



**HAL**  
open science

# Modélisation multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions rigides

Ghazi Hassen

► **To cite this version:**

Ghazi Hassen. Modélisation multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions rigides. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2006. English. NNT: . pastel-00001996

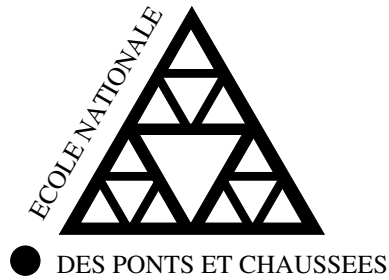
**HAL Id: pastel-00001996**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001996>**

Submitted on 7 Nov 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE  
présentée pour l'obtention du diplôme de  
DOCTEUR  
DE  
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES  
Spécialité : Structures et Matériaux  
par

GHAZI HASSEN

Sujet de la thèse :

MODÉLISATION MULTIPHASIQUE  
POUR LE CALCUL DES OUVRAGES RENFORCÉS  
PAR INCLUSIONS RIGIDES

soutenue à Champs-sur-Marne le 16 Mai 2006

devant le jury composé de :

J.B. Leblond	<i>Président</i>
M. Boulon	<i>Rapporteur</i>
J. Pastor	<i>Rapporteur</i>
E. Bourgeois	<i>Examineur</i>
A. Pecker	<i>Examineur</i>
P. de Buhan	<i>Directeur de thèse</i>



*A mes parents*





## *Remerciements*

*Je voudrais remercier tout d'abord le Professeur Jean-Baptiste Leblond qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie également les Professeurs Marc Boulon et Joseph Pastor d'avoir accepté de rapporter mon mémoire de thèse et d'avoir suscité ma réflexion par leurs remarques et questions. J'adresse aussi mes remerciements à Emmanuel Bourgeois, Chercheur au LCPC, et Alain Pecker, PDG de GDS, qui ont examiné mon travail, pour leurs questions pertinentes et remarques constructives.*

*Je voudrais exprimer ma gratitude à Patrick de Buhan pour son irréprochable encadrement, ses conseils, sa disponibilité et aussi le féliciter pour ses qualités scientifiques, pédagogiques et humaines.*

*Je remercie vivement tous les membres de l'équipe LMSGC/ENPC, chercheurs soient-ils ou doctorants, pour la très bonne ambiance de travail qui règne au sein du laboratoire et pour leur aide et soutien.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à ceux qui m'ont aidé à mettre ce rapport sous sa forme actuelle.*

*Je réserve enfin une pensée chaleureuse à mes parents qui n'ont cessé de m'encourager et de me pousser vers l'avant et qui ont su, malgré les distances, être toujours à mes côtés, et à mes frères et sœur Amir, Elyes et Nawel que j'adore.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction bibliographique</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Les techniques de renforcement par inclusions rigides . . . . .	3
1.2.1	Les fondations sur groupes de pieux . . . . .	4
1.2.2	Autres techniques de renforcement par inclusions rigides . . . . .	5
1.3	Une brève revue des méthodes de calcul . . . . .	9
1.3.1	Les approches de type "modélisation mixte" . . . . .	9
1.3.2	Les méthodes de calcul par éléments finis . . . . .	15
1.4	L'approche par homogénéisation et ses limites . . . . .	20
1.4.1	Le sol renforcé comme milieu élastique anisotrope . . . . .	20
1.4.2	Un exemple illustratif . . . . .	22
1.5	Vers une modélisation multiphasique des sols renforcés par inclusions . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Modèle multiphasique de sol renforcé en élasticité linéaire</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction . . . . .	29
2.2	Principe de la modélisation multiphasique . . . . .	29
2.2.1	Description cinématique du modèle biphasique . . . . .	30
2.2.2	Equations de la statique relatives au modèle . . . . .	31
2.2.3	Comportement élastique linéaire . . . . .	36
2.3	Position d'un problème d'élasticité pour le milieu biphasique en déformation plane . . . . .	39
2.4	Exemple d'application . . . . .	40

2.4.1	Position du problème . . . . .	40
2.4.2	Solution en déplacement . . . . .	41
2.5	Conclusion : modèle multiphasique et homogénéisation . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élasticité linéaire</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	Energie potentielle d'un milieu biphasique . . . . .	51
3.3	Principe du minimum de l'énergie potentielle pour un milieu biphasique élastique . . . . .	53
3.4	Formulation variationnelle . . . . .	57
3.5	Méthode des éléments finis appliquée au système biphasique . . . . .	57
3.5.1	Maillage . . . . .	58
3.5.2	Approximation des champs de déplacement et de rotation . . . . .	59
3.5.3	Principe du minimum discrétisé . . . . .	61
3.5.4	Mise en oeuvre numérique du modèle multiphasique en élasticité linéaire . . . . .	63
3.5.5	Validation de l'outil numérique . . . . .	69
3.6	Conclusion . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Applications du code de calcul multiphasique en élasticité linéaire</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	77
4.2	Dimensionnement d'une fondation sur radier de pieux . . . . .	77
4.2.1	Position du problème . . . . .	77
4.2.2	Validation et comparaisons avec d'autres méthodes . . . . .	100
4.3	Conclusion . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Comportement élastoplastique et à la rupture du milieu multiphasique</b>	<b>111</b>
5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	Comportement élasto-plastique d'un milieu biphasique . . . . .	113
5.2.1	Phase matrice . . . . .	113

5.2.2	Phase renforcement . . . . .	115
5.2.3	Loi d'interaction . . . . .	117
5.3	Exemple d'application . . . . .	119
5.3.1	Position du problème . . . . .	119
5.3.2	1 <sup>er</sup> cas : $\rho > 1$ (plastification de la matrice en premier) . . . . .	124
5.3.3	2 <sup>ème</sup> cas : $\rho = 1$ (plastification simultannée des deux phases) . . . . .	129
5.3.4	3 <sup>ème</sup> cas : $\rho < 1$ (plastification de la phase renforcement en premier) . . . . .	130
5.4	Détermination des paramètres élasto-plastiques . . . . .	132
5.4.1	Phase matrice . . . . .	132
5.4.2	Phase renforcement . . . . .	133
5.5	Calcul à la rupture pour les systèmes en milieux biphasiques . . . . .	135
5.5.1	Domaine des chargements potentiellement supportables . . . . .	135
5.5.2	Approche statique par l'intérieur de $K$ . . . . .	135
5.5.3	Approche cinématique par l'extérieur de $K$ . . . . .	136
5.5.4	Exemple de mise en œuvre . . . . .	137
5.6	Conclusion . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élastoplasticité</b>	<b>141</b>
6.1	Introduction . . . . .	143
6.2	Position d'un problème d'élastoplasticité pour le milieu biphasique . . . . .	143
6.3	Discrétisation temporelle du processus de chargement . . . . .	144
6.4	Algorithme de plasticité implicite . . . . .	151
6.5	Méthode des éléments finis appliquée au calcul élastoplastique des structures biphasiques . . . . .	153
6.5.1	Principe du minimum de l'énergie potentielle . . . . .	153
6.5.2	Formulation variationnelle . . . . .	155
6.5.3	Principe du minimum discrétisé . . . . .	156
6.6	Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élastoplasticité . . . . .	158
6.7	Premières applications du code de calcul multiphasique en élastoplasticité . . . . .	160

6.7.1	Dimensionnement d'une fondation mixte . . . . .	160
6.7.2	Analyse de stabilité d'une pente renforcée par inclusions rigides . .	174
6.8	Conclusion . . . . .	179
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>181</b>
7.1	Conclusions . . . . .	183
7.2	Perspectives . . . . .	184

# Table des figures

1.1	<i>Schématisme simplifiée d'une fondation profonde (a) et d'une fondation mixte (b)</i> . . . . .	5
1.2	<i>Exemples d'ouvrages sur radiers de pieux (Sudret (1999) [75])</i> . . . . .	6
1.3	<i>Exemple de reprise en sous-œuvre par des micropieux : pile du pont de pierre à Bordeaux (Ledoux (1997) [55])</i> . . . . .	8
1.4	<i>Principe du renforcement d'une couche de sol compressible par des inclusions verticales</i> . . . . .	8
1.5	<i>(a) Vue d'une fondation du pont de Rion-Antirion, (b) Rupture d'un modèle réduit testé à la centrifugeuse du LCPC</i> . . . . .	9
1.6	<i>Exemple de confortation d'une pente instable par un groupe de pieux (Schlosser et Unterreiner (1998) [69])</i> . . . . .	9
1.7	<i>Pieu de renforcement sollicité en flexion par l'action latérale du sol (Frank (1995) [36])</i> . . . . .	10
1.8	<i>Principe du modèle "hybride" pour le calcul d'une fondation mixte (Clancy et Randolph (1993) [20])</i> . . . . .	11
1.9	<i>Calcul du déplacement vertical normalisé d'un groupe de pieux sous chargement vertical (Zhang et Small (2000) [79])</i> . . . . .	12
1.10	<i>Analyse de la stabilité avec surface de rupture d'un talus renforcé par inclusions rigides</i> . . . . .	13
1.11	<i>Multicritère d'une inclusion de renforcement à la traversée d'une surface de rupture (Blondeau et al. (1983) [10])</i> . . . . .	14
1.12	<i>(a) Mécanisme de rupture d'un ouvrage renforcé par inclusions rigides avec zone de cisaillement, (b) Facteur de Stabilité d'un talus vertical renforcé évalué par le biais de différents mécanismes</i> . . . . .	14



1.13	<i>Disposition des pieux de renforcement du radier de fondation de la Messurm (d'après Sudret (1999) [75]) . . . . .</i>	17
1.14	<i>Maillage tridimensionnel du sol renforcé (Vetter (1998) [78]) . . . . .</i>	18
1.15	<i>(a) Maillage aux différences finies d'un radier sur pieux (logiciel FLAC 3D : Comdromos et al. (2003) [22]); (b) Maillage par éléments finis 3D (logiciel ANSYS : Liang et al. (2003) [57]) . . . . .</i>	19
1.16	<i>Isovaleurs des tassements de radiers sur groupes de pieux et de fondations mixtes (Reul (2004) [62]) . . . . .</i>	19
1.17	<i>Volume élémentaire représentatif . . . . .</i>	21
1.18	<i>Modèle simplifié de radier de fondation sur pieux sous chargement latéral .</i>	23
1.19	<i>(a) Evaluations du facteur de renforcement par la méthode d'homogénéisation et par la méthode des éléments finis; (b) Profils de déplacement latéral dans la couche renforcée . . . . .</i>	24
2.1	<i>Cinématique d'un milieu biphasique modélisant un sol renforcé par une famille d'inclusions . . . . .</i>	30
2.2	<i>Efforts intérieurs à la phase renforcement . . . . .</i>	33
2.3	<i>Efforts intérieurs pour un système biphasique (cas bidimensionnel) . . . . .</i>	36
2.4	<i>Cisaillement en déformation plane d'une couche de sol renforcée transversalement . . . . .</i>	41
2.5	<i>Déplacement normalisé en fonction de la côte normalisée pour différentes valeurs de <math>\gamma^r</math> lorsque les effets de cisaillement sont négligés . . . . .</i>	45
2.6	<i>Variation du module de cisaillement apparent en fonction de la raideur à la flexion de la phase renforcement lorsque les effets de cisaillement sont négligés (a) ou non (b) . . . . .</i>	46
3.1	<i>Passage de l'élément de référence à l'élément réel (Dhatt et Touzot (1984) [33]) . . . . .</i>	60
3.2	<i>(a) élément P1-Lagrange pour les déplacements et la rotation; (b) P2-Lagrange pour les déplacements et la rotation; (c) P2-Lagrange pour les déplacements et P1-Lagrange pour la rotation . . . . .</i>	65
3.3	<i>Poutre console soumise à une charge concentrée . . . . .</i>	65
3.4	<i>Déformées analytiques et numériques (P1-Lagrange) de la poutre-console .</i>	68

3.5	<i>Déformée numérique (P1-Lagrange pour la rotation et la flèche) de la poutre-console . . . . .</i>	68
3.6	<i>Déformées analytique et numériques (P2-Lagrange) et (P1-Lagrange) de la poutre-console . . . . .</i>	69
3.7	<i>Modélisation unidimensionnelle de l'essai de cisaillement en déformation plane d'une couche de sol renforcée transversalement. . . . .</i>	70
3.8	<i>Distribution de flèche et de rotation. Comparaison résultats analytiques-EF P2 . . . . .</i>	70
3.9	<i>Distribution des efforts intérieurs. Comparaison résultats analytiques-EF P2 . . . . .</i>	71
3.10	<i>Maillage en éléments finis T6 d'une bande de sol renforcée transversalement. . . . .</i>	72
3.11	<i>Distribution de flèche et de rotation. Comparaison résultats analytiques-EF T6 . . . . .</i>	73
3.12	<i>Distribution des efforts intérieurs. Comparaison résultats analytiques-EF T6 . . . . .</i>	73
4.1	<i>Fondation sur radier de pieux soumise à un chargement combiné . . . . .</i>	78
4.2	<i>Paramètres de chargements et paramètres cinématiques associés du problème . . . . .</i>	79
4.3	<i>Volume élémentaire représentatif . . . . .</i>	81
4.4	<i>Modélisation biphasique d'une fondation sur radier de pieux . . . . .</i>	83
4.5	<i>Maillage de la structure par des éléments T6 . . . . .</i>	83
4.6	<i>Coefficient de renforcement (a) vertical, (b) latéral, (c) au renversement calculés par une modélisation biphasique . . . . .</i>	85
4.7	<i>Déformées de la structure sous chargement vertical et isovaleurs des déplacements verticaux et de la contrainte <math>\sigma_{xx}</math>. (a) Structure non renforcée, (b) configuration (1) . . . . .</i>	88
4.8	<i>Déformées de la structure sous chargement vertical et isovaleurs des déplacements verticaux et des rotations. (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastrés (2B) . . . . .</i>	89
4.9	<i>Isovaleurs de la contrainte <math>\sigma_{xx}</math>, des efforts normaux et des moments de flexion. Structure sous chargement vertical :(a) Pieux rotulés (2A), (b) encastrés (2B) . . . . .</i>	90
4.10	<i>Déformées de la structure sous chargement latéral et isovaleurs des déplacements horizontaux et de la contrainte <math>\sigma_{xy}</math>. (a) Structure non renforcée, (b) configuration(1) . . . . .</i>	93

4.11	<i>Déformées de la structure sous chargement latéral et isovalues des déplacements horizontaux et des rotations. (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastres (2B)</i> . . . . .	94
4.12	<i>Isovalues de la contrainte <math>\sigma_{xy}</math>, des efforts tranchants et des moments de flexion. Structure sous chargement latéral : (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastres (2B)</i> . . . . .	95
4.13	<i>Déformées de la structure sous chargement de renversement et isovalues des déplacements verticaux et de la contrainte <math>\sigma_{xx}</math>. (a) Structure non renforcée, (b) configuration (1)</i> . . . . .	97
4.14	<i>Déformées de la structure sous chargement de renversement et isovalues des déplacements verticaux et des rotations. (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastres (2B)</i> . . . . .	98
4.15	<i>Isovalues de la contrainte <math>\sigma_{xx}</math>, des efforts normaux et des moments de flexion. Structure sous chargement de renversement : (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastres (2B)</i> . . . . .	99
4.16	<i>Couche équivalente à une file de pieux dans la direction transversale</i> . . . . .	100
4.17	<i>Maillage et déformées de la structure (modélisation mixte). Pieux rotulés (2A) et encastres (2B)</i> . . . . .	103
4.18	<i>Coefficient de renforcement (a) vertical, (b) latéral, (c) et au au renversement calculés par une modélisation mixte</i> . . . . .	104
4.19	<i>Déformées de la structure sous chargement vertical et isovalues des déplacements verticaux et de la contrainte <math>\sigma_{xx}</math>. Modélisation mixte</i> . . . . .	106
4.20	<i>Déformées de la structure sous chargement latéral et isovalues des déplacements verticaux et de la contrainte <math>\sigma_{xx}</math>. Modélisation mixte</i> . . . . .	107
4.21	<i>Déformées de la structure sous chargement de renversement et isovalues des déplacements verticaux et de la contrainte <math>\sigma_{xx}</math>. Modélisation mixte</i> . . . . .	108
4.22	<i>Effet de bord</i> . . . . .	109
5.1	<i>Critère de plasticité de la phase matrice et règle d'écoulement plastique dans le cas associé</i> . . . . .	114
5.2	<i>Critère de plasticité de la phase renforcement et règle d'écoulement plastique (cas associé)</i> . . . . .	117
5.3	<i>Critère de plasticité de la loi d'interaction et règle d'écoulement plastique (cas associé)</i> . . . . .	118

5.4	<i>Cisaillement en déformation plane d'une couche de sol renforcée transversalement . . . . .</i>	120
5.5	<i>Distributions des efforts intérieurs en phase élastique . . . . .</i>	122
5.6	<i>Distribution des efforts intérieurs avec plastification de la phase matrice dans la zone centrale . . . . .</i>	125
5.7	<i>Distribution des efforts intérieurs (plastification des deux phases) . . . . .</i>	128
5.8	<i>Distribution des efforts intérieurs (a) et de vitesse de flèche (b) à la ruine plastique de la structure . . . . .</i>	129
5.9	<i>Courbe effort de cisaillement total-déplacement (<math>\rho &gt; 1</math>) . . . . .</i>	129
5.10	<i>Courbe effort de cisaillement total déplacement (<math>\rho=1</math>) . . . . .</i>	131
5.11	<i>Courbe effort de cisaillement total déplacement (<math>\rho&lt;1</math>) . . . . .</i>	132
5.12	<i>Diagramme d'interaction d'une inclusion de renforcement ayant la forme d'un tube mince . . . . .</i>	134
6.1	<i>Algorithme de plasticité pour le milieu biphasique . . . . .</i>	159
6.2	<i>Fondation non renforcée . . . . .</i>	160
6.3	<i>Maillage de la structure . . . . .</i>	161
6.4	<i>Evolution du déplacement vertical en fonction de l'effort vertical . . . . .</i>	162
6.5	<i>Mécanisme d'écoulement plastique de la structure non renforcée sous chargement vertical . . . . .</i>	162
6.6	<i>Fondation renforcée sur radier de pieux . . . . .</i>	163
6.7	<i>Modélisation biphasique de la zone renforcée . . . . .</i>	164
6.8	<i>Critère de plasticité de la phase renforcement . . . . .</i>	165
6.9	<i>Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement négligés) . . . . .</i>	166
6.10	<i>Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée sous chargement vertical (effets de flexion et de cisaillement pris en compte) . . . . .</i>	167
6.11	<i>(a) Mécanisme par blocs rigides de la fondation renforcée, (b) hodographe des vitesses . . . . .</i>	168
6.12	<i>Déformées de la structure sous chargement vertical de service . . . . .</i>	170

6.13	<i>Etat de plastification de la structure sous le chargement N (effets de flexion et de cisaillement négligés)</i> . . . . .	170
6.14	<i>Etat de plastification de la structure sous le chargement N (effets de flexion et de cisaillement pris en compte)</i> . . . . .	170
6.15	<i>Evolution des déplacements de la fondation sous chargement latéral (effets de flexion et de cisaillement négligés)</i> . . . . .	171
6.16	<i>Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement négligés)</i> . . . . .	172
6.17	<i>Evolution des déplacements de la fondation sous chargement latéral (effets de flexion et de cisaillement pris en considération)</i> . . . . .	172
6.18	<i>Déformée de la structure sous chargement de dimensionnement (vertical et latéral)</i> . . . . .	172
6.19	<i>Talus incliné soumis à son poids propre</i> . . . . .	174
6.20	<i>Maillage de la structure par des éléments triangulaires quadratiques</i> . . . . .	175
6.21	<i>Déplacement d'un point caractéristique du talus en fonction du paramètre de chargement</i> . . . . .	175
6.22	<i>Mécanisme d'écoulement plastique de la structure non renforcée</i> . . . . .	176
6.23	<i>Stabilisation d'une pente par inclusions rigides</i> . . . . .	176
6.24	<i>Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement négligés)</i> . . . . .	177
6.25	<i>Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement pris en compte)</i> . . . . .	178
6.26	<i>Plastification de la phase renforcement</i> . . . . .	179

# Liste des tableaux

1.1	<i>Caractéristiques d'ouvrages sur pieux (d'après Sudret (1999) [75]) . . . . .</i>	7
-----	---	---



# Chapitre 1

## Introduction bibliographique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Les techniques de renforcement par inclusions rigides</b>	<b>3</b>
1.2.1	Les fondations sur groupes de pieux	4
1.2.2	Autres techniques de renforcement par inclusions rigides	5
<b>1.3</b>	<b>Une brève revue des méthodes de calcul</b>	<b>9</b>
1.3.1	Les approches de type "modélisation mixte"	9
1.3.2	Les méthodes de calcul par éléments finis	15
<b>1.4</b>	<b>L'approche par homogénéisation et ses limites</b>	<b>20</b>
1.4.1	Le sol renforcé comme milieu élastique anisotrope	20
1.4.2	Un exemple illustratif	22
<b>1.5</b>	<b>Vers une modélisation multiphasique des sols renforcés par inclusions</b>	<b>25</b>

---





## 1.1 Introduction

Le renforcement des sols par inclusions rigides est une technique fort ancienne visant à améliorer la tenue en service des ouvrages de géotechnique et à augmenter leur portance. Cette technique connaît un essor important depuis quelques décennies avec les constructions dans des environnements de plus en plus hostiles et sur des terrains de plus en plus médiocres, mais le dimensionnement de tels ouvrages reste difficile en raison de la complexité du problème abordé.

C'est dans ce cadre que s'inscrit le présent travail, dont l'objectif est de développer une méthode de calcul simplifiée des ouvrages renforcés par inclusions rigides qui prenne en compte les interactions complexes ayant lieu dans ce type de matériau composite.

Ce chapitre débute par la définition du renforcement des sols par inclusions rigides, suivie de la présentation de cette technique et de ses différentes applications en géotechnique.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la revue des méthodes de calcul des ouvrages renforcés par inclusions rigides, en distinguant deux grandes familles, à savoir les méthodes de type "modélisation mixte" et les approches de calcul par éléments finis. La description de ces différentes méthodes de calcul et la difficulté à les mettre en œuvre suggère la nécessité d'aller vers des approches consistant à homogénéiser de telles structures hétérogènes. Ce type de modélisation est présenté dans la quatrième section du présent chapitre, montrant les avantages d'une telle approche pour le calcul du comportement global d'une structure renforcée, mais aussi ses limites puisqu'elle s'avère très conservatrice dans certaines situations.

## 1.2 Les techniques de renforcement par inclusions rigides

La terminologie de "renforcement par inclusions rigides", que nous adopterons tout au long du présent travail, se réfère à l'ensemble des techniques de renforcement des sols par inclusions linéaires ayant les caractéristiques suivantes :

a) Le matériau qui constitue ces inclusions possède des propriétés de raideur et de résistance incomparablement plus grandes que celles du sol environnant. Ainsi le module d'Young du sol, de type sable ou argile, excède rarement la centaine de MPa, à comparer à celui d'un béton (10 000 à 40 000 MPa) ou d'un acier (200 000 MPa). De même, la cohésion d'une argile atteint tout au plus quelques centaines de kPa qui sont à comparer

à la résistance en compression d'un béton (plusieurs dizaines de MPa) ou à la traction d'un acier (plusieurs centaines de MPa).

b) Chaque inclusion étant traitée comme un élément de structure unidimensionnel, son diamètre est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer qu'elle fonctionne comme une poutre susceptible de reprendre non seulement des efforts de traction et de compression, mais également des sollicitations de flexion et de cisaillement.

Cette dernière condition exclut donc de notre champ d'investigation les procédés de renforcement par inclusions "souples" (c'est-à-dire, en pratique, ne pouvant reprendre que des efforts de traction), tels que la terre armée, le renforcement par géotextiles, ou encore les techniques de clouage ou de boulonnage, pour lesquelles on peut montrer que les contributions associées aux composantes de flexion et de cisaillement jouent un rôle négligeable dans la tenue des ouvrages (voir par exemple : de Buhan et Salençon (1993) [29]; de Buhan (2004) [26]). De même, la première condition écarte de notre analyse les techniques de renforcement des sols de fondation par colonnes ballastées (Dhouib et Blondeau (1979) [34]) ou stabilisées à la chaux (Broms et Boman (1979) [15]). En effet, dans ce cas, les caractéristiques de raideur et de résistance ne sont pas considérablement plus grandes que celles du sol à renforcer et peuvent même être inférieures dans l'exemple des colonnes ballastées, où le matériau constitutif (sable ou gravier compacté) est dépourvu de cohésion.

En contrepartie de bien meilleures caractéristiques du matériau de renforcement, la fraction volumique de ce dernier est relativement faible, dépassant rarement les quelques pourcents. En outre, nous centrerons plus spécifiquement notre travail sur la configuration d'un renforcement des ouvrages par un nombre relativement important d'inclusions (de quelques dizaines à plusieurs centaines), réparties de façon régulière au sein du massif de sol, faisant ainsi ressortir le caractère composite du matériau "sol renforcé" ainsi élaboré.

Nous décrivons brièvement ci-après quelques techniques de renforcement d'ouvrages faisant usage d'inclusions rigides au sens défini ci-dessus.

### 1.2.1 Les fondations sur groupes de pieux

On peut distinguer dans cette catégorie deux types de fondations reposant sur un sol renforcé par des pieux (Borel (2001) [11]).

- Les *fondations profondes* pour lesquelles les efforts sont repris quasi-exclusivement par les pieux par le biais du frottement latéral d'une part et des efforts de pointe d'autre part (figure 1.1 (a)). Il n'y a pas d'interaction directe entre la semelle et le sol.

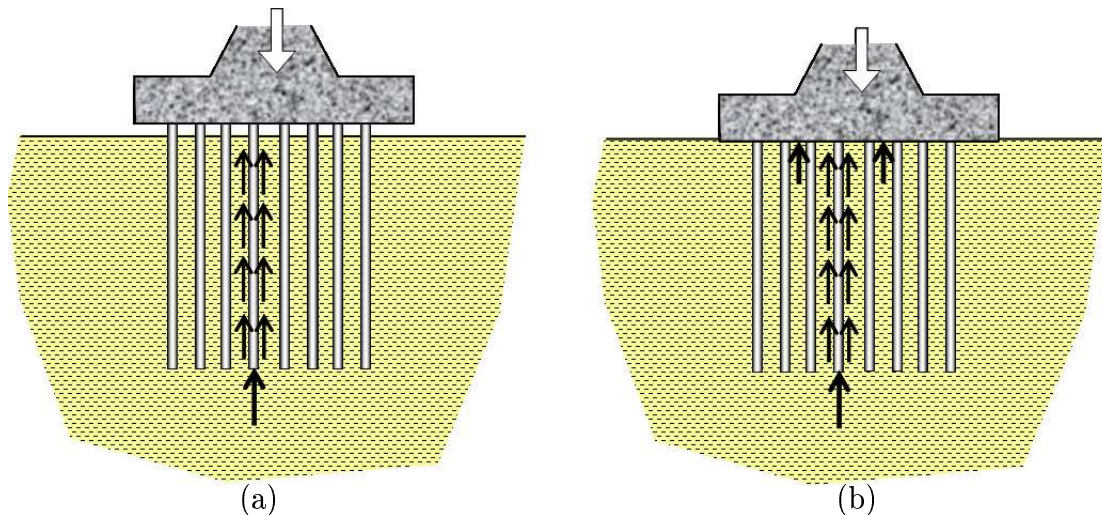


FIG. 1.1: Schématisation simplifiée d'une fondation profonde (a) et d'une fondation mixte (b)

- Les *radiers de fondation sur pieux* ou *fondations mixtes* (traduction de "piled raft foundations", voir Borel (2001) [11]) pour lesquels, la semelle de fondation est en contact direct avec le sol (figure 1.1 (b)). Le système combine le mode de fonctionnement de la fondation profonde décrit précédemment, avec celui de la fondation superficielle.

Cette dernière technique, d'utilisation plus récente que les fondations profondes (Burland et al. (1977) [16]), se révèle efficace pour fonder des ouvrages de grande taille sur des couches argileuses, relativement compressibles, et diminuer au maximum les tassements en milieu urbain, comme dans le cas d'immeubles de très grandes hauteurs. La figure 1.2 ci-après et le tableau 1.1 qui l'accompagne, extraits de Sudret (1999) [75], donnent quelques exemples de tours construites dans les villes de Londres et Francfort dont le sous-sol est caractérisé par la présence d'une couche d'argile d'épaisseur importante.

De nombreux autres exemples sont fournis par Borel (2001) [11], qui décrit par ailleurs l'utilisation de cette technique, en France comme à l'étranger, pour les fondations d'ouvrages d'art, où le nombre de pieux de renforcement est toutefois plus faible que dans le cas des fondations des bâtiments.

### 1.2.2 Autres techniques de renforcement par inclusions rigides

Parmi les autres méthodes relevant du renforcement d'un sol par inclusions rigides, on peut citer :

- Les reprises en sous-œuvre de fondations de bâtiments ou d'ouvrages d'art par des

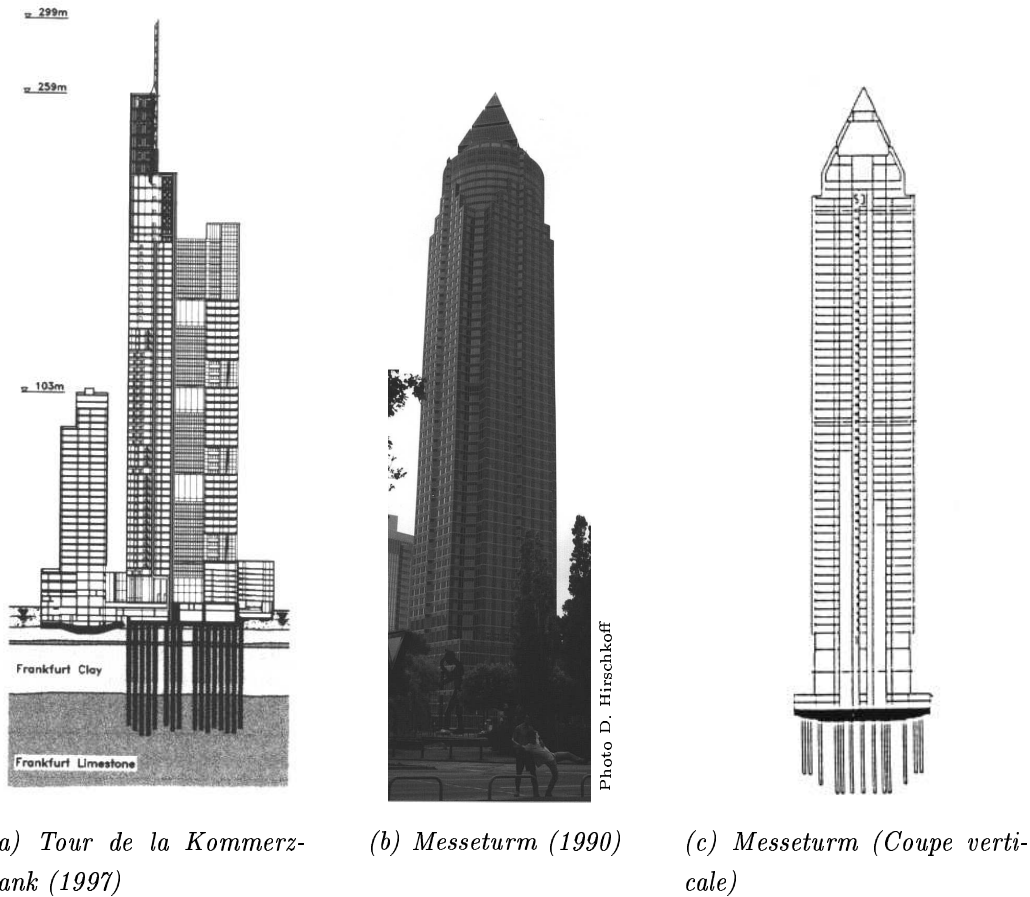


FIG. 1.2: Exemples d'ouvrages sur radiers de pieux (Sudret (1999) [75])

groupes ou réseaux de *micropieux* (figure 1.3). En France, ce type de technique a fait l'objet du Projet National FOREVER qui a débouché sur l'édition de recommandations (Plumelle et al. (2002) [61]; Schlosser et Frank (2003) [68]).

- Le renforcement de sols de fondation par des inclusions verticales en contact avec un substratum, le chargement étant transmis par l'intermédiaire d'un matelas de répartition formé d'un matériau granulaire (figure 1.4).

Contrairement aux situations précédentes, et notamment aux fondations profondes ou mixtes, les inclusions ne sont pas reliées entre elles par un radier de fondation. Elles contribuent par exemple à réduire considérablement le tassement de remblais sur sols compressibles (Combarieu (1988) [21]; Alexiew et Vogel (2002) [2]; Berthelot et al. (2003) [9]). Ce procédé de renforcement, qui connaît un développement croissant, fait l'objet d'un Projet National (Briançon et al. (2004) [14]; Jenck et al. (2005) [53]). Ce dernier met essentiellement l'accent sur la façon dont les charges verticales sont transmises aux inclusions de renforcement par le biais d'un matelas granulaire de répartition.

Date	Désignation	Hauteur (m)	Epaisseur du radier (m)	Pieux
1967	Tour <i>Cavalry Barracks</i> , Londres (Hooper (1997) [52])	90	1,5	51 pieux $d = 0,9$ m, $L = 25$ m
1975	Immeuble <i>Stonebridge Park</i> , Londres (Cooke et al. (1981) [23])	-	0,9	301 pieux $d = 0,45$ m, $L = 13$ m
1990	<i>Messeurm</i> , Francfort (Sommer et al. (1991) [74])	256	3 - 6	64 pieux $d = 1,3$ m, $L = 27 - 30$ m
1997	Tour de la <i>Kommerzbank</i> , Francfort (Katzenbach (1997) [54])	299	2,5 - 4,5	111 pieux $d = 1,5 - 1,8$ m, $L = 37,5 - 45,5$ m

TAB. 1.1: *Caractéristiques d'ouvrages sur pieux (d'après Sudret (1999) [75])*

- Dans le même ordre d'idée, un concept original de renforcement par inclusions rigides a été développé pour assurer la stabilité des fondations des piles du pont de Rion-Antirion en zone sismique (Pecker et Teyssandier (1998) [60]; Pecker (1998) [59]). A la différence des fondations mixtes, les inclusions de renforcement (qui sont des tubes métalliques de 25 m de longueur, 2 m de diamètre et 2 cm d'épaisseur) ne sont ni reliées au radier de fondation, ni en contact avec un substratum rigide en partie inférieure. Le nombre et la densité d'inclusions sont par ailleurs bien plus importants, tandis que leur longueur, évaluée relativement par rapport aux dimensions horizontales du radier, est moins importante que dans les fondations profondes classiques (figure 1.5).
- Un autre domaine d'utilisation de la technique de renforcement des sols par inclusions rigides concerne la stabilisation des pentes instables. La figure 1.6, extraite du traité "Construction" des "Techniques de l'Ingénieur", donne l'exemple de la confortation par inclusions verticales (pieux de 80 cm de diamètre) d'un remblai SNCF reposant sur un versant instable. L'utilisation de telles inclusions capables de reprendre des efforts de

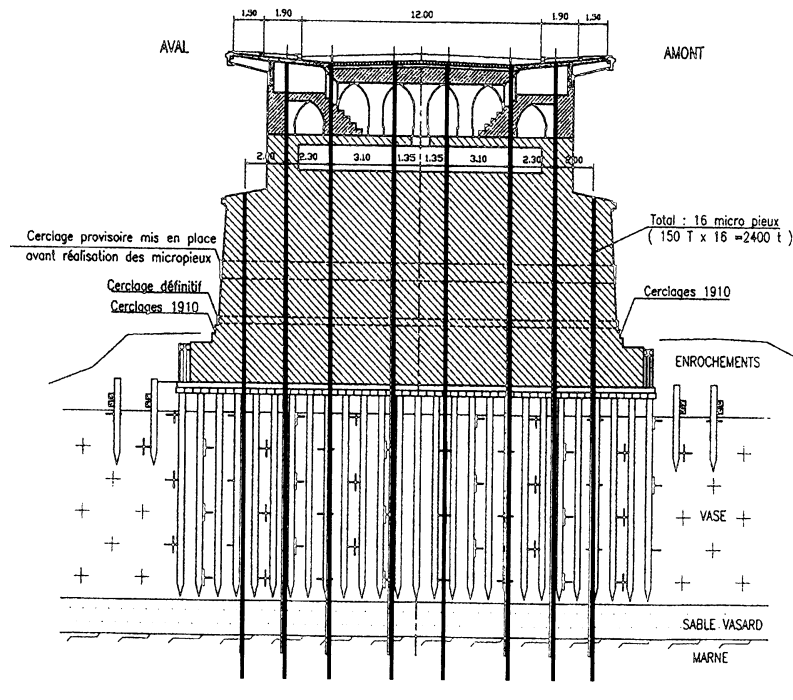


FIG. 1.3: Exemple de reprise en sous-œuvre par des micropieux : pile du pont de pierre à Bordeaux (Ledoux (1997) [55])

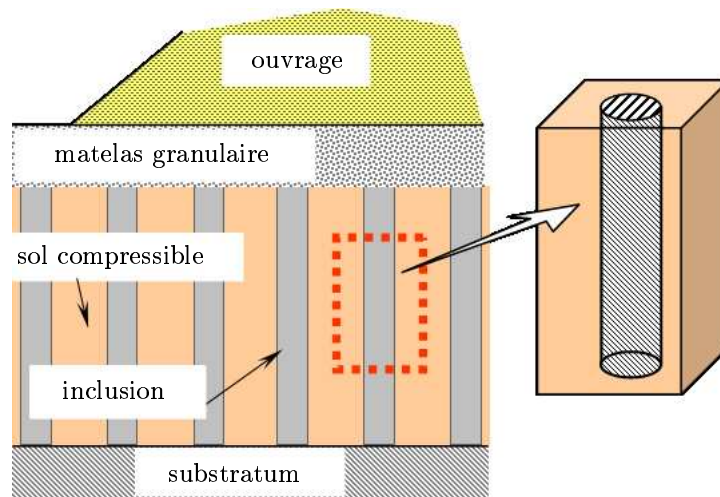


FIG. 1.4: Principe du renforcement d'une couche de sol compressible par des inclusions verticales

flexion a permis de diminuer fortement les mouvements de la pente. D'autres exemples d'application de ce type de technique de renforcement à la stabilisation des pentes sont décrits par Gudehus et Schwartz (1985) [41], Guilloux (1993) [42], et Hong et al. (1997) [51].

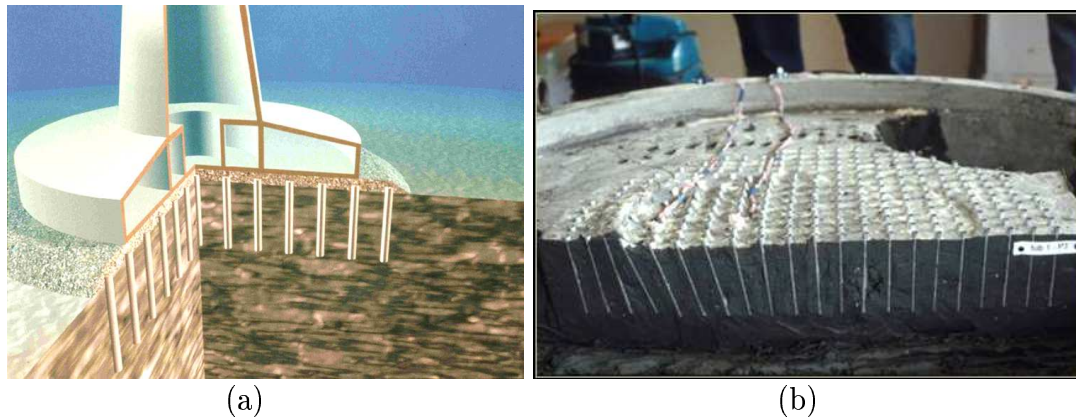


FIG. 1.5: (a) Vue d'une fondation du pont de Rion-Antirion, (b) Rupture d'un modèle réduit testé à la centrifugeuse du LCPC

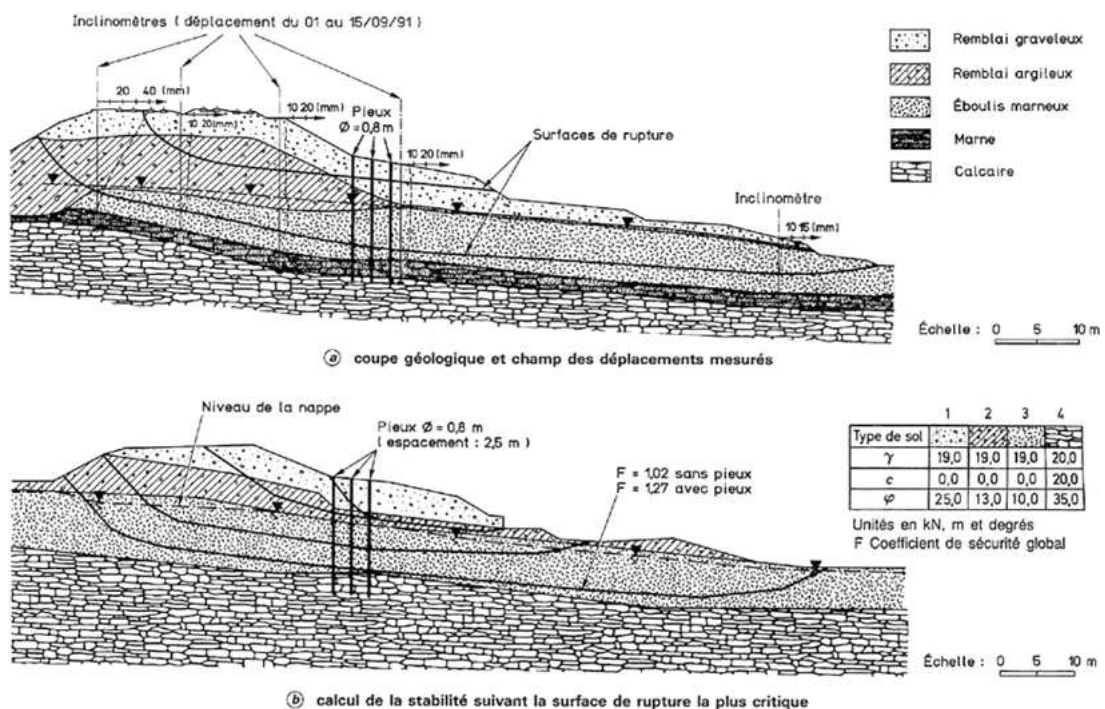


FIG. 1.6: Exemple de confortation d'une pente instable par un groupe de pieux (Schlosser et Unterreiner (1998) [69])

## 1.3 Une brève revue des méthodes de calcul

### 1.3.1 Les approches de type "modélisation mixte"

#### 1.3.1.1. Méthodes de calcul en déplacement

Ce sont celles qui s'imposent tout naturellement à l'ingénieur confronté au problème de dimensionnement d'ouvrages de géotechnique renforcés par des éléments linéaires conti-



nus que sont les inclusions rigides. Cette modélisation consiste à appréhender les renforcements comme des éléments de *poutres en flexion*, distribuées au sein du sol avec lequel ils interagissent. Elles s'inspirent donc directement des méthodes de calcul des fondations profondes, notamment dans le cas de sollicitations latérales où les inclusions travaillent en flexion.

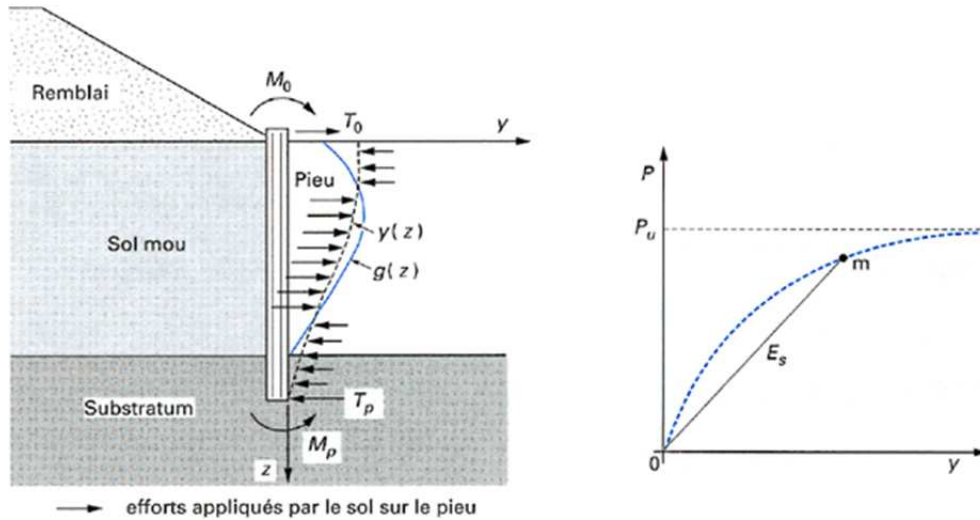


FIG. 1.7: *Pieu de renforcement sollicité en flexion par l'action latérale du sol (Frank (1995) [36])*

La figure 1.7 représente un pieu vertical de renforcement soumis à la poussée latérale exercée par le sol. Dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire du pieu, l'équation différentielle qui gouverne sa déflexion latérale s'écrit (Frank (1995) [36]) :

$$E_p I_p \frac{d^4 y}{dz^4} + E_s(z) (y(z) - g(z)) = 0 \quad (1.1)$$

dans laquelle :

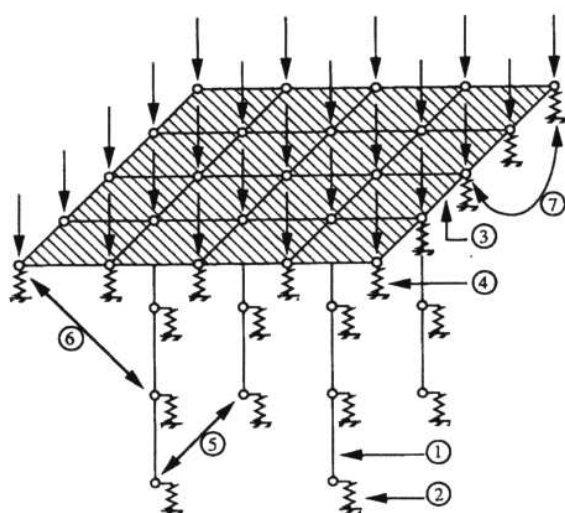
- $E_p I_p$  désigne la rigidité à la flexion du pieu ;
- $y(z)$  (resp.  $g(z)$ ) est le déplacement latéral du pieu (resp. déplacement libre du sol) ;
- $E_s$  désigne le module de réaction sécant du sol (courbe de la figure 1.7).

Dans un tel calcul, le sol n'est représenté qu'à travers l'action qu'il exerce sur le pieu de renforcement, sous la forme d'une relation de proportionnalité entre l'effort appliqué et le déplacement relatif pieu/sol. Une telle schématisation de l'interaction sol/pieu est analogue au modèle de Winkler adopté pour le calcul d'une poutre sur appui élastique (Timoshenko (1990) [77]).

Dans le cas d'un groupe de pieux, un programme de calcul spécifique dénommé GOU-PIL (Degny et Romagny (1989) [32]) a été mis au point sur la base de la modélisation

précédente. Ce programme incorpore des lois d'interaction pieu/sol prenant en compte les sollicitations latérale (courbe dite "p-y") et axiale (courbe "t-z"), de type linéaire par morceaux, de manière à tenir compte de la non-linéarité de ces interactions. Un effet de groupe peut également être introduit par pondération de ces lois d'interaction.

De nombreuses autres méthodes de calcul fondées sur la modélisation mixte d'un sol renforcé par inclusions rigides ont été proposées. L'une d'elles, désignée sous l'appellation de "modèle hybride" a été développée pour le calcul des fondations mixtes par Griffiths et al. (1991) [40] et Clancy et Randolph (1993) [20], à partir d'une extension de la méthode "hybride" proposée par Chow (1986) [19] pour l'analyse des groupes de pieux. La démarche, illustrée par la figure 1.8, est appliquée au cas d'un chargement vertical. Le principe en est le suivant (Sudret (1999) [75]) :



1. Élément de barre 1D
2. Réaction du sol en chaque nœud - ressort non linéaires  $t-z$
3. Élément fini de plaque en flexion
4. Réaction du sol en chaque nœud du radier - ressort équivalent
5. Interaction pieu-sol-pieu calculée par paire de nœuds (Solution de Mindlin)
6. Interaction pieu-sol-radier
7. Interaction radier-sol-radier

FIG. 1.8: Principe du modèle "hybride" pour le calcul d'une fondation mixte (Clancy et Randolph (1993) [20])

Les pieux de renforcement sont modélisés par des éléments finis de type barre ne travaillant qu'en traction-compression, et l'interaction avec le massif de sol est prise en compte, tout comme dans le cas des fondations profondes, par l'intermédiaire de ressorts schématisant le frottement latéral (courbe "t-z" de transfert de charge). Le massif de sol n'est pas modélisé de façon explicite, mais pris en compte en utilisant la solution de Mindlin qui donne, en élasticité linéaire, le champ de déplacement en tout point du massif sous l'action d'une charge ponctuelle. Des améliorations de cette méthode ont été apportées par Hong et al. (1999) [50], permettant de diminuer le temps de calcul lorsque le nombre de pieux devient important.

Dans le même esprit, Shen et Teh (2002a, 2002b) [70] [71] présentent une approche variationnelle du problème consistant à appliquer le principe du minimum de l'énergie potentielle à un groupe de pieux quelconque, pouvant être soumis à une sollicitation verticale ou latérale. L'idée est d'effectuer cette minimisation à partir d'une décomposition en séries de la déflexion des pieux. L'interaction entre les pieux et le sol est fondée sur la méthode des modules de réaction, l'estimation de ces modules étant faite là encore à partir de la solution de Mindlin en élasticité linéaire.

Small et Zhang (2000, 2002) [79] [73] proposent une méthode de calcul très similaire à la précédente, associant la méthode des éléments finis pour modéliser les pieux et le radier, et la théorie des "couches finies" (finite layer theory) pour traiter le massif de sol dont le module varie avec la profondeur. A titre d'exemple illustratif, la figure 1.9 représente une série de couches donnant le déplacement vertical normalisé d'un radier connecté à un groupe de 3x4 pieux en fonction de la longueur des pieux ainsi que de la rigidité relative des pieux.

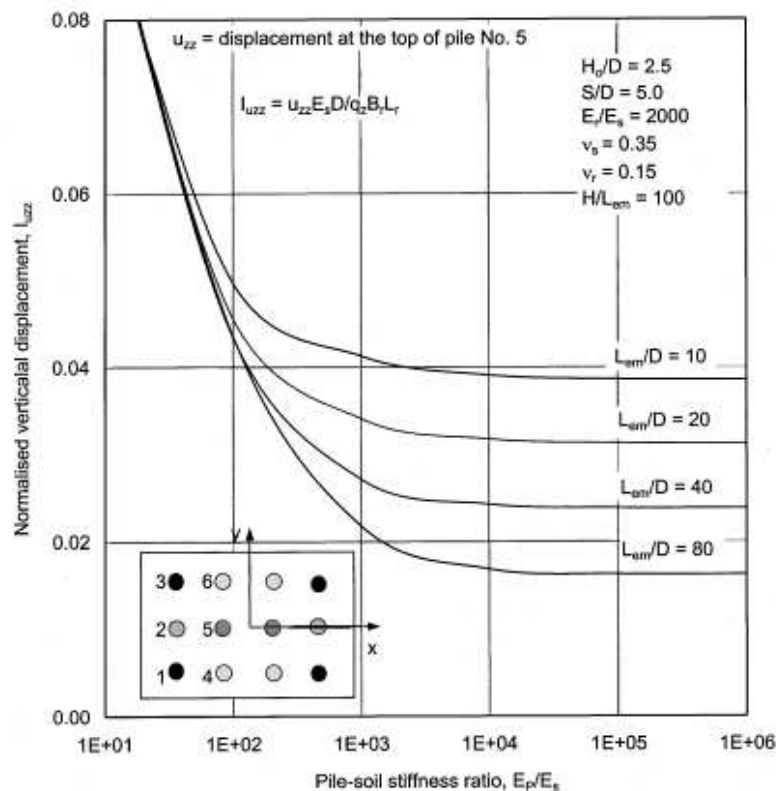


FIG. 1.9: Calcul du déplacement vertical normalisé d'un groupe de pieux sous chargement vertical (Zhang et Small (2000) [79])

Une approche variationnelle modifiée, tout à fait analogue aux deux précédentes, a été récemment développée par Liang et Chen (2004) [56].

### 1.3.1.2. Analyse de stabilité d'ouvrages renforcés par inclusions rigides

La modélisation mixte d'un sol renforcé par inclusions rigides se prête bien à l'analyse de la stabilité des ouvrages correspondants. La figure 1.10 montre un exemple d'étude de stabilité par surface de rupture d'un talus renforcé par inclusions rigides.

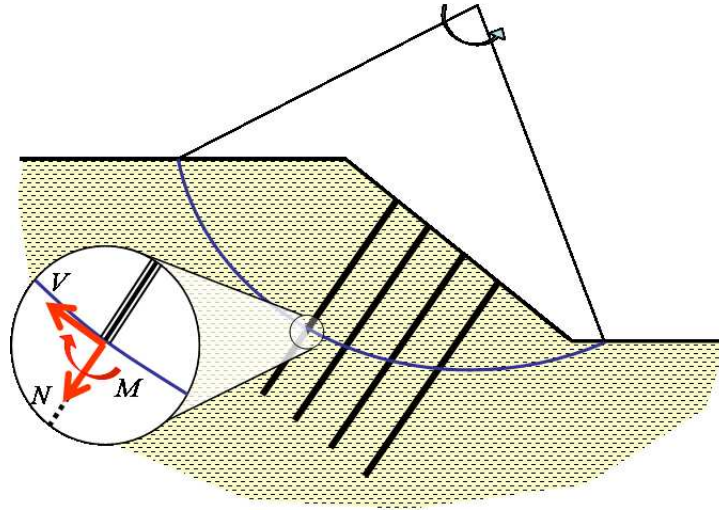


FIG. 1.10: *Analyse de la stabilité avec surface de rupture d'un talus renforcé par inclusions rigides*

Une telle analyse est conduite en ajoutant aux efforts résistants développés par le sol le long de la surface de rupture, ceux développés par chaque inclusion à l'endroit de son intersection avec la surface de rupture, c'est-à-dire les efforts normal  $N$  et tranchant  $V$ , ainsi que le moment fléchissant. Tout comme pour le sol dont les capacités de résistance sont classiquement exprimées par un critère de Mohr-Coulomb, la résistance des inclusions, modélisées comme des poutres, se traduit par une condition du type (Anthoine (1989) [3]; de Buhan et Salençon (1993) [29]) :

$$\left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 + \left|\frac{M}{M_0}\right| - 1 \leq 0 \quad (1.2)$$

où  $N_0$ ,  $V_0$  et  $M_0$  désignent respectivement les résistances de l'inclusion vis-à-vis des sollicitations d'effort axial, d'effort tranchant et de moment de flexion. D'autres critères similaires ont été proposés tels que le multicritère (figure 1.11), qui prend également en compte la plastification du sol en butée, ainsi que la condition d'arrachement de l'inclusion par défaut d'adhérence (Blondeau et al. (1983) [10]).

La théorie du calcul à la rupture et plus précisément l'approche cinématique par l'extérieur permet d'intégrer facilement et de façon parfaitement cohérente des critères de

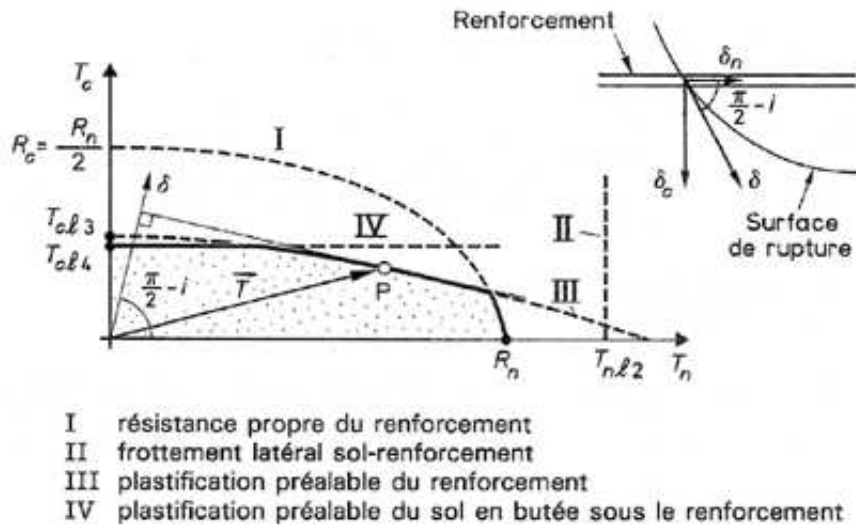


FIG. 1.11: Multicritère d'une inclusion de renforcement à la traversée d'une surface de rupture (Blondeau et al. (1983) [10])

rupture de type (1.1) dans l'analyse de stabilité d'ouvrages renforcés par inclusions rigides. Elle permet en particulier de clarifier la question de savoir dans quelle mesure il convient de prendre en compte les résistances au cisaillement et à la flexion des inclusions dans les calculs de stabilité. La figure 1.12 extraite de de Buhan (2004) [26] et de de Buhan et Salençon (1993) [29] montre les résultats d'une étude paramétrique obtenus par la méthode cinématique du calcul à la rupture utilisant des mécanismes mettant en jeu soit des surfaces de rupture, soit des zones en cisaillement (figure 1.12 (a))

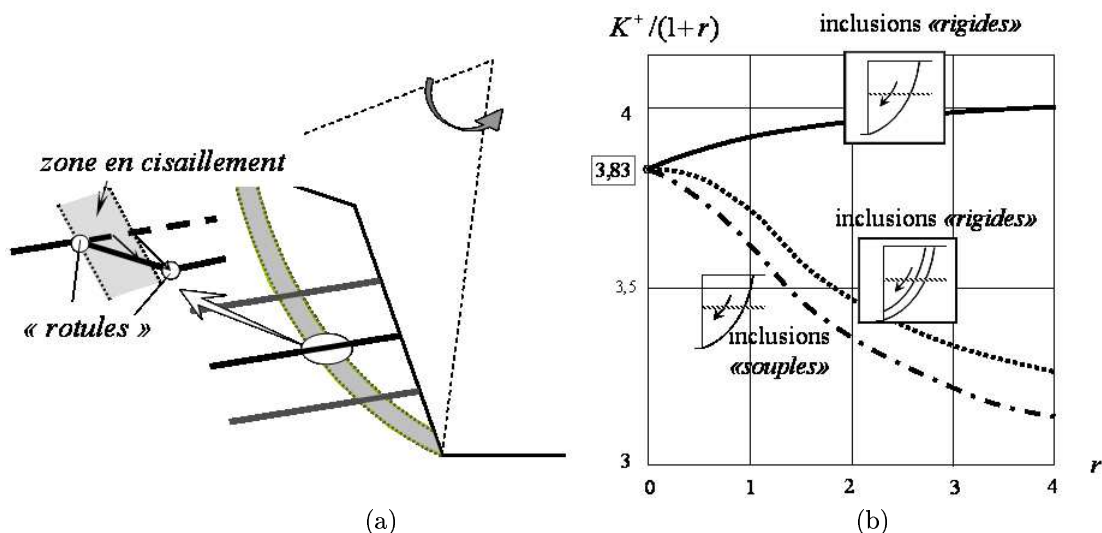


FIG. 1.12: (a) Mécanisme de rupture d'un ouvrage renforcé par inclusions rigides avec zone de cisaillement, (b) Facteur de Stabilité d'un talus vertical renforcé évalué par le biais de différents mécanismes

L'exemple traité est celui d'un talus vertical de hauteur  $H$  en sol purement cohérent (cohésion  $C$ ) renforcé sur toute sa hauteur par une distribution uniforme d'inclusions horizontales, pour lequel les surfaces de rupture sont circulaires. La figure 1.12 (b) représente les variations des différentes évaluations (majorants) du rapport  $K^+/(1+r)$ , où  $K^+$  est le facteur de stabilité de l'ouvrage et  $r = mN_0/2CH$  ( $N_0$  : résistance en traction des inclusions,  $m$  : nombre d'inclusions de renforcement). La courbe inférieure correspond au cas où les inclusions sont "souples", c'est-à-dire que leur résistance au cisaillement et à la flexion est négligée ( $V_0 = M_0 = 0$  dans (1.2)), tandis que les courbes intermédiaires et supérieures correspondent au calcul de stabilité prenant en compte ces résistances (inclusions "rigides").

Il ressort d'une telle analyse que dans le cas où le diamètre des inclusions de renforcement n'excède pas quelques centimètres (exemple de la technique de clouage), le gain de stabilité que l'on est en droit d'attendre des résistances en flexion et au cisaillement reste relativement négligeable. Il est en revanche tout à fait significatif dans le cas d'ouvrages renforcés par inclusions "rigides", tels que les radiers de fondation sous sollicitation sismique (voir figure 1.5). Dans ce dernier cas, l'approche cinématique du calcul à la rupture mettant en œuvre des mécanismes avec "bandes de cisaillement", analogues à celui schématisé sur la figure 1.12 (a), a permis de fournir des évaluations de la capacité portante de telles fondations, qui se sont révélées en bon accord avec les résultats expérimentaux relatifs à des essais à rupture sur des modèles réduits en centrifugeuse (Pecker (1998) [60]) : figure 1.4 (b).

Signalons que, partant d'une modélisation mixte d'un sol renforcé par une distribution uniforme d'inclusions rigides, traitées comme des poutres en flexion, il est possible d'aboutir par homogénéisation à l'aide des puissances virtuelles, à un milieu homogénéisé de type *micropolaire* (de Buhan et al. (1998) [28]). Nous verrons que le modèle multiphasique développé dans le présent travail pour ce type de renforcement, rejoint très précisément un tel point de vue, limité jusqu'à lors aux applications faites en calcul à la rupture.

### 1.3.2 Les méthodes de calcul par éléments finis

Nous avons vu que dans le cadre des méthodes de calcul en déplacements fondées sur une modélisation mixte du sol renforcé par inclusions rigides (paragraphe 1.3.1), le sol n'est pas modélisé en tant que tel, comme un milieu continu 3D. Il n'apparaît le plus souvent qu'à travers une modélisation simplifiée des actions qu'il exerce sur les inclusions de renforcement traitées comme des poutres en flexion. Celles-ci sont appréhendées par le biais des courbes de réaction "p-y" ou "t-z", ainsi que, dans une version plus élaborée, en s'appuyant sur la solution du problème de Mindlin relatif à un milieu élastique, qui ne

permet pas de rendre compte des interactions entre renforcements.

