



**HAL**  
open science

# Study of systeme redundancy in bridges : failure machanism analysis using response surface methods

Soheil Mohammadkhani-Shali

## ► To cite this version:

Soheil Mohammadkhani-Shali. Study of systeme redundancy in bridges : failure machanism analysis using response surface methods. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. English. NNT: . pastel-00003313

**HAL Id: pastel-00003313**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00003313>**

Submitted on 17 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

Spécialité : **Structures et Matériaux**

Présentée par

**M. Soheil MOHAMMADKHANI-SHALI**

pour obtenir le titre de Docteur  
de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Titre

***CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA REDONDANCE  
DANS LES PONTS : ANALYSES DES MECANISMES  
DE DEFAILLANCE PAR SURFACES DE REPONSE***

soutenue le 5 octobre 2007, devant le jury composé de :

M. Ahmed MEBARKI	<i>Président</i>
M. Michel FOGLI	<i>Rapporteur</i>
M. Alain SELLIER	<i>Rapporteur</i>
M. Bruno CAPRA	<i>Examineur</i>
M. Nicolas DEVICTOR	<i>Examineur</i>
M. Christian CREMONA	<i>Directeur de thèse</i>



## **REMERCIEMENTS**

Cette thèse a été réalisée à la Section Durabilité des Ouvrages d'Art (SDOA) au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC). J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Christian CREMONA, Chef de la section Durabilité des Ouvrages d'Art, qui a accepté de diriger cette thèse. Je le remercie très chaleureusement pour sa confiance, sa disponibilité, son soutien, ses connaissances scientifiques et la qualité de son encadrement. Je lui garde toute mon amitié.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le professeur Ahmed MEBARKI (Université de Marne la Vallée) de m'avoir fait l'honneur de présider le jury. J'exprime également mes plus vifs remerciements aux deux rapporteurs de cette thèse, Messieurs les Professeurs Michel FOGLI (Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand) et Alain SELIER (INSA de Toulouse) pour leur disponibilité, et à Messieurs Nicolas DEVICTOR (CEA/Cadarache) et Bruno CAPRA (OXAND S.A.) pour l'intérêt porté à mes travaux et pour leur présence au sein du jury.

Je remercie Monsieur Bruno GODART, Directeur Technique des Ouvrages d'Art au LCPC et Monsieur François TOUTLEMONDE, Chef de la division Fonctionnement et Durabilité des Ouvrages d'Art au LCPC pour leur accueil au LCPC. Je suis très largement redevable à Monsieur Alberto PATRON SOLARES pour ses conseils pendant la première année de ma thèse et à mes collègues André ORCESI, Lucas ADELAIDE et Benjamin RICHARD pour leur soutien pendant la rédaction de cette thèse. Qu'il me soit aussi permis de remercier tous mes collègues de travail et plus particulièrement Minh CONG, Florence CONG, Bruno KOUBI, Véronique BOUTEILLER, YunYun TONG, Alexandre DEMAN, Jean DAUTHUILLE et Jérôme DUCHEREAU pour leur amitié et leur encouragement.

Enfin, je réserve une mention très spéciale à ma future épouse Suzhe pour son aide précieuse et sa patience, ainsi qu'à mes parents et toute ma famille pour leur soutien constant. Je leur dédie cette thèse.



## RESUME

Dans ce mémoire, une approche cohérente pour apprécier la redondance des ponts en béton armé, vis-à-vis de critères de service, a été présentée. La redondance est définie comme la capacité d'un pont à redistribuer les efforts dus aux charges extérieures, sur l'ensemble de ses éléments constitutifs. Afin d'étudier au mieux la redondance dans les ponts, nous avons envisagé d'intégrer un processus de dégradation et d'évaluer son impact sur la redondance dans les ponts en béton armé. Afin de prendre en compte les incertitudes liées aux variables dans l'évaluation des ponts endommagés, une approche probabiliste a été considérée. Les techniques classiques de la théorie de la fiabilité permettent aujourd'hui de calculer de diverses manières la probabilité de défaillance d'un élément particulier, sous réserve de disposer d'une caractérisation probabiliste des variables et d'un état limite explicite. Cependant, pour des ouvrages complexes, il est presque impossible de se procurer des états limites explicites ; la fonction d'état limite ne peut être évaluée que par calculs, notamment aux éléments finis. Les méthodes combinant les techniques de fiabilité avec le calcul aux éléments finis sont aussi appelées méthodes de fiabilité aux éléments finis (MFEF). Une approche consiste à construire « artificiellement » la fonction d'état limite en utilisant un polynôme ajusté aux résultats d'un nombre limité de calculs aux éléments finis. Cette fonction peut alors être utilisée pour évaluer la probabilité de défaillance au moyen de techniques classiques de fiabilité. Ce type d'approche est appelé méthode de surfaces de réponse (MSR). L'algorithme de construction de cette méthode a été mis en œuvre au sein de la boîte à outils ReliabTbx, développée sous l'environnement Matlab®. Cette dernière fait appel soit au code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC® soit au code de calcul de structures à barres, SETRA-ST1® selon les cas, pour la réalisation des expériences numériques. Une étude originale sur la fiabilité des systèmes au niveau de l'ensemble de l'ouvrage, a été également abordée par la méthode de surfaces de réponse. L'analyse de la redondance d'un pont passe donc par l'ajustement d'une fonctionnelle décrivant son comportement global ; c'est ce que nous avons réalisé avec l'utilisation de surfaces de réponse. Il s'agit d'étudier la redondance, d'une part, d'un point de vue de la performance du système global et d'autre part, d'un point de vue de la réserve entre la performance des éléments individuels et celle du pont dans sa globalité. Cela exprime l'importance des éléments individuels sur la réserve d'un ouvrage, notamment endommagé.

## ABSTRACT

In this thesis, a system redundancy analysis for reinforced concrete bridges has been presented. This analysis is performed in order to appraise the load redistribution effects based on a serviceability requirement of excessive deformation. In order to specify the effects of damage in both the bridge serviceability and the individual components serviceability, several damage scenarios have been considered. In order to consider uncertainties related to the various parameters, calculations are carried out through a probabilistic approach. Traditional techniques of the theory of reliability allow today to calculate in various manners, the failure probability of the specific failure modes associated to the individual components, subject to have a probabilistic characterization of the variables and an explicit limit state. Reality is however different. For complex structural systems, it is almost impossible to get explicit limit states. Limit state function can be evaluated only by calculations, in particular with finite element analysis are often called “finite element reliability methods (FERM)”. If traditional techniques of reliability remain costs of reasonable calculation for the study of a failure mode, they quickly become prohibitive in a complex structural systems analysis. So to reduce the number of evaluations of the limit state function to a reasonable level, an approach consists in constructing “artificially” the limit state function by using a polynomial adjusted with the results of small number calculations of finite element analysis. This function can then be used to evaluate the failure probability in traditional techniques of reliability. This kind of approach is named “Response Surfaces Method (RSM)”. The response surfaces method was programmed in MATLAB© and implemented in the “Reliabtbox” toolbox developed in LCPC, which combined with the finite element code CESAR-LCPC© or bar element code ST1-SETRA©, according to cases, for the realization of the numerical experiments. An original study on reliability of structural systems has been also realized by the response surfaces method. So, the redundancy analysis in bridges passes by adjusting a polynomial function describing its whole structural behaviour; it is why response surfaces methods have been used. It is also shown that redundancy is a measure of the performance and the system reserve ratio of the bridge between the loss of member serviceability and loss of serviceability of the overall system. That means redundancy can be used as both the bridge safety and the importance of the individual members to the performance of the bridge system in the damaged conditions for the serviceability limit state.

## *TABLES DES MATIERES*

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 : Fiabilité des structures- objets et méthodes.....</b>	<b>7</b>
1.1. Introduction	7
1.2. Evaluation de la probabilité de défaillance des composants	8
1.2.1. Transformations isoprobabilistes	9
Transformation de Rosenblatt	9
Transformation de Nataf	10
1.2.2. Algorithme de Rackwitz-Fiessler	11
1.2.3. Les méthodes FORM et SORM	12
Méthode FORM	12
Méthode SORM	13
1.2.4. Les méthodes Monte-Carlo	16
Tirage d'importance	17
Tirage directionnel	18
1.3. Evaluation de la probabilité de défaillance des systèmes	19
Combinaison série	19
Combinaison parallèle	21
1.3.1. Méthodes de Monte-Carlo par tirage d'importance	21
Tirage d'importance- systèmes en série	22
Tirage d'importance- systèmes en parallèle	23
1.3.2. Bornes	23
Bornes du premier ordre ou bornes simples- systèmes en série	24
Bornes du premier ordre ou bornes simples- systèmes en parallèle	24
Bornes du second ordre- Bornes de Ditlevsen	24



1.4. Evaluation de la probabilité de défaillance pour des états limites implicites	26
1.4.1. Notions d'apprentissage à la fiabilité	26
Méthode des machines à vecteurs supports	28
Réseaux de neurones	34
1.4.2. Positionnement de l'approche par surfaces de réponse	38
1.5. Conclusions	41
<b>CHAPITRE 2 : Méthode des surfaces de réponse.....</b>	<b>43</b>
2.1. Introduction	43
2.2. Méthodes des surfaces de réponse	44
2.2.1. Concepts de base	45
2.2.2. Choix du degré du polynôme	45
2.2.3. Plans d'expérience	48
2.2.4. Algorithme de construction des surfaces de réponse	52
2.2.5. Calcul au second ordre de la probabilité de défaillance	59
2.3. Validation de l'algorithme de construction des surfaces de réponse	61
2.4. Conclusions	68
<b>CHAPITRE 3 : Couplage mécano-fiabiliste</b>	<b>69</b>
<b>Application aux ouvrages complexes.....</b>	<b>69</b>
3.1. Introduction	69
3.2. Principe du couplage mécano-fiabiliste	70
3.2.1. Code de calcul aux éléments finis	71
3.2.1.1. Familles des éléments finis	72
3.2.1.2. Lois de comportement	73
3.2.1.3. Validation des modèles aux éléments finis	76
3.3. Application aux modes de défaillance	77
3.3.1. Poutre encastrée à comportement linéaire	77
3.3.2. Application aux ponts bipoutres mixtes	80
3.4. Application à des cas réels	84
3.4.1. Etude de la corrosion dans la poutre de la Rance:	84
3.4.1.1. Calcul des intervalles de confiance	90
3.4.1.2. Influence de corrélation sur les incertitudes du modèle	92
3.4.2. Calcul des incertitudes du modèle d'une poutre du VIPP de Merlebach	94
3.5. Etude des mécanismes de défaillance	102

3.5.1. Fiabilité du système et mécanismes de défaillance	102
3.5.1.1. Poutre à deux travées à comportement non linéaire	104
3.5.1.2. Portique à comportement non linéaire	108
3.6. Conclusions	112
<b>CHAPITRE 4 : Etude de la redondance des ponts.....</b>	<b>115</b>
4.1 Introduction	115
4.2 Redistribution des efforts et redondance	116
4.3 Définition de la redondance	119
4.4 Caractéristiques et dimensionnement d'un pont en béton armé	123
4.4.1 Chargement	125
4.4.2 Modèle probabiliste	127
4.4.3 Identification d'éléments les plus critiques	128
4.5 Endommagement et redondance	128
4.5.1 Premier scénario de l'endommagement et impact sur la redondance du pont	129
4.5.2 Deuxième scénario de l'endommagement et impact sur la redondance du pont	139
4.5.3 Troisième scénario de l'endommagement et impact sur la redondance du pont	146
4.6 Conclusions	155
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>157</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>161</b>
<b>ANNEXE A : Etude de sensibilité sur deux exemples.....</b>	<b>171</b>
A.1. Système dynamique non linéaire	171
A.1.1. Influence du coefficient arbitraire h sur les résultats obtenus	175
A.1.2 Etude paramétrique sur les coefficients de variation des variables aléatoires	176
A.1.3. Influence de la corrélation sur l'indice de fiabilité	180
A.1.4. Sensibilité des variables aléatoires aux types de loi de distribution	181
A.2. Etat limite fortement non linéaire	183
A.2.1. Influence du coefficient arbitraire h	187
A.2.2. Influence du type de plan d'expérience	188
<b>ANNEXE B : Influence de la corrosion sur la poutre du benchmark des poutres de la Rance.....</b>	<b>191</b>



## ***INTRODUCTION GENERALE***

La sécurité pour les usagers d'un pont est un enjeu principal pour la société. Implicitement, la société fait confiance aux concepteurs et aux gestionnaires, et considère qu'en absence de sécurité absolue et totale, ces derniers doivent s'assurer que les aléas sont maîtrisés, en d'autres termes, que le risque est limité à une valeur acceptable. En général, la défaillance globale d'ouvrage est rare, sauf lors de désastres naturels majeurs ou d'erreurs humaines manifestes. Cette vision de la sécurité liée au caractère exceptionnel de la défaillance globale ou locale d'un ouvrage ne doit cependant pas cacher d'autres mises en cause de la sécurité pour les usagers. La sécurité pour les usagers se situe bien avant que la capacité portante de l'ouvrage soit menacée. Il s'agit donc pour l'ouvrage d'un problème relevant plus de son *aptitude au service* que de sa sécurité structurale. Les notions d'aptitude au service, de durabilité et de sécurité structurale sont aujourd'hui regroupées sous le vocable de performance [Cremona, 2003]. Cette dernière est donc la capacité d'une structure, d'un ouvrage à remplir des exigences données. Dans le cas des ponts existants, à l'exception de problèmes liés à la durabilité et à la fissuration, la déformation est également un critère important. En effet, une aptitude au service médiocre se réfère souvent à des déformations excessives pour certains éléments structuraux d'un pont. Elles sont également les prémisses de désordres plus importants et aux conséquences plus graves entamant ainsi la sécurité structurale. Ces déformations peuvent donc engendrer toutes sortes de désordres difficilement réparables et très coûteux. Le problème des déformations excessives des ponts en béton a

également pris une importance accrue ces dernières années. Actuellement, il est reconnu que la déformation sur le long terme d'une structure en béton peut-être, selon le cas, trois à dix fois plus grande que la déformation résultant d'un calcul élastique linéaire. Ce facteur d'amplification, qu'il soit calculé grâce à des tables numériques ou qu'il résulte d'un calcul aux éléments finis, est dû principalement à la fissuration ainsi qu'aux effets différés. Afin de considérer d'une part les déformations excessives et d'autre part la *redistribution des efforts* dans l'ensemble de l'ouvrage, le recours à des calculs non linéaires est souvent indispensable. L'application de l'approche semi-probabiliste ne fournit pas les relations ou les méthodes qui permettraient au concepteur d'évaluer les réserves réelles de performance des éléments structuraux. Les coefficients partiels sont en fait destinés à couvrir un large ensemble d'incertitudes et peuvent ainsi s'avérer très peu représentatifs du besoin réel d'évaluation de la sécurité d'une structure particulière. Pour des ouvrages exceptionnels ou endommagés, l'évaluation peut être sur- ou sous-estimée. L'introduction et la prise en compte des incertitudes liées aux variables apparaissent comme un critère réaliste d'évaluation de la sécurité structurale. De ce fait, l'*approche probabiliste* constitue aujourd'hui une alternative aux approches semi-probabilistes. Dans l'approche probabiliste, un faible indice de fiabilité ou bien une probabilité de défaillance élevée n'indique pas nécessairement une défaillance imminente vis-à-vis d'un mode de défaillance donné (exigence de fonctionnement). Par contre, il indique clairement que des actions de maintenance, de surveillance, de réparation, de réhabilitation ou de renforcement sont nécessaires au risque d'encourir à un dysfonctionnement dans un délai plus ou moins rapproché [Cremona, 2003]. Ceci implique donc non seulement de relier l'état d'un ouvrage ou de l'un de ses éléments avec la fiabilité, mais aussi d'allouer des budgets qui assurent un niveau de sécurité suffisant à un coût total minimal de maintenance sur la durée de service.

La plupart des études d'évaluation de la performance des ouvrages sont dirigées vers la vérification des éléments structuraux, sous réserve de disposer d'une caractérisation probabiliste des variables et d'un état limite explicite. C'est notamment ce qui se réalise au travers des techniques classiques de la théorie de la fiabilité comme les méthodes de niveau II auxquelles appartiennent les techniques FORM et SORM. Or, dans le cas des ouvrages complexes, il est presque impossible de se procurer des états limites explicites, la fonction d'état limite ne pouvant être évaluée que par calculs, notamment par des méthodes numériques (méthodes aux différences finies, aux éléments finis...). Les méthodes combinant

les techniques de fiabilité avec le calcul aux éléments finis sont appelées méthodes de fiabilité aux éléments finis. Il est notamment souvent indispensable de faire appel à la richesse de la méthode par *éléments finis* pour effectuer des études de *fiabilité mécanique*. Le calcul classique en fiabilité des ouvrages complexes nécessite alors de recourir à des simulations numériques de type Monte-Carlo. Ceci n'est accessible qu'au prix de longs temps de calcul impliquant des tirages en grand nombre et donc des appels conséquents au code de calcul. Ces techniques classiques (même dans leurs versions optimisées, comme les techniques de tirage d'importance ou conditionné...) deviennent donc vite prohibitives pour le calcul d'un ouvrage complexe. Ce problème se complique encore lorsque plusieurs modes de défaillance doivent être considérés simultanément. Cet effet *système* est cependant essentiel dans l'étude de la fiabilité d'ouvrages.

Afin de ramener le nombre d'évaluations de la fonction d'état limite à un niveau raisonnable, une approche consiste à construire *artificiellement* la fonction d'état limite en utilisant un polynôme ajusté aux résultats d'un nombre limité de calculs aux éléments finis. Cette fonction peut alors être utilisée pour évaluer la probabilité de défaillance au moyen de techniques classiques en fiabilité. Ce type d'approche est appelé méthode par *surfaces de réponse*. L'originalité de cette thèse est donc de faire reposer l'analyse de la *redistribution des efforts* dans un ouvrage par l'ajustement d'une fonctionnelle décrivant son comportement global ; c'est ce que nous avons envisagé avec l'utilisation de surfaces de réponse. L'objectif de cette thèse est donc de développer la méthode par surfaces de réponse afin de prendre en compte les effets *systèmes* dans les ouvrages complexes, afin d'évaluer la performance d'ouvrages par différents indices de redondance ou de redistribution.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont porté au cours de la thèse donc sur les actions suivantes :

- le développement d'un algorithme pour l'évaluation de la probabilité de défaillance des structures par les méthodes de surfaces de réponse (Chapitre 2) ;
- la mise en œuvre numérique de l'algorithme et son implémentation au sein de la boîte à outils de fiabilité ReliabTbx développée au LCPC (Chapitre 3) ;
- la validation du programme et l'étude de sensibilité dans les cas de fonctions d'état limite explicites (Chapitre 2) ;
- le *couplage* des développements réalisés avec le code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC© ou le code de calcul des structures à barres ST1-SETRA© (Chapitre 3) ;

## Introduction générale

- la validation de ces développements sur des cas simples (Chapitre 3) ;
- l'étude de cas complexes (bipoutres mixtes et ponts en béton armé) en considérant le comportement non linéaire de ses matériaux constitutifs (Chapitre 3) ;
- la prise en compte des mécanismes de défaillance dans les ouvrages : comparaisons des résultats obtenus par les méthodes de surfaces de réponse avec ceux obtenus par application d'une analyse limite simplifiée (Chapitre 3) ;
- l'évaluation de l'influence de la *dégradation* sur l'indice de redondance initial dans le cas des ponts bipoutres mixtes et de ponts en béton armé (Chapitre 4).
- la mesure des différents *indices de redondance* au niveau de l'ensemble de l'ouvrage et au niveau des éléments primaires ; ces indices nous permettent une meilleure prise en compte de la redistribution des efforts (Chapitre 4).

Ce mémoire est donc découpé en quatre chapitres. Le premier chapitre porte sur la présentation des différentes techniques de calculs classiques en fiabilité. Les méthodes de niveau II (FORM, SORM) ou III (Monte-Carlo) mais d'autres techniques comme les méthodes dites machines à vecteurs supports et celles des réseaux de neurones sont également présentées. A la fin de ce chapitre, la performance de la méthode par surfaces de réponse est mise en évidence en comparant les différentes approches issues de la littérature.

Le deuxième chapitre détaille le principe des méthodes de surfaces de réponse. La performance de l'algorithme de construction est appréciée par deux approches distinctes. D'une part, les critères liés directement à l'algorithme, comme par exemple le type de surface de réponse, le type de plan d'expérience, l'influence de paramètres de calage sont considérés. D'autre part, les critères liés aux différentes techniques de la théorie de la fiabilité, comme par exemple la robustesse face à des points de conception multiples, la capacité à traiter des unions et des intersections, le nombre de variables aléatoires ainsi que le cas des fortes courbures sont abordés.

Le troisième chapitre traite de l'application de l'algorithme de construction des surfaces de réponse à la recherche de modes et de mécanismes de défaillance. Pour cela, l'algorithme a été mis en œuvre au sein de la boîte à outils ReliabTbx, développée au LCPC sous environnement Matlab©. Cette dernière fait appel au code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC© ou au code de calcul des structures à barres ST1-SETRA©, pour la réalisation des expériences numériques.

Le quatrième chapitre introduit enfin une approche cohérente pour apprécier la redistribution des efforts appliquée aux ponts en béton armé, ceci vis-à-vis d'exigences d'aptitude au service. La redondance est définie dans ce mémoire comme la capacité d'un pont à redistribuer les efforts dus aux charges extérieures, sur l'ensemble de ses éléments constitutifs. En d'autres termes, la redondance est considérée, d'une part comme la performance du système global formé par l'ouvrage et d'autre part comme la réserve entre la performance des éléments individuels et celle du système global. L'impact de dégradation sur cette propriété est en particulier étudié.

Enfin, une conclusion générale permet de faire une synthèse des résultats obtenus et de tirer quelques perspectives sur des suites liées à cette étude.





## **CHAPITRE 1**

### **FIABILITE DES STRUCTURES- OBJETS ET METHODES**

#### **1.1. Introduction**

La communauté technique est généralement perplexe face à des calculs de probabilité de défaillance. L'ingénieur conçoit le plus souvent la probabilité comme une mesure fréquentielle, c'est à dire comme le nombre de cas constatés sur le nombre total de cas possibles. Lorsqu'on parle d'une probabilité de défaillance annuelle de  $10^{-5}$ , il ne faudrait malheureusement pas la concevoir comme une fréquence annuelle de 1 pont défaillant sur 100000! Ce que nous dit cette probabilité n'a en fait que très peu de sens dans l'absolu. Elle ne nous sera utile que comparée à celle d'un autre ouvrage calculé avec les mêmes méthodes d'analyse et les mêmes lois pour les variables aléatoires. Comme la probabilité de défaillance doit être analysée de façon relative, il est important de le faire dans un cadre cohérent [Cremona, 2003].

Ce chapitre rappelle quelques notions de la théorie de la fiabilité. Puis, les différentes méthodes utilisées pour évaluer la probabilité de défaillance des ouvrages ainsi que leur objectifs, sont présentées. Les références générales de cette étude bibliographique sont [Cremona, 2003], [Richard, 2007a-c], [Hurtado, 2004], [Melchers, 1999], [Ditlevsen, 1996], [Devictor, 1996].

## 1.2. Evaluation de la probabilité de défaillance des composants

Dans un problème de fiabilité, les variables d'entrée, encore appelées *variables physiques*, sont considérées comme étant des variables aléatoires. Notons que ces variables d'entrée sont en général regroupées dans un vecteur, appelé vecteur des variables de base et noté  $X$ . Ces variables sont définies dans ce que l'on appellera l'*espace physique*. Introduisons maintenant la notion de *fonction de performance* ou *d'état limite*, notée  $g(X)$ . Cette donnée permet la réalisation d'une partition de l'espace physique en deux domaines, appelés *domaines de sécurité* et de *défaillance*, pour lesquels nous avons respectivement  $g(X) > 0$  et  $g(X) < 0$ . Il existe donc une frontière appelée *état limite* sur laquelle  $g(X) = 0$ . Si l'on suppose que  $n > 1$  variables aléatoires interviennent dans le problème, alors l'état limite est une hypersurface de l'espace physique. A ce stade, deux cas sont à distinguer : l'état limite *explicite* et l'état limite *implicite*. Le fait de pouvoir expliciter la fonction d'état limite est loin d'être systématique, bien au contraire. Dans la majorité des cas d'étude en ingénierie, la fonction de performance n'est connue de manière explicite ; il s'agit alors d'essayer d'en donner une approximation.

Tout le problème de la théorie de la fiabilité consiste à proposer des méthodes permettant de calculer l'intégrale 1.1, définissant la probabilité de défaillance  $P_f$  de la structure considérée :

$$P_f = \int_{g(X) \leq 0} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.1)$$

Dans l'équation 1.1,  $f_X(x_1, \dots, x_n)$  représente la densité conjointe du vecteur  $X$  des variables de bases. Si les variables de base sont indépendantes, la densité de probabilité conjointe est égale au produit de toutes les densités de chaque variable :

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) \quad (1.2)$$

Pour résoudre un problème de fiabilité, deux approches peuvent être mises en avant. D'une part, il existe les méthodes de niveau II. La forme de l'état limite est alors essentielle, ce qui implique de disposer de l'écriture explicite de cet état limite, où à défaut d'une approximation. Cette probabilité peut être estimée par des méthodes analytiques du type FORM (First Order Reliability Method), SORM (Second Order Reliability Method). Une autre approche repose sur l'application de simulations de Monte-Carlo. Ces méthodes constituent une famille de méthodes appelées méthodes de niveau III ; dans ce cas, la forme de l'état limite n'est alors plus essentielle dans la détermination de la probabilité de

défaillance. Seule le signe de la fonction de performance est utile. Il est enfin à noter qu'une bonne estimation de cette intégrale peut être réalisée en considérant non pas l'intégralité du domaine de défaillance mais seulement un certain voisinage du point de l'état limite, où la densité conjointe est la plus forte, appelé point de conception le plus probable.

Considérée comme une variable aléatoire, la fonction de performance permet de définir la probabilité de défaillance par:

$$P_f = P(g(X) \leq 0) \quad (1.3)$$

### 1.2.1. Transformations isoprobabilistes

Toute application permettant de substituer la métrique de l'espace physique par une métrique euclidienne, tout en conservant la valeur de la probabilité en chacun des points de cet espace, sera appelé transformation isoprobabiliste. Pour cela, les variables physiques  $X$ , qui suivent a priori une loi quelconque et qui sont a priori corrélées, sont transformées en des variables aléatoires centrées réduites et indépendantes  $U$ . Ces dernières définissent les vecteurs de base de l'espace normé ou espace gaussien. Cet espace est parfaitement adapté à une conduite simple des calculs. D'une part, les difficultés liées aux domaines de définition des densités des variables physiques sont ainsi évitées étant donné que la densité gaussienne est à support infini. D'autre part, celles liées à une différence trop importante entre les ordres de grandeurs des valeurs moyennes des variables en jeu ne se posent plus. Enfin, comme nous l'avons mentionnée précédemment, la métrique de l'espace normé est la métrique euclidienne. C'est pourquoi l'indice de fiabilité prend alors une signification géométrique. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

#### Transformation de Rosenblatt

Cette transformation permet d'opérer une transformation marginale des variables de l'espace normé vers l'espace physique. La transformation de Rosenblatt, notée  $U = T(X)$ , n'est applicable que si la densité conjointe de toutes les variables aléatoires est connue. Son principe réside dans l'hypothèse que la distribution multivariable  $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$  est équivalente à  $F_{X_1}(x_1)F_{X_2|X_1}(x_2|x_1) \dots F_{X_n|X_1, \dots, X_{n-1}}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$ .

La transformation de Rosenblatt est donnée par :

$$\begin{cases} X_1 = F_1^{-1}(\Phi(U_1)), \\ X_2 = F_2^{-1}(\Phi(U_2)|U_1), \\ \vdots \\ X_n = F_n^{-1}(\Phi(U_n)|U_{n-1}, \dots, U_1), \end{cases} \quad (1.4)$$

et la transformation inverse s'obtient successivement à partir de la première variable :

$$\begin{cases} U_1 = \Phi^{-1}(F_1(X_1)), \\ U_2 = \Phi^{-1}(F_2(X_2|X_1)), \\ \vdots \\ U_n = \Phi^{-1}(F_n(X_n|X_{n-1}, \dots, X_1)), \end{cases} \quad (1.5)$$

Dans la pratique, la difficulté majeure dans l'application de cette transformation réside dans la détermination des probabilités conditionnelles en jeu. De plus, la densité conjointe des variables physique n'est pas toujours connue.

Dans le cas de variables indépendantes, la transformée de Rosenblatt ne pose pas de problème, puisque seules les transformées marginales sont nécessaires. Pour une variable normale  $N(\mu, \sigma)$ , cette transformation marginale s'écrit :

$$X = \mu + \sigma U \quad (1.6)$$

En revanche, pour une variable lognormale  $LN(\mu, \sigma)$ , la transformation marginale de l'équation 1.7 est:

$$X = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}}} \exp\left( U \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)} \right) \quad (1.7)$$

### Transformation de Nataf

La transformation de Nataf ne requiert pas la connaissance de la densité conjointe des variables physiques. En revanche, leurs densités marginales ainsi que la matrice de corrélation  $\rho_{ij}$  sont connues. Son principe consiste à considérer une suite des variables centrées réduites  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^t$ , issues de la transformation 1.8, où  $\Phi$  représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.  $z$  représente le vecteur des réalisations des variables intermédiaires :

$$z_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \quad (1.8)$$

Il faut noter que les variables intermédiaires  $Z$  ne sont pas décorréliées. Leur corrélation est a priori différente de la corrélation des variables physiques  $X$ . Les corrélations de ces variables intermédiaires  $\rho_{ij}^*$  sont solutions de l'équation intégrale 1.9, dans laquelle  $\phi_2$  représente la densité de la loi binormale :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \phi_2(z_i, z_j, \rho_{ij}^*) dz_i dz_j \quad (1.9)$$

Dans la pratique, des relations empiriques fournissant des estimations acceptables des corrélations des variables intermédiaires sont utilisées. La matrice de décorrélation des variables physiques est alors construite à partir de la matrice de corrélation des variables intermédiaires en considérant sa décomposition spectrale, ou encore sa décomposition de Cholesky. Les coordonnées des variables physiques dans l'espace normé peuvent alors être déterminées [Melchers, 1999].

### 1.2.2. Algorithme de Rackwitz-Fiessler

Il existe de très nombreux algorithmes permettant la résolution du problème d'optimisation. En fiabilité structurale, l'algorithme de Rackwitz-Fiessler [Rackwitz, 1978] est de loin le plus employé à cause de sa très simple expression, mais aussi pour ses bons résultats en pratique. Ainsi, dans ce paragraphe, nous nous proposons de présenter le principe sur lequel se fonde cet algorithme. Dans ce qui suit, nous nous placerons dans l'espace normé sauf mention contraire. Tout d'abord, il s'agit de choisir un point de départ a priori quelconque. Dans la majorité des cas, l'initialisation aura lieu aux valeurs moyennes des variables, autrement dit, à l'origine de l'espace normé. Ce point peut également être tiré aléatoirement. Ensuite, le gradient normalisé à la fonction d'état limite est déterminé en ce point. Il permet la détermination des composantes du vecteur normal au plan tangent à la fonction d'état limite en ce point, dirigé vers le domaine de défaillance :

$$\alpha_k = \frac{\nabla(g_U)(u_k^*)}{\|\nabla(g_U)(u_k^*)\|} \quad (1.10)$$

La distance entre l'origine de l'espace normé et l'hyperplan est calculée par :

$$\beta_k = \frac{g_U(u_k^*) - \nabla(g_U)(u_k^*)u_k^*}{\|\nabla(g_U)(u_k^*)\|} \quad (1.11)$$

Le nouveau point de départ peut alors être déterminé par :

$$u_{k+1}^* = -\beta_k \alpha_k \quad (1.12)$$

Dans la section suivante, nous nous proposons de présenter le principe des méthodes FORM (First Order Reliability Method) et SORM (Second Order Reliability Method). Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, la fonction de performance sera notée de la même manière qu'elle soit exprimée dans l'espace physique ou normé, pour alléger les notations.

### 1.2.3. Les méthodes FORM et SORM

#### Formulation fondamentale

Après application d'une transformation isoprobabiliste, il est possible de recourir aux méthodes FORM et SORM. Elles consistent tout d'abord à trouver une approximation de la fonction de performance  $g_U(u)$ , notée  $\tilde{g}_U(u)$ , par un développement en série de Taylor autour d'un point donné  $u_0$  :

$$\tilde{g}_U(u) = g_U(u_0) + a^t(u - u_0) + \frac{1}{2}(u - u_0)^t H(u - u_0) + o_{u=u_0}((u - u_0)^t(u - u_0)) \quad (1.13)$$

Dans l'équation 1.13,  $a$  et  $H$  représentent respectivement le gradient de la fonction d'état limite ainsi que la matrice Hessienne, évalués tous deux en  $u_0$ .

#### Méthode FORM

L'approximation au premier ordre de la fonction d'état limite consiste à négliger les termes de second ordre. A cela s'ajoute qu'un point  $u_0$  particulier est choisi, il s'agit du point où la fonction densité conjointe est maximale, appelé point de conception et noté  $u^*$ . Le point de conception est déterminé en recherchant le point de l'état limite le plus proche de l'origine de l'espace normé. Ainsi, le point de conception est solution du problème d'optimisation 1.14 :

$$\begin{cases} \beta = \min(\sqrt{u^t u}) \\ \text{tel que: } g_U(u) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Dans l'équation 1.14,  $\beta$  représente l'indice de fiabilité au sens de Hasofer et Lind. Cet indice diffère de celui de Basler et Cornell qui est basée sur une linérisation autour du point moyen. Celle proposée par ces deux derniers auteurs est rarement retenue dans la pratique en raison du manque d'invariance quant à la manière de formuler la fonction d'état limite. L'indice de fiabilité, grandeur scalaire, permet de rendre compte de la fiabilité d'un mode de performance donné. En effet, plus cet indice est élevé, plus la probabilité de défaillance sera faible car le

point de conception, très éloigné de l'origine de l'espace normé, tend à être présent dans les zones de densité très faible appelées queues de distribution. Le résultat de ce problème de minimisation sous contraintes peut être mis sous la forme 1.15. Dans la suite de cette étude, l'algorithme de Rackwitz-Fiessler sera utilisé dans la pratique pour la résolution de ce type de problème :

$$u^* = -\alpha^t \beta \quad (1.15)$$

où  $\alpha$  représente le gradient normalisé de la fonction d'état limite, évalué au point de conception  $u^*$  :

$$\alpha = \frac{\nabla g_U(u^*)}{\|\nabla g_U(u^*)\|} \quad (1.16)$$

En reportant la relation 1.13 dans 1.15, nous obtenons l'équation de l'hyperplan tangent au point de conception 1.17 :

$$\tilde{g}_U(u) = \beta + \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \quad (1.17)$$

A l'aide de cette approximation au premier ordre, il est possible de donner l'équation 1.18, dans laquelle  $\Phi$  représente la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée et réduite.

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (1.18)$$

Il est à noter que dans le cas d'une fonction d'état limite possédant une forte courbure, l'approximation au point de conception par un hyperplan tangent n'est évidemment plus adaptée. Il est alors nécessaire de recourir à une approximation au second ordre.

### Méthode SORM

L'approximation au second ordre nécessite de considérer les termes de l'équation (1.13) laissés de côté. La matrice Hessienne doit être déterminée puis diagonalisée pour que les courbures principales  $k_i$  puissent être calculées. Ces dernières constituent le supplément d'information contenu dans la formulation SORM par rapport à FORM. Autrement dit, une approximation quadratique SORM est possible, si les courbures sont évaluables. La résolution du problème aux valeurs propres qui se pose est en général délicat, surtout dans le cas des zones de faibles gradients. L'approximation SORM prend la forme d'un hyperparaboloïde tangent au point de conception, qui a la même courbure en ce point, pouvant s'exprimer par :

$$\tilde{g}_U(u) = u_n - \beta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i u_i^2 \quad (1.19)$$



Avec un tel hyperparaboloïde, la probabilité de défaillance peut être approchée par plusieurs approches. La probabilité de défaillance approchée par Breitung [Breitung, 1984] est :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \kappa_i \beta)^{-1/2} \quad (1.20)$$

Hohenbichler et Rackwitz [Hohenbichler & Rackwitz, 1988] proposent une approximation de probabilité de défaillance plus générale par rapport celle de Breitung. Cette approximation est donnée par :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \kappa_i \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \right)^{-1/2} \quad (1.21)$$

Dans cette approche le terme de  $\frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)}$  est obtenue par l'expression suivante:

$$\frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} = \beta + \beta^{-1} - 2\beta^{-3} + 10\beta^{-5} - 74\beta^{-7} + 706\beta^{-9} + \dots \quad (1.22)$$

L'approximation de Breitung peut être obtenue par le premier terme de l'équation 1.22.

Notons que la méthode SORM peut être ramenée à une approche au premier ordre en définissant un hyperplan tangent au point de conception, mais à une distance  $\beta'$  définie comme suivante [Cremona, 2003] :

$$\beta' \approx -\Phi^{-1}(P_f) \quad (1.23)$$

$\beta'$  est appelé indice de fiabilité généralisé, et diffère donc de l'indice d'Hasofer-Lind. La figure 1.1 illustre une représentation géométrique de l'indice de fiabilité obtenu par les deux approches FORM et SORM.

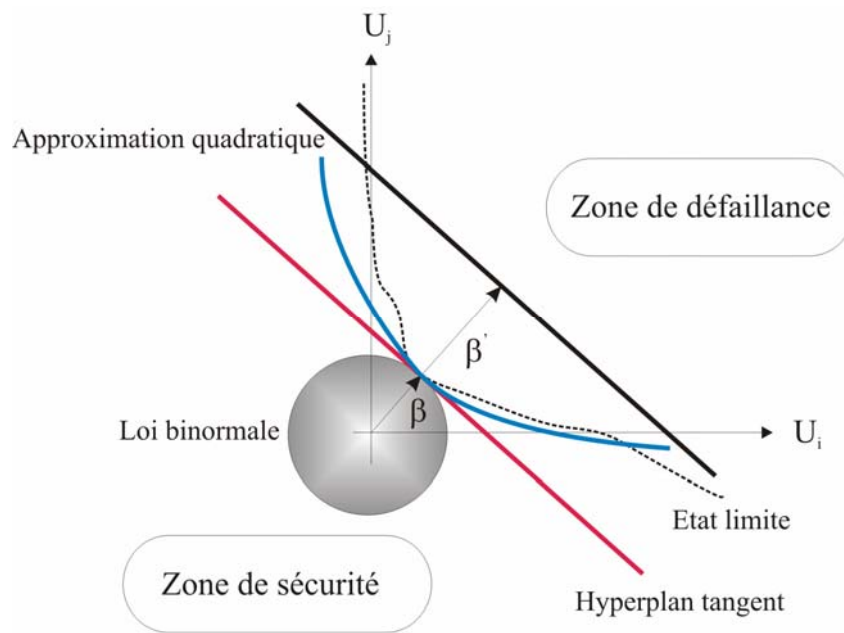


Figure 1.1. Représentation géométrique de l'indice de fiabilité

Remarquons que l'indice de fiabilité est un concept indispensable dans la théorie de la fiabilité, à tel point qu'il est préféré à la probabilité de défaillance. En effet, cette dernière est souvent très petite et varie entre 0 et 1. Dans le cas où l'origine est dans le domaine de défaillance, la valeur de l'indice de fiabilité est négatif.

Pour terminer cette section, il est essentiel de remarquer que l'application des méthodes FORM ou SORM, dans le cas d'un état limite implicite, requiert soit la construction d'une approximation de la fonction d'état limite au voisinage du point de conception, soit l'évaluation numérique de gradients et de matrices Hessiennes par un nombre réduit de calculs déterministes. De plus, il convient de préciser que la différence éventuelle entre les probabilités de défaillance obtenues par FORM et par SORM peut être liée à la présence de fortes non-linéarités ou de fortes courbures... Le temps de calcul est indépendant de l'ordre de grandeur de la probabilité de défaillance, par contre, dans la méthode FORM, il varie linéairement avec la dimension  $n$  de l'espace et le terme supplémentaire de SORM est évalué en  $n^2$  [Devictor, 1996].

### 1.2.4. Les méthodes Monte-Carlo

Les méthodes de simulation de Monte Carlo visent à la construction d'une estimation de la probabilité de défaillance. Des tirages aléatoires sont effectués et l'évaluation de la réponse de la structure est effectuée pour chaque jeu de données. Il existe plusieurs variantes de ces méthodes, visant à optimiser les stratégies de tirs dans le but de réduire le coût de calcul lié essentiellement au nombre d'appels du code de calcul aux éléments finis. Nous nous proposons tout d'abord de présenter la formulation sur laquelle se fondent toutes ces méthodes, puis de préciser quelques-unes d'entre-elles.

#### Formulation fondamentale

Définissons tout d'abord la fonction indicatrice du domaine de défaillance  $\gamma_F(x)$ . L'équation 1.25 peut alors être mise sous la forme :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_F(x) p_X(x) dx \quad (1.24)$$

Ecriture autrement, nous obtenons l'équation 1.25 :

$$P_f = E(\gamma_F(x)) \quad (1.25)$$

Dans l'équation 1.25,  $E(.)$  représente l'espérance de  $\gamma_F(x)$ , et il est donc licite de faire appel à l'estimateur empirique 1.26 :

$$P_f \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_F(x_i) \quad (1.26)$$

Remarquons que  $n$  évaluations de la fonction d'état limite sont nécessaires à la construction d'une bonne estimation de la probabilité de défaillance. De nombreuses relations empiriques, permettant de prédire le nombre de tirages  $n$ , existent. Une relation couramment employée est donnée par [Melchers, 1999] :

$$n = \frac{C}{P_f} \quad (1.27)$$

où la constante  $C$  représente le niveau de confiance avec lequel on souhaite connaître  $P_f$ . Une valeur typique de  $C$  est 1000. Pour réduire le nombre de tirages, plusieurs stratégies de tirs ont été développées. Nous nous proposons dans la suite de présenter le principe pour deux d'entre-elles, à savoir le tirage d'importance et le tirage directionnel.

### Tirage d'importance

L'équation 1.24 peut être mise sous la forme suivante 1.28, dans laquelle  $h(x)$  est une densité de probabilité, a priori inconnue, qui devra être choisie de sorte que les tirages soient effectués dans la région participant le plus à l'intégrale 1.1 [Melchers, 1999] :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_F(x) \frac{p_X(x)}{h(x)} h(x) dx \quad (1.28)$$

Comme précédemment, il est possible, pour approcher cette intégrale, de recourir à l'estimateur 1.29 où les  $v_i$  sont obtenues aléatoirement selon la distribution  $h(x)$  :

$$P_f \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_F(v_i) \frac{p_X(v_i)}{h(v_i)} \quad (1.29)$$

Une approximation du point de conception (figure 1.2) est tout d'abord construite en effectuant par exemple quelques tirages et en ne retenant que le point appartenant au domaine de défaillance le plus proche de l'origine de l'espace normé. Ensuite, la densité du tirage d'importance  $h(x)$  peut être estimée et centrée en ce point. C'est alors qu'un tir de précision peut être réalisé. Notons cependant que de nombreux problèmes se posent lorsque la dimension de l'espace augmente. En effet, le nombre de tirages nécessaires à une bonne estimation de la probabilité de défaillance croît essentiellement avec la dimension. Cela est, bien entendu, à relier avec le fait que, pour un nombre de tirage fixé, lorsque la dimension de l'espace physique augmente, la densité de tirage chute. Autrement dit, la densité de tirages reflète la quantité d'information contenue dans leur réponse.

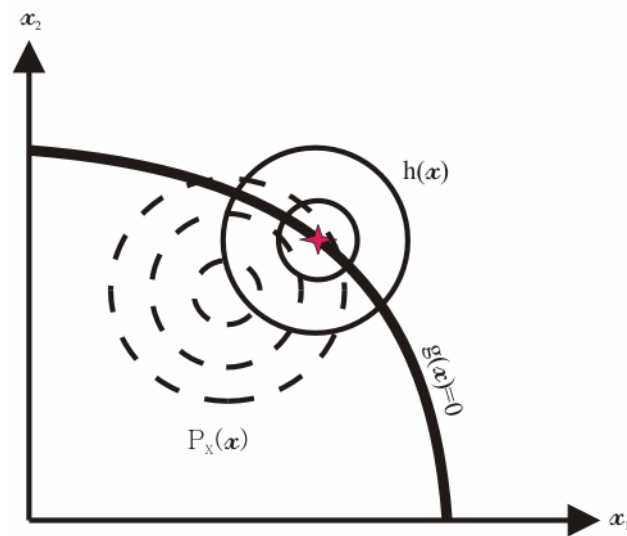


Figure 1.2. Tirage importance

### Tirage directionnel

Le fondement du tirage directionnel [Melchers, 1999] réside dans la notion de probabilité conditionnelle. En effet, l'équation 1.1 peut être mise sous la forme suivante 1.30 dans laquelle  $\Omega_d$ ,  $A$  et  $R$  représentent respectivement l'hypersphère unitaire centrée en l'origine de l'espace normé de dimension  $d$ , un vecteur aléatoire unitaire dont les réalisations sont choisies uniformément depuis le centre de  $\Omega_d$  vers l'extérieur et enfin, la solution de l'équation  $g_{R,A}(ra) = 0$  :

$$P_f = \int_{a \in \Omega_d} P(g_{R,A}(ra) \leq 0) p_A(a) da \quad (1.30)$$

Ainsi, la probabilité de défaillance peut être approchée par l'estimateur 1.31 :

$$P_f \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(g_{R,A_i}(ra_i) \leq 0) \quad (1.31)$$

Il est à noter que la densité du tirage d'importance peut être utilisée avec le tirage directionnel. En effet, dans un tel cas, la densité en question n'est pas située au voisinage du point de conception mais dirigée vers lui (figure 1.3). Comme la densité n'est pas placée sur le point de conception, elle ne peut donc être considérée comme optimale en ce sens. Cela a le mérite d'atténuer le problème d'augmentation exponentielle du nombre de tirages avec la dimension. Toutefois, la résolution de l'équation  $g(ra) = 0$  peut devenir complexe dans le cas d'un état limite implicite.

Au terme de cette brève présentation, nous pouvons affirmer que ces méthodes permettent de ne pas faire l'hypothèse d'une forme particulière de la fonction d'état limite. En effet, seul le signe de la fonction de performance est nécessaire à la conduite d'un calcul. Ainsi, les difficultés liées à la présence de formes particulières de la fonction d'état limite, comme par exemple de fortes non-linéarités ou courbures, ne sont pas pénalisantes pour l'application des méthodes Monte-Carlo. Cependant, l'obtention de résultats pertinents nécessite un lourd coût de calcul dû, essentiellement, au fait qu'aucune expression analytique de la fonction d'état limite n'entre en jeu. Pour remédier à cette difficulté, la construction d'une approximation de la fonction d'état limite est nécessaire.

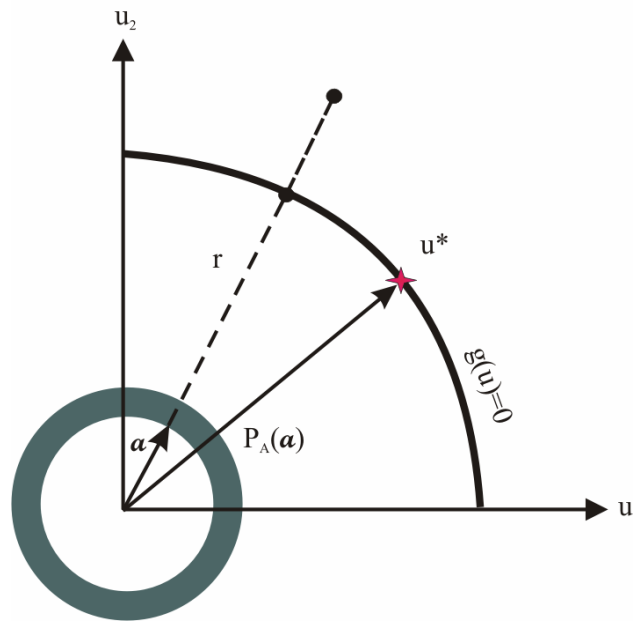


Figure 1.3. Tirage directionnel

### 1.3. Evaluation de la probabilité de défaillance des systèmes

Un système est défini comme un ensemble de mécanismes de défaillance dépendant de l'état de chacun de ses composants constitutifs. Rappelons qu'un mécanisme de défaillance est un sous-ensemble d'élément qui, ayant tous défailli, entraînent la défaillance du système. Il est donc possible d'avoir plusieurs combinaisons pour atteindre la défaillance d'un système. Les principales combinaisons sont [Cremona, 2005a] :

- combinaison série,
- combinaison parallèle,
- combinaison série de combinaisons parallèles,
- combinaison parallèle de combinaisons séries.

Dans ce paragraphe, deux combinaisons série et parallèle sont détaillées.

#### Combinaison série

Un système formé de  $n$  événements  $M_i$ , de probabilité  $P(M_i)$ , est un système en série si l'occurrence d'un seul événement entraîne la défaillance du système (principe du *maillon faible*) (figure 1.4). La probabilité de défaillance du système,  $P_f$ , est alors la probabilité de l'union des événements de défaillance :

$$P_f = P\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right) \quad (1.32)$$

Dans le cas un système constitué de deux événements de défaillance, l'équation 1.33 s'écrit comme suit :

$$P_f = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2)$$

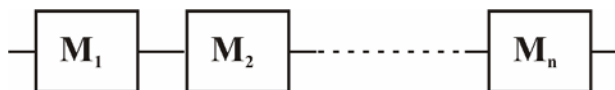


Figure 1.4. Schéma d'un système en série

Il apparaît que la formulation en système en série ressemble à celle des modes de défaillance, dans lequel, chaque mode de défaillance \$M\_i\$ est représenté par un état limite \$G\_i(X) = 0\$ dans l'espace des variables de base. La probabilité de défaillance \$P\_f\$ d'un système en série selon l'équation 1.1 est donnée par :

$$P_f = \int_{D \in X} \dots \int f_X(x) dx \tag{1.33}$$

où \$X\$ le vecteur des variables de bases et \$D\$ le domaine de défaillance du système. La figure 1.5 illustre l'expression 1.33 dans le cas de deux variables aléatoires.

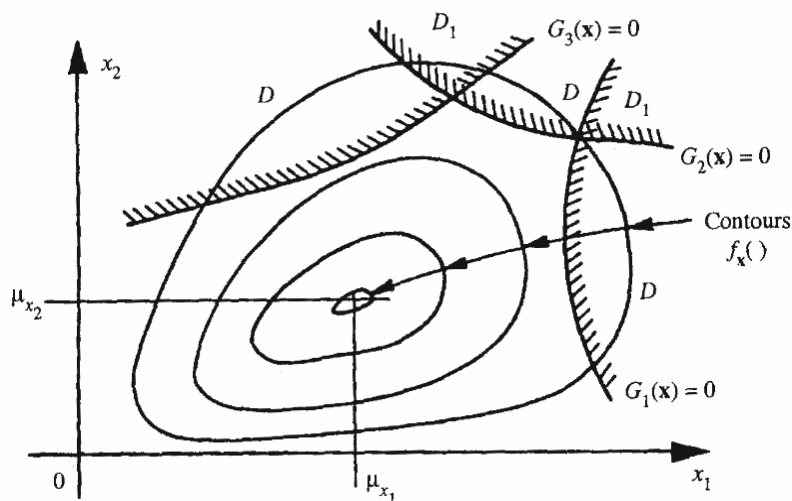


Figure 1.5. Système de base en fiabilité avec deux variables aléatoires  
d'après [Melchers, 1999]

### Combinaison parallèle

Un système formé de  $n$  événements  $M_i$ , de probabilité  $P(M_i)$ , est un système en parallèle ou *redondant* si l'occurrence de la défaillance de tous les événements est nécessaire pour atteindre la défaillance du système (figure 1.6). La probabilité de défaillance du système,  $P_f$ , est alors la probabilité des intersections des événements de défaillance :

$$P_f = P\left(\bigcap_{i=1}^n M_i\right) \quad (1.34)$$

Dans le cas un système constitué de deux événements de défaillance, l'équation 1.35 s'écrit comme :

$$P_f = P(M_1) \times P(M_2 | M_1)$$

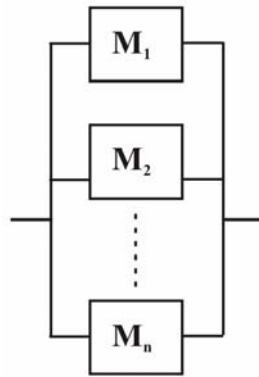


Figure 1.6. Schéma d'un système en parallèle

La probabilité de défaillance  $P_f$  du système en parallèle selon l'équation 1.1 est donnée par :

$$P_f = \int_{D_I \in X} \dots \int f_X(x) dx \quad (1.35)$$

où  $D_I$  est le domaine formé par les intersections présenté dans la figure 1.5. Cela montre que la défaillance d'un système parallèle est possible si tous ses événements constitutifs  $M_i$  ont atteint leurs états limites  $G_i(\{X\}) = 0$ .

#### 1.3.1. Méthodes de Monte-Carlo par tirage d'importance

Dans les calculs classiques en fiabilité des systèmes, les méthodes de simulation de Monte-Carlo sont toujours applicables. Mais les limitations pratiques de ces méthodes restent aussi valables, en particulier celles liées au nombre important de simulation requis en cas de



recherche de faibles probabilités. Dans ce paragraphe, le cas des méthodes de tirage d'importance est présenté.

### Tirage d'importance- systèmes en série

La probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_f = \int \cdots \int \gamma_F(x) f_X(x) dx \quad (1.36)$$

où la fonction indicatrice  $\gamma_F$  se généralise à un système en série par :

$$\begin{cases} \gamma_F(x) = \gamma \left[ \bigcup_{i=1}^m G_i(\{X\}) \leq 0 \right] = 1 & \text{si } \left[ \bigcup_{i=1}^m G_i(\{X\}) \leq 0 \right] \text{ est vrai} \\ & = 0 & \text{si } [ \quad ] \text{ est faux} \end{cases} \quad (1.37)$$

Dans l'équation 1.37,  $G_i(X)$  représente la  $i^{\text{ème}}$  fonction d'état limite ( $i=1,2,\dots,m$ ). La figure 1.7 présente le cas avec deux variables aléatoires. Le domaine d'intégration correspond au sous-espace des points  $X$  tels qu'au moins une valeur de  $G_i(X)$  est négative ou nulle. Cela correspond aux zones «abcd» dans la figure 1.7.a.

En présence de plusieurs états limites, il est nécessaire de définir une fonction d'importance multimodale. [Melchers, 1990] a proposé la fonction d'importance suivante

$$l_v(X) = a_1 l_{v1}(X) + a_2 l_{v2}(X) + \cdots + a_m l_{vm}(X) \quad (1.38)$$

avec des coefficients de pondérations vérifiant la condition  $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ .

Pour chacun des états limites pris individuellement, une composante de la fonction d'importance est déterminée via la même procédure que dans la situation d'un unique état limite. Une des méthodes les plus utilisées est de construire ces composantes à partir des points sur chacun des états limites dans l'espace gaussien les plus proches de l'origine de l'espace.

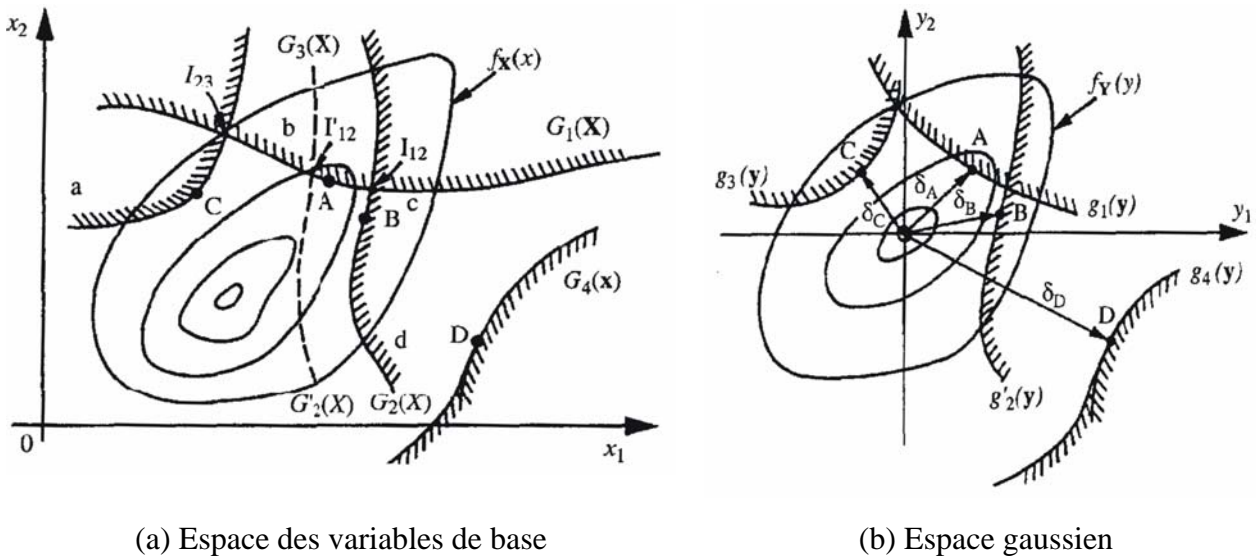


Figure 1.7. Système avec deux variables aléatoires  
d'après [Melchers, 1999]

### Tirage d'importance- systèmes en parallèle

Dans le cadre de systèmes parallèles, la probabilité de défaillance s'écrit toujours selon l'équation 1.40. Mais la fonction indicatrice  $\gamma_F$  est modifié en :

$$\gamma_F(x) = \begin{cases} \gamma \left[ \bigcap_{i=1}^m G_i(\{X\}) \leq 0 \right] = 1 & \text{si } \left[ \bigcap_{i=1}^m G_i(\{X\}) \leq 0 \right] \text{ est vrai} \\ = 0 & \text{si } [ \quad ] \text{ est faux} \end{cases} \quad (1.39)$$

où  $G_i(\{X\})$  représente la  $i^{\text{ème}}$  fonction d'état limite ( $i=1,2,\dots,m$ ). Les régions d'intérêt sont alors proches des intersections des états limites pertinents. Sur la figure 1.7.a, cela correspond aux points déterminés en résolvant le système d'équations :

$$G_i(\{X\}) = G_j(\{X\}) = 0 \quad (1.40)$$

### 1.3.2. Bornes

Des approximations de la probabilité de défaillance  $P_f$  d'un système ont été développées pour obtenir rapidement des estimations ; ces approximations ont généralement des coûts de mise en œuvre très inférieurs à ceux des méthodes de simulations [Cremona, 2005b]. Ces bornes sont souvent dérivées de la formule de Poincaré :

$$P_f = \sum_{i=1}^m P(M_i) - \sum_{j=2}^m \sum_{i=1}^{j-1} P(M_i \cap M_j) + \dots + (-1)^m P(M_1 \cap M_2 \dots \cap M_n) \quad (1.41)$$

où  $(E_i \cap E_j)$  est l'occurrence de la défaillance dans les deux modes  $i$  et  $j$  du système.

### Bornes du premier ordre ou bornes simples- systèmes en série

De telles bornes ne font intervenir que les probabilités des modes de défaillance seules :

$$\max_{i=1 \dots m} (P_{f,i}) \leq P_{f,s} \leq 1 - \prod_{i=1}^m [1 - P_{f,i}] \approx \sum_{i=1}^m P_{f,i} \quad (1.42)$$

Le terme de gauche correspond au cas d'une corrélation parfaite entre les événements (modes de défaillance). Le terme de droite est une approximation du cas où les modes de défaillance sont statistiquement indépendants. Cela montre que la probabilité de défaillance d'un système en série augmente d'une part avec le nombre des modes de défaillance et d'autre part est fortement conditionnée par l'élément le plus faible (principe du maillon faible).

### Bornes du premier ordre ou bornes simples- systèmes en parallèle

La probabilité de défaillance d'un système en parallèle est encadrée par :

$$\prod_{i=1}^m P_{f,i} \leq P_{f,s} \leq \min_{i=1 \dots m} (P_{f,i}) \quad (1.43)$$

Le terme de droite correspond au cas d'une corrélation parfaite entre les modes de défaillance du système et le terme de gauche correspond au cas où les modes de défaillance sont statistiquement indépendants.

Comme le montrent les équations 1.42 et 1.43, dans de nombreuses situations pratiques, ces bornes sont trop éloignées pour être utiles.

### Bornes du second ordre- Bornes de Ditlevsen

Ces bornes sont définies en retenant les probabilités des intersections de deux événements  $P(G_i(\{X\}) < 0 \cap G_j(\{X\}) < 0)$ . En développant l'équation 1.41, il est possible d'observer que des signes alternés sont utilisés dans les termes. Cette caractéristique a été retenue par Ditlevsen [Ditlevsen, 1979], pour proposer la borne inférieure suivante :

$$P_{f,s} \geq P_{f,1} + \sum_{i=2}^m \max \left\{ 0, \left[ P_{f,i} - \sum_{j=1}^{i-1} P(G_i(\{X\}) < 0 \cap G_j(\{X\}) < 0) \right] \right\} \quad (1.44)$$

Il a également proposé la borne supérieure suivante :

$$P_{f,s} \leq \sum_{i=1}^m P_{f,i} - \sum_{i=2}^m \max_{j < i} (P(G_i(\{X\}) < 0 \cap G_j(\{X\}) < 0)) \quad (1.45)$$

### Evaluation de la probabilité d'intersection de deux événements

La difficulté d'utilisation des bornes de Ditlevsen réside dans l'évaluation des probabilités conjointes  $P(G_i(\{X\}) \cap G_j(\{X\}))$ . Il est alors possible d'utiliser les méthodes d'approximation FORM et SORM décrites auparavant.

La figure 1.8 illustre les termes d'intersection, comme le domaine  $D_1$ , obtenus par les fonctions d'état limites  $G_i(\{X\}) = 0$  ( $i=1,2,3$ ).

