ -ième busy period sous  $\gamma$  et  $T^\gamma$  le débit de service sous  $\gamma$  :*

1. *pour toute file  $G/M/s/s + GI$ , pour tout  $t$ ,  $P_t^{EDF} \leq_{st} P_t^\gamma$ ,*
2. *pour toute file  $M/G/s/s + GI$ ,  $T^\gamma \leq T^{EDF}$  et pour tout  $n$ ,  $B_n^{EDF} \geq_{st} B_n^\gamma$ ,*

*où on note :*

$$X \geq_{st} Y \Leftrightarrow \mathbf{P}[X \leq x] \leq \mathbf{P}[Y \leq x], \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Il est à noter que ces résultats sont obtenus par stricte comparaison des files d'attente trajectoire par trajectoire (*i.e.*, pour un scénario de trafic donné) et ces arguments ne permettent pas *a priori* de calculer ou même d'estimer la loi du processus des pertes sous EDF ( $P_t^{EDF}, t \geq 0$ ) et la probabilité de perte sous EDF,  $\pi^{EDF}$ . Néanmoins, ils confirment le résultats précédent de faisabilité en tant qu'ils désignent aussi EDF comme la discipline optimale.

### 3.3 La file EDF : problématique probabiliste

#### 3.3.1 Description du système

Comme on l'a remarqué dans la section précédente et mis à part le dernier résultat, les comparaisons de performances entre les disciplines de service ont souvent été posées en termes d'ordonnancement pur, et rarement en termes probabilistes. Elles désignent EDF comme la discipline optimale. Cependant, alors que l'étude d'un système temps-réel sous FCFS est très robuste comme on l'a vu en partie 3.1, il n'en va pas de même lorsque la discipline de service est EDF.

En effet, du point de vue du client qui rentre dans le système, la situation est beaucoup plus complexe qu'en FCFS. Sachant son délai initial et le

*workload* du système à l'instant de son arrivée, un client ne peut pas savoir en EDF s'il sera servi ou non. Sa situation dans la file d'attente va évoluer de manière instable et incertaine, puisque des clients peuvent entrer dans le système après lui et passer devant lui si leur délai initial est plus court que son délai résiduel à l'instant de leur arrivée. Ensuite, la situation du même client peut brutalement s'améliorer s'il s'avère que ces clients qui l'ont préempté sont éliminés du système à cause d'un délai trop court. En allant plus loin, il est très clair en FCFS qu'un client entrant dans un système à l'état stationnaire a d'autant moins de chances d'être perdu que son délai initial est long. Par contre, sous EDF, il semble *a priori* beaucoup plus difficile de répondre à cette question : un client qui a un délai initial très long et qui, de fait, a beaucoup de chances de passer longtemps dans le système n'a pas forcément plus de chances d'être servi qu'un client qui entre dans le système avec un délai initial très court, et qui a donc une probabilité grande d'être prioritaire (dans le cas non-préemptif), ou même d'être directement servi (dans le cas préemptif).

Ces remarques montrent donc bien la difficulté de décrire l'évolution de la file d'attente sous EDF par un descripteur d'état classique : entre autres, les remarques que nous venons de faire montrent que le processus de congestion  $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ , la suite des *workload* aux instants d'entrées  $(W_n, n \in \mathbb{N})$  ou encore le processus d'ancienneté  $(K_t, t \geq 0)$  introduit par [CKC01] pour la file FCFS ne sont pas markoviens dans le cas d'EDF.

Cela pose problème, car nous avons vu qu'EDF est précisément la discipline de service la plus intéressante en tant qu'elle maximise de nombreux critères de performances. C'est bien là toute la problématique de ce travail : la théorie probabiliste est robuste lorsqu'il s'agit d'étudier les propriétés à l'état stationnaire d'un système régi par FCFS, mais les mêmes arguments ne peuvent plus s'appliquer s'agissant d'un système EDF, qui par ailleurs présente toutes les propriétés d'optimalité.

### 3.3.2 Calcul numérique des performances d'EDF

La simulation des performances d'EDF ne peut déjà être réalisée qu'en mettant en évidence un bon descripteur du système. Ainsi, citons quelques exemples montrant comment simuler numériquement la perte du système sous EDF en mettant en évidence une chaîne de Markov [HXD88, PK91, ND92, PT88]. Cela peut sembler surprenant, puisqu'on a vu qu'aucune chaîne de Markov simple ne peut *a priori* décrire un système sous EDF. Précisément, des approximations du système par un autre sont nécessaires pour rendre le système markovien et ces études ont des limites :

- Certaines d'entre elles utilisent un modèle simplifié, comme par exemple la file  $F/ML(n)$  ([HXD88]), qui n'applique EDF qu'aux  $n$  premiers (ou derniers, [PK91]) clients, les autres étant servis en FIFO.

- Le calcul de  $\pi$  impose des limites pratiques sur le nombre d'états du système, et requiert une spécification restrictive des données, comme les  $n$  clients choisis dans [HXD88], ou une borne sur les délais ([PT88]).

Par ailleurs, Chen et Decreusefond donnent dans [CD96] une méthode originale adaptée de la loi de conservation de Kleinrock pour calculer numériquement le temps d'attente moyen pour une file d'attente  $M/G/1/1+G-EDF$ , où les clients appartiennent à  $N$  classes différentes qui déterminent leur délai. Ce calcul s'effectue par la résolution d'un système non linéaire de dimension  $N$ , faisable numériquement.

De manière générale, la mise en place de l'algorithme EDF pose comme on vient de le voir de vrais problèmes de tractabilité pour les calculs numériques et les simulations, et présente de plus un coup algorithmique en terme de complexité. Une autre question sous-jacente devient donc : le gain de performance d'EDF est-il suffisamment important par rapport au système FCFS par exemple, pour compenser cette plus grande complexité ? A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de réels éléments permettant de répondre à cette question. L'un des objectifs de ce travail est précisément de donner des pistes pour le calcul des performances sous EDF.

### 3.3.3 Le descripteur à valeurs mesures ponctuelles

Nous introduisons ici l'idée et la méthode de Doytchinov, Lehoczky et Shreve (RTQT, [DLS01]) pour décrire une file d'attente à un serveur régie par EDF. L'idée centrale de ce travail consiste à considérer comme processus descripteur du système le processus à valeurs mesures ponctuelles qui garde la trace à l'instant  $t$  de tous les délais résiduels de tous les clients présents dans le système à l'instant  $t$ . Les trajectoires du processus prennent donc leur valeur dans un espace d'état beaucoup plus complexe que la droite réelle (ici, un espace de dimension infinie), mais semblent être les seules qui rendent compte de l'évolution du système de manière exhaustive.

Soit le système suivant :

- une file d'attente  $GI/GI/1$ ,
- les clients entrent affectés de délais i.i.d. et p.s. bornés et son servis suivant la discipline de service EDF préemptive,
- aucun client n'est perdu : les clients restent dans la file même si leur délai est expiré, jusqu'à l'achèvement de leur service.

Attardons-nous sur les deux différences majeures avec les systèmes que nous étudions dans cette thèse :

- d'une part, les délais ne sont pas éliminatoires, ce qui bouleverse fondamentalement la dynamique du système : celui-ci ne présente pas la même condition de stabilité, ne se vide pas aux mêmes instants, sert des clients que le système EDF avec élimination aurait perdus. Dans ce cas, les délais des clients ne servent qu'à les classer dans la file,
- d'autre part, la discipline de service est préemptive, ce qui signifie que le service d'un client peut être interrompu à tout moment si un client plus pressé que lui entre dans le système.

Même si ce modèle et son domaine d'applications n'entrent pas à proprement parler dans le sujet de cette thèse, la méthode développée ici a inspiré toute une partie de nos contributions (chapitre 6), en l'adaptant à une file EDF où les clients sont perdus à l'atteinte de leurs délais.

Remarquons enfin que l'hypothèse que les délais initiaux sont p.s. bornés n'est qu'une hypothèse technique. D'une part, cette hypothèse est très plausible en pratique et d'autre part, les simulations réalisées dans ces travaux indiquent que les résultats sont toujours vérifiés si cette condition n'est pas remplie. Cela dit, nous verrons que nous pourrions nous passer de cette hypothèse dans notre cas.

On définit alors comme descripteur du système, le processus des *profils* à l'instant  $t$  par, pour tout  $t$  et pour tout borélien  $\mathfrak{B}$  :

$$\mathcal{Q}_t(\mathfrak{B}) := \left\{ \begin{array}{l} \text{nombre de clients dans le file à } t \\ \text{ayant à } t \text{ un délai résiduel dans } \mathfrak{B} \end{array} \right\}.$$

On note par ailleurs

$$\mathcal{W}_t(\mathfrak{B}) := \left\{ \begin{array}{l} \text{travail associé aux clients dans le file à } t \\ \text{ayant à } t \text{ un délai résiduel dans } \mathfrak{B} \end{array} \right\},$$

le processus du *workload* associé.

L'objet de [DLS01] est l'étude à *forte charge* ( $\rho = 1$ ) d'un tel système par changement d'échelle en espace et en temps.

On considère ainsi une suite de systèmes tels que  $\lambda^{(n)} \mathbf{E}[\sigma^{(n)}] \rightarrow 1$ , où les clients entrent dans le système affectés de délais initiaux  $D^{(n)}$  de fonction de répartition  $G^{(n)}$ . On suppose qu'il existe une fonction de répartition  $G$  telle que  $G^{(n)}(\sqrt{n}x) = G(x)$  pour tout  $n$ .

On note pour le  $n$ -ième système,  $\mathcal{Q}_t^{(n)}$  et  $\mathcal{W}_t^{(n)}$ , les processus des profils et du travail correspondant, et

- le *Netput process*  $N_t^{(n)} := \text{travail entré jusqu'à } t$ ,

- l'*Idleness process*  $I_t^{(n)} := -\min_{0 \leq s \leq t} N_s^{(n)}$  = temps *idle* jusqu'à  $t$ ,
- le *Workload process*  $W_t^{(n)} := N_t^{(n)} + I_t^{(n)}$ .

On normalise ces processus de la façon suivante, par exemple :

$$\bar{Q}_t^{(n)}(\mathfrak{B}) := \frac{1}{\sqrt{n}} Q_{nt}^{(n)}(\sqrt{n}\mathfrak{B}).$$

Rappelons maintenant le *théorème central limite fonctionnel pour les files d'attente sans perte*, réalisé pour une charge limite 1. Au sens de la convergence en loi des processus à valeurs réelles :

### Theorème 3.3.1

$$(\hat{N}^{(n)}, \hat{I}^{(n)}, \hat{W}^{(n)}) \Rightarrow (N^*, I^*, W^*),$$

où  $N^*$  est un mouvement Brownien avec dérive, et

$$I_t^* := -\min_{0 \leq s \leq t} N_s^*,$$

$$W_t^* := N_t^* + I_t^*.$$

En utilisant ce dernier résultat, Doytchinov *et al.* démontrent alors le théorème suivant :

### Theorème 3.3.2 (cf [DLS01])

Les processus à valeurs mesurées  $\bar{W}^{(n)}$  et  $\bar{Q}^{(n)}$  convergent en distribution vers les processus  $\bar{W}^*$  et  $\bar{Q}^*$  définis pour tout  $t$  et tout  $\mathfrak{B}$  par :

$$\hat{W}_t^*(\mathfrak{B}) = \int_{\mathfrak{B} \cap [F^*(t), \infty[} (1 - G(x)) dx, \quad \hat{Q}_t^*(\mathfrak{B}) = \lambda \hat{W}_t^*(\mathfrak{B}),$$

où  $F^*$  est le processus défini pour tout  $t$  par :

$$F^*(t) := H^{-1}(W_t^*), \quad \text{où } H(y) := \int_y^\infty (1 - G(x)) dx.$$

En projetant pour tout  $t$  et pour tout  $n$  continûment la mesure  $\hat{Q}_t^{(n)}$  sur la droite réelle, on a en particulier :

**Corollaire 3.3.3 ( [DLS01])**

*La longueur de la file renormalisée  $Q^{(n)}$  converge en distribution au sens des processus vers  $\lambda W^*$ .*

Le résultat précédent permet donc l'approximation fluide du processus càdlàg qui compte le nombre de clients en attente par une diffusion. Ce résultat permet ainsi de simuler, entre autres, la fraction  $N^{(n)}(x)$  de clients à l'état stationnaire dans la queue ayant un délai résiduel inférieur ou égal à  $x$  en fonction du nombre de clients à l'état stationnaire dans la file,  $Q^{(n)}$ , qui n'est pas exprimé explicitement.

Pour vérifier ce résultat par simulations, Doytchinov *et al.* simulent un système pour  $n$  grand et arrête de le faire tourner lorsque  $Q^{(n)}$  est assez grand. A ce moment-là, on suppose que l'on a atteint l'état stationnaire et on regarde la valeur empirique de  $N^{(n)}(x)$ . L'application à  $x = 0$  donne donc en théorie, à l'état stationnaire, la proportion de clients dans la file ayant dépassé leur délai. Les simulations montrent que l'approximation est bonne.

Citons ici également les travaux initiaux de Lehoczky sur le sujet, qui ont abouti aux résultats que nous venons de citer ( [Leh96], [Leh97b]), ou une variante appliquée à des réseaux de Jackson ( [Leh97a]). Notons également que Baldwin *et al.* proposent dans [BDKM00] une méthode de contrôle d'admission adaptée de la RTQT, dans le cadre d'un système EDF sans perte. La méthode présentée permet une diminution substantielle de la probabilité de dépassement de délai (et donc de retard).

En conclusion, la RTQT propose donc la première véritable méthode de description d'un système soumis à EDF, dont on a par ailleurs remarqué la grande instabilité. Mais son application à une file EDF avec pertes pose trois problèmes majeurs :

- le théorème 3.3.1 ne s'applique pas dans le cas où le système perd des clients,
- l'approximation du nombre de clients n'ayant pas dépassé leur délai dépend de la loi stationnaire du nombre de clients dans le buffer, sur lequel on a aucune information dans le cas d'un système à perte,
- en vertu des remarques faites précédemment sur les différences structurelles entre la dynamique de ce système EDF sans perte et celle du système avec perte, on ne peut rien déduire de ces résultats pour une file avec éliminations, la proportion de clients présents ayant dépassé leur délai n'étant pas *a priori* la proportion de clients perdus dans notre système, par exemple,

- le seuil de charge limite ( $\rho = 1$ ) n'est plus pertinent lorsque l'on regarde un système à perte : on n'est pas à saturation du système quand  $\rho = 1$ , puisque le système est alors toujours stable (*cf* chapitre 4).

Ceci étant, la méthode a elle-même un intérêt pour ce qui va suivre et le descripteur considéré semble être le modèle pertinent pour décrire la discipline EDF.

**Remarque 3.3.1** L'idée de prendre un processus à valeurs mesures ponctuelles comme indicateur de l'état d'un système à la dynamique instable est également développée par Gromoll, Puha et Williams ( [GPW01]) dans le cas de la file d'attente *Processor Sharing* (PS) et par Limic ( [Lim01]) pour une file LIFO, dans les deux cas pour des systèmes sans pertes à forte charge ( $\rho = 1$ ).

# Chapitre 4

## Stabilité

Ce chapitre, et tous les chapitres suivants, sont dévolus à nos contributions.

### 4.1 Introduction

Nous posons ici la question de la stabilité du système. A quelle condition sur les paramètres du système, celui-ci atteint-il un régime stationnaire ? Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, théorème 3.1.1, une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour une file d'attente  $GI/GI/1/1 + GI - FIFO$  où les délais sont p.s. finis est donnée par

$$\mathbf{P}[\sigma < U] > 0.$$

Nous nous proposons ici d'élargir ce résultat à un cas plus général :

- en supposant seulement que l'on est dans le cas  $G/G/1$ , où les délais forment une suite ergodique,
- en considérant une discipline de service quelconque.

Il est à noter en effet sur ce dernier point que les résultats de stabilité existant à notre connaissance ne sont établis que pour la discipline de service FIFO. Une méthode liée au calcul de Palm permet comme on va le voir de donner des résultats pour le cas  $G/G/1/1 + G$  et pour une discipline de service quelconque.

Ce chapitre s'organise comme suit. En partie 4.2 nous montrons la stabilité dans le cas  $GI/GI/1/1 + GI$  avec discipline de service quelconque, en comparant le processus de congestion de la file avec clients impatientes avec celui de la file « délai pur »  $G/G/\infty$ .

Nous donnons en partie 4.3 un résultat de stationnarité adapté du calcul de Palm et d'un schéma de récurrence arrière pour une file avec clients impatientes  $G/G/1/1 + G$  avec discipline de service quelconque.

## 4.2 Régénérativité dans le cas $GI/GI/1/1 + GI$

### 4.2.1 Comparaison avec la file « délai pur »

Nous considérons ici une file d'attente *délai pur*  $G/G/\infty$ , c'est-à-dire :

- les suites des interarrivées et des temps de service  $(U_n, n \in \mathbb{N})$  et  $(\sigma_n, n \in \mathbb{N})$  sont ergodiques et intégrables,
- il y a une infinité de serveurs.

Ainsi, chaque client qui entre dans le système est directement pris en charge par un serveur (il y en a toujours un disponible) et reste dans le système pendant la durée de son service.

Nous noterons alors pour un tel système :

- $\sigma_n^{\text{DP}}$ , le temps de service demandé par le  $n$ -ième client entré dans la queue,
- $X_t^{\text{DP}}$ , le nombre de clients à l'instant  $t$ .

#### Theorème 4.2.1

*Soit une file  $G/G/1/1 + G$  gérée par une discipline de service non-préemptive quelconque, où  $(\sigma_n, n \in \mathbb{N})$  représente la suite des temps de service et  $(D_n, n \in \mathbb{N})$  est la suite des délais initiaux des clients. Alors :*

1. *Le nombre de clients dans le système est à tout instant  $t$  inférieur à celui  $X_t^{\text{DP}}$  de la file  $G/G/\infty$  qui traite les demandes des mêmes clients, où les temps de services demandés par les clients sont donnés par*

$$\sigma_n^{\text{DP}} := \sigma_n + D_n.$$

2. *Le nombre de clients dans le buffer est à tout instant  $t$  inférieur au nombre de clients  $\hat{X}_t^{\text{DP}}$  dans la file  $G/G/\infty$  qui traite les demandes des mêmes clients et où les temps de service demandés par les clients sont donnés par :*

$$\hat{\sigma}_n^{\text{DP}} := D_n.$$

*Preuve.* Supposons que la file avec impatiences et la file *délai pur* partent du même état initial.

Ensuite, elles traitent les demandes des mêmes clients (arrivés aux mêmes instants).

1. Dans la file  $G/G/1/1 + G$ , le client  $C_n$  reste dans le système pendant un temps au plus égal à  $\sigma_n + D_n$ . Par ailleurs, le même client  $C_n$  entre dans la file *délai pur* en demandant un service  $\sigma_n^{\text{DP}} := \sigma_n + D_n$ . Les suites  $(D_n, n \in \mathbb{N})$  et  $(\sigma_n, n \in \mathbb{N})$  étant ergodiques,  $(\sigma_n^{\text{DP}}, n \in \mathbb{N})$  l'est aussi et donc le système est bien de type  $G/G/\infty$ . On a de plus :

$$X_t \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t, T_n + \sigma_n + D_n > t\}} = X_t^{\text{DP}}.$$

2. Le client  $C_n$  passe dans le buffer de la file  $G/G/1/1 + G$  un temps inférieur ou égal à  $D_n$ .

Si on considère maintenant que les mêmes clients entrent dans le système *délai pur* en demandant un service de durée

$$\hat{\sigma}_n^{\text{DP}} := D_n,$$

ce système est bien de type  $G/G/\infty$  et on a :

$$Q_t \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t, T_n + D_n > t\}} = \hat{X}_t^{\text{DP}}.$$

□

## 4.2.2 Résultat de régénérativité

La question de la stabilité est souvent posée en terme de finitude presque sûre des *busy periods*, ou autrement dit, de *régénérativité* du processus de congestion  $(X_t, t \geq 0)$ . On dit qu'un processus est régénératif lorsque 0 est récurrent positif pour ce processus. Dans ce cas,  $(X_t, t \geq 0)$  atteint p.s. un régime stationnaire et le temps passé entre les instants successifs de visite en 0 forment une suite i.i.d.. Dans le cas particulier où  $(X_t, t \geq 0)$  représente le processus de congestion d'une file d'attente, la régénérativité de  $X$  implique en particulier que la file d'attente atteint un régime stationnaire et que les durées des *busy periods* successives forment une suite i.i.d.. En particulier, le processus  $X$  atteint le régime stationnaire et la file est stable<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>voir [Tho00]

**Theorème 4.2.2**

*Soit une file d'attente avec clients impatientes  $GI/GI/1/1 + GI$  gérée par une discipline de service non-préemptive quelconque, où les interarrivées sont notées  $(U_n, n \in \mathbb{N})$ , les temps de services  $(\sigma_n, n \in \mathbb{N})$  et les délais initiaux des clients sont notés  $(D_n, n \in \mathbb{N})$ . On suppose que :*

$$\mathbf{P}[D + \sigma < U] > 0. \quad (4.1)$$

*Alors, le processus de congestion  $(X_t, t \geq 0)$  est régénératif.*

*Preuve.* Considérons la file  $GI/GI/\infty$  où les interarrivées sont de loi celle de  $U$ , telle que les demandes de services des clients sont la somme des délais et des temps de services demandés par les clients de la file avec clients impatientes (i.e.,  $(\sigma_n^{\text{DP}} = \sigma_n + D_n, n \in \mathbb{N})$ ). Soit  $\mathbf{P}_N^0$ , la probabilité de Palm associée au processus des entrées  $N$ . (4.1) implique que

$$\mathbf{P}_N^0[\sigma^{\text{DP}} < U] = \mathbf{P}_N^0[\sigma + D < U] > 0.$$

On peut donc appliquer le résultat de Thorisson ([Tho00], p.370) : le processus  $(\hat{X}_t^{\text{DP}}, t \in \mathbb{R}^+)$  du nombre de clients dans la file  $GI/GI/\infty$  est régénératif. On applique alors la première partie du théorème 4.2.1 : le processus  $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$  du nombre de clients dans la file avec impatiences  $GI/GI/1/1 + GI$  atteint 0 p.s. une infinité de fois.

□

**Remarque 4.2.1** Ce résultat généralise le théorème 3.1.1 à une discipline de service quelconque.

### 4.3 Stationnarité pour la file $G/G/1/1 + G$

Nous considérons ici le cas général d'une file d'attente avec clients impatientes  $G/G/1/1 + G$  gérée par une discipline de service non-préemptive quelconque.

#### 4.3.1 Un résultat de stationnarité

Soient :

- $(\hat{S}_t, t \geq 0)$ , un processus ponctuel stationnaire de points  $(\hat{T}_n, n \in \mathbb{N})$ .  
Pour tout  $t$  :

$$\hat{S}_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{\hat{T}_n \leq t\}},$$

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{\sigma}_n := \hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n.$$

La suite  $(\hat{\sigma}_n, n \in \mathbb{N})$  est donc une suite stationnaire ergodique de loi générale celle de  $\hat{\sigma}$ ,

- $(\hat{\alpha}_n, n \in \mathbb{N})$ , une suite de marques du processus  $(\hat{S}_t, t \geq 0)$ . La suite  $(\hat{\alpha}_n, n \in \mathbb{N})$  est donc une suite stationnaire ergodique de loi générale celle de  $\hat{\alpha}$ .

Nous nous plaçons sur l'espace de Palm <sup>2</sup> correspondant au processus  $\hat{S}$ . Plus précisément, nous munissons l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  du flot  $\theta := \theta_{\hat{T}_1}$  et de la probabilité de Palm  $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0$  associés à  $\hat{S}$ .

L'espace de Palm  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_{\hat{S}}^0, \theta)$  est tel que :

- $\theta$  est *stationnaire* : Pour tout  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{F}$ ,

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [\theta^{-1}(\mathcal{A})] = \mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [\mathcal{A}],$$

- $\theta$  est *ergodique* : Pour tout  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{F}$ ,

$$A = \theta^{-1}(A) \Rightarrow \mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [A] = 0 \text{ ou } 1,$$

- $\hat{T}_0 = 0$ ,  $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0$ -p.s.

Suivant cette définition, la suite  $(\hat{\sigma}_n, n \in \mathbb{N})$  est compatible avec le flot ergodique  $\theta$  et autrement dit, en notant pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\theta^n = \theta \circ \theta \circ \dots \circ \theta,$$

alors,  $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0$ - p.s., pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma} \circ \theta^n.$$

De même,  $(\hat{\alpha}_n, n \in \mathbb{N})$  étant une suite de marques du processus  $(\hat{S}_t, t \geq 0)$ , elle est également compatible avec le flot. C'est donc une suite stationnaire ergodique et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha} \circ \theta^n.$$

Nous supposons de plus que :

$$\mathbf{E}_{\hat{S}}^0 [\hat{\sigma}] < \infty \text{ et } \mathbf{E}_{\hat{S}}^0 [\hat{\alpha}] < \infty.$$

---

<sup>2</sup>voir [BB93] pour de plus amples informations sur ce cadre d'étude

Par ailleurs, nous supposons que le flot  $\theta$  est bijectif, et notons :

$$\theta^{-1}(\mathcal{A}) = \mathfrak{B} \in \mathcal{F} \text{ tel que } \theta(\mathfrak{B}) = \mathcal{A}.$$

Ainsi, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\theta^{-n} = \theta^{-1} \circ \theta^{-1} \circ \dots \circ \theta^{-1}.$$

Nous décrivons une suite définie par une équation de récurrence de type équation de Lindley ([Loy62]) :

**Definition 4.3.1**

*Soit  $Y$ , une variable aléatoire p.s. finie. La suite  $(\hat{Y}_n^Y, n \in \mathbb{N})$  à valeurs  $\mathbb{R}^+$  est définie par :*

$$\begin{cases} \hat{Y}_0^Y = Y, \\ \hat{Y}_{n+1}^Y = \left[ \max \{ \hat{Y}_n^Y, \hat{\alpha}_n \} - \hat{\sigma}_n \right]^+, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nous cherchons ici à établir à quelle condition  $(\hat{Y}_n^Y, n \in \mathbb{N})$  atteint un régime stationnaire. Autrement dit, nous cherchons une variable aléatoire  $Y$ , p.s. finie, telle que  $Y$  soit la version stationnaire de la suite  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ , ou encore :

$$\hat{Y}_n^Y = Y \circ \theta^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, avec la définition 4.3.1, on aura alors :

$$Y \circ \theta = [\max \{ Y, \hat{\alpha} \} - \hat{\sigma}]^+. \quad (4.2)$$

On a le résultat suivant :

**Theorème 4.3.1**

*Il existe une unique solution  $Y$  de (4.2), finie p.s.. De plus :*

$$\mathbf{P}_{\hat{\sigma}}^0 [Y \leq \hat{\alpha}] > 0. \quad (4.3)$$

*Preuve.* Soit  $Y$  une solution de (4.2). Vérifions (4.3) :

- Si  $\mathbf{P}_{\hat{\sigma}}^0 [Y = 0] > 0$ , il n'y a rien à montrer.
- Supposons que  $\mathbf{P}_{\hat{\sigma}}^0 [Y = 0] = 0$ . Alors, sur un évènement de probabilité 1,

$$\begin{aligned} Y \circ \theta > 0 &\Leftrightarrow [\max \{ Y, \hat{\alpha} \} - \hat{\sigma}]^+ > 0 \\ &\Leftrightarrow Y \circ \theta = \max \{ Y, \hat{\alpha} \} - \hat{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si on suppose que (4.3) est fautive,  $\mathbf{P}_{\hat{\sigma}}^0$ -p.s.,  $Y > \hat{\alpha}$  et donc  $Y \circ \theta = Y - \hat{\sigma}$ .  
On a alors :

$$\mathbf{E}_{\hat{\sigma}}^0 [Y \circ \theta - Y] = -\mathbf{E}_{\hat{\sigma}}^0 [\hat{\sigma}] < 0,$$

ce qui est absurde par le lemme ergodique (lemme A.0.1 en appendice).  
(4.3) est vérifiée.

Nous allons exhiber une solution  $Y$  de l'équation (4.2) par un schéma de type schéma arrière de Loynes ([Loy62]).

Nous notons pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\hat{\alpha}_{-n} = \hat{\alpha} \circ \theta^{-n} \text{ et } \hat{\sigma}_{-n} = \hat{\sigma} \circ \theta^{-n}.$$

Définissons la suite  $(M_n, n \in \mathbb{N})$  (*suite arrière* correspondant à  $(\hat{Y}_n^0, n \in \mathbb{N})$ ) :

$$\begin{cases} M_0 = 0, \text{ p.s. ,} \\ M_n = \left[ \max_{j=1}^n \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right) \right]^+ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarquons que  $(M_n, n \in \mathbb{N})$  est croissante, puisque pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \left[ \max_{j=1}^{n+1} \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right) \right]^+ \\ &= \left[ \max \left\{ \max_{j=1}^n \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right), \hat{\alpha}_{-(n+1)} - \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\sigma}_{-i} \right\} \right]^+ \\ &= \max \left\{ M_n, \hat{\alpha}_{-n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\sigma}_{-i} \right\}, \end{aligned}$$

en remarquant que  $\{\max(A, B)\}^+ = \max\{A^+, B\}$ , pour tous  $A$  et  $B$ .

Donc, il existe une variable aléatoire (éventuellement infinie)  $M_\infty$ , telle que  $M_\infty$  soit la limite presque sûre de la suite  $(M_n, n \in \mathbb{N})$ . Plus précisément,  $M_\infty$  est donnée par :

$$M_\infty = \left[ \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right) \right]^+. \quad (4.5)$$

Par ailleurs, on peut remarquer que :

### Lemme 4.3.2

*Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,*

$$M_{n+1} \circ \theta = [\max\{M_n, \hat{\alpha}\} - \hat{\sigma}]^+.$$

*Preuve du lemme 4.3.2.* On fait une récurrence sur  $n$  :

$$\begin{aligned}
M_{n+1} &= \left[ \max_{j=1}^{n+1} \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right) \right]^+ \\
&= \left[ \max \left\{ \max_{j=2}^{n+1} \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right), \hat{\alpha}_{-1} - \hat{\sigma}_{-1} \right\} \right]^+ \\
&= \left[ \max \left\{ \max_{j=1}^n \left( \hat{\alpha}_{-j-1} - \sum_{i=0}^j \hat{\sigma}_{-i-1} \right), \hat{\alpha}_{-1} - \hat{\sigma}_{-1} \right\} \right]^+ \\
&= \left[ \max \left\{ \max_{j=1}^n \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right) \circ \theta^{-1} - \hat{\sigma}_{-1}, \hat{\alpha}_{-1} - \hat{\sigma}_{-1} \right\} \right]^+ \\
&= \left[ \max \left\{ \left[ \max_{j=1}^n \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right) \right]^+ \circ \theta^{-1}, \hat{\alpha}_{-1} \right\} - \hat{\sigma}_{-1} \right]^+ \\
&= [\max \{M_n, \hat{\alpha}\} - \hat{\sigma}]^+ \circ \theta^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Par continuité p.s. de la fonction  $[\max \{., \hat{\alpha}\} - \hat{\sigma}]^+ \circ \theta^{-1}$ , la limite  $M_\infty$  vérifie donc :

$$M_\infty \circ \theta = [\max \{M_\infty, \hat{\alpha}\} - \hat{\sigma}]^+,$$

ce qui correspond à (4.2).  $M_\infty$  est donc un bon « candidat » pour la v.a. stationnaire  $Y$ . Il reste à vérifier à quelle condition  $M_\infty$  est p.s. finie.

### Lemme 4.3.3

*$M_\infty$  est p.s. finie.*

*Preuve du lemme 4.3.3.* L'évènement  $\{M_\infty = \infty\}$  est  $\theta$ -invariant. En effet,

$$\begin{aligned}
\theta^{-1} \{M_\infty = \infty\} &= \{M_\infty \circ \theta = \infty\} \\
&= \{[\max \{M_\infty, \hat{\alpha}\} - \hat{\sigma}]^+ = \infty\} = \{M_\infty = \infty\},
\end{aligned}$$

puisque  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\sigma}$  sont p.s. finies.

Maintenant, remarquons que :

$$\begin{aligned}
M_\infty &= \left[ \sup_{j \in \mathbb{N}} \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right) \right]^+ \\
&= \left[ \sup_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i=1}^j (\hat{\alpha}_{-i} - \hat{\alpha}_{-i+1} - \hat{\sigma}_{-i}) + \hat{\alpha}_0 \right) \right]^+. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Birkhoff (théorème A.0.2 appliqué aux suites ergodiques et intégrables  $(\hat{\alpha}_i, i \in \mathbb{N})$  et  $(\hat{\sigma}_i, i \in \mathbb{N})$ ) :

$$\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j (\hat{\alpha}_{-i} - \hat{\alpha}_{-i+1} - \hat{\sigma}_{-i}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\hat{S}}^0 [\hat{\alpha} - \hat{\alpha} - \hat{\sigma}] = \mathbf{E}_{\hat{S}}^0 [\hat{\sigma}] \text{ p.s. .}$$

Le dernier terme est strictement négatif et donc en définissant pour tous  $N \in \mathbb{N}$  et  $\eta > 0$ , l'évènement

$$\mathcal{E}_{N,\eta} := \left\{ \forall j \geq N, \sum_{i=1}^j (\hat{\alpha}_{-i} - \hat{\alpha}_{-i+1} - \hat{\sigma}_{-i}) \leq j \left( -\mathbf{E}_{\hat{S}}^0 [\hat{\sigma}] + \eta \right) \right\},$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\eta > 0$ , tels que :

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [\mathcal{E}_{N,\eta}] \geq 1 - \varepsilon.$$

Pour  $\varepsilon$  tel que  $-\mathbf{E}_{\hat{S}}^0 [\hat{\sigma}] + \eta < 0$ , sur l'évènement  $\mathcal{E}_{N,\eta}$ , pour tout  $j \geq N$ ,

$$\sum_{i=1}^j (\hat{\alpha}_{-i} - \hat{\alpha}_{-i+1} - \hat{\sigma}_{-i}) + \hat{\alpha}_0 \leq j \left( -\mathbf{E}_{\hat{S}}^0 [\hat{\sigma}] + \eta \right) < 0$$

et donc

$$M_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^j (\hat{\alpha}_{-i} - \hat{\alpha}_{-i+1} - \hat{\sigma}_{-i}) + \hat{\alpha}_0 < \infty.$$

Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [M_\infty < \infty] \geq 1 - \varepsilon,$$

ou encore :

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [M_\infty = \infty] \leq \varepsilon.$$

Comme l'évènement  $\{M_\infty = \infty\}$  est  $\theta$ -invariant, par l'ergodicité du flot  $\theta$ , on conclut :

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [M_\infty = \infty] = 0.$$

□

Donc, on a trouvé une version stationnaire de la suite  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ , *i.e.* une solution de (4.2) : il s'agit de la variable aléatoire p.s. finie

$$Y := M_\infty.$$

Nous prouvons finalement que  $M_\infty$  est l'unique solution de (4.2). Soit  $Z$  une autre solution finie. D'une part,  $Z \geq 0 = M_0$  et si on suppose que  $Z \geq M_n$   $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0$ -p.s., alors,

$$Z \circ \theta = [\max \{Z, \hat{\alpha}\} - \hat{\sigma}]^+ \geq [\max \{M_n, \hat{\alpha}\} - \hat{\sigma}]^+ = M_{n+1} \circ \theta, \mathbf{P}_{\hat{S}}^0 \text{ - p.s.}$$

et donc  $Z \geq M_{n+1} \mathbf{P}_{\hat{S}}^0$ -p.s..

Finalement, pour tout  $n$ ,  $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [Z \geq M_n] = 1$  et on passe à la limite :

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [Z \geq M_\infty] = 1. \quad (4.7)$$

Par ailleurs, sur l'évènement  $\{Z \leq M_\infty\}$ ,

$$\begin{aligned} Z \circ \theta &= [Z - \hat{\sigma}]^+ \mathbf{1}_{\{Z > \hat{\alpha}\}} + [\hat{\alpha} - \hat{\sigma}]^+ \mathbf{1}_{\{Z \leq \hat{\alpha}\}} \\ &\leq [M_\infty - \hat{\sigma}]^+ \mathbf{1}_{\{Z > \hat{\alpha}\}} + [\hat{\alpha} - \hat{\sigma}]^+ \mathbf{1}_{\{Z \leq \hat{\alpha}\}} \\ &\leq (M_\infty \circ \theta) \mathbf{1}_{\{Z > \hat{\alpha}\}} + (M_\infty \circ \theta) \mathbf{1}_{\{Z \leq \hat{\alpha}\}} = M_\infty \circ \theta. \end{aligned}$$

L'évènement  $\{Z \leq M_\infty\}$  est donc  $\theta$ -contractant, et donc de probabilité 0 ou 1 en vertu de l'ergodicité du flot. Comme

$$\{Z \leq \alpha\} \subseteq \{Z \circ \theta \leq M_\infty \circ \theta\},$$

(4.3) implique que

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [Z \circ \theta \leq M_\infty \circ \theta] = \mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [Z \leq M_\infty] > 0,$$

ce qui donne finalement :

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [Z \leq M_\infty] = 1,$$

soit avec (4.7) :

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [Z = M_\infty] = 1. \quad \square$$

Nous déduisons de ce résultat deux corollaires importants sur le comportement asymptotique de la suite  $(\hat{Y}_n, n \in \mathbb{N})$  :

#### Corollaire 4.3.4

*Partant de 0,*

$$\hat{Y}_n^0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y.$$

*Preuve.* On peut en particulier donner la forme développée de  $Y_n^0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\hat{Y}_n^0 = \left[ \max_{j=0}^{n-1} \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^{n-1} \hat{\sigma}_i \right) \right]^+. \quad (4.8)$$

En effet, pour le premier terme, la définition 4.3.1 implique :

$$\hat{Y}_1^0 = [\max\{0, \hat{\alpha}_0\} - \hat{\sigma}_0]^+ = [\hat{\alpha}_0 - \hat{\sigma}_0]^+$$

et (4.8) est vérifiée.

Ensuite, par récurrence, si  $Y_n^0$  satisfait (4.8), alors :

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{n+1}^0 &= \left[ \max \left\{ \left[ \max_{j=0}^{n-1} \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^{n-1} \hat{\sigma}_i \right) \right]^+, \hat{\alpha}_n \right\} - \hat{\sigma}_n \right]^+ \\
&= \left[ \max \left\{ 0, \max_{j=0}^{n-1} \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^{n-1} \hat{\sigma}_i \right), \hat{\alpha}_n \right\} - \hat{\sigma}_n \right]^+ \\
&= \left[ \max \left\{ -\hat{\sigma}_n, \max_{j=0}^{n-1} \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^{n-1} \hat{\sigma}_i \right) - \hat{\sigma}_n, \hat{\alpha}_n - \hat{\sigma}_n \right\} \right]^+ \\
&= \left[ \max \left\{ \max_{j=0}^{n-1} \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^n \hat{\sigma}_i \right), \hat{\alpha}_n - \hat{\sigma}_n \right\} \right]^+ \\
&= \left[ \max_{j=0}^n \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^n \hat{\sigma}_i \right) \right]^+.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout  $n$ :

$$M_n^0 = \hat{Y}_n^0 \circ \theta^{-n}.$$

D'une part, pour  $n = 0$ , on a clairement :

$$M_0 = 0 = \hat{Y}_0^0.$$

Ensuite, en supposant que pour  $n$ , la propriété soit vraie, on a :

$$\begin{aligned}
M_{n+1} &= \left[ \max \{ M_n \circ \theta^{-1}, \hat{\alpha}_{-1} \} - \hat{\sigma}_{-1} \right]^+ \\
&= \left[ \max \{ \hat{Y}_n^0 \circ \theta^{-n-1}, \hat{\alpha}_{-1} \} - \hat{\sigma}_{-1} \right]^+ = \left[ \max \{ \hat{Y}_n^0, \hat{\alpha}_n \} - \hat{\sigma}_n \right]^+ \circ \theta^{-n-1} \\
&= \left[ \max \left\{ \max_{j=0}^{n-1} \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^{n-1} \hat{\sigma}_i \right), \hat{\alpha}_n \right\} - \hat{\sigma}_n \right]^+ \circ \theta^{-n-1} \\
&= \left[ \max \left\{ \max_{j=0}^{n-1} \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^n \hat{\sigma}_i \right), \hat{\alpha}_n - \hat{\sigma}_n \right\} \right]^+ \circ \theta^{-n-1} \\
&= \left[ \max_{j=0}^n \left( \hat{\alpha}_j - \sum_{i=j}^n \hat{\sigma}_i \right) \right]^+ \circ \theta^{-n-1} = Y_{n+1}^0 \circ \theta^{-(n+1)}.
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$ . Elle est donc vérifiée pour tout  $n$ . Maintenant, soit  $F$ , une fonction réelle continue et bornée. Alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\hat{S}}^0 \left[ F \left( \hat{Y}_n^0 \right) \right] &= \mathbf{E}_{\hat{S}}^0 \left[ F \left( \hat{Y}_n^0 \circ \theta^{-n} \right) \right] = \mathbf{E}_{\hat{S}}^0 \left[ F \left( M_n \right) \right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\hat{S}}^0 \left[ F \left( M_\infty \right) \right] = \mathbf{E}_{\hat{S}}^0 \left[ F \left( Y \right) \right]. \end{aligned}$$

□

### Corollaire 4.3.5

*A la condition*

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 \left[ \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_{-i} \right) \leq 0 \right] > 0, \quad (4.9)$$

*il existe  $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0$ -p.s. une infinité d'indices tels que  $\hat{Y}_n^Y = Y \circ \theta^n = 0$ .*

*Preuve.* La condition (4.9) équivaut à

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [Y = 0] > 0,$$

où  $Y = M_\infty$  est donnée par (4.5). La suite  $(\hat{Y}_n^Y, n \in \mathbb{N})$  « retombe » donc  $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0$ -p.s. une infinité de fois en 0 puisque 0 est chargé par sa loi stationnaire. □

### 4.3.2 Application à la file $G/G/1/1 + G$

Nous considérons une file d'attente avec clients impatientes  $G/G/1/1+G$  régie par une discipline de service non-préemptive quelconque. Comme défini en chapitre d'introduction, nous notons par  $Z_t$ , le délai résiduel à l'instant  $t$  du client le « moins pressé » présent dans le buffer à cet instant. Nous majorons ici aux instants de fins de service, le processus  $(Z_t, t \geq 0)$  par une méthode de type « borne stochastique »<sup>3</sup>. Nous montrons alors la stationnarité du processus majorant grâce au théorème précédent et donc, celle du processus  $(Z_t, t \geq 0)$ .

