



HAL
open science

Approche analytique et numérique pour l'aéroacoustique en régime transitoire par le modèle de Galbrun

Kamel Berriri

► **To cite this version:**

Kamel Berriri. Approche analytique et numérique pour l'aéroacoustique en régime transitoire par le modèle de Galbrun. Mathématiques [math]. ENSTA ParisTech, 2006. Français. NNT : . pastel-00002485

HAL Id: pastel-00002485

<https://pastel.hal.science/pastel-00002485>

Submitted on 5 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE

à présenter à

UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

soutenue par

Kamel BERRIRI

2006

Titre

**Approche analytique et numérique
pour l'aéroacoustique en régime transitoire
par le modèle de Galbrun**

Directeurs de thèse : Anne Sophie BONNET-BENDHIA

Patrick JOLY

Jury

Président : M.

Rapporteurs : M. OLIVIER LAFITTE, Professeur

M. NABIL GMATI, Maître de conférences

Suffragant : M. GABRIEL TURNICI, Professeur

M. VINCENT PAGNEUX, Chargé de recherches CNRS

M. PATRICK JOLY, Directeur de recherche INRIA

Mme. ANNE-SOPHIE BONNET-BENDHIA, Directrice de recherche CNRS

L'Université n'entend donner aucune approbation, ni improbation aux opinions émises dans cette thèse. Ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur”.

Résumé : La thèse a pour objet la modélisation et la simulation numérique de la propagation d'ondes dans un fluide en écoulement uniforme ou fortement cisailé.

Nous retiendrons l'équation de Galbrun comme modèle mathématique linéarisé pour décrire ce phénomène. Cette équation, dont l'inconnue est le déplacement lagrangien, ne se prête pas à une étude mathématique directe en raison d'un défaut d'ellipticité.

La première partie traite le cas d'un écoulement subsonique uniforme. Nous présentons dans un premier temps une méthode de régularisation pour pallier le défaut de coercivité de la "partie spatiale" de l'équation de Galbrun et, dans un deuxième temps, une méthode de résolution numérique stable. En outre, nous calculons à l'aide de la technique de Cagniard-de Hoop, le tenseur de Green de l'équation de Galbrun. Ce tenseur admet une singularité non-intégrable en espace et en temps.

La deuxième partie est consacrée à l'extension de ce qui précède au cas des écoulements brutalement cisailés. Nous montrons par l'analyse de Kreiss que le problème limite (lorsque l'épaisseur de la couche de cisaillement tend vers 0) est fortement mal posé. Pour contourner cette difficulté, nous proposons alors deux approches fondamentalement différentes. La première est analytique : nous utilisons d'une part la méthode de Cagniard-de Hoop pour calculer analytiquement la solution fondamentale du problème et d'autre part la théorie des ultradistributions pour lui donner un sens mathématique. La deuxième approche repose sur la conception d'un nouveau modèle. Nous montrons comment, à partir de techniques asymptotiques de type "couche limite", on peut construire de nouvelles conditions de transmission conduisant à un problème bien posé et rendant compte du phénomène d'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Mots clés : aéroacoustique, équation de Galbrun, régime transitoire, régularisation, analyse asymptotique, couche de mélange, Méthode de Cagniard-de Hoop.

Abstract : The goal of the thesis is the modelling and the numerical simulation of the wave propagation in a fluid with a uniform or strong shear flow.

We retain the Galbrun's equation as a linearized mathematical model to describe this phenomenon. This equation for the lagrangian displacement, can not directly analyzed mathematically due to an ellipticity defect.

The first part deals with the case of a uniform subsonic flow. First, we present a regularization method to correct the coercivity defect of the Galbrun equation "spatial part" and then followed by a stable numerical method of resolution. Furthermore, we calculate by the Cagniard-de Hoop technique the Green tensor of the Galbrun's equation. This tensor admits a non-integrable singularity in space and time.

The second part, focuses on the extension of the previous methods for a strong shear flow. Using Kreiss analysis, we prove that the "limit problem" (as the thickness of the shear layer goes to 0) is strongly ill-posed. To overcome this difficulty, we propose different approaches. The first one is analytical, it consists in applying the Cagniard-de Hoop method to calculate analytically the fundamental solution of the problem. Then, the latter solution is mathematically defined in the sense of the ultradistribution theory. The second approach is based on the conception of a new model. We prove by boundary layers asymptotic techniques, that we can construct new transmission conditions leading to well-posed problem and taking into account the phenomenon of Kevin-Helmholtz instability.

Keywords : aeroacoustics, Galbrun's model, transient regime, regularization, asymptotic analysis, layers mixed, Cagniard-de Hoop method.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier Madame Anne Sophie Bonnet-Ben Dhia et Monsieur Patrick Joly, qui m'ont proposé ce sujet très vaste et ont su me guider dans des travaux variés. Ils m'ont appris à maîtriser des outils nouveaux, élégants et originaux.

Il n'a pas été évident de réunir six personnalités dans ce jury, et je suis touché que chacune des personnes sollicitées ait accepté d'en faire partie, malgré un emploi du temps souvent chargé. Je tiens à les en remercier tous, et plus particulièrement Monsieur Olivier Lafitte et Monsieur Nabil Gmati, qui ont accepté d'être rapporteurs pour ma thèse. Je suis très honoré de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Leurs remarques m'ont permis d'améliorer significativement la rédaction de ce manuscrit.

Je tiens également à remercier Monsieur Gabriel Turnici d'avoir accepté de participer au jury.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à l'état tunisien, l'institut de recherche en informatique et automatique (INRIA) et l'unité de mathématiques appliquées à ENSTA (UMA) qui ont apportés leurs soutiens financiers durant toute la thèse.

Pour terminer, je salue chaleureusement les personnels, aussi bien administratifs que scientifiques, du projet POEMS plus particulièrement Guillaume Legendre, ainsi que les invités, étudiants et stagiaires que j'ai côtoyés pendant ces quatre années.

Enfin, merci à tous ceux qui ont porté de l'intérêt à mes travaux, et qui m'ont donné des idées pour les continuer.

TABLE DES MATIÈRES

Conventions et notations	ix
Lexiques	xv
Introduction générale	1
I Propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement uniforme	9
1 La méthode de régularisation	11
1.1 Position du problème	12
1.2 Formulation régularisée de l'équation de Galbrun	13
1.2.1 Présentation de la technique de régularisation	13
1.2.2 Régularisation sans écoulement	13
1.2.3 Régularisation en écoulement uniforme	14
1.3 Existence et unicité de solutions fortes	15
1.3.1 Un outil mathématique : le théorème de Hille-Yosida	15
1.3.2 Résultat d'existence et unicité d'une solution forte	16
1.3.3 Conservation de l'énergie	19
1.3.4 Formulation variationnelle régularisée	19
1.4 Existence et unicité des solutions faibles	20
1.5 Équivalence entre le problème initial et le problème régularisé	21
1.6 Résolution numérique de l'équation de Galbrun	23
1.6.1 Formulation variationnelle régularisée	23
1.6.2 Semi-discrétisation en espace	24
1.6.3 Schéma totalement discrétisé	24
1.6.4 Énergie discrète et analyse de stabilité	25
1.7 Simulations numériques	27
1.8 Conditions aux limites absorbantes	28
1.8.1 Analyse modale de l'équation de Galbrun	29
1.8.2 CLA pour le problème régularisé	32
1.8.3 Reformulation en domaine borné	33
1.8.4 Résolution numérique	34
1.8.5 Simulation numérique	35

1.9	Conclusion	35
2	Solution fondamentale de l'équation de Galbrun	37
2.1	Introduction	38
2.1.1	Position du problème	38
2.1.2	Notion de solution fondamentale	38
2.1.3	Méthode de Cagniard-de Hoop	39
2.2	Résultat principal	40
2.3	Calcul dans le domaine spectral	42
2.3.1	Définitions de la transformée de Fourier-Laplace	42
2.3.2	Résolution dans l'espace de Fourier-Laplace	43
2.3.3	Résolution dans l'espace de Laplace	46
2.4	Retour dans le domaine physique	47
2.4.1	Contours de Cagniard-de Hoop	47
2.4.2	Retour au domaine temporel	51
2.4.3	Fronts d'ondes acoustiques	55
2.5	Extraction de la singularité	56
2.5.1	Décomposition en parties régulière et singulière	56
2.5.2	Calcul de la partie régulière	57
2.5.3	Calcul de la partie singulière	57
2.5.4	Calcul explicite de la fonction singulière	59
2.6	Validation numérique	59
2.7	Équation de Galbrun régularisée.	63
2.7.1	Position du problème.	63
2.7.2	Solution dans l'espace Fourier-Laplace.	63
2.7.3	Validation numérique	64
II	Propagation d'ondes dans un écoulement fortement cisailé	67
3	Instabilité de Kelvin-Helmholtz	69
3.1	Introduction	70
3.2	Rappels mathématiques et position du problème	71
3.2.1	Position du problème	71
3.2.2	Quelques questions relatives à la régularité du profil	72
3.3	Le cas d'un écoulement discontinu	75
3.3.1	Le problème de transmission	75
3.3.2	Analyse modale du problème de transmission	76
3.3.3	Illustration numérique du caractère fortement mal posé.	79
3.4	Le cas d'un profil cisailé régularisé	83
3.4.1	Définition du problème régularisé	83
3.4.2	Analyse de stabilité par approche modale.	84
3.4.3	Instabilité du problème de Cauchy	92
3.4.4	Illustration numérique de l'instabilité.	95

4	Fonction de Green pour un écoulement discontinu	109
4.1	Introduction	110
4.2	Formulation du problème	110
4.2.1	Changement de référentiel	110
4.2.2	Reformulation du problème	112
4.3	Résolution dans l'espace des transformées	113
4.3.1	Résolution dans l'espace Fourier-Laplace	113
4.3.2	Résolution dans l'espace de Laplace	117
4.4	Résolution du problème pour l'onde réfléchie	118
4.4.1	Contours de Cagniard-de Hoop	118
4.4.2	Retour au domaine temporel	121
4.4.3	Étude de l'onde de vorticité	124
4.4.4	Conclusion	125
4.5	Résolution du problème pour les ondes transmises	125
4.5.1	Détermination du contour d'intégration	125
4.5.2	Retour au domaine temporel	127
4.6	Fronts d'ondes	129
5	Modélisation asymptotique stable d'une couche de cisaillement	131
5.1	Introduction	131
5.2	Analyse asymptotique du problème de Cauchy	132
5.2.1	Position du problème	132
5.2.2	Développement asymptotique de type couche limite	133
5.3	Construction de conditions de transmission approchées	135
5.3.1	Le problème approché dans les variables (k, y, s)	135
5.3.2	Le problème approché dans les variables (x, y, t)	136
5.4	Analyse mathématique du problème de transmission	138
5.4.1	Analyse modale	138
5.4.2	Etude de stabilité	139
6	Résolution numérique	143
6.1	Passage de l'équation d'Euler à celle de Galbrun	143
6.2	Application de la régularisation	144
6.3	Formulation variationnelle	146
6.4	Résultats numériques	147
	Annexes	153
A	Calcul explicite des fonctions singulières	153
B	Résultat d'existence et d'unicité pour l'équation d'Euler linéarisée	159
B.1	Notion de la solution faible	159
B.2	Notion de la solution forte	161
B.2.1	Application du théorème Hille-Yosida	161
B.2.2	Régularisation elliptique	162

C Les ultradistributions	167
C.1 Propriétés immédiates	167
C.2 Propriétés algébriques	168
C.3 Les ultradistributions à variable complexe	168
Conclusion et perspectives	171
Index terminologique	172
Bibliographie	176

CONVENTIONS ET NOTATIONS

Notations et rappels relatifs aux vecteurs et tenseurs

Convention de l'indice muet

Nous utilisons dans ce document la convention d'Einstein :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_i b_i.$$

Soit E un espace vectoriel euclidien sur \mathbb{R} de dimension n ($n \geq 1$). Nous munissons E d'un référentiel \mathcal{R} , défini par un repère d'origine le point O et une base orthonormée directe $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$. Un vecteur \mathbf{v} de E est défini par :

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i,$$

les réels v_i étant les composantes de \mathbf{v} dans la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$. Les coordonnées d'un point courant M sont alors notées x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, où les x_i sont les composantes du vecteur OM .

Produit scalaire

Le produit scalaire euclidien de deux vecteurs de l'espace E est le scalaire, noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, défini par :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i$$

Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est le vecteur, noté $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, de composantes :

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k, \text{ pour } i = 1, 2, 3,$$

$$\text{avec } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

C'est une application bilinéaire et antisymétrique sur E . Si E est un espace de dimension deux, le produit vectoriel est un scalaire, défini par :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \varepsilon_{3ij} u_i v_j = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Produit tensoriel

On appelle produit tensoriel, le produit de chaque composante d'un tenseur par chaque composante d'un autre tenseur. Le produit d'un tenseur A d'ordre p avec un tenseur B d'ordre q est un tenseur d'ordre $p + q$. Par exemple le produit tensoriel de deux vecteurs U et V est donné par :

$$U \otimes V = (u_i v_j)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$$

Les opérateurs différentiels

Soit φ une fonction ou distribution à valeurs scalaires sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 . On note $\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_i^m}$ la dérivée partielle d'ordre m de φ par rapport à x_i , $i = 1, \dots, n$. Nous introduisons l'opérateur symbolique ∇ , qui a pour définition :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

Opérateur gradient. L'opérateur *gradient* associe à la fonction φ à valeurs scalaires le champ de vecteurs défini par :

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

Plus généralement, on peut définir le gradient du tenseur \mathbf{T} d'ordre $p \geq 1$, qui est le tenseur d'ordre $(p + 1)$ obtenu par produit tensoriel de \mathbf{T} avec l'opérateur ∇ :

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{T} \otimes \nabla.$$

Ainsi, pour un vecteur \mathbf{u} , on a :

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

et pour un tenseur \mathbf{S} d'ordre 2, on a :

$$\nabla \mathbf{S} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k.$$

Opérateur divergence. L'opérateur *divergence* associe à la fonction $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ à valeurs vectorielles le champ scalaire défini par :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Là encore, il est possible d'étendre la définition de cet opérateur à un champ de tenseurs d'ordre $p \geq 2$. On note ainsi $\operatorname{div} \mathbf{T}$ le tenseur d'ordre $(p - 1)$ obtenu par produit contracté de \mathbf{T} avec l'opérateur ∇ :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \nabla$$

Par exemple, pour un tenseur \mathbf{S} d'ordre 2, on a :

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i.$$

Opérateur laplacien. Le *laplacien* d'un champ de tenseurs \mathbf{T} d'ordre $p \geq 0$, noté $\Delta\mathbf{T}$, est le tenseur d'ordre p défini par :

$$\Delta\mathbf{T} = \operatorname{div}(\nabla\mathbf{T}).$$

Opérateur rotationnel. L'opérateur *rotationnel* associe à la fonction \mathbf{u} à valeurs vectorielles le champ de vecteurs défini par :

$$(\mathbf{rot}\mathbf{u})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

En dimension deux, il existe deux formes duales de l'opérateur rotationnel. Ainsi, si \mathbf{u} est une fonction à valeurs vectorielles, on a :

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

et si ϕ est une fonction à valeurs scalaires, on a :

$$\mathbf{rot}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \mathbf{e}_2.$$

On utilisera aussi les notations suivantes :

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} : \text{dérivée partielle par rapport au temps.}$$

$$\partial_t^m = \frac{\partial^m}{\partial t^m} : \text{dérivée partielle } m^{\text{ième}} \text{ par rapport au temps.}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} : \text{dérivée partielle suivant } x_i.$$

$$\partial_i^m = \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} : \text{dérivée partielle } m^{\text{ième}} \text{ suivant } x_i.$$

$$\nabla\phi = (\partial_1\phi, \partial_2\phi) : \text{gradient de } \phi.$$

$$\partial_{\mathbf{n}}\phi = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega} : \text{dérivée de } \phi \text{ sur } \partial\Omega \text{ dans la direction normale à } \partial\Omega.$$

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{\tau}_{|\partial\Omega} : \text{dérivée de } \phi \text{ sur } \partial\Omega \text{ dans la direction tangentielle à } \partial\Omega, \text{ aussi appelé gradient tangentiel.}$$

$$\mathbf{rot}\phi = (\partial_2\phi, -\partial_1\phi) : \text{le rotationnel vectoriel de } \phi.$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 : \text{le rotationnel scalaire de } \mathbf{u}.$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 : \text{la divergence de } \mathbf{u}.$$

$$\Delta v = \partial_1^2 v + \partial_2^2 v : \text{le laplacien de } v.$$

$$\Delta\mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2) : \text{le laplacien vectoriel de } \mathbf{u}.$$

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 \end{pmatrix} : \text{le gradient matriciel de } \mathbf{u}.$$

Quelques identités élémentaires entre opérateurs différentiels

On désigne par \mathbf{u} un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^n ($n = 2$ ou 3) à valeurs vectorielles et ϕ une fonction de \mathbb{R}^n à valeurs scalaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{u} \quad = -\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}), \\ \Delta \phi \quad = \operatorname{div}(\nabla \phi) (= -\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \phi) \text{ si } \phi \text{ est une fonction de } \mathbb{R}^2), \\ \mathbf{rot}(\nabla \phi) \quad = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) \quad = 0. \\ \operatorname{div} \nabla(\cdot) \quad = \Delta(\cdot) \end{array} \right.$$

Espaces de Hilbert usuels et normes associées

Soit V un espace de Hilbert. On désigne par

- V' le dual de V , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur V ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V, V'}$ le crochet de dualité entre V et son dual V' ;
- $[[\cdot]]$ le saut de la fonction encadrée ;
- $(\cdot, \cdot)_V$ le produit scalaire dans V ;
- $\| \cdot \|_V$ une norme sur l'espace V .

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $n = 2$ ou 3 , de frontière $\partial\Omega$ le cas échéant.

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable, de carré intégrable}\}, & \|u\| &= \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ H^1(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)^n\}, & \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \right)^{1/2} \\ H_0^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}, & \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \|\nabla u\| \\ H(\operatorname{div}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n, \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, & \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} &= \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 \right)^{1/2} \\ H_0(\operatorname{div}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}, & & \\ H(\mathbf{rot}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3, \mathbf{rot} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3\}, & \|\mathbf{u}\|_{H(\mathbf{rot}; \Omega)} &= \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|^2 \right)^{1/2} \\ H_0(\mathbf{rot}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}; \Omega) \mid \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}, & & \\ H(\mathbf{rot}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2, \operatorname{rot} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, & \|\mathbf{u}\|_{H(\mathbf{rot}; \Omega)} &= \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Formules d'intégration par parties classiques dans un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^n

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Delta \varphi \psi \, d\mathbf{x} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}, \psi \right\rangle \quad \forall \varphi \in D(\Delta, H^1(\Omega)), \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}; \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \varphi \, d\mathbf{x} = - \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}, \varphi \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}; \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)}$ est le crochet de dualité entre $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Notations propres

c_0	la célérité du son.	m/s
p_0	la pression statique ou thermodynamique.	Pa
ρ_0	la masse volumique.	kg/m ³
\mathbf{v}_0	la vitesse de l'écoulement de référence	m/s
V_{\pm}	la vitesse de l'écoulement uniforme	m/s
M	le nombre de Mach.	
ξ	le déplacement lagrangien.	m
\mathbf{v}	le champ de vitesse.	m/s
\mathbf{f}	le terme source.	
\mathcal{G}	le tenseur de Green	
ε	un petit paramètre positif	

LEXIQUES

Pour décrire mathématiquement les propriétés d'un fluide en mouvement, deux systèmes cohabitent, l'un et l'autre présentant des avantages dans des situations particulières. Il s'agit de la description lagrangienne et de la description eulérienne :

La description lagrangienne consiste à observer les modifications des propriétés d'une particule fluide que l'on suit dans son mouvement.

La description eulérienne consiste à se placer en un point fixe du milieu à l'étude et à observer les modifications des propriétés du fluide qui défile en ce point.

Autres lexiques

La couche limite est une zone située au voisinage d'un corps immergé dans un fluide en mouvement en dehors de laquelle on peut négliger les effets de la viscosité.

Les instabilités dites de Kelvin-Helmholtz sont celles qui se développent à l'interface de deux fluides lors d'un cisaillement sous la forme d'ondes qui déferlent.

Mode hydrodynamique : Mode d'oscillations naturelles de tout écoulement cisailé naturellement instable, telle une couche de mélange. Cette appellation se conserve quand les oscillations deviennent auto-entretenues, suite, par exemple, à la rétroaction due aux structures tourbillonnaires convectées vers l'aval.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce document présente les travaux de recherche effectués sous la co-direction de Madame Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Monsieur Patrick Joly dans le cadre de ma thèse, réalisée au sein du laboratoire POEMS¹. Ces travaux traitent des problèmes de propagation d'ondes acoustiques en présence d'écoulement, ainsi que de leur résolution numérique.

L'aéroacoustique est une branche commune à l'acoustique et à la mécanique des fluides. Elle diffère de l'acoustique en ce sens que l'écoulement d'un fluide y joue un rôle prépondérant. En suivant la définition de l'aéroacoustique proposée par Möhring et *al* (1983) [47], on peut classer en trois catégories les problèmes qu'elle englobe :

1. La génération du son, lorsqu'elle est provoquée par un écoulement.
2. La génération d'écoulement de fluides par le son.
3. La propagation du son dans un écoulement de fluide.

Les études effectuées dans ce domaine ont des applications diverses, telles que la création et la transmission du son dans les réacteurs ou les pots d'échappement, et intéressent de nombreux secteurs industriels. En fait, d'importants enjeux commerciaux et des obligations réglementaires imposées par l'OACI² conduisent les constructeurs d'avions à mener des actions de recherche dans le domaine de la réduction de la nuisance sonore. Mais le chemin est encore long car ces actions de recherche n'en sont qu'à leurs débuts.

¹Laboratoire POEMS, UMR 2706 CNRS-ENSTA-INRIA.

²Organisation de l'Aviation Civile Internationale.

Aéroacoustique linéaire

Dans le cadre de l'aéroacoustique linéaire, il existe deux approches pour modéliser le phénomène de rayonnement acoustique au sein de l'écoulement d'un fluide que nous supposons non visqueux et stationnaire. La première est bien connue, elle consiste dans le cadre de la description eulérienne à linéariser les équations d'Euler autour d'un écoulement de référence³. Les inconnues sont la vitesse et la pression exprimées en un point \boldsymbol{x} . Elles décrivent les propriétés d'une particule qui occupe la position \boldsymbol{x} à l'instant t . La deuxième approche qui a été beaucoup moins popularisée est précisément celle qui fournit l'équation de Galbrun (1931) [23]. Ce modèle est issu d'une linéarisation de type mixte de l'équation d'Euler : la perturbation de l'écoulement est décrite en variable lagrangienne alors que l'écoulement de référence \boldsymbol{v}_0 est décrit en variable eulérienne comme nous l'avons dit précédemment. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du second ordre en temps et en espace dont l'inconnue est le vecteur de déplacement lagrangien $\boldsymbol{\xi}$ (l'écart entre la position d'une particule fluide dans un écoulement perturbé et sa position dans l'écoulement d'entraînement) exprimé en fonction des coordonnées eulériennes (\boldsymbol{x}, t) .

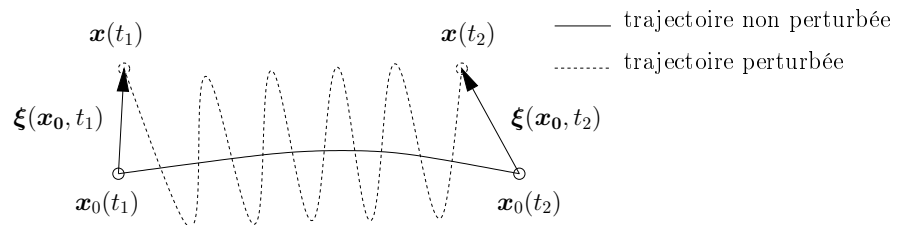


FIG. 1: Perturbation du déplacement lagrangien pour une particule fluide à deux instants t_1 et t_2 .

Ce modèle a été assez peu étudié dans la littérature, pourtant, les équations auxquelles elles mènent ont une structure qui apparaît à première vue similaire à celle qu'on rencontre en électromagnétisme ou en élastodynamique. Par ailleurs, il n'existe pas à notre connaissance de travaux sur ce modèle en régime transitoire. Cependant, la résolution numérique des équations de Galbrun en régime harmonique établi a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche [3, 6, 18, 22, 52].

³L'écoulement de référence vérifie les équations d'Euler stationnaires.

On se donne un écoulement de référence stationnaire *ie.* \mathbf{v}_0 est indépendant du temps. On désigne respectivement par ρ_0 , c_0 et p_0 , la masse volumique du fluide parfait, la célérité du son et la pression dans le milieu non perturbé décrivant l'écoulement de référence⁴. L'équation de Galbrun s'écrit :

$$\rho_0 \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) + (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \nabla p_0 = \mathbf{0} \quad (1)$$

où

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$$

est la dérivée convective par rapport à l'écoulement d'entraînement.

Remarquons que, dans le cas d'un fluide parfait *ie.* ρ_0 , c_0 et p_0 sont des fonctions constantes l'équation (1) se réduit à

$$\rho_0 \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

Choix de l'approche lagrangienne

C'est cette dernière approche que nous avons retenue pour nos études. En raison de son établissement et de l'inconnue qu'elle fait intervenir, l'équation de Galbrun semble être relativement originale comparée aux équations linéarisées habituellement employées en acoustique⁵. Pourtant, le déplacement lagrangien s'avère particulièrement adapté pour le traitement de conditions aux limites dans les problèmes d'interactions fluide-structure ou d'interface entre deux fluides (ou dioptré) [32,35,53]. D'autre part, un gain sur le nombre d'inconnues mises en jeu est *a priori* observé. Le caractère vectoriel de cette équation aux dérivées partielles rend compte de l'interaction, due à la présence d'un écoulement, entre les phénomènes acoustiques et hydrodynamiques, bien qu'elle ne soit que du second ordre. Nous verrons dans nos travaux que la compréhension de cette interaction joue un rôle fondamental pour la résolution numérique de l'équation. En effet, la mise en œuvre d'une méthode d'éléments finis se heurte à des difficultés qui, bien qu'étant du même type que celles rencontrées il y a une trentaine d'années dans diverses applications numériques en électromagnétisme, ont un caractère propre relatif

⁴Les fonctions ρ_0 , c_0 , p_0 et \mathbf{v}_0 dépendent uniquement de variables spatiales.

⁵Un retour aux inconnues "usuelles" que sont les perturbations eulériennes de masse volumique, de vitesse et de pression est néanmoins possible par dérivation de la perturbation lagrangienne du déplacement lagrangien.

au phénomène de convection des ondes caractéristique de l'aéroacoustique. Une approche mathématique rigoureuse du problème est alors nécessaire.

Nous passons maintenant à la description précise du plan de la thèse :

Plan de la thèse

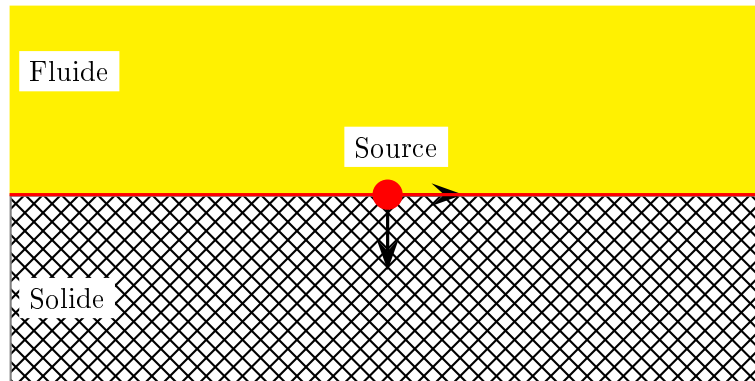
Cette thèse s'articule en deux parties :

Partie I : Propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement uniforme

Le premier chapitre de ce document est de nature académique : il concerne le cas d'un fluide en écoulement uniforme dans un conduit bidimensionnel. Même dans ce cas simple, l'équation de Galbrun ne se prête pas à une étude mathématique directe : en effet, la "partie spatiale" de l'opérateur différentiel qui décrit cette équation présente un défaut d'ellipticité, responsable d'instabilités numériques déjà constatées par plusieurs auteurs [1, 14, 37, 54]. Ceci peut être corrigé par une technique de régularisation exacte, c'est-à-dire en écrivant le problème avec une formulation augmentée [13, 14, 29]. En l'absence d'écoulement, cette démarche est voisine de celle proposée en électromagnétisme pour des problèmes similaires . Nous avons exploré cette analogie, puis nous l'avons étendue en présence d'un écoulement uniforme. C'est à notre connaissance la seule méthode conduisant à une résolution de l'équation de Galbrun dont on puisse prouver la stabilité. Ainsi, en utilisant le théorème de Hille-Yosida [7, 56], nous montrons que le problème de Cauchy associé à l'équation de Galbrun régularisée est bien posé. Ensuite nous proposons des schémas numériques de résolution, combinant des éléments finis de Lagrange en espace, des différences finies en temps et des conditions aux limites absorbantes dans le cas de données initiales irrotationnelles. Nous montrons la stabilité des schémas numériques et présenterons plusieurs simulations numériques réalisées à l'aide du code éléments finis MELINA [45].

Le deuxième chapitre, est également académique mais fondamentalement différent. Il s'agit ici d'obtenir une solution analytique du problème étudié. L'intérêt d'un tel calcul est double : il permet d'une part de décrire avec précision la propagation du son dans un fluide parfait en écoulement uniforme, d'autre part de fournir des solutions de référence pour la validation des méthodes numériques.

Nous nous intéressons donc au calcul de la fonction de Green transitoire de l'équation de Galbrun dans un écoulement bidimensionnel uniforme à l'aide de la méthode de Cagniard-de Hoop [8–10, 31]. Cette méthode permet par exemple de calculer la fonction de Green transitoire pour une interface plane solide/solide ou solide/fluide [32, 53].



Elle repose principalement sur l'utilisation d'une transformée de Fourier-Laplace puis sur une déformation astucieuse des contours d'intégration qui nous conduit à trouver explicitement la solution recherchée.

Dans ce cas (écoulement uniforme), les composantes du tenseur de Green obtenues par la méthode de Cagniard-de Hoop se sont avérées présenter une double singularité : la première est située sur les fronts d'ondes c'est-à-dire sur l'ensemble des points ayant le même temps d'arrivée (ce sont des cercles de centre mobile $(Vt, 0)$). Celle-ci ne pose aucun problème sur le plan pratique car elle est intégrable. La deuxième est ponctuelle et non intégrable en un point $(x = Vt, y = 0)$ convecté par l'écoulement à partir de la position de la source. L'idée utilisée pour extraire cette (méchante) singularité, consiste à écrire le tenseur de Green comme la somme d'un tenseur localement intégrable et d'un tenseur singulier, lui-même obtenu comme dérivée d'un tenseur localement intégrable. La formule obtenue est alors exploitable numériquement.

Partie II : Propagation d'ondes dans un écoulement fortement cisailé

L'extension de la méthode de régularisation aux écoulements quelconques (non-uniformes) s'avère difficile et soulève des questions aujourd'hui non résolues. En effet, cette méthode nous conduit à un problème couplé. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont le déplacement et la vorticité difficile à résoudre par la théorie de semi-

groupe [7] ou par le théorème de Hille-Yosida [56]. Néanmoins, les résultats obtenus dans le cas de l'écoulement uniforme seront exploités pour traiter les écoulements discontinus et fortement cisailés : (Voir figure 2).

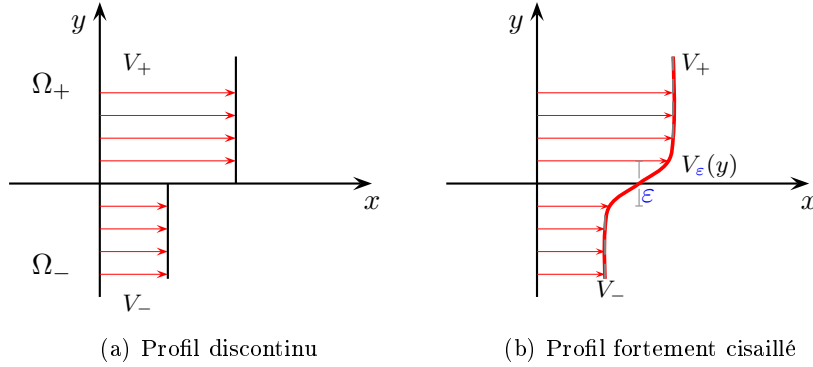


FIG. 2: Couches de mélange (idéalisée (à gauche), mince (à droite)).

Cette partie est dédiée à l'étude des problèmes de propagation d'ondes dans des fluides parfaits en écoulement fortement cisailé (Fig. 2-b). L'approche naturelle pour étudier ce type d'écoulement est de le remplacer par un écoulement discontinu (Fig. 2-a). Ces problèmes ont été largement étudiés dans le cas d'un fluide incompressible [11, 17, 27, 28, 30, 43] depuis l'apparition des premiers travaux de Rayleigh [50] en 1883. Dans le chapitre 3, nous présentons les difficultés qui sont liées à l'existence de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [5] (une onde qui se développe à l'interface de deux fluides lors d'un cisaillement). Nous montrons à l'aide d'une analyse modale que les conditions de transmission "naturelles" qui se traduisent par la continuité du déplacement normal et de la pression acoustique p (=la divergence de déplacement) à travers la ligne de cisaillement conduisent à un problème fortement mal posé sur le plan mathématique. Autrement dit, la solution de ce problème ne dépend pas continûment des données initiales et peut admettre une croissance exponentielle incontrôlable en espace et en temps. La conséquence immédiate sur le plan numérique est qu'il n'est pas possible d'approcher ce problème par la méthode des éléments finis. Physiquement, on comprend alors que le fait d'avoir négligé l'épaisseur ε de la couche mince (le cas limite) n'est légitime que pour les grandes longueurs d'onde $\lambda \gg \varepsilon$ et que le modèle discontinu n'est plus valable pour les petites longueurs d'onde $\lambda \ll \varepsilon$.

Afin de résoudre ce problème, nous allons proposer deux approches fondamentalement

différentes. La première est analytique et fera l'objet du chapitre 4 dans lequel nous utilisons de nouveau la méthode de Cagniard-de Hoop. La difficulté spécifique à ce problème est la présence des pôles complexes qui rendent l'application de cette méthode plus délicate. En effet, après la déformation de contour d'intégration nous obtenons des fonctions qui ne peuvent pas admettre une transformation de Laplace inverse au sens de la théorie de distribution. Ceci nous oblige à définir notre solution au sens d'une autre théorie qui englobe celle des distributions, la théorie des ultradistributions. En outre, la méthode de Cagniard-de Hoop nous permet de représenter tous les phénomènes générés par la ligne de cisaillement ou la couche de mélange idéalisée : fronts d'onde réfléchis et transmis, onde de tête et instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Dans le cinquième chapitre, nous proposons une approche numérique. Il s'agit cette fois de trouver un moyen pour effectuer des simulations numériques par éléments finis d'une vraie couche de mélange mince. Comme on l'a dit au début de ce paragraphe, le problème de transmission "naturel" est un problème fortement mal posé au sens de Kreiss [42] et une résolution numérique directe ne peut donc pas donner de résultats exploitables (on le vérifie en pratique). Dans ce chapitre, nous allons considérer qu'un écoulement discontinu n'a pas de réalité physique mais n'est rien d'autre qu'une modélisation d'un écoulement qui varie très rapidement sur une petite distance $\varepsilon > 0$.

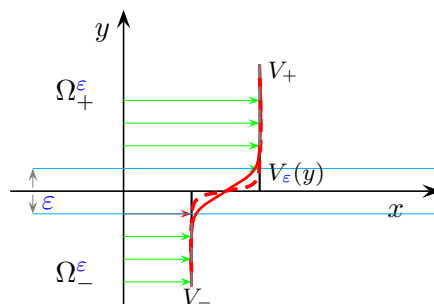


FIG. 3: Idéalisé d'une de couche de mélange.

Grâce à une analyse asymptotique de type couche limite, nous construisons un nouveau problème de transmission pour l'écoulement discontinu tel que les nouvelles conditions de transmission apparaissent d'une part comme une perturbation à l'ordre 1 en ε des conditions de transmission usuelles et approchent à l'ordre 2 la couche limite exacte, dont elles représentent une idéalisation et permettent d'autre part de rendre compte des instabilités hydrodynamiques

physiques existant dans la couche d'épaisseur non nulle. Nous montrons finalement à l'aide de critère de Kreiss que le nouveau problème est mathématiquement bien posé.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous nous intéressons à la résolution numérique du nouveau modèle asymptotique. Pour ce faire, il nous est apparu utile (et préférable) de reformuler le problème sous la version "Galbrun". Ensuite, on étend les résultats obtenus dans la première partie de ce document au nouveau problème de transmission. A cet effet, on établit la formulation variationnelle associée. Nous montrons que cette formulation se prête à une résolution par la méthode des éléments finis de Lagrange. Nous présentons finalement quelques simulations numériques obtenues à l'aide du code MELINA [45]. Ces simulations mettent en évidence tous les phénomènes physiques liés au problème étudié : la manifestation de plusieurs types d'ondes et le déclenchement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz au voisinage de la ligne de cisaillement.

Première partie

Propagation d'ondes acoustiques dans
un écoulement uniforme

LA MÉTHODE DE RÉGULARISATION

Sommaire

1.1	Position du problème	12
1.2	Formulation régularisée de l'équation de Galbrun	13
1.2.1	Présentation de la technique de régularisation	13
1.2.2	Régularisation sans écoulement	13
1.2.3	Régularisation en écoulement uniforme	14
1.3	Existence et unicité de solutions fortes	15
1.3.1	Un outil mathématique : le théorème de Hille-Yosida.	15
1.3.2	Résultat d'existence et unicité d'une solution forte	16
1.3.3	Conservation de l'énergie	19
1.3.4	Formulation variationnelle régularisée	19
1.4	Existence et unicité des solutions faibles	20
1.5	Équivalence entre le problème initial et le problème régularisé	21
1.6	Résolution numérique de l'équation de Galbrun	23
1.6.1	Formulation variationnelle régularisée	23
1.6.2	Semi-discrétisation en espace	24
1.6.3	Schéma totalement discrétisé	24
1.6.4	Énergie discrète et analyse de stabilité	25
1.7	Simulations numériques	27
1.8	Conditions aux limites absorbantes	28
1.8.1	Analyse modale de l'équation de Galbrun	29
1.8.2	CLA pour le problème régularisé	32
1.8.3	Reformulation en domaine borné	33
1.8.4	Résolution numérique	34
1.8.5	Simulation numérique	35
1.9	Conclusion	35

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter une méthode pour l'étude du problème transitoire de propagation d'onde acoustique dans un fluide en écoulement uniforme \mathbf{v}_0 .

Plus précisément, nous nous intéressons à l'analyse mathématique et à l'approximation numérique de l'équation de Galbrun en régime transitoire. Nous montrons pour un écoulement porteur uniforme subsonique que ce modèle a une solution unique. En outre, nous proposons une méthode de résolution numérique stable du problème régularisé qui repose sur l'utilisation d'éléments finis de Lagrange en espace et de schémas aux différences finies explicite ou implicite en temps.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans le journal **ARIMA** écrit avec Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Patrick Joly [4].

1.1 Position du problème

Considérons un conduit rigide bidimensionnel de longueur infinie $\Omega = \mathbb{R} \times]-d, d[$ contenant un fluide compressible. L'écoulement est supposé uniforme, c'est-à-dire que ρ_0 et p_0 sont constantes, et que $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$, avec v_0 constante (voir figure 1.1.1).

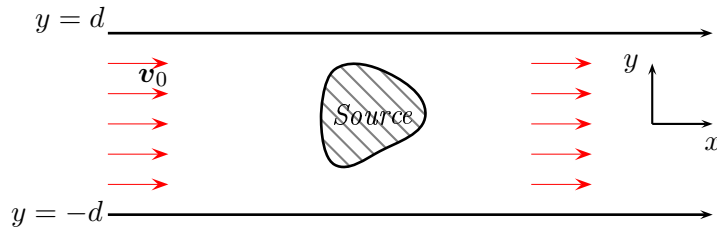


FIG. 1.1.1: La géométrie du problème

La perturbation du champ de déplacement $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ satisfait l'équation de Galbrun adimensionnée :

$$\frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \quad (1.1.1)$$

où

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x}$$

est la dérivée convective par rapport à l'écoulement d'entraînement, $M = v_0/c_0$ est le nombre de Mach, \mathbf{f} est un terme source et \mathbf{n} la normale unitaire extérieure. Ensuite, nous traduisons l'hypothèse de la rigidité du conduit par la nullité du déplacement normal aux parois *ie.* :

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \quad (1.1.2)$$

On complète enfin les équations (1.1.1)-(1.1.2) par les conditions initiales suivantes :

$$\boldsymbol{\xi}(x, y, 0) = \boldsymbol{\xi}_0(x, y), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(x, y, 0) = \boldsymbol{\xi}_1(x, y). \quad (1.1.3)$$

Ce problème présente quelques difficultés, tant théoriques que numériques. Sur le plan théorique, la difficulté majeure est l'absence d'un cadre fonctionnel naturel pour qu'il soit bien

posé. La conséquence sur le plan numérique est qu'il n'est pas évident de trouver une bonne approximation par élément finis : par exemple une résolution directe du problème, utilisant des éléments finis de Lagrange pour la discrétisation en espace, est instable (voir Fig 1.7.2). C'est ce qui nous a notamment conduit à introduire la notion de formulation régularisée.

1.2 Formulation régularisée de l'équation de Galbrun

1.2.1 Présentation de la technique de régularisation

L'idée de la *régularisation*, initialement introduite pour les équations de Maxwell par Werner [54], a été étendue à l'équation de Galbrun en régime périodique établi par A-S. Bonnet-Ben Dhia et *al* [18]. Contrairement aux équations de Maxwell du second ordre en temps, cette opération consiste à ajouter à l'opérateur " $-\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})$ " le terme " $s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi})$ ", où s est un paramètre réel positif. L'intérêt de régulariser l'équation de Galbrun (1.1.1) est de faire apparaître un opérateur elliptique par rapport à un espace fonctionnel bien précis.

1.2.2 Régularisation sans écoulement

Nous présentons brièvement dans ce paragraphe la technique de *régularisation* de l'équation de Galbrun sans écoulement :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \quad (1.2.1)$$

Pour simplifier la présentation, on suppose que le second membre est à rotationnel nul. En appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (1.2.1)

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \right) = 0, \quad (1.2.2)$$

et après avoir remarqué que $\operatorname{rot}(\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})) = 0$, on montre facilement que si les données du problème sont irrotationnelles, la solution reste irrotationnelle dans tout le domaine. Nous pouvons par suite ajouter le terme " $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi})$ " à l'équation (1.2.1), nous obtenons le problème régularisé suivant :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi})}_0 = \mathbf{0} \quad (1.2.3)$$

En vertu de l'identité suivante

$$-\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) = -\Delta \boldsymbol{\xi},$$

l'équation (1.2.3) n'est autre que l'équation d'ondes vectorielle standard,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (1.2.4)$$

Il est possible maintenant de montrer que le problème est elliptique dans l'espace de Sobolev $\mathbb{H}_0(\Omega) := \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$.

L'application de la méthode de *régularisation* à l'équation de Galbrun sans écoulement n'a pas d'intérêt sur le plan théorique parce que on peut montrer aisément à l'aide de techniques énergétiques que le problème de valeurs initiales (1.2.1)-(1.1.2) et (1.1.3) est bien posé dans

l'espace de Hilbert $H_0(\text{div}, \Omega)$. Néanmoins, l'approximation en espace du problème non régularisé par les éléments finis nodaux n'est pas possible.

En écoulement uniforme, nous verrons dans la suite que la *régularisation* a un objectif double théorique et numérique.

1.2.3 Régularisation en écoulement uniforme

Nous nous intéressons dans cette partie à étendre la méthode de *régularisation* pour l'aéroacoustique temporelle de Galbrun en écoulement uniforme.

Pour un terme source $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^+, H(\text{rot}, \Omega))$ et en appliquant à nouveau l'opérateur rotationnel à (1.1.1), nous montrons tout d'abord que $\text{rot } \boldsymbol{\xi} = \psi$ vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{D^2 \psi}{Dt^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + M^2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} = \text{rot } \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \psi|_{t=0} = \psi_0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_1 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (1.2.5)$$

où $\psi_0 = \text{rot } \boldsymbol{\xi}_0$ et $\psi_1 = \text{rot } \boldsymbol{\xi}_1$.

On voit que ψ est solution d'une équation aux dérivées partielles en x et en t . La variable y n'intervient que dans le second membre et les données initiales du problème (1.2.5). Il est donc facile de déterminer analytiquement ψ avant de calculer $\boldsymbol{\xi}$.

LEMME 1.1 *La solution de l'équation (1.2.5) est donnée par :*

$$\psi(x, y, t) = \alpha(x - Mt, y) + x \beta(x - Mt, y) + \frac{1}{M^2} \int_0^x (x - a) (\text{rot } \mathbf{f})(a, y, t - \frac{x - a}{M}) da$$

où α et β sont deux fonctions qui ne dépendent que des données initiales ψ_0 et ψ_1 .

REMARQUE 1.1 *La vortacité ψ peut admettre une croissance linéaire par rapport à x et à t .*

Position du problème régularisé

On suppose dans la suite que ψ_0 , ψ_1 et $\text{rot } \mathbf{f}$ sont à support compact dans Ω et suffisamment réguliers de sorte que la vortacité ψ soit nulle sur les bords du domaine $\partial\Omega$ et appartienne à $C^1(\mathbb{R}^+, H(\text{rot}, \Omega))$

Nous remplaçons alors le problème (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.3) par le problème *régularisé* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla(\text{div } \boldsymbol{\xi}) + s \text{ rot } (\text{rot } \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}_s, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (1.2.6a) \\ \text{rot } \boldsymbol{\xi} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (1.2.6b) \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (1.2.6c) \\ \boldsymbol{\xi}(\cdot, 0) = \boldsymbol{\xi}_0(\cdot), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\cdot, 0) = \boldsymbol{\xi}_1(\cdot) & \text{dans } \Omega \quad (1.2.6d) \end{array} \right.$$

où s est un paramètre positif et $\mathbf{f}_s = \mathbf{f} + s \mathbf{rot} \psi$

En fait, ce sont les propriétés d'ellipticité de l'opérateur spatial $L_s = -\nabla(\operatorname{div}) + s \mathbf{rot}(\operatorname{rot})$ qui permettent de mener l'étude mathématique et l'analyse numérique du problème (1.2.6) dans un cadre classique. En particulier si on prend $s = 1$, l'opérateur L_s devient $-\Delta$, par conséquent l'équation de Galbrun (1.2.6a) peut être écrite comme l'équation d'onde convectée. La présence du terme source " $s \mathbf{rot} \psi$ " permet de prendre en compte l'évolution d'une perturbation rotationnelle.

Il est clair qu'une solution du problème (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.3) est solution de (1.2.6a)-(1.2.6d). La réciproque fait l'objet du paragraphe 1.5.

REMARQUE 1.2 *La deuxième équation du système (1.2.6) est une condition supplémentaire, nécessaire à l'équivalence avec le problème (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.3)*

1.3 Existence et unicité de solutions fortes

Le but de cette partie est de montrer que le modèle de Galbrun régularisé introduit dans la section précédente conduit à un problème bien posé, autrement dit qu'il possède une et une seule solution forte. Pour cela nous le faisons entrer dans le cadre du théorème de Hille-Yosida qui est un outil mathématique fondamental pour étudier l'existence et l'unicité de la solution forte de problèmes d'évolution linéaires. L'essentiel de cette partie consiste dans une première étape à reformuler le problème sous la forme d'un problème d'évolution du premier ordre en temps et du second ordre en espace, puis à vérifier dans une deuxième étape les hypothèses du théorème.

1.3.1 Un outil mathématique : le théorème de Hille-Yosida.

Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$. On considère un opérateur A , non borné dans H , autrement dit une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset H$, à valeurs dans H . $D(A)$ est le domaine de A . On considère pour $F(t) \in C^0(\mathbb{R}_+; H)$ et $u_0 \in D(A)$ le problème d'évolution suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow D(A) \subset H, \\ \frac{du}{dt} + Au = F, \quad \forall t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (1.3.1)$$

DÉFINITION 1.1 *On appelle solution forte de (1.3.1), toute fonction u satisfaisant :*

$$\forall t \geq 0, u(t) \in D(A), \quad t \longrightarrow u(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; H), \quad t \longrightarrow Au(t) \in C^0(\mathbb{R}_+; H)$$

et vérifiant l'équation $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = F(t)$ pour $t > 0$ et $u(0) = u_0$.

Ce théorème fait appel à la notion d'opérateur maximal monotone :

DÉFINITION 1.2 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, un opérateur linéaire non borné. On dit que A est monotone si :

$$(Au, u)_H \geq 0, \quad \forall u \in D(A). \quad (1.3.2)$$

On dit que A est maximal monotone si de plus $A + I$ est surjectif de $D(A)$ dans H , ie. :

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } : u + Au = f. \quad (1.3.3)$$

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème de Hille-Yosida, dont on peut trouver une démonstration dans [7] :

THÉORÈME 1.3 (HILLE-YOSIDA) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A + \lambda I$ est maximal monotone. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ et tout $F(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, il existe une unique solution forte du problème (1.3.1).

1.3.2 Résultat d'existence et unicité d'une solution forte

On considère l'espace fonctionnel suivant : $\mathcal{H} := X(\Omega) \times L^2(\Omega)^2$ où

$$X(\Omega) := \{ \boldsymbol{\xi} \in L^2(\Omega)^2 / \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \in L^2(\Omega), \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \in L^2(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \},$$

muni du produit scalaire :

$$(U, U^*)_{\mathcal{H}} = (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}, \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^*) + s (\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}^*) + (\zeta, \zeta^*), \quad (1.3.4)$$

avec $U = (\boldsymbol{\xi}, \zeta)^t$, $U^* = (\boldsymbol{\xi}^*, \zeta^*)^t$ et $(\zeta, \zeta^*) = \int_{\Omega} \zeta \cdot \zeta^*$

Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida, nous introduisons la nouvelle variable $\boldsymbol{\zeta} = D\boldsymbol{\xi}/Dt$ (rappelons que $D/Dt = \partial/\partial t + M\partial/\partial x$). Si on pose $\mathbf{U} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})^t$, on peut alors récrire (1.2.6) sous la forme du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + A_s \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \end{cases}$$

avec

$$A_s \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\zeta + M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \\ -\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) + M \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_0 \\ \boldsymbol{\xi}_1 + M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_0}{\partial x} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_s \end{pmatrix}.$$

Le domaine de l'opérateur non borné A_s est défini par :

$$D(A_s) = \{ \mathbf{U} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})^t \in \mathcal{H} \text{ tel que } A_s \mathbf{U} \in \mathcal{H} \text{ et } \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

THÉORÈME 1.4 (EXISTENCE ET UNICITÉ D'UNE SOLUTION FORTE) Si $\min(1, s) > M^2$, alors pour $\mathbf{f}_s \in C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^2)$ et $(\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1 + M\partial\boldsymbol{\xi}_0/\partial x) \in D(A_s)$, le problème (1.2.6) admet une unique solution forte vérifiant :

$$\boldsymbol{\xi} \in C^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^2) \cap C^1(\mathbb{R}_+; X(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_+; D(A_s))$$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME 1.2 *L'opérateur $A_s + \lambda I$ est maximal monotone pour tout $\lambda \geq \frac{1}{2}$.*

DÉMONSTRATION :

Montonie : Par définition du produit scalaire (1.3.4), nous avons, pour tout $\mathbf{U} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})^t \in \mathcal{H}$,

$$(A_s \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = (M \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} + \quad (1.3.5)$$

$$(-\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) + (\operatorname{div}(-\boldsymbol{\zeta}), \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + s (\operatorname{rot}(-\boldsymbol{\zeta}), \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) + \quad (1.3.6)$$

$$(-\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\zeta}) + s (\mathbf{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\zeta}) \quad (1.3.7)$$

En utilisant le caractère antisymétrique du l'opérateur ∂_x on a :

$$(M \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = -(\mathbf{U}, M \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x})_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{H}. \quad (1.3.8)$$

Grâce aux formules de Green ¹ [14]

$$(\mathbf{v}, \nabla \phi) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \phi) = \int_{\partial \Omega} (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) \phi \, d\sigma \quad (1.3.9)$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{rot} \phi) - (\operatorname{rot} \mathbf{v}, \phi) = \int_{\partial \Omega} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}) \phi \, d\sigma. \quad (1.3.10)$$

valables pour tout $\mathbf{v} \in X(\Omega)$ et $\phi \in H^1(\Omega)$, nous déduisons pour tout $\mathbf{U} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})^t \in D(A_s)$:

$$(\boldsymbol{\zeta}, \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi})) + (\operatorname{div} \boldsymbol{\zeta}, \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \int_{\partial \Omega} (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \, d\sigma = 0, \quad (\text{car } \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega)$$

$$(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi})) - (\operatorname{rot} \boldsymbol{\zeta}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) = \int_{\partial \Omega} (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\zeta}) \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \, d\sigma = 0, \quad (\text{car } \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = 0 \text{ sur } \partial \Omega)$$

Enfin nous obtenons :

$$(A_s \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = (1.3.5) + (1.3.6) + (1.3.7) = (-\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \mathbf{U} \in D(A_s).$$

Mais grâce à l'inégalité de Young on a (en notant $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$) :

$$\begin{aligned} (A_s \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} + \lambda(\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} &= -(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) + \lambda \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \lambda \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + \lambda \|\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}\|^2 + \lambda s \|\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}\|^2 \\ &\geq (\lambda - \frac{1}{2}) \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + (\lambda - \frac{1}{2}) \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 \end{aligned}$$

on en déduit que, pour tout $\lambda \geq \frac{1}{2}$,

$$(A_s \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} + \lambda(\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{U} \in D(A_s). \quad (1.3.11)$$

REMARQUE 1.5 *On remarque que l'opérateur non régularisé ($s = 0$) $A_0 + \lambda I$ est monotone dans l'espace $H_0(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)^2$, mais nous verrons dans la suite qu'il n'est pas surjectif dans cet espace.*

¹Pour $\boldsymbol{\xi} \in H(\operatorname{rot}, \Omega)$ (resp, $H(\operatorname{div}, \Omega)$), la trace tangentielle (resp, normale) est définie comme élément de $H^{-1/2}(\Omega)$ par $\langle \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}, \phi \rangle = (\mathbf{v}, \nabla \phi) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \phi)$ (resp, $\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}, \phi \rangle = (\operatorname{rot} \mathbf{v}, \phi) - (\mathbf{v}, \mathbf{rot} \phi)$)

Surjectivité : Nous allons montrer que l'opérateur $A_s + \nu I$ est surjectif $\forall \nu > 0$ (on aura en particulier $A_s + (\lambda + 1)I$ surjectif pour tout $\lambda \geq \frac{1}{2}$), ce qui revient à trouver une solution dans $D(A_s)$ de l'équation : $A_s \mathbf{U} + \nu \mathbf{U} = \mathbf{F}$, où $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})^t$ est un élément quelconque de \mathcal{H} ; ceci équivaut à trouver $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\boldsymbol{\eta} + M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} + \nu \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \in X(\Omega) \\ -\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) + M \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial x} + \nu \boldsymbol{\eta} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2 \end{array} \right. \quad (1.3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) + M \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial x} + \nu \boldsymbol{\eta} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2 \end{array} \right. \quad (1.3.13)$$

En remplaçant $\boldsymbol{\eta}$ dans (1.3.13) par son expression en fonction de $\boldsymbol{\xi}$ obtenue à partir de (1.3.12) nous obtenons :

$$\mathcal{L}_s(\boldsymbol{\xi}) = -\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + s \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} + M^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial x^2} + 2\nu M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} + \nu^2 \boldsymbol{\xi} \quad (1.3.14)$$

$$= M \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \nu \mathbf{f} + \mathbf{g}. \quad (1.3.15)$$

Pour montrer l'existence d'une solution de ce problème, nous appliquons la même technique que celle utilisée en régime fréquentiel. Nous voulons donc montrer l'existence d'une solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \cap H(\operatorname{rot}, \Omega) \text{ tel que :} \\ \mathcal{L}_s(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{h} \quad \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.3.16)$$

avec $\mathbf{h} = M \partial \mathbf{f} / \partial x + \nu \mathbf{f} + \mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2$.

Grâce à la régularité du domaine Ω , les espaces :

$$X(\Omega) \text{ et } \mathbb{H}_0(\Omega) := \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2, \text{ tel que } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \}$$

coïncident [24] et par conséquent la résolution du problème (1.3.16) revient à chercher une solution dans l'espace \mathbb{H}_0 du problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une solution } \boldsymbol{\xi} \text{ dans } \mathbb{H}_0(\Omega) \text{ telle que :} \\ l_s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = b(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{H}_0(\Omega), \end{array} \right. \quad (1.3.17)$$

avec

$$l_s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \nu^2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} + s \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial x} + 2\nu M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \boldsymbol{\eta}$$

$$b(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\eta}$$

Si nous prenons maintenant $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}$, on trouve :

$$l_s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = \nu^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}\|^2 + s \|\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}\|^2 - M^2 \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right\|^2 \quad (1.3.18)$$

D'après un résultat dû à Costabel ([14], théorème 4.1, p. 539), nous avons :

$$\int_{\Omega} |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2 + s |\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}|^2 \geq \min(1, s) \int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{\xi}|^2 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in X(\Omega) \quad (1.3.19)$$

On en déduit alors que

$$l_s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geq \nu^2 \|\boldsymbol{\xi}\| + (\min(1, s) - M^2) \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|^2$$

Autrement dit, la forme bilinéaire $l_s(\cdot, \cdot)$ est coercive dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H}_0(\Omega)$ pour tous les nombres de Mach vérifiant $M^2 < \min(1, s)$.

