



**HAL**  
open science

## Amortissement semi-actif des structures flexibles

Othman Ben Mekki

► **To cite this version:**

Othman Ben Mekki. Amortissement semi-actif des structures flexibles. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2006. English. NNT : . pastel-00002570

**HAL Id: pastel-00002570**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002570>**

Submitted on 25 Jun 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Ecole Nationale des Ponts et Chaussées



Università di Roma "Tor Vergata"

**THESE**

présentée à

L'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

per il conseguimento del titolo di

**DOTTORE DI RICERCA IN**

**INGEGNERIA DELLE STRUTTURE E GEOTECNICA**

**DELL'UNIVERSITA DI ROMA "TOR VERGATA"**

et du diplôme de

**DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

par : **Othman Ben Mekki**

Sujet de thèse :

**Amortissement semi-actif des structures flexibles**

Soutenue en Mai 2006

devant le jury composé de :

<b>Michel Frémond</b>	Président, Examineur
<b>Ferdinando Auricchio</b>	Rapporteur
<b>Rui Carneiro de Barros</b>	Rapporteur
<b>Franco Maceri</b>	Directeur de thèse
<b>Frédéric Bourquin</b>	Directeur de thèse
<b>Hedi Hassis</b>	Examineur

**A ma famille**

## Remerciements

*Je tiens tout d'abords à remercier Monsieur Michel Frémond de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Messieurs Ferdinando Auricchio et Rui Carneiro de Barros d'avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire. Je remercie également Monsieur Hedi Hassis d'avoir participé à l'évaluation de ce travail en tant qu'examineur.*

*Je voudrais adresser ma plus sincère gratitude à mon directeur de thèse Monsieur Franco Maceri, sans qui ce travail n'aurait pas pu voir le jour, pour m'avoir fait confiance et aidé tout au long de ces années tant sur le plan scientifique qu'humain, pour la qualité de son encadrement et ses conseils avisés. Tous mes remerciements vont également à Monsieur Frédéric Bourquin, qui a accepté d'être mon directeur de thèse Français. Mais surtout, je tiens à le remercier pour m'avoir proposé ce sujet et pour le temps qu'il m'a consacré durant ces deux années, me transmettant ainsi une rigueur et clarté nécessaires à une véritable recherche scientifique.*

*Je souhaite également remercier Messieurs Ahmed Friâa et Hatem Zenzri de m'avoir choisi pour participer au concours de doctorat de recherche à l'Università di Roma Tor Vergata.*

*Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à Monsieur Michel Frémond pour ses aides scientifique et humain ainsi que pour son soutien moral.*

*Un grand remerciement s'adresse à Monsieur Giovanni Caruso pour la longue discussion et ces conseils précieux.*

*Mes remerciements à Messieurs François Derkx, Cyril Nguyen Van Phu, Jean Luc Bachelier et surtout Monsieur Erick Merliot pour leurs aides précieuses au niveau de l'expérimentation.*

*Je tiens à remercier également Madame Nicole Tchang et Agnes Vaikhé du LCPC pour leurs aides administratives et leur soutien moral.*

*Je remercie tous les chercheurs de l'Università di Roma Tor Vergata et surtout la collègue Paola Isabella Valenzi.*

*Je ne saurais jamais remercier assez mon père et ma mère pour leur amour, leur encouragement et leur soutien inconditionnel. Je leur dédie ce travail.*

# Table des matières

Résumé	1
Sommario	2
Abstract	3
Introduction	5
<b>1 Les systèmes de contrôle passif et les lois de contrôle actif et semi-actif</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Systèmes de contrôle passif . . . . .	10
1.2.1 Systèmes d'isolation sismique . . . . .	10
1.2.2 Dissipation d'énergie . . . . .	13
1.3 Les lois de contrôle actif . . . . .	14
1.3.1 Modélisation des systèmes de contrôle . . . . .	15
1.3.2 Contrôlabilité et observabilité . . . . .	21
1.3.3 Phénomène de Spillover . . . . .	24
1.3.4 Algorithmes de contrôle actif . . . . .	24
1.4 Les lois de contrôle semi-actif . . . . .	29
1.4.1 Contrôle à boucle ouverte . . . . .	31
1.4.2 Contrôle Sky-hook . . . . .	31

---

1.4.3	Contrôle ground-hook . . . . .	36
1.4.4	Algorithme LQR semi-actif . . . . .	37
1.4.5	Contrôle Clipping . . . . .	37
1.4.6	Contrôle de Lyapunov . . . . .	38
1.4.7	Contrôle Bang-Bang . . . . .	39
1.4.8	Contrôle par frottement homogène modulé . . . . .	40
1.4.9	Contrôle par logique floue . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Modélisation du système de contrôle d'une poutre avec TMD pendulaire et un alternateur</b>	<b>44</b>
2.1	Introduction . . . . .	44
2.2	Modèle mécanique . . . . .	45
2.3	Vibration horizontale . . . . .	46
2.3.1	Equations du mouvement de la poutre et du pendule . . . . .	48
2.3.2	Equations de l'alternateur . . . . .	54
2.3.3	Identification du coefficient d'amortissement . . . . .	57
2.3.4	Identification de l'alternateur . . . . .	59
2.4	Vibrations horizontale et verticale de la poutre . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Conception des paramètres optimaux d'un amortisseur à masse accordée pendulaire et un alternateur : actionneur de référence</b>	<b>70</b>
3.1	Introduction . . . . .	70
3.2	Modèle mécanique . . . . .	72
3.3	Equations adimensionnelles . . . . .	73
3.4	Solution du système des équations adimensionnelles . . . . .	75
3.5	Optimisation des paramètres adimensionnels . . . . .	75
3.6	Résolution du système adimensionnel . . . . .	83
3.7	Paramètres optimaux du pendule . . . . .	87

---

3.8	Bilan Energétique du système . . . . .	89
3.9	Influence de la masse totale de l'actionneur $M_{ap}$ sur la réponse de la poutre . . . . .	91
3.10	Emplacement optimal du pendule . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Modélisation de la maquette du pont avec un actionneur électroméca- nique</b> . . . . .	<b>94</b>
4.1	Introduction . . . . .	94
4.2	Modèle de la maquette du pont . . . . .	95
4.3	Formulation du problème dynamique . . . . .	96
4.3.1	Puissance des efforts extérieurs . . . . .	98
4.3.2	Puissance des quantités d'accélération . . . . .	98
4.3.3	Puissance des efforts intérieurs . . . . .	98
4.4	Approximation modale du déplacement . . . . .	101
4.5	Equations du pendule et de l'alternateur . . . . .	102
4.6	Calcul des modes propres de la maquette en utilisant une modélisation par éléments finis . . . . .	110
4.7	Contrôlabilité de la maquette du pont . . . . .	111
4.8	Conception des paramètres optimaux de l'actionneur . . . . .	113
4.8.1	Equations adimensionnelles . . . . .	113
4.8.2	Solution du système des équations adimensionnelles . . . . .	115
4.9	Réponses des modes de la maquette du pont . . . . .	120
4.10	Amortissement multimodale de vibration de la maquette du pont . . . . .	125
4.10.1	Amortissement du premier mode de vibration de la maquette du pont . . . . .	125
4.10.2	Amortissement du troisième mode de vibration de la maquette du pont . . . . .	127
4.11	Réponse du mode de torsion sous excitation harmonique . . . . .	128
4.12	Réponse du mode de torsion de la maquette du pont en résolvant le système non linéaire . . . . .	131

---

<b>5</b>	<b>Contrôle semi-actif</b>	<b>133</b>
5.1	Introduction . . . . .	133
5.2	Modèle mécanique de la maquette du pont et de l'actionneur électromécanique . . . . .	137
5.3	Energie totale de la maquette du pont et du pendule . . . . .	139
5.4	contrôle semi-actif du mode de torsion de la maquette du pont . . . . .	140
5.5	Réponse du mode de torsion de la maquette . . . . .	145
5.5.1	Cas1 : réponse du mode de torsion à l'étape $e_{i+1}$ selon la méthode 1	146
5.5.2	Cas2 : réponse du mode de torsion à l'étape $e_{i+1}$ selon la méthode 2	147
5.6	Contrôle semi-actif de différents types d'excitations . . . . .	151
5.7	Contrôle modal . . . . .	155
5.8	Conclusion . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>158</b>
6.1	Introduction . . . . .	158
6.2	Dispositif expérimental . . . . .	159
6.2.1	Matériels utilisés . . . . .	159
6.2.2	Placement des capteurs . . . . .	162
6.2.3	Estimation d'état . . . . .	166
6.2.4	Identification modale . . . . .	166
6.2.5	Filtre fréquentiel et dérivation numérique . . . . .	167
6.3	Contrôle passif . . . . .	167
6.3.1	Contrôle du mode de torsion de la maquette du pont . . . . .	168
6.3.2	Contrôle du premier et du troisième mode de vibration de la maquette du pont . . . . .	175
6.4	Contrôle semi-actif . . . . .	178
6.4.1	Schéma de la boucle de rétroaction . . . . .	178

6.4.2	Résultats de contrôle semi-actif . . . . .	180
6.5	Conclusion . . . . .	182
<b>Conclusions</b>		<b>185</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>188</b>

# Table des figures

1.1	Isolateur élastomérique avec noyau de plomb. . . . .	12
1.2	Isolateur de type pendule à friction. . . . .	13
1.3	diagramme de contrôle actif. . . . .	14
1.4	Poutre droite encastrée-libre contrôlée en force. . . . .	16
1.5	Contrôlabilité d'un système. . . . .	22
1.6	Principe de contrôle modal par retour d'état. . . . .	28
1.7	Amortisseur conventionnel et Skyhook. . . . .	32
1.8	Courbe du module de transmissibilité. . . . .	33
1.9	Amortisseur semi-actif . . . . .	34
2.1	Modèle mécanique : vibration horizontale. . . . .	46
2.2	Composantes du pendule. . . . .	47
2.3	Système pendule-alternateur. . . . .	48
2.4	Les forces appliquées sur le pendule. . . . .	49
2.5	Composantes de l'alternateur. . . . .	54
2.6	Modèle électrique de l'alternateur. . . . .	56
2.7	Représentation du capteur potentiométrique et du circuit électronique. . . . .	58
2.8	Comparaison entre la tension $V_s(t)$ expérimentale et numérique en circuit ouvert. . . . .	59
2.9	Représentation expérimentale de la force électromotrice à vide. . . . .	60
2.10	Représentation numérique de la force électromotrice à vide. . . . .	60

2.11	Diagramme vectoriel de Behn-Eshenbourg. . . . .	61
2.12	Comparaison entre la tension $V_s(t)$ expérimentale et numérique en court-circuit. . . . .	63
2.13	Comparaison entre la tension $V_s(t)$ expérimentale et numérique à $R = 6,8\Omega$ . . . . .	63
2.14	Modèle mécanique : vibration horizontale et verticale de la poutre. . . . .	64
2.15	Les forces appliquées sur le pendule. . . . .	66
3.1	Représentation schématique de l'actionneur. . . . .	73
3.2	Evolution de ETDR en fonction de $k$ à $\mu = 5\%$ à gauche et en fonction de $\mu$ à $k = 15\%$ à droite. . . . .	77
3.3	Evolution de $p$ en fonction de $k$ à $\mu = 5\%$ à gauche et en fonction de $\mu$ à $k = 15\%$ à droite. . . . .	78
3.4	Evolution de $\zeta$ en fonction de $k$ à $\mu = 5\%$ à gauche et en fonction de $\mu$ à $k = 15\%$ à droite. . . . .	78
3.5	Lieu des pôles à $k = 15\%$ , $\mu = 5\%$ et en faisant varier $\zeta$ à $p = 0,9p_{k\mu}$ . . . . .	79
3.6	Lieu des pôles à $k = 15\%$ , $\mu = 5\%$ et en faisant varier $\zeta$ à $p = 1,1p_{k\mu}$ . . . . .	80
3.7	Lieu des pôles à $k = 15\%$ , $\mu = 5\%$ et en faisant varier $\zeta$ à $p = p_{k\mu}$ . . . . .	80
3.8	Réponse en fréquence de $ \alpha_1(\Omega) $ pour $k = 15\%$ , $\mu = 5\%$ , $p = 0,97$ et pour différentes valeurs de $\zeta$ . . . . .	83
3.9	Oscillation libre du premier mode de la poutre à $p = 0,9p_{k\mu}$ , $k = 15\%$ et $\mu = 5\%$ . . . . .	84
3.10	Oscillation libre du premier mode de la poutre à $p = 1,1p_{k\mu}$ , $k = 15\%$ et $\mu = 5\%$ . . . . .	84
3.11	Oscillation libre du premier mode de la poutre à $p = p_{k\mu}$ , $\zeta = \zeta_{k\mu}$ , $k = 15\%$ et $\mu = 5\%$ . . . . .	85
3.12	Oscillation libre du premier mode de la poutre à $k = 15\%$ , $\mu = 5\%$ , $p = p_{k\mu}$ et $\zeta = 2\zeta_{k\mu}$ . . . . .	86
3.13	Oscillation libre du premier mode de la poutre à $k = 15\%$ , $\mu = 5\%$ , $p = p_{k\mu}$ et $\zeta = 1/2\zeta_{k\mu}$ . . . . .	86
3.14	Oscillation libre du premier mode de la poutre à $k = 15\%$ , $p = p_{k\mu}$ , $\zeta = \zeta_{k\mu}$ et $\mu = 10\%$ . . . . .	87
3.15	Oscillation libre du premier mode de la poutre à $M_{ap} = 1 \text{ Kg}$ , $m_2 = 0,35 \text{ Kg}$ $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$ et $l = l^{opt}$ . . . . .	88
3.16	Lieu des pôles à $M_{ap} = 2,05 \text{ Kg}$ , $m_2 = 1,02 \text{ Kg}$ et $l = 6 \text{ cm}$ . . . . .	88
3.17	Oscillation libre du premier mode de la poutre à $M_{ap} = 2,05 \text{ Kg}$ , $m_2 = 1,02 \text{ Kg}$ , $C_{eq} = 0,13 \text{ Kg/s}$ et $l = 6 \text{ cm}$ . . . . .	89

3.18	Energie élastique et potentiel de dissipation pour $M_{ap} = 2,05Kg$ , $m_2 = 1,02Kg$ , $C_{eq} = 0,13Kg/s$ et $l = 6cm$ . . . . .	90
3.19	Energie élastique et potentiel de dissipation pour $M_{ap} = 1Kg$ , $m_2 = 0,35Kg$ , $l = l^{opt}$ et $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$ . . . . .	90
3.20	Effet de la variation de la masse totale $M_{ap}$ du pendule sur la réponse de la poutre à $l = l^{opt}$ , $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$ et $m_2 = 0,35$ . . . . .	91
3.21	Différents emplacements de l'actionneur optimal sur la poutre. . . . .	92
3.22	Emplacement optimal de l'actionneur sur la poutre. . . . .	93
4.1	Maquette du pont. . . . .	96
4.2	Modélisation de la maquette du pont. . . . .	97
4.3	Modélisation de la maquette du pont avec l'actionneur. . . . .	103
4.4	Modèle mécanique: vibration du pendule. . . . .	104
4.5	Les forces appliquées sur le pendule. . . . .	106
4.6	Les déformées modales de la maquette du pont. . . . .	111
4.7	Grammien de contrôlabilité des six modes de la maquette du pont. . . . .	112
4.8	Lieu des pôles en variant $\zeta$ pour $k = 36\%$ , $\mu = 15,7\%$ et $p = p_{k\mu}$ . . . . .	117
4.9	Lieu des pôles en variant $\zeta$ pour $k = 36\%$ , $\mu = 15,7\%$ et $p = 0,95p_{k\mu}$ . . . . .	117
4.10	Lieu des pôles de la maquette du pont en variant $\zeta$ pour $k = 36\%$ , $\mu = 15,7\%$ et pour $p = p_{k\mu}$ . . . . .	118
4.11	Réponse libre de la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont pour $k = 36\%$ , $\mu = 15,7\%$ et pour $p$ et $\zeta$ calculées premièrement à partir du critère de maximisation de ETDR puis à partir du critère donné par [39]. . . . .	121
4.12	Algorithme d'intégration de Newmark. . . . .	123
4.13	Contributions modales des modes verticaux (à gauche) et des modes horizontaux (à droite) en utilisant des paramètres dimensionnels. Les contributions en pointillés sont obtenues selon le critère de maximisation de ETDR et les contributions en traits pleins sont obtenues selon le critère donné par [39]. . . . .	124
4.14	Angle de vibration du pendule obtenu selon le critère de maximisation de ETDR (en pointillé) et angle de vibration obtenu selon le critère donné par [39] (en trait plein). . .	124

4.15	Réponse libre de la contribution modale du premier mode de vibration de la maquette du pont munie du pendule décrit au paragraphe (4.10.1) . . . . .	126
4.16	Réponse libre de la contribution modale du troisième mode de la maquette du pont munie du pendule décrit au paragraphe (4.10.2). . . . .	127
4.17	Maquette du pont équipé par trois actionneurs. . . . .	128
4.18	Contribution modale du mode de torsion obtenue selon le critère de maximisation de ETDR (en trait pointillé) et la contribution du même mode obtenu selon le critère donné par [29] (en trait plein). . . . .	129
4.19	Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion sans contrôle et la contribution modale du même mode avec l'actionneur attaché à l'extrémité du tablier. . . . .	130
4.20	Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion à circuit ouvert et à circuit fermé avec $C_{ap} = 0$ . . . . .	131
4.21	Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion à circuit ouvert et à circuit fermé avec $C_{ap} \neq 0$ . . . . .	131
5.1	Evolution en fonction du temps de l'énergie totale avec et sans partie inductive. . . . .	139
5.2	Oscillation libre de la contribution modale du mode de torsion avec et sans partie inductive. . . . .	139
5.3	Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont à l'étape $e_i$ et à l'étape $e_{i+1}$ en utilisant l'actionneur introduit à l'étape $e_i$ . . . . .	146
5.4	Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont à l'étape $e_{i+1}$ en utilisant l'actionneur de l'étape $e_i$ et l'actionneur de l'étape $e_{i+1}$ . . . . .	147
5.5	Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont donnée par le contrôle passif optimal en utilisant l'actionneur de l'étape $e_{i+1}$ et par le contrôle semi-actif. . . . .	148
5.6	Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont donnée par le contrôle passif optimal en utilisant l'actionneur de l'étape $e_{i+1}$ et par le contrôle semi-actif selon la loi (5.24). . . . .	149
5.7	Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont en utilisant l'actionneur de l'étape $e_i$ et le contrôle semi-actif selon la loi (5.24). . . . .	149

5.8	Contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont à l'étape $e_i$ en utilisant le contrôle passif optimal à gauche et à l'étape $e_{i+1}$ en utilisant le contrôle semi-actif selon la loi (5.24) à droite. . . . .	150
5.9	Contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé obtenue à partir des paramètres optimaux de l'étape $e_i$ et en trait plein obtenue à partir des paramètres optimaux de l'étape $e_{i+1}$ . . . . .	153
5.10	Contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont en trait plein obtenue à partir des paramètres de l'étape $e_{i+1}$ et en pointillé obtenue à partir du contrôle semi-actif.	154
5.11	Contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont en trait plein obtenue à partir des paramètres de l'étape $e_i$ et en pointillé obtenue à partir du contrôle semi-actif.	154
5.12	Oscillation libre de la contribution modale du mode $e_{i+1}$ de la maquette du pont en pointillé obtenue à partir de la méthode 2 et en trait plein obtenue à partir de la méthode 1. . . . .	156
6.1	Maquette du pont. . . . .	160
6.2	Liaison centrale de la maquette. . . . .	160
6.3	Actionneur électromécanique. . . . .	161
6.4	Placement des capteurs pour la maquette du pont suivant les méthodes Mseq (à gauche) et EFI (à droite). . . . .	164
6.5	MAC correspondant au placement des capteurs pour la maquette du pont suivant les méthodes Mseq (à gauche) et EFI (à droite). . . . .	164
6.6	Grammien d'accélération pour six accéléromètres placés sur la maquette du pont pour six modes ciblés. . . . .	165
6.7	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont sans actionneur . . . . .	168
6.8	Dispositif de contrôle du mode de torsion de la maquette du pont. . . . .	169
6.9	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette lorsque l'actionneur est à paramètres optimaux. . . . .	170
6.10	Oscillation libre numérique de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette lorsque l'actionneur à paramètres optimaux. . . . .	170

6.11	Oscillation libre expérimentale des six premières contributions modales des accélérations de la maquette du pont avec actionneur à paramètres optimaux. . . . .	171
6.12	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque l'actionneur est en circuit ouvert et en trait plein lorsque l'actionneur est à paramètres optimaux. . . . .	172
6.13	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque $R = 2R^{opt}$ et en trait plein lorsque $R = R^{opt}$ . . . . .	173
6.14	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque $l = 13,5cm$ et en trait plein lorsque $l = l^{opt}$ . . . . .	174
6.15	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque $l = 25cm$ et en trait plein lorsque $l = l^{opt}$ . . . . .	174
6.16	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque $l = 34,5cm$ et en trait plein lorsque $l = l^{opt}$ . . . . .	174
6.17	Contrôle du premier mode de vibration de la maquette du pont. . . . .	175
6.18	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du premier mode de la maquette du pont lorsque le motoréducteur est en court circuit. . . . .	175
6.19	Contrôle du premier mode de vibration de la maquette du pont. . . . .	176
6.20	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de balancement de la maquette du pont lorsque le motoréducteur est en court circuit. . . . .	176
6.21	Oscillation libre expérimentale des trois contributions modales des accélérations des deux premiers modes horizontaux et du mode de balancement de la maquette du pont lorsque l'actionneur attaché à l'extrémité du tablier est à paramètres optimaux et le motoréducteur est en court circuit. . . . .	177
6.22	Boucle de rétroaction. . . . .	178
6.23	Switch électronique. . . . .	179
6.24	Génération du signal de commande. . . . .	180

---

6.25	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale d'accélération du mode de torsion de la maquette du pont à l'étape $e_i$ et à l'étape $e_{i+1}$ en maintenant le même actionneur. . . . .	181
6.26	Oscillation libre expérimentale de la contribution modale d'accélération pour quatre étapes du mode de torsion de la maquette du pont en utilisant le contrôle semi-actif. . .	182

# Liste des tableaux

5.1	Paramètres optimaux du TMD pour différents types d'excitations. . . . .	151
6.1	Caractéristiques des accéléromètres PCB. . . . .	160
6.2	paramètres du pendule. . . . .	161
6.3	Caractéristiques techniques de l'alternateur. . . . .	162
6.4	Paramètres internes de l'alternateur. . . . .	162
6.5	Les valeurs des six premières fréquences propres obtenues expérimentalement. . . . .	166



# Résumé

Les amortisseurs à masse accordée (TMD) connaissent un succès important en génie civil. Mais leur performance est très liée aux réglages de ses paramètres et leur efficacité varie beaucoup lorsque la structure évolue ainsi que le type de chargement. Dans ce travail, on a réalisé une version semi-active ne nécessitant pas de source d'énergie extérieure significative, à base d'amortisseurs électromécaniques commandés en temps réel. Cette version semi-active consiste en un TMD pendulaire couplé à un alternateur qui sert à transformer l'énergie mécanique en énergie électrique qui sera dissipée dans une résistance externe par effet Joule.

Quatre points ont particulièrement été développés dans ce travail.

- Le premier est consacré à la conception des paramètres de l'actionneur en introduisant un critère d'optimisation. Ce critère est basé sur la maximisation du taux de décroissance exponentiel au moyen de la technique de placement des pôles. Il a été montré numériquement l'efficacité de cet actionneur ainsi que l'importance de ses paramètres optimaux à amortir le mode de torsion d'un démonstrateur d'un pont en construction lorsqu'il est en vibration libre ou également en vibration harmonique.

- Le deuxième est dédié à l'amortissement des plusieurs modes en introduisant plusieurs actionneurs. En particuliers, l'utilisation des trois actionneurs, dont un est attaché à l'extrémité du tablier et les deux autres sont attachés à l'extrémité du pylône, permettent d'amortir quatre modes de vibration du démonstrateur du pont.

- Le troisième porte sur le développement d'une loi de contrôle semi-actif qui permet une adaptation en temps réel des paramètres de l'actionneur lorsque la structure évolue ainsi que les types de chargement. Cette loi peut être appliquée pour amortir plusieurs modes en agissant sur un mode particulier à chaque instant dans l'esprit de la méthode MIMSC. Cette loi de contrôle, appliquée sur la résistance externe branchée aux bornes de l'alternateur, permet de faire varier le coefficient d'amortissement et de compenser la rigidité de l'actionneur.

- Le dernier porte sur la mise en oeuvre expérimentale, sur la maquette du pont, d'une part du contrôle passif et d'autre part du contrôle semi-actif. Dans le contrôle passif a été validé la théorie de la conception des paramètres de l'actionneur et a été confirmé l'efficacité de l'actionneur électromécanique. Mais, dans le contrôle semi-actif a été seulement validé l'avantage de rendre l'efficacité de l'actionneur indépendante de l'évolution de la structure.

# Sommario

Gli smorzatori a massa accordata hanno ottenuto un importante successo in ingegneria civile. Il loro rendimento tuttavia dipende molto dalla scelta dei parametri e la loro efficacia varia notevolmente con l'evoluzione della struttura e il tipo di carico applicato. Durante lo svolgimento di questo lavoro abbiamo realizzato una versione semi-attiva che non richiede un'energia significativa dall'esterno, tramite l'utilizzo degli smorzatori elettromeccanici. Questa versione semi-attiva consiste in un pendolo accoppiato ad un alternatore che serve a trasformare l'energia meccanica in energia elettrica; tale energia viene dissipata in una resistenza esterna per effetto Joule.

In questo lavoro sono stati sviluppati in particolare quattro punti.

- Il primo è dedicato all'ottimizzazione dei parametri relativi all'attuatore introducendo un criterio d'ottimizzazione. Questo criterio è basato sulla massimizzazione del coefficiente di decadimento esponenziale mediante la tecnica dello spostamento dei poli. È stata mostrata numericamente l'efficacia di questo attuatore e l'importanza dei suoi parametri ottimali per smorzare il modo torsionale di un modello di ponte quando è soggetto a vibrazione libera o armonica.

- Il secondo punto è dedicato allo smorzamento multimodale usando attuatori elettromeccanici multipli. In particolare, sono stati usati tre attuatori per controllare il primo modo verticale, il modo torsionale, il terzo modo e il sesto modo di vibrazioni del modello.

- Il terzo punto è concentrato sullo sviluppo di una legge di controllo semi-attivo che permette un adattamento in tempo reale dei parametri dell'attuatore secondo l'evoluzione della struttura e il tipo di carico applicato. Questa legge può essere applicata per lo smorzamento multimodale agendo su un modo particolare in ogni istante. Questa legge di controllo, applicata alla resistenza esterna collegata all'alternatore, permette di variare il coefficiente di smorzamento e di compensare la rigidità dell'attuatore.

- Nell'ultimo punto è stato sviluppato uno studio sperimentale del controllo passivo e del controllo semi-attivo sul modello di ponte. Nel controllo passivo è stata convalidata la teoria dell'ottimizzazione dei parametri dell'attuatore ed è stata confermata l'efficacia dell'attuatore elettromeccanico. Nel controllo semi-attivo invece è stato confermato soltanto il vantaggio di rendere l'efficacia dell'attuatore indipendente dell'evoluzione della struttura.

# Abstract

Tuned mass dampers (TMDs) have obtained an important success in civil engineering. Since their performance depends on the choice of its parameters and evolutions of the structure to be controlled may pull down the efficiency of this kind of device. In this work we achieved a semi-active version based on electromechanical device. This semi-active version consists in a pendulum coupled at an alternator. When pendulum begins to oscillate, the alternator converts the mechanical energy into electric energy to be dissipated through an exterior resistor via Joule effect.

Four points have been mainly developed in this work.

- The first point is devoted to obtaining an optimal design of a passive actuator using an optimization criteria. This criteria is based on the maximization of the exponential time decay rate by means of the pole placement technique. Numerical simulations have shown the actuator efficiency and the importance of their optimal parameters in absorbing the torsional mode of small-scale bridge under construction when it is in free vibration or also in harmonic vibration.

- The second point studies the multimodal vibration damping of the demonstrator bridge equipped with multiple actuators. In particular, three actuators have been used for control the first vertical mode, the torsional mode, the third mode and the sixth mode of vibrations of the demonstrator bridge.

- The third point consisted in developing the semi-active control law that permits to adapt the actuator parameters in real-time when the structure evolves. This semi-active control law consists in changing the resistor in real-time in such a way to lock the apparent stiffness of the real TMD at its desired optimal value and to vary the damping coefficient.

- The last point deals with the experimental study of the passive control and the semi-active control on a small-scale bridge. In passive control, the theory of optimal design of the actuator parameters has been validated and the efficiency of the electromechanical actuator has been confirmed. In semi-active control, only the advantage of the actuator in such a way to make its performance independent of the structural evolution has been validated.



# Introduction

Les motivations qui poussent à l'utilisation du contrôle des vibrations des ponts sont nombreuses. Les grands ponts modernes à haubans ou suspendus sont de plus en plus flexibles. Leur chargement a plus que doublé en dix ans, alors que leur poids propre a diminué. Ils sont donc plus sensibles aux excitations extérieures comme le vent et les séismes. Il s'agit d'une tendance qui s'accroît et qui trouve son origine entre autres dans une amélioration des performances des matériaux de construction. De plus, l'exigence de projeter des ponts en degré de résister, sans dégâts appréciables, à des hautes actions dynamiques.

Plutôt que de renforcer et de rigidifier la structure afin d'affronter des actions extérieures peu fréquentes, il s'agit de s'y opposer de manière contrôlée en produisant des forces de réaction adaptées lorsque ces actions se produisent. Les systèmes de contrôle sont principalement trois : passif, actif et semi-actif. Le contrôle passif consiste à superposer à la structure un dispositif qui dissipe l'énergie ou filtre la transmission des efforts dans la structure, au moins à une fréquence donnée. Il ne nécessite ni mesure ni source d'énergie externe. Le contrôle actif vise à imposer une force ou un déplacement en certains points du système, en fonction notamment de l'état mesuré au même instant, ou de l'histoire de celui-ci. Ceci exige un système de capteurs, un traitement du signal, une stratégie de contrôle, un ordinateur temps réel, un système d'actionneurs et une source importante d'énergie externe. Le contrôle semi-actif, en revanche, ne nécessite qu'une faible source d'énergie pour modifier la propriété mécanique du dispositif de contrôle. Il combine les principaux traits des systèmes actifs et passifs. D'où, le système de contrôle semi-actif des structures est une extension logique de technologie du contrôle actif et passif.

Parmi les amortisseurs les plus utilisés en génie civil, on peut citer les amortisseurs à masse accordée (TMDs). Les travaux de Frahm (1911) [38] et Ormondroyd et Den Hartog (1928) [78] sont parmi les premières études d'application de ce type d'appareil aux différents systèmes mécaniques. Ces amortisseurs sont couramment utilisés dans différentes structures du génie civil, comme les bâtiments et les ouvrages souples tels que les passerelles, les

ponts suspendus et les ponts à haubans. La performance de ces amortisseurs est très liée aux réglages de leurs paramètres. De même, leur efficacité varie beaucoup lorsque la structure évolue ainsi que le type de chargement. D'où, l'idée principale d'introduire le contrôle semi-actif qui permet selon une loi de contrôle d'adapter les paramètres de l'actionneur en temps réel lorsque la structure évolue ou lorsqu'elle est soumise à différents types des sollicitations.

L'objectif de ce travail est de mettre en place les outils numériques nécessaires, de réaliser la conception en détail de l'actionneur, afin d'amortir le mode de torsion d'une maquette de pont en construction, et la faisabilité de version semi-active, à base d'amortisseur électromécanique, afin que l'actionneur permette une adaptation en temps réel aux évolutions de la structure et des sollicitations.

Dans ce travail on a introduit un nouvel actionneur électromécanique principalement composé d'un TMD pendulaire couplé à un alternateur qui sert à transformer l'énergie mécanique en énergie électrique qui sera dissipée par effet Joule dans une résistance externe. Puis, on a introduit une nouvelle méthode de conception des paramètres du TMD pendulaire : un critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel. Enfin, on a développé une loi de contrôle semi-actif permettant une adaptation en temps réel des paramètres de l'actionneur aux évolutions de la structure aux cours du temps et des sollicitations. Cette loi de contrôle est appliquée sur la résistance externe attachée aux bornes de l'alternateur.

Les travaux de cette thèse sont exposés comme suit :

Le chapitre 1 est consacré à un bref aperçu sur les systèmes de contrôle passif et les lois de contrôle actif et semi-actif.

Dans le chapitre 2 on présente l'actionneur électromécanique qui est principalement formé d'un pendule couplé à un alternateur. Cet actionneur est attaché à l'extrémité d'une poutre encastree-libre afin d'amortir le premier mode de vibration. Le système d'équations du modèle complet est obtenu en utilisant le cas de discrétisation puis couplage. Les équations de la poutre sont obtenues en utilisant une discrétisation sur la base modale, les équations du TMD pendulaire sont obtenues à partir des équations de Lagrange et les équations mécanique et électrique de l'alternateur sont obtenues en appliquant, respectivement, le principe fondamental de la dynamique et la loi des mailles. Pour simuler le système complet couplé, on a identifié les paramètres de l'alternateur et le coefficient d'amortissement propre de l'actionneur.

Dans le chapitre 3 on a effectué une étude paramétrique du système formé par deux équations. L'équation de vibration du premier mode de la poutre et l'équation de l'actionneur

de référence : l'amortissement total est équivalent à un amortissement visqueux. Les paramètres optimaux de l'actionneur sont déterminés en introduisant une nouvelle méthode de conception qui consiste à la maximisation du taux de décroissance exponentiel. On a réalisé une étude détaillée de l'amortissement obtenu en variant les paramètres de l'actionneur. De cette étude, on a constaté que le meilleur emplacement de l'actionneur est dans la zone à déplacement maximal. Après avoir simulé le système complet couplé sur un système simple (poutre), on a présenté dans le chapitre 4 la simulation du démonstrateur d'un pont en construction contrôlé par l'actionneur électromécanique. La conception des paramètres de l'actionneur : la longueur du pendule et le coefficient d'amortissement total équivalent est réalisée en appliquant le critère d'optimisation introduit dans le chapitre 3. A partir de la simulation numérique, on a montré que cet actionneur, lorsqu'il est attaché à l'extrémité du tablier, est très efficace à amortir le mode de torsion de la maquette lorsqu'elle est en vibration libre ou également en vibration harmonique. Aussi, il est très efficace à amortir, suivant le plan de vibration du pendule, le premier ou le troisième mode de vibration lorsqu'il est attaché à l'extrémité supérieure du pylône. Par ailleurs, lorsque la maquette est équipée par trois actionneurs, les trois premiers modes sont bien contrôlés.

Dans le chapitre 5, d'une part on a développé une loi de contrôle semi-actif permettant une adaptation en temps réel des paramètres de l'actionneur aux évolutions de la maquette du pont lorsqu'elle est considérée en cours de construction. D'autre part, on a appliqué cette loi de contrôle pour adapter les paramètres de l'actionneur en temps réel selon les types des sollicitations en considérant que la maquette est soumise à différents types des chargements. En plus, cette loi de contrôle semi-actif est utilisée pour amortir deux modes différents : le mode de torsion et le sixième mode, en agissant sur un mode à chaque instant dans l'esprit de la méthode MIMSC.

Cette loi, qui peut être considérée très simple, s'applique sur la résistance externe qui permet de varier en temps réel l'amortissement et de compenser la rigidité de l'actionneur. La simplicité de cette loi consiste en l'introduction d'un seul capteur pour sa mise en oeuvre expérimentale comme il est indiqué dans le dernier chapitre.

Le chapitre 6 expose la mise en oeuvre expérimentale du contrôle passif et semi-actif sur la maquette du pont. On a confirmé expérimentalement, en contrôlant le mode de torsion de la maquette, la validité du critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel introduit dans le chapitre 4. Aussi, on a montré l'importance majeure des paramètres optimaux de l'actionneur sur l'amortissement.

Ensuite, on a introduit plusieurs actionneurs pour amortir plusieurs modes de vibration

de la maquette du pont : l'utilisation des trois actionneurs électromécaniques dont un est attaché à l'extrémité du tablier et les deux autres à l'extrémité supérieure du pylône permet d'amortir le premier mode vertical, les deux premiers modes horizontaux et le mode de balancement de la maquette du pont. Même lorsque les paramètres des deux actionneurs attachés à l'extrémité supérieure du pylône ne sont pas choisis de manière optimale, on note une amélioration significative de l'efficacité du TMD principal. Tous ces essais sont illustrés par des films qui sont représentés sur un CD-ROM.

Enfin, on a mis en oeuvre expérimentalement la boucle de contrôle semi-actif qui a permis de valider l'avantage de rendre l'efficacité de l'actionneur indépendante de l'évolution de la structure.

# Chapitre 1

## Les systèmes de contrôle passif et les lois de contrôle actif et semi-actif

### 1.1 Introduction

L'intérêt de contrôle des structures en génie civil revêt divers aspects, évoqué dans plusieurs projets scientifiques, tels que l'accroissement de la productivité des chantiers, de la durée de vie de l'ouvrage ou de ses composants, de la durée de mise en service qui due à la possibilité de la réhabilitation, l'adaptation des ouvrages existants à une évolution des niveaux de performances requises ou de l'environnement, le maintien en fonctionnement d'un ouvrage à la suite d'un séisme, le confort, qui peut aussi s'avère un critère limitant pour l'utilisation d'un ouvrage tel qu'un pont ou une passerelle piétonnière, la stabilité aéroélastique et l'économie de matériaux. En conséquence et pour atteindre tous ces objectifs, de nouveaux concepts de protection structural ont été améliorés dans le domaine de contrôle de vibration des structures.

Les méthodes innovantes de contrôle sont devenues, dans les dernières années, d'actualité importante, ils permettent de projeter des structures pour résister, sans dégâts appréciables, à des actions dynamiques, par exemple des tempêtes, une grande action sismique, etc. Parallèlement on exige, pendant la construction, de protéger les structures par des systèmes de protections, en réduisant la réponse, efficaces et en même temps fiables. Entre ces méthodes innovantes de contrôle, on peut distinguer trois approches différentes : passif, actif et semi-actif ; à celles-ci on peut ajouter une quatrième qui est le contrôle hybride. Le contrôle passif consiste à superposer à la structure un dispositif qui modifie la rigidité ou l'amortissement du système structural sans demande d'une source d'énergie externe

et sans introduire de l'énergie pour son fonctionnement. Le contrôle actif vise à imposer une force ou un déplacement en certains points du système à contrôler, en fonction notamment de l'état mesuré ou de l'historique de celui-ci. Ce type de contrôle nécessite une source importante d'énergie externe pour opérer les actionneurs qui fournissent les forces de contrôle dont les magnitudes sont déterminées en utilisant les mesures, à partir des capteurs, des excitations et/ou de réponse de la structure. Le contrôle semi-actif combine les principaux traits des systèmes actifs et passifs. Ces systèmes exigent une faible source d'énergie pour modifier la propriété mécanique de dispositif de contrôle. Alors, qu'un système de contrôle est hybride s'il utilise une combinaison de système de contrôle passif et actif.

## 1.2 Systèmes de contrôle passif

Les techniques passives d'amortissement des vibrations structurales utilisent l'intégration ou l'ajout de matériaux ou systèmes, possédant des propriétés amortissantes, couplés à la structure de telle façon que les vibrations de la structure soient amorties passivement, c'est à dire, sans aucune intervention extérieure supplémentaire et sans apport d'énergie de l'extérieure. Principalement, il existe deux catégorie de systèmes passifs : la première est l'isolation sismique et la deuxième est la dissipation d'énergie.

### 1.2.1 Systèmes d'isolation sismique

Le principe de l'isolation sismique n'est pas nouveau : les premières expériences remontant au début de 20<sup>ième</sup> siècle. La première application de la technologie moderne de l'isolation sismique a été réalisée en 1969. Actuellement quelques milliers de bâtiments et de ponts à travers le monde sont munis de systèmes d'isolation sismique. Ces systèmes consistent à mettre, entre les fondations et la superstructure, des dispositifs qui ont une déformabilité horizontale très importante et une rigidité verticale très élevée. Ces dispositifs permettent à découpler le mouvement du sol de la structure dans le but de réduire les forces transmises à cette dernière. L'isolateur capte les déformations (inélastiques) et filtre les accélérations (hautes fréquences) de sorte que la superstructure isolée se déplace essentiellement selon un mode rigide subissant de faibles accélérations et presque pas de déformations. Par conséquent, les forces d'inertie transmises aux éléments de fondations sont limités et demeurent en deçà de la capacité élastique de tels éléments. Ce comporte-

ment se traduit par la limitation des dommages subis par la superstructure et les éléments de fondation et par la préservation de la fonctionnalité de la structure après le séisme.

L'isolation à la base repose sur le principe que si la période de vibration est augmentée suffisamment pour s'éloigner de la période d'excitation prédominante du tremblement de terre, les accélérations transmises à la structure (et par conséquent les forces d'inertie) sont considérablement réduites. En revanche, l'augmentation de la période engendre des déplacements plus importants concentrés au niveau de l'isolateur. Dès lors l'incorporation d'un dispositif de dissipation d'énergie à l'isolateur est requise afin de contrôler le déplacement et de réaliser un compromis satisfaisant entre la réduction de la force et l'accroissement du déplacement.

Les systèmes d'isolations sismique sont composés, principalement, par :

- *un appui capable de transmettre les charges verticales mais ayant une faible rigidité horizontale* : c'est le noyau de l'isolateur. La rigidité latérale de l'appui est le paramètre clé dans l'augmentation de la période et par conséquent dans la réduction des forces sismiques. De plus, la rigidité latérale de l'appui joue un rôle très important dans le déplacement sismique de l'ouvrage et son recentrage après le séisme (déplacement résiduel).
- *dispositif de dissipation d'énergie* : ce dispositif sert à contrôler la déformation de l'isolateur et par conséquent le déplacement absolu de la superstructure située au dessus. Plusieurs dispositifs ont été mis au point avec une application plus au moins répandue.
- *un système de retenue* : le système d'isolation doit avoir une rigidité initiale élevée afin de minimiser les déplacements sous les charges de service tel que le freinage et le vent.

Les systèmes d'isolation sismique sont largement utilisés dans le monde dont l'application a été plus au moins répandue et une revue exhaustive de ces systèmes dépasse le cadre de ce travail. Néanmoins, on peut grossièrement classer les systèmes d'isolation sismiques en deux catégories.

### 1.2.1.1 Les systèmes à base d'élastomère

Ces systèmes exploitent le principe de l'appui fretté et sa flexibilité latérale. Le système d'isolateur à base d'élastomère est l'isolateur à base d'appui fretté avec un noyau de plomb intégré à l'intérieur de l'appui tel qu'illustré à la figure (1.1).

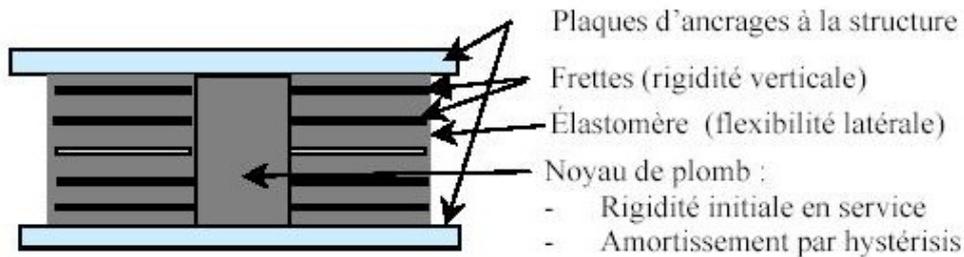


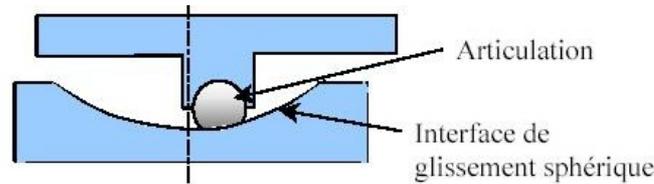
FIG. 1.1 – *Isolateur élastomérique avec noyau de plomb.*

Les principales limitations des systèmes à base d'élastomère sont :

- sensibilité aux variations thermiques,
- l'instabilité de l'appui : la résistance à la charge verticale diminue avec l'accroissement de la déformation latérale,
- les dimensions de l'appui et particulièrement sa hauteur peuvent constituer une limitation pratique particulièrement pour les applications de réhabilitation,
- le noyau de plomb a le défaut de transmettre des accélérations de haute fréquence et réduit l'efficacité de l'isolation.

### 1.2.1.2 Les systèmes à base de glissement

L'interface de glissement permet de dissiper l'énergie sismique par friction. A titre d'exemple, le système de pendule à friction est un système qui utilise une interface de glissement sous forme de cuvette, portion d'une sphère, qui confère à la structure un mouvement global similaire à un pendule. Le rayon de courbure et le coefficient de frottement de l'interface sont les caractéristiques clé qui contrôlent la période d'isolation et la quantité d'énergie dissipée du système, figure (1.2).

FIG. 1.2 – *Isolateur de type pendule à friction.*

### 1.2.2 Dissipation d'énergie

Les systèmes passifs de dissipation d'énergie ont le même principe de base que les isolateurs sismiques lorsqu'ils sont incorporés dans la structure : ils peuvent absorber une portion de l'énergie d'excitation extérieure. En plus, ils peuvent réduire substantiellement le mouvement différentiel entre les éléments de la structure et par conséquent réduire les dégâts de cette dernière. Ces dernières années, des efforts sérieux ont amélioré le concept des systèmes de dissipation d'énergie, et plusieurs appareils ont été installés dans des structures partout dans le monde. En général, ils sont caractérisés par leur capacité de dissiper l'énergie de vibration de la structure ou de la convertir en un autre mode de vibration ou en une autre forme d'énergie. Les principaux systèmes sont :

- amortisseurs métalliques
- amortisseurs à friction
- amortisseurs viscoélastiques
- amortisseurs à fluide visqueux
- amortisseurs à masse accordée
- amortisseurs à liquide accordée
- les matériaux intelligents

Pour une étude détaillée de ces systèmes de dissipation d'énergie, on renvoie les lecteurs à [91, 98] où il a été représenté un rappel historique, un principe de base, une formulation mathématique et une étude théorique et expérimentale de ces systèmes. Les matériaux intelligents sont formés principalement par :

- les alliages à mémoire de forme
- les matériaux piézoélectriques
- les fluides électrorhéologiques
- les fluides magnétorhéologiques

## 1.3 Les lois de contrôle actif

Un amortisseur passif est fondamentalement conçu pour réduire seulement un mode de vibration particulier de la structure. En revanche, un amortisseur actif peut amortir une bande large de fréquence. D'où, l'étude du contrôle actif des structures est une extension logique de technologie du contrôle passif. Un système de contrôle est actif si un ou plusieurs actionneurs appliquant des forces sur une structure selon une loi de contrôle et en utilisant pour leur fonctionnement une source d'énergie externe. Ces forces peuvent être utilisées pour ajouter ou dissiper l'énergie de la structure à contrôler. Afin de construire un tel système, il existe deux approches qui sont radicalement différentes : la première consiste à identifier la perturbation qui crée les vibrations pour l'annuler en lui superposant une excitation "inverse". Cette stratégie de contrôle actif est appelée contrôle par anticipation (*feedforward*). Elle est surtout développée en acoustique [74], mais elle est aussi très utile pour le contrôle de vibration des structures [40]. La deuxième consiste à identifier la réponse de la structure plutôt que l'excitation qui la fait vibrer. Elle nécessite, donc, la modélisation du comportement dynamique de la structure. Le travail de contrôle des vibrations qui porte sur ce type de stratégie est appelé contrôle par boucle de rétroaction (*feedback*).

Un système de contrôle actif des structures a la configuration de base comme est indiquée dans la figure (1.3). Il consiste, premièrement, à placer les capteurs sur la structure pour

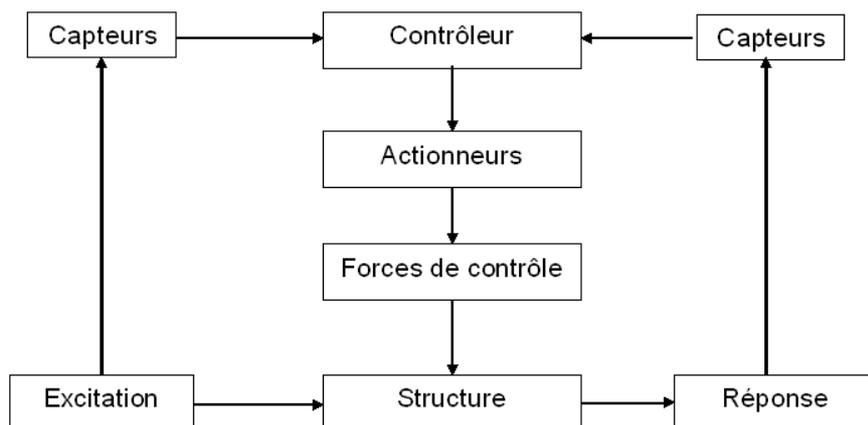


FIG. 1.3 – *diagramme de contrôle actif.*

identifier, à chaque instant, la réponse ou l'excitation. Lorsque seulement la réponse de la structure est mesurée, la configuration de contrôle est connue sous le nom de contrôle à boucle fermée : la réponse est mesurée à chaque instant et cette information est utilisée pour la correction de la force de contrôle appliquée instantanément. Mais, lorsque seulement l'excitation est mesurée, le contrôle prend le nom de boucle ouverte. Par contre, si la réponse et l'excitation sont mesurées ensemble le terme utilisé dans la littérature est le contrôle à boucle fermée-ouverte. En deuxième étape, il consiste à choisir une loi de contrôle convenable qui permet, à chaque instant, à l'actionneur, en apportant de l'énergie de l'extérieur, de produire une force de contrôle. Par suite, lors de la conception d'un système de contrôle actif des vibrations par rétroaction, on commence par étudier le comportement dynamique de la structure à contrôler, puis on choisit une loi de contrôle de rétroaction qui répond au mieux à la problématique. Les lois des contrôles par rétroaction auxquelles on s'intéresse par la suite se définissent en fonction de l'état de la structure sur laquelle elles sont appliquées. L'efficacité de ce type de contrôle dépend du :

- placement optimal des capteurs : en vue d'une discrétisation modale du déplacement d'une structure, le positionnement des capteurs est primordial pour le contrôle de la structure et l'estimation de l'état du modèle.
- choix d'une loi de contrôle efficace : si le comportement du système n'est pas satisfaisant, l'objectif du contrôle est d'agir sur le système à travers des variables notées  $v(t)$  pour obtenir le comportement désiré de la réponse de la structure ou du système. Le problème de contrôle consiste donc à définir une loi de contrôle robuste afin que les réponses ou les sorties du système soient celles désirées.
- placement optimal des actionneurs : comme les actions de contrôle sont localisées au niveau des actionneurs, c'est à dire que le contrôle agit sur la structure par l'intermédiaire des actionneurs, et donc évidemment l'efficacité de contrôle dépend de la position de ces derniers. Pour un contrôle actif, l'optimisation du positionnement des actionneurs consiste à minimiser l'énergie qu'il faut fournir pour stabiliser le système.

### 1.3.1 Modélisation des systèmes de contrôle

On a distingué deux grandes familles : le contrôle feedforward et le contrôle feedback auquel on limitera l'étude dans ce paragraphe. On présente les principes de contrôle actif dans le cas unidimensionnel, cas d'une poutre de longueur  $L$  encastree à l'une de ses extrémités. Ensuite, on présentera sommairement la technique d'approximation modale.

Avant que nous introduisions les différentes lois de contrôle existantes, nous définissons les outils modernes de modélisation du système de contrôle : les équations d'état, les équations de sortie et les équations de contrôle qui forment le système d'état et les notions de contrôlabilité et d'observabilité.

### 1.3.1.1 Contrôle en effort d'une poutre

Comme la poutre est la structure la plus courante à modéliser, et en vue d'avoir la technique de discrétisation modale d'un système mécanique continu qui nous permet de déterminer le système d'état, nous considérons une poutre uniforme d'Euler-Bernoulli, qui relie la rotation de la section de la poutre au déplacement transversal. La poutre est fixée à l'une de ses extrémités, l'autre extrémité est soumise à une force de contrôle, figure (1.4). D'une manière générale, l'action de contrôle peut être un déplacement imposé ou une force. Pour le cas de force on peut citer l'exemple de l'amortisseur à masse accordée qui agit sur la structure en appliquant une force de contrôle, un tel type d'amortisseur est passif en lui ajoutant un moteur, par exemple, il devient un amortisseur actif.

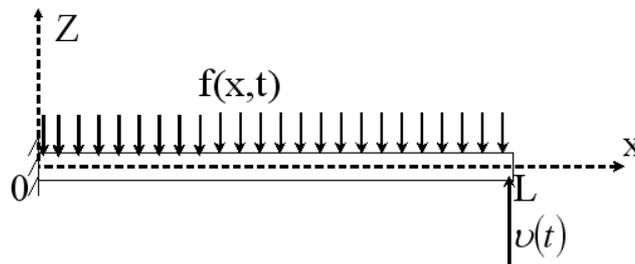


FIG. 1.4 – Poutre droite encastrée-libre contrôlée en force.

La poutre a les caractéristiques physiques suivantes :  $L$  sa longueur,  $\rho$  sa masse volumique,  $S$  sa section,  $E$  son module d'Young et  $I$  son moment d'inertie de flexion selon l'axe de  $Y$ . L'excitation de la poutre est modélisée par une densité linéique de force répartie sur toute sa longueur  $f(x,t)$  et qui varie dans le temps. Considérons l'évolution de la poutre sur un intervalle de temps  $[0,T]$ , c'est à dire que  $T$  est l'horizon du temps pendant lequel la poutre se stabilise. Cet horizon du temps est assimilé à l'infini dans le contrôle moderne [67]. Cette hypothèse rend la matrice de Riccati du système à contrôler indépendantes du temps. La réponse de la poutre, déplacement transversal, notée  $z(x,t)$ , vérifie les équations d'évolution dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \ddot{z}(x,t) + EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}(x,t) = f(x,t) & \text{dans } (0,L) \times [0,T] \\ z(0,t) = 0, -EI \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(L,t) = v(t) & \text{sur } [0,T] \\ \frac{\partial z}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(L,t) = 0 & \text{sur } [0,T] \\ z(x,0) = z^0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = z^1(x) & \text{dans } (0,L) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où  $z^0(x)$  et  $z^1(x)$  définissent les conditions d'évolutions initiales supposées suffisamment régulières. Le contrôle  $v(t)$  est appliqué à l'extrémité de la poutre afin d'amortir les vibrations dues à l'excitation extérieure et qui sera déterminé en fonction de l'état du système. D'une manière générale, pour amortir les vibrations, on impose soit un effort soit un déplacement sur tout ou sur une partie du solide. Dans le cas de contrôle actif par rétroaction, le contrôle est défini

$$v(t) = F(z(x,t), \dot{z}(x,t)), \quad (1.2)$$

en fonction de l'état du système. Ce type de stratégie, selon la terminologie de contrôle, prend le nom de contrôle par retour d'état. Le concept de ce type de contrôle est exprimé de façon plus générale, dans le domaine temporel, sans qu'il soit nécessaire d'évoquer une boucle. Le problème essentiel est de déterminer le contrôle  $v(t)$  [84].

### 1.3.1.2 Calcul des formes modales de la poutre

Lors du calcul des valeurs et vecteurs propres, on suppose que le déplacement du problème libre : c'est à dire non amorti, complété des conditions initiales et que toutes les actions extérieures sont considérées nulles, a la forme harmonique

$$z(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}. \quad (1.3)$$

Comme la poutre a une infinité de degrés de liberté, alors la solution du système conservatif homogène muni des conditions aux limites, a une infinité dénombrable de solutions [43], appelées modes propres, valeurs et vecteurs propres associées au système homogène extrait du système (1.1) sont les solutions des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \lambda_i \varphi_i(x) = EI \frac{d^4 \varphi_i}{dx^4}(x) \quad \text{dans } (0,L) \\ \varphi_i(0) = 0, \quad \frac{d\varphi_i}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2}(L) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^3 \varphi_i}{dx^3}(L) = 0 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Les constantes  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la poutre et  $\varphi_i(x)$  sont les formes propres associées. La résolution de ce système conduit aux formes propres à une constante multiplicative près. Cette constante est fixée par la condition de normalisation. Un calcul exact des valeurs et vecteurs propres d'un tel système avec une normalisation par rapport à la masse a été fait par [88].

### 1.3.1.3 Calcul de la flèche de la poutre par formulation variationnelle

L'idée de base, pour approcher la solution  $z(x,t)$  du problème (1.1) posé dans un espace de dimension infinie, consiste à restreindre la formulation variationnelle à un sous-espace de dimension finie où le problème se ramène simplement à un système linéaire. La solution approchée obtenue dans l'espace de dimension finie converge vers la solution exacte du problème d'origine.

Dans le cas d'un contrôle en déplacement imposé sur le bord d'une poutre en appuis simple, une formulation variationnelle faible ne convient pas à l'approximation du déplacement [19]. Il a été introduit une formulation variationnelle dite très faible. Dans une telle formulation le déplacement est défini comme étant la somme d'un déplacement quasi statique imposé par le contrôle et d'une somme de modes propres de flexion.

Par contre, pour un contrôle en effort, en imposant un effort tranchant à l'extrémité libre de la poutre, comme indiqué dans la figure (1.4), une formulation variationnelle classique en espace

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi \in \mathbf{V} = \{ \psi \in H^2(0,L) \quad \text{telque} \quad \psi(0) = \frac{d\psi}{dx}(0) = 0 \} \\ \rho A \int_0^L \ddot{z}(x,t) \psi(x) dx + EI \int_0^L \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = v(t) \psi(L) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

convient pour l'approximation de la réponse de la poutre.

Le terme intégral de cette formulation variationnelle est une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace  $\mathbf{V}$  et le second terme définit une forme linéaire continue sur  $\mathbf{V}$ . Le théorème de Lax-Milgram nous garantit alors que la formulation (1.5) admet une solution et une seule.

La formulation variationnelle faible (1.5) a été obtenue par multiplication de l'équation d'équilibre dynamique du système (1.1) par une fonction test de l'espace puis par double intégration par partie par rapport à la variable de l'espace. Dans cette formulation on a annulé les efforts extérieurs. L'approximation de la solution du problème (1.5) consiste simplement à introduire un sous-espace de dimension finie noté  $\mathbf{V}_N$  qui est formé par les  $N$  premiers modes propres. La projection du déplacement sur cette base modale nous

permet de déterminer une estimation modale de déplacement sur les  $N$  premiers modes propres sous la forme suivante :

$$z_N(x,t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \varphi_i(x), \quad (1.6)$$

où  $\varphi_i(x)$  est l' $i$ ème mode propre de la poutre et  $\alpha_i(t)$ , la composante de la projection du vecteur déplacement sur  $\varphi_i(x)$ , souvent appelé la contribution modale du mode  $i$ .

Le déplacement défini par l'équation (1.6) est solution de la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_N \in \mathbf{V}_N \\ \rho A \int_0^L \ddot{z}_N(x,t) \psi_N(x) dx + EI \int_0^L \frac{\partial^2 z_N}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \psi_N}{dx^2}(x) dx = v_N(t) \psi_N(L) \end{array} \right. \quad (1.7)$$

restreinte au sous-espace  $\mathbf{V}_N$ .  $v_N(t)$  le contrôle en effort calculé à partir de l'estimation du déplacement et de la vitesse par les  $N$  premiers modes.

Après le remplacement du déplacement par son estimation (1.6) dans la formulation variationnelle (1.7), en faisant varier la fonction test  $N$  fois, en la remplaçant à chaque fois par  $\varphi_i$ , et en utilisant les propriétés d'orthonormalité et d'orthogonalité des modes propres, on obtient les équations suivantes :

$$\ddot{\alpha}_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = v_N(t) \varphi_i(L) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (1.8)$$

où  $\lambda_i = \omega_i^2$  la valeur propre associée au mode  $i$ . Dans l'équation d'équilibre de la poutre (1.1) on n'a pas introduit le terme de l'amortissement qui est le siège de dissipation d'énergie. L'amortissement existe dans tout système physique, même si on le néglige souvent en première approximation. En pratique, les vibrations libres, qui correspondent à la solution générale du système homogène, s'atténuent très rapidement de sorte que, dans les problèmes de réponse à une charge harmonique ou périodique, on se limite en général à la recherche de la solution particulière correspondante. Pour être plus proche de la réalité, on prend en compte la présence d'amortissement dans la modélisation du mouvement de la structure. Les systèmes mécaniques réels comportent de très nombreuses liaisons qui sont en général le siège des dissipations d'énergie des vibrations les plus importantes. Actuellement, on ne sait pas encore modéliser à priori le comportement dynamique des liaisons [44].

Considérons, dans le cas d'une poutre, que la majeure partie de la dissipation peut être modélisée par une dissipation de type visqueuse, c'est à dire une force proportionnelle à la vitesse mais de signe contraire. Et afin d'éviter le problème de couplage entre les équations en  $\alpha_i$ , on adopte l'hypothèse de Rayleigh qui rend la matrice d'amortissement

diagonale. L'équation (1.8), en introduisant le taux d'amortissement modal  $\xi_i$ , sera écrite comme suit :

$$\ddot{\alpha}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\alpha}_i(t) + \lambda_i\alpha_i(t) = v_N(t)\varphi_i(L) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

Cette partie de discrétisation en espace des équations différentielles a pour but de permettre une description des systèmes en termes de variable d'état qui est très utilisée en contrôle actif, essentiellement pour les modélisations de contrôle de type feedback.

#### 1.3.1.4 Système d'état

La théorie classique est basée explicitement sur une relation entrée/sortie, en utilisant un modèle de la fonction de transfert du système pour la mise au point du contrôleur. La théorie du contrôle moderne, quant à elle, est basée sur un modèle construit à partir d'un système d'équations différentielles du premier ordre constituant une équation différentielle matricielle. Nous écrivons les contributions modales de l'accélération en fonction de celles du déplacement, de la vitesse et des forces de contrôle, sous la forme d'équations de Lagrange d'un système à N degrés de liberté écrit sous la forme vectorielle équivalente, définissent par l'équation (1.9). Complétons par l'identité  $\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(t)$  et introduisons le vecteur d'état qui contient les inconnues du système différentiel, défini par :  $X(t) = [\alpha_i(t), \dot{\alpha}_i(t)]^T$ , pour  $i = 1, \dots, N$ . Nous pouvons écrire l'équation d'état du système (1.9) :

$$\dot{X}(t) = [\mathbf{A}]X(t) + [\mathbf{B}]v_N(t), \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice d'état de dimension  $2N \times 2N$  :  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\lambda_i & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{B}$  la matrice d'entrée de dimension  $2N \times r$  :  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi_i(L) \end{bmatrix}$  avec r est le nombre d'actionneurs.

Si le vecteur d'état initial et le vecteur de contrôle sont donnés, le vecteur d'état peut être calculé à chaque instant. L'équation (1.10) est très largement utilisée en contrôle de systèmes linéaires. Pour décrire le système du point de vue de sa sortie, on lui ajoute souvent une seconde équation :

$$Y(t) = [\mathbf{C}]X(t), \quad (1.11)$$

appelée équation de sortie ou d'observation. L'observation est mesurée le plus souvent à travers des capteurs placés aux points  $x_q$ .  $Y(t)$  est le vecteur de sortie contenant les signaux observés, aux points de mesure des capteurs,  $[\mathbf{C}]$  est la matrice d'observation :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi_i(x_q) \end{bmatrix}.$$

La fonction de contrôle est définie en fonction de l'état du système, elle peut se mettre sous la forme matricielle :

$$v_N(t) = -[\mathbf{K}]X(t), \quad (1.12)$$

avec  $\mathbf{K}$  la matrice de gain défini par la loi de contrôle.

Le système formé par les équations (1.10), (1.11) et (1.12)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = [\mathbf{A}]X(t) + [\mathbf{B}]v_N(t) \\ Y(t) = [\mathbf{C}]X(t) \\ v_N(t) = -[\mathbf{K}]X(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

est appelé système d'état.

### 1.3.2 Contrôlabilité et observabilité

La mise en oeuvre d'une stratégie de contrôle actif d'une structure nécessite toujours l'étude de l'observabilité et de la contrôlabilité du système étudié. C'est une étape indispensable de la loi de contrôle choisie. Elle conditionne la réussite de tout dispositif de contrôle actif. Les notions de contrôlabilité et d'observabilité introduites dans les années soixante, sont fondamentales en contrôle moderne. La contrôlabilité mesure la capacité d'une configuration particulière d'actionneur de contrôler l'état du système complet ; inversement, l'observabilité mesure la capacité de la configuration particulière du capteur à fournir toutes les informations nécessaires estimées d'état complet du système [83].

#### 1.3.2.1 Contrôlabilité

Considérons un simple exemple, pour mieux comprendre la contrôlabilité d'un système, à deux sous systèmes mécaniques soumis à la même force de contrôle agissant sur la masse  $m_1$  comme illustré dans la figure (1.5). Il est clair que la masse  $m_2$  du système (a) n'est pas contrôlable par la force de contrôle et pour ce motif que le système global est dit non contrôlable et donc si une seule composante est non contrôlable, le système est dit non contrôlable. D'autre part, le système (b) est contrôlable et la force de contrôle agit sur les deux masses du système.

Un système est dit contrôlable lorsqu'il est possible de changer l'état en passant d'un état

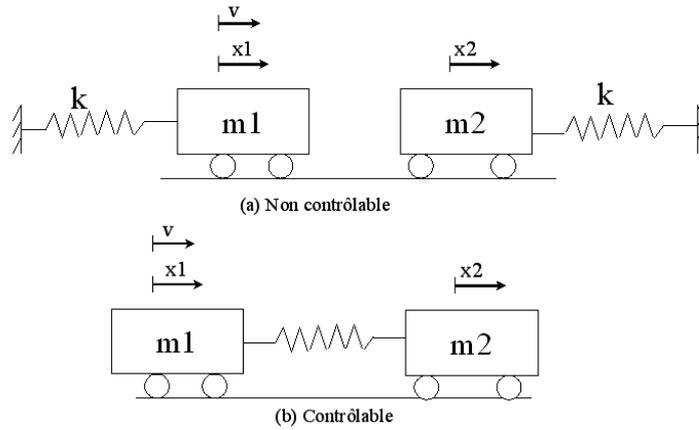


FIG. 1.5 – Contrôlabilité d'un système.

initial,  $X_0$ , à un état final,  $X_f$ , ou l'inverse, en un temps fini et en utilisant seulement une force de contrôle.

