



**HAL**  
open science

# Contrôle des conditions aux frontières ouvertes d'un modèle de circulation côtière avec une méthode variationnelle d'assimilation de données: application au Golfe du Lion

Vincent Taillandier

► **To cite this version:**

Vincent Taillandier. Contrôle des conditions aux frontières ouvertes d'un modèle de circulation côtière avec une méthode variationnelle d'assimilation de données: application au Golfe du Lion. Planète et Univers [physics]. ENSTA ParisTech, 2004. Français. NNT : 2004TOUL0004 . pastel-00002365

**HAL Id: pastel-00002365**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002365>**

Submitted on 18 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULON ET DU VAR

pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université de Toulon et du Var**  
discipline : océanographie physique

présentée et soutenue le 19 janvier 2004 par  
**Vincent Taillandier**

Sujet

**CONTRÔLE DES CONDITIONS AUX FRONTIÈRES OUVERTES D'UN MODÈLE DE  
CIRCULATION CÔTIÈRE AVEC UNE MÉTHODE VARIATIONNELLE D'ASSIMILATION  
DE DONNÉES ; APPLICATION AU GOLFE DU LION**

Composition du jury

<b>Pierre BROCHE</b>	<b>Président</b>
<b>Bernard BARNIER</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Pierre DE MEY</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Fabienne GAILLARD</b>	<b>Examinatrice</b>
<b>Vincent ECHEVIN</b>	<b>Invité</b>
<b>Laurent MORTIER</b>	<b>Codirecteur de thèse</b>
<b>Jean-Luc DEVENON</b>	<b>Directeur de thèse</b>

## **Contrôle des conditions aux frontières ouvertes d'un modèle de circulation côtière avec une méthode variationnelle d'assimilation de données; application au Golfe du Lion.**

La dynamique de la circulation marine en région côtière peut être appréhendée par des moyens d'observation et des moyens de modélisation. Si le domaine côtier bénéficie de réseaux de mesure variés en résolution et en couverture, la mise en oeuvre d'un outil de modélisation s'avère délicate, particulièrement dans la spécification de conditions initiales et de conditions aux frontières ouvertes appropriées. Cette question de l'estimation des conditions aux limites peut être considérée comme relevant d'une problématique plus générale de détermination des paramètres de fonctionnement d'un modèle à partir de l'information apportée par les observations. Ainsi posé, le problème est abordé par l'outil mathématique du contrôle optimal qui conduit à une opération d'assimilation de données par méthode d'adjoint. L'adaptation et l'application de cette formulation inverse à un problème de modélisation océanographique contrôlé par ses conditions frontières font l'objet de ce travail de thèse.

Une approche 4D-variationnelle d'assimilation pour le contrôle des conditions frontières est ainsi développée et implémentée sur la base du modèle aux équations primitives OPA (version 'toit rigide') et de son adjoint existant. L'algorithme d'inversion est validé sur trois expériences d'identification : (i) les perturbations du forçage barotrope sur la frontière ouverte d'un modèle non-stratifié sont détectées par l'assimilation de courants de surface pris à l'intérieur du domaine ; (ii) le développement d'un courant de densité dans un canal semi-infini et homogène est retrouvé à partir de profils hydrologiques distribués en aval ; (iii) l'observation du « spin up » d'une circulation de plateau induit par un courant côtier permet d'identifier les conditions amonts prévues par le mécanisme de séparation d'un front de Kelvin barocline en incidence sur un talus.

Cette méthode d'assimilation est alors proposée pour des applications s'inscrivant dans la problématique scientifique des échanges côte - large sur la zone du Golfe du Lion. Riche en observations et largement ouverte sur le bassin méditerranéen occidental, cette région est soumise à l'influence du courant Liguro-Provençal qui s'écoule en bord de plateau. L'algorithme d'inversion permet de contrôler cette influence régionale sur la circulation de plateau ; il est donc évalué à travers des expériences réalistes menées dans le mode diagnostique. En particulier, la faculté de réseaux d'observation à détecter des épisodes d'intrusion du courant côtier sur le golfe est traitée suivant leur couverture spatiale et temporelle.

---

### **A variational data assimilation method for open boundary conditions control in a coastal circulation model; application to the Gulf of Lions.**

The marine circulation dynamics in coastal zones can be assessed by observation and modelisation. If coastal domains are quantitatively observed (routine remote sensing, periodic in situ surveys, long term measurements), consistent model set up remain relatively elusive, especially for the prescription of appropriate initial and open boundary conditions. This issue raised by the specification of model boundary conditions is proposed to be posed in the optimal control framework, which leads to a data assimilation problem solved by an adjoint method: these model parameters are determined according to information from observations.

A four-dimensional variational (4DVAR) assimilation method for open boundary control is then developed and implemented on the basis of the primitive equation circulation model OPA and its adjoint. The algorithm is validated with three academic twin experiments: (i) the detection of perturbations on the barotropic forcing along the open boundary of a non-stratified model are obtained by assimilating surface currents taken inside the domain; (ii) the development of a density current inside a semi-infinite homogeneous channel is retrieved from a synthetic data set figuring density profiles distributed downstream; (iii) the observation of the spin up of a coastal circulation induced by a baroclinic Kelvin front incident to a shallow shelf topography permits to identify the upstream boundary conditions linked to the separation at the shelf break.

The Gulf of Lions, which is largely opened to the northwestern Mediterranean basin, appears to be an appropriate study case to investigate mechanisms and magnitudes of coastal lateral export to the open ocean. The assimilation method is applied in situations of regional influence on the gulf circulation. It is assessed in the hindcast mode for monitoring applications, especially on the data related aspect. The regional forcing provided by the Liguro-Provençal current flowing along the shelf break is controlled to study the ability of the available observational networks to detect transient cross shelf intrusions according to their spatial and temporal coverage.

Mon souvenir de ces trois années de thèse sera celui d'un voyage, l'un de ceux initiés sous le prétexte d'une mission, au cours duquel vagabondage et pratique buissonnière auront rempli mon bagage de ces précieux guides sur les lieux-dits du savoir et du savoir-faire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à l'équipe qui m'a encadré, et supporté aussi, durant ce travail de thèse. Dans le rôle de l'expert, Jean-Luc Devenon a été un fin pédagogue, source intarissable de savoir scientifique. Dans le rôle du parrain, Vincent Echevin a été un interlocuteur très efficace et toujours disponible. Dans le rôle du manager, Laurent Mortier a toujours fait preuve à mon égard de confiance et de soutien. Je tiens aussi à remercier les autres membres du jury pour leur lecture critique de ce manuscrit, et pour leur participation active dans ce travail de thèse. La confrontation de ces points de vue a en effet permis de replacer l'étude dans un contexte nouveau et d'en discuter les démarches applicatives proposées.



## TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>I. MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE CÔTIÈRE</b>	<b>5</b>
I.1. DESCRIPTION DU MODÈLE	5
I.1.1 EQUATIONS RESOLUES	5
I.1.2 QUELQUES DETAILS SUR LA MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE	9
I.2. TRAITEMENT DE LA RÉPONSE AU FORÇAGE DU VENT	13
I.2.1 PROCESSUS D'AJUSTEMENT AU CHAMP DE VENT	13
I.2.2 REPRESENTATIVITE DU MODELE	18
I.3 TRAITEMENT DU FORÇAGE RÉGIONAL	24
I.3.1 POSITION DU PROBLEME	25
I.3.2 TOUR D'HORIZON DES METHODES DE TRAITEMENT	25
<b>II. INVERSION DE DONNÉES GÉOPHYSIQUES</b>	<b>29</b>
II.1. DE L'INVERSION À L'ASSIMILATION	29
II.1.1 FORMULATION D'UN PROBLEME INVERSE, POINT DE VUE DETERMINISTE	29
II.1.2 FORMULATION D'UN PROBLEME INVERSE, POINT DE VUE STATISTIQUE	32
II.1.3 APPLICATIONS AUX SYSTEMES GEOPHYSIQUES	35
II.2. L'APPROCHE 4DVAR INCRÉMENTALE	38
II.2.1 FORMULATION DU PROBLEME VARIATIONNEL	38
II.2.2 ORGANISATION DU CODE	41
<b>III. POSITION, IMPLÉMENTATION ET VALIDATION DU CONTRÔLE DES CONDITIONS FRONTIÈRES</b>	<b>45</b>
III.1. TRAITEMENT DU PROBLÈME DE CONTRÔLE FRONTIÈRE	45
III.1.1 CONTROLE FRONTIERE DE LA DYNAMIQUE BAROTROPE	45
III.1.2 CONTROLE FRONTIERE DE LA DYNAMIQUE BAROCLINE EN EQUILIBRE GEOSTROPHIQUE	48
III.1.3 IMPLEMENTATION DU CONTROLE FRONTIERE	51

III.2.	VALIDATION SUR DES EXPÉRIENCES JUMELLES D'IDENTIFICATION	54
III.2.1	FORÇAGE A LA FRONTIERE OUVERTE D'UN MODELE BIDIMENTIONNEL	54
III.2.2	DEVELOPPEMENT D'UN JET COTIER DANS UN CANAL SEMI-INFINI	58
III.2.3	SEPARATION D'UN COURANT COTIER INCIDENT A UN TALUS	66
<b>IV.</b>	<b>APPLICATION AU GOLFE DU LION</b>	<b>83</b>
IV.1	MORPHOLOGIE ET FORÇAGES	83
IV.2	LES MOYENS D'OBSERVATION DEPLOYES	86
IV.3	SENSIBILITE DES RESEAUX D'OBSERVATION AUX VARIATIONS BAROTROPES DE LA CIRCULATION REGIONALE	88
IV.3	CONTROLE DE L'INFLUENCE DE LA CIRCULATION REGIONALE A PARTIR D'UN RESEAU D'OBSERVATION FIXE : PROSPECTIVES	95
	<b>CONCLUSION</b>	<b>103</b>
	<b>RÉFÉRENCES</b>	<b>107</b>

## INTRODUCTION

Ce travail de thèse est dédié à l'étude de la circulation marine en milieu côtier. Il existe bien sûr de multiples approches pour comprendre les mécanismes de ce milieu naturel, chacune s'inscrivant avec son degré de réalisme et son degré d'interprétation. D'une part, notre perception du milieu marin s'appuie sur son observation qui s'enrichit à travers le développement de techniques innovantes d'acquisition de données. D'autre part, l'activité du dynamicien s'est spécialisée aux fluides géophysiques pour représenter la circulation marine à partir d'une large gamme de mécanismes candidats sous diverses hypothèses d'échelle. Notre compréhension de la dynamique du milieu marin s'appuie alors sur son interprétation qui fait appel à l'application d'un modèle de circulation combinée à l'analyse des observations.

L'utilisation des observations dans un modèle de circulation marine, et notamment à travers des méthodes qualifiées d'assimilation de données, est une thématique de recherche particulièrement en vogue ces temps-ci. Depuis que les principaux états stationnaires du système océanique ont été élucidés, notre intérêt se porte dorénavant sur son évolution climatique et sur les régions qui le composent. Et parce qu'il est aux premières places dans le fonctionnement global de notre planète, le milieu marin bénéficie des mêmes attentions que l'atmosphère en termes de moyens technologiques déployés et d'objectifs de prévision. Les méthodes d'assimilation de données développées en météorologie sont alors appliquées avec un certain succès à l'océan global et à ses régions océaniques. Toutefois, le milieu côtier reste confidentiel puisqu'il a été très tôt sujet à une prévision opérationnelle pour appréhender les principaux facteurs de notre activité maritime que sont tempêtes et marées. Les techniques d'emboîtement de modèle ont fait leur preuve en la matière, et elles restent bien sûr d'actualité. C'est peut-être pourquoi peu d'études, comparativement à l'océan global, ont été engagées dans le développement de méthodes d'assimilation de données. Pourtant il apparaît aujourd'hui des velléités pour appliquer au milieu côtier des méthodes approuvées dans le contexte océanique.

L'océanographie côtière est en effet au centre des efforts de recherche de la part de nombreux acteurs de la communauté scientifique. Parce qu'il constitue basiquement l'interface entre le milieu terrestre et le milieu océanique, le domaine côtier reçoit la majorité des apports fluviaux et de la déposition atmosphérique. L'influence anthropique y est forte, avec un impact considérable sur l'écosystème marin. On observe ainsi une forte concentration de matière organique, qui donne lieu à des réactions chimiques avec la couche sédimentaire et qui active un cycle biogéochimique complexe. C'est pourquoi le système côtier joue un rôle fondamental, et toutefois mal connu, dans la quantification des flux de carbone globaux. Et de surcroît à travers le constat d'un niveau croissant de CO<sub>2</sub> atmosphérique et de ses conséquences incertaines, l'évaluation de la part à attribuer au milieu océanique côtier passe par une meilleure compréhension des liens entre la circulation et les cycles biogéochimiques en son sein. Du point de vue du dynamicien, ces indéterminations se posent en termes de mécanisme et de magnitude du transfert de matière vers l'océan hauturier, de contrôle de la physique dans la structure de l'écosystème côtier, de réponses et rétroactions à la variabilité climatique. Pour les résoudre, un certain nombre d'informations sont mises en oeuvre pour participer in fine à la compréhension des



caractéristiques de fonctionnement du système côtier. D'une part en terme d'observation, les moyens modernes et routiniers de télédétection (température de surface, élévation de surface et couleur de l'eau via satellites, courant de surface via radars HF) viennent s'ajouter aux moyens traditionnels de mesure in situ. D'autre part en matière de modélisation, des moyens sophistiqués sont développés pour une représentation de la circulation marine toujours plus réaliste, ainsi que pour le couplage de la dynamique avec des mécanismes biogéochimiques.

Ce travail de thèse s'inscrit dans cette approche d'applicabilité au domaine côtier de techniques maîtrisées dans un contexte océanique. Pourtant, les processus dynamiques en son sein diffèrent notablement de ceux présents dans l'océan hauturier, et ce pour plusieurs raisons. D'une part, les profondeurs considérées sont de l'ordre de quelques centaines de mètres. Les forçages atmosphériques affectent alors une grande partie de la colonne d'eau, et les mouvements marins associés répondent à des échelles spatiales et temporelles identiques. D'autre part, les bassins côtiers ont des dimensions horizontales de l'ordre de la centaine de kilomètres. La circulation côtière est ainsi influencée par la rotation de la Terre au même titre que dans les bassins océaniques, mais aussi par ses limites latérales (les côtes et la circulation à l'échelle du bassin océanique limitrophe). Par conséquent, la gamme des processus dynamiques côtiers est très largement étendue, composée en grande partie de mouvements forcés et couplés avec les milieux environnants ou encore influencés par les forts gradients bathymétriques et le trait de côte. Et pour être en mesure de représenter les différents signaux présents dans les observations, les modèles réalistes côtiers doivent représenter cette palette très riche de processus. C'est pourquoi les problèmes numériques sont nombreux : en plus de la classique spécification de conditions initiales adaptées, les forçages atmosphériques et les forçages latéraux sont à prescrire aux limites ouvertes de grilles spatiales fines et dans une fenêtre temporelle fortement échantillonnée.

Ainsi les enjeux actuels se posent en termes d'identification des phénomènes dynamiques côtiers dans les observations et de leur modélisation réaliste. D'où le rôle des méthodes d'assimilation de données, puisqu'elles permettent une analyse combinée de ces différentes informations. Ces méthodes reposent basiquement sur une relaxation dynamique des sources d'erreur pour corriger les écarts entre une circulation modélisée et la circulation observée. Il existe un certain nombre de méthodologies pour cette étape d'analyse (voir e.g. De Mey, 1997), allant de formulations simplifiées comme l'interpolation optimale à des formulations plus élaborées qui utilisent un filtre de Kalman ou s'appuient sur la théorie du contrôle optimal. L'ensemble de ces approches d'assimilation a pour base (i) le choix d'une source d'erreur à corriger (de manière directe avec le contrôle de paramètres du modèle, ou de manière indirecte avec par exemple l'estimation de l'état initial du modèle) ; (ii) le choix d'un procédé de sélection qui pondère l'influence de chaque information. Lorsque la dynamique du modèle est suffisamment élaborée pour le représenter l'ensemble des signaux observés, ces méthodes d'analyse permettent de fournir un résultat conforme à la réalité. C'est le cas pour l'océan hauturier, où la modélisation réaliste s'appuie largement sur les observations altimétriques fournies par les satellites : les bases de données disponibles sont représentatives en couverture spatio-temporelle des échelles du mouvement océanique

décrit la dynamique du modèle. C'est hélas beaucoup plus difficile en mer côtière : l'ensemble des mesures récoltées, inhomogènes de part leur nature et leur distribution, ne permet plus de contraindre l'ensemble des processus présents. Ainsi, cette diminution du potentiel de sélection s'avère cruciale dans la mise en oeuvre de l'étape d'assimilation.

Notre perception du milieu marin apparaît donc comme la résultante d'une observation, d'une sélection et d'un modèle de processus. Afin de pouvoir améliorer leur analyse combinée pour le milieu côtier, il s'agit tout d'abord d'identifier les causes de leur fonctionnement défectueux. Une première cause vient du fait que les sources d'erreur des modèles côtiers sont nombreuses et leur structure spatio-temporelle est généralement mal connue. Dans la gamme des processus de haute fréquence, les sources d'erreur proviennent essentiellement du forçage atmosphérique (notamment du vent) et de la paramétrisation de la couche de fond (friction et variations bathymétriques). Dans la gamme des processus de basse fréquence, le forçage latéral par la circulation de grande échelle est une source d'erreur importante ; la paramétrisation des processus de mélange vertical limitent la représentation des zones de dilution en présence de panaches. Une seconde cause provient de la manière d'observer, à savoir, quel processus particulier un jeu de données disponible permettrait-il de corriger ? Il est d'abord remarquable que les seuls éléments dynamiques de l'observation (i.e. animés de quelque degré de mouvement) sont pris en compte dans la correction du processus associé aux mêmes échelles spatio-temporelles. Lorsque la démarche d'observation du milieu côtier s'effectue sans la contrainte d'assimilation ultérieure, les mesures récoltées ne sont pas forcément adaptées. Elles peuvent être même inadéquates dans le cas de l'observation de mouvements jugés transitoires, ou à l'inverse stationnaires, pour la dynamique du modèle. La contre mesure est alors de forcer la démarche d'observation aux échelles des processus envisagés. C'est d'ailleurs tout l'intérêt de simuler cette démarche pratique avec l'assimilation afin d'optimiser des futurs réseaux d'observation.

Dans le cadre de ce travail de thèse, le modèle OPA et sa plate-forme d'assimilation variationnelle développée pour l'étude de l'océan Pacifique tropical sont mis en oeuvre dans le contexte d'un bassin côtier, avec une première adaptation du contrôle aux paramètres jugés les plus influents dans cette configuration que sont les conditions aux limites ouvertes. Cette approche apparaît comme innovante devant celle de l'emboîtement de modèles. Elle permettrait en effet la prise en compte de distributions spatio-temporelles de données issues de mesures réalisées à l'intérieur du domaine côtier. La méthode donnerait aussi accès à une approche cognitive pour interroger les liens entre une structure de circulation à l'échelle régionale et son influence sur un caractère local observé dans le domaine côtier.

La présentation de ce travail est articulée en quatre chapitres indépendants.

Dans un premier chapitre, le modèle OPA dans sa version 'toit rigide' est choisi pour décrire les mouvements du fluide en zone côtière, avec ses hypothèses et son fonctionnement algorithmique. Il s'agit alors de savoir dans quelle mesure ce modèle est représentatif des phénomènes liés au forçage du vent. Une étude est menée pour comparer les processus d'ajustement à un champ de vent uniforme décrits dans la littérature avec ceux représentés

par le modèle. Il s'agit aussi de définir une manière de spécifier le forçage régional, ce qui revient à choisir un mode de traitement des conditions aux limites ouvertes du modèle.

Dans un second chapitre, le problème d'inversion de données est exposé. La démarche d'analyse combinée des différentes informations disponibles (issues des observations réelles ou simulées, des lois physiques et statistiques régissant le comportement du fluide) relève en effet de la résolution d'un problème inverse. A partir des formulations déterministe et statistique d'un problème inverse linéaire, les caractéristiques de la solution sont mis en exergue en termes d'existence et d'unicité. Puis les applications opérationnelles et cognitives sont abordées à travers la description d'algorithmes d'assimilation de données pour des modèles réalistes de circulation océanique. On s'attache enfin à la description spécifique de l'algorithme d'assimilation variationnelle utilisé dans ce travail (le 4DVAR). Sa formulation, ses approximations et son organisation sont précisées pour donner les bases de cette méthode d'inversion.

Dans un troisième chapitre, il s'agit de mettre en place et de valider le contrôle des conditions aux limites ouvertes d'un modèle aux équations primitives avec la méthode d'assimilation variationnelle (4DVAR). Le problème inverse est traité dans sa formulation continue pour une dynamique purement barotrope puis purement barocline. Le développement dans le contexte du problème inverse discret repose sur les résultats obtenus dans le cas continu et fournit précisément une manière d'implémenter l'algorithme de contrôle des conditions aux frontières ouvertes. Cet algorithme est alors validé par trois expériences d'identification de complexité croissante, chacune s'appuyant sur des processus physiques décrits analytiquement. (i) Les perturbations du forçage barotrope sur la frontière ouverte d'un bassin non-stratifié sont détectées par l'assimilation de courants de surface pris à l'intérieur du domaine. (ii) Le développement d'un courant de densité dans un canal homogène et ouvert en amont est retrouvé à partir de profils hydrologiques distribués en aval. (iii) L'observation du « spin up » d'une circulation de plateau induit par un courant côtier permet d'identifier les conditions amont prévues par le mécanisme de séparation d'un front de Kelvin barocline en incidence sur un talus.

Dans un quatrième chapitre, les applications à la zone côtière du Golfe du Lion sont abordées. En effet dans le contexte de la contribution des systèmes côtiers au cycle global du carbone, le Golfe du Lion offre un modèle d'étude intéressant. Sa morphologie et les forçages qui induisent ses structures de circulation ainsi que les différents réseaux déployés pour son observation justifient le choix de ce site d'étude. Il s'agit alors d'appliquer la méthode variationnelle d'assimilation (4DVAR) afin d'estimer les conditions frontières à l'interface du Golfe du Lion avec le bassin Nord. Deux points de vues sont développés dans ce sens. Celui de l'observabilité est abordé dans une étude de sensibilité des différents réseaux d'observation aux variations barotropes de la circulation régionale. Celui de la contrôlabilité de perturbations de type front de Kelvin sur une circulation régionale barocline à partir d'un réseau d'observation fixé est mené dans une étude finale à caractère prospectif.

## I. MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE CÔTIÈRE

Les régions côtières sont riches en phénomènes dynamiques qui interagissent à différentes échelles et obéissent à de multiples mécanismes. Un modèle est choisi pour décrire les mouvements en zone côtière, avec ses hypothèses et son fonctionnement algorithmique (en 1<sup>ère</sup> partie). Dans l'ensemble de ce travail, les forçages de la circulation côtière sont donnés par le vent en surface et par la circulation régionale aux frontières ouvertes latérales. Il s'agit alors de savoir d'une part dans quelle mesure le modèle choisi est représentatif des phénomènes liés au forçage atmosphérique (en 2<sup>ème</sup> partie). D'autre part, il s'agit de définir une manière de spécifier le forçage régional, ce qui revient à choisir un mode de traitement des conditions aux limites ouvertes du modèle (en 3<sup>ème</sup> partie).

### I.1. DESCRIPTION DU MODÈLE

La compréhension et la prédiction de la circulation côtière nécessitent le développement de modèles théoriques appropriés. Ils sont naturellement basés sur les principes fondamentaux décrivant la mécanique des fluides, soit la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement. Si l'approche lagrangienne semble être la mieux adaptée pour la traduction des mouvements de la circulation côtière, la conventionnelle approche eulérienne est conservée. Il s'agit ensuite de faire appel à des méthodes numériques afin de discrétiser les équations du mouvement sur une grille à trois dimensions, puis de calculer l'évolution temporelle de chaque variable à chaque point de grille. On utilise pour cela un code numérique existant : OPA, modèle de circulation générale dédié à l'étude des bassins océaniques hauturiers. Le choix de ce modèle a été motivé par l'existence de son modèle adjoint.

#### I.1.1 EQUATIONS RESOLUES

##### *Les équations de bilan*

Le modèle OPA résout les équations primitives, c'est-à-dire les équations de Navier Stokes pour un fluide géophysique incompressible sous plusieurs approximations d'échelle détaillées ci-après. Soit le repère normé ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ) lié à la Terre, avec ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ) décrivant des surfaces géopotentielles et  $\mathbf{k}$  la verticale ascendante. L'hypothèse majeure dans la résolution des équations du mouvement est l'hydrostaticité qui simplifie le bilan des forces suivant la verticale. En effet à l'équilibre, la distribution verticale de pression est donnée par le profil de masse volumique suivant la relation :

$$\partial_z p = - \rho g \quad (1.1)$$

où  $p$  et  $\rho$  désignent les variables thermodynamiques de pression et masse volumique du fluide,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\partial_z$  la dérivée suivant  $\mathbf{k}$ .

Par ailleurs les variations de la masse volumique autour de sa valeur moyenne  $\rho_0$  sont uniquement prises en compte dans l'expression de la pression (1.1). Avec cette approximation dite de Boussinesq, la distribution de pression  $p$  constitue le « moteur » de la dynamique du fluide en l'absence de forçage extérieur. Le fluide étant incompressible, la dérivée particulaire de la quantité de mouvement est reliée linéairement à celle de la vitesse. De plus, l'approximation d'un fluide mince ajoutée à l'hypothèse d'hydrostaticité permet de négliger les échelles verticales du mouvement devant les échelles horizontales. Si  $\mathbf{u}$  désigne la composante horizontale du vecteur vitesse,  $w$  sa composante verticale et  $f$  le paramètre de Coriolis, le bilan de quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + w \partial_z \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -1/\rho_0 \nabla p + \mathbf{D}^u \quad (1.2)$$

où  $\nabla$  désigne l'opérateur de dérivation suivant  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  et  $\partial_t$  la dérivée eulérienne en temps. On détaillera ultérieurement la paramétrisation des contraintes de déformation au sein du fluide. Elles sont représentées à ce stade par leur tenseur dont la divergence est notée  $\mathbf{D}^u$ .

La conservation de la masse prend en compte la divergence du flux de masse  $\rho \mathbf{u}$  ainsi que les variations de la masse volumique du fluide dues à la diffusion de ses traceurs hydrologiques (représentée ci-après par le terme  $\mathbf{D}^t$ ). Mais l'ordre de grandeur de ces variations de masse volumique reste négligeable devant l'ordre de grandeur des gradients de courant à l'échelle d'un bassin côtier. Le bilan de masse peut donc s'exprimer à l'échelle de temps des gradients de courant par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \partial_z w = 0 \quad (1.3)$$

et à l'échelle de temps des variations de masse volumique par l'équation de transport :

$$\partial_t \rho + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + w \partial_z \rho = \mathbf{D}^t \quad (1.4)$$

Ce système d'équations aux dérivées partielles (1.1)-(1.4) résout l'évolution du courant et de la masse volumique du fluide, à partir d'un état initial et sur l'emprise d'un bassin côtier délimité par un trait de côte et des frontières latérales ouvertes. Une condition de flux de quantité de mouvement nul est spécifiée à travers l'interface terre – mer ; une condition de glissement pur est spécifiée pour le courant le long du trait de côte ; une condition de frottement est paramétrée dans la couche de fond. Les profils de courant et de masse volumique sont spécifiés le long des limites ouvertes.

### *Paramétrisation des contraintes de déformation*

L'écoulement dans un bassin côtier est essentiellement turbulent, notamment au sein des couches mélangées en surface et au fond. Pourtant l'échelle de temps des mouvements décrits par les équations primitives est très supérieure à l'ordre de grandeur de la période des fluctuations liées aux mouvements turbulents. Par conséquent, les effets de ces mouvements de plus petite échelle doivent être représentés en terme de structures à l'échelle du modèle. Les contraintes turbulentes internes à la colonne d'eau sont paramétrées avec des coefficients de viscosité  $\nu_v$  constants. Les processus verticaux de petite échelle sont représentés par un opérateur harmonique :

$$\mathbf{D}^u|_z = \nu_v \partial_z^2 \mathbf{u} \quad (1.5)$$

Les flux de quantité de mouvement injectés en surface (via la tension  $\mathbf{t}_s$  exercée par le vent) et dissipés au fond (via la tension  $\mathbf{t}_b$  due aux frottements sur le fond) se traduisent par deux conditions limites de Neumann pour la relation (1.5) :

$$v_v \partial_z \mathbf{u} = 1/\rho_0 \cdot \mathbf{t}_s \text{ en } z = 0, \quad v_v \partial_z \mathbf{u} = 1/\rho_0 \cdot \mathbf{t}_b \text{ en } z = -h \quad (1.6)$$

où  $h$  désigne la hauteur de la colonne d'eau. De même, les contraintes turbulentes latérales sont paramétrées avec des coefficients  $v_L$  constants. Toutefois, deux types de représentations sont envisageables avec le choix d'un opérateur harmonique ou bi-harmonique, donné pour une des deux composantes horizontales par :

$$\mathbf{D}^u|_x = v_L \partial_x^2 \mathbf{u} \text{ ou bien } \mathbf{D}^u|_x = v_L \partial_x^4 \mathbf{u} \quad (1.7)$$

La représentation bi-harmonique (d'ordre quatre) est un traitement purement numérique afin de prendre en compte des échelles horizontales de diffusion plus fines. Elle utilise en effet les variations d'ordre plus élevé du champ de courant.

### *Gradient de pression de surface*

La pression à une profondeur  $z$  de la colonne d'eau peut être directement évaluée par intégration de l'équation (1.1) :

$$p(z) = p_s + p_h(z) = p_s - \int_{[0,z]} \rho(\xi) g d\xi \quad (1.8)$$

où  $p_h$  désigne la pression hydrostatique et  $p_s$  désigne la pression de surface. Deux stratégies peuvent être envisagées pour le traitement du gradient de la pression de surface. La première consiste à définir une nouvelle variable exprimant l'élévation de la surface libre. On peut établir son équation d'évolution – celle du mode externe - et exprimer directement le gradient de pression de surface. L'alternative choisie dans le modèle considère la surface du bassin comme un 'toit rigide'. Sous cette hypothèse, l'intégration suivant la verticale de l'équation (1.3) donne un champ de courant sommé sur la verticale  $\mathbf{U}$  (ou transport barotrope) qui a la propriété d'être non-divergent. Il dérive ainsi d'une fonction de courant  $\psi$  :

$$\mathbf{U} = \mathbf{k} \times \nabla \psi \quad (1.9)$$

Comme  $p_s$  est indépendante de la profondeur, son gradient horizontal s'obtient à partir de la moyenne verticale de l'équation (1.2) :

$$1/\rho_0 \nabla p_s = 1/h [ \mathbf{m} - \mathbf{k} \times \nabla \partial_t \psi ] \quad (1.10)$$

où  $h$  désigne la profondeur du bassin et  $\mathbf{m}$  collecte l'intégration verticale des termes d'advection, de Coriolis, de gradient de pression hydrostatique et de viscosité. La tendance  $\partial_t \psi$  est quant à elle solution de l'équation elliptique obtenue par la transformation  $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$  (1.10) :

$$\nabla \cdot (1/h \nabla \partial_t \psi) = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times 1/h \mathbf{m}) \quad (1.11)$$

Cette approche filtre les ondes de gravité de surface, ces dernières constituant les mouvements de « haute fréquence » de la circulation côtière. Cette hypothèse modifie de manière significative la représentation des processus de réponse au forçage du vent ; les restrictions correspondantes sont concrètement abordées en section I.2.2.

### Comment spécifier les conditions aux frontières ouvertes ?

Si les contraintes intérieures sont supposées être distribuées linéairement, les termes d'advection de quantité de mouvement constituent les seules non linéarités du modèle. Ces termes d'advection deviennent négligeables lorsque leur ratio avec la force de Coriolis est petit, c'est-à-dire pour de petits nombres de Rossby. Ils pourraient aussi être négligés devant les termes de forçage, mais aucun des deux cas n'est validé en ce qui concerne la dynamique des courants côtiers. Toutefois, ces termes non linéaires ont pour effet de transférer la quantité de mouvement d'une région à une autre sans modifier globalement son intensité. L'effet de l'advection ne se traduit donc pas par une modification notable des caractéristiques importantes de la dynamique, telles que les échelles spatiales ou temporelles (Csanady 1982, section 1.8). Dans le cadre d'études de processus, le modèle sera considéré faiblement affecté par ses non linéarités. En conséquence, on s'appuie essentiellement dans ce travail sur une décomposition théorique de la dynamique en deux modes pour la mise en place des expériences et la compréhension des résultats. Un mode barotrope qui rend compte des mouvements de la colonne d'eau et un mode barocline qui rend compte des mouvements internes. Ces deux modes sont liés par les termes d'advection, on se permet donc de passer outre ce lien non linéaire sans pour autant l'éteindre dans le code.

Cette décomposition peut aussi s'appliquer pour la spécification des conditions aux frontières ouvertes. L'influence de la circulation régionale est alors séparée en deux modes. D'une part, le gradient de pression de surface (mode barotrope) est résolu à travers un problème elliptique non homogène donné par l'équation (1.11) et une condition de Dirichlet sur  $\partial_t \psi$  le long des limites latérales. Cette condition est nulle à la côte. Aux limites ouvertes, elle s'exprime en fonction de la composante normale du transport à la frontière suivant :

$$\partial_t \psi(M) = \int_{AM} \mathbf{k} \cdot (\partial_t \mathbf{U} \times d\mathbf{M}) \quad , \quad M \in (AB) \quad (1.12)$$

où (AB) représente une frontière ouverte,  $d\mathbf{M}$  l'abscisse curviligne le long de (AB) et  $\partial_t \mathbf{U}$  la tendance du transport spécifiée par la circulation régionale. La propriété de conservation du volume du bassin imposée dans l'hypothèse du 'toit rigide' est implicitement respectée puisque les valeurs de  $\partial_t \psi(A)$  et  $\partial_t \psi(B)$  sont égales tant que A et B appartiennent au même trait de côte. On envisage uniquement dans cette étude le cas d'une frontière ouverte continue, soit  $\partial_t \psi(A) = \partial_t \psi(B) = 0$ . D'autre part, les gradients de pression hydrostatique (mode barocline) sont résolus à partir du profil hydrologique sur la limite ouverte. Le courant géostrophique associé s'exprime ainsi le long de la frontière :

$$\mathbf{u}(z) = g/f \cdot \mathbf{k} \times \nabla \left( \int_{[0,z]} \rho(\xi) / \rho_0 d\xi \right) \quad \text{avec} \quad \int_{[0,-h]} \mathbf{u}(\xi) d\xi = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

Un courant résiduel s'ajoute à ce profil géostrophique ; il est de moyenne verticale nulle, puisque la composante barotrope est par ailleurs spécifiée.

## I.1.2 QUELQUES DETAILS SUR LA MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE

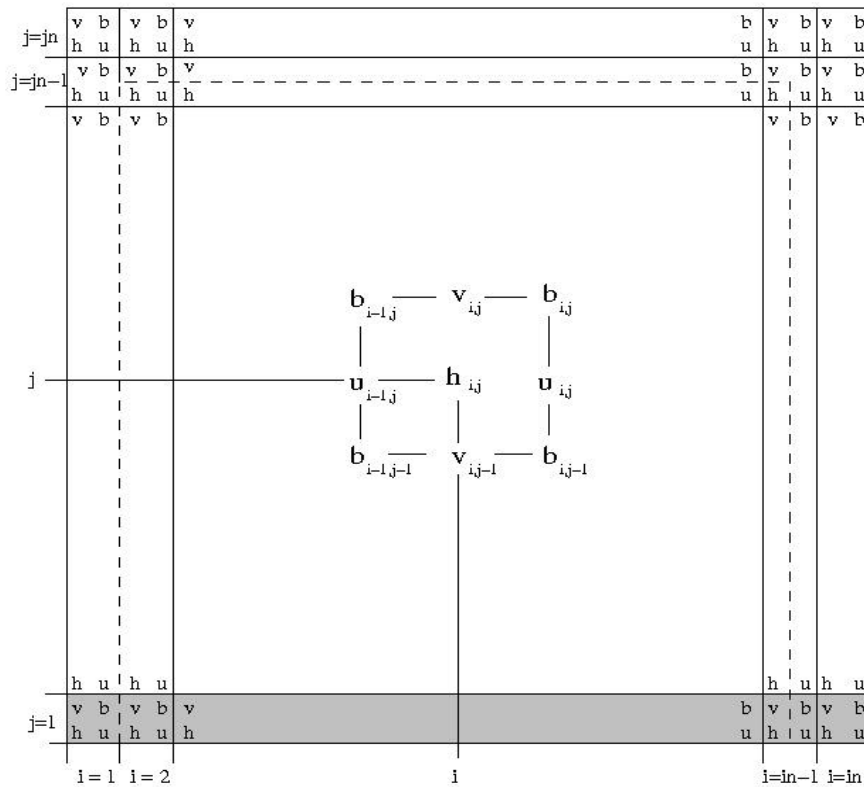
Le modèle aux équations primitives OPA calcule l'évolution temporelle d'un vecteur d'état constitué des trois variables prognostiques suivantes : les composantes zonale et méridienne du champ 3D de courant  $\mathbf{u}$  et le champ 3D de la masse volumique  $\rho$ . Les autres variables intervenant dans les équations primitives – le champ de pression  $p$ , la fonction de courant  $\psi$  et le champ de vitesse verticale  $w$  – peuvent alors être diagnostiquées via les relations détaillées en section I.1.1.

### *Arrangement des variables*

A partir d'un vecteur d'état pris au temps  $t$ , les différents termes des équations d'évolution (1.2) et (1.4) sont évalués pour calculer les tendances du courant  $\partial_t \mathbf{u}$  et de la masse volumique  $\partial_t \rho$ . La discrétisation spatiale des opérateurs impliqués dans ces équations est basée sur l'utilisation de schémas aux différences finies du second ordre centrés. Ce point est détaillé dans la notice du code (Madec et al. 1998). Il est seulement à préciser que le schéma de diffusion horizontale bi-harmonique est réduit à sa forme harmonique le long de la frontière ouverte. Par conséquent, les opérateurs de dérivation spatiale discrétisés sont bien définis à la frontière ouverte à partir de la spécification d'une seule maille de conditions aux limites.

L'arrangement des variables est effectué sur une grille de type C dans la classification d'Arakawa. Les bassins côtiers sont de faible extension devant le rayon de la terre, et par conséquent, tout effet de sphéricité est négligé dans la définition de la géométrie horizontale du bassin. Cette dernière est ainsi directement transposée sur une grille horizontale isotrope d'échantillonnage  $\Delta s$ . La dimension verticale du bassin est, dans la présente version d'OPA, construite sur la base de coordonnées géopotentielle : la coordonnée de fond ajuste la bathymétrie réelle du bassin à la précision de l'échantillonnage vertical choisi. Ce type de discrétisation verticale est très utile pour une bonne représentation des processus de surface (liés aux échanges à l'interface air – mer), ainsi que d'un point de vue numérique pour l'implémentation des gradients de pression hydrostatique. Mais cette approche s'avère imprécise dans la représentation de l'influence de la topographie sur la structure des courants côtiers ou encore sur la dynamique de la couche limite de fond (détaillé en section I.2.2). L'emprise du modèle est ainsi construite sur un nombre fini de cellules de calcul. Chaque cellule  $(i, j, k)$  – dont les coordonnées sont respectivement fonctions de la longitude, latitude, profondeur - est centrée sur le noeud du traceur. Le noeud de la composante zonale de courant est décalé à l'Est  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ , le noeud de sa composante méridienne est décalé au Nord  $(i, j + \frac{1}{2}, k)$ , le noeud de la fonction de courant est décalé au Nord-Est  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ , et enfin le noeud de la vitesse verticale est décalé vers le haut  $(i, j, k - \frac{1}{2})$ . L'arrangement de ces variables sur une grille bidimensionnelle est donné en Figure 1.1. Les équations primitives sont ainsi discrétisées en tous les points  $(i, j, k)$  intérieurs à la grille. A l'interface terre - mer, les limites du bassin sont imposées par un système de masques sur les variables d'état (en pointillés sur la Figure 1.1) pour implémenter la condition de flux nul. Les conditions aux frontières ouvertes sont à spécifier dans la zone grisée.





**Fig.1.1** Arrangement des variables scalaires sur une grille horizontale centrée (k est alors fixé).  $h_{i,j}$  représente le noeud du traceur,  $b_{i,j}$  celui de la fonction de courant,  $u_{i,j}$  celui de la composante zonale du courant,  $v_{i,j}$  celui de sa composante méridienne. Le trait de côte est représenté en ligne pointillée, les mailles des conditions aux frontières ouvertes sont représentées sur fond grisé.

### Discretisation des opérateurs temporels

L'évolution temporelle du vecteur d'état est discrétisée avec l'échantillonnage d'un pas de temps  $\Delta t$ . L'intégration des tendances s'effectue à l'aide d'un schéma « saute mouton », couramment utilisé pour les processus advectifs des fluides peu visqueux.

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^{t-\Delta t} + 2\Delta t \partial_t \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \rho^{t+\Delta t} = \rho^{t-\Delta t} + 2\Delta t \partial_t \rho \quad (1.14)$$

Ce schéma utilise trois pas de temps excepté dans la première itération : un pas d'Euler fait alors évoluer le système depuis l'état initial contrôlant le système. Mentionnons que ce schéma d'évolution engendre le développement un bruit numérique de haute fréquence, appelé le « time splitting » : les séries paires  $[2k.\Delta t]_{k>0}$  et impaires  $[(2k+1).\Delta t]_{k>0}$  ont tendance à diverger. C'est pourquoi le filtrage temporel d'Asselin est utilisé pour corriger la valeur du vecteur d'état à la fin de chaque itération au détriment de l'introduction d'une diffusion numérique explicite.

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{u}^t + \gamma (\mathbf{u}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{u}^t + \mathbf{u}^{t+\Delta t}) \quad \text{et} \quad \rho^t = \rho^t + \gamma (\rho^{t-\Delta t} - 2\rho^t + \rho^{t+\Delta t}) \quad (1.15)$$

où  $\gamma$  est le coefficient de diffusion numérique choisi empiriquement (de l'ordre de 0.05).

Les opérateurs de diffusion horizontale sont différenciés sur un schéma explicite « saute mouton ». Ce schéma de diffusion est stable sous la condition d'une limitation sur les coefficients de viscosité (ou diffusivité) turbulente. Dans le cas d'un opérateur harmonique (*resp.* bi-harmonique), cette condition s'exprime par :

$$v_L \leq \Delta s^2 / 16.\Delta t \quad (\text{resp. } v_L \leq \Delta s^4 / 64.\Delta t) \quad (1.16)$$

Les opérateurs de diffusion verticale sont différenciés sur un schéma implicite « saute mouton », qui a la propriété d'être inconditionnellement stable. Il n'y a donc pas de contrainte sur la paramétrisation des coefficients de viscosité (ou diffusivité) turbulente verticale.

### Résolution du gradient de pression de surface

La résolution numérique du gradient de pression de surface s'avère être le seul point délicat dans le traitement algorithmique de l'ouverture d'une frontière latérale. C'est pourquoi elle est détaillée ci-après, sous l'angle d'un bilan énergétique associé. La variation d'énergie cinétique totale due au travail des forces de pression de surface sur l'emprise d'un bassin de volume  $\Omega \times h$  s'écrit :

$$\int_{[0,h]} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}_{lp} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \cdot dz = \int_{[0,h]} \int_{\Omega} -1/\rho_0 \nabla p_s \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \cdot dz = \int_{\Omega} (1/h [\partial_t \mathbf{U} - \mathbf{m}] \cdot \mathbf{k} \times \nabla \psi) \, d\Omega \quad (1.17)$$

égalité obtenue à partir des équations (1.9) et (1.10), avec  $d\Omega \cdot dz$  un volume élémentaire du bassin. Si la limite latérale du bassin a une surface  $\Gamma \times h$ , la relation (1.17) s'écrit à l'aide de la formule de Green :

$$\int_{[0,h]} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}_{lp} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \cdot dz = \int_{\Omega} [\mathbf{k} \cdot (\nabla \times 1/h \mathbf{m}) - \nabla \cdot (1/h \nabla \partial_t \psi)] \cdot \psi \, d\Omega - \int_{\Gamma} 1/\rho_0 p_s \mathbf{U} \cdot d\mathbf{G} \quad (1.18)$$

avec  $d\mathbf{G} \cdot dz$  un vecteur surfacique élémentaire sortant. Ainsi, dans l'approximation 'toit rigide', la relation (1.11) permet d'exprimer cette variation d'énergie cinétique totale en fonction du « flux sur la quantité  $1/\rho_0 p_s$  » à travers la limite latérale du domaine. Lorsque le bassin est fermé, l'énergie cinétique totale associée au travail des forces de pression de surface est strictement conservé, puisque le terme de bord s'annule  $\mathbf{U} \cdot d\mathbf{G} = 0$ . Si la frontière est ouverte, la variation d'énergie cinétique à l'intérieur du domaine est associée à la pression de surface du réservoir mitoyen.

Cette propriété de conservation globale est numériquement satisfaite à la précision du solveur elliptique impliqué à chaque pas de temps dans la résolution de l'équation (1.11). La forme discrétisée de cette dernière s'écrit au pas de temps  $t$  et au point  $M(i, j)$  :

$$\partial_t \psi_{i+1,j} + \partial_t \psi_{i-1,j} + \partial_t \psi_{i,j+1} + \partial_t \psi_{i,j-1} - 4.\partial_t \psi_{i,j} = \text{RHS}_{i,j} \quad \text{avec} \quad \text{RHS}_{i,j} = [\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{m})]_{i,j} \quad (1.19)$$

dans le cas où le bassin est de profondeur constante. Les valeurs numériques de  $\partial_t \psi$  aux points frontières sont masquées. Aux points  $M(im, jm)$  intérieurs au bassin et mitoyens à ses limites, l'influence barotrope extérieure est prescrite dans le terme de droite de l'équation (1.19) par :

$$\text{RHS}_{im,jm} = [\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{m})]_{im,jm} - \sum_{A \rightarrow N} \partial_t \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, \Delta s \quad , \quad N(i, j) \in (AB) \quad (1.20)$$

où  $\partial_t \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$  est la tendance du transport normal à la frontière, soit une forme discrétisée de la relation (1.12). Avec un ordonnancement naturel d'Ouest en Est et du Nord au Sud des

variables  $\partial_t \psi$  prises à l'intérieur du domaine dans un vecteur  $Z$ , l'équation elliptique (1.11) se discrétise selon un système linéaire de la forme :

$$A.Z = \text{RHS} \quad (1.21)$$

avec  $A$  une matrice tridiagonale par blocs et  $\text{RHS}$  est rangé dans l'ordonnement naturel. La résolution du système (1.21) est effectuée par un solveur linéaire qui utilise une méthode itérative de sur-relaxation. La solution  $Z^p$  obtenue à la  $p^{\text{ème}}$  itération est définie à partir de  $Z^{p-1}$  par une relation récurrente d'ordre un, de la forme :

$$Z^p = G(\omega) Z^{p-1} + Y$$

$$\text{avec } G(\omega) = (I - \omega D^{-1} L^{-1})^{-1} ((1-\omega)I + \omega D^{-1} U) \text{ et } Y = (I - \omega D^{-1} L^{-1})^{-1} \omega D^{-1} \text{RHS} \quad (1.22)$$

où  $D$ ,  $-L$  et  $-U$  sont respectivement les parties diagonale, triangulaire inférieure et triangulaire supérieure de  $A$  ;  $I$  est la matrice identité et  $\omega$  un paramètre d'accélération de la convergence. Les conditions de convergence et le taux de convergence optimal théorique, avec le choix de  $\omega$ , ont été étudié par Smith (1978). Par ailleurs, les matrices manipulées ci-dessus sont de grande dimension ; elles ne sont pas stockées en mémoire de façon effective puisque la résolution est effectuée par un algorithme « élégant » qui évite le traitement numérique des matrices  $G(\omega)$  et  $Y$ .

1. initialisation :  $z^0_{i,j} = 2 \partial_t \psi_{i,j} - \partial_{t-1} \psi_{i+1,j}$

2. itération  $p$ , jusqu'à convergence

2.1. expression du résidu  $R^p_{i,j} = z^p_{i+1,j} + z^p_{i,j+1} + z^p_{i-1,j} + z^p_{i,j-1} - 4 z^p_{i,j} - \text{RHS}_{i,j}$

2.2.  $z^{p+1}_{i,j} = z^p_{i,j} + \omega R^p_{i,j}$

2.3. test de convergence :  $\| R^p \| / \| \text{RHS} \| \leq \varepsilon$  où  $\| \text{RHS} \| = \sum_{i,j} \text{RHS}_{i,j}^2$

C'est donc à cette précision  $\varepsilon$  que l'approximation 'toit rigide' est vérifiée dans le modèle. En pratique, le solveur est paramétré avec une précision  $\varepsilon = 10^{-5} - 10^{-12}$  et un coefficient de convergence  $\omega = 1.76$ .

