



HAL
open science

Control of processes with variable parameters

Julien Barraud

► **To cite this version:**

Julien Barraud. Control of processes with variable parameters. Mathematics [math]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006. English. NNT: . pastel-00002192

HAL Id: pastel-00002192

<https://pastel.hal.science/pastel-00002192>

Submitted on 19 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS
PAR

JULIEN BARRAUD

EN VUE DE L'OBTENTION DU TITRE DE
DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

SPÉCIALITÉ
MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

SUJET DE LA THÈSE
**COMMANDE DE PROCÉDÉS À PARAMÈTRES
VARIABLES**

JEAN-PIERRE CORRIOU
EMMANUEL TRÉLAT
YANN CREFF
MADIHA NADRI WOLF
NICOLAS PETIT
LAURENT PRALY
MÉRIAM CHÈBRE

PRÉSIDENT ET RAPPORTEUR
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR
EXAMINATEUR
EXAMINATEUR
EXAMINATEUR
INVITÉ

Mots clés. Contrôle de procédés. Modélisation. Commande non linéaire. Systèmes à retards. Retards variables. Mélanges. Contrôle de pH. Régulateurs monovariables. Stabilité.

RÉSUMÉ

Le travail présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans le cadre de la commande temps réel de certains procédés du raffinage. Nous présentons les travaux réalisés sur la commande monovariante et la gestion des paramètres variables (retard, gain). Cette approche est complétée par des applications réalisées, soit directement sur un procédé réel, soit sur un modèle de connaissance proche d'un procédé réel.

La première partie des travaux s'est articulée autour de l'étude d'un article apparu en 2003. Nous avons comparé les méthodes de commande monovariante proposées dans cet article avec d'autres méthodes plus communément utilisées. Pour tester ces différents outils dans des conditions proches des conditions réelles, nous avons réalisé un modèle simplifié d'un procédé d'hydrodésulfuration. Dans le but d'améliorer les performances obtenues avec les outils testés, nous avons mis au point un prédicteur de Smith adaptatif dans lequel le retard est mis à jour à partir de considérations physiques du procédé.

Nous nous intéressons aussi au problème ouvert de la commande d'un procédé de mélange, qui comporte plusieurs volumes morts entre les bacs de bases et la mélangeuse. Nous avons montré qu'il était possible de reconstruire, en choisissant un estimateur adapté, les propriétés en sortie de mélangeuse. Nous avons aussi constaté qu'il était possible, via une optimisation non linéaire, de gérer les contraintes sur les caractéristiques du mélange, en prenant en compte explicitement la variabilité du retard pendant le calcul de la commande. La méthode, testée dans un premier temps en simulation, a été mise en place et est utilisée, au moins pour sa partie estimation, sur une mélangeuse réelle.

Nous avons également travaillé sur la commande d'un procédé de neutralisation de pH. L'approche que nous avons eue du problème est double. D'un côté, nous avons travaillé directement sur le procédé, de l'autre, nous avons élaboré un modèle non linéaire à partir duquel nous avons mis en place une loi de commande non linéaire. Le modèle utilisé est issu du principe de la conservation de la matière et des équations d'équilibre qui régissent les réactions acido-basiques ; il est calé avec une série d'expériences réalisées dans différentes conditions opératoires. La loi de commande utilisée pour réguler le pH mesuré au pH de consigne intègre les non linéarités du procédé ce qui permet à l'utilisateur de changer de conditions opératoires sans avoir de modifications à apporter aux réglages de celle-ci.

REMERCIEMENTS

Monsieur Jean-Pierre Corriou m'a fait l'honneur d'accepter d'être président de mon jury de thèse et rapporteur de celle-ci. Pour cela, ainsi que pour ses commentaires sur mon mémoire, je lui exprime ma profonde gratitude.

Je remercie Monsieur Emmanuel Trélat d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, ainsi que pour ses jugements très pertinents sur mon manuscrit, tant sur le fond que sur la forme.

Mes remerciements vont à mon directeur de thèse, Nicolas Petit, qui a accepté d'encadrer cette thèse et qui m'a témoigné son soutien et sa confiance. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.

Je tiens à remercier Yann Creff pour son encadrement et son soutien qui m'ont permis de mener à bien cette étude.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent également à Mesdames Madiha Nadri Wolf et Mériam Chèbre et Monsieur Laurent Praly pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'évaluer mes travaux.

Messieurs Renaud Revel et Olivier Lafon ont toute ma reconnaissance pour la confiance qu'ils m'ont accordée pendant presque deux ans de collaboration.

Un grand merci à tout mes collègues de l'IFP qui par un service, un café ou un repas partagé ont rendu conviviale cette expérience.

Je tiens à remercier mes amis et ma famille pour leur soutien, ils ont subi les moments de découragement et ont su trouver les mots qui m'ont donné la motivation nécessaire pour terminer ce travail.

Enfin et surtout, merci à mes parents qui m'ont donné l'éducation nécessaire à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	iii
Remerciements	v
1 Introduction générale	1
1.1 Motivation	1
1.2 Résumé des travaux réalisés	2
1.2.1 Retard variable	2
1.2.2 Gain variable	3
2 Limitations et possibilités d'adaptation des méthodes usuelles de contrôle pour les systèmes à retards variables	5
2.1 Introduction	6
2.1.1 Les contrôleurs PI	7
2.1.2 Stabilité des systèmes bouclés avec des régulateurs PI	8
2.1.3 Robustesse des réglages de Tavakoli Fleming face à une erreur de retard	10
2.1.4 Un prédicteur de Smith pour améliorer les performances	12
2.2 Prédicteur de Smith adaptatif	14
2.2.1 Présentation du prédicteur de Smith adaptatif	15
2.2.2 Etude comparative sur un système du premier ordre retardé	15
2.2.3 Conclusion	17
2.3 Étude comparative sur un modèle d'une unité d'hydrodésulfuration	18
2.3.1 Contexte	18
2.3.2 Description du procédé	18
2.3.3 Modèle	19
2.3.4 Résultats de simulation	23

2.4	Variabilité du retard associée à l'équation piston diffusion	26
2.4.1	Prise en compte de la diffusion pour le calcul du retard	27
2.4.2	Calcul du retard pur	30
2.4.3	Simulation	31
2.5	Conclusion	32
3	Commande d'une mélangeuse	33
3.1	Description du procédé de mélange	34
3.2	Composition de fonctions retard	35
3.3	Modèle	37
3.3.1	Expression de la sortie	38
3.3.2	Définition d'une topologie pour la représentation d'un flowsheet	43
3.4	Estimation de la sortie	45
3.5	Commande	48
3.5.1	Contraintes sur les propriétés en sortie	50
3.5.2	Commande sans prise en compte des prémélanges	50
3.5.3	Commande avec prise en compte des prémélanges	52
3.6	Résultats de simulation	56
3.7	Résultats industriels	59
3.8	Conclusion	59
4	Régulation de pH	61
4.1	Le procédé	63
4.2	Approche linéaire	65
4.2.1	Régulation hors zone de neutralisation	66
4.2.2	Régulation dans la zone de neutralisation	66
4.3	Modèle et approche non linéaire	68
4.3.1	Modèle d'un procédé de neutralisation du pH dans un réacteur de type fed batch	68
4.3.2	Commande non linéaire du procédé de neutralisation de pH . . .	74
4.4	Mise au point pour l'approche non linéaire	79
4.4.1	Stratégie pour la régulation de base	79

4.4.2	Commande non linéaire directe pH/Intensité	82
4.4.3	Précipitation, erreurs de modélisation et déstabilisation	86
4.4.4	Résultats pratiques	89
4.5	Approche dérivée	93
4.6	Conclusion	94
Bibliographie		96
Annexes		99
A Stabilité des systèmes du premier ordre avec retard		101
A.1	Stabilité des réglages de Tavakoli Fleming (temps intégral)	101
A.2	Comparaison des réglages de Ziegler et Nichols et Tavakoli et Fleming .	104
B Solution de l'équation de piston-diffusion		107
C Définition et calcul du retard pour le transport d'une charge dans un volume fixe		113
C.1	Définition du retard	114
C.2	Expression du retard à débit constant non nul	114
C.3	Expression du retard à débit variable non identiquement nul	114
C.4	Calcul du retard dans le cas particulier d'un débit constant par morceaux	115
D Discussion sur l'approximation réalisée sur le retard pour les prédictions		117
E Compléments de travaux pour la régulation de pH		121
E.1	Stratégie pour la régulation de base	121
E.1.1	Pré-compensation	122
E.1.2	Existence d'un cycle limite	126
E.1.3	Stabilité du système boucle fermée.	132
E.2	Commande linéaire directe pH/Intensité	135
E.3	Stabilité d'un système linéaire non autonome particulier	141

TABLE DES FIGURES

2.1	Positivité de la fonction $K(K_{max} - K_c)\mu$ (définie par (2.5)) sur l'intervalle $\alpha \in]0, \pi[$	10
2.2	Erreurs limites e_{min}^{Ti} (trait noir épais) et $e_{min}^{K\varepsilon}$ (trait bleu fin) à ne pas dépasser pour conserver un système bouclé stable	12
2.3	Système bouclé avec le prédicteur de Smith.	13
2.4	Forme équivalente du système bouclé avec le prédicteur de Smith.	14
2.5	Implémentation du prédicteur de Smith avec filtre additionnel de robustesse.	14
2.6	Réponse à un échelon de consigne sur le modèle $(K, \tau, \delta) = (1, 1, 1)$. Le retard identifié vaut +40% du retard réel	16
2.7	Réponse à un échelon de consigne sur le modèle $(K, \tau, \delta) = (1, 0.2, 1)$. Le retard identifié vaut +40% du retard réel	17
2.8	Schéma simplifié d'une unité d'HDS	20
2.9	Fraction massique de <i>RSH</i> . Simulation boucle ouverte.	21
2.10	Rejet de perturbation	25
2.11	Suivi de trajectoire avec perturbation du débit à l'entrée du réacteur	26
2.12	Identification de la solution de l'EDP (2.19) par un premier ordre retardé.	30
2.13	Suivi de trajectoire sur un modèle piston diffusion bouclé avec un prédicteur de Smith synthétisé avec et sans utilisation de la diffusion	32
3.1	Disposition des bacs de stockage et regroupement des bases avant la mélangeuse	34
3.2	Transport de matière dans 2 volumes successifs	35
3.3	Flowsheet du procédé de mélange avec prémélanges	39
3.4	Flowsheet simplifié	48

3.5	Comparaison des résultats obtenus avec les deux commandes (avec et sans prise en compte des prémélanges dans le problème d'optimisation) présentées dans la section 3.5 dans le cas du flowsheet simplifié.	57
3.6	Comparaison des résultats obtenus avec les deux commandes (avec et sans prise en compte des prémélanges dans le problème d'optimisation) présentées dans la section 3.5 dans le cas du flowsheet présenté sur la figure 3.3.	58
3.7	Résultats expérimentaux obtenus dans une raffinerie du groupe Total. En bleu le pourcentage de soufre mesuré en sortie de mélangeuse, en marron l'estimation de ce pourcentage et en rouge les minima et maxima à ne pas dépasser.	59
3.8	Résultats expérimentaux obtenus dans une raffinerie du groupe Total. En bleu le densité mesurée en sortie de mélangeuse, en marron l'estimation de cette densité et en rouge les minima et maxima à ne pas dépasser.	60
4.1	Schéma de principe du procédé de régulation de pH	64
4.2	Courbe de titrage d'un mélange de sulfate d'aluminium ($Al_2(SO_4)_3$) et de métasilicate de sodium (Na_2SiO_3) par ajout d'acide sulfurique (H_2SO_4) : expérience réalisée au titrimètre automatique.	65
4.3	Régulation à pH = 10 avec un contrôleur proportionnel intégral	66
4.4	Régulation à pH = 7, avec adaption du gain en fonction du pH mesuré	67
4.5	Régulation à pH = 7 avec un contrôleur proportionnel intégral dérivé (PID)	68
4.6	Test de linéarité de $f_A(10^{-pH}, C_{\bar{A}}) = h_A(10^{-pH})C_{\bar{A}}$, pour cinq concentrations initiales de $C_{\bar{A}}$ différentes.	73
4.7	Test de linéarité de $f_B(10^{-pH}, C_{\bar{B}}) = h_B(pH)C_{\bar{B}}$, pour cinq concentrations finales $C_{\bar{B}}$ différentes.	74
4.8	Simulation d'un batch dont le pH de consigne est hors zone de neutralisation : $pH^c = 10$	76
4.9	Simulation d'un batch dont le pH de consigne est dans la zone de neutralisation : $pH^c = 7$	77
4.10	Régulation du pH hors zone de neutralisation ($pH^c = 10$) sur le procédé réel	78
4.11	Régulation du pH dans la zone de neutralisation ($pH^c = 7$) sur le procédé réel	78
4.12	Schéma de principe de la régulation de masse/débit sur le procédé de neutralisation de pH	80

4.13	Expérience BOUCLE OUVERTE (sur le pH) où les débits de consigne des réactifs ET de la commande sont constants. Les variations d'intensité (générées par le régulateur de masse débit d'origine) entraînent des variations très importantes sur le pH.	81
4.14	Régulation à 2g/min ; Régulateur de masse mis au point	82
4.15	Régulation à 2g/min ; Régulateur de masse d'origine	83
4.16	Schémas de régulation du pH. (a) : Cascade des régulateurs de pH et de masse/débit d'origine sur le procédé. (b) modification apportée pour une régulation directe du pH par l'intensité envoyée à la pompe d'acide de commande	84
4.17	Expérience où la commande utilisée est (4.21) sans pré positionnement et sans prise en compte de la précipitation.	87
4.18	Simulation d'une expérience où la précipitation est prise en compte dans le simulateur mais pas dans la commande ; le pH de consigne est 7. La commande utilisée est (4.21) sans pré positionnement ($\beta = 0$).	88
4.19	Régulation à pH = 7 avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation	90
4.20	Régulation à pH = 4 avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation	90
4.21	Régulation à pH = 5.5 avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation	91
4.22	Régulation à pH = 8.5 avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation	91
4.23	Régulation à pH = 10 avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation	92
A.1	(a) : Valeur de μ en fonction de z où μ est défini par l'équation (A.4) ; (b) : Vérification de l'inégalité (A.5).	103
A.2	(a) : Valeur de μ en fonction de z où μ est défini par l'équation (A.4) ; (b) : Vérification de la positivité de $b(z_2)$	104
A.3	Comparaison de $\mu K K_c$ pour Tavakoli et Fleming (trait noir épais), Ziegler et Nichols (trait bleu fin) par rapport à la valeur maximale de stabilité (trait discontinu rouge).	105
A.4	Comparaison de $\mu^2 K \frac{K_c \tau}{T_i}$ pour Tavakoli et Fleming (trait noir épais), Ziegler et Nichols (trait bleu fin) par rapport à leurs valeurs maximales respective de stabilité (traits discontinus).	106
B.1	Condition Initiale	111

C.1	Transport dans un volume	113
D.1	Flowsheet simplifié	117
D.2	Commandes	119
E.1	Feed forward : génération d'une trajectoire boucle ouverte par platitude	123
E.2	Feed forward : génération d'une trajectoire boucle ouverte par commande constante par morceaux	124
E.3	Génération d'une trajectoire boucle ouverte par commande constante par morceaux : feed forward implémenté sur le pilote	127
E.4	Schéma bloc du système bouclé avec un régulateur proportionnel lorsque la masse mesurée est discrète.	128
E.5	Signal périodique $u(t)$	129
E.6	Signal de masse et signal de masse discrétisé	130
E.7	Paramètres du modèle : Gain du modèle (en $\text{g}\cdot\text{min}^{-1}\cdot\text{mA}^{-1}$) et constante de temps du modèle (en s)	137
E.8	Gain du contrôleur (en $\text{mA}\cdot\text{min}\cdot\text{g}^{-1}$)	138
E.9	Temps intégral du contrôleur (en s) et temps dérivé du contrôleur (en s)	139
E.10	Résultat d'une régulation à $\text{pH} = 10$ sur le procédé	140
E.11	Résultat d'une régulation à $\text{pH} = 7$ sur le procédé	140

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Notations	22
3.1	Signification physique des retards	37
3.2	M_f – Matrice de représentation du flowsheet de la figure 3.3	44
3.3	M_s – Sous-matrice triangulaire inférieure	45
3.4	V_f – Vecteur des volumes des prémélanges du flowsheet	45

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le but des travaux présentés ici est de développer des outils de contrôle temps réel adaptés pour la commande de modèles à paramètres variables. Cette démarche cherche à pallier les principaux défauts des approches linéaires actuellement utilisées pour la commande des procédés du raffinage et de la pétrochimie. Basées sur des modèles trop simples, celles-ci ont un domaine de fonctionnement et des performances limités.

1.1 Motivation

Le besoin de généralité Pour les industries manufacturières, l'investissement dans un contrôleur est rentabilisé par un effet de volume. Comme il se vend de nombreux exemplaires des produits équipés du contrôleur en question, un développement spécifique trouve facilement sa justification. En contrôle des procédés, la situation est différente. Chaque unité est particulière et il est difficile de dégager des classes de problèmes pour lesquels le développement d'un outil dédié est économiquement viable. Par conséquent, les outils ont une vocation générale, leur permettant de s'adapter aussi bien à des réformeurs qu'à des unités d'hydrodésulfuration ou à des distillations atmosphériques. . .

Limites actuelles La contrepartie de cette généralité est qu'actuellement ces outils se basent sur des modèles extrêmement simples. Ce sont des modèles linéaires à paramètres constants, dont le domaine de validité est restreint : il n'est pas possible de garantir les performances sur une large plage de fonctionnement du procédé. Ces modèles linéaires disent essentiellement que la modification d'une variable d'action entraîne une modification proportionnelle de la variable contrôlée (le coefficient de proportionnalité est appelé gain). L'effet n'est pas immédiat : rien ne se passe avant un retard pur donné, ensuite la modification de la variable contrôlée prend un certain temps, appelé temps de montée. Les trois paramètres (gain, retard et temps de montée) sont considérés comme des constantes. Pour obtenir la valeur de ces paramètres, il est nécessaire de procéder à de longs et nombreux essais sur le site industriel. De plus, en pratique, les paramètres ne sont jamais constants : les performances de ces contrôleurs sont limitées, parfois au point de rendre impossible leur utilisation. Quelques palliatifs

sont envisageables pour changer les paramètres du modèle suivant les conditions de fonctionnement du procédé. Mais, classiquement, le problème est repoussé ailleurs et en génère de nouveaux. Il faut définir quand les changements doivent avoir lieu. Les changements impliquent une phase transitoire pendant laquelle les performances sont dégradées. Enfin, qui dit changement de paramètres dit disponibilité de ces paramètres, donc alourdissement de la phase d'identification, déjà trop longue, puisqu'aucune méthode pour identifier les paramètres du contrôleur pendant son fonctionnement ne se révèle vraiment efficace.

1.2 Résumé des travaux réalisés

Nous présentons dans ce manuscrit les approches que nous avons mises en place pour la commande de plusieurs procédés non linéaires. Dans les cas traités, les non linéarités peuvent être interprétées comme des gains variables, des constantes de temps variables ou des retards variables. Dans un premier temps, nous avons abordé le problème du retard variable dans un contexte monovarié pour la commande d'un modèle simplifié d'une unité d'hydrodésulfuration. Dans un second temps, nous avons isolé le problème du retard variable dans un cadre multivarié en travaillant sur un procédé de mélange. Enfin, nous avons travaillé sur un problème réunissant gain variable et constante de temps variable : la régulation de pH sur un procédé batch (pilote IFP).

1.2.1 Retard variable

La gestion du retard variable représente un problème récurrent dans la commande des procédés industriels. Le retard est le plus souvent généré par le transport d'un fluide dans un volume constant. Il devient variable lorsque le débit de ce fluide fluctue. Nos travaux sur ce thème comportent deux volets.

Prédicteur de Smith adaptatif Dans un premier temps (chapitre 2), nous nous sommes intéressés à la régulation monovarié d'un procédé d'hydrodésulfuration. Nous avons comparé les performances de régulateurs standards (régulateur proportionnel intégral et prédicteur de Smith) avec celles d'un prédicteur adaptatif. Pour ce dernier, notre contribution réside dans la mise à jour du retard à partir de considérations tirées de la solution analytique d'une équation aux dérivées partielles comportant des termes de convection et de diffusion. Les simulations indiquent que ce prédicteur fonctionne mieux que les régulateurs standards. Nous chercherons à quantifier cette amélioration dans la suite des travaux.

La calcul pour la mise à jour du retard pourra être utilisé dans d'autres cadres. Mais la structure de ce prédicteur se prête mal aux généralisations (en multivarié notamment), pour lesquelles il faut pouvoir prendre en compte, au moment du calcul de la commande et non de manière indirecte comme dans le cas traité, la variabilité des retards par rapport à cette commande.

Mélanges Le constat précédent sur la généralisation de notre prédictif adaptatif nous a amené à aborder un second volet, concernant un problème de mélange (chapitre 3). C'est un cas multivariable pour lequel la dynamique est constituée uniquement de combinaisons de retards purs variables.

Nous avons établi le modèle dynamique pour une topologie de mélange quelconque, comportant des volumes morts à l'origine des retards purs. Ces topologies deviennent importantes avec le développement des mélanges en amont de procédés de traitement, mélanges qui utilisent des bacs de stockage intermédiaires répartis à des endroits divers dans la raffinerie.

Nous avons montré qu'il est possible de modifier dynamiquement la connaissance disponible des bases de mélange, afin que la prédiction des propriétés du mélange converge vers sa mesure (estimation). Nous avons aussi constaté qu'il était possible, via une optimisation non linéaire, de gérer les contraintes sur les caractéristiques du mélange, en prenant en compte explicitement la variabilité du retard pendant le calcul de la commande. La méthode, testée dans un premier temps en simulation, a été mise en place avec succès et est utilisée, pour l'instant pour sa partie estimation, sur une mélangeuse réelle en raffinerie.

1.2.2 Gain variable

Parallèlement aux études sur la variabilité des retards purs, nous avons travaillé sur un problème de régulation de pH, qui illustre bien le problème de la variabilité du gain. L'écriture du modèle de connaissance sur ce procédé est difficile, à cause du caractère multi-acide ou multi-basique des constituants utilisés d'une part ; à cause, d'autre part, de phénomènes de précipitation et de dissolution assez mal connus d'un point de vue cinétique. De plus le caractère batch du procédé est représenté par un modèle instationnaire ; cette caractéristique du modèle est vue comme une constante de temps variable.

Dans le cadre de premiers travaux, nous avons réglé un régulateur PID autour de divers points de fonctionnement (dont des points difficiles à atteindre dans la zone de neutralisation). Le fonctionnement, satisfaisant dans les cas les plus simples, ne nous a pas permis de respecter les spécifications souhaitées par l'utilisateur dans les cas les plus difficiles.

Pour améliorer les performances, nous avons mis au point un modèle compatible avec nos objectifs de commande. Nous nous sommes donc intéressés aux propriétés d'un modèle simplifié du procédé et avons mis au point une commande non linéaire. Malgré des résultats très satisfaisants en simulation, les premiers résultats obtenus sur le pilote ont été décevants. La régulation de pH en zone de neutralisation est un problème difficile du fait de l'importante non linéarité du procédé présente dans cette zone. En plus, de cette difficulté que nous avons prise en compte dans le modèle et donc la commande, nous avons dépassé ce cadre et travaillé sur le procédé pour réduire considérablement les perturbations non mesurables. Nous avons notamment mis au point une régulation plus performante pour la couche bas niveau dont le comportement était insatisfaisant

et modifié une partie du système de supervision.

Suite à ces améliorations nous avons raffiné notre modèle et pris en compte à l'aide d'un modèle simplifié la précipitation jusqu'à maintenant considérée comme une perturbation non mesurable.

L'ensemble des modifications opérés sur le procédé et sur le modèle utilisé pour la commande nous a permis d'obtenir les résultats attendus, similaires à ceux obtenus en simulation et répondant aux exigences de l'utilisateur sur la gamme de fonctionnement donnée. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 4.

CHAPITRE 2

LIMITATIONS ET POSSIBILITÉS D'ADAPTATION DES MÉTHODES USUELLES DE CONTRÔLE POUR LES SYSTÈMES À RETARDS VARIABLES

Les systèmes à retards variables représentent un défi pour le contrôle des procédés industriels. Une des principales causes de la variabilité du retard est le transport de matière, à débit variable, dans un volume constant. C'est typiquement le cas dans les réacteurs tubulaires.

En dépit des avancées des techniques du contrôle des procédés, la simplicité et la robustesse du contrôleur PID en font un choix très fréquent (voir [ÅH95]). De nombreuses méthodes de réglage existent lorsque les modèles présentent un retard non négligeable. Les régulateurs de type prédictif (voir [MY01]) prennent en compte les retards purs présents dans les modèles, mais ils ne sont pas spécifiquement adaptés aux retards variables. Le prédicteur de Smith est le plus simple de ces régulateurs et permet d'accroître les performances obtenues lorsque le retard est bien connu. Cependant, comme le montre [MN03], il est pénalisé par une forte sensibilité face à l'identification et à la variabilité du retard. En contrôle monovarié, les performances des prédicteurs sont souvent décevantes et poussent à l'utilisation de contrôleurs plus simples de type PID, dont la robustesse est améliorée, aux dépens des performances du système bouclé. Une vue d'ensemble des problèmes associés aux systèmes retardés est présentée dans [Ric03]. Dans le cadre de premiers travaux visant à gérer la variabilité du retard, nous présentons dans ce chapitre un contrôleur de type "prédictif adaptatif".

Dans l'introduction (section 2.1), nous présentons une méthode de réglage des régulateurs proportionnels intégraux (PI) proposée par Tavakoli et Fleming en 2003. Nous utilisons un résultat récent proposé dans [SDP05] pour montrer qu'un régulateur PI réglé avec les réglages de Tavakoli et Fleming stabilise les systèmes du premier ordre à retard. Les réglages proposés par les auteurs, déterminés pour assurer la robustesse en boucle fermée, garantissent des marges de gain et de phase minimums. Nous proposons un calcul qui permet de définir l'erreur maximale réalisable sur l'identification du retard (en fonction du rapport retard/constante de temps) pour conserver un système bouclé stable. Après avoir présenté le prédicteur de Smith, nous rappelons la méthode utilisée sur ce prédicteur pour le rendre robuste face aux erreurs d'identification de retard.

Le prédictif de Smith adaptatif que nous exposons est présenté à la section 2.2. Nous proposons dans cette section une étude comparative du prédictif proposé avec les régulateurs présentés en introduction sur un simple système du premier ordre à retard variable.

Pour illustrer et comparer ces différentes commandes, nous souhaitons les utiliser pour un modèle de connaissance de procédé réel. Nous proposons donc, à la section 2.3, un modèle simplifié pour une unité d'hydrodésulfuration (HDS) dont le cœur est un réacteur tubulaire. Le modèle du réacteur est du type piston-diffusion, il s'écrit donc à l'aide d'équations aux dérivées partielles (EDP). L'EDP du transport est aussi utilisée pour modéliser les conduites qui acheminent les matières d'une opération unitaire à une autre. Après avoir décrit l'unité d'hydrodésulfuration, nous en proposons un modèle simplifié. La robustesse et les performances en suivi de trajectoire et rejet de perturbation du contrôleur proposé sont étudiées sur ce modèle de connaissance. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus avec deux régulateurs classiques : un contrôleur proportionnel intégral (PI) et un prédictif de Smith. Cette étude nous permet de valider l'intérêt de notre contrôleur dans un contexte plus réaliste de contrôle de procédés.

Nous proposons, dans la section 2.4, une méthode pour identifier le retard utilisé dans le prédictif adaptatif à partir des équations aux dérivées partielles convection-diffusion.

2.1 Introduction

La mise en place de régulateurs monovariables représente souvent une première étape pour la conduite des procédés. Une manière directe d'étudier et de comparer ces régulateurs monovariables est de les boucler sur un système simple : le modèle du premier ordre retardé que nous utilisons, dans ce qui suit, est noté

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -\frac{K}{\tau}x(t) + \frac{K}{\tau}u(t - \delta) \\ y(t) &= x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où K est le gain statique, τ est la constante de temps et δ est le retard. Sur un procédé réel, ces trois paramètres peuvent être identifiés en réalisant un échelon unitaire en entrée (boucle ouverte). La dynamique du procédé en boucle fermée peut aussi être caractérisée par son gain limite K_u et sa période limite T_u qui se déterminent par exemple via une commande relais (voir [ÅH95]). Nous notons l'erreur et la commande PID comme suit

$$\begin{aligned} e(t) &= y_c(t) - y(t), \\ u(t) &= K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(v)dv + T_d \frac{de}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

où K_c est le gain du contrôleur, T_i est le temps intégral et T_d est le temps dérivé. Nous parlerons de régulateur proportionnel intégral (PI) lorsque $T_d = 0$ et de régulateur proportionnel (P) lorsque $T_d = 0$ et $T_i = +\infty$.

2.1.1 Les contrôleurs PI

En 2003, *S. Tavakoli et P. Fleming* proposent dans [TF03] une approche de réglage de ces contrôleurs pour des systèmes du premier ordre retardés. Cette nouvelle approche utilise l'analyse dimensionnelle, pour déterminer le gain proportionnel et le temps intégral en fonction des trois paramètres caractérisant un modèle du premier ordre retardé.

Nous avons réalisé un état de l'art des méthodes de réglage depuis 1942, date à laquelle *J. G. Ziegler et N. B. Nichols* ont proposé les deux premières méthodes utilisées dans l'industrie. Nous rappelons quelques unes de ces méthodes qui ne forment pas une liste exhaustive des méthodes de réglages pour les contrôleurs PID, mais leurs caractéristiques ont fait d'elles une base de comparaison pertinente pour la méthode de *S. Tavakoli et P. Fleming*.

Méthode proposée par Tavakoli Fleming Les auteurs proposent dans [TF03] une méthode optimale basée sur une analyse dimensionnelle pour le réglage des PI pour des systèmes du premier ordre retardé. Les paramètres du contrôleur sont déterminés en fonction de ceux du système. L'analyse dimensionnelle permet de mettre à jour et d'utiliser des variables adimensionnelles, on cherche alors des relations entre ces variables de la forme

$$KK_c = g_1 \left(\frac{\delta}{\tau} \right), \quad \frac{T_i}{\delta} = g_2 \left(\frac{\delta}{\tau} \right).$$

Ces fonctions sont déterminées de telle manière que pour un changement de consigne, l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur soit minimisée. Pour assurer la robustesse en boucle fermée, deux contraintes sont utilisées, pour garantir une marge de gain minimum de 6.0 dB et une marge de phase minimum de 60°.

Une optimisation globale (algorithme génétique) permet de déterminer les meilleures valeurs pour les paramètres du contrôleur pour chaque valeur de δ/τ . Les fonctions g_1 et g_2 sont ensuite déterminées par des méthodes d'identification et les paramètres du contrôleur PI sont finalement donnés par

$$K_c = \zeta \frac{\tau}{\delta K} + \beta \frac{1}{K} \quad \text{et} \quad T_i = \gamma \delta + \xi \tau \quad \text{où} \quad \begin{cases} \zeta = 0.4849 \\ \beta = 0.3047 \\ \gamma = 0.4262 \\ \xi = 0.9581 \end{cases} \quad (2.3)$$

Ziegler-Nichols en boucle fermée : réponse fréquentielle Cette méthode est basée sur la connaissance du *gain limite* et de la *période limite*, deux paramètres qui caractérisent la dynamique du procédé et qu'il est aisé d'identifier expérimentalement en amenant le système en limite de stabilité (voir [ZN42]). Ziegler et Nichols ont étudié sur un procédé réel simple les effets de perturbations et d'échelons avec un contrôleur proportionnel. Ces tests leur ont permis de conclure qu'un bon compromis entre *un biais important* et *un grand dépassement* était de choisir le gain du contrôleur de telle sorte que le rapport d'amplitude sur-oscillation/sous-oscillation soit égal à 0.25. Ils ont

déduit de ce critère la valeur du gain du contrôleur puis le temps intégral du contrôleur. Cette méthode donne de bons résultats lorsque le rapport δ/τ est faible ; quand il est important, la réponse en boucle fermée est très lente.

La formule de Cohen et Coon Cohen et Coon ont présenté dans [CC53] une méthode pour déterminer les paramètres pour garantir un certain degré de stabilité. Les réglages sont obtenus par une étude théorique sur un système du premier ordre avec retard normalisé. Les harmoniques de la réponse après un échelon sont négligées et le rapport d'amplitude de la fondamentale est choisi égal à 0.25. La méthode de Cohen-Coon a une petite marge de gain et une petite marge de phase lorsque le retard du procédé est faible. De manière intéressante, ce problème de robustesse diminue lorsque le retard augmente, c'est pourquoi cette méthode est souvent utilisée sur des procédés présentant des retards importants.

Raffinements de la formule de Ziegler-Nichols Le réglage a été proposé par Hang, Åström et Ho en 1991 [HÅH91]. C'est une analyse dimensionnelle, pour laquelle les variables adimensionnelles sont le gain normalisé KK_u et le retard normalisé δ/τ , qui a permis de déterminer les réglages. De nombreuses études en simulation ont été menées pour déterminer qu'un bon critère de performance est de régler les paramètres pour obtenir une réponse avec 10% d'overshoot et 3% d'undershoot. Cette méthode de réglage donne de bons résultats, très proches de ceux présentés par Tavakoli et Fleming, que le retard soit important ou non.

La méthode proposée dans [TF03] est comparée favorablement aux autres méthodes et d'autant plus lorsque le rapport du retard sur la constante de temps est important.

2.1.2 Stabilité des systèmes bouclés avec des régulateurs PI

Dans le cadre du contrôle des systèmes du premier ordre à retard, Silva, Datta et Bhattacharyya ont démontré, dans [SDP05], un théorème qui définit l'ensemble des régulateurs PID (2.2) stabilisants. Nous exposons les réglages de Tavakoli et Fleming pour un régulateur proportionnel intégral (PI) aux hypothèses de ce théorème.

Théorème 2.1 ([SDP05])

Supposons $\tau > 0$ et $K > 0$, alors l'ensemble des contrôleurs PID (2.2) préservant la stabilité du système (2.1) est défini par les valeurs admissibles suivantes

$$-\frac{1}{K} < K_c < \frac{1}{K} \left(\frac{\tau}{\delta} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \right)$$

où α_1 est l'unique racine sur $]0, \pi[$ de l'équation

$$\tan(\alpha) = -\frac{\tau}{\tau + \delta} \alpha$$

Pour K_c en dehors de ces bornes, il n'existe pas de contrôleur PID (2.2) stabilisant (2.1). Une fois choisi K_c dans ces bornes, il faut et il suffit pour stabiliser (2.1) de choisir (T_i, T_d) comme suit.

Soient z_1 et z_2 les deux racines réelles (ordonnées) sur $]0, 2\pi[$ de l'équation

$$KK_c + \cos(z) - \frac{\tau}{\delta}z \sin(z) = 0$$

Nous notons $m(z) = \delta^2/z^2$ et $b(z) = -\delta(\sin(z) + \frac{\tau}{\delta}z \cos(z))/(Kz)$.

1. si $K_c \in]-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}[$, alors (T_i, T_d) doit être choisi de telle sorte que $-\frac{\tau}{K} < K_c T_d < \frac{\tau}{K}$, $\frac{K_c}{T_i} > 0$ et $K_c T_d > m(z_1)\frac{K_c}{T_i} + b(z_1)$;
2. si $K_c = \frac{1}{K}$, alors (T_i, T_d) doit être choisi de telle sorte que $K_c T_d < \frac{\tau}{K}$, $\frac{K_c}{T_i} > 0$ et $K_c T_d > m(z_1)\frac{K_c}{T_i} + b(z_1)$;
3. si $K_c \in]-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}(\frac{\tau}{\delta}\alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1))]$, alors (T_i, T_d) doit être choisi de telle sorte que $\frac{K_c}{T_i} > 0$ et $m(z_1)\frac{K_c}{T_i} + b(z_1) < K_c T_d < \min\left(m(z_2)\frac{K_c}{T_i} + b(z_2), \frac{\tau}{K}\right)$.

Pour la stabilité des contrôleurs proportionnel (P) ou pour différentes extensions des résultats, nous nous référerons à [SDP05]. Les auteurs montrent dans [SDP05, page 224] que le régulateur PID (2.2) réglé avec les réglages de la première méthode (indicielle) de Ziegler et Nichols [ZN42] et bouclé sur (2.1) est un système stabilisant.

Montrons maintenant que les réglages (2.3) choisis par Tavakoli et Fleming pour un régulateur PI rendent aussi (2.1) stable. Commençons par montrer que le gain proportionnel K_c satisfait toujours les hypothèses du théorème 2.1. Pour notre système stable, le gain proposé satisfait $K_c > 0 > -1/K$. En ce qui concerne la borne supérieure indiquée dans le théorème 2.1, en posant

$$\mu = \frac{\delta}{\tau}, \quad (2.4)$$

nous pouvons la réécrire

$$K_{max} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{\mu} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \right)$$

où α_1 est l'unique solution sur $]0, \pi[$ de $\tan(\alpha_1) = -\frac{\alpha_1}{1+\mu}$. En éliminant μ en fonction de α_1 dans cette dernière équation, nous pouvons établir que

$$\begin{aligned} K_{max} - K_c &= \frac{1}{K\mu} \left(\cos(\alpha_1) + \frac{\alpha_1}{\sin(\alpha_1)} - \zeta - \beta\mu \right) \\ &= -\frac{1}{K} \left(\frac{\tan(\alpha_1)}{\alpha_1 + \tan(\alpha_1)} \right) \left(\cos(\alpha_1) + \frac{\alpha_1}{\sin(\alpha_1)} - \zeta \right) - \frac{\beta}{K} \end{aligned}$$

Le signe de $K_{max} - K_c$ est le même que celui de $K(K_{max} - K_c)\mu$ car $K > 0$ et $\mu > 0$. Il suffit donc de montrer l'inégalité suivante

$$K(K_{max} - K_c)\mu = \cos(\alpha_1) + \frac{\alpha_1}{\sin(\alpha_1)} - \zeta + \beta \left(\frac{\alpha_1}{\tan(\alpha_1)} + 1 \right) > 0 \quad (2.5)$$

Comme le montre la figure 2.1, quel que soit $\alpha \in]0; \pi[$, nous avons

$$K(K_{max} - K_c)\mu > 0.$$

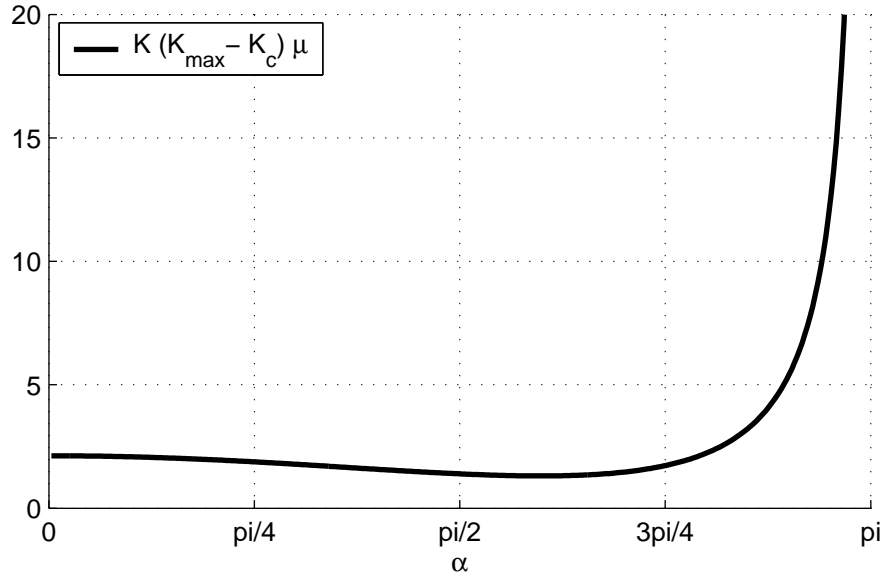


FIG. 2.1 – Positivité de la fonction $K(K_{max} - K_c)\mu$ (définie par (2.5)) sur l'intervalle $\alpha \in]0, \pi[$.

Par conséquent, comme $\alpha_1 \in]0; \pi[$ le gain proportionnel suggéré par Tavakoli et Fleming satisfait toujours les hypothèses du théorème 2.1 de stabilisation par un PID pour un système du premier ordre à retard. En outre, nous montrons par une étude détaillée dans l'annexe A que le temps intégral T_i défini dans (2.3) par cette même méthode satisfait également les hypothèses le concernant de ce théorème.

2.1.3 Robustesse des réglages de Tavakoli Fleming face à une erreur de retard

Notons δ le retard réel et $\bar{\delta} = (1 + e)\delta$ le retard identifié correspondant au retard réel sur lequel nous avons réalisé une erreur $e > -1$. Dans ce qui suit, nous déterminons la valeur maximale acceptable de e pour conserver un système bouclé stable en choisissant les réglages suivants

$$K_c = \zeta \frac{\tau}{(1 + e)\delta K} + \beta \frac{1}{K} \quad \text{et} \quad T_i = \gamma(1 + e)\delta + \xi\tau \quad (2.6)$$

Pour cela, nous présentons deux résultats issus de [SDP05] :

Théorème 2.2 ([SDP05] page 138)

Supposons $\tau > 0$, $\delta > 0$ et $K > 0$, alors l'ensemble des K_c pour lesquels il existe une solution stable lors du bouclage d'un système stable (2.1) avec un contrôleur PI (2.2) est défini par les valeurs admissibles suivantes

$$-\frac{1}{K} < K_c < \frac{\tau}{\delta K} \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}$$

où α_1 est l'unique racine sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ de l'équation

$$\tan(\alpha) = -\frac{\tau}{\delta}\alpha$$

Lemme 2.1 ([SDP05] page 142)

Pour $K_c > -\frac{1}{K}$, une condition nécessaire et suffisante pour que les $a(z_j)$ définis par

$$a(z) = \frac{z}{\delta K} \left(\sin(z) + \frac{\tau}{\delta} z \cos(z) \right)$$

soient positifs pour i impair est que

$$K_c < \frac{\tau}{\delta K} \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}$$

où α_1 est l'unique racine sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ de l'équation

$$\tan(\alpha) = -\frac{\tau}{\delta}\alpha$$

De plus, pout tout

$$K_c \in \left] -\frac{1}{K}; \frac{\tau}{\delta K} \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}} \right[,$$

$a(z_j) < 0$ pour tout j pair.

Le théorème 2.2 nous permet de définir une première borne sur e

$$e > e_{min}^{K_c} = \frac{\zeta}{-\beta\mu + \sqrt{\alpha_1^2 + \mu^2}} - 1 \quad (2.7)$$

Le lemme 2.1 permet de s'affranchir de vérifier l'inégalité $m(z_1)\frac{K_c}{T_i} + b(z_1) < K_c T_d < \min\left(m(z_2)\frac{K_c}{T_i} + b(z_2), \frac{\tau}{K}\right)$ du cas 3 du théorème 2.1 puisqu'elle est toujours vérifiée si le régulateur est proportionnel intégral et si l'inégalité du théorème 2.2 est vrai. Nous sommes dans ce cas. Il nous reste à définir, sous ces hypothèses et sans distinction de cas, une borne sur e qui, lorsqu'elle n'est pas dépassée, permet de vérifier l'inégalité

$$m(z_1)\frac{K_c}{T_i} + b(z_1) < 0$$

Soit $e_{min}^{T_i}$ cette borne, elle est solution de l'équation

$$\zeta + \beta\mu(1+e) - z_1 \sin(z_1) (\gamma\mu(1+e)^2 + \xi(1+e)) - z_1^2 \cos(z_1) \left(\gamma(1+e)^2 + \xi \frac{(1+e)}{\mu} \right) = 0$$

où z_1 est la plus petite solution réelle de l'intervalle $]0, \pi[$ de l'équation

$$\zeta + \beta\mu(1+e) + \mu(1+e)\cos(z) - (1+e)z\sin(z) = 0$$

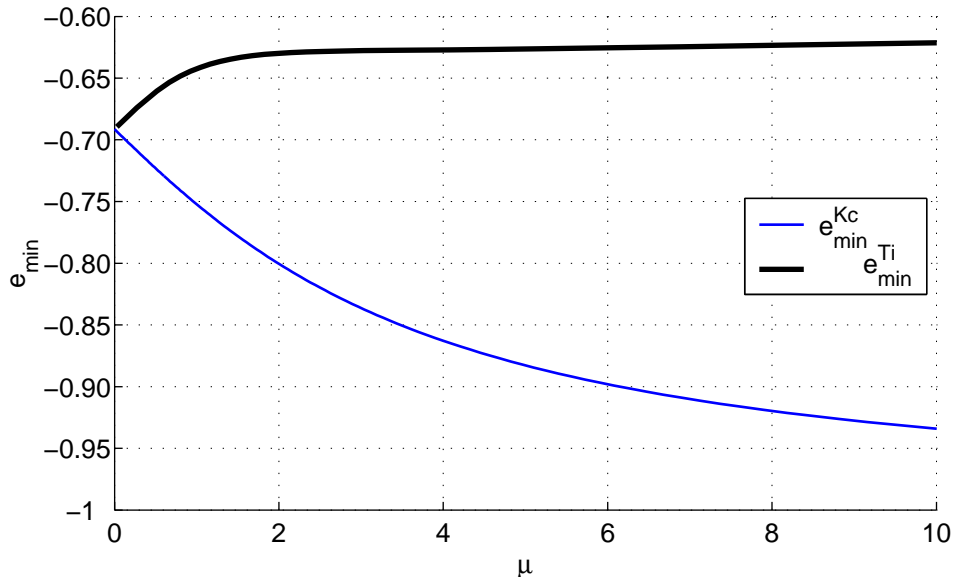


FIG. 2.2 – Erreurs limites e_{min}^{Ti} (trait noir épais) et e_{min}^{Kc} (trait bleu fin) à ne pas dépasser pour conserver un système bouclé stable

Nous représentons sur la figure 2.2 les deux bornes e_{min}^{Kc} et e_{min}^{Ti} déterminées et remarquons graphiquement que $e_{min}^{Ti} \geq e_{min}^{Kc}$. Nous définissons ainsi $e_{min} = e_{min}^{Ti}$ la valeur minimale à ne pas dépasser pour conserver la stabilité boucle fermée avec le régulateur PI suggéré par Tavakoli et Fleming. Ainsi, pour toute erreur $e > e_{min}$, le système boucle fermée est stable. D'un point de vue physique, cette conclusion est logique ; si le retard réel est surestimé, les réglages (2.6) deviennent plus mous ; s'ensuit une perte de performance mais un gain de robustesse donc pas de déstabilisation. En revanche si ce retard est sous estimé, les réglages sont plus durs et rendent le système bouclé moins stable ou instable si $e < e_{min}$.

S'il est difficile d'avoir une expression analytique de e_{min} , quelques calculs supplémentaires permettent de montrer que $e_{min} < -0.6$ ou plutôt que quel que soit $\mu > 0$ les réglages (2.6) avec $e = -0.6$ rendent encore le système (2.1) stable.

2.1.4 Un prédicteur de Smith pour améliorer les performances

Nous avons montré théoriquement que le régulateur PI (2.2) réglé avec (2.3) sur le système (2.1) était stable. Nous le comparons au prédicteur de Smith, dans un premier temps lorsque les paramètres sont parfaitement identifiés et dans un second temps lorsque le retard est mal connu. Nous mettons en évidence la sensibilité du prédicteur de Smith lorsque le retard δ est important par rapport à la constante de temps τ du modèle.