Considérons un système linéaire de rang  $2N$  (1.13), et une matrice test  $\mathbf{Q}$ , dite matrice de contrôlabilité qui a la forme suivante :

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{2N-1}\mathbf{B}] \quad (1.14)$$

Le système (1.13) est dit contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité a pour rang maximal. Dans le cas où il aurait une seule entrée, la matrice  $\mathbf{Q}$  est carré et le système est contrôlable si  $\mathbf{Q}$  est non singulier.

Cette réponse n'est pas assez souvent pratique pour les problèmes de l'ingénieur où nous avons besoin d'une information plus quantitative puisqu'il précise simplement si le système est contrôlable ou non. Pour cela, il est proposé d'utiliser un nouveau critère, permet de quantifier la contrôlabilité mode par mode, se base sur la matrice grammienne de contrôlabilité défini par [51]

$$\mathbf{W}_c = \int_0^T [e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau}] d\tau. \quad (1.15)$$

Cette matrice est solution de l'équation de Liapunov

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0. \quad (1.16)$$

Ainsi, on peut énoncer le critère de contrôlabilité de la matrice grammienne : un système est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité  $\mathbf{W}_c$  est définie positive. Pour contrôler tous les états du système, contrôler mode par mode, il est plus intéressant d'étudier le problème des valeurs propres de la matrice grammienne.

### 1.3.2.2 Observabilité

Un concept dual à celui de contrôlabilité d'un système linéaire est l'idée que chaque variable d'état a des effets sur la réponse du système. L'observabilité est donc un concept du même type que la contrôlabilité mais cette fois, c'est la relation entre les sorties et l'état du système qui est caractérisée. Autrement dit, l'observabilité relie le vecteur de sortie  $z(t)$  au vecteur d'état  $X(t)$  du système linéaire (1.13). Avec référence à un tel système, il est dit complètement observable si, pour chaque état initial  $X_0$  existe un temps fini, noté  $T$ , dans le quel la connaissance de  $z(t)$  est suffisant pour déterminer l'état final  $X(T)$ . La vérification de l'observabilité ressemble beaucoup à celle de la contrôlabilité qui se réduit au calcul du rang d'une matrice :

$$\mathbf{O} = [\mathbf{C}, \mathbf{A}\mathbf{C}, \dots, \mathbf{A}^{2N-1}\mathbf{C}] \quad (1.17)$$

Cette matrice prend le nom de matrice d'observabilité. D'après le critère de Kalman reposant sur le rang, le système (1.13) est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est de rang  $2N$ , nombre des composantes du vecteur d'état [83]. L'étude de l'observabilité d'un système à plusieurs variables permet au concepteur de choisir les variables de sorties mesurables du modèle du système. Si un état non observable est inclus dans le contrôle, il résulte qu'il ne pourra pas être détecté à la sortie, d'où l'instabilité éventuelle. Le critère de Kalman précise simplement que le système est observable ou non, mais il ne donne pas une information plus quantitative. Pour cela, et dans le plus souvent des cas pratiques des problèmes de l'ingénieur il est utilisé un critère qui quantifie la visibilité de la réponse par les capteurs, en utilisant la matrice grammienne définit par

$$\mathbf{W}_o = \int_0^T [e^{\mathbf{A}^T \tau} \quad \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad e^{\mathbf{A} \tau}] d\tau. \quad (1.18)$$

Cette matrice permet de quantifier l'énergie récupérée par les capteurs indépendamment des conditions initiales et qui a pour propriété: le système (1.13) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité  $\mathbf{W}_o$  est définie positive. Pour mesurer, donc, l'observabilité mode par mode du système il suffit de calculer les valeurs propres de  $\mathbf{W}_o$ .

On remarque que la matrice grammienne d'observabilité est déduite directement par dualité entre observabilité et contrôlabilité: le couple  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  est observable si et seulement si  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)$  est contrôlable. En remplaçant  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  par  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$  dans l'équation (1.16), nous obtenons que la matrice d'observabilité  $\mathbf{W}_o$  est solution de l'équation suivante :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 \quad (1.19)$$

### 1.3.3 Phénomène de Spillover

Les structures continues ont une infinité de degrés de liberté. La décomposition modale du déplacement d'une telle structure se fait alors sur une infinité de termes et donc les capteurs, placés lors du contrôle, observent une infinité de modes. Les systèmes de contrôle actif sont utilisés pour réduire les vibrations d'une bande de fréquence. Un modèle réduit alors doit être développé par discrétisation en introduisant seulement les  $N$  premiers modes propres de la structure qui est en général tout à fait suffisant pour tenir compte des comportements dynamiques à basse fréquence dans la plupart des situations pratiques. Cette réduction d'ordre se fait par la projection sur les  $N$  premiers modes et le contrôle sera exprimé sur une base tronquée de dimension  $N$  ce qui fait apparaître l'instabilité des modes résiduels qui ne sont pas pris en compte, lors de la discrétisation, dans le modèle de dimension fini. On peut définir le phénomène de spillover par le transfert d'énergie vers des modes élevés qui ne sont pas pris en considération dans le modèle. Le spillover peut être décomposé en deux parties :

- le spillover d'observation dans le quel les signaux observés décomposés sur les  $N$  modes du modèle sont pollués par les modes d'ordre supérieur,
- le spillover de contrôle qui aura lieu lorsque le contrôle excite les modes d'ordre supérieur.

Pour qu'il y ait instabilité par spillover, il faut avoir le spillover d'observation et le spillover de contrôle. Plusieurs travaux ont fait l'objet de ce phénomène [2, 17, 59].

### 1.3.4 Algorithmes de contrôle actif

La conception du système de contrôle est très dépendante du choix et de l'emplacement relatif des actionneurs et des capteurs. Il est connu que, pour des actionneurs et capteurs colocalisés, la conception du système de contrôle, même pour des systèmes simples de rétroaction, permet d'aboutir à des systèmes stables. Le contrôle est dit colocalisé si les capteurs et actionneurs sont localisés sur les mêmes points de la structure, c'est à dire que les capteurs et l'actionneurs sont physiquement placés sur les mêmes points de la structure et énergétiquement sont conjugués, tel que force et déplacement ou vitesse ou moment et rotation.

D'autre part, la performance du système de contrôle est aussi fortement dépendante de l'algorithme de contrôle utilisé pour traiter les informations fournies par les capteurs afin

de déterminer les signaux de contrôle envoyés aux actionneurs. Plusieurs algorithmes ont été utilisés dans la littérature pour contrôler les vibrations des structures : le plus simple est probablement le "Direct Velocity Feedback" DVF [3], qui a pour principe d'imposer une force proportionnelle à la vitesse au point de mesure, ou "Integral Force Feedback" IFF [83]. Ces approches colocalisées assurent une stabilité locale, ils ne produisent pas le phénomène d'instabilité par spillover. Ces deux lois de contrôle peuvent être appliquées sans recours à un modèle. De plus, elles sont principalement efficaces près de la fréquence de résonance. D'autres approches sont très non colocalisées tel que le contrôle proportionnel à la flèche de l'extrémité libre d'une console, en utilisant des éléments piézoélectriques, dont l'actionneur piézoélectrique est positionné près de l'encastrement, tandis que la mesure de la flèche est effectuée, au moyen d'un accéléromètre ou d'un capteur optique, placé à l'extrémité. Plusieurs travaux ont considéré cette approche [12, 110], qui utilise la loi de contrôle "Linear Quadratic" LQ classique qui est plus efficace et assure une stabilité globale [83]. Néanmoins, un modèle est exigé pour sa mise en oeuvre qui nécessite une discrétisation, et lors de son approximation en dimension finie une instabilité due au spillover peut paraître.

Il est intéressant de considérer le comportement dynamique d'un système par sa réponse modale. Ceci est particulièrement vrai en contrôle actif pour les structures mécaniques montrant des résonances espacées dans la bande passante du contrôleur. Tout naturellement, cela a motivé le développement des méthodes de contrôle actif visant à contrôler les modes de façon indépendante [68].

Suivant les travaux sur la contrôlabilité exacte des équations différentielles [63], Komornik a introduit une nouvelle stratégie efficace et simple pour la stabilisation des structures souples [54, 55]. Ce type de contrôle est optimal et donc il est caractérisé par les mêmes avantages que la rétroaction LQ. Les seules différences sont la simplicité lors de sa mise en oeuvre et une meilleure efficacité, surtout lorsqu'il est utilisé comme un contrôle frontière, les actionneurs sont placés sur le bord [19]. Plusieurs travaux ont étudié ce type de contrôle pour la stabilisation des structures flexibles [16, 19, 86]. Pour des études détaillées sur cette loi de contrôle nous renvoyons les lecteurs aux [19, 54, 55, 86].

#### 1.3.4.1 Les lois DVF et IFF

Considérons un système mécanique, formé de masses ressorts et amortisseurs, à  $N$  degrés de liberté. L'équation d'équilibre dynamique de ce système a la forme suivante :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0. \quad (1.20)$$

En multipliant cette équation par la vitesse  $\dot{x}$  et en intégrant sur un intervalle de temps fini, nous aboutissons à l'équation d'équilibre énergétique :

$$M \int_0^t \ddot{x}\dot{x} dt + K \int_0^t x\dot{x} dt = -C \int_0^t \dot{x}^2 dt. \quad (1.21)$$

Le premier membre de l'équation (1.21) est la variation de l'énergie totale dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Le deuxième membre est une fonction décroissante dans le temps à cause de la condition  $C > 0$  et du caractère croissant de l'intégrale  $\int_0^t \dot{x}^2 dt$ .

Par conséquent, lors de l'étude d'un système dissipatif, l'énergie totale se transforme d'un état à un autre sous une forme décroissante par effet de frottement ou de viscosité. Alors que lors de présence de contrôle actif de vibration, l'énergie mécanique de vibration de la structure se dissipe par un système de l'extérieur. Par exemple en imposant une force en un point  $x_c$  de la structure, pour qu'elle s'oppose aux vibrations, sa puissance devrait être négative. Dans ce cadre, est développée la loi de contrôle colocalisé D.V.F, qui consiste à imposer une force

$$F(x_c, t) = -g_1 \dot{z}(x_c, t) \quad (1.22)$$

proportionnelle à la vitesse. Donc, à partir d'une configuration capteur actionneur, on mesure la vitesse et on impose une force.  $g_1$  est un gain positif,  $\dot{z}(x_c, t)$  est la vitesse du point  $x_c$  de la structure à contrôler. Le signe (-) est pour toujours assurer que la puissance apportée par le contrôleur est négative

$$P(t) = -g_1 \dot{z}(x_c, t)^2. \quad (1.23)$$

On remarque que ce type de contrôle colocalisé n'exige pas un modèle discret, il peut être utilisé sans discrétisation si l'on utilise un capteur de vitesse car il est basé sur une mesure locale de la vitesse et non plus d'une mesure continue de vitesse ou de déplacement de la structure. Lorsque les capteurs mesurent l'accélération, ou le déplacement, la vitesse sera calculée par intégration ou par dérivation.

La loi de contrôle IFF nécessite une mesure locale de la force. Ce type de contrôle dual de D.V.F a pour principe, en mesurant une force, d'imposer un déplacement

$$z(x_c, t) = -g_2 \int_0^t F(x_c, t) dt \quad (1.24)$$

proportionnel à l'intégrale de la force mesurée en un point de placement du capteur.  $g_2$  est un gain positif, le signe (-), comme pour le contrôle D.V.F, est pour toujours assurer que la puissance

$$P(t) = -g_2 F(x_c, t)^2 \quad (1.25)$$

apportée par le contrôleur est négative.

### 1.3.4.2 Contrôle optimal

La théorie de contrôle moderne se présente comme la synthèse de la matrice de gain du contrôle par retour d'état. Le contrôle intervient dans l'équation d'état (1.10) comme une donnée que l'on peut choisir, en imposant une énergie de contrôle, afin de minimiser l'énergie mécanique de la structure. Le problème du contrôle optimal consiste essentiellement à déterminer le contrôle  $v^*(t)$ , admissible, apte à conduire le système vers un état désiré  $X^*(t)$ , tout en minimisant une fonctionnelle coût. Afin de déterminer la solution d'un problème du contrôle optimal, il existe plusieurs approches dont deux sont principales : la première, constituée de la théorie de Hamilton-Jacobi, consiste à établir des conditions suffisantes d'optimalité global et la deuxième se base sur le principe de minimum de Pontryagin qui est un principe variationnel : le contrôle optimal doit minimiser une fonction appelée Hamiltonien.

En se mettant dans le cadre d'un système linéaire après discrétisation (1.13), pour déterminer la matrice de gain, le contrôle optimal linéaire quadratique propose de minimiser une fonctionnelle de performance défini par :

$$J(v) = \int_0^T \{ [X(t)]^T \mathbf{Q} [X(t)] + [v_N(t)]^T \mathbf{R} [v_N(t)] \} dt, \quad (1.26)$$

où  $[X(t)]$  est l'état du système,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  des matrices pondérantes respectivement les états et le contrôle du système. Ces matrices sont les paramètres de la loi de contrôle. La matrice  $\mathbf{R}$  est symétrique strictement définie positive vu que chaque contrôle a un coût, alors que  $\mathbf{Q}$  est semi-définie positive. Le contrôle utilisant l'expression (1.26) comme une fonctionnelle de coût quadratique linéaire à minimiser peut être interprété ainsi : il s'agit de conduire l'état du système aussi proche de zéro que possible tout en limitant la force de contrôle. Une certaine construction de  $\mathbf{Q}$  peut favoriser le contrôle de certains états. De la même façon, les éléments de  $\mathbf{R}$  peuvent privilégier un actionneur de contrôle sur un autre. Ainsi, les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  ont une influence importante sur le calcul de la matrice de gain. Alors que le choix de la fonctionnelle de coût permet, par conséquent, de considérer deux aspects caractéristiques d'un problème de contrôle :

- obtenir une minimisation de la vibration de l'état de la structure en minimisant l'énergie mécanique,
- obtenir la performance recherchée sur l'état du système à travers l'utilisation d'une force de contrôle convenablement limitée.

Le contrôle  $v^*(t)$  est défini par [58]

$$v^*(t) = -\mathbf{K}X^*(t), \quad (1.27)$$

$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T P(t)$  est la matrice gain du contrôle optimal. Lors de contrôle à horizon infini, aucune condition n'est imposé sur l'état final et  $P(t)$  tend vers une matrice constante  $P$  solution de l'équation algébrique de Riccati

$$-\mathbf{Q} - \mathbf{A}^T P - P\mathbf{A} + P\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T P = 0. \quad (1.28)$$

### 1.3.4.3 Contrôle modal

Comme est signalé plus haut, il est intéressant de considérer le comportement dynamique d'un système par ses réponses modales. Cela a motivé le développement des méthodes de contrôle actif des vibrations visant à contrôler les modes de façon indépendante, on parle alors de contrôle modal. Cette méthode permet d'amortir chaque mode indépendamment des autres IMSC (Independent Modal Space Control), ce qui permet de résoudre des équations algébriques non couplées plutôt que l'équation matricielle de Riccati [68]. Chaque mode à amortir oblige la présence d'un actionneur, et donc cette méthode nécessite autant d'actionneurs que de modes à contrôler. Plus tard, a été développée la méthode MIMSC (Modified Independent Modal Space Control) par [8], toujours dans le même esprit du contrôle modal, qui offre la possibilité d'amortir plusieurs modes en utilisant seulement quelques actionneurs. Un contrôleur modal est composé de trois

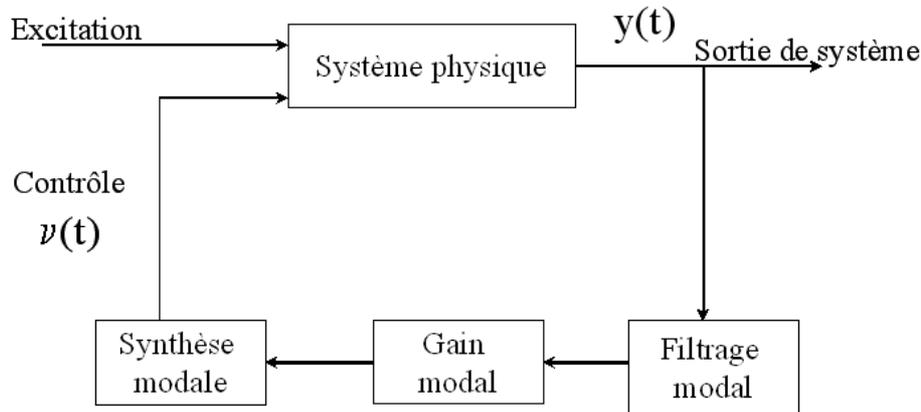


FIG. 1.6 – Principe de contrôle modal par retour d'état.

parties distinctes comme est indiqué dans la figure (1.6) :

- un filtre modal qui permet de construire un vecteur d'état modal de dimension fini à partir de la sortie du système,

- la matrice de gain modal qui pondère le contrôle sur les différentes coordonnées modales,
- le synthétiseur de modes qui reconstruit le signal à appliquer aux actionneurs de contrôle.

## 1.4 Les lois de contrôle semi-actif

Comme on a indiqué, l'idée principale du contrôle semi-actif est très simple : elle consiste à changer, en temps réel, les caractéristiques des dispositifs passifs de dissipation d'énergie et ce changement ne nécessite qu'une source minimale d'énergie. Le concept de ce type de contrôle est introduit pour la première fois par Karnopp [52] qui propose de modifier la force d'amortissement du fluide en contrôlant l'ouverture de la valve d'un amortisseur conventionnel, par exemple, un amortisseur hydraulique muni d'une servo-valve qui contrôle le débit d'huile à travers une restriction [79].

L'action de contrôle, pour une approche de type semi-actif, se réalise à travers le réglage, en temps réel, des paramètres mécaniques de dissipation réagit passivement avec le reste de la structure. La modalité de réglage de ces paramètres est déterminée, sur la base d'un choix d'algorithme de contrôle, en fonction de l'excitation et/ou de la réponse de la structure. Par conséquent, comme pour le contrôle actif, le système de contrôle semi-actif nécessite des capteurs, processeurs et actionneurs. L'énergie demandée de l'extérieure, par contre, est minimale par rapport à un système de contrôle actif : sert seulement à modifier les caractéristiques mécaniques des dispositifs de contrôle, et peut être fournie, par exemple, d'une simple batterie. Les systèmes de contrôle semi-actif, donc, représentent une évolution des systèmes passifs, et par conséquent ils en conservent les caractéristiques fondamentales de fiabilité, de sécurité et de simplicité, en les plaçant à côté de celle de l'adaptation, dans le but d'augmenter ses performances jusqu'à les approcher aux systèmes de contrôle actif.

Il existe une liaison conceptuelle forte entre les systèmes semi-actifs et les systèmes passifs [33] ; en effet, les diverses terminologies utilisées en littérature pour identifier le contrôle semi-actif sont, par exemple, Parametric Control, Contrôle Passif Variable, contrôle de Système à Structure Variable (VSS)... Pour plus de détails sur ces terminologies, nous citons aux lecteurs [33].

Les systèmes de contrôle semi-actif incluent deux catégories : la première est à rigidité variable et la deuxième est à amortisseur variable. Dans la première, la raideur de la structure est ajustée pour établir une condition non-résonnante entre la structure et l'ex-

citation [90]. Les appareils à raideurs variables peuvent être réglés en éliminant ou en ajoutant une rigidité à une section particulière de la structure. Dans la deuxième, le coefficient d'amortissement des appareils de dissipation d'énergie varie entre une valeur minimale et une autre maximale. Ces coefficients sont modifiés à partir d'un algorithme de contrôle, en ajustant les propriétés mécaniques du dispositif de contrôle, pour accomplir des réductions considérables de la réponse de la structure. Dans les deux catégories, comme les systèmes passifs, les forces de contrôle sont produites en utilisant le mouvement de la structure et, comme les systèmes actifs, des contrôleurs qui, à partir d'une loi de contrôle, développent des signaux pour sélectionner la rigidité ou le coefficient d'amortissement de l'appareil.

Plusieurs études sont concentrées sur l'usage des algorithmes de contrôle semi-actif pour les structures avec variation du coefficient d'amortissement du dispositif utilisé. Ils ont étudié l'efficacité de ces algorithmes en réduisant la réponse des structures sous différents chargements dynamiques.

Le coefficient d'amortissement d'un amortisseur variable de la structure peut être ajusté, pendant la réponse, entre deux valeurs limites : une valeur maximale et une autre minimale,  $C_{max}$  et  $C_{min}$  ; tel que

$$C_{min} \leq C(t) \leq C_{max}. \quad (1.29)$$

Plusieurs études ont développé des algorithmes pour sélectionner le coefficient d'amortissement convenable pendant la réponse de la structure. En [81] a été introduit un actionneur hydraulique avec un orifice réglable en utilisant un algorithme de contrôle en boucle fermée pour sélectionner le coefficient d'amortissement de l'appareil à chaque incrément du temps. Il a été, aussi, introduit un algorithme de contrôle optimal "Clipping" basé sur le régulateur linéaire quadratique (LQR). Les résultats de ces études indiquent que la variation d'amortisseur réduit considérablement la réponse d'une structure soumise à des excitations sismiques. Dans le même principe, en [80] a été introduit un algorithme bang-bang basé sur la méthode de Lyapunov. D'autres études ont été concentrées sur l'efficacité des dispositifs de dissipation en réduisant la réponse de vibration des ponts induite par les véhicules [82].

En [37], pour régler le coefficient d'amortissement d'un système d'isolation sismique, il a été utilisé deux algorithmes : le premier est l'algorithme bang-bang et le deuxième est l'algorithme instantané optimal introduit par [108]. Les résultats numériques indiquent des réductions des réponses de presque 41% du déplacement maximum et 22% de l'accélération maximale lorsque le pont est soumis à une excitation sismique. En [30] a été utilisé un algorithme LQR bang-bang semi-actif pour contrôler la force de glissement dans

les amortisseurs à frottement. Dans une autre étude, en [64] a été utilisé un algorithme bang-bang semi-actif basé sur la théorie de Lyapunov pour un cadre à trois étages dont a été montré l'importance de l'effet des amortisseurs variables sur la réponse.

Dans une étude analytique et expérimentale sur un cadre à un seul étage et à trois étages développée par [101], a été testé un amortisseur à fluide variable semi-actif et un amortisseur on-off. Pour l'amortisseur variable, un amortisseur skyhook, un LQR et un algorithme de contrôle du mode glissant ont été employés. Les résultats ont indiqué que les deux types d'amortisseurs ont réduit considérablement la réponse comparé au cas sans contrôle. On présentera dans la suite quelques lois de contrôle semi-actif.

### 1.4.1 Contrôle à boucle ouverte

Dans le cas de contrôle à boucle ouverte aucune loi de contrôle rétroaction n'est nécessaire et même si une loi de contrôle est a priori fixée aucune connaissance de variable d'état n'est nécessaire [65]. Les caractéristiques d'amortissement des appareils peuvent varier de façon continue ou par étapes, selon la condition de fonctionnement. Typiquement, les variations d'amortisseurs fonctionnent en bi-phase de la manière "on-off". Cela veut dire que l'appareil peut être considéré comme un élément passif dans lequel les propriétés dissipatives peuvent varier d'une valeur à une autre. C'est la façon la plus simple d'appliquer la loi de contrôle qui peut être très utile pour l'isolation de vibrations des machines tournantes. Par exemple, une telle technique est utilisée pour les machines à laver : une valeur d'amortissement "haute" est utilisée quand le tambour est à basse vitesse (c'est à dire durant l'accélération ou décélération), alors qu'une "faible" valeur d'amortissement est attribuée à haute vitesse. Un changement automatique des propriétés de l'amortisseur lorsqu'une vitesse limite est atteinte. Ce type de contrôle est utile quand le système à amortir admet des caractéristiques dynamiques très bien connues. Dans quelques cas les différents niveaux d'amortissement sont choisis par l'utilisateur, comme dans le cas de suspension de véhicule semi-actif.

### 1.4.2 Contrôle Sky-hook

Pour introduire ce type de contrôle, nous considérons un système conventionnel à un seul degré de liberté, figure (1.7), dont la masse est reliée à la base par un ressort de rigidité  $k$  et un amortisseur  $C$  et qui a l'équation de mouvement suivante :

$$m_1 \ddot{X}_1 + C(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + k(X_1 - X_2) = 0, \quad (1.30)$$

$X_1$  et  $X_2$  sont respectivement le déplacement de la masse  $m_1$  et de la base. La fonction de transfert sera défini par

$$H\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \frac{1 + 2i\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2i\xi\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad (1.31)$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m_1}$  est la pulsation propre et  $\xi = \frac{C}{2m_1\omega_0}$  le taux d'amortissement du système conventionnel.

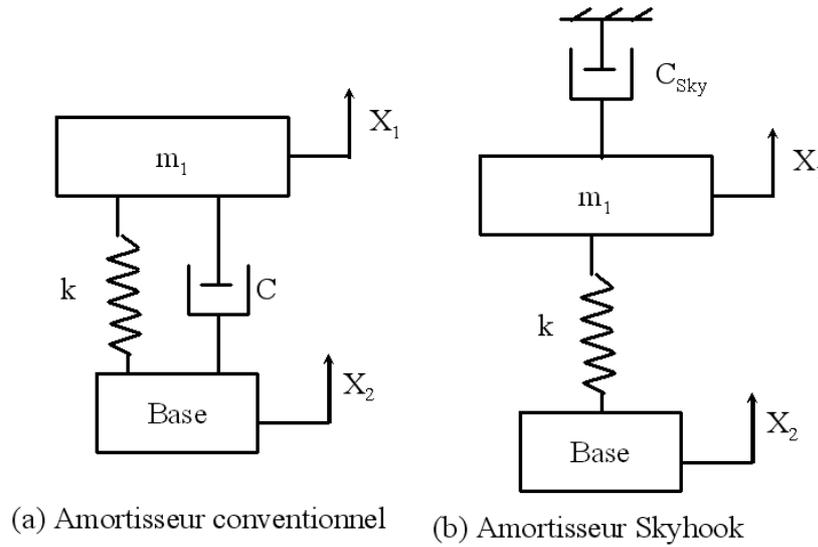


FIG. 1.7 – Amortisseur conventionnel et Skyhook.

Lorsque l'amortisseur n'est plus inséré entre la base et la masse, figure (1.7.a), mais entre celle-ci et une référence fixe, figure (1.7.b), le système d'amortissement sera appelé un *amortisseur skyhook* [52]. Les équations (1.30) et (1.31), pour un tel système, seront définies comme suit :

$$m_1\ddot{X}_1 + C_{sky}\dot{X}_1 + k(X_1 - X_2) = 0, \quad (1.32)$$

$$H\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2i\xi_{sky}\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad (1.33)$$

où  $\xi_{sky}$  est le taux d'amortissement idéal skyhook.

Afin de comparer les performances entre l'amortisseur skyhook et l'amortisseur passif, on représente le module de transmissibilité, pour les deux systèmes, en fonction de  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , pour différentes valeurs du taux d'amortissement, par la figure (1.8). Pour les deux cas, à faible valeur de  $\xi$ , le module de transmissibilité présente une forte amplification à la

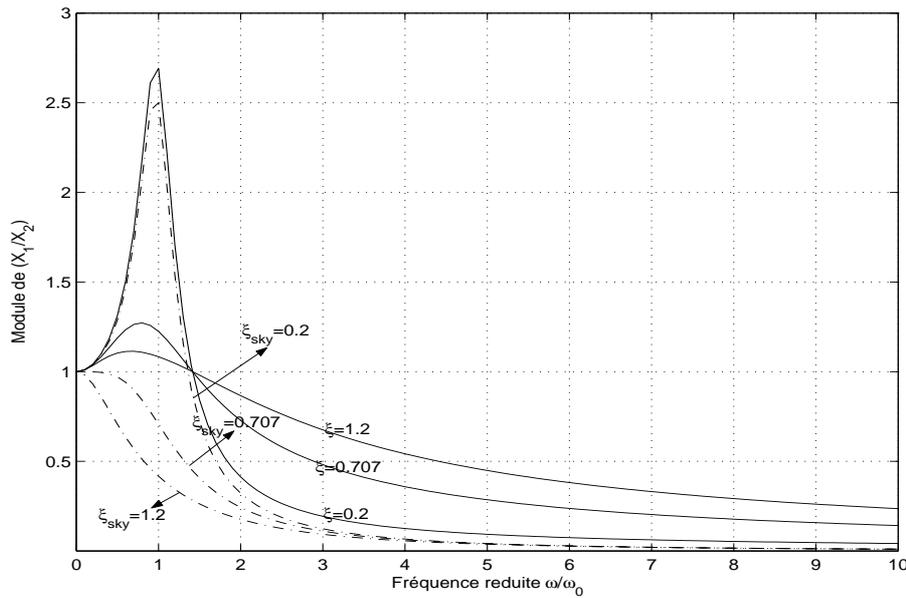


FIG. 1.8 – Courbe du module de transmissibilité.

résonance. Alors que, pour une valeur du taux d'amortissement skyhook suffisamment grande, nous pouvons amortir la vibration même à la fréquence de résonance. Au-delà de cette fréquence, les deux amortisseurs atténuent la vibration mais dans des proportions différentes. Il existe un grand nombre d'études qui porte sur l'efficacité des systèmes de contrôle skyhook, surtout, utilisés pour le contrôle de vibration de suspension soumise à des excitations à la base [52, 84].

D'un point de vue pratique, il est difficile de reproduire le concept de l'amortisseur skyhook dans le cas de contrôle des structures. En effet, il est presque impossible de trouver une référence fixe pour l'amortisseur dans le cas des grands ouvrages. Malgré cette contrainte il existe des systèmes qui peuvent remplacer le système skyhook. Une première méthode pour obtenir un système qui représente des performances très proches de l'amortisseur skyhook est de remplacer l'amortisseur passif par une force génératrice active qui peut être obtenue en utilisant un actionneur hydraulique. Alors que ce système est plutôt complexe et il exige une source d'énergie importante. Une deuxième méthode, qui représente la simplicité d'un amortisseur passif conventionnel, est d'utiliser les amortisseurs semi-actifs, qui sont placés entre la base et la masse, dont le coefficient d'amortissement varie entre deux valeurs extrêmes. En se plaçant dans le cadre de la deuxième approche, le système de contrôle semi-actif est représenté par la figure (1.9). Supposons que, pour les deux systèmes (skyhook et semi-actif), la masse  $m_1$  se déplace vers le haut avec une vitesse  $\dot{X}_1$

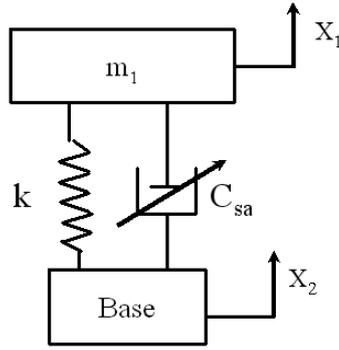


FIG. 1.9 – Amortisseur semi-actif

positive. Si nous considérons la force

$$F_{Sky} = -C_{Sky}\dot{X}_1, \quad (1.34)$$

qui est appliquée par l'amortisseur skyhook à la masse  $m_1$ , nous remarquons qu'elle est dirigée vers le bas. Ensuite, nous avons besoin de déterminer si l'amortisseur semi-actif est capable de produire la même force défini par l'équation (1.34). Si la base et la masse s'éloignent, alors l'amortisseur semi-actif est en traction. Par conséquent, la force semi-active appliquée

$$F_{sa} = -C_{sa}(\dot{X}_1 - \dot{X}_2), \quad (1.35)$$

sur la masse  $m_1$  est dans la direction négative (dirigée vers le bas). Le coefficient d'amortissement  $C_{sa}$  vérifie, sous l'exigence d'égaliser le deux forces d'amortissement (1.34) et (1.35), la condition suivante :

$$C_{sa} = C_{Sky} \frac{\dot{X}_1}{\dot{X}_1 - \dot{X}_2}. \quad (1.36)$$

Et par suite, si  $\dot{X}_1$  et  $(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$  sont positives,  $C_{sa}$  devrait être défini conformément à (1.36). Considérons maintenant le cas où la base et la masse s'éloignent encore, mais la masse se déplace vers le bas avec une vitesse  $\dot{X}_1$  négative. Dans la configuration skyhook, la force d'amortissement sera appliquée vers le haut, direction de  $X_1$  positive. Dans la configuration semi-active, cependant, l'amortisseur est encore en traction, et la force d'amortissement sera encore appliquée vers le bas, dans la direction de  $X_1$  négative. Puisque la force d'amortissement semi-active ne peut pas être appliquée dans la même direction que la force d'amortissement skyhook, elle prendra la valeur minimale possible. L'amortisseur semi-actif est désiré être mieux que possible afin qu'il n'y ait aucune force d'amortissement, mais en réalité quelques petites forces d'amortissement sont présentées et qu'elles ne sont pas dans la même direction que la force d'amortissement skyhook. Donc, si  $\dot{X}_1$

est négative et  $(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$  est positive, la force d'amortissement semi-active devrait être minimisée. D'autres analyses simples ont été appliquées à d'autres combinaisons de  $\dot{X}_1$  et  $(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$ , [65], ont montré que la force de contrôle semi-actif sera définie comme suit :

$$\begin{cases} si & \dot{X}_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) > 0 \text{ alors } F_{sa} = C_{Sky}\dot{X}_1 \\ si & \dot{X}_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) < 0 \text{ alors } F_{sa} = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

$F_{sa}$  est la force produite par l'amortisseur semi-actif. Le système (1.37) implique que lorsque la vitesse relative  $(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$  et la vitesse absolue de la masse  $m_1$  ont les mêmes signes, la force d'amortissement est proportionnelle à  $\dot{X}_1$ . Autrement, elle est nulle. Une autre interprétation énergétique, si le produit de deux vitesses est positif, c'est à dire que la puissance associée à la force d'amortissement Skyhook est dissipative. Donc, l'amortisseur semi-actif réalise la force d'amortissement skyhook si le signe de la vitesse relative,  $(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$ , est identique à celui de la vitesse absolue,  $\dot{X}_1$ ; dans le cas contraire, l'amortisseur semi-actif doit engendrer un effort de signe opposé à la vitesse relative, ce qui est impossible sans fournir d'énergie au système.

Pour le cas d'un amortisseur variable, le coefficient d'amortissement pendant la réponse de la structure peut être ajusté entre deux valeurs limites, comme est indiqué par l'équation (1.29), suivant une certaine loi de contrôle; une valeur supérieure et l'autre inférieure,  $C_{max}$  et  $C_{min}$ . Si la force  $F_{Sky}$  est supérieure à l'effort maximum que peut fournir l'amortisseur semi-actif,  $C_{sa}$  prend la valeur  $C_{max}$ . Par contre, le coefficient d'amortissement semi-actif prend la valeur minimale  $C_{min}$  lorsque la force  $F_{sa}$  est égale à zéro. D'après les équations (1.29) et (1.36), le coefficient,  $C_{sa}$ , varie continuellement entre deux valeurs limites suivant la loi de contrôle qui prend le nom d'un algorithme de contrôle semi-actif continu skyhook (*Continuous skyhook control*).

$$\begin{cases} si & \dot{X}_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) > 0 \text{ alors } C_{sa} = \alpha \\ si & \dot{X}_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) < 0 \text{ alors } C_{sa} = C_{min} \end{cases} \quad (1.38)$$

Avec  $\alpha = \min \left\{ C_{Sky} \frac{\dot{X}_1}{\dot{X}_1 - \dot{X}_2}, C_{max} \right\}$ . La loi de contrôle (1.38) est choisie telle que la variation du coefficient d'amortissement passif conventionnel peut atteindre le coefficient d'un amortisseur skyhook. Cette loi peut être simplifiée en utilisant un amortisseur semi-actif à deux états comme une variante de l'amortisseur continuellement variable [56]. Cet amortisseur commute entre deux positions; une valeur minimale et une valeur maximale, d'où

le nom de l'algorithme "on-off". L'amortisseur est ajusté selon la loi de contrôle suivante :

$$\begin{cases} \text{si} & \dot{X}_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) > 0 \quad \text{alors} \quad C_{sa} = C_{max} \\ \text{si} & \dot{X}_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) < 0 \quad \text{alors} \quad C_{sa} = C_{min} \end{cases} \quad (1.39)$$

La performance de cette loi est due au choix du coefficient d'amortissement. Ce qui le rend, malgré sa simplicité et ses performances supérieures à celles d'un amortisseur passif, moins performant que le cas continu [52, 84].

### 1.4.3 Contrôle ground-hook

Ce type de contrôle a le même principe que le contrôle skyhook, seulement que le solide à amortir sera attaché à la terre, simple appellation, au lieu du ciel. Mais l'essentiel est que le solide reste attaché à une référence fixe. La loi de contrôle est déterminée suivant le signe du produit de la vitesse absolue de la masse à amortir et de la vitesse relative entre les deux solides. Nous pouvons citer le cas de la suspension d'un véhicule [65] ; le contrôle ground-hook, contrairement au contrôle skyhook qui est développé pour amortir la vibration de la suspension, est développé pour amortir la vibration du pneu, qui sera attaché à une référence fixe (terre) par un amortisseur ; un tel amortisseur est appelé souvent un amortisseur idéal. La vitesse absolue est celle du pneu alors que la vitesse relative est la différence entre les vitesses absolues du pneu et de la suspension. Ce type de contrôle semi-actif est aussi utilisé dans les amortisseurs à masse accordée, appelés amortisseurs à masse accordée ancrés (ground-hook tuned mass damper), pour réduire les vibrations des planchers causées par l'activité humaine [95]. Il a été introduit un amortisseur à masse accordée qui utilise un amortisseur semi-actif variant continuellement afin de réduire l'accélération du plancher. Il l'a appliqué à un système ayant un seul degré de liberté, ce qui est représentatif des planchers d'un édifice. La loi de contrôle utilisée est équivalente au système (1.38), avec  $\dot{X}_1$  est la vitesse absolue du plancher,  $\dot{X}_2$  est la vitesse absolue de la masse accordée et  $\alpha = \min \{G|\dot{X}_1|, C_{max}\}$  où  $G$  est un gain. Le coefficient d'amortissement peut varier aussi de façon discontinu entre deux valeurs limites,  $C_{min}$  et  $C_{max}$ , mais selon la loi de contrôle (1.39) et qui sera nommée par le contrôle semi-actif *on-off ground-hook*.

### 1.4.4 Algorithme LQR semi-actif

L'algorithme classique LQR est très utilisé pour le contrôle actif des vibrations [97, 109] mais il est aussi utilisé pour le contrôle semi-actif des vibrations des structures [12, 81, 101]. Considérons l'équation différentielle du mouvement d'une structure à  $n$  degrés de liberté soumise à  $m$  amortisseurs semi-actifs :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = Dv(t), \quad (1.40)$$

où  $x(t)$  est un vecteur de dimension  $n$  qui représente le déplacement de la structure,  $v(t)$  un vecteur de dimension  $m$  qui représente les forces de contrôles engendrées par les amortisseurs semi-actifs,  $M$  la matrice masse,  $C$  la matrice d'amortissement,  $K$  la matrice de rigidité et  $D$  une matrice de dimension  $n \times m$ . La représentation d'état de ce système est donnée sous la forme  $\dot{X}(t) = AX(t) + Bv(t)$ . Dans cet algorithme le contrôle  $v(t)$  est choisi par minimisation, durant l'excitation, de l'expression quadratique de la fonction coût suivante :

$$J(v) = \int_0^T \{ [X(t)]^T \mathbf{Q} [X(t)] + [v(t)]^T \mathbf{R} [v(t)] \} dt, \quad (1.41)$$

où  $T$  est la durée de l'excitation,  $\mathbf{Q}$  une matrice carrée semi-définie positive et  $\mathbf{R}$  une matrice carrée symétrique définie positive.

Pour une configuration de contrôle en boucle fermée [90], en minimisant la fonctionnelle  $J(v)$  définie par l'équation (1.41), le vecteur force de contrôle est construit comme suit :

$$v(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T P(t) X(t) = \mathbf{G} X(t), \quad (1.42)$$

où la matrice  $\mathbf{G}$  représente la matrice de gain et la matrice  $P$  la solution de l'équation classique de Riccati.

### 1.4.5 Contrôle Clipping

La conception du contrôleur, pour ce type de contrôle, peut être divisée en deux étapes. La première étape consiste à choisir une loi de contrôle actif en supposant qu'un appareil actif idéal est présent. La deuxième étape est "la coupure" (Clipping) du contrôleur qui permet à l'amortisseur semi-actif de développer la force que l'appareil actif aurait exercée sur la structure [65].

Considérant le cas du paragraphe précédent, le coefficient d'amortissement pour l' $i$ ème

amortisseur au temps  $t$  peut être calculé à partir de l'équation (1.42) [62].

$$C_i^*(t) = \frac{v_i(t)}{\dot{y}_i(t)} = \frac{\sum_{j=1}^{2N} \mathbf{G}_{ij} X_j(t)}{\dot{y}_i(t)}, \quad i = 1, \dots, r \quad (1.43)$$

où  $\dot{y}_i(t)$  est la vitesse relative entre les extrémités de l' $i$ ème amortisseur. Rappelons que le coefficient d'amortissement est ajusté entre deux valeurs limites (1.29),  $C_i(t)$  de l' $i$ ème amortisseur est choisi comme suit :

$$C_i(t) = \begin{cases} C_{max,i} & si \quad C_i^*(t) \geq C_{max,i} \\ C_i^* & si \quad C_{min,i} < C_i^*(t) \leq C_{max,i} \\ C_{min,i} & si \quad C_i^*(t) \leq C_{min,i} \end{cases} \quad (1.44)$$

Le coefficient d'amortissement choisi, varie d'une façon continue entre les deux valeurs extrêmes. Il peut être aussi choisi de sorte qu'il commute entre ces deux valeurs extrêmes  $C_{min}$  et  $C_{max}$ .

Un tel algorithme est adopté par [90] pour le contrôle semi-actif des structures.

Les forces de contrôles  $v(t)$  sont produites par des amortisseurs semi-actifs tels que les amortisseurs magnéto-rhéologiques qui peuvent être convenablement contrôlés en ajustant un potentiel [50]. Par ailleurs, les forces de contrôles sont liées à la tension appliquée notée dans la suite  $\nu$  [50].

### 1.4.6 Contrôle de Lyapunov

Cette approche exige l'utilisation de la fonction,  $V(X)$ , de Lyapunov qui devrait être définie positive à chaque état du système  $X(t)$ . Cette fonction, pour un système linéaire sans contrôle,  $\dot{X} = AX$ , a la forme suivante [83] :

$$V(X) = \frac{1}{2} X^T \mathbf{P} X, \quad (1.45)$$

$\mathbf{P}$  est une matrice réelle symétrique définie positive. La dérivée par rapport au temps de cette fonction est

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \frac{1}{2} [\dot{X}^T \mathbf{P} X + X^T \mathbf{P} \dot{X}] = \frac{1}{2} X^T (A^T \mathbf{P} + \mathbf{P} A) X \\ &= -\frac{1}{2} X^T \mathbf{Q} X. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Si les matrices  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  satisfont l'équation matricielle

$$A^T \mathbf{P} + \mathbf{P} A = -\mathbf{Q}, \quad (1.47)$$

dite de Lyapunov. La matrice  $\mathbf{Q}$  est aussi définie positive. Par suite, les fonctions  $V(X)$  et  $-\dot{V}(X)$  sont définies positives. Si, maintenant, le système linéaire contient des forces de contrôle  $v(t)$  produites par des amortisseurs semi-actifs magnéto-rhéologiques tel que  $\dot{X} = AX + Bv(t)$ , l'équation (1.46) devient

$$\dot{V}(X) = -\left[\frac{1}{2}X^T \mathbf{Q} X - X^T \mathbf{P} B v(t)\right]. \quad (1.48)$$

Les forces produites par les amortisseurs magnéto-rhéologiques peuvent être augmentées ou diminuées en ajustant la valeur de la tension appliquée  $\nu$ . Cette tension, varie entre une tension minimale et une autre maximale, permet de varier la force de contrôle. Par ailleurs, dans l'équation (1.48), le seul terme qui peut varier directement par un changement de la tension du contrôle est le terme qui contient le vecteur force de contrôle  $v(t)$ . Afin de maintenir ce terme le plus positif possible il a été proposé par [60] la loi de contrôle, qui minimise  $\dot{V}(X)$ , suivante :

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{si} & -X^T \mathbf{P} B v(t) < 0 \\ V_{max} & \text{si} & -X^T \mathbf{P} B v(t) \geq 0 \end{cases} \quad (1.49)$$

$V_{max}$  est la tension maximale appliquée sur l'appareil magnéto-rhéologique. Il est à noter que cet algorithme est classé comme un contrôle bang-bang, il dépend du signe de la force de contrôle mesurée et de l'état du système. Pour implémenter cet algorithme, un filtre de Kalman est à utiliser pour estimer les états basés sur les mesures disponibles, c'est à dire les déplacements et forces de l'appareil. Donc, dans cet algorithme, une meilleure performance est attendue lorsque les mesures des réponses des structures complètes sont utilisées.

### 1.4.7 Contrôle Bang-Bang

Cette stratégie de contrôle est élaborée afin de piloter un système mécanique par le biais d'actionneurs ayant une gamme d'efforts admissibles très réduite. Par exemple une vanne pilotant la viscosité d'un amortisseur. Il a été montré par [66] que tous les transferts d'état que l'on peut faire avec un contrôle optimal dont les valeurs sont comprises dans un ensemble borné peuvent être obtenus par un contrôle bang-bang dont les valeurs

sont réduites à la frontière de cet ensemble. Les principes de base pour des applications générales de ce loi de contrôle ont été étudiés par [112]. Pour introduire cet algorithme, nous considérons une structure à  $n$  degrés de liberté soumise à  $m$  forces de contrôles produites par les amortisseurs semi-actifs magnéto-rhéologiques. L'équation d'équilibre de ce système est définie par l'équation (1.40).

Dans cette approche, la fonction de Lyapunov a été choisie pour représenter l'énergie totale de vibration dans la structure

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T \mathbf{K}x + \frac{1}{2}\dot{x}^T \mathbf{M}\dot{x}. \quad (1.50)$$

La dérivée par rapport au temps de cette fonction, en introduisant (1.40), est

$$\dot{V}(X) = x^T \mathbf{K}\dot{x} + \dot{x}^T (-\mathbf{C}\dot{x} - \mathbf{K}x + Dv). \quad (1.51)$$

De cette expression, afin d'obtenir  $\dot{V}$  grand et négatif, c'est à dire maximiser le taux de dissipation d'énergie, la loi de contrôle est choisie sous cette forme :

$$v = \begin{cases} 0 & \text{si} & -\dot{x}^T Dv(t) < 0 \\ V_{max} & \text{si} & -\dot{x}^T Dv(t) \geq 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

Cette loi permet de commuter la tension appliquée sur l'amortisseur entre deux valeurs extrêmes, une minimale et l'autre maximale. La tension est minimale (nulle) lorsqu'il n'y a pas de dissipation et elle est maximale lorsqu'il y a dissipation. D'où, l'appellation, le plus souvent, d'algorithme de dissipation d'énergie maximale.

En [90] a été proposé un algorithme appelé algorithme domaine déplacement accélération qui est un raffinement de l'algorithme bang-bang.

### 1.4.8 Contrôle par frottement homogène modulé

Le contrôle semi-actif des amortisseurs à frottement a été proposé pour améliorer les caractéristiques de la dissipation d'énergie des amortisseurs à frottement passifs et élargir la région d'application dans laquelle ils peuvent être utilisés avec succès. Cette stratégie de contrôle a été développée originalement par [49] pour utiliser les amortisseurs à frottement variable. Dans la même période il a été proposé [31] des lois du contrôle pour des amortisseurs à frottement qui maximisent la dissipation d'énergie au sens instantané en modulant la force normale à l'interface du frottement.

Dans cette approche, à chaque événement des extrêmes locaux de la déformation de

l'appareil, c'est à dire lorsque la vitesse relative entre les extrémités de l'appareil semi-actif est nulle, la force normale appliquée à l'interface de frottement est mise à jour à une nouvelle valeur. Pour chaque minimum ou maximum local de déformation, la force normale est choisie d'être proportionnelle à la valeur absolue de la déformation de l'appareil semi-actif. La loi de contrôle est définie par :

$$N(t) = g|P[\Delta(t)]|, \quad (1.53)$$

où  $g$  est un gain positif et  $P[.]$  est défini tel que,

$$P[\Delta(t)] = \Delta_i(t - s), \text{ avec } s = \{\min_{x \geq 0; \dot{\Delta}(t - x) = 0}\},$$

on définit  $\Delta(t - s)$  comme le plus récent extrême local de la déformation.

Cet algorithme a été développé pour les appareils à frottement variable, c'est pourquoi les modifications suivantes sont exigées lors des applications pour un autre genre d'appareils semi-actifs (comme par exemple, l'appareil magnéto-rhéologique ou appareil à orifice variable) :

- Le plus souvent, il n'est pas besoin de vérifier si la force mesurée est plus grande que la force de frottement statique  $\mu N$ ,  $\mu$  est le coefficient de frottement, parce que quelques appareils semi-actifs ne produisent pas de force de frottement statique.
- Une boucle à force rétroaction est utilisée pour induire l'amortisseur semi-actif à produire, approximativement, la force de frottement qui correspond à la force normale exigée.

Donc, le but est de produire la force de contrôle suivante :

$$v_c = \mu g|P[\Delta(t)]| = g_n|P[\Delta(t)]|, \quad (1.54)$$

où la constante  $g_n$  a l'unité d'une rigidité. D'où, la loi de contrôle suivante :

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{si } v_c - |v| < 0 \\ V_{max} & \text{si } v_c - |v| \geq 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

$v$  est la force mesurée et  $v_c$  la force de contrôle exigé. Un choix approprié de la constante  $g_n$  gardera la force  $v_c$ , la plupart du temps, dans l'enveloppe de fonctionnement de l'amortisseur semi-actif. Cette loi de contrôle exige seulement la mesure de la force appliquée et du déplacement relatif de l'appareil de contrôle.

### 1.4.9 Contrôle par logique floue

La théorie de la logique floue a été publiée en 1965 par [111]. Cette théorie a été appliquée surtout à la commande des systèmes. La logique floue repose sur une théorie permettant de manipuler des données imprécises. Par exemple, comment réguler la température d'une pièce en fonction d'un jugement du type: "il fait trop chaud", "il fait froid"...Elle permet de traduire mathématiquement la sensibilité humaine sous la forme de valeurs déterministes ; par exemple, la couleur d'un objet qui entre le "gris" et "noir". Ces valeurs sont appelées *valeurs linguistiques*.

Ce type de contrôle appliqué sur des amortisseurs semi-actifs est considéré comme une loi de contrôle continue. La production du contrôleur déterminée par la loi de contrôle par logique floue peut être ajustée entre deux états limites. La logique floue est utilisée dans plusieurs contrôleurs parce qu'elle n'exige pas un modèle très précis du système à contrôler [90]. La logique floue exécute des règles qui relient les entrées du contrôleur avec des sorties exigées. Ces règles sont créées typiquement à travers l'intuition. Le contrôle par logique floue est caractérisé par trois étapes de base indépendamment du système à contrôler, ces étapes sont :

1. première étape: "fuzzification". Cette étape consiste à attribuer une fonction d'appartenance à chaque entrée. C'est le point principal, parce que les formes possibles de ces fonctions sont infinies, pourtant le plus souvent sont utilisées les formes triangulaires ou trapézoïdales. Une fois les fonctions d'appartenance des entrées sont choisies, elles seront lues comme des valeurs fictives et seront transformées en des valeurs floues par attribution d'une valeur à chaque composant de la fonction d'appartenance,
2. deuxième étape: "inférence"; exécution des règles. Pour créer la règle de base du contrôleur, tout d'abord, la fonction d'appartenance doit être définie. Une fois ces fonctions avaient été définies, plusieurs combinaisons peuvent être déclarées. Dans ce cas, pour chaque combinaison possible des entrées une valeur linguistique de sortie est définie. Ces règles peuvent être décrites comme une série des déclarations "si-alors" et ne nécessitent pas un modèle mathématique complexe,
3. troisième étape: "défuzzification". C'est la phase qui permet de calculer le contrôle en fonction des différents degrés d'appartenance des variables d'entrées. Plusieurs méthodes sont utilisées, mais principalement la méthode de "centre de gravité" est la plus utilisée.

Ces trois étapes doivent être répétées pour chaque nouvelle entrée afin d'obtenir un contrôle continu.

# Chapitre 2

## Modélisation du système de contrôle d'une poutre avec TMD pendulaire et un alternateur

### 2.1 Introduction

Les appareils d'amortissement de vibrations mécaniques les plus utilisés dans la pratique sont les amortisseurs à masse accordée (TMDs) qui sont couramment utilisés dans différents champs d'applications en génie civil, par exemple, l'amortissement des vibrations des bâtiments, des ouvrages souples tels que les passerelles, les ponts suspendus les ponts à Haubans... Les efforts des recherches entamés par Frahm (1911) [38], Ormondroyd et Den Hartog (1928) [78] et Den Hartog (1947) [29] sont parmi les premières études d'application de cet appareil aux différents systèmes mécaniques.

Les TMDs peuvent être implémentés principalement sous deux formes [98] dont la plus connue est celle formé par une masse attachée à la structure principale par un ressort et un amortisseur (masse-ressort-amortisseur), tel que le bloc de béton qui a été installé au sommet du bâtiment Citicorp à New York dans les années 1970 et qui se déplace sur une surface lisse lubrifiée avec de l'huile. La deuxième forme, où se limite notre étude, est l'amortisseur à masse accordée pendulaire. L'utilisation la plus connue de ce type d'amortisseur est l'installation d'un pendule de 800 tonnes dans un bâtiment de 508 m de hauteur (Taipei 101) pour stabiliser le tour en présence d'un chargement externe d'origine tremblement de terre ou vent.

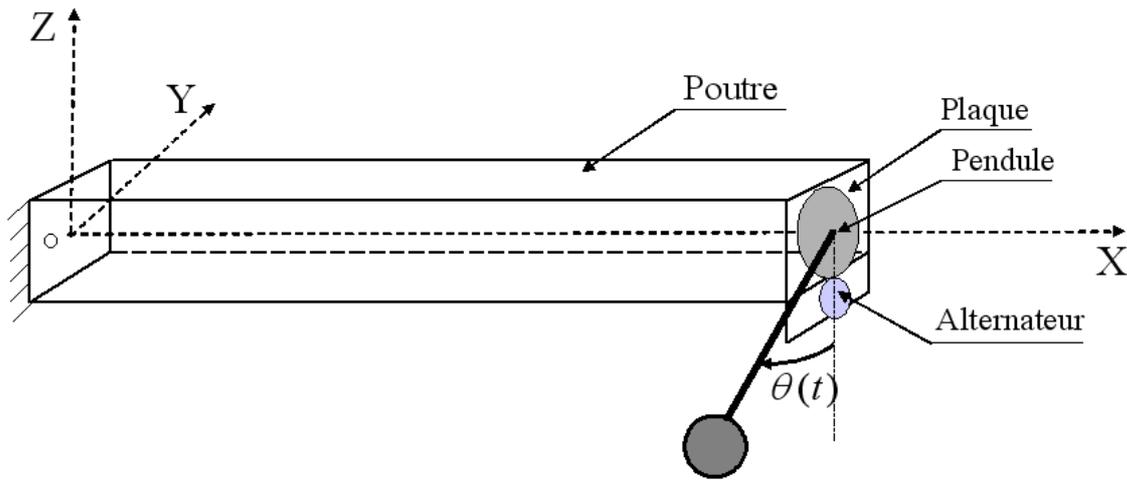
Pour un simple pendule, la fréquence de vibration dépend seulement de la longueur du fil

du pendule qui souvent exige un grand espace pour qu'on puisse le synchroniser avec la fréquence du système à amortir [98]. Pour diminuer la longueur du pendule, on introduit un pendule tel que sa fréquence dépend de sa longueur et de sa masse ; le bras du pendule est conçu comme une barre rigide à son extrémité libre est attachée une boule rigide. Ce type du pendule a été introduit, comme système passif, dans plusieurs travaux pour réduire la vibration d'une structure en grande déformation. Il a été introduit par [77] pour amortir les modes de flexion d'une poutre, encastrée-libre, tridimensionnelle avec grand déplacement et grande rotation. Le pendule est attaché à l'extrémité de la poutre dans le but d'amortir la vibration verticale. Le système d'équations aux dérivées partielles trouvé est non linéaire et les termes de non linéarité sont dues à la grande déformation de la poutre et au couplage entre la poutre et le pendule. Une discrétisation de ce système est faite par utilisation de la méthode de Galerkin en introduisant un seul mode de vibration de la poutre. En [71] a été déterminé l'efficacité du pendule à réduire passivement la vibration de la poutre, introduite par [77], pour différentes orientations. Le même système a été étudié par [70] mais en utilisant la méthode des éléments finis. Pour introduire le couplage bidirectionnel entre la poutre et le pendule, [76] a considéré le cas d'un pendule qui vibre dans deux plans et qui se déplace selon l'axe de la poutre. Plusieurs autres types de systèmes pendulaires peuvent être utilisés pour réduire les vibrations des structures [98].

Tous les systèmes de TMDs pendulaire introduits sont des amortisseurs passifs. Nous présentons dans ce chapitre un nouveau système d'amortissement TMD pendulaire couplé à un alternateur "actionneur électromécanique". Ce système consiste en un pendule couplé à un alternateur qui à sa sortie est liée une résistance. Lorsque cette résistance varie dans le temps selon une loi de contrôle, l'actionneur électromécanique devient un amortisseur semi-actif. Afin d'étudier un tel actionneur, on propose de contrôler, en utilisant cet actionneur, premièrement la vibration horizontale puis les vibrations horizontale et verticale d'une poutre encastrée-libre.

## 2.2 Modèle mécanique

Pour étudier l'amortissement semi-actif des vibrations en utilisant un amortisseur à masse accordée de type pendulaire, on considère un système mécanique couplé à un circuit électrique. Ce modèle est constitué d'une poutre d'Euler-Navier-Bernoulli, qui à son extrémité est collée une plaque à laquelle sont attachés un pendule et un alternateur comme est indiqué sur la figure (2.1). Le pendule est couplé à l'alternateur qui à sa sortie

FIG. 2.1 – *Modèle mécanique : vibration horizontale.*

est liée une résistance. Ce modèle, à résistance constante, est considéré comme un système passif. Pour obtenir un amortissement semi-actif des vibrations de la poutre on fait varier la résistance dans le temps. Le rôle de l'alternateur dans ce système est de transformer l'énergie mécanique du pendule en énergie électrique qui sera dissipée par effet Joule dans la résistance variable. L'énergie mécanique du pendule est due à la vibration de la poutre. Le pendule est couplé à l'alternateur, il a alors un seul degré de liberté ; il peut pivoter selon un seul axe de rotation. Son plan de vibration dépend de la position de fixation sur l'extrémité de la poutre. Si le pendule vibre dans le plan (OYZ) il sera conçu pour amortir la vibration horizontale, mais lorsqu'il vibre dans le plan (OXZ) il sera conçu pour amortir la vibration verticale de la poutre. Nous considérons dans cette étude que le plan de vibration du pendule est (OYZ). Nous écrivons par la suite les équations qui décrivent le comportement mécanique et électrique de ce système en analysant, premièrement, le cas où la poutre vibre seulement dans le plan horizontal puis le cas, plus général, où il y a une combinaison entre les vibrations horizontale et verticale de la poutre.

## 2.3 Vibration horizontale

On considère seulement le cas de la vibration horizontale de la poutre, vibration dans le plan (OXY), qui induit une vibration du pendule dans le plan (OYZ), en faisant un angle  $\theta$  par rapport à l'axe (OZ), comme est montré sur la figure (2.1). La rotation du pendule entraîne en rotation le rotor de l'alternateur avec un angle  $\beta\theta$ ,  $\beta$  est le rapport d'engrenage, constant, entre l'alternateur et le pendule. On écrit, dans ce cas de vibration, les équations

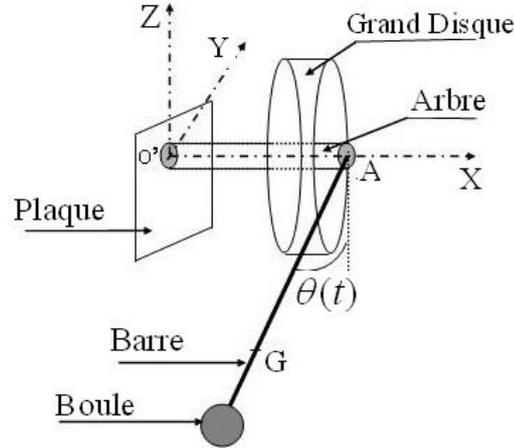


FIG. 2.2 – Composantes du pendule.

qui décrivent le comportement du système en considérant le cas de discrétisation puis couplage.

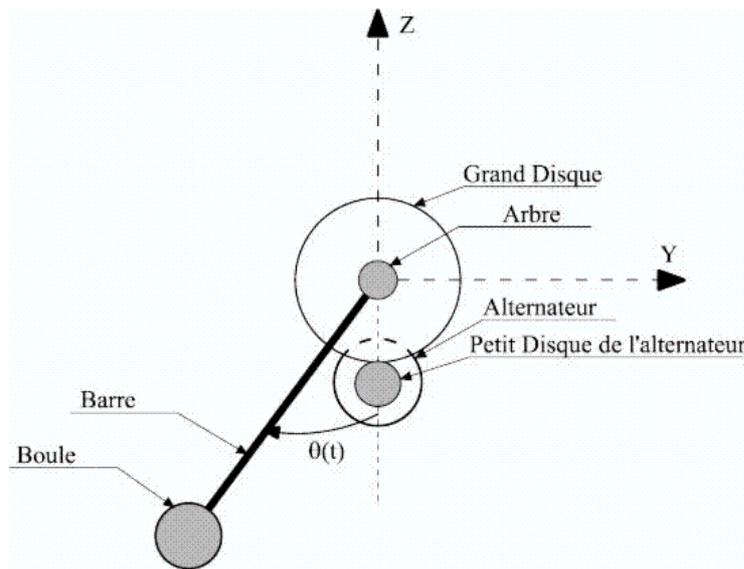
On considère une poutre de longueur  $L$  en flexion simple fixée à l'une de ses extrémités par une liaison encastrement et à l'autre extrémité est attachée une plaque de masse  $m_p$  à laquelle sont accrochés un pendule et un alternateur. Le pendule est formé d'une boule de masse  $m_s$  et de rayon  $R_s$  fixée à l'extrémité libre d'une barre de masse  $m_b$  et de longueur  $l_b$ , d'un grand disque de rayon  $R_d$  de masse  $m_d$  et de moment d'inertie  $I_d$  d'axe  $X$  et d'un arbre de masse  $m_{arb}$  et de moment d'inertie  $I_{arb}$  d'axe  $X$  comme est montré sur la figure (2.2). Supposons que ce pendule est formé simplement de deux sous systèmes ; un premier sous systèmes "disque-arbre-plaque" formé par le disque, l'arbre et la plaque de masse totale  $m_1 = m_p + m_d + m_{arb}$  et de moment d'inertie  $I_1 = I_d + I_{arb}$  et un deuxième sous système "barre-boule" formé par la barre et la boule de masse totale  $m_2 = m_s + m_b$  et de moment d'inertie  $I_2$  par rapport à l'axe (AX) qui est déterminé à partir du théorème d'Huygens

$$I_2 = \frac{1}{3}m_b l_b^2 + \frac{2}{5}m_s R_s^2 + m_s (R_s + l_b)^2. \quad (2.1)$$

Le centre de gravité de ce deuxième système est déterminé par la formule suivante :

$$l = AG = \frac{m_s (R_s + l_b) + \frac{1}{2}m_b l_b}{m_s + m_b}. \quad (2.2)$$

Le moment d'inertie total  $I_p$  et la masse totale  $M_p$  du pendule sont respectivement la somme des moments d'inerties et des masses de deux sous systèmes ;  $I_p = I_1 + I_2$  et

FIG. 2.3 – *Système pendule-alternateur.*

$M_p = m_1 + m_2$ . L'alternateur de masse  $m_a$  et de moment d'inertie  $I_a$  est en engrenage avec le disque du pendule, figure (2.3). On note dans la suite par  $M_{ap}$  la masse totale du système électromécanique ; pendule-alternateur. Pour obtenir un système d'équations discrétisées couplées, nous introduisons le cas de discrétisation spatiale du déplacement de la poutre puis couplage entre les différentes équations d'équilibre [19].

### 2.3.1 Equations du mouvement de la poutre et du pendule

La mise en équation d'équilibre d'un problème dynamique est une étape très importante pour analyser la réponse d'une structure. Ces équations dynamiques peuvent être obtenues à partir de trois méthodes : méthode directe, méthode énergétique et Principe des Puissances Virtuelles (PPV). La première consiste à identifier le torseur des efforts qui s'exerce sur la structure à étudier et à écrire qu'il est égal à la variation de la quantité de mouvement du système ; cette formulation est connue sous le nom de seconde loi de Newton ou loi fondamentale de la dynamique. La deuxième, à l'opposé de la méthode directe, ne fait intervenir que des grandeurs scalaires. La troisième est particulièrement bien adaptée à la mise en équation des milieux continus pour lesquels masses et raideurs sont distribuées dans tout le système.

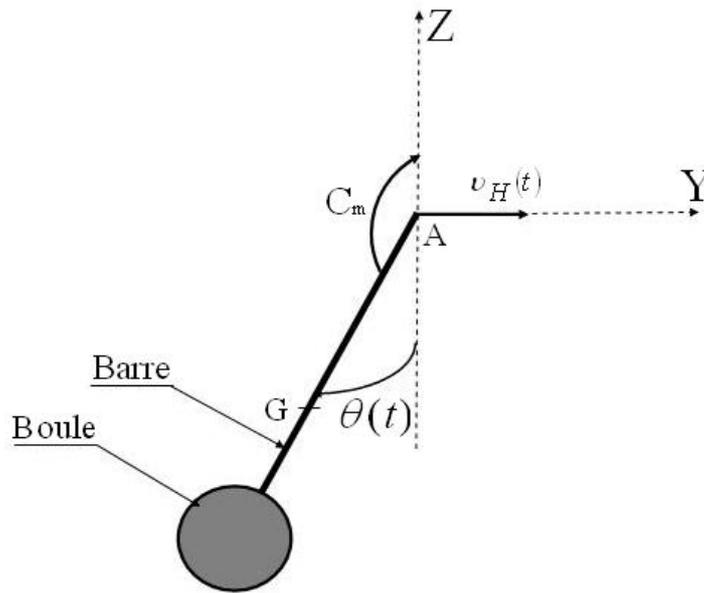


FIG. 2.4 – Les forces appliquées sur le pendule.