### *Environnement d'utilisation*

En raison du grand nombre de points de grille et d'importantes durées d'intégration, l'utilisation d'un tel modèle est sévèrement contrainte par le temps de calcul. C'est pourquoi les expériences numériques sont lancées sur des machines très performantes (supercalculateurs) et des efforts sont menés afin de paralléliser les opérations sur plusieurs sous-grilles. Une autre contrainte vient s'ajouter à l'environnement numérique requis pour l'utilisation d'algorithmes variationnels : celle de la place mémoire active. Il est en effet nécessaire de conserver l'ensemble de la trajectoire modèle et son stockage disque ralentit de manière drastique le temps d'intégration. C'est pourquoi l'ensemble des travaux numériques constituant ce travail a été réalisé au centre de calcul du CNRS – l'IDRIS – avec des calculateurs du type NEC SX5. Sur cette base, le temps de calcul d'une importante simulation est de l'ordre de quelques heures. Le langage de codage utilisé est le FORTRAN 77. Les sorties de modèle sont stockés sous le format NetCDF et sont traités à l'aide d'un logiciel de représentation adapté. Si l'environnement numérique choisi pour ce travail s'avère

optimal et performant, c'est au détriment de la lenteur de connexion à partir d'une station de travail déportée.

## I.2. TRAITEMENT DE LA RÉPONSE AU FORÇAGE DU VENT

On s'intéresse maintenant aux états d'équilibre de la circulation dans un bassin forcé par le vent, et comment ces états sont atteints. En réponse à un forçage de vent, un fluide tournant et homogène atteint un état d'équilibre dynamique - appelé l'équilibre géostrophique – différent de l'état de repos. C'est par une approche analytique que sont décrits les structures stationnaires correspondantes - issues de Csanady (1982) - et les mécanismes d'ajustement à ces structures de circulation - issus de Crépon (1971). Il s'agit alors d'évaluer la représentativité du modèle OPA face à ces processus côtiers : est-ce que ces états d'équilibre existent dans les solutions admissibles du modèle ? Si oui, comment peuvent-ils être générés et quels sont les paramètres qui influencent la solution du modèle ?

### I.2.1 PROCESSUS D'AJUSTEMENT AU CHAMP DE VENT

#### *L'équilibre géostrophique*

La tension de vent exercée à la surface de la mer représente le forçage majeur de la circulation côtière. Si cette force pariétale n'affecte directement que la couche de surface, par friction interne, elle agit en fait sur toute la colonne d'eau à travers la contrainte normale qu'exercent les variations de la pression en surface. Ces variations de pression sont équivalentes à l'élévation de la surface libre par rapport au niveau marin moyen engendrée par la présence d'une côte ou encore par les cisaillements de la tension de vent. La solution stationnaire de l'équation de bilan de quantité de mouvement (1.2) linéarisée et non diffusive représente l'équilibre géostrophique, c'est-à-dire l'équilibre entre la force de Coriolis et le gradient de pression :

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -1/\rho_0 \nabla p \quad (1.23)$$

Lorsque l'océan est stratifié de façon barotrope (i.e. les isopycnes sont confondues avec les surfaces géopotentielles), le gradient de pression hydrostatique est nul et seules les variations de la pression de surface  $p_s$  sont prises en compte. On se place dès lors dans cette situation barotrope du bassin. Le profil de courant est alors verticalement homogène, et l'écoulement est identifié au mouvement de la colonne d'eau dans son ensemble. En introduisant la fonction de courant  $\psi$  et l'élévation de la surface libre liée à la pression de surface  $\zeta = \rho_0 g.p_s$ , on identifie la relation suivante à partir de l'intégration de (1.23) :

$$f.\psi = gh.\zeta \quad (1.24)$$

$\mathbf{u}$  étant relié à  $\psi$  par la relation (1.9). L'écoulement suit dans cet état les lignes isobares – qui correspondent aux lignes de même élévation de la surface libre. La dernière relation contient une échelle de longueur  $R = c / f$  appelée le rayon de déformation de Rossby où  $c = (gh)^{1/2}$

représente la célérité de l'onde de gravité en absence de rotation. Pour des longueurs caractéristiques petites devant  $R$ , les effets de la rotation sont faibles ; alors que pour des échelles comparables ou grandes devant  $R$ , ces mêmes effets deviennent importants.

### *La dérive d'Ekman*

La tension de vent induit une friction  $\mathbf{t}_s$  à la surface du bassin qui est transmise dans une couche superficielle. En supposant une distribution de pression et un forçage uniformes, la forme stationnaire et linéarisée du bilan de quantité de mouvement (1.2) s'écrit dans une couche limite de surface de la colonne d'eau suivant :

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \nu_v \partial_z^2 \mathbf{u} \quad (1.25)$$

où le coefficient de viscosité turbulente verticale  $\nu_v$  est constant dans le modèle. Les conditions aux limites sont données par (1.6), où les frottements au fond ne sont pas pris en compte dans cette couche limite de surface ( $\mathbf{t}_b = \mathbf{0}$ ). L'intégration de (1.25) fait apparaître un transport  $\mathbf{U}_e = -1/\rho_0 f \mathbf{k} \times \mathbf{t}_s$  à la droite de la direction du vent (dans l'hémisphère Nord) dans une couche d'épaisseur  $D = (2\nu_v/f)^{1/2}$  ; on suppose d'ailleurs que la profondeur du bassin est supérieure à  $D$  (qui est de l'ordre de quelques dizaines de mètres). Dans cette couche d'Ekman la distribution verticale de courant associée à la tension du vent suit un hodographe en spirale avec une norme évanescence sur l'épaisseur caractéristique  $D$ . L'effet du vent est donc paramétré dans le modèle à travers le coefficient  $\nu_v$  qui définit la profondeur de cette couche limite turbulente. La dérive d'Ekman associée est quant à elle dépendante de l'échantillonnage vertical de la grille. Le choix de coordonnées géocentriques permet une grande uniformité horizontale dans la modélisation de ce processus.

### *Equation d'évolution de la surface libre*

On se place dans le cas d'un bassin rectangulaire à fond plat, schématisé par la Figure 1.2. Les frontières du bassin suivent les directions Nord-Sud (de longueur  $\alpha$ ) et Est-Ouest (de longueur  $\beta$ ). On exprime le mouvement du fluide homogène en fonction de l'élévation de la surface libre. L'intégration sur la verticale de l'équation du bilan de quantité de mouvement (1.2) linéarisée et non diffusive donne une première relation entre  $\mathbf{U}$  et  $\zeta$  :

$$\partial_t \mathbf{U} + f \mathbf{k} \times \mathbf{U} = -c^2 \nabla \zeta + 1/\rho_0 \mathbf{t}_s \quad (1.26)$$

L'intégration verticale de l'équation de continuité (1.3) relie la divergence du transport avec la tendance de  $\zeta$ . Dans l'approximation 'toit rigide' cette tendance est nulle par définition, ce qui induit l'hypothèse de non divergence du transport. De manière générale, on a la relation :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} + \partial_t \zeta = 0 \quad (1.27)$$

Quelques manipulations de ce système d'équations (1.26)-(1.27) permettent d'obtenir une équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\zeta$ . La divergence horizontale de (1.26) fait apparaître la divergence du transport donnée par (1.27) ; le terme de Coriolis est transformé par un produit mixte pour mener à la relation :

$$-\partial_t^2 \zeta - f \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = -c^2 \nabla^2 \zeta + 1/\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{t}_s \quad (1.28)$$

De même, le rotationnel de (1.26) donne une relation entre la vorticité potentielle et l'élévation de la surface libre. En utilisant l'équation (1.27) et une intégration temporelle sur une durée  $T$ , on obtient :

$$\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = f\zeta + 1/\rho_0 \int_T \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}_s) dt \quad (1.29)$$

Cette dernière intégration temporelle est nécessaire pour obtenir une équation d'évolution d'ordre deux en temps sur l'élévation de la surface libre. Cette opération reste valable si le terme associé au rotationnel de vent reste suffisamment faible, ce qui impose une durée de validité  $T$  petite. Au-delà, la mise en mouvement du bassin initialement contrôlée par la force d'inertie acquiert un comportement asymptotique forcé par un champ de vent cisailé et dissipé par les frottements au fond. Dans la période de validité  $T$ , l'élévation de la surface libre vérifie une équation aux dérivées partielles forcée par deux termes liés à l'hétérogénéité spatiale du vent :

$$-\partial_t^2 \zeta - f^2 \zeta + c^2 \nabla^2 \zeta = 1/\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{t}_s + f/\rho_0 \int_T \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}_s) dt \quad (1.30)$$

Avant d'étudier les solutions de cette dernière équation d'évolution pour différentes configurations de vent, sa résolution fait appel à des conditions initiales et aux limites que l'on peut définir à ce stade. La condition limite spatiale annule le transport normal à la côte. On admet de plus qu'il y a frottement sans glissement le long des limites, c'est-à-dire un transport total nul à la côte (soit  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ ). Ainsi, l'équation (1.26) fournit une condition limite le long des côtes sur  $\zeta$  donnée par la relation :

$$\nabla \zeta = 1/\rho_0 c^2 \mathbf{t}_s \quad (1.31)$$

La condition initiale correspond à l'instant d'impulsion du vent sur le bassin au repos. Ainsi,  $\zeta(t=0) = 0$ . La durée  $T$  du forçage est limitée afin de mettre en évidence une phase de « spin up » de la circulation (son ajustement au champ de vent), puis une phase correspondant à un nouvel état d'équilibre.

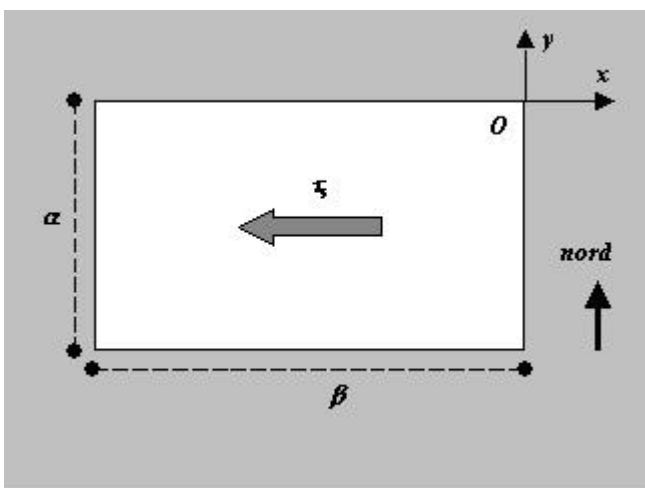


Fig.1.2 Bassin côtier rectangulaire, à fond plat de profondeur  $h$  mis en mouvement par un vent d'est uniforme et constant.

### Cas d'un vent constant, uniforme et perpendiculaire à la côte

On étudie la réponse à un vent d'Est uniforme, « au voisinage » des frontières du bassin et en dehors de ce voisinage. On s'attachera à définir l'échelle spatiale caractéristique de la transition côte - large *a posteriori*. Au bord de la frontière Est ( $x \leq 0$ ), un vent perpendiculaire à la côte induit des lignes isobares de surface parallèles à la côte. L'écoulement en équilibre géostrophique suit ces isobares, et l'on peut considérer dans ce voisinage une solution indépendante de  $y$ ; cette hypothèse est valable dans le cadre de régimes lentement variables. Une solution particulière indépendante du temps est donnée par la résolution de l'équation suivante :

$$c^2 \partial_x^2 \zeta - f^2 \zeta = 0 \quad \text{avec} \quad \partial_x \zeta (x=0) = -\tau_s / \rho_0 c^2 \quad (1.32)$$

La solution correspondante  $\zeta = -\tau_s / (\rho_0 f c) . e^{x/R}$  caractérise l'élévation de la surface libre en présence de la côte, et par conséquent diagnostique les variations de pression de surface. Dans une zone proche de la côte, dont le voisinage est donné par  $|x| \ll R$ , la force de pression équilibre la tension de vent. En revanche au large ( $|x| \gg R$ ), la seule force en présence est donnée par la tension de vent ce qui suggère une dérive d'Ekman. Cette dernière structure n'existe bien sûr que dans l'hypothèse d'un bassin d'emprise adaptée, i.e.  $\alpha \gg R$ . Il faut de plus  $\beta \gg R$  pour négliger l'effet des frontières Nord et Sud sur cette dernière solution.

Si l'on considère les transports associés à cette réponse dans le voisinage de la côte et au large, la solution peut être décomposée en une partie géostrophique liée au gradient de pression de surface, et une partie « ekmanienne » prenant en compte les frictions internes dues au vent :  $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_g(t) + \mathbf{U}_e(t)$ . La forme stationnaire de  $\mathbf{U}_e$  représente la dérive d'Ekman décrite précédemment. En revanche, sa forme non stationnaire vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$\partial_t \mathbf{U}_e + f \mathbf{k} \times \mathbf{U}_e = 1/\rho_0 \mathbf{t}_s \quad (1.33)$$

La solution de cette dernière équation s'écrit  $\mathbf{U}_e = -\tau_s / (\rho_0 f) [1 - \cos ft ; \sin ft]$ . Ainsi, le profil de courant associé se développe vers sa forme stationnaire en spirale sur une extension  $D = (2\nu_v / f)^{1/2}$  à travers une oscillation à la fréquence d'inertie. Cette oscillation d'inertie pénètre graduellement au temps  $t$  à une profondeur  $(2\nu_v . t)^{1/2}$  tout en conservant un transport d'amplitude constante. Une fois la quantité de mouvement répartie sur toute la colonne d'eau, ces oscillations deviennent imperceptibles. Le transport total  $\mathbf{U} = [U ; V]$  vérifie quant à lui le système d'équations suivant :

$$\partial_t U - f V = -c^2 \partial_x \zeta - 1/\rho_0 \tau_s \quad (1.34)$$

$$\partial_t V + f U = 0 \quad (1.35)$$

Le transport normal  $U$  est nul le long de la côte, ce qui inhibe tout développement de transport tangent  $V$ . Au large, un transport normal transitoire apparaît après une durée de l'ordre de  $f^{-1}$ , ce qui permet l'établissement d'un transport tangent. La solution stationnaire correspondante est donnée par  $\mathbf{U} = [0 ; \tau_s / \rho_0 f (1 - e^{x/R})]$ , ce qui correspond à une partie géostrophique  $\mathbf{U}_g = [0 ; -\tau_s / \rho_0 f . e^{x/R}]$ . Dans un voisinage de la côte, la force de Coriolis ajuste la force liée au forçage du vent sur toute la colonne d'eau en équilibrant le gradient de tension en surface et le gradient de pression au fond. La dérive d'Ekman localisée à la surface est ainsi

exactement équilibrée par le profil du courant géostrophique de toute la colonne d'eau. La circulation correspondante est schématisée Figure 1.3.

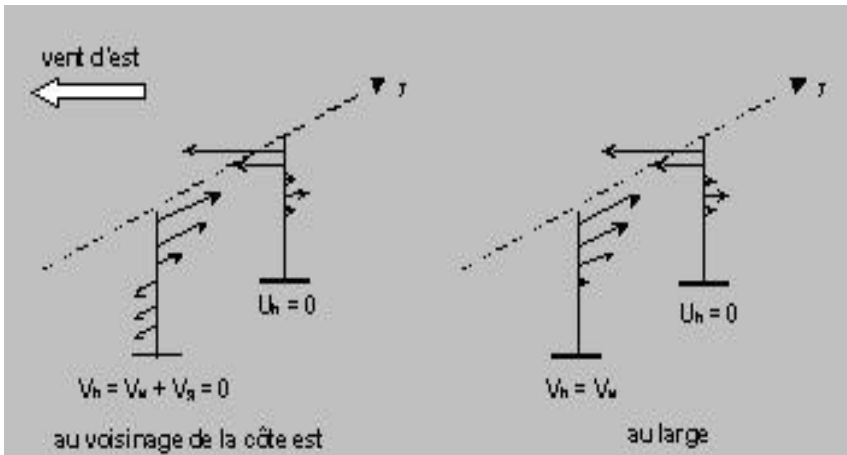


Fig.1.3 Ajustement à un forçage de vent constant en uniforme perpendiculaire à la côte au voisinage de cette côte et au large.

*Cas d'un vent constant, uniforme et parallèle à la côte*

La réponse au vent d'est est maintenant traitée le long de la frontière nord ( $y \leq 0$ ). Dans un voisinage petit devant R, la tension de vent sur le bassin au repos ne crée aucune variation de pression de surface puisque la présence de la côte n'a aucune influence. Toutefois, le transport est uniformément accéléré dans une direction parallèle à la côte, ce qui engendre un champ de pression en équilibre géostrophique. La résolution de l'équation (1.26) dans cette configuration fournit les conditions aux limites suivantes à la côte :

$$\partial_y \zeta (y=0) = ft / \rho_0 c^2 \cdot \tau_s \quad \text{et} \quad \mathbf{U}(y=0) = [ -\tau_s t / \rho_0, 0 ] \quad (1.36)$$

la solution asymptotique en temps de l'élévation de la surface libre est donnée par (1.30). Elle s'écrit:  $\zeta = \tau_s t / \rho_0 c \cdot e^{y/R}$ . Par conséquent, la résolution de l'équation (1.26) conduit à un transport  $\mathbf{U} = \tau_s / \rho_0 [ -t \cdot e^{y/R}, 1/f (1 - e^{y/R}) ]$ . La composante du transport parallèle à la côte résulte de l'équilibre géostrophique avec l'élévation de la surface libre au voisinage de la côte ( $|y| \ll R$ ). La composante normale se développe excepté au voisinage de la côte ; elle est uniquement composée par la dérive d'Ekman fournie par le vent parallèle à la côte. Ainsi, le transport passe graduellement d'un transport géostrophique pur à une dérive d'Ekman pure lorsque l'on s'éloigne de la côte. La circulation correspondante est schématisée en Figure 1.4.

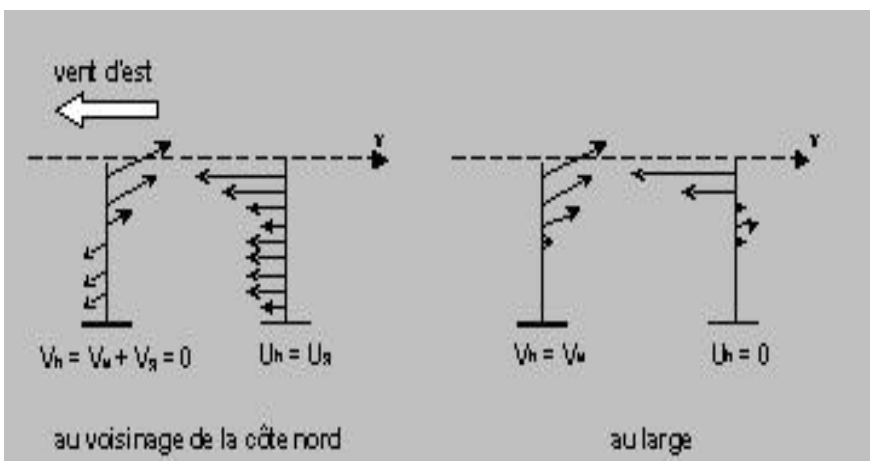


Fig.1.4 Ajustement à un forçage de vent constant et uniforme parallèle à la côte au voisinage de cette côte et au large.



### Généralisation à un forçage quelconque sur le bassin à fond plat

L'équation d'évolution (1.30) régissant l'élévation de la surface libre est forcée par deux termes qui expriment les variations spatiales et temporelles du champ de vent. Le premier terme forçant ( $\nabla \cdot \mathbf{t}_s$ ) exprime la divergence de la tension de vent, le second ( $\nabla \times \mathbf{t}_s$ ) son rotationnel. Une comparaison en ordres de grandeur de l'équation (1.30) permet de mettre en évidence le rôle de chaque forçage et l'équilibre associé aux longueurs caractéristiques spatiales  $L$  et temporelles  $T$ .

$$-1/f^2 \partial_{tt}^2 \zeta - \zeta + R^2 \nabla^2 \zeta = 1/f^2 \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{t}_s + 1/f \rho_0 \int_{\tau} \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}_s) dt$$

$$1/(fT)^2 \cdot \zeta \quad \zeta \quad R^2/L^2 \cdot \zeta \quad 1/f^2 L \cdot \tau_s / \rho_0 \quad T/f L \cdot \tau_s / \rho_0$$

Les mouvements dont l'échelle de temps est petite devant la période d'inertie ( $fT \ll 1$ ) sont forcés par la divergence du vent avec un équilibre du type

$$-\partial_{tt}^2 \zeta + c^2 \nabla^2 \zeta = 1/\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{t}_s \quad (1.37)$$

Ces derniers sont associés à une longueur caractéristique petite devant le rayon de déformation ( $L \ll R$ ). La solution correspond aux ondes de gravité externe stationnaires sans effet de la rotation de la Terre (les seiches par exemple). En revanche, les mouvements d'échelle de temps grande devant la période d'inertie ( $fT \gg 1$ ) sont forcés par le terme en rotationnel du vent avec un équilibre résolu par la relation

$$-\partial_t \zeta + R^2 \nabla^2 \partial_t \zeta = 1/f \rho_0 \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}_s) \quad (1.38)$$

Ce forçage agit sur la tendance de l'élévation de la surface libre, ce qui en fait le véritable fournisseur d'énergie cinétique du système océanique côtier. Ces phénomènes de basse fréquence sont caractérisés par des longueurs spatiales caractéristiques grandes devant le rayon de déformation ( $L \gg R$ ). Le terme d'ordre zéro ( $\partial_t \zeta$ ) de la relation (1.38) joue un rôle de transition entre les mouvements de petite échelle donnés par (1.37) et les mouvements de grande échelle décrits quant à eux par l'équation elliptique

$$R^2 \nabla^2 \partial_t \zeta = 1/f \rho_0 \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}_s) \quad (1.39)$$

En exprimant cette dernière relation avec la fonction de courant barotrope (1.24) dans le cas d'un équilibre géostrophique, on retrouve l'équation résolue par le modèle pour le diagnostic du gradient de pression de surface (relation (1.11)).

## 1.2.2 REPRESENTATIVITE DU MODELE

### Analyse basée sur les équations résolues par le modèle

La représentativité du code OPA pour l'étude du spin up d'un bassin avec un forçage de vent uniforme est véritablement restreinte. En effet, l'hypothèse de non divergence sur le transport barotrope dans l'approximation 'toit rigide' inhibe les variations en temps de la surface libre. Par conséquent, peuvent être uniquement considérées les solutions stationnaires : l'ajustement du bassin à un coup de vent est instantané, toute onde de gravité externe est filtrée par cette approximation. Les solutions représentées par le modèle

s'expriment en termes de fonction de courant. A partir de l'équation (1.26) donnée avec la fonction de courant barotrope de la relation (1.9), on obtient

$$f \nabla \psi = c^2 \nabla \zeta - 1/\rho_0 \mathbf{t}_s \quad (1.40)$$

valable en dehors du voisinage des côtes. On impose un domaine de validité sur les dimensions de bassin ( $\alpha$  et  $\beta$  grands devant  $R$ ). A partir de cette relation (1.40), on peut identifier un réseau de lignes de courant - correspondant au transport d'Ekman - perpendiculaire en direction et à droite du vent qui se referment avec la génération d'un courant de bord. Ainsi, la description de la circulation due au vent est limitée aux processus basse fréquence s'étendant sur une échelle caractéristique grande devant  $R$ .

### *Analyse basée sur des sorties du modèle*

On considère un bassin carré, à fond plat, dont les dimensions sont de l'ordre d'un rayon de déformation  $R$  ; on étudie la réponse du bassin au repos à un vent d'Est constant et uniforme sur une période de 3 mois. La paramétrisation du modèle est donnée par un fluide homogène de masse volumique  $\rho_0=1028\text{kg.m}^{-3}$  et de profondeur  $h=100\text{m}$ , un paramètre de Coriolis constant  $f=10^{-4}\text{s}^{-1}$  soit un rayon de déformation  $R=300\text{km}$ , une grille carrée  $50 \times 50$  de résolution horizontale  $\Delta s=10\text{km}$ , une discrétisation verticale sur 10 niveaux de résolution 5m en surface à 20m au fond et un pas de temps  $\Delta t=30\text{min}$ . Le forçage de vent  $\tau_s=0.2\text{N.m}^{-2}$  est dissipé

- par frottement latéraux où une condition de non glissement est imposée.
- par diffusion horizontale, le schéma harmonique est paramétré par un coefficient de viscosité  $\nu_L=150\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ . Ce dernier est choisi pour éviter d'une part le développement d'instabilités numériques et d'autre part une dynamique contrôlée par un courant de retour.
- par frottement au fond  $\mathbf{t}_b=r.\mathbf{u}_b$  avec un coefficient de friction  $r=10^{-3}\text{m.s}^{-1}$ , soit un temps de décroissance égal à  $h/r=28h$ .

La couche d'Ekman est paramétrée quant à elle par le coefficient de viscosité verticale choisi à  $\nu_V=10^{-1}\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ , soit une épaisseur  $D=44\text{m}$ . Le gradient de pression de surface est évalué à une précision  $\varepsilon=10^{-10}$ .

Le bassin, au repos à l'instant initial, est mis en mouvement pour atteindre son état stationnaire au bout de 70 jours : l'énergie cinétique apportée par le vent est alors équilibré par les frottements et dissipations. La Figure 1.5 montre en terme d'énergie cinétique que l'ajustement est régi par un équilibre frictionnel progressif. Les différentes étapes de cette réponse sont représentées en Figure 1.6. Un transport d'Ekman de grande échelle apparaît le long de la côte Est, ainsi qu'un transport géostrophique le long de la côte Nord. Des cellules de recirculation - le long de la côte Sud et au centre du bassin - viennent alimenter ces deux courants générés par le champ de vent. Lorsque le terme de diffusion horizontale est assez faible, une cellule cyclonique prend naissance et se déplace le long de la côte Nord. L'état stationnaire est alors atteint, avec deux zones distinctes. Dans la zone du quadrant Ouest, une circulation de bord Ouest est composée de cette cellule cyclonique.

Dans un quadrant Nord-Est de dimension comparable à R, une circulation se développe en accord avec les états d'équilibre avec le forçage de vent décrits en section 1.2.1 dans un bassin semi-infini. Au voisinage du bord Nord, le profil du courant donné en Figure 1.7 fait apparaître une composante tangentielle géostrophique, et une composante normale de moyenne verticale nulle résultant de la combinaison d'un transport géostrophique équilibrant le transport d'Ekman. Au voisinage du bord Est, le profil de courant est donné en Figure 1.8 : sa composante tangentielle combine l'effet géostrophique généré par la pente de la surface libre et la dérive d'Ekman. Au large, la Figure 1.9 montre le résultat du frottement du vent qui se développe sur une couche de 50m d'épaisseur.

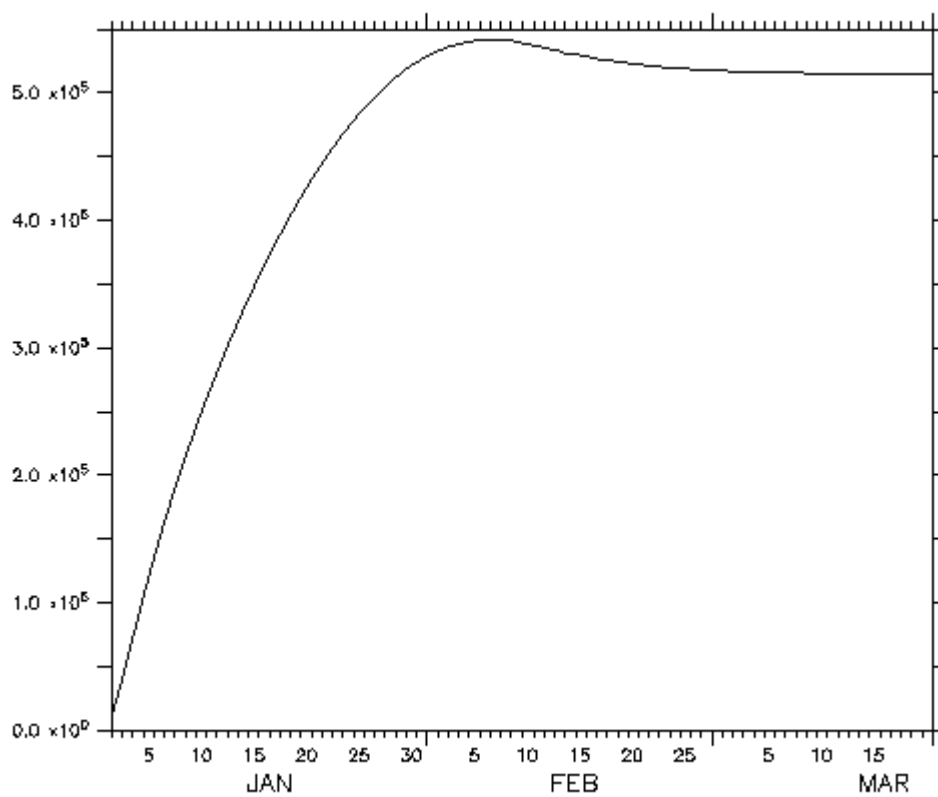
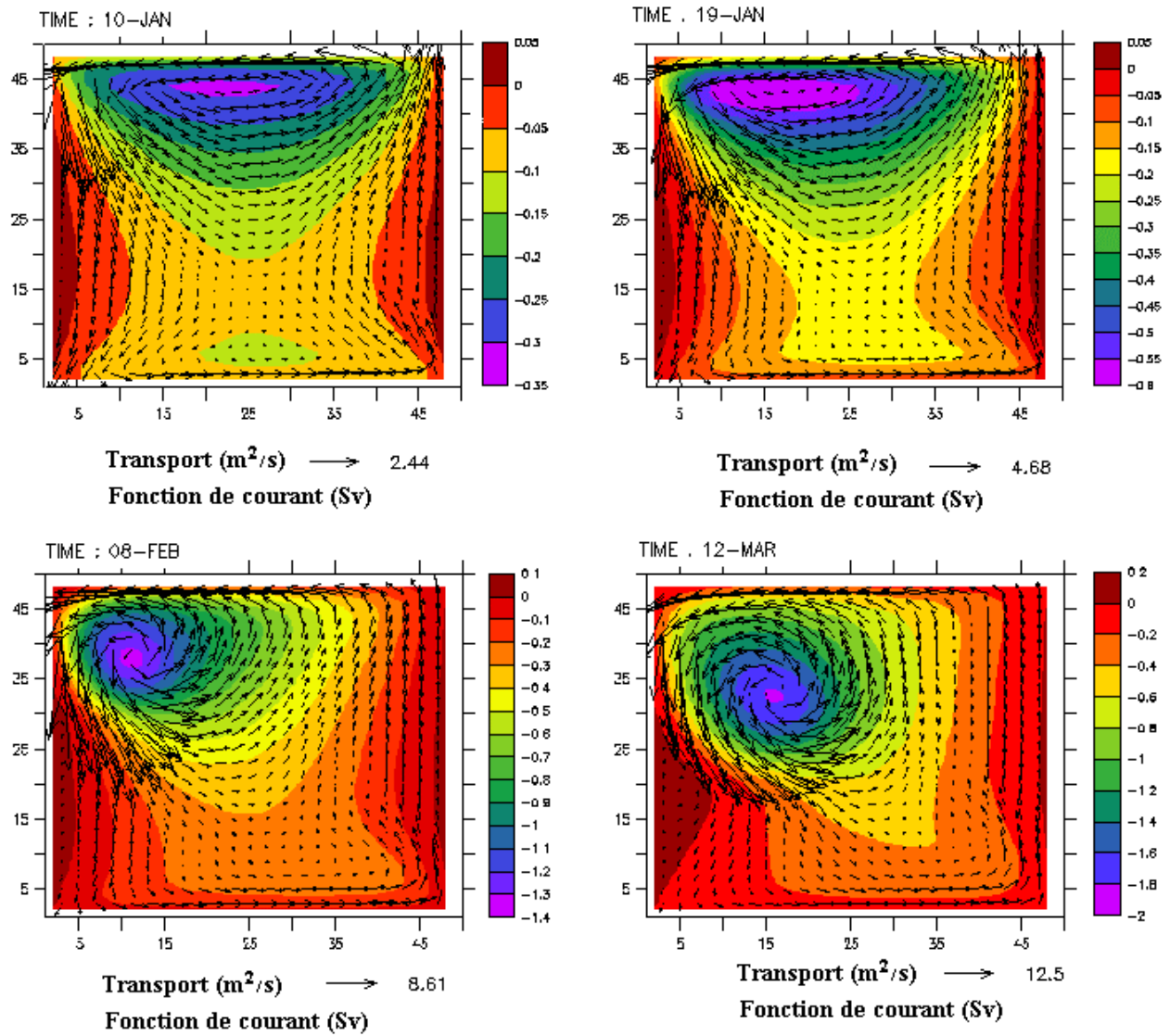
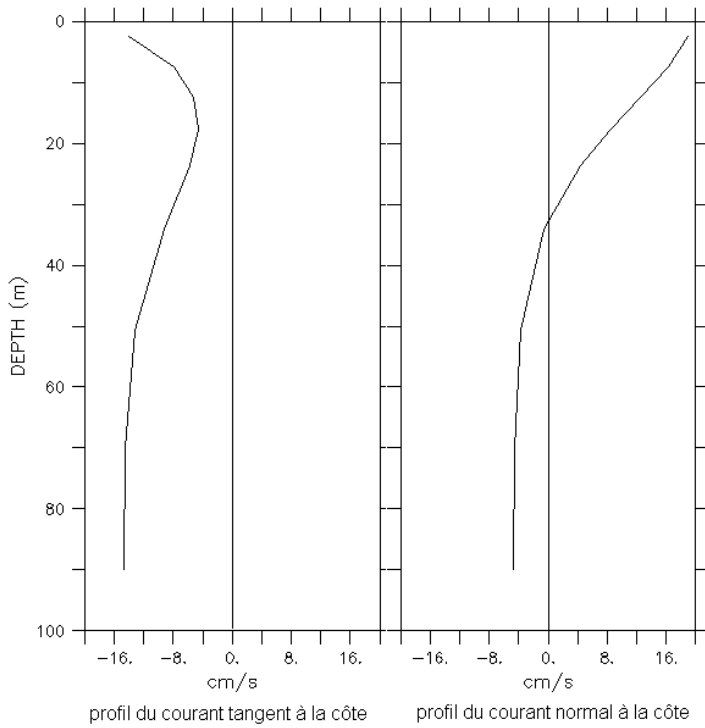


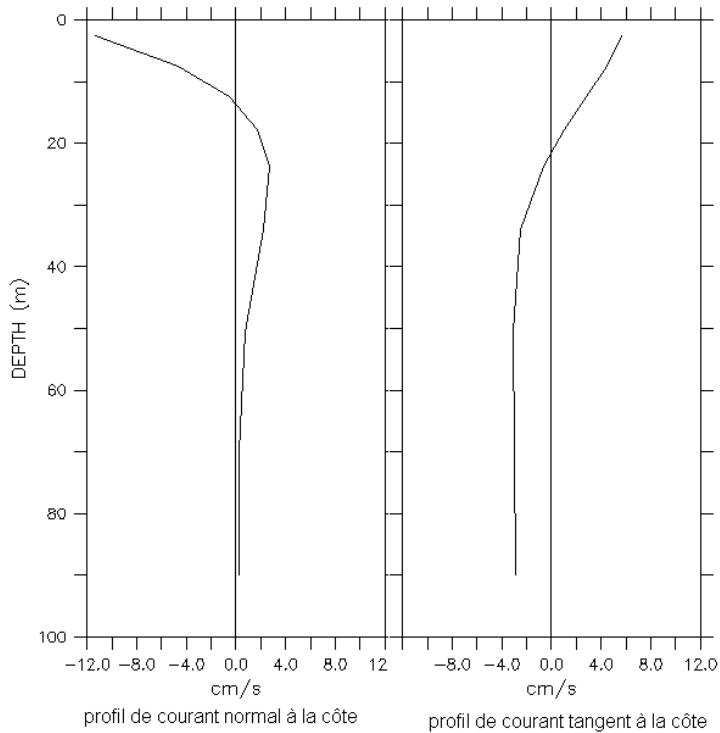
Fig.1.5 Evolution de l'énergie cinétique totale calculée à partir du transport (i.e.  $\|\mathbf{U}\|^2$  en  $\text{m}^4.\text{s}^{-2}$ ) au cours de la simulation.



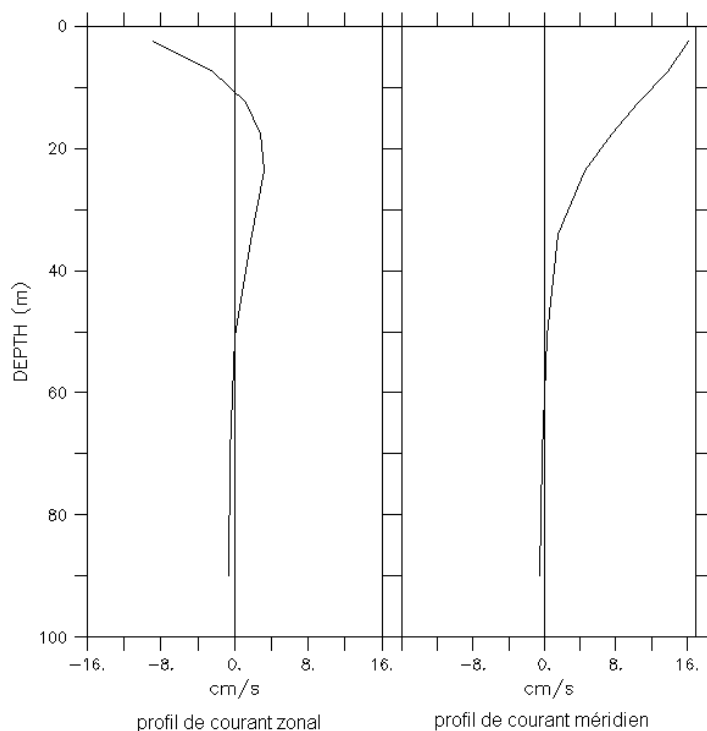
**Fig.1.6** Ajustement de la circulation au forçage du vent d'est. La fonction de courant (en Sv) est représentée par le champ d'isocontours, le transport (en  $m^2 \cdot s^{-1}$ ) par le champ de vecteurs.



**Fig.1.7** Profil du courant au voisinage de la côte Nord dans l'état stationnaire de circulation.



**Fig.1.8** Profil de courant au voisinage de la côte Est dans l'état stationnaire de circulation.



**Fig.1.9** Profil de courant au large des côtes Nord et Est, représentant le courant d'Ekman.

On peut identifier deux caractéristiques dans la modélisation de l'ajustement à un champ de vent uniforme. D'une part, les processus en régime impulsionnel n'apparaissent pas dans les solutions du modèle. En revanche, la circulation à l'équilibre est en accord avec les solutions données de manière analytique dans une zone non influencée par les mouvements de bord Ouest. D'autre part, ce sont les spécifications globales du modèle, tels que la géométrie du bassin ou le terme de diffusion horizontale, qui imposent le type de solution. La réponse barotrope est résolue à travers une équation elliptique (relation (1.11)) et non par une équation d'évolution ; c'est par conséquent la valeur du terme forçant (i.e. le terme de droite) et celle des conditions aux limites spatiales qui contrôlent la circulation modélisée.

### *Effets topographiques*

On considère ci-après un bassin d'extension supérieure à son rayon de déformation moyen, et de bathymétrie variable. Le bilan de quantité de mouvement (1.26) s'obtient alors avec l'ajout d'un nouveau terme associé aux variations de la profondeur. Dans l'hypothèse de non divergence du transport, l'application de l'opérateur  $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$  à (1.26) fournit une relation locale pour la fonction de courant :

$$\partial_t \nabla^2 \psi + f/h \mathbf{k} \cdot (\nabla h \times \nabla \psi) = 1/\rho_0 \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}_s) \quad (1.41)$$

Les structures de circulation dans un état stationnaire sont de deux types. En absence de forçage, les lignes de courant suivent les isobathes. La colonne d'eau est guidée par la topographie en accord avec la conservation de la vorticité potentielle. En présence de forçage, les lignes de courant sont déviées dans le sens (*resp.* sens inverse) du gradient topographique avec un rotationnel de vent positif (*resp.* négatif). La circulation s'effectue alors

en travers des isobathes. L'ajustement à ces derniers états stationnaires est réalisé par le passage d'une onde de Rossby topographique. Sa propagation repose sur l'ajustement de la variation de l'épaisseur de la colonne d'eau lors de son déplacement (i.e. le terme  $\nabla h \times \nabla \psi$ ) par une variation de la vorticité potentielle (i.e. le terme  $\partial_t \nabla^2 \psi$ ). Différents types d'ondes entrent sous la dénomination d'onde de Rossby topographique, celles-ci dépendant de caractéristiques géométriques, de la présence de côtes, d'îles (voir e.g. Leblond et Mysak 1978).

Le système d'équations résolu par le modèle s'avère particulièrement approprié pour la prise en compte de ces effets topographiques. Il existe en effet une grande similitude entre ce genre de processus côtier et les processus de grande échelle prenant compte des variations du paramètre de Coriolis. Le terme lié à la topographie qui apparaît dans la relation (1.41) peut être effet assimilé à un effet « bêta topographique ». Il en résulte une bonne représentativité de la circulation stationnaire vérifiée par une relation analogue à l'équilibre de Sverdrup, ainsi qu'aux processus d'ajustement proches de ceux de l'océan global (ondes de Rossby planétaires). Il reste cependant un problème majeur dans la modélisation des effets topographiques : celui de la précision dans la discrétisation de la bathymétrie. L'utilisation de coordonnées géocentriques s'avère incompatible pour prendre en compte des pentes de fond supérieures à celles résolues par l'échantillonnage de la grille  $\Delta z^{\text{fond}} / \Delta s$  – ces dernières étant de l'ordre de quelques pour cent. C'est pourquoi une modification dans la définition de la grille a été envisagée afin d'améliorer la représentativité du modèle. Elle est basée sur la mise en place de « partial cells » proposée par Pacanowski et Gnanadesikan (1998) : à partir d'un système de coordonnées géocentriques, il s'agit d'ajuster la hauteur de la dernière cellule active au niveau réel du fond. L'implémentation de ce type de modification est immédiate pour le traitement du mode barotrope ; il reste toutefois à imposer la conservation de l'énergie cinétique totale par un calcul approprié du gradient de pression hydrostatique au fond du bassin. Cette amélioration possible a été laissée de côté dans l'utilisation du code et de son adjoint.

### I.3. TRAITEMENT DU FORÇAGE RÉGIONAL

Les équations aux dérivées partielles sur lesquelles sont fondés les modèles numériques ne donnent que la structure générale de la circulation côtière dans l'espace et le temps. Une détermination particulière et unique de la solution sur une configuration précise demande en plus la connaissance des conditions à l'instant initial et sur les frontières du domaine. La donnée d'un état initial rappelle simplement que le milieu océanique obéit au principe de causalité alors que les conditions aux limites donnent des indications sur le milieu environnant. Ces influences externes s'avèrent essentielles étant donnée l'importance que prennent les phénomènes physiques de grande échelle en conditionnant la circulation dans une mer ouverte. C'est à travers une description rapide des différentes méthodes de traitement du problème - issue d'exposé de E. Blayo à la Journée *Frontières Ouvertes* (Lyon, octobre 2002) - que le point de vue choisi dans ce travail est exposé : celui de spécifier de manière optimale une condition frontière de type Dirichlet.

### I.3.1 POSITION DU PROBLEME

Il s'agit de déterminer au mieux ces conditions frontières en prenant en compte le type d'échange entre le domaine ouvert et l'extérieur. Les conditions de Dirichlet expriment le fait que le système concerné est en contact avec un réservoir non perturbé par les échanges. Les conditions de Neumann s'imposent pour un milieu environnant complètement isolé qui ne permet aucun échange diffusif. Dans des cas plus complexes où le système ouvert peut être appréhendé par des caractères de la circulation à modéliser (i.e. les données), la question est de savoir si le problème de la frontière ouverte est bien posé, c'est-à-dire si :

- i. la solution existe
- ii. la solution dépend continûment des données
- iii. la solution est uniquement déterminée par les données

La détermination de conditions aux limites mathématiquement correctes fait intervenir des résultats théoriques de continuité et de convergence, qui n'ont été démontrés que pour certaines classes d'opérateurs (e.g. elliptique) construits sur des dimensions données (le cas 1D est généralement résolu). A titre d'exemple, la preuve de l'existence d'une solution n'est pas assurée pour les équations 3D de Navier Stokes. Toutefois, Bennett et Chua (1994) analysent le cas du modèle en eau peu profonde linéaire pour lequel des conditions aux limites ouvertes satisfaisantes sont identifiées ; ils démontrent aussi que le problème est mal posé dans le cas non linéaire. Il en résulte en général une surdétermination des conditions aux limites en certains points, notamment les points où l'écoulement est sortant. La conclusion est donc que le problème des conditions aux limites ouvertes est sans aucun doute mal posé pour les modèles aux équations primitives.

En résumé, d'un point de vue physique on souhaite imposer sur une limite artificielle une condition laissant passer l'information sortante, et apportant une information entrante. D'un point de vue mathématique, cette condition frontière doit mener à un problème bien posé.

### I.3.2 TOUR D'HORIZON DES METHODES DE TRAITEMENT

#### *Traitement par une frontière « passive »*

Une frontière passive est une frontière de calcul où les perturbations originaires de l'intérieur du domaine peuvent sortir sans détériorer la solution. Il s'agit alors d'inhiber les réflexions causées par la présence de la limite artificielle du domaine. On considère dans la suite un domaine semi-infini placé dans les  $x$  positifs et limité par une frontière ouverte en  $x=0$ . La condition de radiation de Sommerfeld représente la condition optimale pour le cas d'un modèle construit sur une équation d'ondes à une dimension du type :

$$\partial_t^2 \phi - c^2 \partial_x^2 \phi = 0 \quad (1.42)$$



A la frontière ouverte, on souhaite laisser passer l'onde sortante se déplaçant à la vitesse (-c). Cette onde vérifie exactement la condition de Sommerfeld :

$$\partial_t \phi - c \partial_x \phi = 0 \quad (1.43)$$

Sur la base de cette condition, différentes variantes ont ensuite été proposées afin de palier à ces diverses limitations. La première est la mise en oeuvre de cette condition lorsque l'on ne connaît pas la célérité. On suppose pour cela que la condition de Sommerfeld est valable non seulement sur la frontière mais aussi dans son voisinage ; typiquement sur deux points de grille. Ainsi, Orlanski (1976) estime la célérité sous la forme :

$$c = \partial_t \phi / \partial_x \phi \quad (1.44)$$

sous l'hypothèse  $c(x, t) = c(x+\Delta x, t-\Delta t)$  dans sa forme explicite ; ou encore sous l'hypothèse  $c(x, t) = c(x+\Delta x, t)$  dans sa forme implicite. La conséquence principale est que les conditions de type Orlanski génèrent des schémas non linéaires. Elles restent donc correctes pour le cas d'ondes monochromatiques mais elles ne conviennent plus en cas de superposition de deux ondes. D'autres constructions basées sur des conditions de radiation ont été menées pour palier au fait que les ondes en présence dans un bassin océanique ne sont pas forcément unidimensionnels et monochromatiques (e.g. Chapman 1985, Palma et Matano 1998, Marchesiello et al. 2001). Globalement, les conditions de radiation sont associées à une solution climatologique connue par ailleurs, pour l'estimation de la célérité.

Une généralisation de ces conditions de radiation consiste en des conditions dites absorbantes. Ces dernières sont construites à partir de la recherche des lignes caractéristiques de l'opérateur décrivant l'écoulement au voisinage de la frontière ouverte. Par conséquent elles sont vérifiées exactement par les quantités sortantes du domaine au niveau de la frontière ouverte. Engquist et Majda (1977) donnent un principe de construction de telles conditions globales en espace et en temps - hélas inutilisables en pratique - et ils montrent comment les approcher par des conditions locales, à différents ordres d'approximation. A titre d'exemple, on considère les équations en eau peu profonde non-visqueuses et linéarisées autour d'un point de fonctionnement  $\phi_0 = (u_0, v_0, h_0)$  :

$$\partial_t \phi + A_1 \partial_x \phi + A_2 \partial_y \phi + B \cdot \phi = 0 \quad (1.45)$$

avec  $\phi=(u, v, h)$ , et avec  $A_1, A_2, B$  des matrices  $3 \times 3$  s'exprimant en fonction de  $g, f, u_0, v_0$  et  $h_0$ . La diagonalisation de  $A_1$  fournit les trois caractéristiques de l'équation dans la direction normale à la frontière :

$$\omega_1 = u + (g/h_0)^{1/2} \cdot h \quad \text{associée à la valeur propre } u_0 + c$$

$$\omega_2 = v \quad \text{associée à la valeur propre } u_0$$

$$\omega_3 = u - (g/h_0)^{1/2} \cdot h \quad \text{associée à la valeur propre } u_0 - c$$

avec  $c^2 = gh_0$ . La méthode fournit alors pour chaque caractéristique les conditions frontières à différents ordres, en supposant l'angle d'incidence faible. Dans le cas d'un flux sortant,  $u_0 < c$ , et à l'ordre 0  $\omega_1 = 0$ . De plus si  $u_0 < 0$ , on en déduit  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Ces conditions très utilisées dans la modélisation de la marée ont été proposées par Flather (1976). Malgré sa simplicité, la condition absorbante à cet ordre donne des résultats satisfaisants. La méthode des

conditions absorbantes fournit aussi des conditions à des ordres plus élevés, qui sont plus difficiles à établir et à mettre en oeuvre.