Le prédicteur de Smith Smith a présenté en 1958 un outil de régulation pour les systèmes asymptotiquement stables en boucle ouverte, mono-entrée/mono-sortie et qui présentent du retard (proposé dans [Smi58]). Dans ce contexte mono-variables, un retard sur l'entrée ou la sortie est équivalent. En effet les formes d'état suivantes possèdent la même fonction de transfert

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \bar{\delta}), y(t) = Cx(t) \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t - \bar{\delta})\end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Cette fonction de transfert est un produit d'une fraction rationnelle propre et d'un opérateur à retard

$$P(s) = \bar{G}(s) \exp(-\bar{\delta}s) = C(sI - A)^{-1}B \exp(-\bar{\delta}s)$$

L'intérêt du prédicteur de Smith est de permettre d'utiliser un contrôleur $G_c(s)$ conçu pour le système sans retard $\bar{G}(s)$ en l'insérant dans le schéma général de la figure 2.3. Pour le contrôleur $G_c(s)$, de multiples choix sont possibles. Pour les modèles de procédé $P(s)$ du premier ordre, nous utilisons une approche commune : le contrôleur est un PI dont le gain est l'inverse du gain du modèle et dont le temps intégral est la constante de temps du modèle. Les fonctions $G(s)$ et $\exp(-\delta s)$ représentent la connaissance du

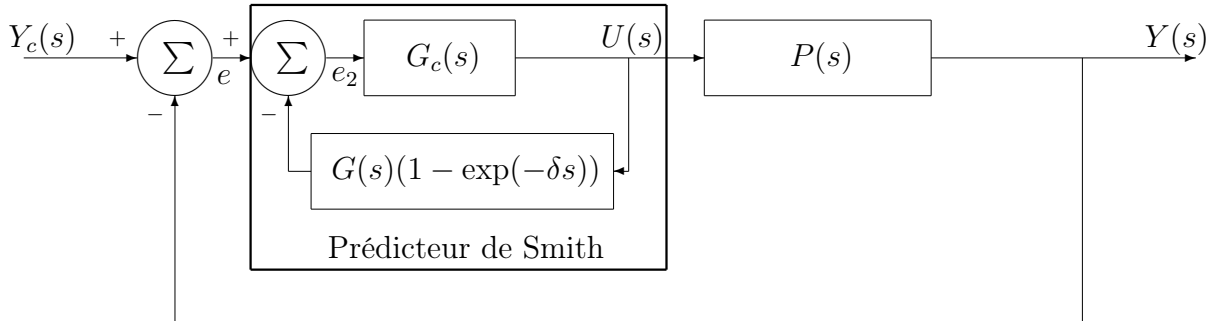


FIG. 2.3 – Système bouclé avec le prédicteur de Smith.

système. Idéalement, on a $G(s) = \bar{G}(s)$ et $\exp(-\delta s) = \exp(-\bar{\delta}s)$. On suppose donc le transfert $\bar{G}(s)$ stable. C'est sous ces hypothèses qu'on comprend le fonctionnement du prédicteur de Smith. Grâce à la boucle interne au prédicteur (dans la zone encadrée de la figure 2.3), le signal entrant dans le contrôleur $G_c(s)$ est

$$e_2 = Y_c - P(s)U - (\bar{G}(s) - P(s))U = Y_c - \bar{G}(s)U$$

Ce terme est la différence entre la référence et la prédiction de la valeur de sortie du système à l'horizon $\bar{\delta}$.

Le comportement entrée-sortie du système bouclé par le prédicteur de Smith est équivalent à celui du système donné sur la figure 2.4. Artificiellement, on a réussi à intercepter le signal de mesure avant le bloc retard et donc à nous ramener à un problème

de régulation d'un système sans retard. On notera toutefois que le retard est toujours présent sur la sortie. Il n'a pas disparu du problème mais il n'interfère pas avec la régulation.

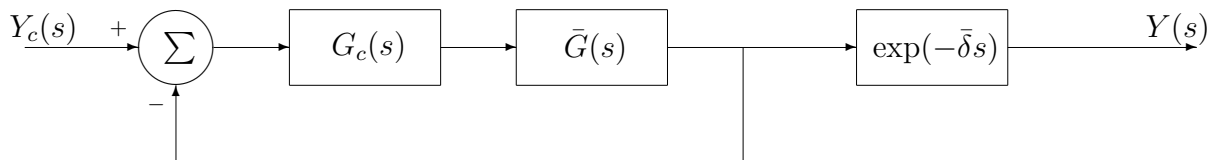


FIG. 2.4 – Forme équivalente du système bouclé avec le prédicteur de Smith.

Amélioration du comportement du prédicteur de Smith lorsque le retard est mal identifié Il est bien connu que le prédicteur de Smith n'est performant que si le retard du système est très bien identifié. Lorsque ce n'est pas le cas, une solution peut consister à filtrer (filtre $F(s)$ sur la figure 2.5) l'écart entre la sortie mesurée et l'estimation synchronisée (retardée) pour atténuer l'influence de ce terme dans la rétroaction. En pratique, lorsque le retard est mal connu, le filtrage ajouté, nécessaire pour augmenter la robustesse du contrôleur, dégrade les performances du contrôleur : il est alors plus simple et tout aussi performant d'utiliser un régulateur type PID avec des réglages adaptés.

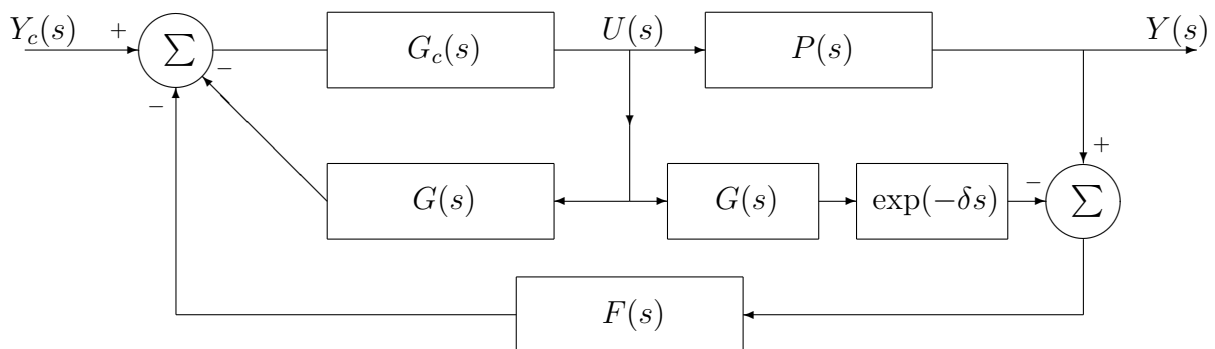


FIG. 2.5 – Implémentation du prédicteur de Smith avec filtre additionnel de robustesse.

2.2 Prédicteur de Smith adaptatif

Nous présentons dans la section 2.2.1 le prédicteur de Smith adaptatif proposé et nous le comparons dans la section 2.2.2 au régulateur PI et au prédicteur de Smith sur un

modèle du premier ordre retardé. Nous nous plaçons délibérément dans le cadre d'une structure connue pour la variabilité du retard donc, par conséquent, nous ne cherchons pas à comparer avec des méthodes d'identification en ligne du retard.

2.2.1 Présentation du prédicteur de Smith adaptatif

Le prédicteur de Smith adaptatif est, comme son nom l'indique, issu du prédicteur de Smith : il se représente comme sur la figure 2.5. L'amélioration proposée consiste à mettre à jour le retard dans le modèle de commande du procédé. Cette mise à jour permet d'avoir un modèle plus proche du procédé, et donc un contrôleur plus performant. L'amélioration repose sur la connaissance du retard qui, dans la majeure partie des cas, est lié au transport d'un produit dans un volume fixe à un certain débit (retard de transport) et au temps nécessaire pour prélever un échantillon, réaliser la mesure et renvoyer le résultat de la mesure (retard de mesure). La variabilité du retard de transport est due aux changements de débit. Le retard de mesure peut être variable et en particulier peut dépendre de la valeur courante de la grandeur mesurée. Dans tous les cas cependant, au moment où une nouvelle mesure est disponible, le retard de mesure est connu.

Pour que le prédicteur de Smith ait un comportement optimal, il faut que les paramètres du modèle (en particulier le retard) soient bien connus. Dans le cas contraire, en particulier lorsque le retard du procédé varie, le procédé commandé peut devenir instable. Pour pallier ce problème, une estimation en ligne du retard est réalisée. Le retard estimé correspond à la somme du retard de mesure et du retard de transport. Le retard de mesure est connu à chaque itération, mais le retard dû au transport dépend (implicitement) du volume traversé V et du débit volumique $Q(t)$. Dans le cas piston pur, il est défini par l'équation

$$V = \int_{t-\delta(t)}^t Q(s) ds \quad (2.8)$$

La connaissance du débit en fonction du temps permet de résoudre à chaque instant cette équation implicite (qui ne possède qu'une unique solution lorsque le débit est strictement positif) pour mettre à jour le retard et synchroniser correctement le prédicteur adaptatif. Nous rappelons l'origine de l'expression (2.8) dans l'annexe C.

Lorsqu'il existe de la diffusion, le retard calculé à partir de l'intégrale (2.8) est surestimé et il est nécessaire de corriger cette estimation. Nous présentons, à la section 2.4 une méthode pour prendre en compte la diffusion dans le calcul du retard.

2.2.2 Etude comparative sur un système du premier ordre retardé

Nous comparons dans ce qui suit le comportement du système (2.1) lorsqu'il est bouclé avec un régulateur PI (réglé avec la méthode proposée par [TF03]), un prédicteur de

Smith et le prédicteur de Smith adaptatif. Pour cela, nous choisissons deux jeux de paramètres différents : le premier $(K, \tau, \delta) = (1, 1, 1)$ permet d'avoir un ratio δ/τ égal à 1 et le second $(K, \tau, \delta) = (1, 0.2, 1)$ où le ratio δ/τ vaut 5.

Les simulations présentées sur les figures 2.6 et 2.7 sont des suivis de trajectoires avec un retard qui varie de +40%. Dans le modèle de commande du contrôleur PI et du prédicteur de Smith, le retard n'est pas mis à jour : la commande ne tient pas compte de la variation de débit. En revanche, dans le prédicteur de Smith adaptatif, le retard est mis à jour à partir de sa vraie valeur. La simulation avec le premier modèle, figure

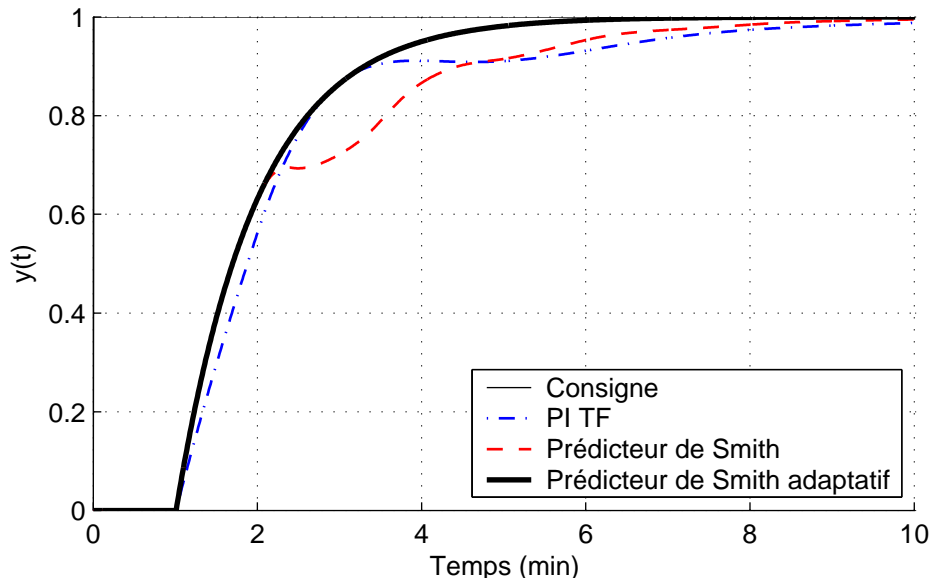


FIG. 2.6 – Réponse à un échelon de consigne sur le modèle $(K, \tau, \delta) = (1, 1, 1)$. Le retard identifié vaut +40% du retard réel

2.6, montre que la réponse du prédicteur de Smith adaptatif est stable et rapide. Le régulateur PI et le prédicteur de Smith offrent des réponses très proches l'une de l'autre, même si le prédicteur de Smith présente un comportement légèrement perturbé par la variation du retard. Le rapport δ/τ est égal à 1, cela permet au contrôleur PI d'être performant et au prédicteur de Smith de se montrer assez robuste face à l'erreur sur le retard. La simulation du second modèle, figure 2.7, met en évidence la sensibilité du prédicteur de Smith aux erreurs sur le retard lorsque le rapport δ/τ est très supérieur à 1. En effet, alors que l'erreur sur retard (en %) est identique à celle du cas précédent, la réponse obtenue avec le prédicteur de Smith est instable. Le contrôleur PI offre une réponse stable mais lente (les temps de montée et de réponse sont très longs). Le prédicteur de Smith adaptatif permet de conserver les performances du prédicteur de Smith lorsque le retard est bien identifié : la réponse atteint rapidement la consigne sans perte de stabilité.

Régulateur PI adaptatif. Dans le même esprit que pour le prédicteur de Smith, il est possible de mettre à jour les paramètres du régulateur PI. Cette mise à jour permet

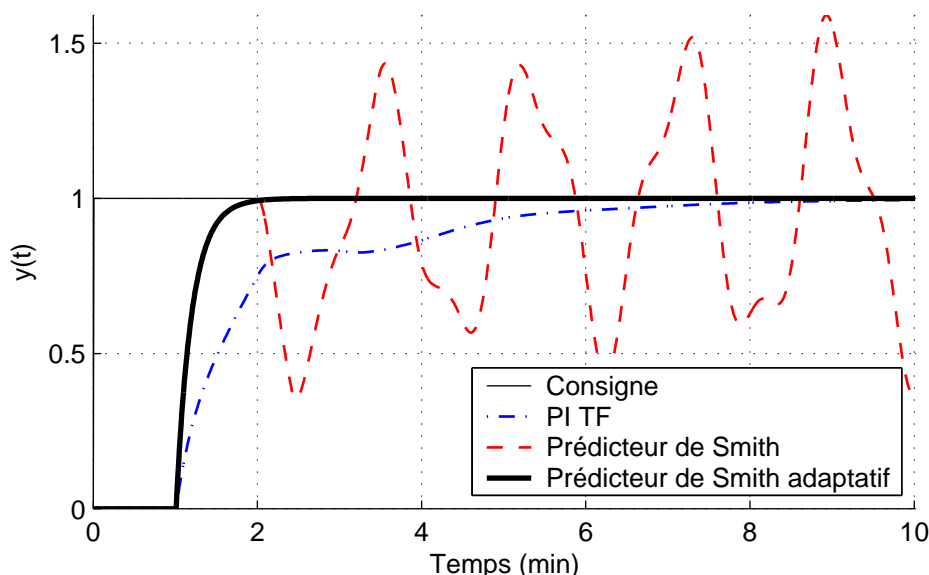


FIG. 2.7 – Réponse à un échelon de consigne sur le modèle $(K, \tau, \delta) = (1, 0.2, 1)$. Le retard identifié vaut +40% du retard réel

de récupérer les performances d'un régulateur PI réglé avec la valeur réelle du retard. Mais cette approche implique d'avoir la connaissance du retard ou du moins le moyen de le calculer précisément : dans ce cadre et pour obtenir de meilleures performances, l'utilisation d'un prédicteur de Smith adaptatif est plus naturelle.

Néanmoins, nous avons testé cette approche (où les réglages sont ceux de [TF03]) sur le modèle (2.1) et sur le modèle d'hydrodésulfuration présenté à la section 2.3. Les résultats obtenus sont logiquement un peu moins bons que ceux du prédicteur de Smith adaptatif, mais meilleurs que ceux du régulateur PI à paramètres fixés et que ceux du prédicteur de Smith à retard fixé.

2.2.3 Conclusion

La connaissance ou l'estimation des paramètres d'un système permet, si elle est exploitée dans le régulateur, d'améliorer considérablement les performances du système en boucle fermée. Dans le cas des systèmes à retards, les performances du prédicteur de Smith adaptatif (lorsque les retards sont connus ou bien estimés) font de celui-ci un contrôleur naturel à utiliser.

2.3 Étude comparative sur un modèle d'une unité d'hydrodésulfuration

Pour confirmer les conclusions de la précédente étude, nous développons, dans cette section, un modèle de procédé d'hydrodésulfuration. Le cœur du procédé est un réacteur tubulaire modélisé par une équation piston diffusion. C'est un procédé qui présente un retard important et variable ; les variations du débit d'entrée du réacteur sont à l'origine de la variabilité du retard.

2.3.1 Contexte

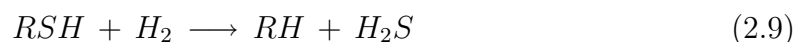
Les gazoles moteur et fuel domestique sont constitués en grande partie des coupes gazoles et kérosènes obtenues dans la distillation initiale du pétrole brut. Quand elles sont issues de bruts à moyenne teneur en soufre (MTS) ou à haute teneur en soufre (HTS), ces coupes ont des teneurs en soufre incompatibles avec les spécifications imposées par les directives européennes (50 ppm masse depuis le 1^{er} janvier 2005 et 10 ppm masse à partir du 1^{er} janvier 2009).

En hydrodésulfuration de gazoles, le taux de désulfuration visé jusqu'à présent était de 90-95 %. Pour respecter les nouvelles spécifications, ceux-ci doivent être accrus à 95-98 % en fonction des teneurs en soufre des charges à traiter.

Face à un approvisionnement constitué majoritairement de bruts MTS et HTS, les raffineries doivent disposer de capacités importantes en hydrodésulfuration de gazoles et cela d'autant plus, qu'aux coupes de distillation s'ajoutent maintenant les produits craqués. L'abaissement de la teneur en soufre va conduire, d'une part à des modifications des unités existantes d'hydrodésulfuration des gazoles et d'autre part à des améliorations des outils de commande.

2.3.2 Description du procédé

Nous étudions le cas particulier de la désulfuration d'une coupe intermédiaire qui entre dans la composition des gazoles. Dans le procédé réel, la charge à désulfurer est mélangée avec un gaz (essentiellement de l'hydrogène). Le soufre est éliminé par combinaison chimique avec de l'hydrogène en présence d'un catalyseur adapté ; l'unique réaction retenue s'écrit :



C'est une simplification très importante du schéma réactionnel réel. L'unité d'hydrodésulfuration que nous avons choisi de modéliser est décrite sur la figure 2.8.

Pour simplifier la simulation et la commande, nous avons fait les hypothèses suivantes :
– la température d'entrée du réacteur peut être réglée instantanément ;

- les composants légers sont totalement et instantanément séparés du liquide dans le séparateur à la sortie du réacteur ;
- le rapport entre la charge et le gaz (recyclage + apport de gaz riche en hydrogène) reste constant ;
- la composition de la charge mélangée à la recyclage est constante.

Ces hypothèses ne simplifient pas le problème de manière excessive ; les conclusions que nous donnons sur ce modèle restent valables sur le procédé. Concernant la première hypothèse, en pratique, une mesure de température est réalisée peu après le four et celle-ci est utilisée pour commander le brûleur du four. Cette boucle bas niveau a une dynamique rapide comparativement à celle du procédé, avec un temps de réponse inférieur à 10 minutes, contre un temps de réponse supérieur à 1 heure pour le procédé. Relaxer les deux dernières hypothèses ne conduirait pas à des résultats qualitativement différents.

Le modèle simplifié garde les caractéristiques principales que nous avons voulu isoler pour les essais : des non-linéarités fournissent un gain et une constante de temps variables, le transport par la tuyauterie nous donne un retard variable. La figure 2.9 permet d'illustrer ces variations du retard.

2.3.3 Modèle

Réacteur

Nous nous sommes attardés sur la modélisation du réacteur, cœur de l'unité. En partant de la conservation de la matière (2.10) et de l'énergie (2.11), nous avons établi les modèles pour les réacteurs suivants : réacteur parfaitement agité continu, réacteur piston et réacteur piston-diffusion. Pour chaque composant A_j , la conservation de la matière exige que l'on ait

$$\left(\begin{array}{c} \text{Débit} \\ \text{d'accumulation} \\ \text{de } A_j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Flux de } A_j \\ \text{entrant} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Flux de } A_j \\ \text{sortant} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Débit de} \\ \text{production} \\ \text{de } A_j \end{array} \right) \quad (2.10)$$

et le premier principe de la thermodynamique donne

$$\left(\begin{array}{c} \text{Quantité d'énergie} \\ \text{entrant} \\ \text{dans le réacteur} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Quantité d'énergie} \\ \text{sortant} \\ \text{du réacteur} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Energie interne} \\ \text{s'accumulant} \\ \text{dans le réacteur} \end{array} \right) \quad (2.11)$$

Pour le réacteur, nous utilisons le modèle piston avec diffusion de matière et d'énergie. Nous supposons que le profil de pression dans le réacteur est constant et que le volume molaire est constant. L'état du modèle est constitué par les fractions molaires des réactifs (x_{RSH} , x_{H_2}) et des produits (x_{RH} , x_{H_2S}), ainsi que par la température (T). Le modèle du réacteur s'écrit

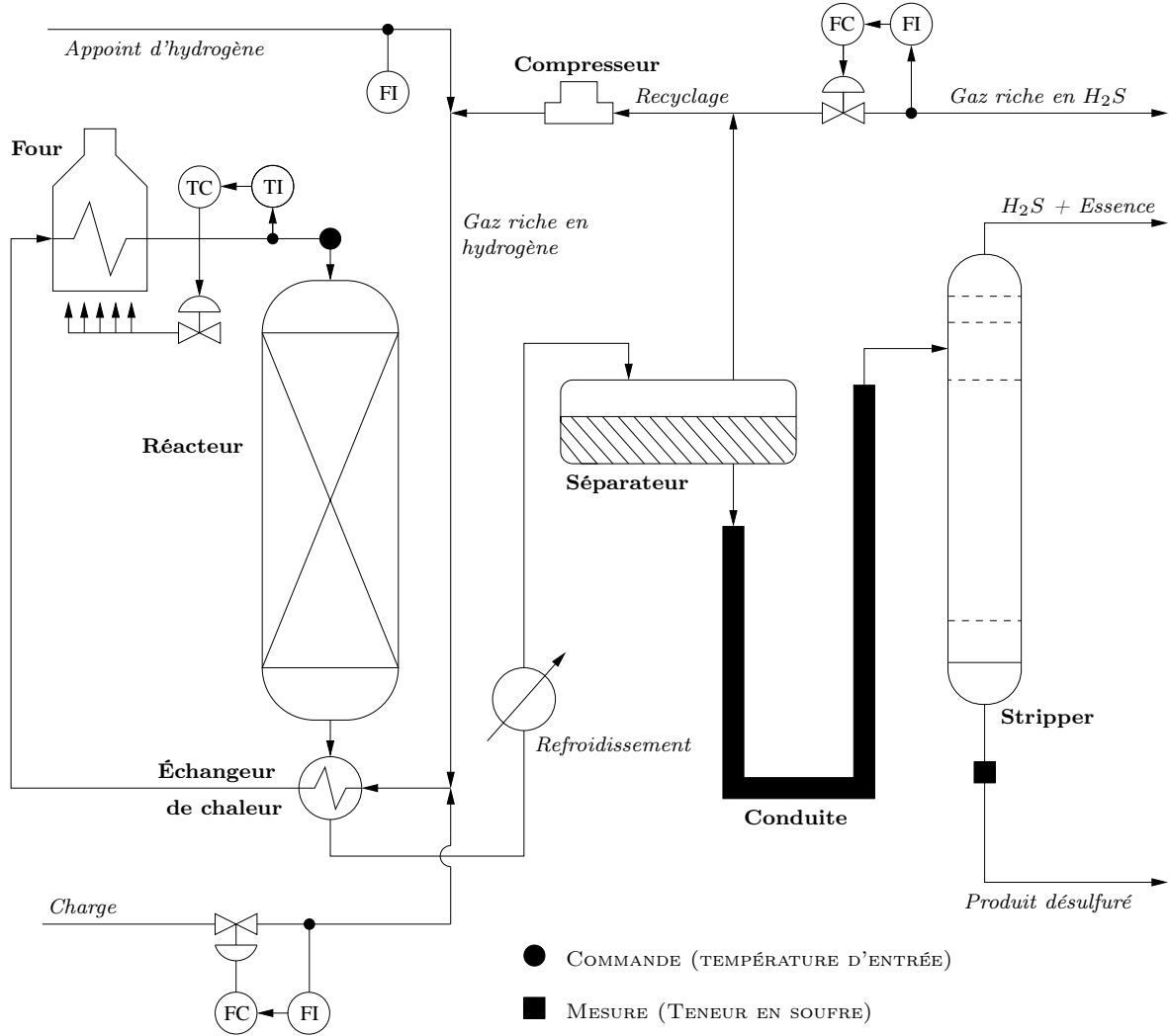


FIG. 2.8 – Schéma simplifié d'une unité d'HDS

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = v_{mol} \left(-\frac{F}{\Omega} \frac{\partial x}{\partial z} + \nu r(\cdot) \right) + D \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} & \forall x \in \{x_{RSH}, x_{H_2}, x_{RH}, x_{H_2S}\} \\ \tau_T \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{FC_P}{\Omega} \frac{\partial T}{\partial z} + \Delta H r(\cdot) + D_T \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{cases} \quad (2.12)$$

où $T(0, t)$ est la commande et $x_{RSH}(0, t)$, $x_{H_2}(0, t)$, $x_{RH}(0, t)$ et $x_{H_2S}(0, t)$ sont constants (ils pourraient être utilisés comme des perturbations). Le terme ν vaut -1 pour les réactifs et 1 pour les produits. Le terme τ_T nous permet de prendre en compte le fluide, le catalyseur et le métal du réacteur. La cinétique de la réaction est notée

$$r(\cdot) = r(T, x_{RSH}, x_{H_2}) = k \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) x_{RSH} x_{H_2} \quad (2.13)$$

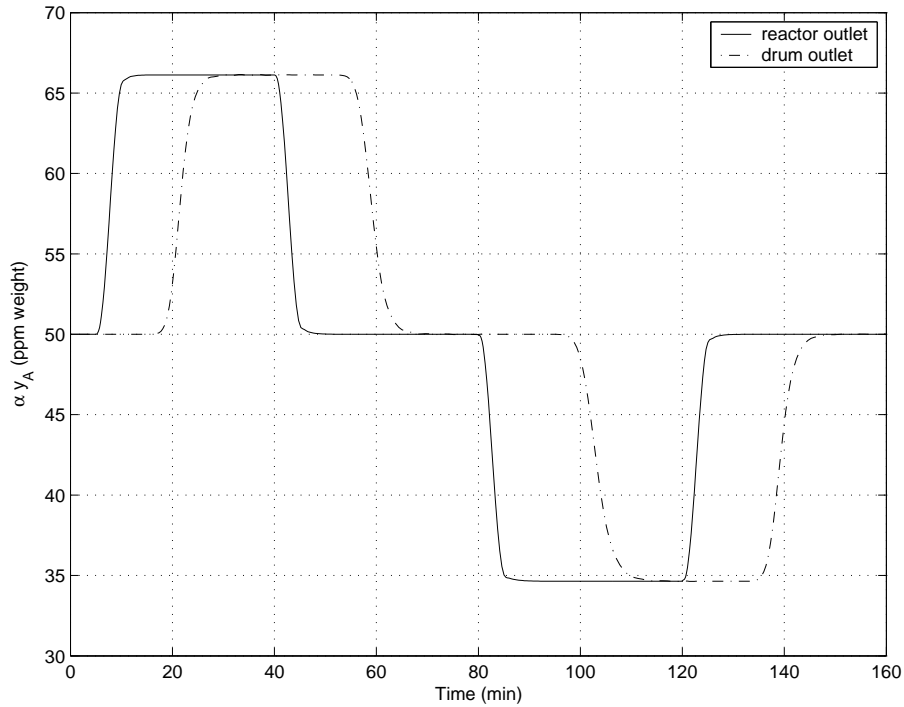


FIG. 2.9 – Fraction massique de RSH . Simulation boucle ouverte.

Dans ce modèle, les paramètres E_a , k et ΔH ont été identifiés numériquement en faisant trois hypothèses basées sur des connaissances réelles en régime permanent :

- si la température d'entrée est $T^{in} = 623 K$ alors la température de sortie est $T^{out} = 643 K$;
- si la température d'entrée est $T^{in} = 623 K$ et que la pureté massique en entrée est $x^{in} = 350\text{ppm}$ massique alors la pureté massique en sortie est $x^{out} = 50\text{ppm}$ massique ;
- si la température d'entrée est $T^{in} = 628 K$ et que la pureté massique en entrée est $x^{in} = 350\text{ppm}$ massique alors la pureté massique en sortie est $x^{out} = 40\text{ppm}$ massique.

L'identification numérique des paramètres cinétiques dépend des valeurs de D et D_T qui sont difficiles à connaître ou à identifier, mais qui ont été fixées au préalable.

Séparateur

A la sortie du réacteur, la charge est refroidie, nous ne prenons plus en compte la dynamique de la température. Nous supposons que la séparation entre le gaz liquide est parfaite et instantanée. Nous modélisons donc le séparateur à l'aide d'équations algébriques (2.14). Notons, avant la séparation, x_j^{liq} , la fraction molaire du constituant j sous forme liquide et x_j^{gaz} la fraction molaire du constituant j en phase gazeuse alors

Symb.	Quantité	Unité
D	Coefficient de diffusion de la matière	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
D_T	Coefficient de diffusion de la température	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
E_a	Énergie d'activation	$\text{J}.\text{mol}^{-1}$
F	Débit molaire en z	$\text{mol}.\text{min}^{-1}$
t	Temps	min
T	Température (Temp.)	K
v_{mol}	Volume molaire dans le réacteur	$\text{m}^3.\text{mol}^{-1}$
x_{RSH}	Fraction molaire de RH	
x_{H_2}	Fraction molaire de H_2	
x_{RH}	Fraction molaire de RH	
x_{H_2S}	Fraction molaire de H_2S	
x_B	Fraction molaire de B	
z	Unité de longueur	m
ΔH	Enthalpie de réaction	$\text{J}.\text{mol}^{-1}$
ν	Coefficient stœchiométrique	
Ω	Section du réacteur	m^2
τ_T	Pseudo constante de temps	$\text{J}.\text{K}^{-1}.\text{m}^{-3}$

TAB. 2.1 – Notations

on a

$$\bar{x}_j^{liq} = \frac{x_j^{liq}}{\sum_k x_k^{liq}}, \quad \bar{x}_j^{gaz} = \frac{x_j^{gaz}}{\sum_k x_k^{gaz}}. \quad (2.14)$$

où \bar{x}_j^{liq} (resp. \bar{x}_j^{gaz}) désigne la fraction molaire du constituant j liquide (resp. gazeux) après la séparation. Nous supposons qu'à ce niveau de l'unité les constituants H_2 et H_2S sont gazeux et RH et RSH sont liquides.

Stripper

À partir de la sortie du séparateur, nous modélisons uniquement la dynamique des éléments en phase liquide. Nous simplifions le problème en faisant l'hypothèse que le stripper se comporte comme un simple ballon modélisé comme un réacteur parfaitement agité continu dans lequel il n'y a pas de réaction. Le bilan matière est le suivant

$$\frac{d\bar{x}_j}{dt} = \frac{F^d}{N^d} (\bar{x}_j^{in} - \bar{x}_j).$$

où F^d est le débit molaire à l'entrée du réacteur et N^d est le nombre de moles dans le ballon.

Le stripper, en aval du séparateur, est destiné à soutirer (en tête) l' H_2S et les constituants légers qui restent dans le liquide après la séparation. Une température d'épuisement suffisante permet de retirer pratiquement tout l' H_2S présent dans la charge. Par contre, le soufre (hors H_2S) est essentiellement contenu dans les constituants lourds,

qui se retrouvent en totalité en fond. En pratique, pour un débit de 200 t/h à l'entrée du stripper, le débit en fond de stripper est supérieur à 190 t/h . Dans ces conditions, on peut considérer que charge et débit soutiré en fond sont identiques. Par ailleurs, sur les plateaux sous l'alimentation, on peut négliger les fractions vapeur des constituants lourds contenant le soufre. Pour ces constituants, chaque plateau se comporte comme un filtre du premier ordre de la fraction liquide du plateau au dessus. Le comportement de la fraction soufre en fond de stripper est alors assimilable à celui d'un premier ordre retardé.

Tuyauterie

En pratique, la tuyauterie permet d'acheminer le produit du réacteur au séparateur, puis du séparateur au ballon et finalement, du ballon à l'endroit où la mesure est réalisée. Dans l'unité simplifiée que nous modélisons, nous faisons l'hypothèse que le comportement de l'ensemble des tuyauteries est similaire au comportement dans une seule conduite dont le volume correspond à la somme des volumes des tuyauteries. Dans cette conduite, nous supposons que le comportement du fluide est du type piston pur. Le modèle utilisé est l'EDP du transport

$$\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial t} = -v_{mol}^p \frac{F^p}{\Omega_p} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial z} \quad \text{pour tout } j \in \{R, RSH\},$$

où v_{mol}^p , F^p et Ω_p sont respectivement le volume molaire à l'intérieur de la conduite de longueur L^p qui génère le retard, le débit à l'entrée de la conduite et la section de celle-ci.

2.3.4 Résultats de simulation

Discrétisation en espace Le modèle final est composé de plusieurs équations aux dérivées partielles que nous avons discrétisées avec un schéma décentré dans l'espace (cf. équations (2.15), (2.16), (2.17) et (2.18)) pour nous ramener à une suite d'équations différentielles ordinaires.

$$\frac{\partial x_j}{\partial z} = \frac{x_j^i - x_j^{i-1}}{l}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T^i - T^{i-1}}{l}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial z^2} = \frac{x_j^{i+1} - 2x_j^i + x_j^{i-1}}{l^2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T^{i+1} - 2T^i + T^{i-1}}{l^2}. \quad (2.18)$$

où l est la taille du réacteur divisée par le nombre de mailles n (une maille représente alors un réacteur parfaitement agité). La discrétisation des conduites est réalisée de manière similaire.

Modèle de commande Pour la commande, nous avons choisi d'identifier le modèle de procédé comme un modèle linéaire du premier ordre avec retard. La commande $u(t)$ est la température d'entrée du réacteur et la sortie $y(t)$ est la teneur en soufre (ppm massique) en sortie du stripper. Le modèle de commande obtenu est valide autour du point de fonctionnement suivant :

$$\bar{y} = \alpha \times 50 \text{ ppm massique}, \quad \bar{u} = 623\text{K}$$

où α est une constante utilisée pour convertir les fractions massiques en fractions molaires. Il est noté

$$\tau \dot{y}(t) = -(y(t) - \bar{y}) + K(u(t - \delta) - \bar{u})$$

L'identification, réalisée avec ISIAC ([TB04]), donne

$$K = -2 \text{ ppm.K}^{-1}, \quad \tau = 8.28 \text{ min et } \delta = 27 \text{ min}$$

Le débit de charge est considéré comme une perturbation. Nous avons réalisé des études de robustesse par rapport à des variations du retard et des études en suivi de trajectoire. Les simulations sont représentées respectivement sur les figures 2.10 et 2.11.

Rejet de perturbations

Le retard variable est dû à la variation du débit de charge. Cela nous conduit à tester la robustesse des contrôleurs en introduisant des changements dans le débit F à l'entrée du réacteur. F_{ref} est le débit de charge qui a été utilisé pour identifier le modèle. La simulation se déroule en cinq étapes : **Étape 1** : quand $t \in [0, 5]$, $F = 1.3 F_{ref}$. **Étape 2** : quand $t \in [5, 10]$, $F = F_{ref}$. **Étape 3** : quand $t \in [10, 15]$, $F = 0.7 F_{ref}$. **Étape 4** : quand $t \in [15, 20]$, $F = F_{ref}$.

La figure 2.10 montre la fraction massique de soufre à la sortie du ballon. Après chaque changement de débit, nous notons la présence d'un pic (sur-oscillation ou sous-oscillation). Celui-ci est inévitable lorsqu'il y a des échelons de débit. En effet, à l'instant où le débit augmente, nous ne pouvons plus agir sur le produit présent dans le réacteur pour compenser la diminution du temps de séjour par une augmentation de la température (c'est à dire une augmentation de la vitesse de la réaction) : la charge sort du réacteur avec plus de soufre. Le phénomène est analogue lorsque le débit diminue.

Pendant l'**étape 1**, le retard diminue car le débit est plus important. La réponse du PI est lente, son temps de montée est le plus long des trois contrôleurs. Le prédicteur de Smith a un temps de montée plus rapide, mais l'erreur sur le retard fait apparaître des oscillations sur le signal de sortie, donc le temps de réponse est le plus long. Le prédicteur adaptatif amène la sortie rapidement à sa consigne ; son temps de montée est le plus court des trois contrôleurs proposés. De plus, le temps de réponse est plus court de plus d'une heure par rapport à celui des autres contrôleurs. L'**étape 2** souligne la supériorité des prédicteurs quand le retard est exactement identifié. Ici, le retard réel est identique au retard utilisé par les contrôleurs : la convergence de la sortie vers

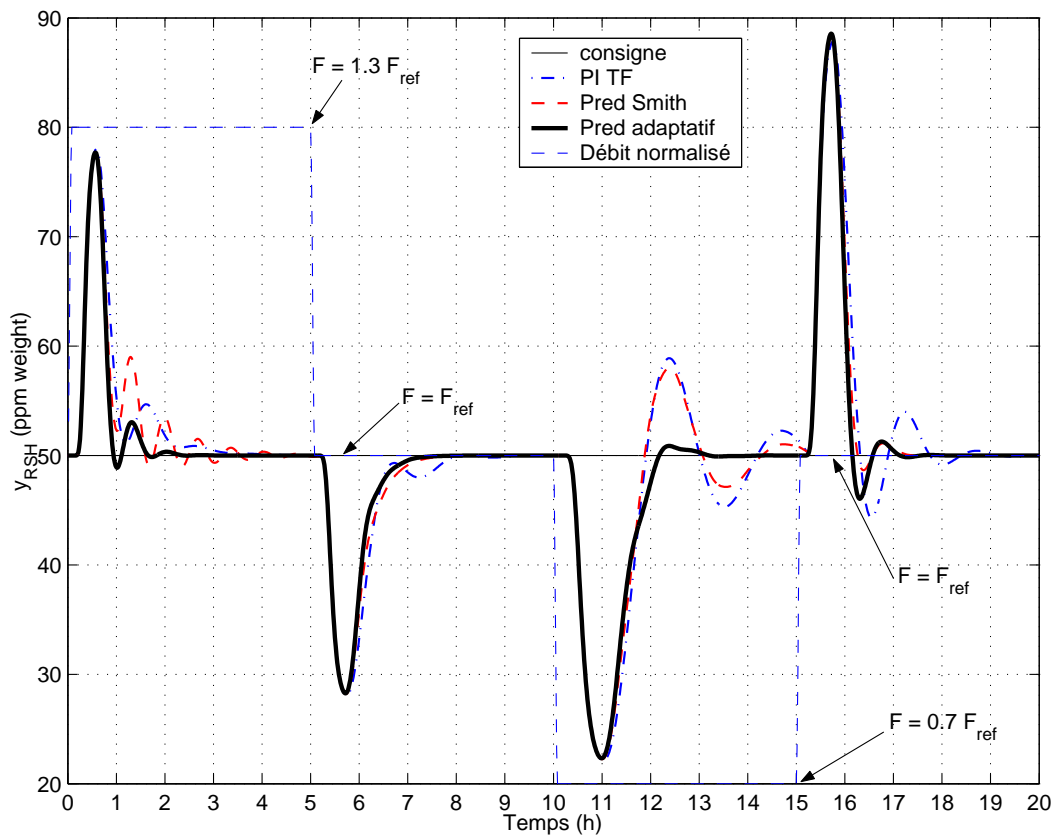


FIG. 2.10 – Rejet de perturbation

sa consigne est rapide. Le contrôleur PI converge plus lentement, le temps de réponse est plus long d'une heure par rapport aux deux prédicteurs. Pendant l'**étape 3**, le retard augmente car le débit est moins important. Le prédicteur adaptatif a un temps de montée légèrement plus long que celui des deux autres contrôleurs, mais le temps de réponse est beaucoup plus petit (plusieurs heures de différence). Pendant l'**étape 4**, le débit à l'entrée du réacteur est égal au débit de référence, les conclusions sont les mêmes que dans l'étape 2. Les prédicteurs donnent de meilleurs comportements que le contrôleur PI.

Suivi de trajectoire

Nous proposons dans cette section un exemple de suivi de trajectoire perturbé par une variation du retard, due à un changement de débit de charge précédant le début de la simulation ($F = 0.8 F_{ref}$). Les résultats sont présentés sur la figure 2.11. Au début, le procédé est initialisé à un point d'équilibre avec la consigne, puis la simulation se déroule en cinq étapes : **Étape 1** : quand $t \in [0, 9]$, $y_c = 60$. **Étape 2** : quand $t \in [9, 16]$, $y_c = 50$. **Étape 3** : quand $t \in [16, 22]$, $y_c = 40$. **Étape 4** : quand $t \in [22, 25]$, $y_c = 50$.

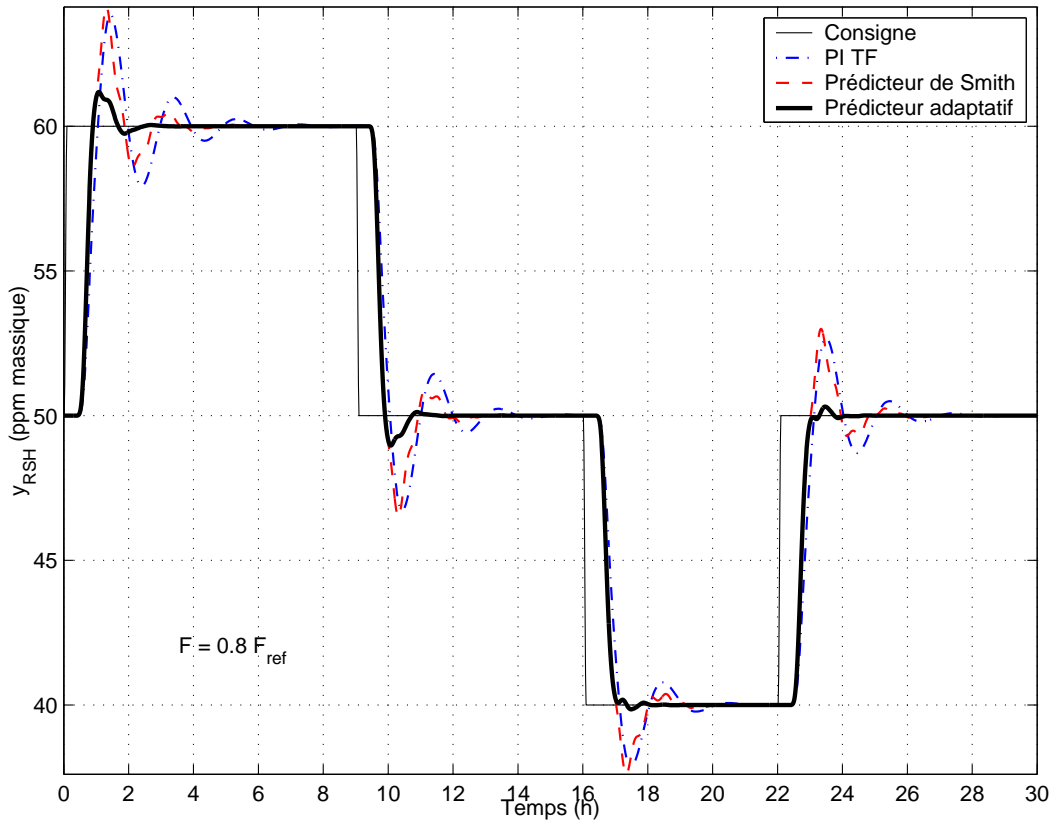


FIG. 2.11 – Suivi de trajectoire avec perturbation du débit à l'entrée du réacteur

La réponse du prédicteur adaptatif est plus rapide pendant toute la simulation : le temps de montée et le temps de réponse sont les plus courts sur les quatre étapes. Les résultats sont très similaires à ceux constatés en rejet de perturbation, le prédicteur adaptatif prend en compte les variations de retard et offre un comportement rapide et stable.

Remarque 2.1

À partir de l'estimation du retard, nous avons aussi testé une mise à jour des paramètres d'un régulateur PI selon les formules (2.3) de Tavakoli-Fleming. Les résultats obtenus sont un peu moins bons que ceux du prédicteur adaptatif, mais toutefois meilleurs que ceux du régulateur PI à paramètres fixés et que ceux du prédicteur de Smith à retard fixé.

2.4 Variabilité du retard associée à l'équation piston diffusion

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, l'amélioration des performances du prédicteur adaptatif repose sur la connaissance du retard. Dans la majeure partie des cas, ce retard est lié au transport d'un produit dans un volume fixe à un certain

débit (retard de transport) et au temps nécessaire pour prélever un échantillon, réaliser la mesure et renvoyer le résultat de la mesure (retard de mesure). Le retard de mesure est variable, mais il est connu, il peut donc être exploité directement. Si dans le cas piston pur, l'expression du retard peut être estimée via l'équation implicite (2.8), il n'en est pas de même pour un modèle piston diffusion. En effet, il est nécessaire de corriger cette estimation.

2.4.1 Prise en compte de la diffusion pour le calcul du retard

Pour un même réacteur tubulaire, différents types de modèles peuvent être dérivés selon les besoins. Dans le cadre de la commande de procédés, le modèle généralement le plus utilisé est du type premier ordre retardé. Ce type de modèle ne tient toutefois pas compte de la nature du réacteur tubulaire pour lequel la dynamique et la cinétique de réaction peuvent être caractérisées en tout point du réacteur. En effet, l'utilisation des bilans de matière et d'énergie mène directement à des équations aux dérivées partielles. Pour une simple conduite, celles-ci sont des équations de transport. Dans le cas général, pour un réacteur tubulaire, le modèle obtenu des bilans est du type piston-diffusion avec un terme qui représente la cinétique de réaction.

Après avoir calculé l'expression dans le cas piston pur (2.8), nous présentons dans ce qui suit un calcul du retard pour un modèle piston-diffusion (sans cinétique de réaction).

Lorsqu'il existe de la diffusion, le retard calculé à partir de l'intégrale (2.8) est sur-estimé. Il est nécessaire de corriger cette estimation : nous utilisons pour cela des résultats issus de travaux sur l'équation de la chaleur que nous présentons dans ce qui suit. En simulation, ces résultats permettent aussi, dans le cas du piston pur, de compenser les effets de diffusion numérique. Ceux-ci sont créés par les discrétisations en espace que nous utilisons pour nous ramener à un système d'équations différentielles ordinaires en temps. La diffusion a aussi un effet sur les constantes de temps du système, effet que nous négligeons ici, mais qui ouvre d'autres voies pour l'adaptation des contrôleurs.

Nous proposons dans ce qui suit une méthode pour le calcul du retard dans le cas de l'équation piston diffusion. Nous reprenons l'idée de Ziegler et Nichols qui proposent dans [ZN43] de déterminer graphiquement les paramètres d'un modèle du premier ordre à retard à partir de la réponse à un échelon du système. C'est une méthode couramment utilisée pour l'identification des paramètres d'un modèle. Une version analytique du calcul du retard pour le cas particulier de l'équation piston diffusion est proposée dans la suite de cette section.

Solution de l'équation piston diffusion

Considérons l'équation piston diffusion suivante

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial y}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \\ y(z, 0) = f(z) \end{cases} \quad (2.19)$$

Dans le cas particulier où la condition initiale est un échelon défini par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \forall z \in [0; +\infty[\\ 1 & \forall z \in]-\infty; 0[\end{cases}, \quad (2.20)$$

la solution analytique de cette équation s'écrit

$$y(L, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{L}{2\sqrt{t\lambda}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{\lambda}} \right) \quad (2.21)$$

où la fonction¹ $\operatorname{erfc}(x)$ est

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad \text{avec} \quad \operatorname{erfc}(0) = 1.$$

La solution est démontrée dans l'annexe B.

Calcul du temps où la pente est maximum

Pour le calcul du retard, nous avons besoin de l'expression du temps où la pente est maximale. Nous calculons la dérivée seconde de la fonction $y(L, t)$ par rapport au temps² pour déterminer l'instant où la fonction aura une dérivée maximum. Nous posons

$$g(t) = \frac{L}{2\sqrt{t\lambda}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{\lambda}}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \left(\frac{L}{t\sqrt{t}} + \frac{v}{\sqrt{t}} \right), \\ g''(t) &= \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} \left(\frac{3L}{t^2\sqrt{t}} + \frac{v}{t\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \\ \operatorname{erfc}'(x) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \\ \operatorname{erfc}''(x) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} = -2x \operatorname{erfc}'(x) \end{aligned}$$

¹“fonction erreur complémentaire”

²Dans le calcul qui suit, L est considérée constante.