Par le théorème de Lax-Milgram, on montre que le problème aux limites (1.3.16) admet une unique solution pour tout $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{H}$ et $M^2 < \min(1, s)$. Par conséquent, on en déduit que la fonction définie par $\boldsymbol{\eta} = (\nu + M\partial/\partial x) \boldsymbol{\xi} - \mathbf{f}$ est dans $L^2(\Omega)^2$ ($\boldsymbol{\eta}$ est une solution de l'équation (1.3.12)). On conclut enfin que pour $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{H}$ et $M^2 < \min(1, s)$ qu'il existe une unique solution $\mathbf{U} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})^t$ dans \mathcal{H} vérifiant le système d'équations (1.3.12)-(1.3.13). ■

1.3.3 Conservation de l'énergie

En multipliant l'équation de Galbrun régularisée sans terme source par la fonction test $\mathbf{v} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$, on peut vérifier que l'énergie associée au problème (1.2.6) :

$$E_s(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right|^2 + |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2 + s |\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right|^2 \right) d\Omega \quad (1.3.20)$$

se conserve au cours de temps. *ie.*

$$\frac{d}{dt} \{E_s(t)\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right|^2 + |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2 + s |\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right|^2 \right) d\Omega \right\} = 0 \quad (1.3.21)$$

REMARQUE 1.6 Soit $\boldsymbol{\xi}$ la solution forte de (1.1.1). Nous notons $E(t)$ la quantité suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right|^2 + |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right|^2 \right) d\Omega \quad (1.3.22)$$

Nous remarquons ici que la forme quadratique $E(t)$ n'a pas un signe constant même si $M < 1$. C'est pourquoi, il n'est pas immédiat d'obtenir des estimations a priori pour le problème de valeurs initiales non régularisé (1.1.1) – (1.1.2) et (1.1.3). En effet, prenons par exemple une solution stationnaire à divergence nulle *ie.* $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega}$ est une fonction indépendante du temps), $E(t)$ devient ($\operatorname{div}(\mathbf{rot}) = 0$) :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right|^2 \right) d\Omega = -\frac{M^2}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right|^2 d\Omega \leq 0.$$

1.3.4 Formulation variationnelle régularisée

Nous associons naturellement au problème régularisé (1.2.6) une formulation variationnelle. Soit $\boldsymbol{\eta}$ une fonction test dans $X(\Omega)$. En multipliant la première équation du système (1.2.6a)

par $\boldsymbol{\eta}$ et en intégrant sur tout le domaine Ω , nous trouvons à l'aide de la formule de Green et en tenant compte des conditions limites (1.2.6b)-(1.2.6c) que $\boldsymbol{\xi}$ vérifie :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{d}{dt}b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + a_s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = F_s(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in X(\Omega) \quad (1.3.23)$$

avec

$$a_s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} + s \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial x},$$

$$b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \boldsymbol{\eta},$$

$$F_s(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\eta} + s \psi \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta}$$

1.4 Existence et unicité des solutions faibles

Il existe dans la littérature deux théories similaires pour prouver l'existence et l'unicité de la solution faible d'un problème d'évolution du second ordre en temps dans un intervalle de temps $[0, T]$ ($T > 0$). La première est due aux travaux des mathématiciens Jaques Louis Lions et E. Magenès [16], la deuxième repose sur l'extension de la notion de solution faible espace-temps [38].

Pour simplifier la lecture, nous avons besoin des quelques notations. Plus précisément, on note

$$\begin{aligned} \Omega_T &:= \Omega \times [0, T] \\ H(\Omega_T) &:= \left\{ \boldsymbol{v} \in C^2(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap C^1(0, T; X(\Omega)), \quad \boldsymbol{v}(T) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(T) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Soit $\boldsymbol{\xi}$ une solution forte du problème (1.2.6) pour un temps fini (dans $[0, T]$) et soit $v(\boldsymbol{x}, t)$ une fonction test dans l'espace $C^2(\Omega_T)$ vérifiant :

$$v(\boldsymbol{x}, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(\boldsymbol{x}, T) = 0$$

Si nous intégrons l'équation (1.2.6a) sur le domaine spatio-temporel Ω_T , nous aurons ;

$$\int_{\Omega_T} \left(\frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + s \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) \right) \cdot \boldsymbol{v} = \int_{\Omega_T} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} - s \psi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \quad (1.4.1)$$

En effectuant des intégrations par parties, en temps et en espace, nous montrons que la solution forte $\boldsymbol{\xi}$ vérifie pour tout $\boldsymbol{v} \in H(\Omega_T)$ cette identité :

$$\left| \begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + s \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \\ & = \int_{\Omega_T} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} - s \psi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \Big|_{t=0} + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\xi}_1 + 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_0}{\partial x}) \cdot \boldsymbol{v} \Big|_{t=0} \end{aligned} \right. \quad (1.4.2)$$

DÉFINITION 1.3 (Solution faible espace-temps) *On appelle solution faible espace-temps sur l'intervalle $[0, T]$ du problème (1.2.6) tout fonction vectorielle $\boldsymbol{\xi}$ vérifiant :*

$$\boldsymbol{\xi} \in C^1(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap C^0(0, T; X(\Omega))$$

et satisfaisant (1.4.2) pour toute fonction-test admissible ($\boldsymbol{v} \in H(\Omega_T)$).

LEMME 1.3 *Par construction même de la notion de solution faible à partir de la solution forte, toute solution forte est a fortiori solution faible sur tout intervalle de type $[0, T]$*

THÉORÈME 1.7 *Si les données initiales $\boldsymbol{\xi}_0$ et $\boldsymbol{\xi}_1$ et le terme source \boldsymbol{f} vérifient :*

$$(\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{f} + s \operatorname{rot} \psi) \in X(\Omega) \times L^2(\Omega)^2 \times L^1(0, T; L^2(\Omega)^2),$$

alors le problème (1.2.6) admet une et une seule solution faible $\boldsymbol{\xi}$ dans l'intervalle $[0, T]$. Cette solution vérifie encore l'identité d'énergie suivante :

$$\frac{d}{dt}\{E_s(t)\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right|^2 + |\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}|^2 + s |\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right|^2 \right) d\Omega \right\} = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}_s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise la technique appliquée à la démonstration d'existence et d'unicité de la solution faible de l'équation d'onde donnée dans [16, 38].

1.5 Équivalence entre le problème initial et le problème régularisé

Dans cette partie nous nous intéressons à l'équivalence entre le problème régularisé (1.2.6) et le problème initial (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.3). Pour montrer cette équivalence, il suffit de montrer que si $\boldsymbol{\xi}$ est une solution du problème régularisé, alors elle vérifie $\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = \psi$ sur Ω (la réciproque est évidente).

Formellement, la preuve consiste à appliquer l'opérateur rotationnel à l'équation de Galbrun régularisée, puis à utiliser l'équation sur le rotationnel de la solution (1.2.5) pour obtenir l'équation vérifiée par la quantité $d = \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} - \psi$. En lui adjoignant la condition aux limites supplémentaire, nous trouvons un problème type, dont le champ " $\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} - \psi$ " est solution, qui est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } d \text{ tel que :} & \\ \frac{D^2 d}{Dt^2} - s \Delta d = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ d(0, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial d}{\partial t}(0, \boldsymbol{x}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ d = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \end{array} \right. \quad (1.5.1)$$

Si l'on peut montrer que d est assez régulier ($d \in H_0^1(\Omega)$) alors, d'après le théorème d'existence et d'unicité de la solution forte de l'équation d'onde convectée, on peut montrer facilement que la solution du problème (1.5.1) est nulle donc $d = 0$ dans Ω .

Nous proposons ci-dessous une démonstration rigoureuse de ce résultat, susceptible d'être étendue à des situations plus générales.

PREUVE : nous reprenons la formulation variationnelle (1.4.2) et nous considérons alors des fonctions test \mathbf{v} de la forme $\mathbf{v} = \mathbf{rot} \phi$, avec

$$\phi \in C^2(0, T; H(\mathbf{rot}, \Omega)) \cap C^0(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

de sorte que \mathbf{v} soit dans $H(\Omega_T)$. Nous avons donc :

$$\left| \begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{rot} \phi}{\partial t^2} - 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{rot} \phi}{\partial t} - s \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi} \Delta \phi - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \\ & \int_{\Omega_T} \mathbf{f} \mathbf{rot} \phi - s \psi \Delta \phi - \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{rot} \phi}{\partial t} \Big|_{t=0} + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\xi}_1 + 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_0}{\partial x}) \cdot \mathbf{rot} \phi \Big|_{t=0} \end{aligned} \right.$$

En effectuant des intégrations par partie en espace on obtient :

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2M \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + M^2 \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - s \Delta \phi \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi} = \quad (1.5.2)$$

$$\int_{\Omega_T} \phi \mathbf{rot} \mathbf{f} - s \Delta \phi \psi - \int_{\Omega} \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=0} + (\mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_1 + 2M \frac{\partial \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_0}{\partial x}) \phi \Big|_{t=0} \quad (1.5.3)$$

Or on sait, d'après l'équation (1.2.5), que :

$$\int_{\Omega_T} \phi \mathbf{rot} \mathbf{f} = \int_{\Omega_T} \frac{D^2 \psi}{Dt^2} \phi = \int_{\Omega_T} \psi \frac{D^2 \phi}{Dt^2} + \int_{\Omega} \psi_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=0} - \int_{\Omega} (\psi_1 + 2M \frac{\partial \psi_0}{\partial x}) \phi \Big|_{t=0}$$

En remplaçant le terme $\int_{\Omega_T} \phi \mathbf{rot} \mathbf{f}$ dans l'équation (1.5.3) on trouve que :

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi} \left(\frac{D^2 \phi}{Dt^2} - s \Delta \phi \right) = \int_{\Omega_T} \psi \left(\frac{D^2 \phi}{Dt^2} - s \Delta \phi \right) \quad (1.5.4)$$

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_0 - \psi_0) \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=0} + ((\mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_1 - \psi_1) + 2M \frac{\partial (\mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_0 - \psi_0)}{\partial x}) \phi \Big|_{t=0} = 0, \quad (1.5.5)$$

mais comme $\mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_j = \psi_j$ ($\forall j = 0, 1$), le terme (1.5.5) est nul et par conséquent, on obtient :

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi} \left(\frac{D^2 \phi}{Dt^2} - s \Delta \phi \right) = \int_{\Omega_T} \psi \left(\frac{D^2 \phi}{Dt^2} - s \Delta \phi \right),$$

$$\forall \phi \in C^2(0, T; H(\mathbf{rot}, \Omega)) \cap C^0(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

Pour conclure, nous avons besoin du théorème suivant qui est un cas particulier du théorème 1 p. 670 de [15] :

THÉORÈME 1.8 *Pour une fonction $g \in C^1(0, T; L^2(\Omega))$, il existe une solution unique $\phi_g \in C^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ vérifiant :*

$$\left| \begin{aligned} & \frac{D^2 \phi_g}{Dt^2} - s \Delta \phi_g = g \quad \text{dans } \Omega_T \\ & \phi_g(T, \cdot) = \frac{\partial \phi_g}{\partial t}(T, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \right. \quad (1.5.6)$$

En choisissant en particulier

$$g = \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} - \psi \text{ et } \phi = \phi_g,$$

on trouve finalement :

$$\int_{\Omega_T} |\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} - \psi|^2 = 0,$$

d'où $\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = \psi$ dans tout Ω . ■

1.6 Résolution numérique de l'équation de Galbrun

La résolution numérique en conduit non borné pose des questions délicates liées aux conditions aux limites sur les bords artificiels du domaine de calcul. Cet aspect n'est pas traité dans ce chapitre. Nous proposons ici une méthode numérique de calcul du champ de déplacement dans une portion bornée $\Omega_b :=]-L; L[\times]-d; d[$ du conduit en imposant, pour simplifier, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ sur les bords verticaux ($x = \pm L$) qui ne perturbent pas l'écoulement. En effet, on sait que la solution de ce problème se propage avec une vitesse finie, elle vérifie donc cette condition avant d'arriver aux bords latéraux (c-a-d pour les temps courts). Ce problème n'a pas de sens physique mais a un sens mathématique.

1.6.1 Formulation variationnelle régularisée

Nous commençons par écrire une formulation variationnelle du problème régularisé (avec $\min(1, s) > M^2$). Soit \mathbf{v} une fonction-test dans $X_0(\Omega_b)$, avec

$$X_0(\Omega_b) := \{ \boldsymbol{\xi} \in H^1(\Omega_b)^2, \text{ tels que } \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ pour } y = \pm d \text{ et } \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \text{ pour } x = \pm L \}.$$

En multipliant la première équation du système (1.2.6) par \mathbf{v} et en intégrant sur le domaine Ω_b , nous trouvons à l'aide de la formule de Green que $\boldsymbol{\xi}$ vérifie la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi} \in C^2(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap C^0(0, T; X_0(\Omega_b)) \text{ satisfaisant :} \\ \frac{d^2}{dt^2} (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) + \frac{d}{dt} b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) + a_s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = F_s(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in X(\Omega_b), \\ \boldsymbol{\xi}_0 \text{ et } \boldsymbol{\xi}_1 \text{ donnés dans } X_0(\Omega_b). \end{array} \right. \quad (1.6.1)$$

avec

$$a_s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_b} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + s \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \mathbf{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x},$$

$$b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_b} 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \mathbf{v}, \quad \text{et} \quad F_s(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + s \psi \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

- ▷ $a_s(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue coercive et symétrique dans $X_0(\Omega_b)$
- ▷ $b(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue antisymétrique dans $X_0(\Omega_b)$

REMARQUE 1.9 *En suivant la même démarche qui a été appliquée pour le cas du conduit infini, nous pouvons montrer facilement que le problème (1.6.1) est toujours bien posé.*

1.6.2 Semi-discrétisation en espace

Soit \mathcal{T}_h une triangulation donnée du domaine de calcul Ω_b telle que $\overline{\Omega}_b = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$. Le paramètre h désigne le pas du maillage. Considérons X_h l'espace de dimension finie $2n_h$ correspondant aux éléments finis de Lagrange. Nous noterons $\{\mathbf{w}_i^\alpha\}_{i=1 \dots n_h}^{\alpha=1,2}$ les fonctions de base de X_h , avec $\mathbf{w}_i^\alpha = w_i \mathbf{e}_\alpha$ (w_i est la fonction de base scalaire correspondant au $i^{\text{ème}}$ noeud et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est la base canonique de \mathbb{R}^2). On cherche alors une solution sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\xi}_h(t) = \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{\alpha=1}^2 \xi_i^\alpha(t) \mathbf{w}_i^\alpha$$

de la formulation variationnelle approchée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + \frac{d}{dt}b(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + a_s(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) = (\mathbf{f}_s, \boldsymbol{\eta}_h) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in X_h \\ \boldsymbol{\xi}_h(0) = \Pi_h \boldsymbol{\xi}_0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t}(0) = \Pi_h \boldsymbol{\xi}_1 \end{array} \right. \quad (1.6.2)$$

où Π_h est une projection sur l'espace de dimension finie convenablement choisie. On aboutit enfin à l'écriture matricielle suivante :

$$\mathbb{M}_h \frac{d^2 \mathbf{U}_h}{dt^2} + \mathbb{B}_h \frac{d \mathbf{U}_h}{dt} + \mathbb{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_s \quad (1.6.3)$$

avec

1. $\mathbf{U}^T := (\xi_1^1, \xi_1^2; \xi_2^1, \xi_2^2; \dots; \xi_{n_h}^1, \xi_{n_h}^2)$,
2. \mathbb{M}_h est la matrice de masse,
3. \mathbb{A}_h et \mathbb{B}_h sont des matrices associées respectivement aux formes bilinéaires a_s et b
4. \mathbf{F}_s est le vecteur source.

1.6.3 Schéma totalement discrétisé

À ce niveau, nous avons obtenu une semi-discrétisation en espace de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme. Il reste à effectuer la discrétisation en temps. Pour cela, nous proposons deux schémas aux différences finies en temps, le premier est un schéma centré, explicite et du second ordre, dit schéma saute-mouton et le deuxième un schéma implicite, également du second ordre, centré. On considère Δt le pas de temps, et on pose $t_n = n\Delta t$.

- le schéma explicite s'écrit :

$$S_E : \mathbb{M}_h \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - 2\mathbf{U}_h^n + \mathbf{U}_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{B}_h \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbb{A}_h \mathbf{U}_h^n = \mathbf{F}_s^n \quad (S_E)$$

- tandis que le schéma implicite est donné par :

$$S_I : \mathbb{M}_h \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - 2\mathbf{U}_h^n + \mathbf{U}_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{B}_h \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbb{A}_h \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} + 2\mathbf{U}_h^n + \mathbf{U}_h^{n-1}}{4} = \mathbf{F}_s^n \quad (S_I)$$

avec

1. \mathbf{U}_h^n est la solution discrète à l'instant t_n ,
2. \mathbf{F}_s^n est le vecteur source discret à l'instant t_n .

1.6.4 Énergie discrète et analyse de stabilité

L'étude de la stabilité par une technique énergétique consiste à définir une sorte d'énergie discrète, analogue à l'énergie continue, qui se conserve au cours des itérations. On cherche ensuite une condition suffisante pour que cette quantité reste positive et définisse bien une énergie.

Etude de stabilité du schéma S_E

DÉFINITION 1.4 On définit l'énergie discrète du schéma S_E sous la forme suivante :

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} a_s(\boldsymbol{\xi}_h^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_h^n)$$

THÉORÈME 1.10 Si $\mathbf{f}_s = 0$, l'énergie discrète $E_h^{n+\frac{1}{2}}$ se conserve au cours de temps ie.

$$\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

DÉMONSTRATION :

Nous reprenons la formulation variationnelle discrète sans terme source :

$$\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - 2\boldsymbol{\xi}_h^n + \boldsymbol{\xi}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \boldsymbol{\eta}_h \right) + b\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^{n-1}}{\Delta t}, \boldsymbol{\eta}_h \right) + a_s(\boldsymbol{\xi}_h^n, \boldsymbol{\eta}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in X_h$$

En choisissant une fonction-test discrète de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\eta}_h = \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Après avoir remarqué que pour tout $\mathbf{v}_h \in X_h$, $b(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = 0$, on obtient alors :

$$\frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^n}{\Delta t} \right\|^2 - \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_h^n - \boldsymbol{\xi}_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|^2 + a_s(\boldsymbol{\xi}_h^n, \boldsymbol{\xi}_h^{n+1}) - a_s(\boldsymbol{\xi}_h^n, \boldsymbol{\xi}_h^{n-1}) \right\} = 0$$

Par définition de l'énergie discrète (1.4), on vérifie aisément que :

$$\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0 \quad \blacksquare$$

THÉORÈME 1.11 La condition de stabilité suffisante pour assurer la convergence du schéma numérique (S_E) est donnée par :

$$\frac{\Delta t^2}{4} \|\mathbb{A}_h\| \leq 1 \tag{1.6.4}$$

avec :

$$\|\mathbb{A}_h\| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\boldsymbol{\xi}_h \in X_h - \{0\}} \frac{a_s(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\xi}_h)}{\|\boldsymbol{\xi}_h\|^2}.$$

DÉMONSTRATION :

Pour que le schéma numérique (S_E) soit stable, il faut que la quantité $E_h^{n+1/2}$ soit une forme quadratique positive. Or on remarque que :

$$E_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} a_s(\boldsymbol{\xi}_h^{n+1/2}, \boldsymbol{\xi}_h^{n+1/2}) - \frac{\Delta t^2}{8} a_s\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^n}{\Delta t}, \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^n}{\Delta t}\right)$$

avec

$$\boldsymbol{\xi}_h^{n+1/2} = \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} + \boldsymbol{\xi}_h^n}{2}$$

d'où on déduit que :

$$E_h^{n+1/2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta t^2}{4} \|\mathbb{A}_h\| \right) \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + a_s(\boldsymbol{\xi}_h^{n+1/2}, \boldsymbol{\xi}_h^{n+1/2})$$

À partir de cette inégalité nous trouvons la condition suffisante de stabilité (1.6.4). ■

Etude de stabilité du schéma S_I

De la même manière, en étudiant la stabilité du schéma S_I .

PROPRIÉTÉ 1.1 On définit l'énergie discrète du schéma S_I sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} a_s(\boldsymbol{\xi}_h^{n+1/2}, \boldsymbol{\xi}_h^{n+1/2}) \quad (1.6.5)$$

Alors l'énergie \mathcal{E} vérifie la propriété suivante ($\mathbf{f}_s = \mathbf{0}$) :

$$\frac{\mathcal{E}_h^{n+1/2} - \mathcal{E}_h^{n-1/2}}{\Delta t} = 0 \quad (1.6.6)$$

PREUVE : En multipliant l'équation (3.14) par $(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1})/2\Delta t$ et après avoir remarqué que

$$\frac{\mathbf{U}_h^{n+1} + 2\mathbf{U}_h^n + \mathbf{U}_h^{n-1}}{4} = \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} + \mathbf{U}_h^n}{4} + \frac{\mathbf{U}_h^{n-1} + \mathbf{U}_h^n}{4}$$

et que

$$\frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - 2\mathbf{U}_h^n + \mathbf{U}_h^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{U}_h^n - \mathbf{U}_h^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (1.6.7)$$

on obtient alors cette identité :

$$\left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + a_s\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} + \boldsymbol{\xi}_h^n}{2}, \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{n+1} + \boldsymbol{\xi}_h^n}{2}\right) - \left\| \frac{\boldsymbol{\xi}_h^n - \boldsymbol{\xi}_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|^2 - a_s\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_h^n + \boldsymbol{\xi}_h^{n-1}}{2}, \frac{\boldsymbol{\xi}_h^n + \boldsymbol{\xi}_h^{n-1}}{2}\right) = 0$$

D'après la définition de l'énergie discrète $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$ définie par (1.6.5), on obtient enfin le résultat (1.6.6). ■

LEMME 1.4 le schéma (3.14) est inconditionnellement stable.

la démonstration de ce lemme est immédiate. En fait, il suffit de remarquer que la forme quadratique $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$ définie par (1.6.5) est toujours positive.

1.7 Simulations numériques

Nous présentons ici quelques simulations numériques de la propagation acoustique dans un fluide en écoulement subsonique uniforme. Nous nous plaçons dans un domaine de calcul $\Omega_b =]-5, 5[\times]-2.5, 2.5[$. Nous considérons un maillage non-régulier composé de triangles de côté maximal $h = 0.25$. Pour l'approximation en espace, on utilise les éléments finis de Lagrange P_2 mais pour la discrétisation en temps, on utilise le schéma numérique explicite S_E avec un pas de discrétisation Δt vérifiant la condition de stabilité $\Delta t = \text{CFL} h = 0.025$. Nous rappelons que le problème continu est posé dans un conduit infini, mais ici nous ne faisons que des simulations dans une portion de ce conduit en imposant sur les parois d'entrée et de sortie de l'écoulement une condition de type Dirichlet ($\xi = 0$ sur les bords $x = \pm 2.5$).

Solution irrotationnelle

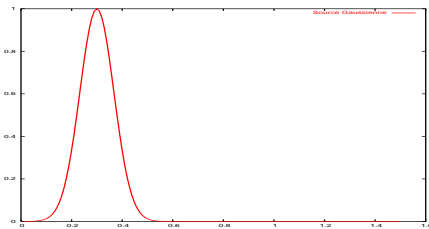
L'expérience suivante simule la propagation d'un signal émis par une source irrotationnelle, gaussienne en temps et à support compact en espace, placée au centre du domaine de calcul dans un écoulement uniforme $M = 0.5$. Plus précisément on a,

$$\mathbf{f}(x, y, t) = S(t) \nabla g(r) \quad (1.7.1)$$

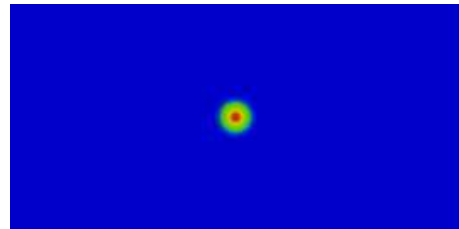
où

$$S(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 & \text{si } r \leq r_0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $f_0 (=10/3)$ est la fréquence de la source, $t_0 = 1/f_0$, $r_0 = 0.5$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



(a) source temporelle S



(b) source spatiale g

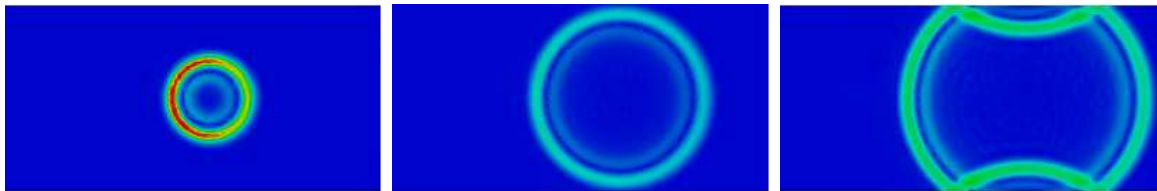


FIG. 1.7.1: Norme euclidienne du déplacement à $t_1 = 1.2$, $t_2 = 2.4$ et $t_3 = 3.3$. Cas $s = 1$.

On voit que la source irrotationnelle rayonne dans toutes les directions du plan en étant convectée dans le sens de l'écoulement. Ainsi le front d'onde aval progresse à la vitesse $1 + M = 1.5$ et le front d'onde amont à la vitesse $1 - M = 0.5$. Dans la direction orthogonale à l'écoulement l'onde se propage à la vitesse du son $c_0 = 1$. et vient se réfléchir sur les parois du conduit.

Importance de la régularisation

Nous vérifions ici que la méthode n'est stable que si l'équation est régularisée.

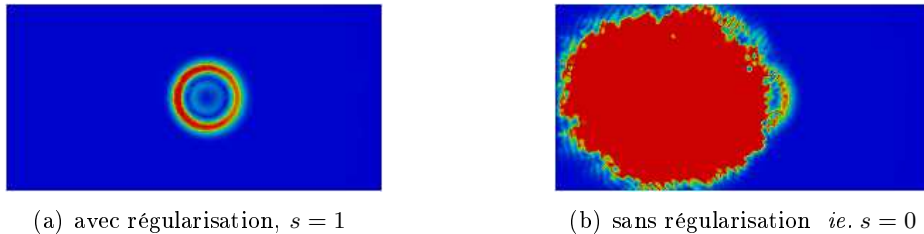


FIG. 1.7.2: Norme euclidienne du déplacement à l'instant $t = 1$.

Solution rotationnelle

Nous réalisons une autre expérience en considérant comme source des données initiales rotationnelles concentrées au voisinage de l'origine dans un écoulement uniforme $M = 0.5$:

$$\boldsymbol{\xi}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{x}) = 0.5 \mathbf{rot} \phi(\mathbf{x}) + 10 \nabla \phi(\mathbf{x}), \quad \phi(\mathbf{x}) = e^{-\pi^2(x^2+y^2)}.$$

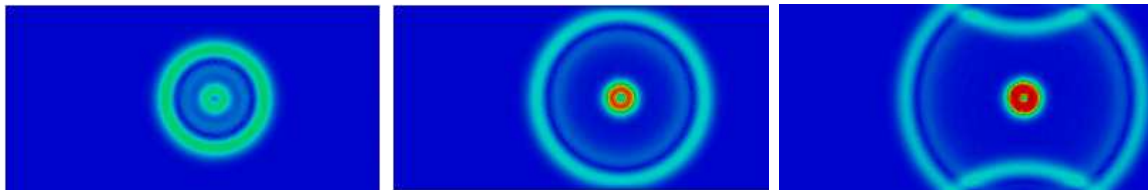


FIG. 1.7.3: Norme euclidienne du déplacement à $t_1 = 1.2$, $t_2 = 2.4$ et $t_3 = 3.3$. Cas $s = 1$.

Contrairement au cas précédent, on a ici $\psi(= \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}) \neq 0$. Le but de ce cas est de mettre en évidence la propagation de deux types de perturbation : la première est la partie irrotationnelle (qui correspond aux ondes acoustiques) qui se propage (comme dans l'expérience précédente) dans tout le domaine de calcul. La deuxième est la partie rotationnelle (qui correspond aux ondes de vorticité) qui est simplement convectée par l'écoulement et se manifeste sur la figure 1.7.3, par un cercle de rayon constant qui est translatée au cours du temps. On peut noter que l'amplitudes de perturbation croit linéairement en t et en x (voir remarque 1.1).

1.8 Conditions aux limites absorbantes

La question naturelle qui se pose maintenant est liée à la résolution du problème dans un conduit infini sans avoir imposé la condition non physique $\boldsymbol{\xi} = 0$ sur $\{x = \pm L\}$. L'objectif de cette section vise à apporter une réponse à cette question. Pour ce faire nous pensons à la technique de conditions aux limites (CLA). Nous rappelons que cette technique consiste à adjoindre aux équations du problème initial des conditions aux limites sur les bords artificiels du domaine de calcul. Ces conditions sont construites de façon à ce que le nouveau problème aux limites soit bien posé et conduise à une solution proche de celle du problème d'origine.

Dans le cas de l'équation des ondes acoustiques les conditions aux limites absorbantes ont été initialement introduites par B. Engquist et A. Majda [44] dans les années soixante dix. Leur approche consiste à écrire dans un premier temps la condition transparente, c'est à dire l'équation qui relie sur le bord absorbant la trace d'une solution de l'équation des ondes homogènes à celle de sa dérivée normale. Cette équation implique l'introduction d'un opérateur pseudo-différentiel scalaire qui est non local en espace et en temps. La mise en oeuvre de ces conditions exactes est très coûteuse au niveau du temps de calcul, voire irréalisable. Pour surmonter cette difficulté, on approche le symbole de cet opérateur à l'aide d'un développement limité qui permet d'obtenir des conditions locales².

En ce qui concerne l'étude de stabilité de CLA, il existe dans la littérature deux techniques. La première repose sur la décroissance d'énergie et la deuxième est basée sur le critère de Kreiss [42]. Notons que les techniques d'énergie peuvent s'avérer difficiles à exploiter. Les techniques de Kreiss ont un caractère plus systématique et permettent de ramener l'étude de stabilité à l'étude des solutions dans le plan complexe d'une équation souvent appelée équation caractéristique.

Nous nous intéressons tout d'abord à la détermination du nombre de conditions aux limites à imposer à la frontière fictive pour l'équation de Galbrun. En utilisant une méthode qui repose sur les modes de Fourier, on montre facilement que le nombre des conditions aux limites associées au problème non-régularisé n'est pas le même à l'amont et à l'aval. C'est pourquoi on ne peut pas les exploiter pour écrire une formulation variationnelle. Cette difficulté a été déjà constatée par Gwénaél Gabard dans sa thèse [22]. Néanmoins elle peut être surmontée à l'aide de la technique de régularisation qui symétrise le nombre des conditions aux limites. Nous montrons que dans le cas *irrotationnel* on peut étendre naturellement les CLA d'ordre un pour l'équation d'onde usuelle à l'équation de Galbrun régularisée. En revanche, pour le cas général (cas d'une source *rotationnelle*) ces conditions ne sont plus valables car elles ne laissent pas sortir du domaine de calcul les ondes de vorticité (voir 1.7.3). Ceci est dû au fait que la régularisation introduit une source mobile à support compact dans l'équation. Dans ce cas on ne peut plus appliquer la démarche classique pour construire des CLA. En effet, contrairement au cas habituel, le problème "extérieur" n'est plus homogène. Nous ne traitons pas ce cas dans ce chapitre et cette question reste ouverte.

1.8.1 Analyse modale de l'équation de Galbrun

On se donne des conditions initiales $\boldsymbol{\xi}_0$ et $\boldsymbol{\xi}_1$ à support compact dans Ω^- (domaine tronqué), on cherche donc à établir une condition aux limites sur la frontière fictive $\Gamma := \{x = 0\}$ avec comme objectif principal que la solution calculée avec cette condition approche au mieux la solution exacte sur l'espace entier restreinte à Ω^- (voir figure (1.8.1)). Considérons donc l'équation de Galbrun posée dans le demi plan Ω^+ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla\right)^2 \boldsymbol{\xi} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad (x, y) \in \Omega^+, t > 0 \quad (1.8.1)$$

$\mathbf{M} = (M_1, M_2)^t$ est le vecteur d'écoulement uniforme.

²Pour une présentation plus générale et détaillée des CLA, nous renvoyons le lecteur aux revues bibliographiques données par Dan Givoli [25] et Jinsoo Kim [12].

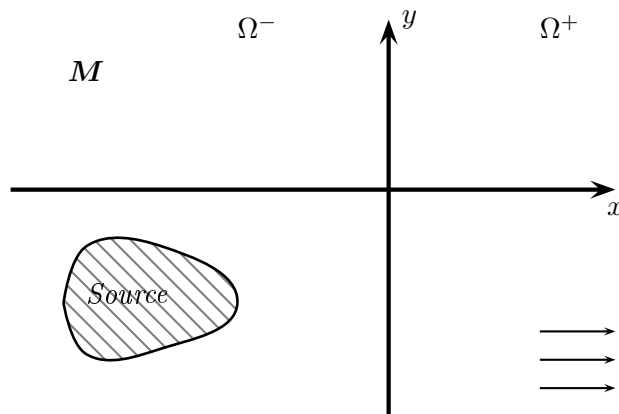


FIG. 1.8.1: Géométrie du problème

En appliquant la transformation de Fourier en espace et en temps à l'équation (1.8.1), on obtient :

$$(\omega - \mathbf{M} \cdot \vec{k})^2 \widehat{\xi} - (\vec{k} \cdot \widehat{\xi}) \vec{k} = 0 \quad (1.8.2)$$

avec $\vec{k} = (\alpha, \beta)^t \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'onde et ω est un nombre complexe.

Ceci est équivalent à chercher des solutions de (1.8.1) sous la forme d'une onde plane :

$$\xi(x, y, t) = \widehat{\xi}(\alpha, \beta, \omega) \exp(i\alpha x + i\beta y - i\omega t). \quad (1.8.3)$$

Si on réécrit l'équation (1.8.2) sous la forme matricielle on aura :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\omega - \mathbf{M} \cdot \vec{k})^2 - \alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & (\omega - \mathbf{M} \cdot \vec{k})^2 - \beta^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}(\alpha, \beta, \omega)} \underbrace{\begin{pmatrix} \widehat{\xi}_1 \\ \widehat{\xi}_2 \end{pmatrix}}_{\widehat{\xi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8.4)$$

Remarquons ici que la matrice $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \omega)$ est symétrique, ses valeurs propres sont alors réelles, ceci traduit l'aspect hyperbolique de l'équation de Galbrun. L'équation caractéristique associée à (1.8.1) est donnée par :

$$\det \mathbf{S} = (\omega - \mathbf{M} \cdot \vec{k})^2 ((\omega - \mathbf{M} \cdot \vec{k})^2 - \alpha^2 - \beta^2) = 0$$

qui est équivalent à :

$$(\omega - \mathbf{M} \cdot \vec{k})^2 ((\omega - \mathbf{M} \cdot \vec{k})^2 - \|\vec{k}\|^2) = 0 \quad (1.8.5)$$

Cette équation admet trois solutions (en ω) qui sont données par :

$$\omega_a^\pm = \mathbf{M} \cdot \vec{k} \pm \|\vec{k}\|, \quad \omega_h = \mathbf{M} \cdot \vec{k} \quad (1.8.6)$$

En fixant ω et β , nous pouvons facilement déduire de (1.8.6), les valeurs propres α du système linéaire (1.8.4) :

$$\alpha_a^\pm = \frac{-M_1(\omega - \beta M_2) \pm \sqrt{(\omega - \beta M_2)^2 - (1 - M_1^2)\beta^2}}{1 - M_1^2}, \quad \alpha_h = \frac{\omega - \beta M_2}{M_1} \quad (1.8.7)$$

Les vecteurs propres associés sont alors :

$$V_a^\pm = \begin{pmatrix} \alpha_a^\pm \\ \beta \end{pmatrix}, \quad V_h = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha_h \end{pmatrix} \quad (1.8.8)$$

Pour déterminer la direction de propagation de ces modes nous devons introduire la vitesse de groupe notée c_g et définie par $c_g = \partial\omega/\partial\alpha_p^\pm|_{\beta=0}$ ($p = a, h$) qui a le même signe que $\partial\alpha_p^\pm/\partial\omega|_{\beta=0}$.

Or on sait que :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_a^+}{\partial \omega} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{M_1 + 1} > 0 \quad \text{si } -1 < M_1 < 1 \implies \alpha_a^+ \text{ est un mode sortant} \\ \frac{\partial \alpha_a^-}{\partial \omega} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{M_1 - 1} < 0 \quad \text{si } -1 < M_1 < 1 \implies \alpha_a^- \text{ est un mode entrant} \\ \frac{\partial \alpha_h}{\partial \omega} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{M_1} \geq 0 \quad \text{si } M_1 \geq 0, \implies \alpha_h \text{ est un mode sortant (resp entrant)} \end{array} \right.$$

On déduit alors que pour un écoulement subsonique positif, les modes α_a^\pm correspondent respectivement aux ondes acoustiques amont (-) et aval (+). Par contre le mode α_h correspond à l'onde hydrodynamique convectée par l'écoulement. Dans lequel la solution se décompose en :

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}} = \zeta_h V_h + \zeta_a^- V_a^- + \zeta_a^+ V_a^+ \quad (1.8.9)$$

où ζ_h, ζ_a^\pm sont les amplitudes associées respectivement aux ondes V_h^\pm et V_a^\pm .

La condition de non-réflexion exacte se traduit par la nullité de l'amplitude des modes entrants dans le domaine de calcul. Plus précisément lorsque la vitesse de groupe c_g est négative, il faut que l'amplitude soit nulle, ceci implique que la m -ème ligne de la matrice inverse P^{-1} (P est la matrice composée par les vecteurs V_a^\pm et V_h) est orthogonale au vecteur $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$. Gwénaél Gabard a étudié dans sa thèse [22] ce cas pour la formulation mixte déplacement-pression associée à l'équation de Galbrun en régime harmonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-i\omega + \mathbf{M} \cdot \nabla \right)^2 + \nabla p = 0, \\ p + \text{div } \boldsymbol{\xi} = 0. \end{array} \right. \quad (1.8.10)$$

Pour un écoulement subsonique dans la direction des x ($\mathbf{M} = M\mathbf{e}_x$), il propose des conditions aux limites absorbantes dans l'espace fréquentiel qu'on réécrit dans l'espace physique espace-temps sous la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi_y = \xi_y = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (1 - M) \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi_x = 0 \end{array} \right\} \quad \text{à l'amont} \quad (1.8.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + (1 + M) \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{à l'aval}$$

Il est clair que ces conditions ne peuvent pas être adaptées pour une formulation variationnelle. Pour cela, on ne peut pas les exploiter pour le problème régularisé.

1.8.2 CLA pour le problème régularisé

Nous cherchons alors à construire un opérateur local \mathcal{B} tel que le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t + M\partial_x)^2 - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) = 0, & (x, y) \in \Omega^-, t > 0 \\ \mathcal{B}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) \boldsymbol{\xi} = 0, & (x, y) \in \Gamma \\ \boldsymbol{\xi}(\cdot, 0) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \partial_t \boldsymbol{\xi}(\cdot, 0) = \boldsymbol{\xi}_1 & (x, y) \in \Omega^- \end{array} \right. \quad (1.8.12)$$

soit bien posé dans un espace fonctionnel à déterminer.

En vertu de la relation

$$-\nabla(\operatorname{div}) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot}) = -\Delta$$

le problème (3.3.2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t + M\partial_x)^2 \boldsymbol{\xi} - \Delta \boldsymbol{\xi} = 0, & \text{dans } \Omega^- \times \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{B}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) \boldsymbol{\xi} = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \boldsymbol{\xi}(\cdot, 0) = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \partial_t \boldsymbol{\xi}(\cdot, 0) = \boldsymbol{\xi}_1 & \text{dans } \Omega^- \end{array} \right. \quad (1.8.13)$$

en utilisant le changement de variables suivant :

$$x = \sqrt{1 - M^2} X, \quad y = Y, \quad t = \frac{\tau - MX}{\sqrt{1 - M^2}} \quad (1.8.14)$$

REMARQUE 1.12 *La particularité de ce changement de variable est de garder la position de la frontière fictive $\Gamma := \{x = 0\}$ dans le nouveau référentiel $(X, Y, \tau) : \Gamma = \{X = 0\}$.*

Après avoir remarqué que :

$$\partial_X U = -\frac{M}{\sqrt{1 - M^2}} \partial_t \boldsymbol{\xi} + \sqrt{1 - M^2} \partial_x \boldsymbol{\xi}, \quad \partial_\tau U = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \partial_t \boldsymbol{\xi},$$

on montre que, $U(X, Y, \tau) = \boldsymbol{\xi}(x, y, t)$ est solution de l'équation des ondes usuelle :

$$\partial_\tau^2 U - (\partial_X^2 + \partial_Y^2) U = 0 \quad (1.8.15)$$

Or on sait que

$$\partial_\tau U + \partial_X U|_\Gamma = 0 \quad (1.8.16)$$

est une condition aux limites absorbante du premier ordre pour l'équation d'ondes (1.8.15) sur la frontière Γ (2.4.12), on déduit facilement une CLA pour l'équation (1.8.13) en revenant à l'espace physique (x, y, t) :

$$\mathcal{B}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) \boldsymbol{\xi} = \partial_t \boldsymbol{\xi} + (1 + M)\partial_x \boldsymbol{\xi} = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (1.8.17)$$

De la même manière on peut construire une CLA du premier ordre lorsque la source est située à **droite** de la frontière fictive Γ :

$$\mathcal{B}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) \boldsymbol{\xi} = \partial_t \boldsymbol{\xi} - (1 - M)\partial_x \boldsymbol{\xi} = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (1.8.18)$$

REMARQUE 1.13 Les CLA (1.8.17)-(1.8.18) sont des conditions qui laissent sortir respectivement les ondes planes de la forme $\boldsymbol{\xi}(t, x, y) = f(x - (1+M)t)$ et $\boldsymbol{\xi}(t, x, y) = g(x - (1-M)t)$ qui se propagent avec une vitesse $(1+M)$ dans le sens des $x > 0$ et $(1-M)$ dans le sens inverse sans aucune réflexion.

1.8.3 Reformulation en domaine borné

Nous utilisons les résultats qu'on vient d'obtenir pour écrire le problème couplé (équations initiales + conditions aux limites) dans une portion du conduit $\Omega_b(:=]-L; L[\times]-h; h[)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \boldsymbol{\xi} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega_b \times \mathbb{R}_+ \quad (1.8.19a) \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = 0, \quad \text{sur } \Sigma^\pm \times \mathbb{R}_+ \quad (1.8.19b) \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Sigma^\pm \times \mathbb{R}_+ \quad (1.8.19c) \\ \mathcal{B}^\pm(\partial_x, \partial_y, \partial_t) \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\pm \times \mathbb{R}_+ \quad (1.8.19d) \end{array} \right.$$

où

$$\mathcal{B}^\pm(\partial_x, \partial_y, \partial_t) = \frac{\partial}{\partial t} + (M \pm 1) \frac{\partial}{\partial x}.$$

On complète le système d'équations (1.8.19) par la donnée des conditions initiales :

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}(\cdot, 0), \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\cdot, 0) \quad (1.8.20)$$

Formulation variationnelle

Soit \mathbf{v} une fonction-test dans l'espace de Hilbert suivant :

$$V(\Omega_b) := H^1(\Omega_b)^2 \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega_b) = \{ \boldsymbol{\xi} \in H^1(\Omega_b)^2 \mid \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma^\pm \}.$$

En multipliant l'équation (1.8.19a) par \mathbf{v} et en intégrant sur le domaine Ω_b , nous avons :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_b} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_b} 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_b} \left(M^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial x^2} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) \right) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

À l'aide de la formule de Green nous obtenons :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_b} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_b} 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_b} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \mathbf{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \quad (1.8.21) \\ + \int_{\partial \Omega_b} M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{array} \right.$$

En utilisant le fait que la solution du problème (1.8.19) est irrotationnelle sur les frontières du domaine Ω_b , on a alors :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_b} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_b} 2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_b} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \mathbf{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \\ & + \int_{\partial \Omega_b} \partial_n \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \pm \int_{\Gamma^\pm} M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial \Omega_b} \partial_n \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega_b} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

mais comme pour tout $\boldsymbol{\xi}$ et \mathbf{v} dans $V(\Omega_b)$

$$\int_{\Omega_b} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega_b} \partial_n \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Omega_b} \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

alors la forme bilinéaire suivante :

$$a_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_b} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \mathbf{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \int_{\partial\Omega_b} \partial_n \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \quad (1.8.22)$$

est $V(\Omega_b)$ -elliptique pour tout écoulement subsonique ($M^2 < 1$)

ceci nous conduit à écrire la formulation variationnelle associée au problème (1.8.19) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi} \in V(\Omega_b), \quad \text{tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle + \frac{d}{dt} (2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x}, \mathbf{v}) + a_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) + b^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega_b) \end{array} \right. \quad (1.8.23)$$

où on a noté :

$$a_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_b} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} \operatorname{rot} \mathbf{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \pm \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial y} \wedge \mathbf{v} \quad (1.8.24)$$

$$b^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = -(1 - M^2) \int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \cdot \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \quad (1.8.25)$$

En introduisant les conditions aux limites absorbantes (1.8.19d), la forme bilinéaire b^Γ devient sous la forme suivante :

$$b^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma^-} (1 + M) \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma^+} (1 - M) \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}$$

Finalement, on trouve la formulation variationnelle à mettre en oeuvre numériquement :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi} \in V(\Omega_b), \quad \text{tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle + \frac{d}{dt} (2M \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x}, \mathbf{v}) + a_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) + (1 \pm M) \frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma^\mp} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega_b) \end{array} \right. \quad (1.8.26)$$

On désigne par $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma^\mp}$ le crochet de dualité sur Γ^\mp .

1.8.4 Résolution numérique

Pour la résolution numérique de formulation variationnelle (1.8.26), on s'appuie sur la section 1.6. En fait, nous utilisons la méthode des éléments finis pour l'approximation en espace et un schéma de différence finie centré de type saute-mouton pour la discrétisation temporelle. La formulation matricielle associée à (1.8.26) s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbb{M} \frac{d^2 U_h}{dt^2} + \mathbb{K} \frac{dU_h}{dt} + \mathbb{B}^{\Gamma^\pm} \frac{dU_h}{dt} + \mathbb{A} U_h = F_h$$

avec

- U_h est la solution discrétisée.
- \mathbb{M} est la matrice de masse.

- \mathbb{A} , \mathbb{B}^{Γ^\pm} et \mathbb{K} sont les matrices associées respectivement aux formes bilinéaires $a_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$, $b^{\Gamma^\pm}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$ et $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) \mapsto (2M\partial_x \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$.

Après discrétisation en temps, on obtient alors le schéma numérique suivant :

$$\mathbb{M} \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{(\Delta t)^2} + (\mathbb{K} + \mathbb{B}^{\Gamma^\pm}) \frac{U_h^{n+1} - U_h^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbb{A} U_h^n = F_h^n$$

1.8.5 Simulation numérique

Nous nous plaçons dans le domaine borné $\Omega_b =]-5, 5[\times]-5, 5[$. Nous considérons un maillage non-régulier composé de triangles de côté maximal $h = 0.25$. Pour l'approximation en espace, on utilise les éléments finis de Lagrange P_2 mais pour la discrétisation en temps nous utilisons le schéma numérique explicite S_E (en remplaçant la matrice \mathbb{B} par $\mathbb{K} + \mathbb{B}^{\Gamma^\pm}$).

L'expérience suivante simule la propagation dans un conduit tronqué d'un signal émis par une source irrotationnelle, gaussienne en temps et à support compact en espace, placée au centre du domaine de calcul dans un écoulement uniforme $M = 0.3$. Plus précisément on a,

$$\mathbf{f}(x, y, t) = S(t) \nabla g(r) \quad (1.8.27)$$

où

$$S(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 & \text{si } r \leq r_0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec f_0 ($=10/3$) est la fréquence de la source, $t_0 = 1/f_0$, $r_0 = 0.5$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

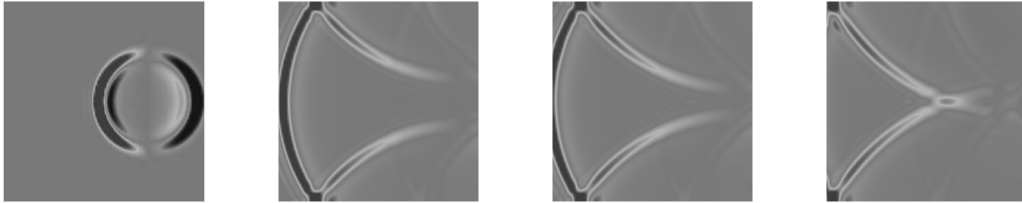


FIG. 1.8.2: Sortie non-réfléchissante de la première composante ξ_1

1.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étendu la méthode de régularisation à l'équation de Galbrun en écoulement uniforme subsonique. A l'aide de cette méthode nous avons pu étudier rigoureusement le problème de valeurs initiales associé à cette équation. Pour la résolution numérique du problème régularisé, nous avons proposé différents schémas d'approximation en temps mais en se basant toujours sur la méthode des éléments finis de Lagrange en espace.

SOLUTION FONDAMENTALE DE L'ÉQUATION DE GALBRUN

Sommaire

2.1	Introduction	38
2.1.1	Position du problème	38
2.1.2	Notion de solution fondamentale	38
2.1.3	Méthode de Cagniard-de Hoop	39
2.2	Résultat principal	40
2.3	Calcul dans le domaine spectral	42
2.3.1	Définitions de la transformée de Fourier-Laplace	42
2.3.2	Résolution dans l'espace de Fourier-Laplace	43
2.3.3	Résolution dans l'espace de Laplace	46
2.4	Retour dans le domaine physique	47
2.4.1	Contours de Cagniard-de Hoop	47
2.4.2	Retour au domaine temporel	51
2.4.3	Fronts d'ondes acoustiques	55
2.5	Extraction de la singularité	56
2.5.1	Décomposition en parties régulière et singulière	56
2.5.2	Calcul de la partie régulière	57
2.5.3	Calcul de la partie singulière	57
2.5.4	Calcul explicite de la fonction singulière	59
2.6	Validation numérique	59
2.7	Équation de Galbrun régularisée.	63
2.7.1	Position du problème.	63
2.7.2	Solution dans l'espace Fourier-Laplace.	63
2.7.3	Validation numérique	64

Nous nous intéressons dans ce chapitre à calculer analytiquement, par la méthode de CAGNIARD-DE HOOP, le tenseur de GREEN de l'équation de GALBRUN dans un milieu infini occupé par un fluide parfait homogène. Plus précisément on cherche la solution analytique de cette équation quand le second membre est une source ponctuelle en espace et en temps. Nous constatons que ce tenseur de GREEN admet une singularité forte en un point situé à l'avant de la source, convecté par l'écoulement (qui n'est pas localement intégrable). Nous montrons alors que l'on peut exprimer la partie singulière de ce tenseur comme dérivée (au sens de distribution), d'une fonction localement intégrable. Ceci est finalement exploité numériquement

2.1 Introduction

2.1.1 Position du problème

On modélise la propagation des ondes acoustiques dans un fluide parfait en écoulement de vitesse \mathbf{v}_0 par la perturbation *lagrangienne* du déplacement d'une particule de fluide qui vérifie l'équation vectorielle suivante :

$$\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right)^2 \mathbf{u} - \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+. \quad (2.1.1)$$

Si l'écoulement est parallèle, c'est à dire $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$, l'équation (2.1.1) devient :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+. \quad (2.1.2)$$

où D/Dt est la dérivée convective définie par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Le but de ce chapitre est de trouver analytiquement une solution causale ($\mathbf{u}(\cdot, t) = 0, \forall t < 0$) de l'équation (2.1.1). Pour ce faire introduisons la notion de solution fondamentale pour les problèmes vectoriels

2.1.2 Notion de solution fondamentale

Nous supposons maintenant que le milieu est excité à l'instant initial $t' = 0$ par une source ponctuelle unitaire localisée au point $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s)$ dans la direction \mathbf{e}_d ($d = x$ ou y) :

$$\mathbf{f} = \delta_{x_s} \delta_{y_s} \delta_{t'} \mathbf{e}_d$$

δ_a étant la masse de Dirac au point a définie pour toute fonction $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ par :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas la réponse en déplacement à cette force unidirectionnelle, vérifie l'équation suivante :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \mathbf{u}^d}{Dt^2} - \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}^d) = \delta_{x_s} \delta_{y_s} \delta_{t'} \mathbf{e}_d, \quad \text{pour } d = x \text{ ou } y. \quad (2.1.3)$$

En utilisant la linéarité du problème, on peut montrer facilement que la solution associée à l'équation de Galbrun (2.1.2) pour une source impulsionnelle ayant une direction quelconque $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y$ est de la forme suivante :

$$\mathbf{u}^a = a_x \mathbf{u}^x + a_y \mathbf{u}^y$$

Pour alléger les notations nous allons introduire $\mathcal{G} = (G_{ij})_{ij}$ le tenseur de Green de l'équation de Galbrun qui caractérise la réponse impulsionnelle du fluide (en prenant $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ et $t' = 0$). Ce tenseur \mathcal{G} satisfait alors la causalité et l'équation suivante :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \mathcal{G}}{Dt^2} - \nabla (\text{div } \mathcal{G}) = \delta(x)\delta(y)\delta(t) \mathcal{I}_2 \quad (2.1.4)$$

\mathcal{I}_2 est le tenseur unité d'ordre 2.

En utilisant la convention d'EINSTEIN (chaque fois qu'un indice est répété, la somme est effectuée sur tous les termes en faisant varier les indices de 1 à 2) on peut récrire l'équation (2.1.4) sous cette forme :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 G_{ij}}{Dt^2} - \partial_i (\partial_k G_{kj}) = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta_{ij} \quad \forall \quad i, j = 1, 2 \quad (2.1.5)$$

δ_{ij} est le symbole de KRONECKER¹.

Si la solution fondamentale est connue, la solution de (2.1.2) peut être obtenue par une simple convolution en espace et en temps.

$$u_j(x, y, t) = \mathcal{G} \underset{*}{x', y', t'} \mathbf{f} = \int_{\mathbb{R}^3} G_{jk}(x', y', t') f_k(x - x', y - y', t - t') dx' dy' dt', \forall j = 1, 2 \quad (2.1.6)$$

* désigne le produit de convolution.

2.1.3 Méthode de Cagniard-de Hoop

Présentation de la méthode

La méthode de CAGNIARD-DE HOOP (1939) [8, 10, 31] est une technique mathématique qui s'applique aux problèmes transitoires de propagation d'ondes (acoustiques, élastodynamiques) dans des milieux non dispersifs (homogène, dioptré). L'avantage de la méthode de CAGNIARD-DE HOOP est d'éviter de calculer des transformées intégrales inverses : en termes plus techniques, l'intégrale de FOURIER est modifiée, au moyen d'une déformation du contour d'intégration dans le plan complexe, sous la forme d'une transformée de LAPLACE directe, de sorte que la transformée de LAPLACE inverse est retirée par identification.

On peut trouver divers exemples d'applications de la méthode de CAGNIARD-DE HOOP dans [19, 32–35, 46, 48].

Étapes principales d'application de la méthode

Soit \mathcal{F} la transformation de FOURIER dans une direction homogène du milieu (par exemple la direction Ox) et \mathcal{L} la transformation de LAPLACE en temps. La solution de l'équation (2.1.2) sera notée dans l'espace spectral (espace de FOURIER-LAPLACE) :

$$\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{F} \mathcal{L} (\mathcal{G})$$

¹ $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Les différentes étapes de la méthode consistent à :

1. transformer l'équation (2.1.5) vérifiée par le tenseur \mathcal{G} en une équation différentielle ordinaire suivant la variable spatiale y vérifiée par $\widehat{\mathcal{G}}$.
2. Calculer la solution $\widehat{\mathcal{G}}(k, y, s)$ analytiquement dans l'espace des transformées.
3. On applique la transformée de FOURIER inverse à $\widehat{\mathcal{G}}$, on obtient alors la solution dans l'espace de LAPLACE sous la forme intégrale suivante :

$$\widetilde{\mathcal{G}}(x, y, s) = \mathcal{L}(\mathcal{G})(x, y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k, s) \exp(-\kappa(k, s, x, y)) dk.$$

où g et κ sont deux fonctions homogènes en k et s et le degré d'homogénéité de κ est égal à 1 (sinon la méthode ne s'applique plus).

4. On utilise le fait que g et κ sont homogènes en k et s , pour introduire la transformation de de Hoop $q = i c_0 k / s$ et on obtient ($m \in \mathbb{Z}$ est le degré d'homogénéité de g) :

$$\widetilde{\mathcal{G}}(x, y, s) = s^m \int_{-i\infty}^{i\infty} A(q) \exp(-s \tau(q, x, y)) dq. \quad (2.1.7)$$

5. Cette étape consiste à déformer le contour d'intégration dans le plan complexe des q de sorte que l'intégrale (2.1.7) coïncide avec une transformation de LAPLACE. Plus précisément pour un point fixé (x, y) dans le plan physique, on cherche un chemin d'intégration γ dans le plan complexe des q tel que la fonction $\tau(q, x, y)$ soit réelle positive.
6. Finalement, on applique le théorème de LERCH [55] pour déduire la solution dans le domaine espace-temps.

THÉORÈME 2.1 (THÉORÈME DE LERCH) *Si F_1 et F_2 sont deux fonctions ayant la même transformée de LAPLACE, ie.*

$$\mathcal{L}[F_1(t)] = \mathcal{L}[F_2(t)] = f(s)$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$, alors on a :

$$F_1(t) = F_2(t), \quad \forall t > 0.$$

2.2 Résultat principal

Nous allons utiliser les notations suivantes pour présenter les résultats principaux de ce chapitre :

$$D(x, y, t) := c_0^2(1 - M^2)(t - t_a(x, y))(t + t_b(x, y)),$$

avec

$$t_a(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + (1 - M^2)y^2} - Mx}{c_0(1 - M^2)} \quad \text{et} \quad t_b(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + (1 - M^2)y^2} + Mx}{c_0(1 - M^2)}$$

$$B(z) := \frac{z^2}{(1 - Mz)^2}, \quad C(z) = \frac{z \gamma(z)}{(1 - Mz)^2}, \quad \text{où } \gamma^2(z) = (1 - Mz)^2 - z^2$$

Soient Ψ et Φ deux fonctions définies respectivement par :

$$\Phi(x, y, t) = \frac{1}{\pi M} \cosh^{-1} \left(\frac{c_0 t}{\sqrt{(x - c_0 M t)^2 + y^2}} \right) \text{H}(t - t_a(x, y))$$

$$\Psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi M^2} \left(t \cosh^{-1} \left(\frac{c_0 t}{\sqrt{(x - c_0 M t)^2 + y^2}} \right) - \sqrt{D(x, y, t)} \right) \text{H}(t - t_a(x, y))$$

THÉORÈME 2.2 Pour un écoulement subsonique, la solution causale \mathcal{G} du problème (2.1.5) est donnée au sens des distributions sous la forme suivante :

$$\mathcal{G}(x, y, t) = \mathcal{G}^H(x, y, t) + \mathcal{G}^S(x, y, t) + \mathcal{G}^R(x, y, t) \quad (2.2.1)$$

1. \mathcal{G}^H correspond au phénomène hydrodynamique qui se manifeste par le transport des particules de fluide localisées sur l'axe Ox avec la même vitesse que l'écoulement :

$$\mathcal{G}^H(x, y, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{x}{M^2} \text{H}(x) \delta \left(t - \frac{x}{c_0 M} \right) \delta(y) \quad (2.2.2)$$

2. \mathcal{G}^S correspond à la partie singulière de la solution au voisinage du point $(c_0 M t, 0, t)$:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{11}^S(x, y, t) = \mathcal{G}_{22}^S(x, y, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ \mathcal{G}_{12}^S(x, y, t) = \mathcal{G}_{21}^S(x, y, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} \end{cases}$$

3. $\mathcal{G}^R(x, y, t)$ est la partie régulière :

$$\mathcal{G}^R(x, y, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + M^2 \end{bmatrix} \frac{c_0 \text{H}(t - t_a(x, y))}{2\pi \sqrt{D(x, y, t)}}$$

On désigne ici par H l'échelon de HEAVISIDE qui est défini par :

$$\text{H}(w) = \begin{cases} 1, & w > 0, \\ 0, & w < 0, \end{cases}$$

Nous rappelons ici que toutes les dérivées temporelles et spatiales sont définies au sens des distributions.