Rappelons que l'on note par  $\tilde{T}_n$ , le  $n$ -ième instant de *sortie d'un client du service* et  $(S_t, t \geq 0)$ , le processus des sorties du serveur, c'est-à-dire :

$$S_t = \sum_{\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_n \leq t\}} \text{ pour tout } t.$$

<sup>3</sup>voir [Pek99] pour des exemples

Soit pour tout  $n$ ,  $\tilde{\sigma}_n$  la durée du  $n$ -ième service rendu par le serveur. Il est clair, comme la suite des temps de service demandés dans l'ordre des arrivées  $(\sigma_n, n \in \mathbb{N})$  est indépendante des autres paramètres du système et en particulier de la discipline de service, que

$$(\sigma_n, n \in \mathbb{N}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\tilde{\sigma}_n, n \in \mathbb{N}).$$

En d'autres termes, la « statistique » du système (loi des variables aléatoires et processus qui le caractérisent) est la même suivant que c'est le serveur ou le client qui décide de la durée du service qui commence. Nous considérons alors que c'est le serveur qui décide de la durée de chaque service qui commence, sans perte de généralités :

$$\text{pour tout } n, \text{ durée du } n\text{-ième service} = \tilde{\sigma}_n.$$

Alors,  $\tilde{\sigma}_n$  est de même loi que le durée de service d'un client, *i.e.* celle de la v.a.  $\sigma$ .

### Lemme 4.3.6

*Soit pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ :*

$$\mathcal{A}_n := \max_{k/T_k \in (\tilde{T}_n - \tilde{\sigma}_n, \tilde{T}_n]} \left\{ (D_k - (\tilde{T}_n - T_k))^+ \right\} \mathbf{1}_{\{N(\tilde{T}_n - \tilde{\sigma}_n, \tilde{T}_n) > 0\}}.$$

*Alors,  $\mathcal{A}_n$  désigne le plus grand délai résiduel à  $\tilde{T}_n$  des clients entrés dans le système durant le  $n$ -ième service et conservés à l'instant  $\tilde{T}_n$  si il y en a , ou 0 sinon.*

*Preuve.* Si au moins un client est entré pendant le  $n$ -ième service (à la condition  $N(\tilde{T}_n - \tilde{\sigma}_n, \tilde{T}_n) > 0$ ), le plus grand délai résiduel à  $\tilde{T}_n$  parmi ces clients nouveaux entrés sera donné par le plus grand des  $(D_k - (\tilde{T}_n - T_k))^+$ .

Si la précédente quantité est nulle, cela signifie que des clients sont entrés dans le système durant le  $n$ -ième service, mais qu'ils ont tous atteint leur délai à  $\tilde{T}_n$ .  $\square$

Définissons pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  la quantité  $\alpha_n$  par :

$$\mathcal{A}_n = [\alpha_n - \tilde{\sigma}_n]^+,$$

ou autrement dit :

$$\alpha_n := \max_{k/T_k \in (\tilde{T}_n - \tilde{\sigma}_n, \tilde{T}_n]} \left\{ D_k + T_k - (\tilde{T}_n - \tilde{\sigma}_n) \right\} \mathbf{1}_{\{N(\tilde{T}_n - \tilde{\sigma}_n, \tilde{T}_n) > 0\}}.$$

On peut remarquer que

$$\alpha_n \geq 0 \text{ p.s. pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (4.10)$$

puisque pour tout  $k$  tel que  $T_k \in (\tilde{T}_n - \tilde{\sigma}_n, \tilde{T}_n]$ ,  $T_k + \tilde{\sigma}_n > \tilde{T}_n$ .

**Definition 4.3.2**

*Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous notons*

$$\tilde{Z}_n := Z_{\tilde{T}_n},$$

*le plus grand délai résiduel à  $\tilde{T}_n$  d'un client présent dans le système à cet instant.*

En particulier, en rappelant (cf chapitre 2) que

$$R_1(t) < R_2(t) < \dots < R_{Q(t)}(t)$$

désigne la suite des délais résiduels à  $t$  des clients présents dans le buffer à cet instant, on a alors:

$$\tilde{Z}_n := R_{Q_{\tilde{T}_n}}(\tilde{T}_n)\mathbf{1}_{\{Q_{\tilde{T}_n} > 0\}} = R_{X_{\tilde{T}_n}}(\tilde{T}_n)\mathbf{1}_{\{X_{\tilde{T}_n} > 0\}}, \quad (4.11)$$

puisque  $\tilde{T}_n$  étant l'instant d'une fin de service, à cet instant la population du buffer est la population de système tout entier.

En d'autres termes, la suite  $(\tilde{Z}_n)$  caractérise la quantité suivante :

- si plus d'un client est dans le système à l'instant  $\tilde{T}_n$  (en particulier,  $\tilde{T}_n + 1$  sera égal à  $\tilde{T}_n + \tilde{\sigma}_{n+1}$ , puisque le système ne se vide pas à  $\tilde{T}_n$ ),  $\tilde{Z}_n$  indique le plus grand délai résiduel des clients dans le système à  $\tilde{T}_{n-1}$ , le maximum étant pris y compris sur le client qui commence à être servi,
- si  $X_{\tilde{T}_n} = 1$ , il n'y a qu'un seul client dans le système à  $\tilde{T}_n$  et  $\tilde{Z}_n$  est le délai résiduel à cet instant de ce client qui précisément va être servi et à cet instant son délai ne compte plus. Il faudra l'effacer du descripteur par la suite,
- si  $X_{\tilde{T}_n} = 0$ , il n'y a aucun client dans le système à la fin du  $n$ -ième service, le système est vide et  $\tilde{Z}_n = 0$ .

Par conséquent, on a :

$$X_{\tilde{T}_n} = 0 \Leftrightarrow \tilde{Z}_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

**Lemme 4.3.7**

*Pour toute discipline de service,*

$$\tilde{Z}_{n+1} \leq \left[ \max \left\{ \tilde{Z}_n \cdot \mathbf{1}_{\{X_{\tilde{T}_n} \neq 1\}}, \alpha_{n+1} \right\} - \tilde{\sigma}_n \right]^+. \quad (4.13)$$

*De plus, les deux termes sont égaux sous EDF.*

*Preuve.* Nous nous plaçons dans les trois cas possibles pour la récurrence, suivant que  $X_{\tilde{T}_n}$  est égal à 0, 1 ou  $\geq 2$  :

- Si  $X_{\tilde{T}_n} \geq 2$ , en particulier,  $\tilde{Z}_n \neq 0$ , le système n'est pas vide à  $\tilde{T}_n$  et  $\tilde{T}_{n+1} = \tilde{T}_n + \tilde{\sigma}_n$ . Alors, le plus grand délai résiduel des clients dans le système à  $\tilde{T}_{n+1}$  est inférieur ou égal au  $\max \left\{ \tilde{Z}_n - \tilde{\sigma}_n, \mathcal{A}_{n+1} \right\}$ . Il y a égalité dans le cas d'EDF, puisqu'alors le client relatif à ce maximum, s'il était déjà dans le système à  $\tilde{T}_n$  (et donc, il correspond à  $\tilde{Z}_n - \tilde{\sigma}_n$ ), n'a pas été servi à cet instant et est donc toujours dans le système à  $\tilde{T}_{n+1}$ . Dans tous les cas,  $\tilde{T}_{n+1} = \tilde{T}_n + \tilde{\sigma}_n$  et on a :

$$\tilde{Z}_{n+1} \leq \max \left\{ \tilde{Z}_n - \tilde{\sigma}_n, \mathcal{A}_{n+1} \right\} = \left[ \max \left\{ \tilde{Z}_n, \alpha_{n+1} \right\} - \tilde{\sigma}_n \right]^+.$$

- Si  $X_{\tilde{T}_n} = 1$ , le seul client dans le système à l'instant  $\tilde{T}_n$  commence son service à cet instant et donc son délai résiduel  $\tilde{Z}_n$  à  $\tilde{T}_n$  doit disparaître du descripteur puisqu'il ne sera plus en concurrence avec les autres clients à  $\tilde{T}_{n+1}$ , date de la fin de son service. Dans ce cas le plus grand délai résiduel à  $\tilde{T}_{n+1}$ , s'il y a au moins un client dans le système, est apporté par un client entré pendant le  $n + 1$ -ième service. Ici aussi,  $\tilde{T}_{n+1} = \tilde{T}_n + \tilde{\sigma}_n$  et on a :

$$\tilde{Z}_{n+1} = \mathcal{A}_{n+1} = [\alpha_{n+1} - \tilde{\sigma}_n]^+.$$

- Si  $X_{\tilde{T}_n} = 0$ , le système est vide à  $\tilde{T}_n$ . Dans ce cas, il faut attendre l'arrivée d'un client pour que le  $n + 1$ -ième service commence. Donc,  $\tilde{T}_{n+1} \neq \tilde{T}_n + \tilde{\sigma}_n$ , mais

$$\begin{aligned} & \max_{k/T_k \in (\tilde{T}_{n+1} - \tilde{\sigma}_{n+1}, \tilde{T}_{n+1}]} \left( \left\{ D_k + T_k - (\tilde{T}_{n+1} - \tilde{\sigma}_{n+1}) \right\} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \cdot \mathbf{1}_{\{N(\tilde{T}_{n+1} - \tilde{\sigma}_{n+1}, \tilde{T}_{n+1}) > 0\}} \right) \\ & = \max_{k/T_k \in (\tilde{T}_n, \tilde{T}_{n+1}]} \left( \left\{ D_k + T_k - (\tilde{T}_{n+1} - \tilde{\sigma}_{n+1}) \right\} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \cdot \mathbf{1}_{\{N(\tilde{T}_n, \tilde{T}_{n+1}) > 0\}} \right), \end{aligned}$$

puisque aucun client n'est entré entre  $\tilde{T}_n$  et  $\tilde{T}_{n+1} - \tilde{\sigma}_{n+1}$ . On a là encore :

$$\mathcal{A}_{n+1} = [\alpha_{n+1} - \tilde{\sigma}_n]^+.$$

Donc,

$$\tilde{Z}_{n+1} = \mathcal{A}_{n+1} = [\alpha_{n+1} - \tilde{\sigma}_n]^+.$$

□

Nous donnons une condition pour la récurrence de la suite  $(\tilde{Z}_n, n \in \mathbb{N})$  en 0. Or, (4.13) induit deux difficultés. La première est que la récurrence est définie par une inégalité dans le cas général (discipline de service quelconque), la seconde est que le terme  $\mathbf{1}_{\{X_{\tilde{T}_n} \neq 0\}}$ , qui dépend de tout le passé de la file et pas seulement de  $\tilde{Z}_n$ , montre que l'inégalité ne met pas directement en évidence une suite ergodique.

Nous exhibons donc une suite de variable aléatoire qui soit définie par une égalité de récurrence du type de l'équation de Lindley et qui permette par comparaison de donner le comportement asymptotique de  $(\tilde{Z}_n, n \in \mathbb{N})$ .

### Definition 4.3.3

*On définit la suite  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$  par :*

$$\begin{cases} Y_0 = \tilde{Z}_0, \\ Y_{n+1} = [\max\{Y_n, \alpha_n\} - \tilde{\sigma}_n]^+, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En particulier, il est clair que :

$$Y_n \geq \tilde{Z}_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (4.14)$$

avec une récurrence immédiate et l'inégalité (4.13).

Soit maintenant la suite  $(\hat{T}_n, n \in \mathbb{N})$  suivante :

$$\begin{cases} \hat{T}_0 := \tilde{T}_0, \\ \hat{T}_n = \hat{T}_{n-1} + \tilde{\sigma}_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Nous notons par ailleurs le processus suivant :

$$\hat{S}_t := \sum_{\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{\hat{T}_n \leq t\}} \text{ pour tout } t.$$

La suite  $(\tilde{\sigma}_n, n \in \mathbb{N})$  étant stationnaire et ergodique,  $(\hat{S}_t, t \geq 0)$  l'est aussi et on peut considérer l'espace de Palm  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_{\hat{S}}^0, \theta)$  relatif au processus  $(\hat{S}_t, t \geq 0)$ , en notant  $\theta := \theta_{\hat{T}_n}$  le flot stationnaire ergodique correspondant. Sous cette hypothèse,  $(\tilde{\sigma}_n, n \in \mathbb{N})$  est donc une suite de marques du processus  $\hat{S}$ . En particulier elle forme une suite ergodique, puisqu'elle est compatible avec le flot.  $\mathbb{P}_{\hat{S}}^0$ - p.s. :

$$\tilde{\sigma}_n(\omega) = \tilde{\sigma}(\theta_{\hat{T}_n}(\omega)) = \tilde{\sigma} \circ \theta^n(\omega),$$

où  $\tilde{\sigma}$  est la durée du service qui se termine  $\mathbb{P}_{\hat{S}}^0$ -p.s. à  $t = 0$ , de loi celle de  $\sigma$ .

Nous définissons par ailleurs la variable aléatoire

$$\hat{\alpha} := \max_{k/T_k \in (\hat{T}_0, \hat{T}_1]} \left\{ D_k + T_k - (\hat{T}_0) \right\} \mathbf{1}_{\{N(\hat{T}_0, \hat{T}_1) > 0\}}.$$

Le processus des entrées marqué par les délais initiaux des clients  $(N, D)$  étant indépendant de  $\hat{S}$ , on peut construire la suite de marques de  $\hat{S}$  ( $\hat{\alpha}_n, n \in \mathbb{N}$ ) de la manière suivante, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0$ - p.s. :

$$\hat{\alpha}_n(\omega) = \hat{\alpha}(\theta_{\hat{T}_n}(\omega)) = \hat{\alpha} \circ \theta^n(\omega).$$

On a en particulier :

$$\hat{\alpha}_n \geq 0 \text{ } \mathbf{P}_{\hat{S}}^0 \text{- p.s. pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Finalement, nous définissons pour toute v.a.  $X$  :

$$\begin{cases} \hat{Y}_0^X = X, \\ \hat{Y}_{n+1}^X = \left[ \max \left\{ \hat{Y}_n^X, \hat{\alpha}_n \right\} - \tilde{\sigma}_n \right]^+, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

### Theorème 4.3.8

**1. Partant de  $Y_0 = 0$ , Il existe une unique version stationnaire  $Y$  p.s. finie telle que :**

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y.$$

**2. Si de plus**

$$\mathbf{P}_{\hat{S}}^0 \left[ \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \tilde{\sigma}_{-i} \right) \leq 0 \right] > 0,$$

**la file d'attente se vide p.s. une infinité de fois.**

*Preuve.* 1. Les hypothèses du théorème 4.3.1, 1 sont vérifiées pour le processus  $(\hat{S}_t, t \geq 0)$  et les suites  $(\hat{\alpha}_n, n \in \mathbb{N})$  et  $(\tilde{\sigma}_n, n \in \mathbb{N})$ . En particulier on peut appliquer le corollaire 4.3.4 : il existe une unique variable aléatoire  $Y$  p.s. finie telle que :

$$\hat{Y}_n^0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y. \quad (4.15)$$

Remarquons maintenant que  $(\hat{\alpha}_n, n \in \mathbb{N})$  a la même loi que  $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ . Donc, partant de  $Y_0 = \tilde{Z}_0 = 0$ , la suite  $(\hat{Y}_n^0, n \in \mathbb{N})$  a la même loi que  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$  et on conclut avec (4.15).

2. La condition (4.9) est satisfaite et on peut appliquer le corollaire 4.3.5 : il existe  $\mathbf{P}_{\hat{S}}^0$ -p.s. une infinité d'indices tels que  $\hat{Y}_n^Y = 0$ . Partons de l'état  $Y_0 = \tilde{Z}_0 = Y$ . D'une part, comme la suite  $(\hat{Y}_n^Y, n \in \mathbb{N})$  a la même loi que  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ , il y a p.s. une infinité d'indices tels que  $Y_n = 0$ . D'autre part, à tout instant  $\tilde{T}_n$  et pour toute discipline de service :

$$\{Y_n = 0\} \subseteq \{\tilde{Z}_n = 0\} = \{X_{\tilde{T}_n} = 0\},$$

avec (4.12) et (4.14). 0 est donc récurrent pour la suite  $(X_{\tilde{T}_n})$  et il l'est aussi pour le processus  $(X_t, t \geq 0)$  ( par définition,  $X_t$  ne peut valoir 0 qu'à un instant de fin de service ).

□

**Remarque 4.3.1** Il est intéressant de rapprocher ce résultat à la condition de stabilité de la file  $G/G/1/1$ , donnée par [Fli83] ( [BB94], propriété 2.6.1. p.123), de la même forme. Cependant, dans la file  $G/G/1/1$ , lorsque cette condition n'est pas vérifiée, l'unicité, et même l'existence de la solution stationnaire ne sont pas garanties ([BB94], exemples 2.6.1 et 2.6.2, p. 122). Elle le sont dans le cas  $G/G/1/1 + G$ .

### Corollaire 4.3.9

**La file d'attente avec clients impatients  $M/GI/1/1 + GI$  se vide p.s. une infinité de fois pour toute discipline de service.**

*Preuve.* D'une part, il est immédiat de voir avec l'expression de  $\hat{\alpha}_n$  pour tout  $n$  que si le processus des entrées est un processus de Poisson et les temps de service et les délais forment deux suites i.i.d., la suite  $(\hat{\alpha}_n, n \in \mathbb{N})$  est i.i.d.. D'autre part, pour tout  $n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{S}}^0[\hat{\alpha} \leq \tilde{\sigma}] &\geq \mathbf{P}_{\hat{S}}^0[\hat{\alpha} = 0] \\ &\geq \mathbf{P} \left[ N(\hat{T}_{n-1}, \hat{T}_n) = 0 \right] = \mathbf{P} \left[ N(\tilde{T}_n - \tilde{\sigma}_n, \tilde{T}_n) = 0 \right] > 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{S}}^0 \left[ \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \left( \hat{\alpha}_{-j} - \sum_{i=1}^j \tilde{\sigma}_{-i} \right) \leq 0 \right] \\ = \mathbf{P}_{\hat{S}}^0 \left[ \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \left( \hat{\alpha} - \sum_{i=1}^j \tilde{\sigma}_{-i} \right) \leq 0 \right] = \mathbf{P}_{\hat{S}}^0 [\hat{\alpha} - \tilde{\sigma} \leq 0] > 0. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème 4.3.8, partie 2.  $\square$

**Remarque 4.3.2** Dans ce dernier cas, on a affaibli les hypothèses du théorème 4.2.2. Remarquons de plus que le théorème 4.3.8, 2 s'applique dans un cadre plus général, ses hypothèses étant plus larges.



## Chapitre 5

# Probabilité de perte

La probabilité de perte d'un client à l'état stationnaire (probabilité pour un client entrant dans le système à l'état stationnaire de ne pas atteindre le serveur avant l'expiration de son délai) est la principale métrique de performance d'un système à perte. L'estimation de cette probabilité par une formule close dépendant des autres paramètres du système peut permettre de répondre à des questions de dimensionnement : étant données des contraintes de trafic (flux des entrées et loi des délais par exemple), on peut en particulier déduire de cette formule les valeurs des paramètres (nombre de serveurs, débit de service), qui garantissent une exigence fixée en terme de perte pour une discipline de service donnée. Nous avons vu dans le chapitre 3 une formule explicite de cette probabilité pour un système  $M/M/s/S + G - FCFS$  ([Mov98], par exemple).

Dans la première partie de ce chapitre, nous exposons dans quelques cas plus généraux, d'autres résultats et méthodes de calcul pour estimer la probabilité de perte.

L'autre aspect du problème est précisément le choix de la discipline de service : laquelle choisir afin de minimiser la probabilité de perte ? C'est l'objet de la deuxième partie de ce chapitre, qui présente quelques résultats de comparaison entre disciplines de service pour un jeu de paramètre donné. Ce faisant nous précisons et complétons certains résultats de Panwar, Towsley et Wolf dans [PT88] sur la comparaison de la perte entre les différentes disciplines de service pour toute file d'attente avec clients impatients. Comme on l'a rappelé dans le chapitre 3, théorème 3.2.2, Panwar *et al.* ont montré qu'EDF est optimale en terme de perte pour toutes les disciplines de services non-préemptives, en le sens qu'à chaque instant  $t$ , la perte dans une file d'attente  $G/M/s/s + G - EDF$  est stochastiquement inférieure à celle endurée par le même système sous toute autre discipline de service non-préemptive. Nous donnons ici une autre preuve de ce résultat, en allant plus loin : nous montrons que la *probabilité de perte à l'état sta-*

tionnaire  $\pi^1$  est inférieure en EDF par rapport à toute autre discipline de service non-préemptive. Par le même type de raisonnement, nous montrons également que la discipline LDF maximise la perte pour l'ordre stochastique et la probabilité de perte.

L'algorithme EDF est coûteux en terme d'ordonnancement : il requiert une réactualisation complète du buffer tout entier à chaque arrivée d'un client. Il est donc naturel de se demander si le gain réalisé en appliquant EDF est suffisant pour justifier ce coût. Ne disposant pas d'une formule close pour la probabilité de perte sous EDF, on cherche donc à estimer le gain réalisé en terme de probabilité de perte entre EDF et toute autre discipline de service non-préemptive. Nous proposons ici une première estimation.

Ce chapitre s'organise comme suit. En partie 5.1 nous présentons deux encadrements de la probabilité de perte pour une file avec clients impatientes : un encadrement à forte charge ( $\rho > 1$ ) pour un système  $M/G/1/1 + G$  avec discipline de service quelconque en section 5.1.1 et un encadrement pour un système  $GI/M/1/1 + D - FIFO$  en section 5.1.2<sup>2</sup>. En partie 5.2, nous comparons les différentes disciplines de service du point de vue de la perte. Nous donnons en section 5.2.1 une nouvelle preuve du résultat de Panwar *et al.* ([PT88]) qui donne EDF comme discipline optimale en terme de perte dans le cas  $G/M/1/1 + G$  pour l'ordre stochastique. Nous montrons également que LDF maximise la perte pour l'ordre stochastique. Nous donnons en section 5.2.2 un encadrement de la probabilité de perte sous toute discipline de service non-préemptive (et donc pour FIFO, par exemple) en fonction de la probabilité de perte sous EDF pour un système  $M/M/1/1 + G$ . Nous montrons au passage qu'EDF est dans ce cas optimal pour la probabilité de perte, et donnons un majorant du gain d'EDF en terme de probabilité de perte.

## 5.1 Deux encadrements

### 5.1.1 Encadrement à forte charge

Nous proposons un premier encadrement, pour une file d'attente avec clients impatientes régie par une discipline de service quelconque, de la probabilité de perte dans le cas où la charge du système est supérieure à 1.

#### Lemme 5.1.1

*Soit  $\gamma$  une discipline de service quelconque. Pour toute file d'attente*

---

<sup>1</sup>définie en (2.2)

<sup>2</sup>Ces deux encadrements figurent dans [DM03]

$G/G/1/1 + G - \gamma$  soumise à la charge  $\rho > 1$ ,

$$\pi > \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

*Preuve.* Comme on le montre en appendice B, (B.3), le processus stationnaire  $N^s$  des clients qui seront servis a pour intensité  $\lambda^s$  donnée par :

$$\lambda^s = \lambda(1 - \pi).$$

Considérons le « sous-système » restreint aux clients qui seront servis. Le sous-système est donc une file  $G/G/1$ , avec un processus stationnaire d'intensité  $\lambda(1 - \pi)$  en entrée, stable puisque le système d'ensemble est stable lui-même. D'après le théorème de Loynes, on a donc :

$$\lambda(1 - \pi)\mathbf{E}[\sigma] < 1$$

et autrement dit,

$$1 - \frac{1}{\rho} < \pi.$$

□

On a par ailleurs :

### Lemme 5.1.2

*Pour toute discipline de service  $\gamma$ , pour toute file d'attente  $M/G/1/1 + G - \gamma$  soumise à la charge  $\rho$ ,*

$$\pi < \frac{\rho}{\rho + 1}.$$

*Preuve.* La probabilité de perte d'un client est inférieure à celle d'une file d'attente classique sans buffer  $M/G/1/1$  (les clients ne sont servis que si ils entrent dans un système vide). Pour un tel système, la formule d'Erlang-B donne la probabilité de perte  $\pi(M/G/1/1)$  :

$$\pi(M/G/1/1) = \frac{\rho}{\rho + 1}$$

et on a le résultat. □

Nous pouvons donc déduire des deux lemmes précédents un encadrement de la probabilité de perte pour toute file d'attente  $M/G/1/1 + G$ , avec discipline de service quelconque :

**Theorème 5.1.3**

*Pour toute discipline de service  $\gamma$ , la probabilité de perte de la file  $M/G/1/1+G-\gamma$  soumise à une charge  $\rho > 1$  vérifie*

$$\frac{\rho-1}{\rho} < \pi < \frac{\rho}{\rho+1}. \quad (5.1)$$

Comme on peut s'y attendre, la probabilité de perte tend alors vers 1 quand la charge tend vers l'infini, puisque le système tend à s'engorger, et un client à avoir très peu de chances d'être choisi.

Nos simulations indiquent qu'à  $\rho > 1$  fixé, la probabilité de perte tend vers la borne supérieure de l'intervalle précédent lorsque  $1/\mathbf{E}[D]$  tend vers l'infini, donc en cas de délais d'exécution très petits et par-là même, de forte perte.

**5.1.2 Cas  $GI/M/1/1+D - FIFO (EDF)$** 

Nous nous plaçons ici dans un cas sensiblement plus complexe, où on ne suppose plus que le processus des entrées est un processus de Poisson, mais simplement un processus de renouvellement. Nous supposons par ailleurs dans cette section que les délais initiaux sont déterministes.

Nous considérons donc une file d'attente  $GI/M/1/1+D - FIFO$ , où :

- les clients entrent dans le système suivant un processus de renouvellement. Autrement dit, les interarrivées  $U_{n+1} := T_{n+1} - T_n$  sont indépendantes et identiquement distribuées,
- les clients demandent un service de durée exponentielle  $\sigma \sim \varepsilon(\mu)$ ,
- les délais éliminatoires des clients sont déterministes, initialement tous égaux à  $d$ .

Remarquons tout d'abord que dans ce cas, les disciplines de service EDF et FIFO sont équivalentes. En effet, le délai résiduel du client  $C_k$  à un instant  $t$  auquel il est encore en attente dans le système est donné par :

$$DR_k(t) = D_k - (t - T_k) = d + T_k - t.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \left\{ \text{le client } C_i \text{ est prioritaire à } t \text{ sur le client } C_j \text{ sous EDF} \right\} \\ & \iff 0 < DR_i(t) < DR_j(t) \\ & \iff 0 < d + T_i - t < d + T_j - t \\ & \iff T_i < T_j, \text{ et } C_i \text{ et } C_j \text{ sont en attente à } t \\ & \iff \left\{ \text{le client } C_i \text{ est prioritaire à } t \text{ sur le client } C_j \text{ sous FIFO} \right\}. \end{aligned}$$

Le résultat donné ici, exprimé pour une file gérée en FIFO, est par conséquent toujours valable si la file est gérée en EDF : il s'agit exactement de la même file d'attente.

**Remarque 5.1.1** On montre de la même façon que dans ce cas où les délais sont déterministes, la discipline LDF revient à la discipline LIFO.

Nous donnons un encadrement de la probabilité de perte d'un client à l'état stationnaire. Alors que l'absence de mémoire de la loi exponentielle permettait dans le cas  $M/M/s/s + G - FCFS$  d'exhiber des modèles markoviens simples pour le calcul de performances et donnaient en particulier une formule close pour la probabilité de perte, un tel cadre d'étude ne fonctionne plus ici et il faut trouver un cadre *ad hoc* pour pouvoir estimer cette probabilité.

Rappelons que l'on note pour tout  $k$ ,

$$\pi_k := \mathbf{P}[\text{le client } C_k \text{ est perdu}].$$

Nous donnons une équation de récurrence simple pour  $(\pi_k, k \in \mathbb{N})$  et en déduisons la probabilité de perte en passant à la limite sur l'expression générale de  $\pi_k$ .

#### Theorème 5.1.4

*La probabilité de perte à l'état stationnaire d'une file d'attente  $GI/M/1/1 + D - FIFO$  (ou EDF) vérifie :*

$$\frac{\mathbf{P}[\sigma > U]e^{-\mu d}}{1 - \mathbf{P}[\sigma > U](1 - e^{-\mu d})} \leq \pi \leq \mathbf{P}[\sigma > U].$$

*Preuve.* Nous notons  $T'_k$ , l'instant où le client  $C_k$  quitte la file d'attente. S'il n'est pas perdu,  $T'_k$  est donc l'instant où il entre en service et  $T'_k$  se trouve dans l'intervalle de temps  $[T_k, T_k + d[$ . Sinon, on a  $T'_k = T_k + d$ .

Notons par ailleurs les événements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_j^t := \left\{ C_j \text{ est en service à l'instant } t \right\}, \\ G_j := \left\{ C_j \text{ est servi} \right\}. \end{array} \right.$$

Le client  $C_k$  est éliminé lorsque le serveur est occupé à l'instant  $T_k + d$ . Cet événement est réalisé si l'un des clients  $C_0, C_1, \dots, C_{k-1}$  entrés avant  $C_k$  est

en service à l'instant  $T_k + d$ . Dans ce cas, ce client en service à  $T_k + d$  l'était déjà à  $T_{k-1} + d$ , sinon il aurait été éliminé à cet instant :

$$\begin{aligned} \pi_k &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{P} \left[ I_j^{T_k+d} \right] = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{P} \left[ I_j^{T_k+d} \cap I_j^{T_{k-1}+d} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{P} \left[ I_j^{T_k+d} \mid I_j^{T_{k-1}+d} \right] \mathbf{P} \left[ I_j^{T_{k-1}+d} \right]. \end{aligned}$$

Les temps de service étant exponentiels, la probabilité qu'un client soit encore en service à  $T_k + d$  sachant qu'il était déjà en service à  $T_{k-1} + d$  est donnée par :  $\mathbf{P}[\sigma > T_k - T_{k-1}] = \mathbf{P}[\sigma > U]$ . L'égalité précédente donne donc :

$$\begin{aligned} \pi_k &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{P}[\sigma > U] \mathbf{P} \left[ I_j^{T_{k-1}+d} \right] \\ &= \mathbf{P}[\sigma > U] \pi_{k-1} + \mathbf{P}[\sigma > U] \mathbf{P} \left[ I_{k-1}^{T_{k-1}+d} \right]. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Comme  $I_{k-1}^{T_{k-1}+d} \subset G_{k-1}$ , on a alors :

$$\pi_k \leq \mathbf{P}[\sigma > U] \pi_{k-1} + \mathbf{P}[\sigma > U] (1 - \pi_{k-1}) = \mathbf{P}[\sigma > U].$$

On passe à la limite sur  $k$  dans l'inégalité précédente. Comme on atteint un jour l'état stationnaire,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = \pi$$

et on a la borne supérieure pour  $\pi$ .

Considérons maintenant la borne inférieure. (5.2) donne pour tout client  $C_k$  :

$$\begin{aligned} \pi_k &= \mathbf{P}[\sigma > U] \pi_{k-1} + \mathbf{P}[\sigma > U] \mathbf{P} \left[ I_{k-1}^{T_{k-1}+d} \right] \\ &= \mathbf{P}[\sigma > U] \left( \pi_{k-1} + \mathbf{P} \left[ G_{k-1} \right] \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P} \left[ \text{le service de } C_{k-1} \text{ se termine avant } T_{k-1} + d \right] \right) \\ &= \mathbf{P}[\sigma > U] \left( \pi_{k-1} + 1 - \pi_{k-1} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P} \left[ G_{k-1} \cap \{T'_{k-1} + \sigma_{k-1} < T_{k-1} + d\} \right] \right) \\ &\geq \mathbf{P}[\sigma > U] \left( 1 - (1 - \pi_{k-1}) \mathbf{P}[\sigma_{k-1} < d] \right) \\ &= \mathbf{P}[\sigma > U] - \mathbf{P}[\sigma > U] \mathbf{P}[\sigma < d] (1 - \pi_{k-1}). \end{aligned}$$

En d'autres termes, pour tout  $k$ :

$$\pi_k \geq \mathbf{P}[\sigma > U] \mathbf{P}[\sigma > d] + \mathbf{P}[\sigma > U] \mathbf{P}[\sigma < d] \pi_{k-1}$$

et en passant à la limite sur  $k$  :

$$\pi \geq \mathbf{P}[\sigma > U] \mathbf{P}[\sigma > d] + \mathbf{P}[\sigma > U] \mathbf{P}[\sigma < d] \pi.$$

La minoration est démontrée.  $\square$

Ce résultat complète celui de [LL73], (3.2), qui ne donnait qu'une borne supérieure pour la probabilité de perte. Par ailleurs, il est clairement beaucoup plus fin que l'encadrement (5.1) et présente l'avantage d'être vrai pour des interarrivées i.i.d. de loi quelconque et pour n'importe quelle charge.

Précisons à quoi revient cet encadrement dans trois cas de lois pour les interarrivées, déterministe, uniforme et exponentielle :

### Corollaire 5.1.5

1. *Dans une file  $D/M/1/1 + D - FIFO$  (EDF), où les arrivées sont périodiques de période  $p$  (autrement dit  $U = p$  p.s.),*

$$\frac{e^{-\mu(p+d)}}{1 - e^{-\mu}(1 - e^{-\mu d})} \leq \pi \leq e^{-\mu p}. \quad (5.3)$$

2. *Dans une file  $GI/M/1/1 + D - FIFO$  (EDF), où les interarrivées forme une suite de variables uniformément distribuées sur  $[0, M]$ ,*

$$\frac{\frac{1-e^{-\mu M}}{\mu M} e^{-\mu d}}{1 - \frac{1-e^{-\mu M}}{\mu M} (1 - e^{-\mu d})} \leq \pi \leq \frac{1 - e^{-\mu M}}{\mu M}. \quad (5.4)$$

3. *Dans une file  $M/M/1/1 + D - FIFO$  (EDF), où le processus des arrivées est un processus de Poisson de paramètres  $\lambda$ ,*

$$\frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\mu d}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} (1 - e^{-\mu d})} \leq \pi \leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (5.5)$$

On peut remarquer en particulier que le dernier résultat (5.5) est cohérent avec celui de [CKC01], (3.7), puisque les bornes précédentes encadrent la valeur exacte de  $\pi$ .

## 5.2 Comparaison entre disciplines de service

Plaçons-nous maintenant dans le cas général stationnaire pour la loi des délais initiaux des clients. Ici, les disciplines EDF et FIFO par exemple, ne sont *a priori* plus équivalentes, et nous cherchons à les comparer du point de vue de la perte. Dans cette partie, nous redémontrons le résultat de Panwar *et al.* ([PT88]), théorème 3.2.2, qui donne l'optimalité d'EDF en terme de perte pour l'ordre stochastique. Nous montrons également que LDF est la moins bonne discipline de service avec ce critère. En outre, nous allons plus loin : nous montrons pour un système équivalent qu'EDF a la plus faible probabilité de perte à l'état stationnaire, que LDF a la plus forte probabilité de perte à l'état stationnaire entre toutes les disciplines de service non-préemptives et donnons un majorant du gain d'EDF en terme de probabilité de perte par rapport à toute autre discipline de service.

### 5.2.1 Cas général $G/M/1/1 + G$

Soit une file d'attente avec impatiences  $G/M/1/1 + G$ . Soit  $\tilde{\sigma}_n$ , la durée du  $n$ -ième service rendu par le serveur. Nous supposons comme dans le chapitre précédent que c'est le serveur et non l'identité du client qui entre en service à  $\tilde{T}_{n-1}$ , qui décide de la valeur de  $\tilde{\sigma}_n$ . Cette hypothèse ne change pas la statistique du système.

On note pour toute discipline de service  $(.)$  :

- pour tout  $t$ ,  $P_t^{(.)}$  le nombre de clients perdus et  $S_t^{(.)}$  le nombre de clients servis par  $(.)$  à l'instant  $t$ ,
- à l'état stationnaire :
  - $P^{(.)}$ , le nombre de clients perdus pendant une *busy period* de  $(.)$ ,
  - $E^{(.)}$ , le nombre de clients entrés pendant une *busy period* de  $(.)$ ,
  - $S^{(.)}$ , le nombre de clients servis pendant une *busy period* de  $(.)$ ,
  - $B^{(.)}$ , la durée d'une *busy period* pour  $(.)$ ,
  - $\pi^{(.)}$ , la probabilité de perte pour  $(.)$ .

Nous comparons, pour un scénario de trafic (une trajectoire de la file d'attente), les performances du système pour trois disciplines de service différentes : EDF, LDF et une discipline de service quelconque  $\gamma$ .

On se place donc sur une trajectoire  $(t_n, n \in \mathbb{N})$  de la suite des temps d'arrivées  $(T_n, n \in \mathbb{N})$ ,  $(s_n, n \in \mathbb{N})$  de la suite des temps de service  $(\tilde{\sigma}_n, n \in \mathbb{N})$  et  $(d_n, n \in \mathbb{N})$  une trajectoire de la suite des délais initiaux  $(D_n, n \in \mathbb{N})$ . On notera, pour cette trajectoire et pour toute discipline de service  $(.)$  :

- pour tout  $t$ ,  $p_t^{(.)}$  le nombre de clients perdus à l'instant  $t$  par  $(.)$ ,

- pour tout  $n$ ,  $s_n^{(\cdot)}$  le nombre de service pendant la  $n$ -ième *busy period* de  $(\cdot)$ .

Soit  $t_0$ , l'instant d'arrivée du premier client dans la file (point de construction). On note également :

- pour tout  $n = 1 \dots \max\{s_1^\gamma, s_1^{\text{EDF}}, s_1^{\text{LDF}}\}$ ,  $\tilde{t}_n$ , la date de fin du  $n$ -ième service,  $V_n^{(\cdot)}$ , la population présente dans la file  $(\cdot)$  à  $\tilde{t}_n$ ,  $x_n^{(\cdot)} = \#(V_n^{(\cdot)})$ , le nombre de clients présents dans le système  $(\cdot)$  à  $\tilde{t}_n$  et  $l_n^{(\cdot)} := p_{\tilde{t}_n}^{(\cdot)}$ , le nombre de clients perdus par  $(\cdot)$  à  $\tilde{t}_n$ ,
- pour tout  $n = 1 \dots \min\{s_1^\gamma, s_1^{\text{EDF}}\}$ , pour  $(\cdot) = \gamma$  et EDF, On sépare à  $\tilde{t}_n$  les populations  $V_n^{(\cdot)}$  de la façon suivante :

$$V_n^{\text{EDF}} = M_n^{\gamma, \text{EDF}} + R_n^{\text{EDF}/\gamma}$$

et

$$V_n^\gamma = M_n^{\gamma, \text{EDF}} + R_n^{\gamma/\text{EDF}},$$

où  $M_n^{\gamma, \text{EDF}}$  est la population présente à la fois dans le système EDF et dans le système  $\gamma$  à  $\tilde{t}_n$ ,  $R_n^{\text{EDF}/\gamma}$  est la population présente dans le système EDF à  $\tilde{t}_n$ , qui est absente à cet instant dans le système  $\gamma$  et  $R_n^{\gamma/\text{EDF}}$  est la population présente dans le système  $\gamma$  à  $\tilde{t}_n$ , qui est absente à cet instant dans le système EDF,

- pour tout  $n = 1 \dots \min\{s_1^{\text{LDF}}, s_1^\gamma\}$ , pour  $(\cdot) = \gamma$  et LDF,

$$V_n^{\gamma/\text{LDF}} = M_n^{\gamma, \text{LDF}} + R_n^{\gamma/\text{LDF}}$$

et

$$V_n^{\text{LDF}/\gamma} = M_n^{\gamma, \text{LDF}} + R_n^{\text{LDF}/\gamma},$$

où  $M_n^{\gamma, \text{LDF}}$  est la population présente à la fois dans le système LDF et dans le système  $\gamma$  à  $\tilde{t}_n$ ,  $R_n^{\gamma/\text{LDF}}$  est la population présente à  $\tilde{t}_n$  dans le système LDF qui n'est pas présente au même instant dans le système  $\gamma$  et vice-versa pour  $R_n^{\text{LDF}/\gamma}$ .

### Lemme 5.2.1

*Pour tout  $n$  jusqu'à  $\min\{s_1^\gamma, s_1^{\text{EDF}}\}$ , si  $R_n^{\gamma/\text{EDF}} \neq \emptyset$ , il existe une application injective :*

$$\Phi_n : \begin{cases} R_n^{\gamma/\text{EDF}} \rightarrow R_n^{\text{EDF}/\gamma} \\ C_j \mapsto C_k \text{ tel que } T_j + D_j < T_k + D_k. \end{cases}$$

*Preuve.* Nous raisonnons par récurrence. A  $\tilde{t}_1$ ,

$$R_1^{\gamma/\text{EDF}} = R_1^{\text{EDF}/\gamma} = \emptyset$$

et la condition est vérifiée. On suppose que la propriété est vraie à l'instant  $\tilde{t}_n$  et on appelle  $C_l$ , le client servi par  $\gamma$  à cet instant.

1. Si  $R_n^{\gamma/\text{EDF}} = \emptyset$ , tous les clients de  $V_n^\gamma$  sont dans  $V_n^{\text{EDF}}$ .
  - si EDF sert aussi  $C_l$ ,  $V_{n+1}^\gamma \subset V_{n+1}^{\text{EDF}}$  et  $R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}} = \emptyset$ ,
  - si EDF sert  $C_j \in R_n^{\text{EDF}}$ , il sert un client qui de toutes façons n'est pas dans le système  $\gamma$  à  $\tilde{t}_n$  et on a bien  $R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}} = \emptyset$ ,
  - si EDF sert un client  $C_j \in M_n^{\gamma, \text{EDF}}$ ,
    - si  $C_j$  est le client  $C_l$ , le même client est servi à  $\tilde{t}_n$  dans les deux systèmes et donc  $R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}} = \emptyset$ ,
    - si  $C_j \neq C_l$  et  $T_l + D_l < \tilde{t}_{n+1}$ ,  $T_j + D_j < T_l + D_l < \tilde{t}_{n+1}$ ,  $C_j$  est donc éliminé du système régi par  $\gamma$  à  $\tilde{t}_{n+1}$ ,  $C_j$  n'est pas dans  $R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}}$  et on a bien  $R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}} = \emptyset$ ,
    - si  $C_j \neq C_l$  et  $T_l + D_l \geq \tilde{t}_{n+1}$ ,
      - \* si  $T_j + D_j < \tilde{t}_{n+1}$ ,  $C_j$  est donc éliminé du système  $\gamma$  à  $\tilde{t}_{n+1}$  et  $R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}} = \emptyset$ ,
      - \* si  $T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ ,  $C_j$  est donc toujours dans le système  $\gamma$  à  $\tilde{t}_{n+1}$  et  $R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}} = \{C_j\}$ . Or,  $C_l \in V_n^\gamma \subset V_n^{\text{EDF}}$  et  $T_l + D_l > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ , donc  $C_l \in R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma}$  et on peut noter  $\Phi_n(C_j) = C_l$ .