La dérivée seconde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(L, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}'_{|g(t)} (-2g(t)g'(t)^2 + g''(t))$$

Comme il faut annuler cette équation pour obtenir une expression du temps où la pente de $y(L, t)$ est maximum, nous cherchons t tel que :

$$\begin{aligned} 0 &= -2g(t)g'(t)^2 + g''(t) \\ 0 &= -2\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(\frac{L}{\sqrt{t}} - v\sqrt{t}\right)\frac{1}{16\lambda}\left(\frac{L}{t\sqrt{t}} + \frac{v}{\sqrt{t}}\right)^2 + \frac{1}{8\sqrt{\lambda}}\left(\frac{3L}{t^2\sqrt{t}} + \frac{v}{t\sqrt{t}}\right) \\ 0 &= \dots \\ 0 &= \frac{v^3}{t^3\sqrt{t}} \underbrace{\left(t^3 + t^2\left(\frac{L}{v} + \frac{2\lambda}{v^2}\right) + t\left(\frac{6\lambda L}{v^3} - \frac{L^2}{v^2}\right) - \frac{L^3}{v^3}\right)}_{P(t)} \end{aligned}$$

Notons

$$a = \frac{L}{v} \quad \text{et} \quad b = \frac{2\lambda}{v^2},$$

le polynôme $P(t)$ s'écrit alors

$$P(t) = t^3 + t^2(a + b) + t(3ab - a^2) - a^3$$

La solution intéressante de l'équation $P(t) = 0$ est la suivante

$$\begin{aligned} \kappa &= \left(48a^2b + 84ab^2 + 64a^3 - 8b^3 + 12\sqrt{276a^3b^3 - 192a^4b^2 - 27a^2b^4 + 192a^5b}\right)^{1/3} \\ t_{pmax} &= \frac{\kappa}{6} - \left(\frac{7}{3}ab - \frac{4}{3}a^2 - \frac{b^2}{3}\right)\frac{2}{\kappa} - \frac{a}{3} - \frac{b}{3} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ce temps correspond au temps où la pente de la solution de (2.19) est maximale.

Remarque 2.2 (Solution approchée)

L'expression du temps t_{pmax} dans (2.22) est compliquée, mais nous avons déterminé un temps \bar{t}_{pmax} très proche de celui-ci et dont l'expression est beaucoup plus simple. Lorsque nous choisissons

$$\bar{t}_{pmax} = a - b,$$

les temps t_{pmax} et \bar{t}_{pmax} sont similaires dans la plupart des cas.

Cette expression nous permet de retrouver l'expression du retard lorsqu'il n'y a pas de diffusion. En effet, dans ce cas, $\lambda = 0$ donc $b = 0$ et ainsi, le temps où la pente est maximum est exactement le retard. Elle est égale à

$$\bar{t}_{pmax} = a = \frac{L}{v}$$

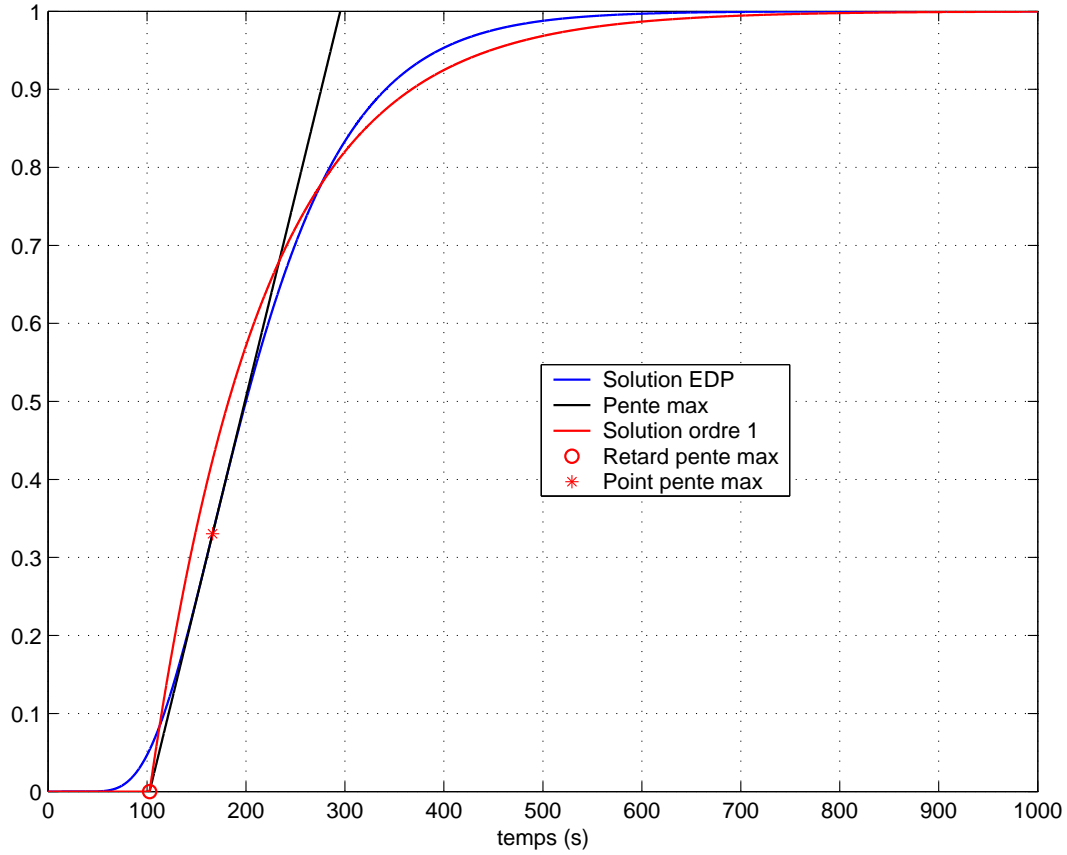


FIG. 2.12 – Identification de la solution de l'EDP (2.19) par un premier ordre retardé.

2.4.2 Calcul du retard pur

Pour identifier le retard pur d'un système du premier ordre, nous choisissons comme première approximation l'expression (2.23) qui correspond au temps où la tangente à la solution de l'équation piston diffusion au point de pente maximale coupe l'axe des abscisses. Pour cela, calculons la pente maximum de $y(L, t)$ (en t_{pmax}).

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(L, t_{pmax}) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{L}{4t_{pmax}^{3/2}\sqrt{\lambda}} - \frac{v}{4\sqrt{\lambda}t_{pmax}} \right) \frac{d \operatorname{erfc}}{dt} \left(\frac{L}{2\sqrt{t_{pmax}\lambda}} - \frac{v\sqrt{t_{pmax}}}{2\sqrt{\lambda}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{L}{4t_{pmax}^{3/2}\sqrt{\lambda}} - \frac{v}{4\sqrt{\lambda}t_{pmax}} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{L}{2\sqrt{t_{pmax}\lambda}} - \frac{v\sqrt{t_{pmax}}}{2\sqrt{\lambda}} \right)^2} \end{aligned}$$

L'approximation du retard s'écrit finalement

$$\delta = t_{pmax} - \frac{y(L, t_{pmax})}{\frac{dy}{dt}(L, t_{pmax})} \quad (2.23)$$

La figure 2.12 montre la solution de l'EDP (2.19) et le retard calculé via la méthode présentée précédemment.

Dans le cadre d'un modèle piston diffusion, cette approximation du retard est une donnée supplémentaire qui permet de mettre à jour le retard dans le prédicteur de Smith adaptatif à partir des paramètres du modèle de connaissance. Elle permet d'améliorer les performances du prédicteur proposé lorsque le procédé commandé est de type piston diffusion.

2.4.3 Simulation

Pour illustrer les améliorations apportées lorsque la diffusion est prise en compte dans la commande, nous présentons dans cette sous-section une simulation de suivi de trajectoire sur un modèle piston-diffusion. Le modèle simulé s'écrit

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad (2.24)$$

où v est une vitesse et λ est le coefficient de diffusion. Pour la simulation, nous avons discrétisé l'équation (2.24) avec un schéma décentré dans l'espace pour nous ramener à une suite d'équation différentielle ordinaire.

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{x^i - x^{i-1}}{l}, \text{ et } \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{x^{i+1} - 2x^i + x^{i-1}}{l^2} \quad (2.25)$$

où l est la longueur d'une maille. Nous bouclons le système avec le prédicteur de Smith présenté dans ce chapitre. Le modèle interne utilisé est identifié hors ligne : c'est un premier ordre avec retard. Nous distinguons deux cas : pour le premier modèle identifié, nous prenons en compte le transport et la diffusion de l'équation (2.24) ; dans le second modèle, seul le transport est utilisé pour l'identification. L'identification de l'équation aux dérivées partielles avec un premier ordre retardé se justifie alors par la présence de diffusion numérique. Le schéma de discrétisation utilisé est source de diffusion numérique dont nous tenons compte dans l'identification du modèle interne. Le régulateur interne est un PI qui est réglé à partir du modèle identifié comme suit

$$K_c = K, \text{ et } T_i = \tau$$

où K est le gain et τ la constante de temps du modèle identifié.

Nous présentons sur la figure 2.13 les solutions $y(t) = x(L, t)$ de l'équation (2.24) bouclée avec un prédicteur de Smith d'une part lorsque la diffusion est prise en compte et d'autre part, lorsqu'elle ne l'est pas. Dans cet exemple, le fait de ne pas prendre en compte la diffusion dans le prédicteur de Smith dégrade les performances et porte le système en limite de stabilité. Dans ce cas, la perte de stabilité peut être estompée par l'ajout d'un filtre dans le prédicteur et par la dégradation des paramètres du régulateur interne, mais alors, la réponse obtenue est moins performante.

Ainsi, la prise en compte du terme de diffusion dans le calcul du retard permet de préserver les bonnes performances du prédicteur de Smith obtenues lorsque le retard est bien connu.

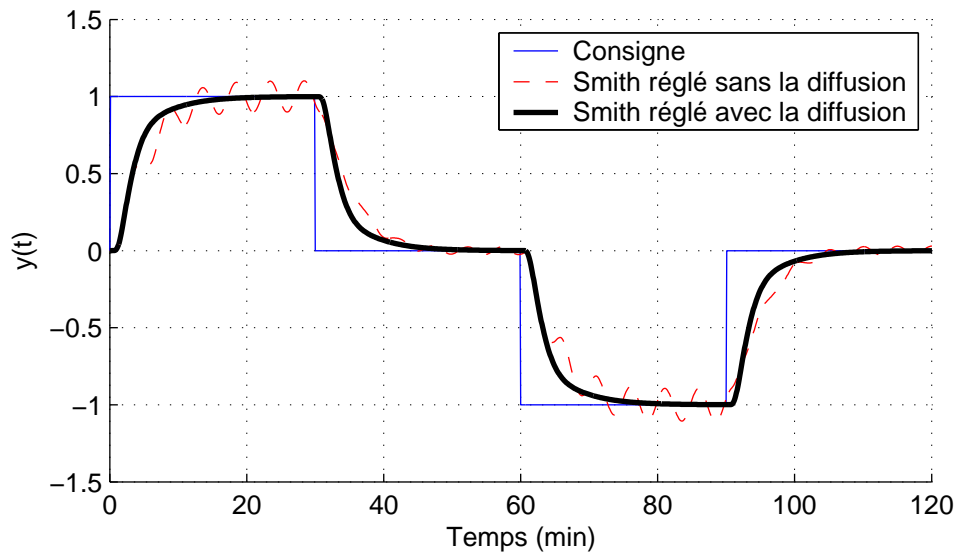


FIG. 2.13 – Suivi de trajectoire sur un modèle piston diffusion bouclé avec un prédicteur de Smith synthétisé avec et sans utilisation de la diffusion

2.5 Conclusion

Les résultats obtenus illustrent les problèmes liés à la variabilité du retard tels qu'ils se posent en génie des procédés : il est nécessaire de rendre les PI robustes au détriment de leur précision ; les prédicteurs de Smith classiques sont vulnérables aux erreurs sur le retard pur et doivent aussi être déréglés pour acquérir de la robustesse. Ce dérèglement peut impliquer les paramètres du contrôleur ou consister uniquement en un filtrage plus important de la différence entre la sortie mesurée et son estimation (mal) synchronisée. Dans les deux cas, la réponse alors obtenue est plus lente et l'amélioration par rapport à un contrôleur PI n'est plus significative.

Il est donc logique de s'attendre à une amélioration des résultats lorsque le retard utilisé par le contrôleur est mis à jour. C'est ce que montrent les premiers résultats présentés dans ce chapitre : le prédicteur adaptatif est sensiblement meilleur, en suivi de trajectoire et en rejet de perturbations.

Dans le cadre particulier de l'équation piston diffusion, nous avons montré qu'il était possible d'estimer le retard en fonction du terme de diffusion. Ce calcul permet la mise à jour du retard dans le prédicteur de Smith adaptatif.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication [BCP04] présentée à Bath (UK) en septembre 2004 (Proc. of UKACC Int. Control Conference). La présentation du prédicteur de Smith adaptatif a eu lieu en septembre 2005 à l'occasion du congrès de la société française de génie des procédés [BCP05].

CHAPITRE 3

COMMANDE D'UNE MÉLANGEUSE

Les problèmes générés par les retards variables apparaissent dans beaucoup de procédés de raffinage et de pétrochimie, mais ils sont souvent combinés à d'autres phénomènes provenant de caractéristiques propres aux procédés (réactions chimiques, diffusion de la température, diffusion de la matière,...). Cette superposition de phénomènes empêche souvent d'isoler clairement les difficultés liées aux retards variables.

Pour pallier ce problème, nous présentons dans ce chapitre un procédé dont la difficulté essentielle est la gestion des retards variables. Le procédé étudié peut alors être vu comme regroupant les problèmes liés aux retards variables qu'on retrouve dans un procédé plus complexe. Il s'agit d'un procédé de mélange.

Les enjeux de l'optimisation de mélanges en raffinerie sont considérables : ils relèvent du respect aux meilleurs coûts des spécifications réglementaires des carburants fabriqués (indice d'octane, volatilité, taux de soufre...).

Nous étudions un modèle de mélange tel qu'il se pose dans les raffineries. Le mélange de n bases qui ont chacune m propriétés (théoriquement connues) permet d'obtenir un produit qui a m propriétés. L'objectif est de réguler (ou surveiller) les propriétés en sortie de mélangeuse en commandant les débits de chaque base, cela en restant au plus près de la recette (choix initial des proportions des bases dans le mélange). Dans ce procédé, les retards variables sont dus au transport de la charge à des débits variables dans des volumes fixes. La prise en compte des volumes morts (prémélanges) et des contraintes sur les sorties dans la commande d'un tel procédé est un problème ouvert.

En pratique, si les volumes morts sont petits par rapport aux débits dans les conduites, ils sont négligés ; le modèle devient linéaire [Pet00]. Le cas de la commande de mélanges linéaires avec prémélanges est abordé dans [PCR98].

Dans la section 3.1, nous faisons une description du procédé tel qu'il est rencontré dans les raffineries. La disposition des bacs de stockage et le regroupement des bases à différents endroits de la raffinerie sont représentés par un schéma de principe que nous appelons flowsheet.

Dans la section 3.3 nous proposons une manière de représenter un flowsheet quelconque via une matrice et un vecteur. Puis nous proposons un modèle et une expression générale des propriétés en sortie de mélangeuse, en fonction des propriétés des bases.

À la section 3.4, nous proposons un estimateur des propriétés en sortie de mélangeuse dont nous montrons la convergence vers les propriétés réelles en sortie de mélangeuse en exhibant une fonction de Lyapunov.

À la section 3.5, nous proposons une commande prenant en compte les prémélanges et les contraintes en sortie.

Finalement, à la section 3.6, nous présentons les résultats de simulation pour deux flowsheets présentés dans ce chapitre.

3.1 Description du procédé de mélange

Dans le cas de mélange que nous traitons, chacune des bases n'est pas directement envoyée à la mélangeuse. En effet, la disposition des bacs de stockage des bases dans une raffinerie fait que les conduites qui transportent les bases se combinent à différents emplacements avant d'arriver dans la mélangeuse. La figure 3.1 donne un exemple de regroupements de conduites en amont de la mélangeuse. Dans la suite, ces regroupements sont dénommés des prémélanges.

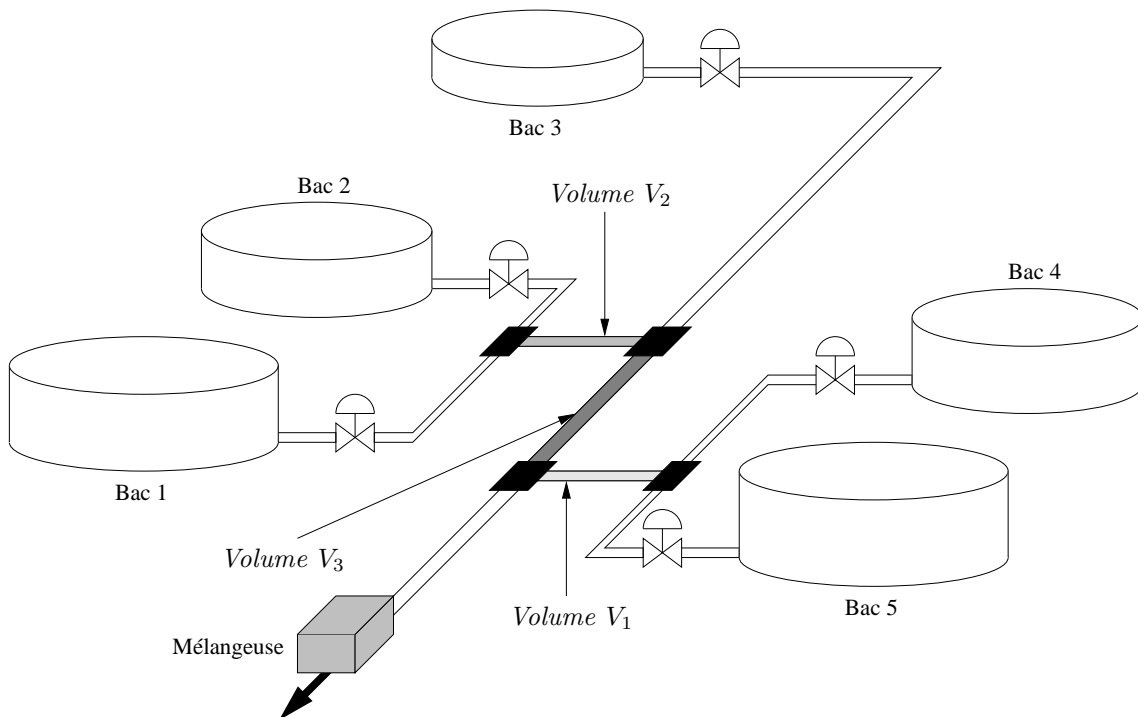


FIG. 3.1 – Disposition des bacs de stockage et regroupement des bases avant la mélangeuse

Les volumes morts V_i génèrent des retards purs sur la sortie du modèle (i.e. sur les propriétés du mélange). Ces retards sont variables car les débits traversant ces volumes morts sont variables. Les fractions de débits de chaque base sont les commandes ; elles

sont mises à jour toutes les minutes. Celles-ci sont déterminées afin de minimiser l'écart à la recette en respectant (quand c'est possible) les contraintes sur les propriétés en sortie de mélangeuse.

3.2 Composition de fonctions retard

Pour exprimer les propriétés de la coupe en sortie de mélangeuse, il est nécessaire de tenir compte des volumes des conduites. Lorsque ces volumes se succèdent, l'expression de la sortie se complexifie en faisant apparaître des compositions de fonctions retard (nous rappelons la définition de la fonction retard dans l'annexe C). Pour mieux comprendre les calculs et l'expression des propriétés en sortie de mélangeuse dans la section 3.3, nous présentons et interprétons ici un exemple simple de composition de retard.

L'expérience que l'on souhaite décrire est la suivante : il est envoyé à débit variable $F(t)$ un liquide dans une conduite de volume $V_3 = V_1 + V_2$. On place un capteur à l'entrée du volume V_1 qui permet de mesurer la propriété $b_1(t)$ et un autre capteur entre V_1 et V_2 qui permet de mesurer la propriété $b_2(t)$. On souhaite exprimer, de deux façons différentes, l'expression de la sortie $b_3(t)$ (en utilisant $b_2(t)$ et sans utiliser $b_2(t)$). Le problème est représenté sur la figure 3.2. Nous donnons une signification physique aux différents retards à différents temps dans la table 3.1.

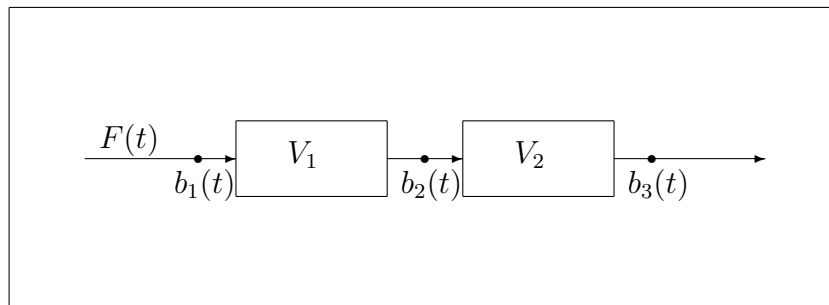


FIG. 3.2 – Transport de matière dans 2 volumes successifs

Cas 1

Les propriétés en sorties des volumes V_1 et V_2 s'écrivent respectivement

$$b_2(t) = b_1(t - \delta_1(t)) \quad \text{où} \quad V_1 = \int_{t-\delta_1(t)}^t F(s) ds$$

$$b_3(t) = b_2(t - \delta_2(t)) \quad \text{où} \quad V_2 = \int_{t-\delta_2(t)}^t F(s) ds$$

d'où

$$b_3(t) = b_1(t - \delta_2(t) - \delta_1(t - \delta_2(t)))$$

Cas 2

La propriété en sortie du volume V_3 s'écrit aussi directement

$$b_3(t) = b_1(t - \delta_3(t)) \quad \text{où} \quad V_3 = V_1 + V_2 = \int_{t-\delta_3(t)}^t F(s)ds$$

Montrons que

$$\delta_3(t) = \delta_2(t) + \delta_1(t - \delta_2(t))$$

Faisons l'hypothèse que $F(t) \neq 0$ sur l'intervalle d'étude. L'équation

$$V_1 = \int_{t^* - \delta_1(t^*)}^{t^*} F(s)ds$$

est valable en tout temps t^* , notamment en $t^* = t - \delta_2(t)$ d'où

$$V_1 = \int_{t-\delta_2(t) - \delta_1(t-\delta_2(t))}^{t-\delta_2(t)} F(s)ds$$

Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} V_3 &= V_1 + V_2 \\ \int_{t-\delta_3(t)}^t F(s)ds &= \int_{t-\delta_2(t) - \delta_1(t-\delta_2(t))}^{t-\delta_2(t)} F(s)ds + \int_{t-\delta_2(t)}^t F(s)ds \\ \int_{t-\delta_3(t)}^t F(s)ds &= \int_{t-\delta_2(t) - \delta_1(t-\delta_2(t))}^t F(s)ds \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{t-\delta_3(t)}^{t-\delta_2(t) - \delta_1(t-\delta_2(t))} F(s)ds = 0 \tag{3.1}$$

D'après l'hypothèse faite $F(t) > 0$, l'équation (3.1) est équivalente à

$$\delta_3(t) = \delta_2(t) + \delta_1(t - \delta_2(t))$$

■

$\delta_2(t)$	temps qu'a mis la particule à la sortie du volume V_2 au temps t pour parcourir ce volume V_2 .
$t - \delta_2(t)$	temps auquel la particule à la sortie du volume V_2 au temps t est à l'entrée du volume V_2 (et à la sortie du volume V_1).
$\delta_1(t)$	temps qu'a mis la particule à la sortie du volume V_1 au temps t pour parcourir ce volume V_1 .
$\delta_1(t - \delta_2(t))$	temps qu'a mis la particule à la sortie du volume V_1 au temps $t - \delta_2(t)$ pour parcourir ce volume V_1 .
$\delta_3(t)$	temps qu'a mis la particule à la sortie du volume V_2 au temps t pour parcourir le volume $V_3 = V_1 + V_2$.
$\delta_2(t) + \delta_1(t - \delta_2(t))$	temps qu'a mis la particule à la sortie du volume V_2 au temps t pour parcourir le volume V_2 plus temps qu'a mis la particule à la sortie du volume V_1 au temps $t - \delta_2(t)$ pour parcourir le volume V_1 .

TAB. 3.1 – Signification physique des retards

3.3 Modèle

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes

- n est le nombre de bases ;
- m est le nombre de propriétés de chaque base ;
- p est le nombre de prémélanges ;
- b_i est le vecteur de longueur m représentant, soit les propriétés de la base i si $i \leq n$, soit les propriétés en sortie du prémélange k si $i > n$ (on a alors $i = n + k$) ;
- B est la matrice des propriétés des bases

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

- u_i est, soit la fraction du débit volumique de la base i si $i \leq n$ soit la fraction du débit volumique traversant le prémélange k si $i > n$ (on a alors $i = n + k$). Nous avons

$$u_i = \frac{Q_i}{Q}$$

où Q_i est un débit volumique correspondant à la base (ou au prémélange) i et Q est le débit total de la mélangeuse ;

- le retard généré, à l'instant t , par le volume mort du prémélange k est noté $\delta_k(t)$.

Les propriétés des bases sont supposées constantes. Par définition des fractions volumiques, nous avons

$$\sum_{i=1}^n u_i = 1$$

3.3.1 Expression de la sortie

Dans cette section, nous commençons par rappeler l'expression de la sortie lorsque chaque base arrive directement à la mélangeuse. Puis, à titre d'illustration, nous écrivons l'expression de la sortie lorsque la disposition des bacs de stockage et des prémélanges dans la raffinerie est représentée par la figure 3.1. Enfin, dans le dernier paragraphe de cette section, nous exposons une écriture de la sortie dans le cas général, pour un flowsheet quelconque.

Cas d'un procédé sans prémélange

Lorsque chaque base arrive directement dans la mélangeuse, les propriétés du mélange dépendent proportionnellement du débit de chaque base. L'expression $y(t)$ des propriétés du mélange s'écrit donc

$$y(t) = Bu(t)$$

La commande de ce type de procédé est étudiée dans [Pet00].

Cas particulier de la configuration représentée figure 3.1

La configuration des prémélanges en amont de la mélangeuse, correspondant à la figure 3.1, est représentée par le flowsheet figure 3.3.

Dans ce cas particulier, il y a cinq bases et trois prémélanges. Les fractions des débits volumiques traversant les prémélanges s'écrivent

$$\begin{aligned} u_6(t) &= u_4(t) + u_5(t) \\ u_7(t) &= u_1(t) + u_2(t) \\ u_8(t) &= u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'expression des propriétés en sortie fait intervenir les propriétés en sortie des prémélanges 2 et 3. On a donc

$$y(t) = b_6(t) u_6(t) + b_8(t) u_8(t) \quad (3.3)$$

Au temps t , les propriétés en sorties des prémélanges s'écrivent

$$\left\{ \begin{aligned} b_6(t) &= \frac{b_4 u_4(t - \delta_1(t)) + b_5 u_5(t - \delta_1(t))}{u_6(t - \delta_1(t))} \\ b_7(t) &= \frac{b_1 u_1(t - \delta_2(t)) + b_2 u_2(t - \delta_2(t))}{u_7(t - \delta_2(t))} \\ b_8(t) &= \frac{b_7(t - \delta_3(t)) u_7(t - \delta_3(t)) + b_3 u_3(t - \delta_3(t))}{u_8(t - \delta_3(t))} \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

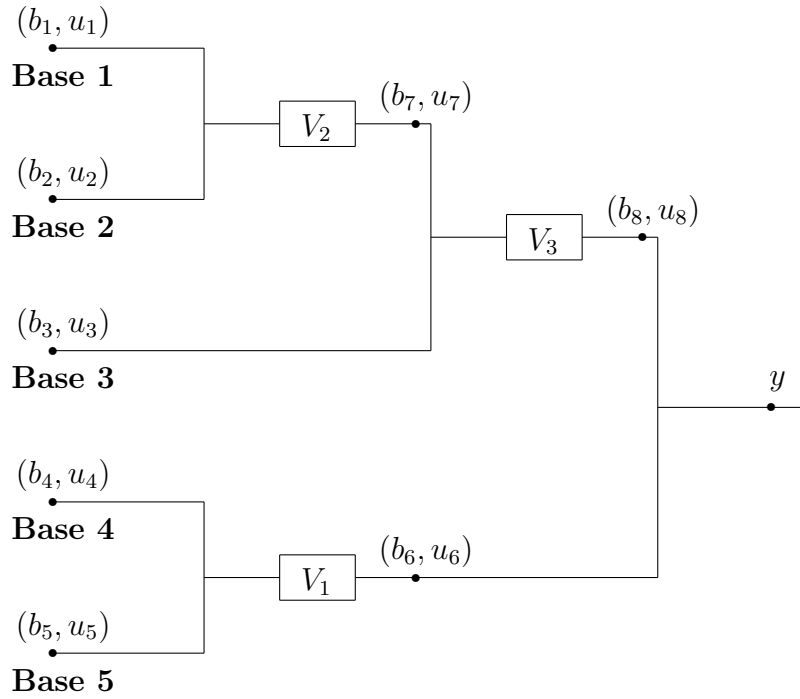


FIG. 3.3 – Flowsheet du procédé de mélange avec prémélanges

Nous utilisons (3.2), (3.3) et (3.4) pour obtenir une expression de la sortie dans laquelle les propriétés des bases sont en facteur

$$\begin{aligned}
 y(t) &= b_1 u_8(t) \frac{u_7(t - \delta_3(t))}{u_8(t - \delta_3(t))} \frac{u_1(t - \delta_2(t - \delta_3(t)))}{u_7(t - \delta_2(t - \delta_3(t)))} \\
 &+ b_2 u_8(t) \frac{u_7(t - \delta_3(t))}{u_8(t - \delta_3(t))} \frac{u_2(t - \delta_2(t - \delta_3(t)))}{u_7(t - \delta_2(t - \delta_3(t)))} \\
 &+ b_3 u_8(t) \frac{u_3(t - \delta_3(t))}{u_8(t - \delta_3(t))} + b_4 u_6(t) \frac{u_4(t - \delta_1(t))}{u_6(t - \delta_1(t))} + b_5 u_6(t) \frac{u_5(t - \delta_1(t))}{u_6(t - \delta_1(t))}
 \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}
 U_1(t) &= u_8(t) \frac{u_7(t - \delta_3(t))}{u_8(t - \delta_3(t))} \frac{u_1(t - \delta_2(t - \delta_3(t)))}{u_7(t - \delta_2(t - \delta_3(t)))} \\
 U_2(t) &= u_8(t) \frac{u_7(t - \delta_3(t))}{u_8(t - \delta_3(t))} \frac{u_2(t - \delta_2(t - \delta_3(t)))}{u_7(t - \delta_2(t - \delta_3(t)))} \\
 U_3(t) &= u_8(t) \frac{u_3(t - \delta_3(t))}{u_8(t - \delta_3(t))} \\
 U_4(t) &= u_6(t) \frac{u_4(t - \delta_1(t))}{u_6(t - \delta_1(t))} \\
 U_5(t) &= u_6(t) \frac{u_5(t - \delta_1(t))}{u_6(t - \delta_1(t))}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

et

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_5(t) \end{pmatrix}$$

l'expression des propriétés en sortie de mélangeuse devient

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}U(t) = \sum_{i=1}^5 U_i(t) \mathbf{b}_i$$

Remarque 3.1

Si $u(t)$ est constant sur l'intervalle $[t - \delta_2(t - \delta_3(t)), t]$, alors

$$U(t) = u(t)$$

Les propriétés $y(t)$ du mélange sont exprimées en fonction des propriétés des bases, des valeurs présentes et passées des fractions de débits de chaque base. Les $U_i(t)$ sont des produits et rapports de commandes passées et présentes.

Les expressions des $U_i(t)$ dans les propriétés du mélange sont donc beaucoup plus complexes lorsqu'il y a des prémélanges. On voit notamment apparaître des compositions des fonctions $\delta_i(t)$. Une des difficultés dans la mise en place d'une commande dans ce problème est que la variabilité des retards est uniquement due aux variations de débits qui sont justement les commandes.

Cas général

Considérons un flowsheet de mélange comportant p prémélanges numérotés de 1 à p . Notons :

– $Q_i(t)$ le débit volumique de base i au temps t , avec $i \in \{1, \dots, n\}$;

- $Q_{n+i}(t)$ le débit volumique total traversant le volume mort i au temps t , avec $i \in \{1, \dots, p\}$ (le débit entrant est toujours égal au débit sortant) ;
- $Q(t)$ le débit volumique total de la mélangeuse au temps t , $Q(t) = \sum_{i=1, n} Q_i(t)$;
- V_i le volume mort associé au prémélange i ;
- b_i le vecteur des propriétés de la base i , $b_j^E(t)$ (resp. $b_j^S(t)$) le vecteur des propriétés à l'entrée (resp. la sortie) du prémélange j au temps t . Par convention pour une base $b_i = b_i^E(t) = b_i^S(t)$.

À toute base i associons un chemin Π_i défini par la suite des p_i volumes morts traversés à partir de cette base pour atteindre la mélangeuse. C'est une suite de p_i entiers différents qui se rapportent aux indices de numérotation des prémélanges, $\Pi_i = \{\pi_i^1, \pi_i^2, \dots, \pi_i^{p_i}\}$, avec $\pi_i^j \in \{1, \dots, p\}$ pour tout $j \in \{1, \dots, p_i\}$. $\Pi_i = \emptyset$, soit $p_i = 0$, signifie que la base i est directement injectée dans la mélangeuse.

Dans le cas de la figure 3.3, nous avons :

- $\Pi_1 = \{2, 3\}$, $p_1 = 2$;
- $\Pi_2 = \{2, 3\}$, $p_2 = 2$;
- $\Pi_3 = \{3\}$, $p_3 = 1$;
- $\Pi_4 = \{1\}$, $p_4 = 1$;
- $\Pi_5 = \{1\}$, $p_5 = 1$;

Pour tout prémélange i , définissons l'ensemble Γ_i de ses q_i débits entrants. C'est un ensemble de q_i entiers différents qui se rapportent aux indices de numérotation des débits volumiques, $\Gamma_i = \{\gamma_i^1, \gamma_i^2, \dots, \gamma_i^{q_i}\}$, avec $\gamma_i^j \in \{1, \dots, n + p\}$ pour tout $j \in \{1, \dots, q_i\}$.

Dans le cas de la figure 3.3, nous avons :

- $\Gamma_1 = \{4, 5\}$, $q_1 = 2$;
- $\Gamma_2 = \{1, 2\}$, $q_2 = 2$;
- $\Gamma_3 = \{1, 5 + 3\} = \{1, 8\}$, $q_3 = 2$.

Pour $\Pi_i = \emptyset$, les propriétés b_i interviennent sous la forme pondérée $Q_i(t)/Q(t)b_i$ dans l'expression des propriétés du mélange sous forme de combinaison linéaire des propriétés des bases.

Intéressons-nous maintenant au cas $\Pi_i \neq \emptyset$.

Pour le prémélange π_i^j , le débit total est $Q_{\pi_i^j}(t) = \sum_{k \in \Gamma_{\pi_i^j}} Q_k(t)$. La propriété en entrée $b_{\pi_i^j}^E$ s'écrit

$$b_{\pi_i^j}^E(t) = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{\pi_i^j}} b_j^E Q_j(t)}{\sum_{j \in \Gamma_{\pi_i^j}} Q_j(t)}$$

Dans cette entrée, le terme en b_i intervient sous la forme

$$\frac{Q_i(t)}{\sum_{j \in \Gamma_{\pi_i^j}} Q_j(t)} b_i = \frac{Q_i(t)}{Q_{\pi_i^j}(t)} b_i$$

En sortie, nous avons $b_{\pi_i^1}^S(t) = b_{\pi_i^1}^E(t - \delta_{\pi_i^1}(t))$, le retard pur $\delta_{\pi_i^1}(t)$ étant défini par

$$V_{\pi_i^1} = \int_{t - \delta_{\pi_i^1}(t)}^t Q_{\pi_i^1}(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Le terme en b_i intervient donc dans $b_{\pi_i^1}^S(t)$ sous la forme

$$\frac{Q_i(t - \delta_{\pi_i^1}(t))}{Q_{\pi_i^1}(t - \delta_{\pi_i^1}(t))} b_i$$

De manière similaire, nous avons pour le prémélange π_i^2

$$b_{\pi_i^2}^E(t) = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{\pi_i^2}} b_j^E Q_j(t)}{\sum_{j \in \Gamma_{\pi_i^2}} Q_j(t)},$$

soit, pour le terme en b_i dans $b_{\pi_i^2}^E(t)$,

$$\frac{Q_{\pi_i^1}(t)}{Q_{\pi_i^2}(t)} \frac{Q_i(t - \delta_{\pi_i^1}(t))}{Q_{\pi_i^1}(t - \delta_{\pi_i^1}(t))} b_i$$

Pour $b_{\pi_i^2}^S(t) = b_{\pi_i^2}^E(t - \delta_{\pi_i^2}(t))$, le terme b_i intervient sous la forme

$$\frac{Q_{\pi_i^1}(t - \delta_{\pi_i^2}(t))}{Q_{\pi_i^2}(t - \delta_{\pi_i^2}(t))} \frac{Q_i(t - \delta_{\pi_i^2}(t) - \delta_{\pi_i^1}(t - \delta_{\pi_i^2}(t)))}{Q_{\pi_i^1}(t - \delta_{\pi_i^2}(t) - \delta_{\pi_i^1}(t - \delta_{\pi_i^2}(t)))} b_i$$

Nous voyons apparaître des compositions de retards sur les chemins Π_i . Définissons les fonctions $\Delta_i^j(t) : t \mapsto t - \delta_{\pi_i^j}(t)$, pour tout π_i^j dans Π_i . La composition de ces fonctions à i fixé est définie par

$$\Delta_i^{k,j}(t) \triangleq \Delta_i^k(\Delta_i^j(t)) : t \mapsto t - \delta_{\pi_i^j}(t) - \delta_{\pi_i^k}(t - \delta_{\pi_i^j}(t))$$

et $\Delta_i^{l,k,j}(t) \triangleq \Delta_i^l(\Delta_i^{k,j}(t))$. Avec ces définitions, la formule pour le terme b_i dans $b_{\pi_i^2}^S(t)$ s'écrit

$$\frac{Q_{\pi_i^1}(\Delta_i^2(t))}{Q_{\pi_i^2}(\Delta_i^2(t))} \frac{Q_i(\Delta_i^{1,2}(t))}{Q_{\pi_i^1}(\Delta_i^{1,2}(t))} b_i$$

A la sortie du dernier prémélange $\pi_i^{p_i}$, nous avons pour $b_{\pi_i^{p_i}}^S(t)$ en b_i

$$\frac{Q_{\pi_i^{p_i-1}}(\Delta_i^{p_i}(t))}{Q_{\pi_i^{p_i}}(\Delta_i^{p_i}(t))} \frac{Q_{\pi_i^{p_i-2}}(\Delta_i^{p_i-1,p_i}(t))}{Q_{\pi_i^{p_i-1}}(\Delta_i^{p_i-1,p_i}(t))} \cdots \frac{Q_{\pi_i^1}(\Delta_i^{2,\dots,p_i}(t))}{Q_{\pi_i^2}(\Delta_i^{2,\dots,p_i}(t))} \frac{Q_i(\Delta_i^{1,2,\dots,p_i}(t))}{Q_{\pi_i^1}(\Delta_i^{1,2,\dots,p_i}(t))}$$

et enfin dans le mélange, en notant $U_i(t)$ le terme en facteur de b_i

$$U_i(t) = \frac{Q_{\pi_i^{p_i}}(t) Q_{\pi_i^{p_i-1}}(\Delta_i^{p_i}(t)) Q_{\pi_i^{p_i-2}}(\Delta_i^{p_i-1,p_i}(t)) \dots Q_{\pi_i^1}(\Delta_i^{2,\dots,p_i}(t)) Q_i(\Delta_i^{1,2,\dots,p_i}(t))}{Q(t) Q_{\pi_i^{p_i}}(\Delta_i^{p_i}(t)) Q_{\pi_i^{p_i-1}}(\Delta_i^{p_i-1,p_i}(t)) \dots Q_{\pi_i^2}(\Delta_i^{2,\dots,p_i}(t)) Q_{\pi_i^1}(\Delta_i^{1,2,\dots,p_i}(t))} \quad (3.7)$$

La sortie s'écrit

$$y(t) = \sum_{i=1}^n U_i(t) b_i \quad (3.8)$$

Remarque 3.2 (Cas sans prémélange)

Pour $\Pi_i = \emptyset$, on a $U_i(t) = u_i(t) = Q_i(t)/Q(t)$.

Dans le cas de la figure 3.3, l'expression (3.7) des $U_i(t)$ permet bien de retrouver l'expression (3.5) déterminée dans le paragraphe précédent.

3.3.2 Définition d'une topologie pour la représentation d'un flowsheet

Pour la commande (et aussi pour la simulation) du procédé de mélange, nous avons besoin de représenter numériquement le flowsheet. Destiné à être implémenté en raffinerie, le régulateur doit être générique et il doit facilement s'adapter à des configurations de bacs de stockage et de prémélanges différentes. En effet, certains bacs sont alimentés ponctuellement, il existe alors des modes de fonctionnement dégradés dont le flowsheet diffère du flowsheet classique. Ces modes de fonctionnement sont identifiés et le régulateur doit être adapté pour travailler sur tous ces schémas.

Dans un souci de généralité, nous définissons un objet qui caractérise de manière univoque un flowsheet particulier. Nous avons choisi cet objet comme étant une matrice M_f de représentation du flowsheet et un vecteur V_f des volumes des prémélanges du flowsheet. Dans le cas particulier du flowsheet de la figure 3.3, la matrice M_f et le vecteur V_f sont respectivement représentés sur les tables 3.2 et 3.4. La construction de ces éléments se fait par simple "lecture" du flowsheet. Ainsi le régulateur peut être utilisée pour un autre flowsheet en faisant une simple mise à jour dans le code de l'objet qui le caractérise.

Matrice de représentation d'un flowsheet

Étant donné p , le nombre de prémélanges la matrice M_f a $p + 1$ lignes et $p + n + 1$ colonnes. Nous représentons, sur les lignes, les prémélanges puis le produit final. Sur les colonnes, nous représentons les bases, puis les produits intermédiaires (les sorties des volumes morts de prémélanges) et finalement le produit final (le mélange).

	base 1	base 2	base 3	base 4	base 5	PM ₁	PM ₂	PM ₃	P
PM ₁	0	0	0	-1	-1	2	0	0	0
PM ₂	-1	-1	0	0	0	0	2	0	0
PM ₃	0	0	-1	0	0	0	-2	3	0
P	0	0	0	0	0	-2	0	-3	5

TAB. 3.2 – M_f – Matrice de représentation du flowsheet de la figure 3.3

Chaque colonne correspond à un “produit particulier” : c’est soit une base, soit un produit intermédiaire (une sortie de volume mort de prémélange), soit le produit final (le mélange). Les lignes ne comportent que les produits différents des bases.

Dans la colonne correspondant à un produit, il existe un unique nombre négatif, exprimant la consommation de ce produit. La ligne sur laquelle se situe ce nombre négatif donne le produit immédiatement en aval dans la chaîne de mélange : c’est soit un produit intermédiaire, soit le produit final. Le fait qu’il n’existe qu’un unique nombre négatif par colonne signifie qu’aucun produit n’est séparé en deux flux distincts. Cette hypothèse est toujours vérifiée en pratique. La somme des éléments de la colonne vaut :

- -1 pour les bases (signe négatif pour indiquer une consommation) ;
- 0 pour les produits intermédiaires (constitués et consommés) ;
- n , soit le nombre de bases, pour le mélange final.

Dans la ligne correspondant à un produit (intermédiaire ou mélange final),

- les nombres négatifs indiquent les bases ou produits intermédiaires à partir desquels il est constitué ;
- l’unique nombre positif se situe dans la colonne du produit et indique le nombre de bases entrant dans sa constitution. Par construction, la somme des éléments d’une ligne vaut 0.

Pour suivre une base, il faut

- chercher le produit intermédiaire ou le produit final par lequel elle est utilisée ;
- se reporter à la colonne de ce produit intermédiaire, voir par quel produit intermédiaire ou final il est lui même consommé . . . , jusqu’à arriver au produit final.

Dans le cas d’un flowsheet sans prémélange, la table se réduit à une ligne et $(n + 1)$ colonnes, une par base plus une pour le mélange. Les n premières colonnes valent -1 et la dernière n .

Propriétés qui permettent de vérifier l’absence d’erreur dans la matrice M_f

- la somme des éléments sur chaque ligne doit être égale à 0 ;
- la somme des éléments sur les colonnes correspondant aux bases doit faire -1 ;
- la somme des éléments sur les colonnes correspondant aux prémélanges doit faire 0 ;
- la somme des éléments sur la dernière colonne doit être égale au nombre de bases ;
- il y a un seul élément sur chaque colonne correspondant à une base.

Remarque 3.3 (Ordonnement des prémélanges)

On appelle sous matrice M_s de M_f la matrice correspondant uniquement aux lignes et aux colonnes des prémélanges et du produit final dans M_f .

	PM₁	PM₂	PM₃	P
PM₁	2	0	0	0
PM₂	0	2	0	0
PM₃	0	-2	3	0
P	-2	0	-3	5

TAB. 3.3 – M_s – Sous-matrice triangulaire inférieure

On note qu'il est **nécessaire** d'ordonner les prémélanges de manière à ce que les indices $\{j_1, \dots, j_k\}$ des prémélanges qui sont en amont d'un prémélange i respectent les inégalités

$$\begin{cases} j_1 < i \\ \vdots \\ j_k < i \end{cases}$$

Cet ordonnancement particulier impose à la matrice M_s d'être triangulaire inférieure.

Vecteur des volumes des prémélanges du flowsheet

Le vecteur V_f est représenté dans la table 3.4. Il suffit de placer dans l'ordre des prémélanges, les volumes morts leur correspondant.

	Volume
PM₁	V_1
PM₂	V_2
PM₃	V_3

TAB. 3.4 – V_f – Vecteur des volumes des prémélanges du flowsheet**3.4 Estimation de la sortie**

Pour la commande de ce procédé de mélange, l'objectif est de réguler (ou surveiller) les propriétés en sortie de mélangeuse en commandant les débits de chaque base, cela en restant au plus près de la recette (choix initial des proportions des bases dans le mélange).

La résolution d'un problème d'optimisation du type

$$\begin{aligned} & \min_u \|u - \bar{u}\|_2^2 \\ & \begin{cases} z_m \leq b_{max} \\ z_e = b_{eq} \\ u_{min} \leq u \leq u_{max} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où z_m et z_e sont les vecteurs de propriétés en sortie de mélangeuse (y_i) en différents temps. Lorsque les propriétés des bases (matrice B) sont bien connues, les propriétés en sortie de mélange s'écrivent facilement à partir de la commande u et de la matrice B (Cf section précédente). En pratique, la matrice B est mal connue, il n'est donc pas possible d'écrire z_m et z_e comme un produit d'une sous-matrice de B et de u . Pour pallier ce problème, nous proposons dans cette section un estimateur des propriétés en sortie de mélangeuse. Pour cela, nous déterminons une matrice \hat{B} qui ne tend pas nécessairement vers la matrice des propriétés B mais qui fait converger $\hat{y} = \hat{B}U$ vers $y = BU$. Le problème d'optimisation (3.10) s'écrit

$$\begin{aligned} & \min_u \|u - \bar{u}\|_2^2 \\ & \begin{cases} Au \leq b_{max} \\ A_{eq}u = b_{eq} \\ u_{min} \leq u \leq u_{max} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

où A et A_{eq} sont des sous-matrices de \hat{B} . Ce problème est alors solvable par une méthode SQP.

Notons $\hat{y}(t)$ les propriétés estimées en sortie de mélangeuse. Nous avons

$$\hat{y}(t) = \hat{B}(t)U(t) \quad (3.11)$$

L'estimateur que nous proposons s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d\hat{B}_1^t}{dt} = -\beta_1 U(t)(\hat{y}_1(t) - y_1(t)) \\ \vdots \\ \frac{d\hat{B}_m^t}{dt} = -\beta_m U(t)(\hat{y}_m(t) - y_m(t)) \end{cases} \quad (3.12)$$

où $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^t$ est le vecteur des propriétés en sortie de mélangeuse.