THÉORÈME 2.3 La solution causale \mathcal{G} du problème (2.1.5) peut être donnée loin de la zone singulière $\{ (v_0 t, 0, t) \}$ par :

$$\mathcal{G}(x, y, t) = \Re e \left[\begin{array}{cc} B(\vartheta^+(x, y, t)); & C(\vartheta^+(x, y, t)) \operatorname{sgn}(y) \\ C(\vartheta^+(x, y, t)) \operatorname{sgn}(y); & 1 - B(\vartheta^+(x, y, t)) \end{array} \right] \frac{c_0 \text{H}(t - t_a(x, y))}{2\pi \sqrt{D(x, y, t)}}, \quad \forall y \neq 0$$

avec

$$\vartheta^+(x, y, t) = \frac{c_0 t x - M y^2}{x^2 + (1 - M^2) y^2} + i \frac{|y| \sqrt{D(x, y, t)}}{x^2 + (1 - M^2) y^2}$$

REMARQUE 2.4 Lorsque $y \rightarrow 0$, la fonction $C(\vartheta^+(t)) \rightarrow 0$. Ce qui nous permet de vérifier la continuité de la composante G_{12} dans tout l'espace.

LEMME 2.1 Les fronts d'onde associés à l'équation de Galbrun pour un écoulement uniforme subsonique sont des cercles convectés par l'écoulement. Autrement dit ce sont les cercles de rayons $c_0 t$ et de centre mobile $(c_0 M t, 0)$ (voir figure 2.2.1)

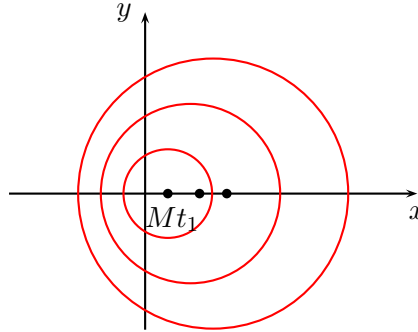


FIG. 2.2.1: Évolution des fronts d'onde au cours du temps ($M = 0.5$ et $c_0 = 1$)

2.3 Calcul dans le domaine spectral

Nous nous intéressons dans cette section à la démonstration du théorème (2.3) en utilisant les outils d'analyse complexe et la méthode de CAGNIARD-DE HOOP. Il nous est apparu utile de rappeler quelques définitions des transformations qu'on va utiliser dans la suite.

2.3.1 Définitions de la transformée de Fourier-Laplace

Transformations directes

La transformée de LAPLACE d'une fonction causale u est donnée par :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \int_0^{+\infty} u(x, y, t) e^{-st} dt \quad (2.3.1)$$

où s est le paramètre de LAPLACE, réel positif.

En appliquant à (2.3.1) une transformation de FOURIER partielle par rapport à la variable x , on obtient :

$$\hat{u}(k, y, s) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x, y, s) e^{-ikx} dx \quad (2.3.2)$$

où k est le paramètre de FOURIER, réel.

Transformations inverses

Une solution dans le domaine physique est obtenue, à partir d'une solution transformée dans l'espace de FOURIER-LAPLACE, en utilisant les transformées inverses, de FOURIER d'abord puis de LAPLACE. Les transformations inverses de FOURIER et de LAPLACE sont définies respectivement par :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k, y, s) e^{ikx} dk, \quad u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{u}(x, y, s) e^{st} ds. \quad (2.3.3)$$

où σ est un paramètre complexe tel que $\Re \sigma > 0$.

2.3.2 Résolution dans l'espace de Fourier-Laplace

Si on applique la transformation de FOURIER-LAPLACE à (2.1.5), et en remarquant que les symboles des opérateurs : $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$ et D/Dt sont données respectivement par s , ik et $s+ikv_0$, on trouve un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 facile à résoudre :

$$\left\{ \left(\frac{s}{c_0} + i M k \right)^2 + k^2 \right\} \widehat{G}_{12} - i k \frac{d \widehat{G}_{22}}{dy} = 0 \quad (2.3.4a)$$

$$\left(\frac{s}{c_0} + i M k \right)^2 \widehat{G}_{22} - i k \frac{d \widehat{G}_{12}}{dy} - \frac{d^2 \widehat{G}_{22}}{dy^2} = \delta(y) \quad (2.3.4b)$$

$$\left\{ \left(\frac{s}{c_0} + i M k \right)^2 + k^2 \right\} \widehat{G}_{11} - i k \frac{d \widehat{G}_{21}}{dy} = \delta(y) \quad (2.3.5a)$$

$$\left(\frac{s}{c_0} + i M k \right)^2 \widehat{G}_{21} - i k \frac{d \widehat{G}_{11}}{dy} - \frac{d^2 \widehat{G}_{21}}{dy^2} = 0 \quad (2.3.5b)$$

où $M = v_0/c_0$ est le nombre de MACH.

Si on note :

$$\kappa^2(k, s) = \left(\frac{s}{c_0} + i M k \right)^2 + k^2 \quad (2.3.6)$$

les équations (2.3.4a)-(2.3.4b)-(2.3.5a)-(2.3.5b) se réécrivent sous cette forme :

$$\kappa^2(k, s) \widehat{G}_{12} - i k \frac{d \widehat{G}_{22}}{dy} = 0 \quad (2.3.7a)$$

$$(\kappa^2(k, s) - k^2) \widehat{G}_{22} - i k \frac{d \widehat{G}_{12}}{dy} - \frac{d^2 \widehat{G}_{22}}{dy^2} = \delta(y) \quad (2.3.7b)$$

$$\kappa^2(k, s) \widehat{G}_{11} - i k \frac{d \widehat{G}_{21}}{dy} = \delta(y) \quad (2.3.8a)$$

$$(\kappa^2(k, s) - k^2) \widehat{G}_{21} - i k \frac{d \widehat{G}_{11}}{dy} - \frac{d^2 \widehat{G}_{21}}{dy^2} = 0 \quad (2.3.8b)$$

En introduisant respectivement (2.3.7a) et (2.3.8a) dans (2.3.7b) et (2.3.8b) on trouve :

$$(\kappa^2(k, s) - k^2) \widehat{G}_{22} - \frac{\kappa^2(k, s) - k^2}{\kappa^2(k, s)} \frac{d^2 \widehat{G}_{22}}{dy^2} = \delta(y) \quad \iff \quad (2.3.9)$$

$$- \frac{d^2 \widehat{G}_{22}}{dy^2} + \kappa^2(k, s) \widehat{G}_{22} = \frac{\kappa^2(k, s)}{\kappa^2(k, s) - k^2} \delta(y) \quad (2.3.10)$$

$$(\kappa^2(k, s) - k^2) \widehat{G}_{21} - \frac{\kappa^2(k, s) - k^2}{\kappa^2(k, s)} \frac{d^2 \widehat{G}_{21}}{dy^2} = \frac{i k}{\kappa^2(k, s)} \delta'(y) \quad \iff \quad (2.3.11)$$

$$- \frac{d^2 \widehat{G}_{21}}{dy^2} + \kappa^2(k, s) \widehat{G}_{21} = \frac{i k}{\kappa^2(k, s) - k^2} \delta'(y) \quad (2.3.12)$$

Finalement nous obtenons la solution de (2.3.10) sous la forme :

$$\widehat{G}_{22}(k, y, s) = A(k, s) e^{-\kappa(k, s)|y|} \quad (2.3.13)$$

où $A(k, s)$ est une fonction à déterminer et $\kappa(k, s)$ est la racine carrée complexe donnée par :

$$\kappa(k, s) = \sqrt[4]{\left(\frac{s}{c_0} + i M k\right) + k^2}$$

La fonction $\sqrt[4]{\cdot}$ est définie de la manière classique suivante :

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\cdot} : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = \rho e^{i\theta} &\longmapsto \sqrt[4]{\rho} e^{i\theta/2}, \quad \theta \in]-\pi, \pi[. \end{aligned}$$

La coupure de $\sqrt[4]{z}$ dans le plan complexe sera donc la demi-droite définie par $\{z \in \mathbb{R}_-\}$ (voir la figure 2.3.1).

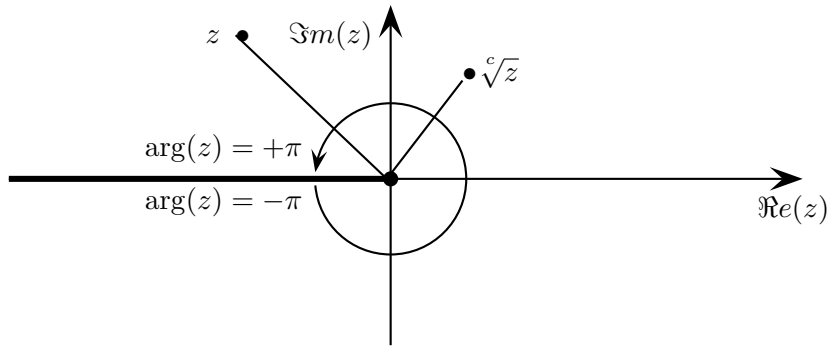


FIG. 2.3.1: Détermination de la fonction $z \mapsto z^{\frac{1}{2}}$

Avec ce choix, on vérifie que la solution de l'équation (2.3.10) tend vers 0, lorsque y tend vers l'infini.

Pour un écoulement subsonique v_0 c'est à dire $|v_0| < c_0$ (ie. $|M| < 1$), la coupure de la fonction κ dans le plan complexe des k sera la réunion de deux demi-droites (voir figure 2.3.2) :

$$\Im m k \in]-\infty; -\frac{\Re e(s)}{c_0(1-M)} [\cup] \frac{\Re e(s)}{c_0(1+M)}; +\infty [, \quad \forall \Re e(s) > 0$$

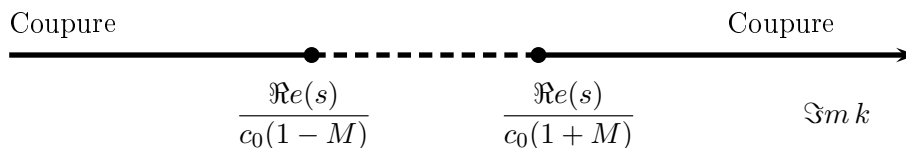


FIG. 2.3.2: Détermination de la fonction $k \mapsto \kappa(k, s)$

En dérivant (4.3.2), on trouve que :

$$\frac{d\widehat{G}_{22}}{dy}(k, y, s) = -\operatorname{sgn}(y)\kappa(k, s) A(k, s) e^{-\kappa(k, s)|y|}$$

où la fonction " $\text{sgn}(y)$ " est définie par :

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} +1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

et l'on doit avoir

$$\left[\left[\frac{d\widehat{G}_{22}}{dy} \right] \right]_{y=0} = -\frac{\kappa^2(k, s)}{\kappa^2(k, s) - k^2}$$

Donc

$$A(k, s) = \frac{1}{2} \frac{\kappa(k, s)}{\kappa^2(k, s) - k^2}$$

De la même manière on trouve que les solutions du système (2.3.8a)-(2.3.8b) vérifient :

$$\widehat{G}_{21}(k, y, s) = \frac{ik}{\kappa^2(k, s)} \frac{d\widehat{G}_{22}}{dy}(k, y, s)$$

$$\widehat{G}_{11}(k, y, s) = \frac{\delta(y)}{\kappa^2(k, s)} + \frac{ik}{\kappa^2(k, s)} \frac{d\widehat{G}_{21}}{dy}(k, y, s)$$

D'après (2.3.10) et (2.3.12), on obtient

$$\widehat{G}_{21}(k, y, s) = \widehat{G}_{12}(k, y, s) \quad (2.3.14)$$

$$\widehat{G}_{11}(k, y, s) = \frac{\delta(y)}{\kappa^2(k, s) - k^2} - \frac{k^2}{\kappa^2(k, s)} \widehat{G}_{22}(k, y, s) \quad (2.3.15)$$

Dans l'espace FOURIER-LAPLACE, les composantes du tenseur de GREEN \widehat{G}_{ij} ($i, j = 1, 2$) sont données finalement par :

$$\widehat{G}_{11}(k, y, s) = \frac{\delta(y)}{\kappa^2(k, s) - k^2} - \frac{k^2}{2\kappa(s, k)} \frac{e^{-\kappa(k, s)|y|}}{\kappa^2(k, s) - k^2},$$

$$\widehat{G}_{12}(k, y, s) = \widehat{G}_{21}(k, y, s) = \mp \frac{ik}{2} \frac{e^{-\kappa(k, s)|y|}}{\kappa^2(k, s) - k^2}, \quad \forall \pm y > 0,$$

$$\widehat{G}_{22}(k, y, s) = \frac{\kappa(k, s)}{2} \frac{e^{-\kappa(k, s)|y|}}{\kappa^2(k, s) - k^2}$$

ou sous la forme matricielle suivante :

$$\widehat{\mathcal{G}}(k, y, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\delta(y) e^{\kappa(k, s)|y|} - \frac{k^2}{\kappa(s, k)}; & -ik \text{sgn}(y) \\ -ik \text{sgn}(y); & \kappa(k, s) \end{pmatrix} \frac{e^{-\kappa(k, s)|y|}}{\kappa^2(k, s) - k^2} \quad (2.3.16)$$

Remarquons ici que le tenseur de Green de l'équation de Galbrun est un tenseur symétrique.

2.3.3 Résolution dans l'espace de Laplace

En appliquant la transformation de FOURIER inverse en x à (2.3.16), on obtient la transformée de LAPLACE du tenseur dans le domaine spatial.

$$\tilde{G}_{11}(x, y, s) = \frac{\delta(y)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} dk}{\kappa^2(k, s) - k^2} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2 e^{-\kappa(k, s)|y|+ikx}}{\kappa(k, s)(\kappa^2(k, s) - k^2)} dk \quad (2.3.17)$$

$$\tilde{G}_{12}(x, y, s) = \frac{\text{sgn}(y)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-ik}{\kappa^2(k, s) - k^2} e^{-\kappa(k, s)|y|+ikx} dk \quad (2.3.18)$$

$$\tilde{G}_{22}(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa(k, s)}{\kappa^2(k, s) - k^2} e^{-\kappa(k, s)|y|+ikx} dk \quad (2.3.19)$$

On pose alors $k = iqs/c_0$, (q est une variable imaginaire pure). Ce choix de changement de variable nous permet de ne pas faire apparaître de coefficients imaginaires dans les intégrands. On peut réécrire (2.3.17)-(2.3.18)-(2.3.19) sous les formes suivantes :

$$\tilde{G}_{11}(x, y, s) = \frac{\delta(y) c_0}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-sq/c_0}}{(1 - Mq)^2} dq + \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{q^2}{\gamma(q)(1 - Mq)^2} e^{-\frac{s}{c_0}[\gamma(q)|y|+qx]} dq$$

$$\tilde{G}_{12}(x, y, s) = \frac{\text{sgn}(y)}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{q}{(1 - Mq)^2} e^{-\frac{s}{c_0}[\gamma(q)|y|+qx]} dq$$

$$\tilde{G}_{22}(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\gamma(q)}{(1 - Mq)^2} e^{-\frac{s}{c_0}[\gamma(q)|y|-qx]} dq$$

avec

$$\gamma(q) = \left((1 - Mq)^2 - q^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou bien sous la forme matricielle :

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, y, s) = \tilde{\mathcal{G}}^A(x, y, s) + \tilde{\mathcal{G}}^H(x, y, s) \quad (2.3.20)$$

où

$$\tilde{\mathcal{G}}^A(x, y, s) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dq}{(1 - Mq)^2} \begin{pmatrix} \frac{q^2}{\gamma(q)} & q \text{sgn}(y) \\ q \text{sgn}(y) & \gamma(q) \end{pmatrix} e^{-\frac{s}{c_0}[\gamma(q)|y|+qx]} \quad (2.3.21)$$

et

$$\tilde{\mathcal{G}}^H(x, y, s) = \frac{\delta(y) c_0}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{e^{-sq/c_0}}{(1 - Mq)^2} dq \quad (2.3.22)$$

Nous nous intéressons maintenant à calculer seulement la transformée de Laplace inverse de $\tilde{\mathcal{G}}^A(x, y, s)$ par la méthode de Cagniard-de Hoop. En revanche, on utilise la méthode classique de résidu pour inverser $\tilde{\mathcal{G}}^H(x, y, s)$.

Calcul de $\mathcal{G}^H(x, y, t)$

En utilisant le théorème des résidus, on trouve que pour $0 < M < 1$

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{2\pi i s} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-s x q/c_0}}{(1 - Mq)^2} dq &= \frac{x}{M^2} \text{H}(x) \exp\left(-\frac{s x}{c_0 M}\right) \\ &= \frac{x}{M^2} \text{H}(x) \int_0^{+\infty} \delta\left(t - \frac{x}{c_0 M}\right) e^{-s t} dt \\ &= \frac{x}{M^2} \text{H}(x) \mathcal{L}_t\left(\delta\left(\cdot - \frac{x}{c_0 M}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression de \mathcal{G}^H dans le domaine physique :

$$\boxed{\mathcal{G}^H(x, y, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{x}{M^2} \text{H}(x) \delta\left(t - \frac{x}{c_0 M}\right) \delta(y)}$$

2.4 Retour dans le domaine physique

2.4.1 Contours de Cagniard-de Hoop

En suivant la démarche indiquée dans la sous section 2.1.3, nous devons maintenant pour un point fixé (x, y) du plan physique déterminer un chemin dans le plan complexe des q telle que la fonction $\tau(q)$ définie par :

$$c_0 \tau(q) = \gamma(q)|y| + q x \quad (2.4.1)$$

soit réelle positive.

Pour des raisons expliquées plus loin (liées à la singularité de la solution au point $y = 0$ et $x = c_0 M t$), nous supposons dans la suite que $y \neq 0$.

Le contour de CAGNIARD est une courbe du plan complexe de la variable q définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \{q \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(\tau(q)) \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \Im(\tau(q)) = 0\} \\ &:= \left\{q \in \mathbb{C} \text{ tel que } \exists \tau \in \mathbb{R}_+ \mid (1 - Mq)^2 - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} |y| + qx = c_0 \tau \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$q \in \Gamma \implies P(q) = ((1 - M^2) y^2 + x^2) q^2 + 2(M y^2 - c_0 \tau x) q - (y^2 - c_0^2 \tau^2) \geq 0 \quad (2.4.2)$$

Le discriminant réduit de ce polynôme est lui même un polynôme en τ qui sera noté dans toute la suite par :

$$\begin{aligned} \Delta' &= -y^2 \underbrace{[(1 - M^2) c_0^2 \tau^2 + 2 M x c_0 \tau - y^2 - x^2]}_{D(x, y, \tau)} \\ &= -y^2 \times D(x, y, \tau) \end{aligned}$$

Pour alléger la notation nous définissons le paramètre adimensionné :

$$\mu \triangleq \sqrt{1 - M^2}.$$

On étudie maintenant le signe de la fonction $\tau \mapsto D(x, y, \tau)$ dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Cette fonction est de la forme :

$$D(x, y, \tau) = c_0^2 \mu^2 (\tau - \tau^-)(\tau - \tau^+)$$

avec

$$\tau^\pm = \frac{\pm \sqrt{x^2 + \mu^2 y^2} - Mx}{c_0 \mu^2}$$

On a donc

$$\sqrt{D(x, y, \tau)} = \begin{cases} \sqrt{D(x, y, \tau)} & \text{si } \tau \geq \tau^+ > 0 \\ i \sqrt{|D(x, y, \tau)|} & \text{si } 0 \leq \tau \leq \tau^+ \end{cases}$$

et les racines du polynôme (2.4.2) sont :

$$q_r^\pm = \frac{c_0 \tau x - My^2 \pm |y| \sqrt{|D(x, y, \tau)|}}{x^2 + \mu^2 y^2}, \quad \text{si } 0 \leq \tau \leq \tau^+$$

$$q_c^\pm = \frac{c_0 \tau x - My^2}{x^2 + \mu^2 y^2} \pm i \frac{|y| \sqrt{D(x, y, \tau)}}{x^2 + \mu^2 y^2}, \quad \text{si } \tau > \tau^+$$

Posons :

$$\Upsilon^\pm := \left\{ v^\pm(\tau) = q_r^\pm = \frac{c_0 \tau x - My^2 \pm |y| \sqrt{|D(x, y, \tau)|}}{x^2 + \mu^2 y^2}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau^+ \right\}$$

et

$$\Gamma^\pm := \left\{ \vartheta^\pm(\tau) = q_c^\pm = \frac{c_0 \tau x - My^2}{x^2 + \mu^2 y^2} \pm i \frac{|y| \sqrt{D(x, y, \tau)}}{x^2 + \mu^2 y^2}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau^+ \right\}$$

On déduit alors que le contour Γ est inclu dans

$$\Gamma \subset \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Upsilon^+ \cup \Upsilon^-$$

Nous vérifions l'inclusion inverse, en montrant que les solutions du polynôme (2.4.2) sont a posteriori des solutions de l'équation (4.4.1). Enfin, on obtient :

$$\Gamma \equiv \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Upsilon^+ \cup \Upsilon^-$$

Nous verrons que τ^+ est le temps d'arrivée de l'onde au point (x, y) . C'est pourquoi nous le noterons dans toute la suite par τ_a ou $t_a(x, y)$. En particulier, $\mathcal{G}(x, y, t) = 0$ si $t < t_a(x, y)$.

On choisit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \frac{\rho}{\mu} \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in]-\pi; \pi[\text{ et } \rho \geq 0 \quad (2.4.3)$$

de sorte que

$$x^2 + \mu^2 y^2 = \rho^2.$$

REMARQUE 2.5 La relation entre les coordonnées (ρ, θ) et les coordonnées polaires standard (r, α) est donnée par :

$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \alpha}} \\ \sin \theta &= \frac{\mu \sin \alpha}{\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \alpha}} \\ \rho &= \sqrt{r^2 - Mx^2} \end{cases} \quad (2.4.4)$$

En particulier, si $M = 0$ on retrouve les coordonnées polaires standard ($\theta = \alpha$ et $\rho = r$).

Nous montrons que si $q \in \Gamma^\pm$, on a alors

$$\boxed{\frac{Y^2}{\sin^2 \theta} - \frac{\left(X + \frac{M}{1-M^2}\right)^2}{\cos^2 \theta} = -\frac{1}{(1-M^2)^2}} \quad (2.4.5)$$

avec $X = X(\tau) = \Re e(q)$ et $Y = Y(\tau) = \Im m(q)$.

DÉMONSTRATION : Par définition on sait que :

$$X(\tau) = \frac{c_0 M}{\mu^2} \sin^2 \theta - \frac{\tau}{\rho} \cos \theta \quad (2.4.6a)$$

$$Y(\tau) = \pm \frac{|\sin \theta|}{\mu \rho} \sqrt{D(x, y, \tau)} \quad (2.4.6b)$$

Pour établir la relation (2.4.5), il faut penser à éliminer le paramètre τ dans l'une des équations du système (2.4.6). En effet, si on choisit par exemple la première équation (2.4.6a), on peut écrire :

$$c_0 \tau = \left[\frac{M}{\mu^2} \sin^2 \theta + X(\tau) \right] \frac{\rho}{\cos \theta} \quad (2.4.7)$$

Après avoir rappelé la définition de la forme quadratique

$$D(x, y, \tau) = c_0^2 \mu^2 \tau^2 + 2c_0 M \rho \tau \cos \theta - \frac{1 - M^2 \cos^2 \theta}{\mu^2} \rho^2,$$

on introduit (2.4.7) dans le terme droit de l'équation (2.4.6b), il vient :

$$\begin{aligned} \mu^2 \rho^2 \frac{Y^2(\tau)}{\sin^2 \theta} &= \mu^2 \left[\frac{M}{\mu^2} \sin^2 \theta + X(\tau) \right]^2 \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta} + 2M \rho \left[\frac{M}{\mu^2} \sin^2 \theta + X(\tau) \right] - \frac{1 - M^2 \cos^2 \theta}{\mu^2} \rho^2 \\ &= \mu^2 \rho^2 \frac{X^2}{\cos^2 \theta} + 2\rho^2 M \frac{X}{\cos^2 \theta} + \frac{\rho^2 M^2}{\mu^2} \left[\frac{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right] - \frac{\rho^2}{\mu^2} \\ &= \mu^2 \rho^2 \frac{X^2}{\cos^2 \theta} + 2\rho^2 M \frac{X}{\cos^2 \theta} + \frac{\rho^2 M^2}{\mu^2} - \frac{\rho^2}{\mu^2} \\ &= \mu^2 \rho^2 \left(\frac{\left(X + \frac{M}{\mu^2}\right)^2}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\mu^4} \right) \end{aligned}$$

en remplaçant μ par sa définition $\sqrt{1 - M^2}$, on obtient finalement :

$$\frac{Y^2(\tau)}{\sin^2 \theta} = \frac{\left(X + \frac{M}{1-M^2}\right)^2}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{(1 - M^2)^2}, \quad \text{d'où le résultat.}$$

■

Dans le plan complexe l'équation (2.4.5) décrit une hyperbole. Les formules (2.4.6a,2.4.6b) donnent une τ -paramétrisation de cette hyperbole, c'est-à-dire en fonction du paramètre τ . Lorsque $\tau = \tau_a = (\sqrt{x^2 + \mu^2 y^2} - Mx)/(c_0 \mu^2)$ la partie imaginaire de ϑ^\pm est nulle et le sommet de l'hyperbole Γ^\pm est donné à cet instant par :

$$\vartheta(\tau_a) = q_a = \frac{c_0 \tau_a x - M y^2}{x^2 + \mu^2 y^2} = \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{x}{\rho} - M \right)$$

1^{er} cas : $0 < \cos \theta < M$ le contour de Cagniard-de Hoop $\Gamma := \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ est une branche hyperbolique dont le sommet est situé sur la demi droite des réels négatifs.

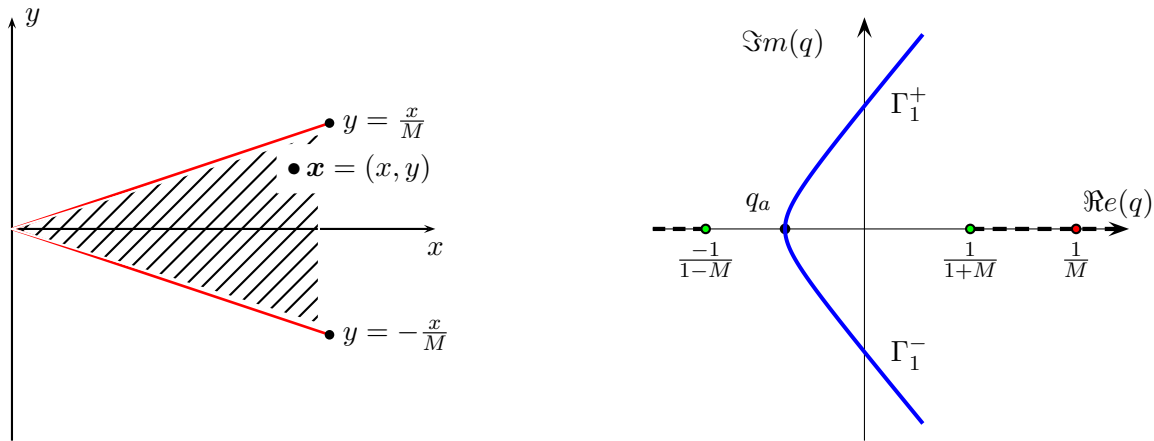


FIG. 2.4.1: Contour de CAGNIARD-DE HOOP lorsque $0 < \cos \theta < M$.

2^{ème} cas : $\cos \theta > M > 0$, dans ce cas Γ^+ (respectivement Γ^-) est la partie d'une hyperbole située dans le demi plan $X \geq 0$ et $Y \geq 0$ ($X \geq 0$ et $Y \leq 0$)

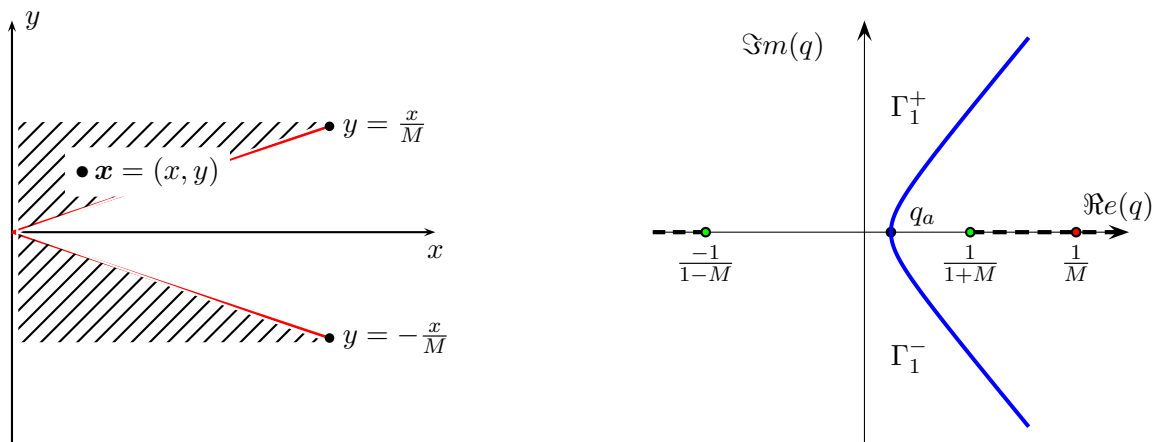


FIG. 2.4.2: Contour de CAGNIARD-DE HOOP lorsque $\cos \theta > M > 0$.

3^{ème} cas : $\cos(\theta) < 0$, on montre de même que $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ est une branche située dans le plan $X < 0$.

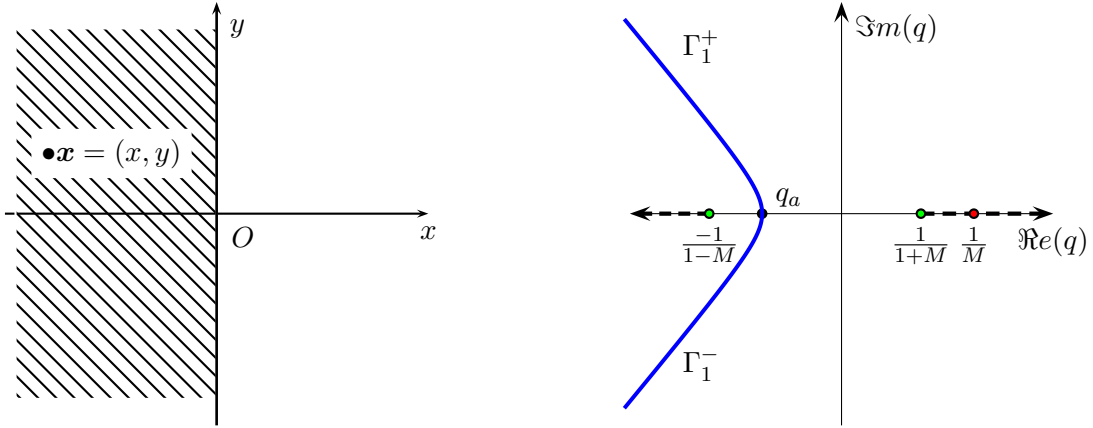


FIG. 2.4.3: Contour de CAGNIARD-DE HOOP lorsque $\cos \theta \leq 0$ ($x \leq 0$).

2.4.2 Retour au domaine temporel

Nous avons besoin d'introduire quelques notations. On note Ξ et \mathcal{H} , deux tenseurs définis par :

$$\tilde{\mathcal{G}}^A(x, y, s) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mathcal{H}(q, y) e^{-\frac{q}{c_0}[\gamma(q)|y| - qx]} dq \equiv \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Xi(q, x, y, s) dq \quad (2.4.8)$$

Notre objectif dans cette section est de trouver des fonctions g_{ij} satisfaisant cette égalité :

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Xi_{ij}(q, x, y, s) dq = \int_0^{+\infty} g_{ij}(x, y, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \text{ pour } \Re e(s) \geq 0 \text{ et } i, j = 1, 2. \quad (2.4.9)$$

où Ξ_{ij} sont les composantes du tenseur Ξ .

Pour ce faire nous allons utiliser les outils d'analyse complexe pour déterminer la solution.

D'après l'expression (2.3.21), nous remarquons que les composantes du tenseur $\Xi(q, x, y, s)$ admettent un pôle d'ordre 2 en $q = 1/M$. Ce pôle est relié au mode hydrodynamique. Seul la première composante admet 3 pôles dont deux sont des points de branchement de la coupure. Ces pôles sont tous situés sur l'axe réel.

$$q_1 = \frac{1}{M-1}, \quad q_2 = \frac{1}{1+M} \text{ et } q_3 = \frac{1}{M}$$

On définit alors les courbes suivantes du plan complexe des q . Soit $R > 0$, on note

$\mathcal{D}(\mathbf{0}, R)$ le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R .

$\mathcal{C}(\mathbf{0}, R)$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R .

On pose :

$$\Gamma^\pm(R) := \Gamma^\pm \cap \mathcal{D}(\mathbf{0}, R)$$

$$M^\pm(R) = \Gamma^\pm \cap \mathcal{C}(\mathbf{0}, R)$$

On définit par $\mathcal{A}^\pm(R)$ les arcs du cercle de centre $(0, 0)$, de rayon R et d'angle $\phi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ joignant les points $(\pm R, 0)$ et $M^\pm(R)$. On considère :

$$CI(R) = [-iR; iR] \cup \mathcal{A}^+(R) \cup \Gamma^+(R) \cup \Gamma^-(R) \cup \mathcal{A}^-(R)$$

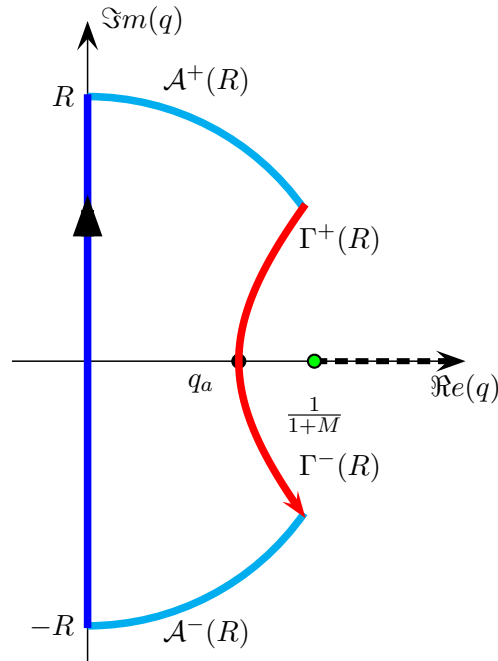


FIG. 2.4.4: Contour d'intégration fermé dans le q -plan pour $\cos \theta > M > 0$

Pour des valeurs de τ inférieures à une valeur seuil τ_a , le contour Γ est réel, à partir de cette valeur ce contour devient complexe, le point de changement de nature est noté par $q_a(x) = q(x, y, \tau = \tau_a)$. La partie réelle du contour est symétrique par rapport à l'axe des réel et pour une même valeur de τ on a deux points du contour ayant la même partie imaginaire. Le tenseur Ξ est une fonction holomorphe dans le contour fermé $CI(R)$ donc elle vérifie les hypothèses du théorème de CAUCHY [2] :

$$\int_{CI(R)} \Xi(q, x, y, s) dq = 0$$

En vérifiant que $\lim_{|q| \rightarrow +\infty} q \Xi(x, y, q, s) = 0$ sur les arcs $\mathcal{A}^\pm(R)$ (pour un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > M|y|$), on déduit d'après le lemme de JORDAN [2, 41] que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{A}^\pm(R)} \Xi(q, x, y, s) dq = 0$$

En tenant compte des sens d'intégration indiqués sur la figure (2.4.4) on a

$$\int_{CI(R)} = \int_{-iR}^{iR} + \int_{\Gamma^+(R)} + \int_{\Gamma^-(R)} + \int_{\mathcal{A}^+(R)} + \int_{\mathcal{A}^-(R)}$$

En passant à la limite ($R \rightarrow +\infty$) on trouve que :

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Xi(q, x, y, s) dq = - \int_{\Gamma^+} \Xi(q, x, y, s) dq - \int_{\Gamma^-} \Xi(q, x, y, s) dq$$

Or on sait que la courbe Γ^\pm est paramétrée par la fonction $\vartheta^\pm(\tau)$ ie.

$$\int_{\Gamma^\pm} \Xi(q, x, y, s) dq = \mp \int_{\tau_a}^{+\infty} \Xi(\vartheta^\pm(\tau)) \frac{\partial \vartheta^\pm}{\partial \tau}(\tau) d\tau$$

En utilisant la symétrie du contour $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ par rapport à l'axe des réels et l'égalité suivante :

$$\Xi(\vartheta^-(\tau)) = -\overline{\Xi(\vartheta^+(\tau))}$$

on obtient finalement que :

$$\tilde{G}^A(x, y, \tau) = \int_{\tau_a}^{+\infty} \Xi(\vartheta^+(\tau)) \frac{\partial \vartheta^+}{\partial \tau}(\tau) d\tau + \int_{\tau_a}^{+\infty} \overline{\Xi(\vartheta^+(\tau))} \frac{\partial \vartheta^-}{\partial \tau}(\tau) d\tau \quad (2.4.10)$$

Il ne nous reste maintenant qu'à calculer $\partial \vartheta^\pm / \partial \tau$ en fonction de ϑ^\pm et de τ .

LEMME 2.2 *Pour tout $\tau > \tau_a$, la dérivée par rapport au temps de la fonction ϑ^\pm qui décrit le trajectoire du contour de Cagniard est donnée par :*

$$\boxed{\frac{\partial \vartheta^\pm}{\partial \tau} = \pm \frac{i c_0 \gamma(\vartheta^\pm)}{\sqrt{D(x, y, \tau)}} \text{ sur } \Gamma^\pm} \quad (2.4.11)$$

DÉMONSTRATION : On rappelle que ϑ^\pm s'écrit le long du contour Γ sous la forme suivante :

$$\vartheta^\pm(\tau) = \frac{c_0 \tau x - M y^2}{\rho^2} \pm i \frac{|y| \sqrt{D(x, y, \tau)}}{\rho^2}, \quad \tau_a < \tau < \infty \quad (2.4.12)$$

D'après l'équation (2.4.12) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta^\pm}{\partial \tau} &= \frac{c_0 x}{\rho^2} \pm i \frac{|y|}{\rho^2} \frac{D'(x, y, \tau)}{2\sqrt{D(x, y, \tau)}} \\ &= \frac{c_0 x}{\rho^2} \pm i \frac{|y|}{\rho^2} \frac{c_0^2 \mu^2 \tau + c_0 M x}{\sqrt{D(x, y, \tau)}} \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{D(x, y, \tau)}} \left\{ \frac{x \sqrt{D(x, y, \tau)}}{\rho^2} \pm i (c_0 \mu^2 \tau + M x) \frac{|y|}{\rho^2} \right\} \end{aligned}$$

En remplaçant $q = \vartheta^\pm(\tau)$ par (2.4.12) dans l'égalité suivante :

$$\gamma(q) = \frac{c_0 \tau}{|y|} - \frac{x}{|y|} q \quad \forall y \neq 0,$$

on obtient par ailleurs :

$$\gamma(\vartheta^\pm(\tau)) = \left\{ \mp \frac{i x \sqrt{D(x, y, \tau)}}{\rho^2} + (c_0 \mu^2 \tau + M x) \frac{|y|}{\rho^2} \right\}$$

On trouve donc enfin que :

$$\frac{\partial \vartheta^\pm}{\partial \tau} = \pm \frac{i c_0 \gamma(\vartheta^\pm)}{\sqrt{D(x, y, \tau)}} \text{ sur } \Gamma^\pm \quad (2.4.13)$$

■

D'après le résultat du lemme (2.2) et l'identité (2.4.10) nous avons :

$$\tilde{\mathcal{G}}^A(x, y, \tau) = - \int_{\tau_a}^{+\infty} 2 \Re e \left[\Xi(\vartheta^+(\tau)) \frac{i c_0 \gamma(\vartheta^+(\tau))}{\sqrt{D(x, y, \tau)}} \right] d\tau \quad (2.4.14)$$

Or $\Xi(\vartheta^+(\tau)) = 1/(4\pi i) \mathcal{H}(\vartheta^+(\tau)) \exp(-s\tau)$, donc l'expression (2.4.14) devient :

$$\tilde{\mathcal{G}}^A(x, y, \tau) = - \frac{c_0}{2\pi} \int_{\tau_a}^{+\infty} \Re e [\mathcal{H}(\vartheta^+(\tau)) \gamma(\vartheta^+)] \frac{e^{-s\tau}}{\sqrt{D(x, y, \tau)}} d\tau \quad (2.4.15)$$

D'après le théorème 2.1 de LERCH, on conclut que :

$$\mathcal{G}^A(x, y, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{si } \tau \leq \tau_a(x, y) \\ - \frac{c_0 \Re e [\mathcal{H}(\vartheta^+(\tau)) \gamma(\vartheta^+)]}{2\pi \sqrt{D(x, y, \tau)}}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4.16)$$

En remarquant que \mathcal{G} coïncide avec \mathcal{G}^A lorsque $y \neq 0$, le tenseur de GREEN dans l'espace physique (x, y, t) est donné sous la forme finale suivante :

$$\mathcal{G}(x, y, t) = \begin{pmatrix} B(x, y, t); & C(x, y, t) \operatorname{sgn}(y) \\ C(x, y, t) \operatorname{sgn}(y); & 1 - B(x, y, t) \end{pmatrix} \frac{c_0 \mathcal{H}(t - t_a(x, y))}{2\pi \sqrt{D(x, y, t)}}, \quad \forall y \neq 0$$

avec

$$B(x, y, t) = \Re e \left[\frac{\vartheta^+(t)^2}{(1 - M\vartheta^+(t))^2} \right], \quad C(x, y, t) = \Re e \left[\frac{\vartheta^+(t) \gamma(\vartheta^+(t))}{(1 - M\vartheta^+(t))^2} \right]$$

et

$$t_a(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + (1 - M^2)y^2} - Mx}{c_0(1 - M^2)}$$

Nous pouvons exprimer explicitement la fonction $B(x, y, t)$ en fonction des parties réelle et imaginaire de ϑ^+ .

$$B(x, y, t) = \frac{\frac{Y^2}{c_0^2} - (X - MY^2 - MX^2)^2}{(M^2Y^2 + (1 - MX)^2)^2} \quad (2.4.17)$$

où $X = \Re e(\vartheta^+)$ et $Y = \Im m(\vartheta^+)$. En revanche on ne peut pas avoir une expression explicite de la fonction C à cause de la racine carrée complexe $\gamma(\vartheta^+)$.

REMARQUE 2.6 Les composantes du tenseur \mathcal{G} sont toutes singulières au temps d'arrivée $\tau_a = (\rho(1 - M \cos \theta)/(c_0(1 - M^2)))$ mais cette singularité ne pose pas de problème sur le plan numérique parce qu'elle est intégrable (en temps).

REMARQUE 2.7 Nous avons représenté quelques contours d'intégration obtenus pour différentes valeurs de y (respectivement vert, magenta, bleu et rouge). Quand y tend vers 0, le contour tend vers la demi-droite $[\frac{1}{M+1}; +\infty]$. Le pôle $1/M$ sera détecté par le contour d'intégration lorsque le couple $(x, y) = (c_0 M t, 0)$. Au voisinage du point $(c_0 M t, 0)$, les coefficients du tenseur de Green augmentent rapidement, ce qui explique la forte singularité de la solution.

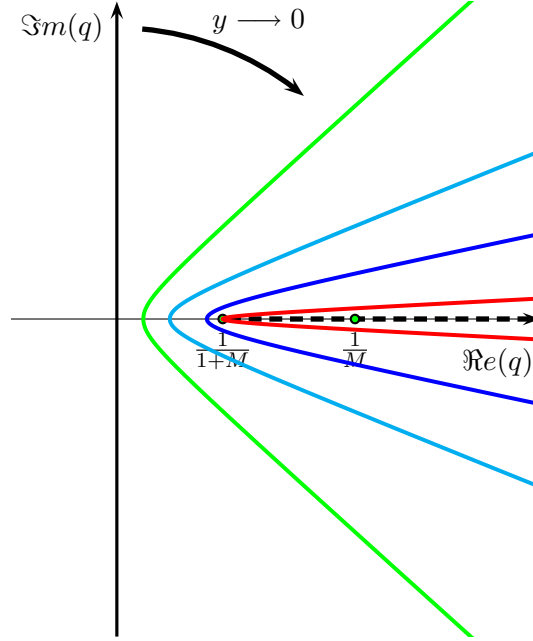


FIG. 2.4.5: Influence de y sur le contour d'intégration.

REMARQUE 2.8 Lorsque $y = 0$, la fonction

$$\frac{\vartheta^+(t) \gamma(\vartheta^+(t))}{(1 - M\vartheta^+(t))^2} = \pm i \frac{c_0 \tau \sqrt{c_0^2 \tau^2 - (x - v_0 \tau)^2}}{(x - v_0 \tau)^2}, \quad \forall x \neq 0$$

est imaginaire pure, par conséquent la composante $G_{12}(x, y, t)$ est nulle sur la droite $\{y = 0\}$.

2.4.3 Fronts d'ondes acoustiques

Soit t un instant donné. Nous cherchons à déterminer l'ensemble des points (x, y) dans le plan physique qui vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } t_a(x, y) = t\} \\ &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{\sqrt{x^2 + (1 - M^2)y^2} - Mx}{1 - M^2} = c_0 t \right\} \\ &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x - c_0 M t)^2 + y^2 = c_0^2 t^2\} \end{aligned}$$

\mathcal{E}_t est alors le cercle de centre $(c_0 M t, 0)$ et de rayon $c_0 t$.

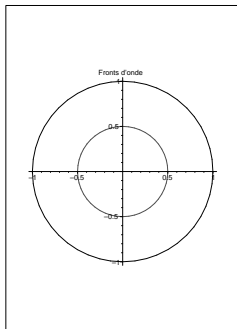


FIG. 2.4.6: fronts d'ondes sans écoulement ($M = 0$)

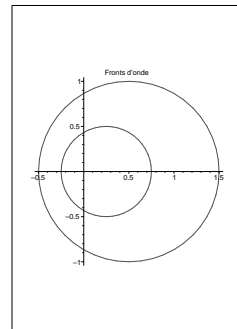


FIG. 2.4.7: Fronts d'ondes avec écoulement ($M = 0.5$)

2.5 Extraction de la singularité

2.5.1 Décomposition en parties régulière et singulière

L'idée de base pour extraire la singularité du tenseur de Green est de la décomposer en deux parties dont l'une est régulière et l'autre est singulière, autrement dit on va écrire toutes les composantes du tenseur \mathcal{G}^A dans l'espace physique sous cette forme :

$$G_{ij}^A = \underbrace{G_{ij}}_{G_{ij}^R} - S_{ij} + \underbrace{S_{ij}}_{G_{ij}^S}, \quad \forall i, j = 1, 2 \quad (2.5.1)$$

où G_{ij}^R et G_{ij}^S sont respectivement une fonction régulière et une distribution singulière, exprimée comme dérivée d'une fonction qui est localement intégrable.

Nous rappelons au lecteur que pour un instant t donné le tenseur de Green admet deux types de singularité dans l'espace physique, la première est située sur les fronts d'ondes, autrement dit lorsque le point $\mathbf{x} = (x, y)$ vérifie l'équation de cercle convecté par l'écoulement, la deuxième est localisée au centre de ce cercle *ie.* au point $(c_0 M t, 0)$.

Nous ne nous intéressons dans cette partie qu'à l'extraction de la deuxième singularité des composantes diagonales G_{ii} ($i = 1, 2$) de la solution fondamentale. Pour ce faire nous les écrivons tout d'abord dans l'espace spectral sous la forme suivante :

$$\tilde{G}_{ii}^A(x, y, s) = \tilde{G}_{ii}(x, y, s) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Xi_{ii}(q, x, y, s) dq, \quad \forall y \neq 0. \quad \forall i, j = 1, 2. \quad (2.5.2)$$

l'intégrand $\Xi_{ii}(q, x, y, s)$ est donné cette fois par :

$$\Xi_{ii}(q, x, y, s) = \frac{1}{4\pi i} \frac{A_{ii}(q)}{(1 - Mq)^2} \frac{1}{\gamma(q)} \exp(-s\tau(q)), \quad (2.5.3)$$

avec

$$A_{11}(q) = q^2, \quad A_{22}(q) = q^2 + (1 - Mq)^2 \quad (2.5.4)$$

Ensuite nous développons $A_{ii}(q)$ à l'ordre de la singularité (qui est égal à 2) au voisinage du point $q_s = 1/M$ *ie.*

$$A_{ii}(q) = A_{ii}(q_s) + (q - q_s)A'_{ii}(q) + (q - q_s)^2 R_{ii}(q). \quad (2.5.5)$$

où R_{ii} est une fonction régulière au voisinage de q_s .

Si nous injectons le développement (2.5.5) dans (2.5.3), nous obtenons :

$$\Xi_{ii}(q, x, y, s) = \frac{1}{4\pi i} \left[R_{ii}(q) + \frac{A'_{ii}(q_s)}{(q - q_s)} + \frac{A_{ii}(q_s)}{(q - q_s)^2} \right] \frac{dq}{M^2 \gamma(q)} \exp(-s\tau(q)), \quad (2.5.6)$$

$$= \Xi_{ii}^R(q) + \underbrace{\Xi_{ii}^{1,S}(q) + \Xi_{ii}^{2,S}(q)} \quad (2.5.7)$$

$$= \Xi_{ii}^R(q) + \Xi_{ii}^S(q) \quad (2.5.8)$$

D'après (2.5.2) et (2.5.7), on peut décomposer la fonction de Green sous la forme suivante :

$$G_{ii}(x, y, s) = G_{ii}^R(x, y, s) + G_{ii}^{1,S}(x, y, s) + G_{ii}^{2,S}(x, y, s) \quad (2.5.9)$$

où

- G_{ii}^R est une fonction régulière.
- $\tilde{G}_{ii}^{j,S}$ est une fonction ayant une singularité au voisinage de $(c_0 M t, 0, t)$

2.5.2 Calcul de la partie régulière

Après l'extraction de la singularité du tenseur de Green \mathcal{G} , nous nous intéressons au calcul de la partie régulière \mathcal{G}^R par la méthode de Cagniard-de Hoop. Nous rappelons au lecteur que \mathcal{G}^R est donné par :

$$G_{ii}^R(x, y, t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} R_{ii}(q) \frac{dq}{\gamma(q)} \exp(-s\tau(q)), \quad (2.5.10)$$

D'après les résultats de la sous-section (2.4.2), nous montrons sans difficulté que :

$$G_{ii}^R(x, y, t) = \frac{\Re e[R_{ii}(\vartheta^+(t))]}{\sqrt{D(x, y, t)}} \mathbf{H}(t - t_a(x, y)), \quad (2.5.11)$$

avec

$$R_{11}(q) = 1, \quad R_{22}(q) = 1 + M^2$$

2.5.3 Calcul de la partie singulière

La question qui se pose maintenant est : comment peut-on calculer $\tilde{G}^{j,S}$ indépendamment de l'expression (2.5.9) ? Autrement dit existe-il des fonctions semi explicites qui coïncident presque partout avec les fonctions singulières $G^{j,S}$ et qui admettent la même singularité ?

Nous introduisons pour cela une EDP dont la solution est de la forme $G^{j,S}$. Soient Ψ et Φ les solutions fondamentales respectivement associées aux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2}{Dt^2} - \Delta \right) \frac{D^2 \Psi}{Dt^2} = \mathcal{A}(q_s) \delta(x) \delta(y) \delta(t) \\ \Psi \text{ est une fonction causale} \end{cases} \quad (2.5.12)$$

et

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2}{Dt^2} - \Delta \right) \frac{D\Phi}{Dt} = \mathcal{A}'(q_s) \delta(x) \delta(y) \delta(t) \\ \Phi \text{ est une fonction causale} \end{cases} \quad (2.5.13)$$

avec

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{A}(q_s) = \frac{1}{M^2} \mathcal{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}'(q_s) = \frac{2}{M} \mathcal{I}_2.$$

Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe un lien entre Ψ (resp. Φ) et $\mathcal{G}^{1,S}$ (resp. $\mathcal{G}^{2,S}$) à savoir que $\mathcal{G}^{1,S}$ est la dérivée temporelle (au sens de distribution) de la fonction Φ (resp. Ψ). Nous montrons ensuite qu'il est possible de calculer explicitement les fonctions Ψ et Φ qui sont localement intégrables.

Après la transformation de LAPLACE en t et de FOURIER en x de la fonction Ψ on trouve :

$$-\frac{\partial^2 \widehat{\Psi}}{\partial y^2} + s^2 \left(\left(\frac{1}{c_0} + i M \frac{k}{s} \right)^2 + \frac{k^2}{s^2} \right) \widehat{\Psi} = \frac{\delta(y)}{s^2 (1 + i v_0 \frac{k}{s})^2} \mathcal{A}(q_s) \quad (2.5.14)$$

La solution de l'équation (2.5.14) est donnée sous cette forme :

$$\widehat{\Psi}(k, y, s) = F(k, s) e^{-s \gamma(k, s) |y|}$$

avec

$$\gamma(k, s) = \left(\left(\frac{1}{c_0} + i M \frac{k}{s} \right)^2 + \frac{k^2}{s^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Re e(\gamma(k, s)) \geq 0$$

En tenant compte des conditions aux limites, on trouve que :

$$F(k, s) = \frac{\mathcal{A}(q_s)}{s^3 \gamma(k, s) (1 + i v_0 \frac{k}{s})^2}$$

donc

$$\widehat{\Psi}(k, y, s) = \frac{e^{-s \gamma(k, s) |y|}}{s^3 \gamma(k, s) (1 + i v_0 \frac{k}{s})^2} \mathcal{A}(q_s) \quad (2.5.15)$$

Si on applique la transformée de FOURIER inverse on aura alors :

$$\widetilde{\Psi}(x, y, s) = \frac{\mathcal{A}(q_s)}{4 \pi s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-s(\gamma(k, s)|y| - i \frac{k}{s} x)} dk}{\gamma(k, s) (1 + i v_0 \frac{k}{s})^2 s} \quad (2.5.16)$$

En faisant le changement de variable suivant $q = -i c_0 \frac{k}{s}$, on obtient

$$\widetilde{\Psi}(x, y, s) = \frac{\mathcal{A}(q_s)}{4 \pi i s^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dq}{(1 - M q)^2} \frac{e^{-\frac{s}{c_0}(\gamma(q)|y| + q x)}}{\gamma(q)} \quad (2.5.17)$$

D'après (2.5.7) on déduit que :

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{ii}^{2,S}(x, y, s) = s^2 \widetilde{\Psi}_{ii}(x, y, s) = \frac{A_{ii}(q_s)}{4 \pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dq}{(q - q_s)^2} \frac{e^{-\frac{s}{c_0}(\gamma(q)|y| + q x)}}{M^2 \gamma(q)}$$

Par conséquent nous obtenons dans l'espace physique que :

$$\boxed{G_{ii}^{2,S}(x, y, t) = \frac{\partial^2 \Psi_{ii}(x, y, t)}{\partial t^2}}.$$

De la même manière, on montre aisément que

$$\boxed{\mathcal{G}_{ii}^{1,S}(x, y, t) = \frac{\partial \Phi_{ii}(x, y, t)}{\partial t}}$$

Ici la dérivée en temps est à prendre au sens des distributions. Nous allons voir dans la suite que les fonctions Ψ et Φ sont dans l'espace $L_{x,y,t}^{1,\text{loc}}$.

2.5.4 Calcul explicite de la fonction singulière

Considérons le système d'équations suivant ($j = 1$ ou 2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 G}{Dt^2} - \Delta G = \delta(x) \delta(y) \delta(t), \quad G(x, y, t) = 0, \quad \forall t \leq 0. \\ \frac{D^j K_j}{Dt^j} = \delta(x) \delta(y) \delta(t), \quad K_j(x, y, t) = 0, \quad \forall t \leq 0. \end{array} \right. \quad (2.5.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D^j K_j}{Dt^j} = \delta(x) \delta(y) \delta(t), \quad K_j(x, y, t) = 0, \quad \forall t \leq 0. \end{array} \right. \quad (2.5.19)$$

Les fonctions Ψ et Φ sont définies alors par les produits de convolution suivants :

$$\Phi(x, y, t) = \mathcal{A}'(q_s) G \overset{x', y', t'}{*} K_1 \quad (2.5.20)$$

$$\Psi(x, y, t) = \mathcal{A}(q_s) G \overset{x', y', t'}{*} K_2 \quad (2.5.21)$$

La justification mathématique des produits de convolution (2.5.20) et (2.5.21) fait l'objet de la première section de l'annexe A.

LEMME 2.3 *Les solutions (fondamentales) des problèmes (2.5.18) et (2.5.19) sont données respectivement par :*

$$K_1(x, y, t) = \frac{1}{c_0 M} H(x) \delta\left(t - \frac{x}{c_0 M}\right) \delta(y) \quad (2.5.22)$$

$$K_2(x, y, t) = \frac{1}{c_0^2 M^2} x H(x) \delta\left(t - \frac{x}{c_0 M}\right) \delta(y) \quad (2.5.23)$$

$$G(x, y, t) = \frac{c_0}{2\pi} \frac{H(t - t_a(x, y))}{\sqrt{c_0^2 (1 - M^2) t^2 + 2 c_0 M x t - x^2 - y^2}} \quad (2.5.24)$$

où

$$t_a(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + (1 - M^2)y^2} - Mx}{c_0(1 - M^2)}$$

LEMME 2.4 *Les fonctions Ψ et Φ sont données maintenant explicitement :*

$$\Phi(x, y, t) = \frac{1}{\pi M} \cosh^{-1}\left(\frac{c_0 t}{\sqrt{(x - c_0 M t)^2 + y^2}}\right) H(t - t_a(x, y)) \mathcal{I}_2$$

$$\Psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi M^2} \left[t \cosh^{-1}\left(\frac{c_0 t}{\sqrt{(x - c_0 M t)^2 + y^2}}\right) - \sqrt{D(x, y, t)} \right] H(t - t_a(x, y)) \mathcal{I}_2$$

Nous démontrons ce lemme dans l'annexe A.

