



**HAL**  
open science

# Crack modelling for the assessment of stiffness loss of reinforced concrete structures under mechanical loading

Malika Bongué Boma

► **To cite this version:**

Malika Bongué Boma. Crack modelling for the assessment of stiffness loss of reinforced concrete structures under mechanical loading. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. English. NNT: . pastel-00003418

**HAL Id: pastel-00003418**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00003418>**

Submitted on 22 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

*Présentée pour l'obtention du grade de*

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

Présentée par :

**Malika BONGUÉ BOMA**

Titre :

**MODÉLISATION DE LA FISSURATION POUR  
L'ÉVALUATION DE LA PERTE D'ÉTANCHÉITÉ DES  
STRUCTURES EN BÉTON ARMÉ SOUS CHARGEMENTS  
MÉCANIQUES**

Soutenue le 11 décembre 2007

Composition du jury :

Alexander FREIDIN	Rapporteur
Paolo PODIO-GUIDUGLI	Rapporteur
Alain EHRLACHER	Examineur
Samuel FOREST	Examineur
Alain FORESTIER	Examineur
Lev TRUSKINOVSKY	Examineur
Maurizio BROCATO	Directeur de thèse



*Configurational Mechanics is a funny subject. The first time you go through it, you don't understand it at all. The second time you go through it, you think you understand it, except for one or two small points. The third time you go through it, you know you don't understand it, but by that time you are so used to it, it doesn't bother you any more.*  
*[Modified quotation originally attributed to Arnold Sommerfeld]*

*anvan chen manje zo, li mezire machwè'l*



*À mon oncle Maurice et mamie Berthod*



# Remerciements

Le présent travail n'a pu être effectué que grâce à une étroite collaboration entre l'École Nationale des Ponts et Chaussées et le Commissariat à l'Énergie Atomique. Ainsi je remercie tout particulièrement M. Karam SAB directeur du LAMI et M. Jean-Marc HUMBERT directeur du laboratoire DEN-DANS-DM2S-SEMT-LM2S au CEA de Saclay pour m'avoir accueillie au sein de leurs structures et donné l'opportunité de faire cette thèse.

Je n'ai pas trouvé de mot assez fort pour exprimer ma gratitude envers M. Maurizio Brocato qui m'a fait profiter de son génie avec tellement de générosité, d'enthousiasme et de patience, le tout saupoudré d'une bonne dose d'humour. Il a été l'instigateur de ce projet et il a su m'orienter non seulement dans ma réflexion, mais aussi dans mes choix professionnels. Merci.

Je tiens particulièrement à remercier mes deux rapporteurs de thèse : M. Alexander FREIDIN et M. Paolo PODIO-GUDUGLI. Я вам очень благодарна за то что принимали участие и быть членом в комиссии на мою защиту. Мне было очень приятно с вами познакомиться и надеюсь что увидимся снова. Sono stata molto onorata dei colloqui che lei mi ha accordato nel decorso della mia tesi di dottorato. La ringrazio per il suo appoggio et per la sua disponibilità. Mi auguro che avremo modo di riincontrarci in futuro.

Mes sincères remerciements s'adressent également aux examinateurs de ma thèse, pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail : Alain EHRLACHER, Samuel FOREST, Alain FORESTIER et Lev TRUSKINOVSKY. Merci particulièrement à M. ALain EHRLACHER dont les connaissances n'ont d'égales que sa gentillesse. Je lui suis reconnaissante pour son soutien et ses conseils.

Je tiens à remercier tous les membres du LAMI (doctorants et permanents) qui ont partagé mon quotidien au cours de ces trois années de thèse. Un environnement agréable est propice au travail ! Je remercie spécialement Mme Adélaïde FÉRAILLE, Mme Marie-Françoise KASPI et Mme Brigitte VIGO.

Merci aux membres du MOQUEST qui sont bien plus que mes amis, une famille : Rê-Liré IVANGA OGOULA, Valérie ALANDZI, Saskia JÜLICH, Cynthia LAUMUNO, Ghislain DONGO, Sarah OVERTANI, Julie NTSAME, Florence MOUITY et ses frères (j'espère ne pas en oublier certains). Je suis reconnaissante et même honorée de bénéficier de votre soutien ; j'espère que vous me supporterez pendant encore de nombreuses années !

Merci à tous ceux qui m'ont vue grandir, m'ont entourée de leur affection et m'ont apporté leur aide quand c'était nécessaire : Annie, Christiane , Claudine, Crépin, Gisèle, Roger KOUMANGOYE, Liliane, Malou , Mariane, Mbabiri, Pulchérie, Sébastien, la famille BERTHOD et la famille OUOLOGEM etc...

Enfin merci à ma famille Hilaire d'Haïti éloignée géographiquement, mais si présente affectivement. Je remercie particulièrement mes parents, mon frère Mikiéla et mes deux sœurs N'Odih et Kwélé pour leur soutien inconditionnel.



# Résumé

## Modélisation de la fissuration pour l'évaluation de la perte d'étanchéité des structures en béton armé sous chargements mécaniques

L'évaluation du comportement de structures de béton armé est une problématique cruciale dans le domaine du génie civil : l'objectif de cette thèse est la mise en place d'un modèle mécanique capable de décrire l'évolution des paramètres physiques qui régissent l'évolution de la perméabilité de ce matériau. Le béton (initialement micro-fissuré) est modélisé comme un milieu à microstructure : la cinématique du corps est enrichie par une variable caractéristique de la taille et de l'orientation du champ de fissure. La théorie des forces configurationnelles est utilisée afin de tenir compte des évolutions irréversibles des micro-défauts. Ces deux approches nous permettent de déterminer les équations d'équilibre régissant la déformation du milieu ainsi que la propagation des fissures. Les paramètres utilisés pour décrire la microstructure ont été choisis de façon à schématiser le milieu poreux : la résolution des équations de Stokes sur le volume élémentaire représentatif (microstructure) permettra d'évaluer la perméabilité intrinsèque en tout point du corps. Un exemple a été détaillé : on détermine le comportement d'un solide en traction tout en considérant des conditions d'étude simplifiées (champ de fissures homogène, isostaticité, application de la mécanique linéaire de la rupture). Déformation, propagation des fissures et perte de rigidité sont déterminées en fonction du chargement. On présente par ailleurs l'évolution de la perméabilité du milieu : une fois amorcée, la propagation du champ de fissure devient la cause principale de la perte d'étanchéité.

## Mots clés

Micro-fissures - Microstructure - Forces configurationnelles - Perméabilité - Béton



# Abstract

**Crack modelling for the assessment of stiffness loss of reinforced concrete structures under mechanical loading - determination of the permeability of the micro-cracked body**

We propose a model describing the evolution of mechanical and permeability properties of concrete under slow mechanical loading. Calling upon the theory of continua with microstructure, the kinematic of the domain is enriched by a variable characterising size and orientation of the crack field. We call upon configurational forces to deal with crack propagation and we determine the balance equations governing both strain and propagation. The geometry of the microstructure is representative of the porous media : the permeability is obtained from the resolution of Stokes equations in an elementary volume. An example has been treated : we considered simple assumptions (uniform crack field, application of linear fracture mechanics...) and we determined the behaviour of a body under tensile loading. Strain, crack propagation and stiffness loss are completely assessed. Finally the evolution of permeability is plotted : once activated, crack propagation is the main cause of water tightness loss.

## Keywords

Micro-cracks - Microstructure - Configurational forces - Permeability - Concrete



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Synthèse bibliographique</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Comportement hydrique du béton</b>	<b>8</b>
Introduction . . . . .	8
1.1 Description . . . . .	8
1.1.1 Description de la matrice solide . . . . .	9
1.1.1.1 Porosité . . . . .	9
1.1.1.2 Distribution de la taille des pores - Rayon hydraulique . . . . .	10
1.1.1.3 Surface spécifique . . . . .	10
1.1.1.4 Tortuosité . . . . .	11
1.1.2 Description des phases fluides . . . . .	11
1.1.2.1 Capillarité . . . . .	11
1.1.2.2 Fluides contenus dans la matrice : eau et air sec . . . . .	12
1.1.2.3 Paramètres caractéristiques . . . . .	12
1.1.3 Équilibre entre phases . . . . .	13
1.1.3.1 Phase liquide unique : régime saturé . . . . .	13
1.1.3.2 Deux fluides immiscibles : régimes pendulaires et funiculaires . . . . .	13
1.2 Modélisation . . . . .	14
1.2.1 Hypothèses à la base des modèles mathématiques les plus courants . . . . .	14
1.2.2 Loi de Darcy . . . . .	14
1.2.3 Calcul du coefficient de perméabilité d'un milieu poreux non déformable . . . . .	15

1.2.3.1	Modèle de Kozeny-Carman . . . . .	15
1.2.3.2	Le milieu poreux en tant que réseau de capillaires . . . . .	16
1.2.3.3	Treillis de Boltzmann . . . . .	18
1.2.3.4	Modèle de percolation . . . . .	18
1.2.3.5	Limites . . . . .	18
1.2.4	Transferts hydriques isothermes dans les milieux poreux déformables . . . .	19
1.2.4.1	Théorie des mélanges . . . . .	19
1.2.4.2	Modèle à variable interne . . . . .	19
1.2.5	Couplage de la propagation des fissures et du comportement hydrique . . .	21
Conclusion . . . . .		23
<b>2</b>	<b>Comportement mécanique du béton</b>	<b>24</b>
Introduction . . . . .		24
2.1	Comportement uni-axial du béton . . . . .	24
2.2	Mécanique de la rupture . . . . .	26
2.3	Modèles inélastiques . . . . .	29
2.3.1	Formulation plastique . . . . .	29
2.3.2	Surface de Charge . . . . .	29
2.3.3	Loi d'évolution . . . . .	30
2.3.4	Variables internes . . . . .	30
2.4	Modèles non locaux . . . . .	31
2.5	Enrichissement cinématique . . . . .	31
2.5.1	Smeared crack models . . . . .	31
2.5.1.1	Formulation du problème . . . . .	32
2.5.1.2	Bande de discontinuité faible . . . . .	33
2.5.1.3	Bande de discontinuité forte . . . . .	34
2.5.1.4	Condition de continuité . . . . .	34
2.5.1.5	Comportement . . . . .	34
2.5.1.6	Longueur caractéristique - Comportement adoucissant . . . . .	35
2.5.1.7	Couplage entre le comportement local et le comportement global .	36
2.5.1.8	Remarques . . . . .	36

2.5.2	Embedded crack models . . . . .	36
2.5.2.1	Introduction . . . . .	36
2.5.2.2	Critère de localisation . . . . .	37
2.5.2.3	Principe variationnel . . . . .	38
2.5.2.4	Enrichissement des déformations . . . . .	39
2.5.2.5	Enrichissement des déplacements . . . . .	40
2.5.2.6	Enrichissement mixte . . . . .	40
	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Théories mécaniques de référence</b>	<b>42</b>
	Introduction . . . . .	42
3.1	Milieux à microstructure . . . . .	42
3.1.1	Cinématique . . . . .	44
3.1.1.1	Configurations actuelle et de référence . . . . .	44
3.1.1.2	Dépendance vis-à-vis de l'observateur . . . . .	44
3.1.2	Energie cinétique/Actions inertielles . . . . .	44
3.1.3	Equations de bilan . . . . .	45
3.1.3.1	Conservation de la masse . . . . .	45
3.1.3.2	Equations d'équilibre dynamique . . . . .	45
3.1.3.3	Principe des puissances virtuelles . . . . .	46
3.1.4	Contraintes internes . . . . .	46
3.1.5	Premier principe de la thermodynamique . . . . .	47
3.1.6	Second principe de la thermodynamique/Inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	47
3.2	Forces configurationnelles . . . . .	48
	Introduction . . . . .	48
3.2.1	Principe des forces configurationnelles appliqué à la propagation de fissure	49
3.2.2	Géométrie . . . . .	50
3.2.3	Cinématique . . . . .	51
3.2.3.1	Propagation de fissure . . . . .	51
3.2.3.2	Déformation du solide . . . . .	51
3.2.3.3	Paramétrisation . . . . .	52

3.2.3.4	Notations . . . . .	52
3.2.3.5	Hypothèses . . . . .	53
3.2.4	Forces . . . . .	53
3.2.4.1	Forces standards . . . . .	53
3.2.4.2	Forces configurationnelles . . . . .	54
3.2.4.3	Energie cinétique - Quantité de mouvement . . . . .	55
3.2.5	Second principe de la thermodynamique . . . . .	56
3.2.5.1	Enoncé . . . . .	56
3.2.5.2	Second principe appliqué à un volume de contrôle loin de la fissure	57
3.2.5.3	Second principe appliqué à $P_\delta$ et $D_\delta$ . . . . .	57
3.2.5.4	Propagation de la fissure . . . . .	58
	Conclusion . . . . .	59
	Conclusion . . . . .	59
	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>
	<b>II Exemples de modélisations envisageables dans le calcul de structures</b>	<b>61</b>
	<b>Introduction</b>	<b>65</b>
	<b>4 Description hydro-mécanique du béton : Microstructure scalaire</b>	<b>66</b>
	Introduction . . . . .	66
	4.1 Géométrie . . . . .	66
	4.2 Equations de bilan . . . . .	67
	4.2.1 Conservation de la masse et du volume . . . . .	67
	4.2.2 Energie cinétique, actions inertielles . . . . .	67
	4.2.3 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	68
	4.2.4 Parties actives et réactives . . . . .	68
	4.2.5 Bilan . . . . .	68
	4.3 Ecoulement de type Kozeny-Carman . . . . .	69
	4.3.1 Volume représentatif du réseau poreux . . . . .	69
	4.3.2 Hypothèses . . . . .	69
	4.3.3 Résolution des équations de Stokes . . . . .	69

Conclusion . . . . .	70
<b>5 Description hydro-mécanique du béton : Microstructure vectorielle</b>	<b>71</b>
Introduction . . . . .	71
5.1 Ecoulement entre deux plans $\nu = w\mathbf{n}$ . . . . .	71
5.1.1 Géométrie . . . . .	71
5.1.2 Equations d'équilibre dynamique . . . . .	72
5.1.2.1 Conservation de la masse et changements de volume . . . . .	72
5.1.2.2 Générateur infinitésimal de rotation . . . . .	72
5.1.2.3 Liaisons cinématiques . . . . .	73
5.1.2.4 Energie cinétique, actions inertielles . . . . .	73
5.1.2.5 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	73
5.1.2.6 Parties actives et réactives . . . . .	73
5.1.2.7 Bilan . . . . .	74
5.1.3 Description de type Kozeny-Carman . . . . .	74
5.1.3.1 Volume représentatif . . . . .	74
5.1.3.2 Hypothèses . . . . .	74
5.1.3.3 Résolution des équations de Stokes . . . . .	75
5.1.3.4 Représentation statistique . . . . .	75
5.2 Ecoulement dans des canaux . . . . .	76
5.2.1 Géométrie et paramètres caractéristiques de la microstructure . . . . .	76
5.2.2 Liaison cinématique . . . . .	76
5.2.3 Equations d'équilibre dynamique . . . . .	76
5.2.4 Description de Type Kozeny-Carman . . . . .	77
5.2.4.1 Hypothèses . . . . .	77
5.2.4.2 Résolution des équations de Stokes . . . . .	77
5.2.4.3 Représentation statistique . . . . .	77
Conclusion . . . . .	77

<b>6</b>	<b>Liquide avec des bulles de vapeur : Microstructure scalaire et approche configurationnelle</b>	<b>78</b>
	Introduction . . . . .	78
6.1	Géométrie et cinématique . . . . .	78
6.1.1	Géométrie . . . . .	78
6.1.2	Paramètres caractéristiques de la microstructure . . . . .	78
6.1.3	Hypothèses . . . . .	79
6.2	Equations de bilan macroscopiques . . . . .	79
6.2.1	Conservation de la masse . . . . .	80
6.2.2	Equations d'équilibre dynamique . . . . .	80
6.2.3	Changements de volume . . . . .	80
6.2.4	Liaisons cinématiques . . . . .	82
6.2.5	Bilan . . . . .	82
6.3	Description microscopique . . . . .	83
6.3.1	Equations sur une surface de discontinuité $\Gamma$ . . . . .	83
6.3.1.1	Milieu de Cauchy . . . . .	83
6.3.1.2	Equations dans le cas d'une frontière de surface de tension $\sigma_t$ . . . . .	84
6.3.2	Relations constitutives . . . . .	86
6.3.2.1	Courbe volume spécifique - pression . . . . .	86
6.3.2.2	Liquide . . . . .	86
6.3.2.3	Vapeur . . . . .	87
6.3.2.4	Moyenne et saut de vitesse, matière échangée . . . . .	88
6.3.2.5	Second principe de la thermodynamique . . . . .	89
6.4	Proposition de lois de comportement . . . . .	91
6.5	Energie cinétique, inertie . . . . .	92
6.5.1	Taux de variation des rayons intérieur et extérieur . . . . .	92
6.5.2	Energie cinétique . . . . .	92
6.5.3	Densité de coénergie . . . . .	93
6.5.4	Inertie . . . . .	93
6.6	Modèle complet . . . . .	94
	Conclusion . . . . .	95

<b>Conclusion</b>	<b>96</b>
<b>III Proposition d'une modélisation pour la prise en compte du couplage hydromécanique dans le béton à température ambiante</b>	<b>97</b>
<b>Introduction</b>	<b>101</b>
<b>7 Géométrie et cinématique</b>	<b>102</b>
7.1 Evolution du corps déformable . . . . .	102
7.2 Géométrie . . . . .	103
7.3 Paramètres caractéristiques de la microstructure . . . . .	103
<b>8 Equations de bilan macroscopiques</b>	<b>105</b>
8.1 Conservation de la masse et changements de volume . . . . .	105
8.2 Tenseur infinitésimal de rotation de la microstructure . . . . .	105
8.3 Equations d'équilibre dynamique . . . . .	106
8.3.1 Configuration actuelle . . . . .	106
8.3.2 Configuration de référence . . . . .	106
8.4 Liaisons cinématiques . . . . .	107
8.4.1 Termes de second gradient . . . . .	107
8.4.2 Parties réactives des contraintes . . . . .	107
8.4.3 Parties actives des contraintes . . . . .	109
8.5 Evolution micro-configurationnelle . . . . .	110
8.5.1 Variable configurationnelle . . . . .	110
8.5.2 Méthode pour obtenir les équations d'équilibre dynamique . . . . .	111
8.5.3 Mise en place des équations d'équilibre dynamique . . . . .	112
8.5.3.1 Puissance des efforts intérieurs . . . . .	112
8.5.3.2 Puissance des efforts extérieurs . . . . .	114
8.5.3.3 Quantité d'accélération . . . . .	114
8.5.3.4 Equations d'équilibre . . . . .	115
8.5.3.5 Equilibre à la rotation . . . . .	115
8.5.3.6 Contraintes exprimées en configuration actuelle . . . . .	116
8.6 Bilan . . . . .	116

<b>9</b>	<b>Méthode pour déterminer les lois de comportement du modèle</b>	<b>118</b>
9.1	Hypothèse des petites perturbations . . . . .	119
9.2	Conditions aux limites . . . . .	119
9.3	Description « microscopique » de l'évolution de $\omega(\mathfrak{X})$ . . . . .	120
9.4	Lien entre les représentations « microscopique » et « macroscopique » . . . . .	121
9.4.1	Masse volumique . . . . .	121
9.4.2	Puissance des efforts intérieurs . . . . .	121
9.4.2.1	Etude d'un point matériel . . . . .	121
9.4.2.2	Propagation dans deux éléments . . . . .	122
9.4.3	Energie cinétique . . . . .	125
9.5	Objectivité . . . . .	127
<b>10</b>	<b>Proposition de lois de comportement</b>	<b>128</b>
10.1	Approximation des champs solution . . . . .	129
10.1.1	Détermination de $\mathbb{A}$ . . . . .	130
10.1.1.1	Chargement, hypothèse des déformations planes . . . . .	130
10.1.1.2	Mode d'ouverture (1) . . . . .	131
10.1.1.3	Mode d'ouverture (2) . . . . .	134
10.1.2	Calcul de la moyenne de $\mathbb{A}$ . . . . .	134
10.1.3	Etude de $\mathbb{H}$ . . . . .	135
10.2	Modèle micro-configurationnel . . . . .	141
10.2.1	Equations d'équilibre statique . . . . .	141
10.2.2	Loi de comportement de $\mathbf{B}$ . . . . .	141
10.2.3	Loi de comportement de $\beta$ . . . . .	142
10.2.4	Loi de fissuration . . . . .	144
10.2.5	Exemple de loi constitutive . . . . .	145
<b>11</b>	<b>Calcul de la perméabilité intrinsèque</b>	<b>147</b>
11.1	Champ de déplacement . . . . .	147
11.2	Ecoulement dans une fissure . . . . .	148
11.3	Tenseur de perméabilité macroscopique . . . . .	148

<b>12 Exemples</b>	<b>150</b>
12.1 Exemple 1 : déplacements nuls sur les cotés . . . . .	150
12.1.1 Hypothèses . . . . .	150
12.1.2 Equations d'équilibre et lois de comportement . . . . .	151
12.1.3 Propagation . . . . .	153
12.1.4 Loi de comportement . . . . .	154
12.2 Exemple 2 : contraintes nulles sur les bords . . . . .	157
12.2.1 Hypothèses . . . . .	157
12.2.2 Equations d'équilibre et lois de comportement . . . . .	157
12.2.3 Propagation . . . . .	158
12.2.4 Loi de comportement . . . . .	160
12.2.5 Essai de traction . . . . .	161
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>163</b>
<b>Annexes</b>	<b>165</b>
<b>A Objectivité des contraintes du modèle</b>	<b>167</b>
A.1 Relations utiles . . . . .	167
A.2 Modification de $\bar{B}$ par $q$ . . . . .	168
A.3 Modification de $\bar{\beta}$ par $q$ . . . . .	168
A.4 Objectivité des contraintes . . . . .	169
A.4.1 Objectivité de $B$ . . . . .	169
A.4.2 Objectivité de $b_1$ . . . . .	171
A.4.3 Objectivité de $\beta_1$ . . . . .	172
A.4.4 Objectivité de $\mathbf{b}_1$ . . . . .	172
<b>B Détermination de <math>\mathbb{H}</math> par le logiciel Maple</b>	<b>174</b>
B.1 Matrice de rigidité $C$ . . . . .	174
B.2 Fissure de longueur $2a$ , Modes (1) et (1') . . . . .	174
B.2.1 Contraintes, facteurs d'intensité de contraintes / coordonnées polaires - ori- gine en pointe de fissure - . . . . .	174
B.2.1.1 Contraintes . . . . .	174

B.2.1.2	Facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	174
B.2.2	Contraintes et déformations / coordonnées cartésiennes - origine le centre de la fissure . . . . .	174
B.2.2.1	Contraintes dans le nouveau repère (R) . . . . .	175
B.2.2.2	Déformations dans le repère (R) . . . . .	175
B.2.3	Calcul de la moyenne des déformations sur un carré de coté $2*L$ (au vu des symétries, on considère le quart du domaine) . . . . .	175
B.2.3.1	Définition des $A_{ijkl}$ . . . . .	175
B.2.3.2	Moyenne de $A[1111]$ . . . . .	175
B.2.3.3	Moyenne des composantes restantes . . . . .	178
B.3	Mode (2) . . . . .	178
B.3.1	Contraintes et déformations / coordonnées polaires - origine en pointe de fissure - . . . . .	178
B.3.1.1	Contraintes . . . . .	178
B.3.1.2	Facteur d'intensité de contraintes . . . . .	178
B.3.2	Contraintes et déformations / coordonnées cartésiennes - origine le centre de la fissure - . . . . .	178
B.3.2.1	Contraintes dans le nouveau repère (R) . . . . .	178
B.3.2.2	Déformations dans le nouveau repère (R) . . . . .	179
B.3.3	Calcul de la moyenne des déformations . . . . .	179
B.3.3.1	Définition des $A_{ijkl}$ . . . . .	179
B.3.3.2	Moyennes des $A[1112]$ et $A[2212]$ . . . . .	179
B.3.3.3	Moyenne de $A[1212]$ . . . . .	179
B.4	Résultats . . . . .	180
B.4.1	$\langle A_{1111} \rangle_\omega$ . . . . .	180
B.4.2	$\langle A_{2211} \rangle_\omega$ . . . . .	181
B.4.3	$\langle A_{1211} \rangle_\omega$ . . . . .	182
B.4.4	$\langle A_{1122} \rangle_\omega$ . . . . .	183
B.4.5	$\langle A_{2222} \rangle_\omega$ . . . . .	184
B.4.6	$\langle A_{1222} \rangle_\omega$ . . . . .	185
B.4.7	$\langle A_{1112} \rangle_\omega$ . . . . .	185

B.4.8	$\langle A_{2212} \rangle_\omega$ . . . . .	185
B.4.9	$\langle A_{1212} \rangle_\omega$ . . . . .	186
B.5	Lien entre paramètres microscopiques et macroscopiques . . . . .	186
B.5.1	Paramètres et fonctions associées . . . . .	186
B.5.2	Lien entre la dérivée par rapport à $\gamma^*$ et la dérivée par rapport à $a$ . . . . .	186
B.6	Matrices $\mathbb{A}$ (notée $A$ ) et $\langle \mathbb{A} \rangle_\omega$ (MAA) . . . . .	186
B.6.1	$\mathbb{A}$ (notée $A$ ) . . . . .	186
B.6.2	$\langle \mathbb{A} \rangle_\omega$ (MAA) . . . . .	186
B.6.3	L'inverse de $\langle \mathbb{A} \rangle_\omega$ notée invMAA . . . . .	187
B.7	Matrice $\mathbb{H}$ . . . . .	187
B.8	Déformation imposée . . . . .	187
<b>C</b>	<b>Calcul de la contrainte <math>\beta</math> et du tenseur <math>\mathbb{C}^*</math></b> . . . . .	<b>188</b>
C.1	Valeurs numériques de $\langle \mathbb{A} \rangle_\omega$ (MAA) et de $\langle \mathbb{A} \rangle_\omega^{-1}$ (invMAA) . . . . .	188
C.2	Calcul numérique de $\frac{\partial(\langle \mathbb{A} \rangle_\omega^{-1})}{\partial \gamma^*}$ . . . . .	188
C.3	Intégration du terme $\left[ \mathbb{H}^T \mathbb{C} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \right]$ . . . . .	189
C.3.1	Termes à intégrer . . . . .	189
C.3.2	Bornes d'intégration . . . . .	189
C.3.3	Calcul de l'intégrale de TEMP1beta (les termes à intégrer sont paires ou impaires) . . . . .	189
C.3.4	Calcul de l'intégrale de TEMP2beta (les termes à intégrer sont des sommes de fonctions paires ou impaires) . . . . .	193
C.4	Déformation imposée . . . . .	197
C.5	Calcul de $\beta$ . . . . .	197
C.5.1	$\beta_1$ . . . . .	197
C.5.2	$\beta_2$ . . . . .	197
C.5.3	Calcul du taux de restitution d'énergie $G$ . . . . .	197
C.5.4	Valeur critique $G_{slc}$ . . . . .	197
C.5.5	Résultat . . . . .	197
C.6	Tenseur $\mathbb{C}^*$ . . . . .	198

<b>D</b>	<b>Implémentation de l'exemple 1 : traction à déformation nulle sur les bords</b>	<b>199</b>
D.1	Déplacements, calcul de l'ouverture de la fissure . . . . .	199
D.1.1	Mode (1) . . . . .	199
D.1.2	Mode (2) . . . . .	199
D.1.3	Champs de déplacements du milieu non fissuré . . . . .	200
D.1.4	Déplacement total . . . . .	200
D.2	Déplacements sur les lèvres de la fissure . . . . .	200
D.3	Résultats préliminaires . . . . .	200
D.4	Courbe efforts/déplacements . . . . .	200
D.5	Interpolation des $C_{ij}^*$ (notés CCij) (chaque composante est interpolée en une fonction de a) . . . . .	201
D.6	Calcul du taux de restitution d'énergie . . . . .	201
D.7	Courbes de taux de restitution d'énergie . . . . .	202
D.8	Points d'intersection entre taux de restitution d'énergie et taux critique . . . . .	202
<b>E</b>	<b>Implémentation de l'exemple 2 : traction à contrainte nulle sur les bords</b>	<b>205</b>
E.1	Tracé d'évolution du rapport efforts/déplacements . . . . .	205
E.2	Interpolation de la fonction $\frac{B_{22}}{\epsilon}$ . . . . .	206
E.3	Calcul du taux de restitution d'énergie . . . . .	206
E.3.1	En fonction des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	206
E.3.2	En fonction des contraintes . . . . .	206
E.3.3	En fonction de la déformation moyenne imposée . . . . .	206
E.4	Intéropolation des CCij (chaque CCij devient une fonction de a) . . . . .	207
E.5	Evolutions de taux de restitution d'énergie pour douze valeurs de déformation imposée	207
E.5.1	Interpolation des douzes taux de restitution d'énergie . . . . .	208
E.6	Points d'intersection entre taux de restitution d'énergie et taux critique . . . . .	210
E.6.1	Détermination des tailles de fissures vérifiant $G = G_c$ , pour les différents chargements imposés . . . . .	210
E.6.2	a critique en fonction de la déformation moyenne . . . . .	210
E.6.3	a critique en fonction du déplacement imposé . . . . .	211
E.6.4	Déformation moyenne (critique) en fonction de la taille de la fissure pour laquelle il y a propagation . . . . .	211

E.6.5	Déplacement imposé (critique) en fonction de la taille de la fissure pour laquelle il y a propagation . . . . .	212
E.6.6	Superposition des deux courbes . . . . .	212
E.6.7	Tracé des surfaces (D,a,G) , (D,a,Gcritique) et intersection des deux . . . . .	212
E.7	Essai de traction . . . . .	213
E.7.1	Partie 1 : linéaire, avant fissuration . . . . .	213
E.7.2	Partie 2 : pendant propagation de fissures . . . . .	214
E.7.3	Courbe complète . . . . .	214
E.8	Tracé de la courbe de perméabilité . . . . .	215
E.8.1	Partie 1 : avant propagation . . . . .	215
E.8.2	Partie 2 : pendant propagation . . . . .	215
E.8.3	Courbe complète . . . . .	215
<b>F</b>	<b>Expression du tenseur de perméabilité intrinsèque</b>	<b>217</b>
F.1	Expression du champ de vitesse en coordonnées cylindriques, on vérifie que l'équation d'équilibre est bien satisfaite . . . . .	217
F.2	Expression du champ de vitesse en coordonnées cartésiennes, calcul de la moyenne	217
F.3	Champ de déplacements dans le domaine fissuré . . . . .	217
F.3.1	Mode 1 . . . . .	217
F.3.2	Mode 2 . . . . .	218
F.3.3	Considérons les champs de déplacement moyens imposés D11 et D22 . . . . .	218
F.3.4	Déplacement total . . . . .	218
F.4	Déplacements sur les lèvres de la fissure . . . . .	218
F.5	Déformation sur les lèvres de la fissure . . . . .	218
F.6	Perméabilité en fonction des paramètres macroscopiques . . . . .	219
F.7	Paramètre d'ouverture ( $\nu$ ) . . . . .	219
	<b>Bibliographie</b>	<b>221</b>

# Table des figures

1.1	Capillaire cylindrique - [13]	11
1.2	Régimes pendulaire et funiculaire	14
1.3	Cellule périodique d'un milieu poreux - Image inspirée de [169]	15
2.1	Schéma du comportement du béton sous chargement uni-axial	25
2.2	Evolution de la fissuration [139]	26
2.3	Mode de rupture : 1 ; ouverture, 2 et 3 : glissement - [35]	26
2.4	Zone plastifiée en pointe de fissure - Système de coordonnées	27
2.5	Conditions aux limites appliquées à $\Omega$	32
2.6	Cinématique d'une discontinuité faible - [139]	33
2.7	Cinématique d'une discontinuité forte - [139]	34
3.1	Evolution de $\mathcal{B}$ : Configurations de référence et actuelle	43
3.2	Milieu à microstructure	43
3.3	Principe des forces configurationnelles et standards	50
3.4	Cinématique de $\mathcal{B}$ (Image inspirée de [88])	50
3.5	Cinématique d'un volume de contrôle	52
4.1	Exemple de réseau poreux	66
5.1	Microstructure : deux plans parallèles	71
5.2	Ecoulement dans un canal	76
6.1	$\omega$ : élément de $\Omega$	79
6.2	Configurations de référence, intermédiaire et actuelle d'une bulle lors d'une augmentation de pression	81
6.3	Courbe (volume spécifique, pression)	86

7.1	$\mathcal{B}$ : milieu à microstructure, configurations de référence et actuelle . . . . .	102
7.2	$\omega$ : Élément matériel représentatif . . . . .	103
8.1	Evolution de la microstructure en un point $x$ . . . . .	111
9.1	Corps micro-fissuré : milieu à microstructure . . . . .	120
9.2	Deux éléments matériels microscopiques voisins . . . . .	123
10.1	$\omega$ : élément matériel $\omega(x)$ en configuration initiale . . . . .	128
10.2	Changement de coordonnées . . . . .	131
10.3	Directions principales du champ de déformation au sein de $\omega$ non fissuré, obtenu en imposant une déformation déviatorique homogène au bord de type $D_{11} = D_{22} = 0$ , $D_{12} = D$ [ $L = 1cm$ ] . . . . .	135
10.4	Directions principales du champ de déformation au sein de $\omega$ non fissuré, obtenu en imposant une déformation déviatorique homogène au bord de type $D_{12} = 0$ , $D_{11} = -D_{22} = -D$ [ $L = 1cm$ ] . . . . .	135
10.5	Directions principales du champ de déformation $\mathbf{E}$ au sein de $\omega$ , pour différents chargements et valeurs de $\Gamma^*$ [ $E_Y = 27GPa$ , $\nu_P = 0.2$ , $L = 1cm$ ], la fissure se trouve le long de l'axe $y_1$ , à partir du point 0, avec la pointe en $y_1 = L \times \Gamma^*$ . . . . .	137
10.6	Evolution du champ de déformation au sein de $\omega$ pour un chargement déviatorique à $45^\circ$ [ $D = 0.1\%$ , $E_Y=27GPa$ , $\nu_P = 0.2$ , $L = 1cm$ ], la fissure se trouve le long de l'axe $y_1$ , à partir du point 0, avec la pointe en $y_1 = L \times \Gamma^*$ . . . . .	138
10.7	Evolution du champ de déformation au sein de $\omega$ pour un chargement déviatorique à $90^\circ$ [ $D = 0.1\%$ , $E_Y = 27GPa$ , $\nu_P = 0.2$ , $L = 1cm$ ], la fissure se trouve le long de l'axe $y_1$ , à partir du point 0, avec la pointe en $y_1 = L \times \Gamma^*$ . . . . .	139
10.8	Evolution du champ de déformation au sein de $\omega$ pour un chargement sphérique [ $D = 0.1\%$ , $E_Y = 27GPa$ , $\nu_P = 0.2$ , $L = 1cm$ ], la fissure se trouve le long de l'axe $y_1$ , à partir du point 0, avec la pointe en $y_1 = L \times \Gamma^*$ . . . . .	140
10.9	Evolution des composantes du tenseur $\mathbf{C}^*$ (GPa) avec la géométrie du champ de fissure . . . . .	142
10.10	Taux de relaxation d'énergie $G(\Gamma^*, \mathbf{D})$ [ $N.m^{-1}$ ] [ $D_{11} = D_{12} = 0$ , $E_Y = 27GPa$ , $\nu_P = 0.2$ , $L = 1cm$ ] . . . . .	144
11.1	Evolution de $k_{ss}$ [ $E_Y = 27GPa$ , $\nu_P = 0.2$ , $L = 1cm$ , $l = 3cm$ ] . . . . .	149
12.1	Tracé du rapport $\frac{f_2}{\epsilon}$ . . . . .	152

12.2	Courbes $G(\Gamma^*)$ pour différentes valeurs de $D_{22}$ . . . . .	153
12.3	Déformation moyenne $D_{22}$ et déplacement $\epsilon$ en fonction de la taille de la fissure $\Gamma^*$ , pendant la propagation . . . . .	154
12.4	Evolution de la taille de a fissure $\Gamma^*$ en fonction de la déformation moyenne de la matière $D_{22}$ . . . . .	155
12.5	Evolution de la taille de la fissure $\Gamma^*$ en fonction du déplacement $\epsilon$ , pendant la propagation (condition $G = G_c$ ) . . . . .	155
12.6	Courbes $G = G(\Gamma^*, D_{22})$ et $G_c = G_c(\Gamma^*)$ . . . . .	156
12.7	Tracé du rapport $\frac{f_2}{\epsilon}$ . . . . .	158
12.8	Courbes $G(\Gamma^*)$ pour différentes valeurs de $D_{22}$ . . . . .	159
12.9	Déformation moyenne $D_{22}$ et déplacement $\epsilon$ en fonction de la taille de la fissure $\Gamma^*$ , pendant la propagation . . . . .	159
12.10	Evolution de la taille de a fissure $\Gamma^*$ en fonction de la déformation moyenne de la matière $D_{22}$ . . . . .	160
12.11	Evolution de la taille de la fissure $\Gamma^*$ en fonction du déplacement $\epsilon$ , pendant la propagation (condition $G = G_c$ ) . . . . .	160
12.12	Courbes $G = G(\Gamma^*, D_{22})$ et $G_c = G_c(\Gamma^*)$ . . . . .	161
12.13	Comportement du béton sous chargement uni-axial [ $\Gamma_0 = 59\%$ , $E_Y = 27GPa$ , $\nu_P =$ $0.2$ , $f_{ty} = 3.2MPa$ ] . . . . .	162

# Notations

Sauf mention contraire, les conventions suivantes sont utilisées tout au long de la thèse.

Les lettres grecques désignent les scalaires, les lettres latines minuscules sont utilisées pour les vecteurs, et les majuscules pour les tenseurs de second ordre. Les tenseurs d'ordre 3 et 4 sont désignés par des caractères filetés, en caractères minuscule et majuscule respectivement :

Scalaire	:	$\alpha$
Vecteur	:	$\mathbf{a}$
Tenseur d'ordre 2	:	$\mathbf{A}$
Tenseur d'ordre 3	:	$\mathfrak{a}$
Tenseur d'ordre 4	:	$\mathfrak{A}$

On note  $\mathfrak{e}$  le tenseur de permutation de Ricci, et  $\mathbf{I}$  le tenseur d'identité d'ordre deux. Par analogie on note  $\mathbb{I}$  le tenseur d'ordre 4 tel que

$$\mathbb{I}\mathbf{X} = \mathbf{X}, \quad \text{quelque soit le tenseur } \mathbf{X} \text{ d'ordre 2}$$

On note les produits scalaire et tensoriel par  $(\cdot)$  et  $(\otimes)$  respectivement :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{b} = A_{ij} b_k$$

Dans le cas de la transformation d'un tenseur par un second tenseur d'ordre supérieur :

$$\mathbb{B}\mathbf{A} = B_{ijkl} A_{kl}$$

$(\ )^T$  est la transposition majeure. On désigne par  $(\ )^t$  et  ${}^t(\ )$  les transpositions mineures droite et gauche.

1. Transposition majeure : on permute tous les indices.

$$(\mathfrak{a}^T)_{ijk} = (\mathfrak{a})_{kji}$$

2. Transposition mineure gauche : on permute les deux premiers indices.

$$({}^t\mathfrak{a})_{ijk} = (\mathfrak{a})_{jik}$$

3. Transposition mineure droite : on permute les deux derniers indices.

$$(\mathfrak{a}^t)_{ijk} = (\mathfrak{a})_{ikj}$$

Pour les tenseurs d'ordre deux, on note  $Sym$  et  $Skw$  les sous espaces des tenseurs symétriques et antisymétriques :

$$\mathbf{A} \in Sym \quad \text{si} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{A} \in Skw \quad \text{si} \quad \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

Par analogie, on note  $Sym_g$  la partie symétrique gauche d'un tenseur de troisième ordre :

$$\mathfrak{a} \in Sym_g \quad \text{si} \quad \mathfrak{a} = {}^t\mathfrak{a}$$

Soit  $f$ , défini sur un domaine  $\Omega$ .

1.  $f \rightarrow \langle f \rangle_\Omega$  est la moyenne de  $f$  sur  $\Omega$ ,
2. Supposons qu'il y ait une discontinuité  $\Gamma$  au sein de  $\Omega$ , on note  $f \rightarrow [[f]]$  le saut de  $f$  à travers  $\Gamma$ .

# Introduction générale

Les enceintes de confinement assurent la protection de l'environnement face aux agressions chimiques et radioactives : constituées de plusieurs parois d'étanchéité contrôlée, elles assurent en toutes circonstances l'imperméabilité des caissons de protection.

Cependant, même à l'intérieur des limites de service, les chargements mécaniques, thermiques et chimiques appliqués à l'enceinte influent sur les caractéristiques du béton. L'étude de l'évolution de l'étanchéité et de la résistance mécanique est donc une problématique cruciale dans le domaine de la sûreté nucléaire.

On se propose de mettre en place un modèle mécanique capable de décrire l'évolution des paramètres physiques qui régissent les propriétés hydriques de ce matériau. Notre étude se basera sur une description du milieu micro-fissuré par une méthode alliant les principes de la théorie des milieux à microstructure et celle des forces configurationnelles.

On rappellera dans la partie bibliographique (I) les principales caractéristiques du béton ainsi que les méthodes usuelles permettant de décrire son comportement hydro-mécanique (chapitres 1 et 2). On présentera dans un second temps les principes théoriques sur lesquels notre étude est basée : Milieu à microstructure et Forces configurationnelles (chapitre 3).

Des exemples simples sont brièvement développés dans la partie II afin de montrer la pertinence d'une telle approche.

Partie III : le béton est vu comme un milieu dont chaque point comporte une micro-fissure : celles-ci sont donc décrites par un champ continu de paramètres géométriques tels que la taille, l'orientation et l'ouverture de la fissure (chapitre 7).

La nature configurationnelle de la variable de taille est ensuite exploitée afin d'obtenir une représentation adaptée des efforts intérieurs d'un tel milieu (chapitre 8).

La proposition de lois de comportement tirées de l'hypothèse que chaque micro-fissure évolue dans des conditions de type de celles de la mécanique linéaire de la rupture permet finalement de compléter le modèle et de traiter des exemples (chapitres 9, 10 et 12).



Première partie

# Synthèse bibliographique



# Table des Matières

---

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Comportement hydrique du béton</b>	<b>8</b>
Introduction . . . . .	8
1.1 Description . . . . .	8
1.1.1 Description de la matrice solide . . . . .	9
1.1.2 Description des phases fluides . . . . .	11
1.1.3 Équilibre entre phases . . . . .	13
1.2 Modélisation . . . . .	14
1.2.1 Hypothèses à la base des modèles mathématiques les plus courants . . . . .	14
1.2.2 Loi de Darcy . . . . .	14
1.2.3 Calcul du coefficient de perméabilité d'un milieu poreux non déformable . . . . .	15
1.2.4 Transferts hydriques isothermes dans les milieux poreux déformables . . . . .	19
1.2.5 Couplage de la propagation des fissures et du comportement hydrique . . . . .	21
Conclusion . . . . .	23
<b>2 Comportement mécanique du béton</b>	<b>24</b>
Introduction . . . . .	24
2.1 Comportement uni-axial du béton . . . . .	24
2.2 Mécanique de la rupture . . . . .	26
2.3 Modèles inélastiques . . . . .	29
2.3.1 Formulation plastique . . . . .	29
2.3.2 Surface de Charge . . . . .	29
2.3.3 Loi d'évolution . . . . .	30
2.3.4 Variables internes . . . . .	30
2.4 Modèles non locaux . . . . .	31
2.5 Enrichissement cinématique . . . . .	31
2.5.1 Smearred crack models . . . . .	31
2.5.2 Embedded crack models . . . . .	36
Conclusion . . . . .	40
<b>3 Théories mécaniques de référence</b>	<b>42</b>
Introduction . . . . .	42
3.1 Milieux à microstructure . . . . .	42
3.1.1 Cinématique . . . . .	44
3.1.2 Energie cinétique/Actions inertielles . . . . .	44

---

3.1.3	Equations de bilan . . . . .	45
3.1.4	Contraintes internes . . . . .	46
3.1.5	Premier principe de la thermodynamique . . . . .	47
3.1.6	Second principe de la thermodynamique/Inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	47
3.2	Forces configurationnelles . . . . .	48
	Introduction . . . . .	48
3.2.1	Principe des forces configurationnelles appliqué à la propagation de fissure	49
3.2.2	Géométrie . . . . .	50
3.2.3	Cinématique . . . . .	51
3.2.4	Forces . . . . .	53
3.2.5	Second principe de la thermodynamique . . . . .	56
	Conclusion . . . . .	59
	Conclusion . . . . .	59
	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>

---

# Introduction

Nous allons présenter dans cette première partie les principaux modèles hydro-mécaniques du béton et détailler les principes théoriques sur lesquels nous baserons notre travail :

- Le chapitre 1 rappelle les notions relatives aux milieux poreux ainsi qu'au béton et donne les principales définitions nécessaires à l'étude des transferts hydriques dans ce type de structures. Il comprend une synthèse des méthodes les plus couramment utilisées dans l'étude des transferts de matière à travers un milieu poreux éventuellement déformable, dans un champ de température supposé constant.
- Le chapitre 2 expose les principales méthodes utilisées dans la description du comportement mécanique du béton et est axé principalement sur la modélisation du comportement post-pic.
- Les sections 3.1 et 3.2 sont consacrées à deux modèles se détachant de l'approche usuelle de la mécanique des milieux continus. Il s'agit de la mécanique des milieux à microstructure et de la théorie des forces configurationnelles.

# Chapitre 1

## Comportement hydrique du béton

### Introduction

Le béton est un matériau complexe que l'on peut décrire comme une matrice solide à travers laquelle peuvent percoler plusieurs phases fluides.

On rappelle dans ce chapitre les principales caractéristiques de ce matériau et on présente différentes méthodes utilisées pour modéliser son comportement sous chargement mécanique lent, à température constante. On considère que les seules phases fluides pouvant percoler à travers le milieu sont l'eau et/ou l'air présents sous forme liquide ou gazeuse, et considérés comme immiscibles. Les interactions chimiques éventuelles entre la phase solide et les fluides sont négligées.

### 1.1 Description

Le béton est un matériau hétérogène fabriqué à partir d'un mélange d'eau, de ciment, de granulats (gravillons et sable) et éventuellement d'ajouts [13, 49, 68].

Le ciment est un mélange de clinker (dosage de calcaire, marne et argile), de gypse (régulateur de prise) et d'ajouts éventuels tels que du schiste carbonisé, des pouzzolanes ou encore des fumées de silice. Lors de l'ajout de l'eau de gâchage, les minéraux du clinker réagissent avec les molécules d'eau. Ce processus d'hydratation donne naissance à la pâte de ciment qui en durcissant joue le rôle du liant du béton.

La pâte de ciment durcie est un réseau poreux complexe : des inclusions remplies d'eau subsistent dans la pâte appelées pores de gel. De plus, pour un rapport massique entre les quantités d'eau et de ciment supérieur à 40%, il existe un excès d'eau qui ne participe pas aux réactions d'hydratation du ciment. Lors du durcissement de la pâte de ciment, cette eau reste contenue dans le mélange et donne naissance à des pores connectés de forme oblongue appelés pores capillaires. Certains pores de forme sphérique peuvent être introduits de façon artificielle par des entraîneurs d'air afin d'interrompre la formation de pores capillaires.

Les granulats siliceux ou calcaires, forment le squelette du béton. Ils sont en principe inertes vis-à-vis des autres composants du matériau. Agglomérés par le liant, ils confèrent au béton sa résistance et sa compacité. La dimension des granulats (granulométrie) ainsi que leur forme sont choisies de manière à minimiser la taille des vides et à optimiser la compacité de la structure. Les vides compris entre ces agrégats et la pâte de ciment ont une part importante dans la porosité totale du milieu.

Des ajouts et adjuvants peuvent être éventuellement additionnés au mélange afin d'améliorer les caractéristiques du béton. Ils sont pris en compte dans la composition du béton appelé alors composite. Des adjuvants tels que des plastifiants ou fluidifiants, des retardateurs ou accélérateurs de prise, ou encore des hydrofuges permettent d'influer sur les propriétés des bétons (résistance mécanique, étanchéité, aspect esthétique...). Parmi les ajouts les plus courants, on peut nommer les cendres volantes (formées à partir de charbons de basse qualité), les pouzzolanes naturelles (cendres volcaniques) ou encore des fumées de silice. Ces ajouts permettent notamment de former des bétons dits « à hautes performances ».

### 1.1.1 Description de la matrice solide

Une structure poreuse est constituée d'une matrice solide et de pores dont la taille est très inférieure aux dimensions du milieu considéré. Ces pores sont remplis de fluides que nous allons dans la suite assimiler à de l'air et/ou à de l'eau présents sous forme liquide ou éventuellement gazeuse. Ils peuvent être classés en trois familles de pores en fonction de leur rôle dans le transport de matière à travers le milieu [13, 149] :

- Les pores inter-connectés, essentiellement de taille capillaire, forment le réseau de vides permettant des écoulements à travers le milieu poreux.
- Les pores aveugles (ou bras morts) qui ne débouchent sur le réseau de pores inter-connectés que par une seule extrémité. Les fluides peuvent donc y avoir accès, mais ils ne peuvent pas le traverser.
- Les pores isolés comme les pores de gel et ceux dus aux inclusions d'air : leur nombre est négligeable par rapport aux précédents types de vides. Les fluides n'y ont pas accès.

Le réseau poreux est usuellement caractérisé par une série de paramètres structuraux permettant de définir la géométrie du milieu. Les plus courants sont la porosité, la distribution de la taille des pores, la surface spécifique ainsi que la tortuosité [13, 149, 170].

#### 1.1.1.1 Porosité

Le principal paramètre géométrique macroscopique décrivant la phase solide du milieu poreux est la porosité. Elle est définie comme le rapport du volume total des pores sur le volume total

du milieu. En pratique, on s'intéresse principalement à la porosité dite effective notée ici  $\nu$  qui ne tient compte que de l'espace des pores inter-connectés.

En notant :

- $V^{tot}$  : le volume du milieu poreux considéré,
- $V^{pores}$  : le volume des pores inter-connectés,

on a :

$$\nu = \frac{V^{pores}}{V^{tot}} \quad (1.1)$$

La porosité influe non seulement sur les transports hydriques, mais aussi sur les caractéristiques mécaniques du milieu. Dans le cas du béton, les vides sont essentiellement dus aux vides de la pâte de ciment et aux interfaces de celle-ci avec les granulats (les granulats ayant une porosité faible en comparaison avec la porosité de la pâte de ciment). Les mesures expérimentales de porosité consistent toutes à déterminer le volume de la matrice ainsi que celui de l'espace poreux puis d'en faire le rapport. On peut citer les méthodes de détermination directe, par méthode optique ou encore reposant sur le phénomène de sorption du fluide [13, 170, 199].

### 1.1.1.2 Distribution de la taille des pores - Rayon hydraulique

Le réseau poreux est de géométrie complexe et la taille des pores varie selon un large éventail de valeurs (de quelques Angströms à une dizaine de micromètres [13, 28]). On peut définir un diamètre de pore noté  $\delta$  comme étant en tout point du pore, le diamètre de la sphère la plus grande contenant le point considéré et restant incluse dans le pore [170, 171].

La distribution de la taille de pores est le plus souvent déterminée expérimentalement par porosimétrie mercure [13, 170]. Elle peut être aussi caractérisée par le rayon hydraulique moyen : pour un matériau dont les pores sont définis par un volume  $V^{pores}$ , et une surface développée interne  $A^{pores}$ , ce rayon est défini par la relation :

$$2 \frac{V^{pores}}{A^{pores}} \quad (1.2)$$

### 1.1.1.3 Surface spécifique

Elle est définie par le rapport :

$$A_S = \frac{A^{pores}}{V^{tot}} \quad (1.3)$$

Elle est mesurée par adsorption ou analyse de coupes [170].

### 1.1.1.4 Tortuosité

La tortuosité caractérise le mouvement de fluide à travers un échantillon de longueur  $L$ . Si on note  $L_e$  la distance effectivement parcourue par le fluide (longueur moyenne de la ligne de courant), on définit le paramètre de tortuosité  $\tau$  par le rapport :

$$\tau = \frac{L_e}{L} \quad (1.4)$$

Il peut être déterminé par mesure de résistivité électrique, de vitesses de propagation ou d'amplitude d'ondes sonores [170].

### 1.1.2 Description des phases fluides

L'eau (liquide ou vapeur) et l'air sec sont les principaux solvants des agents agressifs ( $CO_2$ , agents radioactifs etc). Nous restreindrons donc notre étude au comportement de ces deux fluides que nous considérerons comme immiscibles.

L'équilibre entre les différentes phases fluides est régi par les lois de la capillarité qui sont succinctement rappelées dans le paragraphe suivant.

#### 1.1.2.1 Capillarité

Dans le cas de pores de faible diamètre, la présence des parois de la matrice solide favorise la condensation du fluide qui forme un film d'épaisseur variable à la surface de la paroi du pore.

Notons  $\theta$  l'angle de contact entre le liquide et la paroi,  $r_p$  le rayon du pore et  $a$  le rayon de courbure du liquide. Ils sont liés par la relation géométrique (voir figure 1.1) :

$$r_p = a \cos \theta \quad (1.5)$$

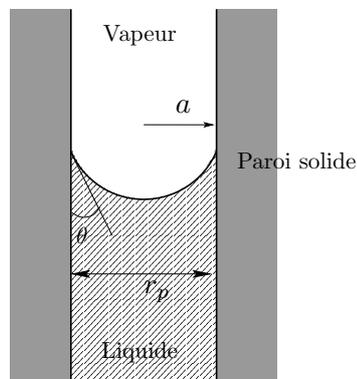


FIG. 1.1. Capillaire cylindrique - [13]

L'équilibre entre les phases liquide et gazeuse est décrit par la relation de Laplace [149, 199] :

$$p_a - p_l - \frac{2\sigma_t}{a} = 0 \quad (1.6)$$

Avec :

- $p_a$  : Pression de l'air
- $p_l$  : Pression de la phase liquide
- $\sigma_t$  : Tension superficielle

Si un solide est tel que l'angle de contact avec un fluide est inférieur à  $90^\circ$ , on dit que le solide a une mouillabilité préférentielle à cette phase. Le fluide le plus mouillant est favorisé pour entrer dans le milieu poreux.

### 1.1.2.2 Fluides contenus dans la matrice : eau et air sec

Comme indiqué dans le §1.1, l'eau est l'un des constituants majeurs du béton. Contenue essentiellement dans la pâte de ciment durcie, elle peut être séparée selon quatre familles distinctes [13, 180, 179] :

- L'eau chimiquement liée : Elle est consommée lors des réactions d'hydratation de la pâte de ciment et fait partie à part entière du matériau. Elle ne joue aucun rôle dans les phénomènes de transfert dans le béton.
- L'eau adsorbée : l'adsorption est le phénomène régissant l'interaction entre les molécules d'eau (sous forme gazeuse ou liquide) et la surface de contact avec un solide. L'augmentation de la concentration de l'eau au voisinage de l'interface est due aux interactions physiques ou chimiques entre les molécules d'eau et du solide. L'eau adsorbée dans les bétons est liée aux pores du milieu par des liaisons de type Van der Waals et des liaisons de type électrostatique dont l'amplitude diminue en s'éloignant de la paroi.
- L'eau libre : elle n'est liée au solide par aucune force d'interaction. Sous l'action d'un gradient de pression, elle peut percoler à travers le milieu poreux.
- L'eau capillaire : liquide elle est séparée de la phase gazeuse par un ménisque et obéit aux lois de la capillarité.

L'air sec occupe l'espace des vides non occupés par les molécules d'eau vapeur.

### 1.1.2.3 Paramètres caractéristiques

Les phénomènes physiques au sein du béton dépendent des fluides présents dans les pores. Pour caractériser le système, on définit la notion de saturation relative à un fluide comme étant

le rapport entre le volume des vides occupés par le fluide et leur volume total. Les transports en milieux poreux dépendent non seulement des caractéristiques de la matrice solide, mais aussi des paramètres d'état des différentes phases (température, pression...) et des caractéristiques des fluides. Les constantes physiques utilisées dans la description des écoulements dans le béton sont :

- Le coefficient de viscosité  $\eta$  [ $Pa.s^{-1}$ ]
- La viscosité dynamique (ou absolue)  $\mu$  [ $Pa.s^{-1}$ ]
- Le tenseur de diffusion  $\mathbf{D}_{Fick}$  [ $m^2.s^{-1}$ ]. Ce dernier caractérise la réponse d'une espèce à un gradient de concentration. Il intervient dans la loi de Fick simplifiée :

$$\mathbf{j} = -\mathbf{D}_{Fick} \cdot \text{grad}c \quad (1.7)$$

$\mathbf{j}$  étant la densité de flux de la phase vapeur et  $c$ , la concentration ou pression partielle de la phase vapeur.

- le tenseur de perméabilité  $\mathbf{K}$  [ $m^2$ ] : il caractérise les transports de fluides à travers le milieu poreux, sous l'action d'un gradient de pression (voir §1.2.2).

### 1.1.3 Équilibre entre phases

Les fluides contenus dans les milieux poreux sont soumis aux lois générales de la mécanique. Cependant, il faut aussi tenir compte des phénomènes d'adsorption qui découlent de l'interaction entre le fluide et les parois solides. Ces phénomènes se manifestent différemment suivant la composition de la phase fluide [170].

#### 1.1.3.1 Phase liquide unique : régime saturé

Le phénomène prépondérant est l'adsorption décrite en §1.1.2.2. A une température donnée, on peut déterminer expérimentalement l'évolution de la pression en fonction de la masse volumique en traçant les isothermes d'adsorption  $(p, \rho)$ .

#### 1.1.3.2 Deux fluides immiscibles : régimes pendulaires et funiculaires

Des études expérimentales ainsi que numériques ont montré qu'il existait plusieurs configurations possibles des phases liquide (phase mouillante) et gazeuse dans les pores [170, 181, 193]. L'arrangement des particules d'air et d'eau, qui tend à minimiser la tension superficielle globale du système, dépend de la saturation relative à la phase liquide : à faible saturation, le liquide se concentre dans les espaces capillaires, au voisinage des points de contact entre les particules du milieu poreux (espaces anguleux). Le fluide forme des anneaux pendulaires autour de ces points de contact. Il n'y a aucun contact entre les différents anneaux, ce qui empêche le transport de cette phase ; le régime est dit pendulaire. Au fur et à mesure que la saturation augmente, l'eau liquide remplit les pores de petite taille préférentiellement aux pores de grandes tailles. Les phases liquide

et gazeuse forment alors un réseau continu dans le milieu poreux, ce qui permet un écoulement simultané des deux phases selon un trajet tortueux. On est alors en régime funiculaire.

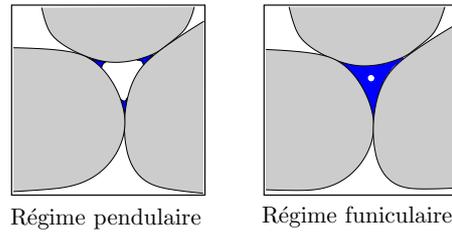


FIG. 1.2. Régimes pendulaire et funiculaire

## 1.2 Modélisation

### 1.2.1 Hypothèses à la base des modèles mathématiques les plus courants

On suppose dans la suite que les coefficients de viscosité et les tenseurs de diffusion caractéristiques des phases fluides (cf §1.1.2.3) ne dépendent que de la température.

De plus, nous ne tiendrons pas compte de tous les phénomènes d'hystérésis pouvant apparaître dans les phénomènes décrits dans le §1.1.3 (hystérésis d'adsorption etc.).

Sauf mention contraire, les problèmes étudiés sont tels que la loi de Darcy décrite dans la suite est applicable (cf §1.2.2).

On considérera dans toute la suite que le liquide et la vapeur sont composés uniquement d'eau pure, ce qui permet de négliger les interactions (physiques et chimiques) autres que les changements de phases liquide/vapeur. Le mélange d'eau vapeur et d'air sec est parfois considéré comme un mélange idéal de gaz parfaits.

### 1.2.2 Loi de Darcy

Sous l'action d'un gradient de pression, les phases fluides peuvent percoler à travers les pores. On note  $\Omega_f$  l'espace poreux rempli par un fluide unique. L'écoulement de ce dernier est régi par les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \text{grad} p + \text{grad}(\eta \text{div} \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega_f \quad (1.8a)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_f \quad (1.8b)$$

La vitesse  $\mathbf{v}$  et la pression  $p$  sont les inconnues du problème tandis que  $\mathbf{f}$ , force extérieure appliquée sur le fluide par unité de volume est la donnée. 1.8a est le bilan de quantité de mouvement, et 1.8b traduit la condition de non glissement du fluide sur la surface des parois de la matrice solide. L'ensemble des évolutions est supposé quasi-statique et le fluide est postulé incompressible.

[169] propose une formulation variationnelle de ce problème. On y suppose que le milieu poreux est spatialement  $Y$ -périodique ; chaque période étant constituée d'une partie fluide  $Y_f$  et d'une partie solide  $Y_s$ . L'union de l'ensemble des  $Y_f$ , de même que celui des  $Y_s$  est connecté.

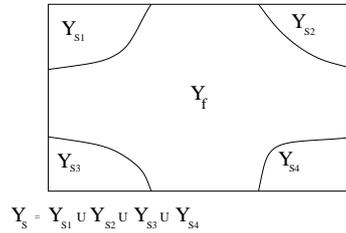


FIG. 1.3. Cellule périodique d'un milieu poreux - Image inspirée de [169]

Pour chaque période  $Y$ , la vitesse moyenne du fluide est liée à la pression et aux efforts appliqués par :

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y v_j^0 = \frac{\mathbf{K}_{ij}}{\mu} \left( f_i - \frac{\partial p^0}{\partial x_i} \right) \quad (1.9)$$

Il s'agit de la loi de Darcy : pour chaque direction  $j$ , la vitesse moyenne  $\mathbf{v}_j^0$  du fluide est proportionnelle au terme  $(\mathbf{f} - \frac{\partial p^0}{\partial \mathbf{x}})$  par l'intermédiaire d'un tenseur  $\mathbf{K}$  ne dépendant que de la géométrie de la période  $Y$ .  $\mathbf{K}[m^2]$  est le tenseur de perméabilité intrinsèque ; il est défini, positif et symétrique. Il s'agit du paramètre primordial dans la caractérisation des propriétés de transfert hydrique dans les milieux poreux. Dans la suite, nous allons nous intéresser aux différentes méthodes utilisées afin de déterminer ce coefficient.

### 1.2.3 Calcul du coefficient de perméabilité d'un milieu poreux non déformable

Plusieurs méthodes ont été mises au point afin de déterminer le coefficient de perméabilité intrinsèque du milieu. Elles se basent sur la loi de Darcy et utilisent des descriptions géométriques simplifiées afin d'identifier le tenseur  $\mathbf{K}$ .

#### 1.2.3.1 Modèle de Kozeny-Carman

Dans ce modèle, Carman suppose que la perméabilité intrinsèque (mesurée en  $m^2$ ) est équivalente au carré d'une longueur caractéristique du milieu poreux. Cette longueur est le rayon hydraulique et est liée aux caractéristiques géométriques du milieu. Kozeny et Carman expriment la perméabilité dans la direction de l'écoulement en fonction de l'aire spécifique du milieu poreux  $A_S$  et de la porosité  $\nu$  :

$$k_{K-Carman} = c \frac{\nu^3}{A_S^2} \quad (1.10)$$

- $c$  : constante déterminée expérimentalement et qui dépend de la géométrie du milieu poreux.

Si on tient compte de la tortuosité  $\tau$  du matériau :

$$k_{K-Carman} = c \frac{\nu^3}{A_S^2 \tau^2} \quad (1.11)$$

Carman redémontre ainsi les résultats obtenus par Kozeny qui lui, avait modélisé le réseau poreux par un assemblage de capillaires.

Le coefficient  $c$  introduit dans les relations 1.10 et 1.11 est déterminé de façon empirique [171] ou alors grâce à la résolution des équations de Navier-Stokes sur une représentation simplifiée de la structure.

### 1.2.3.2 Le milieu poreux en tant que réseau de capillaires

Les équations de la mécanique des fluides utilisées dans le cas d'une géométrie simple ne sont pas applicables à la structure complexe du milieu poreux. Les modèles géométriques des milieux poreux visent à représenter simplement le réseau afin d'appliquer les résultats usuels de la mécanique des fluides. Ces résultats permettent de lier le paramètre de perméabilité aux caractéristiques géométriques du domaine.

Une première approche vise à représenter la géométrie du milieu poreux non fissuré par un réseau de tubes capillaires. L'écoulement dans la maille élémentaire correspond alors à un écoulement de fluide à travers un tube cylindrique :

**Écoulement au sein d'un capillaire** L'écoulement d'un fluide visqueux soumis à un gradient de pression  $\text{grad}(p)$  est déterminé par l'équation de Navier-Stokes 1.8a.

On suppose que le fluide est incompressible et n'est soumis à aucune force volumique extérieure. On suppose de plus que l'on est en régime stationnaire et on néglige les termes convectifs. L'équation s'écrit alors en coordonnées cylindriques selon l'axe d'écoulement unidirectionnel  $Ox$  :

$$-\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x(r, t)}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (1.12)$$

$V_x(r)$  étant la composante de la vitesse du fluide suivant  $Ox$ .

On note  $R$  le rayon du cylindre. La résolution de cette équation donne en régime permanent le profil de vitesse suivant (relation de Hagen-Poiseuille) [137] :

$$V_x(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1.13)$$

La vitesse moyenne  $\bar{V}_x$  et le débit volumique  $q$  sont tels que [137, 171] :

$$|\bar{V}_x| = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}, \quad q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.14)$$

**Capillaires en parallèle** On considère ici des tubes cylindriques supposés tous débouchants et parallèles. Leur diamètre est choisi de façon à être fidèle à la distribution de la taille des pores dans le milieu poreux représenté. On note  $\epsilon$  la densité de canaux par unité de surface ; la relation entre  $\epsilon$  et la porosité du milieu réel est alors donnée par la relation [137] :

$$\nu = \epsilon\pi R^2. \quad (1.15)$$

La vitesse moyenne du fluide est la même que dans 1.14 tandis que le débit devient :

$$\epsilon\pi R^2 \cdot \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.16)$$

Par identification avec la loi de Darcy, la perméabilité s'écrit :

$$k_{parallele} = \epsilon \frac{R^2 \nu}{8} \quad (1.17)$$

**Capillaires en série** Le réseau est ici défini comme l'association en série de tubes composés de capillaires de rayons variables. En limitant au nombre de deux le nombre de capillaires en série formant un seul tube, on note  $R$  le rayon du capillaire le plus gros et  $\alpha R$  le rayon du capillaire de taille inférieure. La porosité et la perméabilité du milieu sont exprimées par les relations suivantes [137] :

$$\nu = \frac{\pi R^2}{2L^2} (1 + \alpha^2) \quad (1.18)$$

$$k_{serie} = \frac{R^2}{2} \frac{\nu \alpha^4}{(1 + \alpha^4)(1 + \alpha^2)} \quad (1.19)$$

Ce modèle a pour avantage de tenir compte grâce à  $\alpha$ , du caractère obstrué ou non obstrué des canaux transportant le fluide.