### *Utilisation d'informations extérieures, couplage*

Il s'agit de faire intervenir une information extérieure  $\phi^{\text{ext}}$  dans l'expression des conditions frontières. Cette information provient en général d'un modèle de grande échelle ou de données climatologiques. A titre d'exemple, la réponse au vent d'un bassin océanique est souvent à grande échelle, les systèmes d'ondes de Kelvin qui ajustent la circulation d'un bassin le sont aussi. Pour que les circulations de part et d'autre de la frontière ouverte soient compatibles, la condition à la limite doit nécessairement être du type :

$$L.\phi = L.\phi^{\text{ext}} \quad (1.46)$$

où  $L$  est un opérateur aux dérivées partielles. On peut insérer dans les méthodes précédentes ce type de rappel, au risque de ne pas coupler les solutions intérieure et extérieure de façon cohérente. C'est pourquoi l'équilibre est effectué sur une couche 'éponge' où la circulation du modèle vient progressivement en temps et en espace s'identifier aux informations extérieures.

Le système de modèles emboîtés semble dans cette optique une solution intéressante pour traiter l'influence grande échelle dans un domaine de petite échelle. Il consiste à coupler le même modèle sur différents raffinements de grille, et de gérer les échanges de données inter-grilles avec deux modes de fonctionnement possibles : le mode 'one way' où le modèle de grande emprise force le modèle de petite échelle ; et le mode 'two way' où la rétroaction du modèle haute résolution vers le modèle de grande emprise est envisagée. Des outils tels que AGRIF (Blayo et Debreu 1999) ont été développés pour ces applications. A titre d'exemple dans le domaine côtier, cette approche est appliquée dans la modélisation de la réponse océanique au passage d'une tempête (e.g. Jones et Davies 1998 en mer d'Irlande) ou encore à la modélisation régionale du bassin Nord-Ouest de la mer Méditerranée (Beckers et al. 1997, Echevin et al. 2001).

### *Régularisation du problème de la condition frontière*

Le problème mathématique des frontières ouvertes dans les modèles aux équations primitives étant mal posé, on peut avoir recours à la régularisation. Cette méthode consiste à modifier légèrement le problème, en général avec l'ajout de conditions supplémentaires que l'on demande à la solution de vérifier. Ces conditions sont issues de connaissance que l'on peut avoir *a priori* sur la solution. Elles portent sur la régularité de la solution, des statistiques disponibles, ou de l'information issue d'observations. On recherche alors la solution qui satisfait l'ensemble de ces contraintes. Cela revient à lever l'indétermination du problème en recherchant parmi toutes les solutions possibles celle qui est la plus proche de l'ensemble des informations. On se trouve alors confronté à un problème d'inversion. Cette alternative aux méthodes présentées précédemment permet de prendre en compte tous types d'informations (surtout celles à l'intérieur de l'emprise du modèle) pour fournir une estimation du forçage de grande échelle compatible par construction avec la dynamique du modèle.

Les méthodes variationnelles employées avec succès pour l'identification des conditions initiales sont envisagées pour l'estimation des conditions aux limites sur la frontière ouverte. Les résultats théoriques de Bennett et Chua (1994) montrent qu'il est possible, par une formulation variationnelle inverse, de régulariser le problème des conditions aux limites ouvertes des modèles aux équations primitives. Toutefois, ce type d'approche a été mis en oeuvre sur des modèles où les problèmes physiques sont réduits. Devenon (1990) traite le problème avec un modèle elliptique de marée dans la baie de Seine ; Bogden et al. (1996) utilisent les équations en eau peu profonde dans la baie du Massachusetts ; les conditions frontières dans un bassin d'échelle régional sont traitées de la même manière avec un modèle quasi-géostrophique (e.g. Seiler 1993, Gunson et Malanotte-Rizzoli 1996). C'est dans cette même optique que l'on se propose de traiter la spécification du forçage régional sur un bassin côtier décrit par un modèle aux équations primitives.

## II. INVERSION DE DONNÉES GÉOPHYSIQUES

Les études d'écoulements géophysiques bénéficient d'un certain nombre d'informations : des données acquises par observations, des lois physiques et statistiques régissant le comportement du fluide, des modèles numériques réalistes. La démarche d'analyse combinée de ces différentes informations relève de la résolution d'un problème inverse. A partir des formulations déterministe et statistique d'un problème inverse linéaire, les caractéristiques de la solution, son existence et son unicité sont mis en exergue. Les applications opérationnelles et cognitives d'une telle approche sont abordées à travers la mise en place d'algorithmes d'assimilation de données pour des modèles réalistes de circulation atmosphérique ou océanique (1<sup>ère</sup> partie). On s'attache ensuite à la description spécifique de l'algorithme 4DVAR incrémental (2<sup>ème</sup> partie). Sa formulation, ses approximations et l'organisation du code sont précisés pour apporter in fine les bases de la méthode d'inversion utilisée dans ce travail.

### II.1. DE L'INVERSION À L'ASSIMILATION

#### II.1.1 FORMULATION D'UN PROBLEME INVERSE, POINT DE VUE DETERMINISTE

##### *Position du problème*

Il s'agit d'évaluer certaines des propriétés spécifiques utiles à la compréhension d'un système dynamique à partir d'un ensemble de données issues de son observation. On appellera ces propriétés les paramètres du modèle. On considère en effet qu'il existe une méthode, reposant sur un modèle mathématique, qui relie les paramètres du modèle aux données. Sur cette base, on peut distinguer deux voies de traitement. La première se pose sous la forme d'un problème direct : c'est le procédé qui prédit le résultat des mesures en considérant un modèle et ses conditions spécifiques d'application,

paramètres du modèle → modèle → prédiction des données

La seconde voie, en contraste avec la première, se pose sous la forme d'un problème inverse. Elle s'appuie sur un modèle et des données pour déterminer une estimation des paramètres du modèle,

données → modèle → estimation des paramètres du modèle

Deux problématiques successives de se posent à la résolution du problème inverse. La première s'atèle à déterminer si le modèle est compatible avec les données. Il n'est pourtant pas question de valider le modèle, dans le sens de sa retranscription fiable de l'écoulement. Si cohérence il y a, il s'agit alors d'estimer l'ensemble des paramètres du modèle à travers une combinaison du modèle et des données.

Dans des situations réalistes, les données – représentées par le vecteur  $y$  - et les paramètres du modèle – placés dans le vecteur  $x$  – peuvent avoir des liens élaborés ; on

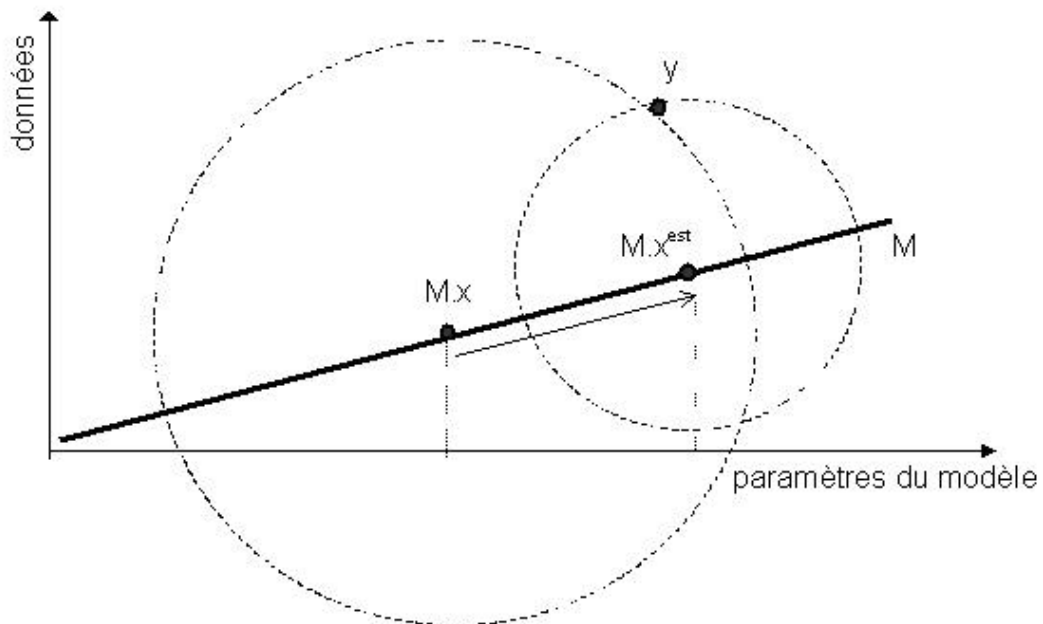
suppose ci-après qu'ils gardent le caractère linéaire. Ces relations peuvent donc s'exprimer sous la forme explicite  $M.x = y$ , où le modèle  $M$  est une application linéaire. La méthode de résolution est basée sur la mesure de la distance entre la donnée prédite par une estimation des paramètres du modèle (l'analyse) et celle observée. La solution du problème inverse est donnée par les paramètres du modèle qui minimisent cette erreur de prévision représentée par la fonction de coût  $J_0$ . On cherche alors  $x^{est}$  tel que

$$\partial J_0 / \partial x^{est} = 0 \quad \text{avec} \quad J_0(x) = (y - M.x)^T \cdot (y - M.x) \quad (2.1)$$

La norme euclidienne utilisée est particulièrement adaptée pour des distributions gaussiennes de probabilité sur les erreurs affectant les données. Ce problème de minimisation ainsi posé au sens des moindres carrés fournit la meilleure estimation des paramètres du modèle vérifiant la relation :

$$[M^T M]. x^{est} - M^T y = 0 \quad (2.2)$$

où  $M^T$  désigne la matrice transposée de  $M$ . La solution au sens des moindres carrés correspond donc à la meilleure prédiction de  $y$  à travers le modèle exact  $M$  (voir Figure 2.1). La question de cohérence entre le modèle et les données se pose lorsque le nombre de solutions qui donnent le même minimum de  $J_0$  est plus grand que un, ce qui est intrinsèquement lié à l'existence et l'unicité de la solution vérifiant l'équation (2.2).



**Fig.2.1** La variété linéaire du modèle  $M$  représente l'ensemble des images des paramètres  $x$  dans l'ensemble des données. Il s'agit de chercher l'estimation  $x^{est}$  dont l'image par  $M$  se rapproche au mieux de la donnée  $y$  au sens de la mesure utilisée.

### Existence de la solution au sens des moindres carrés

On parlera de problème inverse surdéterminé lorsque l'équation (2.2) possède une solution unique correspondant à une erreur de prédiction minimale. Il y a donc assez d'informations pour déterminer la totalité des paramètres du modèle. Toutefois, la variance de la solution n'est pas forcément nulle, et l'erreur commise sur l'estimation peut avoir deux interprétations. Dans un premier point de vue, l'erreur commise dans l'estimation est contrôlée par l'erreur de mesure. Si l'on considère des données décorréelées et de même variance  $\sigma_o^2$ , les erreurs de mesure se propagent en des erreurs sur l'estimation en respect avec les liens fournis par le modèle. L'erreur correspondante s'exprime suivant la matrice de covariance

$$P = \sigma_o^2 [M^T M]^{-1} \quad (2.3)$$

Une seconde interprétation considère la courbure de la fonction de coût  $J_o$  au voisinage de son minimum. Cette courbure est donnée par la dérivée du second ordre de  $J_o$ , qui n'est autre que  $2.M^T M$ . Lorsque le minimum est relativement creusé, les erreurs de mesure ont une faible influence sur la solution. En revanche, lorsque la courbure est faible, les erreurs de mesure entraînent de grandes fluctuations dans la détermination du minimum, et par conséquent augmentent la variance de l'estimation.

A contrario, le problème inverse est dit sous-déterminé lorsqu'il existe plusieurs solutions de l'équation (2.2) correspondant à une erreur de prédiction minimale. Ce cas se pose lorsqu'il n'y a pas assez d'informations pour déterminer tous les paramètres du modèle. En effet, les données peuvent déterminer uniquement certains paramètres du modèle, les autres paramètres correspondent alors aux termes singuliers de  $[M^T M]^{-1}$ . Le moyen le plus courant de remédier aux indéterminations d'un problème inverse est d'introduire d'avantage d'informations au système. En l'absence de données compatibles avec les paramètres non estimés, l'information *a priori* d'une ébauche sur le comportement de la solution, notée ci-après  $x^{bck}$ , permet de préciser parmi les solutions admissibles celle qui minimise l'erreur d'ébauche  $J_b$ . On cherche alors  $x^{est}$  tel que

$$\partial J / \partial x^{est} = 0 \quad \text{avec} \quad J(x) = (y - M.x)^T . (y - M.x) + \varepsilon (x - x^{bck})^T . (x - x^{bck}) \quad (2.4)$$

où  $\varepsilon$  est un réel positif représentatif du poids respectif des deux termes  $J_o$  et  $J_b$ . Ce procédé, connu sous le nom de régularisation, permet de s'astreindre des difficultés formulées en termes d'unicité et de qualité sur la solution (Wahba 1982). Si  $\varepsilon$  est trop petit, la solution du problème inverse (surdéterminé ou sous-déterminé) est alors sensible au bruit sur les observations et les indéterminations éventuelles subsistent. Si  $\varepsilon$  est trop grand, le problème inverse est bien posé, mais la résolution revient à minimiser principalement  $J_b$  au détriment de l'erreur de prévision. En pratique, la valeur optimale du coefficient  $\varepsilon$  est donnée *a posteriori* en termes d'ordres de grandeur, de manière empirique ou par des critères de validation croisée. Cette valeur optimale correspond alors à une erreur de prévision  $J_o$  minimale.

### Résolution à partir de mesures d'erreur pondérées

D'autres types d'information *a priori* portant par exemple sur la précision de chaque mesure ou le comportement des paramètres du modèle, permettent de fournir les facteurs de pondération sur les écarts de la solution aux données et sur ses écarts à l'ébauche. L'insertion de ces pondérations dans la norme euclidienne rend alors compte de la confiance apportée à chacune des sources d'information de manière quantitative. Détaillons les solutions issues de Menke (1984) dans les cas où

- le problème inverse est surdéterminé. L'emploi de mesures pondérées pour l'erreur de prévision  $J_0$  permet de rendre compte de la précision de chacune des observations utilisées, et de quantifier leur poids relatif. La minimisation conduit à :

$$x^{\text{est}} = [M^T W_o^{-1} M]^{-1} \cdot M^T W_o^{-1} \cdot y \quad \text{avec} \quad J_0(x) = (y - M \cdot x)^T \cdot W_o^{-1} \cdot (y - M \cdot x) \quad (2.5)$$

où  $W_o$  représente la matrice de covariance d'erreur aux observations.

- le problème inverse est complètement sous-déterminé. Le terme d'erreur à l'ébauche peut faire intervenir des liens entre les différents paramètres du modèle, ou des propriétés globales que doit vérifier la solution (le degré ou l'échelle de ses variations par rapport à sa valeur moyenne fournie dans  $x^{\text{bck}}$ , par exemple). La minimisation conduit alors à :

$$x^{\text{est}} = x^{\text{bck}} + W_b^{-1} M^T \cdot [M W_b^{-1} M^T]^{-1} \cdot [y - M \cdot x^{\text{bck}}] \quad \text{avec} \quad J_b(x) = (x - x^{\text{bck}})^T \cdot W_b^{-1} \cdot (x - x^{\text{bck}}) \quad (2.6)$$

où  $W_b$  représente la matrice de covariance d'erreur à l'ébauche.

- le problème inverse est légèrement sous-déterminé. La minimisation de  $J = J_0 + \varepsilon \cdot J_b$  conduit à :

$$x^{\text{est}} = x^{\text{bck}} + [M^T W_o^{-1} M + \varepsilon \cdot W_b^{-1}]^{-1} \cdot M^T W_o^{-1} \cdot [y - M \cdot x^{\text{bck}}] \quad (2.7)$$

Moyennant quelques manipulations algébriques (décrites dans Menke 1984, section 5.9), la solution peut s'exprimer suivant :

$$x^{\text{est}} = x^{\text{bck}} + W_b M^T \cdot [M W_b M^T + \varepsilon \cdot W_o]^{-1} \cdot [y - M \cdot x^{\text{bck}}] \quad (2.8)$$

## II.1.2 FORMULATION D'UN PROBLEME INVERSE, POINT DE VUE STATISTIQUE

### Position et résolution du problème

Il s'agit de combiner différents types d'informations afin de produire une estimation pertinente de l'état d'un système dynamique, dont on n'a que des descriptions parcellaires. Ces informations sont issues de plusieurs sources : de l'observation du système ; des simulations fournies par des modèles numériques ; des lois physiques vérifiées par le système. Dans la théorie de l'estimation statistique linéaire, l'ensemble de ces informations est relié à l'état du système à travers un opérateur linéaire  $M$  :

$$y = M \cdot x + \zeta \quad (2.9)$$

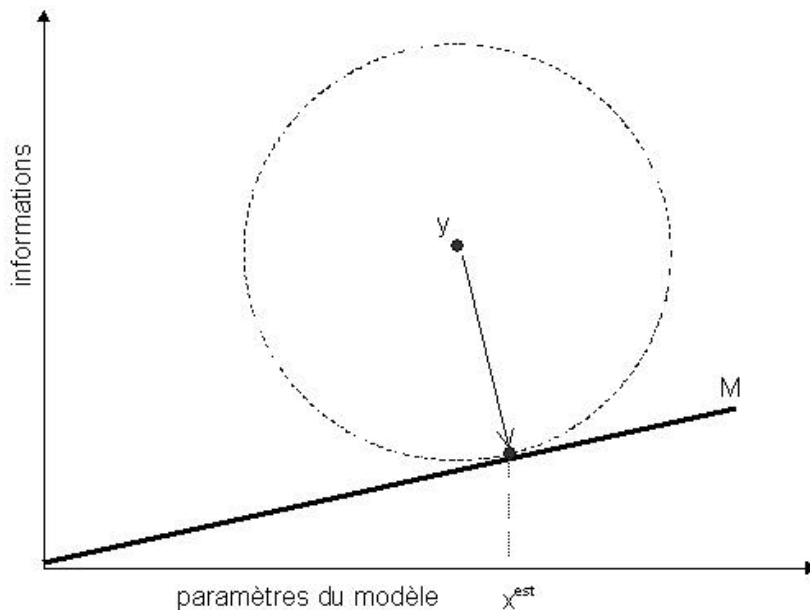
où la quantité résiduelle  $\zeta$  est un vecteur non-biaisé et connu uniquement par ses propriétés statistiques. En effet, on suppose que chacune des informations est individuellement pondérée en fonction de la confiance que l'on peut lui accorder. Sa pondération est inversement proportionnelle à l'erreur gaussienne affectant cette information. Les poids respectifs de l'ensemble des informations sont contenus dans la matrice de covariance  $W = E[\zeta\zeta^T]$ . L'estimation de  $x$ , notée  $x^{est}$ , est alors déterminée sous la contrainte de minimum de la moyenne statistique  $E[(x^{est} - x)^T(x^{est} - x)]$ . La solution de ce problème est appelée le meilleur estimateur linéaire non-biaisé de  $x$  à partir de  $y$  (Best Linear Unbiased Estimator ou BLUE en anglais) ; il s'exprime selon

$$x^{est} = [M^T W^{-1} M]^{-1} W^{-1} y \quad (2.10)$$

Le BLUE est défini de manière univoque si l'opérateur  $M$  vérifie la condition de détermination, c'est-à-dire si deux états différents ne peuvent pas conduire à deux jeux de données identiques. Il y a alors au moins une information pour chacune des composantes du vecteur  $x$  ; l'erreur d'estimation correspondante est donnée par la matrice de covariance  $P = [M^T W^{-1} M]^{-1}$ . Par ailleurs, l'estimation peut être définie de manière variationnelle comme le vecteur qui minimise la fonction de coût  $J$  suivante :

$$\partial J / \partial x^{est} = 0 \quad \text{avec} \quad J(x) = \frac{1}{2} (M.x - y)^T . W^{-1} . (M.x - y) \quad (2.11)$$

La norme euclidienne utilisée est celle du produit scalaire associé à la matrice de covariance  $W$ . Minimiser  $J$  revient alors à chercher le point dans l'espace image de l'application  $M$  le plus proche de  $y$  (voir Figure 2.2). Ce point constitue la projection orthogonale (dans le sens du produit scalaire associé à  $W$ ) de  $y$  dans l'espace image de  $M$ . Par conséquent, le BLUE est l'antécédent par  $M$  de cette projection orthogonale. Il existe donc une unique solution lorsque la projection de  $y$  est non nulle.



**Fig.2.2** L'information (dans le sens littéral) contenue dans le vecteur  $y$  est projetée sur la variété de l'application linéaire  $M$ , au sens de la mesure utilisée. L'estimation  $x^{est}$  correspond à l'antécédent par  $M$  du projeté.



### Equivalence avec l'approche déterministe

On adopte une représentation du vecteur information  $y$  du type ébauche - innovation. Sa projection dans l'espace des états du système dynamique définit l'ébauche  $x^{bck} = x + \zeta^b$ . Sa projection dans l'espace image de  $M$  définit l'innovation  $d = M.(x - x^{bck}) + \zeta^o$ . On suppose les erreurs  $\zeta^b$  et  $\zeta^o$  décorréelées, les matrices de covariance respectives sont notées  $W_b$  et  $W_o$ . L'équation (2.10) prend alors la forme

$$x^{est} = x^{bck} + W_b M^T . [M W_b M^T + W_o]^{-1} . [y - M . x^{bck}] \quad (2.12)$$

Cette dernière expression est strictement identique à la relation (2.8), toutes les deux obtenues dans le cas d'un problème inverse remplissant la condition de détermination. L'estimation est ainsi produite à partir d'une ébauche où l'écart mesuré par l'innovation dans l'espace image est propagé dans l'espace des états du système dynamique par un opérateur  $K$  appelé le gain :

$$x^{est} = x^{bck} + K . [y - M . x^{bck}] \quad \text{avec} \quad K = [M W_b]^{-1} . E[dd^T]^{-1} \quad (2.13)$$

où la matrice de covariance associée à l'innovation s'exprime suivant  $E[dd^T] = M W_b M^T + W_o$ . De plus,  $M W_b$  constitue l'ensemble des fonctions d'influence ; ces fonctions jouent le rôle de propagateur du vecteur innovation (pondéré par les erreurs commises avec  $E[dd^T]$ ) dans l'espace des états du système.

A partir d'une problématique identique : l'estimation optimale de paramètres à l'aide de toute information pertinente disponible et d'hypothèses formulées *a priori*, deux approches distinctes (déterministe et statistique) ont été développées. Les caractéristiques de ces deux approches sont similaires en tous points, des causes d'indétermination du problème inverse à la forme analytique de l'estimation.

### Validation a posteriori de l'inversion

Si l'inversion est en général résolue avec qualitativement un bon accord entre l'analyse  $M . x^{est}$  et les données  $y$ , il subsiste quantitativement des divergences dues à plusieurs sources d'erreur présentes dans la formulation du modèle, dans ses forçages et sa paramétrisation, et dans les observations. Ces incertitudes liées à la définition des hypothèses *a priori* (notamment sur les pondérations attribuées à chaque information) dégradent la qualité du résultat. Il est possible de détecter *a posteriori* ces imperfections à travers le comportement de la quantité « Information minus Analysis » :  $ImA = y - M . x^{est}$  (Tarantola 1987, Talagrand 1999).

- Une comparaison sur les amplitudes de  $ImA$  ne peut mener à une comparaison sur la qualité de deux analyses utilisant les mêmes informations. Elle permet toutefois de comparer la qualité de deux analyses qui utilisent des observations différentes, à condition qu'elles soient non-biaisées et affectées d'erreurs décorréelées.
- Tout écart entre les statistiques prédites sur l' $ImA$  (i.e. spécifiées *a priori*) et les statistiques sur l' $ImA$  obtenues *a posteriori* est un signe de mauvais fonctionnement. En effet, sa matrice de covariance (notée  $W$  précédemment) intervient dans la définition de la

projection orthogonale de  $y$  dans l'espace image de  $M$ , soit intrinsèquement dans l'estimation de  $x$ .

- Le minimum de la fonction de coût  $J$  définie en (2.11) peut s'exprimer analytiquement par  $J_{\min} = \frac{1}{2} \text{ImA}^T \cdot W^{-1} \cdot \text{ImA}$ . En considérant le produit scalaire associé à  $W^{-1}$ , on en déduit  $E[J_{\min}] = p/2$ , où  $p$  est la dimension de  $\text{ImA}$ .

Enfin, l'algorithme d'inversion fait appel à différentes méthodes d'analyse mathématique définies au sens des moindres carrés qui doivent être cohérentes avec les hypothèses émises. Pour éclaircir ce dernier point, le traitement de phénomènes naturels intermittents exclut toute hypothèse de distribution gaussienne des erreurs qui affectent les variables. La mesure au sens des moindres carrés est alors peu adaptée. Le problème inverse peut alors être posé d'un point de vue probabiliste : les informations et les paramètres à estimer sont traités comme des variables aléatoires. Ce type de problème consiste à chercher le maximum de vraisemblance, c'est-à-dire à maximiser la probabilité que les données issues des observations sont en effet observées.

### II.1.3 APPLICATION AUX SYSTEMES GEOPHYSIQUES

#### *Les algorithmes d'assimilation*

Les techniques basées sur la résolution de problèmes inverses tels que présentés précédemment ont été développées pour des modèles élaborés de description des écoulements géophysiques. Toutefois, des difficultés intrinsèques à un système géophysique complexe se posent ; en voici les principales :

- Le système est évolutif, sa dynamique est non stationnaire et non linéaire.
- La dimension numérique du problème est très grande : les modèles utilisés ont environ  $10^5$  degrés de liberté et assimilent environ  $10^3$  observations.
- Les statistiques pertinentes sur l'erreur commise par les modèles sont mal connues.

En conséquence, deux grands types d'algorithmes ont été développés pour la résolution du problème inverse, tel que posé au sens des moindres carrés. Le nom de chacune des quantités évoquées auparavant est conservé dans la description suivante.

L'assimilation séquentielle consiste à optimiser l'état hydrodynamique ( $x$ ) du modèle au cours du temps chaque fois que des observations ( $y$ ) sont disponibles. L'état de prévision du modèle ( $x^{\text{bck}}$ ) ainsi que l'erreur associée ( $W_b$ ) sont propagés par le modèle. A l'instant de l'analyse, la distance entre l'observation ( $y$ ) et un état de prévision fourni par l'opérateur d'observation ( $M \cdot x^{\text{bck}}$ ) est évaluée pour estimer un nouvel état du modèle ( $x^{\text{est}}$ ) et son erreur d'analyse associée ( $P$ ). Les fondements de cette méthode reposent sur l'utilisation de l'interpolation optimale (i.e. le calcul du BLUE) ou de manière plus élaborée, sur le filtre de Kalman. Ce filtre fait appel à une dynamique linéarisée avec une prise en compte des erreurs liées aux paramétrisations du modèle. Cette méthode présente plusieurs difficultés. La première est liée aux ressources de calcul. Le filtre complet est en effet particulièrement coûteux en temps de calcul lorsque le nombre de variables du modèle est important : si  $N$  est

le nombre de ces variables, alors la propagation des erreurs nécessite  $2N$  intégrations du modèle. Il requiert de plus un stockage en mémoire de l'ordre de  $N^2$  variables. La seconde difficulté relève d'un problème cognitif : la méthode repose sur la connaissance exacte de chacune des covariances d'erreur, ce qui en pratique n'est pas le cas. Ces imprécisions dégradent fortement l'optimalité du filtre. Enfin, une troisième difficulté est liée à l'étape de linéarisation, procédé peu adapté aux systèmes dynamiques fortement non linéaires. Tous ces motifs ont conduit à des formulations simplifiées du filtre de Kalman, via une réduction de la taille du problème numérique ou encore une simplification de l'estimation des covariances d'erreur. Ces dernières peuvent être évaluées par divers moyens statistiques. Citons le filtre SEEK (Singular Evolutive Extended Kalman Filter) qui consiste à effectuer une réduction d'ordre en décomposant la matrice de covariance  $W_k$  sur un nombre réduit de modes singuliers, chaque mode étant considéré comme une direction privilégiée (donnée par chaque valeur propre) pour la propagation de l'erreur (voir e.g. Brasseur et al. 1999). Ou encore, le filtre de Kalman d'ensemble consiste à estimer les erreurs sur l'ébauche de la prévision à partir de statistiques sur un ensemble de simulations du modèle : à condition de connaître la source des erreurs que l'on recherche, on peut bâtir un procédé de Monte-Carlo pour obtenir une valeur approchée de leur statistique (voir e.g. Evensen et van Leeuwen 1996).

L'assimilation variationnelle consiste à effectuer un ajustement global de la trajectoire du modèle hydrodynamique ( $M$ ) aux données ( $y$ ) distribuées dans le temps. Cet ajustement réside en l'optimisation des paramètres du modèle ( $x$ ) par un algorithme de gradient. Ces derniers sont appelés les contrôles en référence au formalisme continu de la théorie du contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (Lions, 1968). L'analyse consiste à minimiser une fonction de coût  $J$ , ce qui revient au premier ordre à annuler son gradient par rapport aux contrôles. L'évaluation du gradient est fournie par le modèle adjoint de  $M$ . Dans ce type d'algorithme, l'estimation doit satisfaire exactement les équations du modèle. Le modèle est alors considéré sans erreur et l'on parle alors d'assimilation sous contrainte forte (Sasaki 1970) – ce qui est le cas de l'assimilation 4DVAR (Le Dimet et Talagrand 1986). Les inconvénients majeurs résident en deux difficultés. La première est d'ordre pratique : le gradient de la fonction de coût est évalué en pratique à travers le modèle adjoint. Le codage d'un adjoint demeure un exercice laborieux pour les modèles relativement complexes. La deuxième difficulté réside en la méconnaissance de statistiques d'erreur sur l'ébauche – via la matrice  $P$  - et de surcroît l'absence de statistique sur l'erreur modèle. Toutefois, lorsque l'hypothèse d'un modèle parfait est levée, le problème variationnel est posé sous contrainte faible (4DPSAS) : il s'agit alors de prendre en compte l'erreur modèle dans les variables de contrôle (Amodei 1995, Courtier 1997, Louvel 2001).

### *Champ d'application*

Un certain nombre d'applications a été développé autour de ces méthodes d'assimilation de données. Bennett (1992) évoque les différentes problématiques scientifiques susceptibles d'être résolues avec des formulations inverses appropriées. Ce champ d'application est repris ci-après.

L'estimation de l'état d'un modèle météorologique ou océanique à partir d'un ensemble réduit d'observations en est l'application première. L'approche inverse a très tôt été envisagée par les services de prévision atmosphérique avec le procédé de prédiction correction. Chaque analyse permet de déterminer un état optimal servant de condition initiale au modèle pour une prochaine prévision. Ce procédé basé au départ sur un algorithme séquentiel d'interpolation optimale puis de filtrage de Kalman a désormais évolué sous une forme variationnelle (Rabier et al. 2000). La mise en place opérationnelle de tels algorithmes reste toutefois délicate notamment sur la détermination des erreurs à l'ébauche (Derber et Bouttier 1999, Weaver et Courtier 2001). De manière analogue à la météorologie, des projets ont vu le jour afin de mettre sur pied une océanographie opérationnelle. Il s'agit de coordonner les tâches de récupération, validation et mise à disposition des observations, d'assimilation de ces observations dans les modèles numériques, et de publication des prévisions qui en résultent. Le projet français MERCATOR consiste à assimiler des observations de niveau de la mer fournies par le satellite TOPEX/POSEIDON dans un modèle de la zone Atlantique Nord – Méditerranée Occidentale, avec l'utilisation d'algorithmes d'interpolation optimale. Le projet européen MFSTEP conserve ces mêmes enjeux sur l'ensemble du bassin méditerranéen. C'est d'ailleurs un intérêt majeur de l'assimilation que de pouvoir corriger les informations fournies par les modèles numériques en utilisant l'information contenue dans les observations. Cela se traduit par une meilleure compréhension des phénomènes dynamiques naturels. De nombreux travaux ont été menés sur la base de configurations océaniques réalistes à l'échelle globale (e.g. Derber et Rosati 1989), à l'échelle d'un bassin océanique (e.g. en Atlantique Sud, Florenchie et Verron 1998) et à l'échelle côtière (e.g. sur la côte de l'Oregon, Oke et al. 2001).

Une seconde application consiste en l'estimation de paramètres impliqués dans la construction des lois physiques décrivant l'écoulement. Il s'agit d'identifier le point de fonctionnement optimal d'un modèle décrivant le processus physique observé. Les algorithmes variationnels sont particulièrement adaptés à la résolution d'un tel problème inverse : ils fournissent une paramétrisation adaptée du modèle pour retranscrire l'observation, mais aussi des informations quantitatives sur la sensibilité des paramètres contrôlés. Appliquée à la dynamique côtière, cette approche permet d'étudier les différents mécanismes d'influence tels que le frottement du fond (e.g. Devenon 1990 dans la baie de Seine), les forçages latéraux (e.g. Lellouche et al. 1998 avec le passage d'une onde de gravité externe), ou encore les processus de mélange (e.g. Leredde et al. 2002 dans l'étang de Berre).

L'assimilation de données peut servir de banc d'essai préalable à la définition de nouveaux réseaux d'observation. Il s'agit de contribuer à déterminer les caractéristiques optimales des observations du futur réseau en termes de variable observée, d'échantillonnage spatio-temporel et de précision ; avec l'objectif d'assimiler ces futures données dans les modèles. A titre d'exemple, Verron (1990) a étudié l'impact des données d'altimétrie satellitaire sur la modélisation numérique selon différents paramètres orbitaux ainsi que le niveau de bruit des observations. L'utilisation potentielle de données altimétriques en zone côtière a été aussi étudiée en vue d'être assimilée (e.g. dans la zone du Golfe du Lion, Echevin et al. 2000, Auclair et al. 2003).

## II.2. L'APPROCHE 4DVAR INCRÉMENTALE

### II.2.1 FORMULATION DU PROBLEME VARIATIONNEL

#### *Position du problème*

Il s'agit d'estimer un ensemble de paramètres du modèle, décrits par des fonctions continues, dans une approche variationnelle d'assimilation de données. Dans sa formulation continue, ce problème inverse est résolu dans la théorie du contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (Lions 1968). Les espaces vectoriels manipulés dans cette description entrent dans le cadre des espaces de Hilbert complets pour la métrique choisie. Ils sont munis de produits scalaires identifiables au produit de dualité dans  $L^2$  (identifié à son dual). A partir des données suivantes :

- un contrôle  $x$  de l'ensemble des contrôles admissibles  $X$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ . Il représente la fonction continue des paramètres du modèle.
- l'état  $u$  de l'ensemble  $E$  des états du modèle et muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ . L'état est donné, pour  $x$  donné, par la résolution des équations aux dérivées partielles qui gouvernent le modèle non linéaire :  $u = M_{NL}(x)$ .
- l'observation  $y$  qui est solution du modèle dans  $E$ . Elle est supposée connue exactement.
- la fonction de coût  $J$  de  $E$  qui mesure l'écart quadratique de l'état  $u$  avec l'observation  $y$ . C'est une fonction implicite des contrôles puisqu'à un contrôle  $x$  donné correspond un unique état  $u$ , ainsi  $J$  peut être aussi définie sur  $X$ .

L'objectif de la méthode est de résoudre le problème de minimisation non contraint :

$$\text{trouver } x^{\text{est}} \in X \text{ tel que } J(x^{\text{est}}) = \min J(x)$$

Le contrôle dit optimal est noté  $x^{\text{est}}$ . L'algorithme d'optimisation recherche le contrôle optimal réalisant le minimum local de la fonction de coût tel que

$$J(x^{\text{est}}) \leq J(x), \quad \forall x \in \vartheta(x^{\text{est}})$$

où  $\vartheta(x^{\text{est}})$  est un voisinage du contrôle optimal. La recherche d'un minimum global de  $J$  sur  $X$  est une tâche difficile. Par conséquent, on se restreint à explorer une région de  $X$  proche du contrôle de départ (l'ébauche), physiquement admissible aux vues du jeu d'observations. Toutefois, le nombre de minima locaux est réduit dans le cas d'un système d'équations faiblement non linéaire. Le minimum local vérifie les conditions d'optimalité du premier ordre

$$\nabla_x J(x^{\text{est}}) = 0 \tag{2.14}$$

ce qui en fait un état stationnaire de la fonction de coût. Il faut ajouter une information du second ordre sur les directions de courbure négative de  $J$  pour qu'un point stationnaire réalise le minimum local. Les méthodes classiques de recherche d'un point stationnaire génèrent une suite d'approximations  $(x_k)_{k \geq 1}$  dont chaque itération réactualise  $x_k$  par un meilleur  $x_{k+1}$  dans le sens de la propriété de descente

$$J(x_{k+1}) < J(x_k) \quad (2.15)$$

Cette réactualisation se fait en deux étapes :

- le choix de la direction de descente  $\theta_k$  au point  $x_k$  qui vérifie  $\langle \nabla_x J(x_k), \theta_k \rangle_x < 0$
- le choix d'un pas  $\rho_k$  positif suivant la direction  $\theta_k$  :  $x_{k+1} = x_k + \rho_k \cdot \theta_k$ . C'est l'étape du 'line search'.

Ces méthodes de descente peuvent être rangées en deux catégories. Les méthodes de type gradient conjugué résolvent les systèmes linéaires d'équations et minimisent les fonctions quadratiques fortement convexes ; et les méthodes de type Newton qui traitent de systèmes non linéaires dont les directions de descente sont calculées à partir du système linéarisé. Elles sont alimentées par les données de  $J$  et de son gradient  $\nabla_x J$ .

### *Description de l'approche variationnelle*

Pour traiter un problème non linéaire, une méthode de Newton a été mise en place au sein de la méthode 4D-variationnelle, dont l'approche a été introduite en météorologie (Talagrand et Courtier 1987). En voici le principe. Soit  $M$  l'opérateur linéaire de  $X$  dans  $E$  obtenu par différentiation de  $M_{NL}$  par rapport à  $x$ . Pour une variation du contrôle autour de  $x_0$  dans la direction  $\delta x$ , on a :

$$M_{NL}(x_0 + \delta x) = M_{NL}(x_0) + M(x_0) \cdot \delta x, \quad \forall \delta x \in X \quad (2.16)$$

Où  $M(x_0)$  désigne le modèle linéarisé tangent de  $M_{NL}$  autour de  $x_0$ . La fonction de coût est une fonction implicite des contrôles, différentiable dans  $X$ . La variation de  $J$  dans la direction  $\delta x$  s'exprime dans l'espace des contrôles admissibles suivant la relation :

$$\delta J = \langle \nabla_x J, \delta x \rangle_x, \quad \forall \delta x \in X \quad (2.17)$$

Dans l'ensemble des états, l'état  $u$  du modèle subit une perturbation égale au premier ordre à  $M(x_0) \cdot \delta x$ . D'où l'expression de  $\delta J$  dans  $E$  :

$$\delta J = \langle \nabla_u J, M(x_0) \cdot \delta x \rangle_u = \langle M^*(x_0) \cdot \nabla_u J, \delta x \rangle_x, \quad \forall \delta x \in X \quad (2.18)$$

où  $M^*(x_0)$  est l'opérateur adjoint de  $M(x_0)$ . Ce calcul de variations est vrai quelque soit la direction  $\delta x$ , on en déduit une relation liant les gradients de la fonction de coût :

$$\nabla_x J = M^*(x_0) \cdot \nabla_u J \quad (2.19)$$

A partir des données de  $J(x)$  et  $\nabla_x J$ , regardons comment la méthode de descente effectue les deux étapes de minimisation. L'évaluation de la direction de descente par la méthode de Newton se fait par la résolution de

$$\nabla_x^2 J(x_k) \cdot \theta_k + \nabla_x J(x_k) = 0 \quad (2.20)$$

et nécessite le calcul de l'inverse du Hessien de la fonction de coût (noté  $\nabla_x^2 J$ ), trop onéreux en place mémoire. En revanche, les méthodes de quasi-Newton évaluent cette direction de descente par

$$\theta_k = -H_k \cdot \nabla_x J(x_k) \quad (2.21)$$

où  $H_k$  est une matrice réactualisée à chaque itération par la formule BFGS, relation de la forme

$$H_{k+1} = f [ H_k, \nabla_x J(x_{k+1}) - \nabla_x J(x_k), x_{k+1} - x_k ] \quad (2.22)$$

Afin de limiter l'allocation de mémoire pour son calcul, la routine de minimisation M1QN3 mise en place par Gilbert et Lemaréchal (1989) et utilisée dans notre application, construit  $H_k$  à partir des  $m$  couples  $[\nabla_x J(x_{i+1}) - \nabla_x J(x_i), x_{i+1} - x_i]_{k-m \leq i \leq k}$ . La direction de descente  $\theta_k$  étant maintenant définie, l'étape du 'line search' recherche à chaque itération un pas de descente optimal  $\rho_k$  qui vérifie la relation

$$J(x_k + \rho_k \theta_k) < J(x_k) \quad (2.23)$$

Lorsque ce pas est constant au cours de la procédure, une valeur trop forte risque de conduire à une série  $(x_k)_{k>0}$  oscillant indéfiniment autour de  $x^{est}$ . A l'inverse, le choix d'une valeur trop faible génère une série  $(x_k)_{k>0}$  qui converge vers un point non stationnaire (dans le sens de la relation (2.14)). L'idée est donc de minimiser la fonction  $\rho \rightarrow J(x_k + \rho \theta_k)$  pour des valeurs de  $\rho$  positives. En pratique, on est confronté à un problème de minimisation non linéaire qui n'a de solution exacte que dans le cas où  $J$  est quadratique. Une solution détournée consiste à choisir  $\rho_k$  qui vérifie les deux inégalités suivantes (conditions de Wolfe) :

$$\begin{aligned} J(x_{k+1}) &\leq J(x_k) + \rho_k \omega_1 \cdot \langle \nabla_x J(x_k), \theta_k \rangle_x \\ \langle \nabla_x J(x_k + \rho_k \theta_k), \theta_k \rangle_x &\geq \omega_2 \cdot \langle \nabla_x J(x_k), \theta_k \rangle_x \quad \text{avec } 0 < \omega_1 < \omega_2 < 1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Il est démontré que pour un tel pas, le point de Wolfe  $x_{k+1}$  correspondant valide la condition de descente. Un algorithme spécifique permet de calculer ce point.

### Formulation incrémentale

En pratique, le problème inverse est résolu dans sa formulation incrémentale (Courtier et al. 1994). Le contrôle est dès lors défini par un incrément  $\delta x$  autour d'une référence  $x_0$  fixée :  $x = x_0 + \delta x$ . Par conséquent l'état du modèle s'exprime au premier ordre en fonction de ce nouveau contrôle par  $u = u_0 + M \cdot \delta x$ . D'autre part, l'observation est définie en termes d'innovation par le vecteur  $d = u_0 - y$  puisque l'état de référence n'est plus variable. La fonction de coût  $J$  devient :

$$J(x_0 + \delta x) = \frac{1}{2} \| u - y \|^2 = \frac{1}{2} \| u - u_0 + u_0 - y \|^2 \approx \frac{1}{2} \| M \cdot \delta x - d \|^2 \quad (2.25)$$

au premier ordre, en utilisant la relation (2.16). Dans l'approche incrémentale, la nouvelle fonction de coût a la bonne propriété d'être quadratique. Le problème de minimisation local posé à la référence  $x_0$  consiste à minimiser cette fonction de coût. De fait, le problème de minimisation complet avec plusieurs minima potentiels dus aux non linéarités du modèle est simplifié en un problème de minimisation avec un seul minimum garanti par le caractère quadratique de ce dernier. La routine de minimisation voit son fonctionnement modifié puisque les itérations s'effectuent à travers le modèle linéarisé tangent pour la réactualisation de la fonction de coût, et son adjoint pour le calcul de son gradient. Le point de Wolfe peut dans ce cas être explicitement déterminé. Par réactualisations successives de  $x_0$ , le problème complet est résolu à travers une série de problèmes quadratiques qui aboutissent au contrôle optimal (voir la Figure 2.3). De cette manière, l'approche variationnelle prend les

non linéarités du modèle en compte et conserve les avantages d'unicité dans la minimisation de problèmes quadratiques (Laroche et Gauthier 1998).

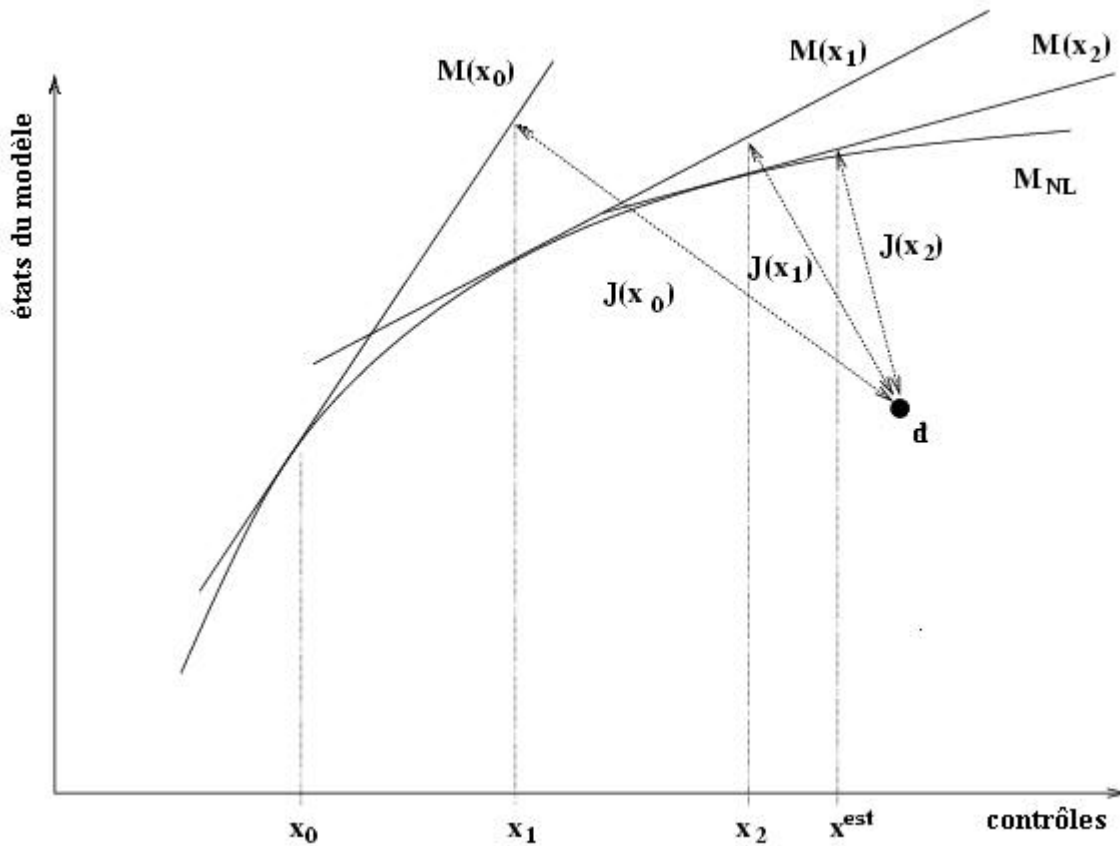


Fig.2.3 Fonctionnement de l'algorithme 4DVAR dans sa formulation incrémentale. La variété du modèle direct  $M_{NL}$  dans l'espace des contrôles est localement approchée autour de  $x_i$  par une variété linéaire tangente  $M(x_i)$  suivant laquelle le problème de minimisation quadratique de  $J(x_i)$  est posé.

## II.2.2 ORGANISATION DU CODE

### *Composantes du système d'assimilation*

La plate-forme d'assimilation OPAVAR, à la base de ce travail, a été construite pour l'optimisation de l'état initial et appliqué à l'assimilation des données TAO dans le bassin équatorial de l'océan Pacifique (Weaver et al. 2003). Cette plate-forme opérationnelle utilise le modèle de circulation générale OPA qui est décrit en détails dans la section I.1. C'est à partir de ce modèle direct  $M_{NL}$  qu'a été développé l'algorithme du 4DVAR incrémental. Ce dernier fait appel au modèle linéarisé tangent  $M$  défini en (2.16) et au modèle adjoint



correspondant  $M^*$  défini en (2.18). Ces trois modèles constituent les trois composantes du système d'assimilation.

Le modèle de circulation océanique OPA est devenu au cours de multiples évolutions, un code long et complexe. La longueur et la complexité du code adjoint est comparable au code direct. De plus, l'expérience a montré que même de petites erreurs de correspondance entre les deux codes numériques rendent l'usage de l'adjoint inefficace ; en effet l'usage de routines de minimisation telles que M1QN3 nécessite des gradients parfaitement justes. C'est pourquoi, les codes linéarisé tangent et adjoint ont été écrits « à la main » à partir d'une version figée du code direct en suivant des règles de prise d'adjoint. Ces dernières sont décrites par Talagrand (1991).