Donc, dans tous les cas l'hypothèse de récurrence est vérifiée si  $R_n^{\gamma/\text{EDF}} = \emptyset$ .

2. On suppose maintenant que  $R_n^{\gamma/\text{EDF}} \neq \emptyset$  et que l'application injective  $\Phi_n$  existe. On suppose de plus que  $R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}} \neq \emptyset$ . Soit  $C_j \in R_{n+1}^{\gamma/\text{EDF}}$ . Alors,  $C_j \in V_n^\gamma$  à  $\tilde{t}_n$  et  $C_j \neq C_l$  car  $\gamma$  sert  $C_l$  à  $\tilde{t}_n$ .
  - si  $C_j \in R_n^{\gamma/\text{EDF}}$ , soit  $C_k := \Phi_n(C_j) \in R_n^{\text{EDF}/\gamma}$ . Alors,  $T_k + D_k > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ ,
    - si  $C_k$  n'est pas le client servi par EDF à  $\tilde{t}_n$  (et donc  $T_k + D_k \neq \min\{T_i + D_i, C_i \in V_n^{\text{EDF}}\}$ ), alors,  $C_k \in R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma}$  car il n'est pas éliminé à  $\tilde{t}_{n+1}$  et  $\Phi_{n+1}(C_j) := C_k$ ,
    - si EDF sert  $C_k$  à  $\tilde{t}_n$ ,

- \* si  $C_l \in M_n^{\gamma, \text{EDF}}$ ,  $T_l + D_l > T_k + D_k > \tilde{t}_{n+1}$ ,  $C_l$  n'est pas éliminé par EDF à  $\tilde{t}_{n+1}$  et donc  $C_l \in R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma}$ .  
Alors on note  $\Phi_{n+1}(C_j) := C_l$ .
- \* si  $C_l$  n'est pas dans  $M_n^{\gamma, \text{EDF}}$ ,  $C_l \in R_n^{\gamma/\text{EDF}}$ ,  $C_m := \Phi_n(C_l) \in R_n^{\text{EDF}/\gamma}$  et  $C_m \neq C_k$  car  $C_l \neq C_j$ . Comme  $C_k$  est le client servi par EDF à  $\tilde{t}_n$ ,  $T_m + D_m > T_k + D_k > \tilde{t}_{n+1}$  et donc  $C_m \in R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma}$ .  
Alors on note  $\Phi_{n+1}(C_j) := C_m$ ,
- si  $C_j \in M_n^{\gamma, \text{EDF}}$ ,  $C_j$  est le client servi par EDF à  $\tilde{t}_n$ , et donc  $T_j + D_j = \min \left\{ T_i + D_i, C_i \in V_n^{\text{EDF}} \right\}$ ,
  - si  $C_l \in M_n^{\gamma, \text{EDF}}$ ,  $T_l + D_l > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ ,  
 $C_l$  est toujours dans le système EDF à  $\tilde{t}_{n+1}$ , plus précisément  $C_l \in R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma}$  et on note  $\Phi_{n+1}(C_j) := C_l$ ,
  - si  $C_l \in R_n^{\gamma/\text{EDF}}$ , on note à nouveau  $C_m := \Phi_n(C_l) \in R_n^{\text{EDF}/\gamma} \subseteq V_n^{\text{EDF}}$  et  $T_m + D_m > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ . Donc,  $C_m \in R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma}$  car à  $\tilde{t}_{n+1}$  il n'est ni servi ni éliminé par EDF. On note alors  $\Phi_{n+1}(C_j) := C_m$ .

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée si  $R_n^\gamma \neq \emptyset$ .

□

On peut de même donner le résultat suivant en comparant maintenant, pour le même scénario de trafic, le système géré par la discipline de service quelconque  $\gamma$  avec celui géré par LDF :

### Lemme 5.2.2

*Pour tout  $n$  jusqu'à  $\min\{s_1^{\text{LDF}}, s_1^\gamma\}$ , si  $R_n^{\text{LDF}/\gamma} \neq \emptyset$ , il existe une application injective :*

$$\Psi_n : \begin{cases} R_n^{\text{LDF}/\gamma} \rightarrow R_n^{\gamma/\text{LDF}} \\ C_j \mapsto C_k \text{ tel que } T_j + D_j < T_k + D_k. \end{cases}$$

*Preuve.* Nous raisonnons de la même façon que dans le lemme précédent, par récurrence. A  $\tilde{t}_1$ ,

$$R_1^{\text{LDF}/\gamma} = R_1^{\gamma/\text{LDF}} = \emptyset.$$

On suppose que la propriété est vraie à l'instant  $\tilde{t}_n$  et on appelle  $C_l$ , le client servi par LDF à cet instant.

1. Si  $R_n^{\text{LDF}/\gamma} = \emptyset$ ,  $V_n^{\text{LDF}} \subseteq V_n^\gamma$ .

- si  $\gamma$  sert aussi  $C_l$ ,  $V_{n+1}^{\text{LDF}} \subseteq V_{n+1}^\gamma$  et  $R_{n+1}^{\text{LDF}/\gamma} = \emptyset$ ,
- si  $\gamma$  sert  $C_j \in R_n^{\gamma/\text{LDF}}$ , il sert un client qui n'est pas dans le système LDF à  $\tilde{t}_n$  et on a bien  $R_{n+1}^{\text{LDF}/\gamma} = \emptyset$ ,
- si  $\gamma$  sert un client  $C_j \in M_n^{\gamma, \text{LDF}}$ ,
  - si  $C_j = C_l$ ,  $R_{n+1}^{\text{LDF}/\gamma} = \emptyset$ ,
  - si  $C_j \neq C_l$  et  $T_l + D_l < \tilde{t}_{n+1}$ , alors  $T_j + D_j < T_l + D_l < \tilde{t}_{n+1}$ ,  $C_j$  est donc éliminé du système LDF à  $\tilde{t}_{n+1}$  et on a bien  $R_{n+1}^{\text{LDF}/\gamma} = \emptyset$ ,
  - si  $C_j \neq C_l$  et  $T_l + D_l \geq \tilde{t}_{n+1}$ ,
    - \* si  $T_j + D_j < \tilde{t}_{n+1}$ , et donc  $C_j$  est éliminé par LDF à  $\tilde{t}_{n+1}$  et  $R_{n+1}^{\text{LDF}/\gamma} = \emptyset$ ,
    - \* si  $T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ ,  $C_j$  n'est pas éliminé du système LDF à  $\tilde{t}_{n+1}$  et  $R_{n+1}^{\text{LDF}/\gamma} = \{C_j\}$ . Or,  $C_l \in V_n^{\text{LDF}} \subset V_n^\gamma$  et  $T_l + D_l > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ , donc  $C_l \in R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma}$  et on peut noter  $\Psi_n(C_j) = C_l$ .

2. On suppose que  $R_n^{\text{LDF}/\gamma} \neq \emptyset$ , que l'application injective  $\Psi_n$  existe et que  $R_{n+1}^{\text{LDF}/\gamma} \neq \emptyset$ . Soit  $C_j \in R_{n+1}^{\text{LDF}/\gamma}$ .  $C_j \in V_n^{\text{LDF}}$ .

- si  $C_j \in R_n^{\text{LDF}/\gamma}$ ,  $C_k := \Psi_n(C_j) \in R_n^{\text{EDF}}$  et  $T_k + D_k > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ ,
  - si  $C_k$  n'est pas le client servi par  $\gamma$  à  $\tilde{t}_n$ ,  $C_k \in R_{n+1}^{\gamma/\text{LDF}}$  et  $\Psi_{n+1}(C_j) := C_k$ ,
  - si  $\gamma$  sert  $C_k$  à  $\tilde{t}_n$ ,
    - \* si  $C_l \in M_n^{\gamma, \text{LDF}}$ , comme LDF sert  $C_l$  à  $\tilde{t}_n$ ,  $T_l + D_l > T_k + D_k > \tilde{t}_{n+1}$  et donc  $C_l \in R_{n+1}^{\gamma/\text{LDF}}$ . On note  $\Psi_{n+1}(C_j) := C_l$ ,
    - \* si  $C_l \in R_n^{\text{LDF}/\gamma}$ , on note  $C_m := \Psi_n(C_l) \in R_n^{\gamma/\text{LDF}}$  et  $T_m + D_m > T_l + D_l$ . Or,  $T_l + D_l > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$  car  $C_j$  et  $C_l$  sont dans  $V_n^{\text{LDF}}$  et LDF sert  $C_l$ . Donc,  $C_m$  n'est pas éliminé à  $\tilde{t}_{n+1}$  et n'a pas été servi par  $\gamma$  :  $C_m \in R_{n+1}^{\gamma/\text{LDF}}$  et on note  $\Psi_{n+1}(C_j) := C_m$ .
- Si  $C_j \in M_n^{\gamma, \text{LDF}}$ ,  $\gamma$  sert  $C_j$  à  $\tilde{t}_n$ ,
  - si  $C_l \in M_n^{\gamma, \text{LDF}}$ ,  $T_l + D_l > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$ ,  $C_l \in R_{n+1}^{\gamma/\text{LDF}}$  et on note  $\Psi_{n+1}(C_j) := C_l$ ,
  - si  $C_l \in R_n^{\text{LDF}/\gamma}$ , on note à nouveau  $C_m := \Psi_n(C_l)$ .  $C_j$  et  $C_l$  sont dans  $V_n^{\text{EDF}}$  et LDF sert  $C_l$ , donc  $T_l + D_l > T_j + D_j > \tilde{t}_{n+1}$  et comme  $T_m + D_m > T_l + D_l$ ,  $C_m$  n'est pas servi par  $\gamma$  à  $\tilde{t}_n$  et n'est pas non-plus éliminé du système  $\gamma$  à  $\tilde{t}_{n+1}$ . Donc  $C_m \in R_{n+1}^{\gamma/\text{LDF}}$  et on note  $\Psi_{n+1}(C_j) := C_m$ .

□

On en déduit :

### Corollaire 5.2.3

*Partant d'un point de construction commun aux trois systèmes et répondant au même trafic,*

1. *le système régi par  $\gamma$  se vide avant le système régi par EDF et après celui géré par LDF :*

$$s_1^{LDF} \leq s_1^\gamma \leq s_1^{EDF},$$

2. *pour tout  $n$  jusqu'à  $s_1^\gamma$ ,*

$$\#(R_n^{EDF/\gamma}) \leq n - 1, \quad (5.6)$$

$$p_{i_{s_1^\gamma}}^{EDF} \leq p_{i_{s_1^\gamma}}^\gamma \leq p_{i_{s_1^\gamma}}^{EDF} + s_1^\gamma - 1, \quad (5.7)$$

3. *pour tout  $n$  jusqu'à  $s_1^{LDF}$ ,*

$$\#(R_n^{\gamma/LDF}) \leq n - 1, \quad (5.8)$$

$$p_{i_{s_1^{LDF}}}^\gamma \leq p_{i_{s_1^{LDF}}}^{LDF} \leq p_{i_{s_1^{LDF}}}^\gamma + s_1^{LDF} - 1. \quad (5.9)$$

*Preuve.* 1. Le lemme 5.2.1 implique en particulier que

$$\#(R_n^{\gamma/EDF}) \leq \#(R_n^{EDF/\gamma}) \text{ pour tout } n \leq \min\{S_1^\gamma, S_1^{EDF}\} \quad (5.10)$$

et donc :

$$\#(V_n^\gamma) \leq \#(V_n^{EDF}) \text{ pour tout } n \leq \min\{S_1^\gamma, S_1^{EDF}\}.$$

Donc, le système EDF ne peut se vider avant que le système  $\gamma$  ne se vide et autrement dit  $s_1^\gamma \leq s_1^{EDF}$ .

Par ailleurs, le lemme 5.2.2 implique de même que

$$\#(R_n^{LDF/\gamma}) \leq \#(R_n^{\gamma/LDF}) \text{ pour tout } n \leq \min\{S_1^{LDF}, S_1^\gamma\}$$

et donc

$$\#(V_n^{LDF}) \leq \#(V_n^\gamma) \text{ pour tout } n \leq \min\{S_1^{LDF}, S_1^\gamma\}.$$

Le système LDF se vide donc avant le système  $\gamma$  :  $s_1^{LDF} \leq s_1^\gamma$ .

2. Par récurrence: à  $\tilde{t}_1$ ,  $\#(R_1^{\text{EDF}}) = 0$ . On suppose la propriété vraie à  $\tilde{t}_n$ . On note encore  $C_l$ , le client servi par  $\gamma$  à cet instant. Alors,

$$R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma} \subseteq \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{C_l\} \cup \\ \left\{ R_n^{\text{EDF}/\gamma} \cap \left\{ T_k + D_k > \left( \tilde{t}_{n+1} \vee \min_{C_i \in V_n^{\text{EDF}}} \{T_i + D_i\} \right) \right\} \right\} \\ \text{si } C_l \in M_n^{\gamma, \text{EDF}}, \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left\{ R_n^{\text{EDF}/\gamma} \cap \left\{ T_k + D_k > \left( \tilde{t}_{n+1} \vee \min_{C_i \in V_n^{\text{EDF}}} \{T_i + D_i\} \right) \right\} \right\} \\ \text{si } C_l \in R_n^{\gamma/\text{EDF}}. \end{array} \right\} \end{cases}$$

Donc, pour tout  $n$  jusqu'à  $S_1^\gamma$ ,

$$\#(R_{n+1}^{\text{EDF}/\gamma}) \leq \#(R_n^{\text{EDF}/\gamma}) + 1$$

et on a (5.6). Par ailleurs :

$$p_{\tilde{t}_n}^{\text{EDF}} = N(0, \tilde{t}_n] - n - x_n^{\text{EDF}} = p_{\tilde{t}_n}^\gamma + \#(R_n^{\gamma/\text{EDF}}) - \#(R_n^{\text{EDF}/\gamma})$$

et avec (5.10) et (5.6) :

$$p_{\tilde{t}_n}^{\text{EDF}} \leq p_{\tilde{t}_n}^\gamma \leq p_{\tilde{t}_n}^{\text{EDF}} + n - 1 - \#(R_n^{\gamma/\text{EDF}}). \quad (5.11)$$

On a donc (5.7) pour  $n = s_1^\gamma$ .

3. On applique le même argument à la comparaison  $\gamma / \text{LDF}$  : pour tout  $n \leq s_1^{\text{LDF}}$ , en notant  $C_j$ , le client servi par LDF et  $C_l$  à  $\tilde{t}_n$  :

$$R_{n+1}^{\gamma/\text{LDF}} \subseteq \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{C_j\} \cup \left\{ R_n^{\gamma/\text{LDF}} \cap \left\{ T_k + D_k > \tilde{t}_{n+1} \right\} \cap \{C_l\}^c \right\} \\ \text{si } C_j \in M_n^{\gamma, \text{LDF}}, \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left\{ R_n^{\gamma/\text{LDF}} \cap \left\{ T_k + D_k > \tilde{t}_{n+1} \right\} \cap \{C_l\}^c \right\} \\ \text{si } C_j \in R_n^{\text{LDF}/\gamma} \end{array} \right\} \end{cases}$$

et on conclut de la même façon.  $\square$

La figure 5.2.1 illustre ces résultats, en représentant une *busy period* pour EDF et  $\gamma := \text{FIFO}$ . Les *busy periods* pour les deux systèmes, soumis aux mêmes demandes, aux mêmes instants d'arrivées, commencent au même instant. En abscisses, on note les instants d'arrivées  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$  des clients

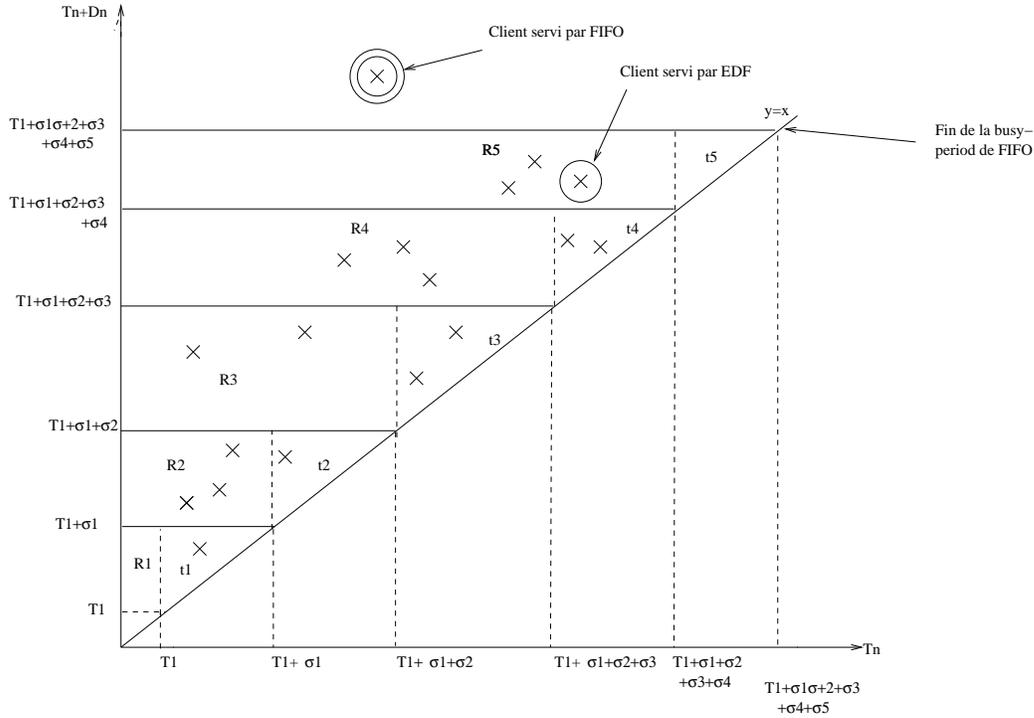


Figure 5.1: Busy period pour EDF et FIFO

et en ordonnées leurs dates d'élimination  $(T_n + D_n, n \in \mathbb{N}^*)$ . Chaque croix représente donc un client entré dans le système. Les barres horizontales représentent les instants de fins de service pour les deux systèmes, pour ce scénario de trafic. Un client est encore dans le système, et susceptible d'être servi à l'instant  $\tilde{t}_n := \tilde{t}_1 + \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i$  si la croix correspondante est au dessus de la  $n$ -ième barre horizontale, et si il n'a pas encore été servi sous la discipline de service considérée. Par exemple, le serveur peut servir à  $\tilde{t}_n$  toutes les croix se trouvant dans le rectangle  $R_{n+1}$  (clients qui si ils ne sont pas servis à  $\tilde{t}_n$  seront éliminés à  $\tilde{t}_{n+1}$ ), ou au dessus.

Les croix se trouvant dans les triangles  $t_i$  sont des clients éliminés avant même la fin du service pendant lequel ils sont entrés (clients « mort-nés »). EDF sert toujours le client correspondant à la croix la plus basse parmi celles se trouvant au dessus de la barre horizontale correspondant à l'instant de fin de service. FIFO sert au même instant, le client dont la croix se trouve la plus à gauche (LDF servirait, lui, toujours la croix la plus haute). A  $\tilde{t}_4$ , EDF sert le client entouré une fois et FIFO, le client entouré deux fois. La *busy period* sous FIFO se termine donc à  $\tilde{t}_5$ , alors que celle d'EDF se poursuit: le client entouré deux fois n'a pas encore été servi à  $\tilde{t}_5$  par EDF et n'a pas atteint son délai à cet instant : il est servi.

On peut alors retrouver et compléter le résultat de Panwar *et al.* :

**Corollaire 5.2.4**

**Pour toute file  $G/M/1/1 + G$ , pour tout  $t$  et toute discipline de service  $\gamma$ ,**

$$P_t^{\mathbf{EDF}} \leq_{st} P_t^\gamma \leq_{st} P_t^{\mathbf{LDF}}.$$

*Preuve.* On part de  $\tilde{t}_0^0 := \tilde{t}_0$ . A cet instant un client entre dans les trois systèmes vides et pour les trois disciplines de service :

$$s_{\tilde{t}_0^0}^{(\cdot)} = p_{\tilde{t}_0^0}^{(\cdot)} = 0$$

(aucun service n'a été complété et aucun client n'a été éliminé).

Commençons par considérer les disciplines  $\gamma$  et EDF. D'après le corollaire 5.2.3,  $\gamma$  termine sa première *busy period* avant EDF, et à tout instant  $t \leq s_1^\gamma$ , d'après (5.11) :

$$p_t^{\mathbf{EDF}} \leq p_t^\gamma.$$

A la fin de la *busy period* de  $\gamma$  (à  $s_1^\gamma$ ), si le système EDF n'est pas vide, EDF commence son  $(s_1^\gamma + 1)$ -ième service et

$$p_{\tilde{t}_{s_1^\gamma}}^{\mathbf{EDF}} < p_{\tilde{t}_{s_1^\gamma}}^\gamma, \quad (5.12)$$

puisque à cet instant autant de client sont entrés et ont été servis dans les deux systèmes, mais il reste des clients dans le système EDF. Si EDF termine sa *busy period* avant l'arrivée d'un nouveau client dans le système  $\gamma$  vide, les deux systèmes sont vides en même temps et on peut ré-initier le même raisonnement en repartant d'un système vide pour les deux disciplines (point de construction commun) dès que ce nouveau client  $C_i$  entre dans le système.

Sinon, on définit la discipline de service modifiée  $\tilde{\gamma}$  :  $\tilde{\gamma}$  « bloque » le serveur (il le rend inactif) pendant toute la durée du  $(s_1^\gamma + 1)$ -ième service d'EDF (et ainsi de suite à chaque début d'un nouveau service d'EDF tant qu'aucun nouveau client n'est entré dans le système  $\gamma$ ). Le premier client  $C_i$  à entrer dans le système à partir de là voit sa patience « gelée » jusqu'à ce qu'il rentre en service, à la fin du service en cours pour EDF. Ainsi, le système  $\tilde{\gamma}$  ré-initie une période d'activité avec le service de  $C_i$  nécessairement à un instant de début de service du système EDF. Soit  $\tilde{t}_0^1$  cet instant. On a alors :

$$p_{\tilde{t}_0^1}^{\mathbf{EDF}} \leq p_{\tilde{t}_0^1}^{\tilde{\gamma}} \quad (5.13)$$

puisque les clients éventuellement perdus par EDF pendant l'*idle period* de  $\tilde{\gamma}$  sont soit :

- des clients qui ont figuré dans le système  $\tilde{\gamma}$  (perdus ou servis),
- des clients entrés après  $C_i$  et éliminés avant  $\tilde{t}_0^1$  auquel cas ils sont aussi éliminés par  $\tilde{\gamma}$ ,

- $C_i$  lui-même (qui dans ce cas ne doit sa présence dans le système  $\tilde{\gamma}$  à  $\tilde{t}_0^1$  qu'au fait que son délai a été gelé) et dans ce cas  $\tilde{\gamma}$  perd un client de moins qu'EDF.

Dans tous les cas,  $\tilde{\gamma}$  perd au plus un nouveau client de moins qu'EDF pendant son *idle period* et donc (5.13) découle de (5.12).

Ensuite, à l'instant  $\tilde{t}_0^1$ , une *busy period* reprend pour  $\tilde{\gamma}$ , couplée avec les services d'EDF : on réitère le même raisonnement pour cette nouvelle *busy period* de  $\tilde{\gamma}$  et pour les clients entrés à partir de cet instant en appliquant le corollaire 5.2.3 partie 2 et l'équation (5.11).

On peut donc coupler les deux systèmes à l'infini en s'assurant que la perte du système  $\tilde{\gamma}$  soit plus forte que celle d'EDF : pour ce scénario de trafic, pour tout  $t$ ,

$$p_t^{\text{EDF}} \leq p_t^{\tilde{\gamma}}.$$

On généralise ce raisonnement à tous les scénarios de trafic : p.s., pour tout  $t$ ,

$$P_t^{\text{EDF}} \leq P_t^{\tilde{\gamma}}. \quad (5.14)$$

Maintenant, en vertu de la propriété d'oubli de la loi exponentielle, la durée du service du client  $C_i$  qui entre dans le système  $\gamma$  vide est de même loi que la durée résiduelle du service en cours pour EDF,  $\tilde{\sigma}_{n_0}$ . Donc, le système  $\gamma$  a la même statistique que le système  $\tilde{\gamma}$ . En particulier, pour tout  $t$ ,

$$P_t^{\tilde{\gamma}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} P_t^{\gamma},$$

et on a la première majoration stochastique avec (5.14).

Ensuite, on applique le même raisonnement en comparant maintenant les systèmes  $\gamma$  et LDF. On définit la discipline L $\tilde{\text{D}}$ F qui couple avec les *busy periods* de  $\gamma$  lorsque le système LDF se vide mais pas le système  $\gamma$ , et on applique le corollaire 5.2.3 partie 3 : on a la deuxième majoration.  $\square$

**Remarque 5.2.1** Panwar *et al.* montrent dans [PT88], d'une manière différente, la première majoration stochastique.

### 5.2.2 Cas $M/M/1/1 + G$

Nous considérons dans cette partie que le processus des entrées est un processus de Poisson. Nous montrons dans ce cas l'optimalité d'EDF en terme de **probabilité de perte à l'état stationnaire** par rapport à toute autre discipline de service non-préemptive. Ce faisant, on peut aller plus loin que dans la section précédente et donc que Panwar *et al.*, qui donnaient cette optimalité sur les pertes instantanées en terme de majoration stochastique pour un système  $G/M/1/1 + G$ .

**Theorème 5.2.5**

*Pour toute file d'attente avec clients impatientes  $M/M/1/1+G$  où  $\lambda$  est l'intensité du processus des entrées et les demandes de services sont de durée moyenne  $1/\mu$ , pour toute discipline de service non préemptive  $\gamma$ , la probabilité de perte  $\pi^\gamma$  vérifie :*

$$\pi^{\text{EDF}} \leq \pi^\gamma \leq \pi^{\text{EDF}} + \frac{(\lambda \mathbf{E}[B^{\text{EDF}}] + 1)(\mu \mathbf{E}[B^{\text{LDF}}] - 1)}{(\lambda \mathbf{E}[B^{\text{LDF}}] + 1) \lambda \mathbf{E}[B^{\text{EDF}}]}.$$

*Preuve.* Comme dans la preuve du corollaire 5.2.4, on part d'un point de construction commun aux trois systèmes  $\tilde{t}_0^0 := \tilde{t}_0$ . D'après le corollaire 5.2.3,  $\gamma$  termine sa première *busy period* avant EDF, et à cet instant  $s_1^\gamma$ , on a (5.7). A  $s_1^\gamma$ , si le système EDF n'est pas vide, on considère comme plus haut la discipline de service modifiée  $\tilde{\gamma}$ . Si EDF termine sa *busy period* avant l'arrivée du client  $C_i$  qui ré-initie la *busy period* de  $\tilde{\gamma}$ , les deux systèmes sont vides en même temps et on note  $\nu := 1$ .

Sinon, on note à nouveau  $\tilde{t}_0^1$ , le premier instant où le serveur est libre sous EDF et les deux systèmes sont non-vides. A cet instant, on a :

$$p_{\tilde{t}_0^0}^{\text{EDF}} \leq p_{\tilde{t}_0^1}^{\tilde{\gamma}} \leq p_{\tilde{t}_0^0}^{\text{EDF}} + s_1^\gamma - 1. \quad (5.15)$$

En effet, (5.13) donne la minoration et d'autre part, tout client perdu par  $\tilde{\gamma}$  pendant sa période d'inactivité est un client « mort-né », entré après  $C_i$  pendant le service d'EDF et éliminé avant la fin de celui-ci. Un tel client est donc aussi perdu par EDF et (5.7) donne la majoration.

A  $\tilde{t}_0^1$ , une nouvelle *busy period* commune à EDF et  $\tilde{\gamma}$  commence et à cet instant, il n'y a aucun client présent dans le système  $\tilde{\gamma}$  qui ne soit pas présent dans le système EDF. On réitère le même raisonnement que pour la première *busy period* jusqu'à l'instant où le système  $\tilde{\gamma}$  se vide à nouveau. Si le système EDF n'est pas vide à cet instant, on appelle  $\tilde{t}_0^2$  l'instant de reprise de la période d'activité pour  $\tilde{\gamma}$ , etc... jusqu'à l'instant (dont on sait qu'il existe puisque le système est stable) où le système EDF se vide. Cet instant est nécessairement un instant où le système  $\tilde{\gamma}$  se vide aussi : c'est la fin de la  $\nu$ -ième *busy period* de  $\tilde{\gamma}$ . Par récurrence, pour tout  $1 < n \leq \nu$ , en appliquant le corollaire 5.2.3, (5.7) et (5.15) à la  $n$ -ième *busy period* de  $\tilde{\gamma}$ , on généralise (5.15) :

$$\sum_{i=1}^n \left( p_{\tilde{t}_0^i}^{\text{EDF}} - p_{\tilde{t}_0^{i-1}}^{\text{EDF}} \right) \leq \sum_{i=1}^n \left( p_{\tilde{t}_0^i}^{\tilde{\gamma}} - p_{\tilde{t}_0^i}^{\tilde{\gamma}} \right) \leq \sum_{i=1}^n \left( \left( p_{\tilde{t}_0^i}^{\text{EDF}} - p_{\tilde{t}_0^{i-1}}^{\text{EDF}} \right) + s_i^\gamma - 1 \right).$$

D'autre part, en notant  $b^{\text{EDF}}$ , la durée totale de la *busy period* d'EDF, pour  $i = 1, \dots, \nu$ ,  $b_i^{\tilde{\gamma}}$ , la durée de la  $i$ -ième *busy period* de  $\tilde{\gamma}$  pendant celle d'EDF et pour  $i = 1, \dots, \nu - 1$  (si  $\nu \geq 2$ ),  $i_i^{\tilde{\gamma}}$  la durée de la  $i$ -ième *idle period* de  $\tilde{\gamma}$

pendant que le serveur est actif sous EDF :

$$b^{\text{EDF}} = \sum_1^{\nu} b_i^{\tilde{\gamma}} + \sum_1^{\nu-1} i_i^{\tilde{\gamma}},$$

si  $\nu \geq 2$ .

D'après les deux équations précédentes, on a donc p.s. pour deux systèmes EDF et  $\tilde{\gamma}$  partant d'un point de construction commun et répondant à la même demande de service :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} \left( P_{T_0^i}^{\text{EDF}} - P_{T_0^{i-1}}^{\text{EDF}} \right) &\leq \sum_{i=1}^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} \left( P_{T_0^i}^{\tilde{\gamma}} - P_{T_0^{i-1}}^{\tilde{\gamma}} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} \left( P_{T_0^i}^{\text{EDF}} - P_{T_0^{i-1}}^{\text{EDF}} + S_i^{\tilde{\gamma}} \right) - \nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$B^{\text{EDF}} = \sum_1^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} B_i^{\tilde{\gamma}} + \sum_1^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}-1} I_i^{\tilde{\gamma}}, \quad (5.17)$$

où :

- $\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}$  est le nombre de *busy period* que fait  $\tilde{\gamma}$  pendant une *busy period* d'EDF,
- pour  $i = 1, \dots, \nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}$ ,  $B_i^{\tilde{\gamma}}$  est la durée de la  $i$ -ième *busy period* de  $\tilde{\gamma}$  pendant celle d'EDF et  $S_i^{\tilde{\gamma}}$  est le nombre de service complétés sous  $\tilde{\gamma}$  pendant cette  $i$ -ième *busy period*,
- pour  $i = 1, \dots, \nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}} - 1$ ,  $I_i^{\tilde{\gamma}}$  est la durée de la  $i$ -ième *idle period* de  $\tilde{\gamma}$  pendant la *busy period* d'EDF.

D'une part, soit  $\lambda$ , l'intensité du processus Poissonien des entrées. Le système étant supposé à l'état stationnaire, l'ergodicité et la propriété PASTA appliquées à ce processus impliquent que  $\pi^{(\cdot)}$  est la limite du quotient du taux de perte par  $\lambda$  :

$$\pi^{(\cdot)} = \frac{1}{\lambda} \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ \frac{P_t^{(\cdot)}}{t} \right]. \quad (5.18)$$

Par ailleurs, les points de construction étant des instants de renouvellement du système stable, d'après ([Ros95], théorème 3.6.1.), (5.18) revient à :

$$\pi^\gamma = \frac{\mathbf{E}[P^\gamma]}{\mathbf{E}[E^\gamma]} = \frac{\mathbf{E}[P^\gamma]}{\lambda \mathbf{E}[B^\gamma]}. \quad (5.19)$$

(5.19) implique :

$$\begin{aligned}\pi^{\text{EDF}} &= \frac{\mathbf{E}[P^{\text{EDF}}]}{\mathbf{E}[E^{\text{EDF}}]} = \frac{\mathbf{E}\left[\frac{P_{\tilde{T}_0^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}}^{\text{EDF}}} - P_{\tilde{T}_0^0}^{\text{EDF}}}{\tilde{T}_0^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} - \tilde{T}_0^0}\right]}{\lambda \mathbf{E}\left[\frac{\tilde{T}_0^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} - \tilde{T}_0^0}{\tilde{T}_0^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} - \tilde{T}_0^0}\right]} = \frac{\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}}\left(\frac{P_{\tilde{T}_0^i}^{\text{EDF}} - P_{\tilde{T}_0^{i-1}}^{\text{EDF}}}{\tilde{T}_0^i - \tilde{T}_0^{i-1}}\right)\right]}{\lambda \mathbf{E}[B^{\text{EDF}}]}, \\ \pi^{\tilde{\gamma}} &= \frac{\mathbf{E}[P^{\tilde{\gamma}}]}{\mathbf{E}[E^{\tilde{\gamma}}]} = \frac{\mathbf{E}\left[\frac{P_{\tilde{T}_0^1}^{\tilde{\gamma}} - P_{\tilde{T}_0^0}^{\tilde{\gamma}}}{\tilde{T}_0^1 - \tilde{T}_0^0}\right]}{\lambda \mathbf{E}\left[\frac{\tilde{T}_0^1 - \tilde{T}_0^0}{\tilde{T}_0^1 - \tilde{T}_0^0}\right]} = \frac{\mathbf{E}[\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}] \mathbf{E}\left[\frac{P_{\tilde{T}_0^1}^{\tilde{\gamma}} - P_{\tilde{T}_0^0}^{\tilde{\gamma}}}{\tilde{T}_0^1 - \tilde{T}_0^0}\right]}{\lambda \mathbf{E}[\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}] \mathbf{E}\left[\frac{\tilde{T}_0^1 - \tilde{T}_0^0}{\tilde{T}_0^1 - \tilde{T}_0^0}\right]} \\ &= \frac{\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}}\left(\frac{P_{\tilde{T}_0^i}^{\tilde{\gamma}} - P_{\tilde{T}_0^{i-1}}^{\tilde{\gamma}}}{\tilde{T}_0^i - \tilde{T}_0^{i-1}}\right)\right]}{\lambda \mathbf{E}\left[\frac{\tilde{T}_0^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} - \tilde{T}_0^0}{\tilde{T}_0^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}} - \tilde{T}_0^0}\right]} = \frac{\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}}\left(\frac{P_{\tilde{T}_0^i}^{\tilde{\gamma}} - P_{\tilde{T}_0^{i-1}}^{\tilde{\gamma}}}{\tilde{T}_0^i - \tilde{T}_0^{i-1}}\right)\right]}{\lambda \mathbf{E}[B^{\text{EDF}}]},\end{aligned}$$

avec l'identité de Wald. Ces deux équations donnent avec (5.16) :

$$\pi^{\text{EDF}} \leq \pi^{\tilde{\gamma}} \leq \pi^{\text{EDF}} + \frac{\mathbf{E}[\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}] \mathbf{E}[S^{\tilde{\gamma}}] - \mathbf{E}[\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}]}{\lambda \mathbf{E}[B^{\text{EDF}}]}. \quad (5.20)$$

D'autre part, avec (5.17) et l'identité de Wald :

$$\mathbf{E}[B^{\text{EDF}}] = \mathbf{E}[\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}] \mathbf{E}[B^{\tilde{\gamma}}] + \mathbf{E}[\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}] \mathbf{E}[I] - \mathbf{E}[I],$$

où  $I$  est la variable aléatoire du temps à attendre avant l'arrivée d'un nouveau client dans un système vide. L'équation précédente se réécrit :

$$\mathbf{E}[\nu^{\tilde{\gamma}/\text{EDF}}] = \frac{\mathbf{E}[B^{\text{EDF}}] + \mathbf{E}[I]}{\mathbf{E}[B^{\tilde{\gamma}}] + \mathbf{E}[I]} = \frac{\mathbf{E}[B^{\text{EDF}}] + 1/\lambda}{\mathbf{E}[B^{\tilde{\gamma}}] + 1/\lambda}. \quad (5.21)$$

(5.20) et (5.21) donnent donc :

$$\pi^{\text{EDF}} \leq \pi^{\tilde{\gamma}} \leq \pi^{\text{EDF}} + \frac{\frac{\mathbf{E}[B^{\text{EDF}}] + 1/\lambda}{\mathbf{E}[B^{\tilde{\gamma}}] + 1/\lambda} (\mathbf{E}[S^{\tilde{\gamma}}] - 1)}{\lambda \mathbf{E}[B^{\text{EDF}}]}.$$

La statistique du système sous  $\tilde{\gamma}$  étant la même que celle du système sous  $\gamma$ , la suite d'inégalités précédente équivaut à :

$$\pi^{\text{EDF}} \leq \pi^{\gamma} \leq \pi^{\text{EDF}} + \frac{\frac{\mathbf{E}[B^{\text{EDF}}] + 1/\lambda}{\mathbf{E}[B^{\gamma}] + 1/\lambda} (\mathbf{E}[S^{\gamma}] - 1)}{\lambda \mathbf{E}[B^{\text{EDF}}]}. \quad (5.22)$$

(5.22) est vraie pour toute discipline de service non-préemptive  $\gamma$ . Elle est vraie pour  $\gamma := \text{LDF}$  et donc en particulier :

$$\pi^{\text{EDF}} \leq \pi^{\text{LDF}} \leq \pi^{\text{EDF}} + \frac{\frac{\mathbf{E}[B^{\text{EDF}}] + 1/\lambda}{\mathbf{E}[B^{\text{LDF}}] + 1/\lambda} (\mathbf{E}[S^{\text{LDF}}] - 1)}{\lambda \mathbf{E}[B^{\text{EDF}}]}. \quad (5.23)$$

Maintenant, en refaisant le même raisonnement pour la comparaison des probabilités de perte entre LDF et la discipline quelconque  $\gamma$  à partir de l'équation (5.9), on aboutit à l'équation analogue à (5.22) en remplaçant  $\gamma$  par LDF et EDF par  $\gamma$  :

$$\pi^\gamma \leq \pi^{\text{LDF}} \leq \pi^\gamma + \frac{\mathbf{E}[B^\gamma] + 1/\lambda}{\mathbf{E}[B^{\text{LDF}}] + 1/\lambda} (\mathbf{E}[S^{\text{LDF}}] - 1). \quad (5.24)$$

En combinant la première inégalité de (5.24) et celle de (5.22) avec (5.23), on obtient :

$$\pi^{\text{EDF}} \leq \pi^\gamma \leq \pi^{\text{EDF}} + \frac{\mathbf{E}[B^{\text{EDF}}] + 1/\lambda}{\mathbf{E}[B^{\text{LDF}}] + 1/\lambda} (\mathbf{E}[S^{\text{LDF}}] - 1).$$

Finalement, l'espérance de la durée d'une *busy period* vérifie

$$\mathbf{E}[B^{\text{LDF}}] = \mathbf{E}[\sigma] \mathbf{E}[S^{\text{LDF}}] = \frac{1}{\mu} \mathbf{E}[S^{\text{LDF}}]$$

et l'équation précédente donne le résultat.  $\square$



## Chapitre 6

# Limites fluides des processus de transport

Lorsque l'on ne dispose pas d'outils théoriques permettant d'étudier finement un système de files d'attente, on peut chercher à identifier son « comportement asymptotique ». On cherche alors, via une renormalisation de type loi forte des grands nombres, une limite au sens des processus pour un processus markovien décrivant le système. Cette limite est alors à trajectoires continues et décrit la tendance générale de l'évolution du système stable.

Appliquée à la file M/M/1 de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ , cette idée conduit à chercher le comportement pour  $n$  grand, de la suite de processus  $(\bar{L}^n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie par  $\bar{L}_0^{(n)} = 1$  et pour  $t > 0$ ,  $\bar{L}_t^{(n)} := n^{-1}L_{nt}$ , où  $L_t$  est le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ .

Notons qu'il importe de préciser la condition initiale si l'on veut obtenir un résultat significatif : pour d'autres suites de conditions initiales, la limite sera identiquement nulle ou infinie. Une fois montré que la suite  $(\bar{L}^n, n \in \mathbb{N}^*)$  tend au sens de la topologie de Skorokhod <sup>1</sup> vers le processus déterministe continu  $\bar{L} := \{(1 + (\lambda - \mu)t)^+, t \geq 0\}$ , on étudie la « vitesse de convergence » et on montre que la suite de processus  $(\sqrt{n}(\bar{L}^n - \bar{L}), n \in \mathbb{N}^*)$  converge en loi vers un processus de diffusion sur l'intervalle de temps  $[0, 1/(\lambda - \mu)^+]$  ([Rob00, Prop 5.15 p.121]).