2.6 Validation numérique

Le but de cette section est de calculer en utilisant les résultats que nous venons d'obtenir la solution de l'équation (2.1.2) avec un second membre ponctuel en espace et gaussien en temps autrement dit pour \mathbf{f} égal à :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix} \delta(x) \delta(y) \quad (2.6.1)$$

Par convolution du tenseur de Green avec le terme source (2.6.1), la solution de l'équation de GALBRUN est donnée par :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathcal{G} * \mathbf{f} := \left(\sum_{k=1}^2 G_{jk} * S_k \right) \mathbf{e}_j = \begin{cases} u_1(x, y, t) = G_{11} \overset{t'}{*} S_1 + G_{12} \overset{t'}{*} S_2 \\ u_2(x, y, t) = G_{21} \overset{t'}{*} S_1 + G_{22} \overset{t'}{*} S_2 \end{cases}$$

Le calcul numérique de la convolution en temps entre les fonctions de Green que nous venons de décrire et un terme source présente certaines difficultés :

1. Les composantes de tenseur de Green ne sont pas toujours explicites.
2. Les fonctions de Green sont singulières au temps d'arrivée de l'onde.

Comme \mathcal{G} se décompose en trois parties :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{1,S} + \mathcal{G}^{2,S} + \mathcal{G}^R,$$

on peut également décomposer \mathbf{u} sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathcal{G}^R \overset{t'}{*} \mathbf{f} + \mathcal{G}^{1,S} \overset{t'}{*} \mathbf{f} + \mathcal{G}^{2,S} \overset{t'}{*} \mathbf{f}$$

D'après la section précédente nous savons que $\mathcal{G}^{1,S} = \dot{\Phi}$ et $\mathcal{G}^{2,S} = \ddot{\Psi}$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, t) &= \mathcal{G}^R * \mathbf{f} + \Phi * \dot{\mathbf{f}} + \Psi * \ddot{\mathbf{f}} \\ &= \mathbf{u}^R + \mathbf{v} + \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

où

$$u_j^R(x, y, t) = \int_0^t G_{jk}^R(x, y, \tau) S_k(t - \tau) d\tau, \quad v_j(x, y, t) = \int_0^t \Phi_{jk}(x, y, \tau) \dot{S}_k(t - \tau) d\tau \quad (2.6.3)$$

$$w_j(x, y, t) = \int_0^t \Psi_{jk}(x, y, \tau) \ddot{S}_k(t - \tau) d\tau \quad (2.6.4)$$

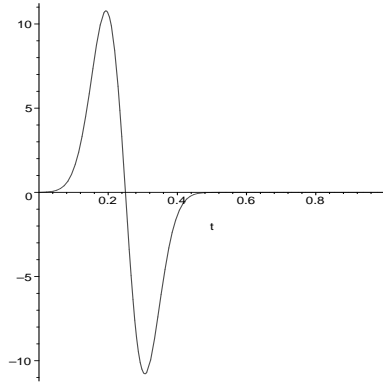
Ici nous avons utilisé la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

Dans les tests numériques qui vont suivre, nous utilisons une source monodirectionnelle (dans la direction Oy) qui est impulsionnelle en espace et gaussienne en temps, située à l'origine du domaine de calcul (voir FIG 2.6.1).

$$S_2(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{si } t > 2t_0 \end{cases} \quad \text{et } S_1(t) = 0.$$

avec f_0 est la fréquence de la source et $t_0 = \frac{1}{f_0}$,

$$\dot{S}_2(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 (t-t_0) e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{si } t > 2t_0 \end{cases} \quad \text{et } \dot{S}_1(t) = 0$$

FIG. 2.6.1: Graphe de $t \rightarrow \dot{S}_2(t)$ pour une fréquence $f_0 = 4$.

A un instant t fixé, on trouve alors une solution analytique à support compact

$$\begin{cases} u_1^R(x, y, t) = \int_{\max(t_a, t-2t_0)}^t G_{11}^R(x, y, t') S_1(t-t') dt' + \int_{\max(t_a, t-2t_0)}^t G_{12}^R(x, y, t') S_2(t-t') dt' \\ u_2^R(x, y, t) = \int_{\max(t_a, t-2t_0)}^t G_{21}^R(x, y, t') S_1(t-t') dt' + \int_{\max(t_a, t-2t_0)}^t G_{22}^R(x, y, t') S_2(t-t') dt' \end{cases}$$

Rappelons que $u_j^R(x, y, t)$ est nulle pour $t < t_a(x, y)$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^R(x, y, t) = 0 & \text{si } t \leq t_a(x, y) \\ \mathbf{u}^R(x, y, t) = \int_{t_a}^t G_{jk}^\infty(x, y, \tau) S_k(t-\tau) d\tau & \text{si } t > t_a(x, y) \end{cases} \quad (2.6.5)$$

avec

$$\mathcal{G}^R(x, y, t) = \frac{\Re[\mathcal{R}(\vartheta^+(t))]}{\sqrt{D(x, y, t)}} \mathbf{H}(t - t_a(x, y)), \quad (2.6.6)$$

où

$$\mathcal{R}(q) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{M^2 q^2}{q\gamma(q)+q^2} + 1 \\ \frac{M^2 q^2}{q\gamma(q)+q^2} + 1 & 1 + M^2 \end{pmatrix}$$

Nous rappelons au lecteur que $\vartheta^+(t)$ est donné par :

$$\vartheta^+(t) = \frac{c_0 \tau x - M y^2}{x^2 + (1 - M^2) y^2} + i \frac{|y| \sqrt{D(x, y, t)}}{x^2 + (1 - M^2) y^2}$$

On décompose l'intervalle de temps $[t_a ; t]$ en Nt intervalles de même longueur dt . On a alors

$$\mathbf{u}^R(x, y, t) = \sum_{i=1}^{Nt} \int_{t_a+(i-1)dt}^{t_a+idt} G_{jk}^R(x, y, \tau) S_k(t-\tau) d\tau$$

Il existe de nombreuses techniques permettant de calculer les intégrales

$$\int_{t_a+(i-1)dt}^{t_a+idt} G_{jk}^R(x, y, \tau) S_k(t-\tau) d\tau$$

comme la méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson ou de Gauss (par ordre de sophistication croissante). Pour simplifier notre propos nous présentons ici la méthode la plus simple à mettre en oeuvre : la méthode des rectangles. Pour $i > 1$ on approximera donc l'intégrale

$$\int_{t_a+(i-1)dt}^{t_a+idt} G_{jk}^R(x, y, \tau) S_k(t - \tau) d\tau$$

par

$$G_{jk}^R(x, y, t_a + (i - 1)dt) S_k(t - (t_a + (i - 1)dt)) dt$$

Par contre, pour $i = 1$, on ne peut plus utiliser cette formule puisque la fonction G_{jk}^R est singulière au point (x, y, t_a) . Une première idée consiste à approcher

$$\int_{t_a}^{t_a+dt} G_{jk}^R(x, y, \tau) S_k(t - \tau) d\tau$$

par

$$G_{jk}^R(x, y, t_a + dt) f(t - (t_a + dt)) dt$$

mais c'est une mauvaise approximation parce que G_{jk}^R varie fortement sur l'intervalle $[t_a ; t_a + dt]$. Pour cette raison on préfère l'approximation suivante :

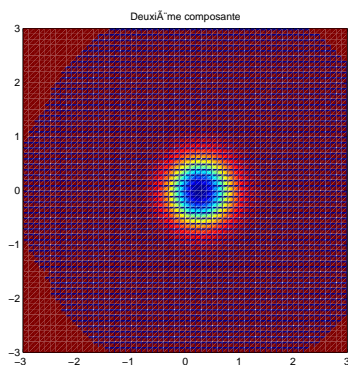
$$\int_{t_a}^{t_a+dt} G_{jk}^R(x, y, \tau) S_k(t - \tau) d\tau \simeq S_k(t - t_a) \int_{t_a}^{t_a+dt} G_{jk}^R(x, y, \tau) d\tau$$

On calculera donc :

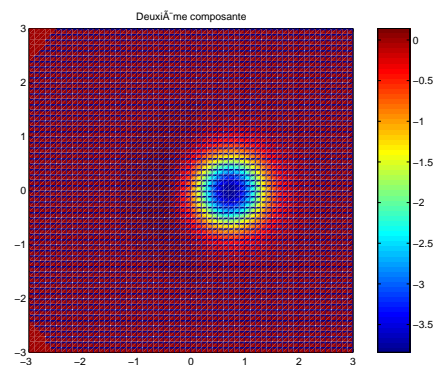
$$\mathbf{u}^\infty(x, y, t) \simeq S_k(t - t_a) \int_{t_a}^{t_a+dt} G_{jk}^R(x, y, \tau) d\tau + \sum_{i=2}^{Nt} G_{jk}^R(x, y, t_a + (i-1)dt) S_k(t - (t_a + (i-1)dt)) dt \quad (2.6.7)$$

Résultats numériques

Dans ce cas test on prend la vitesse du son dans le fluide $c_0 = 1(m/s)$ avec un écoulement uniforme $v_0 = 0.5 c_0$. Dans ce cas test, nous présentons la composante u_y de la solution.



(a) à l'instant $t=1$



(b) à l'instant $t=2$

2.7 Équation de Galbrun régularisée.

2.7.1 Position du problème.

On cherche dans cette partie une solution explicite du problème régularisé de GALBRUN (2.7.1) dans un domaine infini en utilisant la méthode de CAGNIARD-DE HOOP.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{Dt^2} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f} + \mathbf{rot} \omega, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \\ \boldsymbol{\xi}(x, y, 0) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(x, y, 0) = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ \lim_{\|x, y\| \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\xi}(x, y, t) = \mathbf{0}, \quad \forall t > 0. \end{array} \right. \quad (2.7.1)$$

ω est la vorticité du déplacement ($\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = \omega$) vérifiant

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \omega}{Dt^2} = \operatorname{rot} \mathbf{f}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+. \quad (2.7.2)$$

REMARQUE 2.9 *La solution du problème (2.7.1) est de même nature de rotationnel que la source.*

Or on sait que

$$-\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}) = -\Delta \boldsymbol{\xi}$$

donc on obtient à partir de la première équation de (2.7.1) une équation vectorielle découplée

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \xi_i}{Dt^2} - \Delta \xi_i = f_i + (\mathbf{rot} \omega)_i, \quad \forall i = 1, 2. \quad (2.7.3)$$

Pour résoudre explicitement cette équation, il suffit de chercher la fonction de GREEN scalaire u de l'équation des ondes convectées

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 u}{Dt^2} - \Delta u = \delta(x)\delta(y)\delta(t). \quad (2.7.4)$$

Une fois on trouve cette fonction de GREEN la solution de (2.7.1) est obtenue par la convolution suivante :

$$\xi_i(x, y, t) = u * f_i(x, y, t) + u * (\mathbf{rot} \omega)_i(x, y, t), \quad \forall i = 1, 2. \quad (2.7.5)$$

* désigne le produit de convolution en espace et en temps.

2.7.2 Solution dans l'espace Fourier-Laplace.

Après la transformation de LAPLACE en t et de FOURIER en x de la fonction u on trouve :

$$-\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + s^2 \left(\left(\frac{1}{c_0} + i M \frac{k}{s} \right)^2 + \frac{k^2}{s^2} \right) \hat{u} = \delta(y) \quad (2.7.6)$$

$$\widehat{u}(k, y, s) = \frac{e^{-s\left\{\left(\frac{1}{c_0} + iM\frac{k}{s}\right)^2 + \frac{k^2}{s^2}\right\}^{\frac{1}{2}}|y|}}{2s\left\{\left(\frac{1}{c_0} + iM\frac{k}{s}\right)^2 + \frac{k^2}{s^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.7.7)$$

Si on applique la transformée de FOURIER inverse on aura alors :

$$\widetilde{u}(x, y, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-s\left\{\left(\frac{1}{c_0} + iM\frac{k}{s}\right)^2 + \frac{k^2}{s^2}\right\}^{\frac{1}{2}}|y|} e^{ikx}}{4\pi s\left\{\left(\frac{1}{c_0} + iM\frac{k}{s}\right)^2 + \frac{k^2}{s^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} dk \quad (2.7.8)$$

On note

$$\gamma(k, s) = \left(\left(\frac{1}{c_0} + iM\frac{k}{s}\right)^2 + \frac{k^2}{s^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Re e(\gamma(k, s)) \geq 0$$

alors

$$\widetilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-s(\gamma(k, s)|y| - i\frac{k}{s}x)} dk}{\gamma(k, s) s} \quad (2.7.9)$$

Si nous faisons la même démarche que celle de la section précédente nous obtenons :

$$u(\theta, \rho, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t \leq \rho\left(\frac{1-M\cos(\theta)}{c_0(1-M^2)}\right) \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-M^2)t^2 + 2\frac{M}{c_0}t\rho\cos(\theta) - \rho^2\left(\frac{1-M^2\cos^2(\theta)}{c_0(1-M^2)}\right)}} & \text{si } t > \rho\left(\frac{1-M\cos(\theta)}{c_0(1-M^2)}\right) \end{cases} \quad (2.7.10)$$

Ou encore en coordonnées cartésiennes :

$$u(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t \leq \frac{\sqrt{(1-M^2)y^2 + x^2} - Mx}{c_0(1-M^2)} \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-M^2)t^2 + 2\frac{M}{c_0}xt - \frac{x^2 + y^2}{c_0^2}}} & \text{si } t > \frac{\sqrt{(1-M^2)y^2 + x^2} - Mx}{c_0(1-M^2)} \end{cases} \quad (2.7.11)$$

REMARQUE 2.10 :

Lorsque $M = 0$ on retrouve la fonction de GREEN de l'équation des ondes en dimension 2.

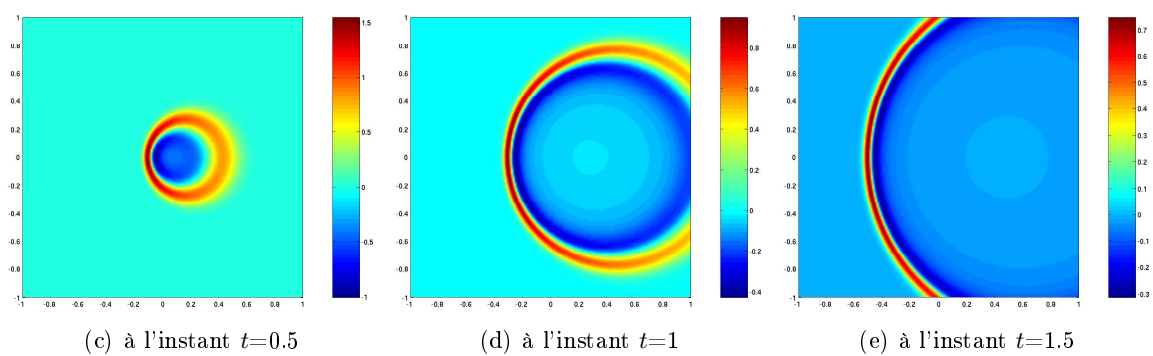
2.7.3 Validation numérique

Dans les tests numériques qui vont suivre, nous utilisons une source excitatrice de fréquence f_0 , située à l'origine du domaine de calcul. Ceci revient à résoudre l'équation (2.7.4) avec un second membre $f(x, y, t)$ donnée par $f(x, t) = G(t)\delta(x)\delta(y)$ où G est une fonction en temps :

$$G(t) = \frac{d}{dt}\{e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2}\}H(t-2t_0) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 (t-t_0)e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{si } t > 2t_0 \end{cases}, \quad t_0 = \frac{1}{f_0}$$

La solution de l'équation (2.7.4) avec le terme source $f(x, y, t)$ est donnée par :

$$u(x, y, t) = \int_{\max(\tau^+, t-2t_0)}^t G(x, y, t')S(t-t')dt'$$

Résultats numériquesFIG. 2.7.1: La solution analytique u pour $M = 0.6$ et $f_0 = 4$

Deuxième partie

Propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement fortement cisailé

INSTABILITÉ DE KELVIN-HELMHOLTZ

Sommaire

3.1 Introduction	70
3.2 Rappels mathématiques et position du problème	71
3.2.1 Position du problème	71
3.2.2 Quelques questions relatives à la régularité du profil	72
3.3 Le cas d'un écoulement discontinu	75
3.3.1 Le problème de transmission	75
3.3.2 Analyse modale du problème de transmission	76
3.3.3 Illustration numérique du caractère fortement mal posé.	79
3.4 Le cas d'un profil cisailé régularisé	83
3.4.1 Définition du problème régularisé	83
3.4.2 Analyse de stabilité par approche modale.	84
3.4.3 Instabilité du problème de Cauchy	92
3.4.4 Illustration numérique de l'instabilité.	95

3.1 Introduction

L'objectif de cette partie est d'étendre ce qui précède (régularisation et calcul analytique) à un écoulement fortement cisailé. Un tel écoulement peut être modélisé par un profil discontinu : on est alors conduit à résoudre un problème de transmission qui s'écrit plus naturellement avec la variable de Galbrun (en effet, on doit imposer la continuité du déplacement normal à travers la ligne de cisaillement) qu'avec celles d'Euler linéarisées. L'intérêt pratique de traiter ce genre d'écoulement est de calculer, soit analytiquement soit numériquement, la solution dans une couche de mélange (voir figure 3.1.1).

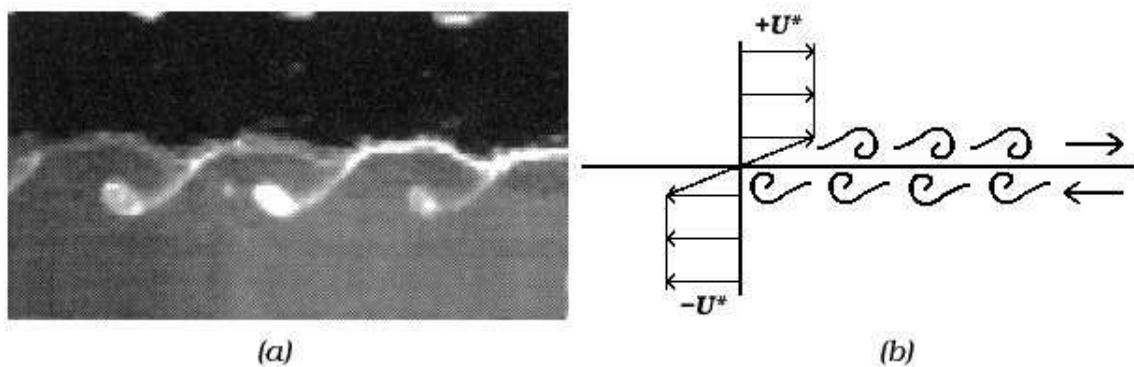


FIG. 3.1.1: Couche de mélange

Malheureusement ce problème de transmission est, en tant que problème d'évolution, un problème fortement mal posé sur le plan mathématique. Autrement dit, la solution de ce problème ne dépend pas continuellement des données initiales et peut admettre une croissance exponentielle incontrôlable en espace et en temps. La conséquence immédiate sur le plan numérique est qu'il n'est pas possible d'approcher ce problème par la méthode des éléments finis car la solution discrète sera ultra-sensible aux variations du pas du maillage. La description de ce caractère mal posé fait l'objet de la section 3.3.

Pour mieux comprendre ce phénomène qui est lié aux instabilités hydrodynamiques, nous considérons que le problème "naturel" de transmission n'est autre que la limite asymptotique (lorsque l'épaisseur de la couche de mélange tend vers 0) d'un problème associé à un écoulement régulier qui approche le profil discontinu. Mais comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de la thèse, on ne sait pas traiter les équations de Galbrun pour des écoulements réguliers non uniformes. C'est pourquoi nous utilisons ici les équations d'Euler linéarisées pour mener l'analyse asymptotique de type couche limite.

Nous commençons par quelques rappels relatifs au problème de Cauchy associé aux équations d'Euler linéarisées dans un écoulement quelconque (les détails sont donnés dans l'annexe B).

3.2 Rappels mathématiques et position du problème

3.2.1 Position du problème

On considère le problème suivant : trouver $(\mathbf{u}, p) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, tels que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) p + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}) \quad (3.2.2)$$

On désigne par $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ l'écoulement de référence adimensionnel ($|\mathbf{M}(\mathbf{x})|$ est par définition le nombre de Mach au point \mathbf{x}) supposé satisfaire, au moins au sens faible, les équations d'Euler stationnaires :

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = 0.$$

REMARQUE 3.1 *Le modèle compressible (3.2.1) s'oppose traditionnellement au modèle incompressible*

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

lequel semble plus largement étudié dans la littérature pour les instabilités [17, 26, 27, 36] ! C'est toutefois le modèle (3.2.1) qui est classiquement utilisé en aéroacoustique, notamment pour les applications en aérodynamique.

Dans (3.2.1), $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ représente le champ de (perturbations de) vitesses et $p(\mathbf{x}, t)$ le champ de (perturbations de) pression, ces quantités étant ici adimensionnalisées. On rappelle que si \mathbf{a} est un vecteur de \mathbb{R}^d (un champ de vecteurs) l'opérateur $\mathbf{a} \cdot \nabla$ est l'opérateur différentiel linéaire scalaire

$$\mathbf{a} \cdot \nabla = \sum_{j=1}^d a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Le problème de conditions initiales (3.2.1)-(3.2.2) relève de l'application du théorème de Hille-Yosida dès que le champ \mathbf{M} est régulier (au moins $W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d)^d$).

THÉORÈME 3.2 *Pour des données initiales (\mathbf{u}_0, p_0) dans l'espace hilbertien (muni de sa norme naturelle) :*

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{M}, \mathbb{R}^d) = & \{(\mathbf{v}, q) \in L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d) / \\ & ((\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla q, (\mathbf{M} \cdot \nabla) q + \operatorname{div} \mathbf{u}) \in L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d)\} \end{aligned} \right.$$

on a existence et unicité d'une solution forte (ou classique) :

$$(\mathbf{u}, p) \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; \mathbf{H}(\mathbf{M}, \mathbb{R}^d)).$$

dès que

$$\mathbf{M} \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d)^d$$

Pour les détails de la démonstration d'existence et d'unicité de la solution forte, on renvoie le lecteur à l'annexe B.

À l'aide des formules de Green (voir l'annexe B), on montre que l'énergie $E(t)$ définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (|\mathbf{u}|^2 + |p|^2)$$

vérifie l'égalité suivante :

$$E(t) \leq E(0) \exp \{2 (\| \operatorname{div} \mathbf{M} \|_{L^\infty} + \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}) t\}, \quad (3.2.4)$$

ce qui constitue une estimation *a priori* dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On peut alors en déduire une théorie de solutions faibles :

$$(\mathbf{u}_0, p_0) \in L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d) \implies (\mathbf{u}, p) \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d))$$

avec l'estimation *a priori* suivante (on utilise $\| \operatorname{div} \mathbf{M} \|_{L^\infty} \leq \sqrt{2} \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}$) :

$$\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2}^2 + \| p(\cdot, t) \|_{L^2}^2 \leq (\| \mathbf{u}_0 \|_{L^2}^2 + \| p_0 \|_{L^2}^2) \exp \left(2\sqrt{2} t \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty} \right). \quad (3.2.5)$$

En d'autres termes plus mathématiques, nous avons montré l'existence d'un semi-groupe :

$$\begin{cases} S_M(t) : L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d) \\ (\mathbf{u}_0, p_0) & \longmapsto & S_M(t)[\mathbf{u}_0, p_0] \equiv (\mathbf{u}(\cdot, t), p(\cdot, t)), \end{cases} \quad (3.2.6)$$

où (\mathbf{u}, p) est la solution de (3.2.1, 3.2.2), vérifiant l'estimation :

$$\| S_M(t) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \exp \left(2\sqrt{2} t \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty} \right). \quad (3.2.7)$$

REMARQUE 3.3 Lorsque $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$, l'estimation (B.1.6) devient :

$$\| S_M(t) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \exp (2 t \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}). \quad (3.2.8)$$

3.2.2 Quelques questions relatives à la régularité du profil

Ce type de résultat "minimal" (B.1.7) soulève naturellement deux questions :

1. Peut-on avoir une théorie raisonnable lorsque le champ \mathbf{M} est moins régulier, typiquement discontinu et à divergence bornée ?

Cette question n'est pas si évidente car l'estimation (B.1.4) "ne passe" pas à la limite si \mathbf{M} "devient" discontinu (*ie.* si $\| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}$ tend vers $+\infty$)

2. L'estimation (B.1.4) (ou (B.1.6)) prévoit, ou du moins autorise, une croissance exponentielle en temps de la solution. La question est : un tel phénomène va-t-il se produire effectivement ? La réponse de cette question est *a priori* déconnectée de la régularité du champ d'écoulement \mathbf{M} mais dépend de sa structure. Une abondante littérature a été consacrée à cette question, surtout dans le cas des écoulements cisailés compressibles. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de référence [49] pour divers critères de

stabilité (comme par exemple le fameux critère de Rayleigh) qui caractérisent donc des écoulements tels que :

$$\|S_M(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C. \quad (3.2.9)$$

et pour des exemples d'écoulements instables c'est à dire, par définition, des écoulements tels que :

$$\|S_M(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d))} \geq \exp(\alpha t), \quad \alpha > 0. \quad (3.2.10)$$

Dans la suite de ce travail, nous nous limitons à la dimension $d = 2$ et à des écoulements de référence dits "cisailés". Nous désignons par x et y les coordonnées de l'espace et considérons un champ de vecteur \mathbf{M} de la forme :

$$\mathbf{M}(x, y) = M(y)\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} M(y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons que $\mathbf{M} \cdot \nabla \equiv M(y) \partial / \partial x$, et que le champ \mathbf{M} est une solution stationnaire des équations d'Euler incompressibles, (même si M est discontinu, on a alors une solution faible) :

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{M} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = 0 \quad (3.2.11)$$

En remarquant que, si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, on a

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{M} = \left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] M \mathbf{e}_x = v M'(y) \mathbf{e}_x,$$

on voit que le système d'Euler linéarisé à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + M(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + M'(y)v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M(y) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M(y) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.2.12)$$

REMARQUE 3.4 Dans le cas particulier d'un écoulement uniforme, c'est à dire lorsque la fonction $M(y)$ est une constante égale à M , on a :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u} + \nabla p = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right) p + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3.2.13)$$

et, comme l'opérateur différentiel $\partial / \partial t + M \partial / \partial x$ commute avec les opérateurs de dérivation spatiale, on voit que la pression est la solution de l'équation d'ondes convectée :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p - \Delta p = 0 \quad (3.2.14)$$

La suite de ce chapitre est dédiée à rappeler un certain nombre des réponses déjà connues aux questions 1 et 2, posées plus haut, en apportant un éclairage particulier (voir remarque 3.5) et nouveau. Notons que les résultats "connus" auquel nous faisons allusion concernent le plus souvent les équations *incompressibles* et ne sont pas toujours énoncés dans la littérature avec les détails mathématiques nécessaires : ceci nous paraît justifier en soi ce travail préliminaire qui a par ailleurs surtout l'avantage de préparer les trois derniers chapitres de ce manuscrit. En substance, les réponses aux questions 1 et 2 sont :

- i) Non : en général, pour un écoulement non régulier, le problème de Cauchy n'a pas de solution. Ce phénomène est dû à ce que l'on appelle dans la littérature physique l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (section 3.3).
- ii) Oui : en particulier tout profil $M(y)$ d'écoulement cisailé joignant deux valeurs constantes M_- et M_+ est nécessairement instable (section 3.4).

La démarche que nous allons adopter dans cette première partie est la suivante :

a) Considérons un écoulement cisailé $2D$ discontinu :

$$M(y) = M_{\text{disc}}(y) = \begin{cases} M_-, & y < 0, \\ M_+, & y > 0 \end{cases}$$

Alors avec $M_- < M_+ < M_- + 2\sqrt{2}$, le problème de Cauchy "naturellement" associé (voir remarque ci-dessous) à ce profil est fortement mal posé au sens de Kreiss ([42]). Ce résultat est déjà "connu" depuis longtemps, au moins depuis les travaux de [21] et [39], mais pas forcément identifié en tant que tel : le mot "instabilité" est utilisé dans [21], la difficulté à résoudre le problème d'évolution est soulignée dans [39], où les auteurs suggèrent de faire appel à la théorie des ultra-distributions. Ce phénomène est l'équivalent compressible de ce qu'on appelle l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en régime incompressible qui, elle, a lieu quelles que soient les valeurs de $M_+ > M_-$.

b) Considérons un profil régulier $M_\varepsilon(y)$ qui converge vers $M_{\text{disc}}(y)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$M_\varepsilon(y) = \begin{cases} M_-, & \text{pour } y < 0, \\ M_+, & \text{pour } y > \varepsilon \\ M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) & \text{pour } 0 < y < \varepsilon \end{cases}$$

où la fonction $M \in C^0[0, 1]$ est telle que $M(0) = M_-$ et $M(1) = M_+$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, le problème de Cauchy est instable et en outre on a l'estimation, en posant $S_\varepsilon(t) = S_{M_\varepsilon}(t)$,

$$\|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d))} \geq \exp\left(\frac{\alpha t}{\varepsilon}\right), \quad \alpha > 0.$$

REMARQUE 3.5 *Quelques remarques de bon sens s'imposent pour accompagner ce que nous venons de dire :*

1. Comme une homothétie de rapport ε transforme le profil "unité" $M_1(y)$ en $M_\varepsilon(y)$, il est bien évident que si le profil $M_1(y)$ est instable, tous les profils $M_\varepsilon(y)$ le sont également dans la mesure où si une donnée initiale (\mathbf{u}_0, p_0) génère avec le profil $M_1(y)$ une croissance en $\exp(\beta t)$, $\beta > 0$, la donnée initiale $(\mathbf{u}_0(x/\varepsilon, y/\varepsilon), p_0(x/\varepsilon, y/\varepsilon))$ générera une croissance en $\exp(\beta t/\varepsilon)$, $\beta > 0$. On peut donc s'attendre, par passage à la limite, au caractère fortement mal posé du problème limite.

2. *La question du sens à donner à ce problème limite, c'est à dire lorsque \mathbf{M} est discontinu, n'est pas évidente puisque les équations (3.2.1) n'ont a priori plus de sens. Lorsque \mathbf{M} est régulier par morceaux séparés par des lignes de continuité tangentielle, le sens qu'on donne habituellement dans la littérature est celui d'un problème de transmission : les équations dans chaque domaine "régulier" sont complétées par des conditions de raccord. Comme on le verra plus loin, ces conditions de transmission peuvent être obtenues formellement par un processus limite quand ε tend vers 0 sur le profil régularisé M_ε .*
3. *Ces conditions sont homogènes (en termes d'opérateurs différentiels), autrement dit invariantes par changement d'échelle, c'est à dire par tout changement de variable $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\alpha \mathbf{x}, \alpha t)$, $\alpha > 0$. En conséquence, comme la géométrie du problème bi-couches et les équations dans chacun des milieux homogènes le sont également, il n'y a plus d'échelle caractéristique dans le problème et on comprend bien que dans ce cas on ne peut avoir instabilité que si c'est une instabilité au sens fort (ie. au sens de Kreiss).*
4. *Il y a donc cohérence complète entre les points a) et b). En fait, comme il n'est pas évident d'étudier directement le caractère instable d'un profil régulier, nous déduirons, par analyse asymptotique, l'instabilité des profils $M_\varepsilon(y)$ de l'instabilité forte du profil limite $M_{\text{disc}}(y)$.*
5. *Physiquement, on comprend le fait d'avoir négliger l'épaisseur ε de la couche n'est légitime que pour les grandes longueurs d'onde $\lambda \gg \varepsilon$. Cependant le modèle discontinu n'est plus valable pour les petits longueurs d'onde $\lambda \ll \varepsilon$.*

Sur le plan des applications pratiques et numériques, la conséquence majeure du résultat a) est que l'utilisation du modèle linéarisé standard (au sens de la remarque 3.5) est impossible dans le cas discontinu. Nous l'illustrerons à la fin de la section 2.

3.3 Le cas d'un écoulement discontinu

3.3.1 Le problème de transmission

Nous considérons maintenant le cas particulier où $M(y)$ est discontinu :

$$M_{\text{disc}}(y) = \begin{cases} M_-, & \text{pour } y < 0 \quad (\Omega_-) \\ M_+, & \text{pour } y > 0 \quad (\Omega_+) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Évidemment se pose la question de donner un sens au système (3.2.12) puisque $M'_{\text{disc}}(y)$ (ici $M'_{\text{disc}}(y) = (M_+ - M_-) \delta(y)$!) intervient explicitement comme un coefficient dans la première équation du système (3.2.12). Nous supposons dans toute la suite de ce chapitre que $M_+ > M_-$.

Traditionnellement (au sens de la littérature s'entend) on donne un sens au problème en tant que problème de transmission. Si on pose $(\mathbf{u}_\pm, p_\pm) = (\mathbf{u}, p)|_{\Omega_\pm}$, avec $\Omega_\pm = \{(x, y) / \pm y > 0\}$,

on peut par exemple formuler un problème de transmission en (p_-, p_+) sous la forme :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_- \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p_- - \Delta p_- = 0 & \text{dans } \Omega_- \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_+ \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p_+ - \Delta p_+ = 0 & \text{dans } \Omega_+ \end{cases} \quad (3.3.2)$$

avec les conditions de raccordement entre les deux écoulement à l'interface de cisaillement $\Gamma := \{y = 0\}$

$$\begin{cases} p_+ = p_- \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_+ \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial p_-}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_- \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial p_+}{\partial y} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Une première façon de comprendre la seconde condition de transmission consiste à revenir aux équations de la physique. Plus précisément à l'acoustique de Galbrun. En effet, c'est la continuité du *déplacement normal* à travers l'interface qui conduit à cette condition. En d'autres termes, si on considère que, formellement :

$$\xi_y = \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-2} \frac{\partial p}{\partial y},$$

alors la deuxième équation de continuité vient du fait que :

$$\xi_{y-} = \xi_{y+} \quad (3.3.4)$$

REMARQUE 3.6 Lorsque $M_- = M_+$, on retrouve les conditions habituelles de raccord (la continuité de la pression et sa dérivée normale) pour l'équation d'ondes convectée.

3.3.2 Analyse modale du problème de transmission

Venons en à l'analyse du problème de transmission (3.3.2)-(3.3.3). Si on identifie Ω_- et Ω_+ au même demi espace, (3.3.2)-(3.3.3) peut être comme un problème hyperbolique mixte, c'est à dire le couplage d'un système hyperbolique dans un demi espace avec des conditions aux limites au bord de ce demi espace. Autrement dit, ce problème relève de l'application de la théorie de Kreiss [42]. Cette théorie repose sur l'analyse modale (spectrale) consistant à rechercher une solution non triviale de (3.3.2)-(3.3.3) sous la forme :

$$\begin{cases} p_-(x, y, t) = \widehat{p}_-(y) e^{st} e^{ikx}, & \text{pour } y < 0 \\ p_+(x, y, t) = \widehat{p}_+(y) e^{st} e^{ikx}, & \text{pour } y > 0 \end{cases} \quad (3.3.5)$$

où $\widehat{p}_\pm(y)$ sont des fonctions bornées (décroissantes à l'infini), k est un nombre réel et s est un nombre complexe.

Si on injecte (3.3.5) dans (3.3.2), on obtient aisément :

$$\begin{cases} \widehat{p}_-(y) = \varphi_- e^{+\xi_- y}, & \text{pour } y < 0 \quad (\Omega_-) \\ \widehat{p}_+(y) = \varphi_+ e^{-\xi_+ y}, & \text{pour } y > 0 \quad (\Omega_+) \end{cases} \quad (3.3.6)$$

où par définition

$$\xi_{\pm} = \xi_{\pm}(s, k) = ((s + iM_{\pm}k)^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \Re(\xi_{\pm}) > 0. \quad (3.3.7)$$

Si on injecte dans un deuxième temps (3.3.6) dans (3.3.3) on voit que $p_+ = p_-$ impose $\varphi_+ = \varphi_-$. La seconde condition de transmission donne alors (si on veut une solution non nulle) l'équation :

$$(s + iM_-k)^2 \xi_+(s, k) + (s + iM_+k)^2 \xi_-(s, k) = 0 \quad (3.3.8)$$

Si on pose $s = \sigma k$, alors on obtient par homogénéité, une équation en une seule inconnue σ pour tout signe de k :

$$F(\sigma) = (\sigma + iM_-)^2 ((\sigma + iM_+)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + (\sigma + iM_+)^2 ((\sigma + iM_-)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.3.9)$$

Rappelons que la théorie de Kreiss dit que si l'équation (3.3.8) admet des racines s de partie réelle positive, alors le problème est fortement mal posé. Nous allons voir effectivement le cas ici, comme le précise le théorème suivant (qui reprend sous une forme un peu moderne le résultat de [21])

THÉORÈME 3.7 *Si $M_+ - M_- \in]0, 2\sqrt{2}[$, l'équation (3.3.9) admet deux racines à parties réelles non nulles et opposées qui sont données par $\sigma = \sigma_*$ et $\sigma = -\bar{\sigma}_*$ où :*

$$\sigma_* = -i \frac{M_+ + M_-}{2} + \left(\sqrt{1 + (M_+ - M_-)^2} - \frac{(M_+ - M_-)^2}{4} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.10)$$

Le système (3.3.2)-(3.3.3) est donc fortement mal posé.

PREUVE : Effectuons le changement d'inconnue $\sigma = -i\omega$ (cela permet simplement d'éviter l'apparition de coefficients imaginaires dans les calculs) . L'équation (3.3.9) se réécrit alors

$$(\omega - M_-)^2 [(1 - (\omega - M_+)^2)^{\frac{1}{2}}] = -(\omega - M_+)^2 [1 - (\omega - M_+)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.11)$$

Introduisons les nouvelles variables $X = \omega - M_-$ et $Y = -(\omega - M_+)$ (suggérées par un argument de symétrie) de telle sorte que (3.3.11) équivaut à :

$$\begin{cases} X + Y = M_+ - M_- \\ X^2(1 - Y^2)^{\frac{1}{2}} = -Y^2(1 - X^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Élevant la seconde équation au carré (attention, ici on ne procède plus par équivalence), il vient :

$$X^4 - X^4Y^2 = Y^4 - X^2Y^4,$$

ce que nous pouvons réécrire

$$X^4 - Y^4 + X^2Y^2(Y^2 - X^2) = 0,$$

soit encore

$$(X^2 - Y^2)(X^2 + Y^2 - X^2Y^2) = 0.$$

Comme $X + Y = M_+ - M_- \neq 0$, cette dernière équation est équivalente à

$$(X - Y)(X^2 + Y^2 - X^2Y^2) = 0.$$

L'égalité $X - Y = 0$ correspond à $\omega = \frac{M_+ + M_-}{2}$ soit $\sigma = -i \frac{M_+ + M_-}{2}$.

Pour les autres solutions, on remarque que $X^2 + Y^2 = (M_+ - M_-)^2 - 2XY$ et donc que, si on pose $P = XY$, il vient

$$P^2 + 2P - (M_+ - M_-)^2 = 0 \quad (3.3.13)$$

d'où l'on tire

$$P = -1 \pm \sqrt{1 + (M_+ - M_-)^2}. \quad (3.3.14)$$

Par définition de P , le lien entre ω et P est simplement

$$(\omega - M_+)(\omega - M_-) = -P$$

soit

$$\omega^2 - (M_+ + M_-)\omega + P + M_+M_- = 0, \quad (3.3.15)$$

équation en ω dont le discriminant est

$$D = (M_+ + M_-)^2 - 4(P + M_+M_-) = (M_+ - M_-)^2 - 4P.$$

On a deux cas alors à distinguer :

(i) $P \leq (M_+ - M_-)^2/4$. Dans ce cas les racines ω du polynôme (3.3.15) sont réelles et les σ associés sont imaginaires purs.

(ii) $P > (M_+ - M_-)^2/4$. Dans ce second cas les zéros ω du polynôme (3.3.15) sont complexes conjuguées de parties imaginaires non nulles et les deux $\sigma = -i\omega$ ont des parties réelles non nulles et opposées.

C'est ce dernier cas qui va nous intéresser et il s'agit de voir quand (ii) a lieu sachant que P est donné par (3.3.14). C'est ce qui va nous amener à la restriction sur $M_+ - M_-$.

Nous posons $Z = (M_+ - M_-)^2$ et considérons les deux valeurs de P possibles :

a) $P = -1 + \sqrt{1 + (M_+ - M_-)^2}$. Dans ce cas $P > (M_+ - M_-)^2/4$ se traduit par

$$\sqrt{1 + Z} - 1 > Z/4 \iff Z \in]0, 8[.$$

Autrement dit, on a deux racines σ à partie réelle non nulles et opposées dès que le saut de l'écoulement $M_+ - M_- \in]0; 2\sqrt{2}[$.

b) $P = -1 - \sqrt{1 + (M_+ - M_-)^2} < 0$ ne peut être supérieur à $(M_+ - M_-)^2/4$.

Pour achever la démonstration, il convient de

– remarquer que, dès que $0 < M_+ - M_- < 2\sqrt{2}$, l'expression des racines de (3.3.15), $\omega = (M_+ + M_-)/2 \pm \sqrt{\Delta}$ correspond à $\sigma = \sigma_*$ ou $\sigma = -\bar{\sigma}_*$.

– vérifier *a posteriori* que $\sigma = \sigma_*$ ou $\sigma = -\bar{\sigma}_*$ sont bien solutions de (3.3.9). ■

REMARQUE 3.8 *Le fait que la partie imaginaire de σ^* soit égale à $(M_+ + M_-)/2$ signifie que le mode instable se propage à la vitesse $(M_+ + M_-)/2$, moyenne arithmétique des deux vitesses de part et d'autre de la "ligne de cisaillement". Selon la terminologie consacrée [20, 36], on dit que l'on a affaire à une instabilité convective si $M_+ + M_- \neq 0$, et à une instabilité absolue si $M_+ + M_- = 0$.*

La partie réelle (positive) de σ^* mesure le taux de croissance exponentielle (en temps) de l'amplitude du mode : plus elle est grande, plus l'instabilité est forte. Notons que cette partie réelle ne dépend que de la valeur absolue du saut de l'écoulement $e = |M_+ - M_-| \in]0, 2\sqrt{2}[$:

$$\Re \sigma^* = q(e)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } q(e) = \sqrt{1 + e^2} - e^2/4 - 1.$$

Sur la figure (3.3.1), nous représentons les variations de $\Re \sigma^*$ en fonction de e .

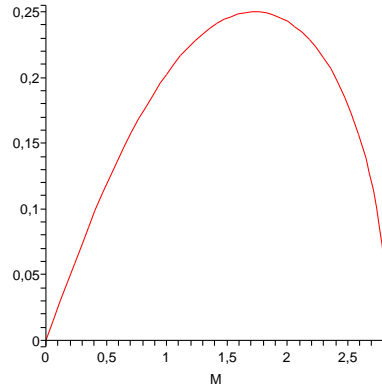


FIG. 3.3.1: Variations de $\Re \sigma^*$ en fonction de e

On remarque sur la figure (3.3.1) que $\Re \sigma^*$ est maximale pour $e = \sqrt{3} \simeq 1.7320$.

3.3.3 Illustration numérique du caractère fortement mal posé.

Pour la résolution numérique, il est utile (et préférable pour nous) de reformuler le problème sous sa forme "Galbrun" en utilisant les déplacements lagrangiens ξ_{\pm} comme inconnues. En effet, l'intérêt de ce choix d'inconnues, est que les conditions de transmission prennent une forme particulièrement simple et s'intègrent de façon naturelle dans une formulation variationnelle.

Or on sait que ces déplacements sont liés aux pressions acoustiques p_{\pm} par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \xi_{\pm} = -\nabla p_{\pm}, \quad \text{et} \quad p_{\pm} = -\text{div} \xi_{\pm}.$$

Il est alors facile de voir que le problème (3.3.2)-(3.3.3) s'écrit en $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_-, \boldsymbol{\xi}_+)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi}_+ : \Omega_+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\xi}_- : \Omega_- \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tels que} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_+ \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \boldsymbol{\xi}_+ - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_+) = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_- \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \boldsymbol{\xi}_- - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_-) = 0 \quad \text{dans } \Omega_- \\ \llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \rrbracket = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \llbracket \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (3.3.16)$$

avec $\mathbf{n} (= (0, 1)^t)$ est le vecteur normal à l'interface Γ :

Pour simuler le problème de transmission (4.2.5) qui est posé dans tout l'espace, nous devons tout d'abord borner le domaine de calcul en imposant une condition physique $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Σ^\pm (voir la figure 3.3.2) et une conditions non physique $\boldsymbol{\xi} = 0$ sur les bords verticaux Γ_L^\pm

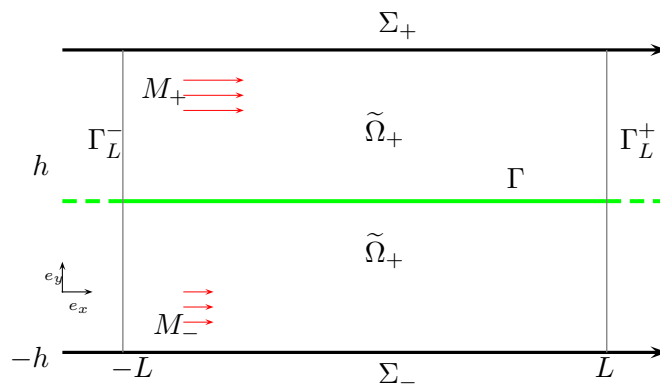


FIG. 3.3.2: Géométrie du problème de transmission

le problème à résoudre numériquement dans le domaine borné $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_+ \cup \tilde{\Omega}_-$ est donné alors sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi}_+ : \tilde{\Omega}_+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\xi}_- : \tilde{\Omega}_- \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tels que} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_+ \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \boldsymbol{\xi}_+ - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_+) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}_+ \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_- \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \boldsymbol{\xi}_- - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_-) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}_- \\ \llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Sigma^\pm \end{array} \right. \quad (3.3.17)$$

On considère les espaces fonctionnels suivants :

$$X_0(\tilde{\Omega}_\pm) = \left\{ \boldsymbol{\xi}_\pm \in H^1(\tilde{\Omega}_\pm), \quad / \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma_\pm \text{ et } \boldsymbol{\xi} = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\pm \right\}$$

$$X_0(\tilde{\Omega}) = \left\{ \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_+, \boldsymbol{\xi}_-) \in X_0(\tilde{\Omega}_+) \times X_0(\tilde{\Omega}_-), \quad / \quad \llbracket \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

On s'appuyant sur les résultats de premier chapitre, on peut établir aisément la formulation variationnelle régularisée associée au problème de transmission (3.3.17) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_+, \boldsymbol{\xi}_-) \in C^2(0, T; L^2(\tilde{\Omega}_\pm)) \cap C^0(0, T; X_0(\tilde{\Omega}_\pm)) \text{ satisfaisant :} \\ \frac{d^2}{dt^2} (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) + \frac{d}{dt} b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) + a_s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in X_0(\tilde{\Omega}), \\ \boldsymbol{\xi}_0 \text{ et } \boldsymbol{\xi}_1 \text{ sont les données initiales (à support compact)} \end{array} \right. \quad (3.3.18)$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) &= \int_{\tilde{\Omega}_+ \cup \tilde{\Omega}_-} \boldsymbol{\xi}_\pm \cdot \mathbf{v}, \quad b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \int_{\tilde{\Omega}_+ \cup \tilde{\Omega}_-} 2M_\pm \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_\pm}{\partial x} \cdot \mathbf{v} \text{ et} \\ a_s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) &= \int_{\tilde{\Omega}_+ \cup \tilde{\Omega}_-} \left\{ \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_\pm \operatorname{div} \mathbf{v} + s \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_\pm \operatorname{rot} \mathbf{v} - M^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_\pm}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

avec $a_s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$ (resp, $b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$) est une forme bilinéaire continue et symétrique (resp, antisymétrique) dans $X_0(\tilde{\Omega}_\pm)$.

Les résultats numériques que nous allons présenter dans ce paragraphe ont été obtenus avec le code MELINA, à partir de la formulation régularisée (3.3.18). La discrétisation en espace est réalisée par éléments finis de Lagrange Q_1 et la discrétisation en temps par un schéma aux différences finies explicite centré. Les calculs qui suivent ont été réalisés avec un maillage régulier uniforme. Le pas de temps est choisi proportionnel au pas de maillage h , contraint par la condition de stabilité. Dans la suite, on gardera fixe le rapport $\Delta t/h$ (égal à 0.25 en l'occurrence, de telle sorte que la condition de stabilité CFL est satisfaite dans Ω_\pm) ce qui permet de considérer h comme le seul paramètre de discrétisation. On considère comme source des données initiales concentrées au voisinage de l'origine :

$$\boldsymbol{\xi}_0(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{x}) = \chi(|\mathbf{x}|) \nabla \psi(\mathbf{x}), \quad \psi(\mathbf{x}) = e^{-\pi^2 |\mathbf{x}|^2}, \quad (3.3.19)$$

où χ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1]$.

Les calculs sont effectués sur l'intervalle de temps $[0, 5]$ et le rectangle de calcul est choisi assez grand pour que l'onde n'atteigne pas les bords.

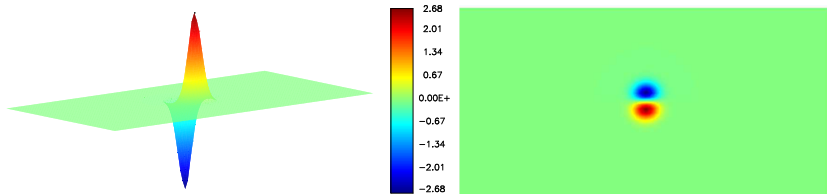


FIG. 3.3.3: la composante normale ξ_y du déplacement à l'instant $t = 0$

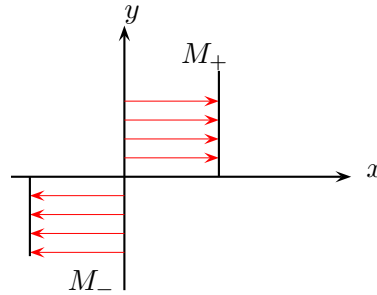


FIG. 3.3.4: Profil discontinu $M_{\text{disc}}(y) = M_- \mathbf{1}_{\{y < 0\}} + M_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$

En réalisant cette expérience numérique, nous nous attendons que la solution discrète ainsi calculée ne converge pas lorsque le pas de maillage h tend vers 0. C'est ce que nous allons effectivement vérifier. Pour bien visualiser l'instabilité (forte), nous nous intéressons à la trace sur l'interface de discontinuité $\Gamma := \{y = 0\}$ de la composante selon y du champ $\xi = (\xi_x, \xi_y)$ (la seule composante continue).

Nous comparons sur la figure (3.3.5) les solutions obtenues avec deux maillages correspondant respectivement à $h = 0.2$ et $h = 0.1$. On observe clairement l'instabilité forte du problème en réalisant que la solution obtenue dépend complètement du maillage : la solution augmente exponentiellement en temps et cette croissance exponentielle est d'autant plus forte que le maillage est fin. D'autre part, l'onde instable oscille dans la direction x avec une longueur d'onde qui apparaît proportionnelle au pas de maillage.

Nous regardons sur la figure 3.3.6 la dépendance de la deuxième composante de la solution en fonction du pas de maillage h . A nouveau on constate le défaut de convergence, qui est ici lié au caractère mal posé du problème continu.

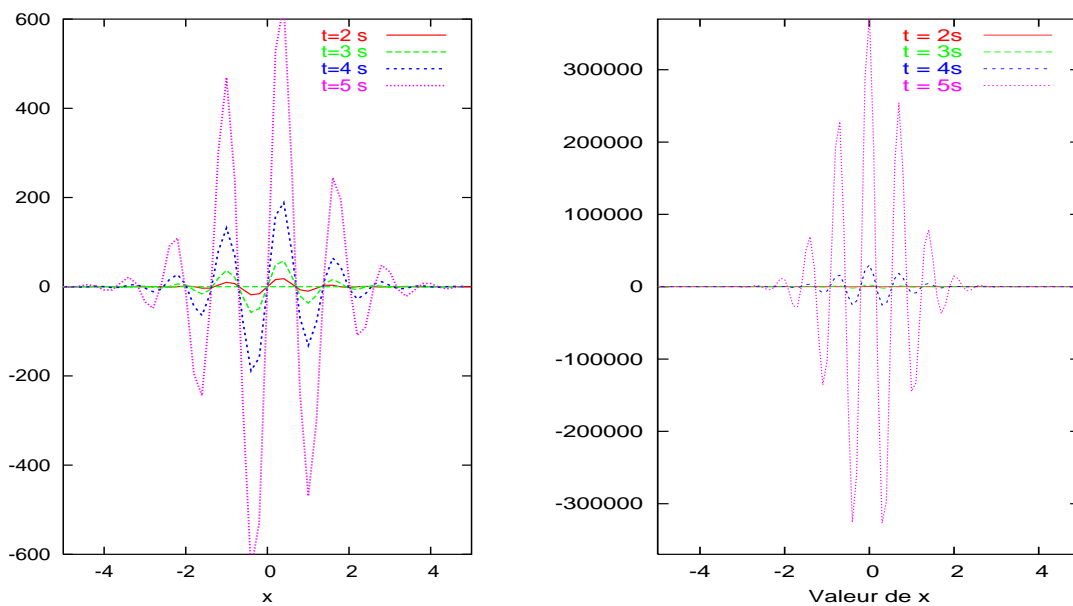


FIG. 3.3.5: La trace de la deuxième composante de la solution à différents instants pour $h = 0.2$ (à gauche) et $h = 0.1$ (à droite)

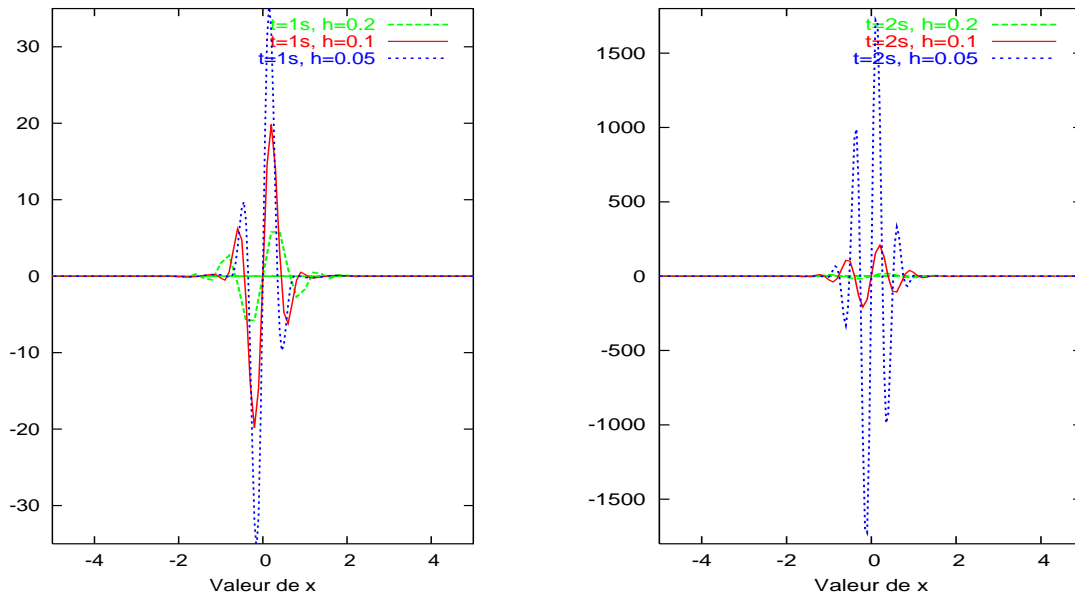


FIG. 3.3.6: La trace de la deuxième composante de la solution au même instant et pour différents pas de maillage

3.4 Le cas d'un profil cisailé régularisé

L'objectif de cette section est double. le premier est d'étudier la stabilité de problème de Cauchy lors de la transition d'un écoulement régulier non uniforme à un écoulement fortement cisailé et même discontinu. Pour ce faire, on utilise la technique d'analyse asymptotique de type couche limite. Le deuxième objectif est de préparer les outils de base pour construire de nouvelles conditions de transmission pour le problème limite qui nous conduit à un problème fortement bien posé. Ceci fait l'objet du chapitre 5

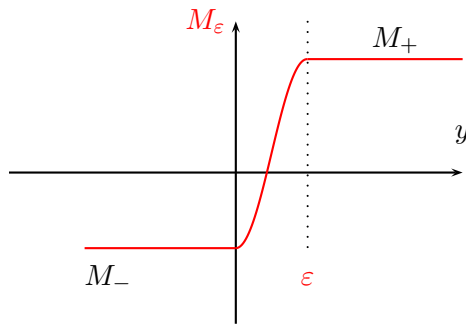
3.4.1 Définition du problème régularisé

Nous nous donnons une fonction régulière (au moins continue) $M(y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$M(0) = M_- \text{ et } M(1) = M_+$$

et nous considérons le profil régulier suivant :

$$M_\varepsilon(y) = \begin{cases} M_+, & \text{si } y > \varepsilon, \\ M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) & \text{si } 0 < y < \varepsilon \\ M_-, & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

FIG. 3.4.1: Profil régularisé $y \mapsto M_\varepsilon(y)$.

Nous nous intéressons dans cette section à la stabilité du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x} + (M_\varepsilon)'(y)v^\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

et notamment à ce qui se passe quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

REMARQUE 3.9 *D'après les résultats que nous avons rappelé dans l'annexe (B), le problème de Cauchy associé à (3.4.2) est bien posé dans L^2 et que l'on a une estimation du type*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|p^\varepsilon|^2 + |u^\varepsilon|^2 + |v^\varepsilon|^2) \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} |p_0^\varepsilon|^2 + |u_0^\varepsilon|^2 + |v_0^\varepsilon|^2 \right] \exp\left(\frac{C}{\varepsilon} \|M'\|_\infty t\right) \quad (3.4.3)$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de ε et de M .

3.4.2 Analyse de stabilité par approche modale.

Introduction.