**Modèle de Saffman** Les précédents modèles n'autorisaient qu'un écoulement unidirectionnel. Saffman propose un modèle plus réaliste en représentant un milieu poreux homogène isotrope par un réseau de capillaires d'orientation quelconque [166]. En utilisant une représentation statistique de l'orientation des pores et de la répartition de pression au sein de ces derniers, Saffman parvient à un facteur de perméabilité égal au tiers de la valeur obtenue dans le cas d'un modèle à capillaires parallèles. En effet, dans son modèle, il ne prend en compte que les capillaires jouant un rôle dans l'écoulement unidirectionnel de fluide à travers le milieu poreux. Seul un tiers des capillaires sont parallèles à l'écoulement, la perméabilité 1.17 est donc elle aussi divisée par trois.

$$k_{Saffman} = \frac{R^2 \nu}{24} \quad (1.20)$$

### 1.2.3.3 Treillis de Boltzmann

Les modèles de type capillaires sont des modèles périodiques utilisant des propriétés de symétries inexistantes dans la plupart des milieux poreux réels. Les descriptions de type Boltzmann sont donc de plus en plus utilisées [31, 183] afin de générer un schéma aléatoire du milieu poreux. Ce dernier est représenté par un assemblage d'obstacles et la condition de non glissement à la surface des solides est remplacée par une condition de réflexion des particules de fluide. Les équations de Navier-Stokes sont résolues sur ce système complexe, ce qui permet d'identifier les coefficients de l'équation de Kozeny-Carman.

### 1.2.3.4 Modèle de percolation

[199] modélise les disparités de la taille des pores de matériaux de construction. Il décrit le milieu poreux en superposant plusieurs réseaux d'échelles différentes. Les calculs des propriétés de transport sont menés par itérations successives : à chaque pas de calcul la perméabilité du milieu est déterminée grâce aux lois de percolations et le passage à l'échelle supérieure se fait grâce à une méthode de renormalisation.

Des calculs de perméabilité ont été menés sur un groupe de matériaux. Les résultats, comparés à l'expérience, présentent des valeurs satisfaisantes. Cependant, elles se basent sur certaines approximations quant à la répartition réelle de la taille des pores qui est mesurée par porosimétrie mercure. Cette méthode reste donc difficilement applicable sans une amélioration des techniques de porosimétrie qui ne donnent d'information que sur un intervalle restreint de taille de pores.

### 1.2.3.5 Limites

Dans la plupart de ces descriptions (cf. §1.2.3.1, §1.2.3.2 et §1.2.3.3), à porosité et surface spécifique égales, tous les réseaux poreux ont la même perméabilité, ce qui est peu fidèle à la réalité.

Il a de plus été montré que les relations de Carman et Kozeny n'étaient pas applicables dans le cas de matériaux cimenteux [31, 75, 142]. Les relations similaires de type Katz-Thompson qui introduisent la notion de taille critique de pores sont de même peu satisfaisantes : elles donnent des résultats cohérents pour des matériaux de porosité élevée tels que les grès et les roches [192], mais pas pour les matériaux cimenteux tels que le béton.

Enfin les modèles présentés sont inappropriés pour la détermination de la perméabilité dans le cas d'un milieu poreux fissuré : ces discontinuités qui ont une faible influence sur les paramètres structuraux tels que la porosité ou la surface spécifique dirigent le phénomène de perméabilité, mais ne sont pas pris en compte dans ce type de modèles [171, 44].

### 1.2.4 Transferts hydriques isothermes dans les milieux poreux déformables

Soumise à un chargement mécanique, la matrice solide peut se déformer, modifiant ainsi le réseau poreux à travers lequel percole le fluide. La dilatation ou la contraction éventuelle de la matrice influe sur le gradient de pression dans les pores gouvernant l'écoulement de fluide. Inversement, la pression du fluide interstitiel applique un chargement mécanique supplémentaire à la matrice solide et peut induire des non linéarités telles que les propagations ou ouvertures de nouvelles fissures ou micro-fissures. Le couplage hydro-mécanique est donc essentiel pour la description du milieu poreux. On s'intéresse ici à l'évolution de milieux poreux sous chargement mécanique n'induisant pas d'ouverture ou de propagation de fissure.

#### 1.2.4.1 Théorie des mélanges

La théorie des mélanges introduite par Terzaghi en 1951 dans le cadre de la théorie des sols, est la méthode la plus utilisée afin de décrire les phénomènes de transport au sein d'un milieu poreux déformable (il existe de nombreuses références, voir par exemple [27, 30, 46, 47, 68, 171, 93, 132, 170, 172]).

Elle applique le concept de milieu continu au milieu poreux en supposant la superposition des différentes phases du mélange en chaque point de la structure. Le mouvement de chaque phase est décrit par des cinématiques différentes et on tient compte des échanges éventuels entre ces dernières (quantité de mouvement, masse, énergie, etc.). Les modèles à trois phases introduits initialement (solide, liquide et gazeuse, le gaz étant de l'air humide) ont été récemment remplacés par des modèles à quatre phases (dans lesquels la vapeur d'eau et l'air sec sont vus comme des phases séparées).

#### 1.2.4.2 Modèle à variable interne

**Modèle de Biot** Le modèle de Biot est couramment utilisé afin de décrire l'évolution des milieux poreux saturés ou non saturés. Dans ce dernier cas, de nouveaux phénomènes sont à prendre en compte tels que l'interaction entre les fluides ou encore le comportement de la matrice solide vis-à-vis du mélange. Il est donc plus aisé de mener une étude sur l'évolution d'un milieu biphasique (phase solide et un fluide unique) afin de déterminer le coefficient de perméabilité intrinsèque de la phase solide. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à ce type de problème.

Dans [47], Coussy se base sur le modèle de Biot afin de décrire l'évolution de milieux poreux dont le comportement est supposé élastique. Il leur associe une dissipation d'énergie  $p\dot{\nu}$  due à la variation de la porosité  $\nu$  et déduit du second principe de la thermodynamique les lois de comportement du

squelette dit poro-élastique :

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbb{C}\dot{\mathbf{E}} - \mathbf{B}\dot{p} \quad (1.21a)$$

$$\dot{\nu} = \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\dot{p}}{N} \quad (1.21b)$$

- $\mathbb{C}$  : tenseur tangent de raideur élastique de la matrice solide
- $\mathbf{B}$  : tenseur tangent de Biot ; il lie linéairement le changement de porosité  $\dot{\nu}$  aux variations de déformation du squelette lorsque  $\dot{p}=0$ .
- $N$  : module de Biot liant la variation de pression à la variation de porosité dans une évolution telle que  $\dot{\mathbf{E}} = 0$

En l'absence de pores isolés, la matrice solide est le plus souvent supposée incompressible. Les changements volumiques du squelette se réduisent donc au changement de porosité  $\dot{\nu}$  :

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad 1/N = 0 \quad (1.22)$$

Les équations sont modifiées en :

$$(\mathbf{T} + p\mathbf{I}) = \mathbb{C}\dot{\mathbf{E}} \quad (1.23a)$$

$$\dot{\nu} = \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}) \quad (1.23b)$$

On en déduit que la contrainte efficace au sein de la matrice solide est donnée par  $\mathbf{T} + p\mathbf{I}$ .

Les déformations au sein de la matrice solide résultent d'évolutions complexes qui sont une combinaison de phénomènes élémentaires pouvant être modélisés par des lois de comportement telles que l'élasticité, la plasticité ou encore l'endommagement :

- Comportement élastique linéaire

Les tenseurs  $\mathbb{C}$  et  $\mathbf{B}$  sont ici supposés constants. Supposons que le comportement élastique de la matrice solide soit de plus linéaire isotrope. Les énergies dépendent uniquement des invariants scalaires des tenseurs mis en jeu. Les lois de comportement 1.21 se réduisent à une loi de type Hooke :

$$\mathbf{T} - \mathbf{T}_0 = (\mathbf{K} - \frac{2}{3}\mu)\text{tr}\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{E} - \mathbf{B}(p - p_0)\mathbf{I} \quad (1.24a)$$

$$\nu - \nu_0 = \mathbf{B}\mathbf{E} + \frac{(p - p_0)}{N} \quad (1.24b)$$

Les quantités indicées par un 0 faisant référence aux quantités à l'instant initial.

- Comportement plastique

Le comportement non linéaire et irréversible du béton peut être décrit grâce à une loi de type élastoplastique appliquée au tenseur de contrainte efficace [30].

Voir §2.3.1 du chapitre suivant pour plus de détails.

**Description du réseau de fissures** Dans [54], Dormieux suppose que les non-linéarités observées dans l'évolution des milieux poreux (son travail étant appliqué à des matériaux de type roches) sont principalement dues à l'ouverture ou à la fermeture des micro-fissures. Il associe une approche par homogénéisation à une description de type modèle à variable interne afin de décrire l'influence des pores et des micro-fissures sur les propriétés mécaniques et hydriques du milieu. Il exprime le module élastique tangent en fonction des paramètres mécaniques de la phase solide, de la porosité et des paramètres caractéristiques des différentes familles de fissures (densité, orientation, ouverture) et en déduit l'expression des coefficients poroélastiques du milieu.

Cette approche s'applique à des évolutions dans lesquelles on peut négliger la propagation de fissure.

### 1.2.5 Couplage de la propagation des fissures et du comportement hydrique

Il existe de nos jours deux grandes familles de descriptions permettant de quantifier l'évolution des propriétés mécaniques et hydriques des milieux poreux, tout en autorisant l'évolution de l'état de fissuration du matériau : les modèles à variable interne tel que l'endommagement et les modèles discrets décrivant géométriquement l'évolution du réseau de fissures [149] :

**Endommagement** Le modèle le plus courant liant la perméabilité d'un milieu considéré comme continu à ses variables globales est celui basé sur la théorie de l'endommagement.

Cette théorie a été introduite par Kachanov en 1958 et a été appliquée au béton à partir des années 1980. Elle traduit l'ensemble des phénomènes irréversibles de dégradation du matériau par dé-cohésion de la matière sous l'action de sollicitations mécaniques. Cette détérioration est traduite par le tenseur d'endommagement  $\mathbf{D}$  dont dépend le tenseur de raideur  $\mathbb{C}$  :

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}(\mathbf{D}) \quad (1.25)$$

#### Évolution de la perméabilité

- Modèle de Bourdarot

Dans [14], Bary utilise la formulation de Bourdarot afin de traduire l'influence de l'endommagement du béton sur sa perméabilité. Il exprime les valeurs propres du tenseur de perméabilité  $\mathbf{K}$  par :

$$(k)_i = (k_0)_i \left( \frac{(k_U)_i}{(k_0)_i} \right)^D \quad (1.26)$$

Avec :

- $(k_0)_i$  : perméabilité du matériau sain suivant la direction propre  $i$ ,
- $(k)_i$  : perméabilité du matériau endommagé suivant la direction propre  $i$ ,
- $(k_U)_i$  : perméabilité du matériau à la rupture suivant la direction propre  $i$ ,

- $D$  : variable d'endommagement.

Ce type de modèle a notamment été utilisé par Picandet dans [149]. Il détermine expérimentalement une relation entre l'endommagement et la perméabilité de bétons ordinaires, hautes performances et hautes performances fibrés sollicités sous compression uni-axiale et endommagés de façon homogène :

$$k = k_0 \cdot \exp[(11.3 \cdot D)^{1.64}] \quad (1.27)$$

Cette interpolation est valable pour de faibles valeurs de  $D$  (inférieures à 0.18).

- Modèle de Gawin et al.

Dans [77, 78, 79], Gawin et al. utilisent la théorie des mélanges. Ils supposent que la perméabilité dépend non seulement de l'endommagement du squelette, mais aussi de la pression  $p_g$  au sein du fluide. Ils approximent l'évolution de  $k$  à :

$$k = k_0 \left(\frac{p_g}{p_0}\right)^{A_p} \cdot 10^{A_d D} \quad (1.28)$$

où  $A_p$  et  $A_d$  sont des constantes dépendant du matériau et  $p_0$  est une pression de référence. L'influence de la fissuration du béton sur la perméabilité est traduite par le terme  $10^{A_d D}$  de 1.28 ; tandis que  $\left(\frac{p_g}{p_0}\right)^{A_p}$  décrit l'influence exercée par le fluide ouvrant les fissures.

Le scalaire  $A_d$  dépend du type et des dimensions des fissures se propageant dans le béton [78].

**Fissuration** Ce type d'approche est similaire à celle utilisée en §1.2.3.1 pour les solides indéformables. On schématise la géométrie du milieu dans le but de déterminer simplement les évolutions de ses caractéristiques mécaniques et hydriques.

L'écoulement dans une fissure peut être assimilé à un écoulement monodirectionnel entre deux plans parallèles distants de  $w$ . La résolution des équations de Navier Stokes mène à l'expression de la vitesse moyenne  $\bar{V}_x$  :

$$\bar{V}_x = -\frac{w^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.29)$$

On suppose alors que le milieu poreux est équivalent à une matrice incompressible fissurée par un réseau de plans parallèles espacés d'une distance moyenne  $\Delta$ . Comme pour le réseau de pores, on introduit un paramètre  $\xi$  tenant compte de la tortuosité et de la rugosité de la surface de la fissure. Par identification avec la loi de Darcy, la perméabilité due à un réseau de fissures planes parallèles est exprimée par :

$$k_f = \frac{\xi}{\Delta} \frac{w^3}{12} \quad (1.30)$$

La perméabilité d'un milieu poreux endommagé peut alors être décomposée en la somme de la perméabilité initiale et de celle due à la fissuration :

$$k = k_0 + k_f \quad (1.31)$$

- $k_0$  : perméabilité du matériau sain, due au réseau de pores de la matrice de béton
- $k_f$  : perméabilité du solide considéré comme une matrice imperméable fissurée par un réseau de plans débouchant (exprimée par la relation 1.30).

$\xi$ ,  $\Delta$  et  $w$  peuvent être déterminés expérimentalement.

Cette relation a notamment été utilisée par Picandet [149] qui a montré qu'elle était difficile à corréler expérimentalement ; et qu'elle dépendait du type de béton considéré. Ce type d'approche est utilisée pour le couplage hydromécanique de barrages.

## Conclusion

Étanchéité et comportement mécanique sont deux phénomènes physiques différents. Le choix des formulations empiriques rend le couplage difficile. L'étude expérimentale [4] montre la difficulté dans l'usage d'une relation empirique entre endommagement et perméabilité.

Les modèles correspondant à notre problématique (évaluation de la perte d'étanchéité sous chargements mécaniques) sont les modèles visant à modéliser au mieux l'évolution du réseau poreux en fonction du chargement mécanique appliqué.

On effectue dans le chapitre suivant un rapide bilan des méthodes actuelles utilisées pour décrire le béton.

## Chapitre 2

# Comportement mécanique du béton

### Introduction

Le béton est un matériau hétérogène dont le comportement est le plus souvent fragile. On verra cependant qu'un processus de micro-fissuration peut altérer les propriétés mécaniques du béton. Initialement linéaires, les courbes contrainte-déformation du béton s'adoucissent avant d'atteindre un pic de contrainte. La coalescence des micro-fissures est responsable de l'apparition de macro-fissures.

### 2.1 Comportement uni-axial du béton

On différencie trois échelles de fissuration du béton [53, 198] :

- niveau microscopique : les fissures apparaissent au niveau des composants individuels (pâte de ciment, grains)
- niveau mésoscopique : le béton est considéré comme un matériau hétérogène, où les propriétés des interfaces interviennent,
- niveau macroscopique : les dimensions des fissures sont supérieures à celles des hétérogénéités du matériau. Le béton est alors traité comme un matériau homogène.

Le comportement du béton sous chargement uni-axial peut être schématiquement décomposé en trois phases distinctes [23, 53, 119, 97, 139, 149, 167, 159] :

- Comportement élastique : des micro-fissures sont initialement présentes à l'interface entre granulats et pâte de ciment [182, 195]. Elles sont principalement dues au retrait lors de la fabrication du béton [53, 182] (la diminution de volume de la pâte de ciment crée de fortes contraintes de traction à l'interface avec les granulats, ce qui crée des micro-fissures présentes avant même que le béton ne soit sollicité [182, 195]).

Pour des chargements inférieurs à 30% de la limite ultime en compression (respectivement 80% de la limite en traction), les fissures ne se propagent pas et le comportement du béton est élastique linéaire.

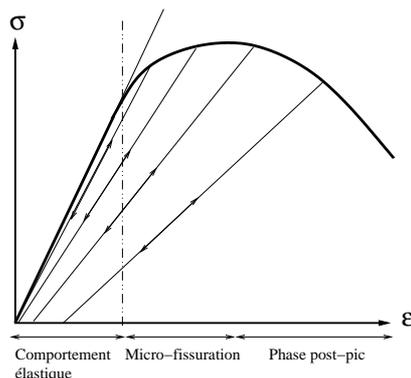


FIG. 2.1. Schéma du comportement du béton sous chargement uni-axial

- Amorce et propagation de micro-fissures avant pic : la dégradation et le comportement non linéaire du béton sont dus à la propagation de micro-fissures déjà présentes.

Selon [53, 109] : le début de propagation des micro-fissures (qui correspond au seuil de non linéarité) dépend de la taille des granulats.

La dégradation est progressive et a pour conséquence la modification des propriétés mécaniques du béton.

- Pic : les micro-fissures dans le mortier se propagent à partir de 70 à 90% de la limite ultime. Elles permettent la coalescence des micro-défauts en macro-fissures [23, 53, 97, 167] perpendiculaires à la direction de la contrainte principale.

La phase post pic se traduit par un comportement adoucissant anisotrope et s'achève par la ruine de la structure.

La résistance en traction du béton est en général d'un ordre de grandeur inférieure à sa résistance en compression : en traction, l'interface pâte/granulats est directement sollicitée et favorise la micro-fissuration, tandis que la compression induit tout d'abord la fermeture des micro-fissures avant de solliciter la pâte de ciment [149]. Le processus de dégradation sous compression est accompagné d'un phénomène important de dilatation dans la direction normale au chargement [155] et il existe un point seuil séparant un domaine de rupture fragile avec une phase adoucissante d'un domaine de fracture ductile accompagné de peu ou quasi aucune dégradation de la raideur [155].

Le processus de fissuration peut être décrit comme la succession de trois étapes [7, 76, 50, 139, 196] - (voire figure 2.2) :

- Observation de zones de concentration de contrainte : elle est associée à un phénomène de dissipation d'énergie alors que les champs de déplacement et déformation restent continus.
- Zone des discontinuités faibles : la zone de concentration de contrainte devient de plus en plus étroite, et donne naissance à une zone dans laquelle les champs de contrainte et de déformation sont discontinus. Cette zone correspond au processus d'endommagement par propagation de micro-défauts avec une densité quasi homogène au sein du matériau.

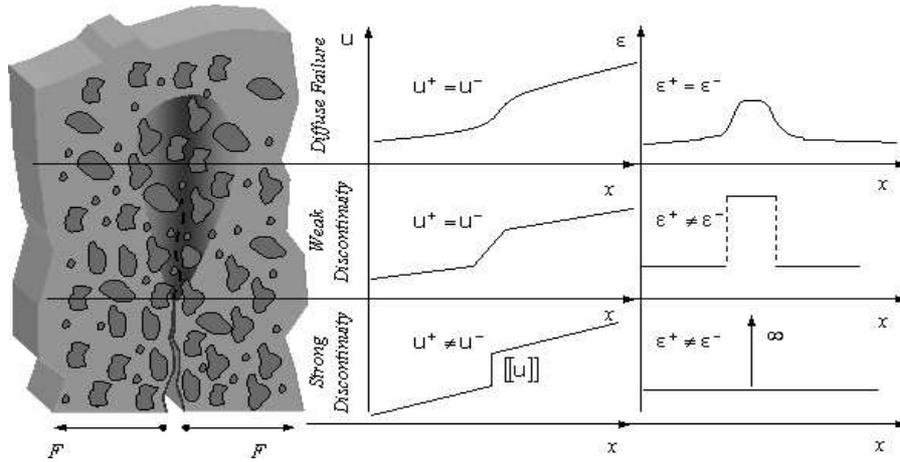


FIG. 2.2. Evolution de la fissuration [139]

- Zone de discontinuité forte : la zone de discontinuité devient de plus en plus étroite jusqu'à devenir d'épaisseur nulle. Les deux champs de déplacement et de déformation sont alors discontinus. On a ouverture de fissure(s) au sein du solide.

Quelque soit le cas de figure, ces phénomènes sont accompagnés de forts gradients : le matériau est chargé à l'intérieur de la bande de localisation, et déchargé élastiquement à l'extérieur [76, 24, 102].

Nous allons reprendre succinctement les principales méthodes utilisées pour décrire l'évolution du béton sous chargements mécaniques lents hors du domaine élastique.

## 2.2 Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture est une étude locale de la propagation de fissures dans un matériau supposé homogène et isotrope. Selon les caractéristiques du matériau ainsi que celles du chargement, on fera appel à une approche linéaire, élasto-plastique ou dynamique [202].

On distingue trois modes élémentaires de fissuration selon la sollicitation appliquée à la structure [35, 159, 168, 202] :

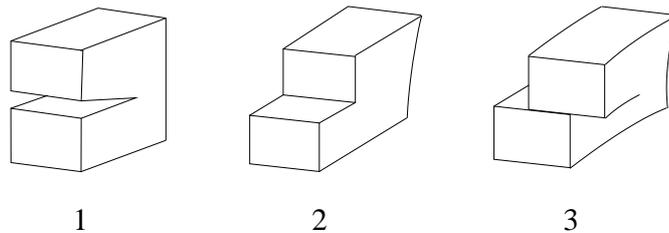


FIG. 2.3. Mode de rupture : 1; ouverture, 2 et 3 : glissement - [35]

- Mode (1) (Mode d'ouverture) : Les déplacements sont perpendiculaires à la direction de propagation de la fissure,
- Mode (2) (Mode de cisaillement plan) : Les déplacements sont parallèles à la direction de propagation,
- Mode (3) (Mode de cisaillement antiplan).

Dans cette approche, la fissure est modélisée par un défaut elliptique de longueur  $2a$  dont les bords sont libres de chargement. On considère que seule la zone en pointe de fissure est influencée par la singularité et est caractérisée par une zone plastique.

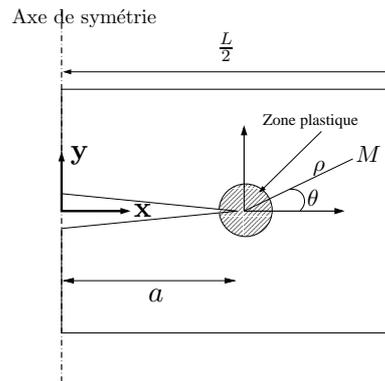


FIG. 2.4. Zone plastifiée en pointe de fissure - Système de coordonnées

On néglige les effets de bord en considérant que la largeur  $L$  de l'éprouvette est grande devant la longueur  $2a$  de la fissure.

Il existe une zone plastique confinée en pointe de fissure que l'on néglige dans le cas de la mécanique linéaire de la rupture : la dimension de la zone plastique est supposée négligeable devant  $a$  : (voir figure 2.4).

Dans le cas contraire, on fait appel à une approche non-linéaire [202].

Dans le modèle linéaire, le matériau est supposé avoir un comportement élastique linéaire et les forces d'inertie sont négligées. Westergaard exprime en pointe de fissure les différentes composantes des champs de contraintes pour chaque mode de sollicitation sous la forme [35, 202] :

$$T_{ij} = \frac{K}{2\pi r} f_{ij}(\theta) \quad (2.1)$$

Où  $K$  et  $f$  sont déterminés pour chaque mode de chargement :

- $K$  : facteur d'intensité de contrainte

$$K = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a} g \quad (2.2)$$

$\sigma_{\infty}$  étant la contrainte appliquée au bord du domaine.  $g$  étant une fonction dépendant de la géométrie de la structure et du type de chargement.

- $f_{ij}$  : fonction scalaire dépendant de la géométrie de la structure Pour les modes (1) et (2) :

$$T_{11} = \frac{K^{(1)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.3a)$$

$$T_{22} = \frac{K^{(1)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.3b)$$

$$T_{12} = \frac{K^{(1)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{K^{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.3c)$$

Pour le mode (3) :

$$T_{13} = -\frac{K^{(3)}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.4a)$$

$$T_{13} = \frac{K^{(3)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.4b)$$

On note  $G$  le taux de restitution d'énergie libre généré par la création de surfaces libres (fissures) :

$$G := \frac{\partial U}{\partial S} \quad (2.5)$$

Avec

- $U = W_{ext} - W_{elast}$  : énergie totale,
- $W_{elast}$  : énergie élastique emmagasinée,
- $W_{ext}$  : travail dû aux forces extérieures,
- $S$  : surface fissurée.

La fissure est stable tant que le taux de restitution d'énergie éventuellement obtenu par sa propagation est inférieure à une valeur critique  $G_c$  caractéristique du matériau. Elle se propage si cette puissance relaxée peut entretenir la dissipation par propagation [35, 40] :

- Fissure stable si

$$G < G_c \quad (2.6a)$$

- Propagation possible si

$$G = G_c \quad (2.6b)$$

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire de module d'Young  $E_Y$  et de coefficient de Poisson  $\nu_P$ , sollicité selon les trois modes de chargement :

$$G = \frac{K^{(1)2} + K^{(2)2}}{E'_Y} + \frac{1 + \nu_P}{E_Y} K^{(3)2} \quad [35, 40] \quad (2.7)$$

Où  $E'_Y = E_Y$  en contraintes planes et  $E'_Y = \frac{E_Y}{1 - \nu_P^2}$  en déformations planes.

Ce type de comportement n'est cependant applicable que pour des matériaux élastiques fragiles, et il est parfois pertinent dans l'étude de bétons. On utilise dans le cas contraire une approche non linéaire.

## 2.3 Modèles inélastiques

Le comportement non linéaire est modélisé par la combinaison d'une loi de comportement de type endommagement traduisant la dégradation des propriétés mécaniques du béton, et d'une formulation de type élasto-plastique permettant de modéliser les déformations résiduelles observées après déchargement complet du matériau.

Les modèles élasto-plastiques endommageables sont courants dans le monde industriel, et sont le plus souvent basés sur une formulation dans l'espace des contraintes [113].

Une des premières formulations a été développée par Bažant et Kim [112] : Ils supposent que l'ensemble des phénomènes inélastiques est dû au seul processus de micro-fissuration.

### 2.3.1 Formulation plastique

L'inégalité de Clausius-Duhem impose en comportement isotherme :

$$\mathbf{T} \cdot \text{Grad} \mathbf{v} - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (2.8)$$

Dans le cadre des petites transformations, la déformation totale  $\mathbf{E}$  peut être décomposée en une partie élastique  $\mathbf{E}^e$ , et une partie non élastique  $\mathbf{E}^i$  :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^i \quad (2.9)$$

On suppose de plus que l'énergie libre  $\Psi$  dépend uniquement des déformations élastiques du solide, et d'un ensemble de  $N$  variables internes  $\kappa_n$  ( $\Psi = \Psi(\mathbf{E}^e, \kappa_n)$ ). L'inégalité Clausius-Duhem s'écrit alors :

$$\left( \mathbf{T} - \rho \frac{d\Psi}{d\mathbf{E}^e} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^i - \rho \frac{d\Psi}{d\kappa_n} \dot{\kappa}_n \geq 0, \quad \forall (\mathbf{E}^e, \kappa_n, \mathbf{E}^i) \quad (2.10)$$

En appliquant cette condition à une évolution élastique telle que  $\dot{\mathbf{E}}^i = 0$  et  $\dot{\kappa}_n = 0 \forall n$ , on déduit la relation entre le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  et le tenseur des déformations  $\mathbf{E}^e$ . On définit de plus la force thermodynamique  $\alpha_n$  associée à la variable interne  $\kappa_n$  :

$$\mathbf{T} = \rho \frac{d\Psi}{d\mathbf{E}^e} \quad (2.11a)$$

$$\alpha_n := \rho \frac{d\Psi}{d\kappa_n}, \quad n = 1..N \quad (2.11b)$$

### 2.3.2 Surface de Charge

La fonction  $f$  est la surface de charge définie sur l'espace des contraintes  $(\mathbf{T}, \alpha_n)$  et délimitant le domaine élastique du matériau :

$$f(\mathbf{T}, \alpha_n) := \Phi(\mathbf{T}) - \alpha_n \quad (2.12)$$

$\Phi(\mathbf{T})$  est la contrainte équivalente associée au chargement et  $\alpha_n$  détermine l'étendue du domaine élastique.

On est hors du domaine élastique si :

$$f(\mathbf{T}, \kappa_n) = 0 \quad (2.13)$$

### 2.3.3 Loi d'évolution

L'inégalité de Clausius-Duhem impose à la dissipation associée au processus de transformation d'être constamment positive. Cette inégalité se traduit par une condition de normalité dans l'espace des contraintes  $(\mathbf{T}, \alpha_n)$  : on note  $\lambda$  un multiplicateur choisi positif et on suppose qu'il existe  $g$  convexe associée au processus de transformation telle que :

$$\dot{\mathbf{E}}^i = \lambda \frac{\partial g}{\partial \mathbf{T}} \quad (2.14a)$$

$$et \quad -\dot{\alpha}_n = \lambda \frac{\partial g}{\partial \kappa_n} \quad \forall n = 1..N \quad (2.14b)$$

L'orientation de l'écoulement plastique est ainsi supposée normale à la surface  $g$ . Si la surface de charge et la fonction d'écoulement coïncident ( $f=g$ ), le modèle est dit associé.

Les lois de comportement de matériaux tels que le béton ne peuvent pas toujours être associées : le béton se contracte sous l'action de faibles chargements en compression, et se dilate sous des chargements élevés.

### 2.3.4 Variables internes

Le modèle est complètement déterminé une fois définies les variables internes  $\kappa_n$ , les fonctions  $c$  et  $g$ .

- Pour un modèle élasto-plastique :  $N = 0$  (pas d'autre variable interne que  $\mathbf{E}^i$ ),  $\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{E}^e \mathbb{C} \mathbf{E}^e$
- Pour un modèle d'endommagement isotrope :  $\mathbf{E}^i = 0$ ,  $N = 1$ ,  $\kappa = \mathbf{D}$  (tenseur d'endommagement) ; et  $\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbb{C}(\mathbf{D}) \mathbf{E}$

Le modèle isotrope de Mazars est couramment utilisé dans la description du comportement des bétons : dans [129, 130], Mazars suppose que le solide a un comportement élasto-endommageable linéaire isotrope. Il réduit donc le tenseur d'endommagement à la variable scalaire  $D$  qui peut être interprétée comme la densité volumique de fissures.

Le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}$  est celui d'un matériau élastique isotrope. Son évolution est décrite selon la loi :

$$\mathbb{C}(\mathbf{D}) = (1 - D) E_0 \mathbb{I} \quad (2.15)$$

$\mathbb{C}_0$  étant la rigidité du matériau avant chargement.

## 2.4 Modèles non locaux

Les calculs éléments finis formulés à l'aide de modèles de type endommagement souffrent d'une dépendance vis-à-vis du mode de discrétisation [106, 155, 152, 17] : la localisation de l'endommagement est responsable de la dépendance à la taille et à l'orientation du maillage.

Les modèles non locaux tiennent compte du caractère diffus du processus d'endommagement. Bažant, Pijaudier-Cabot ou encore Mazars introduisent dans leurs modèles une variable caractéristique des zones de micro-fissuration observées autour des macro-fissures.

En tout point de la structure, la contrainte  $\mathbf{T}$  n'est plus calculée à partir de la valeur locale  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ , mais à partir de la moyenne de la déformation prise sur un volume représentatif entourant le point matériel :

$$\mathbf{E}_{nl}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_r(\mathbf{x})} \int_V \mathbf{E}(s) \alpha(s - \mathbf{x}), \quad \mathbf{T} = (1 - D) \mathbb{C} \mathbf{E} \quad (2.16)$$

Où  $\alpha(s - x)$  est une fonction poids permettant de tenir compte des interactions décroissantes en fonction de la distance au point de calcul. Elle est fonction du paramètre  $l_c$  caractéristique de la zone de localisation. Selon Pijaudier-Cabot et Bažant, cette longueur peut être approximée au triple de la taille maximale des hétérogénéités du matériau [106]. La fonction poids peut être choisie comme Gaussienne :

$$\alpha(s - x) = H(s - x) \exp[-(4|s - x|/l_c)^2] \quad (2.17)$$

Le volume représentatif  $V_r$  est défini par :

$$V_r = \int_V \alpha(s - x) dv \quad (2.18)$$

Cette méthode permet d'augmenter les performances du modèle d'endommagement, et remédie considérablement au problème de dépendance au maillage.

Les formulations usuelles basées sur la mécanique des milieux continus imposent une condition de continuité des champs de déplacements, déformations et contraintes au sein des éléments du maillage, ce qui mène à une mauvaise formulation des conditions aux limites du problème. Pour remédier à ce problème, de nombreux auteurs (voir par exemple [8, 50, 140, 145, 196]) ont fait appel à des méthodes d'enrichissement cinématique.

## 2.5 Enrichissement cinématique

### 2.5.1 Smearred crack models

Ce type de formulation est basé sur la mécanique des milieux continus, avec une application de l'inégalité de Clausius-Duhem [7, 133, 139]. L'énergie de dissipation associée au processus de fissuration permettra de mettre en place les lois de comportement du solide endommagé, et aucune représentation de la cinématique de la fissure n'est nécessaire à l'étude du problème [96].

### 2.5.1.1 Formulation du problème

Considérons un corps non fissuré sur lequel sont définis les trois champs de déplacement, déformation et contrainte notés respectivement  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{T}$ . La frontière de  $\Omega$ , notée  $\partial\Omega$  est divisée en deux sous-ensembles  $\partial\Omega_u$  et  $\partial\Omega_t$  sur lesquels les déplacements et les efforts sont respectivement imposés.

Le tenseur des déformations est déduit du champ de déplacement grâce à la relation cinématique :

$$\mathbf{E} = \text{sym Grad}\mathbf{u} \quad (2.19)$$

et l'équilibre mécanique est défini par :

$$\text{Div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Avec :

- $\rho$  : masse volumique,
- $\mathbf{b}$  : vecteur densité de force massique appliqué sur  $\Omega$ .

La relation entre les tenseurs de déformation et de contrainte est donnée par la loi de comportement :

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}\mathbf{E}; \quad \mathbb{C} := \text{tenseur de raideur du matériau} \quad (2.21)$$

*Conditions aux limites :*

$$\text{Les efforts } \mathbf{t} \text{ sont imposés sur } \partial\Omega_t : \mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (2.22)$$

$$\text{et les déplacements } \mathbf{u} \text{ sont imposés sur } \partial\Omega_u : \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (2.23)$$

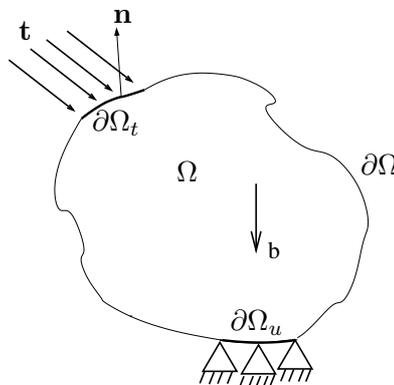


FIG. 2.5. Conditions aux limites appliquées à  $\Omega$

### 2.5.1.2 Bande de discontinuité faible

Considérons maintenant une bande de discontinuité faible  $S^h$  de largeur  $h$ , paramétrée dans sa largeur par le scalaire  $\zeta$ , et séparant les deux autres sous-domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  (cf. figure 2.6).

Le champ de déplacements  $\hat{\mathbf{u}}$  du solide est considéré comme la superposition des champs de déplacements de ce même domaine sans tenir compte de la bifurcation (noté  $\mathbf{u}$ ), et d'une contribution de la bande de localisation (noté  $\tilde{\mathbf{u}}$ ) :

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}; \quad \tilde{\mathbf{u}} = H_s^h[[\mathbf{u}]] \quad (2.24)$$

$[[\mathbf{u}]]$  étant le saut de déplacement à travers la surface de discontinuité  $S^h$  tel que :

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}|_{x \in \Omega^+ \cap S^h} - \mathbf{u}|_{x \in \Omega^- \cap S^h}$$

et  $H_s^h$  étant la fonction rampe définie par  $H_s^h = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega^- \\ \text{Fonction rampe croissante sur } S^h & \text{(cf. figure 2.6)} \\ 1 & \text{sur } \Omega^+ \end{cases}$

Le champ des déformations total du corps s'écrit alors sous la forme [139, 7, 141] :

$$\hat{\mathbf{E}} = \text{sym Grad}(\mathbf{u}) + \text{sym Grad}(H_s^h[[\mathbf{u}]]) \quad (2.25a)$$

$$= \mathbf{E} + \frac{1}{h} \mu_s^h \text{sym}([[ \mathbf{u} ]] \otimes \mathbf{n}) \quad (2.25b)$$

$$\text{Avec : } \mu_s^h = \begin{cases} 1 & \forall x \in S^h \\ 0 & \forall x \in \Omega \setminus S^h \end{cases}$$

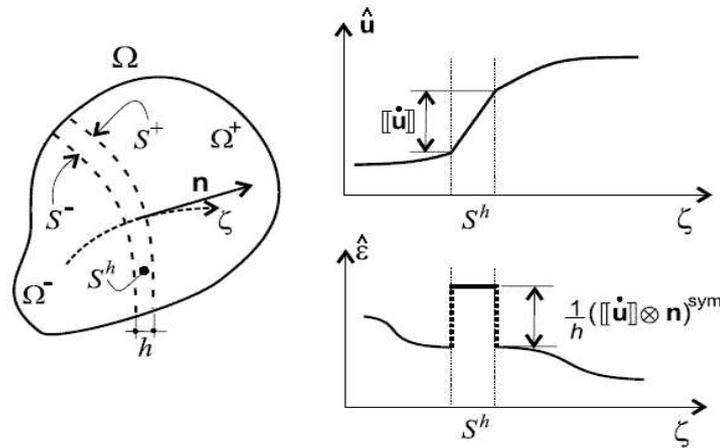


FIG. 2.6. Cinématique d'une discontinuité faible - [139]

### 2.5.1.3 Bande de discontinuité forte

La description d'une bande de discontinuité forte est similaire à celle développée précédemment et correspond au cas limite  $h \rightarrow 0$  [139, 141], la fonction rampe  $H_s^h$  définissant le champ de déformation est alors remplacée par une fonction Heaviside  $H_S$  définie sur  $\Omega \setminus S$  [7] telle que

$$H_S = \begin{cases} 0 & \forall x \in \Omega^- \setminus S \\ 1 & \forall x \in \Omega^+ \setminus S \end{cases}$$

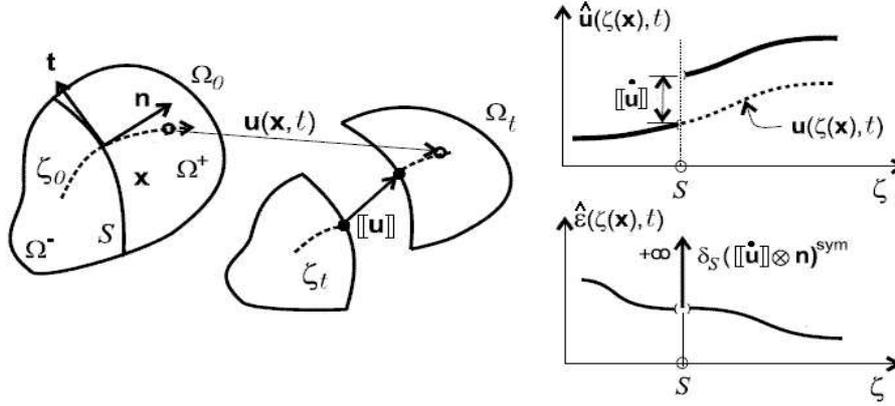


FIG. 2.7. Cinématique d'une discontinuité forte - [139]

Le champ de déformations s'écrit dans ce cas :

$$\hat{\mathbf{E}} = \text{sym Grad}(\mathbf{u}) + H_S \text{sym Grad}[[\mathbf{u}]] + \delta_S \text{sym}([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n}) \quad (2.26)$$

$$\delta_S \text{ étant la fonction Dirac définie par : } \delta_S = \lim_{h \rightarrow 0} \mu_s^h = \begin{cases} \infty & \forall x \in S \\ 0 & \forall x \in \Omega \setminus S \end{cases}$$

### 2.5.1.4 Condition de continuité

La mécanique des milieux continus impose naturellement :

$$\mathbf{T}|_{x \in d\Omega^+ \cap S^h} \mathbf{n} = \mathbf{T}|_{x \in d\Omega^- \cap S^h} \mathbf{n} = \mathbf{T}|_{x \in S^h} \mathbf{n} \quad (2.27)$$

Cette relation permet de tenir compte du domaine  $S^h$  dans les équations de la mécanique des milieux continus [139].

### 2.5.1.5 Comportement

On peut, pour les deux types de discontinuité, formuler le modèle mécanique de façon similaire. Quel que soit le type de bande de localisation, le champ de déformation se décompose en une partie régulière  $\bar{\mathbf{E}}$  et une partie singulière  $\tilde{\mathbf{E}}$  [7, 139] :

- Discontinuité faible

$$\bar{\mathbf{E}} = \text{sym Grad}(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{h} \mu_s^h \text{sym}([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n}) \quad (2.28)$$

- Discontinuité forte :

$$\bar{\mathbf{E}} = \text{sym Grad}(\mathbf{u}) + H_S \text{sym Grad}[\mathbf{u}] \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \delta_S \text{sym}([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n}) \quad (2.29)$$

Au vu de 2.28 et 2.29, il est naturel d'introduire une constante  $F$  telle que  $F = \frac{\mu_s^h}{h}$  dans le cas d'une discontinuité faible, et  $F = \delta_S$  dans le cas d'une discontinuité forte. Le comportement de la bande de localisation peut alors être découplé du comportement du solide considéré comme sain [7] :

$$\Psi(\mathbf{E}, \kappa) = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{E}}, \bar{\kappa}) + F \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\kappa}) \quad (2.30)$$

$\bar{\Psi}$  est l'énergie libre associée au comportement régulier du corps tandis que  $\tilde{\Psi}$  est associée à l'évolution de la bande de discontinuité.  $\bar{\kappa}$  représente un ensemble de variables internes caractérisant la réponse inélastique du matériau contenu dans  $\Omega/S^h$ , tandis que  $\tilde{\kappa}$  représente la contribution inélastique sur le domaine  $S^h$ . Par conséquent l'inégalité de Clausius Duhem écrite sous forme intégrale est :

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{E}}} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{\mathbf{T}} \cdot [|\dot{\mathbf{u}}|] d\Gamma_h \geq 0 \quad (2.31)$$

Le tenseur des contraintes  $\tilde{\mathbf{T}}$  étant défini par :

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{E}}} = \int_{\Omega_x} \mathbf{T} \cdot F \text{sym}([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n}) d\Omega_x = \int_{\Gamma_h} \tilde{\mathbf{T}} \cdot [|\dot{\mathbf{u}}|] \quad (2.32)$$

La bande de discontinuité hérite des propriétés du modèle constitutif original (du solide non fissuré) [8, 141] et la méthode de Coleman et Noll permet à travers les expressions de  $\bar{\Psi}$  et  $\tilde{\Psi}$ , de mettre en place les lois de comportement décrivant le système [7].

### 2.5.1.6 Longueur caractéristique - Comportement adoucissant

La description des discontinuités fortes met en jeu un champ de déformations infinies (cf. équation 2.26). Pour des questions de faisabilité, l'implémentation de ce type de modèle s'effectue grâce à une description de type discontinuité faible (voir §2.5.1.2), associée à une largeur  $h$  petite. Ce scalaire devient alors une longueur caractéristique du modèle de fissuration [139].

De plus, les conditions générales d'équilibre qui régissent l'évolution du solide sont définies à partir d'un champ de contraintes supposé borné. Pour justifier l'application d'un tel modèle, il est donc nécessaire d'introduire un module d'adoucissement limitant les amplitudes du champ de contraintes au sein de la bande de discontinuité [8, 139, 141, 196].

### 2.5.1.7 Couplage entre le comportement local et le comportement global

On achève le couplage entre les échelles micro et macro en égalisant la dissipation due à l'évolution de la discontinuité, à celle due au comportement macro du solide. L'égalité mène à l'équation [7] :

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot (\hat{\mathbf{E}} - \mathbf{E}) = 0 \quad (2.33)$$

La formulation est alors complétée et permet le calcul des champs de déplacements  $\mathbf{u}$  et  $\hat{\mathbf{u}}$  [7].

### 2.5.1.8 Remarques

Plusieurs auteurs [139, 141, 7, 196] ont utilisé cette formulation dans des problèmes de propagation de fissure(s) au sein du béton. Elle semble donner de bons résultats concernant les courbes effort-déplacements, ces données étant relativement indépendantes du mode de discrétisation. Ce n'est pas le cas concernant le trajet des fissures qui reste dépendant du maillage [147] : ce type de modèle nécessite un raffinement du maillage dans la zone de localisation de manière à localiser le gradient de déformation. Il est donc nécessaire de connaître à priori la direction de propagation des fissures. Ceci se traduit par une dépendance des résultats à l'alignement et aux dimensions du maillage [196].

Il se pose de plus un problème de blocage dû à un transfert de contrainte à travers une fissure ouverte [96, 105]. Ce transfert de contrainte est dû à une mauvaise représentation de la cinématique autour d'une zone de macro fissuration.

On remarque que cette méthode a introduit un nouveau paramètre (largeur de la bande de discontinu) influant lui aussi sur les résultats des calculs.

Enfin, il est à noter que ce modèle pose un problème d'interprétation physique (description continue d'un milieu discontinu), et il est primordial de ne pas perdre de vue le but de notre étude : un calcul de perméabilité basé sur ce type d'approche mènerait forcément à des lois empiriques spécifiques.

## 2.5.2 Embedded crack models

### 2.5.2.1 Introduction

L'apparition d'une bande de localisation est ici testée à chaque pas de calcul de type éléments finis usuels et ce, sur l'ensemble des éléments du maillage. Une fois détectée, on tient compte de cette éventuelle discontinuité en remplaçant les fonctions d'interpolation usuelles par des fonctions reproduisant le comportement des bandes de discontinuité. Les éléments sont alors dits incompatibles : ils violent la condition de continuité imposée dans la méthode usuelle des éléments finis [102, 145].

### 2.5.2.2 Critère de localisation

L'apparition d'une bande de discontinuité peut être simplement détectée par un critère local déterminant la fin du régime élastique [139, 141] (début d'un comportement modélisé comme plastique ou endommageable), ou alors par un critère de contrainte maximale basé sur la mécanique de la rupture. La direction de la bande de bifurcation est alors empiriquement déterminée en la supposant par exemple normale à la direction principale du tenseur des contraintes [196, 141].

Un critère couramment utilisé, permettant à la fois de déterminer le point d'apparition de la bande de localisation et sa direction, est le critère de Hill auquel ont notamment contribué Hadamard, Rice, Thomas et Mandel [76, 145].

Considérons un solide initialement homogène, soumis à un chargement quasi-statique. Au moment de l'éventuelle bifurcation, le solide sera partitionné en deux sous-domaines  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$  séparés par une surface de discontinuité  $S^h$  dont le vecteur normal est  $\mathbf{n}$ .

L'incrément de chargement responsable de la bifurcation mène à un saut du champ de déformations à travers  $S^h$  tel que  $[[\mathbf{E}]] := \mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^- \neq \mathbf{0}$  où l'exposant + (respectivement l'exposant -) fait référence à la partie  $\Omega^+$  (respectivement  $\Omega^-$ ).

Dans le cadre de petites perturbations, l'équation de compatibilité de Maxwell impose la relation cinématique [76, 145] :

$$[[\mathbf{E}]] = [[\text{sym Grad} \mathbf{u}]] = \text{sym Grad}[[\mathbf{u}]] \quad (2.34)$$

En supposant que la largeur de la bande de localisation est négligeable devant sa longueur, et en notant  $\mathbf{g}$  le saut de vitesse au travers de  $S^h$ , la relation 2.34 peut s'écrire :

$$\text{Grad}[[\dot{\mathbf{u}}]] = g \otimes \mathbf{n} \Rightarrow [[\dot{\mathbf{E}}]] = \frac{1}{2} (\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}) \quad (2.35)$$

Une fois la bande de localisation initiée, le solide est chargé dans la bande de localisation, et déchargé dans le reste du domaine. Les raideurs sont donc différentes suivant que l'on se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la bande de localisation. La condition d'équilibre statique sur  $S^h$  entraîne :

$$[[\mathbf{T}]]\mathbf{n} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbb{C}^+(\dot{\mathbf{E}}^- + [[\dot{\mathbf{E}}]]) - \mathbb{C}^-\dot{\mathbf{E}}^-)\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

$\mathbb{C}^\pm$  étant le tenseur de raideur de part et d'autre de  $S^h$ . Avec 2.35 on obtient la condition nécessaire :

$$(\mathbf{n}\mathbb{C}^+\mathbf{n})\mathbf{g} = ((\mathbb{C}^+ - \mathbb{C}^-)\dot{\mathbf{E}}^-)\mathbf{n} \quad (2.37)$$

Si on assimile le corps à un solide de comportement linéaire dont la raideur est en tout point homogène à  $\mathbb{C}^-$  (raideur avant bifurcation), l'équation 2.37 mène à la condition nécessaire :

$$(\mathbf{n}\mathbb{C}^-\mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

Cette dernière équation est satisfaite si et seulement si la matrice d'ordre 2 ( $\mathbf{n}\mathbb{C}^{-}\mathbf{n}$ ) a au moins une valeur propre nulle [76, 145, 141] :

$$\det(\mathbf{n}\mathbb{C}^{-}\mathbf{n}) = 0 \quad (2.39)$$

Cette condition permet de déterminer le point d'apparition de la bande de localisation ainsi que sa normale  $\mathbf{n}$  et donne avec 2.38 des informations cruciales sur le comportement du matériau [76, 145] :

- $\mathbf{g}$  perpendiculaire à  $\mathbf{n}$  : la zone de localisation est une zone de cisaillement pur,
- $\mathbf{g}$  parallèle à  $\mathbf{n}$  : il y a ouverture (ou fermeture) de la bande de localisation. Ce phénomène peut correspondre à une ouverture de fissure,
- $\mathbf{g}$  incliné par rapport à  $\mathbf{n}$  : le béton est un des matériaux (tels que les roches ou encore les céramiques) fissurant en mode dit mixte.

### 2.5.2.3 Principe variationnel

La méthode des éléments finis est basée sur une formulation faible des relations entre les champs de déplacements et de déformations, des conditions d'équilibre, des lois de comportement et des conditions imposées sur les limites du domaine mécanique étudié.

Excepté sur la frontière  $\partial\Omega_u$  sur laquelle les déplacements sont imposés, la formulation faible du problème, équivalente aux équations 2.19, 2.20 et 2.22, est connue sous le nom de fonctionnelle de Hu-Washizu et peut s'écrire sous la forme [76, 102] :

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{E}^T \mathbf{T} + \int_{\Omega} \delta\mathbf{T}^T (\text{sym Grad}\mathbf{u} - \mathbf{E}) = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} + \int_{\partial\Omega_t} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} \quad (2.40)$$

$\forall \delta\mathbf{T}, \delta\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{E}$  : variations admissibles de champs de contrainte, déplacement et déformation.

Contrairement à la formulation éléments finis usuelle, les champs de déplacements, déformations et contraintes sont interpolés non seulement à partir de degrés de liberté définis aux nœuds du maillage, mais aussi grâce à des champs incompatibles traduisant la discontinuité [50, 76, 196, 102] :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{N}_c\mathbf{d}_c \quad (2.41a)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e} = \text{sym Grad}\mathbf{u} \quad (2.41b)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{s} \quad (2.41c)$$

Les matrices colonnes  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{s}$  sont les degrés de liberté correspondant aux déplacements nodaux, tandis que  $\mathbf{d}_c$  et  $\mathbf{e}$  sont les paramètres d'enrichissement.  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{S}$  sont respectivement les matrices d'interpolation des déplacements, déformations et contraintes tandis que les matrices  $\mathbf{N}_c$  et  $\mathbf{G}$  sont les matrices d'enrichissement correspondantes.

En introduisant les expressions 2.41 dans la formulation 2.40, et en tenant compte de l'indépendance des variations  $\delta\mathbf{T}$ ,  $\delta\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{E}$ , on obtient un système d'équations linéaires liant degrés de liberté et matrices d'interpolation :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{T} (\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) = \mathbf{f}_{ext} \quad (2.42a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{T} (\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) - \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{S}\mathbf{s} = 0 \quad (2.42b)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G}\mathbf{e} = 0 \quad (2.42c)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T \mathbf{S}\mathbf{s} = 0 \quad (2.42d)$$

Avec  $\mathbf{B}_c = \text{sym Grad}\mathbf{B}$ , et  $\mathbf{f}_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}\mathbf{t}$  (on suppose qu'aucun effort n'est imposé à l'intérieur de la zone de localisation).

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle en utilisant la loi de comportement 2.21 [102].

Les champs de déplacements et de déformations peuvent être discontinus. On peut déduire de 2.42a les expressions de  $\mathbf{d}_c$  et  $\mathbf{e}$  en fonction des seuls degrés de liberté usuels  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{s}$ . Les paramètres d'enrichissement n'apparaissent alors pas explicitement dans la formulation obtenue.

Cette dernière est valable pour des interpolations à la fois de déplacements et de déformations. Mais en pratique, tous les champs ne sont pas nécessairement interpolés.

#### 2.5.2.4 Enrichissement des déformations

Dans ce type d'approche, seules les déformations sont cinématiquement enrichies. Les autres termes d'enrichissement disparaissent alors de la formulation. Le « patch test » (vérification concernant la capacité à reproduire un champ de contrainte uniforme) implique  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$  et impose pour  $\mathbf{G}$  une condition de moyenne nulle sur le volume de l'élément. La formulation se réduit donc aux équations [76, 50, 196, 102, 145] :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{T} (\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) = \mathbf{f}_{ext} \quad (2.43a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{T} (\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) = 0 \quad (2.43b)$$

Avec

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \mathbf{G}\mathbf{e} = 0 \quad (2.44)$$

Cependant, on peut faire face dans ce type d'interpolation à un problème de « blocage » : lors du calcul éléments finis, les déformations (et donc les contraintes) sont relaxées dans le reste de la structure, ce qui défavorise la propagation de la fissure déjà initiée. Même si la condition de continuité de traction à la frontière est satisfaite, il y a alors une mauvaise représentation cinématique de la discontinuité de déplacement ou de déformation [50, 196, 102, 105].

### 2.5.2.5 Enrichissement des déplacements

Le seul champ enrichi est ici celui des déplacements à partir duquel on calcule le champ de déformation. L'équation 2.42d étant satisfaite,  $\forall \mathbf{S}$  en posant  $\mathbf{d} = \mathbf{e}$ , on montre aisément que la formulation de ce problème est identique à celle décrite précédemment [50] à cela près que dans la première,  $\mathbf{G}$  satisfait une condition de moyenne nulle sur l'élément, alors qu'ici [76, 50, 102] :

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}_c \quad (2.45)$$

Les performances de cette méthode sont contraires à celles de l'enrichissement des déformations : la discontinuité des déplacements est bien représentée (il n'y a pas de problème de blocage), mais la condition de continuité de traction n'est pas satisfaite [50, 196, 102, 145, 105].

### 2.5.2.6 Enrichissement mixte

Ce type de formulation vise à associer les deux points forts des deux approches précédentes. Dans [196, 105], on impose à la fois  $\mathbf{G} = \mathbf{B}_c$  dans l'équation d'interpolation de déformation 2.42c, et  $\int_{\Omega} \mathbf{G} \mathbf{e} = 0$  dans l'équation 2.43a.

Une méthode de calcul par enrichissement des déplacements est développée tout en utilisant une formulation de type « enrichissement des déformations » pour le calcul des efforts internes. L'espace des déformations résultant n'est alors pas forcément un champ de déformation admissible.

Ortiz et al. utilisent dans [145] une formulation basée sur un enrichissement de déplacements, en limitant à un le nombre de discontinuités par maille. La largeur de la bande de localisation dépend alors fortement du maillage utilisé [50].

Dans ce type d'approche, les directions de fissures sont souvent faiblement approximées, et les calculs mènent parfois à des problèmes de blocage [50].

Belytschko et al. [21] remédient à ce problème en autorisant l'initiation de deux bandes de localisation dans un même élément. Cet artifice permet non seulement de limiter la dépendance au maillage, mais aussi d'initier une seconde fissure « artificielle » en cas de blocage. L'algorithme en est cependant d'autant plus compliqué et il peut se présenter des problèmes de convergence.

## Conclusion

Nous avons présenté les principales méthodes théoriques et numériques permettant de décrire le comportement du béton sous chargement mécanique lent, à température constante.

On se propose de mettre au point une nouvelle approche à ce problème : l'enrichissement sera effectué au sein même de la représentation du corps micro-fissuré, et non pas lors de sa modélisation éléments finis. La mécanique des milieux continus usuelle n'est alors plus applicable :

on fait appel à la théorie des milieux à microstructure permettant de considérer des degrés de liberté supplémentaires à la cinématique classique du corps. On utilisera la théorie des forces configurationnelles afin de décrire la propagation du champ de fissures dans le corps. Ces deux théories sont présentées dans le chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Théories mécaniques de référence

### Introduction

On désire mettre en place un modèle décrivant l'évolution d'un corps micro-fissuré soumis à un chargement mécanique.

On fera appel non pas à la mécanique des milieux continus usuelle, mais à la théorie des milieux à microstructure qui permet d'enrichir la cinématique du point : on associera à tout point  $x$  du corps micro-fissuré une fissure et on introduira dans le modèle une variable cinématique pour la représenter. Cette variable engendre des équations d'équilibre et des conditions aux limites qui lui sont propres.

Il se posera alors le problème de la représentation de la propagation de ce champ de micro-fissures : on fera appel à la théorie des forces configurationnelles.

Ces deux théories étant peu communes, il est nécessaire de faire une présentation détaillée de leurs principes.

### 3.1 Milieux à microstructure

#### Introduction

La plupart des problèmes mécaniques se situe dans le cadre d'application de la mécanique des milieux continus en déformations finies : considérons un corps déformable  $\mathcal{B}$ , on décrit son évolution en étudiant les déplacements des points  $\mathfrak{x} \in \mathcal{B}$ . Le milieu est considéré comme homogène : chaque point de  $\mathcal{B}$  est supposé au centre d'un volume élémentaire de référence dont les dimensions sont infiniment grandes devant les hétérogénéités du matériau, mais infiniment petites devant les longueurs caractéristiques du chargement. On travaille alors sur le milieu dit de Cauchy : les seuls degrés de liberté de  $\mathfrak{x}$  sont ceux de translation dans l'espace Euclidien physique  $\mathcal{E}$ . Les mouvements microscopiques sont négligés.

L'image de  $\mathcal{B}$  dans l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  passe d'une configuration de référence arbitraire notée  $\Omega_0$  à la configuration actuelle  $\Omega$  par une transformation  $x$  dont le gradient est nommé  $\mathbf{F} := \text{Grad}x$ .

On admet l'abus de notation pour  $x$  qui indique en même temps la fonction et sa valeur.

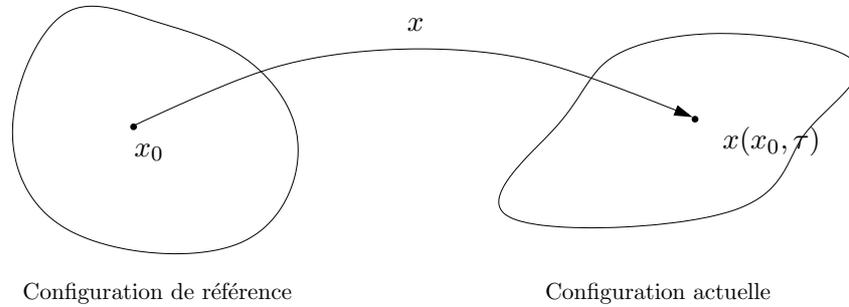


FIG. 3.1. Evolution de  $\mathcal{B}$  : Configurations de référence et actuelle

Cette représentation ne peut cependant être appliquée à tous les matériaux. Il est par exemple nécessaire de tenir compte des rotations des cristaux constitutifs des cristaux liquides [32, 33, 72], ou encore des déformations des constituants d'un matériau (milieux micromorphes [61, 55, 73]). Ces considérations mènent à des théories dans lesquelles le mouvement de translation n'est plus le seul degré de liberté (voir figure 3.2), l'étude est menée sur des milieux continus dits à microstructure.

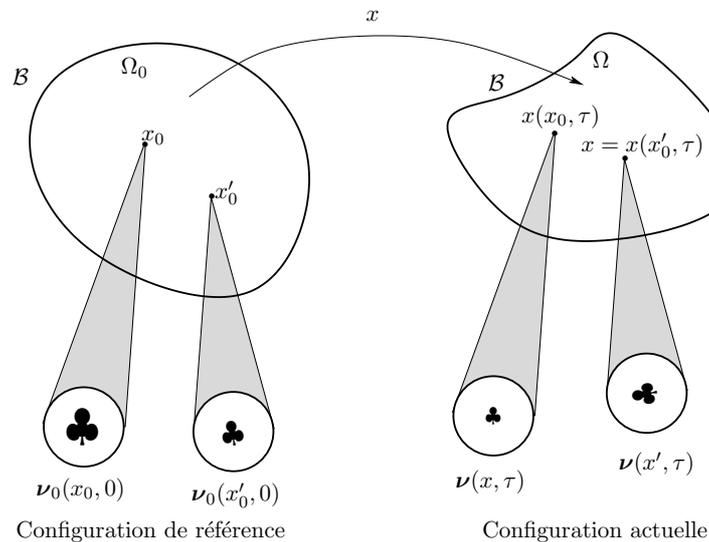


FIG. 3.2. Milieu à microstructure

Dans [36], Capriz présente les principes généraux de la théorie des milieux à microstructure. Cinématique, équations bilans et thermodynamique sont étudiées dans le but d'incorporer l'influence des évolutions microstructurelles.

### 3.1.1 Cinématique

#### 3.1.1.1 Configurations actuelle et de référence

Toute microstructure influant sur l'évolution du corps peut être représentée par un nombre  $m$  de paramètres  $\nu^\alpha$  ( $\alpha \in [1, m]$ ). L'ensemble des  $m$   $\nu^\alpha$  peut être considéré comme les coordonnées dans une carte de l'élément  $\nu$  d'une variété différentielle  $\mathcal{M}$  de dimension finie  $m$ . On appelle  $\nu$  variable de microstructure ou simplement microstructure.

Un milieu continu peut donc être défini comme un corps  $\mathcal{B}$  constitué de points matériels  $x$  auxquels on associe une microstructure  $\nu$ . Pour un placement de référence  $x_0$  on a :

$$x = x(x_0, \tau), \quad \nu = \nu(x, \tau) \quad (3.1)$$

#### 3.1.1.2 Dépendance vis-à-vis de l'observateur

Considérons un observateur se déplaçant grâce au mouvement de solide rigide (R) caractérisé par la vitesse de translation  $\mathbf{c}(t)$  et la vitesse de rotation  $\mathbf{w}(t)$ . Les coordonnées  $x$  d'un point observé avant le mouvement diffèrent des coordonnées  $x_{R(t)}$  de  $x$  une fois l'observateur déplacé. Pendant le mouvement (R), la célérité de ce point s'exprime par :

$$\dot{x}_{(R)}(x_0, t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{w}(t) \cdot (x_{R(t)}(x_0, t) - x(x_0, t)) \quad (3.2)$$

Supposons que  $x$  appartienne au corps déformable de microstructure  $\nu$ . La valeur de  $\nu$  associée au point  $x$  est supposée inchangée par translation de l'observateur, mais est modifiée par une rotation de vecteur caractéristique  $\mathbf{q}$ .

Le tenseur infinitésimal de rotation est un opérateur évaluant l'influence du mouvement de l'observateur sur la valeur observée de la microstructure :

$$\mathcal{A}(\nu, t) := \left( \frac{d\nu_{(\mathbf{q})}(x, t)}{d\mathbf{q}} \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \quad (3.3)$$

*Remarque :*

En notant  $\mathbf{Q}$  le générateur de rotation caractéristique de (R) ( $\mathbf{Q} = e^{-\mathbf{q}}$ ), on peut aussi définir  $\mathcal{A}$  par :

$$\mathcal{A}(\nu, t) := \left( \frac{d\nu_{(\mathbf{Q})}(x, t)}{d\mathbf{Q}} \right) \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{I}} \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Energie cinétique/Actions inertielles

L'énergie cinétique d'un point de  $\Omega$  est supposée décomposée en une contribution macroscopique due au mouvement du point, et une contribution microscopique due à la modification de la microstructure :

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \kappa(\nu, \dot{\nu}), \quad \kappa(\nu, \dot{\nu}) \text{ tel que } \kappa(\nu, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \dot{\nu}^2} \neq 0 \quad (3.5)$$

On veut que cette fonction vérifie le théorème de l'énergie cinétique. A cette fin, on se donne une densité d'actions inertielles appropriée  $\alpha$  telle que :

$$\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \kappa(\boldsymbol{\nu}, \dot{\boldsymbol{\nu}})\right)' = m \cdot \dot{x} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}} \quad (3.6)$$

Cette équation est vérifiée à condition que :

$$m = \ddot{x}, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \dot{\boldsymbol{\nu}}}\right)' - \left(\frac{\partial \chi}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) \quad (3.7)$$

Ces deux quantités représentent les densités massiques des actions inertielles macroscopique ( $\ddot{x}$ ) et microscopique ( $\boldsymbol{\alpha}$ ).

$\chi$  est la densité de co-énergie cinétique définie par la relation :

$$\kappa = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \dot{\boldsymbol{\nu}}}\right) \dot{\boldsymbol{\nu}} - \chi \quad (3.8)$$

### 3.1.3 Equations de bilan

Les équations d'équilibre macroscopique usuelles restent valables dans le cadre de la mécanique des milieux continus .

#### 3.1.3.1 Conservation de la masse

L'équation est en représentation eulérienne ( $\rho$  densité actuelle) :

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{x} = 0 \quad (3.9)$$

Ou en représentation lagrangienne ( $\rho_0$  densité de référence) :

$$\rho \iota = \rho_0; \quad \iota := \det \mathbf{F} \quad (3.10)$$

#### 3.1.3.2 Equations d'équilibre dynamique

Concernant l'équation d'équilibre dynamique, il est nécessaire de mettre en place un nouveau système de forces agissant au niveau de la microstructure.

Rappelons tout d'abord l'équation de Cauchy qui reste valable pour des conditions d'équilibre associées au mouvement de translation des points matériels.

