



**HAL**  
open science

## Particle size effect on EPS lightweight concrete

Karim Miled

► **To cite this version:**

Karim Miled. Particle size effect on EPS lightweight concrete. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2005. English. NNT: . pastel-00001820

**HAL Id: pastel-00001820**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001820>**

Submitted on 20 Jul 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Mécanique, Structures et Matériaux

par

**Karim MILED**

Sujet de la thèse :

**Effet de taille dans le béton léger de polystyrène expansé**

*soutenue le 21 Novembre 2005*

devant le jury composé de :

François Hild	<i>Rapporteur</i>
Gilles Pijaudier-Cabot	<i>Rapporteur</i>
François de Larrard	<i>Président</i>
Sylvain Meille	<i>Examineur</i>
Robert Le Roy	<i>Examineur</i>
Karam Sab	<i>Directeur de thèse</i>



*"The scholar who does not know mathematics  
does not know any science **but** without  
experiment nothing can be adequately known"*

R. Bacon (1276)

À mes Parents.

À tous ceux qui me sont chers,...





# REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier vivement **Karam Sab** pour toute la confiance qu'il m'a accordée en m'accueillant au Laboratoire d'Analyse des Matériaux et Identification (LAMI) et en acceptant la responsabilité de la direction de ma thèse. Karam fût au long de ce travail mon principal conseiller et interlocuteur. Il a suivi de près mon travail, m'a fait profiter de sa vaste connaissance et m'a souvent fasciné par sa rigueur, sa clarté d'esprit, son enthousiasme et sa curiosité intellectuelle. Son soutien m'a beaucoup aidé surtout pendant les moments de doute et d'incertitude. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je voudrais également remercier mon conseiller d'étude LCPC **Robert Le Roy** qui m'a accueilli dans la section Formulation et Mise en œuvre des bétons (FMB) de la division Bétons et Composites Cimentaires (BCC) du LCPC-Paris et qui a participé à l'encadrement de ma thèse. Robert fût mon principal conseiller et interlocuteur pour le travail expérimental qui constitue une part très importante de ma thèse. Il m'a fait profiter notamment de son expérience, de ses compétences et de son savoir faire dans la formulation et la mise en œuvre des bétons, la conception et la réalisation des différents essais mécaniques. Grâce à lui, j'ai pris le goût de l'expérimentation et j'ai compris son importance pour la compréhension de la physique des phénomènes étudiés, pour l'appréhension de leur complexité et pour leur modélisation. Son soutien et sa bonne humeur m'ont beaucoup motivé pour mener à bien ce travail. Je lui adresse ma sincère gratitude.

Je tiens à remercier Monsieur **François de Larrard** qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes vifs remerciements sont également adressés à Messieurs **François Hild** et **Gilles Pijaudier-Cabot** pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter mon mémoire et pour leur participation à mon jury.

Je remercie aussi Monsieur **Sylvain Meille**, ingénieur de recherche à Lafarge Construction, pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail en acceptant d'être membre de mon jury.

Ma sincère sympathie va aussi à **mes collègues** et **amis** du LAMI et de BCC pour l'ambiance de travail chaleureuse et motivante qu'ils ont su créer dans ces deux laboratoires. En particulier, ma gratitude va à **Claude Boulay**, chargé de recherche à BCC, qui m'a formé sur les presses mécaniques de BCC et m'a prodigué ses riches conseils qui m'ont beaucoup aidé dans la conception et la réalisation de mes essais. Mes remerciements vont aussi à Messieurs Jacques Campin, Jean-Luc Bachelier et Maurice Séverin du service Métrologie

et Instrumentation (MI) du LCPC-Paris pour leur aide dans la conception et la fabrication des différents moules qui ont servi pour la confection de mes éprouvettes d'essai. Je remercie également Monsieur Thierry Berthelot du service Physico-Chimie des Matériaux (PCM) du LCPC-Paris pour les observations au MEB qu'il a réalisées sur mes échantillons de béton de polystyrène.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à tous **mes amis** pour leur soutien durant ces années de thèse.

Mes pensées vont aussi à **ma soeur, mes frères** et **toute ma famille** en Tunisie qui, présents par leurs coeurs et leurs esprits, m'ont offert leur soutien et leur amour.

Ma gratitude va aussi à **Nadia** qui m'a beaucoup soutenu pour accomplir ce travail.

Enfin, je ne remercierais jamais assez **mes parents** pour leur soutien inconditionnel et leur amour. Je leur dédie ce travail.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Revue bibliographique des effets d'échelle et de taille</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles . . . . .	7
1.2.1 Effet d'échelle de volume . . . . .	8
1.2.2 Effet d'échelle de structure . . . . .	9
1.2.3 Théories de base . . . . .	11
1.3 Effets de taille . . . . .	19
1.3.1 Effets de taille dans les matériaux métalliques . . . . .	19
1.3.2 Effets de taille dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons . . . . .	22
1.4 Synthèse générale . . . . .	26
<b>2 Modélisation 2D de l'effet de taille</b>	<b>29</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.2 Distribution régulière des trous . . . . .	31
2.2.1 Etude expérimentale . . . . .	32
2.2.2 Modélisation numérique . . . . .	42
2.2.3 Conclusions . . . . .	62
2.3 Distribution aléatoire des trous . . . . .	64
2.3.1 Etude expérimentale . . . . .	64

2.3.2	Modélisation numérique . . . . .	74
2.3.3	Conclusions . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Etude expérimentale sur béton de polystyrène</b>	<b>79</b>
3.1	Introduction . . . . .	81
3.2	Formulation et confection des matériaux . . . . .	82
3.2.1	Formulation de la matrice cimentaire . . . . .	82
3.2.2	Les billes de polystyrène expansé . . . . .	83
3.2.3	Composition de différents bétons légers . . . . .	84
3.2.4	Coulage des éprouvettes et conditions de cure . . . . .	85
3.2.5	Absence d'auréole de transition . . . . .	86
3.3	Effet d'échelle de volume . . . . .	87
3.3.1	Résultats des essais de compression sur les bétons renfermant les billes de 1mm . . . . .	88
3.3.2	Résultats des essais de compression sur les bétons renfermant les billes de 2.5mm . . . . .	89
3.4	Effet de taille . . . . .	91
3.4.1	Essais de compression à rapport $\left(\frac{D}{\phi}\right)$ constant . . . . .	91
3.4.2	Essais sur les éprouvettes (110 × 220mm) . . . . .	93
3.5	Effet de la taille des hétérogénéités de la matrice . . . . .	96
3.5.1	Formulation et fabrication des matériaux . . . . .	96
3.5.2	Résultats des essais de compression . . . . .	97
3.6	Conclusions . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Modèle phénoménologique</b>	<b>101</b>
4.1	Introduction . . . . .	103
4.2	Nature de la loi d'effet de taille . . . . .	103

4.3	Analyse des mécanismes de rupture dans le béton de polystyrène . . . . .	105
4.3.1	Mécanismes de rupture . . . . .	106
4.3.2	Scénario de ruine . . . . .	107
4.3.3	Longueur caractéristique . . . . .	108
4.3.4	Longueur géométrique . . . . .	110
4.4	Analyse asymptotique de l'effet de taille . . . . .	112
4.4.1	Cas où $(l_g(p, \phi) \leq l_c)$ : absence d'effet de taille . . . . .	112
4.4.2	Borne supérieure $\mathbf{g}_0(p)$ . . . . .	113
4.4.3	Cas où $(l_g(p, \phi) \gg l_c)$ : rupture fragile . . . . .	114
4.4.4	Borne inférieure $\mathbf{g}_\infty(p)$ . . . . .	115
4.5	Cas où $(l_g(p, \phi) > l_c)$ : loi d'effet de taille en puissance . . . . .	120
4.6	Modèle proposé . . . . .	121
4.6.1	Validation expérimentale . . . . .	122
4.7	Conclusions . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Modélisation numérique de l'effet de taille</b>	<b>127</b>
5.1	Introduction . . . . .	129
5.2	Théorie des équivalences . . . . .	129
5.2.1	Exposé général . . . . .	129
5.2.2	Le modèle équivalent . . . . .	130
5.3	Modélisation proposée . . . . .	133
5.3.1	Milieu homogène discret équivalent . . . . .	134
5.3.2	Génération de la macroporosité . . . . .	136
5.3.3	Schéma de calcul . . . . .	137
5.4	Résultats des simulations . . . . .	139
5.4.1	VER pour la résistance en compression . . . . .	140
5.4.2	Effet de taille . . . . .	141

5.4.3	Mode de rupture . . . . .	142
5.5	Conclusions . . . . .	142
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>145</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>163</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>173</b>

# Table des figures

1.1	Effet d'échelle de volume. . . . .	8
1.2	Effet d'échelle de structure d'après (L'Hermite, 1973). . . . .	10
1.3	Zones de relâchement des contraintes dans une éprouvette entaillée selon Bazant (Bazant, 2004). . . . .	14
1.4	Loi d'effet d'échelle proposée par Bazant (1984) pour des structures entaillées (les courbes en pointillées correspondent au développements asymptotiques aux grandes et petites échelles, la courbe en trait plein correspond au raccordement asymptotique, LEFM : mécanique linéaire de la rupture). . . . .	15
1.5	Fissure fractale et sa zone d'élaboration d'après (Carpinteri, 1994a). . . . .	18
1.6	Effet de taille sur la contrainte limite en traction de l'aluminium renforcé par des particules en céramique d'après (Kouzeli et Mortensen, 2002). . . . .	20
1.7	Effet de taille sur la contrainte d'écoulement des mousses d'aluminium d'après (Despois et al., 2004b,a) . . . . .	20
1.8	Effet de taille sur la résistance en compression du béton ordinaire d'après (Walker et Bloem, 1960; Cordon et Gillespie, 1963; Hobbs, 1972; Stock et al., 1979) : la courbe en trait plein correspond à la loi proposée par de Larrard et Tondat pour rendre compte de cet effet (de Larrard et Tondat, 1993). . . . .	24
1.9	Effet de taille sur la résistance en compression du béton léger de polystyrène expansé d'après (Le Roy et al., 2005). . . . .	25
1.10	Différentes longueurs intervenant dans le problème d'effet de taille dans le béton léger de polystyrène expansé. . . . .	27
2.1	Plans de deux éprouvettes d'essai. . . . .	33



2.2	Moule conçu pour le coulage des éprouvettes d'essai. . . . .	35
2.3	Éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ; % surfacique en trous = 20). . . . .	36
2.4	Éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ; % surfacique en trous = 20). . . . .	36
2.5	Courbes de compression typiques pour les deux types d'éprouvettes. . . . .	39
2.6	Mode de rupture par extension observé dans le béton léger modèle. . . . .	40
2.7	Faciès de rupture au début de l'essai de compression : initiation des fissures sur les bords de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ; % surfacique en trous = 20). . . . .	41
2.8	Faciès de rupture au pic d'effort : propagation stable des fissures vers le centre de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ; % surfacique en trous = 20). . . . .	41
2.9	Maillage avec Castem2000 des quarts de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) et l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ). . . . .	43
2.10	Modèle d'endommagement de Mazars en traction (Mazars, 1984). . . . .	46
2.11	Modèle d'endommagement de Mazars en compression (Mazars, 1984). . . . .	46
2.12	Courbes numériques de compression pour les deux types d'éprouvettes : calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars. . . . .	49
2.13	Faciès de rupture obtenus respectivement avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) et l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ) : calcul local avec un maillage suffisamment fin (36 éléments par trou). . . . .	50
2.14	Faciès de rupture obtenu avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) : calcul local avec un maillage grossier (12 éléments par trou). . . . .	51
2.15	comparaison entre la courbe de compression expérimentale de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) et les courbes numériques obtenues avec un calcul local pour trois finesses différentes du maillage. . . . .	52
2.16	Courbes numériques de compression des deux types d'éprouvettes : calcul non local avec le modèle d'endommagement de Mazars. . . . .	53
2.17	Comparaison entre les courbes de compression numériques et expérimentales obtenues avec les deux types d'éprouvettes. . . . .	54
2.18	Faciès de rupture au début de l'essai de compression obtenu avec un calcul non local : initiation de l'endommagement sur les bords de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ). . . . .	55

2.19	Faciès de rupture au pic d'effort obtenu avec un calcul non local : propagation de l'endommagement vers le centre de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ). . . . .	55
2.20	Maillages des trois cellules représentant l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ , % surfacique en trous = 20). . . . .	57
2.21	Courbes numériques de compression des trois cellules représentant l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ , % surfacique en trous = 20) : calcul non local avec le modèle d'endommagement de Mazars. . . . .	58
2.22	Distributions de l'endommagement au pic d'effort dans les trois cellules de tailles croissantes représentant l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ , % surfacique en trous = 20) : calcul non local avec le modèle d'endommagement de Mazars. . . . .	59
2.23	Résistances en compression numériques des éprouvettes renfermant des trous de diamètres compris entre 1 et 11.25mm : calcul non local. . . . .	60
2.24	Maillage du quart de l'éprouvette 1bis ( $\phi_1 = 5mm$ , % surfacique en trous = 20) : symétrie carrée de la cellule de base. . . . .	61
2.25	Courbes de compression numériques obtenues avec deux éprouvettes ayant des trous de diamètres 5 et 3 mm et présentant une symétrie carrée de leur cellule de base : calcul non local. . . . .	62
2.26	Première configuration aléatoire des trous pour l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous =20). . . . .	65
2.27	Première configuration aléatoire de trous pour l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous =20). . . . .	65
2.28	Deux plaques, constituant deux fonds du moule, percées respectivement selon la première configuration aléatoire des trous pour l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ) et pour l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ). . . . .	66
2.29	a) Eprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous =20) : configuration aléatoire des trous n°1. b) Eprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 20) : configuration aléatoire des trous n°1. . . . .	67
2.30	Faciès de rupture au début de l'essai de compression et au pic d'effort pour l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous =20) : configuration aléatoire des trous n°1. . . . .	68

2.31	Faciès de rupture au début de l'essai de compression et au pic d'effort pour l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 20) : configuration aléatoire des trous n°1. . . . .	68
2.32	a) Eprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 1.8) : configuration aléatoire des trous n°1. b) Eprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 1.8) : configuration aléatoire des trous n°1. . . . .	71
2.33	Faciès de rupture typiques observés respectivement avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 1.8) et l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 1.8). . . . .	72
2.34	Courbes de compression typiques obtenues expérimentalement avec les deux types d'éprouvettes. . . . .	73
2.35	Faciès de rupture obtenus respectivement avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 20) et l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 20) : calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars. . . . .	75
2.36	Courbes numériques de compression de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 20) : calcul local. . . . .	76
2.37	Courbes numériques de compression de l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 20) : calcul local. . . . .	76
2.38	Courbes moyennes de compression de deux types d'éprouvettes : calcul local. . . . .	77
2.39	Résistances en compression obtenues avec la première configuration aléatoire des trous correspondant à l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 20), pour différentes finesses du maillage : calcul local. . . . .	78
3.1	Les trois tailles homothétiques des billes de polystyrène expansé considérées dans cette étude : $\phi_1 = 1mm$ , $\phi_2 = 2.5mm$ et $\phi_3 = 6.3mm$ : rapport d'homothétie égal à 2.5. . . . .	81
3.2	Photo au MEB montrant la très bonne qualité de l'interface entre les billes de polystyrène et la matrice cimentaire (photo Berthelot : PCM - LCPC). . . . .	87
3.3	Eprouvettes homothétiques de béton de polystyrène de tailles : ( $110 \times 220mm$ ) et ( $44 \times 88mm$ ) : rapport d'homothétie égal à 2.5. . . . .	88
3.4	Résistances en compression normalisées des bétons légers renfermant les billes de diamètre $\phi_1 = 1mm$ , obtenues avec les deux types d'éprouvettes d'essai. . . . .	89

3.5	Résistances en compression normalisées des bétons légers renfermant les billes de diamètre $\phi_2 = 2.5mm$ , obtenues avec les deux types d'éprouvettes d'essai.	90
3.6	Résistances en compression normalisées obtenues avec les billes de diamètres $\phi_1 = 1mm$ et $\phi_2 = 2.5mm$ : résultats pour un rapport d'homothétie constant ( $\frac{D}{\phi} = 44$ ).	92
3.7	Résistances en compression normalisées obtenues avec les billes de diamètres $\phi_2 = 2.5mm$ et $\phi_3 = 6.3mm$ : résultats pour un rapport d'homothétie constant ( $\frac{D}{\phi} = 17.6$ ).	93
3.8	Modules d'élasticité obtenus avec les trois types de béton de polystyrène.	94
3.9	Résistances en compression normalisées obtenues avec les trois types de béton de polystyrène : essais sur des éprouvettes de taille $(110 \times 220mm)$ .	95
3.10	Résistances en compression normalisées obtenues avec les billes de diamètre $\phi_1 = 1mm$ et les trois types de matrice cimentaire.	98
3.11	Résistances en compression normalisées obtenues avec les billes de diamètre $\phi_2 = 2.5mm$ et les trois types de matrice cimentaire.	98
4.1	Deux éprouvettes de béton de polystyrène de même taille ( $D$ ), renfermant deux tailles différentes des billes pour une même porosité du béton.	104
4.2	Mécanisme de rupture, par propagation de quelques macrofissures localisées, observé pour les deux bétons de polystyrène renfermant respectivement les billes de $6.3mm$ et $2.5mm$ et présentant une faible porosité (coupes longitudinales de deux éprouvettes $(110 \times 220mm)$ ).	106
4.3	Mécanisme de rupture, par microfissuration diffuse, observé pour les deux bétons de polystyrène renfermant respectivement les billes de $6.3mm$ et $2.5mm$ et présentant une forte porosité (coupes longitudinales de deux éprouvettes $(110 \times 220mm)$ ).	107
4.4	Photos au MEB montrant la présence de grains de sable de taille maximale égale à environ $0.25mm$ dans les matrices cimentaires des bétons allégés respectivement par les billes de polystyrène de diamètre $6.3mm$ et $1mm$ .	109
4.5	La longueur géométrique $l_g(p, \phi)$ dans les cas de très faibles et de très fortes porosités.	111

4.6	Evolution de la longueur géométrique adimensionnelle $\tilde{l}_g$ en fonction de la porosité $p$ du béton. . . . .	112
4.7	Ajustement de la fonction hyperbolique approchant la borne supérieure $\mathbf{g}_0(p)$ grâce aux résistances normalisées obtenues expérimentalement avec les trois types de béton de polystyrène. . . . .	114
4.8	Schéma d'un milieu 3D infini renfermant une cavité sphérique et chargé en compression simple : mode de rupture fragile par extension. . . . .	116
4.9	Distribution des déformations élastiques équivalentes d'extension dans un huitième de la cellule de base d'un réseau périodique (CC) ayant une porosité proche de zero ( $p = 10^{-04}$ ) : maximum atteint autour des trous. . . . .	119
4.10	Résistance normalisée du béton de polystyrène renfermant les billes de diamètre 2.5 mm en fonction de la porosité $p$ , d'après le modèle proposé. . . . .	122
4.11	Comparaison entre les résistances normalisées expérimentales et celles données par le modèle pour les bétons de polystyrène renfermant les billes de diamètres 1mm et 2.5mm. . . . .	123
4.12	Comparaison entre les résistances normalisées expérimentales et celles données par le modèle, pour les trois types de béton de polystyrène. . . . .	124
4.13	Validation du modèle pour des porosités supérieures à 0.5. . . . .	125
5.1	Discretisation du milieu continu. . . . .	131
5.2	Milieu homogène discret équivalent de taille $(50 \times 50)$ . . . . .	135
5.3	Une réalisation aléatoire d'un réseau carré troué de taille $(50 \times 50)$ et présentant une macroporosité égale à 20%. . . . .	136
5.4	Courbes de compression moyennes pour quatre réseaux de tailles $(10 \times 10)$ , $(20 \times 20)$ , $(30 \times 30)$ et $(50 \times 50)$ . . . . .	140
5.5	Courbes de compression moyennes obtenues avec les deux types de réseau. . . . .	141
5.6	Faciès de rupture au début de l'essai de compression et au pic d'effort obtenus avec un réseau de taille $(50 \times 50)$ renfermant des trous de taille $D = L_c = 1$ . . . . .	142

# Liste des tableaux

2.1	Composition de la matrice cimentaire. . . . .	34
2.2	Propriétés mécaniques de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ; % surfacique en trous = 20) . . . . .	38
2.3	Propriétés mécaniques de l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ; % surfacique en trous = 20) . . . . .	38
2.4	Propriétés mécaniques moyennes de deux types d'éprouvettes présentant une macroporosité égale à 20%. . . . .	38
2.5	Modules d'élasticité homogénéisés pour les deux types d'éprouvettes. . . . .	43
2.6	Paramètres du modèle d'endommagement de Mazars adoptés pour le béton léger modèle. . . . .	48
2.7	Propriétés mécaniques de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 20). . . . .	69
2.8	Propriétés mécaniques de l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 20). . . . .	69
2.9	Comparaison entre les modules d'élasticité apparents moyens obtenus avec les deux types d'éprouvettes d'essai. . . . .	69
2.10	Comparaison entre les résistances en compression moyennes obtenues avec les deux types d'éprouvettes d'essai. . . . .	70
2.11	Propriétés mécaniques de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 1.8). . . . .	72
2.12	Propriétés mécaniques de l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 1.8). . . . .	72

3.1	Composition de la matrice cimentaire $M^1$ . . . . .	83
3.2	Composition des différents mélanges pour le béton de polystyrène renfermant les billes de diamètre $\phi_1 = 1mm$ . . . . .	84
3.3	Composition des différents mélanges pour le béton de polystyrène renfermant les billes de diamètre $\phi_2 = 2.5mm$ . . . . .	85
3.4	Composition des différents mélanges pour le béton de polystyrène renfermant les billes de diamètre $\phi_3 = 6.3mm$ . . . . .	85
3.5	Récapitulatif des résultats de l'étude de l'effet d'échelle de volume sur la résistance en compression du béton de polystyrène. . . . .	91
3.6	Composition des différents mélanges. . . . .	97
4.1	Résultats des calculs EF en élasticité linéaire conduits sur le huitième des cellules de base de trois réseaux périodiques (CC) présentant des porosités proches de zéro. . . . .	120
1	Résultats des essais de compression et de module sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice $M^1$ et de billes de diamètre $\phi_1 = 1mm$ . . . . .	173
2	Résultats des essais de compression sur les éprouvettes ( $44 \times 88mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice $M^1$ et de billes de diamètre $\phi_1 = 1mm$ . . . . .	174
3	Résultats des essais de compression et de module sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice $M^1$ et de billes de diamètre $\phi_2 = 2.5mm$ . . . . .	175
4	Résultats des essais de compression sur les éprouvettes ( $44 \times 88mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice $M^1$ et de billes de diamètre $\phi_2 = 2.5mm$ . . . . .	176
5	Résultats des essais de compression et de module sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice $M^1$ et de billes de diamètre $\phi_3 = 6.3mm$ . . . . .	177
6	Résultats des essais de compression sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) des bétons de polystyrène constitués de la matrice $M^0$ et renfermant respectivement les billes de diamètre $\phi_1 = 1mm$ et $\phi_2 = 2.5mm$ . . . . .	178

- 
- 7 Résultats des essais de compression sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) des bétons de polystyrène constitués de la matrice  $M^2$  et renfermant respectivement les billes de diamètre  $\phi_1 = 1mm$  et  $\phi_2 = 2.5mm$ . . . . . 179





# Introduction générale

On regroupe sous le terme “béton léger” l’ensemble des bétons dont la densité est inférieure à celle d’un béton ordinaire (égale à environ 2.4). Une telle densité peut être obtenue grâce à la substitution des granulats classiques (sable, gravillon) par des granulats plus légers, souvent artificiels tels que : l’argile expansé, le schiste, la perlite, la vermiculite, le laitier expansé, etc. Ces bétons, qui sont aujourd’hui bien appréhendés au niveau de leur formulation et leur mise en œuvre (Arnould et Virlogeux, 1986; de Larrard, 1995), présentent des densités se situant en général dans la fourchette [1.4 ; 1.9].

Cependant, on peut atteindre des densités plus faibles, en utilisant des inclusions extrêmement légères telles que des billes de polystyrène expansé (Bagon et Frondistou-Yannas, 1976; Patron et Shendy-El-Barbary, 1982; Sri Ravindrarajah et Tuck, 1994; Kayyali et Haque, 1996; Ganesh Babu et Saradhi Babu, 2002; Chen et Liu, 2004; Le Roy et al., 2005; Laukaitis et al., 2005). En outre, grâce à l’emploi des matrices cimentaires à ultra haute résistance, ces bétons de polystyrène peuvent avoir des résistances de bétons de structure. Par conséquent, ils représentent, grâce à leur légèreté, une solution technique intéressante pour les domaines du bâtiment, des ouvrages d’art et d’offshore.

Par ailleurs, les bétons légers de polystyrène ont une faible conductivité thermique notamment pour un taux de billes très important (de l’ordre de 70%). Par conséquent, ils peuvent apporter une solution technique très intéressante au problème d’isolation thermique dans les bâtiments (à l’instar du Béton Isolant Porteur (BIP) du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment CSTB).

Cependant, bien qu’ils soient technologiquement très prometteurs, les bétons légers de polystyrène posent encore de nombreux problèmes au niveau de la compréhension de leurs propriétés mécaniques en liaison avec leur microstructure.

A ce propos, une étude expérimentale réalisée en 1999 (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005) au sein de la division Bétons et Composites Cimentaires du LCPC et portant sur la formulation et l’optimisation d’un béton de polystyrène expansé de densité comprise entre 0.6 et 1.4, a montré que la résistance en compression de ce béton diminue sensiblement lorsqu’on

augmente la taille des billes de polystyrène, à densité constante du béton. A titre d'exemple, pour un béton léger de densité 1.4, Parant et Le Roy ont observé une chute de la résistance d'environ 50% en remplaçant des billes de polystyrène de diamètre 1 mm par des billes de diamètre 6 mm. Par ailleurs, ils ont observé aussi que l'effet de la taille des billes de polystyrène sur la résistance du béton léger diminue lorsqu'on augmente la macroporosité du béton (la fraction volumique en polystyrène) et qu'il devient négligeable pour les bétons présentant une très forte porosité.

Ce phénomène a été confirmé par G. Babu et S. Babu (2002) sur des bétons légers de polystyrène ayant des densités comprises entre 1.85 et 1.44 et renfermant deux tailles de billes (4.75 et 6.3mm). Ensuite, par Laukaitis et al. (2005) sur un ultra léger béton de densité comprise entre 0.3 et 0.15, constitué d'une matrice mousse (pâte cimentaire + polystyrène émietté) et de billes de polystyrène expansé de taille comprise entre 2.5 et 10mm.

Cette dépendance de la résistance du béton léger par rapport à la taille des billes de polystyrène est connue en mécanique sous le nom d'effet de taille. Ce phénomène est observé dans d'autres types de matériaux, notamment dans les matériaux métalliques (Hall, 1951; Petch, 1953; Kouzeli et Mortensen, 2002; Despois et al., 2004b). Cependant, si l'étude des effets de taille dans les matériaux métalliques est aujourd'hui un domaine animé (Fleck et Hutchinson, 1993; Fleck et al., 1994; Smyshlyaev et Fleck, 1994; Arzt, 1998; Gao et al., 1999; Huang et al., 2000; Gil Sevillano et al., 2001; Mishnaevsky Jr. et al., 2004; Voyiadjis et Abu Al-Rub, 2005; Cheong et al., 2005), le même problème dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons et composites cimentaires est resté encore mal appréhendé. Pour ce type de matériaux, le problème d'effet d'échelle le plus connu est celui de l'effet de la taille d'une structure sur sa résistance (Weibull, 1939; Bazant, 1976; Carpinteri, 1994a).

Ce travail de thèse est le fruit d'une collaboration entre le Laboratoire d'Analyse des Matériaux et Identification (LAMI) et la division Bétons et Composites Cimentaires (BCC) du LCPC. Il vise principalement à identifier l'origine physique et à modéliser l'effet de taille observé sur la résistance en compression du béton de polystyrène expansé. Ce problème est très complexe car il dépend *a priori* de trois longueurs correspondant à trois échelles différentes. La première longueur est la taille de l'éprouvette d'essai ( $D$ ), la deuxième est la taille des billes de polystyrène ( $\phi$ ) et la troisième est la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire ( $l_m$ ). En outre, il semble dépendre aussi de la macroporosité du béton.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous dressons une revue bibliographique des effets d'échelle et de taille dans les matériaux hétérogènes, en particulier, dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des mécanismes de rupture en compression et de

l'effet de taille en (2D). Pour ce faire, une étude combinée expérimentale et numérique est conduite sur un béton léger modèle où les billes de polystyrène sont remplacées par des trous de même taille. Dans un premier temps, nous considérons une distribution régulière des trous et dans un second temps, une distribution aléatoire.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les résultats d'une étude expérimentale conduite sur trois types de béton de polystyrène renfermant respectivement des billes de diamètre : ( $\phi_1 = 1mm$ ), ( $\phi_2 = 2.5mm$ ) et ( $\phi_3 = 6.3mm$ ) et présentant des densités allant de  $1200 kg/m^3$  à  $2000kg/m^3$ . En outre, pour éliminer l'effet d'échelle de volume, nous étudions l'effet de la taille des éprouvette d'essai en testant des éprouvettes homothétiques. Enfin, nous étudions l'effet de la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire.

Dans le quatrième chapitre, nous conduisons une démarche phénoménologique, basée sur l'analyse des mécanismes de ruine observés expérimentalement dans le béton de polystyrène, pour identifier la loi régissant l'effet de taille. A l'issue de cette démarche, un modèle est proposé pour prédire la résistance du béton de polystyrène en tenant compte de l'effet de taille. Ce modèle est validé grâce aux résultats de l'étude expérimentale.

Dans le cinquième chapitre, nous proposons une modélisation numérique (2D) simple qui rend compte de l'effet de taille observé sur la résistance en compression du béton de polystyrène. Le modèle proposé est de type réseaux où une discrétisation du milieu continu troué représentant le béton de polystyrène est conduite en se basant sur la théorie des équivalences (Absi, 1978). Dans cette étude, nous analysons aussi l'effet de la taille du réseau pour éliminer l'effet d'échelle de volume.

Enfin, la conclusion du mémoire reprend les principaux résultats obtenus et discute ensuite des perspectives ouvertes par le présent travail.



# Chapitre 1

## Revue bibliographique des effets d'échelle et de taille

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles</b>	<b>7</b>
1.2.1	Effet d'échelle de volume	8
1.2.2	Effet d'échelle de structure	9
1.2.3	Théories de base	11
<b>1.3</b>	<b>Effets de taille</b>	<b>19</b>
1.3.1	Effets de taille dans les matériaux métalliques	19
1.3.2	Effets de taille dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons	22
<b>1.4</b>	<b>Synthèse générale</b>	<b>26</b>

---



## 1.1 Introduction

La notion d'effet d'échelle en mécanique caractérise la dépendance des performances des matériaux, notamment au voisinage de la rupture, aux différentes dimensions entrant en jeu lors du passage d'une échelle d'étude à une autre. Le problème d'effet d'échelle qui présente le plus grand intérêt en mécanique des solides est celui de l'effet de la taille d'une structure sur sa résistance, notamment dans le cas des matériaux quasi-fragiles.

Un autre effet d'échelle, se situant à une échelle inférieure à savoir l'échelle mésoscopique, est celui caractérisant la dépendance des performances mécaniques des matériaux de la taille de leur microstructure. Ce phénomène est connu souvent sous le nom d'effet de taille. Si le problème d'effet de taille dans les matériaux métalliques, en plasticité, est relativement bien cerné aujourd'hui, le même problème dans le cas des matériaux quasi-fragiles de type bétons est resté encore mal appréhendé.

Dans ce premier chapitre, nous dressons une revue bibliographique des effets d'échelle et de taille dans les matériaux hétérogènes. Dans la première partie de ce chapitre (section 1.2), nous rappelons les effets d'échelle classiques dans les matériaux quasi-fragiles.

Dans la deuxième partie (section 1.3), nous commençons par rappeler brièvement les effets de taille en plasticité, puis nous dressons un état des lieux relatif aux effets de taille dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons.

## 1.2 Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles

Les matériaux quasi-fragiles (bétons, roches, céramiques, etc.) sont des matériaux incapables de présenter des déformations plastiques. Ils cèdent selon une rupture caractérisée par une zone d'élaboration de la fissuration (située en fond de fissure) relativement importante (Hillerborg et al., 1976; Bazant, 1976), dans laquelle le matériau subit de l'endommagement distribué, lié à un adoucissement, sous la forme de microfissuration et de frottement de glissement. Autrement dit, la rupture de ces matériaux n'apparaît pas dès l'amorçage de la fissuration comme c'est le cas pour les matériaux fragiles. En outre, la taille ( $l_c$ ) de cette zone semble être indépendante de la taille de la structure. En effet, d'après les observations expérimentales effectuées par Pijaudier-Cabot (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987), cette taille serait liée à celle de la plus grosse hétérogénéité du matériau ( $l_c \propto 3 \times l_m$  où  $l_m$  est la taille du plus gros granulat).

Le matériau quasi-fragile qui a été l'objet des recherches intenses sur la plus longue durée est le béton. La rupture de ce matériau fortement hétérogène est un phénomène très com-



plexe exhibant des effets d'échelle. En effet, au voisinage de la rupture, le comportement très contrasté de la matrice et des inclusions, résultant de leur propriétés mécaniques différentes, est à l'origine de la naissance, la propagation et enfin la coalescence des microfissures pour former enfin des macrofissures dont la croissance est souvent stable.

A l'échelle macroscopique, deux types d'effet d'échelle sont observés dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons : l'effet de volume qui se situe à l'échelle de l'éprouvette du laboratoire et l'effet d'échelle de structure se situant à l'échelle de la structure.

### 1.2.1 Effet d'échelle de volume

Le premier type d'effet d'échelle, connu sous le nom d'effet de volume existe lorsqu'on observe expérimentalement une diminution de la contrainte moyenne de rupture ( $\sigma$ ) avec l'augmentation du volume ( $\mathbf{V}$ ) de l'éprouvette d'essai soumise à une sollicitation homogène (cf. figure 1.1).

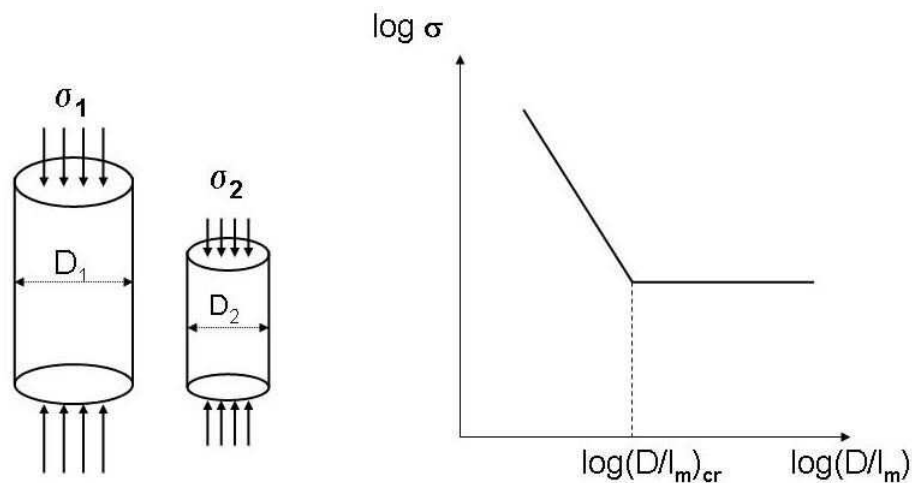


FIG. 1.1: Effet d'échelle de volume.

Les expériences de traction simple de Kadlecek et Spetla (1973) sur des éprouvettes homothétiques en béton de forme cylindrique ont prouvé l'existence d'un tel effet d'échelle. En outre, d'après (Kadlecek et Spetla, 1973), ( $\sigma$ ) suit une loi en puissance de ( $\mathbf{V}$ ) :

$$\sigma \propto \mathbf{V}^{-\alpha} \text{ avec } \alpha > 0 \quad (1.1)$$

D'autres auteurs ont confirmé ensuite ces conclusions par leurs propres expériences (Torrent, 1977; Wu, 1991).

L'effet d'échelle de volume est lié souvent à l'existence de défauts dans les matériaux. En effet, à cause de l'hétérogénéité du matériau, la résistance locale des éléments de matière n'est pas uniforme, mais suit une distribution aléatoire. Par conséquent, la probabilité de trouver des éléments de faible résistance (des défauts) croît avec la taille de l'éprouvette d'essai. De ce fait, la rupture apparaîtra plus tôt quand la taille de l'éprouvette augmente. C'est en partant de ces constatations que les approches probabilistes de la rupture des matériaux, de type Weibull (Weibull, 1939), ont été développées.

Cependant, il semble que cet effet devienne négligeable à partir d'un certain volume de l'éprouvette d'essai. Ce résultat a été trouvé numériquement par Laalai et Sab (Laalai, 1993; Sab et Laalai, 1993; Laalai et Sab, 1994) qui ont étudié la rupture d'un réseau carré de poutres encastrées élastiques fragiles dont les seuils de rupture sont tirés aléatoirement selon une loi de Weibull, et ont montré l'existence d'un certain rapport critique entre la taille de l'éprouvette ( $D$ ) et la taille de la plus grosse hétérogénéité ( $l_m$ ) du matériau, à partir duquel l'effet d'échelle de volume disparaît. Pour ce rapport, le volume élémentaire représentatif (VER) sera considéré comme atteint pour la résistance du matériau. Ce résultat a été conforté par Wu et Rossi (Wu, 1991) qui ont trouvé expérimentalement la même contrainte à la rupture en traction pour deux éprouvettes cylindriques du béton à très haute résistance ayant pour diamètres 6 cm et 15 cm.

### 1.2.2 Effet d'échelle de structure

Les performances mécaniques des structures réelles ne sont pas forcément identiques à celles des éprouvettes du laboratoire. Le passage à l'échelle de la structure nécessite de prendre en compte les effets d'échelles. En effet, on observe que la contrainte de rupture diminue lorsqu'on augmente la taille de la structure. L'Hermite (1973) en particulier, a mis en évidence ce phénomène à travers des essais de flexion 3-points sur des poutres non entaillées de dimensions homothétiques (rapport maximum d'homothétie égal à 10) (cf. figure 1.2). Dans ces expériences, la contrainte de rupture en traction  $f_t$  est déterminée en supposant le matériau élastique fragile et en utilisant la théorie classique des poutres pour le calcul des champs de contraintes dans l'éprouvette.

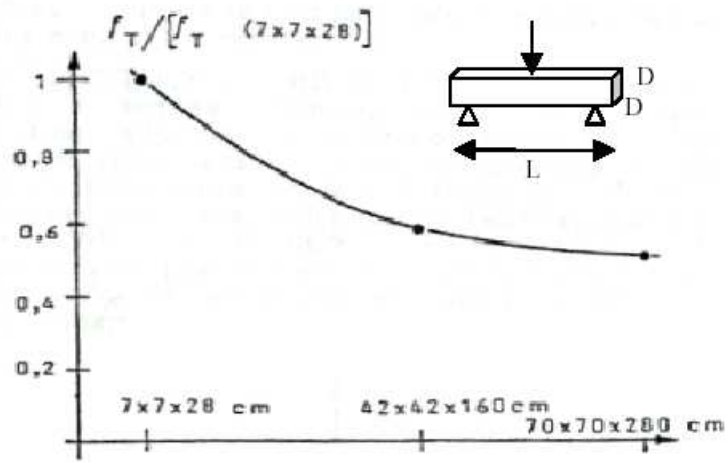


FIG. 1.2: Effet d'échelle de structure d'après (L'Hermite, 1973).

Les effets d'échelle de structure ont été aussi mis en évidence à travers des essais sur des structures pré-fissurées ou entaillées et chargées en mode I (mode de propagation de la fissure par ouverture de ses lèvres selon la mécanique linéaire de la rupture due à Griffith (Griffith, 1920)). En effet, il s'est avéré que les valeurs expérimentales du facteur d'intensité des contraintes critique  $K_{Ic}$ , pour le cas de la flexion 3-points des poutres entaillées en béton, augmentent avec la taille de la structure jusqu'à atteindre une valeur constante pour des poutres de très grandes dimensions (Hillerborg, 1983; Bazant et Pfeiffer, 1987).

Rappelons que la mécanique linéaire de la rupture (MLR) stipule que la résistance nominale  $\sigma_N$  d'une structure (2D), de taille ( $D$ ) et renfermant une fissure se propageant en mode I, varie selon l'inverse de la racine carrée de ( $D$ ) multiplié par le facteur d'intensité des contraintes critique  $K_{Ic}$ . Ce dernier, appelé "ténacité", est supposé être une caractéristique intrinsèque du matériau caractérisant sa résistance à la propagation de la fissure (Irwin, 1957). Ainsi, la loi d'effet d'échelle de la MLR s'écrit :

$$\sigma_N \propto K_{Ic}^c D^{-1/2}. \quad (1.2)$$

Cette loi n'est donc respectée que pour les structures en béton de grandes tailles. Cette limite de validité de la MLR pour l'analyse des effets d'échelle de structure dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons trouve son explication dans le fait que l'hypothèse principale en MLR, à savoir la linéarité du comportement élastique, n'est plus respectée dans le cas des matériaux quasi-fragiles. En effet, cette hypothèse suppose que tous les phénomènes d'endommagement soient concentrés à la pointe de la fissure. Or, dans le cas des matériaux

quasi-fragiles, le fait qu'il existe en fond de fissure une zone d'élaboration qui est le siège des phénomènes de microfissuration rend le comportement du béton non linéaire. Ainsi, la MLR ne peut pas être applicable dans le cas des matériaux quasi-fragiles, sauf pour des structures de grandes tailles où la taille de la zone d'élaboration devient négligeable devant la taille de la structure dont la rupture devient fragile.

En revanche, la mécanique non linéaire de la rupture permet de tenir compte explicitement de la zone de non linéarité en amont de la fissure, car elle suppose l'existence d'une zone plane de taille finie, qui est le siège des phénomènes de dégradation (plasticité, microfissuration), et dont le comportement est non linéaire (Rice, 1972). Cette théorie a été utilisée pour le béton par Hillerborg (1976) pour bâtir son modèle de la fissure fictive. Ce modèle, connu aujourd'hui sous le nom du modèle de la fissure cohésive, fait l'hypothèse que la zone d'élaboration de la microfissuration est suffisamment petite ou confinée. Ainsi, il la représente comme le prolongement fictif de la fissure existante et il adopte pour décrire son comportement une relation non linéaire entre les contraintes transmises par cette fissure fictive et les déplacements de ses lèvres.

### 1.2.3 Théories de base

Nous allons recenser maintenant les principales théories qui permettent de rendre compte des effets d'échelle de volume et de structure dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons.

#### 1.2.3.1. La théorie statistique de Weibull

Weibull (1939) proposa une théorie statistique de la résistance des matériaux en étudiant la rupture d'une chaîne constituée de  $n$  maillons identiques et indépendants. Cette statistique est basée sur l'hypothèse du "maillon le plus faible" : il suffit qu'un seul maillon de la chaîne casse pour que l'ensemble de la chaîne casse. La résistance limite est donc aléatoire et la probabilité  $P$  pour qu'un maillon ne cède pas à une contrainte inférieure à  $\sigma$  est donnée par la distribution cumulée de Weibull suivante :

$$P(\sigma) = \left(\frac{\sigma - \sigma_{\mathbf{u}}}{\sigma_{\mathbf{0}}}\right)^m ; (\sigma \geq \sigma_{\mathbf{u}} \text{ et } (\sigma - \sigma_{\mathbf{u}}) \leq \sigma_{\mathbf{0}}) \quad (1.3)$$

où  $m$  est appelé "coefficient de Weibull" et il est habituellement compris entre 5 et 50,  $\sigma_{\mathbf{0}}$  et  $\sigma_{\mathbf{u}}$  sont des constantes du matériau :  $\sigma_{\mathbf{0}}$  est un paramètre d'échelle et  $\sigma_{\mathbf{u}}$  est un seuil de contrainte qui est généralement égal à 0.

En se basant sur l'équation précédente, une généralisation tridimensionnelle du modèle du

maillon le plus faible avec une chaîne constituée de maillons de résistance aléatoire conduit à la distribution suivante :

$$P(\sigma_{\mathbf{N}}) = 1 - \exp\left[- \int_V c[\sigma(\mathbf{x}), \sigma_{\mathbf{N}}] dV(x)\right], \quad (1.4)$$

où  $P$  représente la probabilité que la structure cède à la contrainte nominale  $\sigma_{\mathbf{N}}$  dès que la fissuration macroscopique est initiée à partir d'une microfissure (ou d'un défaut quelconque),  $\sigma$  est le champ de contraintes juste avant la ruine et  $c(\sigma)$  est la fonction donnant la répartition spatiale de la probabilité de ruine du matériau.

Ainsi, plus le volume ( $V$ ) de l'éprouvette d'essai ou de la structure est grand, plus la probabilité de présence d'un défaut est importante et donc plus la résistance est petite : c'est l'explication probabiliste des effets d'échelle.

Par ailleurs, du fait que la distribution de Weibull suit une loi en puissance, sa loi d'échelle suit aussi une loi en puissance. Elle s'écrit pour des structures géométriquement similaires en (2D) comme suit :

$$\sigma_{\mathbf{N}} = k_0(D)^{-\frac{n}{m}}, \quad (1.5)$$

où  $\sigma_{\mathbf{N}}$  est la contrainte nominale d'une structure de taille ( $D$ ),  $k_0$  est une constante caractérisant la forme de la structure et ( $n$ ) est la dimension de la structure ( $n=1, 2$  ou  $3$ ). Pour une similitude bi-dimensionnelle ( $n=2$ ) et des propriétés typiques du béton, l'exposant ( $-\frac{n}{m}$ ) de cette loi est égal approximativement à  $(-1/12)$  (Bazant et Novak, 2000).

Ainsi, cette théorie statistique est souvent utilisée pour expliquer les effets d'échelle de volume dans les matériaux quasi-fragiles, vu que les expériences montrent que ces effets suivent généralement des lois en puissance de ( $V$ ) (Kadlecek et Spetla, 1973; Torrent, 1977; Wu, 1991). Par ailleurs, deux études numériques conduites par Hermann *et al.* (1989) et par Laalai et Sab (1993) sur deux réseaux périodiques différents en (2D) formés de poutres élastiques fragiles présentant des seuils de rupture tirés aléatoirement selon une loi de Weibull, ont confirmé que la contrainte de rupture d'un réseau de taille ( $L \times L$ ) décroît comme une puissance en fonction de  $L$ .

Cependant, cette théorie ne permet pas d'expliquer les effets d'échelle de structure dans les matériaux quasi-fragiles, sauf pour des échelles si grandes où la taille des hétérogénéités de ces matériaux devient négligeable devant la taille de la structure et la rupture devient fragile. En effet, la théorie statistique de l'effet d'échelle de Weibull s'applique aux structures qui rompent dès l'amorçage de la fissuration macroscopique, et présentent par conséquent à la rupture une petite zone d'élaboration de la fissuration induisant une redistribution négligeable des contraintes à l'échelle macroscopique. Cela n'est pas souvent le cas pour les

matériaux quasi-fragiles de type bétons dont la matière est fortement hétérogène, avec une hétérogénéité caractérisée par une longueur matériau non négligeable.

La théorie statistique de Weibull est souvent utilisée pour modéliser la rupture des matériaux hétérogènes fragiles, notamment les composites céramiques et fibrés à matrice fragile (Curtin, 1998; Charles et Hild, 2002; Hild et al., 2003; Mishnaevsky Jr. et al., 2004) et les métaux fragilisés par fatigue (Bilger, 2003). Pour les bétons, cette théorie a été utilisée, en particulier, par Rossi et Piau (Rossi et Piau, 1983) dans leur modèle stochastique et par Breysse (Breysse, 1988) dans son modèle probabiliste de l'endommagement (ces deux modèles sont implantés dans le code d'éléments finis CESAR-LCPC).

### 1.2.3.2. La théorie déterministe de Bazant

Bazant (1983, 1984) s'est basé sur la mécanique non linéaire de la rupture pour expliquer l'effet d'échelle de structure observé dans les matériaux quasi-fragiles. Il suggère qu'une propagation stable de grandes fissures ou de bandes de fissuration distribuée jusqu'à atteindre l'effort maximal, conjuguée à une redistribution des contraintes et un relâchement de l'énergie emmagasinée, provoque un effet d'échelle de transition entre ceux prédits par la MLR par un critère ultime donné par la théorie de la résistance des matériaux ou la théorie de la plasticité classique.

En effet, selon Bazant, pour une taille de structure suffisamment grande, la longueur caractéristique ( $l_c$ ), correspondant à la taille de la zone d'élaboration de la fissuration et liée à la taille des hétérogénéités du matériau (Bazant, 1987), devient négligeable et sans effet s'il y a une grande fissure qui traverse la structure à la rupture. Ainsi, la loi d'échelle en puissance de la MLR peut s'appliquer asymptotiquement dans ce cas.

La longueur caractéristique ( $l_c$ ) peut aussi devenir sans effet pour des structures de très petites tailles, par exemple, quand la taille de l'éprouvette de béton n'est que de quelques fois la taille du granulat. Dans ce cas, la zone d'élaboration occupe toute l'éprouvette et l'effet d'échelle de structure disparaît, ce qui correspond à un critère ultime de la théorie de la résistance des matériaux ou de la théorie de la plasticité classique.

Cependant, comme pour la plupart des applications des matériaux quasi-fragiles, la taille ( $l_c$ ) de la zone d'élaboration de la fissuration n'est pas négligeable devant la taille de la structure, on se trouve alors dans l'intervalle de transition entre ces deux asymptotes. Ainsi, il est nécessaire de déduire une loi d'échelle applicable sur tout l'intervalle de dimensions. L'idée de Bazant était de construire un raccordement entre ces deux comportements asymptotiques. Ensuite, pour identifier sa loi de transition, Bazant a considéré dans son raisonnement une plaque rectangulaire qui est initialement dans un état de contrainte uniforme égale à la

contrainte nominale  $\sigma_N$  (cf. figure 1.3).

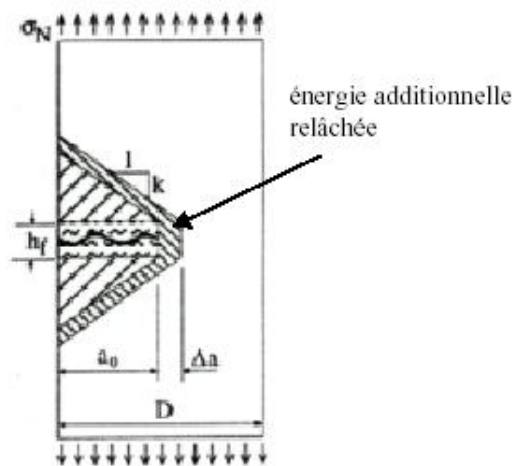


FIG. 1.3: Zones de relâchement des contraintes dans une éprouvette entaillée selon Bazant (Bazant, 2004).

Bazant suppose que la rupture est précédée par la formation d'une bande de fissuration d'épaisseur ( $h_f$ ) dans la section centrale de la plaque. L'extension de cette bande d'une unité de longueur nécessite un certain taux d'énergie (par unité d'épaisseur) noté  $G_f$  et appelé "énergie de fissuration" (supposée être une caractéristique du matériau (Griffith, 1920)). La condition de conservation d'énergie consiste à écrire que l'énergie emmagasinée est égale à l'énergie nécessaire à la propagation de cette bande. Lorsque la bande de fissuration s'allonge de ( $\Delta a$ ), l'énergie additionnelle relâchée est causée par la partie densément hachurée. Ensuite, Bazant a considéré deux plaques homothétiques ayant des modes de rupture géométriquement similaires. Ainsi, plus la plaque est large, plus la bande de fissure est longue à la rupture. En conséquence, plus la plaque est large, plus l'aire de la zone fortement hachurée est grande. Alors pour une même extension de la bande de fissuration, une quantité d'énergie plus importante est relâchée dans une structure de grande taille que dans une petite structure. Par conséquent, la petite structure aura une résistance plus grande, ce qui explique l'effet d'échelle de structure.

En se basant sur ce raisonnement énergétique et moyennant un raccordement asymptotique, Bazant a aboutit à une loi d'effet d'échelle très simple, mais qui est valable uniquement pour le cas des structures préfissurées ou renfermant une entaille initiale. Cette loi s'écrit sous la forme suivante (Bazant, 1983, 1984) :

$$\sigma_N = \frac{Bf'_t}{\sqrt{1+\beta}} \quad \text{avec} \quad \beta = \left(\frac{D}{D_0}\right), \quad (1.6)$$

où  $\sigma_N$  est la contrainte nominale à la rupture d'une structure de dimension ( $D$ ) (qui peut être la hauteur ou la longueur),  $B$  est un paramètre dépendant de la géométrie de la structure,  $f'_t$  est la résistance à la traction du matériau, ( $D_0$ ) est une dimension caractéristique appelée "taille de transition" et le paramètre  $\beta$  correspondant au rapport ( $\frac{D}{D_0}$ ) est appelé : "indice de fragilité", il définit la fragilité de la structure comme la proximité à l'effet d'échelle de la MLR. En effet, plus cet indice est grand, plus la structure est fragile (Bazant, 1987; Bazant et Pfeiffer, 1987). A noter que les deux constantes  $B$  et  $D_0$ , qui peuvent être déterminées expérimentalement, ne dépendent pas des dimensions de la structure étudiée mais de la géométrie et des caractéristiques du matériau.