Pour analyser la stabilité du système (3.4.2) nous utilisons la transformée de Fourier en x , la transformation de Laplace en temps t . Cela revient algébriquement à chercher les solutions de la forme suivante :

$$\begin{cases} p^\varepsilon(x, y, t) = \widehat{p}^\varepsilon(y) e^{st} e^{ikx} \\ u^\varepsilon(x, y, t) = \widehat{u}^\varepsilon(y) e^{st} e^{ikx} \\ v^\varepsilon(x, y, t) = \widehat{v}^\varepsilon(y) e^{st} e^{ikx} \end{cases} \quad \text{avec } \Re(s) > 0, \quad \text{et } k \in \mathbb{R} \quad (3.4.4)$$

On aboutit alors au système d'équations différentielles ordinaires facile à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s + ikM_\varepsilon(y)) \widehat{u}^\varepsilon(y) + M'_\varepsilon(y)v^\varepsilon(y) + ik\widehat{p}^\varepsilon(y) = 0 \\ (s + ikM_\varepsilon(y)) \widehat{v}^\varepsilon(y) + \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy}(y) = 0 \\ (s + ikM_\varepsilon(y)) \widehat{p}^\varepsilon(y) + ik\widehat{u}^\varepsilon(y) + \frac{d\widehat{v}^\varepsilon}{dy}(y) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.4.5a) \\ (3.4.5b) \\ (3.4.5c) \end{array}$$

L'analyse va consister à chercher d'éventuelles valeurs de s à parties réelles > 0 pour lesquelles le système (3.4.5) admet des solutions non triviales dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

REMARQUE 3.10 *On peut se ramener à étudier le cas $k > 0$ une fois que l'on a remarqué l'équivalence entre les deux propositions suivantes :*

- $(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon, \widehat{p}^\varepsilon)$ est une solution de (3.4.5) associée à (s, k) ,
- $(\widehat{u}^\varepsilon, -\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{p}^\varepsilon)$ est une solution de (3.4.5) associée à $(-s, -k)$.

REMARQUE 3.11 *Une conséquence de l'estimation (3.4.3) est que la partie réelle du nombre complexe s est nécessairement bornée supérieurement, uniformément par rapport à k . Démonstrons ce résultat directement.*

On multiplie les trois équations du système (3.4.5) respectivement par \widehat{u}^ε , \widehat{v}^ε et \widehat{p}^ε , on somme le tout et on intègre sur \mathbb{R} . Il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (s + ikM_\varepsilon) \left(|\widehat{p}^\varepsilon|^2 + |\widehat{u}^\varepsilon|^2 + |\widehat{v}^\varepsilon|^2 \right) + \int_{\mathbb{R}} \left(ik\widehat{u}^\varepsilon + \frac{d\widehat{v}^\varepsilon}{dy} \right) \widehat{p}^\varepsilon \\ & + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} \widehat{v}^\varepsilon + ik \int_{\mathbb{R}} \widehat{p}^\varepsilon \widehat{u}^\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} (M_\varepsilon)' \widehat{v}^\varepsilon \widehat{u}^\varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Nous prenons la partie réelle du résultat après avoir remarqué que

$$ik \int_{\mathbb{R}} (\widehat{u}^\varepsilon \widehat{p}^\varepsilon + \widehat{u}^\varepsilon \widehat{p}^\varepsilon) = 2ik \int_{\mathbb{R}} \Re(\widehat{u}^\varepsilon \widehat{p}^\varepsilon) \in i\mathbb{R}, \quad (3.4.7)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d\widehat{v}^\varepsilon}{dy} \widehat{p}^\varepsilon + \widehat{v}^\varepsilon \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} \right) = 2i \int_{\mathbb{R}} \Im \left(\frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} \widehat{v}^\varepsilon \right) \in i\mathbb{R}. \quad (3.4.8)$$

Il vient alors

$$(\Re(s)) \int_{\mathbb{R}} \left(|\widehat{p}^\varepsilon|^2 + |\widehat{u}^\varepsilon|^2 + |\widehat{v}^\varepsilon|^2 \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} M' \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \Re(\widehat{v}^\varepsilon \widehat{u}^\varepsilon)$$

Or on a :

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} M' \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \widehat{v}^\varepsilon \widehat{u}^\varepsilon \right| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|M'\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(|\widehat{u}^\varepsilon|^2 + |\widehat{v}^\varepsilon|^2 \right). \quad (3.4.9)$$

Par conséquent :

$$\left\{ \Re e(s) - \frac{1}{2\varepsilon} \|M'\|_{L^\infty} \right\} \int_{\mathbb{R}} (|\widehat{u}^\varepsilon|^2 + |\widehat{v}^\varepsilon|^2 + |\widehat{p}^\varepsilon|^2) \leq 0.$$

En particulier

$$\Re e(s) > \frac{1}{2\varepsilon} \|M'\|_{L^\infty} \implies \widehat{u}^\varepsilon = \widehat{v}^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon = 0$$

Autrement dit, les valeurs de s pour lesquelles le système (3.4.2) a des solutions non triviales dans $L^2(\mathbb{R})$ vérifient nécessairement

$$\Re e(s) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \sup_y |M'(y)|.$$

ce que nous voulions démontrer. ■

Obtention de l'équation caractéristique.

Nous allons ramener la recherche des valeurs de s pour lesquelles (3.4.2) admet des solutions non triviales à la résolution d'une certaine équation caractéristique (algébrique) en la variable s .

Nous pouvons éliminer \widehat{u}^ε et \widehat{v}^ε . En effet de (3.4.5a) nous déduisons :

$$\widehat{v}^\varepsilon(y) = -(s + ikM_\varepsilon)^{-1} \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} \implies \frac{d\widehat{v}^\varepsilon}{dy} = -\frac{d}{dy} \left((s + ikM_\varepsilon)^{-1} \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} \right) \quad (3.4.10)$$

En remplaçant dans (3.4.5c) \widehat{v}^ε par son expression en fonction de \widehat{p}^ε , on trouve ainsi que

$$\left| \begin{aligned} \widehat{u}^\varepsilon(y) &= -(s + ikM_\varepsilon)^{-1} (M_\varepsilon)' \widehat{v}^\varepsilon - ik(s + ikM_\varepsilon)^{-1} \widehat{p}^\varepsilon \\ &= (s + ikM_\varepsilon)^{-2} (M_\varepsilon)' \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} - ik(s + ikM_\varepsilon)^{-1} \widehat{p}^\varepsilon \end{aligned} \right. \quad (3.4.11)$$

En reportant (3.4.10) et (3.4.11) dans la troisième équation de (3.4.5), nous obtenons alors :

$$\left| \begin{aligned} &(s + ikM_\varepsilon) \widehat{p}^\varepsilon + k^2 (s + ikM_\varepsilon)^{-1} \widehat{p}^\varepsilon \\ &+ ik(s + ikM_\varepsilon)^{-2} (M_\varepsilon)' \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} - \frac{d}{dy} \left((s + ikM_\varepsilon)^{-1} \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.4.12)$$

ce que nous pouvons réécrire sous la forme suivante :

$$(\gamma_\varepsilon^2 + k^2) \widehat{p}^\varepsilon + ik \gamma_\varepsilon^{-1} (M_\varepsilon)' \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} - \gamma_\varepsilon \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon} \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} \right) = 0 \quad (3.4.13)$$

après avoir multiplié l'équation (3.4.12) et introduit

$$\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(s, k, y) = s + ikM_\varepsilon(y).$$

Pour la suite, il est utile de réécrire (3.4.13) comme un problème entre :

$$\widehat{p}_-^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon|_{y<0}, \quad \widehat{p}_+^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon|_{y>\varepsilon}, \quad \widehat{p}^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon|_{0<y<\varepsilon}. \quad (3.4.14)$$

Les équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [k^2 + (s + i k M_-)^2] \widehat{p}_-^\varepsilon - \frac{d^2 \widehat{p}_-^\varepsilon}{dy^2} = 0, & y < 0 \\ [k^2 + (s + i k M_+)^2] \widehat{p}_+^\varepsilon - \frac{d^2 \widehat{p}_+^\varepsilon}{dy^2} = 0, & y > \varepsilon \\ [\gamma_\varepsilon^2 + k^2] \widehat{p}^\varepsilon + i k \gamma_\varepsilon^{-1} (M_\varepsilon)' \frac{d \widehat{p}^\varepsilon}{dy} - \gamma_\varepsilon \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon} \frac{d \widehat{p}^\varepsilon}{dy} \right) = 0, & 0 < y < \varepsilon \end{array} \right. \quad (3.4.15)$$

avec les conditions de transmission "naturelles" (ici la fonction M_ε est continue)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{p}_-^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon, & \frac{\partial \widehat{p}_-^\varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}, \quad \text{en } y = 0 \\ \widehat{p}_+^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon, & \frac{\partial \widehat{p}_+^\varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y} \quad \text{en } y = \varepsilon \end{array} \right. \quad (3.4.16)$$

Introduisons les quantités intermédiaires :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_-^\varepsilon = \widehat{p}_-^\varepsilon(0) = \widehat{p}^\varepsilon(0) & (\in \mathbb{C}) \\ \varphi_+^\varepsilon = \widehat{p}_+^\varepsilon(\varepsilon) = \widehat{p}^\varepsilon(\varepsilon) & (\in \mathbb{C}) \end{array} \right. \quad (3.4.17)$$

ainsi que les variables "adimensionnalisées" (nous nous référons aux notations de la section précédente) :

$$\sigma = \frac{s}{|k|}, \quad \zeta_\pm = ((\sigma + i M_\pm)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{de telle sorte que } \xi_\pm = |k| \zeta_\pm).$$

Nous avons alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{p}_-^\varepsilon(y) = \varphi_-^\varepsilon e^{+|k| \zeta_- y} & \text{pour } y < 0 \\ \widehat{p}_+^\varepsilon(y) = \varphi_+^\varepsilon e^{-|k| \zeta_+ (y-\varepsilon)} & \text{pour } y > \varepsilon \end{array} \right. \quad (3.4.18)$$

Pour les équations dans l'intervalle $[0, \varepsilon]$, nous effectuons le changement d'inconnue :

$$\boxed{\widehat{p}^\varepsilon(y) = P^\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)} \quad (3.4.19)$$

et introduisons les quantités "adimensionnalisées" :

$$\gamma = \gamma(\sigma; Y) \equiv \sigma + i M(Y), \quad \eta = |k| \varepsilon, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon} \quad (3.4.20)$$

de telle sorte que

$$\gamma_\varepsilon(s, k, y) = |k| \gamma\left(\frac{s}{|k|}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = |k| \gamma(\sigma; Y).$$

Après avoir remarqué que $i M'(Y) = \gamma'(Y)$, on voit que l'équation en P^ε s'écrit :

$$\eta^2(1 + \gamma^2)P^\varepsilon + \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{dP^\varepsilon}{dY} - \gamma \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{dP^\varepsilon}{dY} \right) = 0, \quad (3.4.21)$$

dont on remarque (c'est un point clé !) qu'elle peut se réécrire sous la forme :

$$\boxed{\eta^2(1 + \gamma^2)P^\varepsilon - \gamma^2 \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{dP^\varepsilon}{dY} \right) = 0.} \quad (3.4.22)$$

Pour exploiter adéquatement la linéarité du problème, nous introduisons les deux fonctions :

$$Y \mapsto P_-(\sigma, \eta, Y) \text{ et } Y \mapsto P_+(\sigma, \eta, Y)$$

solutions respectives des problèmes aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} \eta^2(1 + \gamma^2)P_- - \gamma^2 \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{dP_-}{dY} \right) = 0. \\ P_-(0) = 1, \quad P_-(1) = 0. \end{cases} \quad (3.4.23)$$

$$\begin{cases} \eta^2(1 + \gamma^2)P_+ - \gamma^2 \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{dP_+}{dY} \right) = 0. \\ P_+(0) = 0, \quad P_+(1) = 1. \end{cases} \quad (3.4.24)$$

REMARQUE 3.12 *l'existence et l'unicité d'une solution de problème (3.4.23) (resp. 3.4.24) relève de l'application du théorème de Lax-Milgram.*

Compte tenu des conditions de raccord de type Dirichlet :

$$P^\varepsilon(0) (\equiv p^\varepsilon(0)) = \varphi_-^\varepsilon, \quad P^\varepsilon(1) (\equiv p^\varepsilon(\varepsilon)) = \varphi_+^\varepsilon$$

on voit aisément que :

$$\widehat{p}^\varepsilon(k, s, y) = \varphi_-^\varepsilon P_-\left(\frac{s}{k}, \varepsilon|k|, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \varphi_+^\varepsilon P_+\left(\frac{s}{|k|}, \varepsilon|k|, \frac{y}{\varepsilon}\right), \quad \text{pour } 0 < y < \varepsilon. \quad (3.4.25)$$

Pour que la concaténation de (3.4.18) avec (3.4.25) fournisse une solution du problème global, il faut et il suffit que φ_-^ε et φ_+^ε soient tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(0) = \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(\varepsilon) = \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(\varepsilon) \end{cases} \quad (3.4.26)$$

Ceci fournit un système différentiel homogène en $(\varphi_-^\varepsilon, \varphi_+^\varepsilon)$. En effet, d'après (3.4.18)

$$\frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(0) = |k| \zeta_- \varphi_-^\varepsilon, \quad \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(\varepsilon) = -|k| \zeta_+ \varphi_+^\varepsilon$$

alors que (3.4.25) donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(0) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dP_-}{dY}(\sigma, \eta, 0) \varphi_-^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dP_+}{dY}(\sigma, \eta, 0) \varphi_+^\varepsilon \\ \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial Y}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dP_-}{dY}(\sigma, \eta, 1) \varphi_-^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dP_+}{dY}(\sigma, \eta, 1) \varphi_+^\varepsilon \end{cases} \quad (3.4.27)$$

Posons alors

$$\begin{cases} A_{11}(\sigma, \eta) = \frac{dP_-}{dY}(\sigma, \eta, 0), & A_{12}(\sigma, \eta) = \frac{dP_+}{dY}(\sigma, \eta, 0), \\ A_{21}(\sigma, \eta) = \frac{dP_-}{dY}(\sigma, \eta, 1), & A_{22}(\sigma, \eta) = \frac{dP_+}{dY}(\sigma, \eta, 1). \end{cases} \quad (3.4.28)$$

Les équations (3.4.27) se réécrivent :

$$\begin{cases} \eta \zeta_- \varphi_-^\varepsilon - A_{11}(\sigma, \eta) \varphi_-^\varepsilon - A_{12}(\sigma, \eta) \varphi_+^\varepsilon = 0, \\ -\eta \zeta_+ \varphi_+^\varepsilon - A_{21}(\sigma, \eta) \varphi_-^\varepsilon - A_{22}(\sigma, \eta) \varphi_+^\varepsilon = 0, \end{cases} \quad (3.4.29)$$

soit encore

$$[\eta \mathcal{D}(\sigma) - \mathcal{A}(\sigma, \eta)] \begin{bmatrix} \varphi_- \\ \varphi_+ \end{bmatrix} = 0,$$

où nous avons posé

$$\mathcal{D}(\sigma) := \begin{pmatrix} \zeta_-(\sigma) & 0 \\ 0 & -\zeta_+(\sigma) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}(\sigma, \eta) := (A_{ij}(\sigma, \eta))_{1 \leq i, j \leq 2}. \quad (3.4.30)$$

Autrement dit, nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME 3.13 *Le problème (3.4.5) admet une solution non triviale dans $L^2(\mathbb{R})^3$ si et seulement si $\eta = \varepsilon k$ et $\sigma = \frac{\varepsilon}{k}$ sont reliés par l'équation caractéristique :*

$$\det [\eta \mathcal{D}(\sigma) - \mathcal{A}(\sigma, \eta)] = 0 \quad (3.4.31)$$

où la matrice $\mathcal{D}(\sigma)$ est donnée explicitement par (3.4.30) et où la matrice $\mathcal{A}(\sigma, \eta)$ est définie par (3.4.23), (3.4.24), (3.4.28) et (3.4.30).

Analyse asymptotique de l'équation caractéristique.

Le prochaine étape de l'analyse va consister à mener une étude asymptotique de l'équation (3.4.31) quand $\eta \rightarrow 0$. Nous commençons par remarquer que, comme $\zeta_\pm(\sigma) \neq 0$ si $\Re(\sigma) \neq 0$, cette équation se réécrit :

$$\det [\eta \mathcal{I} - \mathcal{D}^{-1}(\sigma) \mathcal{A}(\sigma, \eta)] = 0, \quad (3.4.32)$$

ce qui se développe en

$$\Lambda(\sigma, \eta) \equiv \eta^2 - \eta \operatorname{Tr} [\mathcal{D}^{-1}(\sigma) \mathcal{A}(\sigma, \eta)] + [\det \mathcal{D}(\sigma)]^{-1} \det \mathcal{A}(\sigma, \eta) = 0$$

Nous allons ensuite rechercher un développement de $\mathcal{A}(\sigma, \eta)$ en puissances de η . Ceci passe par une analyse asymptotique des problèmes (3.4.23)-(3.4.24), afin d'obtenir un développement en puissances de η des fonctions $P_\pm(\sigma, \eta, Y)$ sous la forme :

$$P_\pm(\sigma, \eta, Y) = P_\pm^{(0)}(\sigma, Y) + \eta^2 P_\pm^{(1)}(\sigma, Y) + \eta^4 P_\pm^{(2)}(\sigma, Y) + \dots \quad (3.4.33)$$

Si nous injectons ce développement dans l'équation (3.4.23), par identification des termes de même puissance en η , nous obtenons tout d'abord :

$$\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{dP_\pm^{(0)}}{dY} \right) = 0 \implies \frac{1}{\gamma^2} \frac{dP_\pm^{(0)}}{dY}(Y) = Cste = A_\pm^{(0)}$$

En tenant compte des conditions aux limites respectives pour P_+ et P_- on obtient aisément :

$$A_-^{(0)} = - \langle \gamma^2 \rangle^{-1}, \quad A_+^{(0)} = \langle \gamma^2 \rangle^{-1},$$

avec

$$\langle f \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 f(Y) dY,$$

et par conséquent

$$P_-^{(0)}(Y) = \frac{1}{\langle \gamma^2 \rangle} \int_Y^1 \gamma^2(r) dr, \quad P_+^{(0)}(Y) = \frac{1}{\langle \gamma^2 \rangle} \int_0^Y \gamma^2(r) dr. \quad (3.4.34)$$

On en déduit

$$\frac{dP_-^{(0)}}{dY}(0) = -\frac{\gamma(0)^2}{\langle \gamma^2 \rangle} = -\frac{(\sigma + iM_-)^2}{\langle \gamma^2 \rangle} \quad (3.4.35)$$

$$\frac{dP_-^{(0)}}{dY}(1) = -\frac{\gamma(1)^2}{\langle \gamma^2 \rangle} = -\frac{(\sigma + iM_+)^2}{\langle \gamma^2 \rangle} \quad (3.4.36)$$

$$\frac{dP_+^{(0)}}{dY}(0) = \frac{\gamma(0)^2}{\langle \gamma^2 \rangle} = \frac{(\sigma + iM_-)^2}{\langle \gamma^2 \rangle} \quad (3.4.37)$$

$$\frac{dP_+^{(0)}}{dY}(1) = \frac{\gamma(1)^2}{\langle \gamma^2 \rangle} = \frac{(\sigma + iM_+)^2}{\langle \gamma^2 \rangle} \quad (3.4.38)$$

ce qui montre que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{A}(\sigma, \eta) = \mathcal{A}^{(0)}(\sigma) \equiv \frac{1}{\langle \gamma^2 \rangle} \begin{bmatrix} -(\sigma + iM_-)^2 & (\sigma + iM_-)^2 \\ -(\sigma + iM_+)^2 & (\sigma + iM_+)^2 \end{bmatrix} \quad (3.4.39)$$

On remarque que cette limite est une matrice de rang 1, non inversible. Du développement

$$\mathcal{A}(\sigma, \eta) = \mathcal{A}^{(0)}(\sigma) + \eta^2 \mathcal{A}^{(1)}(\sigma) + o(\eta^4) \quad (3.4.40)$$

et de $\det \mathcal{A}^{(0)}(\sigma) = 0$ nous déduisons donc que :

$$\det \mathcal{A}(\sigma, \eta) = O(\eta^2) \quad (3.4.41)$$

Après avoir rappelé que

$$\Lambda(\sigma, \eta) \equiv \eta^2 - \eta \operatorname{Tr} [\mathcal{D}^{-1}(\sigma) \mathcal{A}(\sigma, \eta)] + [\det \mathcal{D}(\sigma)]^{-1} \det \mathcal{A}(\sigma, \eta) = 0,$$

nous introduisons alors :

$$F(\sigma, \eta) = \frac{\Lambda(\sigma, \eta)}{\eta} \quad (3.4.42)$$

Grâce à (3.4.41) la fonction $(\sigma, \eta) \rightarrow F(\sigma, \eta)$, se prolonge par continuité en $\eta = 0$ en une fonction analytique telle que :

$$(3.4.32) \iff F(\sigma, \eta) = 0 \quad \text{et} \quad F(\sigma, 0) = -\operatorname{Tr} [\mathcal{D}^{-1}(\sigma) \mathcal{A}^{(0)}(\sigma)]. \quad (3.4.43)$$

Un calcul simple montre que

$$\mathcal{D}^{-1}(\sigma) \mathcal{A}^{(0)}(\sigma) = \frac{1}{\langle \gamma^2 \rangle} \begin{bmatrix} -\frac{(\sigma + iM_-)^2}{\zeta_-}, & \frac{(\sigma + iM_-)^2}{\zeta_-} \\ \frac{(\sigma + iM_+)^2}{\zeta_+}, & -\frac{(\sigma + iM_+)^2}{\zeta_+} \end{bmatrix} \quad (3.4.44)$$

de telle sorte que :

$$F(\sigma, 0) = \frac{1}{\langle \gamma^2 \rangle} \left[\frac{(\sigma + iM_-)^2}{\zeta_-} + \frac{(\sigma + iM_+)^2}{\zeta_+} \right] \quad (3.4.45)$$

On peut alors remarquer que l'équation "limite" $F(\sigma, 0) = 0$ coïncide avec l'équation (3.3.9). Nous savons donc (théorème (3.7)) que si $M_+ - M_- \in]0, 2\sqrt{2}[$, l'équation $F(\sigma, 0) = 0$ admet une unique racine à partie réelle strictement positive, donnée par $\sigma = \sigma^*$ (cf. (3.3.10)).

D'après la démonstration du théorème (3.7) on peut montrer en outre que σ^* est une racine simple de $F(\sigma, 0) = 0$. Autrement dit $\frac{\partial F}{\partial \sigma}(\sigma^*, 0) \neq 0$. Ceci va nous permettre d'appliquer le théorème des fonctions implicites pour résoudre $F(\sigma, \eta) = 0$ pour η petit. De façon plus précise, si nous introduisons ici les vecteurs colonnes de $\mathcal{A}^{(l)}(\sigma)$:

$$\mathcal{A}^{(l)}(\sigma) = \left(a_1^{(l)}(\sigma), a_2^{(l)}(\sigma) \right),$$

nous savons déjà que

$$a_1^{(0)}(\sigma) = -a_2^{(0)}(\sigma) = a^{(0)}(\sigma) \equiv \frac{-1}{\langle \gamma^2 \rangle} \begin{bmatrix} (\sigma + iM_-)^2 \\ (\sigma + iM_+)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.4.46)$$

En utilisant la bilinéarité du déterminant et le développement (3.4.40), nous obtenons

$$\begin{cases} \det \mathcal{A}(\sigma, \eta) &= \det \left(a_1^{(0)}, a_2^{(0)} \right) + \left[\det \left(a_1^{(0)}, a_2^{(1)} \right) + \det \left(a_1^{(1)}, a_2^{(0)} \right) \right] \eta^2 + O(\eta^4) \\ &= \eta^2 \det \left[a^{(0)}(\sigma), a_1^{(1)}(\sigma) + a_2^{(1)}(\sigma) \right] + O(\eta^4) \end{cases} \quad (3.4.47)$$

Or, si nous posons $S_1 = P_+^{(1)} + P_-^{(1)}$, il vient :

$$a_1^{(1)}(\sigma) + a_2^{(1)}(\sigma) = \begin{bmatrix} \frac{dS_1}{dY}(\sigma, 0) \\ \frac{dS_1}{dY}(\sigma, 1) \end{bmatrix} \quad (3.4.48)$$

Nous injectons de nouveau l'ansatz (3.4.33) dans les équations (3.4.23,3.4.24), nous obtenons par identification des termes de puissance deux en η la relation suivante :

$$(1 + \gamma^2)P_{\pm}^{(0)} - \gamma^2 \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{dP_{\pm}^{(1)}}{dY} \right) = 0 \quad (3.4.49)$$

Après avoir ajouté les deux équations (3.4.49) (pour + et -) et remarqué d'après le résultat (3.4.34) qu'on a toujours $P_-^{(0)} + P_+^{(0)} = 1$, on en déduit :

$$\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{dS_1}{dY} \right) = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma^2}$$

ce qui donne après intégration entre 0 et 1

$$\frac{1}{(\sigma + iM_+)^2} \frac{dS_1}{dY}(\sigma, 1) - \frac{1}{(\sigma + iM_-)^2} \frac{dS_1}{dY}(\sigma, 0) = \int_0^1 \frac{1 + \gamma(r)^2}{\gamma(r)^2} dr \quad (3.4.50)$$

En combinant (3.4.46), (3.4.47) et (3.4.48), nous trouvons

$$\det \mathcal{A}(\sigma, \eta) \sim - \left[(\sigma + i M_-)^2 (\sigma + i M_+)^2 \frac{C(\gamma)}{\langle \gamma^2 \rangle} \right] \eta^2 \quad (3.4.51)$$

où nous avons posé :

$$C(\gamma) = \int_0^1 \frac{1 + \gamma(r)^2}{\gamma(r)^2} dr = \langle \frac{1 + \gamma^2}{\gamma^2} \rangle = 1 + \langle \gamma^{-2} \rangle. \quad (3.4.52)$$

Finalement, nous avons montré que :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(\sigma, 0) = 1 + \frac{C(\gamma)}{\langle \gamma^2 \rangle} \frac{(\sigma + i M_-)^2 (\sigma + i M_+)^2}{\zeta_- \zeta_+} \neq 0, \quad \forall \sigma \in \mathbb{C}. \quad (3.4.53)$$

Nous pouvons maintenant appliquer la théorème des fonctions implicites pour énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.14 *Il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour $\eta \leq \eta_0$ l'équation $F(\sigma, \eta) = 0$ admet une unique solution ayant une partie réelle strictement positive $\sigma = \sigma^*(\eta)$ dans un voisinage de σ^* . En outre, cette solution admet pour η petit, le développement :*

$$\sigma^*(\eta) = \sigma^* - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}(\sigma^*, 0) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \eta}(\sigma^*, 0) \eta + O(\eta^2).$$

3.4.3 Instabilité du problème de Cauchy

Nous introduisons le semi-groupe de $L^2(\mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{S}^\varepsilon(t) (u_0, v_0, p_0) = (u^\varepsilon(t), v^\varepsilon(t), p^\varepsilon(t))$$

où $(u^\varepsilon(t), v^\varepsilon(t), p^\varepsilon(t))$ est l'unique solution du problème (3.4.2).

THÉORÈME 3.15 *Si $M_+ - M_- \in] 0, 2\sqrt{2} [$, il existe une constante $\alpha = \alpha(M_-, M_+, M)$ strictement positive telle que*

$$\| \mathcal{S}^\varepsilon(t) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\mathbb{R}^2))} \geq \exp \left(\alpha \frac{t}{\varepsilon} \right) \quad (3.4.54)$$

PREUVE : : Nous allons construire un jeu de données initiales adéquates. Nous commençons par introduire, pour tout $k > 0$ tel que $\varepsilon k \geq \eta_0$, la fonction $p^\varepsilon(k, y) \in L^2(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{cases} \widehat{p}^\varepsilon(k, y) = \varphi_1(\varepsilon k) e^{+k \zeta_1^*(\varepsilon k) y}, & y < 0 \\ \widehat{p}^\varepsilon(k, y) = \varphi_2(\varepsilon k) e^{-k \zeta_2^*(\varepsilon k) y}, & y > \varepsilon \\ \widehat{p}^\varepsilon(k, y) = \varphi_1(\varepsilon k) \widehat{P}_1(\sigma^*(\varepsilon k), \varepsilon k, \frac{y}{\varepsilon}) + \varphi_2(\varepsilon k) \widehat{P}_2(\sigma^*(\varepsilon k), \varepsilon k, \frac{y}{\varepsilon}), & y \in]0, \varepsilon[\end{cases}$$

où la fonction $\sigma^*(\eta)$ est celle définie par le théorème 3.14, où les fonctions ζ_1^* et ζ_2^* sont données par

$$\zeta_\pm^* = (\sigma^*(\eta) + i M_\pm)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

et où le vecteur $(\varphi_1(\eta), \varphi_2(\eta))^T$ appartient à

$$\ker [\eta \mathcal{D}(\sigma) - \mathcal{A}(\sigma, \eta)]$$

(normalisé, par exemple, par sa norme euclidienne : $|\varphi_1(\eta)|^2 + |\varphi_2(\eta)|^2 = 1$).

À partir de \widehat{p}^ε , nous construisons $\widehat{u}^\varepsilon(k, y)$ et $\widehat{v}^\varepsilon(k, y)$ à l'aide des formules (3.4.10)-(3.4.11). Nous posons alors

$$(\widehat{p}^\varepsilon(t), \widehat{u}^\varepsilon(t), \widehat{v}^\varepsilon(t))(k, \cdot) = C_\varepsilon(k) (\widehat{p}^\varepsilon(t), \widehat{u}^\varepsilon(t), \widehat{v}^\varepsilon(t))(k, \cdot)$$

où $C_\varepsilon(k)$ est une constante de normalisation telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} (|\widehat{p}^\varepsilon|^2 + |\widehat{u}^\varepsilon|^2 + |\widehat{v}^\varepsilon|^2) dk = 1$$

Rappelons (cf. théorème 3.7) que

$$\sigma^*(0) = \sigma^* = -i \frac{M_+ + M_-}{2} + q(e)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } e = M_+ - M_- \text{ et } q(e) = \sqrt{1 + e^2} - e^2/4 - 1.$$

Bien évidemment, il existe $\eta^* \leq \eta_0$ tel que pour tout $\eta < \eta^*$

$$\Re \sigma^*(\eta) > \frac{1}{2} q(e) > 0. \quad (3.4.55)$$

Choisissons alors $A_\varepsilon(k)$ une fonction à support compact telle que

$$\text{supp } \widehat{A}_\varepsilon(k) \subset \left[\frac{\eta^*}{2\varepsilon}, \frac{\eta^*}{\varepsilon} \right]$$

et nous construisons les conditions initiales

$$\begin{cases} p_0^\varepsilon(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_\varepsilon(k) \widehat{p}^\varepsilon(k, y) e^{ikx} dk \\ u_0^\varepsilon(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_\varepsilon(k) \widehat{u}^\varepsilon(k, y) e^{ikx} dk \\ v_0^\varepsilon(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_\varepsilon(k) \widehat{v}^\varepsilon(k, y) e^{ikx} dk \end{cases} \quad (3.4.56)$$

On notera que, par Plancherel, $\|\cdot\|$ désignant la norme dans $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\|p_0^\varepsilon\|^2 + \|u_0^\varepsilon\|^2 + \|v_0^\varepsilon\|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\widehat{A}_\varepsilon(k)|^2 dk \quad (3.4.57)$$

Par linéarité, la solution du problème de Cauchy (3.4.2) pour des données initiales (3.4.56) est donnée par :

$$\begin{cases} p^\varepsilon(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_\varepsilon(k) \widehat{p}^\varepsilon(k, y) e^{ikx} e^{k \sigma^*(\varepsilon k) t} dk \\ u^\varepsilon(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_\varepsilon(k) \widehat{u}^\varepsilon(k, y) e^{ikx} e^{k \sigma^*(\varepsilon k) t} dk \\ v^\varepsilon(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_\varepsilon(k) \widehat{v}^\varepsilon(k, y) e^{ikx} e^{k \sigma^*(\varepsilon k) t} dk \end{cases} \quad (3.4.58)$$

Par le théorème de Plancherel nous trouvons :

$$\|p^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 + \|u_0^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 + \|v^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{A}_\varepsilon(k) \right|^2 e^{2k \Re\{\sigma^*(\varepsilon k)\} t} dk \quad (3.4.59)$$

Compte tenu de (3.4.55) et de la propriété de support de \widehat{A}_ε , on a :

$$\|p^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 + \|u^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 + \|v^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 \geq 2\pi e^{\frac{\eta^* q(e)}{2\varepsilon} t} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{A}_\varepsilon(k) \right|^2 dk \quad (3.4.60)$$

Si on confronte (3.4.57)-(3.4.60) on obtient le résultat annoncé avec $\alpha = \frac{\eta^* q(e)}{2}$ ■

Commentaires

a) Le résultat que nous venons d'établir est un résultat valable quel que soit $\varepsilon > 0$. Autrement dit, il n'est pas nécessaire que le profil M_ε soit raide pour générer une instabilité. Toutefois l'estimation montre que plus le profil est raide, plus l'instabilité est forte : ceci est cohérent avec le caractère fortement mal posé du problème limite étudié au paragraphe 3.3.1.

b) Il est facile de voir qu'on a une instabilité de type (3.4.54) même si on mesure $\mathcal{S}_\varepsilon(t)$ dans une norme du type $\mathcal{L}(\mathbb{H}^s, \mathbb{L}^2)$ et ce quel que soit s aussi grand soit il (Remarquons que la norme de $(u_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon, p_0^\varepsilon)$ dans l'espace \mathbb{H}^s explose au pire en ε^{-s}).

c) Notre résultat ne montre pas que la croissance exponentielle a lieu pour toute donnée initiale (u_0, v_0, p_0) (ce n'est d'ailleurs pas le cas) mais nous conjecturons que c'est génériquement le cas (c'est à dire pour un ensemble dense de données initiales)

3.4.4 Illustration numérique de l'instabilité.

Nous présentons ici quelques résultats numériques obtenus à l'aide d'un code développé dans le projet POEMS à l'INRIA écrit par J. Diaz et A. Ezziani pour la résolution des équations d'Euler linéarisées par une méthode de différences finies.

Dans toute la suite nous présentons des calculs effectués sur le domaine :

$$\Omega = [-10, 10] \times [-5, 5].$$

Des conditions de bord rigide ($v = 0$) sont appliquées sur les frontières $y = \pm 5$ et on utilise des conditions aux limites périodiques. L'onde acoustique va être engendrée par une condition initiale en pression localisée au voisinage de l'origine $OP(0, 0)$

$$p_0(\mathbf{x}) = \exp(-a|\mathbf{x}|^2) \quad (a = 10^{-2} \log 2), \quad u_0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) = 0.$$

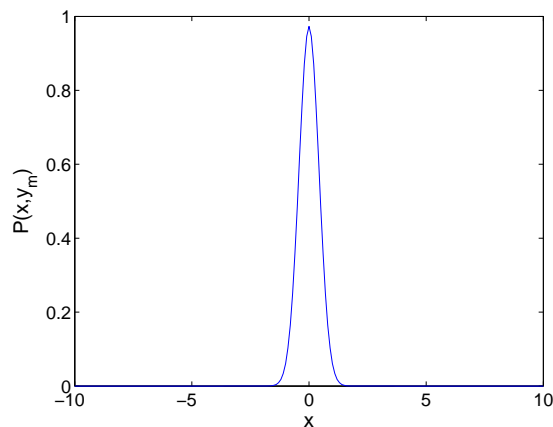
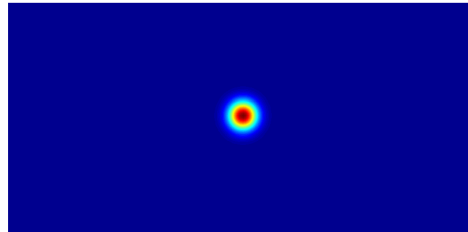


FIG. 3.4.2: La donnée initiale p_0 , en lignes de niveau en haut, en coupe en bas.

Notons que c'est le paramètre a qui va définir la longueur d'onde principale du phénomène. Les simulations seront réalisées sur l'intervalle de temps $[0, T]$, avec $T \simeq 21.2$ ce qui correspond approximativement, en l'absence d'écoulement, au temps nécessaire à une onde acoustique pour parcourir la longueur du domaine de calcul. Les calculs ont été réalisés sur un maillage suffisamment fin pour que l'on soit sûr de voir une solution convergée (la situation est ici radicalement différente de celle de la section 3.3.3).

Le profil de vitesse $M_\varepsilon(y)$ sera tel que (attention, on change ici un peu les notations par rapport à ce qui précède) :

$$M_\varepsilon(y) = \begin{cases} M_- & \text{si } y < -\varepsilon/2 \\ \frac{M_+ + M_-}{2} + \frac{M_+ - M_-}{2} \sin \frac{\pi y}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon/2 < y < \varepsilon/2 \\ M_+ & \text{si } y > +\varepsilon/2 \end{cases} \quad (3.4.61)$$

La zone de transition entre les deux écoulements homogènes est donc cette fois la bande $|y| < \varepsilon/2$ mais c'est toujours le paramètre ε qui règle la brutalité de la transition. Les simulations seront effectuées avec 4 valeurs de ε . La valeur $\varepsilon = 4$ servira de référence. Elle correspond à une transition trop douce (elle s'effectue sur 40 pour cent de la hauteur du conduit) pour que l'instabilité soit visible à l'échelle de temps $t = 20$. Les trois autres valeurs de ε sont $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25$

Le cas d'une instabilité absolue

Dans cette série d'expériences, nous choisissons

$$M_+ = -M_- = 0.5,$$

auquel cas nous savons que la vitesse de propagation du mode instable est nulle : l'instabilité est absolue. Les 4 profils de vitesse considérés sont représentés sur la figure 3.4.3.

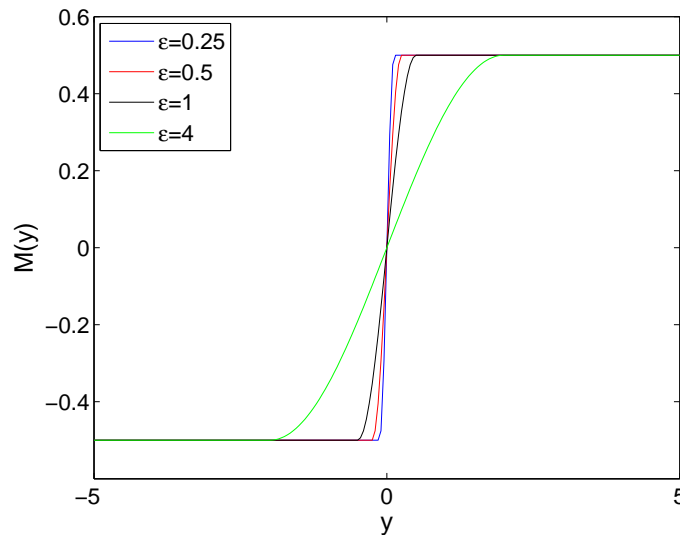


FIG. 3.4.3: Les profils de vitesse considérés correspondant à $\varepsilon = 4, 1, 0.5$ et 0.25

Dans la suite nous allons privilégier l'observation de la solution sur la ligne de transition $y = 0$. Ce mode de représentation nous a paru optimal ; pour visualiser le phénomène d'instabilité que nous voulons mettre en lumière. Cette vision sera parfois complétée par la visualisation d'instantanés 2D (en lignes de niveau) qui permet de mieux appréhender la globalité du phénomène physique.

Nous considérons tout d'abord le profil "doux" $\varepsilon = 4$ et nous représentons sur la figure 3.4.4 la coupe de la pression sur la ligne aux trois instants consécutifs $t = 3T/5, 4T/5$ et T sur la ligne $y = 0$. Aucun phénomène spectaculaire n'est visible. L'amplitude de la solution varie peu au cours du temps et on observe essentiellement un phénomène de propagation "classique", ainsi que cela est illustré par les instantanés 2D de la figure 3.4.5. L'explication est simple : l'instabilité est "faible" au sens où le taux de croissance exponentielle de la solution est trop petit pour que l'instabilité se manifeste avant l'instant $t = T$.

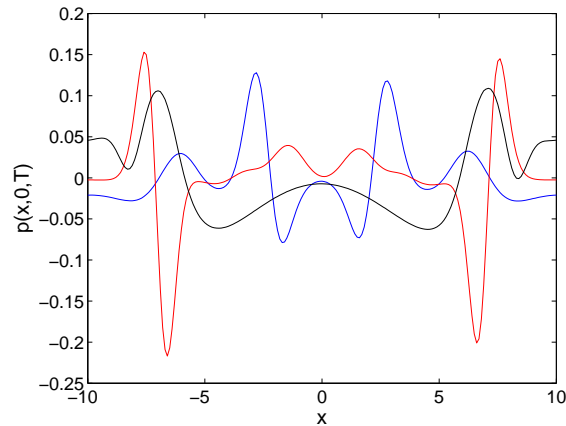


FIG. 3.4.4: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 4$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

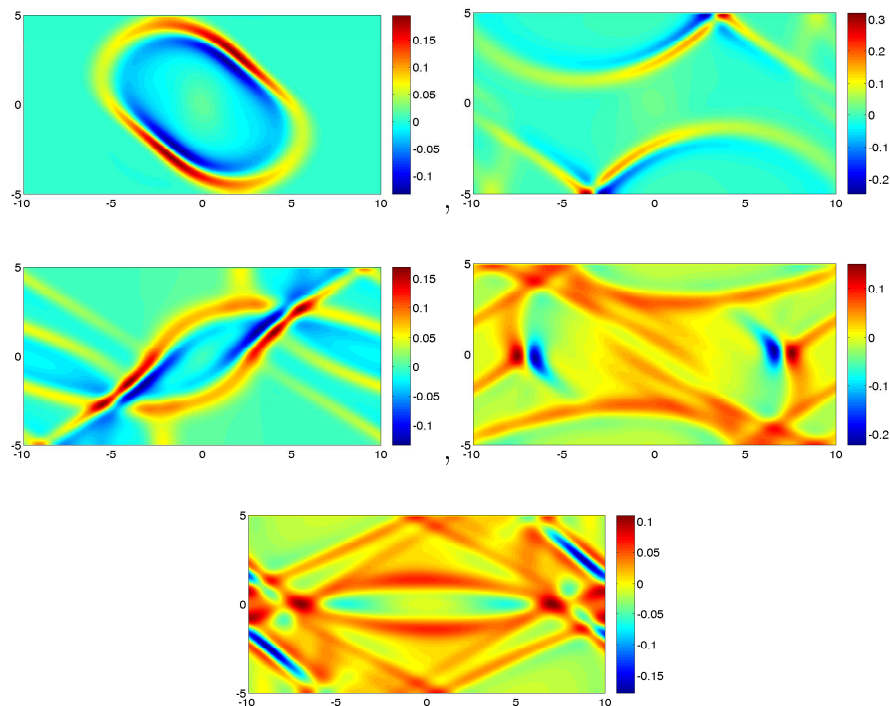


FIG. 3.4.5: Instantanés de pression pour $\varepsilon = 4$, $t = T/5, 2T/5, 3T/5, 4T/5, T$

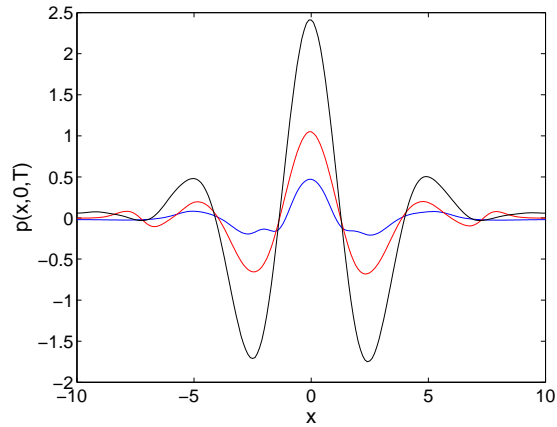


FIG. 3.4.6: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 1$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

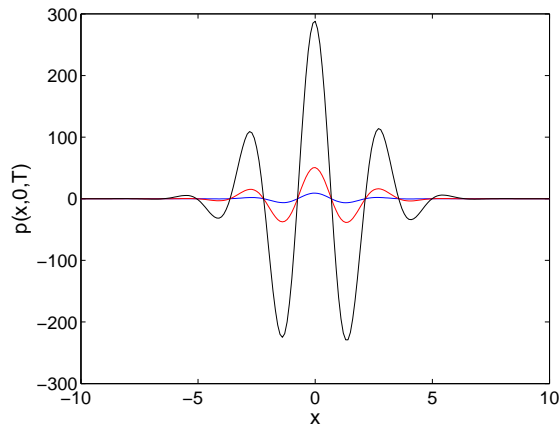


FIG. 3.4.7: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 0.5$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

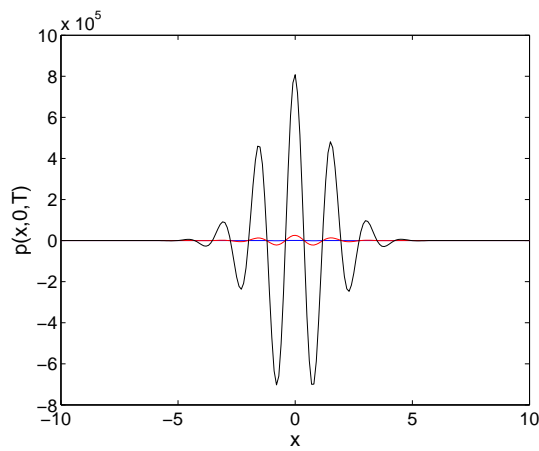


FIG. 3.4.8: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 0.25$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

Pour les trois plus petites valeurs de ε , les choses changent radicalement. Sur les figures de coupes sur l'axe $y = 0$ (figures 3.4.6 à 3.4.8), dès l'instant $t = 3T/5$ on voit clairement apparaître une onde "stationnaire" (c'est le caractère absolu de l'instabilité) dont l'amplitude domine le reste (la partie qui se propage dans toutes les directions) et augmente fortement (exponentiellement en fait) avec le temps. De plus, la croissance est d'autant plus forte que ε diminue, ainsi que la théorie le prédit (faire attention aux échelles qui changent beaucoup d'un dessin à l'autre). Enfin, en même temps que l'instabilité se fait de plus en plus forte, la longueur d'onde (en x) de l'onde stationnaire diminue, proportionnellement à ε , ainsi que c'était également prévu par la théorie.

Pour mieux saisir l'intégralité du phénomène, nous nous intéressons à l'évolution des instantanés de la solution, en nous restreignant à la plus petite valeur de ε , $\varepsilon = 0.25$. Sur la figure 3.4.9, l'échelle de couleurs varie d'un instant à l'autre en s'adaptant aux valeurs de la solution. Avec cette représentation, l'onde volumique acoustique, encore visible à l'instant $t = T/5$ disparaît dès l'instant $2T/5$. Sur la figure 3.4.9, nous avons opté pour une échelle fixe qui sature les trop fortes valeurs de la solutions. On peut ainsi observer que :

- L'onde stationnaire est fortement anisotrope et "s'étale" prioritairement dans la direction x .
- Lorsque le temps augmente, cette onde "s'étale" également dans la direction y . Ceci se voit aussi sur les coupes en $x = 0$ (figures 3.4.11 à 3.4.13).

Enfin, nous étudions les variations de la norme L^2 (dans le domaine Ω) de la solution (plus précisément du champ de pression p^ε) au cours du temps. Nous avons choisi de ne pas représenter les courbes correspondant à différentes valeurs de ε sur une même figure afin de ne pas écraser le phénomène d'instabilité pour les plus grandes valeurs de ε (nous attirons l'attention du lecteur sur les échelles). La figure 3.4.14 illustre clairement la croissance exponentielle de la solution (sauf pour $\varepsilon = 4$, l'instabilité n'étant pas encore visible). Ceci est encore plus clair sur la figure 3.4.15 où on représente, sur la même figure cette fois, les variations du logarithme de cette énergie. Nous avons choisi de remplacer $\varepsilon = 4$ (pas d'instabilité visible) par une expérience avec $\varepsilon = 0.75$. En mesurant la pente de l'asymptote de chacune des courbes de la figure 3.4.15, on peut mesurer le taux de croissance exponentielle de la solution puis représenter ses variations en fonction de $1/\varepsilon$ (figure 3.4.16). On observe que ce taux est proportionnel (au moins pour ε petit) à $1/\varepsilon$ ce que prévoit la théorie (voir par exemple l'inégalité (3.4.60)).

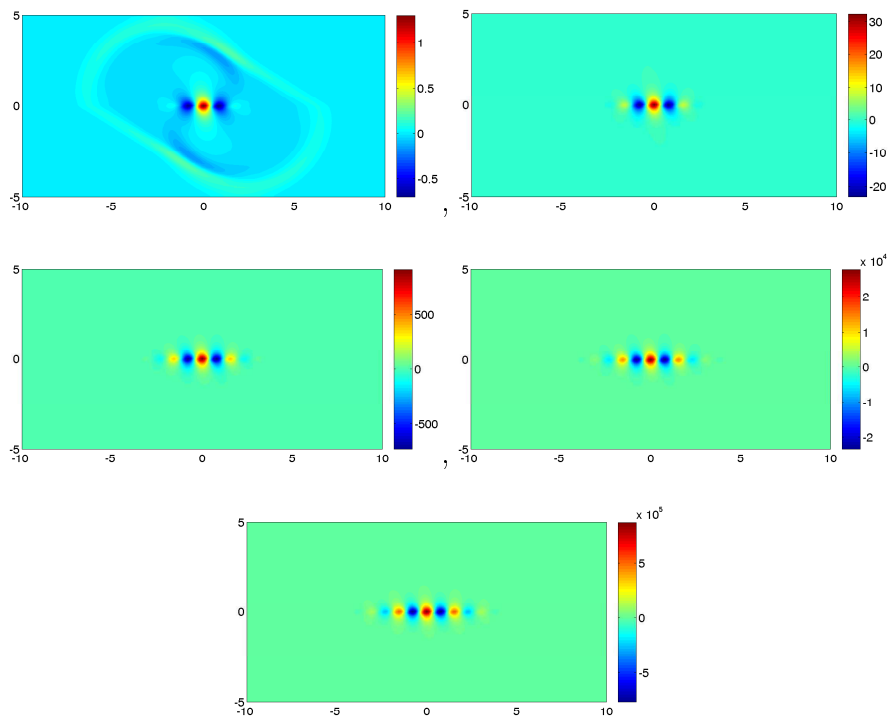


FIG. 3.4.9: Instantanés de pression pour $\varepsilon = 0.25$, $t = T/5, 2T/5, 3T/5, 4T/5, T$, l'échelle varie d'un dessin à l'autre

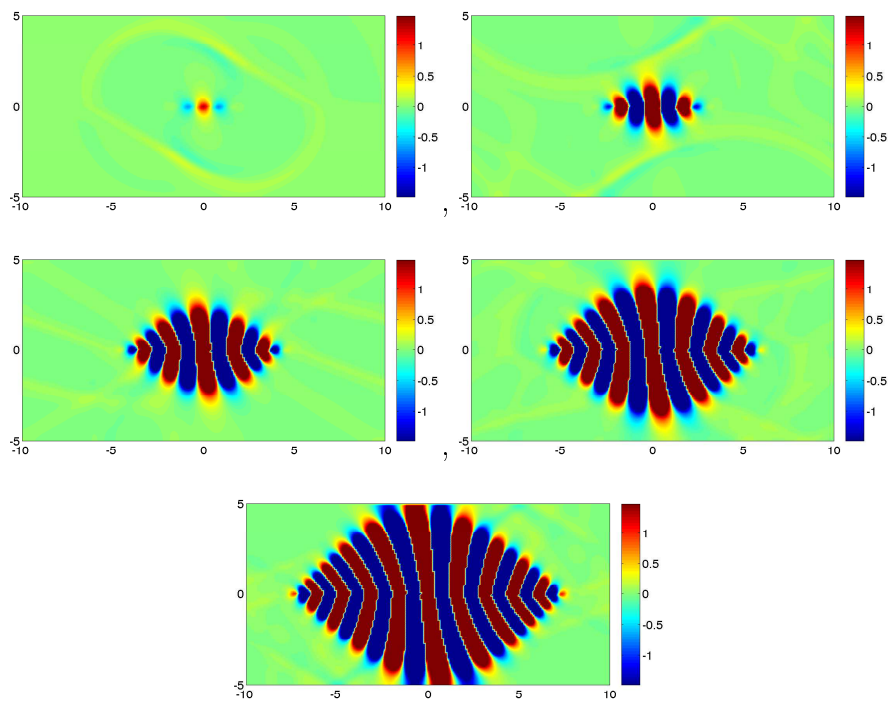


FIG. 3.4.10: Instantanés de pression pour $\varepsilon = 0.25$, $t = T/5, 2T/5, 3T/5, 4T/5, T$, l'échelle est la même d'un dessin à l'autre

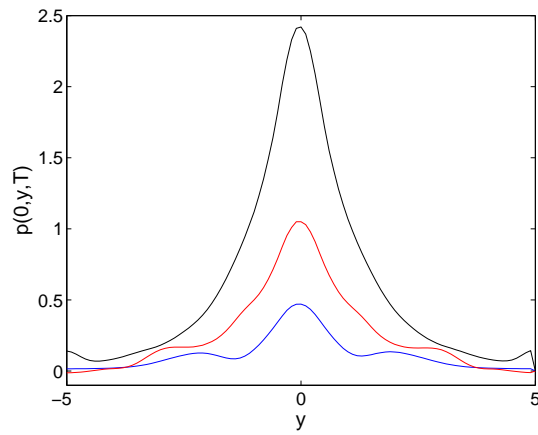


FIG. 3.4.11: Variations de la pression sur la ligne $x = 0$ pour $\varepsilon = 1$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

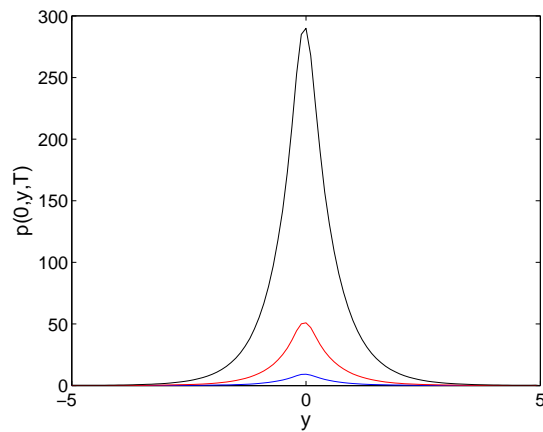


FIG. 3.4.12: Variations de la pression sur la ligne $x = 0$ pour $\varepsilon = 0.5$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

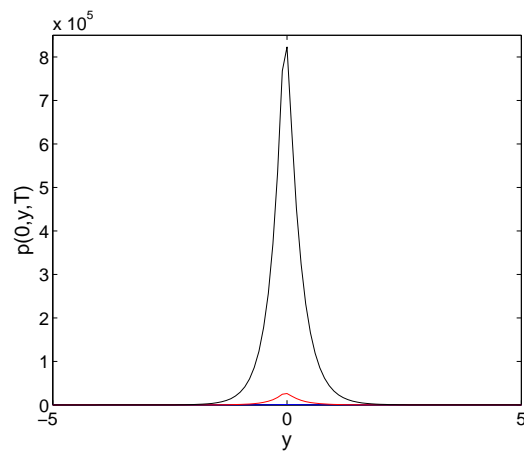


FIG. 3.4.13: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 0.25$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

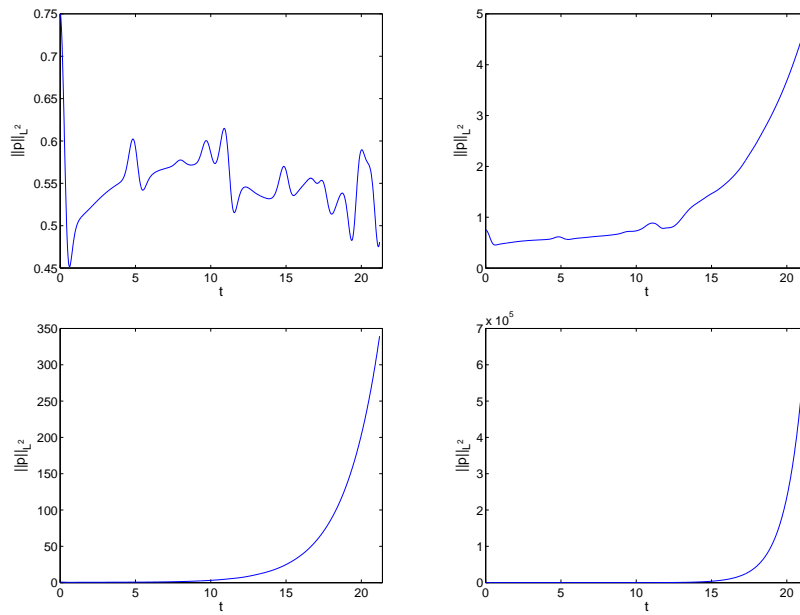


FIG. 3.4.14: Variations de la norme L^2 du champ de pression en fonction du temps pour $\varepsilon = 4, 1, 0.5, 0.25$

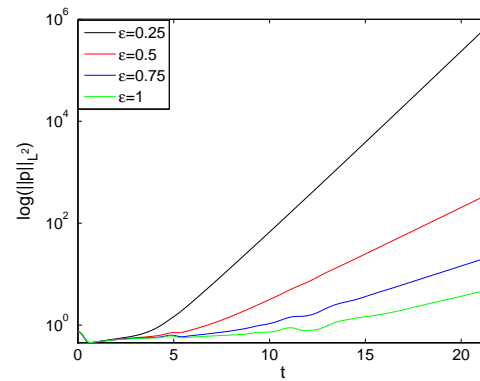


FIG. 3.4.15: Variations du logarithme de la norme L^2 du champ de pression en fonction du temps pour $\varepsilon = 4, 1, 0.5, 0.25$

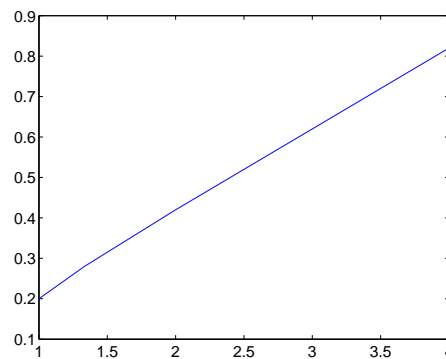


FIG. 3.4.16: Variations du taux de croissance exponentiel en fonction de $1/\varepsilon$.

Le cas d'une instabilité convective

Dans cette série d'expériences, nous choisissons $M_+ = 0.5$ et $M_- = 0.$, auquel cas nous savons que la vitesse de propagation du mode instable est :

$$\frac{M_+ + M_-}{2} = 0.25.$$

Nous menons exactement les mêmes expériences numériques que dans la sous-section précédente. Les profils de Mach utilisés pour les calculs correspondent à la figure 3.4.17.