Pour tout corps soumis à un champ extérieur de force massique  $\mathbf{b}$  et un effort surfacique  $\mathbf{t}$  appliqué sur le contour, il existe un tenseur  $\mathbf{T}$  tel que  $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  est la force exercée sur l'unité de surface de normale  $\mathbf{n}$ , en tout point du corps de  $\Omega \cup \partial\Omega$ . Pour des fonctions  $\dot{x}$  et  $\mathbf{T}$  régulières, on a :

$$\rho \ddot{x} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{T} \quad (3.11)$$

Par analogie avec cette dernière équation, on postule l'équilibre micro-mécanique suivant :

$$\rho \boldsymbol{\alpha} = \rho \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\zeta} + \operatorname{div} \mathcal{S} \quad (3.12)$$

- $\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \nu}\right)' - \left(\frac{\partial \chi}{\partial \nu}\right)$  : densité par unité de masse de micro inertie, conformément au §3.1.2,
- $\boldsymbol{\beta}$  : densité par unité de masse des actions extérieures sur la microstructure (par exemple, forces de nature électromagnétique agissant sur une microstructure de dipôle),
- $-\zeta$  : densité par unité de volume des actions micro-structurelles interne dites force équilibrée interne.
- $\mathcal{S}$  : opérateur linéaire tel que sur un élément de surface de normale extérieure  $\mathbf{n}$ , les actions exercées sur la microstructure, à travers l'élément sont données par  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifiant  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{S}\mathbf{n}$ .

### 3.1.3.3 Principe des puissances virtuelles

Selon [36], le principe des puissances virtuelles est applicable à un corps déformable de microstructure  $\nu$ .

Le premier axiome de ce principe postule l'égalité entre les puissances d'accélération et la somme des puissances des efforts intérieurs et extérieurs. On déduit de 3.9, 3.11 et 3.12 le théorème de l'énergie cinétique à un milieu à microstructure :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \kappa(\boldsymbol{\nu}, \dot{\boldsymbol{\nu}}) \right) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{b} \cdot \dot{x} + \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}) + \int_{\partial \Omega} (\mathbf{t} \cdot \dot{x} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}) - \int_{\Omega} (\mathbf{T} \cdot \text{grad} \dot{x} + \zeta \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathcal{S} \cdot \text{grad} \dot{\boldsymbol{\nu}}) \quad (3.13)$$

Les termes de cette équation sont aisément identifiables :

- $\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \kappa(\boldsymbol{\nu}, \dot{\boldsymbol{\nu}}) \right)$  : somme des variations d'énergies cinétiques macroscopique et microscopique,
- $\int_{\Omega} \rho(\mathbf{b} \cdot \dot{x} + \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}) + \int_{\partial \Omega} (\mathbf{t} \cdot \dot{x} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}})$  : puissance des actions extérieures, séparée en une partie volumique et une partie surfacique,
- $-\int_{\Omega} (\mathbf{T} \cdot \text{grad} \dot{x} + \zeta \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathcal{S} \cdot \text{grad} \dot{\boldsymbol{\nu}})$  : puissance des actions intérieures.

Le second axiome suppose que la puissance des efforts intérieurs est nulle pour tout mouvement de solide rigide, 3.13 implique la condition suivante pour les champs  $\mathbf{T}$ ,  $\zeta$  et  $\mathcal{S}$  :

$$\mathbf{e}\mathbf{T} = \mathcal{A}^T \zeta + (\text{grad} \mathcal{A}^T) \mathcal{S} \quad (3.14)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équilibre à la rotation. On remarque que le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  est symétrique non seulement dans le cas de la mécanique des milieux continus (lorsque la microstructure est absente), mais aussi dès que le tenseur infinitésimal de rotation  $\mathcal{A}$  est nul (la valeur de la microstructure étant alors indépendante du mouvement de l'observateur).

### 3.1.4 Contraintes internes

Que ce soit en mécanique des milieux continus (dans l'espace de Cauchy) ou dans le cas des milieux à microstructure, les contraintes peuvent être décomposées en une partie active ( $a$ ) et une partie réactive ( $r$ ). Ici :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^r + \mathbf{T}^a, \quad \zeta = \zeta^r + \zeta^a, \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}^r + \mathcal{S}^a \quad (3.15)$$

Dans le cas de liaisons parfaites (comme par exemple l'incompressibilité du milieu), on suppose que la partie réactive de la puissance des efforts intérieurs est nulle quelque soit le mouvement compatible avec la liaison cinématique.

La partie active est elle déterminée par des lois de comportement.

### 3.1.5 Premier principe de la thermodynamique

Négligeons l'ensemble des phénomènes microstructurels liés aux évolutions thermiques et supposons que les quantités thermodynamiques usuelles restent définies dans le cadre de la mécanique des milieux à microstructure.

Les bilans d'énergie interne et d'entropie restent donc applicable dans le cadre de la mécanique des milieux à microstructure : Le bilan d'énergie interne est :

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} + \rho h \quad (3.16a)$$

tandis que le bilan d'entropie est :

$$\rho \dot{\zeta} = - \text{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} + \frac{r}{\theta} + \eta \quad (3.16b)$$

Où :

- $\mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v}$  : puissance des efforts intérieurs,
- $\mathbf{q}$  : apport surfacique de chaleur,
- $h$  : apport massique de chaleur,
- $\theta$  : température absolue,
- $\zeta$  : Entropie spécifique,
- $\eta$  : Production d'entropie,
- $\frac{h}{\theta}$  : Apport externe volumique d'entropie,
- $\frac{\mathbf{q}}{\theta}$  : Vecteur flux d'entropie.

On applique donc la conservation de l'énergie 3.16a en tenant compte de la puissance des efforts appliquées sur la microstructure :

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} + \zeta \cdot \dot{\nu} + \mathcal{S} \cdot \text{grad} \dot{\nu} - \text{div} \mathbf{q} + \rho h \quad (3.17)$$

### 3.1.6 Second principe de la thermodynamique/Inégalité de Clausius-Duhem

Le second principe de la thermodynamique impose  $\eta \geq 0$ . Faisons le bilan d'entropie du corps de microstructure  $\nu$ , l'inégalité de Clausius-Duhem impose (grâce à 3.17) :

$$\mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} + \zeta \cdot \dot{\nu} + \mathcal{S} \cdot \text{grad} \dot{\nu} - \rho(\dot{\psi} + \zeta \dot{\theta}) - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \text{grad} \theta \geq 0 \quad (3.18)$$

L'évolution du problème est déterminée par les hypothèses cinématiques et thermodynamiques : les hypothèses cinématiques portent sur les fonctions assignées à  $\mathcal{A}(\boldsymbol{\nu})$ ,  $\kappa(\boldsymbol{\nu}, \dot{\boldsymbol{\nu}})$  et déterminent directement les parties réactives des contraintes (voir §3.1.4) tandis que les hypothèses thermodynamiques concernent l'énergie libre  $\Psi$ .

Supposons que  $\Psi$  ne dépende que des variables  $\mathbf{F}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$ ,  $\text{grad}\boldsymbol{\nu}$ ,  $\theta$  et  $\text{grad}\theta$  :

$$\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}, \text{grad}\boldsymbol{\nu}, \theta, \text{grad}\theta) \quad (3.19)$$

On déduit grâce à la méthode de Coleman-Noll les expressions du tenseur de contrainte de Cauchy, de la densité des actions microstructurelles internes et du tenseur de contraintes exercées sur la microstructure :

$$\mathbf{T} = \rho \left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{F}} \right) \mathbf{F}^T \quad (3.20a)$$

$$\zeta = \rho \left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \quad (3.20b)$$

$$\mathcal{S} = \rho \left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \text{grad}\boldsymbol{\nu}} \right) \quad (3.20c)$$

Au vu des principes de la mécanique linéaire de la rupture (voir 2.2 et plus particulièrement l'équation 2.5) on remarque que dans le cas où  $\boldsymbol{\nu}$  est une variable associée à une propagation de fissure,  $\zeta$  tient le rôle du taux d'énergie  $G_c$  relâchée lors de la création de surface  $\partial\boldsymbol{\nu}$ .

## Conclusion

La théorie des milieux à microstructure permet donc d'enrichir la cinématique d'un corps déformable. Au même titre que l'on dispose d'équations d'équilibre régissant le mouvement macroscopique des points du corps, on dispose d'équations d'équilibre régissant l'évolution de la microstructure.

## 3.2 Forces configurationnelles

### Introduction

La théorie des forces configurationnelles a été introduite dans les années cinquante par Eshelby dans des articles tels que [62, 63] ou encore [11]. Il y étudie l'évolution de solides élastiques et démontre que pour tout corps déformable homogène  $\mathcal{B}$ , il existe un tenseur  $\mathbf{C}_E$  exprimé par :

$$\mathbf{C}_E = \Psi \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{P}$$

dont la divergence est nulle dans  $\Omega$  à moins que le solide ne soit soumis à une force distribuée à l'origine d'un champ de contraintes internes.

Il désigne par singularité toute partie de  $\Omega$  sur laquelle les conditions d'équilibre sont satisfaites, mais pas les conditions de compatibilité. Dans le cas d'un corps élastique comportant une singularité mobile  $S$ , il montre que l'on peut exprimer une force fictive  $\mathbf{f}$  s'appliquant sur  $S$  par l'intégrale de surface :

$$\mathbf{f} = \int_{\Sigma} \mathbf{C}_E \mathbf{n}$$

où  $\Sigma$  est une surface quelconque de normale  $\mathbf{n}$  entourant la singularité  $S$ .

Cette relation est valable pour différents types de singularités (fissures rectilignes, inclusions sphériques, dislocations, défauts volumiques ou surfaciques). Elle peut s'appliquer à des calculs aussi bien en régime statique que dynamique [11, 62, 63].

Dans [86], Gurtin suppose en plus que ce tenseur est soumis à un groupe d'équations de bilan et de conditions aux limites, au même titre que les tenseurs de contrainte de la mécanique des milieux continus. Tout corps est alors supposé évoluer sous l'action :

- des quantités configurationnelles agissant sur le système de défauts inclus dans le corps : idéalement il n'y a pas de mouvement des points du corps, mais uniquement propagation des défauts. On passe d'une configuration initiale de référence à une configuration dite intermédiaire.
- des quantités usuelles de la mécanique des milieux continus (quantités matérielles [126]) : elles interviennent dans la transformation de la configuration intermédiaire en configuration actuelle.

Ces résultats ont été repris dans l'étude de différents milieux tels que les milieux multi-phasiques [87, 123] ou plastiques [126]. Mais nous nous intéresserons plus particulièrement à son application au phénomène de la fissuration qui a principalement été développé par Gurtin et Podio-Guidugli dans [88, 89].

La suite de cette partie reprend les principaux résultats exposés dans ces différents articles.

### 3.2.1 Principe des forces configurationnelles appliqué à la propagation de fissure

L'évolution d'un solide fissuré est ici scindé en deux processus distincts (*cf.* figure 3.3) :

- Fissuration dans la configuration initiale du solide : les forces dites configurationnelles influent uniquement sur la cohésion des molécules du matériau, elles dirigent le phénomène de propagation de la fissure, mais n'induisent aucun mouvement.
- Evolution mécanique standard : les forces et contraintes usuelles de la mécanique des milieux continus agissent sur la configuration intermédiaire du système. Elles induisent un champ de déformation au sein du solide mais ne propagent pas la ligne de discontinuité.

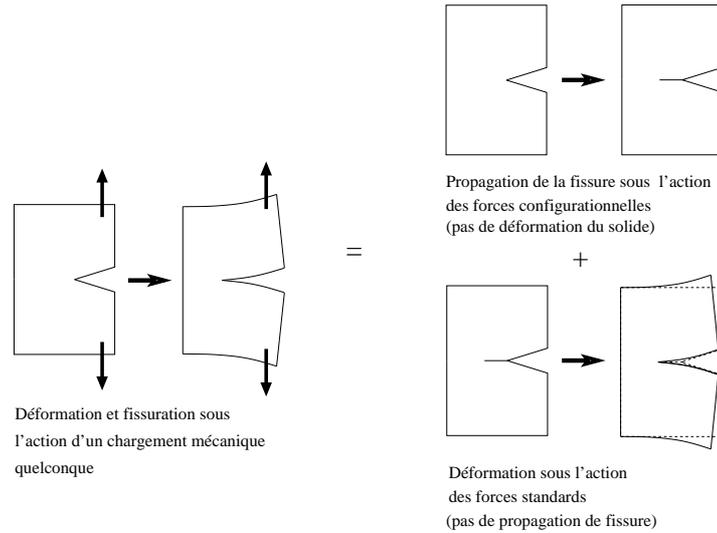
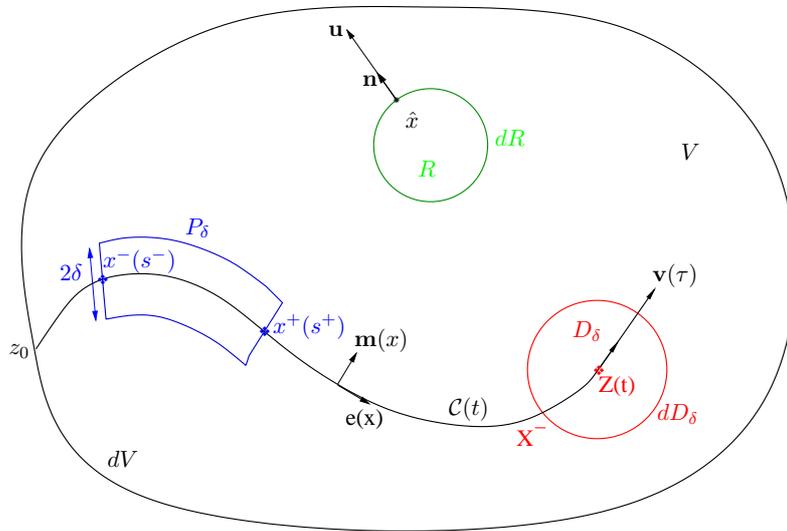


FIG. 3.3. Principe des forces configurationnelles et standards

### 3.2.2 Géométrie

Considérons le voisinage  $V$  d'une fissure  $\mathcal{C}(\tau)$  d'extrémité  $z(\tau)$ .  $V$  est choisi tel que la fissure intersecte  $dV$  en un unique point  $z_0$ . La fissure  $\mathcal{C}$  est paramétrée par le scalaire  $s$ , et en tout point  $x \in \mathcal{C}$ , la normale à  $\mathcal{C}$  est notée  $\mathbf{m}(x)$ , tandis que la tangente est notée  $\mathbf{e}(x)$  (cf. figure 3.4) :


 FIG. 3.4. Cinématique de  $\mathcal{B}$  (Image inspirée de [88])

On caractérise le domaine par trois volumes de contrôle  $R(\tau)$  (voir figure 3.4) :

- volume de contrôle loin de la fissure  $R(\tau)$ ,
- volume de contrôle autour de la fissure  $P_\delta$  : on considère un volume entourant une portion de la fissure mais non la pointe, et n'intersectant  $\mathcal{C}$  qu'en deux points notés  $x^-$  d'abscisse  $\zeta^-$ , et  $x^+$  d'abscisse  $\zeta^+$  ( $\zeta^- < \zeta^+ \neq s(z(\tau))$ ).

- volume de contrôle autour de la pointe de fissure : ce volume de contrôle suit la pointe de fissure dans son mouvement.  $R(\tau)$  peut être défini comme une sphère  $D_\delta$  (un disque dans le cas d'un espace 2D) centrée en  $z(\tau)$ , et de rayon  $\delta$ .  $dD_\delta$  intersecte  $\mathcal{C}$  en un unique point  $x^-$  d'abscisse  $\zeta^-$ .

Les deux volumes de contrôle relatifs à la fissure permettront d'étudier respectivement le comportement singulier de  $\mathcal{C}(\tau)$ , et  $z(\tau)$  en faisant tendre le paramètre  $\delta$  vers 0 (cf. §3.2.3.4).

### 3.2.3 Cinématique

Le principe des forces configurationnelles présenté dans [86, 88] étudie sous deux aspects distincts l'évolution d'un solide éventuellement déformable : la fissuration (passage de la configuration initiale à la configuration intermédiaire) et la déformation du corps.

La cinétique associée à cette approche décrit ces deux évolutions [88, 89, 108] :

#### 3.2.3.1 Propagation de fissure

La propagation de la fissure est supposée s'effectuer à travers un corps  $\mathcal{B}$  non déformé. Le mouvement fictif de la pointe de la fissure est alors décrit par sa position  $z$  exprimée dans la configuration de référence du corps. On note  $\mathbf{v}_{fiss}$  la vitesse de propagation de la pointe :

$$\mathbf{v}_{fiss}(z(\tau), \tau) = \frac{\partial z(\tau)}{\partial t} \quad (3.21)$$

$D_\delta$  (suivant la pointe de fissure) est animé par un mouvement de translation  $x(\tau) = x(t=0) + z(\tau) - z(t=0)$ . Pour tout point appartenant à sa frontière :

$$\mathbf{v}(x, \tau) = \frac{\partial x}{\partial t} = U_{\partial D_\delta} \mathbf{n}, \quad x \in \partial D_\delta \quad (3.22)$$

#### 3.2.3.2 Déformation du solide

Rappelons que la fonction définissant la déformation du corps  $\mathcal{B}$  est notée  $x$  et que son gradient est  $\mathbf{F}$ . Pour tout point situé en  $x_0$  dans la configuration de référence, on note  $x$  sa position dans la configuration actuelle :

$$x = x(x_0, \tau)$$

La pointe de fissure  $z(\tau)$  se déplace dans la configuration déformée à une vitesse  $\bar{\mathbf{v}}_{fiss}$  :

$$\bar{\mathbf{v}}_{fiss}(z(\tau), \tau) = \frac{\partial x(z_0, \tau)}{\partial t}, \quad \text{tel que } x(z_0, \tau) = z(\tau) \quad (3.23)$$

Tout volume de contrôle  $D_\delta(\tau)$  entourant un point  $x(\tau)$  quelconque est déformé en un contour  $y(\partial D_\delta(\tau), \tau)$  dont tous les points ont une vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$  :

$$\bar{\mathbf{v}}(x, \tau) = \frac{\partial x(x_0(\tau), \tau)}{\partial t}, \quad x \in \partial D_\delta(\tau) \quad (3.24)$$

### 3.2.3.3 Paramétrisation

Considérons la cinématique décrite précédemment : tout volume de contrôle  $R(\tau)$  est paramétré par la relation :

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}\mathbf{v} \quad (3.25)$$

$\dot{\mathbf{x}}$  est le taux de transformation du volume de contrôle  $R(\tau)$ , tandis que  $\mathbf{F}\mathbf{v}$  est la vitesse d'entraînement induite par la déformation du solide.

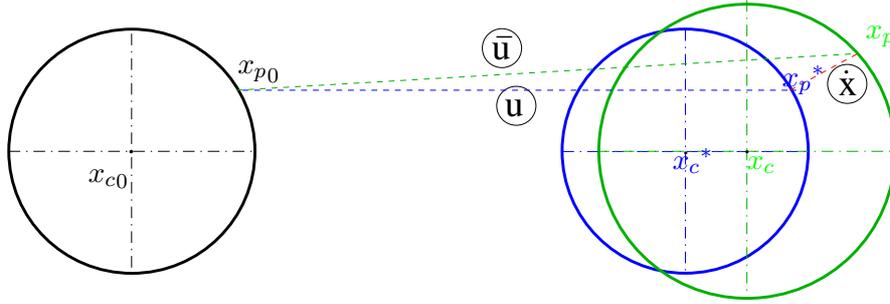


FIG. 3.5. Cinématique d'un volume de contrôle

### 3.2.3.4 Notations

- $\mathcal{C}_{R(\tau)} = \mathcal{C}(\tau) \cap R(\tau)$
- $\mathcal{C}_{\delta(\tau)} = \mathcal{C}_{P_{\delta}(\tau)} = \mathcal{C}(\tau) \cap P_{\delta(\tau)}$  pour un volume de contrôle entourant la fissure ,
- $\mathcal{C}_{\delta(\tau)} = \mathcal{C}_{D_{\delta}(\tau)} = \mathcal{C}(\tau) \cap D_{\delta(\tau)}$  pour un volume de contrôle autour de la pointe de fissure .

On notera de plus  $u^{\pm}$  et  $u^{-}$  les vitesses scalaires définies par :

- $\frac{\partial x^{\pm}}{\partial t} = u^{\pm} \mathbf{e}^{\pm}$  dans le cas d'un volume de contrôle entourant la fissure
- $\frac{\partial x^{-}}{\partial t} = u^{-} \mathbf{e}^{-}$  dans le cas d'un volume de contrôle autour de la pointe de fissure .

Pour tout champ  $\gamma(s)$  (indépendant du temps) continu sur la fissure. On note :

$$\gamma_{\text{pointe}} = \gamma(\zeta(z)) \quad (3.26a)$$

$$\gamma^{\pm} = \gamma(\zeta(x^{\pm})) \text{ pour un volume de contrôle entourant la fissure} \quad (3.26b)$$

$$\gamma^{-} = \gamma(\zeta(x^{-})) \text{ pour un volume de contrôle autour de la pointe de fissure} \quad (3.26c)$$

On considérera dans la suite l'évolution de la fissure et de sa pointe en étudiant respectivement les volumes de contrôle  $P_{\delta}$  et  $D_{\delta}$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . On utilisera alors les notations et limites suivantes :

- lorsque cette limite existe, on note  $\oint_{\text{pointe}}$  la limite sur le contour de  $D_{\delta}$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ ,
- en considérant un volume de contrôle autour de la pointe de fissure ,
  - $\lim_{\delta \rightarrow 0}(\mathbf{v}(x^{-}(\tau))) = \mathbf{v}_{\text{fiss}}$
  - $\lim_{\delta \rightarrow 0}(\bar{\mathbf{v}}(y(x^{-}(\tau)))) = \bar{\mathbf{v}}_{\text{fiss}}$

### 3.2.3.5 Hypothèses

Pour toute fonction  $\varphi$  régulière, considérons un volume de contrôle entourant la fissure, on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{P_\delta(\tau)} \varphi \right\} = 0 \quad (3.27)$$

Pour tout champ  $\gamma(s)$  continu sur la fissure :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{C}_{D_\delta}(\tau)} \gamma \right\} = \gamma_{\text{pointe}} V - \gamma^- u^- \quad (3.28a)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{C}_{P_\delta}(\tau)} \gamma \right\} = \gamma^+ u^+ - \gamma^- u^- \quad (3.28b)$$

### 3.2.4 Forces

Les équations de bilan de forces configurationnelles et standards sont obtenues en considérant successivement les volumes de contrôle définis dans le §3.2.2 :

#### 3.2.4.1 Forces standards

**Présentation** Cet ensemble de forces est identique au système couramment utilisé dans la mécanique des milieux continus :

- Champs de contraintes de Piola-Kirchhoff :  $\mathbf{P}$  et de Cauchy :  $\mathbf{T}$  ( $\mathbf{P} = \iota \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$ )
- Force inertielle massique distribuée dans le volume :  $\mathbf{b}(x, \tau)$ ,
- Force d'inertie concentrée en pointe de fissure :  $\mathbf{i}(\tau)$ .

**Hypothèses** Comme dans la mécanique de la rupture, les lèvres de la fissure sont supposées libres de charge :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{T}(x \pm \epsilon \mathbf{m}(x), \tau) \mathbf{m}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}(\tau) \quad (3.29)$$

De nombreux calculs (équations de bilan, application du théorème de l'énergie cinétique et du second principe de la thermodynamique) sont menés à partir de l'étude des volumes de contrôle définis au §3.2.2. On postulera donc dans la suite les conditions de continuité suivantes :

- $\mathbf{b}$  est intégrable sur  $\Omega$ ,
- $\mathbf{T}$  est régulier loin de la fissure,
- $\int_{\partial D_\delta} |\mathbf{T} \mathbf{n}|$  est borné lorsque  $\delta \rightarrow 0$

### Equations de bilan

**Volumes de contrôle loin de la fissure et entourant la fissure :** Que ce soit pour un volume de contrôle loin de la fissure ou un volume de contrôle entourant la fissure les seuls champs intervenant dans les équations de bilan sont le champ de contrainte  $\mathbf{P}$  et le champ de forces distribuées  $\mathbf{b}$  :

$$\int_{\partial R(\tau)} \mathbf{P}\mathbf{n} + \int_{R(\tau)} \rho\mathbf{b} = 0 \quad (3.30)$$

Ce qui implique :

$$\text{Div}\mathbf{P} + \rho\mathbf{b} = 0; \quad \mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T \text{ pour un volume de contrôle loin de la fissure ,} \quad (3.31a)$$

$$[\mathbf{P}]\mathbf{m} + \rho\mathbf{b} = 0; \quad \mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T \text{ pour un volume de contrôle entourant la fissure} \quad (3.31b)$$

**Volume de contrôle entourant la pointe de fissure :** La force inertielle  $\mathbf{i}$  intervient dans les équations de bilan. Pour un volume de contrôle  $D_\delta(\tau)$ ,  $\delta$  tendant vers 0 :

$$\oint_{\text{pointe}} (\mathbf{P}\mathbf{n} + \mathbf{i}) = 0 \quad (3.32)$$

### 3.2.4.2 Forces configurationnelles

**Présentation** Le système de forces configurationnelles est semblable au système standard. Elles agissent sur la cohésion même de  $\mathcal{B}$  :

- Champ de contrainte sur le corps :  $\mathbf{C}(x, \tau)$ ,
- Force distribuée sur le corps :  $\mathbf{d}(x, \tau)$ ,
- Force distribuée sur  $\mathcal{C}(\tau)$  :  $\mathbf{h}(x, \tau)$ ,
- Force concentrée en pointe de fissure  $\mathbf{g}(\tau)$ , elle est scindée en une composante inertielle  $\mathbf{g}_{ext}(\tau)$ , et une composante interne  $\mathbf{g}_{int}(\tau)$ . Cette dernière maintient l'intégrité de la pointe de fissure lorsqu'elle est stationnaire.
- Contrainte de surface agissant sur les surface libres de la fissure :  $\mathbf{s}(s)$ .

**Hypothèses** De même que pour les forces standards, on suppose que les différents champs vérifient les assertions suivantes :

- $\mathbf{d}$  est intégrable sur le corps,
- $\mathbf{C}$  est régulier loin de la fissure,
- $\mathbf{h}$  est intégrable sur le corps,
- $\mathbf{s}$  est continu sur  $\mathcal{C}(\tau)$ .

### Equations de bilan

**Volume de contrôle loin de la fissure** Ici, seuls les champs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{d}$  interviennent :

$$\int_{\partial R(\tau)} \mathbf{C}\mathbf{n} + \int_{R(\tau)} \mathbf{d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}\mathbf{C} + \mathbf{d} = 0 \quad (3.33)$$

**Volume de contrôle entourant la fissure** Considérons  $P_\delta(\tau)$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$  et  $\zeta^+ \rightarrow \zeta^-$ , on a :

$$[\mathbf{C}]\mathbf{m} + \mathbf{h} + \frac{d\mathbf{s}}{d\zeta} = 0 \quad (3.34)$$

**Volume de contrôle autour de la pointe de fissure** Pour  $D_\delta$  entourant la pointe de fissure et  $\delta \rightarrow 0$  :

$$\oint_{\text{pointe}} \mathbf{C}\mathbf{n} + \mathbf{g}_{\text{int}} + \mathbf{g}_{\text{ext}} - \mathbf{s}_{\text{pointe}} = 0 \quad (3.35)$$

### 3.2.4.3 Energie cinétique - Quantité de mouvement

Le théorème de l'énergie cinétique et la conservation de la quantité de mouvement permettent de caractériser les efforts inertiels agissant sur  $\mathcal{B}$  :

#### Enoncé

- Théorème de l'énergie cinétique

Quelque soit le volume de contrôle  $R(\tau)$ , il postule l'égalité entre la puissance des efforts appliqués à  $R(\tau)$ , et l'opposé de la variation d'énergie cinétique  $K(R(\tau))$  :

$$\mathcal{P}_e(R(\tau)) + \mathcal{P}_i(R(\tau)) = -K(R(\tau)) \quad (3.36)$$

Pour tout volume de contrôle  $R(\tau)$  dont la cinématique est décrite en 3.2.3,  $K(R(\tau))$  est donnée par la formule :

$$K(R(\tau)) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_{R(\tau)} k \right\} - \int_{\partial R(\tau)} k U_{\partial R}, \quad k = \frac{1}{2} \rho |\dot{\mathbf{x}}|^2 \quad (3.37)$$

- Bilan de quantité de mouvement

Quelque soit le volume de contrôle  $R(\tau)$ , il postule l'égalité entre les efforts appliqués à  $R(\tau)$ , et la variation de quantité de mouvement exprimée par :

$$\mathcal{P}(R(\tau)) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_{R(\tau)} \mathbf{p} \right\} - \int_{\partial R(\tau)} \mathbf{p} U_{\partial R(\tau)}, \quad \mathbf{p} = \rho \dot{\mathbf{x}} \quad (3.38)$$

Gurtin et al. supposent que les efforts configurationnels produisent un travail apparaissant de façon explicite dans l'expression de la puissance des efforts appliqués à  $R(\tau)$ , ils en déduisent :

**Expression de  $\mathbf{b}$**  Considérons un volume de contrôle loin de la fissure, défini comme en §3.2.2. 3.38 implique :

$$\mathbf{b} = -\ddot{\mathbf{x}} \quad (3.39)$$

**Expression de  $\mathbf{i}$**  3.38 est appliqué à un volume de contrôle autour de la pointe de fissure  $D_\delta(\tau)$  :

$$\int_{D_\delta(t)} \rho \mathbf{b} + \mathbf{i} = - \int_{R(\tau)} \frac{d}{dt} p + \int_{\partial R(\tau)} p U_{\partial R} \quad (3.40)$$

On déduit de 3.39 et de la condition  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_{fiss}$  quand  $\delta \rightarrow 0$  :

$$\mathbf{i} = \oint_{pointe} \mathbf{p}(\mathbf{v}_{fiss} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.41)$$

$\mathbf{i}$  est équivalent au taux de relaxation de quantité de mouvement en pointe de fissure.

**Expression de  $\mathbf{g}_{ext}$**  Pour un volume de contrôle autour de la pointe de fissure à la limite  $\delta \rightarrow 0$ , 3.37 s'écrit :

$$\oint_{pointe} \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{fiss} + \mathbf{g}_{ext} \cdot \mathbf{v}_{fiss} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (-K(D_\delta(\tau))) \quad (3.42)$$

On déduit de 3.37 et 3.39 l'équivalence entre le travail total inertiel et le taux de relaxation d'énergie cinétique en pointe de fissure :

$$\mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{fiss} + \mathbf{g}_{ext} \cdot \mathbf{v}_{fiss} = \oint_{pointe} k(\mathbf{v}_{fiss} \cdot \mathbf{n}), \quad (3.43)$$

et la relation 3.41 permet de démontrer l'équivalence entre le travail inertiel configurationnel et le taux de relaxation d'énergie cinétique mesuré à partir de la pointe de fissure :

$$\mathbf{g}_{ext} \cdot \mathbf{v}_{fiss} = \mathbf{v}_{fiss} \cdot \oint_{pointe} k_{rel} \mathbf{n}, \quad k_{rel} = \frac{1}{2} \rho |\dot{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{v}}_{fiss}|^2 \quad (3.44)$$

## 3.2.5 Second principe de la thermodynamique

### 3.2.5.1 Enoncé

Le lien entre les évolutions standard et configurationnelle se fait en appliquant au système le second principe de la thermodynamique. Gurtin et Podio-Guidugli décomposent à cet effet l'énergie libre de Helmholtz en une partie  $\Psi$  définie en tout point du corps et une partie surfacique  $\psi$  et définie sur  $\mathcal{C}(\tau)$ . Comme en 3.2.4.3 on considère les contributions standard et configurationnelle :

$$\int_{\partial R(\tau)} (\mathbf{Pn} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{Cn} \cdot \mathbf{v}) + \int_{R(\tau)} \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathcal{P}_c(R(\tau)) - \frac{d}{dt} \left( \int_{R(\tau)} \Psi + \int_{\mathcal{C}_R(\tau)} \psi \right) \geq 0 \quad (3.45)$$

$\mathcal{P}_c(R(\tau))$  étant la puissance des efforts associés à la fissure selon le volume de contrôle considéré :

- pour un volume de contrôle loin de la fissure :  $\mathcal{P}_c(R(\tau)) = 0$ ,
- pour un volume de contrôle entourant la fissure :  $\mathcal{P}_c(R(\tau)) = \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{e}^+ u^+ - \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{e}^- u^-$ ,
- pour un volume de contrôle autour de la pointe de fissure :  $\mathcal{P}_c(R(\tau)) = \mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{fiss} + \mathbf{g}_{ext} \cdot \mathbf{v}_{fiss} - \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{e}^- u^-$ .

On remarque que les champs configurationnels  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{h}$  ne travaillent pas puisqu'il n'y a aucune propagation de défauts loin de la pointe de fissure.

### 3.2.5.2 Second principe appliqué à un volume de contrôle loin de la fissure

$$\frac{d}{dt} \int_{R(\tau)} \Psi \leq \int_{\partial R(\tau)} (\mathbf{Pn} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{Cn} \cdot \mathbf{v}) + \int_{R(\tau)} \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (3.46)$$

Cette relation doit être indépendante du choix de paramétrisation, et doit être en particulier valable pour celui défini en 3.2.3 [123, 86, 100]. Vérifier l'invariance de 3.46 équivaut donc à vérifier l'invariance de  $\mathcal{P}(R(\tau))$ . En utilisant 3.25, cette condition porte sur le terme :

$$\mathcal{P}(R(\tau)) = \int_{\partial R(\tau)} (\mathbf{Pn} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{Cn} \cdot \mathbf{v}) + \int_{R(\tau)} \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (3.47a)$$

$$= \int_{\partial R(\tau)} (\mathbf{Pn} \cdot \dot{\mathbf{x}} + ((\mathbf{F}^T \mathbf{P})\mathbf{n} + \mathbf{Cn}) \cdot \mathbf{v}) + \int_{R(\tau)} \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (3.47b)$$

La normale de  $\mathbf{v}$  étant déterminée par le mouvement de la fissure, le changement de paramétrisation influe uniquement sur sa composante tangentielle. L'invariance de 3.47b impose alors :

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{P} + \mathbf{C})\mathbf{n} \quad \text{parallèle à } \mathbf{n} \text{ quelque soit } \mathbf{n} \text{ normal à } \partial R(\tau), \quad (3.48)$$

Soit :

$$\mathbf{F}^T \mathbf{P} + \mathbf{C} = \pi \mathbf{I}, \quad \pi \text{ champ scalaire.} \quad (3.49)$$

La puissance des efforts intérieurs est dans ce cas :

$$\mathcal{P}(R(\tau)) = \int_{\partial R(\tau)} \mathbf{Pn} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \int_{R(\tau)} \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \int_{\partial R(\tau)} \pi U_{\partial R(\tau)} \quad (3.50)$$

Les deux premiers termes représentent le travail « matériel » tandis que  $\int_{\partial R(\tau)} \pi U_{\partial R(\tau)}$  compte pour le travail configurationnel.

Sachant que  $\frac{d}{dt} \int_{R(\tau)} \Psi = \int_{R(\tau)} \left\{ \frac{d}{dt} \Psi \right\} + \int_{\partial R(\tau)} \Psi U_{\partial R(\tau)}$ , 3.46 est satisfait pour tout volume de contrôle de vitesse normale  $U_{\partial R(\tau)}$  à condition que :

$$\pi = \Psi \quad (3.51)$$

Gurtin retrouve alors l'expression du tenseur de Eshelby valable alors quelque soit le type de matériau étudié.

### 3.2.5.3 Second principe appliqué à $P_\delta$ et $D_\delta$

En appliquant 3.45 à  $P_\delta$  et  $D_\delta$  tout en considérant la condition  $\delta \rightarrow 0$ , Gurtin et al. déduisent les relations suivantes :

- La tension superficielle est égale à l'énergie libre de surface :

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{e} = \psi \quad (3.52)$$

- La dissipation interne en pointe de fissure est négative, et seul  $\mathbf{g}_{int}$  en est responsable :

$$\mathbf{v}_{fiss} \cdot \mathbf{g}_{int} \leq 0 \quad (3.53)$$

### 3.2.5.4 Propagation de la fissure

Les quantités suivantes régissent la propagation de la fissure :

**Force de traction** La fissure se propage sous l'action du tenseur configurationnel  $\mathbf{C}$ , mais aussi sous l'action de l'énergie inertielle  $k_{rel}$ . On définit alors le vecteur force de traction  $\mathbf{j}$  :

$$\mathbf{j} := \oint_{pointe} \mathbf{C}\mathbf{n} + \oint_{pointe} k_{rel}\mathbf{n} == \oint_{pointe} \{(\Psi + k_{rel})\mathbf{I} - \mathbf{F}^T\mathbf{P}\}\mathbf{n} \quad (3.54)$$

*Remarque :*

Selon 3.35 :  $\oint_{pointe} \mathbf{C}\mathbf{n} + \mathbf{g} - \mathbf{s}_{pointe} = 0$ . L'action de  $\mathbf{C}$  est donc conjuguée avec l'action de  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{s}$ .

**Taux de relaxation d'énergie** Le taux de relaxation d'énergie sous l'action du vecteur  $\mathbf{j}$  est noté  $J$  :

$$J := \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{e} \cdot \oint_{pointe} \{(\Psi + k_{rel})\mathbf{I} - \mathbf{F}^T\mathbf{P}\}\mathbf{n} \quad (3.55)$$

Rappelons que  $\mathbf{s}$  produit de l'énergie libre  $\psi = \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}$ .

La fissure se propage dès que et tant que le phénomène de dissipation par fissuration est suffisant pour alimenter le phénomène de production d'énergie par  $\mathbf{s}$ . La condition de propagation est alors :

$$J \geq \psi_{pointe} \quad (3.56)$$

Ce critère correspond à celui de Griffith couramment utilisé dans la mécanique de la rupture.

**Force « conductrice »** On retrouve le même concept en définissant la force conductrice  $f$  :

$$f := J - \psi_{pointe} \quad (3.57)$$

3.55 et 3.52 permettent d'exprimer  $f$  sous la forme :

$$f = \mathbf{e} \cdot \left[ \oint_{pointe} (\Psi\mathbf{I} - \mathbf{F}^T\mathbf{P})\mathbf{n} + \mathbf{g}_{ext} - \mathbf{s}_{pointe} \right] \quad (3.58)$$

$\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{g}_{ext}$  donnent donc naissance dans un voisinage infinitésimal de la pointe de fissure, à une force configurationnelle non interne dont  $f$  est la composante tangentielle (suivant  $\mathbf{e}$ ).

On déduit de 3.58 l'équation d'équilibre liant  $f$  à la force configurationnelle s'opposant au mouvement  $\mathbf{g}_{int}$  :

$$f = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{g}_{int} \quad (3.59)$$

selon 3.53 :  $\mathbf{v}_{fiss} \cdot \mathbf{g}_{int} \leq 0$ , or la vitesse de propagation de la fissure est telle que :  $\mathbf{v}_{fiss} = V\mathbf{e}$ ,  $V > 0$ , 3.53 implique donc

$$f = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{g}_{int} \geq 0 \quad (3.60)$$

Cette dernière relation constitue une condition nécessaire pour la propagation de la fissure. Si 3.56 est satisfaite, il en est de même pour 3.60.

**Relations constitutives** Les relations constitutives permettent d'appliquer cette théorie à des problèmes mécaniques simplifiés.

$\theta$  étant l'angle formé par la tangente à la fissure et un axe fixe, il est usuel de postuler  $\psi_{pointe} = \psi_{pointe}(\theta)$  et d'exprimer la vitesse  $V$  de la fissure en fonction de  $\theta$  et  $f$ .

On suppose qu'il n'y a propagation de fissure que lorsque  $f$  est supérieur à une valeur seuil  $F(\theta)$ .

La cinétique de la fissure est alors caractérisée par :

$$V = 0 \text{ pour } f \leq f(\theta) \quad (3.61a)$$

$$V = \hat{V}(\theta, f) \text{ pour } f > F(\theta) \quad (3.61b)$$

$V(\theta, f)$  étant régulier à partir de  $f = F(\theta)$ , et  $\lim_{f \rightarrow F(\theta)} \hat{V}(\theta, f) = 0$ .

## Conclusion

La théorie des forces configurationnelles est originale car elle fait intervenir la notion de configuration intermédiaire : elle scinde de façon fictive l'évolution d'un corps mécanique en une partie configurationnelle correspondant à la propagation des défauts au sein du corps, et une partie matérielle correspondant uniquement à la déformation. Elle fait appel à une cinématique décrivant la propagation des défauts ainsi que le mouvement des points du corps. Au même titre que les contraintes duales des déplacements sont responsables de la déformation, les contraintes duales du paramètre traduisant la propagation des défauts sont responsables de la propagation.

## Conclusion

La théorie des milieux à microstructure et celle des forces configurationnelles s'opposent aux modèles à variables internes par le fait que les paramètres considérés sont des variables « observables » : elles sont associées à une production d'énergie intervenant explicitement dans l'expression de la puissance des efforts extérieurs et intérieurs [123]. Contrairement aux variables internes, elles sont déterminées par des équations de bilan ainsi que des conditions aux bords.

# Conclusion

Au vu de ce qui précède, on se propose de décrire le comportement hydromécanique du béton en utilisant les théories des milieux à microstructure et des forces configurationnelles :

- La description de type milieu à microstructure permet de décrire des milieux dont le seul mouvement des points est insuffisant dans la représentation du comportement. Les phénomènes décrits sont à priori réversibles, à moins d'y associer une variable interne de dissipation.
- Le concept configurationnel quant à lui permet de coupler l'évolution de défauts et la déformation d'un corps. Il scinde de façon fictive l'évolution de tout corps en une partie configurationnelle lors de laquelle il n'y a aucun mouvement de matière, et une partie « matérielle » traduisant la déformation.

On utilisera une description de type Kozeny Carman afin de déterminer la perméabilité du béton, à partir d'une représentation géométrique simplifiée du réseau poreux.

## Deuxième partie

# Exemples de modélisations envisageables dans le calcul de structures



# Table des Matières

---

<b>Introduction</b>	<b>65</b>
<b>4 Description hydro-mécanique du béton : Microstructure scalaire</b>	<b>66</b>
Introduction . . . . .	66
4.1 Géométrie . . . . .	66
4.2 Equations de bilan . . . . .	67
4.2.1 Conservation de la masse et du volume . . . . .	67
4.2.2 Energie cinétique, actions inertielles . . . . .	67
4.2.3 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	68
4.2.4 Parties actives et réactives . . . . .	68
4.2.5 Bilan . . . . .	68
4.3 Ecoulement de type Kozeny-Carman . . . . .	69
4.3.1 Volume représentatif du réseau poreux . . . . .	69
4.3.2 Hypothèses . . . . .	69
4.3.3 Résolution des équations de Stokes . . . . .	69
Conclusion . . . . .	70
<b>5 Description hydro-mécanique du béton : Microstructure vectorielle</b>	<b>71</b>
Introduction . . . . .	71
5.1 Ecoulement entre deux plans $\nu = w\mathbf{n}$ . . . . .	71
5.1.1 Géométrie . . . . .	71
5.1.2 Equations d'équilibre dynamique . . . . .	72
5.1.3 Description de type Kozeny-Carman . . . . .	74
5.2 Ecoulement dans des canaux . . . . .	76
5.2.1 Géométrie et paramètres caractéristiques de la microstructure . . . . .	76
5.2.2 Liaison cinématique . . . . .	76
5.2.3 Equations d'équilibre dynamique . . . . .	76
5.2.4 Description de Type Kozeny-Carman . . . . .	77
Conclusion . . . . .	77
<b>6 Liquide avec des bulles de vapeur : Microstructure scalaire et approche configurationnelle</b>	<b>78</b>
Introduction . . . . .	78
6.1 Géométrie et cinématique . . . . .	78
6.1.1 Géométrie . . . . .	78
6.1.2 Paramètres caractéristiques de la microstructure . . . . .	78

6.1.3	Hypothèses . . . . .	79
6.2	Equations de bilan macroscopiques . . . . .	79
6.2.1	Conservation de la masse . . . . .	80
6.2.2	Equations d'équilibre dynamique . . . . .	80
6.2.3	Changements de volume . . . . .	80
6.2.4	Liaisons cinématiques . . . . .	82
6.2.5	Bilan . . . . .	82
6.3	Description microscopique . . . . .	83
6.3.1	Equations sur une surface de discontinuité $\Gamma$ . . . . .	83
6.3.2	Relations constitutives . . . . .	86
6.4	Proposition de lois de comportement . . . . .	91
6.5	Energie cinétique, inertie . . . . .	92
6.5.1	Taux de variation des rayons intérieur et extérieur . . . . .	92
6.5.2	Energie cinétique . . . . .	92
6.5.3	Densité de coénergie . . . . .	93
6.5.4	Inertie . . . . .	93
6.6	Modèle complet . . . . .	94
Conclusion . . . . .		95
<b>Conclusion</b>		<b>96</b>

---

# Introduction

On développe dans cette partie quelques exemples de modèles simples dans lesquels on associe une approche de type milieu à microstructure, et une description de type Kozeny-Carman afin de décrire le comportement hydro-mécanique du béton. Cette étude nous servira à comprendre quelle géométrie adopter pour la microstructure du milieu micro-fissuré.

On désire enrichir ce type de modélisation en y associant une approche de type force configurationnelle, permettant de tenir compte de l'évolution de défauts au sein du domaine. Cette méthode est tout d'abord mise en place dans le cadre d'un liquide avec bulles (chapitre 6) : son évolution peut être décrite grâce aux translations habituelles dans l'espace euclidien plus une variable de microstructure scalaire ; sa description est donc plus simple que celle envisagée pour la description du corps fissuré (pour lequel la variable de microstructure sera à priori d'ordre supérieur à 0).

Dans cette partie, on étudiera les propriétés des points matériels du corps en les regardant comme des volumes élémentaires représentatifs de la microstructure du corps en le notant  $\omega(\mathfrak{x})$ , où  $\mathfrak{x}$  est un point matériel quelconque du corps étudié. Lorsque ce corps sera étudié comme un milieu continu, on considérera que chaque point  $\mathfrak{x}$  est identifié par la donnée d'une position  $x_0$  dans l'espace euclidien et on notera  $x$  la position actuelle dans ce même espace.

## Chapitre 4

# Description hydro-mécanique du béton : Microstructure scalaire

### Introduction

Au vu de l'étude bibliographique précédente, la porosité apparaît comme une variable naturelle à utiliser pour une première approche du problème. On supposera qu'en tout point  $x(x_0, \tau)$  du milieu poreux, on peut définir une valeur de porosité :  $\nu(x, \tau)$ .

Dans ce chapitre, on choisit  $\nu$  comme variable de microstructure.

### 4.1 Géométrie

Le corps étudié est représenté par un continuum de corps microscopiques dont la géométrie est supposée similaire à la représentation faite figure 4.1.

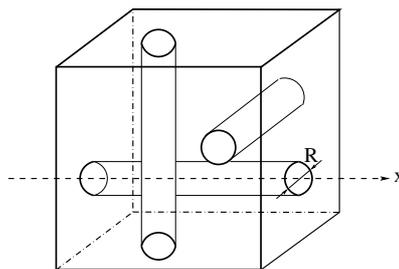


FIG. 4.1. Exemple de réseau poreux

On note  $v$  la variable caractéristique de la taille de  $\omega(\mathfrak{X})$  :

$$v := \frac{1}{V_{\text{apparent}}} \quad (4.1)$$

Où  $V_{\text{apparent}}$  fait référence au volume total de  $\omega(\mathfrak{X})$  : somme du volume de matière et du volume de vide créé par le pore de rayon  $R$ .

$$v = \frac{1}{L^3} \quad (4.2a)$$

$$\nu = \frac{3\pi R^2}{L^2} \quad (4.2b)$$

## 4.2 Equations de bilan

### 4.2.1 Conservation de la masse et du volume

La masse volumique de  $\mathcal{B}$  est :

$$\rho = \rho_m(1 - \nu) \quad (4.3)$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$((1 - \nu)\dot{\rho}_m - \dot{\nu}\rho_m) + \rho_m(1 - \nu) \operatorname{div}\dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (4.4)$$

On suppose que les variations de volume sont régies par le mouvement macroscopique de  $\Omega$  :

$$\iota = \frac{v_0}{v}, \quad \operatorname{div}\dot{\mathbf{x}} = -\frac{\dot{v}}{v} \quad (4.5)$$

Où  $\iota = \det \mathbf{F}$  et  $v_0$  est la valeur de  $v$  dans la configuration de référence.

### 4.2.2 Energie cinétique, actions inertielles

On suppose que l'énergie cinétique associée aux variations de porosité  $\dot{\nu}$  est quadratique de la forme :

$$\kappa = \frac{1}{2}\dot{\nu}^2 \quad (4.6)$$

La densité de co-énergie  $\chi$  vérifiant :

$$\kappa = \left( \frac{\partial \chi}{\partial \dot{\nu}} \right) \dot{\nu} - \chi,$$

on déduit aisément qu'elle est égale à  $\kappa$  :

$$\chi = \frac{1}{2}\dot{\nu}^2 \quad (4.7)$$

On note  $\alpha(\nu, \dot{\nu})$  la densité de micro-inertie associée au modèle. Elle est donnée en fonction de la densité de co-énergie  $\chi$  par :

$$\alpha = \left( \frac{\partial \chi}{\partial \dot{\nu}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right).$$

On a donc :

$$\alpha = \ddot{\nu} \quad (4.8)$$

### 4.2.3 Conservation de la quantité de mouvement

La variable de microstructure étant de dimension 0,  $\beta$  et  $\zeta$  sont eux aussi des scalaires, et  $\mathcal{S}$  est un tenseur d'ordre 1. Ils seront notés dans la suite :  $z$ ,  $b$  et  $\mathbf{s}$ .

Les valeurs de porosité sont inchangées par rotation de l'observateur. Le tenseur infinitésimal de rotation  $\mathcal{A} = \mathbf{a}$  qui traduit l'influence de ce mouvement sur les valeurs de la microstructure est donc nul :

$$\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Les équations d'équilibre s'écrivent donc :

$$\rho \ddot{x} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{T} \quad (4.10a)$$

$$\rho \ddot{\nu} = \rho \beta - z + \operatorname{div} \mathbf{s} \quad (4.10b)$$

$$\mathbf{e} \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (4.10c)$$

Avec  $\rho = \rho_m(1 - \nu)$ .

- $\mathbf{b}$  : efforts appliqués sur  $\Omega$  par unité de masse,
- $\beta$  : efforts appliqués sur la microstructure par unité de masse (pression du liquide sur l'intérieur des canaux par exemple),
- $\mathbf{T}$  : contrainte de Cauchy,
- $z$  : contrainte équilibrée interne,
- $\mathbf{s}$  : contrainte exercée sur la microstructure. Elle permet de tenir compte des contraintes internes dues à un éventuel gradient de porosité.

### 4.2.4 Parties actives et réactives

La microstructure  $\nu$  évolue indépendamment de liaison cinématique 4.5 ; les contraintes en jeu dans les équations de bilan 4.10 sont donc purement actives.

### 4.2.5 Bilan

- Données :  $\beta$  et  $\mathbf{b}$ .
- Inconnues :  $\nu$ ,  $x$ ,  $v$ ,  $z$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{s}$  et  $\dot{\rho}_m$ .
- Relations :
  - deux équations d'équilibre 4.10a et 4.10b,
  - la relation 4.5 liant  $v$  à  $x$ ,
  - l'équation de conservation de la masse (4.4).

On dispose donc de quatre équations pour sept inconnues. En déterminant les lois de comportement  $\mathbf{T} := \mathbf{T}(\dot{x}, \dot{\nu})$ ,  $z := z(\dot{x}, \dot{\nu})$  et  $\mathbf{s} := \mathbf{s}(\dot{x}, \dot{\nu})$ , on parvient à un système d'équations décrivant le comportement mécanique du milieu poreux. On remarque que la loi de comportement choisie pour  $\mathbf{T}$  doit vérifier la relation 4.10c quelque soit le processus.

## 4.3 Ecoulement de type Kozeny-Carman

### 4.3.1 Volume représentatif du réseau poreux

Considérons une rotation  $\mathbf{Q}$  de l'observateur, la perméabilité du volume représentatif dessiné figure 4.1 est supposée évoluer suivant la loi :

$$\mathbf{K}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (4.11)$$

on peut dans ce cas lui associer un tenseur de perméabilité  $\mathbf{K}$  tel que :

$$\mathbf{K}(x) = k(x)\mathbf{I}. \quad (4.12)$$

Le VER du corps noté  $\omega(\mathfrak{X})$  est un cube de côté  $L$ , traversé par trois canaux rectilignes de même rayon  $R$ . Le seul mouvement autorisé sous l'action d'un chargement mécanique est la variation de la porosité  $v$  traduisant des dilatations/contractions de  $\omega(\mathfrak{X})$ .

### 4.3.2 Hypothèses

Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite :

- Ecoulement monophasique,
- Ecoulement incompressible,
- Pression constante sur une section droite des canaux.

### 4.3.3 Résolution des équations de Stokes

Considérons un écoulement suivant la direction  $x$  du système représenté figure 4.1. La solution de l'équation de Stokes en écoulement cylindrique est :

$$V_x(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Avec  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide.

La vitesse moyenne  $\bar{V}_x$  est alors

$$\bar{V}_x = \frac{-R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}$$

On note respectivement  $\nu_{surf}$  et  $\nu$  les porosités surfaciques et volumiques du système :

$$\nu_{surf} = \frac{\pi R^2}{L^2} \quad \nu = \frac{3\pi R^2}{L^2}, \quad \nu = 3\nu_{surf} \quad (4.13)$$

Le débit de fluide traversant une surface est donc :

$$q_f = \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \nu_{surf} L^2 = V_{filtre} \cdot L^2 \quad (4.14)$$

Sachant que la loi de Darcy lie la vitesse « filtre » du fluide à la différence de pression imposée au milieu grâce à la relation simplifiée :

$$\mathbf{v}_{filtre} = \frac{1}{\mu} \mathbf{K} \text{grad} p, \quad (4.15)$$

(voir §1.2.2 de la partie I).

La relation 4.14 permet de déduire :

$$v_{filtre} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \nu_{surf}, \quad (4.16)$$

et donc :

$$k = \frac{R^2}{8} \nu_{surf} = \frac{R^2}{24} \nu \quad (4.17)$$

on a alors :

$$\mathbf{K} = \frac{R^2}{24} \nu \mathbf{I} \quad (4.18)$$

On retrouve la valeur de perméabilité calculée par Saffman (voir l'étude bibliographique, partie I) et correspondant à un réseau de canaux aléatoirement orientés.

## Conclusion

Nous avons montré que l'on pouvait mettre en place un modèle liant déformation macroscopique et porosité dans la description d'un milieu poreux. L'approche de type Kozeny-Carman quant à elle permet de lier cette variable à sa perméabilité, une fois que la géométrie du réseau intéressé par l'écoulement est définie.

Par exemple, nous avons supposé que pour un écoulement suivant une direction  $\mathbf{n}$ , seul un tiers du réseau poreux était utilisé. Ce choix représente de façon infidèle un réseau poreux. On est donc amené à considérer une description plus riche de la géométrie du béton micro-fissuré.

## Chapitre 5

# Description hydro-mécanique du béton : Microstructure vectorielle

### Introduction

On se propose désormais d'utiliser non plus une microstructure scalaire, mais une microstructure vectorielle afin de tenir compte de l'anisotropie du réseau poreux. On s'intéressera à deux cas de figure :

1. Les fluides s'écoulent entre deux plans parallèles,
2. Les fluides s'écoulent à travers des canaux rectilignes.

### 5.1 Ecoulement entre deux plans $\nu = wn$

#### 5.1.1 Géométrie

On suppose qu'en chaque point, la microstructure du corps peut être représentée par la figure 5.1 :

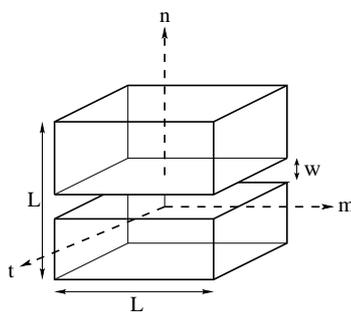


FIG. 5.1. Microstructure : deux plans parallèles

- $\mathbf{n}$  est la normale au plan de fissuration (le sens est choisi arbitrairement),
- On suppose que lorsque les deux plans sont en contact,  $\omega(\mathbf{x})$  est un cube de côté  $L$ ,

- $w$  est l'ouverture de la fissure.

$\omega(\mathfrak{X})$  se translate et peut tourner sous l'action des forces extérieures. Les lèvres de la fissure représentées par les plans parallèles peuvent s'ouvrir suivant la direction normale. On choisit comme variable microstructurelle :

$$\boldsymbol{\nu} := w\mathbf{n} \quad (5.1)$$

$v$  est la densité de fissure du corps :

$$v := \frac{1}{V_{\text{apparent}}} \quad (5.2)$$

$V_{\text{apparent}}$  fait référence au volume total de  $\omega(\mathfrak{X})$  : somme du volume de matière et du volume de vide créé par la fissure.

## 5.1.2 Equations d'équilibre dynamique

### 5.1.2.1 Conservation de la masse et changements de volume

De même que pour le modèle à microstructure scalaire (voir §4.2.1), on a :

$$((1 - \nu)\dot{\rho}_m - \dot{\nu}\rho_m) + \rho_m(1 - \nu) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (5.3)$$

ainsi que (voir §4.2.1) :

$$\iota = \frac{v_0}{v}, \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = -\frac{\dot{v}}{v} \quad (5.4)$$

### 5.1.2.2 Générateur infinitésimal de rotation

Le générateur infinitésimal de rotation traduit l'influence d'une rotation de l'observateur de vecteur  $\mathbf{q}$  sur la valeur observée de la microstructure :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\nu}, t) := \left( \frac{d\boldsymbol{\nu}_{(\mathbf{q})}(\mathbf{x}, t)}{d\mathbf{q}} \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$$

Si on considère une rotation d'axe  $\mathbf{q} = |\mathbf{q}|\mathbf{c}$  et d'angle  $|\mathbf{q}| = \theta \pmod{2\pi}$ , le vecteur  $\boldsymbol{\nu}$  après rotation est noté  $\boldsymbol{\nu}_{(\mathbf{q})}$ . Il est tel que :

$$\boldsymbol{\nu}_{(\mathbf{q})} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{W} + (1 - \cos\theta)\mathbf{W}^2]\boldsymbol{\nu} \quad (5.5a)$$

avec :

$$\mathbf{Q} = e^{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{q}}; \quad \mathbf{W} = -\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{c}; \quad \mathbf{q} = \theta\mathbf{c} \quad (5.5b)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\nu}_{(\mathbf{q})} = \boldsymbol{\nu} + \sin\theta\mathbf{W}\boldsymbol{\nu} + (1 - \cos\theta)\mathbf{W}^2\boldsymbol{\nu} \quad (5.6a)$$

$$= \boldsymbol{\nu} - \frac{\sin\theta}{\theta}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nu})\mathbf{q} + o(\mathbf{q}) \quad (5.6b)$$

$$\mathcal{A} = \mathbf{A} = \left( \frac{d\boldsymbol{\nu}_{(\mathbf{q})}(\mathbf{x}, t)}{d\mathbf{q}} \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = -\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nu} \quad (5.6c)$$

### 5.1.2.3 Liaisons cinématiques

On suppose ici que la normale  $\mathbf{n}$  est entraînée par le mouvement macroscopique :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0\|} \quad (5.7)$$

On a alors :

$$\dot{\mathbf{n}} = -\left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right)^T \mathbf{n} + \left[(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right)\right] \mathbf{n} \quad (5.8)$$

### 5.1.2.4 Energie cinétique, actions inertielles

On suppose que l'énergie cinétique microstructurale est quadratique de la forme :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\nu}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{w}^2 + \dot{w} w \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} w^2 \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Le modèle proposé ne tiendra pas compte des termes inertiels, on ne calculera donc pas la densité de micro-inertie associée aux modifications de microstructure.

### 5.1.2.5 Conservation de la quantité de mouvement

La variable de microstructure étant un tenseur d'ordre 1, la densité par unité de masse des actions extérieures sur la microstructure et la densité par unité de volume des actions microstructurales internes sont elles aussi d'ordre 1 et sont notées  $\mathbf{b}_\mu$  et  $\mathbf{z}$  tandis que le tenseur des actions exercées sur la microstructure est d'ordre 2 et est noté  $\mathbf{S}$ .

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \rho \mathbf{b} + \text{div} \mathbf{T} \quad (5.10a)$$

$$\rho \alpha = \rho \mathbf{b}_\mu - \mathbf{z} + \text{div} \mathbf{S} \quad (5.10b)$$

$$\mathbf{e} \mathbf{T} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} + (\text{grad} \mathbf{A}^T) \mathbf{S}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{e} \boldsymbol{\nu} \quad (5.10c)$$

### 5.1.2.6 Parties actives et réactives

La partie réactive de la puissance des efforts intérieurs est supposée nulle quelque soit le mouvement admis par les liaisons cinématiques 5.7 ou 5.8. Considérons la liaison cinématique 5.7, cette puissance a pour expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int}^r &= \dot{w} \left( \overset{r}{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{n} + \overset{r}{\mathbf{S}} \cdot \text{grad} \mathbf{n} \right) \\ &+ \left[ \overset{r}{\mathbf{T}} - w \left( \mathbf{n} \otimes \overset{r}{\mathbf{z}} + \left( \mathbf{n} \cdot \overset{r}{\mathbf{z}} \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) - \left( \overset{r}{\mathbf{S}} \text{ grad} w \right) \otimes \mathbf{n} + \left[ \overset{r}{\mathbf{S}} \cdot (\text{grad} w \otimes \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right] \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

On en déduit les propriétés des parties réactives des contraintes :

$$\overset{r}{\mathbf{z}} \perp \mathbf{n} \quad (5.12a)$$

$$\overset{r}{\mathbf{S}} \perp \text{grad} \mathbf{n} \quad (5.12b)$$

$$\overset{r}{\mathbf{T}} = w \left( \mathbf{n} \otimes \overset{r}{\mathbf{z}} \right) + \left( \overset{r}{\mathbf{S}}^T \text{grad} w \right) \otimes \mathbf{n} - \left[ \overset{r}{\mathbf{S}} \cdot (\text{grad} w \otimes \mathbf{n}) \right] \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (\overset{r}{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) = 0) \quad (5.12c)$$

5.10c s'applique :

$$\mathbf{e} \overset{r}{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^T \overset{r}{\mathbf{z}} + (\text{grad} \mathbf{A}^T) \overset{r}{\mathbf{S}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{e} \nu \quad (5.12d)$$

Avec des lois de comportement appropriées, ces propriétés permettent de déterminer les contraintes  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{S}$ .

### 5.1.2.7 Bilan

- Données :  $\mathbf{b}_\mu$  et  $\mathbf{b}$ ,
- Sept inconnues :  $\dot{\rho}_m$ ,  $\dot{\nu}$ ,  $v$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$ ,
- Equations :
  - deux équations 5.10a et 5.10b, ainsi que la relation 5.10c,
  - 5.4 liant  $v$  à  $\mathbf{x}$ ,
  - l'équation de conservation de la masse 5.3.

Il est donc nécessaire de se donner les trois lois de comportements  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\nu})$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\nu})$ , et  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\nu})$ , sous la condition dictée par la relation 5.10c.

On obtient alors  $\dot{\nu}$  et  $\dot{\mathbf{x}}$  grâce aux relations 5.10a et 5.10b et  $v$  grâce à 5.4.

## 5.1.3 Description de type Kozeny-Carman

### 5.1.3.1 Volume représentatif

Le réseau poreux est ici un assemblage de volumes représentatifs semblables à  $\omega(\mathfrak{X})$  représenté figure 5.1.

### 5.1.3.2 Hypothèses

Les hypothèses sont identiques à celles de la partie 4.3.2 :

- Ecoulement monophasique,
- Ecoulement incompressible,
- Pression constante sur une section droite des plans.

### 5.1.3.3 Résolution des équations de Stokes

Supposons que le fluide soit soumis à un gradient de pression suivant la direction  $\mathbf{m} : \frac{dp}{dx_{\mathbf{m}}}$  (voir figure 5.1). Le champ de vitesse solution des équations de Stokes a pour expression :

$$V_{x_{\mathbf{m}}}(x_{\mathbf{n}}) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx_{\mathbf{m}}} \left( \frac{x_{\mathbf{n}}^2}{2} - \frac{w^2}{8} \right) \quad (5.13)$$

dont la moyenne est :

$$\bar{V}_{x_{\mathbf{m}}} = \frac{-w^2}{12\mu} \frac{dp}{dx_{\mathbf{m}}}. \quad (5.14)$$

En procédant de la même manière que dans la partie 4.3.3, on parvient à :

$$k_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = \frac{w^3}{12L} \quad (5.15)$$

$\omega(\mathfrak{X})$  étant identique par rotation autour de l'axe  $\mathbf{n}$ , le tenseur de perméabilité de ce volume représentatif est :

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \tau) = k_{\mathbf{m}\mathbf{m}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{t}} \quad (5.16a)$$

$$= \frac{w^3}{12L} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \quad (5.16b)$$

Où  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{t}$  sont les vecteurs normés tels que la base  $(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{t})$  soit directe.

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{|\nu|^3}{12L} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \quad (5.17)$$

$\mathbf{K}$  fait partie de la variété différentielle des tenseurs ayant une valeur propre nulle et deux égales (disques).

### 5.1.3.4 Représentation statistique

Nous avons jusqu'ici supposé qu'en chaque point matériel, il ne pouvait se trouver qu'une seule fissure représentée par deux plans parallèles. On pourrait supposer que plusieurs plans sont présents et définir une fonction de répartition  $f(\mathbf{x}, \mathbf{F}, \nu, \dots)$  caractérisant en chaque point du milieu poreux l'orientation des micro-plans contenus dans  $\omega(\mathfrak{X})$ .

On obtiendrait alors une représentation statistique de la perméabilité :

$$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{Vol(\omega(\mathfrak{X}))} \int_{\omega(\mathfrak{X})} f(\mathbf{x}, \mathbf{F}, \nu, \dots) \frac{|\nu|^3}{12L} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \quad (5.18)$$

$\hat{\mathbf{K}}$  fait partie de la variété différentielle des tenseurs ayant une valeur propre nulle (ellipsoïdes), pouvant dégénérer en disques.

## 5.2 Ecoulement dans des canaux

### 5.2.1 Géométrie et paramètres caractéristiques de la microstructure

On suppose ici que le VER du milieu est un cube traversé par un canal représenté figure 5.2. Le seul mouvement autorisé est la dilatation/contraction de  $\omega(\mathbf{x})$  de façon à ce que le domaine reste constamment un cube de côté variable  $L$ , traversé par un canal de rayon  $R$ .

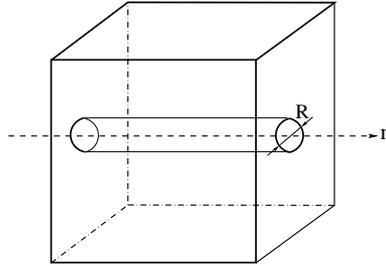


FIG. 5.2. Ecoulement dans un canal

On choisit comme variable de microstructure le vecteur :

$$\boldsymbol{\nu} = \pi R^2 \mathbf{n} \quad (5.19)$$

### 5.2.2 Liaison cinématique

On suppose que la microstructure est entièrement déterminée par le mouvement macroscopique :

$$\boldsymbol{\nu} = {}_t\mathbf{F}^{-T} \boldsymbol{\nu}_0 \quad (5.20)$$

Les contraintes intervenant dans les équations de bilan suivantes sont à partie réactive nulle.