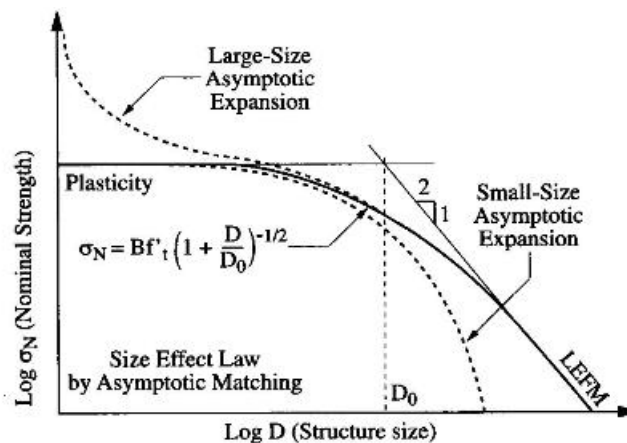


FIG. 1.4: Loi d'effet d'échelle proposée par Bazant (1984) pour des structures entaillées (les courbes en pointillées correspondent au développements asymptotiques aux grandes et petites échelles, la courbe en trait plein correspond au raccordement asymptotique, LEFM : mécanique linéaire de la rupture).

Cette loi d'échelle représentée dans un diagramme (log-log) (cf. figure 1.4), met en évidence l'existence d'une asymptote quand ( $\frac{D}{D_0} \gg 1$ ). Dans ce cas, la contrainte normalisée



$(\frac{\sigma_N}{Bf'_t})$  varie en  $(\frac{D}{D_0})^{-1/2}$ , ce qui est représentatif des effets d'échelle décrits par la MLR. En revanche, dans le cas où  $(\frac{D}{D_0} \ll 1)$ , la contrainte  $\sigma_N$  se rapproche de  $Bf'_t$  et l'effet d'échelle devient alors négligeable, ce qui met en évidence l'existence d'une asymptote horizontale pour des petites tailles de structures. Notons aussi que la constante  $D_0$  représente sur la figure 1.4 le point d'intersection de ces deux asymptotes.

Enfin, la loi de Bazant prédit une augmentation de contrainte relative de 30% lorsqu'on passe d'une taille de structure donnée à une taille 5 fois plus petite et une diminution de contrainte relative de 55 % lorsqu'on passe à une structure 5 fois plus grande.

Ensuite, Bazant (Bazant, 1996) a proposé une loi "universelle" pour expliquer les effets d'échelle de structure dans les matériaux quasi-fragiles. En effet, sa loi s'applique pour des structures avec et sans entaille initiale :

$$\sigma_N = Bf'_t [1 + (\frac{D}{D_0})^r]^{-1/2r} [1 + s \frac{(2l_f D_0)}{((2\gamma l_f + L)(D + D_0))}]^{1/s}, \quad (1.7)$$

avec  $l_f$  est une épaisseur critique dans laquelle se développe des microfissures pour une poutre non entaillée, tandis que pour une poutre entaillée ( $l_f = 0$ ) et on retrouve la loi précédente, et  $\gamma$  est une constante. Bazant a suggéré que les valeurs de ( $r = s = 1$ ) sont les plus appropriées pour caler les expériences.

Cette loi a été vérifiée pour un grand nombre de données expérimentales, pour différents matériaux (béton, mortier, roches, céramiques, etc.), pour des échantillons entaillés ou non, pour des géométries différentes (poutres, cylindres) et pour diverses sollicitations mécaniques (essais de flexion 3-points, essais de compression, essais de fendage).

Ainsi, la théorie déterministe proposée par Bazant pour expliquer et prédire les effets d'échelle de structure est considérée aujourd'hui comme la mieux adaptée au cas des matériaux quasi-fragiles. Cependant, cette théorie ne tient pas compte de l'effet d'échelle de volume puisqu'elle suppose que pour des structures de petites tailles, un critère ultime de résistance est applicable.

### 1.2.3.3. La mécanique de l'endommagement

La théorie de l'endommagement permet dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles de rendre compte de la dégradation progressive des matériaux. Son domaine d'application couvre aussi bien le domaine des premières détériorations, la prise en compte des effets de cumul non-linéaire du dommage ainsi que la prévision de l'amorçage d'une macrofissure. En outre, dans cette théorie, les défauts interviennent à travers un concept

d'homogénéisation et leur évolution est décrite d'une façon macroscopique à l'aide d'une variable  $\mathbf{D}$  qui représente la variation du tenseur d'élasticité par rapport à l'état vierge non endommagé (Mazars, 1984; Lemaitre et Dufailly, 1977).

Cependant, l'utilisation de cette théorie pour le calcul des structures en béton par la méthode des éléments finis a toujours posé des problèmes. En particulier, la présence d'un écrouissage négatif (adoucissement) dans le comportement en traction ou en compression du béton pose d'importantes difficultés numériques qui se traduisent souvent par une forte dépendance des résultats vis-à-vis de la taille des mailles et de leur orientation (Bazant et al., 1984; Saouridis, 1988; Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993; Peerlings et al., 2002). En effet, lorsque le matériau s'adoucit, l'endommagement se localise dans une bande d'éléments (il s'agit d'une localisation pathologique) et le résultat obtenu, de point de vue de la zone de matériau dégradée ainsi que de la réponse globale de la structure, dépend donc de la taille des éléments. En plus, l'énergie dissipée à la rupture tend vers zéro quand on raffine suffisamment le maillage, ce qui est physiquement inadmissible.

L'utilisation du concept non local couplé avec certains modèles d'endommagement comme le modèle de Mazars (Mazars, 1984; Saouridis, 1988) s'est avérée utile, car elle permet de résoudre ces problèmes et par conséquent de faire des calculs fiables sur des structures en béton. Dans ce cas, la variable d'endommagement en un point de la structure ne dépend pas uniquement de ce point (cas du calcul local) mais d'un volume représentatif autour de lui, dans lequel se localise l'endommagement. En outre, la taille de ce volume est caractérisée par une longueur caractéristique ( $L_c$ ), supposée être une caractéristique du matériau qui représente souvent la taille de la zone d'élaboration de la fissuration (Hillerborg et al., 1976; Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987). Ainsi, la théorie d'endommagement non locale permet de rendre compte des effets d'échelle de structure résultant du rapport de la longueur ( $L_c$ ) à la taille de la structure.

#### 1.2.3.4. La théorie fractale des effets d'échelle

Une idée intrigante fût introduite dans le débat sur l'effet d'échelle par Carpinteri *et al.* (Carpinteri, 1994a,b; Carpinteri et al., 1995). S'inspirant de nombreuses études réalisées sur les caractéristiques des fissures dans divers matériaux, Carpinteri (1994) suggéra, sur la base d'arguments strictement géométriques et ne comportant aucun fondement mécanique, que le caractère fractal des surfaces de rupture joue un rôle significatif dans le processus de formation d'une nouvelle surface de rupture et que la différence entre les caractéristiques fractales de fissures (la fractalité invasive) ou de microfissures (la fractalité lacunaire) à différentes échelles d'observation est la source principale des effets d'échelle observés dans

les matériaux quasi-fragiles de type bétons (cf. figure 1.5). Cette théorie a été très critiquée notamment par Bazant (Bazant, 1995), qui s'est penché sur la question de la fractalité des fissures pour conclure à la fin que cette théorie ne peut pas expliquer les effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles. En effet, en se basant sur ce concept fractal de l'énergie de fissuration, il a conduit une analyse asymptotique similaire à celle effectuée pour les fissures non fractales (théorie déterministe de Bazant) pour montrer que l'hypothèse de l'origine fractale invasive de l'effet d'échelle est contredite par les résultats expérimentaux. De même, il a montré que pour des raisons mathématiques et physiques, la fractalité lacunaire ne peut pas être la source de l'effet d'échelle de structure observé dans les matériaux quasi-fragiles.

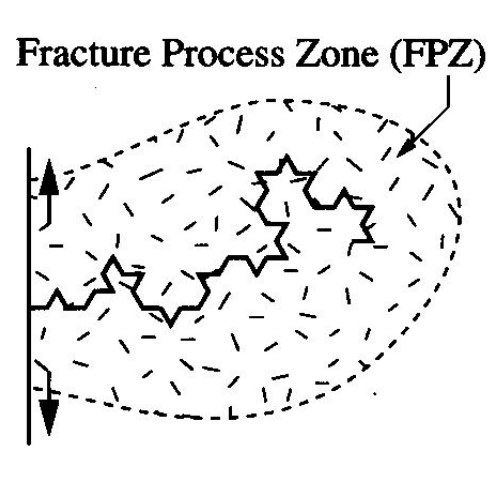


FIG. 1.5: Fissure fractale et sa zone d'élaboration d'après (Carpinteri, 1994a).

## 1.3 Effets de taille

L'effet de taille se situe à l'échelle mésoscopique, puisqu'il caractérise la dépendance des performances mécaniques des matériaux à la taille de leur microstructure. En effet, une amélioration significative de ces performances, notamment au voisinage de la rupture (résistance en traction/compression, contrainte d'écoulement, etc.) a été observée dans plusieurs types de matériaux, lorsqu'on diminue la taille de leur microstructure (cristaux, granulats, inclusions, fibres, pores, etc.), tout en gardant les mêmes fractions volumiques des constituants. Autrement dit, ces performances mécaniques subissent un effet négatif de l'augmentation de la taille de la microstructure de ces matériaux. Les effets de taille sont observés notamment dans les matériaux métalliques (les métaux mono et polycristallins et les composites et les mousses à matrices métalliques) et font l'objet d'une activité de recherche relativement intense. En revanche, dans les matériaux granulaires de type bétons, ces effets n'ont pas reçu une attention aussi grande.

### 1.3.1 Effets de taille dans les matériaux métalliques

#### 1.3.1.1. Observations expérimentales

Au début, l'effet de taille a été observé dans les matériaux mono et polycristallins métalliques. En effet, il a été découvert accidentellement par Hall et Petch au début des années cinquante (Hall, 1951; Petch, 1953), lorsque ces derniers ont observé que la contrainte d'écoulement des aciers doux diminue en fonction de la taille des grains ( $\phi$ ), suivant une loi en puissance en ( $\phi$ ) avec un exposant égal à  $(-1/2)$ ; ce phénomène sera désigné par la suite par "l'effet Hall-Petch".

Ensuite, l'effet de taille a été découvert dans les composites métalliques fibrés et particulaires ainsi que dans les mousses métalliques, où il devient très remarquable dès que la taille des renforts (inclusions ou fibres) ou des pores devient voisine ou inférieure à une dizaine de micromètres. En effet, il a été observé que plus cette taille est fine, plus la contrainte d'écoulement est élevée. A titre d'exemple, l'étude de Kelly et Lilholt (Kelly et Lilholt, 1969) sur le cuivre renforcé par des fibres de tungstène constitue une des premières mises en évidence de cet effet de taille. Cette étude a fait couler beaucoup d'encre, suscitant des études expérimentales parallèles ainsi que diverses analyses (Pedersen, 1983a,b; Fleck et al., 1994; Lloyd, 1994; Mortensen et al., 1998; Stölken et Evans, 1998). Récemment, l'étude conduite par Kouzeli et Mortensen (2002) sur l'aluminium renforcé par des inclusions en céramique est

une éloquente mise en évidence de cet effet de taille (Kouzeli et Mortensen, 2002) (cf. figure 1.6).

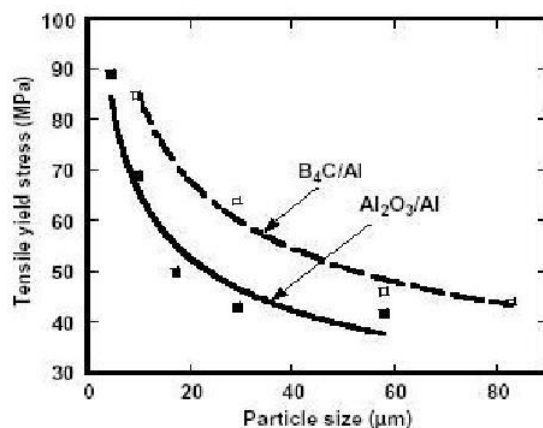


FIG. 1.6: Effet de taille sur la contrainte limite en traction de l'aluminium renforcé par des particules en céramique d'après (Kouzeli et Mortensen, 2002).

Par ailleurs, l'effet de taille est très important aussi dans les mousses métalliques, où l'on observe que plus la taille moyenne des pores est petite, plus la contrainte d'écoulement de la mousse est élevée. Ceci est illustré par la figure 1.7 issue d'une étude expérimentale menée par Despois *et al.* (2004) sur des mousses d'aluminium. En effet, on observe que la contrainte d'écoulement de la mousse augmente par un facteur voisin de trois quand la taille moyenne des pores décroît de 400 à 40  $\mu m$ .

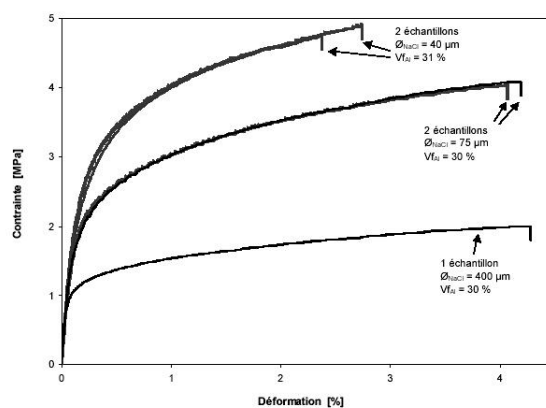


FIG. 1.7: Effet de taille sur la contrainte d'écoulement des mousses d'aluminium d'après (Despois et al., 2004b,a)

### 1.3.1.2. Origines physiques et modélisation

Les effets de taille dans les matériaux cristallins et dans les composites et mousses métalliques sont passés du stade de curiosité du laboratoire à celui de domaine ouvert en plein développement. Rappelons que pour tous ces matériaux, la déformation plastique se produit par le glissement des dislocations. Ainsi, l'origine physique de ces effets de taille ne peut être comprise qu'à partir d'une étude à l'échelle microscopique, basée sur les propriétés des dislocations. Un facteur principal qui ressort de cette analyse des mécanismes de la déformation plastique est une augmentation de la densité de dislocations induite par une décroissance de l'échelle du métal se déformant entre les grains, les pores ou les renforts. Ce phénomène connu sous le nom de "localisation de la déformation plastique" est généralement responsable de ces effets de taille.

Une classification des effets de taille dans ces matériaux a été proposée par Sevillano *et al.* (Gil Sevillano *et al.*, 2001). On peut ainsi distinguer des effets de taille extrinsèques et intrinsèques. Les effets extrinsèques sont dus à des gradients de déformation qui peuvent être directement imposés par une sollicitation externe et donc contrôlables, comme l'effet de taille en flexion découvert par Friedel (Friedel, 1964), ou l'effet de taille en torsion découvert suite aux observations de Smyshlyaev et Fleck (Smyshlyaev et Fleck, 1996), ou l'effet de taille en microindentation et l'effet de taille en nanoindentation découvert récemment (Fivel, 2004). Notons aussi que ces gradients de déformation peuvent apparaître spontanément au cours de la déformation plastique.

Toutes ces situations peuvent se traiter par le formalisme des dislocations géométriquement nécessaires (DGNs) qui sont générées par le matériau pour accommoder ces gradients locaux de déformation, et qui augmentent par conséquent sa contrainte d'écoulement. Ce formalisme, initié par Nye (Nye, 1953) puis popularisé par Ashby (Ashby, 1970), est à l'origine de la plupart des théories de plasticité d'ordre supérieur (Aifantis, 1984, 1987), à l'instar de la théorie du second gradient qui a été initiée par Fleck and Hutchinson (Fleck et Hutchinson, 1993; Fleck *et al.*, 1994; Smyshlyaev et Fleck, 1994), puis développée sous diverses formes jusqu'à ce jour (Gao *et al.*, 1999; Huang *et al.*, 2000; Voyiadjis et Abu Al-Rub, 2005; Cheong *et al.*, 2005).

Quand aux effets intrinsèques, ils sont nombreux et variés. Ces effets sont bien expliqués par Arzt dans son article dressant une revue des effets de taille dans les matériaux métalliques (Arzt, 1998). Ils apparaissent lorsqu'une dimension caractéristique interfère avec les dimensions naturelles associées au matériau, en modifiant son comportement mécanique et en induisant par conséquent des contributions à la contrainte d'écoulement, à travers des lois d'échelle simples. Cette dimension caractéristique est typiquement associée à une distance

entre points d'ancrage forts (petits amas, précipités...), une taille de grains, ou une dimension linéaire d'une seconde phase ou de l'échantillon lui-même. Cependant, les dimensions naturelles associées au matériau sont des longueurs caractéristiques intrinsèques aux processus de dislocations, telle que par exemple, la distance moyenne entre dislocations.

Pour conclure, les effets de taille dans les matériaux cristallins et les composites et mousses métalliques sont aujourd'hui relativement bien appréhendés et pris en compte au niveau de la modélisation à l'échelle mésoscopique du comportement de ces matériaux, grâce notamment à des approches phénoménologiques déterministes basées sur l'analyse des mécanismes de l'écoulement plastique et de la localisation de la déformation plastique.

D'autres approches micromécaniques, dans le cadre des milieux continus généralisés à l'instar des milieux micropolaires (Cosserat, 1909), émergent aujourd'hui (Xiaoning et Gengkai, 2005; Hu et al., 2005). Toutefois, Sanders *et al.* (Sanders et al., 1997) ont suggéré, à partir de leurs résultats expérimentaux sur le cuivre, que ces effets de taille peuvent aussi être dues à des imperfections du matériau initial (porosités, fissures pré-existantes, etc.), et par conséquent ils peuvent avoir une explication probabiliste.

Enfin, notons que les effets de taille sont observés aussi dans les matériaux métalliques fragiles, notamment dans les céramiques où plusieurs études expérimentales ont montré une dépendance de la ténacité de ces matériaux à la taille de leur microstructure (Evans, 1990; Bower et Ortiz, 1993; Roux et al., 2003; Charles et al., 2004). Les travaux issus de la physique statistique concernant les piègeages faibles et forts fournissent une explication à ces effets de taille (Bouchaud et al., 1993; Ramanathan et Fisher, 1993; Hansen et Schmittbuhl, 2003).

### 1.3.2 Effets de taille dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons

#### 1.3.2.1. Effet de taille dans les bétons de densité courante

L'effet de taille a été observé dans le béton de densité courante. En effet, au début des années soixante, Walker et Bloem ont montré que la résistance en compression du béton subissait un effet négatif de l'augmentation du diamètre maximal des granulats ( $D_{max}$ ), à rapport (Eau/Ciment) constant. Leur article (Walker et Bloem, 1960) sema la controverse dans les milieux scientifiques, puisqu'il était et il est encore généralement admis que plus ( $D_{max}$ ) est élevé, plus le béton est compact et plus sa résistance est élevée. Cet effet de taille a été ensuite confirmé par Frazier (1961), puis par Cordon et Gillespie (1963) et enfin par Hobbs (1972).

Une trentaine d'année plus tard, de Larrard et Tondat (1993) ont montré, moyennant une exploitation des résultats expérimentaux fournis par les auteurs précédemment cités et en se rapportant à seize bétons ayant un diamètre ( $D_{max}$ ) compris entre 5 et 19 mm, que l'espacement ( $e$ ) entre les deux gros granulats voisins qu'ils ont appelé : "Épaisseur Maximale de Pâte (EMP)", représente le meilleur paramètre pour prédire l'effet de la taille des granulats ainsi que celui du volume granulaire sur la résistance du béton. Ils ont évalué ce paramètre par :

$$e = D_{max} \left( \sqrt[3]{\frac{g^*}{g}} - 1 \right), \quad (1.8)$$

où  $g$  est la fraction volumique en granulats et  $g^*$  est la compacité granulaire. Ainsi, de Larrard et Tondat ont montré que lorsque ( $D_{max}$ ) augmente et par conséquent ( $e$ ) aussi, la résistance en compression du béton diminue suivant une loi en puissance en ( $e$ ) :

$$G(e) = e^\alpha \quad \text{avec } \alpha < 0, \quad (1.9)$$

où  $G(e)$  est la fonction donnant la contribution du squelette granulaire à la résistance du béton et  $\alpha$  est la puissance de cette loi d'échelle, ajustée par de Larrard et Tondat à une valeur comprise entre -0.13 et -0.16 (cf. figure 1.8).

Toutefois, l'origine physique de l'effet de taille sur la résistance des bétons de densité courante est restée mal appréhendée jusqu'à aujourd'hui.



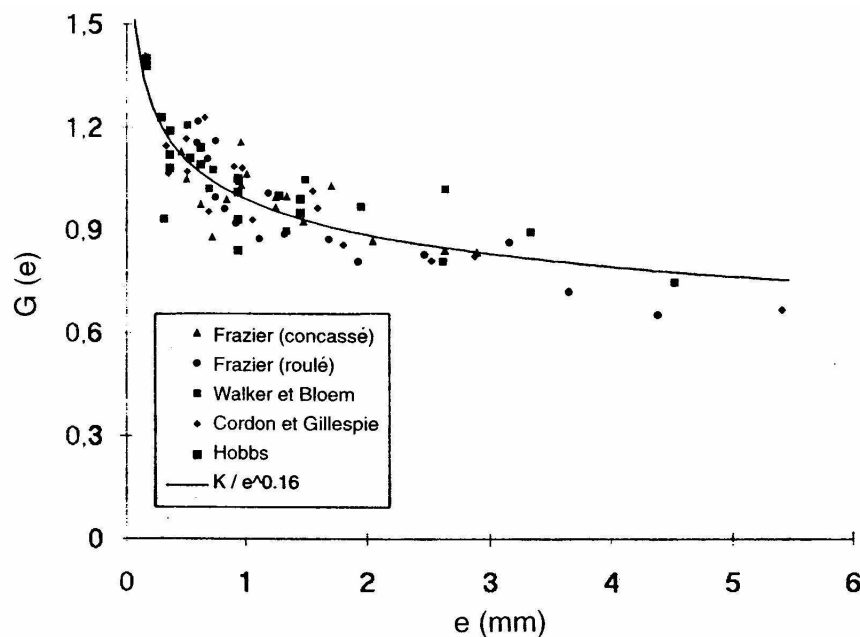


FIG. 1.8: Effet de taille sur la résistance en compression du béton ordinaire d'après (Walker et Bloem, 1960; Cordon et Gillespie, 1963; Hobbs, 1972; Stock et al., 1979) : la courbe en trait plein correspond à la loi proposée par de Larrard et Tondat pour rendre compte de cet effet (de Larrard et Tondat, 1993).

Enfin, une étude récente, conduite par Marolf *et al.* (Marolf et al., 2004) portant sur la formulation d'un béton très poreux ayant une bonne absorption sonore a montré que, à fraction volumique égale en granulats, la résistance en flexion du béton ordinaire subit un effet négatif de l'augmentation de la taille des granulats. Ceci a été expliqué par le fait qu'avec les gros granulats, les pores générés autour sont plus grands et par conséquent la porosité du béton sera plus importante, ce qui explique la chute de résistance. Cette étude a montré également qu'avec des granulats fins, on obtient un béton ayant une meilleure absorption sonore.

### 1.3.2.2. Effet de taille dans les bétons légers

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction générale, il existe un important effet de taille sur la résistance en compression du béton léger de polystyrène expansé, qui sera l'objet de ce travail. Cet effet de taille se traduit par une diminution significative de la résistance du béton léger lorsqu'on augmente la taille des billes de polystyrène, à densité constante du béton. Il a été d'abord observé par Parant et Le Roy (1999) sur trois types de

béton de polystyrène de densités comprises entre  $1400 \text{ kg/m}^3$  et  $600 \text{ kg/m}^3$  et renfermant trois tailles différentes des billes (1, 3 et 6 mm). Les essais de compression ont été conduits sur des éprouvettes cylindriques de taille  $(11 \times 22 \text{ cm})$ . A titre d'exemple, pour un béton léger de densité  $1400 \text{ kg/m}^3$  (fraction volumique en polystyrène égale à environ 0.4), Parant et Le Roy ont observé une chute d'environ 50% de la résistance du béton léger en remplaçant des billes de diamètre 1mm par des billes de diamètre 6mm. Ils ont observé aussi que cet effet de taille diminue lorsqu'on augmente la porosité du béton (la fraction volumique en polystyrène) jusqu'à devenir négligeable pour les bétons présentant une très forte porosité (cf. figure 1.9).

Le Roy *et al.* (2005) ont proposé un modèle semi-empirique qui prend en compte cet effet de taille. En effet, leur modèle, ajusté grâce aux résultats expérimentaux, permet de calculer la résistance en compression normalisée du béton léger (résistance du béton léger / résistance de la matrice) en fonction de la fraction volumique en polystyrène et de la taille des billes. L'effet de taille est pris en compte à travers un paramètre qui varie en fonction de la taille des billes et dont la détermination est purement empirique. Ainsi, ce modèle ne fournit pas d'explication physique à cet effet de taille.

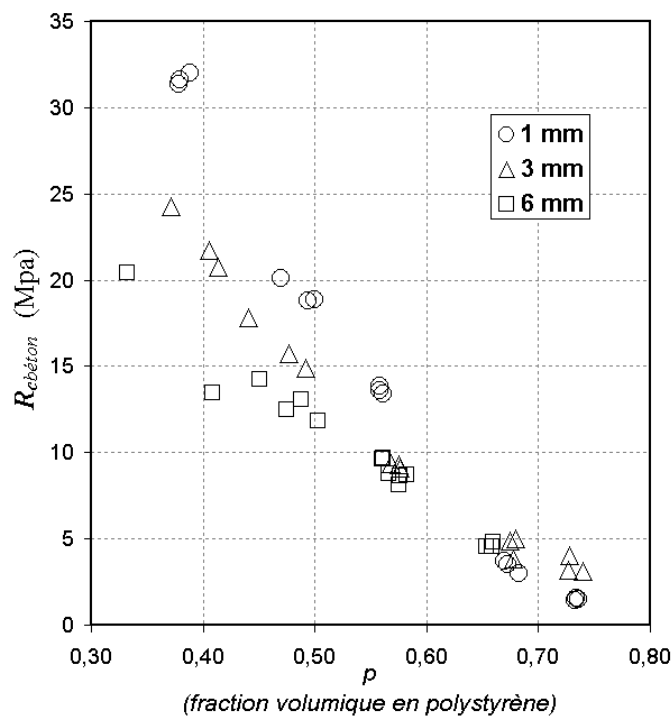


FIG. 1.9: Effet de taille sur la résistance en compression du béton léger de polystyrène expansé d'après (Le Roy et al., 2005).

L'effet de taille sur la résistance en compression du béton de polystyrène a été ensuite confirmé par Ganesh Babu et Saradhi Babu (2002) sur des bétons légers de structure ayant des densités comprises entre  $1850 \text{ kg/m}^3$  et  $1440 \text{ kg/m}^3$  et renfermant deux tailles des billes (4.75 et 6.3mm). Dans leur article (Ganesh Babu et Saradhi Babu, 2002), ces auteurs ont juste mentionné la présence de cet effet de taille sans donner une explication à son origine physique.

Enfin, Laukaitis *et al.* (Laukaitis et al., 2005) ont aussi confirmé la présence d'un effet de taille dans un ultra léger béton de densité comprise entre  $300 \text{ kg/m}^3$  et  $150 \text{ kg/m}^3$  et constitué d'une matrice mousse (pâte + polystyrène émietté) et de billes de polystyrène expansé. En effet, pour une densité égale à  $275 \text{ kg/m}^3$ , ils ont observé une augmentation dans la résistance en compression de ce béton de 40%, en remplaçant des grosses billes (diamètres compris entre 5 et 10 mm) par des petites billes (diamètres compris entre 2.5 et 5 mm). Laukaitis *et al.* ont expliqué l'effet de taille par le fait que les petites et grosses billes de polystyrène expansé n'ont pas la même morphologie, ce qui implique des propriétés mécaniques différentes au niveau de l'interface entre ces billes et la matrice mousse.

## 1.4 Synthèse générale

A la lumière de cette introduction bibliographique, il apparaît que les effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles, ainsi que les effets de taille en plasticité sont aujourd'hui relativement bien appréhendés.

Par ailleurs, nous soulignons l'importance du phénomène de localisation de la déformation ou de l'endommagement qui précède la rupture. En effet, les effets de taille observés dans les matériaux cristallins, les composites et mousses métalliques sont liés principalement à la localisation de la déformation plastique (accumulation des dislocations) qui sera plus importante si la taille des cristaux ou des inclusions ou des pores est plus petite.

De même, les effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles, en particulier, les effets d'échelle de structure sont souvent expliqués en se basant sur ce phénomène de localisation de l'endommagement, à l'instar de la théorie déterministe des effets d'échelle de structure proposée par Bazant. Cette localisation, liée à un adoucissement dans le comportement, se manifeste par une accumulation de la microfissuration dans une zone appelée "zone d'élaboration de la fissuration" et dont la taille ( $l_c$ ), est souvent non négligeable devant la taille de la structure. Cette taille qui pilote l'effet d'échelle de structure est indépendante de la taille de la structure et elle est souvent liée à la taille de la plus grosse hétérogénéité du matériau (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987).

En revanche, les effets de taille dans les matériaux hétérogènes quasi-fragiles de type bétons et composites cimentaires sont restés encore mal appréhendés. Pour cette raison, ces effets ne sont pas pris en compte au niveau de la modélisation du comportement de ces matériaux à l'échelle mésoscopique, à l'exception de quelques modèles empiriques ou semi-empiriques qui en tiennent compte (de Larrard et Tondat, 1993; Le Roy et al., 2005), mais qui ne leur fournissent pas d'explication physique.

Dans ce contexte, ce travail est une tentative pour l'explication et l'identification de l'origine physique de l'effet de taille observé sur la résistance en compression du béton léger de polystyrène expansé. Notons que dans ce problème, trois longueurs correspondant à trois échelles différentes coexistent. La première longueur est la taille de l'éprouvette d'essai ( $D$ ), la deuxième est la taille des billes de polystyrène ( $\phi$ ) et la troisième est la taille des hétérogénéités de la matrice ( $l_m$ ) (cf. figure 1.10).

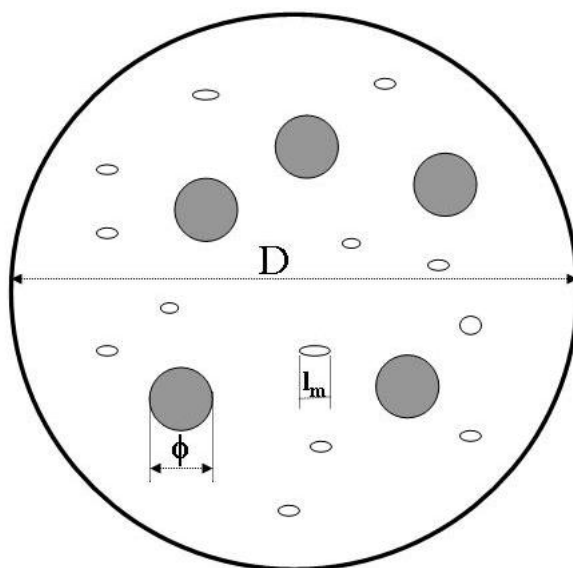


FIG. 1.10: Différentes longueurs intervenant dans le problème d'effet de taille dans le béton léger de polystyrène expansé.

Afin de pouvoir résoudre ce problème très complexe, plusieurs pistes seront explorées pour étudier et quantifier les effets suivants :

- 1- L'effet du comportement adoucissant de la matrice cimentaire.
- 2- L'effet du caractère aléatoire de la distribution des inclusions légères.

- 3- L'effet de l'interface entre les billes de polystyrène et la matrice cimentaire.
- 4- L'effet de la taille de l'éprouvette d'essai ( $D$ ) dit "effet d'échelle de volume".
- 5- L'effet de la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire ( $l_m$ ).
- 6- L'effet de la fraction volumique en polystyrène appelée " macro porosité" du béton.

# Chapitre 2

## Modélisation 2D de l'effet de taille

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Distribution régulière des trous</b>	<b>31</b>
2.2.1	Etude expérimentale	32
2.2.2	Modélisation numérique	42
2.2.3	Conclusions	62
<b>2.3</b>	<b>Distribution aléatoire des trous</b>	<b>64</b>
2.3.1	Etude expérimentale	64
2.3.2	Modélisation numérique	74
2.3.3	Conclusions	78

---



## 2.1 Introduction

Pour identifier l'origine physique de l'effet de taille observé expérimentalement sur la résistance en compression du béton léger de polystyrène expansé, nous avons choisi de simplifier le problème afin de pouvoir étudier les différentes pistes décrites dans la synthèse bibliographique. Nous allons supposer tout d'abord que le béton de polystyrène est un composite cimentaire biphasique constitué d'une matrice cimentaire homogène et des billes de polystyrène expansé. Ainsi, nous commençons par éliminer l'éventuel rôle des hétérogénéités de la matrice.

Ensuite, comme le polystyrène expansé ne participe pratiquement pas à la résistance en compression du béton léger étant donné que sa résistance à la compression est négligeable (inférieure à 0.1 MPa), il peut alors être considéré, du point de vue mécanique, comme du vide renfermé dans la matrice cimentaire : il s'agit d'une macroporosité. Par conséquent, nous avons choisi de remplacer les billes par des trous de même taille. Ainsi, nous éliminons l'éventuel effet de la liaison entre les billes et la matrice cimentaire. En outre, pour pouvoir observer l'effet de la taille des billes sur la résistance en compression du béton léger, deux diamètres de trous sont considérés.

Enfin, pour réaliser cette macroporosité expérimentalement, il est plus facile de travailler avec une géométrie (2D). Ceci nous permet aussi d'identifier plus facilement le mode de rupture du béton de polystyrène.

Ce chapitre est dédié à l'étude des mécanismes de rupture en compression et de l'effet de taille dans un béton léger modèle (2D). Dans un premier temps (section 2.2), nous allons adopter une distribution régulière des trous (Miled et al., 2004) et dans un second temps (section 2.3), une distribution aléatoire.

## 2.2 Distribution régulière des trous

Dans cette étude, nous allons nous intéresser uniquement à l'effet de taille déterministe qui peut résulter du comportement quasi-fragile adoucissant de la matrice cimentaire. En effet, l'adoucissement caractérisant le comportement en compression de cette matrice peut engendrer une localisation de la rupture qui est souvent responsable des effets d'échelle dans les matériaux et les structures quasi-fragiles (Hillerborg et al., 1976; Bazant et al., 1984; Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987; Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993; Markeset et Hillerborg, 1995; Peerlings et al., 2002). Par conséquent, nous avons éliminé l'éventuel effet d'échelle



probabiliste qui peut résulter du caractère aléatoire de la distribution des inclusions légères dans la matrice cimentaire, en considérant une distribution périodique des trous, selon une symétrie hexagonale de la cellule de base. Enfin, nous avons choisi de tester les deux diamètres des trous suivants :  $\phi_1 = 5mm$  et  $\phi_2 = 3mm$  et une fraction surfacique en trous égale à 20%.

## 2.2.1 Etude expérimentale

Deux éprouvettes de forme prismatique et de même taille sont fabriquées en matrice cimentaire puis percées selon les deux distributions périodiques et les deux diamètres des trous considérés pour cette étude. Ces éprouvettes sont enfin testées en compression simple.

### 2.2.1.1. Conception des éprouvettes d'essai

Les dimensions de la section rectangulaire transversale ( $S$ ) des éprouvettes d'essai sont fixées en fonction de la capacité maximale ( $F_{max}$ ) de la presse égale ici à 100 KN, et de la résistance de la matrice seule à 28 jours estimée à une valeur inférieure ou égale à 50 MPa. Ainsi, la section transversale  $S$  doit vérifier :  $S \leq 20 \text{ cm}^2$ . En outre, comme les résistances des éprouvettes trouées sont inférieures à celle de la matrice, la section ( $S$ ) est fixée à  $20 \text{ cm}^2$ , soient une épaisseur  $e = 20mm$  et une largeur  $b = 100mm$ .

Ensuite, pour déterminer la hauteur ( $h$ ) des éprouvettes d'essai, il faut vérifier la condition de non-flambement car ces éprouvettes présentent une faible épaisseur. Ainsi, la capacité maximale ( $F_{max}$ ) de la presse ne doit pas dépasser l'effort critique  $N_c$  de l'éprouvette pleine constituée de la matrice seule. Pour calculer  $N_c$ , nous avons utilisé le modèle poteau biarticulé correspondant au cas le plus défavorable :

$$N_c = \left( \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \right) \text{ avec } I = \left( \frac{be^3}{12} \right), E = E_{matrice} \text{ et } l = h \text{ ici.}$$

Comme le module d'Young de la matrice est estimé à 15000 MPa, la condition ( $N_c \geq F_{max}$ ) implique que ( $h \leq 15 \text{ cm}$ ). Cependant, comme les modules d'Young équivalents des éprouvettes trouées sont plus faibles que celui de l'éprouvette pleine et par conséquent leurs efforts critiques plus faibles, nous avons choisi pour réduire au maximum le risque de flambement, une hauteur ( $h$ ) égale à  $65mm$ .

Enfin, l'espacement entre deux trous voisins est fixé à 5 mm pour la distribution des trous de diamètre ( $\phi_1 = 5mm$ ). Tandis que pour la distribution des trous de diamètre ( $\phi_2 = 3mm$ ), ce paramètre est fixé à 2.75 mm. Les plans de deux éprouvettes sont représentés par la figure 2.1.

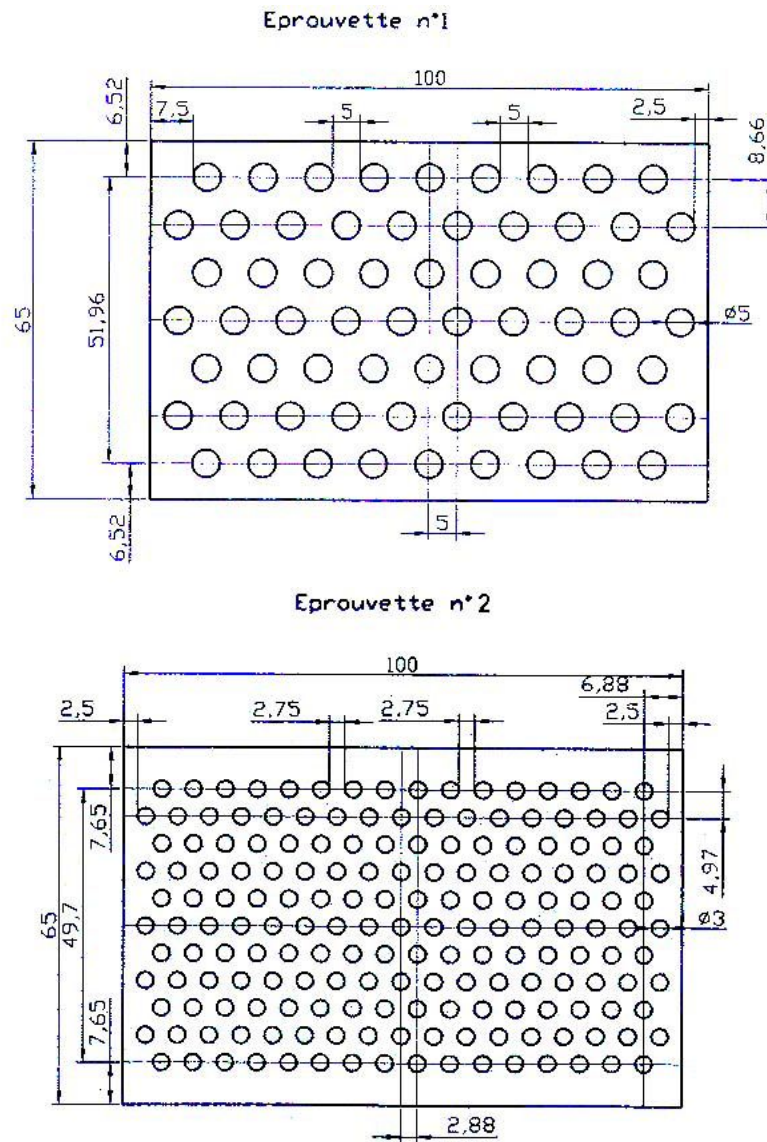


FIG. 2.1: Plans de deux éprouvettes d'essai.

### 2.2.1.2. Confection des éprouvettes d'essai

La confection des éprouvettes d'essai passe par les étapes suivantes :

**Formulation de la matrice cimentaire :** afin d'obtenir une résistance à 28 jours inférieure à 50 MPa, la matrice cimentaire est constituée d'un ciment portland (C) CEM I 52.5 (selon la norme française NF P 18 502), d'un filler (F) (il s'agit d'une addition minérale

formée par des granulats très fins), d'un superplastifiant (SP), d'un agent viscosant (AV), d'un accélérateur de prise (AP) et de l'eau (E). Cette matrice est caractérisée principalement par un rapport  $(\frac{E}{C})$  égal à 0.6 et par un rapport  $(\frac{F}{C})$  égal à 0.25. Le superplastifiant (SP) à base de polycarboxylate est utilisé pour défloculer le mélange afin de faciliter son malaxage. La proportion massique en superplastifiant par rapport à la quantité de ciment et de filler ( $\alpha = \frac{SP}{C + F}$ ) est fixée à 0.2%, de manière à obtenir un mélange fluide et bien homogène. L'agent viscosant est ajouté au mélange pour éviter le ressuage. Sa proportion massique par rapport à la quantité de ciment et de filler est fixée à 1.2%. Enfin, l'accélérateur de prise est utilisé pour accélérer le démoulage des éprouvettes. Sa proportion massique par rapport à la quantité de ciment et de filler est fixée à 4%. Dans le tableau 2.1, nous présentons la composition utilisée pour cette matrice cimentaire présentant une masse volumique égale à  $1810 \text{ kg/m}^3$  (voir notices techniques des adjuvants utilisés en annexe B) :

Constituant	Proportion ( $\text{kg/m}^3$ )	Quantité par gachée (g)
Ciment (SaintVigor)	948	500
Filler (BetocarbP2)	237	125
Eau de gâchage	527	278.2
Superplastifiant (Optima100) (extrait sec égal à 30%)	3.16	1.66
Agent Viscosant (Meyco685) (extrait sec égal à 20%)	50.5	26.7
Accélérateur de prise (Candat Vit) (extrait sec égal à 50%)	50.5	26.7

TAB. 2.1: Composition de la matrice cimentaire.

**Coulages des éprouvettes pleines :** la séquence de malaxage de la pâte cimentaire se déroule comme suit : au début, on introduit dans le malaxeur l'eau, le superplastifiant, le filler et le ciment, puis au bout de deux minutes, on ajoute (2/3) de la quantité d'accélérateur de prise. Enfin, au bout de la 3<sup>e</sup> minute on ajoute l'agent viscosant et le tiers restant de l'accélérateur de prise et on continue le malaxage pendant une minute encore ; soit une durée totale de malaxage de 4 minutes. Ensuite, on met la gachée sous vide pendant 20 minutes pour enlever les bulles d'air.

Enfin, pour couler les éprouvettes tout en respectant leurs dimensions et assurant la planéité des surfaces transversales notamment, un moule en acier, comme le montre la figure 2.2, a

été conçu et fabriqué spécialement pour cette étude. Avant de remplir le moule par la gâchée préparée, on le graisse pour faciliter après le démoulage des éprouvettes.

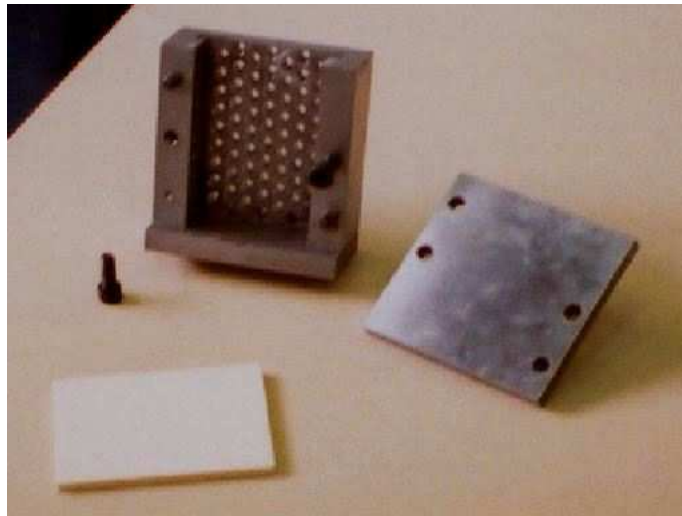


FIG. 2.2: Moule conçu pour le coulage des éprouvettes d'essai.

**Cure des éprouvettes pleines :** nous avons opté pour un traitement thermique des éprouvettes d'essai en se basant sur la méthode de l'âge équivalent (D'Aloia et Le Roy, 2001), qui consiste à calculer le temps durant lequel le béton doit être maintenu à une température donnée, dite de référence, afin d'obtenir la même maturité qu'à 28 jours dans les conditions réelles de cure. En effet, après leur démoulage 24 heures après la date du coulage, les éprouvettes sont couvertes par du papier aluminium pour les protéger contre la dessiccation et sont placées ensuite dans une étuve à  $60^{\circ}\text{C}$  pendant trois jours. Enfin, ces éprouvettes sont gardées à la température ambiante du laboratoire ( $22 \pm 3^{\circ}\text{C}$ ) pendant trois jours. Ainsi, elles auront une résistance en compression proche de celle à 28 jours.

**Perçage des éprouvettes pleines :** plusieurs solutions ont été envisagées pour la réalisation des trous. La première consiste à placer des pailles dans le moule suivant la distribution périodique des trous à réaliser, puis à couler la matrice cimentaire. Le problème porte alors sur la position et le parallélisme de chaque trou, difficile à obtenir avec précision dans ce cas. Nous avons alors opté pour une seconde solution qui consiste à réaliser la macro porosité par perçage. Des essais préliminaires ont permis de valider la technique avec des forêts en carbure de tungstène. En plus, deux plaques métalliques perforées suivant les deux distributions et tailles des trous considérées ont été utilisées comme guides lors du perçage, et une plaque en

matière plastique a été placée sous l'échantillon de manière à éviter l'apparition de cratères en sortie de l'outil. Ce perçage est effectué à une faible vitesse de descente du forêt. Le résultat obtenu avec cette technique est jugé très satisfaisant (cf. figures 2.3 et 2.4). Notons enfin qu'une fois les éprouvettes pleines perforées, elles sont sciées sur les bords (suivant leur hauteur) afin d'avoir une distribution des trous parfaitement périodique jusqu'aux bords de l'éprouvette.

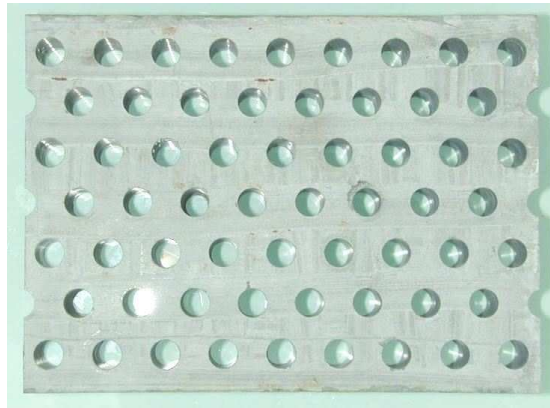


FIG. 2.3: Eprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ; % surfacique en trous = 20).

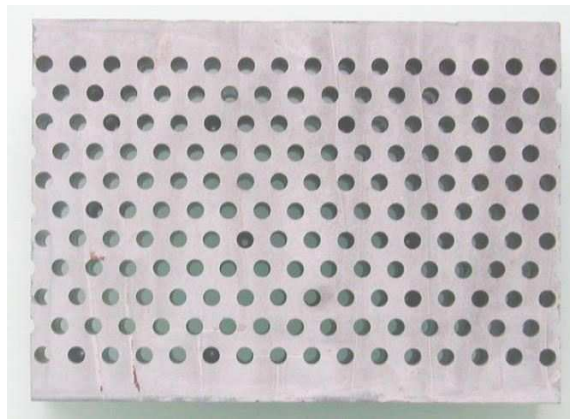


FIG. 2.4: Eprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ; % surfacique en trous = 20).

### 2.2.1.3. Identification des propriétés mécaniques de la matrice cimentaire

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques de la matrice cimentaire, nous avons conduit tout d'abord des essais de module d'élasticité sur trois éprouvettes cylindriques

de dimensions ( $110 \times 220mm$ ), qui ont subit les mêmes conditions de cure que celles des éprouvettes prismatiques trouées. Le principe de l'essai de module consiste à appliquer trois cycles de chargement entre 5% et 30% de la contrainte nominale à la rupture, plage du chargement où l'on considère que le comportement du matériau est élastique linéaire. Un module d'Young moyen égal à 10700 MPa est obtenu pour la matrice cimentaire. Ensuite, ces trois éprouvettes ont été testées à la compression simple : une résistance en compression moyenne égale à 35 MPa est obtenue pour cette matrice.

#### 2.2.1.4. Essais de compression simple sur les éprouvettes trouées

**Mode opératoire :** les essais de compression sont conduits avec une presse de capacité maximale égale à 100 KN. Cette presse est liée à une chaîne d'acquisition de données et à une table traçante. Trois échantillons pour chaque type d'éprouvettes ont été testés.

Pour éviter le frettage engendré par les deux plateaux de la presse, nous avons placé deux plaques prismatiques en PVC (de dimensions  $(100 \times 30 \times 20mm)$  de part et d'autre de l'éprouvette, de manière à avoir des déformations latérales proches de celles des éprouvettes d'essai (notamment dans la phase de chargement où le comportement des éprouvettes est élastique linéaire). Par ailleurs, deux capteurs de déplacement LVDT sont collés sur chaque éprouvette, un sur chaque côté, et sont liés à la chaîne d'acquisition des données qui fournit en plus de ces deux déplacements verticaux, le déplacement du vérin de la presse et l'effort exercée. Les essais de compression sont pilotés en déplacement par la moyenne des déplacements enregistrés par les deux capteurs.

**Résultats des essais de compression :** dans les tableaux 2.2 et 2.3, nous présentons les résultats des essais de compression sur les deux types d'éprouvettes. Dans le tableau 2.4, nous présentons un récapitulatif des valeurs moyennes des propriétés mécaniques obtenues pour ces deux types d'éprouvettes. Notons que le module d'élasticité apparent  $E_0$  de chaque type d'éprouvettes correspond ici au module sécant obtenu à partir des courbes (contraintes-déformations) expérimentales. La résistance à la compression  $\sigma_{max}$  correspond à la contrainte nominale enregistrée au pic d'effort (= effort maximal appliqué/section transversale). La déformation élastique limite  $\epsilon_0$  peut être vue comme la déformation macroscopique à la fin de la phase élastique linéaire du comportement de l'éprouvette trouée, ou bien la déformation macroscopique à partir de laquelle le comportement devient non linéaire (un seuil d'endommagement). Enfin, la déformation à la rupture  $\epsilon_f$  correspond à la déformation macroscopique enregistrée au pic d'effort.

Propriété mécanique	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3
Module d'élasticité apparent $E_0$ (MPa)	5700	5300	5900
Résistance en compression $\sigma_{max}$ (MPa)	8.2	8.5	7.7
Déformation élastique limite $\epsilon_0$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-4}$
Déformation à la rupture $\epsilon_f$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$

TAB. 2.2: Propriétés mécaniques de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ; % surfacique en trous = 20)

Propriété mécanique	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3
Module d'élasticité apparent $E_0$ (MPa)	5500	5000	4800
Résistance en compression $\sigma_{max}$ (MPa)	7.6	7.5	7.6
Déformation élastique limite $\epsilon_0$	$8.8 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$9.3 \cdot 10^{-4}$
Déformation à la rupture $\epsilon_f$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$

TAB. 2.3: Propriétés mécaniques de l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ; % surfacique en trous = 20)

Propriété mécanique moyenne	Eprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ )	Eprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ )
Module d'élasticité apparent $E_0$ (MPa)	5633	5100
Résistance en compression $\sigma_{max}$ (MPa)	8.1	7.6
Déformation élastique limite $\epsilon_0$	$7.9 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$
Déformation à la rupture $\epsilon_f$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$

TAB. 2.4: Propriétés mécaniques moyennes de deux types d'éprouvettes présentant une macroporosité égale à 20%.

Les résultats expérimentaux présentés dans les tableaux 2.2, 2.3 et 2.4 ainsi que les courbes de compression obtenues avec les deux types d'éprouvettes (cf. figure 2.5) montrent des comportements macroscopiques et des résistances en compression similaires pour les deux types d'éprouvettes d'essai.

D'abord, dans la phase linéaire, ces deux éprouvettes ont des modules d'élasticité apparents

proches. Ce résultat prévisible est en accord avec les modèles classiques d'homogénéisation (Eshelby, 1957; Hashin, 1962; Hashin et Shtrikman, 1963; Mori et Tanaka, 1973) car nous avons la même fraction surfacique en trous pour les deux types d'éprouvettes. En effet, la différence entre les valeurs moyennes de ces deux modules est de 9.5% de plus pour l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) par rapport à l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ). Ainsi, nous considérons que cette légère différence entre les modules d'Young apparents de deux éprouvettes est due à une dispersion d'origine statistique dans les résultats.