On voit bien dans cet exemple que la limite fluide indique la tendance générale d'un système fluide qui s'écoulerait à temps continu, ayant les mêmes caractéristiques au premier ordre que le vrai système, la file d'attente à événements discrets. Ici, partant d'une masse initiale unité, le système fluide limite se remplit bien à la vitesse  $\lambda$  et se vide à la vitesse  $\mu$ . Par ailleurs, à la condition  $\lambda < \mu$ , il reste éternellement vide une fois qu'il s'est vidé pour la première fois. Notons que cette condition est précisément la condition nécessaire et suffisante de stabilité de la file d'attente. En outre, la limite

---

<sup>1</sup>cette topologie est décrite précisément en section 6.1.1

fluide permet de calculer la durée moyenne d'une période d'activité, donnée par le premier instant de vidage du système fluide.

De nombreux systèmes de files d'attente ont fait l'objet de telles investigations, pour des systèmes variés de grande taille (voir [Rob00], [Bor67] pour la file *pure delay*, [Gra05] pour un système où le client rejoint la plus courte file, ou [Cho90] pour un réseau de vidéo-conférence).

La démonstration classique exige que le processus étudié soit une semi-martingale. Les principaux outils pour montrer les convergences recherchées sont alors l'inégalité de Doob et surtout le lemme de Gronwall. On en tire assez aisément l'équation différentielle ordinaire dont doit être solution la « fonction de centrage », c'est-à-dire la limite du processus renormalisé. La démonstration du théorème central limite fonctionnel, ainsi qu'il est convenu d'appeler la convergence de la suite des écarts vers une diffusion, repose sur les mêmes outils. Il faut toutefois prendre garde aux « effets de bord » (voir [Rob00, page 124]) : par exemple, quand le processus  $\bar{L}$  ci-dessus atteint 0, le système a quasiment atteint l'équilibre, ces fluctuations sont donc faibles et la renormalisation les écrase tant que  $\bar{L}$  reste à 0. Il importe donc aussi de trouver des conditions initiales qui permettent d'assurer que l'intervalle de temps sur lequel la convergence a lieu ne soit pas réduit à 0.

L'objet de ce travail est d'obtenir le même type d'information pour des files d'attente avec clients impatientes. Nous considérons principalement deux cas : les files  $M/M/s/s + GI - EDF$  et  $M/M/s/s + D - FCFS$ . Dans ces deux cas, il faut remarquer que le processus  $(X_t, t \geq 0)$  qui compte le nombre de clients présents dans le système à  $t$ , n'est plus markovien. En effet, la valeur de  $X_{t+h}$  dépend non seulement du nombre de clients présents à  $t$  mais surtout de tous les délais résiduels de ces clients ainsi que ceux des clients qui arrivent entre  $t$  et  $t+h$ . On choisit donc naturellement comme processus à étudier le processus  $\nu := (\nu_t, t \geq 0)$ , à valeurs mesures ponctuelles, dont à chaque instant les atomes sont les délais résiduels des clients passés et présents. On peut retrouver de tels processus dans les travaux de Doytchinov *et al.* pour une file EDF sans éliminations ([DLS01]), dans une forme légèrement différente, de Baccelli et Brémaud au sujet de la SRPT ([BB94]), ou encore de Gromoll *et al.* dans le cas de la file Processor Sharing ([GPW01]).

Ici, nous montrons dans les cas qui nous intéressent que pour toute fonction  $\phi$  suffisamment régulière, le processus  $\{(\nu_t, \phi) - \langle \nu'_t, \phi \rangle, t \geq 0\}$  est une semi-martingale. A la différence des systèmes étudiés jusqu'à présent, il importe ici de remarquer que la dynamique du système, en l'occurrence la décroissance continue des délais résiduels, introduit un terme de « dérive » spatiale de  $\nu$ , qui explique la présence de la dérivée (au sens des distributions) de  $\nu_t$ . La présence de ce terme nous oblige d'une part à travailler dans un espace beaucoup plus grand que celui des mesures ponctuelles, nommé-

ment nous utilisons l'espace des distributions tempérées et d'autre part nous empêche d'utiliser le lemme de Gronwall. Nous avons pu contourner cette difficulté grâce à l'étude d'une équation aux dérivées partielles particulière, dite « équation de transport ». La forme explicite de la solution de cette équation permet de mener à bien les majorations nécessaires à la preuve des convergences. Les autres difficultés sont du même ordre que celles usuellement rencontrées dans ce genre d'approche, notamment il s'agit de trouver de bonnes conditions initiales qui assurent que l'intervalle de temps sur lequel la convergence a lieu n'est pas vide.

Ce chapitre s'organise comme suit<sup>2</sup>. Dans une première partie de préliminaires, partie 6.1, nous définissons les principaux espaces de mesures et de processus dans lesquels nous travaillons en section 6.1.1 et définissons en section 6.1.2 l'équation de transport intégrale dans l'espace des processus à valeurs distributions tempérées. En partie 6.2, nous introduisons le descripteur d'état pour une file d'attente  $M/M/1/1 + GI - EDF$ , le processus des *profils*, à valeurs mesures ponctuelles. Nous montrons en particulier qu'il est un processus de Feller faible à valeur mesures. En partie 6.3, nous étudions plus généralement les *processus de transport*, la classe de processus à valeurs mesures ponctuelles ayant le même type de générateur infinitésimal, ainsi que leur renormalisation en espace et en temps. Dans la partie 6.4, nous donnons deux résultats de convergence pour des suites de processus de transport renormalisés vers des limites fluides. En partie 6.5, nous donnons le théorème central limite fonctionnel correspondant. Dans la partie 6.6, nous revenons à la file d'attente  $M/M/1/1 + GI - EDF$  et adaptons les théorèmes limites fluides de la partie 6.4 et centraux limites de la partie 6.5 au processus des profils de cette file d'attente. Nous élargissons en sections 6.6.3 et 6.6.4 ces résultats au cas de  $s$  serveurs,  $s \geq 1$ . En partie 6.7, nous adaptons les résultats des parties 6.4 et 6.5 à une suite de processus à valeurs mesures renormalisés décrivant une file d'attente  $M/M/s/s + D - FCFS$ . En partie 6.8 nous appliquons ces résultats à la file délai pur  $M/GI/\infty$ . Nous concluons ce chapitre en partie 6.9 par des heuristiques et des commentaires sur les résultats obtenus.

## 6.1 Préliminaires

### 6.1.1 Les processus à valeurs mesures

L'objectif de ce travail est d'étudier la convergence en loi d'une classe de processus renormalisés à valeurs dans l'espace des mesures de comptage simples. Dans cette section nous exposons les notations que nous utilisons dans tout le chapitre et définissons les espaces de mesures, les espaces de proces-

---

<sup>2</sup>Le contenu du présent chapitre apparaît pour l'essentiel dans [DM04] et [DM05]

sus et enfin les espaces de processus à valeurs mesures dans lesquels nous travaillons. Nous donnons en outre les propriétés de bases de ces espaces.

### Espaces fonctionnels et espaces de mesures

Définissons tout d'abord les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathcal{D}_b := \{\text{fonctions càdlàg bornées de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{C}_0 := \{\text{fonctions continues de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ de limite nulle en l'infini}\},$$

$$\mathcal{C}_b := \{\text{fonctions continues bornées de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{C}_b^1 := \{\phi \text{ dérivables de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ de limite nulle en l'infini} \\ \text{telles que } \phi \text{ et } \phi' \text{ sont bornées}\},$$

$$\mathcal{C}^\infty := \{\text{fonctions infiniment dérivables de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{S} := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty, \forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \sup_{|x|} |x^a \frac{d^b}{dx^b} \phi(x)| < \infty\}.$$

On munit  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_b$  de la norme uniforme

$$\|\phi\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|$$

et  $\mathcal{C}_b^1$  de la norme

$$\|\phi\| := \|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty.$$

$\mathcal{S}$  est l'espace des fonctions à *décroissance rapide*. La topologie sur  $\mathcal{S}$ , définie par la famille de semi-normes

$$|\phi|_{a,b} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^a \frac{d^b}{dx^b} \phi(x)|, \quad a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N},$$

est métrisable et  $\mathcal{S}$  est un espace de Fréchet nucléaire<sup>3</sup> et séparable.

On notera par ailleurs pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{D}_b$ , pour tout  $h$  réel,

$$\tau_h \phi(\cdot) := \phi(\cdot - h).$$

On définit maintenant les espaces de mesures :

$$\mathcal{M}_P := \{\text{mesures de comptage localement finies sur } \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{M}_f^+ := \{\text{mesures finies positives sur } \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{M}_p := \mathcal{M}_P \cap \mathcal{M}_f^+ = \{\text{mesures de comptage finies sur } \mathbb{R}\}.$$

---

<sup>3</sup>Pour la définition et les propriétés des espaces et opérateurs nucléaires, voir [Sch71]

Pour toute  $\mu$  dans  $\mathcal{M}_f^+$ , pour toute fonction  $\phi$  de  $\mathcal{D}_b$ , on peut définir

$$\langle \mu, \phi \rangle := \int \phi(x) d\mu(x).$$

En particulier, pour toute mesure  $\xi$  de  $\mathcal{M}_p$  on peut définir  $(t_n(\xi), n = 1, \dots, N(\xi))$ , la suite des points de  $\xi$  rangés dans l'ordre croissant.  $\xi$  s'écrit alors

$$\xi = \sum_{n=1}^{N(\xi)} \delta_{t_n(\xi)},$$

et pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{D}_b$ ,

$$\langle \xi, \phi \rangle = \sum_{n=1}^{N(\xi)} \phi(t_n(\xi)).$$

Notons par ailleurs pour tout  $h$  réel et toute  $\nu$  de  $\mathcal{M}_f^+$ ,  $\tau_h\nu$  la mesure de  $\mathcal{M}_f^+$  telle que pour tout  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\tau_h\nu(B) := \nu(B + h),$$

où  $B+h := \{x+h, x \in B\}$ . Pour toute  $\phi \in \mathcal{D}_b$ , on a donc  $\langle \tau_h\nu, \phi \rangle = \langle \nu, \tau_h\phi \rangle$ . En particulier, si  $\nu \in \mathcal{M}_p$ ,

$$\tau_h\nu = \sum_{n=1}^{\nu(\mathbb{R})} \tau_h\delta_{t_n(\nu)} = \sum_{n=1}^{\nu(\mathbb{R})} \delta_{t_n(\nu)-h},$$

et

$$\langle \tau_h\nu, \phi \rangle = \langle \nu, \tau_h\phi \rangle = \sum_{n=1}^{\nu(\mathbb{R})} \tau_h\phi(t_n).$$

L'espace  $\mathcal{M}_f^+$  est muni de la topologie *faible*  $\sigma(\mathcal{M}_f^+, \mathcal{C}_b)$  (ou topologie *étroite*), la topologie la moins fine rendant continues les applications de  $\mathcal{M}_f^+$  dans  $\mathbb{R} : \mu \mapsto \langle \mu, \phi \rangle, \phi \in \mathcal{C}_b$ . La topologie étroite est métrisable (on notera la distance induite  $d_{\mathcal{M}_f^+}(\cdot, \cdot)$ ), et  $\mathcal{M}_f^+$  muni de cette topologie est un espace Polonais (*cf* [Pro56]). On munit par ailleurs  $\mathcal{M}_p$  de la trace de la topologie étroite.

### L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'$

Nous noterons  $\mathcal{S}'$  l'espace des *distributions tempérées*, qui est le dual topologique de  $\mathcal{S}$  (ensemble des applications linéaires continues de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}$ ).  $\mathcal{S}'$  est alors

un espace de Fréchet nucléaire et séparable, puisque  $\mathcal{S}$  l'est. On notera alors pour toute distribution  $\mu$  dans  $\mathcal{S}'$  et toute fonction  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ ,

$$\langle \mu, \phi \rangle_{\mathcal{S}'} := \mu(\phi).$$

Il est clair que  $\langle \mu, \phi \rangle_{\mathcal{S}'}$  prolonge  $\langle \mu, \phi \rangle$  pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$ , et on notera, pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$  et toute  $\mu$  de  $\mathcal{M}_f^+$  :

$$\langle \mu, \phi \rangle := \langle \mu, \phi \rangle_{\mathcal{S}'}$$

On rappelle par ailleurs que pour  $\mu$  une distribution de  $\mathcal{S}$ , pour toute fonction  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , la *dérivée au sens des distributions*  $\mu'$  de  $\mu$  est donnée par :

$$\langle \mu', \phi \rangle := -\langle \mu, \phi' \rangle$$

et sa *transformée de Fourier*  $\widehat{\mu}$  est définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \widehat{\mu}, \phi \rangle := \langle \mu, \widehat{\phi} \rangle,$$

où  $\widehat{\phi}$  est la transformée de Fourier de  $\phi$  :

$$\widehat{\phi}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \phi(x) dx.$$

Finalement, on dira qu'une suite de distributions  $\mu^n$  *converge vers  $\mu$  au sens des distributions* et on notera  $\mu^n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \mu$ , si :

$$\langle \mu^n, \phi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \mu, \phi \rangle \text{ pour toute fonction } \phi \text{ dans } \mathcal{S}.$$

### Les espaces de processus

Soit  $0 < T \leq \infty$ . Nous définissons ici les espaces de processus indicés sur  $[0, T]$  (ou sur tout  $\mathbb{R}_+$  si  $T = \infty$ ) et particulièrement, l'espace des processus à valeurs distributions tempérées. Dans toute la suite,  $E$  étant un espace Polonais, nous noterons

$$\mathcal{C}_{T,E} := \mathcal{C}([0, T], E),$$

l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $E$  et

$$\mathcal{D}_{T,E} := \mathcal{D}([0, T], E),$$

l'espace des fonctions càdlàg de  $[0, T]$  dans  $E$  (et de même,  $\mathcal{C}_{\infty,E}$  et  $\mathcal{D}_{\infty,E}$ ). Si  $\mathcal{M}_f^+$  est muni de la topologie étroite,  $\mathcal{C}_{T,\mathcal{M}_f^+}$  et  $\mathcal{D}_{T,\mathcal{M}_f^+}$  sont des espaces Polonais ([EK86], [Daw93]), pour  $t < \infty$ ,  $\mathcal{C}_{T,\mathbb{R}}$  muni de la norme infinie

$$\|g\|_{T,\infty} := \sup_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$$

est un espace Polonais, de même que  $C_{\infty, \mathbb{R}}$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. D'autre part, il existe une distance  $d_T$  sur  $\mathcal{D}_{T, \mathbb{R}}$  telle que cet espace métrique soit complet et séparable (voir par exemple [Rob00], p.352).

Le théorème suivant donne un critère simple pour caractériser  $\mathcal{D}_{T, \mathcal{F}'}$ , où  $\mathcal{F}'$  est le dual topologique d'une espace de Fréchet nucléaire ( $\mathcal{F}'$  est alors lui-même de Fréchet nucléaire) :

**Theorème 6.1.1 (cf. [Ü82])**

*Soit  $\mathcal{F}$ , un espace de Fréchet nucléaire. Une fonction  $\mu$ , est dans  $\mathcal{D}_{T, \mathcal{F}'}$  (resp.  $\mathcal{C}_{T, \mathcal{F}'}$ ) ssi  $\langle \mu, \phi \rangle$  est dans  $\mathcal{D}_{T, \mathbb{R}}$  (resp.  $\mathcal{C}_{T, \mathbb{R}}$ ) pour toute fonction  $\phi$  dans  $\mathcal{F}$ .*

En particulier,  $\zeta$ , est donc dans  $\mathcal{D}_{T, \mathcal{S}'}$  si et seulement si  $\langle \zeta, \phi \rangle$  est dans  $\mathcal{D}_{T, \mathbb{R}}$  pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ .

Revenons au cas où  $E$  est un espace Polonais, et plaçons nous maintenant sur l'espace probabilisable  $(\mathcal{D}_{T, E}, \mathfrak{B}_{\mathcal{D}_{T, E}})$ . On appelle *processus* à valeurs  $E$ , une variable aléatoire à valeurs  $\mathcal{D}_{T, E}$ . On peut généraliser la notion de convergence étroite à tout espace Polonais en disant que la suite de probabilités  $(\mathbf{P}^n, n \in \mathbb{N}^*)$  sur  $E$  converge étroitement (*i.e.* au sens de la topologie faible) si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int F d\mathbf{P}^n = \int F d\mathbf{P},$$

pour toute fonction continue bornée  $F$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . On dira alors qu'une suite de processus  $(X^n, n \in \mathbb{N})$  de  $\mathcal{D}_{T, E}$  converge étroitement (ou *en loi*, au sens de Skorokhod) vers  $X$  dans  $\mathcal{D}_{T, E}$  et on notera

$$X^n \Longrightarrow_{T, E} X,$$

si la suite des probabilités images converge étroitement.

**Définition 6.1.1**

*Une suite de probabilité  $(\mathbf{P}^n, n \in \mathbb{N}^*)$ , sur un espace Polonais  $E$  est dite tendue si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon$  de  $E$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{P}^n [K_\varepsilon] \geq 1 - \varepsilon$ . On dira qu'une suite de variables aléatoires à valeurs  $E$  est tendue si la suite des probabilités images est tendue.*

La topologie induite sur les probabilités sur un espace Polonais est métrisable ([Rud91]). On a alors :

**Theorème 6.1.2 (Théorème de Prohorov)**

*Une suite de probabilités  $(\mathbf{P}^n, n \in \mathbb{N}^*)$  sur  $E$  Polonais est tendue si et seulement si elle est relativement compacte.*

Le résultat suivant donne un critère de tension pour une suite de probabilités sur l'espace probabilisable  $(\mathcal{D}_{T, \mathcal{F}'}, \mathfrak{B}_{\mathcal{D}_{T, \mathcal{F}'}})$ , où  $\mathcal{F}$  est de Fréchet nucléaire. On notera dans toute la suite pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{F}$ , l'application suivante :

$$\mathcal{P}_\phi : \begin{cases} \mathcal{D}_{T, \mathcal{F}'} & \hookrightarrow \mathcal{D}_{T, \mathbb{R}} \\ \mu & \mapsto \langle \mu, \cdot, \phi \rangle. \end{cases}$$

**Theorème 6.1.3 (cf. [Mit83])**

*Soit  $(\mathbf{P}^n, n \in \mathbb{N})$  une suite de probabilités sur  $(\mathcal{D}_{T, \mathcal{F}'}, \mathfrak{B}_{\mathcal{D}_{T, \mathcal{F}'}})$ , telle que pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{F}$ ,  $(\mathbf{P}^n \mathcal{P}_\phi, n \in \mathbb{N})$  est tendue dans  $\mathcal{D}_{T, \mathbb{R}}$ . Alors,  $(\mathbf{P}^n, n \in \mathbb{N})$  est tendue dans  $\mathcal{D}_{T, \mathcal{F}'}$ .*

**6.1.2 L'équation de transport intégrale dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$** 

Nous introduisons ici l'équation de transport intégrale dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$ , une équation intégrale dans l'espace des processus càdlàg à valeurs dans l'espace des distributions tempérées,  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$ .

Nous rappelons ici le résultat standard ([Eva98]) sur la résolution de l'équation de transport dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . Soit l'équation suivante d'inconnue  $u(x, t)$  :

$$(\mathbf{E}) \quad \begin{cases} \partial_t u = -b \partial_x u + f \text{ dans } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = h \text{ sur } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

où  $b$  est un réel,  $f$  est une fonction  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  et  $h$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$  et  $t$  dans  $\mathbb{R}_+$ , l'unique solution de  $(\mathbf{E})$  est donnée par :

$$u(x, t) = h(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds. \quad (6.1)$$

La résolution de cette équation utilise la méthode des caractéristiques.

**Definition 6.1.2**

*Soient  $K$  dans  $\mathcal{S}'$  et  $(g_t, t \geq 0)$ , une fonction de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  telle que  $g_0 \equiv 0$ , la distribution nulle. On dit que  $(\eta_t, t \geq 0)$  vérifie l'équation de transport  $(\mathbf{E}_{K,g})$  dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  si pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  et pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\langle \eta_t, \phi \rangle = \langle K, \phi \rangle + \int_0^t \langle (\eta_s)', \phi \rangle ds + \langle g_t, \phi \rangle. \quad (6.2)$$

Il apparaît d'une part que  $\eta_0 \equiv K$ . Par ailleurs, notons que  $(\eta_t, t \geq 0)$  une solution de  $(\mathbf{E}_{K,g})$  est à valeurs dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$ , puisque la fonction  $(t \mapsto \langle g_t, \phi \rangle)$  est càdlàg pour toute fonction  $\phi$  de  $\mathcal{S}$ .

Nous raisonnons par analogie avec le résultat précédent pour montrer que cette équation intégrale dans l'espace des fonctions càdlàg à valeurs  $\mathcal{S}'$  admet une unique solution, et explicitons cette solution. On résout ainsi l'équation de la même façon, en assimilant la dérivée en espace  $\partial_x u$  pour les fonctions de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}+, \mathbb{R})$  avec la dérivée au sens des distributions pour les fonctions de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  :

**Theorème 6.1.4**

*L'équation de transport intégrale  $(\mathbf{E}_{K,g})$  admet une unique solution  $L$  dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$ , vérifiant pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  et pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\langle L_t, \phi \rangle = \langle K, \tau_t \phi \rangle + \langle g_t, \phi \rangle - \int_0^t \langle g_s, \tau_{t-s} \phi' \rangle ds. \quad (6.3)$$

On commence par donner le résultat technique suivant :

**Lemme 6.1.5**

*Pour toute  $\zeta$  dans  $\mathcal{S}'$ , toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , l'application  $(t \mapsto \langle \zeta, \tau_t \phi \rangle)$  est dérivable et pour tout  $t$  :*

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta, \tau_t \phi \rangle = \langle \zeta', \tau_t \phi \rangle.$$

*preuve du Lemme 6.1.5.*

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle \zeta, \tau_{t+h} \phi - \tau_t \phi \rangle \\ &= \langle \zeta, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\tau_t \phi(\cdot - h) - \tau_t \phi) \rangle = -\langle \zeta, (\tau_t \phi)' \rangle = \langle \zeta', \tau_t \phi \rangle. \end{aligned}$$

□

*preuve du Théorème 6.1.4. Unicité*

Soit  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  et deux solutions  $L$  et  $M$  de  $(\mathbf{E}_{K,g})$ . Notons pour tout  $t$  réel la distribution  $N_t$  suivante :

$$N_t := L_t - M_t.$$

(6.2) implique en particulier que pour tout  $t \geq 0$  :

$$\langle N_t, \phi \rangle = \int_0^t \langle (N_s)', \phi \rangle ds,$$

soit pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  :

$$\frac{d}{dt} \langle N_t, \phi \rangle = \langle (N_t)', \phi \rangle \quad \text{avec } \langle N_0, \phi \rangle = 0.$$

On a alors :

$$\frac{d}{dt} \langle \widehat{N}_t, \phi \rangle = \frac{d}{dt} \langle N_t, \widehat{\phi} \rangle = \langle (N_t)', \widehat{\phi} \rangle = -\langle N_t, (\widehat{\phi})' \rangle.$$

En notant pour tout  $\xi$ ,  $\psi(\xi) := -i\xi$ , l'équation précédente revient donc à :

$$\frac{d}{dt} \langle \widehat{N}_t, \phi \rangle = -\langle N_t, \widehat{\psi\phi} \rangle = -\langle \widehat{N}_t, \psi\phi \rangle = -\langle \psi\widehat{N}_t, \phi \rangle.$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient donc pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  et pour tout  $t$  :

$$\langle \widehat{N}_t \phi \rangle = \langle \widehat{N}_0 e^{\psi t}, \phi \rangle = \langle \widehat{N}_0, e^{\psi t} \phi \rangle = \langle N_0, e^{\psi t} \phi \rangle = 0.$$

Finalement, pour tout  $t$ ,  $N_t$  est donc la distribution de transformée de Fourier identiquement nulle : c'est la distribution nulle.

### **Existence**

Soit  $t \geq 0$ ,  $\phi$  une fonction de  $\mathcal{S}$  et  $L_t$  la fonction de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  définie par (6.3).

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle (L_s)', \phi \rangle ds &= - \int_0^t \langle L_s, \phi' \rangle ds \\ &= - \int_0^t \langle K, \tau_s \phi' \rangle ds - \int_0^t \langle g_s, \phi' \rangle ds + \int_0^t \int_0^s \langle g_r, \tau_{s-r} \phi'' \rangle dr ds \\ &= \int_0^t \langle K', \tau_s \phi \rangle ds - \int_0^t \langle g_s, \phi' \rangle ds - \int_0^t \int_r^t \langle (g_r)', \tau_{s-r} \phi' \rangle ds dr. \end{aligned}$$

On applique le lemme 6.1.5 au premier et au dernier terme :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle (L_s)', \phi \rangle ds &= \int_0^t \frac{d}{ds} (\langle K, \tau_s \phi \rangle) ds - \int_0^t \langle g_s, \phi' \rangle ds \\
&\quad - \int_0^t \int_r^t \frac{d}{ds} (\langle g_r, \tau_{s-r} \phi' \rangle) ds dr \\
&= \langle K, \tau_t \phi \rangle - \langle K, \phi \rangle - \int_0^t \langle g_s, \phi' \rangle ds - \int_0^t (\langle g_r, \tau_{t-r} \phi' \rangle - \langle g_r, \phi' \rangle) dr \\
&= \langle K, \tau_t \phi \rangle - \langle K, \phi \rangle - \int_0^t \langle g_s, \tau_{t-s} \phi' \rangle ds.
\end{aligned}$$

L'équation précédente avec (6.3) donne donc pour tout  $t \geq 0$  et pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  :

$$\langle L_t, \phi \rangle = \langle K, \phi \rangle + \int_0^t \langle (L_s)', \phi \rangle ds + \langle g_t, \phi \rangle,$$

et autrement dit  $(L_t, t \geq 0)$  est l'unique solution dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  de  $(\mathbf{E}_{K,g})$ .  $\square$

## 6.2 Processus des profils de la file EDF

Nous introduisons ici le descripteur d'état pour une file d'attente  $M/M/1/1+GI-EDF$ . Nous considérons un processus d'entrées Poissonien  $(N_t, t \geq 0)$ , de points  $(T_k, k \in \mathbb{N}^*)$  et d'intensité  $\lambda$ , de clients demandant un service de durée exponentielle de paramètre  $\mu$ . Le  $k$ -ième client est affecté à son entrée d'un délai éliminatoire jusqu'au début de service  $D_k$ , de loi générale celle de  $D$ , variable aléatoire p.s. strictement positive. Les clients sont traités suivant la discipline de service EDF non-préemptive.

Rappelons les définitions des *processus de performances* caractérisant la file d'attente. Pour tout  $t$  :

$X_t :=$  Nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ ,

$Q_t := (X_t - 1)^+ =$  Nombre de clients en attente à l'instant  $t$ ,

$S_t :=$  Nombre de clients servis jusqu'à  $t$ ,

$P_t := N_t - X_t - S_t =$  Nombre de clients perdus jusqu'à  $t$ .

Comme précisé en introduction, aucun de ces processus mono-dimensionnels classiques n'est markovien et on doit avoir recours à une autre description qui soit exhaustive. Nous définissons donc un nouveau processus descripteur : à l'instant  $t$ , si le buffer est non vide, rappelons que l'on note pour  $i = 1, \dots, Q_t$ ,  $R_i(t)$  le délai résiduel du  $i$ -ème client dans le buffer dans l'ordre des priorités :

$$R_1(t) < R_2(t) < \dots < R_{Q_t}(t).$$

Notons par ailleurs, si au moins un client a été perdu à  $t$  ( $P_t \neq 0$ ), pour  $i = 1, \dots, P_t$ ,  $R_{-i}(t)$ , le temps écoulé depuis l'élimination du  $i$ -ème client

dans l'ordre inverse de l'ordre chronologique (ce temps écoulé est aussi un « délai résiduel », mais il est négatif et concerne un client qui a été perdu) :

$$R_{-P_t}(t) < R_{-P_t-1}(t) < \dots < R_{-1}(t).$$

Ainsi, pour tout  $i$  dans  $\{-P_t, \dots, -1, 1, \dots, Q_t\}$ , si on note par  $k_i$ , le numéro du client correspondant dans l'ordre des arrivées,

$$R_i(t) = D_{k_i} - (T_{k_i} - t)$$

et le serveur commence le service du client de délai résiduel  $R_1(t)$  à l'instant  $t$  où il termine un service.

On définit le *profil* du système par :

$$\nu_t := \sum_{i=1}^{Q_t} \delta_{R_i(t)} + \sum_{i=1}^{P_t} \delta_{R_{-i}(t)},$$

où pour tout réel  $x$ ,  $\delta_x$  est la masse de Dirac en  $x$ . Le profil est donc une mesure ponctuelle, qui place une unité de masse à chaque délai résiduel à  $t$  d'un client présent dans le buffer, ou déjà éliminé, à cet instant. A chaque instant  $t$ ,  $\nu_t$  appartient bien p.s. à  $\mathcal{M}_p$ . On définit par ailleurs la filtration

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\nu_s(\mathfrak{B}), s \leq t, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})).$$

Étudions en détail la dynamique du processus des profils  $(\nu_t, t \geq 0)$ . D'une part, le processus évolue continûment en fonction du temps : les délais résiduels des clients décroissent à la vitesse unité et donc tous les points se décalent vers la gauche à cette vitesse. Les clients perdus sont ceux correspondant aux atomes qui en dérivant sont passés en dessous de 0. A chaque instant d'arrivée, un point s'ajoute à la mesure en  $d$ , le délai initial du client qui entre dans le système à cet instant. Enfin, à chaque fin de service, un point est ôté de la mesure : l'atome correspondant au client qui rentre en service,

$$R_1(t) := t_1(\nu_t),$$

autrement dit, le plus petit atome positif de la mesure. Cette dynamique est résumée par la figure 6.2.

Étudions les variations infinitésimales de ce processus. Notons pour tout  $t$ ,  $A_t$ , le temps à attendre avant la première arrivée après  $t$  et pour tout  $t$  tel que  $X_t > 0$ ,  $F_t$  le temps à attendre avant le premier départ du serveur après  $t$ . Alors, pour tous  $t, h > 0$  :

$$\nu_{t+h} = \begin{cases} \tau_h \nu_t & \text{si } A_t > h \text{ et } F_t > h \text{ ou } Q_t = 0, \\ \tau_h \nu_t - \delta_{R_1(t)-h} & \text{si } A_t > h, F_t < h \text{ et } Q_t > 0, \\ \tau_h \nu_t + \delta_{d_k - (t+h-t_k)} & \text{si } A_t < h \text{ et } F_t > h \text{ ou } Q_t = 0 \\ & \text{et le client entre à } t_k \text{ affecté d'un délai } d_k, \end{cases}$$

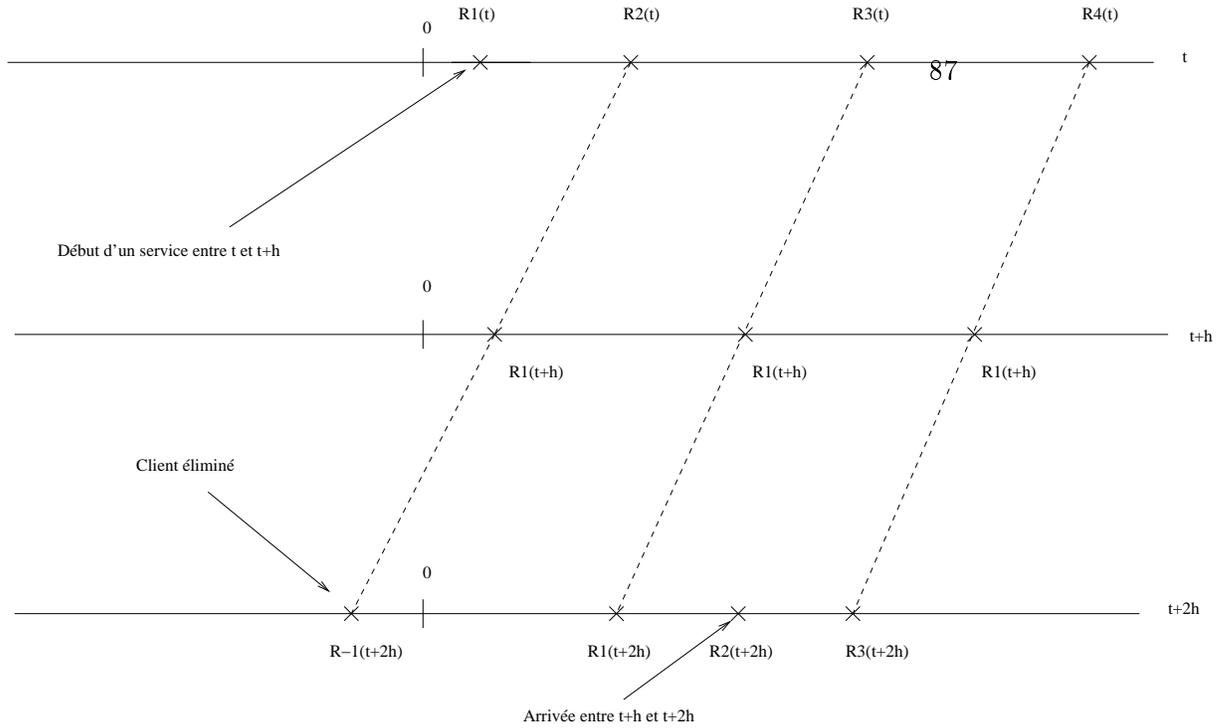


Figure 6.1: Dynamique du processus des profils

les événements plus complexes (plusieurs arrivées, plusieurs fins de service ou arrivées et fins de services) entre  $t$  et  $t+h$  étant de probabilité  $o(h)$ . En particulier, cette dynamique montre que le processus  $(\langle \nu_t, \phi \rangle, t \geq 0)$  est dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathbb{R}}$  pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}_b$ .

$\mathcal{M}_f^+$  muni de la topologie étroite est localement compact séparable, et peut être compactifié suivant la compactification de Watanabe ([Daw93]) :  $\overline{\mathcal{M}_f^+} = \mathcal{M}_f^+ \cup \infty_{\mathcal{M}_f^+}$  où  $\infty_{\mathcal{M}_f^+}$  est le *point à l'infini* tel que  $\nu^n \rightarrow \infty_{\mathcal{M}_f^+}$  si et seulement si  $(\nu^n, n \in \mathbb{N}^*)$  sort de tout compact à partir d'un certain rang. Soit  $\mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions continues de  $\mathcal{M}_f^+$  dans  $\mathbb{R}$ , de limite nulle en  $\infty_{\mathcal{M}_f^+}$ . On munit  $\mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$  de la norme du sup :

$$\|F\|_{\infty} := \sup_{\nu \in \mathcal{M}_f^+} |F(\nu)|.$$

### Proposition 6.2.1

*Le processus  $(\nu_t, t \geq 0)$  est un processus de Feller faible relativement*

à  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  dont le générateur infinitésimal est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}F(\nu) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\tau_h \nu) - F(\nu)}{h} - \left( \lambda + \mu \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \right) F(\nu) \\ &\quad + \mu F(\nu - \delta_{t_1(\nu)}) \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \int F(\nu + \delta_d) d\mathbf{P}_D(d). \end{aligned} \quad (6.4)$$

pour toute  $F$  appartenant au domaine de  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R}) \cap \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\tau_h \cdot) - F}{h} \text{ existe} \right\}.$$

*Preuve.* Pour tous  $t, h \geq 0$  et toute fonction mesurable bornée  $F$  de  $\mathcal{M}_f^+$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[F(\nu_{t+h}) | \mathcal{F}_t] &= \left( 1 - \left( \lambda + \mu \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \right) h \right) F(\tau_h \nu_t) \\ &\quad + \mu h F(\tau_h \nu_t - \tau_h \delta_{t_1(\nu_t)}) \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \\ &\quad + \lambda h \int F(\tau_h \nu_t + \tau_h \delta_d) d\mathbf{P}_D(d) + o(h) \\ &=: T_h F(\nu_t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Le processus  $(\nu_t, t \geq 0)$  est donc un processus de Markov faible homogène suivant la définition (iii) p.18 de [Daw93], dont la fonction de transition est donnée par  $(T_h, h \geq 0)$ .

$\mathcal{M}_f^+$  muni de la topologie étroite étant localement compact séparable, on peut appliquer la proposition 2.4 p.89 de [RY94] :  $(\nu_t, t \geq 0)$  est un processus de Feller ssi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall h > 0, \forall F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{M}_p, \mathbb{R}), T_h F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{M}_p, \mathbb{R}), \\ \forall F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{M}_p, \mathbb{R}), \forall \nu \in \mathcal{M}_f^+, T_h F(\nu) \xrightarrow{h \rightarrow 0} F(\nu). \end{array} \right.$$

Soit  $F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$ . Tout d'abord, (6.5) indique clairement que pour tout  $h \geq 0$ ,  $T_h F$  est dans  $\mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$ , puisqu'en particulier les applications qui à  $\nu \in \mathcal{M}_p$  associent son premier atome positif et sa masse positive sont continues pour la topologie étroite ([EK86] p. 402, [Bil68]). On a ensuite pour toute  $\nu \in \mathcal{M}_p$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h F(\nu) = \lim_{h \rightarrow 0} F(\tau_h \nu) = F(\nu),$$

puisque  $d_{\mathcal{M}_f^+}(\tau_h \nu, \nu) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  (i.e.  $\int f d\tau_h \nu \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int f d\nu$  pour toute  $f \in \mathcal{C}_b$ , par convergence dominée) et  $F$  est continue.  $(\nu_t, t \geq 0)$  est donc un processus de Feller faible. Son générateur est alors défini pour tout  $F \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  par :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h F - F}{h}.$$

**Lemme 6.2.2**

**Pour toute**  $F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \|F(\tau_h \cdot) - F\|_\infty = 0$ .

*preuve du lemme 6.2.2.* Remarquons tout d'abord que l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R}) \\ F(\cdot) \longmapsto F(\tau_h \cdot) \end{cases}$$

est continue. l'application étant linéaire, il suffit de vérifier que pour toute suite  $(F_n, n \in \mathbb{N}^*)$  tendant vers 0, la suite  $(F_n(\tau_h \cdot), n \in \mathbb{N}^*)$  tend vers 0. Pour cela il suffit de remarquer que pour tout  $F$  et tout  $h > 0$  :

$$\sup_{\nu \in \mathcal{M}_f^+} |F(\tau_h \nu)| = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_f^+} |F(\nu)|.$$

Soit  $F$  dans  $\mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$ . L'ensemble  $\mathcal{C}_K(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $\mathcal{M}_f^+$  dans  $\mathbb{R}$  à support compact dans  $\mathcal{M}_f^+$  est dense dans  $\mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$ . Il existe donc  $\tilde{F} \in \mathcal{C}_K(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $k$  tel que  $|h| \leq k$  implique :

$$\begin{aligned} \|F(\tau_h \cdot) - F\|_\infty &\leq \|F(\tau_h \cdot) - \tilde{F}(\tau_h \cdot)\|_\infty + \|\tilde{F}(\tau_h \cdot) - \tilde{F}\|_\infty + \|\tilde{F} - F\|_\infty \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tilde{F}(\tau_h \cdot) - \tilde{F}\|_\infty. \end{aligned}$$

On est donc ramené à prouver que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{F}(\tau_h \cdot) - \tilde{F}\|_\infty = \limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\nu \in K} |\tilde{F}(\tau_h \nu) - \tilde{F}(\nu)| = 0, \quad (6.6)$$

où  $K$  est le support compact de  $\tilde{F}$ .  $\tilde{F}$  est donc uniformément continue sur  $K$  : pour tout  $\varepsilon$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\nu, \tilde{\nu} \in K, d_{\mathcal{M}_f^+}(\nu, \tilde{\nu}) < \eta \implies |\tilde{F}(\nu) - \tilde{F}(\tilde{\nu})| < \varepsilon.$$

En prenant le  $h_0 > 0$  tel que  $\sup_{|h| < h_0} d_{\mathcal{M}_f^+}(\nu, \tau_h \nu) < \eta$  et pour tout  $|h| \leq h_0$ ,  $\tau_h \nu \in K$ , on a donc :

$$\sup_{|h| < h_0} \sup_{\nu \in K} |\tilde{F}(\nu) - \tilde{F}(\tau_h \nu)| < \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

On a pour tout  $F \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  et tout  $h > 0$  :

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (T_h F - F) - \mathcal{A}F \right\|_\infty \\
& \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\nu \in \mathcal{M}_f^+} \left| \frac{F(\tau_h \nu) - F(\nu)}{h} - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{F(\tau_h \nu) - F(\nu)}{h} \right| \\
& \quad + (\lambda + \mu) \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\nu \in \mathcal{M}_p} |F(\tau_h \nu) - F(\nu)| \\
& \quad + \mu \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\nu \in \mathcal{M}_p} |F(\tau_h(\nu - \delta_{t_1(\nu)})) - F(\nu - \delta_{t_1(\nu)})| \\
& \quad + \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\nu \in \mathcal{M}_p} \mathbf{E} [|F(\tau_h(\nu - \delta_D)) - F(\nu - \delta_D)|] \\
& \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\nu \in \mathcal{M}_f^+} \left| \frac{F(\tau_h \nu) - F(\nu)}{h} - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{F(\tau_h \nu) - F(\nu)}{h} \right| \\
& \quad + 2(\lambda + \mu) \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\nu \in \mathcal{M}_f^+} |F(\tau_h \cdot) - F|, \quad (6.7)
\end{aligned}$$

par convergence dominée dans dernier le terme de la première inégalité. Par définition du domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , il existe une fonction  $\mathfrak{B}F$  de  $\mathcal{C}_0(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R})$  telle que :

$$\mathfrak{B}F = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{F(\tau_h \cdot) - F}{h} \right\|_\infty,$$

et en particulier pour toute  $\nu \in \mathcal{M}_f^+$ ,

$$\mathfrak{B}F(\nu) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\tau_h \nu) - F(\nu)}{h}.$$

Le premier terme du terme de droite de (6.7) est donc nul, de même que la limite dans le deuxième terme, d'après le lemme 6.2.2.  $\square$

### 6.3 Les processus de transport renormalisés

Nous introduisons ici une classe de processus à valeurs  $\mathcal{M}_f^+$ , généralisant le processus des profils de la file *EDF*. Dans toute cette partie, nous fixons les paramètres suivants :

- $\lambda$  et  $\mu$ , deux réels positifs,
- une application

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \mathcal{M}_p & \hookrightarrow \mathbb{R} \\ \zeta & \mapsto \mathcal{R}(\zeta) := t_{j(\zeta)}(\zeta), \end{cases}$$

où  $j(\zeta)$  est un entier déterministe. En d'autres termes, l'application déterministe  $\mathcal{R}$  associe à une mesure ponctuelle, l'un de ses atomes ( pour  $j$  fixé ou, par exemple, pour le plus grand atome),

- $D$ , une variable aléatoire réelle strictement positive.