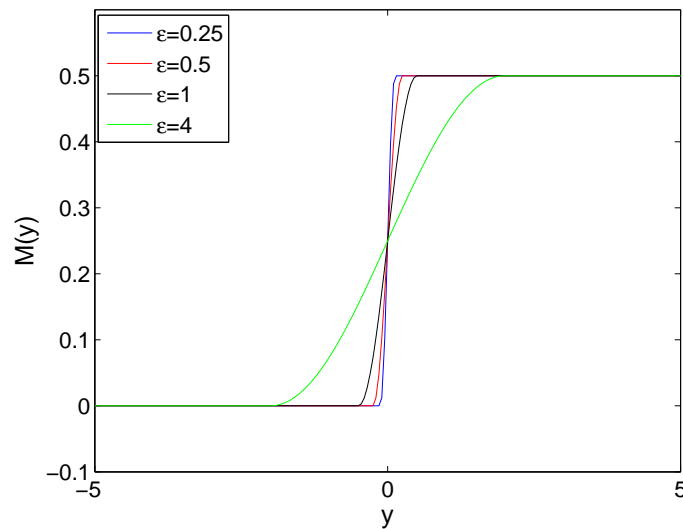


FIG. 3.4.17: Les profils de vitesse considérés correspondant à $\varepsilon = 4, 1, 0.5$ et 0.25

Les résultats obtenus, présentés sur les figures 3.4.19 à 3.4.26 appellent des commentaires similaires à ceux que nous avons fait dans le cas de l'instabilité absolue à ceci près que.

- L'onde instable n'est plus stationnaire mais se propage lentement dans la direction des x positifs à une vitesse de propagation qu'on peut mesurer sensiblement égale à 0.25.
- L'instabilité est moins forte que dans le cas de la section précédente. Ainsi, même pour $\varepsilon = 1$, l'instabilité n'est pas très visible (voir figure 3.4.20) aux instants considérés (alors que c'était le cas pour l'instabilité absolue). Cela est dû au fait que $\Re \sigma^*$ est plus fort pour $e = |M_+ - M_-| = 1$ que pour $e = |M_+ - M_-| = 1/2$. (voir figure 3.3.1).

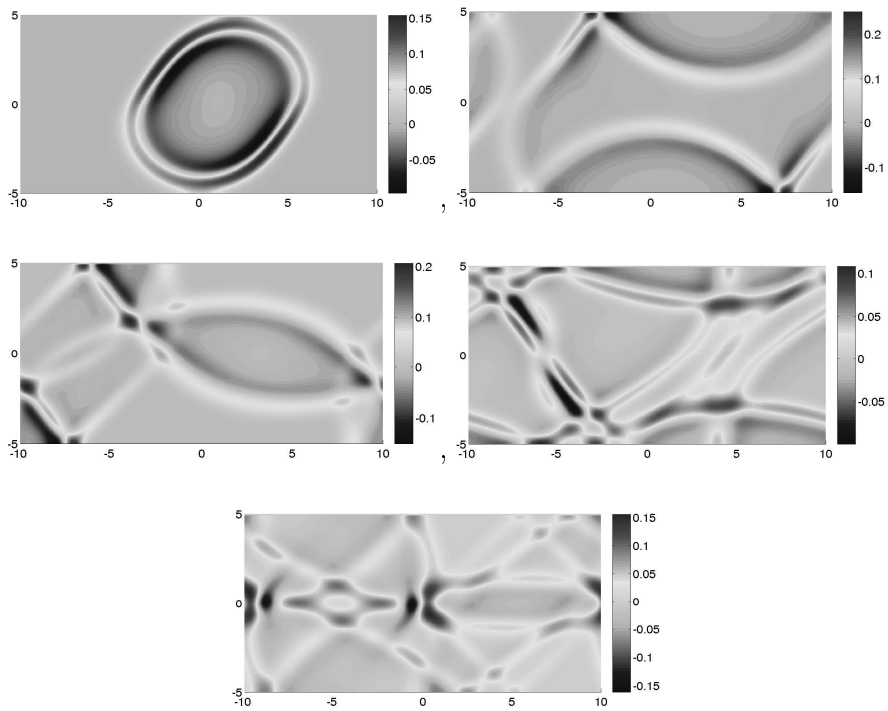


FIG. 3.4.18: Instantanés de pression pour $\varepsilon = 4$, $t = T/5, 2T/5, 3T/5, 4T/5, T$

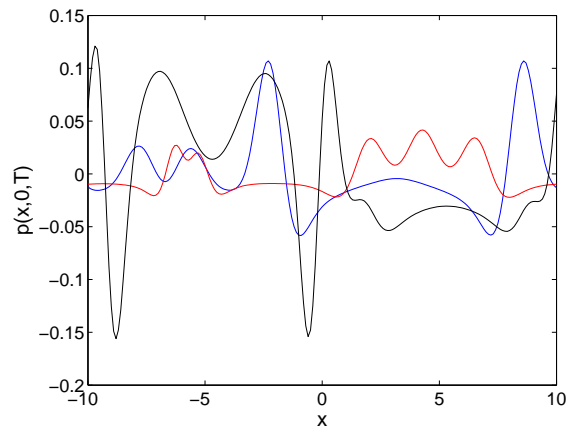


FIG. 3.4.19: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 4$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

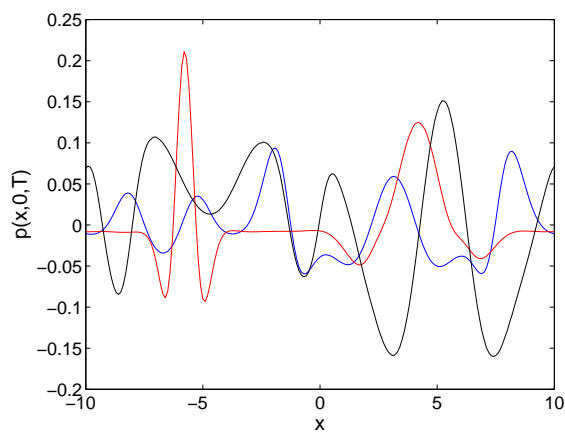


FIG. 3.4.20: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 1$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

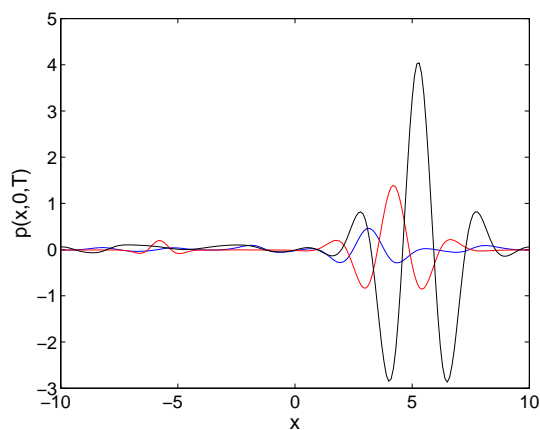


FIG. 3.4.21: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 0.5$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

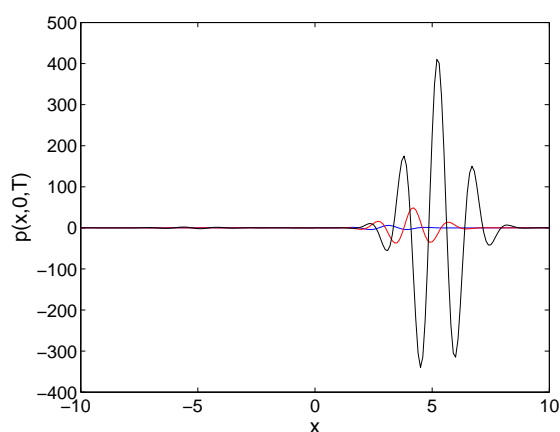


FIG. 3.4.22: Variations de la pression sur la ligne $y = 0$ pour $\varepsilon = 0.25$ aux instants $t = 3T/5$ (bleu), $t = 4T/5$ (rouge), $t = T$ (noir)

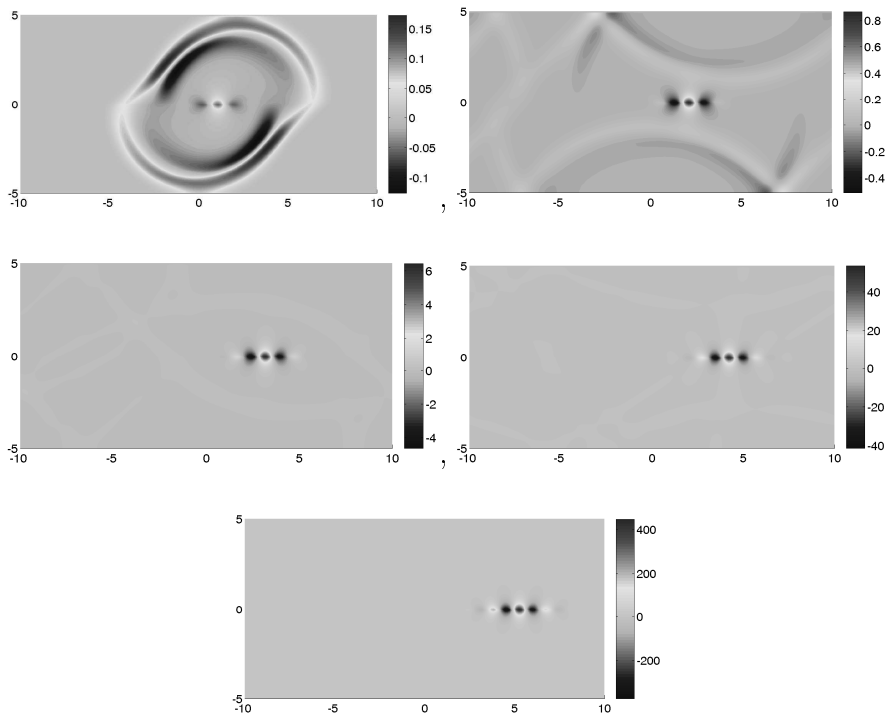


FIG. 3.4.23: Instantanés de pression pour $\varepsilon = 0.25$, $t = T/5, 2T/5, 3T/5, 4T/5, T$, l'échelle varie d'un dessin à l'autre

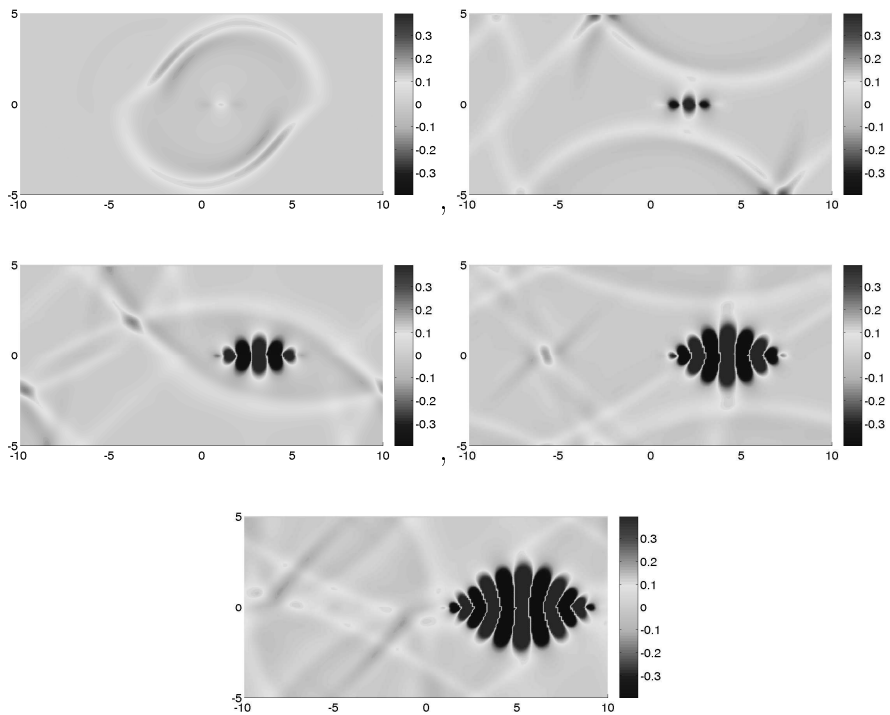


FIG. 3.4.24: Instantanés de pression pour $\varepsilon = 0.25$, $t = T/5, 2T/5, 3T/5, 4T/5, T$, l'échelle est la même d'un dessin à l'autre

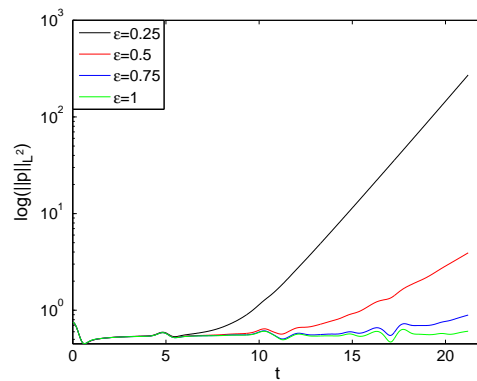


FIG. 3.4.25: Variations du logarithme de la norme L^2 du champ pression en fonction du temps pour $\varepsilon = 1, 0.75, 0.5, 0.25$

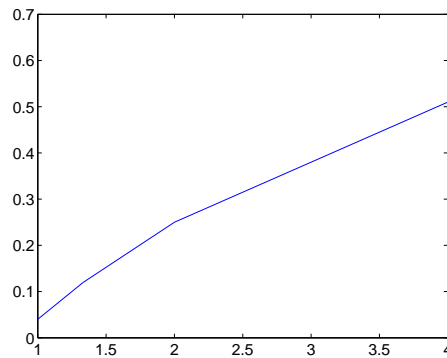


FIG. 3.4.26: Variations du taux de croissance exponentiel en fonction de $1/\varepsilon$.

Conclusion

Nous avons voulu dans ce chapitre mettre en évidence le lien entre le caractère mal posé du problème de Cauchy associé aux équations de l'aéroacoustique linéaire et les instabilités de Kelvin-Helmholtz. Nous nous intéressons dans la suite à la résolution de ce problème par deux approches. La première est une approche analytique basée sur la théorie de la solution fondamentale. En revanche la deuxième repose sur la conception d'un nouveau modèle bien posé au sens de Kreiss (fortement bien posé) qui peut être résolu numériquement. Nous verrons dans le chapitre 5 que la dérivation des nouvelles conditions pour les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement discontinu est basée essentiellement sur les mêmes techniques que celles nous avons utilisées dans ce chapitre.

FONCTION DE GREEN POUR UN ÉCOULEMENT DISCONTINU

Sommaire

4.1 Introduction	110
4.2 Formulation du problème	110
4.2.1 Changement de référentiel	110
4.2.2 Reformulation du problème	112
4.3 Résolution dans l'espace des transformées	113
4.3.1 Résolution dans l'espace Fourier-Laplace	113
4.3.2 Résolution dans l'espace de Laplace	117
4.4 Résolution du problème pour l'onde réfléchie	118
4.4.1 Contours de Cagniard-de Hoop	118
4.4.2 Retour au domaine temporel	121
4.4.3 Étude de l'onde de vorticité	124
4.4.4 Conclusion	125
4.5 Résolution du problème pour les ondes transmises	125
4.5.1 Détermination du contour d'intégration	125
4.5.2 Retour au domaine temporel	127
4.6 Fronts d'ondes	129

4.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à déterminer analytiquement une solution de l'équation de Galbrun dans une couche de mélange idéalisée qui sépare deux fluides homogènes identiques, l'un en écoulement subsonique et l'autre au repos. La difficulté majeure de ce problème comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent est son caractère fortement mal posé. Néanmoins, nous pouvons surmonter cette difficulté sur le plan théorique en définissant notre solution (qui peut croître exponentiellement en temps et en espace) au sens de la théorie des ultradistributions : c'est l'extension de la théorie des distributions (également appelée théorie des fonctions généralisées) [51]. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C pour une brève présentation de cette théorie.

Dans un deuxième temps, nous étudions théoriquement le comportement des ondes d'instabilité qui représentent la partie singulière de la solution et qui la fait sortir du cadre de la théorie des distributions.

L'apport de cette étude par rapport aux anciens travaux qui existent depuis une trentaine d'années dans la littérature [39, 40] est d'une part l'utilisation d'une formulation due à Galbrun [23] qui est bien adaptée au problème de transmission par rapport aux modèles existants dans la littérature, d'autre part c'est l'application d'une nouvelle méthode de résolution analytique due à Cagniard-de Hoop qui nous permet de déduire rapidement la solution du problème aux valeurs initiales dans l'espace physique sans faire intervenir la solution harmonique.

4.2 Formulation du problème

Considérons un milieu infini constitué de deux fluides parfaits identiques séparés par une ligne de cisaillement. Les deux fluides qui sont en écoulement sont respectivement associés aux demi-plans $Y < 0$ et $Y > 0$ et les vitesses d'écoulement dans ces milieux sont respectivement \bar{V}_- et \bar{V}_+ (voir la figure 4.2.1).

On décrit ce problème physique en utilisant le modèle de Galbrun dont l'inconnue est la perturbation du déplacement lagrangien $\boldsymbol{\xi} = (\xi_X, \xi_Y)$:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}}{D\tau^2} - \nabla (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+. \quad (4.2.1)$$

où $D/D\tau = \partial/\partial\tau + \bar{V}(Y) \partial/\partial X$, avec $\bar{V}(Y) = \bar{V}_- \mathbf{1}_{\{Y < 0\}} + \bar{V}_+ \mathbf{1}_{\{Y > 0\}}$.

Les conditions de transmission "naturelles" associées à l'équation (4.2.1) se traduisent par la continuité de la pression (l'opposé de la divergence de la solution) et du déplacement normal à l'interface $\Gamma := \{Y = 0\}$.

$$[[\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_Y]] = 0, \quad [[\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}]] = 0 \quad (4.2.2)$$

4.2.1 Changement de référentiel

Nous considérons le changement de variable suivant (qui est une transformation Galiléenne du repère espace-temps (O, X, Y, τ))

$$(O, X, Y, \tau) \xrightarrow{\varphi} (O, x, y, t) \quad \text{tel que} \quad x = (X - \bar{V}_- \tau), \quad y = Y, \quad t = \tau \quad (4.2.3)$$

Les dérivées partielles entre les deux systèmes de coordonnées sont reliées par :

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - \bar{V}_- \frac{\partial}{\partial x}$$

En introduisant une nouvelle inconnue définie par $\mathbf{u}(x, y, t) = \boldsymbol{\xi}(X, Y, \tau)$, on trouve que la fonction \mathbf{u} vérifie l'équation suivante :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{g} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+. \quad (4.2.4)$$

avec $\mathbf{g}(x, y, t) = \mathbf{f}(x + \bar{V}_- t, y, t)$ et $D/Dt = \partial/\partial t + \bar{U}(y) \partial/\partial x$, où $\bar{U}(y) = 0$ si $y < 0$, $\bar{U}(y) = \bar{V}_+ - \bar{V}_-$ si $y > 0$.

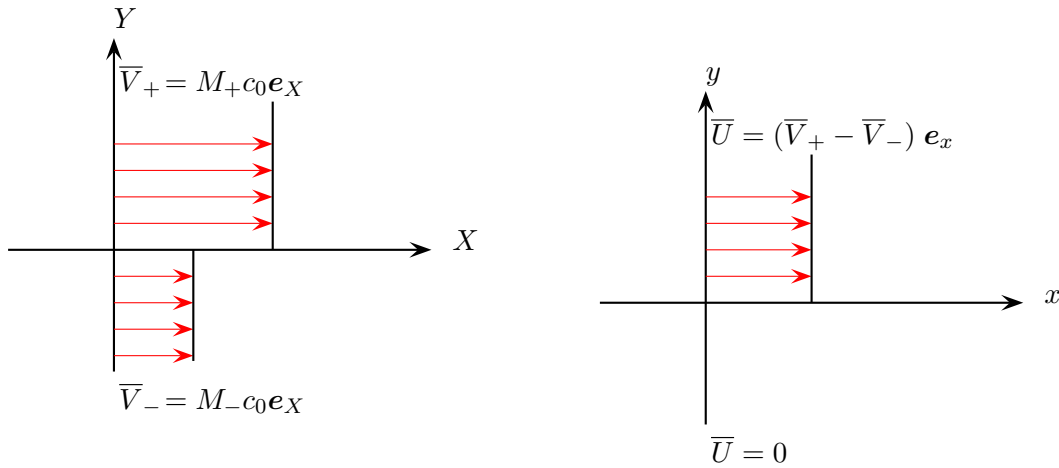


FIG. 4.2.1: Changement de référentiel.

Le changement de variable (4.2.3) nous ramène à la résolution du problème de transmission suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver une solution causale } \mathbf{u} \text{ tels que} & \\ \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{g}_- & \text{dans } \Omega_- \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{g}_+ & \text{dans } \Omega_+ \times \mathbb{R}_+ \\ \llbracket \operatorname{div} \mathbf{u} \rrbracket = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y \rrbracket = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

avec $\Omega_{\pm} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad /mid \quad \pm y > 0 \}$ et $\mathbf{g}_{\pm} = \mathbf{g}|_{\Omega_{\pm}}$.

4.2.2 Reformulation du problème

Pour résoudre ce problème analytiquement nous allons chercher le tenseur de Green associé à l'équation de Galbrun dans une couche de mélange qui contient deux fluides identiques, l'un en écoulement subsonique et l'autre au repos (voir figure 4.2.2). Nous supposons que la source est située dans le milieu en repos Ω_- à une distance $h(> 0)$ de l'interface Γ . Le tenseur de Green vérifie l'équation suivante (ce tenseur est la solution qui caractérise la réponse impulsionnelle du fluide) :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 G_{ij}}{Dt^2} - \partial_i (\partial_k G_{kj}) = \delta(t) \delta(x) \delta(y+h) \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2 \quad (4.2.6)$$

où δ_{ij} est le symbole de KRONECKER.

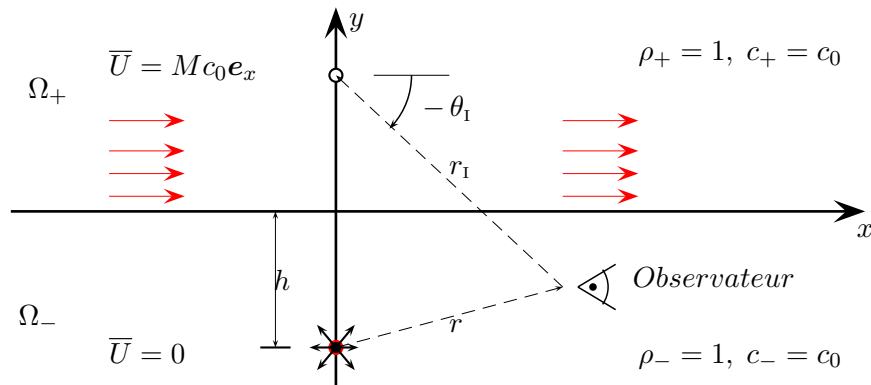


FIG. 4.2.2: Géométrie du problème dans le nouveau référentiel.

En introduisant maintenant les notions d'ondes réfléchie \mathcal{G}^{II} et transmise \mathcal{G}^{I} , on peut toujours décomposer selon le principe des images le tenseur de Green sous la forme suivante¹ :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\infty} + \mathcal{G}^{\text{I}} \quad \text{si } y < 0, \quad (4.2.7a)$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\text{II}} \quad \text{si } y > 0. \quad (4.2.7b)$$

\mathcal{G}^{∞} désigne l'onde incidente qui est la solution de l'équation de GALBRUN dans un milieu infini (sans interface) contenant un fluide parfait au repos.

En injectant les identités (4.2.7a)-(4.2.7b) dans l'équation de (4.2.6), on obtient :

$$c_0^{-2} \partial_t^2 G_{ij}^{\infty} - \partial_i (\partial_k G_{kj}^{\infty}) = \delta(t) \delta(x) \delta(y+h) \delta_{ij}, \quad y < 0, \quad (4.2.8a)$$

$$c_0^{-2} \partial_t^2 G_{ij}^{\text{I}} - \partial_i (\partial_k G_{kj}^{\text{I}}) = 0, \quad y < 0, \quad (4.2.8b)$$

$$c_0^{-2} D_t^2 G_{ij}^{\text{II}} - \partial_i (\partial_k G_{kj}^{\text{II}}) = 0, \quad y > 0. \quad (4.2.8c)$$

avec $D_t = \partial/\partial t + \bar{U} \partial/\partial x$ ($\bar{U} = \bar{V}_+ - \bar{V}_-$).

¹Nous avons choisi la notation ∞ pour le champ incident car il est défini dans tout l'espace.

On complète le système d'équations (4.2.8a)-(4.2.8c) par les conditions de transmission suivantes :

$$G_1 \cdot e_y|_{y=0^+} = G_1 \cdot e_y|_{y=0^-}, \quad (4.2.9)$$

$$G_2 \cdot e_y|_{y=0^+} = G_2 \cdot e_y|_{y=0^-}, \quad (4.2.10)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{G}|_{y=0^+} = \operatorname{div} \mathcal{G}|_{y=0^-} \quad (4.2.11)$$

où G_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathcal{G} .

Nous nous intéressons seulement dans la suite aux calculs des fonctions G_{ij}^L avec ($L = \text{I}$ ou II). En effet le calcul du champ incident est déjà fait dans le chapitre 2).

4.3 Résolution dans l'espace des transformées

Le but de cette partie est de calculer les tenseurs $(G_{ij}^L)_{ij}$ ($L = \text{I}, \text{II}$) associés respectivement aux ondes réfléchi et transmise, dans le domaine spectral (k, y, s) . Ensuite nous revenons au domaine spatial (x, y, s) , en appliquant simplement la transformée de Fourier inverse.

4.3.1 Résolution dans l'espace Fourier-Laplace

Après l'application de transformation de Fourier en x et de Laplace en temps t aux équations (4.2.8a)-(4.2.8b), on obtient un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 facile à résoudre :

$$\kappa^2(k, y, s) \widehat{G}_{12}^L - i k \frac{d \widehat{G}_{22}^L}{dy} = 0 \quad (4.3.1a)$$

$$(\kappa^2(k, y, s) - k^2) \widehat{G}_{22}^L - i k \frac{d \widehat{G}_{12}^L}{dy} - \frac{d^2 \widehat{G}_{22}^L}{dy^2} = 0 \quad (4.3.1b)$$

$$\kappa^2(k, y, s) \widehat{G}_{11}^L - i k \frac{d \widehat{G}_{21}^L}{dy} = 0 \quad (4.3.1c)$$

$$(\kappa^2(k, y, s) - k^2) \widehat{G}_{21}^L - i k \frac{d \widehat{G}_{11}^L}{dy} - \frac{d^2 \widehat{G}_{21}^L}{dy^2} = 0 \quad (4.3.1d)$$

avec

$$\kappa^2(k, y, s) \triangleq \begin{cases} \kappa_1^2(k, s) = (s/c_0)^2 + k^2 & \text{si } y < 0 \\ \kappa_2^2(k, s) = (s/c_0 + i M k)^2 + k^2 & \text{si } y > 0, \end{cases}$$

M désigne le nombre de Mach qui est défini par \bar{U}/c_0 ou encore par $M_+ - M_-$.

Le calcul des composantes \widehat{G}_{2j}^L ($j = 1, 2$ et $L = \text{I}, \text{II}$) se fait de la même manière que celui du milieu homogène mais sans terme source :

$$\widehat{G}_{2j}^L(k, y, s) = A_{2j}^L(k, s) \exp(-\kappa_l(k, s)|y|), \quad \forall j = 1, 2; \forall L = \text{I}, \text{II} \quad (4.3.2)$$

avec

- $A_{2j}^L(k, s)$ est une fonction des deux variables k et s à déterminer.
- $\kappa_1(k, s) = \left((s/c_0)^2 + k^2 \right)^{1/2}$
- $\kappa_2(k, s) = \left((s/c_0 + iMk)^2 + k^2 \right)^{1/2}$

où pour la détermination de la racine carrée complexe, $\sqrt{\cdot}$ définie dans le chapitre 2

D'après la définition de la racine carrée complexe (??) que nous avons choisie, la coupure de la fonction κ_l dans le plan complexe des k sera la réunion de deux demi-droites pour un nombre de Mach M_l ($\in [0, 1]$) qui est égal à 0 si $l = 1$ et égal à M sinon (voir figure 4.3.1) :

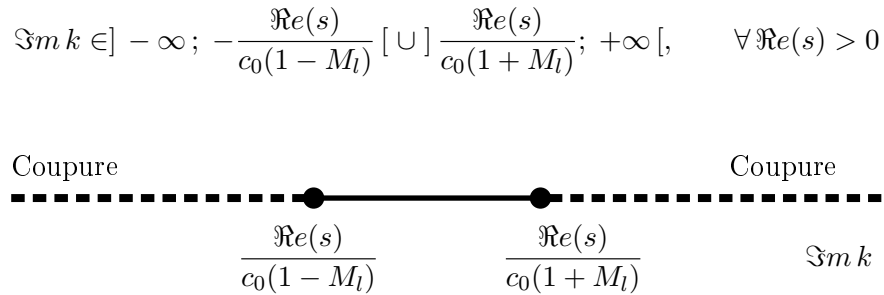


FIG. 4.3.1: Détermination de la fonction $k \mapsto \kappa_l(k, s)$

Pour calculer les amplitudes $A_{2j}^L(k, s)$, on doit utiliser les conditions de transmission (4.2.9) - (4.2.11) sur l'interface qui s'écrivent dans l'espace de Fourier-Laplace :

$$\widehat{G}_{21}^{\text{II}} \Big|_{y=0^+} = \widehat{G}_{21}^{\infty} + \widehat{G}_{21}^{\text{I}} \Big|_{y=0^-} \quad (4.3.3)$$

$$ik \widehat{G}_{11}^{\text{II}} + \partial_y \widehat{G}_{21}^{\text{II}} \Big|_{y=0^+} = ik (\widehat{G}_{11}^{\infty} + \widehat{G}_{11}^{\text{I}}) + \partial_y (\widehat{G}_{21}^{\infty} + \widehat{G}_{21}^{\text{I}}) \Big|_{y=0^-} \quad (4.3.4)$$

$$\widehat{G}_{22}^{\text{II}} \Big|_{y=0^+} = \widehat{G}_{22}^{\infty} + \widehat{G}_{22}^{\text{I}} \Big|_{y=0^-} \quad (4.3.5)$$

$$ik \widehat{G}_{12}^{\text{II}} + \partial_y \widehat{G}_{22}^{\text{II}} \Big|_{y=0^+} = ik (\widehat{G}_{12}^{\infty} + \widehat{G}_{12}^{\text{I}}) + \partial_y (\widehat{G}_{22}^{\infty} + \widehat{G}_{22}^{\text{I}}) \Big|_{y=0^-} \quad (4.3.6)$$

Nous rappelons que le tenseur de Green $\mathcal{G}^{\infty} = (G_{ij}^{\infty})_{ij}$ est donné dans l'espace spectral (k, s) pour une source localisée au point $(0, h)$ sous la forme suivante :

$$\widehat{\mathcal{G}}^{\infty}(k, y, s) = \frac{c_0^2}{s^2} \begin{pmatrix} -\frac{k^2}{\kappa_1} & -ik \operatorname{sgn}(y+h) \\ -ik \operatorname{sgn}(y+h) & \kappa_1 \end{pmatrix} e^{-\kappa_1|y+h|}, \quad \forall y < 0. \quad (4.3.7)$$

D'après les équations (4.3.2)-(4.3.3)-(4.3.6) et (4.3.7), les amplitudes vérifient ce système d'équations linéaires :

$$A_{21}^{\text{II}} - A_{21}^{\text{I}} = \widehat{G}_{21}^{\infty} \Big|_{y=0^-} \quad (4.3.8)$$

$$ik A_{11}^{\text{II}} - \kappa_2 A_{21}^{\text{II}} - ik A_{11}^{\text{I}} - \kappa_1 A_{21}^{\text{I}} = ik \widehat{G}_{11}^{\infty} \Big|_{y=0^+} + \kappa_1 \widehat{G}_{21}^{\infty} \Big|_{y=0^+} \quad (4.3.9)$$

$$A_{22}^{\text{II}} - A_{22}^{\text{I}} = \widehat{G}_{22}^{\infty} \Big|_{y=0^-} \quad (4.3.10)$$

$$ik A_{12}^{\text{II}} - \kappa_1 A_{22}^{\text{II}} - ik A_{12}^{\text{I}} - \kappa_2 A_{22}^{\text{I}} = ik \widehat{G}_{12}^{\infty} \Big|_{y=0^+} + \kappa_1 \widehat{G}_{22}^{\infty} \Big|_{y=0^+} \quad (4.3.11)$$

avec A_{j1}^L les amplitudes associées aux termes \widehat{G}_{j1}^L .

On remarque ici qu'on peut calculer les amplitudes associées à la première colonne du tenseur de Green (A_{11}^L, A_{21}^L) indépendamment de la deuxième colonne (A_{12}^L, A_{22}^L).

Pour ce faire on doit compléter le système d'équations linéaires par les équations (4.3.1a)-(4.3.1c) de sorte qu'on obtienne deux systèmes linéaires carrés vérifiés respectivement par $A_1^L = (A_{11}^L, A_{21}^L)$ et $A_2^L = (A_{12}^L, A_{22}^L)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{21}^{\text{II}} - A_{21}^{\text{I}} = \widehat{G}_{21}^{\infty} \Big|_{y=0^-} \\ ik A_{11}^{\text{II}} - \kappa_2 A_{21}^{\text{II}} - ik A_{11}^{\text{I}} - \kappa_1 A_{21}^{\text{I}} = ik \widehat{G}_{11}^{\infty} \Big|_{y=0^+} + \kappa_1 \widehat{G}_{21}^{\infty} \Big|_{y=0^+} \\ \kappa_2 A_{11}^{\text{II}} + ik A_{21}^{\text{II}} = 0 \\ \kappa_1 A_{11}^{\text{I}} - ik A_{21}^{\text{I}} = 0 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{22}^{\text{II}} - A_{22}^{\text{I}} = \widehat{G}_{22}^{\infty} \Big|_{y=0^-} \\ ik A_{12}^{\text{II}} - \kappa_1 A_{22}^{\text{II}} - ik A_{12}^{\text{I}} - \kappa_2 A_{22}^{\text{I}} = ik \widehat{G}_{12}^{\infty} \Big|_{y=0^+} + \kappa_1 \widehat{G}_{22}^{\infty} \Big|_{y=0^+} \\ \kappa_2 A_{12}^{\text{II}} + ik A_{22}^{\text{II}} = 0 \\ \kappa_1 A_{12}^{\text{I}} - ik A_{22}^{\text{I}} = 0 \end{array} \right.$$

qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{M}(k, s) \mathcal{A}_j = \mathcal{B}_j e^{-\kappa_1 h}, \quad \forall j = 1, 2 \quad (4.3.12)$$

avec

$$\mathcal{M}(k, s) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ ik & \kappa_1 & -ik & \kappa_2 \\ 0 & 0 & \kappa_2 & ik \\ \kappa_1 & -ik & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_j = \begin{pmatrix} A_{1j}^{\text{I}} \\ A_{2j}^{\text{I}} \\ A_{1j}^{\text{II}} \\ A_{2j}^{\text{II}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1^{(j)} \\ b_2^{(j)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall j = 1, 2$$

Les composantes du vecteur \mathcal{B}_j sont données par :

$$\begin{cases} b_1^{(1)} = ik\left(\frac{c_0}{s}\right)^2 \\ b_2^{(1)} = -i\frac{k}{\kappa_1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_2^{(2)} = -\kappa_1\left(\frac{c_0}{s}\right)^2 \\ b_2^{(2)} = 1 \end{cases}$$

Pour que le problème de transmission (4.2.6)-(4.2.11) admette une solution unique, il faut que

$$\det \mathcal{M}(k, s) \neq 0$$

En calculant le déterminant de la matrice \mathcal{M} , on obtient enfin la relation de dispersion de notre problème :

$$\Delta(k, s) = (k_1^2(k, s) - k^2) \kappa_2(k, s) + (\kappa_2^2(k, s) - k^2) \kappa_1(k, s) = 0, \quad (4.3.13)$$

qui peut se réécrire simplement sous la forme :

$$\Delta(k, s) = \frac{s^2}{c_0^2} \left(\frac{s^2}{c_0^2} + k^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{s^2}{c_0^2} + iMk \right)^2 \left(\left(\frac{s}{c_0} + iMk \right)^2 + k^2 \right)^{1/2} = 0, \quad (4.3.14)$$

Nous retrouvons alors (en prenant $c_0 = 1$, $M_- = 0$, $M_+ = M$) la relation de dispersion (3.3.8) du problème de transmission (3.3.2)-(3.3.3) du chapitre précédent. Cette relation est résolue en posant $\sigma = s/k$ mais cette fois nous voulons la résoudre en prenant comme inconnue $q = -ikc_0/s = -ic_0/\sigma$. En utilisant la démonstration du théorème (3.7) nous pouvons montrer facilement le lemme suivant :

LEMME 4.1 *Si $0 < M < 2$ (ce qui est toujours vrai pour le cas subsonique), l'équation (4.3.13) admet uniquement 2 racines complexes :*

$$q_0^\pm = q_r \pm iq_i$$

avec

$$q_r = \frac{1}{2M} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{M^2}}, \quad \text{et} \quad q_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2q_r}{M} - 1} \quad (4.3.15)$$

mais si $M \in]2, 2\sqrt{2}[$, on obtient de plus une racine réelle $q_1 = 2/M$

REMARQUE 4.1 *Nous rappelons ici que l'existence des pôles complexes q_0^\pm dont les parties imaginaires sont positives amène à une croissance exponentielle de la solution en temps ou en espace. Ceci explique l'apparition des ondes d'instabilité. Par contre le pôle q_1 qui est un réel positif ne joue aucun rôle à la manifestation des ondes d'instabilité.*

Par la méthode de CRAMER, on résout aisément l'équation (4.3.12) et nous obtenons enfin les amplitudes qui sont données sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}_1 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{k^2}{\kappa_1} \Delta^- \\ ik \Delta^- \\ 2k^2(\kappa_1^2 - k^2) \\ 2ik\kappa_2(\kappa_1^2 - k^2) \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta^+} \frac{e^{-\kappa_1 h}}{\kappa_1^2 - k^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} ik \Delta^- \\ \kappa_1 \Delta^- \\ -2ik\kappa_1(\kappa_1^2 - k^2) \\ 2\kappa_1\kappa_2(\kappa_1^2 - k^2) \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta^+} \frac{e^{-\kappa_1 h}}{\kappa_1^2 - k^2}$$

avec

$$\Delta^\pm : (k, s) \rightarrow \Delta^\pm(k, s) \triangleq (k_1^2(k, s) - k^2) \kappa_2(k, s) \pm (k_2^2(k, s) - k^2) \kappa_1(k, s)$$

Dans l'espace FOURIER-LAPLACE, les amplitudes de l'onde réfléchie et transmise sont données par :

$$\widehat{\mathcal{G}}^I(k, y, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{k^2}{\kappa_1} & i k \\ -i k & \kappa_1 \end{pmatrix} \frac{\Delta^-}{\Delta^+} \frac{e^{\kappa_1(y-h)}}{\kappa_1^2 - k^2}, \quad \forall y < 0 \quad (4.3.16)$$

$$\widehat{\mathcal{G}}^{II}(k, y, s) = \begin{pmatrix} -k^2 & -i k \kappa_1 \\ -i k \kappa_2 & \kappa_1 \kappa_2 \end{pmatrix} \frac{e^{-\kappa_1 h - \kappa_2 y}}{\Delta^+}, \quad \forall y > 0 \quad (4.3.17)$$

Soient R_{ij} (resp T_{ij}) les coefficients de réflexion (resp de transmission).

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} \frac{(\kappa_1^2 - k^2)}{\Delta_+} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{12} \\ R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\Delta^-}{\Delta^+}$$

En introduisant les matrices de réflexion et de transmission, on peut voir la relation entre les amplitudes des ondes réfléchies et transmises :

$$\widehat{G}_j^\infty|_{y=0} \xrightarrow{\mathcal{T}_j} \widehat{G}_j^{II}|_{y=0}; \quad \widehat{G}_j^\infty|_{y=0} \xrightarrow{\mathcal{C}_j} \widehat{G}_j^I|_{y=0}, \quad \forall j = 1, 2 \quad (4.3.18)$$

avec

$$\mathcal{T}_j = \begin{pmatrix} T_{1j} & 0 \\ 0 & T_{2j} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_j = \begin{pmatrix} R_{1j} & 0 \\ 0 & R_{2j} \end{pmatrix}, \quad \forall j = 1, 2$$

donc on trouve que toutes les composantes du tenseur sont de la forme suivante :

$$\widehat{G}_{ij}^I(k, y, s) = R_{ij}(k, s) A_{ij}^\infty(k, s) e^{\kappa_1(k, s)(y-h)} \quad (4.3.19)$$

$$\widehat{G}_{ij}^{II}(k, y, s) = T_{ij}(k, s) A_{ij}^\infty(k, s) e^{-\kappa_1(k, s)h - \kappa_2(k, s)y} \quad (4.3.20)$$

avec A_{ij}^∞ les amplitudes de l'onde incidente.

4.3.2 Résolution dans l'espace de Laplace

En appliquant la transformation de FOURIER inverse en x à (4.3.19)-(4.3.20), on obtient la transformée de LAPLACE du tenseur dans le domaine spatial.

$$\widetilde{G}_{ij}^I(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(k, s) A_{ij}^\infty(k, s) e^{\kappa_1(k, s)(y-h) + i k x} dk \quad (4.3.21)$$

$$\widetilde{G}_{ij}^{II}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{ij}(k, s) A_{ij}^\infty(k, s) e^{-\kappa_1(k, s)h - \kappa_2(k, s)y + i k x} dk \quad (4.3.22)$$

On fait alors un changement de variable en posant $q = i c_0 k / s$ qui est une étape principale de l'application de la méthode de Cagniard-de Hoop en deux dimension (2D) d'où les fonctions en k et s se réécrivent sous la forme suivante :

$$\kappa_l(k, s) = \frac{s}{c_0} \gamma_l(q), \quad \Delta^\pm(k, s) = \left(\frac{s}{c_0}\right)^3 \Lambda^\pm(q) \quad (4.3.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_1^2(q) &= (1 - q^2)^{1/2}, \quad \gamma_1^2(q) = \left((1 - M q)^2 - q^2\right)^{1/2} \\ \Lambda^\pm(p) &= \gamma_2(q) \pm (1 - M q)^2 \gamma_1(q). \end{aligned}$$

Les identités (4.3.21)-(4.4.10) s'écrivent en fonction de la nouvelle variable τ sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{G}}^I(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mathcal{H}^I(q) e^{-\frac{s}{c_0} (-\gamma_1(q)(y-h) + qx)} dq \equiv \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Xi^I(q) dq \quad (4.3.24)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}^{II}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mathcal{H}^{II}(q) e^{-\frac{s}{c_0} (\gamma_1(q)h + \gamma_2(q)y + qx)} dq \equiv \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Xi^{II}(q) dq \quad (4.3.25)$$

avec

$$\mathcal{H}^I(q) \triangleq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{-q^2}{\gamma_1} & -q \\ q & \gamma_1 \end{pmatrix} \frac{\Lambda^-}{\Lambda^+}, \quad \mathcal{H}^{II}(q) \triangleq \begin{pmatrix} q^2 & q \gamma_2 \\ q \gamma_1 & \gamma_1 \gamma_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\Lambda^+} \quad (4.3.26)$$

Nous allons maintenant calculer le tenseur de GREEN, d'abord dans le milieu Ω_- qui en repos, puis dans le fluide qui en écoulement.

4.4 Résolution du problème pour l'onde réfléchie

4.4.1 Contours de Cagniard-de Hoop

Pour un point fixé (x, y) du demi-plan Ω_- , nous introduisons de nouveau la variable τ qui a la dimension du temps et qui est définie par :

$$c_0 \tau = q x - \gamma_1(q)(y - h) \quad (4.4.1)$$

Le contour de CAGNIARD est alors défini par :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \{q \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(\tau) \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \Im(\tau) = 0\} \\ &:= \left\{q \in \mathbb{C} \text{ tel que } \exists \tau > 0 \mid \left((1 - M q)^2 - q^2\right)^{\frac{1}{2}}(y - h) + q x = c_0 \tau\right\} \end{aligned}$$

Nous posons

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}, \quad x = r_1 \cos \theta_1, \quad y - h = -r_1 \sin \theta_1, \quad \theta_1 \in [0, \pi]$$

Avec ces nouvelles coordonnées polaires nous montrons d'une façon similaire à celle du cas homogène (en prenant $M = 0$) que

$$\Gamma_1 \equiv \Upsilon^- \cup \Upsilon^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+,$$

avec

$$\Upsilon^\pm := \left\{ v^\pm(\tau) = \frac{c_0\tau}{r_1} \cos \theta_1 \pm \sin \theta_1 \sqrt{1 - (\tau/c_0r_1)^2}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_1 \right\}^2$$

$$\Gamma_1^\pm := \left\{ \vartheta^\pm(\tau) = \frac{c_0\tau}{r_1} \cos \theta_1 \pm i \sin \theta_1 \sqrt{(\tau/c_0r_1)^2 - 1}, \tau > \tau_1 \right\}^3$$

Nous verrons que $\tau_1 (= r_1/c_0)$ est le temps d'arrivée de l'onde réfléchie .

Soit $q \in \Gamma_1^\pm$, on note $X = X(\tau) = \Re(q)$ et $Y = Y(\tau) = \Im(q)$, on a alors

$$\boxed{\frac{X^2}{\sin^2 \theta_1} - \frac{Y^2}{\cos^2 \theta_1} = -1} \quad (4.4.2)$$

C'est l'équation d'une hyperbole. En fait $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$ sont deux branches hyperboliques qui intersectent l'axe réel au point $q = q(x, y, \tau = \tau_1) = \cos \theta_1$.

D'après la définition de la racine carrée complexe $\sqrt{\cdot}$ que nous avons choisie, les points de branchement de la fonction Ξ_{ij}^I sont alors $q_1^\pm = \pm 1$ et $q_2^\pm = 1/(M \pm 1)$, ses coupures sont les deux demi-droites réelles

$$\Re q \in] -\infty; -1[\cup] \frac{1}{1+M}; +\infty[, \quad \forall \Re s > 0.$$

Le contour de Cagniard-de Hoop Γ_1 peut traverser la coupure sous certaines conditions qui dépendent essentiellement du point d'observation $\mathbf{x} = (r_1, \theta_1)$ dans le milieu Ω_- . En fait si $q(x, y, \tau_1) = \cos \theta_1 > 1/(1+M) = \cos \theta_M$, le contour d'intégration traverse la coupure Υ_+ , et par conséquent la discontinuité à travers cette coupure va contribuer à l'apparition des ondes de tête.

Nous nous intéressons maintenant à la localisation de la zone d'instabilité qui sera déterminé par la position des pôles par rapport au contour d'intégration. Nous montrons qu'il existe un angle critique $\theta_v = \pi/4$ (l'indice v est lié aux ondes de vorticité) tel que le contour de Cagniard-de Hoop passe par ces pôles. Nous définissons cette zone par :

$$\Omega_-^v := \left\{ (x, y) = (r_1 \cos \theta_1, h - r_1 \sin \theta_1), \quad \left| \frac{\pi}{4} < \theta_1 < \pi \right. \right\}.$$

DÉMONSTRATION :

Nous cherchons à trouver l'ensemble des points (x, y) dans le milieu Ω_- tel que le pôle q_0 (resp \bar{q}_0) soit capturé par la branche hyperbolique du contour d'intégration ayant une partie réelle positive (resp négative). Il faut montrer qu'il existe $\tau > 0$ et un point d'observation $(x, y) = (r_1 \cos \theta_v, h - r_1 \sin \theta_v)$ dans Ω_- vérifiant en même temps ces deux identités :

$$X_0 := \Re(q_0) = \frac{c_0\tau}{r_1} \cos \theta_v \quad (4.4.3)$$

$$Y_0 := \Im(q_0) = \sqrt{(\tau/c_0r_1)^2 - 1} \sin \theta_v. \quad (4.4.4)$$

Or on sait que $q_r^2 - q_i^2 = 1/2$, donc $\exists \lambda_M \in \mathbb{R}$ vérifiant $q_r = (\sqrt{2}/2) \cosh \lambda_M$ et $q_i = (\sqrt{2}/2) \sinh \lambda_M$ ie.

$$q_0 = \cosh \lambda_M \cos \pi/4 + i \sinh \lambda_M \sin \pi/4. \quad (4.4.5)$$

² Υ = upsilon en majuscule, v = upsilon en minuscule

³ ϑ = vartheta

En remplaçant astucieusement dans (4.4.3) et (4.4.4), $c_0\tau/r_I$ par $\cosh \lambda_M$, on peut donc ré-écrire X_0 et Y_0 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X_0 &= \cosh \lambda_M \cos \theta_v \\ Y_0 &= \sinh \lambda_M \sin \theta_v \end{aligned}$$

qu'on en déduit :

$$q_0 = \cosh \lambda_M \cos \theta_v + i \sinh \lambda \sin \theta_v \quad (4.4.6)$$

Pour conclure que $\theta_v = \pi/4$, il suffit d'identifier les deux équations (4.4.5) et (4.4.19). Nous pouvons vérifier aisément que les pôles sont situés à gauche (resp à droite) du contour d'intégration si l'angle $\theta_I > \theta_v$ (resp $\theta_I < \theta_v$).

■

Nous présentons ci-dessous une schématisation de la région d'instabilité.

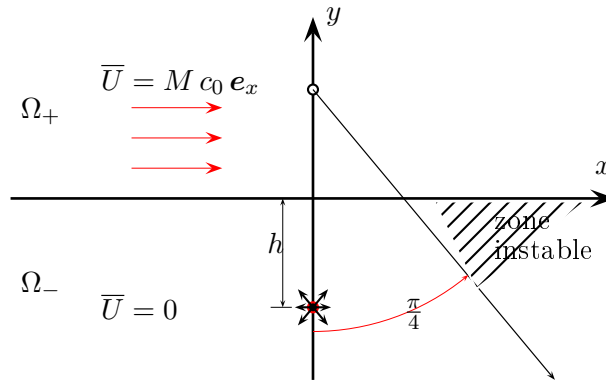


FIG. 4.4.1: Zone de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (IKH)

La question qui se pose maintenant est de savoir s'il existe un point d'observation (r_I, θ_I) tel que le contour de Cagniard-de Hoop traverse la coupure sans passer par le pôle. Cette situation peut se produire lorsque $\theta_M < \theta_I < \frac{\pi}{4}$ (à condition que $M < \sqrt{2} - 1 = 0.414$). Nous présentons ci-dessous les contours de Cagniard-de Hoop pour tous les cas possibles dans le demi-plan inférieur Ω_- .

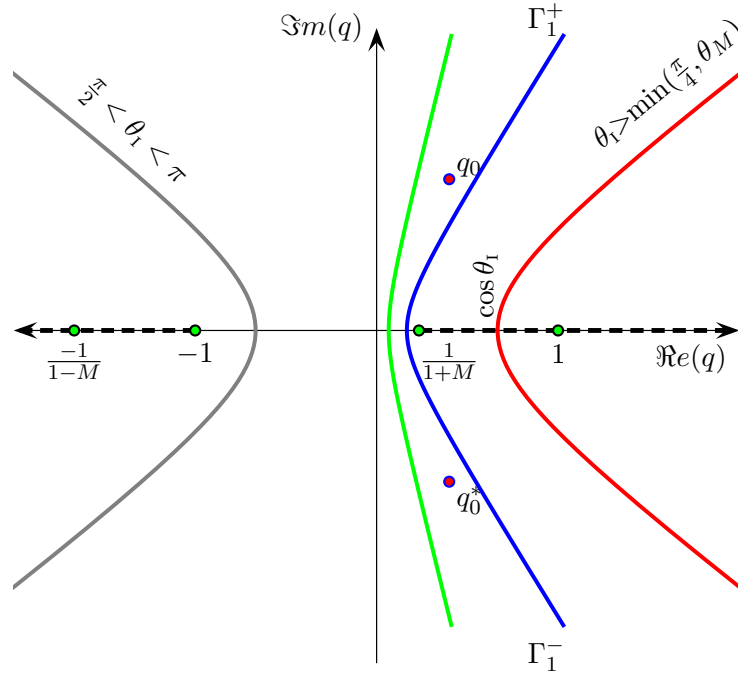


FIG. 4.4.2: Γ^+ et Γ^- dans le q -plan pour différents points d'observation ($\theta_1 \in [0; \pi]$)

4.4.2 Retour au domaine temporel

Il faut alors modifier le contour pour qu'il ne traverse pas les coupures. Pour cela nous allons maintenant utiliser Υ^\pm qui est représenté avec Γ^\pm dans le plan complexe sur la figure 4.4.2. Υ^- est le segment réel $[-1; -1/(1-M)]$ et Υ^+ est le segment réel $[1/(1+M); 1]$. Seul Υ^+ peut nous permettre de contourner la coupure, de plus nous n'avons besoin que de la partie de Υ^+ comprise entre $1/(1+M)$ et $\cos\theta_1 (> 0)$, nous notons donc

$$\Upsilon = \Upsilon^+ \cap [1/(1+M); \cos\theta_1].$$

On vérifie facilement que Υ peut être paramétrée par τ :

$$\Upsilon = \{q = v^+(\tau) = \tau_1 \leq \tau \leq \tau_1\}$$

avec $\tau_1 = r_1 \cos(\theta_1 - \theta_M)$ qui est obtenu en utilisant l'identité (4.4.1) en $q = 1/(1+M)$. Nous perturbons légèrement l'ensemble défini par $\{q \in \Gamma_1^\pm, \quad |q| < \rho\}$, de telle sorte que la courbe obtenue notée par :

$$\Gamma_\rho^\pm := \left\{ q \in \Gamma_1^\pm, \quad |q| < \rho \text{ et } \Re(q) > \frac{1}{\rho} \right\},$$

ne touche pas l'axe réel et nous définissons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon_{\pm\rho} := \{q \in \mathbb{C} \quad | q \pm \frac{1}{\rho} \in \Upsilon\}, \\ c_\rho := \{q \in \mathbb{C} \quad | |q - \frac{1}{1+M}| = \frac{1}{\rho} \text{ et } \Re(q) \leq \frac{1}{1+M}\}. \end{array} \right.$$

$\Upsilon_{+\rho}$ (resp. $\Upsilon_{-\rho}$) est l'image de Υ par la translation de vecteur $\frac{1}{\rho}$ (resp. $-\frac{1}{\rho}$), c_ρ est le demi-cercle "à gauche" de centre $1/(1+M)$ et de rayon $\frac{1}{\rho}$.

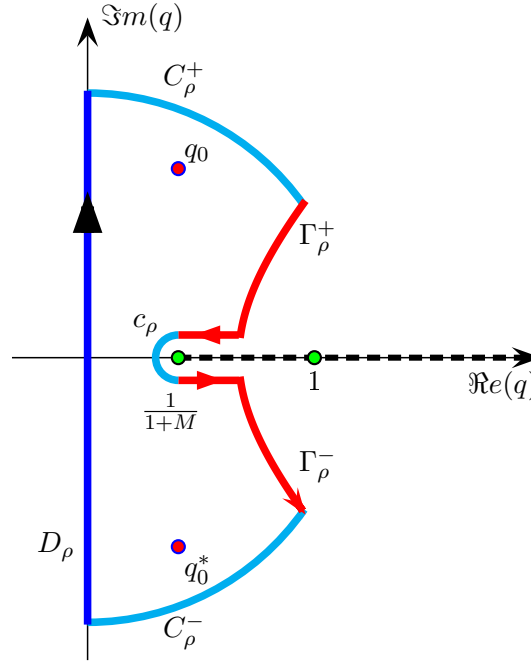


FIG. 4.4.3: Contour d'intégration fermé dans le q -plan pour $\theta_1 > \min(\frac{\pi}{4}, \theta_M)$

La partie imaginaire du contour est symétrique par rapport à l'axe des réels et pour une même valeur de τ on a deux points du contour ayant la même partie réelle.