La même observation peut être faite pour les autres grandeurs mécaniques caractérisant la phase non linéaire du comportement en compression de deux types d'éprouvettes ( $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_f$  et  $\sigma_{max}$ ). En effet, pour la résistance en compression  $\sigma_{max}$ , nous avons un écart de 6.2% de plus pour la valeur moyenne obtenue avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) par rapport à celle obtenue avec l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ). Cette différence est expliquée aussi par une dispersion d'origine statistique dans les résultats expérimentaux. Ainsi, nous aboutissons à la conclusion suivante : il n'existe pas d'effet de taille sur la résistance en compression de ce béton léger modèle caractérisé par une matrice cimentaire homogène et une distribution régulière des trous.

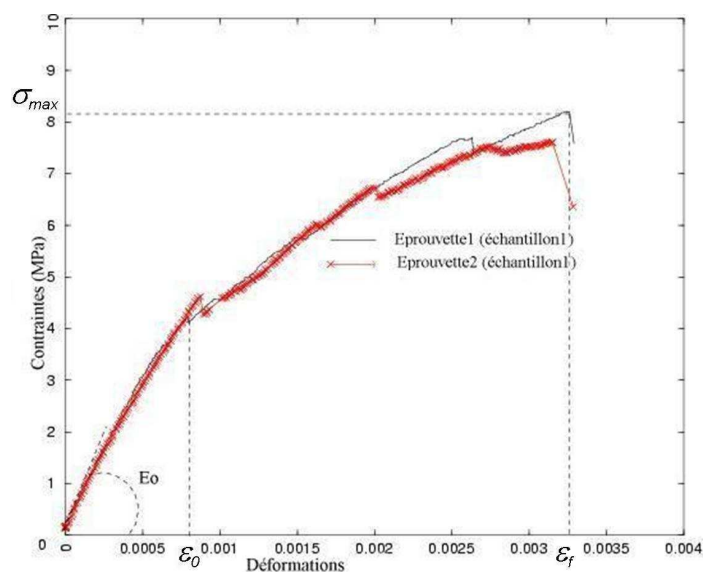


FIG. 2.5: Courbes de compression typiques pour les deux types d'éprouvettes.

**Mode et faciès de rupture :** nous avons observé pour les deux types d'éprouvettes le même mode de rupture. Il s'agit d'un mode de rupture par extension caractérisé par des larges fissures longitudinales. Ces fissures s'initient autour des trous dans les zones tendues



puis se propagent en mode I. Elles ont une croissance stable, jusqu'au moment où elles bifurquent sur un trou voisin ou une autre fissure voisine. Ainsi, toutes les fissures partent verticalement et finissent en forme de crochet (cf. figure 2.7). Nous avons donc un faciès de rupture fortement orthotrope caractérisé par une direction privilégiée de propagation des fissures à savoir la direction verticale correspondant à celle du chargement.

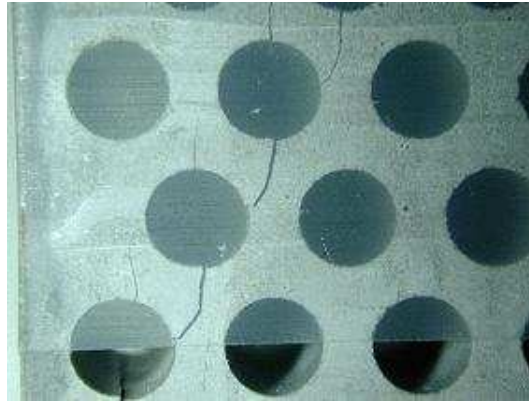


FIG. 2.6: Mode de rupture par extension observé dans le béton léger modèle.

Par ailleurs, ces fissures apparaissent tout d'abord sur les bords de l'éprouvette (cf. figure 2.7), où le maximum des déformations d'extension dans l'éprouvette est atteint, puis progressent de manière stable vers son centre (cf. figure 2.8). Ainsi, nous avons un relâchement des contraintes que nous pouvons observer clairement sur les courbes contraintes-déformations expérimentales (cf. figure 2.5). En outre, la phase de microfissuration dans la rupture de ce béton léger modèle est négligeable voire inexistante puisque nous n'avons pas observé de zone d'élaboration de la fissuration aux pointes des fissures, dans laquelle la microfissuration se développe (Hillerborg et al., 1976). Ceci explique l'adoucissement brutal observé dans la branche non linéaire des courbes contraintes-déformations expérimentales (cf. figure 2.5). Cette absence de la zone d'élaboration de la fissuration est due à l'homogénéité de la matrice cimentaire. En effet, la taille de la plus grosse hétérogénéité de cette matrice correspondant à la taille des grains de filler ne dépasse pas 50 microns. Par conséquent, la taille de la zone d'élaboration qui est étroitement liée à cette taille (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987) est négligeable devant la taille des trous et la taille des fissures observées expérimentalement.

Enfin, ce schéma de fissuration stable et diffus dans toute l'éprouvette explique l'absence d'effet de taille pour ce béton léger modèle.

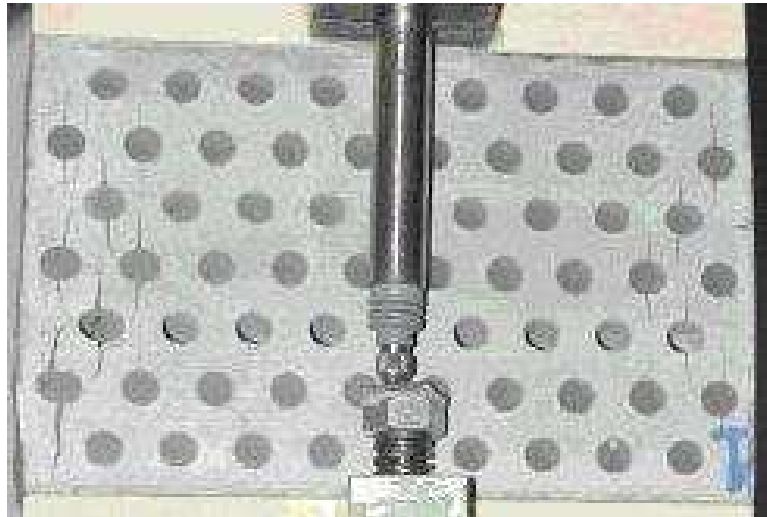


FIG. 2.7: Faciès de rupture au début de l'essai de compression : initiation des fissures sur les bords de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$  ; % surfacique en trous = 20).



FIG. 2.8: Faciès de rupture au pic d'effort : propagation stable des fissures vers le centre de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$  ; % surfacique en trous = 20).

## 2.2.2 Modélisation numérique

Dans cette partie, nous nous proposons de modéliser par des calculs éléments finis en (2D), conduits avec le code Castem2000, le comportement en compression du béton léger modèle. Cette modélisation comporte deux étapes :

1. Une première étape d'homogénéisation en élasticité linéaire pour la détermination des modules d'élasticité homogénéisés des deux types d'éprouvettes d'essai.
2. Une deuxième étape de calcul non linéaire où le modèle d'endommagement de Mazars (Mazars, 1984) est utilisé pour modéliser le comportement de la matrice cimentaire. Dans cette étape, l'essai de compression simple est simulé sur les deux types d'éprouvettes d'essai en conduisant d'abord un calcul local puis un calcul non local. Cette étape comporte aussi un calcul d'homogénéisation périodique non linéaire pour la détermination de la taille du "Volume Elementaire Représentatif" (VER) pour la résistance de ce béton léger modèle. Enfin, l'essai de compression simple est simulé pour d'autres diamètres des trous et pour une autre géométrie de la cellule de base, tout en conservant la même macroporosité du béton, à savoir 20%.

### 2.2.2.1. Calcul du module d'élasticité homogénéisé

L'hypothèse des contraintes planes est adoptée pour ce calcul. Rappelons qu'en élasticité plane, un matériau à symétrie hexagonale est macroscopiquement isotrope. Par ailleurs, grâce aux symétries géométriques dues à la périodicité, le calcul sera conduit sur le quart de chacune de deux éprouvettes (cf. figure 2.9). Enfin, nous avons choisi pour la matrice cimentaire les caractéristiques mécaniques suivantes : un module d'élasticité  $E_m = 10700 \text{ MPa}$  (valeur expérimentale) et un coefficient de poisson  $\nu_m = 0,2$  (valeur usuelle pour les bétons et les pâtes cimentaires).

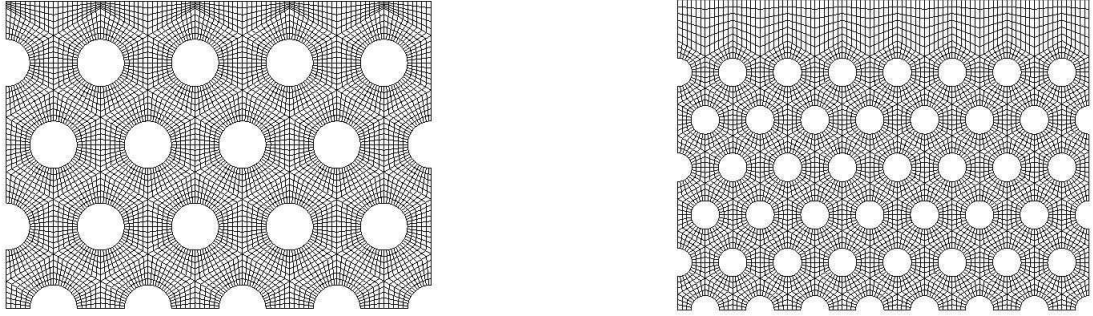


FIG. 2.9: Maillage avec Castem2000 des quarts de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) et l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ).

En appliquant une déformation macroscopique verticale unitaire ( $E_{yy} = 1$ ) sur le bord supérieur de l'éprouvette et en satisfaisant les conditions de symétrie : ( $U_y = 0$ ) sur le bord inférieur et ( $U_x = 0$ ) sur le bord droit, le module d'Young homogénéisé de l'éprouvette s'identifie, à travers un calcul d'homogénéisation élastique linéaire, au double de la densité d'énergie de déformation élastique  $W_{elas}$ . En effet, nous avons :

$$W_{elas} = \frac{1}{2} \Sigma_{yy} E_{yy} \quad \text{avec} \quad \Sigma_{yy} = E_{hom} E_{yy}$$

$$\text{Comme } E_{yy} = 1 \text{ alors } E_{hom} = 2W_{elas}.$$

Ainsi, on obtiens pour les deux types d'éprouvettes les modules élastiques homogénéisés suivants :

Eprouvette	Module d'élasticité équivalent (MPa)
Eprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ , % des trous = 20)	5588
Eprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ , % des trous = 20)	5271

TAB. 2.5: Modules d'élasticité homogénéisés pour les deux types d'éprouvettes.

Les modules d'élasticité des deux types d'éprouvettes sont très proches. La différence est due aux effets de bord. Ainsi, nous pouvons déduire qu'un calcul avec un comportement élastique linéaire fragile pour la matrice cimentaire n'exhibe pas d'effet de taille sur la résistance en compression du béton léger modèle.

Enfin, notons que les valeurs des modules d'élasticité homogénéisés obtenues numériquement avec les deux types d'éprouvettes sont très proches des valeurs moyennes obtenues expérimentalement (cf. tableau 2.4).

### 2.2.2.2. Simulation de l'essai de compression sur les deux types d'éprouvettes : calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars

Afin de simuler la rupture en compression du béton léger modèle, nous avons choisi le modèle d'endommagement de Mazars pour modéliser le comportement de la matrice cimentaire. Le choix de ce modèle a été effectué pour les raisons suivantes :

1. Ce modèle présente un mode d'endommagement par extension qui peut, *a priori*, reproduire le mode de rupture observé expérimentalement.
2. Ce modèle peut exhiber des effets de taille grâce à l'adoucissement qu'il présente. En effet, cet adoucissement peut engendrer une localisation de la rupture qui est souvent responsable des effets d'échelle dans les matériaux et les structures quasi-fragiles (Hillerborg et al., 1976; Bazant et al., 1984; Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987). En effet, ce modèle permet, grâce à un calcul non local, de simuler cette localisation physique de l'endommagement et par conséquent de rendre compte des effets d'échelle.
3. Ce modèle permet aussi, grâce au calcul non local, d'éliminer l'éventuelle localisation pathologique de l'endommagement (localisation de l'endommagement sur un seul élément du maillage) et la dépendance des résultats vis-à-vis de la finesse du maillage, qui sont souvent observées lors d'un calcul local (Bazant et al., 1984; Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993; Peerlings et al., 2002).

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les équations constitutives de ce modèle.

**Modèle d'endommagement de Mazars (Mazars, 1984) :** C'est un modèle élastique endommageable avec un endommagement isotrope caractérisé par une seule variable  $D$  qui mesure la dégradation des propriétés élastiques du matériau et qui est définie par :

$$D = 1 - \frac{E}{E_0}, \quad (2.1)$$

où  $E$  est le module d'Young actuel et  $E_0$  le module d'Young à l'état vierge (?). Ainsi, nous aurons :

$$\sigma = (1 - D)E_0 \epsilon \quad (2.2)$$

En outre, le mode d'endommagement est par extension : l'endommagement aura lieu s'il y a une déformation d'extension dans au moins une direction principale.

Par ailleurs, c'est un modèle avec un critère exprimé en « déformations », contrairement à la plupart des seuils d'irréversibilité qui sont formulés à partir des contraintes. Comme le mode d'endommagement traité est lié à l'extension, la variable d'endommagement  $D$  sera pilotée par une déformation équivalente  $\epsilon_M$ , exprimée en fonction des déformations principales d'extension  $\epsilon_i$  ( $i=1$  à  $2$  en 2D) :

$$\epsilon_M = \sqrt{\sum_i [\max(0, \epsilon_i)]^2}. \quad (2.3)$$

Ainsi, Le seuil d'irréversibilité appelé seuil d'endommagement et noté  $\epsilon_{D_0}$  s'identifie à la déformation équivalente à partir de laquelle l'endommagement apparaît. En effet, nous avons :

$$D = 0 \quad \text{quand} \quad \epsilon_M \leq \epsilon_{D_0} \quad (\text{en plus, } \dot{D} \geq 0) \quad (2.4)$$

Le modèle de Mazars prend en compte aussi la dissymétrie entre les comportements de traction et de compression (ce qui est le cas pour les bétons et les composites cimentaires) par l'utilisation d'une surface seuil appropriée à chaque comportement. Comme  $\epsilon_M$  croît moins vite en compression qu'en traction, on parle d'un mode d'endommagement direct en traction et d'un mode transmis en compression.

L'évolution de l'endommagement en traction, pour ( $\epsilon_M > \epsilon_{D_0}$ ), est décrite par la fonction exponentielle suivante :

$$D_t = 1 - \frac{\epsilon_{D_0}(1 - A_t)}{\epsilon_M} - A_t \exp[-B_t(\epsilon_M - \epsilon_{D_0})], \quad (2.5)$$

où  $A_t$  et  $B_t$  sont deux paramètres caractéristiques du matériau qui pilotent l'évolution de l'endommagement dans la phase post-pic et qui sont généralement identifiés expérimentalement. La figure 2.10 illustre le comportement d'un matériau homogène au cours d'un chargement monotone de traction uniaxiale, tel qu'il est décrit par le modèle de Mazars. Elle met en évidence aussi l'influence du seuil d'endommagement  $\epsilon_{D_0}$  sur ce comportement.

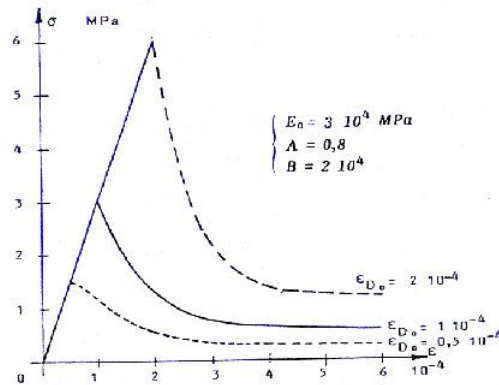


FIG. 2.10: Modèle d'endommagement de Mazars en traction (Mazars, 1984).

En revanche, l'évolution de l'endommagement en compression est décrite par une autre fonction exponentielle :

$$D_c = 1 - \frac{\epsilon_{D_0}(1 - A_c)}{\epsilon_M} - A_c \exp[-B_c(\epsilon_M - \epsilon_{D_0})] \quad (2.6)$$

où  $A_c$  et  $B_c$  sont aussi deux paramètres caractéristiques du matériau qui pilotent l'évolution de l'endommagement et qui sont généralement identifiés expérimentalement. La figure 2.11 illustre le comportement d'un matériau homogène au cours d'un chargement monotone de compression uniaxiale, tel qu'il est décrit par le modèle de Mazars. Elle met en évidence aussi l'influence des paramètres  $A_c$  et  $B_c$  sur ce comportement.

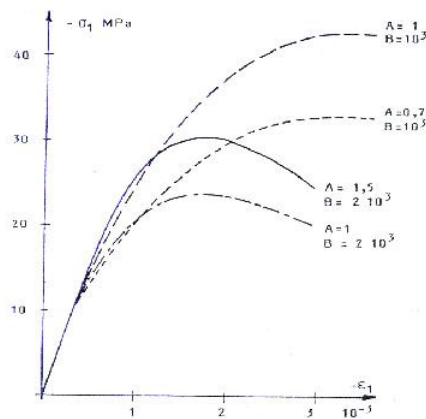


FIG. 2.11: Modèle d'endommagement de Mazars en compression (Mazars, 1984).

Enfin, pour un état de sollicitation multiaxiale, l'endommagement  $D$  est donné par :

$$D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_c + \alpha_t = 1 \\ \alpha_t = 0 & \text{en compression pure} \\ \alpha_c = 0 & \text{en traction pure} \end{cases} \quad (2.7)$$

Enfin, en non local, la variable interne qui pilote l'endommagement sera donnée par (Saouridis, 1988) :

$$\tilde{\epsilon}_M = \frac{\int_V \alpha(d) \epsilon_{\mathbf{M}} dV}{\int_V \alpha(d) dV}, \quad (2.8)$$

où  $\alpha$  est une fonction poids gaussienne dépendant de la distance  $d$  par rapport au point matériel considéré. Elle est donnée par :

$$\alpha(d) = \exp\left[-\left(\frac{2d}{L_c}\right)^2\right], \quad (2.9)$$

où la longueur caractéristique ( $L_c$ ) est égale à la taille de la zone dans laquelle l'endommagement se localise. Elle est supposée être une longueur interne matériau représentant la taille de la zone d'élaboration de la fissuration dans les matériaux quasi-fragiles (Hillerborg et al., 1976; Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987). Cependant, ce paramètre ( $L_c$ ) peut jouer dans certains cas le rôle d'un limiteur de localisation qui permet de régulariser les équations d'équilibre en empêchant la perte de leur ellipticité (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987; Lasry et Belytschko, 1988; Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993). Par conséquent, il permet d'empêcher la localisation pathologique de l'endommagement et d'assurer l'indépendance des résultats vis-à-vis de la finesse du maillage. Le principe de l'exécution d'un calcul non local avec CASTEM2000 est décrit dans l'annexe A.

**Choix du type de calcul à conduire :** étant donné que la phase de microfissuration est pratiquement inexistante dans la rupture de ce béton léger modèle et par conséquent, la longueur matériau interne correspondant à la taille de la zone d'élaboration de la fissuration n'a pas de sens physique dans ce cas, nous avons choisi de conduire un calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars. En outre, comme le calcul local peut être vu comme un calcul non local dans lequel la longueur caractéristique ( $L_c$ ) s'identifie à la taille de la maille élémentaire ( $l_{maille}$ ) du maillage, nous devons éliminer cette longueur en adoptant une finesse du maillage de façon à avoir le même rapport ( $\frac{\phi}{l_{maille}}$ ) pour les deux types d'éprouvettes. Lorsqu'on varie la taille des trous, cette condition est simplement satisfaite en considérant toujours le même nombre d'éléments sur la circonférence d'un trou.



**Identification des paramètres du modèle :** certains paramètres du modèle de Mazars ont été identifiés expérimentalement, en l'occurrence, le module d'Young de la matrice et sa masse volumique. Le coefficient de Poisson est fixé à 0.2 comme pour le calcul en élasticité linéaire. En revanche, le seuil d'endommagement de la matrice noté  $\epsilon_{0_m}$  a été identifié à la fois expérimentalement et numériquement. En effet, à partir de deux courbes moyennes de compression obtenues expérimentalement avec les deux types d'éprouvettes (cf. figure 2.5), nous avons déduit le seuil d'endommagement du béton léger modèle noté  $\epsilon_0$  (cf. tableau 2.3). Ainsi,  $\epsilon_{0_m}$  est calé numériquement en respectant le fait que le seuil de la matrice doit être plus grand que celui de la matrice trouée ( $\epsilon_{0_m} > \epsilon_0$ ). Enfin, les paramètres  $A_c$  et  $B_c$  ainsi que  $A_t$  et  $B_t$  ont été ajustés numériquement. Dans le tableau 2.6, nous présentons les valeurs de tous les paramètres du modèle utilisés dans cette étude.

paramètre	Valeur
Module d'Young de la matrice $E_m$	10700 MPa
Coefficient du Poisson de la matrice $\nu_m$	0.2
Masse volumique de la matrice	1810 $kg/m^3$
Seuil d'endommagement de la matrice $\epsilon_{0_m}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
$A_c$	0.8
$B_c$	$0.9 \cdot 10^3$
$A_t$	1.0
$B_t$	$1. \cdot 10^3$

TAB. 2.6: Paramètres du modèle d'endommagement de Mazars adoptés pour le béton léger modèle.

**Résultats d'un calcul local :** un calcul local a été conduit pour simuler l'essai de compression sur les deux types d'éprouvettes. Pour ce calcul, un rapport  $(\frac{\phi}{l_{maille}})$  constant correspondant à 36 éléments par trou pour les deux éprouvettes, a été considéré. Les résultats de ce calcul, comme le montre la figure 2.12, donnent des réponses similaires et notamment des résistances très proches pour les deux types d'éprouvettes. ainsi, nous concluons qu'un calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars n'exhibe pas d'effet de taille sur la résistance en compression de ce béton léger modèle, à condition d'éliminer l'effet du maillage en considérant un rapport  $(\frac{\phi}{l_{maille}})$  constant.

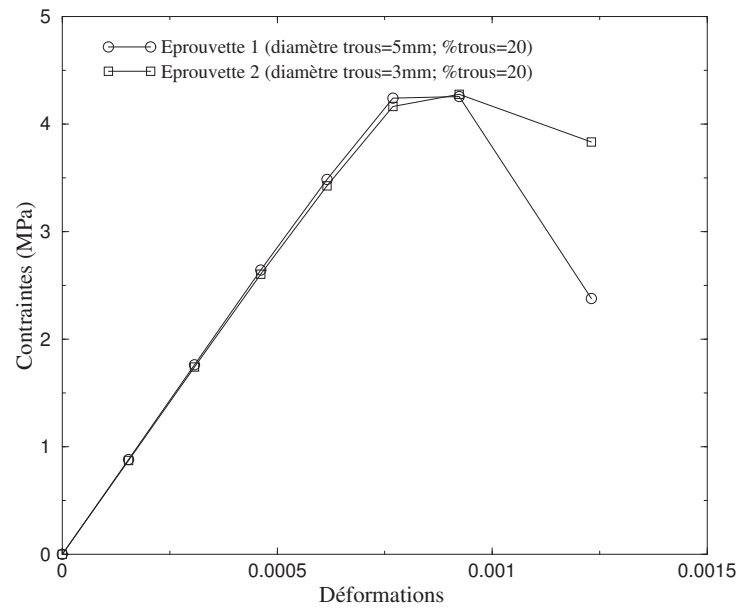


FIG. 2.12: Courbes numériques de compression pour les deux types d'éprouvettes : calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars.

**Etude de l'influence de la finesse du maillage :** avec ce calcul local, nous avons observé que le faciès de rupture ainsi que la réponse de deux éprouvettes dépendent fortement de la taille des mailles (notamment autour des trous) et de leur orientation. En effet, pour une taille donnée des trous, en raffinant suffisamment le maillage (c'est-à-dire en diminuant  $l_{maille}$ ), nous nous rapprochons du mode de rupture observé expérimentalement : nous obtenons des bandes d'endommagement représentant les fissures qui s'initient par extension dans les zones tendues autour des trous, se propagent ensuite verticalement en mode I et s'arrêtent à la fin en bifurquant sur les trous voisins (cf. figure 2.13). Ces bandes se terminent en forme de crochet comme c'est le cas pour les fissures observées expérimentalement.

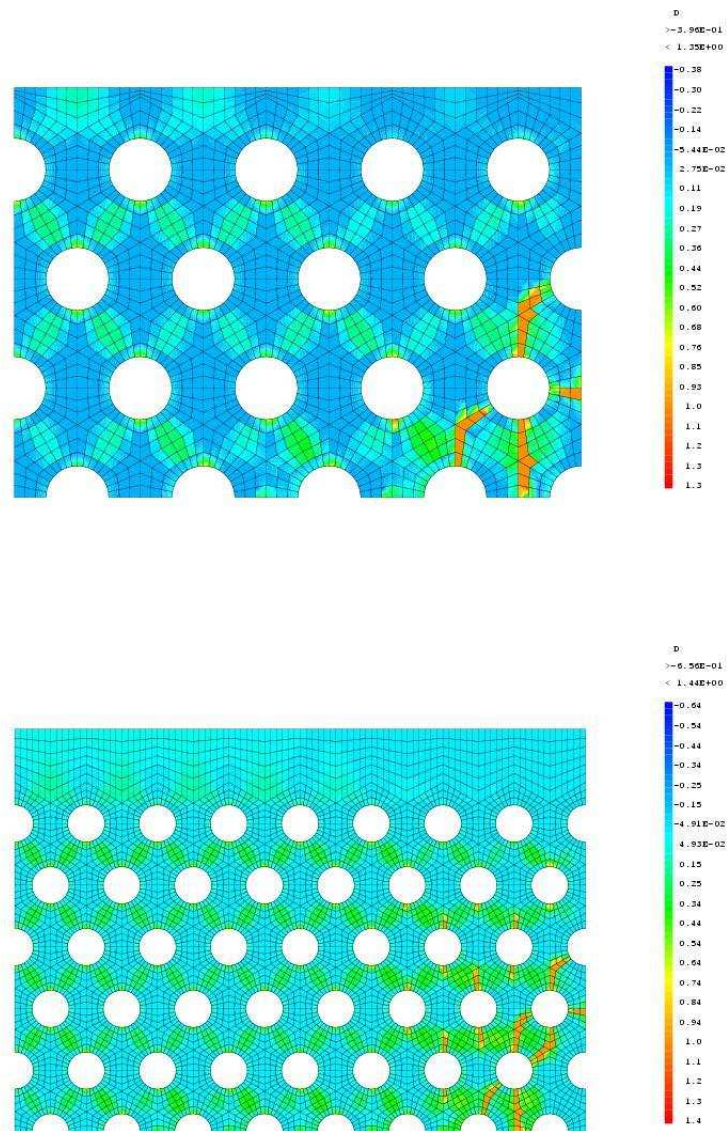


FIG. 2.13: Faciès de rupture obtenus respectivement avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5\text{mm}$ ) et l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3\text{mm}$ ) : calcul local avec un maillage suffisamment fin (36 éléments par trou).

Cependant, avec une finesse suffisamment grande (36 éléments par trou), nous n'arrivons pas à simuler une propagation stable et diffuse de la fissuration. Ainsi, pour pouvoir propager les fissures d'une façon plus stable, il faut considérer un maillage plus grossier (cf.

figure 2.14). En revanche, avec un tel maillage, nous obtenons un mauvais faciès de rupture en comparaison avec celui observé expérimentalement. En effet, dans ce cas, les bandes d'endommagement sont obliques alors qu'elles devraient être verticales.

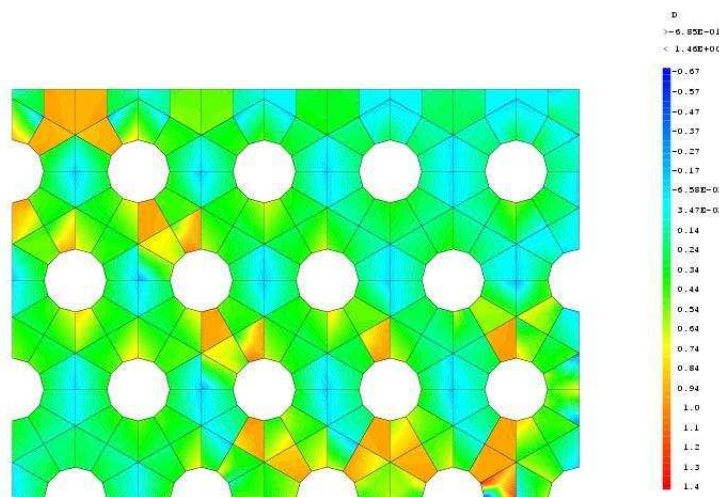


FIG. 2.14: Faciès de rupture obtenu avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) : calcul local avec un maillage grossier (12 éléments par trou).

Par ailleurs, avec un calcul local, nous obtenons aussi des courbes de compression qui dépendent fortement de la finesse du maillage. Dans la figure 2.15, nous représentons les courbes de compression obtenues avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) pour trois finesse différentes du maillage. Nous observons alors que la résistance ainsi que la déformation à la rupture diminuent sensiblement lorsque la finesse du maillage augmente. En outre, nous observons que la résistance numérique obtenue avec la plus grande finesse (nombre d'éléments par trou égal à 48) est très faible en comparaison avec la résistance expérimentale de l'éprouvette 1. En revanche, en diminuant la finesse du maillage, l'écart diminue entre les deux résistances. La même tendance est observée pour la déformation à la rupture.

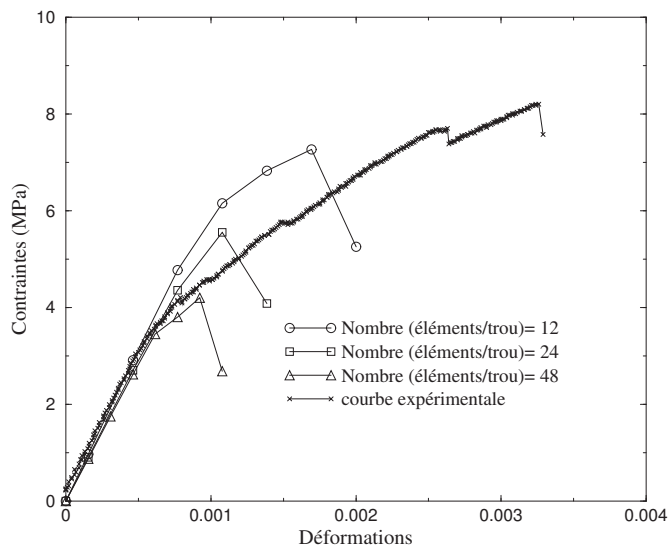


FIG. 2.15: comparaison entre la courbe de compression expérimentale de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) et les courbes numériques obtenues avec un calcul local pour trois finesses différentes du maillage.

Ainsi, un calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars permet de rendre compte de l'absence d'effet de taille observée expérimentalement sur la résistance en compression du béton léger modèle. Cependant, les résultats d'un tel calcul s'avèrent sensiblement dépendants de la finesse du maillage. Ce calcul exhibe aussi une localisation pathologique de l'endommagement qui ne permet pas de simuler le schéma stable de fissuration observé expérimentalement. Par conséquent, nous avons décidé de conduire un calcul non local pour résoudre ces problèmes numériques résultant du comportement adoucissant de la matrice cimentaire.

### 2.2.2.3. Simulation de l'essai de compression sur les deux types d'éprouvettes : calcul non local

**Identification de la longueur caractéristique  $L_c$  :** rappelons qu'un calcul non local doit satisfaire les trois conditions suivantes :

- 1- Obtenir des résultats indépendants de la finesse du maillage.
- 2- Simuler une propagation de l'endommagement stable et sans localisation pathologique.
- 3- Obtenir des résistances en compression proches des résistances expérimentales.

Nous avons vérifié numériquement qu'il existe un choix unique pour la valeur de la longueur

caractéristique ( $L_c$ ) qui permette de satisfaire ces trois conditions. En effet, la longueur non locale ( $L_c$ ) doit être égale à l'espacement entre deux trous voisins. Ainsi, on trouve : ( $L_{c_1} = 5mm$ ) pour l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ) et ( $L_{c_2} = 2.75mm$ ) pour l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 3mm$ ). Notons aussi qu'avec ce choix, les deux types d'éprouvettes auront deux rapports ( $\frac{\phi_1}{L_{c_1}}$ ) et ( $\frac{\phi_2}{L_{c_2}}$ ) très proches.

Ainsi, le paramètre ( $L_c$ ) varie selon la taille des trous. Ceci montre qu'il s'agit, ici, d'un paramètre purement numérique qui n'a aucun rapport avec la taille de la zone d'élaboration de la fissuration, classiquement observée dans la rupture des matériaux quasi-fragiles de type bétons et composites cimentaires (Hillerborg et al., 1976).

**Résultats du calcul non local :** l'essai de compression simple est simulé sur les deux types d'éprouvettes. Grâce au jeu de paramètres du modèle de Mazars utilisé dans le calcul local et au choix du paramètre non local ( $L_c$ ) égal à l'espacement entre deux trous voisins, nous avons réussi à reproduire des comportements macroscopiques similaires pour les deux types d'éprouvettes (cf. figure 2.16). Par conséquent, nous avons simulé l'absence d'effet de taille sur la résistance en compression du béton léger modèle observée expérimentalement.

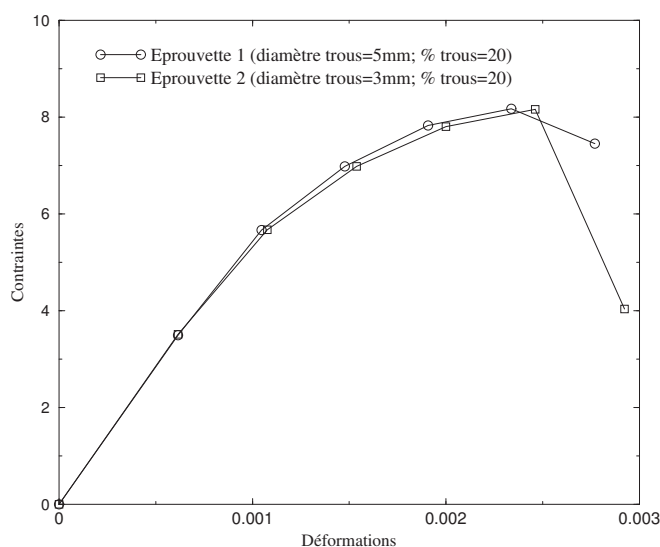


FIG. 2.16: Courbes numériques de compression des deux types d'éprouvettes : calcul non local avec le modèle d'endommagement de Mazars.

Par ailleurs, ces courbes numériques sont concordantes avec les courbes expérimentales.

En effet, nous avons obtenu pour les deux types d'éprouvettes des modules d'élasticité et des résistances numériques qui sont très proches de ceux obtenus expérimentalement (cf. figure 2.17). Cependant, l'évolution des courbes numériques dans la phase non linéaire est différente de celle des courbes expérimentales : on obtient des courbes plus arrondies. Ceci s'explique par le fait que le calcul non local simule un endommagement diffus (correspondant à un mode de rupture par microfissuration diffuse), qui engendre une chute progressive du module d'élasticité apparent de l'éprouvette, alors qu'expérimentalement, nous observons une propagation de larges fissures engendrant plusieurs chutes brutales du module d'élasticité.

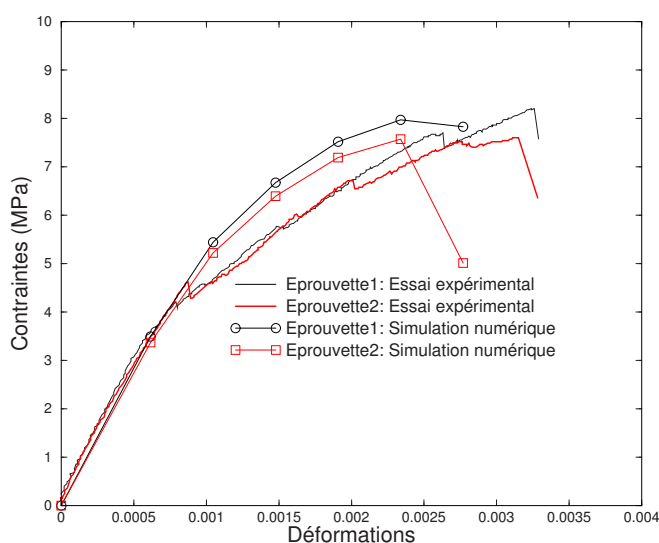


FIG. 2.17: Comparaison entre les courbes de compression numériques et expérimentales obtenues avec les deux types d'éprouvettes.

**Mode et faciès de rupture :** le calcul non local permet aussi de reproduire le mode de rupture par extension ainsi que la progression stable de la fissuration observés expérimentalement. En effet, l'endommagement apparaît au début sur les bords de l'éprouvette puis se propage vers son centre (cf. figures 2.18 et 2.19).

Cependant, nous obtenons un faciès de rupture caractérisé par des bandes d'endommagement obliques, alors qu'expérimentalement nous avons observé des fissures verticales. Ce calcul non local ne permet pas donc de simuler le faciès de rupture orthotrope observé expérimentalement.

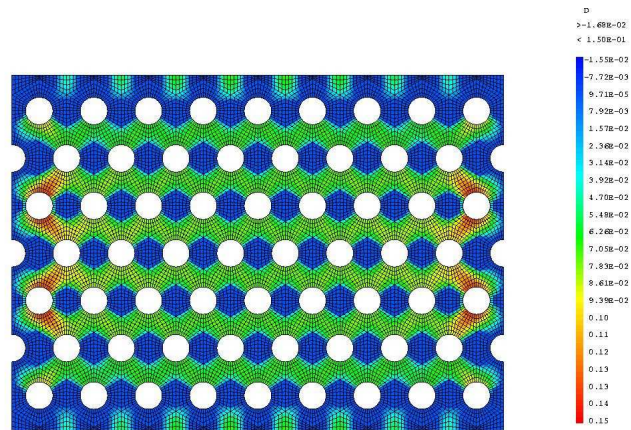


FIG. 2.18: Faciès de rupture au début de l'essai de compression obtenu avec un calcul non local : initiation de l'endommagement sur les bords de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ).

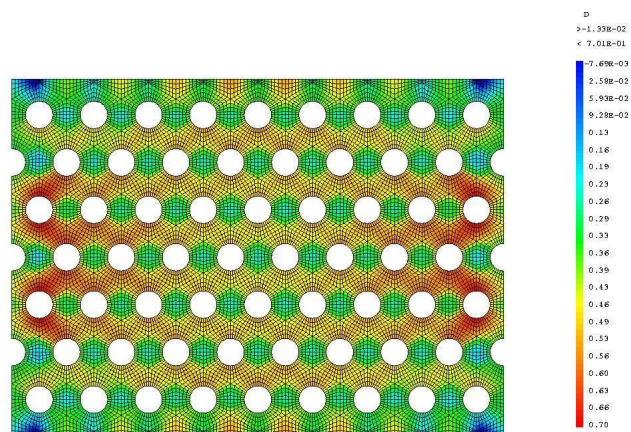


FIG. 2.19: Faciès de rupture au pic d'effort obtenu avec un calcul non local : propagation de l'endommagement vers le centre de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ ).

#### 2.2.2.4. VER pour la résistance en compression du béton léger modèle

Nous avons conduit un calcul d'homogénéisation périodique avec le modèle d'endommage-



ment de Mazars en non local pour déterminer la taille du “Volume Élémentaire Représentatif” (VER) pour la résistance en compression du béton léger modèle. Grâce aux résultats de ce calcul, nous pouvons vérifier que les résistances obtenues avec les deux types d'éprouvettes ne soient pas affectées par un effet d'échelle de volume résultant de la taille d'éprouvettes d'essai.

**Calcul d'homogénéisation périodique non linéaire :** rappelons que dans le cas d'un matériau périodique ayant un comportement élastique linéaire, le VER est constitué par une seule cellule de base. Ce résultat est dû à la convexité de l'énergie de déformation élastique  $\Psi(\underline{\epsilon})$ , qui se traduit par la condition suivante (Marcellini, 1978) :

$$\forall(\underline{\epsilon}_1, \underline{\epsilon}_2) \quad (\Psi(\underline{\epsilon}_2) - \Psi(\underline{\epsilon}_1)) \geq \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\epsilon}}(\underline{\epsilon}_1) : (\underline{\epsilon}_2 - \underline{\epsilon}_1) \quad (2.10)$$

Ainsi, le problème d'homogénéisation, visant à déterminer les propriétés homogènes équivalentes de ce matériau, à partir de celles de ses constituants et de leur répartition géométrique, revient à résoudre le problème de l'équilibre mécanique d'une cellule de base, sous des conditions aux limites de périodicité.

Cependant, ce résultat n'est plus assuré dans le cas non linéaire lorsque l'énergie de déformation perd sa convexité. En effet, dans ce cas, le VER du milieu périodique peut être formé par un nombre de cellules de base arbitrairement grand (Müller, 1987; Saiki et al., 2002). Dans notre cas, le comportement adoucissant de la matrice cimentaire à l'approche de la rupture, simulé par le modèle d'endommagement de Mazars, induit une perte de convexité du problème d'homogénéisation. En effet, la loi exponentielle régissant l'évolution de l'endommagement rend la densité de l'énergie de déformation, donnée ci-dessous par (2.11), non convexe.

$$\psi(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\epsilon}) = \frac{1}{2} \int_V (1 - D(\underline{\epsilon})) \underline{\epsilon} : \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\epsilon} \, dv, \quad (2.11)$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  est le tenseur de rigidité élastique de la matrice cimentaire.

Par conséquent, nous avons conduit des calculs d'homogénéisation périodique non linéaires sur trois cellules de tailles croissantes représentant l'éprouvette 1 (cf. figure 2.20), afin de déterminer le nombre de cellules de base nécessaire pour former un VER pour le calcul de la résistance en compression du béton léger modèle. Pour ces calculs, le même jeu de paramètres du modèle d'endommagement de Mazars utilisé auparavant a été adopté.

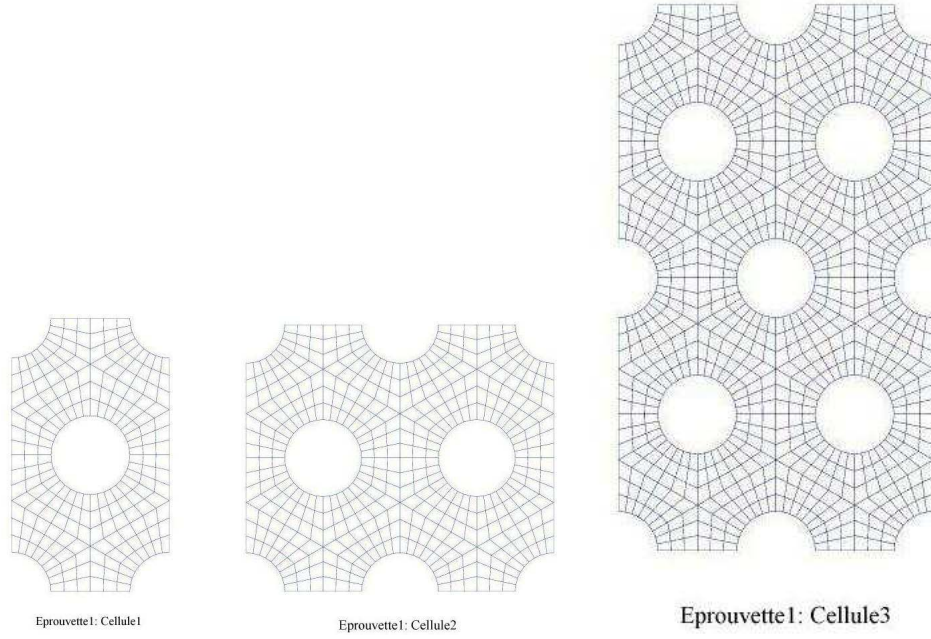


FIG. 2.20: Maillages des trois cellules représentant l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ , % surfacique en trous = 20).

L'essai de compression simple uniaxiale est simulé sur ces trois cellules en tenant compte des conditions de périodicité sur leurs bords. Ces conditions s'écrivent comme suit :

$$\underline{\mathbf{U}}^+ - \underline{\mathbf{U}}^- = \underline{\mathbf{E}} (\underline{\mathbf{X}}^+ - \underline{\mathbf{X}}^-), \quad (2.12)$$

où  $\underline{\mathbf{X}}^+$  et  $\underline{\mathbf{X}}^-$  désignent les vecteurs positions dans la configuration de référence des noeuds situés en vis-à-vis sur les bords de la cellule d'étude notée ( $C$ ),  $\underline{\mathbf{U}}^+$  et  $\underline{\mathbf{U}}^-$  sont les déplacements associés à ces noeuds et  $\underline{\mathbf{E}}$  est le champ de déformations macroscopiques appliquées. Ce champ tensoriel d'ordre 2 (en 2D) doit être défini de manière à ce que la contrainte macroscopique résultante soit une compression uniaxiale. Dans notre cas, nous appliquons une compression uniaxiale suivant la direction  $\underline{\mathbf{e}}_2$ . Ainsi, nous avons :

$$E_{22} = \left( \frac{\delta}{h} \right), \quad (2.13)$$

où  $\delta$  est le déplacement imposé et  $h$  est la taille de la cellule d'étude suivant la direction  $\underline{\mathbf{e}}_2$ .

Cependant, les autres déformations  $E_{ij}$  ( $(i, j) \neq (2, 2)$ ) sont considérées comme des degrés de liberté inconnus. Pour fixer ces paramètres, nous considérons d'abord que ( $E_{12} = E_{21} = 0$ ) grâce aux symétries de la cellule de base. Ensuite, nous avons choisi, pour chaque paire de

faces opposées  $(\partial C_i^+, \partial C_i^-)$ , une paire de nœuds en vis-à-vis, dits “nœuds de référence” et notés :  $(\underline{\mathbf{X}}^{ref+}, \underline{\mathbf{X}}^{ref-})$ . Leurs déplacements seront respectivement notés  $(\underline{\mathbf{U}}^{ref+}, \underline{\mathbf{U}}^{ref-})$ .

Les conditions de périodicité dans le cas d'une compression uniaxiale s'écrivent alors comme suit :

1. Pour les noeuds en vis-à-vis appartenant à  $(\partial C_i^+, \partial C_i^-)$  :

$$\begin{cases} (U_1^+ - U_1^-) - (U_1^{ref+} - U_1^{ref-}) = 0 \\ U_2^+ - U_2^- = 0 \end{cases}$$

2. Pour les noeuds en vis-à-vis appartenant à  $(\partial C_2^+, \partial C_2^-)$  :

$$\begin{cases} U_1^+ - U_1^- = 0 \\ U_2^+ - U_2^- = \delta \end{cases}$$

**Résultats du calcul d'homogénéisation :** les résultats des essais de compression uniaxiale simulés sur les trois cellules représentant l'éprouvette 1 montrent des comportements macroscopiques similaires pour les trois cellules testées (cf. figure 2.21), ce qui montre que le VER est formé par une seule cellule de base. Ce résultat montre que ce béton modèle, conçu avec une matrice cimentaire homogène et une distribution régulière des trous, n'exhibe pas d'effet d'échelle de volume sur sa résistance en compression.

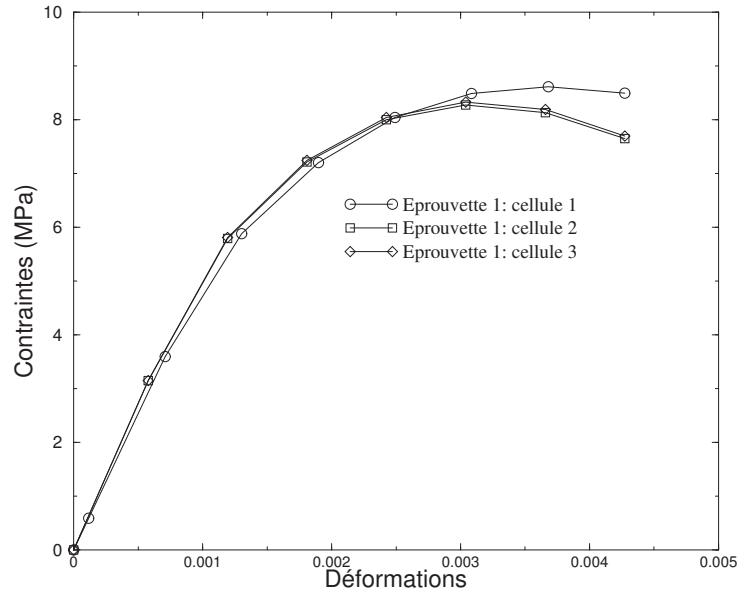


FIG. 2.21: Courbes numériques de compression des trois cellules représentant l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ , % surfacique en trous = 20) : calcul non local avec le modèle d'endommagement de Mazars.

En outre, nous avons obtenu des distributions d'endommagement similaires pour les trois cellules avec un endommagement maximal dans les zones tendues situées autour des trous (cf. figure 2.22). En effet, le calcul non local permet de simuler une propagation périodique stable de l'endommagement, ce qui explique l'absence d'effet d'échelle de volume et d'effet de taille sur la résistance en compression de ce béton léger modèle. Cependant, avec ce calcul, les zones endommagées sont obliques, ce qui n'est pas conforme au mode de rupture observé expérimentalement où l'on observe des fissures verticales.

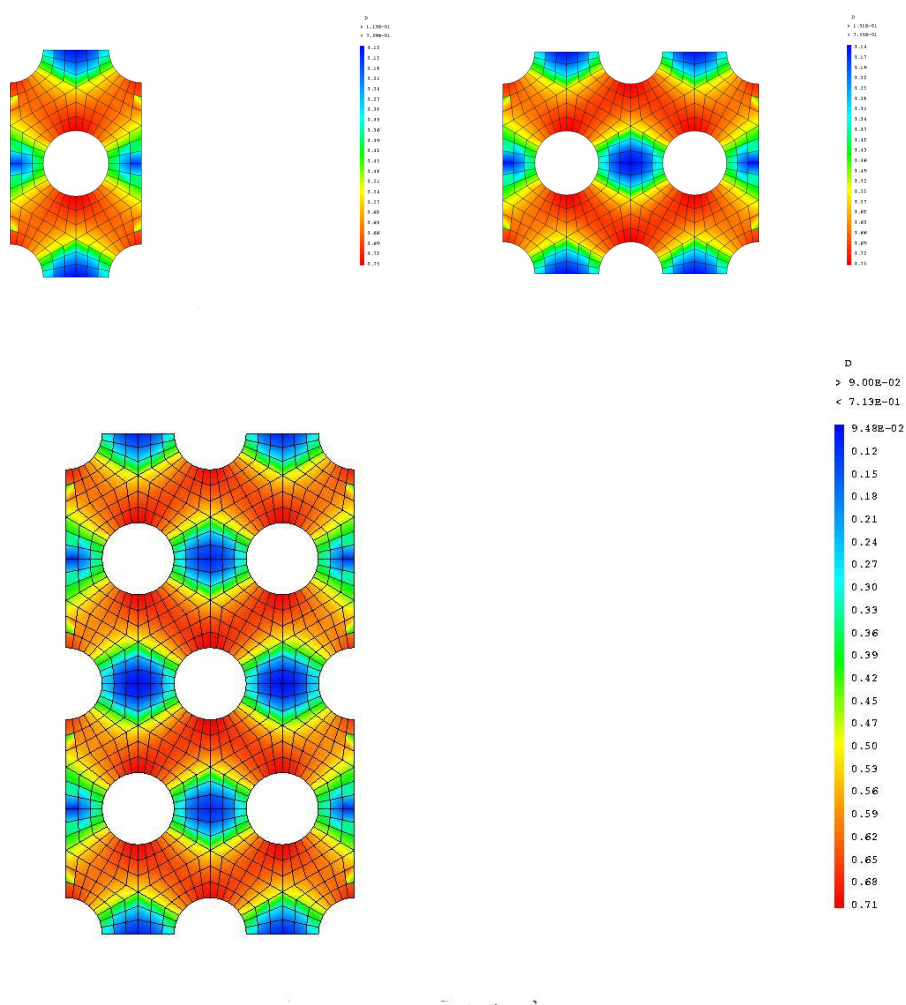


FIG. 2.22: Distributions de l'endommagement au pic d'effort dans les trois cellules de tailles croissantes représentant l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 5mm$ , % surfacique en trous = 20) : calcul non local avec le modèle d'endommagement de Mazars.