Pour montrer la convergence de l'estimateur (3.12), nous choisissons la fonction de Lyapunov suivante

$$\phi(\hat{B}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\hat{B}_j^t(t) - B_j^t(t) \right)^t \left(\hat{B}_j^t(t) - B_j^t(t) \right)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov par rapport au temps est

$$\frac{d\phi}{dt}(\hat{B}) = \sum_{j=1}^m \left(\hat{B}_j(t) - B_j(t) \right) \left(\frac{d\hat{B}_j^t}{dt} - \frac{dB_j^t}{dt} \right)$$

Comme nous avons fait l'hypothèse que les propriétés des bases étaient constantes, nous avons

$$\frac{dB_j^t}{dt} = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

En utilisant cette hypothèse et les équations (3.12) de l'estimateur, nous obtenons

$$\frac{d\phi}{dt} = \sum_{j=1}^m \beta_j \left(\hat{B}_j(t) - B_j(t) \right) U(t) (\hat{y}_j(t) - y_j(t))$$

Par (3.11) et (3.8), la dérivée de $\phi(t)$ le long des trajectoires s'écrit

$$\frac{d\phi}{dt}(\hat{B}) = \sum_{j=1}^m \beta_j (\hat{y}_j(t) - y_j(t))^2 \leq 0$$

La fonction est ϕ positive, décroissante, bornée inférieurement par 0 donc elle converge :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\hat{B}(t)) < \infty$$

Par intégration, t_0 quelconque, on a

$$\int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m \beta_j (\hat{y}_j(t) - y_j(t))^2 = \phi(\hat{B}(t)) - \phi(\hat{B}(t_0))$$

il vient que la limite suivante existe et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m \beta_j (\hat{y}_j(t) - y_j(t))^2 < \infty \quad (3.13)$$

D'autre part \hat{B} est borné car $\hat{B} \rightarrow \phi(\hat{B})$ est telle que $\phi(\hat{B}) \rightarrow \infty$ lorsque $\|\hat{B}\| \rightarrow \infty$ et que $\frac{d\phi}{dt}(\hat{B}) \leq 0$. Il suit que les seconds membres de (3.12) sont tous bornés uniformément en t . Donc $t \rightarrow \hat{B}(t)$ est uniformément continue. Il vient alors que

$$\sum_{j=1}^m \beta_j (\hat{y}_j(t) - y_j(t))^2 = \sum_{j=1}^m \beta_j \left(\hat{B}_j(t) U(t) - B_j(t) U(t) \right)^2$$

est uniformément continue. D'après le lemme de Barbalat appliqué à (3.13), il vient que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{B}_j(t) U(t) - B_j(t) U(t)\| = 0 \quad \forall j$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{y}_j(t) - y_j(t)\| = 0 \quad \forall j$$

Dans la simulation présentée à la section suivante sur la figure 3.5, les β_j sont choisis comme suit

$$\beta_j = \frac{1}{\|U(t)\|^2 \tau}$$

avec $\tau = 3$ min.

Remarque 3.4 (Temps continu / temps discret)

L'étude de l'observateur et de la fonction de Lyapunov a été faite en temps continu par souci de compacité des notations. En pratique, sur site, celui-ci est codé en discret.

L'estimateur, tel qu'il est présenté dans cette section a fait l'objet d'un dépôt propriété industrielle auprès de l'agence européenne de protection des programmes.

3.5 Commande

Nous présentons dans cette section une commande prédictive qui prend en compte les contraintes en sortie de la mélangeuse. Dans un souci de lisibilité, le cas traité concerne un flowsheet très simplifié (figure 3.4) : trois bases, un prémélange et trois propriétés considérées qui sont la densité, l'indice de cétane et la proportion de soufre. Comme en pratique, la commande est mise à jour de manière discrète toutes les minutes. Une approche discrète est donc mise au point pour la commande.

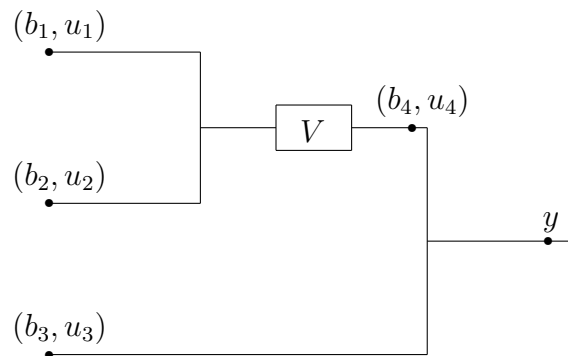


FIG. 3.4 – Flowsheet simplifié

D'après l'expression (3.7), il est aisé de voir qu'il existe une matrice $\Gamma(t)$ telle que

$$U(t) = \Gamma(t)u(t)$$

Les termes de la matrice $\Gamma(t)$ sont connus et antérieurs au temps courant t . Les propriétés en sortie s'écrivent

$$y(t) = B \Gamma(t) u(t)$$

où

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

Notons $u_4(t) = u_1(t) + u_2(t)$ le débit en sortie du prémélange. Les propriétés en sortie de mélange sont

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{b_1 u_1(t - \delta(t)) + b_2 u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} u_4(t) + b_3 u_3(t) \\ &= b_1 \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} u_4(t) + b_2 \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} u_4(t) + b_3 u_3(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Une expression générale de la matrice $\Gamma(t)$ est

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & 0 \\ \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Au temps t , si

$$u(\tilde{t}) = u \quad \forall \tilde{t} \geq t$$

où u est une constante, alors il existe $\tilde{t} > t$ tel que

$$\tilde{t} - \delta(\tilde{t}) = t$$

Donc $\forall \hat{t} \geq t + \delta(\tilde{t})$ nous avons

$$y(\hat{t}) = b_1 u_1(\hat{t}) + b_2 u_2(\hat{t}) + b_3 u_3(\hat{t})$$

Dans ce cas, la matrice $\Gamma(\hat{t})$ se simplifie et s'écrit

$$\Gamma(\hat{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En fait, ceci correspond au phénomène suivant : si les débits des bases sont constants “suffisamment” longtemps, alors les valeurs de ceux-ci aux temps \hat{t} et $\hat{t} - \delta(\hat{t})$ sont identiques.

3.5.1 Contraintes sur les propriétés en sortie

Les contraintes en sortie de mélangeuse sont nécessaires, elles permettent de respecter, aux meilleurs coûts, les spécifications réglementaires des carburants fabriqués (indice d’octane, volatilité, taux de soufre...).

Nous les notons

$$\begin{cases} y_1(t) & \leq y_1^{max} \\ y_2(t) & \geq y_2^{min} \\ y_3(t) & = y_3^{ref} \end{cases}$$

Dans la simulation présentée sur la figure 3.5, nous avons supposé que, pour notre flowsheet simplifié, la densité et le soufre sont bornés par des maxima et l’indice de cétane est borné par un minimum.

3.5.2 Commande sans prise en compte des prémélanges

La commande sans prise en compte des prémélanges peut être vue comme une prédiction dont l’horizon est $+\infty$ et l’horizon de contrôle est 1. En fait, l’horizon de prédiction correspond au temps nécessaire pour que les conduites se vident du liquide présent à l’instant t si la commande déterminée reste constante à partir de celui-ci. Ce temps a été noté précédemment $\delta(\hat{t})$.

Pendant la prédiction, la commande est supposée constante entre t et $t + \delta(\hat{t})$ donc l’expression (3.14) de la sortie se simplifie pour $\hat{t} \geq t + \delta(\hat{t})$ et devient :

$$y(\hat{t}) = b_1 u_1(\hat{t}) + b_2 u_2(\hat{t}) + b_3 u_3(\hat{t}).$$

Dans ce qui suit, la matrice utilisée pour avoir les sorties en $t + \delta(\hat{t})$ est

$$\Gamma(t + \delta(\hat{t})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons \bar{u} , la recette proposée pour le mélange. C’est la commande qui est appliquée quand l’unité est pilotée en boucle ouverte.

En pratique, les bases sont des produits semi-finis, c’est à dire qu’elles ont déjà été transformées dans des unités de la raffinerie. La recette déterminée en boucle ouverte est une solution qui permet théoriquement d’avoir des propriétés en sortie de mélangeuse dans les spécifications mais elle permet aussi de consommer les bases à des débits

cohérents avec les débits de production et les quantités stockées des bases. Les spécifications demandées sur les propriétés en sortie de mélangeuse sont toutes exprimées directement sous forme de contraintes. L'absence de suivi de trajectoire ne nécessite pas d'inclure dans le critère de minimisation une fonction de la sortie. Le problème (P) à résoudre pour respecter les contraintes et être le plus près de la recette est donc le suivant

$$\begin{aligned} & \min_u \|u - \bar{u}\|_2^2 \\ & \begin{cases} Au \leq b \\ A_{eq} u = b_{eq} \\ u_{min} \leq u \leq u_{max} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

La première inéquation de (3.15) permet de prendre en compte les contraintes

$$\begin{cases} y_1(t + \delta(\tilde{t})) \leq y_1^{max} \\ y_2(t + \delta(\tilde{t})) \geq y_2^{min} \end{cases}$$

en choisissant

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} y_1^{max} \\ -y_2^{min} \end{pmatrix}$$

La seconde équation de (3.15) permet de prendre en compte la régulation

$$y_3(t + \delta(\tilde{t})) = y_3^{ref}$$

et d'assurer l'égalité

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1$$

en choisissant

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_{eq} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_3^{ref} \end{pmatrix}$$

La dernière équation de (3.15) permet d'assurer que chacune des fractions de débits reste comprise entre 0 et 1, c'est à dire

$$0 \leq u_i \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

La commande appliquée au procédé est la solution de ce problème. Comme cette commande ne prend pas en compte les prémélanges, elle ne garantit pas le respect des contraintes en régime transitoire. Pour pallier cette insuffisance, nous proposons, dans la section qui suit, une commande calculée pour un horizon de prédiction multiple.

3.5.3 Commande avec prise en compte des prémélanges

L'objectif est de construire une commande qui gère les contraintes en transitoire, c'est à dire entre le temps t où on applique la commande et le temps $t + \delta(\tilde{t})$. L'idée est de garder la structure de la commande précédente et d'y ajouter des points de contraintes entre t et $\delta(\tilde{t})$. L'horizon de contrôle reste 1.

Pour l'écriture du problème, nous ajoutons un point de contrainte en t instant auquel nous souhaitons déterminer la nouvelle commande. Le problème (P_{prem}) s'écrit

$$\begin{aligned} & \min_u \|u - \bar{u}\|_2^2 \\ & \begin{cases} Au \leq b \\ A_{eq} u = b_{eq} \\ u^{min} \leq u \leq u^{max} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

La forme du problème est identique au cas sans prémélange, mais les matrices pour les contraintes changent et s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma(t) \\ \Gamma(t + \delta(\tilde{t})) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & 0 \\ \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{b_{11} u_1(t - \delta(t)) + b_{12} u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{b_{11} u_1(t - \delta(t)) + b_{12} u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & b_{13} \\ \frac{-b_{21} u_1(t - \delta(t)) - b_{22} u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{-b_{21} u_1(t - \delta(t)) - b_{22} u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{14}(t) & \mathbf{b}_{14}(t) & \mathbf{b}_{13} \\ -\mathbf{b}_{24}(t) & -\mathbf{b}_{24}(t) & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ -\mathbf{b}_{21} & -\mathbf{b}_{22} & -\mathbf{b}_{23} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^{max} \\ -\mathbf{y}_2^{min} \\ \mathbf{y}_1^{max} \\ -\mathbf{y}_2^{min} \end{pmatrix}$$

Ces contraintes s'écrivent plus simplement

$$\begin{cases} y_1(t) & \leq y_1^{max} \\ y_2(t) & \geq y_2^{min} \\ y_1(t + \delta(\tilde{t})) & \leq y_1^{max} \\ y_2(t + \delta(\tilde{t})) & \geq y_2^{min} \end{cases}$$

Nous avons aussi

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(t) \\ \Gamma(t + \delta(\tilde{t})) \end{pmatrix}$$

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{b_{31} u_1(t - \delta(t)) + b_{32} u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{b_{31} u_1(t - \delta(t)) + b_{32} u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{b_{31} u_1(t - \delta(t)) + b_{32} u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_{33} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{b}_{34}(t) & \mathbf{b}_{34}(t) & \mathbf{b}_{33} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{eq} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{y}_3^{ref} \\ \mathbf{y}_3^{ref} \end{pmatrix}$$

Ces contraintes s'écrivent plus simplement

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 & = 1 \\ y_3(t) & = y_3^{ref} \\ y_3(t + \delta(\tilde{t})) & = y_3^{ref} \end{cases}$$

Pour rajouter une contrainte au temps $\tilde{t} \in]t, t + \delta(\tilde{t})[$, il suffit de choisir

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma(t) \\ \Gamma(\tilde{t}) \\ \Gamma(t + \delta(\tilde{t})) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$b = \begin{pmatrix} y_1^{max} \\ -y_2^{min} \\ y_1^{max} \\ -y_2^{min} \\ y_1^{max} \\ -y_2^{min} \end{pmatrix},$$

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma(\bar{t}) \\ \Gamma(\check{t}) \\ \Gamma(t + \delta(\check{t})) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

et

$$b_{eq} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_3^{ref} \\ y_3^{ref} \\ y_3^{ref} \end{pmatrix}.$$

La solution du problème (P_{prem}) est la commande appliquée.

Résolution du problème (P_{prem}) et calcul du retard pour les prédictions

Lorsque la contrainte en $\bar{t} \in]t, t + \delta(\check{t}[$ est prise en compte, l'expression des matrices A et A_{eq} dans le problème (P_{prem}) nécessite la connaissance de $\delta(\bar{t})$. Or l'expression implicite du retard est

$$V = \int_{\bar{t}-\delta(\bar{t})}^{\bar{t}} Qu_4(s)ds$$

où Q est le débit total. Le calcul du retard $\delta(\bar{t})$ lorsque $\bar{t} > t$ n'est plus possible car nous ne connaissons pas l'expression de u aux temps supérieurs à t . En pratique, le signal $u(t)$ est discrétisé avec une période d'échantillonnage de Δt . La discrétisation permet de calculer $\delta(t)$ mais aussi $\delta(t + \Delta t)$ qui dépend uniquement des valeurs de u aux temps strictement inférieurs à $t + \Delta t$ (voir Annexe D).

Lorsque les prédictions se font à des temps \check{t} strictement supérieurs à $t + \Delta t$, les matrices A et A_{eq} dépendent de $\Gamma(\check{t})$ (voir (3.17) et (3.18)) qui lui dépend de $u_4(\check{t} - \delta(\check{t}))$. La commande u au temps $\check{t} - \delta(\check{t})$ est celle que l'on cherche à déterminer. **Le problème à résoudre devient non linéaire.** Pour les contraintes, les matrices A et A_{eq} dépendent de la commande u à divers temps dans le futur (u qui est le vecteur des variables d'optimisation).

Pour gérer le calcul du retard aux temps supérieurs à $t + \Delta t$, deux solutions sont envisagées : la première consiste à faire une approximation sur le calcul du retard (voir

annexe D) et la seconde consiste à résoudre “brutalement” le problème non linéaire ce qui permet de faire la minimisation en calculant le vrai retard (de prédiction).

L’hypothèse faite, lorsque la première solution est retenue, est que la commande $u(\bar{t})$ est égale à la commande $u(t)$ lorsque $\bar{t} > t$. Cette hypothèse concerne uniquement le calcul du retard. Il est alors possible de calculer (si on suppose que le débit total est constant) le retard pour tous les temps supérieurs à $t + \Delta t$. Lorsque cette hypothèse est faite, le problème de minimisation (P_{prem}) reste linéaire.

Pour résoudre le problème (P_{prem}) en calculant le retard exact lorsqu’on prend en compte les contraintes entre t et $t - \delta(\tilde{t})$, nous nous servons de la routine d’optimisation non-linéaire sous contrainte *fmincon* de *Matlab*. La méthode utilisée par cette fonction est basée sur une optimisation quadratique séquentielle (SQP en anglais); un sous problème quadratique est résolu à chaque itération et les estimations du Hessien et du Lagrangien sont mises à jour.

Sur le choix du nombre de points de contraintes

En pratique, la disponibilité des mesures et le temps de réaction des pompes font que les débits des bases ne sont pas mis à jour en continu. Ils sont modifiés de manière discrète à intervalles réguliers. Pour ces raisons, nous avons choisi une approche discrète pour traiter ce problème de mélange. En simulation, nous mettons la commande à jour chaque minute.

Le choix du nombre de points de contraintes est empirique mais il est intuitivement fonction du pas d’échantillonnage, du nombre de prémélanges et des volumes des conduites traversées. En fait, les contraintes sont à appliquer en un nombre fini de points. En effet, comme les changements des débits sont discrets, les propriétés en sortie de mélangeuse sont constantes par morceaux. De plus l’horizon de contrôle choisi est 1 donc lors du calcul d’une nouvelle commande, il y a un nombre fini de propriétés différentes à prendre en compte dans les contraintes. Numériquement, il est possible d’ajouter exactement ces points de contraintes, mais les simulations réalisées nous permettent de constater que les améliorations apportées par rapport à un nombre de point de contraintes fixe ne sont pas significatives. De plus, dans ce cas, la dimension du problème à résoudre peut varier à chaque itération et devenir telle que, numériquement, le problème d’optimisation devienne difficile à résoudre.

En simulation, choisir brutalement un nombre de points de contraintes élevé est inutile car, du fait du caractère constant par morceaux des propriétés, certaines inégalités sont identiques donc inutiles. En revanche, choisir un nombre de points de contraintes trop petit peut conduire à violer les contraintes entre les temps pris en compte.

Nous avons choisi, dans le cas simplifié (figure 3.4), 3 points de contraintes en $t, t + \delta(\tilde{t})/2$ et $t + \delta(\tilde{t})$. Dans le cas plus complexe (figure 3.3), nous avons utilisé 5 points de contraintes répartis régulièrement sur $[t; t + \delta(\tilde{t})]$.

Remarque 3.5 (Approche continue)

Si les débits de bases étaient modifiés de façon continue, une approche continue pour la

résolution du problème aurait pu être envisagée. La commande optimale aurait alors été caractérisée par le principe du maximum de Pontryagin. Généralement, les contraintes sont traitées par des méthodes numériques discrètes (par ex. collocation) ou exprimées en de nombreux points de maillage. En laissant une tolérance sur la violation de contraintes, on peut trouver des trajectoires numériquement intéressantes. Dans ce cas, lorsque le pas du maillage tend vers 0, la solution numérique ne converge pas forcément vers la solution du problème continu.

A cette approche continue, nous avons préféré développer une approche discrète plus simple à mettre en oeuvre et correspondant mieux au problème de mélange tel qu'il se pose en raffinerie.

3.6 Résultats de simulation

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats de simulation pour le problème simplifié (figure 3.4) et pour le flowsheet plus complexe présenté sur les figures 3.1 et 3.3.

La simulation présentée sur la figure 3.5 permet de se rendre compte de l'amélioration apportée lorsque les prémélanges sont pris en compte dans la commande pour le problème de mélange simplifié. Lorsque la mélangeuse est pilotée avec la commande ne prenant pas en compte les prémélanges, les propriétés ne sont pas respectées pendant les 8 premières minutes alors qu'il existe une combinaison optimale de débits volumiques permettant de respecter les contraintes dès le début du bouclage. En effet, il suffit d'un seul pas de temps à la commande prenant en compte les prémélanges pour que les propriétés en sortie respectent les contraintes.

Pour le problème de mélange plus complexe, présenté sur les figures 3.1 et 3.3, la commande utilisée est identique. Nous présentons sur la figure 3.6 les mesures des propriétés en sortie de mélangeuse. La commande qui prend en compte les prémélanges permet respecter en transitoire les contraintes sur les propriétés. Avec la commande ne prenant pas en compte les prémélanges, les propriétés mesurées violent les contraintes pendant la période transitoire mais se stabilisent sur des valeurs qui les respectent. La prise en compte des volumes morts permet, dans ce cas, un gain de temps de temps de 20 minutes (les contraintes sont respectées 20 minutes plus tôt). Cette approche permet surtout de limiter la quantité de produit mélangé ne respectant pas les spécifications (donc non valorisable sans une nouvelle étape de traitement).

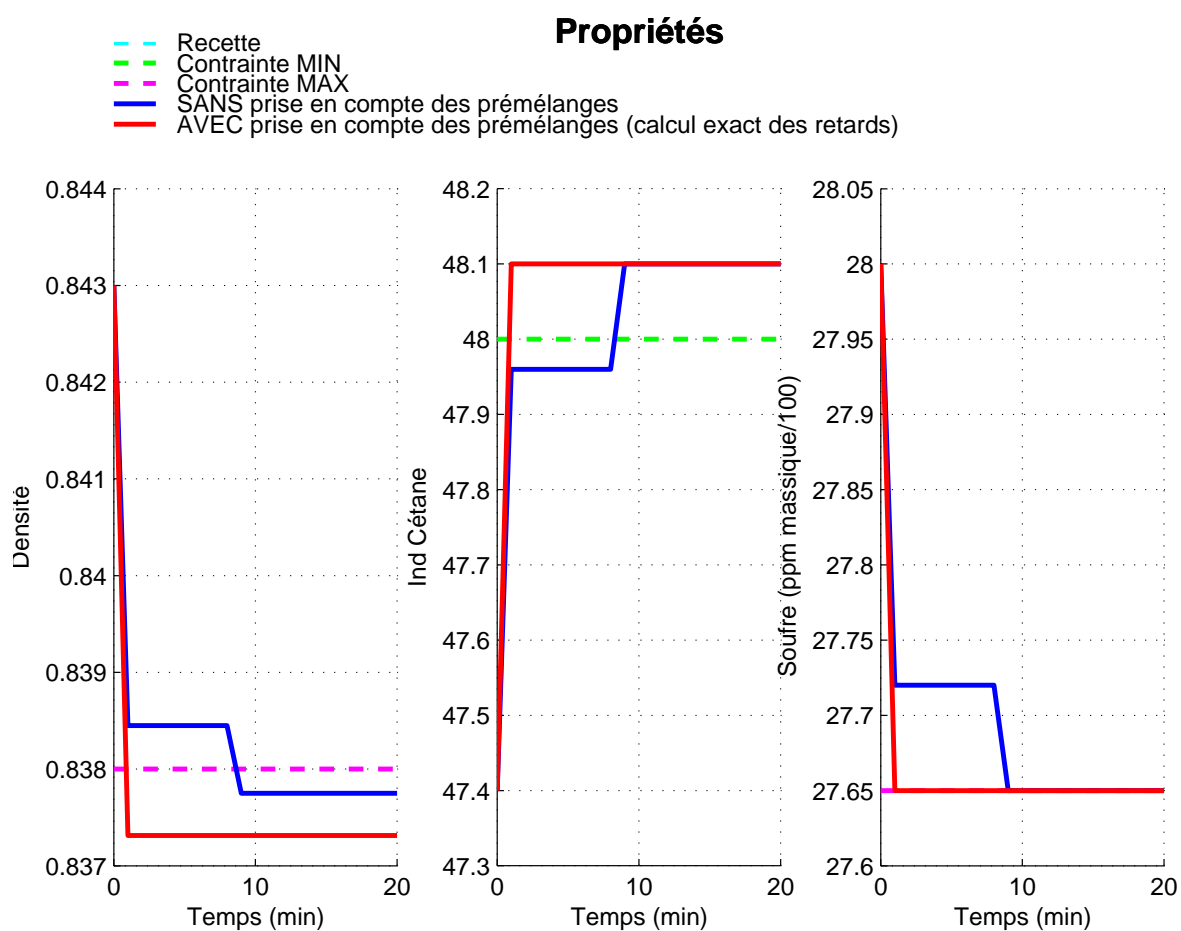


FIG. 3.5 – Comparaison des résultats obtenus avec les deux commandes (avec et sans prise en compte des prémélanges dans le problème d'optimisation) présentées dans la section 3.5 dans le cas du flowsheet simplifié.

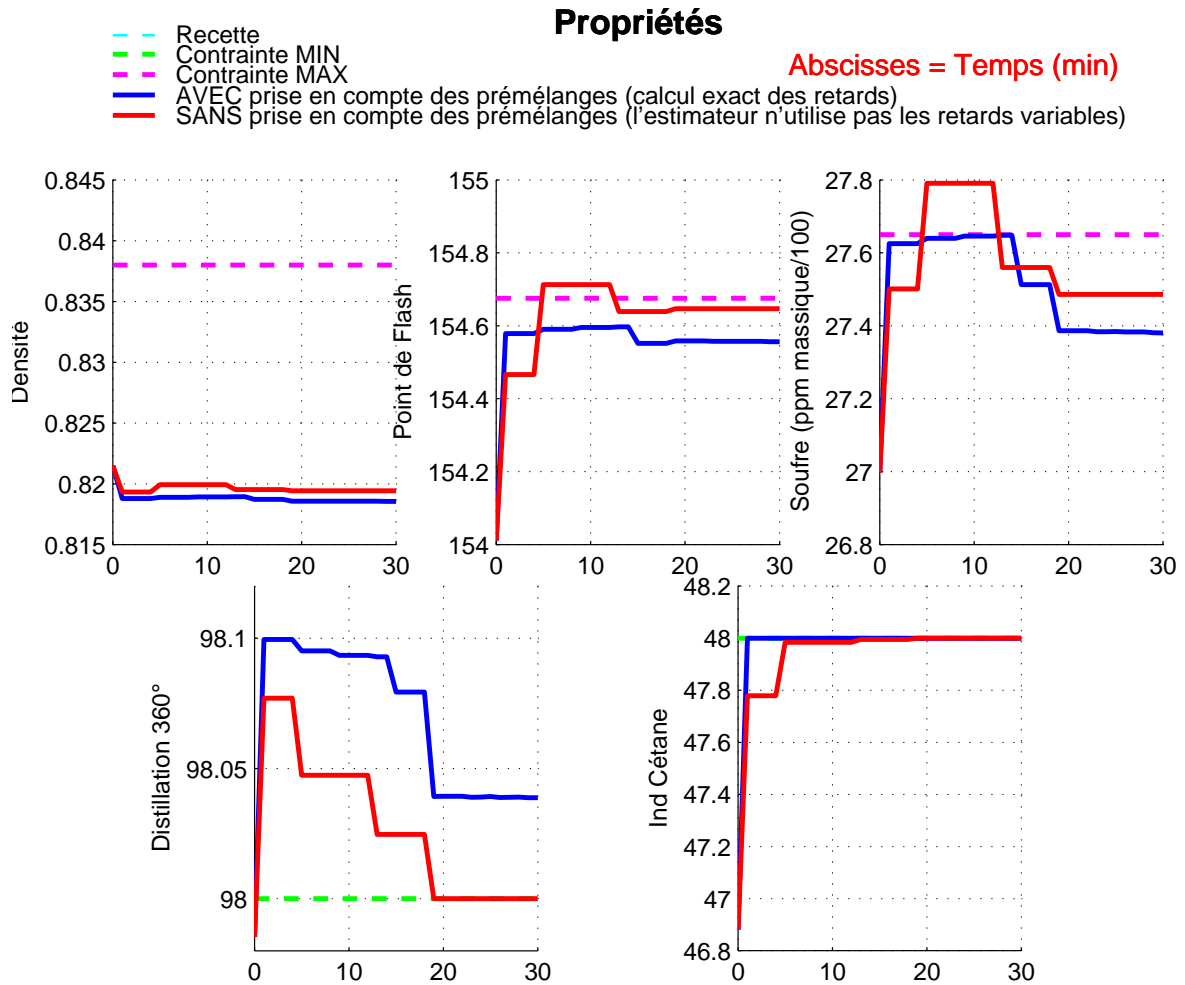


FIG. 3.6 – Comparaison des résultats obtenus avec les deux commandes (avec et sans prise en compte des prémélanges dans le problème d'optimisation) présentées dans la section 3.5 dans le cas du flowsheet présenté sur la figure 3.3.

3.7 Résultats industriels

Dans la section qui suit, nous présentons des résultats expérimentaux obtenus dans une des raffineries du groupe Total où l'estimateur de propriété a été installé. Les courbes représentent, en bleu, les propriétés mesurées en sortie de mélangeuse, et en marron, les propriétés observées à l'aide l'estimateur présenté précédemment. Les contraintes maxima et minima sont représentés en pointillés rouge. Lorsque les contraintes changent, nous distinguons clairement un retard entre l'estimation et la mesure. Nous mesurons assez loin en aval de la mélangeuse, d'où le retard de 50 minutes environ. L'impression de décalage des courbes signifie simplement que la prédiction instantanée est bonne.

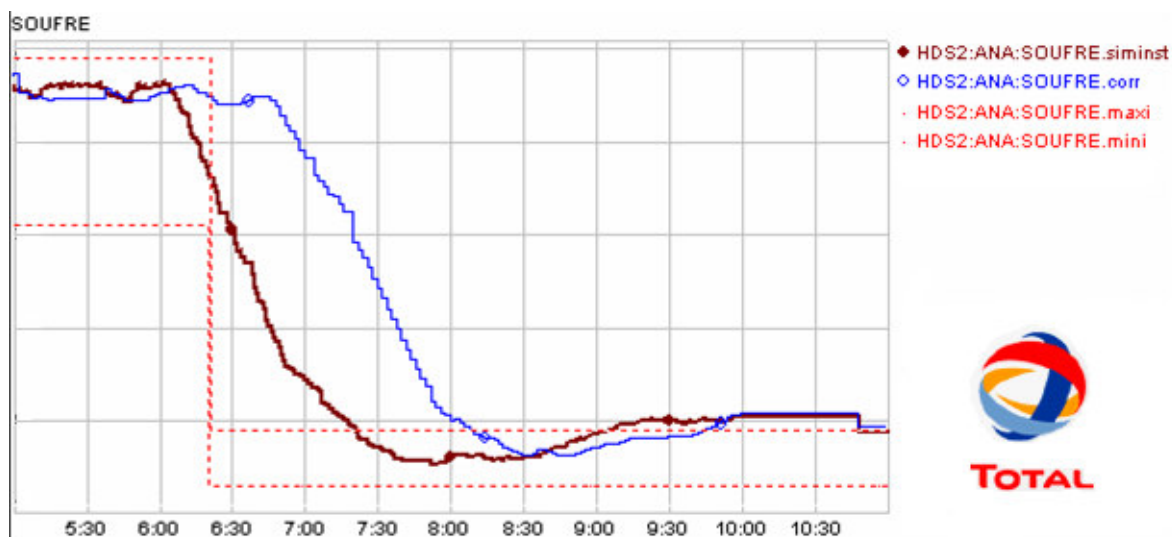


FIG. 3.7 – Résultats expérimentaux obtenus dans une raffinerie du groupe Total. En bleu le pourcentage de soufre mesuré en sortie de mélangeuse, en marron l'estimation de ce pourcentage et en rouge les minima et maxima à ne pas dépasser.

3.8 Conclusion

Nous avons défini, dans la première étape, une manière de représenter n'importe quel flowsheet. Nous avons codé un simulateur générique permettant de traiter un flowsheet quelconque. La seconde étape nous a permis de mettre au point un estimateur de

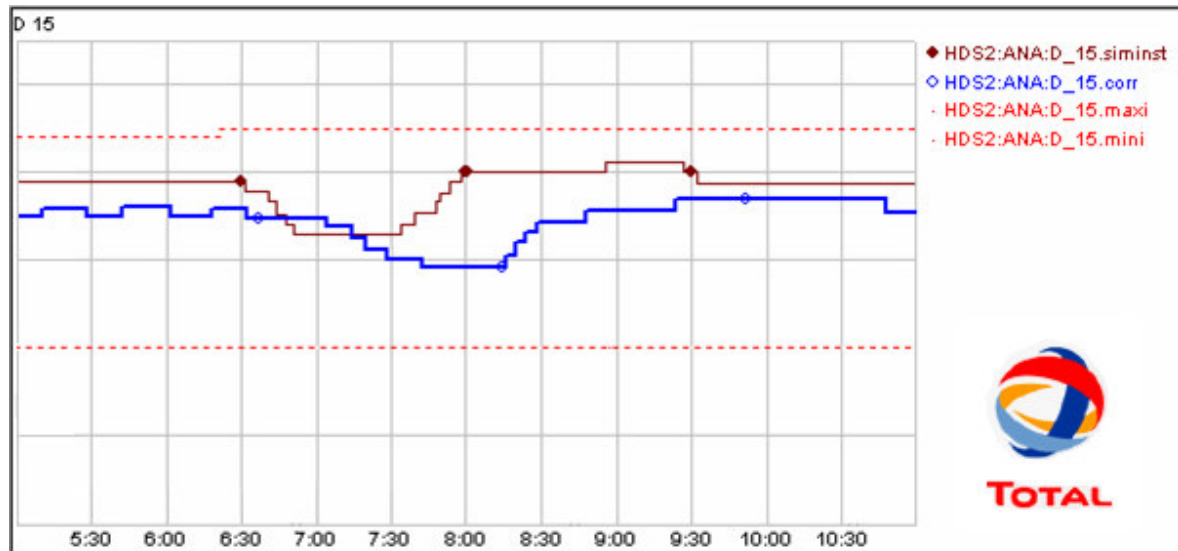


FIG. 3.8 – Résultats expérimentaux obtenus dans une raffinerie du groupe Total. En bleu le densité mesurée en sortie de mélangeuse, en marron l'estimation de cette densité et en rouge les minima et maxima à ne pas dépasser.

propriétés des bases qui sont en réalité mal connues. Nous montrons la convergence de la sortie estimée $\hat{y}(t)$ vers la sortie réelle $y(t)$ en associant à l'observateur déterminé une fonction de Lyapunov.

Nous avons déterminé, dans la troisième étape, une commande prédictive qui permet de respecter les contraintes imposées sur les propriétés du mélange en régime transitoire lorsque c'est possible.

CHAPITRE 4

RÉGULATION DE PH

Si la régulation de pH des procédés continus (type CSTR) est un sujet à l'origine de nombreux articles, celle de procédés de type fed batch est peu abordée dans la littérature. Les contraintes qui s'imposent sur ce type de procédés font de la régulation du pH un problème difficile.

Dans un mélange mettant en jeu plusieurs espèces acides et basiques, le pH est une mesure de la concentration C_H (mol/l) en ions hydronium H_3O^+ . Cette concentration est responsable du caractère acide de la solution. Le pH est défini par

$$\text{pH} = -\log_{10}(C_H) \quad (4.1)$$

La commande des procédés de régulation de pH joue un rôle très important dans l'industrie des procédés. La neutralisation d'une solution est un cas particulier, mais important de la régulation de pH. Le contrôle de pH est connu pour être un problème difficile; en effet, obtenir une commande robuste et performante est souvent difficile à cause des variations non linéaires des caractéristiques du procédé. Les courbes de titrage permettent de se rendre compte de ces non linéarités et notamment de celle qui correspond à la variation du gain. Les commandes classiques basées sur des méthodes de linéarisation autour d'un point de fonctionnement ne sont pas adaptées et offrent, lorsqu'elles sont implémentées, des performances décevantes. D'une manière générale, pour la neutralisation du pH, les régulateurs à paramètres constants sont inefficaces ([Cor01]).

Dans le cadre des réacteurs parfaitement agités, [MHS72] ont présenté un modèle purement différentiel dont l'état est la concentration C_H en ions hydronium. Cette dynamique est obtenue en dérivant l'équation d'équilibre et en utilisant les équations de bilan matière dans la dérivée. [GV83] utilisent le concept d'invariant de réaction et proposent un modèle algèbro-différentiel. La commande mise au point nécessite la mesure du pH des flux de réactifs entrant dans le réacteur. Dans la plupart des cas les espèces mises en jeu et les constantes d'acidité associées sont mal connues, les auteurs proposent donc d'utiliser dans le modèle, des réactifs "fictifs". Le nombre d'acides ainsi que les constantes d'acidité sont déterminés en fonction de la zone de pH exploitée. Un algorithme des moindres carrés récursifs permet d'estimer l'état du modèle et un régulateur PID est utilisé sur le premier élément de l'état estimé. Cette commande n'utilise pas la connaissance du procédé dont nous disposons (courbe de titrage, concentrations

des réactifs, densité, masses,...). Après avoir introduit la définition de l'acide fort équivalent, [WK91] proposent une réduction du modèle de [GV83] sous l'hypothèse que les flux entrants, le volume et les concentrations des réactifs sont constants. Le modèle dynamique obtenu est scalaire ; il devient linéaire s'il est possible de faire l'hypothèse que le débit de commande est très inférieur aux débits des réactifs. Le régulateur proposé est un PI modifié bouclé sur la concentration de l'acide fort équivalent. En pratique, le calcul de cette concentration n'est pas possible, il est nécessaire de l'estimer. [LY93] proposent un modèle de commande algébro-différentiel dans lequel la partie algébrique est une somme pondérée de courbes de titrations (acide forts, faibles) dont la somme des poids vaut 1. Le choix des poids et des concentrations est ajusté pour que la courbe de titration obtenue *colle* à la courbe de titration expérimentale. Le contrôleur utilisé est un PI sur une erreur de pH ; le gain du contrôleur en fonction du pH mesuré est ajusté à partir de la courbe de titration calculée. [KWC05] proposent une commande feedforward-feedback basée sur le modèle de Wiener (le modèle de Wiener a une structure sérielle composée d'un système dynamique linéaire suivi par un système algébrique non-linéaire). Le modèle utilisé est celui proposé par [WK91] ; la partie feedback de la commande est aussi identique à celle proposée par [WK91]. La partie feedforward de la commande est obtenue en ajoutant à la commande feedback un terme dépendant du pH de consigne et du débit entrant des réactifs. Le terme ajouté est la commande appliquée lorsque le pH est stabilisé au pH de consigne.

Un résumé des méthodes récentes de commande des procédés de neutralisation de pH est disponible dans [Cor01, chapitre 6].

L'approche que nous avons eue du problème est double. D'un côté, nous avons travaillé directement sur le procédé pour réaliser des tests en boucle ouverte et en boucle fermée avec des régulateurs simples. De l'autre, nous avons travaillé sur l'élaboration d'un modèle non linéaire qui soit à la fois représentatif du procédé et assez simplifié pour permettre son utilisation dans la commande du procédé. À partir de ce modèle une commande non linéaire a été utilisée pour commander le procédé.

Dans la section 4.1, nous présentons le procédé de neutralisation de pH et une courbe de titrage mettant en jeu les réactifs utilisés dans le procédé réel. Cette courbe fait ressortir la non-linéarité du procédé étudié.

Dans la section 4.2, nous exposons les premiers résultats obtenus sur le procédé avec deux commandes PI et PID : la mise en place d'un régulateur proportionnel intégral (PI) constitue une approche intéressante mais insuffisante pour contrôler ce procédé au vu des spécifications qui nous sont imposées.

Nous proposons dans la section 4.3 un modèle simplifié du procédé étudié. Il est écrit à partir du principe de la conservation de la matière (équations différentielles) et des relations d'équilibres des réactions acido-basiques (équations algébriques). Dans cette même section, nous présentons la loi de commande non linéaire mise au point pour la régulation du pH. Des résultats de simulation et des résultats obtenus sur le procédé sont comparés.

L'importance des perturbations observées sur le signal du pH nous a amené à résoudre des problèmes sortant du cadre de la régulation du pH : nous avons amélioré la régula-

tion de base et modifié une partie du système de supervision pour diminuer la période d'échantillonnage et synchroniser les mesures réalisées. Suite à ces améliorations réalisées dans le but de réduire les perturbations observées sur le signal de pH mesuré, nous avons modifié la manière d'appliquer la commande non linéaire (la structure de la commande restant identique). Nous présentons ces travaux dans la section 4.4 ; des résultats obtenus sur le procédé permettent de se rendre compte des bénéfices apportés par ces modifications. Nous aboutissons à une commande performante satisfaisant aux spécifications demandées.

Enfin, une seconde approche non-linéaire est exposée à la section 4.5. La commande mise au point permet de faire converger l'erreur entre le pH de consigne et le pH mesuré de manière suivant une exponentielle décroissante. En pratique, même si les résultats sont proches de la première méthode non linéaire mise au point, la seconde est moins robuste car les dérivées de fonctions identifiées (hors ligne) point par point y sont utilisées.

4.1 Le procédé

Le procédé sur lequel nous travaillons est utilisé pour la synthèse de précipités de sulfate d'aluminium ($Al_2(SO_4)_3$) et de métasilicate de sodium (Na_2SiO_3). Un ajout supplémentaire de soude ($NaOH$) ou d'acide sulfurique (H_2SO_4) permet de réguler le pH du mélange à une valeur souhaitée. Pour simplifier la lecture de ce document, nous décrivons uniquement la commande avec l'acide sulfurique. Notre contribution sur ce procédé réside dans la mise en place d'une loi de commande qui permette de réguler automatiquement le pH du milieu réactionnel dans des conditions opératoires multiples. L'objectif, pour l'utilisateur, est de pouvoir modifier les valeurs de consigne de pH, les concentrations des réactifs et les débits entrants sans pour autant avoir à modifier les paramètres du régulateur. Cela permettra de fixer un des multiples paramètres modifiables dans la synthèse de précipités et d'optimiser la reproductibilité des synthèses réalisées. Le schéma de principe du procédé est représenté sur la figure 4.1.

Mode opératoire. Le procédé sur lequel nous travaillons est de type fed batch. Une expérience type se décompose comme suit : au départ de l'expérience, le réacteur contient un volume V_0 d'eau (pied d'eau). Puis, les précurseurs (un acide réactif (A_r) et une base réactive (B_r)) sont versés dans le réacteur à des débits massiques constants. Dans le même temps, il est ajouté dans le réacteur, l'acide de commande (A_u) dont l'ajustement du débit massique (variable de commande) permet de contrôler le pH du mélange réactionnel (variable mesurée). Simultanément, de l'eau est ajoutée à un débit variable, calculé pour que le débit volumique total soit constant pendant toute la durée du batch. L'objectif est de déterminer une loi de commande qui permette d'envoyer rapidement le pH du mélange réactionnel vers le pH de consigne et de l'y maintenir pendant la durée restante de l'expérience. Les approches mises au point pour cette régulation haut niveau sont présentées dans les sections 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5.

Chaque produit est ajouté dans le réacteur à l'aide d'une pompe qui transfère le liquide

stocké dans un bac positionné sur une balance vers le réacteur. La masse mesurée par la balance permet de réguler le débit d'ajout via la commande de l'intensité envoyée à la pompe. Cette régulation bas niveau est décrite dans la section 4.4.1 et le schéma de principe est représenté sur la figure 4.12.

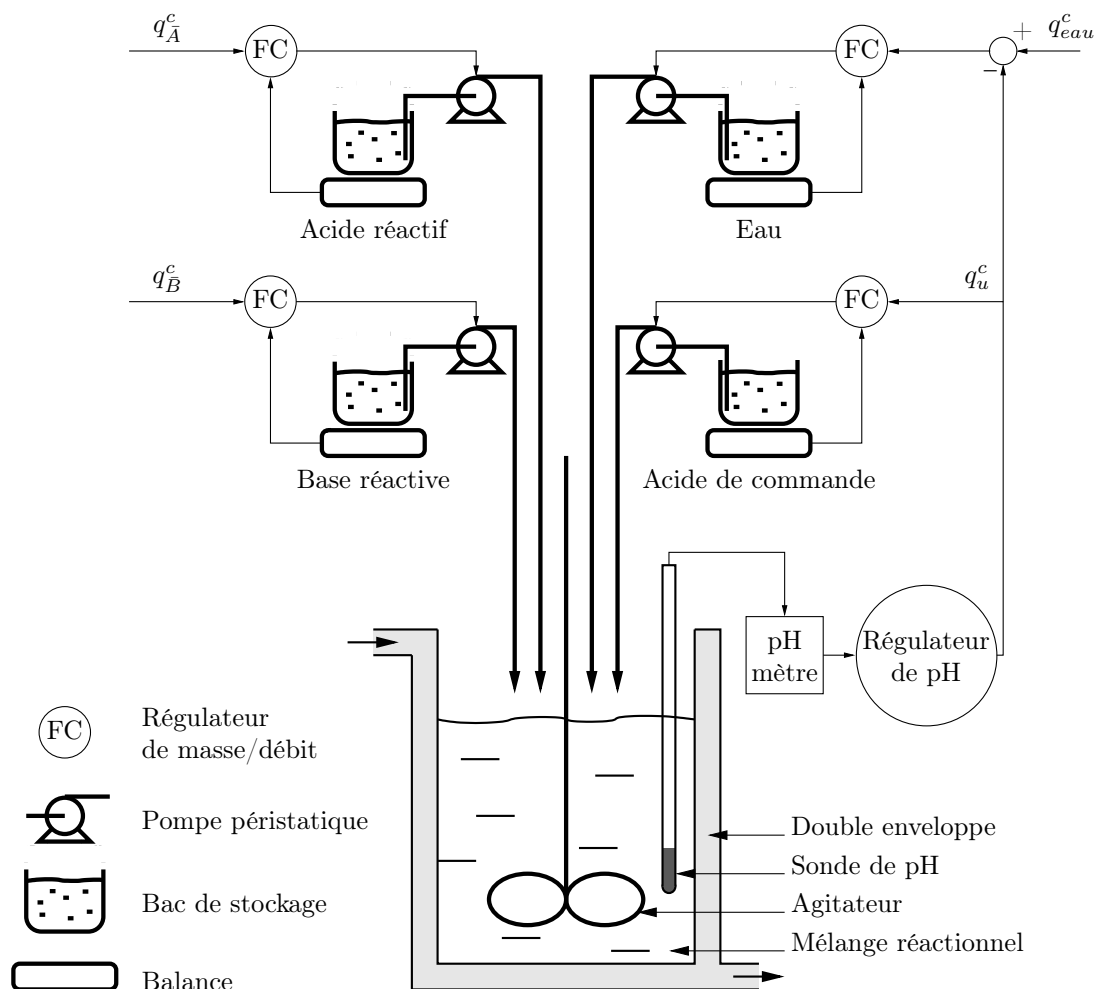


FIG. 4.1 – Schéma de principe du procédé de régulation de pH

Courbe de titrage En pratique, les courbes de titrages sont majoritairement utilisées pour déterminer la concentration exacte d'un produit, d'une espèce ou d'une fonction chimique quelconque. La technique consiste à mettre le produit à analyser en solution et à le faire réagir avec une autre espèce en solution dont on connaît parfaitement la concentration et la quantité mise en jeu. En ajoutant, à intervalles réguliers, un volume de titrant dans la solution et en mesurant le pH, une courbe du pH en fonction de la quantité de titrant ajoutée peut être tracée : c'est la courbe de titrage. Il reste alors à définir à quel moment il y a équivalence entre la quantité de titré et la quantité de titrant, pour définir, à l'aide de la connaissance de la réaction chimique, la concentration du produit analysé.

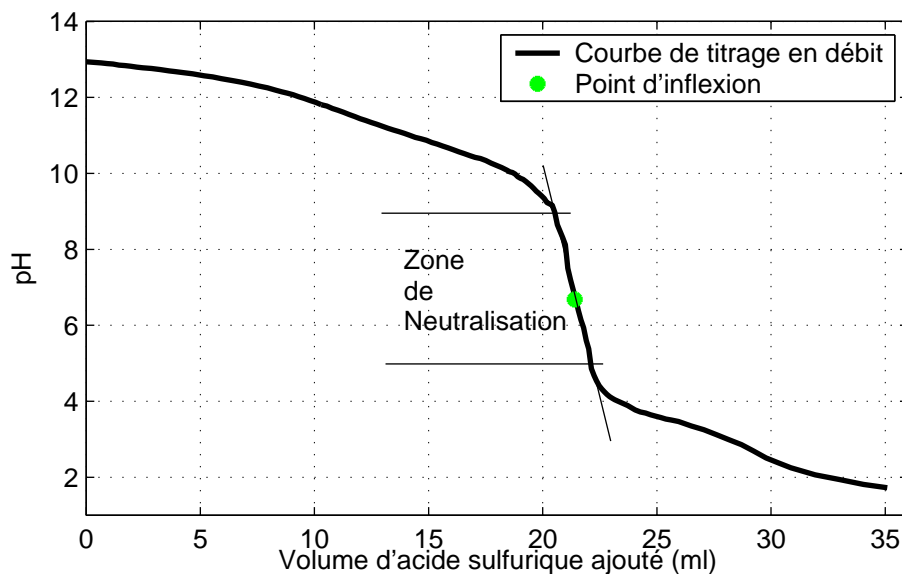


FIG. 4.2 – Courbe de titrage d'un mélange de sulfate d'aluminium ($Al_2(SO_4)_3$) et de métasilicate de sodium (Na_2SiO_3) par ajout d'acide sulfurique (H_2SO_4) : expérience réalisée au titrimètre automatique.