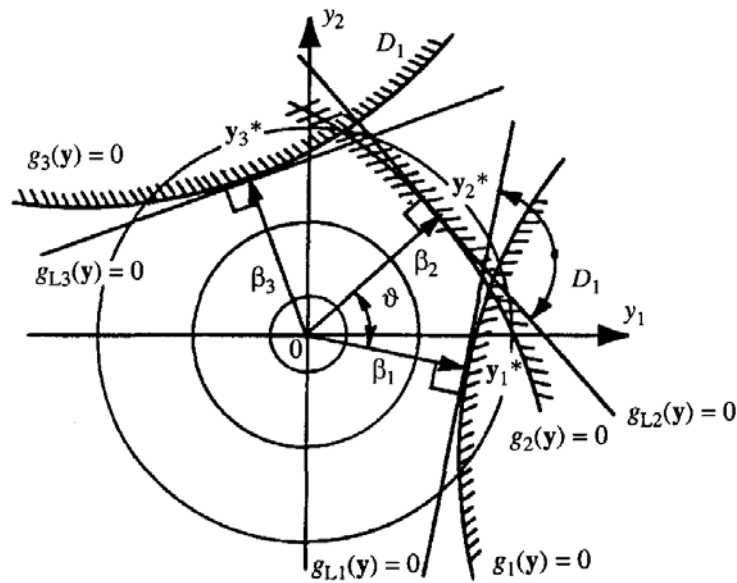


Figure 1.8. linéarisation des fonctions d'état limite dans l'espace gaussien  
d'après [Melchers, 1999]

L'évaluation des probabilité conjointes s'effectue donc en général en linéarisant, dans un premier temps, les états limites autour de leur point de conception exprimée par  $g_L(\cdot)$  selon l'équation 1.18, et dans un second temps, en calculant la probabilité conjointe au moyen de la loi binormale  $\phi_2(y_1, y_2, \rho_{12})$  où  $y_1$  et  $y_2$  sont deux variables aléatoires normales centrées réduites avec coefficient de corrélation  $\rho_{12}$ . Notons que les hyperplans associés, à partir d'un calcul FORM, sont représentés comme suit :

$$g_i(y) = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \quad (1.46)$$

Dans un tel cas, la probabilité de défaillance conjointe se déduit par :

$$P(G_1(\{X\}) < 0 \cap G_2(\{X\}) < 0) \approx \phi_2(-\beta_1; -\beta_2; \rho_{12}) \quad (1.47)$$

### Estimation du premier ordre d'un système en série ou en parallèle

Pour construire de telles approximations, les  $m$  surfaces d'états limites des éléments du système, sont linéarisées dans l'espace gaussien en leur point de conception respectifs. Dans le cas d'un système en série, l'approximation du premier ordre est [Cremona, 2005a] :

$$P_{f, série} = 1 - \phi_m(\{\beta\}; [C]) \quad (1.48)$$

Dans le cas d'un système en parallèle, l'approximation du premier ordre est :

$$P_{f, parallèle} = \phi_m(-\{\beta\}; [C]) \quad (1.49)$$

où  $\phi_m(\cdot)$  la fonction de répartition de la loi multinormale,  $\{\beta\}$  le vecteur composé de  $m$  indice de fiabilité et  $[C]$  la matrice de corrélation de taille  $m \times m$  entre les diverses fonctions de performance linéarisées. Cette matrice s'obtient facilement à partir des divers coefficients des hyperplans tangents [Cremona, 2005a].

## 1.4. Evaluation de la probabilité de défaillance pour des états limites implicites

Dans le cas des structures complexes (par exemple hyperstatiques ou présentant des comportements non linéaires), il est délicat d'écrire explicitement la fonction d'état limite. Les méthodes FORM et SORM, précédemment exposées, ne sont pas directement applicables. En revanche, celles de Monte-Carlo le sont, au prix d'un coût de calcul conséquent. C'est pourquoi des techniques permettant d'explicitier la fonction d'état limite se sont développées.

Il est possible de réaliser la construction d'une approximation de la fonction d'état limite au moyen d'une approche par classification, cette dernière s'inscrivant dans le cadre théorique de l'apprentissage statistique de la fiabilité. En particulier, les méthodes des machines à vecteurs supports et celles des réseaux de neurones en font partie. Il est proposé ici d'introduire quelques notions de la théorie de l'apprentissage de la fiabilité [Hurtado, 2004] et [Richard, 2007a-c].

### 1.4.1. Notions d'apprentissage à la fiabilité

Considérons d'abord un objectif donné ainsi qu'un moyen consistant d'y parvenir. L'idée fondamentale de cette théorie est de minimiser la probabilité qu'une erreur, entre l'objectif recherché et le résultat obtenu par la méthode mise en jeu, soit commise. Les objectifs visés

par les méthodes d'apprentissage de la fiabilité peuvent être classés en trois catégories et sont présentés ici selon leur degré de difficulté croissant.

### Classification

Cette première aspiration consiste à assigner une classe à des réalisations tirées aléatoirement ou non. En fiabilité structurale par exemple, la notion de classes correspond aux domaines de sécurité et de défaillance. Deux classes sont représentées, l'une  $+I$  et l'autre  $-I$ . La frontière les séparant apparaît comme étant l'état limite. La figure 1.9 illustre un problème de classification au sens de la théorie de l'apprentissage à la fiabilité sur un exemple simple.

### Régression

Cette seconde aspiration vise à expliciter la dépendance fonctionnelle de certaines variables sous certaines contraintes données.

### Estimation

L'estimation d'une densité de probabilité est de loin la plus complexe à satisfaire. Il est à noter que la recherche de la construction d'une seule et unique fonctionnelle respectant ces objectifs est souhaitée.

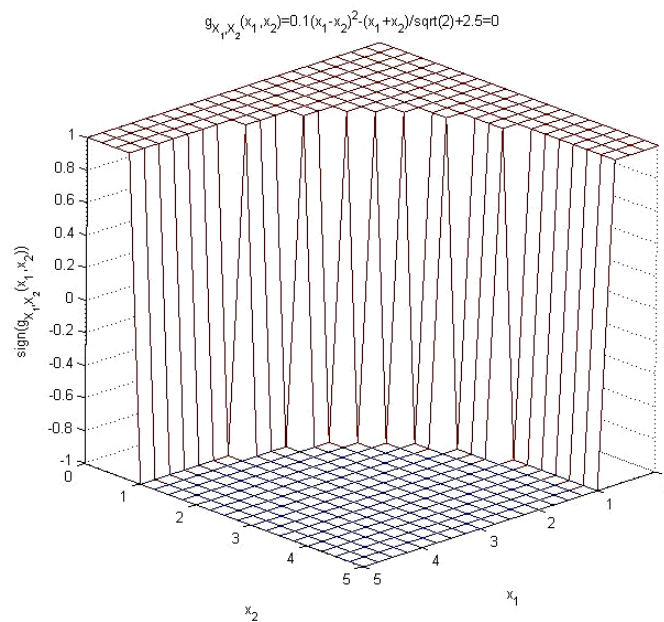


Figure 1.9. Illustration d'un problème de classification au sens de la théorie de l'apprentissage de la fiabilité d'après [Richard, 2007a]

La phase de construction de l'objet mathématique recherché est appelée *phase d'entraînement* et les fonctionnelles, quant à elles, sont appelées *machines*. A ce jour, l'entraînement de

machine apparaît comme pouvant être supervisé ou non supervisé. L'entraînement supervisé est le plus répandu en fiabilité structurale. Une entité d'entraînement supervisée comporte trois éléments essentiels. En premier lieu, un générateur  $G$  permet la création de réalisations des variables aléatoires en jeu, à partir d'une densité conjointe supposée inconnue. Le plus souvent, des techniques telles que celles du tirage d'importance ou du tirage directionnel sont utilisées comme générateurs. Il est essentiel de noter que la qualité de l'étape de la génération détermine la pertinence de la machine. En second lieu, un superviseur  $S$  permet l'attribution d'une classe à une réalisation donnée (cette fonction est réalisée par l'appel d'un code de calcul, donnant le signe de la fonction de performance). En dernier lieu se trouve l'entraîneur de machine  $M$ . Son rôle est d'assurer la construction d'une fonctionnelle  $h(x, w)$  permettant une estimation de la classe à laquelle appartient une réalisation donnée. Dans cette dernière,  $x$  et  $w$  représentent respectivement une réalisation donnée du vecteur aléatoire en jeu et un vecteur de paramètres à déterminer qui intervient dans l'expression analytique de la fonction de séparation supposée. La figure 1.10 représente un schéma l'entraînement supervisé.

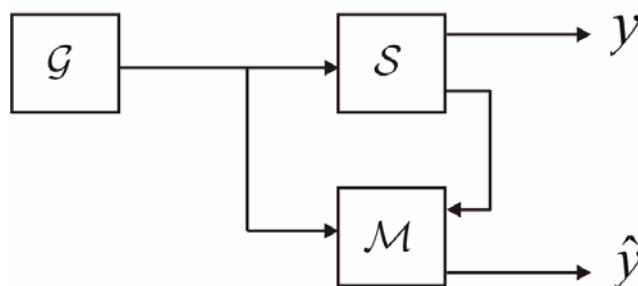


Figure 1.10. Schéma représentatif de l'entraînement supervisé

### Méthode des machines à vecteurs supports

Dans cette section, la méthode des machines à vecteurs supports est présentée dans le cas de séparation linéaire et non linéaire [Richard, 2007a-b] et [Hurtado, 2004].

#### Classes linéairement séparables

Soit  $\mathfrak{N} = (\mathbb{R}^d \times \{-1, +1\}) \times \dots \times (\mathbb{R}^d \times \{-1, +1\})$ . Considérons un sous ensemble de points  $\{(x_1, c_1), \dots, (x_n, c_n)\} \subseteq \mathfrak{N}$ , où  $c_i$  représentent la classe du point  $x_i$ . L'idée fondamentale de la méthode consiste à admettre l'existence d'un hyperplan séparant les deux classes auxquelles

appartiennent les points considérés. Ainsi, la forme de la fonction séparatrice peut être postulée par :

$$\tilde{g}_x(x) = \langle w, x \rangle - b = 0 \quad (1.50)$$

Dans l'équation 1.50,  $w$  et  $b$  représentent respectivement un vecteur de paramètres définissant la normale à l'hyperplan séparateur et une constante appelée biais explicite. La condition, pour parvenir à un hyperplan séparateur optimal, est que la distance entre ce dernier et les points les plus proches de la frontière réelle, mais implicite, soit maximale. Ainsi nous aboutissons naturellement à la formulation primale de première espèce sans contrainte du problème d'optimisation qui vient d'être provoqué :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{(w,b)} \left\{ \min_i \left\{ \|x - x_i\| : \langle w, x \rangle - b = 0 \right\} \right\} \\ (w,b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad (1.51)$$

Il est à noter qu'il existe a priori une infinité d'hyperplans solutions d'un tel problème, tous liés linéairement. Il est donc d'usage d'effectuer une normalisation du vecteur  $w$  telle que la

distance entre l'hyperplan et les points les plus proches soit  $\frac{1}{\|w\|}$ . Un hyperplan séparateur est

alors obtenue, appelé hyperplan canonique. Les paramètres de l'hyperplan canonique sont toujours supposés normalisés. Sous ces conditions, il est possible de définir les contraintes au problème d'optimisation précédent qui, finalement, permettent de contrôler la complexité du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle w, x_i \rangle - b \geq +1 & \text{si } c_i = +1 \\ \langle w, x_i \rangle - b \leq -1 & \text{si } c_i = -1 \end{array} \right. \quad (1.52)$$

La formulation primale de première espèce sous contrainte peut alors être reformulée selon 1.53. Notons que l'écriture des contraintes a été condensée en multipliant les deux membres des deux inégalités par  $c_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } x \text{ tel que: } \max_{(w,b)} \left\{ \min_i \left\{ \|x - x_i\| : \langle w, x \rangle - b = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}; n \in \mathbb{N} \right\} \right\} \\ \text{sous la contrainte: } c_i (\langle w, x_i \rangle - b) \geq +1 \end{array} \right. \quad (1.53)$$

Remarquons qu'il existe, en respectant les contraintes 1.53, un certain voisinage de l'hyperplan séparateur qui ne contient pas de points. Il apparaît que la frontière de ce domaine présente celui d'encadrer l'objectif recherché. Cependant, ce dernier n'est pas toujours la meilleure stratégie à adopter, pour les raisons de temps de calcul. La figure 1.11 illustre le



concept de la fonction de séparation ainsi que celui des marges. La distance entre la marge et l'hyperplan séparateur est donnée par :

$$\Delta = \frac{1}{\|w\|} \quad (1.54)$$

Maximiser  $\Delta$  revient en réalité à minimiser son inverse qui permet de nous ramener à la forme d'un problème classique d'optimisation. La forme primale de seconde espèce peut donc être écrite selon l'équation 1.55 :

$$\begin{cases} \text{Minimiser: } \Omega(w) = \frac{\|w\|^2}{2} \\ \text{tel que: } c_i(\langle w, x_i \rangle - b) \geq +1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (1.55)$$

Cette approche est restreinte au cas de la séparation linéaire. Par conséquent, la fonctionnelle Lagrange  $L(w, b, \alpha)$  associée au problème 1.55, est construite. La formulation duale est donc donnée par l'équation 1.56 :

$$L(w, b, \alpha) = \frac{\|w\|^2}{2} - \sum_{i=1}^n \alpha_i (c_i(\langle w, x_i \rangle - b) - 1) \quad (1.56)$$

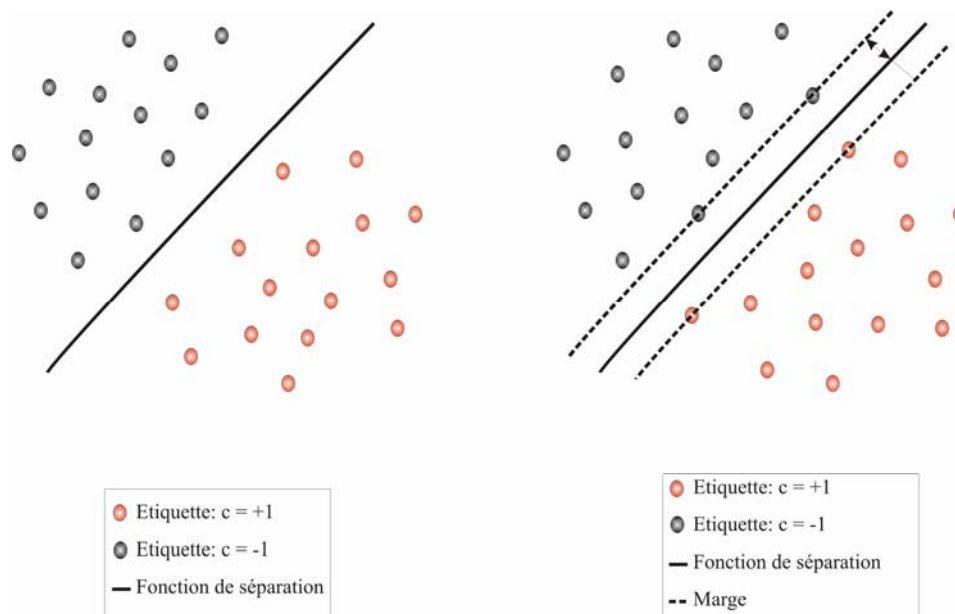


Figure 1.11. Concept de la fonction de séparation (à gauche) et concept de la marge (à droite)

La minimisation de (1.56) nécessite que les multiplicateurs de Lagrange soient tous non négatifs. Cela assure une solution non triviale. Minimiser  $L(w, b, \alpha)$  revient donc à rechercher un point stationnaire. Cela nous permet d'écrire les équations 1.57 :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(w, b, \alpha)}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial L(w, b, \alpha)}{\partial w} = 0 \end{cases} \quad (1.57)$$

Après quelques calculs analytiques pour résoudre le système d'équations, la solution du problème est donnée par :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i x_i = w \end{cases} \quad (1.58)$$

En considérant la fonctionnelle de Lagrange 1.56 et les équations 1.58, la formulation duale du problème est obtenue et donnée par :

$$\begin{cases} \text{minimiser: } W(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i c_i \langle x_i, x_j \rangle c_j \alpha_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ \text{tel que: } \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \text{et: } \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i = 0 \end{cases} \quad (1.59)$$

La condition de non négativité des multiplicateurs de Lagrange induit, en outre, le fait que le vecteur paramètre  $w$  ne peut être exprimé qu'en terme de vecteurs  $x_i$  possédant un multiplicateur de Lagrange strictement positif. Cela peut être mis en évidence en invoquant les conditions complémentaires bien connues de Karush-Kuhn-Trucker (KKT), qui se présentent sous la forme suivante:

$$\alpha_i (c_i \langle w, x_i \rangle - b) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.60)$$

Les conditions KKT permettent donc d'affirmer que seuls les vecteurs  $x_i$  ayant un multiplicateur de Lagrange non nul sont porteurs d'informations. Ces vecteurs sont appelés *vecteurs supports*. Les sommes présentés dans l'équation 1.58 peuvent donc être restreinte uniquement aux vecteurs supports, qui par construction, se trouvent sur la marge de part et d'autre de l'hyperplan séparateur recherché et le biais explicite  $b$  peut être alors aisément

déterminé. En effet, pour cela, il suffit de remplacer  $w$  par son expression dans les conditions de KKT pour obtenir l'équation 1.61, où  $s$  est le nombre de vecteurs supports du problème.

$$b = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \alpha_i c_i \langle x_i, x_j \rangle - c_j \quad (1.61)$$

En considérant les équations 1.50 et 1.58, il est possible d'aboutir à l'équation définissant la forme duale de l'équation de l'hyperplan séparateur 1.62, où  $s$  représente le nombre de vecteurs supports :

$$\tilde{g}_x(x) = \sum_{i=1}^s \alpha_i c_i (\langle x_i, x \rangle - b) = 0 \quad (1.62)$$

Cette équation est un résultat essentiel provenant de l'utilisation de la formulation duale qui permet d'obtenir une solution non-linéaire par extension de celle-ci.

### Classes non-linéairement séparables

La construction d'une approximation explicite de dimension supérieure à celle du  $X$ - espace est appelée *espace caractéristique*. Les grandeurs situées dans l'espace de base sont alors projetées non linéairement sur ce dernier à l'aide d'un opérateur de projection noté  $\xi$ . Cette opération permet d'identifier, dans l'espace caractéristique, un hyperplan séparateur et donc de se ramener au cas précédent. De plus, remarquons que l'approximation de la frontière recherchée sera toujours un hyperplan dans l'espace caractéristique. La figure 1.12 donne une représentation de la notion de l'espace caractéristique. Ainsi, l'hyperplan séparateur prend la forme 1.63 :

$$\tilde{g}_x(x) = \sum_{i=1}^s \alpha_i c_i (\langle \xi(x), \xi(x_i) \rangle - b) = 0 \quad (1.63)$$

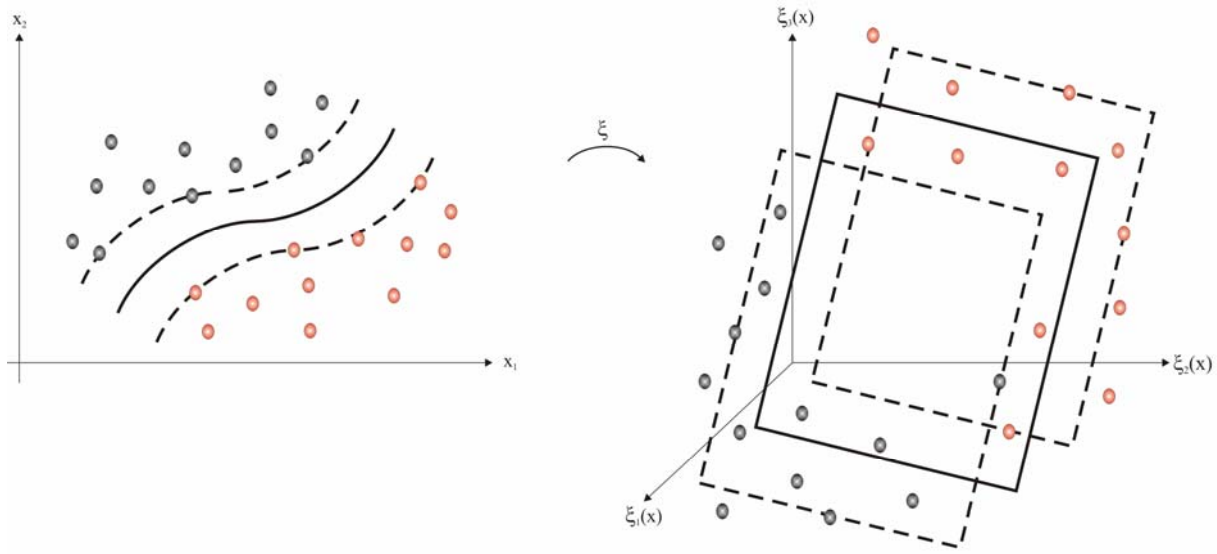


Figure 1.12. Représentation de la projection des tirages sur l'espace caractéristique

Afin de déterminer  $\tilde{g}_x(x_0)$ , la connaissance explicite de  $\xi$  n'est pas nécessaire. En revanche, le produit scalaire  $\langle \xi(x), \xi(y) \rangle$  doit l'être. Ce dernier, noté  $K(x, y)$ , est appelé fonction noyau. Dans la pratique, il est plus aisé de supposer une forme de la fonction  $K$ , puis de vérifier certaines conditions nécessaires et suffisantes pour garantir l'existence d'une transformation  $\xi$  associée, que de déterminer directement cette dernière. Le théorème de Mercer apporte les conditions nécessaires et suffisantes à cet effet. Les fonctions noyaux les plus utilisées sont présentées dans le tableau 1.1.

Tableau 1.1. Les fonctions noyaux les plus utilisées

Type de fonction noyau	Expression de la fonction noyau
Noyau polynomial de degré $p$ hétérogène en dimension $n > 2$	$K(x, y) = (\langle x, y \rangle + \theta)^p$
Noyau radial	$K(x, y) = e^{-\frac{\ x-y\ ^2}{2\sigma^2}}$
Noyau inverse multiquadratique hétérogène	$K(x, y) = \frac{1}{\ x-y\ ^2 + \theta^2}$

L'expression générale de l'hyperplan séparateur peut être donc donné par :

$$\tilde{g}_x(x) = \sum_{i=1}^s \alpha_i c_i K(x_i, x) - b = 0 \quad (1.64)$$

### Réseaux de neurones

Les réseaux de neurones formels sont à l'origine une tentative de modélisation mathématique du cerveau humain. Les premiers travaux datent de 1943 et sont l'oeuvre de Mac Culloch et Pitts. Ils présentent un modèle assez simple pour les neurones et explorent les possibilités de ce modèle. L'idée principale des réseaux de neurones "modernes" est la suivante: On se donne une unité simple, un *neurone*, qui est capable de réaliser quelques calculs élémentaires. On relie ensuite entre-elles un nombre important de ces unités et on essaie de déterminer la puissance de calcul du *réseau* ainsi obtenu. Les réseaux de neurones tirent leur puissance de modélisation de leur capacité à capter les dépendances de haut niveau [Parizeau, 2004], [Hurtado, 2002] et [Gomes, 2004].

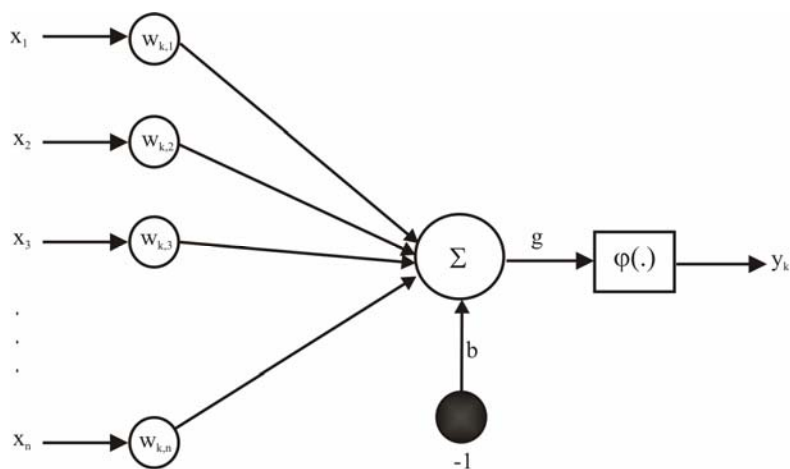


Figure 1.13. Modèle d'un neurone artificiel

Le modèle mathématique d'un neurone artificiel est illustré dans la figure 1.13. Un neurone est essentiellement constitué d'un intégrateur qui effectue la somme pondérée de ses entrées. Le résultat  $g$  de cette somme est ensuite transformé par une fonction de transfert  $\varphi(\cdot)$  qui produit la sortie du neurone. Les  $n$  entrées du neurone correspondent au vecteur

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , alors que  $w = [w_{k,1}, w_{k,2}, \dots, w_{k,n}]^T$  représente le vecteur des poids du neurone  $k$ . La sortie  $g$  de l'intégrateur est donnée par l'équation suivante :

$$g = \sum_{i=1}^n w_{k,i} x_i - b$$

$$= w_{1,1} x_1 + w_{1,2} x_2 + \dots + w_{1,n} x_n - b$$
(1.65)

que l'on peut aussi écrire sous forme matricielle :

$$g = w^T x - b$$
(1.66)

Cette sortie correspond à une somme pondérée des poids et des entrées moins ce qu'on nomme le biais  $b$  du neurone. Le résultat  $g$  de la somme pondérée s'appelle le niveau d'activation du neurone. Le biais  $b$  s'appelle le seuil d'activation du neurone. Lorsque le niveau d'activation atteint ou dépasse le seuil  $b$ , alors l'argument de  $\varphi(\cdot)$  devient positif (ou nul). Sinon, il est négatif. La sortie du neurone  $y_k$  peut être obtenue en ajoutant la fonction d'activation  $\varphi(\cdot)$  à l'équation 1.67 :

$$y_k = \varphi(w^T x - b)$$
(1.67)

Différentes fonctions de transfert peuvent être utilisées comme fonction d'activation du neurone. Les trois les plus utilisées sont les fonctions «seuil», «linéaire» et «sigmoïde».

Comme son nom l'indique, la fonction seuil applique un seuil sur son entrée. Plus précisément, une entrée négative ne passe pas le seuil, la fonction retourne alors la valeur 0 (on peut interpréter ce 0 par *faux*), alors qu'une entrée positive ou nulle dépasse le seuil, et la fonction retourne 1 (*vrai*). Utilisée dans le contexte d'un neurone, cette fonction est illustrée à la figure 1.14.a. On remarque alors que le biais  $b$  dans l'expression<sup>1</sup> 1.68 détermine l'emplacement du seuil sur l'axe  $w^T x$ , où la fonction passe de 0 à 1.

La fonction linéaire est très simple, elle affecte directement son entrée à sa sortie:

$$y_k = g$$
(1.68)

Appliquée dans le contexte d'un neurone, cette fonction est illustrée à la figure 1.14.b. Dans ce cas, la sortie du neurone correspond à son niveau d'activation dont le passage à zéro se produit lorsque  $w^T x = b$ .

---

<sup>1</sup> Il est possible de noter que cette fonction permet de prendre des décisions binaires.

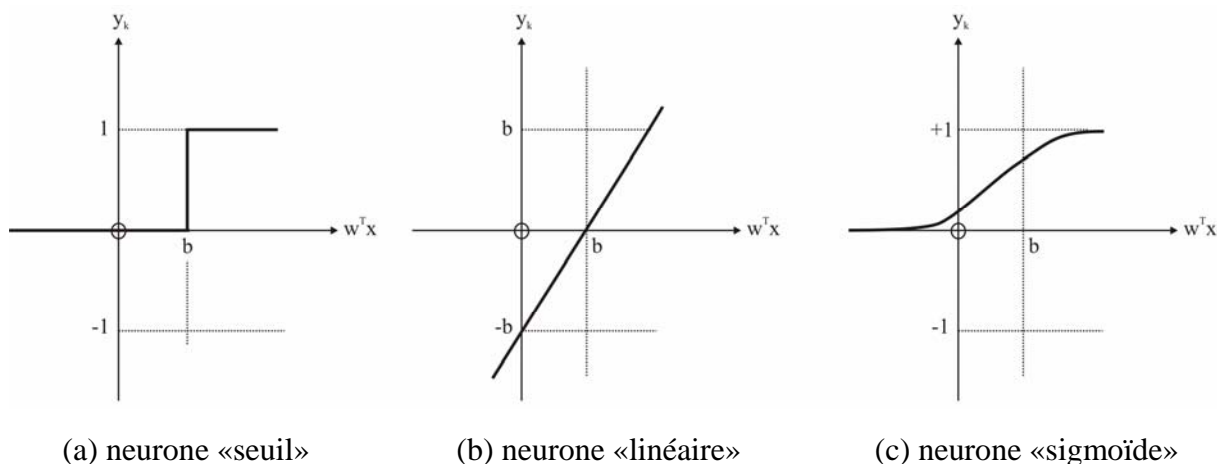


Figure 1.14. Fonctions de transfert

La fonction de transfert sigmoïde est quant à elle illustrée à la figure 1.14.c. Son équation est donnée par:

$$y_k = \frac{1}{1 + e^{-n}} \tag{1.69}$$

Elle ressemble soit à la fonction seuil, soit à la fonction linéaire, selon que l'on est loin ou près de  $b$ , respectivement. La fonction seuil est très non linéaire car il y a une discontinuité lorsque  $w^T x = b$ . De son côté, la fonction linéaire est tout à fait linéaire. Elle ne comporte aucun changement de pente. La sigmoïde est un compromis intéressant entre les deux précédentes.

Les réseaux de type MLP (Multi-Layer Perceptron<sup>2</sup>) sont souvent utilisés pour les applications fiabilistes. Il s'agit d'un réseau comportant  $L$  couches où chaque neurone d'une couche est totalement connecté aux neurones de la couche suivante. La figure 1.15 illustre des réseaux de type MLP avec deux couches.

---

<sup>2</sup> Perceptron est un modèle de réseau de neurones avec algorithme d'apprentissage créé par Rosenblatt en 1958.

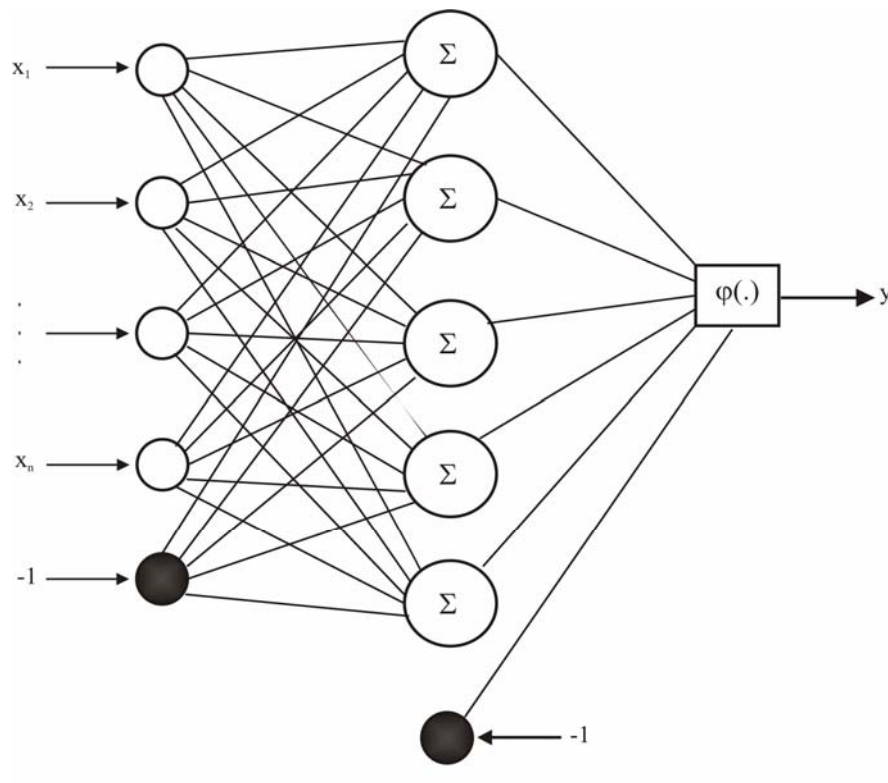


Figure 1.15. Les réseaux de type MLP avec deux couches

Une des caractéristiques de ces réseaux est le très grand nombre de connexions entre les cellules ce qui, au plan matériel, pose à un moment donné des limites incompressibles pour relier ces cellules entre elles, sans aborder le thème des inévitables interférences qui se créent de par l'échange des informations.



### 1.4.2. Positionnement de l'approche par surfaces de réponse

La méthode des surfaces de réponse (MSR) peut être utilisée pour construire «artificiellement» la fonction d'état limite en utilisant un polynôme ajusté aux résultats d'un nombre limité de calculs aux éléments finis. Cette fonction peut alors être utilisée pour évaluer la probabilité de défaillance au moyen de techniques classiques de fiabilité. L'efficacité des méthodes par surfaces de réponse est détaillée dans les chapitres suivants (voir chapitres 2 et 3). Il s'agira donc d'estimer la performance de la méthode par surfaces de réponse selon différents critères. Cela nous permet d'évaluer les capacités et les limites de l'approche pour calculer l'indice de fiabilité ainsi que la probabilité de défaillance. Dans cette section, une comparaison entre les différentes approches par surfaces de réponse issues de la littérature est réalisée. Afin de mieux comparer les différents aspects, dix approches distinctes ont été retenues. Les approches retenues sont présentées dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2. Les différentes approches par surfaces de réponse

	Approche	Auteurs
1	A-F	L. Faravelli (1989)
2	A-B	CG. Bucher et U. Bourgund (1990)
3	A-RE	M. Rajashekhar et B. Ellingwood (1993)
4	A-E	I. Enevoldsen et al (1994)
5	A-D	N. Devictor et al (1996)
6	A-KN	S. Kim et S. Na (1997)
7	A-P	M. Pendola et al (2000)
8	A-KM	I. Kaymaz et C.A. McMahon (2005)
9	A-DS	F. Duprat et A. Sellier (2006)
10	A-MC	S. Mohammadkhani-Shali et C. Cremona (2007)

Ces approches sont légèrement différentes entre-elles selon certaines hypothèses. Ces hypothèses peuvent être basées sur les thèmes suivants :

A) *types de surfaces de réponse (SR) utilisés :*

- 1) SR linéaire,
- 2) SR polynôme,
- 3) SR basée sur une régression pondérée,

B) *construction des SR réalisée dans un des deux espaces suivants :*

- 4) SR dans l'espace gaussien,
- 5) SR dans l'espace physique,

C) *types de plan d'expérience (PE) utilisés :*

- 6) PE classique,
- 7) PE adaptative,

D) *construction du PE réalisée dans un des deux espaces suivants :*

- 8) PE dans l'espace gaussien,
- 9) PE dans l'espace physique,

E) *évaluation de la probabilité de défaillance obtenue en utilisant :*

- 10) les autres méthodes (comme FORM ou SORM) sur le point de conception de la surface de réponse obtenue,
- 11) Point Fitting-SORM sur la surface de réponse globale de l'ouvrage,

F) *vérification de l'efficacité de l'algorithme selon les critères suivants :*

- 12) robustesse face à plusieurs points de conception,
- 13) robustesse face aux fortes courbures,

G) *validation de l'approche selon les cas suivants :*

- 14) application au couplage mécano-fiabiliste,
- 15) validation sur structures simples,
- 16) validation sur structures complexes,
- 17) application aux mécanismes de défaillance,
- 18) compatibilité avec différents codes de calcul.

Le tableau 1.3 donne une comparaison entre les différentes approches, selon les 18 thèmes précédents. Il permet également de positionner clairement les développements théoriques de la thèse par rapport aux absences et lacunes constatées dans la littérature.

Tableau 1.3. Comparaison des différentes approches par surfaces de réponse

Approche Hypothèses	A-F	A-B	A-RE	A-E	A-D	A-KN	A-P	A-KM	A-DS	A-MC
1	⊗	□	⊗	□	⊗	⊗	Δ	□	Δ	⊗
2	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	□	⊗	Δ	⊗	⊗
3	□	□	□	□	□	□	□	⊗	⊗	□
4	⊗	□	□	⊗	⊗	□	⊗	⊗	⊗	□
5	□	⊗	⊗	□	□	⊗	□	□	□	⊗
6	⊗	⊗	□	□	⊗	□	□	⊗	Δ	⊗
7	□	□	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	□	⊗	□
8	⊗	□	□	⊗	⊗	□	⊗	⊗	⊗	⊗
9	□	⊗	⊗	□	□	⊗	□	□	□	□
10	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
11	□	□	□	⊗	□	□	□	□	□	⊗
12	Δ	Δ	Δ	⊗	⊗	Δ	Δ	Δ	Δ	⊗
13	Δ	Δ	Δ	⊗	⊗	Δ	Δ	⊗	Δ	⊗
14	⊗	Δ	Δ	⊗	⊗	Δ	⊗	Δ	⊗	⊗
15	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
16	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	⊗
17	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	⊗
18	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	⊗	Δ	Δ	⊗

⊗ : Etude réalisée.

□ : Pas d'étude sur la fonctionnalité de l'algorithme.

Δ : Pas d'étude trouvée.

## 1.5. Conclusions

Dans ce chapitre, les différentes méthodes de la fiabilité des structures ont été présentées. Les méthodes de calculs classiques ont notamment été introduites à travers les méthodes de niveau *II* et celles de niveau *III*. Afin d'appliquer les méthodes de niveau *II*, la connaissance de la fonction d'état limite est essentielle. Les méthodes analytiques du type FORM et SORM sont regroupées dans ce niveau. Les méthodes de niveau *III* sont basées sur des techniques de simulations. Dans ce cas, la forme de l'état limite n'est alors plus essentielle dans l'estimation de la probabilité de défaillance. Les simulations de Monte-Carlo permettent de contrôler la validité des résultats, mais peuvent être très consommatrices en temps de calculs, qui dépend du niveau de la probabilité de défaillance recherchée. Pour un état limite implicite, il est délicat d'écrire explicitement la fonction d'état limite. Les méthodes FORM et SORM ne sont alors pas directement applicables. En revanche, celles de Monte-Carlo le sont, au prix d'un coût de calcul conséquent. Pour cela, des techniques permettant d'explicitier la fonction d'état limite ont été introduites. Dans un premier temps, l'approche par classification, comme les méthodes des machines à vecteurs supports et celles des réseaux de neurones, ont été expliquées. Dans un deuxième temps, l'apport des méthodes par surfaces de réponse, a été analysée au travers d'une étude bibliographique.

Nous nous proposons maintenant d'étudier plus en détail, les différentes étapes de construction des surfaces de réponse.



## **CHAPITRE 2**

### **METHODE DES SURFACES DE REPONSE**

#### **2.1. Introduction**

L'évaluation de la performance des structures de génie civil par les méthodes classiques de la théorie de la fiabilité (méthodes FORM, SORM) nécessite la définition d'une fonction d'état limite qui caractérise le dysfonctionnement d'un ouvrage (non respect d'exigences de fonctionnement). Or, dans le cas de structures complexes (par exemple hyperstatiques ou présentant des non linéarités importantes), cette fonction n'admet pas nécessairement de forme explicite. Le calcul de la probabilité de défaillance nécessite alors de recourir à des simulations numériques de type Monte-Carlo. Les probabilités très faibles à estimer impliquent cependant des tirages en grand nombre ou des techniques de simulations adaptées. Une méthode alternative consiste à construire *artificiellement* la fonction d'état limite en utilisant un polynôme ajusté aux résultats d'un nombre limité de calculs aux éléments finis [Bucher, 1990], [Rajashkhar, 1993] et [Mohammadkhani-Shali, 2005]. Cette fonction peut être utilisée pour évaluer la probabilité de défaillance (en utilisant la méthode FORM, par exemple). Ce type d'approche est appelé méthode par surfaces de réponse (MSR). L'objectif de ce chapitre est de détailler cette méthode et d'illustrer les résultats obtenus au travers de quelques exemples qui valident la méthode et mettent en évidence ses capacités et ses limites.

#### **2.2. Méthodes des surfaces de réponse**

La méthode des surfaces de réponse est un outil utilisé depuis le début des années cinquante dans plusieurs domaines scientifiques tels que la biologie animale et végétale, les sciences

humaines, la chimie, l'industrie et l'ingénierie [Schoefs, 1996]. En développant des logiciels relatifs à la fiabilité des ouvrages, la méthode des surfaces de réponse est rapidement devenue une des plus puissantes pour évaluer la fiabilité des structures complexes. L'application de cette méthode pour étudier la fiabilité des ouvrages d'art est cependant très récente et reste encore limitée [Sung, 2005] et [Wong, 2005].

Un des objectifs des surfaces de réponse est d'obtenir un modèle mathématique explicite :

- qui représente la surface de défaillance de structures complexes pour des éléments particuliers (modes de défaillance) et pour l'ouvrage (mécanismes de défaillance) ;
- qui représente une bonne approximation du comportement du modèle étudié ;
- qui est une technique d'approximation permettant de diminuer les temps de calcul et de réaliser une étude fiabiliste des structures complexes ;
- qui est construit sur un couplage entre un code de calcul aux éléments finis et un outil numérique de fiabilité.

### 2.2.1. Concepts de base

La réponse d'une structure est généralement représentée par une fonction d'état limite  $g(X)$  qui caractérise la défaillance de la structure. Cette fonction dépend de  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , vecteur des variables intervenant dans le problème étudié (en termes de résistances et sollicitations). Dans le cas de structures complexes, la fonction implicite  $g(X)$  peut être évaluée seulement de manière discrète par des réalisations  $X^k = (X_1^k, \dots, X_n^k)$ ,  $k = 1, \dots, N$  des variables.

L'idée d'origine de la méthode des surfaces de réponse est de remplacer la fonction  $g(X)$  qui est une fonction a priori inconnue, par une fonction explicite équivalente  $\hat{g}(X)$ . Les méthodes de surfaces de réponse recherchent donc une fonction, généralement une surface polynomiale, dont les coefficients sont déterminés de manière à minimiser l'erreur d'approximation dans la région autour du point de conception (point de l'état limite admettant la plus forte densité). L'évaluation de ces coefficients nécessite la réalisation de séries d'expériences numériques qui correspondent à des calculs numériques avec des paramètres d'entrée sélectionnés conformément à un plan d'expérience. Le choix des termes du polynôme à prendre en considération, ainsi que la définition du plan d'expérience numérique à effectuer, sont des opérations délicates que nous allons détailler.

### 2.2.2. Choix du degré du polynôme

Le choix du degré de la surface polynomiale, ses caractéristiques et la conception du plan d'expérience sont profondément liés. Le nombre de coefficients à déterminer augmente (et de même, la taille du plan d'expérience) avec le degré du polynôme. Habituellement, on utilise des surfaces polynomiales linéaires ou quadratiques. Dans le cadre de notre recherche, nous avons basé l'étude sur trois types de surfaces de réponse: linéaire, quadratique incomplète (sans termes croisés), et quadratique complète. La surface  $\hat{g}(X)$  est donc de la forme :

$$\hat{g}(X) = A + X^T B + X^T C X \quad (2.1)$$

où  $A, B$  et  $C$  sont les coefficients du polynôme définis par :

$$B^T = [b_1, b_2, \dots, b_n] ; C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n} & \dots & c_{n,n} \end{bmatrix}$$

Si  $C \equiv 0$ , la surface de réponse est linéaire :

$$\hat{g}(X) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i \quad (2.2)$$

Si  $C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n,n} \end{bmatrix}$  est une matrice diagonale, la surface de réponse est dite

quadratique incomplète :

$$\hat{g}(X) = A + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n c_{ii} X_i^2 \quad (2.3)$$

Enfin si  $C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{1,n-1} \\ c_{1,n} & \dots & c_{1,n-1} & c_{n,n} \end{bmatrix}$  est une matrice pleine, la surface de réponse est dite

quadratique complète :

$$\hat{g}(X) = A + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n c_{ii} X_i^2 + \sum_{i \neq j}^n c_{ij} X_i X_j \quad (2.4)$$



où  $n$  est le nombre de variables aléatoires  $X$  du problème étudié, et  $A$ ,  $b_i$  et  $c_{ij}$  sont les coefficients du polynôme à estimer.

La matrice du plan d'expérience  $X$  (voir paragraphe 2.2.3) dans le cas général est définie de la manière suivante:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mi} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

avec  $n$  le nombre de variables aléatoires et  $m$  le nombre de réalisations effectuées pour chaque variable (on suppose que  $m > n$ ). Dans cette matrice, chaque ligne représente un jeu de données pour un calcul aux éléments finis et chaque colonne est une réalisation de chaque variable.

Dans le cas général les fonctions des surfaces de réponse présentées dans les équations 2.2 à 2.4 peuvent être défini:

$$\hat{g}(X) = G(X)D \quad (2.6)$$

où  $D$  est un vecteur de dimension de  $\left(2n + 1 + \sum_{k=1}^n (k-1)\right)$  qui représente des coefficients du polynôme et  $G(X)$  est une matrice qui s'obtient selon le type des surfaces de réponse utilisées. A titre d'exemple, prenons le cas deux variables aléatoires indépendantes ; la matrice  $G(X)$  correspondant aux trois types de surfaces de réponse est :

- pour les surfaces de réponse linéaires :

$$G(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \\ 1 & x_{41} & x_{42} \\ 1 & x_{51} & x_{52} \end{bmatrix}$$

- pour les surfaces de réponse quadratiques incomplètes :

$$G(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{21}^2 & x_{22}^2 \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{31}^2 & x_{32}^2 \\ 1 & x_{41} & x_{42} & x_{41}^2 & x_{42}^2 \\ 1 & x_{51} & x_{52} & x_{51}^2 & x_{52}^2 \end{bmatrix}$$

- pour les surfaces de réponse quadratiques complètes :

$$G(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{11}^2 & x_{12}^2 & x_{11}x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{21}^2 & x_{22}^2 & x_{21}x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{31}^2 & x_{32}^2 & x_{31}x_{32} \\ 1 & x_{41} & x_{42} & x_{41}^2 & x_{42}^2 & x_{41}x_{42} \\ 1 & x_{51} & x_{52} & x_{51}^2 & x_{52}^2 & x_{51}x_{52} \\ 1 & x_{61} & x_{62} & x_{61}^2 & x_{62}^2 & x_{61}x_{62} \\ 1 & x_{71} & x_{72} & x_{71}^2 & x_{72}^2 & x_{71}x_{72} \\ 1 & x_{81} & x_{82} & x_{81}^2 & x_{82}^2 & x_{81}x_{82} \\ 1 & x_{91} & x_{92} & x_{91}^2 & x_{92}^2 & x_{91}x_{92} \end{bmatrix}$$

Les coefficients des surfaces de réponse sont définis de manière à minimiser l'erreur de l'approximation dans la région autour du point de conception. L'évaluation de ces coefficients nécessite la réalisation de séries d'expériences numériques qui correspondent à des calculs par solveur numérique (code de calcul).

Les paramètres d'entrée sont sélectionnés conformément à un plan d'expérience  $X$  défini préalablement (voir paragraphe 2.2.3). Dans le cas général, la matrice  $G(X)$  correspondant aux surfaces de réponse linéaires (équation 2.2) va être définie comme suit :

$$G(X) = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Les coefficients du polynôme linéaire vont donc être définis en estimant  $\hat{g}(X)$  et  $g(X)$  pour chaque ligne de la matrice  $X$  présentée en équation 2.5 en résolvant l'équation suivante :

$$g(X) = \hat{g}(X) + \varepsilon = G(X)D + \varepsilon \quad (2.7)$$

Pour faciliter l'écriture des équations dans ce paragraphe, nous écrivons  $Y = g(X)$ . L'équation 2.7 devient alors :

$$Y = GD + \varepsilon \quad (2.8)$$

où  $\varepsilon$  est l'erreur à minimiser, définie par un vecteur de  $m \times 1$  :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}, D \text{ et } Y \text{ sont définis par : } D = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \text{ et } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

De manière générale,  $Y$  est un vecteur avec une dimension de  $m$  qui correspond à des résultats de calculs numériques,  $D$  est un vecteur de dimension  $(n+1)$  qui représente les coefficients du polynôme et  $G$  est une matrice de dimension  $m \times (n+1)$ . L'objectif est alors de trouver les coefficients du polynôme  $D$ , au sens des moindres carrés en minimisant :

$$L = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon = (Y - GD)'(Y - GD)$$

L'erreur quadratique  $L$  peut être exprimée de la manière suivante :

$$L = Y'Y - D'G'Y - Y'GD + D'G'GD = Y'Y - 2D'G'Y + D'G'GD$$

Comme  $D'G'Y$  est une matrice de dimension  $1 \times 1$ , c'est une valeur scalaire, de même que sa transposée  $(D'G'Y)' = Y'GD$ . Le vecteur des coefficients  $[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$  doit satisfaire :

$$\left. \frac{\partial L}{\partial D} \right|_d = -2G'Y + 2G'Gd = 0$$

d'où le résultat :

$$G'Gd = G'Y \tag{2.9}$$

Cette équation est une série d'équations normales. Pour résoudre ces équations, il suffit de multiplier l'équation 2.9 par l'inverse de  $G'G$  :

$$d = (G'G)^{-1}G'Y \tag{2.10}$$

L'équation 2.7 peut être décrit également sous la forme matricielle [Myers, 2002] :

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_{i1} & \sum_{i=1}^m x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m x_{in} \\ \sum_{i=1}^m x_{i1} & \sum_{i=1}^m x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^m x_{i1}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m x_{i1}x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_{in} & \sum_{i=1}^m x_{in}x_{i1} & \sum_{i=1}^m x_{in}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m x_{in}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_{in}y_i \end{bmatrix}$$

La matrice  $G'G$  est clairement une matrice symétrique de dimension  $(n+1) \times (n+1)$  et  $G'Y$ , un vecteur de dimension  $(n+1)$ .

### 2.2.3. Plans d'expérience

Le plan d'expérience est la définition des données des calculs numériques nécessaires pour réaliser l'ajustement de la surface de réponse à la fonction d'état limite implicite de la structure. Il n'existe pas de guide précis pour la sélection d'un plan d'expérience. Le nombre

de points expérimentaux du plan d'expérience est souvent choisi de manière à avoir autant d'équations que d'inconnues lors de la détermination des coefficients de la surface polynomiale. Certaines approches introduisent un nombre plus important de points expérimentaux et il est alors nécessaire de faire appel à des analyses en régression pour l'évaluation des coefficients de la surface polynomiale.

Le plan d'expérience le plus simple est le plan dit en étoile (figure 2.1.a). Il comprend  $2n+1$  points, et est simple à générer car il requiert peu d'expériences. Chaque variable peut prendre 3 valeurs distinctes en tenant compte du point central. On sélectionne une valeur centrale  $\bar{X}_i$  et un multiple  $h$  de l'écart type  $\sigma_i$  de chaque variable aléatoire [Bucher, 1990] :  $X_i = \bar{X}_i \pm h\sigma_i$ . La valeur de  $h$  est souvent arbitraire, et comprise entre 1 et 2 [Mohammadkhani-Shali, 2005]. Ce type de plan d'expérience permet d'étudier le comportement de chaque variable selon un axe, mais il ne fournit pas d'indications sur les interactions entre variables. Les points nécessaires pour constituer ce type de plan d'expérience étoile, dans le cas de trois variables aléatoires, sont donnés dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1. Points du plan d'expérience étoile pour trois variables aléatoires

Composants	Numéro des points	$X_1$	$X_2$	$X_3$
2n points sur les axes (points étoiles)	1	+1	0	0
	2	-1	0	0
	3	0	+1	0
	4	0	-1	0
	5	0	0	+1
	6	0	0	-1
Point central	7	0	0	0

Le plan d'expérience en étoile selon les points définis dans le tableau 2.1 peut être décrit de façon matricielle :

$$X = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 + h\sigma_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \\ \bar{X}_1 - h\sigma_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 + h\sigma_2 & \bar{X}_3 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 - h\sigma_2 & \bar{X}_3 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 + h\sigma_3 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 - h\sigma_3 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \end{bmatrix}$$

Le second type de plan utilisé est le plan d'expérience en étoile modifié (figure 2.1.b). Il comprend  $2kn+1$  points. Pour générer les variables à chaque itération, le même principe qu'avec le plan d'expérience en étoile est utilisé. Chaque variable comprend  $2k+1$  niveaux de valeurs, en tenant compte du point central. On sélectionne une valeur centrale  $\bar{X}_i$  et des multiples  $h_k$  de l'écart type  $\sigma_i$  pour chaque variable aléatoire :  $X_i = \bar{X}_i \pm h_k \sigma_i$ . Les valeurs de  $h_k$  sont choisies entre deux valeurs de  $h$  souvent arbitraires. Dans cette étude, les valeurs de  $h_k$  sont normalement considérées entre 1 et 2. Dans la figure 2.1.b,  $k = 3$  a été retenu : il y a donc trois valeurs possibles pour  $h_k (h_1, h_2, h_3)$  [Mohammadkhani-Shali, 2005].

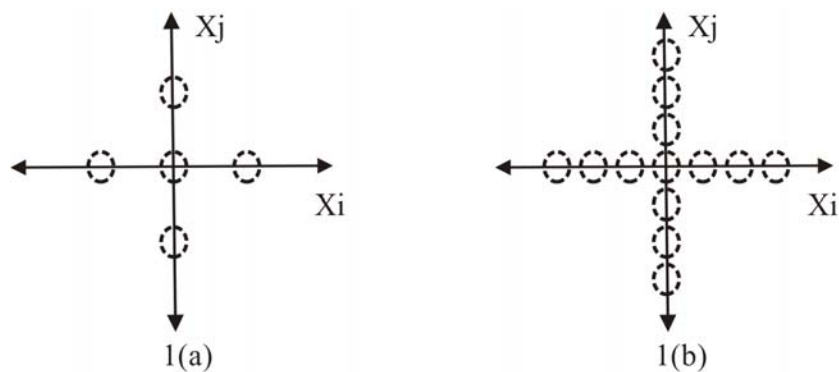


Figure 2.1. Plan d'expérience du type d'étoile et étoile modifié pour deux variables aléatoires

L'autre type de plan utilisé est le plan d'expérience factoriel (figure 2.2.a). Il comprend  $2^n$  points. Il permet de prendre en compte les interactions entre variables, mais nécessite un nombre de points beaucoup plus important que le plan en étoile. Par ailleurs, l'un des types de plan d'expérience les plus performants du point de vue de la représentativité des données est le plan d'expérience composite centré (CC) qui est la réunion d'un plan en étoile et d'un plan

factoriel. Il comprend  $2^n + 2n + n_c$  points [Myers, 2002]. Il s'agit donc de  $2^n$  points factoriels, augmentés de  $n_c$  centres et  $2n$  points avec les coordonnées  $-\alpha, \alpha$  le long des axes. Le dernier qui s'appelle distance axiale construit un plan rotatif. Le choix de  $\alpha$  et  $n_c$  est très important car ces paramètres assurent la stabilité des expériences. Normalement une valeur de  $\alpha$  comprise entre 1 et  $\sqrt{n}$  est choisie ; celle de  $n_c$  est prise entre 1 et 5. Les valeurs considérées ici, sont  $n_c = 1$  et  $\alpha = 1$  dans la majorité des cas (figure 2.2.b) et dans certains cas  $\alpha = \sqrt{n}$  (figure 2.2.c). Il requiert cependant un nombre de points d'évaluation élevé dans le cas d'un grand nombre de variables.

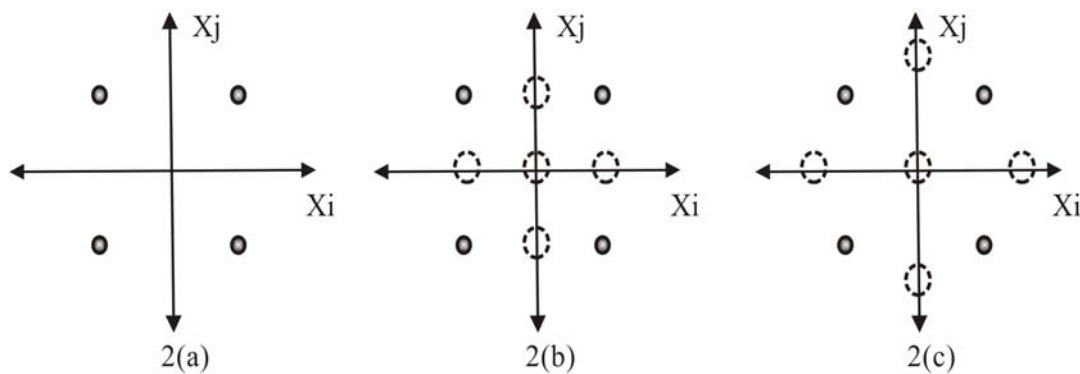


Figure 2.2. Plan d'expérience du type factoriel et composite centré pour deux variables aléatoires

Les points nécessaires pour constituer ce type de plan d'expérience composite centré, dans le cas trois variables aléatoires, ont été montrés dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2. Points du plan d'expérience composite centré pour trois variables aléatoires

Composants	Numéro des points	X1	X2	X3
2n points factoriels	1	-1	-1	-1
	2	+1	-1	-1
	3	-1	+1	-1
	4	+1	+1	-1
	5	-1	-1	+1
	6	+1	-1	+1
	7	-1	+1	+1

	8	+1	+1	+1
2n points sur les axes (points étoiles)	9	$-\alpha$	0	0
	10	$+\alpha$	0	0
	11	0	$-\alpha$	0
	12	0	$+\alpha$	0
	13	0	0	$-\alpha$
	14	0	0	$+\alpha$
Point central	15	0	0	0

Pour avoir une idée de la forme matricielle du plan d'expérience composite centré, le cas de deux variables aléatoires est ici considéré ; la matrice de plan d'expérience en considérant  $\alpha = \sqrt{2}$  est une matrice  $9 \times 2$  dont l'expression est la suivante :

$$X = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - h\sigma_1 & \bar{X}_2 - h\sigma_2 \\ \bar{X}_1 + h\sigma_1 & \bar{X}_2 - h\sigma_2 \\ \bar{X}_1 - h\sigma_1 & \bar{X}_2 + h\sigma_2 \\ \bar{X}_1 + h\sigma_1 & \bar{X}_2 + h\sigma_2 \\ \bar{X}_1 - \sqrt{2}h\sigma_1 & \bar{X}_2 \\ \bar{X}_1 + \sqrt{2}h\sigma_1 & \bar{X}_2 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 - \sqrt{2}h\sigma_2 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 + \sqrt{2}h\sigma_2 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \end{bmatrix}$$

#### 2.2.4. Algorithme de construction des surfaces de réponse

L'objectif fondamental dans la recherche de la surface de réponse réside dans l'estimation de la probabilité de défaillance de la structure. Ceci implique de s'intéresser plus particulièrement à la région où les probabilités sont les plus élevées dans le domaine de la défaillance, domaine qui se situe autour du point de conception, ce point n'étant pas connu a priori. Une technique de recherche itérative est employée pour estimer dans un premier temps ce point de conception.

Supposons que  $g(X)$  dans la figure 2.3 est la fonction d'état limite qui caractérise un dysfonctionnement donné. En absence d'informations spécifiques, les valeurs de départ pour le calcul des coefficients du polynôme  $\hat{g}(X)$  peuvent être choisies de manière à être centrées

autour d'un jeu de données sur les valeurs moyennes des variables  $\mu$  en utilisant l'un des plans d'expérience présenté dans la section précédente (figure 2.3).

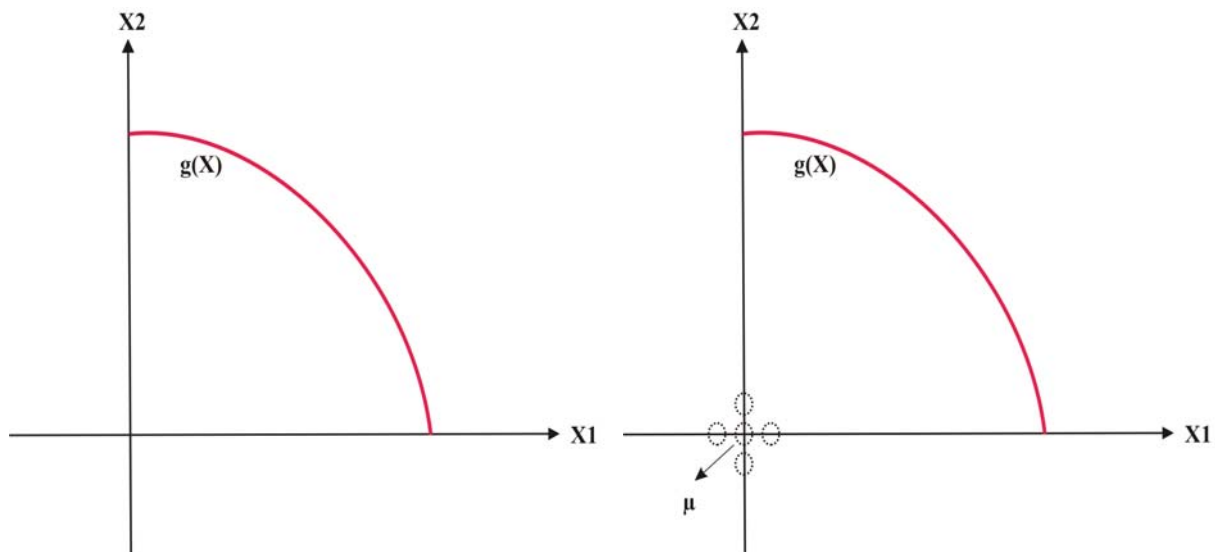


Figure 2.3. Schéma d'algorithme itératif de construction des surfaces de réponse (1/3)

En se servant de ces points, les coefficients définissant la première approximation de la surface polynomiale  $g_1(X)$  peuvent être déterminés. Il est alors possible d'évaluer le point de conception  $X_{d1}$  sur cette surface en utilisant par exemple l'algorithme de Rackwitz-Fiessler ou toute autre technique d'optimisation (figure 2.4). La surface polynomiale  $g_1(X)$  est dans sa position optimale si le point  $\mu$  coïncide avec le point de conception. Dans le cas contraire, le nouveau centre  $X_{m2}$  est utilisé comme point de départ pour une nouvelle itération (figure 2.4). Dans ce cas le nouveau point de centrage  $X_m$  peut être obtenu par une interpolation linéaire entre le point de conception et le point de centrage. Cette interpolation linéaire est donnée à l'équation 2.11 [Bucher, 1990] :

$$X_m = \bar{X} + (X_d - \bar{X}) \frac{g(\bar{X})}{[g(\bar{X}) - g(X_d)]} \quad (2.11)$$



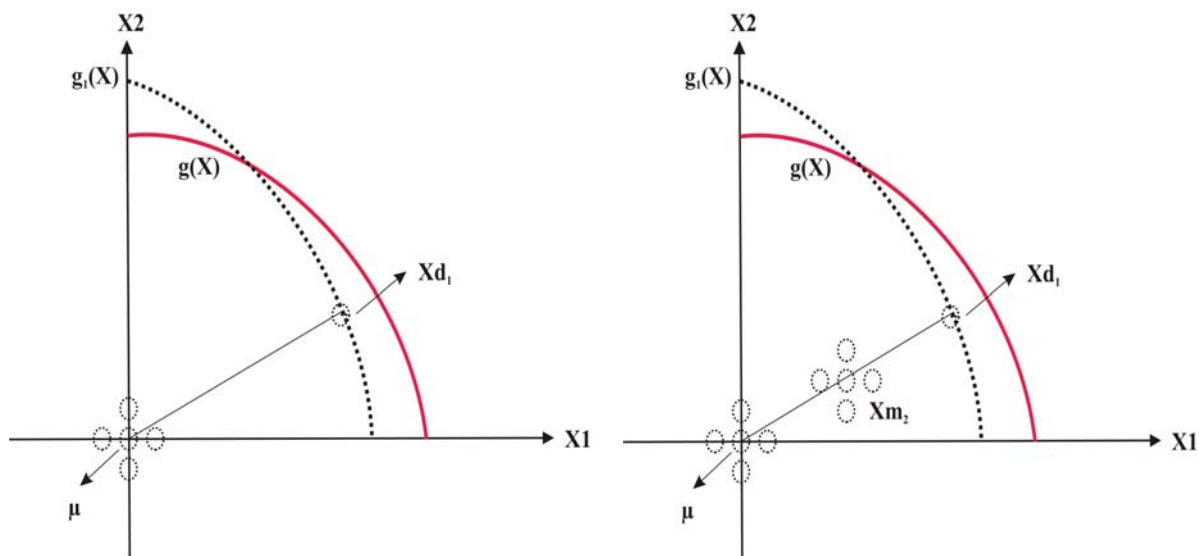


Figure 2.4. Schéma d'algorithme itératif de construction des surfaces de réponse (2/3)

De même que précédemment, le plan d'expérience est construit sur ce nouveau centre  $Xm_2$ . En utilisant des points du plan d'expérience, la deuxième approximation de la surface polynomiale  $g_2(X)$  peut donc être déterminée. Il est alors possible d'évaluer le point de conception  $X_{d2}$  sur la surface polynomiale  $g_2(X)$  (figure 2.5). A cette itération, la distance est définie entre le point de conception  $X_{d2}$  et le nouveau centre  $Xm_2$ . La convergence est assurée lorsque l'écart entre l'indice de la fiabilité de deux itérations consécutives est inférieur au critère de convergence. Ce critère de convergence est décrit dans l'équation :

$$|\beta_k - \beta_{k-1}| < \varepsilon_{tol} \tag{2.12}$$

où  $\varepsilon_{tol}$  est le critère de convergence qui varie entre  $10^{-3}$  et  $10^{-6}$  selon le modèle probabiliste et le modèle numérique étudié. Ce critère n'assure pas cependant toujours qu'il y ait convergence vers le vrai état limite. Il convient donc de doubler cette vérification d'une ultime vérification de l'appartenance du point de fonction au véritable état limite, et d'une bonne corrélation entre points prédits et points calculés.