### 2.2.2.5. Simulation de l'essai de compression pour d'autres types d'éprouvettes

**Autres diamètres des trous :** nous avons conduit six autres simulations de l'essai de compression sur des éprouvettes ayant les mêmes dimensions que celles des éprouvettes testées précédemment et la même fraction surfacique en trous (20%), mais présentant d'autres diamètres des trous. Les diamètres testés sont : 1, 2, 4.1, 6.4, 7.5 et 11.25mm. Pour toutes ces simulations, le même jeu de paramètres du modèle d'endommagement de Mazars utilisé précédemment est adopté. Un calcul non local est conduit avec ( $L_c$ ) égale à l'espacement entre deux trous voisins. Notons aussi que ces éprouvettes présentent des rapports ( $\frac{\phi}{L_c}$ ) très proches.

Les résultats de ces simulations montrent des résistances en compression très proches pour toutes les éprouvettes testées, ce qui confirme l'absence d'effet de taille sur la résistance du béton léger modèle. En outre, ces résistances sont très proches de celles données par le calcul d'une seule cellule de base (cf. figure 2.23), ce qui confirme l'absence d'effet d'échelle de volume sur la résistance du béton léger modèle.

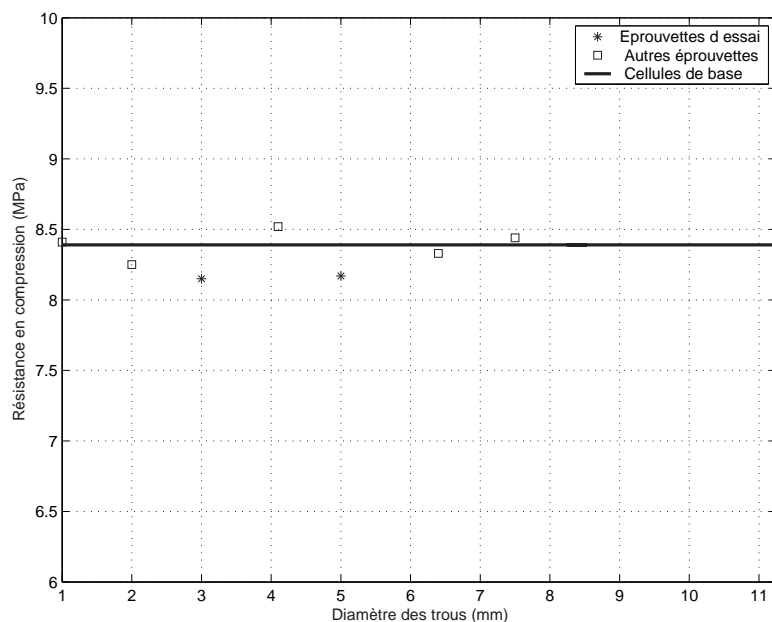


FIG. 2.23: Résistances en compression numériques des éprouvettes renfermant des trous de diamètres compris entre 1 et 11.25mm : calcul non local.

**Autre symétrie pour la cellule de base :** nous avons conduit des simulations de l'essai de compression sur des éprouvettes ayant les mêmes dimensions que celles de l'éprouvette 1 et l'éprouvette 2, les mêmes diamètres des trous (5 et 3 mm) et la même fraction surfacique en trous (20%), mais présentant une symétrie carrée pour leurs cellules de base (cf. figure 2.24).

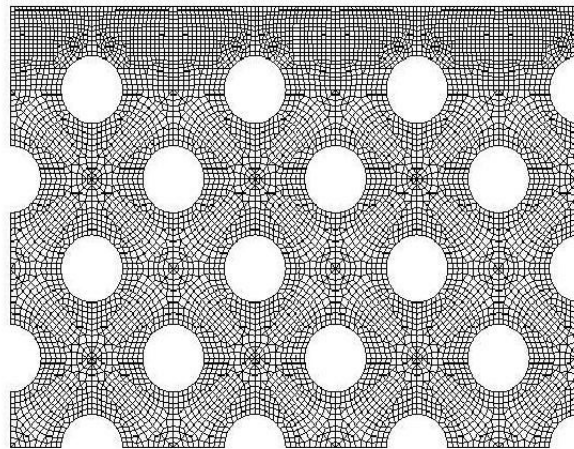


FIG. 2.24: Maillage du quart de l'éprouvette 1bis ( $\phi_1 = 5mm$ , % surfacique en trous = 20) : symétrie carrée de la cellule de base.

Pour ces simulations, le même jeu de paramètres du modèle d'endommagement de Mazars utilisé précédemment est adopté. Le calcul est conduit en non local en choisissant ( $L_c$ ) égale à l'espacement entre deux trous voisins. Notons aussi que les deux éprouvettes présentent un rapport ( $\frac{\phi}{L_c}$ ) constant.

Les résultats montrent des comportements macroscopiques similaires pour les deux types d'éprouvettes (cf. figure 2.25), ce qui confirme, là encore, l'absence d'effet de taille dans ce béton léger modèle.

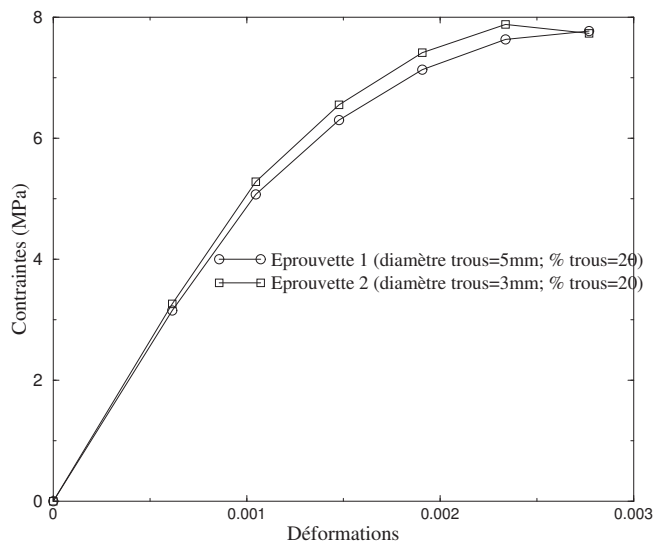


FIG. 2.25: Courbes de compression numériques obtenues avec deux éprouvettes ayant des trous de diamètres 5 et 3 mm et présentant une symétrie carrée de leur cellule de base : calcul non local.

### 2.2.3 Conclusions

L'étude expérimentale a montré que le béton léger modèle, conçu avec une matrice cimentaire homogène renfermant une distribution régulière des trous, n'exhibe pas d'effet de taille sur sa résistance en compression. Cette absence d'effet de taille est due à un mode de rupture par propagation stable de larges fissures longitudinales qui s'initient par extension autour des trous. En outre, la phase de microfissuration est pratiquement inexistante dans la rupture de ce béton léger modèle à cause de l'homogénéité de la matrice. Par conséquent, nous avons conclu que la taille de la zone d'élaboration de la fissuration dans la matrice cimentaire est négligeable.

L'étude numérique a montré notamment qu'un calcul avec le modèle d'endommagement de Mazars, qu'il soit local ou non local, n'exhibe pas d'effet de taille lorsqu'on varie le diamètre des trous ( $\phi$ ) tout en gardant le rapport  $(\frac{\phi}{l_{maille}})$  ou le rapport  $(\frac{\phi}{L_c})$  constant.

Cependant, les résultats d'un calcul local sont très sensibles à la finesse du maillage. En outre, un calcul local ne permet pas de simuler le mode de fissuration stable observé expérimentalement.

Enfin, nous avons trouvé qu'un calcul non local avec une longueur ( $L_c$ ) (considérée ici

comme un paramètre purement numérique) égale à l'espacement entre les trous, permet de simuler la propagation diffuse et stable de la fissuration ainsi que l'absence d'effet de taille observées expérimentalement. Ce calcul a montré aussi que le VER pour la résistance en compression du béton léger modèle est constitué par une seule cellule de base. Cependant, le faciès de rupture obtenu avec un tel calcul est différent de celui observé expérimentalement.



## 2.3 Distribution aléatoire des trous

Nous nous proposons maintenant d'examiner le rôle que peut jouer le caractère aléatoire de la distribution géométrique des billes de polystyrène dans l'effet de taille observé expérimentalement sur la résistance en compression du béton léger. Une étude combinée expérimentale et numérique sera conduite sur un béton léger modèle (2D) constitué d'une matrice cimentaire homogène renfermant une distribution aléatoire des trous.

### 2.3.1 Etude expérimentale

#### 2.3.1.1. Conception et confection des éprouvettes d'essai

Pour cette étude, deux types d'éprouvettes d'essai correspondant à deux diamètres différents des trous sont aussi considérés. Ces éprouvettes ont la même forme prismatique et les mêmes dimensions que celles des éprouvettes testées dans l'étude précédente, à savoir une largeur égale à 100 *mm*, une hauteur égale à 65 *mm* et une épaisseur égale à 20 *mm*. Nous avons choisi de garder aussi la même fraction surfacique en trous, à savoir 20%. Ceux-ci sont générés, non pas par perçage, mais par introduction d'inserts souples (des pailles) dans le moule. Les raisons de ce choix sont la simplicité d'exécution et l'élimination du risque de création des fissures au voisinage des trous (ce risque est grand notamment pour les trous très proches).

Les deux diamètres de trous testés sont : ( $\phi_1 = 6\text{mm}$ ) et ( $\phi_2 = 4\text{mm}$ ). Le choix de ces deux tailles nous a été imposé par les diamètres des pailles disponibles sur le marché. Pour chaque taille des trous, cinq distributions aléatoires sont générées à l'aide d'un programme informatique écrit en langage C en utilisant la fonction "random" des ordinateurs qui génère un nombre selon la loi de probabilité uniforme entre 0 et 1. Les figures 2.26 et 2.27 illustrent les premières configurations aléatoires des trous pour les deux types d'éprouvettes d'essai.

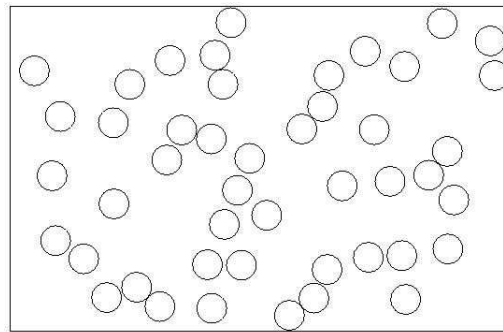


FIG. 2.26: Première configuration aléatoire des trous pour l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous =20).

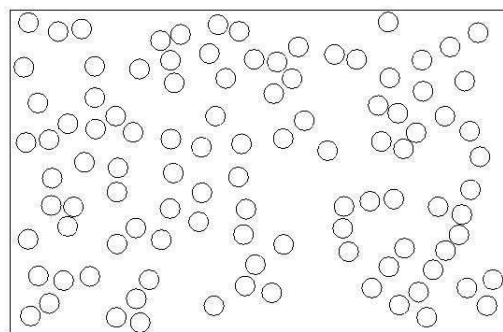


FIG. 2.27: Première configuration aléatoire de trous pour l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous =20).

### 2.3.1.2. Mode opératoire

Nous avons conservé la même composition pour la matrice cimentaire, la même procédure

pour le malaxage et les mêmes conditions de cure adoptées dans l'étude précédente (voir section 2.2.1.2). Cependant, pour le coulage des éprouvettes, un moule prismatique constitué de plaques démontables en PVC est utilisé. En outre, la plaque rectangulaire constituant le fond de ce moule est rechangeable, car elle est percée chaque fois selon le diamètre et la distribution aléatoire de trous considérés (cf. figure 2.28).

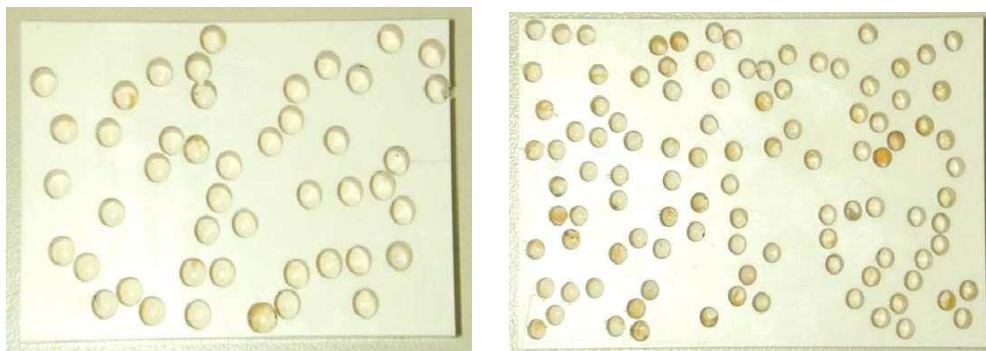


FIG. 2.28: Deux plaques, constituant deux fonds du moule, percées respectivement selon la première configuration aléatoire des trous pour l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ) et pour l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ).

Une fois le moule monté, des tiges métalliques (de longueur 3 cm) sont placées dans les trous se trouvant dans son fond. Ces tiges serviront comme des supports pour poser et maintenir les pailles verticales et indéformables pendant le coulage de la pâte cimentaire. Notons qu'avec cette technique, nous n'arrivons pas à couler la pâte cimentaire entre deux pailles très proches. Ainsi, nous estimons qu'une petite partie de la matière est enlevée à ce béton léger modèle. Cette solution présente un autre inconvénient. En effet, les pailles ne sont pas parfaitement cylindriques et présentent une petite dispersion au niveau de leur diamètre. Par conséquent, la fraction surfacique en trous peut varier légèrement d'une éprouvette à l'autre et d'une distribution aléatoire des trous à une autre.

Enfin, le démoulage des éprouvettes est fait après 24 heures et les inserts métalliques sont enlevés tout en gardant les pailles dans la matrice cimentaire (leur présence n'affecte pas le comportement mécanique du béton léger modèle). Le résultat obtenu est considéré satisfaisant (cf. figure 2.29).

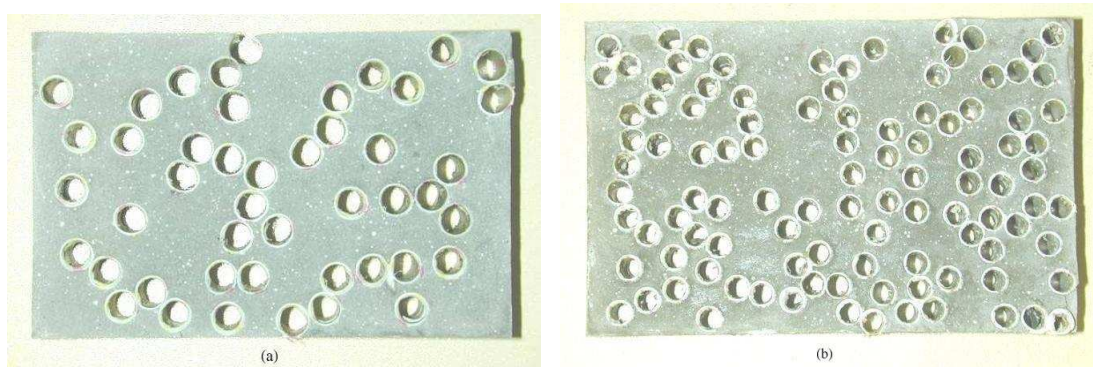


FIG. 2.29: a) Epreuve n°1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 20) : configuration aléatoire des trous n°1. b) Epreuve n°2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 20) : configuration aléatoire des trous n°1.

### 2.3.1.3. Essais de compression

Pour conduire les essais de compression sur les deux types d'éprouvettes, nous avons conservé le même mode opératoire employé dans l'étude expérimentale précédente.

**Mode de rupture :** nous avons observé un mode de rupture par extension comme dans le cas périodique. Ce mode est caractérisé par des fissures, souvent longitudinales et assez larges, s'initiant autour des trous dans les zones tendues puis se propageant d'une manière instable. Cependant, nous avons observé un mode de rupture localisé où les fissures apparaissent souvent près de l'un de deux bords de l'éprouvette alors que le reste de l'éprouvette demeure pratiquement intactes après sa rupture.

Nous avons observé aussi que la phase de microfissuration est pratiquement inexistente dans ce béton léger modèle, comme dans le cas périodique. Ceci est dû principalement à l'homogénéité de la matrice cimentaire. Les figures 2.30 et 2.31 illustrent les faciès de rupture observés avec les deux types d'éprouvettes.

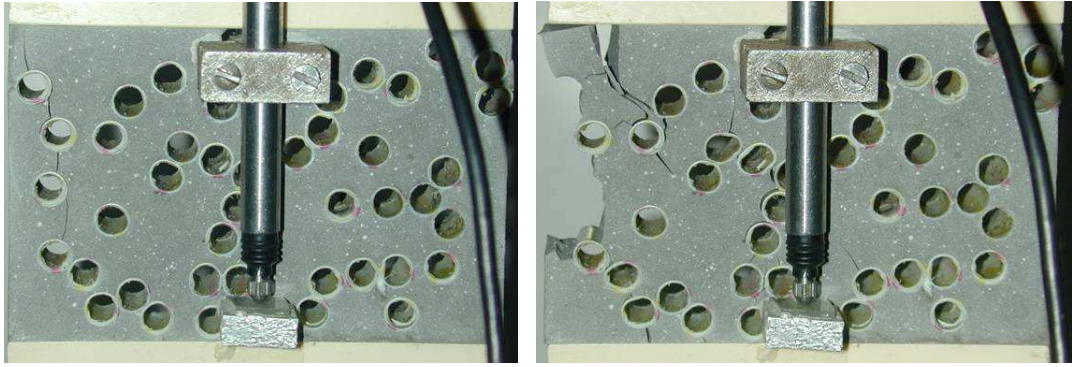


FIG. 2.30: Faciès de rupture au début de l'essai de compression et au pic d'effort pour l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous =20) : configuration aléatoire des trous n°1.

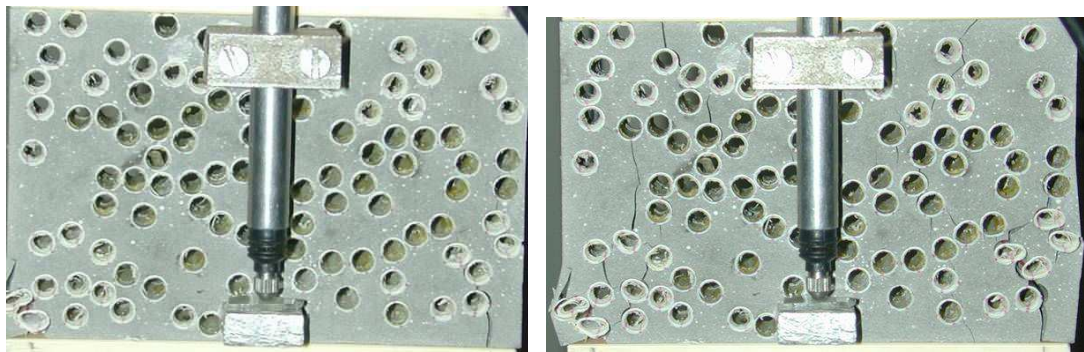


FIG. 2.31: Faciès de rupture au début de l'essai de compression et au pic d'effort pour l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous =20) : configuration aléatoire des trous n°1.

**Résultats des essais de compression :** dans les tableaux 2.7 et 2.8, nous présentons respectivement les résultats des essais de compression sur l'éprouvette 1 et l'éprouvette 2. Pour chaque configuration aléatoire des trous, nous présentons le module d'élasticité apparent moyen et la résistance en compression moyenne, obtenus en testant trois échantillons identiques.

Propriété mécanique	Config. 1	Config. 2	Config. 3	Config. 4	Config. 5
Module d'élasticité apparent (MPa)	2123	2914	2776	3140	1565
Résistance en compression (MPa)	3.5	5.19	5.4	3.4	2.71

TAB. 2.7: Propriétés mécaniques de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 20).

Propriété mécanique	Config. 1	Config. 2	Config. 3	Config. 4	Config. 5
Module d'élasticité apparent (MPa)	1643	980	1494	1973	1833
Résistance en compression (MPa)	1.86	1.44	1.94	1.125	2.22

TAB. 2.8: Propriétés mécaniques de l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 20).

Dans les tableaux 2.9 et 2.10, nous présentons respectivement les modules d'élasticité apparents moyens et les résistances moyennes des deux types d'éprouvettes d'essai. Ces valeurs moyennes sont trouvées en calculant, pour chaque type d'éprouvettes, les moyennes des modules et des résistances obtenus avec les cinq configurations aléatoires des trous.

Module d'élasticité apparent (MPa)	Eprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ )	Eprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ )	Ecart (%) (Epr. 2 / Epr. 1)
Valeur moyenne	2503.6	1584.6	36.7
Valeur maximale	3140	1973	37.2
Valeur minimale	1565	980	37.4
Ecart maximal par rapport à la valeur moyenne (%)	37.5	38.15	

TAB. 2.9: Comparaison entre les modules d'élasticité apparents moyens obtenus avec les deux types d'éprouvettes d'essai.

Résistance en compression (MPa)	Eprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ )	Eprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ )	Ecart (%) (Epr. 2 / Epr. 1)
Valeur moyenne	4.15	1.7	59
Valeur maximale	5.4	2.22	58.89
Valeur minimale	2.71	1.125	58.49
Ecart maximal par rapport à la valeur moyenne (%)	34.7	33.8	

TAB. 2.10: Comparaison entre les résistances en compression moyennes obtenues avec les deux types d'éprouvettes d'essai.

Les résultats de ces essais sont surprenants et inattendus car nous avons trouvé *a priori* un effet de taille inversé par rapport à celui du béton léger de polystyrène. En effet, la résistance moyenne de l'éprouvette 2 renfermant les petits trous est plus faible d'environ 59% par rapport à celle de l'éprouvette 1 renfermant les gros trous.

Cependant, nous avons obtenu aussi un module d'élasticité apparent moyen plus faible (une diminution d'environ 37%) pour l'éprouvette 2 renfermant les petits trous que celui obtenu avec l'éprouvette 1 renfermant les gros trous. En outre, les valeurs obtenues pour les modules de deux types d'éprouvettes sont très faibles par rapport aux valeurs prévues. En effet, pour une macroporosité de l'ordre de 20%, et une matrice ayant un module d'Young autour de 10000 MPa, nous devrions obtenir un module d'élasticité apparent de l'ordre de 5000 MPa (proche des modules obtenus dans avec la distribution périodique des trous). Enfin, nous avons observé aussi une grosse dispersion autour de la valeur moyenne du module d'élasticité apparent pour chacun de deux types d'éprouvettes : l'écart maximal par rapport à la valeur moyenne est égal à 37.5% pour l'éprouvette contre 38.15% pour l'éprouvette 2.

Ces résultats sont inattendus puisque les deux types d'éprouvettes devraient normalement avoir des modules d'élasticité apparents très proches vue qu'elles présentent des porosités identiques ou très proches.

Ceci nous conduit à conclure que le VER n'est pas encore atteint, aussi bien pour le module d'élasticité que pour la résistance en compression de ce béton léger modèle. En effet, en utilisant la même taille d'éprouvettes que dans le cas d'une distribution périodique des trous (pour laquelle le VER est déjà atteint), nous avons négligé le fait que dans le cas d'une distribution aléatoire, le VER peut ne pas être encore atteint, ce qui est le cas ici. Par conséquent, nous considérons que le module d'élasticité apparent ainsi que la résistance en



compression sont affectés par un effet d'échelle de volume. En effet, quand le VER n'est pas encore atteint, diminuer la taille des trous revient à augmenter leur nombre et par conséquent à diminuer la résistance. Ainsi, nous considérons que les résultats issus de cette étude expérimentale ne sont pas concluants car le VER n'est pas encore atteint.

#### 2.3.1.4. Béton léger modèle présentant une porosité très faible

Pour confirmer que l'effet de taille inversé observé sur la résistance du béton léger modèle aléatoire est un effet d'échelle de volume, nous avons testé deux autres types d'éprouvettes : nous avons choisi de garder la même taille pour les éprouvettes d'essai mais de réduire le nombre de trous. Ainsi, nous avons considéré une première éprouvette contenant uniquement quatre trous de diamètre ( $\phi_1 = 6mm$ ) et présentant une fraction surfacique égale à environ 1.8%. La deuxième éprouvette, présentant la même porosité, contient neuf trous de diamètre ( $\phi_2 = 4mm$ ) (cf. figure 2.32). La position des trous est générée aléatoirement. Quatre configurations aléatoires des trous sont générées pour chaque type d'éprouvettes.



FIG. 2.32: a) Epreuve 1 ( $\phi_1 = 6mm$  ; % surfacique en trous = 1.8) : configuration aléatoire des trous n°1. b) Epreuve 2 ( $\phi_2 = 4mm$  ; % surfacique en trous = 1.8) : configuration aléatoire des trous n°1.

**Mode de rupture en compression :** nous observons le même mode de rupture que dans le cas périodique ou aléatoire (avec 20% des trous). Ce mode de rupture par extension est caractérisé par des fissures longitudinales s'initiant autour des trous dans les zones tendues et se propageant en mode I (cf. figure 2.33). La rupture est donc localisée dans ces zones (autrement dit, les zones qui ne contiennent pas des trous restent intactes après la rupture de l'éprouvette).



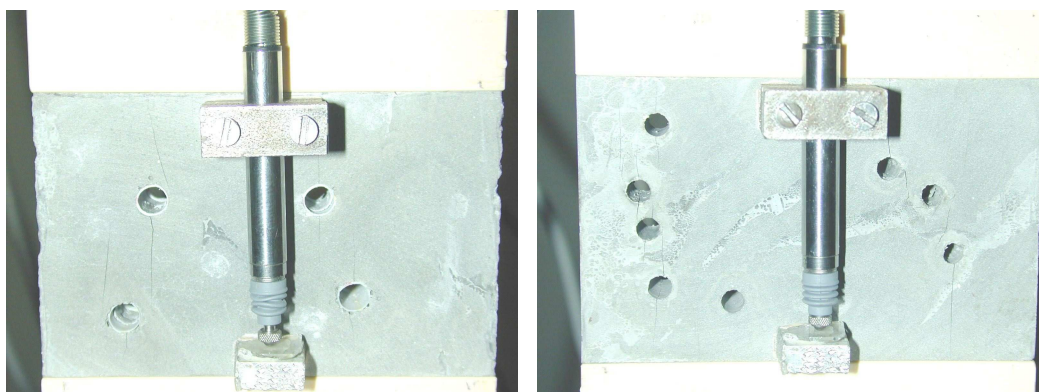


FIG. 2.33: Faciès de rupture typiques observés respectivement avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 1.8) et l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 1.8).

**Résultats des essais de compression :** Dans les tableaux 2.11 et 2.12, nous présentons respectivement les résultats des essais de compression sur l'éprouvette 1 et l'éprouvette 2. Pour chaque configuration aléatoire des trous, nous présentons le module d'élasticité apparent et la résistance en compression.

Propriété mécanique	Config. 1	Config. 2	Config. 3	Config. 4	Moyenne
densité ( $t/m^3$ )	1.67	1.69	1.65	1.68	1.67
Module d'élasticité apparent (MPa)	6526	6732	5954	6946	6539.5
Résistance en compression (MPa)	20.28	21.48	19.54	20.83	20.53

TAB. 2.11: Propriétés mécaniques de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 1.8).

Propriété mécanique	Config. 1	Config. 2	Config. 3	Config. 4	Moyenne
densité ( $t/m^3$ )	1.67	1.66	1.67	1.68	1.67
Module d'élasticité apparent (MPa)	6738	6147	7179	7139	6800.75
Résistance en compression (MPa)	22.42	15.67	21.77	20.01	19.97

TAB. 2.12: Propriétés mécaniques de l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 1.8).

En analysant ces résultats, nous concluons que les deux types d'éprouvettes d'essai ont des réponses très similaires, comme l'illustre la figure 2.34. En effet, elles présentent deux modules d'élasticité apparents très proches puisque l'écart entre les valeurs moyennes de ces modules est inférieur à 4%. De même, ces deux éprouvettes ont des résistances en compression très proches (l'écart entre les valeurs moyennes est inférieur à 3%).

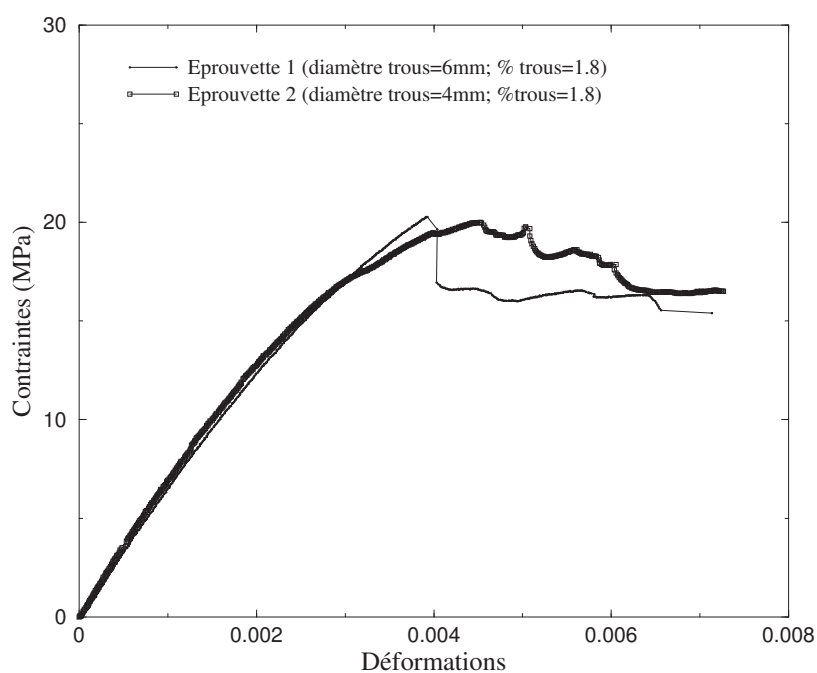


FIG. 2.34: Courbes de compression typiques obtenues expérimentalement avec les deux types d'éprouvettes.

Ces résultats montrent que le VER pour le module d'élasticité et la résistance en compression est déjà atteint avec ces deux types d'éprouvettes présentant une très faible porosité. Par ailleurs, ils montrent aussi qu'il n'y a pas d'effet de taille sur la résistance en compression. Ceci montre que le caractère aléatoire de la distribution des trous n'exhibe pas d'effet de taille sur la résistance en compression de ce béton léger modèle présentant une fraction surfacique en trous très faible (moins de 2%).

## 2.3.2 Modélisation numérique

Cette modélisation vise à vérifier si le caractère aléatoire de la distribution des trous associé à un comportement adoucissant de la matrice cimentaire simulé par le modèle d'endommagement de Mazars, peut exhiber un effet de taille sur la résistance de béton léger modèle. Pour cette étude, nous supposons qu'il n'y a pas d'autres longueurs outre la taille de l'éprouvette et le diamètre des trous. Cette hypothèse est justifiée car la matrice est homogène et la zone de microfissuration est pratiquement inexistante dans la rupture de béton léger modèle. Ainsi, nous avons conduit un calcul local. En outre, pour éliminer l'effet de la taille des mailles ( $l_{maille}$ ) notamment autour des trous, nous avons adopté une finesse du maillage, pour chaque type d'éprouvettes, de telle sorte que le rapport ( $\frac{\phi}{l_{maille}}$ ) soit constant (lorsqu'on varie la taille des trous, cette condition est simplement satisfaite en considérant toujours le même nombre d'éléments sur la circonférence d'un trou).

### 2.3.2.1. Résultats du calcul local

L'essai de compression est simulé sur les deux types d'éprouvettes présentant une macroporosité égale à 20%. Le même jeu de paramètres du modèle d'endommagement de Mazars utilisé dans le cas du béton troué périodique est adopté (voir section 2.2.2.2).

**Mode de rupture :** un calcul local permet de simuler le mode de rupture par extension observé expérimentalement. Il permet de simuler un faciès de rupture caractérisé par des fissures localisées souvent verticales (cf. figure 2.35).

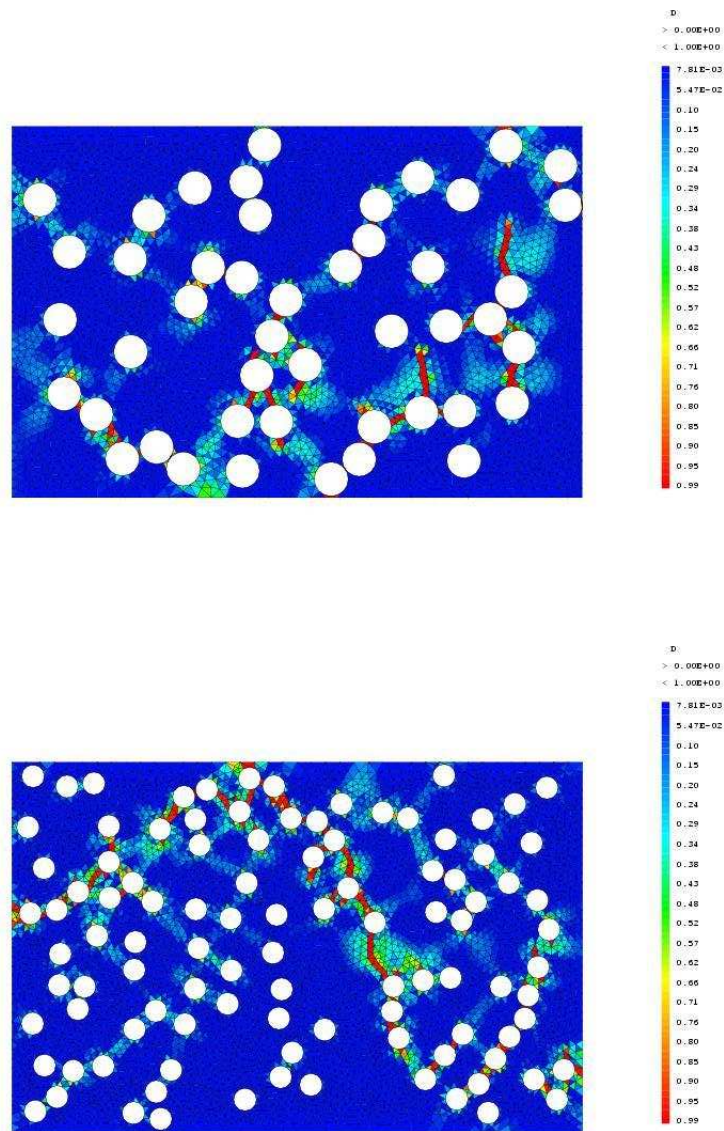


FIG. 2.35: Faciès de rupture obtenus respectivement avec l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 20) et l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$ ; % surfacique en trous = 20) : calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars.

**Résultats des essais de compression :** dans les figures 2.36 et 2.37, nous représentons les courbes de compression numériques obtenues avec les cinq configurations aléatoires des trous correspondant respectivement à l'éprouvette 1 et l'éprouvette 2. Dans la figure 2.38,

nous représentons les courbes de compression moyennes correspondant à ces deux types d'éprouvettes.

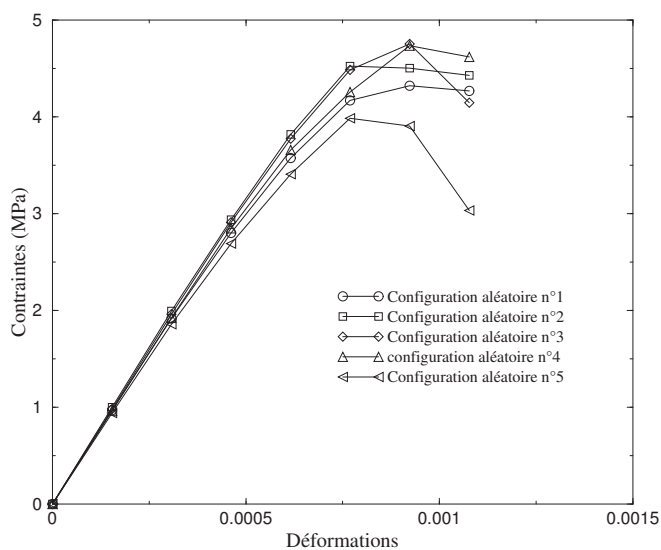


FIG. 2.36: Courbes numériques de compression de l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$  ; % surfacique en trous = 20) : calcul local.

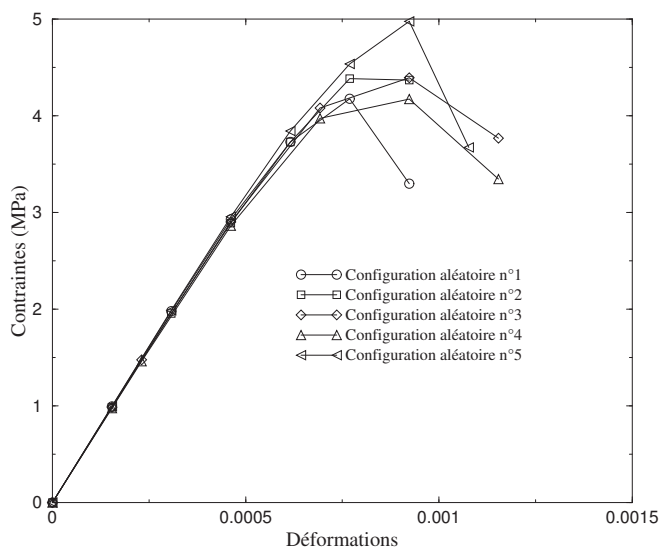


FIG. 2.37: Courbes numériques de compression de l'éprouvette 2 ( $\phi_2 = 4mm$  ; % surfacique en trous = 20) : calcul local.

En comparant ces courbes, nous constatons que les deux éprouvettes ont deux réponses

très similaires aussi bien dans la phase élastique linéaire que dans la phase non linéaire. En particulier, ces deux éprouvettes présentent des résistances en compression très proches. Ainsi, nous concluons qu'un calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars sur ce béton léger modèle (2D), caractérisé par une matrice homogène et une distribution aléatoire de trous, n'exhibe pas d'effet de taille (à condition d'éliminer l'effet de la taille du maillage).

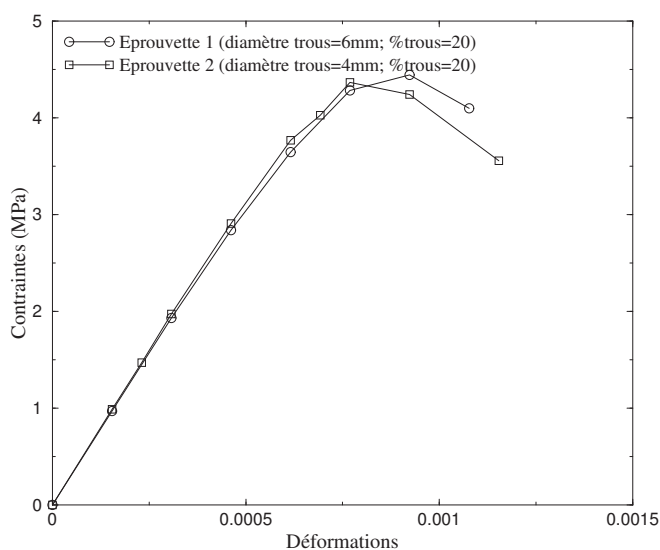


FIG. 2.38: Courbes moyennes de compression de deux types d'éprouvettes : calcul local.

Cependant, pour une taille fixée des trous, la résistance obtenue avec un calcul local dépend fortement de la finesse du maillage, comme dans le cas périodique. En effet, plus la taille de la maille élémentaire ( $l_{maille}$ ) autour d'un trou est grande (autrement dit, plus le nombre d'éléments formant la circonférence d'un trou est petit), plus la résistance du béton troué est grande et vice-versa (cf. figure 2.39).

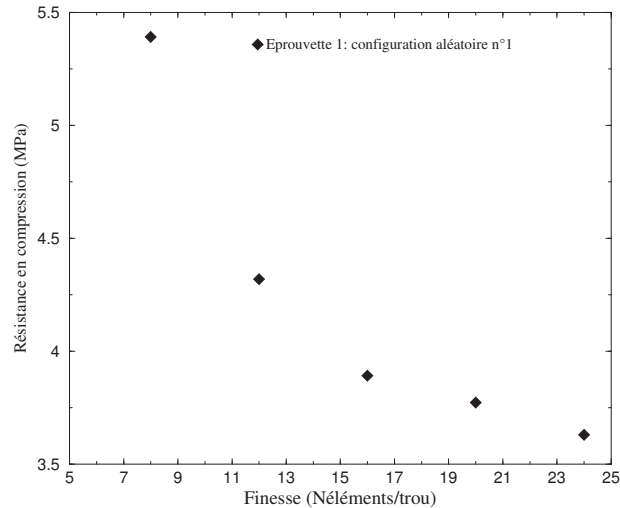


FIG. 2.39: Résistances en compression obtenues avec la première configuration aléatoire des trous correspondant à l'éprouvette 1 ( $\phi_1 = 6mm$ ; % surfacique en trous = 20), pour différentes finesses du maillage : calcul local.

### 2.3.3 Conclusions

Les résultats expérimentaux obtenus avec le béton léger modèle aléatoire présentant une macro porosité de 20% sont affectés par un effet d'échelle de volume vu que le VER n'est pas encore atteint aussi bien pour le module d'élasticité que pour la résistance en compression. Par conséquent, ces résultats ne permettent pas de tirer des conclusions sur l'effet de taille. En revanche, l'étude expérimentale conduite sur le béton léger modèle aléatoire présentant une macroporosité très faible (inférieure à 2%) a montré que ce dernier n'exhibe pas d'effet de taille sur sa résistance en compression.

Enfin, la modélisation numérique a montré qu'un calcul local avec le modèle d'endommagement de Mazars sur le béton léger modèle aléatoire, présentant une macro porosité de 20%, n'exhibe pas d'effet de taille, à condition d'éliminer l'effet de la taille du maillage en considérant un rapport  $(\frac{\phi}{l_{maille}})$  constant. Par conséquent, nous concluons que le modèle d'endommagement de Mazars ne peut pas rendre compte des effets de taille, que la distribution des trous soit périodique ou aléatoire, si on n'introduit pas une autre longueur outre la taille de l'éprouvette et le diamètre des trous. Cette longueur, si elle existe, sera nécessairement liée à la taille des hétérogénéités de la matrice. Ainsi, dans la suite de ce travail, nous allons examiner l'effet de la taille de ces hétérogénéités sur la résistance en compression du béton de polystyrène.

# Chapitre 3

## Etude expérimentale sur béton de polystyrène

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>81</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulation et confection des matériaux</b>	<b>82</b>
3.2.1	Formulation de la matrice cimentaire	82
3.2.2	Les billes de polystyrène expansé	83
3.2.3	Composition de différents bétons légers	84
3.2.4	Coulage des éprouvettes et conditions de cure	85
3.2.5	Absence d'auréole de transition	86
<b>3.3</b>	<b>Effet d'échelle de volume</b>	<b>87</b>
3.3.1	Résultats des essais de compression sur les bétons renfermant les billes de 1mm	88
3.3.2	Résultats des essais de compression sur les bétons renfermant les billes de 2.5mm	89
<b>3.4</b>	<b>Effet de taille</b>	<b>91</b>
3.4.1	Essais de compression à rapport $(\frac{D}{\phi})$ constant	91
3.4.2	Essais sur les éprouvettes (110 × 220mm)	93
<b>3.5</b>	<b>Effet de la taille des hétérogénéités de la matrice</b>	<b>96</b>
3.5.1	Formulation et fabrication des matériaux	96
3.5.2	Résultats des essais de compression	97
<b>3.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>99</b>

---





## 3.1 Introduction

Pour confirmer la présence d'un effet de taille sur la résistance en compression du béton léger de polystyrène (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005; Ganesh Babu et Saradhi Babu, 2002; Laukaitis et al., 2005) et afin de pouvoir identifier l'origine physique de ce phénomène, une étude expérimentale a été conduite sur trois types de béton léger renfermant respectivement des billes de polystyrène expansé ayant pour diamètres :  $\phi_1 = 1mm$ ,  $\phi_2 = 2.5mm$  et  $\phi_3 = 6.3mm$  (cf. figure 3.1). Ces trois tailles présentent un rapport d'homothétie égal à 2.5.



FIG. 3.1: Les trois tailles homothétiques des billes de polystyrène expansé considérées dans cette étude :  $\phi_1 = 1mm$ ,  $\phi_2 = 2.5mm$  et  $\phi_3 = 6.3mm$  : rapport d'homothétie égal à 2.5.

En outre, une matrice cimentaire ultra haute performante est utilisée pour ces bétons légers. Cette matrice contient des grains de sable de taille maximale égale à environ  $300\mu m$ . Par ailleurs, rappelons que Parant et Le Roy (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005) ont observé que l'effet de taille diminue progressivement lorsque la macroporosité du béton (la fraction volumique en polystyrène) augmente jusqu'à devenir pratiquement absent pour les très fortes porosités. Ainsi, pour étudier la dépendance de l'effet de taille par rapport à la porosité, cinq densités allant de  $1200 kg/m^3$  à  $2000kg/m^3$  sont explorées pour ces trois types de béton. Dans la première partie de ce chapitre (section 3.2), nous présentons la formulation et la fabrication des différents bétons légers. Dans la deuxième partie (section 3.3), nous commençons par éliminer l'effet du volume de l'éprouvette d'essai sur la résistance en compression du béton de polystyrène en déterminant la taille du VER minimal. Pour ce faire, des éprouvettes homothétiques sont testées. Ensuite, dans la troisième partie (section 3.4), nous confirmons la présence d'un effet de taille sur la résistance en compression du béton de polystyrène. Enfin, dans la dernière partie (section 3.5), nous étudions l'effet de la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire.

## 3.2 Formulation et confection des matériaux

### 3.2.1 Formulation de la matrice cimentaire

Afin d'obtenir un béton léger de structures, nous avons utilisé une matrice à ultra haute résistance car l'ajout des billes de polystyrène à cette matrice fait chuter brutalement sa résistance. Comme cette étude constitue une suite de l'étude expérimentale menée par Parant et Le Roy en 1999 (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005), nous avons alors utilisé leur matrice. Celle-ci a été utilisée auparavant par Rossi (Rossi, 1997) pour fabriquer des bétons à Ultra Hautes Performances. Elle présente une résistance en compression de l'ordre de 160 MPa. Cette matrice, qui sera désignée par " $M^1$ ", est constituée du ciment (C), du sable (S), de la fumée de silice (FS), du superplastifiant (SP) et de l'eau (E). Elle est caractérisée principalement par un faible rapport ( $\frac{E}{C}$ ) égal à 0.26. Par conséquent, un superplastifiant (SP) à base de polycarboxylate (voir notice technique en annexe B) est utilisé pour pouvoir malaxer la pâte malgré ce faible rapport ( $\frac{E}{C}$ ). Ce superplastifiant agit par défloculation et fluidification de la pâte. Sa proportion massique par rapport à la quantité de ciment et de la fumée de silice ( $\alpha = \frac{SP}{C+FS}$ ) a été fixée à 0.9%, de manière à obtenir un mélange homogène caractérisé par un étalement au cône de l'ordre de 18 cm (Roussel et al., 2005). Notons que le problème de la non-homogénéité du mélange est observé notamment dans le cas des faibles pourcentages en polystyrène où les billes sont plus libres de se mouvoir et ont tendance à remonter vers le haut (à cause de la poussée d'archimède).

Cette matrice est caractérisée aussi par un rapport ( $\frac{FS}{C}$ ) égal à 0.3. La fumée de silice utilisée appartient à la classe A (selon la norme française NF P 18 502). Elle est blanche à fort taux d'ultrafines et sa densité est égale à  $2200 \text{ kg/m}^3$ . Notons que l'ajout de la fumée de silice permet d'améliorer la résistance en compression du béton léger à travers l'amélioration de la qualité de l'interface entre les billes de polystyrène et la matrice cimentaire (Chen et Liu, 2004) (elle remplace en quelque sorte l'agent chimique avec lequel les billes de polystyrène sont souvent pulvérisées pour qu'elles adhèrent bien à la matrice cimentaire).

Le sable utilisé est un sable siliceux roulé. Sa densité est égale à  $2600 \text{ kg/m}^3$  et sa granulométrie varie entre 0 et  $300 \mu\text{m}$  (voir notice technique en annexe B). En outre, la proportion volumique du sable par rapport au mortier a été fixée à 30%.

Enfin, le ciment utilisé est un ciment portland CEM I 52.5 présentant une haute résistance (une classe vraie supérieure à 60 MPa) et une densité égale à  $3200 \text{ kg/m}^3$ . Dans le tableau 3.1, nous présentons la composition de la matrice cimentaire  $M_1$ .

Constituant	Proportion ( $kg/m^3$ )
Ciment de type "HTS du Teil"	961.90
Sable de type "Semanez" en provenance de Fontainebleau	786.00
Fumée de silice	288.60
Superplastifiant de type "OPTIMA 175"	8.30
Eau	244.30
Masse volumique ( $kg/m^3$ )	2289

TAB. 3.1: Composition de la matrice cimentaire  $M^1$ .

### 3.2.2 Les billes de polystyrène expansé

Les billes de polystyrène sont obtenues par expansion de billes pleines. L'expansion est arrêtée lorsque la granulométrie souhaitée est atteinte. Dans l'annexe B nous présentons les résultats d'une analyse granulométrique pratiquée par le fournisseur sur les billes de diamètre moyen égal à 1 mm : la distribution est gaussienne et la granularité est continue mais étroite. Concernant leur densité (sèche), elle est généralement inférieure à  $50 kg/m^3$ . En outre, pour les granulats expansés, la densité dépend de la taille de billes : plus les billes sont grosses, plus leur densité est faible. Les trois types de bille de polystyrène considérés dans cette étude présentent les densités suivantes :  $33 kg/m^3$  pour  $\phi_1 = 1mm$ ,  $19 kg/m^3$  pour  $\phi_2 = 2.5mm$  et  $17 kg/m^3$  pour  $\phi_3 = 6.3mm$  (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005).

#### 3.2.2.1. Propriétés morphologiques

Les billes de polystyrène sont parfaitement sphériques. Cela permet d'être en accord avec les modèles d'empilement classiques (de Larrard, 1995, 2000). La coupe d'une bille révèle une structure alvéolaire et une enveloppe constituée de deux membranes. Ceci explique d'une part son extrême légèreté et d'autre part sa totale imperméabilité à l'eau. En effet, des essais réalisés par Yamura et al. (Yamura et Yamauchi, 1982) ont montré que des billes de polystyrène immergées dans l'eau pendant un mois n'ont pas absorbé d'eau. Enfin, ces billes sont hydrophobes et présentent des charges électrostatiques en surface.

### 3.2.2.2. Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques des billes de polystyrène expansé sont négligeables devant celles de la matrice cimentaire. En effet, ces billes ont un module d'Young compris entre 4 et 8 MPa et une résistance en compression de l'ordre de 80 kPa (Parant, 1999; Haidar, 2002).

### 3.2.3 Composition de différents bétons légers

Pour chaque type de béton de polystyrène, cinq densités sont testées : 2000, 1800, 1600, 1400 et 1200  $kg/m^3$ . Les proportions de polystyrène nécessaires pour obtenir ces densités sont calculées grâce à la formule suivante :

$$g = \frac{\rho_{matrice} - \rho_{béton}}{\rho_{matrice} - \rho_{polystyrène}},$$

où  $g$  est la fraction volumique en polystyrène dans le mélange appelée ici macroporosité du béton,  $\rho_{matrice}$ ,  $\rho_{béton}$  et  $\rho_{polystyrène}$  représentent respectivement les masses volumiques de la matrice, du béton et des billes de polystyrène. Dans les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4, nous présentons les compositions de tous les mélanges pour ces trois types de béton de polystyrène. Nous désignerons les mélanges renfermant les billes de 1mm " $M_1^1$ ", de 2.5mm " $M_2^1$ " et de 6.3mm " $M_3^1$ ". Le chiffre suivant désignera la macro porosité.

Constituant ( $kg/m^3$ )	$M_1^1 - 10$	$M_1^1 - 20$	$M_1^1 - 30$	$M_1^1 - 40$	$M_1^1 - 50$
Ciment	839.35	754.56	669.78	585.00	500.22
Sable	685.86	616.58	547.30	478.02	408.74
Fumée de silice	251.83	226.39	200.96	175.52	150.08
Superplastifiant	7.24	6.51	5.78	5.05	4.32
Eau	213.17	191.64	170.11	148.58	127.04
Polystyrène (1mm) densité = $33kg/m^3$	2.55	4.31	6.07	7.84	9.60
$g$ (%)	12.8	21.7	30.5	39.4	48.3
$\rho_{béton}$ ( $kg/m^3$ )	2000	1800	1600	1400	1200

TAB. 3.2: Composition des différents mélanges pour le béton de polystyrène renfermant les billes de diamètre  $\phi_1 = 1mm$ .

Constituant ( $kg/m^3$ )	$M_2^1 - 10$	$M_2^1 - 20$	$M_2^1 - 30$	$M_2^1 - 40$	$M_2^1 - 50$
Ciment	839.40	754.66	669.91	585.17	500.42
Sable	685.90	616.65	547.41	478.16	408.91
Fumée de silice	251.85	226.42	200.99	175.57	150.14
Superplastifiant	7.24	6.51	5.78	5.05	4.32
Eau	213.19	191.66	170.14	148.62	127.09
Polystyrène (2.5mm) densité = $19kg/m^3$	2.42	4.09	5.77	7.44	9.12
$g$ (%)	12.7	21.5	30.4	39.2	48.0
$\rho_{b\acute{e}ton}$ ( $kg/m^3$ )	2000	1800	1600	1400	1200

TAB. 3.3: Composition des différents mélanges pour le béton de polystyrène renfermant les billes de diamètre  $\phi_2 = 2.5mm$ .