### *Modifications de l'algorithme d'inversion*

C'est donc à partir d'un algorithme existant pour le contrôle de l'état initial que le contrôle sur les frontières ouvertes a été développé. L'implémentation de ces nouveaux contrôles a été effectuée en respect avec le principe de localité : toute modification locale du code direct entraîne la modification locale correspondante dans les codes tangent et adjoint. Cela implique que chaque routine du code direct – qui réalise une tâche donnée - ait une correspondance univoque avec une routine du code adjoint – qui réalise la tâche adjointe. A titre d'exemple, considérons la tâche suivante :

$$[a \ b \ c]^T = M_{NL}([b \ c]) \rightarrow a = b \times c \quad (2.26)$$

Elle prend en entrée les variables  $b$  et  $c$  et fournit en sortie la valeur de  $a$  exprimée en fonction de  $b$  et  $c$ . Le code linéarisé tangent prend les variables tangentes correspondantes :

$$[\delta a \ \delta b \ \delta c]^T = M.[\delta b \ \delta c] \rightarrow \delta a = \delta b \times c + b \times \delta c \text{ avec } M = [c \ b ; 1 \ 0 ; 0 \ 1] \quad (2.27)$$

Le calcul de la valeur de sortie  $\delta a$  nécessite les valeurs de  $b$  et  $c$ , ces variables directes sont stockées dans le déroulement du code direct pour être utilisées dans les codes tangent et adjoint. Ce dernier correspond à la tâche adjointe du code tangent :

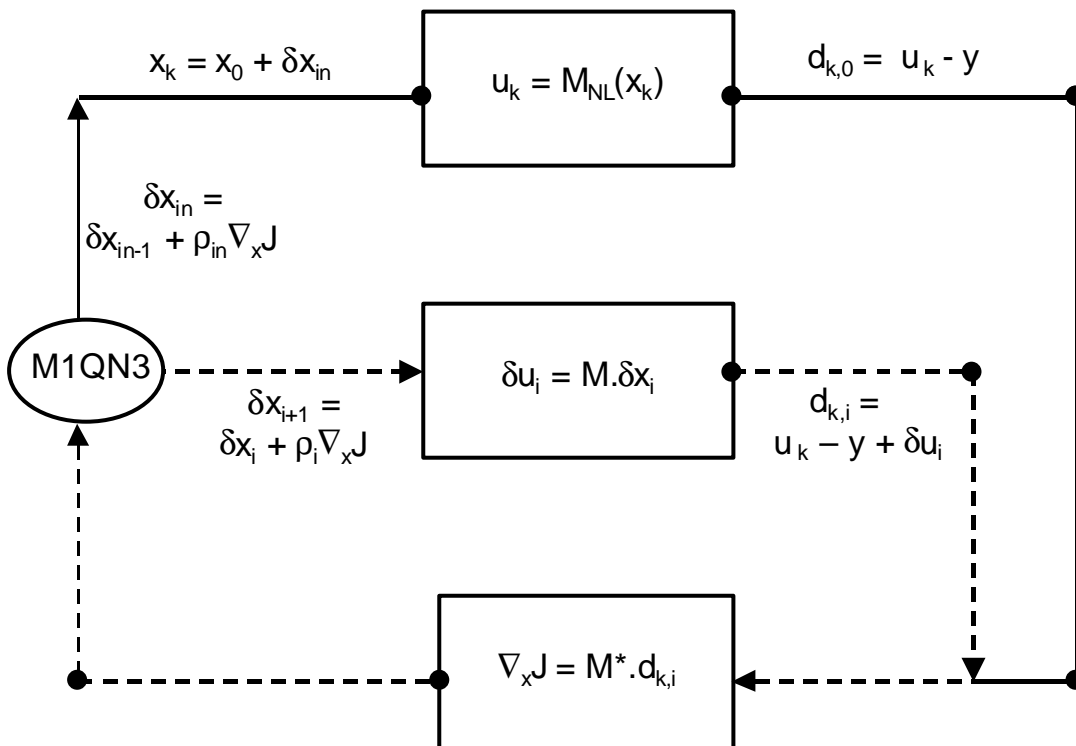
$$\begin{aligned} [\delta b^* \ \delta c^*]^T &= M^*.[\delta a^* \ \delta b^* \ \delta c^*] \rightarrow \delta b^* = \delta b^* + c \times \delta a^* \\ &\delta c^* = \delta c^* + b \times \delta a^* \\ \delta a^* &= 0 \quad \text{avec } M^* = M^T \quad (2.28) \end{aligned}$$

Le code adjoint est donc intégré à rebours, les variables qui apparaissent au cours de l'intégration dans le code direct doivent localement être initialisées dans le code adjoint.

### *Schéma général*

Les trois composantes de l'algorithme incrémental d'assimilation de données présentées ci-dessus sont reliées entre elles par deux boucles itératives, comme schématisé en Figure 2.4. La première boucle, la boucle externe, est initialisée en entrée avec l'ébauche des paramètres de contrôle ( $x_0$ ). La trajectoire du modèle direct ( $u_0$ ) correspondant est calculée et stockée ; le vecteur innovation mesurant l'erreur de prévision initiale  $d_{0,0}$  est alors évalué. Au

cours de la procédure de minimisation, cette boucle externe permet de réactualiser la trajectoire du modèle ( $u_k$ ) et l'innovation  $d_{k,0}$  correspondant aux nouvelles valeurs des paramètres de contrôle ( $x_k$ ). La seconde boucle, la boucle interne, prend en entrée l'innovation  $d_{k,0}$  pour la propager à rebours dans le temps à travers le modèle adjoint. C'est ainsi que le gradient de la fonction de coût  $\nabla_x J_{k,0}$  correspondant à cette erreur de prévision est évalué pour être injecté en entrée de la routine de minimisation M1QN3. Cette dernière calcule un incrément optimal ( $\delta x_i$ ) qui est propagé à travers le modèle linéarisé tangent pour actualiser le vecteur innovation  $d_{k,1}$ . Les deux codes M et M\* impliqués dans cette boucle font appel à la trajectoire sauvegardée ( $u_k$ ) pour le traitement des termes non-linéaires. Cette boucle interne est alors incrémentée un nombre  $in$  de fois, où  $in$  est un entier naturel fixé, avant de passer à nouveau dans la boucle externe. L'innovation  $d_{k,i}$  force le modèle adjoint pour évaluer  $\nabla_x J_{k,i}$ . M1QN3 fournit alors un nouvel incrément ( $\delta x_{i+1}$ ) qui forcera le modèle linéarisé tangent.



**Fig.2.4** Schéma général de fonctionnement de l'algorithme 4DVAR. La boucle externe est représentée en trait plein avec un indice  $k$  croissant. La boucle interne est représentée en trait pointillé avec un indice  $i$  variant de 0 à  $in$ . Ce dernier indice est remis à zéro au début de chaque boucle interne.



### III. POSITION, IMPLÉMENTATION ET VALIDATION DU CONTRÔLE DES CONDITIONS FRONTIÈRES

Il s'agit de mettre en place et de valider le traitement des conditions limites ouvertes d'un modèle aux équations primitives avec l'approche 4DVAR. La formulation continue du problème de contrôle optimal appliqué à une dynamique barotrope puis barocline mène à une solution définie de manière univoque. Le développement dans le contexte d'un problème inverse discret nécessite la définition d'opérateurs appliquant des contraintes exactes aux solutions ; leur implémentation fournit ainsi un algorithme de contrôle des conditions frontières (1<sup>ère</sup> partie). Cet algorithme est alors validé par trois expériences d'identification (2<sup>ème</sup> partie).

#### III.1. TRAITEMENT DU PROBLÈME DE CONTRÔLE FRONTIÈRE

##### III.1.1 CONTROLE FRONTIERE DE LA DYNAMIQUE BAROTROPE

###### *Position du problème direct*

Comme il a été décrit dans la section I.1.1, la partie barotrope de la dynamique côtière est modélisée au travers du diagnostique du gradient de pression de surface. Le courant barotrope est en effet calculé dans l'hypothèse 'toit rigide' par le système d'équations composé de (1.9) et (1.11). Ces équations couplées sont exprimées ci-après dans le cas d'un bassin ouvert.

Sur un domaine à fond plat d'étendue  $\Omega$  ouvert le long de  $\Gamma$ , l'évolution du courant barotrope  $\mathbf{u}$  dans la fenêtre temporelle  $T=[t_0, t_1]$  est solution du problème de Dirichlet non homogène suivant :

$$\partial_t \mathbf{u} = F \cdot \partial_t \psi \quad \text{sur } \Omega \times T \quad (3.1.a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_i \quad \text{à } t = t_0 \quad (3.1.b)$$

où l'opérateur  $F = 1/h \mathbf{k} \times \nabla$  est linéaire,  $h$  est la profondeur du bassin. L'équation (3.1.a) est obtenue en dérivant la relation (1.9) liant  $\mathbf{u}$  à  $\psi$  par rapport au temps, avec l'ajout d'une condition initiale (3.1.b). Ce problème d'évolution est couplé avec la résolution d'un second problème de Dirichlet spatial qui exprime la tendance de la fonction de courant à l'instant  $t \in T$  :

$$\nabla^2 \partial_t \psi = q \quad \text{sur } \Omega \quad (3.2.a)$$

$$\partial_t \psi = x_{ob}(t) \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.2.b)$$

L'équation (3.2.a) est l'expression de l'équation (1.11) dans le cas d'un bassin à fond plat. On note en effet  $q = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{m})$  le terme de forçage de cette équation elliptique qui est localement (i.e. à l'instant  $t$ ) indépendant des variables de contrôle définies ci-après. Une condition frontière (3.2.b) est ajoutée. Ainsi, chaque solution du système est définie de manière unique par la spécification des variables de contrôle composées de la condition initiale  $\mathbf{x}_i \in L^2(\Omega)$  et

des conditions frontières représentées par  $x_{ob} \in L^2(\Gamma \times T)$ . Les espaces fonctionnels manipulés entrent dans le cadre des espaces de Hilbert.

### Position du problème inverse

Considérons l'observation totale  $\mathbf{y}$  du courant barotrope. Le problème inverse consiste à identifier les variables de contrôle  $x = (\mathbf{x}_i, x_{ob}) \in X = L^2(\Omega; \Gamma \times T)$  qui minimisent une fonction de coût  $J(x)$ ; cette fonction implicite de  $x$  mesure la distance entre la solution du modèle  $\mathbf{u}$  et l'observation de l'état du modèle  $\mathbf{y}$ .

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_T \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)\|_{\Omega}^2 dt \quad (3.3)$$

où la norme utilisée est celle du produit scalaire canonique de  $L^2(\Omega)$  et noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ . Ce dernier produit scalaire est identifié au produit de dualité entre  $L^2(\Omega)$  et son dual. De même,  $L^2(\Gamma)$  est défini comme un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  que l'on identifie au produit de dualité entre  $L^2(\Gamma)$  et son dual. Le problème inverse ainsi posé dans sa formulation continue est surdéterminé, il possède une solution optimale  $x^{est}$  dans l'espace des contrôles admissibles noté  $X$ . On cherche alors l'expression du gradient de la fonction de coût par rapport aux variables de contrôle.

### Expression du gradient de la fonction de coût

Introduisons la dérivée directionnelle de  $J$  au point  $x$  le long de la direction  $\phi = (\mathbf{f}_i, \phi_{ob}) \in X$  reliée à celle de  $\mathbf{u}$  par la relation:

$$J'(x, \phi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1/\delta [J(x + \delta \phi) - J(x)] = \int_T \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t) \rangle_{\Omega} dt \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{u}'$  représente la dérivée directionnelle de  $\mathbf{u}$  dans la direction  $\phi$ . Le gradient  $\nabla_x J = (\nabla_{x_i} J, \nabla_{x_{ob}} J) \in X$  est défini comme la forme linéaire satisfaisant

$$\forall \phi, J'(x, \phi) = \langle \mathbf{f}_i, \nabla_{x_i} J \rangle_{\Omega} + \int_T \langle \phi_{ob}(t), \nabla_{x_{ob}(t)} J \rangle_{\Gamma} dt \quad (3.5)$$

$\mathbf{u}'$  vérifie le problème de Dirichlet (3.1) linéarisé au voisinage du contrôle  $x$ . Il s'exprime de manière immédiate en fonction de la dérivée directionnelle de  $\partial_t \psi$  comme un problème temporel dont l'état initial est donné par la variation du contrôle initial :

$$\partial_t \mathbf{u}' = F. \partial_t \psi' \quad \text{sur } \Omega \times T \quad (3.6.a)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}_i \quad \text{à } t = t_0 \quad (3.6.b)$$

De même,  $\partial_t \psi'$  vérifie le problème de Dirichlet spatial (3.2) linéarisé au voisinage du contrôle  $x$ . Dans ce cas, c'est la variation du contrôle frontière prise au temps  $t \in T$  qui est spécifiée :

$$\nabla^2 \partial_t \psi' = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (3.7.a)$$

$$\partial_t \psi' = \phi_{ob}(t) \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.7.b)$$

Il est important de noter que c'est la variable tangente à la tendance de la fonction de courant qui est solution du problème elliptique et stationnaire (3.7). Notons  $\partial_t \psi^*$  l'état adjoint de  $\partial_t \psi$ . Puisque l'opérateur Laplacien  $\nabla^2$  est auto-adjoint,  $\partial_t \psi^*$  vérifie l'équation adjointe de (3.7.a).

Une condition frontière nulle est choisie arbitrairement pour obtenir le problème adjoint forcé par  $F^* \cdot \mathbf{u}^*$ ,

$$\nabla^2 \partial_t \psi^* = F^* \cdot \mathbf{u}^* \quad \text{sur } \Omega \quad (3.8.a)$$

$$\partial_t \psi^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.8.b)$$

où  $\mathbf{u}^*$  est l'état adjoint correspondant au champ de courant barotrope et  $F^*$  l'opérateur adjoint de  $F$  qui a la propriété d'être aussi linéaire.  $\mathbf{u}^*$  satisfait l'équation adjointe de (3.6.a) forcée par l'écart  $(\mathbf{u} - \mathbf{y})$ . Une condition finale nulle est choisie arbitrairement.

$$\partial_t \mathbf{u}^* = -(\mathbf{u} - \mathbf{y}) \quad \text{sur } \Omega \times T \quad (3.9.a)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad \text{à } t = t_n \quad (3.9.b)$$

Afin d'exprimer le gradient de  $J$  par rapport à chacune des variables de contrôle, formons le produit scalaire  $I$  suivant

$$I = \int_T \langle \partial_t \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt \quad (3.10)$$

qui se développe avec la formule de Green en

$$I = - \int_T \langle \mathbf{u}'(t), \partial_t \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt + \langle \mathbf{u}'(t_n), \mathbf{u}^*(t_n) \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{u}'(t_0), \mathbf{u}^*(t_0) \rangle_{\Omega} \quad (3.11)$$

Avec les conditions initiales (3.6.b) et (3.9.b) l'équation adjointe (3.9.a), on obtient

$$I = \int_T \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t) \rangle_{\Omega} dt - \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{u}^*(t_0) \rangle_{\Omega} \quad (3.12)$$

Dans un deuxième temps, le produit scalaire  $I$  s'exprime aussi à partir de (3.6.a), puis (3.8.a) sous la forme:

$$I = \int_T \langle F \cdot \partial_t \psi', \mathbf{u}^* \rangle_{\Omega} dt = \int_T \langle \partial_t \psi', F^* \cdot \mathbf{u}^* \rangle_{\Omega} dt = \int_T \langle \partial_t \psi', \nabla^2 \partial_t \psi^* \rangle_{\Omega} dt \quad (3.13)$$

Cette dernière forme (3.13) se développe avec la formule de Green en

$$\int_T \langle \partial_t \psi', \nabla^2 \partial_t \psi^* \rangle_{\Omega} dt = \int_T \langle \partial_t \psi', \partial_n \partial_t \psi^* \rangle_{\Gamma} dt - \int_T \langle \partial_n \partial_t \psi', \partial_t \psi^* \rangle_{\Gamma} dt + \int_T \langle \nabla^2 \partial_t \psi', \partial_t \psi^* \rangle_{\Omega} dt \quad (3.14)$$

où  $\partial_n$  est la dérivée normale à  $\Gamma$ . En utilisant les conditions frontières (3.7.b) et (3.8.b) ainsi que l'équation tangente (3.7.a), l'équation (3.14) donne une seconde expression de  $I$ :

$$I = \int_T \langle \phi_{ob}(t), \partial_n \partial_t \psi^* \rangle_{\Gamma} dt \quad (3.15)$$

Les expressions (3.12) et (3.15) du produit scalaire  $I$  permettent d'aboutir à une relation exprimant la dérivée directionnelle de  $J$  donnée en (3.4) :

$$J'(x, \phi) = \int_T \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t) \rangle_{\Omega} dt = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{u}^*(t_0) \rangle_{\Omega} + \int_T \langle \phi_{ob}(t), \partial_n \partial_t \psi^* \rangle_{\Gamma} dt \quad (3.16)$$

Par conséquent, l'expression (3.5) de la dérivée directionnelle de  $J$  mène à l'égalité suivante

$$\langle \phi_i, \nabla_{x_i} J \rangle_{\Omega} + \int_T \langle \phi_{ob}(t), \nabla_{x_{ob(t)}} J \rangle_{\Gamma} dt = \langle \phi_i, \mathbf{u}^*(t_0) \rangle_{\Omega} + \int_T \langle \phi_{ob}(t), \partial_n \partial_t \psi^* \rangle_{\Gamma} dt \quad (3.17)$$

expression vérifiée quelque soit  $\phi \in X$ . On identifie ainsi le gradient de  $J$  par rapport aux contrôles en fonction de l'état adjoint :

$$\nabla_{x_i} J = \mathbf{u}^*(t_0) \quad (3.18.a)$$

$$\nabla_{x_{ob(t)}} J = \partial_n \partial_t \psi^*(t) \quad t \in T \quad (3.18.b)$$

On retrouve le même type de solutions que celles décrites par e.g. Talagrand et Courtier (1987) pour  $\nabla_{x_i} J$ , et par e.g. Devenon (1990) pour  $\nabla_{x_{ob}} J$  dans le cas d'un problème elliptique.

### *Caractéristiques remarquables*

Plusieurs aspects de la formulation variationnelle pour le contrôle des conditions frontières barotropes apparaissent dans ce développement analytique. Tout d'abord, les équations tangentes (3.6) et adjointes (3.8) associées au problème d'évolution (3.1) ne sont pas modifiées par l'ajout des contrôles frontières. L'algorithme d'optimisation mis en place pour le contrôle des conditions initiales seules peut être conservé avec l'ajout des conditions frontières.

Dans un second point, la formulation variationnelle du problème de contrôle des conditions frontières barotropes met en lumière un second problème de Dirichlet (3.2) elliptique. Ce problème s'exprime en terme de dérivées en temps. Il s'agit donc d'ajuster la tendance du contrôle frontière à travers un problème stationnaire au premier ordre en temps. Par conséquent, la condition initiale estimée fournit une origine pour la définition de la condition frontière lors de l'intégration de ses tendances estimées : c'est ainsi que le problème d'évolution de la condition à la limite est résolu. De plus, les deux types de conditions sont raccordés de manière continue. L'algorithme d'optimisation contrôle la série temporelle de conditions frontières fournie par le solveur elliptique sous la forme de tendance de la fonction de courant.

Enfin, l'expression du gradient de la fonction de coût exprimée dans le cas d'une l'observation totale s'exprime de manière univoque en fonction des états adjoints pris à l'instant initial d'une part et le long de la frontière d'autre part.

## III.1.2 CONTROLE FRONTIERE DE LA DYNAMIQUE BAROCLINE EN EQUILIBRE GEOSTROPHIQUE

### *Position du problème direct*

Les parties barotrope et barocline de la dynamique sont liées par plusieurs termes intervenant dans les équations résolues par le modèle. On considère dans un premier temps ces deux systèmes dynamiques en particulier, leur couplage sera ensuite abordé. De même que précédemment (section III.1.1), où les effets de la stratification étaient alors écartés, on néglige ici tout effet pouvant générer un gradient de pression de surface (tension de vent, frottement au fond, effets bathymétriques). Sur un domaine de profondeur constante  $h$ , d'étendue  $\Omega \times [0, h]$  ouvert le long de  $\Gamma \times [0, h]$ , l'évolution du courant barocline  $\mathbf{u}$  dans la fenêtre temporelle  $T = [t_0, t_n]$  est solution du problème de Dirichlet non homogène suivant :

$$\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = G(z). \rho \quad \text{sur } \Omega \times \{z\} \times T \quad (3.19.a)$$

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = G(z). x_{ob} \quad \text{sur } \Gamma \times \{z\} \times T \quad (3.19.b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_i \quad \text{à } t = t_0 \quad (3.19.c)$$

où  $[G(z)]_{z \in [0, h]}$  représente une famille d'opérateurs linéaires vérifiant :

$$G(z).p = -g \nabla \left( \int_{[0,z]} \rho(\xi) / \rho_0 d\xi \right) \quad (3.20)$$

A l'équilibre, on retrouve la relation géostrophique (1.23) dans le cas particulier d'un gradient de pression de surface nul. L'écoulement est barocliniquement stable, le gradient de pression dû à la pente de chaque isopycne est équilibré par la force de Coriolis. Hors équilibre, ce sont les perturbations de la masse volumique (faibles devant leur valeur moyenne dans l'approximation de Boussinesq) qui forcent le système dynamique (3.19) à travers la frontière ouverte. Ces variations sur l'état hydrologique du bassin à l'équilibre se répercutent via l'hypothèse d'hydrostaticité par des perturbations de pression autour d'un profil d'équilibre fixé. C'est pourquoi le profil de masse volumique aux limites ouvertes  $x_{ob}$  est le seul contrôle frontière du système dynamique. Ces perturbations affectent aussi l'état hydrologique à l'intérieur du bassin ; on considère cependant que leur « transport », par advection ou diffusion, a une échelle de temps grande devant le signal à la frontière. Le terme de droite de l'équation (3.19.a) est par conséquent indépendant de  $x_{ob}$ .

### Expression du gradient de la fonction de coût

La résolution du problème inverse associé consiste à identifier les variables de contrôle  $x = (\mathbf{x}_i, x_{ob}) \in X = L^2(\Omega \times [0, h] ; \Gamma \times [0, h] \times T)$  qui minimisent une fonction de coût  $J(x)$  définie en (3.3). L'évaluation du gradient  $\nabla_x J$  est réalisée à partir d'un calcul variationnel suivant une direction  $\phi = (\mathbf{f}_i, \phi_{ob}) \in X$ . Le problème linéarisé tangent de (3.19) au voisinage du contrôle  $x$  s'écrit le long de la direction  $\phi$  :

$$\partial_t \mathbf{u}' + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}' = 0 \quad \text{sur } \Omega \times \{z\} \times T \quad (3.21.a)$$

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{u}' = G(z). \phi_{ob} \quad \text{sur } \Gamma \times \{z\} \times T \quad (3.21.b)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}_i \quad \text{à } t = t_0 \quad (3.21.c)$$

en considérant que le champ de masse volumique à l'intérieur du bassin ne dépend pas du profil à la frontière ;  $G(z)$  étant un opérateur linéaire.  $\mathbf{u}'$  représente la dérivée directionnelle de  $\mathbf{u}$  suivant  $\phi$  ; on note  $\mathbf{u}^*$  sa variable adjointe qui vérifie le problème adjoint à (3.21), soit :

$$\partial_t \mathbf{u}^* + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^* = -(\mathbf{u} - \mathbf{y}) \quad \text{sur } \Omega \times \{z\} \times T \quad (3.22.a)$$

$$f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times \{z\} \times T \quad (3.22.b)$$

$$\mathbf{u}^* = 0 \quad \text{à } t = t_1 \quad (3.22.c)$$

forcé par l'écart aux observations  $\mathbf{y}$ . Seules des observations de courant sont envisagées dans ce cas, l'observation de la masse volumique ferait intervenir une équation de transport du type (1.4). La dérivée directionnelle de la fonction de coût, notée  $J'(x, \phi)$  et définie en (3.4), s'exprime en utilisant (3.22.a) :

$$J'(x, \phi) = \int_T \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t) \rangle_{\Omega} dt = - \int_T \langle \mathbf{u}'(t), \partial_t \mathbf{u}^*(t) + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt \quad (3.23)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$  est le produit scalaire identifié à son dual dans  $L^2(\Omega \times [0, h])$ . Une première partie de l'expression (3.23) se développe avec un produit mixte en :

$$- \int_T \langle \mathbf{u}'(t), f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt = \int_T \langle f \mathbf{k} \times \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt + \int_T \langle G(z). \phi_{ob}(t), \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Gamma} dt \quad (3.24)$$



en utilisant les conditions frontières (3.21.b) et (3.22.b). La seconde partie de (3.23) se décompose avec la formule de Green en :

$$-\int_T \langle \mathbf{u}'(t), \partial_t \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt = \int_T \langle \partial_t \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt - \langle \mathbf{u}'(t_n), \mathbf{u}^*(t_n) \rangle_{\Omega} + \langle \mathbf{u}'(t_0), \mathbf{u}^*(t_0) \rangle_{\Omega} \quad (3.25)$$

Les conditions initiales (3.21.c) et (3.22.c) mènent à l'expression suivante :

$$-\int_T \langle \mathbf{u}'(t), \partial_t \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt = \int_T \langle \partial_t \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}^*(t) \rangle_{\Omega} dt + \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{u}^*(t_0) \rangle_{\Omega} \quad (3.26)$$

En utilisant (3.21.a), on en déduit ainsi l'expression de  $J'(x, \phi)$ .

$$J'(x, \phi) = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{u}^*(t_0) \rangle_{\Omega} + \int_T \langle \phi_{ob}, G(z)^* \cdot \mathbf{u}^*(t) \rangle_T dt \quad (3.27)$$

vérifiée quelque soit  $\phi \in X$  où  $G(z)^*$  représente l'opérateur adjoint de  $G(z)$ . C'est ainsi que le gradient  $\nabla_x J$  relié à  $J'(x, \phi)$  via la relation (3.5) a pour composantes :

$$\nabla_{x_i} J = \mathbf{u}^*(t_0) \quad (3.28.a)$$

$$\nabla_{x_{ob(z,t)}} J = G(z)^* \cdot \mathbf{u}^*(t) \quad (z, t) \in [0, h] \times T \quad (3.28.b)$$

On retrouve le type de solutions décrites par e.g. Talagrand et Courtier (1987).

### *Caractéristiques remarquables*

Tout d'abord, on retrouve l'égalité (3.18.a) en (3.28.a). Le gradient de  $J$  par rapport à la condition barotrope initiale est évalué de la même manière que celui pour la condition barocline initiale. Mais contrairement au cas barotrope, la compatibilité avec le contrôle frontière ne se pose pas : ces deux conditions aux limites (spatiale et temporelle) sont impliquées dans le même problème de Dirichlet (3.19) régissant l'état du système.

À la frontière ouverte, le gradient de  $J$  à l'instant  $t$  donné par (3.28.b) dépend uniquement de la valeur de l'état adjoint  $\mathbf{u}^*$  pris à ce même instant, à travers l'opérateur spatial  $G(z)^*$ . Par conséquent, seules les variations spatiales de l'état adjoint sont impliquées dans l'évaluation du gradient.

Enfin, de même que dans le cas barotrope, l'expression du gradient de la fonction de coût exprimée dans le cas d'une observation totale s'exprime de manière univoque en fonction des états adjoints pris à l'instant initial d'une part et le long de la frontière ouverte d'autre part. De même, l'algorithme d'optimisation mis en place pour le contrôle des conditions initiales seules peut être conservé avec l'ajout des conditions frontières.

### *Couplage des deux systèmes dynamiques*

Si le problème de contrôle frontière est désormais posé pour chacun des modes barotrope et barocline, leur couplage au sein du modèle complet décrivant un bassin ouvert stratifié est donné par

- l'équation d'évolution de la masse volumique (1.4) : le mode barotrope fournit la valeur du transport qui participe à l'advection du champ de traceur. Ce dernier champ définit alors le terme de droite de l'équation (3.19.a) régissant le mode barocline.

- l'équation d'évolution de la fonction de courant (1.11) : le gradient horizontal de pression hydrostatique lié à la pente des isopycnes intervient en moyenne verticale dans le terme de droite de l'équation (3.2.a) régissant le mode barotrope.

Ces mêmes liens sont retranscrits dans le modèle adjoint ; il est donc important de conserver la séquence dans l'extraction au cours du temps du gradient de  $J$  par rapport aux contrôles frontières.

L'équation de transport (1.4) est résolue à partir de conditions initiales et aux limites portant sur le champ de courant et de masse volumique. Or le champ initial de masse volumique fournit un diagnostic du champ initial de courant en équilibre géostrophique. Il remplace donc le champ de courant barocline initial (condition (3.19.c)) dans l'ensemble des contrôles pour que le système dynamique complet soit bien posé.

Enfin, le terme d'advection de quantité de mouvement induit aussi un couplage entre les deux systèmes dynamiques. Ainsi la séparation du système dynamique complet en deux modes est limitée par l'amplitude de ce terme non-linéaire. C'est alors à travers la paramétrisation de la procédure d'optimisation (c'est-à-dire le nombre de boucles internes insérées dans chaque boucle externe et le contenu d'information a priori) qu'est traité en pratique ce type de couplage.

### III.1.3 IMPLEMENTATION DU CONTROLE FRONTIERE

#### *Implémentation dans le code direct*

L'implémentation des contrôles frontières dans le modèle direct doit être effectué en harmonie avec leur implémentation dans les codes linéarisés tangent et adjoint. Les caractéristiques du contrôle des conditions aux limites ouvertes qui ressortent des développements précédents (sections III.1.1 et III.1.2) sont ainsi mises en oeuvre dans la construction du modèle direct. Soit un bassin d'extension  $\Omega$  de profondeur  $h$  ouvert le long de  $\Gamma$ , et une fenêtre d'assimilation  $T = [t_0, t_1]$ . On considère une discrétisation en temps du modèle hydrodynamique et ses variables. L'état du modèle est ainsi exprimé à chaque pas de temps  $(k-1) \rightarrow k$  par la récurrence :

$$(\mathbf{u}, \rho)(t_k) = M_{NL,k}(\mathbf{x}) [(\mathbf{u}, \rho)(t_{k-1})] \quad k = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

où le modèle direct  $M_{NL}$  est décomposé en une série d'opérateurs  $M_{NL,k}$ . Chacun d'eux dépendent des paramètres de contrôle  $\mathbf{x}$ , incluant les conditions initiales  $\mathbf{x}_i$  et les conditions frontières  $\mathbf{x}_{ob}$  ; il s'agit alors d'exprimer ces liens de dépendance entre les paramètres de contrôle et les opérateurs  $M_{NL,k}$ .

Les contrôles initiaux sont composés de la fonction de courant  $x_{\eta i}$  qui diagnostique un champ de transport non divergent (en accord avec (3.1.b)), et du champ de masse volumique  $x_{\rho i}$  qui diagnostique le champ de courant géostrophique initial (en accord avec (3.19.b)). La partie résiduelle de cette décomposition sur la circulation initiale correspond à un profil de courant barocline agéostrophique. Dans les expériences académiques envisagées ci-après,

ce courant résiduel est peu sensible aux observations, il n'est donc pas contrôlé. On définit l'opérateur linéaire  $\Lambda_0$  de l'espace des contrôles  $X$  :

$$\Lambda_0 : x \rightarrow (\mathbf{u}, \rho)(t_0) = (F \cdot x_{\psi_i} - 1/f \mathbf{k} \times [G(z) \cdot x_{\rho_i}]_{z \in [0, h]}, x_{\rho_i}) \quad (3.30)$$

où  $F$  est défini en (3.1) et  $G(z)$  en (3.20). En pratique, une routine appelée juste avant le lancement de la boucle temporelle du code direct fournit l'état initial du modèle à partir des paramètres de contrôle. Si une ébauche de l'état initial est disponible, le champ de la fonction de courant  $\psi(t_0)$  est extrait à partir du champ de courant initial moyenné sur la verticale  $\hat{\mathbf{u}}(t_0)$  et une condition au bord ouvert :

$$\nabla \cdot (1/h \nabla x_{\psi_i}) = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{u}}(t_0) \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad x_{\psi_i}(M) = \int_{AM} \mathbf{k} \cdot (h \cdot \hat{\mathbf{u}}(t_0) \times d\mathbf{M}), M \in \Gamma \quad (3.31)$$

où  $A$  est un point de côte bordant  $\Gamma$  et  $d\mathbf{M}$  le vecteur linéique de  $\Gamma$  (voir la relation (1.12)). On peut ainsi identifier une ébauche pour le contrôle initial  $x$ . La partie résiduelle du courant qui n'est pas contrôlée est alors ajoutée.

La condition frontière  $x_{ob}$  est quant à elle composée du courant  $x_{tob}$  tangent à la frontière, de la tendance du transport  $x_{nob}$  normal à la frontière et du profil de masse volumique  $x_{\rho ob}$ . Cette décomposition a été discutée en section I.1.1. Le profil  $(\mathbf{u}, \rho)(t_k)$  le long de la limite ouverte est construit à partir du contrôle frontière  $x_{ob}(t_k)$  au début de chaque pas de temps  $(k-1) \rightarrow k$  par une suite d'opérations dont voici la description :

- le profil du courant tangent au temps  $t_k$  est exactement donné par  $x_{tob}(t_k)$ ,
- le profil de masse volumique au temps  $t_k$  est exactement donné par  $x_{\rho ob}(t_k)$ ,
- la partie barocline du courant normal au temps  $t_k$  est donnée à partir de la composante normale à la frontière du courant géostrophique égale à  $-1/f \cdot \mathbf{k} \times [G(z) \cdot x_{\rho ob}(t_k)]_{z \in [0, h]}$ , en accord avec (3.19.b).
- la partie barotrope du courant normal  $\hat{\mathbf{u}}(t_k)$  s'exprime en fonction de celle prise au temps précédent  $t_b$  par :

$$\hat{\mathbf{u}}(t_k) = \hat{\mathbf{u}}(t_b) + (t_k - t_b) \cdot x_{nob}(t_k) \quad b = (1 - \delta_{1,k}) \cdot (k-2) \quad (3.32)$$

où  $x_{nob}(t_k)$  est contraint par la conservation volumique du bassin  $\int_{\Gamma} x_{nob}(t_k) \cdot dM = 0$ , où  $dM$  est une longueur élémentaire suivant  $\Gamma$ .

- la condition de Dirichlet de l'équation elliptique (3.2.b) résolue au pas de temps  $(k-1) \rightarrow k$  est donnée par  $\partial_t \psi(M) = \int_{AM} x_{nob}(t_k) \cdot dM$ ,  $M \in \Gamma$ .

On définit l'opérateur linéaire  $\Lambda_k$  de l'espace des contrôles  $X$  réalisant cette série d'opérations pour fournir les conditions frontières à  $M_{NL,k}$ , soit une équation (3.29) transformée en

$$(\mathbf{u}, \rho)(t_k) = M_{NL,k} [(\mathbf{u}, \rho)(t_{k-1}), \Lambda_k \cdot x] \quad k = 1, \dots, n \quad (3.33)$$

les conditions initiales étant fournies par l'opérateur linéaire  $\Lambda_0$  défini (3.30). En pratique, une routine placée au début de la boucle d'itération temporelle fournit les valeurs du champ de courant et masse volumique le long de la frontière ouverte ; ces profils frontières sont insérés à l'état du modèle avant son filtrage temporel (voir le filtre d'Asselin en section I.1.2). Cette routine fournit aussi la condition frontière sur  $\partial_t \psi$  directement insérée dans le terme de droite

RHS nécessaire au solveur elliptique (voir de même la section I.1.2). Si une ébauche sur la condition frontière est disponible, une ébauche du contrôle frontière  $x_{ob}$  est réalisée à partir du profil  $(\mathbf{u}, \rho)$  le long de  $\Gamma$ , laissant une partie résiduelle non contrôlée sur la composante du courant barocline géostrophique normal à la frontière. Cette partie résiduelle est alors ajoutée systématiquement pour déterminer complètement les conditions frontières.

### Implémentation dans l'algorithme 4DVAR

On considère l'ensemble de données  $[\mathbf{y}(t_k)]_{k=0,n}$  correspondant à l'observation totale du courant dans l'emprise du bassin. La fonction de coût définie en (3.3) par la somme des contributions données par le vecteur innovation à chaque pas de temps s'écrit :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0, n} [\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{y}(t_k)]^T \cdot [\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{y}(t_k)] \quad (3.34)$$

Le calcul variationnel développé précédemment (sections III.1.1 et III.1.2) est repris dans cette formulation discrétisée en temps. On considère une variation  $\delta x$  sur les paramètres de contrôle. La variation de  $J$  correspondante est reliée aux composantes du  $\nabla_x J$  suivant la relation (3.5) :

$$\delta J = \delta x_i^T \cdot \nabla_{x_i} J + \sum_{k=1, n} \delta x_{x_{ob}(t_k)}^T \cdot \nabla_{x_{ob}(t_k)} J \quad (3.35)$$

En référence avec la relation (3.4), la dérivée directionnelle de  $J$  suivant  $\delta x$  s'écrit :

$$\delta J = \sum_{k=0, n} [\delta \mathbf{u}(t_k)]^T \cdot [\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{y}(t_k)] \quad (3.36)$$

Il apparaît dans cette dernière expression l'incrément du vecteur d'état  $\delta \mathbf{u}(t_k)$ , qui correspond à la variable d'état propagé par le modèle linéarisé tangent.

A ce stade, on définit la série des opérateurs  $M_k$  tangent des  $M_{NL,k}$  au voisinage du contrôle de référence  $x$ . L'incrément du vecteur d'état à l'instant  $t_k$  est relié linéairement à  $\delta \mathbf{u}(t_{k-1})$  et  $\delta x$  par :

$$\delta \mathbf{u}(t_k) = M_k \cdot \delta \mathbf{u}(t_{k-1}) + M_k \cdot \Lambda_k \cdot \delta x \text{ pour } k = 1, \dots, n \text{ et } \delta \mathbf{u}(t_0) = \Lambda_0 \cdot \delta x \quad (3.37)$$

obtenue à partir de la linéarisation de la relation (3.33) autour du contrôle de référence  $x$ , les opérateurs  $\Lambda_k$  étant linéaires. La construction des contrôles frontières dans le code tangent est identique à celle réalisée dans le code direct. Les routines définissant l'incrément initial et l'incrément des conditions frontières sont conservées dans leur structure et dans leur place au sein de l'architecture du code. Seules les variables diffèrent : les routines tangent prennent en entrée l'incrément des contrôles issu de la routine de minimisation. La valeur de l'état du modèle tangent au temps  $t_p$  en fonction  $\delta x$  peut être déduit par la récurrence (3.37) :

$$\delta \mathbf{u}(t_p) = [\prod_{j=p,0} M_j] \cdot [\Lambda_0 \cdot \delta x] + \sum_{k=1,p} [\prod_{j=p,k} M_j] \cdot [\Lambda_k \cdot \delta x] \quad (3.38)$$

Le modèle adjoint est forcé quant à lui par l'écart aux observations. La relation adjointe à (3.37) est ainsi exprimée au temps  $t_p$  par la transposée de (3.38) :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}(t_p)^T \cdot [\mathbf{u}(t_p) - \mathbf{y}(t_p)] &= [\Lambda_0 \cdot \delta x]^T \cdot [\prod_{j=0,p} M_j^T] \cdot [\mathbf{u}(t_p) - \mathbf{y}(t_p)] \\ &+ \sum_{k=1,p} [\Lambda_k \cdot \delta x]^T \cdot [\prod_{j=k,p} M_j^T] \cdot [\mathbf{u}(t_p) - \mathbf{y}(t_p)] \end{aligned} \quad (3.39)$$

A partir de l'expression de la dérivée directionnelle de la fonction de coût en (3.36), l'expression du gradient de J par rapport à chacun des paramètres de contrôle est identifiée avec la relation (3.35), soit

$$\nabla_{x_i} J = [\Lambda_0]^T \cdot \sum_{k=0,n} [ \prod_{j=0,k} M_j^T ] \cdot [ \mathbf{u}(t_k) - \mathbf{y}(t_k) ] \quad (3.40.a)$$

$$\nabla_{x_{ob(tp)}} J = [\Lambda_p]^T \cdot \sum_{k=p,n} [ \prod_{j=p,k} M_j^T ] \cdot [ \mathbf{u}(t_k) - \mathbf{y}(t_k) ] \quad (3.40.b)$$

L'opérateur adjoint à  $M_k$  est exprimé par sa transposée, ainsi que les opérateurs adjoints correspondants aux  $\Lambda_k$ . L'implémentation des contrôles frontières dans le code adjoint est effectuée dans la stricte application des règles de prise d'adjoint décrites en section II.2.2.

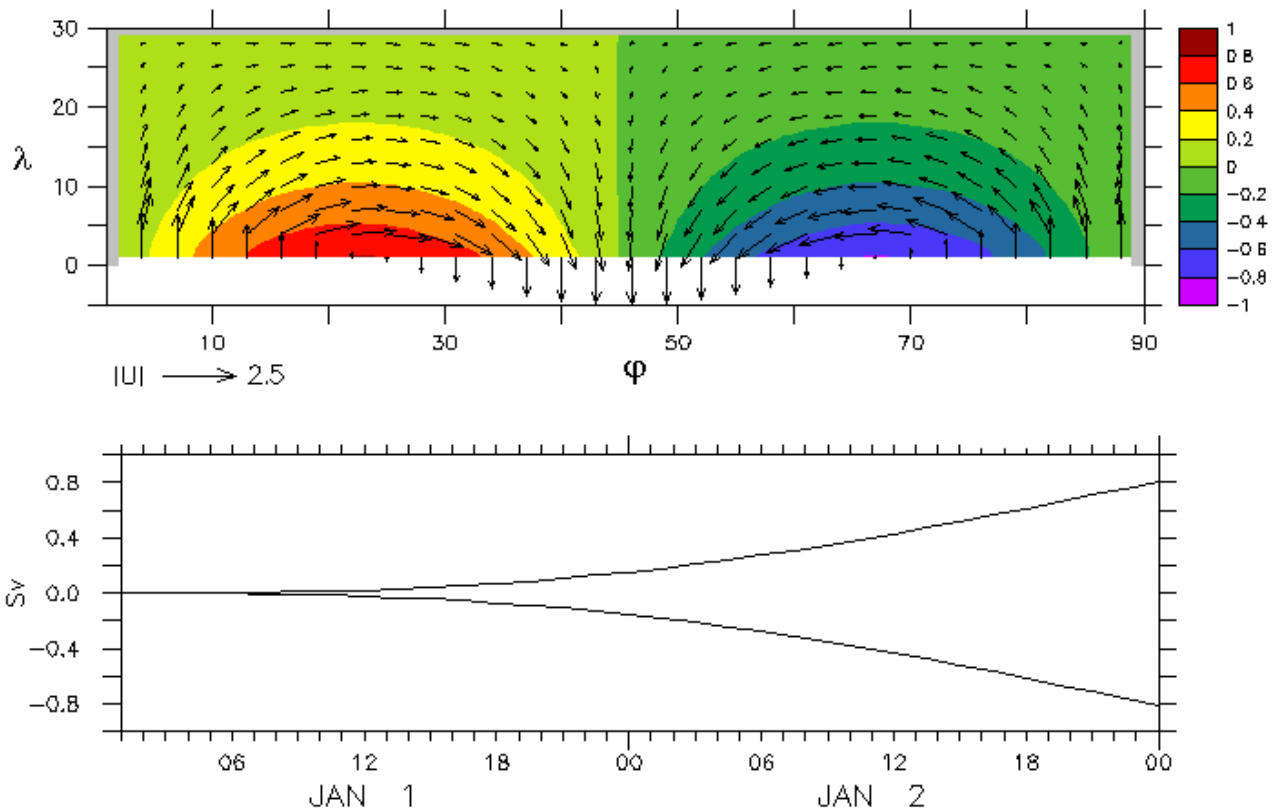
## III.2 VALIDATION SUR DES EXPÉRIENCES JUMELLES D'IDENTIFICATION

### III.2.1 FORÇAGE A LA FRONTIERE OUVERTE D'UN BASSIN BIDIMENSIONNEL

On considère un bassin rectangulaire à fond plat de profondeur  $h=100\text{m}$ , homogène de masse volumique  $\rho_0=1028\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , et ouvert le long de son bord Sud. Le modèle est appliqué sur une grille monocouche  $90 \times 30$  de résolution  $\Delta s=3.5\text{km}$ , avec un pas de temps  $\Delta t=30\text{min}$  et un paramètre de Coriolis constant  $f=10^{-4}\text{s}^{-1}$ . Le schéma de diffusion bi-harmonique avec un coefficient constant  $\nu_L=10^9\text{m}^4/\text{s}$  est réduit localement le long de la frontière Sud à l'ordre deux avec un coefficient de viscosité  $\nu_L=10^3\text{m}^2/\text{s}$ . Aucun terme de frottement n'est ajouté à cette configuration académique. L'expérience consiste à observer la série temporelle du transport sur une latitude à l'intérieur du bassin (à  $17.5\text{km}$  au Nord du bord ouvert) générée par le seul forçage analytique du transport le long de la limite ouverte. Ce dernier est donné sur une période  $T = 2$  jours par :

$$\mathbf{U}^{obs}(l, t) = [ 0 ; h/3 \cdot (1 - \cos \pi t/T) \cdot \cos 2\pi l/L ] \quad (l, t) \in [0, T] \times [0, L] \quad (3.41)$$

où  $L$  représente la longueur de la frontière ouverte, soit  $L=315\text{km}$ . La circulation correspondant à ce forçage est donnée en Figure 3.1. A partir du même bassin au repos (i.e. sans ébauche du contrôle frontière), il s'agit d'identifier ce forçage analytique  $\mathbf{U}^{obs}$  en assimilant les observations de transport.



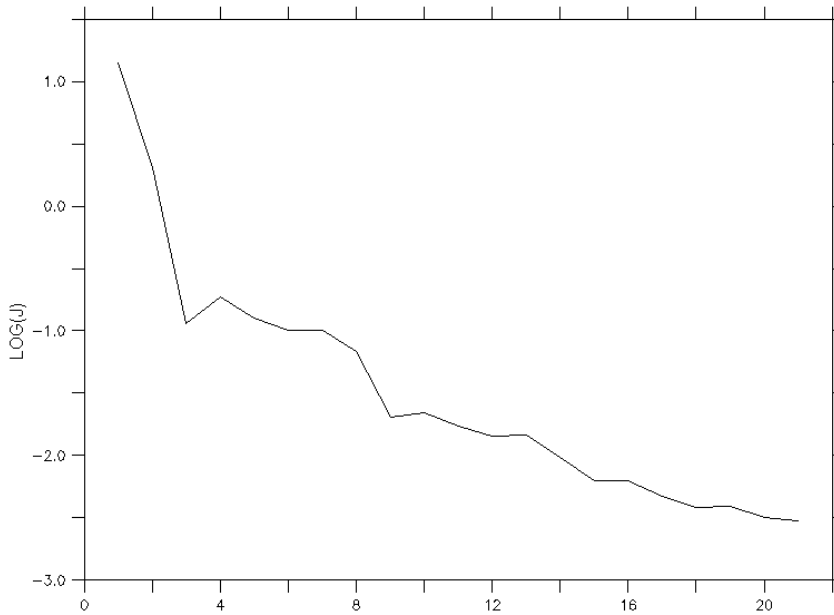
**Fig.3.1** Circulation forcée par une fonction analytique du transport  $\mathbf{U}^{\text{obs}}$  le long de la frontière ouverte. En haut, lignes de courant (en Sv) et transport (en  $\text{m}^2/\text{s}$ ) associé au bout de 2 jours sur le bassin ouvert (donné en points de grille). En bas, évolution de valeurs extrêmes de cette fonction de courant le long de la frontière Sud.