Nous n'utilisons pas la courbe de titrage dans ce but là, mais celle-ci met facilement en évidence la non linéarité du système et après normalisation, nous souhaitons exploiter cette connaissance dans la commande.

Nous représentons, sur la figure 4.2, la courbe de titrage d'un mélange d'acide (sulfate d'aluminium), de base (métasilicate de sodium) et d'eau, titré par de l'acide fort (acide sulfurique). Le titrant est ajouté par petit volume dans le mélange, puis, après un temps de stabilisation, la mesure de pH est effectuée.

La figure 4.2 montre une évolution non linéaire du pH en fonction de la quantité d'acide fort ajouté. Il faut donc tenir compte de ce saut de pH dans l'élaboration de la commande et faire en sorte que celle-ci ait un comportement différent si le pH mesuré est dans l'intervalle [5, 9] (zone de neutralisation dans cet exemple) ou s'il ne l'est pas. La zone de neutralisation est caractérisée graphiquement par le point d'inflexion de la courbe de titrage.

4.2 Approche linéaire

La première approche mise en place pour la commande est une approche linéaire. L'idée est d'utiliser un régulateur simple afin d'évaluer les difficultés pour la commande du procédé à différentes consignes de pH.

4.2.1 Régulation hors zone de neutralisation

Le premier régulateur testé est un régulateur proportionnel intégral (PI) que l'on boucle après une temporisation de trente secondes pendant laquelle nous appliquons un débit constant d'acide fort. Ce débit constant peut être exprimé à partir du modèle présenté dans la section 4.3.1. La temporisation permet de boucler le système lorsque les débits des précurseurs (acide et basique) sont proches du débit de consigne. Après la

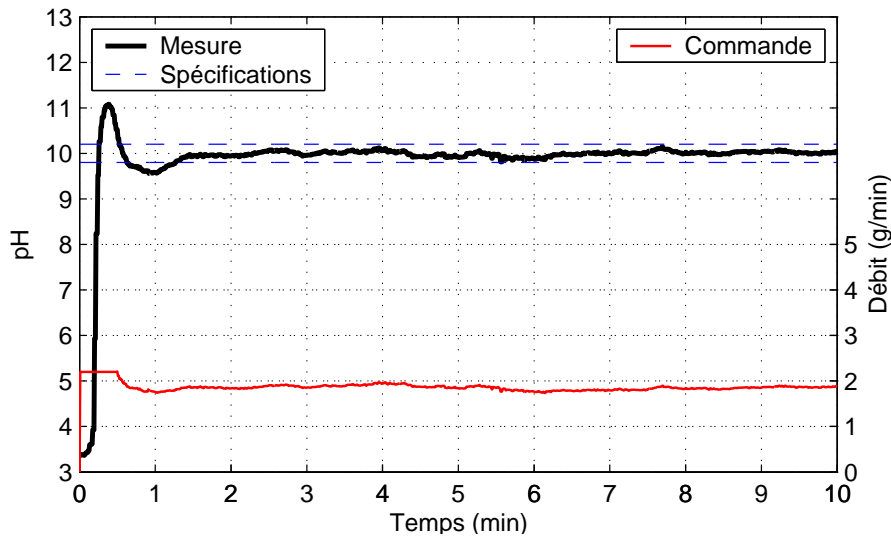


FIG. 4.3 – Régulation à $\text{pH} = 10$ avec un contrôleur proportionnel intégral

temporisation, le régulateur est bouclé et la référence pour la commande est initialisée à la mesure de pH actuelle. Celle-ci rejoint la consigne en quarante cinq secondes. Les résultats de l'expérience sont présentés sur la figure 4.3. Les spécifications sont atteintes en 1 minute et 20 secondes.

4.2.2 Régulation dans la zone de neutralisation

Il est plus difficile de réguler à $\text{pH} = 7$ car nous travaillons dans la zone de neutralisation. Sur la figure 4.2, il est facile de se rendre compte qu'un ajout d'acide de commande dans la zone de neutralisation entraîne une très grande variation du pH alors qu'en dehors de la zone de neutralisation le même ajout entraîne une petite variation de pH.

L'utilisation d'une approche similaire ne permet pas d'atteindre les spécifications en moins de 10 minutes (la durée totale du batch) : des réglages trop durs font osciller le pH ; des réglages trop mous augmentent démesurément le temps de réponse et ne permettent pas de stabiliser le pH en moins 10 minutes. Nous verrons plus loin que les oscillations observées sur pH proviennent aussi d'un ensemble de perturbations que nous avons identifiées. Nous présentons dans la section 4.4, les travaux réalisés pour les limiter.

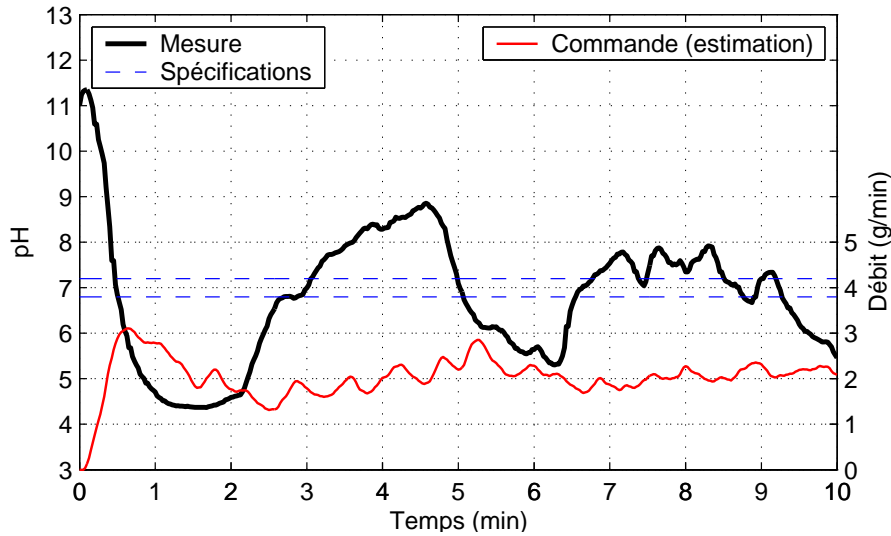


FIG. 4.4 – Régulation à $\text{pH} = 7$, avec adaptation du gain en fonction du pH mesuré

Pour prendre en compte la zone de neutralisation dans la commande, une première approche consiste à adapter le gain du contrôleur en fonction du pH : plus il est proche de la zone de neutralisation, plus il est faible. Nous choisissons un grand gain lorsque le pH mesuré est hors de la zone de neutralisation et un petit gain lorsque le pH correspond à la zone de neutralisation. Comme le montre la figure 4.4, les réglages choisis pour cette approche n'ont pas permis de stabiliser le pH à sa valeur de référence.

Lorsque le pH correspond à la zone de neutralisation, le gain choisi pour le contrôleur est petit. Lorsque le pH “entre” dans cette zone, la commande est soit trop forte, soit trop faible ; le gain choisi n'est pas suffisant pour avoir une action significative sur la commande et faire en sorte que le pH reste dans cette zone.

A la suite de ces résultats, nous choisissons d'abandonner ce gain scheduling (sans doute trop grossier dans cette première approche) pour ajouter un terme dérivé dans le régulateur PI utilisé hors zone de neutralisation.

Nous obtenons ainsi le premier régulateur qui nous permet d'appréhender correctement le problème de régulation à $\text{pH} = 7$: c'est un régulateur PID à paramètres constants pour un pH de consigne donné. Les résultats obtenus avec cette commande sont présentés sur la figure 4.5.

Dans la zone de neutralisation, les améliorations apportées par la dérivée du pH correspondent à nos attentes. Cependant, le temps de stabilisation est long (supérieur à 2 minutes et 30 secondes) et les perturbations observées (jusqu'à ± 0.8 point de pH) sur le signal du pH ne sont pas satisfaisantes et doivent être rejetées. De plus, sur plusieurs dizaines d'expériences réalisées, nous n'avons observé que quelques résultats intéressants (celui présenté sur la figure 4.5 étant le meilleur).

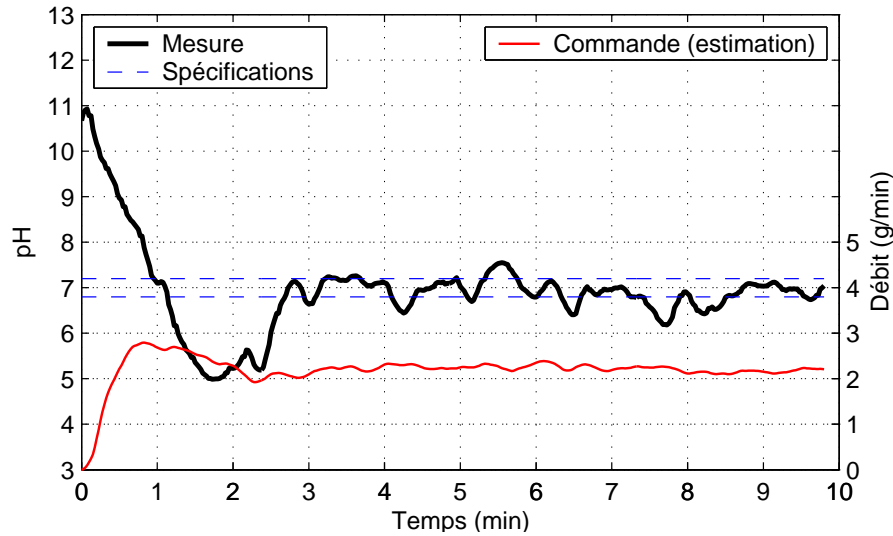


FIG. 4.5 – Régulation à $\text{pH} = 7$ avec un contrôleur proportionnel intégral dérivé (PID)

Conclusion. Les performances (temps de stabilisation et rejet de perturbations) atteintes avec cette approche linéaire sont suffisantes hors zone de neutralisation mais insuffisantes dans la zone de neutralisation. Pour pallier le manque de performance et de répétabilité dans la zone de neutralisation et pour mettre au point une solution moins contraignante pour le réglage du régulateur, nous présentons dans la section suivante, une approche non linéaire basée sur un modèle simplifié du procédé.

4.3 Modèle et approche non linéaire

Nous présentons, dans la section 4.3.1, un modèle simplifié pour un procédé de régulation de pH d'un mélange d'acide faible et de base faible par ajout d'un acide fort. Dans la section 4.3.2, nous proposons une commande non linéaire issue du modèle identifié. Les résultats issus de simulations sont comparés à ceux obtenus sur le pilote dans la même section.

4.3.1 Modèle d'un procédé de neutralisation du pH dans un réacteur de type fed batch

Le modèle utilisé est algèbro-différentiel : les équations dynamiques sont issues du principe de la conservation de la matière et l'équation algébrique de la loi d'action de masse, du produit ionique de l'eau, du principe de la conservation de la matière (appliqué aux réactions) et de la neutralité de la solution. Le modèle résultant est, du fait de l'équation d'équilibre, non linéaire mais aussi fortement instationnaire car le procédé modélisé est de type fed batch : il y a donc un aspect transitoire permanent.

L'écriture du modèle est le résultat d'un compromis entre la précision souhaitée et son utilisation pratique. Pour la commande, nous retenons les dynamiques prépondérantes et négligeons les autres. Dans la première partie de ce travail, les effets de précipitations, mal connus, ne sont pas modélisés et sont considérés comme des perturbations non mesurables. Il en est de même pour les variations de température générées par l'exothermicité des réactions qui ont lieu. La température du milieu réactif est régulée à une température de consigne ; seule la température de consigne, supposée constante, est prise en compte dans le modèle.

Equations dynamiques

Dans ce qui suit, la conservation de la matière permet de dire que pour une espèce (acide ou base et ses ions associés), le débit d'accumulation est égal au flux entrant. Nous obtenons les équations suivantes

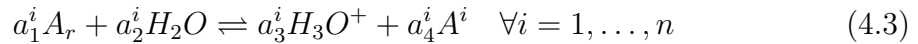
$$\begin{cases} \dot{V} &= q_{eau} + \frac{q_{\bar{A}}}{C_{\bar{A}0}} + \frac{q_{\bar{B}}}{C_{\bar{B}0}} + \frac{q_u}{C_{u0}} \\ \dot{N}_u &= q_u \\ \dot{N}_{\bar{A}} &= q_{\bar{A}} \\ \dot{N}_{\bar{B}} &= q_{\bar{B}} \end{cases} \quad (4.2)$$

où

- C_{u0} , $C_{\bar{A}0}$ et $C_{\bar{B}0}$ sont respectivement les concentrations des solutions aqueuses d'acide de commande A_u , d'acide réactif A_r et de base réactive B_r .
- $q_{\bar{A}}$ (resp. $q_{\bar{B}}$) est le débit molaire d'acide réactif (resp. de base réactive). Ils sont supposés constants car parfaitement régulés via le régulateur bas niveau.
- q_u est le débit molaire d'acide de commande.
- q_{eau} est le débit volumique d'eau. Il est réajusté en fonction de q_u pour que le débit volumique total q_{tot} reste constant. Nous choisissons donc

$$q_{eau} = q_{tot} - \frac{q_{\bar{A}}}{C_{\bar{A}0}} - \frac{q_{\bar{B}}}{C_{\bar{B}0}} - \frac{q_u}{C_{u0}}$$

- $N_{\bar{A}}$ est le nombre total de moles de l'acide. Si les n réactions de dissociation de A_r sont notées



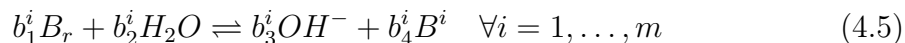
nous appelons nombre total de moles la quantité

$$N_{\bar{A}} = z_0^A N_{A_r} + \sum_{i=1}^n z_i^A N_{A^i} \quad (4.4)$$

où z_0^A et z_i^A sont fonctions du nombre d'atomes d'un corps qu'on choisit comme corps de référence dans la réaction (4.4). Dans les cas étudiés dans la littérature (échange d'un seul proton par réaction et coefficients stœchiométriques égaux à 1), ces coefficients sont égaux à 1.

Cette relation est tirée du **principe de la conservation de la matière** appliqué à l'espèce A_r .

- N_u est le nombre total de moles d'acide de commande.
- $N_{\bar{B}}$ est le nombre total de moles de la base réactive. Si les m réactions de dissociation de B_r sont notées



nous appelons nombre total de moles la quantité

$$N_{\bar{B}} = z_0^B N_{B_r} + \sum_{i=1}^m z_i^B N_{B^i} \quad (4.6)$$

où z_0^B et z_i^B sont fonctions du nombre d'atomes d'un corps qu'on choisit comme corps de référence dans la réaction (4.6). Dans les cas étudiés dans la littérature (échange d'un seul proton par réaction et coefficients stœchiométriques égaux à 1), ces coefficients sont égaux à 1.

Remarque 4.1

La concentration $N_{\bar{A}}/V$ est appelée concentration totale dans [WK91] et invariant de réaction dans [GV83].

Equation d'équilibre

L'équation d'équilibre est directement obtenue à partir d'équations algébriques qui traduisent la loi d'action de masse, le produit ionique de l'eau, le principe de la conservation de la matière (appliqué sur les réactions) et la neutralité de la solution.

Lorsque les électrolytes sont faibles, ils ne sont que partiellement dissociés ; à une température donnée, leurs constantes d'acidité caractérisent l'équilibre. Nous faisons l'hypothèse que les concentrations mises en jeu sont suffisamment faibles pour pouvoir considérer le mélange comme une solution idéale. Ainsi, l'activité d'une espèce peut être exprimée par sa concentration en moles par litre. Pour les réactions (4.3) et (4.5), les constantes d'acidité s'écrivent

$$K_a^i = \frac{C_H^{a_3^i} C_{A^i}^{a_4^i}}{C_{A_r}^{a_1^i}} \quad \text{et} \quad K_b^i = \frac{C_H^{b_3^i} C_{B_r}^{b_1^i}}{C_{B^i}^{b_4^i}} \quad (4.7)$$

Pour l'acide de commande, qui est un électrolyte fort, la dissociation est totale ; en présence d'eau, toutes les moles sont transformées, on a donc

$$C_u = C_{A_u^\alpha}$$

où α est le nombre de réactions de dissociation de A_u et A_u^α est l'ion résultant des dissociations.

La constante d'acidité de l'eau est le **produit ionique de l'eau** K_e : il est considéré constant à une température donnée ($K_e = 10^{-14}$ à $T = 25^\circ C$). Nous avons

$$K_e = C_H C_{OH^-} \quad (4.8)$$

L'équation d'électroneutralité appliquée à la solution s'écrit

$$C_H + \sum_{i=1}^m iC_{B^i} = \frac{K_e}{C_H} + \sum_{i=1}^n iC_{A^i} + \alpha C_{A_u^\alpha} \quad (4.9)$$

Les équations (4.4) et (4.6) permettent d'écrire

$$C_{\bar{A}} = C_{A_r} + \sum_{i=1}^n C_{A^i} \quad \text{et} \quad C_{\bar{B}} = C_{B_r} + \sum_{i=1}^m C_{B^i}$$

qui, utilisées avec (4.7), nous permettent de définir les deux fonctions f_A et f_B suivantes

$$f_A(C_H, C_{\bar{A}}) = - \sum_{i=1}^n iC_{A^i} \quad \text{et} \quad f_B(C_H, C_{\bar{B}}) = \sum_{i=1}^m iC_{B^i} \quad (4.10)$$

L'utilisation de (4.10) dans (4.9) permet d'obtenir l'équation d'équilibre qui s'écrit

$$g_0(C_H) + f_A(C_H, C_{\bar{A}}) + f_B(C_H, C_{\bar{B}}) - \alpha C_u = 0,$$

avec

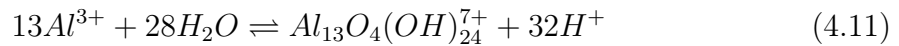
$$g_0(C_H) = \left(C_H - \frac{K_e}{C_H} \right).$$

Dans le cas général ($a_j^i \neq 1$), $f_A(C_H, C_{\bar{A}})$ ne peut pas se décomposer comme un produit de $C_{\bar{A}}$ et d'une fonction dépendant uniquement de C_H ; c'est à dire

$$\nexists g_A(C_H) \text{ tq } f_A(C_H, C_{\bar{A}}) = C_{\bar{A}} g_A(C_H)$$

La remarque est valable pour $f_B(C_H, C_{\bar{B}})$.

Pour illustrer ce cas général, nous nous référons par exemple à [BE76] qui détaille les réactions de dissociation de certains ions; nous citons ici une des nombreuses réactions de dissociation de l'ion aluminium Al^{3+}



Cas particulier Dans la littérature, seul un cas simplifié est étudié; l'hypothèse posée est que les coefficients stoechiométriques sont égaux à 1 : $a_j^i = 1 \quad \forall i, j$. Dans ce cas, les constantes d'acidité s'écrivent

$$K_a^i = \frac{C_H C_{A^i}}{C_{A_r}}$$

et l'équation d'équilibre peut s'écrire

$$g_0(C_H) + g_A(C_H)C_{\bar{A}} + g_B(C_H)C_{\bar{B}} - \alpha C_u = 0 \quad (4.12)$$

où

$$g_A(C_H) = - \frac{n + (n-1) \frac{C_H}{K_a^n} + \dots + \frac{C_H^{n-1}}{K_a^2 K_a^3 \dots K_a^n}}{1 + \frac{C_H}{K_a^n} + \dots + \frac{C_H^{n-1}}{K_a^2 K_a^3 \dots K_a^n} + \frac{C_H^n}{K_a^1 K_a^2 \dots K_a^n}}$$

et

$$g_B(C_H) = - \frac{m C_H^m + (m-1) \frac{K_e}{K_b^m} C_H^{m-1} + \dots + \frac{K_e^{m-1} C_H}{K_b^2 K_b^3 \dots K_b^m}}{C_H^m + \frac{K_e}{K_b^m} C_H^{m-1} + \dots + \frac{K_e^{m-1} C_H}{K_b^2 K_b^3 \dots K_b^m} + \frac{K_e^m}{K_b^1 K_b^2 \dots K_b^m}}$$

Rappelons maintenant que d'après (4.1) nous avons

$$C_H = 10^{-\text{pH}}$$

Notons alors l'équation d'équilibre (4.12) en pH

$$h_0(\text{pH}) + h_A(\text{pH})C_{\bar{A}} + h_B(\text{pH})C_{\bar{B}} - \alpha C_u = 0 \quad (4.13)$$

où

$$\begin{aligned} h_0(\text{pH}) &= g_0(C_H) \\ h_A(\text{pH}) &= g_A(C_H) \\ h_B(\text{pH}) &= g_B(C_H) \end{aligned}$$

Les fonctions $f_i(C_H, C_i)$ pour $i = \{\bar{A}, \bar{B}\}$ se notent aussi $f_i(10^{-\text{pH}}, C_i)$. Dans la suite du document les fonctions seront exprimées en pH.

Identification de $h_A(\text{pH})$ et $h_B(\text{pH})$

Dans le cas étudié, les constantes d'acidité des réactifs sont mal connues et nous savons qu'il existe des réactions de dissociation complexes. En réalité, toujours d'après [BE76], plusieurs dizaines de réactions de dissociation pour la silice, l'aluminium (voir réaction (4.11)) et l'acide sulfurique ont été identifiées. La complexité des réactions et le peu de connaissances disponibles sur celles-ci nous ont incité à emprunter une voie plus simple pour la commande.

Nous supposons que les fonctions $f_A(10^{-\text{pH}}, C_{\bar{A}})$ et $f_B(10^{-\text{pH}}, C_{\bar{B}})$ sont linéaires en les concentrations $C_{\bar{A}}$ et $C_{\bar{B}}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} f_A(10^{-\text{pH}}, C_{\bar{A}}) &= C_{\bar{A}} h_A(\text{pH}) \\ f_B(10^{-\text{pH}}, C_{\bar{B}}) &= C_{\bar{B}} h_B(\text{pH}) \end{aligned}$$

Les fonctions $h_A(\text{pH})$ et $h_B(\text{pH})$ sont identifiées en réalisant des titrations des acides réactifs et bases réactives. Les hypothèses $f_i(10^{-\text{pH}}, C_i) = C_i h_i(\text{pH})$ sont validées a posteriori à partir de ces expériences réalisées à différentes concentrations.

$h_A(\text{pH})$. Pour identifier la fonction $h_A(\text{pH})$ nous réalisons des expériences de titration de l'acide réactif à différentes concentrations par la soude. Lorsque seuls l'acide réactif et la soude sont mis en jeu, l'équation d'équilibre s'écrit

$$h_0(\text{pH}) + h_A(\text{pH})C_{\bar{A}} + C_{NaOH} = 0 \quad (4.14)$$

L'équation (4.14) permet d'exprimer la fonction $h_A(\text{pH})$ en fonction de la concentration totale d'acide réactif, de la soude et du pH mesuré. Les expériences sont réalisées

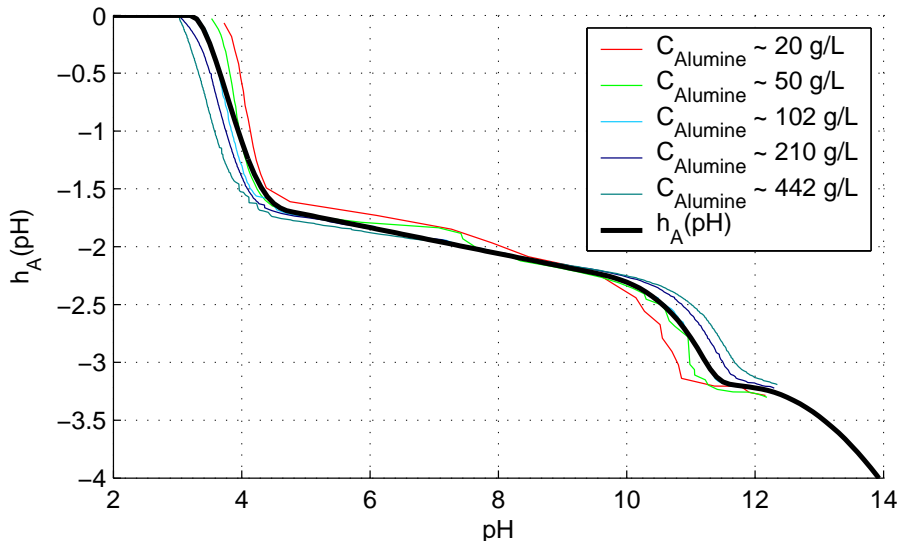


FIG. 4.6 – Test de linéarité de $f_A(10^{-\text{pH}}, C_{\bar{A}}) = h_A(10^{-\text{pH}})C_{\bar{A}}$, pour cinq concentrations initiales de $C_{\bar{A}}$ différentes.

à des concentrations initiales d'acide réactif différentes afin de vérifier l'hypothèse de linéarité. La figure 4.6 représente les fonctions $h_A(\text{pH})$ obtenues pour cinq titrations pour des concentrations initiales d'acide réactif variant de 0.01 à 0.44 g.ml⁻¹. Si l'hypothèse de linéarité avait été exactement vérifiée, la fonction $h_A(\text{pH})$ aurait été identique pour toutes les concentrations d'acide réactif. Dans notre cas, les courbes ne se superposent pas mais restent, pour $\text{pH} \in [4.5; 10]$, dans un intervalle raisonnable ($\pm 3\%$ de la valeur identifiée de la fonction). La fonction $h_A(\text{pH})$ utilisée dans le modèle est continue dérivable et sa dérivée est aussi continue et dérivable (C^2); elle est polynômiale par morceaux. Les coefficients des polynômes sont le résultat d'une minimisation de l'écart au carré par rapport aux fonctions $h_A(\text{pH})$ associées aux concentrations initiales différentes.

$h_B(\text{pH})$. Nous utilisons la même méthode pour identifier la fonction $h_B(\text{pH})$. En revanche, la titration de la base réactive par l'acide sulfurique (acide fort) forme, à certains pH et certaines concentrations élevées, un gel qui peut altérer les mesures du pH. Pour ces raisons, nous avons réalisé les titrations dans le sens inverse : l'acide fort est titré par la base réactive.

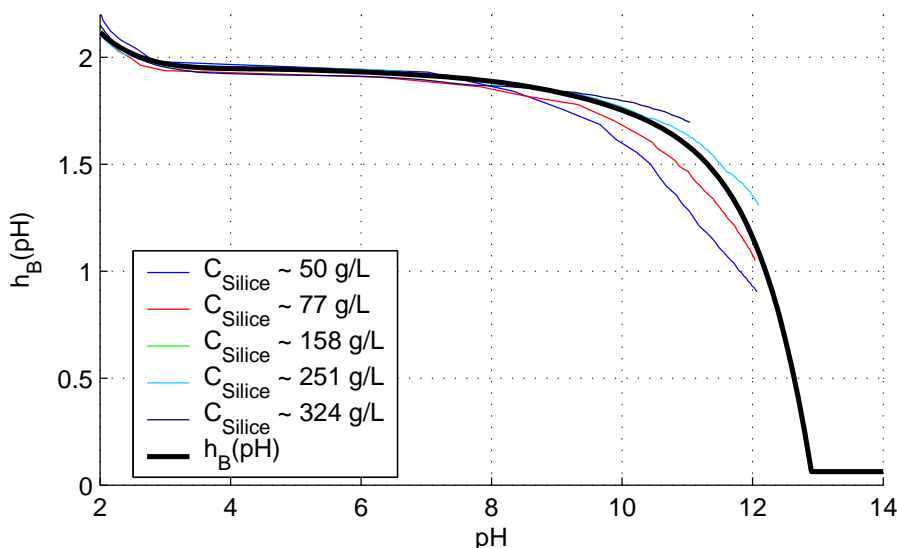


FIG. 4.7 – Test de linéarité de $f_B(10^{-\text{pH}}, C_{\bar{B}}) = h_B(\text{pH})C_{\bar{B}}$, pour cinq concentrations finales $C_{\bar{B}}$ différentes.

Remarque 4.2 (Titrations acide fort/base réactive ou base réactive/acide fort)

Dans les cas favorables (pas de gélification), des titrations de la base réactive par l'acide sulfurique ont été réalisées et les résultats montrent que les courbes obtenues sont proches de celles obtenues pour le titrage inverse.

Dans ce contexte, seuls l'acide sulfurique et la base réactive sont mis en jeu, l'équation d'équilibre s'écrit

$$h_0(\text{pH}) + h_B(\text{pH})C_{\bar{B}} - \alpha C_u = 0$$

Les expériences sont réalisées à des concentrations finales de base réactive différentes afin de vérifier l'hypothèse de linéarité. La figure 4.7 représente les fonctions $h_B(\text{pH})$ obtenues pour cinq titrations pour des concentrations finales de base réactive variant de 0.04 à 0.3 g.ml⁻¹. Si l'hypothèse de linéarité avait été exactement vérifiée, la fonction $h_B(\text{pH})$ aurait été identique pour toutes les concentrations de base réactive. Dans notre cas, les courbes ne se superposent pas mais restent, pour $\text{pH} \in [4; 9.5]$, dans un intervalle raisonnable ($\pm 3\%$ de la valeur identifiée de la fonction). La fonction $h_B(\text{pH})$ utilisée dans le modèle est définie comme étant le polynôme de degré 9 qui minimise l'écart au carré par rapport aux fonctions $h_B(\text{pH})$ associées aux concentrations finales différentes. Contrairement à l'identification de la fonction $h_A(\text{pH})$, l'approche brutale de l'identification avec un polynôme d'ordre élevé est suffisante pour la commande.

4.3.2 Commande non linéaire du procédé de neutralisation de pH

Le travail sur le modèle du procédé nous a permis de mettre en évidence que la régulation du pH pouvait être restreinte à une régulation de masse classique avec des

réglages indépendants des conditions opératoires (pH de consigne et débits des pré-curseurs) : ceux-ci étant considérés automatiquement dans la commande. Nous avons mis au point un simulateur pour tester cette nouvelle idée que nous décrivons dans ce qui suit. Les premiers résultats ont été rapidement très encourageants en simulation : les erreurs faites sur le modèle et le bruit de mesure sont des perturbations qui sont rejetées en boucle fermée. Les résultats obtenus sur le procédé réel, avec ce régulateur, ne se sont pas avérés aussi concluants qu'en simulation. Les perturbations associées à la régulation des pompes et à la précipitation étaient trop importantes pour réguler le pH dans la zone de neutralisation en respectant les spécifications imposées par l'utilisateur.

Nous nous plaçons dans le cas particulier où les coefficients stoechiométriques sont égaux à 1. La variable régulée n'est pas directement le pH ; l'idée est de contrôler le nombre de moles d'acide de commande présentes dans le réacteur. Pour cela, nous disposons initialement de mesures (pH et masses des réactifs) et d'une commande : le débit d'acide de commande.

Nous calculons un nombre de moles N_u^c en utilisant l'équation algébrique (4.13). Pour tout temps, le nombre de moles de consigne s'écrit

$$N_u^c = \frac{1}{\alpha} (h_0(\text{pH}^c)V + h_A(\text{pH}^c)N_{\bar{A}} + h_B(\text{pH}^c)N_{\bar{B}}) \quad (4.15)$$

La commande est déterminée pour faire converger N_u vers N_u^c de manière exponentielle, c'est à dire

$$\dot{N}_u = \dot{N}_u^c - \frac{1}{\tau} (N_u - N_u^c) \quad (4.16)$$

où nous avons

$$\dot{N}_u^c = \frac{1}{\alpha} \left(h_0(\text{pH}^c)\dot{V} + h_A(\text{pH}^c)\dot{N}_{\bar{A}} + h_B(\text{pH}^c)\dot{N}_{\bar{B}} \right)$$

La commande q_u se détermine directement à partir de (4.16) en utilisant $\dot{N}_u = q_u$. Nous obtenons

$$q_u = \dot{N}_u^c + \frac{1}{\tau} (N_u^c - N_u) \quad (4.17)$$

En pratique, les erreurs de modélisation nous obligent à utiliser un terme intégral ; nous choisissons un simple régulateur PI pour réguler le nombre de mole N_u

$$q_u = \frac{1}{\tau} \left((N_u^c - N_u) + \frac{1}{T_i} \int_0^t (N_u^c - N_u) \right) \quad (4.18)$$

Le terme \dot{N}_u^c de l'équation (4.17) n'est pas utilisé dans le régulateur mais du fait qu'il est constant, le terme intégral du régulateur suffit pour le compenser et ainsi assurer la convergence de N_u vers N_u^c .

Une fois ce débit molaire déterminé, il est transformé en débit massique qui devient la nouvelle consigne d'un second régulateur : le régulateur de masse/débit.

Convergence de pH vers pH^c

Montrons maintenant que si $N_u = N_u^c$ alors $\text{pH} = \text{pH}^c$. D'après l'équation algébrique (4.13), nous avons

$$\begin{aligned} & (h_0(\text{pH}) - h_0(\text{pH}^c)) V + \\ & (h_A(\text{pH}) - h_A(\text{pH}^c)) N_{\bar{A}} + \\ & (h_B(\text{pH}) - h_B(\text{pH}^c)) N_{\bar{B}} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Or la fonction définie par l'équation (4.15) est bijective et monotone par rapport à pH^c donc l'unique solution vérifiant l'équation (4.19) est $\text{pH} = \text{pH}^c$.

Résultats de simulation

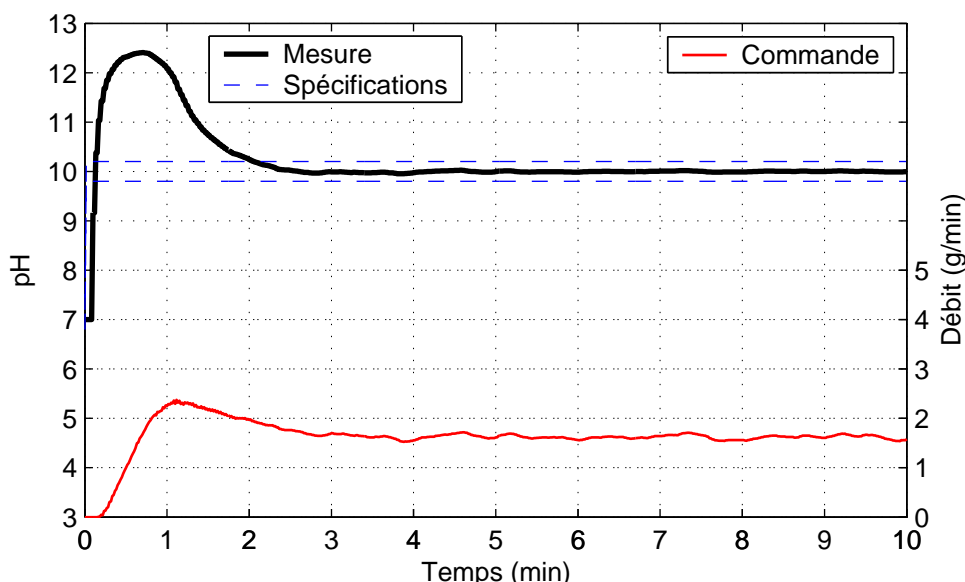


FIG. 4.8 – Simulation d'un batch dont le pH de consigne est hors zone de neutralisation : $\text{pH}^c = 10$.

Pour tester la commande mise au point, nous avons réalisé un modèle de simulation du procédé. Ce modèle intègre une partie réacteur basée sur les équations (4.2) et (4.12) et une partie pompe/balance (couche bas niveau) qui permet de réaliser des ajouts massiques dans le réacteur.

Le modèle de simulation. En plus du modèle chimique présenté dans la section précédente, le modèle de simulation intègre un modèle de la sonde de pH (système du premier ordre), un modèle de pompe (système du premier ordre retardé), un modèle de balance (système du premier ordre) tenant compte de la précision finie (0.1 g) de la balance et le régulateur de masse utilisé. Le tout est simulé avec une période d'échantillonnage variable autour de 0.5 s. Des perturbations sont ajoutées sur les masses mesurées pour reproduire les perturbations observées sur les balances.

Hors zone de neutralisation. Nous présentons sur la figure 4.8 la simulation d'un batch où le pH de consigne est hors zone de neutralisation ($pH^c = 10$). Hors zone de neutralisation, le pH de consigne est atteint en 2 minutes, sans oscillation et le pH reste quasiment constant pendant toute la durée du batch.

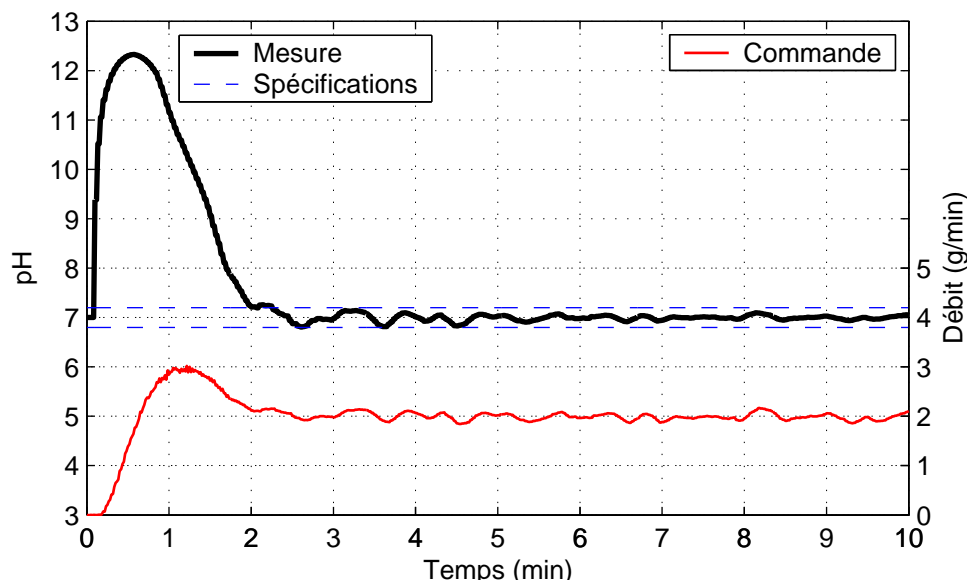


FIG. 4.9 – Simulation d'un batch dont le pH de consigne est dans la zone de neutralisation : $pH^c = 7$.

Dans la zone de neutralisation. Nous présentons sur la figure 4.9 la simulation d'un batch où le pH de consigne est dans la zone de neutralisation ($pH^c = 7$). Le pH mesuré atteint le pH de consigne en 2 minutes et il reste, pendant toute la durée du batch, dans l'intervalle toléré par l'utilisateur (± 0.2 point de pH).

Résultats obtenus sur le procédé

Les premiers résultats obtenus sur le pilote hors zone de neutralisation (à $pH^c = 10$) sont similaires à ceux présentés dans la simulation figure 4.8, même si des oscillations de faible amplitude sur le pH montrent que les perturbations du procédé réel n'ont pas toutes été prises en compte dans le modèle de simulation. La figure 4.10 présente les données réelles obtenues sur le pilote.

La figure 4.11 montre les résultats obtenus lorsque le pH de consigne est dans la zone de neutralisation (ici $pH^c = 7$). Comme dans la simulation, le temps de montée est court mais il y a des oscillations importantes sur la mesure de pH. Les résultats obtenus confirment la présence de perturbations sur le procédé réel. L'ajout des réactifs est supposé être réalisé à débit constant, mais il ne l'est pas car la régulation bas niveau de l'ensemble pompe/balance est peu performante et génère des oscillations importantes sur les débits réels des réactifs et la commande.

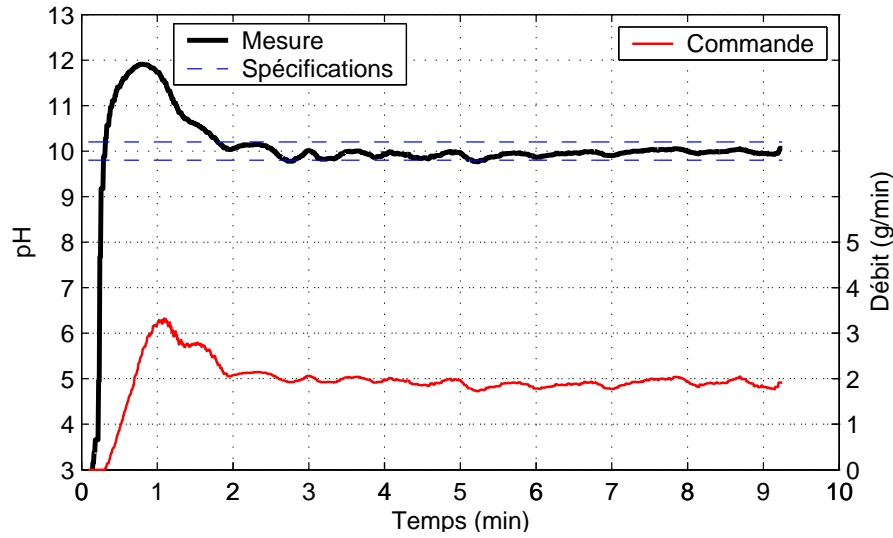


FIG. 4.10 – Régulation du pH hors zone de neutralisation ($\text{pH}^c = 10$) sur le procédé réel

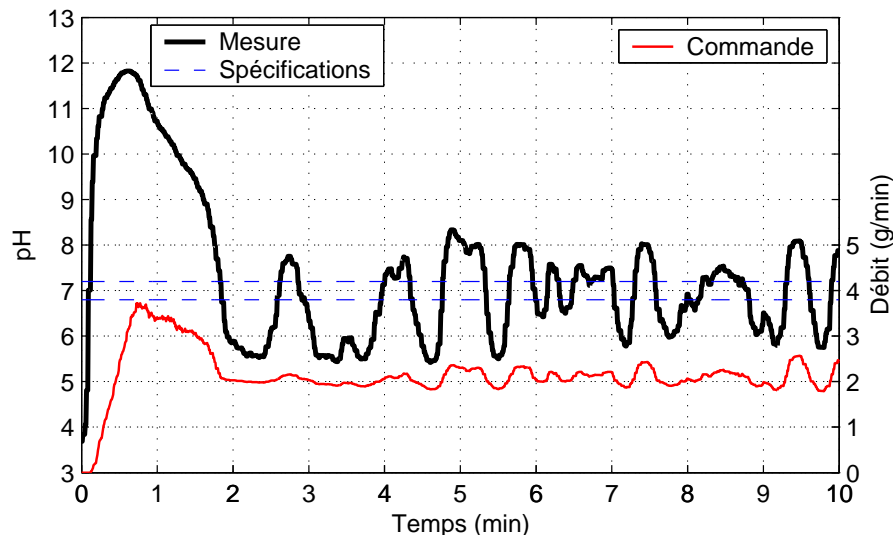


FIG. 4.11 – Régulation du pH dans la zone de neutralisation ($\text{pH}^c = 7$) sur le procédé réel

Conclusion La commande mise au point donne de bons résultats en simulation (pour tout pH de consigne) et sur le pilote hors zone de neutralisation. Les difficultés rencontrées sur le pilote pour la régulation dans la zone de neutralisation nous ont conduit à réaliser d'importants travaux sur le procédé (partie logiciel de supervision et loi de régulation des niveaux bas) pour identifier et minimiser leurs impacts. Une partie de ces travaux est présentée dans la section 4.4.

4.4 Mise au point pour l'approche non linéaire

Pour améliorer le comportement boucle fermée du système avec le régulateur non linéaire (4.18), nous avons d'abord cherché à limiter les perturbations extérieures. Dans ce cadre, nous avons travaillé et amélioré la régulation des masses. L'approche utilisée et les résultats obtenus sont présentés à la section 4.4.1. D'autre part, nous avons modifié une partie du code de supervision pour diminuer les temps d'échantillonnage et pour synchroniser les mesures de masses et de pH. Les balances ont été isolées de manière à ne plus être perturbées par des phénomènes extérieurs (courants d'air, vibrations des pompes,...).

Après avoir réduit les perturbations extérieures, nous avons travaillé sur l'application de la commande : la cascade de régulateur (régulation de pH, puis régulation de masse) est supprimée et la commande de pH se fait directement en intensité (cf section 4.4.2). Cette étape est représentée sur la figure 4.16. La précompensation, non utilisée dans la commande (4.18), est partiellement introduite dans la commande modifiée. La précipitation négligée dans un premier temps, est prise en compte dans la commande ; nous détaillons cette partie dans la section 4.4.3.

4.4.1 Stratégie pour la régulation de base

La régulation de base (masse/débit) mise au point est abordée dans cette section. Nous présentons le modèle de pompe utilisé dans la section 4.4.1 et nous détaillons le régulateur implémenté sur le procédé dans la section 4.4.1.

Le modèle de la boucle bas niveau : pompe - balance

Comme nous l'avons brièvement décrit dans la section 4.1, la régulation d'un débit se fait avec une mesure de la masse ajoutée (balance) et l'ajustement de l'intensité envoyée à la pompe qui fait circuler le liquide de son bac de stockage (positionné sur la balance) au réacteur. Le schéma de cette boucle de régulation est représenté sur la figure 4.12. Il existe une relation dynamique linéaire entre l'intensité envoyée à la pompe et le débit observé (le débit est estimé à partir du signal des masses mesurées). Cette relation est représentée par un modèle du premier ordre retardé

$$\begin{cases} \dot{M}(t) &= d(t) \\ \tau \dot{d}(t) &= -d(t) + K(I(t - \delta) - I_0) \\ y(t) &= \zeta(M(t), \mu) \end{cases} \quad (4.20)$$

où $M(t)$ est la masse réelle, $d(t)$ le débit réel, $I(t)$ l'intensité envoyée à la pompe, I_0 l'offset de la pompe, μ la précision de la balance et $y(t)$ la masse arrondie mesurée. La constante de temps τ , le gain K et le retard δ sont identifiés par une série de tests en boucle ouverte.

La fonction $\zeta(M, \mu)$ permet de modéliser la précision de la balance qui retourne une

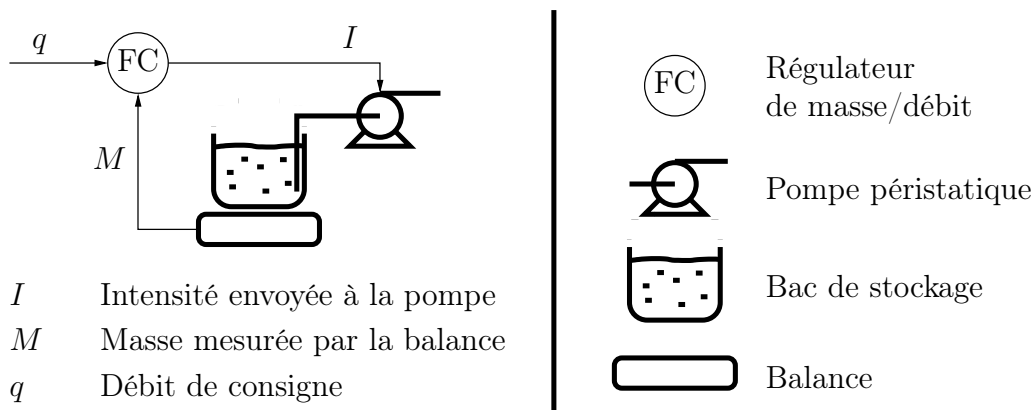


FIG. 4.12 – Schéma de principe de la régulation de masse/débit sur le procédé de neutralisation de pH

valeur précise à $\pm\mu$ g ; elle est définie par

$$\zeta(M, \mu) = \begin{cases} M - \text{mod}(M, \mu) & \text{si } \text{mod}(M, \mu) \leq \mu/2 \\ M + \mu - \text{mod}(M, \mu) & \text{sinon} \end{cases}$$

En pratique les paramètres des pompes sont identifiés hors ligne par une série d'échelons d'intensité ; des échelons d'une longueur suffisante nous permettent d'estimer correctement le débit à partir de la masse mesurée : le gain. La synchronisation des signaux de masse et d'intensité, associée à un nombre suffisant d'échelons et comportement particulièrement linéaire de la pompe nous permettent d'une part d'identifier les paramètres du modèle (4.20) et d'autre part de valider le choix de ce même modèle. Les valeurs des paramètres identifiés sont voisines de celles présentées ci dessous.

$$\begin{aligned} K &= 3.8 \text{ mA}/(\text{g}/\text{min}) \\ \tau &= 0.2 \text{ s} \\ \delta &= 3.5 \text{ s} \\ \mu &= 0.1 \text{ g} \end{aligned}$$

Commande des pompes

La commande des pompes représente un point important de la régulation du pH car elle peut être la source de perturbations non rejetables : à **débits de consigne constants pour les réactifs et l'acide de commande**, nous avons constaté des variations de pH comprises entre 1 et 2 point de pH. Le signal de pH et les intensités des pompes sont représentés sur la figure 4.13. La régulation de base d'origine, pas assez performante, génère des pics d'intensité qui font varier les débits des précurseurs et de l'acide de commande ; ces variations des débits se répercutent directement sur le pH du mélange réactionnel.