### 5.2.3 Equations d'équilibre dynamique

Les développements menant aux équations d'équilibre sont identiques à ceux du §5.1.2. Ils aboutissent à l'équation de masse :

$$((1 - \nu)\dot{\rho}_m - \dot{\nu}\rho_m) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} + \rho_m(1 - \nu) = 0 \quad (5.21)$$

Avec

$$\nu = \frac{\pi R^2}{L^2} \quad (5.22)$$

et aux équations d'équilibre :

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{T} \quad (5.23a)$$

$$\rho \ddot{\boldsymbol{\nu}} = \rho \mathbf{b}_\mu - \mathbf{z} + \operatorname{div} \mathbf{S} \quad (5.23b)$$

$$\mathbf{e} \mathbf{T} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} + (\operatorname{grad} \mathbf{A}^T) \mathbf{z}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{e} \boldsymbol{\nu} \quad (5.23c)$$

## 5.2.4 Description de Type Kozeny-Carman

### 5.2.4.1 Hypothèses

Les hypothèses sont identiques à celles du §4.3.2.

### 5.2.4.2 Résolution des équations de Stokes

L'écoulement à travers un canal de rayon  $R$  de direction  $\mathbf{n}$  est le même que celui décrit au paragraphe 4.3.3 :

$$V_{x_{\mathbf{n}}}(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx_{\mathbf{n}}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

et

$$\bar{V}_{x_{\mathbf{n}}} = \frac{-R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx_{\mathbf{n}}}$$

On a ici  $\nu_{surf} = \nu_{vol} = \nu$ . Le débit  $q_f$  à travers la section d'un canal est alors :

$$q_f = \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx_{\mathbf{n}}} \nu L^2 = V_{filtre} * L^2 \quad (5.24)$$

Le facteur de perméabilité dans la direction  $\mathbf{n}$ , en réponse à un gradient de pression  $\frac{dp}{dx_{\mathbf{n}}}$  est alors :

$$k_{\mathbf{nn}} = \frac{R^2 \nu}{8} = \frac{\pi R^4}{2L^2}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{R^2 \nu(\mathbf{x})}{8} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \frac{\pi R^4}{8|\boldsymbol{\nu}|^4} \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} \quad (5.26)$$

$\mathbf{K}$  fait partie de la variété différentielle des « bâtons ».

### 5.2.4.3 Représentation statistique

Comme au §5.1.3.4, on peut associer à  $\mathbf{x}$  une fonction de répartition de  $\mathbf{n}$  :  $f(\mathbf{x}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}, \dots)$  variant en fonction du chargement mécanique. Le tenseur de perméabilité est alors :

$$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Vol(\omega(\mathbf{x}))} \int_{\omega(\mathbf{x})} \frac{\pi R^4}{8|\boldsymbol{\nu}|^4} f(\mathbf{x}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}, \dots) \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} \quad (5.27)$$

$\hat{\mathbf{K}}$  appartient à la famille différentielle pouvant dégénérer en disques bâtons.

## Conclusion

Ce modèle est semblable à celui du chapitre 4, il permet en plus de tenir compte de l'anisotropie du milieu modélisé. Dans la suite, on prendra soin de choisir une variable qui permet de tenir compte de la porosité en tout point du milieu, ainsi que de la direction des écoulements.

## Chapitre 6

# Liquide avec des bulles de vapeur : Microstructure scalaire et approche configurationnelle

### Introduction

Le but de mon travail est la mise en place d'une description du béton alliant la mécanique des milieux à microstructure et une approche configurationnelle.

On s'intéresse pour l'instant à un milieu dont l'étude est du point de vue géométrique plus simple que celle d'un milieu micro-fissuré : un liquide avec des bulles de vapeur. La démarche proposée s'inspire de la description faite par Capriz dans les paragraphes §7, 14, 15 et 16 de [36] : il modélise le mélange comme un continuum à microstructure dans lequel on néglige tout échange de matière entre le liquide et la vapeur. Une modélisation similaire a aussi été faite dans [82, 81], sans tenir compte des changements de phase.

On enrichit le modèle de [36] en considérant cette fois les changements de phase : l'approche configurationnelle permet de décrire le mouvement des frontières entre liquide et vapeur.

Le travail présenté dans ce chapitre a été publié dans [26].

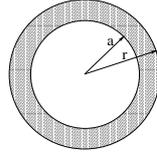
## 6.1 Géométrie et cinématique

### 6.1.1 Géométrie

On suppose que le mélange liquide/vapeur est un continuum d'éléments  $\omega$  dont la géométrie est représentée par la figure 6.1.

### 6.1.2 Paramètres caractéristiques de la microstructure

Notons  $v$  la numérosité spécifique des bulles et  $\nu$  l'indice de la vapeur. Les caractéristiques de la matière sont :

FIG. 6.1.  $\omega$  : élément de  $\Omega$ 

- le rayon extérieur :  $r := (\frac{3}{4\pi\nu})^{1/3}$ ,
- le rayon intérieur :  $a := (\frac{3}{4\pi}\nu\nu^{-1})^{1/3}$ .

On note  $\Gamma$  l'interface liquide / fluide.

La masse volumique de chaque élément s'exprime en fonction de  $\nu$  et des masses volumiques de la vapeur  $\rho_1$  et du liquide  $\rho_2$  par :  $\rho = \rho_1\nu + \rho_2(1 - \nu)$ .

### 6.1.3 Hypothèses

1. Les éventuelles discontinuités à travers  $\Gamma$  sont de premier ordre,
2. la température est continue à travers  $\Gamma$ ,
3.  $\Gamma$  est de surface de tension  $\sigma_t$ ,
4. la phase liquide est incompressible et non visqueuse,
5. la vapeur est un gaz parfait,
6. l'enthalpie est continue à travers une interface plane tant que les deux phases sont en équilibre,
7. évaporation et condensation ne produisent pas d'entropie,
8. il n'y a pas d'échange de chaleur dans le volume.

Soumis au chargement extérieur, le système répond éventuellement par :

- le déplacement des éléments du système,
- un changement de phase.

## 6.2 Equations de bilan macroscopiques

Nous allons adopter une description de type milieu à microstructure. Pour cela on suppose que le milieu est complètement déterminé par la position  $\mathbf{x}$  de ses éléments ainsi que la valeur de l'indice de vide  $\nu$ .

$\nu$  est la variable de microstructure du modèle [36].

### 6.2.1 Conservation de la masse

Le liquide étant considéré comme incompressible, seule la masse volumique du gaz peut varier. L'équation de conservation de la masse  $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0$  s'écrit :

$$\dot{\rho}_1 \nu + (\rho_1 - \rho_2) \dot{\nu} + ((\rho_1 - \rho_2) \nu + \rho_2) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (6.1)$$

### 6.2.2 Equations d'équilibre dynamique

La variable microstructurale  $\nu$  étant d'ordre 0,  $\beta$  et  $\zeta$  sont eux aussi des scalaires, et  $\mathcal{S}$  est un vecteur. Ils seront notés respectivement  $\beta$ ,  $\zeta$  et  $\mathbf{s}$ . On note  $\alpha$  la densité d'inertie microstructurale. Elle dépend à la fois des variations de  $\nu$  et  $v$  :  $\alpha = \alpha(\nu, \dot{\nu}, \ddot{\nu}, v, \dot{v}, \ddot{v})$ .

Les équations d'équilibre macroscopique et de microstructure, ainsi que l'équation d'équilibre à la rotation sont :

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{T} \quad \text{sur } \Omega \quad (6.2a)$$

$$\rho \alpha = \beta - z + \operatorname{div} \mathbf{s} \quad \text{sur } \Omega \quad (6.2b)$$

$$\epsilon \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega, \quad (6.2c)$$

$$\mathbf{s} \mathbf{n} = \sigma \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (6.2d)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (6.2e)$$

- $\mathbf{b}$  : efforts appliqués sur le milieu par unité de masse,
- $\beta$  : efforts appliqués sur la bulle par unité de masse,
- $\mathbf{T}$  : contrainte de Cauchy,
- $z$  : contrainte équilibrée interne,
- $\mathbf{s}$  : contrainte exercée sur la microstructure.

### 6.2.3 Changements de volume

Considérons un corps  $\mathcal{B}$  passant de la configuration de référence (indicée  ${}_0$ ) à la configuration finale. Les éventuels changements de phase se traduisent par une variation de  $\nu$  telle que :

$$(1 - \nu_0) \nu_0^{-1} \neq (1 - \nu) \nu^{-1} \quad (6.3)$$

(changement du volume de la couronne d'eau liquide)

Les changements de volume sont :

$$\nu = \frac{v_0}{v}, \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = -\frac{\dot{v}}{v}. \quad (6.4)$$

On se propose de scinder l'évolution du corps en deux étapes distinctes :

- changement de phase : il fait passer le corps de la configuration de référence à une configuration dite intermédiaire (notée  $*$ ) par unique changement de phase,
- déformation : le passage de la configuration intermédiaire se fait par translation des points matériels du système, sans échange de matière entre liquide et vapeur.

Prenons l'exemple d'une bulle soumise à une augmentation de pression (voir figure 6.2) : la vapeur se contracte et il y a en plus condensation du gaz, ce qui fait augmenter le volume de liquide (configuration actuelle (b)).

Ramenons le corps à la pression initiale, mais supposons que cette transformation s'effectue à volume de liquide constant. Ce nouvel état est caractérisé par un volume de gaz inférieur au volume de gaz initial ; le volume total de l'élément matériel est lui revenu à sa valeur  $v_0$  (configuration intermédiaire (c)). Cette nouvelle configuration diffère de la configuration de référence (a).

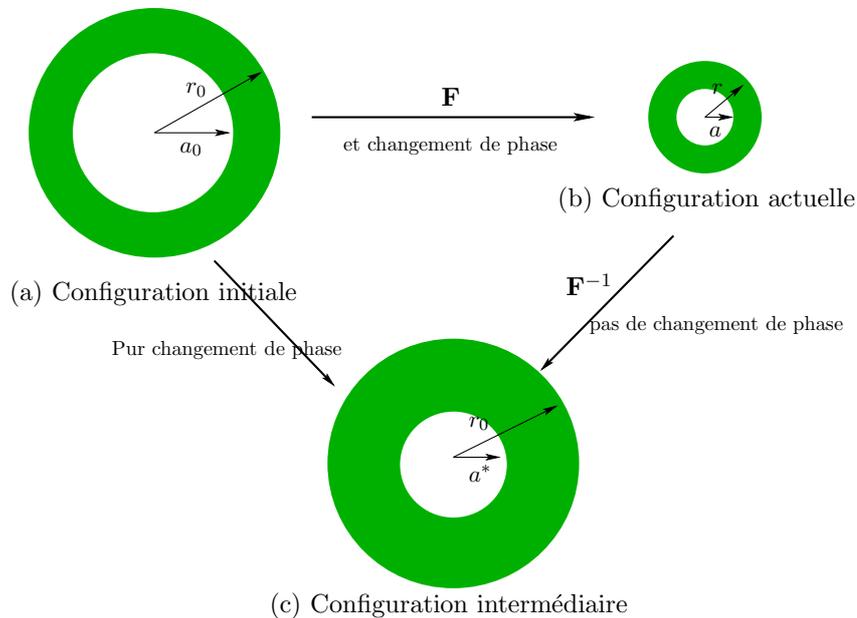


FIG. 6.2. Configurations de référence, intermédiaire et actuelle d'une bulle lors d'une augmentation de pression

L'incompressibilité du liquide implique :

$$(1 - \nu)v^{-1} = (1 - \nu^*)v_0^{-1} \quad (6.5a)$$

$$v\dot{v}^{-1} = \frac{\dot{\nu}^*}{1 - \nu^*} - \frac{\dot{\nu}}{1 - \nu} \quad (6.5b)$$

La relation 6.4 reste valable même si on tient compte du changement de phase. Avec 6.5a elle entraîne :

$$\iota = \frac{1 - \nu^*}{1 - \nu} \quad (6.6)$$

### 6.2.4 Liaisons cinématiques

Dans l'hypothèse où l'on néglige les changements de phases entre les domaines liquides et gazeux :  $\nu^* = \nu_0$ . La relation 6.6 correspond à une liaison cinématique entre  $\nu$  et  $\iota$  :

$$\iota = \frac{1 - \nu_0}{1 - \nu} \quad (6.7)$$

$\nu$  n'est donc pas une variable indépendante, la microstructure est dite latente. La partie réactive de  $\mathcal{P}_{int}$  est postulée nulle quelque soit le mouvement satisfaisant les liaisons cinématiques contraignant l'évolution de  $\mathcal{B}$ . Ce principe permet de déterminer l'écriture d'une équation pure d'équilibre dynamique remplaçant 6.2.

La même démarche peut être appliquée à notre problème. En prenant 6.6 comme liaison cinématique fictive, on aboutit alors à l'équation pure :

$$\rho\ddot{\mathbf{x}} - \text{grad} \left( \rho \frac{1 - \nu^*}{\iota} \alpha \right) = \rho \mathbf{b} - \text{grad} \left( \rho \frac{1 - \nu^*}{\iota} \beta \right) + \text{div} \left( \text{sym} \overset{a}{\mathbf{T}} + \frac{1 - \nu^*}{\iota} (z - \text{div} \overset{a}{\mathbf{s}}) \mathbf{I} \right) \quad (6.8)$$

Il s'agit de la même équation obtenue par [36] lorsqu'on remplace  $\nu_0$  par  $\nu^*$ .

Les lois de comportement des contraintes  $\overset{a}{\mathbf{T}}$ ,  $\overset{a}{z}$  et  $\overset{a}{\mathbf{s}}$  devront être écrites par rapport à la configuration intermédiaire \*.

### 6.2.5 Bilan

A ce stade de l'étude, les inconnues du problème sont les quatre champs  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\nu}$  et  $\dot{\nu}^*$ .

– l'équation d'équilibre 6.8 permet d'exprimer  $\dot{\mathbf{x}}$  en fonction des lois de comportement  $\overset{a}{\mathbf{T}}$ ,  $\overset{a}{z}$ ,  $\overset{a}{\mathbf{s}}$  ainsi que de l'inertie de microstructure  $\alpha$ ,

– 6.6 lie  $\nu$ ,  $\nu^*$  et  $\iota$ ,

$\dot{\nu}$  est lié à  $\dot{\mathbf{x}}$  par 6.4.

Il est donc nécessaire de déterminer les lois de comportement des contraintes  $\mathbf{T}$ ,  $z$  et  $\overset{a}{\mathbf{s}}$ , ainsi que l'inertie de microstructure  $\alpha$  et la loi d'évolution de  $\dot{\nu}^*$ .

Les équations précédentes ne permettent pas de déterminer la loi d'évolution de  $\dot{\nu}^*$ . Ce problème n'est pas constitutif : comme le montre la théorie des forces configurationnelles, l'évolution d'une variable configurationnelle est liée à des équations de bilan appropriées qu'il faudra se donner.

On suppose que l'étude de l'élément microscopique permettra de compléter le modèle, notamment en nous donnant l'évolution de  $\nu^*$ , dans laquelle on pourra à posteriori distinguer les aspects constitutifs et non constitutifs.

$\rho$  est déterminé par l'équation de la conservation de la masse 6.1.

## 6.3 Description microscopique

### 6.3.1 Equations sur une surface de discontinuité $\Gamma$

#### 6.3.1.1 Milieu de Cauchy

Considérons un milieu de Cauchy  $\Omega$ , dont les points sont animés par un champ de vecteurs vitesse  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ . On suppose que ce champ présente une discontinuité  $[[\mathbf{v}]] \neq 0$  au travers d'une surface  $\Gamma$ . Dans le cas  $[[\mathbf{x}]] = 0$ , les équations de saut à travers  $\Gamma$  s'écrivent (équations de Kotchine, voir [190]) :

$$[[\mu]] = 0 \quad (6.9a)$$

$$[[\mathbf{T}]]\mathbf{n} = \mu[[\mathbf{v}]] \quad (6.9b)$$

$$[[\mathbf{T}\mathbf{v} - \mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n} = \mu \left[ e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right] \quad (6.9c)$$

$$\left[ \left[ \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] \right] \cdot \mathbf{n} + [[\varsigma]]\mu \geq 0 \quad (6.9d)$$

Avec :

- $\mu$  : quantité de masse traversant l'unité de frontière en un point régulier de  $\Gamma$  par unité de temps,
- $\mathbf{v}$  : vecteur vitesse,
- $\mathbf{T}$  : tenseur des contraintes,
- $\mathbf{q}$  : vecteur flux de chaleur,
- $e$  : énergie interne spécifique,
- $\theta$  : température absolue,
- $\varsigma$  : entropie spécifique,
- $\mathbf{n}$  : normale à la surface de discontinuité  $\Gamma$ ,
- $\rho$  : masse volumique.

On indice par 1 (pour le gaz) et 2 (pour le liquide) les quantités relatives aux deux sous domaines séparés par la surface  $\Gamma$  ; et on définit sur  $\Gamma$  :  $\mathbf{n} := \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ .

### 6.3.1.2 Equations dans le cas d'une frontière de surface de tension $\sigma_t$

Supposons que la discontinuité  $\Gamma$  séparant  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  (vapeur) et  $\Omega_2$  (liquide) ait une surface de tension  $\sigma_t$ . Les équations 6.9 sont modifiées de la façon suivante :

**Conservation de la masse** On suppose qu'il n'y a pas d'apport de masse par la surface de discontinuité  $\Gamma$  :

$$[[\mu]] = 0 \quad (6.10)$$

Il est nécessaire de tenir compte de la vitesse de la surface séparatrice des phases liquides et vapeur :

$$\mu = \rho_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} - \dot{a}) = \rho_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} - \dot{a}) \quad (6.11)$$

**Conservation de la quantité de mouvement** L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \mathbf{n} + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \quad (6.12)$$

$\mathbf{b}$  : vecteur densité de force volumique appliqué sur le domaine fixe  $\Omega$ .

Décomposons les intégrales sur  $\Omega$ , en intégrales sur les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et ce, tout en tenant compte de la contribution de tension superficielle  $\sigma_t$  :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{v} = \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{T} \mathbf{n}_1 + \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{b} + \int_{\Gamma} \frac{\sigma_t}{a} \mathbf{n}_1 \quad \text{pour l'eau vapeur} \quad (6.13a)$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{v} = \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{T} \mathbf{n}_2 + \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{b} - \int_{\Gamma} \frac{\sigma_t}{a} \mathbf{n}_2 \quad \text{pour l'eau liquide} \quad (6.13b)$$

La quantité d'accélération s'écrit sur les deux sous-domaines 1 et 2 :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_{1,2}} \rho \mathbf{v} = \int_{\Omega_{1,2}} \rho \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \int_{\partial\Omega_{1,2}} \rho \mathbf{v} \mathbf{v}_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} \quad (6.14)$$

$\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$  sur  $\Gamma$  et  $[[\mu]] = 0$ . En sommant les deux équations 6.13a et 6.13b, on obtient :

$$[[\mathbf{T}]] \mathbf{n} - \frac{2\sigma_t}{a} \mathbf{n} = \mu [[\mathbf{v}]] \quad (6.15)$$

Cette relation remplace 6.9b.

**Premier principe de la thermodynamique** L'équation de conservation de l'énergie s'écrit sous forme intégrale :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \rho \left( e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{b} \mathbf{v} + r) + \int_{\partial\Omega} [(\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}] \quad (6.16)$$

$r$  : taux de chaleur reçue par rayonnement.

Sur les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_1} \rho(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) = \int_{\Omega_1} (\rho \mathbf{b} \mathbf{v} + r) + \int_{\partial\Omega_1} [(\mathbf{T}\mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_1] + \int_{\gamma} \sigma_t \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{n}_1 \quad (6.17a)$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_2} \rho(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) = \int_{\Omega_2} (\rho \mathbf{b} \mathbf{v} + r) + \int_{\partial\Omega_2} [(\mathbf{T}\mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_2] - \int_{\gamma} \sigma_t \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{n}_2 \quad (6.17b)$$

La variation d'énergie totale s'écrit sur les deux sous-domaines :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_{1,2}} \rho(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) = \int_{\Omega_{1,2}} \frac{d}{d\tau} \rho(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) + \int_{\partial\Omega_{1,2}} \rho(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) \mathbf{v}_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} \quad (6.18)$$

On déduit de  $[[\mu]] = 0$ , et de la somme des deux équations 6.17a et 6.17b :

$$\mu[e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}] = [[\mathbf{T}\mathbf{v} - \mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n} - 2\sigma_t \frac{\dot{a}}{a} \quad (6.19)$$

Ce bilan remplace 6.9c.

**Second principe de la thermodynamique** On suppose qu'il n'y a pas de production de chaleur au travers de la surface de discontinuité  $\Gamma$ , et que le changement de phase ne produit pas d'entropie. Le second principe de la thermodynamique est inchangé par rapport aux équations de Kotchine :

$$[[\frac{\mathbf{q}}{\theta}]] \cdot \mathbf{n} + [[\varsigma]]\mu \geq 0 \quad (6.20)$$

Utilisons l'équation 6.19 :

$$\mu[[e]] = [[\mathbf{T}]] \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{n} + \mathbf{n} \langle \mathbf{T} \rangle [[\mathbf{v}]] - 2\sigma_t \frac{\dot{a}}{a} - \mu \langle \mathbf{v} \rangle [[\mathbf{v}]] - [[\mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n}$$

Or (équation 6.15) :

$$([[[\mathbf{T}]]\mathbf{n}]) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle - \frac{2\sigma_t}{a} \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \mu[[\mathbf{v}]] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \quad (6.21)$$

De plus :  $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$ , on a donc

$$\mu[[e]] = \mathbf{n} \langle \mathbf{T} \rangle [[\mathbf{v}]] - 2\sigma_t \frac{\dot{a}}{a} + \frac{2\sigma_t}{a} (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n}) - [[\mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n} \quad (6.22)$$

Supposons maintenant que l'évolution est isotherme ( $[[\theta]] = 0$ ), le second principe de la thermodynamique 6.20 s'écrit :

$$\mu([e] - \theta[\varsigma]) \leq \langle \mathbf{T} \rangle [[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} + \frac{2\sigma_t}{a} (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n} - \dot{a}) \quad (6.23)$$

Exprimons le second principe de la thermodynamique non plus en fonction du saut d'énergie interne  $[[e]]$ , mais en fonction du saut d'énergie libre  $[[g]] = [[e]] + [[\frac{p}{\rho}]] - \theta[\varsigma]$ . Rappelons que  $[[\mu]] = 0$  (équation 6.10), on a donc  $\mu[[\frac{p}{\rho}]] = [[\mu\frac{p}{\rho}]]$ . L'inégalité 6.23 équivaut à :

$$\mu[[g]] \leq (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n} - \dot{a}) (\frac{2\sigma_t}{a} + [[p]]) + \langle \mathbf{T}' \rangle [[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} \quad (6.24)$$

Où  $p$  et  $\mathbf{T}'$  sont les parties sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy ( $\mathbf{T} : \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}'$ ).

### 6.3.2 Relations constitutives

#### 6.3.2.1 Courbe volume spécifique - pression

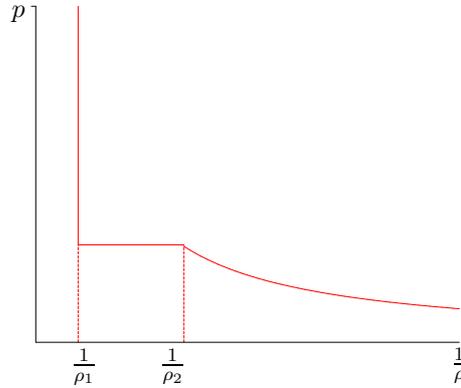


FIG. 6.3. Courbe (volume spécifique, pression)

On postule la courbe de comportement représentée figure 6.3 et on postule :

$$\mathbf{T}_1 = -p_1 \mathbf{I} \quad (6.25a)$$

$$\mathbf{T}_2 = -p_2 \mathbf{I} \quad (6.25b)$$

#### 6.3.2.2 Liquide

**Champ de vitesse**  $\rho_2$  étant une constante, on a à l'intérieur de la couronne (il n'y a aucun changement de phase à l'intérieur du liquide) :

$$\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3) = \text{Constante} \quad \forall s \in ]a, r] \quad (6.26)$$

Donc :

$$r^2 \dot{r} = s^2 \dot{s}. \quad (6.27)$$

$\dot{s} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}(s)$ . On en déduit l'expression du champ de vitesse à l'intérieur de la couronne :

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}(s) = \frac{r^2}{s^2} \dot{r} \quad \forall s \in ]a, r] \quad (6.28)$$

**Masse volumique** Elle a été supposée constante, notée  $\rho_2$ .

**Pression** On déduit de l'expression du champ de vitesse 6.28 et de l'équation de conservation de quantité de mouvement 6.12, la relation entre les champs de pression en  $a$  et  $r$  :

$$p_2(a) - p_2(r) = \frac{\rho_2}{4\pi} \left( \frac{4\pi v}{3} \right)^{\frac{1}{3}} v^{-2} (1 - \nu^{-1}) (2v^{-1} \dot{v}^2 - \ddot{v}) \quad (6.29)$$

### 6.3.2.3 Vapeur

**Champ de vitesse** L'équation de conservation de la masse 6.10 équivaut à :

$$[[\rho \mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} = [[\rho]] \dot{a} \quad (6.30)$$

On en déduit à l'aide de 6.28 :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} \rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1(a)} \frac{r^2}{a^2} \dot{r} + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1(a)}\right) \dot{a} \quad \text{lorsque } s \rightarrow a \quad (6.31)$$

On souhaite faire une description simplifiée de l'évolution d'une bulle. C'est pourquoi on ne résout pas les équations régissant le mouvement dans le gaz, mais on postule l'expression simplifiée :

$$\mathbf{v}_1(s) \cdot \mathbf{n} = \frac{s}{a} \left[ \frac{\rho_2}{\rho_1(a)} \frac{r^2}{a^2} \dot{r} + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1(a)}\right) \dot{a} \right] \quad \forall s \in [0, a] \quad (6.32)$$

Cette expression vérifie les propriétés de symétrie du problème, et varie de façon linéaire avec le rayon  $s$ .

**Masse volumique** On détermine cette fois-ci la masse volumique de la vapeur en utilisant l'équation de conservation de la masse : connaissant le champ de vitesse 6.32, on déduit l'expression du champ uniforme  $\rho_1$  :

$$\rho_1 = \rho_{10} \frac{a_0^3}{a^3} + \rho_2 \left( \frac{r_0^3 - a_0^3}{a_0} - \frac{r^3 - a^3}{a^3} \right) \quad (6.33)$$

Cette expression peut s'écrire à l'aide des variables  $\nu$ ,  $\nu_0$  et  $\nu^*$  :

$$\rho_1 = \rho_{10} \frac{\nu^*(1-\nu)}{\nu(1-\nu^*)} + (\rho_2 - \rho_{10}) \frac{(\nu^* - \nu_0)(1-\nu)}{\nu(1-\nu^*)} \quad (6.34a)$$

$$= \frac{\rho_{10}\nu_0(1-\nu) + \rho_2(\nu^* - \nu_0)(1-\nu)}{\nu(1-\nu^*)} \quad (6.34b)$$

On reconnaît dans le premier terme de 6.34a, la contribution de la masse de vapeur changeant uniquement de volume et dans le second terme, la contribution du changement de phase.

**Pression** La pression au sein du gaz est postulée uniforme au même titre que la masse volumique calculée précédemment. On notera cette approximation  $\bar{p}_1$ .

S'il n'y a pas de changement de phase, le facteur de  $\rho_2$  dans 6.34a est nul : la masse totale de la bulle est constante :  $\rho_1 \nu (1 - \nu_0) = \rho_{10} \nu_0 (1 - \nu)$ . Par conséquent la pression évolue selon une loi polytropicque  $\bar{p}_1 \rho_1^{-\gamma} = \text{const}$  ( $\gamma = 1$  dans le cas d'une évolution isotherme, et  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  rapport des chaleurs spécifiques si l'évolution est adiabatique) :

$$\bar{p}_1 = p_{10} \left( \frac{\nu^*(1-\nu)}{\nu(1-\nu^*)} \right)^\gamma \quad (6.35)$$

Cette loi d'évolution ne peut être utilisée dans le cas de changements de phase. On considère le cas échéant que la sphère de rayon  $a$  contient un mélange de vapeur présente dès la configuration

initiale, et de gaz évaporé à partir de la phase liquide. La loi de Dalton exprime la pression totale du mélange comme le rapport entre la pression partielle et la fraction molaire de n'importe lequel des composants du mélange ; on déduit de 6.34 l'expression de la fraction molaire de la vapeur contenue dans la bulle dès la configuration de référence :

$$\frac{\nu^*}{\nu_0} \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_{10}} \left( \frac{\nu^*}{\nu_0} - 1 \right) \right)^{-1} \quad (6.36)$$

par conséquent :

$$\bar{p}_1 = p_{10} \left( \frac{\nu^*(1-\nu)}{\nu(1-\nu^*)} \right)^\gamma \left( 1 + \left( \frac{\rho_2}{\rho_{10}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\nu_0}{\nu^*} \right) \right) \quad (6.37)$$

### 6.3.2.4 Moyenne et saut de vitesse, matière échangée

On déduit de 6.28 et 6.32 l'expression des sauts et discontinuité du champ de vitesse :

$$[[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} = \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1(a)} \right) \left( \frac{r^2}{a^2} \dot{r} - \dot{a} \right) \quad (6.38)$$

et de la moyenne :

$$\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{a^2} \dot{r} \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1(a)} \right) + \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1(a)} \right) \dot{a} \right] \quad (6.39)$$

Considérons maintenant l'expression du champ de vitesse dans le liquide 6.28, et prenons  $s \rightarrow a$ . Cette relation permet d'exprimer le taux de masse échangée  $\mu$  par rapport à la variable configurationnelle  $\nu^*$  ( $a^* = \left( \frac{3}{4\pi} \nu^* \nu^{-1} \right)^{\frac{1}{3}}$ ) :

$$\mu = -(4\pi\nu_0)^{\frac{1}{3}} \rho_2 \left( \frac{1-\nu}{3\nu(1-\nu^*)} \right)^{\frac{2}{3}} \dot{\nu}^* \quad (6.40)$$

Considérons maintenant la conservation de quantité de mouvement 6.15. En projetant cette équation sur les directions  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  ( $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$ ), on obtient :

$$[[p]] + \frac{2\sigma_t}{a} = -\mu [[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} = -\mu^2 \left[ \frac{1}{\rho} \right] \quad (6.41a)$$

et

$$[[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (6.41b)$$

On déduit grâce à 6.28 :

$$p_2(a) - p_1(a) - \frac{2\sigma_t}{a} = \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \mu^2 \quad (6.42a)$$

$$= \rho_2 \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left( \frac{r^2}{a^2} \dot{r} - \dot{a} \right)^2 \quad (6.42b)$$

Soit en fonction des variables macroscopiques :

$$p_2(a) - p_1(a) - \frac{2\sigma_t}{a} = \left( \frac{1}{36\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_2 \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \nu^{-\frac{4}{9}} \nu^{-\frac{2}{3}} \left( \dot{\nu} \nu^{-1} (\nu - 1) - \dot{\nu} \right)^2 \quad (6.43)$$

### 6.3.2.5 Second principe de la thermodynamique

**Inégalité de Clausius Duhem** Nous avons supposé que l'eau se comportait comme un fluide parfait non visqueux, on a donc  $\mathbf{T}' = \mathbf{0}$  au sein des domaines 1 et 2. L'inégalité 6.24 s'écrit alors :

$$\mu[|g|] \leq (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n} - \dot{a}) \left( \frac{2\sigma_t}{a} + [|p|] \right) \quad (6.44)$$

La relation 6.41a implique :

$$\mu[|g|] \leq -\mu[|\mathbf{v}|] \cdot \mathbf{n} (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n} - \dot{a}), \quad (6.45)$$

grâce à 6.38 et 6.39 :

$$|[g]| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} - 1 \right) \left( \frac{r^2}{a^2} \dot{r} - \dot{a} \right)^2 \quad (6.46a)$$

$$|[g]| \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho^2} \right] \mu^2 \quad (6.46b)$$

Utilisons l'égalité  $\langle \frac{1}{\rho} \rangle = \left[ \frac{1}{\rho} \right] \mu^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho^2} \right] \mu^2$ , ainsi que la relation 6.41a; on obtient :

$$\mu \left( \langle \frac{1}{\rho} \rangle (|[p]| + \frac{2\sigma_t}{a}) - |[g]| \right) \geq 0 \quad (6.47)$$

Exprimons maintenant le saut enthalpique au passage de  $\Gamma$ .

**Saut d'enthalpie** Nous avons dès le début négligé les variations de température dans notre problème; on a donc supposé que les conductivités thermiques des deux fluides sont suffisamment élevées pour que l'on puisse considérer les évolutions isothermes.

L'eau vapeur et l'eau liquide sont supposées se comporter respectivement comme un gaz parfait et un liquide incompressible. Leurs enthalpies libres s'expriment donc en fonction des paramètres d'état par :

$$g_1(p_1, \theta) = \frac{R\theta}{M_V} \ln p_1 + g_{01}(\theta) \quad (6.48a)$$

$M_V$  : Masse molaire de l'eau.

$$g_2(p_2, \theta) = \frac{p_2}{\rho_2} + g_{02}(\theta) \quad (6.48b)$$

$g_{01}(\theta)$  et  $g_{02}(\theta)$  étant des fonctions dépendant uniquement de la température  $\theta$ .

Considérons l'état thermodynamique suivant : de l'eau liquide et de l'eau vapeur sont en équilibre au sein d'un récipient fermé, et l'interface est supposée rectiligne. La pression au sein du mélange est partout égale à la pression de vapeur saturante  $p_s$ , et la température  $\theta$  est constante. Le saut d'enthalpie entre les deux phases est dans ce cas supposé nul [49]. On déduit alors aisément l'expression de la différence  $g_{02}(\theta) - g_{01}(\theta)$ , et le saut  $[|g|]$  s'exprime par :

$$|[g]| = \frac{R\theta}{M_V} \ln \frac{p_s}{p_1} - \frac{p_2 - p_s}{\rho_2} \quad (6.49)$$

Sachant que :  $p_1 \leq p_s \leq p_2$  :  $[|g|] \geq 0$ .

**Lois d'évaporation/condensation** Supposons que le changement de phase n'est accompagné d'aucun phénomène de dissipation ; l'inégalité 6.47 se réduit à :

$$\mu(\langle \frac{1}{\rho} \rangle ([p] + \frac{\sigma_t}{a}) - [g]) = 0, \quad \mu = \rho_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} - \dot{a}) = \rho_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} - \dot{a}) = \rho_2(\frac{r^2}{a^2}\dot{r} - \dot{a}) \quad (6.50)$$

Le terme entre parenthèses apparaît alors comme la force configurationnelle associée au changement de phase. Cette équation implique :

- $\{\mu = 0\}$ . On a alors :  $a^2\dot{a} - r^2\dot{r} = 0$ , c'est-à-dire  $a^3 - r^3 = \text{const}$  : il n'y a pas de changement de phase.
- Ou  $\{\langle \frac{1}{\rho} \rangle ([p] + \frac{\sigma_t}{a}) - [g] = 0\}$ . Dans le cas d'un changement de phase :

$$\langle \frac{1}{\rho} \rangle ([p] + \frac{\sigma_t}{a}) - [g] = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} - 1 \right) \left( \frac{r^2}{a^2}\dot{r} - \dot{a} \right)^2 - \frac{R\theta}{M_V} \ln \frac{p_s(\theta)}{p_1(a)} - \frac{p_2(a) - p_s(\theta)}{\rho_2} = 0 \quad (6.51)$$

La différence de vitesse entre l'interface et la parois extérieure est alors :

$$a^2\dot{a} - r^2\dot{r} = \pm a^2\sqrt{2} \left( 1 - \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{R\theta}{M_V} \ln \frac{p_s(\theta)}{p_1(a)} + \frac{p_2(a) - p_s(\theta)}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.52)$$

Le mécanisme de changement de phase impose qu'il ne peut y avoir évaporation que lorsque le rayon extérieur augmente, et condensation lorsque  $r$  diminue. On a alors :

$$\begin{cases} a^2\dot{a} - r^2\dot{r} \geq 0 & \text{si } \dot{r} \geq 0; \\ a^2\dot{a} - r^2\dot{r} \leq 0 & \text{si } \dot{r} \leq 0. \end{cases}$$

$a^2\dot{a} - r^2\dot{r}$  est donc du même signe que  $\dot{r}$  :

$$\dot{a} = \frac{r^2}{a^2}\dot{r} + \text{sgn}(\dot{r})\sqrt{2} \left( 1 - \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{R\theta}{M_V} \ln \frac{p_s(\theta)}{p_1(a)} + \frac{p_2(a) - p_s(\theta)}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.53)$$

On déduit de  $r := (\frac{3}{4\pi\nu})^{1/3}$ ,  $a := (\frac{3}{4\pi}\nu\nu^{-1})^{1/3}$ , 6.5b et 6.34a :

$$\dot{\nu}^* = \text{sgn}(\dot{\nu})2^{\frac{1}{2}}(36\pi\nu_0)^{\frac{1}{3}}w(\nu, \nu^*) \left( \frac{R\theta}{M_V} \ln \frac{p_s(\theta)}{p_1(a)} + \frac{p_2(a) - p_s(\theta)}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.54)$$

Avec

$$w(\nu, \nu^*) = \left( \frac{\nu(1 - \nu^*)}{1 - \nu} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \left( \frac{\nu(1 - \nu^*)}{\nu^*(1 - \nu)} \right)^2 \left( 1 + \frac{\nu_0}{\nu^*} \left( \frac{\rho_{10}}{\rho_2} - 1 \right) \right)^{-2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.55)$$

**Pression du liquide** On remarque que la loi d'évolution 6.54 est fonction de la pression  $p_2(a)$ . Il est donc nécessaire d'exprimer cette pression en fonction des variables macroscopiques. On dispose pour cela de 6.42a et 6.51 qui permettent d'exprimer la pression sur  $\Gamma$  dans le cas d'un changement de phase :

$$p_2(a) = \frac{\frac{1}{2} (p_1(a) + 2\frac{\sigma_t}{a}) \left( 1 + \frac{p_2}{p_1} \right) - \frac{\rho_2 R\theta}{M_V} \ln \frac{p_s(\theta)}{p_1(a)} + p_s(\theta)}{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + 1} \quad (6.56)$$

## 6.4 Proposition de lois de comportement

On reprend, comme précédemment, la démarche de [36] afin de déterminer les lois de comportement à appliquer à  $\overset{a}{\mathbf{T}}$  et  $\overset{a}{z}$  et  $\overset{a}{s}$ . Pour plus de simplicité, on suppose qu'un gradient de densité de vide n'a pas d'influence sur l'évolution du corps, on néglige donc la contrainte  $s$ .

Considérons l'élément microscopique  $\omega$  situé en un point de position  $\mathbf{x}$ . On postule l'égalité entre (i) l'expression de la puissance des efforts intérieurs à  $\omega(\mathbf{x})$  si on considère la description microscopique précédente, et (ii) celle développée en  $x$  si on considère le milieu à microstructure :

$$-v \sum_{i=1,2} \int_{\Omega} \mathbf{T}_i \cdot \text{grad} \mathbf{v}_i - v \int_{\Gamma} 2\sigma_t \frac{\dot{a}}{a} = -\mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} - z\dot{\nu} \quad (6.57)$$

Le liquide ayant été supposé incompressible, la puissance des efforts intérieurs développés sur le domaine  $\Omega_2$  est nulle :

$$v \int_{\Omega} p_1 \cdot \text{div} \mathbf{v}_1 - v \int_{\Gamma} 2\sigma_t \frac{\dot{a}}{a} = -\mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} - z\dot{\nu} \quad (6.58)$$

La puissance des efforts intérieurs au corps microscopique situé en une position  $\mathbf{x}$  s'exprime en fonction des variables macroscopiques par :

$$\bar{p}_1 \left( \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \dot{\nu} + \left( \nu + \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 - \nu) \right) \text{div} \dot{\mathbf{x}} \right) - 2\sigma_t \left( \frac{4\pi\nu}{3\nu} \right)^{\frac{1}{3}} (\dot{\nu} + \nu \text{div} \dot{\mathbf{x}}) \quad (6.59)$$

où  $\bar{p}_1$  et  $\rho_1$  sont des fonctions de  $\nu$  et  $\nu^*$  (6.34a et 6.37).

L'identification terme à terme permet d'obtenir les lois de comportement des contraintes microstructurelles  $\mathbf{T}_\mu$  et  $z_\mu$  (pour plus de clarté, on omet les  $a$  désignant les parties actives des contraintes) :

$$z_\mu = \bar{p}_1 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) + 2\sigma_t \left( \frac{4\pi\nu}{3\nu} \right)^{\frac{1}{3}} + \tilde{z}_\mu \quad (6.60a)$$

$$\mathbf{T}_\mu = \left( \nu(z - \tilde{z}) - \frac{\rho_2}{\rho_1} \bar{p}_1 \right) \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}}_\mu \quad (6.60b)$$

où les termes en tildes sont des contraintes ne développant aucune puissance.

Considérons l'expression de  $\nu^*$  6.5b, ainsi que 6.4 et définissons la pression  $p_a$  telle que :

$$p_a := \bar{p}_1 - 2 \frac{\sigma_t}{a} \quad (6.61)$$

la puissance des efforts intérieurs 6.59 s'exprime en fonction de  $p_a$  et de  $\nu^*$  par :

$$p_a \text{div} \dot{\mathbf{x}} - \iota^{-1} \left( p_a - \frac{\rho_2}{\rho_1} \bar{p}_1 \right) \dot{\nu}^* \quad (6.62)$$

Ce qui nous permet de définir de nouvelles lois de comportement pour les contraintes  $\mathbf{T}$  et  $z$  :

$$z = \iota^{-1} \left( p_a - \frac{\rho_2}{\rho_1} \bar{p}_1 \right) + \tilde{z} \quad (6.63a)$$

$$\mathbf{T} = -p_a \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}} \quad (6.63b)$$

6.60 et 6.63 sont liées par :

$$z - \tilde{z} = \nu^{-1}(z_\mu - \tilde{z}_\mu) \quad (6.64a)$$

$$\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_\mu - \tilde{\mathbf{T}}_\mu + (1 - \nu)(z_\mu - \tilde{z}_\mu)\mathbf{I} \quad (6.64b)$$

## 6.5 Energie cinétique, inertie

L'étude du comportement microscopique de chaque élément a permis de déterminer la cinétique des phases liquide et vapeur du système. On en déduit l'expression de la densité d'inertie de chaque élément notée  $\alpha$ .

### 6.5.1 Taux de variation des rayons intérieur et extérieur

$$\dot{r} = -\frac{1}{3} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{4}{3}} \dot{\nu} \quad (6.65a)$$

$$\dot{a} = -\frac{1}{3} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{1}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} (\nu^{-1} \dot{\nu} - \nu^{-1} \dot{\nu}) \quad (6.65b)$$

### 6.5.2 Energie cinétique

L'énergie cinétique de chaque élément correspond à la somme des deux énergies de la vapeur d'eau et du liquide :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \rho_1 \int_0^a 4\pi s^2 |u_1|^2 + \frac{1}{2} \rho_2 \int_a^r 4\pi s^2 |u_2|^2 \quad (6.66)$$

Les expressions 6.28 et 6.32 de  $|u_1|$  et  $|u_2|$  permettent d'écrire :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \rho_1 \frac{4\pi}{a^2} \left[ \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{r^2}{a^2} \dot{r} + \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \dot{a} \right]^2 \frac{a^5}{5} + \frac{1}{2} \rho_2 4\pi r^4 \dot{r}^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \quad (6.67)$$

On déduit de 6.65a et 6.65b l'expression de l'énergie cinétique totale de chaque élément, en fonction de  $\nu$ ,  $v$ ,  $\dot{\nu}$  et  $\dot{v}$  :

$$\mathcal{K} \rho \nu^{-1} = \frac{2\pi}{9} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \left[ \frac{\rho_1}{5} \left( \nu^{-1} \dot{\nu} (1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (\nu^{-1} - 1)) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \nu^{-1} \dot{\nu} \right)^2 \nu^{-\frac{5}{3}} \nu^{\frac{5}{3}} + \rho_2 \nu^{-\frac{11}{3}} \dot{\nu}^2 (\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) \right] \quad (6.68)$$

On suppose dans la suite que  $\rho_1 \ll \rho_2$ , on a alors :

$$\rho = \rho_2 (1 - \nu). \quad (6.69)$$

On en déduit l'expression de l'énergie cinétique massique du milieu :

$$\mathcal{K} = \frac{2\pi}{9} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{5}{3}} (1-\nu)^{-1} \left[ \frac{\rho_2}{5\rho_1} v^{\frac{8}{3}} \nu^{-\frac{11}{3}} (\dot{\nu} + v^{-1} \dot{\nu}(1-\nu))^2 + v^{-\frac{8}{3}} \dot{\nu}^2 (\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) \right] \quad (6.70)$$

Utilisons désormais les relations cinématiques 6.5a et 6.5b :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{2\pi}{9} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\rho_2}{5\rho_1} \frac{\dot{\nu}^{*2}}{(1-\nu^*)^{\frac{14}{3}}} (1-\nu)^{\frac{11}{3}} \nu^{-\frac{11}{3}} v_0^{\frac{8}{3}} \\ & + \frac{2\pi}{9} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{5}{3}} (1-\nu)^{-1} v^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{\dot{\nu}}{1-\nu} - \frac{\dot{\nu}^*}{1-\nu^*} \right)^2 (\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) \end{aligned} \quad (6.71)$$

### 6.5.3 Densité de coénergie

La densité de coénergie est liée à l'énergie cinétique par la relation [36] :

$$\mathcal{K} = \left( \frac{\partial \chi}{\partial \dot{\nu}} \right) \dot{\nu} - \chi \quad (6.72)$$

Elle vérifie donc la relation

$$\frac{\mathcal{K}}{\dot{\nu}^2} = \frac{\partial}{\partial \dot{\nu}} \left( \frac{\mathcal{K}}{\dot{\nu}} \right) \quad (6.73)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \chi = & -\frac{2\pi}{9} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\rho_2}{5\rho_1} \frac{\dot{\nu}^{*2}}{(1-\nu^*)^{\frac{14}{3}}} (1-\nu)^{\frac{11}{3}} \nu^{-\frac{11}{3}} v_0^{\frac{8}{3}} \\ & + \frac{2\pi}{9} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{5}{3}} (1-\nu)^{-1} v^{-\frac{2}{3}} (\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) \left[ \left( \frac{\dot{\nu}}{1-\nu} \right)^2 - \left( \frac{\dot{\nu}^*}{1-\nu^*} \right)^2 - 2 \frac{\dot{\nu}}{1-\nu} \frac{\dot{\nu}^*}{1-\nu^*} \ln \dot{\nu} \right] \end{aligned} \quad (6.74)$$

### 6.5.4 Inertie

$$\alpha = \left( \frac{\partial \chi}{\partial \dot{\nu}} \right) \dot{\nu} - \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \quad (6.75)$$

On déduit de 6.74 :

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{2\pi}{27} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{5}{3}} v_0^{-\frac{2}{3}} (1-\nu^*)^{\frac{2}{3}} (1-\nu)^{-\frac{8}{3}} \left[ 6\dot{\nu} (\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) (1-\nu)^{-1} \left( 1 - \frac{\dot{\nu}^*}{1-\nu^*} \frac{1-\nu}{\dot{\nu}} \right) \right. \\ & + \left( \frac{\dot{\nu}}{1-\nu} \right)^2 \left( (7-10\nu+5\nu^2)(\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) - (1-\nu)\nu^{-\frac{4}{3}} \right) \\ & - 2 \frac{\dot{\nu}}{1-\nu} \frac{\dot{\nu}^*}{1-\nu^*} \left( 8(\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) - (1-\nu)\nu^{-\frac{4}{3}} \right) \\ & \left. + \left( \frac{\dot{\nu}^*}{1-\nu^*} \right)^2 \left( 5(\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) - (1-\nu)\nu^{-\frac{4}{3}} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.76)$$

## 6.6 Modèle complet

Les inconnues du problème sont : les variations des champs  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\nu}$  et  $\dot{\nu}^*$ . Elles sont déterminées par les trois relations suivantes :

- Equation d'équilibre 6.8 :

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} - \text{grad} \left( \rho \frac{1 - \nu^*}{\nu} \alpha \right) = \rho \mathbf{g} + \text{div} \left( \text{sym} \overset{a}{\mathbf{T}} + \frac{1 - \nu^*}{\nu} \overset{a}{z} \mathbf{I} \right)$$

- 6.4 :

$$\text{div} \dot{\mathbf{x}} = -\frac{\dot{\nu}}{\nu}$$

- Loi d'évolution de  $\dot{\nu}^*$  6.54 :

$$\dot{\nu}^* = \text{sgn}(\dot{\nu}) 2^{\frac{1}{2}} (36\pi\nu_0)^{\frac{1}{3}} w(\nu, \nu^*) \left( \frac{R\theta}{M_V} \ln \frac{p_s(\theta)}{\bar{p}_1} + \frac{p_2(a) - p_s(\theta)}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Avec :

$$w(\nu, \nu^*) = \left( \frac{\nu(1 - \nu^*)}{1 - \nu} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \left( \frac{\nu(1 - \nu^*)}{\nu^*(1 - \nu)} \right)^2 \left( 1 + \frac{\nu_0}{\nu^*} \left( \frac{\rho_{10}}{\rho_2} - 1 \right) \right)^{-2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Les lois de comportement de  $\mathbf{T}$  et  $z$  ainsi que les évolutions de  $\bar{p}_1$ ,  $p_2(a)$  et  $\alpha$  sont données par :

- 6.63a et 6.63b

$$z = \nu^{-1} \left( \bar{p}_1 \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - 2 \frac{\sigma_t}{a} \right) + \tilde{z}$$

$$\overset{a}{\mathbf{T}} = - \left( \bar{p}_1 - 2 \frac{\sigma_t}{a} \right) \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}}$$

- 6.37 :

$$\bar{p}_1 = p_{10} \left( \frac{\nu^*(1 - \nu)}{\nu(1 - \nu^*)} \right)^\gamma \left( 1 + \left( \frac{\rho_2}{\rho_{10}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\nu_0}{\nu^*} \right) \right)$$

- 6.56 :

$$p_2(a) = \frac{\frac{1}{2} (\bar{p}_1 + 2 \frac{\sigma_t}{a}) \left( 1 + \frac{p_2}{\bar{p}_1} \right) - \frac{\rho_2 R \theta}{M_V} \ln \frac{p_s(\theta)}{\bar{p}_1} + p_s(\theta)}{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + 1}$$

- Inertie de la microstructure 6.76 :

$$\alpha = \frac{2\pi}{27} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \nu_0^{-\frac{2}{3}} (1 - \nu^*)^{\frac{2}{3}} (1 - \nu)^{-\frac{8}{3}}$$

$$\left[ 6\dot{\nu} (\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) (1 - \nu)^{-1} \left( 1 - \frac{\dot{\nu}^*}{1 - \nu^*} \frac{1 - \nu}{\dot{\nu}} \right) \right.$$

$$+ \left( \frac{\dot{\nu}}{1 - \nu} \right)^2 \left( (7 - 10\nu + 5\nu^2) (\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) - (1 - \nu) \nu^{-\frac{4}{3}} \right)$$

$$- 2 \frac{\dot{\nu}}{1 - \nu} \frac{\dot{\nu}^*}{1 - \nu^*} \left( 8(\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) - (1 - \nu) \nu^{-\frac{4}{3}} \right)$$

$$\left. + \left( \frac{\dot{\nu}^*}{1 - \nu^*} \right)^2 \left( 5(\nu^{-\frac{1}{3}} - 1) - (1 - \nu) \nu^{-\frac{4}{3}} \right) \right]$$

## Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que l'on pouvait associer à une description de type milieu à microstructure, une description de type force configurationnelle représentée par la variable  $\nu^*$ .

Le paramètre de taille  $v$  a permis de tenir compte des interactions entre bulles, qui se trouvent à une distance finie les unes des autres.

On remarque que nous n'avons pas mis en place d'équation d'équilibre régissant l'évolution configurationnelle :  $\dot{\nu}^*$  a été déterminée par l'étude de l'élément microscopique.

On utilisera une description similaire pour l'étude des milieux micro-fissurés.

# Conclusion

Le travail mené dans les chapitres 4 et 5 montre comment exploiter l'information géométrique sur le réseau de fissures afin d'obtenir la perméabilité du milieu. La description mécanique des phénomènes est à peine esquissée, essentiellement à titre d'exemple. Dans la III<sup>e</sup> partie de cette thèse on se donnera une description mécanique plus fine, en la développant jusqu'au bout, pour ensuite appliquer la méthode de type Kozeny-Carman présentée précédemment.

Une approche configurationnelle similaire à celle développée au chapitre 6 permettra de tenir compte de l'éventuelle propagation du champ de fissures.

## Troisième partie

# Proposition d'une modélisation pour la prise en compte du couplage hydromécanique dans le béton à température ambiante



# Table des Matières

---

<b>Introduction</b>	<b>101</b>
<b>7 Géométrie et cinématique</b>	<b>102</b>
7.1 Evolution du corps déformable . . . . .	102
7.2 Géométrie . . . . .	103
7.3 Paramètres caractéristiques de la microstructure . . . . .	103
<b>8 Equations de bilan macroscopiques</b>	<b>105</b>
8.1 Conservation de la masse et changements de volume . . . . .	105
8.2 Tenseur infinitésimal de rotation de la microstructure . . . . .	105
8.3 Equations d'équilibre dynamique . . . . .	106
8.3.1 Configuration actuelle . . . . .	106
8.3.2 Configuration de référence . . . . .	106
8.4 Liaisons cinématiques . . . . .	107
8.4.1 Termes de second gradient . . . . .	107
8.4.2 Parties réactives des contraintes . . . . .	107
8.4.3 Parties actives des contraintes . . . . .	109
8.5 Evolution micro-configurationnelle . . . . .	110
8.5.1 Variable configurationnelle . . . . .	110
8.5.2 Méthode pour obtenir les équations d'équilibre dynamique . . . . .	111
8.5.3 Mise en place des équations d'équilibre dynamique . . . . .	112
8.6 Bilan . . . . .	116
<b>9 Méthode pour déterminer les lois de comportement du modèle</b>	<b>118</b>
9.1 Hypothèse des petites perturbations . . . . .	119
9.2 Conditions aux limites . . . . .	119
9.3 Description « microscopique » de l'évolution de $\omega(\mathfrak{X})$ . . . . .	120
9.4 Lien entre les représentations « microscopique » et « macroscopique » . . . . .	121
9.4.1 Masse volumique . . . . .	121
9.4.2 Puissance des efforts intérieurs . . . . .	121
9.4.3 Energie cinétique . . . . .	125
9.5 Objectivité . . . . .	127
<b>10 Proposition de lois de comportement</b>	<b>128</b>
10.1 Approximation des champs solution . . . . .	129
10.1.1 Détermination de $\mathbb{A}$ . . . . .	130

10.1.2	Calcul de la moyenne de $\mathbb{A}$ . . . . .	134
10.1.3	Etude de $\mathbb{H}$ . . . . .	135
10.2	Modèle micro-configurationnel . . . . .	141
10.2.1	Equations d'équilibre statique . . . . .	141
10.2.2	Loi de comportement de $\mathbf{B}$ . . . . .	141
10.2.3	Loi de comportement de $\beta$ . . . . .	142
10.2.4	Loi de fissuration . . . . .	144
10.2.5	Exemple de loi constitutive . . . . .	145
<b>11</b>	<b>Calcul de la perméabilité intrinsèque</b>	<b>147</b>
11.1	Champ de déplacement . . . . .	147
11.2	Ecoulement dans une fissure . . . . .	148
11.3	Tenseur de perméabilité macroscopique . . . . .	148
<b>12</b>	<b>Exemples</b>	<b>150</b>
12.1	Exemple 1 : déplacements nuls sur les cotés . . . . .	150
12.1.1	Hypothèses . . . . .	150
12.1.2	Equations d'équilibre et lois de comportement . . . . .	151
12.1.3	Propagation . . . . .	153
12.1.4	Loi de comportement . . . . .	154
12.2	Exemple 2 : contraintes nulles sur les bords . . . . .	157
12.2.1	Hypothèses . . . . .	157
12.2.2	Equations d'équilibre et lois de comportement . . . . .	157
12.2.3	Propagation . . . . .	158
12.2.4	Loi de comportement . . . . .	160
12.2.5	Essai de traction . . . . .	161
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>163</b>

---

# Introduction

On se propose de mettre en place un modèle décrivant le comportement d'un corps micro-fissuré grâce à une approche similaire à celle développée pour le modèle du liquide avec bulles (chapitre 6).

Dans un premier temps, on base notre étude sur une description de type milieu à microstructure : on définit la variable qui en tout point du corps caractérise la micro-fissuration (chapitre 7) et on en déduit les équations d'équilibre comme dans [36] (chapitre 8). On prendra soins de définir la cinématique du problème afin de particulariser les équations générales des milieux à microstructure au corps micro-fissuré étudié.

Les équations d'équilibre dynamique obtenues régissent d'une part la déformation macroscopique du milieu et d'autre part le comportement du champ de fissures. On se propose d'enrichir cette description en scindant artificiellement la cinématique du milieu en une partie matérielle (déformation macroscopique et déformation des fissures) et une partie configurationnelle (propagation du champ de fissures). On introduira à cet effet une variable de configuration caractéristique de la propagation et on déterminera grâce au principe des puissances virtuelles les équations d'équilibre régissant le nouveau couple de paramètres : déformation/propagation. Cette démarche permettra de définir l'image des contraintes dans l'espace des évolutions des variables de déformation et de configuration.

On proposera au chapitre 9 une méthode afin de déterminer les lois de comportement du modèle. Cette méthode sera appliquée dans un cas simple dans le chapitre 10, et le couplage entre le comportement mécanique du béton et sa perméabilité sera détaillé au chapitre 11. On traite un exemple simple au chapitre 12.

# Chapitre 7

## Géométrie et cinématique

### 7.1 Evolution du corps déformable

Considérons un corps déformable micro-fissuré noté  $\mathcal{B}$ . On le modélise comme un milieu continu avec microstructure. A un instant donné  $\tau$ , chaque élément matériel a une image  $x$  dans l'espace  $\Omega$ . On suppose que l'observation du corps à une échelle microscopique permet de déterminer les caractéristiques de la microstructure  $\nu(x, \tau)$  représentative de l'état de micro-fissuration au point  $x$ .

L'image du corps passe d'une configuration de référence notée  $\Omega_0$  à la configuration actuelle  $\Omega$  grâce à une transformation  $x$  dont le gradient est noté  $\mathbf{F}$  (voir figure 7.1).

$$x : (x_0, t) \rightarrow x, \quad \mathbf{F} := \text{Grad}x \quad (7.1)$$

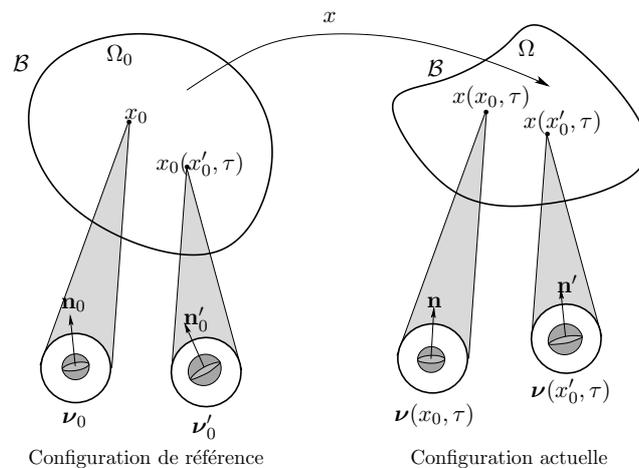


FIG. 7.1.  $\mathcal{B}$  : milieu à microstructure, configurations de référence et actuelle

## 7.2 Géométrie

On suppose dans la suite que l'information contenue dans la microstructure  $\nu(x, \tau)$  est représentative d'un corps déformable  $\omega(x)$  observable à l'échelle microscopique.  $\omega$  sera supposé être un parallélépipède de dimensions  $2L \times 2L \times 2l$  et de masse volumique  $\rho_m$  au sein duquel on autorise l'ouverture et la propagation d'une unique fissure. La normale au plan de propagation sera notée  $\mathbf{n}$  ( $\|\mathbf{n}\| = 1$ ) tandis que la longueur de la fissure et son ouverture maximale seront notées respectivement  $a$  et  $b$  (voir figure 7.2).

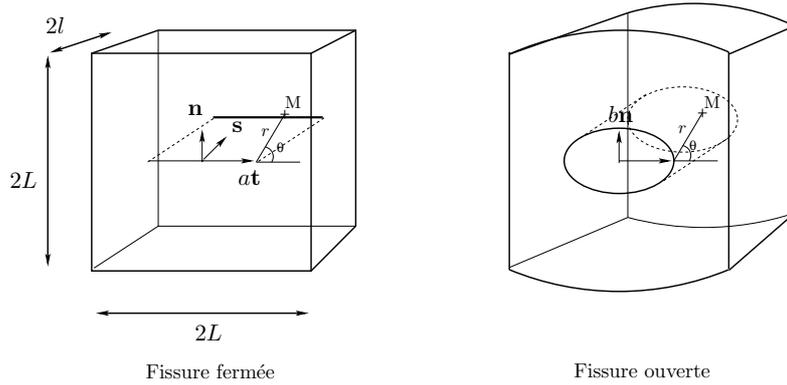


FIG. 7.2.  $\omega$  : Elément matériel représentatif

## 7.3 Paramètres caractéristiques de la microstructure

$(L, l, a, b, \mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$ ) sont des paramètres microscopiques caractéristiques de chaque élément matériel vu comme  $\omega(\mathfrak{X})$ . Il convient de définir les champs scalaires macroscopiques  $\nu$ ,  $v$  et  $\gamma$  pour se donner une caractérisation géométrique des propriétés matérielles. Ces champs désignent respectivement la densité de vide, la densité de fissure, ainsi que la surface de la fissure.

$$\nu := \frac{V_{fissure}}{V_{apparent}} \quad (7.2)$$

$$v := \frac{1}{V_{apparent}} \quad (7.3)$$

$$\gamma := S_{fissure/pla[n]{\mathbf{t}, \mathbf{s}}} \quad (7.4)$$

$V_{apparent}$  fait ici référence au volume total de  $\omega$  : somme du volume de matière et du volume de vide créé par la fissure. On remarque que  $\gamma$  est homogène à une surface, on aurait pu aussi choisir comme variable caractéristique la surface normalisée  $v\gamma$ .

La description microscopique donnée par les champs cités est incomplète : par la donnée d'un quadruplet  $(\nu, v\gamma, \mathbf{n})$  au point  $x$  représentatif de  $\mathfrak{X}$  on ne sait définir la direction  $\mathbf{t}$  de l'épaisseur  $2l$  de  $\omega(\mathfrak{X})$ . Le modèle macroscopique de  $\mathfrak{X}$  contient des informations inférieures à celui de  $\mathfrak{X}$

microscopique. L'information volontairement perdue dans le passage est telle qu'on sera amené à confondre toute fissure à une fissure de type « penny shape ».

Considérons l'élément matériel représenté figure 7.2 :

$$\nu = \frac{1}{8lL^2} \quad (7.5)$$

$$\gamma = 4al \quad (7.6)$$

On définit :

$$\mathbf{G}(\gamma, \mathbf{n}) := \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (7.7)$$

Soit  $\mathbf{n}_0$  la normale au plan de fissuration en configuration de référence, on suppose que seul  $\mathbf{n}$  est entraîné par le mouvement macroscopique :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0\|} \quad (7.8)$$

$\mathbf{G}$  s'exprime alors en fonction de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{n}_0$  et  $\gamma$  par :

$$\mathbf{G} = \gamma \frac{\mathbf{F}^{-T} (\mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0) \mathbf{F}^{-1}}{\|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0\|^2} \quad (7.9)$$

On choisit de ne pas considérer la densité de vide  $\nu$  comme une variable indépendante du problème. Sa valeur pouvant être déterminée à partir de  $\gamma$  et de la déformation.

## Chapitre 8

# Equations de bilan macroscopiques

Nous allons maintenant détailler successivement les étapes nécessaires dans la mise en place du modèle de type milieu à microstructure : la cinématique du problème étant déterminée, on peut appliquer à notre problème les équations de bilan exposées dans [36].

### 8.1 Conservation de la masse et changements de volume

La conservation de la masse s'écrit de façon générale :

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (8.1)$$

On suppose que l'élément de matière est parfaitement entraîné par le mouvement macroscopique pour ce qui concerne ses changements de volume :

$$\iota = \frac{v_0}{v}, \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = -\frac{\dot{v}}{v} \quad (8.2)$$

Où  $\iota = \det \mathbf{F}$  et  $v_0$  est la valeur de  $v$  dans la configuration de référence (voir figure 7.1).

### 8.2 Tenseur infinitésimal de rotation de la microstructure

Considérons 7.9. Pour toute rotation  $\mathbf{Q}$  d'un observateur de  $\Omega$ , la microstructure est modifiée en une nouvelle valeur :

$$\mathbf{G}_{(Q)} = \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T \quad (8.3)$$

Le tenseur infinitésimal de rotation est alors un tenseur d'ordre 3 vérifiant pour tout choix d'un système de référence cartésien  $ijk$  :

$$a_{ijk} = G_{ip} e_{pjk} + G_{lj} e_{ilk} \quad (8.4)$$

### 8.3 Equations d'équilibre dynamique

On considère les équations d'équilibre des milieux à microstructure [36] relatives à une variable  $\mathbf{G}$  qui est tenseur d'ordre deux. Elles sont écrites par rapport à la configuration de référence et à la configuration actuelle du système (voir figure 7.1).

#### 8.3.1 Configuration actuelle

$$\rho \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad \text{sur } \Omega \quad (8.5a)$$

$$\rho \mathbf{V} - \mathbf{Z} + \operatorname{div} \mathbf{z} = \rho \mathbf{A} \quad \text{sur } \Omega \quad (8.5b)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (8.5c)$$

$$\mathbf{z} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (8.5d)$$

$$\mathbf{e} \mathbf{T} = \mathbf{c}^T \mathbf{Z}^T + (\operatorname{grad} \mathbf{c}^T)^t(\mathbf{z}) \quad \text{sur } \Omega \quad (8.6)$$

Où :

- $\mathbf{T}$  est la contrainte de Cauchy,
- $\mathbf{Z}$  est la force auto-équilibrée interne,
- $\mathbf{z}$  est la contrainte de microstructure,
- $\mathbf{A}$  est la densité d'inertie associée aux modifications de la microstructure,
- $\mathbf{V}$  est la densité par unité de masse des actions extérieures sur la microstructure,
- $\mathbf{v}$  est la densité par unité de masse des forces extérieures sur le corps,
- $\mathbf{f}$  est la densité de surface des forces extérieures sur la microstructure,
- $\boldsymbol{\sigma}$  est la densité par unité de surface des actions extérieures sur la microstructure.

Les propriétés des contraintes ainsi que la densité d'inertie seront précisées par la suite grâce à une étude des propriétés de  $\mathbf{G}$ , et du comportement de  $\omega$ .