Il importe de souligner la difficulté à formuler de façon cohérente une telle modélisation mixte, consistant à schématiser les inclusions de renforcement comme des milieux *unidimensionnels* plongés au sein du massif du sol traité comme un milieu continu *tridimensionnel*. Il n'est en effet pas possible de raccorder les distributions d'efforts intérieurs, de type  $(N, V, M)$ , le long des renforcements, aux champs de contraintes, de type  $\underline{\sigma}$ , régnant dans le sol.

Un tel raccord n'est possible que dans la situation où les renforcements sont modélisés comme des plaques continues, c'est-à-dire des milieux *bidimensionnels* (Anthoine (1989) [3]; de Buhan (2004) [26]). Nous verrons au chapitre 4 (section 4.2.2) comment il est possible dans ce cas de mettre en œuvre numériquement, dans le cadre d'une méthode des éléments finis appliquée à la résolution de problèmes en déformations planes, une telle modélisation mixte "1D-2D", chaque file de pieux étant remplacée par une plaque équivalente (poutre 1D dans le plan de la déformation).

La mise en œuvre d'une technique de résolution par éléments finis pour la simulation du comportement d'un ouvrage en sol renforcé par inclusions rigides, exige donc de traiter les inclusions de renforcement tout comme des éléments tridimensionnels. Nous décrivons ci-après un tel exemple de simulation réalisée par Vetter (1998) [78] sur la Messturm de Francfort (figure 1.2 (b)), tour de 256 m de hauteur reposant sur une couche argileuse épaisse relativement compressible, qu'il convenait donc de renforcer pour diminuer les tassements de l'ouvrage, ainsi que les moments de flexion induits dans le radier de fondation.

La figure 1.13 montre une vue de dessus du radier et de la disposition des inclusions de renforcement constituées par des pieux en béton de diamètre 1,3 m. (64 pieux de différentes longueurs ont été utilisés).

La figure 1.14 représente le maillage par éléments finis 3D utilisé par Vetter (compte tenu des symétries, seul un huitième de la structure est modélisé). Ce maillage comporte 8700 nœuds et 7859 éléments. Le calcul effectué porte sur l'évaluation du tassement de l'ouvrage en fonction du chargement (vertical) appliqué dû au poids de la tour au fur et à mesure de sa construction. De plus, les caractéristiques élastiques, mais également plastiques, du sol, comme du béton de renforcement, ont été prises en compte dans la simulation effectuée à l'aide du code de calcul ABAQUS.

Si les évaluations numériques du tassement obtenues par un tel calcul par éléments finis, apparaissent en bon accord avec les mesures faites in situ (tassement final de l'ordre de 10 - 12 cm), c'est au prix d'un temps de calcul important : jusqu'à 75 heures, soit plus de 3 jours ! Cela s'explique évidemment par la taille du problème à résoudre en raison du

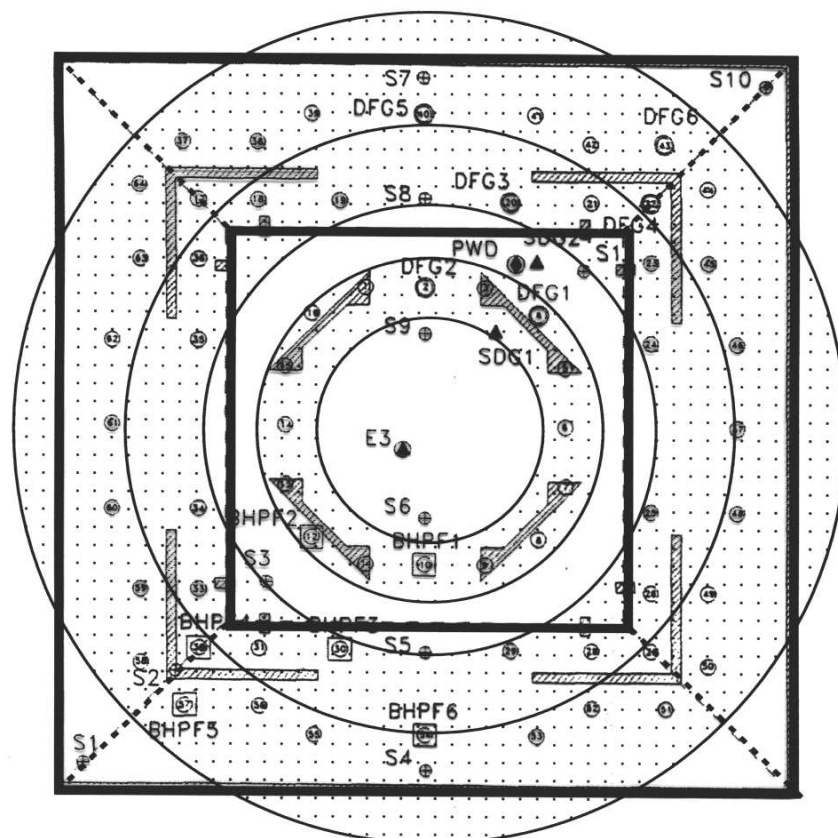


FIG. 1.13: Disposition des pieux de renforcement du radier de fondation de la Messturm (d'après Sudret (1999) [75])

maillage tridimensionnel adopté.

Les analyses approfondies d'ouvrages renforcés par inclusions rigides, conduites par la méthode des éléments finis, sont donc très rares en raison de la complexité du problème à résoudre, engendré par la très forte hétérogénéité du sol composite. Parmi les études les plus récentes consacrées à la simulation par éléments finis tridimensionnels de ce type de problème, on peut citer :

- L'analyse du comportement d'un remblai sur sol renforcé par trois files de pieux forés sous le bord du remblai (Borel et Freitag (2002) [12]). En dépit de l'exploitation de certaines symétries du problème, le maillage tridimensionnel adopté par les auteurs, comportait 14500 nœuds et 3200 éléments.
- L'étude de l'interaction entre pieux relativement peu espacés, dans des essais de chargement vertical d'une fondation sur groupe de pieux (Comodromos et al., (2003) [22]) effectuée par le logiciel FLAC 3D fondée sur la méthode des différences finies (voir maillage sur la figure 1.15 (a)).



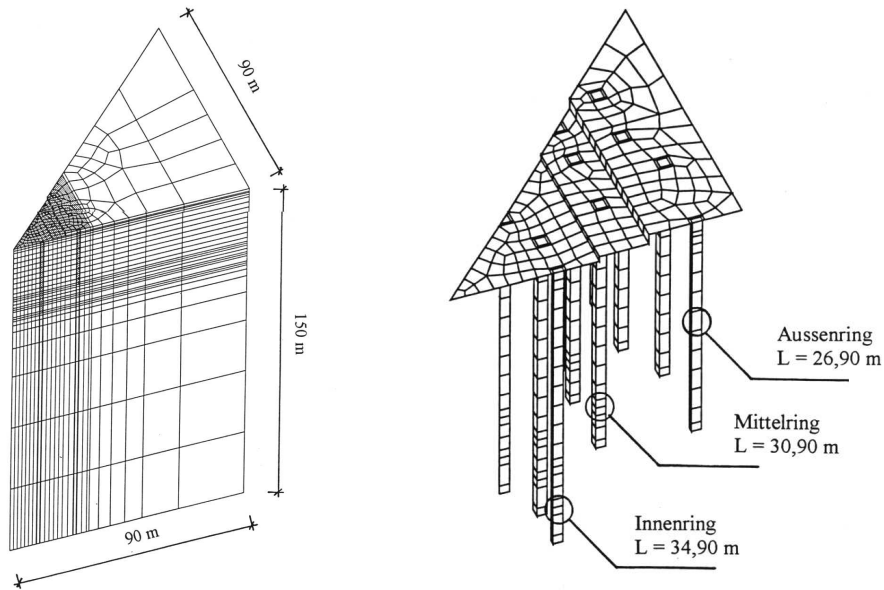


FIG. 1.14: *Maillage tridimensionnel du sol renforcé (Vetter (1998) [78])*

- De même, la figure 1.15 (b) représente le maillage par éléments finis adopté par Liang et al. (2003) [57] pour simuler le comportement d'un radier de fondation sur pieux en présence d'un matelas de répartition placé entre le radier et les pieux (calcul élastique avec le logiciel ANSYS).
- Utilisant le logiciel ABAQUS, Reul (2004) [62] a entrepris une étude paramétrique relative au calcul du tassement d'un radier de fondation sur groupe de pieux, selon que la semelle de fondation est en contact ou non avec le sol (figure 1.16). Les résultats de ces calculs aboutissent à l'établissement d'abaques de dimensionnement de ce type de fondation où l'on peut faire varier des paramètres tels que la longueur des pieux, leur espacement, ainsi que leur nombre, pouvant aller jusqu'à plus de 400.

Dans cette analyse, limitée à la configuration d'un chargement purement vertical, le comportement des inclusions de renforcement, ainsi que du radier de fondation, est supposé élastique, tandis que le sol (argile de Francfort) est modélisé comme un milieu élastoplastique avec écrouissage ("cap model"), le module d'élasticité étant une fonction croissante de la profondeur.

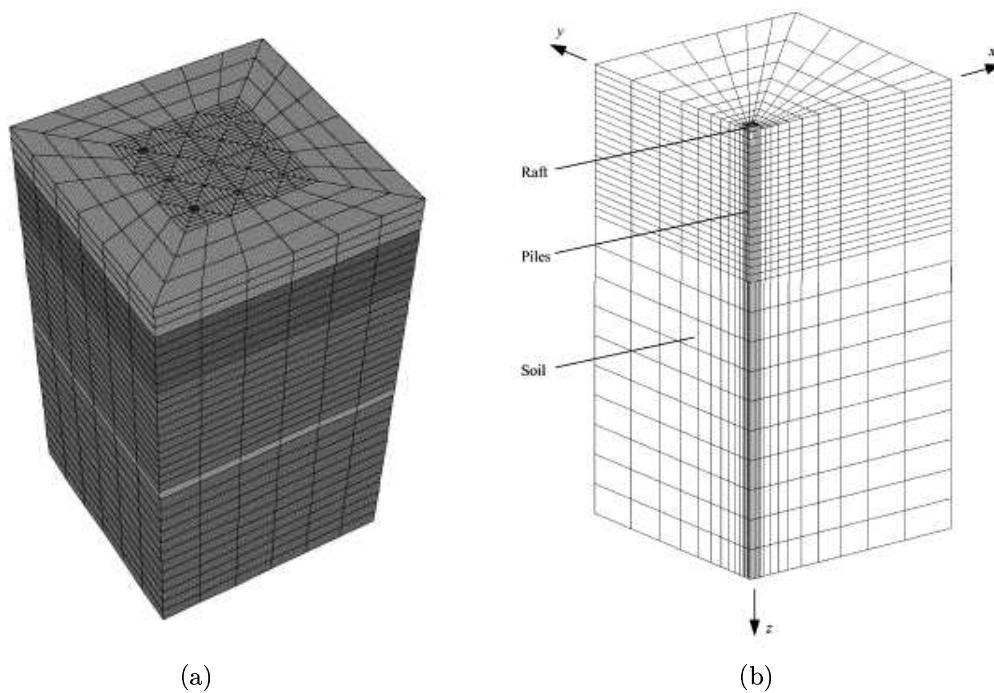


FIG. 1.15: (a) Maillage aux différences finies d'un radier sur pieux (logiciel *FLAC 3D* : Comdromos et al. (2003) [22]); (b) Maillage par éléments finis 3D (logiciel *ANSYS* : Liang et al. (2003) [57])

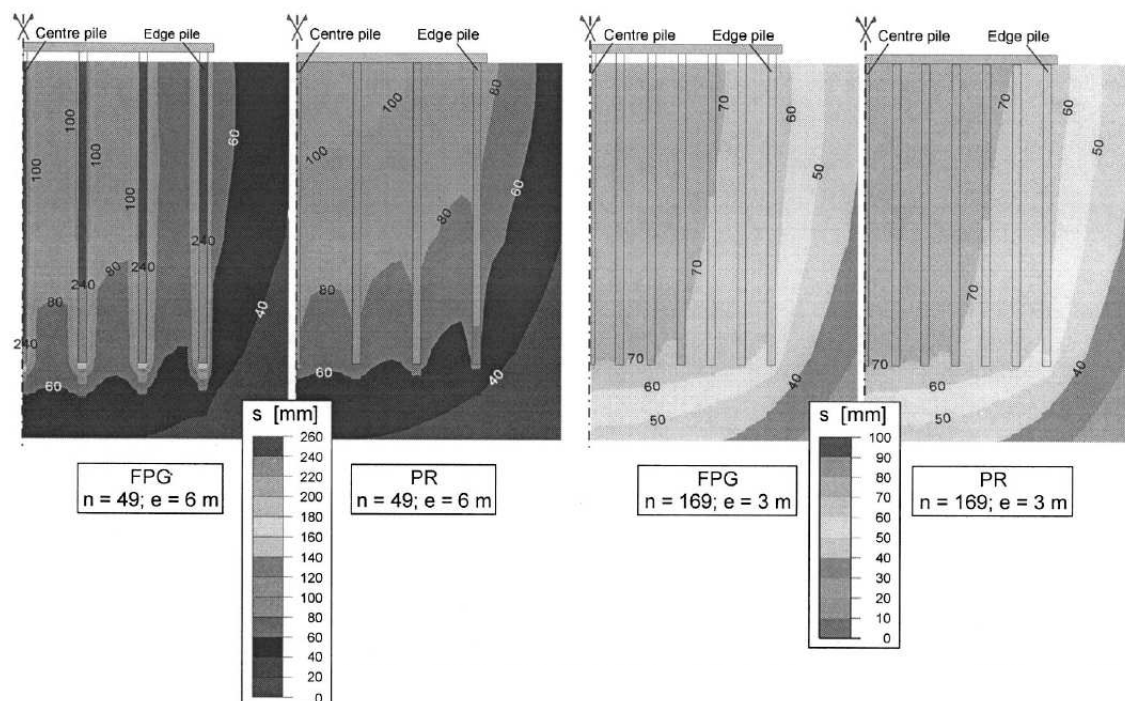


FIG. 1.16: Isovaleurs des tassements de radiers sur groupes de pieux et de fondations mixtes (Reul (2004) [62])

A noter également que Reul et Randolph (2003) [63] font un usage intensif de la simulation par éléments finis tridimensionnels pour analyser les tassements de fondations mixtes et comparer les prévisions données par cette simulation avec celles provenant d'autres méthodes ainsi qu'avec les mesures relevées in-situ sur un certain nombre de cas réels de fondations de grandes tours à Francfort. Aucune indication n'est cependant donnée en ce qui concerne la taille numérique du problème (nombre d'éléments et de nœuds du maillage), ou encore les temps de calculs, que l'on peut supposer être du même ordre de grandeur que ceux donnés par Vetter (1998) [78].

## 1.4 L'approche par homogénéisation et ses limites (de Buhan (2005) [27])

Si la méthode des éléments finis dont nous venons de décrire plusieurs exemples de mise en œuvre, permet de procéder à une analyse systématique du comportement des ouvrages renforcés par inclusions rigides, son utilisation en tant qu'outil de calcul et de dimensionnement pratique accessible à l'ingénieur, se heurte à l'obstacle majeur de la lourdeur des calculs auxquels elle donne lieu, notamment lorsque le nombre d'inclusions de renforcement mises en jeu devient important et que le chargement de l'ouvrage est complexe (cas des sollicitations latérales de radiers de fondation sur pieux). Il devient alors préférable de recourir à une méthode d'homogénéisation qui consiste à appréhender le sol renforcé composite comme un milieu homogène, mais anisotrope en raison de la direction préférentielle des inclusions de renforcement. Nous nous proposons de montrer, comment une telle approche ne permet pas de rendre compte du caractère "rigide" des inclusions, c'est-à-dire du fait que ces dernières peuvent reprendre des efforts de flexion et de cisaillement. L'exposé qui suit reprend très largement l'analyse faite par de Buhan (2005) [27].

### 1.4.1 Le sol renforcé comme milieu élastique anisotrope

En nous restreignant au cas où les deux constituants (sol et inclusion) obéissent à un comportement élastique linéaire, la détermination des propriétés élastiques *macroscopiques* d'un sol renforcé par des inclusions distribuées régulièrement au sein du massif de sol, repose sur la résolution d'un problème auxiliaire d'élasticité défini sur la cellule de base du matériau renforcé, représentée sur la partie droite de la figure 1.17. On peut ainsi montrer que, dans le cas où la fraction volumique du matériau de renforcement notée  $\eta$ , définie comme le rapport :

$$\eta = \frac{s^r}{d^2} \quad (1.3)$$

(avec  $s^r$  : section droite de l'inclusion et  $d$  : espacement entre deux inclusions) est faible, tandis que sa raideur représentée par son module d'Young  $E^r$  est grande vis-à-vis de celle du sol (module d'Young  $E^s$ ), le tenseur d'élasticité macroscopique du sol renforcé s'écrit (Hashin (1983) [43]; Greuell (1993) [39]; Sudret (1999) [75]) :

$$\eta \ll 1, \quad E^r \gg E^s, \quad \underline{\underline{C}}^{hom} = \underline{\underline{C}}^s + \alpha^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (1.4)$$

avec  $\alpha^r = \eta E^r$  et  $\underline{\underline{C}}^s$  est le tenseur d'élasticité du sol, tandis que  $\underline{e}_x$  désigne le vecteur unitaire placé selon la direction des inclusions de renforcement.

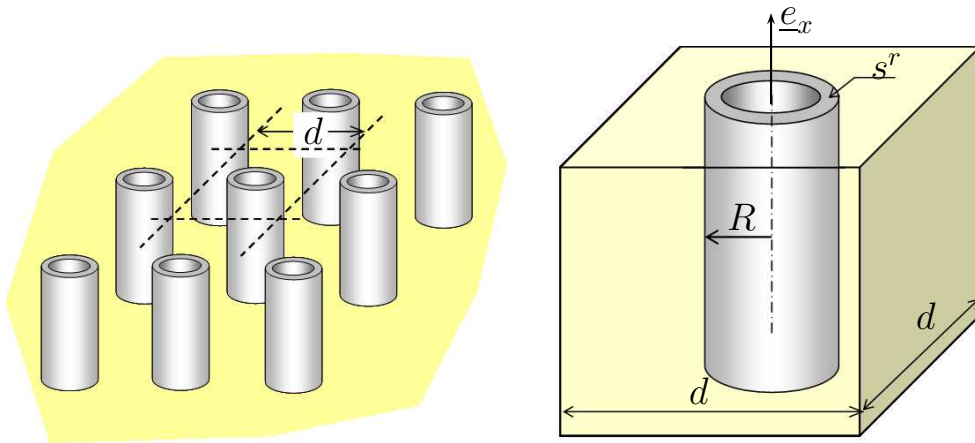


FIG. 1.17: Volume élémentaire représentatif

Dans le cas où le sol est modélisé comme un milieu élastique linéaire *isotrope* de coefficients de Lamé  $\lambda^s$  et  $\mu^s$ , le sol renforcé apparaît comme un milieu élastique *orthotrope de révolution* autour de la direction de renforcement, soit :

$$\underline{\underline{C}}^{hom} = \lambda^s \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu^s \underline{\underline{I}} + \alpha^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (1.5)$$

où encore en utilisant la notation matricielle de Voigt :

$$[C^{hom}] = \begin{bmatrix} \lambda^s + 2\mu^s + \alpha^r & \lambda^s & \lambda^s & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \lambda^s + 2\mu^s & \lambda^s & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \lambda^s + 2\mu^s & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2\mu^s & 0 & 0 \\ \cdot & sym. & \cdot & \cdot & 2\mu^s & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2\mu^s \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Exprimée sous la forme d'une relation contrainte-déformation, la *loi de comportement macroscopique* du sol renforcé s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}}^{hom} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} + \alpha^r \varepsilon_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x = \underline{\underline{\sigma}}^s + \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (1.7)$$

c'est-à-dire que la contrainte "macroscopique"  $\underline{\underline{\Sigma}}$  peut être additivement décomposée comme la somme d'une contrainte relative au sol et d'une *contrainte uniaxiale* associée au renforcement. La valeur de cette dernière, qui peut encore s'écrire, en tenant compte de (1.3) et (1.4) :

$$\sigma^r = \alpha^r \varepsilon_{xx} = \eta E^r \varepsilon_{xx} = \frac{s^r E^r \varepsilon_{xx}}{d^2} = \frac{N^r}{d^2} \quad (1.8)$$

peut s'interpréter alors comme l'*effort axial*  $N^r$  repris par les inclusions de renforcement, par unité de *surface transversale* à ces dernières.

### 1.4.2 Un exemple illustratif

Nous proposons d'illustrer l'application de la méthode d'homogénéisation précédente à l'analyse d'un modèle très simplifié, traitable analytiquement, de radier de fondation reposant sur un massif de sol d'épaisseur égale à  $2H$ , renforcé par un groupe de pieux de même longueur comme indiqué sur la figure 1.18. Nous plaçant dans un cadre *bidimensionnel*, les pieux de renforcement sont modélisés comme des couches d'épaisseur  $e$ , régulièrement espacées d'une distance  $d$ , de sorte que la fraction volumique du renforcement est tout simplement égale à  $\eta = e/d$  (avec  $\eta \ll 1$ ).

Les renforcements sont encastrés en tête dans le radier, considéré comme rigide, tandis que le massif est délimité en partie inférieure par un substratum également supposé indéformable.

Désignant par  $q$  la contrainte de cisaillement exercée sur la radier, on appelle  $\delta$  le déplacement correspondant.

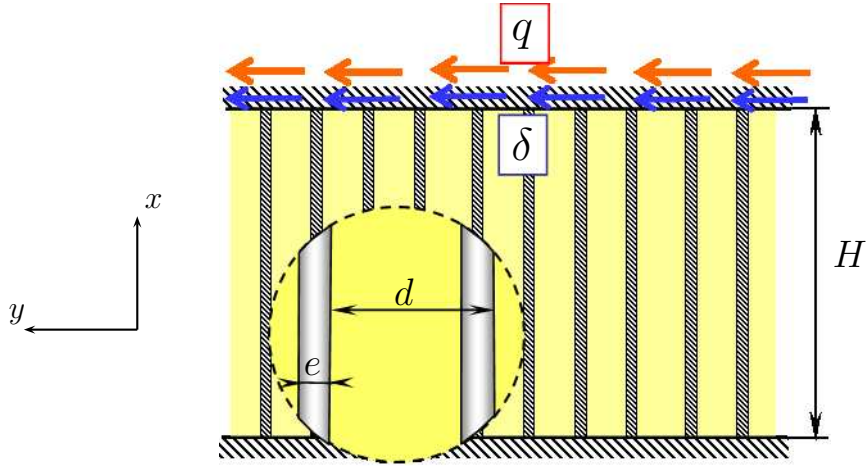


FIG. 1.18: *Modèle simplifié de radier de fondation sur pieux sous chargement latéral*

Le sol renforcé étant modélisé comme un milieu élastique homogène anisotrope dont la matrice d'élasticité est donnée par (1.6), on montre que la solution du problème correspond à des champs de contrainte et de déformation homogènes dans le massif renforcé ainsi homogénéisé, de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}} &= q (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \\ \underline{\underline{\epsilon}} &= \frac{\delta}{2H} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)\end{aligned}\tag{1.9}$$

Introduisant ces deux expressions dans la loi de comportement macroscopique (1.7), et en tenant compte de (1.5), il vient :

$$q = \mu^s \frac{\delta}{H}\tag{1.10}$$

de sorte que le facteur de renforcement de l'ouvrage vis-à-vis d'un chargement latéral que l'on peut définir par :

$$k = \frac{q}{\mu^s(\delta/H)}\tag{1.11}$$

vaut selon la méthode d'homogénéisation :

$$k^{hom} = 1\tag{1.12}$$

c'est-à-dire que, conformément à cette approche, *le fait de renforcer le sol par des inclusions verticales, ne contribue nullement à renforcer l'ouvrage vis-à-vis d'une sollicitation horizontale, c'est-à-dire s'exerçant latéralement aux inclusions de renforcement*. Un tel résultat, qui peut paraître surprenant, provient du fait que le module macroscopique de

cisaillement longitudinal  $C_{1212}^{hom}$  (voir équation (1.6)) du sol renforcé se réduit à celui du sol.

Le résultat diffère très sensiblement de celui donné par une simulation numérique par éléments finis de la structure ci-dessus. La figure 1.19 (a) compare deux évaluations du facteur de renforcement, en fonction du rapport entre les modules de cisaillement du renforcement et du sol, tandis que celle donnée par la méthode d'homogénéisation ne dépend pas de ce rapport, puisqu'elle ne prend en compte aucun effet du renforcement ( $k^{hom} = 1$  : trait horizontal sur la figure 1.19 (a)). L'évaluation fournie par un calcul par éléments finis, fait clairement apparaître cet effet du renforcement lorsque le rapport  $\mu^r/\mu^s$  devient important ( $> 1000$ ). Cet écart est confirmé par la figure 1.19 (b) qui représente les profils de déplacement latéral associés aux deux types de calcul. La méthode d'homogénéisation conduit à un déplacement linéaire qui correspond au champ de déformation de cisaillement homogène donné par (1.9), à la différence de la simulation par éléments finis qui donne un profil analogue à celui de la déflexion d'une poutre bi-encastée.

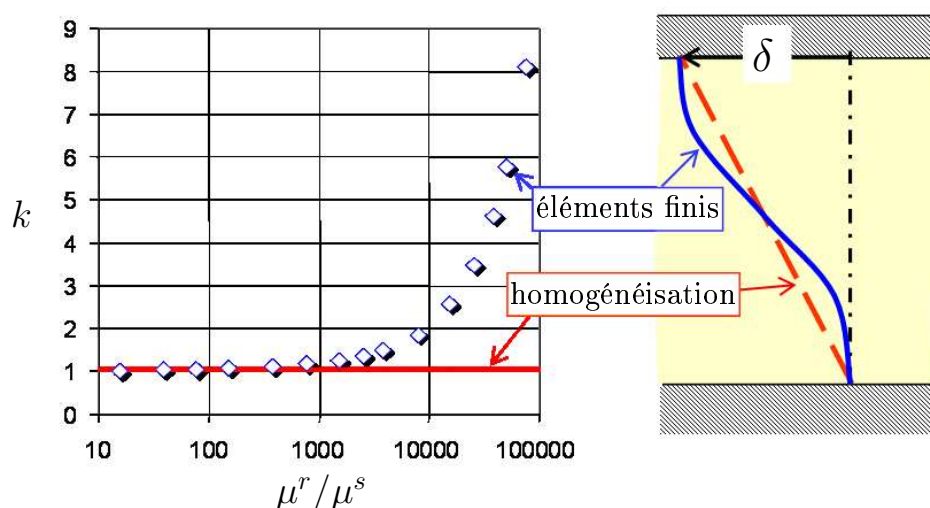


FIG. 1.19: (a) Evaluations du facteur de renforcement par la méthode d'homogénéisation et par la méthode des éléments finis ; (b) Profils de déplacement latéral dans la couche renforcée

Les limites de la méthode d'homogénéisation classique apparaissent donc clairement à travers cet exemple. Tout se passe en effet dans cette méthode, comme si les inclusions de renforcement ne travaillaient qu'en traction-compression, ce que confirme la décomposition (1.7) du tenseur des contraintes macroscopiques et l'interprétation (1.8) de la contrainte uniaxiale  $\sigma^r$  comme effort de traction par unité de surface transversale. L'approche par homogénéisation classique ne permet pas de prendre en compte les effets de flexion et de cisaillement des inclusions de renforcement.

## 1.5 Vers une modélisation multiphasique des sols renforcés par inclusions rigides

L'intérêt majeur du modèle multiphasique au développement duquel le présent travail est consacré, est de combiner l'avantage considérable de l'approche par homogénéisation en termes de temps de calcul, notamment dans des configurations tridimensionnelles, avec la possibilité de prendre explicitement en compte les effets de cisaillement et de flexion caractéristiques des inclusions rigides, c'est-à-dire de remédier aux limitations de la méthode d'homogénéisation que nous venons de souligner. L'intuition de départ qui préside à une telle modélisation est de remplacer le réseau d'inclusions réparties de façon *discrète* au sein du massif de sol (principe de la "modélisation mixte"), par une distribution *continue* de ces inclusions présentes en tout point du massif. C'est cette idée qui est déjà présente dans le développement d'une modélisation *micropolaire* de la résistance d'un sol renforcé par inclusions, effectué dans le cadre du calcul à la rupture (de Buhan et al. (1998) [28]), et que le modèle multiphasique parvient à généraliser à tout type de comportement.

La suite du présent mémoire est organisée comme suit :

Le chapitre 2 est consacré à la description de la modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions rigides, dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des différents matériaux, sol et inclusions de renforcement. Le problème de cisaillement transverse d'une couche de sol renforcée est traité analytiquement. La solution obtenue est comparée à la solution donnée par Sudret (1999) [75] lorsque les effets de cisaillement sont négligés et à la solution donnée par un calcul d'homogénéisation.

Le chapitre 3 porte sur la mise en œuvre numérique du modèle multiphasique avec flexion dans le cadre de la méthode des éléments finis. Partant du principe du minimum de l'énergie potentielle, une formulation variationnelle puis une discrétisation spatiale du problème sont présentées. Le choix du type d'interpolation est discuté et la mise en œuvre numérique du modèle est validée par comparaison à des solutions analytiques, notamment la solution développée au chapitre 2.

Ce code de calcul par éléments finis est utilisé dans le chapitre 4 pour simuler le comportement d'une fondation sur radier de pieux soumise à un chargement combiné, vertical, horizontal et de renversement. Une comparaison en termes de raideur structurelle est faite suivant la prise en compte ou non des rigidités au cisaillement et à la flexion des inclusions de renforcement et suivant le type de connection pieux-fondation. Ce problème de dimensionnement est abordé à la fin de ce chapitre par une modélisation du type *milieu multicouche* dans un premier temps et par une modélisation *mixte* dans un second temps. Les résultats obtenus par les différentes méthodes sont confrontés et discutés.



Le modèle multiphasique avec flexion est étendu au chapitre 5 à la prise en compte de comportement élastoplastique des différents constituants (sol et inclusions de renforcement). La solution analytique développée au chapitre 2, relative au problème de cisaillement transverse d'une couche de sol préalablement renforcée par inclusions rigides, est étendue au cas où aussi bien le sol que les inclusions ont un comportement élastoplastique parfait. Le calcul à la rupture des systèmes en milieux biphasiques est introduit et utilisé pour retrouver la charge limite de la structure analysée par le calcul élastoplastique.

Le chapitre 6 est consacré à l'extension du code de calcul précédemment développé à la prise en compte du comportement élastoplastique des constituants et à ses applications. Partant d'une discrétisation temporelle du processus de chargement et d'un algorithme de plasticité modifié, obtenu par extension de l'algorithme de "retour radial", une procédure itérative de recherche de la solution d'un problème d'élastoplasticité est mise au point. Cette procédure est ensuite intégrée dans le code de calcul développé. Ce dernier est validé par la solution analytique développée au chapitre 5 et utilisé par la suite pour simuler l'évolution élastoplastique d'une fondation mixte soumise à un chargement combiné et la tenue d'un talus incliné renforcé par inclusions rigides.

\*            \*  
              \*  
              \*

# Chapitre 2

## Modèle multiphasique de sol renforcé en élasticité linéaire

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>29</b>
<b>2.2</b>	<b>Principe de la modélisation multiphasique</b>	<b>29</b>
2.2.1	Description cinématique du modèle biphasique	30
2.2.2	Equations de la statique relatives au modèle	31
2.2.3	Comportement élastique linéaire	36
<b>2.3</b>	<b>Position d'un problème d'élasticité pour le milieu biphasique en déformation plane</b>	<b>39</b>
<b>2.4</b>	<b>Exemple d'application</b>	<b>40</b>
2.4.1	Position du problème	40
2.4.2	Solution en déplacement	41
<b>2.5</b>	<b>Conclusion : modèle multiphasique et homogénéisation</b>	<b>46</b>

---



## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les équations générales du modèle multiphasique destiné à appréhender le comportement macroscopique d'un sol renforcé par une famille d'inclusions "rigides", dans le cadre de l'élasticité linéaire. Reprenant les travaux de Sudret (1999) [75] et de Buhan et Sudret (2000) [31], on explicite tout d'abord les efforts intérieurs (contraintes) propres à chacune des phases représentant respectivement le sol et les inclusions de renforcement. Ces contraintes prennent en compte, dans ce dernier cas, les efforts de cisaillement et de flexion dans les inclusions traitées comme des poutres. Les équations d'équilibre et conditions aux limites correspondantes sont alors explicitées pour chacune des phases séparément.

Les équations constitutives du modèle sont ensuite développées dans le cas d'un comportement élastique linéaire des constituants, et donc des phases, associé à l'hypothèse de l'adhérence parfaite. Elles permettent alors d'introduire la formulation d'un problème d'élasticité pour le milieu biphasique en conditions de déformations planes parallèlement à la direction des renforcements.

Ce chapitre se termine par l'exposé d'un exemple illustratif de résolution d'un problème d'élasticité biphasique, consistant à soumettre une couche de sol renforcé par inclusions rigides à un cisaillement transverse. Cet exemple met clairement en évidence le rôle essentiel joué par les sollicitations de cisaillement et de flexion dans la réponse globale de ce type de structure renforcée, montrant ainsi la capacité du modèle multiphasique à rendre compte du caractère "rigide" des inclusions de renforcement.

## 2.2 Principe de la modélisation multiphasique (Sudret (1999) [75]; de Buhan et Sudret (2000) [31])

Le modèle multiphasique consiste à décrire à une *échelle macroscopique* le comportement global d'un sol renforcé par inclusions linéaires en homogénéisant séparément le sol et les inclusions de renforcement. Une telle démarche aboutit, à l'échelle macroscopique, à une superposition de plusieurs milieux, appelés *phases*, représentant le sol et les différentes familles d'inclusions de même direction, en interaction mutuelle. On se limitera dans ce qui suit, pour alléger l'exposé, à la présentation du modèle *biphasique* avec flexion, c'est-à-dire au cas où une seule famille d'inclusions de renforcement de même direction est considérée.

### 2.2.1 Description cinématique du modèle biphasique

On considère un volume  $\Omega$  constitué d'un sol homogène, modélisé comme un milieu continu, renforcé par une famille d'inclusions de même direction  $\underline{e}_x$ , (Figure 2.1 a).

La description biphasique d'un tel milieu hétérogène, où interagissent le sol et les inclusions de renforcement, consiste à supposer qu'en tout point géométrique  $\underline{x}$  du volume  $\Omega$  coexistent deux particules en interaction mutuelle, formant sur tout le volume renforcé  $\Omega$  deux phases nommées *phase matrice* et *phase renforcement*, représentant respectivement le sol et les inclusions. Ces deux phases sont obtenues en "homogénéisant" séparément le sol et les inclusions de renforcement sur tout le domaine  $\Omega$ .

La *cinématique* d'un tel milieu biphasique est décrite pour chaque phase séparément :

- *Phase matrice* : La cinématique de la phase matrice est décrite par la donnée, en tout point matériel, d'un vecteur déplacement  $\underline{\xi}^m$ . Une telle description cinématique confère à ladite phase les caractéristiques d'un milieu de Cauchy que l'on explicitera par la suite.
- *Phase renforcement* : L'idée étant de prendre en compte les caractéristiques de type "poutre" des inclusions de renforcement ; La cinématique de la phase renforcement est enrichie par la donnée, en tout point matériel, de trois degrés de liberté de rotations supplémentaires. La cinématique de la phase renforcement est ainsi caractérisée par le couple  $(\underline{\xi}^r, \underline{\omega}^r)$ , (Figure 2.1 (b)).

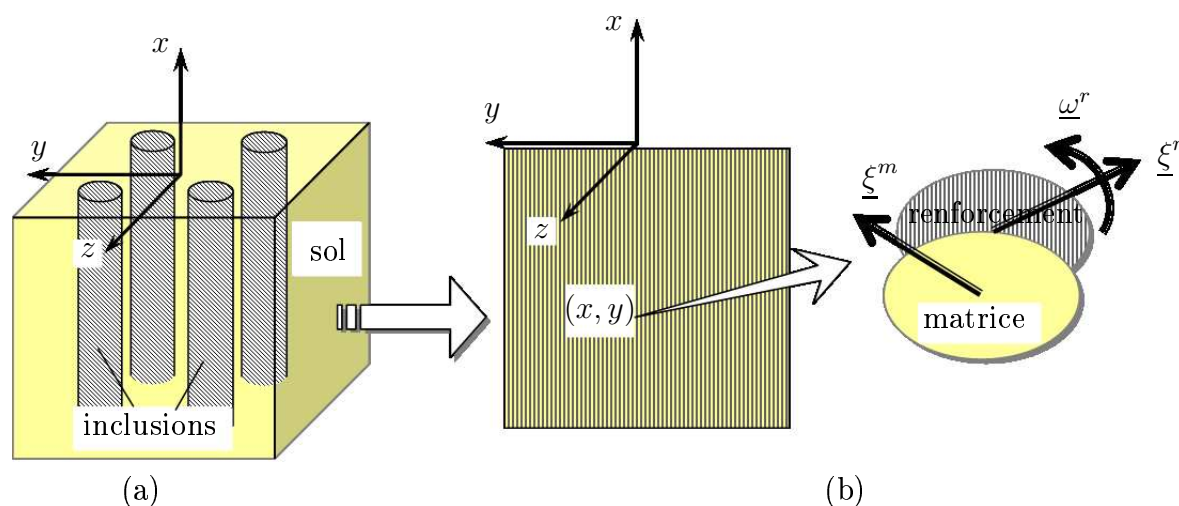


FIG. 2.1: Cinématique d'un milieu biphasique modélisant un sol renforcé par une famille d'inclusions

### 2.2.2 Equations de la statique relatives au modèle

Partant de cette description cinématique, les équations constitutives du modèle peuvent par exemple être établies par *la méthode des puissances virtuelles* (Sudret (1999) [75]; de Buhan et Sudret (2000) [31]).

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites s'écrivent pour chaque phase séparément :

- *Phase matrice.* On retrouve pour cette phase les équations classiques régissant, pour un milieu de Cauchy, l'équilibre et les conditions aux limites :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}, t) + \rho^m \underline{\underline{F}}^m(\underline{x}, t) + \underline{\underline{I}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{0}} \quad \text{sur} \quad \Omega^m \quad (2.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}, t) \cdot \underline{\nu}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{T}}_d^m(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T^m \quad (2.2)$$

$$\underline{\underline{\xi}}^m(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\xi}}_d^m(\underline{x}, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\xi^m \quad (2.3)$$

avec

$$\partial\Omega_T^m \cup \partial\Omega_\xi^m = \partial\Omega^m \quad \text{et} \quad \partial\Omega_T^m \cap \partial\Omega_\xi^m = \emptyset \quad (2.4)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  est le tenseur des contraintes dans la phase matrice,  $\rho^m \underline{\underline{F}}^m$  est la densité volumique d'efforts extérieurs et  $\underline{\underline{I}}$  est la densité volumique d'efforts d'interaction appliquée par la phase renforcement sur la phase matrice.  $\underline{\underline{T}}_d^m$  et  $\underline{\underline{\xi}}_d^m$  sont les données en efforts et en déplacements sur les parties complémentaires  $\partial\Omega_T^m$  et  $\partial\Omega_\xi^m$  de  $\partial\Omega^m$  et  $\underline{\nu}$  est le vecteur normal extérieur unitaire.

- *Phase renforcement.* L'introduction des degrés de liberté de rotation dans la cinématique de cette phase vise à traduire l'existence dans ce milieu, en plus des contraintes, de *couples de contraintes* : il s'agit d'un *milieu de Cosserat*, ou *milieu micropolaire*. Dans le cas général, les équations régissant l'équilibre d'un tel milieu sont données par (Cosserat (1903) [24]; Salençon (2001) [66]) :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho \underline{\underline{F}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{0}} \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{h}}(\underline{x}, t) + 2\underline{\underline{\alpha}}(\underline{x}, t) + \rho \underline{\underline{G}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{0}} \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (2.6)$$

-  $\underline{\underline{\sigma}}$  désigne le tenseur des contraintes, *non symétrique*, et  $\underline{\underline{\alpha}}$  le vecteur associé à sa partie antisymétrique,

-  $\underline{\underline{h}}$  est le tenseur des couples de contraintes,

-  $\rho \underline{F}$  désigne la densité volumique d'efforts extérieurs et  $\rho \underline{G}$  est la densité volumique de couples d'efforts.

Les conditions aux limites sur le bord  $\partial\Omega$  d'un tel milieu de Cosserat sont données par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\nu}(\underline{x}, t) = \underline{T}_d(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T \quad (2.7)$$

$$\underline{\underline{h}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\nu}(\underline{x}, t) = \underline{C}_d(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_C \quad (2.8)$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \underline{\xi}_d(\underline{x}, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\xi \quad (2.9)$$

$$\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \underline{\omega}_d(\underline{x}, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\omega \quad (2.10)$$

avec :

$$\begin{cases} \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_\xi = \partial\Omega & \text{et} & \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_\xi = \emptyset \\ \partial\Omega_C \cup \partial\Omega_\omega = \partial\Omega & \text{et} & \partial\Omega_C \cap \partial\Omega_\omega = \emptyset \end{cases} \quad (2.11)$$

Dans le cas de la *phase renforcement*, perçue comme une distribution continue de poutres, la modélisation à laquelle on aboutit est celle d'un milieu de Cosserat *orienté par la direction des inclusions*, où les tenseurs de contraintes et de couples de contraintes ont la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^r & 0 & 0 \\ \sigma_{yx}^r & 0 & 0 \\ \sigma_{zx}^r & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\underline{\underline{h}}^r = \begin{pmatrix} h_{xx}^r & 0 & 0 \\ h_{yx}^r & 0 & 0 \\ h_{zx}^r & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Se référant au modèle "poutre", les termes de  $\underline{\underline{\sigma}}^r$  et  $\underline{\underline{h}}^r$  peuvent être exprimés en fonction des densités d'efforts et de moments généralisés, soit : (Figure 2.2).

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \begin{pmatrix} n^r & 0 & 0 \\ v_y^r & 0 & 0 \\ v_z^r & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\underline{\underline{h}}^r = \begin{pmatrix} t^r & 0 & 0 \\ m_y^r & 0 & 0 \\ m_z^r & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

- $n^r$  est la *densité d'effort normal par unité de surface transversale* à la direction des inclusions,
- $v_y^r$  est la *densité d'effort tranchant suivant  $\underline{e}_y$  par unité de surface transversale* à la direction des inclusions,
- $v_z^r$  est la *densité d'effort tranchant suivant  $\underline{e}_z$  par unité de surface transversale* à la direction des inclusions,
- $t^r$  est la *densité de couple de torsion par unité de surface transversale* à la direction des inclusions,
- $m_y^r$  est la *densité de moment de flexion suivant  $\underline{e}_y$  par unité de surface transversale* à la direction des inclusions,
- $m_z^r$  est la *densité de moment de flexion suivant  $\underline{e}_z$  par unité de surface transversale* à la direction des inclusions.

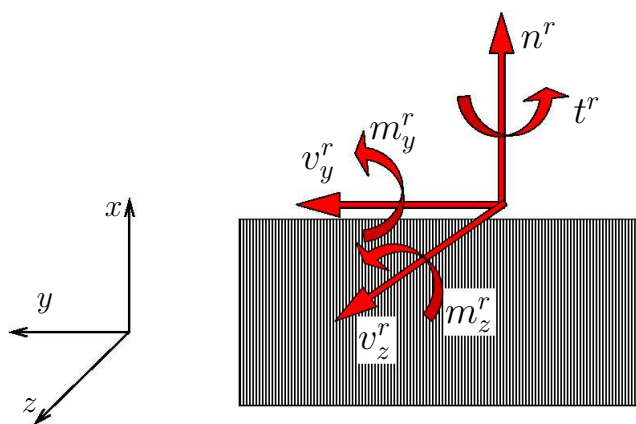


FIG. 2.2: *Efforts intérieurs à la phase renforcement*

Les efforts intérieurs dans la phase renforcement peuvent aussi être exprimés sous forme vectorielle par :

$$\underline{X}^r = \begin{pmatrix} n^r \\ v_y^r \\ v_z^r \end{pmatrix} \quad (2.16)$$



$$\underline{\Gamma}^r = \begin{pmatrix} t^r \\ m_y^r \\ m_z^r \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

où  $\underline{X}^r$  et  $\underline{\Gamma}^r$  représentent respectivement les vecteurs associés aux tenseurs des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^r$  et des couples de contraintes  $\underline{\underline{h}}^r$ , par les relations :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{X}^r \otimes \underline{e}_x \quad (2.18)$$

$$\underline{\underline{h}}^r = \underline{\Gamma}^r \otimes \underline{e}_x \quad (2.19)$$

En utilisant les notations introduites, les équations d'équilibre s'écrivent pour la phase renforcement :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x}, t) + \rho^r \underline{F}^r(\underline{x}, t) - \underline{I}(\underline{x}, t) = \underline{0} \quad \text{sur} \quad \Omega^r \quad (2.20)$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{h}}^r(\underline{x}, t) + \underline{e}_x \wedge \underline{X}^r = \underline{0} \quad \text{sur} \quad \Omega^r \quad (2.21)$$

La densité volumique des couples d'efforts  $\rho^r G$  apparaissant dans l'équation (2.6), exprimant l'équilibre d'un milieu de Cosserat, s'annule dans le cas étudié (renforcement des sols par inclusions rigides) en raison de l'absence des couples d'efforts à distance. Ces équations d'équilibre s'écrivent en fonction des densités d'efforts ( $n^r, v_y^r, v_z^r$ ) et de moments ( $t^r, m_y^r, m_z^r$ ) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dn^r}{dx} + \rho^r F_x^r - I_x = 0 \\ \frac{dv_y^r}{dx} + \rho^r F_y^r - I_y = 0 \\ \frac{dv_z^r}{dx} + \rho^r F_z^r - I_z = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

et

$$\begin{cases} \frac{dt^r}{dx} = 0 \\ \frac{dm_y^r}{dx} - v_z^r = 0 \\ \frac{dm_z^r}{dx} - v_y^r = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

les conditions aux limites (2.7) à (2.10) écrites sur le *bord de la phase renforcement* sont données en fonction des densités d'efforts et de moments généralisés par :

$$n^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = T_x^d(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T^r \quad (2.24)$$

$$v_y^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = T_y^d(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T^r \quad (2.25)$$

$$v_z^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = T_z^d(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T^r \quad (2.26)$$

$$t^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = C_x^d(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_C^r \quad (2.27)$$

$$m_y^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = C_y^d(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_C^r \quad (2.28)$$

$$m_z^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = C_z^d(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_C^r \quad (2.29)$$

avec toujours :

$$\begin{cases} \partial\Omega_T^r \cup \partial\Omega_\xi^r = \partial\Omega^r & \text{et} & \partial\Omega_T^r \cap \partial\Omega_\xi^r = \emptyset \\ \partial\Omega_C^r \cup \partial\Omega_\omega^r = \partial\Omega^r & \text{et} & \partial\Omega_C^r \cap \partial\Omega_\omega^r = \emptyset \end{cases} \quad (2.30)$$

Dans le cas d'un *problème bidimensionnel* dans le plan  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ , les équations d'équilibre et les conditions aux limites se réduisent à : (voir figure 2.3).

$$\begin{cases} \frac{dn^r}{dx} + \rho^r F_x^r - I_x = 0 \\ \frac{dv_y^r}{dx} + \rho^r F_y^r - I_y = 0 \\ \frac{dm_z^r}{dx} - v_z^r = 0 \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Omega^r \quad (2.31)$$

et

$$\begin{cases} n^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = T_x^d(\underline{\nu}) & \text{sur } \partial\Omega_T^r \\ v_y^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = T_y^d(\underline{\nu}) & \text{sur } \partial\Omega_T^r \\ m_z^r(\underline{x}, t) \cdot (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = C_z^d(\underline{\nu}) & \text{sur } \partial\Omega_C^r \end{cases} \quad (2.32)$$

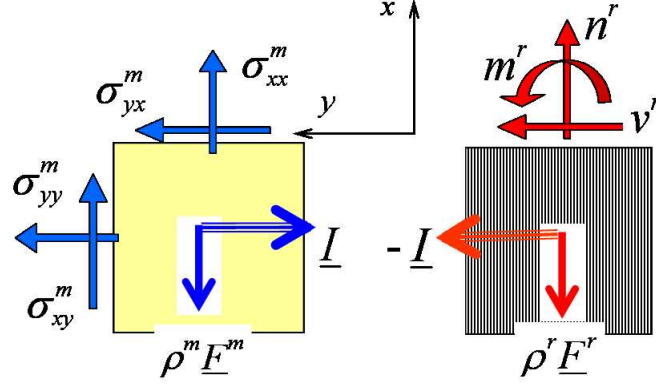


FIG. 2.3: Efforts intérieurs pour un système biphasique (cas bidimensionnel)

### 2.2.3 Comportement élastique linéaire

Sous l'hypothèse des *petites perturbations*, les déformations du milieu biphasique sont décrites de la façon suivante :

- Pour la *phase matrice*, les déformations sont classiquement exprimées par le tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé, donné en fonction du champ de déplacement de cette phase par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{grad}}}\xi^m + {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\xi^m) \quad (2.33)$$

et le comportement *élastique linéaire* s'exprime, sous l'hypothèse d'*isotropie*, par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda^m \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad (2.34)$$

où  $\lambda^m$  et  $\mu^m$  sont les coefficients de Lamé de la *phase matrice*.

- Pour la *phase renforcement*, on retrouve les variables de déformation analogues à celles introduites pour les poutres, soit :

$$\begin{cases} \varepsilon^r = \frac{\partial \xi_x^r}{\partial x}, & \theta_y^r = \frac{\partial \xi_y^r}{\partial x} - \omega_z^r, & \theta_z^r = \frac{\partial \xi_z^r}{\partial x} - \omega_y^r \\ \chi_x^r = \frac{\partial \omega_x^r}{\partial x}, & \chi_y^r = \frac{\partial \omega_y^r}{\partial x}, & \chi_z^r = \frac{\partial \omega_z^r}{\partial x} \end{cases} \quad (2.35)$$

- $\varepsilon^r$  désigne la *déformation axiale*,
- $\theta_y^r$  et  $\theta_z^r$  désignent les *déformations de cisaillement*,
- $\chi_y^r$  et  $\chi_z^r$  désignent les *courbures* et  $\chi_x^r$  désigne la *déformation de torsion*.

Ces variables de déformation peuvent être exprimées sous forme vectorielle par :

$$\underline{\varepsilon}^r = \begin{pmatrix} \varepsilon^r \\ \theta_y^r \\ \theta_z^r \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

et

$$\underline{\chi}^r = \begin{pmatrix} \chi_x^r \\ \chi_y^r \\ \chi_z^r \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Dans le cas de *problèmes bidimensionnels*, les variables de déformation de la phase renforcement se réduisent à  $(\varepsilon^r, \theta_y^r, \chi_z^r)$ , que l'on notera désormais, pour simplifier,  $(\varepsilon^r, \theta^r, \chi^r)$ .

Le comportement *élastique linéaire* de la phase renforcement s'exprime alors à travers six équations reliant les efforts et les moments généralisés aux variables de déformation :

$$\begin{cases} n^r = \alpha^r \varepsilon^r, & v_y^r = \beta_y^r \theta_y^r, & v_z^r = \beta_z^r \theta_z^r \\ t^r = \gamma_x^r \chi_x^r, & m_y^r = \gamma_y^r \chi_y^r, & m_z^r = \gamma_z^r \chi_z^r \end{cases} \quad (2.38)$$

soit sous forme tensorielle :

$$\underline{X}^r = \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\varepsilon}^r \quad (2.39)$$

$$\underline{\Gamma}^r = \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \underline{\chi}^r \quad (2.40)$$

où  $\underline{\underline{C}}_F^r$  et  $\underline{\underline{C}}_C^r$  sont les tenseurs de rigidité de la phase renforcement. Ils sont donnés, dans l'hypothèse d'*absence de couplage entre les efforts*, par :

$$\underline{\underline{C}}_F^r = \begin{pmatrix} \alpha^r & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y^r & 0 \\ 0 & 0 & \beta_y^r \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

et

$$\underline{\underline{C}}_C^r = \begin{pmatrix} \gamma_x^r & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y^r & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_y^r \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Les termes de  $\underline{\underline{C}}_F^r$  et  $\underline{\underline{C}}_C^r$  sont les différentes raideurs de la phase renforcement :

- $\alpha^r$  est la *raideur à l'effort axial*,
  - $\beta_y^r$  est la *raideur à l'effort tranchant* suivant  $\underline{e}_y$ ,
  - $\beta_z^r$  est la *raideur à l'effort tranchant* suivant  $\underline{e}_z$ ,
  - $\gamma_x^r$  est la *raideur à la torsion*,
  - $\gamma_y^r$  est la *raideur à la flexion* suivant  $\underline{e}_y$ ,
  - $\gamma_z^r$  est la *raideur à la flexion* suivant  $\underline{e}_z$ .
- La variable de déformation qui apparaît en dualité avec les *efforts d'interaction* est l'écart des champs de déplacement des deux phases :

$$\Delta \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^m - \underline{\underline{\xi}}^r \quad (2.43)$$

et la loi de comportement d'interaction est donnée, dans le cas de l'élasticité linéaire, par :

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{C}}^I \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}} \quad (2.44)$$

où  $\underline{\underline{C}}^I$  désigne le tenseur de rigidité de la loi d'interaction entre les deux phases, dont les termes peuvent être évalués à partir de simulations numériques sur des volumes élémentaires représentatifs du matériau renforcé (Sudret (1999) [75]; Bennis et de Buhan (2003) [8]).

Le cas de l'*adhérence parfaite* correspond à l'hypothèse où les particules des deux phases localisées au même point sont animées de la *même cinématique* :

$$\Delta \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^m - \underline{\underline{\xi}}^r = \underline{\underline{0}} \iff \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^m = \underline{\underline{\xi}}^r \quad (2.45)$$

A noter que ce cas particulier peut être retrouvé à partir de la loi d'interaction générale (2.44) en faisant *tendre vers l'infini* les termes du tenseur de rigidité  $\underline{\underline{C}}^I$ .

## 2.3 Position d'un problème d'élasticité pour le milieu biphasique en déformation plane

Soit  $\Omega$  un volume de sol renforcé par des inclusions parallèles à la direction  $Ox$  et *sollicité en déformation plane parallèlement au plan  $Oxy$* . La modélisation multiphasique d'un tel système composite, *sous l'hypothèse d'adhérence parfaite entre phases* (2.45), consiste à supposer que la cinématique de tout point matériel est caractérisée par un vecteur déplacement  $\underline{\xi}$  et une rotation  $\omega^r \underline{e}_z$  pour la particule renforcement.

Dans ces conditions, un champ de *déplacement-rotation*  $\{\underline{\xi}, \omega^r\}$  est dit *cinématiquement admissible* s'il vérifie les conditions aux limites en déplacement-rotation :

$$\begin{cases} \underline{\xi} = \underline{\xi}^d & \text{sur } \partial\Omega_\xi \\ \omega^r = \omega^d & \text{sur } \partial\Omega_\omega \end{cases} \quad (2.46)$$

où  $\partial\Omega_\xi$  (resp.  $\partial\Omega_\omega$ ) est la partie du bord  $\partial\Omega$  où un déplacement est imposé aux deux phases (resp. rotation imposée à la seule phase renforcement).

Les efforts intérieurs sont représentés par le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  pour la phase matrice et  $(n^r, v^r, m^r)$  pour la phase renforcement. Un champ d'efforts intérieurs généralisés  $\{\underline{\underline{\sigma}}^m; n^r, v^r, m^r\}$  est dit *statiquement admissible* s'il vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites en efforts, soit :

$$\begin{cases} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}^m + n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \rho^r \underline{F}^r + \rho^m \underline{F}^m = \underline{0} \\ \text{div}(m^r \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + v^r \underline{e}_z = \underline{0} \end{cases} \quad (2.47)$$

et

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\sigma}}^m + n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{\nu} = \underline{T}^d & \text{sur } \partial\Omega_T = \partial\Omega - \partial\Omega_\xi \\ (m^r \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{\nu} = \underline{C}^d & \text{sur } \partial\Omega_C = \partial\Omega - \partial\Omega_\omega \end{cases} \quad (2.48)$$

La recherche de la solution d'un *problème d'élasticité* formulé pour le milieu biphasique, revient à la mise en évidence d'un champ d'efforts intérieurs  $\{\underline{\underline{\sigma}}^m; n^r, v^r, m^r\}$  *statiquement*

*admissible* avec les efforts extérieurs et d'un champ de déplacement  $\{\underline{\xi}, \omega^r\}$  *cinématiquement admissible*, associés en tout point par la loi de comportement élastique :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda^m(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} + 2\mu^m\underline{\underline{\varepsilon}} & \text{avec} & \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\xi} + {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\xi}) \\ n^r = \alpha^r \frac{\partial \xi_x}{\partial x}, & v^r = \beta^r \left( \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \omega^r \right), & m^r = \gamma^r \frac{\partial \omega^r}{\partial x} \end{cases} \quad (2.49)$$

## 2.4 Exemple d'application

En vue de se familiariser avec le modèle multiphasique avec flexion ainsi introduit, l'exemple du cisaillement d'un milieu multicouche en déformation plane, étudié par de Buhan et Sudret (2000) [31] dans le cas où les déformations de cisaillement sont négligées ( $\theta^r = 0$  dans (2.35) ou  $\beta^r \rightarrow \infty$  dans (2.38)), c'est-à-dire sous l'*hypothèse de Navier-Bernoulli*, est repris ici en tenant compte des effets de cisaillement. Cet exemple peut représenter une modélisation simplifiée d'un radier de fondation de grande extension soumis à un chargement latéral.

### 2.4.1 Position du problème

Une couche de sol d'épaisseur  $2L$ , renforcée par un réseau de poutres orientées parallèlement à  $\underline{e}_x$ , et supposée infinie le long de  $(Oy)$ , est assujettie en déformations planes dans le plan  $(Oxy)$  au chargement défini comme suit (Figure 2.4) :

- Les forces de volume sont négligées :  $\underline{F}^m = \underline{F}^r = \underline{0}$
- Les deux phases, matrice et renforcement, sont *encastrées* dans le plan  $(Oyz)$ , soit :

$$\underline{\underline{\xi}}(x=0, y, z) = \underline{\underline{\xi}}^m(x=0, y, z) = \underline{\underline{\xi}}^r(x=0, y, z) = \underline{0} \quad \text{et} \quad \omega^r(x=0, y, z) = 0 \quad (2.50)$$

- On impose au plan  $(x=2L)$  une rotation nulle :

$$\omega(x=2L, y, z) = \omega^r(x=2L, y, z) = 0 \quad (2.51)$$

et un déplacement de la forme :

$$\underline{\underline{\xi}}(x=2L, y, z) = \underline{\underline{\xi}}^m(x=2L, y, z) = \underline{\underline{\xi}}^r(x=2L, y, z) = 2\delta\underline{e}_y \quad (2.52)$$

La phase matrice, représentant le sol est supposée élastique, homogène et isotrope, de constantes de Lamé  $\lambda^m$  et  $\mu^m$  :

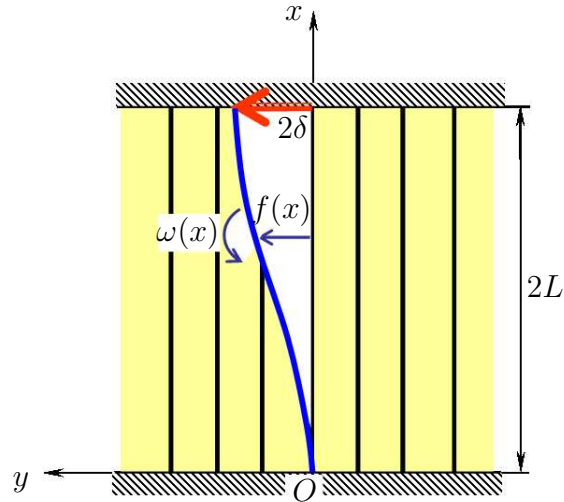


FIG. 2.4: Cisaillement en déformation plane d'une couche de sol renforcée transversalement

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda^m (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.53)$$

Sous les mêmes hypothèses de comportement élastique linéaire, d'homogénéité et d'isotropie du matériau constitutif des inclusions de renforcement, le comportement de la phase renforcement est donné par (2.49) :

$$n^r = \alpha^r \varepsilon^r = \alpha^r \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \quad (2.54)$$

$$v^r = \beta^r \theta^r = \beta^r \left( \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \omega^r \right) \quad (2.55)$$

$$m^r = \gamma^r \chi^r = \gamma^r \frac{\partial \omega^r}{\partial x} \quad (2.56)$$

### 2.4.2 Solution en déplacement

La solution en déplacement du problème est recherchée sous la forme :

$$\underline{\underline{\xi}}(x, y, z) = f(x) \underline{\underline{e}}_y \quad (2.57)$$

$$\omega^r(x, y, z) = \omega(x) \quad (2.58)$$



où, d'après les conditions aux limites (2.50) à (2.51), les fonctions  $f$  et  $\omega$  vérifient les conditions :

$$f(x=0) = 0, \quad f(x=2L) = 2\delta, \quad \omega(x=0) = \omega(x=2L) = 0 \quad (2.59)$$

Les champs de déformation sont donnés par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} f' (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (2.60)$$

pour la phase matrice, et

$$\varepsilon^r = 0, \quad \theta^r = f' - \omega, \quad \chi^r = \omega' \quad (2.61)$$

pour la phase renforcement.

Reportant ces expressions dans les équations de comportement (2.53) à (2.56), il vient :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m = \mu^m f' (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \\ n^r = 0, \quad v^r = \beta^r (f' - \omega), \quad m^r = \gamma^r \omega' \end{cases} \quad (2.62)$$

En remplaçant les expressions (2.62) des efforts intérieurs dans les équations d'équilibre (2.1) et (2.31) des deux phases, écrites en l'absence des forces de volume, on obtient :

$$\begin{cases} \mu^m f'' \underline{e}_y + \underline{I} = \underline{0} \\ \beta^r (f'' - \omega') \underline{e}_y - \underline{I} = \underline{0} \\ \gamma^r \omega'' \underline{e}_z + \beta^r (f' - \omega) \underline{e}_z = \underline{0} \end{cases} \quad (2.63)$$

soit, en éliminant la densité d'efforts d'interaction par sommation des deux premières équations de (2.63) :

$$\begin{cases} \frac{\beta^r + \mu^m}{\beta^r} f'' = \omega' \\ \gamma^r \omega'' + \beta^r (f' - \omega) = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

En dérivant la deuxième équation de (2.64) et en y substituant la première, on trouve :

$$\begin{cases} \beta^r \mu^m \omega' - (\beta^r + \mu^m) \gamma^r \omega''' = 0 \\ f' = \omega - \frac{\gamma^r}{\beta^r} \omega'' \end{cases} \quad (2.65)$$

Il est alors commode d'introduire les *paramètres adimensionnels* suivants :

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu^m \beta^r L^2}{(\mu^m + \beta^r) \gamma^r}} \quad (2.66)$$

et

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu^m}{\mu^m + \beta^r}} \quad (2.67)$$

qui caractérisent respectivement, l'influence relative du module de cisaillement de la phase matrice par rapport à la raideur en flexion et au cisaillement de la phase renforcement pour  $\eta_1$ , et l'influence relative du module de cisaillement de la phase matrice par rapport au module de cisaillement de la phase renforcement pour  $\eta_2$ .