Le problème inverse consiste à chercher la série temporelle du transport  $\mathbf{U}^{\text{est}}$  minimisant au sens des moindres carrés la fonction de coût  $J$  qui mesure l'écart du modèle aux observations. Le problème est exactement déterminé puisque le nombre de données est strictement égal au nombre de paramètres à contrôler ( $2 \times 90 \times 96 = 17280$ ). Aucun terme de régularisation n'est introduit malgré l'absence d'ébauche. La Figure 3.2 montre sur une échelle logarithmique la décroissance  $J$  au cours de la procédure d'optimisation. L'algorithme d'optimisation est paramétré par une succession de trois itérations dans la boucle interne suivies d'une réactualisation dans la boucle externe. On observe une forte décroissance au début de l'optimisation, puis une réduction linéaire de  $\text{Log}(J)$  avant d'atteindre sa valeur minimale à la précision de quelques ‰. Les pics observés sur cette courbe correspondent aux premiers passages dans la boucle externe. Le minimum de la fonction de coût quadratique associée à chaque boucle interne est ainsi inférieur à la valeur de  $J$  correspondante. Il en résulte un accroissement systématique de la norme du gradient  $\nabla J$  évaluée lors de chaque itération initiale dans la boucle interne (voir Figure 3.3). L'approche incrémentale minimise une fonction de coût plus creuse que  $J$ , ce qui induit une convergence plus lente vers le minimum de  $J$ . La connaissance des variations du second ordre données par le Hessien de  $J$  permet de palier à ce type de comportement, c'est pourquoi ces pics disparaissent à la fin de l'assimilation. Le Hessien de  $J$  est en effet construit au cours de la

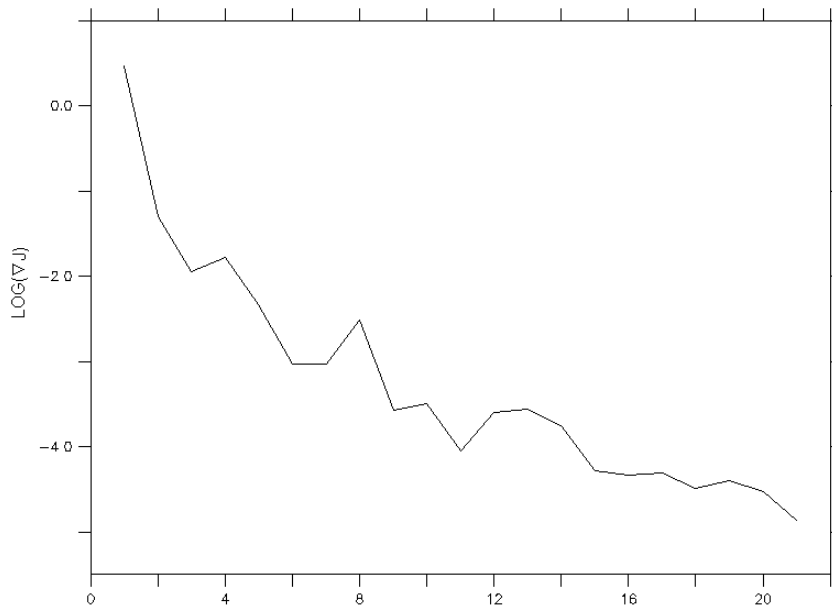
procédure d'optimisation (voir section II.2.1). Le « test du gradient » donne accès une validation numérique du gradient obtenu. Il repose sur la vérification du développement de Taylor au premier ordre de la fonction de coût, soit :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} R(\xi) = 1 \quad \text{avec} \quad R(\xi) = [J(x+\xi \nabla J) - J(x)] / \langle \nabla J, \xi \nabla J \rangle \quad (3.42)$$

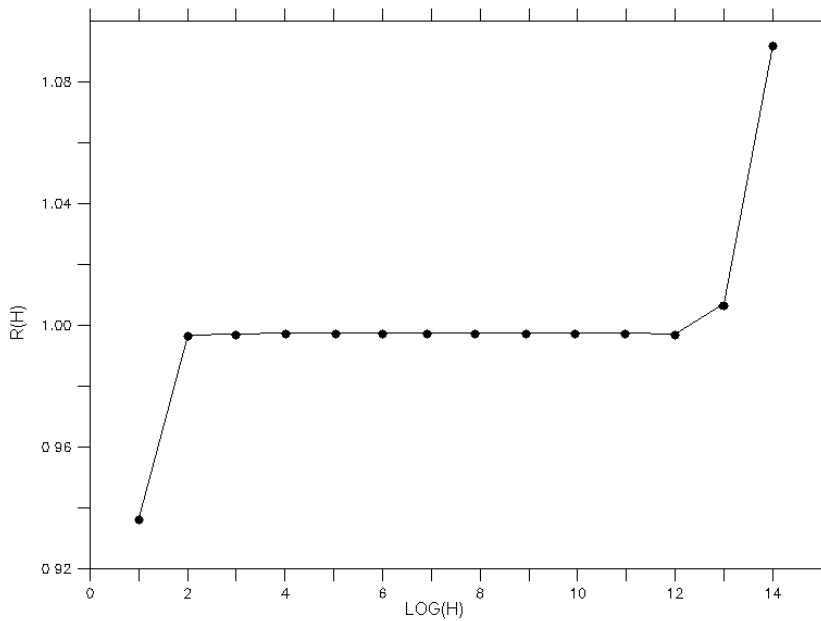
La Figure 3.4 montre la vérification du « test du gradient » à la précision machine.



**Fig.3.2** Décroissance de la fonction de coût J sur une échelle logarithmique en fonction du nombre de passages dans la routine de minimisation.



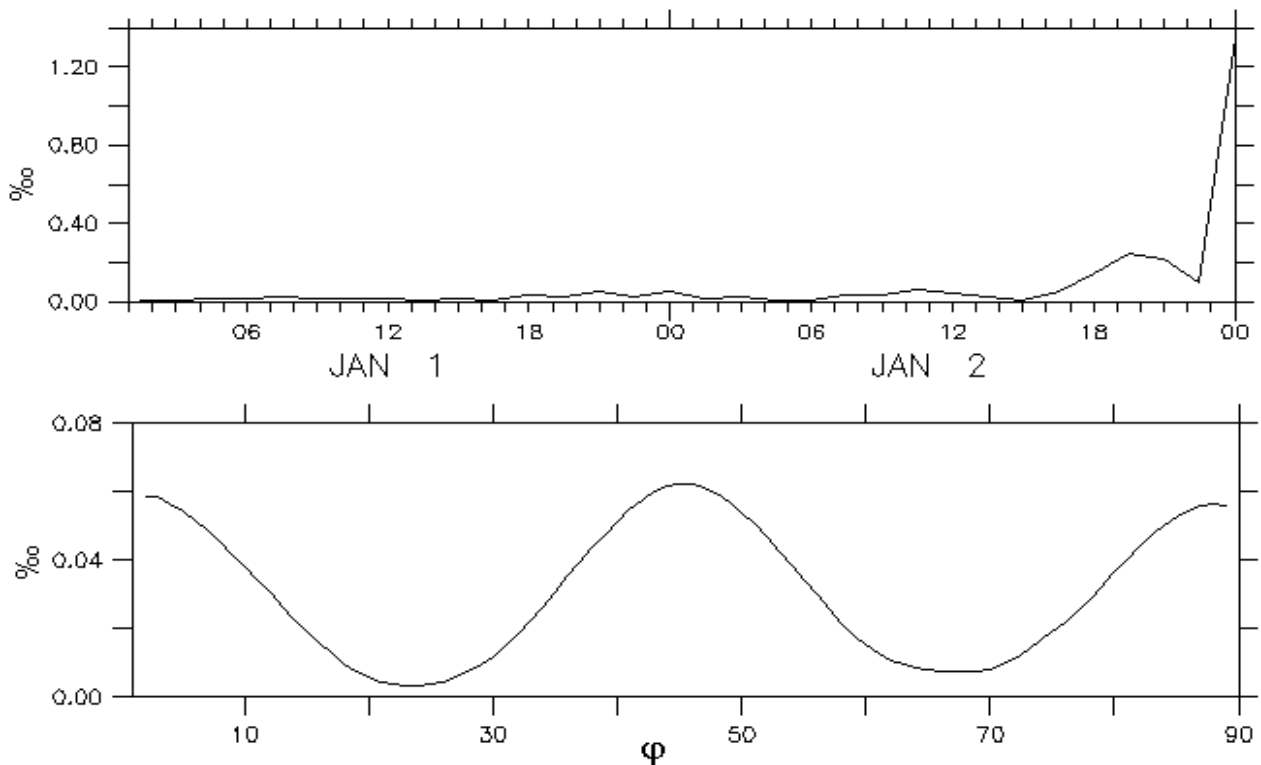
**Fig.3.3** Décroissance du gradient de la fonction de coût ∇J sur une échelle logarithmique en fonction du nombre de passages dans la routine de minimisation.



**Fig.3.4** Test du gradient : la limite de  $R(H)$  donné en (3.41) est 1 à la précision machine lorsque  $H$  tend vers 0.

Le forçage barotrope s'identifie avec le forçage observé à une précision donnée par la fonction de coût. La Figure 3.5 montre la répartition de l'erreur sur l'estimation dans le temps et le long de la frontière ouverte. D'une part, le lieu de maximum d'erreur est localisé en toute fin de fenêtre d'assimilation. Cela correspond en première analyse au moment le moins contraint par les observations. Pourtant, l'analyse fait appel à la résolution d'un problème elliptique purement spatial qui implique la tendance du contrôle frontière. Or la forme de l'équation (3.39) montre que la fin de la fenêtre d'assimilation correspond aussi au maximum de la tendance sur  $\mathbf{U}^{\text{obs}}$ . C'est pourquoi l'estimation reste tout à fait valable dans cette période. D'autre part, la répartition spatiale de l'erreur possède une longueur d'onde égale à la moitié de celle de  $\mathbf{U}^{\text{obs}}$  : elle est maximale aux lieux où l'amplitude du transport est la plus forte.





**Fig.3.5** Représentation de l'erreur d'estimation  $\| \mathbf{U}^{\text{est}} - \mathbf{U}^{\text{obs}} \|^2$  sur le forçage barotrope le long de la frontière ouverte, en millièmes de  $(\text{m}^2/\text{s})^2$ . En haut, évolution de cette différence dans la fenêtre d'assimilation. En bas, sa répartition le long de la frontière ouverte.

### III.2.2 DEVELOPPEMENT D'UN JET COTIER DANS UN CANAL SEMI INFINI

#### *Description de l'expérience*

On considère un canal tournant semi infini de profondeur  $h$  composé de deux masses d'eau au repos, homogènes de masse volumique  $\rho + \Delta\rho$ , séparées par une paroi verticale. En amont de la paroi, on place un fluide léger de masse volumique  $\rho$  et d'épaisseur  $H \ll h$  en équilibre hydrostatique avec la couche de fond. A l'instant initial, la paroi est levée et ce fluide léger se développe dans le canal, tel que schématisé en Figure 3.6. La rotation (de vitesse angulaire égale à  $\frac{1}{2}f$ ) inhibe son mélange horizontal, le front s'étend alors sur une longueur caractéristique donnée par le rayon de déformation associé  $R = c_i/f$  avec  $c_i^2 = \Delta\rho/\rho \cdot gH$  (la profondeur équivalente étant égale à  $H$ ). La gravité inhibe son mélange vertical, la colonne d'eau stratifiée se déplace alors en accord avec la conservation de sa vorticité potentielle égale à  $f/H$  (Gill 1982). Ainsi, un courant se développe le long de la côte en laissant cette côte sur sa droite (dans l'hémisphère Nord).

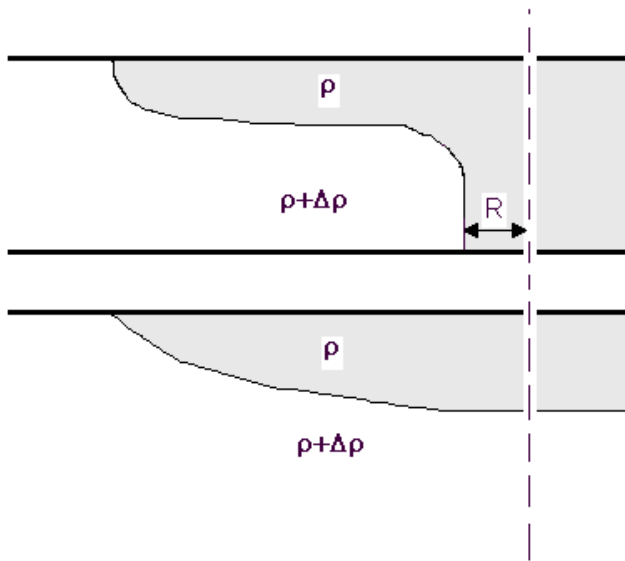


Fig.3.6 Intrusion d'un jet côtier le long d'un canal semi-infini. Vue de dessus (en haut) et coupe le long de la côte (en bas) ; l'emplacement de la paroi est indiqué en trait tiré.

Le développement du jet côtier a été sujet à des descriptions expérimentales sur plaque tournante (Stern et al. 1981) ainsi qu'à des investigations théoriques sur la dynamique du front de densité. Il est observé une intrusion du courant le long de la côte Nord, le point le plus avancé du front (le « nez », évidemment) ayant une vitesse  $\mathbf{u}_n$ . L'observateur se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{u}_n$  voit, en première approximation, un écoulement stationnaire autour du nez du courant qui est alors un point stagnant ; les lignes de courant matérialisent le front. Ce point de vue stationnaire peut être décrit par l'utilisation de l'invariant de Bernoulli (voir Benjamin 1968 dans le cas non-tournant). Dans le référentiel de l'observateur, le bilan de quantité de mouvement (1.2) s'écrit :

$$d_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_n = -1/\rho \nabla p_h - g \nabla \zeta \quad (3.43)$$

où  $p_s = \rho g \zeta$  représente l'élévation de la surface libre (voir section I.2.1) et  $d_t$  représente la dérivée particulaire. Le produit scalaire de (3.43) par  $\mathbf{u}$  mène à la relation suivante :

$$d_t (\frac{1}{2} \mathbf{u}^2) + f \mathbf{u} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_n) = -1/\rho \mathbf{u} \cdot \nabla p_h - d_t (g \zeta) \quad (3.44)$$

où  $\partial_t \zeta = 0$  tant que le transport sur toute la colonne d'eau est non divergent (hypothèse du 'toit rigide'). L'invariant de Bernoulli se déduit de (3.44) le long de chacune des lignes de courant (lieu où  $p_h$  est constant). La valeur de l'invariant au point de stagnation s'identifie à celle prise en aval le long la côte à la surface du canal, soit :

$$g \zeta_n = \frac{1}{2} \mathbf{u}_n^2 \quad (3.45)$$

puisque  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  au nez du courant, et  $\mathbf{u}_\infty = -\mathbf{u}_n$  et  $\zeta_\infty = 0$  loin en aval du courant. On considère la ligne de courant amont passant par le point de stagnation qui longe la côte pour séparer le fluide léger avec la couche de fond. Loin en amont, le fluide se déplace à la même vitesse qu'au point de stagnation (dans l'hypothèse de stationnarité), soit  $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{0}$ . L'élévation de la surface libre est donnée quant à elle par l'expression de  $p_h$  sur cette ligne de courant. L'invariant de Bernoulli s'exprime alors suivant :

$$g\zeta_n = g.\Delta\rho.H/(\rho+\Delta\rho) \approx c_i^2 \quad (3.46)$$

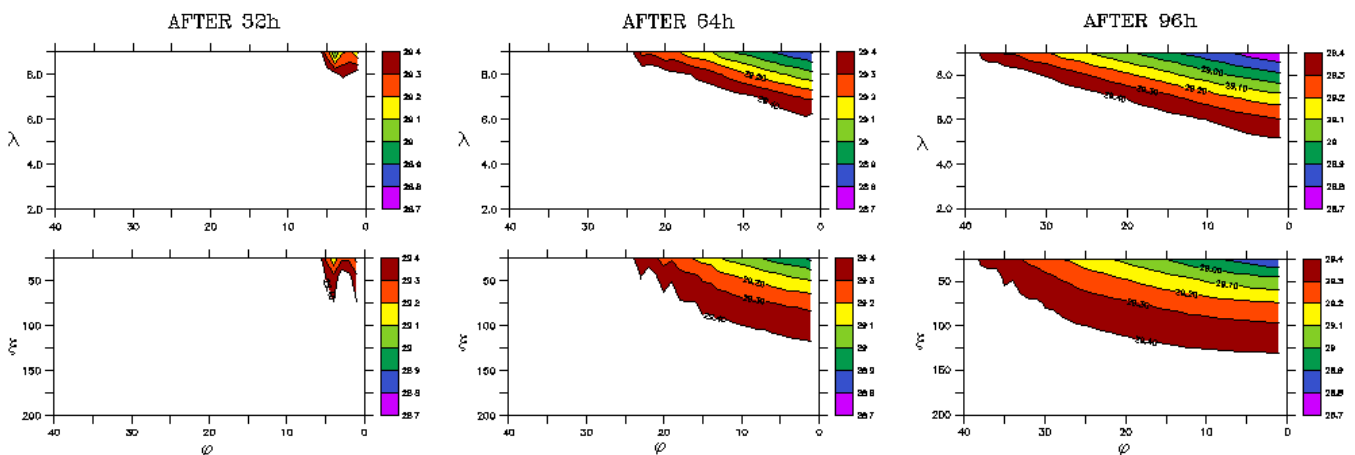
La vitesse du point de stagnation est égale à  $\sqrt{2}.c_i$ .

### Trois expériences jumelles

C'est à partir de ce résultat que se base l'expérience d'identification : grâce à l'observation de la vitesse de déplacement du nez, il s'agit de donner les conditions amont (soit  $H$  et  $\Delta\rho$ ) à partir desquelles le jet côtier s'est développé. On considère un canal de longueur  $L$  ouvert à sa frontière Est placée en aval de l'emplacement de la paroi. Le bassin est homogène à l'instant initial, de masse volumique  $\rho_0=1029.5\text{kg.m}^{-3}$ , à fond plat de profondeur  $h=1000\text{m}$ . Le modèle est paramétré par un pas de temps  $\Delta t=10\text{min}$ , un paramètre de Coriolis constant  $f=10^{-4}\text{s}^{-1}$ , une grille rectangulaire  $40\times 10$  de résolution horizontale  $\Delta s=3\text{km}$ , une discrétisation verticale sur 18 niveaux dont 13 dans les 400 premiers mètres pour une bonne représentation de la dynamique du jet. Les schémas de diffusion de quantité de mouvement et de traceur sont harmoniques, ils font appels à des coefficients constants et égaux à  $\nu_L=100\text{m}^2/\text{s}$  et  $\nu_V=10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$ . Le développement du jet côtier est généré sur une période  $T$  de 96h par un profil de masse volumique forçant le long de la frontière ouverte  $\Gamma$  (le bord Est du canal). Ce profil est issu d'un modèle de même paramétrisation, fermé à l'Est en amont de  $\Gamma$ . Il possède en plus une zone de rappel située en amont de  $\Gamma$  qui s'étend sur  $20\times 10$  points de grille. Dans cette région, l'équation d'évolution du traceur (1.4) est augmentée d'un terme du type  $(\rho - \rho^c)/\tau$ , où

$$\rho^c(z) = \rho_0 - \frac{1}{2} \Delta\rho.[1 - \tanh(z - H)/\Delta z] \quad (3.47)$$

avec  $\Delta z = 20\text{m}$  et  $\tau = 20\text{h}$ . La Figure 3.7 montre le développement du jet côtier dans le canal ouvert pour les valeurs  $\Delta\rho=3\text{kg.m}^{-3}$  et  $H=150\text{m}$ . Le courant est uniformément stratifié avec des valeurs de masse volumique comprises dans  $[\rho_0-\Delta\rho,\rho_0]$  sur une épaisseur maximale de 125m. Au bout de 96h (durée de la simulation), le courant s'étend sur une grande partie du canal, avec une largeur comparable au rayon de déformation associé ( $R\approx 20\text{km}$ ).



**Fig.3.7** Expérience numérique simulant le développement d'un jet côtier le long d'un canal ouvert à trois instants. En haut, l'intrusion donnée par les contours de masse volumique (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) vue de dessus. En bas, coupe le long du bord Nord.

La vitesse du point de stagnation est observée d'un point de vue eulérien par un réseau constitué de sept profils de masse volumique pris dans l'axe transverse du canal (Nord-Sud). C'est sur cet ensemble de données que l'expérience d'identification est construite. A partir d'une ébauche sur le développement du jet côtier correspondant à des conditions amont ( $H^{bck}$ ,  $\Delta\rho^{bck}$ ) et d'un ensemble d'observations, il s'agit d'identifier les conditions amont ( $H^{obs}$ ,  $\Delta\rho^{obs}$ ) correspondant au développement du jet observé. Le courant intrusif est numériquement représenté par couche continûment stratifiée ; ses conditions amont n'apparaissent que lorsque le jet est largement développé. C'est donc la série temporelle du profil de masse volumique le long de la frontière ouverte qui est contrôlée. On considère une ébauche issue des conditions amont ( $H^{bck}=150\text{m}$ ,  $\Delta\rho^{bck}=2\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) ainsi que trois ensembles de données :

- Cas #A : l'observation est donnée par la série temporelle de sept profils  $\rho_A(t \in T, n \in [1,7])$  issus d'un courant caractérisé par les conditions ( $H^{obs}=150\text{m}$ ,  $\Delta\rho^{obs}=3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ). Le premier est situé à 15km du bord Est, les six autres sont répartis uniformément à 15km d'intervalle.
- Cas #B : l'observation est donnée par la série temporelle de sept profils  $\rho_B(t \in T, n \in [1,7])$  issus du même courant caractérisé par les conditions ( $H^{obs}=150\text{m}$ ,  $\Delta\rho^{obs}=3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ). Le premier est situé à 45km du bord Est, les six autres sont répartis uniformément à 9km d'intervalle.
- Cas #C : l'observation est donnée par la série temporelle de sept profils  $\rho_C(t \in T, n \in [1,7])$  issus d'un courant caractérisé par les conditions ( $H^{obs}=250\text{m}$ ,  $\Delta\rho^{obs}=3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ). Le premier est situé à 15km du bord Est, les six autres sont répartis uniformément à 15km d'intervalle.

Le problème inverse consiste à identifier la série temporelle des conditions frontières notée  $x_{ob}(t \in T)$  ayant généré ces trois ensembles de données. Il est résolu à travers la minimisation de la fonction de coût

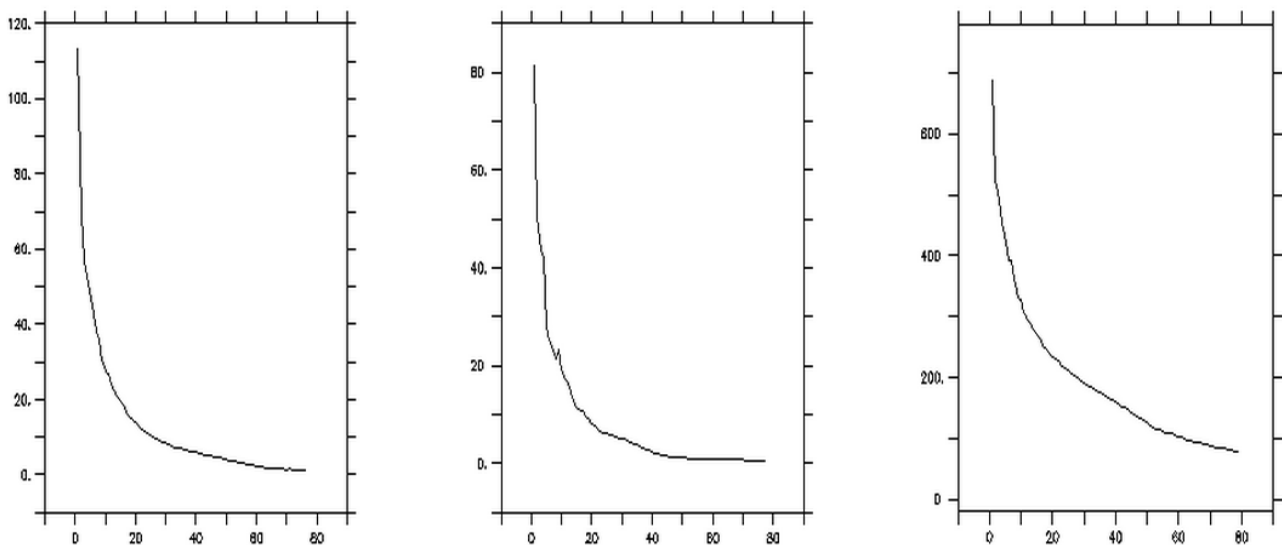
$$J_K = \sum_{t \in T} \sum_{n \in [1,7]} [\rho(t,n) - \rho_K(t,n)]^T \cdot [\rho(t,n) - \rho_K(t,n)] + \varepsilon_K \sum_{t \in T} [D \cdot x_{ob}(t)]^T \cdot [D \cdot x_{ob}(t)] \quad (3.48)$$

où  $K=A,B,C$ . Le coefficient  $\varepsilon_K$  représente le poids du terme de régularisation (voir section II.1.1) et  $D$  est la matrice associée à l'application linéaire de dérivation horizontale du premier ordre à droite, soit  $D_{i,j} = \delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}$ . La composante normale à la frontière du courant géostrophique diagnostiquée à partir du vecteur de contrôle (voir section III.1.3) est très sensible aux variations horizontales de masse volumique. A titre d'exemple, on considère un courant géostrophique associé à la pente de l'isopycne exprimée par  $D \cdot x_{ob}$ . Une variation de la pente entraîne une variation du courant géostrophique 100 fois ( $\approx g/\rho_0 f$ ) supérieure en norme. C'est pourquoi le terme de régularisation est nécessaire à la stabilité numérique de la solution. Son poids augmente d'ailleurs lorsque les écarts de l'ébauche avec le profil observé s'accroissent.

### Résultats et discussion

Le problème inverse posé dans les trois cas est surdéterminé : le nombre de données est sept fois plus grand que le nombre de paramètres contrôlés ( $10 \times 18 \times 96 = 17280$  contrôles), en plus de l'information *a priori* contenue dans le terme de régularisation. L'ordre de grandeur du

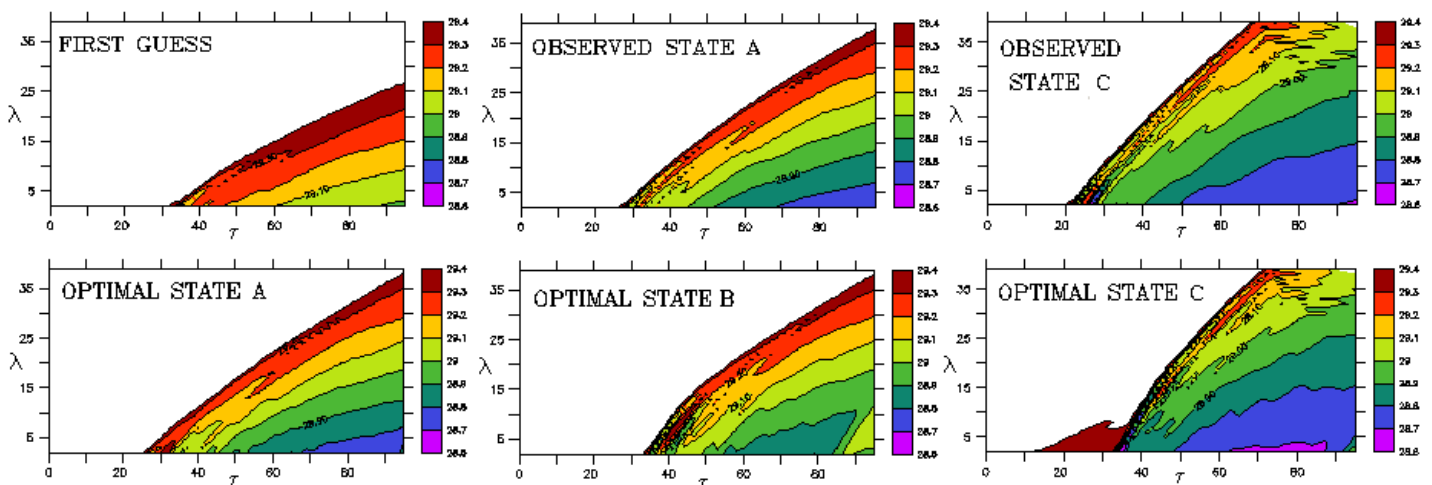
coefficient de pondération  $\varepsilon_K$  est déterminé par un critère de stabilité numérique ; il est donc paramétré à sa valeur minimale pour une détermination réaliste du profil de courant géostrophique associé. Dans chacun des trois cas, la procédure d'optimisation est interrompue au delà de 80 passages dans la routine de minimisation M1QN3 pour obtenir une comparaison sur l'efficacité de convergence. Tout d'abord, la valeur du coefficient de pondération augmente lorsque le réseau d'observation s'éloigne du bord Est ( $\varepsilon_A=10^{-2}$  et  $\varepsilon_B=10^{-1}$ ) et lorsque l'écart à l'ébauche des conditions amont augmente ( $\varepsilon_A=10^{-2}$  et  $\varepsilon_C=10^{-1}$ ). Il en est de même pour le nombre de réactualisations dans le modèle complet à travers une boucle externe : au nombre de 16 dans le cas #A, 20 dans le cas #B et 27 dans le cas #C. L'analyse des trois fonctions de coût représentées en Figure 3.8 montre un taux de convergence diminuant de  $J_A$  à  $J_C$  : une réduction de 80% de l'écart initial entre modèle et données est obtenue au bout de 10 passages dans M1QN3 dans le cas #A, 15 passages dans le cas #B et 50 passages dans le cas #C. La valeur minimale de la fonction de coût est atteinte dans les deux premiers cas, alors qu'elle ne l'est pas dans le troisième cas. Aux vues de ces résultats sur le comportement de la procédure d'optimisation, le minimum de la fonction de coût est atteint dans les cas #A et #B, alors qu'elle ne l'est pas dans le cas #C. Le problème de minimisation dans ce dernier cas converge tout de même grâce à une régularisation importante et des réactualisations fréquentes, signes d'une fonction de coût peu creusée.



**Fig.3.8** Décroissance des fonctions de coût  $J_A$ ,  $J_B$  et  $J_C$  (de gauche à droite) en fonction du nombre de passages dans la routine de minimisation.

Il s'agit maintenant de quantifier dans quelle mesure la vitesse du point de stagnation observé est retrouvée par la méthode d'optimisation. Les diagrammes de célérité représentés en Figure 3.9 montrent une homogénéité globale des vitesses de propagation associés à chacune des isopycnes du jet côtier. Cela peut s'expliquer par le fait que le fluide continûment stratifié voit chacune de ses isopycnes en développement dans une masse d'eau légèrement plus lourde (i.e. avec un écart de masse volumique petit). Une mesure des

célérités donne  $c^{bck}=33\text{cm/s}$  pour le courant d'ébauche,  $c^{obs}=40\text{cm/s}$  pour le courant observé dans les cas #A et #B,  $c^{obs}=61\text{cm/s}$  pour celui observé dans le cas #C. Il est par conséquent difficile de relier précisément ces mesures avec le résultat donné par l'invariant de Bernoulli : pour  $H=150\text{m}$  et  $\Delta\rho=0.1\text{kg.m}^{-3}$ , on obtient en effet une vitesse de propagation de  $54\text{cm/s}$ . La solution donnée par la procédure d'optimisation dans le cas #A est parfaitement en accord avec le diagramme de célérité observé. Le courant associé s'ajuste aux profils observés le long du canal ainsi que dans les zones non observées. En revanche, lorsque le réseau d'observation est déplacé à l'Ouest (cas #B), il apparaît deux régimes de propagation : en amont du premier profil de mesure (à  $45\text{km}$  du bord Est), la vitesse du courant est de  $69\text{cm/s}$  ; en aval, sa vitesse diminue pour atteindre une valeur de  $42\text{cm/s}$  qui est proche de celle observée. La Figure 3.9 montre le même phénomène dans le cas #C. En aval du premier profil (à  $15\text{km}$  du bord Est), la vitesse du courant est comparable à celle observée :  $59\text{cm/s}$ . En amont, sa vitesse est en revanche beaucoup plus faible, soit  $18\text{cm/s}$ . Contrairement aux cas précédents, il apparaît aussi un léger décalage temporel sur le courant observé : cela peut s'expliquer par le fait que la fonction de coût n'atteint pas sa valeur minimale, le travail de minimisation n'est pas achevé. Les ruptures de pente qui apparaissent dans les cas #B et #C sont en accord avec le cône d'influence du premier profil d'observation. Ce cône d'influence représenté sur la Figure 3.10 (zone 1) permet de valider dans la zone amont à l'observation des vitesses de propagation très supérieures à celle requise en aval (c'est le cas pour #B). Il suffit que la vitesse en amont soit supérieure à la valeur limite donnée par un courant se développant au début de la période et atteignant le point d'observation au temps requis (c'est le cas pour #C).



**Fig.3.9** Diagramme de célérité décrit par l'évolution de la masse volumique de surface le long du bord nord. En abscisse le temps (en heures), en ordonnées la distance au bord Est (points de gille, en  $1/3\text{ km}$ ).

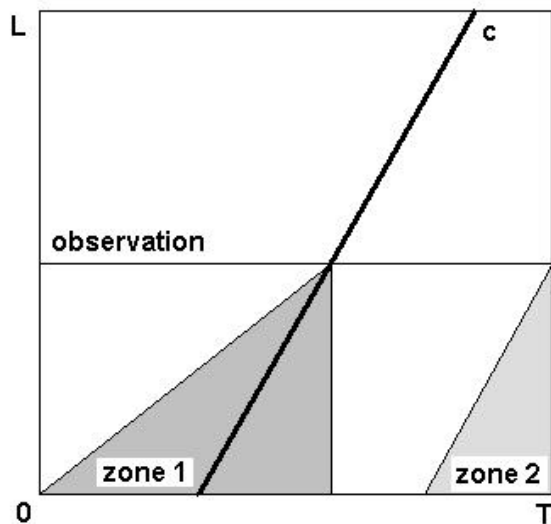
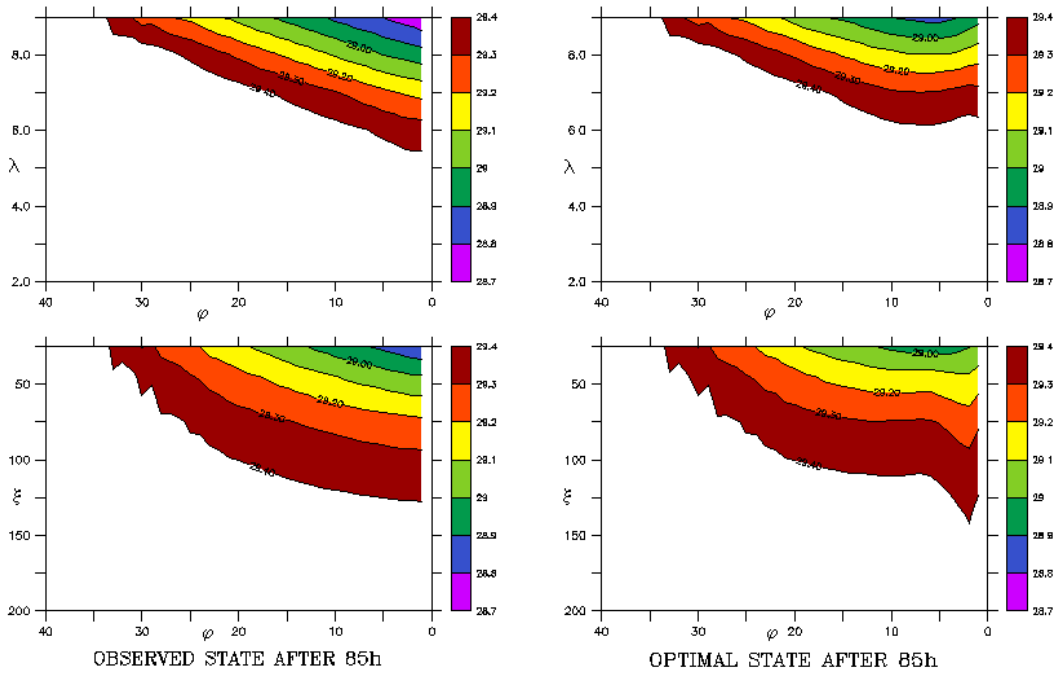
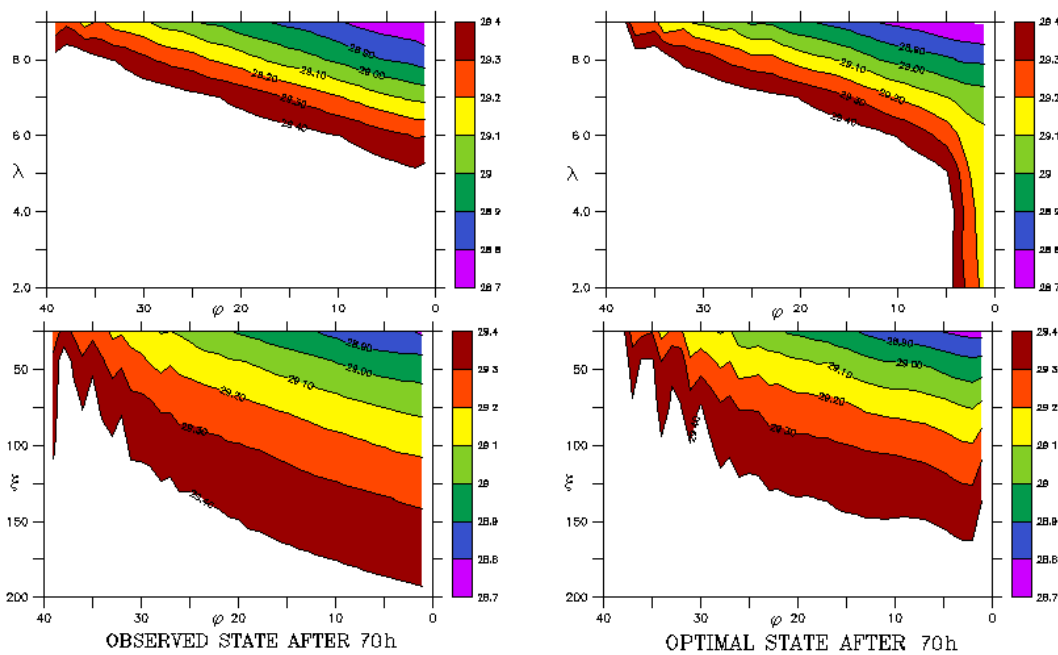


Fig.3.10 Diagramme de célérité le long d'un canal de longueur L sur une fenêtre temporelle [0, T]. La vitesse du courant est donnée par la pente du trait épais et notée c. Le lieu du premier profil d'observation est indiqué.

Un second cône d'influence apparaît dans le contrôle frontière de systèmes évolutifs : c'est celui donné par l'ultime observation du premier profil, et représenté en Figure 3.10 par la zone 2. La fin de la série temporelle du contrôle frontière n'est alors plus contraint par le jeu d'observation. La Figure 3.11 montre ce relâchement de la contrainte en fin de fenêtre d'assimilation où la dynamique de la solution donnée dans le cas #B n'est plus ajustée dans les 30 premiers kilomètres. On voit au passage que les conditions amont ( $H^{\text{obs}}$ ,  $\Delta\rho^{\text{obs}}$ ) sont retrouvés au-delà des 30 kilomètres. Ce dernier cône d'influence ne se retrouve pourtant pas dans la solution fournie dans le cas #C, comme montré par la Figure 3.12. Le courant se développe dans les 15 premiers kilomètres de la même manière que dans un canal fermé. Cette solution est tout à fait acceptable tant qu'une observation plus proche de la frontière ne vienne contraindre le système à une autre dynamique. Malgré un nombre d'informations apportées au système largement supérieur au nombre de paramètres de contrôle, leur distribution spatio-temporelle apparaît comme le facteur limitant quant à l'unicité de la solution.



**Fig.3.11** Représentation du jet développé dans le canal après 85 heures tel qu’observé (à gauche) et estimé dans le cas #B (à droite). Vue de dessus en haut, vue de coupe le long du bord Nord en bas.



**Fig.3.12** Représentation du jet développé dans le canal après 70 heures tel qu’observé (à gauche) et estimé dans le cas #C (à droite). Vue de dessus en haut, vue de coupe le long du bord Nord en bas.



### III.2.3 SEPARATION D'UN COURANT COTIER INCIDENT A UN TALUS

#### *Solutions périodiques dans un fluide bicouche tournant*

On considère un fluide bicouche tournant, avec un paramètre de Coriolis  $f$  constant et une variation de masse volumique  $\Delta\rho$  petite devant la masse volumique moyenne  $\rho$  dans l'approximation de Boussinesq. Les variables des couches de surface et de fond sont respectivement indexées 1 et 2. L'épaisseur au repos de la couche  $i$  est supposée constante et notée  $H_i$ , l'élévation de l'interface avec le fluide placé au-dessus est notée  $\zeta_i$ ;  $H$  est la profondeur du bassin. Le courant moyen  $\mathbf{u}_i$  est gouverné par une équation de bilan de quantité de mouvement et une équation de continuité, soit pour la couche 1 :

$$\partial_t \mathbf{u}_1 + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_1 = -\nabla(g\zeta_1) \quad (3.49.a)$$

$$\nabla \cdot (H_1 \mathbf{u}_1) = \partial_t (\zeta_2 - \zeta_1) \quad (3.49.b)$$

et pour la couche 2 :

$$\partial_t \mathbf{u}_2 + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_2 = -\nabla(g\zeta_1 + g^*\zeta_2) \quad (3.50.a)$$

$$\nabla \cdot (H_2 \mathbf{u}_2) = -\partial_t \zeta_2 \quad (3.50.b)$$

avec  $g^* = g\Delta\rho/\rho$ . Procédons à une décomposition en modes normaux. Dans l'approximation du 'toit rigide', le mode barotrope est donné par la fonction de courant  $\psi$  définie à partir des transports dans chaque couche, en considérant le transport barotrope non divergent.

$$H_1 \mathbf{u}_1 + H_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{k} \times \nabla \psi \quad (3.51)$$

Le rotationnel de  $[H_1 \cdot (3.49.a) + H_2 \cdot (3.50.a)]$  projeté sur  $\mathbf{k}$  mène à l'équation d'évolution de la partie barotrope de l'écoulement :

$$\partial_t \nabla^2 \psi = -\mathbf{k} \cdot (\nabla H \times \nabla g \zeta_1 + \nabla H_2 \times \nabla g^* \zeta_2) \quad (3.52)$$

Cette dernière relation (3.52) est similaire à l'équation (1.11) résolue par le modèle. Elle est forcée par l'effet conjugué des variations du gradient de pression au fond et des variations bathymétriques. Lorsque les variations de la hauteur d'eau atteignent le niveau de l'interface entre les deux couches, le seul gradient de pression de surface agit sur cette composante barotrope. Ce terme de forçage topographique ne sera plus exprimé dans la suite, les épaisseurs des couches étant considérées « constantes par morceaux ». Ce mode barotrope lie variations spatiales des interfaces supérieure et inférieure de la couche de surface. La divergence de l'équation de bilan (3.49.a) donne après usage du produit mixte :

$$\partial_t \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - f \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1) = -\nabla^2 (g\zeta_1) \quad (3.53)$$

Le rotationnel de l'équation de bilan projeté sur  $\mathbf{k}$  et inséré dans l'équation (3.53) conduit à l'expression de la divergence de  $\mathbf{u}_1$ .

$$(\partial_{tt}^2 + f^2) \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = -\partial_t H_1 \nabla^2 (g\zeta_1) \quad (3.54)$$

On en déduit une équation d'évolution vérifiée par le mode barotrope à partir de l'équation de continuité (3.49.a) :

$$(\partial_{tt}^2 + f^2) \cdot (\zeta_2 - \zeta_1) + g H_1 \nabla^2 \zeta_1 = 0 \quad (3.55)$$

Le mode barocline est quant à lui exprimé par la variable  $\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$  et vérifie les équations du mouvement dans le bassin homogène équivalent, soit dans l'approximation du 'toit rigide' :

$$\partial_t \dot{\mathbf{u}} + f \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}} = \nabla g^* \zeta_2 \quad (3.56.a)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = (1/H_1+1/H_2)\partial_t \zeta_2 \quad (3.56.b)$$

La divergence de l'équation (3.56.a) donne après usage du produit mixte :

$$\partial_t \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - f \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \dot{\mathbf{u}}) = \nabla^2 (g^* \zeta_2) \quad (3.57)$$

Le rotationnel de (3.56.a) projeté sur  $\mathbf{k}$  et inséré dans l'équation (3.57) conduit à l'expression de la divergence de  $\dot{\mathbf{u}}$ .

$$(\partial_{tt}^2 + f^2) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = \partial_t \nabla^2 (g^* \zeta_2) \quad (3.58)$$

On en déduit une équation d'évolution vérifiée par le mode barocline à partir de l'équation de continuité (3.56.b) :

$$(\partial_{tt}^2 + f^2) \cdot [(1/H_1+1/H_2)\zeta_2] - g^* \nabla^2 \zeta_2 = 0 \quad (3.59)$$

Il s'agit alors de chercher les solutions périodiques du système se propageant de manière rectiligne suivant l'axe des x croissant. Les variables du système peuvent être décrites sous la forme  $\phi(x,y,t)=\Phi(y) \cdot e^{i(kx-\omega t)}$ , où k est dès lors le nombre d'onde positif. Plusieurs hypothèses viennent s'ajouter afin de cibler le type de solution. On se place d'une part dans l'approximation des ondes longues et  $\omega \ll f$ . Ainsi le système d'équations (3.52), (3.55), (3.59) donne les équations différentielles couplées vérifiées par les amplitudes des variables d'élévation :

$$d_{yy}^2 \Psi - k^2 \Psi = 0 \quad (3.60.a)$$

$$d_{yy}^2 Z_1 - (k^2 + 1/r_1^2) Z_1 = -1/r_1^2 Z_2 \quad (3.60.b)$$

$$d_{yy}^2 Z_2 - (k^2 + 1/r_2^2) Z_2 = 0 \quad (3.60.c)$$

où  $d_{yy}^2$  représente la dérivée d'ordre 2 suivant y.  $r_1=(gH_1)^{1/2}/f$  est le rayon de déformation associé au mode barotrope se propageant dans un bassin de profondeur  $H_1$ .  $r_2=(g^*H_1H_2/H)^{1/2}/f$  est le rayon de déformation associé au premier mode barocline. On considère de plus que  $r_2$  est très petit devant la longueur d'onde, soit  $kr_2 \ll 1$ . Si la couche de fond a une épaisseur grande devant celle de la couche de surface, alors le rapport des deux rayons de déformation est petit, soit  $(r_2/r_1)^2 \approx g^*/g \ll 1$  lorsque  $H_1 \ll H_2$ .

### Description de l'expérience

On considère une configuration académique d'un bassin semi infini ( $y>0$ ), à fond plat, bordé par une côte rectiligne ( $y=0$ ). La profondeur du bassin est supposée grande devant l'épaisseur de la couche de surface. Un golfe de faible profondeur, d'emprise finie et de grande dimension devant le rayon de déformation  $r_2^-$ , s'ouvre dans l'espace  $y<0$  (voir Figure 3.13). Ce golfe est bordé par un talus en  $y=0$  qui est représenté par une discontinuité bathymétrique. Dans la suite, les caractéristiques et les variables décrivant le bassin profond et le golfe sont respectivement notés avec des exposants (+) et (-). Un front de Kelvin barocline généré en amont du golfe par une perturbation de l'interface se propage le long de

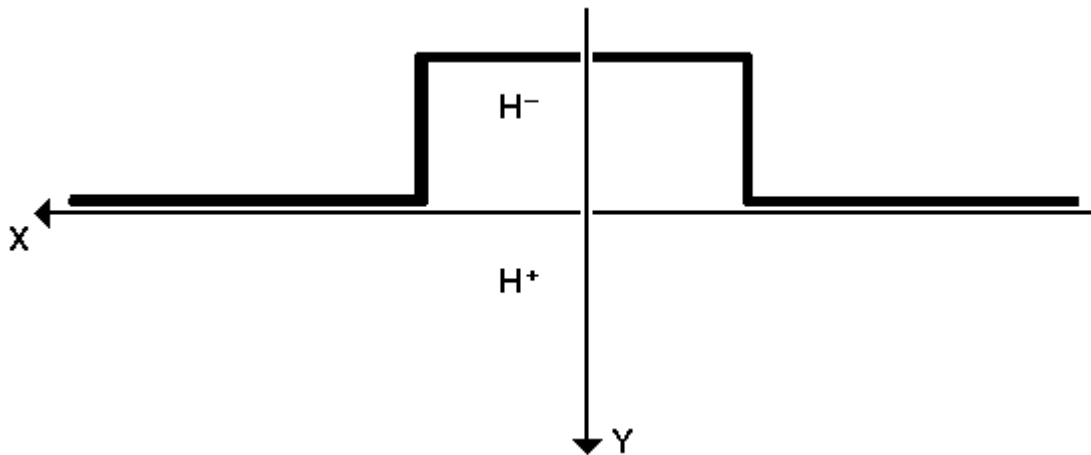
la côte en la laissant à sa droite (dans l'hémisphère Nord), c'est-à-dire suivant l'axe des x croissant. Ce front est décrit par un système d'ondes longues, dont longueurs d'onde sont comparables aux dimensions du golfe. Il entre par conséquent dans la description ondulatoire présentée ci-dessus. Le front de Kelvin barocline est composé d'ondes non dispersives se propageant à la vitesse  $fr_2^+$ , d'après relation de dispersion  $\omega/f=kr_2^+$  issue de (3.59). L'amplitude de ces ondes vérifie l'équation (3.60.c), la résolution de cette dernière mène à l'expression

$$Z_2^+(y) = Z_2^+(0) \cdot \exp(-y/r_2^+) \quad (3.61)$$

où seule la solution évanescente est conservée. Le transport dans la couche de surface est opposé dans la couche de fond, soit un transport barotrope nul. Ce transport barocline est égal au flux de  $u_1$  à travers la couche de surface, qui s'exprime dans l'approximation des ondes longues :

$$T_1^+ = -g \cdot H_1^+ / f \cdot Z_2^+(0) = -T_2^+ \quad (3.62)$$

Lorsque le front arrive au niveau du talus, une partie de l'écoulement bifurque dans le golfe. Ainsi, un mode barotrope est généré par la suite de la discontinuité topographique (confer la relation (3.52)). Un nouveau système d'ondes est alors généré pour fournir les ajustements barotrope et barocline au bassin profond. Ce problème se pose dans le cas précis où le talus est représenté par une discontinuité. Il peut donc être traité d'un point de vue similaire à une « adaptation d'impédance » puisqu'il s'agit de raccorder la structure hydrodynamique du golfe avec celle du bassin. Deux cas distincts apparaissent à ce niveau, selon la profondeur de l'interface  $H_1^+$ . Il est proposé de les traiter à la fois de manière analytique (issu de la littérature) et à travers une approche inverse.