**Definition 6.3.1**

*Soit  $(\nu_t, t \geq 0)$ , un processus à valeurs  $\mathcal{M}_p$  tel que pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_b$ , le processus  $(\langle \nu_t, f \rangle, t \geq 0)$  est dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathbb{R}}$ .*

*Soit  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  la filtration associée. On dit que  $(\nu_t, t \geq 0)$  est un processus de transport associé à  $(\lambda, \mu, \mathcal{R}, D)$  si il est un processus de Feller dont le générateur  $\mathcal{A}$  est donné par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}F(\nu) = & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( F(\tau_h \nu) - F(\nu) \right) - \left( \lambda + \mu \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \right) F(\nu) \\ & + \mu F(\nu - \delta_{\mathcal{R}(\nu)}) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \int F(\nu + \delta_d) d\mathbf{P}_D(d), \end{aligned} \quad (6.8)$$

*pour toute  $F$  appartenant à  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .*

Les processus de transport satisfont ainsi un problème de martingale particulier. On a le résultat suivant :

**Lemme 6.3.1**

*Pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{S}$ , le processus  $(M_\phi(t), t \geq 0)$  suivant est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale de carré intégrable, à trajectoires p.s. càdlàg :*

$$\begin{aligned} M_\phi(t) = & \langle \nu_t, \phi \rangle - \langle \nu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \nu_s, \phi' \rangle ds \\ & + \mu \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\nu_s)) \mathbf{1}_{\{\nu_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \lambda t \mathbf{E}[\phi(D)]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

*Son processus croissant est donné pour tout  $t \geq 0$  par :*

$$\langle M_\phi \rangle_t = \mu \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\nu_s)) \mathbf{1}_{\{\nu_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \lambda t \mathbf{E}[\phi^2(D)]. \quad (6.10)$$

*Preuve.* Soit  $\phi \in \mathcal{S}$ . On définit l'application  $\Pi_\phi$  de  $\mathcal{M}_f^+$  dans  $\mathbb{R}$  pour toute  $\nu$  par :

$$\Pi_\phi(\nu) := \langle \nu, \phi \rangle. \quad (6.11)$$

$\Pi_\phi$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \Pi_\phi(\tau_h \nu) - \Pi_\phi(\nu) \right) &= \sum_{i=1}^{\nu(\mathbb{R})} \frac{1}{h} (\phi(t_i(\nu) - h) - \phi(t_i(\nu))) \\ &= - \sum_{i=1}^{\nu(\mathbb{R})} \phi'(t_i(\nu)) = -\langle \nu, \phi' \rangle, \end{aligned} \quad (6.12)$$

le générateur  $\mathcal{A}$  appliqué à  $\Pi_\phi$  donne donc pour toute  $\nu$  de  $\mathcal{M}_p$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\Pi_\phi(\nu) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \Pi_\phi(\tau_h \nu) - \Pi_\phi(\nu) \right) - \left( \lambda + \mu \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \right) \Pi_\phi(\nu) \\
&\quad + \mu \Pi_\phi(\nu - \delta_{\mathcal{R}(\nu)}) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \int \Pi_\phi(\nu + \delta_d) d\mathbf{P}_D(d) \\
&= -\langle \nu, \phi' \rangle - \left( \lambda + \mu \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \right) \langle \nu, \phi \rangle \\
&\quad + \mu \left( \langle \nu, \phi \rangle - \langle \delta_{\mathcal{R}(\nu)}, \phi \rangle \right) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \left( \langle \nu, \phi \rangle + \int \langle \delta_d, \phi \rangle d\mathbf{P}_D(d) \right) \\
&= -\langle \nu, \phi' \rangle + \mu \phi(\mathcal{R}(\nu)) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \mathbf{E}[\phi(D)]. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Regardons maintenant le générateur correspondant à la fonction  $\Pi_\phi^2$  définie pour toute  $\nu$  par  $\Pi_\phi^2(\nu) = \langle \nu, \phi \rangle^2$ .  $\Pi_\phi^2$  est dans  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , et on a avec (6.12) :

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \Pi_\phi^2(\tau_h \nu) - \Pi_\phi^2(\nu) \right) &= \frac{d}{dx} \left( \Pi_\phi(\tau_x \nu) \right)^2(0) \\
&= 2\Pi_\phi(\nu) \frac{d}{dx} \left( \Pi_\phi(\tau_x \nu) \right)(0) = -2\langle \nu, \phi \rangle \langle \nu, \phi' \rangle.
\end{aligned}$$

Le générateur appliqué à  $\Pi_\phi^2$  est alors donné pour toute  $\nu$  par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\Pi_\phi^2(\nu) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \Pi_\phi^2(\tau_h \nu) - \Pi_\phi^2(\nu) \right) - \left( \lambda + \mu \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \right) \Pi_\phi^2(\nu) \\
&\quad + \mu \Pi_\phi^2(\nu - \delta_{\mathcal{R}(\nu)}) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \int \Pi_\phi^2(\nu + \delta_d) d\mathbf{P}_D(d) \\
&= -2\langle \nu, \phi \rangle \langle \nu, \phi' \rangle - \left( \lambda + \mu \mathbf{1}_{\{\nu_t(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \right) \langle \nu, \phi \rangle^2 \\
&\quad + \mu \left\{ \langle \nu, \phi \rangle - \langle \delta_{\mathcal{R}(\nu)}, \phi \rangle \right\}^2 \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} \\
&\quad + \lambda \int \left\{ \langle \nu, \phi \rangle + \langle \delta_d, \phi \rangle \right\}^2 d\mathbf{P}_D(d) \\
&= 2\langle \nu, \phi \rangle \left( -\langle \nu, \phi' \rangle - \mu \phi(\mathcal{R}(\nu)) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \mathbf{E}[\phi(D)] \right) \\
&\quad + \mu \phi^2(\mathcal{R}(\nu)) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \mathbf{E}[\phi^2(D)] \\
&= 2\langle \nu, \phi \rangle \mathcal{A}\Pi_\phi(\nu) + \mu \phi^2(\mathcal{R}(\nu)) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} + \lambda \mathbf{E}[\phi^2(D)]. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Dynkin ([EK86], proposition 1.7. p.162, [Dyn65]), pour toute fonction  $F \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , le processus suivant est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale :

$$M^F(t) := F(\nu_t) - F(\nu_0) - \int_0^t \mathcal{A}F(\nu_s) ds.$$

Appliquons ce résultat à  $F := \Pi_\phi$ , puis  $F := \Pi_\phi^2$ . Tout d'abord, avec (6.13), le processus suivant est une martingale :

$$\begin{aligned} M_\phi(t) &:= M^{\Pi_\phi}(t) = \Pi_\phi(\nu_t) - \Pi_\phi(\nu_0) - \int_0^t \mathcal{A}\Pi_\phi(\nu_s) ds \\ &= \langle \nu_t, \phi \rangle - \langle \nu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \nu_s, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\nu)) \mathbf{1}_{\{\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \lambda t \mathbf{E}[\phi(D)], \end{aligned}$$

et on retrouve le processus défini par (6.9). Par ailleurs,  $(M_\phi(t), t \geq 0)$  est p.s. à trajectoires càdlàg car le processus  $(\langle \nu_t, \phi \rangle, t \geq 0)$  l'est.

Nous calculons maintenant son crochet. Tout d'abord, avec (6.14), le processus suivant est une martingale :

$$\begin{aligned} N_\phi(t) &:= M^{\Pi_\phi^2}(t) = \Pi_\phi^2(\nu_t) - \Pi_\phi^2(\nu_0) - \int_0^t \mathcal{A}\Pi_\phi^2(\nu_s) ds \\ &= \langle \nu_t, \phi \rangle^2 - \langle \nu_0, \phi \rangle^2 - \int_0^t 2\langle \nu_s, \phi \rangle \mathcal{A}\Pi_\phi(\nu_s) ds \\ &\quad - \mu \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\nu_s)) \mathbf{1}_{\{\nu_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \lambda t \mathbf{E}[\phi^2(D)]. \quad (6.15) \end{aligned}$$

Ensuite, remarquons avec (6.9) que :

$$\langle M_\phi \rangle_t = \langle \langle \nu, \phi \rangle \rangle_t. \quad (6.16)$$

La formule d'intégration par parties appliquée à la semi-martingale  $(\langle \nu_t, \phi \rangle, t \geq 0)$  donne :

$$\begin{aligned} \langle \nu_t, \phi \rangle^2 &= \langle \nu_0, \phi \rangle^2 + 2 \int_0^t \langle \nu_s, \phi \rangle d\langle \nu_s, \phi \rangle + \langle \langle \nu, \phi \rangle \rangle_t \\ &= \langle \nu_0, \phi \rangle^2 + 2 \int_0^t \langle \nu_s, \phi \rangle dM_\phi(t) + 2 \int_0^t \langle \nu_s, \phi \rangle \mathcal{A}\Pi_\phi(\nu_s) ds + \langle \langle \nu, \phi \rangle \rangle_t, \end{aligned} \quad (6.17)$$

avec (6.9). (6.15) avec (6.17) implique donc pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \langle \nu_s, \phi \rangle dM_\phi(t) + \langle \langle \nu, \phi \rangle \rangle_t \\ = N_\phi(t) + \mu \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\nu_s)) \mathbf{1}_{\{\nu_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \lambda t \mathbf{E}[\phi^2(D)]. \end{aligned}$$

Finalement, avec (6.16), et en identifiant les processus à variations finies dans la dernière égalité :

$$\langle M_\phi \rangle_t = \langle \langle \nu, \phi \rangle \rangle_t = \mu \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\nu_s)) \mathbf{1}_{\{\nu_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \lambda t \mathbf{E}[\phi^2(D)].$$

En particulier  $\phi$  est bornée par  $\|\phi\|_\infty$ , on a donc

$$\mathbf{E}[\langle M_\phi \rangle_t] \leq (\lambda + \mu)t \|\phi\|_\infty^2 < \infty,$$

et donc  $(M_\phi(t), t \geq 0)$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale de carré intégrable.  $\square$

Nous présentons maintenant la martingale correspondant à une renormalisation  $(\bar{\nu}_t, t \in \mathbb{R}^+)$  d'un processus de transport  $(\nu_t, t \in \mathbb{R}^+)$  correspondant à un triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  :

### Definition 6.3.2

*Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  trois réels positifs. On appelle renormalisation d'un processus  $(\xi_t, t \geq 0)$  à valeurs  $\mathcal{M}_f^+$  associée au triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , le processus  $(\bar{\xi}_t, t \geq 0)$  à valeurs  $\mathcal{M}_f^+$  défini pour tout  $t$  et pour tout  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  par :*

$$\bar{\xi}_t(B) := \frac{1}{\beta} \xi_{\alpha t}(\gamma B),$$

où  $\gamma B := \{\gamma x, x \in B\}$ .

En particulier, la renormalisation d'un processus  $\zeta$  à valeurs  $\mathcal{M}_p$  est donc le processus  $\bar{\zeta}$  à valeurs  $\mathcal{M}_p$  accéléré en temps avec le facteur  $\alpha$ , dont le poids de chaque atome est divisé par  $\beta$  et dont les atomes à l'instant  $\alpha t$  sont ceux du processus original à l'instant  $t$ , divisés par  $\gamma$  :

$$\bar{\zeta}_t = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{\zeta_{\alpha t}(\mathbb{R})} \delta_{t_i(\zeta_{\alpha t})/\gamma},$$

et pour toute fonction  $f \in \mathcal{D}_b$ ,

$$\langle \bar{\zeta}_t, f \rangle = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{\zeta_{\alpha t}(\mathbb{R})} f\left(\frac{t_i(\zeta_{\alpha t})}{\gamma}\right).$$

Nous considérons finalement que l'application  $\mathcal{R}$  sélectionne à l'instant  $t$  sur la mesure renormalisée  $\bar{\zeta}_t$  l'atome

$$\mathcal{R}(\bar{\zeta}) = \frac{\mathcal{R}(\zeta)}{\gamma}.$$

### Lemme 6.3.2

*Soit  $(\nu_t, t \geq 0)$ , un processus de transport associé à  $(\lambda, \mu, \mathcal{R}, D)$ ,  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ ,  $(\bar{\nu}_t, t \geq 0)$ , la renormalisation de ce processus associée à*

$(\alpha, \beta, \gamma)$  et la tribu  $\mathcal{G}_t := \sigma(\nu_{\alpha s}(B), s \leq t, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ . Le processus défini pour tout  $t \geq 0$  par

$$\begin{aligned} \bar{M}_\phi(t) &:= \langle \bar{\nu}_t, \phi \rangle - \langle \bar{\nu}_0, \phi \rangle + \frac{\alpha}{\gamma} \int_0^t \langle \bar{\nu}_s, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \frac{\mu\alpha}{\beta} \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \frac{\lambda\alpha}{\beta} t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D}{\gamma} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

est une  $\mathcal{G}_t$ -martingale de carré intégrable à trajectoires p.s. càdlàg. De plus, son crochet est donné pour tout  $t \geq 0$  par :

$$\langle \bar{M}_\phi \rangle_t = \frac{\mu\alpha}{\beta^2} \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \frac{\lambda\alpha}{\beta^2} t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D}{\gamma} \right) \right]. \quad (6.19)$$

*Preuve.* Soit  $\psi$  définie par  $\psi(\cdot) = \frac{1}{\beta} \phi(\cdot/\gamma)$ . En particulier,  $\psi$  est une fonction de  $\mathcal{S}$  et d'après le lemme 6.3.1, le processus réel  $(M_\psi(t), t \geq 0)$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale de carré intégrable. Autrement dit, le processus

$$(\bar{M}_\phi(t), t \geq 0) := (M_\psi(\alpha t), t \geq 0)$$

est une  $\mathcal{G}_t$ -martingale de carré intégrable, à trajectoires p.s. càdlàg. Or, pour tout  $t$ ,

$$\begin{aligned} M_\psi(\alpha t) &= \langle \nu_{\alpha t}, \psi \rangle - \langle \nu_0, \psi \rangle + \int_0^{\alpha t} \langle \nu_s, \psi' \rangle ds \\ &\quad + \mu \int_0^{\alpha t} \psi(\mathcal{R}(\nu_s)) \mathbf{1}_{\{\nu_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \lambda \alpha t \mathbf{E} [\psi(D)] \\ &= \langle \nu_{\alpha t}, \psi \rangle - \langle \nu_0, \psi \rangle + \alpha \int_0^t \langle \nu_{\alpha s}, \psi' \rangle ds \\ &\quad + \mu \alpha \int_0^t \psi(\mathcal{R}(\nu_{\alpha s})) \mathbf{1}_{\{\nu_{\alpha s}(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \lambda \alpha t \mathbf{E} [\psi(D)]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

On a par ailleurs les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \nu_{\alpha t}, \psi \rangle &= \sum_{i=1}^{\nu_{\alpha t}(\mathbb{R}^+)} \psi(t_i(\nu_{\alpha t})) = \langle \bar{\nu}_t, \phi \rangle, \\ \langle \nu_{\alpha s}, \psi' \rangle &= \frac{1}{\beta\gamma} \sum_{i=1}^{\nu_{\alpha s}(\mathbb{R}_+^*)} \phi' \left( \frac{t_i(\nu_{\alpha s})}{\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma} \langle \bar{\nu}_s, \phi' \rangle, \\ \psi(\mathcal{R}(\nu_{\alpha s})) \mathbf{1}_{\{\nu_{\alpha s}(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} &= \frac{1}{\beta} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}}, \\ \mathbf{E} [\psi(D)] &= \frac{1}{\beta} \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D}{\gamma} \right) \right]. \end{aligned}$$

De (6.20), on déduit donc pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \bar{M}_\phi(t) &= M_\psi(\alpha t) = \langle \bar{\nu}_t, \phi \rangle - \langle \bar{\nu}_0, \phi \rangle + \frac{\alpha}{\gamma} \int_0^t \langle \bar{\nu}_s, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \frac{\mu\alpha}{\beta} \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \frac{\lambda\alpha}{\beta} t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D}{\gamma} \right) \right]. \end{aligned}$$

Avec (6.10), le crochet de  $(\bar{M}_\phi(t), t \geq 0)$  est donné pour tout  $t \geq 0$  par :

$$\begin{aligned} \langle \bar{M}_\phi \rangle_t &= \langle M_\psi \rangle_{\alpha t} = \mu \int_0^{\alpha t} \psi^2(\mathcal{R}(\nu_s)) \mathbf{1}_{\{\nu_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \lambda \alpha t \mathbf{E} [\psi^2(D)] \\ &= \frac{\mu\alpha}{\beta^2} \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \frac{\lambda\alpha}{\beta^2} t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D}{\gamma} \right) \right]. \end{aligned}$$

□

## 6.4 Lois des grands nombres

Nous exposons ici deux théorèmes limites fluides pour des suites de processus de transports, correspondant à deux renormalisations différentes.

### 6.4.1 Première renormalisation

#### Definition 6.4.1

*Soit  $\xi$ , une mesure diffuse de  $\mathcal{M}_f^+$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels positifs,  $(\bar{r}_t, t \geq 0)$  une fonction déterministe de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathbb{R}}$  et  $\bar{D}$  une variable aléatoire p.s. strictement positive. Nous appelons limite fluide correspondant à  $(\xi, \lambda, \mu, \bar{r}, \bar{D})$ , la fonction déterministe  $(\bar{\nu}_t^*, t \geq 0)$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_f^+$  définie pour tout  $t \geq 0$  et toute  $f \in \mathcal{D}_b$  par :*

$$\langle \bar{\nu}_t^*, f \rangle = \langle \xi, \tau_t f \rangle - \mu \int_0^t \tau_{t-s} f(\bar{r}_s) ds + \lambda \int_0^t \mathbf{E} [\tau_{t-s} f(\bar{D})] ds. \quad (6.21)$$

Sous ces hypothèses, (6.21) indique en particulier que pour toute fonction  $f$  dans  $\mathcal{C}_b$ , la fonction réelle  $(\langle \bar{\nu}_t^*, f \rangle, t \geq 0)$  est dans  $\mathcal{C}_{\infty, \mathbb{R}}$ .

#### Proposition 6.4.1

*La limite fluide  $\bar{\nu}^*$  associée à  $(\xi, \lambda, \mu, \bar{r}, \bar{D})$  est l'unique solution dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}}$  de :*

$$\langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle = \langle \xi, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^*, \phi' \rangle ds - \mu \int_0^t \phi(\bar{r}_s) ds + \lambda t \mathbf{E} [\phi(\bar{D})], \quad (6.22)$$

*pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ .*

*Preuve.* (6.22) est une équation de transport intégrale dont le second membre  $(g_t, t \geq 0)$ , donné pour toute  $\phi$  par :

$$\langle g_t, \phi \rangle := -\mu \int_0^t \phi(\bar{r}_s) ds + \lambda t \mathbf{E} [\phi(\bar{D})],$$

est bien dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$ . On applique le théorème 6.1.4 et donc :

$$\begin{aligned} \langle \bar{v}_t^*, \phi \rangle &= \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + \langle g_t, \phi \rangle - \int_0^t \langle g_s, \tau_{t-s} \phi' \rangle ds \\ &= \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + \langle g_t, \phi \rangle + \int_0^t \frac{d}{dt} \langle g_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \\ &= \langle \xi, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \phi(\bar{r}_s) ds + \lambda t \mathbf{E} [\phi(\bar{D})] \\ &\quad - \mu \int_0^t \int_0^s \frac{d}{dt} (\tau_{t-s} \phi(\bar{r}_u)) du ds + \lambda \int_0^t s \frac{d}{dt} \mathbf{E} [\tau_{t-s} \phi(\bar{D})] ds. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s \frac{d}{dt} (\tau_{t-s} \phi(\bar{r}_u)) du ds &= - \int_0^t \int_0^s \tau_{t-s} \phi'(\bar{r}_u) du ds \\ &= - \int_0^t \int_0^t \mathbf{1}_{\{u < s\}} \tau_{t-s} \phi'(\bar{r}_u) ds du \\ &= - \int_0^t (\phi(\bar{r}_u) - \tau_{t-u} \phi(\bar{r}_u)) du \end{aligned} \quad (6.24)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^t s \frac{d}{dt} \mathbf{E} [\tau_{t-s} \phi(\bar{D})] ds &= - \int_0^t s \mathbf{E} [\tau_{t-s} \phi'(\bar{D})] ds \\ &= -t \mathbf{E} [\phi(\bar{D})] + \int_0^t \mathbf{E} [\tau_{t-s} \phi(\bar{D})] ds, \end{aligned} \quad (6.25)$$

par intégration par parties. Finalement (6.24) et (6.25) dans (6.23) donne exactement (6.21) pour toute fonction  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Soient maintenant :

- $(\lambda^n, n \in \mathbb{N}^*)$  et  $(\mu^n, n \in \mathbb{N}^*)$ , deux suites de réels positifs,
- $\mathcal{R}$  une application de  $\mathcal{M}_p$  dans  $\mathbb{R}$  définie comme dans la partie précédente,
- $(D^n, n \in \mathbb{N}^*)$ , une suite de variables aléatoires réelles p.s. strictement positives.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous définissons  $(\nu_t^n, t \geq 0)$ , le processus de transport correspondant à  $(\lambda^n, \mu^n, \mathcal{R}, D^n)$  et  $(\mathcal{F}_t^n, t \geq 0)$ , la filtration associée. Nous notons par ailleurs  $\tau_0^n$ , le premier instant tel que la mesure  $\nu^n$  ne charge plus la demi-droite positive :

$$\tau_0^n := \inf \{t, \nu_t^n(\mathbb{R}_+^*) = 0\}.$$

$(\bar{\nu}_t^n, t \geq 0)$  est la renormalisation de  $(\nu_t^n, t \geq 0)$  associée à  $(n, n, n)$ , c'est-à-dire, pour tout  $n$ , tout  $t$  et tout borélien  $\mathfrak{B}$  :

$$\bar{\nu}_t^n(\mathfrak{B}) = \frac{1}{n} \nu_{nt}^n(n\mathfrak{B}).$$

En particulier,  $T_i(\nu_t^n)$  étant le  $i$ -ième atome de la mesure ponctuelle  $\nu_t^n$ , le  $i$ -ième atome de  $\bar{\nu}_t^n$  est donc donné par :

$$T_i(\bar{\nu}_t^n) = \frac{T_i(\nu_{nt}^n)}{n}$$

et alors,

$$\mathcal{R}(\bar{\nu}_t^n) = \frac{\mathcal{R}(\nu_{nt}^n)}{n}.$$

Nous notons par ailleurs  $(\mathcal{G}_t^n, t \geq 0) := (\mathcal{F}_{nt}^n, t \geq 0)$ , la filtration associée. Enfin,  $\bar{\tau}_0^n$  est le premier instant tel que la mesure renormalisée  $\bar{\nu}^n$  ne charge plus  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\bar{\tau}_0^n := \inf \{t, \bar{\nu}_t^n(\mathbb{R}_+^*) = 0\} = \inf \{t, \nu_{nt}^n(\mathbb{R}_+^*) = 0\} = \frac{\tau_0^n}{n}.$$

Soit  $\phi$ , une fonction de  $\mathcal{S}$ . D'après le lemme 6.3.2, le processus réel défini pour tout  $t$  par

$$\begin{aligned} \bar{M}_\phi^n(t) &:= \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle - \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle + \frac{n}{n} \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \frac{\mu^n n}{n} \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \frac{\lambda^n n}{n} t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] \\ &= \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle - \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle + \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \mu^n \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \lambda^n t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.26)$$

est une  $\mathcal{G}_t^n$ -martingale de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathbb{R}}$  de carré intégrable, dont le crochet est donné pour tout  $t$  par :

$$\begin{aligned} \langle \bar{M}_\phi^n \rangle_t &= \frac{\mu^n n}{n^2} \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \frac{\lambda^n n}{n^2} t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] \\ &= \frac{\mu^n}{n} \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \frac{\lambda^n}{n} t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D^n}{n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Nous donnons une loi des grands nombres pour la suite de processus  $((\bar{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$ . Plus précisément, pour un horizon  $T$  bien choisi, nous montrons la convergence en loi (ou au sens de Skorokhod) de cette suite vers la limite fluide  $\bar{\nu}^*$  dans  $\mathcal{D}_{T,S'}$ . Faisons les hypothèses suivantes, correspondant à cette première renormalisation :

### Hypothèse 6.4.1

- *Il existe deux réels positifs  $\lambda, \mu$  tels que :*

$$\lambda^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda, \quad (6.28)$$

$$\mu^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu. \quad (6.29)$$

- *Si  $\mu > 0$ , il existe  $\bar{\tau}_0^* > 0$  tel que*

$$\mathbf{P} [\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (6.30)$$

*et tel que pour toute  $\phi$  dans  $S$ ,*

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6.31)$$

- *Il existe une mesure diffuse  $\xi$  de  $\mathcal{M}_f^+$  telle que pour toute  $f$  dans  $\mathcal{D}_b$  :*

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n - \xi, \tau_t f \rangle^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6.32)$$

- *Il existe une p.s. v.a. strictement positive  $\bar{D}$  telle que :*

$$\frac{D^n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \bar{D}, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{E} \left[ \frac{D^n}{n} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{E} [\bar{D}]. \quad (6.34)$$

- *Si  $\mu > 0$ , il existe un processus  $(\bar{r}_t, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathbb{R}}$  tel que :*

$$\text{pour tout } t > 0, \mathbf{E} \left[ \left( \int_0^t (\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n) - \bar{r}_s) ds \right)^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6.35)$$

Nous sommes donc en mesure de prouver le résultat suivant :

**Theorème 6.4.2**

*On suppose vraies les hypothèses 6.4.1. Soit  $(\bar{\nu}_t^*, t \geq 0)$ , la limite fluide correspondant à  $(\xi, \lambda, \mu, \bar{r}, \bar{D})$ . Alors, pour toute fonction  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  :*

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

*Preuve.* Définissons pour tout  $n$  le processus  $(\bar{\eta}_t^n, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  pour tout  $t \geq 0$  par :

$$\bar{\eta}_t^n \doteq \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^*.$$

Soient  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Nous allons tout d'abord montrer que :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.36)$$

D'après (6.22) et (6.26), on a p.s. pour tout  $t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^* \leq \bar{\tau}_0^n$  :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\eta}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\eta}_s^n, \phi' \rangle ds + \mu \int_0^t \phi(\bar{r}_s) ds - \lambda t \mathbf{E} [\phi(\bar{D})] \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds + \lambda^n t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] + \bar{M}_\phi^n(t). \end{aligned} \quad (6.37)$$

En posant

$$\begin{aligned} \langle \bar{g}_t^n, \phi \rangle &:= \mu \int_0^t \phi(\bar{r}_s) ds - \lambda t \mathbf{E} [\phi(\bar{D})] \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds + \lambda^n t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] + \bar{M}_\phi^n(t), \end{aligned}$$

(6.37) revient à :

$$\langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle = \langle \bar{\eta}_0^n, \phi \rangle + \int_0^t \langle (\bar{\eta}_s^n)', \phi \rangle ds + \langle \bar{g}_t^n, \phi \rangle.$$

Par ailleurs, pour tout  $t$ , l'application  $(\phi \mapsto \langle g_t^n(\omega), \phi \rangle)$  est p.s. linéaire et la fonction  $(t \mapsto \langle \bar{g}_t^n(\omega), \phi \rangle)$  est p.s. à trajectoires càdlàg : le processus  $(\bar{g}_t^n, t \geq 0)$  appartient donc à  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ . Autrement dit,  $(\bar{\eta}_t^n, t \leq \bar{\tau}_0^*)$  vérifie l'équation de transport intégrale dans  $\mathcal{S}'$ ,  $(\mathbf{E}_{\bar{\eta}_0^n, \bar{g}^n})$ .

D'après le théorème 6.1.4, on a donc p.s. pour tout  $t \leq \bar{\tau}_0^*(\omega) \wedge \bar{\tau}_0^* \leq \bar{\tau}_0^n(\omega)$  :

$$\langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle = \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle + \langle \bar{g}_t^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{g}_s^n, \tau_{t-s} \phi' \rangle ds,$$

ce qui revient à :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle + \mu \int_0^t \phi(\bar{r}_s) ds - \lambda t \mathbf{E} [\phi(\bar{D})] - \mu^n \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds \\ &\quad + \lambda^n t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] + \bar{M}_\phi^n(t) - \mu \int_0^t \int_0^s \tau_{t-s} \phi'(\bar{r}_u) du ds \\ &\quad + \lambda \int_0^t s \mathbf{E} [\tau_{t-s} \phi'(\bar{D})] ds + \mu^n \int_0^t \int_0^s \tau_{t-s} \phi'(\mathcal{R}(\bar{\nu}_u^n)) du ds \\ &\quad \quad - \lambda^n \int_0^t s \mathbf{E} \left[ \tau_{t-s} \phi' \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] ds - \int_0^t \bar{M}_{\tau_{t-s} \phi'}^n(s) ds \\ &= \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle + \mu \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s) ds - \lambda \int_0^t \mathbf{E} [\tau_s \phi(\bar{D})] ds \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds + \lambda^n \int_0^t \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] ds \\ &\quad \quad + \bar{M}_\phi^n(t) - \int_0^t \bar{M}_{\tau_{t-s} \phi'}^n(s) ds, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle + (\mu - \mu^n) \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds - (\lambda - \lambda^n) \int_0^t \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] ds \\ &\quad - \mu \int_0^t \left( \tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s) \right) ds \\ &\quad + \lambda \int_0^t \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) - \tau_s \phi(\bar{D}) \right] ds \\ &\quad \quad + \bar{M}_\phi^n(t) - \int_0^t \bar{M}_{\tau_{t-s} \phi'}^n(s) ds. \quad (6.38) \end{aligned}$$

L'égalité précédente est vraie p.s., pour tout  $t \leq \bar{\tau}_0^n(\omega) \wedge \bar{\tau}_0^*$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] \\
& \leq 7 \left\{ \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle^2 \right] + |\mu - \mu^n|^2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t |\tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n))| ds \right\}^2 \right] \right. \\
& \quad + |\lambda - \lambda^n|^2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \mathbf{E} \left[ \left| \tau_s \left( \frac{D^n}{n} \right) \right| \right] ds \right\}^2 \right] \\
& \quad + \mu^2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t |\tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s)| ds \right\}^2 \right] \\
& \quad + \lambda^2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \mathbf{E} \left[ \left| \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) - \tau_s \phi(\bar{D}) \right| \right] ds \right\}^2 \right] \\
& \quad \left. + \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \{ \bar{M}_\phi^n(t) \}^2 \right] + \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t |\bar{M}_{\tau_{t-s} \phi'}^n(s)|, ds \right\}^2 \right] \right\}. \tag{6.39}
\end{aligned}$$

Nous allons donner un majorant de l'expression précédente qui tende vers 0. Notons pour tout temps d'arrêt  $\tau$ , pour tout processus  $(X_t, t \geq 0)$ , le processus arrêté  $(X_t^\tau, t \geq 0)$  défini pour tout  $t \geq 0$  par  $X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}$ .  $\bar{\tau}_0^n$  est clairement un  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt : on applique l'inégalité de Doob à la martingale de carré intégrable  $\left( (\bar{M}_\phi^n)^{\bar{\tau}_0^n}(t), t \geq 0 \right)$ , en remarquant en particulier que la martingale locale

$$\left( \left\{ (\bar{M}_\phi^n)^{\bar{\tau}_0^n}(t) \right\}^2 - \langle \bar{M}_\phi^n \rangle_{t \wedge \bar{\tau}_0^n}, t \geq 0 \right)$$

est une martingale :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \{ \bar{M}_\phi^n(t) \}^2 \right] &= \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ (\bar{M}_\phi^n)^{\bar{\tau}_0^n}(t) \right\}^2 \right] \\
&\leq 4 \mathbf{E} \left[ \left\{ (\bar{M}_\phi^n)^{\bar{\tau}_0^n}(\bar{\tau}_0^*) \right\}^2 \right] \\
&= 4 \mathbf{E} \left[ \left\langle (\bar{M}_\phi^n)^{\bar{\tau}_0^n} \right\rangle_{\bar{\tau}_0^*} \right] = 4 \mathbf{E} \left[ \langle \bar{M}_\phi^n \rangle_{\bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \right] \\
&= 4 \mathbf{E} \left[ \frac{\mu^n}{n} \int_0^{\bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \phi^2(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds + \frac{\lambda^n}{n} (\bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*) \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] \right] \\
&\leq 4 \left( \frac{\mu^n}{n} + \frac{\lambda^n}{n} \right) \|\phi^2\|_\infty \bar{\tau}_0^*. \tag{6.40}
\end{aligned}$$

Ensuite, pour le troisième terme,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \left| \bar{M}_{\tau_{t-s}\phi'}^n(s) \right| ds \right\}^2 \right] \\
&= \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_{-t}^0 \left| \bar{M}_{\tau_{-s}\phi'}^n(s+t) \right| ds \right\}^2 \right] \\
&\leq \mathbf{E} \left[ \left\{ \int_{-\bar{\tau}_0^*}^0 \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left| \bar{M}_{\tau_{-s}\phi'}^n(s+t) \right| ds \right\}^2 \right] \\
&\leq \mathbf{E} \left[ \bar{\tau}_0^* \int_{-\bar{\tau}_0^*}^0 \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \bar{M}_{\tau_{-s}\phi'}^n(s+t) \right\}^2 ds \right] \\
&= \bar{\tau}_0^* \int_{-\bar{\tau}_0^*}^0 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \bar{M}_{\tau_{-s}\phi'}^n(s+t) \right\}^2 \right] ds,
\end{aligned}$$

avec Cauchy-Schwarz puis Fubini. La fonction  $\tau_{-s}\phi'$  est dans  $\mathcal{S}$  pour tout  $s$  si  $\phi$  l'est. Il est donc clair que le processus  $(\bar{M}_{\tau_{-s}\phi'}^n(s+t), t \geq 0)$  est une  $\mathcal{G}_{s+t}^n$ -martingale issue de 0 et de carré intégrable. On applique là-aussi l'inégalité de Doob et donc :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \left| \bar{M}_{\tau_{t-s}\phi'}^n(s) \right| ds \right\}^2 \right] \leq 4\bar{\tau}_0^* \int_{-\bar{\tau}_0^*}^0 \mathbf{E} \left[ \left\langle \bar{M}_{\tau_{-s}\phi'}^n(s+\cdot) \right\rangle_{\bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \right] ds \\
&= 4T \int_{-\bar{\tau}_0^*}^0 \mathbf{E} \left[ \left\langle \bar{M}_{\tau_{-s}\phi'}^n \right\rangle_{s+\bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \right] ds \\
&= 4\bar{\tau}_0^* \int_{-\bar{\tau}_0^*}^0 \mathbf{E} \left[ \frac{\mu^n}{n} \int_0^{s+\bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} (\tau_{-s}\phi')^2 (\mathcal{R}(\bar{\nu}_u^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_u^n(\mathbb{R}_+^*) \neq 0\}} du \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^n}{n} (s + \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*) \mathbf{E} \left[ (\tau_{-s}\phi')^2 \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] \right] ds \\
&\leq 4T \|\phi'\|^2 \left( \frac{\mu^n}{n} + \frac{\lambda^n}{n} \right) \int_{-\bar{\tau}_0^*}^0 (s + \bar{\tau}_0^*) ds \\
&= 2(\bar{\tau}_0^*)^3 \|\phi'\|^2 \left( \frac{\mu^n}{n} + \frac{\lambda^n}{n} \right). \quad (6.41)
\end{aligned}$$

Pour les deuxième et troisième termes :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t |\tau_{t-s}\phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n))| ds \right\}^2 \right] \\
&\leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \|\phi\|_\infty ds \right\}^2 \right] = \|\phi\|_\infty^2 (\bar{\tau}_0^*)^2, \quad (6.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \mathbf{E} \left[ \left| \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right| \right] ds \right\}^2 \right] \\ \leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \|\phi\|_\infty ds \right\}^2 \right] = \|\phi\|_\infty^2 (\bar{\tau}_0^*)^2. \quad (6.43) \end{aligned}$$

D'autre part,  $\phi$  est en particulier une fonction Lipschitzienne et on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t |\tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s)| ds \right\}^2 \right] \\ \leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \|\phi'\|_\infty |\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n) - \bar{r}_s| ds \right\}^2 \right] \\ = \|\phi'\|_\infty^2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \int_0^{\bar{\tau}_0^*} |\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n) - \bar{r}_s| ds \right\}^2 \right], \quad (6.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \mathbf{E} \left[ \left| \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) - \tau_s \phi(\bar{D}) \right| \right] ds \right\}^2 \right] \\ \leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \int_0^t \mathbf{E} \left[ \|\phi'\|_\infty \left| \frac{D^n}{n} - \bar{D} \right| \right] ds \right\}^2 \right] \\ = \|\phi'\|_\infty^2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \frac{D^n}{n} - \bar{D} \right\}^2 \right] (\bar{\tau}_0^*)^2. \quad (6.45) \end{aligned}$$

Finalement, réécrivons (6.39) avec (6.40), (6.41), (6.42), (6.43), (6.44) et (6.45) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] \\ \leq 7 \left\{ \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle^2 \right] + |\mu - \mu^n|^2 \|\phi\|_\infty^2 (\bar{\tau}_0^*)^2 \right. \\ + |\lambda - \lambda^n|^2 \|\phi\|_\infty^2 (\bar{\tau}_0^*)^2 + \mu^2 \|\phi'\|_\infty^2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \int_0^{\bar{\tau}_0^*} |\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n) - \bar{r}_s| ds \right\}^2 \right] \\ \left. + \lambda^2 \|\phi'\|_\infty^2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \frac{D^n}{n} - \bar{D} \right\}^2 \right] (\bar{\tau}_0^*)^2 + 4 \left( \frac{\mu^n}{n} + \frac{\lambda^n}{n} \right) \|\phi\|_\infty^2 \bar{\tau}_0^* \right. \\ \left. + 2(\bar{\tau}_0^*)^3 \|\phi'\|_\infty^2 \left( \frac{\mu^n}{n} + \frac{\lambda^n}{n} \right) \right\}, \quad (6.46) \end{aligned}$$

et en vertu des hypothèses 6.4.1, (6.36) est vraie.

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] &= \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* \leq \bar{\tau}_0^n\}} \right] + \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right] \\
&\leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* \leq \bar{\tau}_0^n\}} \right] + \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right] \\
&\leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] + 2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right] \\
&\quad + 2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right]. \quad (6.47)
\end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle^2 &= \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \langle \xi, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s) ds \right. \\
&\quad \left. + \lambda \int_0^t \mathbf{E} [\tau_{t-s} \phi(\bar{D})] ds \right\}^2 \\
&\leq \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \|\phi\|_\infty \xi(\mathbb{R}_+^*) + \|\phi\|_\infty t(\lambda + \mu) \right\}^2 \\
&\leq \|\phi\|_\infty^2 \left\{ \xi(\mathbb{R}_+^*) + \bar{\tau}_0^* (\lambda + \mu) \right\}^2 =: M, \quad (6.48)
\end{aligned}$$

ce qui donne donc dans (6.47) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] &\leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^n \wedge \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] + 2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right] \\
&\quad + 2M \mathbf{P}[\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n].
\end{aligned}$$

On conclut avec (6.36) pour le premier terme et les hypothèses (6.31) et (6.30) pour les deuxième et troisième termes :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

### Corollaire 6.4.3

*Sous les hypothèses du théorème 6.4.2,*

$$((\bar{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*) \implies_{\bar{\tau}_0^*, S'} (\bar{\nu}_t^*, t \geq 0).$$

*Preuve.* D'après le théorème 6.4.2, pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$  :

$$\left( \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} |\langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle|, n \in \mathbb{N}^* \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 0.$$

Cette suite converge donc en probabilité, et on peut appliquer la proposition C.0.1 : pour toute  $\phi$ , la suite  $((\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  converge en loi au sens de Skorokhod vers la fonction déterministe  $(\langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle, t \geq 0)$ .  $\mathcal{S}'$  est un espace de Fréchet nucléaire et on applique le théorème 6.1.3 : la suite  $((\bar{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  est tendue dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ . Son unique valeur d'adhérence est donnée par la limite fluide  $(\bar{\nu}_t^*, t \geq 0)$  : elle converge en loi.  $\square$

## 6.4.2 Deuxième renormalisation

Considérons maintenant le cas limite critique, c'est-à-dire, lorsque

$$\frac{\lambda^n}{\mu^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Dans ce cas, une nouvelle renormalisation est possible sous des hypothèses bien précises. La limite fluide obtenue (ou *limite fluide critique*) a alors une forme différente de la précédente.

### Definition 6.4.2

*Soient  $\xi$  une mesure diffuse de  $\mathcal{M}_f^+$  et  $K > 0$ . Nous appelons limite fluide critique correspondant à  $(\xi, K)$ , la fonction déterministe définie par :*

1.  $\tilde{\nu}_0^* := \xi$ ,
2. pour toute  $f \in \mathcal{D}_b$ , pour tout  $t$  :

$$\langle \tilde{\nu}_t^*, f \rangle = \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + K \int_0^t \phi(s-t) ds. \quad (6.49)$$

Comme dans le cas de la précédente limite fluide, pour toute  $f$  de  $\mathcal{C}_b$ ,  $(\langle \tilde{\nu}_t^*, f \rangle, t \geq 0)$  est une fonction de  $\mathcal{C}_{\infty, \mathbb{R}}$ .