Pour l'ajout des précurseurs à des débits constants, l'objectif est de réguler un débit de consigne et la masse de consigne associée pour obtenir un débit réel le plus constant

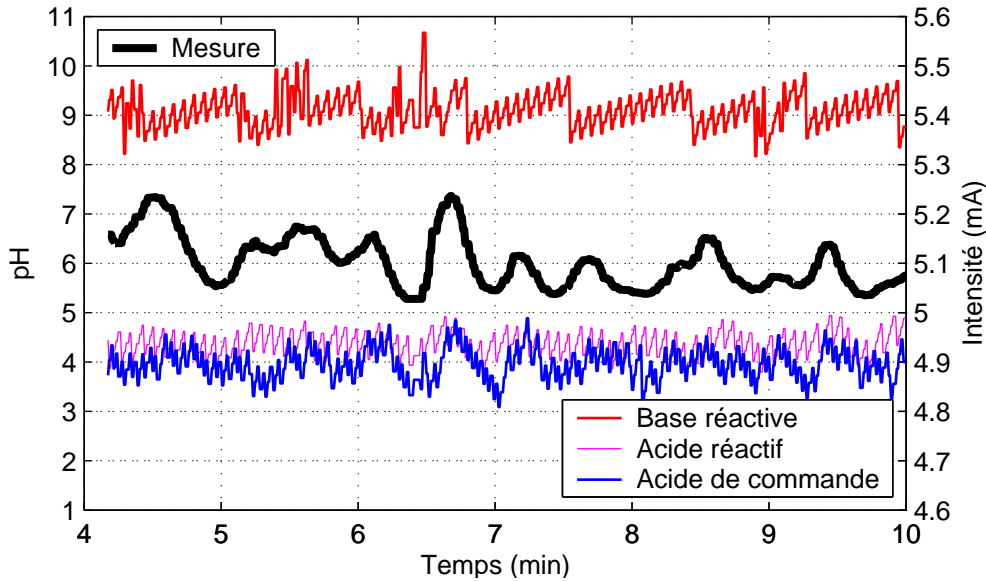


FIG. 4.13 – Expérience BOUCLE OUVERTE (sur le pH) où les débits de consigne des réactifs ET de la commande sont constants. Les variations d'intensité (générées par le régulateur de masse débit d'origine) entraînent des variations très importantes sur le pH.

possible et une masse réelle la plus proche possible de la masse de consigne. Pour cela, nous avons décomposé la commande en trois phases différentes que nous présentons simplement dans ce qui suit mais qui sont détaillées dans la section E.1.

La première phase présentée dans la section E.1.1 est une précompensation qui permet de rattraper le retard δ identifié à l'aide d'un pré positionnement en intensité. Cette boucle ouverte est nécessaire car la structure incrémentale de la commande nécessite une initialisation. La présence d'un retard nous conduit à réaliser un dépassement en intensité afin de boucler le système lorsque plusieurs points de mesure sont disponibles et à un moment où la masse mesurée est proche de la masse de consigne.

Dans une seconde phase, la boucle est fermée avec un contrôleur dont les réglages sont durs de manière à rattraper rapidement les erreurs lorsque le pré-positionnement de la phase 1 ne permet pas d'atteindre la consigne. Dans la section E.1.2, nous justifions le passage à une troisième phase en montrant la présence d'un cycle limite lorsqu'un simple régulateur proportionnel est utilisé. Le régulateur utilisé pendant la troisième et dernière phase a des réglages "mous" ; il permet de limiter les variations de débit. La stabilité du régulateur boucle fermée (phase 2 et 3) est démontrée dans la section E.1.3.

Résultats

Nous présentons sur la figure 4.14 le résultat de la régulation d'un débit à 2g/min avec le régulateur mis au point. La phase 1 (pré compensation boucle ouverte) dure

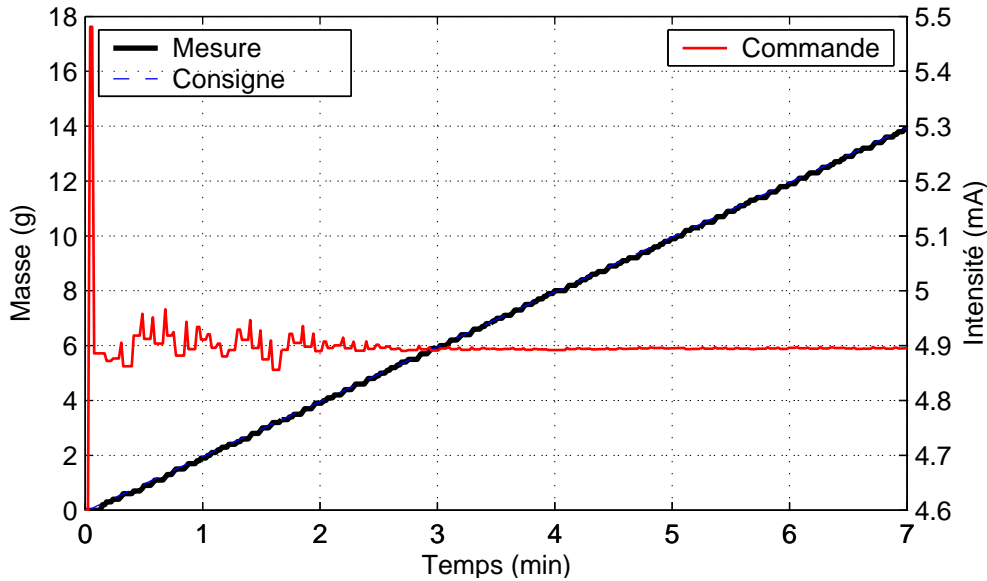


FIG. 4.14 – Régulation à 2g/min ; Régulateur de masse mis au point

10 secondes ; la phase 2 (régulateur mis au point avec des réglages durs) est appliquée sur la période $t \in]10 \text{ s}, 1 \text{ min } 40 \text{ s}[$. La phase trois (régulateur mis au point avec des réglages mous) est appliquée sur le reste de l'expérience ($t > 1 \text{ min } 40 \text{ s}$).

Cette figure peut être comparée avec la figure 4.15 où le régulateur d'origine est utilisé. Nous constatons la présence d'oscillations rapides d'amplitude importante sur l'intensité. De plus, la masse mesurée ne rejoint pas la masse de consigne.

Nous notons donc deux améliorations majeures avec notre régulateur :

- le signal de masse rejoint très rapidement la masse de consigne ;
- les oscillations sur l'intensité (donc le débit étant donnée la faible constante de temps de la pompe) sont quasiment inexistantes dans la troisième phase (réglages mous) ce qui réduit considérablement le risque de perturbation sur le pH pour la régulation du niveau supérieur (régulation du pH).

Les résultats en boucle ouverte sur le pH montrent que le régulateur de masse mis au point est plus performant et limite considérablement les perturbations sur le signal du pH.

4.4.2 Commande non linéaire directe pH/Intensité

L'approche développée ici est similaire à celle présentée dans la section 4.3 mais la cascade de régulateurs est supprimée (cf schéma figure 4.16). Le modèle de pompe est utilisé dans la loi de commande et c'est l'intensité de la pompe qui est directement utilisée pour la régulation du pH (cf figure 4.16).

Le régulateur mis en place est un régulateur PI dont l'entrée est une fonction du pH de consigne et du pH mesuré et dont la sortie est une intensité. Dans un souci de lisibilité,

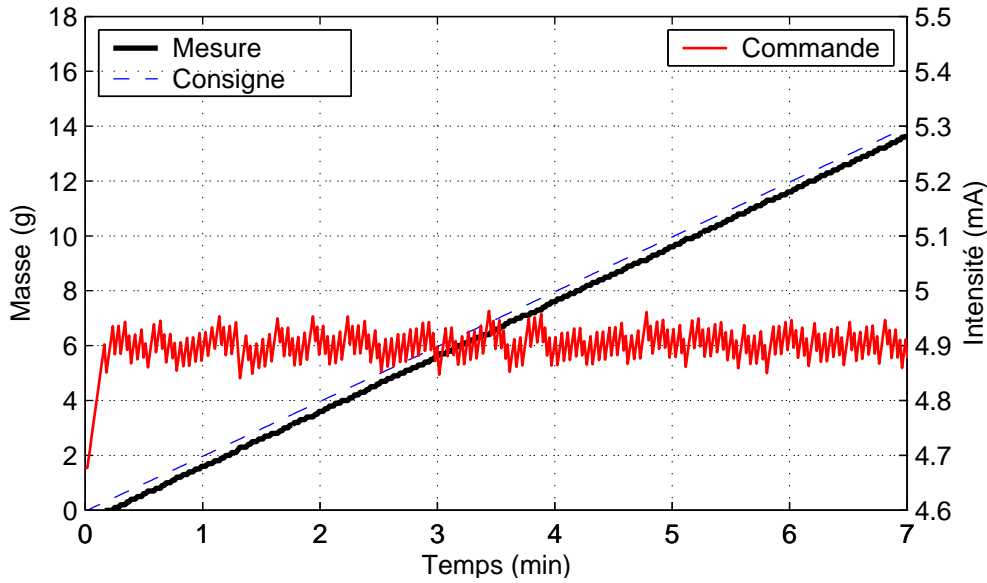


FIG. 4.15 – Régulation à 2g/min ; Régulateur de masse d'origine

nous conservons la notation choisie précédemment où q_u est la commande. Le passage de l'intensité au débit molaire et inversement est simple. En effet, c'est un modèle du premier ordre retardé qui relie le débit molaire à l'intensité

$$\tau \dot{q}_u(t) = -q_u(t) + K(I(t - \delta) - I_0)$$

Comparativement à la dynamique du pH (équation (4.22)), la constante de temps de ce modèle est très faible (0.2s) donc nous la négligeons et considérons dans le modèle que l'intensité est une fonction affine du débit molaire. Le retard δ est lui aussi négligé. En pratique, nous en tenons compte lors du réglage de la commande (4.21) : nous imposons des réglages moins durs dans le but de gagner en robustesse. Le passage du débit molaire q_u à l'intensité s'effectue donc en multipliant le débit molaire par une constante \bar{K} dépendant de la concentration, de la densité et du gain de la pompe d'acide sulfurique $q_u = \bar{K}(I_u - I_0)$.

L'idée de cette approche est de réguler le nombre de moles d'acide sulfurique nécessaire à chaque instant. La suppression de la couche bas niveau nous conduit à ne plus utiliser la valeur mesurée de N_u dans la commande mais la valeur donnée par l'équation d'équilibre (4.13) que nous notons aussi

$$h(\text{pH}, t) - \alpha N_u = 0$$

où

$$h(\text{pH}, t) = h_0(\text{pH})V + h_A(\text{pH})N_{\bar{A}} + h_B(\text{pH})N_{\bar{B}}$$

Les débits des précurseurs (acide et base) sont des consignes constantes connues : $q_{\bar{A}}^c$ et $q_{\bar{B}}^c$; ils sont régulés et nous faisons l'hypothèse que le débit mesuré est égal au débit de consigne. Cette hypothèse, fautive pendant la courte période transitoire est

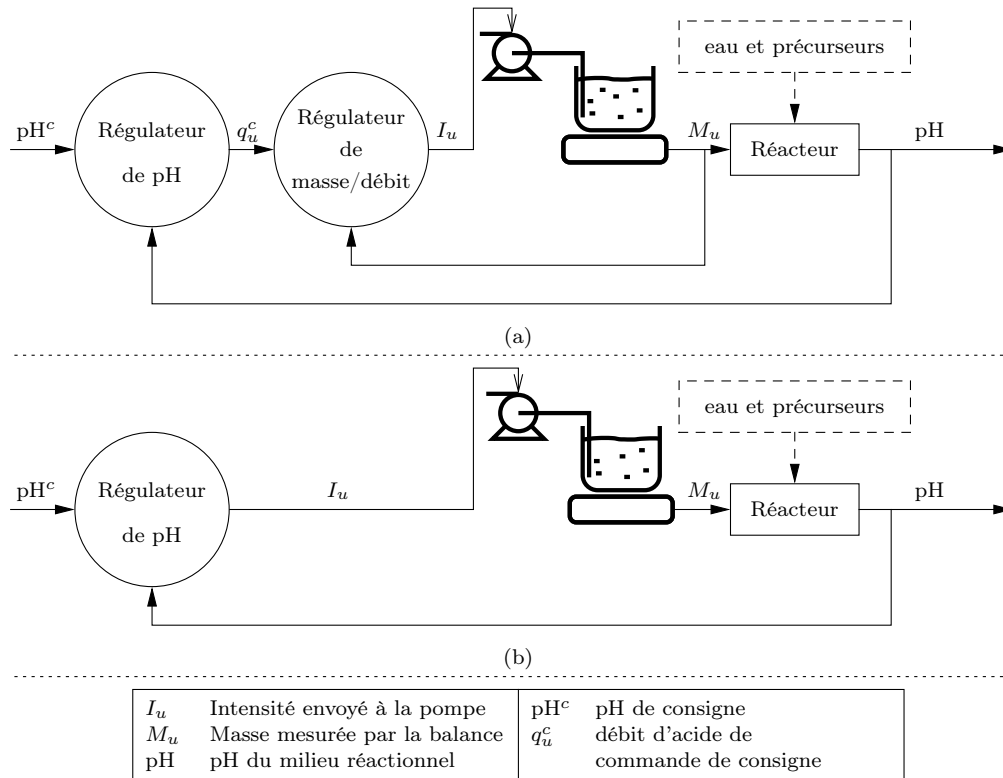


FIG. 4.16 – Schémas de régulation du pH. (a) : Cascade des régulateurs de pH et de masse/débit d'origine sur le procédé. (b) modification apportée pour une régulation directe du pH par l'intensité envoyée à la pompe d'acide de commande

très réaliste aux vues des résultats obtenus avec le nouveau régulateur de masse/débit. Une intégration de ces débits de consigne nous permet de remplacer les mesures $N_{\bar{A}}$ et $N_{\bar{B}}$ par leurs valeurs de consigne. Cela nous permet de ne pas subir les perturbations liées à la précision des balances et de régler le contrôleur comme pour une régulation de masse (réglages constants). La précision de la régulation de masse permet de faire l'hypothèse que les masses des précurseurs sont parfaitement régulées.

La structure de la commande reste inchangée ; elle est définie pour que la dynamique boucle fermée de l'erreur de moles d'acide de commande s'écrive

$$\dot{N}_u(t) - \dot{N}_u^c = -\frac{1}{\tau} (N_u - N_u^c)$$

En débit molaire, la commande s'écrit

$$q_u(t) = q_u^c - \frac{1}{\tau} (N_u - N_u^c)$$

où

$$N_u^c = \frac{h(\text{pH}^c, t)}{\alpha}$$

et

$$q_u^c = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial h}{\partial t}(\text{pH}^c, t) = \frac{1}{\alpha} \left(h_0(\text{pH}^c)q + h_A(\text{pH}^c)q_{\bar{A}} + h_B(\text{pH}^c)q_{\bar{B}} \right)$$

En pratique, la présence de retard et d'erreurs de modélisation nous conduit à ajouter un terme intégral et à n'appliquer qu'une fraction β de la pré-compensation q_u^c . La commande implémentée sur le procédé s'écrit

$$q_u(t) = \beta q_u^c - \frac{1}{\tau \alpha} \left((h(\text{pH}, t) - h(\text{pH}^c, t)) + \frac{1}{T_i} \int_0^t (h(\text{pH}, t) - h(\text{pH}^c, t)) ds \right) \quad (4.21)$$

où nous choisissons $\beta = 0.75$. Le choix de cette valeur est empirique : il est déterminé pour obtenir de bonnes performances sur l'ensemble du domaine d'utilisation de la commande. Les débits d'acide réactif et de base réactive sont connus et nous supposons qu'ils sont parfaitement régulés. La seule mesure utilisée dans la commande (4.21) est celle du pH.

Stabilité boucle fermée. Reprenons l'idée développée par [MHS72] et dérivons l'équation d'équilibre (4.13) par rapport au temps pour obtenir un modèle purement différentiel dont l'état est le pH. Nous obtenons

$$\underbrace{(h'_0(\text{pH})V + h'_A(\text{pH})N_{\bar{A}} + h'_B(\text{pH})N_{\bar{B}})}_{\phi(\text{pH}, t)} \text{pH} + \underbrace{(h_0(\text{pH})q + h_A(\text{pH})q_{\bar{A}} + h_B(\text{pH})q_{\bar{B}})}_{\psi(\text{pH})} - \alpha q_u = 0$$

d'où la dynamique du pH

$$\text{pH} = -\frac{\psi(\text{pH})}{\phi(\text{pH}, t)} + \alpha \frac{q_u}{\phi(\text{pH}, t)} \quad (4.22)$$

La dynamique de l'erreur de pH boucle fermée avec la commande implémentée (4.21) ($\beta = 1$ et pas de terme intégral) s'écrit

$$\overline{\text{pH} - \text{pH}^c} = -\frac{1}{\phi(\text{pH}, t)} \left((\psi(\text{pH}) - \psi(\text{pH}^c)) + \frac{1}{\tau} (h(\text{pH}, t) - h(\text{pH}^c, t)) \right)$$

Prenons la fonction

$$V(t) = \frac{1}{2} (\text{pH} - \text{pH}^c)^2$$

La dérivée de cette fonction par rapport au temps s'écrit

$$V'(t) = -\frac{1}{\phi(\text{pH}, t)} \left((\psi(\text{pH}) - \psi(\text{pH}^c)) + \frac{1}{\tau} (h(\text{pH}, t) - h(\text{pH}^c, t)) \right) (\text{pH} - \text{pH}^c)$$

Nous allons utiliser le théorème de la valeur intermédiaire sur la fonction

$$(t, \text{pH}) \rightarrow \left(\psi(\text{pH}) - \psi(\text{pH}^c) \right) + \frac{1}{\tau} (h(\text{pH}, t) - h(\text{pH}^c, t))$$

Il existe $\text{pH}^0(t)$ tel que $\text{pH}^0(t) \in [\text{pH}, \text{pH}^c]$ ou $[\text{pH}^c, \text{pH}]$ et

$$\dot{\text{pH}} - \text{pH}^c = -\frac{1}{\phi(\text{pH}, t)} \left(\frac{d\psi}{d\text{pH}}(\text{pH}^0(t)) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial h}{\partial t}(\text{pH}^0(t), t) \right) (\text{pH} - \text{pH}^c)$$

Étant donnée la définition de $h(\text{pH}, t)$, il existe $\gamma < 0$ tel que

$$\frac{\partial h}{\partial \text{pH}}(\text{pH}^0(t), t) < \gamma < 0 \quad \forall t$$

pour $\text{pH}^0 \in [2, 13]$. D'autre part

$$\frac{d\psi}{d\text{pH}} \leq 0$$

et enfin il est possible de borner uniformément en temps

$$\alpha \leq \phi \leq \beta < 0$$

Il vient alors

$$\dot{V} \leq -\frac{\gamma}{\alpha} (\text{pH} - \text{pH}^c)^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} V$$

donc V converge exponentiellement vers 0 et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{pH} = \text{pH}^c$$

4.4.3 Précipitation, erreurs de modélisation et déstabilisation

En pratique, l'implémentation des commandes (4.18) et (4.21) conduit à un résultat similaire : pendant une première partie de l'expérience, le pH converge vers le pH de consigne puis des oscillations d'amplitude croissante apparaissent ; le système bouclé devient instable.

L'écriture des modèles en boucle fermée ne permet pas de trouver une explication à ce phénomène déstabilisant. Dans les deux cas, le gain de la commande augmente linéairement par rapport au temps mais, cette dépendance en temps de la commande est adaptée aux volumes de réactifs qui augmentent aussi linéairement par rapport au temps.

Les phénomènes de précipitation (non-modélisés jusqu'à maintenant) sont à l'origine de cette déstabilisation. La figure 4.17 montre les résultats obtenus en pratique lorsque la précipitation n'est pas prise en compte dans la commande (4.21) ; sur cette figure, il n'y a pas de pré-positionnement dans la commande ($\beta = 0$). Nous comparons cette figure avec un résultat issu d'une simulation (figure 4.18) dans laquelle le modèle intègre la précipitation mais pas la commande utilisée (4.21) sans pré positionnement ($\beta = 0$). Les deux figures révèlent des comportements similaires : après une période transitoire, le pH se déstabilise progressivement en oscillant autour du pH de consigne.

Les réactions acido-basiques mises en jeu forment des particules solides sous forme d'un précipité. Celui-ci est homogène dans le réacteur et il se forme à partir du moment

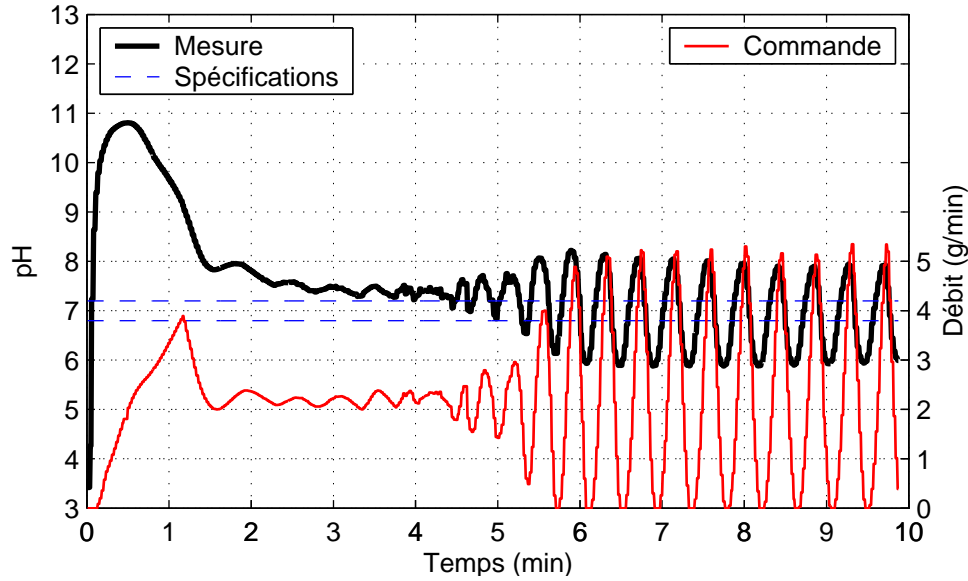


FIG. 4.17 – Expérience où la commande utilisée est (4.21) sans pré positionnement et sans prise en compte de la précipitation.

où les réactifs sont suffisamment concentrés dans le volume réactionnel (concentration critique) et en présence d'un précurseur de charge nulle. A partir de ce moment, la concentration dans le réacteur devient supérieure à cette concentration critique donc tous les réactifs ajoutés précipitent ; le nombre de moles en solution aqueuse (donc à utiliser dans l'équation d'équilibre pour le calcul du pH) est celui correspondant à la concentration de solubilité.

Les phénomènes de précipitation sont mal connus, il est donc difficile d'établir un modèle précis en écrivant une équation de solubilité. Une manière simple de prendre en compte cet effet de précipitation dans le modèle, puis dans la commande est de considérer qu'à partir d'un instant \bar{t} correspondant au début de la précipitation, une partie des réactifs n'est plus en solution aqueuse. Théoriquement, lorsque la concentration d'un précurseur est supérieure à une concentration critique (dite de solubilité) et en présence d'un précurseur de charge nulle, il y a précipitation donc solidification d'une partie du précurseur ajouté.

Pour modéliser ce phénomène, nous écrivons, à partir de l'équation d'équilibre (4.13) deux nouvelles équations

$$h_0(\text{pH})\beta_V V + h_A(\text{pH})\beta_{\bar{A}} N_{\bar{A}} + h_B(\text{pH})\beta_{\bar{B}} N_{\bar{B}} - \alpha\beta_u N_u = 0 \quad (4.23)$$

où les β_i sont les fractions des réactifs, eau et commande consommés lors de la solidification. Cette équation, neutre comme l'équation (4.13), permet d'écrire une nouvelle équation d'équilibre dans laquelle seules les fractions des produits en solution aqueuse sont considérés

$$h_0(\text{pH})(1 - \beta_V)V + h_A(\text{pH})(1 - \beta_{\bar{A}})N_{\bar{A}} + h_B(\text{pH})(1 - \beta_{\bar{B}})N_{\bar{B}} - \alpha(1 - \beta_u)N_u = 0 \quad (4.24)$$

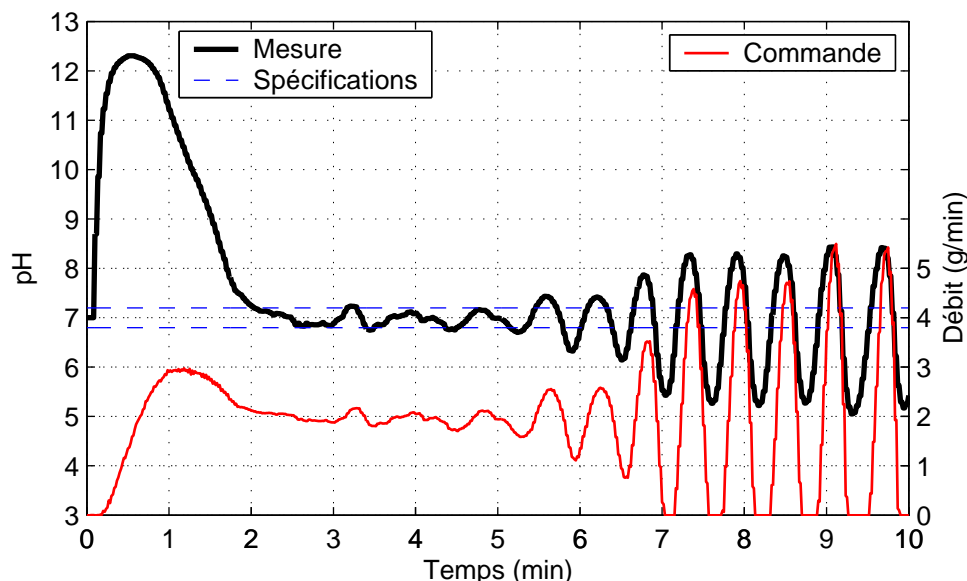


FIG. 4.18 – Simulation d’une expérience où la précipitation est prise en compte dans le simulateur mais pas dans la commande ; le pH de consigne est 7. La commande utilisée est (4.21) sans pré positionnement ($\beta = 0$).

Nous faisons plusieurs hypothèses :

1. Nous supposons que la précipitation de l’acide réactif et de la base réactive se déclenche à \bar{t} connu donc

$$\begin{cases} \beta_{\bar{A}} = \beta_{\bar{B}} = 1 - \bar{t}/t & \text{si } t > \bar{t} \\ \beta_{\bar{A}} = \beta_{\bar{B}} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La valeur donnée à \bar{t} est empirique ; elle a été déterminée à la suite de nombreuses expériences réalisées sur le procédé.

2. Nous supposons que le volume du précipité (solide) est négligeable comparativement au volume total donc $\beta_V = 0$; en pratique, le volume de précipité représente 0.5% à 5% du volume total.
3. Nous supposons que lorsque la précipitation débute, il n’y a pas de consommation de réactif déjà présent dans le mélange réactionnel ; c’est à dire que seules les quantités supplémentaires ajoutées à partir du dépassement de la concentration critique précipitent.
4. Pour précipiter de manière neutre, l’équation (4.23) doit être respectée. Cela nous permet de déterminer β_u :

$$\beta_u = \frac{1}{\alpha N_u} (h_0(\text{pH}^c)\beta_V V + h_A(\text{pH}^c)\beta_{\bar{A}} N_{\bar{A}} + h_B(\text{pH}^c)\beta_{\bar{B}} N_{\bar{B}})$$

Comme pour $\beta_{\bar{A}}$ et $\beta_{\bar{B}}$, nous supposons que la fraction β_u n’est pas dépendante du pH mais du pH de consigne. Cette hypothèse repose sur le fait que pour $t > \bar{t}$, la période transitoire est terminée (ou quasiment terminée) et donc le pH est proche du pH de consigne pH^c .

De $t = 0$ à $t = \bar{t}$, il n'y a pas de précipitation, la stabilité du système décrit par (4.22) et bouclé avec (4.21) est démontrée dans la section 4.4.2.

Regardons maintenant la dynamique du système bouclé sous les hypothèses précédentes lorsque $t > \bar{t}$. En remarquant que $(1 - \beta_i)N_i = N_i^{aq}$ pour $i \in \{\bar{A}, \bar{B}\}$, où N_i^{aq} correspond au nombre de moles présent à l'instant $t = \bar{t}$ (donc constant), nous choisissons les notations suivantes

$$\begin{aligned} h_p(\text{pH}, t) &= h_0(\text{pH})V + h_A(\text{pH})(1 - \beta_{\bar{A}})N_{\bar{A}} + h_B(\text{pH})(1 - \beta_{\bar{B}})N_{\bar{B}} \\ \phi_p(\text{pH}, t) &= h'_0(\text{pH})V + h'_A(\text{pH})N_{\bar{A}}^{aq} + h'_B(\text{pH})N_{\bar{B}}^{aq} \\ \psi_p(\text{pH}) &= h_0(\text{pH})q \end{aligned}$$

le modèle prenant en compte la précipitation comme décrite ci-dessus s'écrit

$$\dot{\text{pH}} = -\frac{\psi_p(\text{pH})}{\phi_p(\text{pH}, \bar{t})} + \alpha \frac{q_u}{\phi_p(\text{pH}, \bar{t})} \quad (4.25)$$

La commande utilisée est la version adaptée pour la précipitation de la commande (4.21) et elle s'écrit

$$q_u(t) = \beta q_u^c - \frac{1}{\tau \alpha} \left((h_p(\text{pH}, t) - h_p(\text{pH}^c, t)) + \frac{1}{T_i} \int_0^t (h_p(\text{pH}, t) - h_p(\text{pH}^c, t)) ds \right) \quad (4.26)$$

où

$$q_u^c = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial h_p}{\partial t}(\text{pH}^c, t)$$

Une approche identique à celle développée dans la section 4.4.2 permet de montrer que le système (4.25) bouclé avec la commande (4.26) est stable.

4.4.4 Résultats pratiques

Après avoir réalisé l'ensemble de ces modifications, nous présentons, sur la figure 4.19 une régulation dans la zone de neutralisation ($\text{pH} = 7$) avec la commande non linéaire développée. Cette approche donne de bons résultats en zone de neutralisation : le pH de consigne est atteint en 2 minutes et 30 secondes et l'amplitude des oscillations ne dépasse pas les spécifications de l'utilisateur (± 0.2 point de pH).

Comme le montrent les figures 4.20 à 4.23, la commande (avec des réglages inchangés) donne de bons résultats sur toute la zone de pH ($[4; 10]$) dans laquelle l'utilisateur souhaite travailler. La période transitoire est inférieure à 3 minutes dans tous les cas et lorsque le pH du milieu réactionnel est stabilisé il reste à ± 0.2 point du pH de consigne.

Les expériences réalisées dans des conditions opératoires différentes (temps de synthèse plus long, concentration totale différente, rapport silice/alumine différent) donnent aussi de bons résultats. Sur l'ensemble des expériences réalisées (hors développement), la répétabilité obtenue avec la commande non linéaire est très satisfaisante.

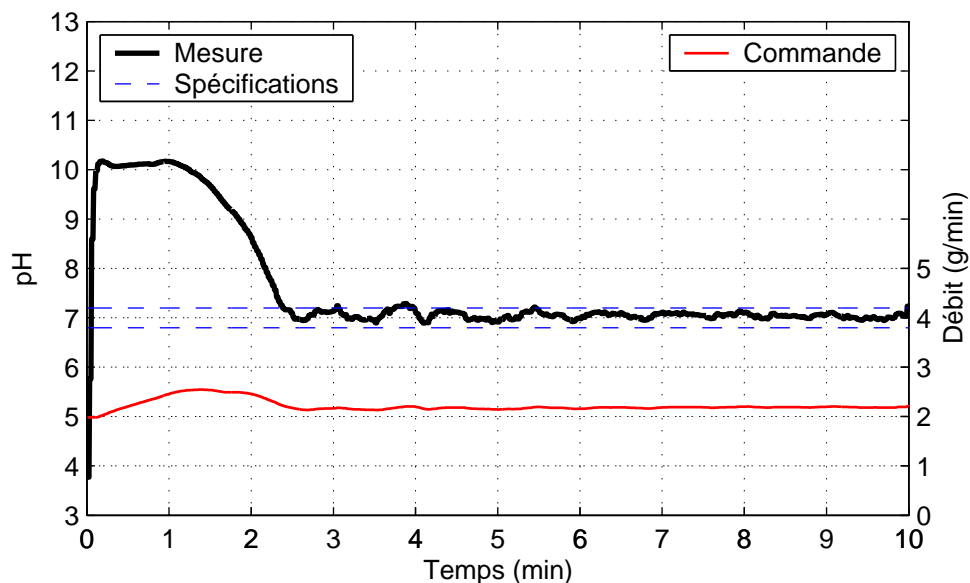


FIG. 4.19 – Régulation à $\text{pH} = 7$ avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation

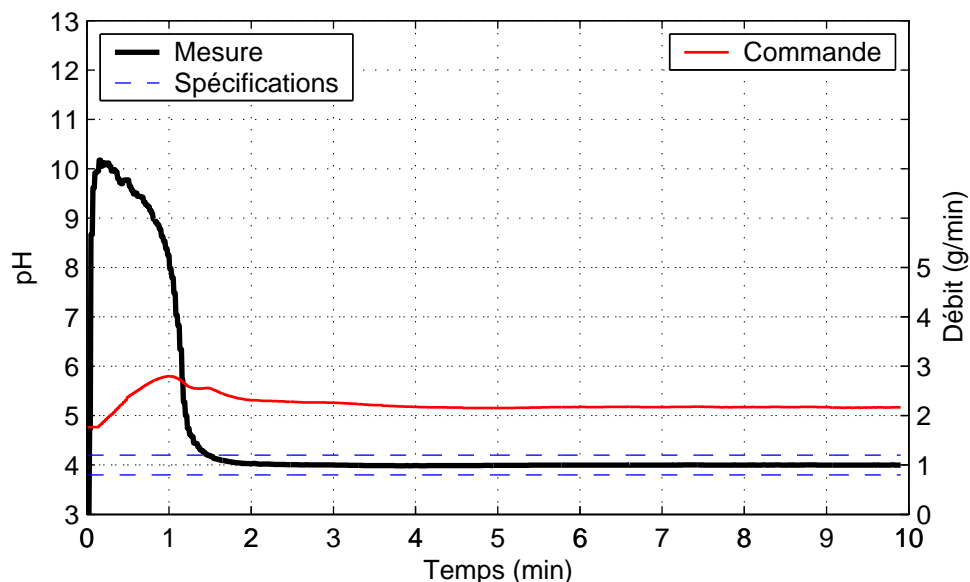


FIG. 4.20 – Régulation à $\text{pH} = 4$ avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation

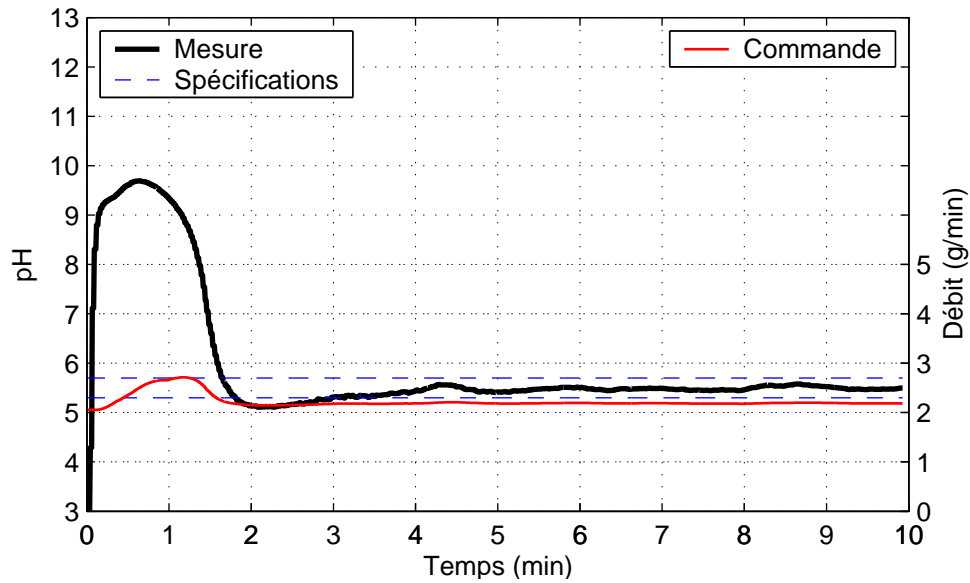


FIG. 4.21 – Régulation à $\text{pH} = 5.5$ avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation

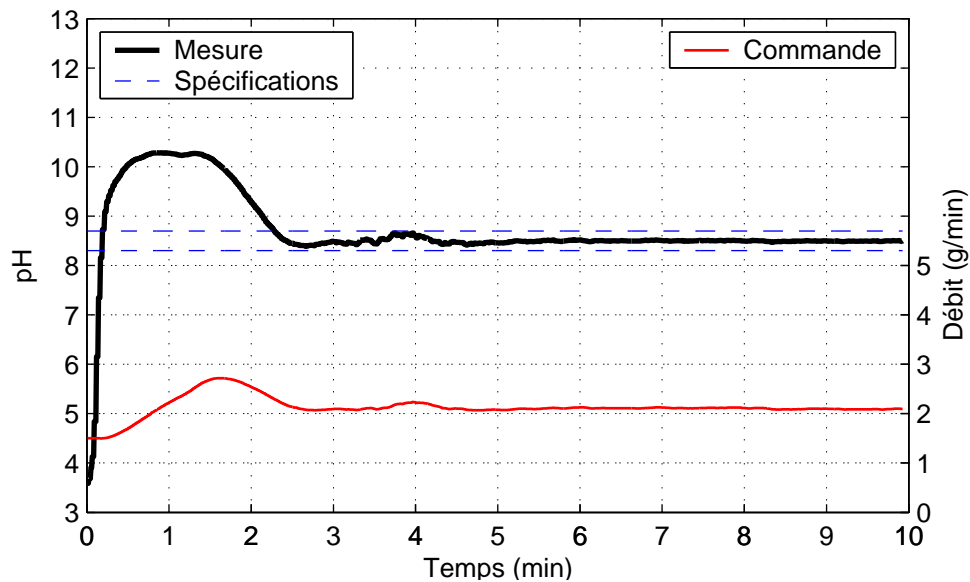


FIG. 4.22 – Régulation à $\text{pH} = 8.5$ avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation

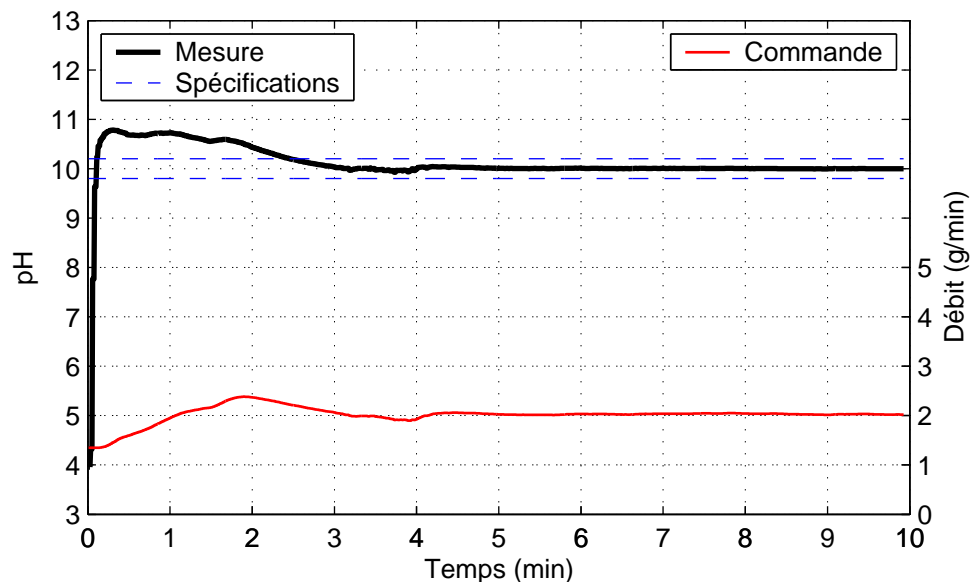


FIG. 4.23 – Régulation à $\text{pH} = 10$ avec un régulateur non-linéaire massique corrigé pour la prise en compte du phénomène de précipitation

4.5 Approche dérivée

Dans cette section nous présentons une seconde approche non linéaire basée directement sur l'équation de la dynamique du pH (4.22). L'idée est de choisir la commande qui permet d'avoir une dynamique boucle fermée qui s'écrit

$$\overline{\text{pH} - \text{pH}^c} = -\frac{1}{\tau}(\text{pH} - \text{pH}^c)$$

Pour cela, il suffit de prendre

$$q_u = \frac{1}{\alpha} \left(\psi(\text{pH}) - \frac{1}{\tau} \phi(\text{pH}, t)(\text{pH} - \text{pH}^c) \right)$$

En pratique, les erreurs de modèle nous conduisent à remplacer le premier terme $\psi(\text{pH})/\alpha$ par un terme de feed-forward $\beta\psi(\text{pH}^c)/\alpha$ et à ajouter un terme intégral pour accélérer la convergence.

La commande appliquée sur le procédé s'écrit

$$q_u = \frac{1}{\alpha} \left(\beta\psi(\text{pH}^c) - \frac{1}{\tau} \phi(\text{pH}, t)(\text{pH} - \text{pH}^c) + \frac{1}{\tau T_i} \phi(\text{pH}, t) \int_0^t (\text{pH} - \text{pH}^c) ds \right) \quad (4.27)$$

Stabilité boucle fermée.

La dynamique de l'erreur de pH boucle fermée avec la commande implémentée (4.27) ($\beta = 1$ et pas de terme intégral) s'écrit

$$\overline{\text{pH} - \text{pH}^c} = -\frac{1}{\phi(\text{pH}, t)} \left(\psi(\text{pH}) - \psi(\text{pH}^c) \right) - \frac{1}{\tau} (\text{pH} - \text{pH}^c)$$

Prenons la fonction

$$V(t) = \frac{1}{2} (\text{pH} - \text{pH}^c)^2$$

La dérivée de cette fonction par rapport au temps s'écrit

$$V'(t) = -\frac{1}{\phi(\text{pH}, t)} \left(\psi(\text{pH}) - \psi(\text{pH}^c) \right) (\text{pH} - \text{pH}^c) - \frac{1}{\tau} (\text{pH} - \text{pH}^c)^2$$

La fonction $\phi(\text{pH}, t)$ est strictement négative, $\psi(\text{pH})$ est une fonction positive décroissante. On a $V'(t) \leq 0$ donc $V(t)$ est une fonction positive décroissante le long des trajectoires; elle converge vers le plus grand invariant contenu dans l'ensemble $\{\text{pH} \mid V'(t) = 0\}$ soit $\text{pH} = \text{pH}^c$.

Conclusion

La commande testée sur le procédé donne des résultats proches de ceux obtenus avec la première approche non linéaire. Cependant, cette méthode nécessite l'utilisation de la dérivée des fonctions identifiées point par point $h_A(pH)$ et $h_B(pH)$. Ces dérivées apparaissent dans la fonction $\phi(pH, t)$. L'utilisation de cette dérivée est source de perturbations car si les erreurs faites sur les fonctions identifiées sont bornées, celles réalisées sur les dérivées des fonctions ne le sont pas. Pour ne pas perdre de robustesse et pour éviter d'introduire inutilement des perturbations, nous préférons travailler directement avec les fonctions identifiées donc avec la première approche non linéaire développée.

4.6 Conclusion

La régulation du pH est connue pour être un problème difficile. Dans le cas traité, la difficulté de ce problème est augmentée par les caractéristiques technologiques du procédé sur lequel nous travaillons :

- temps d'acquisition variables ;
- problèmes de synchronisation des données ;
- perturbations électriques ;
- régulation des masses et débits approximatives ;
- précision des balances ;
- temps de réponse variable de la sonde.

Les caractéristiques chimiques du procédé (précipitation, exothermicité) sont aussi sources de difficultés pour la régulation du pH.

Nous l'avons vu dans la section 4.4.1, il est nécessaire que l'ajout en co-flux des réactifs se réalise rapidement à un débit très faiblement variable autour du débit de consigne ; cette condition permet de ne pas générer de perturbations non rejetables par le régulateur de pH. Dans ce même cadre, il est important de s'assurer que les mesures sont synchronisées correctement.

Une fois que les sources de perturbations ont été minimisées, il est important d'identifier les perturbations qui sont mesurables (la précipitation par exemple) et celles qui ne le sont pas (le temps de réponse variable de la sonde par exemple).

Dans nos approches directes (pH/intensité linéaire et non linéaires), la précipitation est considérée comme une perturbation mesurable et elle est prise en compte dans le modèle de commande et dans la commande appliquée par un artifice validé numériquement. La variabilité du temps de réponse de la sonde de pH (liée aux concentrations, au pH et à son usure) est pris en compte en dérégulant les paramètres des régulateurs afin de rendre le régulateur plus robuste.

La cascade de régulateurs pour la commande du pH ne permet pas de réagir assez rapidement sans ajouter de perturbation : nous avons donc supprimé cette cascade et privilégié une commande directe du pH via l'intensité de la pompe de l'acide com-

mande.

Le contrôleur utilisé permet de réguler le pH à tout pH de consigne entre 4 et 10. Il permet aussi de changer les conditions opératoires comme le temps de batch et les débits des co-flux sans modifier les paramètres de régulation. Dans certains cas, un ajout de base est réalisé pour la régulation du pH ; nous n'avons pas détaillé ce point dans ce document.

Pendant la première partie de nos travaux, nous avons choisi de ne pas modéliser les phénomènes de précipitation. Nous avons ensuite identifié que cette précipitation avait un impact important sur le pH ; cet impact peut être considéré très simplement dans la commande. Des études complémentaires sur ces phénomènes délicats de précipitations pourraient permettre d'affiner la commande présentée (mais dépassent le cadre de ces travaux). Nous souhaitons notamment automatiser le choix du temps \bar{t} à partir de données disponibles en ligne.

BIBLIOGRAPHIE

- [ÅH95] K. J. Åström and T. Hägglund. *PID Controllers : Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America, (1995).
- [BCP04] J. Barraud, Y. Creff, and N. Petit. PI controllers performance for a process model with varying delay. In *Proceedings of UKACC International Control Conference*, (2004).
- [BCP05] J. Barraud, Y. Creff, and N. Petit. Performances d'un prédicteur adaptatif pour un modèle de procédé avec retard variable. In *Congrès de la Société Française de Génie des Procédés*, (2005).
- [BE76] C. F. Baes and Mesmer R. E. *The hydrolysis of cations*. Krieger publishing company, (1976).
- [Can04] J. R. Cannon. *The one-dimensional heat equation*. Cambridge University Press, (2004).
- [CC53] G. H. Cohen and G. A. Coon. Theoretical consideration of retarded control. *Trans. A.S.M.E.*, Vol. 75(No. 1) :pp. 827–834, (1953).
- [Cor01] J.-P. Corriou. *Commande de Procédés Chimiques — Réacteur et Colonnes de Distillation*. Hermes, (2001).
- [FLMR95] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *Int. J. Control*, Vol. 61(No. 6) :pp. 1327–1361, (1995).
- [GV83] T. K. Gustafsson and Waller K. V. Dynamic modeling and reaction invariant control of pH. *Chemical Engineering Science*, Vol. 38(No. 3) :pp. 389–398, (1983).
- [HÅH91] C. C. Hang, K. J. Åström, and W. K. Ho. Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formulas. *IEE Proceeding-D*, Vol. 138(No. 2) :pp. 111–118, (1991).
- [Kha01] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, third edition, (2001).
- [KWC05] A. D. Kalafatis, L. Wang, and W. R. Cluett. Linearizing feedforward-feedback control of pH processes based on the Wiener model. *Journal of Process Control*, Vol. 15 :pp. 103–112, (2005).
- [LY93] J.-Y. Lin and C.-C. Yu. Adaptive nonlinear control of a pH neutralization process. *Chemical Engineering Science*, Vol 48(No. 18) :pp 3159–3171, (1993).
- [MHS72] T. J. McAvoy, H. Hsu, and Lowenthal S. Dynamics of pH in controlled stirred tank reactor. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Develop.*, Vol. 11(No. 1) :pp. 68–70, (1972).