#### 8.3.2 Configuration de référence

On note  $(\mathbf{P}, \mathbf{Z}_0$  et  $\mathbf{z}_0)$  le système de contraintes définies sur la configuration de référence :

$$\mathbf{P} := {}_l \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (8.7a)$$

$$\mathbf{Z}_0 := {}_l \mathbf{Z} \quad (8.7b)$$

$$\mathbf{z}_0 := {}_l \mathbf{z} \mathbf{F}^{-T} \quad (8.7c)$$

Les équations d'équilibre dynamique en configuration de référence s'écrivent :

$$\rho_0 \mathbf{v}_0 + \text{Div} \mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \tau^2} \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (8.8a)$$

$$\rho_0 \mathbf{V}_0 - \mathbf{Z}_0 + \text{Div} \mathbf{z}_0 = \rho_0 \mathbf{A} \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (8.8b)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{n}_0 = \mathbf{f}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0 \quad (8.8c)$$

$$\mathbf{z}_0 \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0 \quad (8.8d)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{P}\mathbf{F}^T) = \mathfrak{a}^T \mathbf{Z}_0^T + (\text{Grad} \mathfrak{a}^T)^t \mathbf{z}_0 \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (8.9)$$

L'ensemble des relations précédentes correspondent à une variable de microstructure  $\mathbf{G}$  d'ordre deux. Le modèle doit être spécifié afin de décrire au mieux l'évolution de notre système. On exploite pour cela les liaisons cinématiques imposées à  $\mathbf{G}$ , on se donne ensuite des lois de comportement valables dans un cas particulier.

## 8.4 Liaisons cinématiques

### 8.4.1 Termes de second gradient

La puissance des efforts intérieurs à un milieu de microstructure  $\mathbf{G}$  est usuellement supposée dépendre de  $\dot{\mathbf{G}}$  et  $\text{grad} \dot{\mathbf{G}}$ , et dépendre uniquement du gradient de vitesse macroscopique  $\text{grad} \mathbf{u} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  :

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega} \left( \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{z} \cdot \text{grad} \dot{\mathbf{G}} \right) \quad (8.10)$$

Imposons la relation cinématique 7.9,  $\dot{\mathbf{G}}$  est lié à  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{\mathbf{F}}$  par :

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \mathbf{G} + \frac{2}{\gamma} \mathbf{G} \left[ (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{G} \right] - \left[ (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G} + \mathbf{G} (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) \right] \quad (8.11)$$

Cette liaison cinématique fait apparaître un terme en second gradient de vitesse ( $\text{grad} \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ ) dans l'expression de  $\mathcal{P}_{int}$  qui permet de souligner des effets que l'on peut appeler faiblement non locaux. Ils sont dus au mouvement imposé aux micro-fissures par le mouvement macroscopique ( $\mathbf{n}$  est entraîné par la déformation macroscopique). Ce résultat est démontré au §8.5.3.1.

### 8.4.2 Parties réactives des contraintes

Étudions la décomposition des contraintes en parties actives et réactives (voire p. 46, partie I) : la puissance des efforts intérieurs associée aux parties réactives des contraintes est nulle quelque soit le mouvement satisfaisant la relation cinématique imposée à  $\mathbf{G}$ . La géométrie de notre système induit alors des particularités sur les champs de contrainte définis sur  $\Omega$ .

1. Considérons une évolution telle que  $(\dot{\mathbf{G}}, \text{grad}\dot{\mathbf{G}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  et telle que les variations  $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  soient non nulles, 8.10 impose

$$\int_{\Omega} \left( \overset{r}{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \right) = 0, \quad \forall \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \text{ champ sur } \Omega \quad (8.12)$$

Ce qui implique :

$$\overset{r}{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \quad \forall x \in \Omega \quad (8.13)$$

2. Considérons maintenant une évolution telle que  $(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \text{grad}\dot{\mathbf{G}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , et  $\dot{\mathbf{G}}$  non nul :

$$\int_{\Omega} \left( \overset{r}{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\mathbf{G}} \right) = 0, \quad \forall \dot{\mathbf{G}} \in \text{Sym} \text{ champ sur } \Omega. \quad (8.14)$$

On en déduit :

$$\overset{r}{\mathbf{Z}} \in \text{Skw} \quad (8.15)$$

3. Supposons  $(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \dot{\mathbf{G}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , et  $\text{grad}\dot{\mathbf{G}}$  non nul :

$$\int_{\Omega} \left( \overset{r}{\mathbf{z}} \cdot \text{grad}\dot{\mathbf{G}} \right) = 0, \quad \forall \dot{\mathbf{G}} \in \text{Sym} \text{ champ sur } \Omega. \quad (8.16)$$

$\text{grad}\dot{\mathbf{G}}$  étant symétrique gauche ( $\text{grad}\dot{\mathbf{G}} = {}^t(\text{grad}\dot{\mathbf{G}})$ ) :

$$\overset{r}{\mathbf{z}} = -{}^t\overset{r}{\mathbf{z}} \quad (8.17)$$

4. Considérons enfin une évolution telle que  $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$  ( $\mathbf{Q} \in \text{Skw}$ ). Il s'agit d'un mouvement de rotation de solide rigide admissible ( $\mathbf{G}$  vérifie bien 7.9) ; on peut donc appliquer 8.6 aux parties réactives des contraintes :

$$\mathbf{0} = \mathfrak{o}^T \overset{r}{\mathbf{Z}} + (\text{grad}\mathfrak{o}^T)({}^t\overset{r}{\mathbf{z}}) \quad (8.18)$$

et

$$\mathfrak{e} \overset{a}{\mathbf{T}} = \mathfrak{o}^T \overset{a}{\mathbf{Z}} + (\text{grad}\mathfrak{o}^T)({}^t\overset{a}{\mathbf{z}}) \quad (8.19)$$

On en déduit les relations suivantes concernant les contraintes exprimées en configuration de référence (définies par 8.7) :

$$\left( \overset{r}{\mathbf{P}} \mathbf{F}^T = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{F}^T \text{ champ sur } \Omega_0 \right) \Rightarrow \overset{r}{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (8.20)$$

$$\overset{r}{\mathbf{Z}}_0 \in \text{Skw} \quad (8.21)$$

$$\overset{r}{\mathbf{z}}_0 = -{}^t\overset{r}{\mathbf{z}}_0 \quad (8.22)$$

Ces relations vont permettre d'exprimer les équations d'équilibre du système en fonction uniquement des parties actives de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{z}$  (respectivement  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Z}_0$  et  $\mathbf{z}_0$ ).

### 8.4.3 Parties actives des contraintes

Ré-écrivons les équations d'équilibre 8.5 et 8.3.1 en fonction des parties réactives et actives des contraintes :

$$\rho \mathbf{v} + \operatorname{div} \overset{a}{\mathbf{T}} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad \text{sur } \Omega \quad (8.23a)$$

$$\rho \mathbf{V} - \overset{a}{\mathbf{Z}} + \operatorname{div} \overset{a}{\mathbf{z}} - \overset{r}{\mathbf{Z}} + \operatorname{div} \overset{r}{\mathbf{z}} = \rho \mathbf{A} \quad \text{sur } \Omega \quad (8.23b)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (8.23c)$$

$$\mathbf{z} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (8.23d)$$

$$\mathbf{0} = \mathfrak{c}^T \overset{r}{\mathbf{Z}} + (\operatorname{grad} \mathfrak{c}^T)(\overset{r}{\mathbf{z}}) \quad \text{sur } \Omega \quad (8.24a)$$

$$\mathfrak{e} \overset{a}{\mathbf{T}} = \mathfrak{c}^T \overset{a}{\mathbf{Z}} + (\operatorname{grad} \mathfrak{c}^T)(\overset{a}{\mathbf{z}}) \quad \text{sur } \Omega \quad (8.24b)$$

Avec :

$$(\overset{r}{\mathbf{z}} \mathbf{n}) \in \operatorname{Skw} (\forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \overset{r}{\mathbf{Z}} \in \operatorname{Skw}$$

Au vu des résultats du §8.4.2, il paraît judicieux de décomposer l'équation 8.23b en une partie symétrique contribuant à la déformation du plan de fissuration et une partie antisymétrique responsable de sa rotation (rotation du vecteur  $\mathbf{n}$  gouvernée par le mouvement macroscopique) :

$$\rho \operatorname{sym} \mathbf{A} = \rho \operatorname{sym} \mathbf{V} - \operatorname{sym} \overset{a}{\mathbf{Z}} + \operatorname{sym}(\operatorname{div} \overset{a}{\mathbf{z}}) \quad (8.25a)$$

$$\rho \operatorname{skw} \mathbf{A} = \rho \operatorname{skw} \mathbf{V} - \operatorname{skw} \overset{a}{\mathbf{Z}} - \overset{r}{\mathbf{Z}} + \operatorname{skw}(\operatorname{div} \overset{a}{\mathbf{z}}) + \operatorname{div} \overset{r}{\mathbf{z}} \quad (8.25b)$$

Les équations d'équilibre pures à considérer sont donc 8.23a, 8.23c et 8.23d ainsi que les équations 8.19 et 8.25a :

$$\rho \mathbf{v} + \operatorname{div} \overset{a}{\mathbf{T}} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad \text{sur } \Omega \quad (8.26a)$$

$$\rho \operatorname{sym} \mathbf{V} - \operatorname{sym} \overset{a}{\mathbf{Z}} + \operatorname{sym}(\operatorname{div} \overset{a}{\mathbf{z}}) = \rho \operatorname{sym} \mathbf{A} \quad \text{sur } \Omega \quad (8.26b)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (8.26c)$$

$$\mathbf{z} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (8.26d)$$

$$\mathfrak{e} \overset{a}{\mathbf{T}} = \mathfrak{c}^T \overset{a}{\mathbf{Z}} + (\operatorname{grad} \mathfrak{c}^T)(\overset{a}{\mathbf{z}}) \quad \text{sur } \Omega \quad (8.27)$$

Elles sont équivalentes en configuration de référence à :

$$\rho_0 \mathbf{v}_0 + \operatorname{Div} \overset{a}{\mathbf{P}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \tau^2} \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (8.28a)$$

$$\rho_0 \operatorname{sym} \mathbf{V}_0 - \operatorname{sym} \overset{a}{\mathbf{Z}}_0 + \operatorname{sym}(\operatorname{Div} \overset{a}{\mathbf{z}}_0) = \rho_0 \operatorname{sym} \mathbf{A} \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (8.28b)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{n}_0 = \mathbf{f}_0 \quad \text{sur } \partial \Omega_0 \quad (8.28c)$$

$$\mathbf{z}_0 \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{sur } \partial \Omega_0 \quad (8.28d)$$

$$\mathfrak{e}(\overset{a}{\mathbf{P}} \mathbf{F}^T) = \mathfrak{e}^T \overset{a}{\mathbf{Z}}_0^T + (\text{Grad} \mathfrak{e}^T)(\overset{a}{\mathbf{z}}_0) \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (8.29)$$

On ne fera désormais plus référence aux parties réactives des contraintes. On notera donc pour plus de clarté les parties actives des contraintes sans l'exposant  $a$ . L'ensemble des équations d'équilibre entre parties actives devront toujours s'accompagner de la liaison cinématique 7.9.

Nous disposons des équations d'équilibre correspondant à une approche de type milieu à micro-structure : l'état de fissuration de  $\Omega$  est en tout point décrit par le champ  $\mathbf{G}$  dont l'évolution traduit non seulement la déformation, mais aussi la propagation de chaque fissure. Les contraintes intervenant dans ces équations de bilan sont duales du taux de déformation  $\dot{\mathbf{F}}$  ainsi que du taux  $\dot{\mathbf{G}}$ . Leurs lois de comportement sont liées aux lois de comportement microscopiques décrivant l'évolution de  $\omega$ . Pour lier ces deux échelles on dispose d'une méthode (menée par exemple dans le chapitre sur les bulles), mais il faut encore l'appliquer dans le cas où il y a dé-cohésion de la matière, c'est-à-dire propagation de fissures.

On fera tout d'abord appel à une approche configurationnelle. On définira alors de nouvelles contraintes dites micro-configurationnelles dont on suppose pouvoir déterminer le comportement.

## 8.5 Evolution micro-configurationnelle

### 8.5.1 Variable configurationnelle

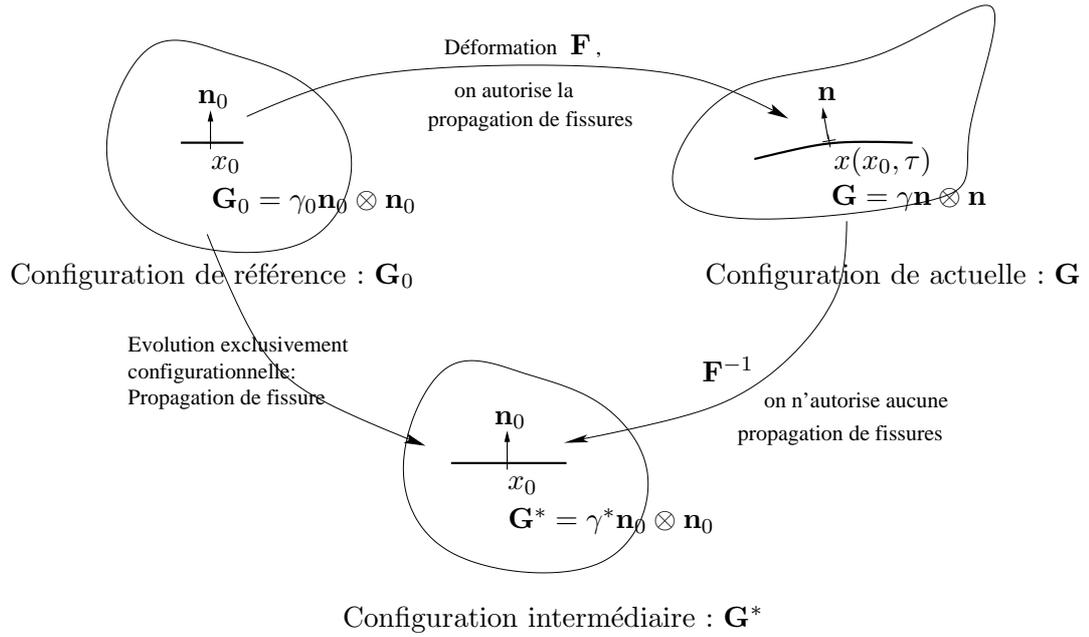
Considérons une évolution partant de l'état de référence  $\Omega_0$  à une configuration actuelle  $\Omega$  par une transformation  $x$  qui n'autorise aucune propagation de fissure. La relation liant la valeur actuelle  $\gamma$  à la valeur initiale  $\gamma_0$  est :

$$\gamma = \gamma_0 \|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0\|, \quad \text{soit } \gamma_0 = \gamma \|\mathbf{F}^T \mathbf{n}\| \quad (8.30)$$

Cette description ne correspond pas à l'évolution réelle du corps pendant laquelle les fissures peuvent se propager. On est donc amené à considérer une évolution fictive obtenue de la configuration actuelle par transport en arrière sans propagation de fissure, ni re-cohésion de la matière. L'évolution permettant de passer de la configuration de référence à la configuration intermédiaire est une évolution fictive lors de laquelle il n'y a aucun mouvement de matière, mais uniquement propagation de fissure. Les forces intervenant lors de cette évolution seront les forces dites configurationnelles. On note  $\gamma^*$  l'étendue de la fissure dans cette configuration intermédiaire (voir figure 8.1).

Notons qu'en tout point du corps, l'orientation de la fissure en configuration intermédiaire est identique à celle en configuration initiale :

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}_0 \quad (8.31)$$


 FIG. 8.1. Evolution de la microstructure en un point  $x$ .

Une relation comme 8.30 (valable uniquement pour une évolution sans fissuration) lie alors  $\gamma$  à  $\gamma^*$  :

$$\gamma = \gamma^* \|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0\|, \quad \text{soit } \gamma^* = \gamma \|\mathbf{F}^T \mathbf{n}\| \quad (8.32a)$$

On en déduit :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^* \frac{\gamma}{\gamma^*} - (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{G} \quad (8.32b)$$

Le terme  $\dot{\gamma}^* \frac{\gamma}{\gamma^*}$  décrit la propagation de la fissure ramenée dans la configuration de référence, tandis que le terme  $-(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{G}$  traduit sa déformation sous l'action d'un champ de déformation  $\mathbf{F}$ .

Dans le cas où le champ de fissures de  $\Omega$  ne fait que se déformer sous l'action des efforts appliqués sur le corps :

$$\dot{\gamma}^* = 0 \text{ et } \dot{\gamma} = -(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{G} \quad (8.33)$$

### 8.5.2 Méthode pour obtenir les équations d'équilibre dynamique

On désire caractériser l'évolution du corps dans la configuration intermédiaire présentée précédemment. Le premier axiome du principe des puissances virtuelles postule pour tout mouvement virtuel  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{O}})$  et pour tout domaine matériel  $\Omega$ , l'égalité entre la puissance de la quantité d'accélération et la somme des puissances des efforts intérieurs et extérieurs :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{P} \cdot \text{Grad} \hat{\mathbf{u}} + (\text{sym} \mathbf{Z}_0) \cdot \hat{\mathbf{O}} + (\text{sym}_{\mathbf{g}} \mathbf{z}_0) \cdot \text{Grad} \hat{\mathbf{O}} \right) + \int_{\Omega_0} \left( \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \rho_0 \mathbf{V}_0 \cdot \hat{\mathbf{O}} \right) + \int_{\partial \Omega_0} \left( \mathbf{f}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \hat{\mathbf{O}} \right) \\
 = \int_{\Omega_0} \left( \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \tau^2} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \rho_0 \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{O}} \right) \quad (8.34)
 \end{aligned}$$

Les premiers termes de ces deux équations correspondent à la puissance générée par le mouvement macroscopique (termes en  $\text{Grad}\hat{\mathbf{u}}$ ), tandis que les termes en  $\hat{\mathbf{O}}$  et  $\text{Grad}\hat{\mathbf{O}}$  sont liés à l'évolution du champ de fissures (déformation et propagation).

On scinde la cinématique de  $\Omega$  en une partie purement matérielle, traduisant aussi bien les déformations macroscopiques que les déformations du champ de fissures, et une partie dite configurationnelle correspondant uniquement à la propagation. Cette nouvelle description permet, grâce au 1<sup>e</sup> axiome du principe des puissances virtuelles, de mettre en évidence un système de contraintes qu'on appelle micro-configurationnelles.

On appliquera par ailleurs le 2<sup>nd</sup> axiome du principe des puissances virtuelles qui postule la nullité de la puissance des efforts intérieurs pour tout mouvement rigidifiant animant  $\Omega$ . De la même façon que la contrainte de Cauchy et les contraintes agissant sur la microstructure sont liées par 8.6 en configuration initiale, l'équation d'équilibre à la rotation permettra de caractériser le nouveau système de contraintes associées aux variables de configuration.

### 8.5.3 Mise en place des équations d'équilibre dynamique

On déduit de 8.11 et 8.32b l'expression de  $\dot{\mathbf{G}}$  en fonction du taux de déformation  $\dot{\mathbf{F}}$  et du taux de propagation de fissure  $\dot{\gamma}^*$  :

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{\dot{\gamma}^*}{\gamma^*} \mathbf{G} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} \left[ \left( \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right) \cdot \mathbf{G} \right] - \left[ \left( \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right)^T \mathbf{G} + \mathbf{G} \left( \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right) \right] \quad (8.35)$$

On restreint la classe des mouvements virtuels aux tenseurs  $\hat{\mathbf{O}}$  qui respectent la relation 8.35, c'est-à-dire vérifiant :

$$\hat{\mathbf{O}} = \frac{\hat{\lambda}^*}{\lambda^*} \mathbf{G} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} \left[ \text{Grad}\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{G} \right] - \left[ \left( \text{Grad}\hat{\mathbf{u}} \right)^T \mathbf{G} + \mathbf{G} \left( \text{Grad}\hat{\mathbf{u}} \right) \right] \quad (8.36)$$

En appliquant le 1<sup>e</sup> axiome des puissances virtuelles 8.34 tout en substituant cette nouvelle expression à  $\hat{\mathbf{O}}$ , on identifie les contraintes micro-configurationnelles duales des vitesses virtuelles  $\hat{\mathbf{u}}$  (translation) et  $\hat{\lambda}^*$  (propagation).

#### 8.5.3.1 Puissance des efforts intérieurs

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{P} \cdot \text{Grad}\hat{\mathbf{u}} + (\text{sym}\mathbf{Z}_0) \cdot \hat{\mathbf{O}} + (\text{sym}\mathbf{z}_0) \cdot \text{Grad}\hat{\mathbf{O}} \right) \quad (8.37)$$

On introduit les définitions :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &:= \frac{1}{\gamma} (\text{sym} \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{G}) \mathbf{G} - 2\mathbf{G} (\text{sym} \mathbf{Z}_0) - \frac{1}{\gamma^2} (((\text{sym}_g \mathbf{z}_0)^T \mathbf{G}) \cdot \text{grad} \gamma) \mathbf{G} \\ &+ \frac{1}{\gamma} (\text{grad} \mathbf{G}) ((\text{sym}_g \mathbf{z}_0)^T \mathbf{G}) + \frac{1}{\gamma} ((\text{sym}_g \mathbf{z}_0) \cdot \text{grad} \mathbf{G}) \mathbf{G} \end{aligned} \quad (8.38a)$$

$$- (\text{grad} \mathbf{G})^t (\text{sym}_g \mathbf{z}_0)^T - \text{grad} \mathbf{G} (\text{sym}_g \mathbf{z}_0)^t$$

$$\mathfrak{a}^* := \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} \otimes ((\text{sym}_g \mathbf{z}_0)^T \mathbf{G}) - 2\mathbf{G} (\text{sym}_g \mathbf{z}_0) \quad (8.38b)$$

$$\alpha^* := \frac{1}{\gamma^*} \cdot [(\text{sym} \mathbf{Z}_0) \cdot \mathbf{G} + (\text{sym}_g \mathbf{z}_0) \cdot \text{grad} \mathbf{G} - \frac{1}{\gamma^*} ((\text{sym}_g \mathbf{z}_0)^T \mathbf{G}) \cdot \text{grad} \gamma^*] \quad (8.38c)$$

$$\mathbf{a}^* := \frac{1}{\gamma^*} ((\text{sym}_g \mathbf{z}_0)^T \mathbf{G}) \quad (8.38d)$$

$\mathbf{G}$  actuel s'exprimant en fonction de  $\mathbf{G}_0$  de référence par :

$$\mathbf{G} = \frac{\gamma^{*2}}{\gamma_0 \gamma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G}_0 \mathbf{F}^{-1} \quad (8.39)$$

Grâce à 8.36, on écrit 8.37 sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega_0} & \left( (\mathbf{P} + \mathbf{A}^* \mathbf{F}^{-T} + (\mathfrak{a}^{*t}) (\text{Grad} \mathbf{F}^{-1})^T) \cdot \text{Grad} \hat{\mathbf{u}} \right. \\ & \left. + (\mathfrak{a}^{*t} \mathbf{F}^{-T})^t \cdot \text{Grad} (\text{Grad} \hat{\mathbf{u}}) + \alpha^* \cdot \hat{\lambda}^* + \mathbf{a}^* \cdot \text{Grad} \hat{\lambda}^* \right) \end{aligned} \quad (8.40)$$

Les contraintes de configuration exprimées dans la configuration initiale du système sont définies par les relations suivantes :

$$\mathbf{B}^* := \mathbf{P} + \mathbf{A}^* \mathbf{F}^{-T} + (\mathfrak{a}^{*t}) (\text{Grad} \mathbf{F}^{-1})^T \quad (8.41a)$$

$$\mathfrak{b}^* := (\mathfrak{a}^{*t} \mathbf{F}^{-T})^t \quad (8.41b)$$

$$\beta^* := \alpha^* \quad (8.41c)$$

$$\mathbf{b}^* := \mathbf{a}^* \quad (8.41d)$$

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{B}^* \cdot \text{Grad} \hat{\mathbf{u}} + \mathfrak{b}^* \cdot \text{Grad} (\text{Grad} \hat{\mathbf{u}}) + \beta^* \cdot \hat{\lambda}^* + \mathbf{b}^* \cdot \text{Grad} \hat{\lambda}^* \right) \quad (8.42)$$

On retrouve le terme  $\text{Grad} (\text{Grad} \hat{\mathbf{u}})$  mentionné au §8.4.1.

D'après le théorème de Gauss, 8.42 équivaut à :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int} = & + \int_{\Omega_0} \left[ (\text{Div} \mathbf{B}^* - \text{Div} (\text{Div} \mathfrak{b}^*)) \cdot \hat{\mathbf{u}} + (-\beta^* + \text{Div} \mathbf{b}^*) \cdot \hat{\lambda}^* \right] \\ & + \int_{\partial \Omega_0} \left[ (-\mathbf{B}^* \mathbf{n}_0 + \text{Div} (\mathfrak{b}^* \mathbf{n}_0) + (\text{Div} \mathfrak{b}^*) \mathbf{n}_0) \cdot \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{b}^* \mathbf{n}_0) \cdot \hat{\lambda}^* \right] \\ & - \int_{\partial(\partial \Omega_0)} [(\mathfrak{b}^* \mathbf{n}_0) \eta_0] \cdot \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (8.43)$$

Où  $\eta_0$  est en configuration de référence, la normale au bord de  $\partial\Omega$ .

### 8.5.3.2 Puissance des efforts extérieurs

De la même manière, on montre que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{ext} &= \int_{\Omega_0} \left( \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\hat{\lambda}}{\gamma^*} \rho_0 \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{G} - \left( \text{Div} \left[ \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} ((\rho_0 \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{G}) \mathbf{I} - \rho_0 (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T)) \right] \right) \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} \\
&+ \int_{\partial\Omega_0} \left( \mathbf{f}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\hat{\lambda}}{\gamma^*} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{G} - \left( \text{Div} \left[ \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} ((\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{G}) \mathbf{I} - (\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0^T)) \right] \right) \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} \\
&+ \int_{\partial\Omega_0} \left( \left( \left[ \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} ((\rho_0 \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{G}) \mathbf{I} - \rho_0 (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0^T)) \right] \mathbf{n}_0 \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} \right) \\
&+ \int_{\partial(\partial\Omega_0)} \left( \left( \left[ \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} ((\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{G}) \mathbf{I} - (\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0^T)) \right] \eta_0 \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} \right)
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Notons  $\mathbb{P}$  le tenseur d'ordre 4 tel que :

$$\mathbb{P} \mathbf{X} = \frac{1}{\gamma} ((\mathbf{X} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{I} - (\mathbf{X} + \mathbf{X}^T)), \quad \forall \mathbf{X} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \tag{8.45}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{ext} &= \int_{\Omega_0} \left[ (\rho_0 \mathbf{v}_0 - \text{Div}(\rho_0 \mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{V}_0)) \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\hat{\lambda}}{\gamma^*} \rho_0 \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{G} \right] \\
&+ \int_{\partial\Omega_0} \left[ (\mathbf{f}_0 + \rho_0 (\mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{V}_0) \mathbf{n}_0 - \text{Div}(\mathbf{G} \mathbb{P} \boldsymbol{\sigma}_0)) \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\hat{\lambda}}{\gamma^*} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{G} \right] \\
&+ \int_{\partial(\partial\Omega_0)} [((\mathbf{G} \mathbb{P} \boldsymbol{\sigma}_0) \eta_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}]
\end{aligned} \tag{8.46}$$

### 8.5.3.3 Quantité d'accélération

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{\Omega_0} \left( \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \tau^2} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\hat{\lambda}}{\gamma^*} \rho_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} - \left( \text{Div} \left[ \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} ((\rho_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{I} - \rho_0 (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)) \right] \right) \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} \\
&+ \int_{\partial\Omega_0} \left( \left( \left[ \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} ((\rho_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{I} - \rho_0 (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)) \right] \mathbf{n}_0 \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} \right)
\end{aligned} \tag{8.47}$$

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega_0} \left[ (\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \tau^2} - \text{Div}(\rho_0 \mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{A})) \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\hat{\lambda}}{\gamma^*} \rho_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \right] + \int_{\partial\Omega_0} [\rho_0 ((\mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{A}) \mathbf{n}_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}] \tag{8.48}$$

### 8.5.3.4 Equations d'équilibre

$\mathcal{A} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$  étant valable quelque soit le mouvement virtuel  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda}^*)$  on considère successivement des mouvements annulant  $\hat{\mathbf{u}}$  ou  $\hat{\lambda}^*$  sur  $\Omega$  et ses contours. Les positions des points du corps étant identiques entre les configurations initiale et intermédiaire, on remplace  $\Omega_0$  par  $\Omega^*$  dans les bilans 8.43, 8.46 et 8.48. Les équations d'équilibre obtenues sont les suivantes :

sur  $\Omega^*$  :

$$\text{Div}(\mathbf{B}^* - \text{Div}(\mathbf{b}^*)) + \rho_0 \mathbf{v}_0 - \text{Div}(\rho_0 \mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{V}_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \tau^2} - \text{Div}(\rho_0 \mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{A}) \quad (8.49a)$$

$$-\beta^* + \text{Div} \mathbf{b}^* + \frac{1}{\gamma^*} \rho_0 \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{G} = \frac{1}{\gamma^*} \rho_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \quad (8.49b)$$

sur  $\partial\Omega^*$  :

$$-\mathbf{B}^* \mathbf{n}_0 + \text{Div}(\mathbf{b}^* \mathbf{n}_0) + (\text{Div} \mathbf{b}^*) \mathbf{n}_0 + \mathbf{f}_0 + \rho_0 (\mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{V}_0) \mathbf{n}_0 - \text{Div}(\mathbf{G} \mathbb{P} \boldsymbol{\sigma}_0) = \rho_0 (\mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{A}) \mathbf{n}_0 \quad (8.49c)$$

$$-\mathbf{b}^* \mathbf{n}_0 + \frac{1}{\gamma^*} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{G} = 0 \quad (8.49d)$$

sur  $\partial(\partial\Omega)^*$  :

$$((\mathbf{G} \mathbb{P} \boldsymbol{\sigma}_0) - (\mathbf{b}^* \mathbf{n}_0) \eta_0) \eta_0 = 0, \quad ((\mathbf{G} \mathbb{P} \boldsymbol{\sigma}_0) - (\mathbf{b}^* \mathbf{n}_0) \eta_0) \perp \eta_0 \quad (8.49e)$$

Considérons 8.49a : le terme  $(\mathbf{B}^* - \text{Div}(\mathbf{b}^*))$  peut être qualifié de partie efficace des contraintes. Elle équivaut à la contrainte  $\mathbf{B}^*$  si le flux d'énergie lié au second gradient de déplacement est nul. La contrainte efficace est réduite et cet effet est d'autant plus grand que l'énergie citée se diffuse.

Il en est de même pour les efforts volumiques appliqués à  $\Omega$ , ainsi que les actions d'inertie :

- l'action de  $\rho_0 \mathbf{v}_0$  est réduite par les efforts volumiques appliqués sur la microstructure  $\text{Div}(\rho_0 \mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{V}_0)$ ,
- $\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \tau^2} - \text{Div}(\rho_0 \mathbf{G} \mathbb{P} \mathbf{A})$  est l'inertie résiduelle des deux mouvements macroscopique et microscopique.

### 8.5.3.5 Equilibre à la rotation

Appliquons maintenant le second axiome du principe des puissances virtuelles, et considérons un mouvement de solide rigide tel que  $(\dot{\gamma}^*, \text{grad} \dot{\gamma}^*) = (0, 0)$  et

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{W}}(\mathbf{x} - 0), \quad \hat{\mathbf{W}} = -\mathbf{e} \hat{\mathbf{q}}$$

$\hat{\mathbf{q}}$  étant le vecteur associé à la rotation  $\hat{\mathbf{W}}$  : sa direction correspond à l'axe de rotation, et sa norme est égale à l'angle de rotation. On obtient :

$$\mathbf{e}(\mathbf{B}^* \mathbf{F}^T) = \mathbf{0} \quad (8.50)$$

### 8.5.3.6 Contraintes exprimées en configuration actuelle

L'expression 8.37 de la puissance des efforts intérieurs peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega} \frac{1}{\ell} \left[ (\mathbf{P}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{A}^*) \cdot \text{grad}\hat{\mathbf{u}} + (\mathfrak{a}^*\mathbf{F}^T) \cdot \text{grad}(\text{grad}\hat{\mathbf{u}}) + \alpha^* \cdot \lambda^* + (\mathbf{F}\mathbf{a}^*) \cdot \text{grad}\hat{\lambda}^* \right], \quad (8.51)$$

ce qui nous permet de définir  $\mathbf{B}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\beta$  et  $\mathbf{b}$  : contraintes duales respectivement de  $\text{grad}\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\text{grad}(\text{grad}\hat{\mathbf{u}})$ ,  $\lambda^*$  et  $\text{grad}\hat{\lambda}^*$  :

$$\mathbf{B} := \frac{1}{\ell} (\mathbf{P}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{A}^*) \quad (8.52a)$$

$$\mathfrak{b} := \frac{1}{\ell} (\mathfrak{a}^*\mathbf{F}^T) \quad (8.52b)$$

$$\beta := \frac{1}{\ell} \alpha^* \quad (8.52c)$$

$$\mathbf{b} := \frac{1}{\ell} (\mathbf{F}\mathbf{a}^*) \quad (8.52d)$$

Les termes  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathfrak{a}^*$ ,  $\alpha^*$  et  $\mathbf{a}^*$  étant définis par 8.38.

Les contraintes exprimées dans la configuration initiale et celles exprimées dans la configuration actuelle sont liées par :

$$\mathbf{B} := \frac{1}{\ell} \left( \mathbf{B}^* - (\mathfrak{b}^{*t}\mathbf{F}^T) (\text{Grad}\mathbf{F}^{-1})^T \right) \quad (8.53a)$$

$$\mathfrak{b} := \frac{1}{\ell} (\mathfrak{b}^{*t}\mathbf{F}^T)^t \mathbf{F}^T \quad (8.53b)$$

$$\beta := \frac{1}{\ell} \beta^* \quad (8.53c)$$

$$\mathbf{b} := \frac{1}{\ell} \mathbf{F}\mathbf{b}^* \quad (8.53d)$$

## 8.6 Bilan

Les inconnues de notre problème sont :

1. Les deux inconnues cinématiques principales :

- $\gamma^*$  : il décrit uniquement la propagation du champ de fissures ,
- $\mathbf{F}$  : gradient de la transformation macroscopique. L'orientation de chaque fissure  $\mathbf{n}$  est supposée évoluer suivant  $\mathbf{F}$ .

2. Les trois inconnues secondaires :

- $\gamma$  : taille actuelle de la fissure,
- $v$  : densité de fissures,
- $\nu$  : décrit l'ouverture des fissures.

3. Les quatre inconnues constitutives : les contraintes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\beta$ .

On dispose de :

- deux équations d'équilibre : l'équation 8.49a accompagnée de ses conditions aux limites 8.49c et 8.49e, ainsi que 8.49b et sa condition aux limites 8.49d.
- la relation 8.2 liant  $v$  à  $\mathbf{F}$
- la relation 8.32a liant  $\gamma^*$ ,  $\gamma$  et  $\mathbf{F}$ .

La masse volumique  $\rho$  est déterminée par l'équation de conservation de la masse 8.1 en fonction de  $\mathbf{F}$ .

Il est donc nécessaire de mettre en place quatre lois de comportement des contraintes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbb{b}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\beta$ , ainsi qu'une relation exprimant  $\gamma^*$  en fonction des autres variables du problème. Ces relations pourront être déterminées grâce à l'étude de l'élément matériel  $\omega$  suivant la méthode appliquée au chapitre 6. Notamment, l'évolution configurationnelle soit  $\gamma^*$  sera le résultat d'une condition d'équilibre de forces configurationnelles qu'il faudra se donner.

## Chapitre 9

# Méthode pour déterminer les lois de comportement du modèle

Nous avons vu précédemment qu'il était nécessaire de mettre en place des lois de comportement pour les contraintes :  $\mathbf{B}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\beta$ .

On suppose qu'il existe des fonctionnelles  $\mathcal{F}_{01}$ ,  $\mathcal{F}_{02}$  et  $\mathcal{F}_{03}$  telles que :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x, \tau) &= \mathcal{F}_{01}(\mathbf{F}(x, \tau), \mathbf{G}(x, \tau)), \\ \mathbf{Z}_0(x, \tau) &= \mathcal{F}_{02}(\mathbf{F}(x, \tau), \mathbf{G}(x, \tau)), \\ \mathbf{z}_0(x, \tau) &= \mathcal{F}_{03}(\mathbf{F}(x, \tau), \mathbf{G}(x, \tau)).\end{aligned}\tag{9.1}$$

Ces fonctionnelles sont supposées vérifier le principe de causalité : la contrainte actuelle ne dépend que du mouvement passé ou actuel.

On supposera dans la suite :

- que le comportement est local ou faiblement local :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x, \tau) &= \int_{-\infty}^t f_{11}(\mathbf{F}(x, \tau), \text{Grad}(\mathbf{F}(x, \tau)), \mathbf{G}(x, \tau), \text{Grad}(\mathbf{G}(x, \tau))), \\ \mathbf{Z}_0(x, \tau) &= \int_{-\infty}^t f_{12}(\mathbf{F}(x, \tau), \text{Grad}(\mathbf{F}(x, \tau)), \mathbf{G}(x, \tau), \text{Grad}(\mathbf{G}(x, \tau))), \\ \mathbf{z}_0(x, \tau) &= \int_{-\infty}^t f_{13}(\mathbf{F}(x, \tau), \text{Grad}(\mathbf{F}(x, \tau)), \mathbf{G}(x, \tau), \text{Grad}(\mathbf{G}(x, \tau))).\end{aligned}\tag{9.2}$$

- et que les contraintes actuelles peuvent être décrites en fonction (i) de l'état local du milieu dans la configuration intermédiaire (\*) et (ii) du mouvement menant de la configuration intermédiaire à la configuration actuelle. Ce mouvement étant paramétré par le couple  $(\mathbf{F}, \gamma^*)$ . On déterminera les lois à appliquer aux contraintes configurationnelles  $\mathbf{B}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(x, \tau) &= f_{21}(\mathbf{F}(x, \tau), \text{Grad}\mathbf{F}(x, \tau), \gamma^*(x, \tau), \text{Grad}\gamma^*(x, \tau)), \\ \mathfrak{b}(x, \tau) &= f_{22}(\mathbf{F}(x, \tau), \text{Grad}\mathbf{F}(x, \tau), \gamma^*(x, \tau), \text{Grad}\gamma^*(x, \tau)), \\ \mathbf{b}(x, \tau) &= f_{23}(\mathbf{F}(x, \tau), \text{Grad}\mathbf{F}(x, \tau), \gamma^*(x, \tau), \text{Grad}\gamma^*(x, \tau)), \\ \beta(x, \tau) &= f_{24}(\mathbf{F}(x, \tau), \text{Grad}\mathbf{F}(x, \tau), \gamma^*(x, \tau), \text{Grad}\gamma^*(x, \tau)).\end{aligned}\tag{9.3}$$

Les éléments de matière ont des propriétés intrinsèques qui ne dépendent pas de la représentation utilisée pour décrire le corps : la puissance des efforts intérieurs, la masse ainsi que l'énergie totale sont les mêmes que l'on décrive  $\mathcal{B}$  comme (i) un ensemble d'éléments matériels de taille finie, représenté chacun comme un sous domaine  $\omega(\mathfrak{X})$  dans le milieu de Cauchy ou (ii) comme un ensemble de points matériels (de taille infinitésimale) caractérisé chacun par la donnée de sa position  $x_0$  et d'une microstructure. On parlera dans le premier cas de représentation « microscopique » tandis qu'on parlera de représentation « macroscopique » dans le deuxième.

On se servira de cette propriété pour déterminer les lois de comportement macroscopique en fonction du comportement microscopique et on vérifiera dans la suite que ces fonctionnelles vérifient le principe d'objectivité (invariance par changement d'observateur).

## 9.1 Hypothèse des petites perturbations

On suppose que les transformations subies par  $\Omega$  sont infinitésimales :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \ll 1. \quad (9.4)$$

Par conséquent :

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \approx \dot{\mathbf{H}} \quad (9.5)$$

On s'intéressera donc aux contraintes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\beta$  et  $\mathbf{b}$  exprimées dans la configuration actuelle confondue (dans les limites de l'hypothèse 9.4) avec la configuration de référence.

On définit  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$  tels que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{D} + \mathbf{W}; \quad \mathbf{D} \in Sym, \mathbf{W} \in Skw \quad (9.6)$$

respectivement vitesses de déformation et de rotation des points matériels.

## 9.2 Conditions aux limites

On considère un élément de matière  $x$  qui occupe un domaine  $\omega(\mathfrak{X})$  dans la représentation microscopique et une position  $\mathbf{x}$  dans la représentation macroscopique. On postule que le mouvement microscopique correspond à un déplacement  $\mathbf{D}$  suivant l'équation :

$$\mathbf{u}(y) = \mathbf{D}(y - 0) \quad \forall y \in \partial\omega(x), \text{ pour un choix } 0 \in \partial\omega(x). \quad (9.7)$$

(voir figure 9.1).

On montre qu'imposer une déformation  $\mathbf{D}$  sur les bords de  $\omega(\mathfrak{X})$  revient à imposer une condition sur la moyenne des déformations de la maille élémentaire.

Déterminons les composantes  $\langle E_{ij} \rangle_\omega$  de ce tenseur :

$$\langle E_{ij} \rangle_\omega = \int_\omega \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} (u_i n_j) + \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} (u_j n_i) \quad (9.8)$$

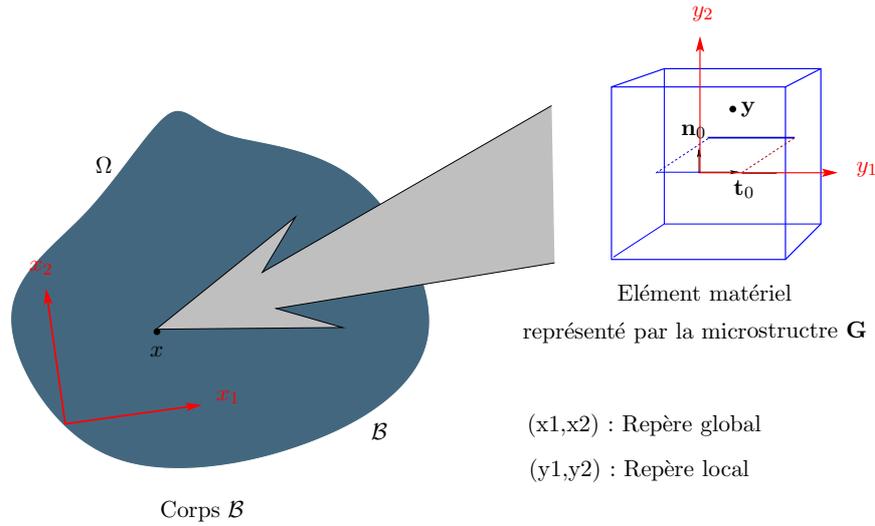


FIG. 9.1. Corps micro-fissuré : milieu à microstructure

Utilisons 9.7 :

$$\begin{aligned}
 \langle E_{ij} \rangle_{\omega} &= \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} (D_{ih}(y_h - 0_h)n_j) + \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} (D_{jk}(y_k - 0_k)n_i) \\
 &= \frac{1}{2} D_{ih} \int_{\partial\omega} ((y_h - 0_h)n_j) + \frac{1}{2} D_{jk} \int_{\partial\omega} ((y_k - 0_k)n_i) \\
 &= \frac{1}{2} D_{ih} \int_{\omega} ((y_h - 0_h)_{,j}) + \frac{1}{2} D_{jk} \int_{\omega} ((y_k - 0_k)_{,i}) \\
 &= D_{ij}
 \end{aligned} \tag{9.9}$$

$$\langle \mathbf{E} \rangle_{\omega} = \mathbf{D} \tag{9.10}$$

### 9.3 Description « microscopique » de l'évolution de $\omega(\mathfrak{x})$

Considérons maintenant l'élément matériel  $\omega(\mathfrak{x})$  et supposons que l'on est dans le cadre d'application de la mécanique linéaire de la rupture. Le matériau est supposé évoluer suivant la loi de comportement élastique :

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{E} \tag{9.11}$$

Où  $\mathbf{C}$  est le tenseur de raideur (d'ordre 4), il dépend des constantes d'élasticité du matériau (module d'Young  $E_Y$  et coefficient de Poisson  $\nu_P$ ).

On suppose que dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, la déformation  $\mathbf{E}$  est en tout point  $y$  de  $\omega(\mathfrak{x})$  liée à la déformation  $\mathbf{D}$  par la relation linéaire (voir figure 9.1) :

$$\mathbf{E}(y; \mathbf{D}, \gamma^*, v) = \mathbb{H}(y; \gamma^*, v) \mathbf{D} \tag{9.12}$$

$\mathbb{H}$  étant un tenseur d'ordre 4, et  $\gamma^*$  ainsi que  $v$  étant des champs définis sur  $\Omega$ .

## 9.4 Lien entre les représentations « microscopique » et « macroscopique »

Il s'agit maintenant de faire le lien entre les représentations « microscopique » et « macroscopique ». Pour cela, on impose l'invariance de la masse, de la puissance des efforts intérieurs ainsi que de l'énergie cinétique entre les deux représentations.

### 9.4.1 Masse volumique

La masse totale de l'élément est indépendante de la représentation, on en déduit :

$$\rho = \rho_m(1 - \nu) \quad (9.13)$$

### 9.4.2 Puissance des efforts intérieurs

#### 9.4.2.1 Etude d'un point matériel

La puissance des efforts intérieurs à un élément matériel  $\omega(\mathfrak{X})$  est identique à la puissance « macroscopique » des efforts développés au point  $x$  dans lequel se place  $\mathfrak{X}$  à l'instant actuel.

On remarque que cette méthode ne permet pas de tenir compte du second gradient de déplacement ni du gradient de propagation traduisant l'interaction entre corps voisins. Ils ne sont pris en compte que si on s'intéresse à l'évolution de plusieurs et non pas d'une seule maille  $\omega(\mathfrak{X})$  (voir §9.4.2.2).

#### Puissance des efforts intérieurs macroscopiques

$$\mathcal{P}_{int}(x) = -\mathbf{B} \cdot (\dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{W}}) - \beta \cdot \dot{\gamma}^* \quad (9.14)$$

Les contraintes  $\mathbb{b}$  et  $\mathbf{b}$  étant négligées, on déduit de 8.53a et 8.50 :

$$\mathbf{eB} = \mathbf{0} \quad (9.15)$$

Ce qui implique :

$$\mathcal{P}_{int}(x) = -\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \beta \cdot \dot{\gamma}^* \quad (9.16)$$

**Puissance des efforts intérieurs « microscopiques »** Nous n'avons pour l'instant fait aucun postulat concernant l'évolution configurationnelle au niveau microscopique. Dans le cas où  $\omega(\mathfrak{X})$  ne fait que se déformer sous le tenseur  $\mathbf{D}$  et qu'il n'y a pas propagation de la fissure, la puissance des efforts intérieurs est :

$$\mathcal{P}_{int}(\omega) = -v \int_{\omega} (\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}})$$

Dans le cas où il y a propagation de la fissure contenue dans  $\omega(\mathfrak{X})$ , il faut tenir compte de la contribution configurationnelle [5, 59, 89], la puissance des efforts intérieurs est alors de la forme :

$$\mathcal{P}_{int}(\omega(\mathfrak{X})) = -v \int_{\omega} \left[ (\mathbb{C}\mathbb{H}\mathbb{D}) \cdot \left( \mathbb{H}\dot{\mathbf{D}} + \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \mathbf{D} \dot{\gamma}^* + \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v} \mathbf{D} \dot{v} \right) \right] - \frac{G}{4l} \dot{\gamma}^* \quad (9.17)$$

$\dot{v}$  s'exprime en fonction de la variable macroscopique  $\dot{\mathbf{D}}$  par 8.2 :

$$\dot{v} = -v \operatorname{tr} \left( \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right) \approx -v \operatorname{tr} \dot{\mathbf{D}} \quad \text{dans le cadre des petites transformations} \quad (9.18)$$

Cette dernière relation permet d'exprimer  $\mathcal{P}_{int}(\omega(\mathfrak{X}))$  uniquement en fonction des variables macroscopiques  $\dot{\gamma}^*$  et  $\dot{\mathbf{F}}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int}(\omega(\mathfrak{X})) &= - \left[ v \left( \int_{\omega} \mathbb{H}^T (\mathbb{C}\mathbb{H}\mathbb{D}) \right) - v^2 \left( \int_{\omega} (\mathbb{C}\mathbb{H}\mathbb{D}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v} \mathbf{D} \right) \right) \mathbf{I} \right] \cdot \dot{\mathbf{D}} \\ &\quad - \left[ \frac{G}{4l} + v \int_{\omega} (\mathbb{C}\mathbb{H}\mathbb{D}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \mathbf{D} \right) \right] \cdot \dot{\gamma}^* \end{aligned} \quad (9.19a)$$

$$\begin{aligned} &= - \left[ v \left[ \int_{\omega} \mathbb{H}^T (\mathbb{C}\mathbb{H}\mathbb{D}) \right] - v^2 \left[ \int_{\omega} \left( (\mathbb{C}\mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \right] \mathbf{I} \right] \cdot \dot{\mathbf{D}} \\ &\quad - \left[ \frac{G}{4l} + v \int_{\omega} \left( (\mathbb{C}\mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \right] \cdot \dot{\gamma}^* \end{aligned} \quad (9.19b)$$

**Identification des lois de comportement macroscopiques** On postule l'égalité entre les puissances des efforts intérieurs macroscopiques  $\mathcal{P}_{int}(x)$  (exprimée par 9.16) et microscopiques  $\mathcal{P}_{int}(\omega(\mathfrak{X}))$  (exprimée par 9.19), ce qui nous permet de déterminer les lois de comportement des contraintes  $\mathbf{B}$  et  $\beta$  :

$$\mathbf{B} := \int_{\omega} \bar{\mathbf{B}} \quad \text{et} \quad \beta := \int_{\omega} \bar{\beta} \quad (9.20)$$

Avec :

$$\bar{\mathbf{B}} := v \left[ (\mathbb{H}^T \mathbb{C}\mathbb{H}) \mathbf{D} \right] - v^2 \left( (\mathbb{C}\mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \mathbf{I} \quad (9.21a)$$

$$\bar{\beta} := v \frac{G}{4l} + v \left( (\mathbb{C}\mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \quad (9.21b)$$

Par la suite, on développera ces calculs dans un cas précis (voir chapitre 10).

#### 9.4.2.2 Propagation dans deux éléments

La méthode proposée précédemment ne permet pas de tenir compte des interactions entre fissures. Il est nécessaire pour cela de s'intéresser à plusieurs éléments matériels.

On peut supposer que pour tout élément matériel  $\omega(\mathfrak{X})$  au sein duquel se propage une microfissure de normale  $\mathbf{n}$ , seule la composante du gradient suivant  $\mathbf{n}$  a une influence sur le comportement global du système. On propose une méthode afin de déterminer l'influence du gradient de déformation et de propagation sur le comportement macroscopique.

Considérons deux domaines  $\omega(\mathfrak{x}_1)$  et  $\omega(\mathfrak{x}_2)$  voisins, notés respectivement  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . La frontière entre les deux domaines est notée  $\Gamma_{12}$ , elle assure la parfaite continuité entre les deux éléments matériels (voir figure 9.2).

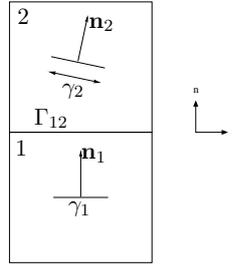


FIG. 9.2. Deux éléments matériels microscopiques voisins

Imposons maintenant une déformation  $\mathbf{D}_1$  à  $\omega_1$ . On suppose que la déformation en  $\omega_2$  est telle que :

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 + \text{Grad}\mathbf{D}(d_0\mathbf{n}_1) \quad (9.22)$$

et que la taille de la fissure en  $\omega_2$  est telle que :

$$\gamma_2^* = \gamma_1^* + \text{Grad}\gamma^* \cdot (d_0\mathbf{n}_1) \quad (9.23)$$

Avec :

$$d_0 = \left( \frac{1}{8l_{10}v_{10}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{8l_{20}v_{20}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.24)$$

- $v_{10}$  et  $v_{20}$  : densité de nombre de fissures aux points  $x_1$  et  $x_2$  à l'instant initial
- $l_{10}$  et  $l_{20}$  : dimensions à l'instant initial de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans la direction normale au plan  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ .

Nous avons montré (voir définitions 9.20 et 9.21) que pour tout élément matériel « isolé »  $\omega(\mathfrak{x})$  situé en un point  $x$ , on pouvait écrire la puissance des efforts intérieurs « microscopique » sous la forme :

$$\mathcal{P}_{int}(\omega(\mathfrak{x})) = \int_{\omega} \left( \overline{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \overline{\beta} \cdot \dot{\gamma}^* \right) \quad (9.25)$$

La puissance des efforts intérieurs aux deux corps microscopiques a donc la forme :

$$\mathcal{P}_{int}^{12}(\omega_1 \cup \omega_2) = \int_{\omega_1} \left( \overline{\mathbf{B}}_1 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1 + \overline{\beta}_1 \cdot \dot{\gamma}_1^* \right) + \int_{\omega_2} \left( \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \dot{\mathbf{D}}_2 + \overline{\beta}_2 \cdot \dot{\gamma}_2^* \right) - \int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \dot{\mathbf{D}}_2 + \overline{\beta}_2 \cdot \dot{\gamma}_2^* \right) \quad (9.26a)$$

$$= \mathbf{B}_1 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1 + \beta_1 \cdot \dot{\gamma}_1^* + \mathbf{B}_2 \cdot \dot{\mathbf{D}}_2 + \beta_2 \cdot \dot{\gamma}_2^* - \int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \dot{\mathbf{D}}_2 + \overline{\beta}_2 \cdot \dot{\gamma}_2^* \right) \quad (9.26b)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_2 = \dot{\mathbf{D}}_1 + \text{Grad}\dot{\mathbf{D}}(d_0\mathbf{n}_1) + \text{Grad}\mathbf{D}(d_0\dot{\mathbf{n}}_1 + \dot{d}_0\mathbf{n}_1) \quad (9.27a)$$

$$\dot{\gamma}_2^* = \dot{\gamma}_1^* + \text{Grad}\dot{\gamma}^* \cdot (d_0\mathbf{n}_1) + \text{Grad}\gamma^* \cdot (d_0\dot{\mathbf{n}}_1 + \dot{d}_0\mathbf{n}_1) \quad (9.27b)$$

$$7.8 \text{ et } 8.32a \Rightarrow \dot{\mathbf{n}} = -\frac{\gamma^*}{\gamma} \left( \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right)^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0 + \frac{\gamma^*}{\gamma^2} \left( \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G} \right) \left( \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0 \right) \quad (9.28)$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations :

$$\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{n}_0 + \left( \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}_0 \right) \mathbf{n}_0 \quad (9.29)$$

On peut dans un premier temps négliger les variations de  $d_0$ , on a alors :

$$\int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \dot{\mathbf{D}}_2 \right) = \int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1 + d_0 \left( \overline{\mathbf{B}}_2 \otimes \mathbf{n}_1 \right) \cdot \text{Grad} \dot{\mathbf{D}} + \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \left( \text{Grad} \mathbf{D} (d_0 \dot{\mathbf{n}}_1) \right) \right) \quad (9.30a)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \right] \cdot \dot{\mathbf{D}}_1 + d_0 \left[ \left( \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \otimes \mathbf{n}_1 \right] \cdot \text{Grad} \dot{\mathbf{D}} \\ &\quad - d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \right] \cdot \dot{\mathbf{H}}_1 \\ &\quad + d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \left( \text{Grad} \mathbf{D} \mathbf{n}_{10} \right) \right] \mathbf{G}_0 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1 \end{aligned} \quad (9.30b)$$

de même :

$$\int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\beta}_2 \cdot \dot{\gamma}_2^* \right) = \int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\beta}_2 \cdot \dot{\gamma}_1^* + d_0 \overline{\beta}_2 \mathbf{n}_1 \cdot \text{Grad} \dot{\gamma}^* + d_0 \overline{\beta}_2 \text{Grad} \dot{\gamma}^* \cdot \dot{\mathbf{n}}_1 \right) \quad (9.31a)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \right] \cdot \dot{\gamma}_1^* + d_0 \left[ \left( \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \right) \mathbf{n}_1 \right] \cdot \text{Grad} \dot{\gamma}^* \\ &\quad - d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\beta}_2 \text{Grad} \dot{\gamma}^* \right) \right] \cdot \dot{\mathbf{H}}_1 \\ &\quad + d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \left( \text{Grad} \dot{\gamma}^* \cdot \mathbf{n}_{10} \right) \right] \mathbf{G}_0 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1 \end{aligned} \quad (9.31b)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int}^{12} &= \left( \left[ \int_{\omega_1} \overline{\mathbf{B}}_1 \right] - \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \right] \right) \\ &\quad + d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \right] - d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot \left( \text{Grad} \mathbf{D} \mathbf{n}_{10} \right) \right] \mathbf{G}_0 \\ &\quad + d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\beta}_2 \text{Grad} \dot{\gamma}^* \right) \right] - d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \left( \text{Grad} \dot{\gamma}^* \cdot \mathbf{n}_{10} \right) \right] \mathbf{G}_0 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1 \\ &\quad + \left( d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \right] + d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( \overline{\beta}_2 \text{Grad} \dot{\gamma}^* \right) \right] \right) \cdot \dot{\mathbf{w}}_1 \\ &\quad - d_0 \left[ \left( \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \otimes \mathbf{n}_1 \right] \cdot \text{Grad} \dot{\mathbf{D}} - d_0 \left[ \left( \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \right) \mathbf{n}_1 \right] \cdot \text{Grad} \dot{\gamma}^* \\ &\quad + \left( \int_{\omega_2} \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \cdot \dot{\mathbf{D}}_2 + \left( \int_{\omega_1} \overline{\beta}_1 - \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \right) \cdot \dot{\gamma}_1^* + \int_{\omega_2} \left( \overline{\beta}_2 \cdot \dot{\gamma}_2^* \right) \end{aligned} \quad (9.32)$$

Les termes en gradient traduisent l'influence de  $\omega_2$  sur  $\omega_1$ . Les lois de comportement à associer à

$\omega_1$  sont donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 = & \left[ \int_{\omega_1} \overline{\mathbf{B}}_1 \right] - \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \right] \\ & + d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \right] - d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot (\text{Grad} \mathbf{D} \mathbf{n}_{10}) \right] \mathbf{G}_0 \end{aligned} \quad (9.33a)$$

$$+ d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} (\overline{\beta}_2 \text{Grad} \gamma^*) \right] - d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 (\text{Grad} \gamma^* \cdot \mathbf{n}_{10}) \right] \mathbf{G}_0$$

$$\mathbf{b}_1 = -d_0 \left[ \left( \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \otimes \mathbf{n}_1 \right] \quad (9.33b)$$

$$\beta_1 = \int_{\omega_1} \overline{\beta}_1 - \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \quad (9.33c)$$

$$\mathbf{b}_1 = -d_0 \left( \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \right) \mathbf{n}_1 \quad (9.33d)$$

Les termes  $\overline{\mathbf{B}}_1$ ,  $\overline{\mathbf{B}}_2$ ,  $\overline{\beta}_1$  et  $\overline{\beta}_2$  étant déterminés par les champs de déformation et de contrainte « microscopiques » connus (9.11 et 9.12 ainsi que 9.20 et 9.21).

*Remarque :* la même méthode peut être effectuée sans négliger les variations de  $d_0$ , cette variable pouvant être déterminée à l'aide du champ de déplacement solution du problème microscopique.

### 9.4.3 Energie cinétique

On suppose :

$$\mathcal{K}(x) = v \int_{\omega} \frac{1}{2} \rho_m \dot{\mathbf{y}}^2 \quad (9.34)$$

L'expression de l'énergie cinétique peut être déterminée en utilisant une démarche semblable à celle du modèle des liquides avec bulles : considérons un élément matériel  $\omega(\mathfrak{X})$ , les champs de déformation et contrainte étant supposés connus sous une déformation imposée  $\mathbf{D}$ , on peut déterminer les positions :

$$\mathbf{y}(\mathbf{D}, v, \gamma^*) \quad (9.35)$$

On a alors :

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \dot{\gamma}^* \quad (9.36)$$

8.35 permet d'écrire  $\dot{\gamma}^*$  en fonction des variations de  $\mathbf{G}$  ainsi que celles de  $\mathbf{D}$  par :

$$\dot{\gamma}^* = \frac{\gamma^*}{3} \left( \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right) \cdot \mathbf{I} - \frac{\gamma^*}{\gamma} \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \frac{2}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \quad (9.37)$$

On rappelle 9.18 :  $\dot{v} = -v \text{tr} \dot{\mathbf{D}}$  dans le cadre des petites transformations, l'énergie cinétique micro-

structurelle  $\mathcal{K}$  au point  $x$  s'exprime donc par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(\omega(\mathfrak{X})) &= \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \right)^2 \frac{\gamma^{*2}}{9} \left( \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{I} \right)^2 \right] \\
 &+ \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m \gamma^*}{2v} \left( \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{I} \right) \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \right)^2 \left( -2 \frac{\gamma^*}{\gamma} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G} + \frac{4}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right) - 2 \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} v \text{tr} \dot{\mathbf{D}} + 2 \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \right) \right] \right] \\
 &+ \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \right)^2 v^2 (\text{tr} \dot{\mathbf{D}})^2 \right] + \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \right)^2 \left[ \left( \frac{\gamma^*}{\gamma} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right)^2 - \frac{4}{3} \frac{\gamma^{*2}}{\gamma} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}) \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right] \right] \\
 &\quad + \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \right\|^2 \right] - \int_{\omega} \left[ \rho_m \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \left( -\frac{\gamma^*}{\gamma} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G} + \frac{2}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right) \right] \\
 &\quad - \int_{\omega} \left[ \rho_m \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \right) \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right] + 2 \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \right) \left[ -\frac{\gamma^*}{\gamma} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}) + \frac{2}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right] \right] \quad (9.38)
 \end{aligned}$$

Notons  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  les termes tels que :

$$\mathcal{K}(\omega(\mathfrak{X})) = t_1 \left( \left( \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right) \cdot \mathbf{I} \right)^2 + t_2 \left( \left( \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right) \cdot \mathbf{I} \right) + t_3 \quad (9.39)$$

$$t_1 := \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \right)^2 \frac{\gamma^{*2}}{9} \right] \quad (9.40a)$$

$$t_2 := \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \right)^2 \frac{\gamma^*}{3} \left( -2 \frac{\gamma^*}{\gamma} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G} + \frac{4}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right) - 2 \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} v \text{tr} \dot{\mathbf{D}} + 2 \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \right) \right] \quad (9.40b)$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &:= \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \right)^2 v^2 (\text{tr} \dot{\mathbf{D}})^2 \right] + \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \right)^2 \left[ \left( \frac{\gamma^*}{\gamma} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right)^2 - \frac{4}{3} \frac{\gamma^{*2}}{\gamma} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}) \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right] \right] \\
 &\quad + \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left[ \left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \right\|^2 - 2v \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \left( -\frac{\gamma^*}{\gamma} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G} + \frac{2}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right) \right] \right] \\
 &\quad + \int_{\omega} \left[ \frac{\rho_m}{2v} \left[ 2v \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \right) \text{tr} \dot{\mathbf{D}} + 2 \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \gamma^*} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \right) \left( -\frac{\gamma^*}{\gamma} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{G}) + \frac{2}{3} \gamma^* \text{tr} \dot{\mathbf{D}} \right) \right] \right] \quad (9.40c)
 \end{aligned}$$

La densité de coénergie 9.41 vérifie l'équation différentielle suivante [36] :

$$\mathcal{K} = \left( \frac{\partial \chi}{\partial \dot{\mathbf{G}}} \right) \dot{\mathbf{G}} - \chi,$$

$$\chi := t_1 \left( \left( \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right) \cdot \mathbf{I} \right)^2 + t_2 \left( \left( \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right) \cdot \mathbf{I} \right) \ln \left( \left( \dot{\mathbf{G}} \mathbf{G}^{-1} \right) \cdot \mathbf{I} \right) - t_3 \quad (9.41a)$$

$$= t_1 \left( \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{G}^{-1} \right)^2 + t_2 \left( \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{G}^{-1} \right) \ln \left( \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{G}^{-1} \right) - t_3 \quad (9.41b)$$

Elle permet de déterminer l'expression de la densité d'inertie de microstructure ensuite identifiée à la valeur de la densité d'inertie de microstructure au point  $x$  occupé par  $\mathfrak{X}$  à l'instant actuel :

$$\mathbf{A}(\omega(\mathfrak{X})) = \left( \frac{\partial \chi}{\partial \dot{\mathbf{G}}} \right)' - \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{G}} = \mathbf{A}(x) \quad (9.42)$$

On supposera dans la suite que les chargements appliqués à  $\Omega$  sont suffisamment lents pour considérer que les évolutions sont statiques, la densité d'inertie définie par 9.42 sera donc négligée dans les calculs.

## 9.5 Objectivité

Les contraintes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\beta$  et  $\mathbf{b}$  exprimées par 9.33 sont objectives (voir annexe A pour les détails des calculs).

## Chapitre 10

# Proposition de lois de comportement

Pour plus de simplicité, on néglige les contraintes duales (i) du second gradient de déplacement  $\mathbf{b}$  et (ii) du gradient de propagation  $\mathbf{b}$ . On ne considérera donc qu'un unique élément matériel lors de l'étude au niveau microscopique.

On suppose que chaque point  $x$  de  $\Omega$  peut être vu, à une certaine échelle, comme un parallélépipède  $\omega$  de dimensions  $2L \times 2L \times 2l$ , au sein duquel évolue une fissure dont la taille de référence est  $2a_0$  (voir figures 9.1 et 10.1).

En vue de la recherche de relations de comportement exploitables à une échelle supérieure, on étudiera l'évolution de  $\omega$  sous une déformation homogène  $\mathbf{D}$  au bord.

On se place dans des conditions d'étude simples : le matériau de  $\omega$  est élastique linéaire avec un module de Young  $E_Y$  et un coefficient de poisson  $\nu_P$ .

On indicera dans la suite par 1 et 2 les quantités suivant les directions  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{n}_0$  respectivement.

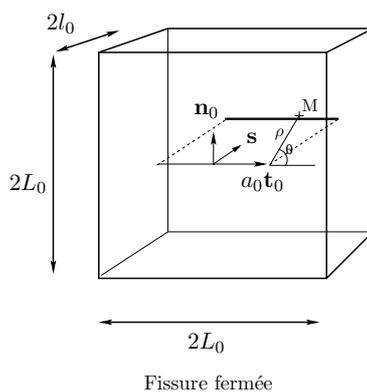


FIG. 10.1.  $\omega$  : élément matériel  $\omega(x)$  en configuration initiale

Comme proposé précédemment on considère la décomposition fictive du mouvement en deux phases :

- Propagation : passage éventuel de  $a_0$  en configuration initiale à  $a^*$  en configuration intermédiaire,

- déformation : passage de  $a^*$  à  $a$  en configuration actuelle.

Dans la suite, on se place dans un cas général : on étudie l'évolution de  $\omega$  à partir d'une configuration intermédiaire  $*$  arbitraire. Les formules obtenues seront applicables pour décrire l'évolution à partir de la configuration initiale. Dans ce cas :  $a^* = a_0$ .