Le système étudié est formé d'une poutre, d'un pendule et d'un alternateur. Les équations mécaniques du pendule seront déterminées en appliquant la méthode énergétique, l'équation mécanique de l'alternateur sera trouvée à partir de la méthode directe et son équation électrique sera obtenue à partir de la loi des mailles, alors que la formulation de la poutre est celle obtenue dans le chapitre précédent avec une force horizontale concentrée à son extrémité libre [13]. Cette force est la réaction de la liaison horizontale interne entre le pendule et la poutre. Nous supposons dans ce cas que la poutre vibre seulement dans le plan horizontal, en faisant un déplacement  $y(x,t)$ , qui induit la translation du pendule et de l'alternateur, en faisant un déplacement horizontal  $y(L,t)$ , et la rotation du deuxième sous système du pendule avec un angle noté  $\theta$ . Le pendule est soumis, comme indiqué sur la figure (2.4), à la force de liaison horizontale entre poutre et pendule notée par  $v_H(t)$  et au couple mécanique  $C_m$  qui agit par le petit pignon de l'alternateur sur le grand pignon du pendule. Le vecteur position de l'extrémité supérieure du pendule noté  $\mathbf{r}_p$ , le vecteur position du centre de gravité de la barre noté  $\mathbf{r}_b$  et le vecteur position de la boule du pendule noté  $\mathbf{r}_s$  peuvent être définis en petit déplacement, dans le système des coordonnées orthonormales  $(O,X,Y,Z)$  des vecteurs unitaires, respectivement,  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ,

comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_p &= L\mathbf{a}_1 + y(L,t)\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{r}_b &= L\mathbf{a}_1 + [y(L,t) + \frac{l_b}{2}\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 - \frac{l_b}{2}\cos(\theta)\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{r}_s &= L\mathbf{a}_1 + [y(L,t) + (l_b + R_s)\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 - (l_b + R_s)\cos(\theta)\mathbf{a}_3\end{aligned}\quad (2.3)$$

Les vecteurs vitesses correspondants sont

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_p &= \dot{y}(L,t)\mathbf{a}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_b &= [\dot{y}(L,t) + \frac{l_b}{2}\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 + \frac{l_b}{2}\dot{\theta}\sin(\theta)\mathbf{a}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_s &= [\dot{y}(L,t) + (l_b + R_s)\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 + (l_b + R_s)\dot{\theta}\sin(\theta)\mathbf{a}_3\end{aligned}\quad (2.4)$$

$\dot{\mathbf{r}}_p$  est la vitesse de vibration du premier sous système du pendule, de masse  $m_1$  et de moment d'inertie  $I_1$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_b$  et  $\dot{\mathbf{r}}_s$  sont, respectivement, les vitesses de vibration de la barre et de la boule du pendule. L'énergie cinétique totale du pendule est  $T = T_p + T_b + T_s$ . Avec

$$\begin{aligned}T_p &= \frac{1}{2}(m_1 + m_a)(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 \\ T_b &= \frac{1}{2}m_b(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{6}m_b l_b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b l_b \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta \\ T_s &= \frac{1}{2}m_s(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{2}m_s(l_b + R_s)^2 \dot{\theta}^2 + m_s(l_b + R_s) \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta\end{aligned}\quad (2.5)$$

L'énergie cinétique du centre de gravité du pendule  $T_G = T_b + T_s$ , en introduisant les équations (2.1) et (2.2), sera défini comme suit :

$$T_G = \frac{1}{2}m_2(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta. \quad (2.6)$$

L'énergie potentielle totale U du pendule est

$$U = -m_2 g l \cos\theta. \quad (2.7)$$

L'énergie dissipative totale D du pendule est

$$D = \frac{1}{2}C_p \dot{\theta}^2. \quad (2.8)$$

$C_p$  est le coefficient d'amortissement du pendule. Pour obtenir les équations du pendule, on utilise les équations de Lagrange suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, r \quad (2.9)$$

Avec les coordonnées généralisées  $q_k$  et les forces extérieures  $Q_k$  sont définies comme suit :

$$q_k = \{y(L) \quad \theta\} \quad \text{et} \quad Q_k = \{v_H \quad -C_m\}. \quad (2.10)$$

Soient les équations suivantes :

Pour  $q_1 = y(L)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= (m_1 + m_a + m_2) \ddot{y}(L, t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour  $q_1 = \theta$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= (I_1 + I_2) \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{y}(L, t) \cos \theta - m_2 l \dot{\theta} \dot{y}(L, t) \sin \theta \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -m_2 l \dot{\theta} \dot{y}(L, t) \sin \theta \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= m_2 g l \sin \theta \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} &= C_p \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

On remplace l'équation (2.11) dans l'équation de Lagrange (2.9) on trouve l'équation de la force de liaison horizontale suivante :

$$M_{ap} \ddot{y}(L, t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta = v_H(t). \quad (2.13)$$

Avec  $M_{ap} = M_p + m_a$ . On remplace maintenant l'équation (2.12) dans l'équation de Lagrange (2.9) on trouve l'équation de rotation du pendule

$$I_p \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{y}(L, t) \cos \theta + C_p \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta = -C_m. \quad (2.14)$$

$g$  est l'intensité de la pesanteur,  $\ddot{y}(L, t)$  l'accélération de l'extrémité libre de la poutre et  $\omega_p = \sqrt{\frac{m_2 g l}{I_p}}$  la pulsation propre du pendule. On suppose que la console en flexion est constituée d'un matériau élastique, homogène et isotrope ; soit  $\rho$  sa masse volumique,  $L$  sa longueur,  $A$  sa section,  $E$  son module d'Young et  $I_z$  son moment d'inertie de flexion selon l'axe  $Z$ . L'excitation de cette poutre est modélisée par une densité linéique de force répartie sur toute sa longueur  $f(x, t)$  variable dans le temps. La réponse de la poutre, déplacement horizontal, notée  $y(x, t)$  et en adoptant l'hypothèse de petite perturbation (HPP) : en négligeant le déplacement longitudinal, vérifie les équations d'évolution dynamique en utilisant la théorie d'Euler Navier Bernoulli [18, 86] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \ddot{y}(x, t) + EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) = f(x, t) & \text{dans} \quad (0, L) \times [0, T] \\ y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0 & \text{sur} \quad [0, T] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad EI_z \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, t) = v_H(t) & \text{sur} \quad [0, T] \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y^1(x) & \text{dans} \quad (0, L) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$y^0(x)$  et  $y^1(x)$  définissent les conditions d'évolutions initiales supposées suffisamment régulières.  $v_H(t)$  est la force de liaison entre la poutre et le pendule appliquée à l'extrémité

libre de la poutre. Pour obtenir un modèle discrétisé de dimension finie du déplacement que l'on pourra utiliser numériquement, on souhaite discrétiser le déplacement horizontal sur la base modale tronquée au rang  $N$ . Pour cela, on projette le déplacement sur ces formes modales, ceci au moyen d'une formulation variationnelle en espace.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } y(x,t) \text{ tel que} \\ \forall \psi \in \mathbf{V} = \{\psi \in H^2(0,L) \text{ tel que } \psi(0) = \frac{d\psi}{dx}(0) = 0\} \\ \rho A \int_0^L \ddot{y}(x,t)\psi(x) dx + EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = -v_H(t)\psi(L) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Cette formulation variationnelle a été obtenue par multiplication de l'équation d'équilibre dynamique du système (2.15) par une fonction test puis par double intégration par parties par rapport à la variable espace. Dans cette formulation on n'a pas tenu compte de la densité linéique de la force répartie  $f(x,t)$ : vibration libre de la poutre.

Pour calculer les valeurs propres et les modes propres de la poutre, on cherche les solutions de la forme  $y(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$  du système homogène conservatif associé au système (2.15). Le terme "homogène" signifie que les actions extérieures agissant sur la poutre sont considérées nulles. Le problème aux valeurs propres peut être formulé sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\lambda, \underline{\varphi}) \in \mathbf{IR} \times \mathbf{V} \text{ tel que } \forall \psi \in \mathbf{V} \\ EI_z \int_0^L \frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \lambda \rho A \int_0^L \varphi(x)\psi(x) dx \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Ce problème admet une infinité de solutions. On note par la suite  $\mathbf{V}_N$ , l'espace engendré par les  $N$  premiers modes propres de la poutre. Les modes ainsi définis vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = m_j^* \delta_{ij} \\ EI_z \int_0^L \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2}(x) \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2}(x) dx = k_j \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$m_j^*$  est la  $j$ -ième masse modale et  $k_j$  est la  $j$ -ième rigidité modale. On impose aussi de normaliser les modes propres en imposant la condition suivante :

$$\varphi_i(L) = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (2.19)$$

Cette normalisation est toujours possible car  $\varphi_i(L) \neq 0$  pour  $i=1, \dots, N$ .

L'approximation de la solution du problème (2.16) consiste simplement à introduire le sous-espace de dimension finie  $\mathbf{V}_N$  qui est formé par les  $N$  premiers modes propres. La projection du déplacement sur cette base modale nous permet de déterminer une estimation modale du déplacement sur les  $N$  premiers modes propres sous la forme suivante :

$$y_N(x,t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\varphi_i(x), \quad (2.20)$$

$\varphi_i(x)$  est l'ième mode propre de la poutre et  $\alpha_i(t)$  la composante de la projection du vecteur déplacement sur  $\varphi_i(x)$ , souvent appelée la contribution modale du mode  $i$ .

Le déplacement estimé défini par l'équation (2.20) est solution de la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } y_N \in \mathbf{V}_N \text{ tel que } \forall \psi_N \in \mathbf{V}_N \\ \rho A \int_0^L \ddot{y}_N(x,t) \psi_N(x) dx + EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 y_N}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \psi_N}{dx^2}(x) dx = -v_{HN}(t) \psi_N(L) \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où  $v_{HN}(t)$  est la force de liaison horizontale discrétisée

$$v_{HN}(t) = M_{ap} \ddot{y}_N(L,t) + m_2 [l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta] \quad (2.22)$$

déterminée à partir de l'estimation du déplacement de la poutre sur les  $N$  premiers modes. De même, l'équation du pendule (2.14) peut être écrite sous la forme discrétisée

$$I_p \ddot{\theta} + C_p \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta = -m_2 l \ddot{y}_N(L,t) \cos \theta - C_m. \quad (2.23)$$

Après le remplacement du déplacement par son estimation (2.20) dans la formulation variationnelle (2.21), en faisant varier la fonction test  $N$  fois, en la remplaçant à chaque fois par  $\varphi_i$  et en utilisant les conditions d'orthogonalité (2.18) et de normalisation (2.19) des modes propres, on obtient les équations suivantes :

$$m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) + k_i \alpha_i(t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta = m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (2.24)$$

Dans l'équation d'équilibre de la poutre (2.15) on n'a pas introduit le terme d'amortissement qui est le siège de dissipation d'énergie. Mais pour être plus proche de la réalité, on prend en compte la présence de l'amortissement propre de la poutre dans la modélisation de son mouvement même s'il est très faible. La majeure partie de la dissipation peut être modélisée par une dissipation visqueuse, c'est à dire une force proportionnelle à la vitesse mais de signe contraire. Et afin d'éviter le problème de couplage entre les équations en  $\alpha_i$ , on adopte l'hypothèse de Rayleigh qui rend la matrice d'amortissement diagonale. En introduisant le taux d'amortissement modal  $\xi_i$ , l'équation (2.24) sera écrite comme suit :

$$m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) + c_i \dot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta = m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.25)$$

pour  $i = 1, \dots, N$

Le système formé par les équations discrétisées (2.25) et (2.23) est un système couplé non linéaire. Le terme de couplage vient de la continuité, au point  $x = L$ , du déplacement entre la poutre et le pendule. A ce système, on ajoute les équations mécanique et électrique de l'alternateur.

### 2.3.2 Equations de l'alternateur

L'alternateur est une machine électrique permettant de convertir l'énergie mécanique en énergie électrique ou inversement. L'alternateur comme toutes les machines tournantes, on distingue la partie fixe appelée stator de la partie tournante appelée rotor, figure (2.5). La partie séparant les deux est appelée entrefer. Le stator porte le bobinage polyphasé qui permet de créer un champ tournant. Le rotor crée un moment magnétique  $\mathbf{M}$ , soit à partir d'un aimant permanent soit à partir d'une bobine en rotation parcourue par un courant continu. Dans les deux cas, le rotor comprend un circuit magnétique qui permet de canaliser le flux afin d'avoir un meilleur couplage possible entre rotor et stator. Lors de la rotation de la machine, le flux envoyé par le rotor dans les bobines fixées sur le stator varie au cours de la rotation et y crée des forces électromotrices d'induction triphasées. D'une manière générale, le stator et le rotor ont le même nombre de pôles [27], qui satisfont la relation entre la vitesse de la machine et la fréquence propre du courant induit dans la bobine

$$f = P \frac{n}{60}, \quad (2.26)$$

où  $P$  est le nombre de paire de pôles,  $f$  la fréquence propre du courant du stator et  $n$  le nombre des tours par minute que nous imposons à la machine. Considérons le cas

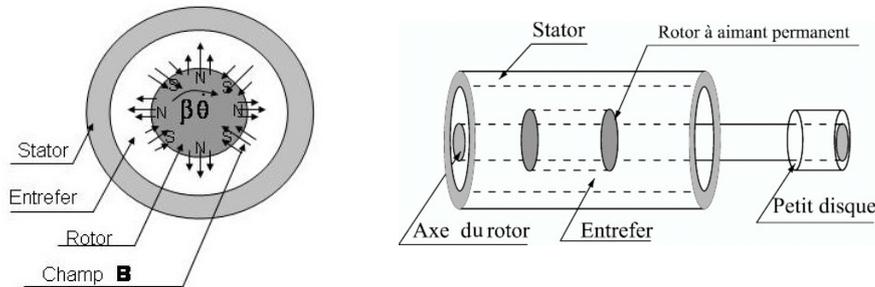


FIG. 2.5 – Composantes de l'alternateur.

d'un alternateur dont le rotor est à aimant permanent à quatre pôles et le stator est à bobinage triphasé en branchement étoile. Les trois bobines sont décalées de  $120^\circ$ . Le champ magnétique uniforme, noté par  $\mathbf{B}$ , est créé par l'aimant fixé sur l'axe du rotor. Le flux magnétique au niveau d'une spire de la bobine fixée sur le stator est donné par la formule suivante :

$$\phi(t) = \int \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.27)$$

Pour simplifier, nous supposons que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est homogène sur toute la surface de la spire  $S$  et ne varie pas au cours du temps.  $\mathbf{S}$  est le vecteur surface de la spire.

Le champ  $\mathbf{B}$  tourne avec la rotation de l'aimant qui est engendrée par la rotation du pendule en faisant un angle  $\theta(t)$  variable dans le temps. L'angle de rotation de l'aimant, angle entre les vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{S}$ , est proportionnel à  $\theta(t)$  en le multipliant par le rapport d'engrenage, noté  $\beta$ , entre le petit disque fixé sur l'axe du rotor de l'alternateur et le grand disque du pendule. Le flux d'une seule spire défini par (2.27) peut être simplifié comme suit :

$$\phi(t) = BS\cos(\beta\theta(t)). \quad (2.28)$$

Le mouvement du pendule entraîne en rotation l'aimant qui provoque une variation de ce flux magnétique dans les bobines. Cette variation, d'après la loi de Lenz, induit une force électromotrice triphasée d'induction aux bornes des bobines. Cette force dépend de la répartition des bobinages, de la forme de l'induction dans l'entrefer créée par l'inducteur et son amplitude est proportionnelle à la vitesse de rotation de la machine. La force électromotrice (f.e.m) pour une simple phase, entre l'extrémité d'une bobine et le neutre,

$$\mathbf{e}(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (2.29)$$

est créée pour s'opposer à la variation de flux dans les bobines. Le signe moins "-" dans la formule (2.29) indique cette opposition. Si la bobine comporte  $N$  spires, la f.e.m pour une phase, f.e.m simple, est égale à la somme des f.e.m induites dans chacune des spires

$$\mathbf{e}(t) = -N\frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (2.30)$$

En dérivant l'équation (2.28) par rapport au temps et en la remplaçant dans l'équation (2.30), l'expression de la f.e.m simple devient

$$\mathbf{e}(t) = K_e\beta\dot{\theta}\sin(\beta\theta(t)). \quad (2.31)$$

$K_e = BNS$  est une constante électrique qui dépend des paramètres de construction de la machine (construction, géométrie, matériaux...) et  $\beta\dot{\theta}$  la vitesse angulaire de rotation de l'aimant à l'intérieur de la bobine. Cette f.e.m est proportionnelle à la vitesse de rotation de l'aimant (donc à la vitesse de la variation de flux dans la bobine). L'alternateur est considéré à quatre pôles et donc à chaque quart de tour la tension induite change de sens, il s'agit d'un courant alternatif. Cet alternateur, comme toute machine électrique, peut être modélisé par un circuit électrique. Par ailleurs, l'équation électrique est déterminée en écrivant l'équation d'équilibre du circuit électrique défini par la figure (2.6.a), en lui appliquant la loi des mailles,

$$u(t) = e(t) - L_e\frac{di}{dt} - ri(t), \quad (2.32)$$

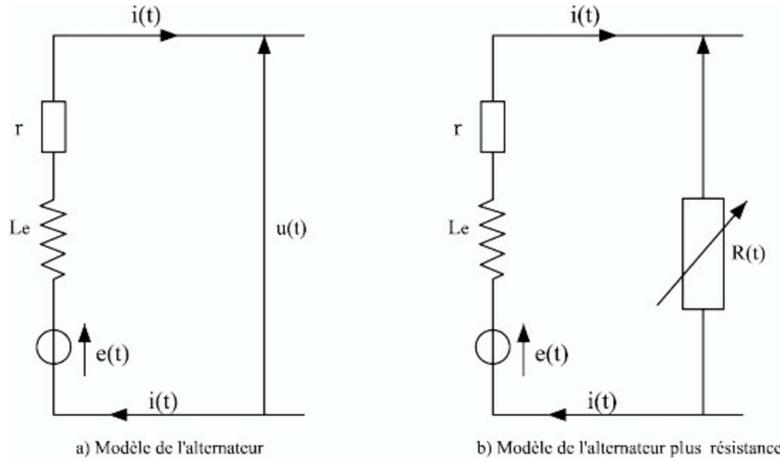


FIG. 2.6 – Modèle électrique de l'alternateur.

où  $u(t)$  est la tension simple à la sortie de l'alternateur,  $L$  et  $r$  sont respectivement l'inductance et la résistance d'une bobine et  $i(t)$  est le courant induit. Lorsqu'à la sortie de l'alternateur est attachée une résistance variable notée  $R(t)$ , figure (2.6.b), l'équation électrique (2.32) devient

$$L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) = K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta(t)). \quad (2.33)$$

A cette équation électrique on peut ajouter une équation mécanique. En plus de la force d'inertie, le rotor est soumis à la force de frottement  $f = C_a \beta \dot{\theta}$ , supposé visqueux, à un couple mécanique externe  $C_m$  exercé par le grand pignon du pendule sur le petit pignon de l'alternateur et à un couple électromagnétique,  $C_{em}$ . La force électromotrice produit un courant induit dans chaque bobine qui provoque lui-même la formation d'un champ magnétique tournant. D'après la loi de Laplace, le couple électromagnétique est défini comme suit :

$$C_{em} = S B^r i(t) \sin(\beta \theta(t)), \quad (2.34)$$

$B^r$  est le champ magnétique résultant qui traverse une spire. Ce couple électromagnétique total est un couple résistant sur l'aimant qui sera défini sous cette forme :

$$C_{em} = K_c i(t) \sin(\beta \theta(t)), \quad (2.35)$$

$K_c$  est une constante mécanique.

Par application du principe fondamental de la dynamique, l'équation mécanique qui régit

le mouvement du rotor est

$$\beta I_a \ddot{\theta} + \beta C_a \dot{\theta} = C_m - C_{em}. \quad (2.36)$$

$I_a$  est le moment d'inertie total de la partie en rotation de l'alternateur ; aimant, axe du rotor et de petit disque fixé sur l'extrémité de cet axe, comme est indiqué sur la figure(2.5).  $C_a$  est un coefficient de frottement interne de l'alternateur. Cette équation mécanique de l'alternateur peut être ajoutée à l'équation du pendule (2.23), vu qu'ils ont le même axe de rotation. Le système d'équations du modèle complet formé par la poutre, le pendule et l'alternateur dans le cas de discrétisation puis couplage peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) + c_i \dot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) + m_2(l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 \\ \quad \text{pour } i = 1 \dots N \\ (I_p + \beta I_a) \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \cos \theta + (C_p + \beta C_a) \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta + K_e i(t) \sin(\beta \theta(t)) = 0 \\ L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) - K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta(t)) = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

On notera dans la suite  $I_{ap} = I_p + \beta I_a$  et  $C_{ap} = C_p + \beta C_a$ , respectivement, le moment d'inertie et le coefficient d'amortissement total de l'actionneur pendule-alternateur. Pour simuler ce système, il faut identifier les paramètres de l'actionneur.

### 2.3.3 Identification du coefficient d'amortissement

Afin de simuler le système (2.37), il est nécessaire de déterminer le coefficient d'amortissement propre de l'actionneur  $C_{ap}$ . Ce coefficient sera calculé dans la configuration où l'actionneur n'est pas lié à la poutre. Pour cela, on considère un simple pendule couplé avec un alternateur en circuit ouvert, avec le moment d'inertie total  $I_{ap} = 1,3657 \text{Kg}m^2$ , la masse  $m_2 = 3,3 \text{Kg}$  et la longueur équivalente  $l = 0,5525 \text{m}$ . Le pendule est attaché à un support fixe et il est équipé par un capteur potentiométrique qui consiste à mesurer l'évolution de l'angle de vibration  $\theta$  au cours du temps. Celui ci est solidaire mécaniquement de l'axe de rotation du pendule. Ce capteur potentiométrique est constitué d'une résistance totale  $R_0$  sur laquelle peut se déplacer un contact électrique. La valeur de la résistance variable est déterminée en fonction du nombre de tours du capteur par la formule suivante [42] :

$$R(t) = \frac{\theta(t)}{\theta_{max}} R_0. \quad (2.38)$$

Avec  $\theta_{max} = 2\pi N$ ,  $N$  est le nombre de tours pris égal à 10 dans notre cas. Dans la figure (2.7) est représenté le schéma du capteur et du circuit électronique qui nous permet d'avoir

une image de la trajectoire du pendule.  $E$  est la tension fournie au capteur,  $V_p(t) = \frac{\theta(t)}{\theta_{max}} E$  est la tension aux bornes du potentiomètre. La tension à la sortie  $V_s(t)$  est égale à la tension  $V_p(t)$  multipliée par le gain  $\frac{R_2}{R_1}$

$$V_s(t) = \frac{ER_2}{2\pi NR_1} \theta(t). \quad (2.39)$$

Avec  $E = 24V$ ,  $R_1 = 1K\Omega$  et  $R_2 = 15K\Omega$ . L'idée de cette expérimentation consiste

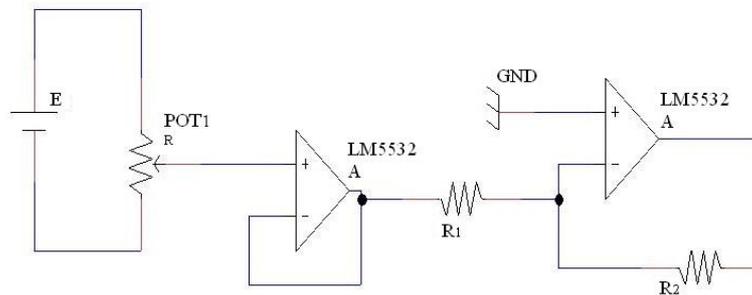


FIG. 2.7 – Représentation du capteur potentiométrique et du circuit électronique.

à mesurer la tension à la sortie du circuit au cours du temps qui est proportionnelle à l'angle de vibration du pendule en vibration libre comme est indiqué par l'équation (2.39). Puis de chercher numériquement le coefficient d'amortissement propre  $C_{ap}$ . Ce coefficient d'amortissement est celui qui minimise une fonctionnelle représentant l'écart entre l'angle de vibration expérimentale et l'angle de vibration numérique,

$$J(C_{ap}) = \int_0^T (\theta_{exp}(t) - \theta_{num}(C_{ap}, t))^2 dt. \quad (2.40)$$

L'angle de vibration numérique est déterminée en résolvant l'équation différentielle suivante :

$$I_{ap} \ddot{\theta} + C_{ap} \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta = 0. \quad (2.41)$$

Un algorithme de gradient permet d'identifier, en minimisant la fonctionnelle (2.40), le coefficient d'amortissement  $C_{ap}$ . La valeur de ce coefficient identifiée est  $C_{ap} = 0,18Kg/s$  qui correspond à un amortissement réduit de 2%. En utilisant cette valeur du coefficient d'amortissement, on a représenté dans le même graphe (2.8) la tension numérique  $V_s(t)$ , liée à l'angle de vibration numérique par la relation (2.39), et la tension  $V_s(t)$  expérimentale

mesurée directement à la sortie du circuit électronique. On constate que les deux courbes sont presque confondues. Après l'identification du coefficient d'amortissement  $C_{ap}$ , il reste à identifier les paramètres de l'alternateur ; les coefficients  $K_e$  et  $K_c$ , la résistance interne et l'inductance de bobine.

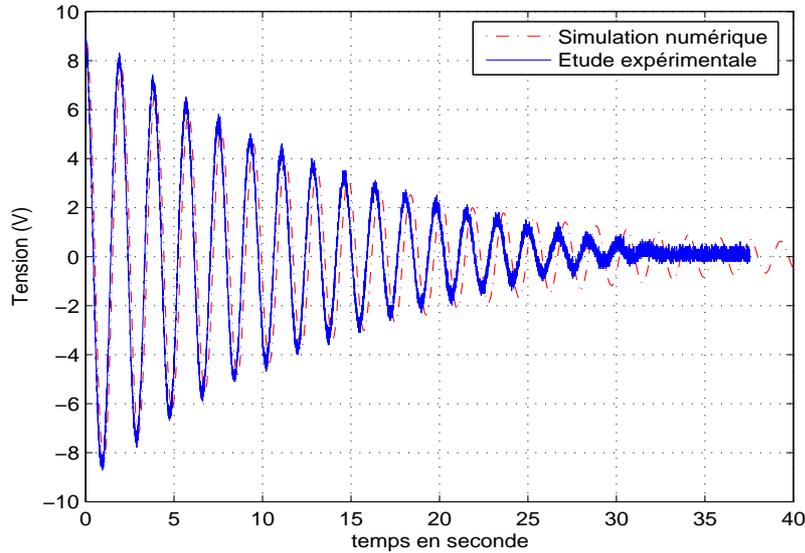


FIG. 2.8 – Comparaison entre la tension  $V_s(t)$  expérimentale et numérique en circuit ouvert.

### 2.3.4 Identification de l'alternateur

Après l'identification du coefficient d'amortissement propre de l'actionneur pendule-alternateur, on utilise le même essai et les mêmes valeurs indiquées dans le paragraphe précédent pour identifier le coefficient  $K_e$  de la f.e.m. On mesure par un oscilloscope la tension à vide composée de l'alternateur lorsque le pendule est lâché d'un angle  $\theta_0$  en vibration libre, figure (2.9).

La valeur de  $K_e$  est celle qui minimise la fonctionnelle représentant l'écart entre la f.e.m à vide expérimentale et la f.e.m à vide numérique,

$$\check{J}(K_e) = \int_0^T (E_v^{exp}(t) - E_v^{num}(K_e, t))^2 dt. \quad (2.42)$$

Cette valeur est fixée à  $K_e = 0,06 \text{Vrad}^{-1}\text{s}$  en appliquant l'algorithme du gradient. Dans la figure (2.10) est représentée la force électromotrice en résolvant numériquement le système

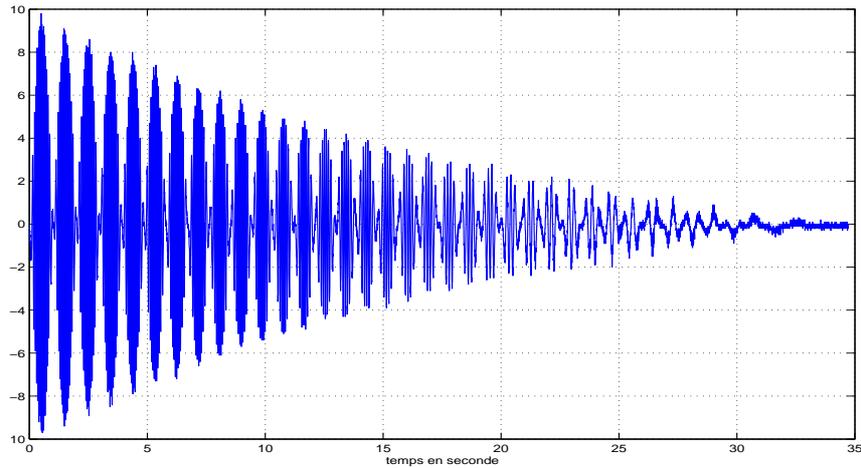


FIG. 2.9 – Représentation expérimentale de la force électromotrice à vide.

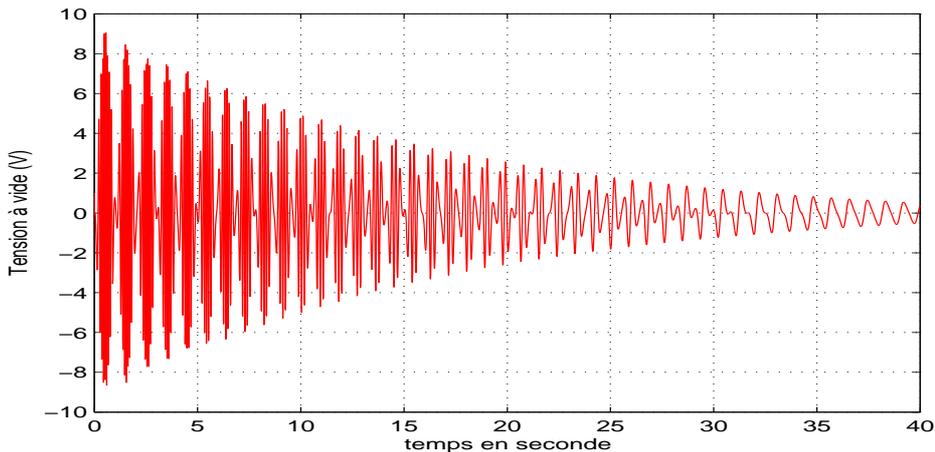


FIG. 2.10 – Représentation numérique de la force électromotrice à vide.

suisant :

$$\begin{cases} I_{ap}\ddot{\theta} + C_{ap}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \\ E_v(t) = \sqrt{3}K_e\beta\dot{\theta}\sin(\beta\theta(t)) \end{cases} \quad (2.43)$$

On remarque que la valeur de  $K_e$  précité est très proche de la valeur déterminée par un essai réalisé par le constructeur soit  $K_e = 0,058Vrad^{-1}s$ ; en mesurant l'amplitude de la f.e.m à vide entre phase à 2000t/min.

La valeur de la résistance par phase a été mesurée par un Ohmmètre. D'où, la résistance d'un seul fil est  $r = 0,85\Omega$ .

Un autre essai est réalisé en mesurant les amplitudes de la tension simple et de l'intensité du courant à une vitesse angulaire constante 2000t/min qui correspond, d'après la formule (2.26), à une fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi} = 66,67Hz$ . Par suite, connaissant l'amplitude de la f.e.m à vide simple, la valeur de la résistance et la valeur de  $\cos\varphi$ , on peut déduire la valeur de la réactance ( $L_e\omega$ ) à partir d'une simple représentation vectorielle: le diagramme de Behn-Eshenbourg. La tension par phase à la sortie de l'alternateur est  $u(t) = Ue^{j\omega t}$  et le courant parcouru dans la bobine est  $i(t) = Ie^{j\omega t + \varphi}$ ;  $\varphi$  est l'angle de déphasage entre la tension et l'intensité du courant. L'équation électrique de l'alternateur (2.32) peut être simplifiée sous la forme suivante :

$$E_v = U + jL_e\omega I + rI. \quad (2.44)$$

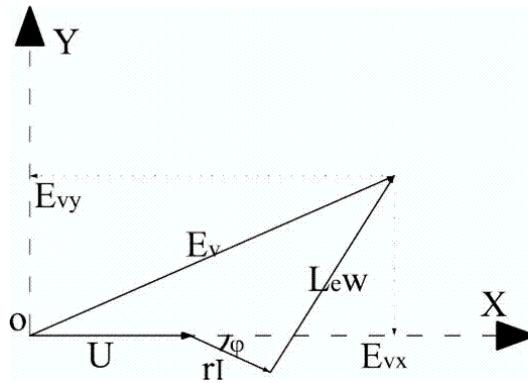


FIG. 2.11 – Diagramme vectoriel de Behn-Eshenbourg.

A partir du diagramme de Behn-Eshenbourg de cette équation défini par la figure (2.11), on déduit le système d'équations

$$\begin{cases} E_{vx} = U + rI\cos\varphi + L_e\omega I\sin\varphi \\ E_{vy} = -rI\sin\varphi + L_e\omega I\cos\varphi \end{cases} \quad (2.45)$$

par projection sur les axes X et Y. La résolution de ce système permet de déterminer la valeur de la réactance et par conséquent la valeur de l'inductance de la bobine :  $L_e = 0,0036$  Henry.

Après l'identification des paramètres électriques, on peut identifier le coefficient mécanique du couple électromagnétique  $K_c$ , en proposant toujours la même expérience réalisée dans le paragraphe précédent. On lâche le pendule en vibration libre à partir d'un angle  $\theta_0$  et

on mesure expérimentalement la tension  $V_s(t)$  en court-circuit. La constante du couple électromagnétique  $K_c$  est celle qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$\tilde{J}(K_c) = \int_0^T (V_s^{exp}(t) - V_s^{num}(K_c, t))^2 dt. \quad (2.46)$$

La tension de sortie numérique  $V_s^{num}(K_c, t)$  est donnée par la résolution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} I_{ap}\ddot{\theta} + C_{ap}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta + K_c i(t)\sin(\beta\theta(t)) = 0 \\ L_e \frac{di}{dt} + ri(t) - K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta\theta(t)) = 0 \\ V_s(t) = \frac{ER_2}{2\pi NR_1} \theta(t) \end{cases} \quad (2.47)$$

La constante mécanique qui minimise la fonctionnelle (2.46), en utilisant l'algorithme du gradient, est  $K_c = 5Vrad^{-1}s$ . A cette valeur les deux courbes, la tension numérique  $V_s^{num}(t)$  et la tension  $V_s^{exp}(t)$  expérimentale, représentées dans la figure (2.12) sont confondues.

Une autre comparaison entre les résultats numérique et expérimental est faite lorsque une résistance est attachée aux bornes de l'alternateur de valeur  $R = 6,8\Omega$ . Pour la valeur de  $K_c$  indiquée ci-dessus, les deux courbes expérimentale et numérique sont aussi confondues, figure (2.13).

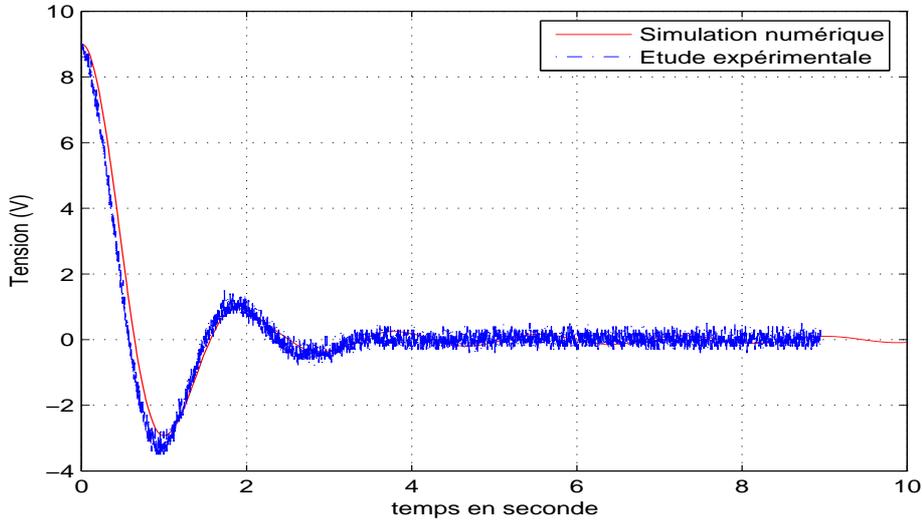


FIG. 2.12 – Comparaison entre la tension  $V_s(t)$  expérimentale et numérique en court-circuit.

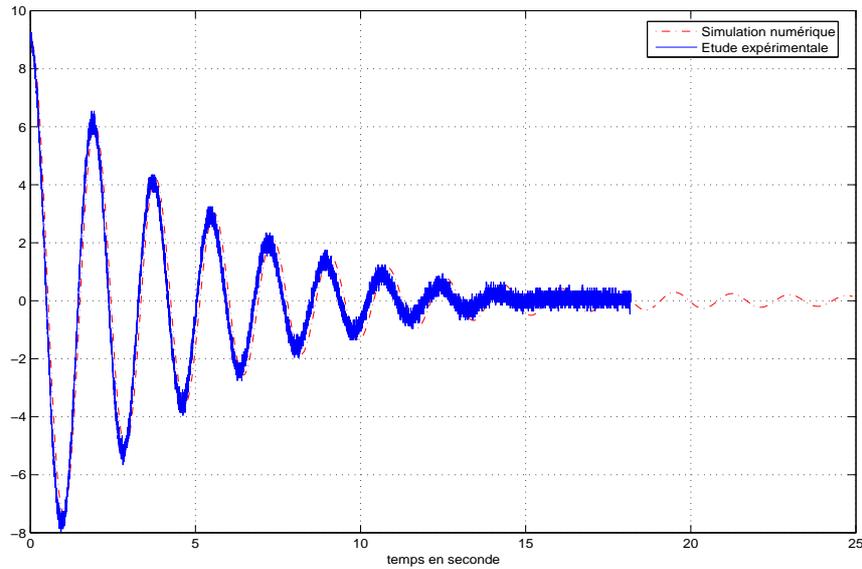


FIG. 2.13 – Comparaison entre la tension  $V_s(t)$  expérimentale et numérique à  $R = 6,8\Omega$ .

En effectuant ces essais, on a identifié les coefficients suivants :  $C_{ap} = 0,18Kg/s$ ,  $K_e = 0,06Vrad^{-1}s$ ,  $r = 0,85\Omega$ ,  $L_e = 0,0036$  Henry et  $K_c = 5Vrad^{-1}s$ .

## 2.4 Vibrations horizontale et verticale de la poutre

Dans le paragraphe précédent, on a considéré le cas où la poutre vibre seulement dans le plan horizontal. Par ailleurs, l'actionneur est destiné à amortir ce type de vibration. On considère dans ce paragraphe que la poutre est soumise à une combinaison de vibrations : vibration verticale, dans le plan  $(OXZ)$ , et vibration horizontale, dans le plan  $(OXY)$ . L'actionneur est toujours considéré fixé à l'extrémité libre de la poutre. Par ailleurs, les vibrations de la poutre induisent une vibration du pendule dans le plan  $(OYZ)$ , en faisant un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $(OZ)$ , comme est montré sur la figure (3.1). La rotation du pendule entraîne la rotation du rotor de l'alternateur avec un angle  $\beta\theta$ ,  $\beta$  est le rapport d'engrenage entre l'alternateur et le pendule. Pour simuler numériquement le système formé par les équations de la poutre, du pendule et de l'alternateur, on propose de discrétiser les équations de la poutre puis de coupler tous les équations du système. On commence à définir les équations des forces de liaison horizontale  $v_H(t)$  et verticale  $v_V(t)$  entre actionneur et poutre et l'équation de rotation du pendule. Ces équations

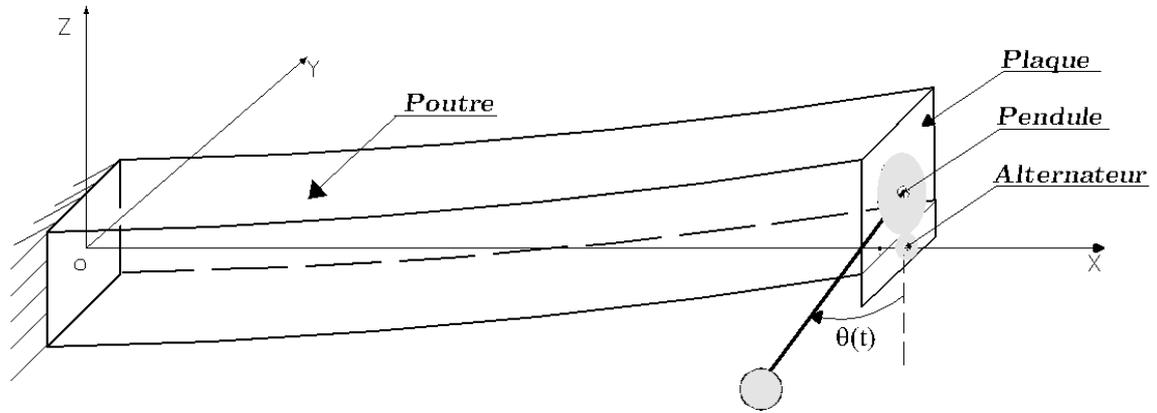


FIG. 2.14 – *Modèle mécanique : vibration horizontale et verticale de la poutre.*

seront obtenues en appliquant les équations de Lagrange. Les déplacements de l'extrémité supérieure "A" du pendule selon les axes  $(OY)$  et  $(OZ)$  seront notés, respectivement,  $y(L,t)$  et  $z(L,t)$ . Le vecteur position de l'extrémité supérieure du pendule noté  $\mathbf{r}_p$ , le vecteur position du centre de gravité de la barre du pendule noté  $\mathbf{r}_b$  et le vecteur position de la boule du pendule noté  $\mathbf{r}_s$  peuvent être définis en petit déplacement, dans le système des coordonnées orthonormales  $(O,X,Y,Z)$  des vecteurs unitaires, respectivement,  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_p &= L\mathbf{a}_1 + y(L,t)\mathbf{a}_2 + z(L,t)\mathbf{a}_3 \\
 \mathbf{r}_b &= L\mathbf{a}_1 + [y(L,t) + \frac{l_b}{2}\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 + [z(L,t) - \frac{l_b}{2}\cos(\theta)]\mathbf{a}_3 \\
 \mathbf{r}_s &= L\mathbf{a}_1 + [y(L,t) + (l_b + R_s)\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 + [z(L,t) - (l_b + R_s)\cos(\theta)]\mathbf{a}_3
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Les vecteurs vitesses correspondants sont

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{r}}_p &= \dot{y}(L,t)\mathbf{a}_2 + \dot{z}(L,t)\mathbf{a}_3 \\
 \dot{\mathbf{r}}_b &= [\dot{y}(L,t) + \frac{l_b}{2}\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 + [\dot{z}(L,t) + \frac{l_b}{2}\dot{\theta}\sin(\theta)]\mathbf{a}_3 \\
 \dot{\mathbf{r}}_s &= [\dot{y}(L,t) + (l_b + R_s)\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 + [\dot{z}(L,t) + (l_b + R_s)\dot{\theta}\sin(\theta)]\mathbf{a}_3
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

L'énergie cinétique totale du pendule est  $T = T_p + T_b + T_s$ .

Avec

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2}(m_1 + m_a)(\dot{y}(L,t))^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_a)(\dot{z}(L,t))^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 \\ T_b &= \frac{1}{2}m_b[(\dot{y}(L,t))^2 + (\dot{z}(L,t))^2] + \frac{1}{6}m_b l_b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_b l_b \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta + \frac{1}{2}m_b l_b \dot{\theta} \dot{z}(L,t) \sin\theta \\ T_s &= \frac{1}{2}m_s[(\dot{y}(L,t))^2 + (\dot{z}(L,t))^2] + \frac{1}{2}m_s(l_b + R_s)^2 \dot{\theta}^2 + m_s(l_b + R_s)\dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta \\ &\quad + m_s(l_b + R_s)\dot{\theta} \dot{z}(L,t) \sin\theta \end{aligned} \quad (2.50)$$

L'énergie cinétique du centre de gravité du pendule  $T_G = T_b + T_s$ , en introduisant les équations (2.1) et (2.2) sera défini comme suit :

$$T_G = \frac{1}{2}m_2[(\dot{y}(L,t))^2 + (\dot{z}(L,t))^2] + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{\theta} \dot{y}(L,t) \cos\theta + m_2 l \dot{\theta} \dot{z}(L,t) \sin\theta. \quad (2.51)$$

L'énergie potentielle totale U du pendule est

$$U = (m_1 + m_a)gz(L,t) + m_2g(z(L,t) - l \cos\theta). \quad (2.52)$$

L'énergie dissipative totale D du pendule est

$$D = \frac{1}{2}C_p \dot{\theta}^2. \quad (2.53)$$

$C_p$  est le coefficient d'amortissement du pendule. Les équations des forces de liaison et l'équation du pendule sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange (2.9). Où les coordonnées généralisées  $q_k$  et les forces extérieures  $Q_k$  sont définies comme suit :

$$q_k = \{y(L) \quad z(L) \quad \theta\} \quad \text{et} \quad Q_k = \{v_H \quad v_V \quad -C_m\}. \quad (2.54)$$

Le couple d'engrenage entre pendule et alternateur  $C_m$  et les forces de liaison horizontale  $v_H$  et verticale  $v_V$  sont donnés par le système suivant :

$$\begin{cases} v_H(t) = M_{ap}\ddot{y}(L,t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos\theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin\theta \\ v_V(t) = M_{ap}g + M_{ap}\ddot{z}(L,t) + m_2 l \ddot{\theta} \sin\theta + m_2 l \dot{\theta}^2 \cos\theta \\ I_p \ddot{\theta} + m_2 l \dot{y}(L,t) \cos\theta + m_2 l \dot{z}(L,t) \sin\theta + C_p \dot{\theta} + m_2 g l \sin\theta = -C_m \end{cases} \quad (2.55)$$

Les équations de vibration horizontale de la poutre, en négligeant la densité linéique de force répartie sur toute la longueur de la poutre et en se plaçant en HPP, sont définies par le système (2.15) et celles de vibration verticale sont :

$$\begin{cases} \rho A \ddot{z}(x,t) + EI_y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}(x,t) = 0 & \text{dans} \quad (0,L) \times [0,T] \\ z(L,t) = z_A(t), \quad EI_y \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(L,t) = v_V(t) & \text{sur} \quad [0,T] \\ z(0,t) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(L,t) = 0 & \text{sur} \quad [0,T] \\ z(x,0) = z^0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = z^1(x) & \text{dans} \quad (0,L) \end{cases} \quad (2.56)$$

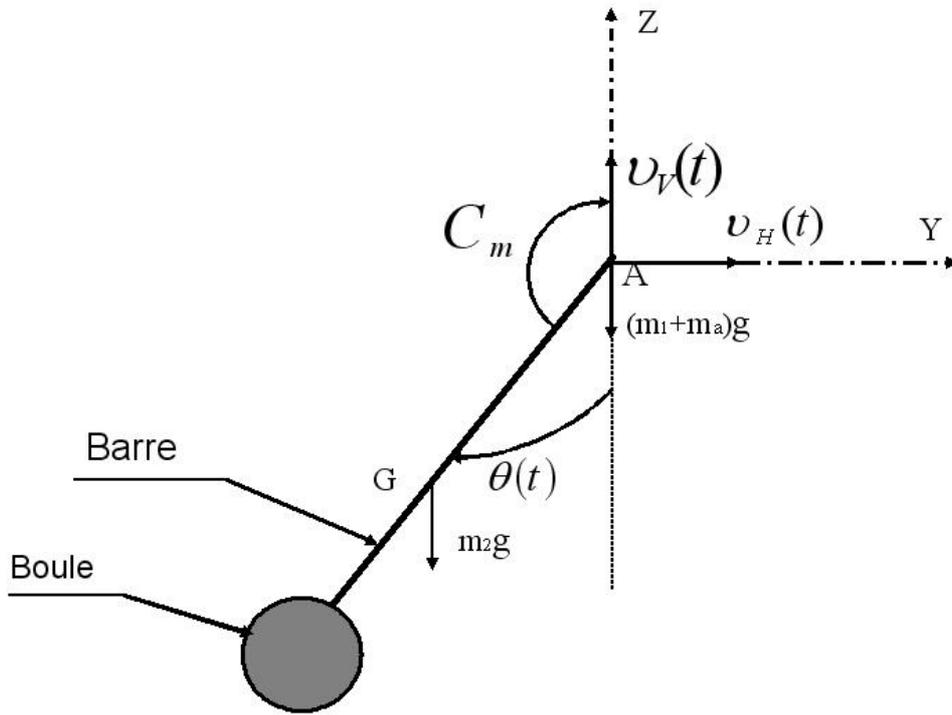


FIG. 2.15 – Les forces appliquées sur le pendule.

$z(x,t)$  est le déplacement de la poutre dans le plan vertical  $(OXZ)$  et  $I_y$  est le moment d'inertie de la poutre selon l'axe  $Y$ . Aux équations du pendule et de la poutre on ajoute les équations, électrique et mécanique, de l'alternateur.

$$\begin{cases} L_e \frac{di}{dt}(t) + (r + R(t))i(t) = K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta\theta(t)) \\ \beta I_a \ddot{\theta} + \beta C_a \dot{\theta} = -K_c i(t) \sin(\beta\theta(t)) + C_m \end{cases} \quad (2.57)$$

On adopte la même démarche qu'au paragraphe précédent pour déterminer un système discrétisé couplé. Ainsi, on obtient un nouveau système d'équations, d'inconnues  $y(x,t)$ ,  $z(x,t)$ ,  $\theta(t)$  et  $i(t)$ .

On cherche le champ déplacement  $\underline{U}(x,t) = (y(x,t), z(x,t))$  dans l'ensemble  $\mathbf{W}$ , défini comme suit [14]:

$$\mathbf{W} = \{ \hat{\underline{U}}(x) = (\hat{y}(x), \hat{z}(x)) \in (H^2(0,L))^2 \text{ tel que } \hat{\underline{U}}(0) = 0, \frac{d\hat{\underline{U}}}{dx}(0) = 0 \}$$

D'où la formulation variationnelle suivante:

$$\begin{cases} \forall \hat{\underline{U}} \in \mathbf{W} \\ \mathbf{b}(\ddot{\underline{U}}, \hat{\underline{U}}) + \mathbf{a}(\underline{U}, \hat{\underline{U}}) = -v_H(t)\hat{y}(L) - v_V(t)\hat{z}(L) \end{cases} \quad (2.58)$$

Avec  $\mathbf{b}(\ddot{\underline{U}}, \hat{\underline{U}}) = \rho A \int_0^L \ddot{y}(x,t) \hat{y}(x) dx + \rho A \int_0^L \ddot{z}(x,t) \hat{z}(x) dx$   
 et  $\mathbf{a}(\underline{U}, \hat{\underline{U}}) = EI_z \int_0^L \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(x) dx + EI_y \int_0^L \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) \frac{d^2 \hat{z}}{dx^2}(x) dx$ . Dans cette formulation on n'a pas tenu compte de la densité linéique des forces réparties sur la poutre.

Les modes propres de la poutre sont trouvés en cherchant des solutions de la forme  $\underline{U}(x,t) = \underline{\varphi}(x)e^{i\omega t}$  du système homogène conservatif associé à la formulation (2.58).

$\underline{\varphi}(x) = (\varphi^y(x), \varphi^z(x))$  est le vecteur des modes propres de la poutre formé par les modes horizontaux et verticaux. Le problème aux valeurs propres peut être formulé sous la forme suivante [14]:

$$\begin{cases} \text{trouver } (\lambda, \underline{\varphi}) \in \mathbf{IR} \times \mathbf{W} \text{ tel que } \forall \hat{\underline{U}} \in \mathbf{W} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}, \hat{\underline{U}}) = \lambda \mathbf{b}(\underline{\varphi}, \hat{\underline{U}}) \end{cases} \quad (2.59)$$

Ce problème admet une infinité de solutions. On note par la suite  $\mathbf{W}_N$ , l'espace engendré par les N premiers modes propres de la poutre. Les modes ainsi définis vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{b}(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = m_j^* \delta_{ij} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = k_j \delta_{ij} \end{cases} \quad (2.60)$$

$m_j^*$  est la j-ième masse modale et  $k_j$  est la j-ième rigidité modale. Vu que  $\underline{\varphi}_i(L) \neq 0$  pour  $i=1, \dots, N$ , on impose aussi de normaliser les modes propres par amplification en imposant la condition suivante :

$$\text{Max} \underline{\varphi}_i(L) = 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.61)$$

Avec  $\forall \underline{a} \in \mathbf{IR}^n$  on pose  $\text{Max}(\underline{a}) = \text{Max}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$ .

L'approximation de la solution du problème (2.58) consiste simplement à introduire le sous espace de dimension finie  $\mathbf{W}_N$  qui est formé par les N premiers modes propres. La projection du déplacement sur cette base modale nous permet de déterminer une estimation modale du déplacement sur les N premiers modes propres sous la forme suivante :

$$\underline{U}_N(x,t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \underline{\varphi}_i(x), \quad (2.62)$$

où  $\alpha_i(t)$  est l'ième contribution modale du déplacement.

Le déplacement estimé (2.62) est solution de la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \forall \hat{\underline{U}}_N \in \mathbf{W}_N \\ \mathbf{b}(\ddot{\underline{U}}_N, \hat{\underline{U}}_N) + \mathbf{a}(\underline{U}_N, \hat{\underline{U}}_N) = -v_{HN}(t) \hat{y}(LN) - v_{VN}(t) \hat{z}(L) \end{cases} \quad (2.63)$$

$v_{HN}(t)$  et  $v_{VN}(t)$  sont les forces de liaisons discrétisées horizontale, respectivement, verticale,  $\underline{U}_N(x,t) = (y_N(x,t), z_N(x,t))$  et  $\hat{\underline{U}}_N(x,t) = (\hat{y}_N(x,t), \hat{z}_N(x,t))$ .

Après le remplacement des déplacements par leurs estimations (2.62) dans le système (2.63) et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité (2.60) et de normalisation (2.61) on obtient le problème discrétisé suivant :

$$m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) = -v_{HN}(t) \varphi_i^y(L) - v_{VN}(t) \varphi_i^z(L) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (2.64)$$

Les expressions discrétisées de ces forces ainsi que l'équation discrétisée du pendule sont obtenues en remplaçant les déplacements horizontal et vertical du système (2.55) par leurs approximations définis par l'équation (2.62). On ajoute les équations du pendule et de l'alternateur au système (2.64), il vient que les contributions modales des déplacements, l'angle de rotation de la barre du pendule et le courant électrique vérifient le système différentiel d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \varphi_j(L) \varphi_i(L) + m_2 l \ddot{\theta} (\cos \theta \varphi_i^y(L) + \sin \theta \varphi_i^z(L)) \\ + k_i \alpha_i(t) = -M_{ap} g \varphi_i^z(L) + m_2 l \dot{\theta}^2 (\sin \theta \varphi_i^y(L) - \cos \theta \varphi_i^z(L)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{i=1}^N \ddot{\alpha}_i(t) (\cos \theta \varphi_i^y(L) + \sin \theta \varphi_i^z(L)) + C_{ap} \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta + K_e i(t) \sin(\beta \theta) = 0 \\ L_e \frac{di}{dt}(t) + (r + R(t)) i(t) - K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta) = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Durant le phénomène de vibration mécanique, la poutre excite le pendule qui vibre en faisant un angle de rotation d'axe (OX) et entraîne l'alternateur en rotation. Lors de sa rotation, l'alternateur transforme une partie de l'énergie mécanique en énergie électrique qui sera dissipée par effet Joule dans une résistance, l'autre partie est dissipée par frottement dont on rend compte par le coefficient d'amortissement mécanique  $C_{ap}$ . Pour mieux comprendre et afin de déterminer le coefficient d'amortissement total, on suppose que la partie inductive de l'alternateur de la dernière équation du système (2.65) est négligeable ; on revient à la vérification de la validité de cette hypothèse simplificatrice dans le cinquième chapitre. On en déduit l'expression du courant électrique

$$i(t) = \frac{\beta K_e}{r + R(t)} \dot{\theta} \sin(\beta \theta). \quad (2.66)$$

Puis on remplace cette expression dans l'équation de la rotation de l'actionneur qui sera définie comme suit :

$$I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{i=1}^N \ddot{\alpha}_i(t) (\cos \theta \varphi_i^y(L) + \sin \theta \varphi_i^z(L)) + [C_{ap} + \frac{\beta K_e K_c}{r + R(t)} \sin^2(\beta \theta)] \dot{\theta} + m_2 g l \sin \theta = 0. \quad (2.67)$$

A partir de cette équation il est clair que l'amortissement est la somme d'un amortissement purement mécanique et d'un amortissement purement électrique qui est une fonction

décroissante de la résistance à ajouter : **système réel**.

L'amortissement total varie entre une valeur minimale et une valeur maximale : lorsque  $R = \infty$ , l'alternateur est en circuit ouvert, pas de courant électrique, et l'amortissement est purement mécanique et lorsque  $R = 0$ , l'alternateur est en court-circuit et l'amortissement est maximal.

Lorsque la résistance extérieure attachée aux bornes de l'alternateur est fixe, on parle du contrôle passif et lorsqu'elle est variée en temps réel selon une loi de contrôle, on parle du contrôle semi-actif. On verra dans le cinquième chapitre comment on peut faire varier cette résistance en temps réel selon une loi de contrôle.

Afin de déterminer les paramètres optimaux du TMD pendulaire, on suppose que l'amortissement électrique est équivalent à un amortissement visqueux. L'actionneur électromécanique sera appelé, dans ce cas, **actionneur de référence**, le système d'équations sera appelé **système de référence**, et l'équation (2.67) sera écrit comme suit :

$$I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l \sum_{i=1}^N \ddot{\alpha}_i(t)(\cos\theta\varphi_i^y(L) + \sin\theta\varphi_i^z(L)) + C_{eq}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0. \quad (2.68)$$

$C_{eq} = C_{ap} + C_{eq}^{électrique}$  est le coefficient d'amortissement visqueux total équivalent.

Avec  $C_{eq}^{électrique}\dot{\theta}$  est l'amortissement visqueux équivalent à l'amortissement électrique dû à la résistance fixe externe attachée aux bornes de l'alternateur.

**En contrôle passif**, la valeur optimale de la constante de la résistance externe  $R$ , est déterminée en minimisant la différence entre l'amortissement optimal du système de référence et l'amortissement du système réel par la méthode des moindres carrées.

**En contrôle semi-actif**, le coefficient d'amortissement varie en temps réel selon une loi de contrôle et sera noté  $\tilde{C}_{eq}(t)$ . Ce coefficient d'amortissement est déterminé tel que la réponse du système réel soit égale à la réponse du système de référence à chaque étape de construction comme on verra en détail dans le chapitre 5.

# Chapitre 3

## Conception des paramètres optimaux d'un amortisseur à masse accordée pendulaire et un alternateur : actionneur de référence

### 3.1 Introduction

Un contrôle purement passif consiste à disposer sur la structure un système qui stabilise les vibrations comme pour le contrôle actif, mais sans apport d'énergie de l'extérieur. Ce type de contrôle est plus simple et ne présente aucun problème d'instabilité. D'autre part, il consiste en une réduction des vibrations moins consistante que celle obtenue avec le contrôle actif et sur une bande de fréquence plus serrée. Parmi les amortisseurs les plus utilisés en génie civil, on peut citer l'amortisseur à masse accordée (TMD). La raideur et la masse d'un tel système sont choisies pour que l'oscillateur ainsi constitué dissipe le maximum d'énergie de l'ouvrage que l'on souhaite contrôler. Ce système est utilisé pour amortir la vibration d'un seul mode de vibration de la structure en synchronisant la fréquence de vibration de l'amortisseur sur le mode à amortir. Le problème d'amortissement d'une manière passive des vibrations relatives à plusieurs modes d'une structure mécanique en utilisant plusieurs amortisseurs à masse accordée est traité dans [94], où l'auteur a utilisé deux amortisseurs à masse accordée pour réduire les vibrations causées par l'activité humaine des deux premiers modes propres du plancher.

La performance d'un amortisseur à masse accordée passif est très liée aux réglages de ses paramètres qui ont été le sujet de nombreuses recherches. La première méthode de conception est introduite par Den Hartog (1947) [29] qui applique un critère d'optimisation consiste à la minimisation du déplacement de la structure principale, lorsque son amortissement propre est nul et lorsqu'elle est soumise à une excitation harmonique. Il a été déterminé les paramètres optimaux du TMD en fonction du rapport de la masse du TMD sur la masse modale du mode à amortir. Lorsque l'amortissement propre de la structure principale est non nul, ces paramètres ont été obtenus par [103] en appliquant un critère qui consiste à la minimisation de la vitesse de la structure principale. Une étude détaillée a été réalisée par [105]; lorsque la structure est soumise à une excitation aléatoire, les paramètres optimaux du TMD ont été donnés en appliquant un critère d'optimisation qui consiste à minimiser l'accélération de la structure principale. Par contre, lorsque la structure principale est en vibration libre, les paramètres optimaux du TMD ont été donnés par [89] en appliquant un critère d'optimisation qui consiste à la maximisation du décrétement logarithmique. Ces paramètres ont été obtenus, plus tard, lorsque l'amortissement propre est non nul par [39]. Tous ces critères, et plusieurs autres, ont déterminé les paramètres optimaux du TMD en fonction du rapport de la masse du TMD sur la masse modale du mode à amortir. Mais, l'actionneur introduit dans cette étude contient la masse du TMD pendulaire et la masse totale de l'actionneur. D'où, l'intérêt d'introduire un critère qui tient compte de tous les paramètres de cet actionneur.

Dans ce chapitre on considère un modèle mécanique à un seul degré de liberté reporté dans le deuxième chapitre et dérivé, à travers réduction modale, d'un modèle à plusieurs degrés de liberté obtenu par discrétisation modale d'une poutre encastrée libre. A cette équation on ajoute l'équation de l'actionneur de référence; système formé par une poutre et par un actionneur de référence. Une étude paramétrique de ce système est effectuée et afin d'amortir le premier mode propre de la poutre, les paramètres optimaux de l'actionneur sont déterminés en appliquant un critère d'optimisation. Ce critère est basé sur la maximisation du taux de décroissance exponentiel au moyen de la technique de placement des pôles après linéarisation du système couplé. Cette technique a été introduite pour déterminer les paramètres optimaux d'un circuit électrique afin d'amortir la vibration d'une structure à travers des éléments piézoélectriques [10, 22, 23]. On a défini un paramètre indicatif de l'amortissement du système, correspondant au taux de décroissance exponentiel des oscillations libres du système, et on a réalisé une étude détaillée de l'amortissement obtenue en variant les paramètres de l'actionneur. Cette étude est analysée sur le premier mode propre de la vibration horizontale de la poutre et il est la même pour tout autre

mode sélectionné.

La comparaison entre les paramètres optimaux de l'actionneur obtenus selon le critère de la maximisation du taux de décroissance exponentiel et les paramètres optimaux selon d'autres critères donnés en littérature ainsi la réponse de la structure correspondante sera étudiée dans le prochain chapitre.

## 3.2 Modèle mécanique

Après l'écriture des équations discrétisées du modèle et l'identification des paramètres de l'alternateur dans le chapitre précédent, on introduit dans ce chapitre un critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel pour obtenir les paramètres optimaux de l'actionneur. Pour chercher ces paramètres, on considère un système mécanique formé d'une poutre encastree-libre ; de longueur  $L$ , de section  $A$  et de masse volumique  $\rho$ , à son extrémité libre est attaché l'actionneur électromécanique qui sera supposé dans la suite de ce chapitre comme actionneur de référence. Cet actionneur est utilisé pour amortir la vibration de la poutre. Comme la performance d'un TMD, en contrôle passif, est très dépendante du mode à amortir de la structure, on considère seulement le premier mode de vibration horizontale de la poutre. Le système de ce contrôle passif est à deux degrés de liberté ; la première contribution modale de la poutre et l'angle de vibration du pendule. Pour obtenir un amortissement passif optimal du premier mode de cette poutre il faut choisir des valeurs optimales de la longueur du pendule et du coefficient d'amortissement total équivalent de l'actionneur indiqué par la figure (3.1). Le comportement de ce système, en considérant seulement le premier mode de vibration horizontale de la poutre, est complètement décrit, après discrétisation, par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} (m_1^* + M_{ap})\ddot{\alpha}_1(t) + m_2l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + c_1\dot{\alpha}_1(t) + k_1\alpha_1(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l\ddot{\alpha}_1(t)\cos\theta + C_{eq}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $m_1^*$ ,  $c_1$ ,  $k_1$  et  $\alpha_1$  sont, respectivement, la première masse modale, le premier amortissement modal, la première rigidité modale et la première contribution modale de la poutre.  $\theta$  est l'angle de rotation de la barre du pendule. On rappelle que  $m_2$  est la masse de la barre et de la boule,  $l$  est la distance entre le point A et le centre de gravité ( $l = AG$ ) : longueur équivalente du pendule,  $M_{ap}$  et  $I_{ap}$  sont, respectivement, la masse et le moment d'inertie total de l'actionneur électromécanique.

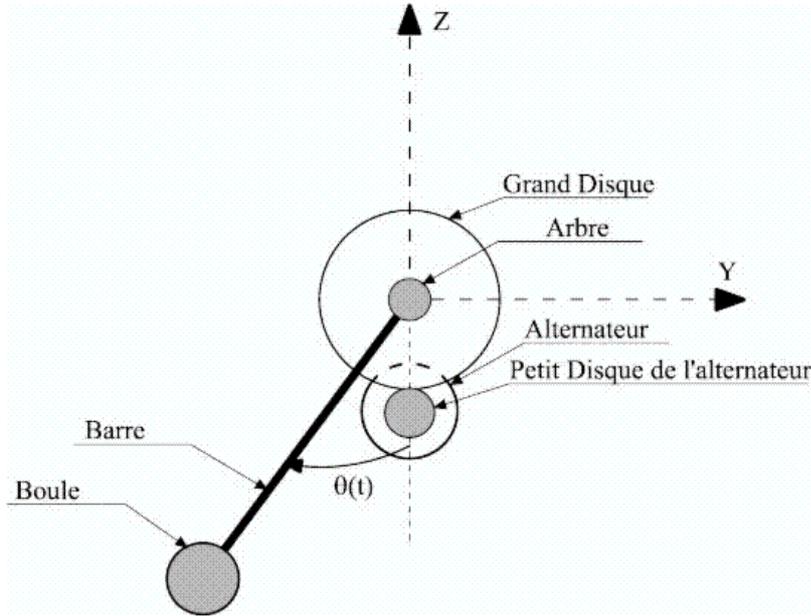


FIG. 3.1 – Représentation schématique de l'actionneur.