Au final, la dernière itération fournit l'indice de fiabilité, les coordonnées du point de conception et le vecteur des cosinus directeurs de chaque variable.

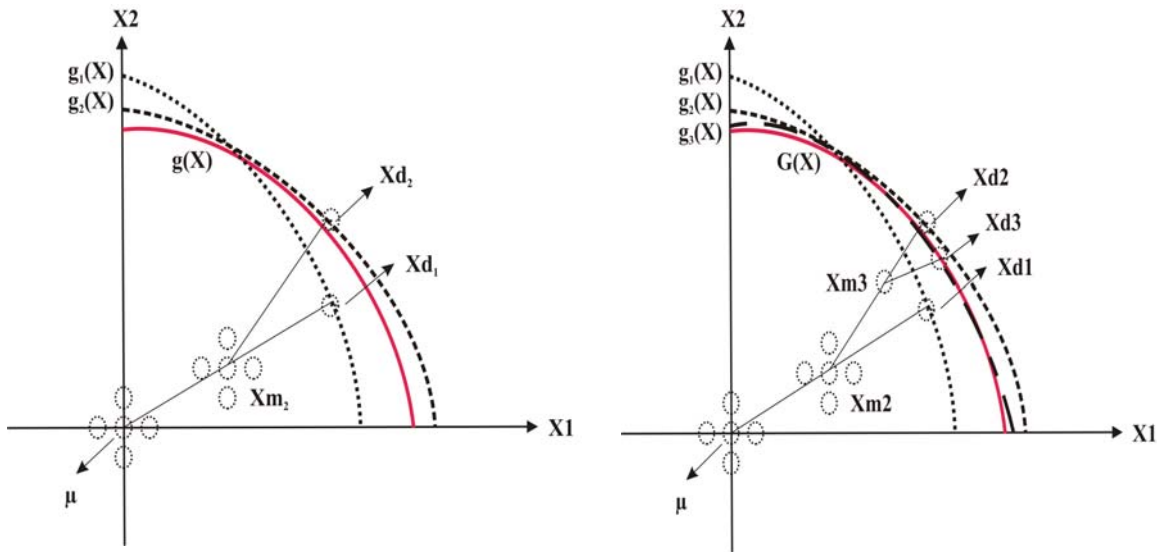


Figure 2.5. Schéma d'algorithme itératif de construction des surfaces de réponse (3/3)

En réalité, ce schéma de calcul fonctionne bien avec des variables aléatoires à support réel, mais peut être source d'instabilités numériques pour des variables aléatoires à support borné (lois uniformes) ou à support seulement positif ou négatif (lois lognormales, lois de valeurs extrêmes...). Une stratégie possible est alors de le mettre en œuvre non pas dans l'espace de variables de base (c'est-à-dire les variables physiques), mais dans un espace normalisé constitué de variables normales centrées réduites. Pour cela, il est nécessaire de transformer toutes les variables physiques en variables normales centrées réduites. Dans notre mise en œuvre, la transformée de Nataf a été retenue. Le plan d'expérience est donc construit non pas dans l'espace de base, mais dans l'espace gaussien, les calculs mécaniques étant cependant réalisés à partir des points de l'espace des variables physiques. Dans l'espace gaussien de normalisation, les plans sont symétriques (figure 2.6), mais ramenés dans l'espace des variables physiques, ils ne le sont plus nécessairement selon les lois des variables [Mohammadkhani-Shali, 2007a-d]. Prenons le cas d'une variable aléatoire  $X$  qui est distribuée selon une loi lognormale avec pour moyenne  $m$  et écart-type  $\sigma$ . La transformation marginale est donnée par l'équation 2.13 :

$$X = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{m^2}}} \exp\left( U \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{m^2}\right)} \right) \quad (2.13)$$

où  $U$  est une variable normale centrée réduite. La transformation inverse est alors caractérisée par l'équation suivante :

$$U = \frac{\ln\left(\frac{X}{m} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{m^2}}\right)}{\sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{m^2}\right)}} \quad (2.14)$$

En considérant deux variables aléatoires lognormales, il est alors évident que selon les valeurs des paramètres, la maille sera contractée dans la direction d'un des demi-axes et relâchée dans l'autre. La figure 2.6 montre un plan d'expérience composite centré avec un demi-diamètre de  $h$  dans l'espace gaussien. La figure 2.7 montre le cas de deux variables aléatoires indépendantes qui sont distribuées selon des lois lognormales. Comme les variables lognormales sont à support positif, la construction d'un plan d'expérience symétrique directement dans l'espace des variables physiques peut envoyer des points du plan d'expérience vers des limites physiquement inacceptables du domaine de variation, source d'instabilités numériques.

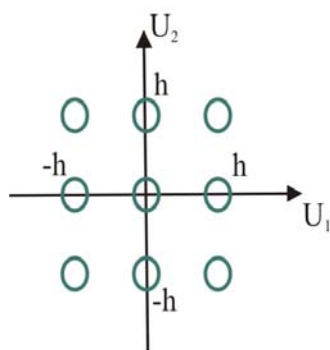


Figure 2.6. Plan symétrique dans l'espace gaussien pour deux variables aléatoires normales centrées réduites

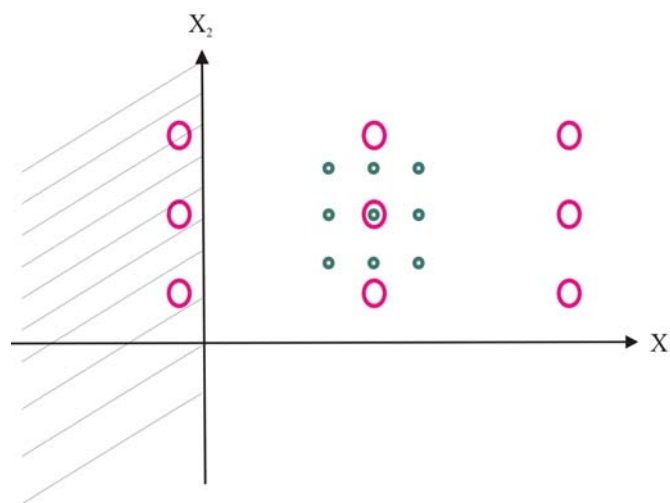


Figure 2.7. Plan non symétrique dans l'espace des variables physiques pour deux variables aléatoires lognormales

Le cas de deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  qui sont distribuées selon des lois uniformes avec pour moyennes de  $m_1$  et  $m_2$  et écart-types  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  est maintenant étudié. La transformation marginale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} X_1 &= a + (b - a) \cdot \phi(U_1) \\ X_2 &= a + (b - a) \cdot \phi(U_2) \end{aligned} \tag{2.15}$$

où  $U_1$  et  $U_2$  sont des variables normales centrées réduites. La transformation inverse est donnée par :

$$\begin{aligned} U_1 &= \phi^{-1} \left( \frac{X_1 - a}{b - a} \right) \\ U_2 &= \phi^{-1} \left( \frac{X_2 - a}{b - a} \right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

avec pour paramètres  $a$  et  $b$  :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2m + \sigma\sqrt{12}}{2} \\ b &= \frac{2m - \sigma\sqrt{12}}{2} \end{aligned}$$

La figure 2.8 montre un plan d'expérience en étoile avec un demi-diamètre  $h$  dans l'espace gaussien. Il est possible d'observer que ce plan dans l'espace gaussien est bien symétrique. La figure 2.9 montre le cas de deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon des lois uniformes. Il apparaît alors qu'en construisant de manière symétrique le plan d'expérience directement dans l'espace de variables de base, il y a un risque de construire des points du plan d'expérience en dehors du domaine de variation acceptable, ce qui peut être la source d'instabilités numériques.

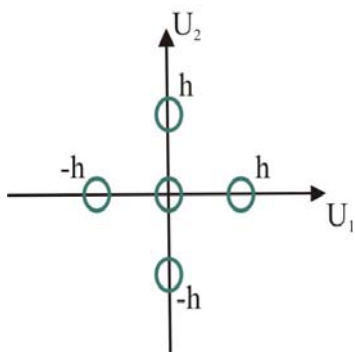


Figure 2.8. Plan symétrique dans l'espace gaussien pour deux variables aléatoires

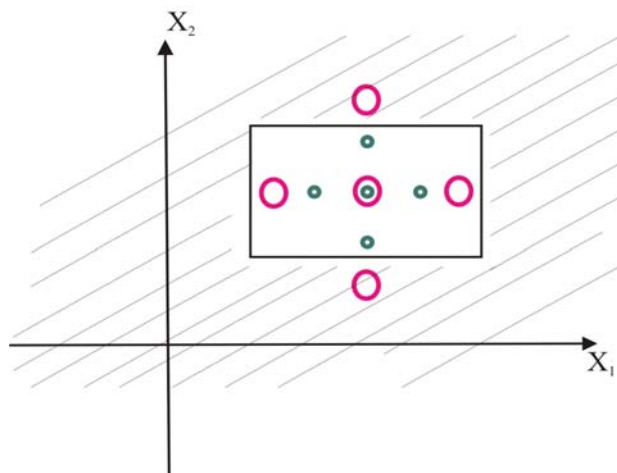


Figure 2.9. Plan non symétrique dans l'espace des variables de base pour deux variables aléatoires uniformes

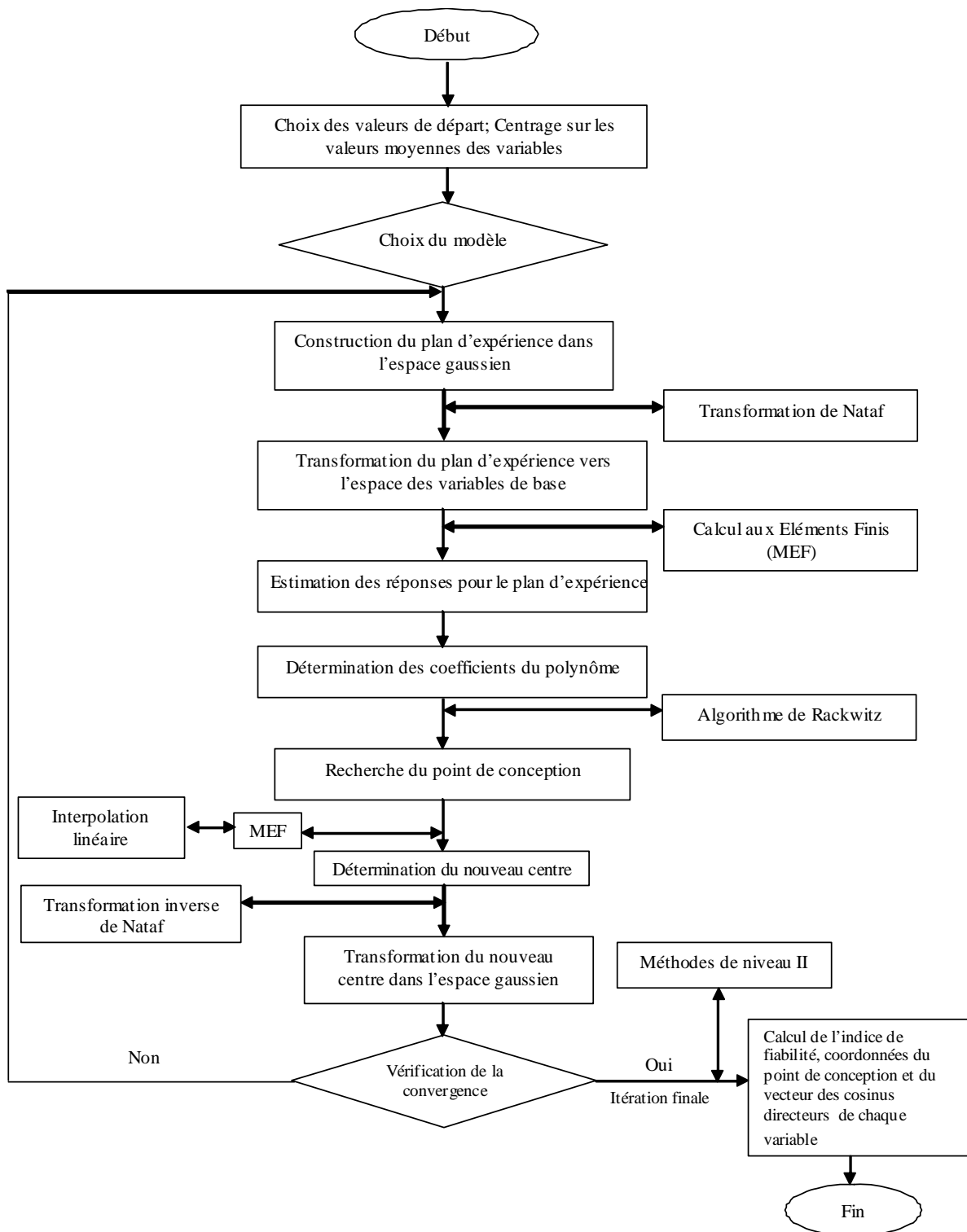


Figure 2.10. Algorithme de construction des surfaces de réponse

L'organigramme de l'algorithme de construction de surfaces de réponse est présenté à la figure 2.10. Cet algorithme avec les diverses variantes du plan d'expérience et celles concernant la forme du polynôme d'approximation a été mis en œuvre au sein de la boîte à outils ReliabTbx, développée au LCPC. Cette dernière fait appel notamment au code calcul aux éléments finis CESAR-LCPC©, pour la réalisation des expériences numériques (voir chapitre 3). La figure 2.11 montre le dialogue effectué entre le code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC© et la boîte à outils ReliabTbx.

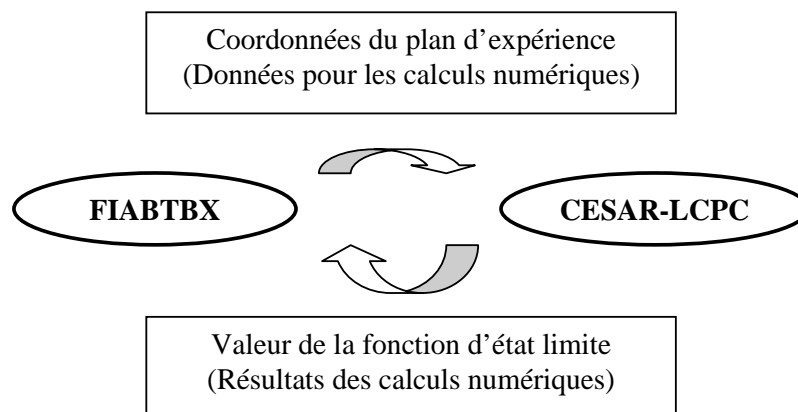


Figure 2.11. Couplage effectué FIABTBX/CESAR

La boîte à outils ReliabTbx développée au LCPC permet l'évaluation de l'indice de fiabilité mais surtout diverses approximation de la probabilité de défaillance par les méthodes suivantes : FORM, SORM-Breitung, SORM-Hohenbichler, tirage d'importance, tirage conditionné... ainsi que diverses techniques de calcul de probabilité de défaillance appliquées aux systèmes. Cependant, les particularités des surfaces de réponse, notamment incomplètes, permettent de recourir à des approximations au second ordre, comme pour les méthodes SORM, sans calculer numériquement la matrice Hessienne. Cet avantage est explicité dans la section suivante.

### 2.2.5. Calcul au second ordre de la probabilité de défaillance

La méthode de surface de réponse procure autant une approximation explicite de la fonction d'état limite  $\hat{g}(\{X\})$  dans l'espace des variables physiques, que dans l'espace des variables normales centrées réduites. Comme la surface de réponse est une quadratique, il est intuitif de

faire une analogie avec l'approche SORM pour laquelle la surface limite est approchée par un parabolöide dans l'espace normalisé. Dans l'approche SORM classique, la surface approchée du second ordre est définie en ajustant ses courbures principales à celles de l'état limite au point de conception. Ces courbures principales sont obtenues au travers de la résolution d'un problème aux valeurs propres de la matrice Hessienne (judicieusement transformée par rotation pour qu'un des axes soit porté par avec le vecteur orthonormal à la surface de défaillance). Les courbures alors calculées permettent de calculer une approximation au second ordre de la probabilité de défaillance, au moyen d'expressions approchées comme celles de Breitung ou de Hohenbichler (voir Chapitre 1). Cependant, le calcul de la matrice Hessienne est délicat en présence d'un grand nombre de variables ou lorsque certaines d'entre-elles ont des cosinus directeurs très faibles.

Cette difficulté peut être contournée dans le cas de la méthode par surface de réponse, car cette dernière, si elle est ajustée dans l'espace normalisé, évite de calculer gradients et matrices Hessiennes. En effet, considérons la convergence assurée ; à la dernière itération, la surface de réponse est également construite dans l'espace normalisé, et pas seulement dans l'espace physique. Soit  $\hat{g}_U(\{U\})$  cette surface approchée et supposons qu'il s'agit d'une quadratique incomplète :

$$\hat{g}_U(U) = A + U^T b + U^T C U$$

où  $C$  est diagonale. Le calcul du gradient  $G$  et de la matrice hessienne  $H$  à partir de cette expression est direct :

$$H = \frac{2}{\|G\|} C ; \|G\| = \|b + 2HU_d\|$$

$U_d$  est le point de conception dans l'espace normalisé. Une fois la matrice Hessienne calculée, il est alors possible d'appliquer n'importe quelle approximation SORM de la probabilité de défaillance. Cette approche sera appelée Point-Fitting SORM (PFSORM), car les courbures sont calculées par ajustement d'une quadratique incomplète sur le dernier plan d'expérience.

En résumé, l'approche par surface de réponse permet non seulement d'explicitier un état limite, mais également de calculer de manière efficace une approximation de la probabilité de défaillance au second ordre en évitant toute instabilité numérique.

### 2.3. Validation de l'algorithme de construction des surfaces de réponse

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'efficacité de la méthode par surfaces de réponse dans l'estimation de la probabilité de défaillance des structures au travers de quelques états limites explicites issus de la littérature qui valident la méthode et mettent en évidence les capacités de celle-ci. Une analyse plus détaillée de sensibilité sur deux exemples (système dynamique non linéaire et état limite exponentiel) est fournie en Annexe A. Dans cette annexe, l'objectif de la démarche présentée est d'estimer la performance de la méthode par surfaces de réponse selon les critères suivants: le type de surface de réponse, le type de plan d'expérience, l'influence du coefficient arbitraire  $h$ , l'influence de la corrélation entre les variables aléatoires et la variabilité des paramètres. Les comparaisons sont faites entre approches, la probabilité de défaillance étant calculée par une approximation au premier ordre. Cette démarche nous permet d'évaluer les capacités de l'algorithme.

Dans cette section, une évaluation plus géométrique de l'efficacité des techniques est réalisée. En effet, comme la recherche du point de fonctionnement se fait dans une métrique euclidienne où toutes les variables ont la même distribution, la nature des variables de base (lois, corrélation) se transforme en un problème purement géométrique. Pour cela, l'analyse se fonde sur les critères suivants :

- 1- la robustesse face à plusieurs points de conception,
- 2- la capacité à traiter des unions et des intersections,
- 3- le nombre de variables,
- 4- la présence de fortes courbures.

Tableau 2.3. Fonctions d'état limite utilisées dans le benchmark

Description	Fonction d'état limite	Critère	Réf.
(1) Avec un seul terme quadratique	$g = R - S^2$	-	[Waarts, 2000]
(2) Avec dix termes quadratiques	$g = R - \sum_{i=1}^{10} \frac{S_i^2}{i}$	3,4	[Waarts, 2000]
(3) Domaine de défaillance convexe	$g = 0,1(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) + 2,5$	4	[Borri, 1997]
(4) Surface selle	$g = 3 - x_1 x_2$	2,4	[Waarts, 2000]



(5) Domaine de défaillance concave	$g = -0,5(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) + 3,0$	2,4	[Katsuki, 1997]
(6) Système en série	$\begin{cases} g_1 = 0,1(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) + 3,0 \\ g_2 = 0,1(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) + 3,0 \\ g_3 = (x_1 - x_2) + \frac{3,5}{\sqrt{2}} \\ g_4 = (-x_1 + x_2) + \frac{3,5}{\sqrt{2}} \\ g = \min(g_1, g_2, g_3, g_4) \end{cases}$	1,2	[Katsuki, 1997]
(7) Système en parallèle	$\begin{cases} g_1 = 2,67 - x_1 - x_2 \\ g_2 = 2,50 - x_2 - x_3 \\ g_3 = 2,32 - x_3 - x_4 \\ g_4 = 2,25 - x_4 - x_5 \\ g = \max(g_1, g_2, g_3, g_4) \end{cases}$	1,2	[Katsuki, 1997]

Pour évaluer la performance de l'approche par surfaces de réponse selon ces critères, plusieurs états limite artificiels sont considérés. La plupart d'entre eux ont été étudié dans la littérature. Ces états limites sont illustrés dans le tableau 2.3. Les critères correspondant à chaque fonction d'état limite sont également présentés dans le tableau 2.3.

Pour les exemples 1 et 2, toutes les variables sont indépendantes et sont supposées suivre des lois normales (tableaux 2.4 et 2.5).

Tableau 2.4. Paramètres des lois des variables aléatoires pour l'état limite (1)

Variables	Moyenne	Ecart type
<i>R</i>	11	1
<i>S</i>	1,5	0,5

Tableau 2.5. Paramètres des lois des variables aléatoires pour l'état limite (2)

Variables	Moyenne	Ecart type
<i>R</i>	0,5	0,1
<i>S</i>	0,2	0,1

Les variables aléatoires qui interviennent dans les autres états limite sont supposées suivre des lois normales centrées réduites (tableau 2.6).

Tableau 2.6. Paramètres des lois des variables aléatoires pour les fonctions d'état limite 3 à 8

Variables	Moyenne	Ecart type
$x_i$	0	1

Les résultats obtenus par la méthode par surfaces de réponse (MSR) sont comparés à ceux issus d'un calcul exact, en terme d'indice de fiabilité (indice de fiabilité généralisé). Par ailleurs, dans ce benchmark, plusieurs approches sont utilisées dont :

- FORM,
- SORM,
- Monte-Carlo tirage d'importance (MCIS),
- Monte-Carlo tirage conditionné (MCCS),
- Machines à vecteurs supports (SVM),
- Système en série en utilisant les bornes de Ditlevsen (SSD),
- Système en parallèle par loi multinormale (PSM).

Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux 2.7 et 2.8. Il est possible d'observer que la méthode par surface de réponse donne de façon générale une bonne approximation de l'indice de fiabilité avec un nombre réduit d'appel à la fonction d'état limite sauf dans le cas de l'état limite (2). L'indice de fiabilité calculé pour les surfaces quadratiques est un indice de fiabilité généralisé calculé après qu'un calcul au second ordre (PFSORM) soit réalisé. De même, les indices donnés pour les méthodes de simulation de Monte-Carlo et pour la méthode SORM sont des indices de fiabilité généralisés.

Pour un état limite avec un seul terme quadratique, l'ensemble des techniques fournit des résultats analogues. En fait, cet exemple est relativement proche de l'état limite linéaire, ce qui explique cette concordance des résultats. Par contre, lorsque le nombre de termes quadratiques passe à 10, l'écart entre les techniques s'accroît. FORM reste encore satisfaisante avec un écart de 7% par rapport à la valeur exacte. Cependant, la présence de fortes courbures explique cet écart. Le calcul au second ordre SORM confirme ce point, puisque l'indice généralisé se rapproche de l'indice de référence.

Pour l'état limite convexe, FORM présente les mêmes limites que pour l'état limite avec 10 termes quadratiques, c'est-à-dire un écart notable avec l'indice cible en présence de fortes courbures. La prise en compte de termes du second ordre (comme dans SORM ou pour RSM) conduit à une amélioration sensible des résultats. La méthode SVM, basée sur un noyau multiquadratique procure des résultats analogues.

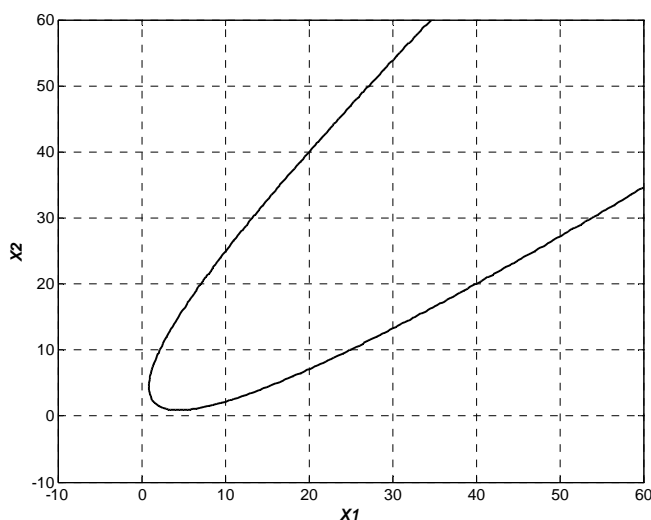


Figure 2.12. Domaine de défaillance convexe

L'état limite concave est en fait un système composé des deux branches d'une parabole. Pour FORM et SORM, les points de départ de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler doivent être choisis aléatoirement. En effet, en prenant pour point initial l'origine  $(0,0)$ , l'algorithme converge vers un mauvais point de conception avec un indice de  $3,00$ . La sélection aléatoire de l'ensemble de points d'apprentissage de la méthode S.V.M. ne conduit pas à cette difficulté. La présence de fortes courbures ne conduit pas à de bons résultats avec FORM. R.S.M. procure un aussi bon résultat que SVM mais avec un coût de calcul plus important.

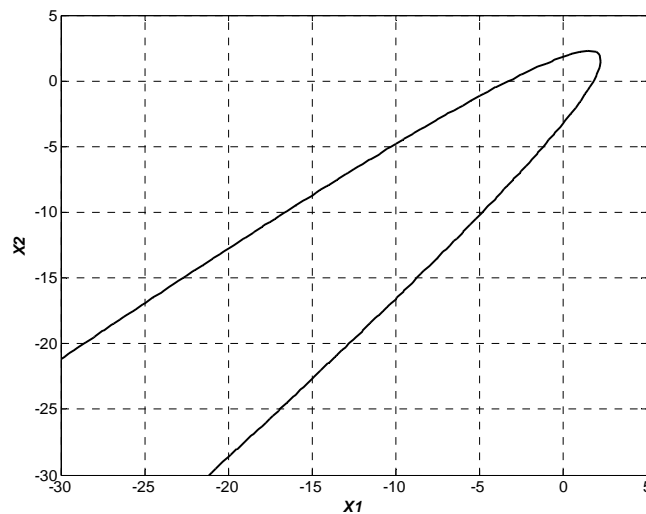


Figure 2.13. Domaine de défaillance concave

La principale difficulté de l'état limite selle réside dans la présence de deux points de conception et l'absence de termes croisés. MCIS fournit d'excellents résultats car le calcul de la probabilité de défaillance est correctement calculé sur les deux domaines de défaillance. F.O.R.M. donne un indice de fiabilité correct correspondant aux deux points de conception. Cependant, il n'y a pas convergence dans la mesure où l'algorithme oscille entre ces deux points. La probabilité de défaillance conduit à une sous-estimation de la probabilité de défaillance réelle de 50%. MSR opère correctement car elle ajuste une véritable quadratique avec termes croisés. L'indice fiabilité diffère du FORM (alors que l'état limite ajusté est le même que celui initial) en raison du fait que la probabilité calculée est au second ordre. Il diffère également de SORM, car le calcul de la probabilité est un calcul sur points d'ajustement (quadratique incomplète). Elle échoue donc à bien caractériser la probabilité de défaillance et donc l'indice généralisé. Pour conclure, S.V.M. avec noyau multiquadratique fournit de bien meilleurs résultats dans sa capacité à décrire l'état limite.

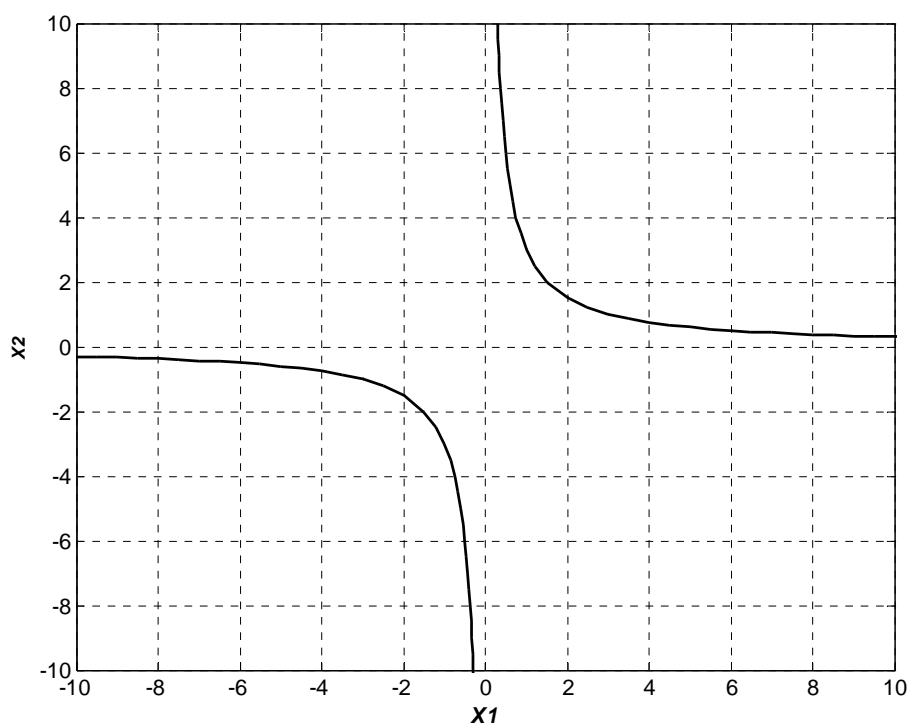


Figure 2.14. Surface selle

Tableau 2.7. Nombre d'appel de la fonction d'état limite par technique

	MSR	MCIS	MCCS
(1) Avec un seul terme quadratique	9	500	1453
(2) Avec dix termes quadratiques	2071	500	500
(3) Domaine de défaillance convexe	9	500	1554
(4) Surface selle	18	500	1554
(5) Domaine de défaillance concave	9	65000	1811
(6) Système en série	27	10000	10000
(7) Système en parallèle	172	5000	5000

L'exemple de système en série consiste en l'union de 4 états limites. FORM n'est pas approprié pour ce genre de problème mais procure un indice raisonnable, un peu par chance, sans qu'il y ait cependant convergence au terme de 1000 itérations. SORM n'est donc pas

opérante en raison de la non convergence de l'algorithme de Rackwitz. MCIS procure d'excellents résultats. S.V.M. ne converge pas alors que MSR procure de bons résultats.

Le cas du système parallèle conduit à des conclusions identiques pour FORM et SORM. PSM et MCIS procurent de bons résultats. S.V.M. a été utilisée avec un noyau multiquadratique inverse et pour un jeu d'entraînement pertinent fournit des résultats encourageants (5%). MSR permet relativement aisément d'accéder à un indice avec une erreur raisonnable (7%).

Dans ce benchmark, l'algorithme proposé est mieux adapté à traiter les unions. Par ailleurs, la convergence de l'algorithme proposé peut être mise en difficulté quand un état limite donné comporte une combinaison de critères comme le cas d'état limite selle ou concave.

Tableau 2.8. Comparaison des indices de fiabilité obtenus par différentes méthodes

Etat limite / Méthode	1	2	3	4	5	6	7
Calcul exact	3,46	2,98	2,63	2,34	1,26	2,85	3,52
MSR	3,46**	2,99**	2,58***	2,44***	1,49***	2,87**	3,84*
FORM	3,47	3,20	2,50	2,37 <sup>+</sup>	1,65 <sup>+</sup>	2,66	1,64 <sup>++</sup>
MCIS	3,46	3,00	2,64	2,31	1,26 <sup>+</sup>	3,87	3,66
SORM	3,47	2,94	2,62	1,96	1,63 <sup>+</sup>	2,66	1,64 <sup>++</sup>
SVM	--	3,01	2,57	2,40	1,65	++	3,74
SSD	--	--	--	--	--	2,72	--
PSM	--	--	--	--	--	--	3,56

\*: surfaces de réponse linéaire avec plan d'expérience en étoile

\*\* : surfaces de réponse quadratique incomplète avec plan d'expérience composite centré

\*\*\*: surfaces de réponse quadratique complète avec plan d'expérience composite centré

+ : point au départ choisi aléatoirement

++ : pas convergence

-- : pas de calcul

## 2.4. Conclusions

Dans ce chapitre, un algorithme permettant la construction des surfaces de réponse, est proposé pour estimer l'indice de fiabilité d'une structure. Ceci implique de s'intéresser plus particulièrement à la région autour du point de conception de structure. Dans cet algorithme, le choix des termes du polynôme à prendre en considération, ainsi que la définition du plan d'expérience numérique ont été supposés préalablement choisis. Afin de construire le plan d'expérience dans l'espace gaussien, une transformation isoprobabiliste a été considérée.

La performance de l'algorithme de construction est appréciée par deux approches distinctes. D'une part, les critères liés directement à l'algorithme comme par exemple le type de surface de réponse, le type de plan d'expérience, l'influence du coefficient arbitraire  $h$  ont été considérés. D'autre part, les critères liés aux différentes techniques de la théorie de la fiabilité comme par exemple: la robustesse face à plusieurs points de conception, la capacité à traiter des unions et des intersections, le nombre de variables aléatoires ainsi que le cas des fortes courbures ont été abordés. La méthode par surface de réponse donne des résultats satisfaisants en terme d'indice de fiabilité avec un nombre satisfaisant d'appel à la fonction d'état limite, en introduisant une surface de défaillance globale. Dans le benchmark proposé, il est possible de constater que la convergence de la méthode des surfaces de réponse peut être mise en difficulté en rencontrant une combinaison de critères dans un seul état limite. En ce qui concerne les problèmes de fiabilité des systèmes, les résultats obtenus pour un système en série sont beaucoup plus proches du résultat exact par rapport au cas de système en parallèle. Cette démarche a permis d'évaluer les capacités et les limites de l'algorithme proposé en terme d'estimation de l'indice de fiabilité.

Cet algorithme a été finalement intégré dans la boîte à outils ReliabTbx. La réponse de chaque expérience numérique est estimée par un appel du code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC©. De plus amples détails relatifs au couplage mécano-fiabiliste sont données dans le chapitre suivant.

**CHAPITRE 3**

**COUPLAGE MECANO-FIABILISTE**  
**APPLICATION AUX OUVRAGES COMPLEXES**

**3.1. Introduction**

Les techniques classiques de la théorie de la fiabilité permettent aujourd'hui de calculer de diverses manières (méthodes de Monte-Carlo, méthodes FORM-SORM...) la probabilité de défaillance d'un mode de défaillance donné, sous réserve de disposer d'une caractérisation probabiliste des variables et d'un état limite explicite. C'est notamment ce que réalise la boîte à outils ReliabTbx développée au LCPC. Cependant, pour des ouvrages complexes (par exemple hyperstatiques ou présentant des comportements non linéaires), il est presque impossible de procurer des états limites explicites, la fonction d'état limite ne pouvant être évaluée que par des calculs, notamment aux éléments finis. Les méthodes combinant les techniques de fiabilité avec le calcul aux éléments finis sont appelées méthodes de fiabilité aux éléments finis (MFEF). Il est souvent indispensable de faire appel à la richesse de la méthode par éléments finis pour effectuer des études de fiabilité mécanique.

Si les techniques classiques de fiabilité restent de coûts de calcul raisonnable pour l'étude d'un mode de défaillance, elles deviennent vite prohibitives dans un calcul de structure complexe. Ainsi, considérons une structure modélisée par éléments finis au moyen de 50 éléments, le comportement mécanique de chaque élément étant décrit par une loi de comportement à 4 paramètres. A ce stade, le calcul va introduire 200 variables aléatoires pour caractériser le comportement mécanique de la structure. Si chaque élément supporte deux charges ponctuelles, cela rajoute 100 variables supplémentaires. Enfin, si les propriétés géométriques



sont elles-mêmes aléatoires, le nombre total de variables aléatoires peut atteindre très rapidement le millier. Ce nombre peut être évidemment réduit si certaines de ces variables sont totalement corrélées. Néanmoins, si l'on ajoute qu'un élément de structure peut présenter plusieurs modes de défaillance et que l'ouvrage introduit plusieurs mécanismes de ruine possibles, le calcul classique en fiabilité n'est alors accessible qu'au prix de longs temps de calcul. Avec 1000 variables, les méthodes d'intégration numérique pour le calcul de la probabilité de défaillance sont inconcevables. Les simulations de Monte-Carlo impliqueraient au moins  $5 \times 10^6$  calculs aux éléments finis (pour approcher de manière correcte une probabilité de défaillance de  $10^{-4}$ ), et la méthode FORM environ  $10^4$  calculs.

Afin de ramener le nombre d'évaluations de la fonction d'état limite à un niveau raisonnable, la méthode par surfaces de réponse (MSR) est utilisée (voir chapitre 2). Nous rappelons ici que cette approche consiste à construire *artificiellement* la fonction d'état limite en utilisant un polynôme ajusté aux résultats d'un nombre limité de calculs aux éléments finis. Cette fonction peut alors être utilisée pour évaluer la probabilité de défaillance au moyen de techniques classiques de fiabilité. L'objectif de ce chapitre est de montrer l'efficacité du couplage effectué entre la méthode par surfaces de réponse et un code de calcul aux éléments finis au travers de quelques exemples d'application.

### 3.2. Principe du couplage mécano-fiabiliste

Comme mentionné dans le chapitre 2, la fonction d'état limite a priori inconnue dans le cas d'ouvrages complexes est remplacée par une fonction explicite qui représente la surface de défaillance de l'ouvrage au voisinage du point de conception. L'algorithme de construction d'une telle approximation par la technique dite de surfaces de réponse (figure 2.10) avec les diverses variantes de plan d'expérience a été mis en œuvre au sein de la boîte à outils ReliabTbx. Cette dernière fait appel au code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC©, pour la réalisation des expériences numériques. Il s'agit donc d'une communication entre le code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC© et la boîte à outils en fiabilité ReliabTbx au travers de réalisations effectuées pour chaque variable dans le plan d'expérience. Chaque ligne du plan d'expérience (équation 2.5) est un jeu de données pour les calculs aux éléments finis. Supposons un plan d'expérience en étoile présenté dans la section 2.2.3 qui se présente sous la forme d'une matrice de la dimension de  $(2n+1) \times n$ . Cela nous conduit à lancer  $2n+1$  calculs élément finis pour évaluer  $2n+1$  réponses. Les réponses peuvent être les résultats

sortants d'un modèle mécanique, telles que des contraintes, les déformations, les déplacements et ... selon les sollicitations exigées. Les réponses estimées par le code de calcul sont ensuite utilisées pour estimer les coefficients du polynôme à chaque itération. Une fois que la surface de défaillance explicite est obtenue, nous estimons le point de conception  $X_d$  en utilisant l'algorithme de Rackwitz-Fiessler. Dans cette étape, le code de calcul est appelé à nouveau en estimant  $g(X_d)$  afin de résoudre l'interpolation linéaire présentée dans l'équation 2.10 [Mohammadkhani, 2007a].

Afin de réaliser ce couplage, un fichier intermédiaire est indispensable. Ce fichier prend en compte les trois étapes suivantes :

- a) la modélisation des paramètres d'entrées pour le modèle mécanique concerné. Ces paramètres peuvent être les variables modélisant les données géométriques ou les propriétés des matériaux et de chargement ;
- b) le lancement du code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC© ;
- c) l'estimation de la réponse en utilisant la fonction de performance suivante :

$$g(\{X\}) = R(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) - S(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \quad (3.1)$$

$R$  et  $S$  dans cette équation sont les résultats d'un modèle mécanique.  $R$  représente la valeur acceptable, telle que la résistance ultime, la limite d'élasticité, la déformation limite et ....  $S$  représente la sollicitation, telle que la contrainte, la déformation, le déplacement... Le vecteur  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  explicité auparavant est un jeu de données pour lancer le code de calcul sur le modèle mécanique concerné. L'indice  $i$  représente les lignes de la matrice du plan d'expérience et  $n$  le nombre des variables aléatoires.

La convergence fiabiliste est fixée par un critère de convergence  $|\beta_k - \beta_{k-1}| < \varepsilon_{tol}$ . La convergence mécanique est obtenue par la méthode des contraintes initiales avec une tolérance de convergence  $\varepsilon'_{tol}$ . Les deux valeurs de tolérances dépendent de plusieurs paramètres surtout du modèle mécanique défini dans le code de calcul aux éléments finis et du modèle probabiliste défini dans la boîte à outils en fiabilité.

### 3.2.1. Code de calcul aux élément finis

Le code de calcul CESAR-LCPC© est un programme général de calcul utilisant la méthode des éléments finis, particulièrement adaptée à la résolution des problèmes en génie civil : calcul des structures, mécanique des sols, thermique et etc. [Humbert, 1987].

Afin de modéliser les ouvrages en deux et en trois dimensions nous avons utilisé respectivement «Cleo 2D» et «Cleo 3D» en version 4.0 de CESAR. Le programme de calcul CESAR effectue la résolution numérique du problème posé où on peut trouver les différents modules d'exécution spécialisés pour un type de problème donné, par exemple élasticité linéaire, élastoplasticité, lois d'interface, dynamique.... Ces modules comprennent des algorithmes adaptés au problème à résoudre. En particulier, le module MCNL (Mécanique de comportement non linéaire) a été utilisé. Ces modules font appel à la bibliothèque des familles des éléments finis du programme.

### **3.2.1.1. Familles des éléments finis**

En particulier, les familles des éléments finis suivantes ont été utilisées :

éléments isoparamétriques bidimensionnels à 6 et à 8 nœuds ;

éléments isoparamétriques tridimensionnels à 6 et à 8 nœuds ;

éléments poutre multifibre 3D à 2 nœuds.

La modélisation des ouvrages en utilisant des éléments massifs nécessite des stockages et des temps du calcul importants. Dans ce rapport, afin de modéliser les sections de poutre en béton armé ou en béton précontraint, l'élément poutre multifibre [Ulm, 1996] a été utilisé. En considérant l'élément poutre multifibre, il est possible d'effectuer des calculs non-linéaires tridimensionnels de structures complètes en béton armé ou en béton précontraint avec des temps de calcul raisonnables. Les lois de comportement utilisées au niveau des fibres sont a priori les mêmes lois de comportement utilisées dans les approches locales où la modélisation fait appel à des éléments massifs.

Une section de poutre en béton armé ou précontraint est composée de plusieurs matériaux avec différentes lois de comportement et plusieurs positions géométriques au sein d'une section de forme quelconque. En raison de la simplicité de la géométrie de la poutre, la discrétisation est effectuée sur l'axe de référence et pour quelques paramètres de la section. La discrétisation consiste à découper la section en zones définies par rapport à l'axe de référence et leurs translatées sur la longueur de l'élément forment des fibres (figure 3.1).

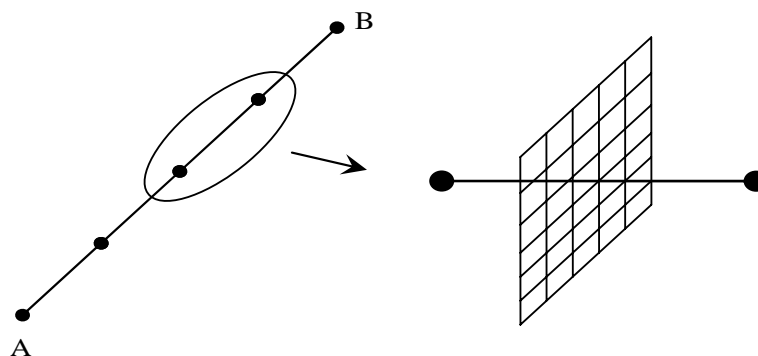


Figure 3.1. Eléments finis poutre multifibre

Cette approche de discrétisation par éléments finis est une approche semi-globale de discrétisation. Cette approche s'effectue à deux échelles distinctes: D'abord, à une échelle globale d'un élément de poutre tridimensionnel classique à deux nœuds et 6 degrés de liberté par nœud, ensuite, à une échelle locale qui est celle des fibres. Pour cette échelle, les non linéarités des matériaux sont caractérisées en utilisant des lois de comportement triaxiales. Les hypothèses cinématiques de la théorie des poutres permettent le passage des fibres à l'élément.

L'adhérence entre les fibres est supposée parfaite et il ne peut y avoir aucun glissement entre les fibres, ce qui signifie que l'état de déformation dans l'acier est uniquement lié à la rotation de la section. Par conséquent, la déformation moyenne dans le béton au voisinage immédiat de l'acier est proche de celle qui pourrait être mesurée dans la fibre en acier. En d'autres termes, deux points matériels, un dans l'acier et l'autre dans le béton, infiniment voisins à un instant donné, le restent après transformations (hypothèse de continuité).

### 3.2.1.2. Lois de comportement

Les familles des éléments finis font appel à la bibliothèque des lois de comportement. En particulier, la loi de comportement d'élasticité linéaire a été choisie afin de considérer le domaine élasticité des matériaux constitutifs de l'ouvrage. En ce qui concerne le critère de plasticité, quelques critères dans les matériaux constitutifs des structures en béton, béton armé ou précontraint ont été utilisés dans ce rapport. Le critère retenu pour l'acier est celui de Von-Mises. Ceux qui sont considérés pour le béton sont de type Willam-Warnke à trois paramètres

et de forme Parabolique. Ces critères sont brièvement détaillés dans les sections suivantes [Humbert, 1987] et [Ulm, 1996] :

### Critère de Von-Mises

Le critère de plasticité et le potentiel plastique s'écrivent en fonction des invariants du tenseur des contraintes,

$$F(\sigma) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \quad (3.2)$$

$$G(\sigma) = \sqrt{J_2} + \beta I_1 + cste \quad (3.3)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes physiques déterminées expérimentalement. Dans le cas où le matériau est standard,  $\alpha = \beta$  ;

$k$  est la contrainte maximale admissible en cisaillement simple ( $\alpha = 0$ ) ;

$J_2$  et  $I_1$  sont les invariants du tenseur des contraintes.

Dans le critère de Von-Mises,  $\alpha$  et  $\beta$  sont nuls. Donc, le modèle de Von-Mises se réduit à :

$$F(\sigma) = \sqrt{J_2} - k \quad (3.4)$$

avec  $k = \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_y$  et  $\sigma_y$ , la limite d'élasticité de l'acier en traction simple.

La surface représentative du critère Von-Mises dans l'espace des contraintes principales est montrée à la figure 3.2. Ce critère permet de rendre compte de manière pertinente du comportement de l'acier.

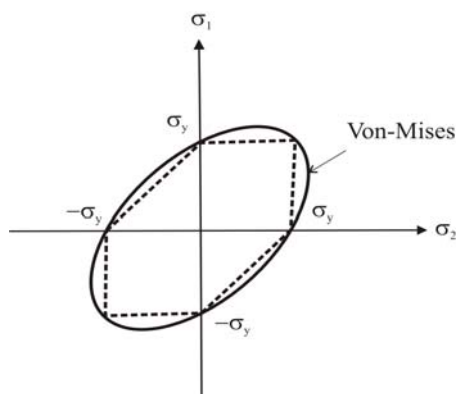


Figure 3.2. Critère de Von-Mises

### Critère Parabolique

Le critère de plasticité et le potentiel plastique s'écrivent en fonction des invariants du tenseur des contraintes :

$$F(\sigma) = J_2 + \left(\frac{f_c - f_t}{3}\right)I_1 - \frac{1}{3}f_c f_t = 0 \quad (3.5)$$

$$G(\sigma) = F(\sigma) = J_2 + \left(\frac{f_c - f_t}{3}\right)I_1 + cste \quad (3.6)$$

avec  $f_c$ , la résistance en compression simple et  $f_t$ , la résistance en traction simple.

La surface représentative du critère Parabolique dans l'espace des contraintes principales est présentée à la figure 3.3. Ce critère permet de rendre compte de manière pertinente du comportement du béton.

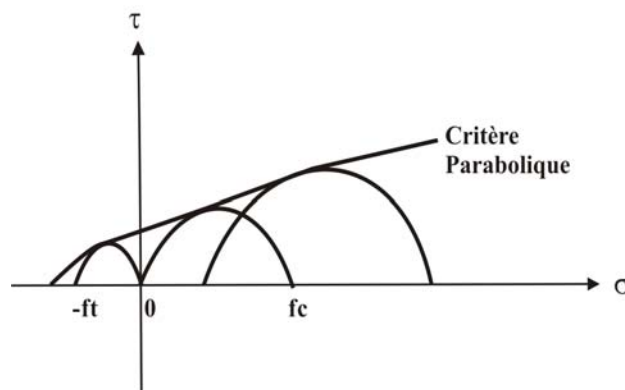


Figure 3.3. Critère parabolique

### Critère de Willam-Warnke à 3 paramètres

Ce critère a été proposé par Fauchet (1991) et peut être considéré comme un critère de Drucker-Prager adapté au béton, en tenant compte l'angle  $\theta$ . Ce critère s'écrit :

$$f(\sigma) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_0) \quad (3.7)$$

où  $f(\theta)$  est le coefficient de frottement qui varie en fonction de l'angle  $\theta$  entre deux bornes :

$f_c = f(60^\circ)$  : coefficient de frottement sur le méridien de compression,

$f_t = f(0^\circ)$  : coefficient de frottement sur le méridien de traction.

Les trois paramètres du modèle sont  $f_c$  et  $f_t$  et  $\rho_0$  se déduisent des trois caractéristiques mécaniques du béton : la résistance en compression simple, la résistance en traction simple et la résistance en compression biaxiale, selon les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_c = \frac{3f_c}{\sqrt{3} - f_c} \rho_0 & \text{si } f_c < \sqrt{3} \\ \sigma_c = \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma_t = \frac{3f_t}{\sqrt{3} + f_t} \rho_0$$

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = \frac{3f_t}{\sqrt{3} - 2f_t} \rho_0 & \text{si } f_t < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_{bc} = \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas où  $f_c = f_t$ , le critère de Willam-Warnke coïncide avec le critère de Drucker-Prager. Pour avoir une idée des valeurs de résistances, les valeurs de résistances obtenues par les essais de référence de Kupfer et al (1969) sont retenues. Les valeurs de référence sont les suivantes:  $f_c=1,3037$ ,  $f_t=0,7578$ ,  $\rho_0=0,1095$   $\sigma_c=1,0952\sigma_t$ .

L'ordre de grandeur du rapport entre ces différences caractéristiques mécaniques du béton est le suivant :

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \approx 0,1 \text{ et } \frac{\sigma_{bc}}{\sigma_c} \approx 1,15$$

La figure 3.4 montre schématiquement le critère de Willam-Warnke à 3 paramètres en compression simple et en traction simple.

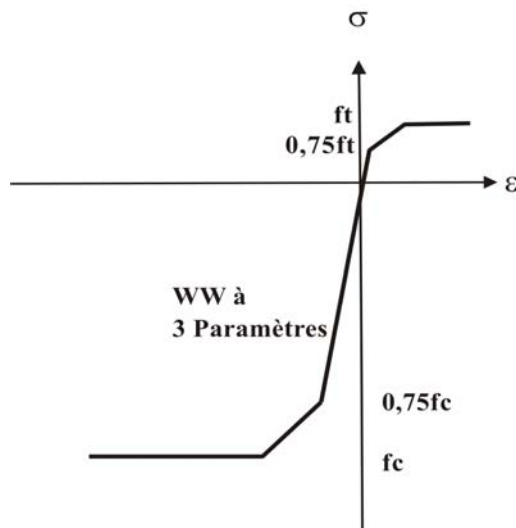


Figure 3.4. Critère de Willam-Warnke à 3 paramètres

### 3.2.1.3. Validation des modèles aux éléments finis

Afin de valider les modèles aux éléments finis effectués, les résultats obtenus par plusieurs modèles ont été comparés, soit avec la solution analytique, soit avec la solution obtenue de la

résistance des matériaux, soit avec les résultats numériques et expérimentaux obtenus par d'autres laboratoires.

### 3.3. Application aux modes de défaillance

#### 3.3.1. Poutre encastrée à comportement linéaire

Il s'agit d'une poutre encastrée de section rectangulaire soumise à une charge uniformément répartie (figure 3.5). L'exigence de performance de cette poutre consiste à vérifier que la flèche en extrémité libre reste inférieure au 325<sup>ème</sup> de la portée [Rajashekhar, 1993] et [Mohammadkhani-Shali, 2007a-b].

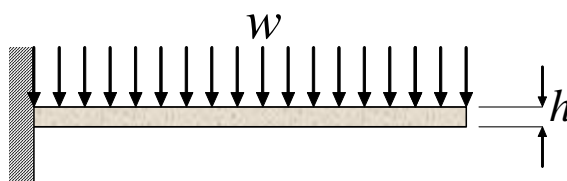


Figure 3.5. Poutre encastrée

La loi de comportement du matériau est élastique linéaire. Il est donc possible de vérifier la performance de cette poutre de deux façons différentes : la première consiste à appliquer les principes de la résistance des matériaux pour déduire de manière explicite la fonction d'état limite, tandis que la seconde consiste à réaliser une modélisation aux éléments finis de cette poutre. Dans le premier cas, les surfaces de réponse déterminées vont tenter d'approcher la fonction d'état limite explicite. Dans le second cas, il s'agit de réaliser un véritable couplage entre les méthodes de la théorie de la fiabilité et les calculs aux éléments finis. Dans chacun des cas, diverses méthodes de surface de réponse sont appliquées. Par ailleurs, dans tous les cas, seules deux variables sont considérées comme aléatoires : le chargement uniformément réparti  $w$  et la hauteur de la poutre  $h$ . Les variables sont indépendantes et sont représentées par des lois lognormales avec les paramètres du tableau 3.1.

Tableau 3.1. Caractéristiques des variables (poutre encastrée)

Variable	Moyenne	Coefficient de variation
W	1000 Pa	0,2
H	0,2 m	0,15



La fonction d'état limite explicite, issue de la théorie de la résistance des matériaux, est donnée par l'expression 3.8 :

$$g(w, h) = -\frac{(wb)l^4}{8E \frac{bh^3}{12}} + \frac{l}{325} \quad (3.8)$$

dans laquelle  $w$ ,  $l$ ,  $b$ ,  $E$  et  $I$  sont respectivement le chargement, la longueur et la largeur de la poutre, le module d'élasticité et le moment d'inertie de la section. En considérant  $E=2,6 \times 10^4$  MPa,  $l=6$  m et  $b=1$  m, la fonction d'état limite se réduit à :

$$g(h, w) = 0,018467 - 7,476923 \times 10^{-8} \frac{w}{h^3} = 0 \quad (3.9)$$

La probabilité de défaillance peut être calculée analytiquement. Les paramètres utilisés pour une loi lognormale sont  $\lambda$  et  $\varepsilon^2$ . Ces paramètres sont définis par l'équation 3.10 :

$$\begin{cases} \lambda = m_{\ln x} = \mu_{\ln x} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 = \sigma_{\ln x}^2 = \ln(1 + CdV_x^2) \approx CdV_x^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Afin de réaliser ce calcul, une autre fonction d'état limite est utilisée en fonction des valeurs de  $\ln w$  et  $\ln h$ :

$$G(\ln w, \ln h) = \ln(0,018467) - \ln(7,476923 \times 10^{-8} \frac{w}{h^3}) \quad (3.11)$$

Cette équation se réduit à:

$$G(\ln w, \ln h) = 12,4168 - \ln(w) + 3\ln(h) \quad (3.12)$$

En utilisant l'équation 3.10, les valeurs moyennes des  $\ln w$  et  $\ln h$  sont obtenues de la manière suivante :

$\sigma_{\ln w} = 0,2$  et  $\sigma_{\ln h} = 0,15$  donc :

$$m_{\ln(w)} = \ln(1000) - \frac{1}{2}(0,2)^2 = 6,888$$

$$m_{\ln(h)} = \ln(0,2) - \frac{1}{2}(0,15)^2 = -1,621$$

L'indice de fiabilité est donc donné par :

$$\beta = \frac{12,416792 - m_{\ln w} + 3m_{\ln h}}{\sqrt{\sigma_{\ln w}^2 + 9\sigma_{\ln h}^2}} = \frac{0,6669}{0,4924} = 1,3544$$

Cette probabilité est également comparée avec celles obtenues par les méthodes classiques FORM et de Monte-Carlo en utilisant l'état limite explicite présenté dans l'équation 3.9. En

ce qui concerne à la méthode par surfaces de réponse, deux cas différents ont été étudiés. Dans un premier temps, cette probabilité est évaluée par la méthode des surfaces de réponse (MSR) avec deux types de surfaces (complet, incomplet) pour la fonction d'état limite explicite présentée dans l'équation 3.9. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.2. Il est possible d'observer une très bonne cohérence des résultats entre les deux types de surfaces de réponse étudiées par rapport à ceux fournis par le calcul exact, les méthodes FORM et Monte-Carlo.

Tableau 3.2. Comparaison des résultats (poutre encastree)

Méthode	Fonction d'état limite explicite	
	Probabilité de défaillance ( $\times 10^{-2}$ )	Indice de fiabilité ( $\beta$ )
Calcul exact	8,780*	1,3544
FORM	8,648	1,3627
Monte-Carlo (avec $10^5$ tirages)	8,599	1,3661**
MSR- polynôme incomplet ( $h=1$ )	8,553	1,3688
MSR- polynôme complet ( $h=1$ )	8,620	1,3645

\* Obtenu par  $P_f = \Phi(-\beta)$ , \*\* Obtenu par  $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$

Dans un deuxième temps, nous avons étudié un couplage entre la boîte à outils de fiabilité ReliabTbx et le code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC©. Afin de réaliser la modélisation par éléments finis de la poutre, un maillage bidimensionnel avec 20 éléments surfaciques rectangulaires à 8 nœuds a été utilisé. L'état limite choisi concerne le dépassement de la flèche en extrémité libre de la poutre. Cet état limite est traduit par l'équation suivante:

$$g(w, h) = \frac{l}{325} - \delta(w, h) \quad (3.13)$$

où  $\delta(w, h)$  est la flèche en extrémité libre de la poutre et  $l$  sa longueur.

La convergence a été obtenue en 4 itérations dans le cas du polynôme complet et en 6 itérations dans le cas du polynôme incomplet pour un critère de convergence  $|\beta_k - \beta_{k-1}| < \varepsilon_{tol}$  ( $\varepsilon_{tol} = 10^{-5}$ ). Les résultats sont présentés dans le tableau 3.3. Comme le montre ce tableau, il y a également une bonne concordance des résultats avec le couplage et ceux obtenus dans le cas d'une fonction d'état limite explicite.

Tableau 3.3. Comparaison des résultats (poutre encastree)

Méthode	Calculs aux éléments finis	
	Probabilité de défaillance ( $\times 10^{-2}$ )	Indice de fiabilité ( $\beta$ )
MSR- polynôme incomplet ( $h=1$ )	8,577	1,3672
MSR- polynôme complet ( $h=1$ )	8,645	1,3629

Ce qui est le plus remarquable dans ce couplage est d'avoir considéré la valeur de la hauteur de la poutre  $h$  comme une variable aléatoire. Ceci implique un changement de maillage pour chaque appel au code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC©. Afin de résoudre ce problème, il a été envisagé de modifier les coordonnées des nœuds correspondant au maillage dans la direction verticale de la poutre (la hauteur) pour chaque appel au code de calcul aux éléments finis, ce qui permet d'éviter les problèmes numériques liés au maillage.

### 3.3.2. Application aux ponts bipoutres mixtes

Les ponts bipoutres mixtes sont réputés pour leurs qualités esthétiques et économiques et rencontrent un grand succès chez les maîtres d'ouvrages depuis ces vingt dernières années.

Dans cette section, le cas d'un pont bipoutre mixte avec cinq entretoises soumis aux charges de poids propre et aux charges routières est considéré [Mohammadkhani, 2005]. La longueur du pont est de 20 mètres et la largeur du tablier est de 10 mètres. Par ailleurs, la hauteur du tablier n'est pas constante et varie entre 20 et 40 cm et la distance entre deux poutres est de 5 mètres. La géométrie de la section des poutres et des entretoises ainsi que les caractéristiques géométriques de la structure du pont sont définies respectivement dans les figures 3.6 et 3.7 et dans les tableaux 3.4 et 3.5. Deux lignes de circulation sont considérées, une pour les véhicules légers, et une autre pour les poids lourds. La poutre « A » montrée dans la figure 3.7 est la poutre *la plus critique* car sous la charge du trafic le plus lourd. Un maillage tridimensionnel de la structure a été élaboré, tenant compte du comportement non linéaire de la dalle en béton et des poutres métalliques. 1012 éléments volumiques tridimensionnels à 6 et à 8 nœuds ont été utilisés.