Nous ne disposons pas de solution analytique exacte du problème décrit précédemment, mais on se propose d'utiliser les résultats de la mécanique linéaire de la rupture afin d'obtenir une solution analytique approchée.

## 10.1 Approximation des champs solution

Considérons un corps déformable au sein duquel évolue une fissure rectiligne de longueur  $2a^*$ , et plaçons nous dans le cadre des petites perturbations. La mécanique linéaire de la rupture approxime la solution à ce problème : une contrainte  $\mathbf{S}^\infty$  est imposée sur les bords du domaine qui sont supposés à distance infinie de la fissure, leur déplacement est nul. Cette solution ne correspond pas à notre étude puisque une densité de fissure non nulle implique la prise en compte de conditions au bord à distance finie pour chaque fissure : nous ne disposons donc pas de l'expression du tenseur  $\mathbb{H}$  :

$$\mathbf{E}(y; \mathbf{D}, \gamma^*, \nu) = \mathbb{H}(y; \gamma^*, \nu) \mathbf{D}(x) \quad (9.12)$$

$y$  un point dans  $\omega(x)$  (voir figure 9.1).

On observe d'abord que, par cette solution, on peut écrire :

$$\mathbf{E} = \mathbb{A}^\infty(\gamma^*) \mathbf{S}^\infty \quad (10.1a)$$

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}\mathbf{E} \quad (10.1b)$$

$\mathbb{A}^\infty$  étant un champ de tenseurs d'ordre 4 permettant à partir de  $\mathbf{S}^\infty$ , de déterminer le champ de déformation sur le corps de taille infinie et comportant une fissure de taille  $2a^*$ .

A partir de 10.1a, on peut calculer la moyenne de  $\mathbf{E}$  et identifier celle-ci avec une déformation homogène au bord  $\mathbf{D}$  (équation 9.10).

On effectue dans l'ordre :

1. Détermination de  $\mathbb{A}^\infty$  vérifiant 10.1a,
2. Détermination de  $\langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega$ , on a alors :

$$\langle \mathbf{E} \rangle_\omega = \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega \mathbf{S}^\infty \quad (10.2)$$

3. Calcul de  $\mathbb{H}$  :

on impose une déformation  $\mathbf{D}$  sur les bords de  $\omega$ , ce qui revient à imposer (voir §9.2) :

$$\langle \mathbf{E} \rangle_\omega = \mathbf{D} \quad (9.10)$$

on détermine grâce à 10.2 la relation entre  $\mathbf{S}^\infty$ ,  $\mathbb{A}^\infty$  et  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{S}^\infty = \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1} \mathbf{D} \quad (10.3)$$

Cette expression est utilisée dans 10.1a qui devient :

$$\mathbf{E} = \left( \mathbb{A}^\infty \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1} \right) \mathbf{D} \quad (10.4)$$

$\mathbb{H}$  est alors approximé à  $\mathbb{A}^\infty \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1}$  :

$$\mathbb{H} \approx \mathbb{A}^\infty \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1} \quad (10.5)$$

Cette méthode est appliquée dans les calculs suivants. On utilise pour cela le logiciel Maple, les détails et résultats des calculs sont présentés en Annexes.

### 10.1.1 Détermination de $\mathbb{A}$

#### 10.1.1.1 Chargement, hypothèse des déformations planes

On suppose que la fissure est sollicitée en modes (1) et (2) et on complète le chargement par une traction (ou compression) suivant la direction tangente aux lèvres de la fissure. Les quantités relatives à ce dernier type de chargement seront indicées par (1').

On étudiera séparément les évolutions de l'élément microscopique  $\omega$  en fonction du type de sollicitation appliquée, le principe de superposition permettra dans la suite de sommer les résultats afin d'obtenir l'évolution de  $\omega$  en modes (1), (2) et (1') (voir annexe B).

Le matériau est supposé avoir un comportement élastique linéaire et l'élément matériel  $\omega$  est supposé évoluer en déformations planes (on suppose  $l \gg L$ ). Au vu des symétries du problème, le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}$  peut être représenté par la matrice  $3 \times 3$  suivante :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{E_Y(1-\nu_P)}{(1+\nu_P)(1-2\nu_P)} & \frac{E_Y\nu_P}{(1+\nu_P)(1-2\nu_P)} & 0 \\ \frac{E_Y\nu_P}{(1+\nu_P)(1-2\nu_P)} & \frac{E_Y(1-\nu_P)}{(1+\nu_P)(1-2\nu_P)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_Y}{2(1+\nu_P)} \end{pmatrix} \quad (10.6)$$

Les tenseurs de déformation et de contrainte sont eux représentés par les vecteurs ci après :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ 2D_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{pmatrix} \quad (10.7)$$

De même,  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{H}$  seront désignés par les matrices  $3 \times 3$  :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1112} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2212} \\ 2A_{1211} & 2A_{1222} & 2A_{1212} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} H_{1111} & H_{1122} & \frac{1}{2}H_{1112} \\ H_{2211} & H_{2222} & \frac{1}{2}H_{2212} \\ 2H_{1211} & 2H_{1222} & H_{1212} \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

On utilisera la solution de Westergaard pour déterminer les champs de déformation et de contrainte au sein du corps fissuré  $\omega$  (voir §2.2 de la partie I).

Les composantes  $T_{ij}$  des contraintes données par 2.3 tendent vers 0 quand on s'éloigne de la fissure. En superposant les champs de contrainte et de déformation d'un corps sain à la solution de Westergaard, ces champs sont considérés comme des champs de polarisation.

Notons  $\arctan'$  la fonction telle que :

$$\forall \text{ fonction } f, \quad \arctan'(f(y_1, y_2)) = \begin{cases} \pi + \arctan(f(y_1, y_2)) & \text{si } y_1 < a^* \text{ et } y_2 > 0 \\ -\pi + \arctan(f(y_1, y_2)) & \text{si } y_1 < a^* \text{ et } y_2 < 0 \\ \arctan(f(y_1, y_2)) & \text{si } y_1 \geq a^*, \forall y_2 \end{cases} \quad (10.9)$$

$\arctan$  étant définie sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

On effectue le changement de repère suivant, permettant de passer des coordonnées cylindriques centrées en pointe de fissure aux coordonnées cartésiennes ayant pour origine le centre de la fissure (voir figure 10.2) :

$$r := \sqrt{y_2^2 + y_1^2 - 2y_1a^* + a^{*2}} \quad \forall (y_1, y_2) \quad (10.10a)$$

$$\theta := \arctan' \left( \frac{y_2}{y_1 - a^*} \right) \quad (10.10b)$$

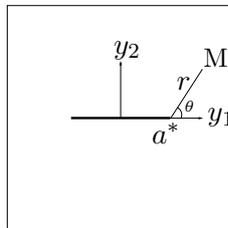


FIG. 10.2. *Changement de coordonnées*

### 10.1.1.2 Mode d'ouverture (1)

Les principes de la mécanique linéaire de la rupture ne s'appliquent que lorsque les lèvres de la fissure s'ouvrent : elles s'écartent lorsqu'on impose une traction  $S_{22}^\infty$  sur  $\omega$  et s'ouvrent sous l'effet Poisson quand  $\omega$  est comprimé par  $S_{11}^\infty$  (voir figure 9.1).

Dans le cas où les lèvres de la fissure tendent à se refermer, on suppose que le champ de contrainte au sein de  $\omega$  est similaire à celui d'une plaque infinie aux bords de laquelle on impose une contrainte  $S^\infty$ .

Etudions les différentes possibilités.

**Composante  $S_{22}^\infty$** 

- Supposons que la contrainte imposée  $\mathbf{S}^\infty$  soit telle que :

$$\mathbf{S}^\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{22}^\infty \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_{22}^\infty > 0 \quad (10.11)$$

Les lèvres de la fissure s'ouvrent et le facteur d'intensité de contrainte équivalent est :

$$K = S_{22}^\infty \sqrt{\pi a^*} \quad (10.12)$$

Les composantes du champ de contrainte sont données par les expressions 2.3 avec  $K^{(2)} = 0$  (voir partie I, §2.2) tandis que le champ de déformation vérifie la loi de comportement 10.1b ( $\mathbb{C}$  étant défini par 10.6).

Les expressions des composantes  $A_{ij22}^\infty$  de  $\mathbb{A}^\infty$  se déduisent de la condition :

$$E_{ij}^{(1)} = A_{ij22}^\infty S_{22}^\infty \quad (10.13)$$

- Dans le cas où les lèvres de la fissure se referment ( $S_{22}^\infty \leq 0$ ), on suppose que  $\omega$  se comporte comme un corps sain et :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= 0 \\ \mathbf{T}_{22} &= S_{22}^\infty \\ \mathbf{T}_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (10.14)$$

**Composante  $S_{11}^\infty$** 

- Supposons maintenant que  $\mathbf{S}^\infty$  soit telle que :

$$\mathbf{S}^\infty = \begin{pmatrix} S_{11}^\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_{11}^\infty < 0 \quad (10.15)$$

L'évolution de  $\omega$  est similaire à celle décrite précédemment. Les lèvres de la fissure s'ouvrent sous l'effet Poisson et le facteur d'intensité de contrainte permettant d'obtenir la même ouverture de fissure que celle imposée par un chargement de type  $S_{22}^\infty$  est (en déformations planes) :

$$K = S_{11}^\infty \frac{\nu_P - 1}{\nu_P} \sqrt{\pi a^*} \quad (10.16)$$

Les contraintes sont de même données par 2.3 (partie I, §2.2) avec  $K^{(2)} = 0$ , tandis que les déformations suivent la loi de comportement 10.1b. Les composantes  $A_{ij11}^\infty$  de  $\mathbb{A}^\infty$  vérifient :

$$E_{ij}^{(1')} = A_{ij11}^\infty S_{11}^\infty \quad (10.17)$$

- Dans le cas où les lèvres de la fissure se referment ( $S_{11}^\infty \geq 0$ ), on suppose de même que précédemment :

$$\mathbf{T}_{11} = S_{11}^\infty \quad (10.18a)$$

$$\mathbf{T}_{22} = 0 \quad (10.18b)$$

$$\mathbf{T}_{12} = 0 \quad (10.18c)$$

**Formulation générale** On ne tient compte des champs de polarisation dus à la présence de la fissure, que lorsque cette dernière tend strictement à s'ouvrir. On définit alors  $\varsigma_{11}$  et  $\varsigma_{22}$  tels que :

$$\varsigma_{11} = 1 \text{ si } S_{11}^\infty \geq 0, \quad \varsigma_{11} = 0 \text{ si } S_{11}^\infty < 0 \quad (10.19a)$$

$$\varsigma_{22} = 1 \text{ si } S_{22}^\infty > 0, \quad \varsigma_{22} = 0 \text{ si } S_{22}^\infty \leq 0 \quad (10.19b)$$

Les facteurs d'intensités de contrainte  $K^{(1)}$  et  $K^{(1')}$  sont de ce fait définis par :

$$K^{(1)} := \varsigma_{22} S_{22}^\infty \sqrt{\pi a^*} \quad (10.20a)$$

$$K^{(1')} := (1 - \varsigma_{11}) \frac{1 - \nu_P}{\nu_P} S_{11}^\infty \sqrt{\pi a^*} \quad (10.20b)$$

(aucune amplification des contraintes en pointe de fissure si celle-ci n'est pas en ouverture).

Utilisons le changement de variable 10.10. On déduit des définitions 10.17, 10.18 et 10.20a les expressions générales des composantes  $A_{ij11}^\infty$  de  $\mathbb{A}$  :

$$A_{1111}^\infty := \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y} - \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{(1 - \nu_P^2)}{\nu_P E_Y} \frac{\sqrt{a^*}}{\sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \left[ (3 - 8\nu_P) \cos\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) + \cos\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right] (1 - \varsigma_{11}) \quad (10.21a)$$

$$A_{2211}^\infty := - \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{(1 - \nu_P^2)}{\nu_P E_Y} \frac{\sqrt{a^*}}{\sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \left( (8\nu_P - 5) \cos\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) + \cos\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right) (1 - \varsigma_{11}) \quad (10.21b)$$

$$A_{1211}^\infty := \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{(1 - \nu_P^2)}{\nu_P E_Y} \frac{\sqrt{a^*}}{\sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \left( \sin\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) - \sin\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right) (1 - \varsigma_{11}) \quad (10.21c)$$

On déduit de même du changement de variable 10.10 ainsi que de 10.13, 10.14, et 10.20b les expressions des composantes  $A_{ij22}^\infty$  de  $\mathbb{A}$  :

$$A_{1122}^\infty := \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{(1 + \nu_P)}{E_Y} \frac{\sqrt{a^*}}{\sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \left[ (3 - 8\nu_P) \cos\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) + \cos\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right] \varsigma_{22} \quad (10.22a)$$

$$A_{2222}^{\infty} := \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y} - \frac{\sqrt{2}(1 + \nu_P)}{8} \frac{\sqrt{a^*}}{E_Y \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \left( (8\nu_P - 5) \cos\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) + \cos\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right) \varsigma_{22} \quad (10.22b)$$

$$A_{1222}^{\infty} := \frac{\sqrt{2}(1 + \nu_P)}{8} \frac{\sqrt{a^*}}{E_Y \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \left( \sin\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) - \sin\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right) \varsigma_{22} \quad (10.22c)$$

### 10.1.1.3 Mode d'ouverture (2)

On suppose qu'un cisaillement imposé à  $\omega$  sollicite la fissure en mode (2). Le facteur d'intensité de contrainte correspondant est :

$$K^{(2)} := S_{12}^{\infty} \sqrt{\pi a^*}, \quad (10.23)$$

Il résulte de 2.3, de la loi de comportement 10.1b et du changement de variable 10.10 les composantes du champ de déformation  $\mathbf{E}^{(2)}$  au sein de  $\omega$ . Ces dernières permettent de calculer les composantes  $A_{ij12}^{\infty}$  de  $\mathbf{A}$  telles que :

$$E_{ij}^{(2)} = A_{ij12}^{\infty} S_{12}^{\infty} \quad (10.24)$$

$$A_{1112}^{\infty} := \frac{\sqrt{2} a^*}{8 \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \frac{(1 + \nu_P)}{E_Y} \left[ 8\nu_P \sin\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) - 7 \sin\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) - \sin\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right] \quad (10.25a)$$

$$A_{2212}^{\infty} := \frac{\sqrt{2} a^*}{8 \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \frac{(1 + \nu_P)}{E_Y} \left[ 8\nu_P \sin\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) + \sin\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) - \sin\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right] \quad (10.25b)$$

$$A_{1212}^{\infty} := \frac{\nu_P}{E_Y} + \frac{\sqrt{2} a^*}{8 \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2}} \frac{(1 + \nu_P)}{E_Y} \left[ 3 \cos\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) + \cos\left(\frac{5}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right] \quad (10.25c)$$

### 10.1.2 Calcul de la moyenne de $\mathbf{A}$

On calcule par le biais du logiciel Maple les moyennes des composantes du tenseur  $\mathbf{A}^{\infty}$  à partir des expressions 10.21, 10.22 et 10.25 :

$$\langle A^{\infty} \rangle_{\omega ijkl} := \frac{1}{8 l_0 L_0^2} \int_{\omega} A_{ijkl}^{\infty}(y_1, y_2) = \frac{1}{2 L_0^2} \int_{-L_0}^{L_0} \int_{-L_0}^{L_0} A_{ijkl}^{\infty}(y_1, y_2) \quad (10.26)$$

Voir annexe B pour les étapes de calculs (§B.2.3 et §B.3) ainsi que les résultats (§B.4 et B.6).

On remarque que dans le cas où les fissures se referment, le tenseur  $\mathbf{A}^\infty$  est identique au tenseur de rigidité  $\mathbf{C}$ .

### 10.1.3 Etude de $\mathbb{H}$

Connaissant  $\mathbf{A}^\infty$  ainsi que  $\langle \mathbf{A}^\infty \rangle_\omega$  on approxime  $\mathbb{H}$  à 10.5 (voir §B.7) :

$$\mathbb{H} \approx \mathbf{A}^\infty \langle \mathbf{A}^\infty \rangle_\omega^{-1}$$

$\mathbb{H}$  est le tenseur de localisation permettant d'approximer les déformations au sein de  $\omega$  à partir de la déformation imposée  $\mathbf{D}$ .

On se propose dans la suite d'en étudier les propriétés. On considérera pour cela trois types de chargement :

- Chargement 1 déviatorique avec  $D_{12} = D$  et  $D_{11} = D_{22} = 0$ . Les directions propres du champ de déformation  $\mathbf{E}$  pour le corps sain sont représentées figure 10.3.

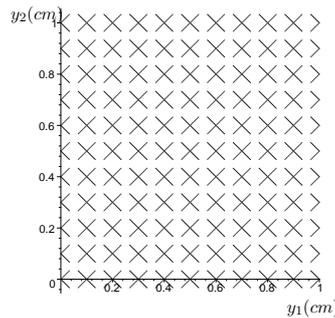


FIG. 10.3. Directions principales du champ de déformation au sein de  $\omega$  non fissuré, obtenu en imposant une déformation déviatorique homogène au bord de type  $D_{11} = D_{22} = 0$ ,  $D_{12} = D$  [ $L = 1\text{cm}$ ]

- Chargement 2 déviatorique avec  $D_{12} = 0$  et  $D_{11} = -D_{22} = -D$ . Les directions propres de  $\mathbf{E}$  pour le corps sain sont représentées figure 10.4.

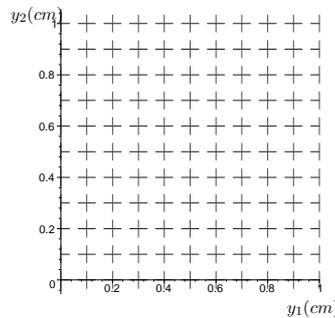


FIG. 10.4. Directions principales du champ de déformation au sein de  $\omega$  non fissuré, obtenu en imposant une déformation déviatorique homogène au bord de type  $D_{12} = 0$ ,  $D_{11} = -D_{22} = -D$  [ $L = 1\text{cm}$ ]

*Remarque* : le tenseur de déformation déviatorique choisi est tel que  $D_{11} = -D_{22}$  ( $D > 0$ ) et non  $D_{11} = D_{22}$  afin de tenir compte du mode d'ouverture (1') (voir §10.1.1.2).

- Chargement 3 sphérique avec  $D_{12} = 0$  et  $D_{11} = D_{22} = D$ . Les directions propres de  $\mathbf{E}$  pour le corps sain sont identiques à celles représentées figure 10.4.

En raison des symétries du problème, on ne tracera dans toute la suite que les courbes décrivant le quart de  $\omega$ , c'est-à-dire les domaines tels que  $y_1 \in [0, L]$  et  $y_2 \in [0, L]$ .

**Directions propres** On note  $\Gamma^*$  le rapport entre la taille de la fissure et la taille caractéristique de l'élément :

$$\Gamma^* := \frac{a^*}{L_0}, \quad (10.27)$$

Les directions propres du champ de déformation au sein de  $\omega$  sont tracées figure 10.5 pour les trois types de chargement et pour trois différentes valeurs de  $\Gamma^*$ .

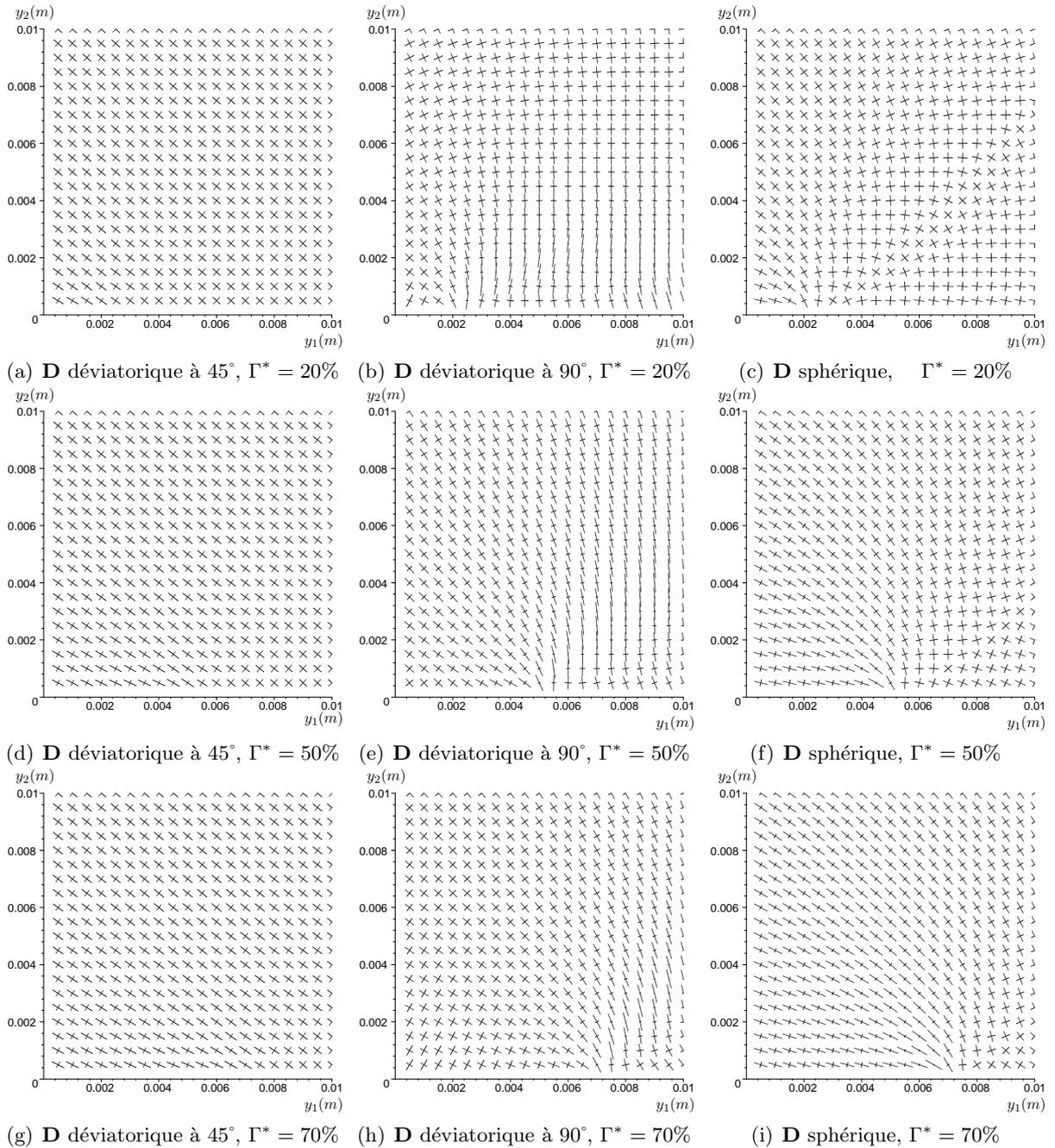


FIG. 10.5. Directions principales du champ de déformation  $\mathbf{E}$  au sein de  $\omega$ , pour différents chargements et valeurs de  $\Gamma^*$  [ $E_Y = 27\text{GPa}$ ,  $\nu_P = 0.2$ ,  $L = 1\text{cm}$ ], la fissure se trouve le long de l'axe  $y_1$ , à partir du point 0, avec la pointe en  $y_1 = L \times \Gamma^*$

**Champs de déformation** On trace figure 10.6, 10.7 et 10.8 Les isovaleurs des champs de déformation  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  et  $E_{12}$  pour différents chargements et valeurs de  $\Gamma^*$ .

*Remarque :* La modification de la solution de Westergaard énoncée page 10.1.1.1 est incompatible avec la condition de contrainte nulle sur les lèvres de la fissure. On acceptera cette modification tant que la déformation imposée  $\mathbf{D}$  reste petite.

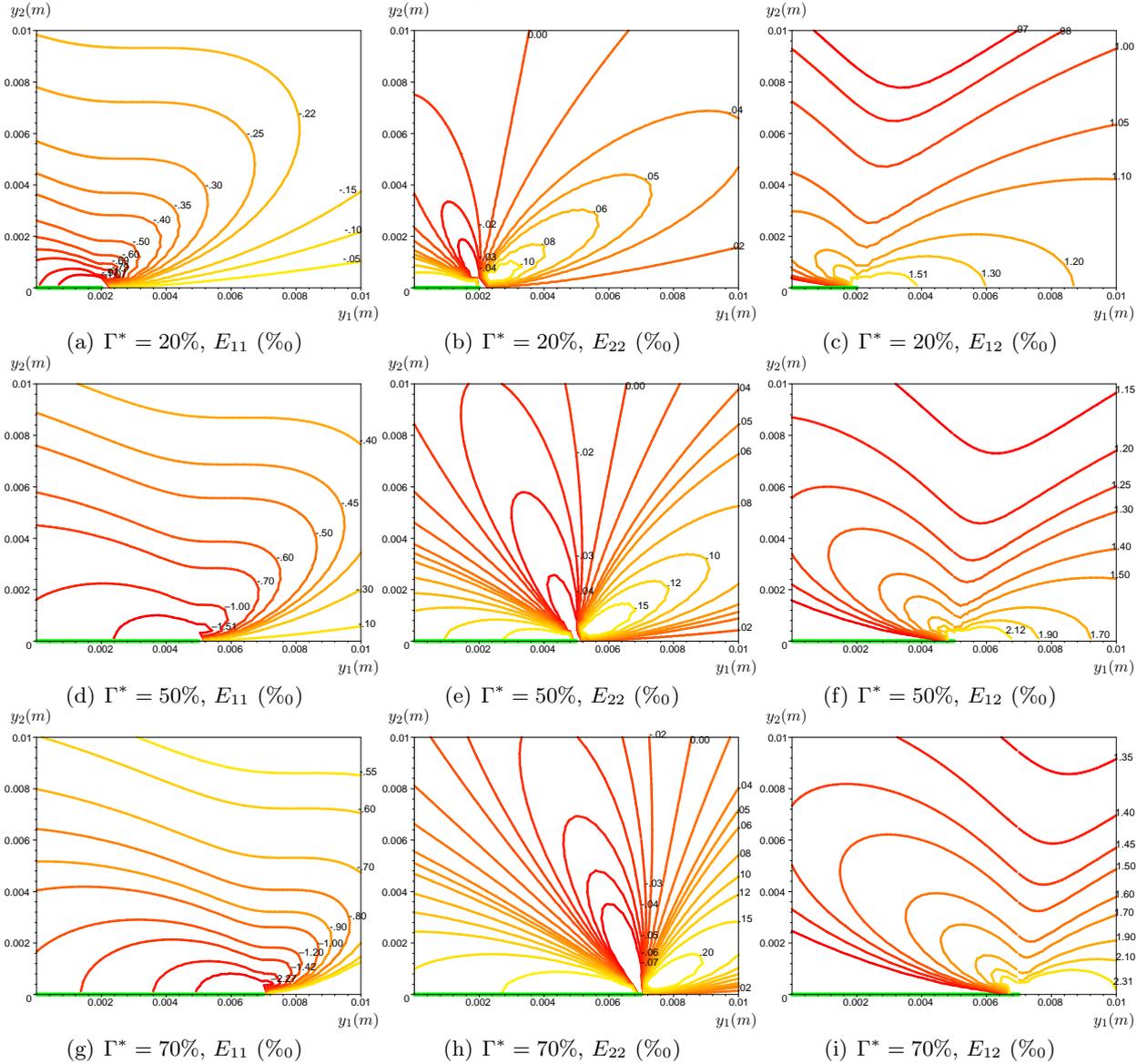


FIG. 10.6. Evolution du champ de déformation au sein de  $\omega$  pour un chargement déviatorique à  $45^\circ$  [ $D = 0.1\%$ ,  $E_Y = 27\text{GPa}$ ,  $\nu_P = 0.2$ ,  $L = 1\text{cm}$ ], la fissure se trouve le long de l'axe  $y_1$ , à partir du point 0, avec la pointe en  $y_1 = L \times \Gamma^*$

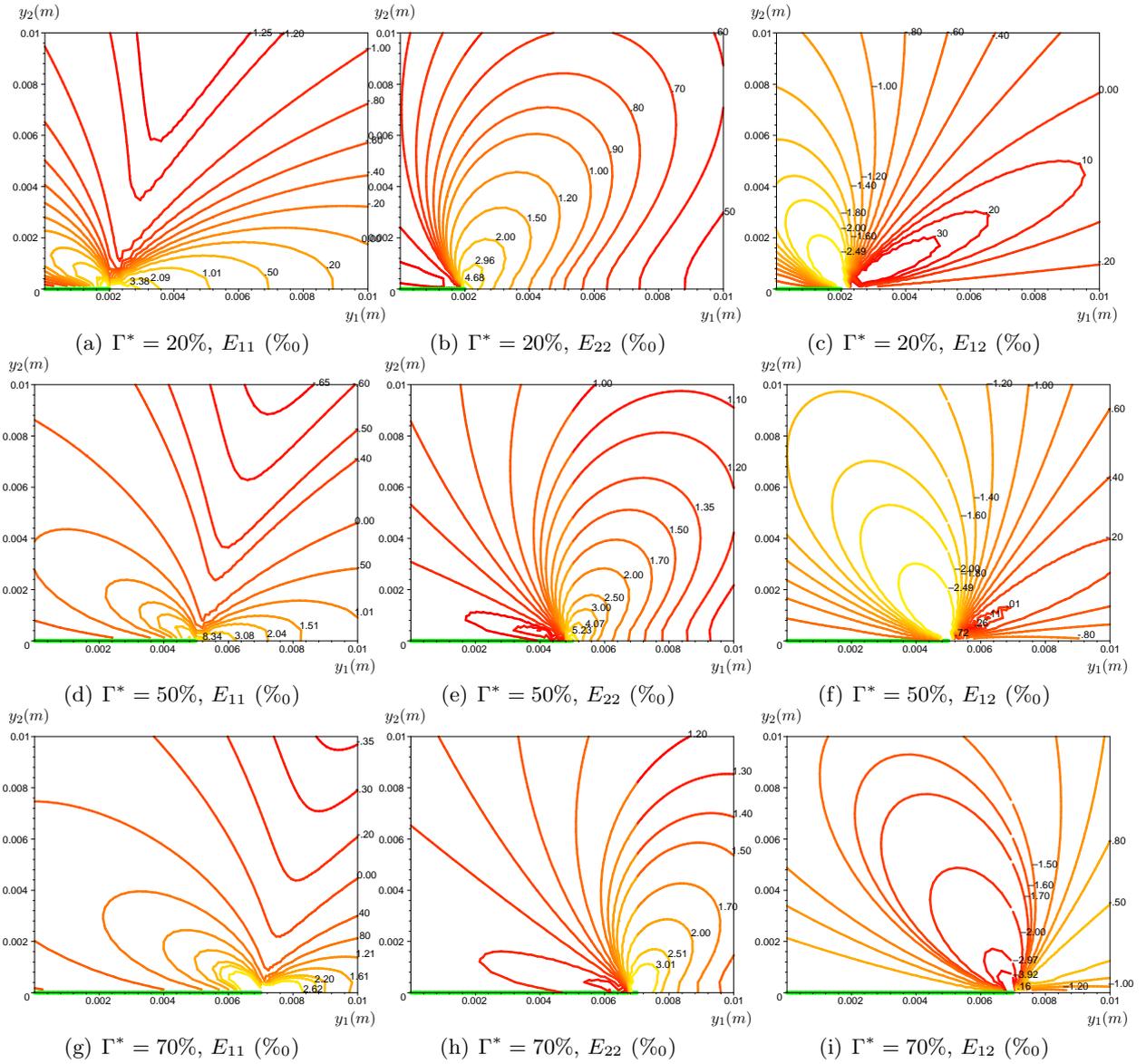


FIG. 10.7. Evolution du champ de déformation au sein de  $\omega$  pour un chargement déviatorique à  $90^\circ$  [ $D = 0.1\%$ ,  $E_Y = 27\text{GPa}$ ,  $\nu_P = 0.2$ ,  $L = 1\text{cm}$ ], la fissure se trouve le long de l'axe  $y_1$ , à partir du point 0, avec la pointe en  $y_1 = L \times \Gamma^*$

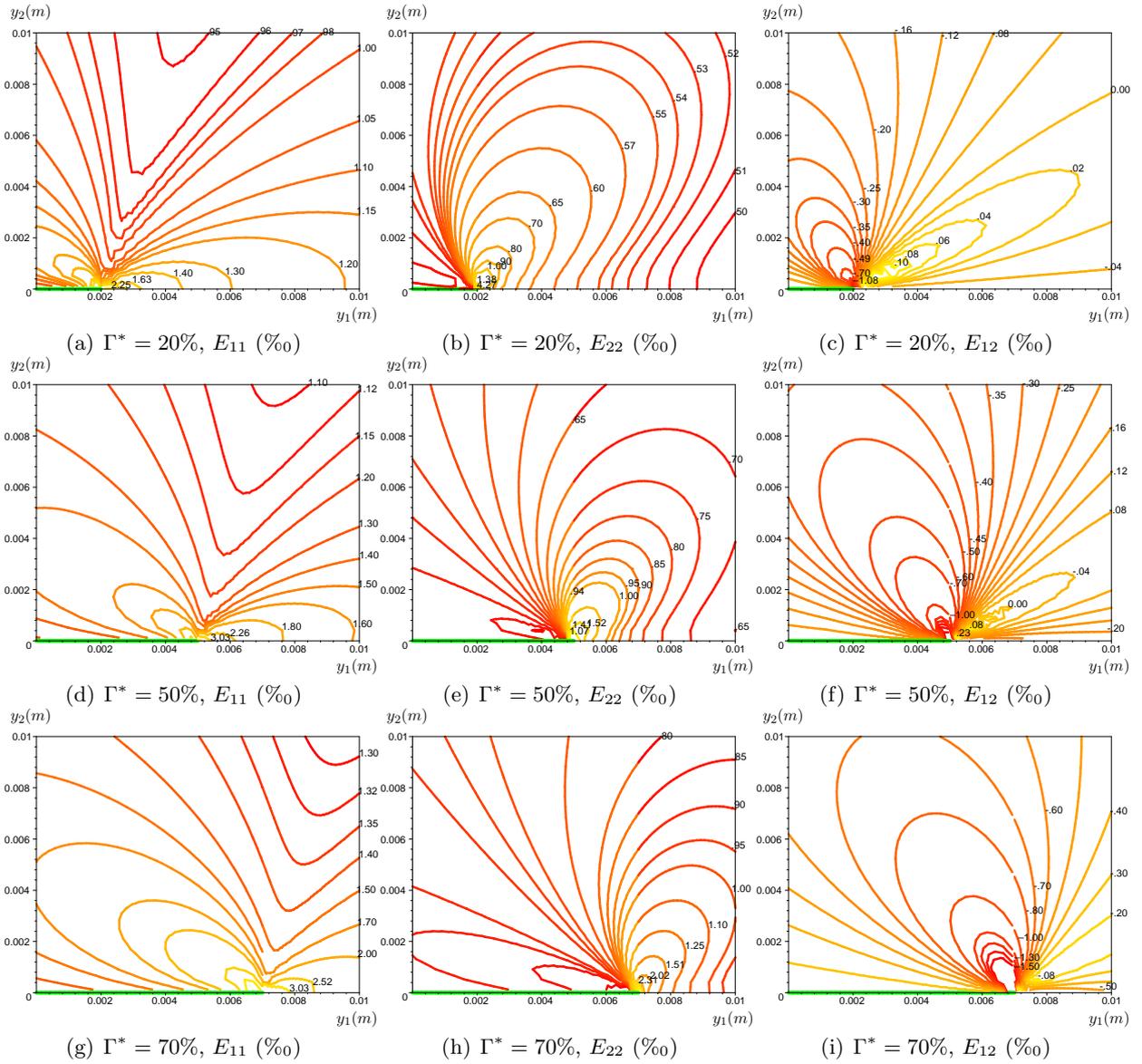


FIG. 10.8. Evolution du champ de déformation au sein de  $\omega$  pour un chargement sphérique [ $D = 0.1\%$ ,  $E_Y = 27GPa$ ,  $\nu_P = 0.2$ ,  $L = 1cm$ ], la fissure se trouve le long de l'axe  $y_1$ , à partir du point  $0$ , avec la pointe en  $y_1 = L \times \Gamma^*$

## 10.2 Modèle micro-configurationnel

Les lois de comportement microscopiques étant déterminées, on observe maintenant le corps  $\mathcal{B}$  à l'échelle macroscopique : chaque élément matériel est un point  $x$  à qui on associe une position  $\mathbf{x}$  et une taille de fissure  $\gamma^*$ .

### 10.2.1 Equations d'équilibre statique

On suppose qu'il n'y a aucune force volumique exercée sur le corps ni d'effort appliqué sur la microstructure et on néglige les forces d'inertie :

$$\text{Div} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega^* \quad (10.28a)$$

$$-\mathbf{B} \mathbf{n}_0 + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega^* \quad (10.28b)$$

Rappelons 8.49b :

$$-\beta + \text{Div} \mathbf{b} + \frac{1}{\gamma^*} \rho_0 \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{G} = \frac{1}{\gamma^*} \rho_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}$$

Sous les hypothèses précédentes, cette équation ne peut être utilisée pour déterminer la vitesse de propagation du champ de fissures. Elle donne normalement, par intégration dans le temps de l'inertie  $\mathbf{A}$ , la vitesse  $\dot{\gamma}$ . L'hypothèse d'inertie négligeable rend  $\dot{\gamma}$  indéterminé du point de vue du bilan des quantités de mouvement.

On utilisera dans la suite un critère de propagation semblable à celui de Griffith afin de déterminer les règles de propagation (voir §10.2.4).

### 10.2.2 Loi de comportement de $\mathbf{B}$

Rappelons la définition de la contrainte  $\mathbf{B}$  (voir équations 9.20 et 9.21a) :

$$\mathbf{B} = v \int_{\omega} [(\mathbb{H}^T \mathbb{C} \mathbb{H}) \mathbf{D}] - v^2 \int_{\omega} \left[ \left( (\mathbb{C} \mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \mathbf{I} \right]$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, le deuxième terme de cette définition peut être négligé. Les configurations actuelle et initiale étant confondues, on calcule en annexe C (§C.6) le développement limité de la contrainte  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^*(\gamma^*, v_0) \mathbf{D} \quad (10.29a)$$

Avec :

$$\mathbf{C}^*(\gamma^*, v_0) := v_0 \int_{\omega_0} [(\mathbb{H}^T \mathbb{C} \mathbb{H})], \quad \mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbf{y}; \gamma^*, v_0) \quad (10.29b)$$

$\mathbf{C}^*$  est un tenseur de rigidité d'ordre 4 représenté par une matrice  $3 \times 3$  dont les composantes dépendent des caractéristiques du matériau, du couple de paramètres  $(\gamma^*, v_0)$  ainsi que du type de chargement appliqué (selon que les fissures s'ouvrent ou se ferment).

Plusieurs calculs de  $\mathbf{C}^*$  ont été menés pour différentes valeurs de  $a^*$  et de  $L_0$  : les résultats sont identiques pour tous les champs de fissures de même  $\Gamma^* = \frac{a^*}{L_0}$ .

On rappelle que les tenseurs sont jusqu'à maintenant représentés dans le repère local  $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0)$  défini en chaque point  $x$  de  $\mathcal{B}$  (voir figure 10.1).

On trace figure 10.9 la comparaison entre les composantes du tenseur  $\mathbf{C}^*(\Gamma^*)$  et celles du tenseur de rigidité  $\mathbb{C}$  correspondant à la loi de Hooke 10.6.

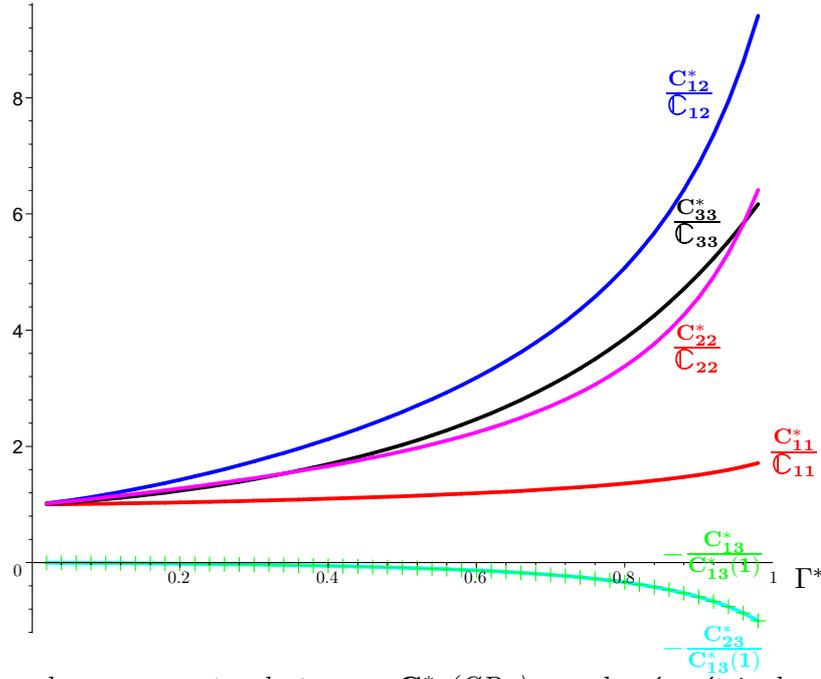


FIG. 10.9. Evolution des composantes du tenseur  $\mathbf{C}^*$  (GPa) avec la géométrie du champ de fissure

### 10.2.3 Loi de comportement de $\beta$

$\beta$  est défini par 9.20 et 9.21b :

$$\beta := \frac{G}{4l} + v \int_{\omega} \left( (\mathbb{C}\mathbf{H})^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \gamma^*} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})$$

– Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture :

$$G = \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y} \left( K^{(1)2} + K^{(1')2} + K^{(2)2} \right) \quad (10.30)$$

Où les facteurs d'intensité de contrainte  $K^{(1)}$ ,  $K^{(1')}$  et  $K^{(2)}$  sont donnés par 10.20 et 10.3 :

$$\begin{aligned} K^{(1)} &:= \sqrt{\frac{\pi \gamma^*}{4l}} \cdot \varsigma_{22} \cdot \left[ \left( \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1} \mathbf{D} \right) \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{n} \\ K^{(1')} &:= \sqrt{\frac{\pi \gamma^*}{4l}} \cdot \frac{1 - \nu_P}{\nu_P} \cdot (1 - \varsigma_{11}) \cdot \left[ \left( \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1} \mathbf{D} \right) \mathbf{t} \right] \cdot \mathbf{t} \\ K^{(2)} &:= \sqrt{\frac{\pi \gamma^*}{4l}} \cdot \left[ \left( \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1} \mathbf{D} \right) \mathbf{t} \right] \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (10.31a)$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{11} &= 1 \text{ si } \left[ \left( \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1} \mathbf{D} \right) \mathbf{t} \right] \cdot \mathbf{t} \geq 0, & \varsigma_{11} &= 0 \text{ si } S_{11}^\infty < 0 \\ \varsigma_{22} &= 1 \text{ si } \left[ \left( \langle \mathbb{A}^\infty \rangle_\omega^{-1} \mathbf{D} \right) \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{n} > 0, & \varsigma_{22} &= 0 \text{ si } S_{22}^\infty \leq 0 \end{aligned} \quad (10.31b)$$

Au vu de 10.30 et 10.31,  $G$  est proportionnel à  $a^*$ .

Pour calculer  $G_c$ , on se sert de la formule 10.30 où les facteurs d'intensité de contrainte sont les facteurs critiques correspondant aux seuils de micro-fissuration. Ces seuils peuvent être déterminés expérimentalement : ce sont les éventuelles limites d'élasticité du béton, sous chargement uni-axial ou cisaillement (voir §2.1 de la partie bibliographique).

Pour un chargement en traction, les premières micro-fissures propagent à partir d'une contrainte avoisinant  $80\%f_t$ , tandis que pour un chargement en compression, le seuil est proche de  $30\%f_c$  ( $f_t$  et  $f_c$  étant respectivement les limites ultimes en traction et compression) [53, 182, 195]. Les données pour un chargement en cisaillement ne sont pas disponibles dans la littérature que nous avons étudiée.

On suppose que les micro-fissures les plus sollicitées sont celles dont la direction  $\mathbf{n}$  correspond à l'une des directions principales du chargement :

- pour un chargement en traction, les fissures les plus sollicitées sont celles dont la direction  $\mathbf{n}$  est parallèle à la direction de chargement : le seuil de micro-fissuration correspond à un taux de restitution d'énergie :

$$G_c^{trac} = \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y} \frac{\pi \gamma^*}{4 l_0^2} (0.8 f_t)^2 \quad (10.32)$$

- Pour une compression : on supposera que les fissures les plus sollicitées sont celles dont la normale est perpendiculaire à la direction de chargement, le seuil  $G_c$  en traction pure est donc :

$$G_c^{comp} = \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y} \frac{\pi \gamma^*}{4 l_0^2} (0.3 f_c)^2 \quad (10.33)$$

- l'intégrale  $\int_\omega \left( (\mathbb{C}\mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})$  est calculée sur la configuration de référence (dans les limites de la condition de petites perturbations).

On calcule en annexe C la valeur de  $\beta$  pour une configuration  $(\gamma^*, v_0)$  donnée : pour des coefficient de Poisson, un module d'Young et des déformations caractéristiques du béton, le terme  $v \int_\omega \left( (\mathbb{C}\mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})$  est négligeable devant la rapport  $\frac{G}{4l}$  (de 4 ordres de grandeur inférieur). On approximera donc la contrainte  $\beta$  à la valeur :

$$\beta \approx \frac{G}{4l} \quad (10.34)$$

On trace figure 10.10 les courbes de niveau de la fonction  $G(\Gamma^*, \mathbf{D})$ , pour un chargement uniaxial vérifiant  $D_{11} = D_{12} = 0$ .

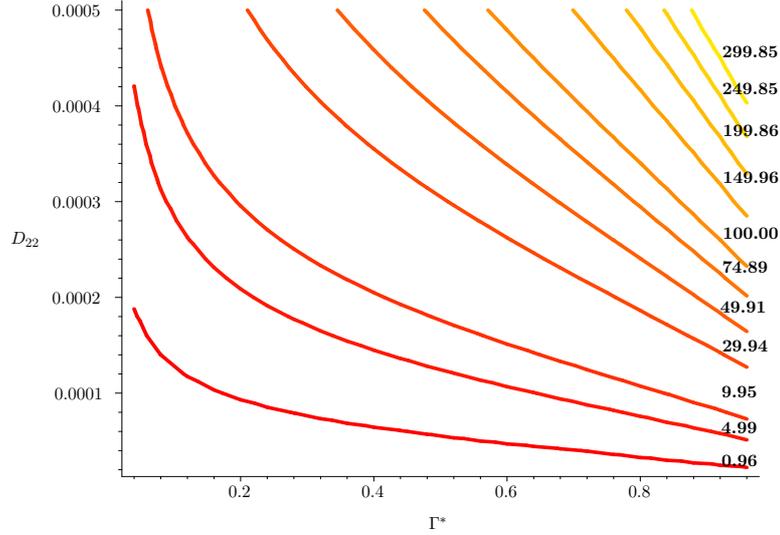


FIG. 10.10. Taux de relaxation d'énergie  $G(\Gamma^*, \mathbf{D})$  [ $N.m^{-1}$ ] [ $D_{11} = D_{12} = 0$ ,  $E_Y = 27GPa$ ,  $\nu_P = 0.2$ ,  $L = 1cm$ ]

#### 10.2.4 Loi de fissuration

On note  $\beta_c$  la valeur critique de  $\beta$  pour laquelle la fissure présente dans un élément de matière se propage. Elle est supposée dépendre à chaque instant du matériau, ainsi que de la vitesse de propagation  $\dot{\gamma}^*$  :

- Points pour lesquels  $\beta < \beta_c$  : il n'y a pas propagation et  $\mathbf{B}$  suit la loi de comportement 10.29 :

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^* \mathbf{D} \quad (10.35)$$

- Points pour lesquels  $\beta = \beta_c$  : cette valeur est atteinte pour une déformation critique notée  $\mathbf{D}^c$  et la contrainte  $\mathbf{B}$  vaut :

$$\mathbf{B}^c = \mathbf{C}^* \mathbf{D}^c \quad (10.36)$$

Si on ne diminue pas la déformation imposée, les fissures peuvent se propager.

Lors de cette évolution, la condition  $\beta = \beta_c$  est constamment vérifiée. Rappelons la définition de  $\beta$  (équations 9.20 et 9.21b) :

$$\beta := \frac{G}{4l} + v \int_{\omega} \left( (\mathbb{C}\mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})$$

L'avancée de la fissure est alimentée par deux contributions : l'apport énergétique concentré en pointe de fissure (terme  $\frac{G}{4l}$ ) et l'apport énergétique des champs de contrainte lointains (terme  $v \int_{\omega} \left( (\mathbb{C}\mathbb{H})^T \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})$ ).

La condition  $\beta = \beta_c$  est imposée :

$$\dot{\beta} - \dot{\beta}_c = 0 \quad (10.37)$$

10.37 est la relation de consistance permettant d'évaluer la vitesse de propagation de la fissure.

$\beta$  dépend à la fois de la déformation imposée  $\mathbf{D}$  et de la taille de la fissure  $\gamma^*$  (voir définitions 9.20 et 9.21b). On déduit de 10.37 l'expression de la vitesse de propagation  $\dot{\gamma}^*$  :

$$\dot{\gamma}^* = \left( \frac{\partial \beta}{\partial \gamma^*} \right)^{-1} \left( \dot{\beta}_c - \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}} \right) \quad (10.38)$$

Avec  $\beta_c = \beta_c(\dot{\gamma}^*, \mathbf{D})$ .

### 10.2.5 Exemple de loi constitutive

Considérons l'élément matériel  $x$  à l'échelle microscopique. La force configurationnelle appliquée en pointe de fissure est identique au taux de restitution d'énergie  $G$ . Les lois constitutives postulées dans [89] sont les suivantes :

$$\dot{a}^* = 0 \quad \text{si } G \leq G_c \quad (10.39a)$$

$$\dot{a}^* = M(G - G_c) \quad \text{si } G > G_c \quad (10.39b)$$

Il y a propagation lorsque la force configurationnelle est suffisamment élevée pour fournir l'énergie nécessaire à l'avancée de la pointe de fissure. Le cas échéant la vitesse  $\dot{a}^*$  est proportionnelle à l'écart entre la force configurationnelle et le seuil  $G_c$  caractéristique du matériau.

On peut donc prendre en compte, à l'échelle microscopique, une loi du type :

$$G = G_c + \frac{\dot{a}^*}{M} := G'_c \quad (10.40)$$

$G'_c(\dot{a}^*)$  est un seuil « dynamique » de propagation. Il dépend à la fois du matériau et de la vitesse d'avancée de la fissure. La condition  $G = G'_c$  est constamment vérifiée lorsque la fissure se propage.

Une telle loi de comportement microscopique se traduit au niveau macroscopique par :

$$\beta_c = \frac{G_c}{4l} + \frac{\dot{\gamma}^*}{4Ml} \quad (10.41)$$

Le seuil macroscopique de propagation de la fissure noté  $\beta_c$  est donc lié à  $G_c$  par 10.41 et il dépend aussi de la vitesse de propagation de la fissure.

On détient tous les ingrédients pour déterminer l'évolution des propriétés mécaniques et géométriques d'un corps  $\mathcal{B}$  micro-fissuré, sous chargement mécanique.

On montre dans le chapitre suivant que les variables de microstructure permettent de déterminer les propriétés hydriques du matériau.

# Chapitre 11

## Calcul de la perméabilité intrinsèque

### Introduction

Il s'agit maintenant de lier les variables géométriques du modèle mis en place précédemment aux propriétés hydriques du milieu micro-fissuré. On utilise pour cela une méthode de type Kozeny Carman similaire à celle décrite dans la partie I (voir §1.2.3.1 et §1.2.5), ainsi que la partie II (§4.3 5.1.3 et 5.2.4).

### 11.1 Champ de déplacement

Les propriétés hydriques de l'élément de matière dépendent de la géométrie de  $\omega$  qui varie en même temps que la déformation  $\mathbf{D}$  aux bords change.

Il est donc primordial de connaître les champs de déplacement au sein de  $\omega$ .

Par une approche similaire à celle menée au §10.1.1 on détermine les champs de déplacements au sein de  $\omega$  :

$$\begin{aligned} u_1(y_1, y_2) = & \left( \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y} D_{11} - \frac{\nu_P(1 + \nu_P)}{E_Y} D_{22} \right) y_1 \\ & + \frac{K^{(1)} + K^{(1')}}{2\sqrt{2\pi\mu}} \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \left( k - \cos\left(\arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right) \\ & + \frac{K^{(2)}}{2\sqrt{2\pi\mu}} \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \left( k + \cos\left(\arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) + 2 \right) \end{aligned} \quad (11.1a)$$

$$\begin{aligned} u_2(y_1, y_2) = & \left( -\frac{\nu_P(1 + \nu_P)}{E_Y} D_{11} + \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y} D_{22} \right) y_2 \\ & + \frac{K^{(1)} + K^{(1')}}{2\sqrt{2\pi\mu}} \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \left( k - \cos\left(\arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \right) \\ & - \frac{K^{(2)}}{2\sqrt{2\pi\mu}} \sqrt[4]{y_2^2 + (y_1 - a^*)^2} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) \left( k + \cos\left(\arctan' \frac{y_2}{y_1 - a^*}\right) - 2 \right) \end{aligned} \quad (11.1b)$$

$k = 3 - 4\nu_P$  et  $\mu = \frac{E_Y}{2(1+\nu_P)}$  dans l'hypothèse des déformations planes.

## 11.2 Ecoulement dans une fissure

On peut assimiler la fissure à une ellipse dont les grands et petits axes sont de longueur  $2a$  et  $2b$ , ces dernières étant respectivement la taille de la fissure en configuration actuelle ainsi que l'ouverture de la fissure. Elles sont déterminées par les champs de déplacement 11.1 :

$$a = a^* \left( 1 + \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y} D_{11} - \frac{\nu_P(1 + \nu_P)}{E_Y} D_{22} \right) \quad (11.2a)$$

$$b = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{a^*}{\pi} \frac{1 - \nu_P^2}{E_Y}} \left( K^{(1)} + K^{(1')} \right) \quad (11.2b)$$

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux soumis à un gradient de pression  $\text{grad}(p)$  suivant la direction normale au plan  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ .

Le champ de vitesse entre les lèvres de la fissure est déterminé par l'équation de Navier-Stokes 1.8a. Le fluide est supposé incompressible et soumis à aucune force volumique extérieure. On postule de plus que l'on est en régime stationnaire et on néglige les termes convectifs.

Le champ de vitesse solution de ce problème est :

$$V(y_1, y_2) = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p(y_3, t)}{\partial y_3} \left( 1 - \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} \right), \quad (11.3)$$

et l'expression du débit  $q$  à travers le plan  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$  est donné par :

$$q := \left| \int_{\text{ellipse}} V(y_1, y_2) \right| \quad (11.4a)$$

$$q := \frac{1}{4} \frac{\pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p(y_3, t)}{\partial y_3} \quad (11.4b)$$

Par conséquent la perméabilité d'un élément matériel  $\omega$  suivant la direction  $\mathbf{s}$  normale au plan  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$  (voir figure 7.2) est :

$$k_{\text{ss}} = \frac{1}{4} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \quad (11.5)$$

## 11.3 Tenseur de perméabilité macroscopique

L'expression 11.5 traduit la perméabilité d'un élément de matière  $\omega$  suivant la direction  $\mathbf{s}$ , normale au plan  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ .

On déduit des expressions 11.2 de  $a$  et  $b$ , ainsi que des relations entre variables macroscopiques et microscopiques (voir annexe F) :

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma^*}{2l\pi} \frac{(1 - \nu_P^2)^2}{E_Y^2} \frac{\left( K^{(1)} + K^{(1')} \right)^2 \left( \frac{1}{4} \frac{\Gamma^*}{l} - \frac{1}{4} \frac{(1 + \nu_P)(\nu_P D_{22} - D_{11}(1 - \nu_P))\Gamma^*}{E_Y l} \right)^2}{\left( \frac{1}{4} \frac{\Gamma^*}{l} - \frac{1}{4} \frac{(1 + \nu_P)(\nu_P D_{22} - D_{11}(1 - \nu_P))\Gamma^*}{E_Y l} \right)^2 + \frac{2\Gamma^*}{l\pi} \left( K^{(1)} + K^{(1')} \right)^2 \frac{(1 - \nu_P^2)^2}{E_Y^2}} \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \quad (11.6)$$

Les facteurs d'intensité de contrainte étant donnés par les définitions 10.31, tandis que les composantes du champ de déformation  $\mathbf{D}$  sont données par :

$$D_{11} = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{D}\mathbf{t}) \quad (11.7a)$$

$$D_{22} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}\mathbf{n}) \quad (11.7b)$$

$$D_{12} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}\mathbf{t}) \quad (11.7c)$$

On représente figure 11.1 les évolutions de  $k_{ss}$  en fonction de la géométrie de la fissure  $\Gamma^*$  et du chargement  $D_{22}$ . On considère un chargement uniaxial tel que  $D_{11} = D_{12} = 0$ .

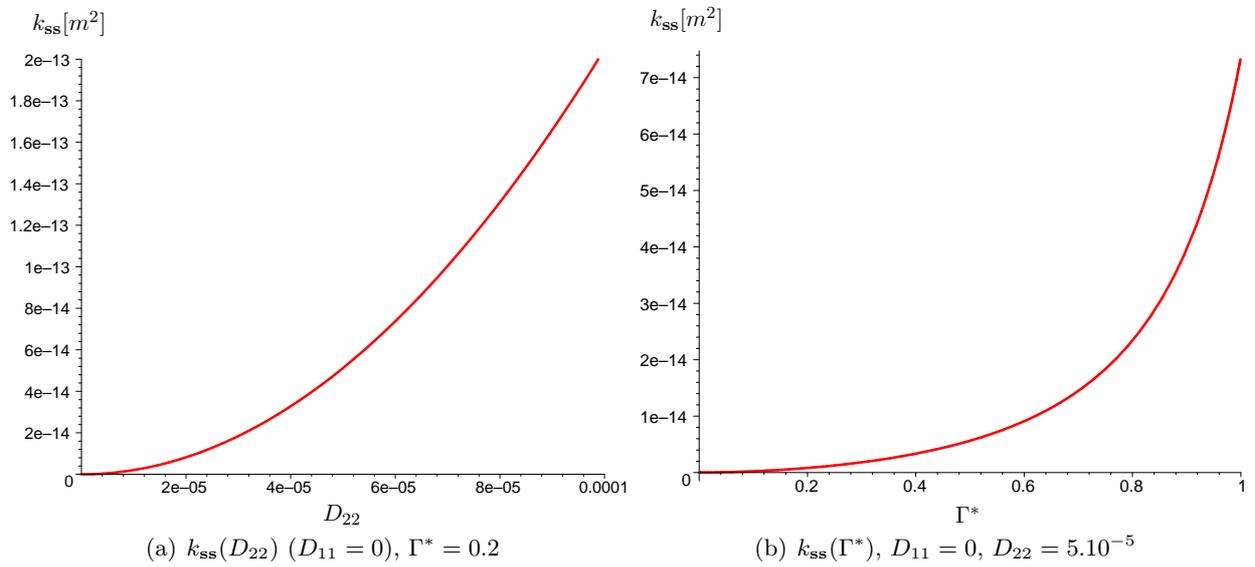


FIG. 11.1. Evolution de  $k_{ss}$  [ $E_Y = 27GPa$ ,  $\nu_P = 0.2$ ,  $L = 1cm$ ,  $l = 3cm$ ]

# Chapitre 12

## Exemples

Ce chapitre est dédié à l'exploitation des résultats précédents. On étudie l'essai de traction à déplacement imposé d'un corps  $\mathcal{B}$  qui occupe le domaine  $\Omega$  à l'instant actuel, deux types de conditions aux limites sont traités :

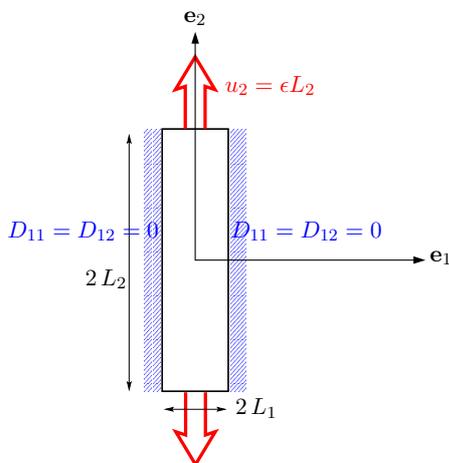
- cotés bloqués : les déplacements sont supposés parallèles à la direction du chargement (§12.1),
- bords libres (§12.2).

Le champ de fissures au sein de  $\Omega$  est supposé uniforme, de normale parallèle à la direction de chargement.

### 12.1 Exemple 1 : déplacements nuls sur les cotés

On note  $u$  le champ de déplacement sur  $\Omega$  et  $\mathbf{f}$  la force extérieure par unité de surface.

#### 12.1.1 Hypothèses



Condition aux limites :

1. On impose  $u_1 = 0$  sur tout le bord de  $\Omega$ ,
2.  $u_2 = \epsilon L_2$  sur les faces supérieures,
3. on impose  $f_2 = 0$  sur les cotés dont la normale est parallèle à  $\mathbf{e}_1$ ,
4. les forces extérieures par unité de masse ainsi que les actions extérieures sur la microstructure sont négligées.
5. On se place en HPP, dans l'hypothèse des déformations planes.

### 12.1.2 Equations d'équilibre et lois de comportement

Il n'y a pas d'effort extérieur par unité de masse, ni d'action sur la microstructure. L'équation d'équilibre 10.28 impose donc :

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega^* \quad (12.1a)$$

$$-\mathbf{B} \mathbf{n}_0 + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega^* \quad (12.1b)$$

On déduit de la conditions 3 :

$$B_{11} = 0 \quad (12.2a)$$

$$B_{22} = f_2 \quad (12.2b)$$

$$B_{12} = 0 \quad (12.2c)$$

Le matériau est homogène de comportement élastique linéaire 10.29  $\mathbf{B} = \mathbf{C}^* \mathbf{D}$ . Les composantes  $D_{11}$  et  $D_{12}$  sont donc nulles, et tant que les fissures ne se propagent pas :

$$f_2 = C_{2222}^* D_{22} \quad (12.3)$$

Notre modèle a été bâti en définissant la transformation macroscopique  $\mathbf{F}$  comme le mouvement apparent du milieu, par conséquent la déformation du corps tient compte en même temps de la déformation réelle de la matière et de l'ouverture des micro fissures.

Nous avons obtenu des lois de comportement basées sur la connaissance de la déformation moyenne  $\mathbf{D}$  des éléments de matière qui diffère, à cause de de la propagation, de la déformation apparente  $\mathbf{E}$ . Ces deux mesures de déformation sont liées dans le cas présent par la relation :

$$E_{22} = D_{22} + \frac{b}{L} \quad (12.4)$$

Où  $\frac{b}{L}$  est l'ouverture de fissure par unité de longueur. On montre en annexe D que  $b$  est une fonction linéaire de  $D_{22}$ . Soit  $z$  tel que :

$$z := \frac{b}{D_{22}}, \quad (12.5)$$

on déduit de 12.4 et 12.5 :

$$E_{22} = \left(1 + \frac{z}{L}\right) D_{22} \quad (12.6)$$

Au vu de 12.3,  $E_{22}$  est uniforme dans  $\Omega$ . On déduit de l'hypothèse 2 :

$$E_{22} = \epsilon \quad (12.7)$$

et :

$$\frac{f_2}{\epsilon} = C_{2222}^* \left(1 + \frac{z}{L}\right)^{-1} \quad (12.8)$$

Il s'agit de la pente de la courbe efforts/déplacements tant que l'on est dans le domaine linéaire du comportement de  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire tant que les fissures ne se propagent pas.

On trace figure 12.1 l'évolution de ce rapport en fonction de la taille de la fissure  $\Gamma^*$ .

On observe une rigidification de  $\mathcal{B}$  à partir de  $\Gamma^* = 0.36$ . Ceci est dû aux conditions aux limites imposées à  $\mathcal{B}$  : ce phénomène disparaît si on remplace la condition de déplacements nuls par une condition de contrainte nulle sur les bords (voir figure 12.7 de l'exemple 2).

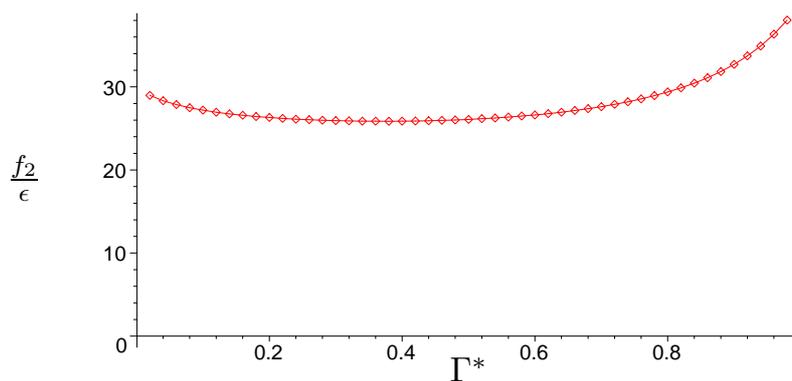


FIG. 12.1. Tracé du rapport  $\frac{f_2}{\epsilon}$

### 12.1.3 Propagation

Le taux de restitution d'énergie est en tout point donné par les formules 10.30 et 10.31. On trace figure 12.2 les évolutions de  $G$  en fonction de  $\Gamma^*$ , pour différentes valeurs de  $D_{22}$ . Ces courbes sont comparées au taux de restitution critique  $G_c$  exprimé par 10.32.

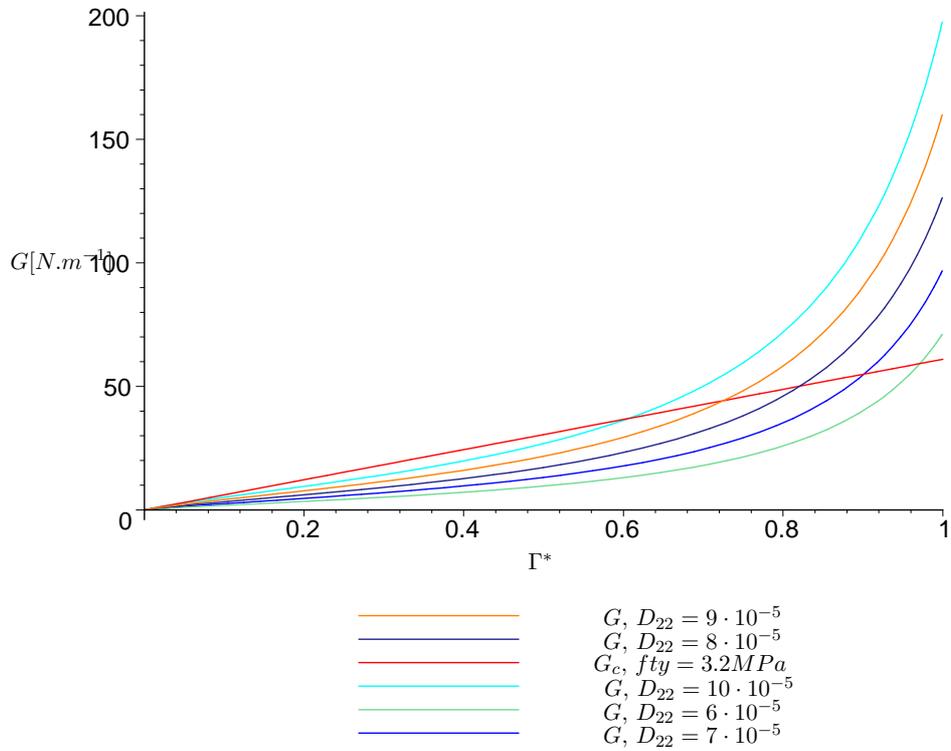


FIG. 12.2. Courbes  $G(\Gamma^*)$  pour différentes valeurs de  $D_{22}$

Les intersections du faisceau de courbes  $G(D_{22}, \Gamma^*)$  avec  $G_c$  correspondent aux couples de valeurs  $(\Gamma^*, D_{22})$  pour lesquels la condition  $G = G_c$  est vérifiée. La courbe bleue tracée figure 12.3 rassemble les points  $D_{22}(\Gamma^*)$  pour lesquels  $G = G_c$ . On s'aide de 12.6 afin de tracer la courbe  $\epsilon(\Gamma^*)$  (en rouge).