Si nous supposons que l'angle de rotation du pendule est faible, le système (3.1) peut être écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\begin{cases} (m_1^* + M_{ap})\ddot{\alpha}_1(t) + m_2 l \ddot{\theta} + c_1 \dot{\alpha}_1(t) + k_1 \alpha_1(t) = 0 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{\alpha}_1(t) + C_{eq} \dot{\theta} + m_2 g l \theta = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.3 Equations adimensionnelles

Dans le but d'optimiser les paramètres du pendule : masse, longueur équivalente et coefficient d'amortissement mécanique, pour obtenir un amortissement optimal de la vibration horizontale de la poutre, il convient de manipuler des paramètres adimensionnels. Les grandeurs fondamentales  $\theta$  et  $t$  sont écrites sous la forme adimensionnelle suivante [22] :

$$\theta = \check{\theta} \Theta, \quad t = \check{t} \tau, \quad (3.3)$$

où les grandeurs majuscules sont adimensionnelles alors que celles avec le tilde sont les échelles relatives. Le système d'équations linéaires (3.2), en introduisant ces paramètres adimensionnels sera écrit comme suit :

$$\begin{cases} (1 + \frac{M_{ap}}{m_1^*})\ddot{\alpha}_1 + \frac{m_2}{m_1^*}l\check{\theta}\ddot{\Theta} + 2\xi_1\omega_1\check{t}\dot{\alpha}_1 + \lambda_1\check{t}^2\alpha_1 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \frac{m_2l}{I_{ap}}\frac{1}{\check{\theta}}\ddot{\alpha}_1 + \frac{C_{eq}}{I_{ap}}\check{t}\dot{\Theta} + \frac{m_2gl}{I_{ap}}\check{t}^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1^*}}$  est la première pulsation modale,  $\lambda_1$  la première valeur propre et  $\xi_1$  le taux d'amortissement réduit du premier mode de la poutre. Les dérivées sont maintenant par rapport au temps adimensionnel  $\tau$ .  $\check{t}$  est choisi tel que le coefficient de  $\alpha_1$  dans la première équation du système (3.4) soit unitaire ; par conséquent on a

$$\check{t} = \frac{1}{\omega_1}. \quad (3.5)$$

Par raison de symétrie,  $\check{\theta}$  sera fixé en supposant que le coefficient de  $\ddot{\Theta}$  dans la première équation soit égal au coefficient de  $\ddot{\alpha}_1$  dans la deuxième équation du système précédent. Par ailleurs, le système linéaire (3.4) s'écrit sous la forme adimensionnelle :

$$\begin{cases} (1 + k)\ddot{\alpha}_1 + \mu l \sqrt{\frac{m_2}{\mu I_{ap}}} \ddot{\Theta} + 2\xi_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_1 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \mu l \sqrt{\frac{m_2}{\mu I_{ap}}} \ddot{\alpha}_1 + 2\zeta p \dot{\Theta} + p^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

avec adaptation des notations suivantes [96] :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{m_1^*k_1}}, & \omega_{ap}^2 = \frac{m_2gl}{I_{ap}} \quad \text{et} \quad p = \frac{\omega_{ap}}{\omega_1} \\ \zeta = \frac{C_{eq}}{2I_{ap}\omega_{ap}}, & k = \frac{M_{ap}}{m_1^*} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{m_2}{m_1^*} \end{cases} \quad (3.7)$$

$\omega_{ap}$  est la pulsation propre du système pendule-alternateur,  $p$  le rapport entre la pulsation propre de la poutre et la pulsation du pendule-alternateur et  $\zeta$  le taux d'amortissement propre de l'actionneur de référence. Les quatre paramètres adimensionnels  $\mu$ ,  $k$ ,  $p$  et  $\zeta$  relient les quatre paramètres dimensionnels de l'actionneur de référence ; la masse du pendule  $m_2$ , la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ , la longueur équivalente du pendule  $l$  et le coefficient d'amortissement total équivalent  $C_{eq}$ . L'inertie totale de l'actionneur est définie en fonction de la longueur équivalente et de la masse du pendule  $m_2$ . Par raison de simplification on suppose que  $I_{ap} = m_2l^2$ .

Si  $\mu = 0$ , le système mécanique couplé poutre-pendule-alternateur revient à l'étude d'une poutre avec une masse concentrée à son extrémité libre.

### 3.4 Solution du système des équations adimensionnelles

On procède maintenant en écrivant le système linéaire des deux équations différentielles ordinaires de seconde ordre (3.6) sous la forme matricielle suivante :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0. \quad (3.8)$$

Avec  $M = \begin{bmatrix} 1+k & \sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2\xi_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta p \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix}$  et  $X = [\alpha_1, \Theta]^T$ . La matrice  $M$  est toujours inversible car son déterminant,  $(1+k-\mu)$ , est non nul puisque la masse du pendule  $m_2$  est inférieure à la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ . Ce système peut être écrit sous la forme d'un système d'état

$$\dot{Z} = \mathbf{A}Z \quad (3.9)$$

des quatre équations différentielles ordinaires du premier ordre.

$Z = [X, \dot{X}]^T$  est la variable d'état et  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$  la matrice d'état. La solution de l'équation (3.9) est de la forme  $Z = Z_0 e^{\mathbf{A}\tau}$  où  $Z_0$  est la condition initiale. Cette solution peut être écrite explicitement comme combinaison linéaire des exponentielles  $e^{\lambda_i \tau}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en utilisant les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice d'état  $\mathbf{A}$ . Les coefficients de cette combinaison linéaire dépendent des conditions initiales. Le polynôme caractéristique de la matrice  $\mathbf{A}$ , dont les racines sont les valeurs propres de ladite matrice, est le suivant :

$$P(\lambda) = \frac{1}{1+k-\mu} \{ (1+k-\mu)\lambda^4 + [2\zeta p(1+k) + 2\xi_1]\lambda^3 + [1+p^2(1+k) + 4\xi_1\zeta p]\lambda^2 + [2\zeta p + 2\xi_1 p^2]\lambda + p^2 \} \quad (3.10)$$

En appliquant le critère de Routh ; un système linéaire est stable si est seulement si ses valeurs propres sont à parties réelles négatives,  $Re(\lambda_i) < 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en accord avec le fait que le système utilisé est purement dissipatif. La solution du système couplé (3.6) est alors constituée de la somme des exponentiels des racines du polynôme (3.10).

### 3.5 Optimisation des paramètres adimensionnels

Afin d'obtenir les paramètres adimensionnels optimaux, on applique un critère d'optimisation qui consiste à maximiser le taux de décroissance exponentiel de la solution de la vibration libre du système mécanique linéaire (3.9). La maximisation de ce taux de

décroissance peut être obtenue au moyen de l'application de la technique de placement des pôles après linéarisation du système différentiel du modèle mécanique couplé [10]. On suppose en premier cas que le coefficient d'amortissement propre de la poutre est nul ;  $\xi_1 = 0$ . Les pôles du système mécanique couplé  $\lambda_i$  sont les racines du polynôme  $P(\lambda)$  (3.10). Ces racines ont des parties réelles non positives. L'optimisation de l'amortissement du système est réalisée en fixant les valeurs de  $\mu$  et de  $k$  dans l'intervalle  $[0,1]$  et en cherchant les valeurs de  $p_{k\mu}$  et de  $\zeta_{k\mu}$  de  $p$  et  $\zeta$  qui maximisent le taux de décroissance exponentiel (ETDR) de la vibration libre de la poutre donnée par :

$$ETDR = \min_i | \operatorname{Re}(\lambda_i) |, \quad (3.11)$$

où  $\operatorname{Re}$  est la partie réelle des racines du polynôme  $P(\lambda)$ . Cette procédure d'optimisation, en paramètres dimensionnels, revient à fixer les valeurs de  $m_2$  et de  $M_{ap}$  et à chercher les valeurs de la longueur équivalente du pendule et de la résistance externe qui maximisent le taux de décroissance exponentiel. La recherche des racines du polynôme  $P(\lambda)$  revient à la recherche des racines du polynôme suivant :

$$\bar{P}(\lambda) = (1 + k - \mu)\lambda^4 + 2\zeta p(1 + k)\lambda^3 + [1 + p^2(1 + k)]\lambda^2 + 2\zeta p\lambda + p^2 \quad (3.12)$$

Ce polynôme a la même forme que le polynôme obtenu par [10, 22] lorsqu'un circuit RL est attaché aux bornes d'un élément piézoélectrique pour amortir une poutre. Dans ce cas et en ordre de maximiser le taux de décroissance exponentiel, les valeurs optimales de  $p$  et de  $\zeta$  sont obtenues lorsque le polynôme a deux racines doubles complexes conjuguées. Par analogie, on suppose que le polynôme (3.12) a deux racines doubles complexes conjuguées :

$$\bar{P}(\lambda) = (1 + k - \mu)[\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_2^2]^2, \quad (3.13)$$

où  $x_1 \in \mathbf{R}^-$  et  $x_2 \in \mathbf{R}$  sont, respectivement, la partie réelle et imaginaire des racines complexes conjuguées. En identifiant les coefficients des deux polynômes (3.12) et (3.13), les valeurs des paramètres adimensionnels optimaux et de ETDR

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{k\mu} = \frac{\sqrt{1+k-\mu}}{1+k} \\ \zeta_{k\mu} = \sqrt{\frac{\mu}{1+k}} \\ ETDR = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1+k}\sqrt{1+k-\mu}} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

sont définies en fonction des paramètres  $\mu$  et  $k$ . On revient lors de la résolution du système adimensionnel sur la validité de l'optimalité de ces paramètres dont on étudie la réponse

de la poutre en variant à chaque fois une paramètre.

Lorsque le polynôme (3.12) a une racine réelle d'ordre quatre, une valeur optimale de  $k$  peut être obtenue en fonction de  $\mu$

$$k = \frac{5\mu - 4}{4}. \quad (3.15)$$

Comme la valeur de  $\mu$  est faible [29], alors à partir de l'équation (3.15), il est presque impossible de trouver une valeur optimale de  $k$ . Par ailleurs, pour fixer les paramètres  $\mu$  et  $k$  on étudie leurs influences sur les autres paramètres de l'actionneur.

Pour voir l'influence de la masse du pendule  $m_2$  et de la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$  sur la réponse du pendule, on trace l'évolution du taux de décroissance exponentiel en fonction de  $k$  et de  $\mu$  en variant l'un et en maintenant l'autre fixe. De la figure (3.2) il résulte que, pour une valeur fixe de  $k$ , ETDR augmente en fonction de  $\mu$  et, pour une valeur fixe de  $\mu$ , diminue en fonction de  $k$ . On remarque aussi, à partir du système (3.14),

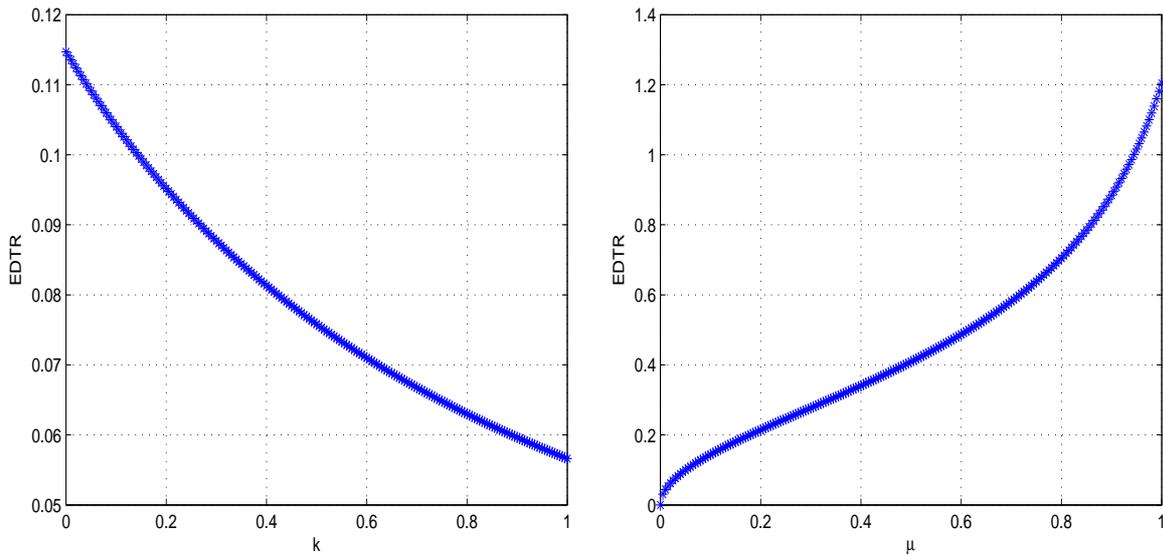


FIG. 3.2 – Evolution de ETDR en fonction de  $k$  à  $\mu = 5\%$  à gauche et en fonction de  $\mu$  à  $k = 15\%$  à droite.

que pour toutes valeurs de  $k$  et de  $\mu$ , le coefficient ETDR est positif. Par ailleurs, la partie réelle des racines du polynôme (3.12) est négative et donc d'après le critère de Routh, le système linéaire mécanique (3.6) est stable.

De même, pour voir l'influence des masses de l'actionneur ( $m_2$  et  $M_{ap}$ ) sur le paramètre de synchronisation et sur le taux d'amortissement réduit, on trace l'évolution de  $p$  et de  $\zeta$  en fonction de  $k$  et de  $\mu$  en fixant à chaque fois l'un et en faisant varier l'autre. De la

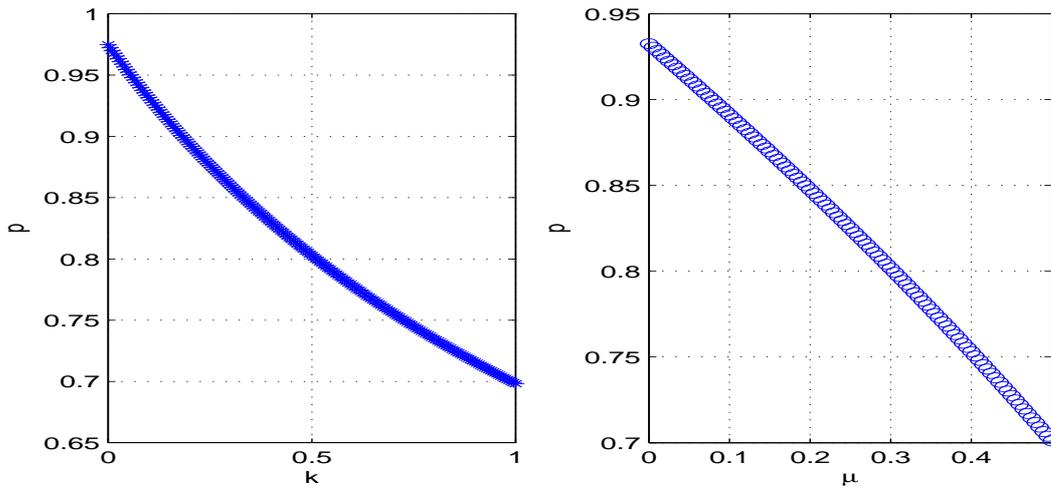


FIG. 3.3 – Evolution de  $p$  en fonction de  $k$  à  $\mu = 5\%$  à gauche et en fonction de  $\mu$  à  $k = 15\%$  à droite.

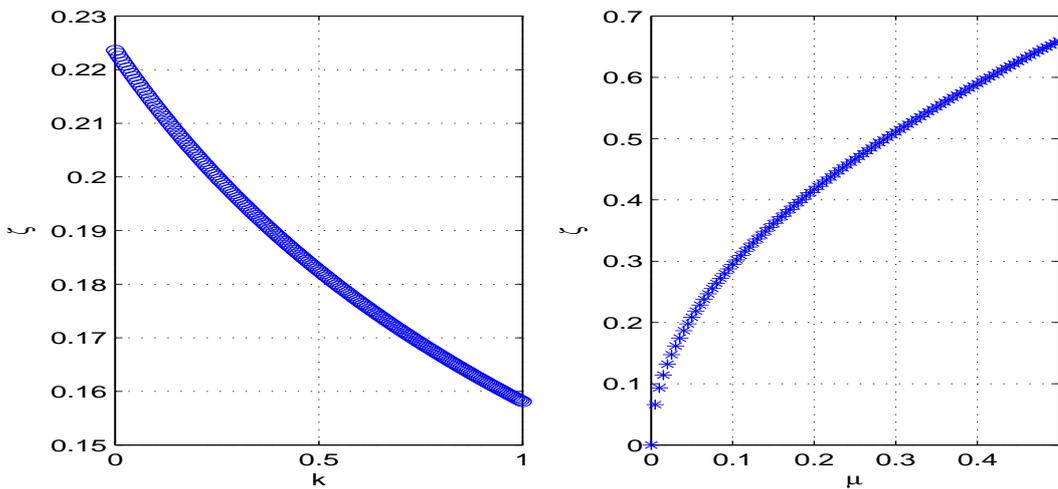


FIG. 3.4 – Evolution de  $\zeta$  en fonction de  $k$  à  $\mu = 5\%$  à gauche et en fonction de  $\mu$  à  $k = 15\%$  à droite.

figure (3.3) il résulte que le paramètre de synchronisation diminue en fonction des masses de l'actionneur. Et par suite, plus les masses de l'actionneur augmentent plus l'influence sur l'amortissement du paramètre de synchronisation diminue. Cette remarque coïncide avec celle donnée par [29]. Mais, en [29] le paramètre de synchronisation modale est défini seulement en fonction de  $\mu$ .

De la figure (3.4) il résulte que le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  diminue en fonction de  $k$  mais il augmente en fonction de  $\mu$ . Par ailleurs, à partir de ces courbes, on ne peut pas définir des valeurs optimales des masses de l'actionneur. Mais, on peut tirer une

constatation : l'amortissement est meilleur lorsqu'on augmente  $\mu$  et on diminue  $k$ . Vu que  $k$  est toujours plus grand que  $\mu$ , on prend dans la suite de ce chapitre  $k = 15\%$  et  $\mu = 5\%$ . Par contre, pour chaque valeur de  $k$  et de  $\mu$  il existe une valeur optimale du paramètre de synchronisation  $p$  et une valeur optimale de  $\zeta$  définies par (3.14). Mais lorsque la valeur de  $p$  est prise d'une manière non optimale elle correspond aussi une valeur du taux d'amortissement réduit  $\zeta$  qui dépend de  $k$ ,  $\mu$  et de  $p$ . La signification des valeurs optimales introduites par les expressions analytiques (3.14) peut être mieux comprise si on introduit le lieu des racines du polynôme (3.12) en variant le taux d'amortissement réduit  $\zeta$ . Dans les figures (3.5) et (3.6) le lieu des racines du polynôme (3.12), dans le demi-plan d'ordonnée positive, est représenté pour  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ , en variant  $\zeta$  et pour des valeurs de  $p$  respectivement égales à  $0,9p_{k\mu}$  et  $1,1p_{k\mu}$ ; la condition d'amortissement maximal est atteinte au point  $x$ , pour lequel la partie réelle du pôle, à partie réelle minimale en valeur absolue, est stationnaire [22]. De même, dans la figure (3.7) est représenté le lieu des racines du polynôme (3.12) pour  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ , en variant  $\zeta$  et pour  $p$  pris en condition de synchronisation  $p = p_{k\mu}$ . Le point optimal, indiqué par  $x$ , lorsque les deux parties imaginaires des pôles coïncident ; racine complexe double, correspond au maximum d'amortissement de la poutre. La valeur optimale de  $\zeta$  trouvée numériquement est conforme à celle donnée par son expression analytique définie par le système (3.14).

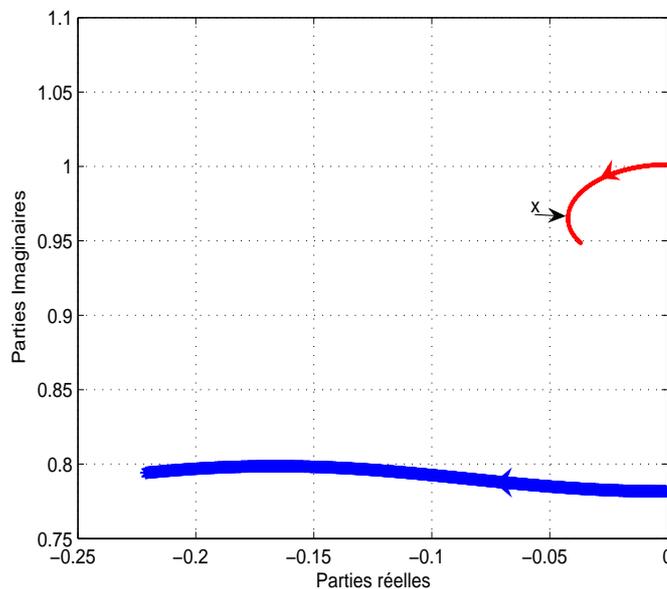


FIG. 3.5 – Lieu des pôles à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$  et en faisant varier  $\zeta$  à  $p = 0,9p_{k\mu}$ .

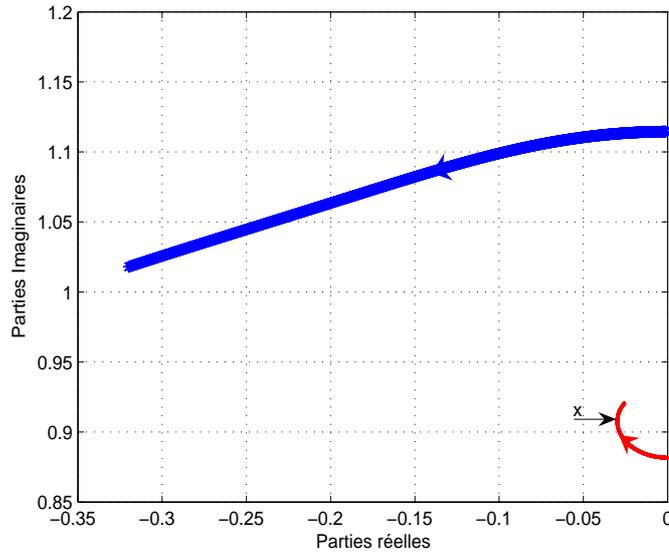


FIG. 3.6 – Lieu des pôles à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$  et en faisant varier  $\zeta$  à  $p = 1,1p_{k\mu}$ .

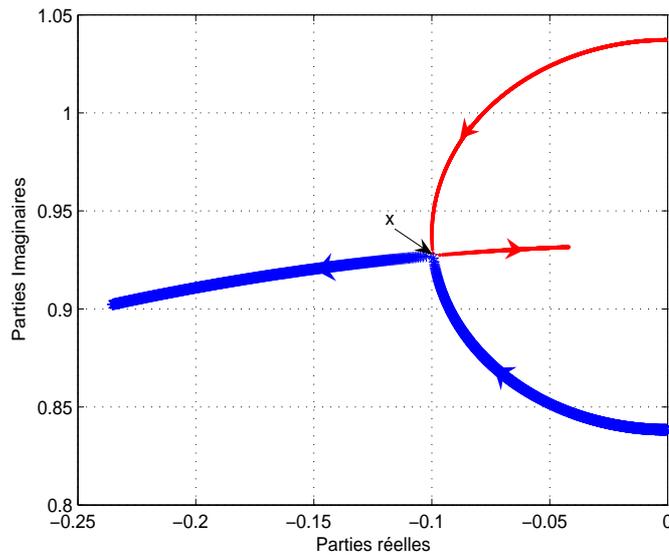


FIG. 3.7 – Lieu des pôles à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$  et en faisant varier  $\zeta$  à  $p = p_{k\mu}$ .

Dans le cas où  $p$  est différent de  $p_{k\mu}$ , une expression analytique du taux d'amortissement réduit  $\zeta$  peut être aussi obtenue en supposant que le polynôme (3.12) a deux racines complexes conjuguées à même partie réelle,

$$\bar{P}(\lambda) = (1 + k - \mu)(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_2^2)(\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_1^2 + x_3^2), \quad (3.16)$$

où  $x_1 \in \mathbf{R}^-$  est la partie réelle et  $(x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2$  sont les parties imaginaires des racines complexes conjuguées. Le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  et le taux de décroissance exponentiel seront déterminés par identification des coefficients des polynômes (3.12) et (3.16) en fonction des trois paramètres adimensionnels du système  $k$ ,  $\mu$  et  $p$ . La recherche de la valeur de ETDR, coïncide toujours avec la partie réelle  $-x_1$ .

On peut considérer aussi le cas où le coefficient d'amortissement propre de la poutre n'est plus négligeable. Les valeurs  $p_{k\mu}$ ,  $\zeta_{k\mu}$  et la correspondante valeur du taux de décroissance exponentiel, lorsque le polynôme caractéristique de la matrice d'état a deux racines doubles complexes conjuguées pour des valeurs fixées de  $k$  et  $\mu$ , sont dans ce cas définies par les relations implicites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{k\mu\xi_1} = \frac{-\mu\xi_1 + \sqrt{1+k-\mu}\sqrt{(1+k-\xi_1^2)\mu}}{(1+k)\sqrt{(1+k-\xi_1^2)\mu}} \\ \zeta_{k\mu\xi_1} = \frac{\xi_1\sqrt{1+k-\mu} + \sqrt{(1+k-\xi_1^2)\mu}}{1+k} \\ ETDR_{k\mu\xi_1} = \frac{\mu(1+k-2\xi_1^2)\sqrt{1+k-\mu} + 2\xi_1(1+k-\mu)\sqrt{\mu(1+k-\xi_1^2)}}{2(1+k)(1+k-\mu)\sqrt{(1+k-\xi_1^2)\mu}} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Il est facile de vérifier que le système (3.17) coïncide avec le système (3.14) lorsque  $\xi_1 = 0$ . Confrontant en outre la troisième équation du (3.17) avec la troisième équation du (3.14) résulte que l'amortissement maximal obtenu dans le cas de dissipation propre de la poutre non nul ( $\xi_1 \neq 0$ ) est supérieur à celui obtenu dans le cas où ( $\xi_1 = 0$ ) pour les mêmes valeurs de  $k$  et  $\mu$ .

### Optimisation basée sur la considération de la fonction de transfert

Comme on a indiqué au début de ce chapitre, ils existent plusieurs autres critères pour obtenir les valeurs optimales d'un amortisseur à masse accordée tels que [98] :

- La minimisation du déplacement de la structure principale.
- La maximisation de la rigidité dynamique de la structure principale.
- La maximisation du coefficient d'amortissement équivalent de l'ensemble structure-TMD.
- La minimisation de la vitesse de la structure principale.
- La minimisation de l'accélération de la structure principale.

On rappelle ici la méthode basée sur l'analyse en fréquence de  $\alpha_1$ . Cette méthodologie a été illustrée en [98], appliquée à un système mécanique à un seul degré de liberté amorti par un amortisseur à masse accordée et soumis à une excitation harmonique, et a été illustrée

en [22] pour un système électromécanique en utilisant un élément piézoélectrique. On considère la réponse en fréquence de  $\alpha_1$  obtenue du système

$$\begin{cases} (1+k)\ddot{\alpha}_1(t) + \sqrt{\mu}\ddot{\Theta} + \alpha_1(t) = 1 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu}\ddot{\alpha}_1(t) + 2\zeta p\dot{\Theta} + p^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

correspond à (3.6) dans lequel est considéré nul le coefficient d'amortissement propre de la poutre et ayant une force externe adimensionnelle unitaire. La réponse en fréquence de  $\alpha_1$  est donnée par l'expression suivante :

$$\alpha_1(\Omega) = \frac{-\Omega^2 + 2j\zeta p\Omega + p^2}{(1+k-\mu)\Omega^4 - 2j\zeta p(1+k)\Omega^3 - (1+p^2(1+k))\Omega^2 + 2j\zeta p\Omega + p^2} \quad (3.19)$$

où  $\Omega$  est la pulsation adimensionnelle et  $j = \sqrt{-1}$ . L'optimisation se fait en cherchant les valeurs des paramètres adimensionnels qui minimisent la quantité :

$$\|\alpha_1(\Omega)\|_\infty = \sup_{\Omega} |\alpha_1(\Omega)| \quad (3.20)$$

Une telle minimisation optimise la réponse du système, sollicitée par une force externe sur une large bande de fréquence.

Dans la figure (3.8) est reportée la réponse en fréquence de  $|\alpha_1(\Omega)|$  pour  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$  et  $p = 0,97$  et pour différentes valeurs de  $\zeta$ . On note qu'il existe deux valeurs de  $\Omega$ , respectivement  $\Omega = \Omega_1$  et  $\Omega = \Omega_2$ , pour les quelles  $|\alpha_1(\Omega)|$  ne dépend pas de  $\zeta$ . La valeur optimale de  $p$ , en fixant les autres paramètres et en déterminant les expressions analytiques  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , selon cette méthode se détermine en imposant  $|\alpha_1(\Omega_1)| = |\alpha_1(\Omega_2)|$ . Pour établir la valeur optimale de  $\zeta$ , il existe plusieurs méthode, on peut par exemple adopter le critère suivant :

$$\frac{\partial |\alpha_1(\Omega)|}{\partial \Omega}(\Omega_1) = 0. \quad (3.21)$$

Des expressions analytiques de  $p$  et de  $\zeta$  ont été données par Den Hartog [29] pour un système à un seul degré de liberté amorti par un amortisseur à masse accordée lorsque la structure est soumise à une excitation harmonique. Plusieurs autres expressions analytiques ont été établies pour différents types d'excitations extérieures sur la structure principales dans le cas d'un simple TMD. En particuliers et comme pour le cas étudié, lorsque la structure est en oscillation libre, les expressions analytiques de  $p$  et de  $\zeta$  ont été données par [39] et seront aussi rappelées dans le prochain chapitre dont une comparaison sera faite entre ces paramètres et les paramètres obtenus dans ce chapitre par le système (3.14).

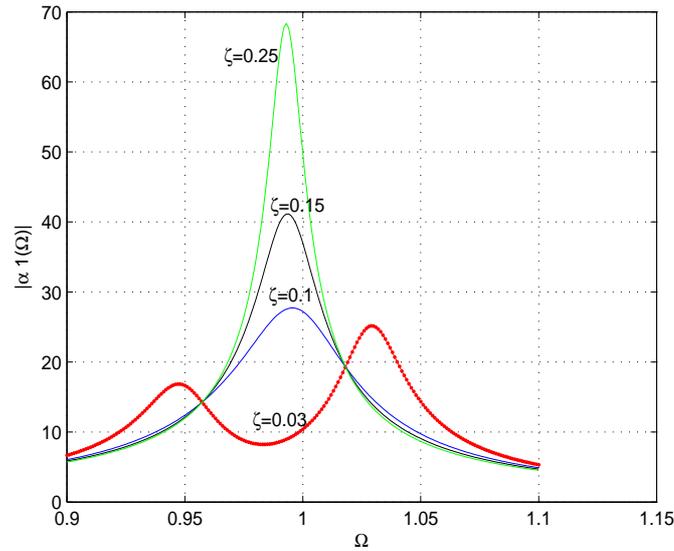


FIG. 3.8 – Réponse en fréquence de  $|\alpha_1(\Omega)|$  pour  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ ,  $p = 0.97$  et pour différentes valeurs de  $\zeta$ .

### 3.6 Résolution du système adimensionnel

Afin de déterminer numériquement les paramètres adimensionnels du pendule qui permettent d'amortir passivement et d'une manière optimale un seul mode de vibration d'une poutre encastree libre, On considère dans cette section une poutre qui a les caractéristiques suivantes: masse volumique  $\rho = 7800\text{kg}/\text{m}^3$ , section  $A = 1,14610^{-3}\text{m}^2$ , longueur  $L = 3\text{m}$  et taux d'amortissement propre considéré nul,  $\xi_1 = 0$ . On choisit d'amortir le premier mode de vibration horizontale de la poutre dont  $f_1 = 6,95\text{Hz}$ . L'oscillation libre du premier mode de la poutre, à un état initial déformé, est représenté par les figures (3.9) et (3.10), en fixant les valeurs de  $k$  et de  $\mu$  dans l'intervalle  $[0,1[$  et en choisissant en premier  $p = 0,9p_{k\mu}$  puis  $p = 1,1p_{k\mu}$ , les valeurs de  $\zeta$  correspondantes sont déterminées respectivement à partir des courbes (3.5) et (3.6). Le cas où  $p = p_{k\mu}$  est représenté par la figure (3.11), avec les mêmes valeurs de  $k$ , de  $\mu$  et avec  $\zeta = \zeta_{k\mu}$ . La comparaison entre les simulations des figures (3.9) et (3.10) avec celle de la figure (3.11) montre l'influence majeure du paramètre de synchronisation  $p$  sur l'amortissement de la réponse de la vibration du premier mode de la poutre.

Dans les figures (3.12) et (3.13), et pour montrer l'influence du paramètre  $\zeta$  sur la réponse de la structure, est représenté l'oscillation libre du premier mode propre  $\alpha_1$  pour des

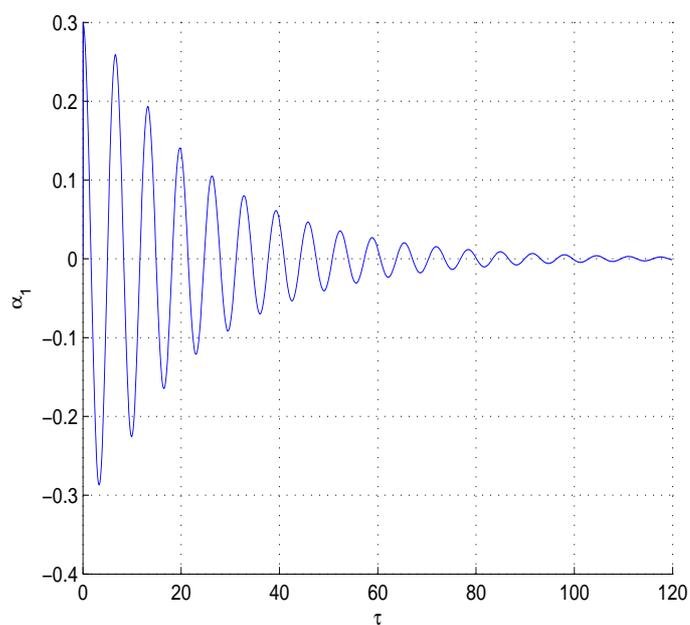


FIG. 3.9 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $p = 0,9p_{k\mu}$ ,  $k = 15\%$  et  $\mu = 5\%$ .

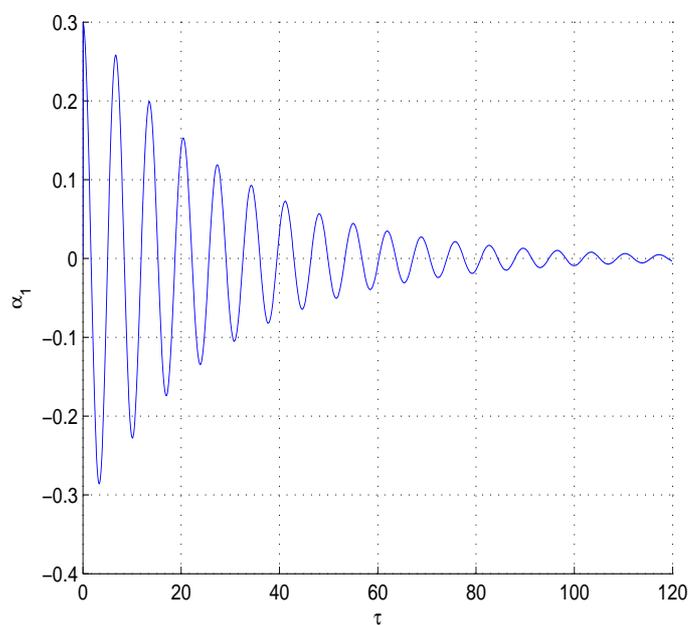


FIG. 3.10 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $p = 1,1p_{k\mu}$ ,  $k = 15\%$  et  $\mu = 5\%$ .

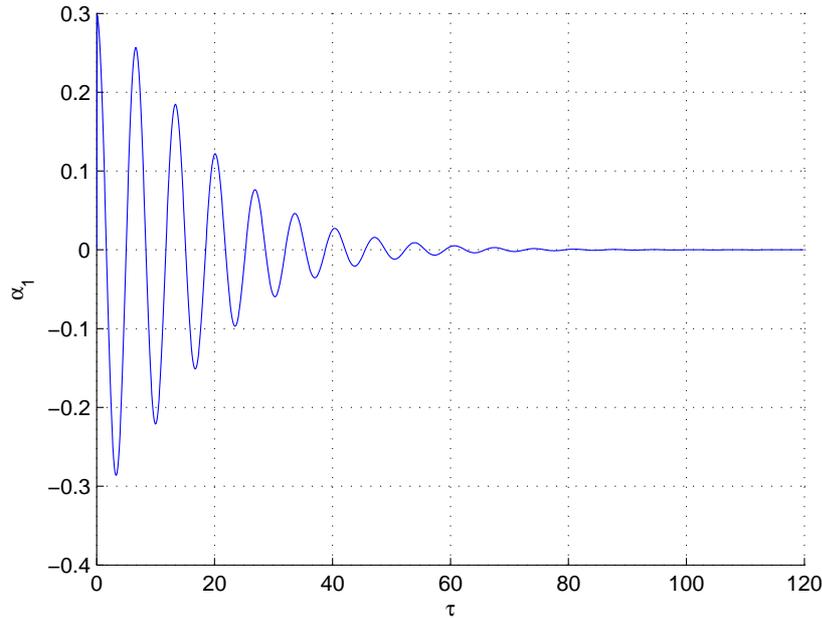


FIG. 3.11 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $p = p_{k\mu}$ ,  $\zeta = \zeta_{k\mu}$ ,  $k = 15\%$  et  $\mu = 5\%$ .

valeurs de  $k$  et de  $\mu$  fixées,  $p = p_{k\mu}$  et en variant à chaque fois la valeur de  $\zeta$  ; dans la figure (3.12) on augmente le taux d'amortissement  $\zeta = 2\zeta_{k\mu}$  et dans la figure (3.13) on prend  $\zeta = \frac{1}{2}\zeta_{k\mu}$ . De même, de la comparaison entre les simulations des figures (3.12) et (3.13) avec celle de la figure (3.11) résulte évident l'influence majeure du taux d'amortissement  $\zeta_{k\mu}$  sur l'amortissement de la réponse de vibration du premier mode de la poutre. Par suite à partir de ces comparaisons, on peut constater que l'amortissement passif optimal du premier mode de vibration horizontal de la poutre est obtenu lorsqu'on utilise les paramètres  $p = p_{k\mu}$  et  $\zeta = \zeta_{k\mu}$  donnés par le système (3.14) qui seront considérés dans la suite comme paramètres optimaux de l'actionneur électromécanique.

On peut en outre observer des battements dans la simulation de la figure (3.13), qui sont dus à la présence de doubles pôles complexes conjugués dont les parties réelles presque coïncident et dont les parties imaginaires sont très peu éloignées [22].

Pour montrer l'influence du paramètre adimensionnel  $\mu$  sur l'amortissement du premier mode de la poutre, on représente par la figure (3.14) la simulation numérique de la réponse de ce mode à  $k$  fixé et avec  $p$  et  $\zeta$  optimaux. La comparaison de cette simulation avec celle de la figure (3.11) montre que l'amortissement augmente en fonction de  $\mu$ .

À partir des paramètres adimensionnels  $k$  et  $\mu$  on peut déduire respectivement la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$  et la masse du pendule  $m_2$  et à partir des paramètres optimaux

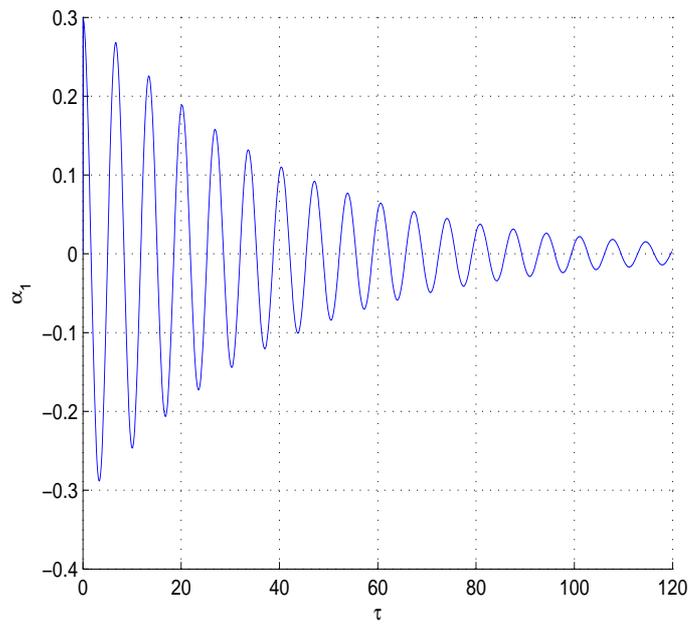


FIG. 3.12 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ ,  $p = p_{k\mu}$  et  $\zeta = 2\zeta_{k\mu}$ .

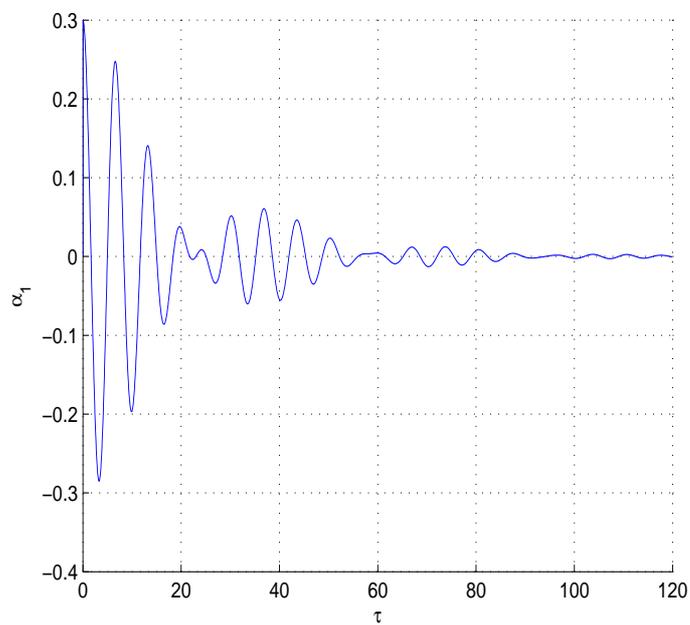


FIG. 3.13 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ ,  $p = p_{k\mu}$  et  $\zeta = 1/2\zeta_{k\mu}$ .

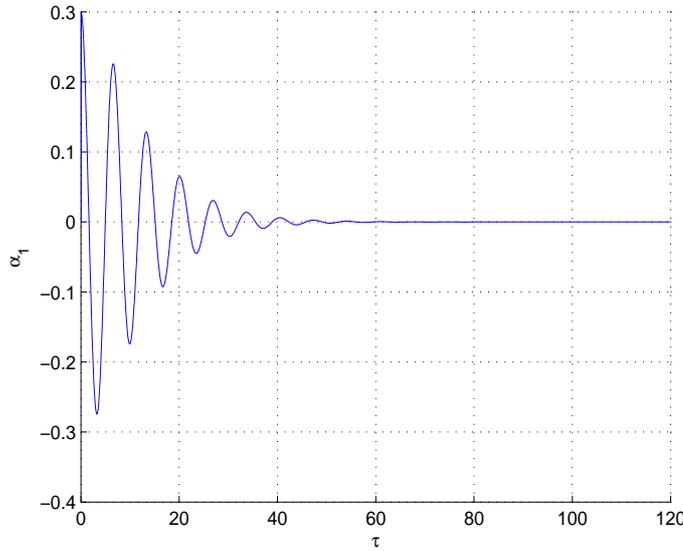


FIG. 3.14 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $k = 15\%$ ,  $p = p_{k\mu}$ ,  $\zeta = \zeta_{k\mu}$  et  $\mu = 10\%$ .

adimensionnels  $p_{k\mu}$  et  $\zeta_{k\mu}$  on peut déduire respectivement la longueur équivalente optimale du pendule  $l^{opt}$  et le coefficient d'amortissement total équivalent optimal de l'actionneur de référence  $C_{eq}^{opt}$  en utilisant le système (3.7). Enfin, à partir de ces paramètres on détermine les masses de la boule  $m_s$ , en négligeant son rayon, et de la barre  $m_b$  ainsi que sa longueur  $l_b$ .

### 3.7 Paramètres optimaux du pendule

Dans ce paragraphe, on détermine les paramètres physiques du pendule-alternateur qui permettent un amortissement optimal du premier mode de la vibration libre de la poutre. Ces paramètres optimaux seront directement déduits à partir des paramètres adimensionnels optimaux trouvés dans le paragraphe précédent. Soient  $k = 15\%$ ,  $\mu = 5\%$ ,  $p = p_{k\mu}$  et  $\zeta = \zeta_{k\mu}$ . A partir de  $k$  on peut déterminer la masse totale  $M_{ap}$ . La masse de la barre et de la boule  $m_2$  est déterminée à partir de  $\mu$ . A partir de la valeur optimale de  $p$ , on déduit la longueur équivalente du pendule optimale et le coefficient d'amortissement total équivalent optimal est déterminé à partir de  $\zeta$ . Ces grandeurs optimales, avec  $M_{ap} = 1$  Kg et  $m_2 = 0,35$  Kg, auront les valeurs suivantes :  $l^{opt} = 0,0062m$  cm et  $C_{eq}^{opt} = 2,25 \cdot 10^{-4} Kg/s$ . L'oscillation libre du premier mode de la poutre, en utilisant ces paramètres optimaux, est représentée par la figure (3.15). La longueur optimale du pendule obtenue est très

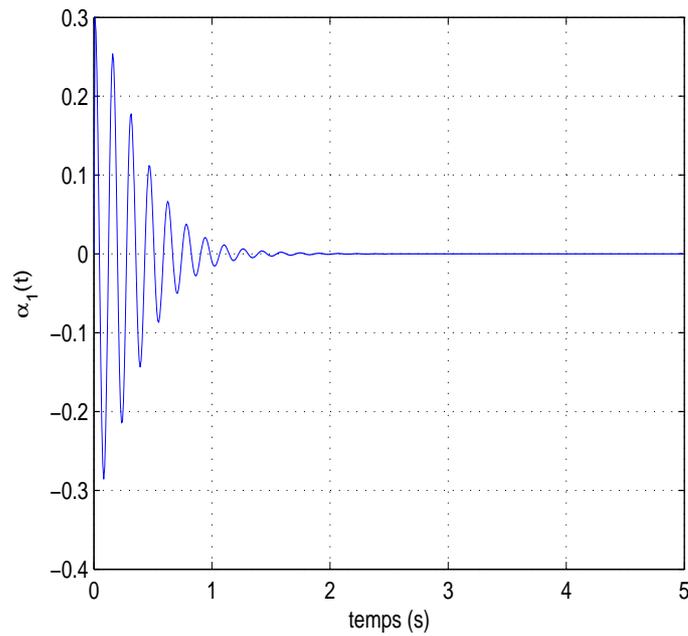


FIG. 3.15 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $M_{ap} = 1 \text{ Kg}$ ,  $m_2 = 0,35 \text{ Kg}$   $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$  et  $l = l^{opt}$ .

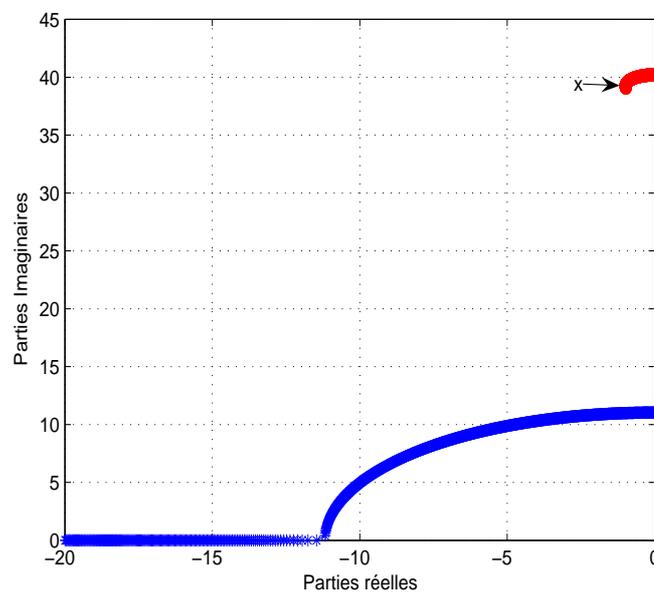


FIG. 3.16 – Lieu des pôles à  $M_{ap} = 2,05 \text{ Kg}$ ,  $m_2 = 1,02 \text{ Kg}$  et  $l = 6 \text{ cm}$ .

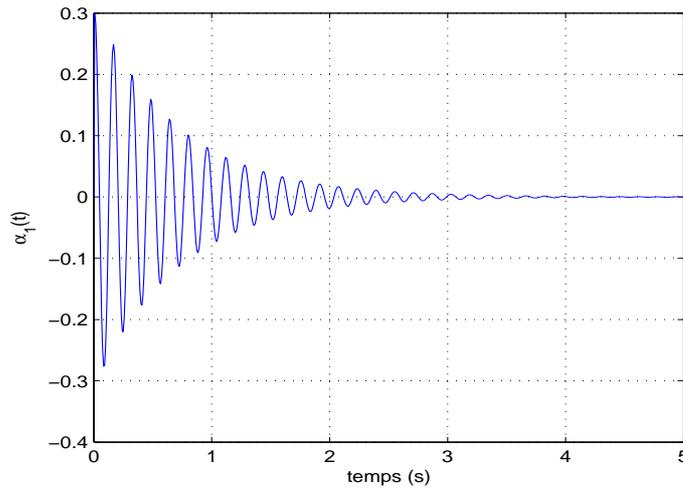


FIG. 3.17 – Oscillation libre du premier mode de la poutre à  $M_{ap} = 2,05Kg$ ,  $m_2 = 1,02Kg$ ,  $C_{eq} = 0,13Kg/s$  et  $l = 6cm$ .

petite. Pour avoir une longueur réalisable, on augmente la valeur de  $k$  et de  $\mu$  et on trace le lieu des pôles pour une valeur fixe de la longueur du pendule afin d'obtenir le coefficient d'amortissement équivalent correspondant optimal. Dans la figure (3.16) est représenté le lieu des pôles à  $M_{ap} = 2,05Kg$  et à  $m_2 = 1,02Kg$ ; la condition d'amortissement optimal est atteinte au point x. Dans la figure (3.17) est représentée la réponse de la première contribution modale de la poutre pour un pendule de longueur  $l = 6cm$ . Il est nettement clair que la décroissance maximale dans le temps de l'oscillation libre du premier mode de la poutre est très inférieure à celle obtenue en condition optimale. D'où l'importance de la longueur optimale du pendule sur l'amortissement.

### 3.8 Bilan Energétique du système

Dans cette section sont évalués les échanges énergétiques entre les différents organes du système capables de dissiper l'énergie. En particulier est confronté, de point de vue énergétique, le comportement du système relatif à un actionneur à paramètres optimaux à celui à paramètres non optimaux. Pour évaluer les différentes contributions énergétiques du système, il convient d'écrire la formulation Lagrangienne du système (3.2) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{ki}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 2 \quad (3.22)$$

où  $q_i$  sont les coordonnées généralisées, avec  $q_1 = \alpha_1$  et  $q_2 = \theta$ ,  $T$  l'énergie cinétique,  $U$  l'énergie potentielle et  $D$  le potentiel de dissipation ; dans le cas spécifique examiné on a

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(m_1^* + M_{ap})\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}I_{ap}\dot{\theta}^2 + m_2l\dot{\theta}\dot{\alpha}_1 \\ U = \frac{1}{2}(k_1\alpha_1^2 + m_2gl\theta^2) \\ D = \frac{1}{2}\xi_1\omega_1\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}C_{eq}\dot{\theta}^2 \end{cases} \quad (3.23)$$

Dans les figures (3.18) et (3.19) sont reportées les simulations de l'oscillation libre du système dimensionnel évaluées pour  $l = 6cm$  et  $C_{eq} = 0,13Kg/s$  respectivement  $l = l^{opt}cm$  et  $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$  ; plus précisément sont reportées les allures de l'énergie potentielle élastique  $\frac{1}{2}k_1\alpha_1^2$  et du potentiel de dissipation  $\frac{1}{2}C_{eq}\dot{\theta}^2$ .

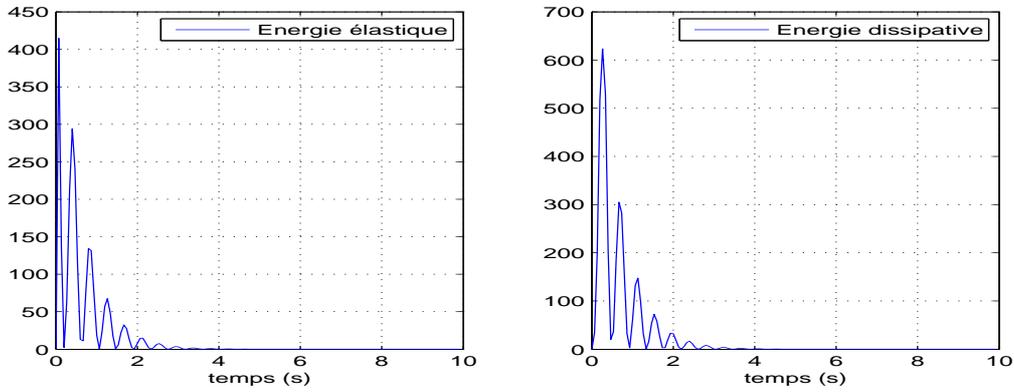


FIG. 3.18 – Energie élastique et potentiel de dissipation pour  $M_{ap} = 2,05Kg$ ,  $m_2 = 1,02Kg$ ,  $C_{eq} = 0,13Kg/s$  et  $l = 6cm$ .

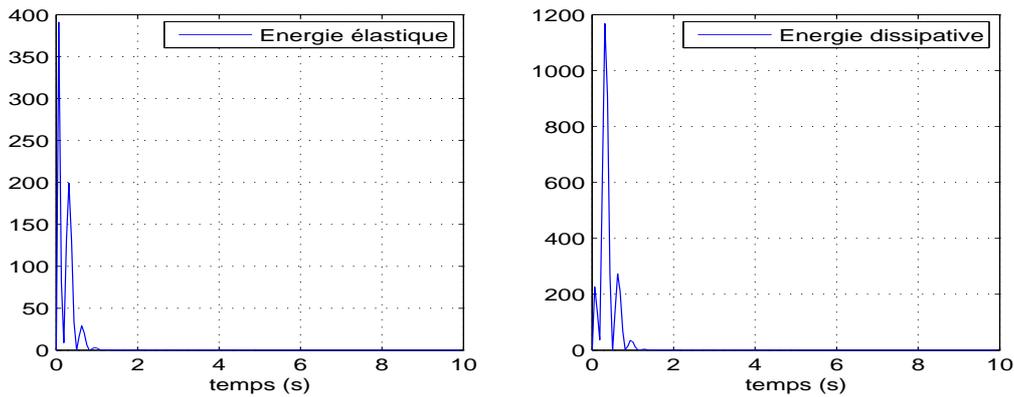


FIG. 3.19 – Energie élastique et potentiel de dissipation pour  $M_{ap} = 1Kg$ ,  $m_2 = 0,35Kg$ ,  $l = l^{opt}$  et  $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$ .

De ces deux figures on observe que l'énergie potentielle, proportionnelle au carré de la première contribution modale, a une allure oscillante et dont la décroissance exponentielle est maximale lorsque les paramètres sont optimaux.

### 3.9 Influence de la masse totale de l'actionneur $M_{ap}$ sur la réponse de la poutre

On a étudié dans les paragraphes précédents l'influence des différents paramètres de l'actionneur sur l'amortissement du premier mode de la poutre tels que la longueur du pendule équivalente  $l$ , le coefficient d'amortissement total équivalent  $C_{eq}$  et la masse  $m_2$ . On a aussi montré que le paramètre de synchronisation ainsi que ETDR diminuent en fonction de la masse totale de l'actionneur. Pour cela, on étudie dans ce paragraphe

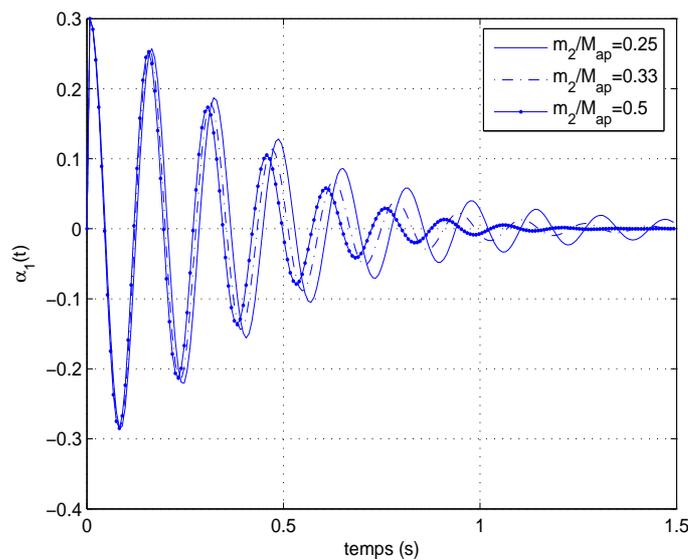


FIG. 3.20 – Effet de la variation de la masse totale  $M_{ap}$  du pendule sur la réponse de la poutre à  $l = l^{opt}$ ,  $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$  et  $m_2 = 0,35$ .

l'influence de la masse totale de l'actionneur sur la réponse de la vibration de la poutre. On considère l'actionneur de référence avec ces paramètres optimaux précités et on varie la masse  $M_{ap}$ . La simulation numérique est représentée par la figure (3.20) pour différentes valeurs du rapport  $\frac{m_2}{M_{ap}}$  à  $m_2$  fixé. Il résulte que, à taux d'amortissement propre nul, la réponse de la première contribution modale de la poutre diminue avec l'augmentation

du rapport  $\frac{m_2}{M_{ap}}$  : diminution de la masse totale du système pendule-alternateur  $M_{ap}$ . Par ailleurs, il est nécessaire de tenir compte de ce paramètre dans la conception d'un tel actionneur. Le critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel, appliqué ci-dessus, offre l'avantage d'introduire la masse totale dans la conception de l'actionneur.

### 3.10 Emplacement optimal du pendule

Après la détermination des paramètres optimaux de l'actionneur électromécanique pendule-alternateur qui ont pour but d'amortir l'oscillation libre du premier mode propre de la poutre, nous analysons numériquement dans ce paragraphe l'emplacement optimal de cet actionneur sur la poutre en faisant la comparaison entre l'oscillation de la première contribution modale de la poutre pour différents emplacements. Pour cela, nous considérons une longueur équivalente du pendule  $l = l^{opt} cm$ , un coefficient d'amortissement total équivalent  $C_{eq} = C_{eq}^{opt}$ , une masse totale  $M_{ap} = 1Kg$  et une masse  $m_2 = 0,35Kg$  et en variant le rapport  $\frac{x}{L}$ . Avec  $x$  est l'abscisse d'emplacement du pendule et  $L$  est la longueur de la poutre.

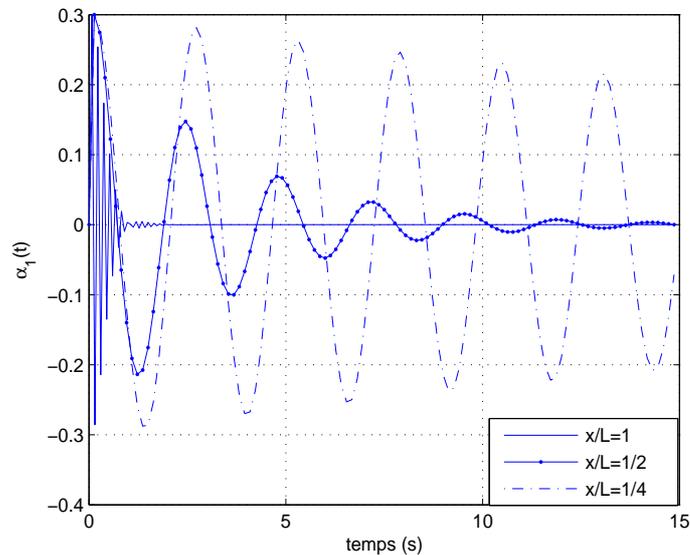


FIG. 3.21 – Différents emplacements de l'actionneur optimal sur la poutre.

Dans la figure (3.21) est représentée l'oscillation libre de la première contribution modale de la poutre, à taux d'amortissement propre nul, tel que le rapport  $\frac{x}{L} \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ . De cette

figure on observe que l'amortissement est maximal lorsque le rapport  $\frac{x}{L} = 1$  : le pendule est placé à l'extrémité de la poutre. Il est minimal lorsque  $\frac{x}{L} = \frac{1}{4}$  et il sera évidemment nul si le pendule est attaché à l'encastrement, c'est à dire le rapport  $\frac{x}{L} = 0$ . Et par suite, on remarque que l'amortissement augmente avec l'augmentation du rapport  $\frac{x}{L}$ .

Si on reprend les valeurs optimales de la longueur du pendule et du coefficient d'amortissement total équivalent pour chaque emplacement. Les valeurs de la masse totale  $M_{ap}$  et de la masse  $m_2$  sont figées. Les oscillations libres de la première contribution modale pour différents emplacements sont représentés dans la figure (3.22).

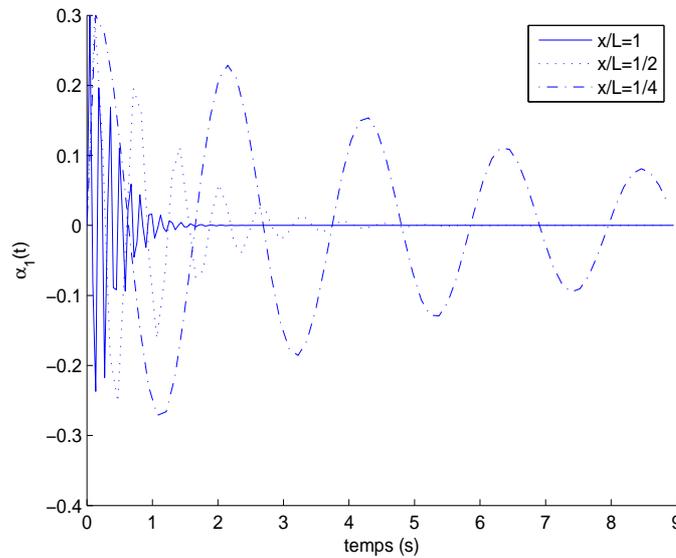


FIG. 3.22 – *Emplacement optimal de l'actionneur sur la poutre.*

Plusieurs études ont été faites pour déterminer l'emplacement optimal de l'actionneur lors du contrôle passif ; par exemple le meilleur emplacement d'un élément piézoélectrique est dans la zone d'encastrement pour diminuer la courbure de la structure [22]. Alors que l'amortisseur à masse accordée agit pour diminuer le déplacement de la structure [94] et par suite son meilleur emplacement est dans la zone à déplacement maximal. Pour le système étudié ci-dessus, le déplacement maximal est à l'extrémité libre de la poutre. Par suite, le meilleur emplacement du système TMD pendulaire, comme le montre la figure (3.22) et conformément aux études développées par [71, 94], est à l'extrémité libre de la poutre  $x = L$ .

# Chapitre 4

## Modélisation de la maquette du pont avec un actionneur électromécanique

### 4.1 Introduction

Dans les deux derniers chapitres précédents, nous avons étudié la modélisation et la conception de l'actionneur de référence pour contrôler une poutre encastree-libre. Dans ce chapitre on adopte la même démarche pour modéliser une maquette d'un pont en construction contrôlée par l'actionneur électromécanique. Les équations dynamiques de la maquette sont obtenues par application du principe des puissances virtuelles et les modes propres sont calculés par éléments finis. Les équations du pendule sont réécrites à partir des équations de Lagrange, alors que les équations mécanique et électrique de l'alternateur sont données dans le deuxième chapitre.

Les paramètres optimaux de l'actionneur, paramètre de synchronisation et taux d'amortissement réduit, pour amortir un seul mode de vibration, sont obtenus dans ce chapitre en développant la même idée : application du critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel. Ces paramètres optimaux sont calculés analytiquement et numériquement pour amortir d'une manière optimale le mode de torsion de la maquette du pont (deuxième mode de vibration). Les expressions analytiques de ces paramètres sont définis en fonction de la masse du pendule et de la masse totale de l'actionneur.

Ces paramètres, obtenus en appliquant le critère de maximisation de ETDR, sont comparés aux paramètres obtenus en littérature. En particulier, les paramètres obtenus dans cette étude sont comparés aux paramètres donnés par [39] lorsque la structure est en vibration libre.

Pour amortir le mode de torsion de la maquette, l'actionneur est attaché à l'extrémité du tablier. La simulation numérique de la réponse de la maquette du pont a montré l'efficacité de l'actionneur et l'importance de ses paramètres optimaux à amortir le mode de torsion lorsque la maquette est en vibration libre ou également en vibration harmonique. Par contre, pour contrôler passivement plusieurs modes on a utilisé plusieurs actionneurs. En particulier, trois actionneurs dont un est attaché à l'extrémité du tablier et les deux autres à l'extrémités du pylône de la maquette du pont ont été utilisés pour amortir les trois premiers modes de vibration.

Enfin, l'amortissement de la contribution modale du mode de torsion en résolvant le système d'équations linéaires est comparé à l'amortissement de la contribution modale du même mode en résolvant le système d'équations non-linéaires.

## 4.2 Modèle de la maquette du pont

La maquette du pont est un démonstrateur d'un pont en construction. Pour cela, elle est réalisée de manière à avoir des fréquences propres similaires à celles d'un ouvrage réel : de l'ordre de 1Hz. La géométrie de la maquette est constituée par :

- Un tube cylindrique inférieur de diamètre extérieur 45 mm, d'épaisseur 2 mm et de hauteur 1035 mm.
- Une barre cylindrique supérieure pleine de diamètre 45 mm et de hauteur 1215 mm.
- Une masse cylindrique mobile, située sur le tube supérieur, de diamètre 100 mm et de longueur 200 mm, soit une masse de 12,25 kg.
- Une poutre creuse, à section rectangulaire de dimension 150 mm x 50 mm, avec une épaisseur de 3 mm et une longueur de 6 m.
- Une plaque de base de dimension 22 mm x 40 mm x 15 mm.