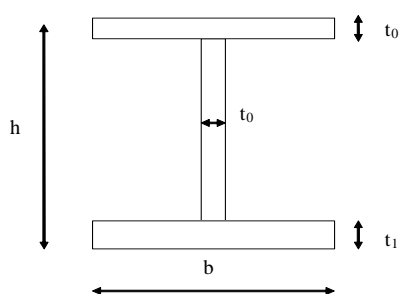


Figure 3.6. Section des poutres et des entretoises

Tableau 3.4. Géométrie de la section des poutres

h (cm)	b (cm)	t <sub>1</sub> (cm)	t <sub>0</sub> (cm)
98,50	60,00	3,00	1,50

Tableau 3.5. Géométrie de la section des entretoises

h (cm)	b (cm)	t <sub>1</sub> (cm)	t <sub>0</sub> (cm)
40,00	30,00	1,00	1,00

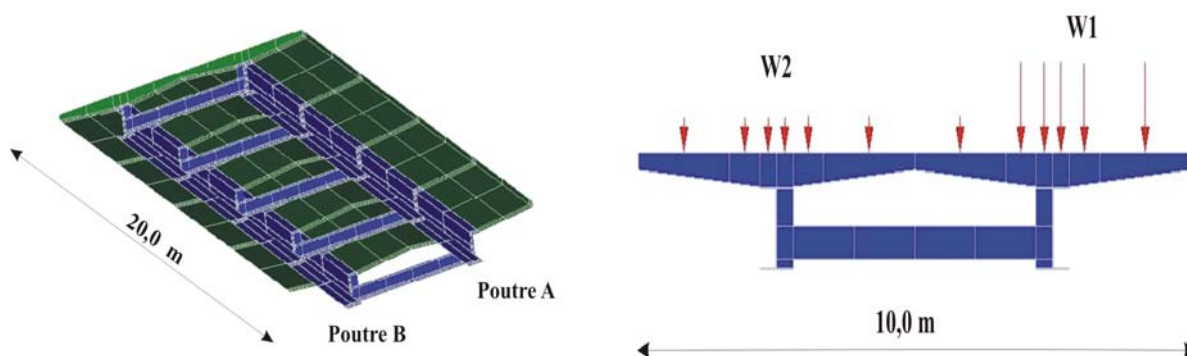


Figure 3.7. Modélisation tridimensionnelle du bipoutre mixte

Le béton de la dalle a été modélisé par une loi de comportement élastoplastique (modèle Willam-Warnke à 3 paramètres). Les valeurs des paramètres du modèle du béton sont précisées dans le tableau 3.6.

Tableau 3.6. Caractéristiques des paramètres du modèle élastoplastique du béton

Paramètre	Valeur
Module d'Young	$E=3 \times 10^4$ MPa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,15$
Résistance en compression	$f_c = 20$ MPa
Résistance en traction	$f_t = 2$ MPa
Résistance en compression biaxiale	$f_{bc}=23$ MPa
Paramètre définissant le seuil de plasticité initial du béton	$Z_0 = 0,75$
Paramètre définissant le seuil de plasticité ultime du béton	$Z_u = 1,00$
Facteur exponentiel d'érouissage	$k = 0$

Pour l'acier des poutres, une loi élastoplastique uniaxiale de Von-Mises a été introduite. Les valeurs utilisées pour les paramètres de cette loi sont la résistance en traction simple  $\sigma_y = 332$  MPa, le module d'Young  $E = 2,1 \times 10^5$  MPa, le coefficient de Poisson  $\nu = 0,25$  et la résistance en cisaillement simple  $K = 192$  MPa.

Les variables considérées comme aléatoires sont les chargements de la voie rapide et de la voie lente, le module d'élasticité et la densité volumique du béton (tableau 3.7). Les valeurs des charges du trafic sont celles définies dans l'eurocode [Calgaro, 1996]. Elles ont cependant été modifiées afin de tenir compte de l'effet d'amplification dynamique. Par ailleurs, toutes les variables sont indépendantes et sont modélisées par des lois lognormales.

Tableau 3.7. Caractéristiques des variables aléatoires (bipoutre mixte)

Variable	Moyenne	CdV*
W1	9 KPa	0,3
W2	2,5 KPa	0,3
$E_c$	$3 \times 10^4$ MPa	0,2
$\rho_c$	$2,5 \times 10^3$ MPa	0,1

\*: Coefficient de variation

L'état limite choisi est le dépassement de la limite d'élasticité admissible dans les poutres métalliques au niveau de la semelle inférieure à mi-travée du pont :

$$g(W_1, W_2, E_c, \rho_c) = \sigma_y - \sigma_{\max}(W_1, W_2, E_c, \rho_c) = 0 \quad (3.14)$$

où  $\sigma_y = 0.6 f_y$  selon de l'eurocode ( $f_y$  est la limite élastique de l'acier).

En utilisant les surfaces de réponse de type linéaire et polynomial incomplet, l'algorithme converge en 5 itérations pour une tolérance de convergence de  $10^{-3}$ , ce qui correspond à une cinquantaine d'appels du code de calcul CESAR-LCPC©. Les probabilités de défaillance sont ainsi évaluées dans la semelle inférieure à mi-travée des poutres « A » et « B ». Les probabilités de défaillance calculées sont au 1<sup>er</sup> ordre (FORM-  $P_f = \Phi(-\beta)$ ).

Tableau 3.8. Indice de fiabilité et probabilité de défaillance (1<sup>er</sup> ordre) des poutres A et B

	Probabilité de défaillance	Indice de la fiabilité
Poutre A	$9,111 \times 10^{-7}$	4,772
Poutre B	$1,576 \times 10^{-14}$	7,593

Comme le montre le tableau 3.8, la probabilité de défaillance la plus importante est celle associée à la plastification de la semelle inférieure à mi-travée de la poutre « A », qui supporte la charge de trafic la plus lourde.

La sensibilité du modèle aux caractéristiques des matériaux est maintenant étudiée dans la poutre la plus défavorable au travers de deux études. Dans un premier temps, trois types de valeurs pour la résistance en traction simple de l'acier sont considérés. Les résultats obtenus montrent que l'indice de fiabilité de la poutre « A » augmente avec la résistance en traction de l'acier (tableau 3.9).

Tableau 3.9. Influence de la résistance en traction simple de l'acier sur l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance de la poutre « A »

$F_y$ (MPa)	Probabilité de défaillance	Indice de la fiabilité
332	$9,111 \times 10^{-7}$	4,772
409	$1,467 \times 10^{-8}$	5,546
486	$4,019 \times 10^{-10}$	6,145

Dans un deuxième temps, l'influence des caractéristiques mécaniques du béton sur la fiabilité du pont est analysée. Trois valeurs de la résistance en compression du béton sont alors considérées. Les résultats obtenus montrent que l'indice de fiabilité augmente avec la

résistance en compression du béton (tableau 3.10), cette influence restant cependant inférieure à celle de la résistance en traction de l'acier.

Tableau 3.10. Influence de la résistance en compression du béton sur l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance de la poutre « A »

$f_c$ (MPa)	Probabilité de défaillance	Indice de la fiabilité
20	$9,111 \times 10^{-7}$	4,772
30	$2,595 \times 10^{-7}$	5,019
40	$1,541 \times 10^{-7}$	5,119

Deux cas particuliers des tableaux 3.9 et 3.10 sont comparés. Ces deux cas sont présentés dans le tableau 3.11. Les résultats obtenus sont pertinents pour choisir une combinaison efficace du béton et de l'acier afin d'augmenter la fiabilité et la sécurité des ponts bipoutres mixtes. Bien évidemment, cette combinaison particulière est une proposition permettant d'augmenter la sécurité des ponts bipoutres mixtes. Elle ne tient pas compte de problématiques relatives au coût de conception qui interviennent également.

Tableau 3.11. Comparaison de deux cas particuliers

	$F_y$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\beta$	$P_f$
Cas 1	332	40	5,119	$1,541 \times 10^{-7}$
Cas 2	486	20	6,145	$4,019 \times 10^{-10}$

### 3.4. Application à des cas réels

Afin de valoriser l'efficacité de la méthode par surfaces de réponse, deux exemples d'application présentant des résultats expérimentaux connus ont été considérés.

#### 3.4.1. Etude de la corrosion dans la poutre de la Rance:

En 1961, l'union technique interprofessionnelle des fédérations nationales du bâtiment et des travaux publics lance un projet de recherche impliquant 80 poutres visant à caractériser la dégradation de structure en béton armé et précontrainte après un vieillissement en milieu marin. La fabrication des poutres est alors réalisée au CEBTP. En 1962, une moitié de ces poutres est exposée sur le site EDF de la Rance et l'autre moitié au large du port de Marseille. En 1976 les poutres de la Rance sont déplacées au port st. Anne de Portzic (Centre IFREMER de Brest) dans la zone de marnage (figure 3.8). En 2000, le CEBTP récupère 20 poutres

précontraintes qui font l'objet d'une étude approfondie dans le cadre du projet de Benchmark [BMC\_Rance, 2004].



Figure 3.8. Poutres de la Rance

Dans ce paragraphe, le cas du chargement à la rupture d'une de ces poutres sous deux charges ponctuelles est considéré. Les caractéristiques géométriques de la section de la poutre sont présentées dans la figure 3.10. Il s'agit de dix barres d'acier passif, l'aire de chaque barre étant de  $28,25 \text{ mm}^2$  et de deux barres d'acier actifs, l'aire de chaque barre étant de  $33,50 \text{ mm}^2$ . Afin de simplifier la modélisation au sein du code de calcul aux éléments finis, les éléments poutres multifibres sont utilisés. Cette poutre est alors modélisée avec 9 éléments de poutre multifibre. Ces éléments sont constitués de 5 groupes de caractéristiques géométriques différentes selon le plan de ferrailage. Chaque élément est constitué de 117 fibres dont 110 en béton, six en acier passif et une en acier actif.



Le chargement comporte deux phases : la première phase consiste en la mise en précontrainte avec activation du poids propre et la deuxième phase consiste en l'application des charges ponctuelles  $W$  symétriques, incrémentées jusqu'à la ruine (figure 3.9).

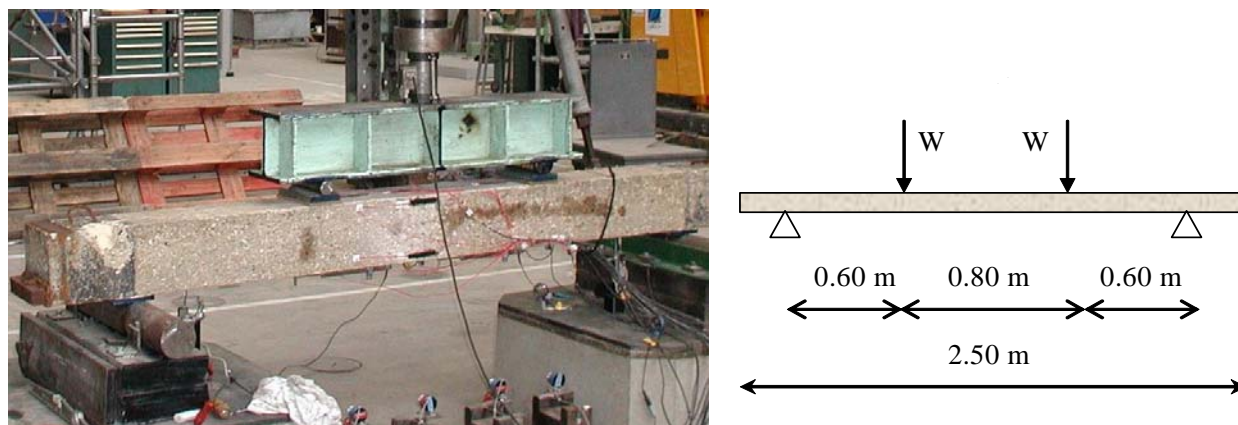


Figure 3.9. Profil de chargement de poutre

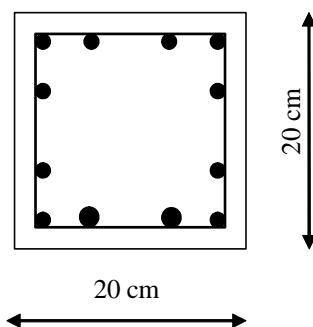


Figure 3.10. Section de poutre

Le comportement du béton de la poutre est modélisé à l'aide d'une loi de type élastoplastique (modèle Willam-Warnke à 3 paramètres). Les valeurs des paramètres du modèle du béton sont précisées dans le tableau 3.12.

Tableau 3.12. Caractéristiques des paramètres du modèle élastoplastique du béton

Paramètre	Valeur
Module d'Young	$E=3,04 \times 10^4$ MPa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,20$
Résistance en compression	$f_c = 47,1$ MPa
Résistance en traction	$f_t = 3,5$ MPa

Résistance en compression biaxiale	$f_{bc}=55,0$ MPa
Paramètre définissant le seuil de plasticité initial du béton	$Z_0 = 0,75$
Paramètre définissant le seuil de plasticité ultime du béton	$Z_u = 1,00$
Facteur exponentiel d'écrouissage	$k = 0$

Pour les aciers passif et actif, une loi élastoplastique uniaxiale de Von-Mises est utilisée. Les valeurs utilisées pour les paramètres de cette loi pour l'acier passif sont la résistance en traction simple  $\sigma_y=309$  MPa, le module d'Young  $E_s=2,0\times 10^5$  MPa, le coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et la résistance en cisaillement simple  $K=178,4$  MPa. Dans le cas de l'acier actif, les valeurs sont la résistance en traction simple  $\sigma_y=1304$  MPa, le module d'Young  $E_s=2,0\times 10^5$  MPa, le coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et la résistance en cisaillement simple  $K=753$  MPa.

Par ailleurs, étant donné que cette poutre a subi 40 ans d'exposition à l'environnement marin, sa corrosion ne peut pas être considérée comme uniforme avec la longueur de la poutre [Mohammadkhani, 2007c-d]. Cinq domaines différents sont donc étudiés dans la poutre pour tenir compte des incertitudes liées à la variation spatiale des propriétés du béton (Figure 3.11).



Figure 3.11. Domaines considérés dans la poutre

Les variables considérées comme aléatoires sont la force de précontrainte qui est modélisée par une loi lognormale. La résistance en traction du béton est modélisée par une loi normale.

Tableau 3.13. Caractéristiques des variables aléatoires (Poutre de la Rance)

Paramètres	Loi de distribution	Moyenne	CDV*
$F_{pr}$	Lognormale	59,4 kN	0,10
$f_{t1}\dots f_{t5}$	Normale	3,5 MPa	0,30
$E_{c1}\dots E_{c5}$	Lognormale	30,4 GPa	0,15
$f_{c1}\dots f_{c5}$	Lognormale	47,1 MPa	0,10
W	Déterministe	14,0 kN	-----

\*Coefficient de variation

Le module d'élasticité et la résistance en compression du béton sont modélisés par des lois lognormales. Le module d'élasticité, la résistance en traction et la résistance en compression du béton sont considérés corrélés avec un coefficient de corrélation de 0,9 dans les cinq domaines différents de la poutre. Il s'agit donc de seize variables aléatoires qui sont présentés dans le tableau 3.13.

Comme une aptitude au service médiocre est liée très souvent aux déformations excessives des différents éléments structuraux d'un pont et que ces déformations peuvent engendrer divers sortes de désordres difficilement réparables et coûteux, l'état limite considéré et le déplacement à mi-porté de la poutre :

$$g(F_{pr}, f_{t1} \dots f_{t5}, E_{c1} \dots E_{c5}, f_{c1} \dots f_{c5}) = \delta_y - \delta_i(F_{pr}, f_{t1} \dots f_{t5}, E_{c1} \dots E_{c5}, f_{c1} \dots f_{c5}) = 0 \quad (3.15)$$

où  $\delta_y$  est la déformation maximum (4,5 mm), et  $\delta_i$  est la déformation verticale dans chaque élément.

Dans le cas où les surfaces de réponse du type linéaire et polynomiale incomplète sont utilisées, l'algorithme converge après 6 itérations, soit 400 appels au code de calcul CESAR-LCPC©, ceci pour une tolérance de convergence de  $\varepsilon_{tol} = 10^{-3}$ . Les résultats obtenus pour la probabilité de défaillance (1<sup>er</sup> ordre-  $P_f = \Phi(-\beta)$ ) et l'indice de la fiabilité dans la poutre pour le temps initial de la corrosion sont présentés dans le tableau 3.14.

Tableau 3.14. Résultats obtenus avant corrosion	
Probabilité de défaillance	Indice de fiabilité
4,583×10 <sup>-12</sup>	6,8199

Les coordonnées du point de conception obtenues par surfaces de réponse sont présentées dans le tableau 3.15. Les valeurs absolues des cosinus directeurs des variables aléatoires sont présentées dans la figure 3.12. Cette figure montre l'importance des variables dans le modèle probabiliste de la poutre. La force de précontrainte, la résistance en traction et le module d'élasticité du béton ont une grande influence dans le modèle probabiliste de cette poutre et pour l'état limite de service considéré. Au contraire la résistance en compression du béton n'a pas beaucoup d'influence sur le modèle probabiliste. Il est possible d'observer également que la résistance en traction du béton, dans le domaine III de la poutre, a la plus grande influence sur le modèle probabiliste parmi les variables aléatoires présentées dans le tableau 3.15. Il n'y a pas symétrie des résultats (domaine II/domaine IV, domaine I/domaine V) en raison de

conditions aux limites différentes (blocage vertical seul pour un appui, blocage vertical et longitudinal pour l'autre).

Tableau 3.15. Coordonnées du point de conception

	$F_{pr}$ (kN)	$E_c$ (GPa)	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)
Domaine I		30,064	46,830	3,465
Domaine II		28,283	46,821	2,630
Domaine III	68,20	26,415	46,816	1,031
Domaine IV		26,936	46,811	1,197
Domaine V		27,940	46,809	2,072

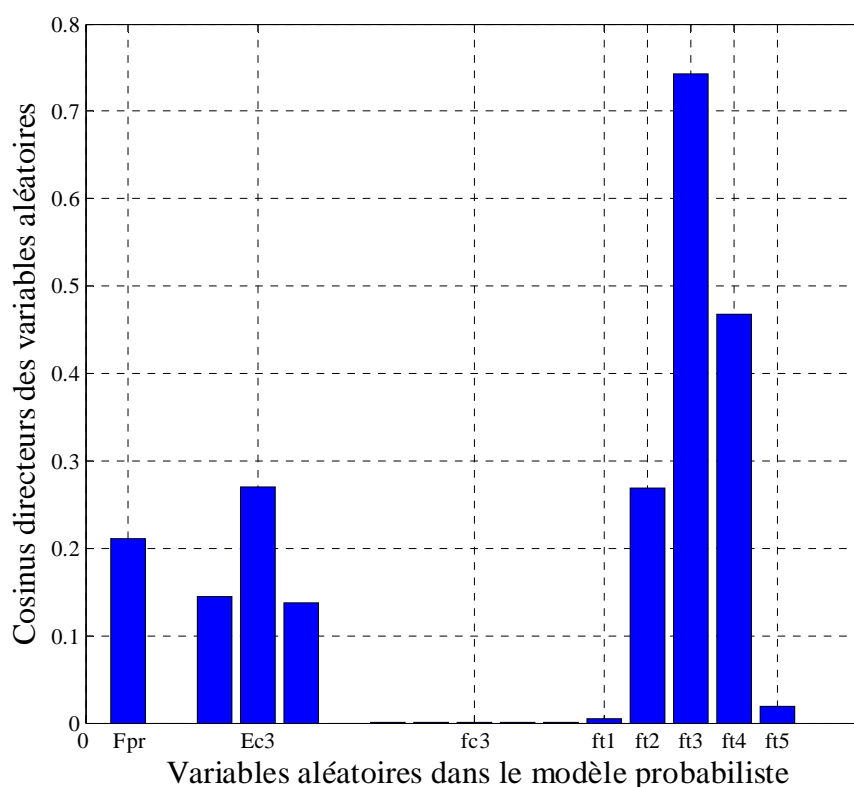


Figure 3.12. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires

Si on augmente la charge jusqu'à 30 kN, la probabilité pour laquelle la flèche à mi-travée de la poutre dépasse la limite de 4,5 mm, est égale à 1 ce qui signifie qu'à cette charge, il y a

100% de la chance que la flèche à mi-travée de la poutre dépasse la valeur limite. La figure 3.13 présente alors la probabilité de défaillance en fonction de la charge.

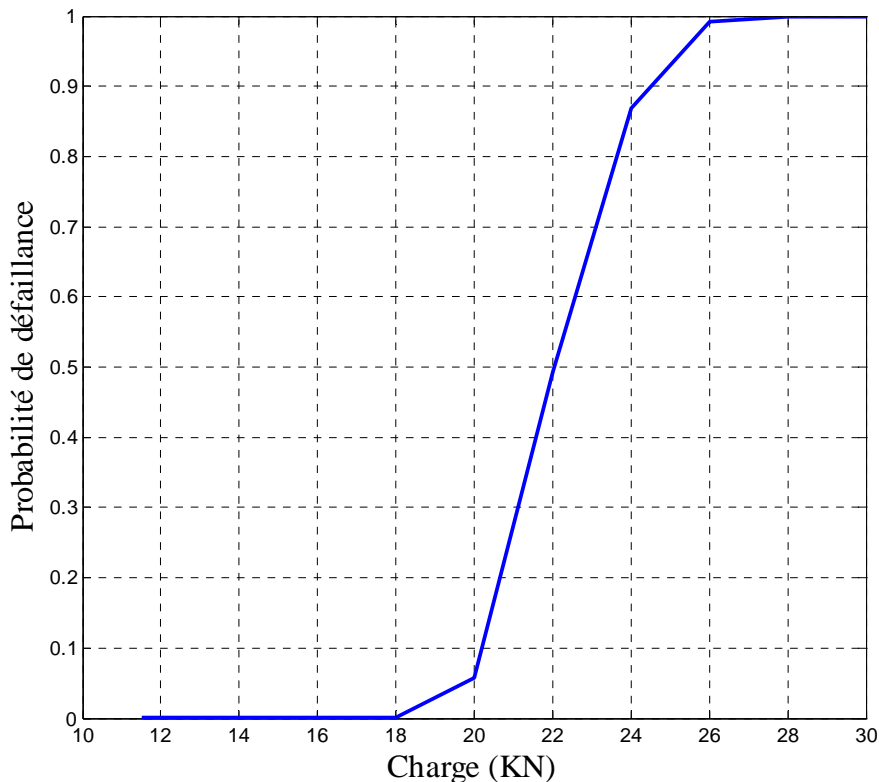


Figure 3.13. Probabilité de défaillance en fonction de la charge

### 3.4.1.1. Calcul des intervalles de confiance

Les fonctions de répartition du déplacement à mi-travée sous certaines charges sont recherchées ici ; les charges  $W=14$  kN, 20 kN et 26 kN sont considérées. La fonction de répartition du déplacement est donnée dans la figure 3.14. Afin d'obtenir une fonction de répartition, on fait varier la valeur de la flèche limite  $\delta y$  et la probabilité pour laquelle la flèche à mi-travée de poutre dépasse de la flèche limite est à chaque fois estimée. Tracer des courbes de fonction de répartition a pour objectif d'obtenir les intervalles de confiance du modèle correspondant aux valeurs de la flèche pour les fractiles de 5% et 95%, la valeur médiane qui correspond à la valeur de la flèche pour le fractile de 50%, et enfin la valeur moyenne qui est donnée par l'expression suivante (voir figure 3.15) :

$$x_{moyenne} = x_1 F(x_1) + \sum_{i=2}^n x_i (F(x_i) - F(x_{i-1})) \quad (3.16)$$

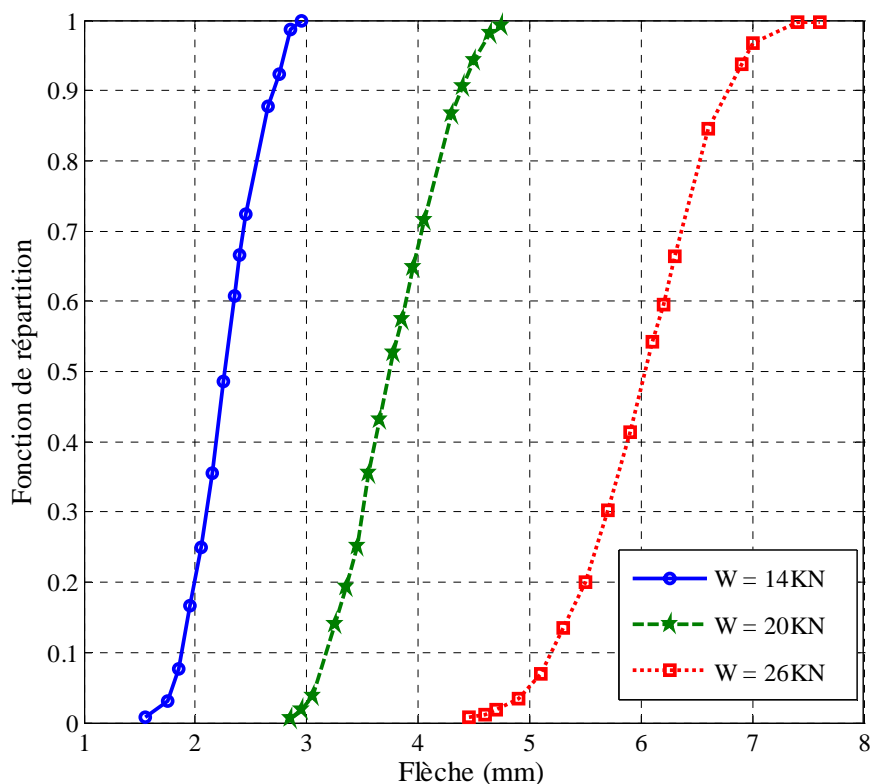


Figure 3.14. Fonction de répartition pour les charges données

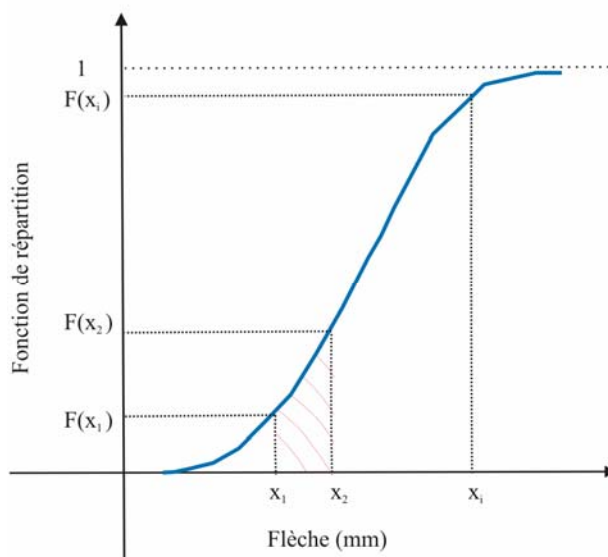


Figure 3.15. Obtention de la valeur moyenne de la flèche par la fonction de répartition

La figure 3.16 compare les courbes flèche\chargement à mi-travée de la poutre obtenues par les essais expérimentaux et par les simulations numériques effectuées par différents laboratoires en France. Notons que ces simulations sont basées soit sur le principe des calculs

analytiques (LML et LMDC), soit sur la modélisation par éléments finis en utilisant des éléments volumiques en 3D (Oxand) ou des éléments poutres multicouches (GeM). A l'exception d'une seule approche (LML), l'ensemble des techniques sous-estiment la rigidité de la poutre, mais fournissent toutes des résultats concordants. L'intervalle de confiance identifié contient l'ensemble des simulations (hors LML).

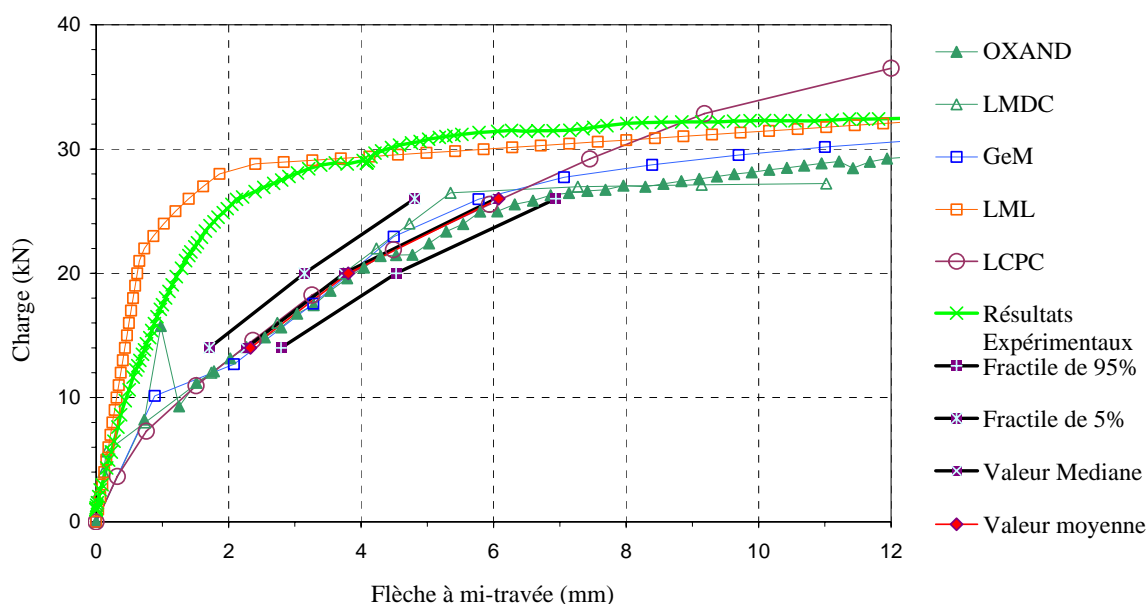


Figure 3.16. Comparaison des résultats obtenus par les différents laboratoires

### 3.4.1.2. Influence de corrélation sur les incertitudes du modèle

L'objectif est ici de mettre en évidence l'influence de la corrélation sur les incertitudes du modèle. Pour cela, d'une part le modèle probabiliste présenté dans le tableau 3.15 est considéré avec des variables aléatoires corrélées avec un coefficient de corrélation égal à 0,9 et d'autre part avec des variables aléatoires indépendantes. L'intervalle de confiance pour ces deux modèles est présenté à la figure 3.17. Il apparaît que celui obtenu avec des variables corrélées est bien plus petit que celui obtenu avec des variables indépendantes. En d'autres termes, la marge est très proche de celle obtenue dans le cas déterministe, en considérant la corrélation entre les variables aléatoires des caractéristiques mécaniques du béton de la poutre. Il y a par ailleurs une bonne adéquation entre ces résultats et ceux présentés dans la section 3.4.1.1. Notons que les résultats obtenus pour le modèle probabiliste avec des variables indépendantes ont été comparés avec la méthode par machines à vecteurs supports (MVS). Il est de plus possible d'observer une très bonne concordance entre les deux approches MSR et MVS.

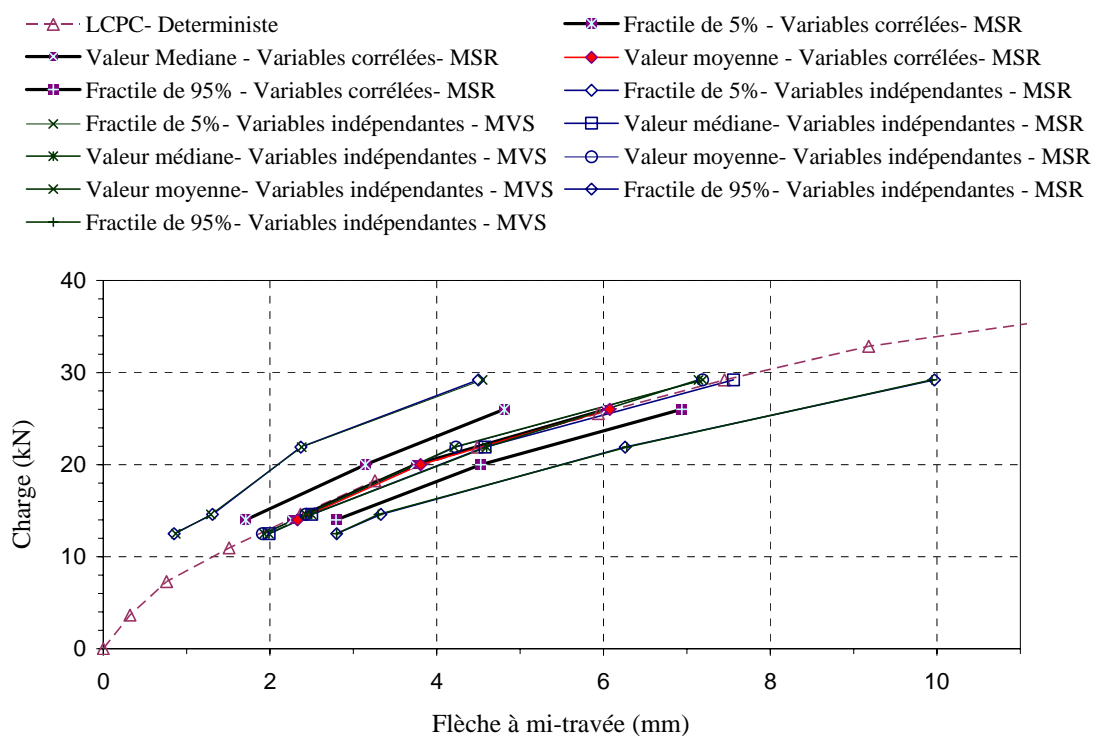


Figure 3.17. Influence de la corrélation sur l'incertitude du modèle



### 3.4.2. Calcul des incertitudes du modèle d'une poutre du VIPP de Merlebach

Les VIPP sont des viaducs à travées indépendantes et à poutres préfabriquées en béton précontraint par post-tension. Le VIPP de Merlebach a été construit en 1968 sur l'A320 (figure 3.18). L'ouvrage se compose de 6 travées isostatiques de 32,40 m sans entretoise intermédiaire. Il comporte cinq poutres espacées de 3,15 m. La hauteur des poutres est de 2,10 m. Les poutres centrales possèdent 10 câbles longitudinaux de type STUP 12Ø8 (figure 3.19). A l'origine, tous les câbles ont été tendus par les deux côtés à  $133\text{kg/mm}^2$ . Le détail de ce VIPP est décrit dans [Cremona, 2007].



Figure 3.18. Vue générale du viaduc de Merlebach

Le modèle consiste à considérer une poutre courante du VIPP de Merlebach sur deux appuis simples soumise à une charge ponctuelle «  $P$  » à mi-travée de la poutre (figure 3.20). La modélisation de la poutre a été effectuée par le groupe d'ouvrage d'art du Centre d'Etudes Techniques de l'Équipement Nord-Picardie en prenant en compte la fissuration du béton précontraint pour mieux appréhender la flèche à mi-travée de la poutre fonctionnant en mode dégradé. Cette poutre est modélisée à l'aide du logiciel de calcul des structures à barres, SETRA-ST1©. Notons qu'une particularité de SETRA-ST1© est d'utiliser la notion de section d'étude, ce qui nous permet d'obtenir des résultats à l'intérieur des barres sans augmenter le nombre de noeuds. Cependant, ce logiciel ne sachant faire que des calculs linéaires, la non linéarité est imposée en désactivant les sections fissurées. En ce qui concerne

la modélisation de la poutre, 312 barres ont été utilisées. Les caractéristiques géométriques de chaque section ont quant à elles été calculées à partir du dimensionnement de la poutre (figure3.19).

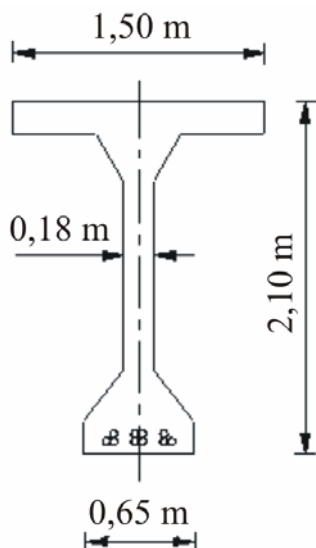


Figure 3.19. Section d'une poutre

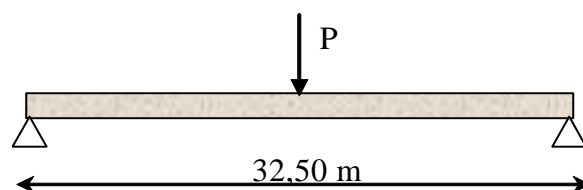


Figure 3.20. Profil de chargement de poutre

La modélisation de cette poutre s'effectue en deux passages dans ST1© : le premier passage ST1© considère le modèle de la poutre intacte, le deuxième considérant le modèle de poutre fissurée. Dans ce deuxième passage, les paramètres géométriques sont modifiés au droit des sections fissurées en fonction de la hauteur de poutre comprimée et du chargement [Cremona, 2007].

Les caractéristiques du béton sont la densité qui est égale à  $2,40 \text{ t/m}^3$  et le module d'élasticité  $E_b=3,6 \times 10^4 \text{ MPa}$ . En ce qui concerne les caractéristiques des câbles, la limite d'élasticité des câbles considérés dans les calculs est  $F_y=650 \text{ MPa}$ , et la section des câbles est égale à  $A_s=6,032 \text{ cm}^2$ .

Les variables considérées comme aléatoires sont la densité et le module d'élasticité du béton, modélisés par la loi normale (N), la résistance en traction du béton modélisée par la loi lognormale (LN) et la limite d'élasticité des câbles modélisée également par la loi lognormale. Ces quatre variables sont considérées comme indépendantes. Elles sont présentées dans le tableau 3.16.

Tableau 3.16. Caractéristiques des variables aléatoires (VIPP de Merlebach)

Paramètres	Loi de distribution	Moyenne	CDV*
$\gamma_b$	$N$	2,4 t/m <sup>3</sup>	0,03
$F_y$	$LN$	650 MPa	0,04
$f_t$	$LN$	3,0 MPa	0,20
$E_b$	$N$	$3,6 \times 10^4$ MPa	0,07

\*Coefficient de variation

Par ailleurs, les résultats expérimentaux étant basés sur la flèche à mi-travée de poutre, l'état limite à mi-travée de la poutre est le suivant :

$$M_P = g(\gamma, F_y, f_t, E_b) = \delta_y - \delta(\gamma, F_y, f_t, E_b) = 0 \quad (3.17)$$

où  $\delta_y$  est la déformation limite autour d'une charge donnée et  $\delta$  la flèche à mi-travée de poutre.

Dans le calcul en fiabilité,  $P=75$  KN et  $\delta_y=36$  mm. En utilisant les surfaces de réponse de type linéaire, l'algorithme converge en 10 itérations pour une tolérance de convergence de  $\varepsilon_{tol} = 10^{-3}$ , ce qui correspond à 100 appels au code de calcul SETRA-ST1©. Les résultats obtenus pour la probabilité de défaillance et l'indice de la fiabilité dans la poutre sont présentés dans le tableau 3.17.

Tableau 3.17. Résultats obtenus pour VIPP de Merlebach

Probabilité de défaillance	Indice de fiabilité
$2,1973 \times 10^{-2}$	2,0146

Les courbes de la fonction de répartition  $F_P(\delta y) = P_{f,P}(\delta y)$  du déplacement à mi-travée pont sont construites en prenant les charges  $P=60$  T, 65 T, 70 T, 75 T et 80 T. La fonction de répartition du déplacement correspondant à ces charges est décrite à la figure 3.21. Pour obtenir la fonction de répartition, la probabilité de dépasser la flèche à mi-travée de la poutre est déterminée pour plusieurs valeurs de la flèche limite pour chaque charge donnée. En utilisant les fonctions de répartition, il est alors possible de retrouver les intervalles de confiance à 90%, la valeur médiane et la valeur moyenne. Les résultats obtenus par la méthode des surfaces de réponse (MSR) sont comparés avec ceux obtenus par la méthode par machines à vecteurs supports (MVS). La figure 3.21 montre qu'il y a une bonne adéquation entre ces deux méthodes.

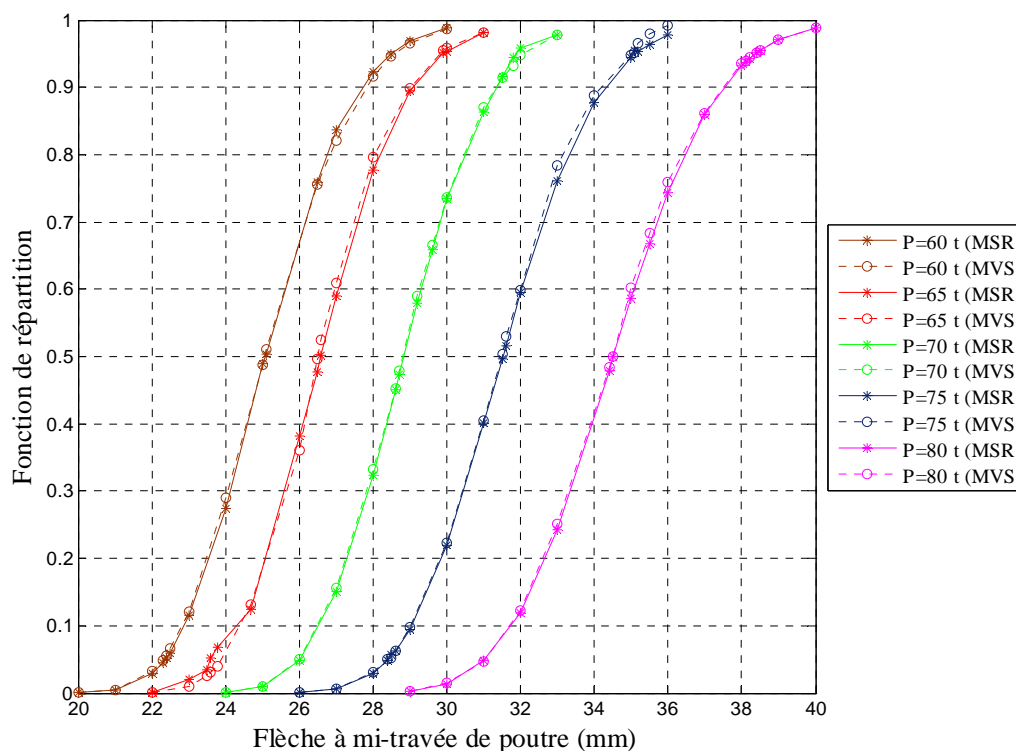


Figure 3.21. Fonction de répartition du déplacement pour différents cas de charges

La figure 3.22 compare les courbes chargement/flèche à mi-travée de la poutre obtenues lors des essais expérimentaux, en utilisant la méthode par surfaces de réponse et en utilisant la méthode par machines à vecteurs supports.

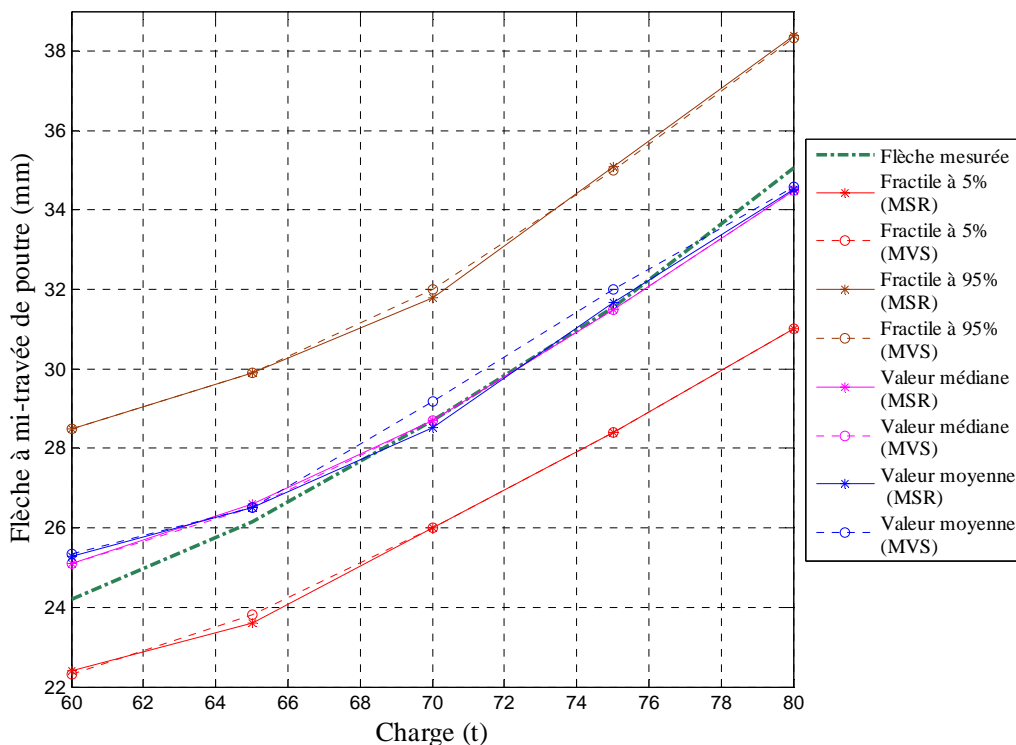


Figure 3.22. Comparaison des résultats obtenus par les essais expérimentaux, MSR et MVS

Les figures 3.21 et 3.22 conduisent à certaines constatations. En premier lieu, les méthodes R.S.M. et S.V.M. conduisent à des résultats voisins. Cela constitue pour chaque approche une validation a posteriori. En second lieu, un comportement non linéaire en fonction de la charge peut être noté (cf. figure 3.22). Ceci provient du fait que le modèle numérique est capable d'appréhender le comportement fissuré de la section en modifiant les caractéristiques géométriques et mécaniques en fonction du niveau de contrainte de traction. Néanmoins, si l'on compare les résultats avec les données expérimentales, et notamment leur intervalle de confiance [Cremona, 2007], il vient que le modèle moyen est en bon accord, mais que l'intervalle de confiance des calculs numériques est pessimiste (par excès).

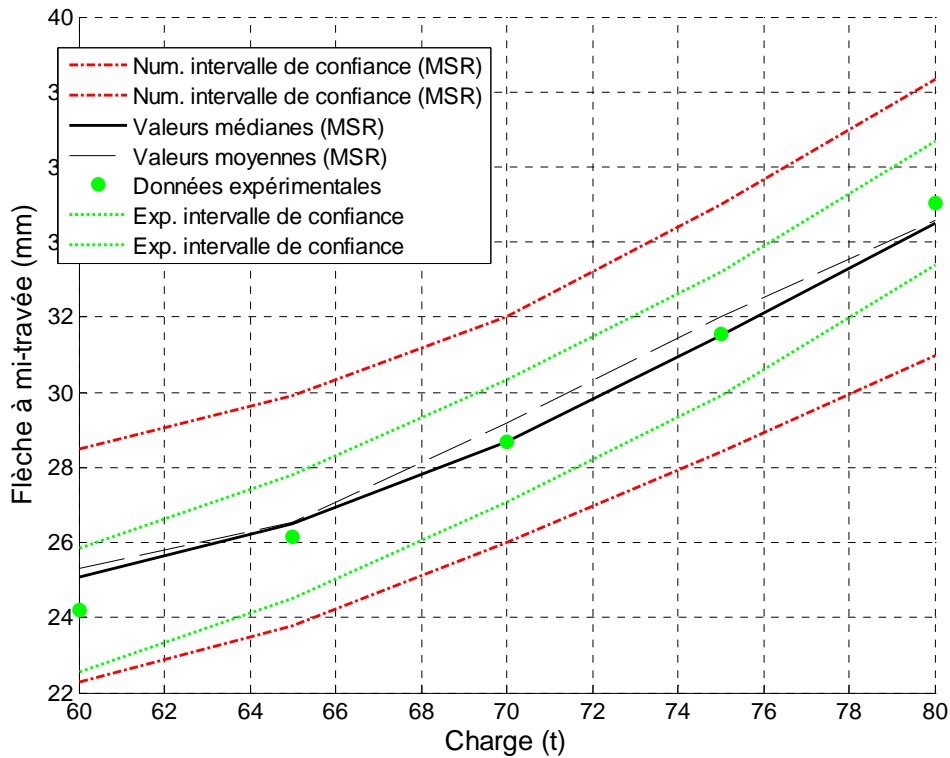


Figure 3.23. Comparaison calculs/mesures

Afin de réduire ces incertitudes liées aux données de base, une alternative consiste à actualiser les fonctions de répartition sur la base de mesures. Il s'agit d'une approche bayésienne qui évite d'actualiser les variables, mais seulement les résultats des calculs numériques, c'est-à-dire la flèche à mi-portée. Cette approche consiste à calculer :

$$F_p(\delta y) = P_{f,p}(\delta y) = P(M_p(\delta y) < 0 | H_{P_{mes}} = 0) \quad (3.18)$$

où  $H_{P_{mes}}$  est appelée marge d'événement et est donnée par :

$$H_{P_{mes}} = \delta y_{P_{mes}} - \delta y_{mes}(P_{mes}) \quad (3.19)$$

$\delta y_{mes}(P_{mes})$  est la mesure obtenue au moyen du chargement  $P_{mes}$  et  $\delta y_{P_{mes}}$  est la flèche donnée par le modèle pour la charge  $P_{mes}$ . En raison des incertitudes,  $\delta y_{mes}(P_{mes})$  est une variable aléatoire distribuée de manière normale avec un écart-type de 1 MM [Cremona, 2007] selon la précision des mesures. Plusieurs techniques d'approximation existent pour calculer cette probabilité conditionnelle [Cremona, 2005]. Dans ce cas, il est possible d'écrire que la fonction de répartition actualisée est donnée par [Richard & al, 2007] :

$$F_p^{updated}(\delta y) = P(M_p(\delta y) < 0 | H_{P_{mes}} = 0) = \Phi \left( - \left[ \frac{\beta_{P,\delta y} - \rho \beta_{mes}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] \right) \quad (3.20)$$

où :

$$F_p(\delta y) = P_{f,p}(\delta y) = \Phi(-\beta_{P,\delta y});$$

$$\beta_{mes} \approx \frac{E(\delta y_{P_{mes}}) - E(\delta y_{mes})}{\sqrt{V(\delta y_{Q_{mes}}) + V(\delta y_{mes})}} \text{ avec } E[.], V[.] \text{ les opérateurs de moyenne et de variance;}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{V(\delta y_p)}}{\sqrt{V(\delta y_p) + V(\delta y_{mes})}} \text{ est le coefficient de corrélation entre } M_p \text{ et } H_{P_{mes}}.$$

La figure 3.24 donne les fonctions de répartition actualisées. Comme on pouvait s'y attendre, ces fonctions sont redressées, ce qui indique une réduction de la variance.

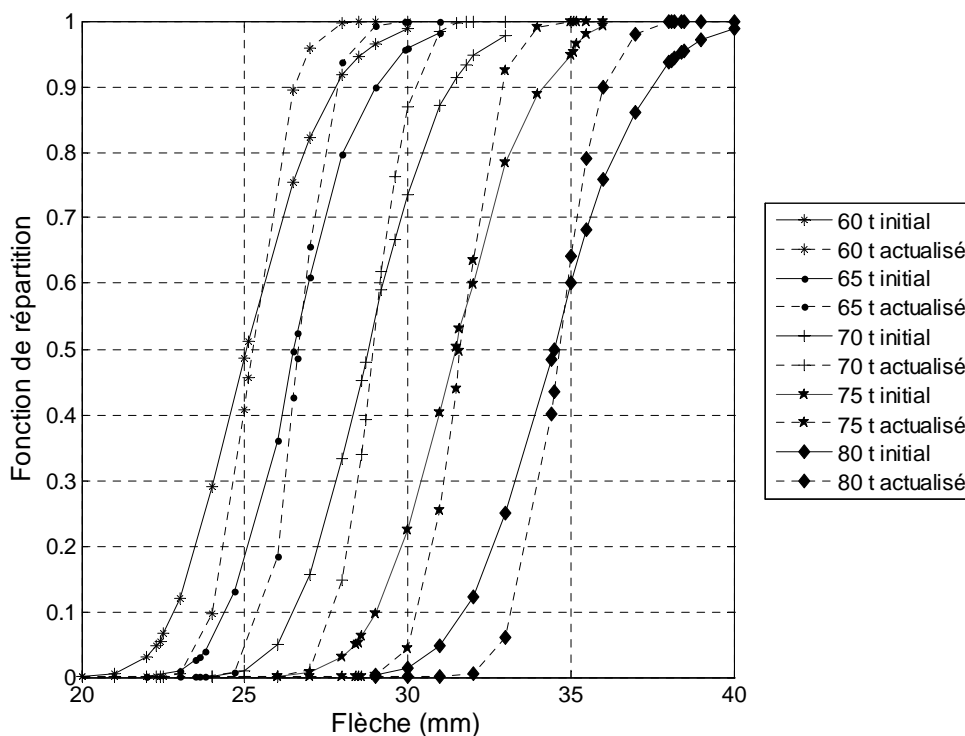


Figure 3.24. Fonction de répartition de la flèche à mi-portée

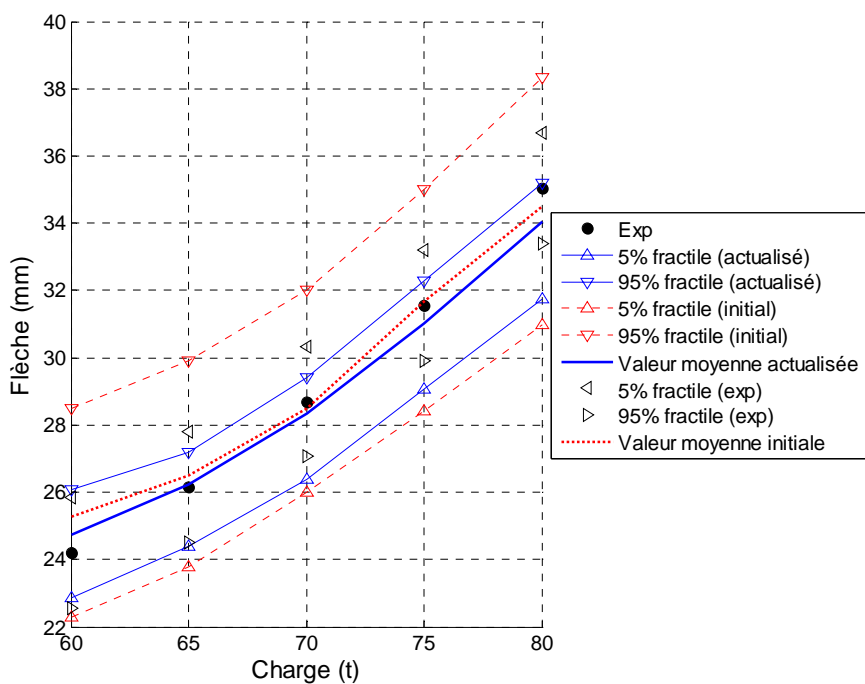


Figure 3.25. Intervalles de confiance actualisés avec les données à 60 t

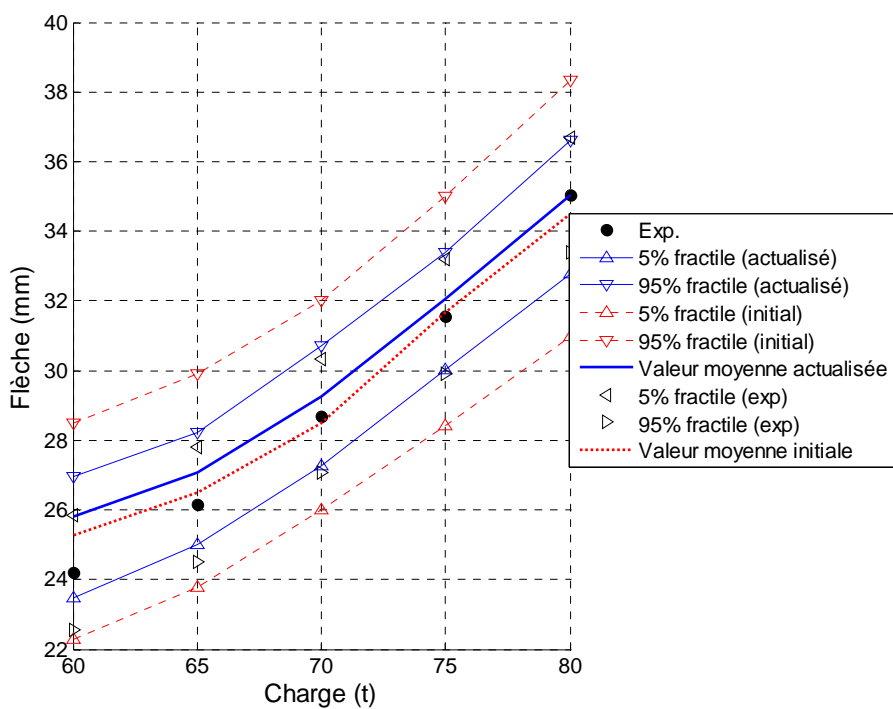


Figure 3.26. Intervalles de confiance actualisés avec les données à 70 t



Les figures 3.25 et 3.26 recalculent les intervalles de confiance à 90% pour deux cas : le chargement servant à l'actualisation est respectivement 60 t et 70 t. Les deux calculs montrent une réduction de l'intervalle de confiance des simulations numériques qui se rapprochent de l'intervalle de confiance des mesures. Cependant, les valeurs moyennes se décalent légèrement des valeurs expérimentales et l'intervalle de confiance n'est plus symétrique pour les valeurs de chargement différentes de la valeur servant à l'actualisation. Ceci est particulièrement vrai pour 60 t. Le choix de la donnée d'information pour le calcul conditionnel affecte les résultats ajustés, mais mettent en évidence un meilleur accord avec les données expérimentales. Le recalage de la valeur moyenne et de l'intervalle de confiance au point d'actualisation est en général très proche des données expérimentales en ce point ; le recalage des valeurs moyennes et des intervalles de confiance en d'autres points dépendent fortement de la représentativité de point servant à l'ajustement. Ainsi, l'actualisation sur la base de la donnée à 60 t pour les données à 70, 75 et 80 t est moins bonne que celle basée sur la donnée à 70 t. Le comportement non linéaire de la courbe peut expliquer ce fait ; en effet, l'actualisation repose sur le résultat du modèle sans passer par les variables constitutives.

### **3.5. Etude des mécanismes de défaillance**

En utilisant les techniques classiques de la théorie de fiabilité, il est possible aujourd'hui de calculer de diverses manières la probabilité de défaillance d'un mode de défaillance donné, en connaissant son état limite explicite. Cependant, ces approches ne permettent pas de couvrir l'ensemble des modes de défaillance et entraînent souvent des surcoûts importants. Autrement dit, il faut distinguer mode et mécanisme de défaillance. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'efficacité de la méthode par surfaces de réponse pour étudier la fiabilité de l'ouvrage pris comme système au travers de quelques cas simples.

#### **3.5.1. Fiabilité du système et mécanismes de défaillance**

L'objectif de cette section est de montrer qu'il devient possible par une connaissance améliorée de la méthode par surfaces de réponse, d'étudier le mécanisme de défaillance le plus probable du système global formé par l'ouvrage. Cette idée originale conduit à faire une étude sur la fiabilité des structures au niveau de l'ensemble de l'ouvrage jusqu'à sa rupture. Il paraît cependant nécessaire de préciser d'abord la notion de système. Un système est défini comme un ensemble de mécanismes de défaillance dépendant de l'état de chacun de ses composants constitutifs. Il est donc possible d'avoir plusieurs combinaisons pour atteindre la

défaillance d'un système. Les combinaisons série et parallèle dites système en série ou en parallèle vis-à-vis des mécanismes de défaillance jouent le rôle de combinaisons principales. Supposons un système formé de mécanismes de défaillance  $M_i$ . Ce système est dit en série si l'occurrence d'un seul mécanisme de défaillance entraîne la défaillance du système. Il est dit en parallèle si l'occurrence de tous les mécanismes de défaillance est nécessaire pour atteindre la défaillance du système (figures 1.4 et 1.6). Dans les calculs classiques en fiabilité, pour trouver la probabilité de défaillance, nous pouvons utiliser les différentes méthodes citées dans la littérature dont la méthode de Monte-Carlo ou les méthodes par encadrements comme les bornes simples ou les bornes de Ditlevsen [Cremona, 2005]. Cependant, ces méthodes nécessitent d'avoir une fonction d'état limite explicite pour chacun des mécanismes de défaillance. Il est évident qu'à l'exception de cas simples, il est presque impossible de décrire une fonction d'état limite explicite correspondant à chaque mécanisme de défaillance du système global de l'ouvrage car un ouvrage peut introduire plusieurs mécanismes de défaillance possibles.

Pour aborder le problème différemment, un couplage mécano-fiabiliste utilisant la méthode par surfaces de réponse est introduit. La méthodologie met en jeu les processus suivants :

- modélisation aux éléments finis du modèle ;
- identification des éléments critiques du modèle mécanique, tels que les éléments primaires (comme les poutres) à mi-travée du pont, les éléments secondaires (comme les entretoises) à mi-travée du pont, les éléments de la dalle du béton à mi-travée du pont, les éléments en intersection des entretoises et des poutres dans les ponts bipoutre mixtes... ;
- utilisation des lois du comportement non linéaires pertinentes pour les matériaux constitutifs du modèle.

La figure 3.27 représente schématiquement la démarche nécessaire pour cette étape. En raison d'instabilités numériques, il n'est pas évident de considérer un comportement rigide plastique parfait au travers d'un code de calcul aux éléments finis. Le comportement rigide plastique (et même élastoplastique) parfait est alors approché le mieux possible.

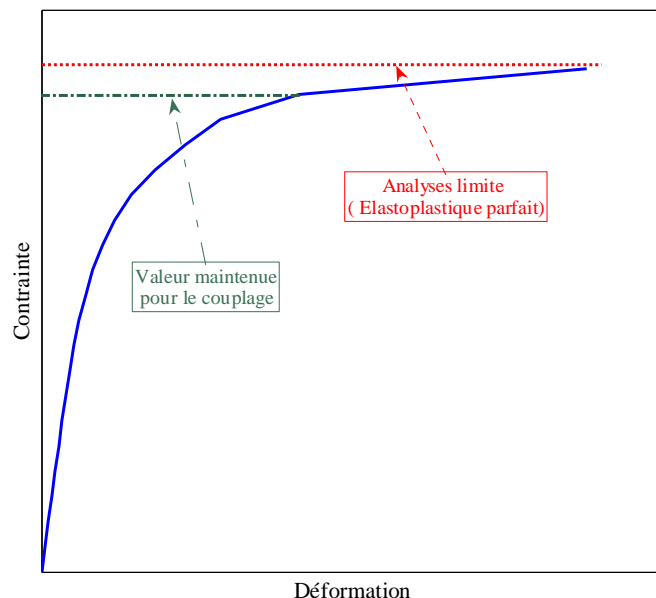


Figure 3.27. Lois de comportement

- couplage entre méthode par surfaces de réponse et code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC© en utilisant une fonction d'état limite décrite par :

$$g(X_1, X_2, \dots, X_k) = R(X_1, X_2, \dots, X_k) - \max(S_1(X_1, X_2, \dots, X_k), S_2(X_1, X_2, \dots, X_k), \dots, S_i(X_1, X_2, \dots, X_k)) \quad (3.21)$$

où  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  sont des variables aléatoires,  $R$  la valeur limite ultime et  $S_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) la sollicitation dans les éléments critiques identifiés.