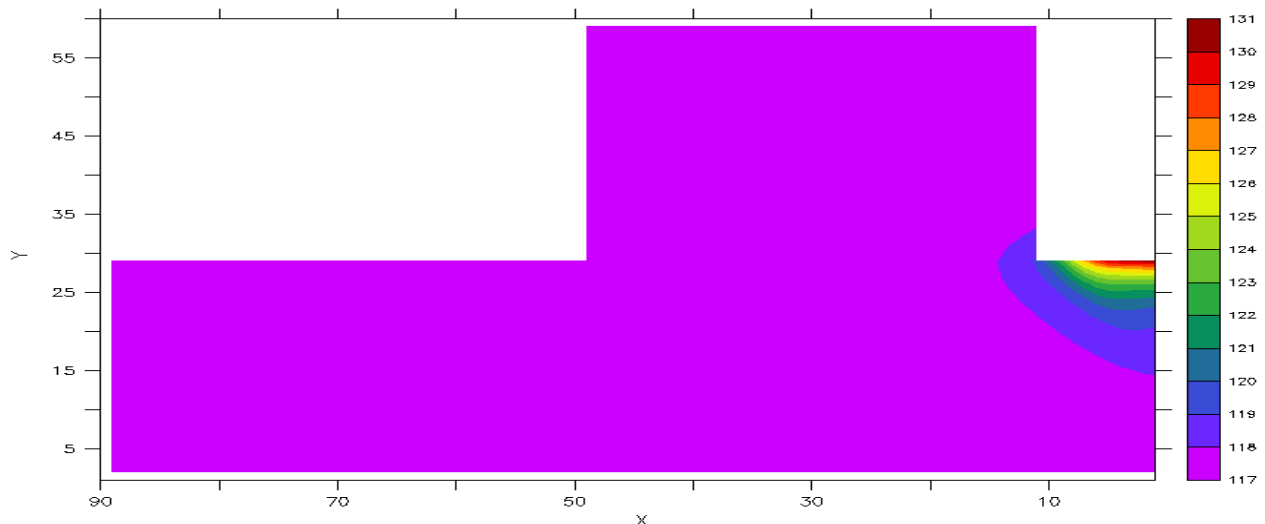
**Fig.3.13** Représentation schématique d'un bassin semi-infini ( $y>0$ ) de profondeur constante  $H^-$  et bordé par un golfe ( $y<0$ ) de profondeur constante  $H^+ < H^-$ .

La méthode inverse est mise à contribution pour identifier les caractéristiques du front incident correspondant au processus de séparation observé à l'entrée du golfe, en accord

avec les résultats analytiques. Pour cela, l'outil de modélisation est appliqué sur un domaine académique représentatif d'un bassin profond et d'un golfe le bordant ; une discontinuité bathymétrique correspondant au talus sépare ces deux bassins. Le modèle est ainsi implémenté sur une grille horizontale 90×60. La profondeur du bassin est constante et égale à  $H^+=1000\text{m}$ . Le golfe est représenté par un bassin rectangulaire 40×30 ; il possède un fond plat de profondeur variable selon les cas envisagés. La résolution horizontale est de  $\Delta s=3\text{km}$ . La discrétisation verticale est donnée par 9 niveaux sur 1000m dont 5 sur les 300 premiers mètres. Le schéma de diffusion horizontal harmonique est paramétré avec un coefficient de viscosité  $\nu_L=250\text{m}^2/\text{s}$  ; verticalement, le schéma implicite fait appel à un coefficient de viscosité égal à  $\nu_V=10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$ . Au repos, la stratification de la colonne d'eau est donnée par la fonction analytique

$$\rho(z) = \rho_0 + \frac{1}{2}\Delta\rho \tanh(z - z_0)/\Delta z \quad (3.63)$$

où  $\rho_0=1028\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $\Delta\rho=1\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $\Delta z=40\text{m}$  et  $z_0$  est un paramètre variable selon les cas envisagés ; ce dernier détermine la profondeur de l'interface. Ce modèle est ouvert le long de son bord Est, où le champ de forçage donné par un front de Kelvin incident est spécifié. Ce forçage est extrait de simulations avec un modèle fermé, de mêmes paramétrisations et de plus grande emprise. Il possède en effet deux zones de rappel situées à l'Est de la limite ouverte : une première (au Nord) génère une perturbation de l'interface par rapport au repos, une seconde (au Sud) atténue ces perturbations. Numériquement, un terme de rappel à un profil  $\rho^c$  du type (3.63) est ajouté dans l'équation de bilan du traceur ; il s'écrit  $(\rho-\rho^c)/\tau$ , avec  $\tau=1\text{h}$ . A l'instant initial, le bassin est au repos et le front de Kelvin se développe durant la période d'assimilation, avec une résolution temporelle  $\Delta t=10\text{min}$ . La Figure 3.14 montre le courant incident qui se propage dans le bassin ouvert.



**Fig.3.14** Configuration du modèle bicouche de profondeur  $H^+=1000\text{m}$ , ouvert le long de son bord Est. Il est forcé à cette frontière par un front de Kelvin se propageant vers l'entrée du golfe (isolignes de profondeur de l'interface en m). Ce front est caractérisé par un rayon de déformation  $\xi^+ \approx 10\text{km}$  pour une profondeur de l'interface au repos  $H_1^+ = 117\text{m}$ . Les coordonnées géographiques sont exprimées en point de grille (de résolution 3km).

Les paramétrisations de l'algorithme d'inversion sont strictement conservées dans l'ensemble des expériences d'identification menées ci-après. Ces dernières utilisent le même réseau d'observations constitué de mesures hydrologiques et courantométriques prises à l'entrée du golfe. Elles permettent une caractérisation exhaustive de la répartition des flux entrant dans le golfe et longeant le talus ; elles donnent aussi accès à l'évolution de l'intensité de chacun de ces flux. Cette zone d'observation de profils de courant et de masse volumique est « à cheval » sur le talus ; elle s'étend sur 60km dans la direction transversale au talus et 15km le long depuis son extrémité Est. La durée d'observation fixée à 4 jours fournit la taille de la fenêtre d'assimilation. Les paramètres de contrôle des expériences sont déterminés par la stratification initiale du bassin et par l'évolution de l'intensité du courant entrant dans le bassin. Il s'agit en pratique du profil initial de masse volumique, du profil de masse volumique le long de la frontière ouverte qui diagnostique le profil de courant géostrophique, et de la composante du transport barotrope normale à la frontière. Le problème inverse se pose en termes de minimisation d'une fonction de coût  $J$  composée d'un terme mesurant l'écart aux observations et d'un terme de régularisation portant sur les variations spatiales du profil frontière de masse volumique (identique à celui du développement d'un jet, section III.2.2). La pondération entre ces deux termes sans dimension est donnée par un coefficient  $\varepsilon=1$ .

### *Incidence sur un talus profond*

L'étude analytique des processus d'ajustement dans le cas où la profondeur de l'interface entre les deux couches est plus faible que celle du talus ( $H_1^+ < H^-$ ) a été menée par Herbaut et al. (1998) sur le détroit de Sicile. Le front de Kelvin incident associé au déplacement de l'interface génère un front de Kelvin se propageant à l'intérieur du golfe, suivant l'axe des  $y$  décroissant. L'élévation de l'interface est une solution continue et évanescente de l'équation (3.60.c), elle s'écrit de part et d'autre du talus :

$$Z_2^+(y) = Z_2^+(0).exp(-y/r_2^+) \quad \text{et} \quad Z_2^-(y) = Z_2^-(0).exp(y/r_2^-) \quad (3.64)$$

Ainsi, le raccordement de l'interface impose  $Z_2^+(0)=Z_2^-(0)$ . Le transport barotrope qui franchit le talus s'écrit  $\partial_x \psi(y=0)$  ; cette quantité est conservée. La fonction de courant est la solution évanescente de l'équation (3.60.a), elle s'exprime de part et d'autre du talus :

$$\Psi^+(y) = \Psi^+(0).exp(-ky) \quad \text{et} \quad \Psi^-(y) = \Psi^-(0).exp(ky) \quad (3.65)$$

Ainsi la contrainte de conservation fournit l'égalité  $\Psi^+(0)=\Psi^-(0)$ . Enfin, le champ de courant  $\mathbf{u}_1$  dans la couche de surface doit être raccordé au passage du talus. Ce dernier est évalué à partir du transport barocline  $H\mathbf{u}_1 = H_2\mathbf{u} + \mathbf{k} \times \nabla \psi$  issue de (3.51). A l'aide de l'équation de bilan (3.56.a), on en déduit l'égalité de chacune des composantes de  $\mathbf{u}_1$  en  $y=0$ .

$$-1/H^-.[k\Psi(0) + g^*H_2^-(/fr_2^-).Z_2(0)] = 1/H^+.[k\Psi(0) + g^*H_2^+/(fr_2^+).Z_2(0)] \quad (3.66.a)$$

$$1/H^-.[k\Psi(0) + g^*H_2^-(/fr_2^-).(w/f).Z_2(0)] = 1/H^+.[k\Psi(0) - g^*H_2^+/(fr_2^+).(w/f).Z_2(0)] \quad (3.66.b)$$

relations obtenues dans l'approximation de  $kr_2 \ll 1$ , la longueur d'onde des mouvements étant de l'ordre de la largeur du golfe. Ce problème est résolu en cherchant les indéterminations du

système (3.66) vérifié par le doublet  $(\Psi(0), Z_2(0))$  ; on obtient ainsi la relation de dispersion vérifiée par le système d'ondes :

$$\omega/f = (H^+ - H^-) / (H^- + H^+) \quad (3.67)$$

$\omega$  est positif : les ondes générées se propagent en laissant les faibles profondeurs à droite (avec  $k > 0$ ). En substituant (3.67) dans (3.66.b), on obtient une relation liant les amplitudes du mode barotrope et du mode barocline :

$$k.(H^+ + H^-).\Psi(0) = (g^*H^-/f).(H_2^+/r_2^+ + H_2^-/r_2^-).Z_2(0) \quad (3.68)$$

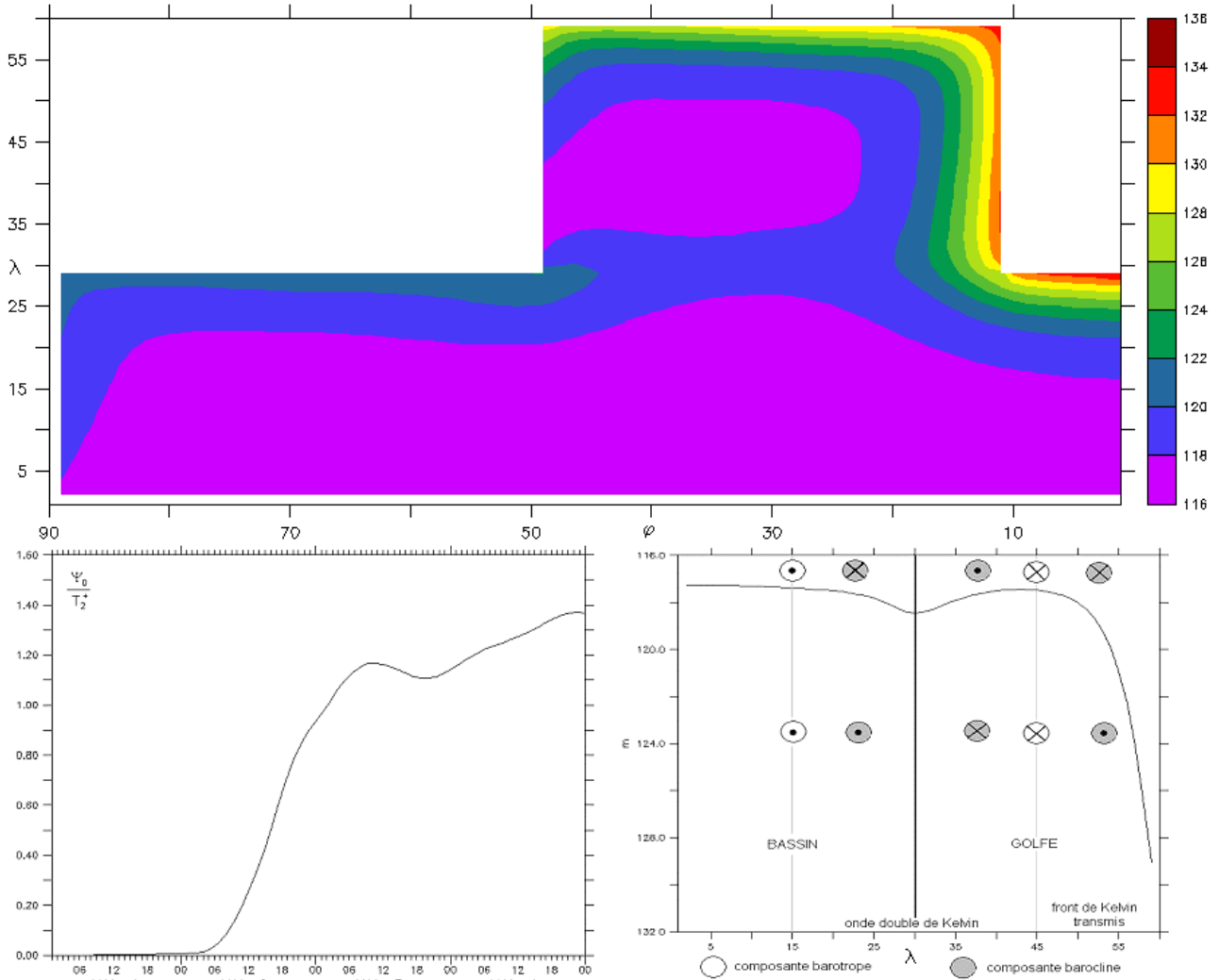
Cette dernière relation montre que  $\Psi(0)$  et  $Z_2(0)$  sont de même signe. La composante barotrope et la composante barocline sont donc opposées dans la couche de surface et dans le même sens dans la couche de fond. De plus, lorsque  $k$  tend vers 0, alors  $Z_2(0)$  tend aussi vers 0. L'onde générée est donc principalement barotrope. Le calcul de la composante du transport dans le sens de la propagation est effectué pour chaque couche. On trouve

$$T_1^- = H_1^-/H^-.\Psi(0) - (r_2^-)^2 f . Z_2(0) \quad \text{et} \quad T_2^- = T_1^- - \Psi(0) = H_2^-/H^-.\Psi(0) + (r_2^-)^2 f . Z_2(0) \quad (3.69)$$

Dans l'approximation des ondes longues, les termes baroclines (liés à  $Z_2(0)$  dans l'équation (3.69)) sont de l'ordre de  $kr_2$  et ils peuvent être négligés devant les termes barotropes. On en déduit le ratio  $\delta$  du transport barotrope transmis à travers le golfe par rapport au transport barocline incident (ce dernier est défini en (3.62)) :

$$\delta = \Psi(0) / T_2^+ = H^- / H_2^- \quad (3.70)$$

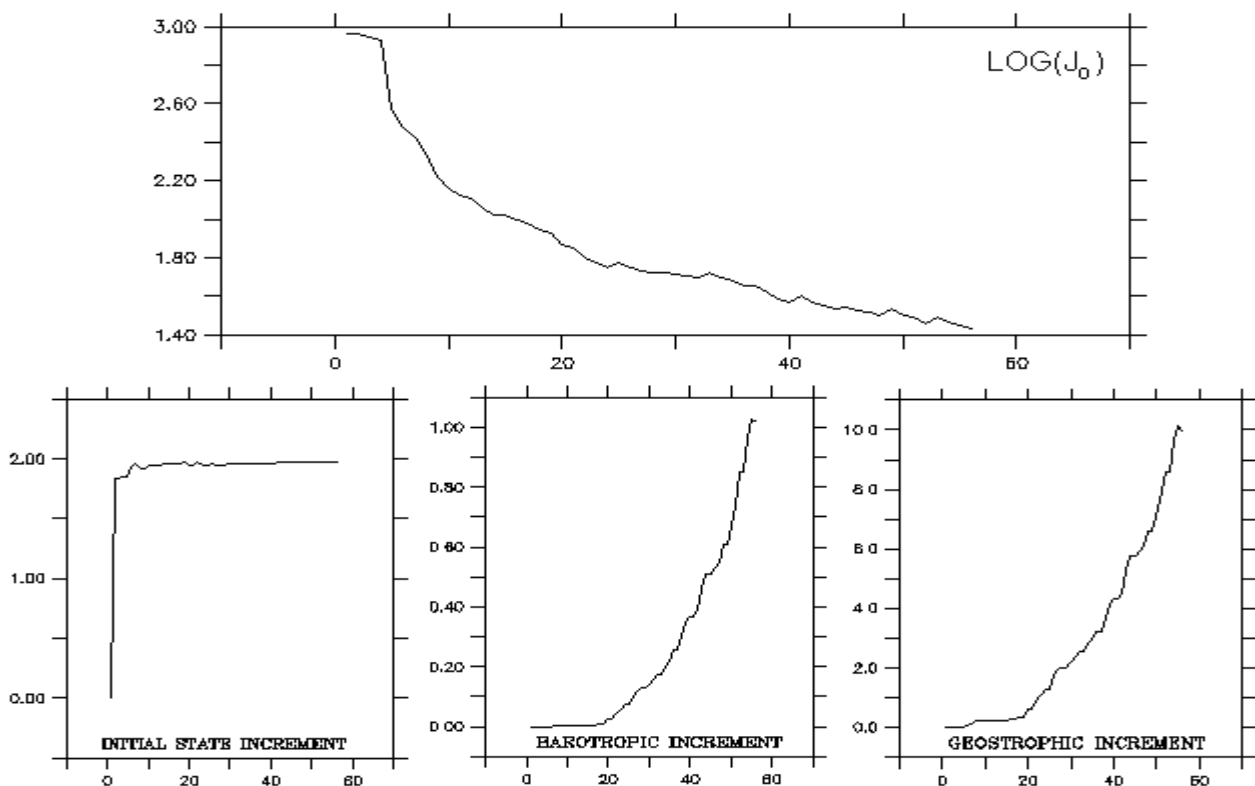
Le processus de séparation dans le cas d'un talus profond possède ainsi des solutions analytiques en accord avec l'expérience numérique (voir Figure 3.15). L'écoulement incident, dirigé suivant l'axe des  $x$  croissant dans la couche de surface, est divisé en deux branches. Une première branche bifurque dans le golfe le long de sa côte Est, elle est associée à un front de Kelvin barocline. La seconde branche s'écoule le long du talus, elle est associée à une onde double de Kelvin. Dans la couche de fond, l'écoulement incident qui est dirigé suivant l'axe des  $x$  décroissant, ne bifurque pas dans le golfe mais il est piégé par le talus et s'écoule le long. Ce dernier est alimenté par l'écoulement dans la couche de fond provenant du golfe et associé au front barocline, ainsi que par le courant barotrope associé à l'onde double de Kelvin.



**Fig.3.15** En haut : représentation de la profondeur de l'interface (en mètres) lors de la séparation d'un front de Kelvin incident à un golfe de profondeur  $H=310\text{m}$ . Cette dernière est caractérisée par un profil exponentiel où 65% de l'élévation est perdue sur une distance égale au rayon de déformation. A gauche : la valeur théorique du ratio  $\delta=1.6$  donnée par la relation (3.70) n'est pas atteinte dans le cadre de cette expérience. A droite : variations de l'interface le long d'un transect passant par l'axe de symétrie du golfe. Une première variation centrale met en évidence la composante barocline de l'onde double de Kelvin se propageant le long du talus. Une seconde variation le long du bord Nord du golfe est le signe du front de Kelvin qui a bifurqué dans le golfe. On remarque que l'amplitude des variations centrales est petite devant celle du front de Kelvin intrusif.

L'expérience d'identification est menée sur un golfe de profondeur  $H=310\text{m}$ . L'ensemble des observations est généré sur la base d'une stratification initiale correspondant à une interface située à  $H_1^{\text{tru}}=228\text{m}$  de profondeur. A partir de la situation de spin up d'un bassin ayant une interface à la profondeur  $H_1^{\text{bck}}=104\text{m}$ , le front de Kelvin incident se propage à une vitesse plus faible en direction du talus pour générer un courant principalement barotrope le long du talus. Sa branche Nord s'étend amplement sur l'emprise du golfe, avec un transport

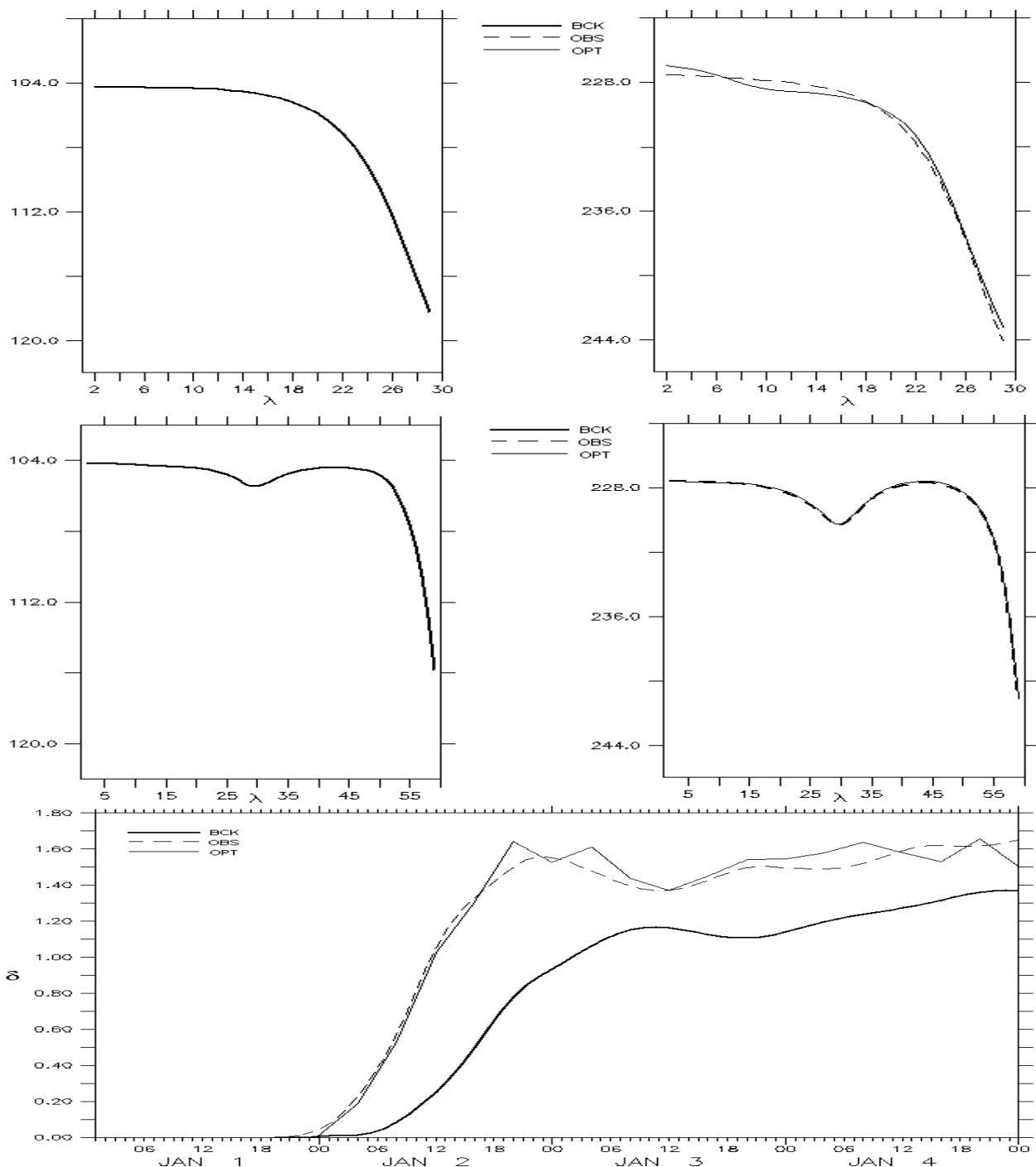
associé dans un rapport  $\delta$  donné par la relation (3.70) avec le transport barocline incident. La Figure 3.16 donne les principales caractéristiques du fonctionnement de l'algorithme. Il apparaît tout d'abord une réduction régulière de la fonction de coût après une forte décroissance lors du premier passage dans la routine de minimisation. Ce type de comportement s'explique à partir de l'analyse de l'évolution de chacun des incréments (par rapport à l'ébauche), mesurés à l'issue de chaque boucle externe (composée de trois boucles internes). En effet, les paramètres de contrôle initiaux atteignent très rapidement leur valeur optimale : la majeure partie du processus de séparation est alors résolue, puisque seule l'intensité du front incident est à estimer. Cette tâche s'avère d'ailleurs plus longue, compte tenu de l'écart résiduel aux observations correspondant aux variations d'intensité. Il apparaît à ce stade une plus grande sensibilité du profil de masse volumique, ce qui est prévisible puisque soumis à régularisation et fournissant la majeure contribution à la dynamique du front de Kelvin incident. L'assimilation de la donnée du flux entrant et de son évolution au cours de la fenêtre temporelle permet d'identifier de manière précise la stratification initiale, et par conséquent la valeur de  $H_1^{tu}$ . La Figure 3.17 montre deux coupes à la moitié de la période d'assimilation, une première en amont du golfe, une seconde selon son axe de symétrie. De même, l'intensité du courant incident donnée par l'élévation de l'interface est correctement estimée. Le ratio  $\delta$  est en bon accord avec la situation observée. Ainsi, le lien entre l'observation de la séparation du courant côtier et ses caractéristiques prises en amont est en accord avec l'étude de processus.



**Fig.3.16** Caractéristiques de fonctionnement de l'algorithme dans le cas du talus profond. Le logarithme de la fonction de coût mesurant l'écart du modèle aux observations est représenté en haut ; la norme euclidienne de l'incrément (sans dimension) pour chaque type de contrôle



est représenté en bas. L'évolution de chacune de ces caractéristiques est donnée en fonction du nombre de passages dans la routine de minimisation M1QN3.



**Fig.3.17** Résultats de l'identification de la stratification initiale et du transport de l'onde de Kelvin incidente correspondant au processus de séparation observé dans le cas d'un talus profond. Les coupes en amont sur l'axe de symétrie du golfe donnent la profondeur de l'interface (en m) au bout de 2 jours de simulation. L'évolution du ratio  $\delta$  est donnée au cours de la période d'assimilation.

### *Incidence sur un talus peu profond*

Il s'agit maintenant traiter le cas d'une interface située plus en profondeur que le talus ( $H_1^+ > H^-$ ). Le développement analytique suivant est traité par Echevin et al. (2003) et appliquée sur le site du Golfe du Lion. Dans cette situation, le front barocline incident ne peut pas se propager dans le golfe. Cependant, l'ajustement correspondant est toujours contraint à plusieurs conditions de raccordement. Il y a tout d'abord continuité de l'interface air – mer. L'élévation de la surface libre est une solution évanescente et continue de l'équation (3.60.b). A partir de la solution sur l'amplitude de l'élévation de l'interface donnée en (3.61), on en déduit

$$Z_1^+(y) = Z_1^+(0).exp(-y\lambda_1^+) - (r_2^+/r_1^+)^2.Z_2^+(0).exp(-y/r_2^+) \text{ et } Z_1^-(y) = Z_1^-(0).exp(y\lambda_1^-) \quad (3.71)$$

où  $\lambda_1 = [k^2 + 1/r_1^{2+}]^{1/2}$ . La conservation de l'amplitude le long du talus s'exprime suivant :

$$Z_1^-(0) = Z_1^+(0) - Z_2^+(0).(r_2^+/r_1^+)^2 \quad (3.72)$$

La composante transverse du transport dans la couche de surface  $H_1\mathbf{u}_1$  doit être raccordée. Cette composante s'exprime en fonction des élévations en  $y=0$  à travers l'équation (3.49.a) intégrée sur la couche supérieure pour donner l'égalité :

$$Z_1^-(0).H_1^-/H_1^+.[k + (\lambda_1^-)\omega/f] = Z_1^+(0).[k - (\lambda_1^+)\omega/f] - Z_2^+(0).(r_2^+/r_1^+)^2.[k - \omega/(fr_2^+)] \quad (3.73)$$

Enfin, la composante transverse du transport  $H_2^+\mathbf{u}_2^+$  dans la couche de fond est nulle à cause de la présence de la côte. Cette composante s'exprime en fonction des élévations en  $y=0$  à travers l'équation (3.50.a) intégrée sur la couche inférieure :

$$Z_1^+(0).[k - (\lambda_1^+)\omega/f] + Z_2^+(0).[g^*/g - (r_2^+/r_1^+)^2].[k - \omega/(fr_2^+)] = 0 \quad (3.74)$$

Dans l'hypothèse  $H_2^+ \approx H^+$ , le ratio des rayons de déformation s'exprime suivant  $(r_2^+/r_1^+)^2 \approx g^*/g \ll 1$ . Le système (3.72)-(3.73)-(3.74) admet ainsi une infinité de triplets solutions  $(Z_1^-(0), Z_1^+(0), Z_2^+(0))$  lorsque le déterminant du système est nul, soit

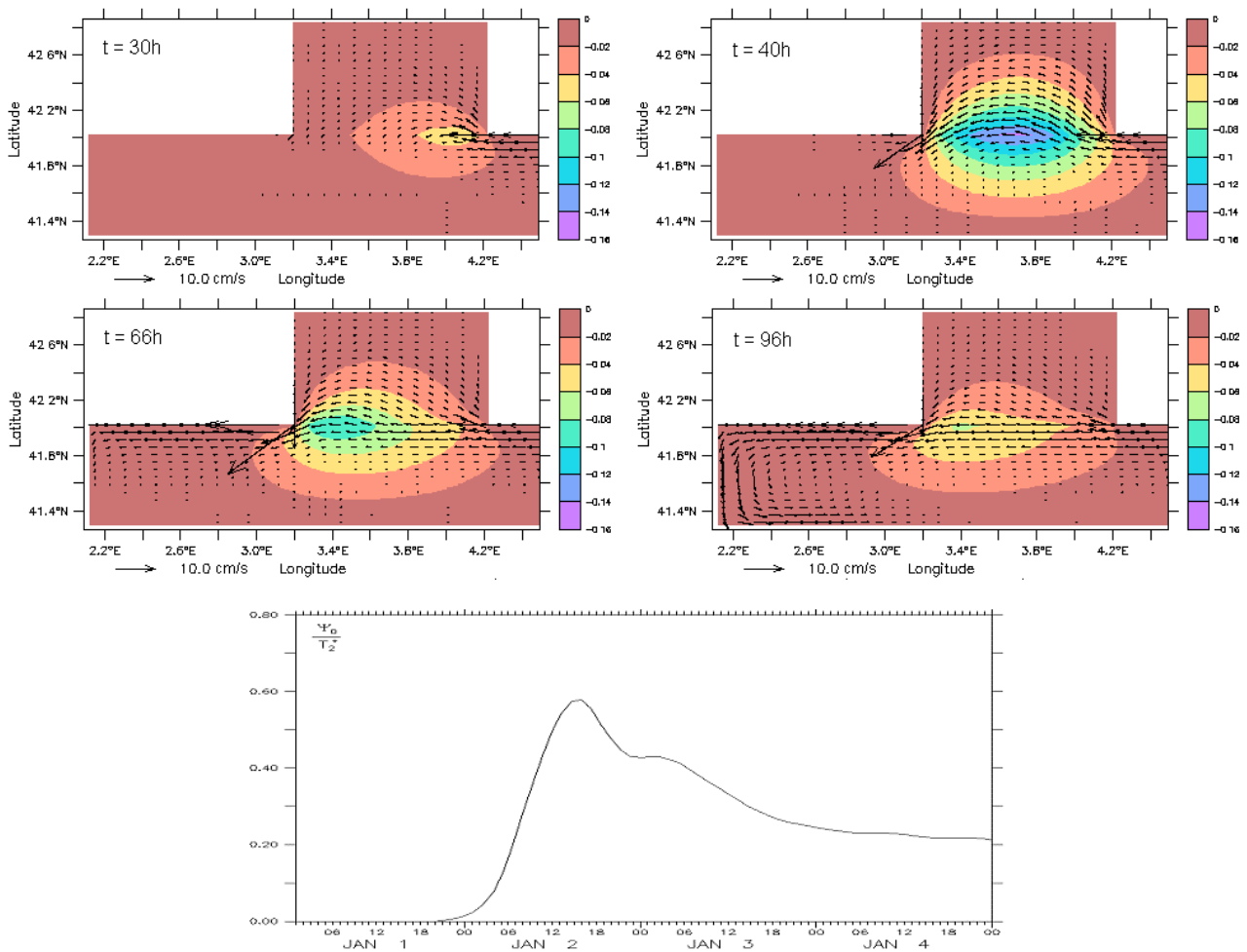
$$[k - (\lambda_1^+)\omega/f].[H_1^-/H_1^+.(k + (\lambda_1^-)\omega/f) - (k - \omega/(fr_2^+))] = 0 \quad (3.75)$$

Deux types d'ondes sont ainsi générés par le front de Kelvin incident. Le premier système d'ondes associé à la relation de dispersion  $\omega/f = k/\lambda_1^+$  ne dépend pas de la stratification. Pour des nombres d'onde petits ( $kr_1^+ \ll 1$ ), on retrouve une relation de dispersion similaire à une onde de Kelvin barotrope de célérité  $(gH_1^+)^{1/2}$  se propageant dans la couche supérieure suivant l'axe des x croissant. Dans l'hypothèse  $(r_2^+/r_1^+)^2 \ll 1$ , l'équation (3.72) donne  $Z_1^+(0) \approx Z_1^-(0)$  ; et d'après la relation (3.73),  $Z_1^+(0)$  est de même signe que  $Z_2^+(0)$ . La composante barotrope et la composante barocline sont donc opposées dans la couche de surface et dans le même sens dans la couche de fond. Le calcul des transports transverses au sens de propagation est mené dans chacune des couches à partir des équations (3.49.a) et (3.50.a) ; on a :

$$T_1^+ = gH_1^+/f.Z_1^+(0) \quad \text{et} \quad T_2^+ = gH_2^+/f.Z_1^+(0) \quad (3.76)$$

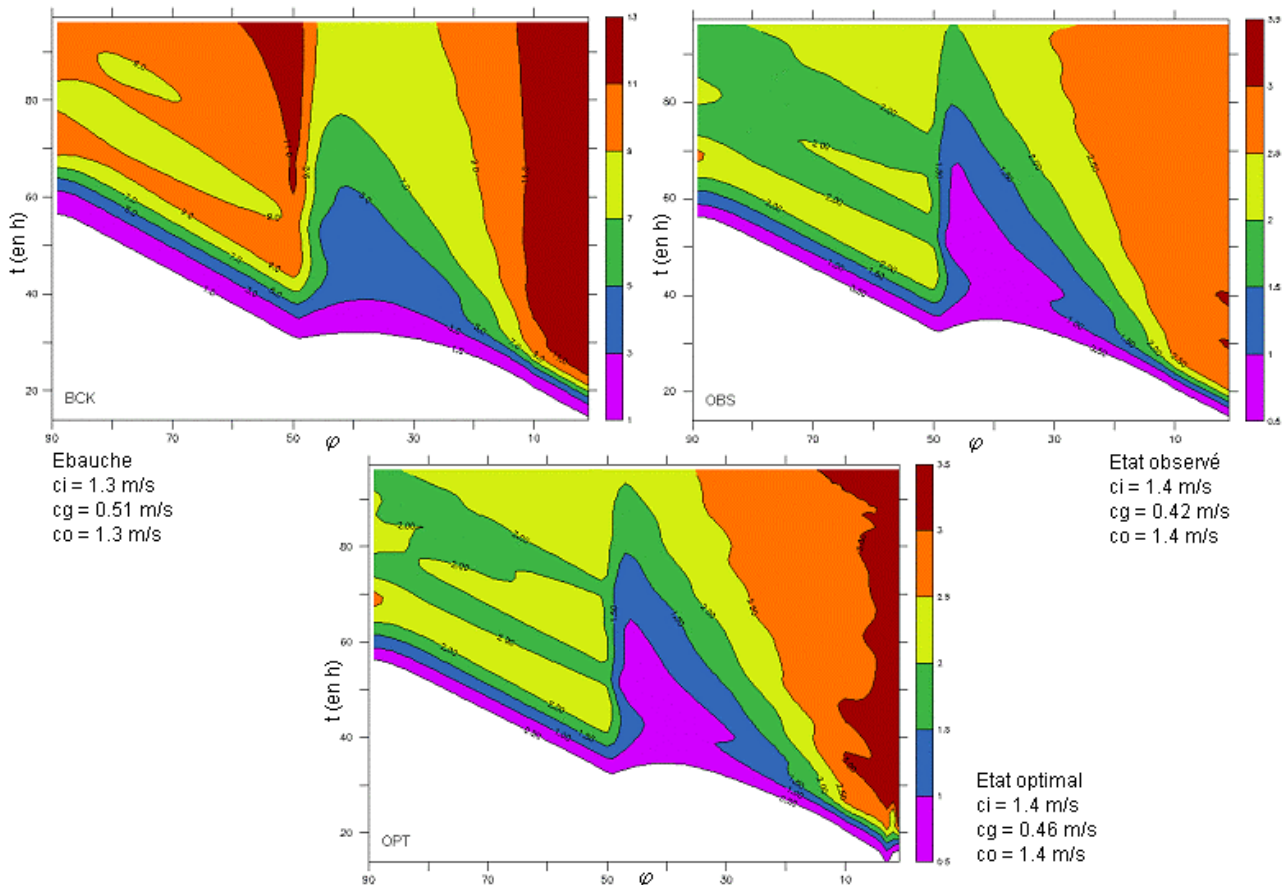
soit un transport barocline dans chaque couche proportionnel au transport barotrope dans un ratio donné par l'épaisseur de la couche. Un second système d'ondes obéit à la relation de dispersion  $\omega/f = kr_2^+.(1 - H_1^-/H_1^+)$ , donnée à partir de (3.75) dans la limite des nombres d'ondes petits et avec  $k_2^+/r_1^- \ll 1$ . Ce nouveau front de Kelvin barocline non dispersif se

propage suivant l'axe des x croissant à une vitesse plus petite que l'onde incidente. Sa vitesse est d'autant plus faible que la couche de surface est épaisse. Le transport barocline associé vient contrecarrer la partie barotrope du transport dans la couche de surface et atténue *in fine* l'intensité de l'onde de Kelvin double. Le processus de séparation dans le cas d'un talus peu profond possède ainsi une description analytique en accord avec l'expérience numérique (voir Figure 3.18). Un front de Kelvin incident à un talus peu profond génère un système d'ondes rapide qui s'étend sur l'emprise du golfe. Un second système d'ondes plus lent ajuste dans la couche de surface le transport associé au premier front. Il en résulte un épisode de durée limitée de bifurcation du front de Kelvin incident à l'intérieur du golfe.



**Fig.3.18** Episode de bifurcation d'un front de Kelvin dans un golfe peu profond ( $H=65m$ ). En haut, représentation à quatre instants successifs des lignes de courant (en Sv) ainsi que du courant de surface (en cm/s), associés à la propagation d'une onde de Kelvin double le long du talus. En bas, évolution du ratio  $\delta$  défini en (3.70), montre l'atténuation du front barotrope rapide par le développement d'un front barocline plus lent ; le transport incident reste constant.

L'expérience d'identification suivante reste très similaire à celle conduite dans le cas d'un talus profond : le comportement de l'algorithme d'assimilation suit en effet les mêmes caractéristiques. On s'attache ainsi à l'identification du processus de séparation du front de Kelvin incident qui diffère lorsque le golfe, de profondeur  $H=65\text{m}$ , est homogène. L'ensemble des observations est généré sur la base d'une stratification initiale correspondant à une interface située à  $H_1^{\text{tru}}=228\text{m}$  de profondeur. A partir de la situation de spin up d'un bassin ayant une interface à la profondeur  $H_1^{\text{bck}}=178\text{m}$ , la stratification initiale est rapidement ajustée à la valeur  $H_1^{\text{tru}}$ , l'évolution du transport barocline incident est ensuite estimé pour être identifié aux conditions amont optimales (voir Figure 3.19). Une comparaison du diagramme de célérité entre la situation de départ et la situation optimisée montre le lien univoque des conditions initiales et forçantes du bassin avec les caractéristiques du système d'ondes généré à l'entrée du golfe. En effet, chaque célérité du système d'ondes ayant généré l'épisode d'intrusion observé est ajustée à partir de l'identification des seuls éléments de stratification initiale et de forçage amont.



**Fig.3.19** Identification du diagramme de célérité de chacun des systèmes d'ondes présents dans le processus de séparation d'un courant côtier sur un talus peu profond. Un diagramme de célérité est généré par la mesure de l'élévation de l'interface par rapport à son emplacement au repos, suivant le transect longeant le talus (i.e. la droite  $y=0$ ) et pendant la période d'assimilation. La célérité du front de Kelvin incident est mesurée sur la portion 1-10 (en points de grille, soit les 30 premiers kilomètres) et notée  $c_i$ , celle de l'onde barotrope sur

le talus (10-50) est difficilement mesurable, celle de l'onde barocline sur le talus est notée  $c_g$ , celle de l'onde sortante (i.e. en aval) est notée  $c_o$ .

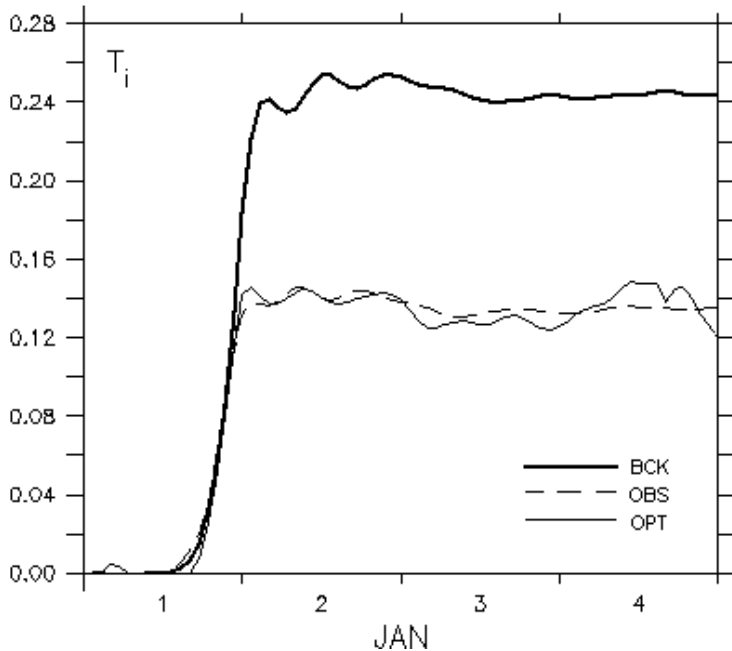
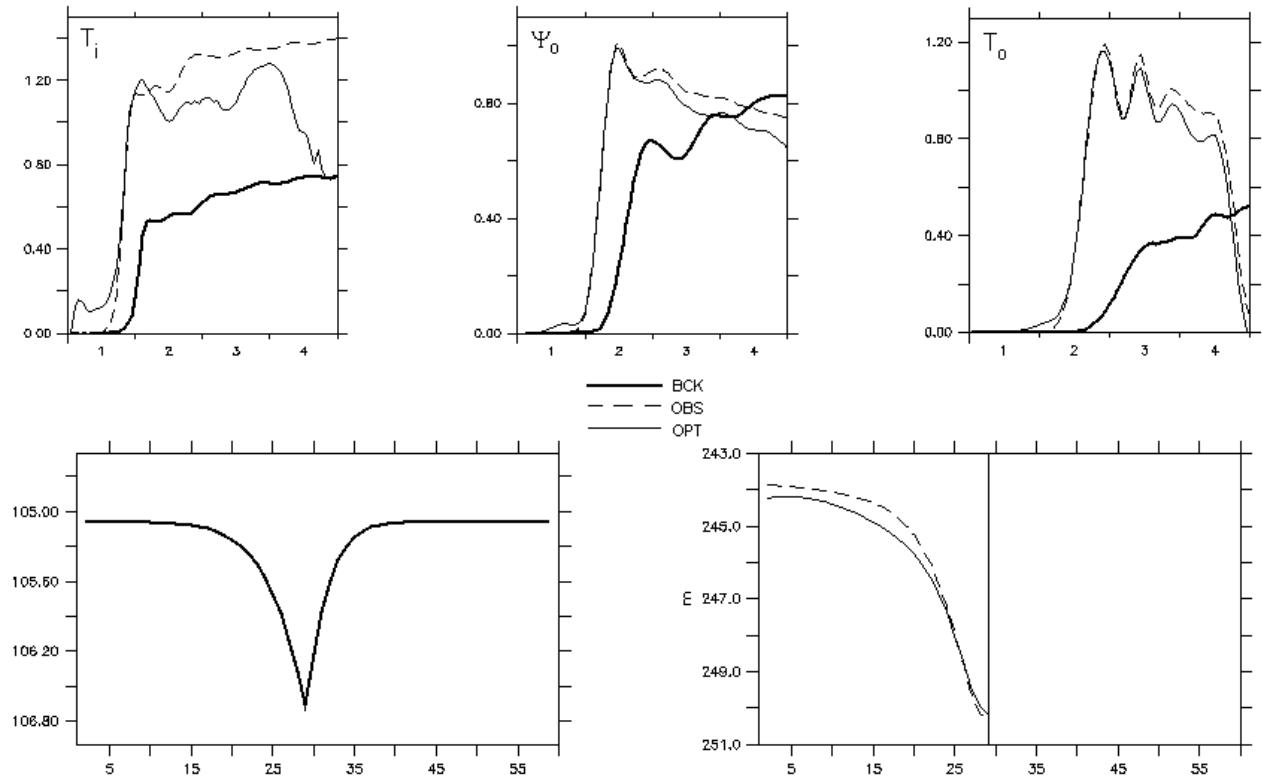


Fig.3.19.b. Identification du transport incident.

Une expérience « transverse » vient conforter cette relation univoque qui associe le type de mécanisme de bifurcation du courant côtier avec ses conditions amont. Une ébauche du spin up est effectuée sur un golfe stratifié de profondeur  $H=150\text{m}$ . La Figure 3.20 montre les caractéristiques des transports associés aux systèmes d'ondes incident, le long du talus et en aval. A partir de l'observation d'un épisode d'intrusion généré par un front incident plus profond que  $H$ , la résolution du problème inverse fournit une solution représentative de ce type de mécanisme, du point de vue de la stratification initiale et de l'intensité des transports associés. On note toutefois un « décrochement » du transport barocline incident sur la fin de la période d'assimilation. En effet, le cône d'influence des ultimes données (i.e. prises à la fin de la fenêtre temporelle) ne couvre pas l'ensemble des paramètres à ajuster.



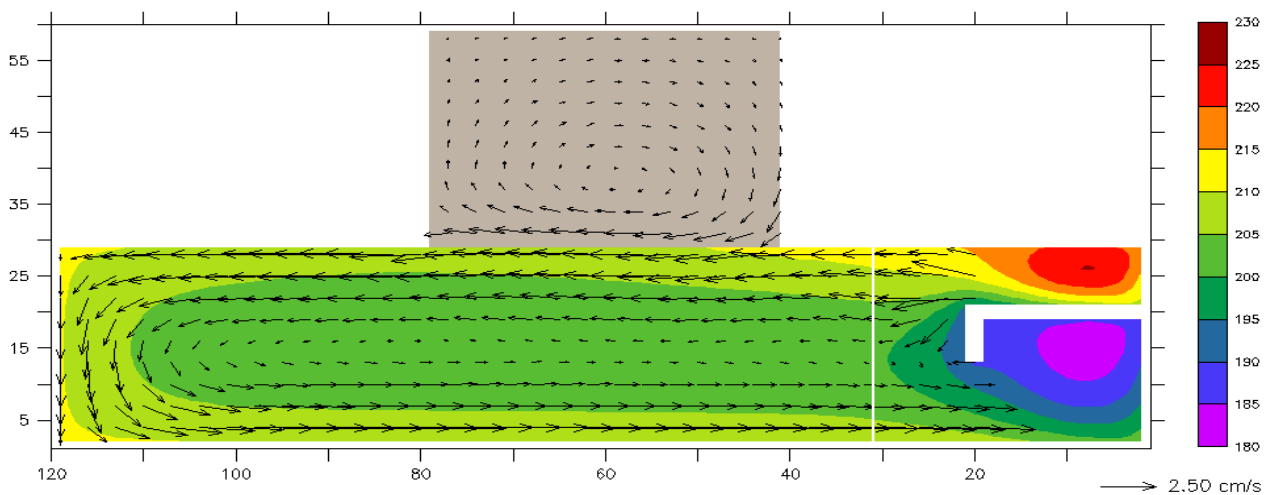
**Fig.3.20** Résultats de l'expérience transverse constant à l'identification d'un épisode de séparation à partir de la situation d'un golfe stratifié de profondeur  $H=150\text{m}$ . En haut, l'évolution des transports associés aux systèmes d'ondes incident ( $T_i$ ), le long du talus ( $\Psi_0$ ) et en aval ( $T_0$ ) est donnée sur la période de spin up du bassin (en Sv). En bas, la stratification et l'élévation de d'interface (en m) sont fournies par cette coupe suivant l'axe de symétrie du golfe au milieu de la fenêtre d'assimilation.