La masse totale de la maquette est d'environ 108 kg. La liaison entre le pylône et le sol est réalisée par l'intermédiaire d'une plaque bien fixée au sol au moyen de quatre vis ; cette liaison est modélisée par une liaison d'encastrement. La liaison entre le tablier et le pylône est réalisée au moyen d'un profilé en U ; aussi cette liaison sera modélisée par un encastrement figure (4.1). Pour obtenir, dans la suite, un modèle simple à simuler, on considère que la maquette du pont est constituée de poutres droites qui vérifient les hypothèses d'Euler-Navier-Bernoulli et on suppose que les transformations restent petites. Par ailleurs, on considère que la maquette du pont est formée des quatre poutres d'Euler-Navier-Bernoulli soumises à la compression-traction, à la torsion et à la flexion dans les

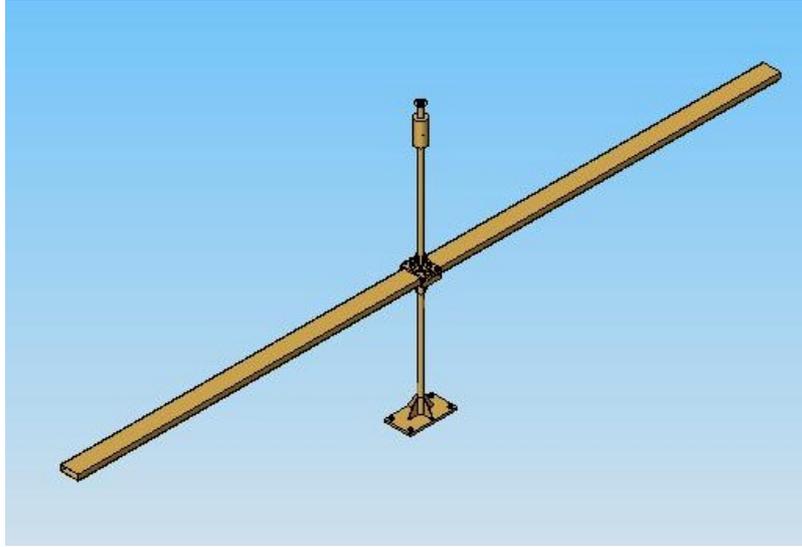


FIG. 4.1 – Maquette du pont.

deux plans. Les numéros des poutres sont indiqués sur la figure (4.2). La première et la troisième poutre représentent le tablier, la deuxième et la quatrième poutre représentent le pylône de la maquette. On associe à chaque poutre un repère local  $(o_k, x_k)$  dirigé vers la droite pour les poutres horizontales et vers le haut pour les poutres verticales. On désigne par  $\rho(x_k)$  la masse linéique,  $E(x_k)$  le module d'Young,  $A_k(x_k)$  la section de la k-ième poutre,  $G(x_k)$  le module de cisaillement de la structure,  $J_k(x_k)$ ,  $I_k^y(x_k)$  et  $I_k^z(x_k)$  les inerties d'une section de la k-ième poutre. Les inconnues du problème sont représentées par le champ des déplacements  $\underline{U} = \underline{U}_k(x_k, t)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  indique le numéro des poutres de la maquette du pont. Ce vecteur champ déplacement est formé des quatre composantes  $\underline{U}_k(x_k, t) = [u_k(x_k, t), \gamma_k(x_k, t), v_k(x_k, t), w_k(x_k, t)]$ , où  $u_k$  désigne le déplacement longitudinal de la k-ième poutre,  $\gamma_k$  la rotation de la k-ième poutre selon son axe propre,  $v_k$  le déplacement selon l'axe Y et  $w_k$  le déplacement selon l'axe Z de la k-ième poutre.

### 4.3 Formulation du problème dynamique

La maquette est modélisée par l'assemblage des quatre poutres. Elle sera contrôlée en lui attachant un pendule, par exemple, à l'une des deux extrémités libres du tablier. Le pendule est couplé avec un alternateur. On suppose que le pendule vibre autour de l'axe du tablier ( $OX$ ), c'est à dire dans le plan vertical ( $OYZ$ ). On note par  $\underline{f} = \underline{f}_k(x_k, t)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , l'effort d'excitation extérieur réparti sur la structure. Ce vec-

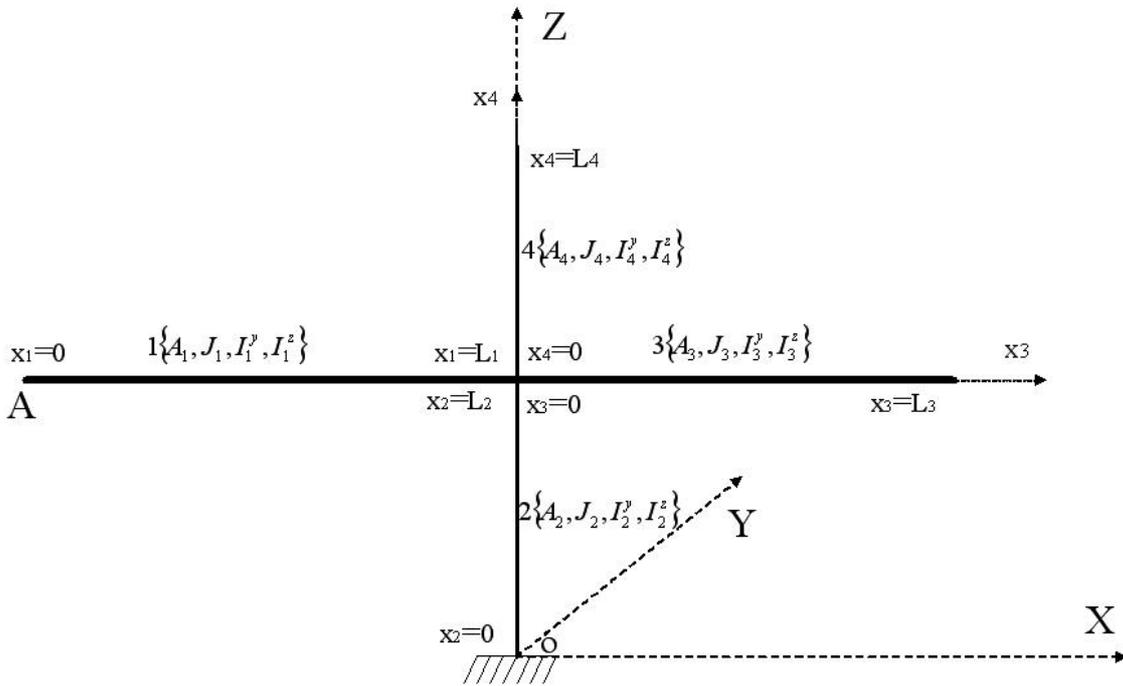


FIG. 4.2 – Modélisation de la maquette du pont.

teur,  $\underline{f}_k(x_k, t) = [f_k^x(x_k, t), m_k(x_k, t), f_k^y(x_k, t), f_k^z(x_k, t)]$ , est formé de quatre composantes : la première représente la force d'excitation longitudinale linéique sur la k-ième poutre, la deuxième le moment de torsion réparti sur la longueur de la k-ième poutre, la troisième et la quatrième les efforts extérieurs répartis selon, respectivement, les directions Y et Z de la k-ième poutre. La mise en équation sera effectuée à l'aide du principe des puissances virtuelles (PPV) qui requiert le calcul de la puissance des efforts intérieurs  $P_{int}(\hat{U})$ , de la puissance des efforts extérieurs  $P_{ext}(\hat{U})$  et de la puissance des quantités d'accélération  $P_{acc}(\hat{U})$  dans tout champ de vitesse virtuelle  $\hat{U}$ . Ce principe des puissances virtuelles s'énonce comme suit :

$$P_{int}(\hat{U}) + P_{ext}(\hat{U}) = P_{acc}(\hat{U}) \quad (4.1)$$

On a choisi cette méthode pour décrire les équations car elle présente l'avantage de mettre en relief la cohérence entre la modélisation géométrique et la modélisation des efforts.

### 4.3.1 Puissance des efforts extérieurs

En plus des efforts répartis sur toute la structure, le pont est soumis aux efforts concentrés à l'extrémité gauche du tablier, notée A : point d'accrochage de l'actionneur. On note, par la suite,  $\underline{R}(t)$  le vecteur des efforts concentrés en A. Par ailleurs, la puissance des efforts extérieurs a pour expression :

$$P_{ext}(\hat{\underline{U}}) = \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} \underline{f}_k(x_k, t) \hat{\underline{U}}_k(x_k) dx - \underline{R}(t) \hat{\underline{U}}_1(x_1 = 0). \quad (4.2)$$

Le vecteur des efforts concentrés  $\underline{R}(t) = [v_L(t), \Gamma(t), v_H(t), v_V(t)]$  est formé des quatre composantes non nulles :  $v_L(t)$  la force longitudinale,  $\Gamma(t)$  le couple de torsion,  $v_H(t)$  la force horizontale et  $v_V(t)$  la force verticale. Ces forces représentent les efforts appliqués par l'actionneur sur le pont au point d'accrochage : extrémité gauche de la première poutre du tablier.

En tenant compte de l'expression du champ des vitesses virtuelles et de l'expression des efforts extérieurs, la puissance des efforts extérieurs aura la forme suivante :

$$P_{ext}(\hat{\underline{U}}) = \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [f_k^x(x_k, t) \hat{u}_k(x_k) + m_k(x_k, t) \hat{\gamma}_k(x_k) + f_k^y(x_k, t) \hat{v}_k(x_k) + f_k^z(x_k, t) \hat{w}_k(x_k)] dx - v_L(t) \hat{u}_1(x_1 = 0) - \Gamma(t) \hat{\gamma}_1(x_1 = 0) - v_H(t) \hat{v}_1(x_1 = 0) - v_V(t) \hat{w}_1(x_1 = 0). \quad (4.3)$$

### 4.3.2 Puissance des quantités d'accélération

La puissance des quantités d'accélération de la structure complète, pour tout champ de vitesses virtuelles a la forme suivante :

$$P_{acc}(\hat{\underline{U}}) = \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [\rho A_k \ddot{u}_k(x_k, t) \hat{u}_k(x_k)] dx + \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [\rho J_k \ddot{\gamma}_k(x_k, t) \hat{\gamma}_k(x_k)] dx + \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [\rho A_k \ddot{v}_k(x_k, t) \hat{v}_k(x_k)] dx + \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [\rho A_k \ddot{w}_k(x_k, t) \hat{w}_k(x_k)] dx. \quad (4.4)$$

### 4.3.3 Puissance des efforts intérieurs

Les efforts intérieurs de la structure étudiée sont l'effort normal  $N_k$ , le moment de torsion  $M_k^x$  et les moments de flexion  $M_k^y$  et  $M_k^z$  selon les axes y et z de la k-ième poutre. Par ailleurs, la puissance de ces efforts intérieurs est

$$P_{int}(\hat{\underline{U}}) = - \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [EA_k \frac{\partial u_k}{\partial x}(x_k, t) \frac{d\hat{u}_k}{dx}(x_k)] dx - \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [GJ_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial x}(x_k, t) \frac{d\hat{\gamma}_k}{dx}(x_k)] dx - \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [EI_k^z \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}(x_k, t) \frac{d^2 \hat{v}_k}{dx^2}(x_k)] dx - \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} [EI_k^y \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}(x_k, t) \frac{d^2 \hat{w}_k}{dx^2}(x_k)] dx \quad (4.5)$$

La formulation variationnelle est déterminée, en remplaçant les équations (4.3-4.5) dans la formule (4.1), sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\underline{U}} \text{ champ de vitesse virtuel } \in \mathbf{V} \\ \mathbf{b}(\ddot{\underline{U}}, \hat{\underline{U}}) + \mathbf{a}(\underline{U}, \hat{\underline{U}}) = \mathbf{c}(\underline{f}, \hat{\underline{U}}) - v_L(t)\hat{u}_1(x_1 = 0) - \Gamma(t)\hat{\gamma}_1(x_1 = 0) \\ \qquad \qquad \qquad - v_H(t)\hat{v}_1(x_1 = 0) - v_V(t)\hat{w}_1(x_1 = 0) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

$\mathbf{b}$  est la puissance des efforts d'accélération,  $\mathbf{a}$  est défini à partir de la puissance des efforts intérieurs et  $\mathbf{c}$  est la puissance des efforts extérieurs linéiques répartis sur toute la structure.  $\mathbf{V}$  est l'espace des champs cinématiquement admissible :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \{ \hat{\underline{U}} = \{ \hat{\underline{U}}_k = \{ \hat{u}_k, \hat{\gamma}_k, \hat{v}_k, \hat{w}_k \}, k = 1..4 \} \in \bigotimes_{k=1}^4 [(H^1[0, L_k])^2 \times (H^2[0, L_k])^2] \\ \text{tel que } \hat{u}_2(x_2 = 0) = 0, \quad \hat{\gamma}_2(x_2 = 0) = 0, \quad \hat{v}_2(x_2 = 0) = 0 \\ \hat{w}_2(x_2 = 0) = 0, \quad \frac{d\hat{v}_2}{dx}(x_2 = 0) = 0, \quad \frac{d\hat{w}_2}{dx}(x_2 = 0) = 0, \\ \hat{v}_1(x_1 = L_1, t) = \hat{v}_3(x_3 = 0, t) = \hat{v}_2(x_2 = L_2, t) = \hat{v}_4(x_4 = 0, t), \\ \hat{w}_1(x_1 = L_1, t) = \hat{u}_2(x_2 = L_2, t) = \hat{w}_3(x_3 = 0, t) = \hat{u}_4(x_4 = 0, t), \\ \hat{w}_2(x_1 = L_2, t) = \hat{u}_1(x_1 = L_1, t) = \hat{w}_4(x_3 = 0, t) = \hat{u}_3(x_3 = 0, t), \\ \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) = \frac{\partial \hat{w}_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) = \frac{\partial \hat{w}_4}{\partial x}(x_4 = 0, t), \\ \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) = \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = \hat{\gamma}_2(x_2 = L_2, t) = \hat{\gamma}_4(x_4 = 0, t), \quad \text{et} \\ \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) = \frac{\partial \hat{v}_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) = \hat{\gamma}_1(x_1 = L_1, t) = \hat{\gamma}_3(x_3 = 0, t) \} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Avec  $\bigotimes_{k=1}^4 H^i[0, L_k] = H^i[0, L_1] \times H^i[0, L_2] \times H^i[0, L_3] \times H^i[0, L_4]$

Dans la conception de la maquette du pont, le pylône a été encasté au sol et le tablier au pylône. D'où le champ de déplacement  $\underline{U}_k(x_k, t)$ ,  $k=1, \dots, 4$  vérifie les conditions aux limites suivantes :

- Extrémité gauche de la première poutre : en ce point sont attachés le pendule et l'alternateur.

$$\left\{ \begin{array}{l} EA_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1 = 0, t) = v_L(t), \quad GJ_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x_1 = 0, t) = \Gamma(t) \\ EI_1^z \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(x_1 = 0, t) = 0, \quad EI_1^y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x_1 = 0, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_1^z \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2})(x_1 = 0, t) = v_H(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}(EI_1^y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2})(x_1 = 0, t) = v_V(t) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

- Extrémité inférieure de la deuxième poutre : cette extrémité est encastée.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2(x_2 = 0, t) = 0, \quad \gamma_2(x_2 = 0, t) = 0 \quad v_2(x_2 = 0, t) = 0 \\ w_2(x_2 = 0, t) = 0 \quad \frac{\partial v_2}{\partial x}(x_2 = 0, t) = 0 \quad \frac{\partial w_2}{\partial x}(x_2 = 0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

– Extrémité droite de la troisième poutre : cette extrémité est libre.

$$\left\{ \begin{array}{l} EA_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}(x_3 = L_3, t) = 0, \quad GJ_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial x}(x_3 = L_3, t) = 0 \\ EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}(x_3 = L_3, t) = 0, \quad EI_3^y \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}(x_3 = L_3, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2})(x_3 = L_3, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(EI_3^y \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2})(x_3 = L_3, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

– Extrémité supérieure de la quatrième poutre : cette extrémité est aussi libre.

$$\left\{ \begin{array}{l} EA_4 \frac{\partial u_4}{\partial x}(x_4 = L_4, t) = 0, \quad GJ_4 \frac{\partial \gamma_4}{\partial x}(x_4 = L_4, t) = 0 \\ EI_4^z \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2}(x_4 = L_4, t) = 0, \quad EI_4^y \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2}(x_4 = L_4, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_4^z \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2})(x_4 = L_4, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(EI_4^y \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2})(x_4 = L_4, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

– Conditions de raccordement au noeud : ce noeud représente un encastrement entre le tablier et le pylône. En ce point on a continuité du déplacement, de la rotation, des efforts et des moments [14].

– Continuité du déplacement

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(x_1 = L_1, t) = v_3(x_3 = 0, t) = v_2(x_2 = L_2, t) = v_4(x_4 = 0, t), \\ w_1(x_1 = L_1, t) = u_2(x_2 = L_2, t) = w_3(x_3 = 0, t) = u_4(x_4 = 0, t), \\ w_2(x_1 = L_2, t) = u_1(x_1 = L_1, t) = w_4(x_3 = 0, t) = u_3(x_3 = 0, t), \end{array} \right. \quad (4.12)$$

– Continuité de la rotation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) = \frac{\partial w_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = \frac{\partial w_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) = \frac{\partial w_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) = \frac{\partial v_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = \gamma_2(x_2 = L_2, t) = \gamma_4(x_4 = 0, t) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) = \frac{\partial v_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) = \gamma_1(x_1 = L_1, t) = \gamma_3(x_3 = 0, t) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

– Continuité des efforts

$$\left\{ \begin{array}{l} -EA_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) + \frac{\partial}{\partial x}(EI_2^y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2})(x_2 = L_2, t) - \frac{\partial}{\partial x}(EI_4^y \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2})(x_4 = 0, t) \\ + EA_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x}(EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2})(x_3 = 0, t) + \frac{\partial}{\partial x}(EI_1^y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2})(x_1 = L_1, t) - EA_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) \\ + EA_4 \frac{\partial u_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2})(x_3 = 0, t) = \frac{\partial}{\partial x}(EI_1^z \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2})(x_1 = L_1, t) \\ \frac{\partial}{\partial x}(EI_4^z \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2})(x_4 = 0, t) = \frac{\partial}{\partial x}(EI_2^z \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2})(x_2 = L_2, t) \end{array} \right. \quad (4.14)$$

– Continuité des moments

$$\left\{ \begin{array}{l} GJ_4 \frac{\partial \gamma_4}{\partial x}(x_4 = 0, t) = GJ_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial x}(x_2 = L_2, t) + EI_1^z \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(x_1 = L_1, t) \\ -EI_3^z \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}(x_3 = 0, t) \\ GJ_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial x}(x_3 = 0, t) = GJ_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x_1 = L_1, t) + EI_2^z \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(x_2 = L_2, t) \\ -EI_4^z \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2}(x_4 = 0, t) \\ -EI_1^y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x_1 = L_1, t) + EI_3^y \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}(x_3 = 0, t) + EI_4^y \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2}(x_3 = 0, t) \\ = EI_2^y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(x_2 = L_2, t) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

## 4.4 Approximation modale du déplacement

Afin de déterminer les modes propres de la structure, on cherche des solutions de la forme :

$$\underline{U}(x_k, t) = \underline{\varphi}(x_k) e^{i\omega t} \quad (4.16)$$

$\underline{\varphi}(x_k) = (\varphi^x(x_k), \varphi^\gamma(x_k), \varphi^y(x_k), \varphi^z(x_k))$  est le vecteur des modes propres de la structure. Le problème aux valeurs propres sera formulé sous la forme suivante [14] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\lambda, \underline{\varphi}) \in \mathbf{IR} \times \mathbf{V} \text{ tel que } \forall \hat{U} \in \mathbf{V} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}, \hat{U}) = \lambda \mathbf{b}(\underline{\varphi}, \hat{U}) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Ce problème admet une infinité de solutions. On note par la suite  $\mathbf{V}_N$ , l'espace engendré par les N premiers modes propres de la maquette. Les modes ainsi définis vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = m_j^* \delta_{ij} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = k_j \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$m_j^*$  est la j-ième masse modale,  $k_j$  est la j-ième rigidité modale et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Vu que  $\underline{\varphi}_i(x_1 = 0) \neq 0$ , on normalise alors les modes propres par amplification en imposant la condition suivante :

$$\text{Max} \underline{\varphi}_i(x_1 = 0) = 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (4.19)$$

Avec  $\forall \underline{a} \in \mathbf{IR}^n$  on pose  $\text{Max}(\underline{a}) = \text{Max}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$ . Cette condition de normalisation est toujours possible car  $\underline{\varphi}_i(x_1 = 0) \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

L'approximation modale du déplacement sur ces  $N$  modes, solution du problème (4.6) dans l'espace de dimension finie  $\mathbf{V}_N$ , se décompose ainsi :

$$\underline{U}_N(x_k, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \underline{\varphi}_i(x_k) \quad (4.20)$$

où  $k$  indique le numéro de la poutre et  $\alpha_i(t)$  l' $i$ ème contribution modale du déplacement. Après le remplacement du déplacement par son estimation (4.20) et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité (4.18) et de normalisation (4.19) on obtient le problème discrétisé suivant :

$$\begin{aligned} m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) &= f_i(t) - v_{LN}(t) \varphi_i^x(x_1 = 0) - \Gamma_N(t) \varphi_i^\gamma(x_1 = 0) \\ &- v_{HN}(t) \varphi_i^y(x_1 = 0) - v_{VN}(t) \varphi_i^z(x_1 = 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $f_i(t) = \sum_{k=1}^4 \int_0^{L_k} \underline{f}_k(x_k, t) \underline{\varphi}_i(x_k) dx$ ,  $\varphi_i^x(x_1 = 0)$  est la composante longitudinale de l' $i$ ème mode,  $\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)$  la composante de torsion de l' $i$ ème mode,  $\varphi_i^y(x_1 = 0)$  et  $\varphi_i^z(x_1 = 0)$  les composantes de l' $i$ ème mode, respectivement, selon les directions Y et Z de l'extrémité gauche de la première poutre de la maquette du pont : point d'accrochage de l'actionneur. Les forces de liaison et les équations du pendule seront déterminées à partir des équations de Lagrange et leurs discrétisations seront obtenues en appliquant l'approximation modale du déplacement (4.20).

## 4.5 Equations du pendule et de l'alternateur

Pour contrôler le mode de torsion de la maquette du pont, on propose d'utiliser un amortisseur à masse accordée de type pendulaire couplé à un alternateur. Cet actionneur est attaché à l'extrémité de la première poutre de la maquette sous le tablier figure (4.3). Le principe de fonctionnement de ce système est le même que celui expliqué dans le deuxième chapitre : la vibration de la maquette induit la vibration du pendule qui entraîne l'alternateur en rotation. Le rôle de ce dernier est de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique qui sera dissipée par effet Joule dans une résistance. On adopte les mêmes notations indiquées dans le cas de la modélisation d'une poutre avec un actionneur, on suppose que le pendule est formé d'une boule de masse  $m_s$  et de rayon  $R_s$  fixée à l'extrémité libre d'une barre de masse  $m_b$  et de longueur  $l_b$ . On note par  $m_2 = m_s + m_b$  la masse totale du pendule et par  $I_2$  son inertie totale par rapport à l'axe parallèle à (OX) déterminée à partir du théorème d'Huygens, par  $l$  la position de centre de gravité du pendule et par  $m_a$  et  $I_a$  la masse totale et le moment d'inertie total de l'alternateur avec

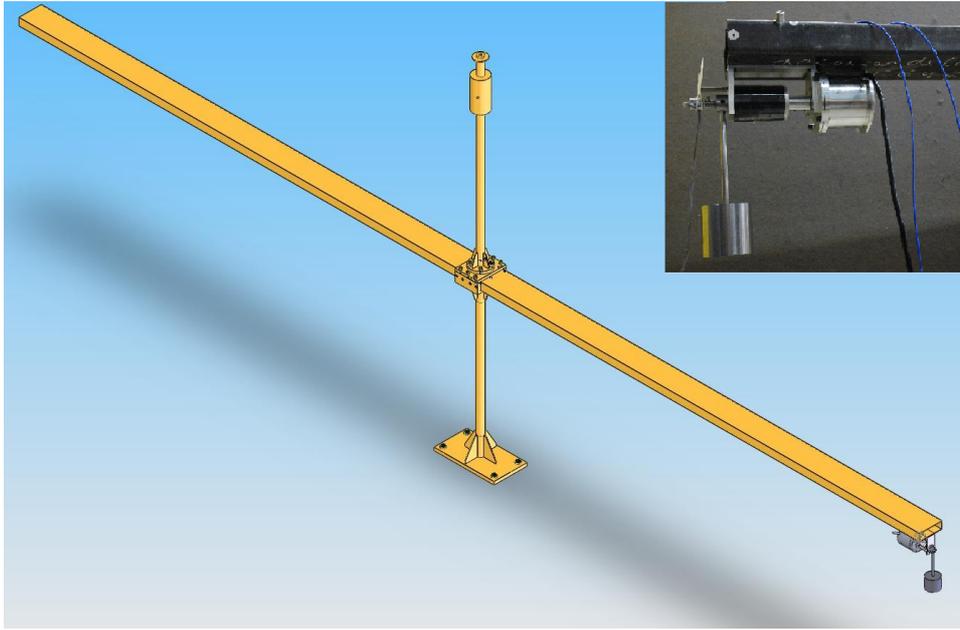


FIG. 4.3 – Modélisation de la maquette du pont avec l'actionneur.

le réducteur. Afin de déterminer les équations du pendule, lorsque le pont est soumis à des vibrations, on propose une écriture énergétique du système en appliquant les équations de Lagrange.

### Remarque

Dans ce cas, le pendule est formé d'un seul système de masse  $m_2$  et d'inertie  $I_2$  et pour rester cohérent avec les notations du deuxième chapitre on pose que la masse totale du pendule est  $M_p = m_2$  et que l'inertie totale du pendule est  $I_p = I_2$ .

Le vecteur champ déplacement de la maquette du pont, comme il a déjà été précisé dans le paragraphe précédent, est formé des quatre composantes : déplacement longitudinal, angle de torsion, déplacement horizontal et déplacement vertical. Par ailleurs, le vecteur position d'un élément de la première poutre du tablier noté  $\mathbf{r}_T$  et le vecteur position de l'extrémité supérieure du pendule noté  $\mathbf{r}_A$  peuvent être définis en petit déplacement dans le repère global des coordonnées orthonormales  $(O, X, Y, Z)$  des vecteurs unitaires notés, respectivement,  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  comme est indiqué dans la figure (4.4) :

$$\mathbf{r}_T = u_1(x_1, t)\mathbf{a}_1 + v_1(x_1, t)\mathbf{a}_2 + w_1(x_1, t)\mathbf{a}_3 \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A = & u_1(x_1 = 0, t)\mathbf{a}_1 + [v_1(x_1 = 0, t) + e\sin(\gamma_1(x_1 = 0, t))]\mathbf{a}_2 \\ & + [w_1(x_1 = 0, t) - e\cos(\gamma_1(x_1 = 0, t))]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

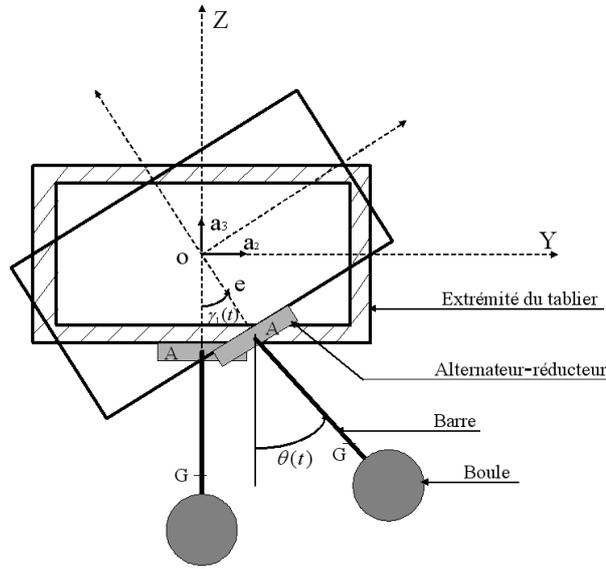


FIG. 4.4 – Modèle mécanique : vibration du pendule.

Avec l'excentricité  $e = OA$ ,  $l$  la longueur équivalente du pendule,  $\theta$  l'angle de rotation du pendule et  $\gamma_1$  l'angle de torsion de la première poutre du tablier de la maquette du pont. De même, le vecteur position du centre de gravité du pendule, noté  $\mathbf{r}_G$ , est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_G = & u_1(x_1 = 0, t)\mathbf{a}_1 + [v_1(x_1 = 0, t) + e\sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + l\sin(\theta)]\mathbf{a}_2 \\ & + [w_1(x_1 = 0, t) - e\cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) - l\cos(\theta)]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Les vecteurs vitesses correspondants sont :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_T = & \dot{u}_1(x, t)\mathbf{a}_1 + \dot{v}_1(x, t)\mathbf{a}_2 + \dot{w}_1(x, t)\mathbf{a}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_A = & \dot{u}_1(x_1 = 0, t)\mathbf{a}_1 + [\dot{v}_1(x_1 = 0, t) + e\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)\cos(\gamma_1(x_1 = 0, t))]\mathbf{a}_2 \\ & + [\dot{w}_1(x_1 = 0, t) + e\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)\sin(\gamma_1(x_1 = 0, t))]\mathbf{a}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_G = & \dot{u}_1(x_1 = 0, t)\mathbf{a}_1 + [\dot{v}_1(x_1 = 0, t) + e\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)\cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + l\dot{\theta}\cos(\theta)]\mathbf{a}_2 \\ & + [\dot{w}_1(x_1 = 0, t) + e\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)\sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + l\dot{\theta}\sin(\theta)]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$\dot{\mathbf{r}}_A$  est la vitesse de vibration de l'alternateur et du réducteur, de masse  $m_a$  et de moment d'inertie  $I_a$ , et  $\dot{\mathbf{r}}_G$  la vitesse de vibration du pendule, de masse  $m_2$  et de moment d'inertie

$I_2$ . L'énergie cinétique totale du pendule est  $T = T_A + T_G$ . Avec

$$\begin{aligned}
T_A &= \frac{1}{2}m_a[(\dot{u}_1(x_1 = 0, t))^2 + (\dot{v}_1(x_1 = 0, t))^2 + (\dot{w}_1(x_1 = 0, t))^2] + \frac{1}{2}m_a e^2(\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \\
&+ m_a e \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_a e \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
T_G &= \frac{1}{2}m_2[(\dot{u}_1(x_1 = 0, t))^2 + (\dot{v}_1(x_1 = 0, t))^2 + (\dot{w}_1(x_1 = 0, t))^2] + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta})^2 \\
&+ \frac{1}{2}m_2 e^2(\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 + m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 l \dot{\theta} \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta \\
&+ m_2 l \dot{\theta} \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta + m_2 e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&+ m_2 e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t))
\end{aligned} \tag{4.26}$$

L'énergie potentielle totale U du pendule est

$$U = m_a g[w_1(x_1 = 0, t) - e \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t))] + m_2 g[w_1(x_1 = 0, t) - e \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) - l \cos \theta] \tag{4.27}$$

L'énergie dissipative totale D du pendule est

$$D = \frac{1}{2}C_p(\dot{\theta} - \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \tag{4.28}$$

$C_p$  est le coefficient d'amortissement propre du pendule. Les équations du pendule seront déterminées en appliquant les équations de Lagrange suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, r \tag{4.29}$$

Les coordonnées généralisées  $q_k$  et les forces extérieures  $Q_k$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
q_k &= \{u_1(x_1 = 0) \quad v_1(x_1 = 0) \quad w_1(x_1 = 0) \quad \gamma_1(x_1 = 0) \quad \theta\} \\
Q_k &= \{v_L(t) \quad v_H(t) \quad v_V(t) \quad \Gamma(t) \quad -C_m\}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$v_L$ ,  $v_H$  et  $v_V$  sont, respectivement, les forces de liaison longitudinale, horizontale et verticale entre le tablier et le pendule,  $\Gamma$  le couple de torsion du tablier sur le pendule et  $C_m$  le couple mécanique de l'alternateur sur le pendule, figure (4.5).

Soient les équations suivantes :

Pour  $q_1 = u_1(x_1 = 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) &= (m_a + m_2) \ddot{u}_1(x_1 = 0, t) \\
\frac{\partial U}{\partial u_1} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial u_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_1} = 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Pour  $q_2 = v_1(x_1 = 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{v}_1} \right) &= (m_a + m_2) \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) + (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&\quad - (m_a + m_2) e (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta \\
\frac{\partial U}{\partial v_1} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial v_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{v}_1} = 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

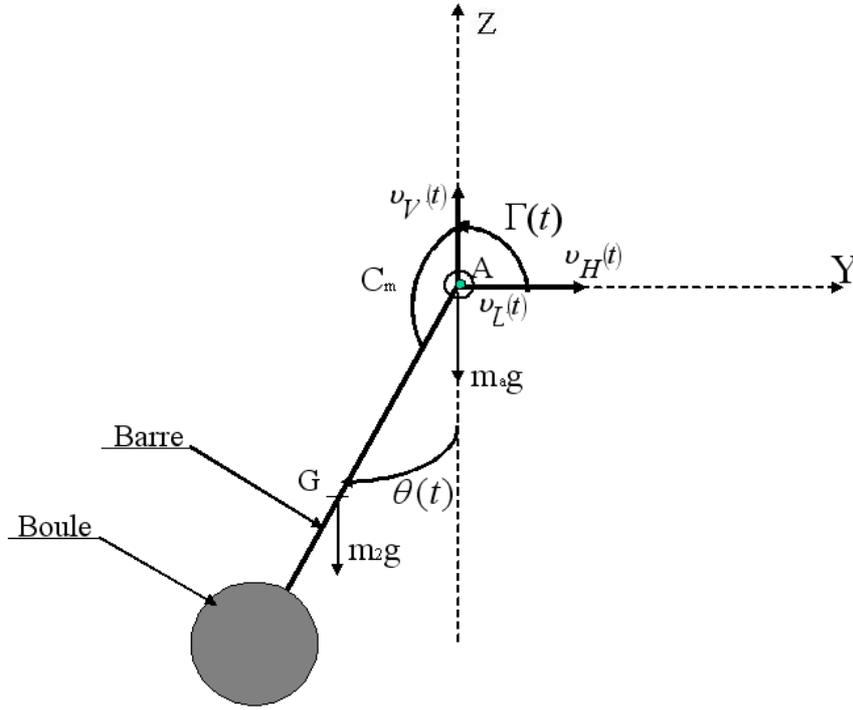


FIG. 4.5 – Les forces appliquées sur le pendule.

Pour  $q_3 = w_1(x_1 = 0)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_1} &= (m_a + m_2) \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \\
 &+ (m_a + m_2) e \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + (m_a + m_2) e (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &+ m_2 l \ddot{\theta} \sin \theta + m_2 l \dot{\theta}^2 \cos \theta \\
 \frac{\partial U}{\partial w_1} &= (m_a + m_2) g \\
 \frac{\partial T}{\partial w_1} &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{w}_1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pour  $q_4 = \gamma_1$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_1} &= (m_a + m_2) e^2 \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) + (m_a + m_2) e \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &- (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + (m_a + m_2) e \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &+ (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 e l \ddot{\theta} \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &+ m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) - m_2 e l \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 \frac{\partial T}{\partial \gamma_1} &= m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) - (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 &+ (m_a + m_2) e \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} &= (m_a + m_2) g e \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)), \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\gamma}_1} = C_p(\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) - \dot{\theta})
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Pour  $q_5 = \theta$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= I_2 \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta - m_2 l \dot{\theta} \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta + m_2 l \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta \\
&+ m_2 l \dot{\theta} \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta + m_2 e l \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&+ m_2 e l (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) - m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
\frac{\partial T}{\partial \theta} &= -m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) - m_2 l \dot{\theta} \dot{v}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta + m_2 l \dot{\theta} \dot{w}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta \\
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= m_2 g l \sin \theta \\
\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} &= C_p (\dot{\theta} - \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))
\end{aligned} \tag{4.35}$$

On remplace l'équation (4.31) dans l'équation de Lagrange (4.29) on trouve l'équation de la force de liaison longitudinale :

$$v_L(t) = M_{ap} \ddot{u}_1(x_1 = 0, t) \tag{4.36}$$

Avec  $M_{ap} = m_a + m_2$  la masse totale de l'actionneur "pendule-alternateur". On remplace maintenant l'équation (4.32) dans l'équation de Lagrange (4.29) on trouve l'équation de la force de liaison horizontale :

$$\begin{aligned}
v_H(t) &= M_{ap} \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&- M_{ap} e (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Puis, on remplace l'équation (4.33) dans l'équation de Lagrange (4.29), on trouve l'équation de la force de liaison verticale :

$$\begin{aligned}
v_V(t) &= M_{ap} g + M_{ap} \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&+ M_{ap} e (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 l \ddot{\theta} \sin \theta + m_2 l \dot{\theta}^2 \cos \theta
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Ensuite, on remplace l'équation (4.34) dans l'équation de Lagrange (4.29), on trouve l'équation du couple de torsion suivante :

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) &= M_{ap} e^2 \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos(\gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&+ M_{ap} e \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + m_2 e l \ddot{\theta} \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
&- m_2 e l \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) + M_{ap} g e \sin(\gamma_1(x_1 = 0, t)) + C_p (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) - \dot{\theta})
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Enfin, on remplace l'équation (4.35) dans l'équation de Lagrange (4.29), on trouve l'équation de rotation du pendule.

$$\begin{aligned}
I_p \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) \cos \theta + m_2 l \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) \sin \theta + m_2 e l \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) \cos(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) \\
+ m_2 e l (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t))^2 \sin(\theta - \gamma_1(x_1 = 0, t)) + C_p (\dot{\theta} - \dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t)) + m_2 g l \sin \theta = -C_m
\end{aligned} \tag{4.40}$$

A ces équations on ajoute les équations, électrique et mécanique, de l'alternateur en considérant que l'angle de torsion du tablier de la maquette du pont est très faible.

$$\begin{cases} \beta I_a \ddot{\theta} + \beta C_a \dot{\theta} &= -K_c i(t) \sin(\beta\theta(t)) + C_m \\ L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) &= K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta\theta(t)) \end{cases} \quad (4.41)$$

Ces équations sont déterminées dans le deuxième chapitre.  $\beta$  est le rapport d'engrenage,  $K_e$  la constante de la force électromotrice et  $K_c$  la constante du couple électromécanique.  $L_e$  est l'inductance d'une bobine de l'alternateur,  $r$  sa résistance et  $R(t)$  la résistance variable externe.

A partir du modèle éléments finis de la maquette du pont réalisé sur Openfem, on remarque que la torsion n'est couplée qu'avec les déplacements horizontaux. Et par suite dans le modèle théorique on peut considérer, à titre d'une première approximation, qu'il n'y a pas de couplage entre les déplacements verticaux et la rotation d'axe vertical. De plus, on suppose que l'angle de torsion du tablier est très faible, et en négligeant les termes quadratiques, les équations des efforts de liaisons peuvent être écrites sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} v_L(t) = M_{ap} \ddot{u}_1(x_1 = 0, t) \\ v_H(t) = M_{ap} \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) + m_2 l \ddot{\theta} \cos\theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin\theta \\ v_V(t) = M_{ap} g + M_{ap} \ddot{w}_1(x_1 = 0, t) + m_2 l \ddot{\theta} \sin\theta + m_2 l \dot{\theta}^2 \cos\theta \\ \Gamma(t) = M_{ap} e^2 \ddot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) + M_{ap} e \ddot{v}_1(x_1 = 0, t) + m_2 e l \ddot{\theta} \cos(\theta) \\ - m_2 e l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + M_{ap} g e \gamma_1(x_1 = 0, t) + C_p (\dot{\gamma}_1(x_1 = 0, t) - \dot{\theta}) \end{cases} \quad (4.42)$$

Les équations discrétisées des efforts de liaisons sont déterminées à partir de l'estimation du déplacement sur les  $N$  premiers modes définis par l'équation (4.20) comme suit :

$$\begin{cases} v_{LN}(t) &= M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \varphi_j^x(x_1 = 0) \\ v_{HN}(t) &= M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) (\varphi_j^y(x_1 = 0) + e \varphi_j^\gamma(x_1 = 0)) + m_2 l [\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2(t) \sin\theta] \\ v_{VN}(t) &= M_{ap} g + M_{ap} \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) \varphi_j^z(x_1 = 0) + m_2 l [\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2(t) \cos\theta] \\ \Gamma_N(t) &= M_{ap} e \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) (\varphi_j^y(x_1 = 0) + e \varphi_j^\gamma(x_1 = 0)) + m_2 e l \ddot{\theta} \cos(\theta) \\ &\quad - m_2 e l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + C_p (\sum_{j=1}^N \dot{\alpha}_j(t) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) - \dot{\theta}) \\ &\quad + M_{ap} e g \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \end{cases} \quad (4.43)$$

De même pour l'équation mécanique de rotation du pendule-alternateur :

$$\begin{aligned} I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) [\varphi_j^y(x_1 = 0) \cos\theta + \varphi_j^z(x_1 = 0) \sin\theta + e \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \cos\theta] \\ + C_{ap} \dot{\theta} - C_p \sum_{j=1}^N \dot{\alpha}_j(t) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) + m_2 g l \sin\theta = -K_c i(t) \sin(\beta\theta(t)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Avec  $I_{ap} = I_p + \beta I_a$  le moment d'inertie total de l'actionneur et  $C_{ap} = C_p + \beta C_a$  le coefficient d'amortissement mécanique total de l'actionneur. D'où le système complet simplifié pont-pendule-alternateur discrétisé couplé :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i^* \ddot{\alpha}_i(t) + k_i \alpha_i(t) = f_i(t) - v_{LN}(t) \varphi_i^x(x_1 = 0) - \Gamma_N(t) \varphi_i^\gamma(x_1 = 0) \\ \quad - v_{HN}(t) \varphi_i^y(x_1 = 0) - v_{VN}(t) \varphi_i^z(x_1 = 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \sum_{j=1}^N \ddot{\alpha}_j(t) [\varphi_j^y(x_1 = 0) \cos \theta + \varphi_j^z(x_1 = 0) \sin \theta + e \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \cos \theta] \\ + C_{ap} \dot{\theta} - C_p \sum_{j=1}^N \dot{\alpha}_j(t) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) + m_2 g l \sin \theta = -K_c i(t) \sin(\beta \theta(t)) \\ L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t)) i(t) = K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta(t)) \end{array} \right. \quad (4.45)$$

où les forces  $v_{LN}(t)$ ,  $v_{HN}(t)$  et  $v_{VN}(t)$  et le couple  $\Gamma_N(t)$  sont définis par la formule (4.43). Ce système non linéaire, en regroupant les termes en accélération ensemble, peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$M(X) \ddot{X} + C(R(t)) \dot{X} + KX = f(t, X, \dot{X}) \quad (4.46)$$

On ne s'intéresse, par la suite, qu'aux six premiers modes ( $N=6$ ), le vecteur inconnu du système sera  $X^T = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_6(t), \theta(t), q(t)]$ ,  $q(t)$  est la charge électrique, et les matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  seront définies comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{12T} & M^{22} \end{bmatrix},$$

$M^{11}$  est une matrice symétrique (6,6) dont les éléments sont :

$$M_{ii}^{11} = m_i^* + M_{ap} ((\varphi_i^x(x_1 = 0))^2 + (\varphi_i^y(x_1 = 0))^2 + (\varphi_i^z(x_1 = 0))^2 + e^2 (\varphi_i^\gamma(x_1 = 0))^2 + 2e \varphi_i^y(x_1 = 0) \varphi_i^\gamma(x_1 = 0)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6$$

$$M_{ij}^{11} = M_{ap} [\varphi_i^x(x_1 = 0) \varphi_j^x(x_1 = 0) + \varphi_i^y(x_1 = 0) \varphi_j^y(x_1 = 0) + \varphi_i^z(x_1 = 0) \varphi_j^z(x_1 = 0) + e^2 \varphi_i^\gamma(x_1 = 0) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) + e \varphi_i^y(x_1 = 0) \varphi_j^\gamma(x_1 = 0) + e \varphi_j^y(x_1 = 0) \varphi_i^\gamma(x_1 = 0)] \\ \text{pour } i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{et } i \neq j$$

$M^{12}$  est une matrice (6,2) dont les éléments sont :

$$M_{i1}^{12} = m_2 l [\cos \theta \varphi_i^y(x_1 = 0) + \sin \theta \varphi_i^z(x_1 = 0) + e \cos \theta \varphi_i^\gamma(x_1 = 0)] \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \\ M_{i2}^{12} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6$$

$M^{12T}$  est la matrice transposée de  $M^{12}$ .

$$M^{22} \text{ est une matrice (2,2), } M^{22} = \begin{bmatrix} I_{ap} & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix}$$

$C = \begin{bmatrix} C^{11} & C^{12} \\ C^{12T} & C^{22} \end{bmatrix}$ ,  $C^{11}$  est une matrice symétrique (6,6) dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} C_{ii}^{11} &= C_p(\varphi_i^\gamma(x_1 = 0))^2 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6, \\ C_{ij}^{11} &= C_p\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)\varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{et } i \neq j. \end{aligned}$$

$C^{12}$  est une matrice (6,2) dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} C_{i1}^{12} &= -C_p\varphi_i^\gamma(x_1 = 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \\ C_{i2}^{12} &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

$C^{12T}$  est la matrice transposée de  $C^{12}$ .

$C^{22}$  est une matrice (2,2),  $C^{22} = \begin{bmatrix} C_{ap} & 0 \\ 0 & r + R(t) \end{bmatrix}$

$K = \begin{bmatrix} K^{11} & O_{6,2} \\ O_{2,6} & O_{22} \end{bmatrix}$ ,  $O$  est la matrice nulle et  $K^{11}$  une matrice symétrique (6,6) dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} K_{ii}^{11} &= k_i + M_{ap}eg(\varphi_i^\gamma(x_1 = 0))^2 \quad i = 1, \dots, 6 \\ K_{ij}^{11} &= M_{ap}eg\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)\varphi_j^\gamma(x_1 = 0) \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{et } i \neq j \end{aligned}$$

Le vecteur  $f(t, X, \dot{X})$  est défini comme suit :

$$f(t, X, \dot{X}) = \left( \begin{array}{l} (f_i(t) - M_{ap}g\varphi_i^z(x_1 = 0) + m_2l\dot{\theta}^2[\sin\theta\varphi_i^y(x_1 = 0) - \cos\theta\varphi_i^z(x_1 = 0) \\ + e\sin\theta\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)])_{i=1, \dots, 6}, -m_2gl\sin\theta - K_c\dot{q}(t)\sin(\beta\theta), K_e\beta\dot{\theta}(t)\sin(\beta\theta) \end{array} \right)^T$$

## 4.6 Calcul des modes propres de la maquette en utilisant une modélisation par éléments finis

Pour obtenir les modes propres de la maquette du pont  $(\lambda, \varphi)$ , on choisit d'utiliser un modèle éléments finis de la structure. Pour cela on a utilisé le logiciel Matlab muni du module Openfem. La maquette est modélisée par l'assemblage des poutres soumises à la traction-compression, à la torsion et à la flexion dans les deux plans. La liaison entre le pylône et le tablier est considérée comme une liaison d'encastrement. Les déformées modales de la maquette du pont sont représentées par la figure (4.6) où sur chaque déformée est indiquée la fréquence propre correspondante. Ces fréquences sont calculées lorsque la masse mobile est à l'extrémité supérieure du pylône. Les fréquences propres des deux premiers modes ; premier mode vertical et mode de torsion, sont très proches. Par ailleurs, la position de la masse mobile a une influence sur le couplage de ces deux premiers modes : lorsque la masse est en bas de la quatrième poutre les deux modes sont découplés.

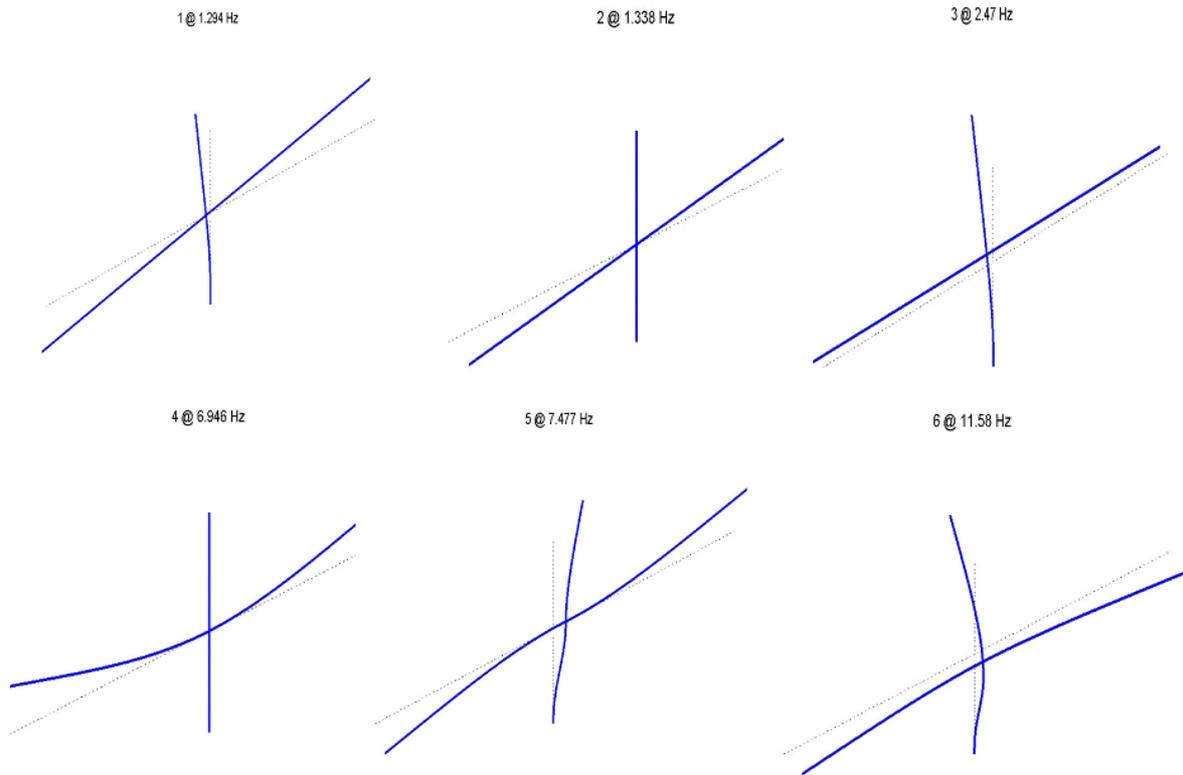


FIG. 4.6 – Les déformées modales de la maquette du pont.

## 4.7 Contrôlabilité de la maquette du pont

Contrôler un système nécessite de pouvoir contrôler chaque mode. En particulier, on peut montrer que certaines positions des actionneurs ne permettent pas de contrôler certains modes. Il est donc nécessaire d'étudier la capacité d'une structure à être contrôlée par une configuration d'actionneurs [20, 86]. Dans ce paragraphe on quantifie la contrôlabilité des six premiers modes de la maquette à partir de la matrice grammienne de contrôlabilité. Pour cela, on suppose que la maquette du pont est soumise seulement à une action de contrôle à l'extrémité du tablier. Cette action représente les forces du pendule sur le pont. Le système formé par les équations du pont avec les forces de contrôle, en supposant dans le modèle éléments finis seulement pour ce cas une normalisation par rapport à la masse, peut être écrit sous la forme d'un système d'état :

$$\dot{Z} = [\mathbf{A}]Z + [\mathbf{B}]v_N(x_1 = 0). \quad (4.47)$$

Avec  $Z = [\alpha_i(t), \dot{\alpha}_i(t)]^T$  pour  $i=1, \dots, 6$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} O_{6,6} & I_{6,6} \\ -\lambda_i & O_{6,6} \end{bmatrix}$

$$v_N(x_1 = 0) = [-v_{LN}(x_1 = 0), -\Gamma_N(x_1 = 0), -v_{HN}(x_1 = 0), -v_{VN}(x_1 = 0)]^T \text{ et}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} O_{6,4} \\ (\underline{\varphi}_i(x_1 = 0))_{i=1,\dots,6} \end{bmatrix}$$

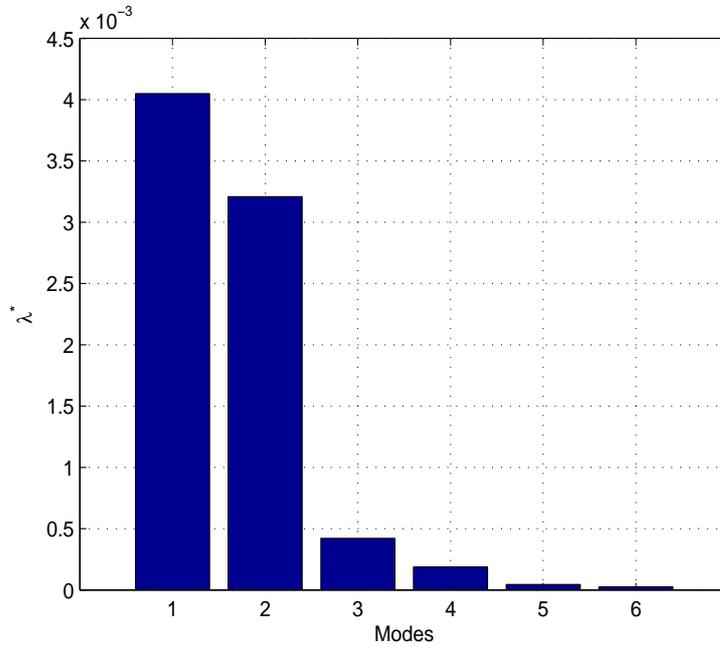


FIG. 4.7 – Grammien de contrôlabilité des six modes de la maquette du pont.

La matrice grammienne de contrôlabilité du système (4.47)

$$G(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{B}^T \mathbf{B} e^{\mathbf{A} t} dt \quad (4.48)$$

permet de quantifier l'énergie fournie au système. Pour observer la contrôlabilité mode par mode lorsque l'actionneur est attaché à l'extrémité du tablier, il est possible de calculer un quotient de Rayleigh associé à chaque mode et défini comme suit :

$$\lambda_i^* = \frac{1}{\lambda_i} (\underline{\psi}_i(x_1 = 0))^T G \underline{\psi}_i(x_1 = 0) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \quad (4.49)$$

Avec  $\underline{\psi}_i(x_1 = 0) = (\underline{\varphi}_i(x_1 = 0), O_{1,8})^T$ . De la figure (4.7) on observe que les deux premiers modes de la maquette du pont sont bien contrôlables alors que les autres sont très peu contrôlables lorsque l'actionneur est attaché à l'extrémité du tablier.

## 4.8 Conception des paramètres optimaux de l'actionneur

Après la formulation du problème dynamique et la discrétisation des équations continues, il reste à déterminer les paramètres optimaux de l'actionneur : masses, longueur du pendule et valeur de la résistance externe. Pour cela, on applique le même critère d'optimisation introduit dans le cas de la modélisation d'une poutre avec un actionneur de référence, qui consiste à maximiser le taux de décroissance exponentiel. Pour chercher ces paramètres, on considère le système mécanique formé de la maquette du pont et de l'actionneur de référence. Comme la performance d'un TMD est très dépendante de la pulsation du mode à amortir et pour des raisons de simplification, on considère premièrement le cas d'un seul mode de vibration : mode de torsion du tablier. Par ailleurs, le système se réduit à un système à deux degrés de liberté : mode de vibration du pont et angle de vibration du pendule. Les paramètres optimaux adimensionnels qui sont liés aux paramètres de l'actionneur sont déterminés analytiquement, en écrivant les équations qui décrivent le comportement de ce système sous une forme adimensionnelle linéaire, lorsque les pôles du système coïncident [10, 45]. Ces paramètres seront déterminés aussi numériquement au moyen de la technique de placement des pôles. Pour étudier l'influence du pendule sur la stabilité des autres modes du système, on calcule les pôles de tous les modes considérés de la maquette. Les paramètres optimaux de l'actionneur de référence trouvés, en appliquant ce critère d'optimisation, seront comparés aux paramètres donnés par [39]. De même, l'oscillation en vibration libre du deuxième mode de la maquette du pont, obtenue par l'utilisation des paramètres trouvés à partir du critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel, est comparée à celle obtenue en introduisant les paramètres donnés par [39]. Lorsque la structure est soumise à une excitation harmonique, ces paramètres ont été donnés par [29] en appliquant le critère de minimisation du déplacement de la structure principale.

### 4.8.1 Equations adimensionnelles

Le système discret qui décrit le modèle mécanique est formé de deux équations : la première est l'équation de vibration du mode de torsion de la maquette du pont en considérant que l'amortissement propre est nul et la deuxième est l'équation de vibration de

l'actionneur de référence.

$$\left\{ \begin{array}{l} [m_2^* + M_{ap}((\varphi_2^x(x_1 = 0))^2 + (\varphi_2^y(x_1 = 0))^2 + (\varphi_2^z(x_1 = 0))^2 + e^2(\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2 \\ + 2e\varphi_2^y(x_1 = 0)\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))] \ddot{\alpha}_2(t) + m_2 l [\varphi_2^y(x_1 = 0) \cos\theta + \varphi_2^z(x_1 = 0) \sin\theta \\ + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \cos\theta] \ddot{\theta} + C_p (\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2 \dot{\alpha}_2(t) - C_p \varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \dot{\theta} + (k_2 + M_{ap} e g (\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2) \alpha_2(t) \\ = -M_{ap} g \varphi_2^z(x_1 = 0) + m_2 l [\varphi_2^y(x_1 = 0) \sin\theta - \varphi_2^z(x_1 = 0) \cos\theta + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \sin\theta] \dot{\theta}^2 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l [\varphi_2^y(x_1 = 0) \cos\theta + \varphi_2^z(x_1 = 0) \sin\theta + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \cos\theta] \ddot{\alpha}_2(t) \\ - C_p \varphi_2^\gamma(x_1 = 0) \dot{\alpha}_2(t) + C_{eq} \dot{\theta} + m_2 g l \sin\theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.50)$$

D'après le calcul éléments finis, les formes propres, au point d'accrochage de l'actionneur, verticale  $\varphi_2^z(x_1 = 0)$ , longitudinale  $\varphi_2^x(x_1 = 0)$  et de torsion  $\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)$  sont nulles. D'après la condition de normalisation (4.19), la forme propre horizontale  $\varphi_2^y(x_1 = 0)$  est unitaire pour le mode de torsion. Si on suppose que l'angle de vibration du pendule est faible, le système précédent peut être écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_2^* + M_{ap}) \ddot{\alpha}_2(t) + m_2 l \ddot{\theta} + k_2 \alpha_2(t) = 0 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{\alpha}_2(t) + C_{eq} \dot{\theta} + m_2 g l \theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Ce système linéaire a la même forme que celui étudié dans le troisième chapitre. Par ailleurs, en suivant la même démarche et en introduisant les notations suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{ap}^2 = \frac{m_2 g l}{I_{ap}}, \quad k = \frac{M_{ap}}{m_2^*} \quad et \quad \mu = \frac{m_2}{m_2^*} \\ p = \frac{\omega_{ap}}{\omega_2} \quad et \quad \zeta = \frac{C_{eq}}{2I_{ap}\omega_{ap}} \end{array} \right. \quad (4.52)$$

le système linéaire (4.51) s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + k) \ddot{\alpha}_2 + \mu l \sqrt{\frac{m_2}{\mu I_{ap}}} \ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \mu l \sqrt{\frac{m_2}{\mu I_{ap}}} \ddot{\alpha}_2 + 2\zeta p \dot{\Theta} + p^2 \Theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.53)$$

$\omega_2$  est la pulsation propre du mode de torsion de la maquette du pont,  $\omega_{ap}$  la pulsation propre de l'actionneur,  $p$  le rapport entre la deuxième pulsation propre de la maquette et la pulsation de l'actionneur et  $\zeta$  le taux d'amortissement réduit de l'actionneur. On rappelle que les quatre paramètres adimensionnels  $\mu$ ,  $k$ ,  $p$  et  $\zeta$  relient les quatre paramètres dimensionnels de l'actionneur : la masse du pendule  $m_2$ , la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ , la longueur équivalente du pendule  $l$  et le coefficient d'amortissement total équivalent  $C_{eq}$ . L'inertie totale de l'actionneur est définie en fonction de la longueur équivalente et de la masse du pendule  $m_2$ . Pour des raisons des simplifications on suppose, dans ce premier cas, que  $I_{ap} = m_2 l^2$ .

### 4.8.2 Solution du système des équations adimensionnelles

Pour appliquer le critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel il convient d'écrire le système linéaire des deux équations différentielles ordinaires du second ordre (4.53) sous la forme matricielle suivante :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0. \quad (4.54)$$

Avec  $M = \begin{bmatrix} 1+k & \sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta p \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix}$  et  $X = [\alpha_2, \Theta]^T$ . La matrice M étant inversible, le système peut être écrit sous la forme d'un système d'état

$$\dot{Z} = \mathbf{A}Z \quad (4.55)$$

de quatre équations différentielles ordinaires du premier ordre avec la variable d'état  $Z = [X, \dot{X}]^T$  et la matrice d'état  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$ . La solution de l'équation (4.55) est de la forme  $Z = Z_0 e^{\mathbf{A}\tau}$ . Avec  $Z_0$  est la condition initiale. Cette solution peut être écrite explicitement en terme de combinaison linéaire des exponentielles  $e^{\lambda_i \tau}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en utilisant  $\lambda_i$  les valeurs propres de la matrice d'état  $\mathbf{A}$ . Le polynôme caractéristique de la matrice  $\mathbf{A}$ , dont les racines sont les valeurs propres de ladite matrice, est le suivant :

$$P(\lambda) = \frac{1}{1+k-\mu} [(1+k-\mu)\lambda^4 + 2\zeta p(1+k)\lambda^3 + (1+p^2(1+k))\lambda^2 + 2\zeta p\lambda + p^2] \quad (4.56)$$

Les paramètres optimaux de l'actionneur comme on a signalé seront obtenus par application du critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel qui est défini comme suit :

$$ETDR = \min_i | \operatorname{Re}(\lambda_i) |, \quad (4.57)$$

où Re est la partie réelle des racines du polynôme  $P(\lambda)$ .

Par analogie à ce qui a été fait dans le troisième chapitre, la maximisation du ETDR est obtenue pour des valeurs fixées de k, de  $\mu$  et des valeurs optimales de  $p_{k\mu}$  et  $\zeta_{k\mu}$ . Ces paramètres optimaux sont obtenus, lorsque le polynôme (4.56) a deux racines doubles complexes conjugués qui ont la même partie réelle [10, 45].

Les expressions analytiques des paramètres optimaux  $p_{k\mu}$  et  $\zeta_{k\mu}$  ainsi que le taux de décroissance exponentiel

$$\begin{cases} p_{k\mu} = \frac{\sqrt{1+k-\mu}}{1+k} \\ \zeta_{k\mu} = \sqrt{\frac{\mu}{1+k}} \\ ETDR = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1+k}\sqrt{1+k-\mu}} \end{cases} \quad (4.58)$$

sont données en fonction des paramètres adimensionnels  $k$  et  $\mu$ .

A partir de ces paramètres adimensionnels optimaux on peut déterminer les paramètres dimensionnels de l'actionneur : masse totale de l'actionneur, masse du pendule, longueur équivalente du pendule et coefficient d'amortissement équivalent total et par conséquent, la valeur de la résistance externe en contrôle passif et semi-actif. Les valeurs optimales définies par les expressions analytiques (4.58) peuvent être trouvées numériquement au moyen de la technique de placement des pôles. Dans la figure (4.8) est représenté le lieu des racines du polynôme (4.56) en variant le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  dans le demi-plan des ordonnées positives pour des valeurs de  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et pour une valeur optimale de  $p$  donnée lorsque  $p = p_{k\mu}$ . Pour cette valeur optimale de synchronisation, les deux pôles coïncident et au point de coïncidence (point x) correspond le taux d'amortissement réduit optimal  $\zeta_{k\mu}$ . Lorsque la valeur de  $p$  n'est pas prise en condition de synchronisation, le problème d'optimisation du taux d'amortissement réduit n'a pas été étudié dans la littérature. Ce problème peut être rencontré lors d'une application pratique, notamment à la condition de synchronisation où il est difficile de réaliser la longueur du pendule calculée ; trop courte ou trop grande. On a déjà rencontré ce problème dans le cas d'amortissement de vibration d'une simple poutre dans le chapitre 3 : la longueur du pendule obtenue, en synchronisant la fréquence du pendule à la première fréquence de la poutre, est très faible, sa réalisation pratique es très difficile.

En utilisant ce critère d'optimisation, le coefficient d'amortissement optimal est obtenu pour chaque valeur de  $p$ . Dans la figure (4.9) est représenté le lieu des racines du polynôme (4.56) en faisant varier le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  dans le demi-plan des ordonnées positives pour des valeurs de  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et pour une valeur de  $p$  non optimale ;  $p = 0,95p_{k\mu}$ . Au point x, indiqué sur cette figure, correspond le maximum de ETDR, et par suite, la condition de maximum d'amortissement est atteinte en ce point.

La valeur de  $k$  est presque fixée à partir de la masse de l'alternateur. La valeur de  $\mu$  est déterminée en se basant sur le travail fait dans le troisième chapitre, où on a montré l'influence du rapport  $\frac{\mu}{k}$  sur la réponse de la poutre ; l'amortissement est une fonction croissante de la masse oscillante  $m_2$ .

L'étude qui vient d'être exposée s'intéresse à la détermination des paramètres de l'actionneur pour amortir d'une manière optimale le mode de torsion de la maquette du pont. Pour voir l'influence de ces paramètres sur les autres modes de vibration, on trace le lieu des pôles de tous les modes de la maquette en supposant que le coefficient d'amortissement propre du pendule est nul. Le lieu de ces pôles est représenté, en faisant varier le taux d'amortissement réduit  $\zeta$  dans le demi-plan des ordonnées positives, par la figure

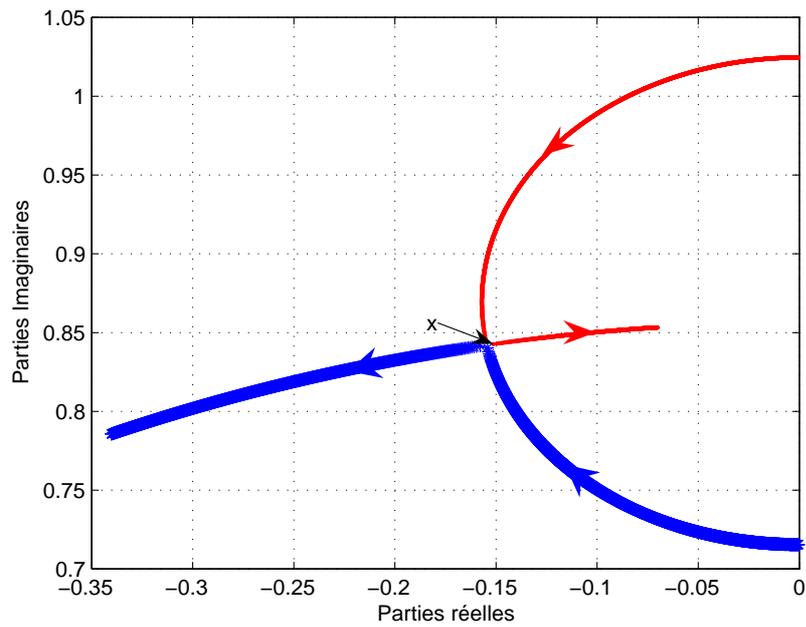


FIG. 4.8 – Lieu des pôles en variant  $\zeta$  pour  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et  $p = p_{k\mu}$ .