Afin de montrer l'efficacité de la méthode proposée, deux exemples d'applications simples souvent utilisées dans la littérature sont considérés, pour lesquels les équations explicites représentant les mécanismes de défaillance sont déjà connus.

### 3.5.1.1. Poutre à deux travées à comportement non linéaire

Le premier exemple traite d'une poutre à deux travées, de matériau à comportement non-linéaire, soumise à deux charges unitaires de 896 kN. Les caractéristiques géométriques de la poutre ainsi que les mécanismes de défaillance possibles sont données à la figure 3.28. La défaillance de l'ouvrage est donc conditionnée par l'occurrence d'un de ces deux mécanismes : il s'agit donc d'un système en série non pas vis-à-vis des éléments, mais vis-à-vis des mécanismes de défaillance [Cremona, 2004].

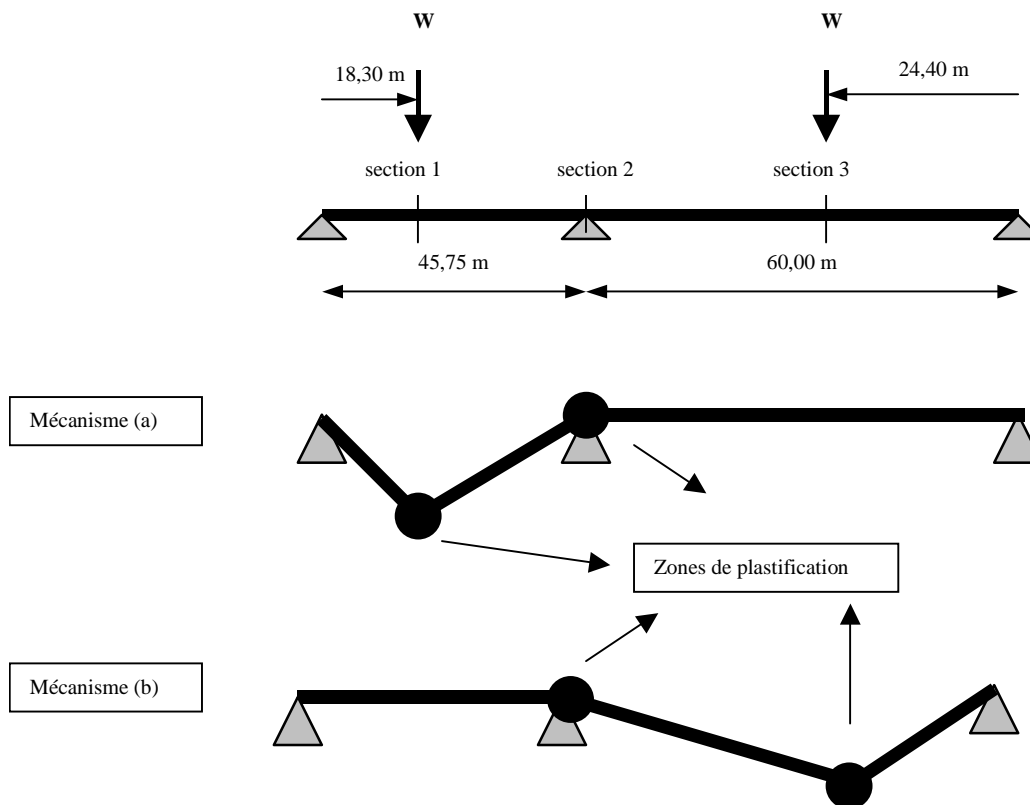


Figure 3.28. Poutre à deux travées et mécanismes de défaillances correspondants

En appliquant les principes d'analyse limite (ce qui suppose un comportement rigide plastique parfait) pour chaque mécanisme, un état limite est défini par l'égalité entre le travail des efforts extérieurs et des efforts internes. Les états limites de ces mécanismes de défaillance peuvent donc être décrits comme les suivants :

$$\text{Mécanisme (a)} : \left( \frac{45,75}{18,30} \right) M_1 - M_2 + W(45,75 - 18,30) \quad (3.22)$$

$$\text{Mécanisme (b)} : \left( \frac{60,00}{24,40} \right) M_3 - M_2 + W(60,00 - 24,40) \quad (3.23)$$

où  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont les moments résistants des sections 1, 2 et 3 respectivement.

Les moments résistants dans les trois sections  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  et les charges ponctuelles  $W$  sont considérés comme des variables aléatoires qui sont indépendantes et représentées par des lois normales dont les paramètres sont donnés dans le tableau 3.18.

Tableau 3.18. Caractéristiques du calcul par analyse limite (poutre à deux travées)

Paramètre	Loi	Moyenne	Coefficient de variation
Moment Résistant $M$ pour toutes les sections	$N$	32213 kN.m.	0,02
Charge $W$	$N$	896 kN	0,3

En prenant les valeurs du tableau 3.18, les indices de fiabilité correspondant à chaque mécanisme sont les suivants:

$$\text{Mécanisme (a) : } \beta_a = 9,6197 \Rightarrow P_f^a = 3,3748 \times 10^{-22}$$

$$\text{Mécanisme (b) : } \beta_b = 8,1163 \Rightarrow P_f^b = 2,4278 \times 10^{-16}$$

En sachant que cette poutre peut se concevoir comme un système en série où chaque composant est un mécanisme de défaillance, il est possible de tirer un encadrement simple de la probabilité de défaillance de la poutre :

$$\max(P_f^a, P_f^b) \leq P_f^s \leq P_f^a + P_f^b \quad (3.24)$$

ce qui donne  $P_f^s \approx 2,4278 \times 10^{-16}$

Ce même exemple a fait l'objet d'un calcul par couplage entre méthode par surfaces de réponse et code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC©. Un maillage bidimensionnel avec 17 éléments surfaciques rectangulaires à 8 nœuds a été utilisé dans cet exemple. En raisons d'instabilités numériques, il n'est pas possible de recourir à une loi rigide plastique (ou même elastoplastique) parfaite. Nous avons par contre utilisé une loi élastoplastique de modèle parabolique tentant d'approcher au mieux le comportement introduit précédemment dans le calcul par analyse limite (figure 3.29). Les caractéristiques utilisées pour les paramètres de cette loi sont les résistances en compression simple de 30 Mpa et en traction simple de 3 MPa, un module d'Young de  $2 \times 10^4$  MPa, et un coefficient de Poisson de 0,15. Les variables qui sont considérées comme aléatoires sont le chargement  $W$  et la résistance ultime du matériau  $\sigma_u$ . Les deux variables sont représentées par des lois normales indépendantes, avec entre autres la variable  $\sigma_u$  est de moyenne 45,3 MPa et de coefficient de variation 0,02.

L'état limite choisi est le dépassement de la contrainte ultime du matériau dans l'ensemble des sections. Cet état se traduit par l'expression suivante :

$$g(W, \sigma_u) = \sigma_u - \max(\sigma_1(W, \sigma_u), \sigma_2(W, \sigma_u), \sigma_3(W, \sigma_u)) = 0 \quad (3.25)$$

où  $\sigma_i$  ( $i=1,2,3$ ) est la contrainte axiale en traction dans chaque section.

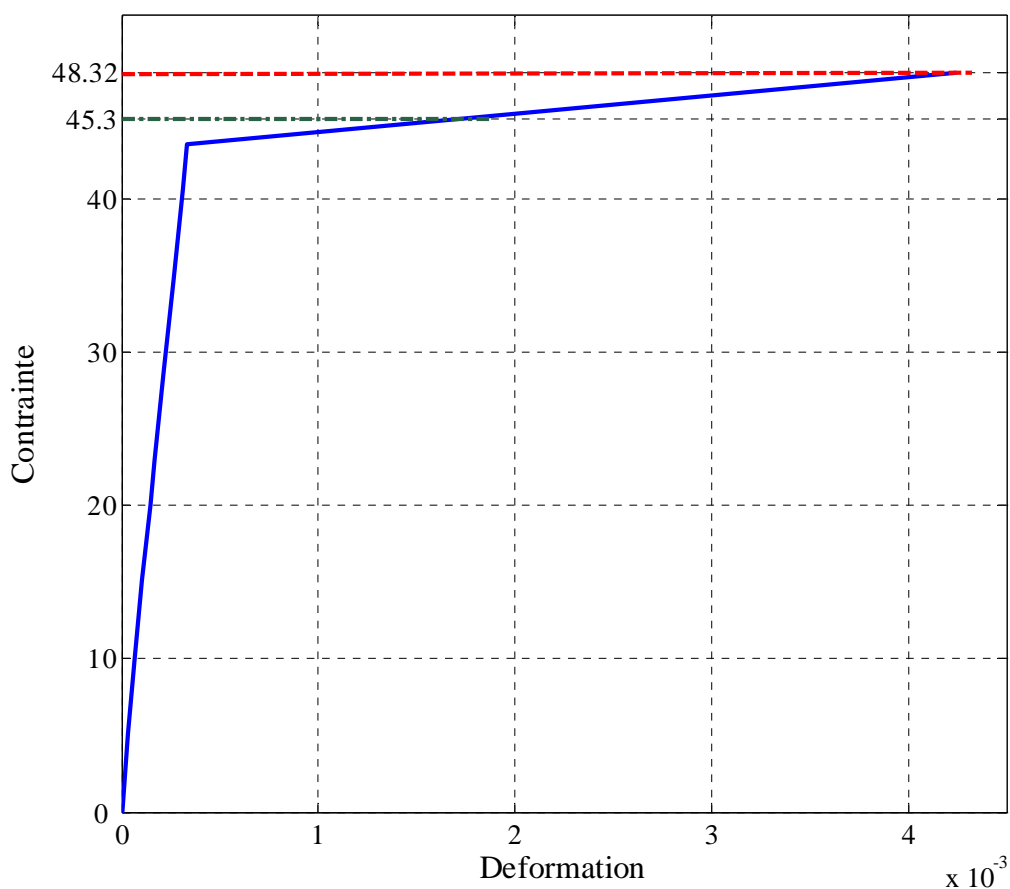


Figure 3.29. Loi de comportement élastoplastique du matériau

Le calcul par surface de réponse linéaire en utilisant un plan d'expérience en étoile conduit à une probabilité de défaillance de  $2,5557 \times 10^{-16}$ . La convergence a été obtenue au terme de 6 itérations pour une tolérance de convergence de  $10^{-5}$ . Par ailleurs, la méthode FORM permet de déterminer le point de conception pour la fonction d'état limite. Il est alors possible de réaliser un calcul aux éléments finis déterministe sous CESAR-LCPC en utilisant les valeurs des différentes variables constituant ce point de conception. Ce calcul conduit à observer la plastification dans les différentes zones de la poutre (figure 3.30).

La figure 3.30 montre que le mécanisme de défaillance déterminé par surfaces de réponse est une combinaison des plusieurs mécanismes irréductibles (minimaux) dans la poutre.

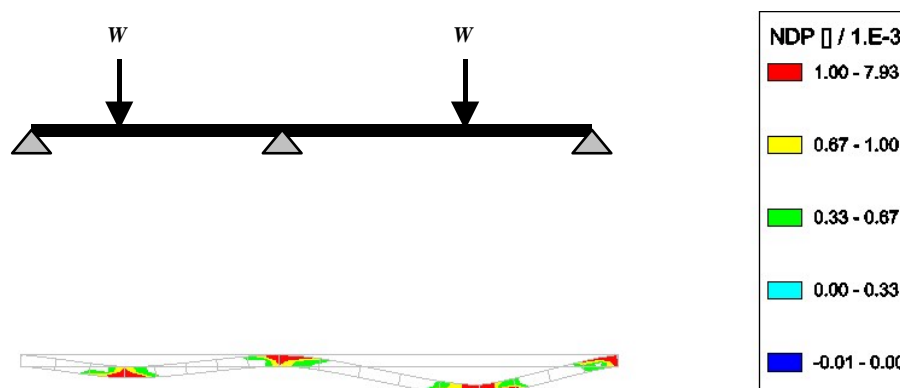


Figure 3.30. Comportement de la structure pour les valeurs des variables au point de conception- diagramme des déformations plastiques

Le calcul aux éléments finis fournit une probabilité de défaillance légèrement supérieure au calcul en analyse limite. La principale raison de ce résultat provient du fait que la contrainte limite du calcul aux éléments finis est légèrement inférieure à la contrainte de rupture. Ce choix s'explique par le souci d'éviter des instabilités numériques (dépassement de la contrainte à la rupture) lors d'un choix de plan d'expérience proche de la rupture. Par conséquent, la probabilité de défaillance calculée avec CESAR et les surfaces de réponse donne une valeur légèrement supérieure. Un écart supplémentaire vient également du fait que l'on ne met pas en œuvre une loi de comportement rigide plastique parfaite. Cet exemple a cependant la volonté de montrer la capacité de l'approche par surface de réponse de caractériser au mieux un comportement système.

### 3.5.1.2. Portique à comportement non linéaire

Un portique composé d'un matériau à comportement non linéaire est maintenant considéré. Les mécanismes possibles de défaillance de cet exemple sont donnés à la figure 3.31. La défaillance de l'ouvrage est donc conditionnée par l'occurrence d'un de ces quatre mécanismes : il s'agit toujours d'un système en série vis-à-vis des mécanismes de défaillance.

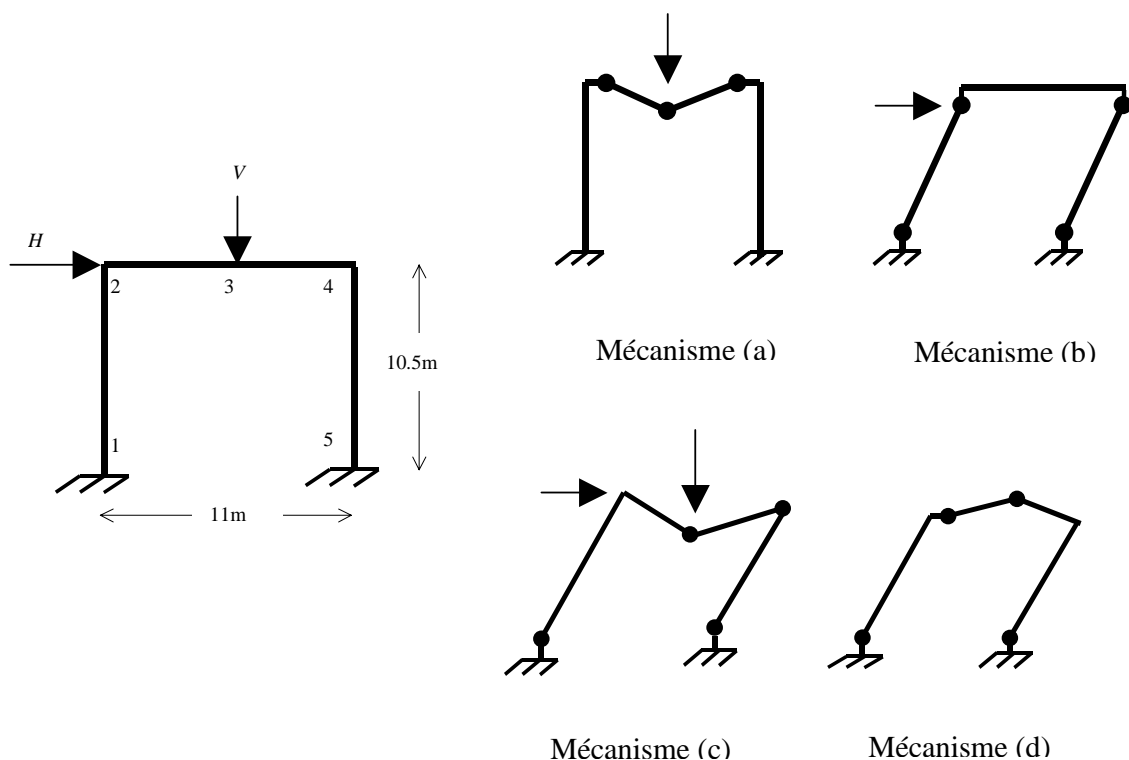


Figure 3.31. Portique et mécanismes de défaillances

En appliquant les principes d'analyse limite (ce qui suppose un comportement rigide plastique parfait), pour chaque mécanisme, un état limite est défini par l'égalité entre le travail des efforts extérieurs et des efforts internes. Les états limites de ces mécanismes de défaillance sont alors décrits de la manière suivante:

$$\text{Mécanisme (a): } M_2 + 2M_3 + M_4 - V \times 5,5 \quad (3.26)$$

$$\text{Mécanisme (b): } M_1 + M_2 + M_4 + M_5 - H \times 10,5 \quad (3.27)$$

$$\text{Mécanisme (c): } M_1 + 2M_3 + 2M_4 + M_5 - H \times 10,5 - V \times 5,5 \quad (3.28)$$

$$\text{Mécanisme (d): } M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_5 - H \times 10,5 + V \times 5,5 \quad (3.29)$$

où  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  et  $M_5$  sont les moments résistants des sections 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement.

Les moments résistants dans les cinq sections  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  et  $M_5$  et les charges  $W$  et  $H$  sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes et représentées par des lois normales dont les paramètres sont donnés dans le tableau 3.19.



Tableau 3.19. Caractéristiques du calcul par analyse limite (portique)

Paramètre	Loi	Moyenne	CdV
Moment Résistant $M$ pour toutes les sections	$N$	4836,70 KN.m.	0,1
Charge $H$	$N$	200 KN	0,2
Charge $V$	$N$	200 KN	0,2

En prenant les valeurs du tableau 3.19, il vient :

$$\text{Mécanisme (a)} : \beta_a = 9,3710 \Rightarrow P_f^a = 3,8308 \times 10^{-21}$$

$$\text{Mécanisme (b)} : \beta_b = 8,7116 \Rightarrow P_f^b = 1,4983 \times 10^{-18}$$

$$\text{Mécanisme (c)} : \beta_c = 8,7809 \Rightarrow P_f^c = 8,4293 \times 10^{-19}$$

$$\text{Mécanisme (d)} : \beta_d = 9,5291 \Rightarrow P_f^d = 8,2875 \times 10^{-22}$$

Ce portique peut se concevoir comme un système en série vis-à-vis des mécanismes de défaillance. Par conséquent, afin d'évaluer la probabilité de défaillance du portique, il est possible d'utiliser d'une part des bornes simples et d'autre part des bornes amélioré de Ditlevsen pour un système en série. En utilisant les bornes simples, la probabilité de défaillance du portique est encadrée par :

$$\max(P_f^a, P_f^b, P_f^c, P_f^d) \leq P_f^s \leq P_f^a + P_f^b + P_f^c + P_f^d \quad (3.30)$$

$$\text{ce qui donne } 1,4980 \times 10^{-18} \leq P_f^s \leq 2,5014 \times 10^{-18}$$

En utilisant maintenant les bornes de Ditlevsen, la probabilité de défaillance est définie par :

$$P_f^s \geq P_f^1 + \sum_{i=2}^4 \left[ \max \left\{ 0, P_f^i - \sum_{j=1}^{i-1} P(g_i(\{Z\}) < 0 \cap g_j(\{Z\}) < 0) \right\} \right] \quad (3.31)$$

$$P_f^s \leq \sum_{i=1}^4 P_f^i - \sum_{i=2}^4 \max_{j < i} (P(g_i(\{Z\}) < 0 \cap g_j(\{Z\}) < 0))$$

Le calcul des probabilités conjointes est évalué en linéarisant les fonctions des états limites autour de leur point de conception. Pour calculer ces derniers, la loi binormale est utilisée. En utilisant les bornes de Ditlevsen, la probabilité de défaillance du portique est encadré par  $1,6828 \times 10^{-18} \leq P_f^s \leq 1,6830 \times 10^{-18}$ .

Un calcul par surfaces de réponse linéaire en utilisant un plan d'expérience en étoile est finalement réalisé. Afin de modéliser ce portique, un maillage bidimensionnel avec quarante quatre éléments surfaciques triangulaires à 6 nœuds est utilisé avec une loi élastoplastique de type Willam-Warnke à 3 paramètres. Les paramètres de cette loi sont pour le Module

d'Young  $E=2,0 \times 10^4$  MPa, le coefficient de Poisson  $\nu=0,18$ , la résistance en compression  $f_c=20$  MPa, la résistance en traction  $f_t=2$  MPa, la résistance en compression biaxiale  $f_{bc}=23$  MPa, le facteur exponentiel d'écroutissage  $k=0$ , le paramètre définissant le seuil de plasticité ultime du béton  $Z_u=1$  et le paramètre définissant le seuil de plasticité initial du béton  $Z_0=0,75$ . La convergence a été obtenue au terme de 6 itérations pour une tolérance de convergence de  $10^{-5}$ . L'état limite est le dépassement de la contrainte ultime du matériau dans l'ensemble des sections. Cet état se traduit par l'expression suivante :

$$g(\sigma_u, H, V) = \sigma_u - \max_{i=1}^5 (\sigma_i(\sigma_u, H, V)) = 0 \quad (3.32)$$

où  $\sigma_u$  est la contrainte ultime du matériau, et  $\sigma_i$  est la contrainte axiale en traction dans chaque section.

Les variables qui sont considérées comme aléatoires sont toujours les chargements  $H$  et  $V$  (tableau 3.19), et la résistance ultime du matériau  $\sigma_u$ . Cette dernière suit une loi normale de moyenne 29,3 MPa avec un coefficient de variation 0,09.

Le résultat obtenu pour ce mécanisme est une probabilité de défaillance de  $b$ , ce qui est bien compris entre les bornes simples et reste très proche des bornes de Ditlevsen. Il s'agit d'un mécanisme de défaillance non réductible.

Le calcul déterministe mené avec le point de conception estimé permet de mettre en évidence une plastification aux sections 1, 2, 4 et 5. Ce mécanisme est bien comparable avec le mécanisme «  $b$  » (figure 3.31).

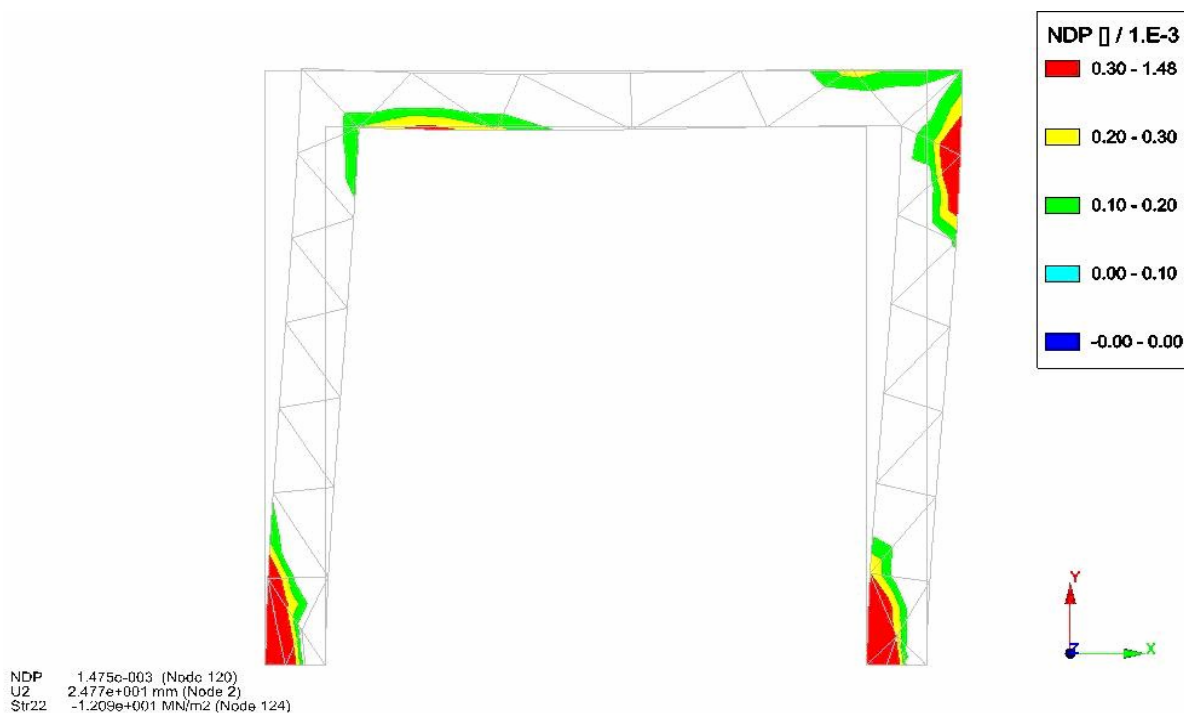


Figure 3.32. Comportement de la structure pour les valeurs des variables au point de conception- diagramme des déformations plastiques

### 3.6. Conclusions

Dans ce chapitre, l'application de l'algorithme de construction des surfaces de réponse à la recherche de modes et de mécanismes de défaillance dans des cas complexes, pour laquelle la fonction d'état limite ne peut pas être explicitée, a été présentée. Cet algorithme est fondé sur la méthode des surfaces de réponse. Cette dernière fait appel soit au code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC©, soit au code de calcul de structures à barres, SETRA-ST1© selon les cas, pour l'évaluation de la réponse de chaque expérience numérique. Les développements réalisés ont été validés sur une structure simple: une poutre encastree. Il est possible d'observer une très bonne cohérence entre les résultats issue du couplage mécano-fiabiliste, avec ceux obtenus dans le cas d'une fonction d'état limite explicite et ceux fournis par le calcul exact. Ensuite, ces développements ont été appliqués à l'évaluation de la probabilité de défaillance d'un bipoutre mixte avec comportement non linéaire pour ses matériaux constitutifs. La sensibilité du modèle aux différents types des matériaux a été également étudiée.

L'efficacité du couplage effectué a été également montrée au travers de quelques cas d'application dont une des poutres du benchmark des poutres de la Rance et une poutre du

viaduc de Merlebach. L'influence de la corrosion sur la fiabilité de poutre de la Rance a été étudiée en considérant deux cas d'étude. Une étude de sensibilité a notamment été conduite sur la corrélation entre les différents paramètres du béton. Les intervalles de confiance à 90% ont été déterminés puis étudiés selon l'influence de la corrélation entre les différentes variables. Dans le cas de poutre du viaduc de Merlebach, les intervalles de confiance à 90% ont également été construits. Les résultats obtenus par la méthode par surfaces de réponse ont été comparés avec ceux obtenus par la méthode des machines à vecteurs supports. Une bonne adéquation apparaît entre ces deux approches, ce qui justifie la surface de défaillance globale obtenue.

Pour terminer, la technique des surfaces de réponse a été mise en œuvre pour réaliser une approche globale de fiabilité des systèmes. En particulier, la recherche du mécanisme de défaillance le plus probable d'un système est possible. Les résultats obtenus ont été validés par ceux obtenus par une approche simplifiée d'analyses limite.



## **CHAPITRE 4**

### **ETUDE DE LA REDONDANCE DES PONTS**

#### **4.1 Introduction**

Les études d'évaluation de la performance (aptitude au service, sécurité structurale) des ouvrages sont la plupart du temps dirigées vers la vérification des éléments structuraux. Cette méthodologie d'évaluation traditionnelle néglige de ce fait les effets *systemes* et conduit souvent à des décisions de gestion inappropriées, car en réalité les éléments de la structure d'un pont ne se comportent pas individuellement mais ils interagissent comme un système.

La mesure de la *redondance* est un paramètre essentiel pour l'ingénieur afin d'évaluer la performance d'un ouvrage. La redondance est définie comme la capacité d'un pont à redistribuer des efforts dans l'ensemble de ses éléments constitutifs, notamment lorsqu'un ou plusieurs éléments sont défailants ou endommagés.

En d'autres termes, la redondance est considérée, d'une part comme la performance du système global formé par l'ouvrage et d'autre part comme la réserve entre la performance des éléments individuels et celle du système global, notamment en présence d'endommagements. Cela exprime l'importance des éléments individuels sur la réserve du système global.

L'objectif de ce chapitre est de développer une approche cohérente pour mesurer ces effets de redondance dans le cas précis de ponts en béton armé, ceci vis-à-vis de critères de service permettant d'améliorer les stratégies de surveillance.

## 4.2 Redistribution des efforts et redondance

Un sujet difficile et encore mal maîtrisé dans le cadre des ponts en béton armé est la prédiction de leur comportement en service en tenant compte des effets non linéaires de la déformation excessive, due à la fissuration, au fluage, etc.. Une reconnaissance insuffisante de ces effets peut être une des causes d'une aptitude au service défailante. Donc, afin de considérer au mieux la non linéarité de ces effets et leur influence sur la redistribution des efforts intérieurs, des calculs non linéaires sur un modèle pertinent de l'ouvrage sont indispensables. La redistribution des efforts due aux charges extérieures aboutit, soit à des changements de signe des moments dans les sections (surtout au voisinage des zones de moment nul), soit à des changements de pente des courbes qui représentent le comportement en service de chaque section.

L'importance de la prise en compte de la non linéarité des matériaux sur la redistribution des efforts en présence d'éléments redondants peut être illustrée simplement au travers de l'exemple suivant. Prenons deux treillis simples [Frangopol, 1987] soumis à une charge horizontale,  $W$  (figure 4.1).

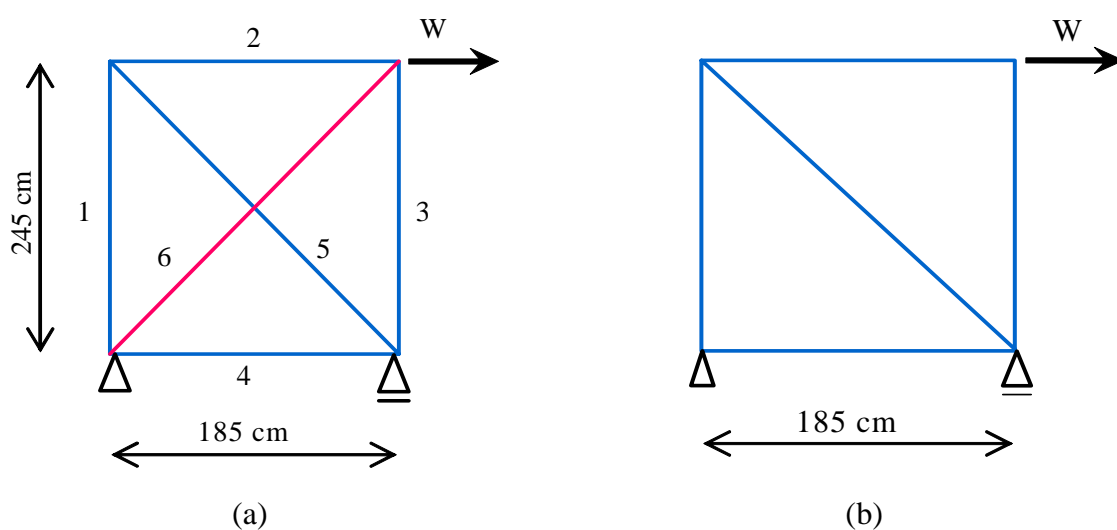


Figure 4.1. Exemples de treillis simples

Le treillis présenté en figure 1(b) est non redondant et peut être classé comme un système faible, du type *maillon faible*. En revanche, le treillis présenté en figure 1(a) est considéré comme redondant (avec pour degré de redondance ou d'hyperstaticité  $1$ ) de par la présence de l'élément 6. Il peut donc d'être vu comme un système *sûr* [Frangopol, 1987].

Afin de mieux comprendre l'importance de la non linéarité sur la redistribution des efforts dans les treillis, nous envisageons de comparer des calculs linéaires et non linéaires sur les deux modèles présentés sur la figure 4.1. Notons que la résistance en traction et en compression dans chaque élément est  $P_y = 320,4 \text{ kN}$ .

Afin de réaliser les calculs non linéaires, une loi élastoplastique uniaxiale de Von-Mises est utilisée pour toutes les barres. Les valeurs utilisées pour les paramètres de cette loi sont la résistance en traction simple  $\sigma_y = 248 \text{ MPa}$ , le module d'Young  $E_0 = 2,0 \times 10^5 \text{ MPa}$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et la résistance en cisaillement simple  $K = 143,2 \text{ MPa}$ .

A partir de la figure 4.2, s'agissant de calculs linéaires, nous ne pouvons pas observer qu'il y a un effet de redistribution des efforts entre les différents éléments, quel que soit le treillis. La seule information qu'il est possible d'affirmer est que le treillis (a) peut atteindre sa limite élastique à une charge de 270 kN grâce à l'élément 6, alors que le treillis (b) ne peut lui l'atteindre qu'à une charge maximum de 153,8 kN.

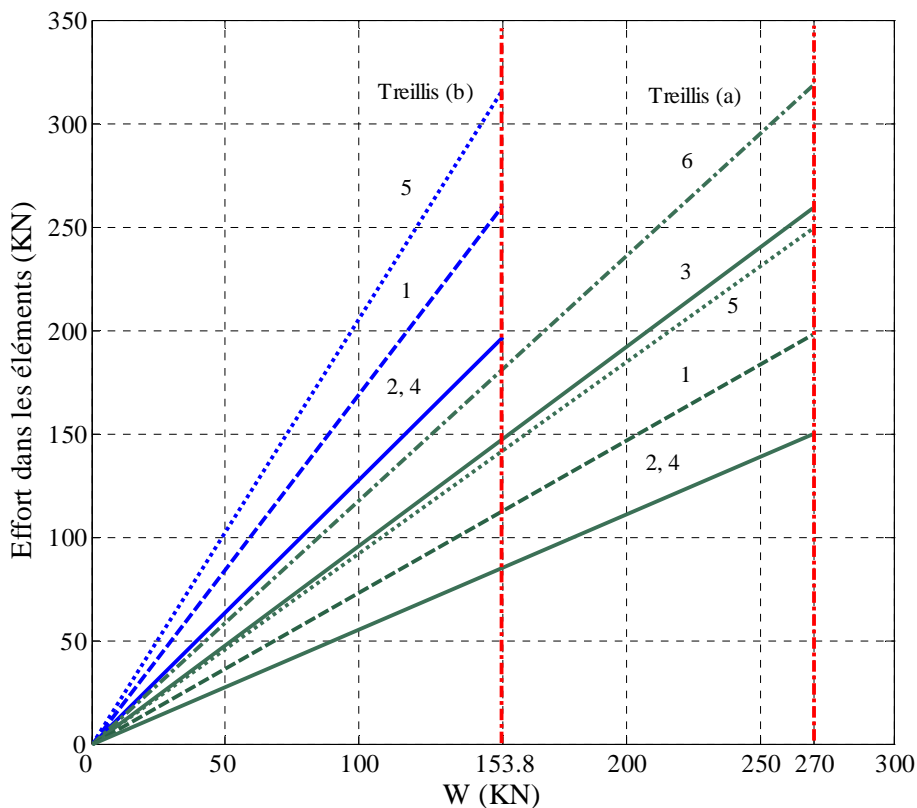


Figure 4.2. Influence d'un élément redondant sur la redistribution des efforts dans le cas des deux treillis (calculs linéaires)



La figure 4.3 montre que le treillis redondant (a) peut résister jusqu'à  $W=384,5$  kN. On remarque que l'élément 6 est défaillant pour  $W=341,8$  kN alors que la performance du système est encore assurée. Par contre, le treillis non redondant (b) ne peut résister que jusqu'à  $W=192,2$  kN, avant d'atteindre sa défaillance totale.

Il est possible d'observer également que le treillis (a) maintient sa performance grâce à sa capacité à redistribuer les efforts lorsque l'élément 6 a atteint sa défaillance. On note aussi que la ruine du treillis (a) est observée à  $W = 384,5$  kN dès l'instant où l'élément 5 est défaillant.

Dans cet exemple, le treillis (a) peut avoir un gain de 100% au niveau de sa performance par rapport au treillis (b) grâce à son élément redondant. Cela exprime également l'importance d'avoir réalisé un calcul non linéaire pour tenir compte de la redistribution des efforts dans un système.

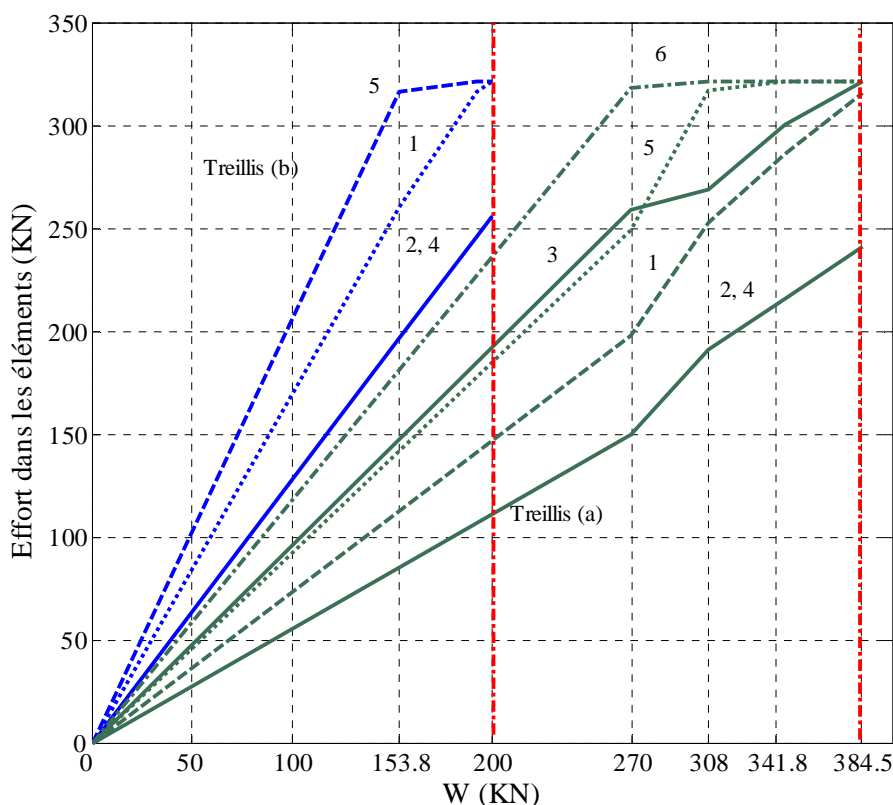


Figure 4.3. Influence d'un élément redondant sur la redistribution des efforts dans le cas des deux treillis (calculs non linéaires)

Par conséquent, il faut retenir que la redondance dans un système ne doit pas être considérée seulement au niveau des éléments de la structure mais aussi au niveau de l'ensemble des

éléments de la structure. Il est évident que sauf pour des cas simples, le degré d'hyperstaticité ne peut pas être envisagé comme une mesure de la redondance d'un système. Il est en effet important d'étudier la redondance dans les ouvrages en conjonction avec une approche fiabiliste et en intégrant un processus de dégradation pour évaluer son impact sur la redondance.

### 4.3 Définition de la redondance

Lorsqu'une défaillance dans un élément d'ouvrage est envisagée, il est nécessaire de mettre en place un dispositif de haute surveillance qui va naturellement dépendre du degré de redondance. La redondance est défini ici comme la capacité d'un pont à redistribuer les efforts liées aux charges extérieures sur l'ensemble de ses éléments lorsqu'un de ses éléments est défaillant [Mohammadkhani-Shali, 2007c-d]. Les études menées dans ce cadre ont donc pour objectif d'améliorer les stratégies de la surveillance et la maintenance des ponts vis-à-vis de critères de service.

La redondance dans les structures peut être estimée avec différentes mesures appelées indices de redondance. Ces indices sont interprétés de plusieurs manières dans la littérature [Frangopol, 1987], [Chen, 1996], [Wisniewski, 2006], [Casas, 2007] et [Ghosn, 1998]. L'approche, la plus classique et conventionnelle est de définir le degré de redondance (ou d'hyperstaticité, souvent utilisé dans le cadre des analyses des structures) comme la différence entre le nombre d'inconnues de réaction et le nombre d'équations d'équilibre indépendantes. Le degré de redondance ou d'hyperstaticité est alors donné par :

$$R_1 = F - E \quad (4.1)$$

où  $F$  est le nombre d'inconnues de réaction et  $E$  est le nombre d'équations d'équilibre indépendantes.

Cette définition s'avère proprement inapplicable dans le cas des ouvrages existants car elle élimine toute prise en compte de l'état et de la performance au cours du temps.

D'autres indices de redondance sont alors donnés dans la littérature :

- Indice de *réserve* de redondance :

$$R_2 = \frac{L_{intact}}{L_{design}} \quad (4.2)$$

où  $L_{intact}$  est un multiplicateur de charge lié à la performance de l'ouvrage intact et  $L_{design}$  est un multiplicateur de charge lié à la conception (design) de l'ouvrage.

- Indice de redondance *résiduelle* :

$$R_3 = \frac{L_{endommagé}}{L_{intact}} \quad (4.3)$$

- Indice de redondance de *performance* :

$$R_4 = \frac{L_{intact}}{L_{intact} - L_{endommagé}} \quad (4.4)$$

où  $L_{intact}$  est un multiplicateur de charge lié à la performance de l'ouvrage intact et  $L_{endommagé}$  est un multiplicateur de charge lié à la performance de l'ouvrage endommagé.

En considérant  $L_{intact} = \lambda L$  et  $L_{endommagé} = \lambda^* L$  (où  $L$  est la charge règlementaire appliquée sur l'ouvrage et  $\lambda$  est le multiplicateur de charge) en équation 4.4,  $R_4$  va être défini comme, suit :

$$R_4 = \frac{\lambda}{\lambda - \lambda^*} \quad (4.5)$$

Cet indice de redondance est une réserve de performance entre l'endommagement d'un élément et la performance du système du pont. Il exprime également l'importance des éléments individuels sur la réserve de performance dans les ouvrages endommagés.  $R_4=1$  montre que le pont endommagé ne peut plus supporter la charge de trafic selon la performance présentée ( $\lambda^*=0$ ).  $R_4=\infty$  correspond à un ouvrage intact ou bien cela veut dire que l'endommagement n'a aucune influence sur la réserve de performance de l'ouvrage ( $\lambda^*=\lambda$ ).

Ces définitions sont cependant inapplicables dans le cas des ouvrages existants, car ces indices ne prennent pas en compte, d'une part les incertitudes dans l'évaluation des ponts endommagés et d'autre part, l'influence des éléments individuels sur la réserve des ponts endommagés.

En conséquence, afin d'étudier au mieux la redondance dans les ponts, nous avons envisagé d'intégrer une dégradation et d'évaluer son impact sur la redondance dans les ponts en béton armé. L'importance des éléments individuels sur la réserve de performance dans les ponts endommagés est également considérée. Comme les règlements sont peu bavards sur la manière d'apprécier le degré de redondance des ponts existants ainsi que sur la façon de considérer les incertitudes dans l'évaluation des ponts endommagés, la mise en œuvre d'une *approche probabiliste* de l'évaluation, plus rationnelle et efficace de l'indice de redondance est nécessaire.

Dans ce chapitre, quatre indices sont définis pour mesurer la redondance dans les ponts existants. Ces indices représentent d'une part la performance de l'ouvrage endommagé (système) et d'autre part la réserve de performance entre les éléments individuels

(composants) et l'ouvrage (système). Cela exprime l'importance des éléments individuels sur la réserve en fiabilité d'un ouvrage complet.

### **Indices de redondance résiduel et de performance**

Le premier indice correspond à la performance résiduelle de l'ouvrage qui représente la performance de l'ouvrage lorsqu'un élément est défaillant. L'indice de redondance résiduelle est défini comme suit :

$$I_{Red} = \frac{\beta_{s,d}}{\beta_{s,i}} \quad (4.6)$$

$\beta_{s,i}$ : indice de fiabilité du système initial (ouvrage) obtenu par des calculs non linéaires,

$\beta_{s,d}$ : indice de fiabilité du système (ouvrage) obtenu par des calculs non linéaires lorsqu'un élément est défaillant.

Notons que  $I_{Red}=0$  correspondra à un ouvrage endommagé avec une probabilité de défaillance de 50% ( $I_{Red}=-\infty$  correspondant à un ouvrage endommagé avec une probabilité de défaillance de 100%), et  $I_{Red}=1$  correspond à un ouvrage intact. L'indice de redondance résiduel indique le pourcentage de la charge du trafic qui peut être supporté, vis-à-vis des critères de service, par le pont lorsque l'un de ses éléments est défaillant. Cet indice peut intervenir comme une alerte et peut être utilisé pour améliorer les stratégies de surveillance et de maintenance des ponts existants. Il est donc souhaitable de définir un indice cible de performance pour cette opération.

Le deuxième indice correspond à la performance de l'ouvrage qui est en fait la robustesse du pont lorsqu'un élément est défaillant. L'indice de redondance de performance est donc défini comme suit :

$$\beta_{Red} = \frac{\beta_{s,i}}{\beta_{s,i} - \beta_{s,d}} \quad (4.7)$$

$\beta_{s,i}$  et  $\beta_{s,d}$  sont définis par l'équation 4.6.

Notons que  $\beta_{Red}=1$  correspond à un ouvrage endommagé à 50%,  $\beta_{Red}=0$  correspondant à un ouvrage endommagé à 100% et  $\beta_{Red}=\infty$  correspond à un ouvrage intact. Cet indice peut également être appliqué pour étudier la performance d'un réseau comprenant plusieurs ponts dans lequel la perte de performance d'un pont peut entraîner la perte de performance de l'ensemble du réseau. Il s'agit donc de définir l'indice  $\beta_{Red}$  pour tous les ponts constituant le

réseau et de le comparer avec un indice cible pertinent. Cette étude est susceptible d'améliorer les stratégies d'inspection des ponts existants dans un réseau.

### **Indices de réserve de redondance**

Le premier indice de réserve correspond au taux de réserve du système. Afin d'obtenir l'indice de redondance minimum nécessaire, des calculs en fiabilité sont également effectués. L'indice de fiabilité relative est défini comme la réserve minimum du système du pont. Ce dernier est une différence entre l'indice de fiabilité du pont endommagé (système) et l'indice de fiabilité de son élément le plus critique. Notons qu'afin d'obtenir l'indice de fiabilité du système formé par l'ouvrage, des calculs non linéaires sont nécessaires. En revanche, pour obtenir l'indice de fiabilité dans l'élément le plus défavorable, les analyses élastiques linéaires sur le système global (ouvrage) sont menées. Cet indice est donné par :

$$\Delta\beta_{\text{Res}} = \beta_{s,d\_nl} - \beta_{m,c\_l} \quad (4.8)$$

$\beta_{s,d\_nl}$  : indice de fiabilité du système lorsqu'un élément est défaillant, en faisant des calculs non linéaires ;

$\beta_{m,c\_l}$  : indice de fiabilité de l'élément critique en faisant des calculs linéaires.

Remarquons que la valeur de l'indice de fiabilité relative  $\Delta\beta_{\text{Res}}$ , pour un ouvrage intègre (non endommagé) peut varier entre -0,20 et 0,70. La valeur négative de cette marge vient du fait que l'ouvrage, en considérant un comportement non linéaire, va dépasser l'état limite de service bien avant que son premier élément ne l'atteigne. La valeur de cet indice pour un pont endommagé varie entre -5,00 et -1,15. Les marges présentées dans ce paragraphe ne sont pas une référence globale pour tous les ouvrages, car elles peuvent varier en fonction du type d'ouvrage, du nombre de poutres et de travées, de la largeur, de la longueur et de la géométrie [Ghosn, 1998].

Le deuxième indice de réserve correspond à la réserve locale dans les éléments principaux de l'ouvrage (poutres) lorsqu'un élément est défaillant :

$$\beta_{\text{Res}} = \frac{\beta_{m,nl}}{\beta_{m,l}} \quad (4.9)$$

$\beta_{m,nl}$  : indice de fiabilité de l'élément le plus critique, en faisant des calculs non linéaires ;

$\beta_{m,l}$  : indice de fiabilité de l'élément le plus critique, en faisant des calculs linéaires.

Notons que la valeur de l'indice de réserve locale est  $\beta_{\text{Res}} \leq 1$ . L'indice de réserve locale indique le pourcentage de la charge du trafic qui peut être supporté par les différents éléments

du pont lorsqu'il y a un dysfonctionnement. Il s'agit donc d'assurer le bon fonctionnement de tous les éléments du pont endommagé en définissant un indice cible. Ce dernier peut être appliqué pour mieux identifier quel élément ou groupe d'éléments est le plus critique. Cet indice peut être utilisé pour améliorer les stratégies de surveillance.

#### 4.4 Caractéristiques et dimensionnement d'un pont en béton armé

Dans ce paragraphe, un des ponts en béton armé, parmi ceux de la région Alsace (Bas et Haut Rhin) a été considéré. Le tableau 4.1 illustre les caractéristiques structurales et géométriques de cet ouvrage. Les caractéristiques géométriques de la section en *T* des poutres et des entretoises de ce pont sont présentées dans la figure 4.4 et les tableaux 4.2 et 4.3. L'enrobage en béton prévu autour des barres d'acier est de 4 cm, valeur souvent retrouvée dans les ponts en béton armé existants de cette région [Silva, 2004].

Tableau 4.1. Caractéristiques générales du pont

Caractéristiques structurales			Caractéristiques géométriques		
Nombre des poutres	Nombre des entretoises	Nombre des travées	Nombre des voies	Largeur du pont (m)	Longueur du pont (m)
5	5	1	2	10	30

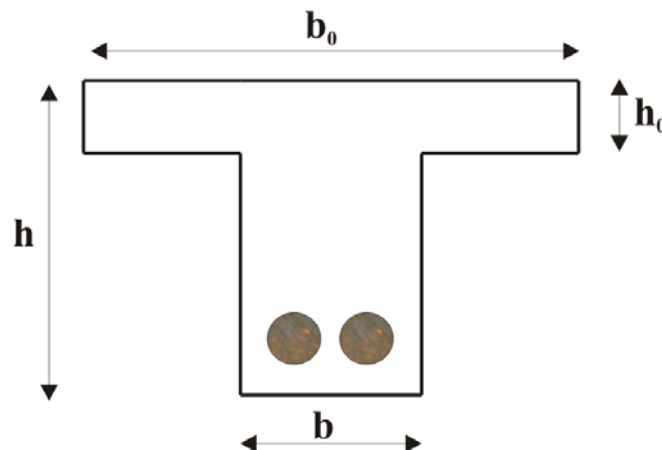


Figure 4.4. Section en *T* des poutres et des entretoises

Tableau 4.2. Caractéristiques géométriques de la section en *T* des poutres

$A_s^*$ ( $cm^2$ )	$h$ (cm)	$b$ (cm)	$h_0$ (cm)	$b_0$ (cm)
203,06	125	50	10	200

\* Aire de section de l'acier

Tableau 4.3. Caractéristiques géométriques de la section *T* des entretoises

$A_s^*$ ( $cm^2$ )	$h$ (cm)	$b$ (cm)	$h_0$ (cm)	$b_0$ (cm)
25	120	40	10	200

\* Aire de section de l'acier

Afin de simplifier la modélisation au sein du code de calcul aux éléments finis, les éléments de poutres multifibres sont utilisés (voir chapitre 3). Les poutres et les entretoises sont modélisées avec 100 éléments multifibres. Ces éléments sont constitués de 8 groupes de caractéristiques géométriques différentes selon le plan de ferrailage. Chaque élément est constitué de 40 fibres dont 38 en béton et deux en acier passif. Afin de modéliser la dalle, 486 éléments volumiques tridimensionnels à 8 nœuds sont utilisés.

Le comportement du béton dans les poutres, les entretoises et la dalle est modélisé par une loi élastoplastique de Willam-Warnke à 3 paramètres. Les valeurs des paramètres du modèle du béton sont présentées dans le tableau 4.4.

Tableau 4.4 Caractéristiques des paramètres du modèle élastoplastique du béton

Paramètre	Valeur
Module d'Young	$E=3,2 \times 10^4$ MPa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,20$
Résistance en compression	$f_c = 30,0$ MPa
Résistance en traction	$f_t = 2,9$ MPa
Résistance en compression biaxiale	$f_{bc}=34,5$ MPa
Paramètre définissant le seuil de plasticité initial du béton	$Z_0 = 0,75$
Paramètre définissant le seuil de plasticité ultime du béton	$Z_u = 1,00$
Facteur exponentiel d'écrouissage	$K = 0$

Pour l'acier des poutres et des entretoises, une loi élastoplastique uniaxiale de Von-Mises est utilisée. Les valeurs utilisées pour les paramètres de cette loi sont la résistance en traction simple  $\sigma_y=400$  MPa, le module d'Young  $E_s=2,0\times 10^5$  MPa, le coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et la résistance en cisaillement simple  $K=230,94$  MPa.

#### 4.4.1 Chargement

Ce pont est soumis aux charges permanentes dues à son poids propre et aux charges d'exploitations imposées sur la chaussée.

Dans le règlement français [Fasc., 1971], quatre systèmes de charge d'exploitation peuvent être disposés sur les chaussées des ponts: le système de charges *A* (système de charge uniformément répartie), le système de charges *B* (système de charges localisées qui comprend trois systèmes distinctes,  $B_c$ ,  $B_r$  et  $B_l$ ), le système de charges militaires représentées par les convois  $M_c80$  et  $M_c120$  et les systèmes de charges exceptionnelles.

Dans ce paragraphe, afin de mettre en évidence la disposition la plus défavorable des camions sur la chaussée du pont, le système des charges  $B_c$  est retenu. Ce système se compose de camions types. Un camion type du système  $B_c$  comporte trois essieux, ayant des roues simples munies de pneumatiques, et répondant aux caractéristiques suivantes : une masse totale de 30 t, une masse portée par chacun des essieux arrière de 12 t, une masse portée par l'essieu avant de 6 t, une longueur d'encombrement de 10,50 m, une largeur d'encombrement de 2,50 m, une distance des essieux arrière, de 1,50 m, une distance de l'essieu avant au premier essieu arrière, de 4,50 m et une distance d'axe en axe des deux roues d'un essieu, de 2 m. Autant de camions que la chaussée comporte de voies de circulation sont généralement disposés sur la chaussée du pont. Ces camions sont placés dans la situation la plus défavorable.

Afin de localiser le chargement le plus défavorable, nous disposons deux camions du type  $B_c$  selon deux façons différentes. Dans un premier temps, les deux camions sont localisés côte à côte sur la largeur du pont (figure 4.5). Dans cette figure, la distance entre les deux camions  $c$  varie, entre 0,5 et 3,5 m et la distance  $d$  varie, entre 0 et 19.5 m, selon la disposition des camions [Mohammadkhani, 2007c-d].



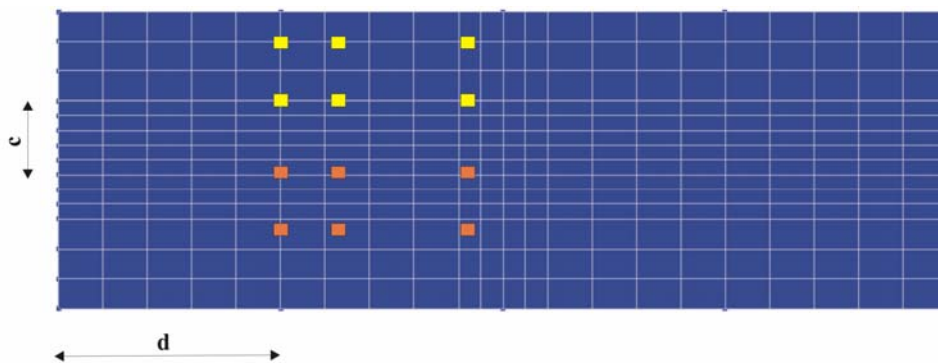


Figure 4.5. Système deux camions  $B_c$  positionnés transversalement

Dans un deuxième temps, deux camions sont placés l'un après l'autre selon l'axe du pont. Il est possible de remarquer que les deux camions sont orientés dans le même sens (figure 4.6). Sur cette figure, la distance longitudinale entre les deux camions  $a$  varie, entre 4,5 et 9,0 m et la distance  $b$  varie, entre 0 et 5,5 m.

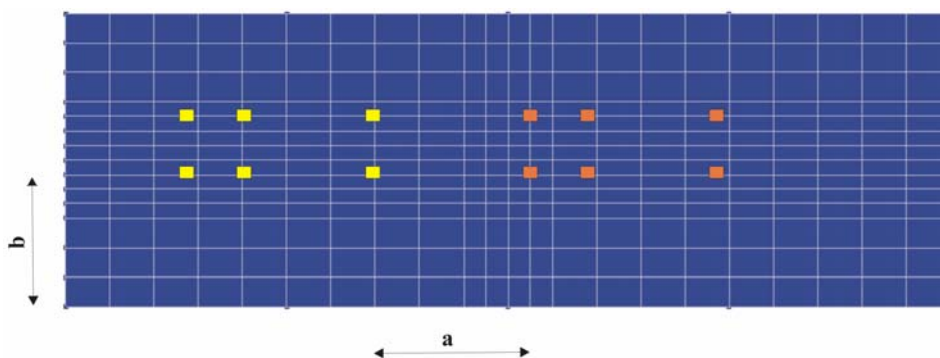


Figure 4.6. Système deux camions  $B_c$  positionnés longitudinalement

Finalement, après une dizaine de dispositions différentes pour les camions en faisant varier les distances  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  des figures 4.5 et 4.6, la disposition du chargement le plus défavorable est obtenue à la figure 4.7. Dans cette figure  $c=0,5$  m et  $d=13,5$  m.

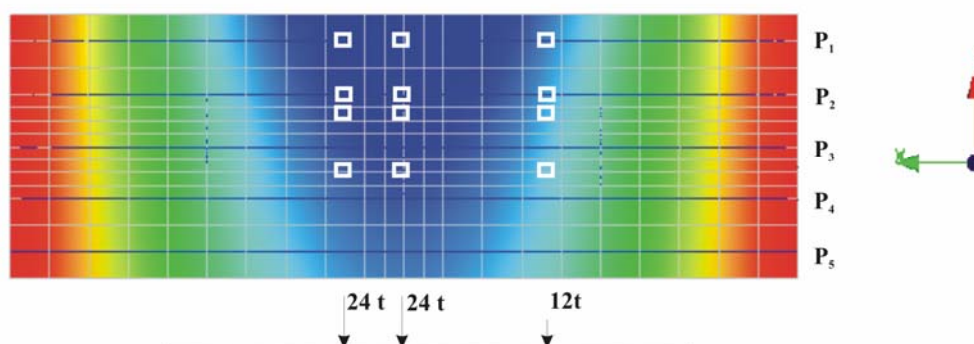


Figure 4.7. Disposition de la charge la plus défavorable

#### 4.4.2 Modèle probabiliste

Les variables considérées comme aléatoires sont respectivement les modules d'élasticité du béton et de l'acier qui sont modélisés par des lois normales, la résistance limite d'élasticité de l'acier, la résistance en compression et en traction du béton qui sont modélisées par des lois lognormales (tableau 4.5). Toutes les variables sont indépendantes. La charge des deux camions du type  $B_c$ , est considérée comme variable déterministe.

Tableau 4.5. Caractéristiques des variables aléatoires

Paramètres	Loi de distribution	Moyenne	CdV*
$E_c$	Normale	$3,2 \times 10^4$ MPa	0,15
$E_s$	Normale	$2,0 \times 10^5$ MPa	0,005
$F_y$	Log-normale	400 MPa	0,01
$f_c$	Log-normale	30,0 MPa	0,15
$f_t$	Log-normale	2,9 MPa	0,005

\*Coefficient de variation

Les processus d'évaluation d'un pont en béton armé sont d'une importance cruciale pour le maintenir dans des conditions d'aptitude au service et de sécurité acceptables. Par ailleurs, la redondance est une réserve entre la performance du système et la performance des éléments individuels du pont. Les états limites de service sont donc considérés d'une part au niveau du

système global formé par le pont (équation 4.10) et d'autre part au niveau des poutres à mi-travée du pont (équation 4.11).

$$g(E_s, E_c, F_y, f_c, f_t) = \delta_y - \max_{i=1}^{23}(\delta_i(E_s, E_c, F_y, f_c, f_t)) = 0 \quad (4.10)$$

$$g(E_s, E_c, F_y, f_c, f_t) = \delta_y - \delta_i(E_s, E_c, F_y, f_c, f_t) = 0 \quad (4.11)$$

où  $\delta_y$  est la déformation maximum ( $L/300=10\text{cm}$ ), et  $\delta_i$  est la déformation verticale dans chaque élément.

#### 4.4.3 Identification d'éléments les plus critiques

Une étude déterministe est menée ici pour mieux identifier quel élément ou groupe d'éléments est le plus critique. Cette stratégie peut être appliquée dans le cas de ponts existants pour prendre des décisions pertinentes afin de savoir dans quelle partie du pont, un endommagement va conduire à des conséquences majeures sur le comportement global de l'ouvrage.

Il est possible également d'identifier quel élément peut avoir une influence plus ou moins importante sur l'efficacité de la redondance des ponts, ce qui nous intéresse ici. Pour cela nous définissons un multiplicateur de charge ( $LF_d$ ). Il s'agit d'un multiplicateur de charge des camions de type  $B_c$  qui peut être obtenu par des calculs non linéaires sur le modèle aux éléments finis du pont intact ou endommagé. Ce multiplicateur  $LF_d$  est incrémenté jusqu'à ce que chaque élément dépasse l'état limite de service.

Pour un multiplicateur de charge,  $LF_d=2,5$  appliqué au pont intact, la déformation maximum sur la poutre  $P_1$  à mi-travée du pont dépasse  $\delta_y$  (déformation limite) considérée dans l'équation 4.11. Cela conduit à redistribuer des efforts sur les autres poutres. La déformation maximum dans les poutres  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  et  $P_5$  à mi-travée du pont dépassent  $\delta_y$  pour les multiplicateur de charge  $LF_d=2,9$ ,  $LF_d=3,4$ ,  $LF_d=4,0$  et  $LF_d=4,85$ . Il est évident que l'élément le plus critique dans ce pont est bien la poutre  $P_1$  à mi-portée.

#### 4.5 Endommagement et redondance

Afin de prendre en compte l'influence de l'endommagement sur la redondance des ponts, il est nécessaire de définir d'abord les différents scénarios d'endommagement. Car au fur à mesure que les événements physiques se succèdent et agissent sur les ponts, la performance de ces derniers à les supporter diminue et le dommage subi augmente. Le dommage ou le niveau d'endommagement est un nombre qui caractérise le degré d'avancement de la dégradation qui précède une défaillance. Un niveau d'endommagement peut être relié

directement à des propriétés physiques parce que l'endommagement est caractérisé par des modifications en principe observables: les déformations, la dégradation des surfaces, les microfissures, la corrosion, le vieillissement par relaxation, etc. tous ces phénomènes sont observables mais, parfois ils sont difficiles à mettre en évidence et ne permettent pas toujours de définir aisément un dommage. Afin donc de mieux considérer l'endommagement et son impact sur la redondance des ponts, trois scénarios sont pris en compte ici.

#### 4.5.1 Premier scénario de l'endommagement et impact sur la redondance du pont

Dans le premier scénario de l'endommagement, une dégradation est supposée dans la section de l'acier passif,  $S_{a,d}$  et la section du béton,  $S_{b,d}$  comme illustré dans la figure 4.8. Cet endommagement est supposé dans la poutre  $P_I$  à mi-portée.