Nous montrons par ailleurs, comme pour  $\bar{\nu}^*$ , que  $\tilde{\nu}^*$  est l'unique solution d'une équation de transport intégrale dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  :

### Proposition 6.4.2

*La limite fluide critique  $\tilde{\nu}^*$  associée à  $(\xi, K)$  est l'unique solution dans  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  de :*

$$\langle \tilde{\nu}_t^*, \phi \rangle = \langle \xi, \phi \rangle - \int_0^t \langle \tilde{\nu}_s^*, \phi' \rangle ds + Kt\phi(0), \quad (6.50)$$

**pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ .**

*Preuve.* (6.50) décrit une équation de transport intégrale dont le second membre est donné pour tout  $t$  par

$$\langle g_t, \phi \rangle := Kt\phi(0)$$

et  $(g_t, t \geq 0)$  est bien un processus de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$ . On applique le théorème 6.1.4 :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nu}_t^*, \phi \rangle &= \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + \langle g_t, \phi \rangle - \int_0^t \langle g_s, \tau_{t-s} \phi' \rangle ds \\ &= \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + \langle g_t, \phi \rangle + \int_0^t \frac{d}{dt} \langle g_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \\ &= \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + Kt\phi(0) + K \int_0^t s \frac{d}{dt} (\tau_{t-s} \phi(0)) ds \\ &= \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + K \int_0^t \tau_{t-s} \phi(0) ds, \end{aligned}$$

ce qui est exactement (6.49) pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Comme dans la section précédente, nous considérons pour tout  $n$ ,  $(\nu_t^n, t \geq 0)$  le processus de transport correspondant à un quadruple  $(\lambda^n, \mu^n, \mathcal{R}, D^n)$ ,  $(\mathcal{F}_t^n, t \geq 0)$  la filtration associée et  $\tau_0^n$ , le premier instant de vidage du système. Nous notons maintenant  $(\tilde{\nu}_t^n, t \geq 0)$ , la renormalisation de  $(\nu_t^n, t \geq 0)$  correspondant au triplet  $(n^{3/2}, n, n^{3/2})$ , c'est-à-dire, pour tout  $n$ , tout  $t$  et tout borélien  $\mathfrak{B}$  :

$$\tilde{\nu}_t^n(\mathfrak{B}) = \frac{1}{n} \nu_{n^{3/2}t}^n(n^{3/2}\mathfrak{B}).$$

En particulier, le  $i$ -ème atome de  $\tilde{\nu}_t^n$  est donc donné par :

$$T_i(\tilde{\nu}_t^n) = \frac{T_i(\nu_{n^{3/2}t}^n)}{n^{3/2}},$$

et alors,

$$\mathcal{R}(\tilde{\nu}_t^n) = \frac{\mathcal{R}(\nu_{n^{3/2}t}^n)}{n^{3/2}}.$$

Nous notons par ailleurs  $(\mathcal{H}_t^n, t \geq 0) := (\mathcal{F}_{n^{3/2}t}^n, t \geq 0)$ , la filtration associée. Enfin, le premier instant où le  $n$ -ième processus ne charge plus la demi-droite positive est noté :

$$\tilde{\tau}_0^n := \inf\{t, \tilde{\nu}_t^n(\mathbb{R}^+) = 0\} = \frac{\tau_0^n}{n^{3/2}}.$$

Écrivons pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , la martingale correspondant à  $(\tilde{\nu}_t^n, t \geq 0)$  : d'après le lemme 6.3.2, le processus réel défini pour tout  $t$  par

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\phi^n(t) &:= \langle \tilde{\nu}_t^n, \phi \rangle - \langle \tilde{\nu}_0^n, \phi \rangle + \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}} \int_0^t \langle \tilde{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \frac{\mu^n n^{3/2}}{n} \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\tilde{\nu}_s^n(\mathbb{R}^+) > 0\}} ds - \frac{\lambda^n n^{3/2}}{n} t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n^{3/2}} \right) \right] \\ &= \langle \tilde{\nu}_t^n, \phi \rangle - \langle \tilde{\nu}_0^n, \phi \rangle + \int_0^t \langle \tilde{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{n} \mu^n \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\tilde{\nu}_s^n(\mathbb{R}^+) > 0\}} ds - \sqrt{n} \lambda^n t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n^{3/2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

est une  $\mathcal{H}_t^n$ -martingale de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathbb{R}}$  de carré intégrable, dont le crochet est donné pour tout  $t$  par :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{M}_\phi^n \rangle_t &= \frac{\mu^n n^{3/2}}{n^2} \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\tilde{\nu}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \frac{\lambda^n n^{3/2}}{n^2} t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D^n}{n^{3/2}} \right) \right] \\ &= \frac{\mu^n}{\sqrt{n}} \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\tilde{\nu}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D^n}{n^{3/2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Comme dans la section précédente, nous donnons une loi des grands nombres pour la suite de processus renormalisés  $((\tilde{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$ . Nous voyons dans (6.51) que les termes à variations finies

$$\sqrt{n} \mu^n \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\tilde{\nu}_s^n(\mathbb{R}^+) > 0\}} ds$$

et

$$\sqrt{n} \lambda^n t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n^{3/2}} \right) \right]$$

« explosent » à l'infini : nous proposons des conditions limites telles que ces deux termes se compensent, en vertu de l'hypothèse  $\lambda^n / \mu^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  :

#### Hypothèse 6.4.4

- *Il existe  $\lambda > 0$  tel que :*

$$\lambda^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda, \quad (6.53)$$

$$\mu^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda, \quad (6.54)$$

*et il existe  $K > 0$  tel que*

$$\sqrt{n} (\lambda^n - \mu^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} K. \quad (6.55)$$

- *Il existe  $\tilde{\tau}_0^* > 0$  tel que :*

$$\mathbf{P} [\tilde{\tau}_0^* > \tilde{\tau}_0^n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (6.56)$$

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\nu}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_0^* > \tilde{\tau}_0^n\}} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6.57)$$

- *Il existe une mesure diffuse  $\xi$  de  $\mathcal{M}_f^+$  telle que pour toute  $f$  dans  $\mathcal{D}_b$  :*

$$n \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\nu}_0^n - \xi, \tau_t f \rangle^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6.58)$$

- 

$$\frac{D^n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0, \quad (6.59)$$

$$\mathbf{E} \left[ \frac{D^n}{n} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6.60)$$

- 

$$\mathbf{E} \left[ \left( \sqrt{n} \int_0^{\tilde{\tau}_0^*} \mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n) ds \right)^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6.61)$$

Sous ces nouvelles hypothèses, on a la convergence suivante :

### Theorème 6.4.5

*On suppose vraies les hypothèses 6.4.4. Soit  $(\tilde{\nu}_t^*, t \geq 0)$  la limite fluide critique correspondant à  $(\xi, K)$ . Alors, pour toute fonction  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  :*

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\nu}_t^n - \tilde{\nu}_t^*, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

*Preuve.* Reprenons les arguments de la preuve précédente. Définissons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \geq 0$  :

$$\tilde{\eta}_t^n \doteq \tilde{\nu}_t^n - \tilde{\nu}^*(t).$$

On a à l'instant  $t \leq \tilde{\tau}_0^n \wedge \tilde{\tau}_0^*$ , d'après (6.50) et (6.51) :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\eta}_t^n, \phi \rangle &= \langle \tilde{\eta}_0^n, \phi \rangle + \tilde{M}_\phi^n(t) - \int_0^t \langle \eta_s^n, \phi' \rangle ds + (K - \sqrt{n}(\lambda^n - \mu^n)) t \phi(0) \\ &- \mu^n \sqrt{n} \int_0^t (\phi(\mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n)) - \phi(0)) ds + \lambda^n \sqrt{n} t \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n^{3/2}} \right) - \phi(0) \right]. \end{aligned} \quad (6.62)$$

L'équation précédente est une équation de transport intégrale de second membre

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}_t^n, \phi \rangle &= \tilde{M}_\phi^n(t) + (K - \sqrt{n}(\lambda^n - \mu^n)) t \phi(0) \\ &\quad - \mu^n \sqrt{n} \int_0^t (\phi(\mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n)) - \phi(0)) ds + \lambda^n \sqrt{nt} \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n^{3/2}} \right) - \phi(0) \right], \end{aligned}$$

ce qui donne avec le théorème 6.1.4, puis intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\eta}_t^n, \phi \rangle &= \langle \tilde{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle + \tilde{M}_\phi^n(t) + \int_0^t \tilde{M}_{\tau_{t-s} \phi'}^n(s) ds \\ &\quad + (K - \sqrt{n}(\lambda^n - \mu^n)) \cdot \int_0^t \phi(-s) ds \\ &\quad - \mu^n \sqrt{n} \int_0^t (\tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n)) - \tau_{t-s} \phi(0)) ds \\ &\quad + \lambda^n \sqrt{n} \int_0^t \mathbf{E} \left[ \tau_{t-s} \phi \left( \frac{D^n}{n^{3/2}} \right) - \tau_{t-s} \phi(0) \right] ds. \quad (6.63) \end{aligned}$$

On alors, de même que dans la preuve précédente, pour tout  $n$  et pour tout  $t \leq \tilde{\tau}_0^n \wedge \tilde{\tau}_0^*$  :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^n \wedge \tilde{\tau}_0^*} \{ \langle \tilde{\eta}_t^n, \phi \rangle \}^2 \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^n \wedge \tilde{\tau}_0^*} \{ \langle \tilde{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle \}^2 \right] \left( \frac{\mu^n}{\sqrt{n}} + \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} \right) 24 \tilde{\tau}_0^* \|\phi^2\|_\infty \\ &\quad + \left( 2 \frac{\mu^n}{\sqrt{n}} + 4 \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} \right) 6 (\tilde{\tau}_0^*)^3 \|(\phi')^2\|_\infty \\ &\quad + \{K - \sqrt{n}(\lambda^n - \mu^n)\}^2 6 \{\tilde{\tau}_0^* \|\phi\|_\infty\}^2 \\ &\quad + 6 \{\mu^n\}^2 \|\phi'\|_\infty^2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \sqrt{n} \int_0^{\tilde{\tau}_0^*} \mathcal{R}(\tilde{\nu}_s^n) ds \right\}^2 \right] \\ &\quad + 6 \{\tilde{\tau}_0^* \lambda^n\}^2 \|\phi'\|_\infty^2 \left\{ \mathbf{E} \left[ \frac{D^n}{n} \right] \right\}^2 \end{aligned}$$

et les hypothèses 6.4.4 donnent :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^n \wedge \tilde{\tau}_0^*} \{ \langle \tilde{\eta}_t^n, \phi \rangle \}^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.64)$$

Comme dans la preuve précédente, il est aisé de montrer qu'il existe une constante  $\tilde{M}$  telle que :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\nu}_t^*, \phi \rangle^2 \right] \leq \tilde{M}. \quad (6.65)$$

On conclut en remarquant que :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] \leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^n \wedge \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\eta}_t^n, \phi \rangle^2 \right] + 2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\nu}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_0^* > \tilde{\tau}_0^n\}} \right] \\ + 2 \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\nu}_t^*, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_0^* > \tilde{\tau}_0^n\}} \right],$$

avec l'hypothèse (6.57), (6.64) et (6.65).  $\square$

### Corollaire 6.4.6

*Sous les hypothèses du théorème 6.4.5,*

$$((\tilde{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*) \implies_{\tilde{\tau}_0^*, \mathcal{S}'} (\tilde{\nu}_t^*, t \geq 0).$$

*Preuve.* Comme dans le corollaire 6.4.3, on applique la proposition C.0.1 et le théorème 6.1.3. La limite fluide critique  $(\tilde{\nu}_t^*, t \geq 0)$  est alors l'unique valeur d'adhérence de  $((\tilde{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  dans  $\mathcal{D}_{\tilde{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ .  $\square$

## 6.5 Théorème central limite fonctionnel

Intéressons-nous à présent aux fluctuations des processus de transport renormalisés autour de la limite fluide. Nous montrons en particulier ici, dans deux cas différents, la convergence en loi dans  $\mathcal{D}_{\tilde{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$  de la suite des processus résiduels obtenus vers un processus de diffusion.

Nous noterons dans toute cette partie, pour tout processus  $(M_t, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\tilde{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ ,  $(N_t^M, t \geq 0)$  le processus à valeurs  $\mathcal{S}'$  défini pour tout  $t$  et pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$  par :

$$\langle N_t^M, \phi \rangle := \int_0^t \langle M_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds,$$

et  $(I_t^M, t \geq 0)$  le processus à valeurs  $\mathcal{S}'$  défini pour tout  $t$  et pour toute  $\phi$  par :

$$\langle I_t^M, \phi \rangle := \int_0^t \langle M_s, \phi \rangle ds.$$

Par ailleurs, on rappelle (cf [Met82], [Ü82]) qu'un processus  $(M_t, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\tilde{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$  est une *semi-martingale* (resp. *martingale locale*, *martingale*) à valeurs  $\mathcal{S}'$  si pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ ,  $(\langle M_t, \phi \rangle, t \geq 0)$  est une semi-martingale (resp. martingale locale, martingale) réelle. Pour toute semi-martingale à valeurs  $\mathcal{S}'$   $(M_t, t \geq 0)$ , pour toute semi-martingale réelle  $(X_t, t \geq 0)$ , le processus  $(L_t, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\tilde{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$  défini pour tout  $t$  et toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$  par :

$$\langle L_t, \phi \rangle = \int_0^t \langle M_s, \phi \rangle dX_s,$$

sera noté pour tout  $t$ ,

$$\int_0^t M_s dX_s =: L_t,$$

l'« intégrale stochastique » à valeurs  $\mathcal{S}'$  de  $M$  avec  $X$ .

### 6.5.1 Résultat préliminaire

Dans cette section nous montrons un résultat technique (la proposition 6.5.1) que nous utiliserons pour démontrer la convergence en loi du processus des écarts.

#### Lemme 6.5.1

*Pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , la famille  $\{\tau_r \phi, r \in [0, \bar{\tau}_0^*]\}$  est un précompact de  $\mathcal{S}$ .*

*Preuve.* Pour toute semi-norme associée aux entiers  $\alpha, \beta$ , pour tout  $r$ ,

$$\begin{aligned} |\tau_r \phi|_{\alpha, \beta} &= \sup_x \left| x^\alpha \phi^{(\beta)}(x - r) \right| = \sup_y \left| (y + r)^\alpha \phi^{(\beta)}(y) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\alpha} C_\alpha^j r^{\alpha-j} |\phi|_{j, \beta} \leq \sum_{j=1}^{\alpha} C_\alpha^j (\bar{\tau}_0^*)^{\alpha-j} |\phi|_{j, \beta} =: K_{\bar{\tau}_0^*, \alpha, \beta, \phi}, \end{aligned}$$

constante indépendante de  $r$ . L'ensemble  $\{\tau_r \phi, r \in [0, \bar{\tau}_0^*]\}$  est donc borné dans l'espace nucléaire  $\mathcal{S}$  : en vertu de la proposition 4.4.7, p.81 de [Pie66], il est précompact.  $\square$

#### Lemme 6.5.2

*Pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$ , l'application*

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{S} \\ r & \longmapsto \tau_r \phi \end{cases}$$

*est continue.*

*Preuve.* Soit  $r' < r$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux entiers. Il existe  $s \in ]r', r[$  tel que :

$$\begin{aligned} |\tau_{r'}\phi - \tau_r\phi|_{\alpha,\beta} &= \sup_x \left| x^\alpha \left( \phi^{(\beta)}(x - r') - \phi^{(\beta)}(x - r) \right) \right| \\ &= \sup_x \left| x^\alpha (r - r') \phi^{(\beta+1)}(x - s) \right| = |r - r'| \sup_y \left| (y + s)^\alpha \phi^{(\beta+1)}(y) \right| \\ &\leq |r - r'| \sum_{j=1}^{\alpha} C_\alpha^j s^{\alpha-j} |\phi|_{j,\beta+1} \\ &\leq |r - r'| \sum_{j=1}^{\alpha} C_\alpha^j (r + 1)^{\alpha-j} |\phi|_{j,\beta+1} =: M_{r,\alpha,\beta,\phi}. \end{aligned}$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe donc  $\eta := \frac{\varepsilon}{M_{r,\alpha,\beta,\phi}}$  tel que

$$|r - r'| < \eta \Rightarrow |\tau_{r'}\phi - \tau_r\phi|_{\alpha,\beta} < \varepsilon.$$

□

### Lemme 6.5.3

*Pour tout élément*  $(M_t, t \geq 0)$  *de*  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ ,  $(N_t^M, t \geq 0)$  *appartient à*  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ .

*Preuve.* Soit  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  et  $(M_t, t \geq 0)$  dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ . Soit l'application

$$F_\phi^M : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, r) & \longmapsto \int_0^t \langle M_s, \tau_r \phi \rangle ds. \end{cases}$$

Soient  $t, r \leq \bar{\tau}_0^*$ . Pour tous  $t', r'$ ,

$$\begin{aligned} |F_\phi^M(t', r') - F_\phi^M(t, r)| &= \left| \int_0^{t'} \langle M_s, \tau_{r'} \phi \rangle ds - \int_0^t \langle M_s, \tau_r \phi \rangle ds \right| \\ &\leq \int_t^{t'} |\langle M_s, \tau_r \phi \rangle| ds + \int_0^{t'} |\langle M_s, \tau_{r'} \phi - \tau_r \phi \rangle| ds. \quad (6.66) \end{aligned}$$

D'une part,  $(\langle M_s, \phi \rangle, s \geq 0)$  est dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$ , donc borné sur  $[0, \bar{\tau}_0^*]$  :

$$\sup_{s \leq \bar{\tau}_0^*} |\langle M_s, \phi \rangle| = \sup_{s \in [0, \bar{\tau}_0^*] \cap \mathbf{Q}} |\langle M_s, \phi \rangle| < \infty.$$

L'ensemble  $\mathcal{M} := \{M_s, s \in [0, \bar{\tau}_0^*] \cap \mathbf{Q}\}$  est donc un sous-ensemble faiblement borné de l'ensemble des applications continues de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}$ . En tant qu'espace de Fréchet,  $\mathcal{S}$  est un tonnelé d'après le corollaire 0, p. III.25

de [Bou73]. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus (théorème 1, p. III.25 de [Bou73]) :  $\mathcal{M}$  est équicontinu. Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$V_\varepsilon := \bigcap_{s \in [0, \bar{\tau}_0^*] \cap \mathbf{Q}} M_s^{-1} \left( \left] -\frac{\varepsilon}{2\bar{\tau}_0^*}, \frac{\varepsilon}{2\bar{\tau}_0^*} \right[ \right) = \left\{ \phi, \sup_{s \in [0, \bar{\tau}_0^*] \cap \mathbf{Q}} |\langle M_s, \phi \rangle| < \frac{\varepsilon}{2\bar{\tau}_0^*} \right\}$$

est un voisinage de la fonction nulle dans  $\mathcal{S}$ . L'application  $r \mapsto \tau_r \phi$  étant continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{S}$  d'après le lemme 6.5.2, il existe donc  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t \leq \bar{\tau}_0^*$  :

$$\begin{aligned} |r' - r| < \eta &\implies (\tau_{r'} \phi - \tau_r \phi) \in V_\varepsilon \\ &\implies \sup_{s \in [0, \bar{\tau}_0^*] \cap \mathbf{Q}} |\langle M_s, \tau_{r'} \phi - \tau_r \phi \rangle| < \frac{\varepsilon}{2\bar{\tau}_0^*} \\ &\implies \int_0^{t'} |\langle M_s, \tau_{r'} \phi - \tau_r \phi \rangle| ds < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

D'autre part,  $(\langle M_s, \tau_r \phi \rangle, s \geq 0)$  est dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$ , donc borné sur  $[0, \bar{\tau}_0^*]$ . Pour tout  $t'$  :

$$\int_t^{t'} |\langle M_s, \tau_r \phi \rangle| ds \leq |t' - t| K_{r, \phi}.$$

Autrement dit, il existe  $\delta := \frac{\varepsilon}{2K_{r, \phi}} > 0$  tel que

$$|t' - t| < \delta_r \implies \int_t^{t'} |\langle M_s, \tau_r \phi \rangle| ds < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.68)$$

Pour tout  $t, r$ , pour tout  $\varepsilon$ , (6.67) et (6.68) dans (6.66) impliquent qu'il existe  $\eta, \delta_r$  tels que

$$|t' - t| < \delta_r, |r' - r| < \eta \implies |F_\phi^M(t', r') - F_\phi^M(t, r)| < \varepsilon.$$

L'application  $F_\phi^M$  est donc continue sur le compact  $([0, \bar{\tau}_0^*])^2$ . En vertu du théorème de Heine, elle est aussi uniformément continue sur ce compact. Il existe donc  $\delta, \eta > 0$  tels que :

$$\sup_{r, r', |r-r'| < \eta} \sup_{t, t', |t-t'| < \delta} |F_\phi^M(t', r') - F_\phi^M(t, r)| < \varepsilon.$$

Finalement, pour  $\xi := \eta \wedge \delta$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{t, t', |t-t'| < \xi} |\langle N_{t'}^M, \phi \rangle - \langle N_t^M, \phi \rangle| \\ \leq \sup_{r, r', |r-r'| < \eta} \sup_{t, t', |t-t'| < \delta} |F_\phi^M(t', r') - F_\phi^M(t, r)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

L'application  $t \mapsto \langle N_t^M, \phi \rangle$  est donc continue pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  :  $(N_t^M, t \geq 0)$  est dans  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ .  $\square$

Nous montrons alors le résultat suivant :

**Proposition 6.5.1**

*L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'} & \longrightarrow \mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'} \\ (M_t, t \geq 0) & \longmapsto (N_t^M, t \geq 0) \end{cases}$$

*est continue.*

*Preuve.* Soit  $((M_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$  convergeant vers  $(M_t, t \geq 0)$ . En particulier, pour toute  $\phi$  la suite  $((\langle M_t^n, \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  converge dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$  vers  $(\langle M_t, \phi \rangle, t \geq 0)$ . Il est bien connu que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} & \longrightarrow \mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} \\ (X_t, t \geq 0) & \longmapsto \left( \int_0^t X_s ds, t \geq 0 \right), \end{cases}$$

est continue pour la topologie de Skorokhod. Donc, la suite  $((\langle I_t^{M^n}, \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  converge dans  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$  vers  $(\langle I_t^M, \phi \rangle, t \geq 0)$ . En particulier,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} |\langle I_t^{M^n}, \phi \rangle| < \infty.$$

Ceci est vrai pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  et donc le théorème de Banach-Steinhaus implique que l'ensemble

$$\mathcal{H} := \{I_t^{M^n}, n \in \mathbb{N}, t \in \mathbf{Q} \cap [0, \bar{\tau}_0^*]\}$$

est équicontinu. Maintenant, pour tout  $k$ , pour toute famille finie  $\{\phi_i, i = 1, \dots, k\}$  et pour tout  $i \leq k$ ,

$$\sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} |\langle I_t^{M^n} - I_t^M, \phi_i \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc,

$$\sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \max_{i=1 \dots k} |\langle I_t^{M^n} - I_t^M, \phi_i \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et donc autrement dit pour toute semi-norme  $p_w$  de la topologie faible :

$$\sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} p_w (I_t^{M^n} - I_t^M) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En vertu du théorème de Pietsch ([Pie66], proposition 0.6.7. p.9),

$$\sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} p'_K (I_t^{M^n} - I_t^M) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pour toute semi-norme  $p'_K$  de la topologie forte, c'est à dire que pour tout précompact  $K$  de  $\mathcal{S}$  :

$$\sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \sup_{\phi \in K} |\langle I_t^{M^n} - I_t^M, \phi \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour  $\phi$  fixée dans  $\mathcal{S}$ , on peut appliquer ce résultat à l'ensemble  $\{\tau_r \phi, r \in [0, \bar{\tau}_0^*]\}$ , qui est précompact d'après le lemme 6.5.1. On a donc :

$$\sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \sup_{r \leq \bar{\tau}_0^*} |\langle I_t^{M^n} - I_t^M, \tau_r \phi \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a finalement pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  :

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} |\langle N_t^{M^n} - N_t^M, \phi \rangle| &= \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left| \int_0^t \langle M_s^n - M_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \right| \\ &\leq \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \sup_{r \leq \bar{\tau}_0^*} \left| \int_0^t \langle M_s^n - M_s, \tau_r \phi \rangle ds \right| \\ &= \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \sup_{r \leq \bar{\tau}_0^*} |\langle I_t^{M^n} - I_t^M, \tau_r \phi \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , la suite  $((\langle N_t^{M^n}, \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  tend donc vers  $(\langle N_t^M, \phi \rangle, t \geq 0)$  dans  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$  :  $((N_t^{M^n}, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  tend vers  $(N_t^M, t \geq 0)$  dans  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}}$ . La proposition est démontrée.  $\square$

### 6.5.2 Première normalisation

Nous fixons  $\xi, (\lambda^n, n \in \mathbb{N}^*), \lambda, (\mu^n, n \in \mathbb{N}^*), \mu, \mathcal{R}$  et  $(D^n, n \in \mathbb{N}^*)$  vérifiant les hypothèses 6.4.1.  $((\nu_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  est la suite des processus de transport correspondant à  $(\lambda^n, \mu^n, \mathcal{R}, D^n)$  et  $((\bar{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$ , sa renormalisation suivant le triplet  $(n, n, n)$ .

Dans toute cette partie, on suppose de plus que :

#### Hypothèse 6.5.4

•

$$\sqrt{n}(\lambda^n - \lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (6.69)$$

$$\sqrt{n}(\mu^n - \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.70)$$

• Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $a$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{P} [ |\sqrt{n} \langle \bar{\nu}_0^n - \bar{\nu}_0^*, \phi \rangle| > a ] \leq \varepsilon. \quad (6.71)$$

- *Il existe  $v \in S'$ , tel que pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ ,*

$$(\sqrt{n}\langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t, \phi \rangle, t \geq 0) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} (\langle v, \tau_t \phi \rangle, t \geq 0). \quad (6.72)$$

- *Dans l'hypothèse (6.33),  $\bar{D} = \bar{d}$  est déterministe et :*

$$\sqrt{n}\mathbf{E} \left[ \left| \frac{D^n}{n} - \bar{d} \right| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.73)$$

- *Si  $\mu > 0$ , il existe un processus  $(\mathcal{R}_t, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, S'}$  tel que :*

$$\left( \left( \sqrt{n} \left( \delta_{\mathcal{R}(\bar{\nu}_t^n)} - \delta_{\bar{r}_t} \right), t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, S'} (\mathcal{R}_t, t \geq 0). \quad (6.74)$$

D'après le théorème 6.4.2, pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ ,

$$(\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} (\langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle, t \geq 0),$$

où  $(\bar{\nu}_t^*, t \geq 0)$  est la limite fluide correspondant à  $(\xi, \lambda, \mu, \bar{r}, \bar{D})$ , définie par (6.21).

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et le processus à valeurs  $\mathcal{M}_f^+$  suivant : pour tout  $t$ ,

$$\bar{Y}_t^n := \sqrt{n} \bar{\eta}_t^n = \sqrt{n} (\bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^*).$$

Soit  $\phi$ , une fonction de  $\mathcal{S}$ . Dans le cas de  $\rho$  quelconque avec la première normalisation, nous cherchons à donner la limite en loi de la suite de processus définie pour tout  $n$  et pour tout  $t \geq 0$  par :

$$\bar{Y}_\phi^n(t) := \langle \bar{Y}_t^n, \phi \rangle = \sqrt{n} (\langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle),$$

qui est bien à valeurs dans  $D_{\infty, \mathbb{R}}$ .

On a tout d'abord le résultat suivant :

### Lemme 6.5.5

*Pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , la suite*

$$\left( \left( \int_0^t \sqrt{n} (\tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s)) ds, t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right)$$

*de  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$  converge en loi vers le processus défini pour tout  $t$  par :*

$$\int_0^t \langle \mathcal{R}_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds.$$

*Preuve.* En notant pour tout  $n$  et pour tout  $t$ ,

$$\mathcal{R}_t^n := \sqrt{n} \left( \delta_{\mathcal{R}(\bar{\nu}_t^n)} - \delta_{\bar{r}_s} \right),$$

le processus  $(\mathcal{R}_t^n, t \geq 0)$  est dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$  (pour tout  $\phi$  ( $\phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)), t \geq 0$ ) est à trajectoires càdlàg car  $\phi$  est continue et  $(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n), t \geq 0)$  est càdlàg). En vertu de l'hypothèse (6.74),

$$((\mathcal{R}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*) \longrightarrow (\mathcal{R}_t, t \geq 0)$$

en loi dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$  et d'après les remarques précédentes, on peut appliquer la proposition 6.5.1 : par le théorème de l'application continue (théorème C.0.1),

$$((N_t^{\mathcal{R}^n}, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*) \longrightarrow (N_t^{\mathcal{R}}, t \geq 0)$$

en loi dans  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ . Le lemme est démontré.  $\square$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Définissons le processus suivant : pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$  et pour tout  $t$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t) &:= \sqrt{n} \bar{M}_\phi^n(t) \\ &= \sqrt{n} \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle - \sqrt{n} \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle + \sqrt{n} \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \mu^n \sqrt{n} \int_0^t \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds - \lambda^n \sqrt{nt} \mathbf{E} \left[ \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.75)$$

avec (6.26).  $(\bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t), t \geq 0)$  est en particulier une martingale de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathbb{R}}$ , de carré intégrable puisque  $(\bar{M}_\phi^n(t), t \geq 0)$  l'est. Son crochet est donné pour tout  $t$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\phi^n(t) &:= \langle \bar{\mathcal{M}}_\phi^n \rangle_t = n \langle \bar{M}_\phi^n \rangle_t \\ &= \mu^n \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \lambda^n t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.76)$$

avec (6.27).

Le processus  $(\bar{\mathcal{M}}_t^n, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathcal{S}'}$  défini pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  par

$$\langle \bar{\mathcal{M}}_t^n, \phi \rangle := \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t)$$

est donc une martingale à valeurs  $\mathcal{S}'$ . Elle vérifie le résultat suivant :

**Lemme 6.5.6**

*La suite de martingales*  $((\bar{\mathcal{M}}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  *converge en loi dans*  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$  *vers le processus*

$$(\mathcal{M}_t, t \geq 0) := \left( \sqrt{\mu} \int_0^t \delta_{\bar{r}_s} dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \delta_{\bar{d}} W_t^2, t \geq 0 \right), \quad (6.77)$$

*où*  $(W_t^1, t \geq 0)$  *et*  $(W_t^2, t \geq 0)$  *sont deux mouvements browniens standards indépendants.*

*Preuve.* Appliquons tout d'abord le théorème C.0.2 en appendice. Soit  $\phi$  une fonction de  $\mathcal{S}$  et  $\gamma_\phi$ , la fonction définie par :

$$\gamma_\phi(t) := \mu \int_0^t \phi^2(\bar{r}_s) ds + \lambda t \phi^2(\bar{d}).$$

On a  $\gamma_\phi(0) = 0$ , pour tout  $n$ ,  $(\bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t), t \geq 0)$  est une martingale issue de 0, son processus croissant  $(\bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t), t \geq 0)$  vérifie pour tout  $t$  :

$$\mathbf{E} [\bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t)] \leq (\lambda^n + \mu^n)t \|\phi\|_\infty^2 < \infty,$$

et donc le processus  $\left( (\bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t))^2 - \bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t), t \geq 0 \right)$  est en particulier une  $\mathcal{G}_t^n$ -martingale : les assertions (C.1) et (C.2) sont vérifiées. Par ailleurs, p.s. pour tout  $t \leq \bar{\tau}_0^*$  :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t) - \gamma_\phi(t) &= (\mu - \mu^n) \int_0^t \phi^2(\mathcal{R}(\bar{v}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{v}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds \\ &+ (\lambda^n - \lambda)t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] + \mu \int_0^t \left( \phi^2(\mathcal{R}(\bar{v}_s^n)) \mathbf{1}_{\{\bar{v}_s^n(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} - \phi^2(\bar{r}_s) \right) ds \\ &+ \lambda t \mathbf{E} \left[ \phi^2 \left( \frac{D^n}{n} \right) - \phi^2(\bar{d}) \right]. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Cela implique d'une part que

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t) - \gamma_\phi(t) \right\}^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right] \\ &\leq \left\{ 4 \left( (\mu - \mu^n)^2 + (\lambda - \lambda^n)^2 \right) + 8(\lambda^2 + \mu^2) \right\} (\bar{\tau}_0^*)^2 \|\phi\|_\infty^2 \mathbf{P} [\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n] \\ &\quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (6.79)$$

avec l'hypothèse (6.30). D'autre part, (6.78) implique aussi :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n} \left\{ \bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t) - \gamma_\phi(t) \right\}^2 \right] &\leq 4 \left\{ (\mu - \mu^n)^2 + (\lambda - \lambda^n)^2 \right\} (\bar{\tau}_0^*)^2 \|\phi^2\|_\infty^2 \\ &\quad + 4\mu^2 \|\phi^2\|_\infty^2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \int_0^{\bar{\tau}_0^*} |\mathcal{R}(\bar{v}_s^n) - \bar{r}_s| ds \right\}^2 \right] \\ &\quad + 4\lambda^2 \|\phi^2\|_\infty^2 \left\{ \mathbf{E} \left[ \frac{D^n}{n} - \bar{d} \right] \right\}^2 \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned} \quad (6.80)$$

avec les assertions (6.28), (6.29), (6.34) et (6.35) des hypothèses 6.4.1. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t) - \gamma_\phi(t) \right\}^2 \right] &\leq 2\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n} \left\{ \bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t) - \gamma_\phi(t) \right\}^2 \right] \\ &\quad + 2\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \bar{\mathcal{A}}_\phi^n(t) - \gamma_\phi(t) \right\}^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right] \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

avec (6.79) et (6.80) : (C.5) est démontrée. Finalement, (C.4) découle directement de la continuité des intégrales dans (6.76), et pour tout  $T > 0$ , d'après (6.75) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq T} |\bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t) - \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t-)|^2 \right] &\leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq T} \sqrt{n} (\langle \bar{v}_t^n, \phi \rangle - \langle \bar{v}_{t-}^n, \phi \rangle)^2 \right] \\ &\leq \left( \sqrt{n} \frac{\|\phi\|_\infty}{n} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

puisque les sauts de  $(\bar{v}_t^n, t \geq 0)$  sont p.s. de taille inférieure à  $\frac{\|\phi\|_\infty}{n}$  : on a (C.3). On peut donc appliquer le théorème C.0.2 : la suite de martingales  $\left( (\bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^* \right)$  converge en loi vers le mouvement Brownien changé de temps  $(W_{\gamma_\phi(t)}, t \geq 0)$ , ou de manière équivalente, vers le processus

$$\left( \sqrt{\mu} \int_0^t \phi(\bar{r}_s) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} W_t^2 \phi(\bar{d}), t \geq 0 \right),$$

où  $(W_t^1, t \geq 0)$  et  $(W_t^2, t \geq 0)$  sont deux mouvements browniens réels indépendants (ce sont deux martingales locales réelles continues de même processus croissant  $(\gamma_\phi(t), t \geq 0)$ ). Pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , la suite de processus  $\left( (\langle \bar{\mathcal{M}}_t^n, \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^* \right)$  converge donc en loi dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$  vers le processus  $(\langle \bar{\mathcal{M}}_t, \phi \rangle, t \geq 0)$  défini en (6.77), ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 6.5.7**

*La suite de processus de  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$   $\left( (N_t^{\bar{\mathcal{M}}^n}, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^* \right)$  converge en loi vers  $(N_t^{\bar{\mathcal{M}}}, t \geq 0)$ . Autrement dit, pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , la suite de processus  $\left( \left( \int_0^t \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{t-s}\phi}^n ds, t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right)$  converge en loi dans  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$  vers le processus défini pour tout  $t$  par :*

$$\sqrt{\mu} \int_0^t \int_0^s \tau_{t-s}\phi(\bar{r}_u) dW_u^1 ds + \sqrt{\lambda} \int_0^t \tau_{t-s}\phi(\bar{d}) W_s^2 ds.$$

*Preuve.* La suite de  $((\bar{\mathcal{M}}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  est à valeurs dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ . On applique la proposition 6.5.1 : l'application qui à  $((\bar{\mathcal{M}}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  associe  $\left( (N_t^{\bar{\mathcal{M}}^n}, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^* \right)$  est continue. La convergence du lemme précédent donne le résultat avec le théorème de l'application continue (théorème C.0.1).  $\square$

Pour toute  $\phi$  fixée dans  $\mathcal{S}$ , la limite en loi au sens de la topologie de Skorokhod de la suite de processus réels  $(\bar{Y}_\phi^n, n \in \mathbb{N}^*)$  va être établie en montrant la tension de la suite des mesures images de ces processus sur  $\mathcal{D}_{T, \mathbb{R}}$ .

**Proposition 6.5.2**

*Pour toute  $\phi$ , la suite de processus  $\left( (\bar{Y}_\phi^n(t), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^* \right)$  est tendue.*

*Preuve.* Nous allons appliquer le théorème C.0.3 : fixons  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ ,  $\varepsilon, \eta > 0$  et intéressons-nous au *module de continuité* de  $\bar{Y}_\phi^n$ ,

$$w^n(\delta) := \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^*, |v-u| \leq \delta} |\bar{Y}_\phi^n(u) - \bar{Y}_\phi^n(v)|.$$

Avec (6.38), on a pour tous  $u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n$  :

$$\begin{aligned}
\langle \bar{Y}^n(u) - \bar{Y}^n(v), \phi \rangle &= \sqrt{n} \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_u \phi - \tau_v \phi \rangle \\
&\quad + \sqrt{n} (\mu - \mu^n) \left\{ \int_0^u \tau_{u-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds - \int_0^v \tau_{v-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds \right\} \\
&\quad - \sqrt{n} (\lambda - \lambda^n) \left\{ \int_0^u \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] ds - \int_0^v \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] ds \right\} \\
&\quad - \sqrt{n} \mu \left\{ \int_0^u \left( \tau_{u-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{u-s} \phi(\bar{r}_s) \right) ds \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \int_0^v \left( \tau_{v-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{v-s} \phi(\bar{r}_s) \right) ds \right\} \\
&\quad + \sqrt{n} \lambda \left\{ \int_0^u \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) - \tau_s \phi(\bar{d}) \right] ds \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \int_0^v \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) - \tau_s \phi(\bar{d}) \right] ds \right\} \\
&\quad + \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(u) - \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(v) - \left\{ \int_0^u \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{u-s}\phi'}^n(s) ds - \int_0^v \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{v-s}\phi'}^n(s) ds \right\}. \quad (6.81)
\end{aligned}$$

On a alors pour tous  $v < u \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n$  :

$$\begin{aligned}
|\langle \bar{Y}^n(u) - \bar{Y}^n(v), \phi \rangle| &\leq |\sqrt{n} \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_u \phi - \tau_v \phi \rangle| \\
&\quad + \sqrt{n} \left\{ |\mu - \mu^n| + |\lambda - \lambda^n| \right\} \|\phi\|_\infty (u + v) \\
&\quad + \sqrt{n} \mu \left| \int_0^u \left( \tau_{u-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{u-s} \phi(\bar{r}_s) \right) ds \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \int_0^v \left( \tau_{v-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{v-s} \phi(\bar{r}_s) \right) ds \right| \\
&\quad + \sqrt{n} \lambda \|\phi'\|_\infty \mathbf{E} \left[ \left| \frac{D^n}{n} - \bar{d} \right| \right] (u + v) \\
&\quad + |\bar{\mathcal{M}}_\phi^n(u) - \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(v)| + \left| \int_0^u \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{u-s}\phi'}^n(s) ds - \int_0^v \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{v-s}\phi'}^n(s) ds \right|. \quad (6.82)
\end{aligned}$$

Tout d'abord, la suite de processus  $((\sqrt{n} \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  converge en loi par l'hypothèse (6.72). Elle est donc tendue et donc il existe  $N_0$  et  $\delta_0 > 0$  tels que pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$\mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta_0} |\sqrt{n} \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_u \phi - \tau_v \phi \rangle| \geq \frac{\eta}{12} \right] \leq \frac{\varepsilon}{8}. \quad (6.83)$$

Ensuite, il existe  $N_1$  tel que pour tout  $n \geq N_1$  et tout  $\delta \leq \bar{\tau}_0^*$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} \sqrt{n} \left\{ |\mu - \mu^n| + |\lambda - \lambda^n| \right\} \|\phi\|_\infty (u+v) \\ \leq \sqrt{n} \left\{ |\mu - \mu^n| + |\lambda - \lambda^n| \right\} \|\phi\|_\infty 2\bar{\tau}_0^* < \frac{\eta}{12}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

et il existe  $N_2$  tel que pour tout  $n \geq N_2$  et tout  $\delta \leq \bar{\tau}_0^*$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} \sqrt{n} \lambda \|\phi'\|_\infty \mathbf{E} \left[ \left| \frac{D^n}{n} - \bar{d} \right| \right] (u+v) \\ \leq \sqrt{n} \lambda^n \|\phi'\|_\infty \mathbf{E} \left[ \left| \frac{D^n}{n} - \bar{d} \right| \right] 2\bar{\tau}_0^* < \frac{\eta}{12}. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Le lemme 6.5.5 implique en particulier que la suite de processus

$$\left( \left( \sqrt{n} \int_0^t \{ \tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s) \} ds, t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right)$$

est tendue. D'après le théorème C.0.3, il existe donc  $\delta_3$  et  $N_3$  tels que pour tout  $n \geq N_3$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left[ \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta_3} \sqrt{n} \mu \left| \int_0^u \left( \tau_{u-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{u-s} \phi(\bar{r}_s) \right) ds \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^v \left( \tau_{v-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{v-s} \phi(\bar{r}_s) \right) ds \right| \geq \frac{\eta}{12} \right] \leq \frac{\varepsilon}{8} \end{aligned} \quad (6.86)$$

De même, le lemme 6.5.6 implique que la suite  $\left( \left( \mathcal{M}_\phi^n(t), t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right)$  est tendue. D'après le théorème C.0.3, il existe donc  $\delta_4$  et  $N_4$  tels que pour tout  $n \geq N_4$  :

$$\mathbf{P} \left[ \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta_4} |\bar{\mathcal{M}}_\phi^n(u) - \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(v)| \geq \frac{\eta}{12} \right] \leq \frac{\varepsilon}{8}. \quad (6.87)$$

Le corollaire 6.5.7 indique de même que la suite de processus

$$\left( \left( \int_0^t \mathcal{M}_{\tau_{t-s} \phi'}^n(s) ds, t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right)$$

est tendue. Il existe donc  $\delta_5$  et  $N_5$  tels que pour tout  $n \geq N_5$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left[ \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta_4} \left| \int_0^u \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{u-s} \phi'}^n(s) ds - \int_0^v \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{v-s} \phi'}^n(s) ds \right| \geq \frac{\eta}{12} \right] \\ \leq \frac{\varepsilon}{8}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Finalement, pour

$$\delta := \min(\delta_0, \delta_3, \delta_4, \delta_5) ,$$

$$N_6 := \max(N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5) ,$$

(6.83) donne pour tout  $n \geq N_6$  :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} |\langle \bar{Y}^n(u) - \bar{Y}^n(v), \phi \rangle| \geq \frac{\eta}{2} \right] \\ & \leq \mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} |\sqrt{n} \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_u \phi - \tau_v \phi \rangle| \geq \frac{\eta}{12} \right] \\ & + \mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} \sqrt{n} \left\{ |\mu - \mu^n| + |\lambda - \lambda^n| \right\} \|\phi\|_\infty (u+v) \geq \frac{\eta}{12} \right] \\ & + \mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} \sqrt{n} \mu \left| \int_0^u (\tau_{u-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{u-s} \phi(\bar{r}_s)) ds \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^v (\tau_{v-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{v-s} \phi(\bar{r}_s)) ds \right| \geq \frac{\eta}{12} \right] \\ & + \mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} \sqrt{n} \lambda \|\phi'\|_\infty \mathbf{E} \left[ \left| \frac{D^n}{n} - \bar{d} \right| \right] (u+v) \geq \frac{\eta}{12} \right] \\ & \quad + \mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} |\bar{\mathcal{M}}_\phi^n(u) - \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(v)| \geq \frac{\eta}{10} \right] \\ & + \mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} \left| \int_0^u \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{u-s} \phi'}^n(s) ds - \int_0^v \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{v-s} \phi'}^n(s) ds \right| \geq \frac{\eta}{12} \right] \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (6.89) \end{aligned}$$

avec (6.83), (6.84), (6.85), (6.86), (6.87) et (6.88).