Le cas particulier, étudié par de Buhan et Sudret (2000a) [31], où l'hypothèse de Navier-Bernoulli a été adoptée pour la phase renforcement, ne fait intervenir qu'un seul paramètre adimensionnel :

$$\eta_1 \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu^m L^2}{\gamma^r}}, \quad \eta_2 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \beta^r \rightarrow \infty \quad (2.68)$$

Dans le cas présent, où les déformations de cisaillement sont prises en compte, le système différentiel (2.65) s'écrit, en y substituant les expressions (2.66) et (2.67) des paramètres adimensionnels  $\eta_1$  et  $\eta_2$  :

$$\begin{cases} \omega''' - \frac{\eta_1^2}{L^2} \omega' = 0 \\ f' = \omega - \frac{L^2}{\eta_1^2 \eta_2^2} \omega'' \end{cases} \quad (2.69)$$

dont la solution, vérifiant les conditions (2.59), est donnée par Hassen (2002) [44] :

$$\begin{cases} f(x) = \delta \frac{(1 - \eta_2^2) [\sinh(\frac{\eta_1 x}{L}) + \tanh(\eta_1)(1 - \cosh(\frac{\eta_1 x}{L}))] - \frac{\eta_1 x}{L}}{(1 - \eta_2^2) \tanh(\eta_1) - \eta_1} \\ \omega(x) = \delta \frac{\eta_1}{L} \frac{[\cosh(\frac{\eta_1 x}{L}) - \tanh(\eta_1) \sinh(\frac{\eta_1 x}{L}) - 1]}{(1 - \eta_2^2) \tanh(\eta_1) - \eta_1} \end{cases} \quad (2.70)$$

Dans le cas où les déformations de cisaillement sont négligées, la solution donnée par de Buhan et Sudret (2000a) [31], peut être retrouvée à partir de (2.70) en y remplaçant  $\eta_1$  et  $\eta_2$  par leurs expressions (2.68), soit :

$$\begin{cases} f(x) = \delta \frac{[\sinh(\frac{\eta x}{L}) + \tanh(\eta)(1 - \cosh(\frac{\eta x}{L}))] - \frac{\eta x}{L}}{\tanh(\eta) - \eta} \\ \omega(x) = f'(x) = \delta \frac{\eta}{L} \frac{[\cosh(\frac{\eta x}{L}) - \tanh(\eta) \sinh(\frac{\eta x}{L}) - 1]}{\tanh(\eta) - \eta} \end{cases} \quad (2.71)$$

La *contrainte de cisaillement totale*  $\tau$  sur une facette de normale  $\underline{e}_x$  est définie par :

$$\tau(x) = v^r(x) + \sigma_{yx}^m(x) \quad (2.72)$$

En faisant la somme des équations d'équilibre (2.1) et (2.31), on trouve :

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \frac{dv^r(x) + d\sigma_{yx}^m(x)}{dx} = 0 \quad (2.73)$$

soit,

$$\tau(x) = \tau = cste \quad (2.74)$$

On définit alors *le module de cisaillement apparent* par :

$$\mu^* = \frac{\tau}{(\delta/L)} = \frac{v^r(x) + \sigma_{yx}^m(x)}{(\delta/L)} \quad (2.75)$$

qui s'écrit en fonction des expressions des efforts intérieurs (2.62) comme :

$$\mu^* = \frac{v^r(x) + \sigma_{yx}^m(x)}{(\delta/L)} = \frac{\beta^r(f' - \omega)(x) + \mu^m f'(x)}{(\delta/L)} \quad (2.76)$$

soit, en y substituant les expressions de la déflexion  $f$  et de la rotation  $\omega$  données par (2.70) :

$$\frac{\mu^*}{\mu^m} = \frac{\eta_1}{\eta_1 - (1 - \eta_2^2)\tanh(\eta_1)} \quad (2.77)$$

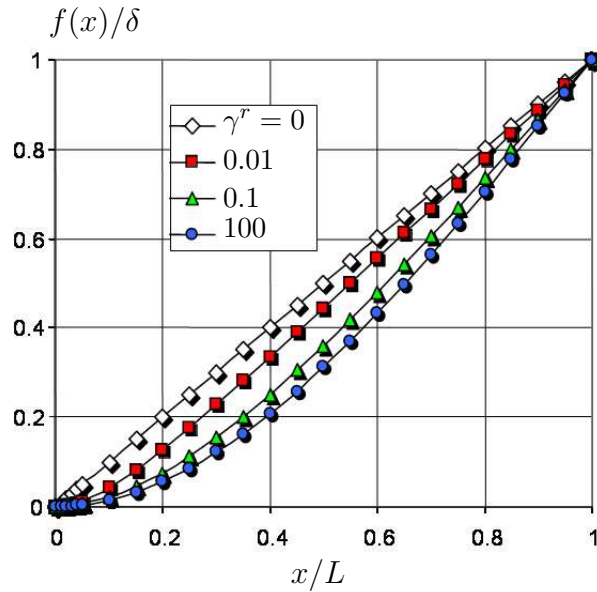


FIG. 2.5: Déplacement normalisé en fonction de la côte normalisée pour différentes valeurs de  $\gamma^r$  lorsque les effets de cisaillement sont négligés

La figure (2.5) représente différentes courbes donnant le déplacement normalisé  $f(x)/\delta$  en fonction de l'abscisse normalisée  $x/L$  pour différentes valeurs de la raideur en flexion  $\gamma^r$  de la phase renforcement (avec  $\mu^m$  et  $L$  pris égaux à l'unité), dans le cas où les déformations de cisaillement sont négligées ( $\beta^r \rightarrow \infty$ ). Comme déjà signalé par de Buhan et Sudret (2000 a), on retrouve, dans le cas où la raideur en flexion des inclusions est négligée ( $\gamma^r = 0$ ), un profil de déplacement linéaire, le module de cisaillement apparent se réduisant alors à celui de la seule matrice (voir figure 2.6 a) :

$$\mu^*(\gamma^r = 0) = \mu^m \quad (2.78)$$

A l'inverse, lorsque  $\gamma^r \rightarrow \infty$ , le profil de déplacement transversal tend vers celui correspondant à la déflexion d'une poutre élastique bi-encastée.

La figure 2.6 (b) montre une série de courbes donnant la valeur du module de cisaillement apparent en fonction de  $\gamma^r$ , paramétrées par la valeur du module de cisaillement  $\beta^r$  de

la phase renforcement. Il apparaît clairement sur cette figure que, toutes choses étant égales par ailleurs, ce module apparent est une fonction croissante de  $\beta^r$ . On peut donc en conclure que le fait de négliger les déformations de cisaillement dans les renforcements, c'est-à-dire de faire l'hypothèse de Navier-Bernoulli, peut conduire à surestimer la raideur globale du sol renforcé et de la structure, tout particulièrement dans le cas d'un chargement latéral.

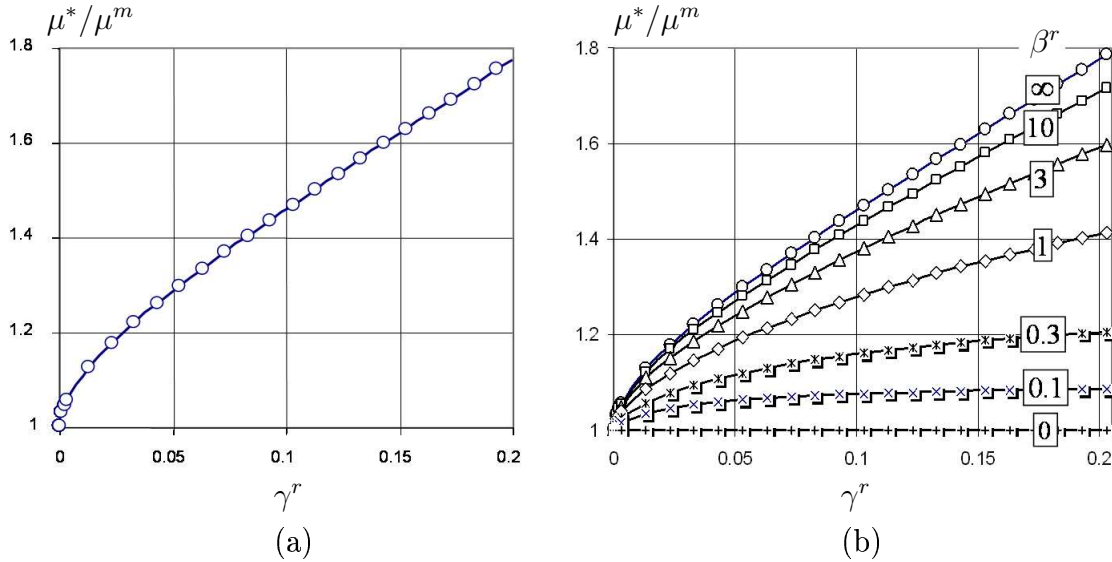


FIG. 2.6: Variation du module de cisaillement apparent en fonction de la raideur à la flexion de la phase renforcement lorsque les effets de cisaillement sont négligés (a) ou non (b)

## 2.5 Conclusion : modèle multiphasique et homogénéisation

Le modèle multiphasique présenté dans ce chapitre permet de rendre compte des effets de cisaillement et de flexion des inclusions de renforcement, ce que ne permet pas une approche par homogénéisation classique, qui est en fait, équivalente au modèle biphasique *sans prise en compte de la flexion* et sous la condition d'adhérence parfaite. En effet, dans ces conditions, les équations (2.49) s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda^m (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\sigma}}^r = n^r \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x = \alpha^r \varepsilon_{xx} \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x \end{cases} \quad (2.79)$$

d'où par sommation :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{\sigma}}^r = \lambda^m (tr \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \underline{\underline{\varepsilon}} + \alpha^r \varepsilon_{xx} \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x \quad (2.80)$$

soit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}}^{hom} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.81)$$

avec,

$$\underline{\underline{C}}^{hom} = \lambda^m \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \underline{\underline{I}} + \alpha^r \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x \quad (2.82)$$

qui n'est autre que le *tenseur d'élasticité macroscopique* du sol renforcé calculé par la méthode d'homogénéisation classique (voir section 1.4.1 du chapitre 1). Le modèle multiphasique constitue donc en quelque sorte une *généralisation* de la méthode d'homogénéisation.

Outre son caractère illustratif, l'exemple de la couche de sol renforcé soumise à une sollicitation transversale, nous fournit une solution analytique de référence permettant la validation de la formulation numérique du modèle multiphasique qui fait l'objet du chapitre suivant.

\*            \*

\*



# Chapitre 3

## Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élasticité linéaire

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>51</b>
<b>3.2</b>	<b>Energie potentielle d'un milieu biphasique</b>	<b>51</b>
<b>3.3</b>	<b>Principe du minimum de l'énergie potentielle pour un milieu biphasique élastique</b>	<b>53</b>
<b>3.4</b>	<b>Formulation variationnelle</b>	<b>57</b>
<b>3.5</b>	<b>Méthode des éléments finis appliquée au système biphasique</b>	<b>57</b>
3.5.1	Maillage	58
3.5.2	Approximation des champs de déplacement et de rotation	59
3.5.3	Principe du minimum discrétisé	61
3.5.4	Mise en oeuvre numérique du modèle multiphasique en élasticité linéaire	63
3.5.5	Validation de l'outil numérique	69
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>

---





## 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en oeuvre numérique du modèle multiphasique en élasticité linéaire développé au chapitre précédent dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Le principe du minimum de l'énergie potentielle des systèmes biphasiques est démontré et utilisé pour développer une formulation variationnelle des problèmes aux limites.

La méthode des éléments finis est présentée dans la section 3.5 dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des différentes phases et sous l'hypothèse d'adhérence parfaite. Cette présentation s'appuie sur celle donnée par Dhatt et Touzot (1984) [33] dans le cas d'un milieu continu classique.

## 3.2 Energie potentielle d'un milieu biphasique

L'énergie potentielle d'un milieu biphasique est fonction des champs de déplacement  $\underline{\xi}^m$  et  $\underline{\xi}^r$  des deux phases et du champ de rotation  $\underline{\omega}^r$  de la phase renforcement. Elle s'écrit dans le cas général : (Sudret, (1999) [75])

$$E(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \underline{\omega}^r) = W(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \underline{\omega}^r) - \Phi(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \underline{\omega}^r) \quad (3.1)$$

où  $W$  est l'énergie de déformation du milieu biphasique et  $\Phi$  est le *potentiel des efforts extérieurs donnés* qui lui sont appliqués, soit :

$$W(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \underline{\omega}^r) = \int_{\Omega} \Psi(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \underline{\omega}^r) d\Omega \quad (3.2)$$

et

$$\Phi(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \underline{\omega}^r) = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\xi}^r) d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} (\underline{T}_d^m \cdot \underline{\xi}^m + \underline{T}_d^r \cdot \underline{\xi}^r) dS + \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot \underline{\omega}^r dS \quad (3.3)$$

où  $\partial\Omega_T$  (resp.  $\partial\Omega_C$ ) est la partie du bord  $\partial\Omega$  de la structure sur laquelle sont données les densités surfaciques d'efforts pour la phase matrice ( $\underline{T}^m = \underline{T}_d^m$ ) et la phase renforcement ( $\underline{T}^r = \underline{T}_d^r$ ) (resp. la densité de couples pour la seule phase renforcement : ( $\underline{C}^r = \underline{C}_d^r$ )).

$\Psi$  désigne la *densité volumique d'énergie libre du système biphasique*, qui s'écrit comme la somme des énergies libres des deux phases et de leur interaction, soit avec les notations introduites au chapitre 2 :

$$\Psi = \Psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \Psi^r(\underline{\underline{\varepsilon}}^r, \underline{\underline{\chi}}^r) + \Psi^I(\Delta\underline{\underline{\xi}}) \quad (3.4)$$

-  $\Psi^m$  est la densité volumique d'énergie libre de la phase matrice donnée par :

$$\Psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{\underline{C}}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{\lambda^m}{2} (tr \underline{\underline{\varepsilon}}^m)^2 + \mu^m tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^m)^2 \quad (3.5)$$

-  $\Psi^r$  est la densité volumique d'énergie libre de la phase renforcement donnée par :

$$\Psi^r(\underline{\underline{\varepsilon}}^r, \underline{\underline{\chi}}^r) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\chi}}^r \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_C^r \cdot \underline{\underline{\chi}}^r) \quad (3.6)$$

-  $\Psi^I$  est la densité volumique d'énergie libre d'interaction donnée par :

$$\Psi^I(\Delta\underline{\underline{\xi}}) = \frac{1}{2} (\Delta\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}^I \cdot \Delta\underline{\underline{\xi}}) \quad (3.7)$$

Compte tenu des expressions des énergies libres des phases matrice et renforcement et de leur interaction, l'énergie de déformation s'exprime en fonction des variables de déformation  $(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \underline{\underline{\varepsilon}}^r, \underline{\underline{\chi}}^r, \Delta\underline{\underline{\xi}})$  par :

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \underline{\underline{\varepsilon}}^r, \underline{\underline{\chi}}^r, \Delta\underline{\underline{\xi}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [(\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{\underline{C}}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m) + (\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\chi}}^r \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_C^r \cdot \underline{\underline{\chi}}^r) + (\Delta\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}^I \cdot \Delta\underline{\underline{\xi}})] d\Omega \quad (3.8)$$

Remplaçant dans (3.1), l'énergie de déformation et le potentiel des efforts extérieurs par leurs expressions (3.3) et (3.8), il vient :

$$\begin{aligned} E(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r, \underline{\underline{\omega}}^r) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ (\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{\underline{C}}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m) + (\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\chi}}^r \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_C^r \cdot \underline{\underline{\chi}}^r) + (\Delta\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}^I \cdot \Delta\underline{\underline{\xi}}) \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m \cdot \underline{\underline{\xi}}^m + \rho^r \underline{\underline{F}}^r \cdot \underline{\underline{\xi}}^r) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} (\underline{\underline{T}}_d^m \cdot \underline{\underline{\xi}}^m + \underline{\underline{T}}_d^r \cdot \underline{\underline{\xi}}^r) dS - \int_{\partial\Omega_C} \underline{\underline{C}}_d^r \cdot \underline{\underline{\omega}}^r dS \end{aligned} \quad (3.9)$$

soit, sous l'hypothèse d'adhérence parfaite entre phases  $(\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^r = \underline{\underline{\xi}}^m)$  :

$$\begin{aligned}
 E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ (\underline{\varepsilon}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\varepsilon}^m) + (\underline{\varepsilon}^r : \underline{\underline{C}}_F^r : \underline{\varepsilon}^r + \underline{\chi}^r : \underline{\underline{C}}_C^r : \underline{\chi}^r) \right] d\Omega - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r) \cdot \underline{\xi} d\Omega \\
 & - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot \underline{\xi} dS - \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot \underline{\omega}^r dS
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec

$$\underline{T}_d = \underline{T}_d^m + \underline{T}_d^r \tag{3.11}$$

### 3.3 Principe du minimum de l'énergie potentielle pour un milieu biphasique élastique

La fonctionnelle *énergie potentielle* définie par (3.10) vérifie le principe de minimum suivant :

Soit  $(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r)$  la *solution en déplacement-rotation* du problème d'élasticité, alors :

$$\forall (\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \in C.A. \quad E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) \leq E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \tag{3.12}$$

où *C.A.* désigne l'ensemble des champs de déplacement-rotation *cinématiquement admissibles* pour le problème :

$$C.A. = \left\{ (\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}); \quad \begin{array}{l} \underline{\xi}' = \underline{\xi}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \setminus \partial\Omega_T \\ \underline{\omega}^{r'} = \underline{\omega}_d^r \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \setminus \partial\Omega_C \end{array} \right\} \tag{3.13}$$

Soient  $\delta\underline{\xi}$  et  $\delta\underline{\omega}$  les écarts des champs  $\underline{\xi}'$  et  $\underline{\omega}^{r'}$  aux champs de déplacement  $\underline{\xi}$  et de rotation  $\underline{\omega}^r$  *solutions* du problème :

$$\delta\underline{\xi} = \underline{\xi}' - \underline{\xi} \quad \text{et} \quad \delta\underline{\omega} = \underline{\omega}^{r'} - \underline{\omega}^r \tag{3.14}$$

L'écart de l'énergie potentielle du champ de déplacement-rotation  $(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'})$  à celle de la solution est donné par :

$$\delta E = E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^r) - E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) = E(\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}, \underline{\omega}^r + \delta\underline{\omega}) - E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) \quad (3.15)$$

soit, en tenant compte de (3.10) :

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ (\underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m) : \underline{\underline{C}}^m : (\underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ (\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r) \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r) \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ (\underline{\underline{\chi}}^r + \delta\underline{\underline{\chi}}^r) \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot (\underline{\underline{\chi}}^r + \delta\underline{\underline{\chi}}^r) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\chi}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \underline{\underline{\chi}}^r \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r) \cdot (\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot (\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}) dS - \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot (\underline{\omega}^r + \delta\underline{\omega}) dS \\ &+ \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r) \cdot \underline{\xi} d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot \underline{\xi} dS + \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot \underline{\omega}^r dS \end{aligned} \quad (3.16)$$

et donc, après simplification :

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ 2\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m \right] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ 2\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ 2\underline{\underline{\chi}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \delta\underline{\underline{\chi}}^r + \delta\underline{\underline{\chi}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \delta\underline{\underline{\chi}}^r \right] d\Omega - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r) \delta\underline{\xi} d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot \delta\underline{\xi} dS \\ &- \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot \delta\underline{\omega} dS \end{aligned} \quad (3.17)$$

où  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m$  et  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r$  désignent les champs de déformation de la phase matrice et de la phase renforcement associés aux champs de déplacement  $\delta\underline{\xi}$ , et  $\delta\underline{\underline{\chi}}^r$  est le champ de déformation généralisé associé à  $\delta\underline{\omega}$ .

Introduisant les champs de contraintes  $(\underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r)$  solutions du problème, c'est-à-dire associés aux champs de déformations  $(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \underline{\varepsilon}^r, \underline{\chi}^r)$  par les lois de comportement élastique des deux phases :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m, \quad \underline{X}^r = \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\varepsilon}^r, \quad \underline{\Gamma}^r = \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \underline{\chi}^r \quad (3.18)$$

l'expression (3.17) devient :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} [\underline{\underline{\sigma}}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \underline{\underline{X}}^r . \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\Gamma}}^r . \delta \underline{\underline{\chi}}^r] d\Omega - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m + \rho^r \underline{\underline{F}}^r) . \delta \underline{\underline{\xi}} d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{\underline{T}}_d . \delta \underline{\underline{\xi}} dS \\ & - \int_{\partial\Omega_C} \underline{\underline{C}}_d^r . \delta \underline{\underline{\omega}} dS + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^r . \underline{\underline{C}}_F^r . \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta \underline{\underline{\chi}}^r . \underline{\underline{C}}_C^r . \delta \underline{\underline{\chi}}^r \right] d\Omega \end{aligned} \quad (3.19)$$

Appliquant le *théorème des travaux virtuels* aux champs cinématiques  $(\delta \underline{\underline{\xi}}, \delta \underline{\underline{\omega}}^r)$  avec les champs de contraintes  $(\underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\underline{X}}^r, \underline{\underline{\Gamma}}^r)$  solutions du problème, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \underline{\underline{X}}^r . \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\Gamma}}^r . \delta \underline{\underline{\chi}}^r) d\Omega = & \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m + \rho^r \underline{\underline{F}}^r) . \delta \underline{\underline{\xi}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}} . \delta \underline{\underline{\xi}} dS \\ & + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{C}}^r . \delta \underline{\underline{\omega}} dS \end{aligned} \quad (3.20)$$

Comme  $\delta \underline{\underline{\xi}}$  (resp.  $\delta \underline{\underline{\omega}}$ ) est la différence de deux champs de déplacement (resp. rotation) cinématiquement admissibles, alors :

$$\begin{cases} \delta \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{0}} & \text{sur } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_T \\ \delta \underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{0}} & \text{sur } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_C \end{cases} \quad (3.21)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \underline{\underline{X}}^r . \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\underline{\Gamma}}^r . \delta \underline{\underline{\chi}}^r) d\Omega = & \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m + \rho^r \underline{\underline{F}}^r) . \delta \underline{\underline{\xi}} d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{\underline{T}}_d . \delta \underline{\underline{\xi}} dS \\ & + \int_{\partial\Omega_C} \underline{\underline{C}}_d^r . \delta \underline{\underline{\omega}} dS \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'écart de l'énergie potentielle des champs  $(\underline{\underline{\xi}}', \underline{\underline{\omega}}^{r'})$  à celle de la solution élastique s'écrit finalement, compte tenu de (3.22) :

$$E(\underline{\underline{\xi}}', \underline{\underline{\omega}}^{r'}) - E(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\omega}}^r) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^r . \underline{\underline{C}}_F^r . \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta \underline{\underline{\chi}}^r . \underline{\underline{C}}_C^r . \delta \underline{\underline{\chi}}^r) d\Omega \quad (3.23)$$

qui, du fait du caractère défini-positif des formes quadratiques associées à  $\underline{\underline{C}}^m$ ,  $\underline{\underline{C}}^r$  et  $\underline{\underline{C}}^r$ , est *positif ou nul* :

$$\forall(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \in C.A. \quad E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) - E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \leq 0 \quad (3.24)$$

*Les champs de déplacement et de rotation, solutions du problème, minimisent l'énergie potentielle sur l'espace des mouvements cinématiquement admissibles.*

La solution est par ailleurs *unique*. En effet, supposant l'existence de deux solutions  $(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r, \underline{\sigma}^m, \underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r)$  et  $(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}, \underline{\sigma}^{m'}, \underline{X}^{r'}, \underline{\Gamma}^{r'})$ , ce principe du minimum de l'énergie potentielle s'écrit pour ces deux solutions :

$$E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) \leq E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \quad \text{et} \quad E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \leq E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) \quad (3.25)$$

Etant donné que les formes quadratiques associées à  $\underline{\underline{C}}^m$ ,  $\underline{\underline{C}}^r$  et  $\underline{\underline{C}}^r$  sont définies, il vient :

$$\begin{cases} E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) < E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) & \text{si} \quad (\underline{\varepsilon}^m, \underline{\varepsilon}^r, \underline{\chi}^r) \neq (\underline{\varepsilon}^{m'}, \underline{\varepsilon}^{r'}, \underline{\chi}^{r'}) \\ E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) < E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) & \text{si} \quad (\underline{\varepsilon}^m, \underline{\varepsilon}^r, \underline{\chi}^r) \neq (\underline{\varepsilon}^{m'}, \underline{\varepsilon}^{r'}, \underline{\chi}^{r'}) \end{cases} \quad (3.26)$$

Il en ressort que les champs de déformations des deux phases sont identiques :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \underline{\underline{\varepsilon}}^{m'} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^r = \underline{\underline{\varepsilon}}^{r'} \\ \underline{\underline{\chi}}^r = \underline{\underline{\chi}}^{r'} \end{cases} \quad (3.27)$$

L'unicité de la solution est ainsi vérifiée pour les déformations, elle est aussi vérifiée pour les champs de contraintes. En revanche, elle n'est assurée pour les champs de déplacement et de rotation qu'à *un mouvement rigidifiant* près :

$$\begin{cases} \underline{\xi} = \underline{\xi}' + \underline{\Omega} \wedge \underline{x} + \underline{u} \\ \underline{\omega} = \underline{\omega}' + \underline{\Omega} \end{cases} \quad (3.28)$$

L'existence de la solution est par ailleurs assurée. La démonstration ne sera pas détaillée ici, mais, à titre indicatif, elle repose sur le *théorème de Lax Milgram*. (Ern et Guermond, (2001) [35])

### 3.4 Formulation variationnelle

La recherche de la solution d'un problème d'élasticité revient, de par le principe du minimum établi ci-dessus, à la recherche du *minimum de l'énergie potentielle* :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) \in C.A. \text{ tel que :} \\ \forall (\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \in C.A. : E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) < E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \end{cases} \quad (3.29)$$

qui est équivalente à la recherche de la solution du *problème variationnel* suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) \in C.A. \text{ tel que :} \\ \forall (\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \in C.A. : a((\underline{\xi}, \underline{\omega}^r), (\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'})) = \Phi(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \end{cases} \quad (3.30)$$

où  $a(., .)$  est la *forme bilinéaire associée à la forme quadratique* définie par la fonctionnelle énergie potentielle, elle s'écrit par :

$$a((\underline{\xi}, \underline{\omega}^r), (\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'})) = \int_{\Omega} [(\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^{m'}) + (\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^{r'} + \underline{\underline{\chi}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \underline{\underline{\chi}}^{r'})] d\Omega \quad (3.31)$$

et  $\Phi(., .)$  est une *forme linéaire* exprimant le travail des efforts extérieurs :

$$\Phi(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r) \cdot \underline{\xi}' d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot \underline{\xi}' dS + \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot \underline{\omega}^{r'} dS \quad (3.32)$$

### 3.5 Méthode des éléments finis appliquée au système biphasique

La recherche de la solution d'un problème d'élasticité par éléments finis consiste à trouver les champs de déplacement-rotation qui minimisent la fonctionnelle énergie potentielle



sur un *espace d'approximation inclus dans l'ensemble des champs cinématiquement admissibles*, ou d'une manière équivalente à résoudre le problème variationnel (3.30) sur cet espace d'approximation.

L'espace d'approximation est déterminé par la discrétisation géométrique de la structure en éléments finis (maillage), la donnée du degré d'approximation polynomiale  $n$  des champs sur chaque élément fini et l'ordre de la continuité de l'approximation.

### 3.5.1 Maillage

Le recouvrement spatial ou maillage consiste à subdiviser la géométrie en un nombre fini  $N_e$  d'éléments polygonaux (triangles ou quadrilatères), ayant en commun, s'ils sont adjacents, un sommet ou une arête :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} (\nu_e)_i \quad (3.33)$$

où  $(\nu_e)_i$  désigne l'élément fini numéro  $i$ .

Pour les problèmes biphasiques, le *même maillage est adopté pour les deux phases* afin de pouvoir aussi bien assurer la condition d'adhérence parfaite, qu'inclure une loi d'interaction entre phases. La structure biphasique à étudier est alors remplacée par une structure discrétisée équivalente.

On se limitera dans ce qui suit au cas d'un milieu biphasique *sollicité en déformations planes dans le plan*  $(O, x, y)$ . Les seuls degrés de liberté d'un tel système sont donc les deux déplacements  $(\xi_x, \xi_y)$  dans le plan et la rotation  $(\omega)$  autour de l'axe  $(Oz)$ . Chaque nœud du maillage étant ainsi muni de *trois degrés de liberté*, l'ensemble de ces degrés de liberté relatifs à l'élément n<sup>o</sup> $i$  peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\{\xi\}_e^i = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot \\ \xi_x^{k,i} \\ \xi_y^{k,i} \\ \omega^{k,i} \\ \cdot \end{pmatrix} \right\} \quad k = 1, \dots, n_e \quad (3.34)$$

où  $n_e$  désigne le nombre de nœuds sur chaque élément.

### 3.5.2 Approximation des champs de déplacement et de rotation

Les champs de déplacement et de rotation sont continus sur chaque élément et aux nœuds. Les polynômes d'interpolation n'assurant que cette continuité  $C^0$  sont appelés *polynômes de Lagrange*. D'autres polynômes d'interpolation permettent d'assurer une continuité plus stricte des champs d'approximations ( $C^1$ ,  $C^2$ , ...) : il s'agit des *polynômes d'Hermite*.

Les expressions littérales des champs de déplacement et de rotation peuvent être retrouvées à partir du vecteur des déplacements et rotations élémentaires et de la matrice des fonctions de forme par la relation :

$$\{\xi\}(x, y) = [N]_e(x, y) \cdot \{\xi\}_e^i \quad (3.35)$$

avec

$$\{\xi\}(x, y) = \begin{Bmatrix} \xi_x(x, y) \\ \xi_y(x, y) \\ \omega(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

et

$$[N]_e(x, y) = \left[ \dots \begin{pmatrix} N_k(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & N_k(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & N_k(x, y) \end{pmatrix} \dots \right] \quad (3.37)$$

où  $N_k(x, y)$  est le polynôme de degré  $n$  tel que :

$$N_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_e \quad (3.38)$$

Les polynômes d'interpolation peuvent facilement se calculer sur chaque élément en fonction des coordonnées de ses nœuds, mais par souci d'optimisation des programmes de calcul, ils sont calculés sur l'*élément de référence* associé aux éléments finis employés, puis transformés pour obtenir les polynômes d'interpolation de l'élément donné. Par exemple, pour des *éléments triangulaires à trois nœuds* (T3), l'élément de référence est un triangle isocèle rectangle ayant deux côtés unitaires (fig 3.1) (Dhatt et Touzot (1984) [33])

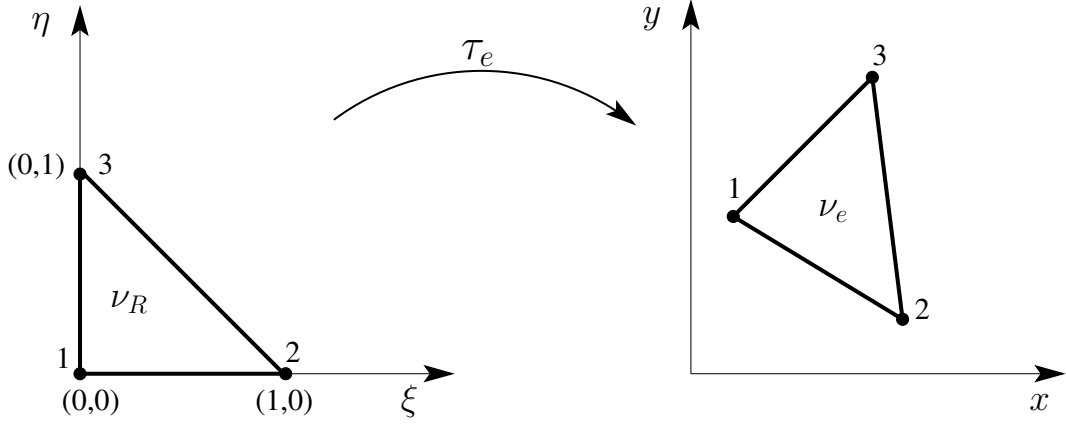


FIG. 3.1: Passage de l'élément de référence à l'élément réel (Dhatt et Touzot (1984) [33])

$\tau_e$  étant la transformation géométrique permettant de passer de l'élément de référence  $\mathcal{V}_R$  à l'élément réel  $\mathcal{V}_e$  :

$$\tau_e : (\xi, \eta) \longrightarrow (x, y) \quad (3.39)$$

on introduit la matrice jacobienne de la transformation  $\tau_e$  :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

et le jacobien de la transformation :

$$\mathbf{J} = \det[\mathbf{J}] > 0 \quad (3.41)$$

Les dérivées des fonctions de forme peuvent aussi être calculées à partir des dérivées des fonctions de forme définies sur l'élément de référence par :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_k}{\partial x} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \quad (3.42)$$

L'intégration des fonctions de formes sur un élément quelconque peut ainsi être calculée sur l'élément de référence par :

$$\int_{\mathcal{V}_e} N_i(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{V}_R} N_i(\xi, \eta) \cdot \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (3.43)$$

où  $\mathcal{V}_e$  désigne un élément réel quelconque.

### 3.5.3 Principe du minimum discrétisé

Les efforts intérieurs ( $\underline{\sigma}_m; \underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r$ ) et les déformations ( $\underline{\varepsilon}_m; \underline{\varepsilon}^r, \underline{\chi}^r$ ), en tout point du milieu biphasique, peuvent s'écrire comme suit sous forme vectorielle :

$${}^t\{\Sigma\} = \{\sigma_{xx}^m, \sigma_{yy}^m, \sigma_{zz}^m, \sigma_{xy}^m, n^r, v^r, m^r\} \quad (3.44)$$

$${}^t\{E\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, \varepsilon^r, \theta^r, \chi^r\} \quad (3.45)$$

de sorte que la *loi de comportement élastique* peut s'écrire :

$$\{\Sigma\} = [D] \cdot \{E\} \quad (3.46)$$

avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^r \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

L'énergie de déformation du milieu biphasique donnée par (3.8), peut s'écrire, compte tenu de (3.44), (3.45) et (3.46), sous la forme :

$$W(\{E\}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t\{E\} \cdot [D] \cdot \{E\} \, d\Omega \quad (3.48)$$

qui est égale, compte tenu de (3.33), à la somme des énergies de déformation sur tous les éléments du maillage, soit :

$$W(\{E\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} \int_{(v_e)_i} {}^t\{E\} \cdot [D] \cdot \{E\}(x, y) \, dx dy \quad (3.49)$$

Utilisant la transformation  $\tau_e$  et la formule de transport (3.43), il vient :

$$W(\{E\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\nu_R} {}^t\{E\} \cdot [D] \cdot \{E\}(\xi, \eta) \cdot J \, d\xi d\eta \quad (3.50)$$

Les déformations s'écrivent comme suit en fonction des champs de déplacement-rotation par élément :

$$\{E\}(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon^r \\ \theta^r \\ \chi^r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \omega \end{pmatrix} (x, y) = [\partial] \cdot \{\xi\}(x, y) \quad (3.51)$$

soit compte-tenu de (3.35) :

$$\{E\}(x, y) = [\partial] \cdot [N]_e(x, y) \cdot \{\xi\}^i = [B]_e \cdot \{\xi\}^i \quad (3.52)$$

où  $B_e$  est une matrice formée de  $n_e$  matrices  $[B]_k$  de taille (7 x 3) :

$$B_e = \left[ \dots, [B]_k, \dots \right] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (3.53)$$

avec d'après (3.36) :

$$[B]_k = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_{k,y} & N_{k,x} & 0 \\ N_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,x} & -N_k \\ 0 & 0 & N_{k,x} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

où les expressions de  $N_{k,x} = \frac{\partial N_k}{\partial x}$  et  $N_{k,y} = \frac{\partial N_k}{\partial y}$  sont données par (3.42).

On obtient finalement l'expression discrétisée de l'énergie de déformation :

$$\begin{aligned}
W(\{E\}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\nu_R} {}^t\{\xi\}^i \cdot {}^t[B]_e \cdot [D] \cdot [B]_e \cdot \{\xi\}^i \cdot J \, d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} {}^t\{\xi\}^i \cdot \underbrace{\left[ \int_{\nu_R} {}^t[B]_e \cdot [D] \cdot [B]_e \cdot J \, d\xi d\eta \right]}_{[K]_e^i} \cdot \{\xi\}^i \\
&= \frac{1}{2} {}^t\{\xi\} \cdot [K] \cdot \{\xi\}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

où  $[K]$  est la *matrice de rigidité globale* de la structure biphasique obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires  $[K]_e^i$  et  $\{\xi\}$  est le vecteur (matrice colonne) formé de tous les déplacements et rotations des nœuds de la structure.

Le potentiel des efforts extérieurs s'écrit de manière analogue comme la somme des potentiels calculés sur chaque maille élémentaire :

$$\Phi(\{\xi\}) = \sum_{i=1}^{N_e} {}^t\{F\}^i \cdot \{\xi\}^i = {}^t\{F\} \cdot \{\xi\} \tag{3.56}$$

d'où l'expression discrétisée de l'énergie potentielle :

$$E(\{\xi\}) = W(\{\xi\}) - \Phi(\{\xi\}) = \frac{1}{2} {}^t\{\xi\} \cdot [K] \cdot \{\xi\} - {}^t\{F\} \cdot \{\xi\} \tag{3.57}$$

dont la recherche du minimum conduit au système linéaire classique :

$$[K] \cdot \{\xi\} = \{F\} \tag{3.58}$$

### 3.5.4 Mise en oeuvre numérique du modèle multiphasique en élasticité linéaire (Hassen et de Buhan (2002) [44])

Partant de la formulation variationnelle établie dans la section 3.4, une mise en oeuvre numérique du modèle multiphasique dans le cadre de la méthode des éléments finis a été développée aboutissant à un *code de calcul bidimensionnel*. Ce dernier permet de simuler la *réponse élastique de structures biphasiques sous chargements statiques en déformations planes*.

Les éléments finis choisis étant *triangulaires*, la question qui reste posée est celle du choix des *fonctions d'interpolation*  $N_k$ , *linéaires* (T3) ou *quadratiques* (T6) ou ... ?

### 3.5.4.1. Hypothèse de Navier-Bernoulli

On peut, dans un premier temps, penser à diminuer la taille du système linéaire à résoudre en adoptant l'hypothèse de Navier-Bernoulli pour la phase renforcement, c'est-à-dire à négliger les déformations de cisaillement dans les inclusions :

$$\theta^r = 0 \iff \omega = \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \quad (3.59)$$

de sorte que le nombre de degrés de liberté en chaque nœud du maillage passe de 3 à 2. Un tel choix a été écarté pour deux raisons :

a) Si la condition de Navier-Bernoulli permet de réduire le nombre de degrés de liberté en chaque nœud, il n'en est pas de même en ce qui concerne le nombre de variables par élément, puisqu'il convient d'assurer non seulement la *continuité des déplacements* d'un tel élément à l'autre, mais également celle des *rotations*, et donc en vertu de la condition de Navier-Bernoulli, des dérivées premières  $\frac{\partial \xi_y}{\partial x}$ . Ceci impose l'utilisation de polynômes de type Hermite qui aboutit à augmenter le nombre de variables de minimisation par élément, perdant ainsi l'avantage initial de la réduction du nombre de degrés de liberté.

b) L'hypothèse de Navier-Bernoulli revient à supposer infinie la rigidité au cisaillement des inclusions de renforcement ( $\beta^r \rightarrow \infty$ ). Nous avons vu au chapitre précédent, qu'une telle hypothèse conduit à "rigidifier" le problème, c'est-à-dire à surestimer de manière parfois non négligeable (voir figure 2.6 du chapitre 2) la raideur de la structure ou de manière équivalente, à sous-estimer les déplacements de cette dernière pour un niveau de chargement donné.

### 3.5.4.2. Quelles fonctions d'interpolation ?

La variable rotation étant considérée comme indépendante des variables de déplacement, il reste maintenant à choisir les fonctions d'interpolation les plus appropriées. Se limitant aux fonctions linéaires ou quadratiques, trois choix possibles ont été considérés (voir figure 3.2) :

a) Choix d'une interpolation *linéaire* pour toutes les variables (les deux déplacements et la rotation dans le plan) : élément T3 dans le cas 2D (P1-Lagrange dans le cas 1D (figure 3.2 (a))).

- b) Interpolation *quadratique* pour les déplacements et la rotation (figure 3.2 (b)).
- c) Interpolation *quadratique* pour les déplacements, *linéaire* pour la rotation (figure 3.2 (c)).

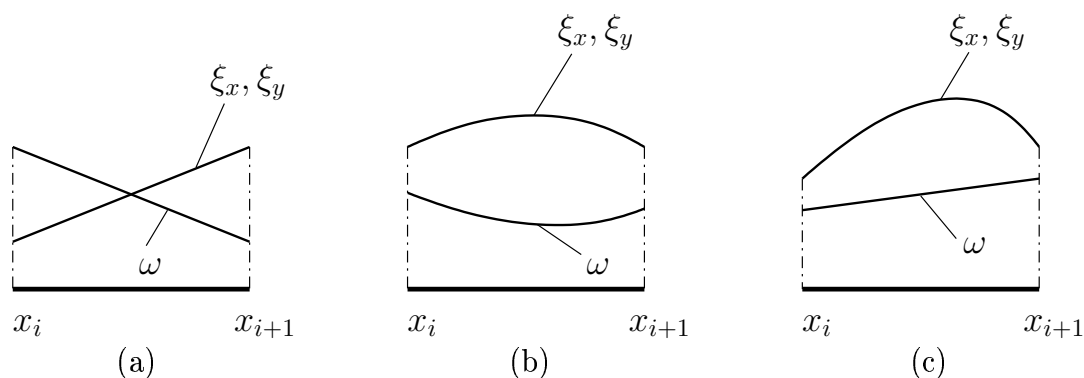


FIG. 3.2: (a) élément *P1-Lagrange* pour les déplacements et la rotation; (b) *P2-Lagrange* pour les déplacements et la rotation; (c) *P2-Lagrange* pour les déplacements et *P1-Lagrange* pour la rotation

Nous allons montrer que le choix a), c'est-à-dire celui d'éléments finis de type T3 (triangle à 3 nœuds) dans le cas bidimensionnel, P1-Lagrange (segment à 2 nœuds) dans le cas unidimensionnel, conduit à des problèmes numériques bien connus sous le nom de "verrouillage numérique" ("shear locking") (Frey, (1994) [37]; Zienkiewicz et Taylor, (1994) [80]; Dhatt et Touzot, (1984) [33]) dans le domaine du calcul des poutres élastiques. L'exemple très simple que nous détaillons ci-après va nous permettre d'illustrer ce point.

On considère une poutre console de longueur  $L$  encastée en  $x = 0$  et soumise à une charge concentrée  $Q$  en  $x = L$  (voir figure 3.3).

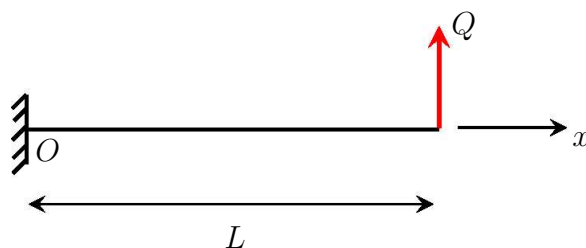


FIG. 3.3: Poutre console soumise à une charge concentrée

La distribution des efforts intérieurs est donnée par :

$$\begin{cases} V(x) = Q \\ M(x) = Q(L - x) \end{cases} \quad (3.60)$$



Compte tenu de la loi de comportement élastique et des conditions aux limites, les distributions de flèche et de rotation sont données par :

$$\begin{cases} v(x) = \frac{Q}{\beta}x + \frac{Q}{\gamma}(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) \\ \omega(x) = \frac{Q}{\gamma}(Lx - \frac{x^2}{2}) \end{cases} \quad (3.61)$$

où  $\gamma$  et  $\beta$  désignent respectivement les rigidités de la poutre à la *flexion* et au *cisaillement*.

La recherche de la solution de ce problème par *éléments finis linéaires* (P1-Lagrange) pour les deux champs cinématiques de déplacement et de rotation, consiste à minimiser l'énergie potentielle discrétisée par rapport aux déplacements et rotations nodaux.

Dans le cas où *un seul élément fini* est utilisé, une approximation linéaire est recherchée pour les déplacements et les rotations, qui s'écrivent compte tenu des conditions aux limites :

$$\begin{cases} v(x) = v_1 \frac{x}{L} \\ \omega(x) = \omega_1 \frac{x}{L} \end{cases} \quad (3.62)$$

où  $v_1$  et  $\omega_1$  désignent respectivement le déplacement et la rotation à l'extrémité  $x = L$ .

L'énergie potentielle de la structure s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E(v_1, \omega_1) &= \frac{1}{2} \int_0^L \gamma \omega'^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \beta (v'(x) - \omega(x))^2 dx - Q \cdot v(L) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \gamma \frac{\omega_1^2}{L^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \beta \left( \frac{v_1}{L} - \omega_1 \frac{x}{L} \right)^2 dx - Q \cdot v_1 \\ &= \omega_1^2 \left( \frac{\gamma}{2L} + \frac{\beta L}{6} \right) - \frac{\beta}{2} \omega_1 v_1 + \frac{\beta v_1^2}{2L} - Q \cdot v_1 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Sa minimisation par rapport aux variables  $v_1$  et  $\omega_1$  aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \omega_1} = \omega_1 \left( \frac{\gamma}{L} + \frac{\beta L}{3} \right) - \beta v_1 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial v_1} = -\frac{\beta}{2} \omega_1 + \beta \frac{v_1}{L} - Q = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

et aux expressions correspondantes du déplacement et de la rotation en  $x = L$  :

$$\begin{cases} v_1 = \frac{4QL(3\gamma + \beta L^2)}{(12\gamma + \beta L^2)\beta} = \frac{QL^3}{3\gamma} \cdot \frac{12(3 + \rho)}{\rho(12 + \rho)} = v^{EF}(L) \\ \omega_1 = \frac{6QL^2}{12\gamma + \beta L^2} = \frac{QL^2}{2\gamma} \cdot \frac{12}{12 + \rho} = \omega^{EF}(L) \end{cases} \quad (3.65)$$

où le paramètre sans dimension  $\rho$  est défini par :

$$\rho = \frac{\beta L^2}{\gamma} \quad (3.66)$$

Ces valeurs sont à comparer à celles dérivées de la solution analytique (3.61) :

$$\begin{cases} v(L) = \frac{QL^3}{3\gamma} \left(1 + \frac{3}{\rho}\right) \\ \omega(L) = \frac{QL^2}{2\gamma} \end{cases} \quad (3.67)$$

Dans la pratique, le paramètre sans dimension  $\rho$  est *grand devant l'unité*, de sorte que les valeurs déduites de la méthode des éléments finis deviennent beaucoup plus faibles que les valeurs exactes, tendant même à s'annuler lorsque  $\rho \rightarrow \infty$ , ce qui correspond à l'hypothèse de Navier-Bernoulli. Cet écart considérable entre la solution analytique et la solution par éléments finis, utilisant des éléments P1-Lagrange (T3 en 2D) aussi bien pour les déplacements que pour la rotation, est confirmé même dans le cas où la poutre est discrétisée en plusieurs éléments. Ceci est illustré par la figure 3.4 qui donne les déformées analytique et numérique de la poutre pour différentes valeurs du paramètre  $\rho$ , mettant ainsi en évidence le caractère aberrant des résultats numériques.

Un tel résultat peut s'expliquer de la façon suivante. L'énergie de déformation de cisaillement s'écrit sous la forme :

$$W^{cis} = \frac{1}{2} \int_0^L \beta (v' - \omega)^2 dx \quad (3.68)$$

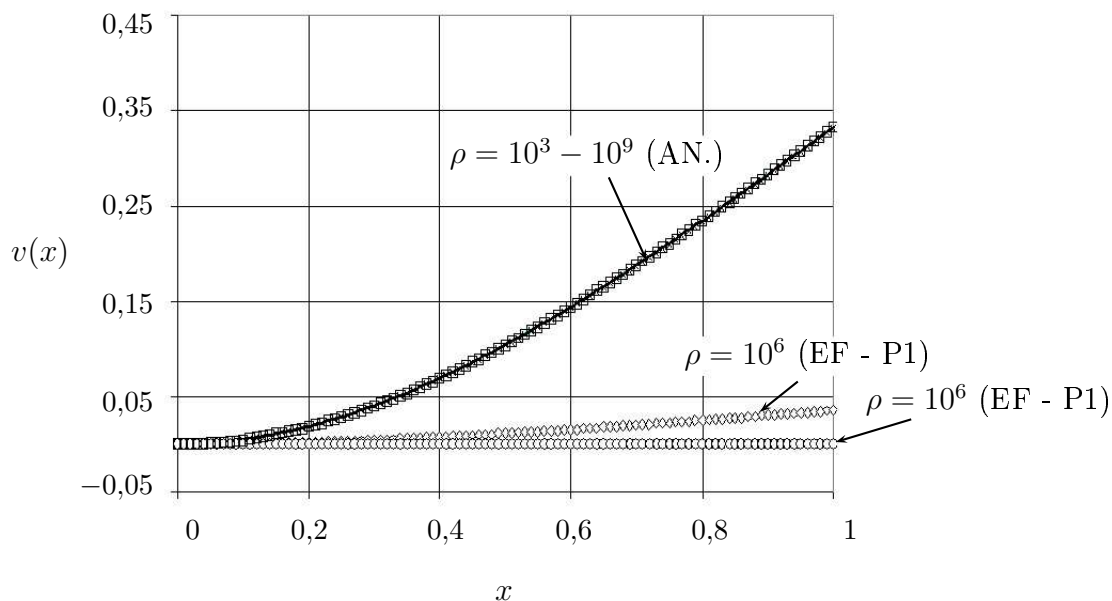


FIG. 3.4: Déformées analytiques et numériques (P1-Lagrange) de la poutre-console

Le choix d'éléments finis P1-Lagrange pour la flèche et la rotation conduit à une approximation *linéaire* pour la rotation  $\omega$  sur chaque élément et à *valeurs constantes* pour la dérivée de la flèche  $v'$  comme indiqué sur la figure 3.4. Dans le cas où  $\rho \gg 1$ , le terme relatif à la déformation de cisaillement devient prépondérant par rapport au terme de flexion, et la recherche du minimum de l'énergie potentielle va conduire à annuler la différence  $v' - \omega$  (zone hachurée sur la figure 3.5) sur chaque élément, et donc de proche en proche la flèche  $v$  elle-même, compte tenu de la condition d'encastrement  $v(0) = \omega(0) = 0$ .

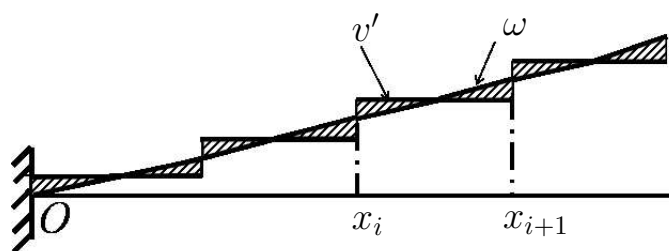


FIG. 3.5: Déformée numérique (P1-Lagrange pour la rotation et la flèche) de la poutre-console

### 3.5.4.3. Validation de la méthode

Afin de surmonter cette difficulté numérique, une approximation d'ordre deux au minimum, doit être adoptée pour la flèche. Une telle approximation a été testée et validée

(cas des éléments P2 de Lagrange pour la flèche et P1 de Lagrange pour la rotation) (voir figure 3.6), mais a été délaissée au profit d'une approximation quadratique pour les deux champs cinématiques dont la mise en oeuvre numérique est plus simple.

La figure 3.6 montre une comparaison entre la solution analytique et les simulations numériques relatives à la mise en oeuvre numérique de la méthode des éléments finis.

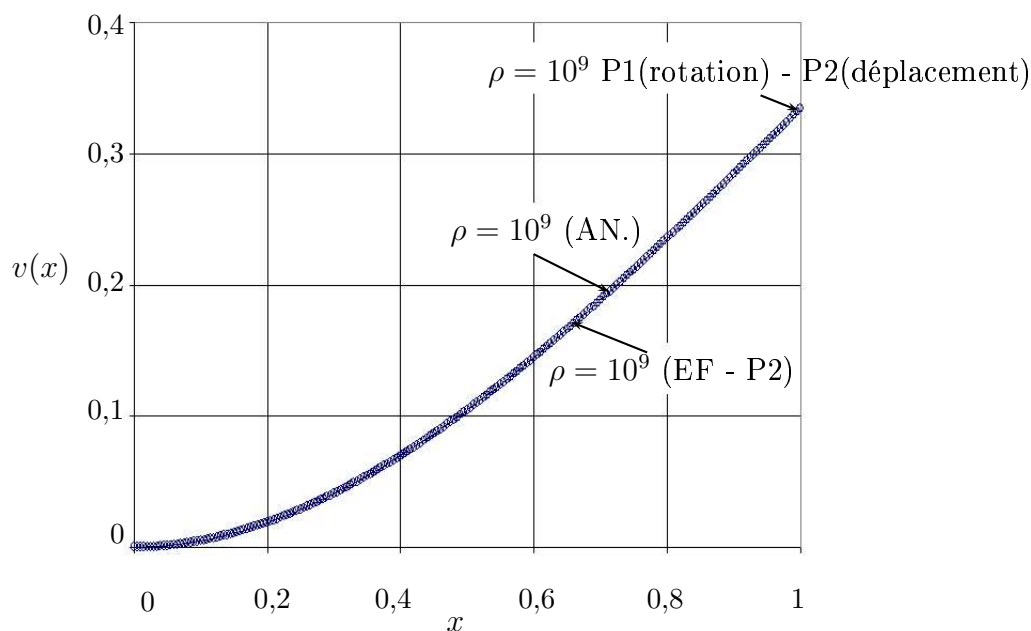


FIG. 3.6: Déformées analytique et numériques (P2-Lagrange) et (P1-Lagrange) de la poutre-console

### 3.5.5 Validation de l'outil numérique

Un outil de calcul numérique par éléments finis a été mis au point permettant de traiter la résolution des problèmes d'élasticité pour un milieu biphasique en déformations planes dans un plan parallèle à la direction du renforcement. Ce code est fondé sur l'utilisation d'éléments finis triangulaires de type T6 (six nœuds par élément fini) correspondant à une approximation *quadratique* aussi bien pour les déplacements que pour les rotations, de façon à éviter le phénomène de verrouillage numérique décrit précédemment. Le code ainsi élaboré est testé sur le problème du cisaillement transverse d'une couche renforcée décrit au paragraphe 2.4 du second chapitre, pour lequel une solution analytique a été explicitée. La comparaison entre cette dernière et la solution numérique est effectuée en deux temps pour une structure dont les caractéristiques sont données par :

$$L = 10 \text{ m}, \mu^m = 1 \text{ Pa}, \beta^r = 100 \text{ Pa} \text{ et } \gamma^r = 10 \text{ N.m} \quad (3.69)$$

(Ces valeurs n'ont aucun caractère réaliste, elles sont uniquement destinées à tester l'outil numérique).

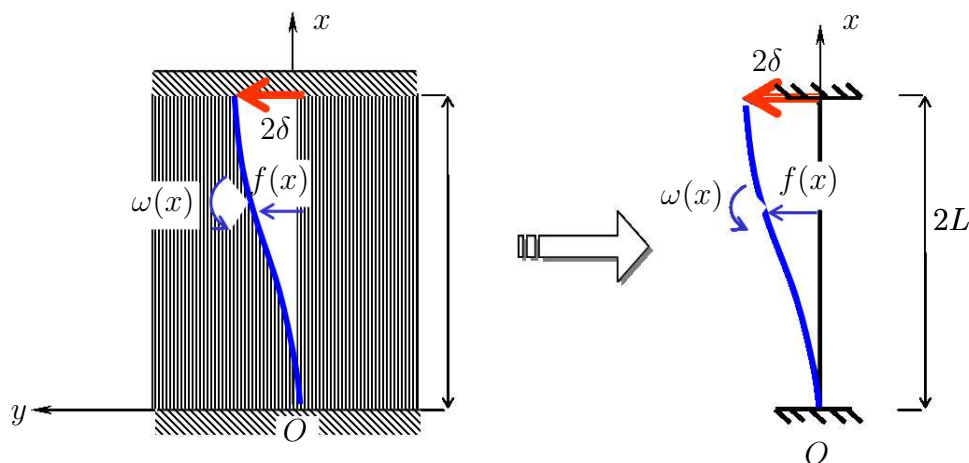


FIG. 3.7: Modélisation unidimensionnelle de l'essai de cisaillement en déformation plane d'une couche de sol renforcée transversalement.

Dans un premier temps, le problème pouvant être traité comme un problème unidimensionnel (figure 3.7), la géométrie de la structure, qui se réduit au segment  $[0, 2L]$ , est discrétisée en 40 éléments P2-Lagrange.

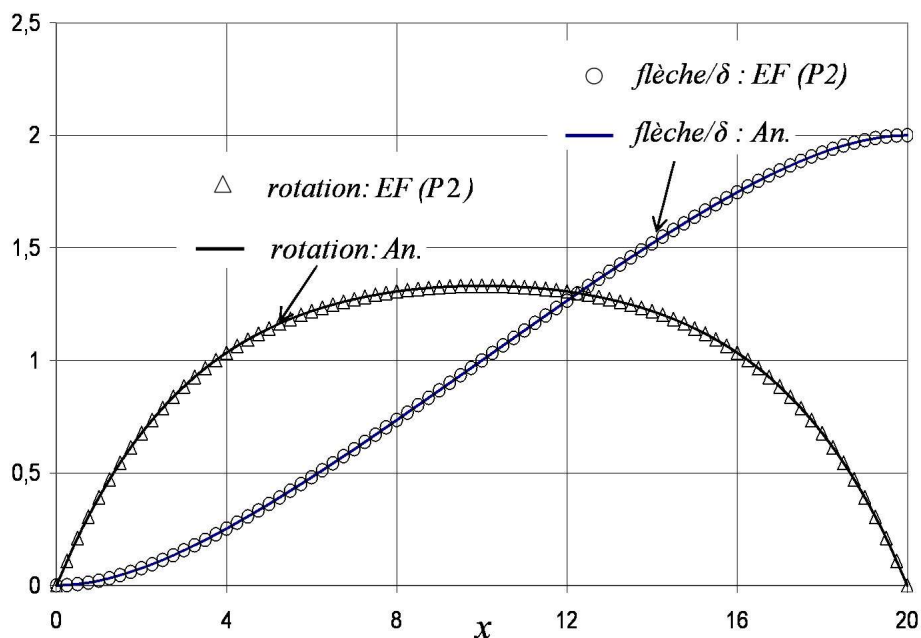


FIG. 3.8: Distribution de flèche et de rotation. Comparaison résultats analytiques-EF P2

La figure 3.8 montre une parfaite concordance entre les résultats numériques (triangles ou cercles) et la solution analytique représentée par les courbes en trait continu, tant pour

ce qui concerne la flèche, que la rotation.

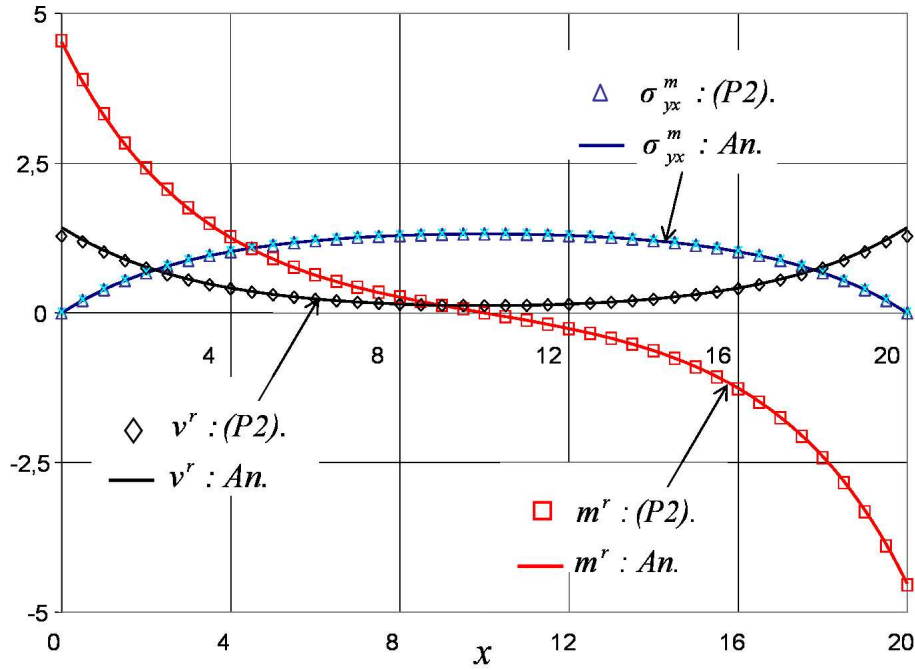


FIG. 3.9: Distribution des efforts intérieurs. Comparaison résultats analytiques-EF P2

A partir des valeurs nodales des déplacements et des rotations, les deux champs cinématiques de déplacement et de rotation sont complètement déterminés. Ils sont, dans le cas des éléments unidimensionnels P2-Lagrange (resp. bidimensionnels T6), quadratiques par élément (resp. quadratiques par rapport aux deux dimensions de l'espace) assurant une continuité  $C^0$  aux nœuds. Les efforts intérieurs sont ainsi calculés par élément via les équations exprimant le comportement élastique des deux phases :

$$\sigma_{yx}^m(x) = \mu^m f'(x) \text{ et } m^r(x) = \gamma^r \omega'(x) \quad (3.70)$$

L'effort tranchant ne sera pas calculé à partir du comportement :

$$v^r(x) = \beta^r (f'(x) - \omega(x)) \quad (3.71)$$

pour éviter les problèmes de verrouillage numérique dus à la différence des degrés des polynômes  $f'(x)$  et  $\omega(x)$ , mais à partir de l'équation d'équilibre :

$$v^r(x) = -m^{r'}(x) \quad (3.72)$$

Il vient ainsi que les distributions des efforts intérieurs dans les deux phases sont discontinues aux nœuds. Les contraintes de cisaillement dans la *phase matrice* et le moment

fléchissant dans la *phase renforcement* sont linéaires par morceaux et discontinus aux nœuds, tandis que l'effort tranchant est constant par élément. Sur la figure 3.9 sont représentées les distributions des efforts intérieurs dans les deux phases. Ces derniers sont calculés analytiquement à partir de la solution développée au chapitre 2 (trait continu) et numériquement par le biais du code de calcul biphasique décrit ci-dessus. Celui-ci utilise des éléments finis du type P2-Lagrange aussi bien pour les déplacements que pour les rotations (carrés, triangles et losanges), montrant une très bonne concordance entre les courbes analytiques et celles obtenues numériquement. Cette concordance est confirmée par celle des valeurs du module de cisaillement apparent, introduit au chapitre précédent (équation (2.75)) :

$$\mu^{*An.} \cong \mu^{*EF(P2)} \quad \text{au cinquième chiffre significatif près} \quad (3.73)$$

Le même problème peut être traité comme un *problème bidimensionnel* en considérant une bande d'extension horizontale limitée comprise entre les plans d'équations  $y = y_i$  et  $y = y_j$  comme indiqué sur la figure 3.10.