### Détection d'épisodes d'intrusion

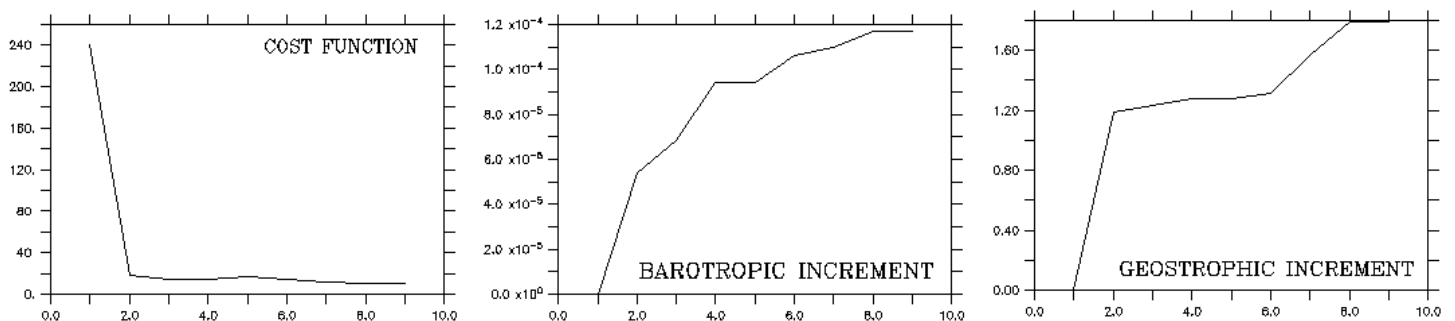
On s'est intéressé précédemment à la phase de spin up du bassin bicouche, et plus particulièrement à son ajustement lorsque le courant côtier arrive à l'entrée du golfe. On se place maintenant dans la situation stationnaire d'un courant côtier longeant un talus peu profond. A partir du même réseau d'observation que précédemment, il s'agit de relier un épisode d'intrusion dans le golfe avec les caractéristiques amont du courant. Sur la base de la configuration construite et utilisée précédemment, l'algorithme d'assimilation est utilisé pour identifier les perturbations sur l'intensité du courant côtier qui ont généré l'épisode d'intrusion observé.

On se place à un temps initial postérieur à la phase de spin up, le modèle simule un courant côtier stationnaire qui s'écoule le long du talus d'un golfe homogène. La Figure 3.21 fait apparaître une veine de courant guidée par la discontinuité bathymétrique et une cellule de recirculation de faible intensité sur l'emprise du golfe. Sur cet état stationnaire, un échelon sur l'élévation de l'interface est imposé pour fournir une anomalie se propageant vers le golfe. Il est alors observé un épisode d'intrusion décrit par la succession d'un front barotrope rapide et d'un front barocline lent qui équilibre le premier. En considérant la même durée

d'assimilation (soit 4 jours), les seules conditions frontières forçant le modèle ouvert à sa frontière Est sont contrôlées : il s'agit du profil de masse volumique et la composante normale du transport barotrope. La Figure 3.22 montre le déséquilibre fort sur la sensibilité de ces deux types de paramètres, la partie barotrope du contrôle étant inactive devant sa partie barocline. L'algorithme fournit un état optimisé au bout de deux boucles externes composées chacune de trois boucles internes ; la fonction de coût décroît en effet très rapidement sur la première itération. L'anomalie sur la profondeur de l'interface à la frontière correspondant à l'échelon imposé sur la vorticité potentielle est ainsi identifiée.

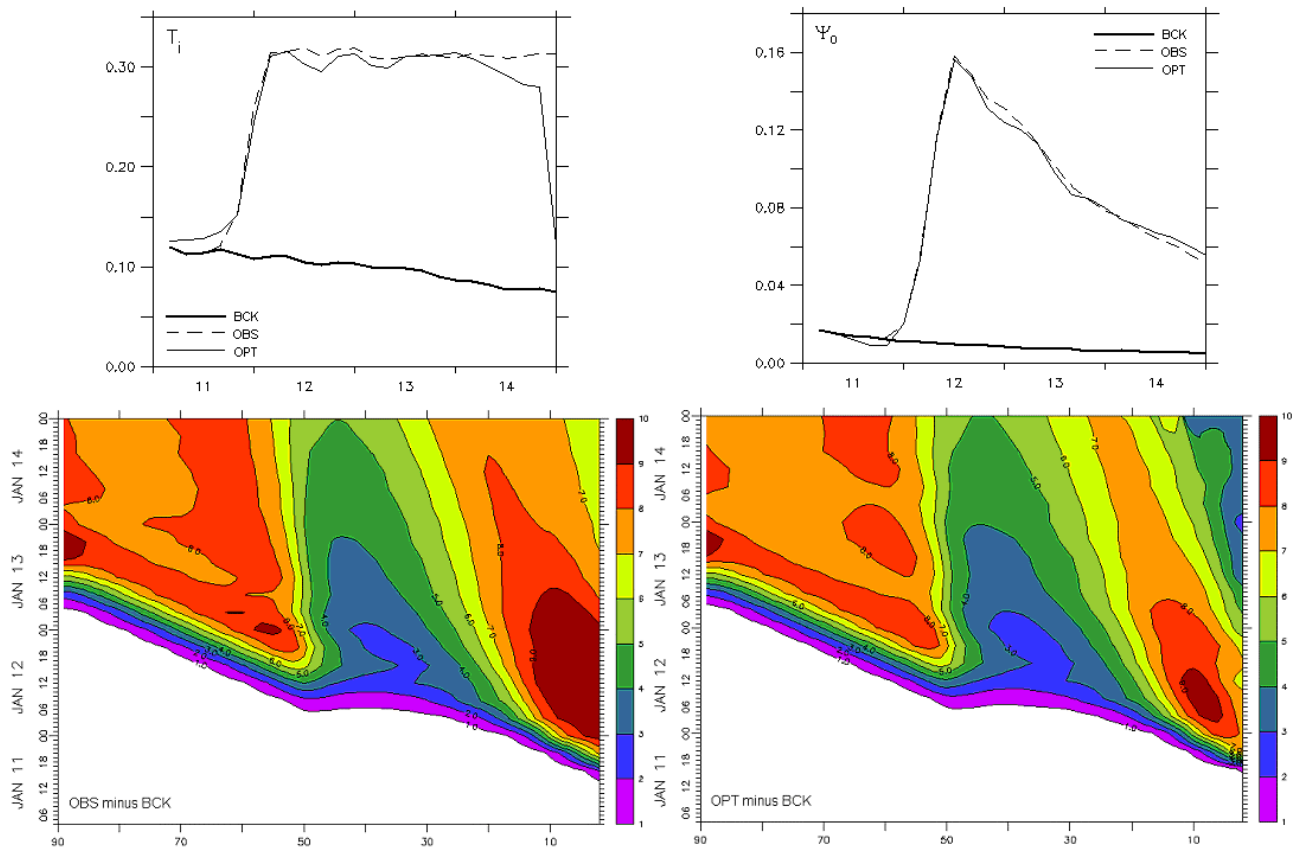


**Fig.3.21** Circulation stationnaire d'un courant côtier associé à un front de Kelvin prenant naissance au coin Nord-Est et s'éteignant au coin Sud-Est. Les ajustements barotrope et barocline à l'incidence du golfe ont été effectués en respect de la description du processus de séparation sur un talus peu profond. Représentation de la profondeur de l'interface (isolignes en m, tous les 5m) et du champ de courant de surface. La frontière du bassin ouvert est matérialisée suivant le transect  $i=31$ .



**Fig.3.22** Fonctionnement de l'algorithme d'assimilation dans la détection d'épisodes d'intrusions du courant côtier dans le golfe. Représentation de la fonction de coût  $J$  ainsi que des incréments sur les deux contrôles frontières en fonction du nombre de passages dans la routine de minimisation. Ces dernières quantités sont sans dimension.

La solution issue de la résolution du problème inverse associé à la détection d'une intrusion est identifiable aux conditions forçantes utilisées pour générer cet épisode. La Figure 3.23 montre en effet une estimation du transport barocline pris en amont du golfe, ainsi que l'intensité et la durée de l'intrusion. Il en est de même pour la vitesse de chacun des systèmes d'ondes présents dans ce processus. Les effets des cônes d'influence intrinsèques au réseau d'observation mis en place sont minimales : à part un décrochement de l'estimation sur la fin de la période d'assimilation, il n'apparaît pas de solution plus rapide ou plus lente inhérente à l'absence de contrôle initial (confer la discussion sur le développement d'un jet, section III.2.2) pouvant générer le même épisode d'intrusion. Par conséquent, l'intensité de la cellule barotrope qui se développe sur le plateau est donnée de manière univoque par l'intensité du courant côtier incident : c'est en effet cette caractéristique amont qui détermine la vitesse de propagation du front.



**Fig.3.23** Détection d'un épisode d'intrusion à partir de l'observation hydrologique et courantométrique simulée à l'entrée du golfe. En haut, représentation des transports en amont ( $T_i$ ) et le long du talus ( $\Psi_0$ ) au cours de la période d'assimilation : la variation du transport dans le front de Kelvin incident ainsi que l'intensité et la durée de l'épisode d'intrusion dans le golfe sont identifiées. En bas, diagramme de célérité donnée par l'élévation de l'interface suivant un transect le long de la côte et du talus. L'élévation dans la situation observée (à gauche) et dans la situation analysée (à droite) sont données par rapport à l'ébauche du courant stationnaire.



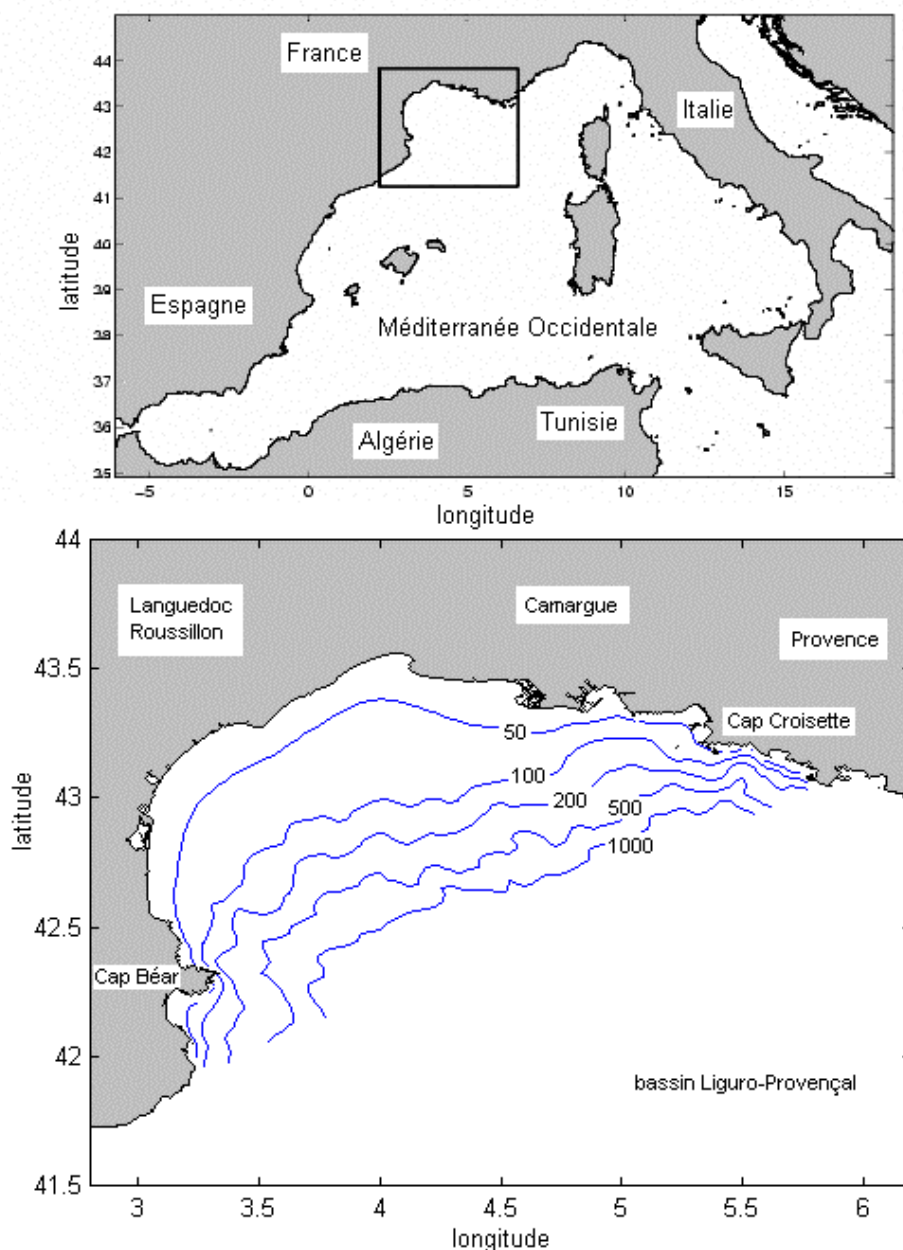


## IV. APPLICATION AU GOLFE DU LION

Dans le contexte de la contribution des systèmes côtiers au cycle global du carbone, le Golfe du Lion offre un modèle d'étude intéressant. Sa morphologie et les forçages qui induisent ses structures de circulation ainsi que les différents réseaux déployés pour son observation justifient en soi le choix de ce site d'étude. Il s'agit alors d'appliquer la méthode variationnelle d'assimilation mise en place précédemment pour estimer les conditions frontières à l'interface du Golfe du Lion avec le bassin Nord. Deux points de vues sont développés dans ce sens. Celui de l'observabilité est abordé dans une étude de sensibilité des différents réseaux d'observation aux variations barotropes de la circulation régionale. Celui de la contrôlabilité de perturbations de type front de Kelvin sur une circulation régionale barocline à partir d'un réseau d'observation fixé est mené dans une étude finale à caractère prospectif.

### IV.1. MORPHOLOGIE ET FORÇAGES

Le Golfe du Lion est un domaine côtier situé dans la partie Nord de la Méditerranée occidentale. Les côtes de Provence, de Camargue, du Languedoc et du Roussillon le bordent depuis le cap Croisette jusqu'au cap Béar. Au Sud, le golfe est largement ouvert sur le bassin Liguro Provençal. La bathymétrie du golfe est décrite par un plateau peu profond bordé par un talus continental entaillé multiples canyons (non visibles sur la Figure 4.1). Le Golfe du Lion est caractérisé par les variations saisonnières de sa stratification (Millot, 1990). La configuration bicouche du bassin durant la période estivale disparaît en hiver : les eaux du golfe sont bien mélangées excepté dans la zone d'influence rhodanienne. En effet, le Rhône constitue une source d'eau douce importante, avec un débit moyen de l'ordre de  $1000\text{m}^3/\text{s}$ . Une couche d'eau douce de un à quelques mètres d'épaisseur s'étend sur une distance de quelques kilomètres autour son embouchure en Camargue. Ce panache se mélange sous l'influence du vent avec les eaux marines pour créer une zone de dilution (la ROFI, Region Of Freshwater Influence).



**Fig.4.1** Situation et morphologie du Golfe du Lion. Au Nord, ses côtes forment un arc de cercle de 150km de rayon. Au Sud, il est largement ouvert sur le bassin Liguro-Provençal, sur une distance de 200km environ. Le golfe du Lion est constitué d'un plateau continental d'une profondeur inférieure à 100m, et de largeur maximale 80km environ. Il est bordé par un talus continental large de 50km environ qui relie le plateau aux plaines abyssales.

L'orographie des régions continentales qui entourent le Golfe du Lion induit une circulation atmosphérique particulière. Les vallées formées par les Pyrénées et le Massif Central d'une part, le Massif Central et les Alpes d'autre part, imposent des régimes de vents forts et de direction stable. Le Golfe du Lion est la région la plus ventée de la mer Méditerranée. Dans le secteur Nord, deux courants d'air sont guidés par l'orographie environnant le golfe. La Tramontane, de secteur Nord-Ouest, souffle en moyenne un jour sur deux sur le Roussillon. Le

Mistral, vent du Nord, souffle dans la vallée du Rhône un jour sur trois. En hiver, ces coups de vent froid peuvent durer pendant plusieurs semaines et atteindre des vitesses de l'ordre de 10-15 m/s. En dehors de ces périodes de vent du Nord, la direction peut basculer brutalement et s'orienter au Sud-Est. Une étude de sensibilité montre que la force, la direction et le cisaillement du vent définissent principalement les structures de circulation observées sur le plateau (Estournel et al. 2003). Par exemple, une cellule anticyclonique associée au Mistral (dont le rotationnel est négatif) est représentative de la circulation synoptique générée par ce régime de vent.

Comme ailleurs dans l'océan, les masses d'eau de la Méditerranée sont soumises à l'attraction de la marée. Les oscillations du niveau de la mer sont de l'ordre de quelques centimètres dans le Golfe du Lion. Ce signal résolu pour l'onde principale M2 est très homogène sur l'extension du golfe, et les courants associés sont trop faibles pour être mesurés (Lamy et al. 1981). De même, les oscillations naturelles du niveau de la mer de type seiche contribuent au signal de haute fréquence, du fait de l'extension et de la profondeur du plateau. Une expérience numérique menée par Echevin (1998) montre qu'une oscillation à 3h du niveau de la mer peut être forcée par une onde se propageant du large vers le golfe. Enfin, les oscillations d'inertie en présence de côtes contribuent aux variations du niveau de la mer, puisque les mouvements associés deviennent divergents et génèrent des mouvements verticaux. Il est toutefois difficile de mesurer les variations du niveau de la mer au passage de ce type d'onde.

Le Courant Liguro-Provençal (ou Courant Nord Méditerranéen) forme la branche Nord de la cellule de circulation cyclonique à l'échelle de la Méditerranée occidentale. Il prend naissance en mer Ligure de la fusion du courant Est Corse et du courant Ouest Corse. Il s'écoule ensuite vers le Sud-Ouest le long de la côte provençale puis sur le talus continental du Golfe du Lion. Ce courant côtier relativement large en été devient plus confiné en hiver (20 à 30km de largeur) en se rapprochant de la côte. Il a toutefois été observé (Crépon et al. 1982) une forte activité méso échelle de ce courant en période hivernale avec l'apparition de méandres de 40km de longueur d'onde. Le coeur du courant peut alors se déplacer d'une vingtaine de kilomètres vers le sud du talus au large de Marseille. Le transport du courant Liguro-Provençal est élevé en hiver, de l'ordre de 2Sv (Béthoux et al. 1988). A l'échelle du bassin Liguro-Provençal, Herbaut et al. (1997) ont montré que des variations du rotationnel de vent modifient le transport du courant et par conséquent modifient son influence sur la circulation côtière. Il en résulte une séparation possible du courant Liguro-Provençal à l'entrée du plateau (voir l'étude en section III.2.3). Les instabilités qui perturbent sa trajectoire le long du talus jouent ainsi un rôle actif dans les échanges entre le plateau et le large. Par conséquent, cette région de faible extension est propice aux échanges avec le large le long de cette frontière ouverte.

En résumé, le site du Golfe du Lion est caractérisé par les éléments suivants :

- un golfe aux dimensions « géophysiques » composé d'un plateau continental individualisé et largement ouvert sur le bassin méditerranéen occidental.
- une source continentale principale, provenant des apports rhodaniens.

- une forte variabilité saisonnière de sa stratification, notamment avec un bassin homogène dans sa situation hivernale (en dehors de la zone de panache).
- un moteur hydrodynamique prédominant : le courant Liguro-Provençal qui s'écoule en bord de plateau.
- en l'absence de marée significative, la circulation sur le plateau est contrôlée par un forçage atmosphérique généré par des vents forts et fréquents.

Il est proposé de traiter les échanges hydrodynamiques avec la circulation de l'échelle régionale. Les liens entre une structure de circulation observée sur le golfe et son forçage le long du talus (en termes de structures spatiales et de ses évolutions) sont étudiés avec la méthode d'inversion mise en place dans la section III.

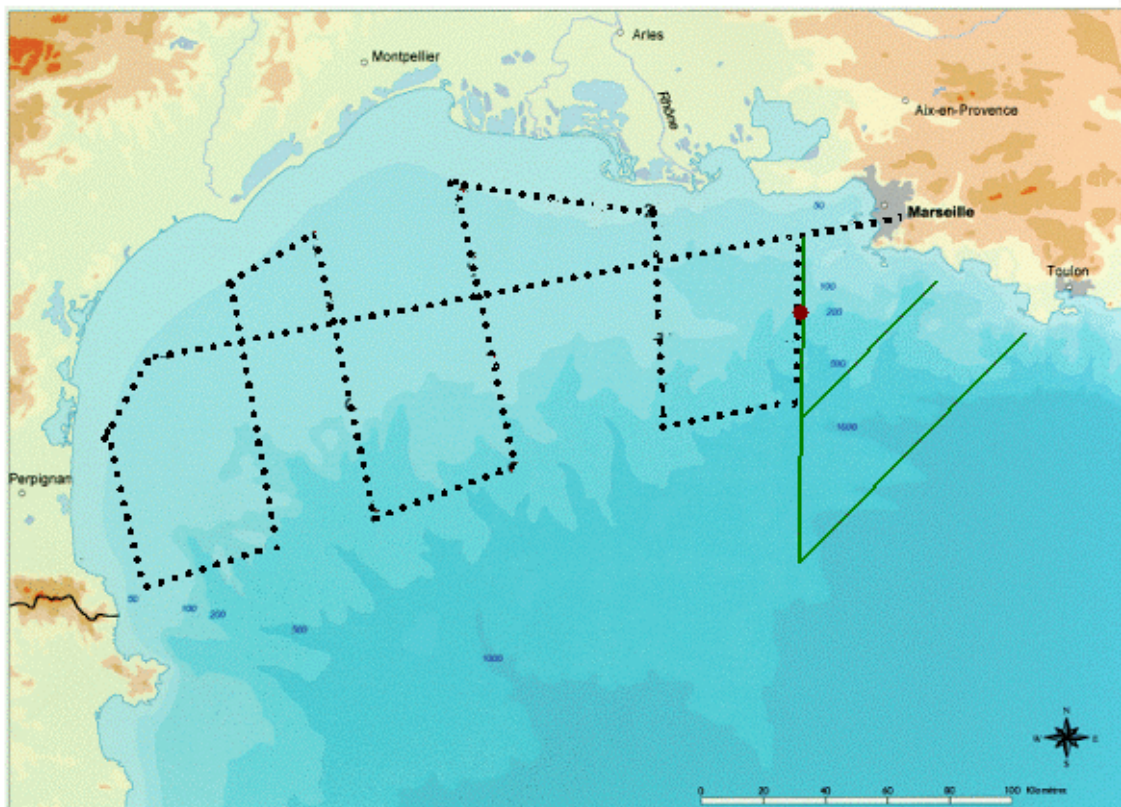
#### IV.2. LES MOYENS D'OBSERVATION DEPLOYES

Un tour d'horizon des moyens utilisés pour l'observation du Golfe du Lion est brièvement parcouru. L'ensemble des mesures physiques récoltées est issu de la télédétection et des actions de terrain.

Les campagnes de mesure in situ ont été nombreuses ces dernières années. Elles ont impliqué des procédés de mesure variés pour une représentation de différentes échelles spatio-temporelles (des caractéristiques saisonnières mésoéchelle à des séries temporelles de haute fréquence). Les mesures physiques ont été acquises par

- courantomètre (puis ADCP) mouillé sur le site SOFI (Station d'Observation Fixe, 5°13E - 43°07N) qui est situé en bord est de plateau à une profondeur de 165m. Ce type de série longue temporelle, qui débute en septembre 1997, donne accès à la forte variabilité spatiale du courant Liguro-Provençal. La signature du courant peut être clairement identifiée par épisodes, et disparaître totalement entre ces épisodes.
- ADCP de coque du navire océanographique lors des campagnes synoptiques MOOGLI (Modélisation et Observation du Golfe du Lion) et SARHYGOL (Suivi Automatique Régulier de l'Hydrologie du Golfe du Lion) fournit le profil du courant le long d'un carroyage couvrant l'ensemble du plateau (représenté en Figure 4.2) durant 13 campagnes de 1998 à 2001. Ce type de campagne d'acquisition sur courte période est adapté à l'étude de caractéristiques saisonnières et synoptiques de la circulation dans le bassin (Petrenko 2003).
- ADCP de coque du navire lors des campagnes GOLTS (Gulf Of Lions Time Series) fournit un profil de courant dans une zone en amont du talus (représentée en Figure 4.2). Le trajet débute à Marseille et sillonne la zone clé d'incursion du courant Liguro-Provençal sur le plateau.

La stratification associée à ces mesures de courant est obtenue soit par une succession de stations où une CTD est utilisée pour l'acquisition de profils de température et de salinité. Un moyen moins précis consiste à lancer une sonde XBT sans l'arrêt du navire, ce procédé donne uniquement accès au profil de température.



**Fig.4.2** L'observation in situ du Golfe du Lion. Le carroyage des campagnes SARHYGOL représenté en ligne pointillée fournit une situation synoptique de la circulation sur le plateau. Les transects parcourus lors des campagnes GOLTS et représentés en ligne continue renseignent des conditions amont du courant Liguro-Provençal. Avec la série temporelle de courant au site SOFI (marqué d'un point), ils servent à quantifier le flux entrant dans le golfe.

Les techniques spatiales traditionnellement utilisées en zone côtière sont l'imagerie infrarouge, l'imagerie SAR et la mesure de la couleur de la mer. Elles proposent des cartes de haute résolution spatiale et temporelle donnant accès à la signature de la température de surface, lorsque la couverture nuageuse est faible (voir Figure 4.3). Une technique de mesure plus récente est l'altimétrie satellite, qui a été conçue à l'origine pour observer l'océan global (mission TOPEX/POSEIDON, mission ERS). L'échantillonnage spatio-temporel des altimètres est par conséquent très insuffisant pour la surveillance des zones côtières (deux traces sont parcourues tous les 10 jours dans la zone du Golfe du Lion). De plus, la précision de la mesure altimétrique (inférieure à 5cm) se dégrade près des côtes. Enfin, le montage de réseaux de radars HF ou VHF le long des côtes permet d'obtenir une carte de courants de surface par rétrodiffusion. La portée de tels instruments est inversement proportionnelle à la fréquence d'émission ainsi qu'à leur résolution. Les radars récents émettant dans la bande des hautes fréquences ont une portée de quelques dizaines de kilomètres (70 à 80 km) pour une résolution de l'ordre du kilomètre. Des campagnes de mesure radar ont été menées dans la zone du Golfe du Lion essentiellement pour l'étude de la zone de dilution du Rhône (Estournel et al. 2001).



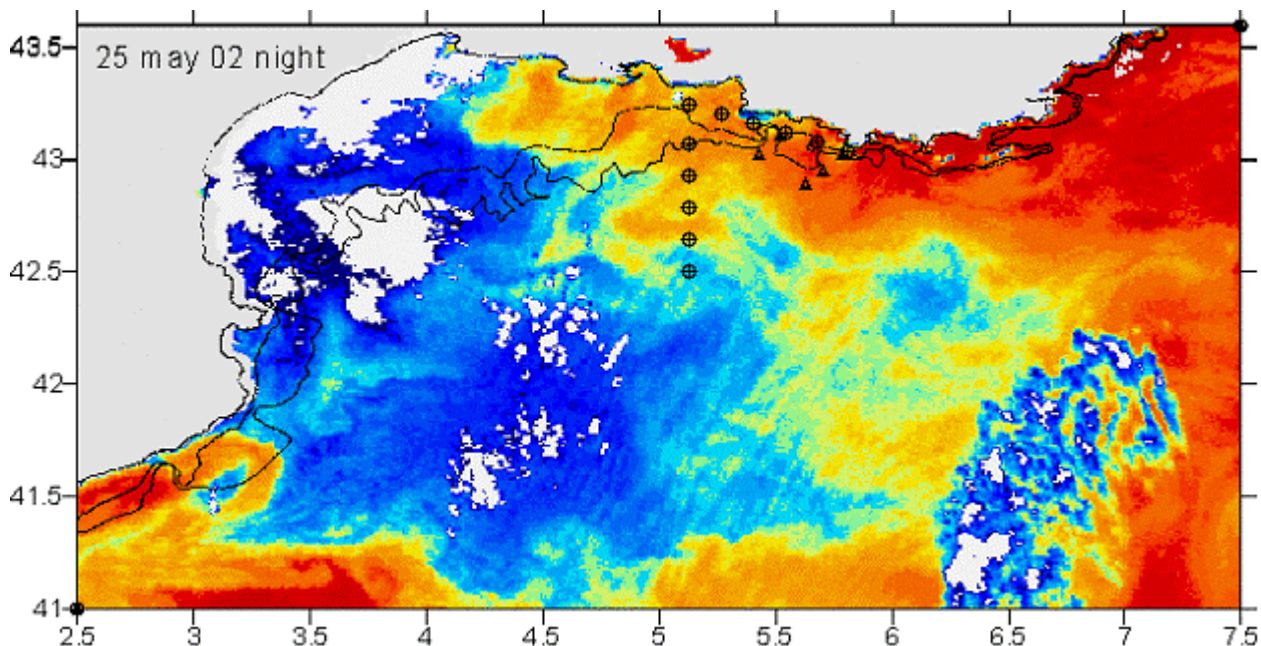
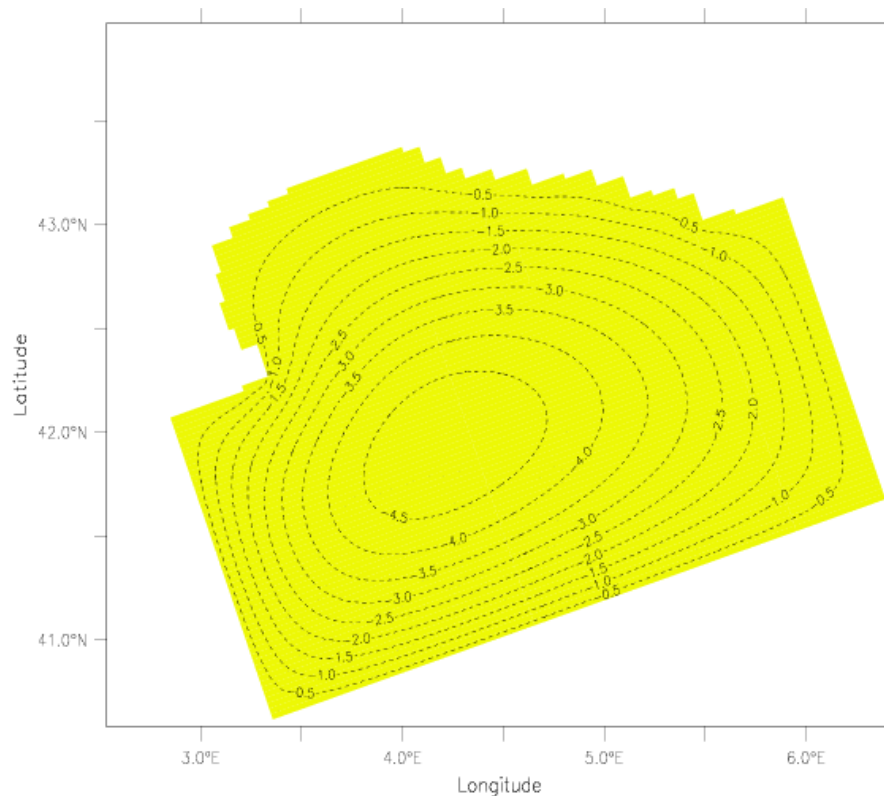


Fig.4.3 Image AVHRR de température de surface sur le bassin Liguro-Provençal. Le front chaud longeant la côte et correspondant au courant Liguro-Provençal se sépare en deux branches à l'incidence sur le plateau du Golfe du Lion : une première suit le talus, une seconde entre dans le golfe. (source : METEOFRACTANCE)

#### IV.3. SENSIBILITE DES RESEAUX D'OBSERVATION AUX VARIATIONS BAROTROPES DE LA CIRCULATION REGIONALE

Il s'agit de savoir quel type et quelle distribution spatio-temporelle de données sont susceptibles d'être utilisés par la méthode d'inversion. Pour cela, une étude de sensibilité aux variations barotropes de la circulation régionale est menée sur une configuration académique. Plusieurs éléments méthodologiques s'en dégagent afin d'obtenir un outil d'assimilation « robuste ».

On considère différentes distributions spatio-temporelles de données simulées acquises dans l'emprise du Golfe de Lion. Ces données sont assimilées dans une configuration non-stratifiée du bassin (correspondant à sa situation hivernale) afin d'estimer au mieux l'influence des perturbations du courant Liguro-Provençal sur la circulation du plateau. Herbaut et al. (1997) ont montré que les variations en intensité du rotationnel de vent à l'échelle du bassin Nord induisent des variations en intensité du courant Liguro-Provençal. Une cellule de circulation cyclonique d'échelle régionale fournit l'ébauche stationnaire des conditions frontières forçant la circulation sur le Golfe du Lion (Figure 4.4). L'intensité de cette cellule est par ailleurs perturbée par une réduction de la valeur du rotationnel de vent à l'extérieur du bassin côtier; les conditions frontières correspondantes fournissent l'état observé sur une période de 10 jours.



Barotropic Stream Function (Sv)

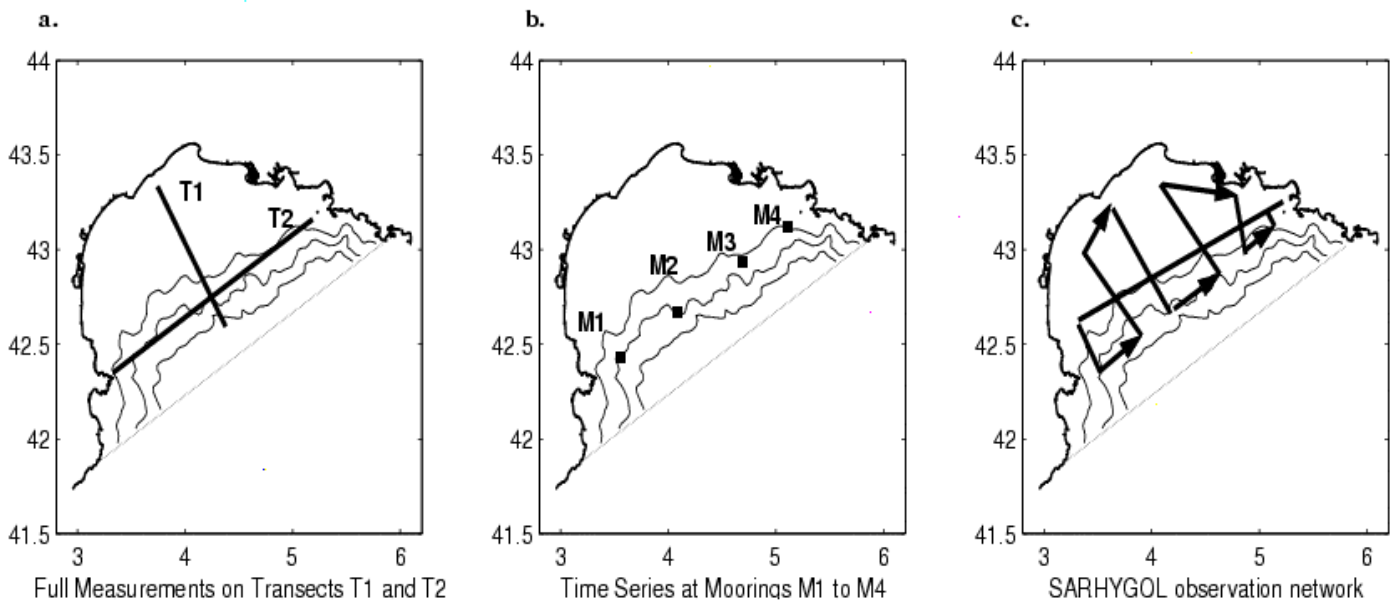
**Fig.4.4** Circulation barotrope stationnaire dans le bassin régional qui inclut le bassin côtier. Représentation des lignes de courant (en Sv).

C'est pourquoi les données à assimiler doivent être sensibles au signal barotrope de basse fréquence représentatif des modifications sur le transport de ce forçage extérieur. Par conséquent, les bases de données utilisées sont composées de la mesure du courant de surface susceptible d'être acquise avec des moyens d'observation in situ ou déportés. Les données acquises par mesure satellitaire donnent une hauteur relative de la surface de la mer par rapport à un géoïde théorique. Ces données ne sont pas utilisables directement dans un modèle possédant un 'toit rigide'. Les mesures acquises par courantomètre embarqué sur un navire océanographique ou bien fixé à un mouillage sont en revanche tout à fait représentatives du signal à observer. De même, le déploiement de radars HF le long des côtes s'avère un moyen efficace pour l'observation de courants de surface dans cette zone de faible extension. Ces trois types de mesure sont donc envisagés dans la constitution de trois bases de données synthétiques et assimilés avec l'outil variationnel développé en section III. Cette étude de sensibilité a fait l'objet d'une publication (Taillandier et al., 2004), dont voici les principaux résultats obtenus :

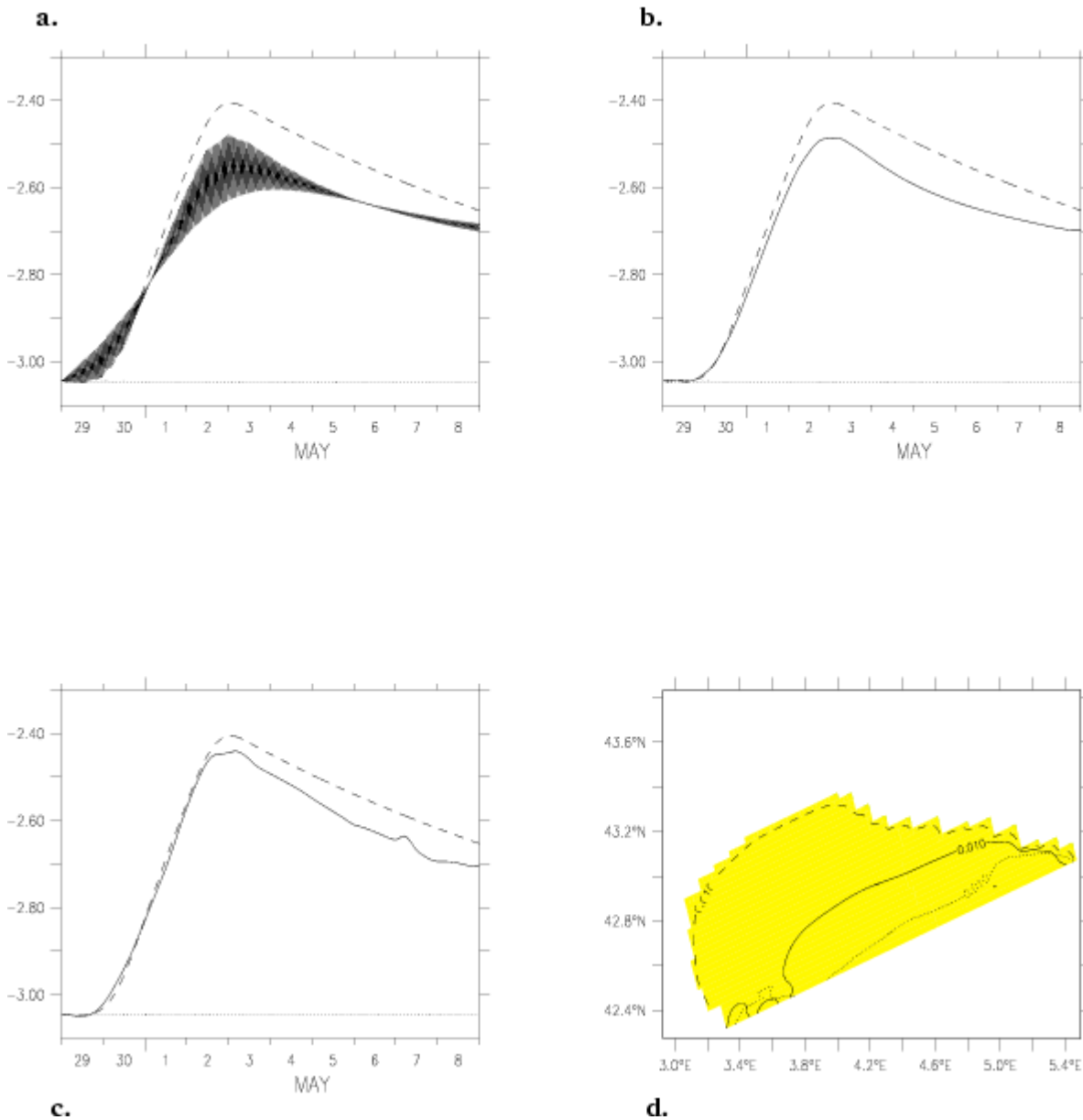
- Trois bases de données sont utilisées (voir Figure 4.5). La première obtenue à partir d'un réseau d'observation radar est exhaustive dans sa distribution spatio-temporelle, elle est utilisée pour la validation de l'algorithme dans une expérience d'identification. La seconde est obtenue à partir d'un réseau fixe composé de quatre courantomètres disposés



régulièrement sur le talus ; la fréquence de deux mesures par jour donne une représentativité synoptique à ce jeu de données. La troisième est obtenue sur le point de mesure parcourant le réseau SARHYGOL. L'assimilation de ces deux dernières bases de données largement sous échantillonnées aux vues du nombre de paramètres de contrôle est effectuée sur une période de 10 jours sous la seule contrainte de la dynamique du modèle (i.e. sans régularisation). Dans les deux cas, l'apport d'information issue de ces bases de données permet d'obtenir une estimation satisfaisante du forçage régional observé (voir Figure 4.6).



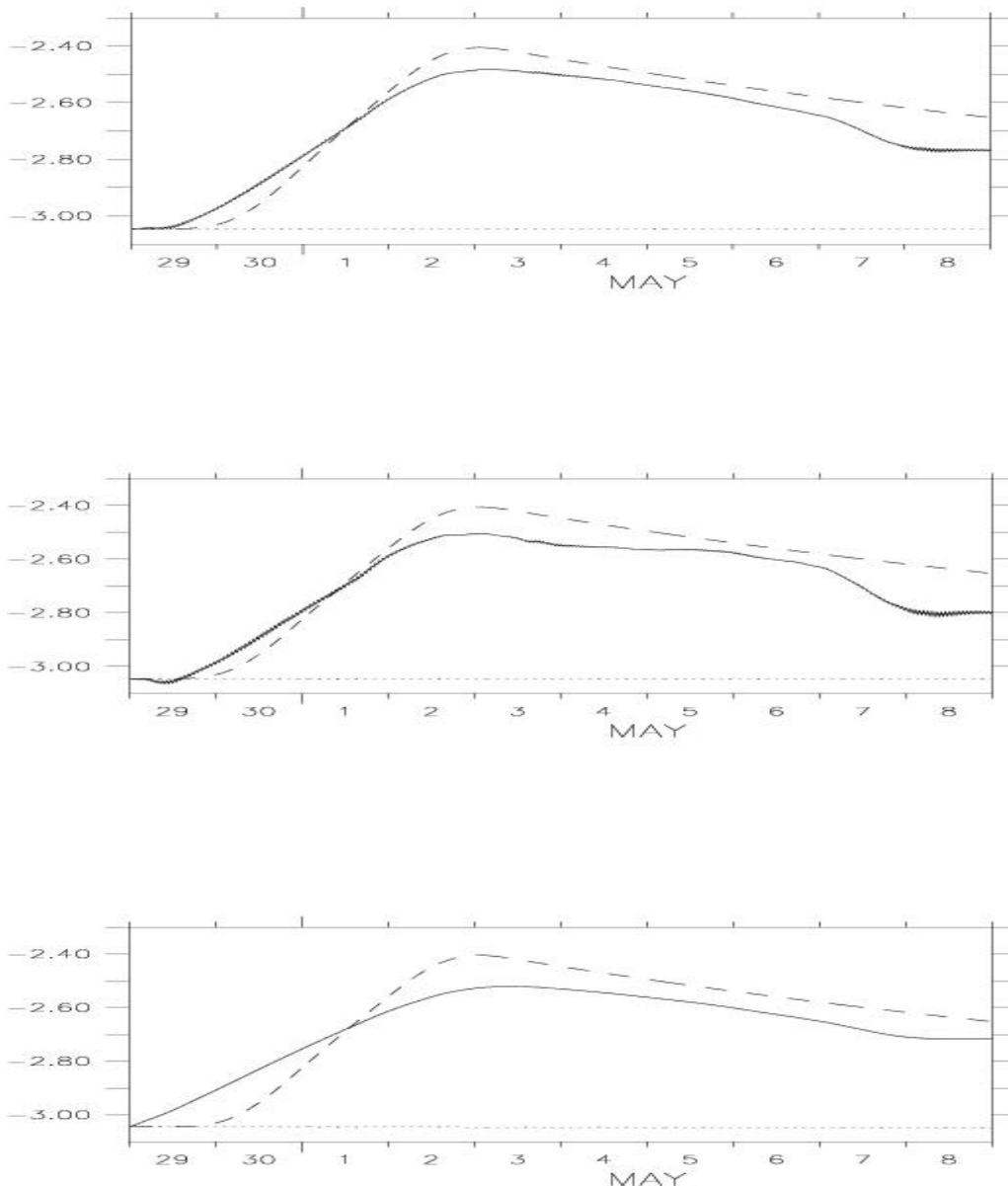
**Fig.4.5** Représentation de trois réseaux d'observations suivants lesquels les courants de surfaces sont extraits pour former les bases de données synthétiques TRANS, MOOR et SARHY.



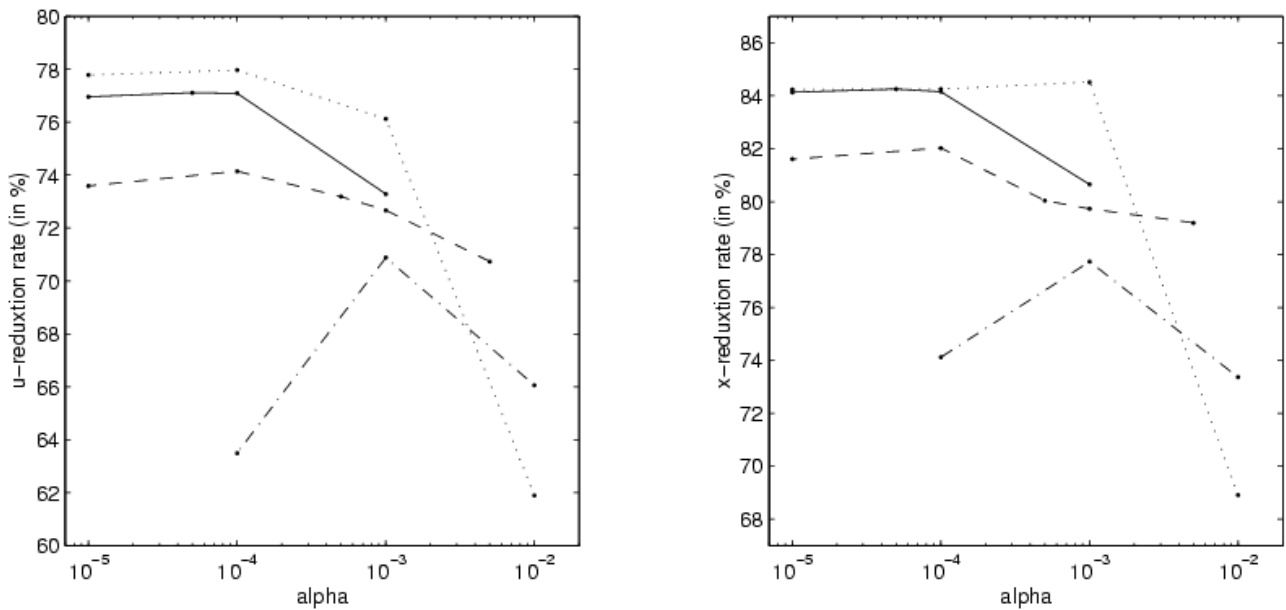
**Fig.4.6** a. non relatif au texte. b,c. Evolution du flux entrant dans le golfe (en Sv) durant la période d'assimilation. L'ébauche est donnée en ligne grisée, le flux observé en ligne pointillée, le flux estimé à partir du réseau d'observation MOOR (b) ou du réseau SARHY est en trait plein. d. Représentation spatiale de l'écart moyenné sur la période d'assimilation entre l'état observé et l'état estimé. La ligne 0.01Sv est en trait plein pour l'estimation obtenue avec le réseau MOOR, en trait pointillé celle obtenue avec le réseau SARHY et en tirés pour l'ébauche.