Constituant ( $kg/m^3$ )	$M_3^1 - 10$	$M_3^1 - 20$	$M_3^1 - 30$	$M_3^1 - 40$	$M_3^1 - 50$
Ciment	839.40	754.66	669.91	585.17	500.42
Sable	685.99	616.80	547.62	478.43	409.24
Fumée de silice	251.88	226.48	201.07	175.67	150.26
Superplastifiant	7.24	6.51	5.78	5.05	4.32
Eau	213.22	191.71	170.21	148.70	127.20
Polystyrène (6.3mm) densité = $17kg/m^3$	2.16	3.66	5.16	6.65	8.15
$g$ (%)	12.7	21.5	30.3	39.1	47.9
$\rho_{b\acute{e}ton}$ ( $kg/m^3$ )	2000	1800	1600	1400	1200

TAB. 3.4: Composition des différents mélanges pour le béton de polystyrène renfermant les billes de diamètre  $\phi_3 = 6.3mm$ .

### 3.2.4 Coulage des éprouvettes et conditions de cure

Les différents mélanges sont préparés comme suit : nous commençons par mélanger l'eau avec le superplastifiant, puis nous ajoutons le ciment, la fumée de silice et le sable. Une

fois le mélange homogène (au bout d'environ 5 minutes de malaxage à grande vitesse), nous introduisons les billes de polystyrène et nous continuons le malaxage à faible vitesse pendant 2 minutes. Ensuite, les moules des éprouvettes d'essai sont remplis sans vibration pour éviter la ségrégation du béton. Pour chaque densité de béton et pour chaque taille de bille de polystyrène, quatre éprouvettes sont fabriquées. Ces éprouvettes sont démoulées après 2 jours et sont recouvertes par du papier aluminium autocollant pour les protéger de la dessiccation. Ensuite, elles sont conservées à la température ambiante du laboratoire ( $22 \pm 3^\circ\text{C}$ ) pendant 28 jours. Ainsi, les essais mécaniques sur ces éprouvettes seront réalisés à l'âge de 28 jours.

Notons qu'avant qu'elle soit testée, chaque éprouvette est pesée pour en déduire la macroporosité avec la meilleure précision possible. Dans la suite, les porosités représentées sur les courbes sont des résultats individuels et non pas des valeurs moyennes. Enfin, nous avons choisi de conduire une étude comparative qui porte sur les résistances normalisées (résistance du béton léger/résistance de la matrice) des trois types de béton de polystyrène. Les résistances individuelles sont présentées dans l'annexe B.

### 3.2.5 Absence d'auréole de transition

Des observations au Microscope Electronique à Balayage (MEB) ont montré que la qualité de l'interface entre les billes de polystyrène et la matrice cimentaire est excellente pour les trois types de béton de polystyrène (cf. figure 3.2). En effet, ces bétons ne présentent pratiquement pas d'auréole de transition entourant les inclusions légères, comme cela est couramment observé dans les bétons ordinaires (rappelons que l'auréole de transition est caractérisée par une porosité plus importante que celle de la matrice cimentaire (Goldman et Bentur, 1993)). Cette absence d'auréole de transition est obtenue grâce à la présence de la fumée de silice (Chen et Liu, 2004) et au faible rapport  $\left(\frac{E}{C}\right)$ .

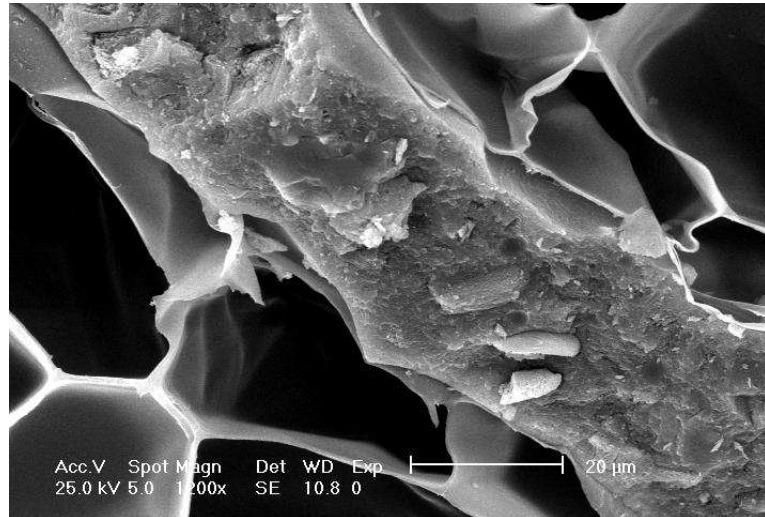


FIG. 3.2: Photo au MEB montrant la très bonne qualité de l'interface entre les billes de polystyrène et la matrice cimentaire (photo Berthelot : PCM - LCPC).

### 3.3 Effet d'échelle de volume

Tout d'abord, pour s'affranchir d'un éventuel effet de la taille ( $D$ ) de l'éprouvette d'essai sur la résistance en compression du béton de polystyrène, nous avons choisi de tester des éprouvettes homothétiques présentant un rapport  $(\frac{D}{\phi})$  constant. Ainsi, comme les tailles de billes de polystyrène considérées dans cette étude présentent un rapport d'homothétie égal à 2.5, deux types d'éprouvettes cylindriques présentant le même rapport d'homothétie ont été considérés. Le premier type d'éprouvettes est un cylindre de diamètre ( $D_1 = 110mm$ ) et de hauteur égale à  $(2D_1)$ . Le deuxième type est un cylindre de diamètre ( $D_2 = 44mm$ ) et de hauteur égale à  $(2D_2)$  (cf. figure 3.3). Pour ces deux tailles d'éprouvettes nous aurons :  $(\frac{D_1}{\phi_2}) = (\frac{D_2}{\phi_1}) = 44$  et  $(\frac{D_1}{\phi_3}) = (\frac{D_2}{\phi_2}) = 17.6$ .





FIG. 3.3: Epreuves homothétiques de béton de polystyrène de tailles :  $(110 \times 220mm)$  et  $(44 \times 88mm)$  : rapport d'homothétie égal à 2.5.

Avant de comparer les résistances données par les trois types de béton léger, il faut vérifier si le VER est atteint avec les deux tailles d'éprouvettes considérées dans cette étude. Autrement dit, il faut vérifier si ces résistances sont affectées par un effet d'échelle de volume (Kadlecek et Spetla, 1973; Wu, 1991). En effet, la résistance d'une éprouvette du béton léger, ayant une taille ( $D$ ) (correspondant à son diamètre par exemple) et renfermant des billes de diamètre ( $\phi$ ), peut être affectée par un effet d'échelle de volume résultant d'un rapport  $(\frac{D}{\phi})$  qui n'est pas suffisamment grand. Cet effet d'échelle de volume se traduit par une diminution de la résistance lorsqu'on augmente le rapport  $(\frac{D}{\phi})$ . Cependant, l'effet de volume semble disparaître à partir d'un certain rapport critique pour lequel le VER est considéré comme atteint pour la résistance en compression (Laalai, 1993; Laalai et Sab, 1994; Sab et Laalai, 1993).

### 3.3.1 Résultats des essais de compression sur les bétons renfermant les billes de 1mm

Pour le béton léger renfermant les billes de diamètre ( $\phi_1 = 1mm$ ), nous avons observé que les résistances en compression obtenues avec les éprouvettes  $(110 \times 220mm)$  ( $\frac{D}{\phi} = 110$ ) sont très proches de celles données par les éprouvettes  $(44 \times 88mm)$  ( $\frac{D}{\phi} = 44$ ). Ce résultat est

vrai quelle que soit la porosité du béton (cf. figure 3.4). Ainsi, nous concluons que le VER pour la résistance du béton de polystyrène est déjà atteint pour un rapport ( $\frac{D}{\phi} = 44$ ). Par conséquent, la taille minimale de ce VER correspond nécessairement à un rapport ( $\frac{D}{\phi} \leq 44$ ). Ceci nous permet de conclure que les résistances des bétons légers renfermant les billes de 1mm obtenues avec les éprouvettes ( $44 \times 88mm$ ) et ( $110 \times 220mm$ ) ne sont pas affectées par un effet d'échelle de volume. De même, nous considérons que les résistances des bétons légers renfermant les billes de 2.5mm obtenues avec les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) ne sont pas affectées par un effet d'échelle de volume puisque le rapport ( $\frac{D}{\phi}$ ) est égal aussi à 44.

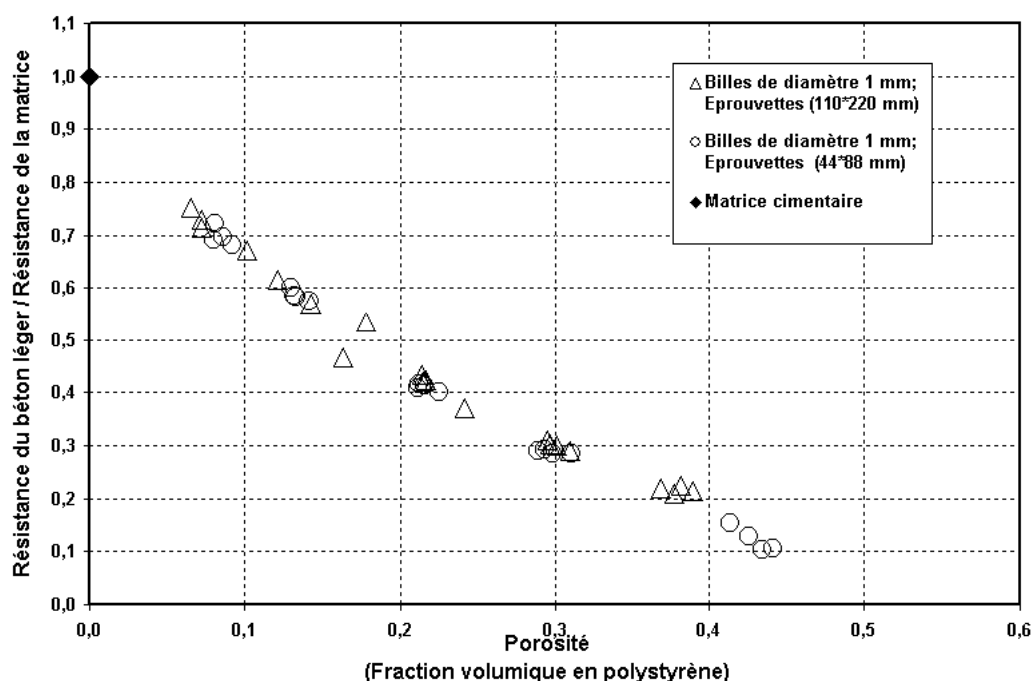


FIG. 3.4: Résistances en compression normalisées des bétons légers renfermant les billes de diamètre  $\phi_1 = 1mm$ , obtenues avec les deux types d'éprouvettes d'essai.

### 3.3.2 Résultats des essais de compression sur les bétons renfermant les billes de 2.5mm

Pour le béton léger renfermant les billes de diamètre ( $\phi_2 = 2.5mm$ ), nous avons observé que les résistances en compression, à porosité constante, obtenues avec les éprouvettes ( $110 \times$

$220mm$ ) ( $\frac{D}{\phi} = 44$ ) sont légèrement plus faibles que celles données par les éprouvettes ( $44 \times 88mm$ ) ( $\frac{D}{\phi} = 17.6$ ), notamment pour les bétons présentant une forte porosité (cf. figure 3.5).

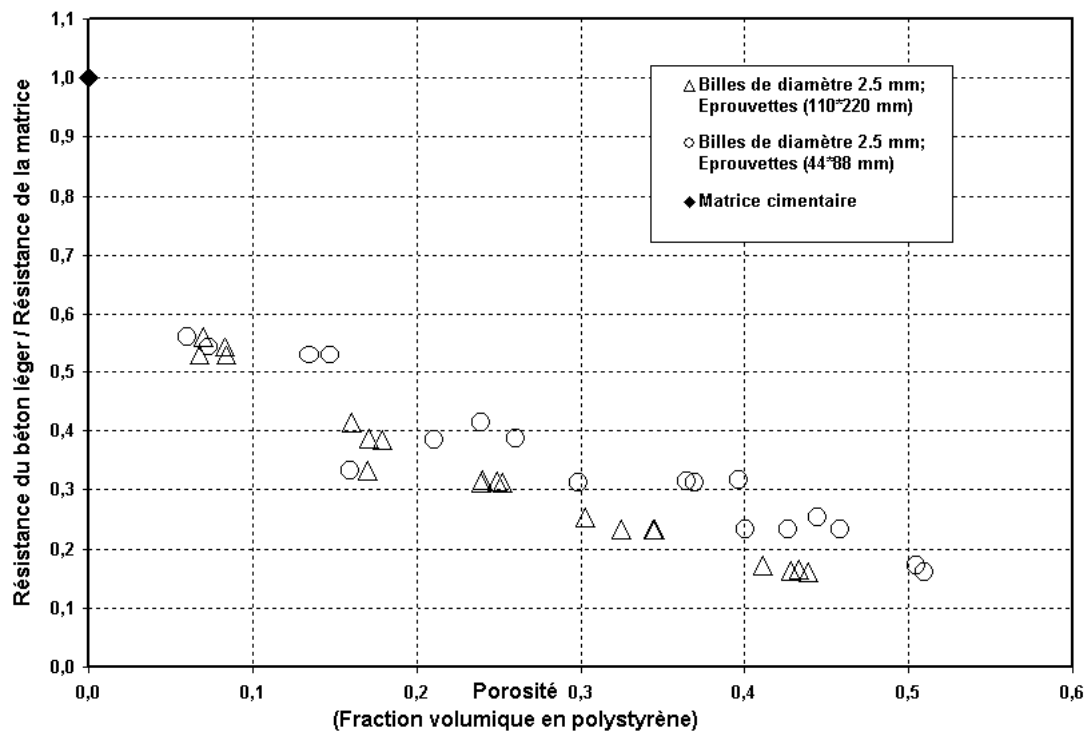


FIG. 3.5: Résistances en compression normalisées des bétons légers renfermant les billes de diamètre  $\phi_2 = 2.5mm$ , obtenues avec les deux types d'éprouvettes d'essai.

Ceci nous permet de conclure que le VER n'est pas encore atteint pour un rapport ( $\frac{D}{\phi} = 17.6$ ). Par conséquent, nous considérons que les résistances obtenues avec les éprouvettes ( $44 \times 88mm$ ) renfermant des billes de diamètre ( $\phi_2 = 2.5mm$ ) sont légèrement affectées par un effet d'échelle de volume. Autrement dit, ces résultats surestiment légèrement les résistances de ce béton léger, notamment pour les fortes porosités. De même, nous considérons que les résistances obtenues avec les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) renfermant les billes de diamètre ( $\phi_3 = 6.3mm$ ) sont aussi affectées par un léger effet d'échelle de volume, vu que ( $\frac{D}{\phi} = 17.6$ ).

**Récapitulatif :** Les résultats de cette analyse de l'effet d'échelle de volume sur les résistances en compression des trois types de béton de polystyrène obtenues avec les deux tailles d'éprouvettes d'essai sont résumés dans le tableau suivant :

	Eprouvette ( $110 \times 220mm$ )	Eprouvette ( $44 \times 88mm$ )
Billes de diamètre $\phi_1 = 1mm$	VER atteint : absence d'effet de volume	VER atteint : absence d'effet de volume
Billes de diamètre $\phi_2 = 2.5mm$	VER atteint : absence d'effet de volume	VER n'est pas encore atteint : un léger effet de volume
Billes de diamètre $\phi_3 = 6.3mm$	VER n'est pas encore atteint : un léger effet de volume	

TAB. 3.5: Récapitulatif des résultats de l'étude de l'effet d'échelle de volume sur la résistance en compression du béton de polystyrène.

## 3.4 Effet de taille

Pour vérifier la présence d'un effet de taille sur la résistance en compression du béton de polystyrène, nous allons analyser les résultats des essais de compression obtenus avec les éprouvettes homothétiques présentant un même rapport  $(\frac{D}{\phi})$  et avec les éprouvettes de taille ( $110 \times 220mm$ ).

### 3.4.1 Essais de compression à rapport $(\frac{D}{\phi})$ constant

#### 3.4.1.1. Pour $(\frac{D}{\phi}) = 44$

Rappelons que pour  $(\frac{D}{\phi}) = 44$ , le VER est déjà atteint pour la résistance en compression du béton de polystyrène. En comparant les résistances normalisées obtenues avec les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) renfermant les billes de 2.5 mm à celles obtenues avec les éprouvettes ( $44 \times 88mm$ ) renfermant les billes de 1mm, nous concluons que les résistances obtenues avec les petites billes, à porosité égale du béton, sont plus élevées (cf. figure 3.6). En effet, pour

une macroporosité très faible égale à environ 9% (correspondant à un béton de densité égale à environ  $2090 \text{ kg/m}^3$ ), nous avons observé une augmentation d'environ 32% de la résistance obtenue avec les billes de 1mm par rapport à celle obtenue avec les billes de 2.5mm. Pour une porosité égale à environ 23% (correspondant à un béton de densité égale à environ  $1750 \text{ kg/m}^3$ ), nous avons une augmentation d'environ 29%.

Nous avons observé aussi que cet effet de taille diminue lorsque la porosité du béton augmente jusqu'à devenir négligeable pour les bétons présentant des fortes porosités. Ainsi, la dépendance de l'effet de taille par rapport à la porosité du béton, observée déjà par Parant et Le Roy (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005), est confirmée.

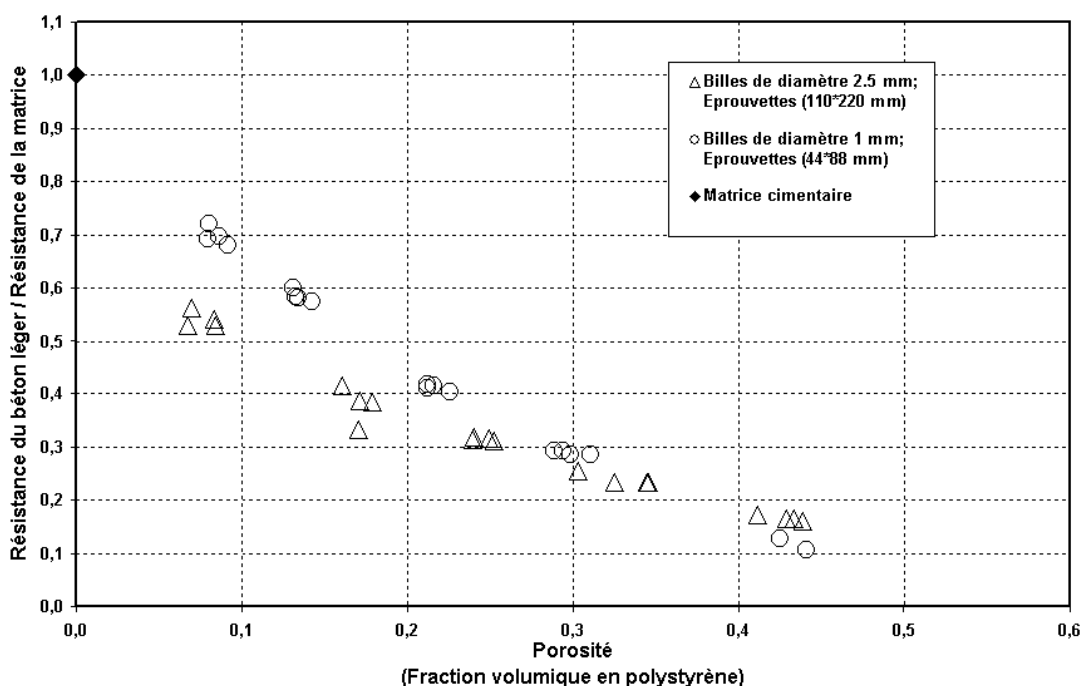


FIG. 3.6: Résistances en compression normalisées obtenues avec les billes de diamètres  $\phi_1 = 1 \text{ mm}$  et  $\phi_2 = 2.5 \text{ mm}$  : résultats pour un rapport d'homothétie constant ( $\frac{D}{\phi} = 44$ ).

#### 3.4.1.2. Pour $(\frac{D}{\phi}) = 17.6$

Rappelons que pour  $(\frac{D}{\phi}) = 17.6$ , le VER n'est pas encore atteint pour la résistance du béton de polystyrène et que cette dernière est affectée par un léger effet d'échelle de volume, notamment dans le cas des bétons à forte porosité. Par conséquent, les valeurs obtenues avec

les éprouvettes ( $110 \times 220 \text{ mm}$ ) renfermant les billes de diamètre ( $\phi_3 = 6.3 \text{ mm}$ ) ainsi que celles obtenues avec les éprouvettes ( $44 \times 88 \text{ mm}$ ) renfermant les billes de diamètre ( $\phi_2 = 2.5 \text{ mm}$ ) surestiment légèrement les “vraies” résistances de ces deux types de béton de polystyrène. Toutefois, nous avons observé que les résistances obtenues avec les billes de diamètre 2.5 mm sont plus grandes que celles obtenues avec les billes de diamètre 6.3 mm (cf. figure 3.7). A titre d'exemple, pour une porosité égale à environ 22% (correspondant à un béton de densité égale à environ  $1800 \text{ kg/m}^3$ ), nous avons une augmentation d'environ 42% de la résistance obtenue avec les petites billes par rapport à celle obtenue avec les grosses billes. Ceci confirme la présence d'un effet de taille sur la résistance en compression du béton de polystyrène.

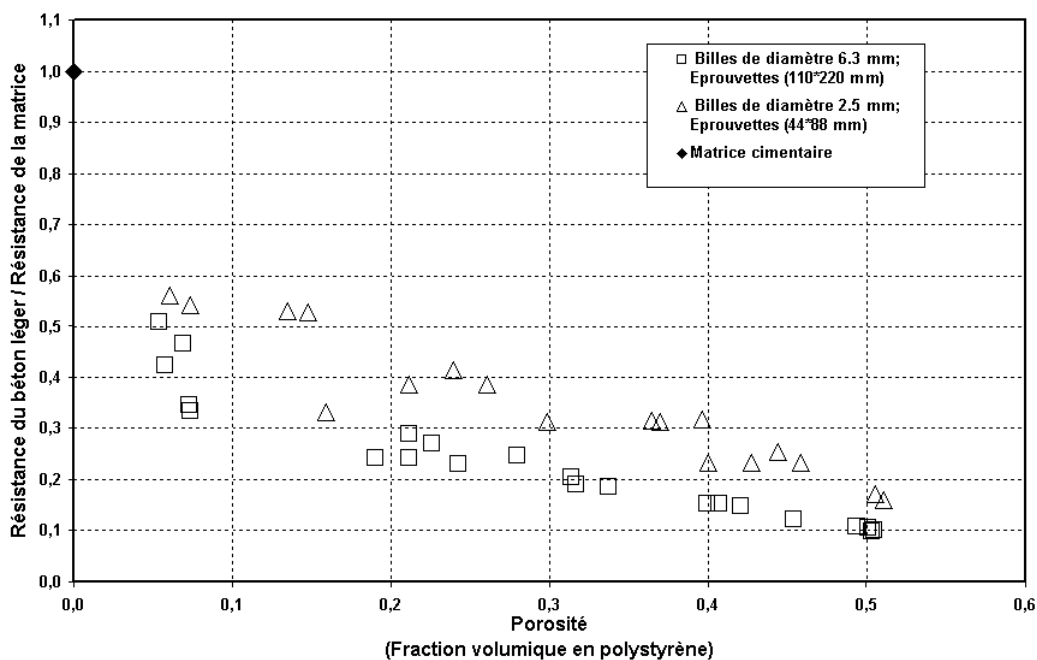


FIG. 3.7: Résistances en compression normalisées obtenues avec les billes de diamètres  $\phi_2 = 2.5 \text{ mm}$  et  $\phi_3 = 6.3 \text{ mm}$  : résultats pour un rapport d'homothétie constant ( $\frac{D}{\phi} = 17.6$ ).

### 3.4.2 Essais sur les éprouvettes ( $110 \times 220 \text{ mm}$ )

#### 3.4.2.1. Essais de module d'élasticité

Le module d'élasticité a été mesuré pour les trois types de béton de polystyrène sur des éprouvettes de taille ( $110 \times 220 \text{ mm}$ ). Les résultats de ces essais donnent des modules très

proches, à porosité égale, pour les trois types de béton (figure 3.8). Ceci prouve que le VER pour le module d'élasticité est atteint pour cette taille d'éprouvettes d'essai et qu'il n'y a pas d'effet de taille sur cette propriété mécanique, ce qui est prévisible. Enfin, nous avons observé que l'évolution du module d'Young en fonction de la porosité du béton est quasiment linéaire pour une porosité inférieure ou égale à 50%.

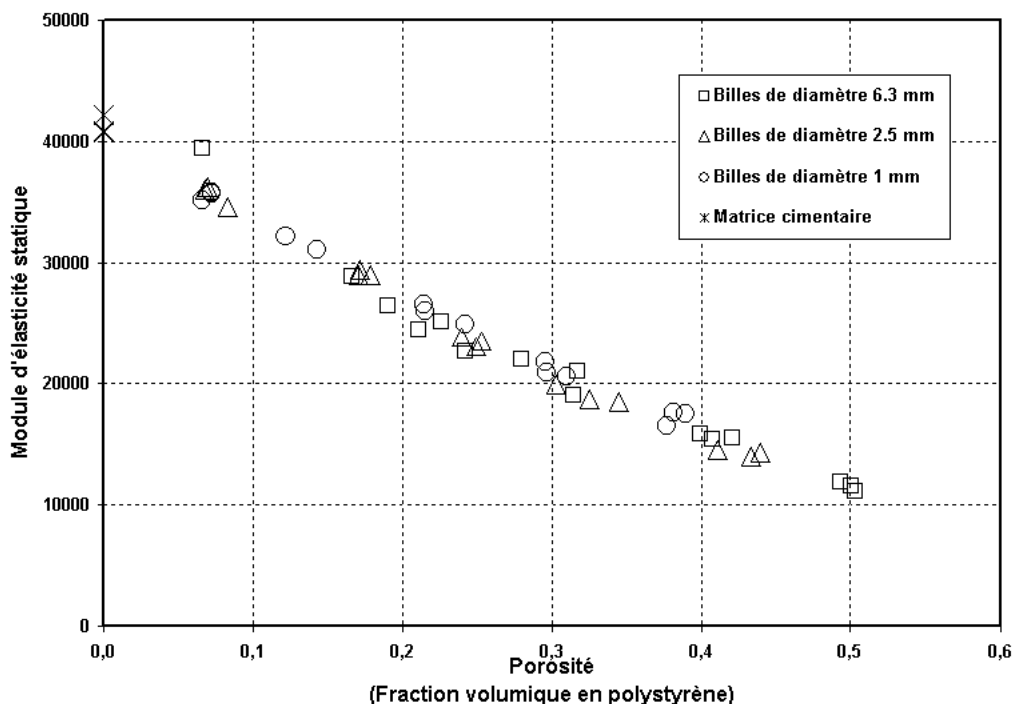


FIG. 3.8: Modules d'élasticité obtenus avec les trois types de béton de polystyrène.

### 3.4.2.2. Essais de compression

Les résultats des essais de compression sur les trois types de béton de polystyrène obtenues avec les éprouvettes ( $110 \times 220\text{mm}$ ) confirment la présence d'un effet de taille (cf. figure 3.9). A titre d'exemple, pour une porosité égale à environ 24% (correspondant à un béton de densité égale à environ  $1740\text{ kg/m}^3$ ), nous observons une augmentation d'environ 60% de la résistance obtenue avec les billes de diamètre 1mm par rapport à celle obtenue avec les billes de diamètre 6.3mm. Pour la même porosité, nous observons aussi une augmentation de la résistance obtenue avec les billes de diamètre 2.5mm d'environ 35% par rapport à celle obtenue avec les billes de diamètre 6.3mm. Par ailleurs, nous avons observé que l'effet de taille est très important pour les bétons présentant une faible porosité mais il diminue

progressivement lorsque la porosité du béton augmente, jusqu'à devenir négligeable pour les très fortes porosités (proches de 50%).

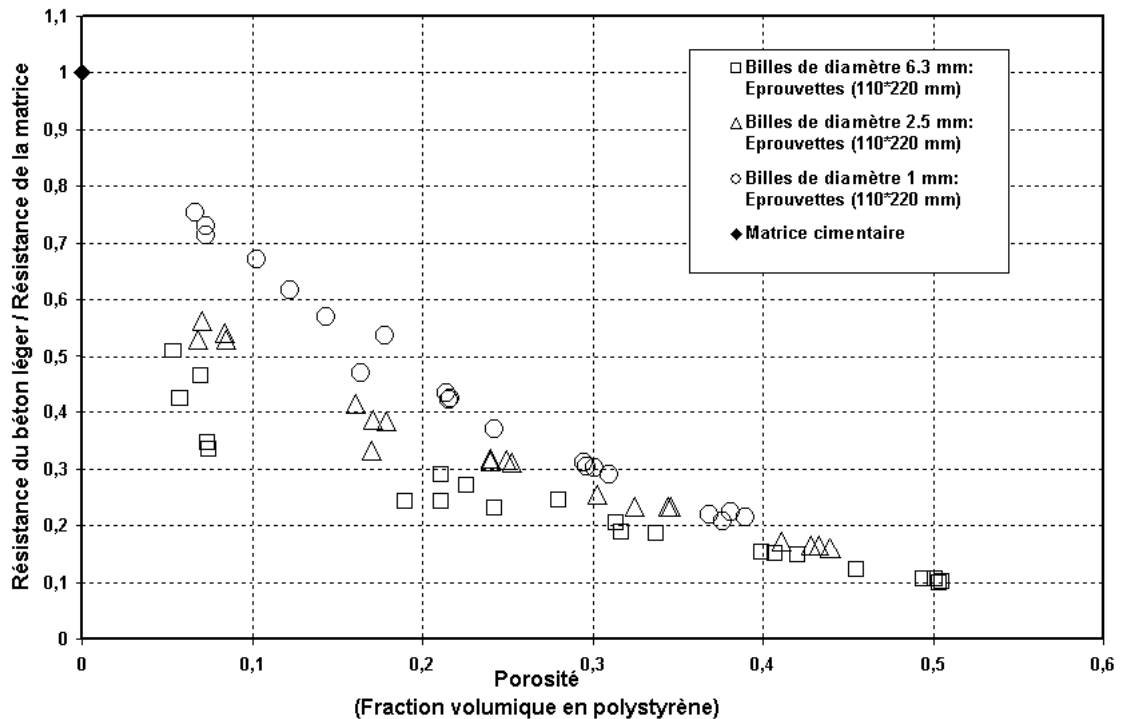


FIG. 3.9: Résistances en compression normalisées obtenues avec les trois types de béton de polystyrène : essais sur des éprouvettes de taille  $(110 \times 220\text{mm})$ .

Enfin, rappelons qu'avec les éprouvettes de taille  $(110 \times 220\text{mm})$ , le VER est déjà atteint pour les bétons légers renfermant les billes de diamètres 1mm et 2.5mm. Cependant, il semble que le VER ne soit pas encore atteint avec cette taille pour les bétons renfermant les billes de diamètre 6.3mm, notamment pour ceux présentant une forte porosité. Ainsi, il est probable que les résistances obtenues avec ces éprouvettes soient affectées par un léger effet d'échelle de volume.

Toutefois, cet effet de volume ne remet pas en cause la présence d'un effet de taille sur la résistance en compression du béton léger. Au contraire, l'effet de volume signifie que les résistances obtenues avec les éprouvettes  $(110 \times 220\text{mm})$  surestiment légèrement les résistances des bétons légers renfermant les billes de diamètre 6.3mm. Ceci veut dire que ces résistances sont normalement plus faibles si nous testons des éprouvettes plus grandes. Par conséquent, l'écart entre elles et les résistances données par les billes de diamètres 2.5mm et



1mm serait plus grand. En même temps, nous considérons que ce léger effet de volume aura une influence minime sur notre analyse de l'effet de taille, puisqu'il se manifeste notamment pour les bétons présentant une forte porosité, pour lesquels l'effet de taille est négligeable. Ainsi, nous considérons qu'avec les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ), nous nous affranchissons de l'effet de la taille de l'éprouvette d'essai. Par conséquent, nous allons nous baser dans notre analyse de l'effet de taille sur les résistances données par ces éprouvettes pour les trois types de béton de polystyrène.

## 3.5 Effet de la taille des hétérogénéités de la matrice

Pour vérifier si la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire a un effet sur la résistance du béton léger, nous avons considéré deux autres types de matrice. Rappelons d'abord que la première matrice  $M^1$  correspond à un mortier renfermant un sable fin de taille maximale égale à environ 0.3 mm. Ainsi, La deuxième de matrice appelée  $M^2$  est un mortier constitué d'une pâte cimentaire et d'un sable grossier dont la taille maximale des grains est égale à environ 4 mm. Le troisième type appelé  $M^0$  est une pâte cimentaire (ciment + eau).

### 3.5.1 Formulation et fabrication des matériaux

La pâte cimentaire utilisée pour les deux nouvelles matrices  $M^0$  et  $M^2$  est caractérisée par un faible rapport ( $\frac{E}{C}$ ) égal à 0.24. Le ciment (C) utilisé est un ciment portland à haute résistance CPA CEM I 52.5 N CP2 (Saint Vigor). Un superplastifiant (SP) (OPTIMA 175) est utilisé pour cette pâte (voir notice technique en annexe B). Sa proportion massique par rapport à la quantité de ciment ( $\alpha = \frac{SP}{C}$ ) a été fixé à 0.5%, de manière à obtenir un mélange homogène. Enfin, le sable (0/4 mm) utilisé pour la matrice  $M^2$  est un calcaire de Rascalat ayant une densité égale à environ  $2500 kg/m^3$  (voir annexe B).

A partir de chaque matrice, deux types de béton léger renfermant deux tailles différentes de billes de polystyrène ( $\phi_1 = 1mm$  et  $\phi_2 = 2.5mm$ ) sont fabriqués. Ces deux bétons présentent une même macroporosité égale à 20%. Ainsi, six mélanges sont préparés. Leurs compositions sont résumées dans le tableau 3.6. Pour chaque mélange, quatre éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) sont fabriquées. Notons que d'un échantillon à l'autre, nous avons obtenu une dispersion de la densité attribuée à une variation de la macroporosité du béton.

Enfin, ces éprouvettes sont démoulées après 2 jours et sont reconvertes par du papier aluminium autocollant pour les protéger de la dessiccation. Ensuite, elles sont conservées à

la température ambiante du laboratoire ( $22 \pm 3^\circ\text{C}$ ) pendant 28 jours. Ainsi, les essais de compression sur ces éprouvettes sont réalisés à l'âge de 28 jours.

Constituant ( $kg/m^3$ )	$M^2$	$M_1^2 - 20$	$M_2^2 - 20$	$M^0$	$M_1^0 - 20$	$M_2^0 - 20$
Ciment	1422	1137.6	1137.6	1750	1400	1400
Eau	329.6	263.68	263.68	399.58	319.67	319.67
Sable	503.1	402.48	402.48	0.	0.	0.
Superplastifiant	23.7	18.96	18.96	29.17	23.33	23.33
Polystyrène : $\phi_1 = 1mm$ densité = $33kg/m^3$	0.	6.6	0.	0.	6.6	0.
Polystyrène : $\phi_2 = 2.5mm$ densité = $19kg/m^3$	0.	0.	3.8	0.	0.	3.8
$g$ (%)	0	20	20	0	20	0
Masse volumique ( $kg/m^3$ )	2278.4	1829.32	1826.52	2178.75	1749.6	1746.8

TAB. 3.6: Composition des différents mélanges.

### 3.5.2 Résultats des essais de compression

Nous avons obtenu deux résistances en compression moyennes pour la matrice  $M^0$  et la matrice  $M^2$  qui sont respectivement égales à 119 MPa et 97 MPa. Ainsi, ces deux nouvelles matrices présentent des résistances inférieures à celle de la matrice  $M^1$  (égale à environ 160 MPa). Cependant, notons que le fait que les trois types de matrice aient des résistances différentes ne pose pas de problème pour cette étude comparative de l'effet de taille qui porte sur les résistances normalisées (résistance du béton léger/résistance de la matrice).

Dans les figures 3.10 et 3.11, nous représentons les résistances normalisées obtenues respectivement avec les billes de diamètres 1mm et 2.5mm, pour les trois types de béton léger ( $M^0 - 20$ ,  $M^1 - 20$  et  $M^2 - 20$ ). Les résistances individuelles sont présentées dans l'annexe B.

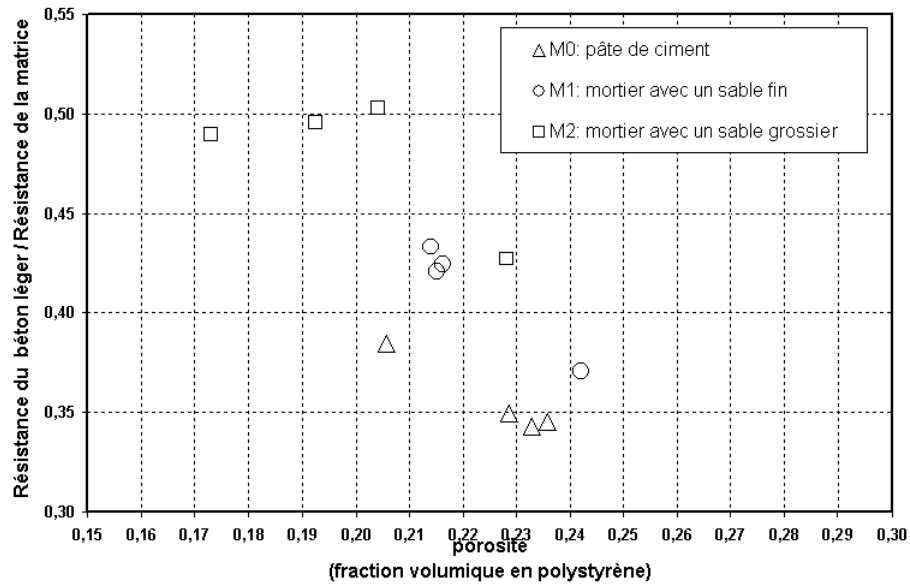


FIG. 3.10: Résistances en compression normalisées obtenues avec les billes de diamètre  $\phi_1 = 1mm$  et les trois types de matrice cimentaire.

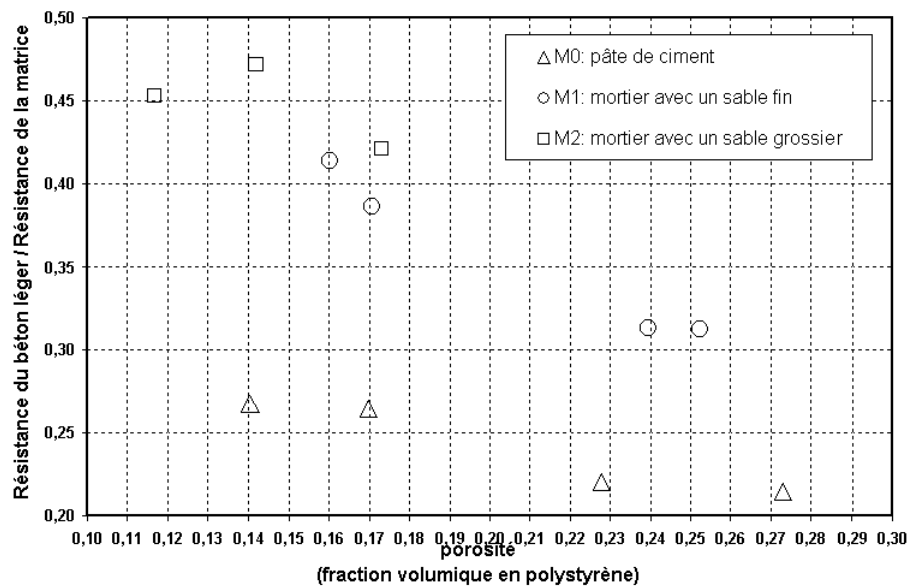


FIG. 3.11: Résistances en compression normalisées obtenues avec les billes de diamètre  $\phi_2 = 2.5mm$  et les trois types de matrice cimentaire.

Nous observons alors que pour la même taille de billes de polystyrène, nous avons des ré-

sistances normalisées différentes en changeant la matrice cimentaire ou plutôt en modifiant la taille de ses hétérogénéités. En effet, nous observons que lorsque la taille maximale de ces hétérogénéités (grains de sable pour le premier et deuxième type de matrice) augmente, la résistance normalisée du béton léger augmente et vice versa. En même temps, nous observons que les plus faibles résistances pour les deux types de béton léger sont obtenues avec la matrice  $M^0$ , à savoir la pâte cimentaire dont la taille maximale des hétérogénéités est micrométrique (grains de ciment dont la taille est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres). Par conséquent, nous avons un effet de taille sur la résistance en compression du béton de polystyrène piloté par la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire.

Enfin, en comparant les résistances normalisées obtenues pour avec les deux tailles des billes de polystyrène, pour une même matrice et une même porosité du béton, nous observons que lorsque la taille des billes augmente, la résistance normalisée du béton léger diminue. Ceci confirme la présence d'un effet de taille piloté par la taille des billes de polystyrène.

Ainsi, nous concluons que le béton de polystyrène exhibe deux effets de taille antagonistes qui sont pilotés par la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire et par la taille des billes de polystyrène.

## 3.6 Conclusions

Cette étude expérimentale a permis de confirmer la présence d'un effet de taille sur la résistance en compression du béton léger. En effet, cette dernière diminue lorsque la taille des billes de polystyrène augmente. Cet effet de taille dépend aussi de la macroporosité du béton puisqu'il diminue progressivement lorsque la porosité du béton augmente, jusqu'à devenir quasiment absent pour les très fortes porosités.

Par ailleurs, cette étude a montré que la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire joue un rôle très important. En effet, elle est à l'origine d'un autre effet de taille antagoniste au premier, vu que nous avons observé que la résistance en compression du béton léger augmente lorsque la taille maximale des hétérogénéités de la matrice cimentaire augmente. Ainsi, avec une matrice qui contient du sable (un mortier), on peut obtenir une résistance pour le béton de polystyrène similaire ou meilleure que celle obtenue avec une pâte à ultra haute résistance, qui est plus résistante que le mortier et qui coûte plus chère.

Enfin, cette étude a montré que l'interface entre les billes de polystyrène et la matrice cimentaire ne présente pas d'auréole de transition. Ainsi, nous concluons que cette interface ne peut pas être à l'origine de l'effet de taille.



# Chapitre 4

## Modèle phénoménologique

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>103</b>
<b>4.2</b>	<b>Nature de la loi d'effet de taille</b>	<b>103</b>
<b>4.3</b>	<b>Analyse des mécanismes de rupture dans le béton de polystyrène</b>	<b>105</b>
4.3.1	Mécanismes de rupture	106
4.3.2	Scénario de ruine	107
4.3.3	Longueur caractéristique	108
4.3.4	Longueur géométrique	110
<b>4.4</b>	<b>Analyse asymptotique de l'effet de taille</b>	<b>112</b>
4.4.1	Cas où $(l_g(p, \phi) \leq l_c)$ : absence d'effet de taille	112
4.4.2	Borne supérieure $\mathbf{g_0}(p)$	113
4.4.3	Cas où $(l_g(p, \phi) \gg l_c)$ : rupture fragile	114
4.4.4	Borne inférieure $\mathbf{g_\infty}(p)$	115
<b>4.5</b>	<b>Cas où <math>(l_g(p, \phi) &gt; l_c)</math> : loi d'effet de taille en puissance</b>	<b>120</b>
<b>4.6</b>	<b>Modèle proposé</b>	<b>121</b>
4.6.1	Validation expérimentale	122
<b>4.7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>125</b>

---



## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons conduire une démarche phénoménologique, basée sur l'analyse des mécanismes de ruine dans le béton de polystyrène, pour expliquer l'effet de taille et identifier la loi le régissant (Miled et al., 2005a,b). Dans la première partie de ce chapitre (section 4.2), nous allons déterminer, grâce à une analyse théorique, la nature de la loi d'effet de taille sur la résistance en compression du béton de polystyrène. Dans la deuxième partie (section 4.3), nous ferons une analyse des mécanismes de rupture afin d'identifier les deux longueurs géométrique et caractéristique qui pilotent la loi d'effet de taille. Ensuite, dans la troisième partie (section 4.4), nous allons identifier cette loi grâce à une analyse asymptotique de l'effet de taille. Enfin, dans la dernière partie (section 4.5), un modèle phénoménologique sera proposé pour prédire la résistance du béton de polystyrène en tenant compte de l'effet de taille.

Notons que la validation du modèle proposé sera basée sur les résultats des essais de compression (faciès de rupture et résistances) obtenus avec les éprouvettes de taille ( $110 \times 220mm$ ) pour les trois types de béton de polystyrène dont la matrice cimentaire contient un sable fin (matrice  $M^1$ ).

## 4.2 Nature de la loi d'effet de taille

Considérons deux éprouvettes de béton de polystyrène ayant la même taille ( $D$ ) (correspondant à leur diamètre par exemple), la même macroporosité ( $p$ ) mais renfermant deux tailles différentes des billes de polystyrène :  $\phi_1$  et  $\phi_2$  tel que  $\phi_1 > \phi_2$  (cf. figure 4.1).



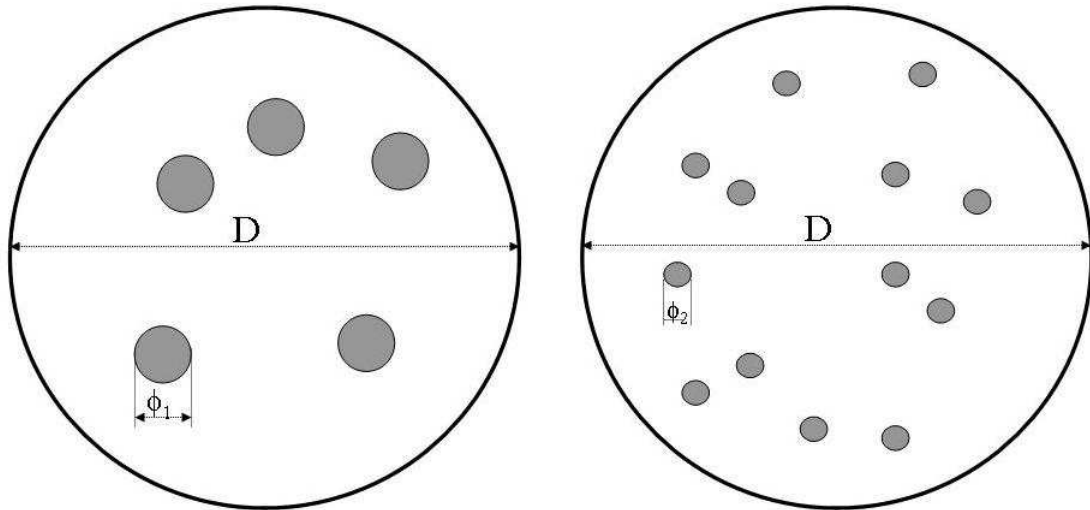


FIG. 4.1: Deux éprouvettes de béton de polystyrène de même taille ( $D$ ), renfermant deux tailles différentes des billes pour une même porosité du béton.

En outre, nous supposons que pour cette taille ( $D$ ) d'éprouvettes, le VER est atteint pour la résistance en compression du béton de polystyrène. Autrement dit, nous supposons que la résistance du béton léger ne dépend pas de ( $D$ ). Ainsi, si nous supposons que la taille des inclusions légères ( $\phi$ ) est l'unique longueur qui gouverne l'effet de taille observé expérimentalement sur la résistance en compression du béton de polystyrène, une simple analyse théorique, conduite auparavant par Bazant dans son analyse des lois d'effet d'échelle de structure (Bazant, 2004), montre que la loi régissant cet effet de taille doit être une loi en puissance de ( $\phi$ ) (de même type que la loi d'effet d'échelle sur la résistance des structures de la mécanique linéaire de la rupture (MLR) ou les lois d'échelle probabilistes de type Weibull (Weibull, 1939), qui sont des lois en puissance de la taille de la structure). Ainsi, cette loi exprimée par la fonction  $f$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f = \left( \frac{\sigma_1^{VER}}{\sigma_2^{VER}} \right) = \left( \frac{\phi_1}{\phi_2} \right)^\alpha.$$

En outre, comme nous avons observé que la résistance du béton léger diminue lorsque la taille des billes de polystyrène augmente, alors l'exposant  $\alpha$  de cette loi doit être négatif. Par conséquent, la résistance du béton léger serait infinie quand ( $\phi \rightarrow 0$ ). Ceci veut dire que pour des billes de polystyrène de taille micrométrique par exemple, la résistance du béton léger tendra vers l'infini, ce qui est absurde car cette dernière est finie et elle est majorée par

la résistance de la matrice. En conséquence, nous concluons qu'en plus de la taille des billes ( $\phi$ ), il existe forcément une autre longueur caractéristique ( $l_c$ ) qui contrôle l'effet de taille. Cette longueur émane naturellement de la matrice cimentaire et elle est liée à la taille de ses hétérogénéités, puisque nous avons observé expérimentalement que la résistance normalisée du béton léger augmente lorsque nous augmentons cette taille. Ainsi, l'effet de taille émane a priori du rapport entre la taille des billes de polystyrène ( $\phi$ ) et la longueur caractéristique ( $l_c$ ).

Cependant, nous avons observé expérimentalement que l'effet de taille dépend aussi de la macroporosité ( $p$ ) du béton et qu'il disparaît pour les très fortes porosités. Par conséquent, nous concluons qu'il ne peut pas être piloté par ( $\phi$ ) pour toute porosité du béton. Ainsi, nous stipulons que la loi d'effet de taille du béton de polystyrène est gouvernée par le rapport d'une longueur géométrique ( $l_g$ ), caractérisant la microstructure du béton et dépendant à la fois de la taille des billes ( $\phi$ ) et de la porosité ( $p$ ), à une longueur caractéristique ( $l_c$ ) liée à la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire. Ainsi, nous avons a priori une loi d'effet de taille à l'échelle mésoscopique de type la loi d'effet d'échelle sur la résistance des structures proposée par Bazant (Bazant, 1983, 1984), à l'échelle macroscopique.

A l'issue de cette analyse, la résistance normalisée du béton de polystyrène, pour une porosité fixée ( $p$ ), sera une fonction du rapport ( $\frac{l_g(p, \phi)}{l_c}$ ) :

$$\frac{\sigma^{VER}(p, \phi)}{\sigma_{matrice}^{VER}} = \mathbf{g}\left(p, \frac{l_g(p, \phi)}{l_c}\right), \quad (4.1)$$

où  $\sigma^{VER}(p, \phi)$  est la résistance en compression d'un béton léger caractérisé par une porosité ( $p$ ) et des billes de diamètre ( $\phi$ ) et  $\sigma_{matrice}^{VER}$  est la résistance en compression de la matrice cimentaire.

### 4.3 Analyse des mécanismes de rupture dans le béton de polystyrène

Pour identifier les deux longueurs caractéristique et géométrique qui pilotent l'effet de taille, nous nous sommes basés sur l'analyse des mécanismes de rupture dans le béton de polystyrène. En effet, les effets de taille apparaissent souvent lors d'un changement de mécanisme de ruine.

### 4.3.1 Mécanismes de rupture

Expérimentalement, nous avons observé que le mécanisme de rupture dans le béton de polystyrène dépend fortement de sa porosité ( $p$ ). En effet, pour les très faibles porosités où l'effet de taille est très important, nous avons observé un mode de rupture par propagation de quelques macrofissures (cf. figure 4.2). Il s'agit d'un mode de rupture quasi-fragile et localisé.

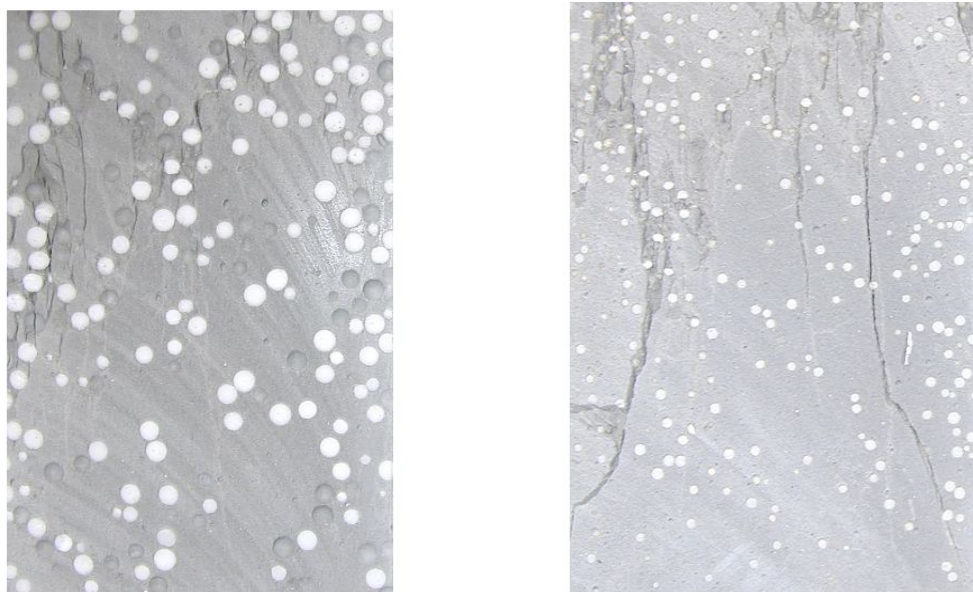


FIG. 4.2: Mécanisme de rupture, par propagation de quelques macrofissures localisées, observé pour les deux bétons de polystyrène renfermant respectivement les billes de  $6.3\text{mm}$  et  $2.5\text{mm}$  et présentant une faible porosité (coupes longitudinales de deux éprouvettes ( $110 \times 220\text{mm}$ )).