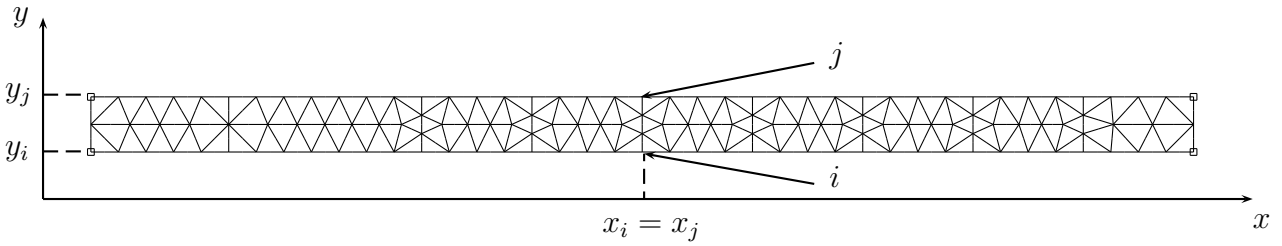


FIG. 3.10: Maillage en éléments finis T6 d'une bande de sol renforcée transversalement.

On impose, pour ce faire, une *condition de périodicité* sur les faces horizontales de cette bande, qui consiste à écrire que les déplacements et les rotations aux nœuds  $i$  et  $j$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  avec  $x_i = x_j$ , sont identiques :

$$\xi_x^i = \xi_x^j, \quad \xi_y^i = \xi_y^j, \quad \omega^i = \omega^j \quad (3.74)$$

Les efforts intérieurs sont calculés de manière analogue au cas d'éléments de type P2-Lagrange, par les lois de comportement élastique pour les contraintes de cisaillement dans la phase matrice et le moment fléchissant dans la phase renforcement, tandis que l'effort tranchant est calculé par l'équation d'équilibre en moment.

Les figures 3.11 et 3.12 montrent que l'on retrouve bien les distributions de flèches, de rotations et d'efforts intérieurs obtenues analytiquement, ainsi que la valeur du module de cisaillement apparent :

$$\mu^{*An.} \cong \mu^{*EF(T6)} \quad \text{au cinquième chiffre significatif près} \quad (3.75)$$

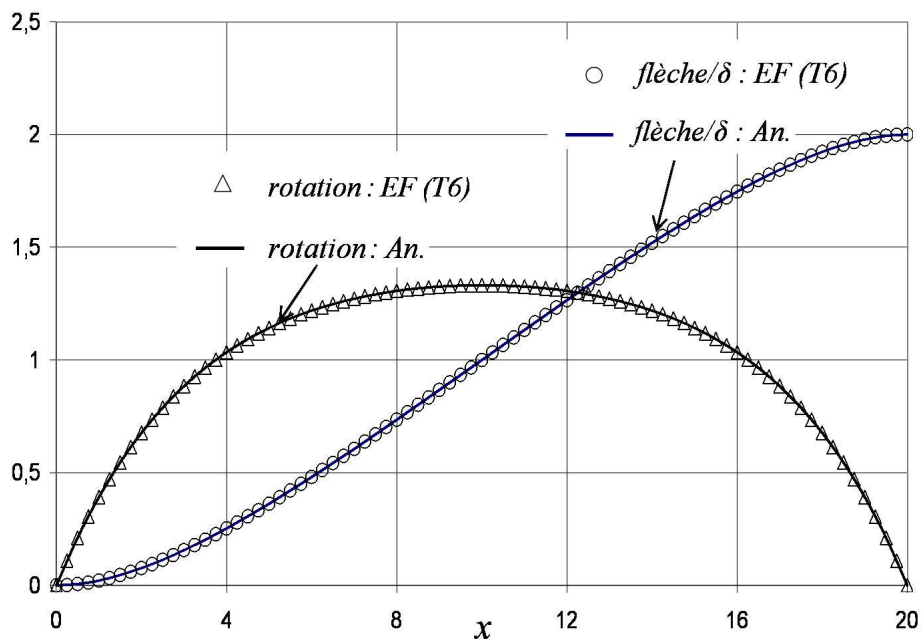


FIG. 3.11: Distribution de flèche et de rotation. Comparaison résultats analytiques-EF T6

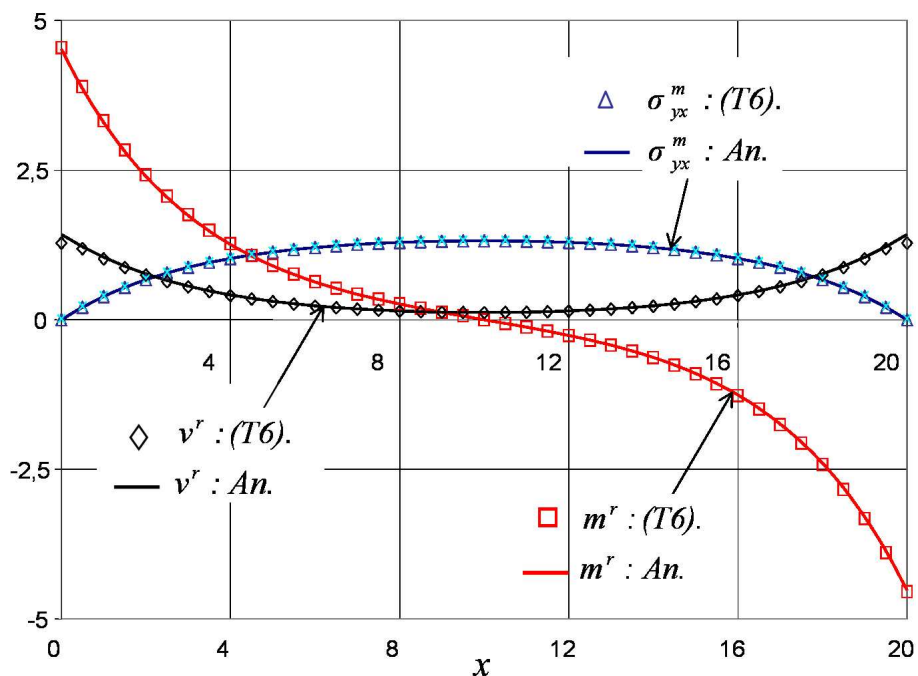


FIG. 3.12: Distribution des efforts intérieurs. Comparaison résultats analytiques-EF T6



## 3.6 Conclusion

Partant du principe de minimum de l'énergie potentielle d'un système en milieu bi-phasique, une formulation variationnelle est établie sous l'hypothèse d'adhérence parfaite entre la phase matrice et la phase renforcement. Cette formulation est discrétisée et mise en œuvre numériquement dans le cadre de la méthode des éléments finis. Une attention particulière a été portée au choix du type d'approximation pour échapper au problème de verrouillage numérique. Le code de calcul numérique ainsi mis au point est validé par la solution analytique du problème de cisaillement transverse d'une couche de sol renforcée détaillée au chapitre 2.

Le chapitre suivant est consacré aux premières applications de ce code de calcul multiphasique.

\*            \*  
                 \*  
                 \*  
                 \*

# Chapitre 4

## Applications du code de calcul multiphasique en élasticité linéaire

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>4.2</b>	<b>Dimensionnement d'une fondation sur radier de pieux . . . . .</b>	<b>77</b>
4.2.1	Position du problème . . . . .	77
4.2.2	Validation et comparaisons avec d'autres méthodes . . . . .	100
<b>4.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>110</b>

---



## 4.1 Introduction

Le code de calcul développé et validé est maintenant utilisé comme un outil de simulation de comportement de structures renforcées par inclusions rigides. On s'intéressera dans le présent travail au problème du dimensionnement d'une fondation sur radier de pieux soumise à un chargement combiné, vertical, latéral et de renversement. En considérant une structure test, les effets de flexion et de cisaillement des inclusions sur la raideur structurelle sont quantifiés dans le cas où les inclusions sont encastrées en tête dans le radier de fondation ou, au contraire, lorsque la connection pieux-fondation peut être schématisée par des rotules.

La dernière partie de ce chapitre porte sur la comparaison des raideurs structurelles obtenues par la modélisation multiphasique avec celles données par une modélisation mixte du même problème.

## 4.2 Dimensionnement d'une fondation sur radier de pieux (Hassen et de Buhan (2005) [48])

### 4.2.1 Position du problème

L'outil numérique est utilisé pour simuler le comportement *global* d'une fondation de largeur  $B$  reposant sur deux couches de sol de caractéristiques mécaniques respectives  $(E_1, \nu_1)$  et  $(E_2, \nu_2)$  et d'épaisseurs respectives  $H_1$  et  $H_2$ , préalablement renforcée par des inclusions rigides de longueur  $L$  régulièrement espacées. (figure 4.1)

La fondation, supposée indéformable, est animée d'un *mouvement de corps rigide* caractérisé par une rotation d'angle  $\varphi$  dans le plan  $(Oxy)$  et d'une translation de composantes verticale  $\delta_x$  et horizontale  $\delta_y$  au point  $O$ . Sous l'*hypothèse d'adhérence parfaite* entre le sol et la semelle de fondation, le déplacement de tout point de cette interface est donné par :

$$\underline{\xi}(x = 0, -B/2 \leq y \leq B/2) = \underline{\xi}^d = \underline{\xi}_O + \varphi \underline{e}_z \wedge y \underline{e}_y = (\delta_x - \varphi y) \underline{e}_x + \delta_y \underline{e}_y \quad (4.1)$$

Des conditions aux limites de contact lisse sont imposées aussi bien sur les bords latéraux que sur le bas de la structure :

$$\begin{cases} \xi_x(x = -(H_1 + H_2)) = 0 \\ \xi_y(y = \pm B'/2) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

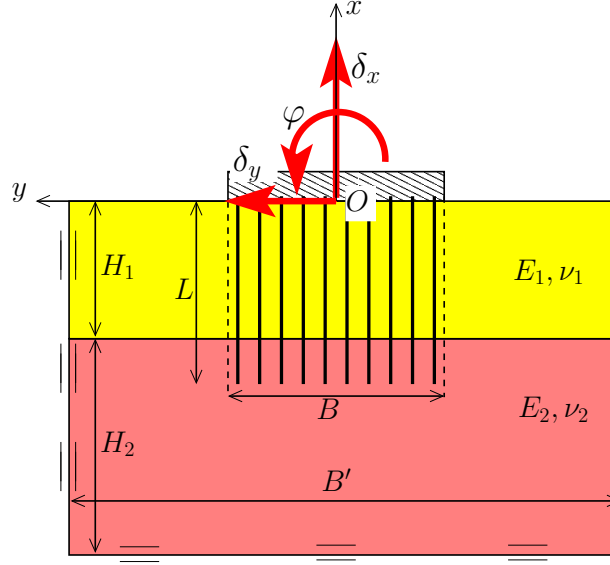


FIG. 4.1: *Fondation sur radier de pieux soumise à un chargement combiné*

tandis que la surface du sol se trouvant de part et d'autre de la fondation, est *libre en contrainte* :

$$\underline{T}(x = 0, -B/2 < y < B/2) = \underline{T}^d = \underline{0} \quad (4.3)$$

L'étude portera sur les deux types de connection pieux-fondation suivants :

- Les pieux sont *encastrés* dans la fondation c'est-à-dire qu'outre l'hypothèse d'adhérence parfaite (4.1), la rotation en tête des inclusions est égale à celle de la fondation :

$$\omega^r(x = 0, y, z) = \omega^d = \varphi \quad (4.4)$$

- La *rotation* en tête des pieux reste libre, c'est-à-dire que la liaison pieux-fondation est schématisée par des *rotules*, et le moment est nul en tête des inclusions :

$$m^r(x = 0, y, z) = C^d = 0 \quad (4.5)$$

Négligeant alors les forces de volume,

$$\underline{F}^m = \underline{F}^r = \underline{0} \quad (4.6)$$

la densité de puissance des efforts extérieurs par unité de *longueur transversale selon Oz*, dans le champ de vitesse  $\{\underline{\dot{\xi}}, \dot{\omega}^r\}$  C.A. est donnée par :

$$P_e(\{\underline{\dot{\xi}}, \dot{\omega}^r\}) = \int_{-B/2}^{B/2} (\underline{T} \cdot \underline{\dot{\xi}} + C \cdot \dot{\omega}^r) dy \quad (4.7)$$

ou encore :

$$P_e(\{\underline{\dot{\xi}}, \dot{\omega}^r\}) = R_x \cdot \dot{\delta}_x + R_y \cdot \dot{\delta}_y + (M/B) \cdot \dot{\phi}B \quad (4.8)$$

où

- $R_x$  désigne la *résultante verticale* des efforts extérieurs appliqués à la fondation dans la direction  $\underline{e}_x$ , donnée par :

$$R_x = \int_{-B/2}^{B/2} T_x dy \quad (4.9)$$

- $R_y$  est la composante *horizontale* des efforts extérieurs appliqués à la fondation :

$$R_y = \int_{-B/2}^{B/2} T_y dy \quad (4.10)$$

- $M$  est le *moment au point O* des efforts extérieurs appliqués à la fondation, donné par :

$$M = \int_{-B/2}^{B/2} (m^r - yT_x) dy \quad (4.11)$$

qui se réduit dans le cas où les pieux sont reliés à la fondation par des rotules à :

$$M = \int_{-B/2}^{B/2} (-y \cdot T_x) dy \quad (4.12)$$

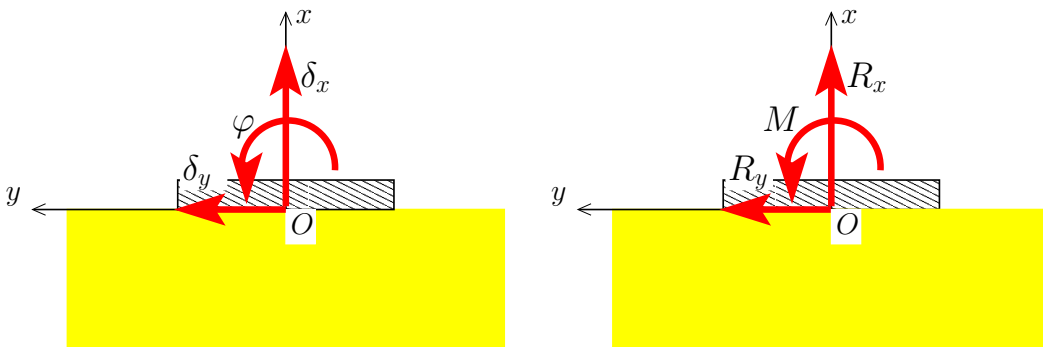


FIG. 4.2: Paramètres de chargements et paramètres cinématiques associés du problème

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, ces *paramètres de chargement*  $R_x, R_y$  et  $M/B$  sont reliés aux paramètres cinématiques  $\delta_x, \delta_y$  et  $\varphi B$  par la relation linéaire suivante :

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ M/B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \varphi B \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

où  $[A_{ij}]$  est la *matrice de raideur structurelle*, qui est *symétrique définie positive* et dont les composantes ont la dimension d'une contrainte. Il est à remarquer que vis-à-vis d'un chargement purement vertical ( $\delta_y = \varphi = 0$ ), étant donné la symétrie du problème, la résultante  $R_y$  des efforts extérieurs et la résultante des moments  $M$  sont nuls, et par suite les termes non diagonaux suivants sont nuls :

$$A_{xy} = A_{yx} = A_{xz} = A_{zx} = 0 \quad (4.14)$$

Le terme  $A_{yz} = A_{zy}$  rend compte du moment engendré par une sollicitation latérale  $\delta_y$  ou d'une manière équivalente de l'effort latéral engendré par une rotation imposée  $\varphi$ , tandis que :

- $A_{xx}$  est la *raideur verticale* de la structure ;
- $A_{yy}$  est la *raideur latérale* de la structure ;
- $A_{zz}$  est la *raideur de la structure vis à vis d'un moment de renversement*.

#### 4.2.1.1. Données du problème

Les caractéristiques géométriques de la structure sont données par :

$$H_1 = 15 \text{ m}, H_2 = 35 \text{ m}, B' = 150 \text{ m}, L = 20 \text{ m}, B = 50 \text{ m} \quad (4.15)$$

La couche de sol supérieure, d'épaisseur  $H_1$ , est une couche d'argile molle de caractéristiques élastiques :

$$E_1 = 5\text{MPa}, \nu_1 = 0,3 \quad (4.16)$$

reposant sur une couche d'argile raide de caractéristiques :

$$E_2 = 30\text{MPa}, \nu_2 = 0,3 \quad (4.17)$$

Par ailleurs, les inclusions de renforcement sont des tubes cylindriques creux de rayon  $R = 1\text{m}$  et d'épaisseur  $e = 0,02\text{m}$  disposés dans le sol suivant un maillage carré de côté  $d = 5\text{m}$  (voir figure 4.3). La longueur de ces derniers est  $L = 20\text{m}$ , c'est-à-dire qu'ils sont enfoncés dans la couche raide jusqu'à une profondeur de  $5\text{m}$ . Ces tubes sont en acier, modélisé comme un matériau élastique dont les caractéristiques mécaniques sont données par :

$$E_a = 200\text{GPa}, \nu_a = 0,3 \quad (4.18)$$

On introduit alors la *fraction volumique* des inclusions de renforcement comme le rapport du volume occupé par une inclusion de renforcement divisé par celui du volume élémentaire représentatif (figure 4.3), ou d'une manière équivalente comme le rapport des sections droites d'une inclusion et du volume élémentaire représentatif. Soit, en tenant compte de la faible épaisseur des inclusions devant leur diamètre ( $e \ll R$ ) :

$$\eta \cong \frac{2\pi Re}{d^2} \cong 0,5\% \quad (4.19)$$

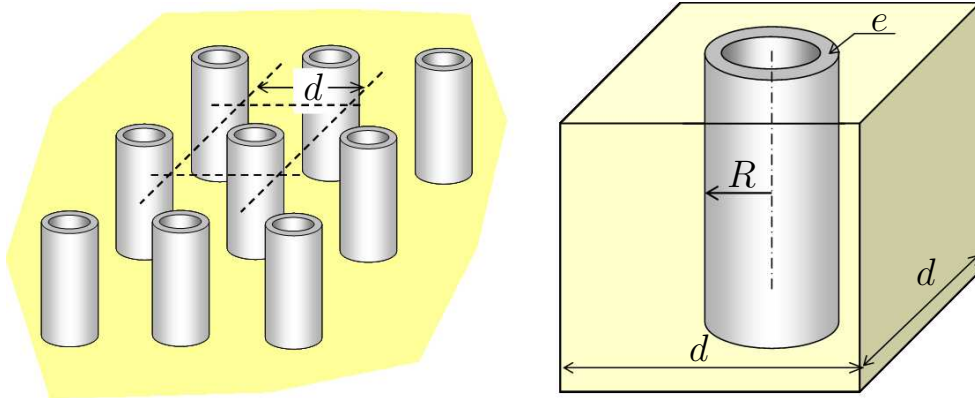


FIG. 4.3: *Volume élémentaire représentatif*

Les paramètres du modèle multiphasique sont déterminés à partir de ces caractéristiques géométriques de la structure et des paramètres mécaniques des constituants, de la manière suivante.

- En ce qui concerne la *phase matrice*, compte tenu de la faible valeur de la fraction volumique de renforcement et donc, a contrario, du fait que la fraction volumique du sol est très proche de l'unité, les caractéristiques mécaniques de la phase matrice sont approximées par celles du sol qu'elle représente :



$$E_1^m \cong E_1 = 5 \text{ MPa}, \nu_1^m = \nu_1 = 0,3 \quad (4.20)$$

$$E_2^m \cong E_2 = 30 \text{ MPa}, \nu_2^m = \nu_2 = 0,3$$

• Pour ce qui est de la *phase renforcement*, les rigidités en *traction-compression*  $\alpha^r$ , au *cisaillement*  $\beta^r$  et à la *flexion*  $\gamma^r$  sont obtenues en divisant les rigidités correspondantes d'une inclusion de renforcement prise individuellement par l'aire de la section transversale à la direction de renforcement du volume élémentaire représentatif. Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^r = \frac{E^a(2\pi Re)}{d^2} = E^a\eta = 1004\text{MPa} \\ \beta^r = \frac{\mu^a(2\pi Re)\kappa}{d^2} = (\mu^a\kappa)\eta = \frac{\mu^a}{2}\eta = 193\text{MPa} \\ \gamma^r = \frac{E^a I}{d^2} = (E^a \frac{R^2}{2})\eta = 502\text{MPa.m}^2 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

où  $\kappa = 1/2$  est le coefficient de correction de cisaillement pour une section tubulaire mince (Frey, (1994) [37]),  $I = \pi R^3 e$  est l'inertie de la section par rapport à un diamètre et  $\mu^a$  est le module de cisaillement de l'acier.

Il est à noter que les rigidités à la traction-compression  $\alpha^r$  et au cisaillement  $\beta^r$  de la phase renforcement ne dépendent pas de la taille des inclusions mais de la fraction volumique de renforcement, c'est-à-dire qu'ils restent *invariants par toute homothétie*. En revanche, la raideur à la flexion de la phase renforcement est une fonction croissante du rayon des inclusions. Il s'agit d'un "effet d'échelle" montrant que, à fraction volumique de renforcement fixée, plus le diamètre des inclusions employées est grand, plus grande sera la raideur de la structure vis-à-vis d'un chargement mettant en jeu la flexion des inclusions. Ce point sera illustré ultérieurement.

#### 4.2.1.2. Simulations numériques et résultats

Afin de simuler le comportement de la structure décrite ci-dessus utilisant le code de calcul biphasique mis au point au chapitre 3, il faut tout d'abord remplacer la zone renforcée par un milieu biphasique (figure 4.4). Les traits de délimitation de la zone renforcée doivent faire partie du maillage de façon à pouvoir distinguer les nœuds à 2

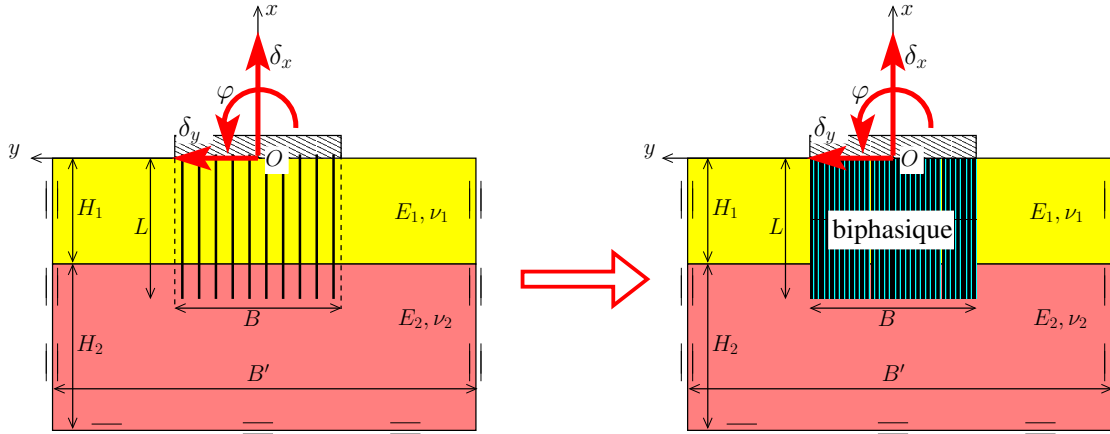


FIG. 4.4: Modélisation biphasique d'une fondation sur radier de pieux

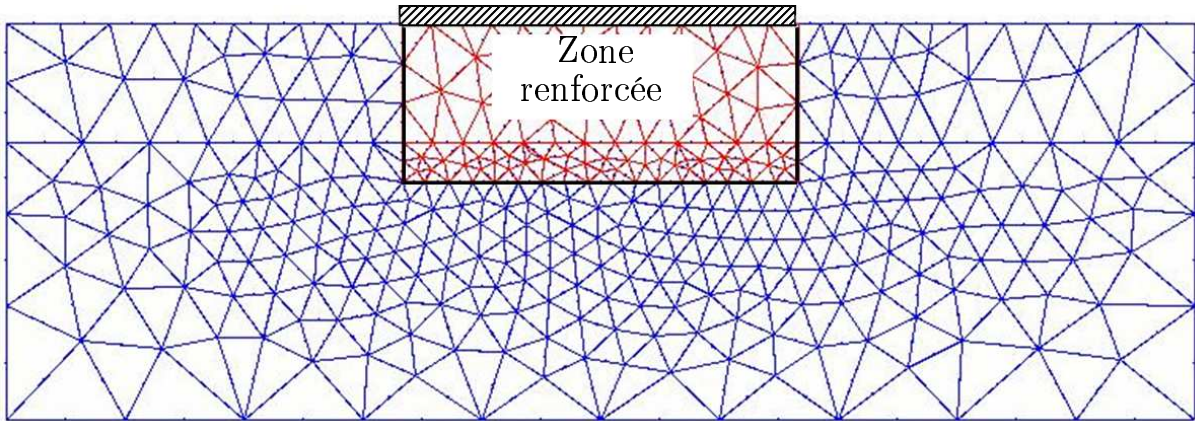


FIG. 4.5: Maillage de la structure par des éléments T6

(sol homogène) et à 3 (biphasique) degrés de liberté. Le maillage adopté comporte 665 éléments triangulaires à 6 nœuds et 1386 nœuds (voir figure 4.5).

Les quatre termes non nuls de la matrice de raideur structurelle  $[A_{ij}]$  sont calculés à partir de trois simulations numériques définies comme suit :

- Chargement purement *vertical* ( $\delta_x = 1, \delta_y = 0, \varphi = 0$ ) :

Le comportement linéaire de la structure (4.13) s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ M/B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & A_{yy} & A_{yz} \\ 0 & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

La *raideur verticale de la structure* n'est alors, dans ce cas, que la résultante des efforts

extérieurs verticaux s'appliquant à la fondation, soit :

$$A_{xx} = R_x = \int_{-B/2}^{B/2} T_x dy = \int_{-B/2}^{B/2} (\sigma_{xx}^m + n^r) dy \quad (4.23)$$

et on vérifie d'ailleurs dans ce cas que :

$$A_{xy} = R_y = \int_{-B/2}^{B/2} T_y dy = \int_{-B/2}^{B/2} (\sigma_{yx}^m + v^r) dy = 0 \quad (4.24)$$

$$A_{xz} = \frac{M}{B^2} = \frac{1}{B^2} \int_{-B/2}^{B/2} (m^r - yT_x) dy = \frac{1}{B^2} \int_{-B/2}^{B/2} (m^r - y(\sigma_{xx}^m + n^r)) dy = 0 \quad (4.25)$$

- Sollicitation *latérale* ( $\delta_x = 0, \delta_y = 1, \varphi = 0$ ) :

Ce chargement permet d'évaluer les termes de la deuxième colonne de la matrice de raideur structurelle donnés par :

$$A_{yx} = R_x = \int_{-B/2}^{B/2} T_x dy = \int_{-B/2}^{B/2} (\sigma_{xx}^m + n^r) dy = 0 \quad (4.26)$$

$$A_{yy} = R_y = \int_{-B/2}^{B/2} T_y dy = \int_{-B/2}^{B/2} (\sigma_{yx}^m + v^r) dy \quad (4.27)$$

$$A_{yz} = \frac{M}{B^2} = \frac{1}{B^2} \int_{-B/2}^{B/2} (m^r - yT_x) dy = \frac{1}{B^2} \int_{-B/2}^{B/2} (m^r - y(\sigma_{xx}^m + n^r)) dy \quad (4.28)$$

- Sollicitation de *renversement* ( $\delta_x = 0, \delta_y = 0, \varphi = 1$ ) :

$$A_{zx} = R_x = \int_{-B/2}^{B/2} T_x dy = \int_{-B/2}^{B/2} (\sigma_{xx}^m + n^r) dy = 0 \quad (4.29)$$

$$A_{zy} = R_y = \int_{-B/2}^{B/2} T_y dy = \int_{-B/2}^{B/2} (\sigma_{yx}^m + v^r) dy = A_{23} \quad (4.30)$$

$$A_{zz} = \frac{M}{B^2} = \frac{1}{B^2} \int_{-B/2}^{B/2} (m^r - y.T_x) dy = \frac{1}{B^2} \int_{-B/2}^{B/2} (m^r - y(\sigma_{xx}^m + n^r)) dy \quad (4.31)$$

Un premier calcul effectué sur la structure *non renforcée* donne les valeurs suivantes des *termes diagonaux* de la matrice de raideur structurelle :

$$A_{xx}^0 = 18,39\text{MPa} \quad A_{yy}^0 = 7,83\text{MPa} \quad A_{zz}^0 = 2,116\text{MPa} \quad (4.32)$$

Pour la structure renforcée, on définit le *coefficient de renforcement*  $r_{kk}$  par :

$$r_{kk} = \frac{A_{kk}}{A_{kk}^0} \quad k = x, y, z \quad (4.33)$$

qui rend compte de la raideur relative de la structure renforcée par rapport à la structure non renforcée.

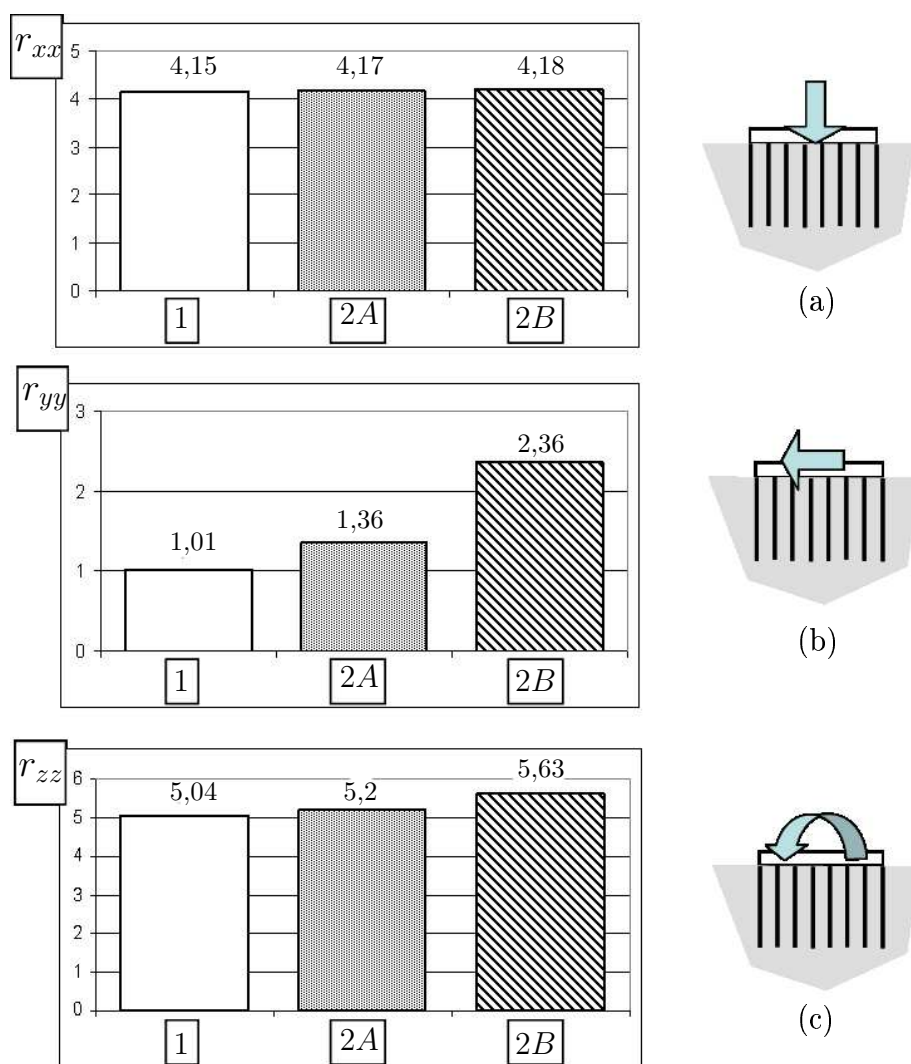


FIG. 4.6: Coefficient de renforcement (a) vertical, (b) latéral, (c) au renversement calculés par une modélisation biphasique

Les résultats des différentes simulations numériques menées sur la structure renforcée sont représentés sur la figure 4.6 en termes de *coefficients de renforcement*. Les indices 1,

2A et 2B font référence aux différentes hypothèses suivantes correspondant à une rigidification progressive de la structure :

- (1) Les raideurs des inclusions, et donc de la phase renforcement, au cisaillement et à la flexion sont *négligées* :  $\beta^r = 0$  et  $\gamma^r = 0$
- (2A) Les raideurs à la flexion et au cisaillement de la phase renforcement sont prises en compte, les inclusions sont reliées à la fondation par des *rotules* ( $m^r(x = 0) = 0$ ).
- (2B) Les inclusions raides ( $\beta^r \neq 0$  et  $\gamma^r \neq 0$ ) sont *encastrées* dans la fondation ( $\omega^r(x = 0) = \varphi$ ).

#### 4.2.1.3. Interprétation des résultats et commentaires

Il apparaît d'après ces résultats que l'emploi des inclusions de renforcement augmente la raideur de la structure vis-à-vis des trois modes de chargement et dans les trois configurations (1, 2A et 2B), puisque les coefficients de renforcement sont supérieurs à l'unité. Cette augmentation est plus ou moins importante suivant le mode de chargement.

- *Cas d'un chargement vertical :*

Sur les figures 4.7 à 4.9 sont représentées les déformées de la structure et les isovaleurs des déplacements verticaux, des rotations, de la contrainte verticale  $\sigma_{xx}$ , du moment de flexion et de l'effort normal, dans les quatre cas suivants :

- (0) Structure non renforcée
- (1) Les effets de cisaillement et de flexion sont *négligés* :  $\beta^r = 0$  et  $\gamma^r = 0$
- (2A) Les raideurs à la flexion et au cisaillement de la phase renforcement sont prises en compte et la rotation est libre en tête des inclusions.
- (2B) Les raideurs à la flexion et au cisaillement de la phase renforcement sont prises en compte et les inclusions sont encastrées dans la fondation.

L'examen des différents graphiques montre que, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une structure non renforcée, les tassements de la structure (déplacements verticaux) sont plus importants dans la couche inférieure raide. En effet, la couche molle étant solidarisée à la phase renforcement, la raideur verticale de la zone renforcée devient plus importante que celle de la couche du bas qui se déforme plus vis-à-vis de ce mode de chargement. Dans le cas d'une structure non renforcée, la contrainte  $\sigma_{xx}$  est diffuse dans les deux couches, vérifiant la propriété de continuité au front de la zone renforcée. Ce constat n'est pas vérifié dans les configurations (1), (2A) et (2B) puisqu'il ressort clairement des graphiques que la contrainte  $\sigma_{xx}$  est très faible dans la couche molle et qu'elle est

*discontinue* à la base de la zone renforcée, puisque la propriété de continuité du vecteur contrainte fait intervenir les efforts intérieurs dans la phase renforcement. Elle s'écrit d'une façon générale en tout point situé à l'interface entre la zone renforcée et le sol sous-jacent :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{\sigma}}^r) \cdot \underline{e}_x = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x \quad (4.34)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  désignent respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy dans la phase matrice et dans la couche de sol non renforcée, tandis que  $\underline{\underline{\sigma}}^r$  représente le tenseur des efforts intérieurs à la phase renforcement.

Considérant uniquement la composante selon  $\underline{e}_x$ , la continuité de la composante verticale du vecteur contrainte s'écrit en tout point du bord inférieur de la zone renforcée par :

$$\sigma_{xx}^{m(2)} + n^r = \sigma_{xx}^{(2)} \quad (4.35)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy dans la couche (2) (couche raide),  $\underline{\underline{\sigma}}^{m(2)}$  est le tenseur des contraintes dans la phase matrice formée par la couche (2), et  $n^r$  est la densité d'effort normal par unité de surface transversale dans la phase renforcement.

La rotation, degré de liberté supplémentaire de la phase renforcement lorsque les effets de flexion et de cisaillement sont pris en considération (configurations (2A) et (2B)), est antisymétrique dans ce cas de chargement (chargement vertical) et quasi-nulle sur toute la zone renforcée sauf au voisinage de ses deux coins inférieurs dans les deux configurations (2A) et (2B) et de ses deux coins supérieurs dans le cas où la rotation est libre en tête des inclusions (configuration (2A)). Le moment de flexion est aussi quasi-nul sur toute la zone renforcée hormis près des bords latéraux de la zone renforcée, au passage de la couche molle à la couche raide. La figure 4.6 (a) montre clairement que, vis-à-vis d'un chargement vertical, et en se limitant pour l'instant au cas d'un comportement élastique, la prise en compte des effets de flexion et de cisaillement dans les inclusions joue un rôle négligeable puisque le coefficient de renforcement  $r_{11}$  passe de la valeur 4,15 dans la configuration 1 à 4,17 et 4,18 dans les configurations (2A) et (2B).

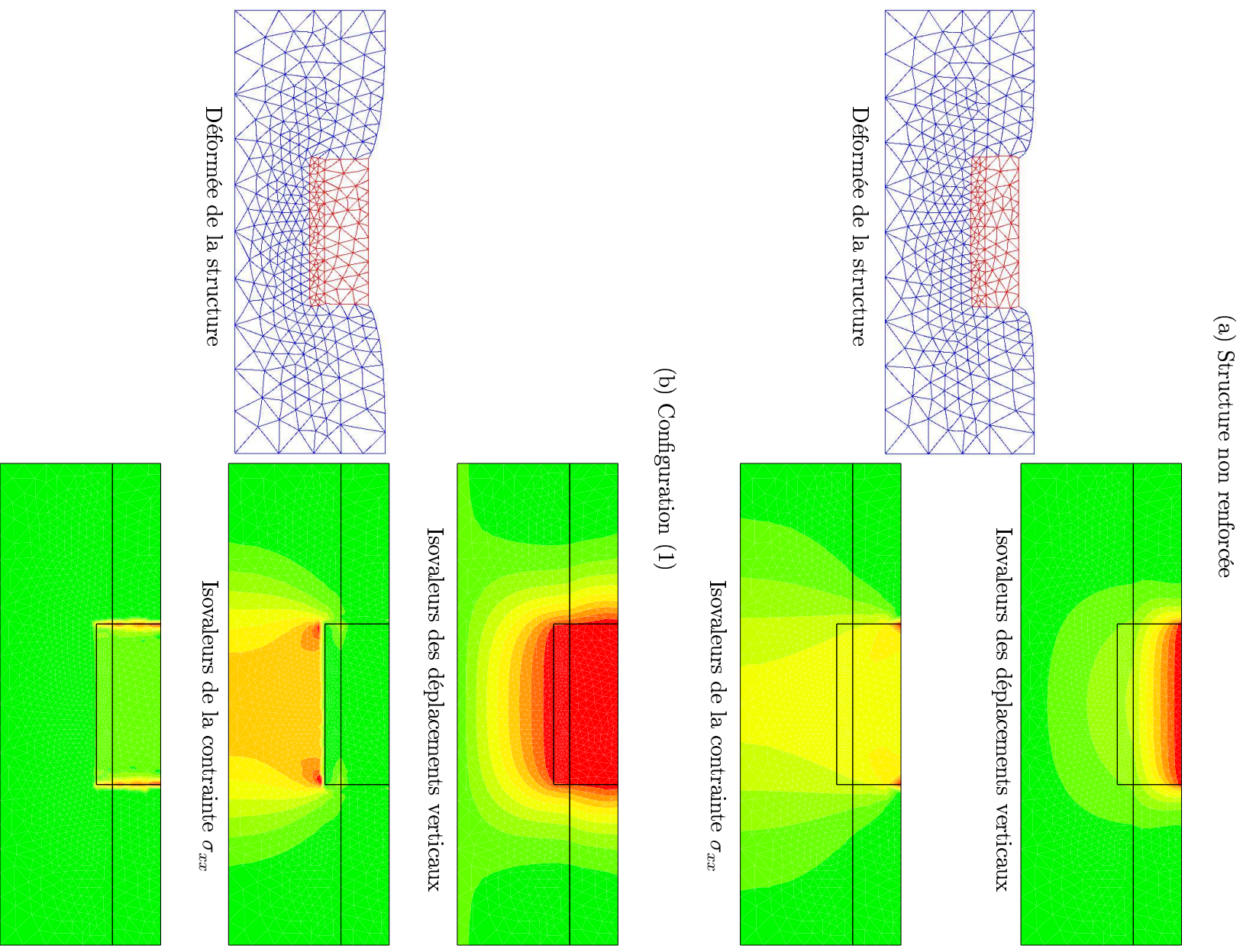


FIG. 4.7: Déformées de la structure sous chargement vertical et isovaleurs des déplacements verticaux et de la contrainte  $\sigma_{xx}$ . (a) Structure non renforcée, (b) configuration (1)



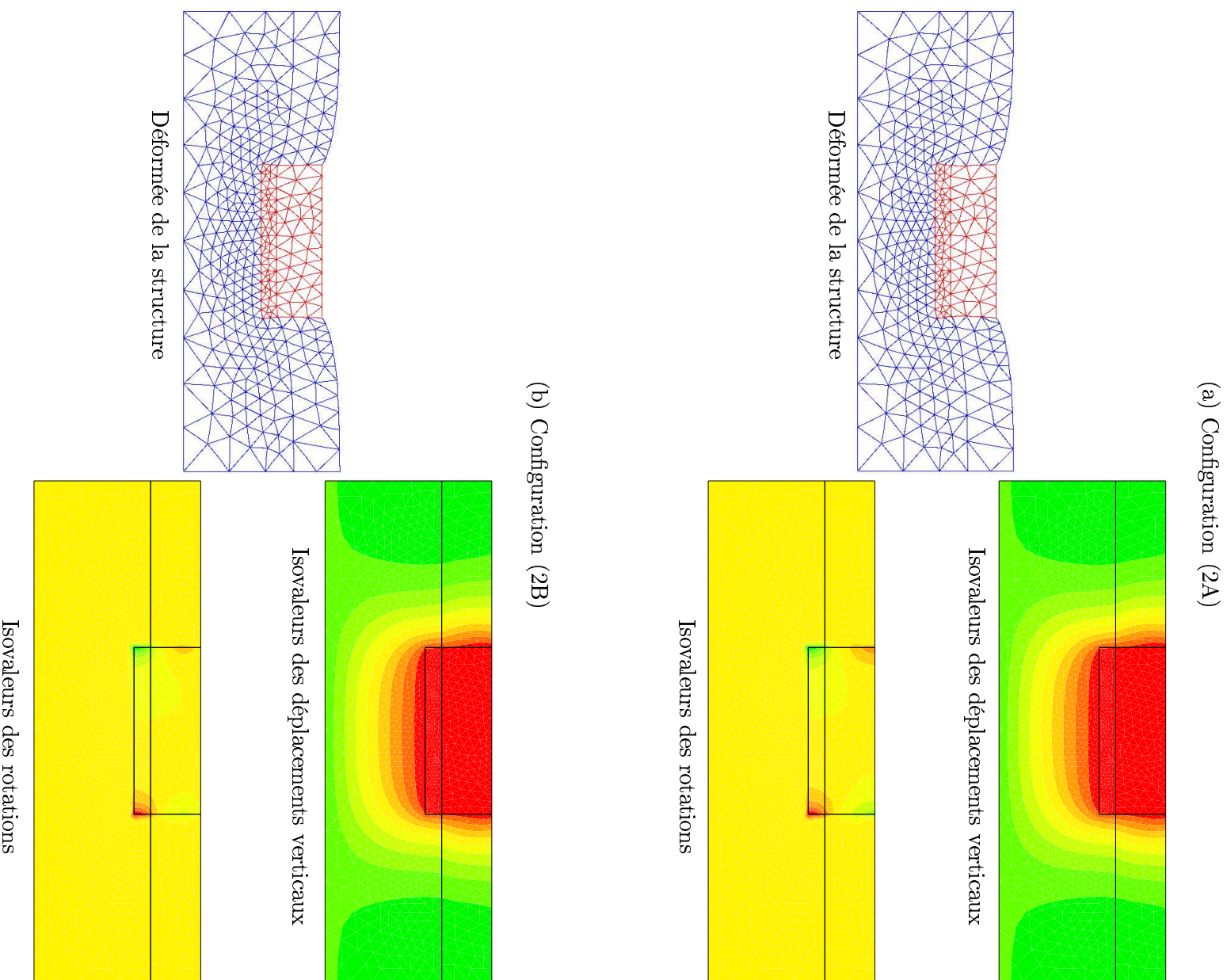


FIG. 4.8: Déformées de la structure sous changement vertical et isovaleurs des déplacements verticaux et des rotations. (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastres (2B)



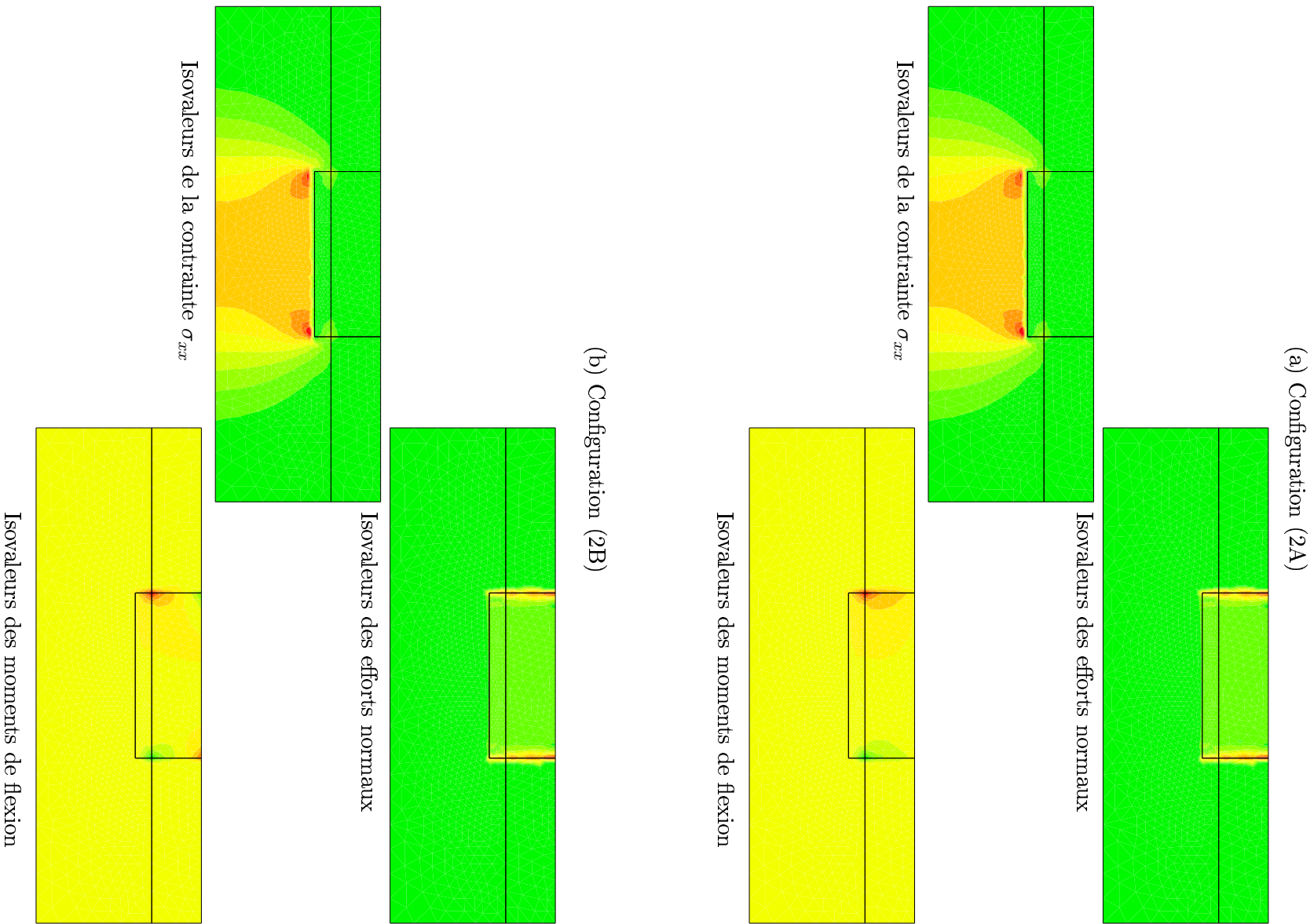


FIG. 4.9: Isovaleurs de la contrainte  $\sigma_{xz}$ , des efforts normaux et des moments de flexion. Structure sous chargement vertical : (a) Pieu rotulé (2A), (b) encastres (2B)

- *Cas d'un chargement latéral :*

La figure 4.10 représente les déformées de la structure et les isovaleurs des déplacements latéraux et de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$  dans le cas d'une structure non renforcée et dans le cas où les effets de flexion et de cisaillement sont négligés. Il apparaît clairement que les distributions des déplacements horizontaux et des contraintes de cisaillement sont quasi-identiques, montrant que ce schéma de renforcement (inclusions souples) ne renforce pas significativement la structure vis-à-vis d'un chargement latéral. Ceci est confirmé par le fait que le coefficient de renforcement est égal à 1,01 correspondant à un gain de 1% sur la raideur latérale de la structure, ce qui est négligeable.

Les résultats relatifs aux configurations (2A) et (2B) sont représentés sur les figures 4.11 et 4.12 qui montrent que les déplacements latéraux sont plus diffus que dans le cas d'une structure non renforcée, ou dans le cas de la configuration (1). Ces déplacements sont encore plus diffus dans le cas où les inclusions sont encastées en tête à la fondation, mobilisant davantage la raideur de la couche inférieure. Quant aux rotations, elles présentent deux profils totalement différents. Dans le cas d'inclusions rotulées, la rotation est maximale en tête et diminue progressivement le long de la zone renforcée, alors que dans le cas d'inclusions encastées (configuration (2B)), la rotation est nulle en tête (encastement) et augmente le long des inclusions jusqu'au point d'ancrage dans la couche raide. Les distributions des moments fléchissants sont de même différents suivant le type de connection inclusions-fondation. Le moment de flexion est maximal en tête des inclusions dans le cas (2B) alors qu'il est maximal aux points d'ancrage des inclusions dans la couche raide dans le cas (2A). Toutefois, quelque soit le type de connection, le moment de flexion est nul aux pieds des inclusions (bord inférieur de la zone renforcée). Cette propriété est due à la continuité du vecteur couples de contraintes, qui s'écrit d'une façon générale :

$$\underline{\underline{h}}^{r(i)} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{h}}^{r(j)} \cdot \underline{n} \quad (4.36)$$

où  $\underline{\underline{h}}^{r(i)}$  et  $\underline{\underline{h}}^{r(j)}$  désignent respectivement les tenseurs des couples de contraintes dans les zones  $i$  et  $j$  séparés par une surface de normale  $\underline{n}$ . Dans notre cas, le bord inférieur de la zone renforcée sépare la couche raide, modélisée comme un milieu de Cauchy, de la zone renforcée, modélisée comme milieu de Cosserat orienté. La continuité du vecteur couples de contraintes est alors, compte tenu du caractère plan du problème, équivalente à :

$$m^r = 0 \quad \text{sur le bord inférieur de la zone renforcée} \quad (4.37)$$

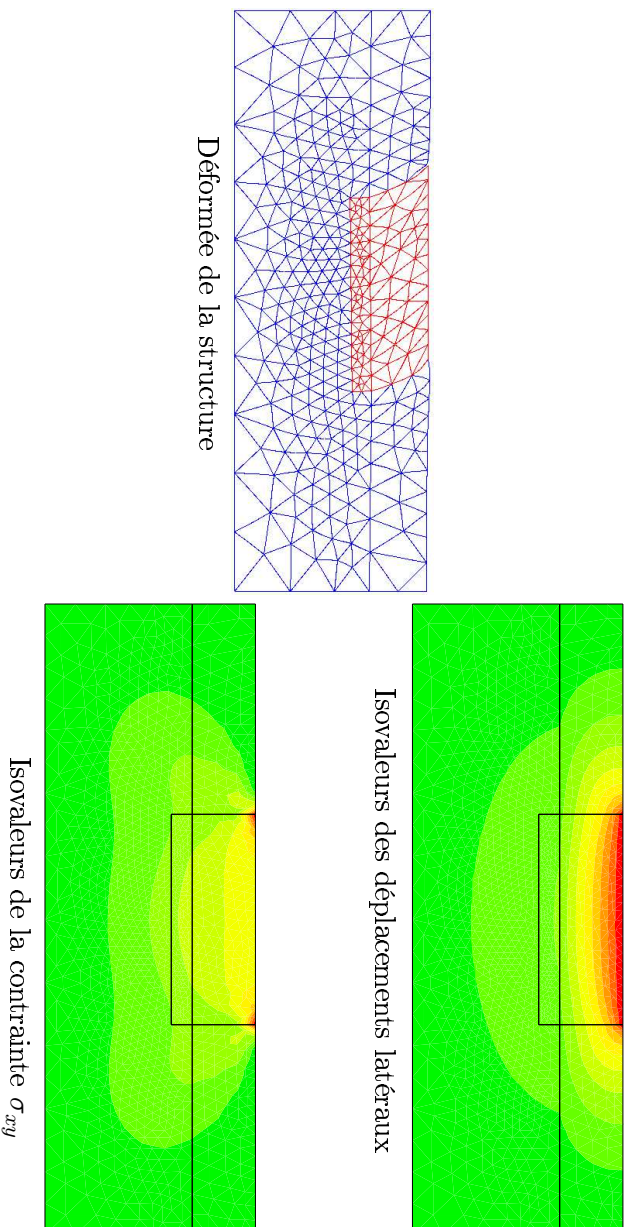
Par ailleurs, les contraintes de cisaillement sont, dans les deux configurations (2A) et (2B), et aussi bien pour la phase matrice ( $\sigma_{xy}$ ) que pour la phase renforcement ( $v^r$ ),

concentrées dans la couche inférieure de la zone renforcée. Elles mettent ainsi en évidence une discontinuité de la contrainte  $\sigma_{xy}$  et de l'effort tranchant  $v^r$  à la traversée du bord inférieur de la zone renforcée, due à la propriété de continuité en "contraintes totales" exprimée par 4.34.

Ces résultats sont en concordance avec ceux présentés sur la figure 4.6 (b), donnant le coefficient de renforcement dans les trois configurations (1), (2A) et (2B). En effet, le coefficient de renforcement passe de 1,01 (1% de gain) dans le cas d'inclusions "souples" à 1,36 (36% de gain) dans le cas d'inclusions "raides" montrant ainsi l'importance de la prise en compte des effets de cisaillement et de flexion dans le calcul de la raideur structurelle.

Comparant les situations (2A) (la connection pieux-fondation est schématisée par des rotules) et (2B) (pieux encastrés en tête dans le radier de fondation), il apparaît que cette condition aux limites joue un rôle décisif dans la mobilisation des raideurs au cisaillement et surtout à la flexion des inclusions, comme analysé ci-dessus, dans la réponse globale de la structure vis-à-vis d'un chargement latéral, puisque le coefficient de renforcement passe de 1,36 à 2,36.

(a) Structure non renforcée



(b) Configuration (1)

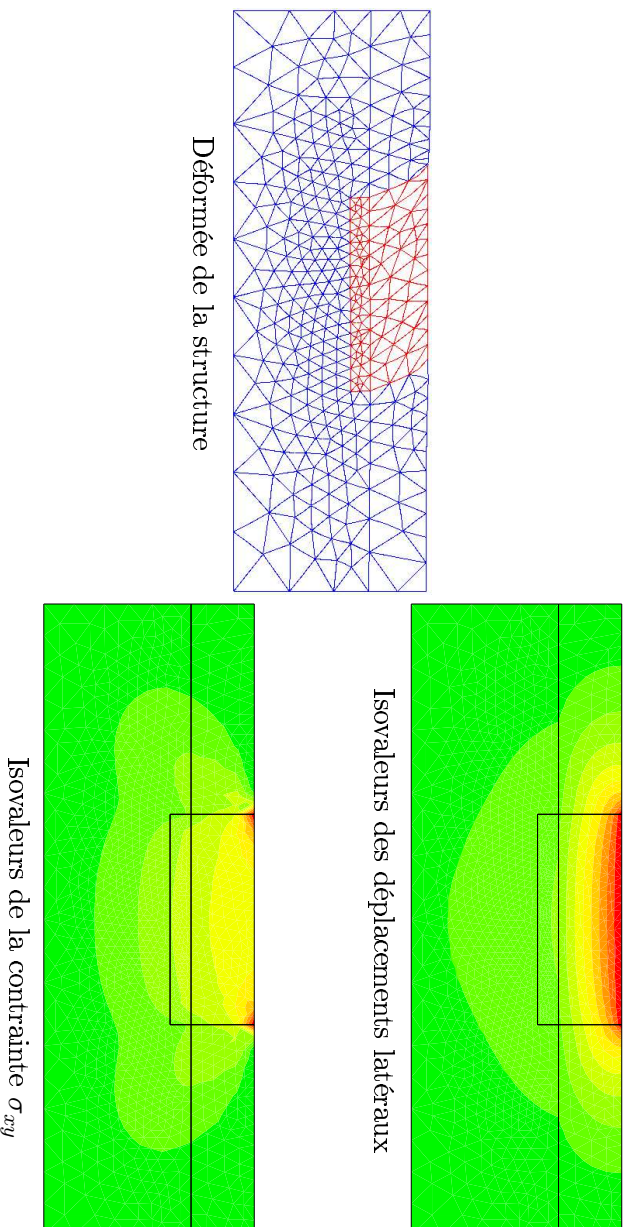
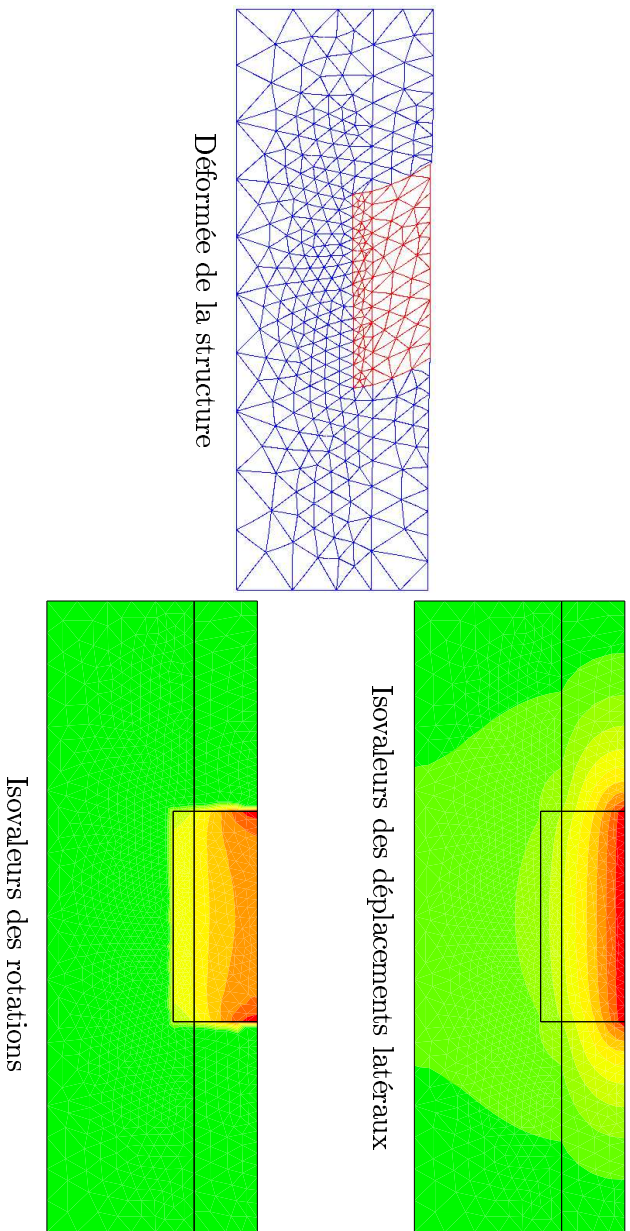


FIG. 4.10: Déformées de la structure sous chargement latéral et isovaleurs des déplacements latéraux et de la contrainte  $\sigma_{xy}$ . (a) Structure non renforcée, (b) configuration (1)

(a) Configuration (2A)



(b) Configuration (2B)

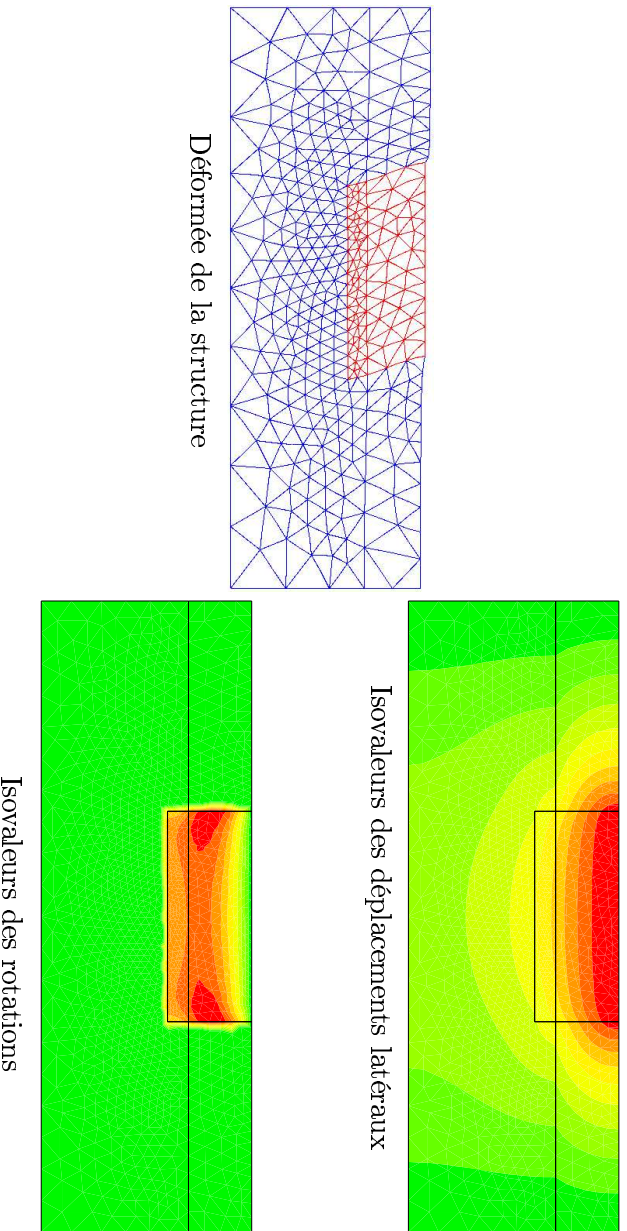


FIG. 4.11: Déformées de la structure sous chargement latéral et isovaleurs des déplacements horizontaux et des rotations. (a) Pieu rotulé (2A), (b) encasté (2B)



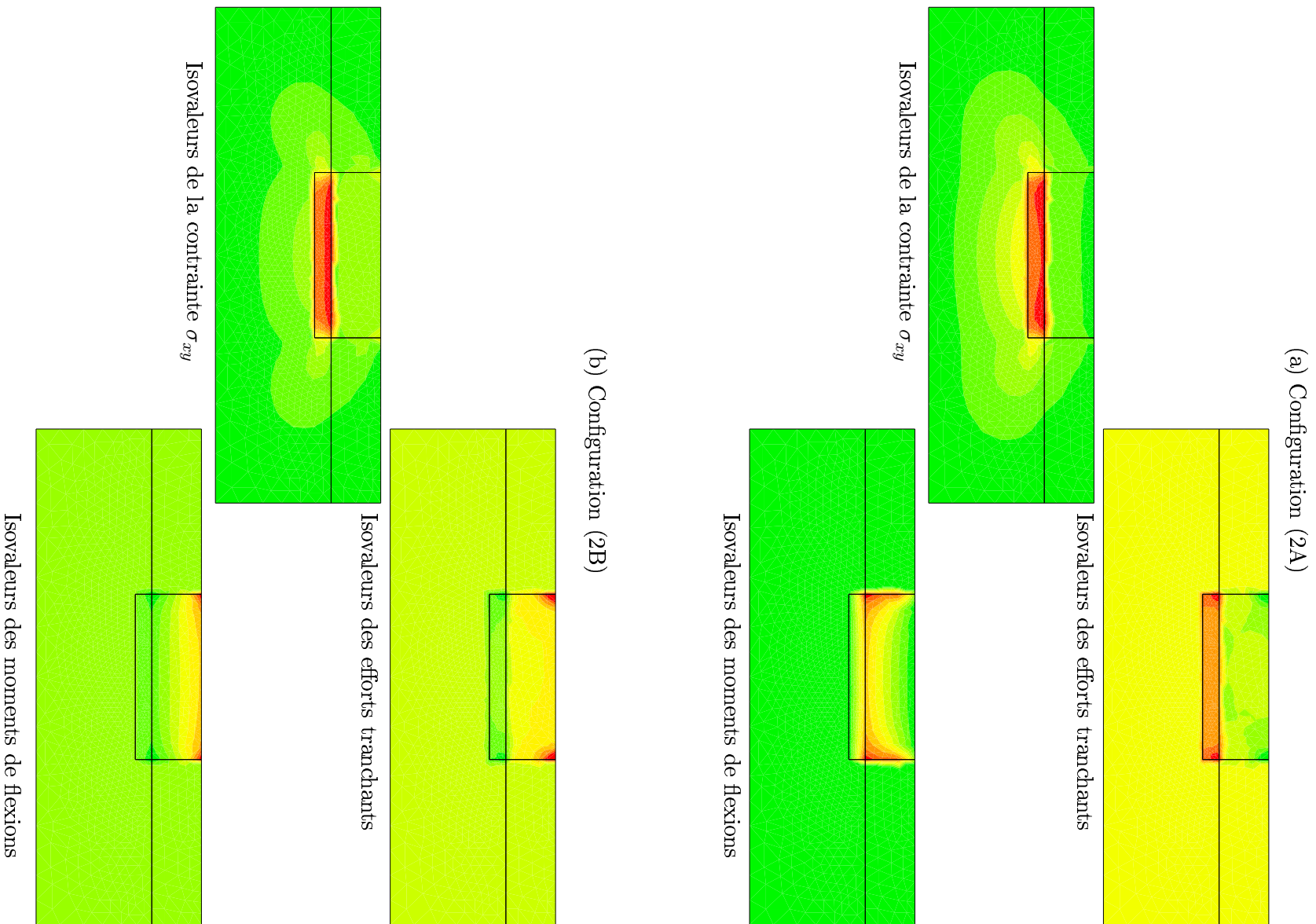


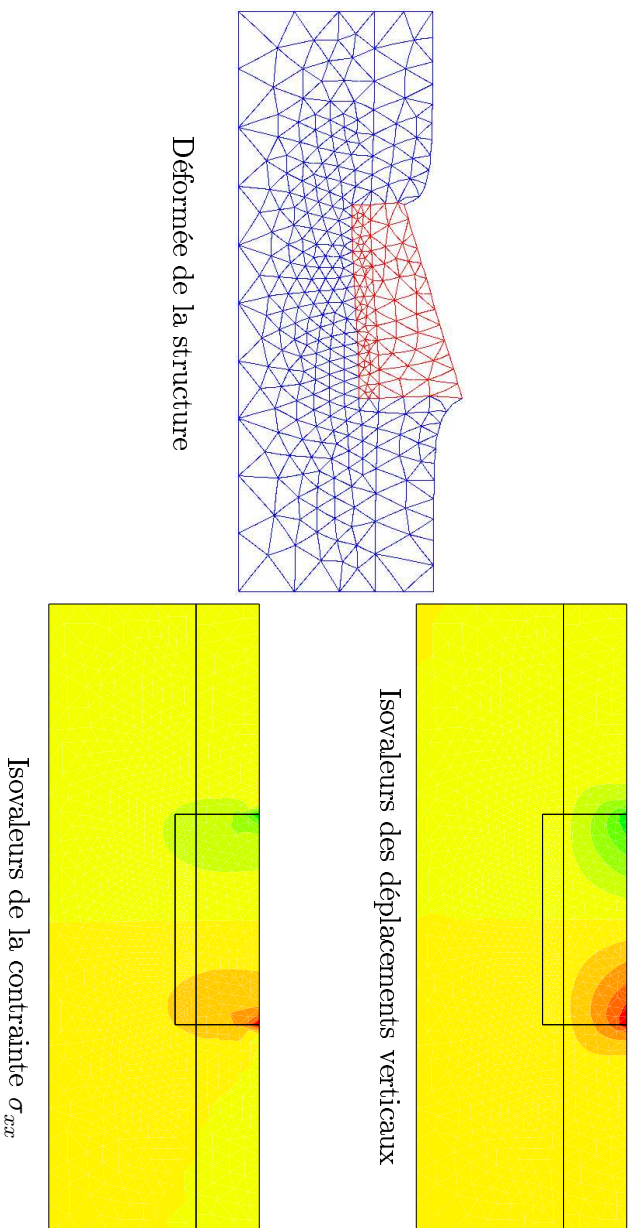
FIG. 4.12: Isovaleurs de la contrainte  $\sigma_{xy}$ , des efforts tranchants et des moments de flexion. Structure sous chargement latéral : (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastres (2B)

- *Cas d'un chargement de renversement :*

Dans le cas d'une structure non renforcée soumise à un chargement de renversement, les déplacements verticaux sont plus importants dans la couche molle avec des concentrations aux deux bords de la fondation qui sont les points de déplacements maxima mais aussi les lieux de concentration de contraintes (figure 4.13).