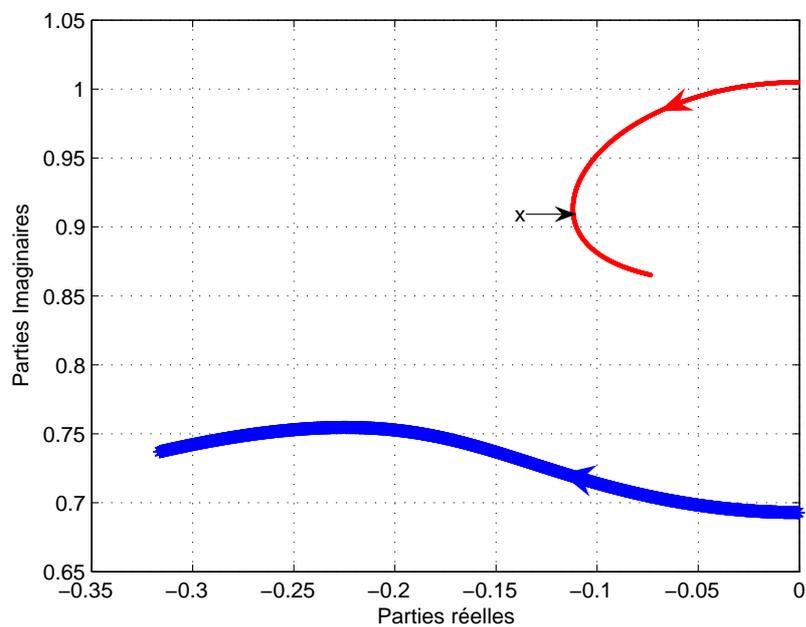


FIG. 4.9 – Lieu des pôles en variant  $\zeta$  pour  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et  $p = 0,95p_{k\mu}$ .

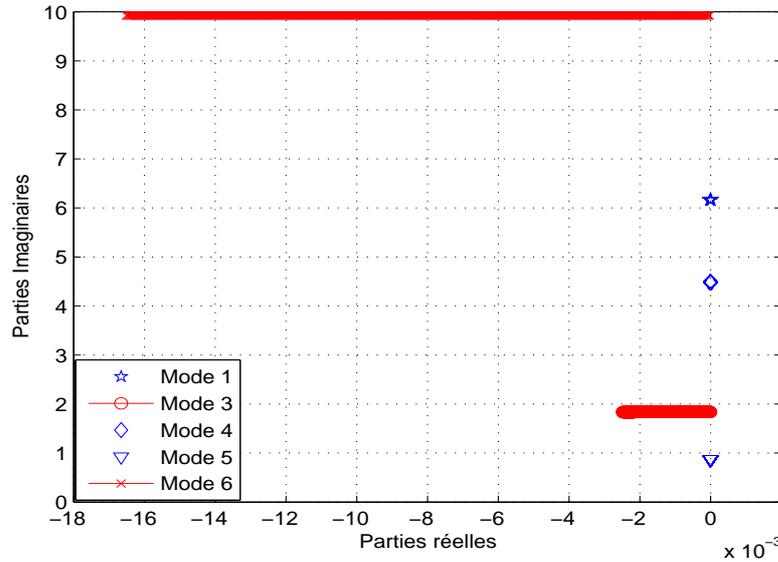


FIG. 4.10 – Lieu des pôles de la maquette du pont en variant  $\zeta$  pour  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et pour  $p = p_{k\mu}$ .

(4.10). Le paramètre  $p$  est pris en condition de synchronisation  $p = p_{k\mu}$ . On constate que les pôles correspondants aux trois modes verticaux (1, 4 et 5) sont à parties réelles nulles. C'est-à-dire que l'amortissement équivalent de ces modes est nul. On peut comprendre, alors, que les modes verticaux ne sont pas contrôlables pour une telle fixation de l'actionneur : le pendule vibre dans le plan (OYZ). Dans le paragraphe (4.7), on a remarqué que le premier mode vertical est très bien contrôlable lorsque l'actionneur est attaché à l'une des extrémités libres du tablier. Par ailleurs, ces modes verticaux seront contrôlés en mettant un autre actionneur électromécanique dont le pendule vibre dans le plan de la maquette : plan vertical (OXZ), ou en utilisant un simple TMD (masse-ressort-amortisseur).

On remarque, sur la même figure, que la partie réelle du sixième mode est très supérieure à celle du troisième mode (mode de balancement). La réponse du mode 6 est donc mieux amortie que celle du mode de balancement. Cette remarque sera réétudiée dans le prochain paragraphe en traçant la réponse des deux modes pour une même excitation. Par ailleurs, l'actionneur est plus efficace sur le mode de torsion que sur les deux autres modes horizontaux : sixième et troisième mode. Cela justifie le résultat trouvé dans le chapitre 3 : le meilleur emplacement du TMD est dans la zone du déplacement maximal. Par ailleurs, pour obtenir un amortissement optimal passif du mode de balancement, le mieux est de placer l'actionneur à l'extrémité du pylône de telle façon que le pendule vibre dans le plan (OYZ).

Les paramètres optimaux donnés par le système (4.58) sont déterminés à partir du critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel. Ces paramètres ont été trouvés dans la littérature pour un simple TMD et selon différents types d'excitations. On rappelle ici les expressions de ces paramètres données par [39] lorsque la structure est en vibration libre, comme le cas étudié, et les expressions données par [29] lorsque la structure est soumise à une excitation harmonique dont la méthode a été rappelée dans le chapitre 3. Pour comparer les paramètres obtenus dans ce chapitre aux paramètres donnés dans la littérature, on adopte les mêmes notations.

Par ailleurs, lorsque la structure à amortissement propre nul est en vibration libre et par application du critère de minimisation du déplacement de la structure principale, le paramètre de synchronisation et le taux d'amortissement réduit optimaux sont définis selon [39] par le système suivant :

$$\begin{cases} p^{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \\ \zeta^{opt} = \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}} \end{cases} \quad (4.59)$$

Ces paramètres ont été donnés par [89] en 1981, en maximisant aussi que possible la valeur du décrement logarithmique, lorsque l'amortissement propre de la structure est négligeable. Plus tard en 1993, ont été retrouvés par [39], dans le cas général, lorsque l'amortissement propre de la structure principale est non nul.

Ces paramètres sont définis en fonction de la masse du pendule  $m_2$  mais ils ne tiennent pas compte de la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ . Par suite, ces formules sont bien adaptées pour un simple TMD ou pour un simple pendule (pendule sans alternateur). Par contre, les paramètres adimensionnels donnés par le système (4.58) offrent cet avantage et tiennent compte de tous les paramètres de l'actionneur et ils sont aussi optimaux pour un simple TMD. Il est facile de vérifier qu'on retrouve les paramètres optimaux (4.59) à partir des paramètres définis par le système (4.58) en supposant que  $k = \mu$  ; la masse de l'alternateur est nulle.

## Remarque

*Lorsque l'amortissement propre de la structure principale est non nul, noté  $\xi$ , les expressions des paramètres optimaux (4.59) sont données par le système suivant [39] :*

$$\begin{cases} p^{opt} = \frac{1}{1 + \mu} - \frac{\xi\sqrt{\mu}}{(1 + \mu)\sqrt{1 + \mu - \xi^2}} \\ \zeta^{opt} = \frac{\xi}{1 + \mu} + \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{1 + \mu - \xi^2}}{1 + \mu} \end{cases} \quad (4.60)$$

Ce système coïncide avec le système (4.59) lorsque l'amortissement est nul;  $\xi = 0$ . On remarque aussi que ces paramètres coïncident avec les paramètres (3.17) donnés dans le troisième chapitre en supposant que  $k = \mu$ .

Lorsque la structure principale à amortissement propre nul est soumise à une excitation harmonique, les expressions des paramètres adimensionnels seront définies par le système suivant [29]:

$$\begin{cases} p^{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \\ \zeta^{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \end{cases} \quad (4.61)$$

Ces paramètres ont été trouvés en appliquant la méthode rappelée dans le troisième chapitre.

## 4.9 Réponses des modes de la maquette du pont

Pour pouvoir juger de l'efficacité des paramètres optimaux de l'actionneur de référence obtenus dans le paragraphe précédent, on compare la réponse en vibration libre du deuxième mode de la maquette du pont obtenue en utilisant les paramètres du système (4.58) et la réponse du même mode de vibration obtenue en introduisant les paramètres donnés par [39].

Les valeurs du coefficient de synchronisation et du coefficient d'amortissement réduit du système (4.58) sont calculées pour  $k = 36\%$  et  $\mu = 15,7\%$ ; ces coefficients sont donnés à partir du critère de maximisation de ETDR. On utilise la même valeur de  $\mu$  pour le calcul des valeurs de  $p^{opt}$  et de  $\zeta^{opt}$  selon le système (4.59) donné par [39]. Le choix de la valeur de  $k$  est fixé à partir de la masse de l'alternateur.

Dans la figure (4.11) sont représentées les deux contributions modales du déplacement en vibration libre du mode de torsion. La première est calculée en utilisant les paramètres optimaux (4.58) donnés à partir du critère de maximisation de ETDR et la deuxième en utilisant les paramètres optimaux (4.59) donnés par [39]. Ces contributions modales ont été obtenues en résolvant le système linéaire aux équations différentielles ordinaires,

$$\begin{cases} (1 + k)\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu}\ddot{\alpha}_2 + 2\zeta p\dot{\Theta} + p^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

en introduisant à chaque fois les paramètres optimaux correspondants. On constate que

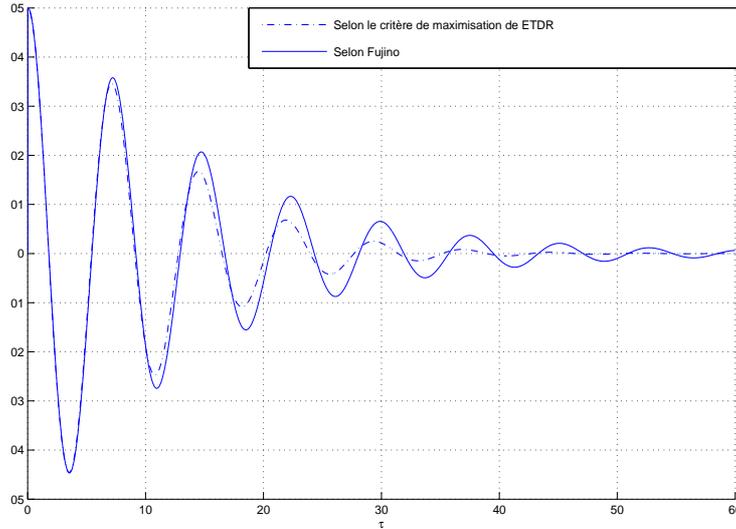


FIG. 4.11 – Réponse libre de la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont pour  $k = 36\%$ ,  $\mu = 15,7\%$  et pour  $p$  et  $\zeta$  calculées premièrement à partir du critère de maximisation de ETDR puis à partir du critère donné par [39].

l'amortissement de la contribution modale du déplacement du mode de torsion obtenu à partir du critère de maximisation de ETDR est plus important que celui obtenu selon le critère donné par [39].

On constate aussi, que la décroissance de la réponse en déplacement dans les deux cas n'est pas exponentielle, vu que la contribution modale n'oscille pas sur son mode propre. En effet, pour quantifier cet amortissement on peut identifier le taux d'amortissement équivalent  $\xi_{eq}$  associé à chaque cas selon la formule suivante :

$$\xi_{eq} = 2\xi_2 + \sqrt{\mu} \frac{\langle \ddot{\Theta} \dot{\alpha}_2 \rangle}{\langle \dot{\alpha}_2^2 \rangle}, \quad (4.63)$$

$\langle . \rangle$  est un produit scalaire,  $\xi_2$  le taux d'amortissement propre du mode de torsion,  $\dot{\alpha}_2$  la vitesse de contribution modale et  $\ddot{\Theta}$  l'accélération de l'angle de vibration du pendule. Ce coefficient est trouvé en réécrivant la première équation du système (4.62) sous la forme d'une équation d'équilibre énergétique.

$$(1 + k) \langle \ddot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_2 \rangle + \sqrt{\mu} \langle \ddot{\Theta} \dot{\alpha}_2 \rangle + 2\xi_2 \langle \dot{\alpha}_2^2 \rangle + \langle \alpha_2 \dot{\alpha}_2 \rangle = \langle f_2(t) \dot{\alpha}_2 \rangle \quad (4.64)$$

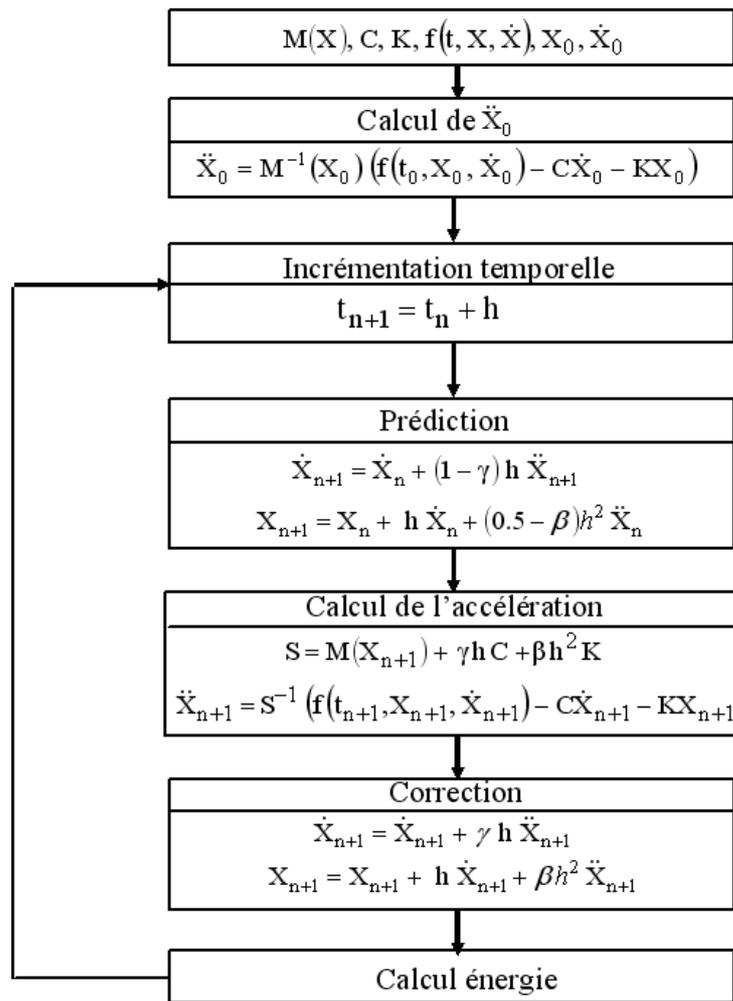
Dans cette équation, on a considéré que l'amortissement propre associé à ce mode de vibration est non nul et que la structure est soumise à une excitation extérieure. Pendant

un cycle de vibration,  $\tau$  varie entre 0 et  $2\pi$ , la contribution modale vérifie les relations suivantes :  $\langle \ddot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_2 \rangle = \langle \alpha_2 \dot{\alpha}_2 \rangle = 0$ . L'équation (4.64) devient l'équation d'équilibre des puissances :

$$2\xi_2 \langle \dot{\alpha}_2^2 \rangle + \sqrt{\mu} \langle \ddot{\Theta} \dot{\alpha}_2 \rangle = \langle f_2(t) \dot{\alpha}_2 \rangle \quad (4.65)$$

$2\xi_2 \langle \dot{\alpha}_2^2 \rangle$  est la puissance dissipative due à l'amortissement propre de la structure,  $\langle f_2(t) \dot{\alpha}_2 \rangle$  la puissance d'effort extérieur et  $\sqrt{\mu} \langle \ddot{\Theta} \dot{\alpha}_2 \rangle$  le flux de puissance de la structure principale au système d'amortissement. Donc, plus le flux est important mieux est l'amortissement de la structure principale. Par suite, ce flux de puissance peut être défini comme une puissance dissipative supplémentaire de la structure principale, d'où l'expression de l'amortissement total équivalent du mode de torsion (4.63).

En négligeant l'amortissement propre de la maquette du pont du mode de torsion, dans le cas étudié, l'amortissement est identifié à 4,67% pour la réponse de la contribution modale du déplacement selon le critère [39] et à 7% pour la réponse de la contribution modale selon le critère de maximisation de ETDR. On a trouvé les mêmes valeurs en utilisant le toolbox COSMAD. Cette différence est due au paramètre  $k$  qui non seulement n'a pas été pris en compte dans les paramètres donnés par [39], mais qui n'a pas été non plus introduit par aucun critère d'optimisation dans la littérature. De plus, cette différence entre les deux taux d'amortissement identifiés augmente si on diminue la masse du pendule  $m_2$  : le rapport  $\frac{\mu}{k}$  diminue. Cela peut expliquer l'intérêt d'introduire un critère d'optimisation qui tient compte de tous les paramètres d'un tel actionneur électromécanique. Pour confirmer l'avantage donné par le critère de maximisation de ETDR : de mieux amortir la contribution modale du déplacement en vibration libre du mode de torsion de la maquette du pont et de tenir compte de tous les paramètres de l'actionneur, on effectue une comparaison entre les réponses des autres modes de la maquette du pont. On souhaite faire la comparaison entre les réponses des six premiers modes. Pour bien voir l'influence du pendule sur les modes verticaux (1, 4 et 5), on résout le système simplifié complet non linéaire (4.45) en considérant que le coefficient d'amortissement propre du pendule est nul et en utilisant un actionneur de référence. Les paramètres dimensionnels utilisés sont déterminés pour chaque critère à partir des paramètres adimensionnels correspondant. La résolution de ce système non linéaire se fait à partir du schéma d'intégration de Newmark dont la procédure de calcul est résumée par l'organigramme de la figure (4.12). Dans la figure (4.13) sont représentées les contributions modales des six premiers modes de la maquette du pont en utilisant des paramètres optimaux dimensionnels. Ces paramètres sont calculés premièrement à partir du critère de maximisation de ETDR (4.58) (courbes pointillés), puis à partir du système (4.59) (courbes en traits pleins). La condition initiale :

FIG. 4.12 – *Algorithme d'intégration de Newmark.*

état initial déformé seulement du mode de torsion, est considérée la même pour les deux critères.

De cette figure on constate que les courbes, selon les deux méthodes, du troisième mode et du sixième mode sont presque confondues. On peut, donc interpréter que la masse totale  $M_{ap}$  n'a pas un effet important sur ces deux modes de vibration.

Le mode de balancement converge vers des oscillations constantes: il est très sensible à l'excitation horizontale du tablier vu que le déplacement horizontal et la torsion sont couplés.

On constate aussi une bonne superposition des contributions pour les modes verticaux. Ces modes oscillent autour d'une position d'équilibre déformée. Ces modes verticaux ne sont pas amortis, conformément à ce qu'il a été remarqué dans le paragraphe précédent en traçant le lieu des pôles.

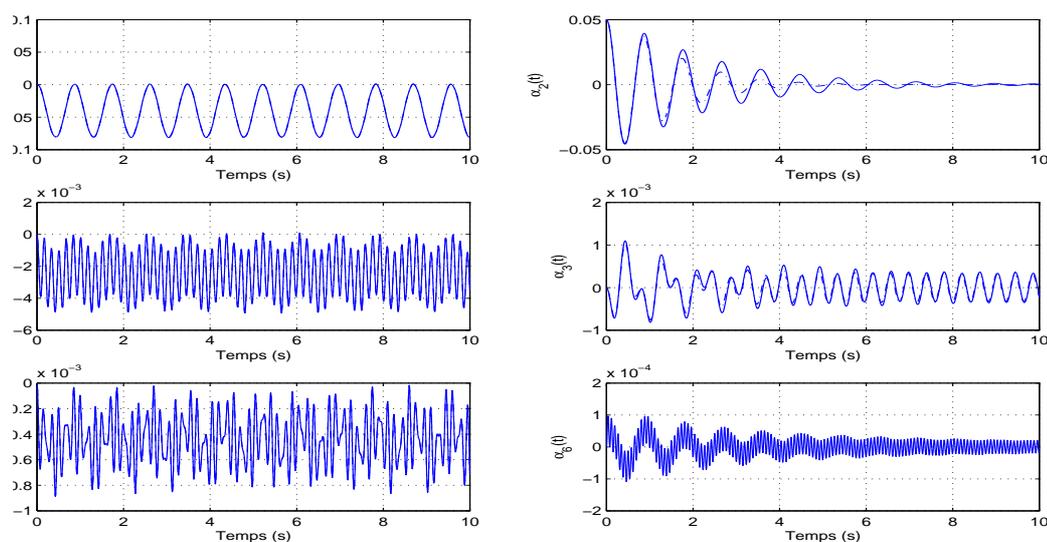


FIG. 4.13 – Contributions modales des modes verticaux (à gauche) et des modes horizontaux (à droite) en utilisant des paramètres dimensionnels. Les contributions en pointillés sont obtenues selon le critère de maximisation de ETDR et les contributions en traits pleins sont obtenues selon le critère donné par [39].

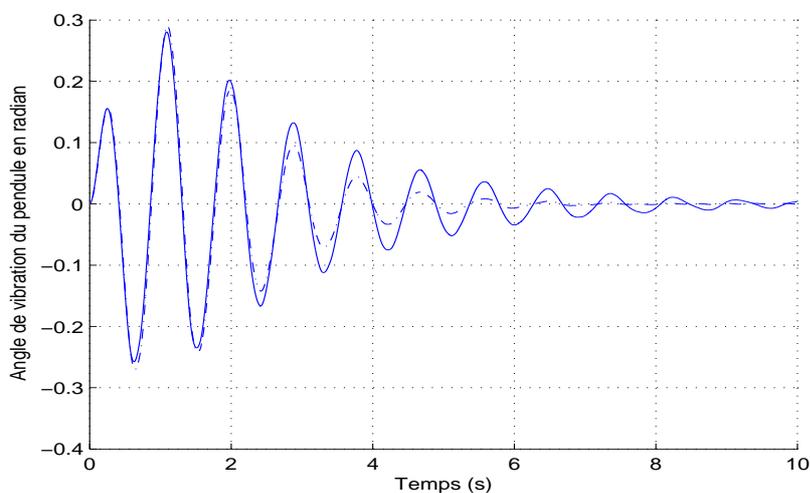


FIG. 4.14 – Angle de vibration du pendule obtenu selon le critère de maximisation de ETDR (en pointillé) et angle de vibration obtenu selon le critère donné par [39] (en trait plein).

Enfin, pour analyser le comportement de l'actionneur, on représente dans la figure (4.14) l'angle de vibration du pendule. Cet angle est excité principalement par le déplacement horizontal de la maquette du pont. On remarque qu'il a presque le même tracé que la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont mais en retard de phase. Cet angle se stabilise lorsque le déplacement horizontal de la maquette se stabilise. Pour cela, l'amortissement de l'angle de vibration du pendule dont les paramètres donnés à partir du critère de maximisation de ETDR est plus important que celui de l'angle de vibration du pendule dont les paramètres obtenus selon [39].

### 4.10 Amortissement multimodale de vibration de la maquette du pont

L'actionneur électromécanique attaché à l'extrémité du tablier de telle façon que le pendule vibre dans le plan (OYZ) permet d'amortir seulement la vibration du mode de torsion. Dans cette section, on cherche à amortir le premier mode et le mode de balancement en utilisant la même idée développée dans ce travail. Comme on a signalé dans le paragraphe (4.8.2), le premier mode est amorti lorsque le pendule de l'actionneur vibre dans le plan (OXZ) et le mode de balancement est amorti lorsque l'actionneur est placé à l'extrémité du pylône dont le pendule vibre dans le plan (OYZ). Pour simplifier, on propose d'amortir premièrement le mode vertical ensuite le mode de balancement.

#### 4.10.1 Amortissement du premier mode de vibration de la maquette du pont

On considère que l'actionneur électromécanique est placé à l'extrémité supérieure du pylône de telle façon que le pendule vibre dans le plan de la maquette du pont (OXZ). Le système mécanique est formé de l'équation de vibration du premier mode de la maquette du pont et de l'équation de vibration de l'actionneur "linéarisé". L'équation de vibration discrétisée du premier mode est définie comme suit :

$$m_1^* \ddot{\alpha}_1(t) + k_1 \alpha_1(t) = -v_{HN}(t) \varphi_1^x(x_4 = L_4), \quad (4.66)$$

où  $\varphi_1^x(x_4 = L_4)$  est la composante selon la direction X de la déformée modale du premier mode. Cette équation est la première équation du système (4.21) avec une seule force

horizontale de liaison appliquée à l'extrémité de la quatrième poutre de la maquette. L'expression de cette force de liaison et l'équation de vibration du pendule

$$\begin{cases} v_H(t) = M_{ap}\ddot{u}_4(x_4 = L_4, t) + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ I_p\ddot{\theta} + m_2l\ddot{u}_4(x_4 = L_4, t)\cos\theta + C_p\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange. La discrétisation de ce système est déterminée à partir de l'estimation du déplacement sur le premier mode. Au système (4.67) on ajoute les équations de l'alternateur. D'où le système formé des deux degrés de libertés suivant, on considère l'actionneur "linéarisé" :

$$\begin{cases} (m_1^* + M_{ap}(\varphi_1^x(x_4 = L_4))^2)\ddot{\alpha}_1(t) + k_1\alpha_1(t) + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta\varphi_1^x(x_4 = L_4) \\ = m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta\varphi_1^x(x_4 = L_4) \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l\ddot{\alpha}_1(t)\varphi_1^x(x_4 = L_4)\cos\theta + C_{eq}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

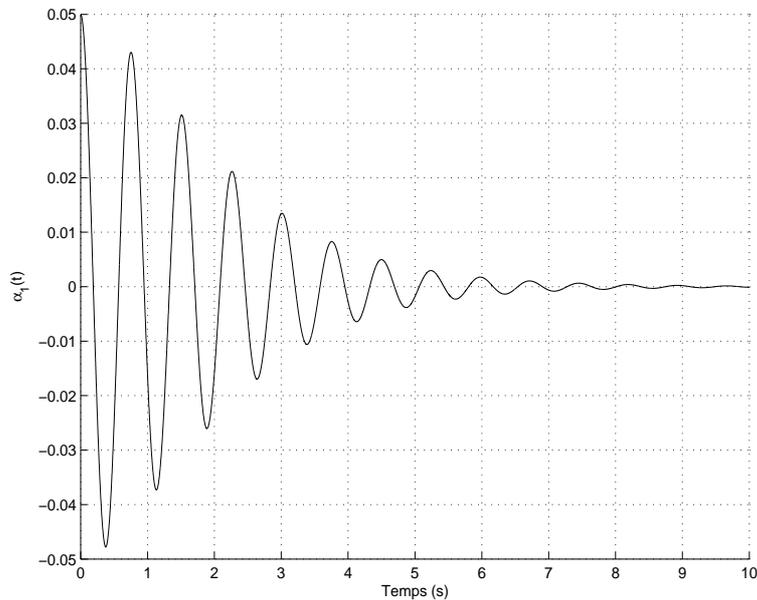


FIG. 4.15 – Réponse libre de la contribution modale du premier mode de vibration de la maquette du pont munie du pendule décrit au paragraphe (4.10.1) .

Les paramètres optimaux du pendule sont déterminés, en appliquant le critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel, à partir du système (4.58). On représente dans la figure (4.15) l'oscillation libre de la contribution modale du premier mode en fonction du temps. On remarque qu'en utilisant une telle configuration de l'actionneur le premier mode vertical de la maquette du pont est amorti et l'amortissement équivalent est identifié à 6%.

### 4.10.2 Amortissement du troisième mode de vibration de la maquette du pont

Pour amortir le mode de balancement, on considère que l'actionneur électromécanique est placé à l'extrémité supérieure du pylône dont le pendule vibre dans le plan de la maquette du pont (OYZ). Par raison de simplification, on suppose que le système mécanique est formé seulement de l'équation de vibration du mode de balancement de la maquette du pont et de l'équation de vibration de l'actionneur "linéarisé". Ce système, a la même forme que le système (4.68), définit comme suit :

$$\begin{cases} (m_3^* + M_{ap}(\varphi_3^y(x_4 = L_4))^2)\ddot{\alpha}_3(t) + k_3\alpha_3(t) + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta\varphi_3^y(x_4 = L_4) \\ = m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta\varphi_3^y(x_4 = L_4) \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l\ddot{\alpha}_3(t)\varphi_3^y(x_4 = L_4)\cos\theta + C_{eq}\dot{\theta} + m_2gl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

où  $\varphi_3^y(x_4 = L_4)$  est la composante selon la direction Y de la déformée modale du mode de balancement. Les paramètres optimaux de l'actionneur "linéarisé" sont déterminés à partir du système (4.58). On représente dans la figure (4.16) l'oscillation libre de la contribution modale du troisième mode en fonction du temps. On remarque que le mode

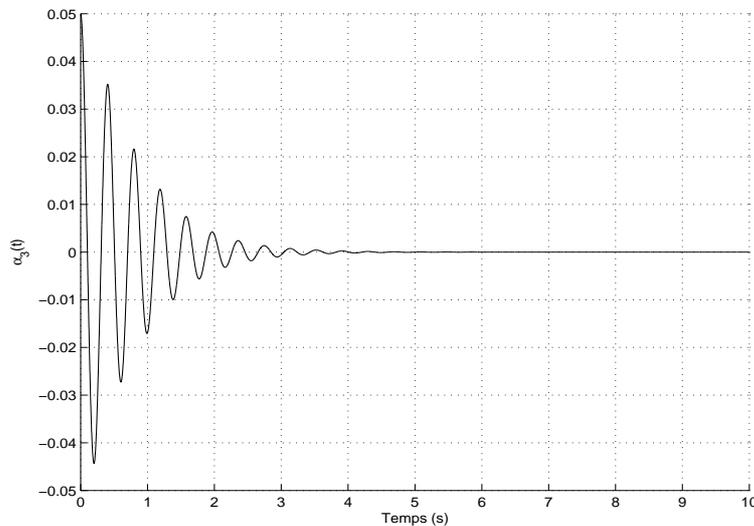


FIG. 4.16 – Réponse libre de la contribution modale du troisième mode de la maquette du pont munie du pendule décrit au paragraphe (4.10.2).

de balancement de la maquette du pont, lorsque l'actionneur est attaché à l'extrémité supérieure du pylône de façon à ce que le pendule vibre dans le plan (OYZ), est bien amorti.

En effet, pour amortir les trois premiers modes de vibration il suffit d'équiper la maquette de trois actionneurs électromécaniques dont deux sont attachés à l'extrémité du pylône et le troisième est attaché à l'une des deux extrémités du tablier comme indiqué sur la figure (4.17).

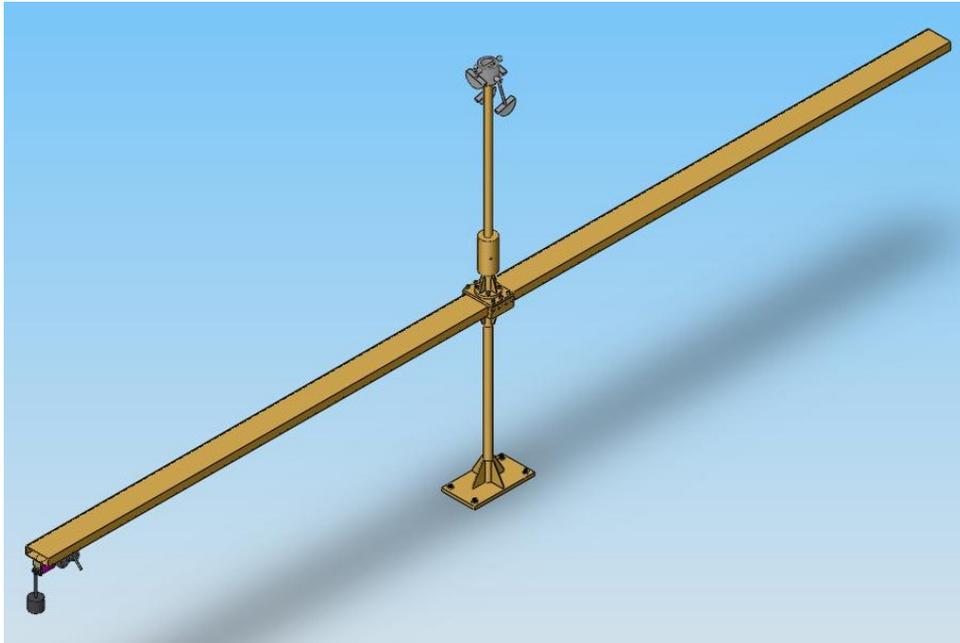


FIG. 4.17 – Maquette du pont équipé par trois actionneurs.

## 4.11 Réponse du mode de torsion sous excitation harmonique

Après la comparaison entre les contributions modales du déplacement en vibration libre, on étudie dans ce paragraphe la comparaison entre la contribution modale du mode de torsion en utilisant les paramètres donnés par le système (4.58) et la contribution modale du même mode en utilisant les paramètres donnés par (4.61). La structure, dans les deux cas, est soumise à une excitation harmonique. On considère que cette excitation est horizontale et qu'elle est concentrée à l'autre extrémité du tablier de la maquette du

pont. Le système à résoudre est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} [m_2^* + M_{ap}((\varphi_2^x(x_1 = 0))^2 + (\varphi_2^y(x_1 = 0))^2 + (\varphi_2^z(x_1 = 0))^2 + e^2(\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2 \\ + 2e\varphi_2^y(x_1 = 0)\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)]\ddot{\alpha}_2(t) + m_2l[\varphi_2^y(x_1 = 0)\cos\theta + \varphi_2^z(x_1 = 0)\sin\theta \\ + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)\cos\theta]\ddot{\theta} + C_p(\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2\dot{\alpha}_2(t) - C_p\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)\dot{\theta} \\ + (k_2 + M_{ap}eg(\varphi_2^\gamma(x_1 = 0))^2)\alpha_2(t) = f_2(t) - M_{ap}g\varphi_2^z(x_1 = 0) \\ + m_2l[\varphi_2^y(x_1 = 0)\sin\theta - \varphi_2^z(x_1 = 0)\cos\theta + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)\sin\theta]\dot{\theta}^2 \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2l[\varphi_2^y(x_1 = 0)\cos\theta + \varphi_2^z(x_1 = 0)\sin\theta + e\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)\cos\theta]\ddot{\alpha}_2(t) \\ + C_{eq}\dot{\theta} + m_2g\sin\theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.70)$$

$f_2(t) = a_0 \cos(\omega_2 t)\varphi_2^y(x_3 = L_3)$  est la force d'excitation harmonique, où  $a_0$  son amplitude et  $\omega_2$  sa pulsation propre prise à la résonance du mode de torsion de la maquette du pont. D'après le calcul éléments finis, les formes propres, au point d'accrochage de l'actionneur, verticale  $\varphi_2^z(x_1 = 0)$ , longitudinale  $\varphi_2^x(x_1 = 0)$  et de torsion  $\varphi_2^\gamma(x_1 = 0)$  sont nulles et d'après la condition de normalisation (4.19), la forme propre horizontale  $\varphi_2^y(x_1 = 0)$  est unitaire pour le mode de torsion.

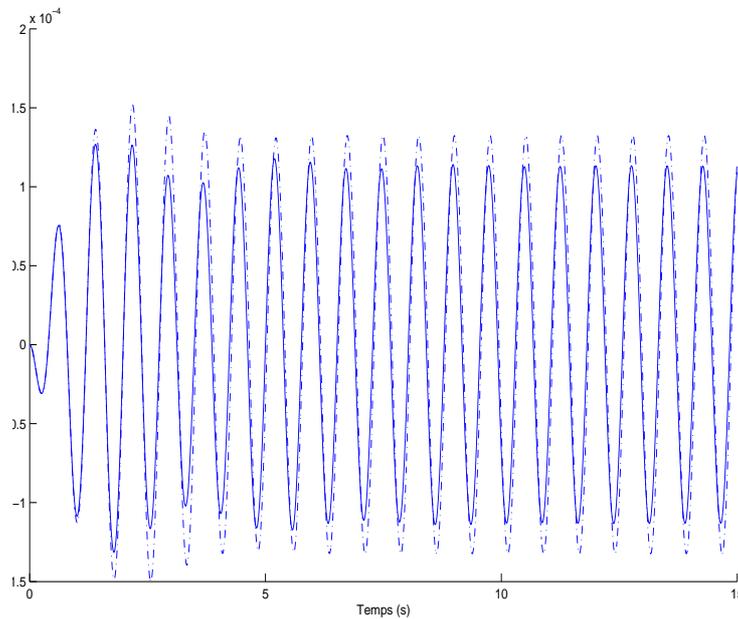


FIG. 4.18 – Contribution modale du mode de torsion obtenue selon le critère de maximisation de ETDR (en trait pointillé) et la contribution du même mode obtenu selon le critère donné par [29] (en trait plein).

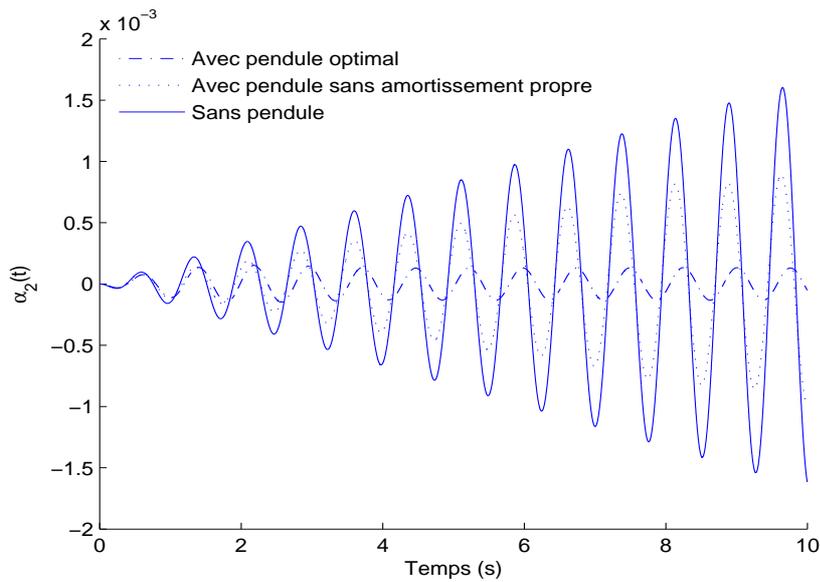


FIG. 4.19 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion sans contrôle et la contribution modale du même mode avec l'actionneur attaché à l'extrémité du tablier.

De la figure (4.18) on observe que la contribution modale obtenue en utilisant les paramètres donnés par (4.61) est mieux amortie que celle obtenue en utilisant les paramètres donnés par (4.58). D'où l'intérêt, comme on verra dans le prochain chapitre, d'introduire une loi de contrôle semi-actif qui permet de faire varier les paramètres de l'actionneur selon les types d'excitations.

De plus, dans la figure (4.19) est représentée la contribution modale du déplacement du mode de torsion sans contrôle, puis contrôlée en utilisant premièrement un actionneur à paramètres optimaux ensuite un actionneur à paramètres non optimaux : actionneur à coefficient d'amortissement équivalent nul. On observe l'influence majeure de l'actionneur à paramètres optimaux à réduire l'amplitude de vibration de la contribution modale à la résonance.

L'étude faite jusqu'à présent est la conception des paramètres optimaux de l'actionneur de référence pour amortir le mode de torsion de la maquette du pont. On étudiera par la suite l'amortissement du mode de torsion de la maquette du pont lorsqu'on considère le système réel (non-linéaire).

## 4.12 Réponse du mode de torsion de la maquette du pont en résolvant le système non linéaire

L'étude faite jusqu'à maintenant se base sur l'hypothèse fondamentale que l'amortissement électrique peut être obtenu par un amortissement mécanique visqueux équivalent ; actionneur de référence. Les paramètres optimaux de l'actionneur de référence pour amortir le mode de torsion de la maquette du pont ont été obtenus en utilisant le critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel au moyen des placement des pôles après linéarisation du système d'équations différentielles. Dans cette section en considérant que l'amortissement est la somme d'un amortissement mécanique et d'un amortissement électrique, système réel, on cherche à déterminer la valeur de la résistance externe afin d'amortir toujours le mode de torsion de la maquette du pont, en résolvant le système d'équations non linéaires (4.45).

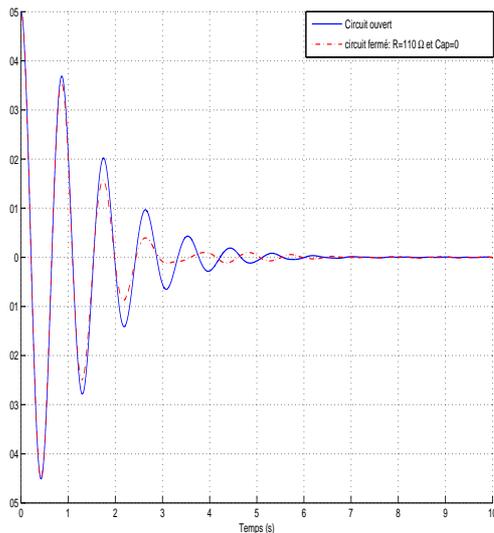


FIG. 4.20 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion à circuit ouvert et à circuit fermé avec  $C_{ap} = 0$ .

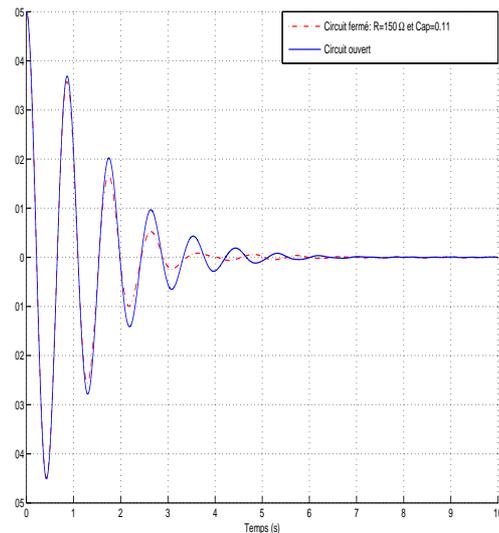


FIG. 4.21 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion à circuit ouvert et à circuit fermé avec  $C_{ap} \neq 0$ .

Pour cela, on maintient la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ , la masse du pendule  $m_2$  et la longueur équivalente optimale du pendule obtenues dans les paragraphes précédents et on cherche premièrement une valeur de la résistance externe à  $C_{ap}$  nul, tel que l'amortissement du mode de torsion soit optimal. Lorsque l'amortissement mécanique de l'actionneur est non nul, on cherche une valeur de la résistance et une valeur de  $C_{ap}$  tel que l'amortis-

sement du mode de torsion soit optimal. Les paramètres électriques, la résistance interne, l'inductance de la bobine et les constantes  $K_e$  et  $K_c$ , sont identifiés dans le deuxième chapitre. Le rapport d'engrenage est pris dans ce cas à  $\beta = 252$  de manière que l'alternateur produise du courant pour des petites oscillations.

Pour comparer l'amortissement du mode de torsion en résolvant le système linéaire avec l'actionneur de référence (4.51) à l'amortissement en résolvant le système non linéaire avec l'actionneur en circuit fermé (4.45), on représente, dans les figures (4.20) et (4.21), la contribution modale en vibration libre du mode de torsion de la maquette du pont en résolvant le système linéaire (4.51) à paramètres optimaux (courbes pointillées) et la contribution modale du même mode de vibration en résolvant le système non linéaire (4.45) (courbes en traits pleins). Dans la figure (4.20) la contribution modale lorsque l'actionneur est en circuit fermé est tracée pour une valeur de résistance externe  $R = 110\Omega$  et un coefficient d'amortissement mécanique nul. Comme dans la pratique l'amortissement propre est non nul, la valeur de la résistance est prise à  $R = 150\Omega$  pour un coefficient  $C_{ap} = 0,11Kg/s$ , figure (4.21). De ces deux figures, on constate que l'amortissement est plus important en résolvant le système non linéaire (4.45) que le système linéaire (4.51) à paramètres optimaux.

# Chapitre 5

## Contrôle semi-actif

### 5.1 Introduction

L'idée principale du contrôle semi-actif est très simple : elle consiste à changer, en temps réel, les caractéristiques des dispositifs passifs de dissipation d'énergie. Ce changement ne nécessite qu'une source minimale d'énergie.

D'une manière générale, il existe deux types de contrôle semi-actif : le premier est un contrôle dit continu, il nécessite un dispositif de commande permettant d'ajuster (en continu) la force de contrôle, et le second est un amortisseur à deux états (amortissement fort/faible), plus facile à mettre en oeuvre. Le concept de contrôle semi-actif a été introduit pour la première fois par [52] où les premiers dispositifs ont été introduits dans le domaine de suspension des véhicules. Très récemment, ce type de dispositifs a été introduit dans le domaine du génie civil [81]. Aujourd'hui il existe différents types d'appareils semi-actifs proposés pour contrôler les structures en génie civil. Dans la suite, on présente quelques exemples. Pour une étude plus détaillée, nous renvoyons les lecteurs aux [46, 47, 99].

- *Amortisseurs hydrauliques à orifice variable* : dans le domaine du génie civil, l'efficacité des amortisseurs à orifice variable pour réduire la réponse de bâtiments soumis aux charges sismiques a été démontrée, à partir des résultats numériques et expérimentaux sur des modèles réduits, par [57, 69, 82, 100]. En plus, des résultats expérimentaux sur des modèles réels ont été donnés, pour un bâtiment, par [26, 53] et, pour un pont, par [36].
- *Amortisseurs à friction variable* : l'idée d'introduire un amortisseur à friction variable est de contrôler la force du frottement entre deux objets glissants en variant

la pression à la surface du contact. Plusieurs variantes sur cette idée existaient dans la littérature. Ce dispositif à friction variable a été proposé par [1] dans lequel l'actionneur est relié rigidement à la structure. Une étude semblable a été menée par [30]. Il a été montré, analytiquement, que de tels appareils peuvent être employés pour réduire les déplacements relatifs des étages d'un bâtiment. Un autre type d'appareil à frottement variable, "a friction-controllable fluid bearing", a été étudié par [37].

- ***Amortisseurs à rigidité variable*** : l'idée d'utiliser un amortisseur à rigidité variable a été proposée pour la première fois par [53]. Ces amortisseurs ont été introduits dans de nombreux bâtiments pendant la dernière décennie [107] et plusieurs méthodes de contrôle ont été développées pour ces appareils [102]. La combinaison des amortisseurs à rigidité variable et du TMD a été introduite surtout par [73, 104, 72].
- ***Amortisseurs à fluide contrôlable*** : les amortisseurs à fluide contrôlable possèdent des fluides dont les propriétés peuvent être influencées par la présence d'un champ magnétique ou électrique. Dans ces deux cas, les amortisseurs sont appelés, respectivement, magnétorhéologique (MR) ou électrorhéologique (ER). Le fluide rhéologique a été découvert pendant les années quarante par [85]. Le fluide change de comportement lorsqu'il est exposé à un champ magnétique ou électrique : il aura alors un comportement visco-plastique. Donc, l'application d'un tel fluide dans un amortisseur permet de contrôler en temps réel la viscosité de l'amortisseur à travers un champ électrique ou magnétique. Ces amortisseurs ont montré une efficacité dans les applications en génie civil [32, 41]. Une récente recherche sur les amortisseurs à fluide MR a montré la capacité de ce type d'amortisseur à réduire la vibration de structures due à des excitations sismiques [106]. Ces amortisseurs sont très fiables parce qu'ils n'ont pas de valves mécaniques à manipuler et ils peuvent être propulsés par de simples piles. Les applications de ce type d'amortisseur dans le domaine de structure sont nombreuses et sont encore un sujet de recherche.
- ***Amortisseurs électromécaniques*** : l'énergie de vibration d'une structure peut être aussi dissipée au moyen d'un amortisseur électrique. Par exemple, dans le contrôle de structures flexibles avec des matériaux piézoélectriques, plusieurs études ont montré qu'une réduction considérable de vibration peut être accomplie lorsqu'un circuit électrique RL est branché aux bornes de l'élément piézoélectrique [11, 45]; l'élément piézoélectrique, par son effet direct, convertit l'énergie mécanique en énergie électrique qui sera dissipée dans le circuit extérieur RL. Mais l'application des

piézoélectriques dans le domaine de génie civil reste très limitée aux structures minces. Par contre, un générateur de courant électrique peut être utilisé dans différents champs d'application en génie civil [92]. Notre étude est basée sur le choix de cet amortisseur électromécanique. Le générateur de courant transforme l'énergie mécanique de vibration de la structure en énergie électrique qui sera dissipée dans un circuit électrique externe branché aux bornes de l'alternateur. Cette idée peut être étendue à un amortisseur électromécanique semi-actif, en faisant varier la résistance extérieure par application d'une loi de contrôle.

Ces dispositifs semi-actifs servent à modifier le comportement de l'actionneur : rigidité ou amortissement, en lui appliquant une loi de contrôle. Par conséquent, les systèmes de contrôle semi-actif incluent deux catégories, comme on a signalé dans le premier chapitre : la première est à rigidité variable et la deuxième est à amortissement variable. Dans les deux catégories, les forces de contrôle sont produites à partir d'une loi de contrôle pour sélectionner la rigidité ou le coefficient d'amortissement de l'appareil.

Les appareils d'amortissement de vibrations mécaniques les plus utilisés dans la pratique sont les amortisseurs à masse accordée (TMDs). La première version semi-active de cet appareil a été introduite par [48], dont des comparaisons entre TMD semi-actif et TMD purement passif et actif sont analysées en utilisant un actionneur hydraulique. Ces comparaisons ont pour but de montrer la performance du TMD semi-actif. Les résultats de la simulation numérique indiquent que l'utilisation du TMD semi-actif en contrôlant le valve de l'actionneur permet d'améliorer l'amortissement de la réponse en déplacement et en accélération par rapport au système du TMD passif et de le rapprocher de la performance du système TMD actif. Une utilisation plus récente du TMD semi-actif, pour contrôler les vibrations des planchers causées par l'activité humaine, est introduite par [95] en utilisant un algorithme de contrôle ground-hook. Cet algorithme permet de faire varier continuellement l'amortissement afin de réduire l'accélération du plancher. Une comparaison entre un tel système d'amortissement et un TMD passif équivalent a montré l'efficacité et la robustesse du TMD semi-actif.

Les amortisseurs à masse accordée représentent une technologie tout à fait mûre pour réduire la réponse des structures flexibles tels que la vibration des passerelles induite par les charges vivantes ou par le vent, mais leur efficacité est lié à la masse ajoutée. Dans le cas de passerelles où les charges des piétons peuvent être une partie considérable de la masse vibrante ou dans le cas de structures vraiment minces, il est difficile d'ajuster les paramètres (masse et raideur) de l'amortisseur à masse accordée selon le mode à contrôler. Il a été proposé en [75] d'utiliser des amortisseurs semi-actifs à masse accordée qui

sont capables d'ajuster leurs paramètres dynamiques, en temps réel en utilisant un algorithme de contrôle. Pour obtenir un tel système d'amortissement semi-actif, il est souvent utilisé un appareil électrorhéologique ou magnétorhéologique sur lequel sera appliqué la loi de contrôle. Plusieurs travaux ont utilisé un amortisseur magnétorhéologique (MR) semi-actif; ce type d'amortisseur a été utilisé par [75] pour réduire la vibration d'une passerelle soumise aux excitations des piétons. Sur cette même application, il a été montré que les amortisseurs semi-actifs MR TMD sont capables de s'adapter aux variations des propriétés mécaniques du système et offrent l'avantage de contrôler une large gamme des fréquences [93]. Ce type d'amortisseur a été testé expérimentalement par [87] pour contrôler un modèle d'un bâtiment à quatre étages en utilisant un algorithme semi-actif On-Off.

Dans ce chapitre on introduit une loi de contrôle semi-actif qui permet de faire varier l'amortissement et de compenser la rigidité du TMD pendulaire. Dans la première partie de ce chapitre, on a étudié l'influence de la partie inductive sur l'énergie totale du système. Dans la deuxième partie on a intéressé à l'amortissement semi-actif du mode de torsion de la maquette du pont en utilisant l'actionneur électromécanique. Cet actionneur est formé d'un TMD pendulaire couplé à un alternateur. Le concept moderne du TMD pour les applications structurelles a été étudié dans le domaine d'amortissement des vibrations dynamiques dès 1911 par [38]. L'efficacité de ce système compte fortement sur le réglage adéquat de ses paramètres en fonction du mode naturel de la structure à contrôler. Dans le cas d'une structure continue, cas des ponts, la fréquence de vibration du TMD est synchronisée à la fréquence propre du mode à amortir: dans le chapitre précédent il a été déterminé les paramètres optimaux de l'actionneur de référence pour amortir le mode de torsion de la maquette du pont. Mais lorsque la structure évolue en fonction des étapes de construction, sa fréquence diminue et les paramètres du TMD ne seront plus optimaux. Par ailleurs, sa performance diminue. Pour remédier à cet inconvénient, une loi de contrôle semi-actif est développée, pour faire varier la résistance en temps réel, afin d'avoir des paramètres optimaux: rigidité et amortissement, pour différentes étapes de construction.

De même, l'efficacité du TMD varie beaucoup selon le type d'excitation. Par ailleurs, dans la troisième partie, on a introduit la même loi de contrôle semi-actif pour adapter en temps réel les paramètres de l'actionneur selon les types des sollicitations.

Dans la quatrième partie on a aussi introduit la même loi de contrôle pour amortir plusieurs modes en agissant sur un mode particulier à chaque instant dans l'esprit de la méthode MIMSC.

## 5.2 Modèle mécanique de la maquette du pont et de l'actionneur électromécanique

L'action de contrôle, pour une approche de type semi-actif, se réalise à travers le réglage en temps réel des paramètres mécaniques de dissipation, et réagit passivement avec le reste de la structure. La modalité de réglage de ces paramètres est déterminée, sur la base d'un choix d'algorithme de contrôle, en fonction de la réponse de la structure ou de l'excitation ou bien en fonction des deux. Par conséquent, comme pour le contrôle actif, le système de contrôle semi-actif nécessite des capteurs, des processeurs et des actionneurs. L'énergie demandée de l'extérieur, par contre, est minimale par rapport à un système de contrôle actif. Elle sert seulement à modifier les caractéristiques mécaniques des dispositifs de contrôle. Les systèmes de contrôle semi-actif représentent donc une évolution des systèmes de contrôle passif, et par conséquent ils en conservent les caractéristiques fondamentales de fiabilité, de sécurité et de simplicité.

Après la détermination des paramètres optimaux de l'actionneur pour contrôler d'une manière passive le mode de torsion de la maquette du pont, on analyse dans ce chapitre la variation de l'amortissement que vise un contrôle semi-actif. La variation de l'amortissement est obtenue en faisant varier la résistance externe branchée aux bornes de l'alternateur par l'introduction d'une loi de contrôle semi-actif. L'amortissement équivalent de ce système, comme il est indiqué dans le deuxième chapitre, est une fonction décroissante de la résistance. On rappelle que lorsque la résistance est nulle, l'alternateur est en court circuit, l'amortissement équivalent est maximal et lorsqu'elle tend vers l'infini, l'alternateur est en circuit ouvert, l'amortissement est purement mécanique. Par ailleurs, ce coefficient d'amortissement, peut être ajusté entre deux valeurs limites suivant la valeur de la résistance. Sa valeur optimale, afin d'amortir le mode de torsion de la maquette du pont, est donnée dans le chapitre précédent en appliquant le critère de maximisation du taux de décroissance exponentiel.

L'efficacité de l'actionneur varie beaucoup, comme on l'a montré dans le chapitre précédent, lorsque ses paramètres ne sont pas pris d'une manière optimale ou également lorsque la structure évolue. Durant la construction d'un grand ouvrage, le pont passe par des phases intermédiaires dans lesquelles il est très flexible. Un vent courant suffit à créer des vibrations susceptibles d'interdire momentanément la poursuite des travaux. Les arrêts de chantier dus à un vent trop fort représentent un coût financier très important. La mise en place d'un système de contrôle de type TMD permet de diminuer l'amplitude des vibrations et d'augmenter ainsi le niveau de vent acceptable. Mais l'efficacité d'un tel

système de contrôle diminue de plus en plus en fonction de l'avancement des travaux. L'idée fondamentale développée dans ce chapitre est de maintenir l'actionneur électromécanique durant plusieurs étapes de construction d'un pont en adaptant ses paramètres en temps réel ; ceci au moyen d'une loi de contrôle semi-actif.

Pour étudier un tel problème, on considère le système mécanique formé par la maquette du pont et de l'actionneur électromécanique, système réel, et on cherche à amortir le mode de torsion de la maquette du pont durant différentes étapes de construction. Par ailleurs, le système se réduit à trois degrés de liberté : la deuxième contribution modale de la maquette du pont, l'angle de vibration du pendule et le courant électrique. Les équations discrètes qui décrivent ce modèle mécanique, en considérant que l'angle de vibration du pendule est faible, sont les suivantes :

$$\begin{cases} (m_2^* + M_{ap})\ddot{\alpha}_2(t) + m_2 l \ddot{\theta} + k_2 \alpha_2(t) = 0 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{\alpha}_2(t) + C_{ap} \dot{\theta} + m_2 g l \theta = -K_c i(t) \sin(\beta \theta(t)) \\ L_e \frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) = K_e \beta \dot{\theta} \sin(\beta \theta(t)) \end{cases} \quad (5.1)$$

Les paramètres de ce système ont été définis dans les chapitres précédents et lorsque on utilise un actionneur de référence, ce système a été obtenu dans le chapitre 4 par le système (4.51).

Afin de déterminer l'amortissement total équivalent, on néglige la partie inductive de l'alternateur de la troisième équation du système (5.1), puis on remplace le courant électrique,

$$i(t) = \frac{\beta K_e}{r + R(t)} \dot{\theta} \sin(\beta \theta), \quad (5.2)$$

par son expression (5.2) dans la deuxième équation du système (5.1). Ce dernier sera défini comme suit :

$$\begin{cases} (m_2^* + M_{ap})\ddot{\alpha}_2(t) + m_2 l \ddot{\theta} + k_2 \alpha_2(t) = 0 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{\alpha}_2(t) + \tilde{C}_{eq}(t) \dot{\theta} + m_2 g l \theta = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

$\tilde{C}_{eq}(t)$  est le coefficient d'amortissement équivalent défini par :

$$\tilde{C}_{eq}(t) = C_{ap} + \frac{\beta K_e K_c}{r + R(t)} \sin^2(\beta \theta). \quad (5.4)$$

Il est noté, que l'inductance n'a pas été négligée lors du calcul des coefficients de la f.e.m  $K_e$  et du couple électromagnétique  $K_c$ .

Pour confirmer l'hypothèse donnée ci-dessus sur l'inductance de l'alternateur, on représente les énergies totales du pont et du pendule calculées à partir du système (5.1) et du système (5.3).

### 5.3 Energie totale de la maquette du pont et du pendule

On appelle énergie totale la somme de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie potentielle  $U$  du mode de torsion de la maquette du pont et du pendule qui sont définies comme suit :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(m_2^* + M_{ap})\dot{\alpha}_2^2(t) + \frac{1}{2}I_{ap}\dot{\theta}^2 + m_2l\dot{\theta}\dot{\alpha}_2(t) \\ U = \frac{1}{2}k_2\alpha_2^2(t) + \frac{1}{2}m_2gl\theta^2 \end{cases} \quad (5.5)$$

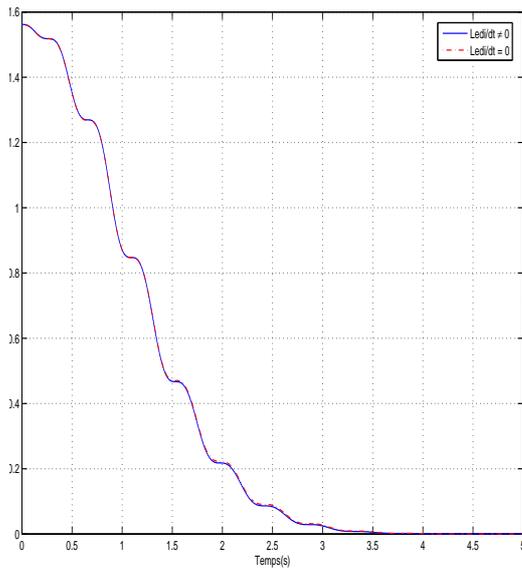


FIG. 5.1 – Evolution en fonction du temps de l'énergie totale avec et sans partie inductive.

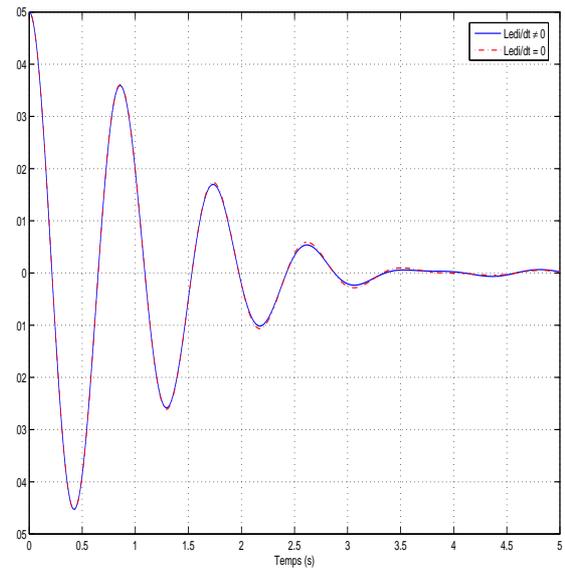


FIG. 5.2 – Oscillation libre de la contribution modale du mode de torsion avec et sans partie inductive.

Dans la figure (5.1) sont représentées, en fonction du temps et aux mêmes conditions initiales, en trait plein l'énergie totale calculée à partir du système (5.1) et en pointillé l'énergie totale calculée à partir du système (5.3). On constate une bonne superposition des deux courbes. Vu le rapport d'engrenage utilisé, l'alternateur produit du courant même

pour des petites oscillations du pendule, l'énergie électrique est donc presque complètement dissipée dans la résistance et l'énergie inductive est négligeable. De même, dans la figure (5.2) sont représentées en trait plein l'oscillation libre de la contribution modale du mode de torsion calculée à partir du système (5.1) et en pointillé la contribution du mode de torsion calculée à partir du système (5.3). On constate aussi une bonne superposition des deux courbes. On peut conclure que l'hypothèse simplificatrice, qui consiste à négliger la partie inductive, n'a pas changé le comportement du système et n'a pas influencé sur l'amortissement de la vibration de la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont.

On remarque, aussi, d'après la figure (5.1) que l'énergie totale décroît périodiquement en fonction du temps. La période de cette décroissance est la demi-période du pendule. Dans le quatrième chapitre, on a montré que l'amortissement est maximal lorsque l'angle de vibration est en retard de phase par rapport au déplacement du pont de  $90^\circ$  et il est nul lorsqu'ils sont en phase. Par ailleurs, lorsque la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont et l'angle de vibration du pendule sont en phase, l'énergie totale est constante.

## 5.4 contrôle semi-actif du mode de torsion de la maquette du pont

Dans les chapitres précédents, on a étudié l'actionneur électromécanique formé d'un pendule et d'un alternateur, on a identifié les paramètres électriques de l'alternateur et on a déterminé les paramètres optimaux de l'actionneur de référence pour amortir le mode de torsion de la maquette du pont. Le contrôle semi-actif sera réalisé en introduisant une loi de contrôle qui permet de faire varier, en temps réel, la résistance externe branchée aux bornes de l'alternateur.

Par ailleurs, on considère le système formé par l'équation du mode de torsion de la maquette du pont et de l'équation de l'actionneur réel, dont la résistance externe varie en fonction du temps et par conséquent le coefficient d'amortissement total.

$$\begin{cases} (m_2^* + M_{ap})\ddot{\alpha}_2(t) + m_2 l \ddot{\theta} + k_2 \alpha_2(t) = 0 \\ I_{ap} \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{\alpha}_2(t) + \tilde{C}_{eq}(t) \dot{\theta} + m_2 g l \theta = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Pour introduire une loi de contrôle, il convient, comme on a eu l'habitude de le faire

durant ce travail, d'étudier des paramètres adimensionnels. Ce système réel a la même forme que le système étudié dans le troisième chapitre. Par suite, en introduisant les grandeurs fondamentales  $\theta$  et  $t$  sous la forme adimensionnelle,

$$\theta = \check{\theta}\Theta, \quad t = \check{t}\tau, \quad (5.7)$$

le système (5.6) peut être écrit directement sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} (1+k)\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu}\ddot{\alpha}_2 + 2\tilde{\zeta}(t)p\dot{\Theta} + [p]^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Les paramètres adimensionnels sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2^*}}, & k = \frac{M_{ap}}{m_2^*} & \text{et} & \mu = \frac{m_2}{m_2^*} \\ \omega_{ap}^2 = \frac{m_2gl}{I_{ap}}, & p = \frac{\omega_{ap}}{\omega_2} & \text{et} & \tilde{\zeta}(\tau) = \frac{\tilde{C}_{eq}(t)}{2I_{ap}\omega_{ap}} \end{cases} \quad (5.9)$$

$\omega_{ap}$  est la pulsation propre de l'actionneur,  $p$  le rapport entre la deuxième pulsation propre de la maquette et la pulsation de l'actionneur et  $\tilde{\zeta}(\tau)$  le taux d'amortissement propre de l'actionneur. Les quatre paramètres adimensionnels  $k$ ,  $\mu$ ,  $p$  et  $\tilde{\zeta}(\tau)$  relient les quatre paramètres dimensionnels de l'actionneur à savoir la masse totale de l'actionneur  $M_{ap}$ , la masse du pendule  $m_2$ , la longueur équivalente du pendule  $l$  et la résistance externe  $R(t)$ . L'inertie totale de l'actionneur est définie sous la forme simplifiée par  $I_{ap} = m_2l^2$ .