En revanche, pour les bétons légers présentant des fortes porosités et qui n'exhibent pas d'effet de taille, nous avons observé un mode de rupture différent caractérisé par une microfissuration diffuse dans toute la matrice cimentaire (cf. figure 4.3). Il s'agit d'un mode de rupture plus ductile.

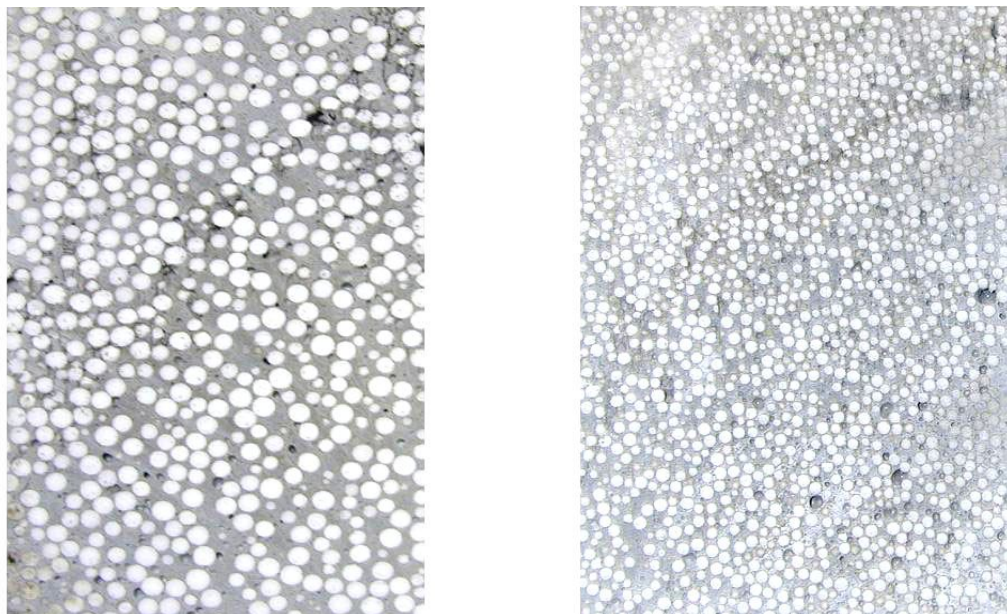


FIG. 4.3: Mécanisme de rupture, par microfissuration diffuse, observé pour les deux bétons de polystyrène renfermant respectivement les billes de  $6.3\text{mm}$  et  $2.5\text{mm}$  et présentant une forte porosité (coupes longitudinales de deux éprouvettes ( $110 \times 220\text{mm}$ )).

Ainsi, le béton de polystyrène peut exhiber deux mécanismes de rupture différents : un mécanisme par microfissuration diffuse et un mécanisme par propagation de macrofissures. Par conséquent, nous pensons que l'effet de taille observé sur la résistance du béton de polystyrène apparaît suite à un changement dans le mécanisme de ruine de ce béton léger, à travers une transition d'un mode de rupture ductile où l'effet de taille est absent, vers un mode plus fragile où l'effet de taille devient très important. Par ailleurs, cette transition est pilotée par le rapport de la longueur géométrique ( $l_g$ ), dépendant à la fois de la taille des billes ( $\phi$ ) et de la porosité ( $p$ ) du béton, à la longueur caractéristique ( $l_c$ ).

### 4.3.2 Scénario de ruine

En se basant sur cette analyse des mécanismes de rupture dans le béton de polystyrène, nous pensons que la ruine se déroule en deux phases : une première phase d'initiation ou de nucléation de la microfissuration qui peut être vue aussi comme la fin de la phase élastique linéaire. En outre, comme nous avons observé expérimentalement qu'il n'y a pas d'effet de taille sur le module d'élasticité du béton de polystyrène, alors nous allons supposer que cette première phase dépend uniquement de la porosité ( $p$ ) du béton.

La deuxième phase correspond à une phase de microfissuration (et/ou) de propagation des macrofissures, où l'un de ces deux mécanismes de rupture ou tous les deux peuvent avoir lieu. En effet, au début de cette phase, les microfissures issues de la première phase de nucléation apparaissent de façon diffuse dans une zone de taille finie qui correspond à la zone d'élaboration de la fissuration classiquement observée dans la rupture des matériaux quasi-fragiles (Hillerborg et al., 1976; Markeset et Hillerborg, 1995). Ensuite, ces microfissures coalescent pour former une ou plusieurs macrofissures qui peuvent se propager d'une façon stable avant d'atteindre la rupture. Cependant, pour les bétons légers présentant une très forte porosité, il semble que cette coalescence des microfissures n'ait pas lieu puisque le mécanisme de microfissuration est prépondérant.

Ainsi, l'effet de taille émane de cette deuxième phase de rupture, à travers la compétition entre ces deux mécanismes de ruine. En outre, nous stipulons que le premier mécanisme de microfissuration est piloté par la longueur caractéristique ( $l_c$ ). Tandis que le deuxième mécanisme de propagation des macrofissures est piloté par la longueur géométrique ( $l_g(p, \phi)$ ), autrement dit par la taille des billes ( $\phi$ ) et la porosité ( $p$ ) du béton.

En se basant sur cette analyse, nous stipulons que la résistance normalisée du béton de polystyrène provient de deux termes :

$$\mathbf{g}\left(p, \frac{l_g(p, \phi)}{l_c}\right) = \sigma_{\mathbf{N}}^{\text{init}}(p) + \sigma_{\mathbf{N}}^{\text{ad}}\left(p, \frac{l_g(p, \phi)}{l_c}\right) \quad \forall p, \phi, \quad (4.2)$$

où  $\sigma_{\mathbf{N}}^{\text{init}}(p)$  est appelée : “contrainte normalisée d'initiation de la microfissuration”. Elle représente la contrainte normalisée nécessaire pour initier la première microfissure. Tandis que le deuxième terme  $\sigma_{\mathbf{N}}^{\text{ad}}(p, \phi)$  appelé : “contrainte normalisée additionnelle de microfissuration (et/ou) de propagation des macrofissures”, représente la résistance normalisée supplémentaire du béton léger provenant de la deuxième phase de microfissuration (et/ou) de propagation des macrofissures. Ainsi, c'est cette contrainte additionnelle  $\sigma_{\mathbf{N}}^{\text{ad}}(p, \phi)$  pilotée par le rapport  $\left(\frac{l_g(p, \phi)}{l_c}\right)$  qui exhibe un effet de taille sur la résistance du béton de polystyrène.

### 4.3.3 Longueur caractéristique

La longueur caractéristique ( $l_c$ ) qui contrôle le mécanisme de microfissuration dans le béton de polystyrène correspond naturellement à la taille de la zone d'élaboration de la microfissuration dans la matrice cimentaire du béton léger. Rappelons que dans la théorie déterministe des effets d'échelle dans les structures quasi-fragiles proposée par Bazant (Bazant, 1983, 1984), la taille de la zone d'élaboration de la microfissuration est indépendante

de la taille de la structure, et elle est liée à la taille de la plus grosse hétérogénéité du matériau. En effet, d'après des observations expérimentales effectuées par Pijaudier-Cabot sur des structures en béton (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987), cette longueur ( $l_c$ ) est identifiée à environ trois fois la taille ( $l_m$ ) du plus gros granulats du béton ( $l_c \propto 3 \times l_m$ ).

Dans notre cas, cette longueur interne ( $l_c$ ) est liée aussi à la taille ( $l_m$ ) de la plus grosse hétérogénéité de la matrice cimentaire, puisque nous avons observé expérimentalement que la résistance normalisée du béton léger augmente lorsque nous augmentons cette taille. Ainsi, la longueur caractéristique ( $l_c$ ), à l'échelle mésoscopique, est estimée aussi à ( $3 \times l_m$ ).

Ensuite, pour identifier ( $l_m$ ), nous avons effectué des observations au MEB qui ont montré que cette taille correspond à la taille du plus gros grain de sable, qui est égale à environ  $0.25mm$  (cf. figure 4.4). Ainsi,  $l_c = 0.75mm$ .

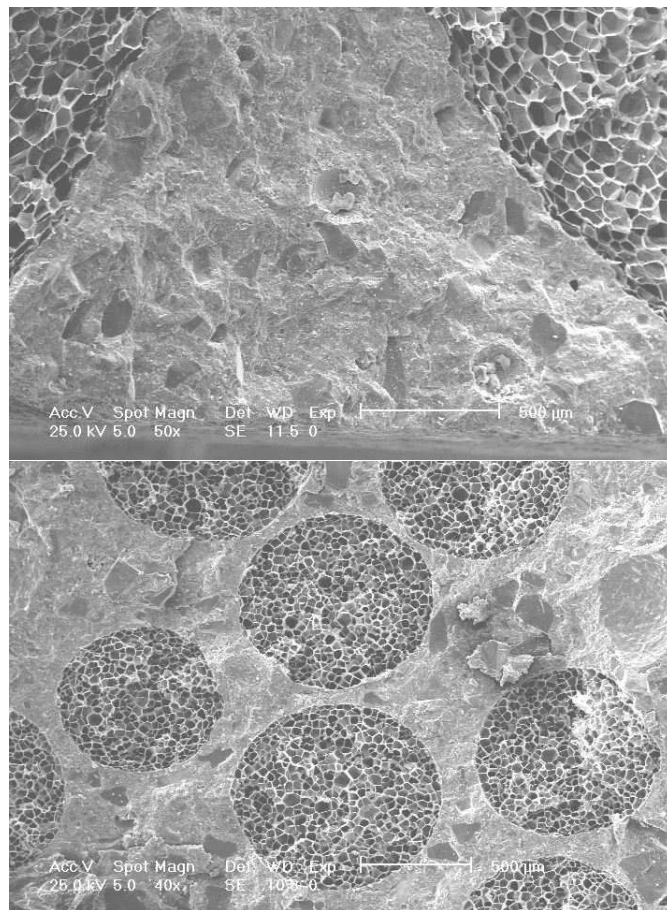


FIG. 4.4: Photos au MEB montrant la présence de grains de sable de taille maximale égale à environ  $0.25mm$  dans les matrices cimentaires des bétons allégés respectivement par les billes de polystyrène de diamètre  $6.3mm$  et  $1mm$ .



### 4.3.4 Longueur géométrique

La longueur géométrique pilote le deuxième mécanisme de propagation des macrofissures : elle contrôle en quelque sorte la taille des fissures ou la longueur de leur parcours. Par conséquent, cette longueur géométrique dépend de la microstructure du béton léger : elle dépend à la fois de la taille des billes de polystyrène ( $\phi$ ) et de la macro porosité ( $p$ ) du béton.

Pour les très faibles porosités (quand  $p \rightarrow 0$ ),  $l_g(0^+, \phi)$  est identifiée à la taille des billes de polystyrène ( $\phi$ ). En effet, dans ce cas, nous pensons que la taille des fissures est pilotée par la taille des billes.

En revanche, pour les très fortes porosités, cette longueur est identifiée à l'espacement moyen ( $e$ ) entre les billes de polystyrène (cf. figure 4.5). En effet, nous pensons que dans ce cas, la taille des fissures est pilotée par cet espacement. Celui-ci a été estimé à l'aide du concept de l'«Épaisseur Maximale de Pâte» (EMP) proposé par de Larrard et Tondat (de Larrard et Tondat, 1993) :

$$e(p, \phi) = \phi \left( \left( \frac{p_{max}}{p} \right)^{1/3} - 1 \right), \quad (4.3)$$

où  $p_{max}$  est la porosité maximale du béton léger. Etant donné que les billes de polystyrène ont une forme parfaitement sphérique, cette porosité maximale a été fixée à la compacité d'un mélange ordonné suivant un arrangement cubique à faces centrées de sphères, soit :  $p_{max} = 0.74$ . Ainsi, l'espacement moyen  $e(p, \phi)$  dépend à la fois de la taille des billes de polystyrène ( $\phi$ ) et de la macro porosité ( $p$ ). Pour une porosité fixée, il augmente lorsque ( $\phi$ ) augmente. Tandis que pour une taille des billes donnée, il diminue lorsque la porosité du béton augmente.

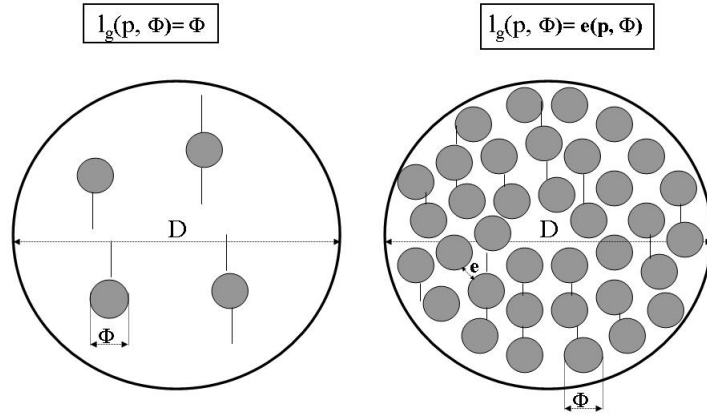


FIG. 4.5: La longueur géométrique  $l_g(p, \phi)$  dans les cas de très faibles et de très fortes porosités.

Ainsi, la fonction  $l_g(p, \phi)$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$l_g(p, \phi) = \phi \tilde{l}_g(p), \quad (4.4)$$

où  $\tilde{l}_g(p)$  est une fonction adimensionnelle qui dépend uniquement de la porosité ( $p$ ) et qui doit satisfaire les quatre conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{l}_g(0^+) &= \lim_{p \rightarrow 0} \tilde{l}_g(p) = 1, \\ \tilde{l}_g(p_{max}) &= 0, \\ \left(\frac{d\tilde{l}_g}{dp}\right)(0^+) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d\tilde{l}_g}{dp} = 0, \\ \left(\frac{d\tilde{l}_g}{dp}\right)(p_{max}) &= \left(\frac{de}{dp}\right)(p_{max}) = \frac{-1}{(3p_{max})}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous nous proposons d'approcher cette fonction par le polynôme du troisième degré suivant :

$$\tilde{l}_g(p) = \left(\frac{p}{p_{max}} - 1\right) \left(\frac{5}{3} \left(\frac{p}{p_{max}}\right)^2 - \frac{p}{p_{max}} - 1\right). \quad (4.5)$$



La figure 4.6 illustre l'évolution de cette longueur géométrique adimensionnelle en fonction de la porosité du béton.

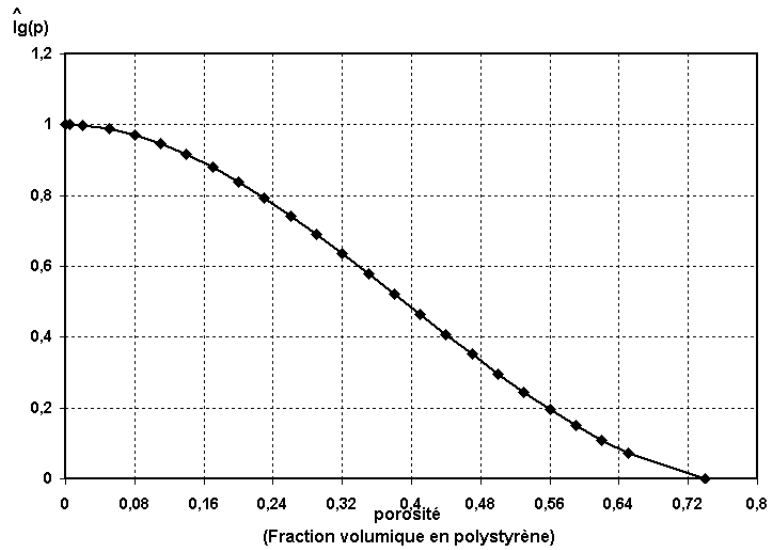


FIG. 4.6: Evolution de la longueur géométrique adimensionnelle  $\tilde{l}_g$  en fonction de la porosité  $p$  du béton.

## 4.4 Analyse asymptotique de l'effet de taille

Afin d'identifier la loi d'effet de taille, nous avons eu recours à une analyse asymptotique correspondant aux cas où  $(l_g(p, \phi) \leq l_c)$  et  $(l_g(p, \phi) \gg l_c)$ . Notons que cette analyse est inspirée des travaux de Bazant sur les effets d'échelle sur la résistance des structures quasi-fragiles (Bazant, 1983, 1984).

### 4.4.1 Cas où $(l_g(p, \phi) \leq l_c)$ : absence d'effet de taille

Comme nous avons observé expérimentalement que l'effet de taille est absent pour les très fortes porosités, nous avons conclu que cette absence d'effet de taille est gouvernée par la condition suivante :  $l_g(p, \phi) \leq l_c$ .

En effet, pour les bétons de polystyrène présentant de très fortes porosités (quand  $p \rightarrow p_{max}$ ),  $l_g(p, \phi)$  correspond à l'espacement moyen  $e(p, \phi)$  entre les billes de polystyrène. Ainsi, pour chaque diamètre ( $\phi$ ) des billes, il existe une certaine porosité ( $p_\phi^*$ ) à partir de laquelle l'espacement  $e(p_\phi^*, \phi)$  devient inférieur à ( $l_c$ ). Dans ce cas, la zone d'élaboration occupera progressive-

ment tout l'espace entre les billes, ce qui résulte en un mode de rupture par microfissuration diffuse dans toute la matrice, d'où l'absence d'effet de taille. En outre, la contrainte normalisée additionnelle  $\sigma_{\mathbf{N}}^{\text{ad}}(p, \phi)$  nécessaire pour cette microfissuration diffuse sera maximale.

Par ailleurs, la condition précédente est satisfaite, quelle que soit la porosité du béton, quand la taille des billes de polystyrène ( $\phi$ ) est inférieure ou égale à ( $l_c$ ). Ceci veut dire que les bétons légers, renfermant des billes de polystyrène de taille ( $\phi$ ) plus petite que la longueur caractéristique ( $l_c$ ), n'exhibent pas d'effet de taille sur leur résistance en compression. Dans ce cas, l'absence d'effet de taille s'explique par l'homogénéité du matériau, vu que les tailles des inclusions légères et des hétérogénéités de la matrice seront très proches.

Dans le cas où ( $l_g(p, \phi) \leq l_c$ ) correspondant à l'absence d'effet de taille, la résistance normalisée du béton léger dépend uniquement de sa porosité ( $p$ ). En outre, pour une porosité donnée ( $p$ ), elle sera maximale puisque la contrainte normalisée additionnelle  $\sigma_{\mathbf{N}}^{\text{ad}}$  est maximale dans ce cas. Ainsi, la résistance normalisée du béton léger  $\mathbf{g}(p, \frac{l_g(p, \phi)}{l_c})$  sera donnée par une borne supérieure notée  $\mathbf{g}_0(p)$  :

$$\mathbf{g}(p, \frac{l_g(p, \phi)}{l_c}) = \mathbf{g}_0(p) \quad \text{quand} \quad (\frac{l_g(p, \phi)}{l_c} \leq 1). \quad (4.6)$$

#### 4.4.2 Borne supérieure $\mathbf{g}_0(p)$

Pour une porosité ( $p$ ) donnée, la fonction  $\mathbf{g}_0(p)$  donne la résistance normalisée maximale du béton de polystyrène. Cette fonction doit tendre vers 1 lorsque ( $p \rightarrow 0$ ). Autrement dit, la résistance du béton léger doit tendre vers la résistance de la matrice lorsque ( $p \rightarrow 0$ ). Par ailleurs,  $\mathbf{g}_0(p)$  doit être nulle quand ( $p = p_{max}$ ) car la percolation est atteinte pour cette porosité et le béton perd complètement sa résistance.

Pour approcher la borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$ , une fonction hyperbolique vérifiant les deux conditions précédentes a été considérée :

$$\mathbf{g}_0(p) = \frac{\gamma_0(1 - \frac{p}{p_{max}})}{(\gamma_0 + \frac{p}{p_{max}})} \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq p_{max} \quad (4.7)$$

Cette forme, déjà utilisée par Le Roy et al. (2005) dans leur modèle de résistance du béton de polystyrène, semble être adéquate pour reproduire l'évolution réelle de la résistance normalisée du béton de polystyrène en fonction de sa porosité ( $p$ ). Enfin, le coefficient  $\gamma_0$  a été ajusté grâce aux résultats expérimentaux. En effet, pour les très fortes porosités (quand  $p \rightarrow p_{max}$ ) où l'effet d'échelle disparaît, les résistances données par cette fonction doivent coïncider avec

les résistances expérimentales obtenues avec les trois types de béton de polystyrène (cf. figure 4.7). On trouve alors  $\gamma_0 = 0.45$ . Ainsi, la borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$  s'écrit :

$$\mathbf{g}_0(p) = \frac{0.45(1 - \frac{p}{p_{max}})}{(0.45 + \frac{p}{p_{max}})} \quad \text{pour } 0 \leq p \leq p_{max} \quad \text{avec } p_{max} = 0.74. \quad (4.8)$$

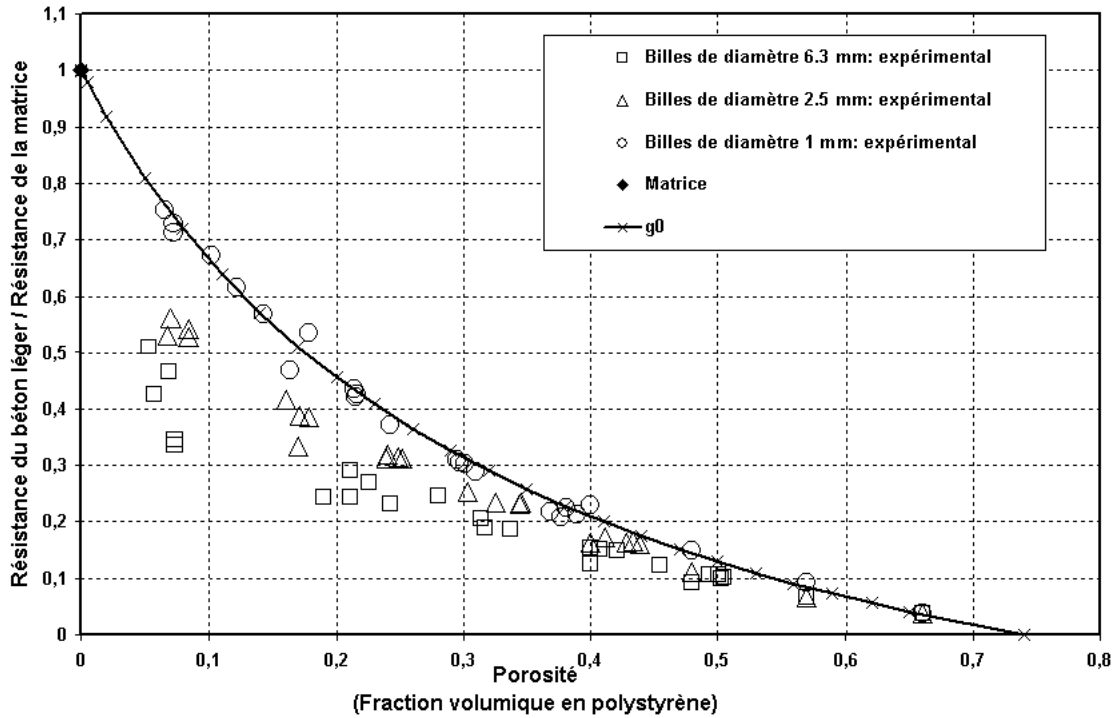


FIG. 4.7: Ajustement de la fonction hyperbolique approchant la borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$  grâce aux résistances normalisées obtenues expérimentalement avec les trois types de béton de polystyrène.

#### 4.4.3 Cas où $(l_g(p, \phi) \gg l_c)$ : rupture fragile

Dans le cas des bétons légers présentant une très faible porosité, nous avons observé expérimentalement que plus le rapport  $(\frac{\phi}{l_c})$  est grand, plus la rupture est brutale et la résistance en compression est faible. Ainsi, ce rapport sera appelé : “indice de fragilité mésoscopique” et noté  $\beta_m$ , par analogie avec l’indice de fragilité  $\beta$  présent dans la loi d’effet d’échelle de structure proposée par Bazant (Bazant, 1987; Bazant et Pfeiffer, 1987). Par conséquent,

nous stipulons que le mode de rupture du béton léger tend vers un mode fragile quand la longueur géométrique  $l_g(p, \phi)$  devient très grande par rapport à la longueur caractéristique ( $l_c$ ) (c-à-d quand la taille des billes ( $\phi$ ) ou l'espacement moyen entre les billes devient très grand par rapport à ( $l_c$ )). En effet, quand la taille de la zone d'élaboration de la fissuration devient négligeable devant la taille de la fissure créée (qui est proportionnelle à  $l_g(p, \phi)$ ), l'énergie dissipée dans cette zone devient aussi négligeable devant l'énergie de fissuration du matériau et la rupture de ce dernier devient fragile. Autrement dit, la rupture aura lieu dès l'amorçage de la première microfissure qui se transforme rapidement en une macrofissure se propageant de façon instable. Dans ce cas, la contrainte normalisée additionnelle  $\sigma_{\mathbf{N}}^{\text{ad}}$  nécessaire ici pour la propagation de cette macrofissure doit tendre asymptotiquement vers zero quand  $(\frac{l_g(p, \phi)}{l_c}) \rightarrow \infty$ . Par conséquent, la résistance normalisée du béton léger tend asymptotiquement vers la contrainte normalisée d'initiation de la microfissuration  $\sigma_{\mathbf{N}}^{\text{init}}(p)$ , qui constituera alors une borne inférieure pour cette résistance :

$$\mathbf{g}(p, \frac{l_g(p, \phi)}{l_c}) \rightarrow \mathbf{g}_{\infty}(p) = \sigma_{\mathbf{N}}^{\text{init}}(p) \quad \text{quand} \quad (\frac{l_g(p, \phi)}{l_c} \rightarrow \infty). \quad (4.9)$$

#### 4.4.4 Borne inférieure $\mathbf{g}_{\infty}(p)$

Pour une porosité ( $p$ ) donnée, la fonction  $\mathbf{g}_{\infty}(p)$  fournit la résistance normalisée du béton léger quand sa rupture est fragile (c-à-d à la fin de la phase élastique linéaire du comportement en compression du béton léger). L'identification de cette borne inférieure  $\mathbf{g}_{\infty}(p)$  est plus délicate que celle de la borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$ , car nous ne disposons pas de résultats expérimentaux pour ( $\beta_{\mathbf{m}} \rightarrow \infty$ ), c'est-à-dire quand la taille des billes ou l'espacement entre elles deviennent très grands par rapport à la longueur caractéristique ( $l_c$ ). En effet, pour les tailles des billes considérées dans l'étude expérimentale, la valeur maximale de  $\beta_{\mathbf{m}}$  est égale à  $(\frac{\phi_3}{l_c})$ , soit 8.4.

Ainsi, nous avons choisi d'approcher, *a priori*,  $\mathbf{g}_{\infty}(p)$  par une fonction hyperbolique ayant la même forme que  $\mathbf{g}_0(p)$ . En outre cette fonction doit vérifier  $\mathbf{g}_{\infty}(p_{\text{max}}) = 0$ . Elle s'écrit alors comme suit :

$$\mathbf{g}_{\infty}(p) = \frac{\gamma_{\infty}(1 - \frac{p}{p_{\text{max}}})}{(\delta_{\infty} + \frac{p}{p_{\text{max}}})}, \quad \text{pour } 0 < p \leq p_{\text{max}} \quad (4.10)$$

Pour identifier les deux coefficients  $\gamma_{\infty}$  et  $\delta_{\infty}$ , nous allons étudier l'évolution de  $\mathbf{g}_{\infty}(p)$  au voisinage de zero. En effet, cette fonction ne tend pas vers 1 quand ( $p \rightarrow 0$ ), comme c'est le cas pour la borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$ . Ceci est dû à l'hypothèse d'une rupture fragile du béton

léger qui engendre une chute importante de sa résistance (par rapport à celle de la matrice cimentaire), malgré une fraction volumique en polystyrène proche de zéro.

#### 4.4.4.1. $g_{\infty}(0^+)$

Théoriquement, le cas ( $p \rightarrow 0$ ) correspond à un calcul élastique fragile d'un milieu 3D infini renfermant une cavité sphérique (représentant une bille de polystyrène) et chargé en compression uniaxiale ( $\Sigma_{\infty}$ ) (cf. figure 4.8).

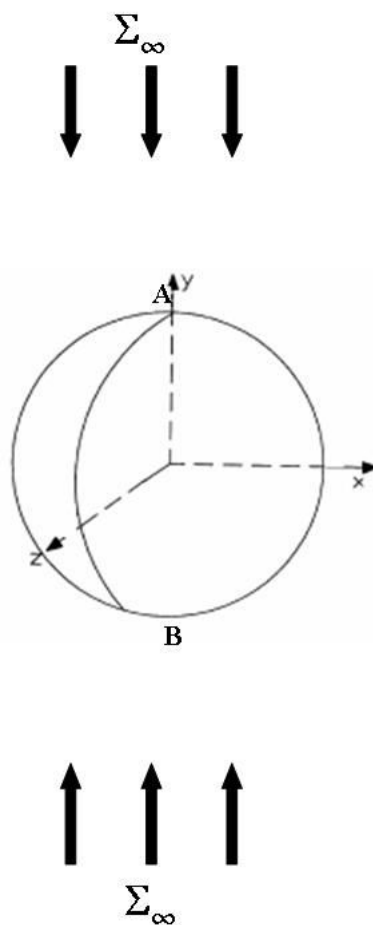


FIG. 4.8: Schéma d'un milieu 3D infini renfermant une cavité sphérique et chargé en compression simple : mode de rupture fragile par extension.

Par ailleurs, comme nous avons observé expérimentalement que les fissures dans le béton de polystyrène s'initient principalement autour des billes dans les zones tendues, nous supposons que la rupture a lieu par extension. Par conséquent, nous avons considéré un seuil de

rupture exprimé en fonction d'une déformation équivalente d'extension  $\epsilon_{\mathbf{M}}$ . La déformation équivalente utilisée par Mazars dans son modèle (Mazars, 1984) pour piloter l'endommagement a été choisie. Cette dernière s'exprime comme suit :

$$\epsilon_{\mathbf{M}} = \sqrt{\sum_i [\max(0, \epsilon_i)]^2}, \quad (4.11)$$

où  $\epsilon_i$  ( $i = 1$  à  $3$ ) sont les déformations principales. Ainsi, le critère de rupture du milieu infini troué s'exprime comme suit :

$$\epsilon_M = \epsilon^{cr}, \quad (4.12)$$

où  $\epsilon^{cr}$  est la déformation équivalente d'extension critique du milieu infini homogène, c'est-à-dire de la matrice. Par conséquent, la résistance normalisée de ce milieu infini élastique fragile renfermant une cavité sphérique s'identifie à :

$$\frac{R_{\text{cmilieu infini troué}}}{R_{\text{cmatrice}}} = \frac{\epsilon_{\mathbf{M}matrice}}{\epsilon_{\mathbf{M}}^{\max}}, \quad (4.13)$$

où  $\epsilon_{\mathbf{M}matrice}$  et  $\epsilon_{\mathbf{M}}^{\max}$  représentent respectivement la déformation d'extension équivalente dans la matrice et la déformation d'extension maximale dans le milieu infini autour de la cavité, sous l'action d'une même contrainte macroscopique de compression  $\Sigma_{\infty}$  de valeur quelconque. Pour identifier la valeur de l'expression (4.13), nous avons considéré une contrainte de compression unitaire ( $\Sigma_{\infty} = -1$ ). Grâce à la formule (4.11), la déformation homogène équivalente d'extension dans la matrice  $\epsilon_{\mathbf{M}matrice}$  s'identifie à :

$$\epsilon_{\mathbf{M}matrice} = \sqrt{2}\nu_m \left( \frac{-\Sigma_{\infty}}{E_m} \right) = \frac{\sqrt{2}\nu_m}{E_m}, \quad (4.14)$$

où  $\nu_m$  est le coefficient de Poisson de la matrice fixé ici à 0.2 et  $E_m$  est son module d'élasticité. La déformation d'extension maximale dans le milieu infini autour de la cavité s'exprime comme suit :

$$\epsilon_{\mathbf{M}}^{\max} = \sqrt{(\epsilon_x(A))^2 + (\epsilon_z(A))^2}, \quad (4.15)$$

où  $\epsilon_x(A)$  et  $\epsilon_z(A)$  sont les déformations d'extension au point A situé autour de la cavité (égales respectivement aux déformations  $\epsilon_x(B)$  et  $\epsilon_z(B)$  au point B (cf. figure 4.8)). Ces deux déformations sont égales et ont été déterminées analytiquement par Southwell et Gough (Southwell et Gough, 1926; Wang et Shrive, 1999) :

$$\epsilon_x(A) = \epsilon_z(A) = \frac{3(1 + 4\nu_m - 5\nu_m^2)}{14 - 10\nu_m} \left( \frac{-\Sigma_{\infty}}{E_m} \right) \quad (4.16)$$

Ainsi, nous avons :

$$\epsilon_{\mathbf{M}}^{\max} = \frac{3\sqrt{2}(1 + 4\nu_m - 5\nu_m^2)}{14 - 10\nu_m} \left( \frac{-\Sigma_{\infty}}{E_m} \right) \quad (4.17)$$

Par conséquent, la résistance normalisée du milieu infini troué dépend uniquement du coefficient de Poisson de la matrice  $\nu_m$  et s'exprime comme suit :

$$\frac{R_{\text{milieu infini troué}}}{R_{\text{matrice}}} = \frac{\nu_m(14 - 10\nu_m)}{3(1 + 4\nu_m - 5\nu_m^2)} \quad (4.18)$$

Ainsi, pour  $\nu_m = 0.2$ , la fonction  $\mathbf{g}_{\infty}(p)$  doit vérifier la condition suivante :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \mathbf{g}_{\infty}(p) = 0.5. \quad (4.19)$$

Cette condition met en évidence la chute brutale (d'environ 50%) de la résistance du béton léger par rapport à celle de la matrice cimentaire pour ( $p = 0^+$ ), dans le cas d'une rupture fragile.

Enfin, nous avons choisi d'approcher la variation de  $\mathbf{g}_{\infty}(p)$  autour de zero ( $\frac{d\mathbf{g}_{\infty}}{dp}(0^+)$ ) à l'aide de calculs éléments finis conduits avec CASTEM2000 sur un réseau (3D) troué périodique présentant une porosité proche de zero.

#### 4.4.4.2. $\frac{d\mathbf{g}_{\infty}}{dp}(0^+)$

Le réseau choisi est un réseau cubique centré (CC) où les trous sont modélisés par des sphères vides noyées dans une matrice. Il présente une compacité égale à  $(\frac{\pi\sqrt{3}}{8})$ , soit :  $p_{max}^* = 0.68$ . Les calculs EF sont conduits sur le huitième d'une cellule de base, grâce à la périodicité et aux différentes symétries de ce réseau. En outre, un soin particulier a été accordé à la finesse du maillage, notamment autour des trous. En effet, la valeur de la déformation d'extension maximale  $\epsilon_{\mathbf{M}}^{\max}$ , qui est atteinte autour des trous (cf figure 4.9), est sensible à la finesse du maillage (ceci est dû au fort gradient de déformation qui règne dans le réseau à cause de la présence des trous). Ainsi, nous avons considéré un maillage suffisamment fin autour des trous pour assurer l'indépendance des résultats vis-à-vis de la finesse du maillage et pour ne pas sous-estimer la valeur de cette déformation.

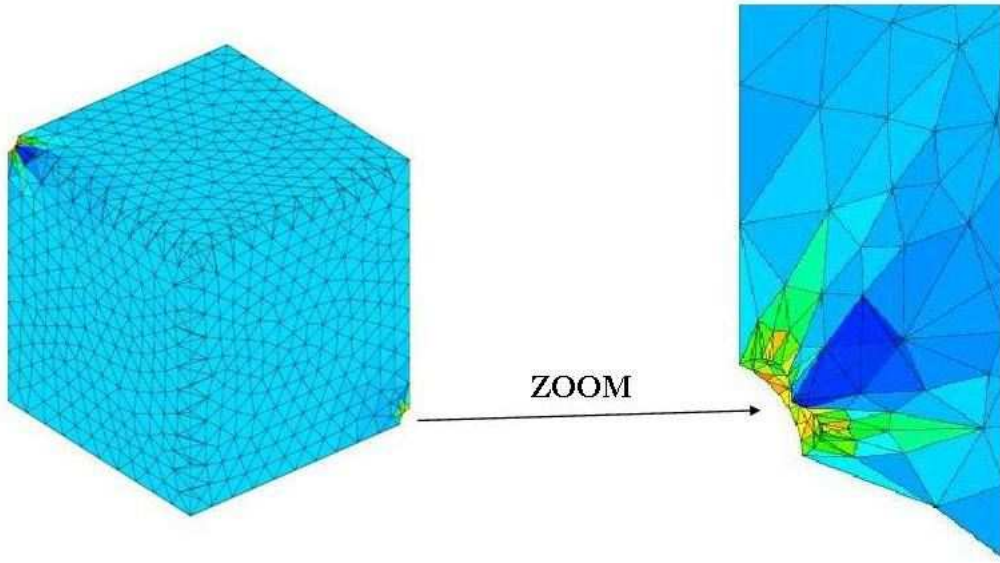


FIG. 4.9: Distribution des déformations élastiques équivalentes d'extension dans un huitième de la cellule de base d'un réseau périodique (CC) ayant une porosité proche de zero ( $p = 10^{-04}$ ) : maximum atteint autour des trous.

Par ailleurs, le même critère de rupture fragile par extension du milieu infini troué a été considéré. Par conséquent, la résistance normalisée de ce réseau troué, pour une porosité proche de zero, s'exprime comme suit :

$$\frac{\sigma(p)_{p \rightarrow 0}}{\sigma_{matrice}} = \frac{\epsilon_{\mathbf{M}matrice}}{\epsilon_{\mathbf{M}}^{\max}(p)_{p \rightarrow 0}}, \quad (4.20)$$

où  $\epsilon_{\mathbf{M}matrice}$  et  $\epsilon_{\mathbf{M}}^{\max}(p)$  représentent respectivement la déformation d'extension équivalente dans la matrice et la déformation d'extension maximale dans le réseau (CC), sous l'action d'une même contrainte macroscopique de compression  $\Sigma$ . Pour  $\Sigma = 1$ , la déformation équivalente  $\epsilon_{\mathbf{M}matrice}$  est donnée par l'équation (4.14). Rappelons aussi que la résistance normalisée du réseau périodique troué ne dépend que de  $\nu_m$  (fixé ici à 0.2) et par conséquent, la valeur choisie pour le module d'Young de la matrice pour ces calculs EF n'a pas d'influence sur cette résistance.

Ensuite, pour identifier la déformation d'extension maximale  $\epsilon_{\mathbf{M}}^{\max}$  dans le réseau troué, nous avons simulé l'essai de compression sur le huitième de la cellule de base. Ainsi, une contrainte de compression unitaire est appliquée tout en tenant compte des conditions de périodicité. Trois porosités proches de zero ont été testées ;  $p_1 = 10^{-04}$ ,  $p_2 = 5 \times 10^{-04}$  et  $p_3 = 10^{-03}$ , pour lesquelles nous avons obtenu les résultats suivants :



porosité ( $p$ )	finesse du maillage autour des trous (nombre d'éléments par trou)	$\frac{\sigma(p)}{\sigma_{matrice}}$
0.0001	28	0.502
0.0005	44	0.477
0.001	56	0.460

TAB. 4.1: Résultats des calculs EF en élasticité linéaire conduits sur le huitième des cellules de base de trois réseaux périodiques (CC) présentant des porosités proches de zéro.

Ainsi, nous observons que la résistance normalisée du réseau périodique troué obtenue numériquement pour ( $p = 10^{-04}$ ) surestime légèrement la valeur analytique ( $\frac{1}{2}$ ) obtenue avec un milieu infini 3D troué chargé en compression uniaxiale.

Pour déterminer la pente de la borne inférieure  $\mathbf{g}_\infty(p)$  autour de zero, nous avons supposé que sa variation en fonction de ( $p$ ), suit la même variation de la résistance normalisée obtenue avec le réseau périodique. En effet, quand  $p \rightarrow 0$ , nous considérons qu'il y a peu de billes dans la matrice et qu'elles sont très espacées. Par conséquent, nous considérons que leur distribution, qu'elle soit périodique ou aléatoire, a peu d'influence sur la résistance normalisée du béton léger. Ainsi, cette pente a été approchée par une interpolation linéaire en se basant sur trois porosités :  $p = 0$  (résultat analytique),  $p = 5 \times 10^{-04}$  et  $p = 10^{-03}$  (résultats numériques), soit :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{g}_\infty(p)}{dp} = -40. \quad (4.21)$$

Grâce aux équations (4.19) et (4.21), les deux coefficients  $\gamma_\infty$  et  $\delta_\infty$  ont été identifiés à :  $\gamma_\infty = 8.59 \times 10^{-03}$  et  $\delta_\infty = 1.72 \times 10^{-02} = 2\gamma_\infty$ . Ainsi, la borne inférieure  $\mathbf{g}_\infty(p)$  s'écrit comme suit :

$$\mathbf{g}_\infty(p) = \frac{(1 - \frac{p}{p_{max}})}{2(1 + 58.14 \frac{p}{p_{max}})}, \quad \text{pour } 0 < p \leq p_{max} \quad (p_{max} = 0.74). \quad (4.22)$$

## 4.5 Cas où ( $l_g(p, \phi) > l_c$ ) : loi d'effet de taille en puissance

En se basant sur l'analyse asymptotique précédente, nous déduisons que la résistance normalisée  $\mathbf{g}(p, \frac{l_g(p, \phi)}{l_c})$  du béton de polystyrène, dans le cas où ( $l_g(p, \phi) > l_c$ ), sera comprise

entre la borne inférieure  $\mathbf{g}_\infty(p)$  et la borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$ . En outre, pour une porosité ( $p$ ) fixée, nous stipulons que l'écart entre la résistance normalisée du béton léger et sa borne inférieure  $\mathbf{g}_\infty(p)$  (correspondant à un mode de rupture fragile) est piloté par la valeur de "l'indice de fragilité mésoscopique"  $\beta_m$ ; plus  $\beta_m$  est grand, plus la rupture du béton de polystyrène est fragile.

Par conséquent, nous proposons le modèle suivant pour prédire la résistance normalisée du béton de polystyrène en fonction de sa macroporosité ( $p$ ) et de  $\beta_m$  :

$$\mathbf{g}(p, \beta_m) = \underbrace{\mathbf{g}_\infty(p)}_{\sigma_N^{\text{init}}} + \underbrace{\mathbf{f}(\beta_m)(\mathbf{g}_0(p) - \mathbf{g}_\infty(p))}_{\sigma_N^{\text{ad}}} \quad \text{quand } \beta_m \geq 1. \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{f}$  est la loi d'effet de taille sur la résistance en compression de béton de polystyrène. Cette loi, qui est fonction de  $\beta_m$ , doit satisfaire les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\beta_m) = 1 & \text{quand } \beta_m = 1 \\ \mathbf{f}(\beta_m) \rightarrow 0 & \text{quand } \beta_m \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.24)$$

Ainsi, nous proposons une loi en puissance de  $\beta_m$ . L'exposant de cette loi a été identifié à  $(-1/3)$  grâce aux résistances normalisées expérimentales obtenues avec les trois types de béton de polystyrène et les éprouvettes ( $110 \times 220\text{mm}$ ) :

$$\mathbf{f}(\beta_m) = (\beta_m)^{-1/3} \quad \text{quand } \beta_m \geq 1, \quad (4.25)$$

## 4.6 Modèle proposé

Le modèle phénoménologique proposé pour prédire la résistance normalisée du béton de polystyrène en fonction de sa macroporosité ( $p$ ) et pour un rapport  $(\frac{\phi}{l_c})$  donné, s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\sigma^{VER}(p, \phi)}{\sigma_{matrice}^{VER}} = \begin{cases} \mathbf{g}_0(p) & \text{quand } \beta_m \leq 1 \\ \mathbf{g}_\infty(p) + (\beta_m)^{-1/3}(\mathbf{g}_0(p) - \mathbf{g}_\infty(p)) & \text{quand } \beta_m \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{g}_0(p) = \frac{0.45(1 - \frac{p}{p_{max}})}{(0.45 + \frac{p}{p_{max}})}, \quad \mathbf{g}_\infty(p) = \frac{(1 - \frac{p}{p_{max}})}{2(1 + 58.14\frac{p}{p_{max}})}$$

$$\text{et } \beta_m = \left(\frac{\phi}{l_c}\right)\left(\frac{p}{p_{max}} - 1\right)\left(\frac{5}{3}\left(\frac{p}{p_{max}}\right)^2 - \frac{p}{p_{max}} - 1\right) \quad (p_{max} = 0.74)$$

Grâce à la loi d'effet de taille ( $f(\beta_m) = \beta_m^{-1/3}$ ), la résistance normalisée du béton léger fournie par le modèle proposé, pour une porosité ( $p$ ) et un rapport  $(\frac{\phi}{l_c})$  donnés, sera comprise

entre la borne inférieure  $\mathbf{g}_\infty(p)$  et la borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$ . Un exemple est illustré par la figure 4.10 qui représente la courbe d'évolution de la résistance normalisée en fonction de la porosité ( $p$ ) pour le béton léger constitué par la matrice cimentaire  $M^1$  caractérisée par une longueur ( $l_c$ ) égale à 0.75mm, et renfermant des billes de diamètre ( $\phi_2 = 2.5mm$ ). Signalons que cette courbe coïncide avec la borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$  pour des porosités supérieures à 0.5, où l'effet de taille disparaît.

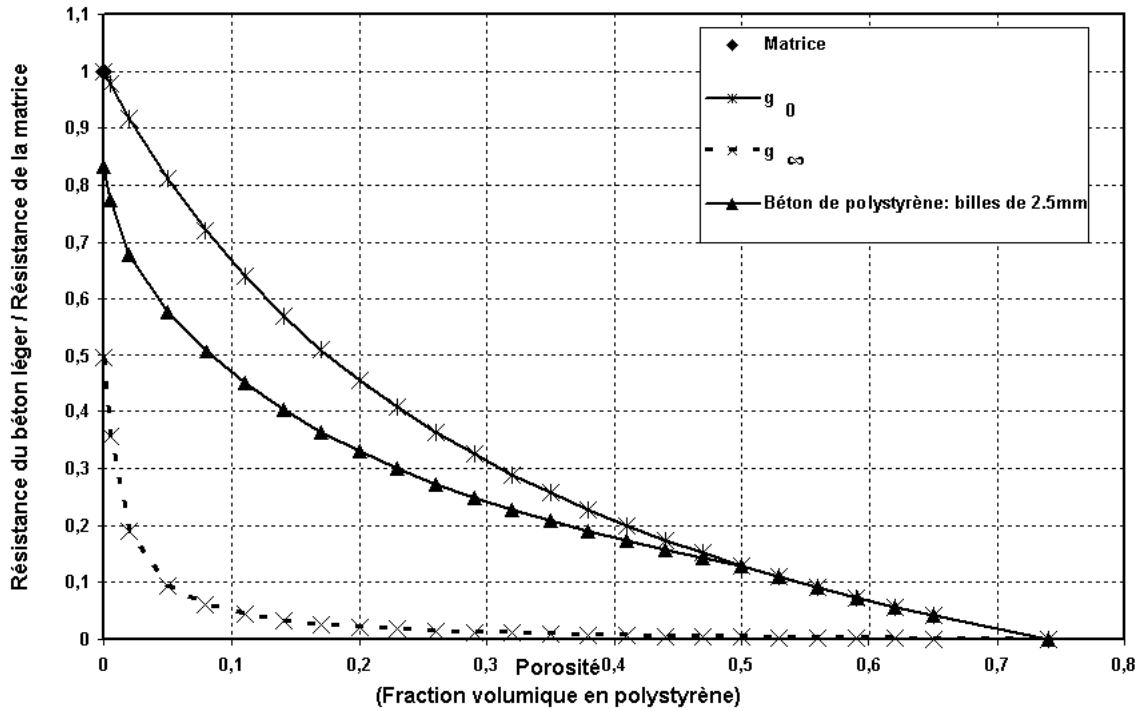


FIG. 4.10: Résistance normalisée du béton de polystyrène renfermant les billes de diamètre 2.5 mm en fonction de la porosité  $p$ , d'après le modèle proposé.

#### 4.6.1 Validation expérimentale

le modèle proposé donne une bonne approximation des résistances normalisées expérimentales obtenues avec les trois types de béton de polystyrène. En effet, nous avons une très bonne concordance entre les résultats du modèle et les résistances normalisées expérimentales obtenues avec les éprouvettes cylindriques ( $110 \times 220mm$ ) renfermant les billes de diamètres 1mm et 2.5mm (cf. figure 4.11). Rappelons que ces résistances ne sont pas affectées par un effet d'échelle de volume.

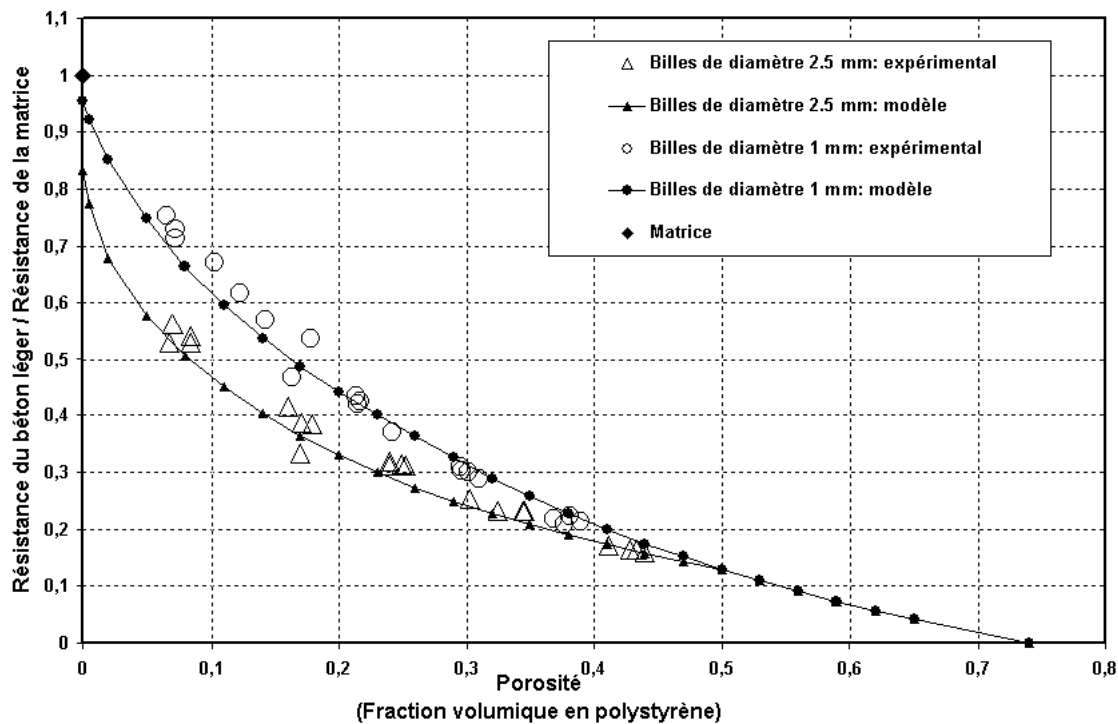


FIG. 4.11: Comparaison entre les résistances normalisées expérimentales et celles données par le modèle pour les bétons de polystyrène renfermant les billes de diamètres 1mm et 2.5mm.

En revanche, pour le béton léger renfermant les billes de diamètre 6.3mm, nous constatons que les résultats du modèle se situent légèrement en dessous des résistances normalisées obtenues expérimentalement avec les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) (cf. figure 4.12). Cependant, rappelons que ces résistances expérimentales sont affectées par un léger effet d'échelle de volume et par conséquent les résistances normalisées effectives de ce béton léger sont normalement plus faibles, ce qui est en accord avec les résultats du modèle.