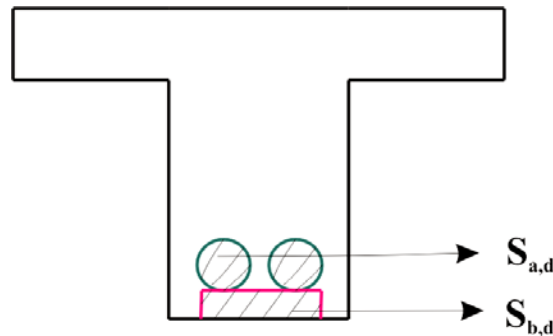


Figure 4.8. Sections endommagées dans la poutre  $P_I$  à mi-portée

Afin de considérer l'évolution de l'endommagement, cinq catégories sont considérées pour le premier scénario d'endommagement :

- élément « *intact* » : Aucune diminution
- endommagement « *léger* » d'un élément : Une diminution de 25% sur l'aire de  $S_{a,d}$  et  $S_{b,d}$
- endommagement « *modéré* » d'un élément : Une diminution de 50% sur l'aire de  $S_{a,d}$  et  $S_{b,d}$
- endommagement « *sévère* » d'un élément : Une diminution de 75% sur l'aire de  $S_{a,d}$  et  $S_{b,d}$
- endommagement « *total* » d'un élément : Une diminution de 100% sur l'aire de  $S_{a,d}$  et  $S_{b,d}$

Les surfaces de réponse du type linéaire sont ici utilisées, l'algorithme convergeant après 6 itérations, soit 72 appels au code de calcul CESAR-LCPC© et pour une tolérance de convergence de  $10^{-3}$ . L'influence de l'évolution de l'endommagement de la poutre  $P_I$  à mi-portée sur l'indice de fiabilité est montrée dans la figure 4.9. Ces résultats montrent que

l'indice de fiabilité du pont diminue avec l'évolution de l'endommagement. L'indice de fiabilité correspondant aux cinq poutres est également illustré dans la figure 4.10. Cette figure montre que l'indice de fiabilité diminue dans les cinq poutres en considérant une évolution de l'endommagement dans la poutre  $P_1$ . Cette influence est plus marquée dans les poutres  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . En revanche, il n'y a aucune influence sur la poutre  $P_5$  et on ne note aucun effet de la redistribution des efforts sur cette poutre.

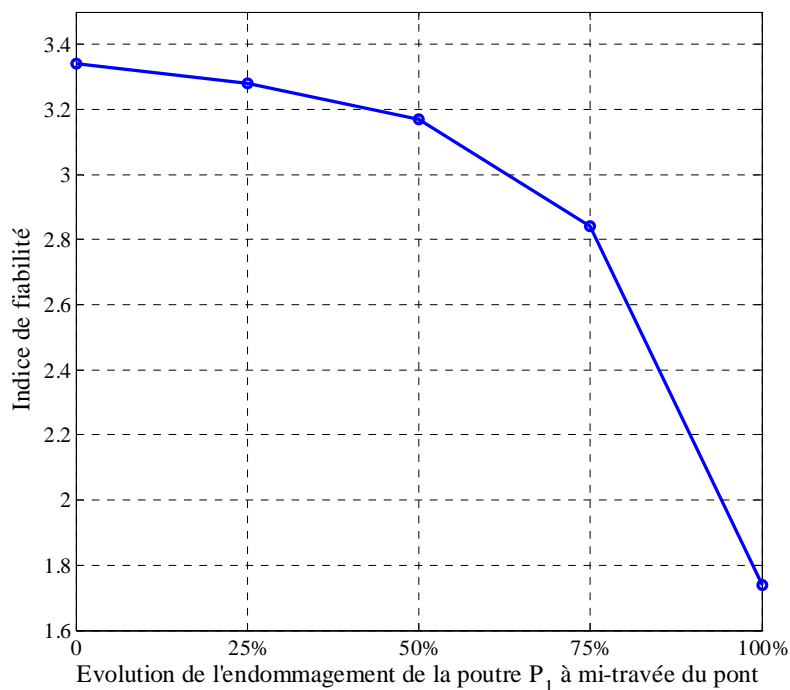


Figure 4.9. Influence de la dégradation sur l'indice de fiabilité du pont

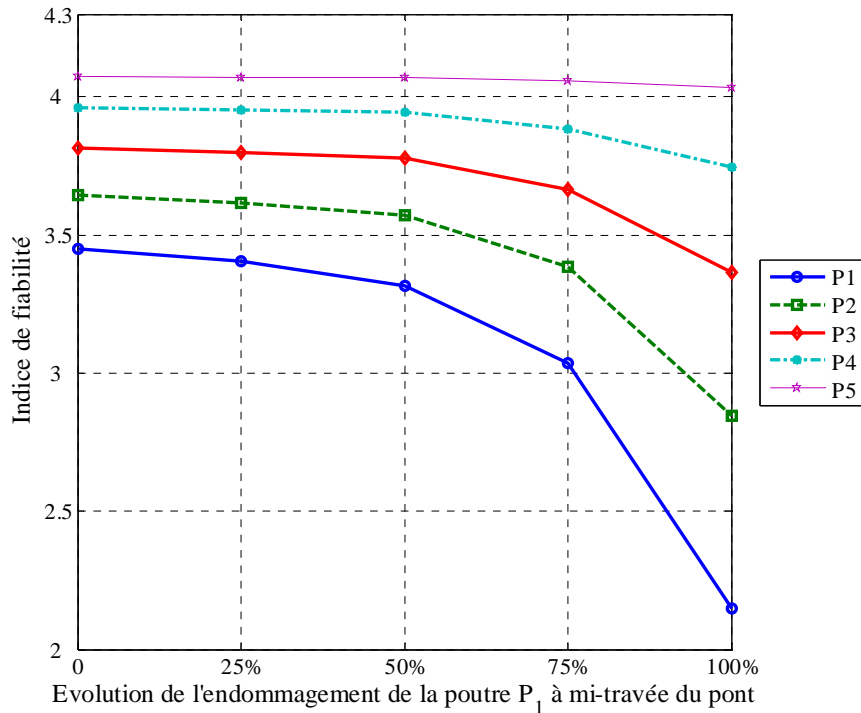


Figure 4.10. Influence de la dégradation sur l'indice de fiabilité des poutres

L'influence de la dégradation de la poutre  $P_1$  sur l'indice de redondance résiduel et sur l'indice de redondance de performance est calculée en utilisant les équations 4.6 et 4.7. Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau 4.6 et dans les figures 4.11 et 4.12. En absence de dégradation,  $\beta_{s,d} = \beta_{s,i}$  et par conséquent  $I_{Red}=1$  et  $\beta_{Red}=\infty$ .

Les résultats obtenus montrent que les deux indices de redondance diminuent, à l'opposé de l'endommagement dans la section de l'acier passif  $S_{a,d}$  et la section du béton  $S_{b,d}$  en poutre  $P_1$  qui continue à évoluer. Il s'agit d'une diminution de la performance du pont. Cependant il est possible d'observer que dans le cas d'un endommagement total des deux sections ( $S_{a,d}$  et  $S_{b,d}$ ), le pont peut encore supporter environ 52% de la charge des camions avant de dépasser son critère d'aptitude au service.

Tableau 4.6. Influence de la dégradation de la poutre  $P_1$  sur les indices de redondance du système du pont

	Etat de l'endommagement				
	Initial	25%	50%	75%	100%
Indice de redondance résiduel du système ( $I_{Red}$ )	1,00	0,9827	0,9505	0,8521	0,5216
Indice de redondance de la performance du système ( $\beta_{Red}$ )	$\infty$	57,7794	20,1930	6,7515	2,0871

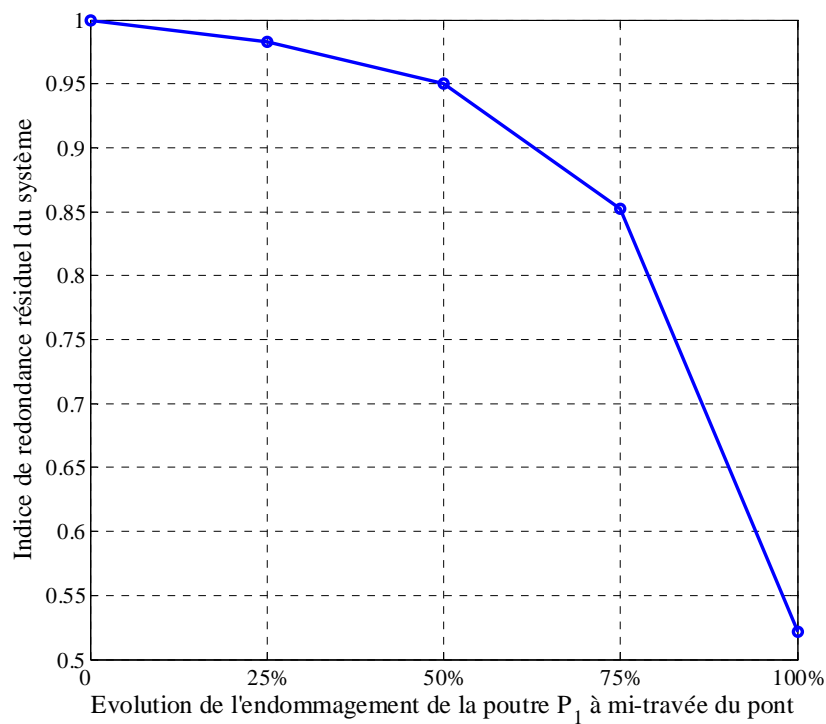


Figure 4.11. Influence de la dégradation sur l'indice de redondance résiduel du pont

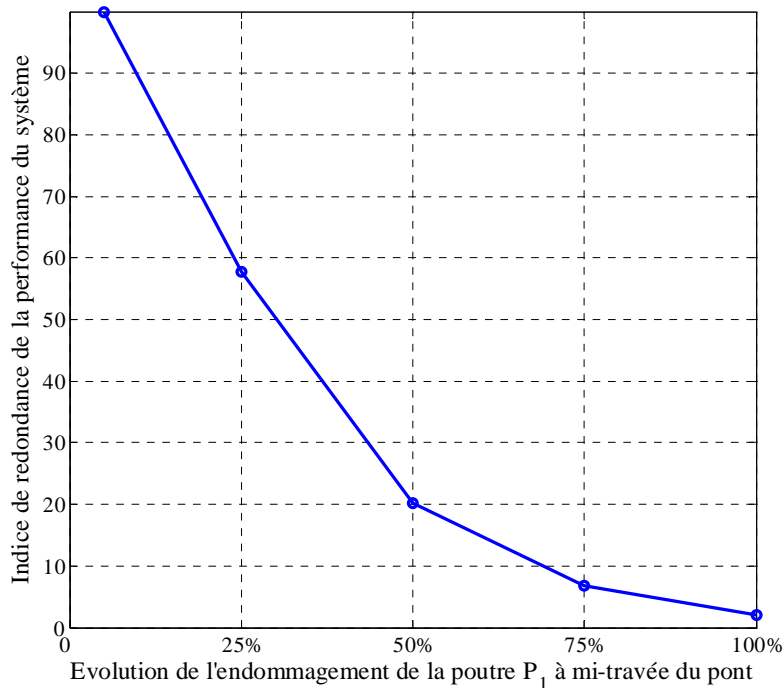


Figure 4.12. Influence de la dégradation sur l'indice de redondance de la performance du pont

L'influence de la dégradation de la poutre  $P_1$  sur l'indice de réserve de redondance du pont est calculée en utilisant les équations 4.8 et 4.9. La figure 4.13 présente les résultats obtenus pour l'indice de fiabilité relative de l'ouvrage. Cet indice,  $\Delta\beta_{Res} = 0,1512$  pour l'état intact (non endommagé) du pont, varie entre -1,2549 et 0,1512 pour le pont endommagé selon les différentes catégories d'endommagement. Ces valeurs sont bien dans les marges mentionnées dans le paragraphe 4.3. Il est donc possible de noter qu'en considérant ce type d'endommagement sur la poutre  $P_1$ , ce pont peut continuer encore à supporter la charge des camions en assurant son aptitude au service.

La figure 4.14 illustre l'indice de réserve locale dans chaque poutre. Cet indice montre l'efficacité de la redistribution des efforts entre les poutres. Nous observons que la redistribution des efforts entre les poutres  $P_1$  et  $P_2$  a été effectuée avant d'avoir considéré l'endommagement dans les deux sections ( $S_{a,d}$  et  $S_{b,d}$ ) de  $P_1$ . Cela veut dire que la charge des camions est tout de suite distribuée sur les deux poutres  $P_1$  et  $P_2$ , une fois qu'elle est appliquée sur la chaussée. Cela est normal dans la mesure où les deux poutres sont directement sous la charge des camions. Par conséquent, elles sont les poutres les plus critiques (voir paragraphe 4.4.3). Il est possible d'observer également une redistribution des efforts pour les poutres  $P_3$  et  $P_4$  en considérant respectivement 50% et 75% de



l'endommagement dans les sections  $S_{a,d}$  et  $S_{b,d}$  de la poutre  $P_1$ . Nous constatons qu'il y a aucun effet de redistribution des efforts sur la poutre  $P_5$ .

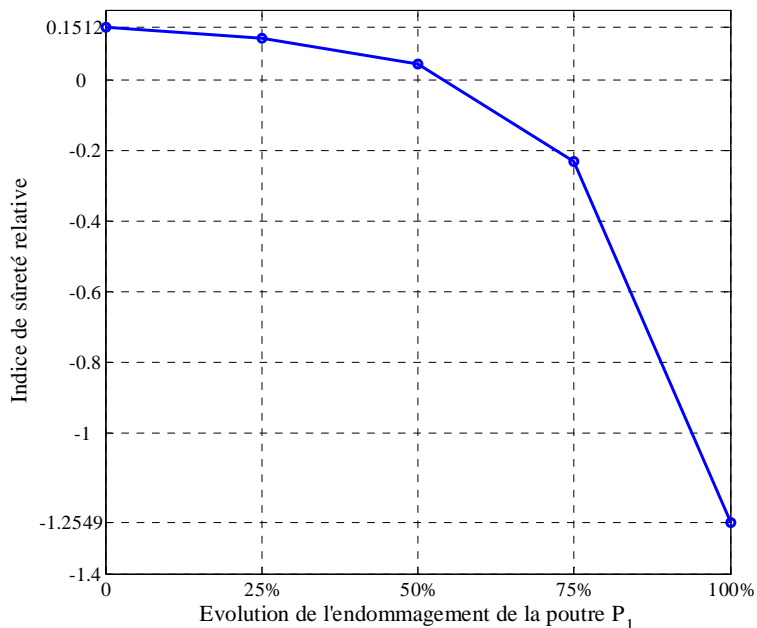


Figure 4.13. Influence de la dégradation sur l'indice de fiabilité relative du système global du pont

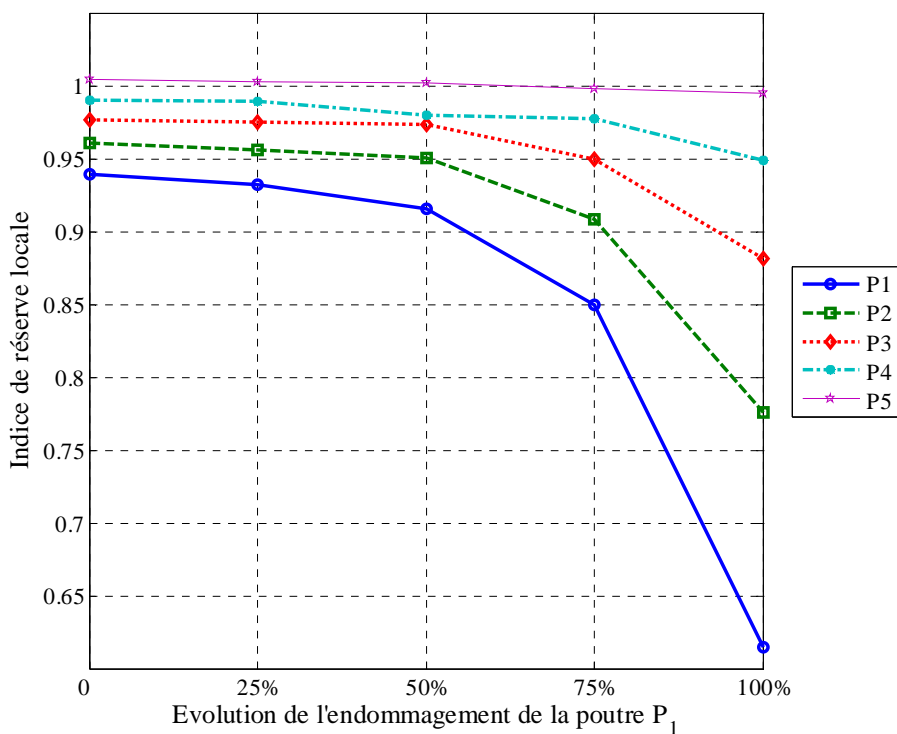


Figure 4.14. Influence de la dégradation sur l'indice de réserve locale de chaque poutre

Comme précisé dans le paragraphe précédent, la redistribution des efforts entre les poutres  $P_1$  et  $P_2$  est effectuée avant la présence d'un endommagement dans la poutre  $P_1$ . Ce résultat a été obtenu pour une déformation limite égale à  $\delta_y=L/300=10\text{cm}$  présenté dans les équations 4.10 et 4.11. Nous nous sommes donc intéressés ici à mettre en évidence, une étude de sensibilité sur la déformation limite et d'évaluer son impact sur la redistribution des efforts entre ces deux poutres. Pour ce faire, quatre valeurs distinctes pour la déformation limite sont considérées. Les valeurs retenues sont  $\delta_y=L/375=8\text{cm}$ ,  $\delta_y=L/333=9\text{cm}$ ,  $\delta_y=L/300=10\text{cm}$  et  $\delta_y=L/270=11\text{cm}$ . Les résultats obtenus pour l'indice de fiabilité sur les poutres  $P_1$  et  $P_2$  en fonction de l'endommagement sont illustrés dans les figures 4.15 à 4.18. Afin de détailler l'évolution de l'indice de fiabilité sur chacune des deux poutres, nous avons considéré l'endommagement sur la poutre  $P_1$  jusqu'à 5%. On remarque que dans les quatre cas, l'indice de fiabilité diminue avec l'évolution de l'endommagement. Par ailleurs, aucun effet de redistribution des efforts entre les deux poutres n'est observé. Cela nous permet de confirmer que la redistribution des efforts entre les poutres  $P_1$  et  $P_2$  apparaît bien avant le début de l'endommagement et que la déformation limite n'a pas une grande influence sur la redistribution des efforts entre ces deux poutres.

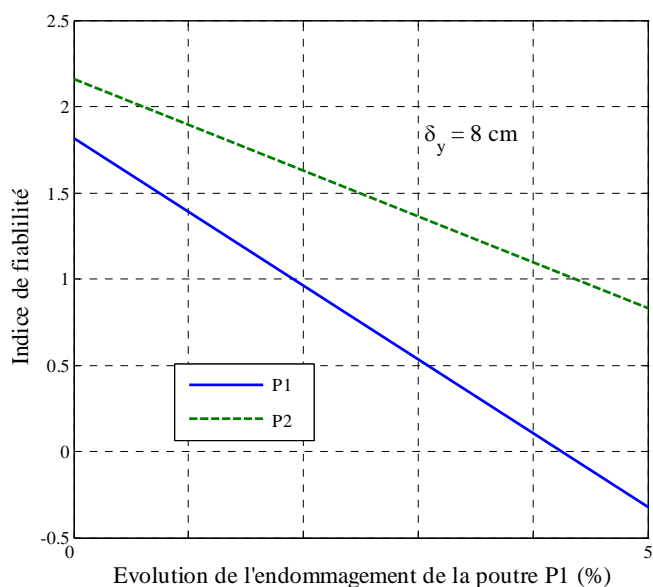


Figure 4.15. Influence de l'endommagement sur l'indice de fiabilité des poutres  $P_1$  et  $P_2$  en considérant une déformation limite  $\delta_y=8\text{cm}$

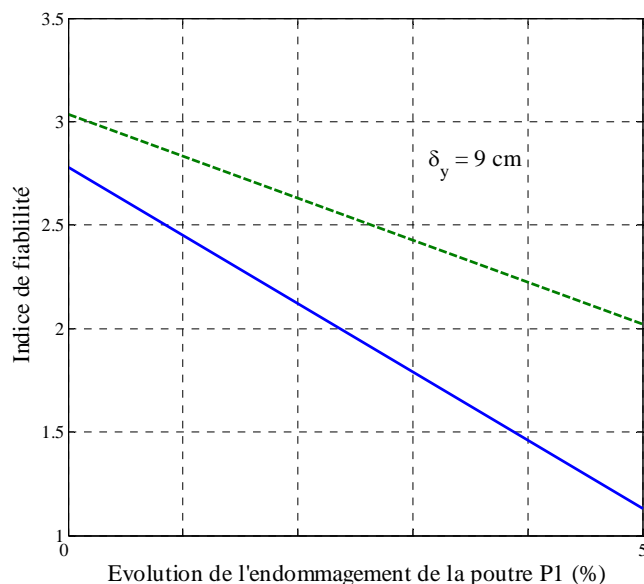


Figure 4.16. Influence de l'endommagement sur l'indice de fiabilité des poutres  $P_1$  et  $P_2$  en considérant une déformation limite  $\delta_y=9\text{cm}$

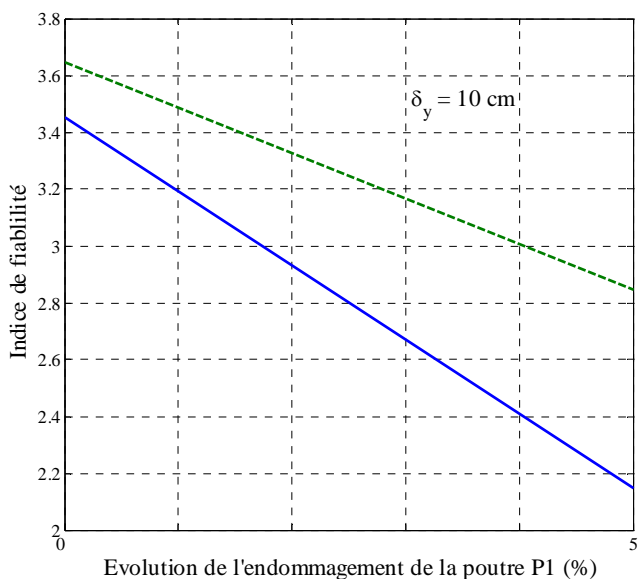


Figure 4.17. Influence de l'endommagement sur l'indice de fiabilité des poutres  $P_1$  et  $P_2$  en considérant une déformation limite  $\delta_y=10\text{cm}$

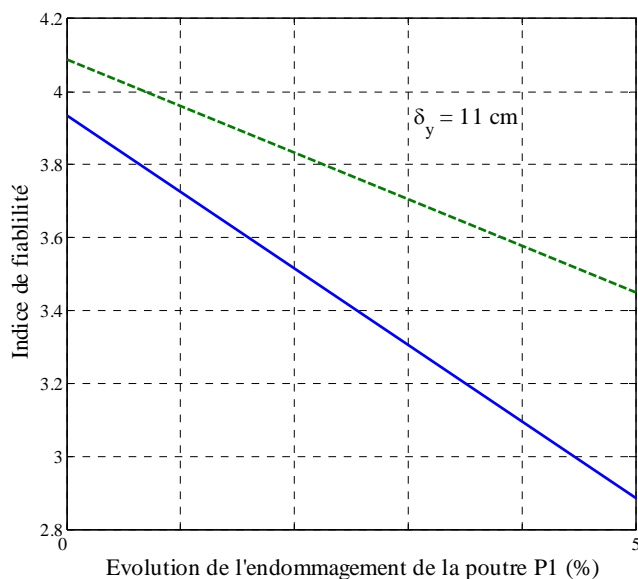


Figure 4.18. Influence de l'endommagement sur l'indice de fiabilité des poutres  $P_1$  et  $P_2$  en considérant une déformation limite  $\delta_y=11\text{cm}$

Les figures 4.19 à 4.23 présentent l'influence du multiplicateur de charge ( $LF_d$ ) sur l'indice de fiabilité de chaque poutre. Ces figures représentent les différentes catégories d'endommagement sur la poutre  $P_1$ . Il s'agit donc d'augmenter la charge des deux camions de type  $B_c$  et de vérifier son impact sur l'évolution de l'indice de fiabilité pour chaque poutre. Il apparaît que l'indice de fiabilité de chaque poutre diminue avec le multiplicateur de charge ( $LF_d$ ) et l'écart entre les courbes des différentes poutres augmente avec l'évolution de l'endommagement de la poutre  $P_1$ .

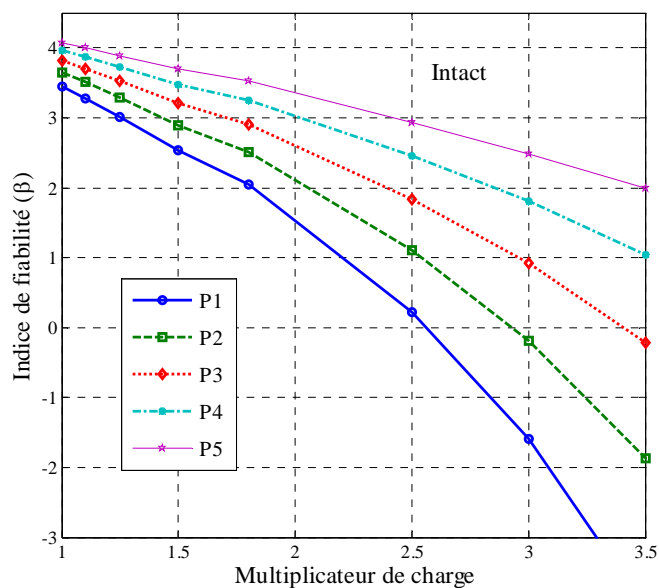


Figure 4.19. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le cas du pont intact

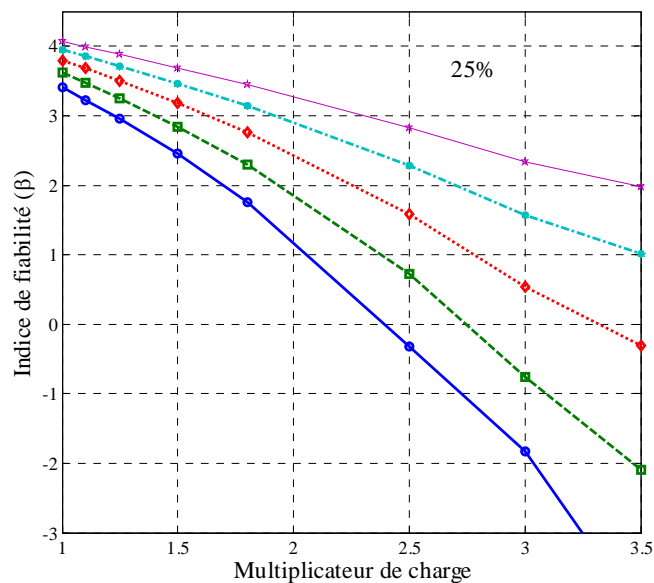


Figure 4.20. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le cas d'un endommagement léger (25%)

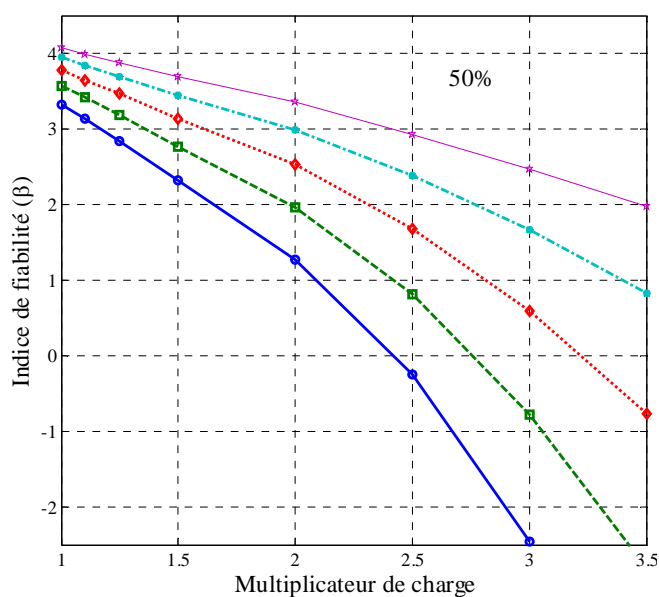


Figure 4.21. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le cas d'un endommagement modéré (50%)

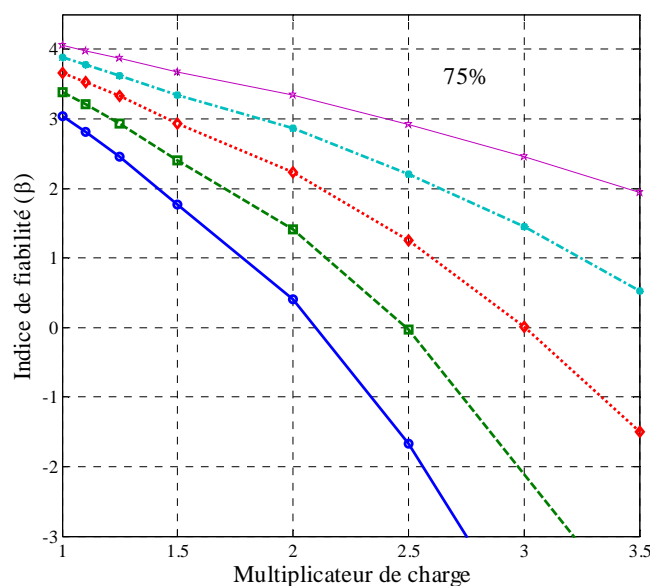


Figure 4.22. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le cas d'un endommagement sévère (75%)

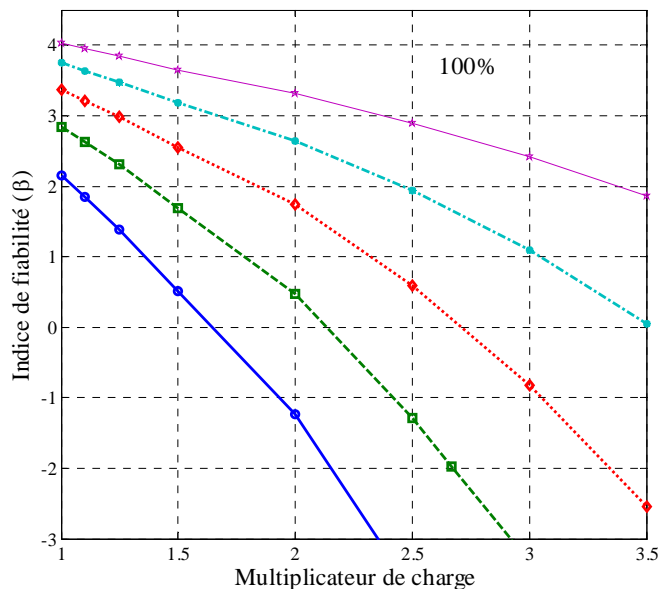


Figure 4.23. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le cas d'un endommagement total (100%)

Il est possible d'identifier également que l'effet combiné du multiplicateur de charge et de l'endommagement sur l'indice de fiabilité est plus marqué sur les poutres  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . En revanche, cet effet est moins sensible sur les poutres  $P_4$  et  $P_5$ . Les figures 4.24 et 4.25 donnent un aperçu de cet effet dans les poutres  $P_1$  et  $P_5$ .

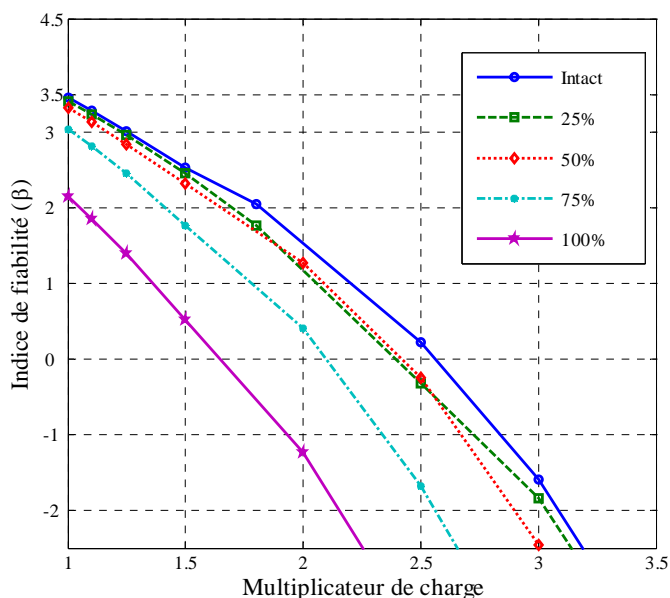


Figure 4.24. Influence de l'effet combiné du multiplicateur de charge et de l'endommagement sur l'indice de fiabilité de la poutre  $P_1$

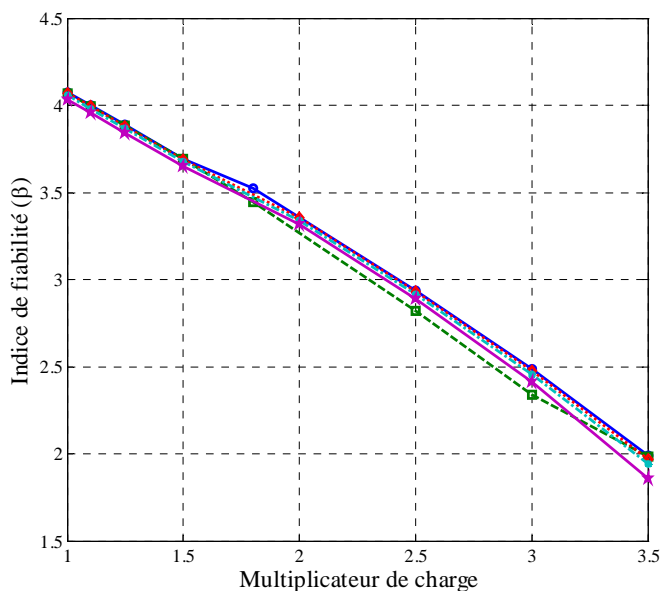


Figure 4.25. Influence de l'effet combiné du multiplicateur de charge et de l'endommagement sur l'indice de fiabilité de la poutre  $P_5$

Prenons deux cas extrêmes dans les figures 4.24 et 4.25. Il s'agit de comparer les indices de fiabilité des poutres  $P_1$  et  $P_5$  pour l'état d'endommagement initial et pour celui de l'endommagement total (100%) des deux sections ( $S_{a,d}$  et  $S_{b,d}$ ) sur  $P_1$ . Les résultats obtenus correspondant aux multiplicateurs de charge  $LF_d=1$  et  $LF_d=2,5$  sont présentés dans les tableaux 4.7 et 4.8.

Tableau 4.7. Influence de l'endommagement sur l'indice de fiabilité des poutres  $P_1$  et  $P_2$  avec un multiplicateur de charge  $LF_d=1$

	Etat de l'endommagement	
	Initial	100%
Indice de fiabilité de la poutre $P_1$	3,452	2,148
Indice de fiabilité de la poutre $P_5$	4,073	4,034

Tableau 4.8. Influence de l'endommagement sur l'indice de fiabilité des poutres  $P_1$  et  $P_2$  avec un multiplicateur de charge  $LF_d=2,5$

	Etat de l'endommagement	
	Initial	100%
Indice de fiabilité de la poutre $P_1$	0,222	-3,714
Indice de fiabilité de la poutre $P_5$	2,937	2,886

#### 4.5.2 Deuxième scénario de l'endommagement et son impact sur la redondance du pont

Le deuxième scénario de l'endommagement consiste à supposer une dégradation plus importante par rapport celle présentée dans le paragraphe 4.5.1. Il s'agit en fait de considérer une dégradation dans la section entière de la poutre  $P_1$  à mi-portée. Une évolution de l'endommagement est également considérée dans ce scénario d'endommagement. Pour cela, quatre catégories sont envisagées comme illustrée sur les figures 4.26 à 4.29.

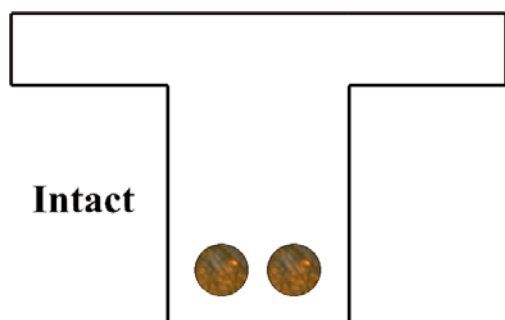


Figure 4.26. Catégorie 1: aucune diminution de l'aire de la section totale de la poutre  $P_1$  à mi-portée du pont

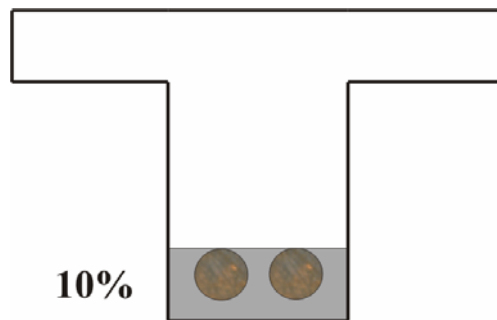


Figure 4.27. Catégorie 2: une diminution de 10% de l'aire de la section totale de la poutre  $P_1$  à mi-portée du pont

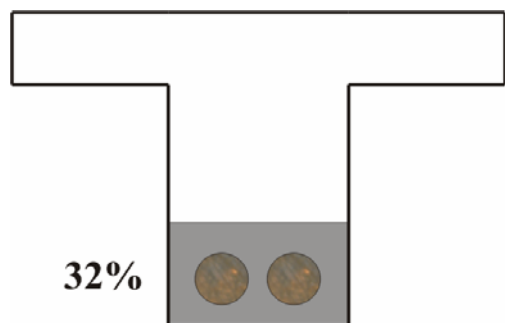


Figure 4.28. Catégorie 3: une diminution de 32% de l'aire de la section totale de la poutre  $P_1$  à mi-portée du pont

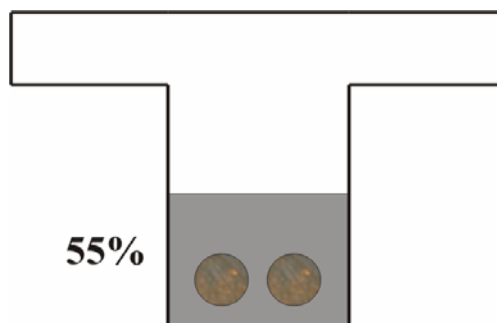


Figure 4.29. Catégorie 4: une diminution de 55% de l'aire de la section totale de la poutre  $P_1$  à mi-portée du pont

L'influence du deuxième scénario d'endommagement sur l'indice de fiabilité du système global du pont ainsi que sur chaque poutre est illustrée sur les figures 4.30 et 4.31. Les résultats obtenus montrent que l'indice de fiabilité diminue avec l'évolution de l'endommagement de la poutre  $P_1$  à mi-portée du pont. Les poutres  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont respectivement plus sensibles par rapport aux deux autres. Il est possible d'observer que dans le deuxième scénario d'endommagement, la diminution de l'indice de fiabilité est plus marquée par rapport à celui du premier cas d'endommagement. Cependant, il n'y a toujours pas une grande influence sur la poutre  $P_5$ . Malgré une dégradation plus importante de la poutre  $P_1$ , la redistribution des efforts sur la poutre  $P_5$  n'est toujours pas atteinte.

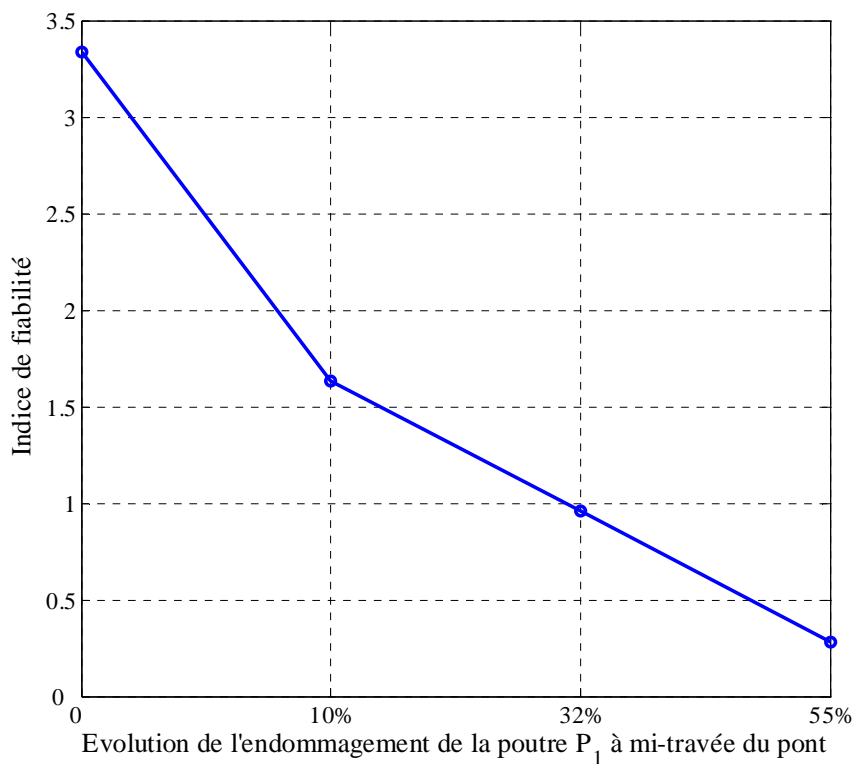


Figure 4.30. Influence de la dégradation sur l'indice de fiabilité du pont

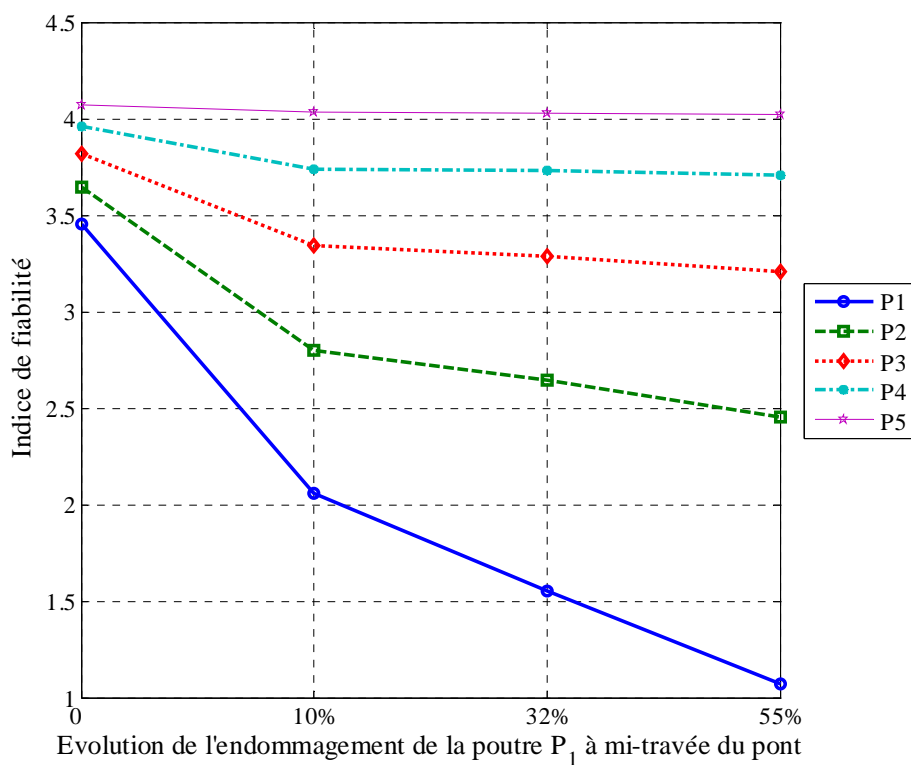


Figure 4.31. Influence de la dégradation sur l'indice de fiabilité des poutres



L'influence du deuxième scénario d'endommagement de la poutre  $P_1$  sur l'indice de redondance résiduel et sur l'indice de redondance de performance est estimée par l'application des équations 4.6 et 4.7. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.9 et sur les figures 4.32 et 4.33. Il apparaît que les deux indices de redondance diminuent. La performance du pont dans ce scénario diminue largement tandis que l'endommagement évolue. Par exemple, dans le cas de la catégorie 4 de l'endommagement (55%), le pont peut supporter environ 10% de la charge des camions avant de dépasser le niveau d'aptitude au service. Cette valeur est bien moindre par rapport à celle obtenue dans le premier scénario d'endommagement.

Tableau 4.9. Influence de la dégradation de la poutre  $P_1$  sur les indices de redondance

	Etat de l'endommagement			
	Initial	10%	32%	55%
Indice de redondance résiduel du système ( $I_{Red}$ )	1,00	0,4886	0,2875	0,0837
Indice de redondance de la performance du système ( $\beta_{Red}$ )	$\infty$	1,9554	1,4035	1,0913

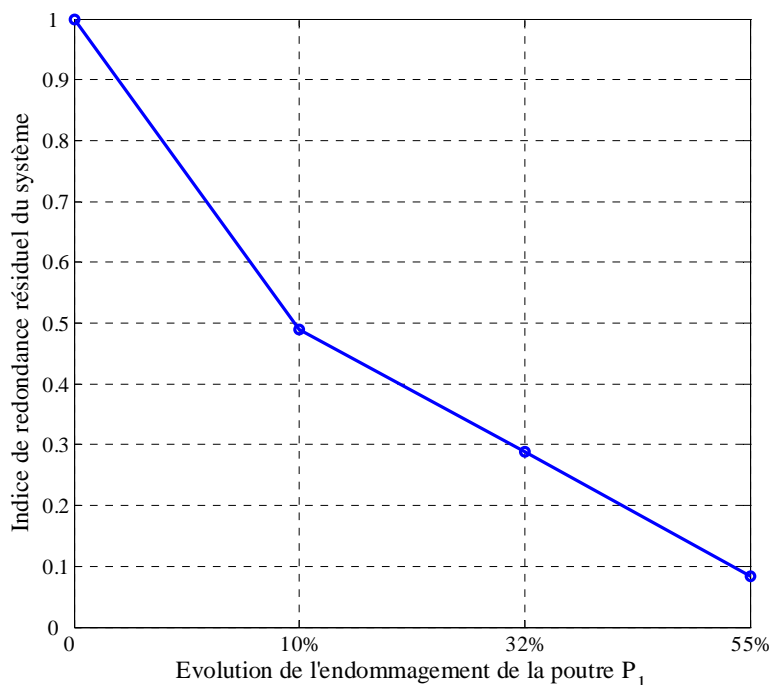


Figure 4.32. Influence de la dégradation sur l'indice de redondance résiduel du pont

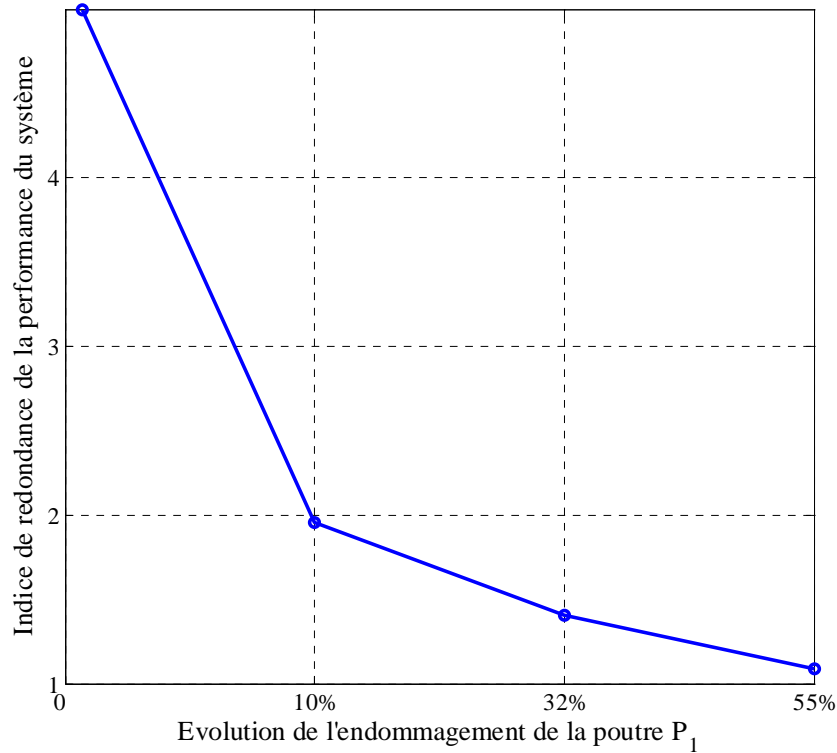


Figure 4.33. Influence de la dégradation sur l'indice de redondance de performance du pont

L'indice de réserve de redondance du pont est obtenu en appliquant les équations 4.8 et 4.9. Les résultats obtenus pour l'indice de fiabilité relative sont présentés dans la figure 4.34. Cet indice,  $\Delta\beta_{Res} = 0,1512$  pour l'état intact (non endommagé), varie entre  $-2,0359$  et  $0,1512$  pour le pont endommagé selon les différentes catégories montrées dans les figures 4.26 à 4.29. On note que ces valeurs respectent les marges mentionnées dans le paragraphe 4.3. Ce qui veut dire qu'en considérant le deuxième scénario d'endommagement de la poutre  $P_1$ , ce pont peut toujours supporter la charge des camions, en conservant son aptitude au service. En revanche, il est évident que l'aptitude au service du pont endommagé dans le cas du deuxième scénario est bien moins vérifiée que dans celui du premier.

L'indice de réserve locale dans chaque poutre est illustré dans la figure 4.35. Il est possible d'observer que l'évolution de cet indice est plus importante dans les poutres  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , respectivement. Il apparaît que cet indice diminue légèrement dans les poutres  $P_3$  et  $P_4$  à partir du moment où l'endommagement est de 10% dans la section totale de la poutre  $P_1$ . Par ailleurs, aucun effet de redistribution des efforts n'est encore décelé dans la poutre  $P_5$ .

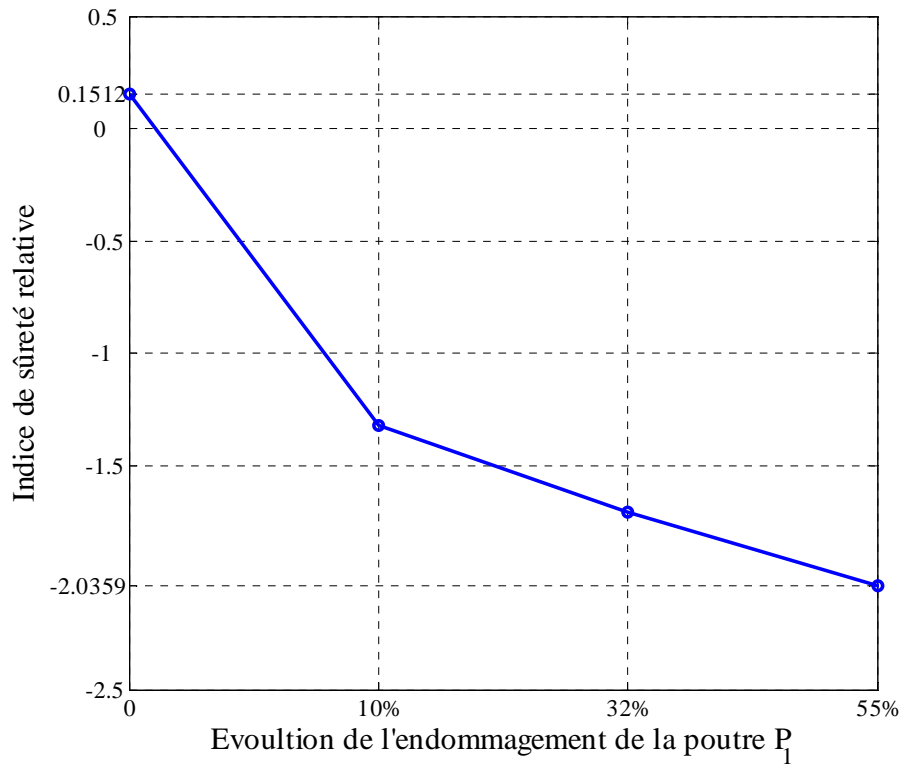


Figure 4.34. Influence de la dégradation sur l'indice de fiabilité relative du pont

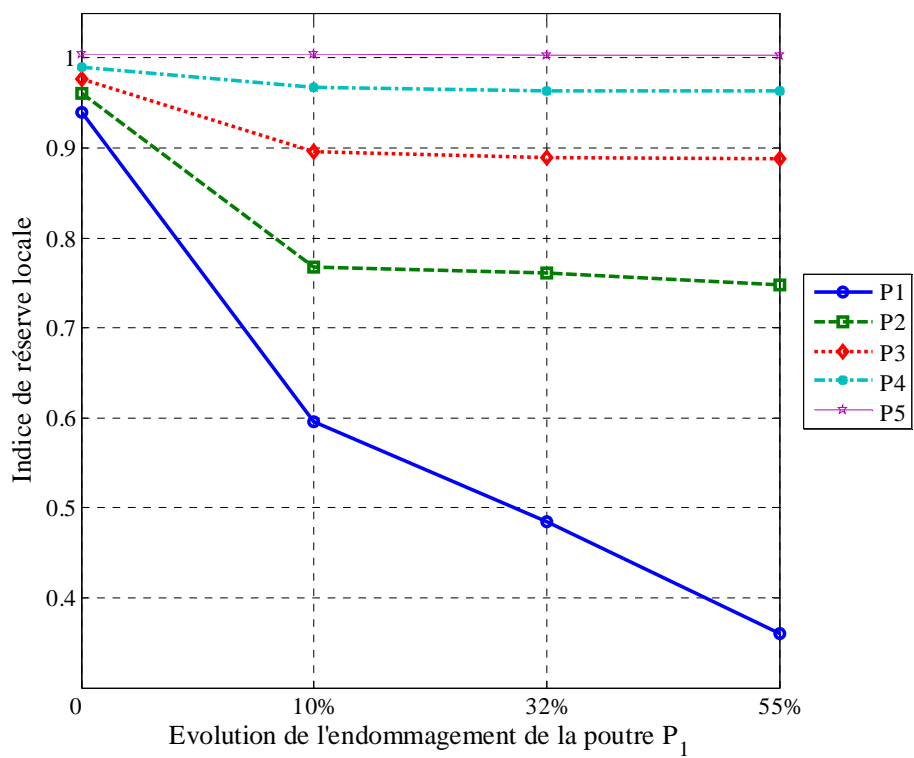


Figure 4.35. Influence de la dégradation sur l'indice de réserve locale de chaque poutre

L'influence du multiplicateur de charge ( $LF_d$ ) sur l'indice de fiabilité de chaque poutre est présentée dans les figures 4.36 à 4.39. Ces figures montrent que l'indice de fiabilité dans chaque poutre diminue, en augmentant le multiplicateur de charge ( $LF_d$ ). Il est possible de remarquer que l'écart entre les différentes courbes des poutres est plus marqué par rapport au premier scénario d'endommagement.

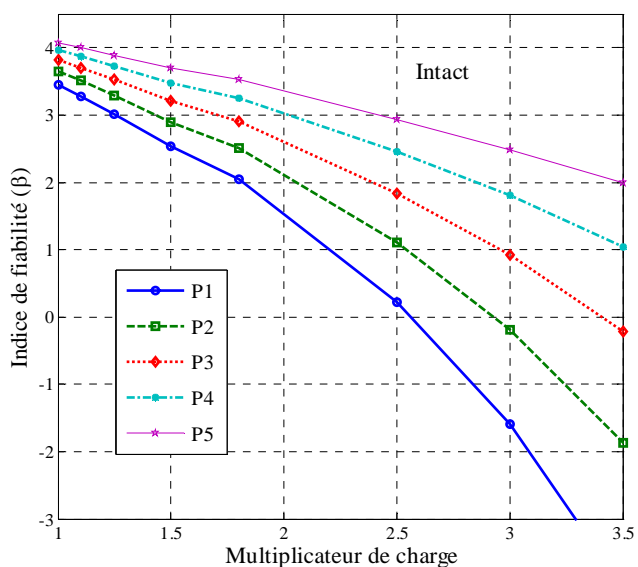


Figure 4.36. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres pour la première catégorie (intact)

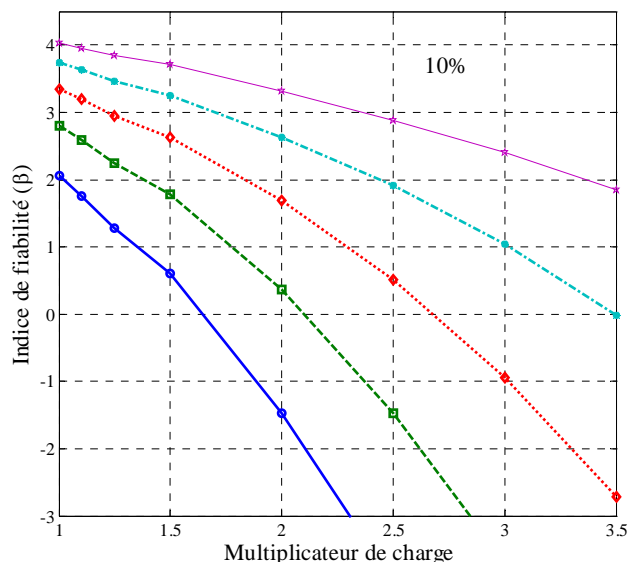


Figure 4.37. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres pour la deuxième catégorie (10%)

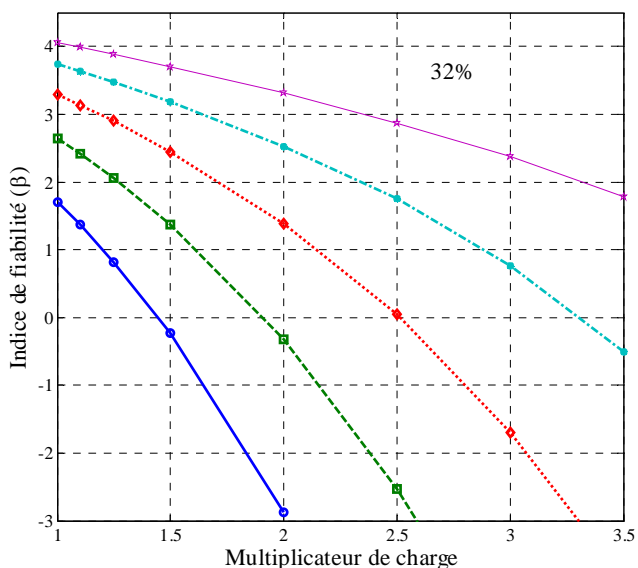


Figure 4.38. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres pour la troisième catégorie (32%)

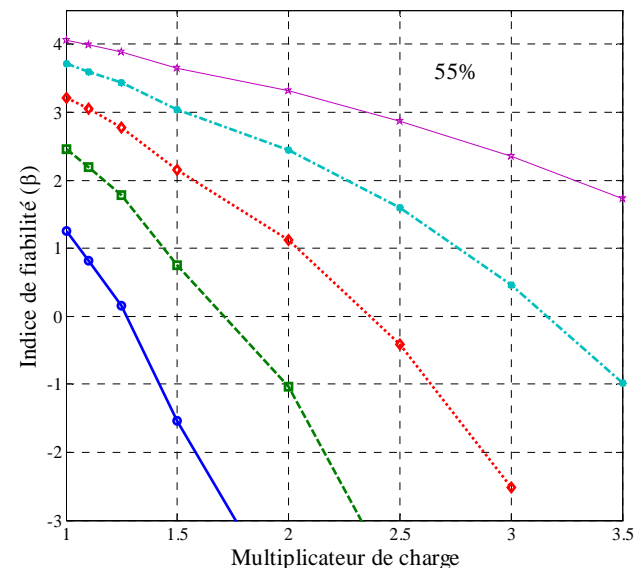


Figure 4.39. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres pour la quatrième catégorie (55%)

L'effet combiné du multiplicateur de charge et de l'endommagement illustré sur les figures 4.36 à 4.39, est notable sur l'indice de fiabilité des poutres  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . En revanche, cet effet est moins marqué sur les poutres  $P_4$  et  $P_5$ . Cet effet dans les poutres  $P_1$  et  $P_5$  est présenté dans les figures 4.40 et 4.41.

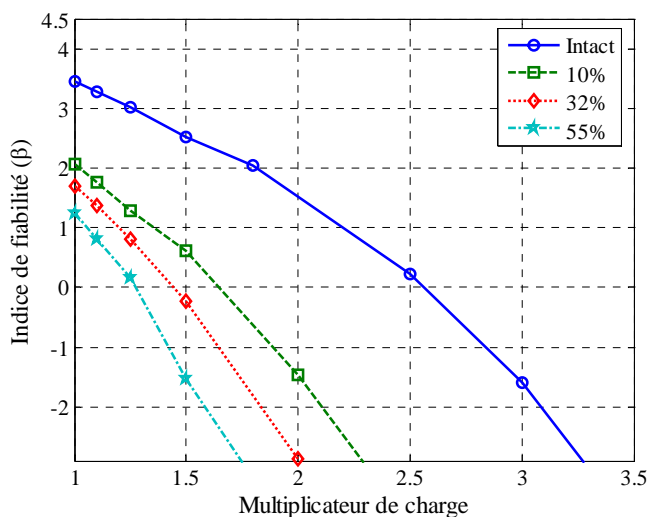


Figure 4.40. Influence de l'effet combiné du multiplicateur de charge et de l'endommagement sur l'indice de fiabilité de poutre  $P_1$

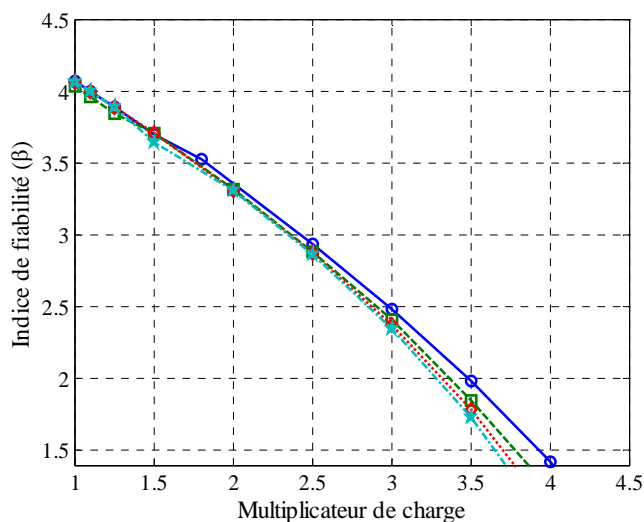


Figure 4.41. Influence de l'effet combiné du multiplicateur de charge et de l'endommagement sur l'indice de fiabilité de poutre  $P_5$

Sur les figures 4.40 et 4.41, l'indice de fiabilité de la poutre  $P_1$  varie entre 1,252 et 3,452 pour un multiplicateur de charge  $LF_d=1$  et entre -1,537 et 2,530 pour  $LF_d=1,5$ . Cependant, dans la poutre  $P_5$ , l'indice de fiabilité varie entre 4,063 et 4,073 pour un multiplicateur de charge  $LF_d=1$  et entre 3,646 et 3,695 pour  $LF_d=1,5$ .