L'idée qu'on souhaite développer dans cette partie est d'adapter en temps réel les paramètres de l'actionneur lorsque la structure évolue, afin d'amortir toujours le mode de torsion de la maquette du pont. Pour cela, on considère que le pont est en cours de construction et on suppose qu'il passe par des étapes successives de construction dont les masses modales et les fréquences propres, pour chaque étape, sont connues. L'actionneur est installé à partir d'une étape bien définie et on cherche à le maintenir durant plusieurs étapes successives de construction, et éventuellement pour toute la durée de construction, en adaptant en temps réel ses paramètres. Cette adaptation permet d'obtenir des paramètres optimaux, tels qu'ils sont introduits dans le quatrième chapitre, pour différentes étapes de construction. C'est à dire, rendre les comportements de la structure comme si elle était équipée par un actionneur de référence à chaque étape de construction. La variation en temps réel des paramètres de l'actionneur sera réalisée en introduisant une loi de contrôle sur la résistance qui permet non seulement d'obtenir un coefficient d'amortissement optimal, mais aussi une rigidité optimale pour chaque étape de construction.

On considère que l'actionneur réel est introduit à l'ième étape de construction. A cette étape, le contrôle semi-actif est défini comme suit par la procédure suivante:

1. on donne les valeurs de  $m_2^*(e_i)$  et de  $k_2(e_i)$  à partir du calcul aux éléments finis ou par identification modale,
2. on choisit les valeurs de  $M_{ap}$  et de  $m_2$  et on calcul les valeurs de  $k(e_i)$  et de  $\mu(e_i)$ ,
3. on déduit les valeurs de  $p(e_i)$  et de  $\zeta(e_i)$  selon les formules données par le critère d'optimisation ETDR,
4. On cherche la résistance  $R(t)$  tel que le système de référence et le système réel suivants

$$\begin{cases} (1 + k(e_i))\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu(e_i)}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu(e_i)}\ddot{\alpha}_2 + \underbrace{2\zeta(e_i)p(e_i)}\dot{\Theta} + [p(e_i)]^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

et

$$\begin{cases} (1 + k(e_i))\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu(e_i)}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu(e_i)}\ddot{\alpha}_2 + \underbrace{2\tilde{\zeta}(\tau)p(e_i)}\dot{\Theta} + [p(e_i)]^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

ont la même solution. C'est à dire que  $\tilde{\zeta}(\tau) = \zeta(e_i)$ . Cette dernière relation, en utilisant l'équation (5.4), peut être écrit comme suit :

$$C_{ap} + \frac{\beta K_e K_c}{r + R(t)} \sin^2(\beta\theta) = C_{eq}(e_i). \quad (5.12)$$

D'où, la résistance externe attachée aux bornes de l'alternateur

$$R(t) = \frac{\beta K_e K_c \sin^2(\beta\theta)}{C_{eq}(e_i) - C_{ap}} - r \quad (5.13)$$

A l'étape de construction suivante,  $e_{i+1}$ , les paramètres de l'actionneur réel,  $\tilde{\zeta}(\tau)$  et  $p(e_{i+1})$ , ne sont plus optimaux, vu que  $k$  et  $\mu$  varient lorsque la structure évolue. Par ailleurs, les paramètres optimaux, à cette étape  $e_{i+1}$ , peuvent être obtenus selon deux méthodes :

- **méthode 1** : introduire un nouvel actionneur optimal,
- **méthode 2** : introduire l'idée de contrôle semi-actif.

La deuxième méthode consiste à maintenir l'ancien actionneur de l'étape  $e_i$  en faisant varier le coefficient d'amortissement en temps réel afin d'obtenir les nouveaux paramètres optimaux de l'actionneur selon la procédure suivante :

1. on donne les nouvelles valeurs de  $m_2^*(e_{i+1})$  et de  $k_2(e_{i+1})$  à partir du calcul aux éléments finis ou par identification modale,
2. on calcul les valeurs de  $k(e_{i+1})$  et de  $\mu(e_{i+1})$  à partir des valeurs de  $M_{ap}$  et de  $m_2$  définies dans l'étape  $e_i$
3. on déduit les valeurs de  $p_{opt}(e_{i+1})$  et de  $\zeta_{opt}(e_{i+1})$  selon les formules données par le critère d'optimisation ETD, R,
4. On cherche la résistance  $R(t)$  tel que le système de référence et le système réel suivants

$$\begin{cases} (1 + k(e_{i+1}))\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu(e_{i+1})}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu(e_{i+1})}\ddot{\alpha}_2 + \underbrace{2\zeta_{opt}(e_{i+1})p_{opt}(e_{i+1})\dot{\Theta} + [p_{opt}(e_{i+1})]^2\Theta}_{=0} = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

et

$$\begin{cases} (1 + k(e_{i+1}))\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu(e_{i+1})}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu(e_{i+1})}\ddot{\alpha}_2 + \underbrace{2\tilde{\zeta}(\tau)p(e_{i+1})\dot{\Theta} + [p(e_{i+1})]^2\Theta}_{=0} = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

ont la même solution.

C'est à dire que  $2\tilde{\zeta}(\tau)p(e_{i+1})\dot{\Theta} + [p(e_{i+1})]^2\Theta = 2\zeta_{opt}(e_{i+1})p_{opt}(e_{i+1})\dot{\Theta} + [p_{opt}(e_{i+1})]^2\Theta$ .

Cette dernière relation peut être écrit comme suit :

$$\tilde{\zeta}(\tau) = \frac{[p^{opt}(e_{i+1})]^2 - [p(e_{i+1})]^2}{2p(e_{i+1})} \frac{\Theta(\tau)}{\dot{\Theta}(\tau)} + \frac{\zeta^{opt}(e_{i+1})}{p(e_{i+1})} p^{opt}(e_{i+1}) \quad (5.16)$$

Le taux d'amortissement réduit, défini par l'équation (5.16), prend des valeurs continues entre une valeur minimale et une autre maximale:  $\tilde{\zeta}_{min}$  et  $\tilde{\zeta}_{max}$ , qui représentent les limites physiques de l'amortisseur. Lorsque l'amortissement est trop grand par rapport à ce que peut fournir l'amortisseur, celui-ci est saturé à  $\tilde{\zeta}(\tau) = \tilde{\zeta}_{max}$ . Inversement, si on se trouve dans une phase non dissipative, l'amortisseur est commuté dans sa configuration

minimale et  $\tilde{\zeta}(\tau) = \tilde{\zeta}_{min}$ . Entre ces deux cas limites, le taux d'amortissement est donné par l'équation (5.16). D'où le système suivant :

$$\tilde{\zeta}(\tau) = \begin{cases} \tilde{\zeta}_{min} & si \quad \tilde{\zeta}^*(\tau) \leq \tilde{\zeta}_{min} \\ \tilde{\zeta}^*(\tau) & si \quad \tilde{\zeta}_{min} < \tilde{\zeta}^*(\tau) < \tilde{\zeta}_{max} \\ \tilde{\zeta}_{max} & si \quad \tilde{\zeta}^*(\tau) \geq \tilde{\zeta}_{max} \end{cases} \quad (5.17)$$

Avec le taux d'amortissement réduit  $\zeta^*(\tau)$  défini par

$$\tilde{\zeta}^*(\tau) = \frac{[p^{opt}(e_{i+1})]^2 - [p(e_{i+1})]^2}{2p(e_{i+1})} \frac{\Theta(\tau)}{\dot{\Theta}(\tau)} + \frac{\zeta^{opt}(e_{i+1})}{p(e_{i+1})} p^{opt}(e_{i+1}) \quad (5.18)$$

L'amortisseur passif avec un amortissement maximal est obtenu lorsque  $\tilde{\zeta}_{max} = 1$ , résistance minimale, et l'amortisseur passif avec un amortissement minimal est obtenu lorsque l'amortissement est purement mécanique :  $\tilde{\zeta}_{min} = \frac{C_{ap}}{2I_{ap}\omega_{ap}}$ , résistance maximale.

Le taux d'amortissement réduit (5.18) est liée à la résistance externe, en supposant que la résistance interne de l'alternateur est nulle, par l'équation suivante :

$$R^*(t) = \frac{\beta K_e K_c}{2I_{ap}\omega_{ap}\tilde{\zeta}^*(t) - C_{ap}} \sin^2(\beta\theta). \quad (5.19)$$

D'où la loi de contrôle semi-actif suivante :

$$R(t) = \begin{cases} R_{max} & si \quad \tilde{\zeta}^*(t) \leq \tilde{\zeta}_{min} \\ R^*(t) & si \quad \tilde{\zeta}_{min} < \tilde{\zeta}^*(t) < 1 \\ R_{min} & si \quad \tilde{\zeta}^*(t) \geq 1 \end{cases} \quad (5.20)$$

Cette loi de contrôle semi-actif est appliquée sur la résistance externe branchée aux bornes de l'alternateur. Elle permet de la commuter continuellement entre une valeur minimale et une autre maximale. Dans la réalité,  $R_{min}$  est égale à la résistance interne de l'actionneur et  $R_{max}$  est une valeur grande.

La variation de la résistance peut être réalisée à partir d'un switch électronique. Ce switch est composé par un pont redresseur, qui transforme la tension alternative en tension continue positive, et d'un transistor mosfet, qui est modélisé comme un interrupteur ouvert ou fermé. Ce switch sera commandé par un signal à rapport cyclique variable. On reviendra

au prochain chapitre sur les détails de la variation de ce switch.

De la loi de contrôle introduite dans ce chapitre, on remarque, outre sa simplicité qu'elle permet non seulement de faire varier le coefficient d'amortissement mais également de compenser la longueur du pendule. Par ailleurs, les paramètres optimaux à l'étape  $e_{i+1}$  de construction du pont sont obtenus à partir des paramètres optimaux de l'actionneur introduits à l'étape  $e_i$  en faisant varier la résistance externe selon la loi de contrôle semi-actif (5.20).

## 5.5 Réponse du mode de torsion de la maquette

Pour appliquer la loi de contrôle introduite dans le paragraphe précédent, on considère que la maquette du pont évolue selon différentes étapes en ajoutant, par exemple une masse concentrée. Cette évolution représente l'évolution d'un pont en cours de construction. Pour simplifier l'étude, on applique la loi de contrôle entre seulement deux étapes de construction. On suppose que la maquette du pont, telle qu'elle est modélisée dans le quatrième chapitre, représente l'étape  $e_i$  de construction du pont. Dans cette étape un actionneur à paramètres optimaux, déterminés dans le quatrième chapitre, pour amortir le mode de torsion est introduit. L'étape  $e_{i+1}$  sera modélisée en ajoutant une masse concentrée de 1,2Kg sur l'extrémité droite du tablier. La fréquence propre du mode de torsion devient  $f(e_{i+1}) = 1,29Hz$ . Si on maintient l'ancien actionneur avec ses paramètres durant l'étape  $e_{i+1}$  (actionneur de l'étape  $e_i$ ), l'oscillation libre de la contribution modale est représentée, dans la figure (5.3), en trait plein à l'étape  $e_i$  et en pointillé à l'étape  $e_{i+1}$ . De cette figure on remarque que l'amortissement diminue en fonction des étapes de construction. Il passe de 7% dans l'étape  $e_i$  à 4% dans l'étape  $e_{i+1}$ . Par ailleurs, l'efficacité de l'actionneur varie beaucoup lorsque la structure évolue.

Pour amortir d'une manière optimale ce mode dans cette nouvelle étape, il existe deux méthodes, comme on a indiqué dans le paragraphe précédent : la première méthode consiste à introduire un nouvel actionneur à paramètres optimaux et la deuxième consiste à maintenir l'ancien actionneur en ajustant ses paramètres en temps réel selon la loi de contrôle semi-actif (5.20). Pour comparer les deux méthodes, on représente dans la suite la contribution modale du mode de torsion en fonction du temps.

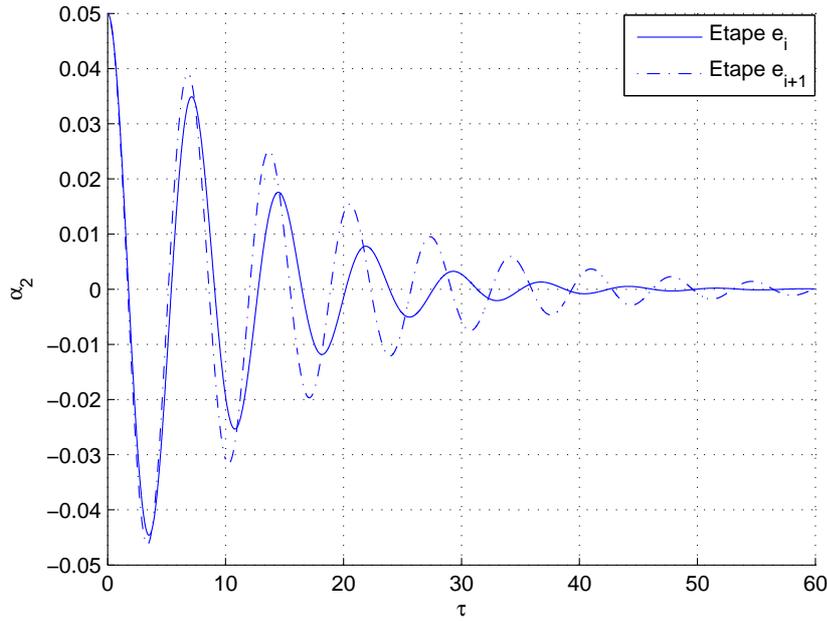


FIG. 5.3 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont à l'étape  $e_i$  et à l'étape  $e_{i+1}$  en utilisant l'actionneur introduit à l'étape  $e_i$ .

### 5.5.1 Cas1 : réponse du mode de torsion à l'étape $e_{i+1}$ selon la méthode 1

La première solution envisagée, pour obtenir un amortissement optimal du mode de torsion à cette nouvelle étape de construction, est d'introduire un nouvel actionneur avec des paramètres optimaux (actionneur de l'étape  $e_{i+1}$ ). Le modèle est décrit par le système d'équations adimensionnels (5.14) et l'oscillation libre de la contribution modale correspondante est comparée à celle donnée par l'actionneur de l'étape  $e_i$  qui vérifie, à l'étape  $e_{i+1}$ , le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (1 + k(e_{i+1}))\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu(e_{i+1})}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu(e_{i+1})}\ddot{\alpha}_2 + 2\zeta(e_i)p(e_i)\dot{\Theta} + [p(e_i)]^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

De la figure (5.4) on constate, comme il est prévu, que l'actionneur de l'étape  $e_{i+1}$ , vu que ces paramètres sont optimaux, est plus efficace que celui de l'étape  $e_i$  à cette nouvelle étape de construction. L'amortissement équivalent de l'oscillation libre de la contribution modale du mode de torsion est de 6,05% en utilisant un actionneur de l'étape  $e_{i+1}$  alors

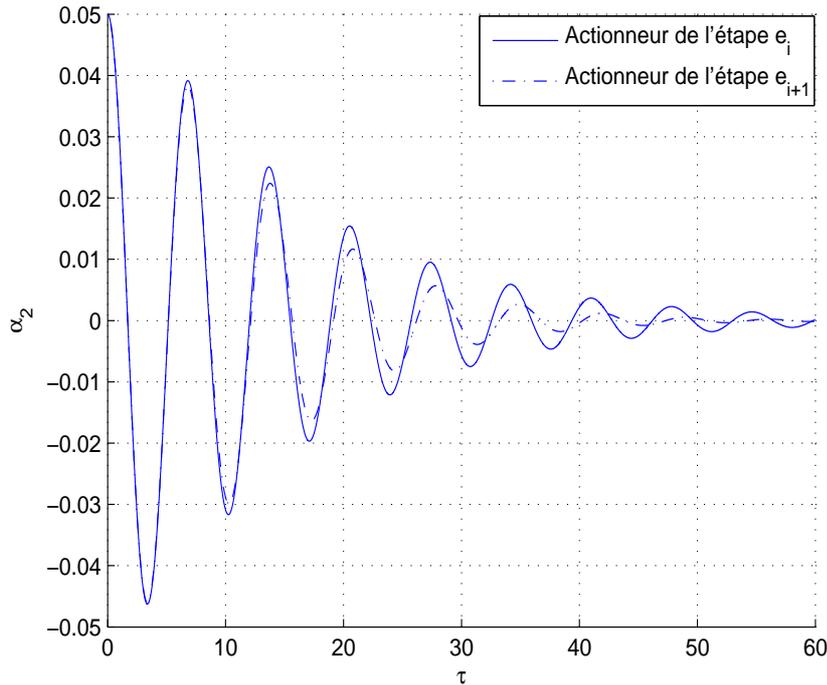


FIG. 5.4 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont à l'étape  $e_{i+1}$  en utilisant l'actionneur de l'étape  $e_i$  et l'actionneur de l'étape  $e_{i+1}$ .

qu'il est seulement de 4% en utilisant un actionneur de l'étape  $e_i$ . Par ailleurs, plus que les étapes de construction de la structure avancent, moins que l'actionneur de l'étape  $e_i$  est efficace.

### 5.5.2 Cas2: réponse du mode de torsion à l'étape $e_{i+1}$ selon la méthode 2

Dans ce deuxième cas, pour obtenir un amortissement optimal du mode de torsion à cette nouvelle étape de construction, on maintient l'ancien actionneur et on fait varier ses paramètres en temps réel selon la loi de contrôle semi-actif (5.20). Afin de comparer cette deuxième méthode avec la première, on représente dans la figure (5.5) l'oscillation libre de la contribution modale du mode de torsion selon les deux méthodes. On remarque une bonne superposition des deux courbes. Par ailleurs, l'utilisation de cette loi de contrôle nous permet de réaliser un actionneur optimal à l'étape  $e_{i+1}$  à partir de l'actionneur introduit à l'étape  $e_i$ . La contribution modale en contrôle semi-actif est représentée en fonction du temps adimensionnel car on a utilisé le système (5.17).

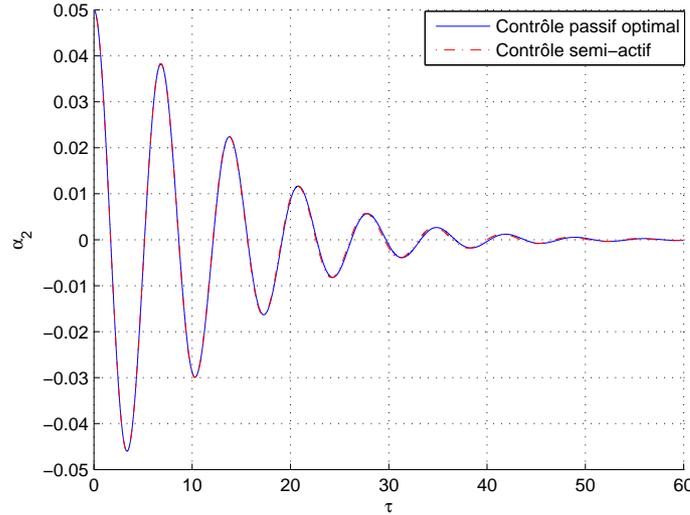


FIG. 5.5 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont donnée par le contrôle passif optimal en utilisant l'actionneur de l'étape  $e_{i+1}$  et par le contrôle semi-actif.

On a remarqué numériquement, qu'il est possible d'avoir un meilleur amortissement à l'étape  $e_{i+1}$  en contrôle semi-actif que celui produit par un actionneur optimal lorsqu'on introduit le système suivante :

$$\tilde{\zeta}(\tau) = \begin{cases} \tilde{\zeta}^*(\tau) & \text{si } \bar{\zeta}(\tau) > \tilde{\zeta}_{min} \\ 0,1 & \text{si non} \end{cases} \quad (5.22)$$

Avec

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}^*(\tau) = \frac{[p^{opt}(e_{i+1})]^2 - [p(e_{i+1})]^2}{2p(e_{i+1})} \frac{\Theta(\tau)}{\dot{\Theta}(\tau)} + \frac{\zeta^{opt}(e_{i+1})}{p(e_{i+1})} p^{opt}(e_{i+1}) \\ \bar{\zeta}(\tau) = \frac{[p^{opt}(e_{i+1})]^2 - [p(e_{i+1})]^2}{2p(e_{i+1})} \frac{\Theta(\tau)}{\dot{\Theta}(\tau)} \end{cases} \quad (5.23)$$

Ce système correspond au loi de contrôle semi-actif suivante :

$$R(t) = \begin{cases} R^*(t) & \text{si } \bar{\zeta}(t) > \tilde{\zeta}_{min} \\ \bar{R}_{min} & \text{si non} \end{cases} \quad (5.24)$$

$R^*(t)$  est définie par l'équation (5.19) et  $\bar{R}_{min}$  peut être définie aussi à partir de l'équation (5.19) en mettant la valeur du taux d'amortissement égale à 0,1.

Dans la figure (5.6) est représentée l'oscillation libre du mode de torsion selon la loi de contrôle (5.24) et selon le contrôle passif optimal en utilisant l'actionneur de l'étape  $e_{i+1}$ . On remarque que cette dernière loi de contrôle semi-actif permet de mieux amortir le mode

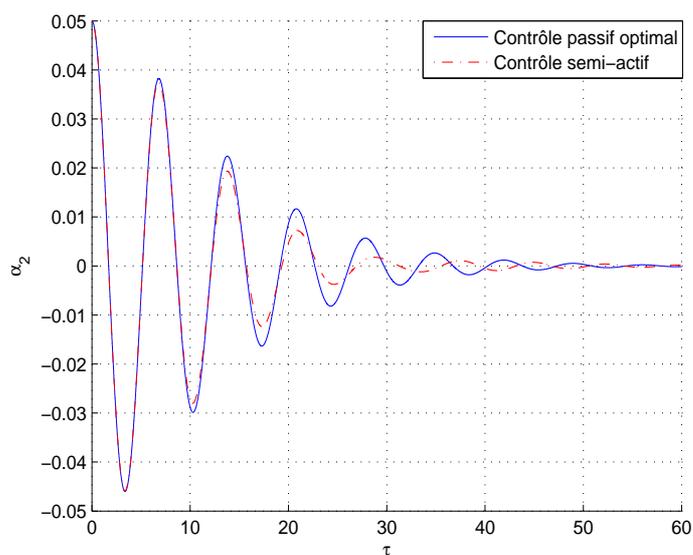


FIG. 5.6 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont donnée par le contrôle passif optimal en utilisant l'actionneur de l'étape  $e_{i+1}$  et par le contrôle semi-actif selon la loi (5.24).

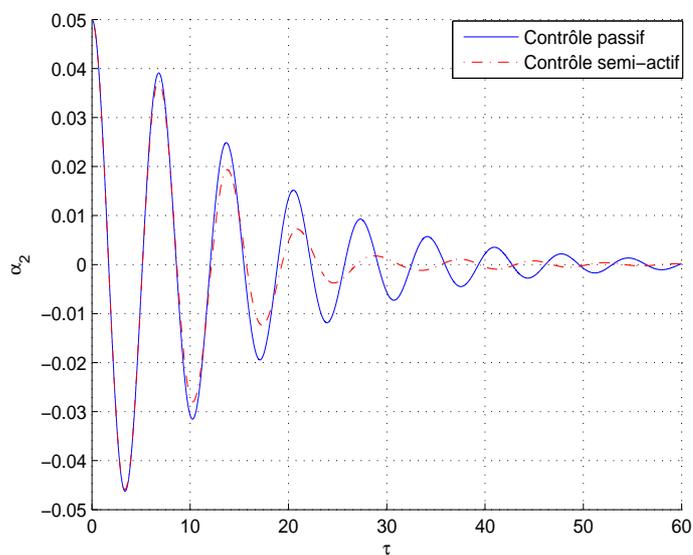


FIG. 5.7 – Comparaison entre la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont en utilisant l'actionneur de l'étape  $e_i$  et le contrôle semi-actif selon la loi (5.24).

de torsion par rapport au contrôle passif optimal à cette nouvelle étape de construction. De même, dans la figure (5.7) est représentée l'oscillation libre du mode de torsion selon la loi de contrôle (5.24) et selon le contrôle passif de l'étape  $e_i$ . On remarque que l'amortissement équivalent de l'oscillation libre du mode de torsion est de 4% en utilisant l'actionneur de l'étape  $e_i$  et il est de 7% en utilisant la loi de contrôle semi-actif. Par ailleurs, cette loi de contrôle permet de maintenir la performance de l'actionneur électromécanique introduite dans l'étape  $e_i$ . Pour confirmer cet avantage, donnée de la loi de contrôle, on représente dans la figure (5.8) l'oscillation libre de la contribution modale du mode de torsion à l'étape  $e_i$  en utilisant le contrôle passif optimal (à gauche) et à l'étape  $e_{i+1}$  en utilisant le contrôle semi-actif selon la loi (5.24) (à droite).

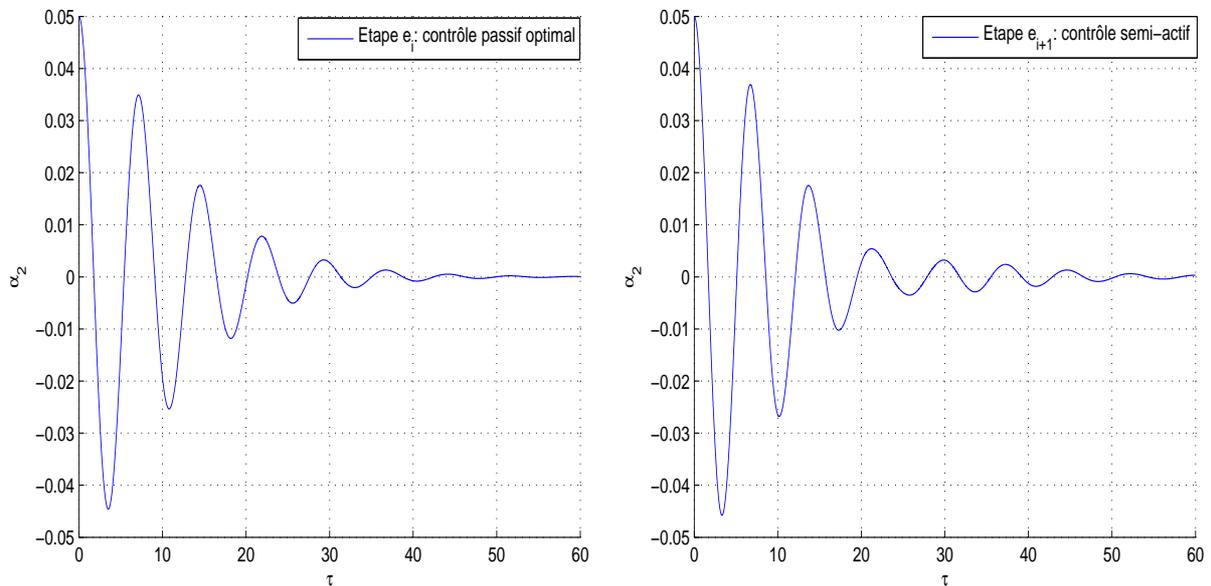


FIG. 5.8 – Contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont à l'étape  $e_i$  en utilisant le contrôle passif optimal à gauche et à l'étape  $e_{i+1}$  en utilisant le contrôle semi-actif selon la loi (5.24) à droite.

On remarque que les deux courbes ont presque la même décroissance et le même taux d'amortissement réduit. Par suite, le premier avantage de cette loi de contrôle semi-actif est d'adapter les paramètres de l'actionneur de manière à rendre sa performance indépendante de l'évolution de la structure.

Comme la performance d'un TMD diminue aussi selon le type d'excitation, on étudie dans la suite la possibilité d'adapter les paramètres de l'actionneur, selon la loi de contrôle semi-actif en faisant varier la résistance externe, pour différents types d'excitations.

## 5.6 Contrôle semi-actif de différents types d'excitations

Dans la littérature il existe des expressions analytiques des paramètres optimaux du TMD selon le type d'excitation externe, comme est indiqué dans le tableau (5.1) [98]. Dans le chapitre précédent, les paramètres optimaux de l'actionneur électromécanique, longueur du pendule et coefficient d'amortissement total, ont été obtenus en introduisant le critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel lorsque la structure est en vibration libre. Lorsque la structure sera soumise à un autre type d'excitation, tel que l'excitation harmonique, aléatoire, sismique..., les paramètres introduits ne sont plus optimaux et la performance de l'actionneur diminue.

L'idée fondamentale à introduire dans cette partie est d'adapter en temps réel les paramètres de l'actionneur selon le type d'excitation en utilisant une source d'énergie minimale. Pour cela, on introduit une loi de contrôle semi-actif qui permet de faire varier en temps réel les paramètres de l'actionneur selon le type de chargement. La loi de contrôle est celle introduite dans le paragraphe précédent et qui est définie par le système (5.24). Cette loi s'applique sur la résistance externe; elle consiste à faire varier la résistance qui permet d'obtenir, selon le type d'excitation, le coefficient d'amortissement réduit  $\zeta^{opt}$  et le paramètre de synchronisation  $p^{opt}$ .

Il faut noter, dans ce cas, que  $e_i$ , introduite dans la loi de contrôle, n'est plus l'étape de construction, mais c'est l'étape durant laquelle la structure est en vibration libre. L'étape  $e_{i+1}$  est lorsque la structure est soumise à un autre type d'excitation.

Type d'excitation	$p^{opt}$	$\zeta^{opt}$
Vibration libre	$\frac{1}{1 + \mu}$	$\sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}}$
Excitation harmonique	$\frac{1}{1 + \mu}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}}$
Excitation aléatoire	$\frac{\sqrt{1 + \frac{\mu}{2}}}{1 + \mu}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(1 + \frac{3}{4}\mu)}{(1 + \mu)(1 + \frac{\mu}{2})}}$
Excitation sismique	$\frac{1}{1 + \mu} \sqrt{\frac{2 - \mu}{2}}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \sqrt{\frac{2}{2 - \mu}}$
Auto-excitation	$\frac{1}{\sqrt{1 + \mu}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{1 + \mu} - 1}{2\sqrt{1 + \mu}}}$

TAB. 5.1 – Paramètres optimaux du TMD pour différents types d'excitations.

**Remarques**

- Les paramètres optimaux rappelés dans le tableau (5.1) pour tous les types d'excitations ont été obtenus dans la littérature pour un simple TMD.
- La loi de contrôle semi-actif introduite est applicable sur plusieurs types d'excitations à condition qu'on les connaisse ou qu'on puisse les identifier.

Comme le paramètre  $k$  n'a pas été introduit pour les différents types d'excitations et pour qu'on puisse faire une comparaison cohérente entre les paramètres optimaux de l'actionneur pour différentes excitations, on a indiqué aussi, lorsque la structure est en vibration libre, dans le tableau (5.1) les paramètres donnés par [39] pour un simple TMD. Pour pouvoir appliquer ces paramètres comme paramètres optimaux de l'actionneur, on considère dans la modélisation, seulement dans ce paragraphe, que l'alternateur représente une masse concentrée à l'extrémité du tablier.

Dans la suite, on suppose que les paramètres de l'actionneur introduit sont déterminés lorsque la maquette du pont est en vibration libre : étape  $e_i$ , à l'étape suivante la maquette est soumise à une excitation harmonique : étape  $e_{i+1}$ . Le but est d'adapter les paramètres de l'étape  $e_i$  à l'étape  $e_{i+1}$  afin d'amortir toujours le mode de torsion de la maquette du pont.

A l'étape  $e_i$ , le système d'équations est décrit comme suit :

$$\begin{cases} (1 + \mu)\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = f(e_i, \tau) \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu}\ddot{\alpha}_2 + 2\zeta p\dot{\Theta} + [p]^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

Avec  $f(e_i, \tau) = 0$ , vibration libre.

Les paramètres optimaux de ce système ont été déterminés par [39] et sont définis dans le tableau (5.1). A l'étape suivante  $e_{i+1}$ , le système d'équations (5.25) sera décrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (1 + \mu)\ddot{\alpha}_2 + \sqrt{\mu}\ddot{\Theta} + \alpha_2 = f_2(e_{i+1}, \tau) \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu}\ddot{\alpha}_2 + 2\zeta p\dot{\Theta} + [p]^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Avec  $f_2(e_{i+1}, \tau) = \frac{a_0}{m_2^*} \cos(\tau)$  est la force d'excitation harmonique d'amplitude  $a_0$  et de même pulsation que le mode de torsion de la maquette du pont. Les paramètres de ce système,  $p$  et  $\zeta$ , ne sont plus optimaux pour ce type d'excitations. Les nouveaux paramètres

optimaux de ce système peuvent être obtenus selon deux méthodes :

- **méthode 1** : introduire un nouvel actionneur à paramètres optimaux pour ce type d'excitation,
- **méthode 2** : introduire l'idée de contrôle semi-actif.

Selon la première méthode, les paramètres optimaux, pour ce type d'excitation, excitation harmonique, ont été obtenus par [29] et ils sont rappelés dans le tableau (5.1). Selon la deuxième méthode, les paramètres optimaux de ce dernier système peuvent être obtenus en gardant l'actionneur de l'étape  $e_i$  et en faisant varier le coefficient d'amortissement réduit en temps réel selon l'équation (5.18) afin d'obtenir les paramètres optimaux de l'actionneur à l'étape  $e_{i+1}$ .

Pour pouvoir comparer l'influence de ces deux types des paramètres sur la réponse de la maquette, on représente dans la figure (5.9) l'oscillation de la contribution modale du mode de torsion, lorsque la structure est soumise à une excitation harmonique, obtenue par la résolution du système (5.26) en introduisant premièrement les paramètres optimaux de l'étape  $e_i$  puis les paramètres optimaux de l'étape  $e_{i+1}$ .

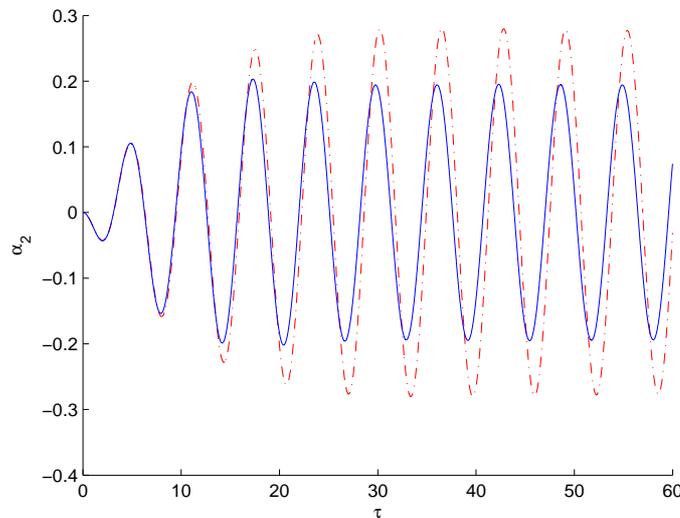


FIG. 5.9 – Contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé obtenue à partir des paramètres optimaux de l'étape  $e_i$  et en trait plein obtenue à partir des paramètres optimaux de l'étape  $e_{i+1}$ .

On remarque que lorsque la maquette du pont est soumise à une excitation harmonique, les paramètres de l'étape  $e_{i+1}$  sont plus efficaces que ceux de l'étape  $e_i$  : ils permettent de

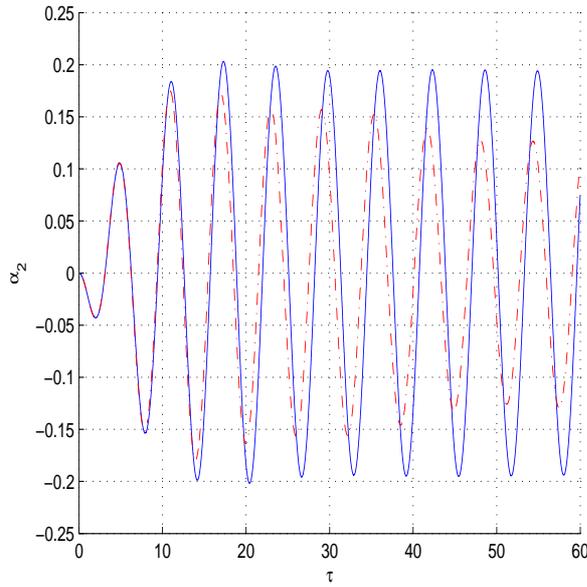


FIG. 5.10 – Contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont en trait plein obtenue à partir des paramètres de l'étape  $e_{i+1}$  et en pointillé obtenue à partir du contrôle semi-actif.

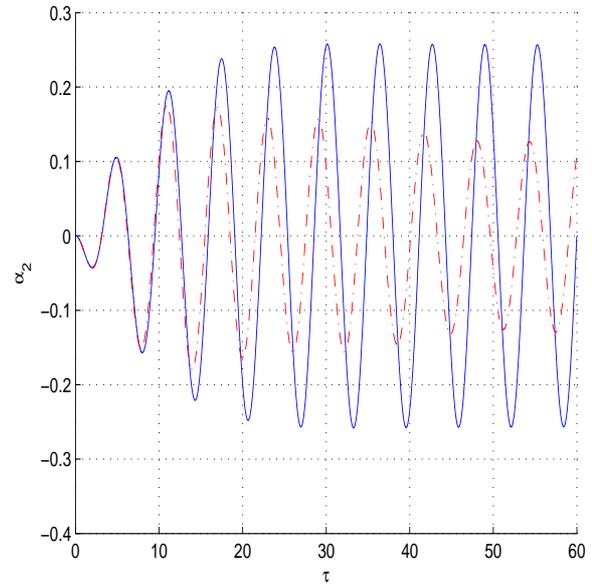


FIG. 5.11 – Contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont en trait plein obtenue à partir des paramètres de l'étape  $e_i$  et en pointillé obtenue à partir du contrôle semi-actif.

mieux amortir l'oscillation de la contribution modale. Par suite, l'efficacité du TMD varie beaucoup selon le type de chargement.

Les paramètres optimaux de l'actionneur à l'étape  $e_{i+1}$  peuvent être obtenus à partir des paramètres optimaux de l'actionneur à l'étape  $e_i$  en faisant varier la résistance externe branchée aux bornes de l'alternateur selon la loi de contrôle semi-actif définie par le système (5.24). Pour pouvoir juger de la robustesse de cette loi de contrôle semi-actif, on compare la réponse de la contribution modale du mode de torsion obtenue à partir de contrôle semi-actif à celle obtenue en utilisant les paramètres optimaux de l'étape  $e_{i+1}$ . De la figure (5.10), on remarque que l'oscillation harmonique de la contribution modale du mode de torsion de la maquette du pont est mieux amortie en contrôle semi-actif qu'en contrôle passif en utilisant les paramètres optimaux de l'étape  $e_{i+1}$ . De même, de la figure (5.11) on remarque une efficacité remarquable de contrôle semi-actif en comparant la réponse de la contribution modale obtenue à partir de contrôle semi-actif à celle obtenue en utilisant les paramètres de l'étape  $e_i$ . En utilisant cette loi de contrôle semi-actif, la performance de l'actionneur devient indépendante du type d'excitation externe.

Par ailleurs, cette loi de contrôle semi-actif permet de faire varier les paramètres de l'actionneur en temps réel selon les types de sollicitations de la structure.

## 5.7 Contrôle modal

On introduit dans ce paragraphe la loi de contrôle semi-actif (5.24) afin d'amortir plusieurs modes de la structure, dans l'esprit de la méthode MIMSC (modified independent modal space control) en agissant sur un mode particulier à chaque instant. La méthode MIMSC a été développée par [8], elle consiste à modifier la méthode IMSC (independent modal space control) développée par [68]. Cette dernière permet d'amortir chaque mode indépendamment des autres, ce qui permet de résoudre des équations algébriques non couplées. Elle nécessite, donc, autant d'actionneurs que de modes à amortir. Par contre, la méthode MIMSC offre la possibilité d'amortir plusieurs modes en utilisant seulement quelques actionneurs. Cette méthode a été le but de plusieurs travaux [9, 35].

L'efficacité de l'actionneur introduit compte fortement sur le réglage adéquat de ses paramètres en fonction du mode naturel de la structure à contrôler. Donc, l'idée fondamentale à introduire dans cette partie est d'adapter en temps réel les paramètres de l'actionneur électromécanique selon le mode de vibration qu'on cherche à amortir. Pour cela, on introduit la loi de contrôle semi-actif (5.24). On considère que cette loi permet de faire varier en temps réel les paramètres de l'actionneur, dans ce cas, selon le mode à amortir. Elle permet d'obtenir le coefficient d'amortissement réduit  $\zeta^{opt}$  et le paramètre de synchronisation  $p^{opt}$  associés à chaque mode.

Il faut noter, dans ce cas, que  $e_i$  et  $e_{i+1}$ , introduits dans la loi de contrôle, sont respectivement l' $i$ ème mode et l' $i+1$ ème plus un mode de vibration qu'on cherche à amortir. Dans la suite, on suppose que l'actionneur électromécanique, à paramètres optimaux, est installé sur la maquette du pont pour amortir le mode de vibration  $e_i$ . Le but est d'adapter les paramètres de l'actionneur pour amortir le mode  $e_{i+1}$  et éventuellement plusieurs autres modes de vibration.

Le système d'équations, formé par l'équation de vibration du mode  $e_i$  et de l'équation de l'actionneur sous la forme adimensionnelle, est décrit comme suit :

$$\begin{cases} (1 + k(e_i))\ddot{\alpha}_{e_i} + \sqrt{\mu(e_i)}\ddot{\Theta} + \alpha_{e_i} = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu(e_i)}\ddot{\alpha}_{e_i} + 2\zeta(e_i)p(e_i)\dot{\Theta} + [p(e_i)]^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

On rappelle que les paramètres optimaux de ce système ont été déterminés dans le chapitre précédent. Le système d'équations (5.27), en considérant le mode de vibration  $e_{i+1}$ , sera défini sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (1 + k(e_{i+1}))\ddot{\alpha}_{e_{i+1}} + \sqrt{\mu(e_{i+1})}\ddot{\Theta} + \alpha_{e_{i+1}} = 0 \\ \ddot{\Theta} + \sqrt{\mu(e_{i+1})}\ddot{\alpha}_{e_{i+1}} + 2\zeta(e_{i+1})p(e_{i+1})\dot{\Theta} + [p(e_{i+1})]^2\Theta = 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

Les paramètres de ce système,  $p(e_{i+1})$  et  $\zeta(e_{i+1})$ , ne sont plus optimaux pour ce mode de vibration.

Les nouveaux paramètres optimaux de ce système peuvent être obtenus selon deux méthodes :

- **méthode 1** : introduire un nouvel actionneur optimal,
- **méthode 2** : introduire l'idée de contrôle semi-actif.

La deuxième méthode consiste à maintenir l'ancien actionneur en faisant varier le coefficient d'amortissement en temps réel afin d'obtenir les nouveaux paramètres optimaux. Ce coefficient d'amortissement peut être varié en temps réel selon la loi de contrôle semi-actif (5.24).

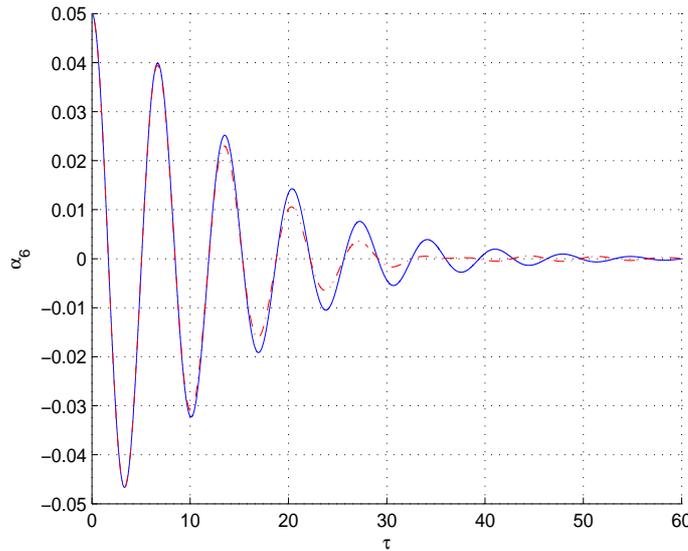


FIG. 5.12 – Oscillation libre de la contribution modale du mode  $e_{i+1}$  de la maquette du pont en pointillé obtenue à partir de la méthode 2 et en trait plein obtenue à partir de la méthode 1.

Afin d'appliquer l'idée de contrôle semi-actif sur la maquette du pont pour amortir deux modes, il est nécessaire d'avoir de déplacement horizontal de l'extrémité du tablier, où est attaché l'actionneur, pour un autre mode outre que le mode de torsion. Pour cela, on

considère le sixième mode de vibration de la maquette. Par conséquence, on suppose dans la suite que  $e_i$  correspond au mode de torsion et que  $e_{i+1}$  correspond au sixième mode de vibration de la maquette du pont.

Pour pouvoir juger de l'efficacité de la loi de contrôle semi-actif (5.24), on compare la réponse de la contribution modale du mode  $e_{i+1}$  obtenue à partir des deux méthodes (méthode 1 et méthode 2). De la figure (5.12), on remarque que la méthode 2, contrôle semi-actif, amortit mieux l'oscillation libre de la contribution modale du mode  $e_{i+1}$  de la maquette du pont, que la méthode 1, contrôle passif optimal. Par ailleurs, en plus de la facilité d'exécution : la variation des paramètres de l'actionneur en temps réel est beaucoup plus facile que l'introduction d'un autre actionneur optimal, le contrôle semi-actif permet de mieux amortir le mode  $e_{i+1}$  que le contrôle passif optimal. Donc, cette loi de contrôle semi-actif permet d'amortir plusieurs modes en agissant sur un mode particulier à chaque instant.

## 5.8 Conclusion

Les amortisseurs à masse accordée connaissent un succès important en génie civil. Mais leur efficacité varie beaucoup lorsque la structure évolue ainsi que le type de chargement. Pour cela, on a introduit dans ce chapitre une loi de contrôle semi-actif qui permet une adaptation en temps réel des paramètres de l'actionneur fondamentalement aux évolutions de la structure et aussi des sollicitations. En plus de sa simplicité, cette loi de contrôle semi-actif permet d'amortir plusieurs modes en agissant sur un mode particulier à chaque instant.

La simplicité de cette loi consiste en l'introduction d'un seul capteur pour sa mise en oeuvre expérimentale comme en verra dans le dernier chapitre de ce travail.

# Chapitre 6

## Résultats expérimentaux

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente la mise en oeuvre expérimentale et quelques résultats expérimentaux relatifs à l'amortissement à travers un contrôle passif puis un contrôle semi-actif de l'oscillation libre de la maquette du pont. La maquette est contrôlée par l'actionneur électromécanique "TMD pendulaire couplé avec un alternateur". Les études expérimentales ont été faites pour vérifier la validité de la théorie de la procédure d'optimisation des paramètres de l'actionneur pour le contrôle passif et de la loi de contrôle semi-actif, définies dans les précédents chapitres. Ces études comportent principalement trois parties. La première partie a été consacrée au contrôle passif du mode de torsion de la maquette du pont et de l'étude de l'influence des paramètres optimaux de l'actionneur sur la réponse de la maquette en introduisant un seul actionneur électromécanique. Dans la deuxième partie on a étudié l'amortissement de plusieurs modes de vibration de la maquette du pont en introduisant trois actionneurs. Des films représentatifs de ces deux parties sont illustrés dans un CD-ROM. Dans la troisième partie on a étudié le contrôle semi-actif du mode de torsion de la maquette du pont en présentant la loi de contrôle introduite dans le cinquième chapitre. Dans cette partie on s'est limité à l'introduction de la loi de contrôle pour maintenir l'actionneur durant plusieurs étapes de construction de la maquette du pont : la maquette telle qu'elle est construite, représente l*i*ème étape de construction, l*i*ème plus une étape de construction est modélisée en ajoutant une masse concentrée. L'application de la loi de contrôle pour faire varier les paramètres de l'actionneur selon les types d'excitations n'est pas faite dans le cadre de ce travail.

## 6.2 Dispositif expérimental

### 6.2.1 Matériels utilisés

La maquette représente le démonstrateur d'un pont en construction. Elle est réalisée de manière à avoir des fréquences propres de l'ordre de 1Hz. La maquette est constituée de, figure (6.1) :

- Un tube cylindrique inférieur de diamètre extérieur 45 mm, d'épaisseur 2 mm et de hauteur 1035 mm.
- Une barre cylindrique supérieure pleine de diamètre 45 mm et de hauteur 1215 mm.
- Une masse cylindrique mobile, située sur le tube supérieur, de diamètre 100 mm et de longueur 200 mm, soit une masse de 12,25 kg.
- Une poutre creuse, à section rectangulaire de dimension 150 mm x 50 mm, avec une épaisseur de 3 mm et une longueur de 6 m.
- Une plaque de base de dimension 22 mm x 40 mm x 15 mm.

Le tube inférieur et la barre cylindrique supérieure forment le pylône. La poutre creuse représente le tablier de la maquette. La maquette du pont est en acier (module d'Young  $E=210$  Gpa, coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et masse volumique  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>). La masse totale de la maquette est d'environ 108 kg. La liaison du pylône au sol est réalisée par l'intermédiaire d'une plaque bien fixée au sol au moyen de quatre vis ; cette liaison a été modélisée par une liaison encastrement. La liaison entre le tablier et le pylône est réalisée au moyen d'un profilé en U, figure (6.2) ; aussi cette liaison a été modélisée par une liaison encastrement. Par ailleurs, il faut noter que le tube creux est emmanché, aussi bien au niveau de la plaque que du profilé en U. La masse mobile est serrée sur le tube supérieur au moyen de trois vis et peut être déplacée sur le long de ce tube afin de découpler les deux premiers modes : premier mode vertical et premier mode horizontal, qui sont très proches en fréquences.

Pour mesurer la réponse de la maquette du pont, on utilise des accéléromètres PCB qui sont fixés sur la maquette. Les principales caractéristiques d'utilisation des ces accéléromètres sont fournies par le constructeur et sont rapportées dans le tableau (6.1).

Les accéléromètres sont, après conditionnement, connectés à la carte d'acquisition DSPACE 1103 dotée de Convertisseurs Analogiques Numériques (CAN), de Convertisseurs Numériques Analogiques (CNA) et d'un composant DSP (Digital Signal Processor) placé sur



FIG. 6.1 – Maquette du pont.



FIG. 6.2 – Liaison centrale de la maquette.

Etendues de mesure ( $m/s^2$ )	$\pm 1000$
Domaine fréquentiel d'utilisation (Hz)	0 à 150
Etendues des températures d'utilisation ( $^{\circ}C$ )	-40 à +85
Masse (g)	12
Coefficient de sensibilité normal ( $mV/(m/s^2)$ )	$0.95e^2$ à $1.1e^2$

TAB. 6.1 – Caractéristiques des accéléromètres PCB.

l'ordinateur qui pilote l'ensemble du système. L'ordinateur est équipé du logiciel MATLAB Simulink qui permet de travailler sur les signaux en provenance de la carte DSPACE. La maquette est contrôlée par un actionneur électromécanique qui est formé par un pendule couplé avec un réducteur et un alternateur comme est indiqué sur la figure (6.3).

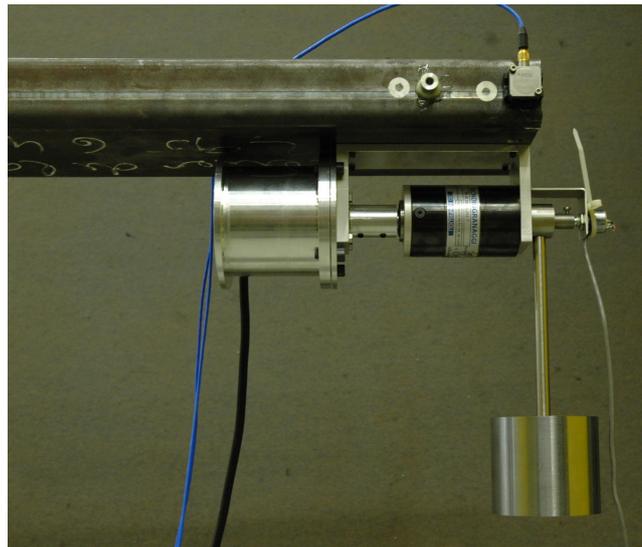


FIG. 6.3 – Actionneur électromécanique.

### Pendule

Les paramètres du pendule sont donnés par le tableau (6.2). La longueur du pendule et

Longueur équivalente: $l$	17,57 cm
Masse du pendule: $m_2$	2,89 Kg

TAB. 6.2 – paramètres du pendule.

le coefficient d'amortissement optimaux ont été déterminés en appliquant le critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel dont la masse totale de l'actionneur est  $M_{ap} = 6Kg$ . A l'axe de rotation du pendule est fixé un capteur potentiométrique pour mesurer son angle de vibration.

### Réducteur

Le rapport du multiplicateur de vitesse de l'alternateur, rapport d'engrenage, a été fixé dans le quatrième chapitre à  $\beta = 252$  de manière que l'alternateur produise du courant pour des petites oscillations. Mais afin que le couple d'entrée soit minimal, ce rapport est fixé, dans ce cas, à  $\beta = 10$ .

### Alternateur

L'alternateur utilisé est triphasé à couplage étoile avec aimants permanents dont les principales caractéristiques techniques sont rapportées dans le tableau (6.3). Les paramètres internes de cet alternateur ont été identifiés dans le deuxième chapitre et sont rappelés dans le tableau (6.4).

Puissance apparente	45 VA
Vitesse	2000 tr/min
fréquences	66,7 Hz

TAB. 6.3 – *Caractéristiques techniques de l'alternateur.*

Résistance interne par phase ( $r$ )	0,85 $\Omega$
Inductance interne par phase ( $L_e$ )	0,0036 Henry
Coefficient de la force électromotrice ( $K_e$ )	0,06 $Vrad^{-1}s$
Coefficient du couple électromécanique ( $K_c$ )	5 $Vrad^{-1}s$

TAB. 6.4 – *Paramètres internes de l'alternateur.*

A la sortie de l'alternateur est attachée une résistance : lorsque elle est fixée, le contrôle est appelé passif et lorsqu'elle est pilotée via une carte électronique dissipant l'énergie électrique de manière variable en fonction du temps, le contrôle est appelé semi-actif.

### Amortissement interne

Pour utiliser cet actionneur il est nécessaire de déterminer son coefficient d'amortissement propre  $C_{ap}$ . Ce coefficient a été identifié dans le deuxième chapitre. Mais comme la liaison pendule-alternateur est changée, en remplaçant le petit et grand pignon par un réducteur, le coefficient d'amortissement est identifié de nouveau en utilisant le même essai et la même méthode. La valeur de ce coefficient identifié est  $C_{ap} = 0,035 Kg/s$  qui correspond à un amortissement réduit de 2,48%.

## 6.2.2 Placement des capteurs

Le mouvement de la maquette est mesuré ponctuellement à l'aide d'un nombre limité de capteurs. L'information qu'ils donnent est donc l'accélération en plusieurs points. L'optimisation de leur placement a été le but de plusieurs travaux [15, 61]. L'utilisation d'une approximation modale conduit au vecteur d'observation de la forme :

$$Y(t) = [y_1^N(x_1, t), \dots, y_q^N(x_q, t), \dots, y_Q^N(x_Q, t)]^T, \quad (6.1)$$

avec

$$y_q^N(x_q, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \varphi_i(x_q) \cdot \underline{f}_q \quad (6.2)$$

où  $x_q$  est l'abscisse du  $q^{\text{ème}}$  capteur,  $q \in (1, \dots, Q)$ ,  $\varphi_i(x_q)$  est le vecteur de l'ième mode propre au point  $x_q$ ,  $\alpha_i(t)$  est l'ième contribution modale du déplacement et  $\underline{f}_q$  est le

vecteur position du  $q^{\text{ème}}$  capteur : c'est à dire  $\underline{f}_q = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  ou  $\mathbf{a}_3$ .

Si on considère le cas de la maquette du pont instrumentée par une configuration des capteurs mais sans actionneur, le système d'état en considérant les six premiers modes est défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = [\mathbf{A}]Z(t) \\ Y(t) = [\mathbf{C}]Z(t) \end{cases} \quad (6.3)$$

Avec  $Z = [\alpha_i(t), \dot{\alpha}_i(t)]^T$  pour  $i=1, \dots, 6$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} O_{6,6} & I_{6,6} \\ -\lambda_i & O_{6,6} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{C} = [\underline{\varphi}_i(x_q) \cdot \underline{f}_q, O]_{Q \times 12}$ .

$\lambda_i, i=1, \dots, 6$ , est l'ième valeur propre de la maquette du pont.

Lors de l'utilisation des accéléromètres, l'équation d'observation devient :

$$\ddot{Y}(t) = [\mathbf{C}][\mathbf{A}]^2 Z(t) \quad (6.4)$$

Pour chercher le placement optimal des accéléromètres sur la maquette du pont, on est servi de deux algorithmes de placement de capteurs disponible dans SDTools [4] :

- Algorithme de "independence effective" (EFI)
- Algorithme de "maximum response sequence" (Mseq)

Le premier algorithme (EFI) garantit l'indépendance linéaire des modes mesurés. Partant d'un nombre initial de capteurs, la méthode les élimine un par un jusqu'à en obtenir le nombre désiré. Cependant, le deuxième algorithme consiste à placer les capteurs là où l'amplitude des modes est la plus importante.

Pour voir la corrélation entre les modes pour une configuration donnée des capteurs, on présente la notion du MAC (Modal Assurance Criterion), qui est le critère de calcul-essai le plus utilisé car il est simple à implémenter. L'expression du MAC entre les modes  $j$  et  $k$  est défini par [21] :

$$MAC_{jk} = \frac{[(\underline{\varphi}_t^T)_j (\underline{\varphi}_a)_k]^2}{(\underline{\varphi}_t^T \underline{\varphi}_t)_j (\underline{\varphi}_a^T \underline{\varphi}_a)_k} \quad (6.5)$$

$\underline{\varphi}_t$  représente la forme modale analytique et  $\underline{\varphi}_a$  représente la forme modale expérimentale. Une corrélation parfaite entre deux modes résulte en un MAC de 100%. Les modes sont jugés être corrélés entre eux pour un  $MAC > 90\%$ , en deçà la corrélation est jugée douteuse jusqu'à 70%, les modes sont considérés non corrélés pour  $10\% < MAC < 70\%$  et parfaitement orthogonaux pour un  $MAC \leq 10\%$ .

Le placement des capteurs, ainsi que le MAC obtenu pour les deux méthodes (EFI et Mseq), en mettant six capteurs pour observer les six premiers modes, sont représentés respectivement sur les figures (6.4) et (6.5).

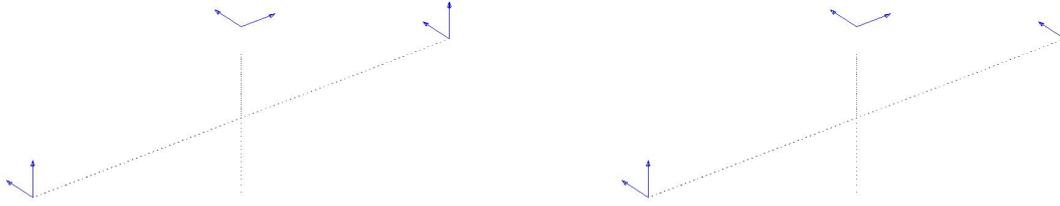


FIG. 6.4 – Placement des capteurs pour la maquette du pont suivant les méthodes Mseq (à gauche) et EFI (à droite).

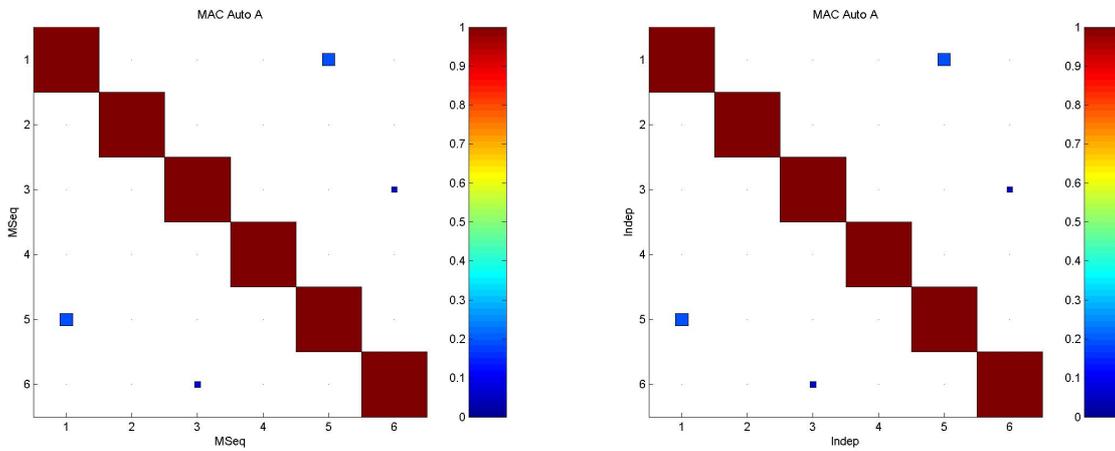


FIG. 6.5 – MAC correspondant au placement des capteurs pour la maquette du pont suivant les méthodes Mseq (à gauche) et EFI (à droite).

On remarque que les deux méthodes donnent la même estimation du MAC et le même emplacement des capteurs. Cet emplacement est aussi la configuration la plus évidente. La corrélation entre les modes donnée par les deux méthodes est très faible. En effet pour l'observabilité, on a tendance à vouloir mettre les capteurs là où le déplacement est maximal, c'est à dire en bout du tablier et au haut du pylône. Par ailleurs, on prend cette configuration des capteurs pour pouvoir effectuer par la suite le contrôle passif et semi-actif de la maquette du pont. Mais pour quantifier la visibilité des modes par les accéléromètres, on propose d'étudier le grammien d'observabilité qui est maintenant une démarche courante pour le contrôle. Son expression est définie comme suit [51] :

$$G(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}^T t} (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{A}^2 e^{\mathbf{A} t} dt \quad (6.6)$$

Dans l'expression de ce grammien, on a utilisé  $\mathbf{A}^2$  car on a introduit des accéléromètres pour mesurer la réponse de la maquette.  $G(T)$  permet de quantifier l'énergie récupérée par les accéléromètres indépendamment des conditions initiales. Pour quantifier la visibilité mode par mode, il est possible de calculer un coefficient associé à chaque mode comme suit :

$$\lambda_i^* = (\underline{\psi}_i)^T G(T) \underline{\psi}_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \quad (6.7)$$

avec  $\underline{\psi}_i = (\varphi_i(x_1), \underline{f}_1, \dots, \varphi_i(x_6), \underline{f}_6, O_{1,6})^T$ . Les valeurs de  $\lambda^*$  pour les six premiers modes sont représentées dans la figure (6.6). On remarque que les six modes sont bien observables.

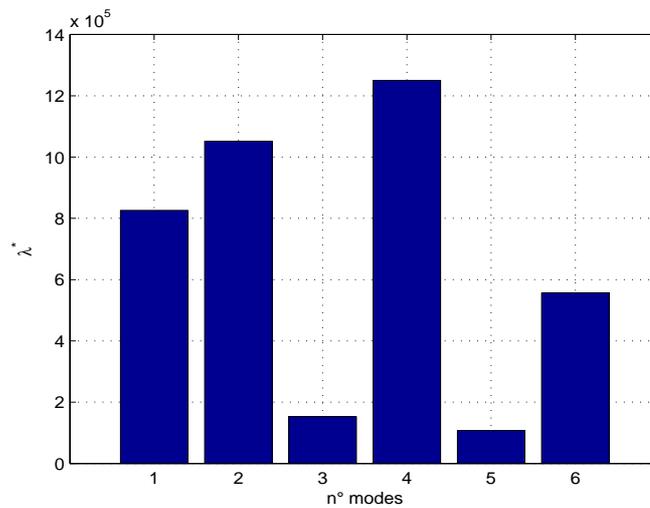


FIG. 6.6 – Grammien d'accélération pour six accéléromètres placés sur la maquette du pont pour six modes ciblés.

### Remarques

- Comme on s'intéresse aux six premiers modes de vibration et qu'on souhaite utiliser une estimation d'accélération par filtrage modal, il convient d'avoir au moins autant d'accéléromètres que de contributions modales à identifier. Pour cela, on a pris six accéléromètres.
- Dans ce cas, on ne s'intéresse pas à la visibilité des modes supérieurs en utilisant cette configuration des capteurs car le problème du spill-over ne se pose pas pour le contrôle passif et semi-actif.

### 6.2.3 Estimation d'état

L'état d'un système est composé des contributions modales du déplacement et des contributions modales de la vitesse. Lors de l'utilisation des accéléromètres, les contributions modales d'accélération seront obtenues en utilisant un filtre modal. Les contributions modales de déplacement et de vitesse seront obtenues par intégrations numériques des signaux des contributions modales d'accélération.

On considère la décomposition modale de l'accélération de la maquette du pont sur les six premiers modes. Le filtre modal permet de convertir en temps réel les six accélérations mesurées par les accéléromètres, en contributions modales d'accélération. Il donne un résultat correct si la réponse réelle coïncide avec sa projection sur les six premiers modes :

$$[\ddot{\alpha}_1^6(x_1,t), \dots, \ddot{\alpha}_6^6(x_6,t)]^T = [\mathbf{F}][\ddot{y}_1^6(x_1,t), \dots, \ddot{y}_6^6(x_6,t)]^T \quad (6.8)$$

$[\mathbf{F}]$  est la matrice de filtre modal définie comme suit :

$$[\mathbf{F}] = [\underline{\varphi}_i(x_q) \cdot \underline{f}_q]^{-1}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \quad \text{et } q = 1, \dots, 6 \quad (6.9)$$

$\underline{f}_q$  est le vecteur position du  $q^{\text{ème}}$  capteur: c'est à dire  $\underline{f}_q = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  ou  $\mathbf{a}_3$ . Les propriétés de cette méthode ont été introduites dans [24, 25]. Les méthodes d'identifications modales sont nombreuses en mécanique [4, 34], elles permettent d'identifier les formes modales aux points de placement des capteurs.

### 6.2.4 Identification modale

L'analyse modale de la maquette du pont a été le but d'un stage de DEA (Diplôme d'Etudes Approfondies) [28]. L'identification modale a été étudiée par la méthode en output-only en utilisant la toolbox COSMAD, qui est fondée sur la méthode des sous espaces [7]. Cependant il a été montré que les fréquences propres identifiées expérimentalement du modèle réel sont très proches de celles calculées par éléments finis et que l'amortissement modal est très faible et même négligeable. Dans le tableau (6.5) sont reportées les fréquences propres des six premiers modes de la maquette du pont.

Mode	1	2	3	4	5	6
fréquences (Hz)	1,3046	1,348	2,36	6,90	7,44	11,77

TAB. 6.5 – Les valeurs des six premières fréquences propres obtenues expérimentalement.