Dans les trois configurations (1), (2A) et (2B), les déplacements verticaux sont diffus dans les deux couches tandis que la contrainte verticale  $\sigma_{xx}$  présente des concentrations aux deux coins du bord inférieur de la zone renforcée en raison du fort contraste des caractéristiques mécaniques et de l'angle vif. Ceci montre que dans les trois cas, la raideur de la couche raide est mobilisée, ce qui a pour conséquence d'augmenter la raideur structurelle vis-à-vis de ce mode de chargement. La prise en compte des effets de cisaillement et de flexion ne peut, elle aussi, qu'augmenter le coefficient de renforcement correspondant  $r_{33}$ . Comparant les deux conditions aux limites (2A) et (2B), les principales différences apparaissent dans les distributions des rotations et des moments fléchissants. La raideur structurelle  $r_{33}$  (figure 4.6 (b)) est plus importante dans le cas où les inclusions sont encastrées en tête dans la fondation mettant encore une fois en évidence, l'importance du type de connection inclusions-fondation pour mobiliser les raideurs à la flexion et au cisaillement des inclusions, même si son rôle est ici moins significatif que dans le cas du chargement latéral.

(a) Structure non renforcée



(b) Configuration (1)

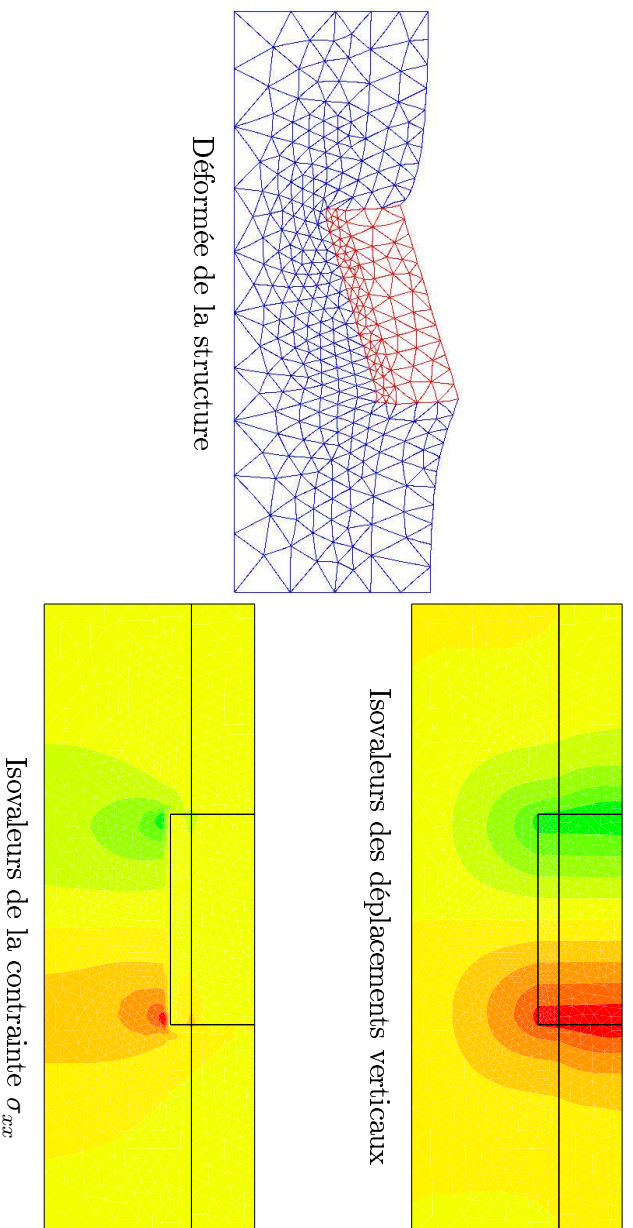


FIG. 4.13: Déformées de la structure sous chargement de renversement et isovaleurs des déplacements verticaux et de la contrainte  $\sigma_{xx}$ . (a) Structure non renforcée, (b) configuration (1)



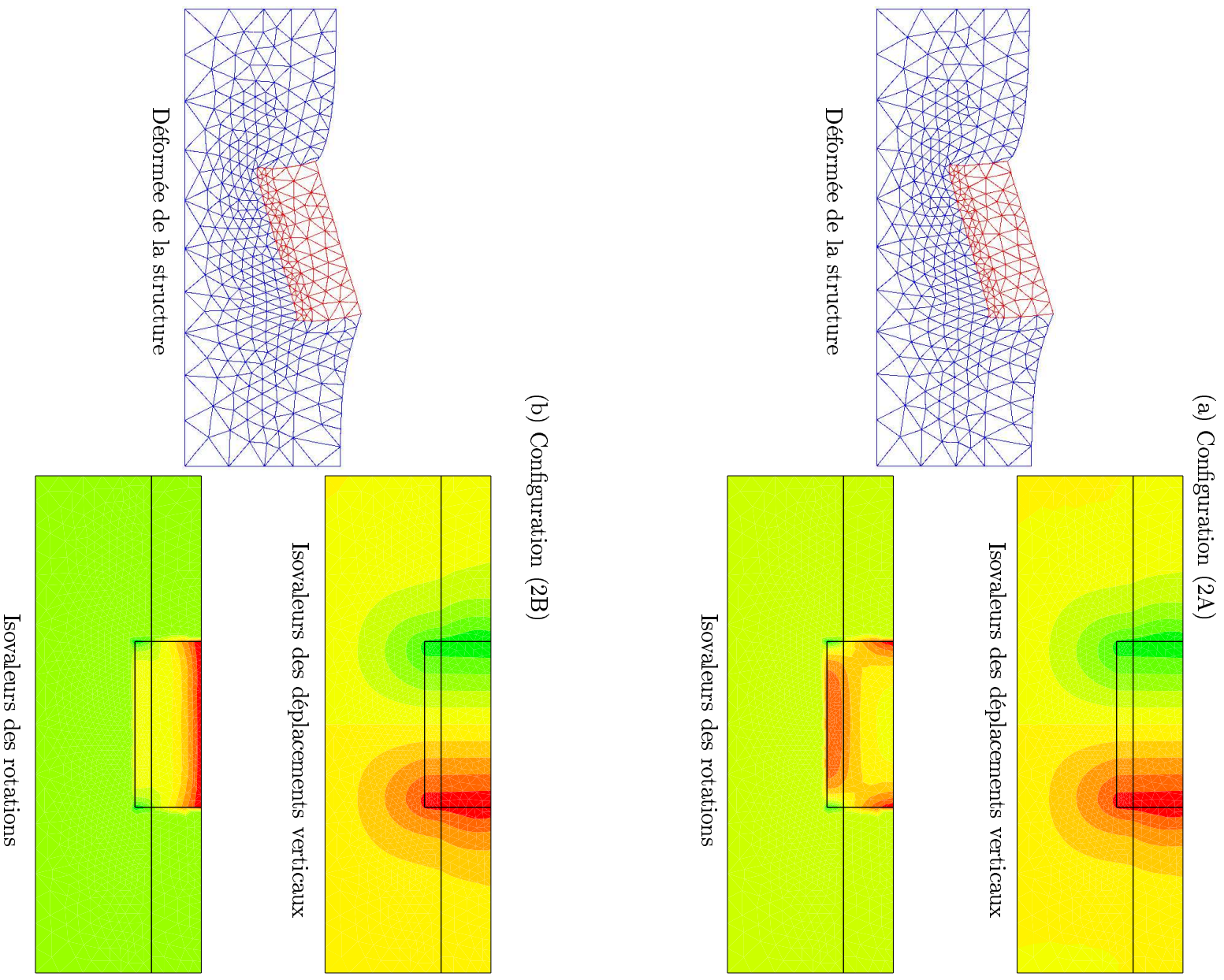


FIG. 4.14: *Déformées de la structure sous chargement de renversement et isovaleurs des déplacements verticaux et des rotations. (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastrés (2B)*

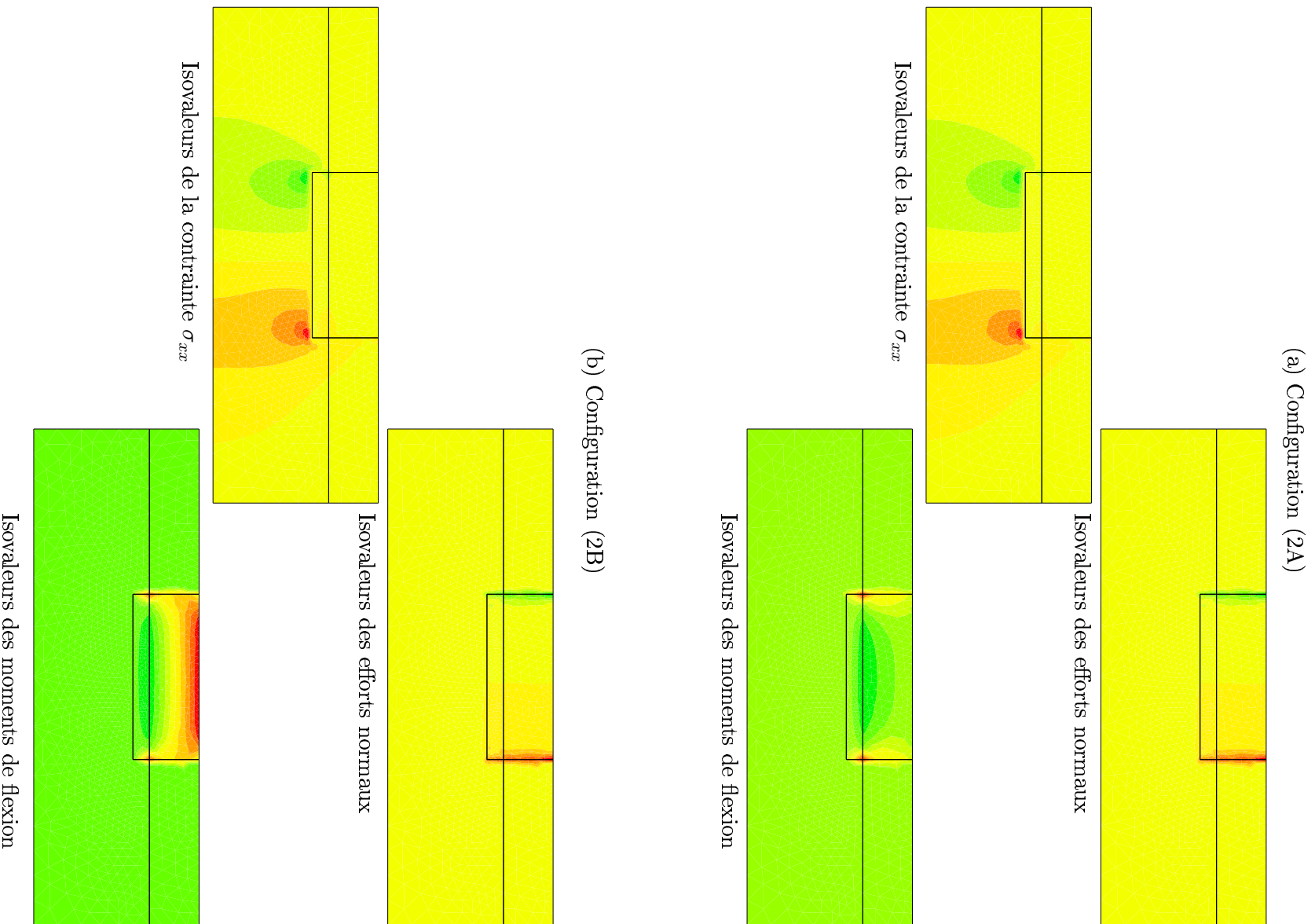


FIG. 4.15: Isovaleurs de la contrainte  $\sigma_{xx}$ , des efforts normaux et des moments de flexion. Structure sous chargement de renversement : (a) Pieux rotulés (2A), (b) encastrés (2B)

## 4.2.2 Validation et comparaisons avec d'autres méthodes

En vue de positionner le modèle multiphasique par rapport aux méthodes décrites au chapitre 1, le même problème de calcul de fondation sur radier de pieux est traité en faisant appel dans un premier temps à une modélisation directe et dans un second temps à une modélisation mixte. L'emploi de la méthode d'homogénéisation pour le calcul de la raideur structurale de la fondation ne fera pas l'objet d'une étude supplémentaire puisqu'elle constitue, dans l'hypothèse d'un comportement élastique, un cas particulier du modèle multiphasique lorsque les rigidités à la flexion et au cisaillement des inclusions sont négligées. Les résultats donnés par cette méthode sont représentés sur la figure (4.6) et indexés par (1). On se focalisera pour la suite sur l'utilisation de la modélisation directe et de la modélisation mixte.

### 4.2.2.1. Modélisation directe bidimensionnelle

Le traitement du problème précédent dans le cadre d'une modélisation directe consisterait à traiter les renforcements comme des inclusions cylindriques en interaction avec le sol environnant, aboutissant ainsi à un problème de nature *tridimensionnelle*. Ne disposant dans le cadre de ce travail que d'un code de calcul par éléments finis pouvant aborder les problèmes *bidimensionnels*, il est donc nécessaire de pouvoir remplacer une file de pieux dans la direction  $(Oz)$  par une couche équivalente ayant les mêmes raideurs verticales  $\alpha$ , au cisaillement  $\beta$  et à la flexion  $\gamma$  (figure 4.16).

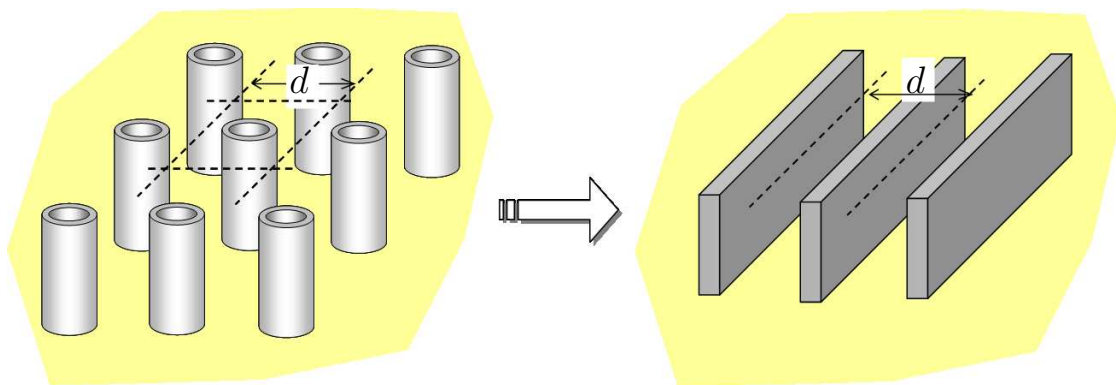


FIG. 4.16: *Couche équivalente à une file de pieux dans la direction transversale*

Ces raideurs sont déterminées à partir des raideurs respectives des inclusions de renforcement et de la distance  $d$  séparant deux inclusions successives dans la direction transversale, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{E_a(2\pi Re)}{d} = \alpha^r d = 5020 \text{ MPa.m} \\ \beta = \frac{\mu_a(2\pi Re)\kappa}{2d} = \beta^r d = 965 \text{ MPa.m} \\ \gamma = \frac{E_a I}{d} = \gamma^r d = 2510 \text{ MPa.m}^2 \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Elles sont fonctions des caractéristiques mécaniques et géométriques de la couche équivalente et données par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{E.h}{(1-\nu^2)} = 5020 \text{ MPa.m} \\ \beta = \frac{5}{12} \frac{E.h}{(1+\nu)} = 965 \text{ MPa.m} \\ \gamma = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} = 2510 \text{ MPa.m}^2 \end{array} \right. \quad (4.39)$$

dans lesquelles les inconnues  $E$ ,  $\nu$  et  $h$  désignent respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de la *couche équivalente*. La résolution de ce système aboutit aux caractéristiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = 1454,8 \text{ MPa} \\ \nu = 0,54 \\ h = 2,45 \text{ m} \end{array} \right. \quad (4.40)$$

ce qui n'est pas physiquement possible étant donné, notamment la valeur du coefficient de Poisson (supérieur à 1/2), ce qui rejoint les remarques faites au premier chapitre. C'est la raison pour laquelle nous abandonnerons une telle modélisation multicouche dont aucune comparaison ne sera faite avec le modèle multiphasique.

#### 4.2.2.2. Comparaison avec la modélisation mixte

La modélisation mixte des structures renforcées par inclusions consiste à modéliser les inclusions de renforcement par des poutres représentées par leurs fibres moyennes auxquelles sont attachées des raideurs à la compression-traction, au cisaillement et à la flexion.

Dans le cas présent, puisque nous ne sommes en mesure que de traiter des problèmes en déformations planes, chaque file de pieux sera modélisée comme une *plaque équivalente* dont les caractéristiques  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont données par les équations (4.39) en fonction des caractéristiques géométriques et mécaniques de chaque inclusion prise individuellement et de l'espacement  $d$  entre deux inclusions voisines.

Un code de calcul par éléments finis a été élaboré où le sol et les plaques de renforcement (schématisées par des segments sans épaisseur) sont discrétisés séparément comme illustré sur la figure 4.17 (a).

Ce code de calcul est utilisé pour le calcul des différents coefficients de renforcement  $r_{kk}$ . Le maillage de la structure est représenté sur la figure (4.17 (a)). Il comporte 4499 nœuds, 2206 éléments T6 et 80 éléments poutre de type P2-Lagrange, c'est-à-dire trois à quatre fois plus d'éléments et de nœuds que dans le cas de la modélisation multiphasique (figure 4.17 (a)). A noter que le nombre d'éléments finis qui auraient été nécessaires pour le calcul dans le cas d'une modélisation mixte 3D, aurait été encore bien plus important.

Les déformées de la structure sous les trois modes de chargement indépendants sont représentés sur la figure (4.17) dans le cas où les inclusions sont reliées par des rotules à la fondation ( $m^r(x=0) = 0$ ). Les résultats en termes de coefficients de renforcement sont représentés sur la figure 4.18.



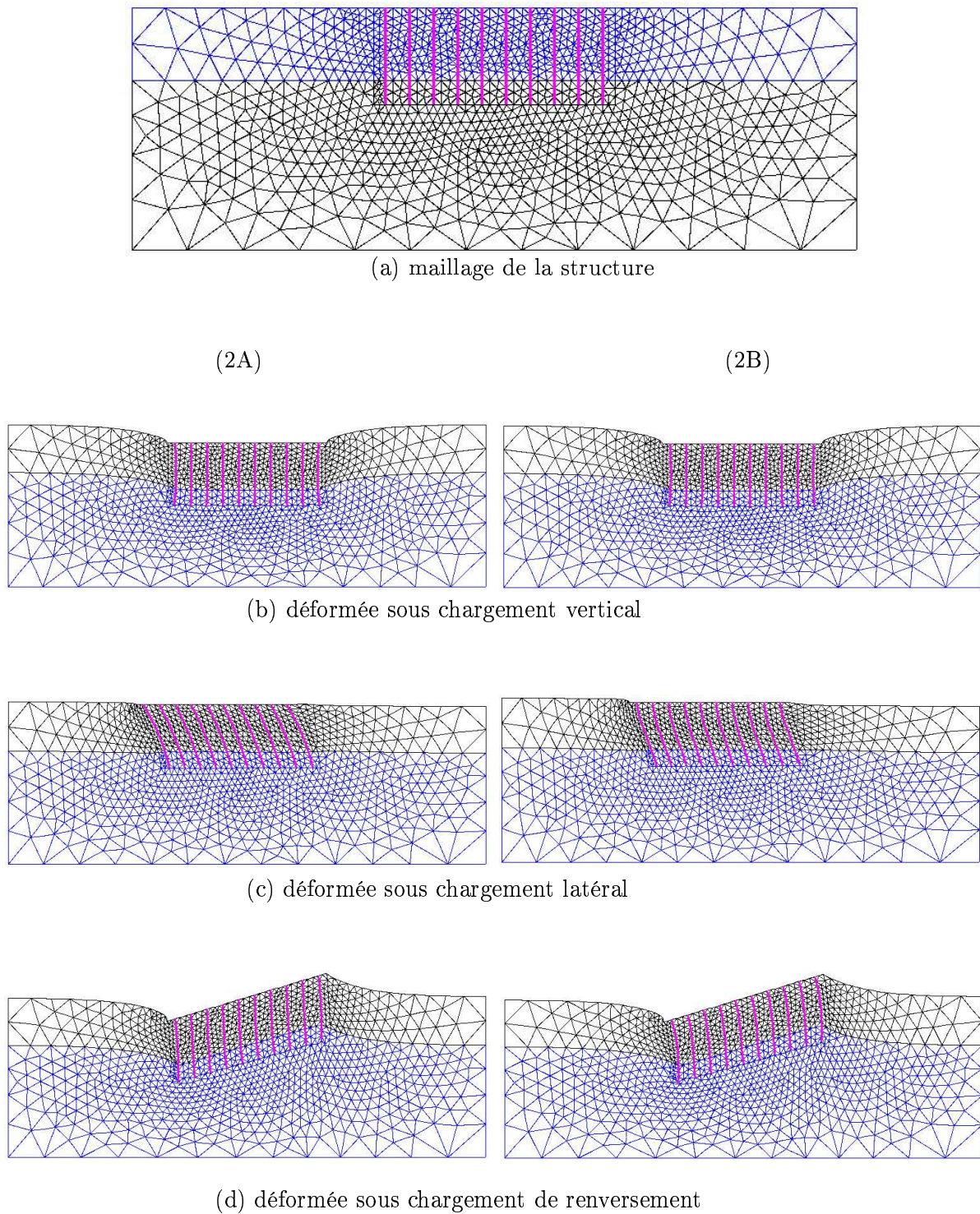


FIG. 4.17: Maillage et déformées de la structure (modélisation mixte). Pieux rotulés (2A) et encastrés (2B)

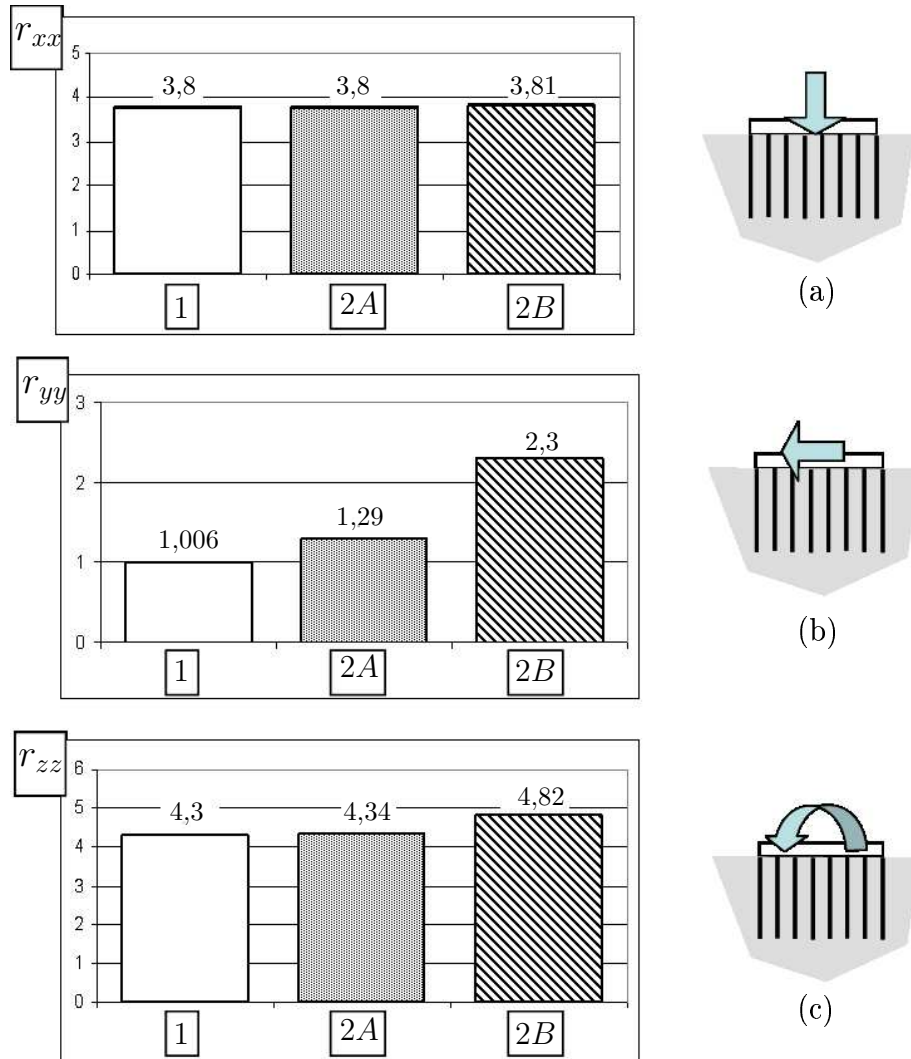


FIG. 4.18: Coefficient de renforcement (a) vertical, (b) latéral, (c) et au au renversement calculés par une modélisation mixte

L'analyse des différents résultats nous amène aux mêmes conclusions que celles tirées à partir de la modélisation biphasique de la structure. L'effet de renforcement est négligeable dans le cas d'un chargement vertical, et peu sensible dans le cas d'un chargement de renversement, cet effet étant au contraire important dans le cas d'un chargement latéral. En effet, dans le premier cas, le coefficient de renforcement  $r_{22}$  passe de 1,006 (0,6% de renforcement) dans le cas d'inclusions "souples" à 1,29 (29% de renforcement) dans le cas d'inclusions raides reliées en tête à la fondation par des rotules, c'est-à-dire que la structure est 50 fois mieux renforcée dans le dernier cas ou, en d'autres termes, la raideur de la structure vis à vis de ce mode de chargement est 50 fois sous-estimée si l'on néglige les effets de flexion et de cisaillement.

La comparaison des deux situations (2A) et (2B) montre que le type de connection inclusion-fondation est essentiel vis-à-vis d'un chargement de renversement, le coefficient

de renforcement  $r_{33}$  passant de 4,34 dans la configuration (2A) à 4,82 dans la configuration (2B), c'est-à-dire que la structure est de 50% mieux renforcée si les inclusions sont encastées dans la fondation. Cet écart est encore plus prononcé dans le cas d'un chargement latéral, puisque le coefficient de renforcement  $r_{22}$  passe de 1,29 dans la configuration (2A) à 2,3 dans la configuration (2B). Il apparaît là encore que le type de connection inclusion-fondation joue un rôle très important pour mobiliser les raideurs flexionnelle et au cisaillement des inclusions.

Il ressort toutefois, que les raideurs structurelles vis-à-vis des trois modes de chargement, vertical, latéral et de renversement, calculées par la modélisation mixte sont inférieures à celles données par la modélisation multiphasique. Cet écart peut s'expliquer par les distributions différentes des efforts intérieurs dans la phase matrice et la phase renforcement d'un côté, le sol et les poutres de renforcement de l'autre. Sur les figures 4.19 à 4.21 sont représentées les isovaleurs des déplacements verticaux, latéraux et des distributions des contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{xy}$  obtenus par une modélisation mixte de la structure renforcée. Ces distributions sont similaires à celles obtenues par une modélisation multiphasique et présentées sur les figures 4.7 à 4.15 hormis en ce qui concerne le voisinage du bord inférieur de la zone renforcée. Afin d'illustrer ce point, on a représenté sur la figure 4.22 (b) les distributions des efforts normaux rapportés à leurs valeurs maximales dans l'inclusion se trouvant à 2,5 m de l'axe de symétrie de la structure pour la modélisation mixte, et au droit d'une coupe de la zone renforcée à 2,5 m du même axe de symétrie pour la modélisation biphasique. Les résultats sont donnés dans le cas où la structure est soumise à un chargement vertical, les raideurs à la flexion et au cisaillement des inclusions étant prises en compte (configurations (2A) et (2B)).

Les figures 4.22 (b) montrent par exemple, que la distribution d'effort normal dans les inclusions donnée par le calcul en modélisation mixte est tout à fait semblable à celle du calcul multiphasique, mis à part près du bord inférieur de la zone renforcée, c'est-à-dire à l'extrémité inférieure du pieux, où l'effort a tendance à diminuer très fortement, voire à s'annuler en pointe si l'on raffine considérablement le maillage dans cette zone. Les figures 4.22 (c) et 4.22 (d) relatives aux distributions respectives d'effort tranchant et de moment fléchissant lorsque la structure est soumise respectivement à un chargement latéral et à un chargement de renversement, montrent en revanche, une bonne concordance entre les deux types de simulations. On observe par exemple, que dans les deux cas, le moment fléchissant s'annule à l'extrémité inférieure des renforcements.



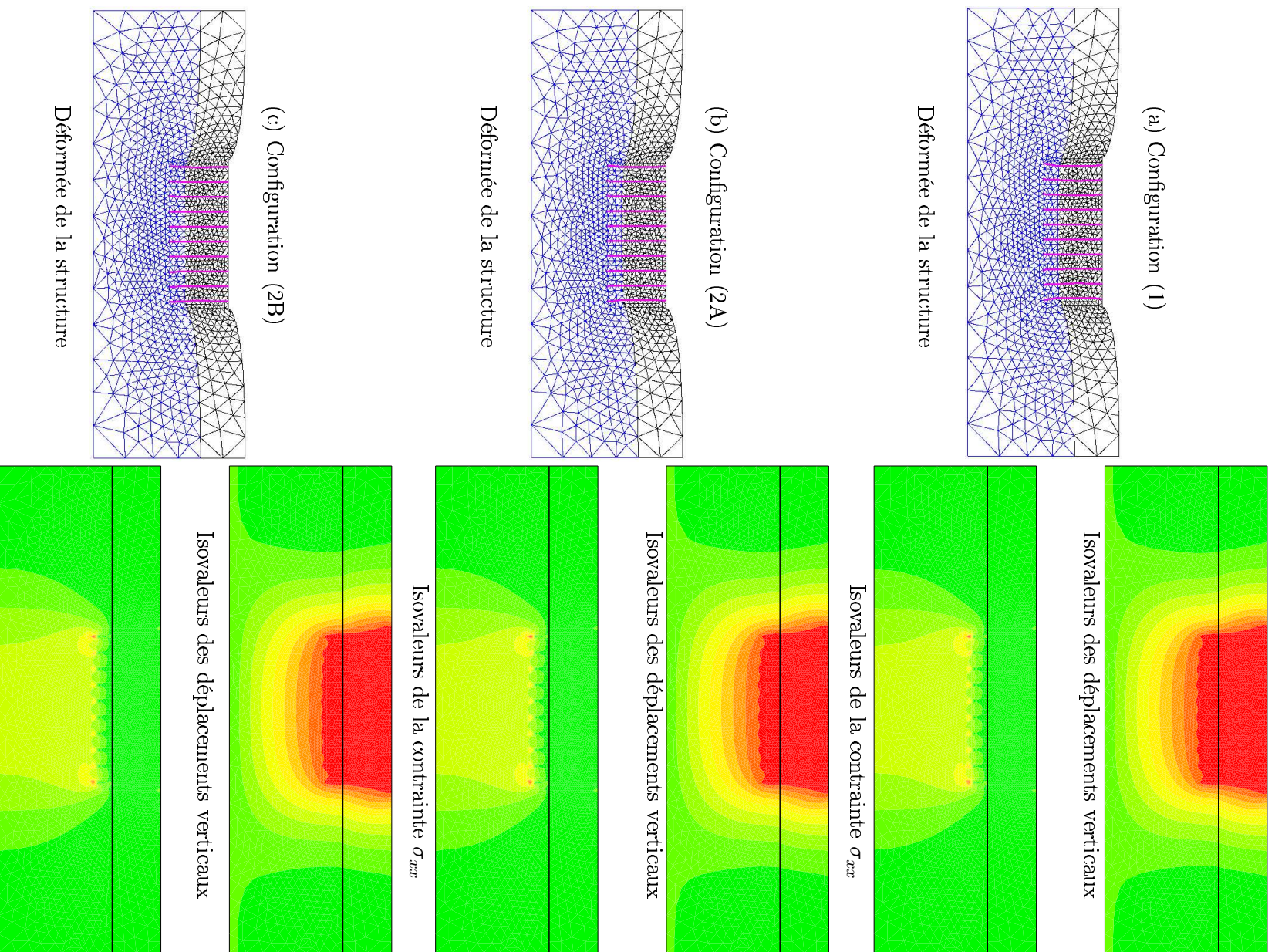


FIG. 4.19: *Déformées de la structure sous chargement vertical et isovaleurs des déplacements verticaux et de la contrainte  $\sigma_{xx}$ . Modélisation mixte*



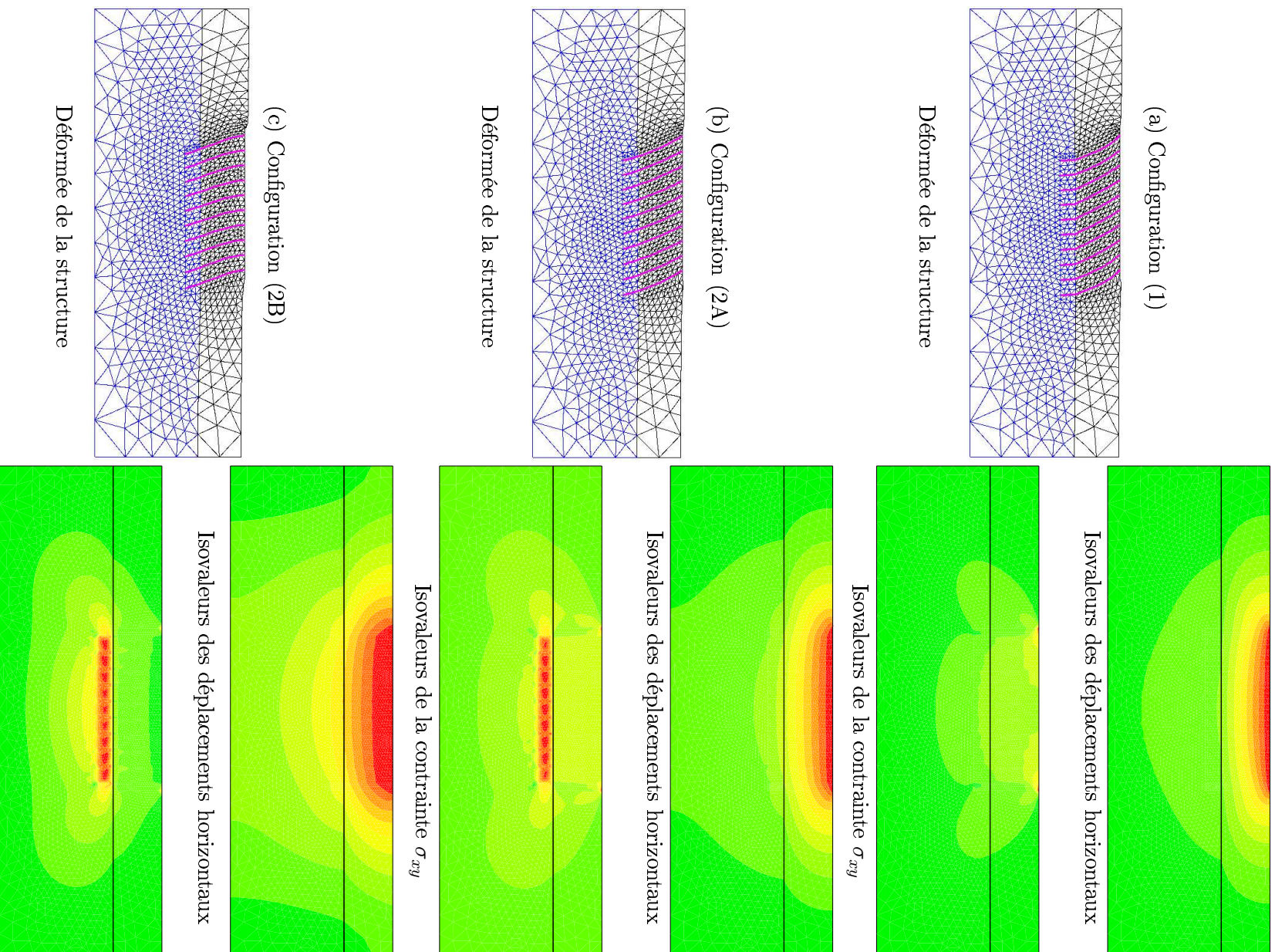


FIG. 4.20: *Déformées de la structure sous chargement latéral et isovaleurs des déplacements verticaux et de la contrainte  $\sigma_{xx}$ . Modélisation mi-é*



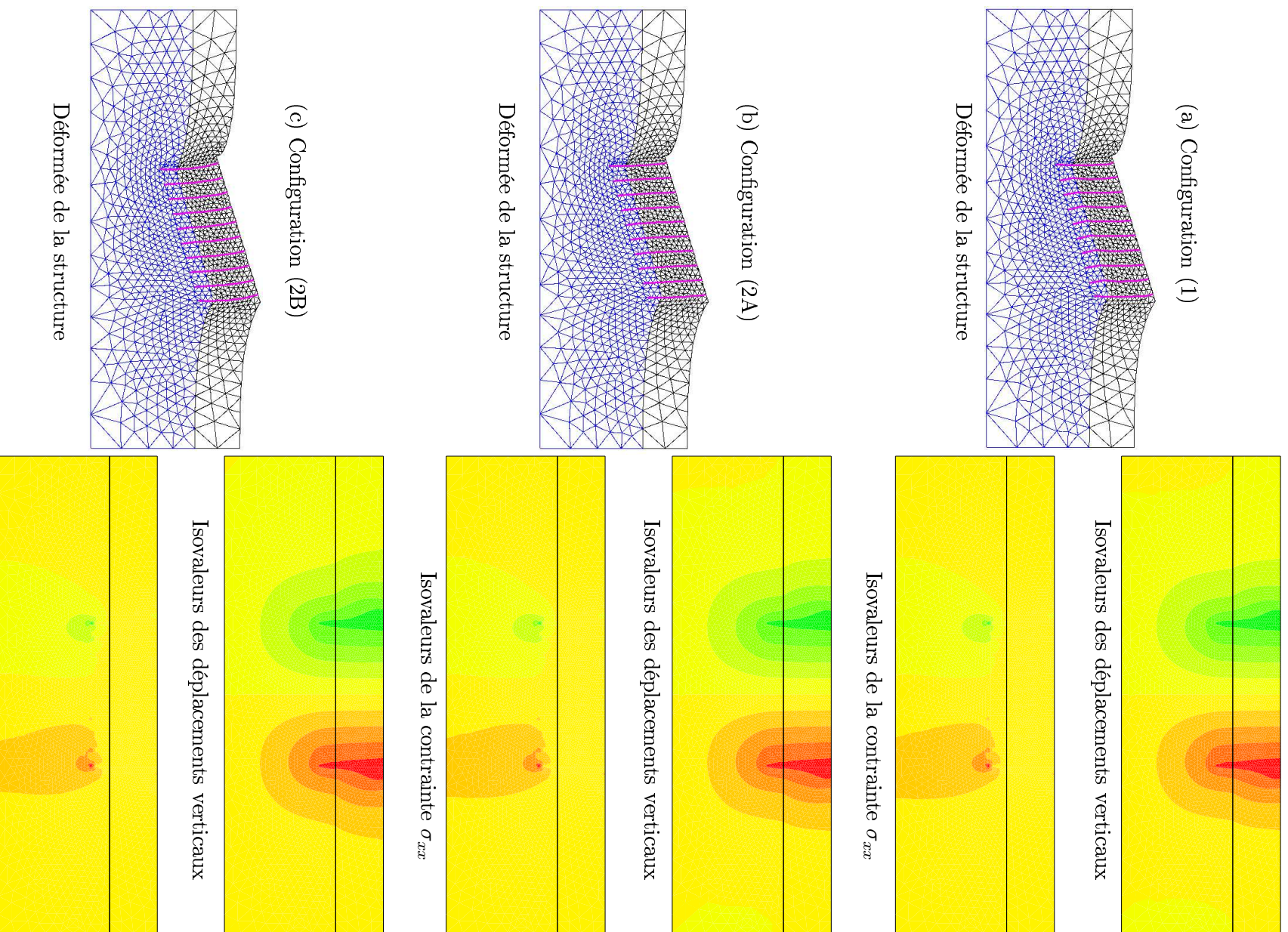
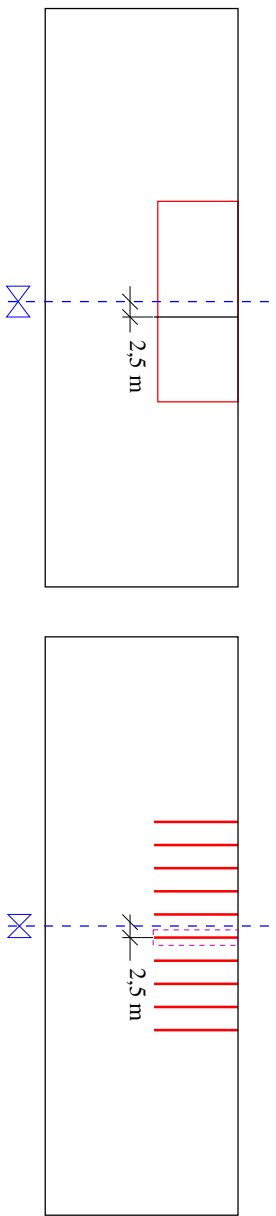
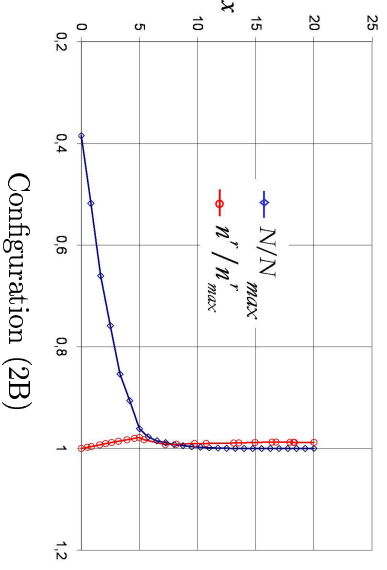
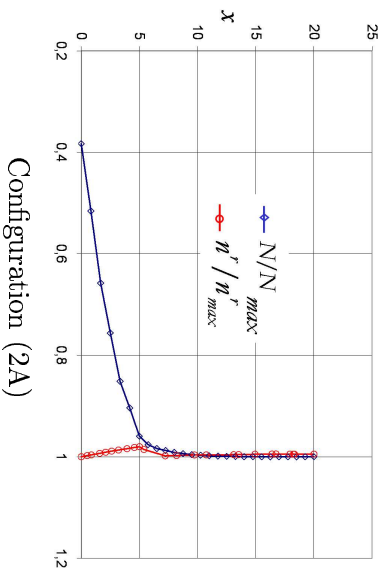


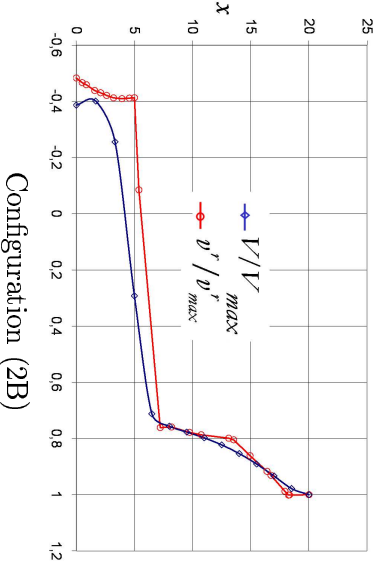
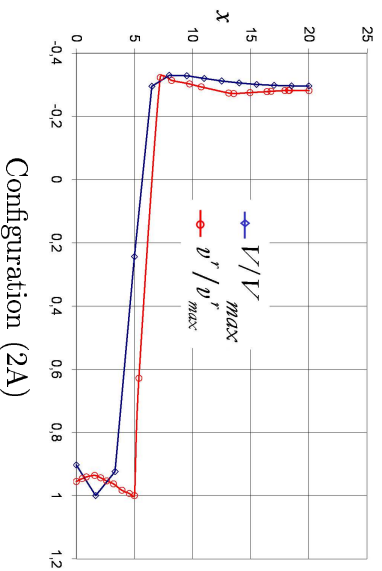
FIG. 4.21: *Déformées de la structure sous chargement de renversement et isovaleurs des déplacements verticaux et de la contrainte  $\sigma_{xx}$ . Modélisation mixte*



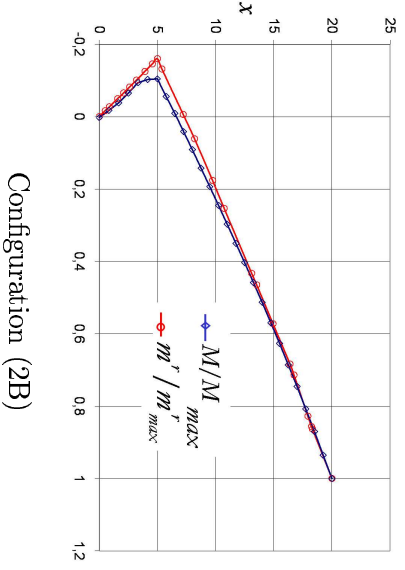
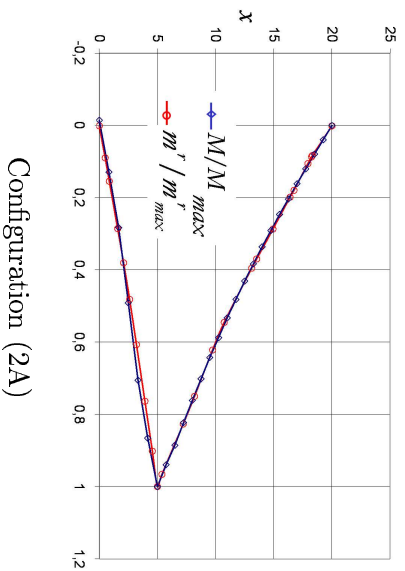
(a) modélisation multiphasique modélisation mixte



(b) Distributions des efforts normaux (Chargement vertical)



(c) Distributions des efforts tranchants (Chargement latéral)



(d) Distributions des moments fléchissants (Chargement de renversement)

FIG. 4.22: Effet de bord

### 4.3 Conclusion

On s'est intéressé dans ce chapitre à l'application du code de calcul multiphasique à l'estimation de la raideur structurelle d'une fondation sur radier de pieux dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des différents constituants. Cette analyse menée dans différents cas de prise en compte ou non des raiders à la flexion et au cisaillement des inclusions et pour différents types de connection pieux-fondation, nous a permis de tirer deux conclusions essentielles :

- Les raiders à la flexion et au cisaillement des inclusions jouent un rôle négligeable dans le cas d'un chargement purement vertical. Cependant, elles jouent un rôle prépondérant vis-à-vis d'un chargement latéral ou d'un chargement de renversement.

- Des différences significatives des valeurs des raiders structurelles ont été observées suivant le choix du type de connection pieux-fondation, montrant que, hormis dans le cas d'un chargement vertical où le type de connection joue peu, les raiders structurelles vis-à-vis d'un chargement latéral ou de renversement sont d'autant plus grandes que les inclusions sont encastées en tête dans la fondation, soulignant ainsi l'importance de ce type de liaison pour mobiliser les raiders à la flexion et au cisaillement des inclusions.

Ces conclusions sont par ailleurs retrouvées via des études analogues menées sur des structures de caractéristiques géométriques et mécaniques différentes (Hassen et de Buhari [45] [46] [48], mettant ainsi en évidence la nécessité de la prise en compte des effets de flexion et de cisaillement dans le calcul des structures renforcées par inclusions rigides.

Une tentative de modélisation multicouche de la structure renforcée a été menée sans succès parce qu'elle s'est révélée impossible pour ce type de structure. Une comparaison avec les résultats donnés par une modélisation mixte de la structure renforcée a été effectuée, en termes de raideur structurelle et de distribution d'efforts intérieurs dans les inclusions de renforcement. Elle a permis de valider les observations faites ci-dessus et de faire apparaître un effet de bord à l'extrémité de la zone renforcée.

La suite du présent mémoire porte sur l'extension du modèle multiphasique à la prise en compte du comportement élastoplastique du sol et des inclusions de renforcement.

\*

\*

\*

# Chapitre 5

## Comportement élastoplastique et à la rupture du milieu multiphasique

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	Comportement élasto-plastique d'un milieu biphasique . . . . .	113
5.2.1	Phase matrice . . . . .	113
5.2.2	Phase renforcement . . . . .	115
5.2.3	Loi d'interaction . . . . .	117
5.3	Exemple d'application . . . . .	119
5.3.1	Position du problème . . . . .	119
5.3.2	1 <sup>er</sup> cas : $\rho > 1$ (plastification de la matrice en premier) . . . . .	124
5.3.3	2 <sup>ème</sup> cas : $\rho = 1$ (plastification simultanée des deux phases) . . . . .	129
5.3.4	3 <sup>ème</sup> cas : $\rho < 1$ (plastification de la phase renforcement en premier) . . . . .	130
5.4	Détermination des paramètres élasto-plastiques . . . . .	132
5.4.1	Phase matrice . . . . .	132
5.4.2	Phase renforcement . . . . .	133
5.5	Calcul à la rupture pour les systèmes en milieux biphasiques . . . . .	135
5.5.1	Domaine des chargements potentiellement supportables . . . . .	135
5.5.2	Approche statique par l'intérieur de $K$ . . . . .	135
5.5.3	Approche cinématique par l'extérieur de $K$ . . . . .	136
5.5.4	Exemple de mise en œuvre . . . . .	137

112 Comportement élastoplastique et à la rupture du milieu multiphasique

---

5.6 Conclusion . . . . . 139

## 5.1 Introduction

Le modèle multiphasique présenté dans le chapitre 2 est ici étendu au comportement élasto-plastique des différentes phases, matrice et renforcement.

La phase matrice est supposée élastique parfaitement plastique comme le sol qu'elle représente, obéissant à un critère mettant en jeu sa cohésion et son angle de frottement.

La phase renforcement obéit à un critère de type diagramme d'interaction portant sur les efforts généralisés  $(\eta^r, \nu^r, m^r)$ .

L'exemple d'application traité dans le cadre de l'élasticité linéaire au chapitre 2 est repris ici lorsque les phases matrice et renforcement sont élastoplastiques. Une introduction au calcul à la rupture appliqué aux milieux biphasiques est présentée, se terminant par le calcul de la charge limite de la même structure de sol renforcé par inclusions, soumis à un chargement de cisaillement traité par un calcul élastoplastique.

## 5.2 Comportement élasto-plastique d'un milieu biphasique

### 5.2.1 Phase matrice

Supposant que la phase matrice est *élastique parfaitement plastique*, on définit classiquement le domaine d'élasticité  $C^m$  de ladite phase comme l'ensemble des états de contraintes, à l'intérieur duquel toute évolution est réversible (élastique). Ce domaine est caractérisé par la donnée de la fonction  $f^m$ , appelée *fonction de charge*, vérifiant :

$$\begin{cases} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) < 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ est à l'intérieur de } C^m \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ est sur la frontière de } C^m \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) > 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ est à l'extérieur de } C^m \end{cases} \quad (5.1)$$

Le critère de plasticité de la phase matrice s'écrit alors :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0 \quad (5.2)$$

Les déformations se décomposent en la somme d'une partie *élastique* (réversible) et d'une partie *plastique* (irréversible) :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^m = \underline{\underline{\epsilon}}_e^m + \underline{\underline{\epsilon}}_p^m \quad (5.3)$$



La partie élastique du tenseur des déformations est reliée au tenseur des contraintes par la loi de comportement élastique qui, sous l'hypothèse d'isotropie de la phase matrice, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda^m \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}_e^m) \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \underline{\underline{\varepsilon}}_e^m \\ \text{ou} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_e^m = \frac{1+\nu^m}{E^m} \underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{\nu^m}{E^m} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^m) \underline{\underline{I}} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

où  $\lambda^m$  et  $\mu^m$  sont les coefficients de Lamé de la phase matrice,  $E^m$  son module d'Young et  $\nu^m$  son coefficient de poisson.

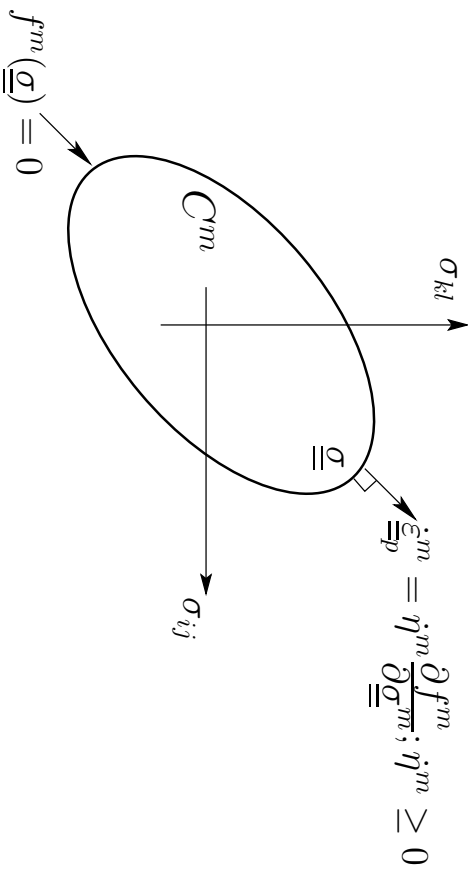


FIG. 5.1: Critère de plasticité de la phase matrice et règle d'écoulement plastique dans le cas associé

Le taux de déformation plastique est donné par la règle d'écoulement qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \eta^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \quad \text{avec} \quad \eta^m \begin{cases} \geq 0 & \text{si} & f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $\eta^m$  est le multiplicateur plastique et  $g^m$  est le potentiel plastique qui se confond avec la fonction de charge  $f^m$  dans le cas où la phase matrice obéit au principe du travail plastique maximal (matériau standard). Dans ce cas, la règle d'écoulement est dite associée, traduisant la normalité du taux des déformations plastiques par rapport à la frontière du domaine d'élasticité. (figure 5.1)

### 5.2.2 Phase renforcement

De la même manière, on définit l'ensemble  $C^r$  des états de contraintes généralisées  $(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r)$ , à l'intérieur duquel toute évolution de la phase renforcement est réversible. A ce domaine d'élasticité est associée la fonction de charge  $f^r$ , d'arguments  $(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r)$ , définie par :

$$\begin{cases} f^r(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) < 0 & \text{si } (\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) \text{ est à l'intérieur de } C^r \\ f^r(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) = 0 & \text{si } (\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) \text{ est sur la frontière de } C^r \\ f^r(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) > 0 & \text{si } (\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) \text{ est à l'extérieur de } C^r \end{cases} \quad (5.6)$$

Le critère de plasticité de la phase renforcement, s'écrit ainsi :

$$f^r(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) \leq 0 \quad (5.7)$$

Les variables de déformation  $\underline{\varepsilon}^r$  et  $\underline{\chi}^r$  définies par dualité avec les efforts généralisés  $\underline{X}^r$  et  $\underline{\Gamma}^r$ , se décomposent chacune en la somme d'une partie élastique et d'une partie plastique :

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}^r = \underline{\varepsilon}_e^r + \underline{\varepsilon}_p^r \\ \underline{\chi}^r = \underline{\chi}_e^r + \underline{\chi}_p^r \end{cases} \quad (5.8)$$

Les parties élastiques des déformations sont reliées aux vecteurs efforts intérieurs  $\underline{X}^r$  et  $\underline{\Gamma}^r$  par la loi de comportement élastique qui s'exprime par : (voir chapitre 2, 2.2.3)

$$\underline{X}^r = \underline{\underline{C}}^r \cdot \underline{\varepsilon}_e^r \quad (5.9)$$

$$\underline{\Gamma}^r = \underline{\underline{C}}^r \cdot \underline{\chi}_e^r \quad (5.10)$$

où  $\underline{\underline{C}}^r$  et  $\underline{\underline{C}}^r$  sont les tenseurs des rigidités de la phase renforcement. L'évolution des parties plastiques obéit à une règle d'écoulement qui s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\dot{\varepsilon}}_p^r = \dot{\eta}^r \frac{\partial q^r}{\partial \underline{X}^r} \\ \underline{\dot{\chi}}_p^r = \dot{\eta}^r \frac{\partial q^r}{\partial \underline{\Gamma}^r} \end{cases} \quad \text{avec } \dot{\eta}^r \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^r(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) = f^r(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.11)$$

où  $\eta^r$  est le multiplicateur plastique et  $g^r$  est le potentiel plastique. Dans le cas où la phase renforcement obéit au principe du travail plastique maximal, la fonction de charge  $f^r$  et le potentiel  $g^r$  sont identiques et la règle d'écoulement plastique sera dans ce cas associée.