- L'algorithme d'assimilation est relativement robuste lorsque la base de données issue du réseau d'observation SARHYGOL est bruitée. Il s'agit en effet de jauger le rapport entre le niveau d'erreur sur la mesure et l'efficacité de la contrainte dynamique. L'estimation des contrôles frontières se dégrade lorsque ce niveau dépasse 10% de la valeur observée. Le recours à un terme de régularisation appliqué aux dérivées spatiales et temporelles du

premier ordre sur les contrôles frontières permet de retrouver un ajustement satisfaisant (Figure 4.7). Dans la construction de la fonction de coût, le coefficient de pondération  $\alpha$  entre l'erreur de prévision et le terme de régularisation est paramétré empiriquement par un diagnostic a posteriori sur l'estimation obtenue. Il s'agit en effet de trouver la valeur  $\alpha^{\text{opt}}$  qui maximise à la fois le taux d'ajustement de l'état optimisé sur l'état observé et le taux d'ajustement du contrôle optimal sur les conditions frontières à identifier (Figure 4.8).

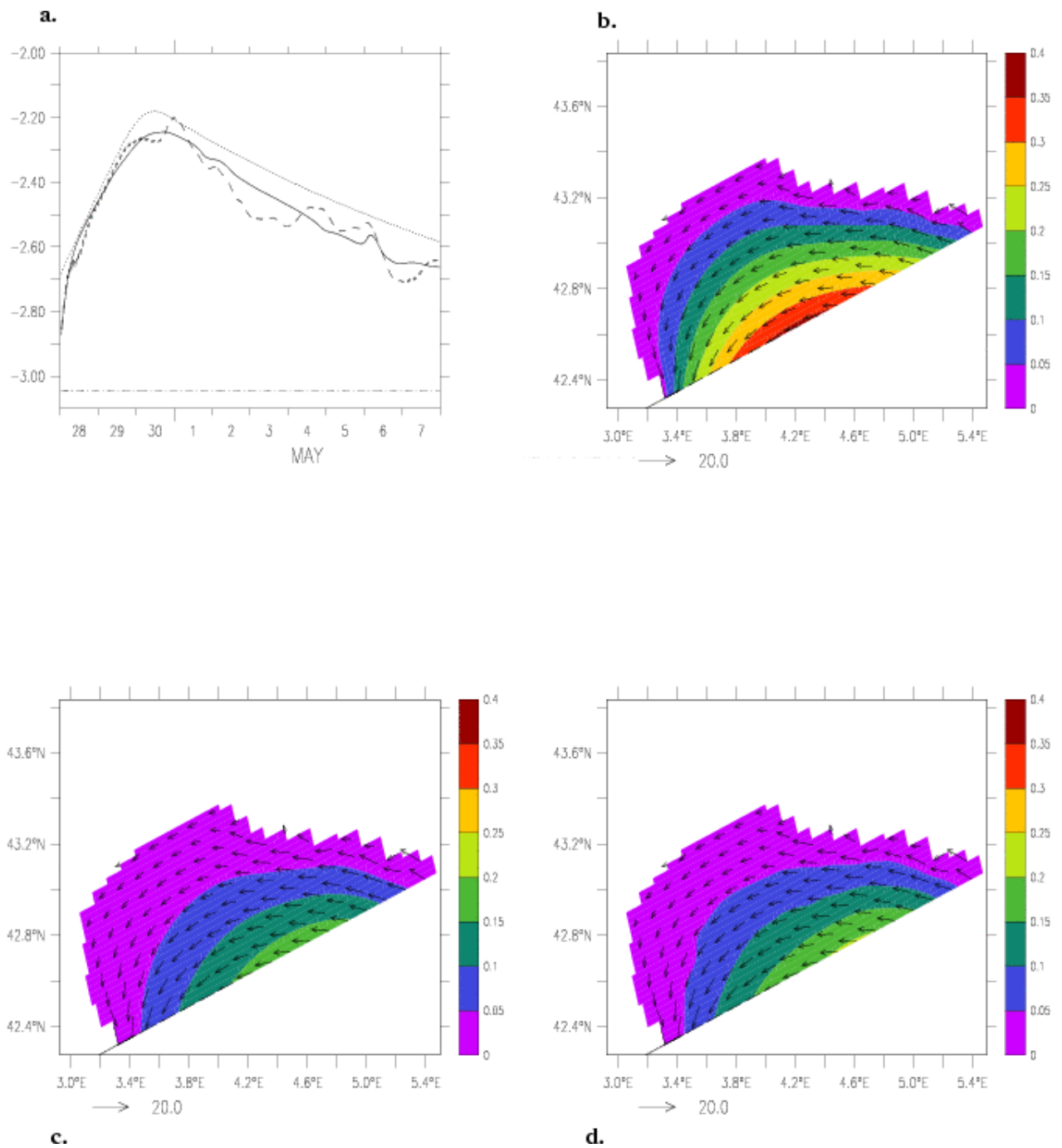


**Fig.4.7** Evolution du flux entrant dans le golfe avec l'ébauche (en trait pointillé), l'état observé (en trait tiré) et l'état estimé à partir du réseau d'observation SARHY. Les données assimilées sont bruitées par un bruit blanc de niveau croissant (de haut en bas, 5%, 10%, 20%). Un terme de régularisation mesurant la rugosité spatiale et temporelle des conditions frontières est ajouté à la fonction de coût.



**Fig.4.8** Evaluation a posteriori de la pondération  $\alpha$  du terme de régularisation dans la fonction de coût.  $\alpha^{\text{opt}}$  correspond au maximum d'ajustement à l'état observé et aux conditions frontières associées.

- Le cas du contrôle simultané de la condition initiale et de la condition frontière est abordé. Si ces deux types de conditions sont intrinsèquement raccordées par la contrainte dynamique du modèle, les résultats issus de l'assimilation de données non bruitées montrent un déséquilibre sur leur vitesse d'optimisation, le contrôle frontière étant plus rapidement optimisé. Cette balance se rétablit dans le cas de l'assimilation de données bruitées, ce qui rend l'erreur sur la mesure plus influente sur les conditions frontières (voir Figure 4.9).



**Fig.4.9** Cas de l'estimation combinée des conditions initiales et des conditions frontières à partir du réseau d'observation SARHY. (a) Evolution du flux entrant dans le golfe, pour l'ébauche (trait tireté), l'état observé (trait pointillé), l'état estimé avec des données non-bruitées (trait plein), l'état estimé avec ces mêmes données et un niveau de bruit de 10% (trait tiré). Champ de courant barotrope (en cm/s) et lignes de courant associées (en Sv) à l'instant initial correspondant à la différence de l'état observé avec l'ébauche (b), la différence de l'état estimé à partir de données non bruitées avec l'ébauche (c), la différence de l'état observé à partir de données bruitées avec l'ébauche (d).

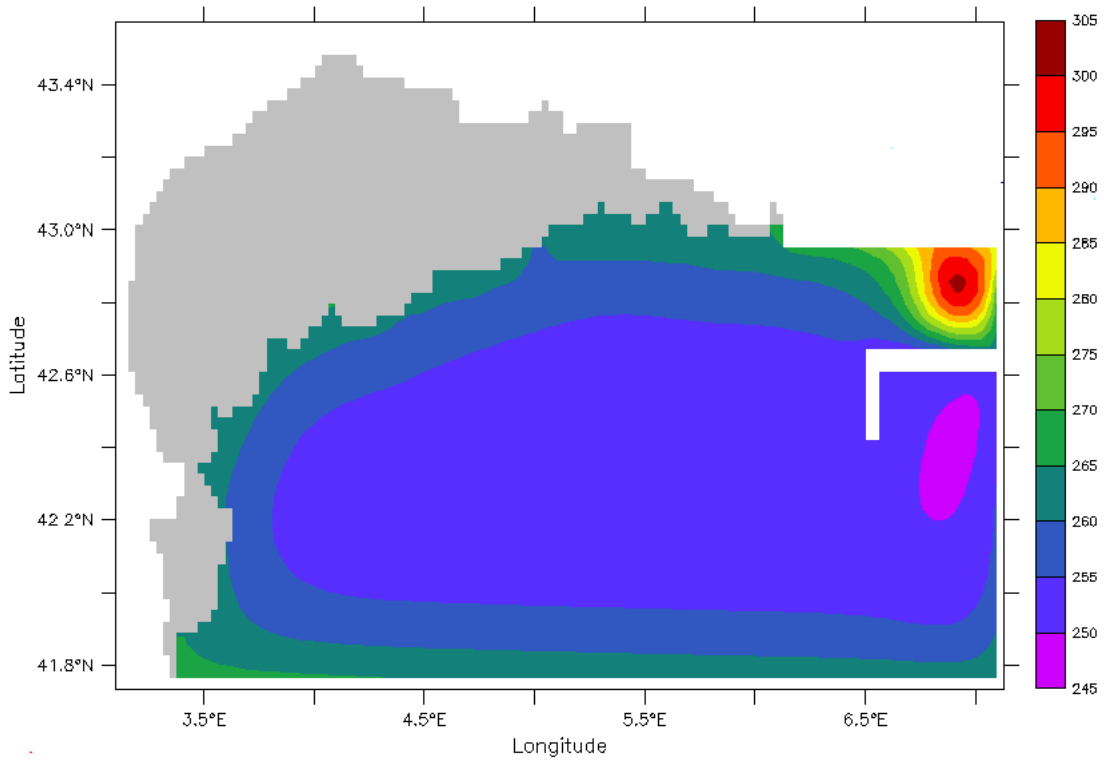
- L'utilisation de la méthode dans le cadre d'une situation réaliste du Golfe du Lion est encourageante au regard de la précision atteinte (inférieure à 10%) sur l'estimation du forçage régional dans l'ensemble des expériences jumelles. Un certain nombre d'avancées sont toutefois nécessaires ; certaines sont reprises en détails dans la section IV.4.

#### IV.4. CONTROLE DE L'INFLUENCE DE LA CIRCULATION REGIONALE A PARTIR D'UN RESEAU D'OBSERVATION FIXE : PROSPECTIVES

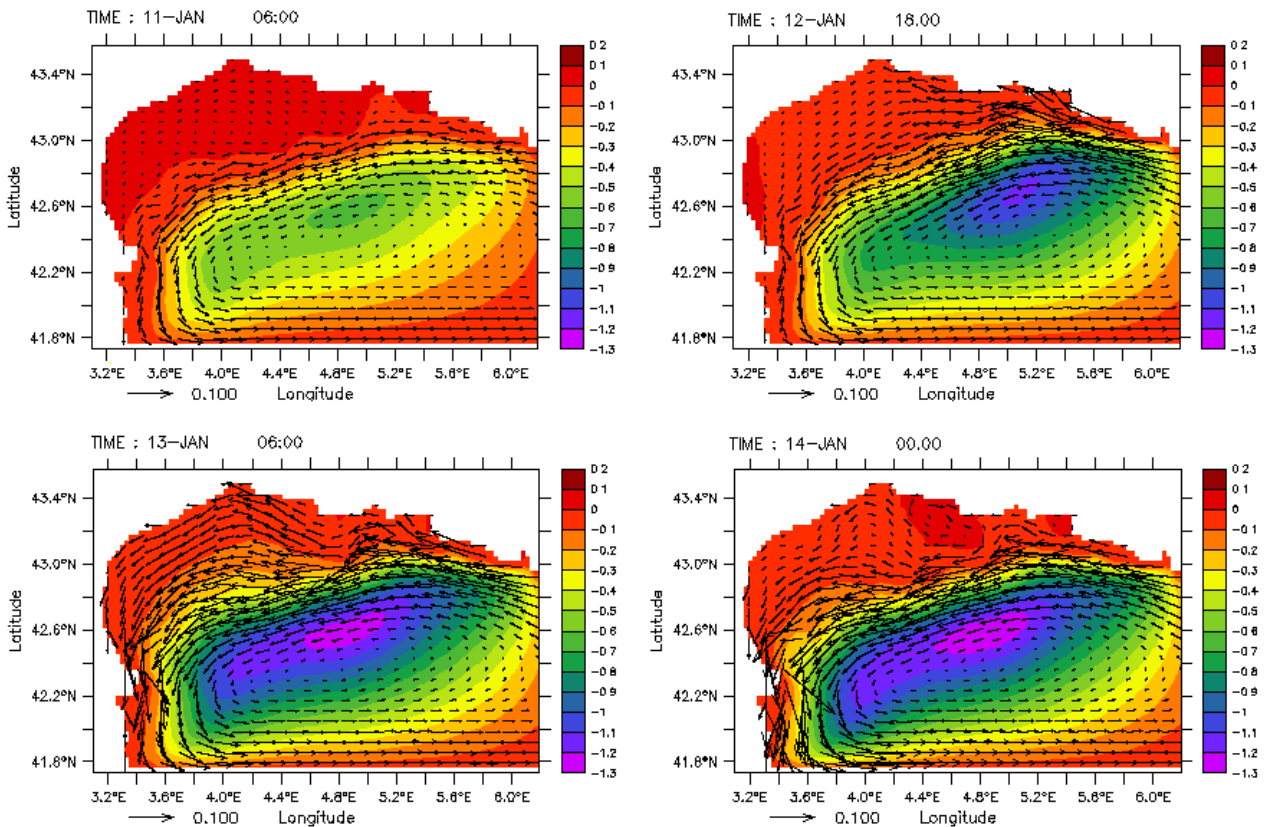
##### *Cadre d'étude*

On considère un Golfe du Lion non-stratifié dans sa situation hivernale, et une circulation régionale donnée par le courant Liguro-Provençal qui possède une véritable structure barocline. Si dans son état stationnaire le courant côtier est guidé en bord de plateau, ses variations en intensité sont envisagées comme l'un des facteurs déclencheurs des interactions avec la circulation au sein du golfe. Le réseau d'observation GOLTS (voir Figure 4.2) est déployé dans ce sens avec une couverture spatiale à l'entrée du golfe. Il s'agit par conséquent de prendre en compte l'ensemble de ces informations pour évaluer la méthode d'assimilation dans sa fonction de contrôle de l'influence régionale. La mise en place de l'étude est discutée sur les points suivants.

Le choix d'un processus. Si l'objectif réside en l'évaluation de la méthode, il n'est pas question d'identifier un ou des mécanismes susceptibles de décrire l'influence de la circulation régionale sur le plateau. L'étude académique d'un front de Kelvin incident à un talus menée par Echevin et al. (2003) est ainsi choisie et transposée à notre cas pour plusieurs raisons. Ce processus de séparation d'un front de Kelvin incident à un talus peu profond met en jeu une dynamique relativement simple pour décrire un épisode d'interaction qui influence la totalité du golfe. Lorsque l'on considère un courant côtier généré après le passage d'un tel front, on obtient la situation stationnaire d'une circulation régionale en équilibre géostrophique, guidée par la côte puis le talus (Figure 4.10). Lorsque cette circulation est perturbée en amont du golfe, l'ajustement est réalisé par la propagation d'un front de Kelvin vers l'entrée du golfe qui donne un épisode d'intrusion (Figure 4.11). Ce processus est particulièrement adapté pour décrire une influence régionale, il est de plus superposable à d'autres structures de circulation sur le plateau tels qu'un panache ou des cellules dues au forçage local du vent.



**Fig.4.10** Configuration du modèle, composé du plateau du Golfe et du bassin Liguro-Provençal de profondeur 1500m. La circulation mésoéchelle est donnée par un courant stationnaire naissant au Nord Est qui vient s'éteindre au Sud Est, et représentée par la profondeur de l'interface (en m) entre une couche supérieure de densité  $\rho_s=1029.5\text{kg/m}^3$  et une couche inférieure de densité  $\rho_b=1028.1\text{kg/m}^3$ . Le bassin Ouest est alors ouvert le long de la longitude 6.2°E.



**Fig.4.11** Quatre structures de circulation issues du modèle ouvert forcé le long de sa frontière Est. Représentation des lignes de courant (en Sv) et du champ de vitesse en surface (en m/s).

La représentativité du modèle pour la dynamique du bassin. Plusieurs éléments de la dynamique du Golfe du Lion ne sont pas représentés dans le modèle (voir section I.2). D'une part, la modélisation réaliste du panache du Rhône peut être effectuée sur une grille fine avec des schémas d'advection et de diffusion appropriés. Ce type de dynamique n'est pas accessible dans la version utilisée du modèle, ni dans son adjoint. Le schéma de diffusion horizontal (*resp.* vertical) est harmonique avec un coefficient de viscosité turbulente constant et égal à  $\nu_L=250\text{m}^2/\text{s}$  (*resp.*  $\nu_V=10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$ ). D'autre part, un forçage atmosphérique réaliste issu d'une climatologie peut être utilisé ; toutefois son influence sur une situation observée demande la prise en compte de nouveaux paramètres de contrôle. Aucun forçage en surface n'est donc envisagé, de même que des termes de dissipation par frottements latéraux ou au fond. Une dynamique de haute résolution horizontale n'est donc pas nécessaire aux vues de la représentativité du modèle, c'est pourquoi la grille du modèle s'étend sur une grande partie du bassin Liguro-Provençal avec une résolution horizontale de  $1/32^\circ$ . En revanche, il apparaît de l'étude sur le développement d'un jet (menée en section III.2.2) qu'une bonne résolution verticale s'impose pour modéliser un profil stratifié. Elle est de plus nécessaire pour prendre en compte les failles topographiques du talus. 24 niveaux actifs sont donc pris en compte pour décrire les mouvements dans les 1500 premiers mètres (dont 20 niveaux dans les 500 premiers mètres).



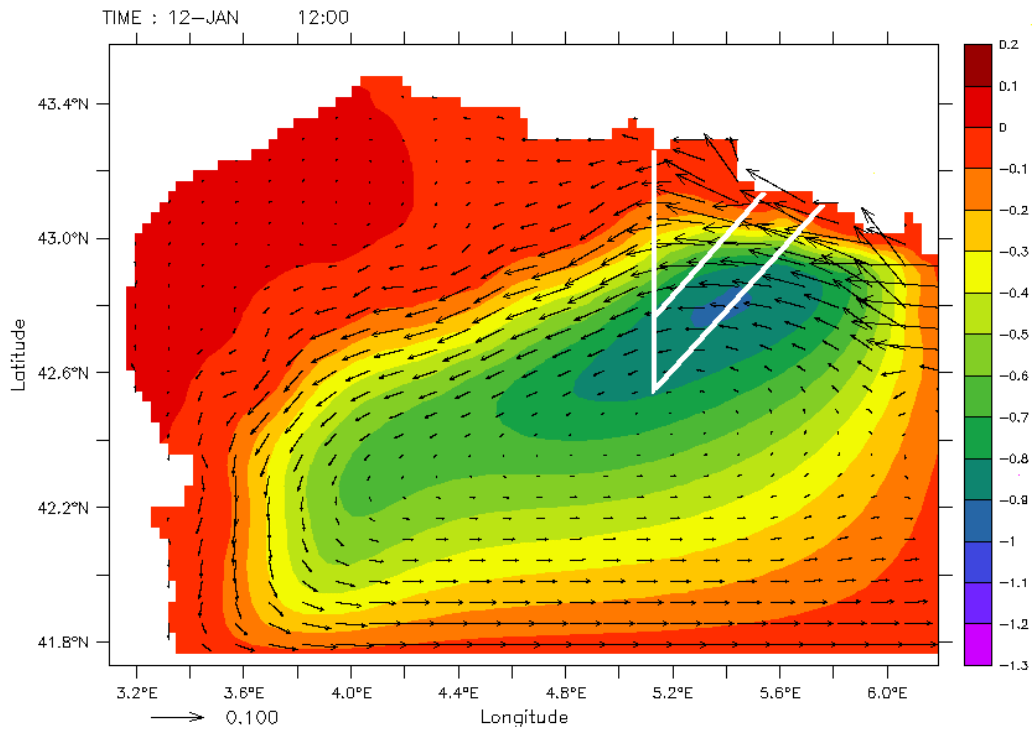
Des échelles d'espace et de temps compatibles avec les observations. Le réseau de mesure GOLTS est composé d'une série temporelle de profils de courant en milieu de talus et des profils hydrologiques et courantométriques perpendiculaires aux isobathes relevés lors de campagnes en mer de quatre jours (voir Figure 4.2). Il est donc possible d'extraire une composante géostrophique du courant Liguro-Provençal dans la zone d'entrée du golfe du Lion durant sur une période hivernale de quatre jours. Le mécanisme d'intrusion choisi a quant à lui une échelle de temps de quelques jours, la durée d'un épisode variant suivant l'intensité de la perturbation. C'est donc sur une fenêtre d'assimilation de cette taille que seront assimilés les données synthétisées à partir d'une expérience « observée » le long des transects GOLTS. Une observation de la dynamique de basse fréquence et d'échelle spatiale 50km peut être extraite de cette base de données. De même, une perturbation barocline modélisée par un front de Kelvin reste confinée le long de la côte, puis l'ajustement barotrope le long du talus affecte la totalité du plateau (voir Figure 4.11).

### *Evaluations envisagées*

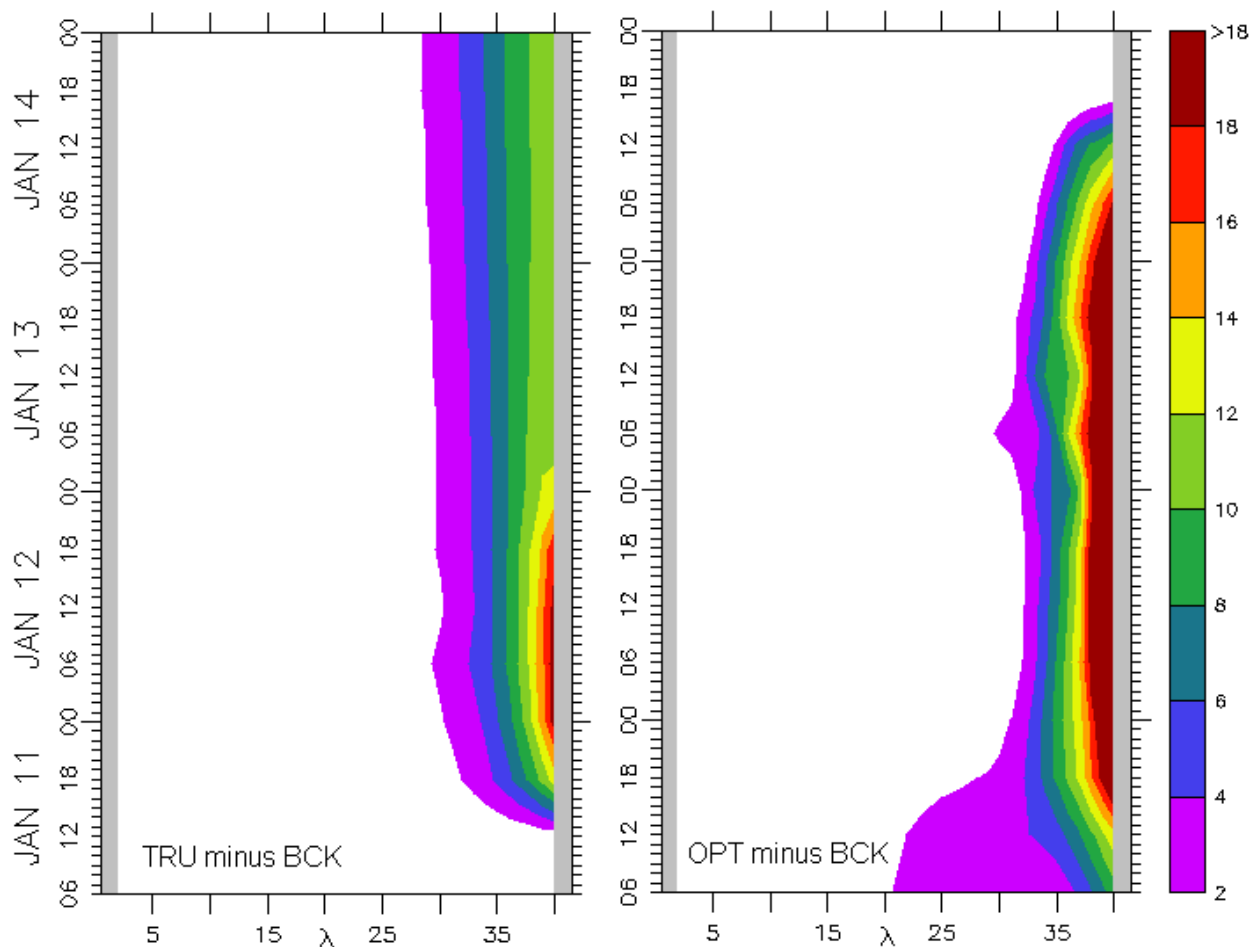
La méthode d'assimilation est évaluée dans le cadre d'expériences jumelles sur le cas d'étude décrit précédemment. Trois axes d'investigation sont tracés à partir de la synthèse des différents cas traités dans ce travail. Leur état d'avancement est décrit ci-après sur la base des résultats acquis à ce jour ; ils sont toutefois insuffisants pour en tirer des conclusions sur le comportement de la méthode.

Le choix des paramètres de contrôle. Il s'agit de définir un ensemble minimal en dimension de contrôles admissibles qui soit à la fois sensible aux observations et harmonieux pour contraindre la dynamique du modèle. Il est tout d'abord important de noter que la méthode s'avère incapable d'attribuer l'influence des données à une variable « intégrée » telle qu'un profil de courant initial ou à la frontière. Une décomposition des contrôles en classes d'influence est alors nécessaire : la dynamique barotrope par le transport initial et sa composante normale à la frontière, la dynamique barocline par le profil de densité et un profil de courant agéostrophique. De plus, leur lien implicite dans les équations apparaît sous forme de contrainte exacte et explicite dans la méthode d'assimilation : le transport initial vérifie la propriété de non divergence, le courant géostrophique est diagnostiqué à partir du champ de densité, le champ de courant barocline possède une moyenne verticale nulle. De cette décomposition, il se pose alors le problème du choix. Les paramètres de contrôle sont déterminés à la fois à partir d'une hiérarchie sur les contrôles donnée *a priori*, et de la contrainte de détermination sur la dynamique du modèle. Pour le cas d'un bassin non-stratifié par exemple, la composante tangentielle du transport frontière est peu sensible aux observations ; elle contraint de manière locale la dynamique du modèle ; pourtant il est nécessaire de la conserver pour permettre de produire une analyse fiable de la composante normale du transport. Dans le présent cas d'étude, seul le profil de densité à la limite Est du modèle est contrôlé. D'une part, la dynamique forcée par un front de Kelvin barocline peut être représentée par ce profil et une distribution géostrophique de courant associée. D'autre part, le nombre de paramètres de contrôle devient rapidement important lorsque l'on a plusieurs niveaux de discrétisation verticale et de longues durées d'intégration ; on se limite en première approche aux paramètres les plus sensibles. La Figure 4.13 montre l'analyse de

la série temporelle du forçage à la frontière. Il apparaît une variation intense et confinée le long du bord, par rapport au forçage observé. La Figure 4.12 montre un second point de divergence : la cellule de circulation cyclonique ne sort pas totalement au bassin Sud-Est du bassin, et une branche de recirculation vient renforcer le courant incident pour obtenir une intensification. Enfin, l'état initial n'étant pas contrôlé, par conséquent le profil de densité analysé fournit des variations d'intensité avant le début des variations observées.



**Fig.4.12** Circulation analysée à partir de l'assimilation des profils de courant et de densité le long des transects GOLTS (en blanc) avec l'ajustement à une circulation plus intense. Représentation des lignes de courant (en Sv) et des courants de surface (en m/s).



**Fig.4.13** Evolution de la perturbation sur l'élévation de la pycnocline le long de la frontière ouverte (en m). Représentation du forçage ayant généré les observations (à gauche) et de la solution optimisée (à droite).

La paramétrisation du problème inverse. En l'absence d'ébauche sur les variations du forçage régional, le problème inverse ainsi posé est sous-déterminé. Il s'agit alors de fournir un certain nombre d'informations *a priori* pour contraindre efficacement l'ensemble des paramètres de contrôle. En premier lieu, la fonction de coût est augmentée d'un terme de régularisation sur les variations horizontales du profil de densité, de manière similaire à l'expérience de développement d'un jet côtier (section III.2.2) ; le courant géostrophique issu de ce profil est donc limité en intensité. L'expérience montre qu'un second type de solution se développe, faisant apparaître des variations de densité dans la couche de fond, solution qui n'a aucune réalité physique. C'est pourquoi un second type d'information est injecté dans le problème inverse à travers la mise en place de fonctions de pondération sur les différents paramètres de contrôle. Les valeurs de densité en dehors de la proximité de l'interface entre les deux couches sont affectées d'erreurs importantes afin d'accentuer le poids des valeurs aux profondeurs correspondant à la pycnocline. Le problème est ainsi convenablement paramétré pour fournir une analyse représentée en Figure 4.13. En second lieu, il s'agit d'optimiser l'ordre de grandeur du coefficient  $\varepsilon$  (actuellement fixé à 1) qui traduit le poids du

terme de régularisation dans la fonction de coût. Ce réglage peut être effectué de la même manière que dans le cas d'un Golfe du Lion non-stratifié. De plus, une fonction de pondération sur la série temporelle des contrôles est aussi envisagée pour éviter le développement de variations en début de la fenêtre d'assimilation. Ce dernier point est développé ci-après sous l'angle de l'observation.

La contribution des données assimilées. D'une part, la dynamique envisagée suit un problème d'évolution. Par conséquent, les conditions aux limites sont sensibles aux données lorsque celles-ci appartiennent au cône d'influence des données. Ce point est traité en section III.2.2 avec le développement d'un jet côtier. Il en résulte deux zones où le réseau d'observation ne peut contraindre les contrôles frontières (voir Figure 3.10) : une première en début de fenêtre d'assimilation et une seconde en fin de fenêtre d'assimilation. Ce cône d'influence des données réduit la fenêtre temporelle des profils de densité dans le cas présent ; cela se traduit sur leur analyse par une estimation différente du profil observé dans les 12 premières heures et l'absence d'estimation dans les 12 dernières heures (voir Figure 4.13). D'autre part, il s'agit de confronter la méthode d'assimilation à un ensemble de données pouvant être issu des mesures relevées durant une campagne en mer. Les échelles de temps et d'espace du signal observé doivent être conservées pour évaluer le fonctionnement de la méthode dans une situation réaliste. De la même manière que dans le cas du Golfe du Lion non-stratifié, ces échelles peuvent être insérées à travers la définition de la matrice de covariance d'erreur aux observations.



## CONCLUSION

Une méthode variationnelle d'assimilation de données a été mise en place et validée pour le contrôle des conditions aux limites ouvertes du modèle de circulation aux équations primitives OPA. Un certain nombre d'aspects sous-jacents à ce développement ont été abordés à travers quatre chapitres indépendants. Une synthèse des points évoqués, des résultats obtenus et des perspectives suggérées est conduite ci-après.

Dans le premier chapitre dédié à l'étude du modèle direct, il a été montré que la description de la circulation côtière associée au forçage du vent est limitée aux processus de basse fréquence, caractérisés par des échelles spatiales comparables au rayon de déformation associé. La réponse barotrope est résolue à travers une équation elliptique et non par une équation d'évolution ; c'est par conséquent la valeur du terme forçant (lié au cisaillement du champ de vent et à la paramétrisation de la diffusion horizontale) et la valeur des conditions aux limites spatiales qui contrôlent la circulation modélisée.

Par conséquent, le traitement des limites ouvertes du modèle s'avère crucial puisqu'il fournit aussi le forçage régional. Une méthode de régularisation a été choisie pour palier au fait que le problème mathématique de spécification des conditions frontières est mal posé. Il s'agit de déterminer de manière optimale une condition de Dirichlet sur les opérateurs elliptique (mode barotrope) et hyperbolique (mode barocline). Une formulation du type condition de Neuman n'a pas été envisagée.

Le second chapitre est dédié à la description des techniques d'inversion de données géophysiques à la base des méthodes d'assimilation. A partir d'une problématique identique, l'estimation des paramètres du modèle à l'aide de toute information pertinente et d'hypothèses formulées a priori, deux approches distinctes (détermiste et statistique) ont été développées. Les caractéristiques des deux approches sont similaires en tous points, des causes d'indétermination du problème inverse à la forme analytique de l'estimation.

Dans un second point, le champ d'application des méthodes d'assimilation est passé en revue. Ces applications peuvent être opérationnelles avec l'utilisation d'outils d'analyse qui se complexifient ; cognitives quand elles fournissent un point de fonctionnement optimal à un modèle de représentation du processus dynamique observé ; ou encore le banc d'essai à la définition de stratégies d'observation.

Un dernier point est consacré à la méthode d'assimilation variationnelle utilisée (le 4DVAR). Cette méthode effectue un ajustement global de la trajectoire d'un modèle hydrodynamique aux données distribuées dans le temps. Elle fait appel à un algorithme de gradient pour minimiser l'erreur de prévision, le gradient est par ailleurs fourni par le modèle adjoint construit à partir du linéarisé tangent du modèle hydrodynamique par rapport aux paramètres de contrôle. D'autre part, l'estimation produite satisfait exactement les équations du modèle ce qui écarte toute prise en compte de l'erreur modèle.

Dans le troisième chapitre, le contrôle des conditions aux limites ouvertes est mis en place à partir de la plateforme d'assimilation existante pour l'estimation de l'état initial du modèle OPA. Plusieurs aspects de la formulation variationnelle pour le contrôle des conditions frontières apparaissent dans un développement analytique. Tout d'abord, les équations tangentes et adjointes associées au problème d'évolution ne sont pas modifiées par l'ajout des contrôles frontières. De plus, les conditions initiales et les conditions frontières sont raccordées de manière continue, ce qui fournit une cohérence intrinsèque au contrôle simultané de ces deux types de conditions. Enfin, l'expression du gradient de la fonction de coût exprimée dans le cas d'une observation totale s'exprime de manière univoque en fonction des états adjoints pris à l'instant initial d'une part, et le long de la frontière d'autre part. Le développement dans le contexte d'un problème inverse discret nécessite la définition d'opérateurs linéaires appliquant des contraintes aux solutions. Leur implémentation dans le code adjoint est effectuée dans la stricte application des règles de prise d'adjoint.

La validation de l'algorithme de contrôle des conditions frontières est effectuée travers trois expériences jumelles d'identification. (i) Le forçage barotrope le long de la frontière ouverte d'un bassin bidimensionnel est identifié à partir de l'ébauche d'un bassin au repos. La seule contrainte fournie par l'observation permet d'obtenir une solution unique à ce problème bien déterminé. (ii) Le forçage barocline en amont d'un courant de densité en développement dans un canal semi-infini est estimé à partir de profils hydrologiques relevés en aval. L'estimation de ces conditions frontières est largement dépendante de l'influence combinée du processus dynamique et de la distribution spatio-temporelle des données. Différents cônes d'influences sont mis en exergue afin de localiser la contrainte effective de la donnée dans l'espace des contrôles. (iii) Enfin, l'algorithme est validé sur l'expérience décrite analytiquement d'un front de Kelvin en incidence sur une marche topographique. L'intensification d'une circulation régionale est ainsi détectée à partir de l'observation du processus dynamique de séparation d'un courant côtier sur un talus.

Dans un quatrième chapitre, une évaluation la méthode pour des applications en milieu côtier est conduite sur la zone du Golfe du Lion. La dynamique du modèle restreint ce champ d'application aux forçages de « basse fréquence » de la circulation côtière (i.e. la journée) et à la représentation de ses structures de « grande échelle » (i.e. celle du rayon de déformation associé). La dynamique propre à la zone du panache, les effets locaux du forçage du vent et de la bathymétrie sont ainsi écartés. Mais la méthode semble particulièrement appropriée pour le traitement de problématiques côtières telles que les échanges côte – large. C'est pourquoi elle est utilisée pour le contrôle de l'influence de la circulation régionale sur le plateau du Golfe du Lion.

Tout d'abord, sont considérés les aspects portant sur l'observabilité d'un processus donné (une perturbation barotrope de la circulation de grande échelle) à partir de différents réseaux d'observation déployés dans cette région côtière. La contribution de chacun des réseaux est retranscrite directement dans l'estimation du forçage régional, ce qui permet une étude de sensibilité sur les distributions spatio-temporelles des données pour identifier les échelles du

mouvement liés à la perturbation barotrope. Il a été montré qu'une couverture minimale de l'ensemble du Golfe du Lion au cours d'une fenêtre d'assimilation de 10 jours permet de contraindre efficacement le modèle. En outre les résultats obtenus semblent encourageants pour une application avec des données réelles, puisque la contrainte de la dynamique du modèle est forte dans l'analyse effectuée avec cette méthode variationnelle.

Par conséquent, le point de vue de la contrôlabilité d'un processus forcé par ses conditions amont à partir d'une distribution fixe de données est initié. Il a été choisi d'estimer l'intensification d'une circulation régionale purement barocline (donnée par la propagation d'un front de Kelvin) à partir d'un réseau d'observation existant à l'entrée du Golfe du Lion (« la radiale entrante marseillaise »). La paramétrisation de l'algorithme d'assimilation est alors évaluée. L'identification des sources d'erreur principales passe par le choix des paramètres de contrôle les plus influencés parmi l'ensemble des conditions frontières possibles. Il s'agit ensuite de poser efficacement le problème d'inversion avec l'insertion d'un contenu d'information a priori via un terme de régularisation. Enfin, le procédé de sélection qui « adapte » les signaux observés aux sources d'erreur envisagées passe par le choix de pondérations des différentes informations et par la mise en place de fonctions d'influence liées à l'effet combiné du processus et de l'observation. Un modus operandi est ainsi fourni pour une application réaliste dans le Golfe du Lion.

Etant donnée la complexité du système dynamique côtier, il apparaît qu'une approche de modélisation seule ou une approche d'observation seule ne sont plus suffisantes pour améliorer notre perception de ce milieu marin. Une approche harmonieuse de ces deux points de vue doit être envisagée, ce qui passe par la mise en oeuvre de méthodes d'assimilation. Celle mise en place dans ce travail donne une part très grande à la contrainte de la dynamique du modèle ce qui semble lui doter d'un caractère robuste face à l'inhomogénéité des observations côtières (de part leur nature et leur distribution). Il est à noter qu'une application réaliste de cet outil doit prendre en compte la gamme restreinte des processus représentés (toutefois cohérente avec les échelles spatio-temporelles du forçage régional contrôlé) dans le choix des observations à assimiler.





## RÉFÉRENCES

- Amodei L., 1995. Solution approchée pour un problème d'assimilation de données météorologiques avec prise en compte de l'erreur du modèle. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, tome 321, série II.a, 1087-1094.
- Auclair F., Marsaleix P. et De Mey P., 2003. Space-time structure and dynamics of the forecast error in a coastal circulation model of the Gulf of Lions. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 36, 309-346.
- Beckers J.-M., Brasseur P. et Nihoul J.C.J., 1997. Circulation of the western Mediterranean: from the global to the regional scale. *Deep Sea Research*, 44, 531-549.
- Benjamin T.B., 1968. Gravity currents and related phenomena. *Journal of Fluid Mechanics*, 88, 223-240.
- Bennett A.F., 1992. *Inverse methods in physical oceanography*. Cambridge University Press, 346pp.
- Bennett A.F. et Chua B.S., 1994. Open-ocean modelling as an inverse problem: the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 122, 1326-1336.
- Béthoux J.-P., Prieur L. et Bong J.H., 1988. Le courant Ligure au large de Nice. *Oceanologica Acta*, 9, 59-67.
- Blayo E. et Debreu L., 1999. Adaptive mesh refinement for finite difference ocean models: first experiments. *Journal of Physical Oceanography*, 1239-1250.
- Bogden P.S., Malanotte-Rizzoli P. et Signall R., 1996. Open-ocean conditions from interior data : local and remote forcing of Massachusetts bay. *Journal of Geophysical Research*, 101, 6487-6500.
- Brasseur P., Ballabrera-Poy J. et Verron J., 1999. Assimilation of altimetric data in the mid-latitude oceans using the SEEK filter with an eddy-resolving, primitive equation model. *Journal of Marine Systems*, 22, 269-294.
- Chapman D.C., 1985. Numerical treatment of cross-shelf open boundaries in a barotropic coastal ocean model. *Journal of Physical Oceanography*, 15, 1060-1075.
- Courtier P., Thépaut J.-N. et Hollingsworth A., 1994. A strategy for operational implementation of 4DVAR, using an incremental approach. *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 120, 1367-1388.
- Courtier P., 1997. Dual formulation of four-dimensional variational assimilation. *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 123, 2449-2461.
- Crépon M., 1971. *Hydrodynamique marine en régime impulsif*. Thèse d'Etat de la faculté des sciences de Paris.
- Crépon M., Wald, L. et Longuet J.-M., 1982. Low frequency waves in the Ligurian sea during December 1977. *Journal of Geophysical Research*, 87, 595-600.

- Csanady G.T., 1982. Circulation in the coastal ocean. Reidel Publishing Company, 279pp.
- De Mey P., 1997. Data assimilation at the oceanic mesoscale: a review. *Journal of Meteorological Society of Japan*, 75, 415-427.
- Derber J. et Rosati A., 1989. A global oceanic data assimilation system. *Journal of Physical Oceanography*, 19, 1333-1347.
- Derber J. et Bouttier F., 1999. A reformulation of the background error covariance in the ECMWF global data assimilation system. *Tellus*, 51A, 195-221.
- Devenon J.-L., 1990. Optimal control theory applied to an objective analysis of tidal current mapping by HF radar. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 7, 269-284.
- Echevin V. 1998. Variabilité du niveau de la mer mesuré par altimétrie dans le Golfe du Lion. Etude de l'influence de diverses observations sur la prévision de la circulation côtière. Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse.
- Echevin V., De Mey P. et Evensen G., 2000. Horizontal and vertical structure of the representer sections for sea level measurements in a coastal model. *Journal of Physical Oceanography*, Vol. 30, 2,627-2,635.
- Echevin V., Crépon M. et Mortier L., 2001. Analysis of the mesoscale circulation in the North Western Mediterranean Sea simulated in the framework of the Mediterranean Forecast System Pilot Project. *Annalae Geophysicae*, 21, 281-287.
- Echevin V., Crépon M. et Mortier L., 2003. Interaction of a coastal current with a shelf topography, application to the Gulf of Lions shelf. *Journal of Physical Oceanography*, 33, 188-206.
- Engquist B. et Majda A., 1977. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*. 31, 629-651.
- Estournel C., Broche P., Marsaleix P., Devenon J.-L., Auclair F. et Vehil R., 2001. The Rhône river plume in unsteady conditions: numerical and experimental results. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 53, 25-38.
- Estournel C., Durrieu de Madron, X., Marsaleix, P., Auclair, F., Julliand, C. et Vehil, R., 2003. Observations and modelisation of the winter coastal oceanic circulation in the Gulf of Lions under wind conditions influenced by the continental orography (FETCH experiment). *Journal of Geophysical Research*, 108, 8059-8078.
- Evensen G. et van Leeuwen P.J., 1996. Assimilation of GEOSAT altimeter data for the Agulhas current using the ensemble Kalman filter with a quasi-geostrophic model. *Monthly Weather Review*, 124, 85-96.
- Flather R.A, 1976. A tidal model of the north-west European continental shelf. *Mémoire de la Société Royale des Sciences, Liège, série 6*, 10, 141-164.

- Florenchie P. et Verron J., 1998. South Atlantic ocean circulation: simulation experiments with a quasi-geostrophic model and assimilation of TOPEX/POSEIDON and ERS1 altimeter data. *Journal of Geophysical Research*, 103, 24737-24758.
- Gilbert J.-C. et Lemaréchal C., 1989. Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Mathematical Programming*, 45, 407-435.
- Gill A.E., 1982. *Atmosphere – ocean dynamics*. Academic Press, 662pp.
- Gunson J.R. et Malanotte-Rizzoli P., 1996. Assimilation studies of open-ocean flows. Part 1: estimation of initial and boundary conditions. *Journal of Geophysical Research*, 101, 28457-28472.
- Herbaut C., Martel F. et Crépon M., 1997. A sensitivity study of the general circulation of the western Mediterranean sea. Part II: the response to atmospheric forcing. *Journal of Physical Oceanography*, 27, 2126-2145.
- Herbaut C., Codron F. et Crépon M., 1998. Separation of a coastal current at a strait level: case of the strait of Sicily. *Journal of Physical Oceanography*, 28, 1346-1362.
- Jones J.E. et Davies A.M., 1998. Storm surge computations for the Irish Sea using a three-dimensional numerical model including wave-current interaction. *Continental Shelf Research*, 18, 201-251.
- Lamy A., Millot C. et Molines J.-M., 1981. Bottom pressure and sea level measurements in the Gulf of Lions. *Journal of Physical Oceanography*, 11, 394-410.
- Laroche S. et Gauthier P., 1998. A validation of the incremental formulation of 4D variational data assimilation in a non linear barotropic flow. *Tellus*, 50A, 97-110.
- LeBlond P.H. et Mysak L.A., 1978. *Waves in the ocean*. Elsevier scientific publications.
- Le Dimet F.-X. et Talagrand O., 1986. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus*, 38A, 97-110.
- Lellouche J.-M., Devenon J.-L. et Dekeyser I., 1998. Data assimilation by optimal control method in a 3D coastal oceanic model: problem of discretization. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 15, 470-481.
- Leredde Y., Dekeyser I. et Devenon J.-L., 2002. T-S data assimilation to optimise turbulent viscosity. An application to the Berre lagoon hydrodynamics. *Journal of Coastal Research*, 18, 555-567.
- Lions J.-L., 1968. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des opérateurs aux dérivées partielles*. Dunod, 426pp.
- Louvel S., 2001. Implementation of a dual variational algorithm for assimilation of synthetic altimeter data in the oceanic primitive equation model MICOM. *Journal of Geophysical Research*, 106, 9199-9212.
- Madec G., Delecluse P., Imbard M. et Levy C., 1998. OPA 8.1, ocean general circulation model reference manual. Rapport technique numéro 11 du LODyC/IPSL, Paris, France. [<http://www.lodyc.jussieu.fr/opa/>].

- Marchesiello P., McWilliams J.C. et Shchepetkin A., 2001. Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models. *Ocean Modelling*, 3, 1-20.
- Menke W., 1984. *Geophysical data analysis: discrete inverse theory*. Academic Press, 224pp.
- Millot C., 1990. The Gulf of Lions hydrodynamics. *Continental Shelf Research*, 10, 885-894.
- Oke P.R., Allen J.S., Miller R.N., Egbert G.D. et Kosro P.M., 2001. Assimilation of surface velocity data into a primitive equation coastal ocean model, *Journal of Geophysical Research*, 107, 3122-3146.
- Orlanski I., 1976. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*, 21, 251-269.
- Pacanowski R.C. et Gnanadesikan A., 1998. Transient response in a z-level ocean model that resolves topography with partial cells. *Monthly Weather Review*, 126, 3248-3270.
- Palma E.D. et Matano R.P., 1998. On the implementation of passive open boundary conditions for a general circulation model: the barotropic mode. *Journal of Geophysical Research*, 103, 1319-1341.
- Petrenko, A., 2003. Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents. *Oceanologica Acta*, 26, 323-338.
- Rabier F., Järvinen H., Klinker E., Mahfouf, J.-F. et Simmons A., 2000. The ECMWF operational implementation of four-dimensional variational assimilation. Part I: experimental result with simplified physics. *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 126, 1143-1170.
- Sasaki Y.K., 1970. Some basic formalisms in numerical variational analysis. *Monthly Weather Review*, 98, 875-883.
- Seiler U., 1993. Estimation of open boundary conditions with the adjoint method. *Journal of Geophysical Research*, 98, 22855-22870.
- Smith G.D., 1978. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford University Press.
- Stern M.E., Whitehead J.A. et Hua B.-L., 1982. The intrusion of a gravity current along the coast of a rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 123, 237-265.
- Taillandier V., Echevin V., Mortier L. et Devenon J.-L., 2004. Controlling boundary conditions with a 4D-variational data assimilation method in a non-stratified open coastal model. *Ocean Dynamics*, doi:10.1007/s10236-003-0068-1.
- Talagrand O. et Courtier P., 1987. Variational assimilation of meteorological observations with adjoint vorticity equation. *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 113, 1311-1328.

- Talagrand O., 1991. The use of adjoint equations in numerical modelling of the atmospheric circulation. Proceedings of workshop on automatic differentiation of algorithms, theory implementation and application, ECMWF.
- Talagrand O., 1999. A posteriori evaluation and verification of analysis and assimilation algorithms. Proceedings of workshop on diagnosis of data assimilation systems, ECMWF.
- Tarantola A., 1987. Inverse problem theory: methods for data fitting and model parameter estimation. Elsevier, 613pp.
- Verron J., 1990. Altimeter data assimilation into an ocean circulation model : sensitivity to orbital parameters. Journal of Geophysical Research, 95, 11443-11459.
- Wahba G., 1982. Constrained regularisation for ill posed linear operator equations, with applications in meteorology and medicine. Statistical decision theory and related topics III, Academic Press, 2, 383-418.
- Weaver A.T. et Courtier P., 2001. Correlation modelling on the sphere using a generalised diffusion equation. Quarterly Journal of Royal Meteorological Society, 127, 1815-1846.
- Weaver A.T., Vialard J. et Anderson D.L.T., 2003. Three- and four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the tropical pacific ocean. Part I: formulation, internal diagnostics, and consistency checks. Monthly Weather Review, 131, 1360-1378.