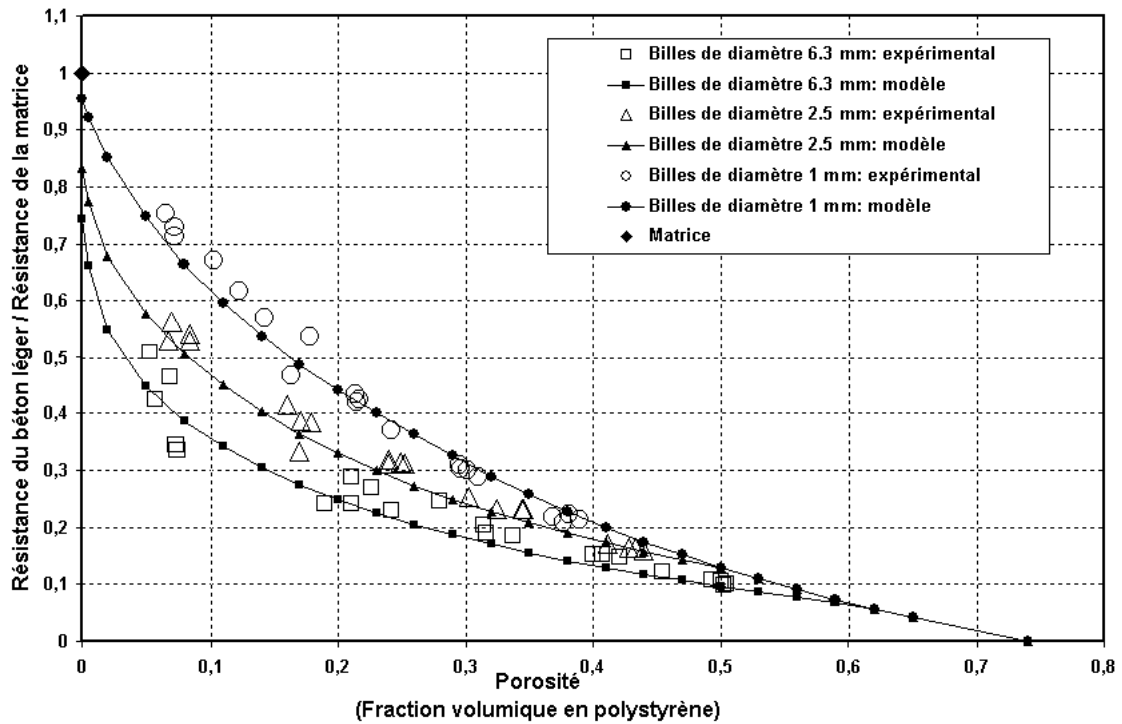


FIG. 4.12: Comparaison entre les résistances normalisées expérimentales et celles données par le modèle, pour les trois types de béton de polystyrène.

Enfin, pour valider le modèle pour des porosités supérieures à 0.5, nous nous sommes basés sur les résultats expérimentaux de l'étude réalisée par Parant et Le Roy (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005). Rappelons que notre étude expérimentale constitue une suite de cette étude, qui a été conduite sur les mêmes types de béton de polystyrène (même matrice  $M^1$  et mêmes diamètres des billes), mais avec des porosités allant de 0.4 à 0.66.

Ainsi, en comparant les résultats du modèle avec les résistances normalisées trouvées par Parant et Le Roy pour ( $p \geq 0.5$ ), nous confirmons le fait que le modèle fournisse une bonne approximation des résistances expérimentales (cf. figure 4.13).

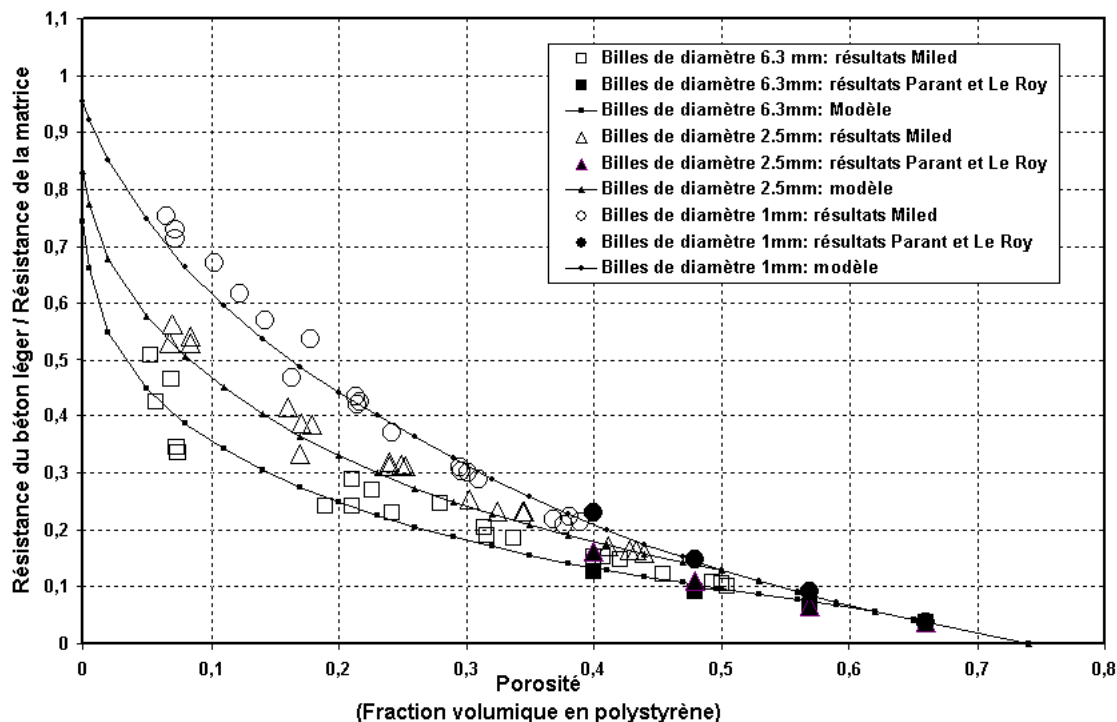


FIG. 4.13: Validation du modèle pour des porosités supérieures à 0.5.

## 4.7 Conclusions

La bonne concordance entre les résistances données par le modèle proposé et les résultats expérimentaux permet de valider l'approche phénoménologique adoptée pour expliquer l'effet de taille et identifier la loi le régissant. Cette approche, basée sur l'analyse des mécanismes de rupture dans le béton de polystyrène, montre que l'effet de taille émane suite à un changement de mécanisme de ruine. Ce changement se manifeste à travers une transition d'un mode de rupture ductile où le mécanisme prépondérant est une microfissuration diffuse dans la matrice cimentaire n'exhibant pas d'effet de taille, vers un mode fragile où le mécanisme prépondérant est une propagation instable d'une macrofissure engendrant un effet de taille très important. Ainsi, nous stipulons que cette transition est pilotée par le rapport d'une longueur géométrique ( $l_g$ ), dépendant à la fois de la taille des billes ( $\phi$ ) et de la macroporosité ( $p$ ) du béton, à une longueur caractéristique ( $l_c$ ). La longueur géométrique  $l_g(p, \phi)$  est identifiée à la taille des billes de polystyrène pour les très faibles porosités (quand  $p \rightarrow 0$ ) et à l'espacement entre ces billes pour les très fortes porosités (quand  $p \rightarrow p_{max}$ ).

Tandis que la longueur caractéristique ( $l_c$ ) est identifiée à la taille de la zone d'élaboration de la fissuration dans la matrice cimentaire. Celle-ci a été fixée à ( $3 \times l_m$ ), où ( $l_m$ ) est la taille de la plus grosse hétérogénéité de la matrice. Ainsi, plus le rapport ( $\frac{l_g(p, \phi)}{l_c}$ ), appelé indice de fragilité mésoscopique et noté ( $\beta_m$ ), est grand, plus la rupture du béton léger est fragile. Par ailleurs, en se basant sur une analyse asymptotique de l'effet de taille, une loi d'échelle en puissance de ( $\beta_m$ ) a été proposée. L'exposant de cette loi a été identifié à ( $-1/3$ ) grâce aux résultats expérimentaux.

Enfin, grâce à cette loi d'échelle, la résistance normalisée du béton léger pour une porosité ( $p$ ) et un rapport ( $\frac{\phi}{l_c}$ ) donnés, sera comprise entre une borne inférieure  $\mathbf{g}_\infty(p)$  correspondant à un mode de rupture fragile et une borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$  correspondant à un mode ductile. Ces deux bornes ont été approchées grâce aux résultats expérimentaux et à des calculs analytiques et numériques par éléments finis.

# Chapitre 5

## Modélisation numérique de l'effet de taille

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>129</b>
<b>5.2</b>	<b>Théorie des équivalences</b>	<b>129</b>
5.2.1	Exposé général	129
5.2.2	Le modèle équivalent	130
<b>5.3</b>	<b>Modélisation proposée</b>	<b>133</b>
5.3.1	Milieu homogène discret équivalent	134
5.3.2	Génération de la macroporosité	136
5.3.3	Schéma de calcul	137
<b>5.4</b>	<b>Résultats des simulations</b>	<b>139</b>
5.4.1	VER pour la résistance en compression	140
5.4.2	Effet de taille	141
5.4.3	Mode de rupture	142
<b>5.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>142</b>

---





## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une modélisation numérique simple qui rend compte de l'effet de taille observé expérimentalement sur la résistance en compression du béton de polystyrène. Le modèle proposé est de type réseau. Ce type de modèle a été déjà utilisé pour reproduire les effets d'échelle de volume (Hermann et al., 1989; Sab et Laalai, 1993; Laalai et Sab, 1994) et de structure (Bazant et al., 1990; Schlangen et Garboczi, 1996; Ince et al., 2003; Cusatis et al., 2003a,b) dans les matériaux quasi-fragiles de type bétons et il s'est avéré pertinent. Par ailleurs, la discrétisation du milieu continu troué représentant le béton de polystyrène est basée sur la théorie dite des équivalences (Absi, 1978).

Dans la première partie de ce chapitre (section 5.2), nous rappelons succinctement le principe de la théorie des équivalences. Ensuite, nous présentons la modélisation adoptée et le schéma de calcul utilisé (section 5.3). Enfin, nous présentons et commentons les résultats obtenus (section 5.4).

## 5.2 Théorie des équivalences

La théorie des équivalences proposée par Absi (Absi, 1978) est une méthode de résolution numérique permettant de substituer à l'étude d'un corps continu chargé  $C$  celle d'un autre corps  $C'$  généralement discret. L'idée principale est d'approcher l'énergie potentielle totale du corps  $C$  par celle du corps  $C'$ .

### 5.2.1 Exposé général

Considérons un corps déformable  $C$  occupant un volume  $\Omega$  et soumis à un chargement dérivant d'un potentiel  $\Psi$ . Le potentiel total  $\Pi$  du corps  $C$  s'écrit alors :

$$\Pi = \mathbf{W} + \Psi, \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{W}$  est le potentiel de déformation du corps  $C$ . En désignant par  $\mathbf{w}$  la densité du potentiel  $\mathbf{W}$  par unité de volume, l'expression précédente s'écrit :

$$\Pi = \int_{\Omega} \mathbf{w} d\Omega + \Psi \quad (5.2)$$

Dans le cas d'un comportement élastique, la résolution de ce problème revient à trouver un champ de déplacement cinématiquement admissible minimisant la fonctionnelle  $\Pi$  ( $\delta\Pi = 0$ ). Considérons maintenant un autre corps  $C'$  occupant le même volume  $\Omega$  et soumis au même chargement que le corps  $C$ . En désignant par  $\mathbf{w}'$  sa densité d'énergie de déformation. Le potentiel total  $\Pi'$  du corps  $C'$  s'écrit :

$$\Pi' = \int_{\Omega} \mathbf{w}' d\Omega + \Psi \quad (5.3)$$

Dans le cas d'un comportement élastique, la résolution de ce problème revient aussi à trouver un champ de déplacement cinématiquement admissible minimisant la fonctionnelle  $\Pi'$  ( $\delta\Pi' = 0$ ).

Dans le cas où ( $\delta\Pi = \delta\Pi'$ ), les deux systèmes sont dits équivalents. Ils admettent le même champ de déplacement solution. En effet, tout champ de déplacement solution du premier problème l'est aussi pour le second et l'on doit avoir :

$$\delta\Pi = \delta\Pi' = 0 \quad (5.4)$$

Il y a, en particulier, équivalence dans le cas où les deux densités d'énergie de déformation sont égales :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' \quad (5.5)$$

La théorie des équivalences s'applique aussi dans le cas où :

$$\Pi = a\Pi', \quad (5.6)$$

où  $a$  est un coefficient quelconque, même si les deux corps n'occupent pas le même volume  $\Omega$ . Dans ce cas, on retrouve la condition de similitude entre un corps réel et son modèle réduit. Enfin, l'équivalence peut être réalisée entre deux corps continus ou entre deux corps discrets ou bien entre un corps continu et un corps discret.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons essentiellement à l'équivalence entre un milieu continu bidimensionnel et un milieu discret formé par un réseau de barres et nous nous limiterons au cas du modèle carré dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope. Ainsi, la détermination des caractéristiques élastiques du modèle équivalent s'effectuera en identifiant les expressions des densités d'énergies de déformation ( $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ ).

## 5.2.2 Le modèle équivalent

Soit un milieu continu bidimensionnel  $C$  homogène et élastique isotrope, occupant un volume  $\Omega$ . Ce milieu, caractérisé par un module d'Young  $E$  et un coefficient de Poisson

$\nu$ , est en équilibre sous l'action d'un chargement classiquement décrit par des données statiques (forces de volume, composantes du vecteur contrainte sur une partie du bord) et des données cinématiques complémentaires (composantes du déplacement sur une partie du bord).

Nous substituons à ce milieu continu un milieu discret équivalent. Le milieu discret est un réseau de barres dont la rigidité globale est équivalente à celle du milieu continu (cf. figure 5.1). Ici l'équivalence entre le milieu continu et le milieu discret a le même sens énergétique que celui qui fonde la méthode des éléments finis. En particulier, le champ de déplacement obtenu par extrapolation des déplacements aux noeuds du réseau constitue une estimation du champ de déplacement du milieu continu aussi précise que celle obtenue avec un calcul éléments finis.

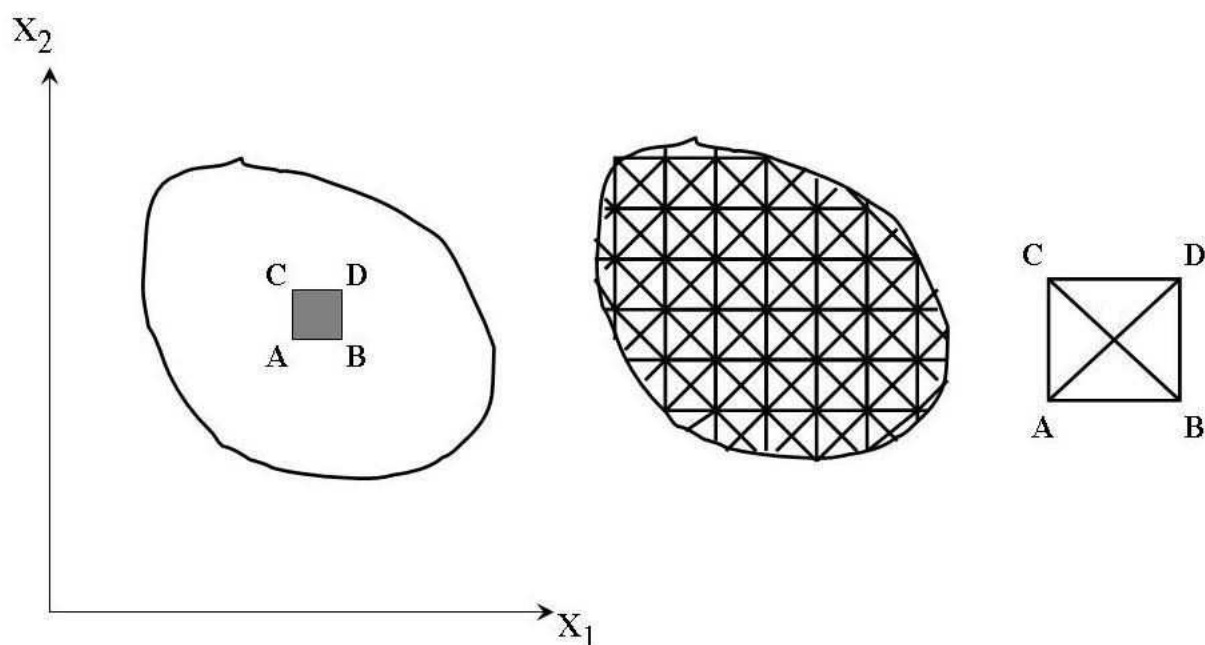


FIG. 5.1: Discretisation du milieu continu.

Le réseau de barres est généré par une maille élémentaire carrée présentant des articulations aux noeuds A, B, C et D. Ainsi, toutes les barres (AB, BD, CD, AC, BC et AD) travaillent en traction-compression. En outre, pour des raisons de symétrie, les barres horizontales (AB et CD) et verticales (AC et BD) ont la même longueur notée  $l$  et le même module d'Young noté  $k$ . En revanche, les barres diagonales (BC et AD) ont une

longueur égale à  $\sqrt{2}l$  et un module d'Young noté  $c$ . Enfin, toutes les barres ont la même section  $S$ . Par conséquent, les barres horizontales et verticales (AB, CD, BD et AC) ont la même raideur ( $K = klS$ ), tandis que les barres diagonales (BC et AD) ont une raideur ( $C = c\sqrt{2}lS$ ).

Ainsi, l'équivalence entre l'élément continu (ABCD) et l'élément discret équivalent (ABCD) est obtenue en identifiant l'expression de l'énergie de déformation de l'élément continu  $W(\underline{\mathbf{E}})$  sous l'action d'un champ de déformation macroscopique  $\underline{\mathbf{E}}$  à celle de l'énergie de déformation de l'élément discret équivalent  $W'(\underline{\mathbf{E}})$  sous l'action du même chargement. Cette équivalence énergétique permet de déterminer les caractéristiques élastiques (les raideurs) des différentes barres de l'élément discret équivalent en fonction des données élastiques du milieu continu ( $E, \nu$ ) et de l'aire de l'élément continu considéré.

### 5.2.2.1. Energie de déformation de l'élément discret équivalent

Nous commençons par identifier l'expression de l'énergie de déformation  $W'(\underline{\mathbf{E}})$  de l'élément discret équivalent, représenté dans la figure 5.1, sous l'action du champ de déformation macroscopique  $\underline{\mathbf{E}}$  donné par :

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ (E_{21} = E_{12}) & E_{22} \end{bmatrix}$$

Comme les barres horizontales (AB et CD) et verticales (BD et AC) sont communes à deux mailles du réseau, nous considérons qu'elles contribuent à l'énergie de déformation  $W'(\underline{\mathbf{E}})$  de l'élément discret par la moitié de leur énergie de déformation. En revanche, les barres diagonales (BC et AD) contribuent par la totalité de leur énergie. Ainsi,  $W'(\underline{\mathbf{E}})$  s'exprime comme suit :

$$\mathbf{W}'(\underline{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}(W_{AB} + W_{CD}) + \frac{1}{2}(W_{BD} + W_{AC}) + W_{BC} + W_{AD} \quad (5.7)$$

Par ailleurs, rappelons que l'énergie de déformation élastique emmagasinée dans une barre de longueur  $l$ , de section  $S$  et de module d'Young  $E_b$ , sous l'action du champ de déformation macroscopique  $\underline{\mathbf{E}}$  s'écrit comme suit :

$$\mathbf{W}'_{\text{barre}}(\underline{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}K\epsilon^2, \quad (5.8)$$

avec  $K = E_b l S$  est la raideur de la barre,  $\epsilon = \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{t}}$  est la déformation élastique de la barre et  $\underline{\mathbf{t}}$  est un vecteur tangent à la barre de norme unitaire.

Ainsi, l'énergie de déformation  $W'(\underline{\underline{\mathbf{E}}})$  de l'élément discret (ABCD) s'écrit :

$$\mathbf{W}'(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \left[ \frac{1}{2}K + \frac{1}{4}C \right] (E_{11}^2 + E_{22}^2) + CE_{12}^2 + \frac{1}{2}CE_{11}E_{22}, \quad (5.9)$$

### 5.2.2.2. Energie de déformation de l'élément continu

L'énergie de déformation élastique  $W(\underline{\underline{\mathbf{E}}})$  de l'élément continu (ABCD) sous l'action du champ de déformation macroscopique  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$  s'écrit :

$$\mathbf{W}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \frac{l^2}{2} \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (5.10)$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  est la matrice de rigidité du milieu continu homogène élastique linéaire isotrope  $(E, \nu)$ . L'équation (5.10) s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\text{où } a = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad b = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \text{ et } d = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Ainsi, l'énergie de déformation élastique de l'élément continu (ABCD) s'exprime comme suit :

$$\mathbf{W}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \frac{l^2}{2} [a(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 4dE_{12}^2 + 2bE_{11}E_{22}] \quad (5.12)$$

Nous trouvons alors par identification de (5.9) et (5.12) :

$$\begin{cases} K = C = \left(\frac{3}{4}\right)l^2E \\ \nu = \left(\frac{1}{3}\right) \end{cases} \quad (5.13)$$

Par conséquent, l'équivalence entre le modèle discret carré considéré et le milieu continu homogène élastique linéaire isotrope est réalisée uniquement dans le cas où toutes les barres ont la même raideur donnée par (5.13). En outre, le milieu continu doit avoir un coefficient de Poisson égal à  $\left(\frac{1}{3}\right)$ .

## 5.3 Modélisation proposée

Considérons un milieu continu (2D) hétérogène renfermant une distribution aléatoire de trous de même taille et présentant une macroporosité  $(p)$ . On s'intéresse à la rupture de ce

milieu sous un chargement monotone de compression.

Nous considérons un chargement décrit par des données statiques toutes nulles et des données cinématiques dépendant linéairement d'une seule variable scalaire notée  $\Delta$  homogène à un déplacement.  $\Delta$  est le paramètre de chargement qui croit en fonction du temps. Nous avons alors :

$$\xi_i(\underline{\mathbf{x}}) = \Delta \cdot \overset{\circ}{\xi}_i(\underline{\mathbf{x}}) \quad \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_i, \quad (5.14)$$

où  $\xi_i$  est la  $i^e$  composante du déplacement et  $\overset{\circ}{\xi}_i(\underline{\mathbf{x}})$  est une fonction donnée définie sur une partie du bord de  $\Omega$  notée  $\partial\Omega_i$ . L'application du théorème des travaux virtuels nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) d\Omega = \Delta \cdot \sum_i \int_{\partial\Omega_i} \overset{\circ}{\xi}_i \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j ds, \quad (5.15)$$

pour tout champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  statiquement admissible et tout champ cinématique  $\underline{\underline{\xi}}$  compatible avec (5.14). Notons :

$$F = \sum_i \int_{\partial\Omega_i} \overset{\circ}{\xi}_i \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j ds.$$

Il vient alors :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) d\Omega = \Delta \cdot F \quad (5.16)$$

Ainsi,  $\Delta$  est le paramètre cinématique de chargement et  $F$  est le paramètre statique associé.

### 5.3.1 Milieu homogène discret équivalent

Nous substituons au milieu continu homogène élastique linéaire isotrope un milieu discret équivalent. La discrétisation est basée sur la théorie des équivalences. Le milieu discret équivalent est un réseau carré de barres de taille  $(L \times L)$ , généré par la maille élémentaire carrée décrite précédemment (cf. figure 5.2). Les barres horizontales et verticales de cette maille élémentaire ont une longueur  $L_c$  unitaire et les barres diagonales ont une longueur égale à  $\sqrt{2}L_c$ . Notons que la longueur  $L_c$  correspondant à la taille de la maille élémentaire du réseau est introduite ici comme étant une taille caractéristique du matériau qui caractérise la taille de ses hétérogénéités et qui peut s'identifier à la taille de la zone d'élaboration de la fissuration.

Rappelons aussi qu'avec une telle maille, le milieu continu homogène élastique linéaire isotrope doit avoir un coefficient de Poisson  $\nu$  égal à  $1/3$  et que toutes les barres doivent présenter la même raideur. Celle-ci notée  $K$  a été identifiée dans la section précédente à  $(\frac{3}{4}L_c^2E)$ .

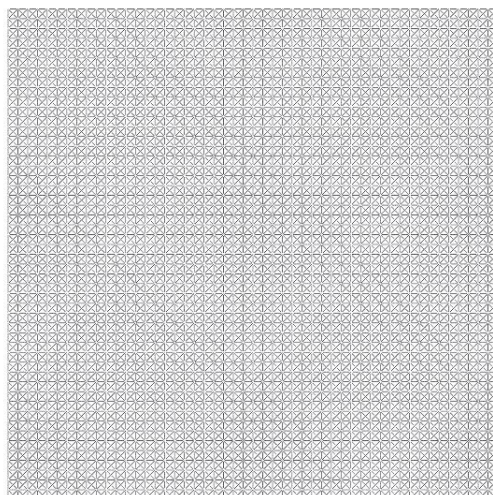


FIG. 5.2: Milieu homogène discret équivalent de taille  $(50 \times 50)$ .

Par ailleurs, les barres de ce réseau ont un comportement élastique fragile avec un seuil de rupture déterministe exprimé comme suit :

$$\epsilon_i = \epsilon^{cr} \quad (5.17)$$

avec  $\epsilon^i$  est la déformation d'extension de la barre  $i$ , qui est donnée par :

$$\epsilon^i = \frac{|U_{j1}^i - U_{k1}^i|}{L_c}, \quad (5.18)$$

où  $U_{j1}^i$  et  $U_{k1}^j$  représentent respectivement les déplacements horizontaux suivant l'axe  $(X_1)$  des noeuds  $j$  et  $k$  de la barre  $i$ .

La déformation d'extension critique  $\epsilon^{cr}$  a été identifiée à la déformation équivalente d'extension critique  $\epsilon_M^{cr}$  du milieu continu homogène (Mazars, 1984). Pour une matrice élastique fragile,  $\epsilon_M^{cr}$  est donnée par :

$$\epsilon_M^{cr} = \sqrt{\sum_i [\max(0, \epsilon_i)]^2} = \nu\sqrt{2} \left( \frac{\sigma_m}{E_m} \right) \quad (5.19)$$

où  $\nu_m$  est le coefficient de Poisson de la matrice égal ici à  $1/3$ ,  $E_m$  est son module d'élasticité et  $\sigma_m$  est sa résistance en compression.



### 5.3.2 Génération de la macroporosité

Dans le modèle considéré, les trous ont une forme carrée et leur taille  $D$  est un multiple entier de la taille de la maille élémentaire  $L_c$  :

$D = h_c$  avec  $h \geq 1$  Ainsi, pour générer des trous de taille  $D$ , pour une macroporosité ( $p$ ) fixée, nous avons procédé de la façon suivante :

nous avons considéré un pavage du réseau à l'aide de mailles carrées de taille  $(D \times D)$  et nous avons discrétisé chaque maille  $m$  par la maille élémentaire décrite précédemment. Ensuite, nous avons attribué à chaque maille un nombre aléatoire  $p_m$  généré selon la loi uniforme entre 0 et 1. Ce nombre  $p_m$  représente la porosité locale de la maille ( $m$ ). Ainsi, une maille  $m$  dont la porosité  $p_m$  vérifie  $p_m \leq p$  représente un trou. Elle est donc enlevée en lui associant une rigidité presque nulle (cf. figure 5.3). En effet, nous avons attribué aux barres appartenant exclusivement à cette maille une raideur presque nulle ou négligeable par rapport à leur raideur initiale  $K$  ( $\frac{K}{10^{10}}$ ). En revanche, nous avons attribué la moitié de la raideur initiale ( $\frac{K}{2}$ ) pour toute barre commune à la maille  $m$  et à une autre maille avoisinante. Notons qu'ici aussi l'équivalence entre le milieu continu élastique troué et le réseau élastique troué est énergétique, puisque les deux milieux ont des rigidités globales très proches.

Ainsi, la répartition des trous représentés par les mailles carrées enlevées est aléatoire puisqu'elle suit le processus aléatoire de la génération des porosités. Par ailleurs, la porosité ( $p$ ) du réseau varie légèrement d'une réalisation à l'autre à cause de ce processus aléatoire.

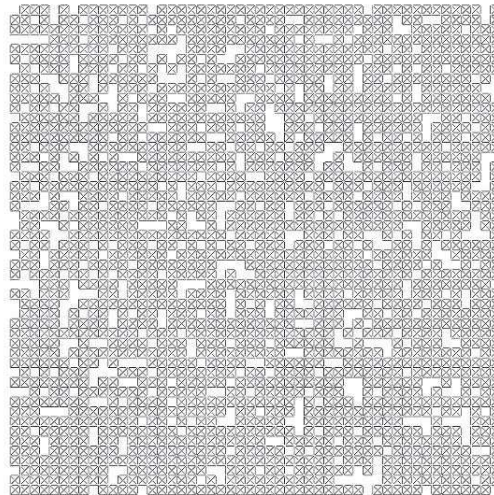


FIG. 5.3: Une réalisation aléatoire d'un réseau carré troué de taille  $(50 \times 50)$  et présentant une macroporosité égale à 20%.

### 5.3.3 Schéma de calcul

Une fois la macroporosité générée, le problème devient complètement déterministe et la simulation de la rupture progressive des barres du réseau troué, au cours d'un essai de compression monotone, devient conceptuellement très simple. En effet, il s'agit de faire des calculs élastiques sur ce réseau troué, d'enlever les barres qui dépassent le critère de rupture et de réitérer l'opération jusqu'à la ruine complète du réseau. Ainsi, le calcul comporte les étapes suivantes :

#### 5.3.3.1. Etape 1

Nous imposons un chargement de compression uniaxiale suivant l'axe  $\mathbf{X}_2$  piloté par le paramètre de chargement  $\Delta$ , tout en tenant compte des conditions de périodicité sur les bords  $(\partial C^{k+}, \partial C^{k-}, k = 1, 2)$  du réseau troué. Ces conditions ont été détaillées dans le deuxième chapitre (cf. section 2.2.2.3). Elles s'écrivent, dans ce cas, comme suit :

1. Pour les noeuds en vis-à-vis de  $(\partial C^{1+}, \partial C^{1-})$  :

$$\begin{cases} (U_1^+ - U_1^-) - (U_{réf}^{1+} - U_{réf}^{1-}) = 0 \\ U_2^+ - U_2^- = 0 \end{cases}$$

où  $U_{réf}^{1+}$  et  $U_{réf}^{1-}$  sont les déplacements suivant l'axe  $\mathbf{X}_1$  d'une paire de noeuds dits "noeuds de référence" situés en vis-à-vis sur les bords  $(\partial C^{1+}, \partial C^{1-})$ .

Pour les noeuds en vis-à-vis de  $(\partial C^{2+}, \partial C^{2-})$  :

$$\begin{cases} U_1^+ - U_1^- = 0 \\ U_2^+ - U_2^- = \Delta \end{cases}$$

Notons que la valeur initiale du paramètre de chargement  $\Delta$  est choisie de telle façon qu'aucune barre ne dépasse le critère de rupture, afin d'avoir la valeur initiale du module d'élasticité macroscopique équivalent du réseau périodique troué sain.

#### 5.3.3.2. Etape 2

Nous résolvons ensuite le problème élastique pour ce chargement initial après assemblage de la matrice de rigidité du réseau troué sain. Cette résolution revient à trouver les déplacements aux noeuds du réseau et donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathbf{R}_0^{\text{sain}} \cdot \mathbf{U}_0^{\text{sain}} = \mathbf{F}, \quad (5.20)$$

où  $\mathbf{R}_0^{\text{sain}}$  est la matrice de rigidité globale du réseau troué à l'état initial sain, obtenue par assemblage des différentes matrices de rigidité  $\mathbf{R}_0^i$  des barres ( $\mathbf{R}_0^{\text{sain}} = \sum_i \mathbf{R}_0^i$ ),  $\mathbf{U}_0^{\text{sain}}$  est

la matrice colonne des déplacements nodaux à l'état initial et  $\mathbf{F}$  est la matrice colonne des forces généralisées.

Une fois les déplacements nodaux déterminés, nous vérifions l'équilibre des noeuds se situant à l'intérieur du réseau en s'assurant que la condition suivante est satisfaite :

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{U}^i = 0, \quad (5.21)$$

où  $\mathbf{F}^i$  est la matrice colonne des efforts dans la barre  $i$  et  $\mathbf{U}^i$  est la matrice colonne des déplacements de ses noeuds. Enfin, notons que la résolution du système numérique (5.1), tout en tenant compte des conditions aux limites et des conditions de périodicité, est faite à l'aide de la méthode du Lagrangien augmenté. Le principe de cette méthode est détaillé dans l'annexe A.

### 5.3.3.3. Etape 3

Nous testons le critère de rupture sur toutes les barres du réseau. Ensuite, nous enlevons les barres cassées en leur attribuant une raideur presque nulle ( $\frac{K}{10^{10}}$ ).

### 5.3.3.4. Etape 4

Nous incrémentons le paramètre de chargement  $\Delta$  et nous reconduisons la résolution du problème élastique (5.20) après assemblage de la nouvelle matrice de rigidité ( $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_0^{\text{sain}} - \sum_{i \in Br} \mathbf{R}^i$ , où  $Br$  est l'ensemble des barres rompues). Nous testons de nouveau le critère de rupture pour toutes les barres et nous enlevons les barres rompues.

### 5.3.3.5. Etape 5

Nous réitérons l'étape 4 jusqu'à la rupture complète du réseau troué. Pour chaque itération  $n$  correspondant à un pas de chargement  $\Delta_n$ , nous déterminons le paramètre statique associé  $F_n$  et la contrainte de compression résultante  $\Sigma_n$ . Celle-ci est identifiée à l'aide de la formule suivante :

$$\Sigma_n = \frac{2W'_n}{\Delta_n L}, \quad (5.22)$$

où  $W'_n$  est l'énergie de déformation élastique du réseau à l'itération  $n$ , qui est donnée par :

Pour une taille du réseau ( $L \times L$ ) et une taille des trous  $D$ , la contrainte de compression  $\Sigma_n$  ainsi que la déformation macroscopique associée ( $E_{22} = \frac{\Delta_n}{L}$ ) sont moyennées sur plusieurs réalisations aléatoires. Ainsi, il faut tester un nombre de réalisations suffisamment grand pour obtenir des résultats fiables. Pour cette raison, nous allons utiliser la méthode de Monte-Carlo pour déterminer le nombre de réalisations nécessaire pour chaque type de réseau testé.

**Rappel sur le principe de la méthode de Monte-Carlo :** rappelons que la méthode de Monte-Carlo a pour but d'estimer l'espérance  $E(Z)$  d'une variable aléatoire  $Z$ , à partir de la moyenne arithmétique  $\bar{Z}$  sur  $N$  réalisations indépendantes de  $Z$ . En effet, Quand  $N$  tend vers l'infini,  $E(Z)$  se trouve avec une probabilité de 95% dans l'intervalle :

$$E(Z) \in [\bar{Z}_N - \varepsilon_N \bar{Z}_N, \bar{Z}_N + \varepsilon_N \bar{Z}_N] \quad (5.24)$$

où  $\varepsilon_N$  est l'erreur relative donnée par :

$$\varepsilon_N = 1.96 \frac{\sigma_N}{\bar{Z}_N \sqrt{N}} \quad (5.25)$$

Rappelons aussi que :

$$\bar{Z}_N = \frac{1}{N} (Z_1 + \dots + Z_N) \quad (5.26)$$

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (Z_i - \bar{Z}_N)^2 \quad (5.27)$$

Dans la suite, nous allons choisir une erreur relative  $\varepsilon_N$  inférieure à 4% et déterminer, pour chaque type de réseau, le nombre  $N$  de réalisations nécessaire pour ne pas dépasser cette erreur. Ce test sera fait sur les valeurs moyennes des modules d'élasticité apparents des différents réseaux testés. En effet, ces derniers doivent avoir des modules d'élasticité très proches car ils présentent des macroporosités très proches.

Ainsi, l'étude de l'effet de taille est faite sur les courbes de compression moyennes ( $\Sigma, E_{22}$ ) obtenues avec un réseau de taille ( $L \times L$ ) en faisant varier la taille  $D$  des trous. Cependant, nous devons d'abord éliminer l'effet d'échelle de volume en déterminant le rapport ( $\frac{L}{D}$ ) à partir duquel le VER sera atteint pour la résistance en compression du réseau considéré.

## 5.4 Résultats des simulations

Pour toutes les simulations, nous avons fixé la valeur de la macroporosité à 20%. Pour la matrice, nous avons considéré un module d'élasticité égal à 40000 *MPa* et une résistance

en compression égale à  $160 \text{ MPa}$  (rappelons aussi que son coefficient de Poisson est imposé à  $\frac{1}{3}$ ). Ainsi, le seuil de rupture de la matrice  $\epsilon_M^{cr}$  est égal à  $1.33 \cdot 10^{-3}$ .

### 5.4.1 VER pour la résistance en compression

Quatre réseaux ayant respectivement les tailles croissantes suivantes :  $(10 \times 10)$ ,  $(20 \times 20)$ ,  $(30 \times 30)$  et  $(50 \times 50)$  ont été testés . Ils présentent tous un rapport  $(\frac{D}{L_c} = 1)$ . Nous avons trouvé que le VER pour la résistance en compression du réseau considéré est atteint pour un rapport  $(\frac{L}{D})$  égal à 20. En effet, la courbe de compression moyenne obtenue avec un réseau de taille  $(20 \times 20)$  est similaire à celles obtenues avec les réseaux de tailles  $(30 \times 30)$  et  $(50 \times 50)$ . En revanche, le VER n'est pas encore atteint pour la résistance en compression pour  $(\frac{L}{D} = 10)$ , puisque nous avons une augmentation de la résistance moyenne de 29% avec le réseau de taille  $(10 \times 10)$  par rapport aux résistances moyennes données par les autres réseaux (cf. figure 5.4). Notons que pour ces résultats, l'erreur relative  $\epsilon_N$  est inférieure à 4% dans la phase élastique et qu'elle est de l'ordre de 5% au pic d'effort.

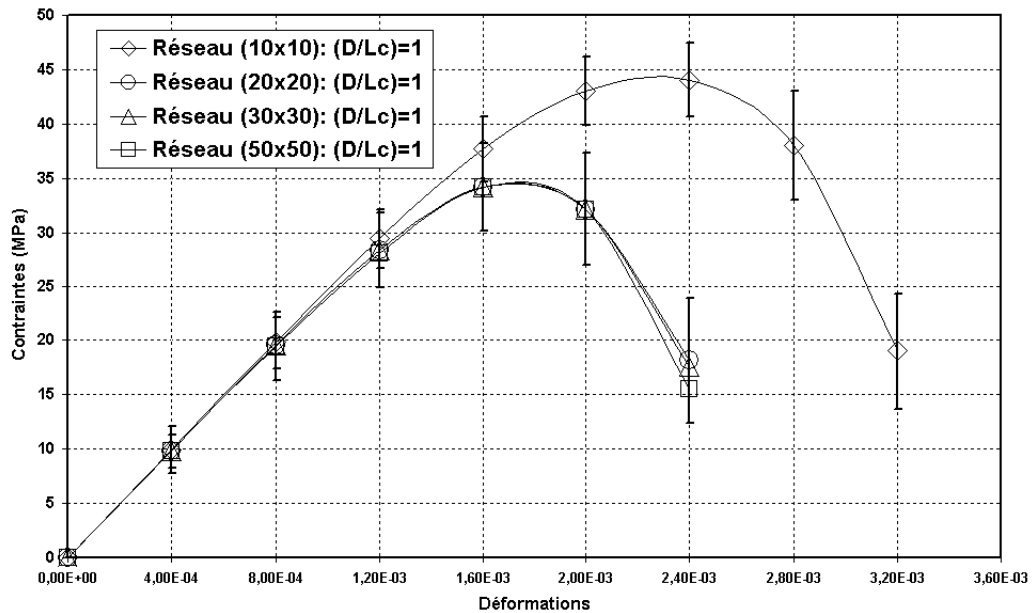


FIG. 5.4: Courbes de compression moyennes pour quatre réseaux de tailles  $(10 \times 10)$ ,  $(20 \times 20)$ ,  $(30 \times 30)$  et  $(50 \times 50)$ .

### 5.4.2 Effet de taille

Dans la suite, nous avons varié la taille  $D$  des trous pour un réseau de taille  $(50 \times 50)$  et une porosité fixée à 20%. Deux tailles ont été considérées :  $D_1 = L_c = 1$  et  $D_2 = 2L_c = 2$ . Rappelons qu'avec ces deux tailles, le VER est déjà atteint avec un réseau de taille  $(50 \times 50)$  puisque  $(\frac{L}{D}) > 20$ . Les résultats des simulations numériques reproduisent qualitativement l'effet de taille observé expérimentalement sur la résistance en compression du béton de polystyrène (cf. fig. 7). En effet, nous avons une diminution de la résistance moyenne obtenue avec les gros trous de 35% par rapport à celle obtenue avec les petits trous (cf. figure 5.5). Notons aussi que pour ces résultats, l'erreur relative  $\varepsilon_N$  est inférieure à 4% dans la phase élastique et qu'elle est de l'ordre de 5% au pic d'effort.

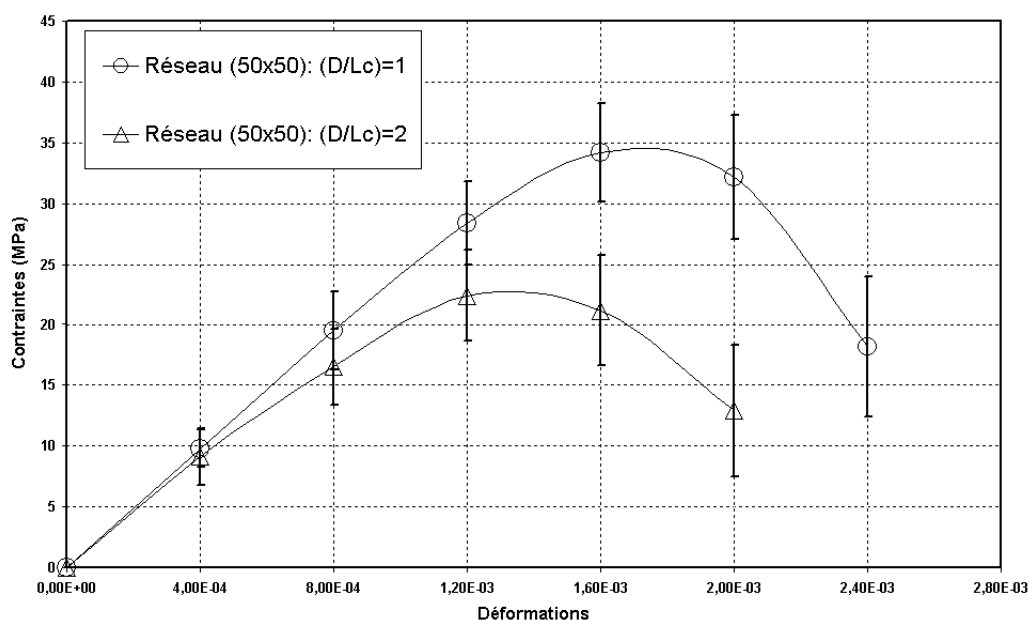


FIG. 5.5: Courbes de compression moyennes obtenues avec les deux types de réseau.

Par ailleurs, nous avons obtenu un écart de 7% de plus pour le module d'élasticité obtenu avec les trous de taille  $D_1 = L_c$  par rapport à celui obtenu avec les trous de taille  $D_2 = 2L_c$ . Cet écart est dû à un biais purement numérique du modèle. En effet, le réseau devient plus souple quand les trous sont maillés plus finement, autrement dit lorsqu'ils sont plus grands. On retrouve d'ailleurs ce résultat si nous conduisons des calculs par éléments finis en élasticité linéaire.

Cependant, la mise en évidence de l'effet de taille sur la résistance en compression de ce

réseau troué n'est pas remise en cause par ce biais du modèle car l'écart trouvé entre les résistances obtenues avec les deux tailles des trous (35%) est très grand par rapport à celui trouvé sur les modules d'élasticité correspondant aux deux types de réseau (7%). Néanmoins, une amélioration du modèle est à envisager dans les perspectives de ce travail pour remédier à ce biais. Ceci peut se faire en considérant une déformation moyenne autour de chaque trou (c'est-à-dire en conduisant un calcul non local des déformations (Laalai, 1993)).

### 5.4.3 Mode de rupture

Le modèle proposé permet de simuler un mode de rupture par extension progressif. La rupture du réseau en compression est d'autant plus stable que la taille des trous est plus petite. Cette rupture apparaît souvent lorsque une macrofissure se forme (cf. figure 5.6).

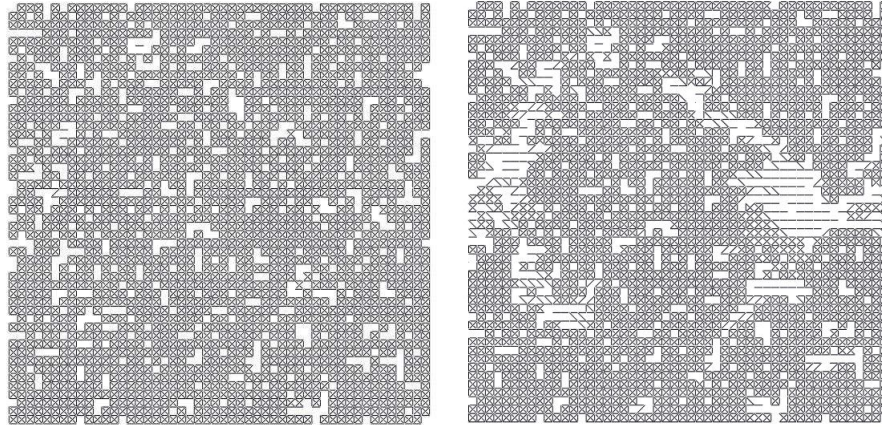


FIG. 5.6: Faciès de rupture au début de l'essai de compression et au pic d'effort obtenus avec un réseau de taille  $(50 \times 50)$  renfermant des trous de taille  $D = L_c = 1$ .

## 5.5 Conclusions

Nous avons proposé une modélisation numérique (2D) de l'effet de taille. Le modèle proposé est de type réseaux. Une discrétisation du milieu continu troué représentant le béton de polystyrène est conduite en se basant sur la théorie des équivalences. Le milieu discret équivalent est un réseau de barres dont la rigidité globale est équivalente à celle du milieu continu troué. Ces barres ont un comportement élastique fragile et se rompent selon un critère ultime exprimé en fonction de leur déformation d'extension. La position des trous dans

ce réseau est générée aléatoirement. Ces trous ont une forme carrée et leur taille  $D$  est un multiple entier de la taille de la maille élémentaire  $L_c$ . Cette dernière est considérée comme une longueur caractéristique du matériau représentant la taille de sa zone d'élaboration de la fissuration. Nous avons commencé par éliminer l'effet d'échelle de volume en montrant que le VER est atteint pour un rapport  $\frac{L}{D} \geq 20$ . Ensuite, nous avons varié la taille des trous pour un réseau de taille  $(50 \times 50)$  et une porosité fixée à 20%. Deux tailles ont été considérées :  $D_1 = L_c = 1$  et  $D_2 = 2L_c = 2$ . Les résultats des simulations numériques reproduisent qualitativement l'effet de taille observé expérimentalement sur la résistance en compression du béton de polystyrène puisque nous avons obtenu une résistance plus grande avec le réseau renfermant les petits trous (35% de plus par rapport à celle obtenue avec les gros trous). Par ailleurs, nous avons obtenu une augmentation de 7% pour le module d'élasticité obtenu avec les petits trous  $D_1 = L_c$  par rapport à celui obtenu avec les gros trous  $D_2 = 2L_c$ . Cet écart est dû à un biais purement numérique du modèle auquel il fallait remédier.





# Conclusions et perspectives

Rappelons que l'objet de cette thèse est l'identification de l'origine physique ainsi que la modélisation de l'effet de taille observé expérimentalement sur la résistance en compression du béton léger de polystyrène expansé. En effet, il a été observé que la résistance en compression de ce béton diminue sensiblement lorsqu'on augmente la taille des billes de polystyrène, à densité constante du béton (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005; Ganesh Babu et Saradhi Babu, 2002; Laukaitis et al., 2005). Cependant, il a été observé que cet effet de taille diminue lorsqu'on augmente la macroporosité du béton (fraction volumique en polystyrène) et qu'il devient négligeable pour les bétons présentant une très forte porosité (Parant, 1999; Le Roy et al., 2005).

Nous nous proposons, ici, de dresser le bilan des contributions apportées sur les deux plans expérimental et théorique, et d'envisager les perspectives d'améliorations et de développements ultérieurs.

Ce problème d'effet de taille est très complexe car il dépend, *a priori*, de trois longueurs correspondant à trois échelles différentes. La première longueur est la taille de l'éprouvette d'essai  $D$ , la deuxième est la taille des billes de polystyrène  $\phi$  et la troisième est la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire  $l_m$ . En outre, il dépend de la macroporosité ( $p$ ) du béton. En réalité, nous pouvons nous affranchir de la taille de l'éprouvette d'essai en s'assurant que le VER est atteint pour la résistance en compression du béton léger.

Dans la première partie de ce travail, nous avons varié uniquement la taille des billes de polystyrène  $\phi$  en gardant la taille de l'éprouvette d'essai  $D$  constante et en éliminant la taille des hétérogénéités de la matrice  $l_m$ . Pour ce faire, nous avons conduit une étude expérimentale sur un béton léger modèle 2D où les billes de polystyrène sont remplacées par des trous de même taille distribués dans une matrice cimentaire homogène. La fraction surfacique en trous a été fixée à 20%.

Dans un premier temps, pour étudier l'effet du comportement adoucissant de la matrice cimentaire qui peut engendrer une localisation de la rupture pouvant exhiber un effet de taille, nous avons considéré une distribution régulière des trous. Ainsi, deux types d'éprouvettes

de forme prismatique et de même taille ont été fabriqués en matrice cimentaire, puis percés selon deux distributions périodiques et deux diamètres des trous ( $\phi_1 = 5mm$  et  $\phi_2 = 3mm$ ). Les résultats des essais de compression sur ces deux types d'éprouvettes ont montré qu'il n'y a pas d'effet de taille sur leur résistance. Par ailleurs, nous avons observé un mode de rupture par propagation stable de fissures longitudinales qui s'initient par extension autour des trous. Nous avons alors conclu que l'absence d'effet de taille sur la résistance de ce béton léger modèle périodique est expliquée par ce mode de fissuration diffus et stable.

Dans un second temps, nous avons considéré une distribution aléatoire des trous pour analyser l'effet du caractère aléatoire de la répartition des trous dans la matrice cimentaire. Les résultats des essais de compression ont donné un module d'élasticité nettement plus petit pour l'éprouvette renfermant les petits trous ( $\phi = 4mm$ ) par rapport à celui obtenu avec l'éprouvette renfermant les gros trous ( $\phi = 6mm$ ). Autrement dit, le VER n'est pas encore atteint avec la taille d'éprouvette considérée, aussi bien pour le module d'Young que pour la résistance en compression, qui sont affectés par un effet d'échelle de volume. Ceci explique aussi le fait que nous avons obtenu une résistance plus grande avec l'éprouvette renfermant les gros trous, contrairement à l'effet de taille du béton de polystyrène. Par conséquent, les résultats de cette étude expérimentale ne permettent pas de tirer de conclusions sur l'effet de taille.

Ensuite, la rupture du béton léger modèle (2D) a été simulée numériquement en conduisant un calcul local d'endommagement avec le modèle de Mazars sur les deux types d'éprouvettes d'essai. Cette étude numérique a montré principalement que lorsqu'on n'introduit pas de longueur supplémentaire outre la taille de l'éprouvette et le diamètre des trous (c'est-à-dire lorsqu'on considère pour les deux types d'éprouvettes un rapport constant entre la taille du maillage et le diamètre des trous), un calcul local n'exhibe pas d'effet de taille sur la résistance en compression, que la distribution des trous soit périodique ou aléatoire. Cependant, les résultats d'un calcul local sont très sensibles à la finesse du maillage. En outre, ce calcul exhibe une localisation pathologique de l'endommagement qui ne permet pas de simuler le mode de fissuration stable observé expérimentalement dans le cas périodique. Par ailleurs, un calcul non local n'est pas pertinent vu que la phase de microfissuration est pratiquement inexistente dans la rupture de ce béton modèle à cause de l'homogénéité de la matrice. Par conséquent, la longueur caractéristique  $L_c$  correspondant à la taille de la zone d'élaboration de la fissuration n'a pas de sens physique dans ce cas. Cependant, dans le cas périodique, nous avons trouvé qu'un calcul non local avec une longueur  $L_c$  (considérée ici comme un paramètre purement numérique) égale à l'espacement entre les trous et un même rapport ( $\frac{\phi}{L_c}$ ) pour les deux types d'éprouvettes, permet de simuler la propagation

diffuse et stable de la fissuration ainsi que l'absence d'effet de taille observées expérimentalement. Ce calcul non local a montré aussi que le VER pour la résistance en compression du béton léger modèle périodique est constitué par une seule cellule de base. Cependant, le faciès de rupture obtenu avec un tel calcul est différent de celui observé expérimentalement.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous avons conduit une étude expérimentale sur trois types de béton de polystyrène renfermant trois tailles différentes des billes ( $\phi_1 = 1mm$ ,  $\phi_2 = 2.5mm$  et  $\phi_3 = 6.3mm$ ) et présentant des densités allant de  $1200 kg/m^3$  à  $2000 kg/m^3$ . Pour ces bétons, nous avons utilisé une matrice  $M^1$  contenant des grains du sable dont la taille maximale est égale à environ  $0.25mm$ .