Dans le cas de *problèmes bidimensionnels* définis dans le plan  $(O, x, y)$ , les efforts intérieurs sont donnés par les densités d'efforts et de moment généralisés,  $n^r, v^r$  et  $m^r$ , la fonction de charge vérifie dans ce cas :

$$\begin{cases} f^r(n^r, v^r, m^r) < 0 & \text{si } (n^r, v^r, m^r) \text{ est à l'intérieur de } C^r \\ f^r(n^r, v^r, m^r) = 0 & \text{si } (n^r, v^r, m^r) \text{ est sur la frontière de } C^r \\ f^r(n^r, v^r, m^r) > 0 & \text{si } (n^r, v^r, m^r) \text{ est à l'extérieur de } C^r \end{cases} \quad (5.12)$$

La phase renforcement obéit ainsi à un critère portant uniquement sur les variables généralisées qui s'écrit :

$$f^r(n^r, v^r, m^r) \leq 0 \quad (5.13)$$

La déformation longitudinale  $\varepsilon^r$ , la déformation de cisaillement  $\theta^r$  et la courbure  $\chi^r$ , qui constituent les variables de déformation associées, se décomposent en la somme d'une partie élastique et d'une partie plastique :

$$\begin{cases} \varepsilon^r = \varepsilon_e^r + \varepsilon_p^r \\ \theta^r = \theta_e^r + \theta_p^r \\ \chi^r = \chi_e^r + \chi_p^r \end{cases} \quad (5.14)$$

La loi de comportement élastique s'exprime par 3 relations scalaires reliant les efforts et le moment généralisés aux parties élastiques des variables de déformation, soit :

$$\begin{cases} n^r = \alpha^r \varepsilon^r \\ v^r = \beta^r \theta^r \\ m^r = \gamma^r \chi^r \end{cases} \quad (5.15)$$

où  $\alpha^r$ ,  $\beta^r$  et  $\gamma^r$  sont les raideurs de la phase renforcement à la compression-traction, au cisaillement et à la flexion.

Les taux de déformation plastique sont donnés d'après la règle d'écoulement plastique par :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_p^r = \dot{\eta}^r \frac{\partial g^r}{\partial n^r} \\ \dot{\theta}_p^r = \dot{\eta}^r \frac{\partial g^r}{\partial v^r} \\ \dot{\chi}_p^r = \dot{\eta}^r \frac{\partial g^r}{\partial m^r} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \dot{\eta}^r \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^r(n^r, v^r, m^r) = f^r(n^r, v^r, m^r) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.16)$$

Le cas associé correspond à  $f^r = g^r$ .

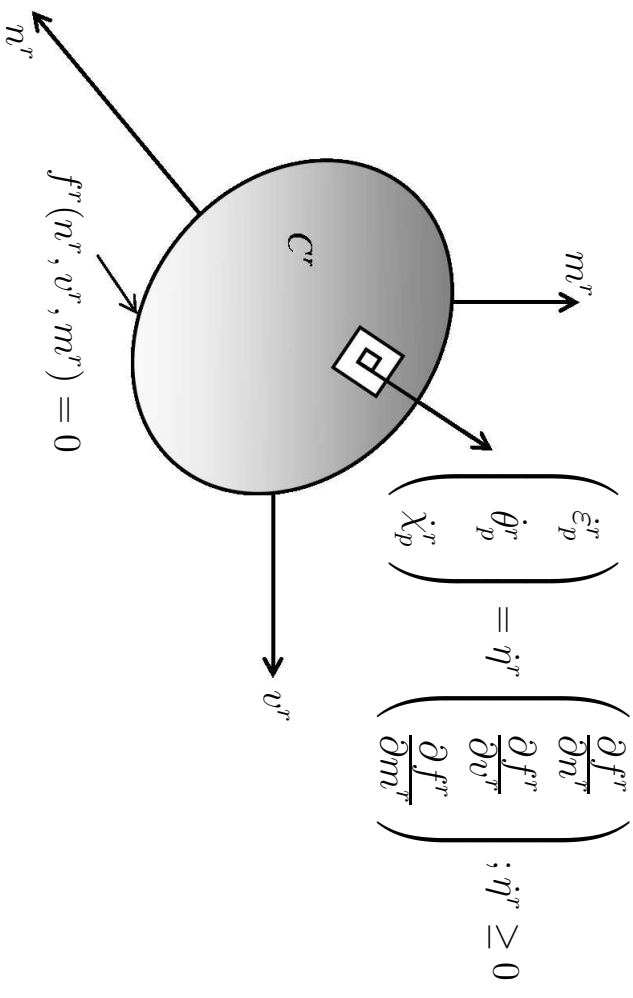


FIG. 5.2: Critère de plasticité de la phase renforcement et règle d'écoulement plastique (cas associé)

### 5.2.3 Loi d'interaction

Dans le cadre de la plasticité parfaite, on introduit la fonction de charge  $f^I$  ayant pour seul argument la densité volumique d'efforts d'interaction, qui définit le domaine d'élasticité  $C^I$  à l'intérieur duquel les évolutions d'interaction sont réversibles :

$$\begin{cases} f^I(\underline{I}) < 0 & \text{si } \underline{I} \text{ est à l'intérieur de } C^I \\ f^I(\underline{I}) = 0 & \text{si } \underline{I} \text{ est sur la frontière de } C^I \\ f^I(\underline{I}) > 0 & \text{si } \underline{I} \text{ est à l'extérieur de } C^I \end{cases} \quad (5.17)$$

Le critère de plasticité de la loi d'interaction est donné par :

$$f^I(\underline{I}) \leq 0 \quad (5.18)$$

La variable de déformation  $\Delta \underline{\xi}$ , définie par dualité avec la densité volumique d'efforts d'interaction, se décompose en la somme d'une partie élastique et d'une partie plastique, comme suit :

$$\Delta \underline{\xi} = \Delta \underline{\xi}_e + \Delta \underline{\xi}_p \quad (5.19)$$

où la partie élastique  $\Delta \underline{\xi}_e$  est liée à  $\underline{I}$  par la loi de comportement :

$$\underline{I} = \underline{\underline{C}}^I \cdot \Delta \underline{\xi}_e \quad (5.20)$$

$\underline{\underline{C}}^I$  désignant le tenseur de rigidité de la loi d'interaction.

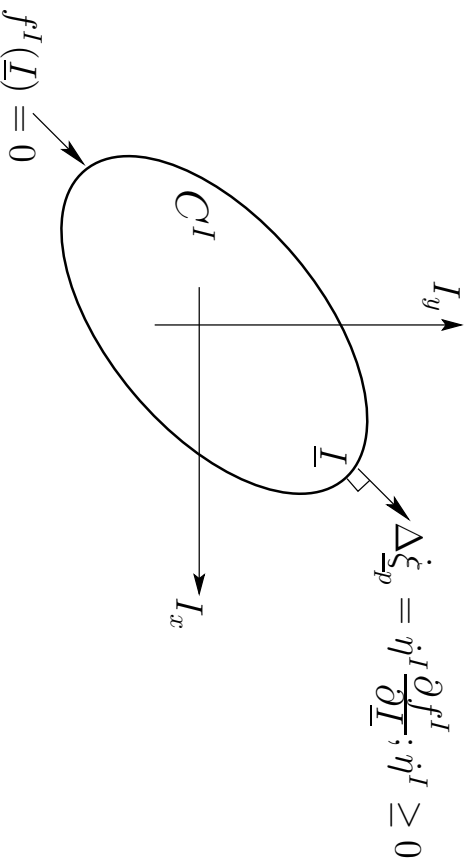


FIG. 5.3: Critère de plasticité de la loi d'interaction et règle d'écoulement plastique (cas associée)

L'évolution de la partie plastique du déplacement relatif des deux phases  $\Delta \underline{\xi}_p$  suit la règle d'écoulement qui s'écrit :

$$\Delta \underline{\xi}_p = \eta^I \frac{\partial g^I}{\partial \underline{I}} \quad \text{avec} \quad \eta^I \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^I(\underline{I}) = \dot{f}^I(\underline{I}) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.21)$$

où  $\eta^I$  est le multiplicateur plastique et  $g^I$  est le potentiel plastique. Dans le cas où la loi

d'interaction obéit au principe du travail plastique maximal, la fonction de charge  $f^I$  et le potentiel  $g^I$  sont identiques et la règle d'écoulement plastique sera dans ce cas associée.

Nous supposons dans toute la suite que, tout comme dans le cas d'un comportement élastique (chapitres 2 à 4), il y a adhérence parfaite entre les phases matrice et renforcement, ce qui se traduit par la condition :

$$\Delta \underline{\xi} = \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m = \underline{0} \quad (5.22)$$

signifiant que les deux phases ont la même cinématique de déplacement. Partant d'une loi élastoplastique d'interaction définie par (5.17 à 5.3), une telle hypothèse revient à admettre que, d'une part les composantes du tenseur de rigidité d'interaction tendent vers l'infini, ce qui annule  $\Delta \underline{\xi}_e$ , et d'autre part que le domaine d'élasticité  $C^I$  tend vers l'infini, ce qui revient à annuler la composante plastique  $\Delta \underline{\xi}_p$  :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{C}^I \longrightarrow \infty \implies \Delta \underline{\xi}_e \longrightarrow 0 \\ C^I \longrightarrow \mathfrak{R}^3 \implies \Delta \underline{\xi}_p \longrightarrow 0 \end{array} \right\} \implies \Delta \underline{\xi} \longrightarrow 0 \quad (5.23)$$

### 5.3 Exemple d'application

Cette section est dédiée à présenter une première application du modèle multiphasique avec flexion lorsque les deux phases, matrice et renforcement, sont élastoplastiques. On reprend pour ce faire, l'exemple du cisaillement transverse d'une couche de sol déjà traité au chapitre 2 dans le cadre de l'élasticité linéaire des matériaux. On supposera, pour alléger le développement de la solution, que les déformations de cisaillement sont négligeables ( $\theta^r = 0$  ou  $\beta^r \longrightarrow \infty$ ).

#### 5.3.1 Position du problème

Une couche de sol d'épaisseur  $2L$  supposée infinie le long de  $(Oy)$  et préalablement renforcée par un réseau de poutres de direction  $\underline{e}_a$ , est soumise en conditions de déformations planes dans le plan  $(Oxy)$  au chargement défini comme suit (Figure 5.4) :

- Les forces de volume sont négligées :  $\underline{F}^m = \underline{F}^r = \underline{0}$

- Les deux phases, matrice et renforcement, sont *encastrées* dans le plan  $(Oyz)$ , soit :

$$\begin{cases} \underline{\xi}(x = 0, y, z) = \underline{\xi}^m(x = 0, y, z) = \underline{\xi}^r(x = 0, y, z) = \underline{0} \\ \omega^r(x = 0, y, z) = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

- On impose aux deux phases en  $(x = 2L)$  un déplacement de valeur  $2\delta$  et une rotation nulle pour la phase renforcement :

$$\begin{cases} \underline{\xi}(x = 2L, y, z) = \underline{\xi}^m(x = 2L, y, z) = \underline{\xi}^r(x = 2L, y, z) = 2\delta \underline{e}_y \\ \omega(x = 2L, y, z) = \omega^r(x = 2L, y, z) = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

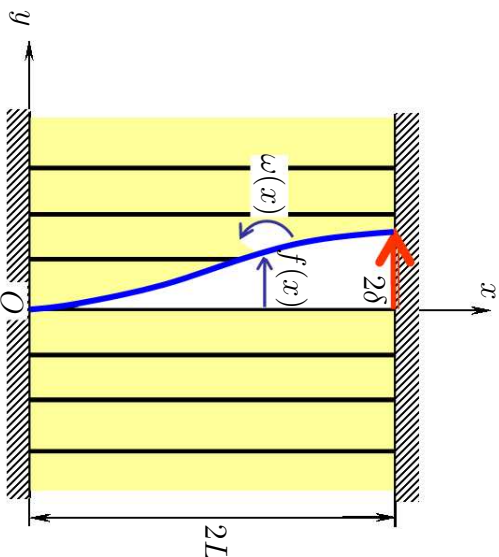


FIG. 5.4: *Cisaillement en déformation plane d'une couche de sol renforcée transversalement*

- La phase matrice, représentant le sol, est supposée élastique parfaitement plastique de modules  $\lambda^m$  et  $\mu^m$ , obéissant au critère de von Mises qui s'écrit :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}}^m : \underline{\underline{s}}^m} - C^m \leq 0 \quad (5.26)$$

où  $C^m$  est la cohésion de la matrice et  $s^m$  la partie déviatorique de la contrainte :

$$\underline{\underline{s}}^m = \underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{1}{3} (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^m)) \underline{\underline{1}} \quad (5.27)$$

- La phase renforcement, élastique parfaitement plastique, est supposée *infimement résistante à l'effort tranchant*. Elle obéit à un critère de type *diagramme d'interaction*

qui ne porte que sur la densité d'effort normal  $n^r$  et la densité de moment de flexion  $m^r$  par unité de surface transversale à la direction des inclusions :

$$f^r(n^r, m^r) = \left(\frac{n^r}{n_0^r}\right)^2 + \left|\frac{m^r}{m_0^r}\right| - 1 \leq 0 \quad (5.28)$$

où  $n_0^r$  (resp.  $m_0^r$ ) désigne la limite d'élasticité de la phase renforcement en traction-compression pure (resp. flexion pure).

Dans la phase de comportement élastique, la solution de ce problème a été développée sous l'hypothèse de Navier-Bernoulli ( $\theta = 0$ ) au chapitre 2. On obtient :

$$\begin{cases} \underline{\xi}(x) = f(x) \underline{e}_y \\ \underline{\omega}(x) = \omega(x) \underline{e}_z \end{cases} \quad (5.29)$$

avec :

$$\begin{cases} f(x) = \delta \frac{\left[\sinh\left(\frac{\eta x}{L}\right) + \tanh(\eta) \left(1 - \cosh\left(\frac{\eta x}{L}\right)\right)\right] - \frac{\eta x}{L}}{\tanh(\eta) - \eta} \\ \omega(x) = f'(x) = \delta \frac{\eta}{L} \frac{\cosh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - \tanh(\eta) \sinh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - 1}{\tanh(\eta) - \eta} \end{cases} \quad (5.30)$$

où  $\eta$  est un paramètre adimensionnel qui rend compte de l'influence relative du module de cisaillement de la phase matrice par rapport à la raideur en flexion de la phase renforcement :

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu^m L^2}{\gamma^r}} \quad (5.31)$$

Les variables de déformation sont données par :

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}^m(x) = \delta \frac{\eta}{2L} \frac{\cosh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - \tanh(\eta) \sinh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - 1}{\tanh(\eta) - \eta} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \\ \varepsilon^r = \theta^r = 0 \\ \chi^r(x) = f''(x) = \delta \left(\frac{\eta}{L}\right)^2 \frac{\sinh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - \tanh(\eta) \cosh\left(\frac{\eta x}{L}\right)}{\tanh(\eta) - \eta} \end{cases} \quad (5.32)$$



Compte tenu des lois de comportement (5.4) et (5.15), les efforts intérieurs sont donnés, au cours de cette phase élastique, par : (figure 5.5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^m(x) = \delta \frac{\mu^m \eta}{L} \frac{\cosh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - \tanh(\eta) \sinh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - 1}{\tanh(\eta) - \eta} (\underline{\underline{\epsilon}}_x \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_y + \underline{\underline{\epsilon}}_y \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_x) \\ n^r = 0 \\ m^r(x) = \delta \gamma^r \left(\frac{\eta}{L}\right)^2 \frac{\sinh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - \tanh(\eta) \cosh\left(\frac{\eta x}{L}\right)}{\tanh(\eta) - \eta} \\ v^r(x) = -\frac{dm^r}{dx} = \delta \gamma^r \left(\frac{\eta}{L}\right)^3 \frac{\tanh(\eta) \sinh\left(\frac{\eta x}{L}\right) - \cosh\left(\frac{\eta x}{L}\right)}{\tanh(\eta) - \eta} \end{array} \right. \quad (5.33)$$

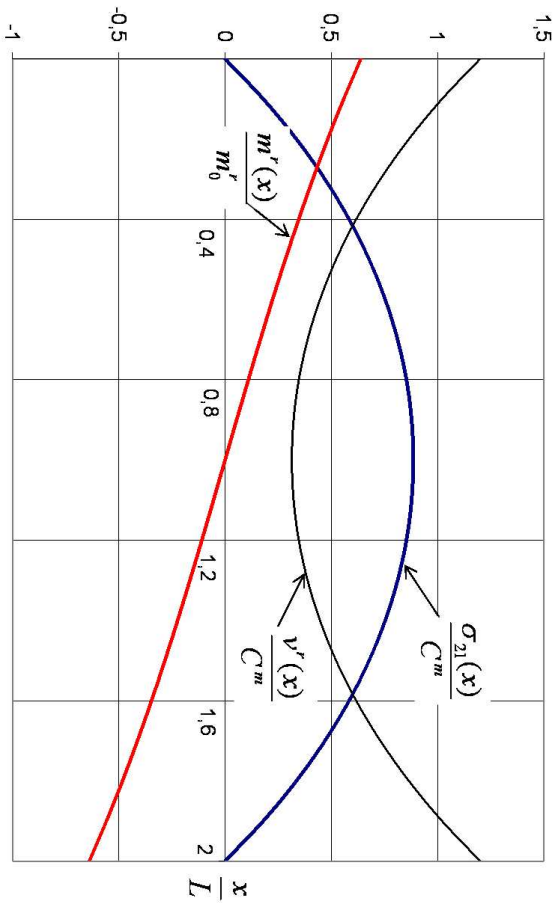


FIG. 5.5: *Distributions des efforts intérieurs en phase élastique*

La contrainte de cisaillement totale  $\tau$  est alors donnée par :

$$\tau(x) = \sigma_{yx}^m(x) + v^r(x) = \delta \gamma^r \left(\frac{\eta}{L}\right)^2 \frac{-1}{\tanh(\eta) - \eta} = \tau(\delta) \quad (5.34)$$

apparaissant comme proportionnelle au paramètre de chargement  $\delta$ .

Le critère de plasticité de la phase matrice s'écrit, compte tenu de la forme du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  :

$$\sigma_{yx}^m(x) \leq C^m \quad \forall x \in [0, 2L] \quad (5.35)$$

Concernant la phase renforcement, le critère de plasticité, qui ne fait intervenir que la densité de moment de flexion, s'écrit simplement :

$$|m^r(x)| \leq m_0^r \quad \forall x \in [0, 2L] \quad (5.36)$$

Les valeurs maximales de la contrainte de cisaillement dans la phase matrice et du moment de flexion dans la phase renforcement sont données par : (voir figure 5.5)

$$\begin{cases} (\sigma_{yx}^m)_{max} = \sigma_{yx}^m(x=L) = \delta \frac{\mu^m \eta}{L} \frac{1 - \cosh(\eta)}{\sinh(\eta) - \eta \cdot \cosh(\eta)} (\epsilon_x \otimes \epsilon_y + \epsilon_y \otimes \epsilon_x) \\ |m^r|_{max} = |m^r(x=0)| = |m^r(x=2L)| = \delta \gamma^r \left(\frac{\eta}{L}\right)^2 \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\eta) - \eta \cdot \cosh(\eta)} \end{cases} \quad (5.37)$$

L'évolution des deux phases reste élastique tant que les critères de plasticité respectifs sont satisfaits, c'est-à-dire tant que :

$$\begin{cases} (\sigma_{yx}^m)_{max} = \delta \frac{\mu^m \eta}{L} \frac{1 - \cosh(\eta)}{\sinh(\eta) - \eta \cdot \cosh(\eta)} \leq C^m \\ (m^r)_{max} = \delta \gamma^r \left(\frac{\eta}{L}\right)^2 \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\eta) - \eta \cdot \cosh(\eta)} \leq m_0^r \end{cases} \quad (5.38)$$

soit, en exprimant ces conditions sur le paramètre de chargement  $\delta$  :

$$\begin{cases} \delta \leq \delta_l^{mat} = \frac{C^m L \sinh(\eta) - \eta \cdot \cosh(\eta)}{\mu^m \eta} \\ \delta \leq \delta_l^{renf} = \frac{m_0^r}{\gamma^r} \left(\frac{L}{\eta}\right)^2 \frac{\sinh(\eta) - \eta \cdot \cosh(\eta)}{\sinh(\eta)} \end{cases} \quad (5.39)$$

où  $\delta_l^{mat}$  (resp.  $\delta_l^{renf}$ ) désigne la limite d'élasticité de la structure dans le cas où la phase matrice (resp. la phase renforcement) plastifie en premier.

On obtient ainsi trois cas de figures possibles suivant la valeur du paramètre adimensionnel  $\rho$  défini par :

$$\rho = \frac{\delta_l^{mat}}{\delta_l^{renf}} = \eta \left( \frac{\cosh(\eta) - 1}{\sinh(\eta)} \right) \frac{m_0^r}{C^m L} \quad (5.40)$$

- $\rho > 1$  : La limite d'élasticité en cisson de la phase matrice est atteinte en  $x = L$  alors que la phase renforcement reste élastique.
- $\rho = 1$  : Ce cas correspond au cas où les deux phases plastifient simultanément, les deux limites d'élasticité des deux phases étant égales. Le moment limite est atteint pour la phase renforcement aux deux extrémités de la structure et la contrainte de cisaillement dans la phase matrice atteint la limite d'élasticité en cisson (cohésion) au point d'abscisse  $x = L$ .

- $\rho < 1$  : Dans ce cas, la limite d'élasticité de la phase renforcement est inférieure à celle de la phase matrice. Le moment limite est atteint aux deux extrémités de la structure (par valeur positive en  $x = 0$  et par valeur négative en  $x = 2L$ ) tandis que la phase matrice est élastique.

Dans ce qui suit, La solution élastoplastique de ce problème va être développée pour chaque cas suivant la valeur du paramètre adimensionnel  $\rho$ .

### 5.3.2 1<sup>er</sup> cas : $\rho > 1$ (plastification de la matrice en premier)

Le paramètre de chargement augmentant, une zone plastique dans la phase matrice, ayant pris naissance au milieu de la structure ( $x = L$ ), se propage vers les extrémités de la structure. On définit 3 zones (figure 5.6) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Zone 1 : } 0 \leq x \leq \alpha L & \text{(matrice élastique)} \\ \text{Zone 2 : } \alpha L \leq x \leq (2 - \alpha) L & \text{(matrice plastique)} \\ \text{Zone 3 : } (2 - \alpha) L \leq x \leq 2L & \text{(matrice élastique)} \end{array} \right. \quad (5.41)$$

où  $\alpha$  est un paramètre sans dimension vérifiant  $0 \leq \alpha \leq 1$  qui représente l'évolution de la zone plastique dans la phase matrice.  $\alpha = 1$  correspond à l'apparition de la première plastification, tandis que  $\alpha = 0$  correspond à la plastification de toute la phase matrice.

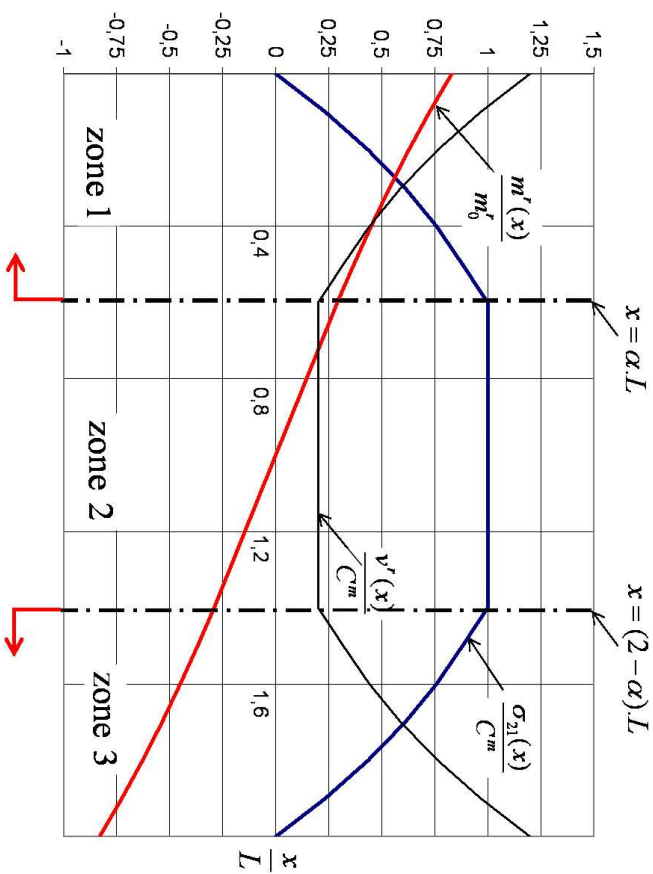


FIG. 5.6: *Distribution des efforts intérieurs avec plastification de la phase matrice dans la zone centrale*

Au cours de cette première phase élastoplastique, la zone 2, où la phase matrice est plastifiée, se propage en direction des deux extrémités de la structure ( $\alpha \longrightarrow 0$ ).

En combinant les équations d'équilibre, les lois de comportement des deux phases et les règles d'écoulement plastique écrites pour chaque phase séparément, on aboutit à la distribution de flèche suivante donnée dans chaque zone :

$$\begin{cases} f_1(x) = A_1 \exp\left(\frac{\eta x}{L}\right) + B_1 \exp\left(-\frac{\eta x}{L}\right) + C_1 x + D_1 & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha L \\ f_2(x) = \frac{A_2}{\gamma} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} + \frac{L^3}{3}\right) + B_2(x-L) + \delta & \text{si } \alpha L \leq x \leq (2-\alpha)L \\ f_3(x) = A_3 \exp\left(\frac{\eta x}{L}\right) + B_3 \exp\left(-\frac{\eta x}{L}\right) + C_3 x + D_3 & \text{si } (2-\alpha)L \leq x \leq 2L \end{cases} \quad (5.42)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} f_1(0) = f_1'(0) = 0 \\ f_3(2L) = 2\delta, \quad f_3'(2L) = 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

et des équations exprimant la continuité de la flèche, de la contrainte de cisaillement totale

et du moment de flexion aux deux fronts de la zone plastique ( $x = \alpha L$  et  $x = (2 - \alpha)L$ ). Ces conditions s'écrivent respectivement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\alpha L) = f_2(\alpha L) \quad \text{et} \quad f_2((2 - \alpha)L) = f_3((2 - \alpha)L) \\ \tau_1(\alpha L) = \tau_2(\alpha L) \quad \text{et} \quad \tau_2((2 - \alpha)L) = \tau_3((2 - \alpha)L) \\ m_1^r(\alpha L) = m_2^r(\alpha L) \quad \text{et} \quad m_2^r((2 - \alpha)L) = m_3^r((2 - \alpha)L) \end{array} \right. \quad (5.44)$$

où  $\tau_i$  désigne la contrainte de cisaillement totale dans la zone  $i$ , définie par :

$$\tau_i(x) = ((\sigma_{gx}^m)_i + v_i^r)(x) \quad (5.45)$$

qui est constante le long de la structure en vertu des équations d'équilibre et qui peut être calculée, par exemple, par le comportement élastique des deux phases dans la zone 1, soit :

$$\tau_i(x) = \mu^m f_1'(x) - \gamma f_1''(x) \quad (5.46)$$

il vient, simplification faite :

$$\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau_3(x) = C^{ste} = \mu^m C_1(\delta) = \tau(\delta) \quad (5.47)$$

Cette phase de propagation de la zone plastique ne peut se terminer par une plastification totale de la phase matrice avant plastification de la phase renforcement. En effet, tant que la phase renforcement est élastique, la condition d'encastrement de cette phase aux deux extrémités de la structure implique :

$$\omega^r(x = 0) = \omega^r(x = 2L) = 0 \quad (5.48)$$

qui s'écrit compte tenu de la condition de Navier-Bernoulli :

$$f'(x = 0) = f'(x = 2L) = 0 \quad (5.49)$$

soit :

$$\begin{cases} \sigma_{yx}(x=0) = \mu f'(x=0) = 0 \\ \sigma_{yx}(x=2L) = \mu f'(x=2L) = 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

de sorte que la contrainte de cisaillement est figée à 0 tant que la phase renforcement est élastique. Il est ainsi impossible de plastifier toute la phase matrice avant d'entamer la plastification de la phase renforcement.

La plastification de la phase renforcement commence lorsque le moment limite  $m_0^r$  est atteint aux deux bords de la structure (figure 5.7), c'est-à-dire lorsque :

$$\begin{cases} m^r(x=0) = \gamma f_1''(x=0) = -m_0^r \\ m^r(x=2L) = \gamma f_3''(x=2L) = m_0^r \end{cases} \quad (5.51)$$

Vu la symétrie du problème, ces deux conditions sont équivalentes et peuvent être remplacées, par exemple, par : (voir 5.42)

$$\gamma \left( \frac{A_3 \eta^2}{L^2} \exp(2\eta) + \frac{B_3 \eta^2}{L^2} \exp(-2\eta) \right) = m_0^r \quad (5.52)$$

Remplaçant  $\eta$  par son expression, on trouve :

$$A_3 \exp(2L) + B_3 \exp(-2L) = \frac{m_0^r}{\mu} \quad (5.53)$$

Cette phase d'évolution élastoplastique de la phase matrice et élastique de la phase renforcement s'achève par la plastification de la phase renforcement. D'une manière analogue à ce qui se passe dans le cas du modèle poutre, on fait l'hypothèse qu'une densité de *rotules plastiques* se forme en  $x=0$  et en  $x=2L$ . La phase renforcement reste élastique par ailleurs, et une discontinuité de rotation se crée aux deux extrémités de la structure. (figure 5.7)

La solution (5.42) reste valable, les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites qui s'écrivent :

$$\begin{cases} f_1(0) = 0, & f_3'(2L) = 0 \\ \gamma f_1''(0) = m_0^r, & \gamma f_1'(2L) = -m_0^r \end{cases} \quad (5.54)$$

et à partir des équations (5.44) exprimant la continuité de la flèche, de la contrainte de cisaillement totale et du moment de flexion aux deux fronts de la zone plastique.

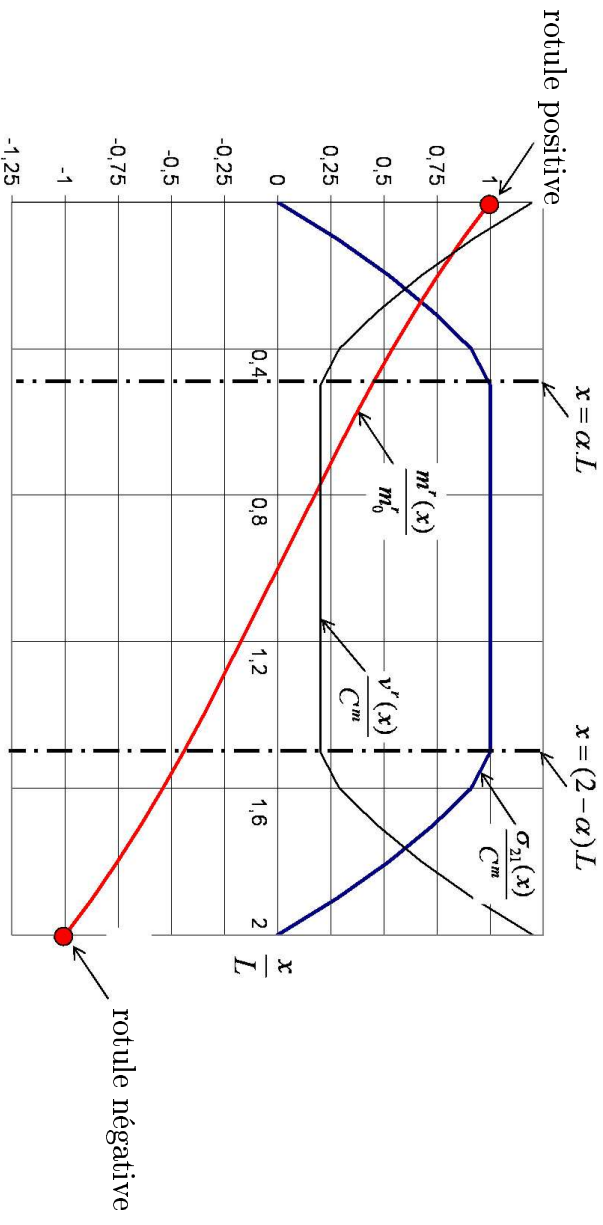


FIG. 5.7: *Distribution des efforts intérieurs (plastification des deux phases)*

Cette phase d'évolution élastoplastique s'achève lorsque les deux fronts de la zone 2 (matrice plastifiée) atteignent simultanément les bords de la structure. La contrainte de cisaillement totale, définie comme la somme de la contrainte de cisaillement dans la phase matrice et l'effort tranchant dans la phase renforcement, devient alors constante (c'est-à-dire n'évolue plus avec  $\delta$ ). Sa valeur est donnée par :

$$\tau(x) = (\sigma_{yx} + v^r)(x) = C^m + \frac{m_0^r}{L} \quad (5.55)$$

En effet, la phase matrice étant plastifiée, la contrainte de cisaillement est égale à sa cohésion. La distribution de moments est alors linéaire, de valeurs respectives  $m_0^r$  et  $-m_0^r$  aux deux extrémités ( $x = 0$ ) et ( $x = 2L$ ) de la structure. L'effort tranchant est ainsi constant sur toute la structure prenant pour valeur la pente de la distribution de moments de flexion, c'est-à-dire  $v^r(x) = \frac{m_0^r}{L}$ .

La charge limite de la structure est alors donnée par :

$$\tau = C^m + \frac{m_0^r}{L} \quad (5.56)$$

La figure 5.9 donne l'allure de la courbe contrainte de cisaillement totale( $\tau$ )-déplacement ( $\delta$ ). Elle fait clairement apparaître une phase élastique jusqu'à la plastification de la ma-

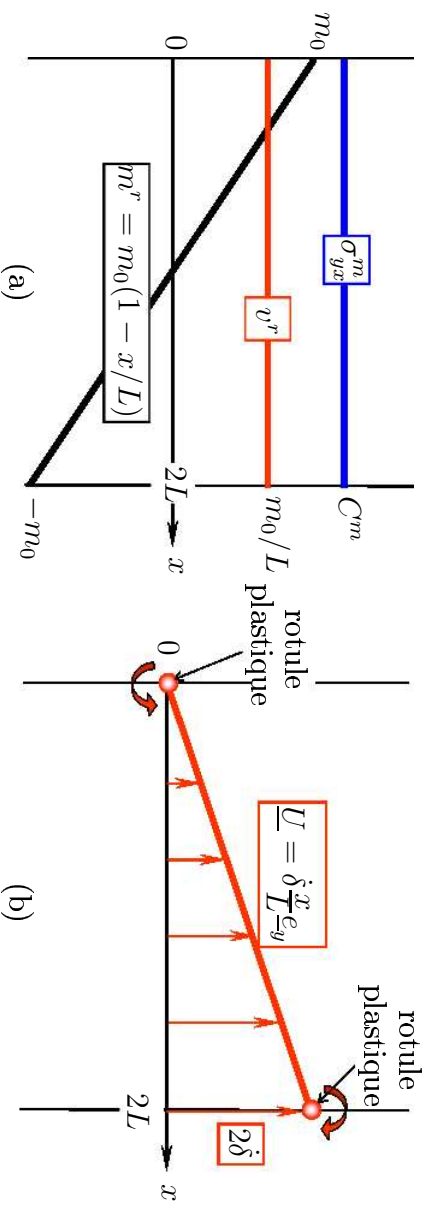


FIG. 5.8: Distribution des efforts intérieurs (a) et de vitesse de flèche (b) à la ruine plastique de la structure

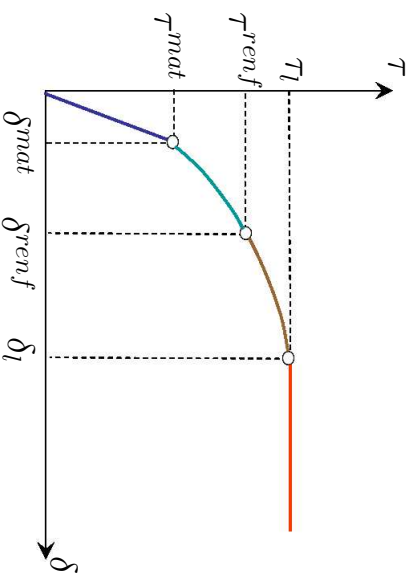


FIG. 5.9: Courbe effort de cisaillement total-déplacement ( $\rho > 1$ )

trix en  $x = L$  (point de coordonnées  $(\delta^{mat}, \tau^{mat})$ ), suivie d'une première phase élastoplastique correspondant à la propagation d'une zone plastique centrale jusqu'à la plastification de la phase renforcement en  $x = 0, 2L$  (point  $(\delta^{renf}, \tau^{renf})$ ). Une seconde phase élastoplastique se manifeste par la formation d'une densité de rotules plastiques en  $x = 0$  et  $x = 2L$  dans la phase renforcement et propagation de la plastification dans la matrice jusqu'à la charge limite (point  $(\delta_l, \tau_l)$ ), à laquelle est associé le mécanisme de ruine plastique représenté sur la figure 5.8 (b).

### 5.3.3 2<sup>ème</sup> cas : $\rho = 1$ (plastification simultanée des deux phases)

Ce cas correspond à la plastification simultanée des deux phases, matrice et renforcement. La limite d'élasticité de la phase matrice et le moment limite de la phase renforcement sont atteints simultanément, respectivement au milieu et aux deux extrémités de la structure.



Le développement de la solution dans ce cas est analogue à celui exposé dans la seconde phase élastoplastique du cas précédent ( $\rho > 1$ ). Celle-ci est donnée par (5.42), satisfaisant les conditions aux limites (5.54) et les conditions de continuité (5.44).

$$\begin{cases} f_1(x) = A_1 \exp\left(\frac{\eta x}{L}\right) + B_1 \exp\left(-\frac{\eta x}{L}\right) + C_1 x + D_1 & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha L \\ f_2(x) = \frac{A_2}{\gamma} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} + \frac{L^3}{3}\right) + B_2(x - L) + \delta & \text{si } \alpha L \leq x \leq (2 - \alpha)L \\ f_3(x) = A_3 \exp\left(\frac{\eta x}{L}\right) + B_3 \exp\left(-\frac{\eta x}{L}\right) + C_3 x + D_3 & \text{si } (2 - \alpha)L \leq x \leq 2L \end{cases} \quad (5.57)$$

La contrainte de cisaillement totale, constante le long de la structure, peut être calculée, par exemple, dans la zone 2 où la contrainte de cisaillement dans la phase matrice est égale à  $C^m$  et l'effort tranchant dans la phase renforcement est donné par le comportement élastique de cette phase, soit :

$$\tau_i(x) = C^m - \gamma f_2''(x) \quad (5.58)$$

Il vient, tous calculs faits, l'expression suivante en fonction du paramètre de chargement  $\delta$  :

$$\tau_i(x) = C^m - A_2(\delta) = \tau_i(\delta) \quad (5.59)$$

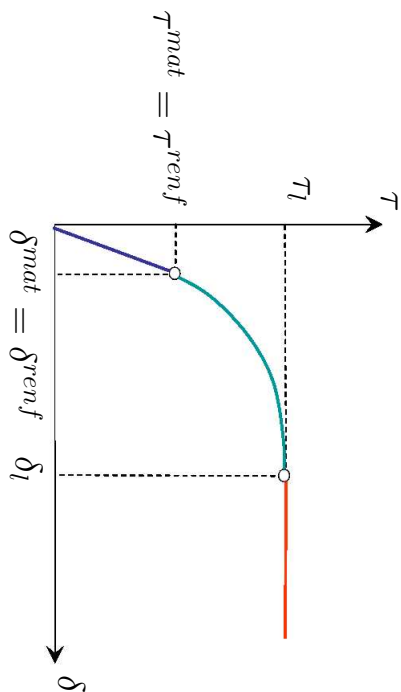
Cette solution reste valable tant que la phase matrice n'est pas totalement plastifiée, ce qui correspond à la ruine plastique de la structure. La charge limite de la structure est donnée par la même expression :

$$\tau = C^m + \frac{m_0'}{L} \quad (5.60)$$

L'allure de la courbe contrainte-déplacement correspondante est donnée par la figure 5.10.

### 5.3.4 3<sup>ème</sup> cas : $\rho < 1$ (plastification de la phase renforcement en premier)

Le cas où  $\rho < 1$  correspond à la situation où le moment limite de la phase renforcement est atteint aux deux extrémités de la phase renforcement, alors que la phase matrice reste élastique.

FIG. 5.10: *Courbe effort de cisaillement total déplacement ( $\rho=1$ )*

Etant donné que la plastification de la phase renforcement reste localisée aux extrémités de la structure, les deux phases matrice et renforcement sont élastiques en dehors des extrémités de la structure et les équations d'équilibre combinées avec les lois de comportement des phases nous amènent à une équation différentielle dont la solution est de la forme :

$$f(x) = A \exp\left(\frac{\eta x}{L}\right) + B \exp\left(-\frac{\eta x}{L}\right) + Cx + D \quad (5.61)$$

où  $A, B, C, D$  sont des constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} f(0) = 0, & f'(2L) = 0 \\ \gamma f''(0) = m_0^r, & \gamma f''(2L) = -m_0^r \end{cases} \quad (5.62)$$

Cette solution reste valable jusqu'à plastification de la phase matrice en  $x = L$ , c'est-à-dire lorsque :

$$\sigma_{yx}(L) = \mu^m f'(L) = C^m \quad (5.63)$$

A partir de ce moment, une zone plastique apparaît dans la phase matrice et s'élargit en direction des deux extrémités de la structure. La solution dans cette phase d'évolution est donnée par zone, comme introduit en (5.41), et la démarche de résolution est analogue à celle développée dans la seconde phase élastoplastique du cas ( $\rho > 1$ ), dont la solution, donnée par (5.42), satisfait les conditions aux limites (5.54) et les conditions de continuité (5.44).

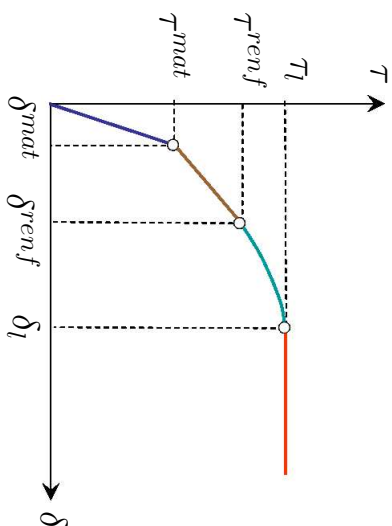


FIG. 5.11: *Courbe effort de cisaillement total déplacement* ( $\rho < 1$ )

Cette solution est valable jusqu'à plastification totale de la matrice, tant que la phase matrice n'est pas totalement plastifiée, ce qui correspond à la charge de ruine plastique de la structure donnée, encore une fois, par :

$$\tau_l = C^m + \frac{m_0^r}{L} \quad (5.64)$$

La courbe  $(\tau - \delta)$  est représentée sur la figure 5.11.

## 5.4 Détermination des paramètres élasto-plastiques

Tout comme les paramètres élastiques (voir chapitre 4), les paramètres élastoplastiques du modèle multiphasique peuvent être déterminés à partir des caractéristiques géométriques de la structure renforcée et des propriétés mécaniques des deux constituants, sols et inclusions de renforcement.

### 5.4.1 Phase matrice

Compte tenu du fait que la fraction volumique du sol est très proche de l'unité, les paramètres élastoplastiques de la phase matrice sont approximés par ceux du sol. La phase matrice obéit ainsi au même critère que le sol qu'elle représente :

$$f^m \cong f^{sol} \quad (5.65)$$

faisant ainsi intervenir dans le cas d'un critère de plasticité de Mohr-Coulomb, les mêmes paramètres élastoplastiques :

$$C^m \cong C^{sol} \quad \text{et} \quad \varphi^m \cong \varphi^{sol} \quad (5.66)$$

### 5.4.2 Phase renforcement

Les paramètres élastoplastiques de la phase renforcement sont, quant à eux, obtenus en divisant les paramètres correspondants à chaque inclusion de renforcement, par l'aire de la section droite du volume élémentaire représentatif de sol renforcé associé à cette inclusion. La phase renforcement obéit au même critère qu'une inclusion de renforcement. Il vient alors que :

$$\begin{cases} n_0^r = \frac{N_0}{S} \\ v_0^r = \frac{V_0}{S} \\ m_0^r = \frac{M_0}{S} \end{cases} \quad (5.67)$$

où  $S$  désigne la section transversale à la direction des inclusions du volume élémentaire représentatif et  $n_0$ ,  $v_0$ ,  $m_0$  désignent respectivement les limites d'élasticité d'une inclusion de renforcement sous chargement de traction-compression pure, de cisaillement pure et de flexion pure.

On supposera par la suite que les inclusions, et par suite la phase renforcement, sont infiniment résistantes à l'effort tranchant, c'est-à-dire :

$$V_0 \cong \infty \longrightarrow v_0^r \cong \infty \quad (5.68)$$

Les résistances des inclusions de renforcement en traction et flexion simples peuvent être déduites des caractéristiques géométriques de la section de ces inclusions et des propriétés de résistance de leur matériau constitutif, par un raisonnement du *Calcul à la rupture*. On obtient ainsi dans le cas où les inclusions sont des tubes minces (voir par exemple

Challanel et de Buhan, (2004) [17]) :

$$\begin{cases} n_0^r = \frac{2\pi R e \sigma_0}{S} \\ m_0^r = \frac{4R^2 e \sigma_0}{S} \end{cases} \quad (5.69)$$

où  $R$  désigne le rayon de l'inclusion,  $e$  son épaisseur (avec  $e \ll R$ ) et  $\sigma_0$  est la résistance en traction simple du matériau constitutif des renforcements (i.e. acier). Le critère de

plasticité portant sur les efforts généralisés pour ce type d'inclusion, modélisée comme une poutre, est donné par :

$$F(N, M) = \left| \frac{M}{M_0} \right| - \cos \left( \frac{\pi N}{2 N_0} \right) \leq 0 \quad (5.70)$$

Dans le cas où de telles inclusions sont utilisées, le critère de plasticité de la phase renforcement s'écrit tout simplement :

$$f^r(n^r, m^r) = \left| \frac{m^r}{m_0^r} \right| - \cos \left( \frac{\pi n^r}{2 n_0^r} \right) \leq 0 \quad (5.71)$$

où les limites d'élasticité en traction simple  $n_0^r$  et en flexion simple  $m_0^r$  de la phase renforcement sont données par (5.69).

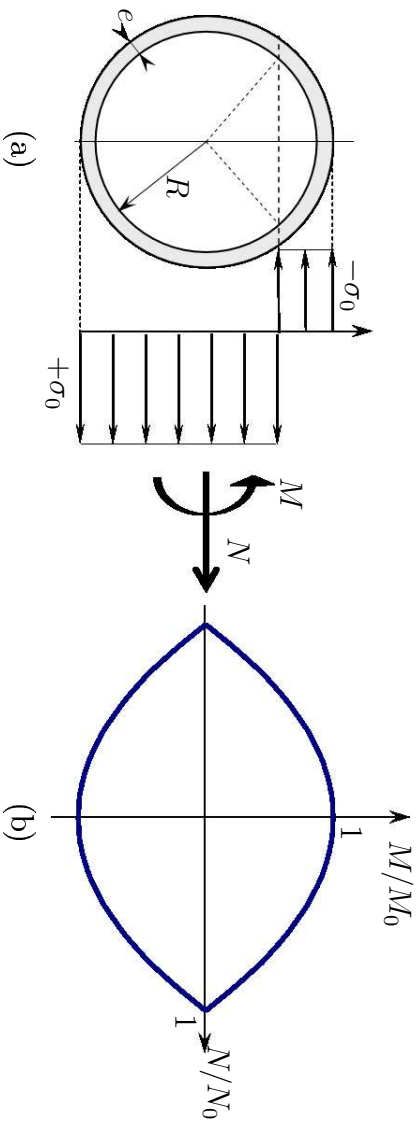


FIG. 5.12: Diagramme d'interaction d'une inclusion de renforcement ayant la forme d'une tube mince

*Remarque* : Dans le cas où le matériau constituant les inclusions de renforcement obéit à une loi de comportement élastique parfaitement plastique avec une règle d'écoulement associée (cas des inclusions métalliques), le comportement de l'inclusion est lui-même élastoplastique avec une règle d'écoulement également associée, de sorte que :

$$\dot{\epsilon}_p^r = \dot{\eta}^r \frac{\partial f^r}{\partial n^r}, \quad \dot{\theta}_p^r = 0, \quad \dot{\chi}_p^r = \dot{\eta}^r \frac{\partial f^r}{\partial m^r} \quad \text{avec} \quad \dot{\eta}^r \geq 0 \quad (5.72)$$

La question se pose, en revanche, dans le cas d'inclusions de renforcement telles que des pieux en béton, matériau au comportement plus complexe, notamment en ce qui concerne la règle d'écoulement plastique (angle de dilatance inférieur à l'angle de frottement). On admettra toutefois ici, pour simplifier, que les relations 5.72 sont également valables dans ce cas.

## 5.5 Position d'un problème du calcul à la rupture pour les systèmes en milieux biphasiques

### 5.5.1 Domaine des chargements potentiellement supportables

De façon générale, le domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables est constitué des chargements  $\underline{Q}$  tels qu'il existe un champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^m$ , une distribution d'efforts généralisés  $(n^r, v^r, m^r)$  et une densité volumique d'efforts d'interaction  $\underline{I}$  *statiquement admissibles* avec  $\underline{Q}$  et vérifiant les critères de résistance de la phase matrice, de la phase renforcement et de l'interaction.

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}^m, (n^r, v^r, m^r); \underline{I} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m, \quad (n^r, v^r, m^r) \in G^r \quad \text{et} \quad \underline{I} \in G^I \end{cases} \quad (5.73)$$

où  $G^m$ ,  $G^r$  et  $G^I$  désignent respectivement les *domaines de résistance* de la phase matrice, de la phase renforcement et de la loi d'interaction. Ces trois domaines sont entièrement déterminés par la donnée d'un critère de résistance pour chacune des deux phases et pour la loi d'interaction analogue aux critères de plasticité introduits précédemment<sup>1</sup>.

Tout comme dans le cas du comportement élastoplastique, nous nous placerons ici dans l'hypothèse où l'effort d'interaction  $\underline{I}$  entre phases n'est soumis à aucune limitation, de sorte que le domaine caractérisant la résistance de cette interaction est infini :

$$G^I = \mathfrak{R}^3 \quad (5.74)$$

### 5.5.2 Approche statique par l'intérieur de $K$

Cette approche consiste à mettre en œuvre la définition (5.73) du domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables. Tout chargement  $\underline{Q}$  est potentiellement supportable, s'il peut être équilibré par un champ d'efforts intérieurs vérifiant les critères de résistance des deux phases. Elle permet d'approcher le domaine  $K$  par l'intérieur et donc les chargements extrêmes situés sur la frontière de  $K$  par valeurs inférieures, aboutissant à un *minorant de la charge extrême* si l'on raisonne par trajets de chargements radiaux.

<sup>1</sup>Rappelons que dans le cadre de la théorie du *Calcul à la rupture* (Salençon, (1983) [65]), la notion de critère de résistance généralise celle du critère de plasticité et que le raisonnement du *Calcul à la rupture* ne fait plus référence à l'élasticité des matériaux.

### 5.5.3 Approche cinématique par l'extérieur de $K$

Tout comme dans le cas d'un milieu continu classique, cette approche repose sur la dualisation des équations d'équilibre du milieu biphasique par le biais du *principe des puissances virtuelles*. Désignant par  $\{\dot{\underline{\xi}}, \dot{\omega}\}$  un champ de vitesse virtuelle<sup>2</sup> cinématiquement admissible dans le mode de chargement, la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* s'écrit :

$$P_e(\dot{\underline{\xi}}, \dot{\omega}) = \int_{\Omega} \underline{F} \cdot \dot{\underline{\xi}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{T} \cdot \dot{\underline{\xi}} + C\dot{\omega}) dS = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} \quad (5.75)$$

où  $\underline{Q}$  désigne le vecteur des *paramètres de chargement* et  $\dot{\underline{q}}$  le vecteur des paramètres cinématiques associés.

La *puissance virtuelle de déformation* s'écrit dans ce même champ de vitesse virtuel :

$$P_d(\dot{\underline{\xi}}, \dot{\omega}) = \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^m : \dot{\underline{\xi}} + n^r \hat{\varepsilon}^r + v^r \hat{\theta}^r + m^r \hat{\chi}^r) d\Omega \quad (5.76)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\underline{\xi}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\text{grad}}(\dot{\underline{\xi}}) + {}^t \underline{\text{grad}}(\dot{\underline{\xi}}) \right) \\ \hat{\varepsilon}^r = \frac{\partial \dot{\xi}_x^r}{\partial x}, \quad \hat{\theta}^r = \frac{\partial \dot{\xi}_y^r}{\partial x} - \dot{\omega}, \quad \hat{\chi}^r = \frac{\partial \dot{\theta}^r}{\partial x} \end{cases} \quad (5.77)$$

Le *principe des puissances virtuelles* s'écrit alors :

$$(\underline{\sigma}^m; (n^r, v^r, m^r)) \text{ S.A avec } \underline{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \{\dot{\underline{\xi}}, \dot{\omega}\} \text{ C.A. } \dot{\underline{q}} \\ \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} = \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^m : \dot{\underline{\xi}} + n^r \hat{\varepsilon}^r + v^r \hat{\theta}^r + m^r \hat{\chi}^r) d\Omega \end{cases} \quad (5.78)$$

On introduit alors la *puissance résistante maximale* d'un milieu biphasique dans le champ de vitesse virtuel  $\{\dot{\underline{\xi}}, \dot{\omega}\}$ , définie par :

$$P_{rm}(\dot{\underline{\xi}}, \dot{\omega}) = \int_{\Omega} \pi^m(\underline{\hat{\xi}}) d\Omega + \int_{\Omega} \pi^r(\hat{\varepsilon}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi^m(\underline{m}; [\dot{\underline{\xi}}]) d\Sigma + \int_{\Sigma} \pi^r([\dot{\underline{\xi}}], [\dot{\omega}]) d\Sigma \quad (5.79)$$

Dans cette dernière expression,  $\pi^m(\cdot)$  et  $\pi^r(\cdot)$  désignent les fonctions d'appui des domaines de résistance de la phase matrice  $G^m$  et de la phase renforcement  $G^r$ , définies par :

<sup>2</sup>La notation avec chapeau ( $\hat{\cdot}$ ) est destinée à rappeler le caractère virtuel de ces champs.

$$\begin{cases} \pi^m(\underline{\hat{\xi}}) = \sup\{\underline{\sigma}^m : \underline{\hat{\xi}}; \quad \underline{\sigma}^m \in G^m\} \\ \pi^r(\hat{\varepsilon}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) = \sup\{n^r \varepsilon^r + v^r \hat{\theta}^r + m^r \hat{\chi}^r; \quad (n^r, v^r, m^r) \in G^r\} \end{cases} \quad (5.80)$$

$\Sigma$  représente l'ensemble des surfaces de discontinuité du champ  $\{\underline{\hat{\xi}}, \hat{\omega}\}$ , de normale unitaire  $\underline{n}$ . Les fonctions d'appui correspondantes étant :

$$\begin{cases} \pi^m(\underline{n}, [\underline{\hat{\xi}}]) = \sup\{(\underline{\sigma}^m \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{\hat{\xi}}]; \quad \underline{\sigma}^m \in G^m\} \\ \pi^r([\hat{\xi}], [\hat{\omega}]) = \sup\{n^r [\hat{\xi}_x] + v^r [\hat{\xi}_y] + m^r [\hat{\omega}]; \quad (n^r, v^r, m^r) \in G^r\} \end{cases} \quad (5.81)$$

([X] représente le saut de la variable X à la traversée de  $\Sigma$  en suivant la normale  $\underline{n}$ ).

Cette puissance résistante maximale apparaîtrait alors comme un *majorant* de la puissance de déformation pour les efforts intérieurs vérifiant les critères de résistance.

La dualisation des équations d'équilibre du milieu biphasique, exprimée à travers ce principe des puissances virtuelles, et des critères de résistance des deux phases, permet de caractériser l'ensemble K des chargements potentiellement supportables comme suit :

$$\underline{Q} \in K \iff \forall \left( \hat{\xi}, \hat{\omega} \right) \quad \underline{Q} \cdot \hat{q} \leq P_{rm} \left( \hat{\xi}, \hat{\omega} \right) \quad (5.82)$$

Une telle démarche est appelée *approche cinématique par l'extérieur*. Elle permet d'obtenir des majorants des chargements extrêmes.

### 5.5.4 Exemple de mise en œuvre

On se propose ici de mettre en œuvre les approches du *Calcul à la rupture* pour un milieu biphasique sur l'exemple illustratif de la couche de sol renforcé sollicité en cisaillement transverse, déjà traité au paragraphe 5.3 dans un cadre élastoplastique, et en particulier de calculer directement la charge limite. Les critères de résistance ne sont autres que les critères de plasticité des phases.

- *Approche statique par l'intérieur* :

On considère le système d'efforts intérieurs suivant :



$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^m(x) = C^m (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \\ n^r(x) = 0 \\ v^r(x) = \frac{m_0^r}{L} \\ m^r(x) = -\frac{m_0^r}{L}x + m_0^r \end{array} \right. \quad (5.83)$$

qui est bien *statiquement admissible* avec le mode de chargement et équilibre une contrainte de cisaillement totale en  $x = 2L$  égale à :

$$Q = \tau = C^m + \frac{m_0^r}{L} \quad (5.84)$$

Par ailleurs, ce champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  vérifie bien le critère de résistance de von Mises. La distribution des efforts généralisés ( $n^r, v^r, m^r$ ) vérifie également le critère de résistance de la phase renforcement (5.28). L'effort  $Q$  équilibré par cette distribution d'efforts intérieurs est donc potentiellement supportable. La charge limite de la structure, dans ce mode de chargement (cisaillement) est supérieure à  $Q$ , soit :

$$Q_l \geq C^m + \frac{m_0^r}{L} \quad (5.85)$$

- *Approche cinématique* :

On considère le champ de vitesse virtuel suivant : (voir figure 5.8 (b))

$$\underline{\underline{\dot{\xi}}}(x) = \dot{\theta} x \underline{e}_y \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\omega}(x) = \dot{\theta} \quad \forall x \in ]0, 2L[ \\ \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(2L) = 0 \end{array} \right. \quad (5.86)$$

La puissance des efforts extérieurs dans ce champ de vitesse virtuel est donnée par :

$$P_e(\underline{\underline{\dot{\xi}}}, \hat{\omega}) = Q \dot{\xi}_y(x=2L) = Q \dot{\theta} 2L \quad (5.87)$$

tandis que la *puissance résistante maximale* calculée, tout comme  $P_e$ , par unité de surface dans le plan  $Oyz$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}
P_{rm}(\hat{\xi}, \hat{\omega}) &= \int_0^{2L} \pi^m(\hat{\underline{\xi}}) dx + \int_0^{2L} \pi^r(\hat{\varepsilon}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) dx + \pi^r([\hat{\theta}](0)) + \pi^r([\hat{\theta}](2L)) \\
&= C^m \sqrt{2\underline{\hat{\xi}} : \underline{\hat{\xi}}} 2L + 2 m_0^r |\hat{\theta}| \\
&= C^m |\hat{\theta}| 2L + 2 m_0^r |\hat{\theta}| \\
&= \left( C + \frac{m_0^r}{L} \right) |\hat{\theta}| 2L
\end{aligned} \tag{5.88}$$

d'où :

$$\underline{Q} \in K \Rightarrow \forall \hat{\theta} \quad Q \hat{\theta} 2L \leq \left( C + \frac{m_0^r}{L} \right) |\hat{\theta}| 2L \tag{5.89}$$

soit, en prenant  $\hat{\theta} > 0$  :

$$(\underline{Q} \in K \Leftrightarrow Q \leq Q_l) \implies Q \leq C + \frac{m_0^r}{L} \tag{5.90}$$

La charge limite de la structure, dans ce mode de chargement (cisaillement) vérifie donc :

$$Q_l \leq C^m + \frac{m_0^r}{L} \tag{5.91}$$

Les deux approches, statique et cinématique, permettent en général d'avoir seulement un encadrement de la charge limite de la structure. Dans le cas présent, les deux inégalités (5.85) et (5.91) donnent la valeur exacte de la charge limite de la structure sous un chargement de cisaillement, puisque les deux bornes coïncident. On retrouve ainsi la charge de ruine plastique déterminée en (5.3) :

$$Q_l = C^m + \frac{m_0^r}{L} \tag{5.92}$$

## 5.6 Conclusion

Une extension du modèle multiphasique à la prise en compte de comportements élasto-plastiques des différents constituants a été réalisée. La solution analytique du problème

## 140 Comportement élastoplastique et à la rupture du milieu multiphasique

de cisaillement d'une bande de sol infinie soumise à un chargement de cisaillement ayant été développée, cette solution de référence sera adoptée comme moyen de validation du code de calcul numérique, que l'on présentera dans le chapitre suivant.

Le calcul à la rupture des milieux biphasiques a également été présenté. Cet outil d'estimation de la charge de ruine sera utilisé tout au long de ce travail comme moyen de contrôle des résultats.

\* \*

\*

# Chapitre 6

## Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élastoplasticité

### Sommaire

---

6.1	Introduction . . . . .	143
6.2	Position d'un problème d'élastoplasticité pour le milieu biphasique . . . . .	143
6.3	Discretisation temporelle du processus de chargement . . . . .	144
6.4	Algorithme de plasticité implicite . . . . .	151
6.5	Méthode des éléments finis appliquée au calcul élastoplastique des structures biphasiques . . . . .	153
6.5.1	Principe du minimum de l'énergie potentielle . . . . .	153
6.5.2	Formulation variationnelle . . . . .	155
6.5.3	Principe du minimum discrétisé . . . . .	156
6.6	Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élastoplasticité . . . . .	158
6.7	Premières applications du code de calcul multiphasique en élastoplasticité . . . . .	160
6.7.1	Dimensionnement d'une fondation mixte . . . . .	160
6.7.2	Analyse de stabilité d'une pente renforcée par inclusions rigides . . . . .	174
6.8	Conclusion . . . . .	179

---



## 6.1 Introduction

On s'intéresse dans ce dernier chapitre à la formulation par éléments finis du modèle multiphasique dans le cadre d'un comportement élastoplastique des différents constituants, à sa mise en œuvre numérique dans le code de calcul multiphasique, et à son application pour simuler l'évolution élastoplastique des structures renforcées par inclusions rigides.

La validation du module "élastoplasticité" est faite par comparaison à différentes solutions analytiques de problèmes mettant en jeu des structures non renforcées dans un premier temps (fondation sur sol homogène par exemple), puis des structures renforcées par inclusions souples et rigides.