- [MN03] W. Michiels and S.-I. Niculescu. On the delay sensitivity of Smith predictors. *International Journal of Systems Science*, Vol. 34(No. 8-9) :pp. 543–552, (2003).
- [MY01] J.M. Maciejowski and C.-C. Yu. *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall, (2001).
- [PCR98] N. Petit, Y. Creff, and P. Rouchon. Motion planning for two classes of nonlinear systems with delays depending on the control. In *Proceeding of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, (1998).
- [Pet00] N. Petit. *Systèmes à Retards. Platitude en Génie des Procédés et Contrôle de certaines Équations des Ondes*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, (2000).
- [Ric03] J. P. Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, Vol. 39 :pp. 1667–1694, (2003).
- [RS00] W. J. Rugh and J. S. Shamma. Research on gain scheduling. *Automatica*, Vol. 36 :pp. 1401–1425, (2000).
- [SDP05] G. J. Silva, A. Datta, and Bhattacharyya S. P. *PID Controllers for time-delay systems*. Birkhäuser, (2005).
- [Smi58] O.J.M. Smith. Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, Vol. 53(No. 5) :pp. 217–219, (1958).
- [TB04] P. Tona and J.-M Bader. Efficient system identification for model predictive control with the ISIAC software. In *1st International Conference on Informatics in Control (ICINCO)*, Setubal, Portugal, August (2004).
- [TF03] S. Tavakoli and P. Fleming. Optimal tuning of PI controllers for first order plus dead time/long dead time models using dimensional analysis. *Proc. of the 7th European Control Conf.*, (2003).
- [TT03] S. Tavakoli and M. Tavakoli. Optimal tuning of PID controllers for first order plus time delay models using dimensional analysis. In *The Fourth International Conference on Control and Automation (ICCA 2003)*, (2003).
- [WK91] R. A. Wright and C. Kravaris. Nonlinear control of pH processes using the strong acid equivalent. *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 30(No. 7) :pp. 1561–1572, (1991).
- [ZN42] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Trans. A.S.M.E.*, Vol. 64 :pp. 759–765, (1942). Available from www.driedger.ca.
- [ZN43] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Process lags in automatic-control circuits. *Transp. A.S.M.E.*, Vol. 65 :pp. 433–444, (1943).

ANNEXES

ANNEXE A

STABILITÉ DES SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE AVEC RETARD

Nous avons montré, dans la section 2.1 que le gain proportionnel K_c (2.3) proposé par Tavakoli et Fleming satisfait toujours les hypothèses du théorème 2.1 de stabilisation par un régulateur PID (2.2) pour un système du premier ordre à retard (2.1). Nous montrons dans ce qui suit que le temps intégral T_i défini dans l'équation (2.3) et proposé par ces mêmes auteurs respecte aussi les conditions du théorème 2.1. Dans une seconde section, nous comparons les réglages de Tavakoli et Fleming et de Ziegler et Nichols et nous retrouvons, par le biais des intervalles stabilisants définis par le théorème 2.1, un phénomène observé en pratique : les réglages de Ziegler et Nichols ne sont pas adaptés lorsque le rapport retard sur constante de temps (δ/τ) est supérieur à 1.

A.1 Stabilité des réglages de Tavakoli Fleming (temps intégral)

Deux cas se distinguent en fonction de μ défini par l'équation (2.4).

Cas 1 : $\mu \geq \frac{\zeta}{1-\beta}$. Dans ce cas, nous avons $0 < K_c \leq \frac{1}{K}$. Le régulateur utilisé est proportionnel et intégral donc le terme dérivé est nul ; nous avons trivialement

$$-\frac{\tau}{K} < 0 < \frac{\tau}{K}$$

Montrons maintenant que nous avons

$$0 > m(z_1) \frac{K_c}{T_i} + b(z_1) \tag{A.1}$$

où les fonctions $m(z)$ et $b(z)$, et la valeur z_1 sont définies dans le théorème 2.1. Nous avons

$$0 > \frac{\delta^2 K_c}{z_1^2 T_i} - \frac{\delta}{K z_1} \left(\sin(z_1) + \frac{\tau}{\delta} z_1 \cos(z_1) \right)$$

En utilisant (2.4) et (2.3), il vient

$$0 > \frac{\zeta + \beta\mu}{\gamma + \frac{\xi}{\mu}} - z_1(\mu \sin(z_1) + z_1 \cos(z_1)) \quad (\text{A.2})$$

où $z_1 \in]0; \pi[$ est la solution de

$$KK_c + \cos(z) - \frac{\tau}{\delta} z \sin(z) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Nous avons donc

$$\zeta + \mu\beta + \mu \cos(z_1) - z_1 \sin(z_1) = 0$$

d'où

$$\mu = f(z_1) = \frac{z_1 \sin(z_1) - \zeta}{\beta + \cos(z_1)} \quad (\text{A.4})$$

La fonction $f(z)$ définie par (A.4) présente une discontinuité pour $z = \arccos(-\beta) \in]0, \pi[$. Il suffit de remarquer que cette valeur n'est jamais solution de l'équation (A.3) pour conclure que ce n'est pas un problème. Comme le montre la figure A.1 (a), la fonction $f(z)$ est croissante sur les intervalles $]0, \arccos(-\beta)[$ et $] \arccos(-\beta), \pi[$. De plus, nous avons $f(\pi) = \frac{\zeta}{1 - \beta}$ qui borne inférieurement la valeur de μ (hypothèse réalisée dans le cas 1), donc pour $\mu \geq \frac{\zeta}{1 - \beta}$, la solution de l'équation (A.3) se trouve dans l'intervalle $]0, \arccos(-\beta)[$. Remplaçons maintenant μ par sa valeur (A.4) dans l'équation (A.2) pour obtenir une nouvelle inégalité à vérifier sur $z_1 \in]0, \arccos(-\beta)[$

$$0 > \frac{\zeta + \beta f(z_1)}{\gamma + \frac{\xi}{f(z_1)}} - z_1(f(z_1) \sin(z_1) + z_1 \cos(z_1)) \quad (\text{A.5})$$

Nous présentons, sur la figure A.1 (b) la fonction à droite de l'inégalité (A.5) multipliée par $\beta + \cos(z_1) > 0$ sur $z_1 \in]0, \arccos(-\beta)[$. La fonction est strictement positive sur cet intervalle donc l'inégalité (A.1) est vérifiée et par conséquent que les réglages de Tavakoli Fleming pour un régulateur PI sur un système du premier ordre retardé sont stabilisant lorsque

$$\mu \geq \frac{\zeta}{1 - \beta}.$$

Cas 2 : $0 < \mu < \frac{\zeta}{1 - \beta}$. Dans ce cas, nous avons $\frac{1}{K} < K_c < \frac{1}{K} \left(\frac{\tau}{\delta} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \right)$.

Le régulateur utilisé est proportionnel et intégral donc le terme dérivé est nul.

La première inégalité à vérifier est

$$m(z_1) \frac{K_c}{T_i} + b(z_1) < 0 \quad (\text{A.6})$$

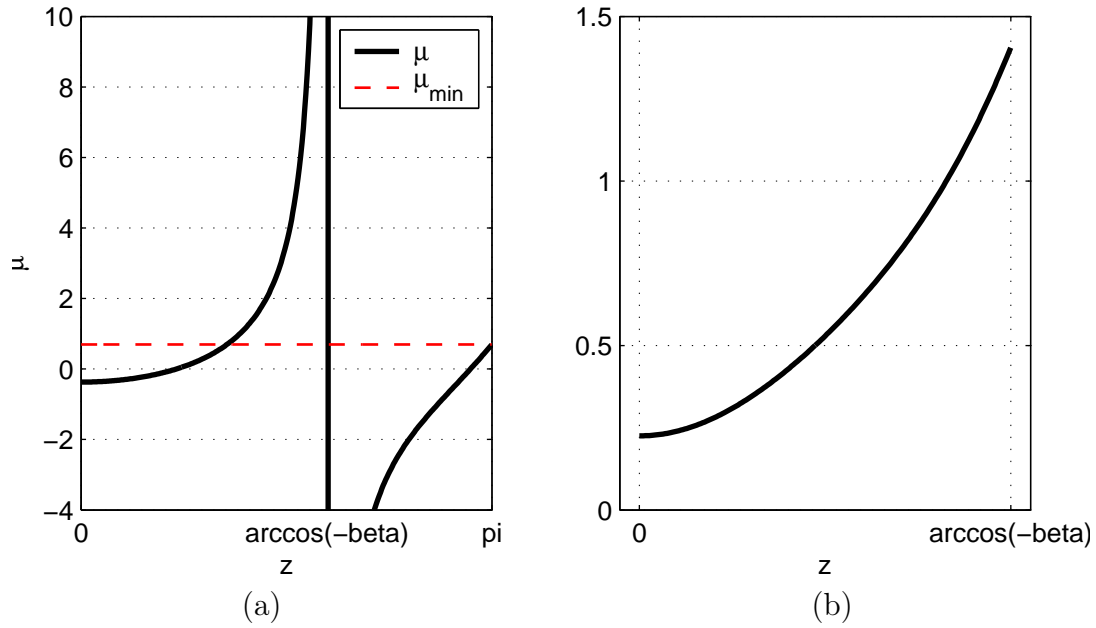


FIG. A.1 – (a) : Valeur de μ en fonction de z où μ est défini par l'équation (A.4) ; (b) : Vérification de l'inégalité (A.5).

Il suffit de remarquer que pour $0 < \mu < \frac{\zeta}{1-\beta}$, alors la solution z_1 qui vérifie (A.3) est comprise dans l'intervalle $]0, \arccos(-\beta)[$ pour utiliser le résultat du cas 1 et ainsi montrer que l'inégalité (A.6) est vrai.

La seconde inégalité à vérifier s'écrit

$$\min \left(m(z_2) \frac{K_c}{T_i} + b(z_2), \frac{\tau}{K} \right) > 0 \quad (\text{A.7})$$

Il est trivial de voir que $m(z_2) > 0$, $\frac{K_c}{T_i} > 0$ et $\frac{\tau}{K} > 0$. Il suffit donc de montrer que $b(z_2) > 0$ pour montrer l'inégalité. z_2 est définie dans le théorème 2.1 comme la seconde racine réelle ordonnée de l'équation (A.3) sur $]0; 2\pi[$. Lorsque $0 < \mu < \frac{\zeta}{1-\beta}$ la figure A.2 (a) montre que cette seconde racine est contenue dans l'intervalle $] \arccos(-\beta), \pi[$. Sur cet intervalle, la figure A.2 (b) représente $b(z_2)$ en facteur de $-\mu(\beta + \cos(z_2))K/\delta > 0$ ce qui permet de conclure que $b(z_2) > 0$, donc l'inégalité (A.7) est bien vérifiée.

Par conséquent, les réglages suggérés par Tavakoli Fleming pour un régulateur PI satisfont toujours les hypothèses du théorème 2.1 de stabilisation pour un système du premier ordre à retard.

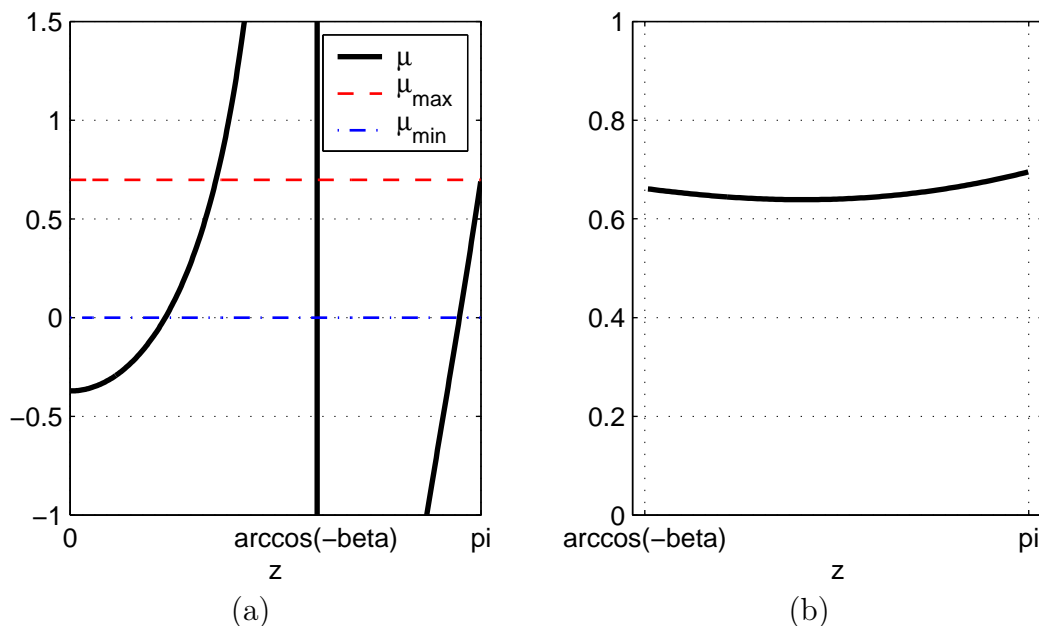


FIG. A.2 – (a) : Valeur de μ en fonction de z où μ est défini par l'équation (A.4) ; (b) : Vérification de la positivité de $b(z_2)$.

A.2 Comparaison des réglages de Ziegler et Nichols et Tavakoli et Fleming

Après avoir démontré que les réglages proposés par Tavakoli et Fleming (2.3) pour les régulateurs PI rendaient stables les systèmes du premier ordre à retard, nous les comparons à ceux proposés par Ziegler et Nichols (réponse indicielle). Pour cela, nous présentons, sur les figures A.3 et A.4, la localisation de ces réglages dans les zones de stabilité définies par le théorème 2.1. La figure A.3 représente la borne sur le gain proportionnel : les deux méthodes de réglages respectent cette contrainte. Néanmoins, alors que les réglages de Ziegler et Nichols offrent un $KK_c\mu$ qui reste constant lorsque μ augmente, ceux proposés par Tavakoli et Fleming offre un $KK_c\mu$ qui augmente et qui reste ainsi plus centré sur la région de stabilité. La figure A.4 présente la localisation du temps intégral sur son intervalle de stabilité. La conclusion est similaire à celle obtenue pour le gain proportionnel : les réglages de Ziegler et Nichols restent très loin de la limite de stabilité. En fait, s'il est clair qu'approcher les bornes supérieures (présentées en trait épais) équivaut à se rapprocher d'un système bouclé instable, rester à proximité de 0 permet d'acquérir de la robustesse mais diminue fortement les performances. Par exemple, lorsque le temps intégral T_i est infini (régulateur proportionnel), la grandeur représentée $\mu^2 K \frac{K_c \tau}{T_i}$ est nulle mais le régulateur laisse le système bouclé stable mais avec un biais entre la mesure et la consigne. C'est un phénomène connu et observé en pratique qui engage souvent à ne pas utiliser les réglages de Ziegler et Nichols lorsque $\mu > 0.6$. En pratique, lorsque le retard est important nous observons que les réglages de Ziegler et Nichols offrent beaucoup de robustesse mais peu de performance, alors

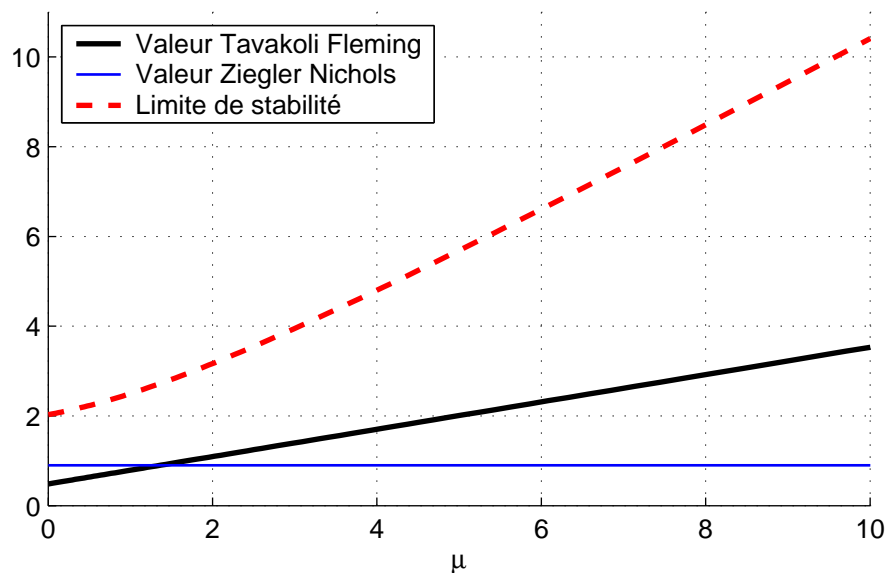


FIG. A.3 – Comparaison de $\mu K K_c$ pour Tavakoli et Fleming (trait noir épais), Ziegler et Nichols (trait bleu fin) par rapport à la valeur maximale de stabilité (trait discontinu rouge).

que ceux proposés par Tavakoli Fleming donnent des résultats performants tout en restant robustes.

Nous caractérisons cette robustesse par rapport à une erreur d'identification du retard δ dans la section 2.1.3.

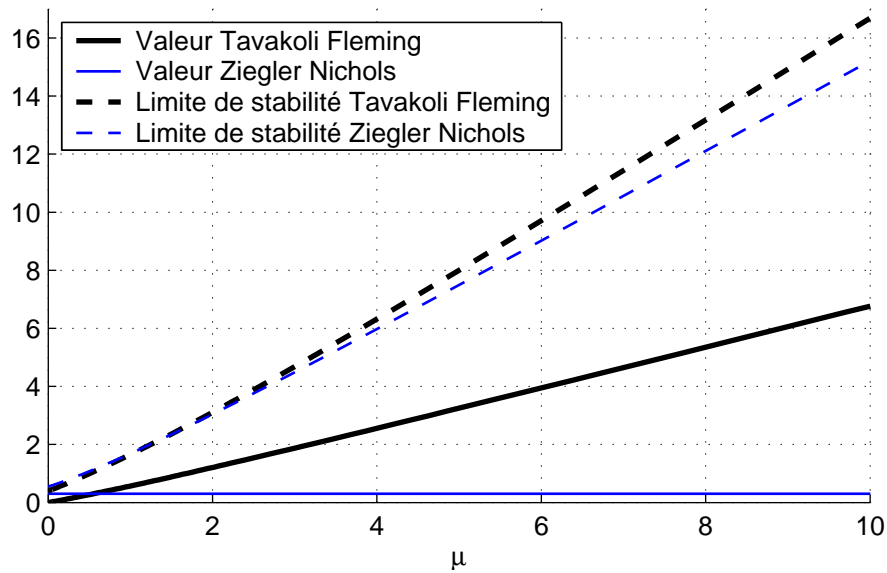


FIG. A.4 – Comparaison de $\mu^2 K \frac{K_c \tau}{T_i}$ pour Tavakoli et Fleming (trait noir épais), Ziegler et Nichols (trait bleu fin) par rapport à leurs valeurs maximales respective de stabilité (traits discontinus).

ANNEXE B

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE PISTON-DIFFUSION

Considérons l'équation piston diffusion suivante

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= \frac{\partial y}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \\ y(z, 0) &= f(z) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas particulier où la condition initiale est un échelon défini par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \forall z \in [0; +\infty[\\ 1 & \forall z \in]-\infty; 0[\end{cases} \quad (\text{B.2})$$

la solution analytique de cette équation s'écrit

$$y(L, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{L}{2\sqrt{t\lambda}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{\lambda}} \right) \quad (\text{B.3})$$

où la fonction¹ $\operatorname{erfc}(x)$ est

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad \text{avec} \quad \operatorname{erfc}(0) = 1$$

Solution de l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur s'écrit

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} \\ u(x, 0) &= f(x) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Nous cherchons une fonction $u(x, t)$ solution du problème B.4 (voir [Can04]) qui soit C^1 en temps, C^2 en espace et $H_0^2(\mathbb{R})$, où l'espace $H_0^2(\mathbb{R})$ est défini comme suit

$$H_0^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \mid \frac{\partial f}{\partial x} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \right\}$$

¹fonction erreur complémentaire

La transformée de Fourier de cette fonction suivant la variable x uniquement s'écrit

$$\hat{u}(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t) e^{-i\alpha\xi} d\xi$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Nous utilisons la première équation de (B.4) pour écrire la transformée de Fourier (suivant la variable x uniquement) de la dérivée partielle de cette fonction par rapport au temps qui s'écrit

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi, t) e^{-i\alpha\xi} d\xi$$

Deux intégrations par parties successives donnent

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (i\alpha)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t) e^{-i\alpha\xi} d\xi - \left[e^{-i\alpha\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, t) + i\alpha u(\xi, t) \right) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Nous avons fait l'hypothèse que $u \in H_0^2$ donc $u(\xi, t)$ et $\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, t)$, tendent vers 0 quand $\xi \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\hat{u}_t(\alpha, t) = -\alpha^2 \hat{u}(\alpha, t)$$

d'où

$$\hat{u}(\alpha, t) = \hat{f}(\alpha) e^{-\alpha^2 t}$$

Nous appliquons la transformée de Fourier inverse

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\alpha, t) e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x - \alpha^2 t} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi e^{i\alpha x - \alpha^2 t} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(x-\xi) - \alpha^2 t} d\alpha d\xi \end{aligned}$$

La fonction Γ permet d'obtenir le résultat suivant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x - \alpha^2 t} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Posons maintenant

$$K(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

nous obtenons alors la solution $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur (B.4) qui s'écrit

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) K(x - \xi, t) d\xi \quad (\text{B.5})$$

À l'aide de deux changements de variables successifs, nous ramenons la résolution du problème (B.1) à la résolution de (B.4).

Premier changement de variable

Montrons que la première équation du système (B.1) se ramène à une équation de la forme

$$u_t = u_{xx} - b(t)u_x.$$

Nous posons

$$x = \frac{z}{\sqrt{\lambda}}$$

il vient alors

$$u_t = u_{xx} - \frac{v}{\sqrt{\lambda}}u_x, \quad \text{où nous avons } y(z, t) = u(x, t)$$

et donc le résultat escompté avec $b(t) = \frac{v}{\sqrt{\lambda}}$.

Second changement de variable

Montrons maintenant que tout système du type

$$u_t = u_{xx} - b(t)u_x$$

s'écrit sous la forme de l'équation de la chaleur

$$H_t = H_{xx}$$

Il suffit de poser

$$x = \xi + \int_0^t b(\eta) d\eta \quad \text{et} \quad H(\xi, t) = u\left(\xi + \int_0^t b(\eta) d\eta, t\right)$$

Dans notre cas, nous avons

$$H(\xi, t) = u\left(\xi + \frac{v}{\sqrt{\lambda}}t, t\right) \quad \text{et} \quad H\left(x - \frac{v}{\sqrt{\lambda}}t, t\right) = u(x, t)$$

Vérification

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}$$

d'où

$$H_{\xi\xi} = u_{xx}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

d'où

$$H_t = u_x b(t) + u_t \quad \text{et donc}$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_{\xi\xi}$$

Condition initiale

$$H(\xi, 0) = u(\xi, 0) = y(\sqrt{\lambda}\xi, 0) = f(\sqrt{\lambda}\xi)$$

Nous posons

$$g(\xi) = f(\sqrt{\lambda}\xi)$$

Le système à résoudre pour trouver une solution de notre problème initial est l'équation de la chaleur suivante qui a été partiellement résolue précédemment.

$$\begin{cases} H_t &= H_{xx} \\ H(x, 0) &= g(x) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

La solution du problème (B.6) est :

$$H(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) K(x - \mu, t) d\mu$$

Parcours inverse La solution du problème

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} - \frac{v}{\sqrt{\lambda}} u_x \\ u(x, 0) &= g(x) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

est

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) K\left(x - \frac{v}{\sqrt{\lambda}}t - \mu, t\right) d\mu$$

La solution du problème

$$\begin{cases} \lambda y_{zz} &= y_t + v y_z \\ y(z, 0) &= f(z) = g\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right) \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

est

$$y(z, t) = u\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}, t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu\sqrt{\lambda}) K\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}} - \frac{v}{\sqrt{\lambda}}t - \mu, t\right) d\mu$$

soit

$$y(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) K\left(\frac{z - vt - \mu}{\sqrt{\lambda}}, t\right) d\mu$$

Choisissons l'échelon unitaire inverse comme sur la figure B.1 pour $f(z)$ alors nous pouvons écrire :

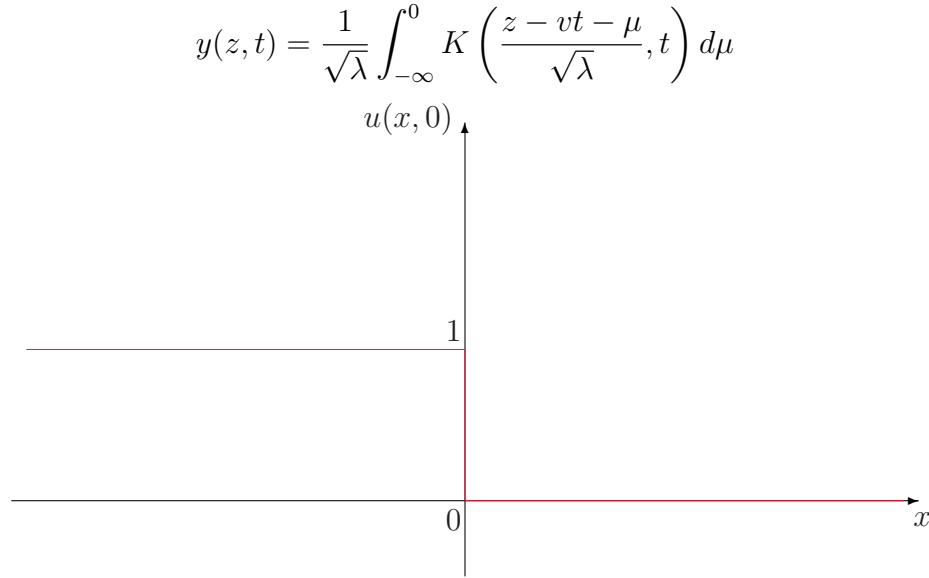


FIG. B.1 – Condition Initiale

Faisons le changement de variable $\mu = -\xi$.

$$y(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} K \left(\frac{z - vt + \xi}{\sqrt{\lambda}}, t \right) d\xi$$

En $z = L$, la solution s'écrit :

$$y(L, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(L-vt+\xi)^2}{4t}} d\xi$$

Posons

$$u = \frac{L - vt + \xi}{2\sqrt{t\lambda}}, \quad \text{et} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{t\lambda}} d\xi.$$

Il vient :

$$y(L, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{L}{2\sqrt{t\lambda}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{\lambda}}}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

La fonction $\operatorname{erfc}(x)$ est

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc}(0) = 1$$

d'où le résultat final recherché

$$y(L, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{L}{2\sqrt{t\lambda}} - \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{\lambda}} \right). \quad (\text{B.9})$$

■

ANNEXE C

DÉFINITION ET CALCUL DU RETARD POUR LE TRANSPORT D'UNE CHARGE DANS UN VOLUME FIXE

Dans les procédés industriels des produits sont transportés d'un endroit à un autre pour y être traités, transformés... Ce transport s'effectue à débits constants ou variables via des conduites qui peuvent être représentées par des volumes fixes.

Lorsqu'il y a ni mélange, ni réaction pendant le transport de la charge et que le débit et la composition de la charge à l'entrée du volume sont connus, il est possible, à tout instant, de déterminer la propriété de la charge à la sortie du volume.

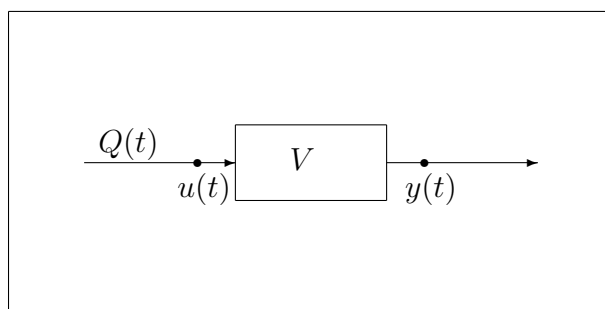


FIG. C.1 – Transport dans un volume

Notations

- $Q(t)$ = débit volumique
- V = volume
- $\delta(t)$ = retard
- $u(t)$ = propriété de la charge à l'entrée du volume
- $y(t)$ = propriété de la charge à la sortie du volume

C.1 Définition du retard

On appelle *retard* le temps $\delta(t)$ qu'a mis une particule se trouvant à la sortie du volume pour traverser ce volume. Si on dispose de ce temps, on peut alors exprimer les propriétés en sortie en fonction des propriétés en entrée avec la relation suivante

$$y(t) = u(t - \delta(t))$$

En effet, la propriété d'une particule en sortie à l'instant t est égale à la propriété de cette même particule observée à l'entrée à l'instant t moins le temps qu'elle a mis pour traverser le volume V .

La question est la suivante :

Etant donnée une particule à la sortie du volume à l'instant t , combien de temps a-t-elle mis pour traverser le volume ?

C.2 Expression du retard à débit constant non nul

Lorsque le débit volumique Q est constant et non nul, l'expression du retard est explicite

$$\delta = \frac{V}{Q}.$$

La propriété de la charge en sortie est

$$y(t) = u(t - \delta)$$

où δ est le retard constant généré par le transport à débit constant dans un volume fixe.

C.3 Expression du retard à débit variable non identiquement nul

Lorsque le débit volumique $Q(t)$ est variable non identiquement nul, l'expression du retard au temps t devient implicite

$$V = \int_{t-\delta(t)}^t Q(s) ds. \quad (\text{C.1})$$

L'expression de la propriété de la charge en sortie de volume est

$$y(t) = u(t - \delta(t))$$

L'équation (C.1) est valable en tout t , si l'intégrale est définie. Pour que l'intégrale soit définie, il suffit que le débit ait été différent de 0 pendant suffisamment de temps pour qu'une particule de la charge traverse le volume.

C.4 Calcul du retard dans le cas particulier d'un débit constant par morceaux

Lorsque $Q(t)$ est constante par morceaux

$$\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$$

il existe $n_0 \leq n$ et une suite $\{\delta_{n_0}, \delta_{n_0+1}, \dots, \delta_n\}$ de temps strictement positifs tels que

$$V = \sum_{i=n_0}^n \delta_i Q_i$$

Le retard au temps t s'écrit

$$\delta(t) = \sum_{i=n_0}^n \delta_i$$

Si l'intervalle de discrétisation Δ est constant, deux cas se distinguent :

Cas 1, il existe $n_0 \leq n$ tel que

$$V = \sum_{i=n_0}^n \Delta Q_i$$

et le retard au temps t s'écrit

$$\delta(t) = (n - n_0 + 1)\Delta$$

Cas 2, il existe $n_0 \leq n$ tel que

$$V < \sum_{i=n_0}^n \Delta Q_i \quad \text{et} \quad V > \sum_{i=n_0+1}^n \Delta Q_i$$

Alors il existe $\delta_{n_0} > 0$ tel que

$$V = \delta_{n_0} Q_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^n \Delta Q_i$$

et il s'écrit

$$\delta_{n_0} = \frac{V - \sum_{i=n_0+1}^n \Delta Q_i}{Q_{n_0}}.$$

Le retard au temps t est

$$\delta(t) = \delta_{n_0} + (n - n_0)\Delta$$

ANNEXE D

DISCUSSION SUR L'APPROXIMATION RÉALISÉE SUR LE RETARD POUR LES PRÉDICTIONS

L'expression implicite du retard est

$$V = \int_{t-\delta(t)}^t Q_1(s) ds. \quad (D.1)$$

où $Q_1(t)$ est le débit traversant le volume au temps t . Au temps t , si les valeurs de u jusqu'à t sont connues, nous calculons via l'expression implicite (D.1) le retard $\delta(t)$. Le vecteur u est la commande avec

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

Les u_i représentent les fractions de débits des bases i pour $i = 1 \dots 3$ (nous avons $u_1 + u_2 + u_3 = 1$).

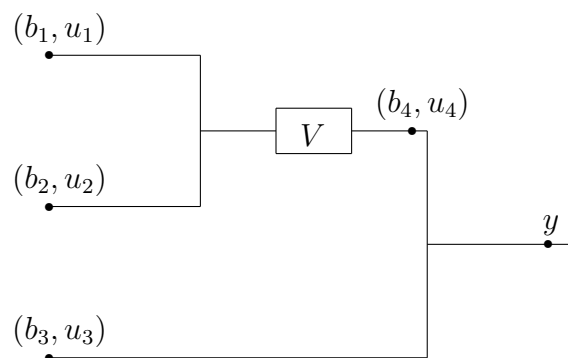


FIG. D.1 – Flowsheet simplifié

Dans le cas d'un prémélange unique (figure D.1), l'expression de la sortie $y(t)$ au temps t est :

$$y(t) = B \Gamma(t) u(t)$$

où $\Gamma(t)$ est une matrice dont les termes sont connus, antérieurs au temps courant t mais dépendant de ce temps t . B est la matrice des propriétés de chaque base :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Une expression générale de la matrice $\Gamma(t)$ est

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & 0 \\ \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En pratique, la commande est mise à jour à une fréquence $\frac{1}{T}$ (où $T = 3$ min). Sur une période d'échantillonnage, entre t et $t + T$, la commande est constante. Notons

$$u^k = u(t) \quad \forall t \in [t_0 + kT, t_0 + (k + 1)T[.$$

L'expression algébrique de la sortie en $t \in [t_0 + kT, t_0 + (k + 1)T[$ est donc

$$y(t) = B \begin{pmatrix} \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{u_1(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & 0 \\ \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & \frac{u_2(t - \delta(t))}{u_4(t - \delta(t))} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u^k.$$

La simulation de cette équation algébrique peut être réalisée de deux manières différentes ; soit nous calculons la sortie à une fréquence $f_1 = 1/T_1$ et la commande à une fréquence $f_2 = 1/T_2$ (on choisit $T_2 > T_1$), soit nous calculons la sortie et la commande à une fréquence d'échantillonnage commune $f = 1/T$. Nous avons choisi la seconde alternative.

Description des deux premières étapes :

Étape 0 — En t_0 , nous supposons que le système est stabilisé depuis assez de temps pour que

$$\delta(t_0) = \frac{V}{Q_1(t_0)}$$

Nous avons $u^0 = u(t_0)$. La sortie en t_0 s'écrit

$$y(t_0) = B \begin{pmatrix} \frac{u_1(t_0 - \delta(t_0))}{u_4(t_0 - \delta(t_0))} & \frac{u_1(t_0 - \delta(t_0))}{u_4(t_0 - \delta(t_0))} & 0 \\ \frac{u_2(t_0 - \delta(t_0))}{u_4(t_0 - \delta(t_0))} & \frac{u_2(t_0 - \delta(t_0))}{u_4(t_0 - \delta(t_0))} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u_0.$$

La commande u^0 est appliquée sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T[$

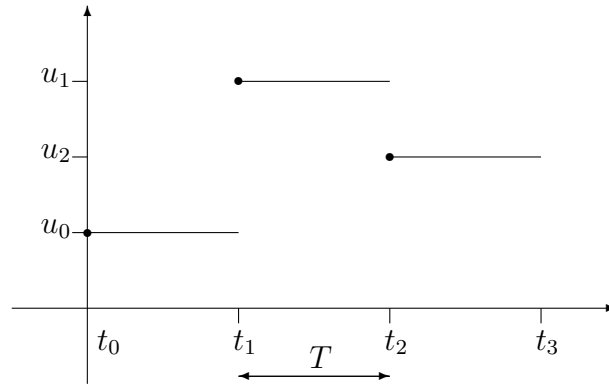


FIG. D.2 – Commandes

Etape 1 — En $t_1 = t_0 + T$, l'expression de la sortie est

$$y(t_1) = B \begin{pmatrix} \frac{u_1(t_1 - \delta(t_1))}{u_4(t_1 - \delta(t_1))} & \frac{u_1(t_1 - \delta(t_1))}{u_4(t_1 - \delta(t_1))} & 0 \\ \frac{u_2(t_1 - \delta(t_1))}{u_4(t_1 - \delta(t_1))} & \frac{u_2(t_1 - \delta(t_1))}{u_4(t_1 - \delta(t_1))} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u^1.$$

Il est nécessaire d'avoir calculé la commande u^1 qui sera appliquée sur l'intervalle $[t_1, t_1 + T[$.

L'expression du retard $\delta(t_1)$ est implicite

$$V = \int_{t_1 - \delta(t_1)}^{t_1} Q_1(s) ds$$

mais le débit est supposé constant par morceaux

$$Q_1(t) = Q(t) u_4^0 \mathbb{I}_{[t_0 - \delta(t_0), t_1[}(t) + \sum_{i=1}^n Q(t) u_4^i \mathbb{I}_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$$

où $Q(t)$ est le débit volumique total constant (en pratique fixé par l'opérateur) et la fonction indicatrice $\mathbb{I}_{[t_a, t_b]}(t)$ est définie comme suit

$$\mathbb{I}_{[t_a, t_b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_a, t_b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous avons donc

$$V = \int_{t_1 - \delta(t_1)}^{t_1} Q u_4^0 \mathbb{I}_{[t_0 - \delta(t_0), t_1]}(s) + \sum_{i=1}^n Q u_4^i \mathbb{I}_{[t_i, t_{i+1}]}(s) ds \quad (\text{D.2})$$

$$= \int_{t_1 - \delta(t_1)}^{t_1^-} Q u_4^0 ds + \underbrace{\int_{t_1^-}^{t_1} Q u_4^1 ds}_{=0} \quad (\text{D.3})$$

$$= \delta(t_1) Q u_4^0 \quad (\text{D.4})$$

d'où l'expression

$$\delta(t_1) = \frac{V}{Q u_4^0}$$

qui ne nécessite pas la connaissance de u^1 .

Dans le calcul de la commande u^1 , des prédictions (calculs de la sortie y) sont réalisées aux temps $\{t_1, t_2, \dots, +\infty\}$. Comme nous avons pu le constater précédemment, le calcul de $\Gamma(t_1)$ ne nécessite pas la connaissance de u^1 . En revanche, pour obtenir la matrice $\Gamma(t_2)$, nous devons calculer $\delta(t_2)$ et donc connaître la valeur u^1 . Le problème à résoudre n'est alors plus linéaire.

L'hypothèse faite dans un premier temps, pour calculer $\delta(t_2)$ et les $\delta(t) \forall t \in [t_2, +\infty[$, est de considérer que les commandes u^i sont égales à la commande u^0 lorsque $i > 0$. Nous pouvons alors calculer (si le débit total est supposé constant par morceaux) le retard pour tous les temps strictement supérieurs à t_1 . Lorsque l'hypothèse précédente est faite, le problème de minimisation est linéaire.

Si on souhaite prendre en compte la valeur exacte du retard, le problème devient non-linéaire, il est alors nécessaire de le résoudre avec une routine prenant en compte ces contraintes non linéaires : *fmincon* de *Matlab*.

ANNEXE E

COMPLÉMENTS DE TRAVAUX POUR LA RÉGULATION DE PH

E.1 Stratégie pour la régulation de base

La commande des pompes représente un point important de la régulation du pH car elle peut être la source de perturbations non rejetables. L'objectif est de réguler un débit de consigne et la masse de consigne associée pour obtenir un débit réel le plus constant possible et une masse réelle la plus proche possible de la masse de consigne. La boucle de régulation est représentée sur la figure 4.12. Le modèle de l'ensemble pompe balance est rappelé ci dessous

$$\begin{cases} \dot{M}(t) &= d(t) \\ \tau \dot{d}(t) &= -d(t) + K(I(t - \delta) - I_0) \\ y(t) &= \zeta(M(t), \mu) \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

où $M(t)$ est la masse réelle, $d(t)$ le débit réel, $I(t)$ l'intensité envoyée à la pompe, I_0 l'offset de la pompe, μ la précision de la balance et $y(t)$ la masse arrondie mesurée.

La fonction $\zeta(M, \mu)$ permet de modéliser la précision de la balance qui retourne une valeur précise à $\pm\mu$ g; elle est définie par

$$\zeta(M, \mu) = \begin{cases} M - \text{mod}(M, \mu) & \text{si } \text{mod}(M, \mu) \leq \mu/2 \\ M + \mu - \text{mod}(M, \mu) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour cela, nous avons décomposé la commande en trois phases différentes. La première phase présentée dans la section E.1.1 est une pré-compensation qui permet de rattraper, à l'aide d'un pré positionnement en intensité, le retard δ identifié. Dans la seconde phase, la boucle est fermée et les réglages sont durs de manière à rattraper rapidement les erreurs lorsque le pré-positionnement de la phase 1 ne permet pas d'atteindre la consigne. Dans la section E.1.2, nous justifions le passage à une troisième phase en montrant la présence d'un cycle limite lorsqu'un simple régulateur proportionnel est utilisé. Le régulateur utilisé pendant la troisième et dernière phase a des réglages "mous"; il permet de limiter les variations de débit. La stabilité du régulateur boucle fermée (phase 2 et 3) est démontrée dans la section E.1.3.

E.1.1 Pré-compensation

La présence de retard pur et la connaissance du modèle nous incitent à calculer un pré positionnement en intensité (commande) pour rejoindre le plus rapidement possible la masse de consigne (mesure) et le débit de consigne.

Nous présentons, dans ce qui suit, trois approches différentes pour réaliser cette pré-compensation. La première idée est d'utiliser la platitude (voir [FLMR95]) pour déterminer l'intensité qui minimise l'intégrale de l'erreur de masse au carré et sous certaines contraintes. La seconde approche permet de prendre en compte le temps d'échantillonnage du superviseur dans le calcul la commande; une optimisation permet d'obtenir la pré-compensation. La troisième approche est celle implémentée sur le procédé réel; inspirée des deux premières, elle n'est pas optimale, mais elle est beaucoup plus simple à implémenter sur le procédé réel.

Platitude

Nous choisissons $M(t)$ sous forme d'un polynôme de degré n en temps t : $M(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$. L'objectif est de déterminer les paramètres a_i de ce polynôme qui minimisent le critère suivant

$$\min_{a_i} \int_{\delta}^{T+\delta} (M(s) - M^c(s))^2 ds \quad (\text{E.2})$$

Du fait du retard pur, l'intensité $I(t)$ appliquée (entre 0 et δ) n'affecte pas le signal de masse $M(t)$ sur le même intervalle de temps. La commande calculée sur $[0; T]$ a un impact sur la masse sur l'intervalle $[\delta; T + \delta]$. Les contraintes d'inégalités sont

$$\begin{cases} I(t) & \leq I_{max} & \forall t \in [0; T] \\ -I(t) & \leq -I_{min} & \forall t \in [0; T] \\ M(t) & \leq M^c(t) + M_d & \forall t \in [\delta; T + \delta] \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

où M_d est le dépassement maximal autorisé. Les contraintes d'égalité s'écrivent

$$\begin{cases} M(\delta) & = 0 \\ \dot{M}(\delta) & = 0 \\ M(T + \delta) & = M^c(T + \delta) \\ \dot{M}(T + \delta) & = d^c \\ I(T) & = I_0 + \frac{d^c}{K} \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Le temps $T + \delta$ correspond à la durée de la boucle ouverte. Pour peu que le choix de T soit raisonnable, le problème d'optimisation a toujours une solution. L'intensité appliquée entre $t = 0$ et $t = T$ est celle obtenue en résolvant le système dynamique (E.1) avec la solution du problème d'optimisation (E.2) sous les contraintes (E.3) et (E.4); entre $t = T$ et $t = T + \delta$, l'intensité appliquée est

$$I(T) = I_0 + \frac{d^c}{K}. \quad (\text{E.5})$$

A l'issu de cette étape, le système est bouclé avec un régulateur de type PI lorsque la masse et le débit sont théoriquement stabilisés à la consigne. Un passage en boucle fermée entre T et $T + \delta$ aurait engendré un comportement perturbateur. La solution du problème de minimisation (E.2) sous les contraintes (E.3) et (E.4) est présentée sur la figure E.1. La fonction *fmincon* de MATLAB permet de résoudre ce problème dont le critère (E.2) s'écrit explicitement. Les contraintes d'inégalité (E.3) sont prises en compte pour des n temps répartis régulièrement sur l'intervalle concerné.

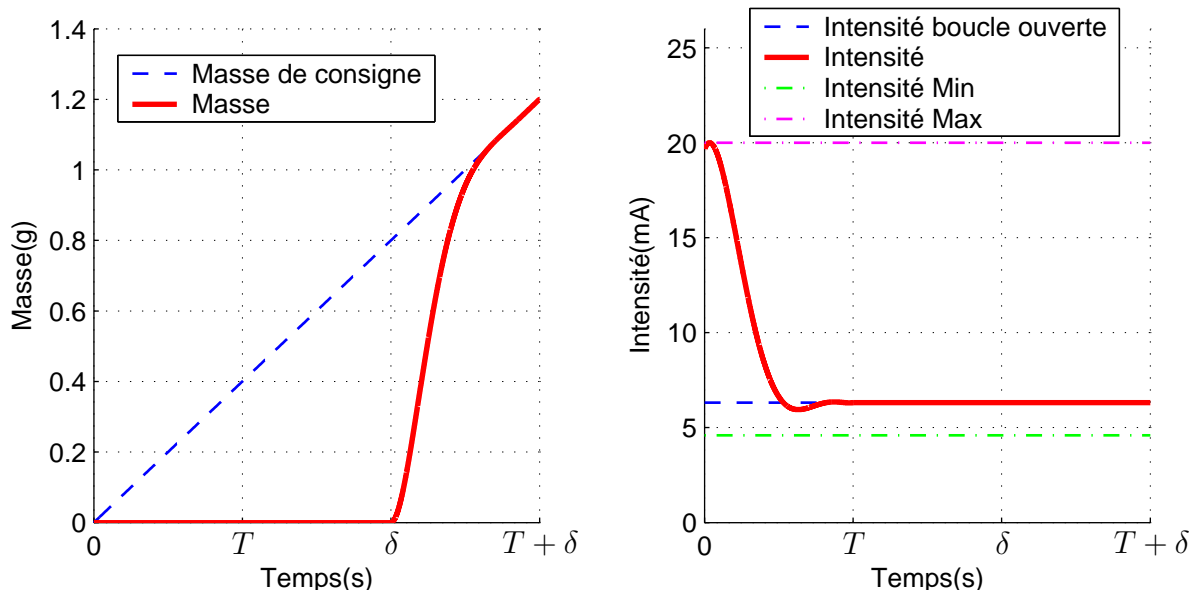


FIG. E.1 – Feed forward : génération d'une trajectoire boucle ouverte par platitude

L'approche platitude est théorique, elle ne tient pas compte des contraintes propres au procédé comme le temps d'échantillonnage du superviseur par exemple.

Prise en compte de l'échantillonnage

L'approche que nous présentons dans cette section est comparable à la précédente, mais nous tenons compte du fait que la commande est constante par morceaux. En effet, le superviseur du procédé a un temps d'échantillonnage fixe (1 seconde), la commande est mise à jour à chaque passage et reste constante pendant 1 seconde. Nous calculons pour cela la solution exacte $M(t)$ du système (E.1) pour $\forall t \in [t_i + \delta; t_{i+1} + \delta] \subset [\delta; T + \delta]$. Nous obtenons

$$M(t) = M(t_i) + K(t - t_i - \delta)(I_i - I_0) + \tau \left(\exp\left(-\frac{t - t_i - \delta}{\tau}\right) - 1 \right) (K(I_i - I_0) - d(t_i))$$

où l'intensité I_i est une constante et

$$I(t) = I_i \quad \forall t \in [t_i; t_{i+1}] \subset [0; T]$$

Les conditions $(M(t_i), d(t_i))$ sont calculées en réalisant les itérations nécessaires à partir des conditions initiales connues $(M(\delta), d(\delta))$.

Le critère à minimiser s'écrit

$$\min_{I_i} \int_{\delta}^{T+\delta} (M(s) - M^c(s))^2 ds$$

Les contraintes sont identiques à (E.3) et (E.4). La solution de cette minimisation est présentée sur la figure E.2.