La condition de propagation  $G = G_c$  ne définit pas la vitesse de propagation (voir §10.2.4) dans l'hypothèse  $\dot{G} = \dot{G}_c$ . La propagation se fait suivant la courbe  $G = G_c$  : la fissure se propage avec la vitesse imposée par le déplacement si celui-ci est croissant, elle ne se propage pas autrement :

$$\dot{\Gamma}^* = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \Gamma^*} \right)^{-1} [[\dot{\epsilon}]], \quad [[ \ ] ] : \text{partie positive} \quad (12.9)$$

Lors de la propagation, la déformation moyenne de la matière décroît, comme indiqué par la courbe bleue.

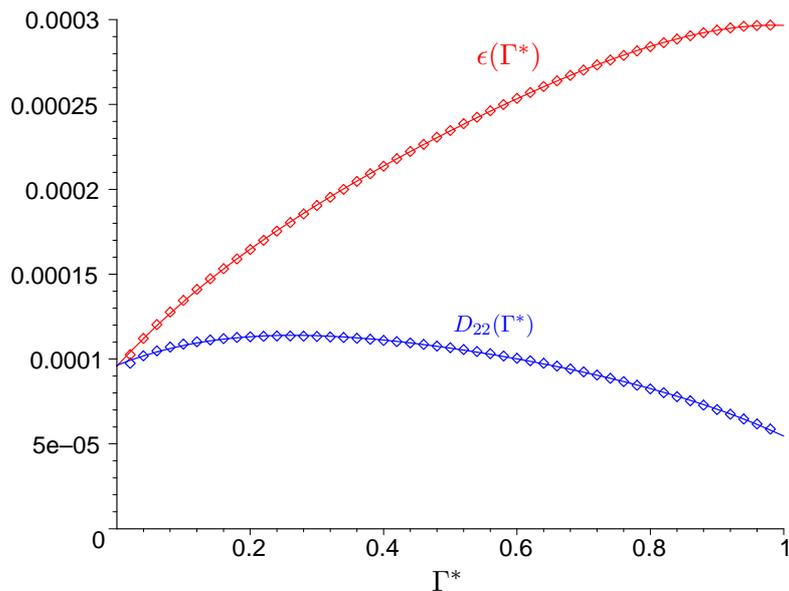


FIG. 12.3. Déformation moyenne  $D_{22}$  et déplacement  $\epsilon$  en fonction de la taille de la fissure  $\Gamma^*$ , pendant la propagation

#### 12.1.4 Loi de comportement

Dès que la condition  $G = G_c$  est satisfaite, la fissure peut se propager : la taille  $\Gamma^*$  augmente en même temps que la déformation de la matière  $D_{22}$  diminue. La figure 12.4 donne la loi de propagation de la fissure en fonction de la déformation  $D_{22}$ . L'évolution de  $\Gamma^*(\epsilon)$  est représentée figure 12.5. Il y a ruine ( $\Gamma^* = 1$ ) pour un déplacement imposé  $3 \cdot 10^{-4} \cdot L_2$ .

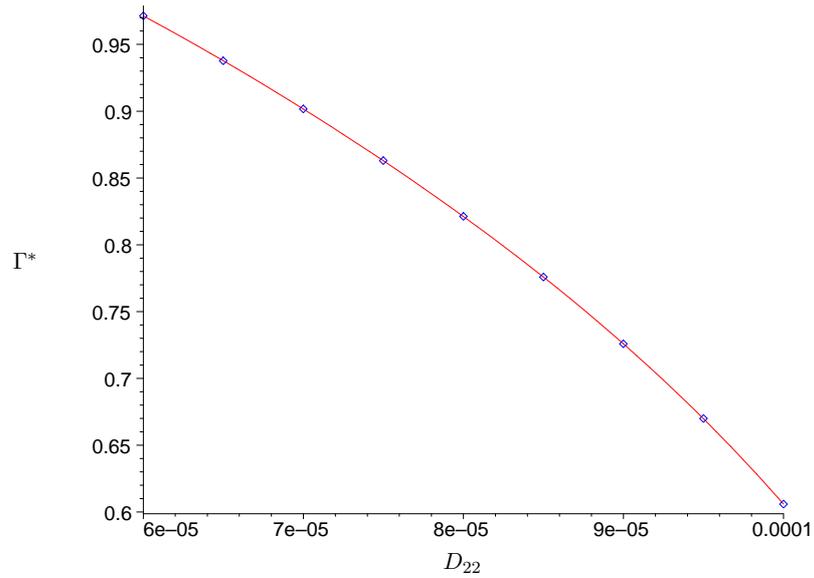


FIG. 12.4. Evolution de la taille de a fissure  $\Gamma^*$  en fonction de la déformation moyenne de la matière  $D_{22}$

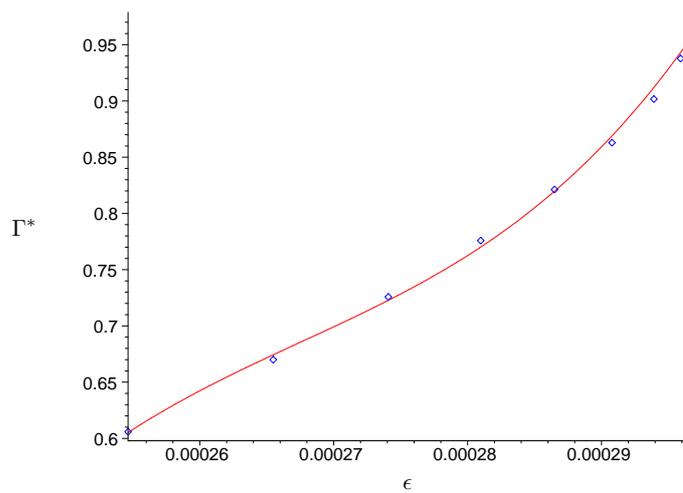


FIG. 12.5. Evolution de la taille de la fissure  $\Gamma^*$  en fonction du déplacement  $\epsilon$ , pendant la propagation (condition  $G = G_c$ )

La surface cadrillée de la figure 12.6 rassemble dans l'espace  $(\Gamma^*, D_{22}, G)$  les points de coordonnées  $(\Gamma^*, D_{22}, G_c)$  : il s'agit de la surface critique de propagation.

La surface pleine est déterminée par  $G = G(\Gamma^*, D_{22})$ . Une fissure de taille  $\Gamma^*$ , dans un élément de matière dont la déformation moyenne est  $D_{22}$ , ne se propage pas tant que son taux de restitution d'énergie  $G$  est inférieur à  $G_c$ . L'ensemble des couples  $(\Gamma^*, D_{22})$  vérifiant la condition  $G = G_c$  est représenté sur la courbe rouge.

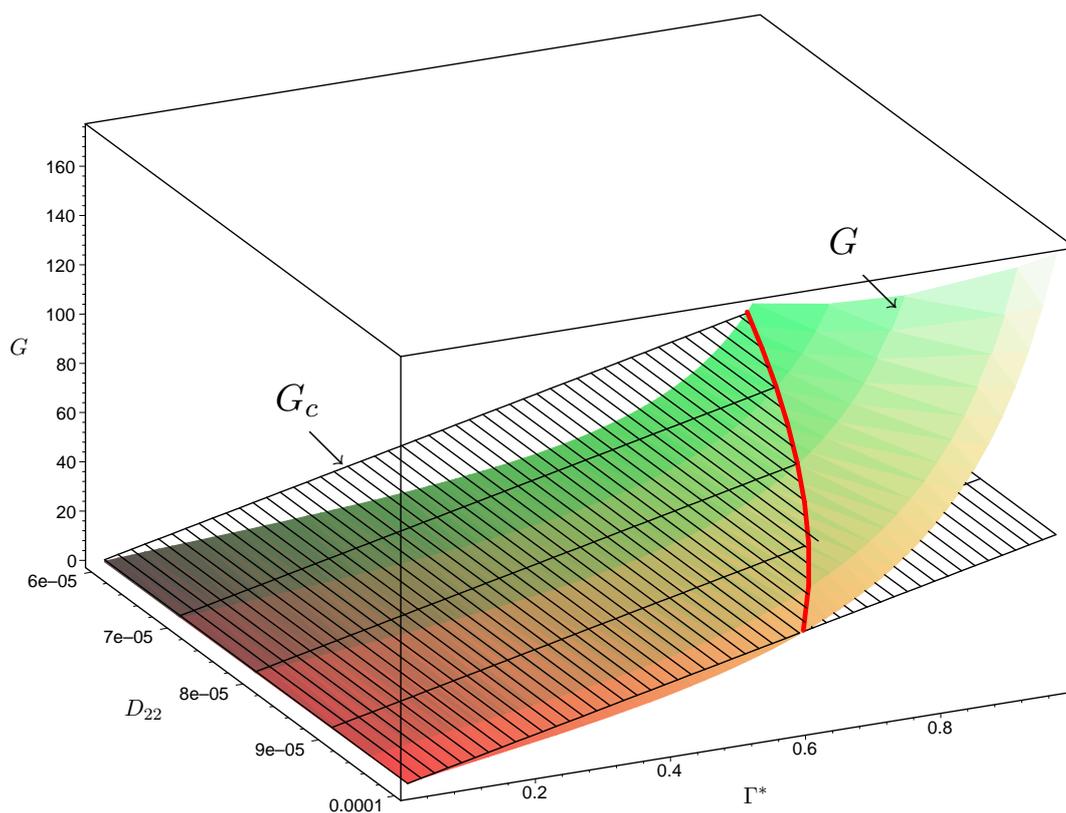
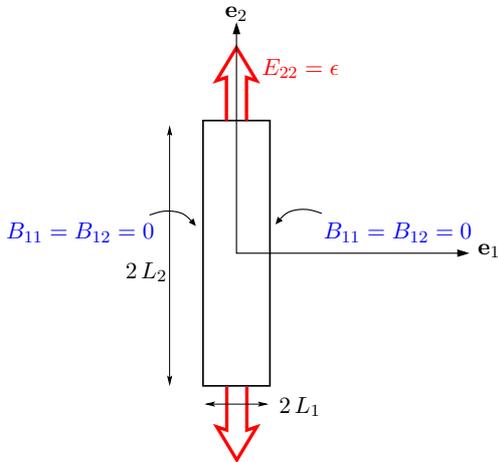


FIG. 12.6. Courbes  $G = G(\Gamma^*, D_{22})$  et  $G_c = G_c(\Gamma^*)$

## 12.2 Exemple 2 : contraintes nulles sur les bords

### 12.2.1 Hypothèses



1. De même que précédemment on impose  $u_2 = \epsilon L_2$  sur la face supérieure,
2.  $\mathbf{f}$  est nul sur les cotés dont la normale est parallèle à  $\mathbf{e}_1$ ,
3. on néglige les forces extérieures par unité de masse ainsi que les actions extérieures sur la microstructure,
4. On se place en HPP, dans l'hypothèse des déformations planes.

Les contraintes  $B_{11}$  et  $B_{12}$  sont nulles sur les cotés,  $D_{11}$  et  $D_{22}$  sont donc solutions du système linéaire suivant, résolu en annexe E :

$$B_{11} = C_{1111}^* D_{11} + C_{1122}^* D_{22} + C_{1112}^* D_{12} = 0 \quad (12.10a)$$

$$B_{12} = C_{1211}^* D_{11} + C_{1222}^* D_{22} + C_{1212}^* D_{12} = 0 \quad (12.10b)$$

On trace dans la suite, comme au §12.1, les courbes permettant de déterminer le comportement de  $\mathcal{B}$ .

### 12.2.2 Equations d'équilibre et lois de comportement

On compare figure 12.7, les évolutions de  $\frac{f_2}{\epsilon}$  avec  $\Gamma^*$  pour les deux exemples traités.

Contrairement à l'exemple 1, on n'observe pas de rigidification de  $\mathcal{B}$  :  $\frac{f_2}{\epsilon}$  décroît jusqu'à être nul pour  $\Gamma^* = 1$ .

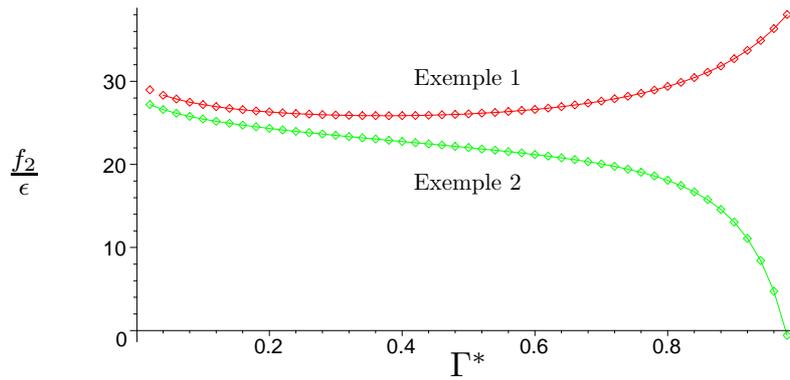


FIG. 12.7. Tracé du rapport  $\frac{f_2}{\epsilon}$

### 12.2.3 Propagation

On trace figure 12.8 un réseau de courbes  $G(\Gamma^*)$  pour différentes valeurs de  $D_{22}$ . Les points d'intersection avec la courbe  $G = G_c$  sont représentés figure 12.9.

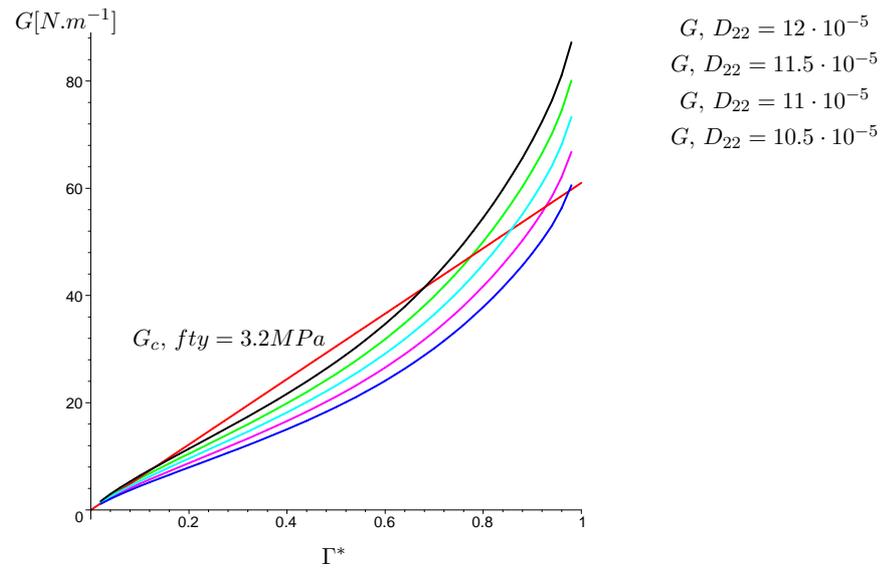


FIG. 12.8. Courbes  $G(\Gamma^*)$  pour différentes valeurs de  $D_{22}$

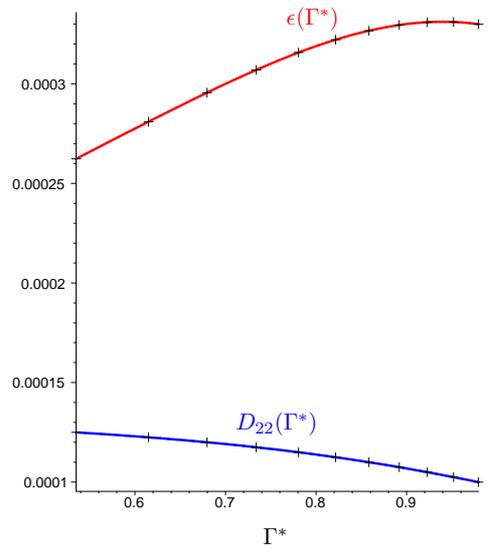


FIG. 12.9. Déformation moyenne  $D_{22}$  et déplacement  $\epsilon$  en fonction de la taille de la fissure  $\Gamma^*$ , pendant la propagation

De même que précédemment la propagation se fait suivant la courbe  $G = G_c$ . La déformation de la matrice diminue lors de la propagation (figure 12.9, courbe bleue). On remarque un point d'instabilité pour un déplacement  $0.0093 L_2$  (figure 12.9, courbe rouge). Ce phénomène est retranscrit figures 12.10 et 12.11.

#### 12.2.4 Loi de comportement

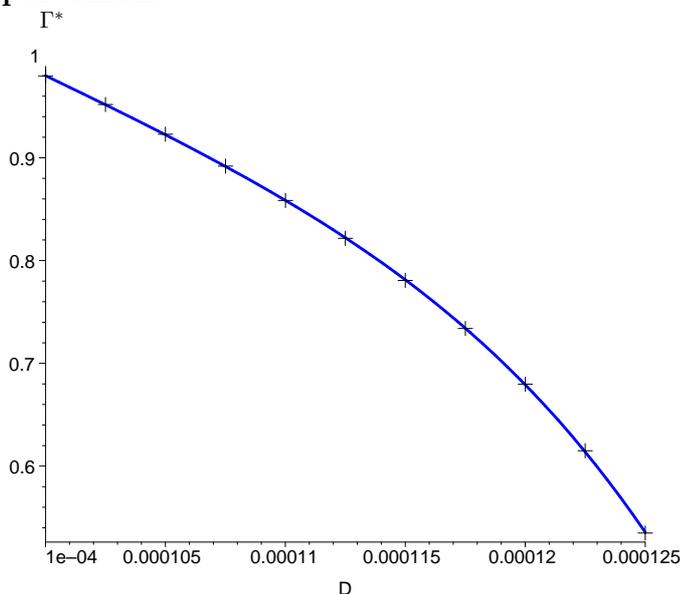


FIG. 12.10. Evolution de la taille de la fissure  $\Gamma^*$  en fonction de la déformation moyenne de la matière  $D_{22}$

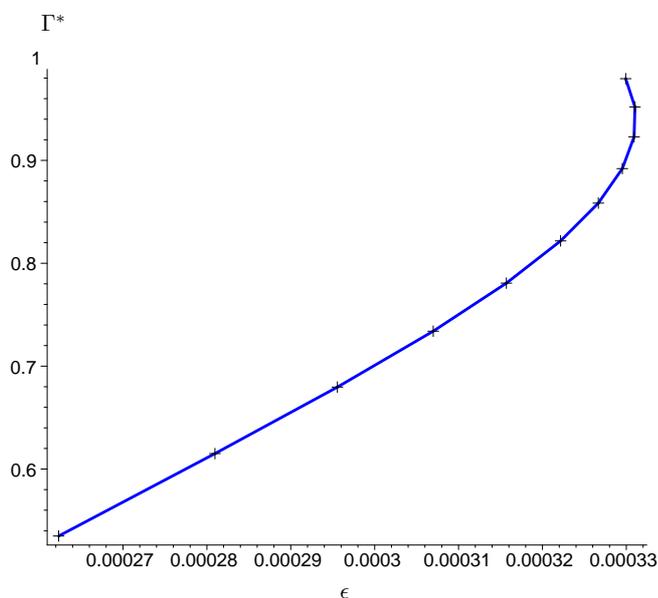


FIG. 12.11. Evolution de la taille de la fissure  $\Gamma^*$  en fonction du déplacement  $\epsilon$ , pendant la propagation (condition  $G = G_c$ )

Le lieu des points de coordonnées  $(\Gamma^*, D_{22}, G)$  vérifiant  $G = G_c$  est tracé figure 12.12.

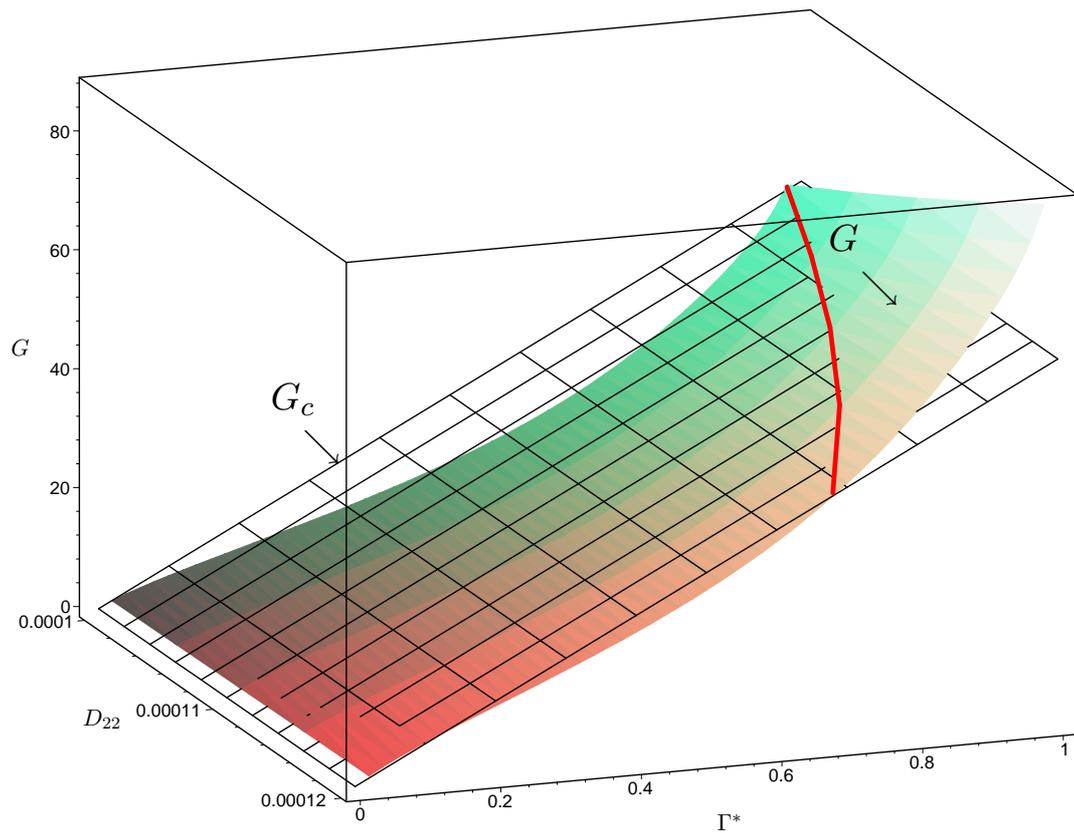


FIG. 12.12. Courbes  $G = G(\Gamma^*, D_{22})$  et  $G_c = G_c(\Gamma^*)$

### 12.2.5 Essai de traction

Les résultats précédents sont utilisés dans cet exemple pour étudier le comportement d'une poutre en traction uni-axiale.

La définition 11.6 du tenseur de perméabilité du solide micro-fissuré permet de tracer en parallèle, l'évolution de  $k$  en fonction du déplacement imposé.

L'évolution de la taille des micro-fissures ( $\Gamma^*$ ) est elle aussi représentée.

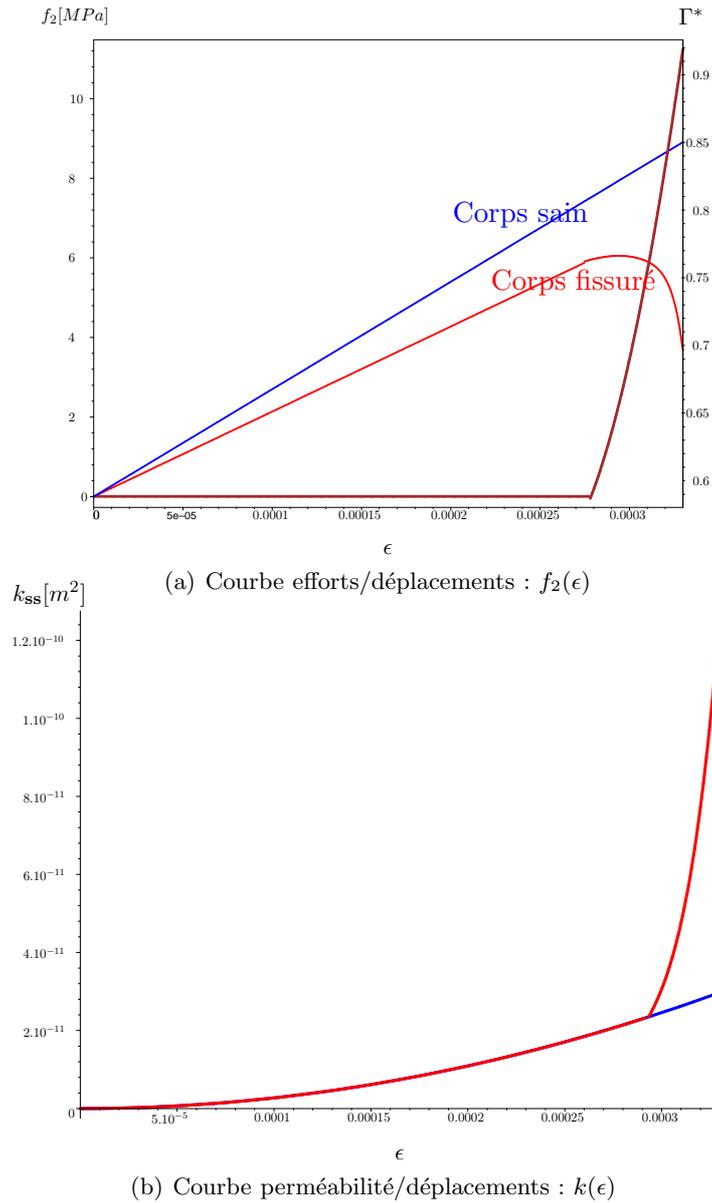


FIG. 12.13. Comportement du béton sous chargement uni-axial [ $\Gamma_0 = 59\%$ ,  $E_Y = 27GPa$ ,  $\nu_P = 0.2$ ,  $f_{ty} = 3.2MPa$ ]

Les tracés précédents traduisent l'influence des micro-fissures sur le comportement du béton.

La rigidité apparente du corps micro-fissuré est inférieure à celle d'un corps sain. Elle diminue dès qu'il y a propagation des micro-fissures, et s'annule à la ruine de la structure.

La perméabilité augmente en même temps que les fissures s'ouvrent. Une fois amorcée, la propagation des micro-fissures devient la principale cause de la perte d'étanchéité.

# Conclusion

Le but de cette étude était de mettre en place un modèle du béton permettant non seulement de décrire l'évolution de ses caractéristiques mécaniques, mais aussi de déterminer l'évolution de sa perméabilité.

Le modèle a été réalisé en appliquant la théorie des milieux à microstructure : on considère qu'en chaque point du corps, il y a une fissure pouvant être représentée par des variables de taille, et d'orientation. Nous nous sommes inspirés de la théorie des forces configurationnelles : on tient compte à la fois de la déformation et de l'éventuelle propagation du champ de fissures.

Les principes de la mécanique linéaire de la rupture nous ont permis de mettre en place une application, les principales étapes de la mise en place des lois de comportements ont été détaillées.

Le modèle mécanique, comportant une simplification de la géométrie du matériau, permet de déterminer l'étanchéité du milieu micro-fissuré, à partir des caractéristiques du champ de fissure et du chargement appliqué.

Nous avons supposé applicable la théorie de la mécanique linéaire de la rupture, mais le modèle pourrait être amélioré par la prise en compte d'une représentation plus précise du volume représentatif de la microstructure.

On pourrait éventuellement déterminer les lois de comportement des contraintes duales du gradient de propagation et du second gradient de déformation : une telle modélisation permettra une meilleure représentation de l'influence entre fissures.



# Annexes



## Annexe A

# Objectivité des contraintes du modèle

Considérons une rotation  $q$  de l'observateur, et notons  $\mathbf{Q}$  le tenseur antisymétrique qui est associé à cette transformation. On vérifie que la puissance des efforts intérieurs calculée à partir des expressions 9.33 des contraintes est invariante par  $q$ .

On détermine pour cela les valeurs de  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbb{b}_1$ ,  $\beta_1$  et  $\mathbf{b}_1$  après rotation de l'observateur, et on vérifie :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbb{b}_1 \cdot \text{Grad} \dot{\mathbf{D}} + \beta_1 \cdot \dot{\gamma}^* + \mathbf{b}_1 \cdot \text{Grad} \dot{\gamma}^* \\ = q(\mathbf{B}_1) \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) + q(\mathbb{b}_1) \cdot q(\text{Grad} \dot{\mathbf{D}}) + q(\beta_1) \cdot q(\dot{\gamma}^*) + q(\mathbf{b}_1) \cdot q(\text{Grad} \dot{\gamma}^*) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Rappelons 9.33 :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \left[ \int_{\omega_1} \overline{\mathbf{B}}_1 \right] - \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \right] \\ &\quad + d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \right] - d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \cdot (\text{Grad} \mathbf{D} \mathbf{n}_{10}) \right] \mathbf{G}_0 \\ &\quad + d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} (\overline{\beta}_2 \text{Grad} \gamma^*) \right] - d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 (\text{Grad} \gamma^* \cdot \mathbf{n}_{10}) \right] \mathbf{G}_0 \\ \mathbb{b}_1 &= -d_0 \left[ \left( \int_{\Gamma_{12}} \overline{\mathbf{B}}_2 \right) \otimes \mathbf{n}_1 \right] \\ \beta_1 &= \int_{\omega_1} \overline{\beta}_1 - \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \\ \mathbf{b}_1 &= -d_0 \left( \int_{\Gamma_{12}} \overline{\beta}_2 \right) \mathbf{n}_1 \end{aligned}$$

Où les fonctions  $\overline{\mathbf{B}}$  et  $\overline{\beta}$  sont définies sur les deux sous domaine  $\omega_1$  et  $\omega_2$  (voir §9.4.2.2). Dans la suite, on détermine leurs nouvelles valeurs  $q(\overline{\mathbf{B}})$  et  $q(\overline{\beta})$  après rotation de l'observateur (voir §A.2 et §A.3).

### A.1 Relations utiles

$$q(\mathbf{G}) = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T \quad \text{relation 8.3}$$

Les tenseurs de déformation et de rigidité sont objectifs :

$$q(\mathbf{D}) = \mathbf{QDQ}^T \quad (\text{A.2})$$

$$q(\mathbf{C}) = \mathbf{QCQ}^T \quad (\text{A.3})$$

Dans le cadre des petites perturbation :

$$q(\mathbf{P}) = \mathbf{QPQ}^T \quad (\text{A.4})$$

On en déduit :

$$q(\mathbf{H}) = \mathbf{QHQ}^T \quad (\text{A.5a})$$

$$q(\mathbf{HD}) = \mathbf{Q(HD)Q}^T \quad (\text{A.5b})$$

$$q(\mathbf{CHD}) = \mathbf{Q(CHD)Q}^T \quad (\text{A.5c})$$

## A.2 Modification de $\bar{\mathbf{B}}$ par $\mathbf{q}$

Les fonctions  $\bar{\mathbf{B}}$  sont définies par 9.21a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &:= v [(\mathbf{H}^T \mathbf{CH}) \mathbf{D}] - v^2 \left( (\mathbf{CH})^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial v} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \mathbf{I} \\ &= v [(\mathbf{H}^T \mathbf{CH}) \mathbf{D}] - v^2 (\mathbf{CHD}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial v} \mathbf{D} \right) \mathbf{I} \end{aligned}$$

Calculons leur valeur après rotation de l'observateur (on utilise A.5a et A.5c) :

$$q(\bar{\mathbf{B}}) = v [(\mathbf{QH}^T \mathbf{Q}^T) (\mathbf{Q} (\mathbf{CHD}) \mathbf{Q}^T)] - v^2 \left[ Q_{ij} (C H D)_{jk} Q_{kl}^T \right] \cdot \left[ Q_{im} \left( \frac{\partial H}{\partial v} D \right)_{mn} Q_{nl}^T \right] \mathbf{I} \quad (\text{A.6a})$$

$$= v [\mathbf{Q} (\mathbf{H}^T (\mathbf{CHD})) \mathbf{Q}^T] - v^2 \left[ Q_{ji}^T Q_{im} (C H D)_{jk} \left( \frac{\partial H}{\partial v} D \right)_{mn} Q_{nl}^T Q_{lk} \right] \mathbf{I} \quad (\text{A.6b})$$

$$= v [\mathbf{Q} (\mathbf{H}^T (\mathbf{CHD})) \mathbf{Q}^T] - v^2 \left[ \delta_{jm} \delta_{nk} (C H D)_{jk} \left( \frac{\partial H}{\partial v} D \right)_{mn} \right] \mathbf{I} \quad (\text{A.6c})$$

$$= \mathbf{Q} \left[ v [(\mathbf{H}^T (\mathbf{CHD}))] - v^2 \left[ (\mathbf{CHD}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial v} \mathbf{D} \right) \right] \mathbf{I} \right] \mathbf{Q}^T \quad (\text{A.6d})$$

$$q(\bar{\mathbf{B}}) = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{Q}^T \quad (\text{A.7})$$

## A.3 Modification de $\bar{\beta}$ par $\mathbf{q}$

Les fonctions  $\bar{\beta}$  sont définies par (9.21b) :

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &:= \frac{v}{4l} G + v \left( (\mathbf{CH})^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \gamma^*} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \\ &= \frac{v}{4l} G + v (\mathbf{CHD}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \gamma^*} \mathbf{D} \right) \end{aligned}$$

De même que précédemment, on montre :

$$q(\bar{\beta}) = \frac{v}{4l}G + v \left[ Q_{ij} (C H D)_{jk} Q_{kl}^T \right] \cdot \left[ Q_{im} \left( \frac{\partial H}{\partial \gamma^*} D \right)_{mn} Q_{nl}^T \right] \quad (\text{A.8a})$$

$$= \frac{v}{4l}G + v Q_{ji}^T Q_{im} (C H D)_{jk} \left( \frac{\partial H}{\partial \gamma^*} D \right)_{mn} Q_{nl}^T Q_{lk} \quad (\text{A.8b})$$

$$= \frac{v}{4l}G + v \delta_{jm} \delta_{nk} (C H D)_{jk} \left( \frac{\partial H}{\partial \gamma^*} D \right)_{mn} \quad (\text{A.8c})$$

$$= \frac{v}{4l}G + v (\mathbb{C} \mathbb{H} \mathbf{D}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \mathbf{D} \right) \quad (\text{A.8d})$$

$$q(\bar{\beta}) = \bar{\beta} \quad (\text{A.9})$$

## A.4 Objectivité des contraintes

### A.4.1 Objectivité de $B$

Rappelons la relation 9.33 entre la contrainte  $\mathbf{B}$  définie sur le sous-domaine  $\omega_1$  (notée  $\mathbf{B}_1$ ), et les différentes fonctions  $\bar{\mathbf{B}}$  et  $\bar{\beta}$  définies sur  $\omega_1$  et le domaine voisin  $\omega_2$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \left[ \int_{\omega_1} \bar{\mathbf{B}}_1 \right] - \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\mathbf{B}}_2 \right] \\ &+ d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \bar{\mathbf{B}}_2 \right) \right] - d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\mathbf{B}}_2 \cdot (\text{Grad} \mathbf{D} \mathbf{n}_{10}) \right] \mathbf{G}_0 \\ &+ d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} (\bar{\beta}_2 \text{Grad} \gamma^*) \right] - d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 (\text{Grad} \gamma^* \cdot \mathbf{n}_{10}) \right] \mathbf{G}_0 \end{aligned}$$

On procède terme par terme afin de montrer l'objectivité de  $\mathbf{B}$  :

1. Calculons la puissance développée par le premier terme  $\left[ \int_{\omega_1} \bar{\mathbf{B}}_1 \right]$  :

$$\begin{aligned} q(\bar{\mathbf{B}}_1) \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) &= Q_{ij} \bar{B}_{1jk} Q_{kl}^T \cdot Q_{im} \dot{D}_{mn} Q_{nl}^T \\ &= \delta_{mj} \delta_{kn} \bar{B}_{1jk} \dot{D}_{mn} \\ &= \bar{B}_{1jk} \dot{D}_{jk} = \bar{\mathbf{B}}_1 \cdot \dot{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Par conséquent :

$$\left( \int_{\omega_1} q(\bar{\mathbf{B}}_1) \right) \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) = \left( \int_{\omega_1} \bar{\mathbf{B}}_1 \right) \cdot \dot{\mathbf{D}} \quad (\text{A.11})$$

2. de même

$$\left[ \int_{\Gamma_{12}} q(\bar{\mathbf{B}}_2) \right] \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) = \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\mathbf{B}}_2 \right] \cdot \dot{\mathbf{D}} \quad (\text{A.12})$$

3. Calculons maintenant la puissance associée au terme  $d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \bar{\mathbf{B}}_2 \right) \right] :$

$$\begin{aligned}
& d_0 \left[ (\mathbf{Q} \mathbf{n}_{10}) \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( q \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \right) q \left( \bar{\mathbf{B}}_2 \right) \right) \right] \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) \\
&= d_0 \left[ (\mathbf{Q} \mathbf{n}_{10}) \otimes \int_{\Gamma_{12}} \left( q \left( (\text{Grad} \mathbf{D})^T \right) \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{Q}^T \right) \right] \cdot (\mathbf{Q} \dot{\mathbf{D}} \mathbf{Q}^T) \\
&= d_0 Q_{im} n_{10m} \int_{\Gamma_{12}} q(\text{Grad} D)_{lkj} Q_{kp} \bar{B}_{2pq} Q_{ql}^T Q_{ir} \dot{D}_{rs} Q_{sj}^T \\
&= d_0 Q_{im} n_{10m} \int_{\Gamma_{12}} Q_{lu} \frac{\partial D_{uv}}{\partial x_s} Q_{vk}^T Q_{sj}^T Q_{kp} \bar{B}_{2pq} Q_{ql}^T Q_{ir} \dot{D}_{rz} Q_{zj}^T \quad (\text{A.13}) \\
&= d_0 \delta_{mr} \delta_{vp} \delta_{sz} \delta_{uq} n_{10m} \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial D_{uv}}{\partial x_s} \bar{B}_{2pq} \dot{D}_{rz} \\
&= d_0 n_{10m} \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial D_{qp}}{\partial x_s} \bar{B}_{2pq} \dot{D}_{ms} \\
&= d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes (\text{Grad} \mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}}_2 \right] \cdot \dot{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

4. On fait de même avec le terme  $d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\mathbf{B}}_2 \cdot (\text{Grad} \mathbf{D} \mathbf{n}_{10}) \right] \mathbf{G}_0$

$$\begin{aligned}
& d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} q(\bar{\mathbf{B}}_2) \cdot \left( q(\text{Grad} \mathbf{D}) q(\mathbf{n}_{10}) \right) \right] q(\mathbf{G}_0) \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} (Q_{im} \bar{B}_{2mn} Q_{nj}^T) \cdot (q(\text{Grad} D)_{ijp} Q_{pg} n_{10g}) \right] Q_{st} G_{0tu} Q_{uv}^T \cdot Q_{sa} \dot{D}_{ab} Q_{bv}^T \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} Q_{im} \bar{B}_{2mn} Q_{nj}^T Q_{id} \frac{\partial D_{de}}{\partial x_f} Q_{ej}^T Q_{fp}^T Q_{pg} n_{10g} \right] \delta_{ta} \delta_{bu} \delta_{tu} \dot{D}_{ab} \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \delta_{md} \delta_{ne} \delta_{fg} \bar{B}_{2mn} \frac{\partial D_{de}}{\partial x_f} n_{10f} \right] G_{0tu} \dot{D}_{tu} \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{B}_{2mn} \frac{\partial D_{mn}}{\partial x_f} n_{10f} \right] G_{0tu} \dot{D}_{tu} \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\mathbf{B}}_2 \cdot (\text{Grad} \mathbf{D} \mathbf{n}_{10}) \right] \mathbf{G}_0 \cdot \dot{\mathbf{G}} \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

5. Terme  $d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} (\bar{\beta}_2 \text{Grad} \gamma^*) \right] :$

$$\begin{aligned}
& d_0 \left[ q(\mathbf{n}_{10}) \otimes \int_{\Gamma_{12}} (q(\bar{\beta}_2) q(\text{Grad} \gamma^*)) \right] \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) \\
&= d_0 \left[ (\mathbf{Q} \mathbf{n}_{10}) \otimes \int_{\Gamma_{12}} (\bar{\beta}_2 (\mathbf{Q} \text{Grad} \gamma^*)) \right] \cdot (\mathbf{Q} \dot{\mathbf{D}} \mathbf{Q}^T) \\
&= d_0 \left[ (Q_{ip} n_{10p}) \otimes \int_{\Gamma_{12}} (\bar{\beta}_2 (Q_{jk} (\text{Grad} \gamma^*)_k)) \right] \cdot (Q_{im} \dot{D}_{mn} Q_{nj}^T) \\
&= d_0 \left[ \delta_{pm} \delta_{nk} n_{10p} \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 (\text{Grad} \gamma^*)_k \right] \dot{D}_{mn} \\
&= d_0 \left[ n_{10m} \int_{\Gamma_{12}} (\bar{\beta}_2 (\text{Grad} \gamma^*)_n) \right] \dot{D}_{mn} \\
&= d_0 \left[ \mathbf{n}_{10} \otimes \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 (\text{Grad} \gamma^*) \right] \cdot \dot{\mathbf{D}}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

6. On calcule enfin :

$$\begin{aligned}
& d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} (q(\bar{\beta}_2) q(\text{Grad} \gamma^*) \cdot q(\mathbf{n}_{10})) \right] q(\mathbf{G}_0) \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 (\mathbf{Q} \text{Grad} \gamma^*) \cdot (\mathbf{Q} \mathbf{n}_{10}) \right] (\mathbf{Q} \mathbf{G}_0 \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{Q} \dot{\mathbf{D}} \mathbf{Q}^T) \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 Q_{ij} (\text{Grad} \gamma^*)_j Q_{ip} n_{10p} \right] (Q_{kt} \mathbf{G}_{0tu} Q_{um}^T) \cdot (Q_{kq} \dot{D}_{qr} Q_{rm}^T) \\
&= d_0 \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 \delta_{jp} \delta_{tq} \delta_{tq} \delta_{ru} (\text{Grad} \gamma^*)_j n_{10p} G_{0tu} \dot{D}_{qr} \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 (\text{Grad} \gamma^*)_j \mathbf{n}_{10j} \right] G_{0qr} \dot{D}_{qr} \\
&= d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 (\text{Grad} \gamma^*) \cdot \mathbf{n}_{10} \right] \mathbf{G}_0 \cdot \dot{\mathbf{D}}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

On a donc :

$$q(\mathbf{B}_1) \cdot q(\dot{\mathbf{D}}) = \mathbf{B}_1 \cdot \dot{\mathbf{D}} \tag{A.17}$$

$\mathbf{B}_1$  est objectif.

#### A.4.2 Objectivité de $\mathfrak{b}_1$

On démontre ici l'objectivité de la contrainte  $\mathfrak{b}_1$  duale de  $\text{Grad} \dot{\mathbf{D}}$  :

$$\mathfrak{b}_1 = -d_0 \left[ \left( \int_{\Gamma_{12}} \bar{\mathbf{B}}_2 \right) \otimes \mathbf{n}_1 \right]$$

$q(\bar{\mathbf{B}}_2) = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{Q}^T$  (A.7), et  $q(\mathbf{n}) = \mathbf{Q} \mathbf{n}$ , par conséquent :

$$q(\mathfrak{b}_1) = -d_0 \left[ \left( \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{Q}^T \right) \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{n}_1) \right] \tag{A.18}$$

De plus :

$$q(\text{Grad}\dot{\mathbf{D}})_{ijk} = \frac{\partial \left( q(\dot{\mathbf{D}}) \right)_{ij}}{\partial (\mathbf{Q}\mathbf{x})_k} \quad (\text{A.19a})$$

$$= \frac{\partial \left( q(\dot{\mathbf{D}}) \right)_{ij}}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial (\mathbf{Q}\mathbf{x})_k} \quad (\text{A.19b})$$

$$= \frac{\partial \left( Q_{im} \dot{D}_{mn} Q_{nj}^T \right)}{\partial x_p} Q_{pk}^T \quad (\text{A.19c})$$

$$= Q_{im} \frac{\partial \dot{D}_{mn}}{\partial x_p} Q_{jn} Q_{kp} \quad (\text{A.19d})$$

Calculons maintenant la puissance associée à  $q(\mathbf{b}_1)$  après rotation de l'observateur :

$$q(\mathbf{b}_1) \cdot q(\text{Grad}\dot{\mathbf{D}}) = -d_0 \int_{\Gamma_{12}} \left[ Q_{iu} B_{2uv} Q_{vj}^T Q_{kt} n_t Q_{im} \frac{\partial \dot{D}_{mn}}{\partial x_p} Q_{jn} Q_{pk}^T \right] \quad (\text{A.20a})$$

$$= -d_0 \int_{\Gamma_{12}} \left[ \delta_{um} \delta_{vn} \delta_{pt} B_{2uv} n_t \frac{\partial \dot{D}_{mn}}{\partial x_p} \right] \quad (\text{A.20b})$$

$$= -d_0 \int_{\Gamma_{12}} \left[ B_{2mn} n_p \frac{\partial \dot{D}_{mn}}{\partial x_p} \right] \quad (\text{A.20c})$$

$$= -d_0 \left[ \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{B}_2 \otimes \mathbf{n} \right] \cdot \text{Grad}\dot{\mathbf{D}} \quad (\text{A.20d})$$

$$q(\mathbf{b}_1) \cdot q(\text{Grad}\dot{\mathbf{D}}) = \mathbf{b}_1 \cdot \text{Grad}\dot{\mathbf{D}} \quad (\text{A.21})$$

$\mathbf{b}_1$  donc est objectif.

#### A.4.3 Objectivité de $\beta_1$

$\beta_1$  défini par (voir 9.33) :

$$\beta_1 = \int_{\omega_1} \bar{\beta}_1 - \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2$$

On a montré que les fonctions  $\bar{\beta}$  associées à un élément fissuré étaient indépendantes par rotation de l'observateur (A.9). Il en est de même de la variable duale  $\dot{\gamma}^*$ , on a donc :

$$q(\beta \cdot \dot{\gamma}^*) = \beta \cdot \dot{\gamma}^* \quad (\text{A.22})$$

$\beta$  est objectif.

#### A.4.4 Objectivité de $\mathbf{b}_1$

$$\mathbf{b}_1 = -d_0 \left( \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 \right) \mathbf{n}_1$$

$\bar{\beta}_2$  est invariant par  $q$  (A.9), et  $q(\mathbf{n}_1) = \mathbf{Q}\mathbf{n}_1$ . De ce fait :

$$q(\mathbf{b}_1) = -d_0 \left( \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 \right) \mathbf{Q}\mathbf{n}_1 \quad (\text{A.23})$$

On a de plus :

$$q(\text{Grad}\dot{\gamma}^*) = \mathbf{Q} \text{Grad}\dot{\gamma}^* \quad (\text{A.24})$$

On en déduit :

$$q(\mathbf{b}_1) \cdot q(\text{Grad}\dot{\gamma}^*) = -d_0 \left( \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 \right) Q_{ij} n_{1j} \cdot Q_{ip} (\text{Grad}\dot{\gamma}^*)_p \quad (\text{A.25a})$$

$$= -d_0 \left( \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 \right) Q_{ji}^T Q_{ip} n_{1j} (\text{Grad}\dot{\gamma}^*)_p \quad (\text{A.25b})$$

$$= -d_0 \left( \int_{\Gamma_{12}} \bar{\beta}_2 \right) \mathbf{n}_1 \cdot \text{Grad}\dot{\gamma}^* \quad (\text{A.25c})$$

$$q(\mathbf{b}_1 \cdot \text{Grad}\dot{\gamma}^*) = \mathbf{b}_1 \cdot \text{Grad}\dot{\gamma}^* \quad (\text{A.26})$$

$\mathbf{b}_1$  est objectif.

## Annexe B

# Détermination de $\mathbb{H}$ par le logiciel Maple

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):with(plots):with(student):
> with(linalg):

> assume(y2>0);assume(y1>0);
> assume(L>0);

> #S11 et S22: constantes égales au signe de Sigma11 et Sigma22, 1 si positifs 0 sinon

> k:=3-4*nu;
> mu:=E/(2*(1+nu));lambda:=E*nu/((1+nu)*(1-2*nu));
```

### B.1 Matrice de rigidité C

```
> C:=Matrix([[lambda+2*mu,lambda,0],[lambda,lambda+2*mu,0],[0,0,mu]]):
```

### B.2 Fissure de longueur 2 a, Modes (1) et (1')

#### B.2.1 Contraintes, facteurs d'intensité de contraintes / coordonnées polaires - origine en pointe de fissure -

##### B.2.1.1 Contraintes

```
> sig11I:=(K1+K1p)/(sqrt(2*Pi*r))*cos(theta/2)*(1-sin(theta/2)*sin(3*theta/2))
+Sigma11:
> sigma11I:=combine(%,trig):

> sig22I:=(K1+K1p)/(sqrt(2*Pi*r))*cos(theta/2)*(1+sin(theta/2)*sin(3*theta/2))
+Sigma22:
> sigma22I:=combine(%,trig):

> sig12I:=(K1+K1p)/(sqrt(2*Pi*r))*cos(theta/2)*sin(theta/2)*cos(3*theta/2):
> sigma12I:=combine(%,trig):
```

##### B.2.1.2 Facteurs d'intensité de contrainte

```
> K1:=s22*Sigma22*sqrt(Pi*a):
> K1p:=((nu-1)/nu)*(1-s11)*Sigma11*sqrt(Pi*a):
```

#### B.2.2 Contraintes et déformations / coordonnées cartésiennes - origine le centre de la fissure

Changement de variable différent selon ( $y1 <$  ou  $>$  a)

### B.2.2.1 Contraintes dans le nouveau repère (R)

Les changements de variables varient selon qu'on est en  $y_1$  inférieur ( $\epsilon=1$ ) ou supérieur ( $\epsilon=0$ ) à  $a$  :

```
> sigma11IR:=eval(sigma11I,[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+(arctan(y2/(y1-a)))]):
> sigma22IR:=eval(sigma22I,[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+(arctan(y2/(y1-a)))]):
> sigma12IR:=eval(sigma12I,[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+(arctan(y2/(y1-a)))]):

> sigmaIR:=Matrix([[sigma11IR],[sigma22IR],[sigma12IR]]):
```

### B.2.2.2 Déformations dans le repère (R)

```
> epsilonIR:=MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(C),sigmaIR):

> epsilon11IR:=epsilonIR[1,1]:
> epsilon22IR:=epsilonIR[2,1]:
> epsilon12IR:=(1/2)*epsilonIR[3,1]:
```

## B.2.3 Calcul de la moyenne des déformations sur un carré de coté $2*L$ (au vu des symétries, on considère le quart du domaine)

### B.2.3.1 Définition des $A_{ijkl}$

```
> A1111:=eval(epsilon11IR,[Sigma11=1,Sigma22=0]):
> A1211:=eval(epsilon12IR,[Sigma11=1,Sigma22=0]):
> A2211:=eval(epsilon22IR,[Sigma11=1,Sigma22=0]):

> A1122:=eval(epsilon11IR,[Sigma11=0,Sigma22=1]):
> A1222:=eval(epsilon12IR,[Sigma11=0,Sigma22=1]):
> A2222:=eval(epsilon22IR,[Sigma11=0,Sigma22=1]):
```

### B.2.3.2 Moyenne de $A[1111]$

1. Moyenne de  $A[1111]$  entre 0 et  $a$

(a)  $A[1111]$  est décomposé en une somme de termes  $Ae_{-}[i]$

```
> Ae:=expand(eval(A1111,epsilon=1)):nAeinf:=nops(Ae):
> for i from 1 to nAeinf do Ae_{i}:=op(i,Ae) end do:
```

(b) Extraction des fonctions dépendantes de  $y_1$  et  $y_2$  :

pour chaque terme  $Ae_{-}[i]$ , j'extrait la fraction fonction de  $y_1$  et  $y_2$  :  $depxy_{-}[i]$

```
> for i from 1 to nAeinf do for j from 1 to nops(Ae_{i}) do if
(eval(op(j,Ae_{i}],[y1=1.2,y2=1.3])=eval(op(j,Ae_{i}],[y1=1.5,y2=2]))
then opxy_{i,j}:=1: else opxy_{i,j}:=op(j,Ae_{i}) end if end do end do:
```

```
> for i from 1 to nAeinf do depxy_{i}:=product('opxy_{i,k}',
'k'=1..nops(Ae_{i})) end do:
```

pour chaque terme  $Ae_{-}[i]$ , j'extrait la partie indépendante de  $y_1$  et  $y_2$  :  $indep_{xy}_{-}[i]$

```
> for i from 1 to nAeinf do for j from 1 to nops(Ae_{i}) do
if (Ae_{i}=-1/E*nu^2) or (Ae_{i}=1/E)
then op_{i,1}:=Ae_{i}: op_{i,j}:=1:
else
```

```

    if(eval(op(j,Ae_[i]),[y1=1.2,y2=1.3])=eval(op(j,Ae_[i]),[y1=1.5,y2=2]))
    then op_[i,j]:=op(j,Ae_[i]): else op_[i,j]:=1
    end if end if
    end do end do:
> for i from 1 to nAeinf do indepxy_[i]:=product('op_[i,k]',
'k'=1..nops(Ae_[i])) end do:

```

- (c) Intégration en  $y_1$  de 0 à  $a$  des termes dépendant de  $y_1$  et  $y_2$

Pour chaque terme, on "force" Maple à faire la simplification voulue

```

> for i from 1 to nAeinf do ddepxy_[i]:=
subs([arctan(y2/(-y1+a))=-arctan(y2/(y1-a))],depxy_[i]) end do:

```

Changement de variable pour l'intégration

```

> for i from 1 to nAeinf do Ae0a[i]:=
changevar(1/2*arctan(y2/(y1-a))=arctan(u/a),int(ddepxy_[i],y1=0..a),u) end do:

```

Simplification

```

> for i from 1 to nAeinf do A0a_[i]:=simplify(Ae0a[i]) end do:

```

- (d) Intégration en  $y_2$  de 0 à  $L$  à partir des intégrales sur  $y_1$  in  $(0,a)$

Changement de variable pour l'intégration

```

> for i from 1 to nAeinf do A0xy[i]:=changevar(1/2*arctan(y2/a)=(u),
int(A0a_[i],y2=0..L),u) end do:

```

Simplification

```

> for i from 1 to nAeinf do Axy[inf,i]:=simplify(A0xy[i]) end do:

```

- (e) Résultat de l'intégration pour  $y_1$  entre 0 et  $a$  et  $y_2$  positif :

On multiplie chaque terme intégré par la constante qui lui est associée ( $\text{indep}_x y_1$ ), et ce pour  $y_1 < a$

```

> for i from 1 to nAeinf do MA[inf,i]:= Axy[inf,i]*indep_x y_1 end do:
> sum('MA[inf,i]', 'i'=1..nAeinf):MA[inf]:=simplify(\%,size):

```

- (f) Désaffectation des données

```

> for i from 1 to nAeinf do unassign('A0xy[i]') end do;

> for i from 1 to nAeinf do unassign
('A0a_[i]', 'Ae0a[i]', 'ddepxy_[i]', 'indep_x y_1', 'depxy_[i]') end do;
> for i from 1 to nAeinf do for j from 1 to nops(Ae_[i]) do
unassign('op_[i,j]', 'opxy_[i,j]') end do: end do:
> for i from 1 to nAeinf do unassign('Ae_[i]', 'MA[inf,i]') end do;
> unassign('Ae');

```

## 2. Moyenne de $A_{1111}$ entre $a$ et $L$

- (a)  $A_{1111}$  est décomposé en une somme de termes  $Ae_{-}[i]$

```

> Ae:=expand(eval(A1111,epsilon=0)): nAesup:=nops(Ae):
> for i from 1 to nAesup do Ae_[i]:=op(i,Ae) end do:

```

- (b) Extraction des fonctions dépendantes de  $y_1$  et  $y_2$  :

pour chaque terme  $Ae_{-}[i]$ , j'extrait la fraction fonction de  $y_1$  et  $y_2$  :  $\text{depx}_y_{-}[i]$

```
> for i from 1 to nAesup do for j from 1 to nops(Ae_[i]) do if
(eval(op(j,Ae_[i]),[y1=1.2,y2=1.3])=eval(op(j,Ae_[i]),[y1=1.5,y2=2]))
then opxy_[i,j]:=1: else opxy_[i,j]:=op(j,Ae_[i]) end if end do end do:
> for i from 1 to nAesup do depxy_[i]:=product('opxy_[i,k]',
'k'=1..nops(Ae_[i])) end do:
```

pour chaque terme  $Ae_{[i]}$ , j'extrait la partie indépendante de  $y_1$  et  $y_2$  :  $indep_{xy}_{[i]}$

```
> for i from 1 to nAeinf do for j from 1 to nops(Ae_[i]) do
if (Ae_[i]=-1/E*nu^2) or (Ae_[i]=1/E)
then op_[i,1]:=Ae_[i]: op_[i,j]:=1:
else
if(eval(op(j,Ae_[i]),[y1=1.2,y2=1.3])=eval(op(j,Ae_[i]),[y1=1.5,y2=2]))
then op_[i,j]:=op(j,Ae_[i]): else op_[i,j]:=1
end if end if
end do end do:
> for i from 1 to nAesup do indep_{xy}_{[i]}:=product('op_[i,k]',
'k'=1..nops(Ae_[i])) end do:
```

(c) Intégration en  $y_1$  de  $a$  à  $L$  des termes dépendant de  $y_1$  et  $y_2$

Pour chaque terme, on "force" Maple à faire la simplification voulue

```
> for i from 1 to nAesup do
ddep_{xy}_{[i]}:=subs([arctan(y2/(-y1+a))=-arctan(y2/(y1-a))],dep_{xy}_{[i]}) end do:
```

Changement de variable pour l'intégration

```
> for i from 1 to nAesup do AeaL[i]:=
changevar(1/2*arctan(y2/(y1-a))=arctan(u/a),int(ddep_{xy}_{[i]},y1 =a..L),u) end do:
```

Simplification

```
> for i from 1 to nAesup do
AaL_[i]:=subs([arctan(y2/(L-a))=-arctan(y2/(-L+a))],simplify(AeaL[i]))
end do:
```

(d) Intégration en  $y_2$  de  $0$  à  $L$  à partir des intégrales sur  $y_1$  in  $(a,L)$

Changement de variable dans l'intégrale allant de  $l_0$  à  $a$

```
> for i from 1 to nAesup do Aaxy[i]:=
changevar(arctan(y2/(a-L))=-u,int(AaL_[i],y2=l_0..L),u)
assuming l_0::positive,L>a; end do:
```

```
> for i from 1 to nAesup do Axy0[sup,i]:=
convert(series(Aaxy[i],l_0=0),polynom) end do:
> for i from 1 to nAesup do Axy[sup,i]:=eval(Axy0[sup,i],l_0=0) end do:
```

(e) Résultat de l'intégration pour  $y_1$  entre  $a$  et  $L$  et  $y_2$  positif :

On multiplie chaque terme intégré par la constante qui lui est associée ( $indep_{xy}_{[i]}$ ), et ce pour  $y_1 > a$

```
> for i from 1 to nAesup do MA[sup,i]:=
eval(Axy[sup,i]*indep_{xy}_{[i]},epsilon=0); end do:
> sum('MA[sup,i]', 'i'=1..nAesup):MA[sup]:=simplify(\%,size):
```

3. Résultat :

```
> MA1111:=simplify((MA[inf]+MA[sup])/L^2,size):
```

#### 4. Désaffectation Des Données

```
> for i from 1 to nAesup do unassign
('MA[sup,i]', 'Axy[sup,i]', 'Axy0[sup,i]', 'Aaxy[i]') end do;
> for i from 1 to nAesup do
unassign('AaL_[i]', 'AeaL[i]', 'ddepxy_[i]', 'indepxy_[i]', 'depxy_[i]')
end do;
> for i from 1 to nAesup do for j from 1 to nops(Ae_[i]) do
unassign('op_[i,j]', 'opxy_[i,j]') end do: end do:
> unassign('nAesup', 'nAeinf', 'Ae');
```

#### B.2.3.3 Moyenne des composantes restantes

L'IMPLEMENTATION EST IDENTIQUE POUR CALCULER LES MOYENNES DES COMPOSANTES  $A_{ijkl}$  RESTANTES.

### B.3 Mode (2)

#### B.3.1 Contraintes et déformations / coordonnées polaires - origine en pointe de fissure -

##### B.3.1.1 Contraintes

```
> sig11II:=-K2/(sqrt(2*Pi*r))*sin(theta/2)*(2+cos(theta/2)*cos(3*theta/2)):
> sigma11II:=combine(%,trig):

> sig22II:=K2/(sqrt(2*Pi*r))*sin(theta/2)*cos(theta/2)*cos(3*theta/2):
> sigma22II:=combine(%,trig):

> sig12II:=K2/(sqrt(2*Pi*r))*cos(theta/2)*(1-sin(theta/2)*sin(3*theta/2))
+Sigma12:
> sigma12II:=combine(%,trig):
```

##### B.3.1.2 Facteur d'intensité de contraintes

```
> K2:=Sigma12*sqrt(Pi*a):
```

#### B.3.2 Contraintes et déformations / coordonnées cartésiennes - origine le centre de la fissure -

Changement de variable différent selon ( $y1 <$  ou  $>$   $a$ )

##### B.3.2.1 Contraintes dans le nouveau repère (R)

Les changements varient selon qu'on est en  $y1$  inférieur ( $\epsilon=1$ ) ou supérieur ( $\epsilon=0$ ) à  $a$  :

```
> sigma11IIR:=eval(sigma11II, [r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+(arctan(y2/(y1-a)))]):
> sigma22IIR:=eval(sigma22II, [r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+(arctan(y2/(y1-a)))]):
> sigma12IIR:=eval(sigma12II, [r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+(arctan(y2/(y1-a)))]):

> sigmaIIR:=Matrix([[sigma11IIR], [sigma22IIR], [sigma12IIR]]):
```

**B.3.2.2 Déformations dans le nouveau repère (R)**

```
> epsilonIIR:=MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(C),sigmaIIR):  
> epsilon11IIR:=epsilonIIR[1,1]:  
> epsilon22IIR:=epsilonIIR[2,1]:  
> epsilon12IIR:=(1/2)*epsilonIIR[3,1]:
```

**B.3.3 Calcul de la moyenne des déformations****B.3.3.1 Définition des  $A_{ijkl}$** 

```
> A1112:=eval(epsilon11IIR,Sigma12=1):  
> A1212:=eval(epsilon12IIR,Sigma12=1):  
> A2212:=eval(epsilon22IIR,Sigma12=1):
```

**B.3.3.2 Moyennes des A[1112] et A[2212]**