### 4.5.3 Troisième scénario de l'endommagement et impact sur la redondance du pont

Dans les paragraphes 4.5.1 et 4.5.2, il a été mentionné que l'objectif de la démarche présentée est de considérer une évolution de l'endommagement de la poutre  $P_1$ , et de son impact sur le degré de redondance initial. Etant donné les incertitudes sur les endroits endommagés dans le pont et afin d'éviter de nous limiter à considérer l'endommagement à un seul endroit, un troisième scénario est retenu ici. Il s'agit de mettre en évidence une dégradation plus générale dans le pont en considérant une évolution de l'endommagement non seulement dans la section totale de la poutre  $P_1$  mais aussi dans celle de la poutre  $P_2$  (qui est la deuxième poutre la plus critique). Cette stratégie permet d'étudier la redistribution des efforts dans les poutres ainsi

que son impact sur le degré de redondance initial. Quatre cas distincts sont donc considérés dans ce paragraphe selon les figures 4.42 à 4.45. Il est possible de remarquer que les cas 1 et 2 sont identiques avec le deuxième scénario d'endommagement.

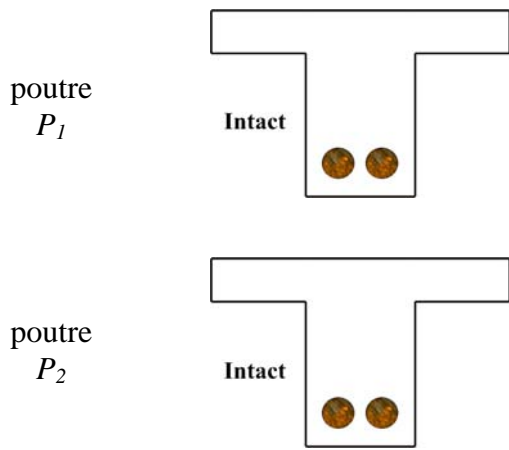


Figure 4.42. Cas 1: aucune diminution de l'aire de la section totale des poutres  $P_1$  et  $P_2$

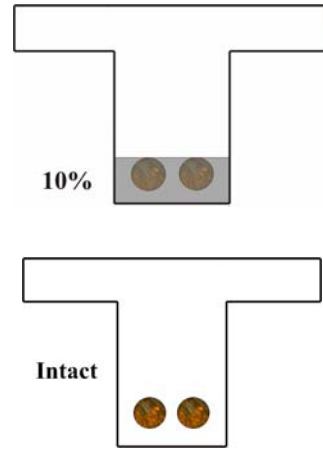


Figure 4.43. Cas 2: diminution de 10% de l'aire de la section totale de poutre  $P_1$  à mi-travée du pont

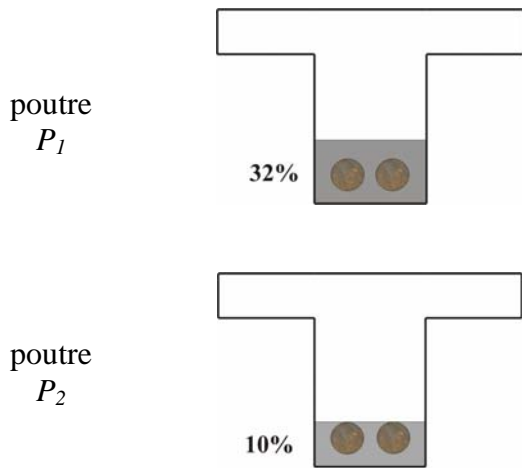


Figure 4.44. Cas 3: diminution de 32% de l'aire de la section totale de la poutre  $P_1$  et de 10% de celle de la poutre  $P_2$  à mi-travée du pont

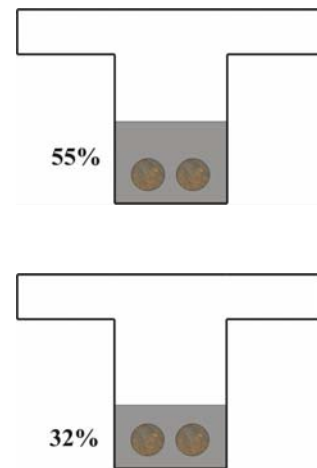


Figure 4.45. Cas 4: diminution de 55% de l'aire de la section totale de la poutre  $P_1$  et de 32% de celle de la poutre  $P_2$  à mi-travée du pont

L'indice de fiabilité de l'ouvrage, en considérant le troisième scénario d'endommagement, est montré sur la figure 4.46. L'indice de fiabilité diminue fortement avec l'évolution de l'endommagement dans les poutres  $P_1$  et  $P_2$  à mi-portée. Notons qu'il n'est pas évident

d'obtenir l'indice de fiabilité du pont pour le quatrième cas. Cela vient du fait que la probabilité pour laquelle le pont endommagé dépasse l'état limite de service, augmente et par conséquent, le couplage mécano-fiabiliste effectué rencontre des difficultés à converger numériquement.

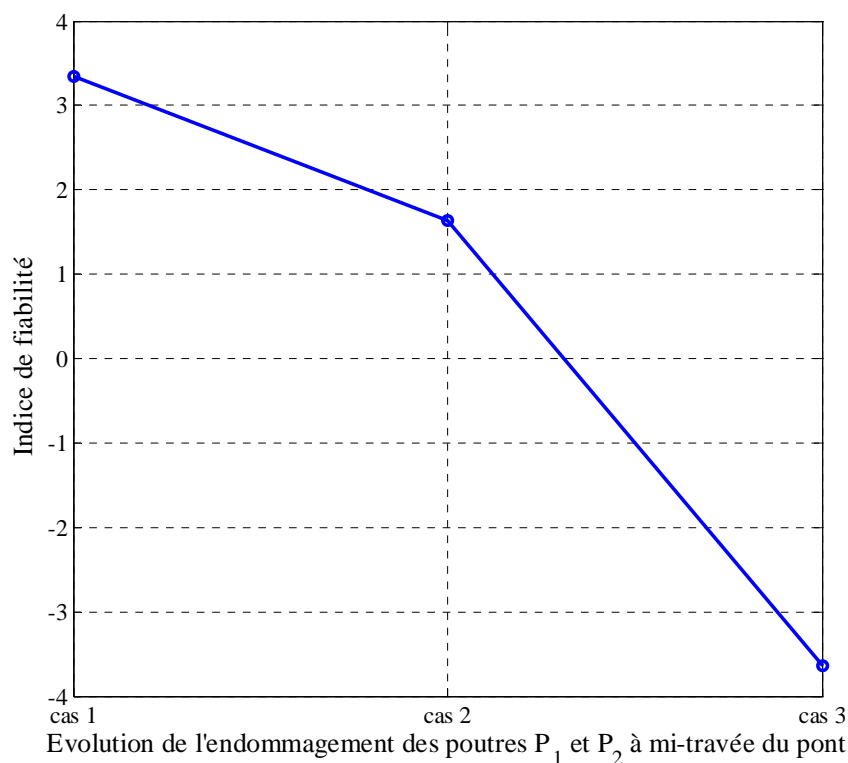


Figure 4.46. Influence de dégradation sur l'indice de fiabilité du pont

La figure 4.47 présente l'indice de fiabilité dans chaque poutre. L'indice de fiabilité diminue dans toutes les poutres et cette évolution est plus importante par rapport aux deux scénarios précédents. Il est possible d'observer que même dans la poutre  $P_5$ , il y a une évolution de l'indice de fiabilité et cela vient du fait qu'en considérant l'endommagement dans la poutre  $P_2$ , il y aura une redistribution importante des efforts dans les poutres voisines  $P_3$ ,  $P_4$  et  $P_5$  pour supporter la charge des camions.

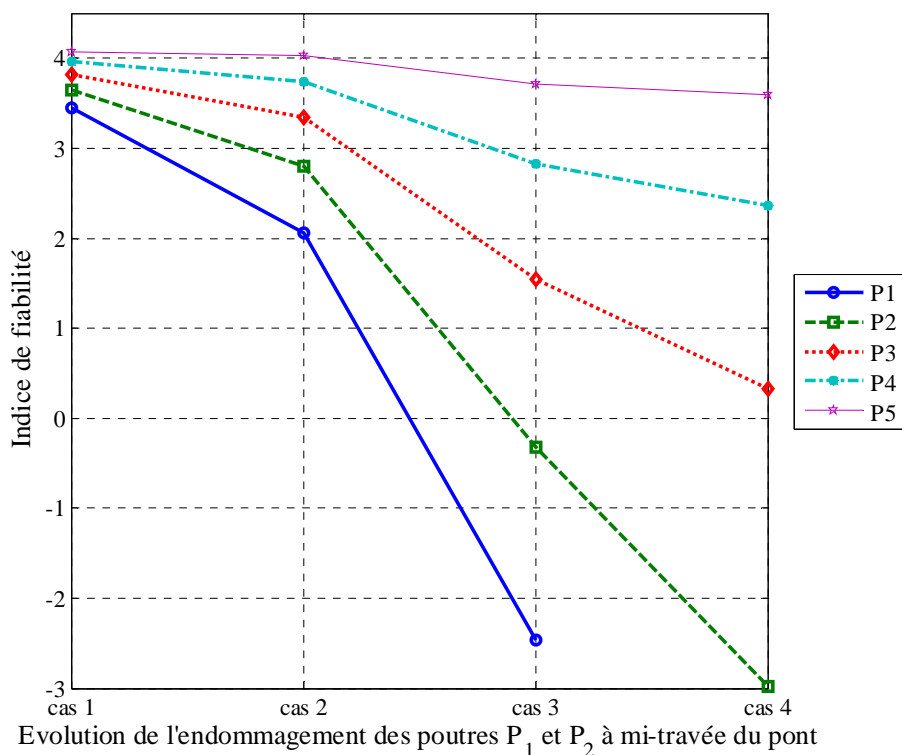


Figure 4.47. Influence de dégradation sur l'indice de fiabilité des poutres

Les figures 4.48 à 4.52 comparent l'évolution de l'indice de fiabilité sur les cinq poutres pour les deuxième et troisième scénarios d'endommagement.

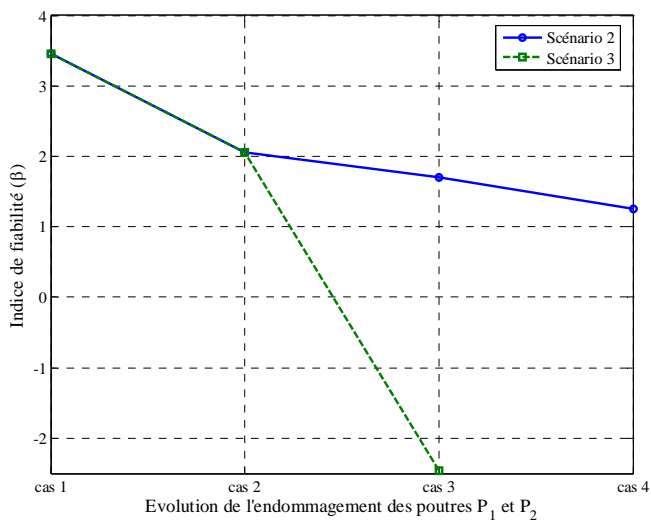


Figure 4.48. Comparaison de l'indice de fiabilité de la poutre  $P_1$  pour deux scénarios

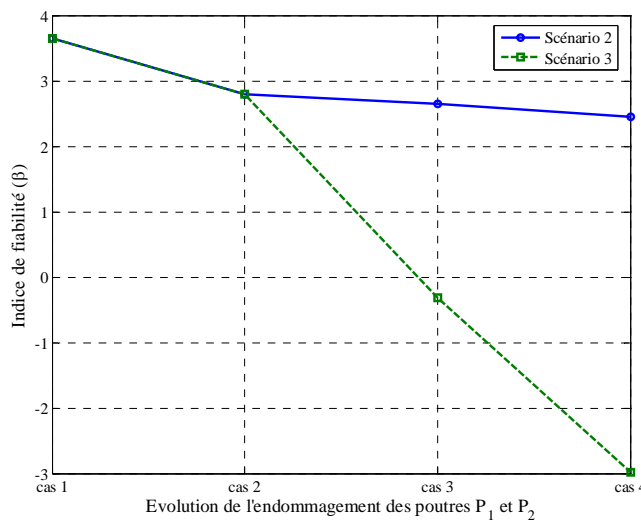


Figure 4.49. Comparaison de l'indice de fiabilité de la poutre  $P_2$  pour deux scénarios



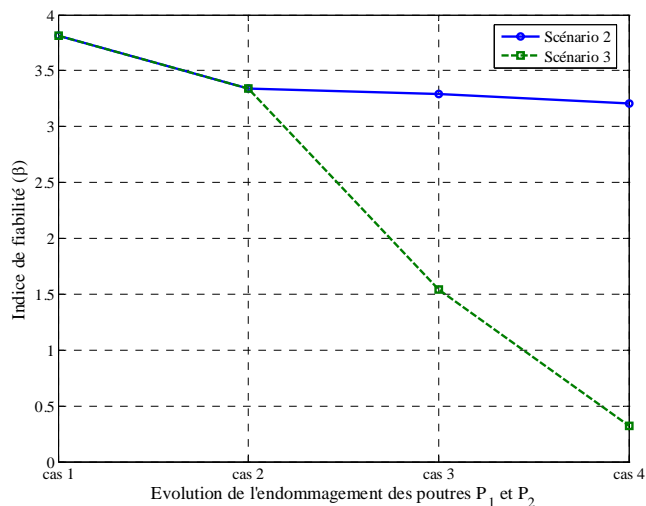


Figure 4.50. Comparaison de l'indice de fiabilité de la poutre  $P_3$  pour scénarios

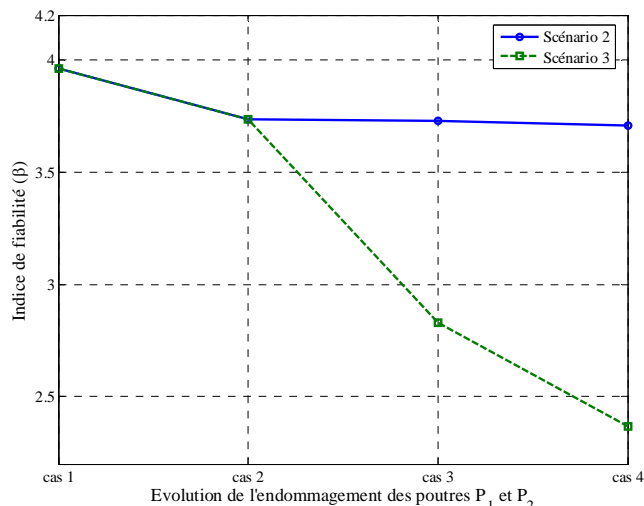


Figure 4.51. Comparaison de l'indice de fiabilité de la poutre  $P_4$  pour deux scénarios

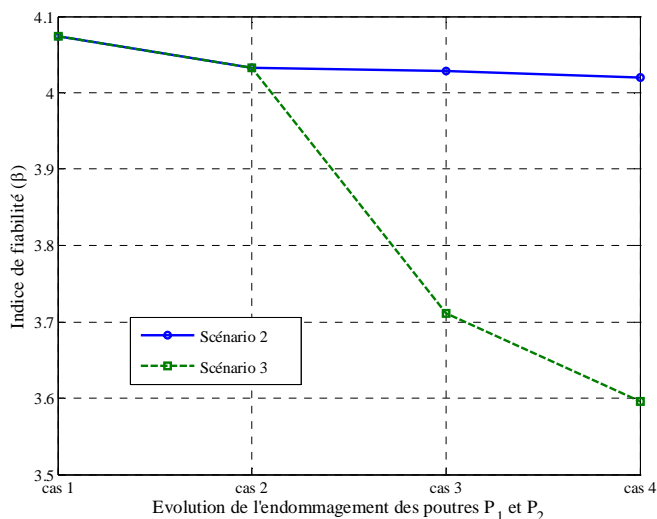


Figure 4.52. Comparaison de l'indice de fiabilité de la poutre  $P_5$  pour deux scénarios

Les résultats obtenus pour l'indice de redondance résiduel et l'indice de redondance de performance du pont, en appliquant le troisième scénario d'endommagement, sont illustrés dans le tableau 4.10 et dans les figures 4.53 et 4.54. Ces résultats montrent que les deux indices de redondance diminuent tandis que la dégradation dans la section totale des poutres  $P_1$  et  $P_2$  évolue. La performance du pont dans ce scénario n'est pas assurée afin de supporter la charge des camions, à partir de troisième cas d'endommagement.

Tableau 4.10. Influence de la dégradation des poutres  $P_1$  et  $P_2$  sur les indices de redondance du système global formé par l'ouvrage

	Etat de l'endommagement			
	Initial	cas 2	cas 3	cas 4
Indice de redondance résiduel du système ( $I_{Red}$ )	1,00	0,4886	-1,089	--
Indice de redondance de la performance du système ( $\beta_{Red}$ )	$\infty$	1,9554	0,4788	--

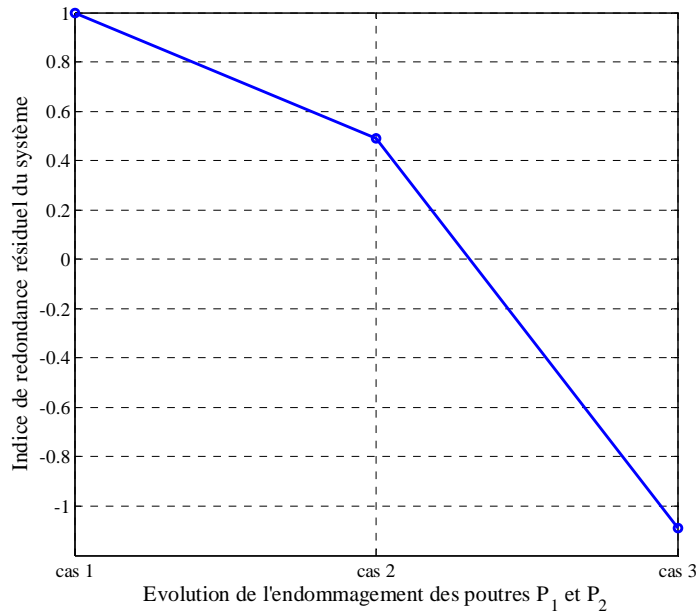


Figure 4.53. Influence de la dégradation sur l'indice de redondance résiduel du pont

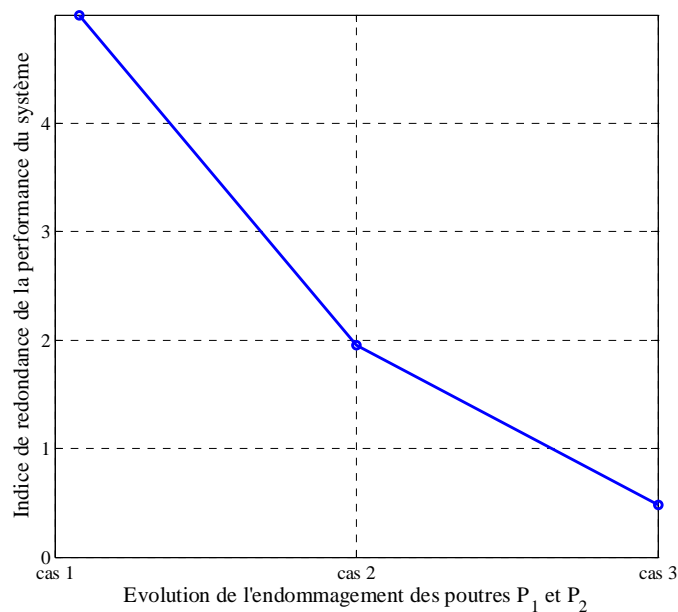


Figure 4.54. Influence de la dégradation sur l'indice de redondance de performance du pont

Les résultats obtenus pour l'indice de fiabilité relative sont présentés dans la figure 4.55. Cet indice varie entre -6,0630 et 0,1512 pour le pont endommagé selon les différents cas d'endommagement des poutres  $P_1$  et  $P_2$  (figures 4.42 à 4.45). Les valeurs correspondantes au troisième et quatrième cas d'endommagement ne rentrent pas dans les marges mentionnées au paragraphe 4.3. A partir du moment où l'évolution de l'endommagement commence sur la poutre  $P_2$ , la performance du pont, par conséquent, sa fiabilité diminuent largement jusqu'au cas 3, avec une diminution de 32% de l'aire de la section totale de la poutre  $P_1$  et de 10% de celle de la poutre  $P_2$  à mi-travée du pont, ce qui entraîne que le pont endommagé ne peut plus supporter la charge des camions.

La figure 4.56 représente l'indice de réserve locale sur chaque poutre. Il est possible d'observer que ce scénario mène à une redistribution des efforts dans les cinq poutres, après le cas 2 de la dégradation. Car une fois que les poutres  $P_1$  et  $P_2$  ne peuvent plus supporter la charge, celle-ci se distribue sur les poutres voisines, mais cela ne semble pas suffisant pour garder la performance globale de l'ouvrage.

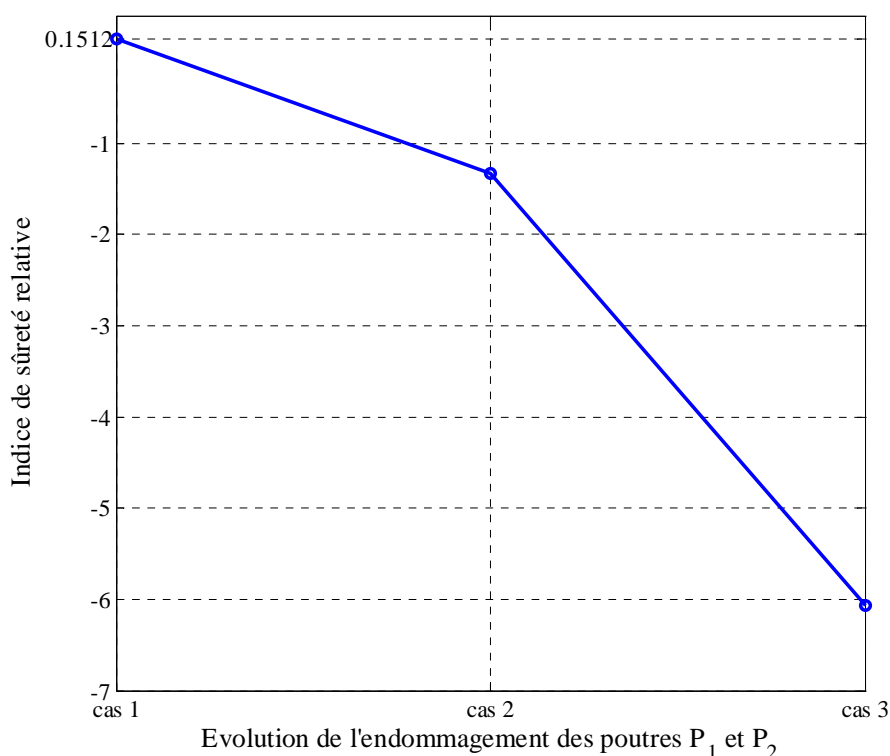


Figure 4.55. Influence de la dégradation sur l'indice de fiabilité relative du pont

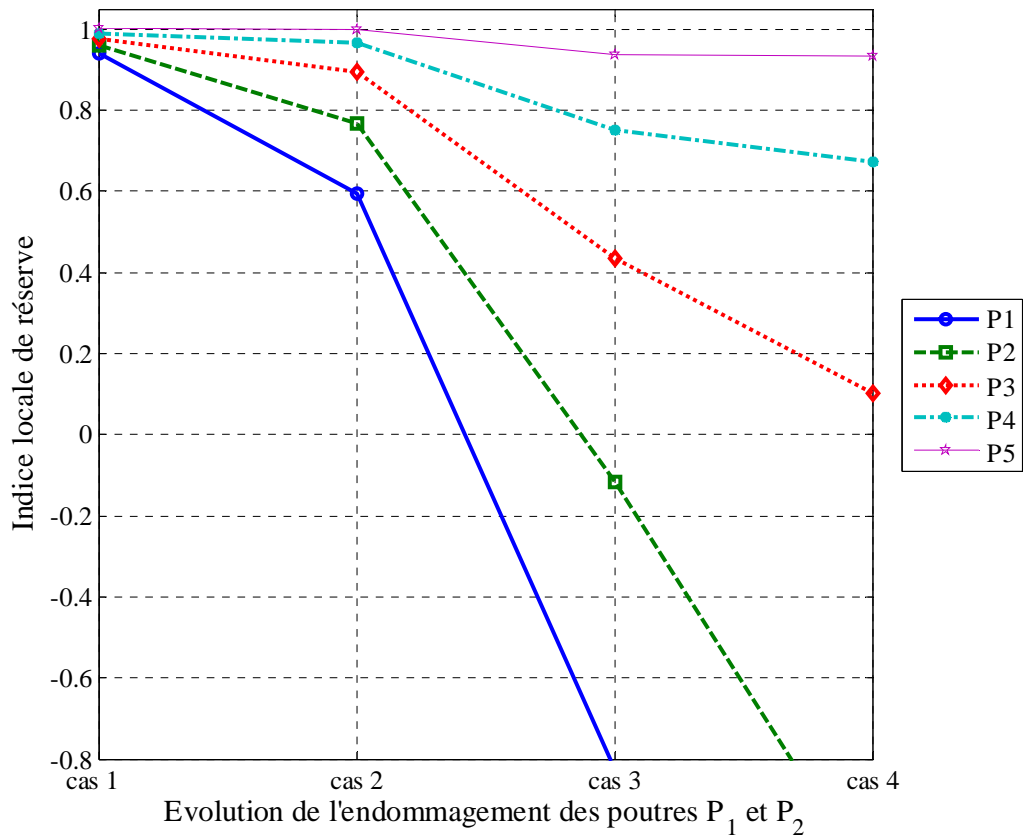


Figure 4.56. Influence de la dégradation sur l'indice de réserve locale de chaque poutre

Les figures 4.57 à 4.60 illustrent l'influence du multiplicateur de charge ( $LF_d$ ) sur l'indice de fiabilité de chaque poutre. Les résultats obtenus montrent que l'indice de fiabilité sur chaque poutre diminue, en augmentant le multiplicateur de charge ( $LF_d$ ). Nous remarquons aussi que la diminution de l'indice de fiabilité avec l'effet combiné du multiplicateur de charge et l'endommagement, est beaucoup plus marquée par rapport au premier et deuxième scénario.

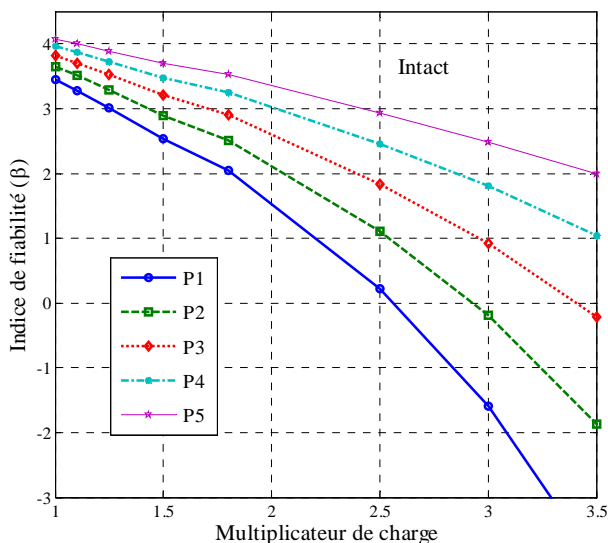


Figure 4.57. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le cas du pont intact

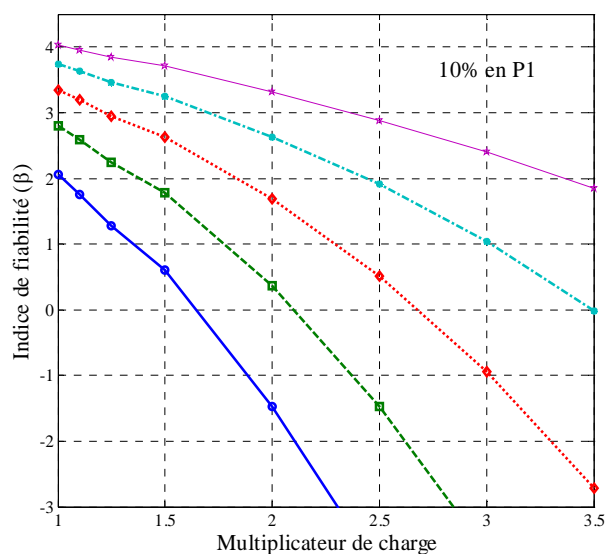


Figure 4.58. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le deuxième cas d'endommagement

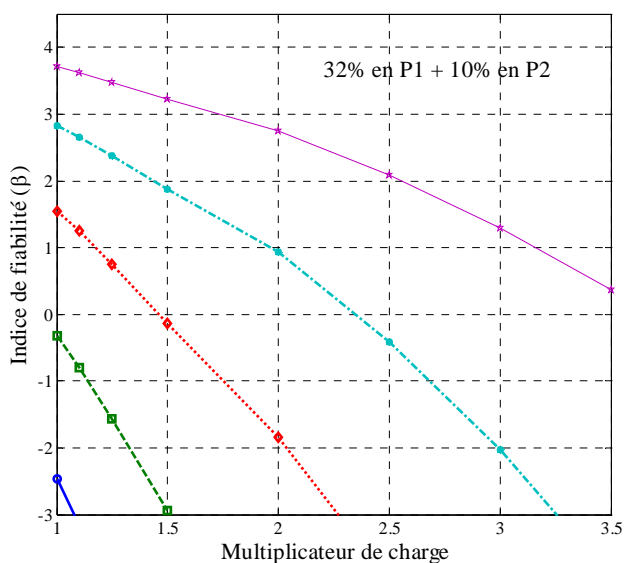


Figure 4.59. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le troisième cas d'endommagement

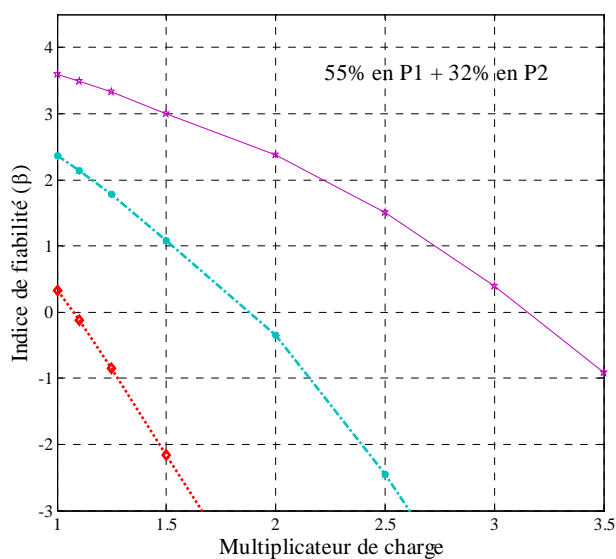


Figure 4.60. Influence du multiplicateur de charge sur l'indice de fiabilité des poutres dans le quatrième cas d'endommagement

De plus, on observe sur les figures 4.57 à 4.60 qu'en augmentant le multiplicateur de charge, les poutres  $P_1$  et  $P_2$  ne sont plus les seules à supporter la charge des camions mais les poutres  $P_3$ ,  $P_4$  et  $P_5$  perdent également de leur fiabilité. L'effet combiné du multiplicateur de charge et l'endommagement pour les poutres  $P_1$  et  $P_5$  est illustré dans les figures 4.61 et 4.62.

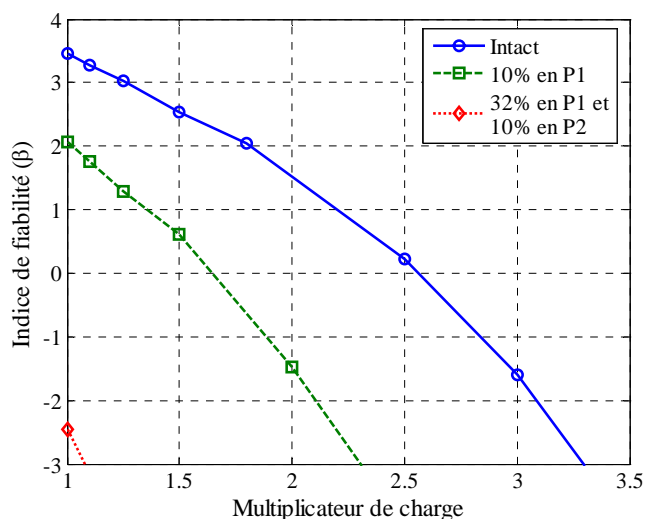


Figure 4.61. Influence de l'effet combiné du multiplicateur de charge et de l'endommagement sur l'indice de fiabilité de la poutre  $P_1$

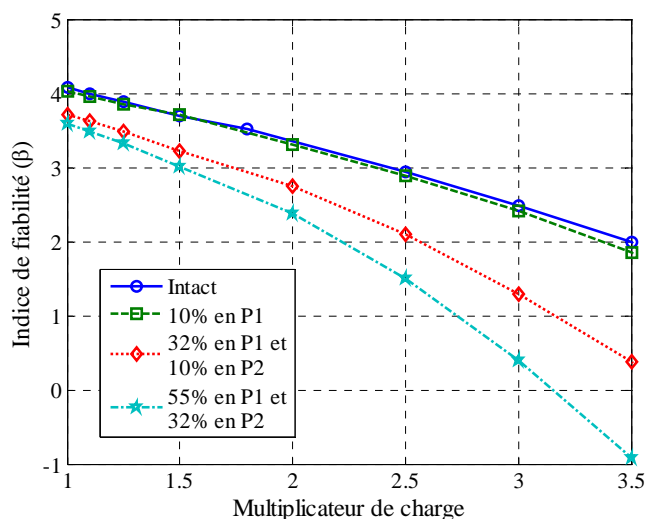


Figure 4.62. Influence de l'effet combiné du multiplicateur de charge et de l'endommagement sur l'indice de fiabilité de la poutre  $P_5$

Sur les figures 4.61 et 4.62, l'indice de fiabilité dans la poutre  $P_5$ , varie entre 3,5953 et 4,073 pour un multiplicateur de charge  $LF_d=1$  et entre -0,9179 et 1,9877 pour  $LF_d=3,5$ .

## 4.6 Conclusions

Dans ce chapitre, une approche cohérente, pour mesurer la redondance des ponts en béton armé, a été présentée. La redondance a été définie comme la capacité d'un pont à redistribuer les efforts dus aux charges extérieures sur l'ensemble de ses éléments lorsqu'un de ses éléments est défaillant. En d'autres termes, la redondance a été considérée d'une part comme la performance du système global (ouvrage) et d'autre part comme la réserve entre la performance du système global et la performance de ses éléments individuels. Cette définition exprime l'importance des éléments individuels sur la réserve des ponts endommagés. Cela montre que l'effet conjugué d'une dégradation avec le degré de redondance initial doit être évalué pour permettre une meilleure prise en compte des réserves de performance dans l'évaluation des ponts existants. Afin de mieux considérer l'endommagement et son impact sur la redondance des ponts, trois scénarios ont été considérés.

Le cas d'un pont en béton armé, soumis aux charges permanentes et aux charges d'exploitation disposées sur sa chaussée, a été étudié pour cela. Afin de prendre en compte au mieux la redistribution des efforts intérieurs, les calculs linéaires et non linéaires sur un modèle pertinent ont été réalisés. Pour les premier et deuxième scénarios, ce pont peut toujours supporter la charge des camions en assurant sa capacité d'aptitude au service. Il est

évident que le pont endommagé dans le cas du deuxième scénario, en gardant la réserve minimum de sa performance, est moins fiable par rapport à celui du premier. Par contre, la performance du pont dans le troisième scénario n'est plus assurée.

## ***CONCLUSION GENERALE***

### ***ET PERSPECTIVES***

Un sujet difficile et encore mal maîtrisé est la prédiction du comportement en service des ouvrages (notamment en béton) en tenant compte des effets *non linéaires* liée à une déformation excessive, à des dégradations.... Une reconnaissance insuffisante de ces effets peut être une des causes d'une aptitude au service médiocre. Afin de considérer au mieux la non linéarité de ces effets et leur influence sur la *redistribution des efforts* intérieurs, des calculs non linéaires sur des modèles pertinents de l'ouvrage ont été réalisés dans ce mémoire (*Chapitre 3 et 4*). Parallèlement, afin d'étudier au mieux la *redondance* dans les ponts, nous avons envisagé d'intégrer un processus de dégradation et d'évaluer son impact sur la redondance dans les ponts en béton armé. L'importance des éléments individuels sur la réserve de performance dans l'évaluation des ponts existants a été également présentée (*Chapitre 4*). Comme les règlements sont assez muets sur la manière d'apprécier le degré de redondance des ponts existants ainsi que la façon de considérer les incertitudes dans l'évaluation des ponts endommagés, la mise en œuvre d'une *approche probabiliste* de l'évaluation, plus rationnelle et efficace pour la définition de l'indice de redondance, est apparu nécessaire (*Chapitre 1 et 2*). Elle implique autant de calculer la fiabilité de modes de défaillance (défaillance individuelle) que celle d'effets systèmes au sein de l'ouvrage (défaillance globale).



## *Conclusions générale et perspectives*

Les différentes techniques de la théorie de la fiabilité permettent à ce jour de calculer de diverses manières la probabilité de défaillance d'un mode de défaillance donné. Les méthodes de calculs classiques ont notamment été introduites à travers les méthodes de niveau *II* et celles de niveau *III*. Afin d'appliquer les méthodes de niveau *II*, comme les méthodes FORM et SORM, la connaissance de la fonction d'état limite est essentielle. Les méthodes de niveau *III* sont basées sur des techniques de simulations. Dans ce cas, la forme de l'état limite n'est alors plus essentielle dans l'estimation de la probabilité de défaillance. La simulation de Monte-Carlo permet de contrôler la validité des résultats, mais peut être très consommatrice en temps de calculs, qui dépend du niveau de la probabilité de défaillance recherchée (*Chapitre 1*). Cependant, pour des ouvrages complexes (par exemple hyperstatiques ou présentant des comportements non linéaires), il est presque impossible de se procurer des états limites explicites (*Chapitre 3*).

Afin d'écrire explicitement la fonction d'état limite et aussi bien de ramener le nombre d'évaluations de la fonction d'état limite à un niveau raisonnable, la méthode par surfaces de réponse a été utilisée dans ce mémoire. L'idée d'origine des méthodes par *surfaces de réponse* est de remplacer la fonction d'état limite qui est a priori inconnue, par une fonction explicite équivalente. Les méthodes de surfaces de réponse recherchent donc une fonction, généralement une surface polynomiale. L'évaluation de ces coefficients nécessite la réalisation de séries d'expériences numériques qui correspondent à des calculs par éléments finis avec des paramètres d'entrée sélectionnés conformément à un plan d'expérience. Ceci implique de s'intéresser plus particulièrement à la région où la fonction densité conjointe des variables aléatoires et située dans un voisinage autour du point de conception de la surface de défaillance de la structure. Un algorithme permettant la construction des surfaces de réponse, a été proposé pour estimer l'indice de fiabilité ainsi que la probabilité de défaillance d'une structure (*Chapitre 2*). Dans cet algorithme, le choix des termes du polynôme à prendre en considération, ainsi que la définition du plan d'expérience numérique ont été supposés préalablement choisis. Une stratégie pour la construction du plan d'expérience a été mise en œuvre non pas dans l'espace de variables de base (c'est-à-dire les variables physiques), mais dans un espace normalisé constitué de variables normales centrées réduites. Pour cela, il est nécessaire de transformer toutes les variables physiques en variables normales centrées réduites. Cette transformation a reposé essentiellement dans sa mise en œuvre pratique sur la transformée de Nataf. Dans ce cas, les variables sont transformées une à une et la transformée marginale est appliquée pour chaque variable. La décorrélation des variables est assurée par

décomposition de Choleski. Le plan d'expérience est donc construit non pas dans l'espace de base, mais dans l'espace gaussien, les calculs mécaniques étant cependant réalisés à partir des points de l'espace de base (*Chapitre 2*). La performance de l'algorithme de construction des surfaces de réponse a été appréciée par deux approches distinctes. D'une part, les critères liés directement à l'algorithme comme le type de surface de réponse, le type de plan d'expérience, l'influence du coefficient arbitraire «*h*» ont été considérés. D'autre part, les critères liés aux différentes techniques de la théorie de la fiabilité comme par exemple la robustesse face à plusieurs points de conception, la capacité à traiter des unions et des intersections, le nombre de variables aléatoires ainsi que le cas des fortes courbures ont été abordés. La méthode par surface de réponse donne des résultats satisfaisants en terme d'indice de fiabilité avec un nombre satisfaisant d'appels à la fonction d'état limite, en introduisant une surface de défaillance globale. Cette démarche a permis d'évaluer les capacités et les limites de l'algorithme proposé en terme de l'indice de fiabilité (*Chapitre 2*).

L'algorithme de construction de méthodes des surfaces de réponse avec les diverses variantes du plan d'expérience et celles concernant la forme du polynôme d'approximation a été mis en œuvre au sein de la boîte à outils ReliabTbx, développée au LCPC. Il fait appel soit au code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC© soit au code de calcul de structures à barres, SETRA-ST1© selon les cas, pour la réalisation des expériences numériques. Il s'agit donc d'une communication entre un code de calcul aux éléments finis et la boîte à outils en fiabilité ReliabTbx au travers de réalisations effectuées pour chaque variable dans le plan d'expérience. Les développements réalisés ont été validés sur quelques structures simples en comparant les résultats issu du *couplage mécano-fiabiliste* avec ceux obtenus dans le cas d'une fonction d'état limite explicite et ceux fournis par le calcul exact. Ces développements ont été appliqués à évaluer la probabilité de défaillance d'un pont routier du type bipoutre mixte en considérant un comportement non-linéaire pour ses matériaux constitutif (*Chapitre 3*). Afin de valoriser l'efficacité de la méthode par surfaces de réponse, deux exemples d'application ayant des résultats expérimentaux connus, ont été envisagés : une des poutres du benchmark des poutres de la Rance et une poutre du viaduc de Merlebach. Dans les deux cas, les *intervalles de confiance* à 90% ont été construits. Les résultats obtenus par la méthode des surfaces de réponse ont été comparés avec ceux obtenus par la méthode des machines à vecteurs supports développée au LCPC et implantée dans la boîte à outils ReliabTbx-LCPC. Une bonne adéquation apparaît entre ces deux approches, ce qui justifie la surface de

défaillance globale obtenue vis-à-vis du *couplage*. L'influence de la *corrosion* sur la fiabilité de la poutre de la Rance pour l'état limite de service a été étudiée en considérant deux cas distincts (*Chapitre 3*). Un des objectifs de cette thèse a été également abordé dans le *chapitre 3*. Il s'agit de pouvoir identifier le mécanisme de défaillance le plus probable du système global de l'ouvrage au moyen d'une méthode par surfaces de réponse. Cette idée originale conduit à faire une étude sur la *fiabilité des systèmes* au niveau de l'ensemble de l'ouvrage ; sa pertinence a été mise en évidence au travers de deux exemples.

Dans le *chapitre 4*, une approche cohérente pour mesurer la *redondance* des ponts en béton armé, a été présentée. La redondance a été définie comme la capacité d'un pont à redistribuer les efforts dus aux charges extérieures sur l'ensemble de ses éléments lorsqu'un de ses éléments est défaillant. Quatre indices ont été définis pour mesurer la redondance dans les ponts existants. Ces indices représentent d'une part la performance du système du pont endommagé et d'autre part la réserve de performance entre les éléments et le système constitué par le pont endommagé. Le cas d'un pont en béton armé, soumis à des charges permanentes et d'exploitation disposées sur la chaussée, a ainsi été étudié au travers de trois scénarios d'endommagement (*Chapitre 4*).

Il est cependant évident qu'au cours de cette thèse, tous les problèmes n'ont pu être abordés. Ainsi, l'amélioration des stratégies de surveillance et de maintenance des ponts existants doit pouvoir reposer sur la base des indices de redondance présentés dans ce mémoire. Il s'agit d'envisager la mise en place d'un dispositif de haute surveillance, lorsqu'une défaillance d'un élément du pont est probable. Le guide sur la télésurveillance des ouvrages aborde ce point sans réellement donner de règle en la matière. L'estimation d'indices cibles de redondance exige également d'être étudiée au travers d'une analyse de plusieurs ponts en béton armé avec des caractéristiques structurales et géométriques différentes. L'application des méthodes et indices à d'autres scénarios d'endommagement, plus représentatifs selon l'environnement des ponts en béton armé existants, mérite d'être étudiée.

L'évaluation de la performance des ponts hyperstatiques a été occultée dans cette thèse. Or, l'effet de redistribution longitudinale est un paramètre important dans l'étude d'ouvrages exceptionnels. Enfin, la calibration des coefficients dans les codes autant vis-à-vis de la sécurité structurale et de l'aptitude au service tenant compte des capacités de redistribution restent encore un objectif pratique à atteindre pour l'ingénieur.

## ***BIBLIOGRAPHIE***

- [Abramowitz, 1964] Abramowitz M. et al, Handbook of mathematical functions, Dover publications Inc., 1964.
- [Adhikari, 2004] Adhikari, S., '*Reliability analysis using parabolic failure surface*', Journal of engineering mechanics, pp. 1407-1427, 2004.
- [Arwashan, 1998] Arwashan, N., '*Matrix formulation for the calculation of structural systems reliability* ', Computers and Structures, Vol. 66, No. 5, pp. 525-534, 1998.
- [BAEL, 1991] Règles B.A.E.L 91 modifiées 99 – '*Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états-limites*'. Ed. Eyrolles, 3<sup>a</sup> édition, 2000.
- [Baroth, 2005] Baroth, J., '*Analyse par élément fini stochastiques de la propagation d'incertitudes dans un modèle mécanique non-linéaire*', Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur d'université, octobre 2005.
- [BMC\_Rance, 2004] Benchmark des poutres de la Rance, Rapport technique, Septembre 2004.

## *Bibliographie*

- [Borri, 1997] Borri, A. et al, '*Structural reliability analysis using a standard deterministic finite element code*', *Structural Safety*, Vol. 19, 1997.
- [Breitung, 1984] Breitung, K., '*Asymptotic approximations for multinormal integrals*', *Engineering Mechanics*, ASCE, 110(3), pp. 357-366, 1984.
- [Bucher, 1990] Bucher, C.G. et al, '*A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems*', *Structural Safety*, Vol. 7, pp. 57-66, 1990.
- [Calgaro,1996] Calgaro, J.A., '*Introduction aux Eurocodes – Sécurité des constructions et bases de la théorie de la fiabilité*', Ed. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, 1996.
- [Capra, 2007] Capra, B. et al, '*Reinforced concrete corrosion: Application of Bayesian networks to the risk management of cooling towers in nuclear plants*', ESRA'07, Stavanger, 2007.
- [Casas, 2007] Casas, J.R. et al, '*Probabilistic nonlinear analysis*', Technical report, Sustainable Bridges, 2007.
- [Chen, 1996] Chen, K. et al, '*Semi-probabilistic method for evaluating system redundancy of existing offshore structures*', *Ocean Engng.*, Vol. 23, No. 6, pp. 455-464, 1996.
- [Cremona, 2003] Cremona, C., '*Application des notions de fiabilité à la gestion des ouvrages existants*', Association Française de Génie Civil. Presse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. 2003.
- [Cremona, 2004] Cremona, C., '*Aptitude au service des ouvrages*', rapport de synthèse de l'opération de recherche, LCPC, Octobre 2004.
- [Cremona, 2005a] Cremona, C., '*Sécurité structurale des ouvrages, Module maintenance, pathologie et réparation des constructions*', Master génie civil européen, ENPC, 2005.

- [Cremona, 2005b] Cremona, C. et al, '*Evaluation et prédiction de la fiabilité des structures*', IPSI, Journée d'étude, Octobre 2005.
- [Cremona, 2007] Cremona, C. et al, '*Benchmark des poutres de La Rance, Modélisation déterministe et probabiliste du comportement mécanique simplifié des corps d'épreuve*', Revue Française de Génie Civil, Vol. 11, 2007.
- [Cremona, 2007] Cremona, C., '*Suivi du comportement mécanique d'une poutre de VIPP sous chargement, le cas du VIPP de Merlebach*', LCPC, Février 2007.
- [Devictor, 1996] Devictor, N., '*Fiabilité et mécanique : méthodes FORM/SORM et couplages avec des codes d'éléments finis par des surfaces de réponse adaptatives*', Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur d'Université, Décembre 1996.
- [Ditlevsen, 1996] Ditlevsen, O. et al, '*Structural Reliability Methods*', Wiley, 1996.
- [Duprat, 2006] Duprat, F. et al, '*Probabilistic approach to corrosion risk due to carbonation via an adaptive response surface method*', Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 21, pp. 207-216, 2006.
- [Elegbede, 2005] Elegbede, C. '*Structural reliability assessment based on particles swarm optimization*', Structural Safety, Vol. 27, pp. 171-186, 2005.
- [Enevoldsen, 1994] Enevoldsen, I. et al, '*Adaptive response surface techniques in reliability estimation*', ICOSSAR'93, pp. 1257-1264, 1994.
- [Faravelli, 1989] Faravelli, L., '*Response surface approach for reliability analysis*', Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, No. 12, pp. 2763-2781, 1989.
- [Fasc., 1971] Fascicule 61, titre II, Cahier des prescriptions communes, Conception, calcul et épreuves des ouvrages d'art, 1971.

## Bibliographie

- [Favre, 1997] Favre, R. et al, '*Dimensionnement des structures en béton*', Vol. 8, Presse polytechniques et universitaires Romandes, EPFL, 1997.
- [Frangopol, 1987] Frangopol, D.M. et al, '*Effects of damage and redundancy on structural reliability*', Structural Engineering, ASCE, Vol. 113, pp. 1533-1549, 1987.
- [Gayton, 2003] Gayton, N. et al, '*CQ2RS: A new statistical approach to the response surface method for reliability analysis*', Structural Safety, Vol. 25, pp. 99-121, 2003.
- [Gharaibeh, 2002] Gharaibeh, E.S. et al, '*Reliability-based importance assessment of structural members with applications to complex*', Computers and Structures, Vol. 80, pp. 1113-1131, 2002.
- [Ghosn, 1992] Ghosn, M. et al, '*Calibration of redundancy factors for highway bridges*', Proceeding of the sixth speciality conference, Colorado, pp. 344-347, 1992.
- [Ghosn, 1998] Ghosn, M. et al, '*Redundancy In highway bridges*', National Cooperative Highway Research Program, NCHRP, Report 406, 1998.
- [Gomes, 2004] Gomes, H.M. et al, '*Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability analysis*', Structural Safety, Vol. 26, pp. 49-67, 2004.
- [Guan, 2001] Guan, X.L. et al, '*Effect of response surface parameter variation on structural reliability analysis*', Structural Safety, Vol. 23, pp. 429-444, 2001.
- [Guide tech., 2005] La télésurveillance des ouvrages d'art sous haute surveillance, Guide technique, 2005.

- [Gupta, 2004] Gupta, S. et al, '*An improved response surface method for the determination of failure probability and importance measures*', Structural Safety, Vol. 26, pp. 123-139, 2004.
- [Hohenbichler, 1988] Hohenbichler, M. et al, '*Improvement of second-order reliability estimation by importance sampling*', Engineering Mechanics, ASCE, 114(12), pp. 2195-2199, 1988.
- [Huh, 2002] Huh, J. et al, '*System reliability of non-linear frames with PR connections using systematic RSM*', Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 17, pp. 177-190, 2002.
- [Humbert, 1987] Manuel théorique de CESAR-LCPC©, Décembre 1987.
- [Hurtado, 2002] Hurtado, J.E., '*Analysis of one-dimensional stochastic finite elements using neural networks*', Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 17, pp. 35-44, 2002.
- [Hurtado, 2004] Hurtado, J.E., '*Structural reliability, statistical learning perspectives*', Springer, Vol. 17.
- [Katsuki, 1997] Katsuki, S. et al, '*Advances hyperspace division method for structural reliability*', Proceeding of the international conference ICOSSA97, 1997.
- [Kaymaz, 2005] Kaymaz, I. et al, '*A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis*', Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 20, pp. 11-17, 2005.
- [Kim, 1997] Kim, S.H. et al, '*Response surface method using vector projected sampling points*', Structural Safety, Vol. 19, No. 1, pp. 3-19, 1997.
- [Kritzler, 1992] Kritzler, W. et al, '*Probabilistic evaluation of redundancy of bridge structures*', Proceeding of the sixth speciality conference, Colorado, pp. 156-159, 1992.



## Bibliographie

- [Kudsi, 2002] Kudsi, T. et al, '*Redundancy analysis of existing truss bridges: "A system reliability-based approach"*', Proceeding of the first international conference IABMAS, Barcelona, 2002.
- [Lemaire, 1997] Lemaire, M., '*Reliability and mechanical design*', Reliability Engineering and System Safety, Vol. 55, pp. 163-170, 1997.
- [Lemaire, 1998] LEMAIRE, M., '*Eléments finis et fiabilité : un mariage à la mode*', Fiabilité des matériaux et des structures, 2<sup>o</sup> Conférence Nationale – JN-FIAB'98.
- [Martin, 1998] Martin, E., '*Etude de la rupture des ouvrages bi-poutres en ossature mixte*', Travail de fin d'étude, ENTPE, 1998.
- [Melchers, 1990] Melchers, R.E., '*Radial importance sampling for structural reliability*', Engineering Mechanics, ASCE, 116(1), pp. 189-203, 1990.
- [Melchers, 1999] MELCHERS, R.E., '*Structural Reliability Analysis and Prediction*', second edition, Wiley, 1999.
- [Micic, 1995] Micic, T.V. et al, '*Reliability analysis for highway bridge deck assessment*', Structural Safety, Vol. 17, pp. 135-150, 1995.
- [Middleton, 1995] Middleton C.R. et al, Review of deterioration models used to predict corrosion in reinforced concrete structures, University of Cambridge, 1998.
- [Mohammadkhani, 2005] Mohammadkhani-Shali, S. et al, '*Etude de la fiabilité des ponts routiers par méthodes de surfaces de réponse*', Fiabilité des matériaux et des structures, 4<sup>ième</sup> JNFIAB, 2005.
- [Mohammadkhani, 2007a] Mohammadkhani-Shali, S. et al, '*Damage effects on system redundancy for existing reinforced concrete bridges using response surfaces method*', European safety and reliability association, ESRA'07, Stavanger, 2007.

- [Mohammadkhani, 2007b] Mohammadkhani-Shali, S. et al, '*Load redistribution analysis applied to existing reinforced concrete bridges using response surfaces method*', Structure and Infrastructure Engineering, Maintenance, Management, Life-Cycle Design and Performance, soumis à publication.
- [Mohammadkhani, 2007c] Mohammadkhani-Shali, S. et al, '*Non-linear finite element reliability analysis for prestressed concrete beams*', European safety and reliability association, ESRA'07, Stavanger, 2007.
- [Mohammadkhani, 2007d] Mohammadkhani-Shali, S. et al, '*Finite element reliability analysis by response surfaces method applied to the structural analysis of prestressed concrete beams*', Structural engineering and Mechanics, soumis à publication.
- [Myers, 2002] Myers, R.H. et al, '*Response surface methodology*', Wiley series in probability and statistics, second edition, 2002.
- [Parizeau, 2004] Parizeau, M., '*Réseaux de neurones*', Université Laval, Automne 2004.
- [Park, 2004] Park, S. et al, '*Efficient method for calculation of system reliability of a complex structure*', International journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp 5035-5050, 2004.
- [Pendola, 2000] Pendola, M. et al, '*Combination of finite element and reliability methods in nonlinear fracture mechanics*', Reliability Engineering and System Safety, Vol. 70, pp. 15-27, 2000.
- [Rackwitz, 1978] Rackwitz, R. et al, '*Structural reliability under combined random load sequences*', Computers and Structures, Vol. 9, pp. 489-494, 1978.
- [Rajashekhar, 1993] Rajashekhar, M.R. et al, '*A New look at the response surface approach for reliability analysis*', Structural Safety, Vol. 12, pp. 205-220, 1993.

## *Bibliographie*

- [Rguig, 2005] Rguig, M., '*Méthodologie des surfaces de réponse pour l'analyse en fiabilité des plates-formes pétrolières offshore fissurées*', Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur d'université, Juin 2005.
- [Richard, 2007a] Richard, B., '*Etude analytique et numérique des machines à vecteurs supports- Application aux calculs mécano-fiabiliste*', Mémoire de master recherche sous la direction de C. Cremona, 2007.
- [Richard, 2007b] Richard, B. et al., '*Adaptive support vector machine approach for reliability analysis: a benchmark study*', *Structural Safety*, soumis à publication.
- [Richard, 2007c] Richard, B. et al., '*Probabilistic analysis of a damaged prestressed beam using support vector machines trained with an adaptive algorithm*', *Engineering Structures*, soumis à publication.
- [Schoefs, 1996] Schoefs, F., '*Surfaces de réponse des efforts de houle dans le calcul de fiabilité des ouvrages*', Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur d'université, Novembre 1994.
- [Schueremans, 2005] Schueremans, L. et al, '*Benefit of splines and neural networks in simulation based structural reliability analysis*', *Structural Safety*, Vol. 27, pp. 246-261, 2005.
- [Shiraishil, 1998] Shiraishil, N. et al, '*Reliability assessment and assurance of infrastructure systems*', *Computers and Structures*, Vol. 67, pp. 147-155, 1998.
- [Silva, 2004] Silva, R., '*Contribution à l'analyse probabiliste de la performance des ponts en béton armé*', Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur de l'ENPC, octobre 2004.
- [Soares, 2002] Soares, R.C. et al, '*Reliability analysis of non-linear reinforced concrete frames using the response surface method*', *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 75, pp. 1-16, 2002.

- [Sung, 2005] Sung, I.J. et al, '*System reliability based bridge assessment using the response surface method*', IABSE'05, pp. 571-577, 2005.
- [Ulm, 1996] Ulm, F.J., '*Un modèle d'endommagement plastique : application aux bétons de structure*', Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur de l'ENPC, Janvier 1994.
- [Val, 1998] Val D.V., et al, '*Effect of reinforcement corrosion on reliability of highway bridges*', Engineering Structures, Vol. 20, N. 11, pp. 1010-1019, 1998.
- [Waarts, 2000] Waarts, P.H., '*Structural reliability using finite element methods*', PhD thesis, Delft University, 2000.
- [Wisniewski, 2006] Wisniewski, D. et al, '*Load capacity evaluation of existing railway bridges based on robustness quantification*', Structural Engineering International., Vol. 2, pp. 161-166, 2006.
- [Wong, 2005] Wong, S.M. et al, '*An adaptive response surface method for reliability analysis of structures with multiple loading sequences*', Structural Safety, Vol. 27, issue 4, pp. 287-308, 2005.
- [Yuansheng, 1986] Yuansheng, F., '*Optimum design, redundancy and reliability of structural systems*', Computers and Structures, Vol. 24, No. 2, pp. 239-251, 1986.
- [Zhao, 2001] Zhao, Y.G. et al, '*Moment methods for structural reliability*', Structural Safety, Vol. 23, pp. 47-75, 2001.
- [Zheng, 2000] Zheng, Y. et al, '*Improved response surface method and its application to stiffened plate reliability analysis*', Engineering structures, Vol. 22, pp. 544-551, 2000.

*Bibliographie*

- [Ziha, 2000]                      Ziha, K., '*Redundancy and robustness of systems of events*', Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 15, pp. 347-357, 2000.

*ANNEXE A*

*ETUDE DE SENSIBILITE SUR DEUX EXEMPLES*

**A.1. Système dynamique non linéaire**

Il s'agit d'un oscillateur non linéaire (figure A.1), très souvent traité dans la littérature. La fonction d'état limite est définie par l'expression [Guan, 2001] :

$$g(X) = 3r - |z_{\max}| \quad (\text{A.1})$$

dans laquelle  $r$  est le déplacement à la plastification de l'un des ressorts,  $z_{\max}$  est le déplacement maximum du système, défini par :

$$z_{\max} = \frac{2F_1}{m\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0 t_1}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

avec  $t_1$  le temps d'application de la charge  $F_1$ ,  $m$  la masse du système et  $\omega_0$  la pulsation définie par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont les raideurs de chaque ressort.

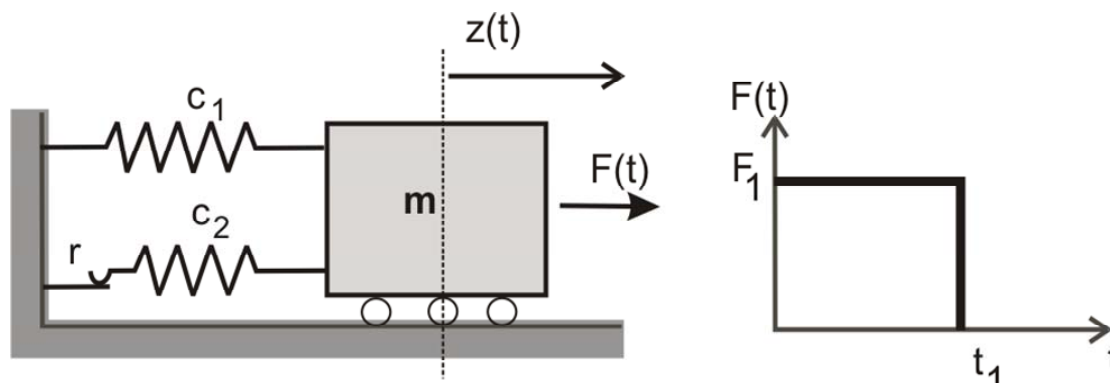


Figure A.1. Oscillateur non linéaire

Toutes les variables sont indépendants et sont représentées par des lois normales avec les paramètres du tableau A.1.

Tableau A.1. Caractéristiques des variables aléatoires

Numéro des variables	Variables	Loi de distribution	Moyenne	Ecart type
1	$m$	Normale	1	0,05
2	$C_1$	Normale	1	0,1
3	$C_2$	Normale	0,1	0,01
4	$r$	Normale	0,5	0,05
5	$F_1$	Normale	1	0,2
6	$t_1$	Normale	1	0,2

Afin d'étudier la sensibilité des résultats obtenus par rapport à la méthode par surfaces de réponse (MSR), nous avons étudié quatre cas distincts en combinant trois types de surfaces de réponse et trois types de plan d'expérience : surface de réponse linéaire (équation 2.2) en utilisant le plan d'expérience en étoile (figure 2.1.a), polynôme quadratique incomplet (équation 2.3) en utilisant le plan d'expérience en étoile ou en étoile modifié (figure 2.1.b), et polynôme quadratique complet (équation 2.4) avec plan d'expérience composite centré (figure 2.2). Pour construire le plan d'expérience en étoile modifié, le coefficient arbitraire suivant est considéré :  $0,75 < h < 2$ . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau A.2. Il est possible d'observer une très bonne concordance des résultats pour les quatre cas étudiés avec la méthode par surfaces de réponse par rapport à ceux fournis par la méthode FORM choisie comme méthode de référence. Pour ce choix de comparaison, les probabilités de défaillance

calculées au moyen de surfaces de réponse sont des approximations au premier ordre (du type FORM).