### 6.2.5 Filtre fréquentiel et dérivation numérique

La chaîne d'acquisition et de traitement des signaux est composée d'appareils fonctionnant sur une certaine plage de fréquence ; au delà et en deçà, le signal est filtré par des filtres passe bas et passe haut. Ces derniers sont soit intégrés dans les appareils, soit rajoutés par l'utilisateur. La dérivation d'un signal amplifie énormément les bruits de hautes fréquences et le signal est souvent noyé au milieu de ces bruits. Pour remédier à ce problème on propose un calcul de la dérivée complété par filtrage fréquentiel passe bas [86]. Soit  $u$  le signal d'entrée d'un filtre dérivateur,  $v$  le signal de sortie et  $w$  le signal intermédiaire. La première opération est la véritable dérivation :  $w = \dot{u}$ , puis vient le filtrage. On prend un filtre dit du second ordre tel que les composantes du signal avant la fréquence de coupure soient conservées et les suivantes soient éliminées. On définit  $v$  comme la solution de

$$\ddot{v} + 2\xi_c \omega_c \dot{v} + \omega_c^2 v = \omega_c^2 w, \quad (6.10)$$

où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure,  $\xi_c$  le coefficient du filtre pris égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  pour ne pas avoir de résonance.

Pour modéliser ces deux opérations, on utilise les transformées de Fourier, on note  $w$  la pulsation, on obtient les équations suivantes :

$$W(\omega) = j\omega U(\omega) \quad \text{et} \quad \omega_c^2 V(\omega) - \omega^2 V(\omega) + 2j\omega \xi_c \omega_c V(\omega) = \omega_c^2 W(\omega). \quad (6.11)$$

D'où

$$\frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \frac{j\omega \omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega^2 + 2j\omega \xi_c \omega_c} \quad (6.12)$$

La fréquence de coupure est choisie pour limiter au mieux les signaux que l'on ne souhaite pas voir. Dans un modèle à six modes, la fréquence du sixième mode est de 11,77 Hz. Pour cela, on a pris une fréquence de coupure  $f_c = 15\text{Hz}$ .

## 6.3 Contrôle passif

Tous les essais ont été réalisés en vibration libre de la maquette du pont : cas du lâché. On considère un état initial déséquilibré qui conduit à des oscillations [86]. Pour cela, on propose de déformer le tablier afin de lui donner un déplacement initial. Ainsi, on tire l'extrémité du tablier pour le déplacer de six centimètres puis on le lâche en laissant le contrôle agir. On tire horizontalement : lâché horizontal, lorsqu'on cherche à exciter les modes horizontaux et verticalement : lâché vertical, lorsqu'on cherche à exciter les modes

verticaux. La simulation est lancée juste avant le lâché du tablier.

Dans cette partie on présente le contrôle passif de la maquette du pont : la résistance attachée aux bornes de l'alternateur est fixée. Lorsque l'actionneur est attaché à l'extrémité du tablier on cherche à contrôler le mode de torsion. Par contre lorsqu'il est attaché à l'extrémité du pylône et suivant le plan de vibration du pendule, on cherche à amortir le premier mode ou le mode de balancement de la maquette.

### 6.3.1 Contrôle du mode de torsion de la maquette du pont

On considère durant cette section un lâché horizontal. On représente dans la figure (6.7) l'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont sans actionneur. On remarque que l'amortissement propre de ce mode est très faible, comme a été montré lors de l'analyse modale ; il est identifié à 0.1%. Par ailleurs, l'amortissement interne a une influence négligeable sur les paramètres optimaux de l'actionneur.

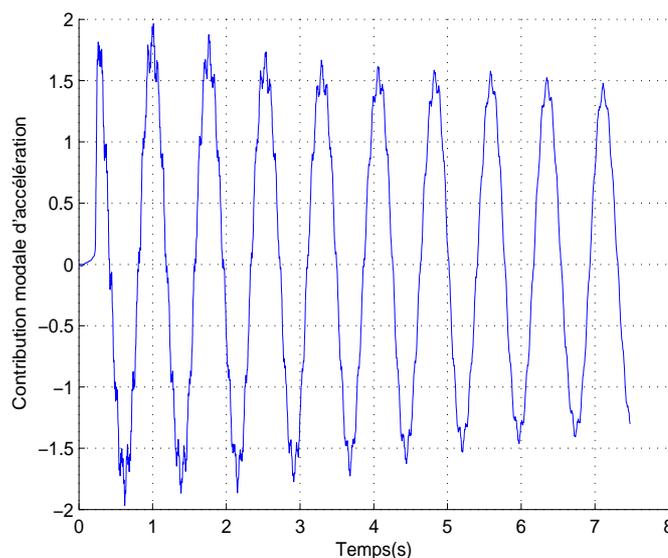


FIG. 6.7 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont sans actionneur

Afin d'amortir ce mode de torsion, l'actionneur est attaché à l'extrémité du tablier où le déplacement est maximal, comme est indiqué sur la figure (6.8). Le coefficient d'amortissement total optimal de l'actionneur a été déterminé à partir du critère d'optimisation du

taux de décroissance exponentiel. Lorsqu'une résistance est attachée aux bornes de l'alternateur, l'amortissement est la somme d'un amortissement purement mécanique et d'un amortissement électrique, dû à la résistance. La valeur de cette dernière est déterminée par la méthode de moindre carrée et elle est fixée à une résistance totale de  $4,5\Omega$ .

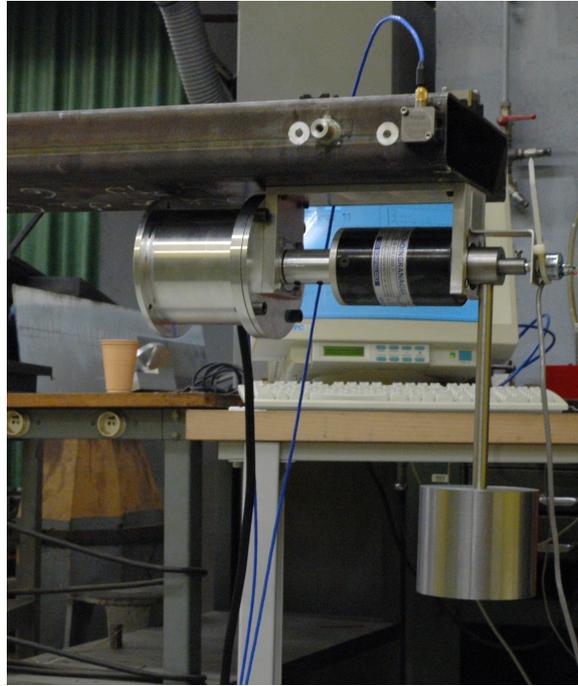


FIG. 6.8 – *Dispositif de contrôle du mode de torsion de la maquette du pont.*

L'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont est représentée sur la figure (6.9). On remarque que l'utilisation d'un tel actionneur électromécanique avec des paramètres optimaux permet de bien amortir ce mode de vibration de la maquette du pont. Par contre, il n'est pas aussi efficace quant à l'amortissement des petites oscillations, vu que le rapport d'engrenage utilisé est très faible. De cette figure, on remarque aussi l'apparition des hautes fréquences des modes horizontaux sur la réponse du mode de torsion, vu qu'un lâché horizontal excite tous les modes horizontaux.

Pour comparer les études expérimentales et numériques, on représente dans la figure (6.10) l'oscillation libre numérique de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en introduisant les mêmes paramètres de l'actionneur utilisés expérimentalement. On remarque que les deux courbes, numérique et expérimentale, ont presque le même tracé et la même décroissance. D'où, une bonne corrélation entre la simulation numérique et le résultat expérimental.

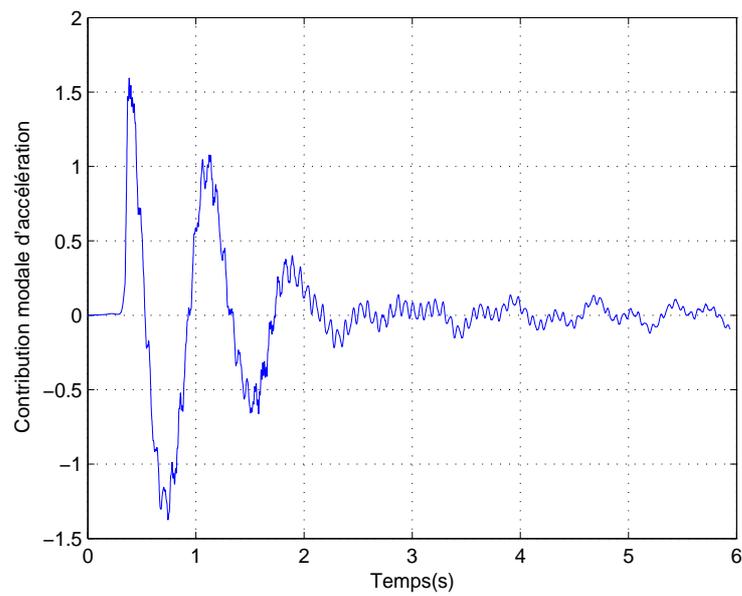


FIG. 6.9 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette lorsque l'actionneur est à paramètres optimaux.

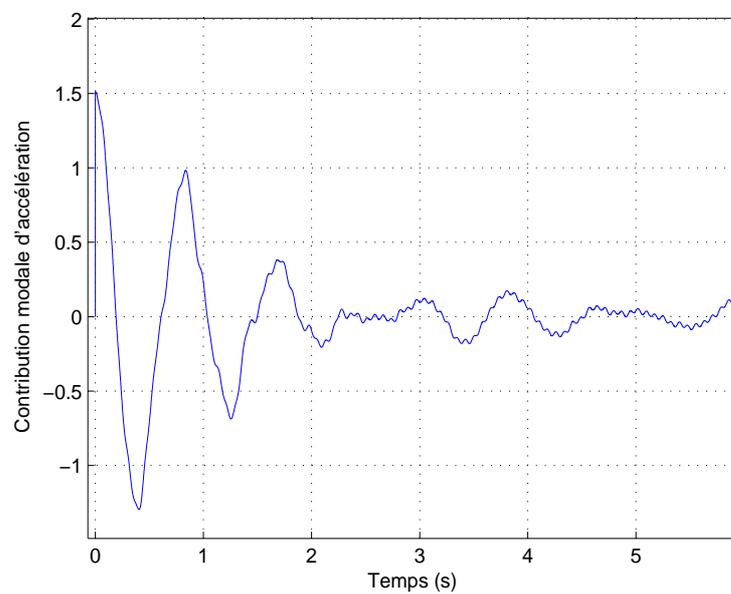


FIG. 6.10 – Oscillation libre numérique de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette lorsque l'actionneur à paramètres optimaux.

Pour voir l'influence de l'actionneur, lors d'un lâché horizontal, sur tous les modes, on représente dans la figure (6.11) l'oscillation libre expérimentale des six premières contributions modales des accélérations de la maquette du pont en utilisant l'actionneur à paramètres optimaux.

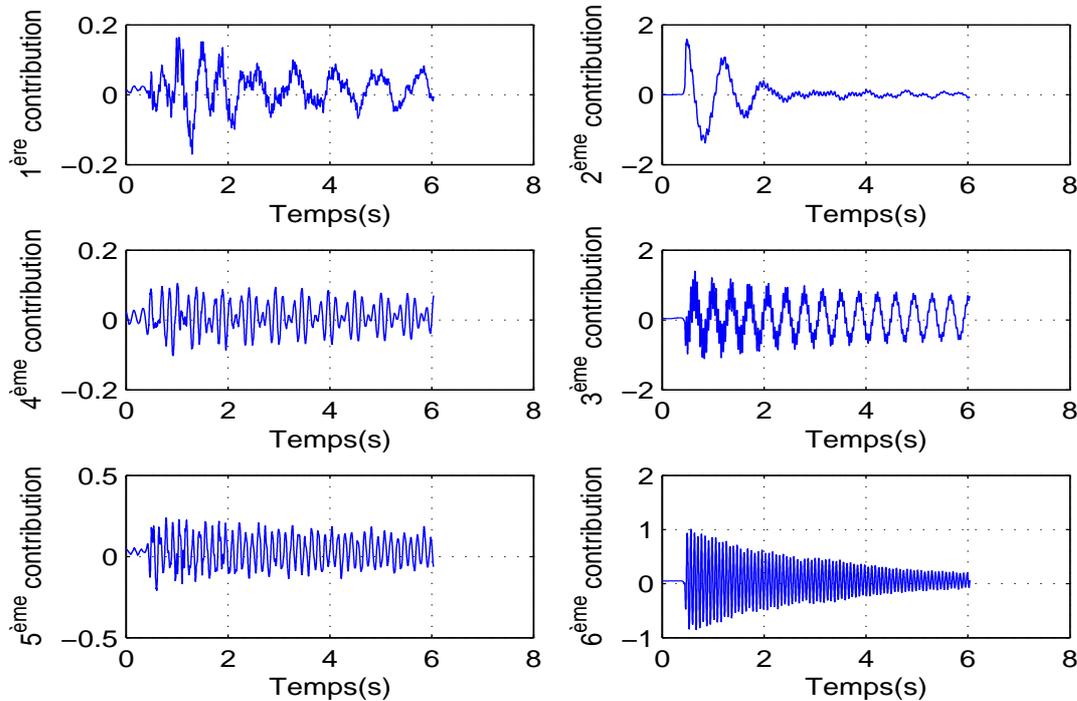


FIG. 6.11 – Oscillation libre expérimentale des six premières contributions modales des accélérations de la maquette du pont avec actionneur à paramètres optimaux.

Dans cette figure les contributions modales des accélérations des modes horizontaux et du mode de balancement sont représentées à droite et celles des modes verticaux sont représentées à gauche. En plus du mode de torsion, l'actionneur permet d'amortir le sixième mode de vibration, alors que son influence sur le troisième mode est minimale. Pour amortir ce mode de balancement, un actionneur devrait être placé à l'extrémité du pylône. Les modes verticaux sont très peu excités et ne sont pas amortis.

Afin de montrer expérimentalement l'importance des paramètres optimaux, on considère toujours le même actionneur : actionneur électromécanique attaché à l'extrémité du tablier, en variant premièrement la résistance externe puis la longueur du pendule en maintenant la masse totale de l'actionneur fixe.

### 6.3.1.1 Variation de la résistance externe

Dans cette section, on fait varier la résistance externe à partir de sa valeur optimale. La longueur du pendule prise en condition de synchronisation reste fixe. Dans la figure (6.12) est représentée l'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque l'actionneur est en circuit ouvert et en trait plein lorsque l'actionneur est à paramètres optimaux. Dans cette

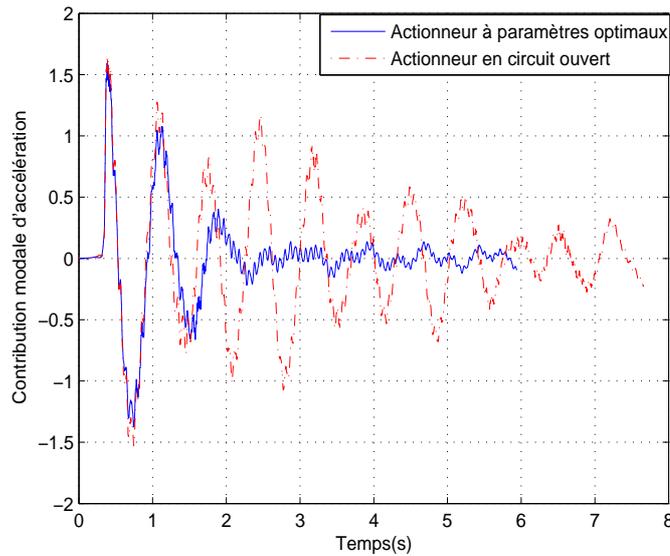


FIG. 6.12 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque l'actionneur est en circuit ouvert et en trait plein lorsque l'actionneur est à paramètres optimaux.

figure, lorsque l'actionneur est en circuit ouvert, il est clairement visible le phénomène des battements qui est dû à la présence de double pôles complexes conjugués dont leurs parties réelles sont presque coïncidées et leurs parties imaginaires sont très peu éloignées. Si on augmente la résistance, l'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du même mode est représentée en pointillé lorsque  $R = 2R^{opt}$  et en trait plein lorsque  $R = R^{opt}$  dans la figure (6.13). On remarque que l'oscillation libre de la contribution modale de l'accélération lorsque  $R = 2R^{opt}$  est moins amortie par rapport au cas où  $R = R^{opt}$ . Les battements ne sont plus visibles dans ce cas, les parties imaginaires des pôles complexes conjugués du système sont égaux et leurs parties réelles sont très éloignées.

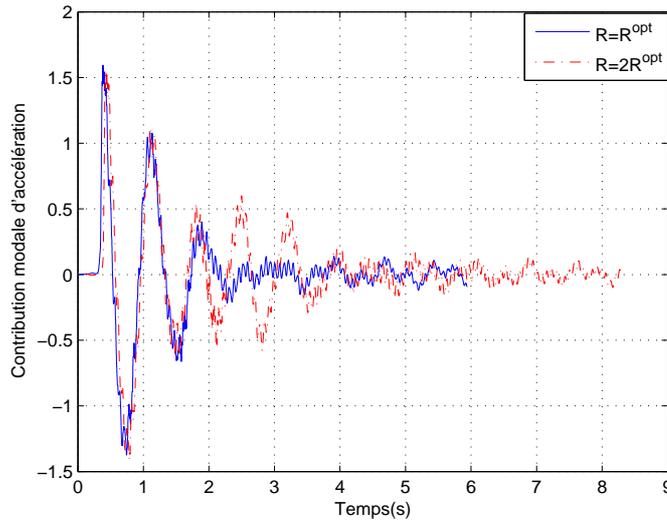


FIG. 6.13 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque  $R = 2R^{opt}$  et en trait plein lorsque  $R = R^{opt}$ .

### 6.3.1.2 Variation de la longueur du pendule

Dans cette section, on maintient la résistance externe fixe  $R = R^{opt}$  et on fait varier la longueur du pendule à partir de sa valeur optimale. En particulier, dans la figure (6.14) est représentée l'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque  $l = 13,5cm$  et en trait plein lorsque  $l = l^{opt} = 17,57cm$ , alors que, dans les figures (6.15) et (6.16), la longueur du pendule utilisée est supérieure à sa valeur optimale. Dans la figure (6.15) est représentée l'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque  $l = 25cm$  et en trait plein lorsque  $l = l^{opt}$ . De même, dans la figure (6.16) est représentée l'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du même mode en pointillé lorsque  $l = 34,5cm$  et en trait plein lorsque  $l = l^{opt}$ . Sur ces figures, on remarque que plus la longueur du pendule s'éloigne de la longueur optimale, moins l'oscillation de la contribution modale est amortie. D'où, l'importance de la condition de synchronisation.

Après avoir montré expérimentalement l'importance des paramètres optimaux de l'actionneur pour contrôler le mode de torsion de la maquette du pont, on cherche dans une deuxième partie à amortir la vibration du premier et du troisième mode de vibration de la maquette du pont.

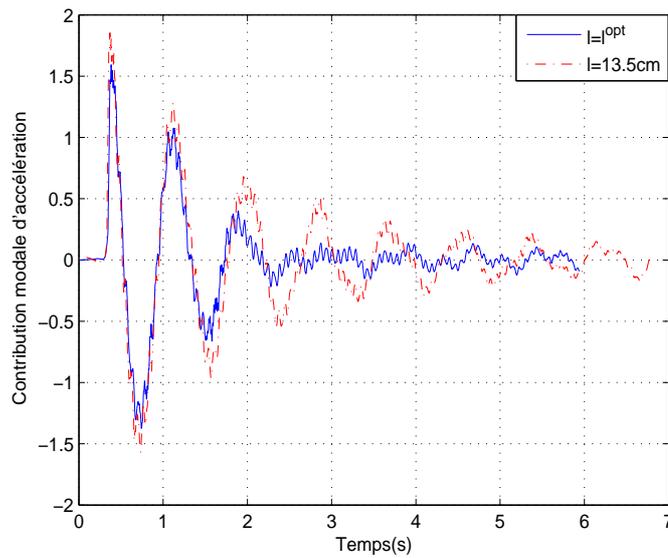


FIG. 6.14 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque  $l = 13,5cm$  et en trait plein lorsque  $l = l^{opt}$ .

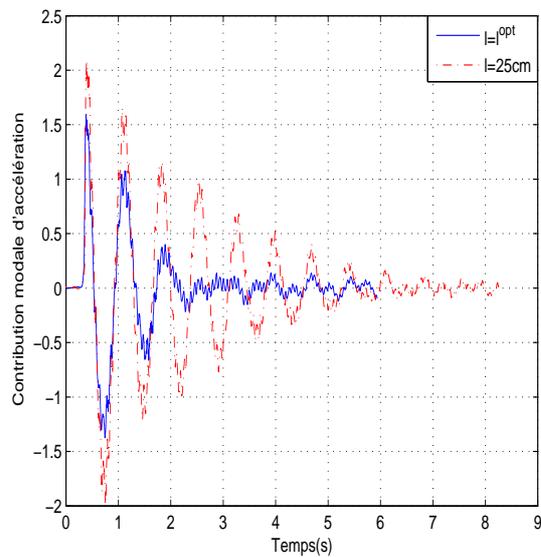


FIG. 6.15 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque  $l = 25cm$  et en trait plein lorsque  $l = l^{opt}$ .

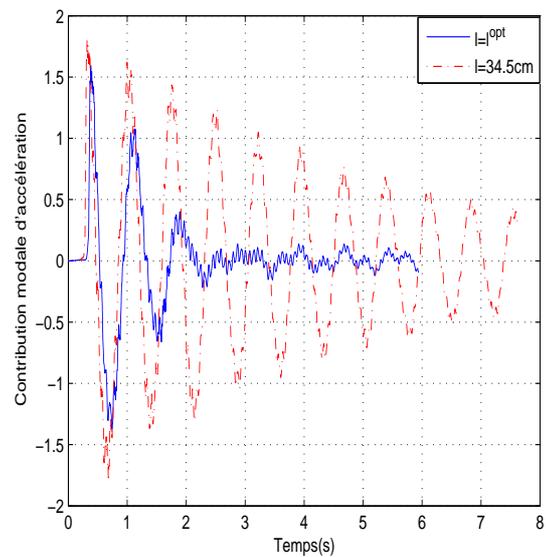


FIG. 6.16 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de torsion de la maquette du pont en pointillé lorsque  $l = 34,5cm$  et en trait plein lorsque  $l = l^{opt}$ .

### 6.3.2 Contrôle du premier et du troisième mode de vibration de la maquette du pont

Comme on a indiqué dans le quatrième chapitre, pour amortir le premier mode et le mode de balancement de la maquette du pont, l'actionneur doit être attaché à l'extrémité du pylône : le premier mode est amorti lorsque le pendule vibre dans le plan (OXZ) alors que le mode de balancement est amorti lorsque le pendule vibre dans le plan (OYZ).

#### 6.3.2.1 Contrôle du premier mode de vibration de la maquette du pont

L'actionneur est attaché à l'extrémité du pylône dont le pendule vibre dans le plan (OXZ) comme est indiqué par la figure (6.17). L'actionneur électromécanique utilisé expérimentalement, dans ce cas, n'est pas à paramètres optimaux, car on a utilisé un motoréducteur à courant continu dont on ne connaît pas ses caractéristiques. La longueur du pendule est choisie en condition de synchronisation  $l = 15,6\text{cm}$ . En considérant un lâché vertical, l'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du premier mode de la maquette du pont, lorsque le motoréducteur est en court circuit, est représentée dans la figure (6.18). On remarque que l'amortissement n'est pas optimal vu



FIG. 6.17 – Contrôle du premier mode de vibration de la maquette du pont.

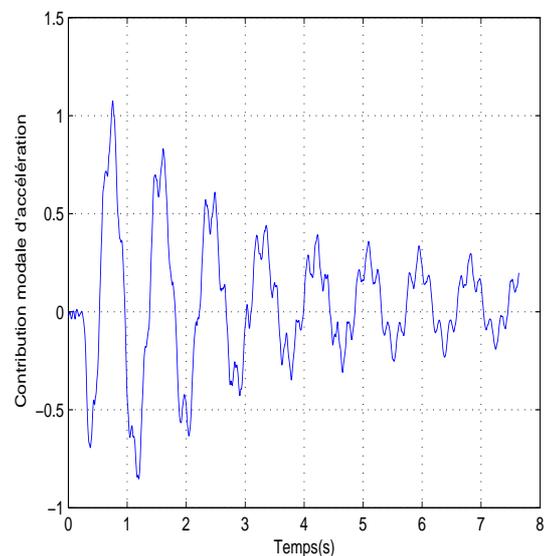


FIG. 6.18 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du premier mode de la maquette du pont lorsque le motoréducteur est en court circuit.

que l'actionneur utilisé n'est pas à paramètres optimaux. Mais l'idée est de montrer que ce mode est amorti lorsque l'actionneur est attaché à l'extrémité du pylône.

L'excitation considérée dans la suite de ce chapitre est un lâché horizontal.

### 6.3.2.2 Contrôle du mode de balancement de la maquette du pont

L'actionneur est toujours attaché à l'extrémité du pylône mais le pendule vibre dans le plan (OYZ) comme est indiqué par la figure (6.19). L'actionneur utilisé expérimentalement dans ce cas est aussi à paramètres non optimaux, car on a utilisé le même actionneur que le cas précédent en variant seulement la longueur du pendule et son plan de vibration. La longueur du pendule est choisie en condition de synchronisation  $l = 6,8cm$ . Dans la figure (6.20) est représentée l'oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de balancement de la maquette du pont lorsque le motoréducteur est en court circuit.



FIG. 6.19 – Contrôle du premier mode de vibration de la maquette du pont.

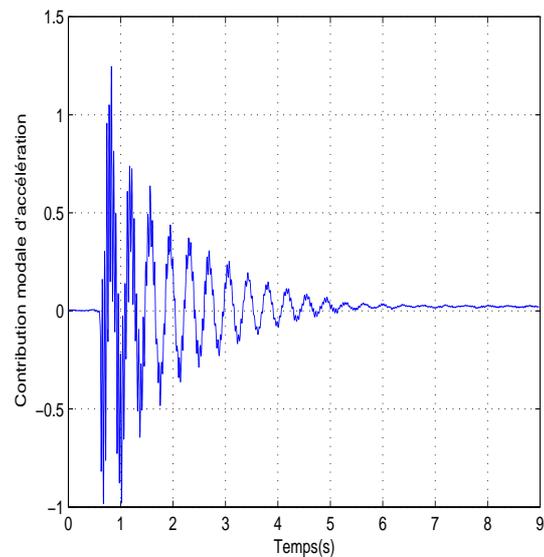


FIG. 6.20 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale de l'accélération du mode de balancement de la maquette du pont lorsque le motoréducteur est en court circuit.

On remarque que ce mode de balancement est amorti pour cette configuration de l'actionneur.

Dans cette section on a utilisé deux actionneurs électromécaniques : un attaché à l'extrémité du tablier et l'autre à l'extrémité du pylône comme est indiqué par le figure (6.19).

L'excitation est toujours la même; on tire l'extrémité du tablier et on lâche à vitesse nulle. En effet, ce lâché excite tous les modes horizontaux et le mode de balancement de la maquette du pont. Par ailleurs, on représente dans la figure (6.21) l'oscillation libre expérimentale des trois contributions modales des accélérations des deux premiers modes horizontaux et du mode de balancement de la maquette du pont lorsque l'actionneur attaché à l'extrémité du tablier est à paramètres optimaux et le motoréducteur est en court circuit.

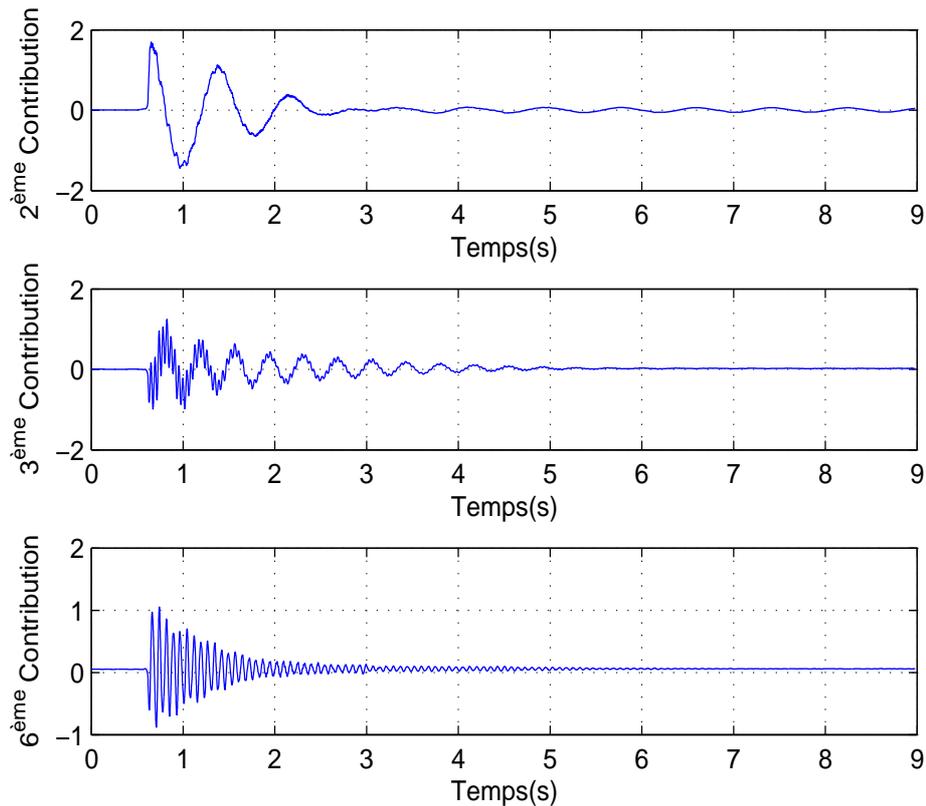


FIG. 6.21 – Oscillation libre expérimentale des trois contributions modales des accélérations des deux premiers modes horizontaux et du mode de balancement de la maquette du pont lorsque l'actionneur attaché à l'extrémité du tablier est à paramètres optimaux et le motoréducteur est en court circuit.

On remarque que les oscillations de ces trois modes sont bien amorties.

Par suite, on peut tirer comme conclusion partielle, que l'utilisation des trois actionneurs électromécaniques dont un est attaché à l'extrémité du tablier et les deux autres sont attachés à l'extrémité du pylône permettent d'amortir le premier mode vertical, les deux premiers modes horizontaux et le mode de balancement de la maquette du pont.

## 6.4 Contrôle semi-actif

Dans cette partie on présente la mise en oeuvre expérimentale de la loi de contrôle semi-actif sur la maquette du pont introduite dans le cinquième chapitre. On se limite à l'introduction de la loi de contrôle pour maintenir l'actionneur durant plusieurs étapes de construction de la maquette du pont. La maquette telle quelle est construite, représente l*i*ème étape de construction  $e_i$ , l*i*ème plus une étape de construction  $e_{i+1}$  est modélisée en ajoutant une masse concentrée. Les paramètres optimaux de cette nouvelle étape seront obtenus en faisant varier la résistance en temps réel selon la loi de contrôle semi-actif introduite dans le chapitre précédent. Cette résistance est pilotée via une carte électronique dissipant l'énergie électrique de manière variable en fonction du temps.

### 6.4.1 Schéma de la boucle de rétroaction

Le contrôle de la maquette du pont est réalisé grâce à un ensemble capteurs-contrôleur-actionneur. La maquette du pont est instrumentée avec 6 accéléromètres, qui permettent de mesurer les mouvements du pont. De plus un potentiomètre est placé sur l'axe de rotation du pendule qui, couplé à un alternateur, fait office d'actionneur. Les capteurs sont, après conditionnement, connectés à la carte d'acquisition placée sur l'ordinateur qui pilote l'ensemble du système. L'actionneur est piloté via la carte électronique dissipant l'énergie électrique de manière variable. La figure (6.22) présente la boucle de rétroaction.

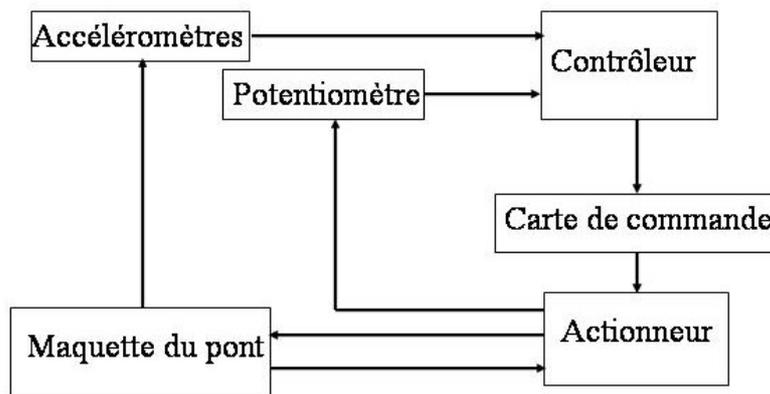


FIG. 6.22 – Boucle de rétroaction.

En supposant que les paramètres de l'étape de construction  $e_{i+1}$  sont connus, la loi de

contrôle introduite dépend seulement du rapport  $\theta/\dot{\theta}$ . L'angle de vibration du pendule  $\theta$  est proportionnel à la mesure du potentiomètre, la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est obtenue par dérivation numérique de l'angle  $\theta$ .

La carte de commande est un switch électronique, dont le schéma est fourni par la figure (6.23), composé d'un pont triphasé qui redresse le signal en tension monophasée, puis d'un transistor mosfet qu'on peut modéliser comme un interrupteur ouvert ou fermé en série avec une très faible résistance. Lorsque le transistor est conducteur, l'alternateur est

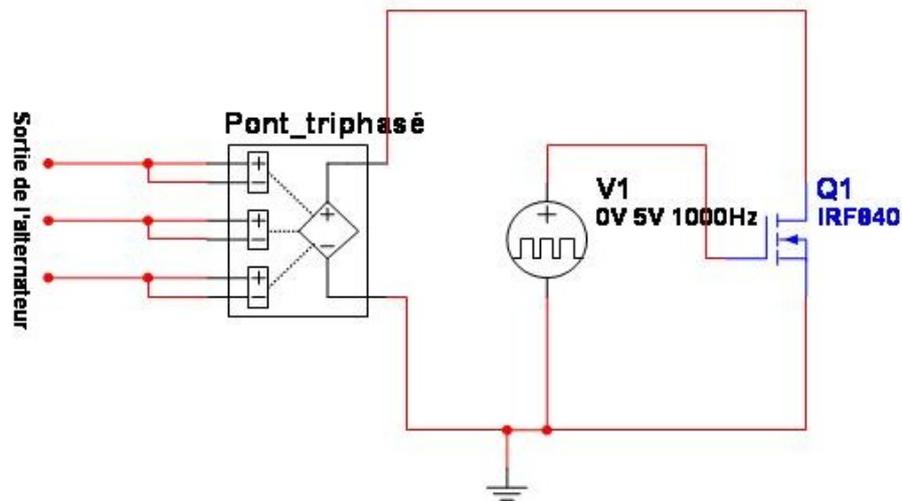


FIG. 6.23 – *Switch électronique.*

alors court-circuité et lorsqu'il est bloqué, l'alternateur est en circuit ouvert. Par suite, l'amortissement est variable selon le rapport cyclique à une fréquence fixée. Ce switch est donc commandé par un signal de commande à rapport cyclique variable de période  $T$ . Soit une résistance en série avec un interrupteur commandé par un rapport cyclique variable. L'interrupteur est fermé pendant la durée  $a$  et ouvert pendant  $T-a$ . On applique une tension  $U$  continue et constante aux bornes de la résistance. La quantité de charge qui passe à travers la résistance pendant une période est  $Q=(U/r)a$ . Or cela correspond à une résistance équivalente  $R$  telle que  $Q=(U/R)T$ . On en déduit  $R=rT/a$ .

La résistance  $r$  a été déterminée expérimentalement en testant la carte électronique lorsque l'actionneur est monté sur un support fixe. On a déterminé la résistance équivalente  $R$  pour différents rapports cycliques  $T/a$ . Il résulte que  $r = 11,25\Omega$  : cette valeur représente la résistance interne de la carte électronique.

Le signal à rapport cyclique variable est obtenu par la comparaison entre un signal trian-

gulaire et une consigne qui dépend de la valeur de la résistance  $R$  déterminée par la loi de contrôle semi-actif (5.24). Cette consigne est définie comme suit:

$$c = A - A \frac{r}{R} \quad (6.13)$$

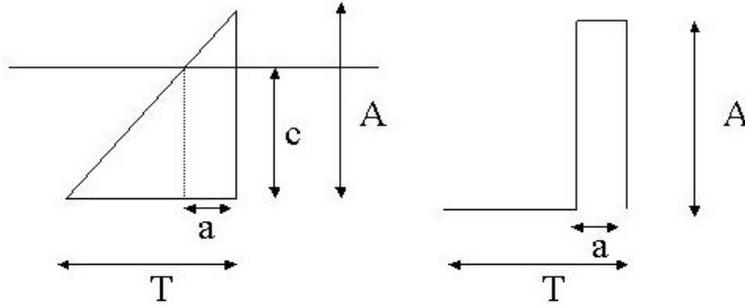


FIG. 6.24 – Génération du signal de commande.

Lorsque l'amplitude du triangle  $A$  est inférieure à la consigne  $c$ , le signal de commande vaut 0 et le switch est bloqué (circuit ouvert). Dans le cas contraire, le signal de commande vaut  $A$  et le switch est passant (circuit fermé). Ainsi on obtient un signal à rapport cyclique variable selon la valeur de  $c$ , la consigne, image de la valeur de la résistance issue de la loi de contrôle. La résistance est fixe sur une période  $T$ . Cette période est choisie très faible de telle façon à simuler une résistance continue dans le temps.

### 6.4.2 Résultats de contrôle semi-actif

La loi de contrôle semi-actif (5.24) introduite dans le chapitre précédent a pour but de maintenir l'actionneur durant plusieurs étapes de construction de la maquette du pont afin d'amortir le mode de torsion. Dans cette étude et pour des raisons de simplification, les grandeurs mécaniques, tels que les masses modales et les fréquences propres, sont calculées d'avance par éléments finis. Mais, ces grandeurs peuvent être déterminés aussi en temps réel par identification modale.

On considère que la maquette du pont telle qu'elle est construite, représente l'étape de construction  $e_i$ , l'étape de construction  $e_{i+1}$  est modélisée en ajoutant une masse concentrée de  $1,2kg$  à extrémité du tablier : extrémité de la troisième poutre, selon la modélisation du quatrième chapitre. Dans la figure (6.25) est représentée l'oscillation libre de la

contribution modale d'accélération du mode de torsion de la maquette des deux étapes de construction. L'actionneur utilisé dans l'étape  $e_i$  est l'actionneur passif à paramètres optimaux. Cet actionneur est maintenu sans changement de ses paramètres durant l'étape  $e_{i+1}$ . On remarque, comme on a montré dans le chapitre précédent, que l'amortissement

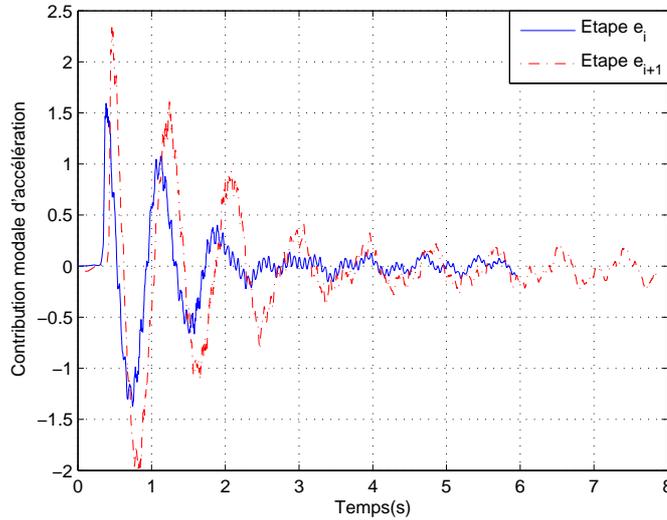


FIG. 6.25 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale d'accélération du mode de torsion de la maquette du pont à l'étape  $e_i$  et à l'étape  $e_{i+1}$  en maintenant le même actionneur.

de l'oscillation de la contribution modale du mode de torsion diminue en fonction de l'évolution de la maquette. Par suite, l'efficacité de l'actionneur électromécanique passif utilisé diminue lorsque la structure évolue au cours du temps.

Par ailleurs, pour confirmer l'avantage de la loi de contrôle semi-actif introduite dans le chapitre précédent, on cherche à maintenir le même actionneur, en faisant varier ses paramètres en temps réel selon la loi de contrôle appliquée sur la résistance externe, durant quatre étapes de construction de la maquette du pont : la maquette telle qu'elle est construite représente l'étape  $e_i$ , l'étape  $e_{i+1}$  est modélisée en ajoutant une masse concentrée de  $1,2kg$ , l'étape  $e_{i+2}$  est représentée en ajoutant une masse concentrée de  $3kg$  et l'étape  $e_{i+3}$  est représentée en ajoutant une masse concentrée de  $4,2kg$  toujours à l'extrémité libre de la troisième poutre. L'oscillation libre de la contribution modale du mode de torsion de ces quatre étapes est représentée par la figure (6.26). On remarque que les quatre courbes sont presque confondues. D'où, la loi de contrôle permet d'adapter l'actionneur de manière à conserver sa performance indépendamment de l'évolution de la structure : l'actionneur permettant une adaptation en temps réel aux évolutions de la structure.

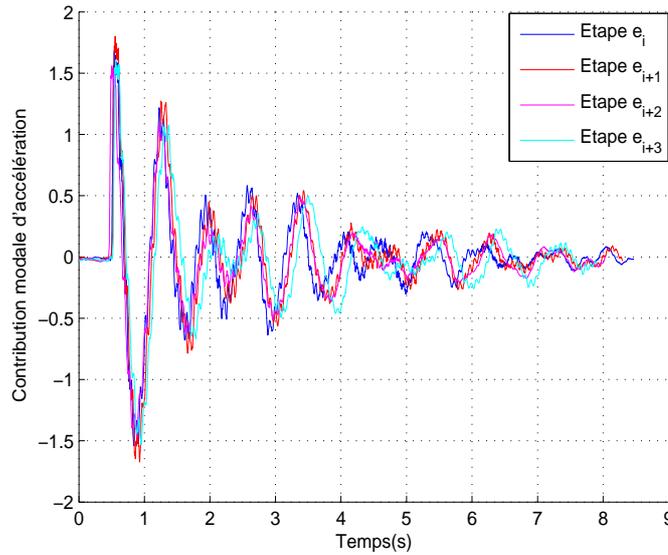


FIG. 6.26 – Oscillation libre expérimentale de la contribution modale d'accélération pour quatre étapes du mode de torsion de la maquette du pont en utilisant le contrôle semi-actif.

Par contre, de cette dernière figure on observe le phénomène des battements qui est dû à la résistance interne de la carte électronique qui est très élevée par rapport à la résistance optimale. Cette résistance interne est due à la présence des diodes pour redresser le courant alternatif.

## 6.5 Conclusion

L'étude expérimentale, développée dans ce chapitre, valide l'efficacité importante de l'actionneur électromécanique utilisé pour stabiliser les vibrations de la maquette du pont. Par ailleurs, les résultats obtenus expérimentalement en contrôle passif confirment la validité du critère d'optimisation du taux de décroissance exponentiel introduit dans le quatrième chapitre. Aussi, ils montrent l'importance majeure des paramètres optimaux de l'actionneur sur l'amortissement.

L'utilisation des trois actionneurs électromécaniques dont un est attaché à l'extrémité du tablier et les deux autres à l'extrémité du pylône permet d'amortir le premier mode vertical, les deux premiers modes horizontaux et le mode de balancement de la maquette du pont. Cependant il faut noter que les paramètres des deux actionneurs attachés à l'extrémité du pylône ne sont pas choisis d'une manière optimale.

Les résultats expérimentaux en contrôle semi-actif confirment l'avantage de la loi de contrôle qui permet d'adapter l'actionneur de manière à conserver sa performance indépendamment de l'évolution de la structure.



# Conclusions

Ce travail est un développement d'une loi de contrôle semi-actif. A ce titre il décline toutes les étapes de la mise en oeuvre : synthèse théorique du contrôle, approximation numérique, expérimentation... Pour appliquer cette loi de contrôle, on a proposé un actionneur électromécanique original. Cet actionneur est composé principalement d'un TMD pendulaire couplé à un alternateur qui sert à transformer l'énergie mécanique en énergie électrique qui sera dissipée par effet Joule dans une résistance externe. Lorsque cette résistance est constante, on parle du contrôle passif et lorsqu'elle varie dans le temps on parle du contrôle semi-actif.

Comme la performance du TMD est très liée aux réglages de ses paramètres et comme leur efficacité varie beaucoup lorsque la structure évolue ainsi que le type de chargement, il décline les principaux résultats et innovations de ce travail qui peut être résumé ainsi :

On a introduit une méthode de conception des paramètres de l'actionneur. Cette méthode consiste à maximiser le taux de décroissance exponentiel au moyen de la technique de placement des pôles. De la simulation numérique, on a pu constater, à partir de l'étude détaillée de l'amortissement obtenu en variant les paramètres de l'actionneur, que l'emplacement optimal de cet actionneur est dans la zone à déplacement maximal. On a constaté aussi l'importance majeure des paramètres optimaux de l'actionneur sur l'amortissement.

A travers des simulations numériques sur une maquette d'un pont en construction, on a montré que cet actionneur électromécanique, lorsqu'il est attaché à l'extrémité du tablier, a une efficacité très importante à amortir le mode de torsion lorsque la maquette est en vibration libre ou également en vibration harmonique. En plus, l'utilisation des trois actionneurs, dont un est attaché à l'extrémité du tablier et les deux autres à l'extrémité du pylône avec le pendule de l'un qui vibre dans le plan de la maquette et le pendule de l'autre qui vibre dans le plan perpendiculaire de la maquette, permettent d'amortir le premier mode vertical, le mode de torsion et le mode de balancement de la maquette du pont.

On a développé une loi de contrôle semi-actif qui permet une adaptation en temps réel des paramètres de l'actionneur aux évolutions de la structure et des sollicitations. Cette loi de contrôle s'applique sur la résistance externe branchée aux bornes de l'alternateur et elle permet de varier le coefficient d'amortissement et de compenser la rigidité de l'actionneur. Cette loi s'applique durant la construction de pont lorsqu'il passe par des étapes intermédiaires dans lesquelles il est très flexible. Elle permet d'éviter le changement de l'actionneur à chaque étape de construction, comme elle permet d'éviter les arrêts du chantier et d'augmenter la sécurité pour les ouvriers. Cette loi peut être aussi appliquée pour amortir plusieurs types d'excitations et également plusieurs modes en agissant sur un mode particulier à chaque instant. En plus, elle peut être considérée très simple, car elle consiste en l'introduction d'un seul capteur lors de sa mise en oeuvre expérimentale.

On a mis en oeuvre expérimentalement, sur la maquette du pont, d'une part le contrôle passif et d'autre part le contrôle semi-actif. Dans le contrôle passif on a validé la théorie de la conception des paramètres de l'actionneur et on a confirmé l'efficacité de l'actionneur électromécanique introduit, comme on a montré que l'introduction des trois actionneurs dont un est attaché à l'extrémité du tablier et les deux autres à l'extrémité du pylône permettent d'amortir le premier mode vertical, les deux premiers modes horizontaux et le mode de balancement. On a aussi observé une bonne similitude entre les résultats numériques et expérimentaux. Mais, dans le contrôle semi-actif on a seulement pu valider l'avantage de rendre l'efficacité de l'actionneur indépendante de l'évolution de la structure.

### Prespectives

Pour compléter les résultats obtenus et répondre aux questions posées par ces derniers, un certain nombre de travaux sont à envisager :

Expérimentalement, on souhaite améliorer la validité de la loi de contrôle semi-actif destinée à être utilisée pour des ponts en construction ou des ponts qui sont soumis à différents types d'excitations, deux pistes peuvent être explorées :

- choisir un autre alternateur qui produise plus de courant pour des petites vitesses de rotation,
- diminuer la résistance interne de la carte.

Une première étape à évaluer après l'amélioration expérimentale, est la mise en oeuvre de la loi de contrôle grâce à une analyse modale en ligne.

On souhaite évaluer expérimentalement l'écart entre la loi de contrôle semi-actif introduit dans cette étude à des lois de contrôle actif.

On souhaite, aussi, mettre en oeuvre expérimentalement la loi de contrôle semi-actif pour amortir différents types d'excitations et amortir différents modes en agissant sur un mode particuliers à chaque instant dans l'esprit de la méthode de MIMSC.

Enfin, on souhaite faire la conception de cet actionneur électromécanique pour un vrai pont et l'industrialiser.

# Bibliographie

- [1] Akbay Z. and Aktan H.M. Actively regulated friction slip braces. In *Pro. Sixth Canadian Conference on Earthquake Engineering, Toronto Canada*, pages 367–374, 1991.
- [2] Balas M.J. Active control of flexible systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 24(4):415–436, 1978.
- [3] Balas M.J. Direct velocity feedback control of large space structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2(3):252, 1979.
- [4] Balmes E. Structural dynamics toolbox. *MATLAB, Scientific Software*, 1991.
- [5] Barros R.C. Seismic response of tanks and vibration control of their pipelines. *Journal of Vibroengineering*, 4(1):9–16, 2002.
- [6] Barros R.C. and Alves R. Seismic response of metallic storage tanks by degenerated solid modelling of liquid contents. *Emgenharia: Estudo e Pesquisa*, 4(2):71–77, 2001.
- [7] Basseville M., Mevel L. and Goursat M. Statistical model-based damage detection and localization: subspace-based residuals and damage-to-noise sensitivity ratios. *Journal of Sound and Vibration*, 275:769–794, 2004.
- [8] Baz A. and Poh S. Performance of an active control system with piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 126(2):327–343, 1988.
- [9] Baz A. and Poh S. Experimental implementation of the modified independent modal space control method. *Journal of Sound and Vibration*, 139(1):133–149, 1990.
- [10] Bisegna P., Caruso G. and Maceri F. On the choice of the shunt circuit for single-mode vibration damping of piezoactuated structures. In *Mechanical Modelling and Computational issues in Civil Engineering*, M. Frémond, F. Maceri, eds. Springer, 23:389–400, 2004.
- [11] Bisegna P., Caruso G. and Maceri F. Optimized electric networks for vibration damping of piezoactuated beams. *Journal of Sound and Vibration*, 289:908–937, 2006.

- [12] Bisegna P., Caruso G., Dionisio D.V., Sergio G. and Laura M. Semi-active control of a thin piezoactuated structure. In T.T. Hyde, editor, *Smart Structures and Materials: Damping and Isolation. Proceedings of SPIE*, volume 3989, pages 301–311, 2000.
- [13] Bourquin F. A numerical approach to the exact controllability of euler-navier-bernoulli beams. *Proceedings of the First World Conference on Structural Control*, pages 120–129, 1994.
- [14] Bourquin F. Numerical methods for the control of flexible structures. *Journal of structural control*, 8(1), 2001.
- [15] Bourquin F. and Joly M. A magnet-based vibrating wire sensor: design and simulation. *Smart Materials and Structures*, 14:247–256, 2005.
- [16] Bourquin F., Branchet B., Collet M. and Ratier L. Primal-dual control, synthesis for flexible structures. In *Proc. of 3rd World Conference on the Control Structures*, Como, Italy, 2002.
- [17] Bourquin F., Briffaut J.S. and Collet M. . On the feedback stabilisation: Komornik method. In *Proc. of second international symposium on active control in mechanical engineering*, Lyon, 1997.
- [18] Bourquin F., Collet M. and Ratier L. Modeling and numerical issues in the active control of flexible structures. In *Proc. of 3 Workshop on Structural Control*, pages 133–137, ENPC Champs sur Marne, 2000.
- [19] Bourquin F., Joly M., Collet M. and Ratier L. An efficient feedback control algorithm for beams: Experimental investigations. *Journal of Sound and Vibration*, 278:181–206, 2004.
- [20] Bourquin F., Urquiza J. and Namar R. Discretization of the controllability gramian in view of exact boundary control: The case of thin plates. *Proceeding of the IFIWG 7.2 Conference on Optimal Control of Partial Differential Equations*, Chemnitz, 1998.
- [21] Brownjohn J. M. W., Pan T. C. and Deng X. Y. Correlating dynamic characteristics from field measurements and numerical analysis of high-rise building. *Earthquake Engineering and Structural*, 29:523–543, 2000.
- [22] Caruso G. *Laminati piezoelettrici, modellazione, algoritmi di calcolo ed ottimizzazione della risposta dinamica*. PhD thesis, Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile XV Ciclo. Università di Roma Tor Vergata, 2000.
- [23] Caruso G. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping. *Smart Materials And Structures*, 10:1059–1068, 2001.

- [24] Collet M. Shape optimization of piezoelectric sensors dealing with spill-over instabilities. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 9(4):654–663, 2001.
- [25] Collet M. and Jezequel L. Active control with piezoelectric layers optimization. *Journal of Structural Control*, 1:59–79, 1995.
- [26] Contantinou M.C. and Symans M.D. Experimental study of seismic response of buildings with supplemental fluid dampers. *Structural Design Tall Buildings*, 2:93–132, 1993.
- [27] Cooperativa Libreria Universitaria . *Appunti di Elettrotecnica Generali*. Bologna, 1970.
- [28] Cumunel G. *Dynamique des structures et des systèmes couplés*. PhD thesis, Stage de Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA), 2005.
- [29] Den Hartog J. P. *Mechanical Vibrations*. McGraw Hill Book Co., New York, 1947.
- [30] Dowdell D.J. and Cherry S. Structural control using semi-active friction dampers. In *Proc. Ist world conference on structural control. Inst. Assoc. for structural control*, pages FA1/59– FA1/68, Los Angeles Calif., 1994.
- [31] Dupont P., Kasturi P. and Stokes A. Semi-active control of friction dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 202(2):203–218, 1997.
- [32] Dyke S.J., Spencer B.F., Sain M.K. and Carlson JD. Modeling and control of magnetorheological dampers for seismic response reduction. *Smart Materials and Structures*, 5:565–575, 1996.
- [33] Emanuele R. and Maurizio De A. Aspetti teorici nel controllo semi-attivo delle strutture. Technical report, Facolta di Ingegneria-Università di Napoli: Federico II, Maggio 2000.
- [34] Ewins D. J. *Modal testing: Theory and practice*. Research Studies Press LTD, 1986.
- [35] Fang J.Q., Li Q.S. and Jeary A.P. Modified independent modal space control of m.d.o.f systems. *Journal of Sound and Vibration*, 261:421–441, 2003.
- [36] Feng Q. and Shinozuka M. Use of a variable damper for hybrid control of bridge response under earthquake. In *Proc. of U.S.-National workshop on structural control Research, USC Publ. No.CE-9013*, 1990.
- [37] Feng Q. and Shinozuka M. Control of seismic response of bridge structures using variable dampers. *Journal Intelligent Material System and Structure*, 4:117–122, 1993.
- [38] Frahm H. Devices for damping vibrations of bodies. *U.S.Patent nr.989,958*, 1911.

- [39] Fujino Y. and Masato A. Design formulas for tuned mass dampers based on a perturbation technique. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22:833–854, 1993.
- [40] Fuller C.R., Elliot S.J. and Nilson P.A. *Active control of vibration*. Academic Press, 1996.
- [41] Gavin G.P., Hanson R.D. and Filisko F.E. Electrorheological dampers, part ii: testing and modeling. *Journal Applied and Mechanics*, 63:676–682, 1996.
- [42] Georges A. et Collaborateurs . *Les capteurs en instrumentation industrielle*. DUNOD, 1999.
- [43] Géradin M. et Rixen D. *Théorie des vibrations: application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1992.
- [44] Gérard C. Mécanique non-linéaire et éléments finis, fascicule 7. *LMSP*, 2003.
- [45] Hagood N.W. and Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 142(2):243–268, 1991.
- [46] Harold L.S. and Jeffrey .L.K. Second generation, non-protruding, intelgent stiffener for bridges (isb) at the i-35 walnut creek bridge. Technical report, The School of Aerospace and Mechanical Engineering, The University of Oklahouma, 1999.
- [47] Housner G.W., Bergman L.A., Chassiaskos A.G., Claus R.O., Marsi S.F., Skelton R.E., Soong T.T., Spencer B.F. and Yao J.T.P. Special issue: structural control: past, present and future. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 123(9):897–971, 1997.
- [48] Hrovat D., Barak P. and Rabins M. Semi-active versus passive or active tuned mass dampers for structural control. *Journal of Engineering Mechanics*, 109(3), June 1983.
- [49] Inaudi J.A. Modelated homogeneous friction: Semi-active damping strategy. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26:361–376, 1997.
- [50] Jauseu L.M. and Dyke S.J. Semi-active control strategies for mr dampers; acomparative study. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 126(8):795–803, 2000.
- [51] Kailtath T. . *Linear systems*. Prentice Hall, 1980.
- [52] Karnopp D., Crosby M.J and Harwood R.A. Vibration control using semi-active forces generators. *ASME Journal of Engineering for Industry Transport*, pages 2–8, Mai 1974.

- [53] Kobori T., Takahashi M., Nasu T. and Niwa N. Seismic response controlled structure with active variable stiffness. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22:925–941, 1993.
- [54] Komornik V. Stabilisation rapide de problèmes d'évolution linéaires. *C.R Academic Science*, 321:433–437, 1995.
- [55] Komornik V. Rapid boundary stabilization of linear distributed systems. *Siam Journal of Control and Optimization*, 35(5):1591–1613, 1997.
- [56] Krasnicki E.J. The experimental performance of an on-off active damper. *The Soch and Vibration Bulletin*, 51(3):125–131, 1981.
- [57] Kurada N., Kobori T., Takahashi M., Niwa N. and Midorikawa H. . Actual seismic response controlled building with semi-active damper system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 128:1427–1447, 1999.
- [58] Kwakernaak H. and Siven R. *Linear optimal control systems*. Wiley, 1972.
- [59] Lammering R., Jia J. and Rogers C.A. Optimal placement of piezoelectric actuators in adaptive truss structures. *Journal of Sound and Vibration*, 171(1):67–85, 1994.
- [60] Leitmann G. Semi-active control of vibration attenuation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 5:841–846, 1994.
- [61] Li Z.N., Tang J. and Li Q.S. Optimal sensor locations for structural vibration measurements. *Applied Acoustics*, 65:807–818, 2004.
- [62] Lin P.Y. and Chung L.L. Semi-active control of building structures with semiactive tuned mass damper. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 20:35–51, 2005.
- [63] Lions J.L. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, volume 1*. Masson, Paris, 1988.
- [64] Loh C.H, and Ma M.J. Active damping or active stiffness control for seismic excited building. In *Proc. Ist. World Conference on structural control Int. Ass. for structural control Los Angeles, CALift., El Cerrito CALif*, pages TA2/11–TA2/20, 1994.
- [65] Marazzi F. *Semi-active control of civil structures: Implementation aspects*. PhD thesis, Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile XV Ciclo. Facolta di Ingigneria-Università di Pavia-Italy, 2002.
- [66] Meirovitch L. *Dynamics and control of distributed structures*. John Wiley and Son, 1988.
- [67] Meirovitch L. *Dynamics and control structures*. Wiley, 1990.
- [68] Meirovitch L. and Öz H. Modal space control of distributed gyroscopic system. *Journal of Guidance, Control and System*, 3:140–150, 1980.

- [69] Mizuno T., Kobori T., Hirai J., Matsunga Y and Niwa N. Development of adjustable hydraulic damper for seismic response control of large structure. In *ASME PVP Conference*, volume 229, pages 163–170, 1992.
- [70] Mustafa Y., Sadri S. and Olkan C. Finite element analysis of non linear coupled oscillator. *Engineering Structures*, 24:577–586, 2002.
- [71] Mustafa Y. and Sadri S. The analysis of the orientation effect of non linear flexible systems on performance of the pendulum absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39:741–752, 2004.
- [72] Nagarajaiah S. and Sonmez E. Performance of semi-active variable stiffness multiple tuned mass damper under harmonic forces. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, accepted, in press, 2005.
- [73] Nagarajaiah S. and Varadarajan N. Novel semi-active variable stiffness tuned mass damper with real time retuning capability. In: *Proceeding of 13th Engineering Mec. conf.*, 2000.
- [74] Nilson P.A. and Elliot S.J. . *Active control of sound*. Academic Press, 1992.
- [75] Occhiuzzi A., Spizzuoco M. and Seino G. *Semi-active MR dampers in TMD's for vibration control footbridges, Part1: Numerical modeling and control algorithm*. Footbridge, 2002.
- [76] Oguamanam D.C.D., Hansen J.S. and Heppler G.R. Dynamics of a three-dimensional overhead crane system. *Journal of Sound and Vibration*, 242(3):411–426, 2001.
- [77] Olkan C. The effect of detuning parameters on the absorption region for a coupled system: A numerical and experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4):837–857, 2000.
- [78] Ormondroyd J. and Den Hartog J.P. The theory of the dynamic vibration absorber. *Tran. American Society of Mech. Engineers, AMP-50-7*, pages 9–22, 1928.
- [79] Parker G.A and Lan K.S. A novel valve for semi-active vehicle suspension systems. In *Proc. of International Mechanical Conference on Advanced Suspension*, volume C427/88, pages 69–74, 1988.
- [80] Patten W.N., Kuo C.C., Liu L., and Sach R.L. Seismic structural control via hydraulic semi-active vibration dampers (savd). In *Proc. 1st World Conference on Structural Control*, pages FA2/83–89, Int. Asso. for Structural Control, Los Angeles, Calif., 1994.
- [81] Patten W.N., Sach R.L., and He Q. Controlled semi-active hydraulic vibration absorber for bridges. In *Proc. ATC-17, Seminar on seismic isolation, passive energy*

- dissipation and active control*, volume 2, pages 727–736, App. Technol. Council, Redwood City, Calif., 1993.
- [82] Patten W.N., Sach R.L., Yen W., Mo C. and Wu H.C. Seismic motion control using semi-active hydraulic force actuators. *Journal Structural Engeneering ASCE*, 122(2):187–192, 1996.
- [83] Preumont A. *Viration control of active structure; An introduction*, volume 50. Kluwer Academic, Departement of Mechanical Engineering and Robotics, Université Libre de Bruxelles-Belgium, 1997.
- [84] Périssé J. *Etude conception et réalisation d'une suspension active d'un siège de véhicule routier pour l'amélioration du confort dynamique*. PhD thesis, L'école Centrale de Lyon-France, 1997.
- [85] Rabinow J. The magnetic fluid clutch. *AIEE Transactions*, 67:1308–1315, 1948.
- [86] Ratier L. *Stabilisation rapide des structures par contrôle actif, mise en oeuvre expérimentale*. PhD thesis, Doctorat de L'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2000.
- [87] Renzi E. and Serino G. Testing and modelling a semi-actively controlled steel frame structure equipped with mr dampers. *Structural Control and Health Monitoring*, 11:189–221, 2004.
- [88] Roberto R. *Dinamica delle strutture*. Cuen, Italia, 1993.
- [89] Rowbottom M. D. The optimization of mechanical dampers to control self-excited galloping oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 75:559–576, 1981.
- [90] Sadek F. and Mohraz B. Semi-active control algorithms for structures with variable dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(92):981–990, September 1998.
- [91] Sadek F., Mohraz B., Taylor A.W. and Chung R.M. *Passive energy dissipation devices for seismic applications*. NISTIR5923, 1996.
- [92] Scruggs J.T. and Iwan W.D. Control of a civil structure using an electric machine with semi-active capability. *Journal of Structural Ingeneering*, 129(7):951–959, 2003.
- [93] Seiler G., Fischer O. and Huber P. *Semi-active MR dampers in TMD's for vibration control footbridges, Part2: Numerical analysis and practical realisation*. Footbridge, 2002.
- [94] Setareh M. Tuned mass dampers to control floor vibration from humans. *Journal of Structural Engineering*, 118(3):741–761, 1992.
- [95] Setareh M. Floor vibration control using semi-active tuned mass dampers. *Canadien Journal Civil Engeneering*, 29:76–84, 2002.

- [96] Song Y., Iwata Y. and Komatsuzaki T. The response of a dynamic vibration absorber system with a parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 259(4):747–759, 2003.
- [97] Soong T.T. . *Active structural control: Theory and practice*. Longman, 1990.
- [98] Soong T.T. and Dargush G.F. *Passive energy dissipation systems in structural engineering*. Wiley Sons, 1997.
- [99] Spencer B.F. and Nagarajaiah S. State of the art of structural control. *Journal Structural Engineering ASCE*, 129(7):845–856, 2003.
- [100] Symans M.D. and Constantinou M.C. . Seismic testing of a building structure with a semi-active fluid damper control system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26:759–777, 1997.
- [101] Symans M.D. and Constantinou M.C. Developement and experimental study of semi-active fluid damping devices for seismic protection of structures. Technical report, REp No. NCEER-95-0011, State Univ. of New York at Buffalo, Buffalo, N.Y, 1995.
- [102] Takahashi M., Kobori T., Nasu T., Niwa N. and Kurata N. Active response control of buildings for large earthquakes-seismic response control system with variable structural characteristics. *Smart Materials and Structures*, 7(4):522–529, 1998.
- [103] Thompson A. G. Optimum tuning and damping of a dynamic vibration absorber applied to a force excited and damped primary system. *Journal of Sound and Vibration*, 77(3):403–415, 1981.
- [104] Varadarajan N. and Nagarajaiah S. Semi-active variable stiffness tuned mass damper for response control of wind-excited tall building: Benchmark problem. *In: Proceeding of 13th Engineering Mec. conf. ASCE, UT-Austin*, 2000.
- [105] Warburton G. B. Optimal absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10:381–401, 1982.
- [106] Xu Y.L., Qu W.L. and Ko J.M. Seismic response control of frame structures using magnetorheological/electrorheological dampers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 29:557–575, 2000.
- [107] Yamada Q. and Kobori T. Fundamental dynamics and control strategies for aseismic structural control. *International Journal of Solids and Structures*, 38:6079–6121, 2001.
- [108] Yang J.N., Akbarpour A. and Ghaemmaghami P. New optimal control algorithms for structural control. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(9):1369–1387, 1987.

- 
- [109] Yang J.N., Li Z. and Vongchavalitkul S. A generalization of optimal control theory: Linear and nonlinear structures. Technical report, REp No. NCEER-92-0026, State Univ. of New York at Buffalo, Buffalo, N.Y, 1992.
- [110] Yang S.M. and Jeng C.A. Structural vibration suppression by concurrent piezoelectric sensor and actuator. *Smart Materials and Structures*, 5(6):806–813, 1996.
- [111] Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Inf Control*, 8:338–353, 1965.
- [112] Zhang Y., Zhou Z.W. and Guo G.C. Decoupling neighboring qubits in quantum computers through bang-bang pulse control. *Physics Letters A*, 6:327–391, 2004.