La deuxième partie du présent chapitre s'intéresse à l'application de cet outil numérique pour le calcul d'ouvrages renforcés par inclusions rigides. Un premier exemple de dimensionnement d'une fondation sur sol compressible, soumise à un chargement combiné est traité. La deuxième étude concerne le renforcement des pentes par inclusions rigides, où l'analyse d'un exemple montre la pertinence de ce type de renforcement et l'importance des effets de flexion dans la stabilité de tels ouvrages.

## 6.2 Position d'un problème d'élastoplasticité pour le milieu biphasique

On considère un volume  $\Omega$  occupé par un milieu multiphasique constitué de la superposition d'une phase matrice et d'une phase renforcement parfaitement adhérentes entre elles, et obéissant toutes deux à un comportement élastique parfaitement plastique. On rappelle les équations régissant l'évolution d'un tel système sous l'hypothèse des *déformations planes* dans  $(Oxy)$  :

- Equations d'équilibre :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^m(t) + n^r(t)e_x \otimes e_x + v^r(t)e_y \otimes e_x) + \rho^m \underline{F}^m(t) + \rho^r \underline{F}^r(t) = \underline{0} \quad (6.1)$$

$$\operatorname{div}(m^r(t)e_z \otimes e_x) + v^r(t)e_z = \underline{0} \quad (6.2)$$

- Comportement élastoplastique :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{C}}^m : \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m \right) \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} n^r = \alpha^r (\varepsilon^r - \varepsilon_p^r) \\ v^r = \beta^r (\theta^r - \theta_p^r) \\ m^r = \gamma^r (\gamma^r - \gamma_p^r) \end{cases} \quad (6.4)$$

- Critères de plasticité :

$$\begin{cases} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m(t)) \leq 0 \iff \underline{\underline{\sigma}}^m(t) \in C^m(t) \\ f^r(n^r(t), v^r(t), m^r(t)) \leq 0 \iff (n^r(t), v^r(t), m^r(t)) \in C^r(t) \end{cases} \quad (6.5)$$

- Règles d'écoulement (cas associé) :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^m = \eta^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m}(\underline{\underline{\sigma}}^m) \quad \text{avec} \quad \eta^m \begin{cases} > 0 & \text{si } f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_p^r = \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial n^r}(n^r, v^r, m^r) \\ \dot{\theta}_p^r = \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial v^r}(n^r, v^r, m^r) \quad \text{avec} \quad \eta^r \begin{cases} > 0 & \text{si } f^r(n^r, v^r, m^r) = f^r(n^r, v^r, m^r) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \dot{\chi}_p^r = \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial m^r}(n^r, v^r, m^r) \end{cases} \quad (6.7)$$

- Conditions aux limites :

$$\begin{cases} (\underline{\underline{\sigma}}^m(t) + n^r(t) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r(t) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{\nu} = \underline{T}^d(t) & \text{sur } \partial\Omega_T \\ (m^r(t) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) \underline{\nu} = \underline{C}^d(t) & \text{sur } \partial\Omega_C \end{cases} \quad (6.8)$$

( $\underline{\nu}$  : normale unitaire extérieure)

### 6.3 Discrétisation temporelle du processus de chargement

Compte tenu du caractère incrémental des équations décrivant le comportement élastoplastique du milieu biphasique, le processus du chargement est classiquement subdivisé

en *pas de chargement*. Notant par  $\{Q\}$  le vecteur des paramètres de chargement total appliqué au milieu biphasique, on désignera par  $\{\Delta Q\}(i)$ , l'incrément de chargement qui lui est appliqué à l'instant  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , défini par :

$$\{\Delta Q(i)\} = \{Q(i+1)\} - \{Q(i)\} \quad (6.9)$$

Supposant comme la solution du problème d'évolution à l'instant  $t_i$ , sous le chargement  $\{Q_i\}$ , en termes de champ de déplacement-rotation  $\{\underline{\xi}, \omega^r\}(t_i)$ , de champs de contrainte  $\{\underline{\underline{\sigma}}^m, (n^r, v^r, m^r)\}(t_i)$  et de champ de déformation plastique  $\{\underline{\underline{\varepsilon}}_p^m, (\varepsilon_p^r, \theta_p^r, \chi_p^r)\}(t_i)$ , la recherche de la solution du problème d'évolution à l'instant  $t_{i+1}$  consiste à actualiser la solution à l'instant  $t_i$  par la donnée des incréments des champs de déplacement-rotation  $\{\Delta \underline{\underline{\xi}}, \Delta \omega^r\}(t_i)$  et des champs de contrainte  $\{\Delta \underline{\underline{\sigma}}^m, (\Delta n^r, \Delta v^r, \Delta m^r)\}(t_i)$  tels que les champs totaux vérifient les équations (6.1) à (6.5). Ces champs sont donnés par :

$$\begin{cases} \underline{\xi}(t_{i+1}) = \underline{\xi}(t_i) + \Delta \underline{\xi}(t_i) \\ \omega(t_{i+1}) = \omega(t_i) + \Delta \omega(t_i) \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m(t_{i+1}) = \underline{\underline{\sigma}}^m(t_i) + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m(t_i) \\ n^r(t_{i+1}) = n^r(t_i) + \Delta n^r(t_i) \\ v^r(t_{i+1}) = v^r(t_i) + \Delta v^r(t_i) \\ m^r(t_{i+1}) = m^r(t_i) + \Delta m^r(t_i) \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m(t_{i+1}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^m(t_{i+1}) - \left( \underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}^m(t_{i+1}) \\ \varepsilon_p^r(t_{i+1}) = \varepsilon^r(t_{i+1}) - \frac{n^r(t_{i+1})}{\alpha^r} \\ \theta_p^r(t_{i+1}) = \theta^r(t_{i+1}) - \frac{v^r(t_{i+1})}{\beta^r} \\ \chi_p^r(t_{i+1}) = \chi^r(t_{i+1}) - \frac{m^r(t_{i+1})}{\gamma^r} \end{cases} \quad (6.12)$$



Supposant connus les *incrément*s de *déformations plastiques* définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m(t_{i+1}) = \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m(t_{i+1}) - \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m(t_i) \\ \Delta \varepsilon_p^r(t_{i+1}) = \varepsilon_p^r(t_{i+1}) - \varepsilon_p^r(t_i) \\ \Delta \theta_p^r(t_{i+1}) = \theta_p^r(t_{i+1}) - \theta_p^r(t_i) \\ \Delta \chi_p^r(t_{i+1}) = \chi_p^r(t_{i+1}) - \chi_p^r(t_i) \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Dans ce qui suit, et pour alléger les notations, la dépendance du temps est omise.

La résolution du problème d'élastoplasticité incrémental est équivalente à celle du problème d'élasticité suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m; (\Delta n^r, \Delta v^r, \Delta m^r) \} \\ \{ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m; (\Delta \varepsilon^r, \Delta \theta^r, \Delta \chi^r) \} \end{array} \right\} = \text{Elas.} \left[ \{ \Delta \mathbf{Q} \}; \left\{ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m; (\Delta \varepsilon_p^r, \Delta \theta_p^r, \Delta \chi_p^r) \right\} \right] \quad (6.14)$$

c'est-à-dire d'un problème d'élasticité dans lequel le champ des *incrément*s de *déformations plastiques* est *donné*.

L'incrément des contraintes dans la phase matrice et les *incrément*s des efforts intérieurs dans la phase renforcement s'écrivent d'après (6.3) et (6.4) :

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{C}}^m : \left( \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m \right) \quad (6.15)$$

et,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta n^r = \alpha^r (\Delta \varepsilon^r - \Delta \varepsilon_p^r) \\ \Delta v^r = \beta^r (\Delta \theta^r - \Delta \theta_p^r) \\ \Delta m^r = \gamma^r (\Delta \chi^r - \Delta \chi_p^r) \end{array} \right. \quad (6.16)$$

et les *incrément*s des *déformations plastiques*  $\left\{ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m; (\Delta \varepsilon_p^r, \Delta \theta_p^r, \Delta \chi_p^r) \right\}$  sont donnés par la règle de découlement plastique (6.6) de la phase matrice et celle (6.7) de la phase renforcement, écrites sous forme incrémentale comme suit :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{p}^m = \Delta \eta^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} (\underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m) \quad \text{avec} \quad \Delta \eta^m \begin{cases} > 0 & \text{si } f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_p^r = \Delta \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial n^r} (n^r + \Delta n^r) \\ \Delta \theta_p^r = \Delta \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial v^r} (v^r + \Delta v^r) & \text{avec } \Delta \eta^r \begin{cases} > 0 & \text{si } f^r(n^r + \Delta n^r, v^r + \Delta v^r, m^r + \Delta m^r) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \Delta \chi_p^r = \Delta \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial m^r} (m^r + \Delta m^r) \end{cases} \quad (6.18)$$

Pour chaque phase, deux cas se présentent suivant la nature de l'évolution subie, élastique ou élastoplastique, ou d'une manière analogue selon la position de l'état de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m$  (resp.  $(n^r + \Delta n^r, v^r + \Delta v^r, m^r + \Delta m^r)$ ) par rapport au convexe  $C^m$  (resp.  $C^r$ ) :

- *Phase matrice* :

- 1<sup>er</sup> cas : L'état de contrainte est à l'intérieur du convexe  $C^m$  :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m) < 0 \quad (6.19)$$

L'évolution subie par la phase matrice est *élastique*. L'incrément des déformations plastiques  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m$  est nul.

- 2<sup>ème</sup> cas : L'état de contrainte est sur le bord du convexe  $C^m$  :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \quad (6.20)$$

La phase matrice a subi une évolution élastoplastique. L'état de contrainte s'écrit alors, en combinant (6.17) et (6.15) :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^m : \Delta \underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^m - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^m : \Delta \underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}_p^m \\ \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^m : \Delta \underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^m - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^m : \Delta \eta^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} (\underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m) \end{cases} \quad \text{avec } \Delta \eta^m > 0 \quad (6.21)$$

Par ailleurs, on désigne par  $\sigma_{p.a.}^m$  l'état de contrainte défini comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{p.a.}^m = \text{proj.}_{C^m} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^m : \Delta \underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^m \right\} \quad (6.22)$$

où  $\text{proj}_{C^m}$  représente la projection orthogonale sur le convexe  $C^m$  au sens du produit scalaire défini à partir de la forme quadratique de l'énergie élastique de la phase matrice, soit :

$$\langle \underline{\sigma}, \underline{\sigma}' \rangle = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : C^m : \underline{\sigma}' \quad (6.23)$$

Il en ressort que  $\underline{\sigma}_{\text{p.a.}}^m$  est la solution du problème de minimisation :

$$\text{Min}_{\underline{\sigma}' \in C^m} \left\{ \left( \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\sigma}}' \right) : \left( \underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \left( \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\sigma}}' \right) \right\} \quad (6.24)$$

qui équivaut au problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{cases} \text{Min}_{\underline{\underline{\sigma}}'} \left( \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\sigma}}' \right) : \left( \underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \left( \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\sigma}}' \right) \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}') \leq 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

Introduisant alors classiquement le Lagrangien  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}(\underline{\underline{\sigma}}', \lambda) = - \left( \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\sigma}}' \right) : \left( \underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \left( \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\sigma}}' \right) - \lambda f^m(\underline{\underline{\sigma}}'), \lambda \geq 0 \quad (6.26)$$

la solution  $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m$  du problème (6.25) vérifie en vertu du théorème de Kuhn et Tucker, les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m, \lambda^*) = \underline{\underline{0}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m, \lambda^*) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} - \left( \underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \left( \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m \right) - \lambda^* \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m) = 0 \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m) = 0 \text{ et } \lambda^* > 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

d'où,

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m = \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{C}}^m : \lambda^* \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m), \quad f^m(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m) = 0 \text{ et } \lambda^* > 0 \quad (6.28)$$

soit, par comparaison avec (6.21) :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m = \underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m \\ \lambda^* = \Delta \eta \end{cases} \quad (6.29)$$

il en ressort alors que :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m = \text{proj.}_{C^m} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m \right\} \quad (6.30)$$

De manière analogue, on distingue, quant à l'évolution de la phase renforcement, deux possibilités :

- 1<sup>er</sup> cas : La phase renforcement a subi une évolution élastique. L'incrément des efforts intérieurs est tel que :

$$f^r (n^r + \Delta n^r, v^r + \Delta v^r, m^r + \Delta m^r) \leq 0 \quad (6.31)$$

et sont classiquement donnés, d'après (6.16) où les déformations plastiques sont nulles, par :

$$\begin{cases} n^r + \Delta n^r = n^r + \alpha^r \Delta \varepsilon^r \\ v^r + \Delta v^r = v^r + \beta^r \Delta \theta^r \\ m^r + \Delta m^r = m^r + \gamma^r \Delta \chi^r \end{cases} \quad (6.32)$$

- 2<sup>ème</sup> cas : La phase renforcement a subi une évolution élastoplastique. L'état de contrainte dans ladite phase est sur le bord du convexe  $C^r$ . En combinant (6.18) et (6.16), les efforts intérieurs sont donnés par :

$$\begin{cases} n^r + \Delta n^r = n^r + \alpha^r \Delta \varepsilon^r - \alpha^r \Delta \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial n^r} (n^r + \Delta n^r, v^r + \Delta v^r, m^r + \Delta m^r) \\ v^r + \Delta v^r = v^r + \beta^r \Delta \theta^r - \beta^r \Delta \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial v^r} (n^r + \Delta n^r, v^r + \Delta v^r, m^r + \Delta m^r) \\ m^r + \Delta m^r = m^r + \gamma^r \Delta \chi^r - \gamma^r \Delta \eta^r \frac{\partial f^r}{\partial m^r} (n^r + \Delta n^r, v^r + \Delta v^r, m^r + \Delta m^r) \end{cases} \quad (6.33)$$

Par ailleurs, on désigne par  $(n_{\text{p.a.}}^r, v_{\text{p.a.}}^r, m_{\text{p.a.}}^r)$  les efforts intérieurs définis par :

$$(n_{\text{p.a.}}^r, v_{\text{p.a.}}^r, m_{\text{p.a.}}^r) = \text{proj.}_{C^r} \{ n^r + \alpha^r \Delta \varepsilon^r, v^r + \beta^r \Delta \theta^r, m^r + \gamma^r \Delta \chi^r(i) \} \quad (6.34)$$

où proj désigne la projection orthogonale sur le convexe  $C^r$  au sens du produit scalaire associé à la forme quadratique de l'énergie élastique de la phase renforcement :

$$\langle (n, v, m), (n', v', m') \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{nm'}{\alpha^r} + \frac{vv'}{\beta^r} + \frac{mm'}{\gamma^r} \right) \quad (6.35)$$

Le système d'efforts intérieurs  $(n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r)$  est donc la solution du problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{cases} \text{Min} \left( \frac{1}{\alpha^r} (n^r + \alpha^r \Delta \varepsilon^r - n')^2 + \frac{1}{\beta^r} (v^r + \beta^r \Delta \theta^r - v')^2 + \frac{1}{\gamma^r} (m^r + \gamma^r \Delta \chi^r - m')^2 \right) \\ f^r(n', v', m') \leq 0 \end{cases} \quad (6.36)$$

de sorte que, introduisant le Lagrangien  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}((n', v', m'); \lambda \geq 0) = -\frac{1}{\alpha^r} (n^r + \alpha^r \Delta \varepsilon^r - n')^2 - \frac{1}{\beta^r} (v^r + \beta^r \Delta \theta^r - v')^2 - \frac{1}{\gamma^r} (m^r + \gamma^r \Delta \chi^r - m')^2 - \lambda f^r(n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) \quad (6.37)$$

cette solution  $(n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r)$  vérifie les conditions de Kuhn et Tucker suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n}((n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r), \lambda^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}((n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r), \lambda^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}((n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r), \lambda^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}((n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r), \lambda^*) = 0 \end{cases} \quad (6.38)$$

qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\alpha^r} (n^r + \alpha^r \Delta \varepsilon^r - n_{p.a.}^r) - \lambda^* \frac{\partial f^r}{\partial n}(n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) = 0 \\ -\frac{1}{\beta^r} (v^r + \beta^r \Delta \theta^r - v_{p.a.}^r) - \lambda^* \frac{\partial f^r}{\partial v}(n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) = 0 \\ -\frac{1}{\gamma^r} (m^r + \gamma^r \Delta \chi^r - m_{p.a.}^r) - \lambda^* \frac{\partial f^r}{\partial m}(n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) = 0 \\ f^r(n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) = 0 \text{ et } \lambda^* > 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

soit, après simplification :

$$\begin{cases} n_{p.a.}^r = n^r + \alpha^r \Delta \varepsilon^r - \alpha^r \lambda^* \frac{\partial f^r}{\partial n} (n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) \\ v_{p.a.}^r = v^r + \beta^r \Delta \theta^r - \beta^r \lambda^* \frac{\partial f^r}{\partial v} (n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) \\ m_{p.a.}^r = m^r + \gamma^r \Delta \gamma^r - \gamma^r \lambda^* \frac{\partial f^r}{\partial m} (n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) \\ f^r (n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) = 0 \text{ et } \lambda^* > 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

Par identification avec (6.33), on obtient :

$$\begin{cases} (n^r + \Delta n^r, v^r + \Delta v^r, m^r + \Delta m^r) = (n_{p.a.}^r, v_{p.a.}^r, m_{p.a.}^r) \\ \Delta \gamma^r = \lambda^* > 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

## 6.4 Algorithme de plasticité implicite

La résolution du problème d'évolution élastoplastique pour les deux phases matrice et renforcement revient comme démontré en 6.3 à la résolution d'une *succession de problèmes élastiques à déformations anélastiques (plastiques) imposées*. La difficulté consiste à évaluer ces déformations anélastiques qui ne sont autres que les déformations plastiques solutions du problème. Dans l'algorithme de plasticité implicite ou *algorithme de retour radial (return mapping algorithm)* (Owen, (1980) [58] ; Crisfield, (1991) [25] ; Simo and Hughes, (1998) [72]), la résolution du problème d'évolution élastoplastique est faite par un calcul itératif qui consiste à corriger progressivement les déformations plastiques calculées jusqu'à la convergence.

Débutant la procédure itérative ( $k = 0$ ) avec des valeurs nulles des déformations plastiques des deux phases. Ces déformations sont ensuite estimées à l'itération ( $k + 1$ ) à partir de leurs valeurs à l'itération ( $k$ ), comme suit :

a) Calcul de la solution par résolution d'un problème d'élasticité à déformations anélastiques imposées. Ces déformations sont les déformations plastiques estimées à l'itération

$$(k) : \begin{cases} \left\{ \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m, (\Delta n^r, \Delta v^r, \Delta m^r) \right\} \\ \left\{ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m, (\Delta \varepsilon^r, \Delta \theta^r, \Delta \chi^r) \right\} \end{cases} (k) = \text{Elas.} \left[ \left\{ \Delta Q \right\}; \left\{ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m, (\Delta \varepsilon_p^r, \Delta \theta_p^r, \Delta \chi_p^r) \right\} (k) \right] (6.42)$$

b) Projection des états de contraintes des deux phases sur les convexes d'élasticité respectifs :

$$\underline{\sigma}_{\text{p.a.}}^m(k) = \text{proj.}_{C_m} \left\{ \underline{\sigma}^m(k) + \underline{C}^m : \underline{\varepsilon}_{\text{p.a.}}^m(k) \right\} \quad (6.43)$$

$$(n_{\text{p.a.}}^r, v_{\text{p.a.}}^r, m_{\text{p.a.}}^r)(k) = \text{proj.}_{C^r} \{ (n^r + \alpha^r \Delta \varepsilon^r)(k), (v^r + \beta^r \Delta \theta^r)(k), (m^r + \gamma^r \Delta \chi^r)(k) \} \quad (6.44)$$

c) Calcul des déformations plastiques à l'itération  $(k+1)$  :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\varepsilon}_{\text{p.}}^m(k+1) &= \Delta \underline{\varepsilon}^m(k) + \left( \underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \left( \underline{\sigma}^m(k) - \underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m(k) \right) \\ &= \Delta \underline{\varepsilon}_{\text{p.}}^m(k) + \left( \underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \left( \underline{\sigma}^m(k) + \Delta \underline{\sigma}^m(k) - \underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m(k) \right) \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \varepsilon_p^r(k+1) &= \Delta \varepsilon^r(k) + \frac{1}{\alpha^r} (n^r(k) - n_{\text{p.a.}}^r(k)) = \Delta \varepsilon_p^r(k) + \frac{1}{\alpha^r} (n^r(k) + \Delta n^r(k) - n_{\text{p.a.}}^r(k)) \\ \Delta \theta_p^r(k+1) &= \Delta \theta^r(k) + \frac{1}{\beta^r} (v^r(k) - v_{\text{p.a.}}^r(k)) = \Delta \theta_p^r(k) + \frac{1}{\beta^r} (v^r(k) + \Delta v^r(k) - v_{\text{p.a.}}^r(k)) \\ \Delta \chi_p^r(k+1) &= \Delta \chi^r(k) + \frac{1}{\gamma^r} (m^r(k) - m_{\text{p.a.}}^r(k)) = \Delta \chi_p^r(k) + \frac{1}{\gamma^r} (m^r(k) + \Delta m^r(k) - m_{\text{p.a.}}^r(k)) \end{aligned} \right. \quad (6.46)$$

Cette procédure est poursuivie jusqu'à convergence, ce qui correspond au fait que les champs plastiquement admissibles  $\left\{ \underline{\sigma}_{\text{p.a.}}^m ; (n_{\text{p.a.}}^r, v_{\text{p.a.}}^r, m_{\text{p.a.}}^r) \right\}(k)$  et les champs statiquement admissibles  $\left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m(k); (n^r + \Delta n^r(k), v^r + \Delta v^r(k), m^r + \Delta m^r(k)) \right\}$  convergent vers la solution en contrainte :

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{i \rightarrow +\infty} \underline{\sigma}_{\text{p.a.}}^m &= \lim_{i \rightarrow +\infty} \left( \underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m(k) \right) = \underline{\underline{\sigma}}^m + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^m \\ \lim_{i \rightarrow +\infty} \left\{ (n_{\text{p.a.}}^r, v_{\text{p.a.}}^r, m_{\text{p.a.}}^r) \right\}(k) &= \lim_{i \rightarrow +\infty} \left\{ (n^r + \Delta n^r(k), v^r + \Delta v^r(k), m^r + \Delta m^r(k)) \right\} \quad (6.47) \\ &= \{ (n^r + \Delta n^r, v^r + \Delta v^r, m^r + \Delta m^r) \} \end{aligned} \right.$$

Il est à remarquer que les étapes b) et c) sont relatives au *traitement local de la plasticité* pour chaque phase séparément, alors que la première étape correspond à un calcul élastique global du système biphasique.

## 6.5 Méthode des éléments finis appliquée au calcul élastoplastique des structures biphasiques

### 6.5.1 Principe du minimum de l'énergie potentielle

Reprenant les notations du chapitre 3, on désigne par  $\{\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}\}$  un champ de déplacements-rotations cinématiques quelconque, et on introduit la fonctionnelle *énergie potentielle* de ce champ, définie par :

$$\begin{aligned} W(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^m : C^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^m : C^m : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^m \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^r : C^r : \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \underline{\chi}^r : C^r : \underline{\chi}^r \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^r : C^r : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^r + \underline{\chi}^r : C^r : \underline{\chi}_{\text{an}}^r \right] d\Omega \quad (6.48) \\ &- \int_{\Omega} (\rho^m \underline{E}^m + \rho^r \underline{E}^r) : \underline{\xi} d\Omega - \int_{\partial\Omega_r} T_d \underline{\xi} dS - \int_{\partial\Omega_C} C_d^r : \underline{\omega}^r dS \end{aligned}$$

généralisant ainsi la définition donnée au chapitre 3 dans le cas d'un *état initial naturel*, à la situation où un champ de *déformations anélastiques*  $\left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^m ; \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^r, \underline{\chi}_{\text{an}}^r \right) \right\}$  doit être pris en compte.

La fonctionnelle *énergie potentielle* ainsi définie vérifie le principe du minimum suivant :

Soit  $(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r)$  la *solution en déplacement-rotation* du problème d'élasticité à déformations anélastiques imposées, alors :

$$V(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \in C.A. \quad E(\underline{\xi}, \underline{\omega}^r) \leq E(\underline{\xi}', \underline{\omega}^{r'}) \quad (6.49)$$

où  $C.A.$  désigne l'ensemble des champs de déplacement-rotation *cinématiquement admissibles* pour le problème.

Soient  $\delta\underline{\xi}$  et  $\delta\underline{\omega}$  les écarts des champs  $\underline{\xi}'$  et  $\underline{\omega}^{r'}$  aux champs de déplacement  $\underline{\xi}$  et de rotation  $\underline{\omega}^r$  *solutions* du problème :

$$\delta\underline{\xi} = \underline{\xi}' - \underline{\xi} \quad \text{et} \quad \delta\underline{\omega} = \underline{\omega}^{r'} - \underline{\omega}^r \quad (6.50)$$



L'écart de l'énergie potentielle du champ de déplacement-rotation  $(\xi', \underline{\omega}^{r'})$  à celle de la solution est donné par :

$$\delta E = E(\xi', \underline{\omega}^{r'}) - E(\xi, \underline{\omega}^r) = E(\xi + \delta\xi, \underline{\omega}^r + \delta\underline{\omega}) - E(\xi, \underline{\omega}^r) \quad (6.51)$$

soit, en tenant compte de (6.48) :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ (\underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m) : \underline{\underline{C}}^m : (\underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ (\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r) \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r) \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ (\chi^r + \delta\chi^r) \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot (\chi^r + \delta\chi^r) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^r + \chi^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \chi^r \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left[ (\underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m) : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an.}}^m \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ (\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r) \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an.}}^r \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ (\chi^r + \delta\chi^r) \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \chi_{\text{an.}}^r \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an.}}^m \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an.}}^r \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \chi^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \chi_{\text{an.}}^r \right] d\Omega \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r) \cdot (\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot (\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}) dS - \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot (\underline{\omega}^r + \delta\underline{\omega}) dS \\ & + \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r) \cdot \underline{\xi} d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot \underline{\xi} dS + \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot \underline{\omega}^r dS \end{aligned}$$

et donc, après simplification :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ 2\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \right] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ 2\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^r \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ 2\chi^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \delta\chi^r + \delta\chi^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \delta\chi^r \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an.}}^m \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an.}}^r \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left[ \delta\chi^r \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \chi_{\text{an.}}^r \right] d\Omega - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r) \cdot \delta\underline{\xi} d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot \delta\underline{\xi} dS - \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot \delta\underline{\omega} dS \end{aligned} \quad (6.53)$$

où  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^m$  et  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^r$  désignent les champs de déformations de la phase matrice et de la phase renforcement associés aux champs de déplacement  $\delta\underline{\xi}$ , et  $\delta\chi^r$  est le champ de déformation généralisé associé à  $\delta\underline{\omega}$ .

Introduisant les champs de contraintes  $(\underline{\sigma}^m, \underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r)$  solutions du problème, c'est-à-dire associés aux champs de déformations  $(\underline{\varepsilon}^m, \underline{\varepsilon}^r, \underline{\chi}^r)$  par les lois de comportement élastoplastique des deux phases :

$$\underline{\sigma}^m = \underline{C}^m : \left( \underline{\varepsilon}^m - \underline{\varepsilon}_{\text{an}}^m \right), \quad \underline{X}^r = \underline{C}_{F^r}^r : (\underline{\varepsilon}^r - \underline{\varepsilon}_{\text{an}}^r), \quad \underline{\Gamma}^r = \underline{C}_{G^r}^r : \left( \underline{\chi}^r - \underline{\chi}_{\text{an}}^r \right) \quad (6.54)$$

l'expression (6.53) devient :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} \left[ \underline{\sigma}^m : \delta \underline{\varepsilon}^m + \underline{X}^r \cdot \delta \underline{\varepsilon}^r + \underline{\Gamma}^r \cdot \delta \underline{\chi}^r \right] d\Omega - \int_{\Omega} (\rho^m E^m + \rho^r E^r) \cdot \delta \underline{\xi} d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot \delta \underline{\xi} dS \\ & - \int_{\partial\Omega_C} \underline{C}_d^r \cdot \delta \underline{\omega} dS + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \delta \underline{\varepsilon}^m : \underline{C}^m : \delta \underline{\varepsilon}^m + \delta \underline{\varepsilon}^r \cdot \underline{C}_{F^r}^r \cdot \delta \underline{\varepsilon}^r + \delta \underline{\chi}^r \cdot \underline{C}_{G^r}^r \cdot \delta \underline{\chi}^r \right] d\Omega \end{aligned} \quad (6.55)$$

qui n'est autre que l'expression (3.19) du même écart de l'énergie potentielle dans le cas où aucune déformation anélastique n'est imposée au milieu biphasique, et dont nous avons montré dans la section 3.3 que le signe était toujours positif ou nul, d'où le résultat.

### 6.5.2 Formulation variationnelle

La recherche de la solution  $\{ \Delta \underline{\xi}, \Delta \omega^r \}$  (i) du problème incrémental (6.42) revient de par le principe du minimum établi ci-dessus, à la résolution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Delta \underline{\xi}, \Delta \omega^r) \in C.A. \text{ tel que :} \\ \forall (\Delta \underline{\xi}', \Delta \omega^{r'}) \in C.A. : E(\Delta \underline{\xi}, \Delta \omega^r) < E(\Delta \underline{\xi}', \Delta \omega^{r'}) \end{array} \right. \quad (6.56)$$

qui est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Delta \underline{\xi}, \Delta \omega^r) \in C.A. \text{ tel que :} \\ \forall (\Delta \underline{\xi}', \Delta \omega^{r'}) \in C.A. : a((\Delta \underline{\xi}, \Delta \omega^r), (\Delta \underline{\xi}', \Delta \omega^{r'})) = L(\Delta \underline{\xi}', \Delta \omega^{r'}) \end{array} \right. \quad (6.57)$$

où  $a(\cdot, \cdot)$  est la *forme bilinéaire associée à la forme quadratique* définie par la fonctionnelle énergie potentielle, qui s'écrit :

$$a((\Delta_{\underline{\xi}}, \Delta_{\underline{\omega}^r}), (\Delta_{\underline{\xi}'}, \Delta_{\underline{\omega}^{r'}})) = \int_{\Omega} \left[ \left( \Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\underline{\varepsilon}^m} : \underline{\underline{C}}^m : \Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\underline{\varepsilon}^m} \right) + \left( \Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}^r}^{\underline{\varepsilon}^r} \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}^r}^{\underline{\varepsilon}^r} + \Delta_{\underline{\underline{\chi}}^r} \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \Delta_{\underline{\underline{\chi}}^r} \right) \right] d\Omega \quad (6.58)$$

et  $L(\cdot, \cdot)$  est une *forme linéaire* donnée par :

$$L(\Delta_{\underline{\xi}'}, \Delta_{\underline{\omega}^{r'}}) = \Phi(\Delta_{\underline{\xi}'}, \Delta_{\underline{\omega}^{r'}}) + \Phi_{\text{an.}}(\Delta_{\underline{\xi}'}, \Delta_{\underline{\omega}^{r'}}) \quad (6.59)$$

$\Phi(\cdot, \cdot)$  étant la forme linéaire exprimant le travail des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta_{\underline{\xi}'}, \Delta_{\underline{\omega}^{r'}}) &= \int_{\Omega} (\rho^m \Delta_{\underline{F}}^m + \rho^r \Delta_{\underline{F}^r}) \cdot \Delta_{\underline{\xi}'} d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \Delta_{\underline{I}_d} \cdot \Delta_{\underline{\xi}'} dS \\ &+ \int_{\partial\Omega_C} \Delta_{\underline{C}_d^r} \cdot \Delta_{\underline{\omega}^{r'}} dS \end{aligned} \quad (6.60)$$

et  $\Phi_{\text{an.}}(\cdot, \cdot)$  désigne la forme linéaire exprimant le potentiel des déformations anélastiques imposées :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{an.}}(\Delta_{\underline{\xi}'}, \Delta_{\underline{\omega}^{r'}}) &= \int_{\Omega} \left[ \Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\underline{\varepsilon}^m} : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an.}}^m \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}^r}^{\underline{\varepsilon}^r} \cdot \underline{\underline{C}}_F^r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an.}}^r \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left[ \Delta_{\underline{\underline{\chi}}^r} \cdot \underline{\underline{C}}_C^r \cdot \underline{\underline{\chi}}_{\text{an.}}^r \right] d\Omega \end{aligned} \quad (6.61)$$

### 6.5.3 Principe du minimum discrétisé

Considérant une discrétisation spatiale de la structure biphasique en  $N_e$  éléments, l'expression discrétisée de l'énergie de déformation est, d'après (3.55), donnée par :

$$W(\{\Delta_{\underline{\xi}}\}) = \frac{1}{2} \{\Delta_{\underline{\xi}}\} \cdot [K] \cdot \{\Delta_{\underline{\xi}}\} \quad (6.62)$$

où  $[K]$  est la *matrice de rigidité globale* de la structure biphasique et  $\{\Delta_{\underline{\xi}}\}$  est le vecteur formé de tous les incréments des déplacements et rotations des noeuds de la structure.

Le potentiel des efforts extérieurs s'écrit de manière analogue sous forme matricielle :

$$\Phi(\{\Delta\xi\}) = {}^t\{\Delta F\} \cdot \{\Delta\xi\} \quad (6.63)$$

tandis que le potentiel des déformations anélastiques donné par (6.61), peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{an.}}(\{\Delta E\}) &= \int_{\Omega} {}^t\{\Delta E_{\text{an.}}\} \cdot [D] \cdot \{\Delta E\} \, d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{(v_e)_i} {}^t\{\Delta E_{\text{an.}}\} \cdot [D] \cdot \{\Delta E\}(x, y) \, dx dy \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{v_{iR}} {}^t\{\Delta E_{\text{an.}}\} \cdot [D] \cdot \{\Delta E\}(\xi, \eta) \cdot J \, d\xi d\eta \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{v_{iR}} {}^t\{\Delta E_{\text{an.}}\}^i \cdot [D] \cdot [B]_e \cdot \{\Delta\xi\}^i \cdot J \, d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{N_e} \left[ \underbrace{{}^t\{\Delta E_{\text{an.}}\}^i \cdot \int_{v_{iR}} [D] \cdot [B]_e \cdot J \, d\xi d\eta}_{{}^t\{\Delta F_{\text{an.}}\}^i} \right] \cdot \{\Delta\xi\}^i \\ &= {}^t\{\Delta F_{\text{an.}}\} \cdot \{\Delta\xi\} \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression discrétisée de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E(\{\Delta\xi\}) &= W(\{\Delta\xi\}) - \Phi(\{\Delta\xi\}) \\ &= \frac{1}{2} {}^t\{\Delta\xi\} \cdot [K] \cdot \{\Delta\xi\} - {}^t\{\Delta F\} \cdot \{\Delta\xi\} - {}^t\{\Delta F_{\text{an.}}\} \cdot \{\Delta\xi\} \end{aligned} \quad (6.65)$$

dont la recherche du minimum conduit au système linéaire suivant :

$$[K] \cdot \{\Delta\xi\} = (\{\Delta F\} + \{\Delta F_{\text{an.}}\}) \quad (6.66)$$

## 6.6 Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élastoplasticité

Le code de calcul des structures biphasiques par éléments finis décrit dans le chapitre 3 a été étendu à la prise en compte de comportement élastoplasticité des différentes phases, utilisant l'algorithme de plasticité implicite détaillé en 6.4 et représenté sur la figure 6.1. Ce code permet de simuler le comportement des structures biphasiques en déformations planes sous chargements statiques. Il utilise des éléments finis de type Lagrange, triangulaire à six noeuds  $T6$ , permettant une approximation des champs cinématiques, de déplacements et de rotation, quadratique par morceaux, avec une continuité  $C^0$ .

Une première validation de l'outil numérique ainsi développé a été faite par comparaison à des solutions analytiques du problèmes biphasiques élastoplastiques dans le cas où les effets de flexion et de cisaillement sont négligés dans un premier temps puis par comparaison à la solution analytique du problème de cisaillement transverse développée au chapitre 5.

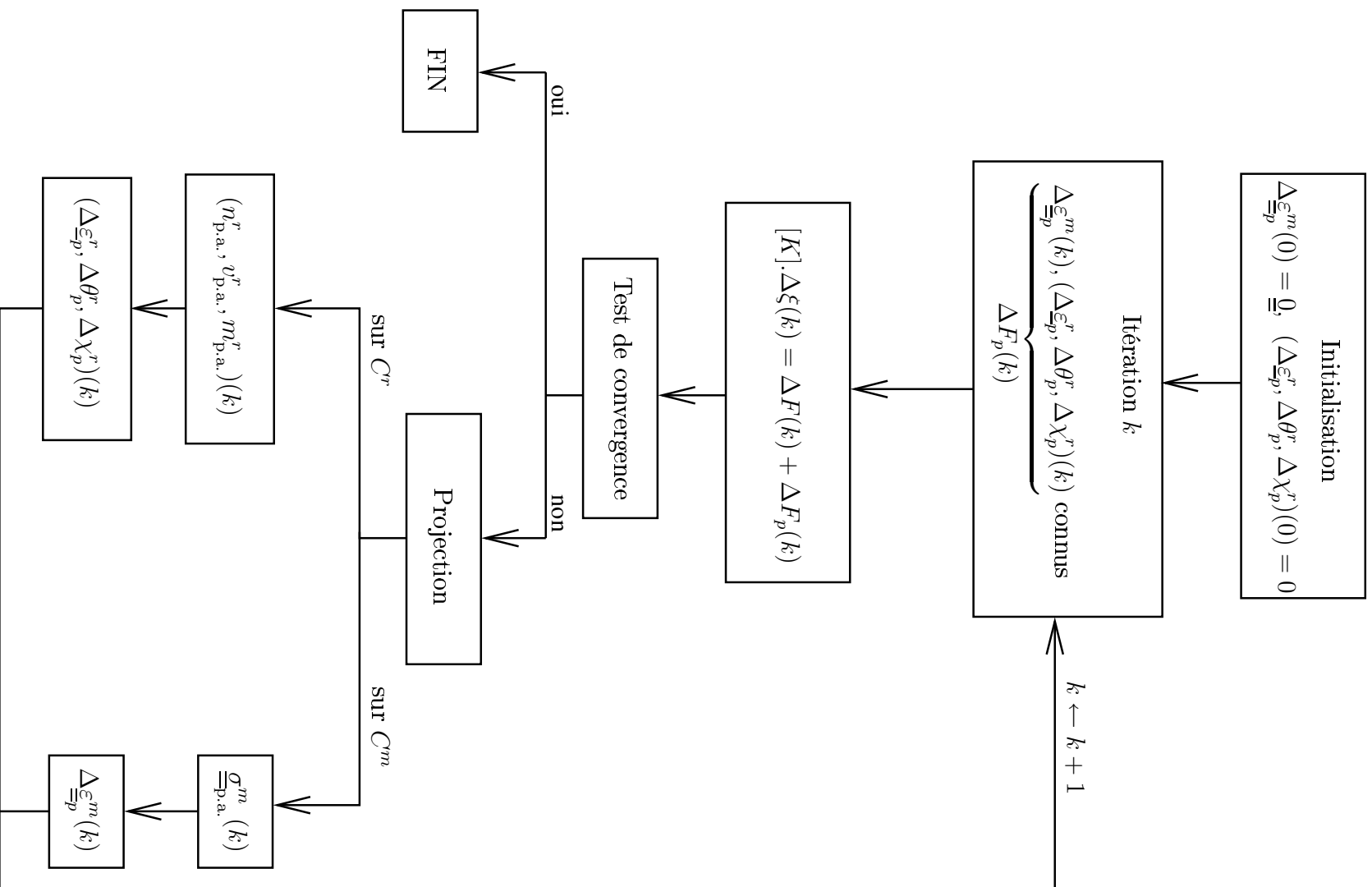


FIG. 6.1: Algorithme de plasticité pour le milieu biphasique

## 6.7 Premières applications du code de calcul multiphasique en élastoplasticité

### 6.7.1 Dimensionnement d'une fondation mixte (Hassen et de Buhan (2006) [49])

L'outil numérique ainsi développé est utilisé pour dimensionner une fondation de largeur  $B$  reposant sur deux couches de sol purement cohérent de caractéristiques mécaniques respectives  $(E_1, \nu_1, C_1)$  et  $(E_2, \nu_2, C_2)$  et d'épaisseurs respectives  $H_1$  et  $H_2$  (figure 6.2). La fondation supposée infiniment rigide doit supporter un chargement vertical de service égal à :

$$N = 2,5 \text{ MN/m} \quad (6.67)$$

ainsi qu'un chargement latéral, d'origine sismique, s'appliquant à une hauteur  $H_3$  au dessus de la base de la fondation et d'intensité proportionnelle à  $N$  :

$$H = \Psi \cdot N \text{ avec } \Psi = 0,15 \quad (6.68)$$

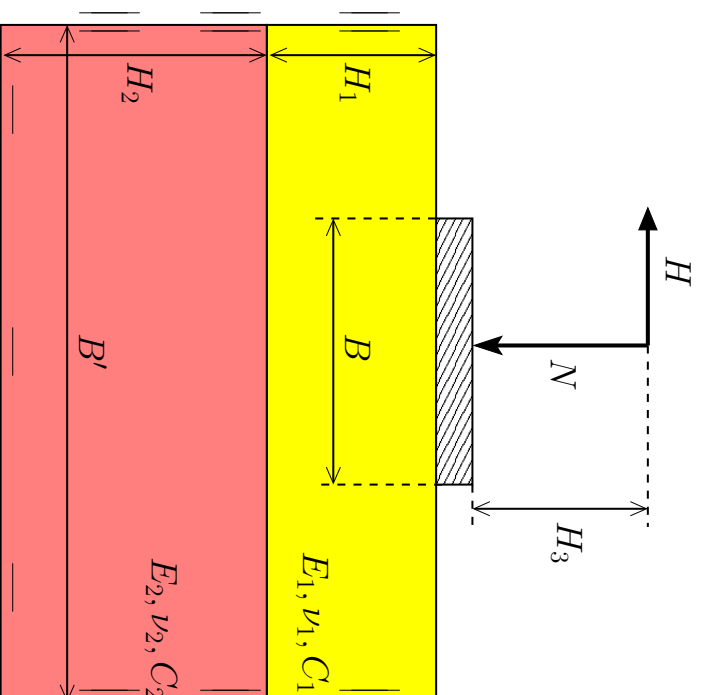


FIG. 6.2: *Fondation non renforcée*

Les caractéristiques géométriques de la structure sont données par :

$$H_1 = 15 \text{ m}, H_2 = 25 \text{ m}, H_3 = 10 \text{ m}, B' = 60 \text{ m}, B = 20 \text{ m} \quad (6.69)$$

La couche de surface, d'épaisseur  $H_1$ , est une couche d'argile molle de caractéristiques mécaniques :

$$E_1 = 5 \text{ MPa}, \nu_1 = 0,3, C_1 = 5 \text{ kPa} \quad (6.70)$$

reposant sur une couche d'argile raide de caractéristiques :

$$E_2 = 200 \text{ MPa}, \nu_2 = 0,3, C_2 = 100 \text{ kPa} \quad (6.71)$$

Un premier calcul élastoplastique de cette structure soumise uniquement au chargement vertical  $N$ , utilisant un maillage comportant 676 éléments triangulaires à six nœuds et 1397 nœuds (voir figure 6.3), a permis de tracer la courbe effort-déplacement, courbe du bas de la figure 6.4 montrant que la charge limite de la structure (capacité portante) est bien inférieure à la charge de service  $N$ .

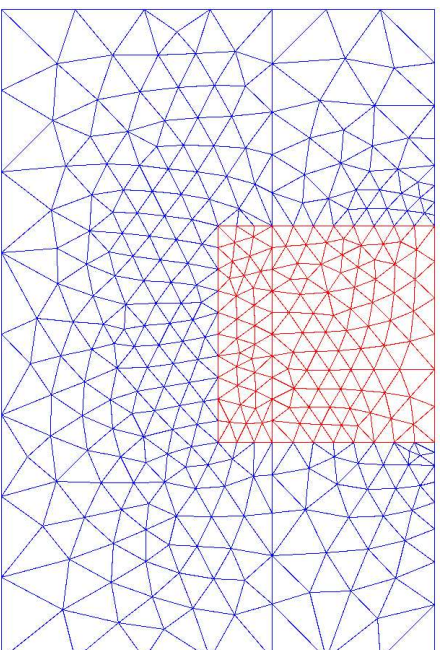


FIG. 6.3: *Maillage de la structure*

Cette charge de ruine plastique de la structure correspond à la capacité portante théorique d'une fondation reposant sur un sol semi-infini ayant les caractéristiques mécaniques de la couche molle :

$$N^+ = 0,514 \text{ MN/m} \cong (\pi + 2)BC_1 < 2,5 \text{ MN/m} \quad (6.72)$$



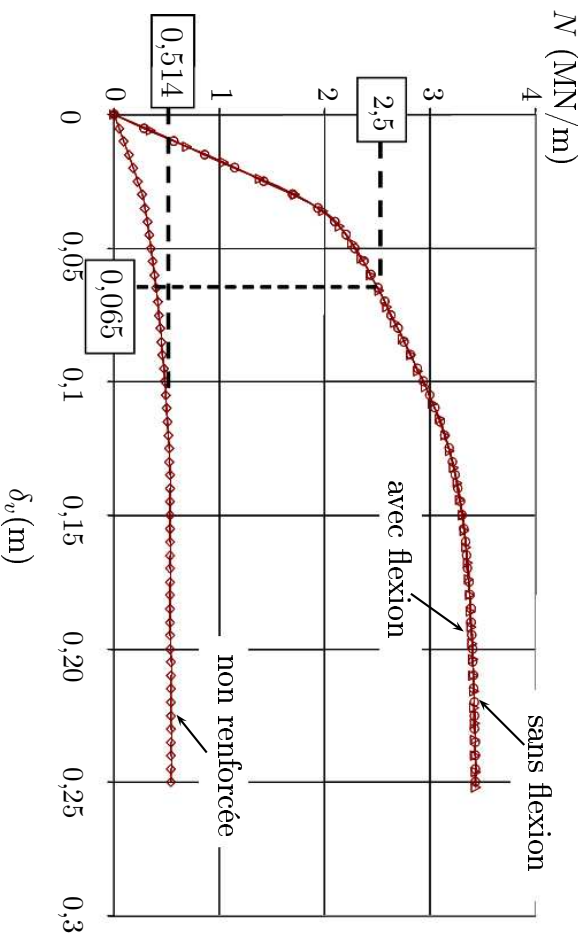
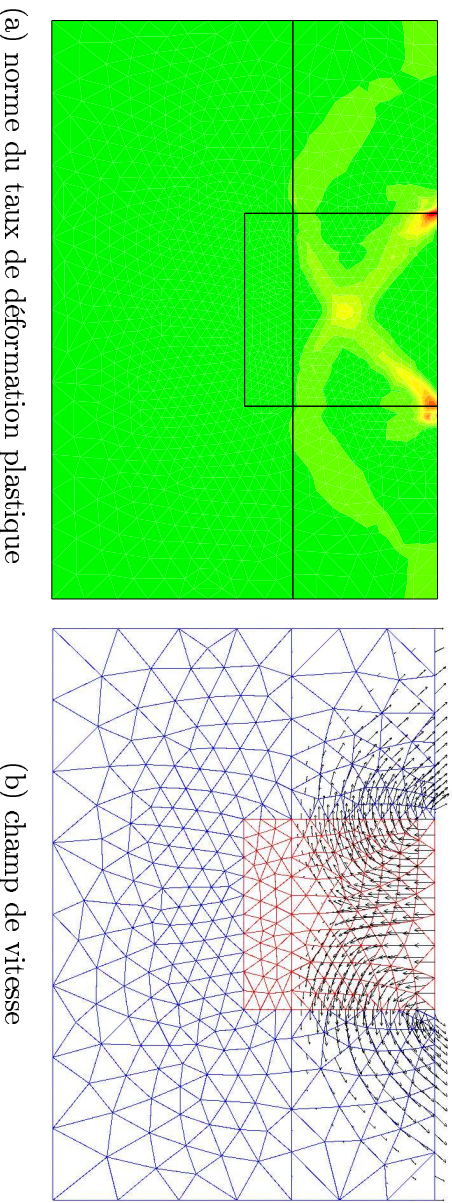


FIG. 6.4: *Evolution du déplacement vertical en fonction de l'effort vertical*

Ceci est confirmé par le mécanisme d'écoulement plastique de la structure non renforcée sous chargement vertical représenté sur la figure 6.5, où la partie (a) représente la norme du taux de déformation plastique au moment de la ruine plastique de la structure, tandis que la partie (b) représente le champ de vitesse. Ces deux représentations mettent clairement en évidence la formation d'un mécanisme de Prandtl dans la couche supérieure du massif de fondation.



(a) norme du taux de déformation plastique

(b) champ de vitesse

FIG. 6.5: *Mécanisme d'écoulement plastique de la structure non renforcée sous chargement vertical*

Afin d'augmenter la capacité portante de cette fondation, on se propose de renforcer la structure par des inclusions rigides de longueurs  $L$ , ayant la forme de tubes de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$  disposées suivant un maillage carré de côté  $d$  (figure 6.6). Ces inclusions sont encastées en tête dans la fondation et sont constituées d'un acier, modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique, obéissant au critère de von Mises de limite en

traction simple  $\sigma_0^a$ . Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure ainsi renforcée sont complétées par celles du volume élémentaire représentatif :

$$L = 20 \text{ m}, R = 1 \text{ m}, e = 2 \text{ cm}, d = 5 \text{ m} \quad (6.73)$$

et celles de l'acier constitutif des inclusions :

$$E^a = 200 \text{ GPa}, \nu^a = 0,3, \sigma_0^a = 200 \text{ MPa} \quad (6.74)$$

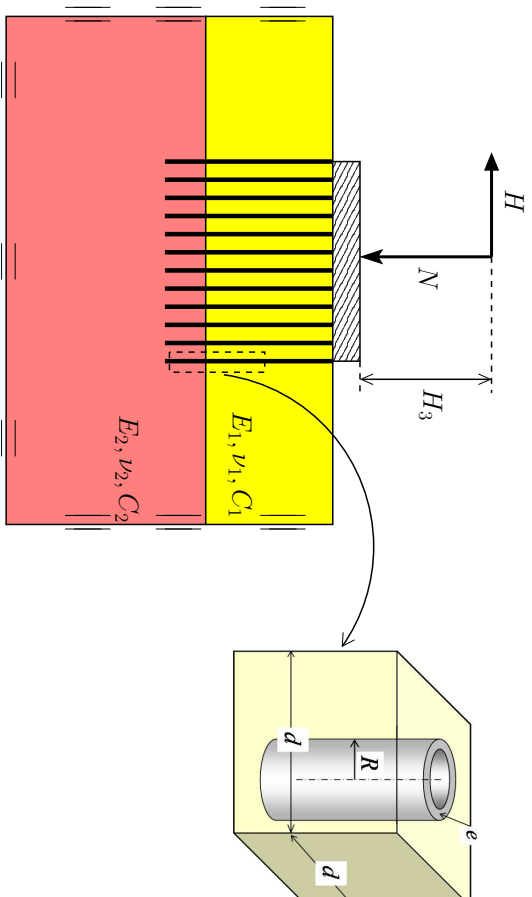


FIG. 6.6: *Fondation renforcée sur radier de pieux*

Pour simuler l'évolution élastoplastique de cette structure, la zone renforcée est remplacée par un milieu biphasique obtenu par la superposition d'une phase matrice représentant le sol et d'une phase renforcement représentant les inclusions de renforcement (figure 6.7). Les caractéristiques mécaniques des deux phases sont déterminées à partir de celles du sol et des inclusions de renforcement, comme détaillé au chapitre 4 pour les paramètres d'élasticité, et au chapitre 5 pour les paramètres de plasticité, c'est-à-dire de la façon suivante : La fraction volumique de renforcement, définie comme le rapport du volume occupé par une inclusion de renforcement au volume de la cellule élémentaire représentative du sol renforcé est égal à :

$$\eta \cong \frac{2\pi R e}{d^2} \cong 0,5\% \quad (6.75)$$

En ce qui concerne la phase matrice, compte tenu du fait que la fraction volumique du sol est très proche de l'unité, les caractéristiques mécaniques des deux phases matrices

peuvent être approximées par celles du sol qu'elle représente :

$$\begin{aligned} E_1^m &\cong E_1 = 5 \text{ MPa}, & \nu_1^m &\cong \nu_1 = 0,3, & C_1^m &\cong C_1 = 5 \text{ kPa} \\ E_2^m &\cong E_2 = 200 \text{ MPa}, & \nu_2^m &\cong \nu_2 = 0,3, & C_2^m &\cong C_2 = 30 \text{ kPa} \end{aligned} \quad (6.76)$$

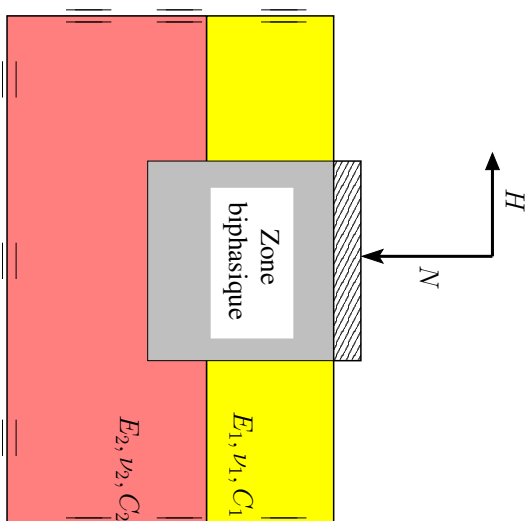


FIG. 6.7: *Modélisation biphasique de la zone renforcée*

Pour ce qui est de la phase renforcement, les rigidités en traction-compression, au cisaillement et à la flexion sont obtenues en divisant les rigidités correspondantes d'une inclusion de renforcement prise individuellement par la surface de la section transversale à la direction de renforcement du volume élémentaire représentatif :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha^r &= \frac{E^a(2\pi Re)}{d^2} = E^a\eta = 1004 \text{ MPa} \\ \beta^r &= \frac{\mu^a(2\pi Re)\kappa}{d^2} = (\mu^a\kappa)\eta = \frac{\mu^a}{2}\eta = 193 \text{ MPa} \\ \gamma^r &= \frac{E^a I}{d^2} = (E^a \frac{R^2}{2})\eta = 502 \text{ MPa.m}^2 \end{aligned} \right. \quad (6.77)$$

où  $\kappa = 1/2$  est le coefficient de correction de cisaillement pour une section tubulaire mince (Frey, (1994) [37]) et  $\mu^a$  est le module de cisaillement de l'acier.

Le critère de plasticité de la phase renforcement est également déduit du critère d'interaction d'une inclusion individuelle. Faisant l'hypothèse que les inclusions, et par suite

la phase renforcement, sont infiniment résistantes à l'effort tranchant, un tel critère est donné d'après (5.71) par :

$$f^r(n^r, m^r) = \left| \frac{m^r}{m_0^r} \right| - \cos\left(\frac{\pi n^r}{2 n_0^r}\right) \leq 0 \quad (6.78)$$

où les limites d'élasticité en traction simple  $n_0^r$  et en flexion simple  $m_0^r$  de la phase renforcement sont données par (5.69), soit :

$$\begin{cases} n_0^r = \frac{2\pi R e \sigma_0^a}{d^2} = \eta \sigma_0^a = 1,0048 \text{ MPa} \\ m_0^r = \frac{4R^2 e \sigma_0^a}{d^2} = \frac{2}{\pi} \sigma_0^a \eta R = 0,64 \text{ MN/m} \end{cases} \quad (6.79)$$

Dans un souci de simplification de la procédure de projection d'un état de contrainte sur le convexe  $C^r$ , ce dernier sera approché par l'intérieur (figure 6.8 (a)) et par l'extérieur (figure 6.8 (b)). Les simulations numériques seront menées en deux temps en adoptant à chaque fois l'une des deux approximations.

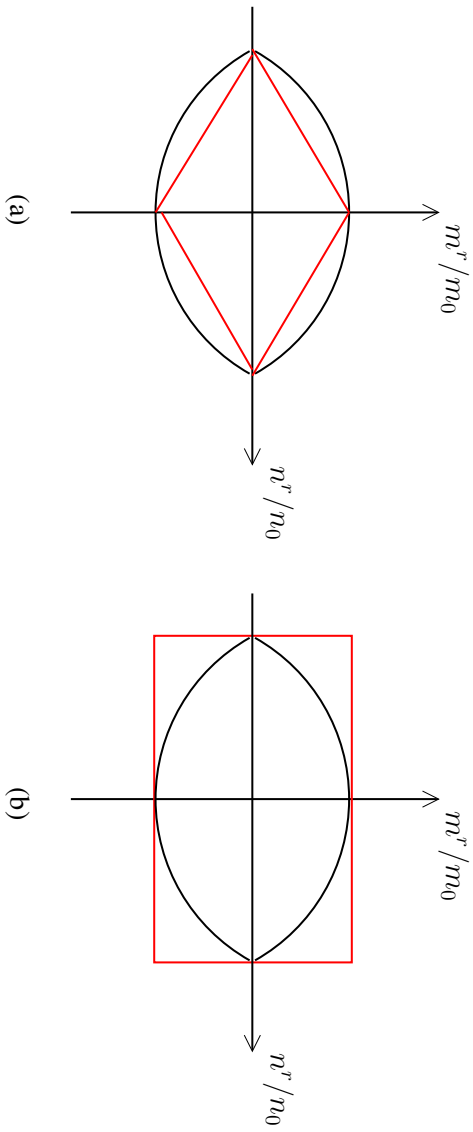


FIG. 6.8: Critère de plasticité de la phase renforcement

A chacun des deux convexes approchés est associée une fonction de charge. Celle-ci est donnée dans le cas de la configuration (a) (convexe approché par l'intérieur) par :

$$f^r(n^r, m^r) = \left| \frac{n^r}{n_0} \right| + \left| \frac{m^r}{m_0} \right| - 1 \leq 0 \quad (6.80)$$

et dans le cas de configuration (b) (convexe approché par l'extérieur) par :

$$f_n^r(n^r) = \left| \frac{n^r}{n_0} \right| - 1 \leq 0 \text{ et } f_m^r(m^r) = \left| \frac{m^r}{m_0} \right| - 1 \leq 0 \quad (6.81)$$

Les calculs ont été effectués en adoptant le maillage de la structure non renforcée comportant 676 éléments triangulaires à six nœuds et 1397 nœuds, sans aucun raffinement particulier.

Les résultats de la simulation du comportement élastoplastique de la structure renforcée sous chargement purement vertical sont représentés sur la figure 6.4 sous la forme de courbes effort-déplacement dans le cas où les raidisseurs à la flexion et au cisaillement de la phase renforcement sont prises en compte ou non. Ce graphique montre qu'on retrouve quasiment la même évolution, que de tels effets soient négligés ou non. Les deux configurations d'approximation du convexe  $C^r$  sont aussi équivalentes dans ce cas de chargement, puisque les effets de flexion jouent un rôle négligeable dans la réponse de la structure. Les mécanismes d'écoulement plastique sont donnés dans les deux cas, en terme de taux de déformation plastique et de champ de vitesse, représentés sur les figures 6.9 (a) et 6.9 (b), montrant que le mécanisme d'écoulement plastique est le même dans les deux situations. Il est à noter que ce mécanisme ne fait intervenir que le sol, les renforcements restant élastiques.

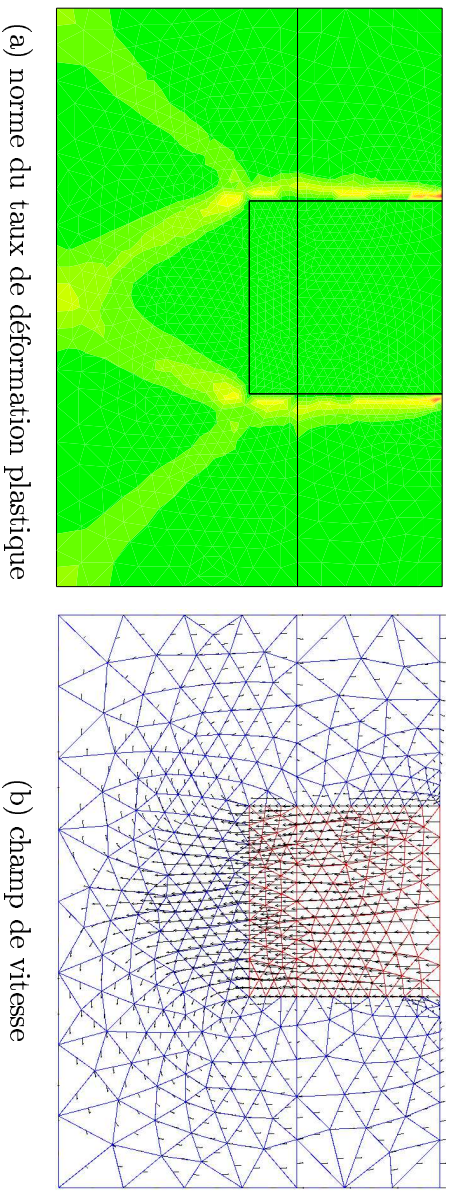


FIG. 6.9: *Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement négligés)*

Il apparaît aussi de ce graphique que la charge de service  $N$  est bien inférieure à la capacité portante de cette fondation donnée par :

$$N^l = 3,43 \text{ MN} \quad (6.82)$$

montrant qu'avec ce schéma de renforcement, la structure est tout à fait capable de supporter la charge de service avec un coefficient de sécurité :

$$C_N = \frac{N^l}{N} = 1,372 \quad (6.83)$$



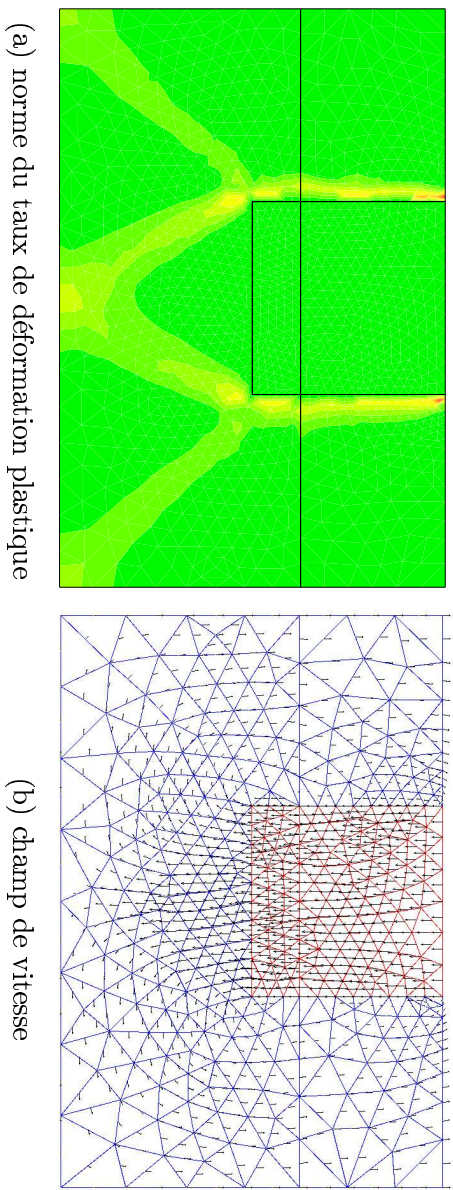


FIG. 6.10: *Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée sous chargement vertical (effets de flexion et de cisaillement pris en compte)*

A la charge de service  $N$ , est associé un tassement vertical de la structure dont la valeur est :

$$\delta_v = 6,5 \text{ cm} \quad (6.84)$$

Afin de valider ce calcul obtenu par le code de calcul multiphasique en élastoplasticité, on se propose de développer un calcul analytique fondé sur l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture, d'une borne supérieure du chargement extrême de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement pris en compte ou non). Pour ce faire, on considère le champ de vitesse virtuelle constant par bloc représenté sur la figure 6.11 (a).