D'autre part, pour tout  $n$  :

$$\mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^*, |v-u| \leq \delta} |\langle \bar{Y}^n(u) - \bar{Y}^n(v), \phi \rangle| \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \geq \frac{\eta}{2} \right] \leq \mathbf{P} [\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n],$$

et donc en vertu de l'hypothèse (6.30), il existe  $N_7$  tel que pour tout  $n \geq N_7$  :

$$\mathbf{P} \left[ \sup_{u, v \leq \bar{\tau}_0^*, |v-u| \leq \delta} |\langle \bar{Y}^n(u) - \bar{Y}^n(v), \phi \rangle| \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \geq \frac{\eta}{2} \right] \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.90)$$

Finalement, pour tout  $n \geq N := N_6 \vee N_7$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[w^n(\delta) \geq \eta] &\leq \mathbf{P} \left[ \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^* \wedge \bar{\tau}_0^n, |v-u| \leq \delta} |\langle \bar{Y}^n(u) - \bar{Y}^n(v), \phi \rangle| \geq \frac{\eta}{2} \right] \\ &\quad + \mathbf{P} \left[ \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^*, |v-u| \leq \delta} |\langle \bar{Y}^n(u) - \bar{Y}^n(v), \phi \rangle| \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \geq \frac{\eta}{2} \right] \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

avec (6.89) et (6.90). La condition (C.7) du théorème C.0.3 est vérifiée pour la suite de processus  $(Y_\phi^n, n \in \mathbb{N}^*)$ . La condition (C.6) ayant été supposée vraie par l'hypothèse (6.71), le théorème s'applique : la suite est tendue.  $\square$

Nous montrons finalement le théorème central limite pour une suite de processus de transport renormalisés et plus précisément, la convergence en loi de la suite de processus  $(Y_\phi^n(t), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*$  vers un processus de diffusion :

### Theorème 6.5.8

*Soit  $\phi \in \mathcal{S}$ . Soit le processus défini pour tout  $t$  par*

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\phi^*(t) &= \langle v, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{\mu} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{d}) dW_s^2, \end{aligned}$$

*où  $(W_t^1, t \geq 0)$  et  $(W_t^2, t \geq 0)$  sont deux mouvements browniens indépendants.*

*Sous les hypothèses 6.4.1 et 6.5.4,*

$$\bar{Y}_\phi^n \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} \bar{Y}_\phi^*.$$

*Preuve.* Soit  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ . Soit  $t \leq \bar{\tau}_0^*$ . Nous avons vu dans la proposition précédente que la suite de processus  $((\bar{Y}_\phi^n(t), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  est tendue et que toutes ses valeurs d'adhérence sont des processus à trajectoires p.s. continues. D'autre part, en vertu des hypothèses, la suite  $(\mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}}, n \in \mathbb{N}^*)$  converge en probabilité vers 0. En particulier, cette suite est tendue et donc, la suite des couples

$$\left( \left\{ (\bar{Y}_\phi^n(t), t \geq 0), \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \bar{\tau}_0^n\}} \right\}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

est tendue dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} \otimes \mathbb{R}$ . Alors, toute valeur d'adhérence de la suite des couples s'écrit  $\left\{ \left( \bar{Y}_\phi^*(t), t \geq 0 \right), 0 \right\}$  et autrement dit, le long de toute sous-suite convergente,  $\bar{\tau}_0^* \leq \bar{\tau}_0^n$  p.s. à partir d'un certain rang. Autrement dit, à partir d'un certain rang p.s.  $t \leq \bar{\tau}_0^n$  et donc, d'après la relation (6.38) :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\phi^n(t) &= \sqrt{n} \langle \bar{\eta}_0^n, \tau_t \phi \rangle + \sqrt{n} (\mu - \mu^n) \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) ds \\ &\quad - \sqrt{n} (\lambda - \lambda^n) \int_0^t \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) \right] ds \\ &\quad - \sqrt{n} \mu \int_0^t \left( \tau_{t-s} \phi(\mathcal{R}(\bar{\nu}_s^n)) - \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s) \right) ds \\ &\quad + \sqrt{n} \lambda \int_0^t \mathbf{E} \left[ \tau_s \phi \left( \frac{D^n}{n} \right) - \tau_s \phi(\bar{D}) \right] ds \\ &\quad + \bar{\mathcal{M}}_\phi^n(t) - \int_0^t \bar{\mathcal{M}}_{\tau_{t-s} \phi'}^n(s) ds. \end{aligned}$$

En vertu des hypothèses 6.5.4, du lemme 6.5.5, du lemme 6.5.6 et du corollaire 6.5.7,  $\left( \bar{Y}_\phi^*(t), t \geq 0 \right)$  vérifie donc p.s. pour tout  $t \leq \bar{\tau}_0^*$  :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\phi^*(t) &= \langle v, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds + \sqrt{\mu} \int_0^t \phi(\bar{r}_s) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \phi(\bar{d}) W_t^2 \\ &\quad - \sqrt{\mu} \int_0^t \int_0^s \tau_{t-s} \phi'(\bar{r}_u) dW_u^1 ds - \sqrt{\lambda} \int_0^t \tau_{t-s} \phi'(\bar{d}) W_s^2 ds. \quad (6.91) \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini pour les intégrales stochastiques ([RY94], ex 5.17 p.175) donne l'égalité en loi :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s \tau_{t-s} \phi'(\bar{r}_u) dW_u^1 ds &= \int_0^t \int_u^t \tau_{t-s} \phi'(\bar{r}_u) ds dW_u^1 \\ &= \int_0^t (\phi(\bar{r}_u) - \tau_{t-u} \phi(\bar{r}_u)) dW_u^1, \quad (6.92) \end{aligned}$$

et la formule d'intégration par parties implique :

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau_{t-s} \phi'(\bar{d}) W_s^2 ds &= \int_0^t W_s^2 d(\tau_{t-s} \phi(\bar{d})) \\ &= \phi(\bar{d}) W_t - \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{d}) dW_s^2. \quad (6.93) \end{aligned}$$

(6.92) et (6.93) dans (6.91) donne finalement l'égalité en loi :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\phi^*(t) &= \langle v, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{\mu} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{d}) dW_s^2. \end{aligned}$$

La limite en loi de  $\left(\bar{Y}_\phi^n(t), t \geq 0\right), n \in \mathbb{N}^*$  est donc l'unique valeur d'adhérence, entièrement définie par la relation précédente.  $\square$

### 6.5.3 Deuxième normalisation

Fixons maintenant  $\xi, (\lambda^n, n \in \mathbb{N}^*), \lambda, (\mu^n, n \in \mathbb{N}^*), R$  et  $(D^n, n \in \mathbb{N}^*)$  et  $K$  vérifiant les hypothèses 6.4.4. En particulier, la charge limite est donnée par

$$\frac{\lambda^n}{\mu^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$((\nu_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  dénote là-encore la suite des processus de transport correspondant à  $(\lambda^n, \mu^n, R, D^n)$  et maintenant  $((\tilde{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$ , sa renormalisation suivant le triplet  $(n^{3/2}, n, n^{3/2})$ .

On suppose de plus que :

#### Hypothèse 6.5.9

•

$$n^{1/4} (K - \sqrt{n}(\lambda^n - \mu^n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (6.94)$$

•

$$n^{1/4} \mathbf{E} \left[ \frac{D^n}{n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.95)$$

• *Il existe un processus  $(\mathcal{R}_t, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, S'}$  tel que :*

$$\left( \left( n^{3/4} (\delta_{\mathcal{R}(\tilde{\nu}_t^n)} - \delta_0), t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, S'} (\mathcal{R}_t, t \geq 0). \quad (6.96)$$

D'après le théorème 6.4.5, pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ ,

$$\langle \tilde{\nu}_t^n, \phi \rangle, t \geq 0 \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} \langle \tilde{\nu}_t^*, \phi \rangle, t \geq 0,$$

où  $(\tilde{\nu}_t^*, t \geq 0)$  est la limite fluide critique correspondant à  $(\xi, K)$ , définie par (6.49). Nous nous intéressons à nouveau au processus des écarts renormalisés. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et le processus à valeurs  $\mathcal{M}_f^+$  suivant : pour tout  $t$ ,

$$\tilde{Y}_t^n := n^{1/4} \tilde{\eta}_t^n = n^{1/4} (\tilde{\nu}_t^n - \tilde{\nu}_t^*).$$

En fixant  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$ , nous notons également le processus réel correspondant : pour tout  $t$ ,

$$\tilde{Y}_\phi^n(t) := n^{1/4} \langle \tilde{\nu}_t^n - \tilde{\nu}_t^*, \phi \rangle.$$

En suivant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 6.5.8, on montre alors que :

**Theorème 6.5.10**

*Sous les hypothèses 6.4.4 et 6.5.9, pour toute  $\phi$  dans  $S$ ,*

$$\tilde{Y}_\phi^n \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} \tilde{Y}_\phi^*,$$

*processus défini pour tout  $t$  par :*

$$\tilde{Y}_\phi^*(t) = \langle v, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s, \tau_{t-s} \phi \rangle ds + \sqrt{2\lambda} \int_0^t \phi(s-t) dW_s,$$

*où  $(W_t, t \geq 0)$  le mouvement Brownien standard.*

*Preuve.* Les arguments sont les mêmes que ceux de la preuve du théorème 6.5.8 : on passe à la limite en loi dans (6.63), en utilisant la convergence de la martingale correspondante vers un mouvement Brownien changé de temps de même processus croissant que dans le théorème précédent, en remplaçant pour tout  $t$ ,  $\bar{r}_t$  par 0 et  $\bar{D}$  par 0.  $\square$

## 6.6 Application aux files EDF

Revenons aux files d'attente avec clients impatientes soumises à EDF. Considérons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une file d'attente  $M/M/1/1 + GI - EDF$  pour laquelle :

- $\lambda^n$  est l'intensité du processus Poissonien des entrées  $(N_t^n, t \geq 0)$ ,
- tout client demande un service exponentiellement distribué de paramètre  $\mu^n$ ,
- tout client est affecté d'un délai éliminatoire jusqu'au début du service, de loi celle de  $D^n$ .

Nous notons alors  $(\nu_t^n, t \geq 0)$ , le processus des profils correspondant. On note pour toute mesure ponctuelle  $\zeta$  telle que  $\zeta(\mathbb{R}_+^*) > 0$ ,

$$\mathcal{R}_{EDF}(\zeta) := t_1(\zeta),$$

le plus petit atome positif de cette mesure.  $t_1(\nu_t^n)$  correspond donc au délai résiduel du client prioritaire dans la  $n$ -ième file à l'instant  $t$ . Avec ces notations,  $(\nu_t^n, t \geq 0)$  est donc le processus de transport correspondant à  $(\lambda^n, \mu^n, \mathcal{R}_{EDF}, D^n)$ , puisqu'alors (6.8) revient à (6.4).

On notera par ailleurs pour tout  $n$  :

$$\tau_0^n := \inf \{t, \nu_t^n(\mathbb{R}_+^*) = 0\},$$

le premier instant de vidage du système.

### 6.6.1 File $M/M/1/1 + GI - EDF$ à charge quelconque

Soit  $(\bar{\nu}_t^n, t \in \mathbb{R}^+)$  la renormalisation du  $n$ -ième processus des profils suivant le triplet  $(n, n, n)$ . On note là-encore

$$\bar{\tau}_0^n := \inf \{t, \bar{\nu}_t^n(\mathbb{R}_+^*) = 0\} = \frac{1}{n} \tau_0^n.$$

#### Theorème 6.6.1

1. *On suppose que les hypothèses (6.28), (6.29), (6.32), (6.33) et (6.34) sont vérifiées, qu'il existe un processus  $(\bar{r}_t^{EDF}, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\infty, \mathbb{R}}$  tel que pour tout  $t > 0$  :*

$$\mathbf{E} \left[ \left( \int_0^t (t_1(\bar{\nu}_s^n) - \bar{r}_s^{EDF}) ds \right)^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (6.97)$$

*et qu'à l'origine il existe un entier strictement positif  $x$  et  $\bar{\tau}_0^* \in (0, x/\mu]$  tels que :*

$$\nu_0^n([n\bar{\tau}_0^*, \infty)) \geq nx + 2 \text{ pour tout } n. \quad (6.98)$$

*Dans ces conditions, pour toute fonction  $\phi$  de  $S$ ,*

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^{EDF}, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

*où  $(\bar{\nu}_t^{EDF}, t \geq 0)$  est la limite fluide correspondant à  $(\xi, \lambda, \mu, \bar{r}^{EDF}, \bar{D})$  :*

$$\langle \bar{\nu}_t^{EDF}, \phi \rangle = \langle \xi, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s^{EDF}) ds + \lambda \int_0^t \mathbf{E} [\tau_s \phi(\bar{D})] ds.$$

2. *On suppose de plus que les hypothèses (6.69)-(6.73) sont vérifiées et qu'il existe un processus  $(\mathcal{R}_t^{EDF}, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, S'}$  tel que :*

$$\left( \left( \sqrt{n} \left( \delta_{t_1(\bar{\nu}_t^n)} - \delta_{\bar{r}_t^{EDF}} \right), t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, S'} (\mathcal{R}_t^{EDF}, t \geq 0). \quad (6.99)$$

*Alors, pour toute fonction  $\phi$  de  $S$ ,*

$$\left( \left( \sqrt{n} \langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^{EDF}, \phi \rangle, t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} (\bar{Y}_\phi^{EDF}(t), t \geq 0),$$

le processus défini pour tout  $t$  par :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\phi^{EDF}(t) &= \langle v, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s^{EDF}, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{\mu} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s^{EDF}) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{d}) dW_s^2, \end{aligned}$$

où  $(W_t^1, t \geq 0)$  et  $(W_t^2, t \geq 0)$  sont deux mouvements browniens indépendants.

*Preuve.* 1. Nous appliquons le théorème 6.4.2 à la suite de processus  $(\bar{v}^n, n \in \mathbb{N})$ . Pour cela, nous devons vérifier les hypothèses 6.4.1. (6.35) revient à (6.97). Ensuite, l'hypothèse (6.98) signifie qu'il y a initialement dans la  $n$ -ième file au moins  $nx + 2$  clients dont le délai résiduel est supérieur ou égal à  $n\bar{\tau}_0^*$ . Notons  $T_0^n$ , le cumul du temps qui serait nécessaire pour servir les  $nx + 1$  premiers clients parmi eux :

$$T_0^n := \sum_{i=1}^{nx+1} \sigma_i.$$

$T_0^n$  est en particulier indépendant du processus des entrées  $(N_t^n, t \geq 0)$ . On a par ailleurs pour tout  $n$  :

$$\mathbf{P} [T_0^n < n\bar{\tau}_0^*] \leq \mathbf{P} [S_{n\bar{\tau}_0^*}^n \geq nx + 1] = \mathbf{P} [S_{n\bar{\tau}_0^*}^n > nx], \quad (6.100)$$

où  $(S_t^n, t \geq 0)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\mu^n$ , puisque les services de durée  $\varepsilon(\mu^n)$  s'enchaînent sans interruption au moins jusqu'à l'instant de fin du  $nx + 2$ -ième service.  $S_{n\bar{\tau}_0^*}^n$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu^n n\bar{\tau}_0^*$  et a donc même loi qu'une somme de  $n$  variables  $(P_i^n, i = 1..n)$  i.i.d. de loi de Poisson de paramètre  $\mu^n \bar{\tau}_0^*$ . Le terme précédent vaut donc :

$$\mathbf{P} [S_{n\bar{\tau}_0^*}^n > nx] = \mathbf{P} \left[ \sum_i^n P_i^n > nx \right] = \mathbf{P} \left[ \frac{1}{n} \sum_i^n P_i^n > x \right].$$

En notant  $(P_i, i \in \mathbb{N})$ , une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre  $\mu \bar{\tau}_0^*$ , le terme précédent est équivalent pour  $n$  grand à

$$\mathbf{P} \left[ \frac{1}{n} \sum_i^n P_i > x \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} [\mathbf{E} [P_1] > x] = \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^* > \frac{x}{\mu}\}} = 0,$$

par la loi faible des grands nombres. Donc :

$$\mathbf{P} [T_0^n < n\bar{\tau}_0^*] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6.101)$$

Soient maintenant pour tout  $n$ , les évènements suivants :

$$\mathcal{A}^n := \left\{ \bar{\tau}_0^n < \bar{\tau}_0^* \right\} = \left\{ \tau_0^n < n\bar{\tau}_0^* \right\},$$

$$\mathfrak{B}^n := \left\{ \begin{array}{l} \text{Les } nx + 1 \text{ clients prioritaires parmi ceux de délais} \\ \text{initialement } \geq n\bar{\tau}_0^* \text{ sont servis avant } n\bar{\tau}_0^* \end{array} \right\}.$$

Sur  $\mathcal{A}^n$ , les atomes de  $\nu_0^n$  qui sont supérieurs à  $n\bar{\tau}_0^*$  ont disparu de la demi-droite positive avant  $n\bar{\tau}_0^*$ . Pourtant, les clients correspondant n'ont pu être éliminés à cet instant car leur échéance était postérieure à  $n\bar{\tau}_0^*$ . Ils sont donc tous rentrés en service avant  $n\bar{\tau}_0^*$ . Comme ils étaient au moins au nombre de  $nx + 2$ , cela signifie en particulier que les  $nx + 1$  prioritaires parmi eux ont tous complété leur service avant  $n\bar{\tau}_0^*$ . Ceci ne peut être vrai que si  $T_0^n < n\bar{\tau}_0^*$ . On a donc :

$$\mathcal{A}^n \subseteq \mathfrak{B}^n \subseteq \{T_0^n < n\bar{\tau}_0^*\}, \quad (6.102)$$

et donc :

$$\mathbf{P} [\mathcal{A}^n] \leq \mathbf{P} [T_0^n < n\bar{\tau}_0^*] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

avec (6.101) : l'hypothèse (6.30) est donc vérifiée.

Il reste à vérifier (6.31). Tout d'abord, on a p.s. pour tout  $n$  et pour toute  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle^2 &= \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{Q_{nt}^n} \phi \left( \frac{t_i(\bar{\nu}_{nt}^n)}{n} \right) \right\}^2 \leq \frac{\|\phi\|_\infty^2}{n^2} \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \{Q_{nt}^n\}^2 \\ &\leq \frac{\|\phi\|_\infty^2}{n^2} \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \{N_{nt}^n + \nu_0^n(\mathbb{R}_+^*)\}^2 \\ &\leq 2 \|\phi\|_\infty^2 \left\{ \frac{\{N_{n\bar{\tau}_0^*}^n\}^2}{n^2} + \{\bar{\nu}_0^n(\mathbb{R}_+^*)\}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^n < \bar{\tau}_0^*\}} \right] &\leq 2 \|\phi\|_\infty^2 \mathbf{E} \left[ \frac{\{N_{n\bar{\tau}_0^*}^n\}^2}{n^2} \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^n < \bar{\tau}_0^*\}} \right] \\ &\quad + 2 \|\phi\|_\infty^2 \mathbf{E} \left[ \{\bar{\nu}_0^n(\mathbb{R}_+^*)\}^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^n < \bar{\tau}_0^*\}} \right]. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Or, d'après (6.102),

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \frac{\left\{ N_{n\bar{\tau}_0^*}^n \right\}^2}{n^2} \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^n < \bar{\tau}_0^*\}} \right] &\leq \mathbf{E} \left[ \frac{\left\{ N_{n\bar{\tau}_0^*}^n \right\}^2}{n^2} \mathbf{1}_{\{T_0^n < n\bar{\tau}_0^*\}} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[ \frac{\left\{ N_{n\bar{\tau}_0^*}^n \right\}^2}{n^2} \right] \mathbf{P} [T_0^n < n\bar{\tau}_0^*] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^2 \{\bar{\tau}_0^*\}^2 \mathbf{P} [T_0^n < n\bar{\tau}_0^*] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned} \quad (6.105)$$

en utilisant au passage l'indépendance de  $T_0^n$  et du processus des entrées  $(N_t^n, t \geq 0)$ . De plus :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[ \left( \bar{\nu}_0^n \{\mathbb{R}_+^*\} \right)^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^n < \bar{\tau}_0^*\}} \right] \\ &\leq 2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \bar{\nu}_0^n (\mathbb{R}_+^*) - \xi (\mathbb{R}_+^*) \right\}^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^n < \bar{\tau}_0^*\}} \right] + 2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \xi (\mathbb{R}_+^*) \right\}^2 \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}_0^n < \bar{\tau}_0^*\}} \right] \\ &\leq 2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \bar{\nu}_0^n (\mathbb{R}_+^*) - \xi (\mathbb{R}_+^*) \right\}^2 \right] + 2 \left\{ \xi (\mathbb{R}_+^*) \right\}^2 \mathbf{P} [T_0^n < n\bar{\tau}_0^*] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned} \quad (6.106)$$

avec (6.32) et (6.101). Finalement, (6.105) et (6.106) dans (6.104) donne (6.31).

2. Comme (6.74) est vraie d'après (6.99), on peut appliquer le théorème 6.5.8. □

### Le cas $\bar{D} = 0$

Un exemple de loi pour les délais initiaux des clients dans le  $n$ -ième système vérifiant l'hypothèse (6.97) est celui où l'on suppose que le délai initial renormalisé des clients  $D^n/n$  tend en loi vers 0. Supposons par exemple que pour tout  $n$ ,

$$D^n \sim \varepsilon \left( \frac{\Gamma}{n^{1-\alpha}} \right),$$

où  $\eta, \Gamma > 0$  et  $\varepsilon(\zeta)$  est la loi exponentielle de paramètre  $\zeta$ . Il est alors aisé de vérifier les hypothèses (6.33), (6.34) et (6.73) pour

$$\bar{D} = 0 \text{ p.s..}$$

De plus, par Cauchy-Schwarz puis Fubini,

$$\mathbf{E} \left[ \left( \int_0^t (t_1(\bar{\nu}_s^n) ds) \right)^2 \right] \leq t \int_0^t \mathbf{E} \left[ (t_1(\bar{\nu}_s^n))^2 \right] ds.$$

Or, pour tout  $s$ ,  $t_1(\bar{v}_s^n) \leq \frac{D^n(s)}{n}$  p.s., où  $D^n(s)$  est le délai *initial* du client prioritaire à l'instant  $s$  dans le  $n$ -ième système.  $D^n(s)$  est de loi de  $D^n$  et donc :

$$t \int_0^t \mathbf{E} \left[ (t_1(\bar{v}_s^n))^2 \right] ds \leq t \int_0^t \mathbf{E} \left[ \left( \frac{D^n}{n} \right)^2 \right] ds = \frac{2t^2}{n^{2\alpha}\Gamma^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

grâce à (6.34), puis par convergence dominée. Donc, (6.97) est vérifiée pour

$$(\bar{r}_t^{\text{EDF}}, t \in \mathbb{R}^+) \equiv \mathbf{0},$$

le processus identiquement nul. La limite fluide correspondante est alors donnée pour toute  $\phi$  et tout  $t$  par :

$$\langle \bar{\nu}_t^0, \phi \rangle = \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + (\lambda - \mu) \int_0^t \phi(-s) ds. \quad (6.107)$$

En supposant maintenant que les délais initiaux sont p.s. bornés, avec pour tout  $n$  :

$$D^n \leq n^{1/2-\alpha} d \text{ p.s.},$$

où  $\alpha, d > 0$ , le raisonnement précédent reste valide et la convergence vers la limite fluide définie par (6.107) reste vraie. De plus, on a pour tout  $n$ , toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$ , tout  $\eta > 0$  et tout  $\delta > 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left[ \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^*, |u-v| < \delta} \sqrt{n} |\{\phi(t_1(\bar{v}_u^n)) - \phi(0)\} - \{\phi(t_1(\bar{v}_v^n)) - \phi(0)\}| \geq \eta \right] \\ \leq \mathbf{P} \left[ \sup_{u,v \leq \bar{\tau}_0^*, |u-v| < \delta} \sqrt{n} |t_1(\bar{v}_u^n) - t_1(\bar{v}_v^n)| \geq \frac{\eta}{\|\phi'\|_\infty} \right] \\ \leq \mathbf{P} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \sqrt{n} \left| \frac{D^n(t)}{n} \right| \geq \frac{\eta}{\|\phi'\|_\infty} \right] \leq \mathbf{1}_{\{n^{-\alpha}d \geq \frac{\eta}{\|\phi'\|_\infty}\}}. \end{aligned}$$

Le terme précédent vaut 0 à partir d'un certain rang  $N$  : la suite de processus  $\left( \left( \sqrt{n}(\delta_{t_1(\bar{v}_t^n)} - \delta_0), t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right)$  est donc tendue dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathcal{S}'}$ . De même, pour tout  $\eta > 0$  et pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \sqrt{n} |\phi(t_1(\bar{v}_t^n)) - \phi(0)| > \eta \right] \leq \mathbf{P} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \sqrt{n} t_1(\bar{v}_t^n) > \frac{\eta}{\|\phi'\|_\infty} \right] \\ \leq \mathbf{1}_{\{n^{-\alpha}d \geq \frac{\eta}{\|\phi'\|_\infty}\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Toute valeur d'adhérence  $(\mathcal{R}_t^{\text{EDF}}, t \geq 0)$  vérifie donc :

$$\mathbf{P} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} |\langle \mathcal{R}_t^{\text{EDF}}, \phi \rangle| \geq \eta \right] = 0,$$

et donc  $(\mathcal{R}_t^{\text{EDF}}, t \geq 0)$  est unique, identiquement égal à la distribution nulle. L'hypothèse (6.99) est donc vérifiée pour le processus distribution nulle. On peut appliquer la deuxième partie du théorème 6.6.1 :

$$((\bar{Y}_\phi^n(t), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} (\bar{Y}_\phi^0(t), t \geq 0),$$

défini pour tout  $t$  par :

$$\bar{Y}_\phi^0(t) = \langle v, \tau_t \phi \rangle + \sqrt{\mu} \int_0^t \phi(s-t) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \phi(s-t) dW_s^2.$$

### 6.6.2 File $M/M/1/1 + GI - EDF$ à charge unité

Soit maintenant  $(\tilde{\nu}_t^n, t \in \mathbb{R}^+)$ , la renormalisation de  $(\nu_t^n, t \geq 0)$  suivant le triplet  $(n^{3/2}, n, n^{3/2})$ . On note ici

$$\tilde{\tau}_0^n := \inf \{t, \tilde{\nu}_t^n(\mathbb{R}_+) = 0\} = \frac{1}{n^{3/2}} \tau_0^n.$$

#### Theorème 6.6.2

1. *On suppose que les hypothèses (6.53), (6.54), (6.55) et (6.58) sont vérifiées, que*

$$\mathbf{E} \left[ \left\{ \frac{D^n}{n} \right\}^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (6.108)$$

*et qu'à l'origine il existe un entier strictement positif  $x$  et  $\tilde{\tau}_0^* \in (0, x/\lambda]$  tels que :*

$$\nu_0^n \left( \left[ n^{3/2} \tilde{\tau}_0^*, \infty \right) \right) \geq nx + 2 \text{ pour tout } n. \quad (6.109)$$

*Dans ces conditions, pour toute fonction  $\phi$  de  $\mathcal{S}$ ,*

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \tilde{\nu}_t^n - \tilde{\nu}_t^{\text{EDF}}, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

*où  $(\tilde{\nu}_t^{\text{EDF}}, t \geq 0)$  est la limite fluide critique correspondant à  $(\xi, K)$  : pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$  et tout  $t$ ,*

$$\langle \tilde{\nu}_t^{\text{EDF}}, \phi \rangle = \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + K \int_0^t \phi(s-t) ds.$$

2. On suppose de plus que les hypothèses (6.94) et (6.95) sont vérifiées et qu'il existe un processus  $(\mathcal{R}_t^{\mathbf{EDF}}, t \geq 0)$  de  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, S'}$  tel que :

$$\left( \left( \sqrt{n} \left( \delta_{t_1(\bar{\nu}_t^n)} - \delta_0 \right), t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, S'} (\mathcal{R}_t^{\mathbf{EDF}}, t \geq 0). \quad (6.110)$$

Alors, pour toute fonction  $\phi$  de  $S$ ,

$$\left( \left( \sqrt{n} \langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^{\mathbf{EDF}}, \phi \rangle, t \geq 0 \right), n \in \mathbb{N}^* \right) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} \left( \tilde{Y}_\phi^{\mathbf{EDF}}(t), t \geq 0 \right),$$

le processus défini pour tout  $t$  par :

$$\tilde{Y}_\phi^{\mathbf{EDF}}(t) = \langle v, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s^{\mathbf{EDF}}, \tau_{t-s} \phi \rangle ds + \sqrt{2\lambda} \int_0^t \phi(s-t) dW_s,$$

où  $(W_t, t \geq 0)$  est le mouvement Brownien standard.

*Preuve.* 1. (6.108) implique que  $\frac{D^n}{n}$  tend en loi vers 0 (hypothèse (6.59)) et par Cauchy-Schwarz,

$$\left\{ \mathbf{E} \left[ \frac{D^n}{n} \right] \right\}^2 \leq \mathbf{E} \left[ \left\{ \frac{D^n}{n} \right\}^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a donc (6.60). De même, pour tout  $t > 0$  et pour tout  $n$  :

$$\mathbf{E} \left[ \left\{ \sqrt{n} \int_0^t (t_1(\bar{\nu}_s^n) ds) \right\}^2 \right] \leq t^2 \mathbf{E} \left[ \left\{ \frac{D^n}{n} \right\}^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

et on a (6.61). Finalement, comme dans la preuve précédente l'hypothèse (6.109) garantit (6.56) et (6.57) : on applique le théorème 6.4.5.

2. (6.110) garantit (6.96) : on peut appliquer le théorème 6.5.10.  $\square$

**Remarque 6.6.1** En faisant le même raisonnement que dans la partie précédente, on vérifie que

$$D^n \sim \varepsilon \left( \frac{\Gamma}{n^{1-\alpha}} \right),$$

où  $\alpha, \Gamma > 0$  satisfait (6.108) et on peut dans ce cas appliquer la première partie du théorème 6.6.2. Si maintenant les délais initiaux sont bornés, par exemple

$$D^n \leq n^{3/4-\alpha} d \text{ p.s.},$$

où  $d > 0$  et déterministe, on vérifie l'hypothèse (6.95) et, comme dans la partie précédente, que (6.110) est vérifiée pour

$$(\mathcal{R}_t^{\text{EDF}}, t \geq 0) \equiv \mathbf{0},$$

le processus à valeur distribution nulle. On peut donc appliquer la deuxième partie du théorème 6.6.2, et la limite en loi est donnée pour tout  $t$  par :

$$\tilde{Y}_\phi^{\text{EDF}}(t) = \langle v, \tau_t \phi \rangle + \sqrt{2\lambda} \int_0^t \phi(s-t) dW_s.$$

### 6.6.3 File $M/M/s/s + GI - EDF$ à charge quelconque

Il est aisé de généraliser les résultats de la section 6.6.1 au cas général d'une suite de systèmes à  $S$  serveurs,  $S \geq 1$ . Du point de vue des clients du buffer, la dynamique du  $n$ -ième système est identique en remplaçant le débit de service par  $S\mu^n$ . Le processus des profils correspondant ( $\nu_t^n, t \geq 0$ ) est alors le processus de transport associé à  $(\lambda^n, S\mu^n, \mathcal{R}_{EDF}, D^n)$ . On supposant maintenant qu'à l'origine, il existe un entier strictement positif  $x$  et  $\bar{\tau}_0^* \in (0, x/S\mu]$  tels que :

$$\nu_0^n([n\bar{\tau}_0^*, \infty)) \geq Snx + 2 \text{ pour tout } n,$$

(on a  $Snx + 2$  clients à servir et non plus seulement  $nx + 2$ ), sous les hypothèses du théorème 6.6.1 on a le même résultat : la suite de processus des profils renormalisés suivant  $(n, n, n)$  ( $\bar{\nu}_t^n, t \geq 0$ ),  $n \in \mathbb{N}^*$  vérifie pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^{\text{EDF}, S}, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

où  $(\bar{\nu}_t^{\text{EDF}, S}, t \geq 0)$  est la limite fluide associée à  $(\xi, \lambda, S\mu, \bar{r}^{\text{EDF}, S}, \bar{D})$  :

$$\langle \bar{\nu}_t^{\text{EDF}, S}, \phi \rangle = \langle \xi, \tau_t \phi \rangle - S\mu \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s^{\text{EDF}, S}) ds + \lambda \int_0^t \mathbf{E} [\tau_s \phi(\bar{D})] ds. \quad (6.111)$$

D'autre part, sous les mêmes hypothèses que le théorème 6.6.1, partie 2., pour toute  $\phi$  la suite des processus des écarts tend en loi vers le processus :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\phi^{\text{EDF}, S}(t) &= \langle v, \tau_t \phi \rangle - S\mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s^{\text{EDF}, S}, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{S\mu} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s^{\text{EDF}, S}) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{d}) dW_s^2, \end{aligned} \quad (6.112)$$

où  $(W_t^1, t \geq 0)$  et  $(W_t^2, t \geq 0)$  sont deux mouvements browniens indépendants.

### 6.6.4 File $M/M/s/s + GI - EDF$ à charge unité

On suppose là-aussi que la  $n$ -ième file a  $S$  serveurs, que

$$S\mu^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$$

la limite de  $(\lambda^n, n \in \mathbb{N}^*)$  (charge limite unité) et qu' il existe à l'origine un entier strictement positif  $x$  et  $\tilde{\tau}_0^* \in (0, x/\lambda]$  tels que :

$$\nu_0^n \left( \left[ n^{3/2} \tilde{\tau}_0^*, \infty \right) \right) \geq Snx + 2 \text{ pour tout } n.$$

Sous les hypothèses du théorème 6.6.2, on obtient de même la convergence vers la limite fluide critique associée à  $(\xi, K)$ , et le théorème central limite fonctionnel théorème 6.6.2, partie 2. .

## 6.7 Application aux files FIFO / FCFS

Le modèle est identique à celui décrit en partie 6.6, en précisant ici que pour tout  $n$  :

$$D^n = d^n \text{ p.s.},$$

où  $(d^n, n \in \mathbb{N}^*)$  est suite déterministe de réels strictement positifs, et que les clients sont servis suivant la discipline FIFO. Les files d'attente sont donc de type  $M/M/1/1 + D - FIFO$ . Comme nous l'avons remarqué en section 5.1.2, chapitre 5, dans ce cas où les délais initiaux sont déterministes les disciplines EDF et FIFO sont équivalentes. Le système est donc un système  $M/M/1/1 + D - EDF$ , et on peut appliquer les résultats de la partie 6.6. En supposant que la file a un serveur, que les hypothèses du théorème 6.6.1 sont vérifiées avec en particulier

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{n} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{d}, \\ \sqrt{n} \left( \frac{d^n}{n} - \bar{d} \right) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

(et donc, les hypothèses (6.33), (6.34) et (6.73) sont satisfaites), on peut appliquer le théorème 6.6.1 : la suite des processus des profils renormalisés suivant  $(n, n, n)$  ( $(\bar{\nu}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*$ ) vérifie pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$  :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \tilde{\tau}_0^*} \langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t^{\text{FIFO}}, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

où  $(\bar{\nu}_t^{\text{FIFO}}, t \geq 0)$  est la limite fluide correspondant à  $(\xi, \lambda, \mu, \bar{r}^{\text{FIFO}}, \bar{d})$  : pour tout  $t$  et toute  $\phi$  :

$$\langle \bar{\nu}_t^{\text{FIFO}}, \phi \rangle = \langle \xi, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s^{\text{FIFO}}) ds + \lambda \int_0^t \tau_s \phi(\bar{d}) ds. \quad (6.113)$$

Sous les hypothèses du théorème 6.6.1, partie 2., la suite des écarts satisfait de même :

$$((\sqrt{n}\langle \bar{v}_t^n - \bar{v}_t^{\text{FIFO}}, \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*) \Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} (\bar{Y}_\phi^{\text{FIFO}}(t), t \geq 0),$$

le processus défini pour tout  $t$  par :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\phi^{\text{FIFO}}(t) &= \langle v, \tau_t \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s^{\text{FIFO}}, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{\mu} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s^{\text{FIFO}}) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{d}) dW_s^2, \end{aligned}$$

où  $(W_t^1, t \geq 0)$  et  $(W_t^2, t \geq 0)$  sont deux mouvements browniens indépendants.

Les résultats de la section 6.6.2 restent vrais sous les mêmes hypothèses, en précisant que les délais initiaux des clients sont déterministes : le théorème 6.6.2 s'applique à une suite de systèmes  $M/M/1/1 + D - \text{FIFO}$  à charge limite unité  $(\lambda^n / \mu^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1)$ .

De même, en supposant maintenant que la file a  $S$  serveurs, les résultats de la section 6.6.3 restent vrais en supposant les délais déterministes. La  $n$ -ième file est alors de type  $M/M/s/s + D - \text{FCFS}$  et sous les mêmes hypothèses, pour toute  $\phi$  de  $\mathcal{S}$  :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq \bar{\tau}_0^*} \langle \bar{v}_t^n - \bar{v}_t^{\text{FCFS}}, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

où  $(\bar{v}_t^{\text{FCFS}}, t \geq 0)$  est la limite fluide associée à  $(\xi, \lambda, S\mu, \bar{r}^{\text{FCFS}}, \bar{d})$  :

$$\langle \bar{v}_t^{\text{FCFS}}, \phi \rangle = \langle \xi, \tau_t \phi \rangle - S\mu \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s^{\text{FCFS}}) ds + \lambda \int_0^t \tau_s \phi(\bar{d}) ds.$$

Pour toute  $\phi$  la suite des écarts  $((\langle \bar{v}_t^n - \bar{v}_t^{\text{FCFS}}, \phi \rangle, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  tend en loi au sens de Skorokhod sur  $[0, \bar{\tau}_0^*]$  vers le processus défini pour tout  $t$  par :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_\phi^{\text{FCFS}}(t) &= \langle v, \tau_t \phi \rangle - S\mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s^{\text{FCFS}}, \tau_{t-s} \phi \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{S\mu} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{r}_s^{\text{FCFS}}) dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \tau_{t-s} \phi(\bar{d}) dW_s^2, \quad (6.114) \end{aligned}$$

où  $(W_t^1, t \geq 0)$  et  $(W_t^2, t \geq 0)$  sont deux mouvements browniens indépendants.

Finalement, sous les hypothèses de la section 6.6.4, le théorème 6.6.2 s'applique à une suite de systèmes  $M/M/s/s + D - \text{FCFS}$  à charge limite unité  $(\lambda^n / S\mu^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1)$  : on a les mêmes résultats de convergence.

## 6.8 Application à la file M/GI/ $\infty$

Nous appliquons ici les résultats des parties 6.4 et 6.5 à la file *délai pur*. Considérons pour tout  $n$  un système M/GI/ $\infty$  dans lequel :

- $\lambda^n$  est l'intensité du processus Poissonien des entrées ( $N_t^n, t \geq 0$ ), telle que la suite ( $\lambda^n, n \in \mathbb{N}^*$ ) vérifie (6.28) : il existe  $\lambda$  tel que

$$\lambda^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda, \quad (6.115)$$

- les clients demandent des services i.i.d. de loi générale celle de

$$\sigma^n := n\sigma, \quad (6.116)$$

où  $\sigma$  est une variable aléatoire p.s. strictement positive.

Nous notons alors ( $\chi_t^n, t \geq 0$ ), le processus qui tient trace à l'instant  $t$  de tous les temps de service résiduels de tous les clients présents dans le système à l'instant  $t$ . Il est aisé de vérifier alors que le processus ( $\nu_t^n, t \geq 0$ ) est le processus de transport correspondant à ( $\lambda^n, 0, 0, \sigma^n$ ). En effet, il est un processus de Feller dont le générateur est donné par :

$$\mathcal{A}F(\chi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( F(\tau_h \chi) - F(\chi) \right) - \lambda^n F(\chi) + \lambda^n \int F(\chi + \delta_s) d\mathbf{P}_\sigma(s),$$

pour toute  $F$  appartenant à  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Nous notons par ailleurs pour tout  $n$  ( $\bar{\chi}_t^n, t \geq 0$ ), la renormalisation de ce processus suivant le triplet  $(n, n, n)$ . Nous imposons la condition initiale suivante : nous fixons  $x$ , un entier strictement positif et posons à  $t = 0$ ,  $\chi_0^n$  la distribution sur  $\mathbb{R}_+^*$  d'un  $nx$ -échantillon  $\{\sigma_i^n, i = 1, \dots, nx\}$  de variables aléatoires i.i.d. de loi celle de  $\sigma^n$ . Ceci implique en particulier que pour toute  $\phi \in \mathcal{D}_b$ , on a la convergence presque sûre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \bar{\chi}_0^n, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{nx} \phi \left( \frac{\sigma_i^n}{n} \right) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx} \sum_{i=1}^{nx} \phi \left( \frac{\sigma_i^n}{n} \right) = x \mathbf{E}[\phi(\sigma)],$$

par la loi forte des grands nombres. En supposant de plus qu'il existe une mesure  $\xi \in \mathcal{M}_f^+$  telle que pour tout  $T \geq 0$  et pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}_b$  :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq T} \langle \bar{\chi}_0^n - \xi, \tau_t \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (6.117)$$

les deux relations précédentes impliquent que pour toute  $\phi$  dans  $\mathcal{D}_b$  :

$$\mathbf{E}[\langle \xi, \phi \rangle] = x \mathbf{E}[\phi(\sigma)]. \quad (6.118)$$

**Theorème 6.8.1**

*Sous les hypothèses (6.115)-(6.117), pour tout  $T > 0$  :*

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq T} \langle \bar{\chi}_t^n - \bar{\chi}_t^{\text{DP}}, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

où  $(\bar{\chi}_t^{\text{DP}}, t \geq 0)$  est la fonction déterministe à valeurs  $\mathcal{M}_f^+$  définie pour tout  $t \geq 0$  par :

$$\bar{\chi}_t^{\text{DP}} = x \mathbf{E} [\tau_t f(\sigma)] + \lambda \int_0^t \mathbf{E} [\tau_s f(\sigma)] ds. \quad (6.119)$$

*Preuve.* Nous appliquons le théorème 6.4.2 à la suite de processus  $((\bar{\chi}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$ . Pour cela nous devons vérifier que les hypothèses 6.4.1 sous  $\mu = 0$  sont satisfaites. (6.28) est vérifiée en vertu de (6.115), (6.116) implique aisément (6.33) et (6.34) pour  $\bar{D} := \sigma$  et (6.32) est supposée vraie en vertu de (6.117) pour  $\xi$  définie par (6.118). On a donc pour tout  $T > 0$  :

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq T} \langle \bar{\chi}_t^n - \bar{\chi}_t^{\text{DP}}, \phi \rangle^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

où  $(\bar{\chi}_t^{\text{DP}}, t \geq 0)$  est la limite fluide correspondant à  $(\xi, \lambda, 0, 0, \sigma)$ , ce qui revient à (6.119).  $\square$

## 6.9 Commentaires

Les résultats présentés dans les parties 6.6, 6.7 et 6.8 donnent des applications du théorème limite fluide et du théorème central limite aux files d'attente avec clients impatients (resp. *délai pur*). Elles exploitent en outre une description exhaustive du système à travers la collection des délais (resp. temps de service) résiduels. Ceci étant, le lecteur aura noté que plusieurs indéterminations résistent à l'analyse. L'objet de cette partie conclusive est de les discuter. Nous expliquons dans certains cas les limites du modèle, et donnons dans d'autres cas des heuristiques pouvant se déduire de ces résultats sans pouvoir, dans l'état actuel des choses, les prouver rigoureusement.