Nous avons commencé par éliminer l'effet de la taille de l'éprouvette d'essai sur la résistance en compression du béton de polystyrène en déterminant la taille minimale du VER. Pour ce faire, nous avons testé des éprouvettes homothétiques et nous avons trouvé que la taille minimale du VER correspond à un rapport ( $\frac{D}{\phi} \leq 44$ ).

Ensuite, la présence d'un effet de taille sur la résistance en compression du béton léger a été confirmée grâce aux résultats des essais de compression sur les trois types de béton de polystyrène.

En outre, nous avons observé que l'effet de taille dépend aussi de la macroporosité ( $p$ ) du béton. En effet, il est très important pour les bétons présentant une faible porosité mais diminue progressivement lorsque la porosité du béton augmente, jusqu'à devenir quasiment absent pour les très fortes porosités.

Par ailleurs, pour étudier l'effet de la taille des hétérogénéités de la matrice, nous avons testé deux autres types de matrice : un mortier  $M^2$  constitué d'une pâte cimentaire et d'un sable grossier dont la taille maximale des grains est égale à environ  $4 mm$  et une pâte cimentaire  $M^0$ . Cette étude a montré que la résistance normalisée du béton de polystyrène (résistance du béton/résistance de la matrice), pour une taille donnée des billes  $\phi$  et une porosité ( $p$ ) constante, augmente lorsque la taille maximale  $l_m$  des hétérogénéités de la matrice augmente. Ainsi, nous avons conclu que l'effet de taille ne dépend pas uniquement de la taille des billes  $\phi$ , mais aussi de la taille maximale  $l_m$  des hétérogénéités de la matrice cimentaire et de la porosité ( $p$ ).

Par ailleurs, grâce à une analyse théorique simple inspirée des travaux de Bazant (1983, 1984), nous avons montré que la loi d'effet de taille ne peut pas être une loi en puissance de  $\phi$  et qu'elle dépend nécessairement d'une autre longueur caractéristique du matériau notée  $l_c$ .

Dans la troisième partie, nous avons conduit une démarche phénoménologique, basée sur

l'analyse des mécanismes de ruine observés expérimentalement dans le béton de polystyrène, pour expliquer l'effet de taille et identifier la loi le régissant. Cette analyse a montré que l'effet de taille est dû à un changement du mécanisme de ruine. Ce changement se manifeste à travers une transition d'un mode de rupture ductile où le mécanisme prépondérant est une microfissuration diffuse dans la matrice cimentaire n'exhibant pas d'effet de taille, vers un mode fragile où le mécanisme prépondérant est une propagation instable d'une macrofissure engendrant un effet de taille très important. Ainsi, nous avons stipulé que cette transition est pilotée par le rapport d'une longueur géométrique  $l_g$ , dépendant à la fois de la taille des billes  $\phi$  et de la macroporosité ( $p$ ) du béton, à la longueur caractéristique  $l_c$ . La longueur géométrique  $l_g(p, \phi)$  a été identifiée à la taille des billes de polystyrène pour les très faibles porosités et à l'espacement entre ces billes pour les très fortes porosités. Tandis que la longueur caractéristique  $l_c$  a été identifiée à la taille de la zone d'élaboration de la fissuration dans la matrice cimentaire. Cette taille a été fixée à trois fois la taille de la plus grosse hétérogénéité de la matrice  $l_m$  (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987).

Ainsi, nous stipulons que quand le rapport  $(\frac{l_g(p, \phi)}{l_c})$ , appelé ici "indice de fragilité mésoscopique" et noté  $\beta_m$ , devient inférieur à 1, l'effet de taille disparaît. En revanche, quand  $\beta_m \rightarrow \infty$ , la rupture du béton léger devient fragile.

En se basant sur cette analyse asymptotique, une loi d'échelle en puissance de  $\beta_m$  a été proposée. L'exposant de cette loi a été identifié à  $(-1/3)$  grâce aux résultats expérimentaux. En outre, un modèle est proposé pour prédire la résistance normalisée du béton de polystyrène en fonction de sa porosité ( $p$ ) et du rapport  $(\frac{\phi}{l_c})$ . Cette résistance sera comprise, grâce à la loi d'effet de taille, entre une borne inférieure  $\mathbf{g}_\infty(p)$  correspondant à un mode de rupture fragile et une borne supérieure  $\mathbf{g}_0(p)$  correspondant à un mode ductile. Ces deux bornes ont été approchées grâce aux résultats expérimentaux et à des calculs analytiques et numériques par éléments finis. Le modèle proposé fournit une bonne approximation des résultats expérimentaux et par conséquent, valide la démarche phénoménologique suivie.

Enfin, dans la dernière partie de ce travail, nous avons proposé une modélisation numérique 2D de l'effet de taille. Le modèle proposé est de type réseaux. Une discrétisation du milieu continu troué représentant le béton de polystyrène est conduite en se basant sur la théorie des équivalences (Absi, 1978). Le milieu discret équivalent est un réseau de barres dont la rigidité globale est équivalente à celle du milieu continu troué. Ces barres ont un comportement élastique fragile et se rompent selon un critère ultime exprimé en fonction de leur déformation d'extension. La position des trous dans ce réseau est générée aléatoirement. Ces trous ont une forme carrée et leur taille  $D$  est un multiple entier de la taille de la maille élémentaire  $L_c$ . Cette dernière est considérée comme une longueur caractéristique du

matériau représentant la taille de la zone d'élaboration de la fissuration.

Nous avons commencé par éliminer l'effet d'échelle de volume en montrant que le VER est atteint pour un rapport  $\frac{L}{D} \geq 20$ . Ensuite, nous avons varié la taille des trous pour un réseau de taille  $(50 \times 50)$  et une porosité fixée à 20%. Deux tailles ont été considérées :  $D_1 = L_c = 1$  et  $D_2 = 2L_c = 2$ . Les résultats des simulations numériques reproduisent qualitativement l'effet de taille observé expérimentalement sur la résistance en compression du béton de polystyrène puisque nous avons obtenu une résistance plus grande avec le réseau renfermant les petits trous (35% de plus par rapport à celle obtenue avec les gros trous). Par ailleurs, nous avons obtenu une augmentation de 7% pour le module d'élasticité obtenu avec les petits trous  $D_1 = L_c$  par rapport à celui obtenu avec les gros trous  $D_2 = 2L_c$ . Cet écart est dû à un biais purement numérique du modèle auquel il fallait remédier.

Notons aussi que grâce à l'analyse de l'effet de taille proposée et validée expérimentalement, nous montrons que la résistance absolue de la matrice n'est pas le facteur déterminant dans la formulation d'un béton léger présentant une bonne résistance. En effet, avec une matrice qui contient du sable (un mortier), on peut obtenir une résistance pour le béton de polystyrène similaire ou meilleure que celle obtenue avec une pâte à ultra haute résistance, qui est plus résistante que le mortier et qui coûte plus cher. Ainsi, l'optimisation de la résistance en compression du béton léger de polystyrène doit se faire en fonction de la résistance de la matrice, de la taille des billes, de la taille des hétérogénéités de la matrice et de leur fraction volumique.

Enfin, pour compléter ce travail, nous suggérons les voies d'améliorations suivantes :

1. Une identification plus précise de la taille de la zone d'élaboration de la fissuration  $l_c$  en fonction de la taille des hétérogénéités de la matrice cimentaire.
2. Une amélioration du modèle numérique proposé pour éliminer la dépendance du module d'élasticité apparent à la taille des trous, autrement dit, à la finesse du maillage.
3. Une étude numérique avec le modèle réseau proposé de la dépendance de l'effet de taille par rapport à la macroporosité du béton.
4. Une extension de la modélisation numérique 2D proposée au 3D.



# Bibliographie

- Absi, E. (1978). *Méthodes de calcul numérique en élasticité*. Eyrolles, Paris.
- Aifantis, E. (1984). On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 106(4) :326–330.
- Aifantis, E. (1987). The physics of plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, 3(3) :211–247.
- Arnould, M. and Virlogeux, M. (1986). *Granulats et bétons légers. Bilan de 10 ans de recherche*. Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- Arzt, E. (1998). Size effects in materials due to microstructural and dimensional constraints : A comparative review. *Acta Mater.*, 46(16) :5611–5626.
- Ashby, M. (1970). The deformation of plastically non-homogeneous materials. *Philos. Mag.*, 21 :399–424.
- Bagon, C. and Frondistou-Yannas, S. (1976). Marine floating concrete made with polystyrene beads. *Magazine of Concrete Research*, 28(2) :5–9.
- Bazant, Z. (1976). Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, 102 :331–344.
- Bazant, Z. (1983). Fracture in concrete and reinforced concrete. In Bazant Z.P., N. U., editor, *Paper Symposium on Mechanics of Geomaterials : Rocks, Concretes, soils*, pages 281–316.
- Bazant, Z. (1984). Size effect in blunt fracture : Concrete, rock, metal. *ASCE J. Eng. Mech.*, 110 :518–535.
- Bazant, Z. (1987). Fracture energy of heterogenous material and similitude. In S.P., S. and S.E., S., editors, *International Conference on Fracture of Concrete and Rock*, pages 390–402.



- Bazant, Z. (1995). Scaling of quasibrittle fracture and the fractal question. *ASME J. Mater. Technology*, 117 :361–376.
- Bazant, Z. (1996). Size effect aspects of measurement of fracture characteristics of quasibrittle material. *Advanced Cement Based Materials*, 4 :128–137.
- Bazant, Z. (2004). *Introduction aux effets d'échelle sur la résistance des matériaux*. Hermes Science Publications, Lavoisier, France.
- Bazant, Z., Belytschko, T., and Chang, T. (1984). Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics*, 110 :1666–1692.
- Bazant, Z. and Novak, D. (2000). Energetic-statistical size effect in quasibrittle failure at crack initiation size effect. *ACI Mater. J.*, 97 :381–392.
- Bazant, Z. and Pfeiffer, P. (1987). Determination of fracture energy from size effect and brittleness number. *ACI Mater. J.*, 84 :463–480.
- Bazant, Z. P., Tabarra, M. R., Kazemi, M. T., and Pijaudier-Cabot, G. (1990). Random particle model for fracture of aggregate or fiber composites. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(8) :1686–1705.
- Bilger, N. (2003). *Etude micromécanique de l'effet de la présence d'amas d'inclusions sur la transition fragile-ductile d'aciers nucléaires*. PhD thesis, Ecole Polytechnique.
- Bouchaud, J., Bouchaud, E., Lapasset, G., and Planes, J. (1993). Models of fractal cracks. *Physical Review Letters*, 71(14) :2240–2243.
- Bower, A. and Ortiz, M. (1993). Influence of grain size on the toughness of monolithic ceramics. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 115(3) :228–236.
- Breysse, D. (1988). A probabilistic model for damage of concrete structures. pages 20–22, Cedzyna, Poland. Brittle Matrix Composite 2, Elsevier Pbs.
- Carpinteri, A. (1994a). Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties. *Mech. Mater.*, 18.
- Carpinteri, A. (1994b). Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials. *Int. J. Solids and Structures*, 31.

- Carpinteri, A., Chiaia, B., and Ferro, G. (1995). Size effects on nominal tensile strength of concrete structures : multifractality of material ligaments and dimensional transition from order to disorder. *Mater. Struct.*, 28.
- CEA, F. (1992). Implantation du concept non local dans CASTEM2000. Technical report, Département de Mécanique et Technologie.
- Charles, Y. and Hild, F. (2002). On crack arrest in ceramic/metal assemblies. *International Journal of Fracture*, 115(3) :251–272.
- Charles, Y., Vandembroucq, D., Hild, F., and Roux, S. (2004). Material-independent crack arrest statistics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 :1651–1669.
- Chen, B. and Liu, J. (2004). Properties of lightweight expanded polystyrene concrete reinforced with steel fiber. *Cem. Concr. Res.*, 34(7) :1259–1263.
- Cheong, K., Busso, E., and Arsenlis, A. (2005). A study of microstructural length scale effects on the behaviour of FCC polycrystals using strain gradient concepts. *Int. J. Plasticity*, 21 :17971814.
- Cordon, W. and Gillespie, H. (1963). Variables in concrete aggregates and portland cement paste which influence the strength of concrete. *J. Am. Concr. Inst.*, 35.
- Cosserat, F. (1909). *Théorie des corps déformables*.
- Curtin (1998). Stochastic damage evolution and failure in fiber-reinforced composites. *Adv. Appl. Mech. Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36 :164.
- Cusatis, G., Bazant, Z. P., and Cedolin, L. (2003a). Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression : I. theory. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 129(12) :1439–1448.
- Cusatis, G., Bazant, Z. P., and Cedolin, L. (2003b). Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression : II. computation and validation. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 129(12) :1449–1458.
- D'Aloia, L. and Le Roy, R. (2001). Mise en oeuvre de la méthode de l'âge équivalent. Technical report, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Paris, France.
- de Larrard, F. (1995). Une approche de la formulation des bétons légers de structure. *Bulletin de liaison des laboratoires des Ponts et Chaussées*.

- de Larrard, F. (2000). *Structures granulaires et formulation des bétons*, volume OA34. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France.
- de Larrard, F. and Tondat, P. (1993). Sur la contribution de la topologie du squelette granulaire à la résistance en compression du béton. *Mater. Struct., RILEM*, 26 :505–516.
- Despois, J., Conde, Y., Müller, R., Weber, L., Rossoll, A., and Mortensen, A. (2004a). Effets d'échelle dans les composites et les mousses métalliques. In *Colloque National MECAMAT Aussois 2004. Mécanismes et mécanique des matériaux et structures à longueur interne : comportement et effets d'échelles*, pages 173–180.
- Despois, J., Conde, Y., San Marchi, C., and Mortensen, A. (2004b). Tensile behaviour of replicated aluminium foams. In Banhart, J., Fleck, N., and Mortensen, A., editors, *Cellular Metals : Manufacture, Properties, On the work hardening of fiber reinforced copper. Metfoam2003*, pages 375–380. Verlag MIT Publishing, Berlin, Germany.
- Eshelby, J. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion in related problem. *Proc. Royal Society London, serie A*, pages 367–396.
- Evans, A. (1990). Perspective on the development of high-toughness ceramics. *Journal of the American Ceramic society*, 73(2) :187–206.
- Fivel, M. (2004). Les effets de taille en nanoindentation : experience et modélisations à diverses échelles. In *Colloque National MECAMAT Aussois 2004. Mécanismes et mécanique des matériaux et structures à longueur interne : comportement et effets d'échelles*, pages 63–70.
- Fleck, N. and Hutchinson, J. (1993). A phenomenological theory for strain gradient effect in plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(12) :1825–1857.
- Fleck, N., Muller, G., Ashby, M., and Hutchinson, J. (1994). Strain gradient plasticity : theory and experiment. *Acta Metall. Mater.*, 42(2) :475–487.
- Friedel, J. (1964). *Dislocations*. Pergamon Press. Oxford.
- Ganesh Babu, K. and Saradhi Babu, D. (2002). Behaviour of lightweight expanded polystyrene concrete containing silica fume. *Cem. Concr. Res.*, 2249 :1–8.
- Gao, H., Huang, Y., Nix, W., and Hutchinson, J. (1999). Mechanism-based strain gradient plasticity-I. theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 47 :1239–1263.

- Gil Sevillano, J., Ocaña Arizcorreta, I., and Kubin, L. (2001). Intrinsic size effects in plasticity by dislocation glide. *Mat. Sci. Eng. A*, 309-310 :393405.
- Glowinski, R. (1984). *Numerical methods for non linear variational problems*. Springer, New York.
- Goldman, A. and Bentur, A. (1993). Properties of cementitious systems containing silica fume or nonreactive microfillers. *Advanced Cement Based Materials*, 1 :209–215.
- Griffith, A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Phi. Trans. Roy. Soc.*, pages 163–198.
- Haidar, K. (2002). *Modélisation de l'endommagement des structures en béton-Approches numériques et effets de la microstructure sur les propriétés de rupture*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes.
- Hall, E. (1951). The deformation and aging of mild steel. In *Proc. Phys. Soc. B64*, pages 747–753.
- Hansen, A. and Schmittbuhl, J. (2003). Origin of the universal roughness of brittle fracture surfaces : stress-weighted percolation in the damage zone. *Physical Review Letters*, 90(4) :045504.
- Hashin, Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, pages 143–150.
- Hashin, Z. and Shtrikman (1963). A variational approach to the theorie of the elastic behavior of multiphase material. *J. Mech. Phys. Solids*, 11 :127–140.
- Hermann, H., Hansen, A., and Roux, S. (1989). Fracture of disordered elastic lattices in two dimensions. *Phys. Rev. B.*, page 637.
- Hild, F., Denoual, C., Forquin, P., and Brajer, X. (2003). On the probabilistic-deterministic transition involved in a fragmentation process of brittle materials. *Computers and structures*, 81(13) :1241–1253.
- Hillerborg, A. (1983). Analysis of a single crack. In Wittmann, F., editor, *Fracture Mechanics of concrete*, pages 223–249. ELSEVIER Pbs.
- Hillerborg, A., Modéer, M., and Petersson, P. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.*, 6 :773–782.

- Hobbs, D. (1972). The compressive strength of concrete : a statistical approach to failure. *Mag. Concr. Res.*, 24(80) :127–138.
- Hu, G., Liu, X., and Lu, T. (2005). A variational method for non-linear micropolar composites. *Mech. Mater.*, 37(7) :407–425.
- Huang, Y., Gao, H., Nix, W., and Hutchinson, J. (2000). Mechanism-based strain gradient plasticity-I. analysis. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :99–128.
- Ince, R., Arslan, A., and Karihaloo, B. (2003). Lattice modelling of size effect in concrete strength. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(16) :2307–2320.
- Irwin, G. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. Appl. Mech.*, page 361.
- Kadlecek, V. and Spetla, Z. (1973). Effect of size and shape of test specimens on the direct tensile strength of concrete. *Bull. RILEM*, 36 :175–184.
- Kayyali, O. and Haque, M. (1996). A new generation of structural lightweight concrete. *University of New South Wales, Australia. Concrete Technology*, SP 171-27 :569–588.
- Kelly, A. and Lilholt, H. (1969). Stress-strain curve of a fiber-reinforced composite. *Philos. Mag.*, 20 :311–328.
- Kouzeli, M. and Mortensen, A. (2002). Size dependent strengthening in particle reinforced aluminium. *Acta Mater.*, 50(1) :39–51.
- Laalai, I. (1993). *Effets d'échelle dans les matériaux quasi-fragiles à microstructure aléatoire : approches locale et non-locale*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - Paris, France.
- Laalai, I. and Sab, K. (1994). Size effect and stochastic nonlocal damage in quasi-brittle materials. In Breysse, D., editor, *Probabilities and Materials*, pages 151–161, Netherlands. Kluwer Academic Publishers.
- Lasry, D. and Belytschko, T. (1988). Localisation limiters in transient problems. *Int. J. Solids Structures*, 24 :581–597.
- Laukaitis, A., Zurauskas, R., and Keriene, J. (2005). The effect of foam polystyrene granules on cement composite properties. *Cem. Concr. Compos.*, 27(1) :41–47.

- Le Roy, R., Parant, E., and Boulay, C. (2005). Taking into account the inclusions' size in lightweight concrete compressive strength prediction. *Cem. Concr. Res.*, 35(4) :770–775.
- Lemaitre, J. and Dufailly, J. (1977). Modélisation et identification de l'endommagement plastique des métaux. In *3e congrès français de mécanique, Grenoble, France*.
- L'Hermite, R. (1973). Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion. *Annales de l'ITBTP*, (309-310) :39–41.
- Lloyd, D. (1994). Particle reinforced aluminium and magnesium matrix composites. *Int. Mater. Rev.*, 39 :1–23.
- Marcellini, P. (1978). Periodic solutions and homogenization of nonlinear variational problems. *Annali di Matematica Pura Ed Applicata*, 117 :139–152.
- Markeset, G. and Hillerborg, A. (1995). Softening of concrete in compression- localization and size effects. *Cem. Concr. Res.*, 25 :702–708.
- Marolf, A., Neithalah, N., Sell, E., Wegner, K., Weiss, J., and Olek, J. (2004). Influence of aggregate size and gradation on acoustic absorption of enhanced porosity concrete. *ACI Materials Journal*, 101(1) :82–91.
- Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.
- Miled, K., Le Roy, R., Sab, K., and Boulay, C. (2004). Compressive behavior of an idealized EPS lightweight concrete : size effects and failure mode. *Mech. Mater.*, 36(11) :1031–1046.
- Miled, K., Sab, K., and Le Roy, R. (2005a). Effet d'échelle dans le béton léger de polystyrène expansé. In *Colloque Microstructure et Propriétés des matériaux, ENPC*, pages 189–194.
- Miled, K., Sab, K., and Le Roy, R. (2005b). EPS lightweight concrete particle size effect modelling. In Owen, Onate, and Suárez, editors, *Computational Plasticity VIII. Fundamentals and Applications*, pages 1185–1188. COMPLAS VIII.
- Mishnaevsky Jr., L., Derrien, K., and Baptiste, D. (2004). Effect of microstructure of particle reinforced composites on the damage evolution : probabilistic and numerical analysis. *Comp. Sci. Tech.*, 64 :1805–1818.
- Mori, T. and Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 :571–574.

- Mortensen, A., Pedersen, O. B., and H., L. (1998). On the work hardening of fiber reinforced copper. *Scripta Materialia*, 38(7) :1109–1115.
- Müller, S. (1987). Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 103 :189–212.
- Nye, J. (1953). Some geometrical relations in dislocated crystals. *Acta Mater.*, 1 :153–162.
- Parant, E. (1999). Optimisation de bétons de densité inférieure à 1. Technical report, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Paris, France.
- Patron, G. and Shendy-El-Barbary, M. (1982). Polystyrene-bead concrete properties and mix design. *The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, 4(3) :153–161.
- Pedersen, O. (1983a). Thermoelasticity and plasticity of composites I. mean field theory. *Acta Metall.*, 31(11) :1795–1808.
- Pedersen, O. (1983b). Thermoelasticity and plasticity of composites II. a model system. *Acta Metall.*, 38(7) :1201–1219.
- Peerlings, R., De Borst, R., Brekelmans, W., and Geers, M. (2002). localization issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics and Solids*, 21 :175–189.
- Petch, N. (1953). The cleavage strength of polycrystals. In *J. Iron Steel Inst. London 174*, pages 25–28.
- Pijaudier-Cabot, G. and Bazant, Z. (1987). Nonlocal damage theory. *ASCE J. Eng. Mech.*, 113 :1512–1533.
- Pijaudier-Cabot, G. and Benallal, A. (1993). Strain localization and bifurcation in nonlocal continuum. *Int. J. Solids Structures*, 30 :1761–1775.
- Ramanathan, S. and Fisher, D. (1993). Dynamics and instabilities of planar tensile cracks in heterogeneous media. *Physical Review Letters*, 79(5) :877–880.
- Rice, J. (1972). Some remarks on elastic crack-tip stress fields. *International Journal of Solids and Structures*, page 751.
- Rossi, P. (1997). High performance multimodal fiber reinforced composite : the LCPC experience. *ACI Mater. J.*, 94 :436–439.

- Rossi, P. and Piau, J.-M. (1983). The usefulness of statistical models to describe damage and fracture in concrete. The Netherlands. Elsevier Pbs.
- Roussel, N., Stefani, C., and Le Roy, R. (2005). From mini-cone test to abrams cone test : measurement of cement-based materials yield stress using slump tests. *Cem. Concr. Res.*, 35(5) :817–822.
- Roux, S., Vandembroucq, D., and Hild, F. (2003). Effective toughness of heterogeneous brittle materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 22(5) :743–749.
- Sab, K. and Laalai, I. (1993). Une approche unifiée des effets d'échelle dans les matériaux quasi fragiles. *C. R. Acad. Sci.*, 316(Série II) :1187–1192.
- Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K., and Hori, M. (2002). Appropriate number of unit cells in a representative volume element for micro-structural bifurcation encountered in a multi-scale modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :2561–2585.
- Sanders, P., Youngdahl, C., and Weertman, J. (1997). The strength of nanocrystalline metals with and without flaws. *Mat. Sci. Eng. A*, 234-236 :77–82.
- Saouridis, C. (1988). *Identification et numérisation objectives des comportements adoucissants : une approche multiéchelle de l'endommagement du béton*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.
- Schlangen, E. and Garboczi, E. (1996). New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice. *International Journal of Engineering Science*, 34(10) :1131–1144.
- Smyshlyaev, V. and Fleck, N. (1994). Bounds and estimates for linear composites with strain gradient effects. *J. Mech. Phys. Solids*, 42 :1851–1882.
- Smyshlyaev, V. and Fleck, N. (1996). The role of strain gradients in the grain size effect for polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(4) :465–495.
- Southwell, R. and Gough, H. (1926). On the concentration of stress in the neighbourhood of a small spherical flaw and on the propagation of fatigue fracture in 'statistically isotropic' materials. *Phil. Mag.*, 7 :71–97.
- Sri Ravindrarajah, R. and Tuck, A. (1994). Properties of hardened concrete containing treated expanded polystyrene beads. *Cement and Concrete Composites*, 16 :273–277.



- Stock, A., Hannant, D., and Williams, R. (1979). The effect of aggregate concentration upon the strength and modulus of elasticity of concrete. *Mag. Concr. Res.*, 31(109) :225–234.
- Stölken, J. and Evans, A. (1998). A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater.*, 46(14) :5109–5115.
- Torrent, R. (1977). A general relation between tensile strength and specimen geometry for concrete-like materials. *RILEM Mater. Struct.*, 10(58) :187–196.
- Voyiadjis, G. and Abu Al-Rub, R. (2005). Gradient plasticity theory with a variable length scale parameter. *Int. J. Solids Structures*, 42(14) :3998–4029.
- Walker, S. and Bloem, D. (1960). Effect of aggregate size on properties of concrete. *J. Am. Concr. Inst.*, 32(3) :283–298.
- Wang, E. and Shrive, N. (1999). A 3-D ellipsoidal flaw model for brittle fracture in compression. *Int. J. Solids. Struc*, 36 :4089–4109.
- Weibull, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials. In *Proceedings Royal Swedish academy of engineering sciences*, volume 151, pages 1–45.
- Wu, X. (1991). *Modélisation numérique de la fissuration du béton à partir d'une approche probabiliste*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Xiaoning, L. and Gengkai, H. (2005). A continuum micromechanical theory of overall plasticity for particulate composites including particle size effect. *Int. J. Plasticity*, 21 :777–799.
- Yamura, K. and Yamauchi, M. (1982). Use of polystyrene pieces for aggregate of concrete. pages 295–29. Proc. Annual conf. of Chugoku-Shikoku Branch of JSCE, Japan.

## Annexe A



## A1. Calcul non local dans Castem2000

Le calcul non local dans Castem2000 se fait en deux étapes (CEA, 1992) :

La première étape effectuée par l'opérateur **CONNEC** permet de stocker dans un champ par éléments l'ensemble des informations nécessaires pour la définition du voisinage de chaque élément, à savoir la longueur caractéristique  $L_c$ , la liste des éléments accessibles pour chaque élément ainsi que les informations sur les fonctions de forme. Il faut dire que toute la structure est en principe accessible pour chaque élément mais vu que le poids gaussien diminue fortement avec la distance, il est considéré que tout élément ayant un point de gauss distant de moins de trois fois la longueur caractéristique d'un point de gauss de l'élément considéré est accessible pour celui-ci.

La deuxième partie effectuée par l'opérateur **NLOC** utilise les résultats de la première étape pour calculer la moyenne non locale d'une grandeur donnée contenue dans un champ par éléments. Les variables contenues dans ce champ dont on ne demande pas la moyenne sont recopiées sans être modifiées. Les moyennes sont réalisées uniquement sur les sous zones communes au champ par élément à moyenner et au champ de connectivité. En outre, la zone accessible sur la structure réelle dépend de sa modélisation géométrique : on obtient ainsi un cylindre dans le cas des contraintes ou déformations planes, un tore dans le cas axisymétrique et une sphère pour le cas tridimensionnel. L'intégrale permettant d'obtenir la moyenne non locale est calculée à partir des valeurs aux points de gauss et des fonctions de forme de l'élément.

Pour que le calcul non local puisse être intégré dans le processus itératif, il faut que l'intégration du modèle soit adaptée. En effet, l'écoulement doit être réalisé en deux fois : Il faut dans un premier temps calculer les seuils pour chaque point de gauss de la structure, puis calculer la moyenne non locale de ces seuils et enfin terminer l'écoulement et calculer les contraintes finales à partir de ces seuils. L'ensemble de ces opérations est effectué automatiquement dans la procédure **PASAPAS** si on indique que le calcul est non local.

## A2. Méthode du Lagrangian augmenté

### A2.1. Principe de la méthode

Soit  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  une matrice  $N \times N$  symétrique, définie positive et  $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$ , on associe à  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  et  $\underline{\mathbf{b}}$  la fonctionnelle quadratique  $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$J(\underline{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}}) - (\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{v}}) \quad (\text{A.1})$$

où dans l'équation A.1,  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^N$ .

Soit  $\underline{\mathbf{B}}$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^N$  à  $\mathbb{R}^M$ , donc identifiable à une matrice  $M \times N$ . on introduit également  $\underline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^M$  tel que :

$$\underline{\mathbf{c}} \in \{ \underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M, \exists \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \} \quad (\text{A.2})$$

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{\mathbf{u}} \in H \text{ tel que} \\ J(\underline{\mathbf{u}}) \leq J(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in H \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

avec

$$H = \{ \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N, \quad \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{c}} \} \quad (\text{A.4})$$

l'ensemble  $H$  est non-vide, ce qui signifie que le problème (A.3) admet une solution unique.

Suivant une technique bien connue, on introduit un multiplicateur de Lagrange  $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^M$  qui transforme le problème de l'équation (A.3) en un problème sans contrainte, soit :

$$\min_{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N} \{ J(\underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}) \} \quad (\text{A.5})$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\underline{\mathbf{p}}$  apparait comme une inconnue supplémentaire qui peut être obtenue moyennant la résolution d'un problème de point-selle. De façon précise on

définit le Lagrangien  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) = J(\underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}}) \quad (\text{A.6})$$

On rappelle que  $\{\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}\}$  sera point-selle de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ , si

$$\mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{q}}) \leq \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N, \underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M \quad (\text{A.7})$$

et l'équation précédente implique

$$\min_{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N} \max_{\underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M} \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) = \max_{\underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M} \min_{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N} \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}}) \quad (\text{A.8})$$

D'après Glowinski (1984), le point-selle solution,  $\{\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}}\}$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ , est unique si et seulement si la matrice  $\underline{\mathbf{B}}$  est surjective, i.e.  $\text{Rang}(\underline{\mathbf{B}}) = M$ . Ceci implique que *les conditions aux limites traduites par  $\underline{\mathbf{B}}$ , doivent être linéairement indépendentes.*

Le résultat classique suivant est essentiel pour la suite :

**Théorème** *La solution  $\underline{\mathbf{u}}$  du problème de (A.3) est caractérisée par l'existence de  $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^M$  telque :*

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}} & {}^T \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{B}} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Le lagrangien augmenté  $\mathcal{L}_r$  pour  $r > 0$  est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) &= J(\underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}) + \frac{r}{2} |\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}|^2 \\ &= \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) + \frac{r}{2} |\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$|\cdot|$  désigne la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^M$ . On démontre facilement que tout point-selle de  $\mathcal{L}_r$  est point-selle de  $\mathcal{L}$  et réciproquement. Ceci tient au fait que  $r \cdot |\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}|$  s'annule quand la contrainte  $\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{c}}$  est satisfaite. Ainsi, la solution de (A.3) est caractérisée par l'existence de  $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^M$  telque :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_r & {}^T \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{B}} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_r \\ \underline{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$- \underline{\mathbf{A}}_r = \underline{\mathbf{A}} + r \cdot {}^T \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$$

$$- \underline{\mathbf{b}}_r = \underline{\mathbf{b}} + r \cdot {}^T \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{c}}$$

Il convient de remarquer que pour  $\underline{\mathbf{q}} = 0$  on a :

$$\mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{v}}, 0) = J(\underline{\mathbf{v}}) + \frac{r}{2} |\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}|^2 \quad (\text{A.12})$$

Soit la fonctionnelle pénalisée classique relative à la contrainte  $\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{c}}$ .

L'avantage du Lagrangien augmenté est que, par suite de la présence du terme  $(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}})$ , la solution exacte du problème (A.3) peut être déterminée sans faire tendre  $r$  vers l'infini, contrairement aux méthodes de pénalisation ordinaires où cela a pour effet de détériorer le conditionnement des systèmes à résoudre.

En outre, le fait d'ajouter le terme quadratique  $\frac{r}{2} |\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}|^2$  au Lagrangien  $\mathcal{L}$ , améliorera les propriétés de convergence des algorithmes décrits dans la suite.

## A2.2. Algorithmes de détermination de point-selle

A partir de l'équation (A.11), il est clair que  $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^M$  est solution du système linéaire suivant :

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}_r^{-1.T}\underline{\underline{\mathbf{B}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{p}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}_r^{-1}\cdot\underline{\underline{\mathbf{b}}}_r - \underline{\underline{\mathbf{c}}} \quad (\text{A.13})$$

D'après Glowinski (1984), la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}_r^{-1.T}\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  est symétrique semi-définie positive. Ainsi, deux algorithmes itératifs peuvent être appliqués pour la résolution du système linéaire (A.13) :

1. Algorithme du gradient à pas fixe (gradient standard). Dans ce cas la méthode est désignée sous le nom d'algorithme de Uzawa avec gradient standard.
2. Algorithme du gradient conjugué. Dans ce cas la méthode est désignée sous le nom d'algorithme de Uzawa avec gradient conjugué.

Nous avons choisi l'algorithme du gradient conjugué. Les étapes de cet algorithme sont décrites dans le paragraphe suivant.

subsubsection Algorithme de Uzawa avec gradient conjugué

Introduisons la matrice  $M \times M$   $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$ , et le vecteur  $\underline{\underline{\beta}}$  de  $\mathbb{R}^M$  comme suit :

$$\underline{\underline{\mathcal{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}_r^{-1.T}\underline{\underline{\mathbf{B}}}, \quad \underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{A}}}_r^{-1}\cdot\underline{\underline{\mathbf{b}}}_r - \underline{\underline{\mathbf{c}}}$$

Lorsque la matrice  $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$  est (semi) définie positive, le système linéaire  $\underline{\underline{\mathcal{B}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{p}}} = \underline{\underline{\beta}}$  peut être résolu par l'algorithme du gradient conjugué suivant :

*Étape 0 : initialisation*

$\underline{\underline{\mathbf{p}}}^0 \in \mathbb{R}^M$  arbitrairement donné

$$\underline{\underline{\mathbf{g}}}^0 = \underline{\underline{\mathcal{B}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{p}}}^0 - \underline{\underline{\beta}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{w}}}^0 = \underline{\underline{\mathbf{g}}}^0$$



Pour  $n > 0$ ,  $\underline{\mathbf{p}}^{n+1}$ ,  $\underline{\mathbf{g}}^{n+1}$ ,  $\underline{\mathbf{w}}^{n+1}$  se calculent en fonction de  $\underline{\mathbf{p}}^n$ ,  $\underline{\mathbf{g}}^n$  et  $\underline{\mathbf{w}}^n$  comme suit :

*Étape 1 : la descente*

$$\rho_n = \frac{(\underline{\mathbf{g}}^n, \underline{\mathbf{w}}^n)}{(\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{w}}^n, \underline{\mathbf{w}}^n)} = \frac{|\underline{\mathbf{g}}^n|^2}{(\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{w}}^n, \underline{\mathbf{w}}^n)}$$

$$\underline{\mathbf{p}}^{n+1} = \underline{\mathbf{p}}^n - \rho_n \cdot \underline{\mathbf{w}}^n$$

*Étape 2 : la nouvelle direction de descente*

$$\underline{\mathbf{g}}^{n+1} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^{n+1} - \underline{\beta}$$

$$\gamma_n = \frac{|\underline{\mathbf{g}}^{n+1}|^2}{|\underline{\mathbf{g}}^n|^2}$$

$$\underline{\mathbf{w}}^{n+1} = \underline{\mathbf{g}}^{n+1} + \gamma_n \cdot \underline{\mathbf{w}}^n$$

Une fois que  $\{\underline{\mathbf{p}}^n\}_{n \geq 0}$  a convergé vers la solution  $\underline{\mathbf{p}}$ , le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}$  est obtenu via la relation :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{A}}_r^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{b}}_r - {}^T \underline{\mathbf{B}}) \quad (\text{A.14})$$

Compte tenu du fait que  $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}}_r^{-1} \cdot {}^T \underline{\mathbf{B}}$ , l'implémentation pratique du précédent algorithme est la suivante :

*Étape 0 : initialisation*

$$\underline{\mathbf{p}}^0 \in \mathbb{R}^M \text{ arbitrairement donné} \quad (\text{A.15a})$$

$$\underline{\mathbf{x}}^0 = \underline{\mathbf{A}}_r^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{b}}_r - {}^T \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^0) \quad (\text{A.15b})$$

$$\underline{\mathbf{g}}^0 = \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{x}}^0, \quad \underline{\mathbf{w}}^0 = \underline{\mathbf{g}}^0 \quad (\text{A.15c})$$

Pour  $n > 0$ ,  $\underline{\mathbf{p}}^{n+1}$ ,  $\underline{\mathbf{g}}^{n+1}$ ,  $\underline{\mathbf{w}}^{n+1}$  se calculent en fonction de  $\underline{\mathbf{p}}^n$ ,  $\underline{\mathbf{g}}^n$  et  $\underline{\mathbf{w}}^n$  comme suit :

*Étape 1 : la descente*

$$\underline{\xi}^n = \underline{\mathbf{A}}_r^{-1} \cdot {}^T \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{w}}^n \quad (\text{A.16a})$$

$$\underline{\eta}^n = \underline{\mathbf{B}} \underline{\xi}^n (= \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{w}}^n) \quad (\text{A.16b})$$

$$\rho_n = \frac{|\underline{\mathbf{g}}^n|^2}{\underline{\eta}^n \cdot \underline{\mathbf{w}}^n} \quad (\text{A.16c})$$

$$\underline{\mathbf{p}}^{n+1} = \underline{\mathbf{p}}^n - \rho_n \underline{\mathbf{w}}^n \quad (\text{A.16d})$$

*Étape 2 : la nouvelle direction de descente*

$$\underline{\mathbf{g}}^{n+1} = \underline{\mathbf{g}}^n - \rho_n \underline{\eta}^n \quad (\text{A.17a})$$

$$\gamma_n = \frac{|\underline{\mathbf{g}}^{n+1}|^2}{|\underline{\mathbf{g}}^n|^2} \quad (\text{A.17b})$$

$$\underline{\mathbf{w}}^{n+1} = \underline{\mathbf{g}}^{n+1} + \gamma_n \cdot \underline{\mathbf{w}}^n \quad (\text{A.17c})$$

Chaque itération de l'algorithme précédent nécessite la résolution d'un système linéaire faisant intervenir la matrice symétrique définie positive  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_r$  (cf. Eqs A.16a et A.16a). Il est donc possible d'utiliser la même factorisation de Cholesky de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_r = \underline{\underline{\mathbf{L}}}_r \cdot {}^T \underline{\underline{\mathbf{L}}}_r$  pour toutes les itérations.

Nous avons choisi d'utiliser la méthode du gradient conjugué pour la résolution du système linéaire dans chaque itération.

En effet, la méthode du gradient conjugué est spécialement attrayante car théoriquement, i.e. si on néglige les erreurs d'arrondis, elle converge en un nombre fini d'itérations ( $\leq M$ ).



## Annexe B



## B1. Bétons de polystyrène à base de la matrice $M^1$

Mélange	densité ( $kg/m^3$ )	% volumique en polystyrène	$f_c^{28j}$ (MPa)	$f_c^{28j} / f_{cmoyenne}^{matrice}$	Module d'élasticité (MPa)
Matrice $M^1$	2281.61	0.00	162.18	-	-
	2311.65	0.00	163.38	-	42315.00
	2262.04	0.00	155.56	-	42667.00
	2311.12	0.00	164.28	-	41731.00
Moyenne $M^1$	2291.60	0.00	161.35	1.000	42237.67
Mélange 1	2061.14	10.22	108.15	0.672	-
	2128.86	7.22	114.84	0.713	35698.00
	2128.33	7.25	117.39	0.729	35820.00
	2142.87	6.60	121.18	0.753	35169.00
Mélange 2	1890.00	17.80	86.31	0.536	-
	1969.43	14.28	91.65	0.569	31084.00
	1923.00	16.33	75.31	0.468	-
	2016.13	12.21	99.25	0.616	32190.00
Mélange 3	1803.34	21.63	68.26	0.424	-
	1808.41	21.41	69.77	0.433	26639.00
	1744.99	24.21	59.65	0.370	24952.00
	1805.93	21.52	67.72	0.421	26031.00
Mélange 4	1611.52	30.12	48.49	0.301	-
	1592.32	30.97	46.51	0.289	20547.00
	1621.85	29.67	48.85	0.303	20831.00
	1625.27	29.51	49.95	0.310	21765.00
Mélange 5	1459.27	36.86	35.15	0.218	-
	1440.70	37.68	33.53	0.208	16473.00
	1430.66	38.13	36.01	0.224	17628.00
	1411.57	38.97	34.38	0.214	17510.00

TAB. 1: Résultats des essais de compression et de module sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice  $M^1$  et de billes de diamètre  $\phi_1 = 1mm$ .

Mélange	densité ( $kg/m^3$ )	% volumique en polystyrène	$f_c^{28j}$ (MPa)	$f_c^{28j} / f_{c_{moyenne}}^{matrice}$
Mélange 1	2096.38	8.66	112.07	0.696
	2083.96	9.21	109.61	0.681
	2111.14	8.01	111.45	0.692
	2109.52	8.08	116.20	0.722
Mélange 2	1993.94	13.19	94.04	0.584
	1996.55	13.08	96.63	0.600
	1990.78	13.33	93.83	0.583
	1971.37	14.19	92.71	0.576
Mélange 3	1813.57	21.18	65.94	0.410
	1804.13	21.60	66.61	0.414
	1782.06	22.57	64.78	0.402
	1813.19	21.20	67.02	0.416
Mélange 4	1639.28	28.89	46.88	0.291
	1590.78	31.04	45.83	0.285
	1628.82	29.36	47.04	0.292
	1617.39	29.86	45.91	0.285
Mélange 5	1330.69	42.55	20.65	0.128
	1295.88	44.10	16.97	0.105
	1311.99	43.38	16.61	0.103
	1357.15	41.38	24.95	0.155

TAB. 2: Résultats des essais de compression sur les éprouvettes ( $44 \times 88mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice  $M^1$  et de billes de diamètre  $\phi_1 = 1mm$ .

Mélange	densité ( $kg/m^3$ )	% volumique en polystyrène	$f_c^{28j}$ (MPa)	$f_c^{28j} / f_{cmoyenne}^{matrice}$	Module d'élasticité (MPa)
Matrice $M^1$	2264.22	0.00	152.89	-	-
	2222.16	0.00	146.32	-	40862
	2263.66	0.00	140.57	-	40705
	2266.03	0.00	155.19	-	40707
Moyenne $M^1$	2,254	0.00	148,74	1.000	40758
Mélange 1	2067.02	8.42	78.81	0.529	-
	2103.11	6.79	78.98	0.530	36050
	2068.52	8.35	80.78	0.542	34611
	2098.04	7.02	83.79	0.562	36298
Mélange 2	1897.93	16.03	61.73	0.414	-
	1876.83	16.98	49.53	0.332	28959
	1874.75	17.08	57.56	0.386	29465
	1857.39	17.86	57.34	0.385	28977
Mélange 3	1720.86	24.00	47.36	0.318	-
	1693.64	25.23	46.50	0.312	23486
	1722.09	23.95	46.56	0.312	23831
	1700.57	24.92	46.90	0.315	23096
Mélange 4	1486.18	34.57	34.75	0.233	-
	1531.92	32.51	34.77	0.233	18649
	1580.84	30.31	37.80	0.254	19848
	1488.75	34.46	34.64	0.232	18465
Mélange 5	1301.77	42.87	24.44	0.164	-
	1340.41	41.13	25.50	0.171	14543
	1291.61	43.33	24.51	0.165	13960
	1278.33	43.93	23.85	0.160	14295

TAB. 3: Résultats des essais de compression et de module sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice  $M^1$  et de billes de diamètre  $\phi_2 = 2.5mm$ .



Mélange	densité ( $kg/m^3$ )	% volumique en polystyrène	$f_c^{28j}$ (MPa)	$f_c^{28j} / f_{c_{moyenne}}^{matrice}$
Mélange 1	1945.53	14.72	78.81	0.529
	1974.22	13.45	78.98	0.530
	2111.83	7.36	80.78	0.542
	2140.64	6.08	83.79	0.562
Mélange 2	1738.03	23.90	61.73	0.414
	1919.14	15.89	49.53	0.332
	1689.64	26.04	57.56	0.386
	1801.87	21.08	57.34	0.385
Mélange 3	1382.43	39.64	47.36	0.318
	1603.69	29.85	46.50	0.312
	1442.89	36.97	46.56	0.312
	1454.30	36.46	46.90	0.315
Mélange 4	1312.80	42.73	34.75	0.233
	1373.16	40.05	34.77	0.233
	1273.74	44.46	37.80	0.254
	1241.53	45.88	34.64	0.232
Mélange 5	1136.73	50.52	25.50	0.171
	1125.51	51.02	23.85	0.160
	1061.18	53.87	24.51	0.165
	1024.68	55.48	24.44	0.164

TAB. 4: Résultats des essais de compression sur les éprouvettes ( $44 \times 88mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice  $M^1$  et de billes de diamètre  $\phi_2 = 2.5mm$ .

Mélange	densité ( $kg/m^3$ )	% volumique en polystyrène	$f_c^{28j}$ (MPa)	$f_c^{28j} / f_{cmoyenne}^{matrice}$	Module d'élasticité (MPa)
Matrice $M^1$	2308.22	0.00	151.70	-	-
	2299.90	0.00	151.62	-	40483
	2307.91	0.00	161.94	-	41253
	2311.55	0.00	152.53	-	-
Moyenne $M^1$	2306.89	0.00	154.45	1.00	40868
Mélange 1	2144.95	7.39	51.58	0.334	-
	2146.40	7.32	53.23	0.345	-
	2190.91	5.39	78.45	0.508	-
	2182.76	5.74	65.28	0.423	-
	2146.83	6.93	72.05	0.466	-
Mélange 2	1871.69	18.95	37.59	0.243	26538
	1822.75	21.09	44.83	0.290	-
	1751.40	24.21	35.79	0.232	22588
	1788.45	22.59	41.82	0.271	25115
	1822.75	21.09	37.58	0.243	24474
Mélange 3	1533.51	33.73	28.86	0.187	-
	1665.07	27.98	38.10	0.247	22006
	1586.92	31.39	31.81	0.206	19009
	1580.51	31.68	29.39	0.190	20955
Mélange 4	1265.90	45.42	18.91	0.122	-
	1390.99	39.96	23.64	0.153	15850
	1373.69	40.71	23.51	0.152	15362
	1343.13	42.05	22.90	0.148	15474
Mélange 5	1150.93	50.45	15.68	0.101	-
	1175.66	49.37	16.60	0.107	11911
	1159.69	50.06	16.38	0.106	11501
	1154.03	50.31	15.41	0.100	11077

TAB. 5: Résultats des essais de compression et de module sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) du béton de polystyrène constitué de la matrice  $M^1$  et de billes de diamètre  $\phi_3 = 6.3mm$ .

## B2. Bétons de polystyrène à base de la matrice $M^0$

Mélange	densité ( $kg/m^3$ )	% volumique en polystyrène	$f_c^{28j}$ (MPa)	$f_c^{28j} / f_{c\text{matrice}}^{\text{matrice}} / f_{c\text{moyenne}}$
Matrice $M^0$	2195.01	0.00	122.03	-
	2195.11	0.00	117.70	-
	2189.76	0.00	116.96	-
	2188.80	0.00	121.68	-
Moyenne $M^0$	2192.17	0.00	119.59	1.000
$M^0$ + billes 1mm	1689.19	23.30	40.96	0.343
	1698.42	22.87	41.76	0.349
	1748.10	20.57	45.98	0.384
	1683.21	23.57	41.30	0.345
$M^0$ + billes 2.5mm	1886.95	14.04	31.98	0.267
	1823.18	16.98	31.61	0.264
	1697.19	22.78	26.36	0.220
	1599.03	27.29	25.66	0.215

TAB. 6: Résultats des essais de compression sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) des bétons de polystyrène constitués de la matrice  $M^0$  et renfermant respectivement les billes de diamètre  $\phi_1 = 1mm$  et  $\phi_2 = 2.5mm$ .

### B3. Bétons de polystyrène à base de la matrice $M^2$

Mélange	densité ( $kg/m^3$ )	% volumique en polystyrène	$f_c^{28j}$ (MPa)	$f_c^{28j} / f_{c\text{matrice}}^{matrice}$ $f_{c\text{moyenne}}$
Matrice $M^2$	2237.65	0.00	103.37	-
	2237.24	0.00	94.94	-
	2231.00	0.00	96.65	-
	2238.11	0.00	94.69	-
Moyenne $M^2$	2236.00	0.00	97.41	1.000
$M^2$ + billes 1mm	1811.82	19.25	48.31	0.496
	1854.79	17.30	47.71	0.490
	1786.18	20.42	48.98	0.503
	1733.45	22.81	41.60	0.427
$M^2$ + billes 2.5mm	1921.66	14.18	45.98	0.472
	1852.36	17.30	41.03	0.421
	1977.42	11.66	44.13	0.453

TAB. 7: Résultats des essais de compression sur les éprouvettes ( $110 \times 220mm$ ) des bétons de polystyrène constitués de la matrice  $M^2$  et renfermant respectivement les billes de diamètre  $\phi_1 = 1mm$  et  $\phi_2 = 2.5mm$ .



## *Résumé*

Il a été observé expérimentalement, dans la littérature, que la résistance du béton léger de polystyrène, à densité égale, diminue sensiblement lorsqu'on augmente la taille  $\phi$  des inclusions légères. L'objectif de cette thèse est l'identification de l'origine physique ainsi que la modélisation de cet effet de taille. Dans la première partie de ce travail, nous avons étudié les mécanismes de rupture et l'effet de taille dans un béton léger modèle 2D où les billes de polystyrène sont remplacées par des trous de même taille distribués dans une matrice cimentaire homogène. Dans la deuxième partie de ce travail, une étude expérimentale a été conduite sur trois types de béton de polystyrène renfermant trois tailles différentes de billes et présentant des densités allant de  $1200\text{kg/m}^3$  à  $2000\text{kg/m}^3$ . En outre, pour s'assurer que la taille du Volume Élémentaire Représentatif (VER) pour la résistance en compression du béton de polystyrène est atteinte, des éprouvettes homothétiques ont été testées. L'effet de la taille des hétérogénéités de la matrice (grains du sable) a été aussi étudié en testant trois types de matrice cimentaire. Les résultats de cette étude ont confirmé la présence d'un effet de taille, mais aussi une interaction antagoniste avec l'effet de la taille maximale  $l_m$  des hétérogénéités de la matrice. Une démarche phénoménologique, basée sur l'analyse des mécanismes de ruine observés expérimentalement dans le béton de polystyrène a été suivie pour expliquer l'effet de taille et identifier la loi le régissant. Enfin, une étude numérique 2D de cet effet de taille a été conduite sur un réseau de barres, en se basant sur la théorie des équivalences.

**Mots-clés :** Béton léger ; Effet de taille ; Effet d'échelle de volume ; mécanismes de rupture en compression ; modèle de type réseau.

## *Abstract*

It had been observed in literature that Expanded Polystyrene (EPS) lightweight concrete compressive strength increases significantly with a decrease in polystyrene beads size  $\phi$ , for the same concrete density. So that, the main purpose of the thesis is to identify the physical origin of this particle size effect. In the first part of this work, a combined experimental and numerical investigation has been conducted on a 2D idealized EPS concrete to study size effect and failure mechanism under compression. The idealized lightweight concrete is obtained by replacing EPS beads having almost zero strength by holes of the same size drowned in a homogeneous cement matrix. In the second part of this work, an experimental investigation has been conducted on three EPS lightweight concretes containing three polystyrene beads sizes and having densities ranging from  $1200\text{kg/m}^3$  to  $2000\text{kg/m}^3$ . Moreover, to free the size effect problem from the specimen size  $D$  by ensuring that the representative volume element (RVE) for the EPS concrete compressive strength is already reached, compressive tests have been carried out on homothetic EPS concrete cylinders. Moreover, we have observed that the compressive strength increases with an increase in the matrix heterogeneities (sand grains) maximum size  $l_m$ . On the basis of the analysis of EPS concrete failure modes observed experimentally, a phenomenological approach has been conducted to explain the EPS concrete particle size effect and to identify the law governing it. Finally, we have proposed a numerical 2D study on a lattice model which reproduces qualitatively the particle size effect observed experimentally.

**Keywords :** Lightweight concrete ; Particle size effect ; volume size effect ; compressive failure mechanisms ; lattice model.