D'après le théorème des résidus l'intégrale du tenseur Ξ^I sur le contour fermé $CF_\rho := D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho \cup \Upsilon_{+\rho} \cup \Upsilon_{-\rho} \cup c_\rho$ (l'orientation du contour est choisie de telle sorte que le segment réel D_ρ soit parcouru dans le sens des valeurs croissantes — voir figure 4.4.3) est égale à la somme des résidus :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{CF_\rho} \Xi^I(q) dq = \text{Res}(\Xi^I, q_0) + \text{Res}(\Xi^I, q_0^*) = \Psi(q_0) + \Psi(q_0^*) \quad (4.4.7)$$

On vérifie facilement que :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \Xi^I(q) dq = 0 \text{ (matrice nulle)}. \quad (4.4.8)$$

De plus

$$\lim_{|q - \frac{1}{1+M}| \rightarrow 0} (q - \frac{1}{1+M}) \Xi^I(q) = 0,$$

donc, en appliquant le second lemme de Jordan [55] :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{c_\rho} \Xi^I(q) dq = 0. \quad (4.4.9)$$

En faisant tendre ρ vers $+\infty$ dans (4.4.7) et en tenant compte des identités (4.4.8)-(4.4.9), on obtient alors :

$$\tilde{\mathcal{G}}^I(x, y, s) = 2\pi i (\Phi(q_0) + \Phi(q_0^*)) - \int_{\Gamma_1} \Xi^I(q) dq - \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi^I(q) dq + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi^I(q) dq \right]. \quad (4.4.10)$$

Il est alors évident (en orientant Υ "de la droite vers la gauche") que :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{\pm\rho}} \Xi^I(p) dq = \mp \int_{\Upsilon} \Xi^I(p) dq$$

En utilisant la symétrie du contour de Cagniard-de Hoop par rapport à l'axe réel, après le changement de variable d'intégration et avoir remarqué que

$$\Xi^I(\vartheta^-(\tau)) = \Xi^I(\overline{\vartheta^+(\tau)}) = -\overline{\Xi^I(\vartheta^+(\tau))},$$

on déduit de (4.4.1)

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_1} \Xi^I(q) dq &= \int_{\tau_1}^{\infty} \Xi^I(\vartheta^+(\tau)) \frac{\partial \vartheta^+(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_{\tau_1}^{\infty} \Xi^I(\vartheta^-(\tau)) \frac{\partial \vartheta^-(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\infty} 2 \Re e \left\{ \Xi^I(\vartheta^+(\tau)) \frac{\partial \vartheta^+(\tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi^I(q) dq + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi^I(q) dq \right] = \int_{\tau_1}^{\tau_1} 2 \Re e \left\{ \Xi^I(v^+(t)) \frac{\partial v^+(\tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau$$

De la même façon que dans le chapitre précédent, on montre que

$$\frac{\partial \vartheta^{\pm}(\tau)}{\partial \tau} = \pm \frac{i \gamma_1(\vartheta^{\pm}(\tau))}{\sqrt{\tau^2 - (r_1/c_0)^2}} \quad (4.4.11)$$

$$\frac{\partial v^+(\tau)}{\partial \tau} = - \frac{\gamma_1(v^+(\tau))}{\sqrt{(r_1/c_0)^2 - \tau^2}} \quad (4.4.12)$$

En utilisant (4.4.11)-(4.4.12), on obtient finalement :

$$\Xi^I(\vartheta^+(\tau)) \frac{\partial \vartheta^+(\tau)}{\partial \tau} = \mathcal{H}(\vartheta^+(\tau)) \gamma_1(\vartheta^+(\tau)) \frac{e^{-s\tau}}{2\pi \sqrt{\tau^2 - (r_1/c_0)^2}} \quad (4.4.13)$$

$$\Xi^I(v^+(\tau)) \frac{\partial v^+(\tau)}{\partial \tau} = i \mathcal{H}(v^+(\tau)) \gamma_1(v^+(\tau)) \frac{e^{-s\tau}}{2\pi \sqrt{(r_1/c_0)^2 - \tau^2}} \quad (4.4.14)$$

On voit que l'onde réfléchie totale $\tilde{\mathcal{G}}^I$ se décompose en différents types d'ondes. Chaque onde a une signification physique précise :

$$\tilde{\mathcal{G}}^I = \tilde{\mathcal{G}}^R + \tilde{\mathcal{G}}^B + \tilde{\mathcal{G}}^V \quad (4.4.15)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{G}}^R(x, y, s) = \int_{\tau_1}^{\infty} \Re e \left\{ \mathcal{H}(\vartheta^+(\tau)) \gamma_1(\vartheta^+(\tau)) \right\} \frac{e^{-s\tau} d\tau}{\pi \sqrt{\tau^2 - (r_1/c_0)^2}} \quad (4.4.16)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}^B(x, y, s) = - \int_{\tau_1}^{\tau_1} \Im m \left\{ \mathcal{H}(v^+(\tau)) \gamma_1(v^+(\tau)) \right\} \frac{e^{-s\tau} d\tau}{\pi \sqrt{(r_1/c_0)^2 - \tau^2}}. \quad (4.4.17)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}^V(x, y, s) = 2\pi i (\Phi(q_0) + \Phi(q_0^*)) \quad (4.4.18)$$

4.4.3 Étude de l'onde de vorticité

Nous nous intéressons dans cette section aux ondes de vorticité $\tilde{\mathcal{G}}^V$ qui viennent de la contribution des pôles. Nous rappelons que q_0 est un pôle simple donc le résidu de la fonction Ξ au point q_0 s'obtient par un simple calcul de limite.

$$\Phi(q_0) = \lim_{q \rightarrow q_0} (q - q_0) \Xi^I(q)$$

Or on sait que

$$\lim_{q \rightarrow q_0} (q - q_0) \Xi^I(q) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{C}(q_0) \exp(-s \tau(q_0))$$

avec

$$\mathcal{C}^I(q_0) = \lim_{q \rightarrow q_0} (q - q_0) \mathcal{H}^I(q) \quad \text{et} \quad \tau(q_0) = (q_0 x - (1 - q_0^2)^{\frac{1}{2}}(y - h))/c_0 \in \mathbb{C}$$

donc

$$\tilde{\mathcal{G}}^V(x, y, s) = \mathcal{C}^I(q_0) \exp(-s \tau(q_0)) + \mathcal{C}^I(q_0^*) \exp(-s \tau(q_0^*))$$

Le fait que $\tau(q_0)$ peut être complexe, la fonction $\tilde{\mathcal{G}}^V$ ne peut pas admettre une transformée de Laplace inverse au sens de la théorie des fonctions généralisées mais nous pouvons quand même l'inverser au sens d'une autre théorie, celle des ultradistributions (voir l'annexe C)

On définit alors d'une façon analogue à celle de la théorie de distributions la transformée inverse de Laplace aux sens des ultradistributions :

$$\mathcal{G}^V(x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{\mathcal{G}}^V(x, y, s) \exp(s \tau) ds.$$

Le choix du paramètre σ dépend principalement des singularités de la fonction $s \mapsto \tilde{\mathcal{G}}^V(\cdot, \cdot, s)$ mais comme notre fonction $s \mapsto \tilde{\mathcal{G}}^V(\cdot, \cdot, s)$ n'admet aucune singularité *ie.* analytique, on peut prendre alors $\sigma = 0$. Par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^V(x, y, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} i \tilde{\mathcal{G}}^V(x, y, i\omega) \exp(i\omega \tau) d\omega. \\ &= \frac{\mathcal{C}^I(q_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega z) d\omega + \frac{\mathcal{C}^I(\bar{q}_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega \bar{z}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{C}^I(q_0) \delta_z + \mathcal{C}^I(\bar{q}_0) \delta_{\bar{z}} \right) \end{aligned}$$

avec

$$z = \tau - (q_0 x - \gamma_1(q_0)(y - h))/c_0 \in \mathbb{C}.$$

On désigne par δ_z une ultradistribution définie par :

$$\delta_{z=\alpha+i\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^n}{n!} \delta_{\alpha}^{(n)}$$

où δ_{α} est la masse de Dirac au sens habituel.

Pour étudier l'ultradistribution $\delta_{z=\alpha+i\beta}$, nous devons déterminer les parties imaginaire et réelle du nombre complexe z qu'on peut r  crire après avoir remarqué que

$$q_0 = \cosh \lambda_M \cos \pi/4 + i \sinh \lambda \sin \pi/4 = \cos(\pi/4 - i \lambda_M), \quad (4.4.19)$$

sous la forme suivante :

$$z = \tau - (r_1/c_0) \cos(\theta_1 - \pi/4 + i \lambda_M)$$

A partir de cette formule on peut déduire explicitement les parties imaginaire et réelle du nombre complexe z . En effet

$$\Re(z) = \tau - \frac{r_1}{c_0} \cos(\theta_1 - \frac{\pi}{4}) \cosh \lambda_M \quad (4.4.20a)$$

$$\Im(z) = \frac{r_1}{c_0} \sin(\theta_1 - \frac{\pi}{4}) \sinh \lambda_M \quad (4.4.20b)$$

Nous remarquerons à partir de (4.4.20a)-(4.4.20b) que $\Im(z) \leq 0$ est équivalent à $\theta_1 \leq \frac{\pi}{4}$ et que $\Re(z) = 0$ exige que le temps τ soit positif dans la région de l'instabilité c'est à dire lorsque $\theta_1 < \frac{\pi}{4}$.

4.4.4 Conclusion

THÉORÈME 4.2 Dans le demi plan $y < 0$, l'onde réfléchie \mathcal{G}^I est donnée par :

- $\theta_1 > \pi/4$ et $\theta_1 > \theta_M$, $\mathcal{G}^I = \mathcal{G}^R$
- $\theta_1 < \pi/4$ et $\theta_1 > \theta_M$, $\mathcal{G}^I = \mathcal{G}^R + \mathcal{G}^V$
- $\theta_1 < \pi/4$ et $\theta_1 < \theta_M$, $\mathcal{G}^I = \mathcal{G}^R + \mathcal{G}^B$
- $\theta_1 < \pi/4$ et $\theta_1 < \theta_M$, $\mathcal{G}^I = \mathcal{G}^R + \mathcal{G}^B + \mathcal{G}^V$

avec

$$\mathcal{G}^R(x, y, t) = \Re \{ \mathcal{H}(\vartheta^+(t)) \gamma_1(\vartheta^+(t)) \} \frac{\mathbb{H}(t - \tau_1)}{\pi \sqrt{t^2 - (r_1/c_0)^2}} \quad (4.4.21)$$

$$\mathcal{G}^B(x, y, t) = -\Im \{ \mathcal{H}(v^+(t)) \gamma_1(v^+(t)) \} \frac{\mathbb{H}(t - \tau_1)}{\pi \sqrt{(r_1/c_0)^2 - t^2}} \quad (4.4.22)$$

$$\mathcal{G}^V(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{C}^I(q_0) \delta_z + \overline{\mathcal{C}^I}(q_0) \delta_{\bar{z}}) \quad (4.4.23)$$

Nous obtenons finalement le tenseur de Green \mathcal{G}^I dans le milieu $\Omega_- (= \{y < 0\})$:

$$\mathcal{G}^I(\theta_1, r_1, t) = \mathcal{G}^R(\theta_1, r_1, t) + \mathbb{H}(\theta_M - \theta_1) \mathcal{G}^B(\theta_1, r_1, t) + \mathbb{H}(\theta_1 - \pi/4) \mathcal{G}^V(\theta_1, r_1, t) \quad (4.4.24)$$

4.5 Résolution du problème pour les ondes transmises

4.5.1 Détermination du contour d'intégration

Pour un point d'observation (x, y) du milieu $\Omega_+ (\{y > 0\})$ qui est en écoulement uniforme, on introduit la variable τ qui est définie cette fois par :

$$c_0 \tau \triangleq \gamma_1(q) h + \gamma_2(q) y + qx. \quad (4.5.1)$$

On définit une fonction complexe F par

$$F(q, \tau) \triangleq \gamma_1(q) h + \gamma_2(q) y + qx - c_0 \tau$$

L'expression du contour Cagniard-de Hoop de Γ_2 est plus compliquée que celle que nous avons déjà rencontré précédemment :

$$\Gamma_2 := \{\exists \tau \in \mathbb{R}^+ \mid q \in \mathbb{C} \mid F(q, \tau) = h(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + y((1 - Mq)^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} - c_0 \tau = 0\}. \quad (4.5.2)$$

Etude détaillée de Γ_2

Nous pouvons tout de suite remarquer que :

1. si $q = a + ib$ avec $b \neq 0$ est une racine de $F(q, \tau)$, alors $\bar{q} = a - ib$ l'est aussi ;
2. si q est un imaginaire pur alors $q = 0$;
3. si q est réel il faut donc que

$$h(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + y((1 - Mq)^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}$$

soit réel et donc que le nombre réel $q \in]-1, \frac{1}{1+M}[$, cette condition nous montre que le contour ne traversera pas les coupures qui sont situés sur l'axe réel et donc qu'il n'y aura pas d'onde de tête pour l'onde transmise.

4. soit

$$F\left(\frac{q}{\tau}, 1\right) = h\left(\frac{1}{\tau^2} - \left(\frac{q}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + y\left(\left(\frac{1}{\tau} - M\frac{q}{\tau}\right)^2 - \left(\frac{q}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{\tau}x - c_0 = 0 \quad (4.5.3)$$

quand τ tend vers $+\infty$, l'équation (4.5.3) devient :

$$\begin{cases} (x + i(h + y\sqrt{1 - M^2}))q = \tau & \text{si } \Im m(q) < 0 \\ (x - i(h + y\sqrt{1 - M^2}))q = \tau & \text{si } \Im m(q) > 0 \end{cases}$$

Le contour Γ_2 admet donc 2 asymptotes paramétrées par τ d'équations

$$q = q(\tau) = \frac{\tau}{x \pm i(y\sqrt{1 - M^2} + h)} = \frac{x \mp i(y\sqrt{1 - M^2} + h)}{x^2 + (y\sqrt{1 - M^2} + h)^2} \tau \quad (4.5.4)$$

Nous remarquons que lorsque τ tend vers $+\infty$ les asymptotes de la courbe Γ_2 tendent vers l'infini suivant la direction $\pm\theta_{asy} = \arctan(y\sqrt{1 - M^2} + h)/x$ si $\pm\Im m(q) > 0$.

Dans un premier temps, nous allons étudier les propriétés de la fonction suivante :

$$q \longmapsto f(q) := h(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + y((1 - Mq)^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} + qx$$

seulement dans l'intervalle réel $[-1; \frac{1}{1+M}]$, dans un second temps nous étendons l'étude de f dans le plan complexe.

Les dérivées de f par rapport à q sont données par :

$$f'(q) = x - (M + (1 - M^2)q) \frac{y}{\gamma_2(q)} - \frac{q}{\gamma_1(q)} h \quad \text{et} \quad f''(q) = -\frac{y}{\gamma_2(q)^3} - \frac{h}{\gamma_1(q)^3}$$

la fonction f' est strictement décroissante car sa dérivée $f'' < 0$, par conséquent elle admet une unique solution q^* dans l'intervalle $[-1; 1/(1+M)]$. En remarquant que $f'(0) = x - My$ et $\lim_{q \rightarrow 1/(1+M)} f'(q) = -\infty$, on peut déterminer le signe de q^* . Nous résumons ces résultats dans le tableau de variation de f ci-dessous

q	-1	q^*	$1/(1+M)$
$f'(q)$	-		+
$f(q)$			

Finalement, on conclut que $\tau_{\text{II}} = h(q^*)/c_0$ est le temps d'arrivée de l'onde incidente dans le milieu Ω_+ tel que la fonction complexe $F(q, \tau_{\text{II}})$ admette une racine double q^* .

4.5.2 Retour au domaine temporel

En utilisant les résultats (4.5.4), nous montrons que le contour d'intégration Γ_2 ne passe pas par les pôles lorsque $x \leq 0$. Par conséquent ils ne vont pas contribuer dans le calcul *ie.* il n'y aura pas d'ondes d'instabilités pour $x \leq 0$ et $y > 0$.

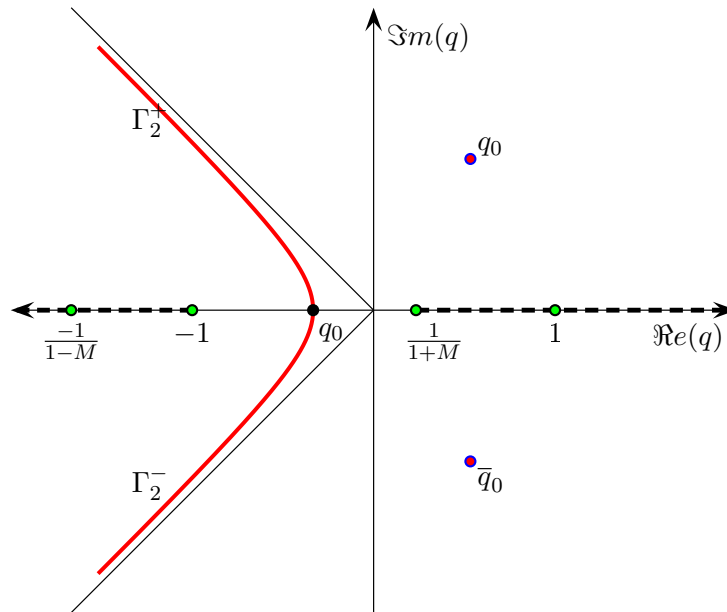


FIG. 4.5.1: Contour d'intégration lorsque $x \leq 0$ et $y > 0$.

Soient $\nu^+(\tau)$ (respectivement $\nu^-(\tau)$) un zéro de la fonction complexe $F(q, \tau)$ ayant une partie réelle positive (respectivement négative) et.

$$\Gamma_2^\pm := \{ q = \nu^\pm(\tau) \text{ tel que } \tau > \tau_{\text{II}} \} \text{ et } \Gamma_2 = \Gamma_2^+ \cup \Gamma_2^-$$

En appliquant les même techniques de calcul que nous avons utilisé précédemment, on obtient la transformée de Laplace de l'onde incidente dans le quart de plan $x \leq 0$ et $y > 0$.

$$\tilde{\mathcal{G}}^{\text{II}}(x, y, s) = - \int_{\Gamma_2} \Xi^{\text{I}}(q) dq = \int_{\tau_{\text{II}}}^{\infty} \Xi^{\text{II}}(\nu^+(\tau)) \frac{\partial \nu^+(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_{\tau_{\text{II}}}^{\infty} \Xi^{\text{II}}(\nu^-(\tau)) \frac{\partial \nu^-(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.5.5)$$

$$= \int_{\tau_{\text{II}}}^{\infty} 2 \Re e \left\{ \Xi^{\text{II}}(\nu^+(\tau)) \frac{\partial \nu^+(\tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau \quad (4.5.6)$$

Si nous appliquons le théorème des fonctions implicites à la fonction $F(q, \tau)$, nous avons alors :

$$\frac{\partial \nu^+}{\partial \tau} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \tau}(\nu^+, \tau)}{\frac{\partial F}{\partial q}(\nu^+, \tau)} = \frac{c_0}{\frac{\partial F}{\partial q}(\nu^+, \tau)}, \quad (4.5.7)$$

avec

$$\frac{\partial F}{\partial q}(\nu^+(\tau), \tau) = x - (M + (1 - M^2)\nu^+(\tau)) \frac{y}{\gamma_2(\nu^+(\tau))} - \frac{\nu^+(\tau)}{\gamma_1(\nu^+(\tau))} h.$$

D'après (4.3.25)-(4.5.6)-(4.5.7), nous obtenons finalement :

$$\tilde{\mathcal{G}}^{\text{II}}(x, y, s) = \frac{c_0}{\pi} \int_{\tau_{\text{II}}}^{\infty} \Im m \left\{ \mathcal{H}^{\text{II}}(\nu^+(\tau)) \left[\frac{\partial F}{\partial q}(\nu^+(\tau), \tau) \right]^{-1} \right\} e^{-s\tau} d\tau. \quad (4.5.8)$$

Par conséquent, nous tirons de (4.5.8) l'expression finale de l'onde incidente dans le quart de plan $x < 0$ et $y > 0$:

$$\mathcal{G}^{\text{II}}(x, y, t) = \frac{c_0}{\pi} \mathbf{H}(t - \tau_{\text{II}}) \Im m \left\{ \mathcal{H}^{\text{II}}(\nu^+(t)) \left[\frac{\partial F}{\partial q}(\nu^+(t), t) \right]^{-1} \right\}. \quad (4.5.9)$$

Nous nous intéressons maintenant au calcul de l'onde incidente dans la partie du plan $x > 0$ et $y > 0$. Pour ce faire il faut tout d'abord localiser l'instabilité dans cette région du plan ce qui n'est pas évident parce que nous n'avons pas d'expression explicite du contour d'intégration. D'après (4.5.1), nous remarquons que le contour de Cagniard-de Hoop associé au point d'observation (x, y) vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Re e \{ \gamma_1(q_0) h + \gamma_2(q_0) y + q_0 x \} > 0, \text{ (qui est toujours vrai } \forall x, y > 0 \text{)} \\ \Im m \{ \gamma_1(q_0) h + \gamma_2(q_0) y + q_0 x \} = 0. \end{cases} \quad (4.5.10)$$

passé exactement par les pôles. Nous définissons implicitement alors la zone d'instabilité par :

$$\Omega_+^v := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad | \quad \Im m \{ \gamma_1(q_0) h + \gamma_2(q_0) y + q_0 x \} < 0 \}.$$

Il y aura de nouveau cette fois les ondes de vorticité dans le domaine Ω_+^v qui sont sous la forme d'une contribution des pôles :

$$G_{\text{II}}^V(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{C}^{\text{II}}(q_0) \delta_b + \mathcal{C}^{\text{II}}(\bar{q}_0) \delta(\bar{b}) \right)$$

avec

$$c_0 b = c_0 t - q_0 x - \gamma_1(q_0) h - \gamma_2(q_0) y \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^{\text{II}}(q_0) = \lim_{q \rightarrow q_0} (q - q_0) \mathcal{H}^{\text{II}}(q).$$

La fonction G_{II}^V sera déclenché au même que l'onde d'instabilité dans le demi plan $y < 0$. Par suite nous obtenons le champs du déplacement incident qui est donné par :

$$\mathcal{G}^{\text{II}}(x, y, t) = \mathcal{G}^T(x, y, t) + \mathcal{G}_{\text{II}}^V(x, y, t) \quad (4.5.11)$$

avec

$$\mathcal{G}^T(x, y, t) = \frac{c_0}{\pi} \Im m \left\{ \mathcal{H}^{\text{II}}(\nu^+(t)) \left[\frac{\partial F}{\partial q}(\nu^+(t), t) \right]^{-1} \right\} \quad (4.5.12)$$

$$G_{\text{II}}^V(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{C}^{\text{II}}(q_0) \delta_b + \mathcal{C}^{\text{II}}(\bar{q}_0) \delta_{\bar{b}} \right) \quad (4.5.13)$$

Nous pouvons remarquer facilement que les deux ondes d'instabilité se rejoignent sur l'interface Γ . En effet, si $y = 0$ on voit tout de suite que b coïncide avec z ($b|_{y=0} = \tau - q_0 x / c_0 - \gamma_1(q_0) h / c_0 = z|_{y=0}$)

4.6 Fronts d'ondes

Dans cette partie nous rappelons quelques propriétés sur les fronts d'ondes de la solution fondamentale. D'après ce qui précède on montre que les ondes incidente et réfléchie arrivent respectivement à l'instant $t = r/c_0$ et $t = \tau_1 = r_1/c_0$ avec $r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$ et $r_1 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}$. D'autres types d'ondes, dites ondes de tête, apparaissent aussi à l'instant $t = (r_1/c_0) \cos(\theta_1 - \theta_M)$

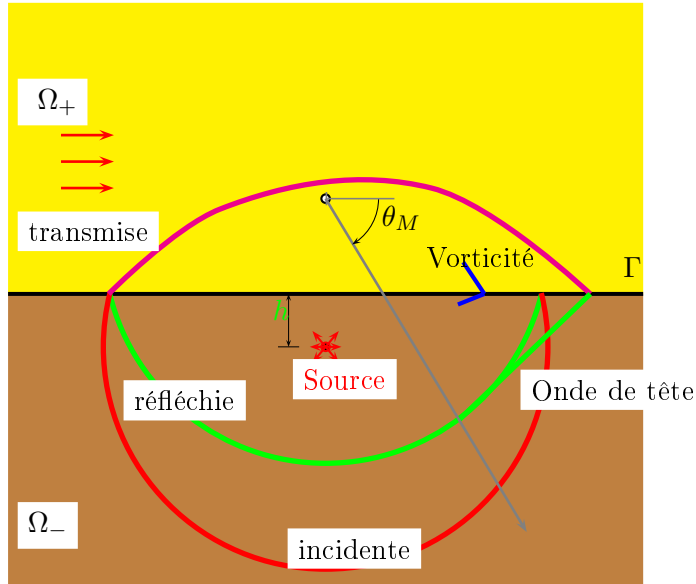


FIG. 4.6.1: Les fronts d'ondes.

MODÉLISATION ASYMPTOTIQUE STABLE D'UNE COUCHE DE CISAILLEMENT

5.1 Introduction

Ce travail vise à apporter une réponse à la question qui se pose naturellement : quel type de modèle peut-on utiliser d'un point de vue numérique pour l'acoustique "au voisinage" d'un écoulement cisailé discontinu (nous voulons dire : un écoulement qui varie si brutalement qu'on aimerait le modéliser - à des fins numériques - comme un écoulement discontinu) ?

L'idée que nous allons développer est de considérer qu'un écoulement discontinu n'a pas de réalité physique mais n'est qu'une modélisation d'un écoulement qui dans la réalité varie brutalement sur une petite distance $\varepsilon > 0$ (par exemple, une couche limite due à la viscosité du fluide, négligée dans les équations d'Euler).

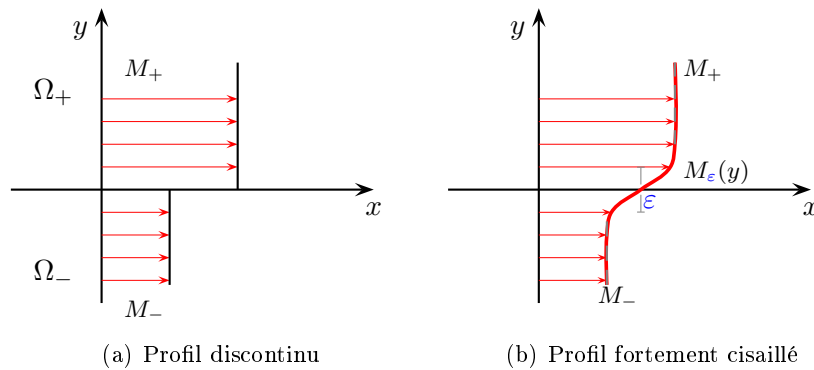


FIG. 5.1.1: Régularisation du profil discontinu

A partir de cette idée et grâce à une analyse asymptotique formelle de type couche limite, nous allons construire un nouveau problème de transmission pour le profil discontinu M_{disc} . Ce genre de modèle est bien entendu très utile pour des modèles de simulation numérique : on évite d'avoir recours à une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche de transition. Les nouvelles conditions de transmission :

1. apparaîtront comme une petite perturbation des conditions de transmission limites fortement instables,
2. garderont la mémoire de la couche limite dont elles représentent une idéalisation,

3. mèneront, c'est le point fondamental, à un problème mathématiquement bien posé,
4. permettront néanmoins de rendre compte des instabilités hydrodynamiques physiques existant dans la couche d'épaisseur non nulle.

Nous reprenons dans ce chapitre les notations du chapitre ??.

5.2 Analyse asymptotique du problème de Cauchy

5.2.1 Position du problème

Nous considérons le problème de Cauchy associé au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x} + (M_\varepsilon)'(y) v^\varepsilon & = 0 \\ \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial y} & = 0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

et à des données initiales que, pour simplifier, nous supposons à support dans le demi-espace $y < 0$. Si on applique au système (5.2.1) la transformation de Fourier par rapport à la variable x , on obtient :

$$(u^\varepsilon, v^\varepsilon, p^\varepsilon)(x, y, t) \longrightarrow (\underline{u}^\varepsilon, \underline{v}^\varepsilon, \underline{p}^\varepsilon)(k, y, t) \quad (5.2.2)$$

Dans ce qui suit, nous allons travailler à k fixé et c'est le comportement des fonctions

$$(y, t) \rightarrow (\underline{u}^\varepsilon, \underline{v}^\varepsilon, \underline{p}^\varepsilon)(k, y, t)$$

qui va nous intéresser.

Le système 1D (en espace) satisfait par ces fonctions, s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{u}^\varepsilon}{\partial t} + i k M_\varepsilon(y) \underline{u}^\varepsilon + i k \underline{p}^\varepsilon + (M_\varepsilon)'(y) \underline{v}^\varepsilon & = 0 \\ \frac{\partial \underline{v}^\varepsilon}{\partial t} + i k M_\varepsilon(y) \underline{v}^\varepsilon + \frac{\partial \underline{p}^\varepsilon}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial \underline{p}^\varepsilon}{\partial t} + i k M_\varepsilon(y) \underline{p}^\varepsilon + i k \underline{u}^\varepsilon + \frac{\partial \underline{v}^\varepsilon}{\partial y} & = 0 \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Lorsque k est fixé, ce problème d'évolution est bien posé dans $L^2(\mathbb{R})$ et on a une estimation a priori du type :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\underline{p}^\varepsilon|^2 + |\underline{u}^\varepsilon|^2 + |\underline{v}^\varepsilon|^2) \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\underline{p}_0^\varepsilon|^2 + |\underline{u}_0^\varepsilon|^2 + |\underline{v}_0^\varepsilon|^2 \right] \exp(C |k| t) \quad (5.2.4)$$

pour une certaine constante C indépendante de ε . Par conséquent, pour $\Re s$ assez grand par rapport à k (mais indépendant de ε) on peut définir la transformée de Laplace en temps de $(\underline{u}^\varepsilon, \underline{v}^\varepsilon, \underline{p}^\varepsilon)$

$$(\underline{u}^\varepsilon, \underline{v}^\varepsilon, \underline{p}^\varepsilon)(k, y, t) \longrightarrow (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon, \widehat{p}^\varepsilon)(k, y, s) \quad (5.2.5)$$

et en outre, k et s étant fixés :

$$y \longmapsto (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon, \widehat{p}^\varepsilon)(k, y, s) \in L^2(\mathbb{R}).$$

5.2.2 Développement asymptotique de type couche limite

C'est maintenant au développement asymptotique en ε de $(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon, \widehat{p}^\varepsilon)$ que nous allons nous intéresser. Ceci va nous ramener à des calculs analogues à ceux de la section 3.4 du chapitre 3. Comme dans cette section, on peut tout ramener à un problème de transmission entre :

$$\widehat{p}_-^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon|_{y<0}, \quad \widehat{p}_+^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon|_{y>\varepsilon} \quad \widehat{p}^\varepsilon = \widehat{p}^\varepsilon|_{0<y<\varepsilon}. \quad (5.2.6)$$

Cette fois, le système d'équations n'est plus homogène. On vérifie que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [k^2 + (s + ikM_-)^2] \widehat{p}_-^\varepsilon - \frac{d^2 \widehat{p}_-^\varepsilon}{dy^2} = (s + ikM_-) \underline{p}_0 + \left(\frac{d\underline{v}_0}{dy} + ik\underline{u}_0 \right), & y < 0 \\ [k^2 + (s + ikM_+)^2] \widehat{p}_+^\varepsilon - \frac{d^2 \widehat{p}_+^\varepsilon}{dy^2} = 0, & y > \varepsilon, \\ [\gamma_\varepsilon^2 + k^2] \widehat{p}^\varepsilon - \gamma_\varepsilon^2 \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon^2} \frac{d\widehat{p}^\varepsilon}{dy} \right) = 0, & 0 < y < \varepsilon, \end{array} \right.$$

où γ_ε est, rappelons le, défini par

$$\gamma_\varepsilon(y) = s + ikM_\varepsilon(y)$$

et où $(\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{p}_0)$ désigne la transformée de Fourier de la donnée initiale (u_0, v_0, p_0) . Le système ci-dessus est complété par les conditions de raccord :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{p}_-^\varepsilon(0) = \widehat{p}^\varepsilon(0), & \widehat{p}^\varepsilon(\varepsilon) = \widehat{p}_+^\varepsilon(\varepsilon), \\ \frac{\partial \widehat{p}_-^\varepsilon}{\partial y}(0) = \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(0), & \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y}(\varepsilon) = \frac{\partial \widehat{p}_+^\varepsilon}{\partial y}(\varepsilon). \end{array} \right. \quad (5.2.7)$$

Nous allons maintenant chercher un développement asymptotique formel de la solution sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{p}_-^\varepsilon(y) = \widehat{p}_-^{(0)}(y) + \varepsilon \widehat{p}_-^{(1)}(y) + \varepsilon^2 \widehat{p}_-^{(2)}(y) + \dots \\ \widehat{p}_+^\varepsilon(y) = \widehat{p}_+^{(0)}(y - \varepsilon) + \varepsilon \widehat{p}_+^{(1)}(y - \varepsilon) + \varepsilon^2 \widehat{p}_+^{(2)}(y - \varepsilon) + \dots \\ \widehat{p}^\varepsilon(y) = \widehat{P}^{(0)}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \widehat{P}^{(1)}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 \widehat{P}^{(2)}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + \dots \end{array} \right.$$

Nous allons nous limiter à la détermination des termes d'ordre 0 et 1, $(\widehat{p}_-^{(j)}, \widehat{p}_+^{(j)}, \widehat{P}^{(j)})$ pour $j = 0, 1$, et allons chercher à éliminer $\widehat{P}^{(j)}$ pour aboutir à un problème de transmission en $(\widehat{p}_-^{(j)}, \widehat{p}_+^{(j)})$. Ceci nous obligera aussi à nous intéresser au terme $\widehat{P}^{(2)}$. Les calculs sont évidemment très similaires à ceux de la section 3.4.2 du chapitre 3 dont nous reprenons les mêmes notations. Rappelons que l'équation en \widehat{P}^ε s'écrit :

$$\varepsilon^2 k^2 (1 + \gamma^2) \widehat{P}^\varepsilon - \gamma^2 \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{P}^\varepsilon}{dY} \right) = 0 \quad (5.2.8)$$

avec

$$\gamma(Y) = \frac{s}{k} + iM(Y).$$

Analyse des termes d'ordre 0. Posons $\underline{g} = (s + ikM_-) \underline{p}_0 + \left(\frac{d\underline{u}_0}{dy} + ik\underline{u}_0\right)$. De façon évidente, on a :

$$\begin{cases} [k^2 + (s + ikM_-)^2] \hat{p}_-^{(0)} - \frac{d^2 \hat{p}_-^{(0)}}{dy^2} = \underline{g}, & y < 0 \\ [k^2 + (s + ikM_+)^2] \hat{p}_+^{(0)} - \frac{d^2 \hat{p}_+^{(0)}}{dy^2} = 0, & y > \varepsilon. \end{cases} \quad (5.2.9)$$

et :

$$\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\hat{P}^{(0)}}{dY} \right) = 0.$$

Ceci nous dit que la fonction $\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\hat{P}^{(0)}}{dY}$ est constante dans l'intervalle $[0, 1]$. Comme les conditions de transmission de Neumann (la deuxième ligne de (5.2.7)) nous donnent au premier ordre

$$\frac{d\hat{P}^{(0)}}{dY}(0) = \frac{d\hat{P}^{(0)}}{dY}(1) = 0,$$

cette constante est nulle et la fonction $\hat{P}^{(0)}$ est donc constante ($\hat{P}^{(0)}(Y) = \hat{P}^{(0)}$). Les conditions de transmission de Dirichlet (première ligne de (5.2.7)) nous disent alors, en éliminant $\hat{P}^{(0)}$, que :

$$\hat{p}_+^{(0)}(0) = \hat{p}_-^{(0)}(0) \iff \llbracket \hat{p}^{(0)} \rrbracket = 0, \quad (5.2.10)$$

ce qui constitue notre première condition de transmission pour le problème (5.2.9).

Analyse des termes d'ordre 1. Cette fois, on vérifie facilement que :

$$\begin{cases} [k^2 + (s + ikM_-)^2] \hat{p}_-^{(1)} - \frac{d^2 \hat{p}_-^{(1)}}{dy^2} = 0, & y < 0 \\ [k^2 + (s + ikM_+)^2] \hat{p}_+^{(1)} - \frac{d^2 \hat{p}_+^{(1)}}{dy^2} = 0, & y > 0. \end{cases} \quad (5.2.11)$$

et que :

$$\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\hat{P}^{(1)}}{dY} \right) = 0.$$

A nouveau, la fonction $\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\hat{P}^{(1)}}{dY}$ est constante, notée C_1 . En particulier

$$\gamma(0)^{-2} \frac{d\hat{P}^{(1)}}{dY}(0) = \gamma(1)^{-2} \frac{d\hat{P}^{(1)}}{dY}(1) \quad (5.2.12)$$

Par ailleurs, nous tirons des conditions de transmission de Neumann les égalités :

$$\frac{d\hat{P}^{(1)}}{dY}(0) = \frac{d\hat{p}^{(0)}}{dy}(0), \quad \frac{d\hat{P}^{(1)}}{dY}(1) = \frac{d\hat{p}^{(0)}}{dy}(1).$$

Compte tenu de (5.2.12), nous obtenons la seconde condition de transmission :

$$\gamma(1)^{-2} \frac{d\hat{p}_+^{(0)}}{dy}(1) = \gamma(0)^{-2} \frac{d\hat{p}_-^{(0)}}{dy}(0) \iff \llbracket \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\hat{p}^{(0)}}{dy} \rrbracket = 0. \quad (5.2.13)$$

Par intégration de $\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{P}^{(1)}}{dY} = C_1$ nous avons bien sûr :

$$\widehat{P}^{(1)}(1) - \widehat{P}^{(1)}(0) = C_1 \langle \gamma^2 \rangle. \quad (5.2.14)$$

où C_1 est la valeur commune de $\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}_+^{(0)}}{dy}$ et $\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}_-^{(0)}}{dy}$ en $y = 0$, ce que nous pouvons réécrire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$C_1 = \left\langle \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{(0)}}{dy} \right\rangle_\alpha$$

avec

$$\langle f \rangle_\alpha = \alpha f_+(0) + (1 - \alpha) f_-(0) \quad (5.2.15)$$

Finalement, compte tenu des conditions de raccord de Dirichlet, (5.2.14) nous fournit une première condition de transmission, de type Dirichlet non homogène, pour le couple $(\widehat{p}_+^{(1)}, \widehat{p}_-^{(1)})$:

$$\llbracket \widehat{p}^{(1)} \rrbracket = \langle \gamma^2 \rangle \left\langle \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{(0)}}{dy} \right\rangle_\alpha. \quad (5.2.16)$$

Analyse des termes d'ordre 2. L'équation (5.2.8) conduit cette fois à une équation non homogène :

$$\gamma^2 \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{P}^{(2)}}{dY} \right) = k^2 (1 + \gamma^2) \widehat{P}^{(0)}. \quad (5.2.17)$$

La fonction $\widehat{P}^{(0)}$ est une constante égale à la valeur commune de $\widehat{p}_+^{(0)}$, et $\widehat{p}_-^{(0)}$ en 0. Cela se réécrit arbitrairement sous la forme :

$$\widehat{P}^{(0)} = \langle \widehat{p}^{(0)} \rangle_\beta, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

En intégrant (5.2.17) entre 0 et 1, nous obtenons :

$$\llbracket \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{P}^{(2)}}{dY} \rrbracket = k^2 \left\langle \frac{1 + \gamma^2}{\gamma^2} \right\rangle \langle \widehat{p}^{(0)} \rangle_\beta,$$

soit encore, compte tenu des conditions de raccord de Neumann

$$\llbracket \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{(1)}}{dy} \rrbracket = k^2 \left\langle 1 + \frac{1}{\gamma^2} \right\rangle \langle \widehat{p}^{(0)} \rangle_\beta, \quad (5.2.18)$$

ce qui fournit la seconde condition de transmission - de type Neumann non homogène - pour le problème en $(\widehat{p}_+^{(1)}, \widehat{p}_-^{(1)})$.

Nous avons donc, formellement, défini $(\widehat{p}_+^{(0)}, \widehat{p}_-^{(0)})$ par ((5.2.9), (5.2.10), (5.2.13)) et $(\widehat{p}_+^{(1)}, \widehat{p}_-^{(1)})$ par ((5.2.11), (5.2.16), (5.2.18)).

5.3 Construction de conditions de transmission approchées

5.3.1 Le problème approché dans les variables (k, y, s) .

L'idée est qu'une bonne approximation (du second ordre en ε) de la solution devrait être fournie par les fonctions :

$$\widehat{p}_+^{\varepsilon,1} = \widehat{p}_+^{(0)} + \varepsilon \widehat{p}_+^{(1)}, \quad \widehat{p}_-^{\varepsilon,1} = \widehat{p}_-^{(0)} + \varepsilon \widehat{p}_-^{(1)}.$$

qui satisfont bien évidemment :

$$\begin{cases} [k^2 + (s + i k M_-)^2] \widehat{p}_-^{\varepsilon,1} - \frac{d^2 \widehat{p}_-^{\varepsilon,1}}{dy^2} = 0, & y < 0 \\ [k^2 + (s + i k M_+)^2] \widehat{p}_+^{\varepsilon,1} - \frac{d^2 \widehat{p}_+^{\varepsilon,1}}{dy^2} = 0, & y > 0. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Par contre, il n'est pas possible de trouver des conditions de transmission reliant $(\widehat{p}_+^{\varepsilon,1}, \widehat{p}_-^{\varepsilon,1})$. En effectuant (5.2.10) + ε (5.2.16) et (5.2.13) + ε (5.2.18), on obtient :

$$\begin{cases} \llbracket \widehat{p}^{\varepsilon,1} \rrbracket = \varepsilon \langle \gamma^2 \rangle \langle \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{(0)}}{dy} \rangle_\alpha, \\ \llbracket \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{\varepsilon,1}}{dy} \rrbracket = \varepsilon k^2 \langle 1 + \gamma^{-2} \rangle \langle \widehat{p}^{(0)} \rangle_\beta. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

qui peut se réécrire, puisque $\widehat{p}^{(0)} = \widehat{p}^{\varepsilon,1} + O(\varepsilon)$

$$\begin{cases} \llbracket \widehat{p}^{\varepsilon,1} \rrbracket = \varepsilon \langle \gamma^2 \rangle \langle \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{\varepsilon,1}}{dy} \rangle_\alpha + O(\varepsilon^2), \\ \llbracket \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{\varepsilon,1}}{dy} \rrbracket = \varepsilon k^2 \langle 1 + \gamma^{-2} \rangle \langle \widehat{p}^{\varepsilon,1} \rangle_\beta + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (5.3.3)$$

L'idée est alors de conserver une approximation de la même qualité (toujours du second ordre) en supprimant les termes $O(\varepsilon^2)$ dans (5.3.3). Autrement dit, nous proposons d'approcher $(\widehat{p}_+, \widehat{p}_-)$ par $(\widehat{p}_+^{\varepsilon,app}, \widehat{p}_-^{\varepsilon,app})$, solution du problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} [k^2 + (s + i k M_-)^2] \widehat{p}_-^{\varepsilon,app} - \frac{d^2 \widehat{p}_-^{\varepsilon,app}}{dy^2} = 0, & y < 0 \\ [k^2 + (s + i k M_+)^2] \widehat{p}_+^{\varepsilon,app} - \frac{d^2 \widehat{p}_+^{\varepsilon,app}}{dy^2} = 0, & y > 0. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

$$\begin{cases} \llbracket \widehat{p}^{\varepsilon,app} \rrbracket = \varepsilon \langle \gamma^2 \rangle \langle \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{\varepsilon,app}}{dy} \rangle_\alpha, \\ \llbracket \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\widehat{p}^{\varepsilon,app}}{dy} \rrbracket = \varepsilon k^2 \langle 1 + \gamma^{-2} \rangle \langle \widehat{p}^{\varepsilon,app} \rangle_\beta. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

5.3.2 Le problème approché dans les variables (x, y, t) .

Ce qui précède nous amène à introduire un opérateur pseudo-différentiel "d'ordre (-2)", agissant sur les fonctions causales des variables (x, t) . Cet opérateur est défini par son symbole Fourier-Laplace qui est égal à $(1/\gamma^2)$. De façon précise, si $\varphi(x, t) \rightarrow \varphi(k, s)$ désigne la transformation de Fourier-Laplace en (x, t) nous introduisons I_M tel que

$$\begin{cases} \widehat{I_M \varphi}(k, s) = \widehat{I_M}(k, s) \varphi(k, s), \\ \widehat{I_M}(k, s) = \int_0^1 \frac{1}{(s + i k M(Y))^2} dY, \end{cases} \quad (5.3.6)$$

On notera que le symbole \widehat{I}_M est homogène de degré -2 en s et k . Cet opérateur est bien entendu non local en espace et en temps, mais on peut en faire une description à l'aide d'opérateurs locaux. Ainsi :

$$I_M \varphi(x, t) = \int_0^1 \psi_M(x, Y, t) dY, \quad (5.3.7)$$

où les fonctions $(x, t) \rightarrow \psi^M(x, Y, t)$, $Y \in [0, 1]$ sont solutions des problèmes d'évolution :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi_M = \varphi, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \psi_M(x, Y, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \leq 0. \end{cases} \quad (5.3.8)$$

Il s'agit d'une famille d'équations de transport 1D d'ordre 2 dans la direction x dans lesquelles la variable Y joue simplement le rôle de paramètre. Après résolution explicite de ces équations, on voit que I_M est encore défini par :

$$I_M \varphi(x, t) = \int_0^1 \int_0^t (t-s) \varphi(x - M(Y)s, s) ds dY \quad (5.3.9)$$

On peut obtenir une autre expression - peut-être plus "lisible" - de $I_M \varphi$ si on fait l'hypothèse supplémentaire (mais "naturelle") :

$$Y \rightarrow M(Y) \text{ est régulière strictement monotone.} \quad (5.3.10)$$

On peut alors introduire l'application inverse $\mu : [M_-, M_+] \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\forall (Y, m) \in [0, 1] \times [M_-, M_+], \quad M(Y) = m \iff Y = \mu(m).$$

En faisant le changement de variable : $Y = \mu(m)$, il vient :

$$I_M \varphi(x, t) = \int_0^t \int_{M_-}^{M_+} (t-s) \varphi(x - ms, s) \mu'(m) dm ds.$$

Notons que, dans le cas d'un profil linéaire, on a simplement :

$$I_M \varphi(x, t) = \frac{1}{M_+ - M_-} \int_0^t \int_{M_-}^{M_+} (t-s) \varphi(x - ms, s) dm ds.$$

Le problème d'évolution que nous proposons de résoudre comme alternative au système pour approcher (5.2.3) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p_+^{\varepsilon, \text{app}} : \Omega^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_-^{\varepsilon, \text{app}} : \Omega^- \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tels que} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_- \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p_-^{\varepsilon, \text{app}} - \Delta p_-^{\varepsilon, \text{app}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_- \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_+ \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p_+^{\varepsilon, \text{app}} - \Delta p_+^{\varepsilon, \text{app}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \\ \llbracket p^{\varepsilon, \text{app}} \rrbracket = \varepsilon D_M \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-2} \frac{dp^{\varepsilon, \text{app}}}{dy} \right\rangle_{\alpha}, \\ \llbracket \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-2} \frac{dp^{\varepsilon, \text{app}}}{dy} \rrbracket = \varepsilon T_M \langle p^{\varepsilon, \text{app}} \rangle_{\beta}. \end{array} \right. \quad (5.3.11)$$

avec

$$\begin{cases} D_M \triangleq \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \langle M \rangle \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \langle M^2 \rangle \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ T_M \triangleq \mathcal{I}d + I_M \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (5.3.12)$$

où $\mathcal{I}d$ est l'identité et I_M est l'opérateur défini précédemment par (5.3.9).

5.4 Analyse mathématique du problème de transmission

5.4.1 Analyse modale

Nous procédons comme à la section 3.2 du chapitre 3, par une analyse modale, en cherchant une solution non triviale du problème (5.3.11) de la forme :

$$\begin{cases} p_-(x, y, t) = \widehat{p}_-(y) e^{st} e^{ikx} \\ p_+(x, y, t) = \widehat{p}_+(y) e^{st} e^{ikx} \end{cases} \quad (5.4.1)$$

A nouveau, en posant :

$$\sigma = \frac{s}{|k|} \text{ et } \zeta_{\pm} = ((\sigma + iM_{\pm})^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

on voit que :

$$\begin{cases} \widehat{p}_-(y) = \varphi_- e^{+k\zeta_- y}, & \text{pour } y < 0 \quad (\Omega_-) \\ \widehat{p}_+(y) = \varphi_+ e^{-k\zeta_+ y}, & \text{pour } y > 0 \quad (\Omega_+) \end{cases} \quad (5.4.2)$$

En injectant (5.4.2) dans les conditions de transmission (5.3.5), il vient :

$$\begin{cases} \varphi_+ - \varphi_- + \varepsilon k \langle \gamma^2 \rangle \left(\frac{\alpha \zeta_+}{(\sigma + iM_+)^2} \varphi_+ - \frac{(1-\alpha) \zeta_-}{(\sigma + iM_-)^2} \varphi_- \right) = 0, \\ \frac{\zeta_+}{(\sigma + iM_+)^2} \varphi_+ + \frac{\zeta_-}{(\sigma + iM_-)^2} \varphi_- + \varepsilon k \langle \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \rangle (\beta \varphi_+ + (1-\beta) \varphi_-) = 0, \end{cases}$$

soit encore sous forme matricielle :

$$\mathcal{A}_{\text{app}}^{\varepsilon}(\sigma, k) \begin{bmatrix} \varphi_- \\ \varphi_+ \end{bmatrix} = 0 \quad (5.4.3)$$

où nous avons posé :

$$\mathcal{A}_{\text{app}}^{\varepsilon}(\sigma, k) = \mathcal{A}_{\text{app}}^1(\sigma) + \varepsilon k \mathcal{A}_{\text{app}}^0(\sigma). \quad (5.4.4)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\text{app}}^0(\sigma) = \begin{bmatrix} -\frac{(1-\alpha) \langle \gamma^2 \rangle \zeta_-}{(\sigma + iM_-)^2} & \frac{\alpha \langle \gamma^2 \rangle \zeta_+}{(\sigma + iM_+)^2} \\ (1-\beta) \langle \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \rangle & \beta \langle \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \rangle \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{\text{app}}^1(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{\zeta_-}{(\sigma + iM_-)^2} & \frac{\zeta_+}{(\sigma + iM_+)^2} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (5.4.5)$$

Ceci nous mène à l'équation caractéristique :

$$\det \mathcal{A}_{\text{app}}^\varepsilon(\sigma, k) = 0. \quad (5.4.6)$$

que nous devons considérer, ε étant fixé, comme une équation en σ dans laquelle k joue le rôle d'un paramètre.

On pourra remarquer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det \mathcal{A}_{\text{app}}^\varepsilon(\sigma, k) = \det \mathcal{A}_{\text{app}}^1(\sigma, k) = - \langle \gamma^2 \rangle F(\sigma, 0),$$

ce qui est bien entendu cohérent avec les chapitres précédents.

5.4.2 Etude de stabilité

Soit $\sigma(k)$ une branche de solutions de (5.4.6), l'analyse du caractère bien posé du problème (5.3.11) revient à vérifier que, si on pose $s(k) = k \sigma(k)$ la fonction :

$$k \longmapsto \Re s(k) \text{ reste bornée.}$$

Il suffit pour garantir cela d'étudier le comportement de $\sigma(k)$, donc de $s(k)$, lorsque k tend vers l'infini. On fera dans toute la suite l'hypothèse :

$$(\alpha = 0 \text{ et } \beta \neq 0) \text{ ou } (\beta = 0 \text{ et } \alpha \neq 0) \quad (5.4.7)$$

Dans ce cas, quand k tend vers l'infini, l'équation caractéristique "limite" s'écrit :

$$\det \mathcal{A}_{\text{app}}^0(\sigma) = 0 \quad (5.4.8)$$

autrement dit :

$$\langle \gamma^2 \rangle \langle \frac{1 + \gamma^2}{\gamma^2} \rangle \left[\alpha (1 - \beta) \frac{\zeta_+}{(\sigma + i M_+)^2} + \beta (1 - \alpha) \frac{\zeta_-}{(\sigma + i M_-)^2} \right] = 0. \quad (5.4.9)$$

L'analyse de stabilité repose de nouveau sur le critère de Kreiss qui consiste à étudier le signe de la partie réelle des racines de l'équation caractéristique (5.4.9). Nous remarquons que cette équation diffère de celle du problème de transmission naturel, en particulier par la présence de nouveaux termes moyennés.

Pour commencer, nous nous intéressons aux racines de l'équation

$$(E_{\alpha, \beta}) \quad \alpha (1 - \beta) \frac{\zeta_+}{(\sigma + i M_+)^2} + \beta (1 - \alpha) \frac{\zeta_-}{(\sigma + i M_-)^2} = 0.$$

Il est clair que, si $\beta \neq 0$ et $\alpha = 0$, l'équation précédente devient :

$$\frac{\zeta_-}{(\sigma + i M_-)^2} = 0$$

qui n'a pas de solution à partie réelle non nulle puisque par définition $\Re \zeta_- > 0$ dès que $\Re \sigma \neq 0$. Le problème de transmission est donc stable.

Bien entendu, il en est de même si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$.

REMARQUE 5.1 Dans le cas général, la résolution numérique de l'équation de dispersion ($E_{\alpha,\beta}$) semble indiquer qu'il existe des solutions σ à partie réelle non nulle dès que $0 < \nu < +\infty$ où

$$\nu = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}.$$

En revanche, nous conjecturons qu'il n'en existe pas si $-\infty \leq \nu \leq 0$.

Par ailleurs, il est clair que l'équation $\langle \gamma^2 \rangle = 0$ ne peut pas admettre des racines complexes σ ayant une partie réelle positive.

C'est finalement (de façon assez inattendue) la résolution de l'équation $\langle 1 + \gamma^{-2} \rangle = 0$ pose une difficulté à cause du terme fractionnel $1/\gamma^2$ qui dépend du profil $Y \mapsto M(Y)$.

Nous sommes en mesure de conclure dans le cas d'un profil $M(Y)$ linéaire. Le cas d'un profil quelconque est une question ouverte.

LEMME 5.1 Soit $M(Y)$ une fonction définie par :

$$Y \mapsto M(Y) = (M_+ - M_-)Y + M_-, \quad \forall Y \in [0; 1].$$

Il n'existe pas de valeurs $\sigma \in \mathbb{C}$, telle que $\Re\sigma \neq 0$ et telle que :

$$\int_0^1 \frac{dY}{(\sigma + iM(Y))^2} = -1. \quad (5.4.10)$$

PREUVE :

Nous donnons une preuve par l'absurde pour montrer qu'il n'existe pas de solutions non nulles de l'équation $\langle \gamma^{-2} \rangle = -1$ ayant une partie réelle positive. En effet, il est clair que si le nombre complexe σ est une solution pour le profil $M(Y)$, alors $\sigma + iM_-$ est une solution pour le profil linéaire suivant :

$$Y \mapsto \widetilde{M}(Y) = (M_+ - M_-)Y \quad \forall Y \in [0; 1]$$

On peut donc se ramener au cas où $M_- = 0$. Par conséquent, à partir de maintenant on pose $M = M_+$ et on considère le profil : $M(Y) = MY$ ($M = M_+ - M_-$).

Si on prend la partie imaginaire de l'équation (5.4.10), on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\sigma_r(\sigma_i + MY)}{(\sigma_r^2 + (\sigma_i + MY)^2)^2} dY = 0 \quad (5.4.11)$$

Soit

$$-\frac{\sigma_r}{2M} \int_0^1 \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{(\sigma_r^2 + (\sigma_i + MY)^2)^2} \right) dY = 0.$$

d'où (si $\sigma_r \neq 0$) :

$$\sigma_r^2 + (\sigma_i + M)^2 = \sigma_r^2 + \sigma_i^2 \implies 2M\sigma_i + M^2 = 0 \implies \sigma_i = \frac{-M}{2}$$

En remplaçant σ_i par $-M/2$ dans l'équation (5.4.10) et en prenant sa partie réelle, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{\sigma_r^2 - \left(-\frac{M}{2} + MY\right)^2}{\left(\sigma_r^2 + \left(-\frac{M}{2} + MY\right)^2\right)^2} dY = -1. \quad (5.4.12)$$

Après avoir effectué le changement de variable suivant :

$$Z = \frac{M(Y - \frac{1}{2})}{\sigma_r}$$

l'égalité (5.4.12) devient (pour $\sigma_r \geq 0$) :

$$\int_{-M/2\sigma_r}^{M/2\sigma_r} \frac{\sigma_r^2(1-Z^2)}{\sigma_r^4(1+Z^2)^2} \left(\frac{M}{\sigma_r}\right)^{-1} dZ = -1. \quad (5.4.13)$$

Soit

$$\frac{1}{M\sigma_r} \int_{-M/2\sigma_r}^{M/2\sigma_r} \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ = -1. \quad (5.4.14)$$

Pour conclure que ceci est impossible, il nous reste à montrer que :

$$\forall a \geq 0; \quad \int_{-a}^a \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ \geq 0$$

Soit encore

$$\forall a \geq 0; \quad \int_0^a \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ \geq 0$$

Le résultat est évident pour a dans l'intervalle $[0; 1]$. Il est également vrai pour $a > 1$ car :

$$\int_1^\infty \frac{Z^2-1}{(1+Z^2)^2} dZ = \int_0^1 \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ$$

ce qui se démontre aisément en utilisant le changement de variable $X = \frac{1}{Z}$ ■

Finalement, nous avons démontré dans ce chapitre le résultat suivant :

THÉORÈME 5.2 Soit $M(Y)$ une fonction définie par :

$$Y \mapsto M(Y) = (M_+ - M_-)Y + M_-, \quad \forall Y \in [0; 1].$$

Alors le problème approché (5.3.11) est bien posé dans les deux cas suivants :

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta \neq 0$$

et

$$\alpha \neq 0 \text{ et } \beta = 0.$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

La résolution numérique du nouveau modèle (6.1.1) par la méthode des éléments finis de Lagrange s'avère difficile à cause des opérateurs non-locaux (de type ∂^{-2} par exemple) en temps et en espace. Néanmoins, cette difficulté peut être surmontée en réécrivant ce modèle sous la version "Galbrun" c'est à dire en introduisant le déplacement lagrangien $\xi_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}}$ comme inconnue au lieu quelle soit la pression acoustique $p_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}}$.

6.1 Passage de l'équation d'Euler à celle de Galbrun

Nous rappelons le lecteur que le problème asymptotique à résoudre est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p_+^{\varepsilon, \text{app}} : \Omega^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_-^{\varepsilon, \text{app}} : \Omega^- \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tels que} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_+ \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p_+^{\varepsilon, \text{app}} - \Delta p_+^{\varepsilon, \text{app}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_- \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p_-^{\varepsilon, \text{app}} - \Delta p_-^{\varepsilon, \text{app}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_- \\ \llbracket p^{\varepsilon, \text{app}} \rrbracket = \varepsilon D_M \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-2} \frac{dp^{\varepsilon, \text{app}}}{dy} \right\rangle_{\alpha}, \\ \llbracket \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-2} \frac{dp^{\varepsilon, \text{app}}}{dy} \rrbracket = \varepsilon T_M \langle p^{\varepsilon, \text{app}} \rangle_{\beta}. \end{array} \right. \quad (6.1.1)$$

avec

$$D_M = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \langle M \rangle \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \langle M^2 \rangle \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

et

$$T_M \varphi(x, t) = \varphi(x, t) + \int_0^1 \psi_M(x, Y, t) dY,$$

où pour chaque $Y \in [0, 1]$, ψ_M est la solution causale de l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi_M = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Pour simplifier la présentation, nous nous limitons dans toute la suite de ce chapitre au cas $\beta = 1 - \alpha$.

Pour écrire le problème de transmission (6.1.1) en déplacement lagrangien, nous suivons la même démarche que nous avons appliqué dans le chapitre 3 pour résoudre le problème de transmission “naturelle” (3.3.17).