L'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture permet d'écrire :

$$P_e(\hat{\delta}) \leq P_{rm}(\hat{\delta}) \quad (6.85)$$

où  $P_e$  est la puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesse virtuelle défini ci-dessus et paramétré par  $\hat{\delta}$ , tandis que  $P_{rm}$  est la puissance résistante maximale développée dans ce même champ de vitesse. Elles sont données respectivement par :

$$P_e(\hat{\delta}) = N\hat{\delta} \quad (6.86)$$

et

$$P_{rm}(\hat{\delta}) = \int_{\Omega} \pi(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{\underline{m}}; [\hat{\underline{\underline{\xi}}}] ) d\Sigma \quad (6.87)$$

Dans cette dernière expression,  $\pi(\cdot)$  représente la fonction d'appui du domaine de résistance,  $\Sigma$  désigne l'ensemble des surfaces de discontinuité du champ de vitesse virtuelle et  $\underline{n}$  est la normale unitaire à cette surface.  $\pi(\underline{n}, [\hat{\underline{\xi}}])$  est la fonction d'appui de cette discontinuité. Compte tenu du fait que le mécanisme proposé ne comporte que des blocs rigides

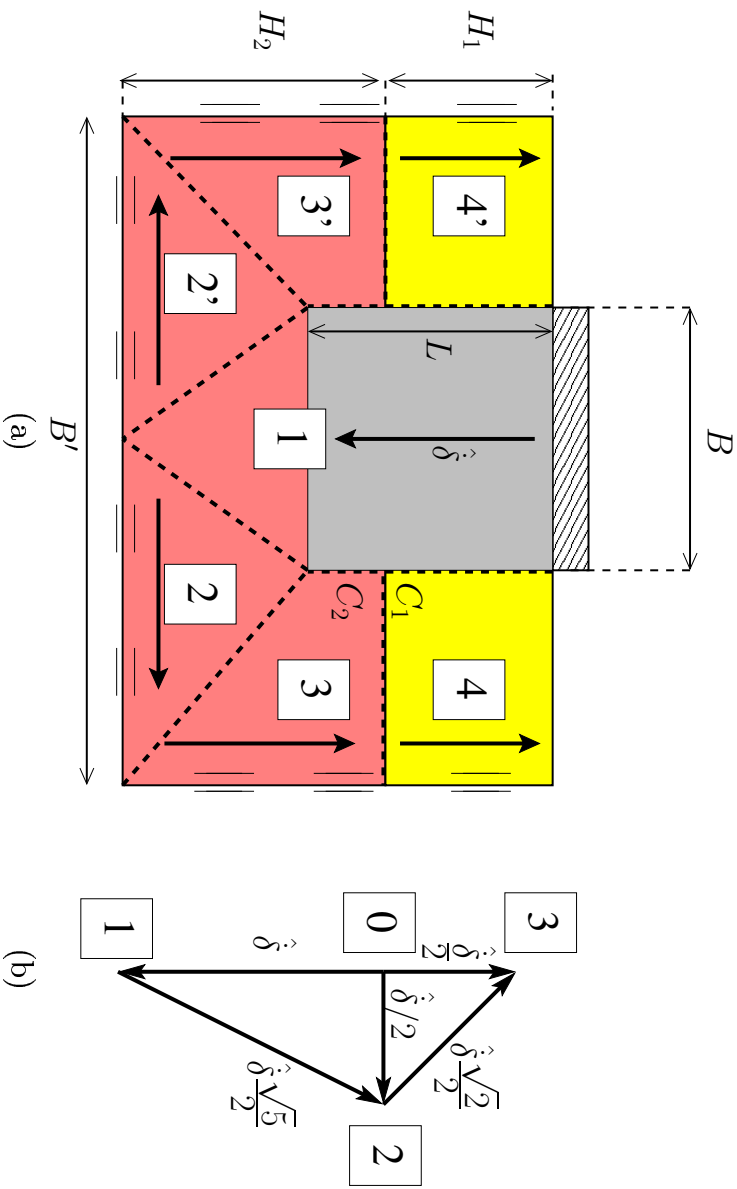


FIG. 6.11: (a) Mécanisme par blocs rigides de la fondation renforcée, (b) hodographe des vitesses

en translation, le premier terme de la puissance résistante maximale, relatif au taux de déformation virtuelle, est nul.

Les discontinuités des vitesses sont données par l'hodographe des vitesses représenté sur la figure 6.11(b) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{\underline{\xi}}]_{1-2} = \hat{\delta} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ [\hat{\underline{\xi}}]_{2-3} = \hat{\delta} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ [\hat{\underline{\xi}}]_{1-3} = \hat{\delta} \frac{3}{2} \\ [\hat{\underline{\xi}}]_{1-4} = \hat{\delta} \frac{3}{2} \\ [\hat{\underline{\xi}}]_{3-4} = 0 \end{array} \right. \quad (6.88)$$

où  $\dot{[\xi]}_{i-j}$  désigne la discontinuité de vitesse entre les deux blocs  $i$  et  $j$ . Désignant par  $\Sigma_{i-j}$  la surface de discontinuité de vitesse entre les blocs  $i$  et  $j$ , et tenant compte de la symétrie du mécanisme adopté, la puissance résistance maximale s'écrit comme suit :

$$P_{rm}(\dot{\delta}) = 2 \left[ \Sigma_{1-2} \dot{[\xi]}_{1-2} C_2 + \Sigma_{2-3} \dot{[\xi]}_{2-3} C_2 + \Sigma_{1-3} \dot{[\xi]}_{1-3} C_2 + \Sigma_{1-4} \dot{[\xi]}_{1-4} C_1 \right] \quad (6.89)$$

Remplaçant les surfaces de discontinuité  $\Sigma_{i-j}$  et les discontinuités de vitesse  $\dot{[\xi]}_{i-j}$  par leurs expressions, il vient :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\dot{\delta}) = 2 & \left[ \sqrt{(H_1 + H_2 - L)^2 + (B/2)^2} \dot{\delta} \frac{\sqrt{5}}{2} C_2 + (L - H_1) \dot{\delta} \frac{3}{2} C_2 + \dot{\delta} \frac{3}{2} C_1 \right. \\ & \left. + \sqrt{(H_1 + H_2 - L)^2 + ((B' - B)/2)^2} \dot{\delta} \frac{\sqrt{2}}{2} C_2 \right] = 3,375 \cdot 10^6 \dot{\delta} \end{aligned} \quad (6.90)$$

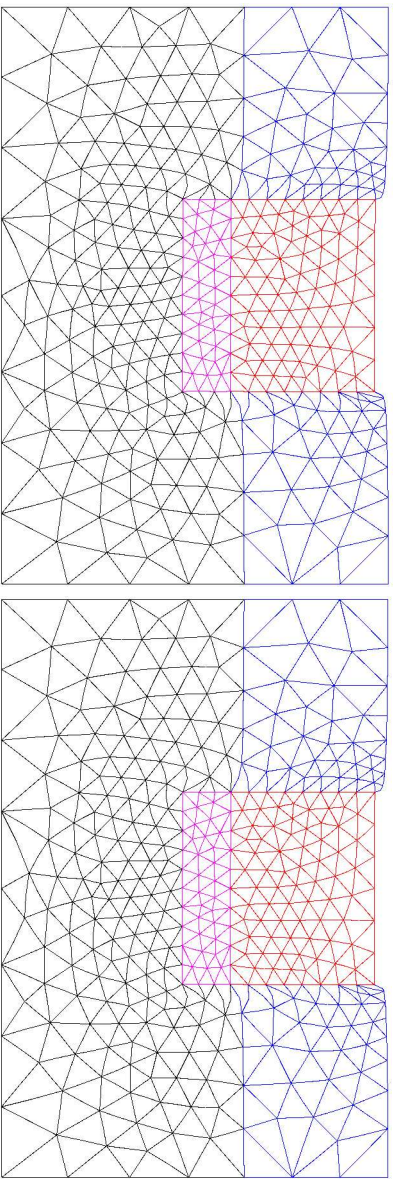
Combinant (6.85), (6.86) et (6.90), il ressort que le chargement extrême  $N^+$  vérifie l'inégalité suivante :

$$N^+ \leq 3,375 \text{ MN/m} \quad (6.91)$$

La capacité portante  $N^l$  calculée par le code de calcul par éléments finis est donc du même ordre de grandeur que la borne supérieure donnée par le raisonnement du calcul à la rupture développé ci-dessus. Cependant, elle s'avère légèrement au dessus de cette borne. Ceci ne met pas en cause le bon fonctionnement du module plasticité du code de calcul multiphasique développé, étant donné qu'il s'agit d'un mécanisme avec des discontinuités de vitesse qu'il n'est possible de traduire par la méthode des éléments finis qu'avec un maillage extrêmement fin, ce qui n'est pas le cas ici puisque le maillage adopté pour le calcul de cette structure est assez grossier.

Revenant à l'exemple du dimensionnement de la fondation sur pieux, les figures 6.12, 6.13 et 6.14 représentent la déformée de la structure, la norme du taux de déformation plastique et la distribution des points plastiques dans la structure, aussi bien dans le cas où les rigidités à la flexion et au cisaillement sont pris en compte, que dans le cas contraire, montrant qu'on retrouve les mêmes distributions dans les deux cas sous chargement vertical et que ces effets jouent donc un rôle négligeable dans la réponse de la structure.

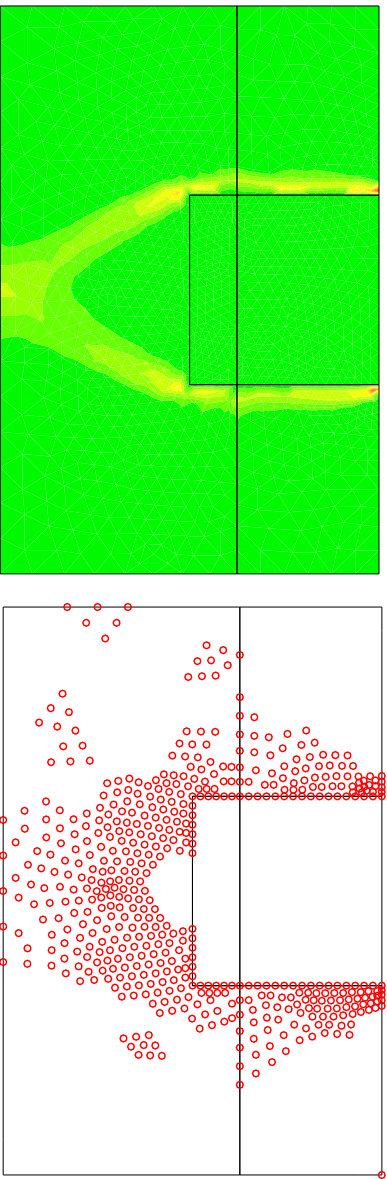




(a) effets de flexion négligés

(b) effets de flexion pris en compte

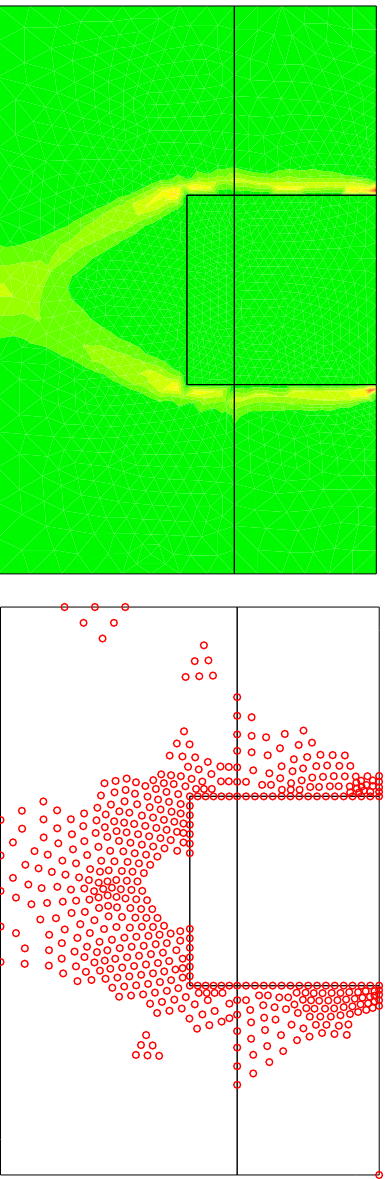
FIG. 6.12: Déformées de la structure sous chargement vertical de service



(a) norme du taux de déformation plastique

(b) distribution des points plastiques

FIG. 6.13: Etat de plastification de la structure sous le chargement  $N$  (effets de flexion et de cisaillement négligés)



(a) norme du taux de déformation plastique

(b) distribution des points plastiques

FIG. 6.14: Etat de plastification de la structure sous le chargement  $N$  (effets de flexion et de cisaillement pris en compte)

Partant de cet état préchargé (voir déformée figure 6.12), on fait croître progressivement le chargement latéral et par conséquent le moment de renversement, en maintenant le chargement vertical constant.

On représente sur la figure 6.15 les évolutions du tassement  $\delta_v$ , du déplacement latéral  $\delta_h$  au centre de la fondation, et du produit  $\varphi B$  qui n'est autre que l'écart des déplacements verticaux des deux extrémités de la fondation couramment appelé tassement différentiel de la fondation, dans le cas où les effets de flexion et de cisaillement sont négligés, en fonction du facteur de chargement adimensionnel  $H/N$ .

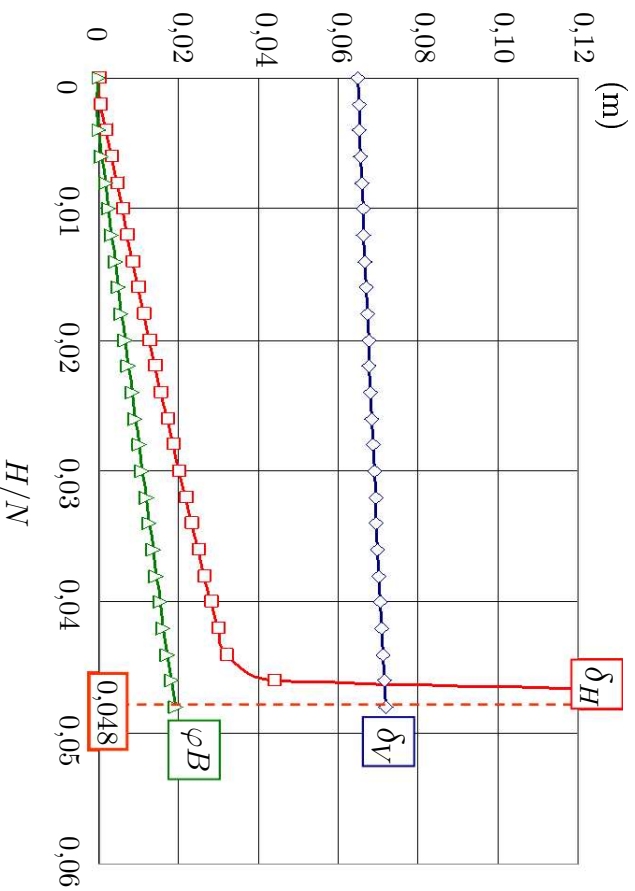


FIG. 6.15: *Evolution des déplacements de la fondation sous chargement latéral (effets de flexion et de cisaillement négligés)*

La charge limite de la structure vis à vis de ce mode de chargement est alors donnée par :

$$H_l = 4,8\% N \quad (6.92)$$

montrant ainsi qu'un tel schéma de renforcement est insuffisant pour supporter la charge latérale de dimensionnement. Le mécanisme de ruine plastique de la structure sous ce mode de chargement est représenté sur la figure 6.16.

Il est à remarquer que dans ce cas où les effets de flexion et de cisaillement négligés, le domaine d'élasticité de la phase renforcement est réduit à sa projection sur l'axe des efforts normaux. Les deux configurations d'approximation du convexe  $C^r$  par valeur inférieure ou supérieure sont alors équivalentes.

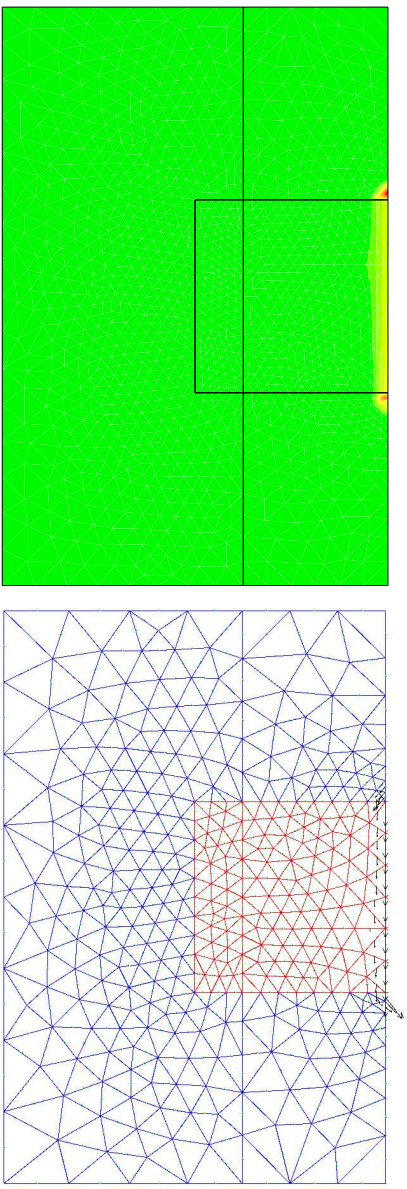


FIG. 6.16: Mécanisme d'écaillage plastique de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement négligés)

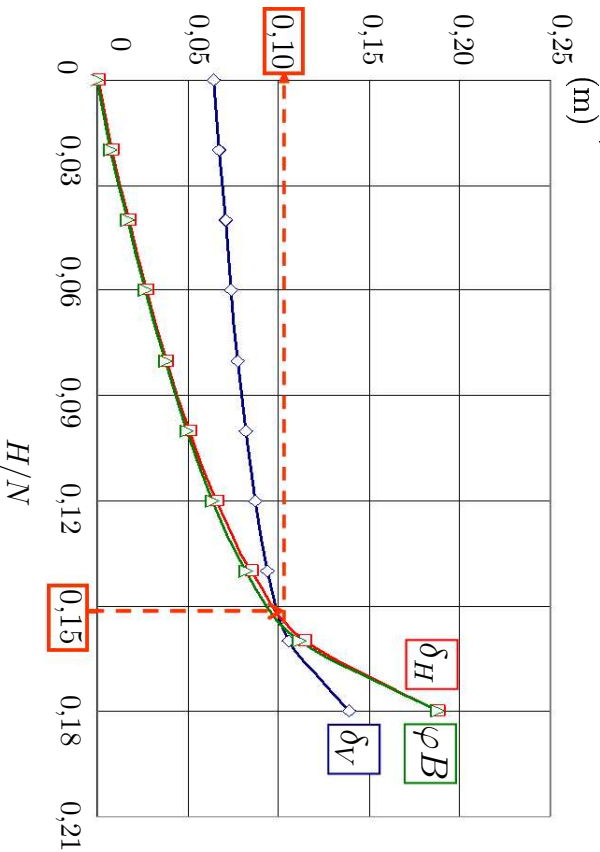


FIG. 6.17: Evolution des déplacements de la fondation sous chargement latéral (effets de flexion et de cisaillement pris en considération)

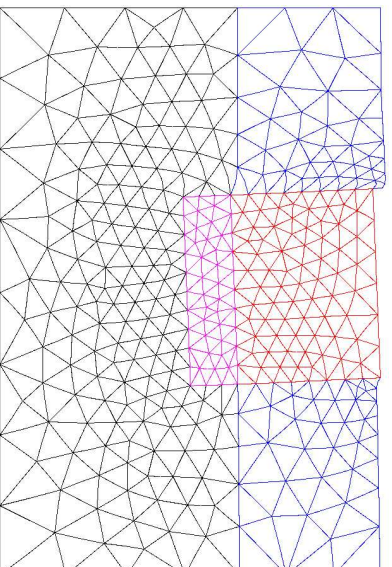


FIG. 6.18: Déformée de la structure sous chargement de dimensionnement (vertical et latéral)

Dans le cas où les raidisseurs et résistances à la flexion et au cisaillement de la phase renforcement sont prises en compte, les évolutions des déplacements vertical, horizontal et différentiel sont représentées sur la figure 6.17, montrant que la charge latérale de dimensionnement est tout à fait supportable par la structure ainsi renforcée et qu'elle conduit aux déplacements suivants (figure 6.18) :

$$\delta_v = 10 \text{ cm}, \delta_h = 10 \text{ cm}, \varphi_B = 10 \text{ cm} \quad (6.93)$$

### 6.7.2 Analyse de stabilité d'une pente renforcée par inclusions rigides (Hassen et de Buhan (2005) [47])

L'outil numérique multiphasique est maintenant utilisé pour analyser la stabilité d'une pente d'angle  $\beta$  sous l'effet de son poids propre (figure 6.19). La structure comporte deux couches de sol de caractéristiques élastoplastiques respectives  $(E_1, \nu_1, C_1)$  et  $(E_2, \nu_2, C_2)$  et de poids volumiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Les caractéristiques géométriques de la structure sont données par :

$$\tan\beta = \frac{1}{2}, H_1 = 12 \text{ m}, H_2 = 13 \text{ m}, H = 10 \text{ m}, B' = 70 \text{ m}, B = 20 \text{ m} \quad (6.94)$$

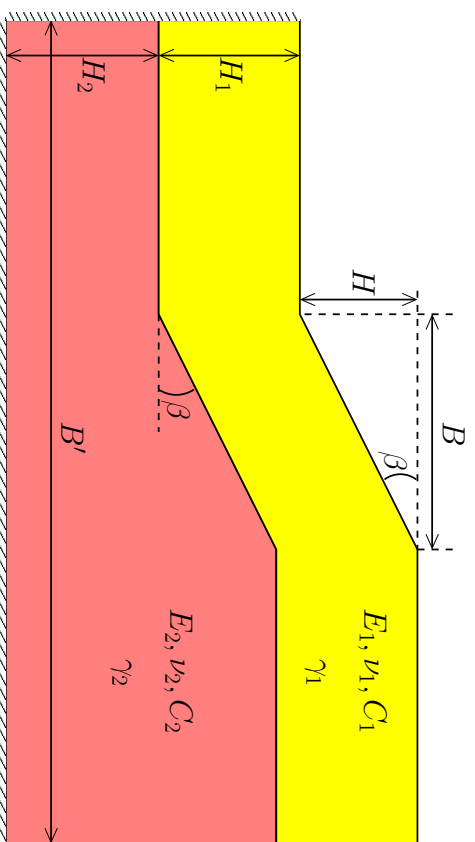


FIG. 6.19: Talus incliné soumis à son poids propre

La couche de surface est une couche d'argile molle purement cohérente de caractéristiques mécaniques :

$$E_1 = 5 \text{ MPa}, \nu_1 = 0,3, C_1 = 10 \text{ kPa}, \gamma_1 = 18 \text{ kN/m}^3, \quad (6.95)$$

La couche profonde est, quant à elle, une couche d'argile plus raide de caractéristiques élastoplastiques :

$$E_2 = 100 \text{ MPa}, \nu_2 = 0,3, C_2 = 100 \text{ kPa}, \gamma_2 = 25 \text{ kN/m}^3, \quad (6.96)$$

Afin de simuler le comportement élastoplastique de cette structure sous son poids propre, on a adopté le maillage représenté sur la figure 6.20 qui comporte 778 éléments de type T6 (approximation quadratique) et 1615 nœuds.



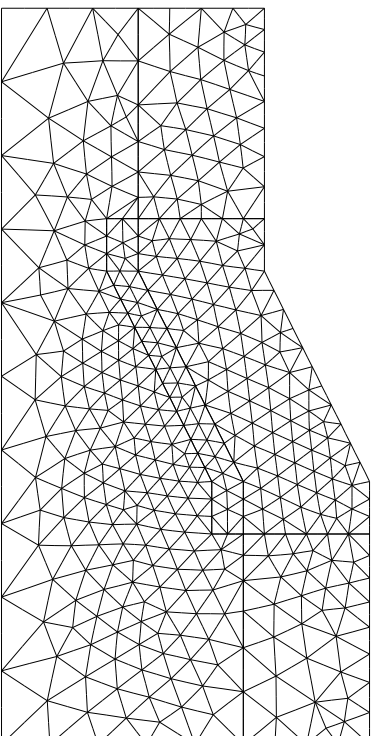


FIG. 6.20: *Maillage de la structure par des éléments triangulaires quadratiques*

Une première simulation de la tenue de cette pente sous chargement gravitationnel, a permis de tracer la courbe effort-déplacement (figure 6.21) représentant l'évolution de la fraction du poids appliquée en fonction de la norme du déplacement du point situé en haut de la pente, mettant en évidence l'apparition d'un mécanisme d'écoulement plastique libre lorsque 36% du poids propre de la structure lui est appliqué.

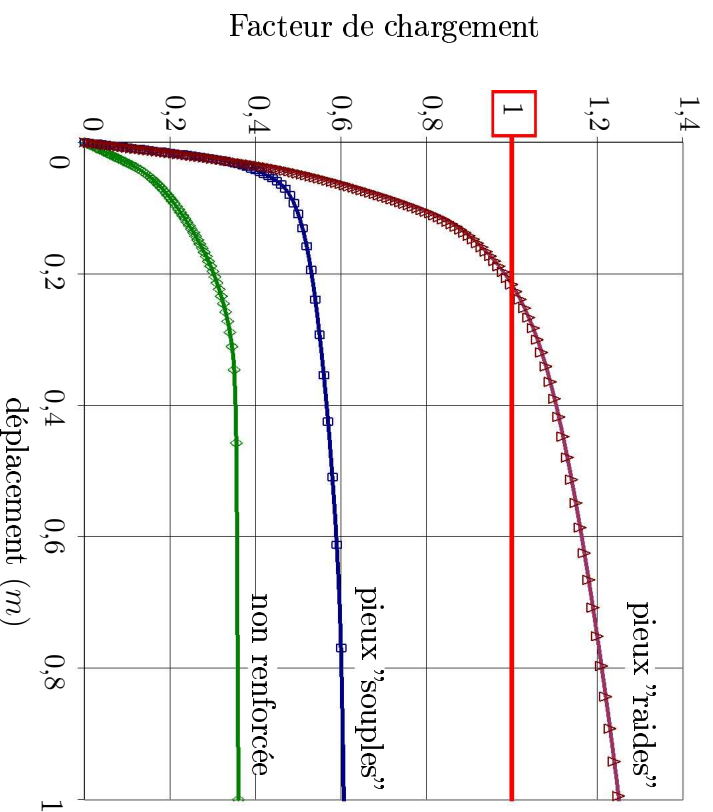


FIG. 6.21: *Déplacement d'un point caractéristique du talus en fonction du paramètre de chargement*

Le mécanisme d'écoulement plastique est représenté sur la figure 6.22 sous la forme d'isovaleurs de la norme du taux de déformation plastique et de la distribution des vitesses.

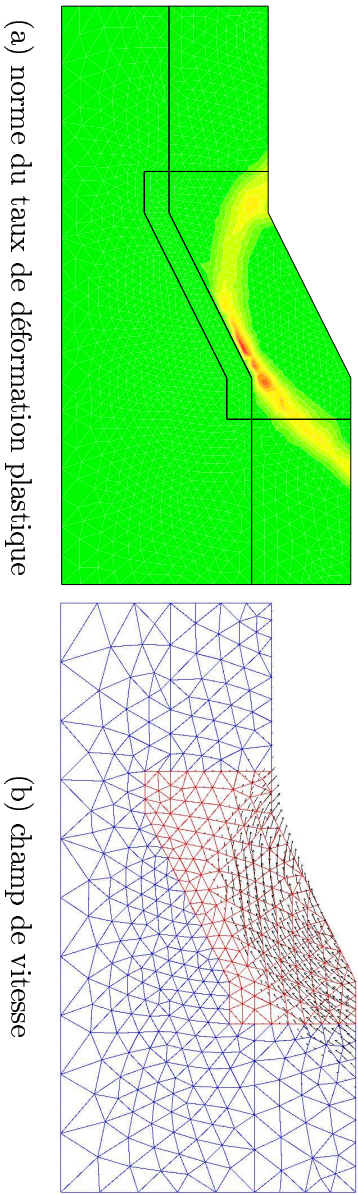


FIG. 6.22: Mécanisme d'écoulement plastique de la structure non renforcée

Etant donné que le mécanisme de ruine plastique de la structure a lieu essentiellement dans la couche molle et au droit de la zone centrale de la structure, on se propose, pour améliorer sa tenue, de la renforcer sur une largeur  $B''$  (figure 6.23) par des inclusions rigides de longueur  $L$ , ayant la forme de tubes de section tubulaire de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$ , disposées dans le sol suivant un maillage régulier de côté  $d$  et constituées d'acier de caractéristiques élastiques ( $E^a$ ,  $\nu^a$ ) obéissant au critère de plasticité de von Mises de limite d'élasticité en traction-compression égal à  $\sigma_0^a$ .

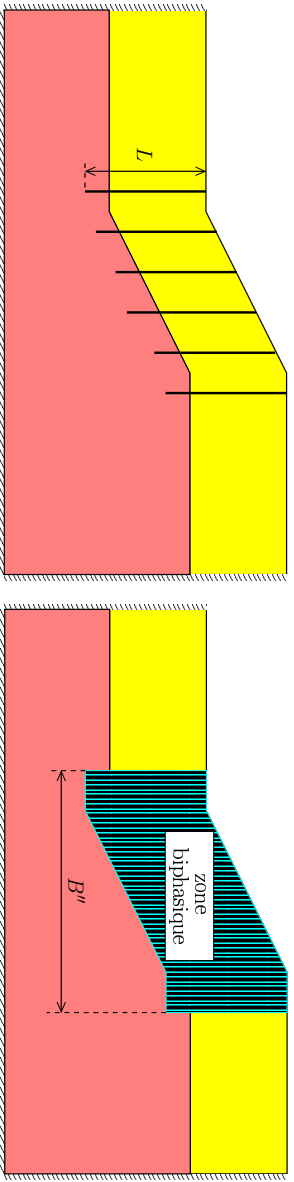


FIG. 6.23: Stabilisation d'une pente par inclusions rigides

Les caractéristiques géométriques de la section des inclusions de renforcement et les caractéristiques mécaniques de leur matériau constitutif sont les mêmes que celles adoptées pour l'exemple précédent de dimensionnement d'une fondation sur radier de pieux, soit :

$$B' = 30 \text{ m}, \quad R = 1 \text{ m}, \quad e = 2 \text{ cm}, \quad d = 5 \text{ m}, \quad L = 15 \text{ m} \quad (6.97)$$

ainsi que

$$E^a = 200 \text{ GPa}, \quad \nu^a = 0,3, \quad \sigma_0^a = 200 \text{ MPa} \quad (6.98)$$

Les caractéristiques de la phase renforcement sont alors données par les calculs développés dans (6.75), (6.77) et (6.79), soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^r = \frac{E^a(2\pi Re)}{d^2} = E^a\eta = 1004 \text{ MPa} \\ \beta^r = \frac{\mu^a(2\pi Re)\kappa}{d^2} = (\mu^a\kappa)\eta = \frac{\mu^a}{2}\eta = 193 \text{ MPa} \\ \gamma^r = \frac{E^a I}{d^2} = (E^a \frac{R^2}{2})\eta = 502 \text{ MPa.m}^2 \\ n_0^r = \frac{2\pi Re\sigma_0^a}{d^2} = \eta\sigma_0^a = 1,0048 \text{ MPa} \\ m_0^r = \frac{4R^2 e\sigma_0^a}{d^2} = \frac{2}{\pi}\sigma_0^a\eta R = 0,64 \text{ N/m} \end{array} \right. \quad (6.99)$$

En revanche, les caractéristiques élastoplastiques de la phase matrice sont tout simplement égales à celles de la couche de sol qu'elle représente, soit :

$$E_1^m \cong E_1 = 5 \text{ MPa}, \quad \nu_1^m \cong \nu_1 = 0,3, \quad C_1^m \cong C_1 = 5 \text{ kPa} \quad (6.100)$$

pour la couche molle, et :

$$E_2^m \cong E_2 = 100 \text{ MPa}, \quad \nu_2^m \cong \nu_2 = 0,3, \quad C_2^m \cong C_2 = 100 \text{ kPa} \quad (6.101)$$

pour la couche raide.

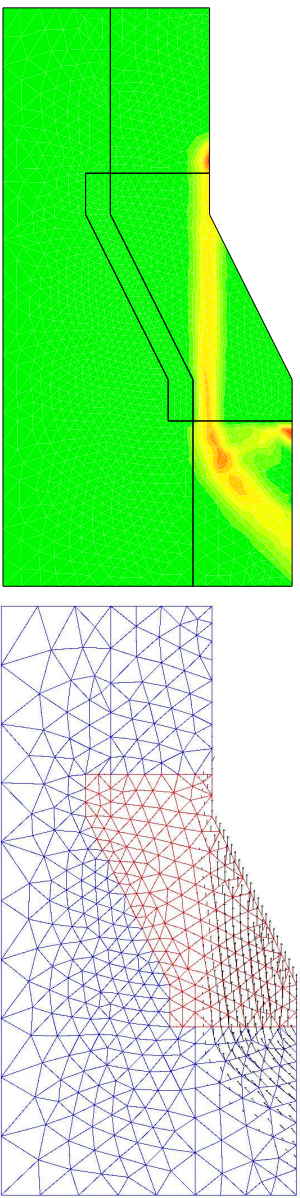


FIG. 6.24: Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement négligés)

Dans un premier temps, les raideurs de la phase renforcement au cisaillement et à la flexion sont négligés. La simulation par éléments finis du problème d'évolution élasto-



plastique du comportement de la structure sous son poids propre est mené avec le même maillage que celui de la structure non renforcée.

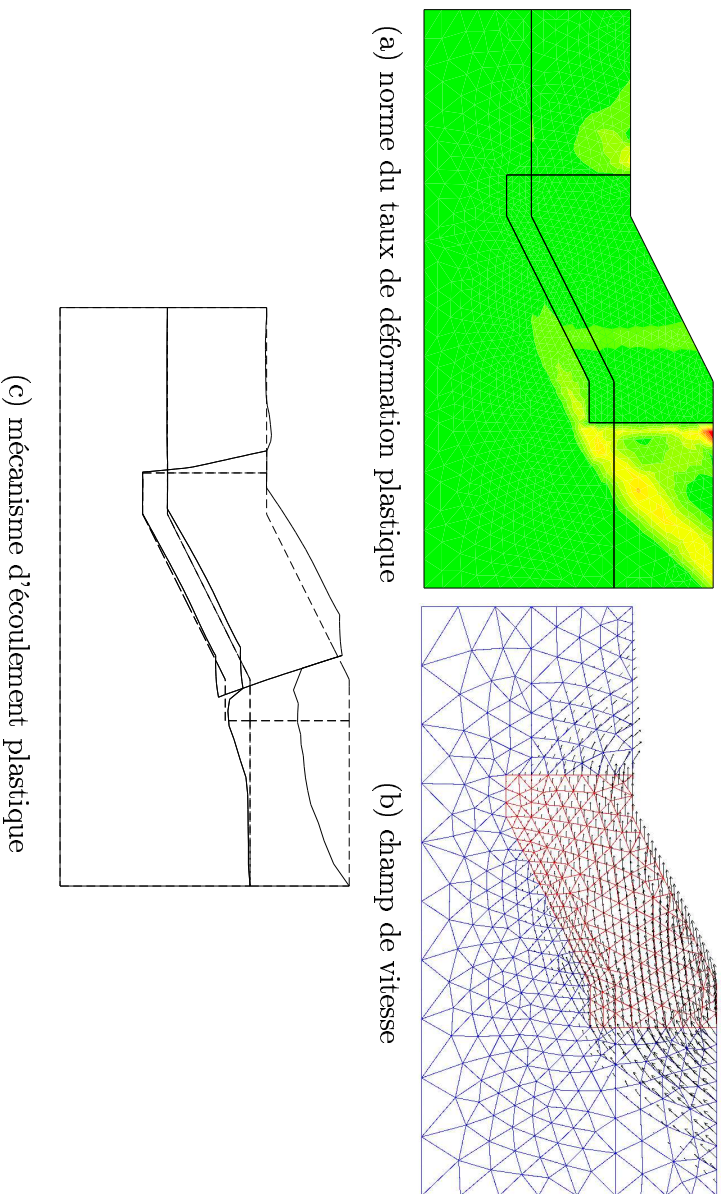
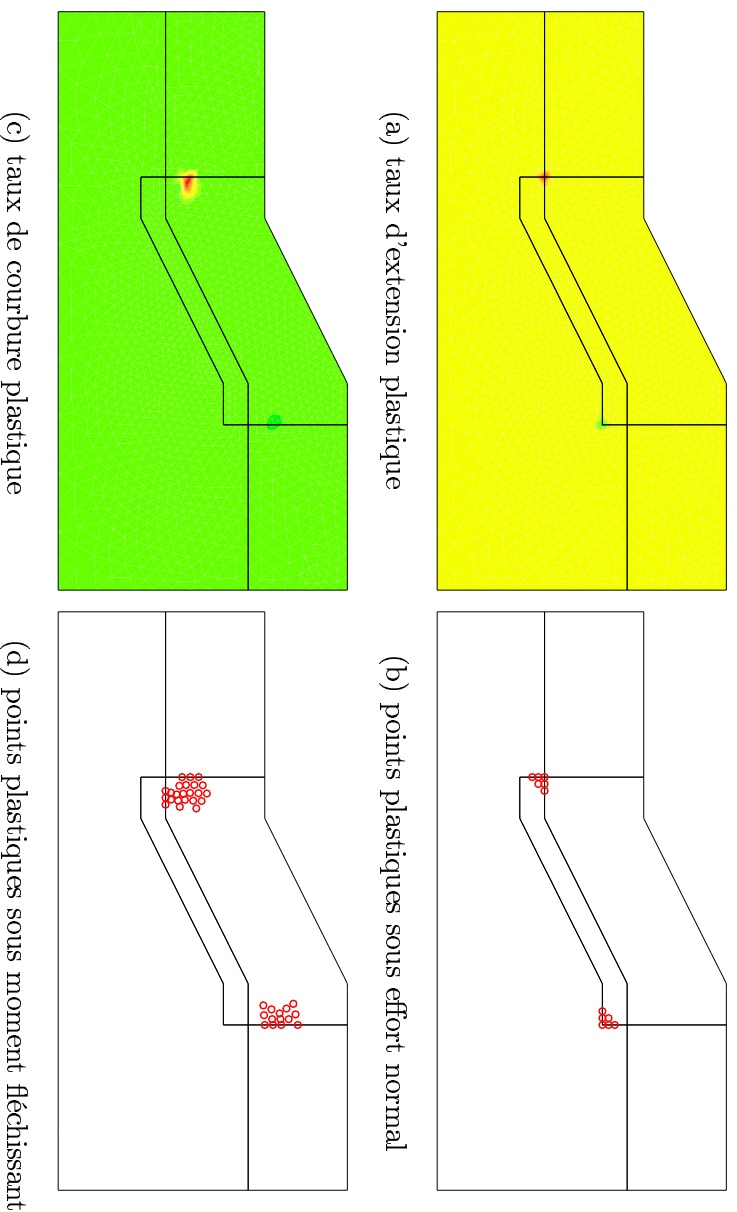


FIG. 6.25: *Mécanisme d'écoulement plastique de la structure renforcée (effets de flexion et de cisaillement pris en compte)*

Les résultats de ce calcul sont représentés sur les figures 6.21 et 6.24 montrant que la charge de ruine plastique est encore en deça du chargement de service de la structure, puisque la structure ainsi renforcée ne peut supporter que de l'ordre de 63% de son poids propre. Le mécanisme d'écoulement plastique représenté sur la figure 6.24 montre que, comme dans le cas non renforcé, seule la couche molle est mise en jeu. Un tel résultat remet en question le choix de ce type d'inclusions "souples" dans le renforcement de la pente.

Dans le cas où les effets de flexion et de cisaillement sont pris en compte, la charge limite de la structure est bien au delà de la charge de service (poids propre) de la structure (voir figure 6.21) puisqu'elle peut être supportée avec un coefficient de sécurité égal à 1,37. Le mécanisme d'écoulement plastique est diffusé dans les deux couches (voir figure 6.25). La phase renforcement est également plastifiée dans ce cas, les zones plastiques étant représentées sur la figure 6.26.

FIG. 6.26: *Plasticification de la phase renforcement*

## 6.8 Conclusion

Un algorithme de plasticité implicite appliqué aux structures multiphasiques, basé sur un découpage du trajet de chargement en un certain nombre de pas, à l'intérieur desquels un calcul itératif par projections sur les critères respectifs des différentes phases est effectué, a été présenté. Sa mise en œuvre numérique dans le cadre de la méthode des éléments finis est ensuite développée, aboutissant à un code de calcul des structures multiphasiques dans le cadre d'un comportement élastoplastique du sol et des inclusions de renforcement.

Cet outil numérique est utilisé par la suite pour le calcul du comportement élastoplastique de deux exemples typiques d'ouvrages renforcés par inclusions rigides :

- Calcul d'une fondation sur radier de pieux. L'analyse élastoplastique du comportement global d'une fondation sous chargement combiné est menée dans le cas où la structure est non renforcée dans un premier temps, montrant la nécessité de l'emploi de renforcements. Le comportement de la structure renforcée est dans un second temps simulé dans le cas où les effets de flexion et de cisaillement sont pris en compte ou non, montrant que le chargement de dimensionnement de la structure est tout à fait supportable par la structure lorsque de tels effets ne sont pas omis, alors qu'elle ne l'est pas si l'on les néglige.
- Analyse de la stabilité d'une pente. Cet exemple est centré autour de l'emploi des

inclusions rigides pour la stabilisation des pentes. Un talus incliné instable sous son poids propre est considéré. Une étude de stabilité de cette structure est faite lorsque des inclusions "souples" ou "raides" sont utilisées montrant, encore une fois, l'importance des raiders à la flexion et au cisaillement des inclusions de renforcement dans la réponse élastoplastique globale de la structure.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont en parfait accord avec les conclusions tirées au chapitre 4 sur l'importance de la prise en considération des effets de flexion et de cisaillement dans le calcul des structures renforcées par inclusions rigides.

\* \* \*

\*

# Chapitre 7

## Conclusions et perspectives

### Sommaire

---

7.1	Conclusions . . . . .	183
7.2	Perspectives . . . . .	184

---



## 7.1 Conclusions

Présenté comme une modélisation alternative pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions rigides, le modèle multiphasique est basé sur un changement d'échelle permettant d'échapper à la lourde tâche de traiter séparément le sol et les inclusions de renforcement. Ainsi, le modèle tire profit des avantages de la méthode d'homogénéisation sans en avoir les limites, puisqu'il permet de rendre compte, non seulement de la raideur au cisaillement et à la flexion des inclusions, mais aussi des interactions sol-inclusions toutes les deux inaccessibles par la méthode d'homogénéisation.

La solution analytique développée au chapitre 2 montre clairement l'importance de la prise en compte des effets de flexion et de cisaillement sur la réponse globale de la structure, quantifiée à travers le module de cisaillement apparent. Cette conclusion est confirmée par les résultats fournis par le code de calcul par éléments finis, développé dans le cadre de ce travail, puisqu'il apparaît d'après les résultats obtenus des simulations menées sur une structure test constituée d'une fondation reposant sur radier de pieux, que, négliger les raidteurs des inclusions à la flexion et au cisaillement conduit à une sous-estimation des raidteurs structurelles. Il ressort aussi de ces différentes simulations que le choix du type de connection pieux-fondation est très important pour mobiliser les effets de cisaillement et de flexion, puisque la comparaison des différentes situations, quantifiée en termes de raideur structurelle, est significative, surtout vis-à-vis d'un chargement latéral ou de renversement.

Ces observations sont également retrouvées, au prix d'un maillage assez fin et d'un temps de calcul conséquent, par une modélisation mixte de la structure renforcée, où les inclusions sont discrétisées individuellement et indépendamment du sol qui les entoure. On valide ainsi les observations faites par la modélisation multiphasique qui, contrairement à la modélisation mixte, n'est pas limitée aux problèmes bidimensionnels.

La deuxième partie de ce travail porte sur le comportement élastoplastique des différents constituants. Le modèle est donc étendu à la prise en compte de tels comportements en adoptant pour la matrice le même critère que le sol qu'elle représente et un critère du type diagramme d'interaction pour la phase renforcement.

L'algorithme de plasticité implicite (algorithme de retour radial) est modifié pour prendre en considération les deux phases en interaction, puis mis en œuvre numériquement dans le cadre de la méthode des éléments finis, aboutissant à un code de calcul des structures biphasiques en élastoplasticité. Ce code de calcul, validé par la solution analytique du problème de cisaillement de la couche de sol renforcée transversalement par une distribution d'inclusions, est utilisé pour simuler le comportement de structures renforcées par inclu-

sions raides. Deux exemples typiques de l'emploi des inclusions raides sont présentés dans ce mémoire. Le dimensionnement d'une fondation sur radier de pieux et l'étude de la tenue d'une pente stabilisée par un réseau d'inclusions, permettant de rejoindre les conclusions tirées dans la première partie de ce travail sur l'importance de la prise en considération des effets de flexion et de cisaillement, lorsque le comportement des différents constituants est élastique linéaire.

## 7.2 Perspectives

La suite de ce travail peut être envisagée dans trois directions principales :

- L'extension du modèle multiphasique avec flexion à la prise en compte de cinématiques différentes des deux phases en adoptant une loi d'interaction entre elles. Ce travail constitue aussi une suite de la thèse de Bennis, 2002 [7], dans laquelle il s'est intéressé à l'identification de cette loi d'interaction et à sa mise en œuvre numérique dans le cas où des inclusions souples sont utilisées.
- L'analyse de l'effet de bord, souligné au chapitre 4, ayant lieu à l'extrémité de la zone renforcée est à envisager. Ce travail, en cours, consiste à enrichir le modèle multiphasique à la prise en compte d'une interaction surfacique ayant lieu sur la frontière d'une zone renforcée et d'une zone non renforcée. L'évaluation des paramètres caractérisant cette interaction de pointe se fait à partir de calculs sur une cellule de base représentative du milieu renforcé (Gellée (2005) [38] ; Rospars et al (2005) [64]).
- Concernant le développement de l'outil numérique proprement dit, l'extension du code de calcul dont on dispose au traitement de problèmes tridimensionnel est à envisager. Un tel outil permettra de quantifier des effets non accessibles par le code bidimensionnel comme, par exemple, les effets de la torsion mais aussi le calcul de structures dans des configurations réelles. Cet outil pourra par la suite être valorisé en l'intégrant dans un code de calcul industriel comme cela a déjà été fait pour la version du modèle multiphasique sans flexion qui a fait l'objet d'un projet baptisé CASTOR et qui consistait à intégrer cette version du modèle multiphasique dans le logiciel CESAR-LCPC (Bourgeois et al. (2001) [13])

\*

\*

\*

# Bibliographie

- [1] D.P. Adhikary and A.V. Dyskin. A cosserat continuum model for layered materials. *Computers and Geotechnics*, (20) :15–45, 1997.
- [2] D. Alexiew and W. Vogel. Remblais ferroviaires renforcés sur pieux en allemagne : projets phares. *Travaux*, (786) :47–52, 2002.
- [3] A. Antoine. Mixed modelling of reinforced soils within the framework of yield design. *Computers and geotechnics*, 7 :67–82, 1989.
- [4] A. Askar and A.S. Cakmak. A structural model of a micropolar continuum. *International Journal Of Engineering Science*, (6) :583–589, 1968.
- [5] K.J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1982.
- [6] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis - volume2 : poutres et plaques*. Hermès, 1990.
- [7] M. Bennis. *Un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions, avec prise en compte de l'interface matrice/inclusion*. Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2002.
- [8] M. Bennis and P. de Buhan. A multiphase constitutive model of reinforced soils accounting for soil-inclusion interaction behaviour. *Mathematical and Computer Modelling*, 37(5-6) :469–475, 2003.
- [9] P. Berthelot, B. Pezot, and Ph. Liansu. Amélioration des sols naturel ou anthropiques par colonnes semi-rigides : le procédé emc. 13<sup>th</sup> *CMGGE, Prague*, 2003.
- [10] F. Blondeau, M. Christensen, A. Guilloux, and F. Shlosser. Talren : méthode de calcul des ouvrages en terre renforcée. *C.R. Coll. Int. Renf. Sols en place, Paris*, pages 219–224, 1983.
- [11] S. Borel. *Comportement et dimensionnement des fondations mixtes*. Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2001.



- 
- [12] S. Borel and N. Freitag. Behavior and numerical analysis of a piled embankment built near a transmission line tower. *NUMGE 2002, Paris*, pages 429–436, 2002.
- [13] E. Bourgeois, J.-F. Semblat, D. Garnier, and B. Sudret. Multiphase model for the 2d and 3d numerical analysis of pile foundations. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, pages 1435–1440, 2001.
- [14] L. Briançon, R. Kastner, B. Simon, and D. Dias. Etats des connaissances. amélioration des sols par inclusions rigides. *ASEP-GI, Paris*, pages 15–43, 2004.
- [15] B.B. Broms and P. Boman. Lime columns : a new foundation method. *Jl. geotech. Eng. Div., ASCE*, 105 :539–556, 1979.
- [16] J.B. Burland and V.F.B. De Mello. Behaviour of foundations and structures. state of the art. *Report, session2. Proc. 9th ICSMFE, Tokyo*, 2 :495–546, 1977.
- [17] N. Challamel and P. de Buhan. Mixed modelling applied to soil-pipe interaction. *Comp. and Geotech*, (3) :205–216, 2004.
- [18] J.Y. Chen, Y. Huang, and M. Ortiz. Fracture analysis of cellular materials : a strain gradient model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :789–828, 1998.
- [19] Y.K. Chow. Analysis of vertically loaded pile groups. *Int J Num Anal Meth Geomech*, 10 :59–72, 1986.
- [20] P. Clancy and M.F Aandolph. An approximate analysis procedure for piled raft foundations. *Int J Num Anal Meth Geomech*, 17(12) :849–869, 1993.
- [21] O. Combarieu. Amélioration des sols par inclusions rigides verticales. application à l'édification de remblais sur sols médiocres. *Revue Française de géotechnique*, (44) :57–79, 1998.
- [22] E.M. Comodromos, C.T. Anagnostopoulos, and M.K. Georgiadis. Numerical assessment of axial pile group response based on load test. *Computers and geotechnics*, (30) :505–515, 2003.
- [23] R.W. Cooke, Bryden-Smith D.W., Gooch M.N., and Sillett D.F. Some observations of the foundation loading and settlement of a multi-storey building on a piled raft foundation in london clay, part. 1. *Proc. Institution of Civil Engineers, London*, pages 433–460, 1981.
- [24] E. Cosserat and F. Cosserat1. *Théorie des corps déformables*. Hermann, 1903.

- [25] M.A. Crisfield. *Non linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. John Wiley & Sons, 1991.
- [26] P. de Buhan. Renforcement par inclusions des sols et des roches. de la modélisation mécanique au calcul des ouvrages. *Revue française de génie civil*, 8(9-10) :1033–1069, 2004.
- [27] P. de Buhan. De l'approche par homogénéisation au développement d'un modèle multiphasique : le cas des sols renforcés par inclusions linéaires. *Proc. Microstructure et Propriétés des Matériaux*, pages 29–38, 2005.
- [28] P. de Buhan, L. Dormieux, and J. Salençon. Modélisation micropolaire de la résistance d'un milieu renforcé par inclusions. *C.R. Ac. Sc, t.326 Série II-b*, pages 163–170, 1998.
- [29] P. de Buhan and J. Salençon. A comprehensive stability analysis of soil nailed structures. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 12(3) :325–345, 1993.
- [30] P. de Buhan and B. Sudret. A macroscopic constitutive model for materials reinforced by linear inclusions, incorporating bending effects. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series III*, 328 :555–560, 2000.
- [31] P. de Buhan and B. Sudret. Micropolar multiphase model for materials reinforced by linear inclusions. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(4) :669–687, 2000.
- [32] E. Degry and J.C. Romagny. Présentation du programme de calcul général des groupes de pieux goupil. *Bulletin de liaison des laboratoires des Ponts et Chaussées*, (162) :3–12, 1989.
- [33] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur, 1984.
- [34] A. Dhouib and F. Blondeau. *Colonne ballastées*. Presses des ponts et chaussées, Paris, 2005.
- [35] A. Ern and J.L. Guermond. *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer, 2001.
- [36] R. Frank. Fondations profondes. *Techniques de l'ingénieur. Traité construction. C248*, 1995.
- [37] F. Frey. *Analyse des structures et milieu continu*, volume 2. Presses Polytechniques et Universitaires Romande, 1994.

- [38] A. Gellée. *Contribution au calcul des sols renforcés par nclusions rigides*. Stage scientifique de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2005.
- [39] E. Greuell. *Etude du soutènement des tunnels par boulons passifs dans les sols et les roches tendres, par une méthode d'homogénéisation*. Thèse de l'École polytechnique., 1993.
- [40] D.V. Griffiths, P. Clancy, and M.F Aandolph. Piled raft foundation analysis by finite elements. *Proc. Comp. Meth. and Adv. in Geomech, Beer, Booker, Carte (Eds.)*. Balkema, Rotterdam, pages 1153–1157, 1991.
- [41] G. Gudenus and W. Schwarz. Stabilization of creeping slopes by dowels. *Proc. 11<sup>th</sup> ICSMFE, San Francisco*, 1985.
- [42] A. Guilloux. Slope stabilization using soil nailing in france; design methods and cares histories for the foundations of the rion-antirion brige. paper number : 11311. 7<sup>2nd</sup> Annual meeting of Transportation Research Board, Washington DC, 1993.
- [43] Z. Hashin. Analysis of composite materials-a survey. *J. Appl. Mech.*, (50) :481–505, 1983.
- [44] G. Hassen. *Mise en oeuvre numérique d'un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions avec prise en compte des effets dus à la flexion et au cisaillement*. Mémoire de DEA, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2002.
- [45] G. Hassen and P. de Buhan. A multiphase model for simulating the response of a reinforced soil foundation under combined loading. *Proc. Int. Symp. FONDSUP, Magnan et Droniuc (ed.)*.
- [46] G. Hassen and P. de Buhan. Development of a computational tool for the analysis and design of soil structures reinforced with stiff linear inclusions. *Proc. Int. Conf. Eng. Comp. Tech., Lisbon, 7-9 september*, (117), 2004.
- [47] G. Hassen and P. de Buhan. Numerical implementation of a multiphase model for the analysis and design of reinforced slopes. *Advances in Geomaterials and Structures, 3-5 May, Tunisia*, 2005.
- [48] G. Hassen and P. de Buhan. A two-phase model and related numerical tool for the design of soil structures reinforced by stiff linear inclusions. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24 :987–1001, 2005.
- [49] G. Hassen and P. de Buhan. Elastoplastic multiphase model for simulating the response of piled raft foundations subject to combined loadings. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 2006.

- [50] D.C. Hong, Y.K. Chow, and K.Y. Yong. An method for the analysis of large vertically loaded pile groups. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, (23) :243–262, 1999.
- [51] W.P. Hong and J.M. Nam. Stability of a cut slope reinforced by stabilizing piles. *Proc. 14<sup>th</sup> ICSMFE*, 1997.
- [52] Hooper J.A. Review of behaviour of piled raft foundations. *Construction Industry Research and Information association (CIRIA)*, 1979.
- [53] o. Jenck, D. Dias, and R. Kastner. Soft ground improvement by vertical rigid piles. two dimensional physical modelling and comparison with current design methods. *Soils and Foundations*, 45(6) :15–30, 2005.
- [54] R. Katzenbach. Soil-structure interaction of the 300 m high commerzbank tower in frankfurt am main. measurements and numerical studies. *Proc. 14th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng, Hamburg*, 2 :1081–1084, 1997.
- [55] J.L. Ledoux. Rénovation du pont de pierre de bordeaux- projet de renforcement des piles 2 et 3. *Revue générale des Routes et Autoroutes*, hors série :92–94, 1997.
- [56] F.Y. Liang and L.Z. Chen. A modified variational approach for the analysis of piled raft foundation. *Mech. Res. Com.*, 31 :593–406, 2004.
- [57] F.Y. Liang, L.Z. Chen, and X.G. Shi. Numerical analysis of composite piled raft with cushion subjected to vertical load. *Computers and geotechnics*, (30) :443–453, 2003.
- [58] D.R.J. Owen and E. Hinton. *Finite elements in plasticity*. Pineridge Press Limited. Swansea, U.K., 1980.
- [59] A. Pecker. Capacity design principles for shallow foundations in seismic areas. *Key-note lecture, 11<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering, Paris*, 1998.
- [60] A. Pecker and J.P. Teyssandier. Seisms design for the foundations of the rion-antirion brige. paper number : 11311. *Proc. ICE, geotechnical Engineering, 131*, pages 4–11, 1998.
- [61] C. Plumelle, P. Cangneux, R. Frank, J. Canou, R. Estephan, P. Furay, and J. Garnier. Projet national forever- différentes approches du comportement des groupes et des réseaux de micropieux, en modèle réduit, en modèle centrifugé, en vraie grandeur. *Revue européenne de génie civil*, hors série, 2002.
- [62] O. Reul. Numerical study of the bearing behaviour of piled rafts. *Int. J. of geomech*, (2) :59–68, 2004.

- [63] O. Reul and M.F. Randolph. Piled rafts in overconsolidated clay. comparison of in-situ measurements and numerical analyses. *géotechnique*, 53(3) :301–315, 2003.
- [64] C. Rosspars, E. Bourgeois, P. Humbert, and P. de Buhan. Un modèle de calcul simplifié pour l'évaluation du tassement d'un massif de fondation renforcé par inclusions rigides. *Proc. 16th Int. Cong. Soil Mech. Geotech. Eng., Osaka*, pages 1081–1084, 2005.
- [65] J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [66] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus, tome I. Concepts généraux*. Les éditions de l'école polytechnique, 2001.
- [67] J. Salençon. *Handbook of Continuum Mechanics. General concepts. Elasticity*. Springer, 2002.
- [68] F. Schlosser and R. Frank. *Projet National FOREVER- Synthèse des résultats et recommandations du Projet national sur les micropieux*. Presses des ponts et chaussées, Paris, 2003.
- [69] F. Schlosser and Ph. Unterreiner. Renforcement des sols par inclusions. *Techniques de l'ingénieur. Traité construction. C245*, 1995.
- [70] W.Y. Shen and C.I. Teh. Analysis of laterally loaded pile groups using a variational approach. *géotechnique*, 52(3) :201–208, 2002.
- [71] W.Y. Shen and C.I. Teh. A variational solution for dowdray force analysis of pile groups. *Int. J. of geomech*, 2(1) :75–91, 2002.
- [72] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer, 1998.
- [73] J.C. Small and H.H. Zhang. Behaviour of piled raft foundations under lateral and vertical loading. *Int. J. of geomech*, 2(1) :29–45, 2002.
- [74] H. Sommer, Tamaro G., and et DeBenedittis C. Messe turn, foundations for the tallest building in europe. *Proc. 4th Int. Conf. on Piling and Deep Foundations - Stresa (Italy)*, pages 139–145, 1991.
- [75] B. Sudret. *Modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions*. Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1999.
- [76] B. Sudret and P. de Buhan. Multiphase model for inclusion-reinforced geostuctures. application to rock-bolted tunnels and piled raft foundations. *Int J Num Anal Meth Geomech*, 25 :155–182, 2001.

- [77] S.R. Timoshenko, R. Pirt, and C. Laftte. *Résistance des matériaux*, volume 2. Dunod, Paris, 1990.
- [78] K. Vetter. *Untersuchungen zum Tragverhalten der Kombinierten Pfahl-Platen-Gründung des Messeturms in Frankfurt am Main auf der Basis von Messungen und numerische Computersimulation*. Masters Thesis, TU Darmstadt, 1998.
- [79] H.H. Zhang and J.C. Small. Analysis of capped pile groups subjected to horizontal and vertical loads. *Computers and geotechnics*, 26 :1–21, 2000.
- [80] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method. Vol1 : basic formulation and linear problems. 4ème édition*. McGraw-Hill Book Company, 1994.



## Résumé

La technique de renforcement des sols par inclusions linéaires rigides, c'est-à-dire capables de reprendre des efforts de flexion et cisaillement, connaît depuis quelques décennies un essor important bien que la simulation et le calcul de tels ouvrages reste un problème difficile, en raison de la très forte hétérogénéité du sol renforcé combinée au grand nombre d'inclusions mis en jeu dans de tels ouvrages. Une modélisation multiphasique a récemment été développée permettant d'aborder le dimensionnement de tels ouvrages de géotechnique avec des temps de calcul considérablement réduits par rapport à ceux d'une modélisation numérique classique, où les inclusions de renforcement doivent être discrétisées individuellement.

On s'intéresse dans le cadre de ce travail à la mise en oeuvre de ce modèle dans le cadre du comportement élastoplastique des différents constituants, lorsque les effets de flexion et de cisaillement des inclusions sont pris en compte. Après avoir développé un certain nombre de solutions analytiques de référence, un outil numérique basé sur la méthode des éléments finis est mis au point, puis appliqué à la simulation du comportement de différentes structures renforcées, telles que les radiers de fondation sur groupes de pieux, ou la stabilisation de pentes instables par l'incorporation de telles inclusions.

## Abstract

The reinforcement of soils by rigid linear inclusions, where shear and flexural behaviour is to be accounted for, is becoming an increasingly used technique to enhance the serviceability and stability of geotechnical structures, although the simulation and design of such structures remains a very difficult task, due to the strong heterogeneity of the reinforced soil combined with the relatively high number of inclusions involved in such reinforced soil structures. A multiphase model has been recently developed, allowing to perform the simulation of such structures with a considerably reduced computational effort, compared with that required by a direct simulation, where the inclusions have to be discretized as individual elements.

The present work is aimed at implementing such a model in the context of an elastoplastic behaviour for both constituents, with a particular emphasis on the shear and flexural effects prevailing in the rigid inclusions. Starting from the derivation of some analytical solutions, a fem.-based numerical code is then developed and applied to simulating the behaviour of some typical reinforced structures, such as piled raft foundations and slope stabilization systems.