Tableau A.2. Comparaison des résultats obtenus pour différents cas étudiés

Méthode	Indice de fiabilité	Probabilité de défaillance ( $\times 10^{-2}$ )
FORM	1,8651	3,1083
MSR- Linéaire ( $h=1$ )	1,8661	3,1012
MSR- Polynôme incomplet ( $h=1$ )	1,8655	3,1056
MSR- Polynôme complet ( $h=1$ )	1,8651	3,1086
MSR- Polynôme incomplet Etoile modifiée ( $0,75 < h < 2$ )	1,8655	3,1056

Les coordonnées du point de conception obtenu par les quatre différentes approches sont présentées dans le tableau A.3. Une très bonne concordance des résultats peut être notée.

Tableau A.3. Valeurs des coordonnées du point de conception

Méthode	$Xd_1$ ( $\times 10^{-1}$ )	$Xd_2$ ( $\times 10^{-1}$ )	$Xd_3$ ( $\times 10^{-2}$ )	$Xd_4$ ( $\times 10^{-1}$ )	$Xd_5$	$Xd_6$
FORM	9,9180	9,5970	9,9597	4,5903	1,2423	1,2143
MSR- Linéaire	9,9185	9,6010	9,9603	4,5860	1,2427	1,2133
MSR- Polynôme incomplet	9,9182	9,5969	9,9604	4,5858	1,2413	1,2142
MSR- Polynôme complet	9,9190	9,5930	9,9589	4,5907	1,2419	1,2146
MSR- Polynôme incomplet Etoile modifié	9,9180	9,5928	9,9604	4,5856	1,2414	1,2138

Les valeurs des cosinus directeurs des variables aléatoires sont présentées dans le tableau A.4 et dans la figure A.2. Ces résultats montrent l'influence de chacune des variables aléatoires dans le modèle probabiliste. Il apparaît que les variables numéro 2, 4, 5 et 6 ont une grande influence sur la modélisation probabiliste des variables aléatoires. La comparaison de ces diverses valeurs montre une bonne adéquation entre les résultats obtenus par FORM et ceux fournis par l'approche par surfaces de réponse.



Tableau A.4. Valeurs des cosinus directeurs des variables dans le modèle probabiliste

Méthode	$\alpha_1$ ( $\times 10^{-2}$ )	$\alpha_2$ ( $\times 10^{-1}$ )	$\alpha_3$ ( $\times 10^{-2}$ )	$\alpha_4$ ( $\times 10^{-1}$ )	$\alpha_5$ ( $\times 10^{-1}$ )	$\alpha_6$ ( $\times 10^{-1}$ )
FORM	-8,7962	-2,1608	-2,1608	-4,3938	+6,4953	+5,7460
MSR- Linéaire	-8,7366	-2,1381	-2,1271	-4,4375	+6,5018	+5,7144
MSR- Polynôme incomplet	-8,7658	-2,1606	-2,1234	-4,4405	+6,4673	+5,7423
MSR- Polynôme complet	-8,6840	-2,1824	-2,2044	-4,3892	+6,4857	+5,7537
MSR- Polynôme incomplet Etoile modifié	-8,7885	-2,1826	-2,1249	-4,4426	+6,4691	+5,7300

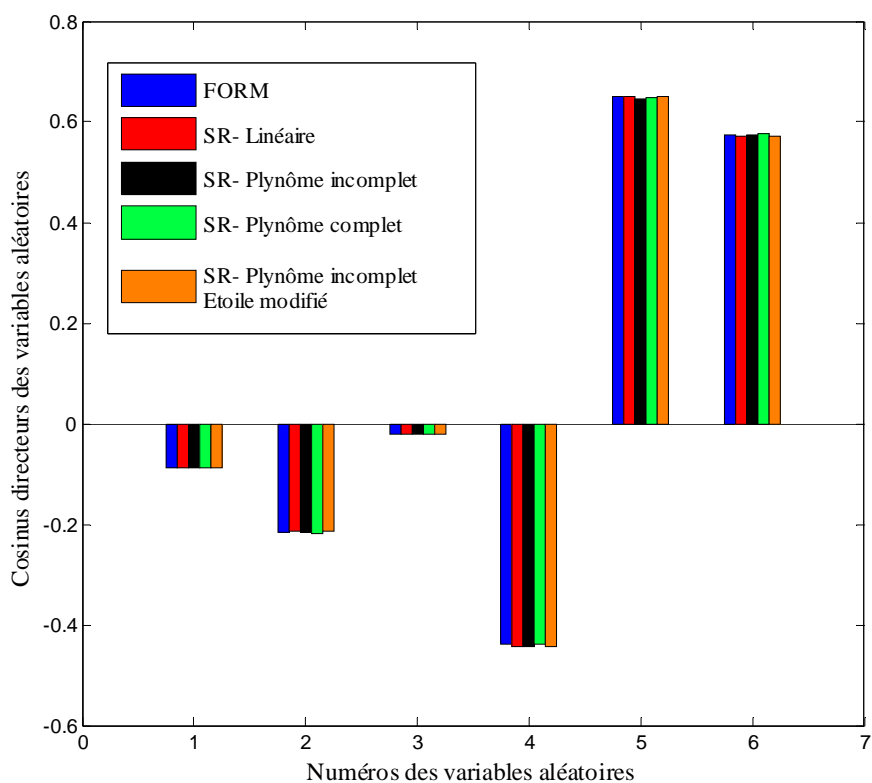


Figure A.2. Comparaison des valeurs des cosinus directeurs obtenues

Il est important de remarquer que la convergence a été obtenue au terme de 4 itérations pour les quatre approches étudiées et pour un critère de convergence de  $\varepsilon_{tol} = 10^{-5}$ . Le nombre d'appel à la fonction d'état limite est donné dans le tableau A.5.

Tableau A.5. Nombre d'appel à la fonction d'état limite pour les différents cas étudiés

Méthode	Nombre d'appel par itération	Nombre d'appel total
MSR- Linéaire	14	56
MSR- Polynôme incomplet	14	56
MSR- Polynôme complet	78	312
MSR- Polynôme incomplet Etoile modifié	79	316

#### A.1.1. Influence du coefficient arbitraire $h$ sur les résultats obtenus

Afin de mettre en évidence l'influence du coefficient arbitraire  $h$  sur les résultats obtenus, nous avons décidé de faire varier ce coefficient et de comparer les résultats obtenus avec la méthode FORM. L'erreur relative est exprimée en (%) et donnée par [Mohammadkhani-Shali, 2005] :

$$ERR = \frac{|(P_f\_MSR) - (P_f\_FORM)|}{(P_f\_FORM)} \times 100 \quad (A.3)$$

où  $P_f\_MSR$  est la probabilité de défaillance obtenue par la méthode par surfaces de réponse (FORM sur surfaces identifiées) et  $P_f\_FORM$  est la probabilité de défaillance obtenue par la méthode FORM.

La figure A.3 montre l'influence du coefficient arbitraire  $h$  sur l'erreur obtenue en utilisant la méthode des surfaces de réponse et la méthode FORM. L'erreur obtenue reste inférieure à 0,2% en utilisant les surfaces de réponse polynomiale (incomplète et complète) et inférieure à 1% en utilisant les surfaces de réponse linéaire pour une valeur de  $h < 5$ . L'erreur augmente à partir de  $h = 5$  respectivement pour les surfaces de réponse linéaire, polynomiale complète et polynomiale incomplète.

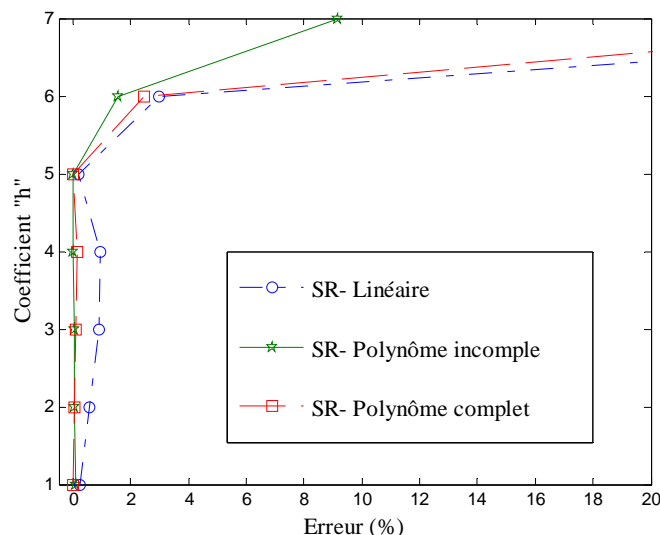


Figure A.3. Influence du coefficient arbitraire  $h$  sur l'erreur obtenue entre la méthode des surfaces de réponse et la méthode FORM

### A.1.2 Etude paramétrique sur les coefficients de variation des variables aléatoires

Afin d'évaluer l'influence de la modélisation probabiliste des variables aléatoires, une étude paramétrique sur le coefficient de variation des variables aléatoires est menée. Pour cela, le coefficient de variation d'une seule variable varie de 0,05 à 0,5 en conservant le coefficient de variation constant pour les autres variables aléatoires. Dans tous les cas, la probabilité de défaillance augmente avec le coefficient de variation. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures A.4 à A.9. Les résultats sont plus sensibles pour les variables  $m$ ,  $C_1$  et  $t$ .

La figure A.4 montre qu'en faisant augmenter du coefficient de variation de la variable  $m$  jusqu'à 0,3, il y a un bon accord entre les différentes variantes. Cependant une fois cette valeur dépassée, les résultats obtenus diffèrent légèrement. Dans ce cas, le résultat obtenu par la surface de réponse linéaire est naturellement plus proche de celui obtenu par la méthode FORM.

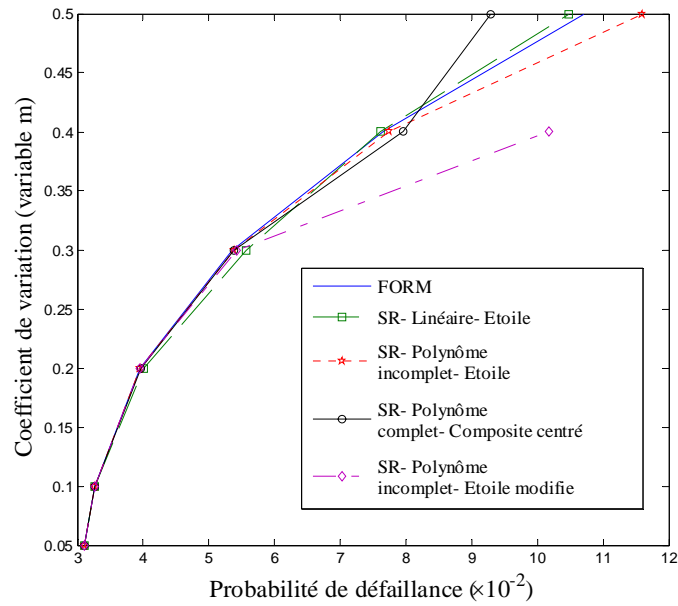


Figure A.4. Evolution de la probabilité de défaillance en fonction du coefficient de variation de variable n° 1 ( $m$ )

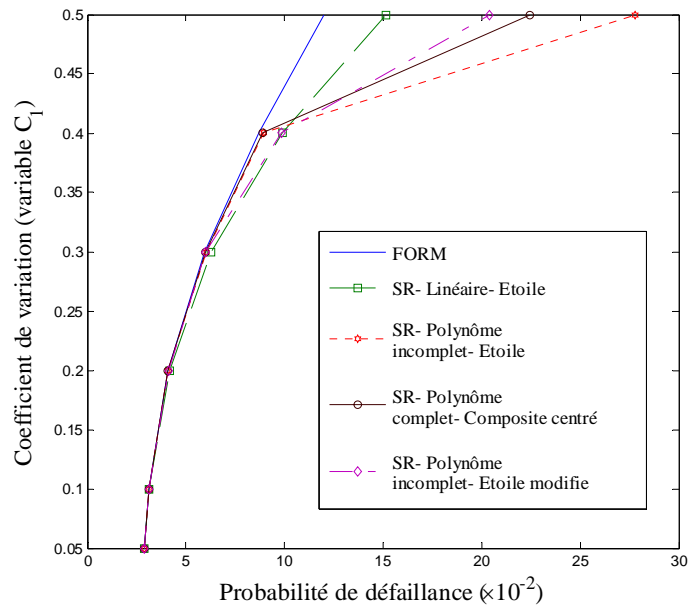


Figure A.5. Evolution de la probabilité de défaillance en fonction du coefficient de variation de variable n° 2 ( $C_1$ )

La figure A.5 montre qu'en faisant augmenter le coefficient de variation de la variable  $C_1$  jusqu'à 0,4, il y a un bon accord entre les différentes variantes de la méthode par surfaces de réponse. Mais à partir de cette valeur, les résultats obtenus divergent. Dans ce cas l'erreur obtenue entre les différentes variantes de la méthode et la méthode FORM augmente

respectivement pour les surfaces de réponse polynomiale incomplète, polynomiale complète et linéaire.

La figure A.6 montre qu'en faisant varier le coefficient de variation pour la variable  $C_2$ , il y a un bon accord entre les différentes variantes présentées ci-dessus. Dans ce cas, l'erreur obtenue entre les différentes variantes de la méthode par surfaces de réponse et la méthode FORM ne dépasse pas 3%.

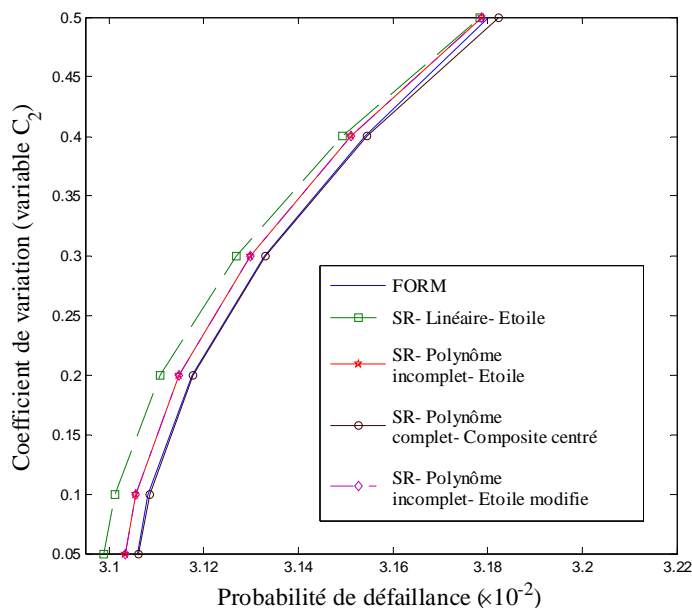


Figure A.6. Evolution de la probabilité de défaillance en fonction du coefficient de variation de variable n° 3 ( $C_2$ )

Les figures A.7 et A.8 montrent qu'en modifiant le coefficient de variation pour les variables  $r$  et  $F$ , il y a accord parfait entre les différentes variantes de la méthode par surfaces de réponse.

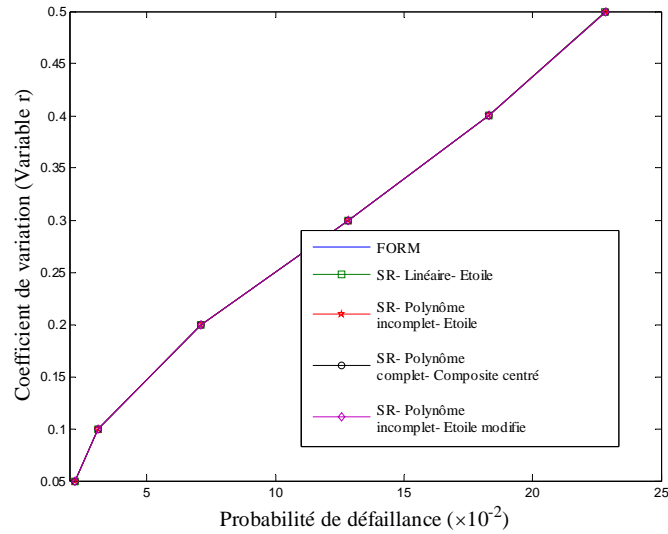


Figure A.7. Evolution de la probabilité de défaillance en fonction du coefficient de variation de variable n° 4 ( $r$ )

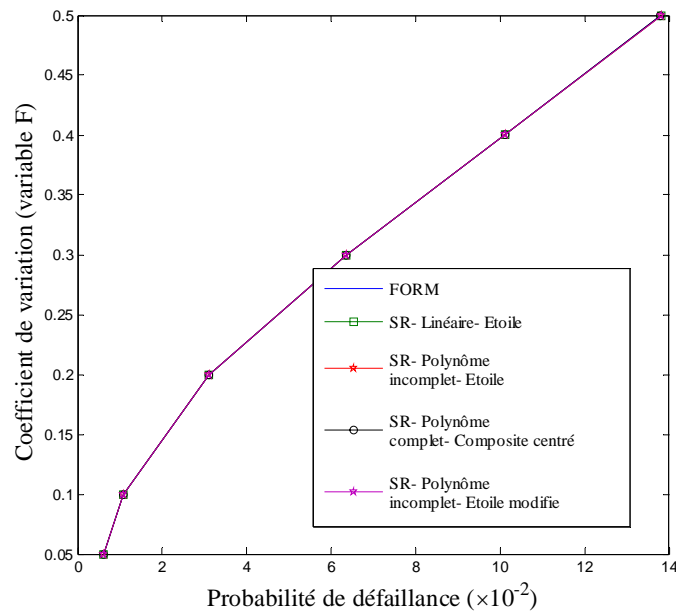


Figure A.8. Evolution de la probabilité de défaillance en fonction du coefficient de variation de variable n° 5 ( $F_1$ )

La figure A.9 montre qu'en augmentant le coefficient de variation pour la variable  $t$  jusqu'à 0,4, il y a un très bon accord entre les différentes variantes de la méthode par surfaces de réponse. Mais une fois cette valeur dépassée, les résultats obtenus divergent très légèrement. Dans ce cas, l'erreur obtenue entre les surfaces de réponse polynomiale complète et la méthode FORM reste négligeable. L'erreur obtenue pour les surfaces quadratiques

incomplètes en utilisant le plan d'expérience en étoile modifié apparaît comme négligeable par rapport à celui en étoile.

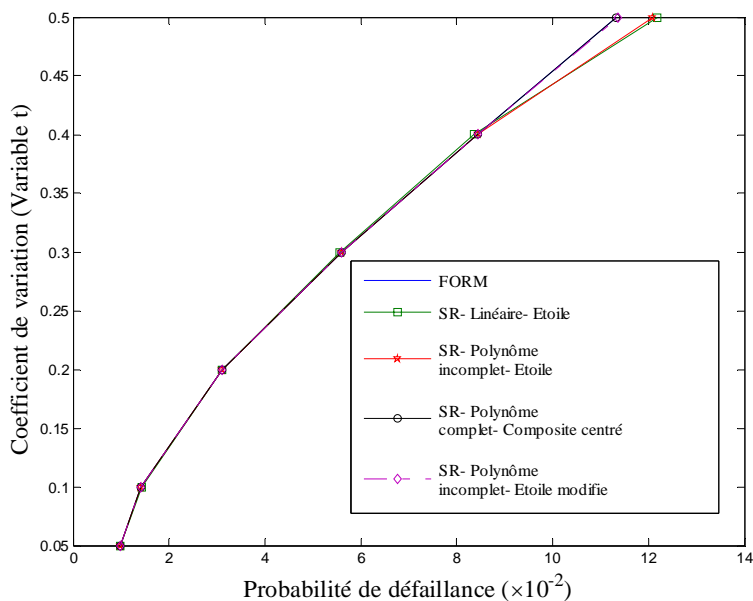


Figure A.9. Evolution de la probabilité de défaillance avec le coefficient de variation de variable n° 6 ( $t_1$ )

### A.1.3. Influence de la corrélation sur l'indice de fiabilité

Une étude de sensibilité a été effectuée sur la corrélation entre les variables aléatoires. Nous supposons que les six variables aléatoires dans ce modèle probabiliste sont corrélées. L'influence de corrélation sur l'indice de fiabilité du modèle est mise en évidence dans la figure A.10. Dans l'ensemble des cas présentés, l'indice de fiabilité augmente avec la corrélation. Les résultats obtenus montrent la bonne concordance des différentes variantes de la méthode par surfaces de réponse. L'erreur est négligeable.

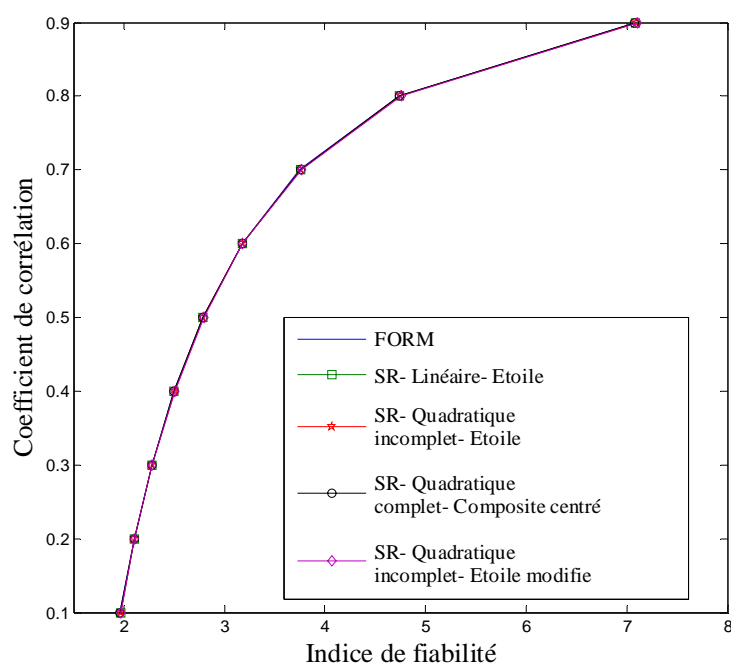


Figure A.10. Influence de la corrélation sur l'indice de fiabilité du modèle

#### A.1.4. Sensibilité des variables aléatoires aux types de loi de distribution

Le changement des lois de distribution implique un changement des transformations isoprobabilistes des variables dans l'algorithme de construction des surfaces de réponse. Afin d'étudier l'influence du type de loi de distribution sur le modèle, une combinaison entre les variables aléatoires distribuées selon différents types de lois a été envisagée. Pour cela, trois cas distincts avec les variables aléatoires indépendantes sont considérés.

Tableau A.6. Caractéristiques des variables aléatoires (à gauche) et comparaison des résultats obtenus (à droite) – cas N°1

Numéro des variables	Loi de distribution	Méthode	Probabilité de défaillance ( $\times 10^{-2}$ )	Erreur (%)
1	$N$	FORM	4,3314	-
2	$G_{max}$	MSR- linéaire	4,3263	0,1177
3	$G_{max}$			
4	$N$	MSR- polynôme incomplet	4,3333	0,0438
5	$LN$	MSR- polynôme complet	4,3252	0,1431
6	$U$			



Tableau A.7. Caractéristiques des variables aléatoires (à gauche) et comparaison des résultats obtenus (à droite) – cas N°2

Numéro des variables	Loi de distribution	Méthode	Probabilité de défaillance ( $\times 10^{-2}$ )	Erreur (%)
1	$LN$	FORM	4,3368	-
2	$G_{min}$	MSR- linéaire	4,3201	0,3851
3	$G_{min}$			
4	$Exp$	MSR- polynôme incomplet	4,3295	0,1683
5	$G_{max}$	MSR- polynôme complet	4,3337	0,0715
6	$U$			

Tableau A.8. Caractéristiques des variables aléatoires (à gauche) et comparaison des résultats obtenus (à droite) – cas N°3

Numéro des variables	Loi de distribution	Méthode	Probabilité de défaillance ( $\times 10^{-2}$ )	Erreur (%)
1	$LN$	FORM	3,4532	-
2	$N$	MSR- linéaire	3,4372	0,4633
3	$N$			
4	$G_{max}$	MSR- polynôme incomplet	3,4437	0,2751
5	$G_{max}$	MSR- polynôme complet	3,4528	0,0116
6	$N$			

La comparaison entre les résultats obtenus est présentée dans les tableaux A.6 à A.8. Il est possible d'observer que l'erreur entre les différentes variantes de la méthode par surfaces de réponse et la méthode FORM est faible et ne dépasse pas 0,5% pour plusieurs cas et 2% dans certains cas.

## A.2. Etat limite fortement non linéaire

Il s'agit d'une fonction d'état limite exponentielle, tirée de la littérature [Kaymaz, 2005]. Deux variables aléatoires indépendantes distribuées chacune selon une loi normale centrée réduite définissent le modèle probabiliste. La fonction d'état limite est définie par l'expression :

$$g(U_1, U_2) = \exp(0,2U_1 + 6,2) - \exp(0,47U_2 + 5) \quad (\text{A.4})$$

Afin de vérifier la robustesse de la méthode par surfaces de réponse, plusieurs études de sensibilité ont été réalisées. Ces études mettent en évidence la sensibilité des résultats obtenus par rapport aux différents types de surfaces de réponse, de plan d'expérience, et du coefficient arbitraire  $h$ .

Dans un premier temps, cette probabilité est évaluée par surface de réponse linéaire, en utilisant le plan d'expérience en étoile. Dans un deuxième temps, elle est évaluée par un polynôme quadratique incomplet, en utilisant le plan d'expérience en étoile. Dans un troisième temps un polynôme quadratique complet est utilisé. Le plan d'expérience composite centré est alors mis en jeu pour trouver les coefficients du polynôme. Les probabilités de défaillance sont calculées par une approximation au 1er ordre par souci de comparaison avec la méthode FORM. Finalement, les résultats obtenus sont présentés dans le tableau A.9. Il est possible d'observer une très bonne superposition des résultats obtenus pour les trois types de surfaces de réponse utilisés par rapport à ceux fournis par la méthode FORM.

Tableau A.9. Comparaison des résultats obtenus à l'aide de différents types de surfaces de réponse

Méthode	Indice de fiabilité	Probabilité de défaillance ( $\times 10^{-3}$ )
FORM	2,3493	9,4036
MSR- Linéaire	2,3474	9,4528
MSR- Polynôme incomplet	2,3492	9,4080
MSR- Polynôme complet	2,3492	9,4080

Les équations ainsi que les figures correspondant aux trois types de surfaces de réponse sont données pour (figures A.11-A12) :

- la surface de réponse linéaire:

$$\hat{g}(U_1, U_2) = 377,17 + 62,877U_1 - 147,86U_2 \quad (\text{A.5})$$

- la surface de réponse quadratique incomplète :

$$\hat{g}(U_1, U_2) = 294,75 + 96,587U_1 - 3,5378U_2 + 7,9326U_1^2 - 43,867U_2^2 \quad (\text{A.6})$$

- la surface de réponse quadratique complète :

$$\hat{g}(U_1, U_2) = 294,75 + 96,587U_1 - 3,5378U_2 + 7,9326U_1^2 - 43,867U_2^2 + 2,7217 \times 10^{-13}U_1U_2 \quad (\text{A.7})$$

Il apparaît que le dernier terme de l'équation A.7 est négligeable. La surface de défaillance obtenue pour les surfaces de réponse polynomiale incomplète et complète est donc identique. C'est la raison pour laquelle on obtient le même indice de fiabilité. Les coordonnées du point de conception obtenu pour les trois types de surfaces de réponse sont présentées dans le tableau A.10. Il est possible d'observer stabilité du point de conception obtenu en fonction des variantes retenues.

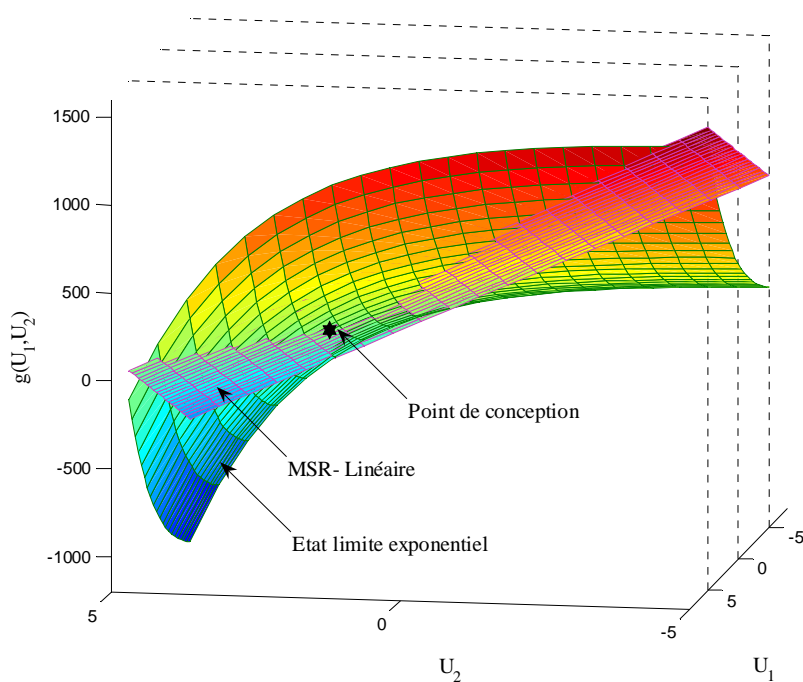


Figure A.11. Surface de réponse linéaire et état limite exponentiel

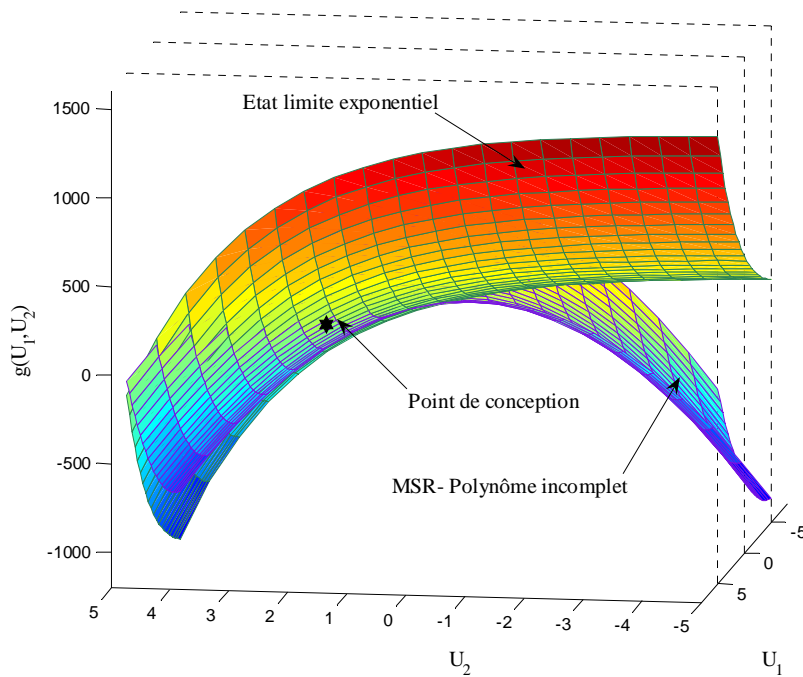


Figure A.12. Surface de réponse polynôme incomplet et état limite exponentiel

Tableau A.10. Valeurs des coordonnées du point de conception

Méthode	$Xd_1$ ( $\times 10^{-1}$ )	$Xd_2$
FORM	-9,1989	2.1617
MSR- Linéaire	-9.1860	2.1602
MSR- Polynôme incomplet	-9.1782	2.1624
MSR- Polynôme complet	-9.1782	2.1624

Les valeurs des cosinus directeurs des variables aléatoires sont présentées dans le tableau A.11 et dans la figure A.13. Ces résultats montrent l'influence de chacune des variables aléatoires dans le modèle probabiliste. Il en ressort que les deux variables sont importantes dans le modèle probabiliste. La comparaison de ces diverses valeurs montre une bonne adéquation entre le résultat obtenu par la méthode FORM et celui fourni par l'approche des surfaces de réponse en appliquant les trois variantes présentées.

Tableau A.11. Valeurs des cosinus directeurs des variables

Méthode	$\alpha_1$ ( $\times 10^{-1}$ )	$\alpha_2$ ( $\times 10^{-1}$ )
FORM	-3,9156	9,2015
MSR- Linéaire	-3,9133	9,2025
MSR- Polynôme incomplet	-3,9070	9,2052
MSR- Polynôme complet	-3,9070	9,2052

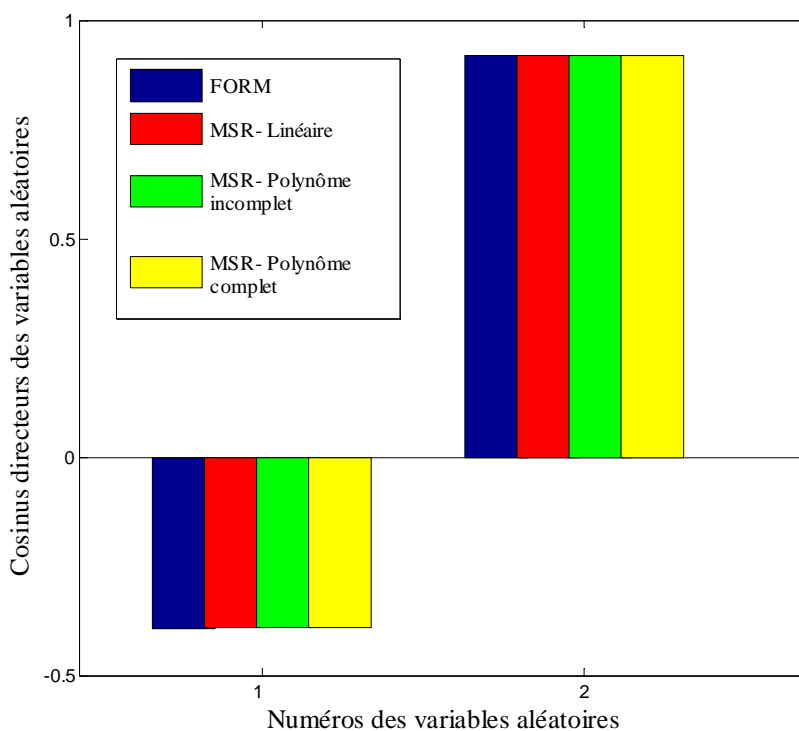


Figure A.13. Comparaison des valeurs des cosinus directeurs obtenus

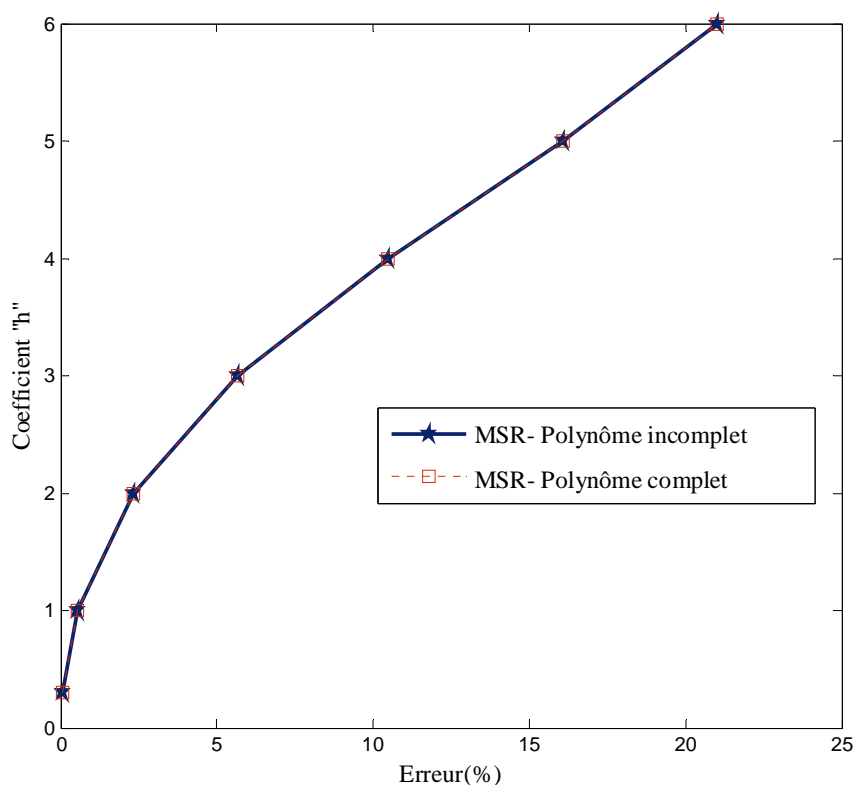
Il est important de noter que la convergence a été obtenue au terme de 4 itérations pour les quatre cas étudiés et pour un critère de convergence  $\varepsilon_{tol} = 10^{-5}$ . Le nombre d'appel à la fonction d'état limite est donné dans le tableau A.12.

Tableau A.12. Nombre d'appel à la fonction d'état limite pour les différents cas étudiés

Méthode	Nombre d'appel par itération	Nombre d'appel total
MSR- Linéaire	6	24
MSR- Polynôme incomplet	6	24
MSR- Polynôme complet	10	40

### A.2.1. Influence du coefficient arbitraire $h$

Le choix des surfaces de réponse polynomiale est retenu dans ce paragraphe. Afin de mettre en évidence l'influence du coefficient arbitraire  $h$  sur les résultats obtenus, plusieurs valeurs sont considérées. Les résultats sont comparés avec la méthode FORM. L'erreur relative est alors exprimée en (%). La figure A.14 montre l'influence du coefficient arbitraire  $h$  sur l'erreur entre les résultats obtenus par les surfaces de réponse polynomiales et ceux obtenus par la méthode FORM. Il apparaît alors que l'erreur obtenue reste inférieure à 5,64% pour une valeur de  $h < 3$ , l'erreur augmentant jusqu'à 23% pour  $h < 7$ .

Figure A.14. Influence du coefficient arbitraire  $h$  sur l'erreur

Deux cas particuliers sont tirés de la figure A.14. Ces deux cas correspondent aux surfaces de réponse polynomiale avec  $h=1$  et  $h=6$  pour les valeurs d'erreur égale à 0,53% et 21% respectivement. La différence entre ces deux cas est liée au fait qu'il y a deux approximations différentes et en conséquence deux points de conception différents pour les surfaces de réponse polynomiale. La valeur de  $h$  est donc un facteur indispensable pour trouver une bonne approximation et par la même, un point de conception pertinent. Il est par ailleurs possible d'observer (dans la figure A.15) que pour des surfaces de réponse polynomiales avec un coefficient  $h$  égal à 1, une très bonne approximation est obtenue. Celle-ci est moins bonne pour des surfaces de réponse polynomiales avec  $h=6$ .

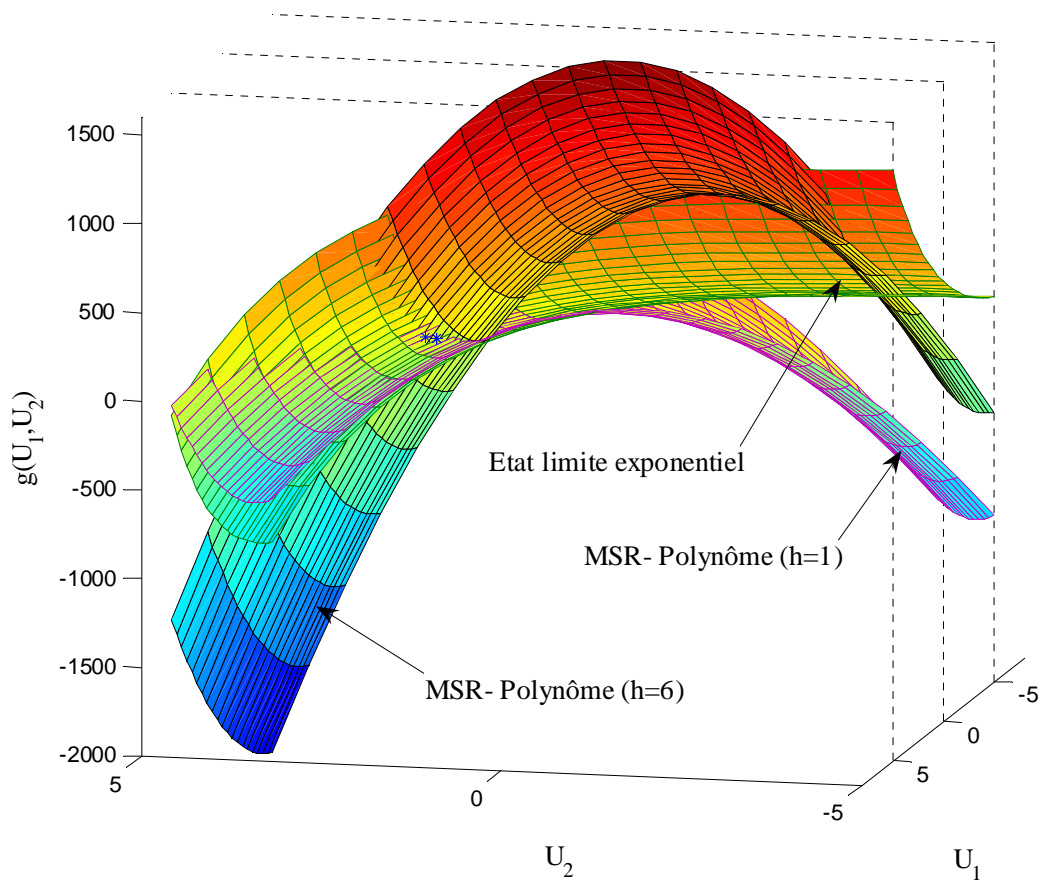


Figure A.15. Influence du coefficient arbitraire  $h$  sur l'approximation des surfaces de réponse

### A.2.2. Influence du type de plan d'expérience

L'objectif est ici de vérifier l'influence du type de plan d'expérience sur les résultats obtenus par les différentes variantes de la méthode par surfaces de réponse. Les surfaces de réponse polynomiales sont à nouveau considérées. Dans un premier temps, la fiabilité est évaluée avec

le plan d'expérience en étoile. Dans un deuxième temps, elle est évaluée avec le plan d'expérience composite centré, pour les valeurs  $\alpha = 1$  et  $\alpha = \sqrt{2}$ . Dans un troisième temps, le plan d'expérience étoile modifié est utilisé. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau A.13. Il est possible d'observer une très bonne adéquation entre les résultats obtenus pour l'ensemble des cas étudiés par rapport à ceux fournis par la méthode FORM.

Tableau A.13. Comparaison des résultats obtenus en utilisant différents plans d'expérience

Plan d'expérience	Indice de fiabilité	Probabilité de défaillance ( $\times 10^{-3}$ )
Etoile	2,3473	9,4538
Composite centré avec $\alpha = 1$	2,3473	9,4538
Composite centré avec $\alpha = \sqrt{2}$	2,3464	9,4781
Etoile modifié en considérant ( $0,25 < h < 1,5$ )	2,3472	9,4560
Etoile modifié en considérant ( $0,5 < h < 3$ )	2,3516	9,3468



*Annexe A- Etude de sensibilité sur deux exemples*

*ANNEXE B*

*INFLUENCE DE LA CORROSION SUR LA POUTRE  
DU BENCHMARK DES POUTRES DE LA RANCE*

La connaissance de la performance à long terme et l'impact incertain de l'environnement sur le comportement des structures en béton armé rendent difficile une évaluation précise de la durabilité des ouvrages au cours du temps. L'origine de la dégradation des ouvrages peut être physique dans le cas de température extrême, mécanique lors de charges excessives ou chimique en présence d'agents agressifs. Les facteurs chimiques sont souvent les plus importants. Parmi les nombreux agents agressifs auxquelles les ouvrages peuvent être exposés, le dioxyde de carbone et les chlorures sont les plus importants. Ces agents sont les responsables principaux de la corrosion des ouvrages existants. La corrosion peut donc être identifiée par la pénétration des chlorures ou par la carbonatation. La corrosion des armatures est un phénomène qui peut affecter les ouvrages en béton armé ou précontraints en contact avec tous types d'environnement : l'atmosphère, les solutions telle que l'eau de mer ou le sol. Il s'avère que dans le domaine des ouvrages d'art, du génie civil ou du bâtiment, les phénomènes de corrosion des armatures du béton sont les plus fréquents parmi les dégradations des ouvrages en béton armé et précontraints. La corrosion des armatures est également la principale cause de dégradation des ouvrages dans les autres pays d'Europe. De par son importance en termes de pathologie des ouvrages, la corrosion dans le béton armé

suscite depuis de nombreuses années de nombreux travaux de recherche dans des domaines très divers : description du processus électrochimique de corrosion de l'acier dans le béton, conditions favorables à la corrosion, mécanismes et cinétiques de transport des agents agressifs, conséquences mécaniques de la corrosion, mise en évidence de l'activité de corrosion, protection contre la corrosion...

Les étapes les plus importants dans le processus de dégradation sont l'arrivée des chlorure à la surface, l'attaque des armatures (initiation), la phase de corrosion active menant à l'éclatement du béton, la phase d'ouverture excessive des fissures et enfin la perte de sécurité structurale. Pour une armature donnée, la perte de section au cours du temps est alors décrite par l'équation [Middleton, 1995] :

$$A(t) = \begin{cases} D_0^2 \frac{\pi}{4} \rightarrow t \leq t_i \\ D^2(t) \frac{\pi}{4} \rightarrow t_i \leq t \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où  $t_i$  est le temps de la corrosion,  $D_0$  et  $D(t)$  sont respectivement les diamètres de la section d'armature à l'instant initial et à l'instant  $t$ . Le diamètre  $D(t)$  se déduit du courant de corrosion par la relation :

$$D(t) = D_0 - k\lambda \int_{t_i}^t i_{corr}(t) dt \quad (\text{B.2})$$

avec  $\lambda$  et  $k$  qui représentent respectivement le facteur de conversion applicable à  $i_{corr}$  pour obtenir un taux de corrosion en mm/an, et le coefficient de corrosion dépendant du type de corrosion.  $i_{corr}$  qui est décrit par l'équation B.3 [Silva, 2004]:

$$i_{corr}(t) = 0.85 \times i_{corr}(1) \times t^{-0.29} \quad (\text{B.3})$$

où  $i_{corr}(1) = 5.78 \frac{\mu A}{cm^2}$ . Les résultants expérimentaux et les observations effectuées sur la poutre de la Rance considérée mettent en évidence que les faces supérieures correspondant à la zone du béton tendu (face opposée à la précontrainte) présentent globalement une dégradation plus importante que la face inférieure, zone dans laquelle béton est comprimé. Comme le suggère l'analyse des vitesses de corrosion [BMC\_Rance, 2004], une activité de corrosion plus faible est globalement observée dans la zone de béton comprimé. Dans cette section, il est supposé que la corrosion mène à une diminution de la section de l'acier passif. L'influence de la corrosion sur la fiabilité de la poutre pour l'état limite de service est alors

étudiée. Deux cas pour la corrosion sont considérés. Dans un premier temps, une diminution de la section de l'acier passif à mi-travée de poutre est considérée dans le domaine III seul (figure 3.11). Dans un deuxième temps, une diminution de la section de l'acier passif est considérée dans les trois domaines III, IV et V de la poutre (figure 3.11), la perte de section au cours du temps étant évaluée par l'équation B.1. Comme l'autopsie de la poutre a montré la présence de produits de corrosion et de quelques réductions de section, nous supposons que la corrosion a débuté. Par simplification l'instant d'initiation de la corrosion est pris à 0 ans.

Les résultats obtenus pour la probabilité de défaillance et l'indice de fiabilité de la poutre, avant corrosion et pour une durée de vie de 80 ans sont décrits dans le tableau B.1. Ce tableau met en évidence le fait que la probabilité de défaillance de la poutre obtenue pour le deuxième cas de corrosion est 28,6% plus importante que celle obtenue pour le premier cas de corrosion. Les indices de fiabilité correspondant à la probabilité de défaillance après  $T$  années de la durée de service de la poutre,  $P_{fT}$ , sont présentés dans la figure B.1.

Tableau B.1. Résultats obtenus pour les temps extrêmes de la corrosion

	Probabilité de défaillance	Indice de fiabilité
Avant corrosion	0,4583	6,8199
Premier cas de corrosion après 80 ans	2,4699	6,5735
Deuxième cas de corrosion après 80 ans	3,1773	6,5359

La figure B.1 montre que l'indice de fiabilité diminue au cours du temps pour les deux cas de la corrosion. Il est également possible d'observer que la corrosion dans le deuxième cas étudié a une influence légèrement plus importante sur l'indice de la fiabilité.

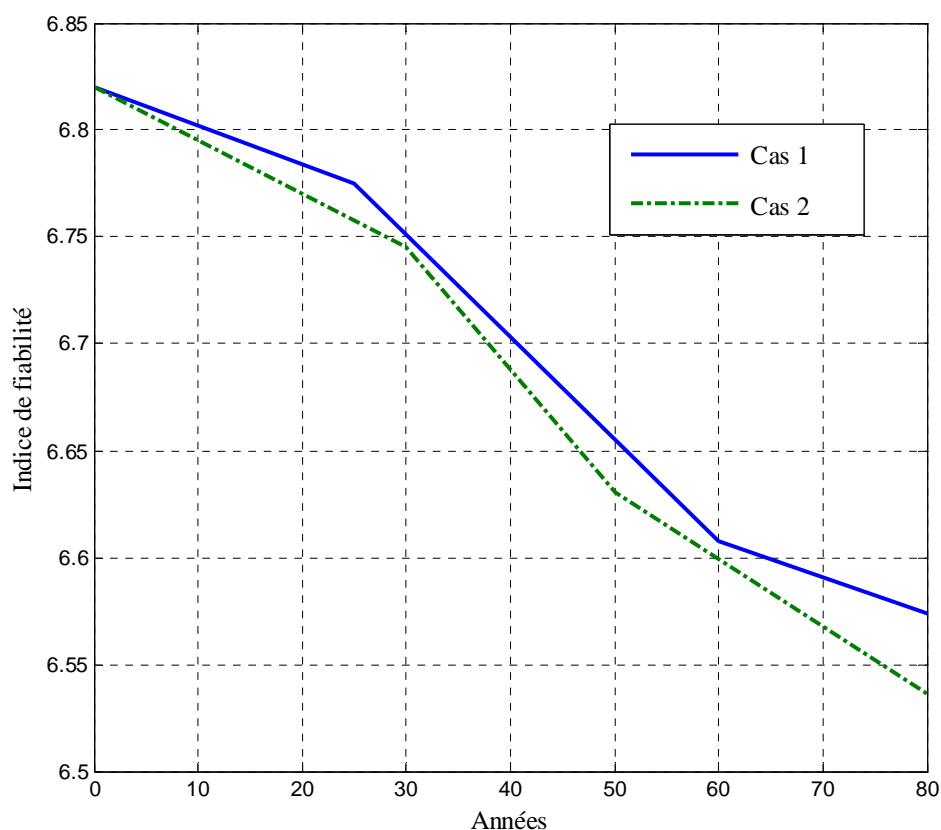


Figure B.1. Evolution de l'indice de fiabilité au cours du temps pour les deux cas de corrosion

Comme la montre la figure B.2, la force de précontrainte, la résistance en traction et le module d'élasticité du béton ont une grande influence dans le modèle probabiliste de cette poutre pour l'état limite de service. Une étude de sensibilité pour les deux cas de corrosion a été menée dans ce paragraphe sur les valeurs absolues des cosinus directeurs des variables aléatoires du modèle (figures B.3 et B.4). Prenons la résistance en traction du béton dans le domaine III ayant la plus grande influence sur le modèle. Avant corrosion, la valeur absolue du cosinus directeur de cette variable est égale à  $\alpha = 0,77002$ . A  $T=80$  ans, cette valeur est égale à  $\alpha = 0,74227$  pour le premier cas de corrosion et  $\alpha = 0,72857$  pour le deuxième cas de corrosion, ce qui montre que l'influence de cette variable augmente au cours de temps dans le premier cas et diminue dans le deuxième cas de la corrosion. Cependant, pour la résistance en traction du béton dans le domaine IV, il apparaît que l'influence de cette variable diminue au cours de temps dans le premier cas et augmente dans le deuxième cas de corrosion. Dans ces figures, il est possible d'observer l'influence des autres variables sur le modèle probabiliste de la poutre au cours du temps pour les deux cas de corrosion et pour l'état limite de service donné.

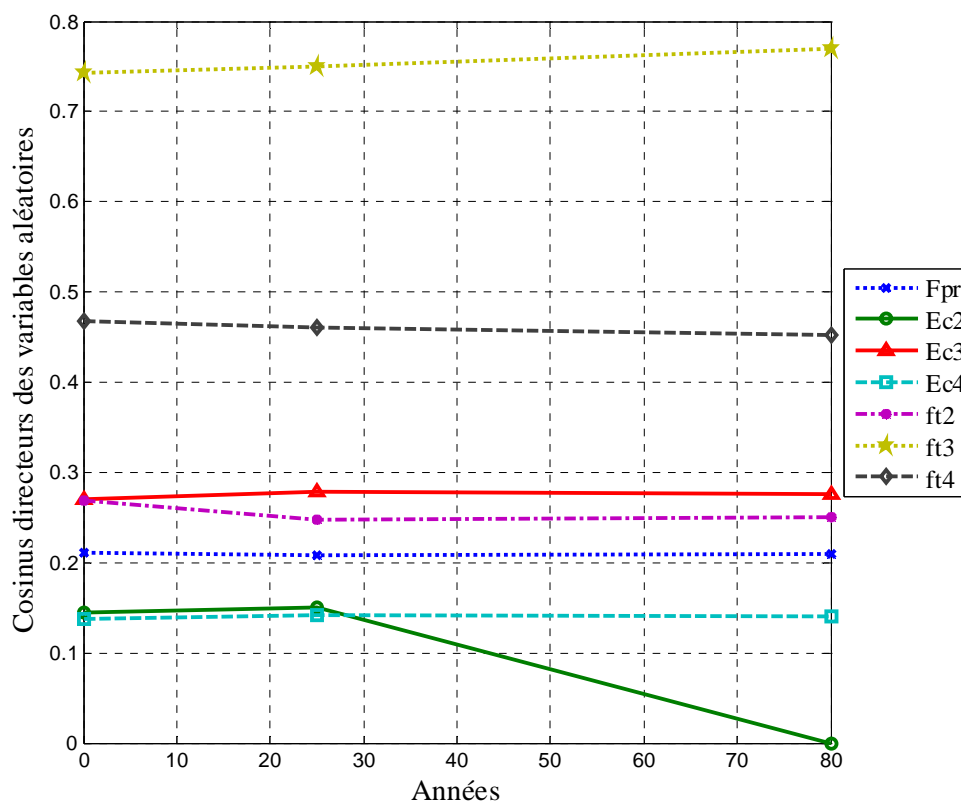


Figure B.3. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables au cours du temps en considérant la corrosion dans le domaine III

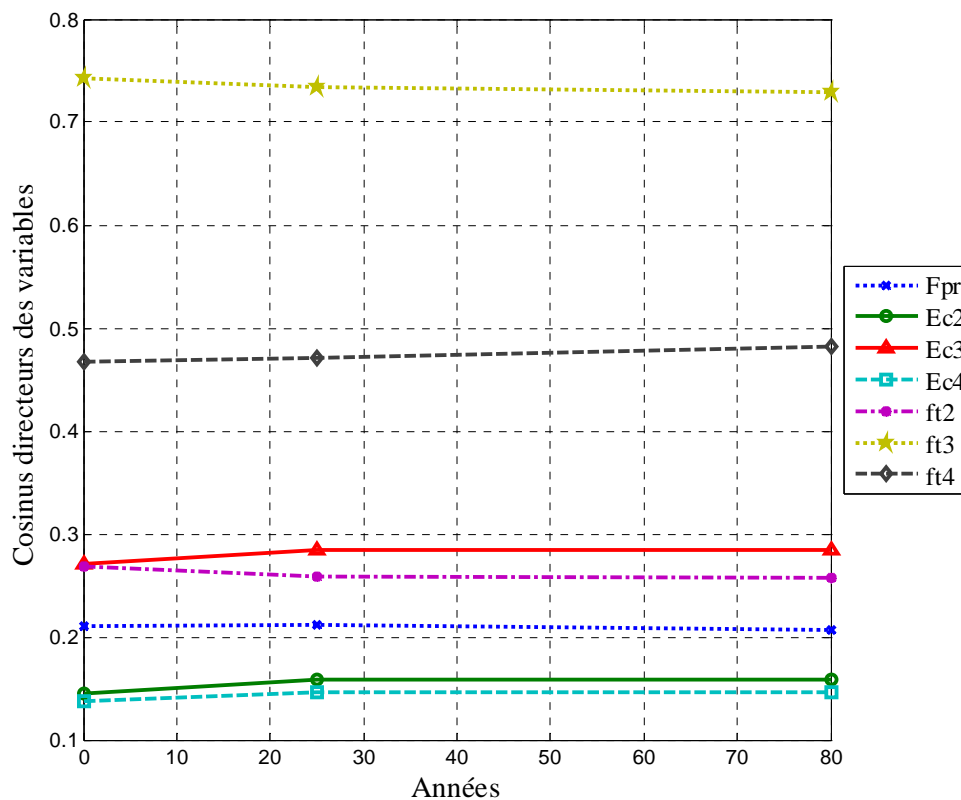


Figure B.4. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables au cours du temps en considérant la corrosion dans les trois domaines II, III et IV

### Influence de corrélation sur l'indice de fiabilité

Comme cela a été mentionné précédemment, le module d'élasticité, la résistance en traction et la résistance en compression du béton sont considérés corrélés avec un coefficient de corrélation de 0,9 dans les cinq domaines différents de la poutre. Afin de mettre en évidence l'influence de la corrélation sur l'indice de fiabilité de la poutre, une étude de sensibilité a été menée sur le coefficient de corrélation. Il s'agit de faire varier ce coefficient de corrélation entre les différents paramètres du modèle, et ceci dans les cinq domaines de la poutre (figure 3.11). L'influence de la corrélation sur la fiabilité de la poutre par rapport à l'état limite de service est présentée dans les figures B.5 et B.6. Ces figures montrent que l'indice de fiabilité augmente avec la corrélation entre les domaines, ce qui est valable dans les deux cas de corrosion. En d'autres termes, plus il y a d'homogénéité entre les paramètres du béton dans les différents domaines de la poutre, plus l'indice de fiabilité dans la poutre augmente.

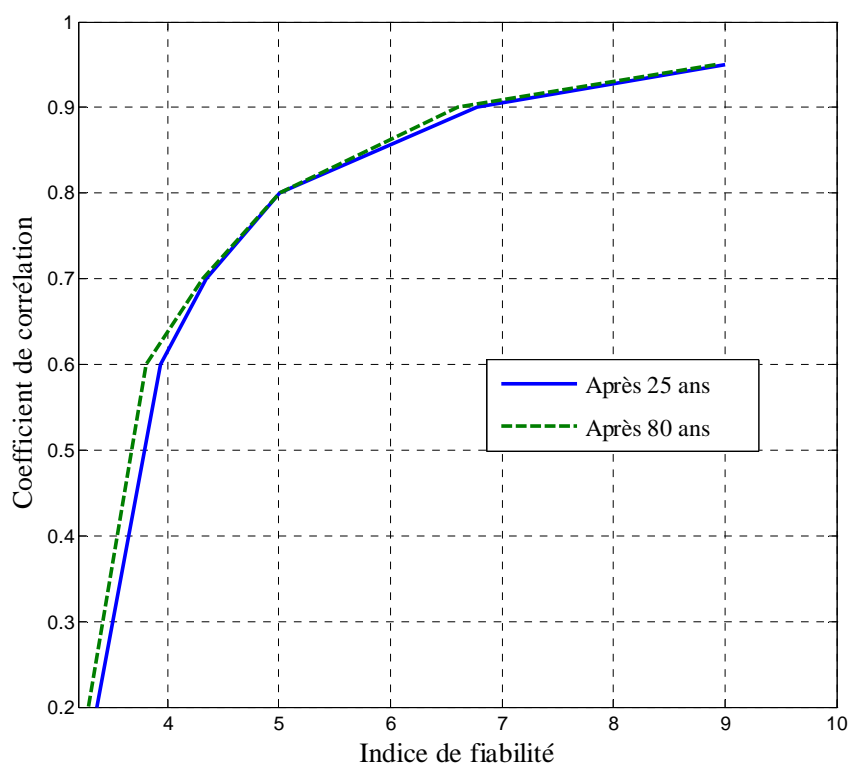


Figure B.5. Influence de corrélation sur l'indice de fiabilité en considérant la corrosion dans le domaine III

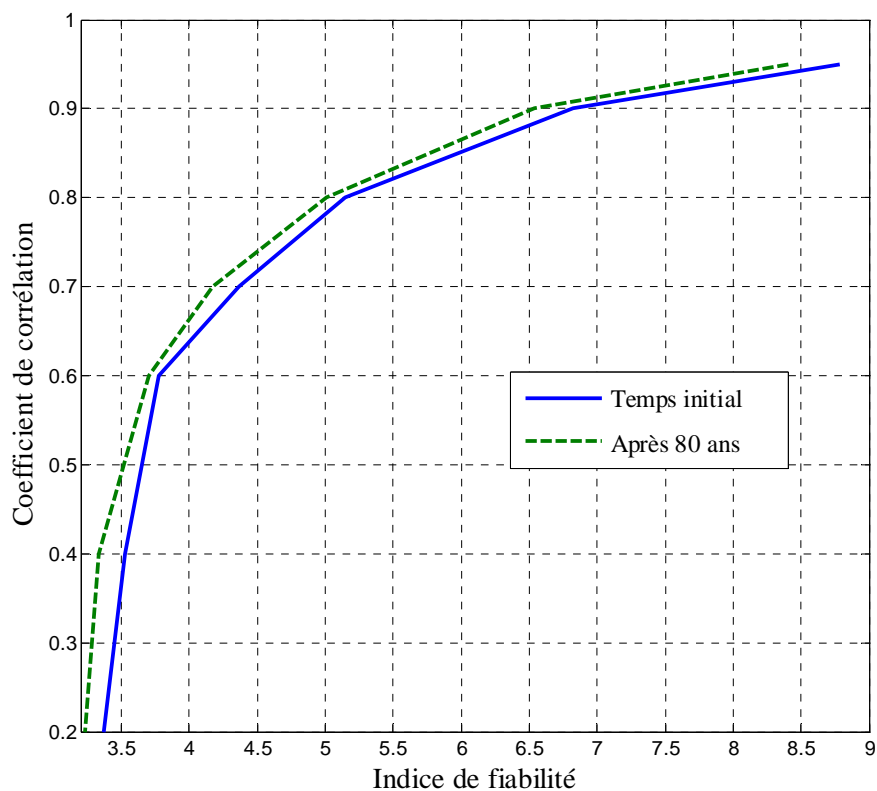


Figure B.6. Influence de corrélation sur l'indice de fiabilité en considérant la corrosion dans les trois domaines II, III et IV