Après avoir rappelé que les relations qui relient le déplacement $\xi_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}}$ et la pression acoustique $p_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}}$:

$$\begin{cases} p_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}} &= -\operatorname{div} \xi_{\pm}^{\varepsilon}, \\ \nabla p_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}} &= -\left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\pm} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \xi_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}} \end{cases}$$

le système d'équation (6.1.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \xi_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}} : \Omega_{\pm} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{tels que} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_+ \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \xi_+^{\varepsilon, \text{app}} - \nabla(\operatorname{div} \xi_+^{\varepsilon, \text{app}}) = 0, \quad \text{dans } \Omega_+ \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_- \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \xi_-^{\varepsilon, \text{app}} - \nabla(\operatorname{div} \xi_-^{\varepsilon, \text{app}}) = 0, \quad \text{dans } \Omega_- \\ \llbracket \operatorname{div} \xi^{\varepsilon, \text{app}} \rrbracket = \varepsilon D_M(\langle \xi_y^{\varepsilon, \text{app}} \rangle_{\alpha}), \quad \text{sur } \Gamma \\ \llbracket \xi_y^{\varepsilon, \text{app}} \rrbracket = \varepsilon T_M(\langle \operatorname{div} \xi^{\varepsilon, \text{app}} \rangle_{1-\alpha}), \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (6.1.2)$$

Notons si on a initialement des champs irrotationnels alors

$$\operatorname{rot} \xi_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}} = 0, \quad \text{dans } \Omega_{\pm}.$$

Or on sait que la solution $\xi_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}}$ du problème régularisé (voir chapitre 1) est dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega_{\pm})$, on peut définir alors la trace de l'opérateur $\operatorname{rot} \xi_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}}$ sur $\partial\Omega_{\pm} = \Gamma_{\pm}$ et par conséquent on a

$$\operatorname{rot} \xi_{\pm}^{\varepsilon, \text{app}} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_{\pm} = \Gamma_{\pm}$$

Pour alléger la notation, nous allons identifier dans toute la suite $\xi^{\varepsilon, \text{app}}$ par ξ^{ε} .

6.2 Application de la régularisation

En s'appuyant sur les résultats du premier chapitre, nous nous intéressons dans cette section à étendre la méthode de régularisation au nouveau modèle (6.1.2). Cette méthode a pour objectif principal est de rendre le problème elliptique dans chaque sous-domaine Ω_{\pm} par rapport à la norme naturelle de l'espace $H_1(\Omega_{\pm})$.

Le problème régularisé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} : \Omega^{\pm} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{tels que} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon}) + r \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon}) = 0, \quad \text{dans } \Omega_{\pm} \\ \llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon, \text{app}} \rrbracket = \varepsilon D_M(\langle \boldsymbol{\xi}_y^{\varepsilon, \text{app}} \rangle_{\alpha}), \quad \text{sur } \Gamma \\ \llbracket \boldsymbol{\xi}_y^{\varepsilon, \text{app}} \rrbracket = \varepsilon T_M(\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon, \text{app}} \rangle_{1-\alpha}), \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (6.2.1)$$

où r est le paramètre de régularisation.

On ajoute encore au système (6.2.1) la condition d'interface supplémentaire suivante :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{\pm}.$$

En remplaçant T_M par sa définition le système d'équation (6.2.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} : \Omega_{\pm} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi^{\varepsilon} : \Gamma \times [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon}) + r \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon}) = 0, \quad \text{dans } \Omega_{\pm} \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{\pm} \\ \llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \rrbracket = \varepsilon D_M \langle \boldsymbol{\xi}_y \rangle_{\alpha}, \quad \text{sur } \Gamma \\ \llbracket \boldsymbol{\xi}_y^{\varepsilon} \rrbracket = \varepsilon \langle \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \rangle_{1-\alpha} + \varepsilon \int_0^1 \psi^{\varepsilon}(\cdot, Y, \cdot) dY, \quad \text{sur } \Gamma \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi^{\varepsilon}(\cdot, Y, \cdot) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \rangle_{1-\alpha}, \quad \forall Y \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (6.2.2)$$

avec la notation

$$\langle f \rangle_{\alpha} = \alpha f_+ + (1 - \alpha) f_-.$$

A des fins d'approximation numérique par éléments finis, il faut écrire une formulation variationnelle du problème et ceci amène à introduire une inconnue de bord auxiliaire :

$$D_{\alpha}^{\varepsilon} = \langle \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \rangle_{1-\alpha} : \Gamma \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad (6.2.3)$$

et a réécrire (6.2.2) sous la forme “augmentée” :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} : \Omega_{\pm} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi^{\varepsilon} : \Gamma \times [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \text{ et } D_{\alpha}^{\varepsilon} : \Gamma \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} - \nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon}) + r \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon}) = 0, \quad \text{dans } \Omega_{\pm} \times \mathbb{R}^+ \quad (6.2.4a) \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{\pm} \quad (6.2.4b) \\ \llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \rrbracket = \varepsilon D_M \langle \xi_y \rangle_{\alpha}, \quad \text{sur } \Gamma \quad (6.2.4c) \\ \llbracket \xi_y^{\varepsilon} \rrbracket = \varepsilon D_{\alpha}^{\varepsilon} + \varepsilon \int_0^1 \psi^{\varepsilon}(\cdot, Y, \cdot) dY, \quad \text{sur } \Gamma \quad (6.2.4d) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi^{\varepsilon}(\cdot, Y, \cdot) = -\frac{\partial^2 D_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x^2}, \quad \forall Y \in [0, 1]. \quad (6.2.4e) \end{array} \right.$$

6.3 Formulation variationnelle

Il est naturel d’associer au problème de transmission (6.2.4) une formulation variationnelle. En multipliant l’équation (6.2.4a) par une fonction-test $\boldsymbol{\zeta}$ définie dans l’espace :

$$V(\Omega) = V(\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-) := \{ \boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_+, \boldsymbol{\zeta}_-) \in H^1(\Omega_+)^2 \times H^1(\Omega_-)^2 \}$$

et en intégrant sur les domaines Ω_{\pm} , on obtient à l’aide des intégrations par parties ($\mathbf{n}_{\pm} = \mp \mathbf{e}_y$) :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_{\pm}} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\pm}} M_{\pm} \partial_x \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \int_{\Omega_{\pm}} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} \operatorname{rot} \boldsymbol{\zeta} - M_{\pm}^2 \partial_x \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} \cdot \partial_x \boldsymbol{\zeta} \\ & + \int_{\partial \Omega_{\pm}} \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} (\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\pm}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\pm}^{\varepsilon} (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n}_{\pm}) = 0. \end{aligned}$$

En tenant maintenant compte des conditions aux limites (6.2.4b) et (6.2.4c) et faisant la somme sur les deux sous-domaines Ω_- et Ω_+ on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\cup \Omega_{\pm}} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \frac{d}{dt} \int_{\cup \Omega_{\pm}} M_{\pm} \partial_x \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\zeta} + \int_{\cup \Omega_{\pm}} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \operatorname{rot} \boldsymbol{\zeta} - M_{\pm}^2 \partial_x \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \cdot \partial_x \boldsymbol{\zeta} \\ & - \int_{\Gamma} \llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n}) \rrbracket = 0, \quad (\text{où on a choisit } \mathbf{n} = -\mathbf{e}_y). \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

On peut vérifier facilement que :

$$\llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n}) \rrbracket = \llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \rrbracket \langle \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\alpha} + \llbracket (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n}) \rrbracket \langle \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} \rangle_{1-\alpha}, \quad \forall \alpha \in [0; 1]. \quad (6.3.2)$$

En utilisant les conditions de transmission non-standard (6.2.4c) et (6.2.4d) et la définition de l’inconnue auxiliaire D_{α}^{ε} donnée par (6.2.3), le saut (6.3.2) devient :

$$\llbracket \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n}) \rrbracket = \varepsilon D_M \langle \xi_y^{\varepsilon} \rangle_{\alpha} \langle \zeta_y \rangle_{\alpha} + \llbracket \zeta_y \rrbracket D_{\alpha}^{\varepsilon}. \quad (6.3.3)$$

Si on remplace l'opérateur D_M donné par :

$$D_M = \partial_t^2 + 2 \langle M \rangle \partial_{xt}^2 + \langle M^2 \rangle \partial_x^2,$$

on aura :

$$(6.3.1) = \left. \begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} M_{\pm} \partial_x \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta} \\ & + \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \operatorname{rot} \boldsymbol{\zeta} - M_{\pm}^2 \partial_x \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \cdot \partial_x \boldsymbol{\zeta} \\ & + \int_{\Gamma} \varepsilon D_M \langle \boldsymbol{\xi}_y^\varepsilon \rangle_\alpha \langle \boldsymbol{\zeta}_y \rangle_\alpha + \llbracket \boldsymbol{\zeta}_y \rrbracket D_\alpha^\varepsilon = 0. \end{aligned} \right] \quad (6.3.4)$$

En multipliant respectivement les équations (6.2.4d) et (6.2.4e) par des fonctions test \tilde{D} et $\tilde{\psi}$ définies sur l'interface on a par intégration par parties sur Γ :

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Gamma} \llbracket \boldsymbol{\xi}_y^\varepsilon \rrbracket \tilde{D} &= \varepsilon \int_{\Gamma} D_\alpha^\varepsilon \tilde{D} + \varepsilon \int_{\Gamma} \tilde{D} \left(\int_0^1 \psi^\varepsilon dY \right) \\ \int_{\Gamma} \partial_x D_\alpha^\varepsilon \partial_x \tilde{\psi} &= \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Gamma} \psi^\varepsilon \tilde{\psi} + 2M(Y) \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \partial_x \psi^\varepsilon \tilde{\psi} - M^2(Y) \int_{\Gamma} \partial_x \psi^\varepsilon \partial_x \tilde{\psi} \end{aligned} \right] \quad (6.3.5)$$

On obtient finalement à partir des identités (6.3.4), (6.3.5) la formulation variationnelle associée au système d'équation (6.2.4a... 6.2.4e) :

$$\left| \begin{aligned} & \text{Trouver } \boldsymbol{\xi}_\pm^\varepsilon \in H^1(\Omega_\pm), \quad \psi^\varepsilon \in H^1(\Gamma) \text{ et } D_\alpha^\varepsilon \in L^2(\Gamma) \text{ tel que} \\ & \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta} + \varepsilon \int_{\Gamma} \langle \boldsymbol{\xi}_y^\varepsilon \rangle_\alpha \langle \boldsymbol{\zeta}_y \rangle_\alpha \right\} + \\ & 2 \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} M_{\text{disc}} \partial_x \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta} + \varepsilon \langle M \rangle \int_{\Gamma} \partial_x \langle \boldsymbol{\xi}_y^\varepsilon \rangle_\alpha \langle \boldsymbol{\zeta}_y \rangle_\alpha \right\} + \\ & \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \operatorname{rot} \boldsymbol{\zeta} - M_{\text{disc}}^2 \partial_x \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \cdot \partial_x \boldsymbol{\zeta} + \\ & \int_{\Gamma} D_\alpha^\varepsilon \llbracket \boldsymbol{\zeta}_y \rrbracket - \varepsilon \langle M^2 \rangle \int_{\Gamma} \partial_x \langle \boldsymbol{\xi}_y^\varepsilon \rangle_\alpha \partial_x \langle \boldsymbol{\zeta}_y \rangle_\alpha = 0, \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in V(\Omega) \\ & \int_{\Gamma} D_\alpha^\varepsilon \tilde{D} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} \llbracket \boldsymbol{\xi}_y^\varepsilon \rrbracket \tilde{D} - \int_{\Gamma} \tilde{D} \left(\int_0^1 \psi^\varepsilon dY \right), \quad \forall \tilde{D} \in L^2(\Gamma) \\ & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Gamma} \psi^\varepsilon \tilde{\psi} + 2M(Y) \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \partial_x \psi^\varepsilon \tilde{\psi} - M^2(Y) \int_{\Gamma} \partial_x \psi^\varepsilon \partial_x \tilde{\psi} = \int_{\Gamma} \partial_x D_\alpha^\varepsilon \partial_x \tilde{\psi}, \quad \forall \tilde{\psi} \in H^{-1}(\Gamma) \end{aligned} \right| \quad (6.3.6)$$

où on a noté $M_{\text{disc}} = M_{\text{disc}}(y) = M_- \mathbf{1}_{\{y < 0\}} + M_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$ et M est une fonction continue sur l'intervalle $[0; 1]$.

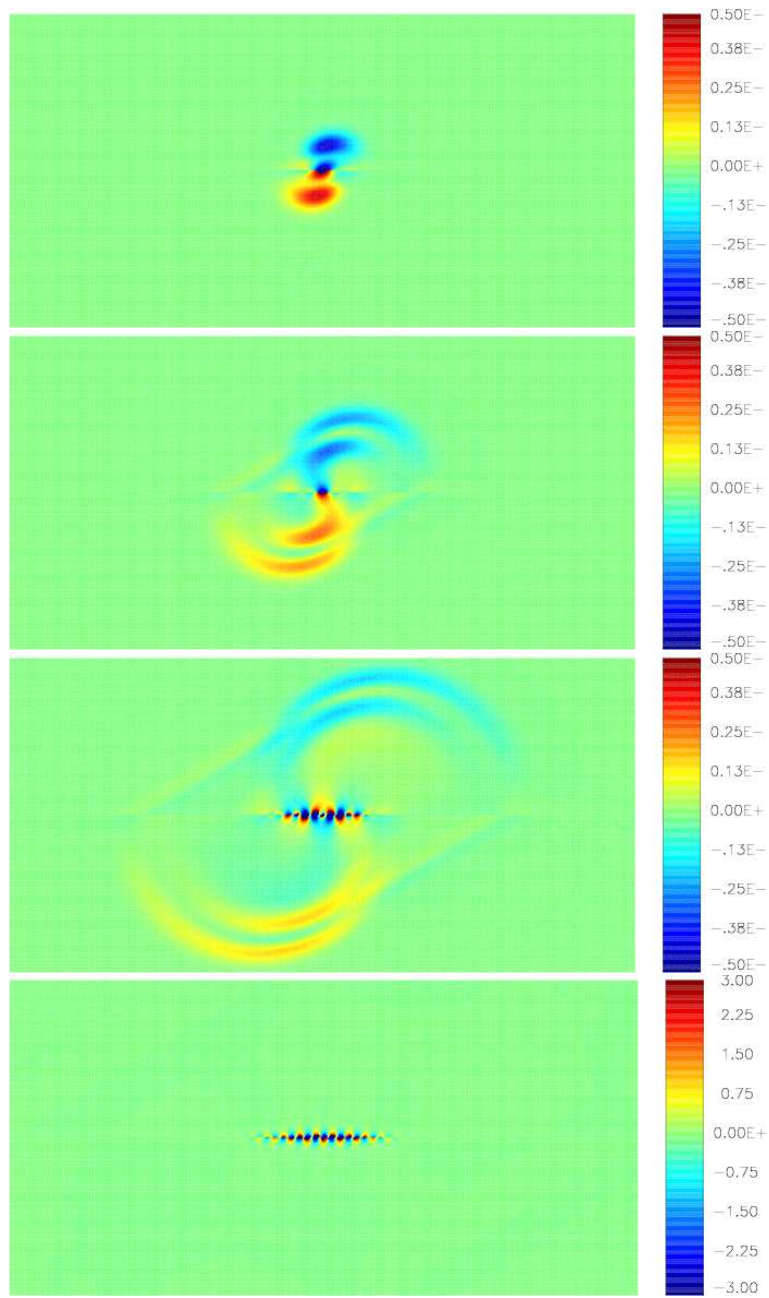
6.4 Résultats numériques

En pratique on résout une formulation variationnelle simplifiée en négligeant tous les termes en ψ^ε dans (6.3.6). Autrement dit on s'intéresse à la résolution numérique du problème de Cauchy

(6.2.1) en remplaçant formellement l'opérateur T_M par l'identité. Pour se faire on repose sur les mêmes méthodes utilisées au premier chapitre pour résoudre l'équation de Galbrun en écoulement uniforme. Plus précisément, nous utilisons la méthode d'éléments finis en espace et de différence finis en temps. Ensuite, nous mettons en oeuvre le problème totalement discrétisé à l'aide de Code de calcul MELINA.

Simulations de l'instabilité absolue

Si nous reprenons les mêmes données et les mêmes paramètres physiques de l'expérience numérique qui a été faite dans le chapitre 3, on trouve que la solution obtenue par le modèle asymptotique est stable par rapport à celle du modèle initial qui est numériquement non soluble à cause du caractère mal posé (au sens de Kreiss). A partir de ces résultats, on voit la manifestation de plusieurs phénomènes physiques liés à la propagation d'onde acoustique dans un écoulement brutalement cisailé. En fait on remarque trois types d'ondes, la première correspond à l'onde de vorticité dans laquelle on observe l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui se produit sur l'interface sans être propagé vers les x positifs parce que nous avons choisi $M_+ = -M_- = 0.5$ (*ie.* le cas d'instabilité absolue). La deuxième correspond à la propagation des fronts d'ondes sonores qui se propagent dans le domaine de calcul avec des vitesses différentes en amont et en aval. Enfin le troisième type d'onde correspond aux ondes de tête qui se manifeste sous la forme des segments qui lient les fronts d'ondes acoustiques.

FIG. 6.4.1: Evolution de la deuxième composante ξ_y .

Annexes

CALCUL EXPLICITE DES FONCTIONS SINGULIÈRES

Nous commençons par rappeler la notion de support convolutif pour donner un sens aux fonctions définies par un produit de convolution.

DÉFINITION A.1 On dit que des fermés F_i , $i = 1, m$ de \mathbb{R}^n sont convolutifs si l'application linéaire

$$P_m : F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto \sum_{i=1}^m x_i$$

est propre, c'est à dire telle que, pour tout compact \mathcal{K} de \mathbb{R}^n , le sous ensemble de \mathbb{R}^m ,

$$P_m^{-1}(\mathcal{K}) \cap F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$$

est compact.

REMARQUE A.1 Si A est un compact, alors pour tout fermé B de \mathbb{R}^n , A et B sont convolutifs.

Nous notons respectivement par \mathcal{K} ($= \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$) et \mathcal{K}_3 les supports des distributions K_j et G . Notre objectif est de montrer que \mathcal{K} et \mathcal{K}_3 sont convolutifs. Autrement dit nous devons montrer que :

$$\text{Si on a } \left\{ \begin{array}{l} (x, y, t) \in \mathcal{K}_j \\ (x', y', t') \in \mathcal{K}_3 \\ |x + x'| \leq b \\ |y + y'| \leq b \\ |t + t'| \leq b \end{array} \right. \text{ alors } \exists c > 0, \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} |x'|, |x| \leq c \\ |y'|, |y| \leq c \\ |t'|, |t| \leq c \end{array} \right.$$

PREUVE :

Pour $(x, y, t) \in \mathcal{K}_j$ ($j = 1, 2$), nous avons $\left\{ \begin{array}{l} x = c_0 M t > 0, \\ y = 0 \end{array} \right. \quad (\star)$

Par ailleurs, le support \mathcal{K}_3 de la fonction de GREEN de l'équation d'onde scalaire convectée G est un cône dans le domaine espace-temps *ie.* .

$$\mathcal{K}_3 \equiv \{(x', y', t') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, |t'| > t_a(x', y')\}.$$

Par conséquent, si $(x', y', t') \in \mathcal{K}_3$, $\exists c' > 0 /$

$$\begin{cases} |x'| < c' t', \\ |y'| < c' t' \\ t' > 0. \end{cases} \quad (**).$$

D'après (*) et (**) et le fait que $\{|x + x'|, |y + y'|, |t + t'|\} \leq b$, nous montrons qu'il existe $c = \sup(b, c') > 0$ tel que

$$\begin{cases} |x'|, |x| \leq c \\ |y'|, |y| \leq c \\ |t'|, |t| \leq c \end{cases}$$

d'où le résultat. ■

En calculant les produits de convolution (2.5.20) et (2.5.21), nous obtenons les expressions de Φ et Ψ qui sont définies par des formules intégrales :

$$\Phi(x, y, t) = \frac{\mathcal{A}'(q_s)}{c_0 M} \int_0^\infty G(x - z, y, t - \frac{z}{c_0 M}) dz \quad (\text{A.0.1})$$

$$\Psi(x, y, t) = \frac{\mathcal{A}(q_s)}{c_0^2 M^2} \int_0^\infty z G(x - z, y, t - \frac{z}{c_0 M}) dz \quad (\text{A.0.2})$$

Or G est une fonction causale en temps, on a alors

$$\Phi(x, y, t) = \frac{\mathcal{A}'(q_s)}{c_0 M} \int_0^{c_0 M t} G(x - z, y, t - \frac{z}{c_0 M}) dz \quad (\text{A.0.3})$$

$$\Psi(x, y, t) = \frac{\mathcal{A}(q_s)}{c_0^2 M^2} \int_0^{c_0 M t} z G(x - z, y, t - \frac{z}{c_0 M}) dz \quad (\text{A.0.4})$$

Nous commençons par calculer l'intégrale suivante :

$$I_1(x, y, t) = \int_0^{c_0 M t} G(x - z, y, t - \frac{z}{c_0 M}) dz$$

En faisant le changement de variable $Z = z/(c_0 M)$, l'intégrale $I_1(x, y, t)$ devient

$$I_1(x, y, t) = c_0 M \int_0^t G(x - c_0 M Z, y, t - Z) dZ \quad (\text{A.0.5})$$

D'après l'identité (2.5.24), on a

$$G(x - c_0 M Z, y, t - Z) = \frac{c_0}{2\pi} \frac{\text{H}(t - Z - t_a(x - c_0 M Z, y))}{\sqrt{D(x - c_0 M Z, y, t - Z)}}$$

En remarquant que

$$D(x - c_0 M Z, y, t - Z) = c_0^2 Z^2 - 2c_0^2 t Z + D(x, y, t)$$

nous obtenons la forme factorisée suivante :

$$D(x - c_0MZ, y, t - Z) = c_0^2(Z - Z_1)(Z - Z_2)$$

où

$$Z_1 \equiv Z_1(x, y, t) = t - \frac{1}{c_0} \sqrt{(x - c_0Mt)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Z_2 \equiv Z_2(x, y, t) = t + \frac{1}{c_0} \sqrt{(x - c_0Mt)^2 + y^2}$$

Pour un point fixé (x, y) , et un instant t donné nous allons maintenant étudier le support de la fonction

$$Z \longrightarrow G(x - c_0MZ, y, t - Z).$$

LEMME A.1 *Pour un point fixé (x, y) , et un instant t donné, on définit l'ensemble réel J par :*

$$\begin{aligned} J &\equiv J(x, y, t) := \mathbb{R}_+ \cap \supp_Z G(x - M\cdot, y, t - \cdot) \\ &= \{ Z \in \mathbb{R}, \quad Z > 0 \text{ et } Z < t - t_a(x, y) \} \\ &= \{ Z \in \mathbb{R}, \quad Z > 0 \text{ et } D(x - MZ, y, t - Z) > 0 \} \end{aligned}$$

Pour $t > t_a(x, y)$ (resp $t \leq t_a(x, y)$), l'ensemble $J =]0, Z_1[$ (resp \emptyset).

PREUVE : le point clé de la preuve est la causalité de la fonction G . En effet, on sait que le polynôme en temps $t \rightarrow D(x, y, t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} D(x, y, t) &= c_0^2 t^2 - ((x - c_0Mt)^2 + y^2) \\ &= c_0^2 \left(t - \frac{1}{c_0} \sqrt{(x - c_0Mt)^2 + y^2} \right) \left(t + \frac{1}{c_0} \sqrt{(x - c_0Mt)^2 + y^2} \right) \\ &= c_0^2 Z_1(x, y, t) Z_2(x, y, t) \end{aligned} \tag{A.0.6}$$

D'après l'égalité (A.0.6), on remarque que le polynôme $D(x, y, t)$ et la première racine $Z_1(x, y, t)$ du polynôme $D(x - c_0MZ, y, t - Z)$ ont le même signe. Or le signe de $D(x, y, t)$ dépend du temps d'arrivée de l'onde $t_a(x, y)$, on obtient alors :

$$\text{sgn}(Z_1(x, y, t)) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > t_a(x, y) \\ -1 & \text{si } t < t_a(x, y) \end{cases}$$

Soit Z un élément de l'ensemble J , il y deux cas à traiter :

Si $0 < t < t_a(x, y)$

Supposons que l'ensemble $J \neq \emptyset$, donc $\exists Z \in \mathbb{R}_+ / D(x - c_0MZ, y, t - Z) > 0$.

Or on sait que

$$D(x - c_0MZ, y, t - Z) = c_0^2(Z - Z_1)(Z - Z_2),$$

alors l'ensemble

$$\{ Z \in \mathbb{R}_+ / D(x - c_0MZ, y, t - Z) > 0 \} = \mathbb{R}_+ \cap \left(] - \infty, Z_1[\cup] Z_2, +\infty[\right)$$

D'une part la causalité de G , impose que Z doit être dans l'intervalle $]0, t[$ qui est inclus dans $]0, Z_2[$ (car $Z_2 > t$), d'autre part $Z_1 < 0$ ($t < t_a(x, y)$), par conséquent ,

$$\mathbb{R}_+ \cap \left(] - \infty, Z_1[\cup] Z_2, +\infty[\right) = \emptyset$$

ce qui est absurde. Enfin on conclut que J ne peut être que l'ensemble vide.

Si $t \geq t_a(x, y)$

Dans ce cas la racine Z_1 est positive. En utilisant le même raisonnement on montre que l'ensemble :

$$\mathbb{R}_+ \cap \left(] - \infty, Z_1[\cup] Z_2, +\infty[\right) =] 0, Z_1[$$

d'où le résultat $J =] 0, Z_1[$ (l'autre sens est trivial) ■

Finalement nous avons :

$$\begin{aligned} I_1(x, y, t) &= c_0 M \mathbb{H}(t - t_a(x, y)) \int_0^{Z_1(x, y, t)} \frac{c_0}{2\pi} \frac{dZ}{\sqrt{D(x - c_0 M Z, y, t - Z)}} \quad (\text{A.0.7}) \\ &= \frac{c_0 M}{2\pi} \mathbb{H}(t - t_a(x, y)) \int_0^{Z_1} \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 - 2tZ + \frac{D(x, y, t)}{c_0^2}}} \end{aligned}$$

En faisant ce changement de variable

$$W = \frac{c_0(t - Z)}{\sqrt{(x - c_0 M t)^2 + y^2}}$$

on obtient

$$\begin{aligned} (\text{A.0.7}) &= \frac{c_0 M}{2\pi} \mathbb{H}(t - t_a(x, y)) \int_1^{c_0 t / \sqrt{(x - c_0 M t)^2 + y^2}} \frac{dW}{\sqrt{W^2 - 1}} \\ &= \frac{c_0 M}{2\pi} \mathbb{H}(t - t_a(x, y)) \left[\cosh^{-1} \left(\frac{c_0 t}{\sqrt{(x - c_0 M t)^2 + y^2}} \right) - \cosh^{-1}(1) \right] \\ &= \frac{c_0 M}{2\pi} \mathbb{H}(t - t_a(x, y)) \cosh^{-1} \left(\frac{c_0 t}{\sqrt{(x - c_0 M t)^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

Pour $(x, y, t) = (c_0 M t, 0, t)$ la fonction $I_1(x, y, t)$ diverge vers $+\infty$, donc la fonction Φ admet bien une singularité au point $(x, y) = (c_0 M t, 0)$ (t est un instant donné).

De la même manière, on montre que l'intégrale :

$$I_2(x, y, t) = c_0^2 M^2 \int_0^t Z G(x - c_0 M Z, y, t - Z) dZ \quad (\text{A.0.8})$$

admet l'expression suivante :

$$I_2(x, y, t) = \frac{c_0^2 M^2}{2\pi} \mathbb{H}(t - t_a(x, y)) \int_0^{Z_1} \frac{Z dZ}{\sqrt{Z^2 - 2tZ + \frac{D(x, y, t)}{c_0^2}}}$$

On peut facilement calculer l'intégrale de $Z / \sqrt{Z^2 - 2tZ + \frac{D(x, y, t)}{c_0^2}}$ entre 0 et Z_1 , qu'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{Z}{\sqrt{Z^2 - 2tZ + \frac{D(x, y, t)}{c_0^2}}} = \frac{t}{\sqrt{Z^2 - 2tZ + \frac{D(x, y, t)}{c_0^2}}} + \frac{Z - t}{\sqrt{Z^2 - 2tZ + \frac{D(x, y, t)}{c_0^2}}}$$

L'expression explicite de I_2 est donnée par :

$$I_2(x, y, t) = c_0 M t I_1(x, y, t) + \frac{c_0^2 M^2}{2\pi} \mathbf{H}(t - t_a(x, y)) \left[\sqrt{D(x - c_0 M Z, y, t - Z)} \right]_0^t$$

Enfin, on obtient :

$$I_2(x, y, t) = c_0 M t I_1(x, y, t) - \frac{c_0^2 M^2}{2\pi} \mathbf{H}(t - t_a(x, y)) \sqrt{D(x, y, t)}$$

RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ POUR L'ÉQUATION D'EULER LINÉARISÉE

Dans un premier temps, nous rappelons dans cette annexe quelques résultats d'existence d'unicité d'une solution faible des équations d'Euler compressibles linéarisées autour d'un écoulement stationnaire d'un fluide occupant l'espace entier \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3). Nous proposons dans un deuxième temps une démonstration d'existence et d'unicité d'une solution forte en appliquant le théorème de Hille-Yosida [7, p. 100, Proposition VII].

Nous choisissons dans ce qui suit, un système de coordonnées spatio-temporelles tel que la vitesse du son pour le fluide au repos est égale à $c_0 = 1$. L'écoulement de référence est alors caractérisé par la donnée d'un champ de vecteur adimensionnel $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ($|\mathbf{M}(\mathbf{x})|$ est par définition le nombre de Mach au point \mathbf{x}) supposé satisfaire, au moins au sens faible, les équations d'Euler stationnaires :

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{M} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = 0.$$

On considère alors le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \text{ tels que :} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{M} + \nabla p = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{M} \cdot \nabla)p + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.0.1})$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}) \quad (\text{B.0.2})$$

B.1 Notion de la solution faible

La preuve d'existence et d'unicité de la solution faible du problème de Cauchy (B.0.1-B.0.2) repose notamment sur la formule de Green et une estimation d'énergie.

Rappelons que si \mathbf{a} est un vecteur de \mathbb{R}^d (un champ de vecteurs) l'opérateur $\mathbf{a} \cdot \nabla$ est l'opérateur différentiel linéaire scalaire

$$\mathbf{a} \cdot \nabla = \sum_{j=1}^d a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Par intégration par parties, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \Phi \Psi = - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi (\mathbf{a} \cdot \nabla) \Psi - \int_{\mathbb{R}^d} (\operatorname{div} \mathbf{a}) \Phi \Psi \quad (\text{B.1.1})$$

Ainsi on voit que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + p \frac{\partial p}{\partial t} \right) - \int_{\mathbb{R}^d} (\operatorname{div} \mathbf{M})(|\mathbf{u}|^2 + |p|^2) + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}$$

Autrement dit, on a l'identité :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} (|\mathbf{u}|^2 + |p|^2) = \int_{\mathbb{R}^d} (\operatorname{div} \mathbf{M})(|\mathbf{u}|^2 + |p|^2) - \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{B.1.2})$$

En remarquant que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} \cdot \mathbf{u} \leq \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{u}|^2$$

avec

$$\| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}^2 := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial M_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right|^2$$

et en introduisant l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (|\mathbf{u}|^2 + |p|^2),$$

il vient :

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq 2 (\| \operatorname{div} \mathbf{M} \|_{L^\infty} + \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}) E(t)$$

D'après le lemme de Gronwall, on trouve :

$$E(t) \leq E(0) \exp \{ 2 (\| \operatorname{div} \mathbf{M} \|_{L^\infty} + \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}) t \}, \quad (\text{B.1.3})$$

ce qui constitue une estimation *a priori* dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On peut alors en déduire une théorie de solutions faibles :

$$(\mathbf{u}_0, p_0) \in L^2(\mathbb{R}^d) \implies (\mathbf{u}, p) \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$$

avec l'estimation suivante (on utilise $\| \operatorname{div} \mathbf{M} \|_{L^\infty} \leq \sqrt{2} \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}$) :

$$\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2}^2 + \| p(\cdot, t) \|_{L^2}^2 \leq (\| \mathbf{u}_0 \|_{L^2}^2 + \| p_0 \|_{L^2}^2) \exp \left(2\sqrt{2} t \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty} \right). \quad (\text{B.1.4})$$

Nous pouvons en déduire l'existence d'un semi-groupe :

$$\begin{cases} S_M(t) : L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d) \\ (\mathbf{u}_0, p_0) & \longmapsto & S_M(t)[\mathbf{u}_0, p_0] \equiv (\mathbf{u}(\cdot, t), p(\cdot, t)), \end{cases} \quad (\text{B.1.5})$$

où (\mathbf{u}, p) est la solution de (B.0.1, B.0.2), vérifiant l'estimation :

$$\| S_M(t) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \exp \left(2\sqrt{2} t \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty} \right). \quad (\text{B.1.6})$$

En particulier, si l'écoulement de référence est incompressible *ie.* $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$, l'estimation (B.1.6) devient :

$$\| S_M(t) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \exp (2 t \| \nabla \mathbf{M} \|_{L^\infty}). \quad (\text{B.1.7})$$

B.2 Notion de la solution forte

Nous proposons dans cette section une démonstration du théorème (3.2) annoncé dans le chapitre 3. En effet Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida nous devons tout d'abord récrivons le problème de Cauchy (B.0.1,B.0.2) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} + A W = 0 \\ W|_{t=0} = W_0 \end{cases} \quad (\text{B.2.1})$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AW = \begin{pmatrix} (\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{M} - \nabla p \\ (\mathbf{M} \cdot \nabla)p - \text{div } \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

On note par

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)^d \times L^2(\mathbb{R}^d), \quad (d = 2 \text{ ou } 3).$$

muni de sa norme naturelle : $\|W\|^2 = \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d}^2 + \|p\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$.

Le domaine de l'opérateur $D(A)$ est défini alors par :

$$D(A) := \left\{ W = (\mathbf{u}, p)^t \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d), / (\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^d)^d, (\mathbf{M} \cdot \nabla)p - \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

muni de la norme du graphe :

$$\|W\|_{D(A)}^2 = \|W\|^2 + \|AW\|^2$$

On remarque que si $\mathbf{M} = 0$ (pas d'écoulement) le domaine $D(A)$ se réduit à l'espace fonctionnel $H^1(\mathbb{R}^d)^d \times H(\text{div}, \mathbb{R}^d)$.

REMARQUE B.1 *On a évidemment l'inclusion : $H^1(\mathbb{R}^d)^d \times H^1(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$ mais il n'y a pas égalité. Par exemple, en dimension 2, si \mathbf{M} est un champ de vecteurs constant orienté dans la direction x (y désignant la deuxième dimension) ie. $\mathbf{M} = M(y)\mathbf{e}_x$ on vérifie aisément que si $\mathbf{u} = (u, v)^t$, pour que (\mathbf{u}, p) appartienne à $D(A)$ il suffit que p et v soient dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ et que $\partial u / \partial x$ soit dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

B.2.1 Application du théorème Hille-Yosida

Pour appliquer le théorème Hille-Yosida, on doit montrer en première étape qu'il existe un réel $\nu \geq 0$ tel que l'opérateur $A_\nu = A + \nu I$ soit monotone c'est à dire le produit scalaire $(A_\nu W, W)$ soit positif pour tout $W \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$; en deuxième étape il faut prouver la surjectivité de l'opérateur $A_{\nu+1}$ sur l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, pour tout $F = (\mathbf{f}, g)^t \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$, on doit montrer qu'il existe une solution $W = (\mathbf{u}, p)^t \in D(A)$ vérifiant l'équation suivante :

$$A_{\nu+1}W = F$$

Monotonie : Par définition du produit scalaire, nous avons, pour tout élément $W = (\mathbf{u}, p)^t$ de l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(AW, W) = \underbrace{\int (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}_{(1)} + \underbrace{\int (\mathbf{M} \cdot \nabla) p p}_{(2)} - \underbrace{\int \nabla p \cdot \mathbf{u} - \int p \operatorname{div} \mathbf{u}}_{(3)} - \underbrace{\int (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}}_{(4)}$$

À l'aide des intégrations par partie, nous montrons que :

$$(1) = -\frac{1}{2} \int (\operatorname{div} \mathbf{M}) |\mathbf{u}|^2 \quad (\text{B.2.2})$$

$$(2) = -\frac{1}{2} \int (\operatorname{div} \mathbf{M}) |p|^2 \quad (\text{B.2.3})$$

$$(3) = 0. \quad (\text{B.2.4})$$

Or on sait que

$$\int (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} \cdot \mathbf{u} \geq - \int |\mathbf{M}| |\mathbf{u}|^2 \quad (\text{B.2.5})$$

Enfin nous obtenons (pour un écoulement "régulier" C^1) :

$$(AW, W) \geq -\frac{1}{2} \int (\operatorname{div} \mathbf{M}) [|\mathbf{u}|^2 + |p|^2] - \int |\mathbf{M}| |\mathbf{u}|^2 \quad (\text{B.2.6})$$

$$\geq -\nu \int [|\mathbf{u}|^2 + |p|^2] \geq -\nu \|W\|^2 \quad (\nu > 0). \quad (\text{B.2.7})$$

d'où on déduit que, pour tout $\nu \geq 0$, l'opérateur $A_\nu = A + \nu \mathcal{I}$ est un opérateur montone.

Surjectivité : Pour pouvoir intégrer une régularité d'ordre H^1 sur les inconnues d'une équation formée d'opérateurs d'ordre 1. Il est alors impossible d'appliquer le théorème de Lax-Milgram pour montrer que A est maximal. Cependant les termes de convection imposent une démarche moins naturelle qu'à l'accoutumée et surtout un opérateur à domaine non trivial. A cet effet on va introduire une régularisation elliptique du problème (P).

B.2.2 Régularisation elliptique

On pose :

$$W_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\varepsilon \\ p_\varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_\varepsilon W_\varepsilon = \begin{pmatrix} -\varepsilon \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon + (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{M} - \nabla p_\varepsilon \\ \varepsilon \Delta p_\varepsilon + (\mathbf{M} \cdot \nabla) p_\varepsilon - \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Le domaine de l'opérateur régularisé A_ε est donné naturellement par :

$$D(A_\varepsilon) = \{(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \quad / \quad \mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)^2 \text{ et } p_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)\}$$

PROPOSITION B.1 *L'opérateur A_ε est maximal monotone c'est à dire que $\exists \nu > 0$ tel que l'équation*

$$A_\varepsilon W_\varepsilon + \nu W_\varepsilon = F \quad (\text{B.2.8})$$

admet une solution pour $F = (\mathbf{f}, g)^t \in L^2(\mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\mathbb{R}^2)$. En plus, nous avons les estimations suivantes :

– $\exists c > 0$ tel que $\|\mathbf{u}_\varepsilon\| < c$ et $\|p_\varepsilon\| < c$

– $\exists c' > 0$ tel que $\|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\| < c$ et $\|\nabla p_\varepsilon\| < \frac{c'}{\sqrt{\varepsilon}}$

DÉMONSTRATION : Soit $(\varphi, \psi) \in D(A_\varepsilon)$, Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} -\varepsilon \Delta \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \varphi + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \varphi + \nabla p_\varepsilon \cdot \varphi + \nu \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \varphi &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{f} \cdot \varphi \\ \int_{\mathbb{R}^2} -\varepsilon \Delta p_\varepsilon \psi + (0 \cdot \nabla) p_\varepsilon \psi + \operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon) \psi + \nu p_\varepsilon \psi &= \int_{\mathbb{R}^2} g \psi \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$a((\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon); (\varphi, \psi)) = L((\varphi, \psi))$$

où a est une forme bilinéaire continue sur $D(A_\varepsilon)$ et L une forme linéaire continue définies par :

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon); (\varphi, \psi)) &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla \varphi + \nabla p_\varepsilon \cdot \nabla \psi \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \varphi + \nabla p_\varepsilon \cdot \varphi + (\mathbf{M} \cdot \nabla) p_\varepsilon \psi + \operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon) \psi \\ &+ \nu \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \varphi + p_\varepsilon \psi \\ L((\varphi, \psi)) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{f} \cdot \varphi + g \psi \end{aligned}$$

Après avoir appliqué les inégalités de Cauchy-Schwarz, nous pouvons montrer facilement la continuité de la forme bilinéaire. Par contre montrons que a est une forme bilinéaire coercive sur $D(A_\varepsilon) \times D(A_\varepsilon)$ pour $\nu > 0$ choisie correctement ce qui permettra de conclure par le théorème de Lax-Milgram.

On a

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon); (\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)) &= \int \varepsilon (|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 + |\nabla p_\varepsilon|^2) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u}_\varepsilon \\ &+ \int \nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{u}_\varepsilon + (\mathbf{M} \cdot \nabla) p_\varepsilon p_\varepsilon + \operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon) p_\varepsilon \\ &+ \int \nu (|\mathbf{u}_\varepsilon|^2 + |p_\varepsilon|^2) \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\int \nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{u}_\varepsilon + \operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon)p_\varepsilon = 0$$

et de plus on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u}_\varepsilon &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} M_j \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}}{\partial x_j} \mathbf{u}_\varepsilon^{(i)} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} M_j \frac{\partial (\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)})^2}{\partial x_j} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)})^2 \frac{\partial (M_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \operatorname{div} \mathbf{M} \end{aligned}$$

et de la même manière on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{M} \cdot \nabla) p_\varepsilon p_\varepsilon = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} \mathbf{M} |p_\varepsilon|^2$$

Par conséquent on a

$$a((\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon); (\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)) = \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon (|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 + |\nabla p_\varepsilon|^2) + \left(\nu - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{M}\right) (|\mathbf{u}_\varepsilon|^2 + |p_\varepsilon|^2)$$

En prenant $\nu > \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{M}$ et en posant $\alpha = \min_{\mathbb{R}^d} \left(\varepsilon; \nu - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{M}\right)$ alors on a $\alpha > 0$ et

$$a((\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon); (\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)) > \alpha \|\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon\|^2$$

d'où la coercivité.

Il reste alors à montrer les inégalités.

Soit \mathbf{u}_ε la solution de (E). En multipliant (B.2.8) par (\mathbf{u}_ε) et en sommant on trouve :

$$\varepsilon (\|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|^2 + \|\nabla p_\varepsilon\|^2) + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nu - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{M}\right) (|\mathbf{u}_\varepsilon|^2 + |p_\varepsilon|^2) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon + g p_\varepsilon, \quad (\star)$$

en particulier en posant $\|\operatorname{div} \mathbf{M}\|_\infty = \max\{\operatorname{div} \mathbf{M}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ qui existe car \mathbf{M} est de classe C^1 on a :

$$\nu - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{M} > \nu - \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{M}\|_\infty$$

Par Cauchy-Schwartz on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon + g p_\varepsilon \leq \|\mathbf{u}_\varepsilon\| \|\mathbf{f}\| + \|p_\varepsilon\| \|g\| \leq \sqrt{\|\mathbf{f}\|^2 + \|g\|^2} \sqrt{\|\mathbf{u}_\varepsilon\|^2 + \|p_\varepsilon\|^2}$$

Donc on en déduit que

$$\left(\nu - \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{M}\|_\infty\right) (\|\mathbf{u}_\varepsilon\|^2 + \|p_\varepsilon\|^2) \leq \sqrt{\|\mathbf{f}\|^2 + \|g\|^2} \sqrt{\|\mathbf{u}_\varepsilon\|^2 + \|p_\varepsilon\|^2}$$

Ceci implique que

$$\|\mathbf{W}_\varepsilon\| = \sqrt{\|\mathbf{u}_\varepsilon\|^2 + \|p_\varepsilon\|^2} \leq \frac{\sqrt{\|\mathbf{f}\|^2 + \|g\|^2}}{\nu - \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{M}\|_\infty}$$

et donc on a bien la première inégalité avec

$$c = \frac{\sqrt{\|\mathbf{f}\|^2 + \|g\|^2}}{\nu - \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{M}\|_\infty}$$

L'équation (*) et les majorations précédentes donnent immédiatement :

$$\varepsilon(\|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|^2 + \|\nabla p_\varepsilon\|^2) \leq c\sqrt{\|\mathbf{f}\|^2 + \|g\|^2}$$

ce qui donne la deuxième inégalité de la proposition B.1 avec

$$(c')^2 = c\sqrt{\|\mathbf{f}\|^2 + \|g\|^2}$$

■

LES ULTRADISTRIBUCTIONS

Nous rappelons dans cet annexe quelques propriétés de la théorie d'ultradistribution. Avant de commencer la présentation, nous avons besoin d'introduire quelques notations, nous posons alors :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \forall \alpha, \beta > 0, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f| < +\infty \right\} \quad (\text{C.0.1})$$

$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) := \{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \quad | \quad \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \} \quad (\text{C.0.2})$$

Un élément de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'appelle une fonction indéfiniment différentiable à décroissance rapide ainsi que ses dérivées de tout ordre. La topologie de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ sera, par définition, l'image réciproque par transformée de Fourier de la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ie. $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$

C.1 Propriétés immédiates

- $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dense dans l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, stable par dérivation et par multiplication monomial.
- La topologie $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ est plus fine que la topologie induite par celle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{F}|_{\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)}$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, son isomorphisme réciproque est noté \mathcal{F}^{-1} .

DÉFINITION C.1 On appelle *ultradistribution* sur \mathbb{R}^n toute forme bilinéaire continue sur $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$. L'ensemble des ultradistributions sur \mathbb{R}^n sera noté par $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$. On peut munir $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$ soit par la topologie duale faible, soit de la topologie forte duale

PROPOSITION C.1 Toute distribution tempérée, S sur \mathbb{R}^n peut être considérée comme une ultradistribution; en particulier la connaissance de S sur $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ détermine S . Réciproquement une ultradistribution sera une distribution tempérée, ssi elle est continue sur $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$, pour la topologie induite $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

DÉFINITION C.2 On appelle *fonction à spectre compact* toute ultradistribution dont l'image de Fourier est une distribution à support compact.

On appelle *ultradistribution à décroissance rapide* toute ultradistribution dont l'image de Fourier est une fonction indéfiniment différentiable. ie.

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) := \{ \psi \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(\mathcal{F}\psi) \in K (K \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n) \}$$

$$\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n) := \{ \psi \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n) \mid (\mathcal{F}\psi) \text{ est une fonction indéfiniment différentiable} \}$$

Il est clair que :

$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n) \text{ et } \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$$

C.2 Propriétés algébriques

Définition de la multiplication dans $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$

Soit f une fonction à spectre compact, T une ultradistribution. On définit le produit fT par

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$$

Il est évident que $fT \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$ et l'application $T \mapsto fT$ envoie continûment l'espace $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Théorème d'échange

Pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et tout $T \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(fT) = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}T)$.

C.3 Les ultradistributions à variable complexe

Nous pouvons introduire les ultradistributions sur \mathbb{C}^n à l'aide de la transformation de Fourier-Laplace qu'on note par \mathcal{L} . En effet, soit φ un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On définit la transformée de Fourier-Laplace de φ par :

$$(\mathcal{L}\varphi)(s) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-sx)\varphi(x) dx, \quad \forall s \in \mathbb{C}^n.$$

Évidemment la fonction $\mathcal{L}\varphi$, définie sur $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ prolonge la fonction $\mathcal{F}\varphi$, définie sur \mathbb{R}^n .

On munira $\mathcal{Z}(\mathbb{C}^n)$ de la topologie transportée par celle de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; alors \mathcal{L} est un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{Z}(\mathbb{C}^n)$, l'isomorphisme réciproque étant la transformée de cotransformée de Fourier notée $\overline{\mathcal{F}}$ et définie par

$$(\overline{\mathcal{F}}\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-xy)\psi(y) dy, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

pour tout $\psi \in \mathcal{Z}(\mathbb{C}^n)$.

Images des fonctions monomiales et exponentielles

Pour tout $a \in \mathbb{C}^n$, on définit l'ultradistribution de la masse de Dirac δ_a sur \mathbb{C}^n par

$$\langle \delta_a, \psi \rangle = \psi(a), \quad \psi \in \mathcal{Z}(\mathbb{C}^n).$$

Série de Taylor des ultradistributions

À la différence des distributions, une ultradistribution est toujours *analytique*. Plus précisément, soit T une ultradistribution sur \mathbb{C}^n . Pour tout $a \in \mathbb{C}^n$ la série :

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{a^\beta}{\beta!} D^\beta T$$

est sommable vers $\tau_{-a}T$ (τ_{-a} désigne la translation dans $\mathcal{Z}'(\mathbb{C}^n)$) pour la topologie duale forte $\mathcal{Z}'(\mathbb{C}^n)$. A cet effet, nous avons par exemple :

$$\tau_a \delta = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{a^\beta}{\beta!} D^\beta \delta$$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons considéré dans notre étude le problème de la propagation d'ondes acoustiques au sein d'un fluide parfait en écoulement, en adoptant le modèle de Galbrun dont la seule inconnue est la perturbation de déplacement lagrangien. L'un des avantages de ce choix par rapport aux équations habituellement employées en aéroacoustique, réside dans le fait qu'on peut traiter les écoulements brutalement cisailés ou discontinus.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons proposé une méthode de régularisation pour le cas d'un écoulement uniforme permettant d'inscrire le problème dans un cadre mathématique classique. Ensuite nous avons résolu le problème numériquement en combinant la méthode des éléments finis de Lagrange en espace, des différences finis en temps et des conditions aux limites absorbantes (uniquement pour le cas de données initiales irrotationnelles). La simulation de l'équation de Galbrun dans un milieu semi-infini pour le cas rotationnel reste une question ouverte. Pour la validation de ces méthodes, nous avons calculé la solution fondamentale du problème non régularisé en appliquant la méthode de Cagniard-de Hoop.

Nous nous sommes intéressés dans la seconde partie de cette thèse à la résolution du problème de Cauchy associé à des écoulements fortement cisailés. Nous avons démontré à l'aide de l'analyse de Kreiss le caractère fortement mal posé du problème de transmission limite, associé à un écoulement discontinu et l'impossibilité de faire des simulations numériques. Pour mieux comprendre le phénomène sous-jacent, nous avons calculé le tenseur de Green de ce problème par la méthode de Cagniard-de Hoop. Celui-ci comporte une partie qui représente l'instabilité dite de Kelvin-Helmholtz et qui n'est définie qu'au sens des ultradistributions. Nous nous sommes intéressés ensuite à la simulation de l'équation de Galbrun dans une couche de mélange mince sans avoir maillé à l'ordre de l'épaisseur de la couche ε . Pour ce faire, nous avons construit des nouvelles conditions de raccord qui amènent à un modèle fortement bien posé sous une certaine hypothèse sur l'écoulement à l'intérieur de la couche de cisaillement.

Les perspectives envisageables pour la suite de ce travail sont le développement d'une méthode de résolution numérique du nouveau modèle, la validation des résultats obtenus en faisant des comparaisons avec des solutions de référence et l'extension des résultats théoriques obtenus pour les écoulements uniforme et discontinus à des écoulements quelconques. En particulier, la méthode développée pour un écoulement fortement cisailé devrait permettre de traiter des écoulements parallèles réalistes tel que le jet sortant du réacteur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **P. Ayoub**. Étude de schémas explicites pour les équations de maxwell 3d avec multiplicateur de lagrange et éléments finis conformes. Thèse d'université, Université Paris 6, novembre 1998.
- [2] **J. Bass**. Cours de mathématiques, tome ii. Masson et C^{IE}, Editeurs, 1968.
- [3] **E. Bécache, A.-S. B.-B. Dhia et G. Legendre**. Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44, 3 (2006).
- [4] **K. Berriri, A. S. Bonnet et P. Joly**. Régularisation de l'équation de galbrun pour l'aéroacoustique en régime transitoire. *ARIMA* (2006).
- [5] **R. Betchov et N. O. C. Jr.** Stability of parallel flows. Academic Press, 1967, p. 330.
- [6] **A.-S. Bonnet-Ben, Dhia, E.-M. Duclairoir, G. Legendre et J.-F. Mercier**. Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow. Accepted Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006.
- [7] **H. Brézis**. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson, Paris, 1983.
- [8] **L. Cagniard**. Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives. Gauthier-Villard, 1939.
- [9] **L. Cagniard**. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. *Geophysics* 18 (1953), 605–635.
- [10] **L. Cagniard**. Reflection and refraction of progressive seismic waves. McGraw-Hill, 1962. traduit de [8].
- [11] **C. Cherfilis-Clérouin, O. Lafitte et P.-A. Raviart**. Asymptotic results for the linear stage of the Rayleigh-Taylor instability. In *Mathematical fluid mechanics*, Adv. Math. Fluid Mech. Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 47–71.
- [12] **D. P. Chi et J. Kim**. Absorbing boundary condition. School of Electrical Engineering, Saoul, 1997.
- [13] **P. Ciarlet**. Augmented formulations for solving maxwell equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), 559–586.
- [14] **M. Costabel**. A coercive bilinear form for Maxwell's equations. *J. Math. Anal. Appl.* 157, 2 (1991), 527–541.
- [15] **R. Dautray et J. L. Lions**. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, tome 3. Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique. Masson, Paris, 1987.

- [16] **R. Dautray et J. L. Lions**. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, tome 9. Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique. Masson, Paris, 1987.
- [17] **B. Desjardins et E. Grenier**. Linear instability implies nonlinear instability for various types of viscous boundary layers. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 20, 1 (2003), 87–106.
- [18] **A.-S. B.-B. Dhia, G. Legendre et E. Lunéville**. Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIB Méc.* 329, 8 (2001), 601–606.
- [19] **J. Diaz**. Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées. thèse d'université, Paris 6, février 2005.
- [20] **P. G. Drazin et W. H. Reid**. Hydrodynamic stability. Cambridge University Press, New York, NY, 1985.
- [21] **A. B. Friedland et A. D. Pierce**. Reflexion of acoustic pulses from stable and unstable interface between moving fluids. *The physics of fluids* 12 (1969), 1148–1159.
- [22] **G. Gabard**. Méthodes numériques et modèles de source aéroacoustique basés sur l'équation de galbrun. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- [23] **H. Galbrun**. Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence. Gauthier-Villars, Paris, France, 1931.
- [24] **V. Girault et P.-A. Raviart**. Finite element methods for Navier-Stokes equations, theory and algorithms, vol. 5 of *Springer series in computational mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [25] **D. Givoli**. Non-reflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.* 94 (1991), 1–29.
- [26] **E. Grenier**. On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 53, 9 (2000), 1067–1091.
- [27] **E. Grenier**. On the stability of boundary layers of incompressible Euler equations. *J. Differential Equations* 164, 1 (2000), 180–222.
- [28] **J.-P. Grenier**. Distributions non standards. In *Séminaire d'Analyse, 6, 7, 1990–1991, 1991–1992 (Aubière, 1990–1991 and 1991–1992)*. Univ. Blaise Pascal Lab. Math. Pures Appl., Clermont, 1995, pp. Exp. No. 7.18, 7.
- [29] **C. Hazard et M. Lenoir**. On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations. *SIAM J. Math. Anal.* 27, 6 (1996), 1597–1630.
- [30] **B. Helffer et O. Lafitte**. Asymptotic methods for the eigenvalues of the Rayleigh equation for the linearized Rayleigh-Taylor instability. *Asymptot. Anal.* 33, 3-4 (2003), 189–235.
- [31] **A. T. de Hoop**. The surface line source problem. *Appl. Sci. Res. B* 8 (1959), 349–356.
- [32] **A. T. de Hoop**. Acoustic radiation from impulsive sources in a layered fluid. *Nieuw Arch. Wisk. (4)* 6, 1-2 (1988), 111–129.
- [33] **A. T. de Hoop**. Reciprocity, causality, and Huygens' principle in electromagnetic wave theory. In *Huygens' principle 1690–1990 : theory and applications (The Hague and Scheveningen, 1990)*, vol. 3 of *Stud. Math. Phys.* North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 171–192.

- [34] **A. T. de Hoop**. Fields and waves excited by impulsive point sources in motion—the general 3d time-domain doppler effect. *Wave Motion* 43, 2 (2005), 116–122.
- [35] **A. T. de Hoop et S. M. de Vries**. Combined Laplace and Fourier transformations in the theory of transient wave propagation in layered media. In *Recent advances in Fourier analysis and its applications (Il Ciocco,1989)*, vol. 315 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, pp. 387–425.
- [36] **P. Huerre et M. Rossi**. Hydrodynamics instabilities in open flows. In *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*, C. Godrèche et P. Manneville, Eds. Cambridge University Press, Cambridge, MA, USA, 1998, pp. 81–294.
- [37] **E. Jamelot**. Résolution des équations de maxwell avec des éléments finis de galerkin continus. Thèse École polytechnique, ENSTA, novembre 1998.
- [38] **P. Joly**. Cours d'analyse et approximation de modèles de propagation d'ondes, partie i. Edition ENSTA, 2002.
- [39] **D. S. Jones et J. D. Morgan**. The instability of a vortex sheet on a subsonic stream under acoustic radiation. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 72 (1972), 465–488.
- [40] **D. S. Jones et J. D. Morgan**. A linear model of a finite amplitude helmholtz instability. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 388 (1974), 17–41.
- [41] **C. Jordan**. Cours d'analyse de l'école polytechnique, 3 ed., vol. 2. Gauthier-Villars, 1909-1915, pp. 285–286.
- [42] **H. O. Kreiss**. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.* 23 (1970), 277–298.
- [43] **O. Lafitte**. Sur la phase linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. In *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles,2000–2001*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles. École Polytech., Palaiseau, 2001, pp. Exp. No. XXI, 22.
- [44] **B. E. . A. Majda**. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of wave. *Mathematics of Computation* 31 (1977), 629–651.
- [45] **D. Martin**. On line documentation of MÉLINA. <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/>.
- [46] **N. Melleron**. Calcul des ondes acoustiques transitoires émises par une source ponctuelle dans un fluide continûment variable par la méthode de cagniard-de hoop. Mémoire de master recherche, Université Aix-Marseille I, September 2005.
- [47] **W. Möhring, E.-A. Müller et F. Obermeier**. Problems in flow acoustics. *Rev. Modern Phys.* 55, 3 (1983), 707–724.
- [48] **O. Poncelet**. Réponse transitoire à une source impulsionnelle en espace en milieu anisotrope. Calcul de fonctions de Green par la méthode de Cagniard-de Hoop. In *Ondes élastiques dans les solides, Cours de l'Ecole des ondes*. INRIA, 2001, pp. 277–330.
- [49] **L. Rayleigh**. On the stability or instability of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.* 53, 9 (1988), 57–70.
- [50] **L. J. Rayleigh**. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. London Math. Soc* 14 (1883), 170–177.
- [51] **L. Schwartz**. Théorie des distributions. i., vol. 162. Paris : Hermann, France, Paris, 1957.

-
- [52] **F. Treyssède, G. Gabard et M. Ben Tahar.** A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian-Lagrangian description. *J. Acoust. Soc. Amer.* 113, 2 (2003), 705–716.
- [53] **M. D. Verweij et A. T. de Hoop.** Analysis of time-domain acoustic wave fields in arbitrarily continuously layered configurations based on the modified Cagniard method. In *Computational acoustics, Vol. 1 (Cambridge, MA, 1991)*. North-Holland, Amsterdam, 1993, pp. 399–409.
- [54] **P. Werner.** On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic wave fields. *J. Math. Anal. Appl.* 194, 7 (1963), 348–396.
- [55] **D. V. Widder.** The laplace tranform. Princeton University Press, p.63, 1946.
- [56] **K. Yosida.** Functional analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1980.