### 6.9.1 Généralisation aux fonctions tests indicatrices

Il est naturel de vouloir donner des approximations fluides des processus de performances caractérisant le système, principalement, les processus  $(Q_t, t \geq 0)$  et  $(P_t, t \geq 0)$  qui comptent respectivement le nombre de clients dans le système à  $t$  et le nombre de clients perdus jusqu'à  $t$ . Pour tout  $t$ , l'approximation fluide  $(\bar{Q}_t^*, t \geq 0)$  du processus de congestion du buffer serait donnée par la relation :

$$\bar{Q}_t^* = \langle \bar{\nu}_t^*, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} \rangle, \quad (6.120)$$

où  $(\bar{\nu}_t^*, t \geq 0)$  est la limite fluide du processus des profils du système considéré. Cependant, les résultats de limites fluides que nous obtenons ne prouvent pas la convergence de la suite de processus de congestion du buffer renormalisés  $((\bar{Q}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  vers  $(\bar{Q}_t^*, t \geq 0)$ , puisque les convergences obtenues ne sont données que pour des fonctions tests fortement régulières (fonctions de  $\mathcal{S}$ ), alors que la fonction  $\phi := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$  présente une discontinuité en 0.

Ceci étant, la forme générale de la limite fluide  $\langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle$  (6.21) ne fait pas intervenir la dérivée de  $\phi$  et reste définie, par exemple, pour une fonction de type càdlàg, ce qui est le cas de  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ . En particulier, la limite fluide du nombre de clients dans le système  $M/M/\infty$  de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  initialement chargé de  $x$  clients demandant des services i.i.d. de loi  $\varepsilon(\mu)$  vaudrait, avec (6.119) appliquée à  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$  :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_t^{\text{DP}} &= \langle \bar{\chi}_t^{\text{DP}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} \rangle = x \mathbf{E} \left[ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\sigma - t) \right] + \lambda \int_0^t \mathbf{E} \left[ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\sigma - s) \right] ds \\ &= x \mathbf{P}[\sigma > t] + \lambda \int_0^t \mathbf{P}[\sigma > s] ds = xe^{-\mu t} + \rho(1 - e^{-\mu t}), \end{aligned} \quad (6.121)$$

ce qui est exactement la limite fluide du processus de congestion de la file  $M/M/\infty$  (voir [Rob00], th. 6.13 p.153). Cela signifie que dans ce cas, on peut généraliser le résultat de convergence, théorème 6.8.1, à la fonction test  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ . On peut remarquer que la renormalisation aboutissant à ce résultat, due à Kelly ([Kel86]), correspond en fait à la suite de processus de transport associée à  $(n\lambda, 0, 0, \sigma)$  renormalisée suivant les paramètres  $(1, n, 1)$ . La suite de martingales obtenue est alors exactement celle correspondant au cas traité en partie 6.8, définie pour tout  $n$  et  $t$  par :

$$\bar{M}_\phi^n(t) = \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle - \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle + \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds - \lambda t \mathbf{E}[\phi(\sigma)].$$

Ce résultat semble donc indiquer que l'on peut généraliser les résultats de limites fluides des processus de transport à des fonctions tests de type càdlàg, et en particulier aux fonctions indicatrices. Nous donnons ici une liste des résultats heuristiques auxquels cette idée conduirait :

### ***Affluence et nombre de clients servis dans le système $M/GI/\infty$***

Sous les hypothèses faites en section 6.8, l'équation (6.121) donnerait dans le cas général  $M/GI/\infty$  la limite fluide suivante pour le processus de congestion du système :

$$\bar{Q}_t^{\text{DP}} = \langle \bar{\chi}_t^{\text{DP}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} \rangle = x \mathbf{P}[\sigma > t] + \lambda \int_0^t \mathbf{P}[\sigma > s] ds.$$

La limite fluide du nombre de clients servis jusqu'à  $t$  serait alors donnée pour tout  $t$  par :

$$\bar{S}_t^{\text{DP}} = \langle \bar{\chi}_t^{\text{DP}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}-} \rangle = x \mathbf{P} [\sigma \leq t] + \lambda \int_0^t \mathbf{P} [\sigma \leq s] ds.$$

Dans le cas où les demandes de services initiales sont déterministes égales à  $\sigma$  (système  $M/D/\infty$ ), la limite fluide du processus de congestion à  $t$  revient à :

$$\bar{Q}_t^{\text{DP}} = x \mathbf{1}_{\{\sigma > t\}} + \lambda(t \wedge \sigma),$$

et celle du processus des services jusqu'à  $t$  devient :

$$\bar{S}_t^{\text{DP}} = x \mathbf{1}_{\{\sigma \leq t\}} + \lambda(t - \sigma)^+.$$

La suite de processus  $((\sqrt{n}(\bar{Q}_t^n - \bar{Q}_t^{\text{DP}}), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  convergerait sur tout compact au sens de la topologie de Skorokhod vers le processus de diffusion :

$$\mathcal{Q}_t^{\text{DP}} = \langle v, \mathbf{1}_{\{.\gt;t\}} \rangle + \sqrt{\lambda} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\sigma > t-s\}} dW_s,$$

et la suite de processus  $((\sqrt{n}(\bar{S}_t^n - \bar{S}_t^{\text{DP}}), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  convergerait dans le même sens vers le processus défini pour tout  $t$  par :

$$\mathcal{S}_t^{\text{DP}} = \langle v, \mathbf{1}_{\{.\leq;t\}} \rangle + \sqrt{\lambda} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\sigma \leq t-s\}} dW_s.$$

### ***Affluence du buffer et perte dans la file $M/M/s/s + GI - EDF$***

Dans le cas de la file à  $S$  serveurs ( $S \geq 1$ ) gérée par EDF, on obtiendrait la convergence dans  $\mathcal{D}_{\tau_0^*, \mathbb{R}}$  de la suite du nombre de clients dans le buffer renormalisé  $((\bar{Q}_t^n, t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*)$  vers la limite fluide donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_t^{\text{EDF}, S} &= \langle \bar{v}_t^{\text{EDF}, S}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} \rangle \\ &= \langle \xi, \tau_t \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} \rangle - S\mu \int_0^t \tau_{t-s} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} (\bar{r}_s^{\text{EDF}, S}) ds + \lambda \int_0^t \mathbf{E} [\tau_s \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} (\bar{D})] ds \\ &= \xi([t, \infty[) - S\mu \int_0^t \mathbf{1}_{\{\bar{r}_s^{\text{EDF}, S} > t-s\}} ds + \lambda \int_0^t \mathbf{P} [\bar{D} > s] ds, \end{aligned}$$

avec (6.111). Le même argument appliqué à la fonction test  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}-}$  donne la limite fluide suivante pour le nombre de clients perdus :

$$\begin{aligned} \bar{P}_t^{\text{EDF}, S} &= \langle \bar{v}_t^{\text{EDF}, S}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}-} \rangle \\ &= \langle \xi, \tau_t \mathbf{1}_{\mathbb{R}-} \rangle - S\mu \int_0^t \tau_{t-s} \mathbf{1}_{\mathbb{R}-} (\bar{r}_s^{\text{EDF}, S}) ds + \lambda \int_0^t \mathbf{E} [\tau_s \mathbf{1}_{\mathbb{R}-} (\bar{D})] ds \\ &= \xi([0, t]) - S\mu \int_0^t \mathbf{1}_{\{\bar{r}_s^{\text{EDF}, S} \leq t-s\}} ds + \lambda \int_0^t \mathbf{P} [\bar{D} \leq s] ds. \end{aligned}$$

**Affluence du buffer et perte dans la file  $M/M/s/s + D - FCFS$**

Dans le cas où le délai initial des clients est déterministe, égal à  $\bar{d}$ , les disciplines EDF et FCFS sont équivalentes. Les deux équations précédentes donneraient respectivement pour la limite fluide du nombre de clients dans le système à  $t$  et du nombre de clients perdus jusqu'à  $t$  :

$$\bar{Q}_t^{\text{FCFS}} = \xi([t, \infty[) - S\mu \int_0^t \mathbf{1}_{\{\bar{r}_s^{\text{FCFS}} > t-s\}} ds + \lambda(t \wedge \bar{d}),$$

$$\bar{P}_t^{\text{FCFS}} = \xi([0, t]) - S\mu \int_0^t \mathbf{1}_{\{\bar{r}_s^{\text{FCFS}} \leq t-s\}} ds + \lambda(t - \bar{d})^+.$$

Le théorème central limite fonctionnel, théorème 6.5.8, donnerait alors les convergences en loi suivantes dans  $\mathcal{D}_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}}$  :

$$\begin{aligned} ((\sqrt{n}(\bar{Q}_t^n - \bar{Q}_t^{\text{FCFS}}), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*) &\Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} (\mathcal{Q}_t^{\text{FCFS}}, t \geq 0), \\ ((\sqrt{n}(\bar{P}_t^n - \bar{P}_t^{\text{FCFS}}), t \geq 0), n \in \mathbb{N}^*) &\Longrightarrow_{\bar{\tau}_0^*, \mathbb{R}} (\mathcal{P}_t^{\text{FCFS}}, t \geq 0), \end{aligned}$$

où pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_t^{\text{FCFS}} &= \langle \bar{\nu}_t^{\text{FCFS}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} \rangle \\ &= \langle v, \mathbf{1}_{\{.\gt t\}} \rangle - S\mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s^{\text{FCFS}}, \mathbf{1}_{\{.\gt t-s\}} \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{S\mu} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\bar{r}_s^{\text{FCFS}} > t-s\}} dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\bar{d} > t-s\}} dW_s^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t^{\text{FCFS}} &= \langle \bar{\nu}_t^{\text{FCFS}}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \rangle \\ &= \langle v, \mathbf{1}_{\{.\leq t\}} \rangle - S\mu \int_0^t \langle \mathcal{R}_s^{\text{FCFS}}, \mathbf{1}_{\{.\leq t-s\}} \rangle ds \\ &\quad + \sqrt{S\mu} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\bar{r}_s^{\text{FCFS}} \leq t-s\}} dW_s^1 + \sqrt{\lambda} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\bar{d} \leq t-s\}} dW_s^2, \end{aligned}$$

avec (6.114).

**Remarque 6.9.1** En vue d'une généralisation aux fonctions tests  $\mathcal{D}_b$ , nous pouvons citer le résultat de [MR93], qui donne une condition suffisante pour l'élargissement de la convergence d'une suite de processus de  $\mathcal{D}_{T, \mathcal{M}_f^+}$ , où  $\mathcal{M}_f^+$  est muni de la topologie vague (induite par les fonctions à support compact) à la convergence dans  $\mathcal{D}_{T, \mathcal{M}_f^+}$ , où  $\mathcal{M}_f^+$  est muni de la topologie étroite.

### 6.9.2 Temps de vidage

Les preuves de convergence que nous exposons reposent sur la résolution de l'équation de transport intégrale dans  $\mathcal{S}'$ . Cependant, la dynamique du système ne s'exprime sous cette forme que tant que le système ne s'est jamais vidé. A cet instant de vidage, un terme dépendant de  $\nu_t(\mathbb{R}_+^*)$  apparaît et ne permet plus l'application du théorème 6.1.4. Nous devons donc, afin de nous assurer que l'horizon de convergence n'est pas réduit à 0, choisir des conditions initiales telles qu'il existe un  $\bar{\tau}_0^* > 0$  déterministe tel que

$$\mathbf{P} [\text{le système normalisé ne se vide pas avant } \bar{\tau}_0^*] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

On assure ainsi la convergence vers la limite fluide sur  $[0, \bar{\tau}_0^*]$ , mais cela ne permet pas, en revanche, de déterminer le temps de vidage du système fluide et donc, un horizon de convergence maximal.

Dans le modèle classique de la file  $M/M/1$  à faible charge ( $\rho < 1$ ), ce problème est évité par la convergence p.s. du temps de vidage normalisé (premier instant d'atteinte de 0 partant de  $n$ , divisé par  $n$ ) vers la limite déterministe  $1/(\mu - \lambda)$  ([Rob00], proposition 5.5, p.108). Cela assure la convergence du processus de congestion normalisé vers la limite fluide sur  $[0, 1/(\mu - \lambda)]$ , qui est la durée moyenne d'une période d'activité (temps d'atteinte de 0 depuis l'instant d'arrivée d'un client dans un système vide). La résolution d'un problème de réflexion de Skorokhod assure que la limite reste collée en 0 après cet instant de vidage, et donc la convergence sur l'horizon  $\mathbb{R}_+$  tout entier. Dans le cas d'une file d'attente avec impatiences, aucun résultat aussi fort n'a pu être montré, et on ne peut qu'exhiber une borne inférieure déterministe pour le temps de vidage renormalisé. On doit pour cela imposer au minimum que le  $n$ -ième système soit chargé de  $n + 2$  clients en attente de délais résiduels supérieurs ou égaux à  $n/\mu$  (hypothèse (6.98) pour  $x = 1$ ). Le système renormalisé correspondant est donc initialement chargé d'un client en attente, de délai supérieur ou égal à la durée moyenne d'un service.

Le problème des conditions initiales ne se pose plus dans le cas où  $\mu = 0$  (système  $M/GI/\infty$ ) : la dynamique du système suit une équation de transport pour tout  $t$  (indépendamment du fait que le système s'est vidé avant  $t$  ou non) et la convergence vers la limite fluide a lieu sur un horizon infini (partie 6.8). Les conditions initiales ne sont alors plus contraintes à la nécessité de « charger » suffisamment le système à l'origine pour éviter un temps de vidage trop rapide (nul asymptotiquement). Cela permet, dans le cas  $M/M/\infty$ , de supposer initialement que le système présente une distribution de  $n$  clients de service résiduel de loi celle de  $n\sigma$ , ce qui donne une congestion initiale de 1 client de service résiduel de loi celle de  $\sigma$  pour le système renormalisé. Cela correspond intuitivement à l'arrivée d'un client dans un système vide, et dans ce cas l'approximation fluide donne une estimation de la durée d'une période d'activité.

# Chapitre 7

## Conclusion

Nous avons donc présenté nos contributions à l'étude du transfert de données en temps-réel *via* l'étude des files d'attente avec clients impatientes.

### Bilan

En plus d'un passage en revue des résultats existant sur le sujet, nous avons décrit en détail des résultats nouveaux, ainsi que des méthodes originales adaptées à certains cas précis.

Synthétisons l'ensemble de ces résultats.

Dans les chapitres 4 et 5, nous avons mis l'accent sur une première description originale adaptée aux files d'attente avec clients impatientes régies par une discipline de service quelconque en étudiant la file aux instants de fins de service :

Nous avons ainsi généralisé dans le chapitre 4 les résultats de stabilité à des cas plus généraux et à toute discipline de service, par une méthode originale adaptée du calcul de Palm :

- la file  $GI/GI/1/1 + GI$  est stable pour toute discipline de service dans le sens où elle se vide p.s. une infinité de fois,
- un processus simple décrivant la file  $G/G/1/1 + G$  atteint le régime stationnaire pour toute discipline de service.

Nous avons par ailleurs donné dans le chapitre 5 un encadrement de la probabilité de perte à forte charge pour la file  $M/G/1/1 + G$  sous une discipline de service quelconque et à charge quelconque pour la file  $GI/M/1/1 + D - FIFO (EDF)$ .

Nous avons dans ce même chapitre comparé les disciplines de service en terme de pertes :

- en redémontrant par une méthode originale que la perte d'un système  $G/M/1/1 + G$  est minimale en EDF pour l'ordre stochastique et en montrant qu'elle est maximale pour LDF suivant ce même critère,
- en montrant dans le cas  $M/M/1/1 + G$  que la discipline EDF est optimale et que la file LDF est la « moins bonne » pour la probabilité de perte,
- en donnant dans le cas  $M/M/1/1+G$  un majorant de la différence entre la probabilité de perte pour toute discipline de service et la probabilité de perte en EDF dans le cas  $M/M/1$ .

Nous avons enfin proposé dans le chapitre 6, une description de la file EDF par un processus à valeurs mesures ponctuelles vérifiant les propriétés des *processus de transport*. Nous avons donné la limite fluide des processus de transport pour une charge limite quelconque et la limite fluide critique de ces processus à charge limite unité. Nous avons également donné les théorèmes centraux limites fonctionnels correspondant à ces deux cas limites.

Nous en avons déduit les lois des grands nombres et les théorèmes centraux limites fonctionnels des processus de transport caractérisant les files  $M/M/s/s + GI - EDF$ ,  $M/M/s/s + D - FCFS$  et  $M/GI/\infty$ .

Ce travail a donc mis l'accent sur l'optimalité du protocole EDF pour tout système temps-réel. Il a par ailleurs proposé des résultats originaux, applicables en pratiques, ainsi que des méthodes nouvelles qui semblent indiquer le cadre d'étude adéquat pour l'étude exhaustive du comportement d'un système temps-réel dirigé par un protocole quelconque.

## Perspectives

Il reste naturellement beaucoup à faire sur le sujet.

Comme on l'a vu, la discipline de service EDF est montrée comme optimale, mais on aura noté également à quel point l'étude d'un système sous EDF était complexe et empêchait une application « directe » de la théorie classique des files d'attente.

Le dernier chapitre, chapitre 6, donne alors une méthode originale et adéquate pour l'étude du comportement d'une file d'attente avec clients impatients régie par la discipline EDF. Nous avons vu que l'étude de la limite fluide du processus des profils permettait de capturer la tendance moyenne des processus d'affluence, de services et de pertes du système. Ces résultats seront le point de départ du calcul analytique des performances d'un tel système. Des indéterminations restent à lever sur la convergence des processus

réels associés pour des fonctions tests moins régulières, la convergence du processus des délais résiduels prioritaires et l'estimation précise du temps de vidage.

Nous nous sommes concentrés à donner un résultat le plus général possible pour les théorèmes limites fluides et théorèmes centraux limites de certains processus à valeurs mesures ponctuelles : les résultats sont vrais pour tous les *processus de transport*. Ces processus sont des processus markoviens à valeurs mesures ponctuelles qui dérivent continûment, et auxquels sont ajoutés et ôtés à des instants aléatoires des points donnés suivant certaines conditions.

Nous avons vu trois exemples de processus de transports (les profils des files  $M/M/s/s + GI - EDF$ ,  $M/M/s/s + D - FCFS$  et  $M/GI/\infty$ ), mais la définition de ces processus semble suffisamment générale pour embrasser un nombre beaucoup plus important de processus à valeurs mesures. Il sera intéressant en particulier d'appliquer les résultats présentés ici à d'autres files d'attente avec clients impatientes et notamment pour des conditions limites différentes (préemptive, délais jusqu'à la fin du service,...).

Par ailleurs, on peut imaginer que ce cadre d'étude puisse aussi être adapté à l'étude de certains systèmes de particules, qui ont souvent une telle dynamique.

D'autre part, l'un des chantiers les plus importants qui pourrait être mis en oeuvre à partir des résultats théoriques que nous venons de d'énumérer sera d'exprimer analytiquement la probabilité de perte (et le temps d'attente, le temps de séjour...) *conditionnellement* au délai initial d'un client, et de comparer les protocoles de services à l'aune de ces indicateurs.

Cependant, notre étude montre que, sauf dans des cas simples, il semble pour l'instant inenvisageable d'adapter le descripteur général du système (le processus des profils, à valeurs dans un espace fonctionnel de dimension infinie) en marquant de plus chaque client par son délai initial.

Un tel travail permettrait de quantifier les performances d'un protocole en considérant une seule source de données parmi toutes (isoler le son dans le contexte multimédia, par exemple), à laquelle un délai propre est alloué, et de quantifier l'apport de performances d'EDF par rapport aux protocoles classiques. On pourrait ainsi répondre à la question de savoir si le coût algorithmique enduré est compensé par ce gain de performances, précisément pour ce flux de données.



## Appendice A

# Deux résultats de théorie ergodique

Nous rappelons ici deux lemmes classiques en théorie ergodique et en théorie de Palm : le lemme ergodique et le théorème de Birkhoff.

**Lemme A.0.1** (cf [BB93])

*Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^0, \theta)$ , un espace de Palm muni du flot stationnaire ergodique  $\theta$ . Soit  $Z$ , une v.a. p.s. finie (pas nécessairement intégrable). Si  $Z - Z \circ \theta$  est intégrable, alors :*

$$\mathbf{E}^0 [Z - Z \circ \theta] = 0.$$

**Theorème A.0.2** (cf [BB93])

*Soit l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Une suite de variables aléatoires  $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$  de  $L^1(\Omega, X)$  est ergodique si et seulement si*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(Y_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{E}[F(Y_0)]$$

*pour toute fonction  $F$  mesurable et intégrable de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ .*

En particulier, ce théorème implique que toute suite de v.a. i.i.d. est ergodique.



## Appendice B

# Applications de la *Swiss army formula*

Nous rappelons ici la *Swiss army formula* pour le calcul de Palm, appelée ainsi car d'une formule compacte, on peut déduire un grand nombre d'usages (comme un couteau suisse...). Nous donnons ses applications élémentaires aux files d'attente avec clients impatientes.

### B.1 Formules

Soient :

- un processus càdlàg  $(Z_t, t \geq 0)$ ,
- un processus « d'arrivées »  $(A_t, t \geq 0)$  de points  $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$ , d'intensité stochastique  $\lambda_A$ ,
- un processus « de départs »  $(D_t, t \geq 0)$  de points  $(\tau_n, n \in \mathbb{N}^*)$ ,
- $(V_n, n \in \mathbb{N}^*)$ , la suite de marques de  $(A_t, t \geq 0)$  définie pour tout  $n$  par :

$$V_n = T_n - \tau_n,$$

le temps de séjour (ou *temps de réponses*) du  $n$ -ième client  $C_n$  à entrer dans le système,

- le processus de comptage  $(X_t, t \geq 0)$ , vérifiant pour tous  $a$  et  $b$

$$X(b) - X(a) = A((a, b]) - D(a, b],$$

- $(B_t, t \geq 0)$  un processus réel croissant.

**Theorème B.1.1 (cf [BB93])**

*Supposons que  $Z, A, D, X$  sont  $\theta_t$ -compatibles, où  $(\theta_t, t \geq 0)$  est un flot stationnaire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Alors :*

$$\lambda_A \mathbf{E}_A^0 \left[ \int_0^{V_0} Z_s dB_s \right] = \frac{1}{t} \mathbf{E} \left[ \int_0^t X_{s-} Z_s dB_s \right]. \quad (\text{B.1})$$

avec cette formule, on retrouve en particulier la *formule d'échange de Neveu*. Soient deux processus ponctuels  $N$  (d'intensité finie  $\lambda$ ) et  $N'$  (de points  $(T'_n, n \in \mathbb{N})$  et d'intensité finie  $\lambda'$ ), stationnaires par rapport au même quadruple  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \theta_t)$ . Alors :

**Theorème B.1.2 (cf [Nev76])**

*Pour toute fonction réelle  $f$ , mesurable et positive,*

$$\lambda \mathbf{E}_N^0 [f] = \lambda' \mathbf{E}_{N'}^0 \left[ \int_0^{T'_1} (f \circ \theta_t) N(dt) \right].$$

**B.2 Applications aux files avec clients impatientes**

Donnons maintenant quelques applications de ces deux formules aux files d'attente avec clients impatientes. La faiblesse des hypothèses de la *Swiss army formula* permet en particulier de prendre pour processus dans cette formule, des processus divers comme les processus des clients qui seront perdus, ou les clients qui seront servis. On peut alors réécrire simplement quelques métriques de performances intéressantes du système.

**Intensité du processus d'entrée des clients perdus**

Soit  $N$ , le processus stationnaire des entrées, d'intensité finie  $\lambda$ . Nous considérons  $N^P$ , le processus des instants d'arrivées *des clients qui seront perdus*. Autrement dit, pour tout  $t$  :

$$N_t^P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} \mathbf{1}_{\{C_n \text{ sera perdu}\}} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_n^P \leq t\}},$$

où  $T_n^P$  marque l'instant de  $n$ -ième entrée d'un client qui sera perdu. Nous notons  $\lambda^P$ , l'intensité de  $N^P$  ( $\lambda^P$  est finie puisque  $\lambda$  l'est).

Pour la discipline EDF par exemple,  $N^P$  est clairement un processus anticipatif. Ce processus est néanmoins stationnaire, conjointement compatible avec le processus des entrées  $N$  et on peut appliquer le théorème B.1.2 à la fonction identiquement égale à 1 :

$$\lambda^P \mathbf{E}_{N^P}^0 [N(0, T_1^P)] = \lambda.$$

Or,  $N(0, T_1^P]$  est précisément, partant  $\mathbf{P}_{NP}^0$ -p.s. de l'arrivée d'un client qui sera perdu, le nombre de clients entrés avant l'entrée d'un autre client qui sera perdu : c'est précisément, à l'état stationnaire, l'inverse de la probabilité de perte  $\pi$  (la proportion de client qui seront perdus sur le nombre total de clients). La formule précédente se réécrit donc :

$$\lambda^P = \lambda\pi. \quad (\text{B.2})$$

Soit  $N^S$ , le processus des arrivées *des clients qui seront servis*.  $N^S$  est toujours jointement stationnaire avec  $N$  et son intensité est donnée par :

$$\lambda^S = \lambda(1 - \pi). \quad (\text{B.3})$$

### Probabilité de perte

Nous appliquons la *Swiss army formula* pour donner une formule impliquant la probabilité de perte d'un client. Dans le théorème B.1.1, nous prenons pour tout  $t$   $Z_t \equiv 1$  et  $B_t \equiv t$ , et notons  $A := N^P$  et  $D := D^P$ , le processus des départs des clients perdus. On a donc pour tout  $n$  :  $V_n = D_n$ , le délai du  $n$ -ième client. La formule (B.1) donne donc :

$$\lambda^P \mathbf{E}_{NP}^0 \left[ \int_0^{D_0} ds \right] = \frac{1}{t} \mathbf{E} \left[ \int_0^t X_{s-}^P ds \right],$$

soit :

$$\lambda^P \mathbf{E}[D] = \mathbf{E}[X_0^P], \quad (\text{B.4})$$

où  $(X_t^P, t \geq 0)$  est le processus comptant le nombre de clients destinés à être perdus dans le système. Avec B.2, (B.4) revient donc à :

$$\pi = \frac{\mathbf{E}[X_p(0)]}{\lambda \mathbf{E}[D]}. \quad (\text{B.5})$$

### Temps d'attente effectif

Maintenant, considérons le temps d'attente effectif  $\mathcal{T}^a$  (temps passé dans le buffer) d'un client impatient. En prenant toujours pour tout  $t$ ,  $Z_t \equiv 1$ ,  $B_t \equiv t$ , mais  $A$  est maintenant le processus des entrées total ( $A := N$ ), en notant  $\mathcal{T}^s$  le temps de séjour, (B.1) revient à :

$$\lambda \mathbf{E}_N^0 \left[ \int_0^{\mathcal{T}^s} ds \right] = \frac{1}{t} \mathbf{E} \left[ \int_0^t X_{s-} ds \right],$$

où  $(X_t, t \geq 0)$  compte maintenant le nombre total de client dans le système. L'équation précédente revient à :

$$\lambda \mathbf{E} [D \mathbf{1}_{\{D < W\}}] + \lambda \mathbf{E} [(W + \sigma) \mathbf{1}_{\{D > W\}}] = \mathbf{E}[X_0],$$

où  $W$  est le temps d'attente offert à un client entrant dans le système, soit :

$$\lambda \mathbf{E}[T^a] + \lambda \mathbf{E}[\sigma] \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{D > W\}}] = \mathbf{E}[X_0],$$

ou encore :

$$\lambda \mathbf{E}[T^a] + \rho(1 - \pi) = \mathbf{E}[X_0].$$

On a donc pour toute discipline de service :

$$\mathbf{E}[T^a] = \frac{\mathbf{E}[X_0] - \rho(1 - \pi)}{\lambda}$$

et en particulier si la discipline de service est FIFO, avec (3.5) la formule précédente se réécrit :

$$\mathbf{E}[T^a] = \frac{\mathbf{E}[X_0] - (1 - p_0)}{\lambda},$$

où  $p_0$  est la probabilité que le système soit vide à l'état stationnaire.

## Appendice C

# Convergence en loi

Commençons par rappeler une condition suffisante pour la convergence en loi d'un processus de  $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$  vers une fonction déterministe de  $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$  :

**Proposition C.0.1** (cf [Rob00], prop D5 p.353)

*Si une suite  $(X^{(n)}, n \in \mathbb{N})$  de processus de  $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$  est telle que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} 0,$$

*où  $(X_t, t \in [0, T])$  est un élément déterministe de  $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$ , alors  $(X^{(n)}, n \in \mathbb{N})$  converge en loi dans  $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$  vers  $X$ .*

Le théorème suivant donne une propriété de base d'une suite de variables aléatoires convergentes en loi :

**Theorème C.0.1** (Théorème de l'application continue, [Bil68])

*Soit  $S$  et  $U$ , deux espaces métriques séparables. Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variable aléatoire à valeurs  $S$  convergeant en loi vers une variable aléatoire  $X$  de  $S$  et  $f : S \rightarrow U$  une application mesurable, continue sur le support de  $X$ . Alors, la suite  $(f(X_n), n \in \mathbb{N}^*)$  converge en loi dans  $U$  vers  $f(X)$ .*

Nous rappelons ensuite le résultat suivant ([EK86]), qui établit en particulier la convergence en loi d'une martingale de carré intégrable vers un mouvement Brownien changé de temps, lorsqu'un problème de martingale est bien posé.

**Theorème C.0.2** ( [EK86], Th 1.4 p.339)

*Soient  $R^{(n)}$  et  $A^{(n)}$ , dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  et une fonction croissante  $\gamma$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  telles que :*

$$R^{(n)}(0) = 0 \text{ et } \gamma(0) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$R^{(n)} \text{ et } \left(R^{(n)}\right)^2 - A^{(n)} \text{ sont des } \mathcal{F}_t \text{-martingales locales,} \quad (\text{C.2})$$

*et pour tout  $T > 0$  :*

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t < T} \left\{ R^{(n)}(t) - R^{(n)}(t-) \right\}^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t < T} \left\{ A^{(n)}(t) - A^{(n)}(t-) \right\} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\forall t > 0, \forall \varepsilon > 0, \mathbf{P} \left[ \left\{ A^{(n)}(t) - \gamma(t) \right\} > \varepsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{C.5})$$

*Alors,  $Y^{(n)}$  converge en distribution vers  $W_{\gamma(\cdot)}$ , où  $W$  est le mouvement Brownien standard.*

Rappelons enfin le résultat standard suivant, qui établit une condition nécessaire et suffisante pour la tension d'une suite de processus :

**Theorème C.0.3** ( [Rob00], Th D9 p.354)

*Soit  $\mathbf{P}_n$ , une suite de probabilités sur  $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$ . On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

*1. Il existe  $a$ ,*

$$\mathbf{P}_n [ |X(0)| > a ] \leq \varepsilon. \quad (\text{C.6})$$

*2. Pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\delta > 0$ ,  $N$  entier tels que pour tout  $n > N$ ,*

$$\mathbf{P}_n [w_X(\delta)] \leq \varepsilon, \quad (\text{C.7})$$

*où  $w_X(\delta) := \sup \{ |X(t) - X(s)| ; s, t \leq T, |t - s| \leq \delta \}$ .*

*Alors, la suite  $(\mathbf{P}_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est tendue, et toute valeur d'adhérence  $\mathbf{P}$  est une probabilité sur  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ .*

# Bibliography

- [Bar57] D. Y. Barrer. Queuing with impatient customers and ordered service. *Operations Res.*, 5:650–656, 1957.
- [BB93] F. Baccelli and P. Brémaud. *Elements of Queueing Theory : Palm-Martingale Calculus and Stochastic Recurrences*. Springer-Verlag, August, 1993.
- [BB94] F. Baccelli and P. Brémaud. *Elements of queueing theory*. Springer, 1994.
- [BB99] A. Brandt and M. Brandt. On the  $m(n)/m(n)/s$  queues with impatient calls. *Performance evaluation*, 35:1–18, 1999.
- [BBH84] F. Baccelli, P. Boyer, and G. Hébuterne. Single-server queues with impatient customers. *Adv. in Appl. Probab.*, 16(4):887–905, 1984.
- [BDKM00] R.O. Baldwin, N.J. Davis, J. E. Kobza, and S.F. Midkiff. Real-time queueing theory: A tutorial presentation with an admission control application. *Queueing systems and their appl.*, 35:1–21, 2000.
- [BH81] F. Baccelli and G. Hébuterne. On queues with impatient customers. In *Performance'81*, pages 159–179, 1981.
- [Bil68] P. Billingsley. *Convergence of probability Measures*. Wiley, 1968.
- [Bor67] A. A. Borovkov. Limit laws for queueing processes in multichannel systems. *Sibirsk. Mat. Z.*, (8):983–1004, 1967.
- [Bou73] N. Bourbaki. *Topological Vector Spaces*. Elements of Mathematics. Springer, 1973.
- [CD96] K. Chen and L. Decreusefond. An approximate analysis of waiting time in multi-class  $m/g/1/edf$  queues. *Performance Evaluation*, 24:190–199, 1996.
- [Cho90] Choukri, T. and Üstünel, A.S. Diffusion approximation of video-conference networks. *Queueing systems and applications*, (6):405–424, January 1990.

- [CKC01] B. D. Choi, B. Kim, and J. Chung.  $M/M/1$  queue with impatient customers of higher priority. *Queueing Syst. Theory Appl.*, 38(1):49–66, 2001.
- [Coh68] J. W. Cohen. Single server queue with uniformly bounded virtual waiting time. *J. Appl. Probability*, 5:93–122, 1968.
- [Daw93] D.A. Dawson. *Measured-Valued Markov processes, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XXI-1991*, volume 1541 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer, 1993.
- [Der74] M. Dertouzos. Control robotics: The procedural control of physical processus. In *Proc. IFIP Congress*, 1974.
- [DKT85a] A.G. De Kok and H.C. Tijms. A queueing system with impatient customers. *J.Appl.Pro.*, 22:688–696, 1985.
- [DKT85b] A.G. De Kok and H.C. Tijms. A two-moments approximation for a buffer design problem requiring a small rejection probability. *Perf. Eval.*, 5:77–84, 1985.
- [DLS01] B. Doytchinov, J.P. Lehoczky, and S. Shreve. Real-time queues in heavy-traffic with earliest deadline first queue discipline. *Ann. of Appl. Probab.*, 11(2):332–378, 2001.
- [DM03] L. Decreusefond and P. Moyal. Elements for the study of stability and performances in real time queues. In *IEEE proceedings ICT'03*, pages 1126–1132, 2003.
- [DM04] L. Decreusefond and P. Moyal. Limite fluide d'une file edf avec clients impatientes. *Rapport de recherche, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications*, 2004.
- [DM05] L. Decreusefond and P. Moyal. Fluid limit of the  $M/M/1/1+GI-EDF$  queue. In *IEEE proceedings Symposium on Applications and the Internet Workshops 05*, pages 248–251, 2005.
- [Dyn65] E.B. Dynkin. *Markov Process, I,II*. Springer-Verlag, 1965.
- [EK86] S.N. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov Processes. Characterization and convergence*. Wiley, 1986.
- [Erl17] A.K. Erlang. Solutions of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchange. *Traduction Anglaise: P.O. Elec. Eng. J.*, 10:189–197, 1917.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

- [Fin60] P.D. Finch. Deterministic customer impatience in the queueing system  $gi/m/1$ . *Biometrika*, 47(1,2):45–52, 1960.
- [Fli83] D. Flipo. Steady state of loss systems. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, (297,6), 1983.
- [Gho63] A. Ghosal. Queues with finite waiting time. *Operations Res.*, 11:919–921, 1963.
- [GK68] B. V. Gnedenko and I. N. Kovalenko. *Introduction to queueing theory*. Translated from Russian by R. Kondor. Translation edited by D. Louvish. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1968.
- [GPW01] C. Gromoll, A. Puha, and R. Williams. The fluid limit of a processor sharing queue. *Sto. Proc. and Appl.*, 2001.
- [Gra05] C. Graham. Functional central limit theorem for a large network in which customers join the shortest of several queues. *Probability Theory and Related Fields*, (131):97–120, 2005.
- [HXD88] J.W. Hong, Tan X.N., and Towsley D. A performance analysis of minimum laxity and earliest deadline scheduling in a real-time system. *IEEE Trans. Computer*, 38(12):1736–1744, december 1988.
- [Jur71] O.M. Jurkevic. On the investigation of many-server queueing systems with bounded waiting time. *Izv.Akad.Nauk. SSSR Techniceskaja Kibernetika*, 4:39–46, 1971.
- [Kel86] F.P. Kelly. Blocking probabilities in large circuit-switched networks. *Advanced in Applied Probability* 18, (18):473–505, 1986.
- [Kle76] L. Kleinrock. *Queueing systems*. J. Wiley and sons, 1976.
- [Leb98] L. Leboucher. Algorithmique et modélisation pour la qualité de service des systèmes répartis temps réel. *These de doctorat*, 1998.
- [Leh96] J.P. Lehoczky. Real time queueing theory. In *Proceedings of the IEEE Real-time symposium*, pages 186–195, 1996.
- [Leh97a] J.P. Lehoczky. Real time queueing network theory. In *Proceedings of the IEEE Real-time symposium*, pages 58–67, 1997.
- [Leh97b] J.P. Lehoczky. Using real-time queueing theory to control lateness in real-time systems. *Performances Evaluation Reviews*, 25:158–168, 1997.
- [Lim01] V. Limic. A lifo queue in heavy traffic. *Ann. of Appl. Prob.*, 11(2):301–331, 2001.

- [LL73] C.L. Liu and J.W. Layland. Scheduling algorithms for multiprogramming in hard real-time environment. *Journal of the ACM*, 20(1):846–61, 1973.
- [Loy62] R.M. Loynes. The stability of queues with non-independent interarrivals and service times. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 58:497–520, 1962.
- [Met82] M. Métivier. *Semimartingales : a course on stochastic processes*. Studies in Mathematics 2. de Gruyter, 1982.
- [Mit83] I. Mitoma. Tightness of probability on  $C([0, 1]; S')$  and  $D([0, 1]; S')$ . *Annals of Probability*, 11:989–999, 1983.
- [Mov98] A. Movaghar. On queueing with customer impatience until the beginning of service. *Queueing Systems Theory Appl.*, 29(2-4):337–350, 1998.
- [MR93] S. Méléard and S. Roelly. Sur les convergences étroite ou vague de processus à valeurs mesures. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, (317,I), 1993.
- [ND92] P. Nain and Towsley D. Comparison of hybrid minimum laxity/first-in-first-out scheduling policies for real-time multiprocessors. *IEEE Trans. Computer*, 41(10):1271–1278, october 1992.
- [Nev76] J. Neveu. Sur les mesures de palm de deux processus ponctuels stationnaires. *Z. Warsch Verw. Gebiete*, 34:199–203, 1976.
- [Pek99] N. Pekergin. Stochastic performance bounds by state-space reduction. *Performance Evaluation*, 36-37:1–17, 1999.
- [Pie66] A. Pietsch. *Nuclear Locally Convex Spaces*. Ergebnisse der mathematik. Grenzgebiete Band, 1966.
- [PK91] S. Pingali and J. Kurose. On scheduling two classes of real time traffic with identical deadlines. In *Globecom'91*, 1991.
- [Pro56] Y.V. Prohorov. Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. *Theory of Probability and its Applications*, (1):157–214, 1956.
- [PT88] S. Panwar and D. Towsley. Optimal scheduling policies for a class of queues with customer deadlines to the beginning of service. *Journal of the ACM.*, 35(4):832–844, 1988.
- [Rob00] Ph. Robert. *Réseaux et files d'attente: méthodes probabilistes*. Springer, 2000.

- [Ros95] K. Ross. *Multiservice loss models for broadband telecommunications models*. Springer-Verlag, 1995.
- [Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, 1991.
- [RY94] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Comprehensive Studies in Mathematics, 293. Springer-Verlag, 2nd edition, 1994.
- [Sch71] H. H. Schaefer. *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, 1971.
- [Tak74] L. Takàcs. A single-server queue with limited virtual waiting time. *J. Appl. Probability*, 11:612–617, 1974.
- [Tho00] H. Thorisson. *Coupling, stationarity, and regeneration*. Springer-Verlag, 2000.
- [Ü82] Üstünel, A.S. Stochastic integration on nuclear spaces and its applications. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, (2):165–200, 1982.