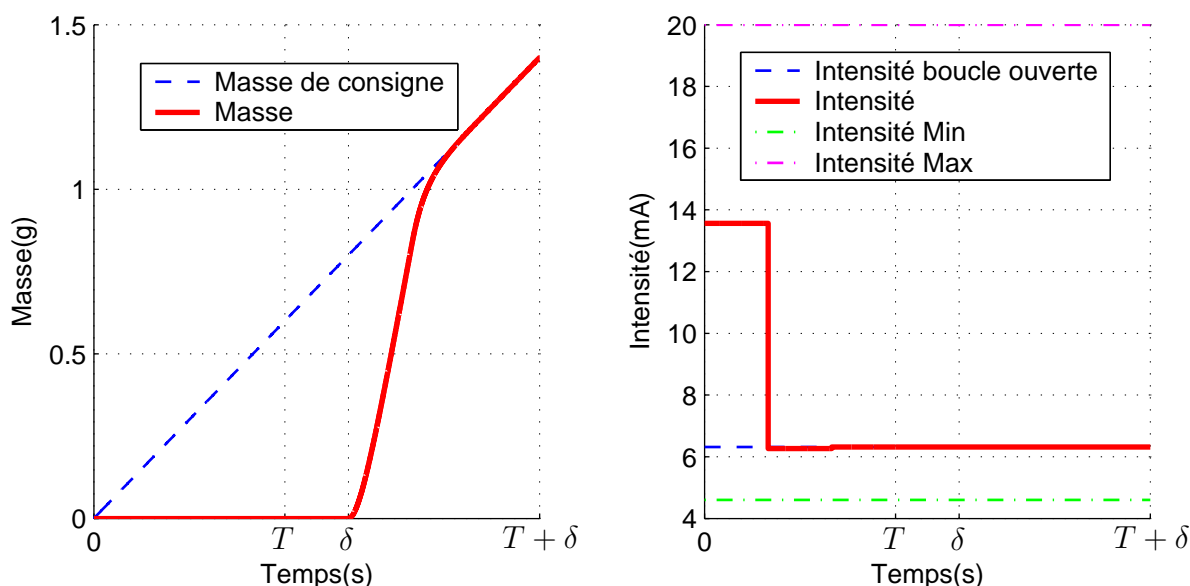


FIG. E.2 – Feed forward : génération d'une trajectoire boucle ouverte par commande constante par morceaux

Pré-compensation implémentée.

Nous proposons une boucle ouverte en trois étapes :

1. Nous appliquons, pendant un temps T , une intensité supérieure à l'intensité nécessaire en stationnaire pour être au débit de consigne. Cette étape permet au signal de masse, de *rattraper* (avec un retard δ) le signal de masse de consigne.
2. Nous appliquons l'intensité nécessaire en stationnaire pour être au débit de consigne durant un temps \bar{T} . Ainsi, le signal de masse *recolle* entre $T + \delta$ et $T + \bar{T} + \delta$ (avec un retard δ) au signal de masse de consigne. Nous avons alors $M(T + \bar{T} + \delta) = M^c(T + \bar{T} + \delta)$.
3. Nous conservons l'intensité précédente pendant un temps $\delta + \tilde{T}$ pour que le bouclage se réalise lorsque $M(T + \bar{T} + \delta) = M^c(T + \bar{T} + \delta)$ et lorsque $M^c(T + \bar{T} + \tilde{T} + \delta) > m\mu$ (où μ est la précision de la balance).

Commençons par fixer \bar{T} : nous choisissons $\bar{T} > 3\tau$ pour que le débit ait atteint plus de 95% de sa valeur stationnaire après un changement d'intensité.

En pratique, nous calculons le temps T le plus petit possible mais il doit être suffisamment grand pour qu'il existe I_T une intensité telle que $I_{min} \leq I_T \leq I_{max}$ et que $M(T + \bar{T} + \delta) = M^c(T + \bar{T} + \delta)$ lorsque I_T est appliquée pendant un temps T .

Il est possible de calculer numériquement (avec un algorithme de Newton) le temps minimum T_{min} pendant lequel l'intensité appliquée est l'intensité maximum ($I_T = I_{max}$) pour avoir $M_c(\delta + T_{min}) = M(\delta + T_{min})$.

Nous majorons ce temps en faisant une approximation sur la constante de temps de la pompe ; nous obtenons ainsi une expression analytique d'un temps proche mais supérieur à T_{min} .

Lorsque $I(t) = I_{max} \forall t \in [0, T_m]$ et si $(M_0, d_0) = (0, 0)$, l'expression de la masse au temps $t \in [\delta; \delta + T_m]$ s'écrit

$$M(t) = K(I_{max} - I_0) \left(t - \delta + \tau \left(\exp \left(-\frac{t - \delta}{\tau} \right) - 1 \right) \right)$$

Pour tout temps $t \in [\delta; \delta + T_m]$, nous avons

$$M(t) > \underbrace{K(I_{max} - I_0) (t - \delta - \tau)}_{\tilde{M}(t)}$$

Définissons le temps T_m tel que $M_c(\delta + T_m) = \tilde{M}(\delta + T_m)$. Nous obtenons

$$T_m = \frac{K(I_{max} - I_0) \tau + d^c \delta}{K(I_{max} - I_0) - d^c}$$

Nous avons, $M(\delta + T_m) > M^c(\delta + T_m)$, donc nécessairement, il existe une intensité comprise entre I_0 et I_{max} qui, appliquée pendant T_m , permet d'atteindre la masse de consigne.

La commande est échantillonnée avec une période fixe T_u ; pendant cette période, l'intensité est constante. Pour qu'il existe I_T telle que $I_0 \leq I_T \leq I_{max}$ et que $M(T + \bar{T} + \delta) = M^c(T + \bar{T} + \delta)$ lorsque I_T est appliquée pendant un temps $n T_u$, nous arrondissons suivant une précision T_u en direction de $+\infty$ le temps T_m . Nous choisissons le plus petit temps T tel que

$$T \geq T_m \text{ et } T = nT_u \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{E.6})$$

Si le temps déterminé s'écrit $T = n T_u$ avec $n < 3$ alors nous imposons $T = 3T_u$. Cette manipulation permet de limiter les erreurs lorsque le temps réel d'échantillonnage T_u n'est pas respecté.

Lorsque les débits sont faibles, la précision de la balance nous impose de rallonger le temps de boucle ouverte pour avoir quelques points de mesure avant de boucler le système. Nous ajustons donc le temps \bar{T} de la manière suivante

$$\tilde{T} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{m\mu}{d^c} - T - \bar{T} - \delta \leq 0 \\ \frac{m\mu}{d^c} - T - \bar{T} - \delta & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ajout de ce temps permet d'avoir m points de mesure au moment du bouclage. Nous avons fixé $m = 2$.

Notons $T_{Idc} = \bar{T} + \tilde{T} + \delta$ la durée pendant laquelle l'intensité correspondant au débit de consigne est appliquée, le temps de boucle ouverte s'écrit

$$T_{BO} = T + T_{Idc}$$

Une fois le temps T déterminé, il suffit de calculer l'intensité I_T appliquée pendant un temps T telle que

$$M(T_{BO}) = M^c(T_{BO})$$

où T est donné par l'équation (E.6).

Nous obtenons

$$I_T = I_0 + \frac{d^c \left(T + \delta + \tau \left(1 - \exp \left(-\frac{T_{Idc}}{\tau} \right) \right) \right)}{K \left(T + \tau \left(\exp \left(-\frac{T + T_{Idc}}{\tau} \right) - \exp \left(-\frac{T_{Idc}}{\tau} \right) \right) \right)}$$

La trajectoire obtenue est représentée sur la figure E.3. La constante de temps de la pompe est faible (0.2s) par rapport à la valeur de la période d'échantillonnage (1s). Les deux solutions prenant en compte l'échantillonnage sont donc très proches. Si la constante de temps était nulle (pas de dynamique sur la pompe) les deux solutions seraient identiques.

E.1.2 Existence d'un cycle limite

Nous justifions, dans cette section, le passage à une troisième phase dans la commande des masses/débits pendant laquelle les réglages sont mous. En pratique, le régulateur utilisé est proportionnel intégral mais le phénomène de cycle limite est présent avec un simple régulateur proportionnel. Nous montrons qu'un régulateur proportionnel génère un cycle limite lorsque la mesure est discrète. Pour simplifier l'analyse, nous retirons le retard de la dynamique du système (celui-ci n'est pas la source du cycle limite). Le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dot{M}(t) &= d(t) \\ \tau \dot{d}(t) &= -d(t) + K(I(t) - I_0) \\ y(t) &= \zeta(M(t), \mu) \end{cases}$$

Notons $e_M = M^c - M$ l'erreur entre la masse de consigne (M^c) et la masse réelle et d^c le débit de consigne. Nous avons

$$\dot{M}^c = d^c$$

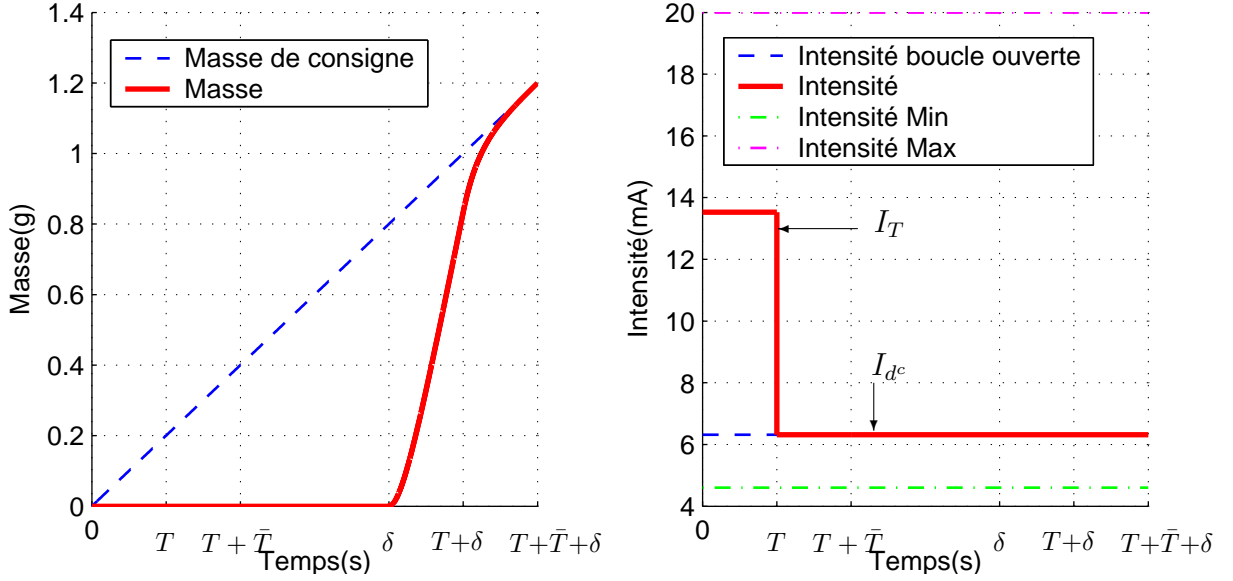


FIG. E.3 – Génération d'une trajectoire boucle ouverte par commande constante par morceaux : feed forward implémenté sur le pilote

A débit de consigne constant, la dynamique de e_M s'écrit

$$\tau \ddot{e}_M = -\dot{e}_M - K(I - I_0) + d^c$$

Notons maintenant I^c la commande appliquée en boucle ouverte pour suivre le débit de consigne : $I^c = I_0 + d^c/K$. La dynamique précédente peut alors s'écrire

$$\tau \ddot{e}_M = -\dot{e}_M + K(I^c - I)$$

Pour plus de lisibilité, nous choisirons la notation suivante pour l'équation précédente

$$\tau \ddot{e}_M = -\dot{e}_M + \mathbf{K}u \quad (\text{E.7})$$

Lorsque la mesure de masse est discrète, la commande proportionnelle s'écrit

$$u(t) = K_c(d^c t - \text{round}(d^c t - e_M(t), \mu))$$

Le schéma bloc du système bouclé avec une commande proportionnelle est représenté sur la figure E.4.

où le bloc χ non-linéaire, est défini par la fonction suivante

$$\chi(x, t) = K_c(d^c t - \text{round}(d^c t + x, \mu))$$

lorsque la commande est proportionnelle avec un gain proportionnel K_c . Le bloc L est défini par l'équation (E.7). L'entrée $u(t)$ de ce bloc s'écrit

$$u(t) = \chi(-e_M(t), t) = K_c(M^c(t) - \text{round}(M^c(t) - e_M(t), \mu)) \quad (\text{E.8})$$

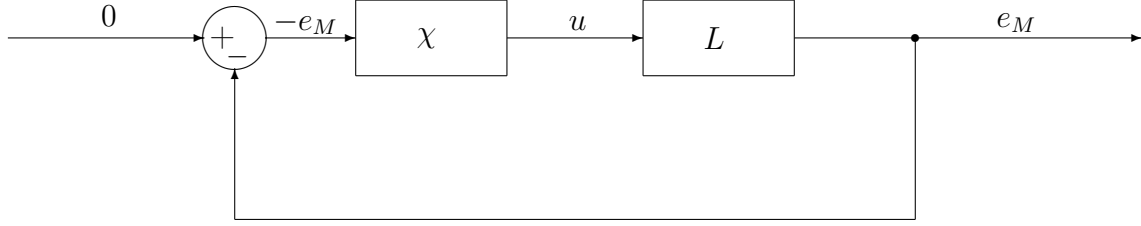


FIG. E.4 – Schéma bloc du système bouclé avec un régulateur proportionnel lorsque la masse mesurée est discrète.

L'objectif est de montrer qu'une solution $e_M(t)$ du système dynamique (E.7) est un cycle limite. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe $e_M(t)$ telle que $\chi(-e_M(t), t)$ est un signal identique à $u(t)$ défini par (E.8). Nous décomposons la démonstration de l'existence de ce cycle limite en trois étapes :

1. Hypothèse sur la forme de $u(t)$;
2. Calcul de la solution $e_M(t)$ lorsque l'entrée du système dynamique linéaire L est $u(t)$;
3. Démonstration : le signal $\chi(e_M(t), t)$ a les mêmes caractéristiques (période, phase, amplitude) que le signal initial $u(t)$.

Hypothèse sur la forme de $u(t)$. Les hypothèses faites sur le signal $u(t)$ sont issues d'une étude du signal $\chi(-e_M(t), t)$ lorsque $M(t) = M^c(t)$ (i.e. $e_M(t) = 0$).

Nous supposons que le signal d'entrée $u(t)$ est périodique de période

$$T = \frac{\mu}{d^c}$$

et d'amplitude $\mu/2$, avec $u(0) = 0$. Le signal est représenté sur la figure E.5.

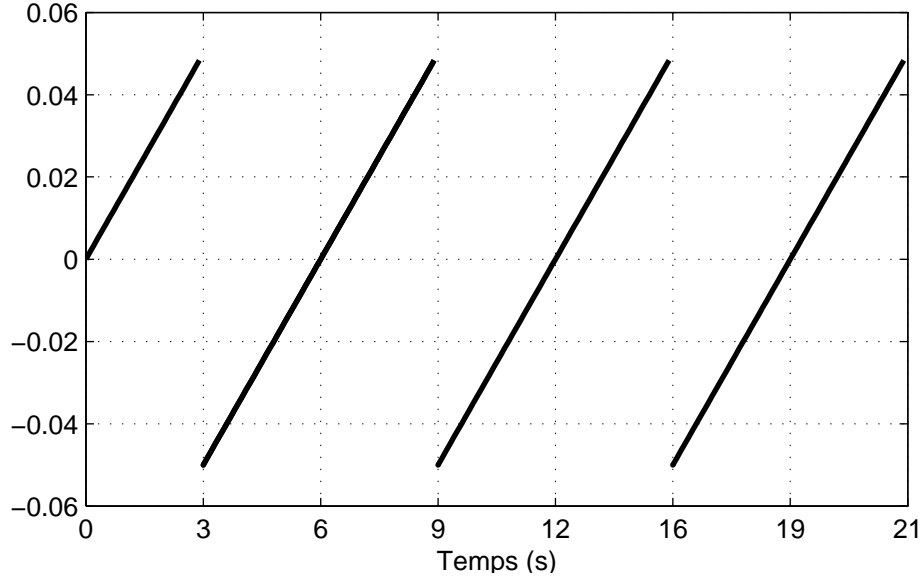
Le signal triangulaire $u(t)$ est impair ($u(-t) = -u(t)$) donc le développement en série de Fourier s'écrit

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \text{où} \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(s) \sin(n\omega s) ds$$

Nous obtenons

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \text{où} \quad b_n = \frac{2K_c d^c (-1)^{n+1}}{n\omega} \quad (\text{E.9})$$

Calcul de la solution $e_M(t)$. La solution du système dynamique (E.7) lorsque l'entrée $u(t)$ s'écrit suivant l'équation (E.9) s'écrit

FIG. E.5 – Signal périodique $u(t)$

$$\begin{aligned}
 e_M(t) &= \dot{e}_M(0)\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + e_M(0) + \frac{2KK_c d^c}{\omega} \\
 &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i(1+(i\omega\tau)^2)} \left(\frac{1 - \cos(i\omega t)}{i\omega} - \tau \sin(i\omega t) + i\omega\tau^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \right)
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

Détails

$$\dot{e}_M(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \dot{e}_M(0) + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right) \frac{2d^c K K_c}{\tau\omega} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sin(i\omega s) ds$$

d'où l'expression de l'erreur de débit

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_M(t) &= \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \dot{e}_M(0) + \frac{2d^c K K_c}{\tau\omega} \\
 &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \frac{\tau}{1+(i\omega\tau)^2} \left(\sin(i\omega t) - i\omega\tau \left(\cos(i\omega t) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

En intégrant (E.11), nous obtenons l'erreur de masse

$$e_M(t) = \int_0^t \dot{e}_M(s) ds + e_M(0)$$

Démonstration : " $\chi(-e_M(t), t)$ a les mêmes caractéristiques que $u(t)$ ". Nous devons maintenant vérifier que les caractéristiques du signal $\chi(e_M(t), t)$ sont identiques à celle du signal d'entrée $u(t)$. Pour cela nous devons montrer l'égalité

$$\chi(-e_M, t) = u(t) \quad \forall t > 0 \quad (\text{E.12})$$

Pour vérifier l'égalité (E.12) il suffit de voir que

$$\dot{M}(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{E.13})$$

et de montrer que

$$e_M \left((2k - 1) \frac{T}{2} \right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{E.14})$$

Si la solution respecte ces deux points alors le signal $\chi(e_M, t)$ est exactement identique à $u(t)$. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la figure E.6 et de constater que si un signal $e_M(t)$ est tel que la masse $M(t) = M^c(t) - e_M(t)$ reste dans la zone hachurée alors la masse discrétisée est identique au signal de masse de consigne discrétisée (celui utilisé pour générer le signal d'entrée $u(t)$). Pour que $M(t)$ reste dans la zone hachurée, il est nécessaire que $M(t) = M^c(t)$ sur l'intersection des rectangles hachurés (coins supérieurs droits et inférieurs gauches). Cette contrainte est représentée par l'équation (E.14). Si en plus, le signal $M(t)$ est croissant (équation (E.13)) alors $M(t)$ reste dans la zone hachurée. Par définition de χ (arrondi représentant la balance) tout signal restant dans la zone hachurée donne, lorsqu'il est discrétisé, le même signal tracé en gras sur la figure E.6. Dans ces conditions, nous avons $\chi(e_M(t), t) = u(t)$.

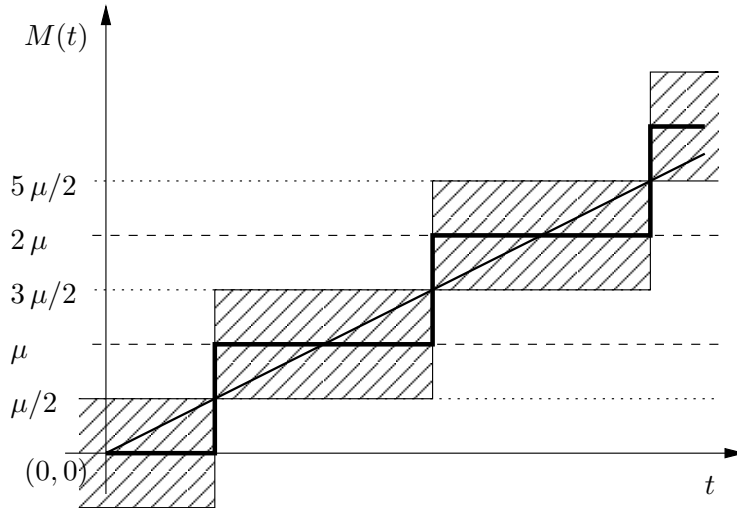


FIG. E.6 – Signal de masse et signal de masse discrétisé

Le premier point (E.13) est vérifié car la masse $M(t)$ est croissante : il n'est pas possible d'enlever du liquide qui a déjà été pompé. Nous vérifions l'égalité (E.14) dans la partie qui suit.

La solution (E.10) évaluée en $(2k - 1)T/2$ donne

$$\begin{aligned}
e_M \left((2k-1) \frac{T}{2} \right) &= \dot{e}_M(0)\tau \left(1 - \exp \left(-\frac{(2k-1)T}{2\tau} \right) \right) + e_M(0) \\
&\quad + 4 \frac{KK_c d^c}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 (1 + ((2k-1)\omega\tau)^2)} \\
&\quad + 2KK_c d^c \tau^2 \left(1 - \exp \left(-\frac{(2k-1)T}{2\tau} \right) \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{1 + (i\omega\tau)^2}
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats sur les séries (E.18) et (E.19), nous obtenons

$$\begin{aligned}
e_M \left((2k-1) \frac{T}{2} \right) &= \dot{e}_M(0)\tau \left(1 - \exp \left(-\frac{(2k-1)T}{2\tau} \right) \right) + e_M(0) \\
&\quad + 4 \frac{KK_c d^c}{\omega^2} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi\omega\tau}{4} \tanh \left(\frac{\pi}{2\omega\tau} \right) \right) \\
&\quad + KK_c d^c \tau^2 \left(1 - \exp \left(-\frac{(2k-1)T}{2\tau} \right) \right) \left(1 - \frac{\pi}{\omega\tau \sinh \left(\frac{\pi}{\omega\tau} \right)} \right)
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Reste à déterminer le couple $(e_M(0), \dot{e}_M(0))$ qui permet de vérifier l'égalité (E.14). La différence entre $e_M((2k_1-1)T/2)$ et $e_M((2k_2-1)T/2)$ pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ avec $k_1 \neq k_2$ donne

$$\dot{e}_M(0) = KK_c d^c \tau \left(\frac{\pi}{\omega\tau \sinh \left(\frac{\pi}{\omega\tau} \right)} - 1 \right) \tag{E.16}$$

L'équation (E.15) utilisée avec le résultat (E.16) permet d'obtenir l'expression de la condition initiale

$$e_M(0) = -d^c KK_c \left(\frac{\pi^2}{2\omega^2} - \frac{\pi\tau}{\omega} \tanh \left(\frac{\pi}{2\omega\tau} \right) \right)$$

telle que

$$e_M \left((2k-1) \frac{T}{2} \right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{E.17}$$

La croissance de $M(t)$ et la propriété (E.17) permettent de montrer que $\chi(-e_M(t), t) = u(t)$ donc que $e_M(t)$ est un cycle limite.

Résultats sur les séries

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{x^2 + i^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\pi}{x \sinh(\pi x)} \right) \quad (\text{E.18})$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2 (1 + (2i-1)^2 x^2)} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi|x|}{4} \tanh\left(\frac{\pi}{2|x|}\right) \quad (\text{E.19})$$

E.1.3 Stabilité du système boucle fermée.

Dans la section précédente, nous avons montré la présence d'un cycle limite. Pour limiter les oscillations observées, nous choisissons de diminuer les gains du régulateur au cours du temps. Nous montrons dans cette section la stabilité du système bouclé. La démonstration est réalisée avec un modèle sans retard et sans discrétisation du signal de masse.

Le modèle de pompe (E.1) est simplifié pour la démonstration de la stabilité du système bouclé avec la commande (E.20). La discrétisation de la masse n'est pas prise en compte et le retard est négligé. Le système utilisé s'écrit

$$\begin{cases} \dot{M}(t) &= d(t) \\ \tau \dot{d}(t) &= -d(t) + K(I(t) - I_0) \end{cases}$$

d'où

$$\tau \ddot{M}(t) = -\dot{M}(t) + K(I(t) - I_0)$$

où $M(t)$ est la masse, $d(t)$ le débit et $I(t)$ l'intensité envoyée à la pompe.

La boucle fermée fait suite au feed forward qui a requis un temps noté t_0 . La commande utilisée est donc appliquée au temps $t = \bar{t} + t_0$ où \bar{t} est le temps où le débit de consigne devient différent de 0; nous avons $M^c(\bar{t}) = 0$. Cette commande s'écrit

$$I(t) = I_0 + \frac{1}{K} \hat{d} + \frac{\tau}{K} \left(a_0 \int_{\bar{t}}^t e_M(s) ds + a_1 e_M + a_2 e_{\hat{d}}(t) \right) \quad (\text{E.20})$$

où $e_M(t) = M^c(t) - M(t)$, $e_{\hat{d}}(t) = d^c - \hat{d}(t)$ et $\hat{d}(t)$ est l'expression du pseudo débit qui s'écrit

$$\hat{d}(t) = \frac{M(t) - M^c(\bar{t})}{t - \bar{t}}.$$

Pour tout temps $t > \bar{t}$, nous avons $d^c = \frac{M^c(t) - M^c(\bar{t})}{t - \bar{t}}$, l'erreur $e_{\hat{d}}$ peut donc s'écrire

$$e_{\hat{d}} = \frac{M^c(t) - M(t)}{t - \bar{t}} = \frac{e_M(t)}{t - \bar{t}}$$

Le système boucle fermée s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{I}e_M \\ \dot{e}_M \\ \dot{e}_d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -(a_1(t) + \frac{1}{t-t_0}(a_2(t) - \frac{1}{\tau})) & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}}_{M(t)} \begin{pmatrix} Ie_M \\ e_M \\ e_d \end{pmatrix} \quad (\text{E.21})$$

avec

$$\begin{aligned} a_0(t) &= (a_0^0 - a_0^\infty) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_f}\right) + a_0^0 \\ a_1(t) &= (a_1^0 - a_1^\infty) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_f}\right) + a_1^0 \\ a_2(t) &= (a_2^0 - a_2^\infty) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_f}\right) + a_2^0 \end{aligned}$$

où les a_i^0 et les a_i^∞ sont des constantes.

Théorèmes, lemmes et corollaires. Pour conclure sur la stabilité du système, nous utilisons le théorème E.1, le corollaire E.1 et le lemme E.1 qui sont démontrés respectivement dans [Kha01, pages 158, 352 et 353].

Théorème E.1

Soit $x = 0$ un point d'équilibre exponentiellement stable de

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Supposons que $A(t)$ est continue et bornée. Choisissons $Q(t)$ une matrice continue, bornée, définie positive et symétrique. Alors, il existe une matrice $P(t)$ continuellement différentiable, bornée, définie positive et symétrique qui satisfait

$$Q(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \dot{P}(t) = 0$$

La fonction $V(t, x) = x^T P(t)x$ est une fonction de Lyapunov pour le système et elle satisfait

$$\begin{aligned} k_1 \|x\|^a &\leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^a \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} A(t)x &\leq -k_3 \|x\|^a \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, où k_1, k_2, k_3 et a sont des constantes positives et D est un ensemble de \mathbb{R}^n contenant le point d'équilibre $x = 0$.

Corollaire E.1

Soit $x = 0$ un point d'équilibre exponentiellement stable de

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (\text{E.22})$$

Soit $V(t, x)$ une fonction de Lyapunov pour (E.22) qui satisfait

$$\begin{aligned} k_1 \|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} A(t) x &\leq -k_3 \|x\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq k_4 \|x\| \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, où k_1, k_2, k_3 et k_4 sont des constantes positives. Supposons que le terme de perturbation $B(t) x$ satisfait

$$\|B(t) x\| \leq \gamma(t) \|x\|$$

où $\gamma(t)$ satisfait

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \leq \epsilon(t - t_0) + \eta \quad (\text{E.23})$$

pour des constantes non négatives ϵ et η , où

$$\epsilon < \frac{k_1 k_3}{k_2 k_4}$$

Alors l'origine est un point équilibre exponentiellement stable du système

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)) x.$$

De plus si toute les hypothèses sont vérifiées globalement, alors l'origine est globalement exponentiellement stable.

Lemme E.1

Si $\gamma(\tau) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tel que la condition (E.23) soit satisfaite.

Le problème traité. L'équation (E.21) dont nous devons montrer la stabilité peut s'écrire sous la forme suivante

$$\dot{x} = A x + B(t) x$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix} \quad (\text{E.24})$$

et

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d(t) & -e(t) & 0 \end{pmatrix}$$

en posant

$$\begin{aligned} a &= a_0^0 \\ b &= a_1^0 \\ c &= \frac{1}{\tau} \\ d(t) &= (a_0^0 - a_0^\infty) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_f}\right) \\ e(t) &= (a_1^0 - a_1^\infty) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_f}\right) + \frac{1}{t-\bar{t}} \left(a_2(t) - \frac{1}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Dans le cas stationnaire, la stabilité exponentielle du système nominal $\dot{x} = Ax$ est obtenue si la matrice A est Hurwitz. La matrice A , définie par (E.24) est Hurwitz si

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ bc > a \end{cases}$$

c'est à dire, $a_0^0 > 0$, $\frac{1}{\tau} > 0$ et $\frac{a_1^0}{\tau} > a_0^0$. L'application du théorème E.1, du corollaire E.1 et du lemme E.1 montre que, sous ces conditions, 0 est un point globalement asymptotiquement stable du système (E.21).

E.2 Commande linéaire directe pH/Intensité

L'approche présentée dans cette section est linéaire. La non linéarité du système est prise en compte dans la commande via un gain scheduling [RS00]. Nous avons supprimé le régulateur de masse d'acide de commande et nous régulons directement le pH à l'aide de l'intensité de la pompe concernée.

Rappelons la dynamique du pH :

$$\dot{\text{pH}} = -\frac{\psi(\text{pH})}{\phi(\text{pH}, t)} + \alpha \frac{q_u}{\phi(\text{pH}, t)}$$

Nous linéarisons ce modèle autour du point de fonctionnement (pH^c, q_u^c) où q_u^c est défini par

$$q_u^c = \frac{\psi(\text{pH}^c)}{\alpha} \quad (\text{E.25})$$

Autour de ce point, le linéarisé temps variant s'écrit

$$\overline{\Delta \dot{\text{pH}}} = -\frac{1}{\phi(\text{pH}^c, t)^2} \left(\psi'(\text{pH}^c) \phi(\text{pH}^c, t) - \frac{\partial \phi}{\partial \text{pH}}(\text{pH}^c, t) (\psi(\text{pH}^c) - \alpha q_u^c) \right) \Delta \text{pH} + \frac{\alpha}{\phi(\text{pH}^c, t)} \Delta q_u \quad (\text{E.26})$$

L'utilisation de (E.25) dans (E.26) donne

$$\widehat{\Delta \dot{\text{pH}}} = -\frac{\psi'(\text{pH}^c)}{\phi(\text{pH}^c, t)} \Delta \text{pH} + \frac{\alpha}{\phi(\text{pH}^c, t)} \Delta q_u$$

En posant

$$\tau(\text{pH}^c, t) = \frac{\phi(\text{pH}^c, t)}{\psi'(\text{pH}^c)}$$

et

$$K(\text{pH}^c) = \frac{\alpha}{\psi'(\text{pH}^c)}$$

le modèle s'écrit sous la forme suivante

$$\widehat{\Delta \dot{\text{pH}}} = -\frac{1}{\tau(\text{pH}^c, t)} \Delta \text{pH} + \frac{K(\text{pH}^c)}{\tau(\text{pH}^c, t)} \Delta q_u.$$

Les paramètres de ce système linéaire sont représentés sur la figure E.7. Le gain du modèle n'est pas dépendant du temps, il dépend uniquement de la valeur de pH^c .

La constante de temps du modèle est faiblement dépendante du pH, elle dépend essentiellement et linéairement du temps.

Remarque E.1 (Valeur de la constante de temps)

L'expression de la constante de temps définie par l'équation (E.2) et représentée sur la figure E.7 se simplifie

$$\tau(\text{pH}^c, t) = \frac{\psi'(\text{pH}^c)t + h'_0(\text{pH}^c) V_0}{\psi'(\text{pH}^c)} = t + \frac{h'_0(\text{pH}^c) V_0}{\psi'(\text{pH}^c)}$$

car $V(t) = qt + V_0$, $N_{\bar{A}} = q_{\bar{A}}t$ et $N_{\bar{B}} = q_{\bar{B}}t$. Le second terme de la constante de temps est négligeable ; la valeur de la constante de temps est donc proche de t .

Le régulateur mis au point est un régulateur PID avec un gain scheduling. Le pH de consigne est donc remplacé par le pH mesuré dans l'expression du gain et de la constante de temps pour le calcul des réglages. La méthode utilisée pour régler les paramètres du contrôleur en fonction des paramètres du modèle linéaire est présentée par Tavakoli Fleming dans [TT03] :

$$\begin{aligned} K_c(\text{pH}, t) &= \frac{1}{K(\text{pH}) \left(\frac{\delta}{\tau(\text{pH}, t)} + 0.2 \right)} \\ T_i(\text{pH}, t) &= \frac{0.3 \frac{\delta}{\tau(\text{pH}, t)} + 1.2}{\frac{1}{\tau(\text{pH}, t)} + \frac{0.08}{\delta}} \\ T_d(\text{pH}, t) &= \frac{\tau(\text{pH}, t)}{90} \end{aligned}$$

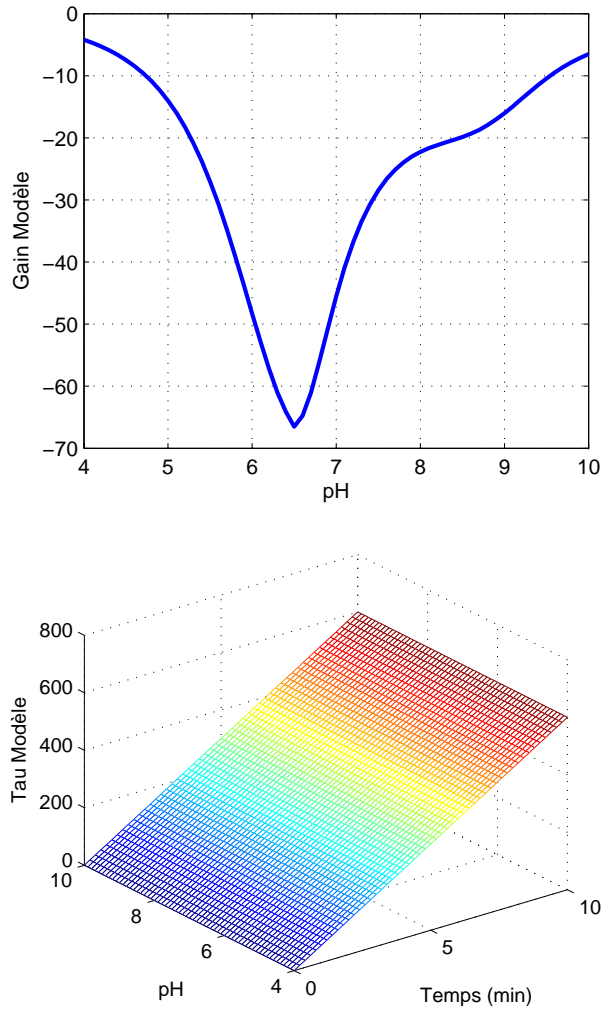


FIG. E.7 – Paramètres du modèle : Gain du modèle (en $\text{g}\cdot\text{min}^{-1}\cdot\text{mA}^{-1}$) et constante de temps du modèle (en s)

Les paramètres du contrôleur sont représentés sur les figures E.8 et E.9.

Le régulateur utilisé s'écrit

$$q_u = K_c(\text{pH}, \tilde{t}) \left(e_{\text{pH}} + \frac{1}{T_i(\text{pH}, \tilde{t})} \int_0^t e_{\text{pH}} + T_d(\text{pH}, \tilde{t}) \frac{d e_{\text{pH}}}{d t} \right)$$

où $\tilde{t} = t$ si $t < \bar{t}$ et $\tilde{t} = \bar{t}$ sinon. Ce choix est justifié dans la section 4.4.3.

En pratique, le terme dérivé est remplacé par un terme dérivé approché incluant un filtre du signal d'erreur. Pour prendre en compte la précipitation, nous fixons le temps $\tilde{t} = t$ si $t < \bar{t}$ et $\tilde{t} = \bar{t}$ sinon. Après le temps \bar{t} , le temps intégral T_i et le temps dérivé T_d sont constants alors que le gain du contrôleur K_c est variable en fonction du pH mesuré. Nous justifions ce choix dans la section 4.4.3.

Cette approche, à paramètres constants est efficace hors zone de neutralisation, mais dans la zone de neutralisation, la période transitoire est trop longue. Nous propo-

sons, dans la section suivante, un gain scheduling qui permet de diminuer ce temps transitoire.

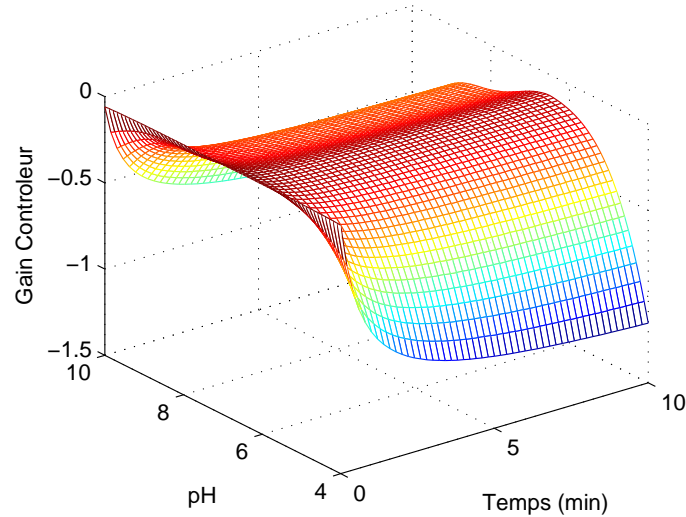


FIG. E.8 – Gain du contrôleur (en mA.min.g⁻¹)

Des résultats obtenus avec cette loi de commande hors zone de neutralisation et dans la zone de neutralisation sont présentés sur les figures E.10 et E.11.

Stabilité du système boucle fermée dans le cadre d'une commande proportionnelle

Le terme dérivé permet d'améliorer les performances, il n'est pas nécessaire pour démontrer la stabilité. Le terme intégral permet de rattraper les erreurs de modèle. Supposons que le régulateur soit proportionnel et qu'il s'écrive

$$q_u = \frac{\psi(\text{pH}^c)}{\alpha} - K_c(\text{pH}, \tilde{t})(\text{pH} - \text{pH}^c)$$

Le système boucle fermée s'écrit

$$\overline{\text{pH} - \text{pH}^c} = -\frac{1}{\phi(\text{pH}, t)} \left(\psi(\text{pH}) - \psi(\text{pH}^c) \right) - \frac{1}{\delta + 0.2 \frac{\phi(\text{pH}, t)}{\psi'(\text{pH})}} (\text{pH} - \text{pH}^c)$$

Prenons la fonction

$$V(t) = \frac{1}{2} (\text{pH} - \text{pH}^c)^2$$

La dérivée de cette fonction par rapport au temps s'écrit

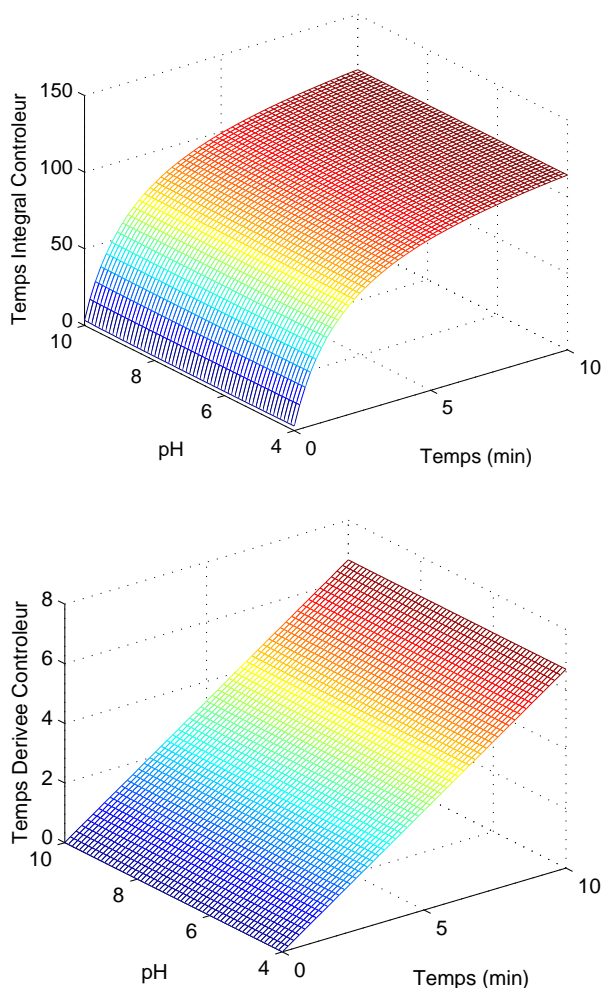
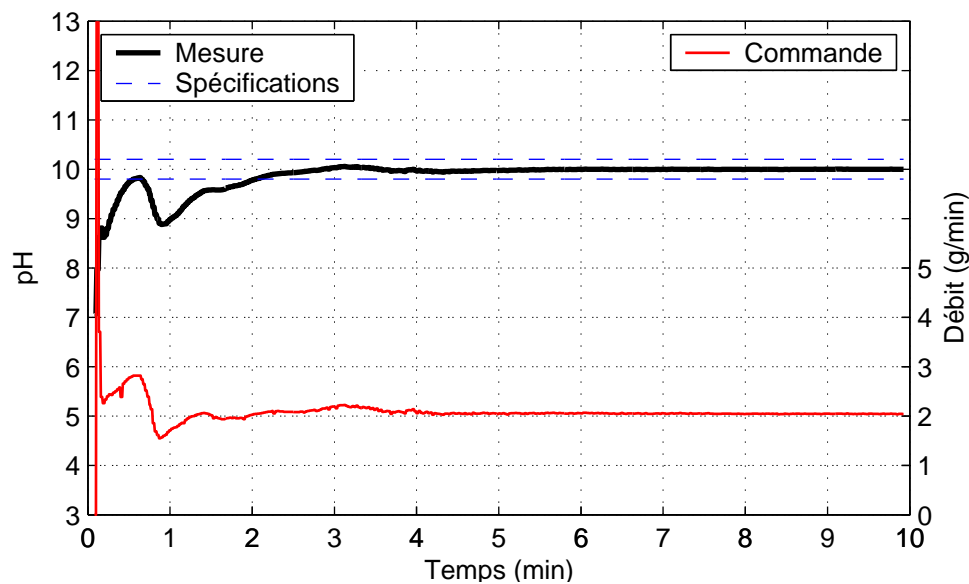
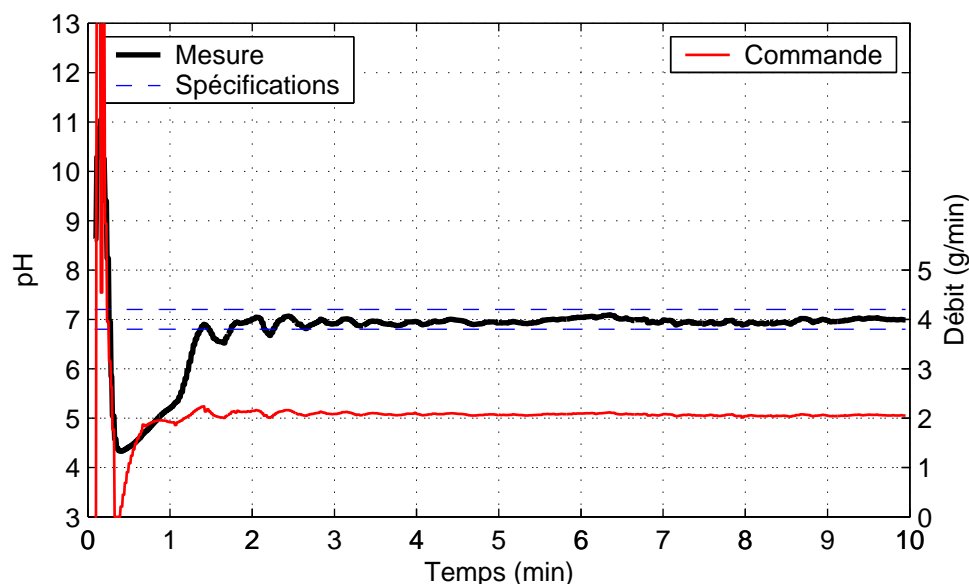


FIG. E.9 – Temps intégral du contrôleur (en s) et temps dérivé du contrôleur (en s)

$$V'(t) = -\frac{1}{\phi(\text{pH}, t)} \left(\psi(\text{pH}) - \psi(\text{pH}^c) \right) (\text{pH} - \text{pH}^c) - \frac{1}{\delta + 0.2 \frac{\phi(\text{pH}, t)}{\psi'(\text{pH})}} (\text{pH} - \text{pH}^c)^2$$

La fonction $\phi(\text{pH}, t)$ est strictement négative, $\psi(\text{pH})$ est une fonction positive décroissante ($\psi'(\text{pH}) \leq 0$). On a $V'(t) \leq 0$ donc $V(t)$ est une fonction positive décroissante le long des trajectoires ; le principe d'invariance de LaSalle dit qu'elle converge vers le plus grand invariant contenu dans l'ensemble $\left\{ \text{pH} \mid V'(t) = 0 \right\}$ soit $\text{pH} = \text{pH}^c$.

FIG. E.10 – Résultat d’une régulation à $\text{pH} = 10$ sur le procédéFIG. E.11 – Résultat d’une régulation à $\text{pH} = 7$ sur le procédé

E.3 Stabilité d'un système linéaire non autonome particulier

Étant donné le système linéaire non autonome suivant

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (\text{E.27})$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ddots & & \\ \vdots & & a_{ij}(t) & \\ a_{n1}(t) & & & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

supposons que $\forall \bar{t} \in C \subset \mathbb{R}$ fixé, $V(x) = x^T P(\bar{t}) x$ soit une fonction de Lyapunov pour le système

$$\dot{x}(t) = A(\bar{t}) x(t)$$

Si la matrice \dot{P} est semi définie négative alors, par la proposition E.1, $V(t, x) = x^T(t) P(t) x(t)$ est une fonction de Lyapunov pour le système (E.27).

Proposition E.1

Soit le système linéaire non autonome suivant

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

Supposons que $\forall \bar{t} \geq t_0$ fixé, la fonction $V(x) = x^T P(\bar{t}) x$ est une fonction de Lyapunov pour le système autonome

$$\dot{x}(t) = A(\bar{t})x(t)$$

telle que $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ soit un point d'équilibre exponentiellement stable.

Supposons qu'il existe k_1 et k_2 deux constantes strictement positives telles que

$$k_1 k_1 \|x\|^2 \leq x^T P(\bar{t}) x \leq k_2 k_1 \|x\|^2$$

Supposons qu'il existe une matrice Q_{min} définie positive telle que

$$x^T Q_{min} x \leq x^T Q(t) x$$

où la matrice $Q(t)$ est définie par

$$Q(t) = -A(t)^T P(t) - P(t)A(t).$$

Supposons que la matrice $\dot{P}(t)$ est une matrice semi définie négative, alors

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = x^T \left(\underbrace{A(t)^T P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t)}_{-Q(t) + \dot{P}(t)} \right) x$$

est définie négative et $x = 0$ est un point globalement exponentiellement stable pour le système (E.27).

Démonstration Immédiate par le théorème E.2. ■

Théorème E.2 ([Kha01])

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système non autonome suivant

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \tag{E.28}$$

avec $x = 0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Soit $V : [0; \infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue différentiable telle que

$$\begin{aligned} k_1 \|x\|^2 &\leq x^T P(\bar{t}) x \leq k_2 \|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x\|^2 \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, où k_1 , k_2 et k_3 sont des constantes positives. Alors, $x = 0$ est un point globalement exponentiellement stable pour le système (E.28).