```
> MA1112:=0:  
> MA2212:=0:
```

**B.3.3.3 Moyenne de A[1212]**

On suit les mêmes lignes de calcul que celles du §B.2.3.2.

## B.4 Résultats

### B.4.1 $\langle A_{1111} \rangle_\omega$

$$\begin{aligned}
& \frac{32}{3} (\sqrt{2} (L^\sim - a)^3 ((\nu - \frac{3}{8}) \cos(\%2)^2 - \frac{1}{4} \nu) (\%1^2 - \frac{1}{2}) (s11 - 1) \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} \sqrt{\pi a} \sin(\%2) \\
& \sqrt{\frac{\sin(\%2) \cos(\%2) (L^\sim - a)}{2 \cos(\%2)^2 - 1}} - \cos(\%2) (\cos(\%2)^2 - \frac{1}{2}) (\sqrt{2} \\
& ((\nu - \frac{3}{8}) \%1^2 - \frac{3}{4} \nu + \frac{3}{8}) (s11 - 1) (-2 a^{(5/2)} L^\sim + a^{(3/2)} L^{\sim 2} + a^{(7/2)}) \sqrt{\pi a} \\
& \sqrt{\frac{\%1 \%3}{2 \%1^2 - 1}} - \frac{1}{2} (\%1^2 - \frac{1}{2}) ( \\
& -(-2 a^{(3/2)} L^{\sim(5/2)} + L^{\sim(7/2)} \sqrt{a} + a^{(5/2)} L^{\sim(3/2)}) (s11 - 1) (\nu - \frac{3}{4}) \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{1}{a}} + ( \\
& -2 \sqrt{2} \nu a^{(5/2)} L^\sim + \sqrt{2} a^{(3/2)} \nu L^{\sim 2} - (\nu - \frac{3}{4}) a^2 L^{\sim(3/2)} + (2 a \nu - \frac{3}{2} a) L^{\sim(5/2)} \\
& + (\frac{3}{4} - \nu) L^{\sim(7/2)} + \sqrt{2} \nu a^{(7/2)}) (s11 - 1) \sqrt{\pi a} - \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \nu (L^\sim - a)^2 L^{\sim 2} \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} \\
& \sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} (\nu - 1) (1 + \nu) \sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} / (\sqrt{\frac{\%3}{\%1}} (2 \cos(\%2)^2 - 1) \\
& \sin(\%2) (2 \%1^2 - 1) \sqrt{\pi} E \nu (L^\sim - a)^2 L^{\sim 2} \\
& \%1 := \cos(\frac{1}{2} \arctan(\frac{L^\sim}{a})) \\
& \%2 := \frac{1}{2} \arctan(\frac{L^\sim}{L^\sim - a}) \\
& \%3 := \sin(\frac{1}{2} \arctan(\frac{L^\sim}{a}))
\end{aligned}$$

B.4.2  $\langle A_{2211} \rangle_\omega$ 

$$\begin{aligned}
& \frac{32}{3} (\sqrt{2} (L^- - a)^3 ((\nu - \frac{5}{8}) \cos(\%2)^2 - \frac{1}{4} \nu + \frac{1}{4}) (\%1^2 - \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} \sqrt{\pi a} (\nu - 1) \sin(\%2) \\
& (s11 - 1) \sqrt{\frac{\sin(\%2) \cos(\%2) (L^- - a)}{2 \cos(\%2)^2 - 1}} - (\cos(\%2)^2 - \frac{1}{2}) (\sqrt{2} \\
& (-2 a^{(5/2)} L^- + a^{(3/2)} L^{-2} + a^{(7/2)}) ((\nu - \frac{5}{8}) \%1^2 - \frac{3}{4} \nu + \frac{3}{8}) \sqrt{\pi a} (\nu - 1) (s11 - 1) \\
& \sqrt{\frac{\%1 \%3}{2 \%1^2 - 1}} - \frac{1}{2} (\%1^2 - \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} ( \\
& -\sqrt{\pi a} (\nu - 1) (\nu - \frac{1}{4}) (s11 - 1) (-2 a^{(3/2)} L^{-(5/2)} + L^{-(7/2)} \sqrt{a} + a^{(5/2)} L^{-(3/2)}) \sqrt{\frac{1}{a}} \\
& + (-2 \sqrt{2} L^- (\nu - 1) a^{(5/2)} + \sqrt{2} (\nu - 1) L^{-2} a^{(3/2)} - (\nu - \frac{1}{4}) a^2 L^{-(3/2)} \\
& + (-\frac{1}{2} a + 2 a \nu) L^{-(5/2)} + (-\nu + \frac{1}{4}) L^{-(7/2)} + \sqrt{2} a^{(7/2)} (\nu - 1)) (\nu - 1) (s11 - 1) \\
& \sqrt{\pi a} - \frac{3}{4} \sqrt{\pi} (L^- - a)^2 L^{-2} \nu^2) \cos(\%2) \sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} (1 + \nu) \sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} / \\
& (\sqrt{\frac{\%3}{\%1}} (2 \cos(\%2)^2 - 1) \sin(\%2) (2 \%1^2 - 1) \sqrt{\pi} E \nu (L^- - a)^2 L^{-2}) \\
& \%1 := \cos(\frac{1}{2} \arctan(\frac{L^-}{a})) \\
& \%2 := \frac{1}{2} \arctan(\frac{L^-}{L^- - a}) \\
& \%3 := \sin(\frac{1}{2} \arctan(\frac{L^-}{a}))
\end{aligned}$$

B.4.3  $\langle A_{1211} \rangle_\omega$ 

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{3}\sqrt{\pi a}(-\sqrt{2}\sqrt{\frac{\%3}{\%1}}(\%1^2 - \frac{1}{2})\cos(\%2)^2 \%1(L^\sim - a)^3\sqrt{\frac{1}{L^\sim - a}} \\
& \sqrt{\frac{\sin(\%2)\cos(\%2)(L^\sim - a)}{2\cos(\%2)^2 - 1}} + (\cos(\%2)^2 - \frac{1}{2})(\sqrt{2}\%3(\%1 - 1) \\
& (-2a^{(5/2)}L^\sim + a^{(3/2)}L^{\sim 2} + a^{(7/2)})(\%1 + 1)\sqrt{\frac{1}{L^\sim - a}}\sqrt{\frac{\%1\%3}{2\%1^2 - 1}} + 2\sqrt{\frac{\%3}{\%1}}( \\
& ((-a^{(3/2)}L^{\sim(5/2)} + \frac{1}{2}a^{(5/2)}L^{\sim(3/2)} + \frac{1}{2}L^{\sim(7/2)}\sqrt{a})\sqrt{\frac{1}{a}} - aL^{\sim(5/2)} + \frac{1}{2}L^{\sim(7/2)} \\
& + \frac{1}{2}a^2L^{\sim(3/2)})\sqrt{\frac{1}{L^\sim - a}} + \sqrt{2}(L^\sim - a)^3(\%1^2 - \frac{1}{2})\%1\sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}}(s11 - 1) \\
& (1 + \nu)(\nu - 1)\cos(\%2)\sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} / (\sqrt{\frac{1}{L^\sim - a}}\sqrt{\frac{\%3}{\%1}}(2\cos(\%2)^2 - 1) \\
& \sin(\%2)(2\%1^2 - 1)\%1\sqrt{\pi}E\nu(L^\sim - a)^2L^{\sim 2}) \\
& \%1 := \cos(\frac{1}{2}\arctan(\frac{L^\sim}{a})) \\
& \%2 := \frac{1}{2}\arctan(\frac{L^\sim}{L^\sim - a}) \\
& \%3 := \sin(\frac{1}{2}\arctan(\frac{L^\sim}{a}))
\end{aligned}$$

B.4.4  $\langle A_{1122} \rangle_\omega$ 

$$\begin{aligned}
& -4(1 + \nu) \left( \frac{8}{3} \sqrt{2} s_{22} \left( (\nu - \frac{3}{8}) \cos(\%2)^2 - \frac{1}{4} \nu \right) (L^\sim - a)^3 \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} \sqrt{\pi a} \sin(\%2) (\%1^2 - \frac{1}{2}) \right. \\
& \left. \sqrt{\frac{\sin(\%2) \cos(\%2) (L^\sim - a)}{2 \cos(\%2)^2 - 1}} + (\cos(\%2)^2 - \frac{1}{2}) \cos(\%2) \sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} \left( -\frac{8}{3} \sqrt{2} s_{22} \right. \right. \\
& \left. \left. (\nu - \frac{3}{8}) \%1^2 - \frac{3}{4} \nu + \frac{3}{8} \right) (-2 a^{(5/2)} L^\sim + a^{(3/2)} L^{\sim 2} + a^{(7/2)}) \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{\%1 \%3}{2 \%1^2 - 1}} + \left( \right. \\
& \left. -\frac{4}{3} s_{22} \sqrt{\pi a} \left( \nu - \frac{3}{4} \right) (-2 a^{(3/2)} L^{\sim(5/2)} + L^{\sim(7/2)} \sqrt{a} + a^{(5/2)} L^{\sim(3/2)}) \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{4}{3}} s_{22} \left( \right. \right. \\
& \left. \left. 2 \sqrt{2} \nu a^{(5/2)} L^\sim - \sqrt{2} a^{(3/2)} \nu L^{\sim 2} + \left( \nu - \frac{3}{4} \right) a^2 L^{\sim(3/2)} + \left( \frac{3}{2} a - 2 a \nu \right) L^{\sim(5/2)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \nu - \frac{3}{4} \right) L^{\sim(7/2)} - \sqrt{2} \nu a^{(7/2)} \right) \sqrt{\pi a} + \sqrt{\pi} \nu (L^\sim - a)^2 L^{\sim 2} \right) \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} \left( \%1^2 - \frac{1}{2} \right) \left. \right) \\
& \left. \sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} \left/ \left( \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} (2 \cos(\%2)^2 - 1) \sin(\%2) (2 \%1^2 - 1) \sqrt{\pi} E(L^\sim - a)^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. L^{\sim 2} \right) \right. \\
& \%1 := \cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{a}\right)\right) \\
& \%2 := \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{L^\sim - a}\right) \\
& \%3 := \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

B.4.5  $\langle A_{2222} \rangle_\omega$ 

$$\begin{aligned}
& -\frac{32}{3} \sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} (\sqrt{2} \sin(\%2) (L^\sim - a)^3 \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} s22 (\%1^2 - \frac{1}{2}) \\
& ((\nu - \frac{5}{8}) \cos(\%2)^2 - \frac{1}{4} \nu + \frac{1}{4}) \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{\sin(\%2) \cos(\%2) (L^\sim - a)}{2 \cos(\%2)^2 - 1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin(\%2)}{\cos(\%2)}} \\
& (\cos(\%2)^2 - \frac{1}{2}) (2\sqrt{2} ((\nu - \frac{5}{8}) \%1^2 - \frac{3}{4} \nu + \frac{3}{8}) s22 (-2 a^{(5/2)} L^\sim + a^{(3/2)} L^{\sim 2} + a^{(7/2)}) \\
& \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{\%1 \%3}{2 \%1^2 - 1}} + ( \\
& \sqrt{\pi a} s22 (-2 a^{(3/2)} L^{\sim(5/2)} + L^{\sim(7/2)} \sqrt{a} + a^{(5/2)} L^{\sim(3/2)}) (\nu - \frac{1}{4}) \sqrt{\frac{1}{a}} + ( \\
& 2\sqrt{2} (\nu - 1) L^\sim a^{(5/2)} - \sqrt{2} (\nu - 1) L^{\sim 2} a^{(3/2)} + (\nu - \frac{1}{4}) a^2 L^{\sim(3/2)} \\
& + (\frac{1}{2} a - 2 a \nu) L^{\sim(5/2)} + (\nu - \frac{1}{4}) L^{\sim(7/2)} - \sqrt{2} (\nu - 1) a^{(7/2)} s22 \sqrt{\pi a} \\
& - \frac{3}{4} \sqrt{\pi} L^{\sim 2} (\nu - 1) (L^\sim - a)^2 \sqrt{\frac{\%3}{\%1}} (\%1^2 - \frac{1}{2}) \cos(\%2) (1 + \nu) / (\sqrt{\frac{\%3}{\%1}} \\
& (2 \cos(\%2)^2 - 1) \sin(\%2) (2 \%1^2 - 1) \sqrt{\pi} E (L^\sim - a)^2 L^{\sim 2}) \\
& \%1 := \cos(\frac{1}{2} \arctan(\frac{L^\sim}{a})) \\
& \%2 := \frac{1}{2} \arctan(\frac{L^\sim}{L^\sim - a}) \\
& \%3 := \sin(\frac{1}{2} \arctan(\frac{L^\sim}{a}))
\end{aligned}$$

**B.4.6**  $\langle A_{1222} \rangle_\omega$ 

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{3}\sqrt{\pi a} s_{22} (1 + \nu)(\sqrt{2} \sqrt{\frac{\%3}{\%2}} (L^\sim - a)^3 \sqrt{\frac{1}{L^\sim - a}} \%2 (\%2^2 - \frac{1}{2}) \cos(\%1)^2 \\
& \sqrt{\frac{\sin(\%1) \cos(\%1) (L^\sim - a)}{2 \cos(\%1)^2 - 1}} - 2 (\cos(\%1)^2 - \frac{1}{2}) (\frac{1}{2} \sqrt{2} \%3 (\%2 + 1) \\
& (-2 a^{(5/2)} L^\sim + a^{(3/2)} L^{\sim 2} + a^{(7/2)}) \sqrt{\frac{1}{L^\sim - a}} (\%2 - 1) \sqrt{\frac{\%2 \%3}{2 \%2^2 - 1}} + \sqrt{\frac{\%3}{\%2}} \\
& \%2 (((-a^{(3/2)} L^{\sim(5/2)} + \frac{1}{2} a^{(5/2)} L^{\sim(3/2)} + \frac{1}{2} L^{\sim(7/2)} \sqrt{a}) \sqrt{\frac{1}{a} - a L^{\sim(5/2)} + \frac{1}{2} L^{\sim(7/2)}} \\
& + \frac{1}{2} a^2 L^{\sim(3/2)}) \sqrt{\frac{1}{L^\sim - a}} + \sqrt{2} (L^\sim - a)^3 (\%2^2 - \frac{1}{2})) \sqrt{\frac{\sin(\%1)}{\cos(\%1)}} / ( \\
& \sqrt{\frac{\%3}{\%2}} \sqrt{\frac{1}{L^\sim - a}} \sqrt{\frac{\sin(\%1)}{\cos(\%1)}} (2 \%2^2 - 1) \%2 \sqrt{\pi} E (2 \cos(\%1)^2 - 1) (L^\sim - a)^2 \\
& L^{\sim 2}) \\
& \%1 := \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{L^\sim - a}\right) \\
& \%2 := \cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{a}\right)\right) \\
& \%3 := \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

**B.4.7**  $\langle A_{1112} \rangle_\omega$ 

$$\text{MA1112}=0$$

**B.4.8**  $\langle A_{2212} \rangle_\omega$ 

$$\text{MA2212}=0$$

**B.4.9**  $\langle A_{1212} \rangle_\omega$ 

$$\begin{aligned}
& 4(\sqrt{2} \sin(\%1) (\%2^2 - \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{\%3}{\%2}} \cos(\%1) (L^\sim - a)^3 \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{\sin(\%1) \cos(\%1) (L^\sim - a)}{2 \cos(\%1)^2 - 1}} \\
& + \sqrt{\frac{\sin(\%1)}{\cos(\%1)}} ( \\
& -\sqrt{2} (\%2 + 1) (\%2 - 1) \sqrt{\pi a} (-2 a^{(5/2)} L^\sim + a^{(3/2)} L^{\sim 2} + a^{(7/2)}) \sqrt{\frac{\%2 \%3}{2 \%2^2 - 1}} + \\
& (\%2^2 - \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{\%3}{\%2}} (-\sqrt{\pi a} (-2 a^{(3/2)} L^{\sim(5/2)} + L^{\sim(7/2)} \sqrt{a} + a^{(5/2)} L^{\sim(3/2)}) \sqrt{\frac{1}{a}} \\
& + (-L^{\sim(7/2)} + 2 a L^{\sim(5/2)} - a^2 L^{\sim(3/2)}) \sqrt{\pi a} + \sqrt{\pi} (L^\sim - a)^2 L^{\sim 2}) (\cos(\%1)^2 - \frac{1}{2})) \\
& (1 + \nu) / (\sqrt{\frac{\%3}{\%2}} \sqrt{\frac{\sin(\%1)}{\cos(\%1)}} (2 \%2^2 - 1) \sqrt{\pi} E (2 \cos(\%1)^2 - 1) (L^\sim - a)^2 \\
& L^{\sim 2}) \\
& \%1 := \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{L^\sim - a}\right) \\
& \%2 := \cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{a}\right)\right) \\
& \%3 := \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L^\sim}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

**B.5 Lien entre paramètres microscopiques et macroscopiques****B.5.1 Paramètres et fonctions associées**

> #les composantes de D seront supposées petites

Passage des paramètres (L,a) au couple de paramètres (u,g)

> macug0:=f->eval(f, [L=1/(2\*sqrt(2)\*sqrt(1)\*sqrt(u\_0)), a=g/(4\*1)]);

**B.5.2 Lien entre la dérivée par rapport à  $\gamma^*$  et la dérivée par rapport à  $a$** 

> difg:=f->diff(f,a)/4/1:

**B.6 Matrices  $\mathbb{A}$  (notée **A**) et  $\langle \mathbb{A} \rangle_\omega$  (MAA)****B.6.1  $\mathbb{A}$  (notée **A**)**

```

> AA:=Matrix([
[ A1111, A1122, A1112],
[ A2211, A2222, A2212],
[2*A1211,2*A1222,2*A1212]
]);

```

**B.6.2  $\langle \mathbb{A} \rangle_\omega$  (MAA)**

On utilise une matrice 3\*3 tampon afin de calculer l'inverse de MAA : on inverse cette matrice tampon avant d'associer à chacune de ses composantes la valeur MA[ijkl]

```
> MAAt:=Matrix([[ma11,ma12,ma13],[ma21,ma22,ma23],[ma31,ma32,ma33]]):
> MAA:=Matrix([
[ MA1111, MA1122, MA1112],
[ MA2211, MA2222, MA2212],
[2*MA1211,2*MA1222,2*MA1212]]):
```

### B.6.3 L'inverse de $\langle A \rangle_\omega$ notée invMAA

Inverse de la matrice tampon

```
> invMAAt:=MatrixInverse(MAAt):

> for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do
invMAAt_[i,j]:=eval(invMAAt[i,j],[
ma11= MA1111,ma12= MA1122,ma13= MA1112,
ma21= MA2211,ma22= MA2222,ma23= MA2212,
ma31=2*MA1211,ma32=2*MA1222,ma33=2*MA1212]):end do end do:

> invMAA:=Matrix([
[invMAAt_[1,1],invMAAt_[1,2],invMAAt_[1,3]],
[invMAAt_[2,1],invMAAt_[2,2],invMAAt_[2,3]],
[invMAAt_[3,1],invMAAt_[3,2],invMAAt_[3,3]]]):
```

## B.7 Matrice $\mathbb{H}$

```
> H:=Multiply(AA,invMAA):
```

## B.8 Déformation imposée

```
> Dimp:=Matrix([[D11],[D22],[2*D12]]):
```

### Sauvegarde des résultats

```
> save y1,y2,L,mu,k,lambda,
A1111, A1211, A2211, A1112, A1212, A2212, A1122, A1222, A2222, AA, invMAA,
MA1111,MA1211,MA2211,MA1112,MA1212,MA2212,MA1122,MA1222,MA2222,MAA,MAAt,
C, H, Dimp, macug0, difg, "determinationHres.m";

> save numeri0,mu,k,lambda,
sig11I,sig22I,sig12I,K1,K1p,sigma11IR,sigma22IR,sigma12IR,
epsilon11IR,epsilon22IR,epsilon12IR,sig11II,sig22II,sig12II,
K2,
sigma11IIR,sigma22IIR,sigma12IIR,
epsilon11IIR,epsilon22IIR,epsilon12IIR, "contdefres.m";
```

## Annexe C

# Calcul de la contrainte $\beta$ et du tenseur $C^*$

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):with(plots):with(student):
> with(linalg):

> DcroiD:=Matrix([
[ D11*D11, D11*D22, 2*D11*D12],
[ D22*D11, D22^2, 2*D22*D12],
[ 2*D12*D11, 2*D12*D22, 4*D12^2]]):

> read "determinationHres.m";
> read "contdefres.m";

> s11:=1: s22:=1:
> L1:=1/100;Gamma:=0.8/10;a1:=Gamma*L1;l1:=3*L1;nu12:=0.2;E12:=27*10^9;

> numerim:=f->evalf(eval(f, [L=L1, a=a1, E=E12, nu=nu12, l=l1, u=u0n])):
> chargement:=f->evalf(eval(f, [D11=D11n, D12=D12n, D22=D22n])):
```

### C.1 Valeurs numériques de $\langle A \rangle_\omega$ (MAA) et de $\langle A \rangle_\omega^{-1}$ (invMAA)

```
> MAAnum:=Matrix([
[numerim(MAA[1,1]),numerim(MAA[1,2]),numerim(MAA[1,3])],
[numerim(MAA[2,1]),numerim(MAA[2,2]),numerim(MAA[2,3])],
[numerim(MAA[3,1]),numerim(MAA[3,2]),numerim(MAA[3,3])]]);

> invMAAnum:=Matrix([
[numerim(invMAA[1,1]),numerim(invMAA[1,2]),numerim(invMAA[1,3])],
[numerim(invMAA[2,1]),numerim(invMAA[2,2]),numerim(invMAA[2,3])],
[numerim(invMAA[3,1]),numerim(invMAA[3,2]),numerim(invMAA[3,3])]]);
```

### C.2 Calcul numérique de $\frac{\partial(\langle A \rangle_\omega^{-1})}{\partial \gamma^*}$

```
> difg(invMAA[1,1]): tem_[1,1]:=numerim(%):
> difg(invMAA[1,2]): tem_[1,2]:=numerim(%):
> difg(invMAA[1,3]): tem_[1,3]:=numerim(%):
> difg(invMAA[2,1]): tem_[2,1]:=numerim(%):
> difg(invMAA[2,2]): tem_[2,2]:=numerim(%):
> difg(invMAA[2,3]): tem_[2,3]:=numerim(%):
```

```
> difg(invMAA[3,1]): tem_[3,1]:=numerim(%):
> difg(invMAA[3,2]): tem_[3,2]:=numerim(%):
> difg(invMAA[3,3]): tem_[3,3]:=numerim(%):
```

$$\text{dinvMAAdgnum} := \frac{\partial \left( \langle \mathbb{A} \rangle_{\omega}^{-1} \right)}{\partial \gamma^*}$$

```
> dinvMAAdgnum:=Matrix([
[tem_[1,1],tem_[1,2],tem_[1,3]],
[tem_[2,1],tem_[2,2],tem_[2,3]],
[tem_[3,1],tem_[3,2],tem_[3,3]]]);
```

### C.3 Intégration du terme $\left[ \mathbb{H}^T \mathbb{C} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \gamma^*} \right]$

#### C.3.1 Termes à intégrer

$$\text{TEMP1beta} := \mathbb{A}^T \mathbb{C} \frac{\partial \left( \langle \mathbb{A} \rangle_{\omega}^{-1} \right)}{\partial \gamma^*}$$

```
> Matrix(transpose(AA)):
> AtC:=MatrixMatrixMultiply(% ,C):
> dAdg:=Matrix([
[difg(AA[1,1]),difg(AA[1,2]),difg(AA[1,3])],
[difg(AA[2,1]),difg(AA[2,2]),difg(AA[2,3])],
[difg(AA[3,1]),difg(AA[3,2]),difg(AA[3,3])]
]):
> MatrixMatrixMultiply(AtC,dAdg):
> TEMP1beta:=map(numerim,%):
```

$$\text{TEMP2beta} := \mathbb{A}^T \mathbb{C} \mathbb{A}$$

```
> MatrixMatrixMultiply(Transpose(AA),C):
> AtCA:=MatrixMatrixMultiply(% ,AA):
> TEMP2beta:=map(numerim,AtCA):
```

#### C.3.2 Bornes d'intégration

```
> marge:=1/10000:
> Borne1:=marge*a1:Borne2:=(1-marge)*a1:Borne3:=marge*L1:
> Borne4:=(1+marge)*a1:
```

#### C.3.3 Calcul de l'intégrale de TEMP1beta (les termes à intégrer sont paires ou impaires)

TEMP1beta[1,1]

##### 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[1,1],[y2=p,epsilon=0])-
eval(TEMP1beta[1,1],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(% ,trig);

> eval(TEMP1beta[1,1],[y2=p,epsilon=1])-
eval(TEMP1beta[1,1],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(% ,trig);
```

0.

0.

## 2. Intégration numérique

y1 entre 0 et a, y2 positif

```
> TEMP1beta0a:=eval(TEMP1beta[1,1],epsilon=1):
> TEMP1inf11:=
evalf(Int(Int(TEMP1beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1)):
```

y1 Entre a et L, y2 positif

```
> TEMP1betaaL:=eval(TEMP1beta[1,1],epsilon=0):
> TEMP1sup11:=evalf(Int(Int(TEMP1betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1)):
```

## 3. Résultat

```
> MTEMP111:= (TEMP1inf11+TEMP1sup11):
```

**TEMP1beta[1,2]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[1,2],[y2=p,epsilon=0])-
eval(TEMP1beta[1,2],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);
> eval(TEMP1beta[1,2],[y2=p,epsilon=1])-
eval(TEMP1beta[1,2],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

0.

0.

## 2. Intégration numérique

Entre 0 et a

```
> TEMP1beta0a:=eval(TEMP1beta[1,2],epsilon=1):
> TEMP1inf12:=
evalf(Int(Int(TEMP1beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1)):
```

Entre a et L

```
> TEMP1betaaL:=eval(TEMP1beta[1,2],epsilon=0):
> TEMP1sup12:=evalf(Int(Int(TEMP1betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1)):
```

## 3. Résultat

```
> MTEMP112:= (TEMP1inf12+TEMP1sup12):
```

**TEMP1beta[1,3]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[1,3],[y2=p,epsilon=0])+
eval(TEMP1beta[1,3],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);
> eval(TEMP1beta[1,3],[y2=p,epsilon=1])+
eval(TEMP1beta[1,3],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

TEMP1beta[1,3] est donc impaire en y2

0.

0.

## 2. Résultat

> MTEMP113:=0:

## TEMP1beta[2,1]

### 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[2,1],[y2=p,epsilon=0])-  
eval(TEMP1beta[2,1],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);  
> eval(TEMP1beta[2,1],[y2=p,epsilon=1])-  
eval(TEMP1beta[2,1],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

0.

0.

### 2. Intégration numérique

Entre 0 et a

```
> TEMP1beta0a:=eval(TEMP1beta[2,1],epsilon=1):  
> TEMP1inf21:=  
evalf(Int(Int(TEMP1beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1));
```

Entre a et L

```
> TEMP1betaaL:=eval(TEMP1beta[2,1],epsilon=0):  
> TEMP1sup21:=evalf(Int(Int(TEMP1betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1));
```

### 3. Résultat

> MTEMP121:= (TEMP1inf21+TEMP1sup21);

## TEMP1beta[2,2]

### 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[2,2],[y2=p,epsilon=0])-  
eval(TEMP1beta[2,2],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);  
> eval(TEMP1beta[2,2],[y2=p,epsilon=1])-  
eval(TEMP1beta[2,2],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

0.

0.

### 2. Intégration numérique

Entre 0 et a

```
> TEMP1beta0a:=eval(TEMP1beta[2,2],epsilon=1):  
> TEMP1inf22:=  
evalf(Int(Int(TEMP1beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1));
```

Entre a et L

```
> TEMP1betaaL:=eval(TEMP1beta[2,2],epsilon=0):  
> TEMP1sup22:=evalf(Int(Int(TEMP1betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1));
```

## 3. Résultat

```
> MTEMP122:= (TEMP1inf22+TEMP1sup22):
```

**TEMP1beta[2,3]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[2,3],[y2=p,epsilon=0])+
eval(TEMP1beta[2,3],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);
> eval(TEMP1beta[2,3],[y2=p,epsilon=1])+
eval(TEMP1beta[2,3],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

0.

0.

## 2. Résultat

```
> MTEMP123:=0:
```

**TEMP1beta[3,1]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[3,1],[y2=p,epsilon=0])+
eval(TEMP1beta[3,1],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);
> eval(TEMP1beta[3,1],[y2=p,epsilon=1])+
eval(TEMP1beta[3,1],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

0.

0.

## 2. Résultat

```
> MTEMP131:=0:
```

**TEMP1beta[3,2]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[3,2],[y2=p,epsilon=0])+
eval(TEMP1beta[3,2],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);
> eval(TEMP1beta[3,2],[y2=p,epsilon=1])+
eval(TEMP1beta[3,2],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

0.

0.

## 2. Résultat

```
> MTEMP132:= 0:
```

**TEMP1beta[3,3]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP1beta[3,3],[y2=p,epsilon=0])-  
eval(TEMP1beta[3,3],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);  
> eval(TEMP1beta[3,3],[y2=p,epsilon=1])-  
eval(TEMP1beta[3,3],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

0.

0.

## 2. Intégration numérique

Entre 0 et a

```
> TEMP1beta0a:=eval(TEMP1beta[3,3],epsilon=1):  
> TEMP1inf33:=  
evalf(Int(Int(TEMP1beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1));
```

Entre a et L

```
> TEMP1betaaL:=eval(TEMP1beta[3,3],epsilon=0):  
> TEMP1sup33:=evalf(Int(Int(TEMP1betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1));
```

## 3. Résultat

```
> MTEMP133:= (TEMP1inf33+TEMP1sup33):
```

```
> MTEMP1:=Matrix([  
[MTEMP111,MTEMP112,MTEMP113],  
[MTEMP121,MTEMP122,MTEMP123],  
[MTEMP131,MTEMP132,MTEMP133]]);
```

### C.3.4 Calcul de l'intégrale de TEMP2beta (les termes à intégrer sont des sommes de fonctions paires ou impaires)

#### TEMP2beta[1,1]

##### 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP2beta[1,1],[y2=p,epsilon=0])-  
eval(TEMP2beta[1,1],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);  
> eval(TEMP2beta[1,1],[y2=p,epsilon=1])-  
eval(TEMP2beta[1,1],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

Paire

0.

0.

##### 2. Intégration numérique

Entre 0 et a, y2 positif

```
> TEMP2beta0a:=eval(TEMP2beta[1,1],epsilon=1):  
> TEMP2inf11:=  
evalf(Int(Int(TEMP2beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1));
```

Entre a et L

```
> TEMP2betaaL:=eval(TEMP2beta[1,1],epsilon=0):  
> TEMP2sup11:=evalf(Int(Int(TEMP2betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1));
```

## 3. Résultat

```
> MTEMP211:= (TEMP2inf11+TEMP2sup11):
```

**TEMP2beta[1,2]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP2beta[1,2],[y2=p,epsilon=0])-
eval(TEMP2beta[1,2],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(% , trig):
> eval(TEMP2beta[1,2],[y2=p,epsilon=1])-
eval(TEMP2beta[1,2],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(% , trig):
```

non nul. idem si on veut prouver que le fonction est impaire. Il faut donc décomposer la fonction à intégrer en une somme de termes qui seront soit paires soit impaires.

```
> TTex:=expand(TEMP2beta[1,2]):
> for i from 1 to nops(TTex) do TTex_[i]:= op(i,TTex) end do:
```

## 2. On « supprime » les termes « impaires » qui ne seront pas intégrés

Remarque : une fonction impaire (resp paire) sur  $[0,a]$  l'est aussi sur  $[a,L]$

```
> for i from 1 to nops(TTex) do
eval(TTex_[i],[y2=p,epsilon=1])-eval(TTex_[i],[y2=-p,epsilon=-1]):
test_[i]:=simplify(% , trig): end do:
> for i from 1 to nops(TTex) do if test_[i]=0 then AtCAe1_[i]:=TTex_[i]
else AtCAe1_[i]:=0 end if end do:
> sum('AtCAe1_[i]', 'i'=1..nops(TTex)):
> TEMP2beta2[1,2]:= %:
```

## 3. Intégration numérique

Entre 0 et a

```
> TEMP2beta0a:=eval(TEMP2beta2[1,2],epsilon=1):
> TEMP2inf12:=
evalf(Int(Int(TEMP2beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1));
```

Entre a et L

```
> TEMP2betaaL:=eval(TEMP2beta2[1,2],epsilon=0):
> TEMP2sup12:=evalf(Int(Int(TEMP2betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1));
```

## 4. Résultat

```
> MTEMP212:= (TEMP2inf12+TEMP2sup12):
```

**TEMP2beta[1,3]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP2beta[1,3],[y2=p,epsilon=0])+
eval(TEMP2beta[1,3],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(% , trig);
> eval(TEMP2beta[1,3],[y2=p,epsilon=1])+
eval(TEMP2beta[1,3],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(% , trig);
```

TEMP2beta[1,3] est donc impaire

0.

0.

## 2. Résultat

```
> MTEMP213:=0:
```

**TEMP2beta[2,2]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP2beta[2,2],[y2=p,epsilon=0])-  
eval(TEMP2beta[2,2],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(% , trig):  
> eval(TEMP2beta[2,2],[y2=p,epsilon=1])-  
eval(TEMP2beta[2,2],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(% , trig):
```

non nul. idem si on veut prouver que le fonction est impaire. Il faut donc décomposer la fonction à intégrer en une somme de termes qui seront soit paires soit impaires.

```
> TTex:=expand(TEMP2beta[2,2]):  
> for i from 1 to nops(TTex) do TTex_[i]:=op(i,TTex) end do:
```

## 2. On « supprime » les termes « impaires » qui ne seront pas intégrés

Remarque : une fonction impaire (resp paire) sur  $[0,a]$  l'est aussi sur  $[a,L]$

```
> for i from 1 to nops(TTex) do  
eval(TTex_[i],[y2=p,epsilon=1])-eval(TTex_[i],[y2=-p,epsilon=-1]):  
test_[i]:=simplify(% , trig): end do:  
> for i from 1 to nops(TTex) do if test_[i]=0 then AtCAe1_[i]:=TTex_[i]  
else AtCAe1_[i]:=0 end if end do:  
> sum('AtCAe1_[i]', 'i'=1..nops(TTex)):  
> TEMP2beta2[2,2]:=%
```

## 3. Intégration numérique

Entre 0 et a

```
> TEMP2beta0a:=eval(TEMP2beta2[2,2],epsilon=1):  
> TEMP2inf22:=  
evalf(Int(Int(TEMP2beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1));
```

Entre a et L

```
> TEMP2betaaL:=eval(TEMP2beta2[2,2],epsilon=0):  
> TEMP2sup22:=evalf(Int(Int(TEMP2betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1));
```

## 4. Résultat

```
> MTEMP222:= (TEMP2inf22+TEMP2sup22):
```

**TEMP2beta[2,3]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP2beta[2,3],[y2=p,epsilon=0])-  
eval(TEMP2beta[2,3],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(% , trig):  
> eval(TEMP2beta[2,3],[y2=p,epsilon=1])-  
eval(TEMP2beta[2,3],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(% , trig):
```

non nul. Idem si on veut prouver que le fonction est impaire.

```
> TTex:=expand(TEMP2beta[2,3]):  
> for i from 1 to nops(TTex) do TTex_[i]:=op(i,TTex) end do:
```

## 2. On « supprime » les termes « impaires » qui ne seront pas intégrés

Remarque : une fonction impaire (resp paire) sur  $[0,a]$  l'est aussi sur  $[a,L]$

```
> for i from 1 to nops(TTex) do
eval(TTex_[i],[y2=p,epsilon=1])-eval(TTex_[i],[y2=-p,epsilon=-1]):
test_[i]:=simplify(%,trig): end do:

> for i from 1 to nops(TTex) do if test_[i]=0 then AtCAe1_[i]:=TTex_[i]
else AtCAe1_[i]:=0 end if end do:
> sum('AtCAe1_[i]', 'i'=1..nops(TTex)):
> TEMP2beta2[2,3]:=%
```

## 3. Intégration numérique

Entre 0 et a

```
> TEMP2beta0a:=eval(TEMP2beta2[2,3],epsilon=1):
> TEMP2inf23:=
evalf(Int(Int(TEMP2beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1)):
```

Entre a et L

```
> TEMP2betaaL:=eval(TEMP2beta2[2,3],epsilon=0):
> TEMP2sup23:=evalf(Int(Int(TEMP2betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1));
```

## 4. Résultat

```
> MTEMP223:= (TEMP2inf23+TEMP2sup23):
```

**TEMP2beta[3,3]**

## 1. Vérification de la parité

```
> eval(TEMP2beta[3,3],[y2=p,epsilon=0])-
eval(TEMP2beta[3,3],[y2=-p,epsilon=0]):simplify(%,trig);
> eval(TEMP2beta[3,3],[y2=p,epsilon=1])-eval(TEMP2beta[3,3],[y2=-p,epsilon=-1]):simplify(%,trig);
```

Paire

0.

0.

## 2. Intégration numérique

Entre 0 et a

```
> TEMP2beta0a:=eval(TEMP2beta[3,3],epsilon=1):
> TEMP2inf33:=
evalf(Int(Int(TEMP2beta0a,y1=Borne1..Borne2),y2=Borne3..L1));
```

Entre a et L

```
> TEMP2betaaL:=eval(TEMP2beta[3,3],epsilon=0):
> TEMP2sup33:=evalf(Int(Int(TEMP2betaaL,y1=Borne4..L1),y2=Borne3..L1));
```

## 3. Résultat

```
> MTEMP233:= (TEMP2inf33+TEMP2sup33):
```

```
> MTEMP2:=Matrix([
[MTEMP211,MTEMP212,MTEMP213],
[MTEMP212,MTEMP222,MTEMP223],
[MTEMP213,MTEMP223,MTEMP233]]);
```

## C.4 Déformation imposée

```
> D11n:=0:   D12n:=0:   D22n:=Dn:
```

Rappel : s11 et s22 ont été postulés en début de programme

## C.5 Calcul de $\beta$

### C.5.1 $\beta_1$

$$\beta_1 := \left( \langle \mathbb{A} \rangle_{\omega}^{-T} \left[ \int_{\omega} \left( \mathbb{A}^T \mathbb{C} \frac{\partial \langle \mathbb{A} \rangle_{\omega}^{-1}}{\partial \gamma^*} \right) \right] \langle \mathbb{A} \rangle_{\omega}^{-1} \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})$$

```
> MatrixMatrixMultiply(Matrix(transpose(invMAAnum)),MTEMP1):
> beta01:=%.invMAAnum;
```

```
> beta1:=chargement( numerim(
beta01[1,1]*DcroiD[1,1]+beta01[1,2]*DcroiD[1,2]+beta01[1,3]*DcroiD[1,3]+
beta01[2,1]*DcroiD[2,1]+beta01[2,2]*DcroiD[2,2]+beta01[2,3]*DcroiD[2,3]+
beta01[3,1]*DcroiD[3,1]+beta01[3,2]*DcroiD[3,2]+beta01[3,3]*DcroiD[3,3]));
```

### C.5.2 $\beta_2$

$$\beta_2 := \left( \langle \mathbb{A} \rangle_{\omega}^{-T} \left[ \int_{\omega} (\mathbb{A}^T \mathbb{C} \mathbb{A}) \frac{\partial \langle \mathbb{A} \rangle_{\omega}^{-1}}{\partial \gamma^*} \right] \right) \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})$$

```
> MatrixMatrixMultiply(Matrix(transpose(invMAAnum)),MTEMP2);
> beta02:=MatrixMatrixMultiply(%,dinvMAAdgnum);
```

```
> beta2:=chargement( numerim(
beta02[1,1]*DcroiD[1,1]+beta02[1,2]*DcroiD[1,2]+beta02[1,3]*DcroiD[1,3]+
beta02[2,1]*DcroiD[2,1]+beta02[2,2]*DcroiD[2,2]+beta02[2,3]*DcroiD[2,3]+
beta02[3,1]*DcroiD[3,1]+beta02[3,2]*DcroiD[3,2]+beta02[3,3]*DcroiD[3,3]));
```

### C.5.3 Calcul du taux de restitution d'énergie $G$

```
> Gsl0:=(KK1^2+KK1p^2+KK2^2)/(4*1)*(1-nu^2)/E:
> Gsl1:=eval(Gsl0,[KK1=K1,KK2=K2,KK1p=K1p]):
```

```
> Dimp1:=eval(Dimp,[D11=D11n,D12=D12n,D22=D22n]):
Seq:=Multiply(invMAA,Dimp1):
eval(Gsl1,[Sigma11=Seq[1,1],Sigma12=Seq[3,1],Sigma22=Seq[2,1]]):
Gsl:=evalf(eval(%,[a=a1,E=E12,nu=nu12,L=L1,l=l1])):
```

### C.5.4 Valeur critique $Gsl_c$

```
> ft:=0.8*3*10^6;   fc:=0.3*30*10^6;   fcis:=0.8*4.5*10^6;
> K1c:=ft*sqrt(Pi*a1);   K2c:=fcis*sqrt(Pi*a1);   K1pc:=fc*sqrt(Pi*a1):
> Gslc:=numerio(eval(Gsl0,[KK1=K1c,KK1p=0*K1pc,KK2=0*K2c,l=l1]));
```

### C.5.5 Résultat

```
> beta:=1/(L1^2)*(beta1+beta2)+Gsl;
```

## C.6 Tenseur $\mathbb{C}^*$

$$C1 := v_0 \left[ \int_{\omega_0} [(\mathbb{H}^T \mathbb{C} \mathbb{H})] \right]$$

```
> MatrixMatrixMultiply(Matrix(transpose(invMAAnum)),MTEMP2):  
> MHtCH:=MatrixMatrixMultiply(% ,invMAAnum):  
> simplify(1/L^2*%):C1:=numerio(%):
```

## Annexe D

# Implémentation de l'exemple 1 : traction à déformation nulle sur les bords

```
> with(stats):
> with(CurveFitting): with(LinearAlgebra):
> with(plots):with(student):with(linalg):

> s22:=1;s11:=1;

> read "evolutiondeC.m":
> read "permeabilite.m";read "contdefres.m";
> read "determinationHres.m":

> nu12:=0.2;E12:=27*10^9;L1:=1/100;Gamma:=1/100;
> a1:=Gamma*L1;l1:=3*L1;u1:=1/(8*l1*L1^2);
```

### D.1 Déplacements, calcul de l'ouverture de la fissure

#### D.1.1 Mode (1)

Coordonnées cylindriques

```
> u1I:=((K1+K1p)/(2*mu))*sqrt(r/(2*Pi))*cos(theta/2)*(k-cos(theta)):
> u2I:=((K1+K1p)/(2*mu))*sqrt(r/(2*Pi))*sin(theta/2)*(k-cos(theta)):
```

Coordonnées cartésiennes

```
> u1IR:=eval(u1I, [r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),theta=epsilon*Pi+arctan((y2/(y1-a)))]):
> u2IR:=eval(u2I, [r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),theta=epsilon*Pi+arctan((y2/(y1-a)))]):
```

#### D.1.2 Mode (2)

Coordonnées cylindriques

```
> u1[II]:=(K2/(2*mu))*sqrt(r/(2*Pi))*sin(theta/2)*(k+cos(theta)+2):
> u2[II]:=-K2/(2*mu))*sqrt(r/(2*Pi))*cos(theta/2)*(k+cos(theta)-2):
```

Coordonnées cartésiennes

```
> u1IIR:=eval(u1[II],[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+arctan((y2/(y1-a)))]):
> u2IIR:=eval(u2[II],[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+arctan((y2/(y1-a)))]): }
```

### D.1.3 Champs de déplacements du milieu non fissuré

```
> eval(AA,[s11=1,s22=0]).eval(Dimp,D12=0):EE:=simplify(%,size):
> u1IIIR:=EE[1,1]*y1:
> u2IIIR:=EE[2,1]*y2:
```

### D.1.4 Déplacement total

```
> u1:=u1IR+u1IIR+u1IIIR:
> u2:=u2IR+u2IIR+u2IIIR:
```

## D.2 Déplacements sur les lèvres de la fissure

```
> u1_[fissup]:=eval(u1IR+u1IIR+u1IIIR,[y2=0,epsilon=1]):
> u1_[fissinf]:=eval(u1IR+u1IIR+u1IIIR,[y2=0,epsilon=-1]):
> u2_[fissup]:=eval(u2IR+u2IIR+u2IIIR,[y2=0,epsilon=1]):
> u2_[fissinf]:=eval(u2IR+u2IIR+u2IIIR,[y2=0,epsilon=-1]):
> y1_[fissup]:=y1+u1_[fissup]:
> y1_[fissinf]:=y1+u1_[fissinf]:
> y2_[fissup]:=u2_[fissup]:
> y2_[fissinf]:=u2_[fissinf]:
> adef:=eval(y1_[fissup],y1=a):
> bdef:=simplify(eval(y2_[fissup],y1=0),size) assuming a::positive:
```

## D.3 Résultats préliminaires

Les listes  $CCkl$  donnent pour  $i$  allant de 1 à 49 les valeurs des composantes  $C_{ij}^*$ , pour des tailles de fissures  $\Gamma^* = \frac{i}{50} : CCkl[i] = [i/50, C^*(v_0, i/50)]$ .

## D.4 Courbe efforts/déplacements

```
> Seq:=eval(Multiply(invMAA,Dimp)):
> bdef_fc_D:=(eval(bdef,
[Sigma11=Seq[1,1],Sigma12=Seq[3,1],Sigma22=Seq[2,1]])):
> bdef_fc_D110D120:=eval(bdef_fc_D,[D11=0,D12=0,D22=1]):
> for i from 1 to 49 do B22_[i]:=
[CC22[i][1],CC22[i][2]*eval(1/(1+bdef_fc_D110D120/L),
[L=L1,a=CC22[i][1]*L1,nu=nu12,E=E12])] end do:
> tamp:=evalf(seq(B22_[i], i = 1 .. 49)):
> depl_imp:=PLOT(CURVES([tamp]),COLOR(1,0,0)):
> display({depl_imp});
```

## D.5 Interpolation des $C_{ij}^*$ (notés CCij) (chaque composante est interpolée en une fonction de a)

```

> Xvalues:=[seq(CC11[i][1],i=1..49)]:Yvalues:=[seq(CC11[i][2],i=1..49)]:
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
> unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC11:=eval(%(x),x=a/L1):
> Xvalues:=[seq(CC12[i][1],i=1..49)]:Yvalues:=[seq(CC12[i][2],i=1..49)]:
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC12:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC13[i][1],i=1..49)]:Yvalues:=[seq(CC13[i][2],i=1..49)]:
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC13:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC22[i][1],i=1..49)]:Yvalues:=[seq(CC22[i][2],i=1..49)]:
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC22:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC23[i][1],i=1..49)]:Yvalues:=[seq(CC23[i][2],i=1..49)]:
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC23:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC33[i][1],i=1..49)]:Yvalues:=[seq(CC33[i][2],i=1..49)]:
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC33:=eval(%(x),x=a/L1):

```

## D.6 Calcul du taux de restitution d'énergie

```

> fty:=0.8*3.2*10^6; fcy:=0.4*43*10^6; ftcis:=0.8*3.2*1.5*10^6:
> K1c:=fty*sqrt(Pi*a): K2c:=ftcis*sqrt(Pi*a): K1pc:=fcy*sqrt(Pi*a):

```

Formule du taux de restitution d'énergie en fonction des facteurs d'intensité de contrainte

```

> Gsl0:=(KK1^2+KK1p^2+KK2^2)/(4*1)*(1-nu^2)/E:

```

Formule du taux de restitution d'énergie en fonction des contraintes

```

> Gsl1:=eval(Gsl0,[KK1=K1,KK2=K2,KK1p=K1p]):

```

Formule du taux de restitution d'énergie en fonction de la déformation moyenne

```

> Dimp1:=eval(Dimp,[D11=D11n,D12=D12n,D22=D22n]):
Seq:=Multiply(invMAA,Dimp1):
eval(Gsl1,[Sigma11=Seq[1,1],Sigma12=Seq[3,1],Sigma22=Seq[2,1]]):
Gsl:=evalf(eval(%,[E=E12,nu=nu12,L=L1,l=11])):

```

Courbe du taux de restitution d'énergie critique (mode 1)

```

> Gslc22:=(eval(Gsl0,[KK1=K1c,KK1p=0,KK2=0,L=L1,nu=nu12,E=E12,l=3*L1])):
> crit:=plot(Gslc22,a=0..L1,legend=('Gcritique (indépendant de D)'):

```

## D.7 Courbes de taux de restitution d'énergie

```
> GGGG1:=plot(eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=6*10^(-5)]),
  a=0..L1,color=aquamarine,legend=('G pour D22=6*10^(-5)')):

> GGGG2:=plot(eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=7*10^(-5)]),
  a=0..L1,color=blue,legend=('G pour D22=7*10^(-5)')):

> GGGG3:=plot(eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=8*10^(-5)]),
  a=0..L1,color=navy,legend=('G pour D22=8*10^(-5)')):

> GGGG4:=plot(eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=9*10^(-5)]),
  a=0..L1,color=coral,legend=('G pour D22=9*10^(-5)')):

> GGGG5:=plot(eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=10*10^(-5)]),
  a=0..L1,color=cyan,legend=('G pour D22=10*10^(-5)')):

> display({crit,GGGG1,GGGG2,GGGG3,GGGG4,GGGG5},
  labels=[a,'G'],title='Comparaisons entre plusieurs G(a) pour une
  déformation donnée, et Gcritique');
```

## D.8 Points d'intersection entre taux de restitution d'énergie et taux critique

```
> for i from 1 to 9 do
  asol_[i]:=fsolve(eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=(5.5+0.5*i)*10^(-5)])=
  Gslc22,a,L1/10..L1) end do:
> for i from 1 to 9 do asol_fct_D_[i]:=[(5.5+0.5*i)*10^(-5),asol_[i]] end do:
> asol_fct_D:=seq(asol_fct_D_[i],i=1..9):
```

Interpolation de la fonction donnant a critique en fonction de la déformation moyenne

```
> Xvalues:=[6*10^(-5),6.5*10^(-5),7*10^(-5),7.5*10^(-5),8*10^(-5),
  8.5*10^(-5),9*10^(-5),9.5*10^(-5),10*10^(-5)]:
> Yvalues:=seq(asol_[i],i=1..9):
> eq_fit:=fit[leastsquare][[x,y],y=h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
  {h4,h3,h2,h1,h0}][[Xvalues,Yvalues]]:
unapply(rhs(eq_fit),x):aD:=%(D):
```

Tracé de a "critique" en fonction de D moyen

```
> display({plot(aD,D=5*10^(-5)..9*10^(-5)),
  PLOT(POINTS(asol_fct_D,SYMBOL(DIAMOND)),COLOR(RGB,0,0,1),
  AXESLABELS('D22','a'))});
```

Tracé de a "critique" en fonction du déplacement

```
> for i from 1 to 9 do
  asol_fct_epsilon_[i]:=[
  eval((5.5+0.5*i)*10^(-5)*(1+eval(bdef_fc_D110D120,
  D22=(5.5+0.5*i)*10^(-5))/L),[L=L1,a=asol_[i],nu=nu12,E=E12]),
  asol_[i]] end do:
> asol_fct_epsilon:=evalf(seq(asol_fct_epsilon_[i],i=1..9)):
```

Interpolation de la fonction donnant a critique en fonction du déplacement

```
> Xvalues:=evalf([seq(asol_fct_epsilon_[i][1],i=1..9)]):
> Yvalues:=evalf([seq(asol_fct_epsilon_[i][2],i=1..9)]):
> eq_fit:=fit[leastsquare][[x,y],y=h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
  {h4,h3,h2,h1,h0}][[Xvalues,Yvalues]]:
unapply(rhs(eq_fit),x):aepsi:=%(epsi):
```

```
> display({plot(aepsi,
epsi=evalf(asol_fct_epsilon_[1][1]).evalf(asol_fct_epsilon_[9][1])),
PLOT(POINTS(asol_fct_epsilon_,SYMBOL(DIAMOND)),COLOR(RGB,0,0,1),
AXESLABELS('epsilon','a'),TITLE('taille de la fissure en fct de
epsilon pour G=Gc'))});
```

Tracé de la déformation D22 critique en fonction de Gamma

```
> for i from 1 to 49 do
eval((Gslc22-Gsl)/Gslc22, [D11=0,D12=0,D11n=0,D12n=0,a=i*L1/50]):
evalf(%);solve(=0,D22n):Dcrit_[i]:=abs(%[1]) end do:

> for i from 1 to 49 do GamDcrit_[i]:=i/50,Dcrit_[i]] end do:
> Dcritlist:=seq(GamDcrit_[i],i=1..49):

> Xvalues:=evalf([seq(Dcritlist[i][1],i=1..49)]):
> Yvalues:=evalf([seq(Dcritlist[i][2],i=1..49)]):
> eq_fit:=fit[leastsquare[[x,y],y=h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):DGamm:=%(Gamm):

> COURBEDcritlist:=PLOT(POINTS(Dcritlist,LEGEND('D22'),SYMBOL(DIAMOND))
,COLOR(0,0,1)):
```

Tracé de la déformation epsilon en fonction de Gamma

```
> for i from 1 to 49 do
Gamepsiloncrit_[i]:=i/50,Dcrit_[i]*(1+eval(bdef_fc_D110D120/L,
[D22=Dcrit_[i],L=L1,a=L1*i/50,nu=nu12,E=12])) end do:
> epscritlist:=evalf(seq(Gamepsiloncrit_[i],i=1..49)):

> Xvalues:=evalf([seq(epscritlist[i][1],i=1..49)]):
> Yvalues:=evalf([seq(epscritlist[i][2],i=1..49)]):
> eq_fit:=fit[leastsquare[[x,y],y=h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):epsGamm:=%(Gamm):

> COURBEpscritlist:=PLOT(POINTS(epscritlist,LEGEND('epsilon'),
SYMBOL(DIAMOND)),VIEW(0..1,0..0.0003),COLOR(1,0,0),
AXESLABELS('Gamma(a/L1)',''),TITLE('Déformation critique en fct de
Gamma')):
```

Superposition des deux courbes

```
> display(
{COURBEDcritlist,plot(DGamm,Gamm=0..1,color=blue),
COURBEpscritlist,plot(epsGamm,Gamm=0..1,color=red)});
```

Tracé des courbes (D,a,G) , (D,a,Gcritique) et intersection des deux

```
> GG63d:=seq([6*10^(-5),i/50*L1,evalf(eval(Gsl,
[D11n=0,D12n=0,D22n=6*10^(-5),a=i/50*L1]))],i=1..49):

> GG73d:=seq([7*10^(-5),i/50*L1,evalf(eval(Gsl,
[D11n=0,D12n=0,D22n=7*10^(-5),a=i/50*L1]))],i=1..49):

> GG83d:=seq([8*10^(-5),i/50*L1,evalf(eval(Gsl,
[D11n=0,D12n=0,D22n=8*10^(-5),a=i/50*L1]))],i=1..49):
```

```

> GG93d:=seq([9.5*10^(-5),i/50*L1,evalf(eval(Gs1,
[D11n=0,D12n=0,D22n=9.5*10^(-5),a=i/50*L1]))],i=1..49):

> GG103d:=seq([10*10^(-5),i/50*L1,evalf(eval(Gs1,
[D11n=0,D12n=0,D22n=10*10^(-5),a=i/50*L1]))],i=1..49):

> for i from 0 to 5 do
DD:=(6+1*i)*10^(-5): GaD3d_[i]:=[DD, eval(aD,D=DD),
eval(eval(Gs1,[D11n=c1*D22n,D12n=c2*D22n]),[D22n=DD,a=eval(aD,D=DD)])]
end do:

> for i from 0 to 4 do
DD:=(6+1*i)*10^(-5): for j from 1 to 49 do aa:=j/50*(L1):
seqq_[j]:=[DD,aa,eval(Gs1c22,a=aa)] end do:
seqqq_[i]:=[seq(seqq_[j],j=1..49)]: end do:

> inters:=[
[6*10^(-5),asol_[1],eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=6*10^(-5),
a=asol_[1]])],
[6.5*10^(-5),asol_[2],
eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=6.5*10^(-5),a=asol_[2]])],
[7*10^(-5),asol_[3],eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=7*10^(-5),
a=asol_[3]])],
[7.5*10^(-5),asol_[4],
eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=7.5*10^(-5),a=asol_[4]])],
[8*10^(-5),asol_[5],eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=8*10^(-5),
a=asol_[5]])],
[8.5*10^(-5),asol_[6],
eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=8.5*10^(-5),a=asol_[6]])],
[9*10^(-5),asol_[7],eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=9*10^(-5),
a=asol_[7]])],
[9.5*10^(-5),asol_[8],
eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=9.5*10^(-5),a=asol_[8]])],
[10*10^(-5),asol_[9],eval(Gs1,[D11n=0,D12n=0,D22n=10*10^(-5),
a=asol_[9]])]
]:

> surface:=evalf([seq(seqqq_[i],i=0..4)]):
> nn:=[[GG63d],[GG73d],[GG83d],[GG93d],[GG103d]]:

> display({
PLOT3D(MESH(surface),AXESSTYLE(BOX),STYLE(WIREFRAME),AXESLABELS('D22',
'a','G'),COLOR(RGB,0,0,0)),PLOT3D(MESH(nn),STYLE(PATCHNOGRID)),
PLOT3D(CURVES(inters),COLOR(RGB,1,0,0),THICKNESS(4))
},orientation=[-25,60]);

```

## Annexe E

# Implémentation de l'exemple 2 : traction à contrainte nulle sur les bords

```
> with(stats):
> with(CurveFitting):
> with(LinearAlgebra):with(plots):with(student):with(linalg):

> s22:=1;s11:=1;

> read "evolutiondeC.m";
> read "permeabilite.m"; read "contdefres.m";
> read "determinationHres12sep.m";

> nu12:=0.2; E12:=27*10^9; L1:=1/100;Gamma:=1/100;
> a1:=Gamma*L1;l1:=3*L1;u1:=1/(8*l1*L1^2);
> u0n:=u1;g1:=4*a1*l1;gstarn:=g1;
```

CC<sub>ij</sub> : composante  $i,j$  de la matrice représentant le tenseur  $\mathbf{C}^*$ .

Fichier nommé "evolutiondeC.m" : liste de points  $(\Gamma^*, \mathbf{C}^*)$ , avec  $\Gamma^* = \frac{i}{50}, i = 1..50$ .

### E.1 Tracé d'évolution du rapport efforts/déplacements

```
> for i from 1 to 49 do
delta:=CC11[i][2]*CC33[i][2]-CC13[i][2]*CC13[i][2]:
c1_[i]:=(-CC33[i][2]*CC12[i][2]+CC13[i][2]*CC12[i][2])/delta:
c2_[i]:=(1/(2*delta))*(CC13[i][2]*CC23[i][2]-CC11[i][2]*CC23[i][2]):

z_[i]:=eval(eval(bdef_fc_D,[D11=c1_[i]*D22,D12=c2_[i]*D22]),D22=1);

B22_[i]:=[CC22[i][1],
eval((CC12[i][2]*c1_[i]+CC23[i][2]*2*c2_[i]+CC22[i][2]))/(1+z_[i]/L),
[nu=nu12,E=E12,L=L1,a=CC22[i][1]*L1]):
end do:

> Xvalues:=evalf([seq(B22_[i][1],i=1..49)]):
> Yvalues:=evalf([seq(c1_[i],i=1..49)]):

> eq_fit:=
fit[leastsquare][[x,y],y=f*x^5+g*x^6+h*x^7+a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e,f,g,h}][[Xvalues, Yvalues]):
> unapply(rhs(eq_fit),x):fctc1:=%(Gamm);

> tamp:=evalf(seq(B22_[i], i = 1 .. 49)):
```

```
> cont_null_bords:=PLOT(CURVES([tamp],LEGEND('Problème à déplacements
imposés, contraintes nulles aux bords'),COLOR(RGB, 0, 1,
0),AXESLABELS('a', 'B22/epsilon'),TITLE('Contrainte B22/deplacement en
fct de refe a')) :
```

```
> display({cont_null_bords});
```

## E.2 Interpolation de la fonction $\frac{B_{22}}{\epsilon}$

Interpolation de la courbe  $B_{22}/\epsilon = f(\gamma)$

```
> Xvalues:=evalf([seq(B22_[i][1],i=1..49)]):
> Yvalues:=evalf([seq(B22_[i][2],i=1..49)]):

> eq_fit:=
fit[leastsquare[[x,y],y=f*x^5+g*x^6+h*x^7+a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e,f,g,h}]]([Xvalues, Yvalues]):
> unapply(rhs(eq_fit),x):f2sureps:=%(Gamm);
```

## E.3 Calcul du taux de restitution d'énergie

### E.3.1 En fonction des facteurs d'intensité de contrainte

```
> fty:=0.8*3.2*10^6; fcy:=0.4*43*10^6; ftcis:=0.8*3.2*1.5*10^6;
> K1c:=fty*sqrt(Pi*a): K2c:=ftcis*sqrt(Pi*a): K1pc:=fcy*sqrt(Pi*a):
```

Formule du taux de restitution d'énergie en fonction des facteurs d'intensité de contrainte

```
> Gsl0:=(KK1^2+KK1p^2+KK2^2)/(4*1)*(1-nu^2)/E;
```

### E.3.2 En fonction des contraintes

Formule du taux de restitution d'énergie en fonction des contraintes

```
> Gsl1:=eval(Gsl0, [KK1=K1, KK2=K2, KK1p=K1p]);
```

### E.3.3 En fonction de la déformation moyenne imposée

Formule du taux de restitution d'énergie en fonction de la déformation imposée

```
> Dimp1:=eval(Dimp, [D11=D11n, D12=D12n, D22=D22n]):
Seq:=Multiply(invMAA, Dimp1):
eval(Gsl1, [Sigma11=Seq[1,1], Sigma12=Seq[3,1], Sigma22=Seq[2,1]]):
Gsl:=evalf(eval(%, [E=E12, nu=nu12, L=L1, l=11])):
```

Taux de restitution d'énergie critique :

```
> Gslc11:=(eval(Gsl0, [KK1=0, KK1p=K1pc, KK2=0, l=11])):
> Gslc22:=(eval(Gsl0, [KK1=K1c, KK1p=0, KK2=0, L=L1, nu=nu12, E=E12, l=3*L1])):
> Gslc12:=(eval(Gsl0, [KK1=0, KK1p=0, KK2=K2c, l=11])):
```

Courbe du taux de restitution d'énergie critique :

```
> crit:=plot(Gslc22, a=0..L1):
```

## E.4 Intérpolation des CCij (chaque CCij devient une fonction de a)

```

> Xvalues:=[seq(CC11[i][1],i=1..49)]:
> Yvalues:=[seq(CC11[i][2],i=1..49)]:
> eq_fit:=
fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
> unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC11:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC12[i][1],i=1..49)]:
Yvalues:=[seq(CC12[i][2],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC12:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC13[i][1],i=1..49)]:
Yvalues:=[seq(CC13[i][2],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC13:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC22[i][1],i=1..49)]:
Yvalues:=[seq(CC22[i][2],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC22:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC23[i][1],i=1..49)]:
Yvalues:=[seq(CC23[i][2],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC23:=eval(%(x),x=a/L1):

> Xvalues:=[seq(CC33[i][1],i=1..49)]:
Yvalues:=[seq(CC33[i][2],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e,
{a,b,c,d,e}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctCC33:=eval(%(x),x=a/L1):

> delta:=fctCC11*fctCC33-fctCC13*fctCC13:
c1:=simplify((-fctCC33*fctCC12+fctCC13*fctCC12)/delta):
c2:=simplify((1/(2*delta))*(fctCC13*fctCC23-fctCC11*fctCC23)):

z:=eval(eval(bdef_fc_D,[D11=c1*D22,D12=c2*D22]),D22=1):

```

## E.5 Evolutions de taux de restitution d'énergie pour douze valeurs de déformation imposée

```

> for i from 1 to 49 do GG55_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1,[D11n=c1_[i]*D22n,D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1,D22n=9.75*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG6_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1,[D11n=c1_[i]*D22n,D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1,D22n=10*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG65_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1,[D11n=c1_[i]*D22n,D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1,D22n=10.25*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG7_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1,[D11n=c1_[i]*D22n,D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1,D22n=10.5*10^(-5)])) end do:

```

```

> for i from 1 to 49 do GG75_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1, [D11n=c1_[i]*D22n, D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1, D22n=10.75*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG8_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1, [D11n=c1_[i]*D22n, D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1, D22n=11*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG85_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1, [D11n=c1_[i]*D22n, D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1, D22n=11.25*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG9_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1, [D11n=c1_[i]*D22n, D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1, D22n=11.5*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG95_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1, [D11n=c1_[i]*D22n, D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1, D22n=11.75*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG10_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1, [D11n=c1_[i]*D22n, D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1, D22n=12*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do
GG105_[i]:=evalf(eval(eval(Gs1, [D11n=c1_[i]*D22n, D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1, D22n=12.25*10^(-5)])) end do:

> for i from 1 to 49 do GG11_[i]
:=evalf(eval(eval(Gs1, [D11n=c1_[i]*D22n, D12n=c2_[i]*D22n]),
[a=CC11[i][1]*L1, D22n=12.5*10^(-5)])) end do:

> GG55 :=seq([i/50*L1, GG55_[i]], i=1..49):
> GG6 :=seq([i/50*L1, GG6_[i]], i=1..49):
> GG65 :=seq([i/50*L1, GG65_[i]], i=1..49):
> GG7 :=seq([i/50*L1, GG7_[i]], i=1..49):
> GG75 :=seq([i/50*L1, GG75_[i]], i=1..49):
> GG8 :=seq([i/50*L1, GG8_[i]], i=1..49):
> GG85 :=seq([i/50*L1, GG85_[i]], i=1..49):
> GG9 :=seq([i/50*L1, GG9_[i]], i=1..49):
> GG95 :=seq([i/50*L1, GG95_[i]], i=1..49):
> GG10 :=seq([i/50*L1, GG10_[i]], i=1..49):
> GG105 :=seq([i/50*L1, GG105_[i]], i=1..49):
> GG11 :=seq([i/50*L1, GG11_[i]], i=1..49):

```

### E.5.1 Interpolation des douzes taux de restitution d'énergie

Interpolation des taux de restitution d'énergie pour les souze valeurs de déformation, en des fonctions de a (taille de la fissure)

```

> for i from 1 to 49 do Gslx_[i]:=i/50*L1 end do:for i from 1 to 49 do
Gslly_[i]:=GG55[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i], i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gslly_[i], i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y], y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit), x):fctGsl55:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gslx_[i]:=i/50*L1 end do:for i from 1 to 49 do
Gslly_[i]:=GG6[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i], i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gslly_[i], i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y], y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit), x):fctGsl6:=%(a):

```

```

> for i from 1 to 49 do Gslx_[i]:=i/50*L1 end do:for i from 1 to 49 do
Gsly_[i]:=GG65[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl65:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG7[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl7:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG75[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl75:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG8[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl8:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG85[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl85:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG9[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl9:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG95[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl95:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG10[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl10:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG105[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl105:=%(a):

> for i from 1 to 49 do Gsly_[i]:=GG11[i][2] end do:
Xvalues:=[seq(Gslx_[i],i=1..49)]: Yvalues:=[seq(Gsly_[i],i=1..49)]:
eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y],y=h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):fctGsl11:=%(a):

> #plotsetup('ps',plotoutput='Exemple/reseau_de_G_pb2.eps',plo
toptions='color,noborder,portrait,height=500pt,width=500pt,noborder,le
ftmargin=0,bottommargin=0');

```

Comparaison des différents taux de restitution énergie en fonction de a, pour douze valeurs de D :

```
> display({
PLOT(CURVES([GG55]),COLOR(RGB,0,0,1),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG6]),COLOR(RGB,0,0,1),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG7]),COLOR(RGB,1,0,1),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG8]),COLOR(RGB,0,1,1),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG9]),COLOR(RGB,0,1,0),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG10]),COLOR(RGB,0,0,0),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG65]),COLOR(RGB,0,0,1),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG75]),COLOR(RGB,1,0,1),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG85]),COLOR(RGB,0,1,1),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG95]),COLOR(RGB,0,1,0),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG105]),COLOR(RGB,0,0,0),AXESLABELS('a','G')),
PLOT(CURVES([GG11]),COLOR(RGB,0,0,0),AXESLABELS('a','G')),
crit},thickness=3); plotsetup(default);
```

## E.6 Points d'intersection entre taux de restitution d'énergie et taux critique

### E.6.1 Détermination des tailles de fissures vérifiant $G = G_c$ , pour les différents chargements imposés

On détermine la taille  $asol\_i$  de la fissure pour laquelle  $G = G_{critique}$ , pour chaque valeur donnée de D :

```
> asol_[5] :=fsolve(fctGsl55=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[6] :=fsolve(fctGsl6=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[7] :=fsolve(fctGsl65=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[8] :=fsolve(fctGsl7=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[9] :=fsolve(fctGsl75=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[10] :=fsolve(fctGsl8=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[11] :=fsolve(fctGsl85=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[12] :=fsolve(fctGsl9=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[13] :=fsolve(fctGsl95=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[14] :=fsolve(fctGsl10=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[15] :=fsolve(fctGsl105=Gslc22,a,0.004..L1):
> asol_[16] :=fsolve(fctGsl11=Gslc22,a,0.004..L1):
```

### E.6.2 a critique en fonction de la déformation moyenne

Interpolation de la fonction donnant a critique en fonction de la déformation moyenne D

```
> Xvalues:=
10*10^(-5), 10.25*10^(-5), 10.5*10^(-5), 10.75*10^(-5),
11*10^(-5), 11.25*10^(-5), 11.5*10^(-5), 11.75*10^(-5),
12*10^(-5), 12.25*10^(-5), 12.5*10^(-5) ]:
> Yvalues:=seq(asol_[i],i=6..16):
> eq_fit:=
fit[leastsquare[[x,y],y=h6*x^6+h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h6,h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):aD:=%(D):

> aDlist:=seq([Xvalues[i],Yvalues[i]],i=1..11):

> #plotsetup('ps',plotoutput='Exemple/a_fct_de_D22_critiq_pb2.eps',
plotoptions='color,noborder,portrait,height=400pt,width=500pt,noborder,
leftmargin=0,bottommargin=0');
```

Taille a "critique" de la fissure en fonction de la déformation moyenne D

```
> display(PLOT(POINTS(adlist,SYMBOL(CROSS,40))),
plot(ad,D=10^(-4)..1.25*10^(-4),labels=[D,a],color=blue),thickness=4);
###plotsetup(default);
```

### E.6.3 a critique en fonction du déplacement imposé

```
> Xvalues:=[
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=10*10^(-5),a=asol_[6]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=10.25*10^(-5),a=asol_[7]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=10.5*10^(-5),a=asol_[8]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=10.75*10^(-5),a=asol_[9]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=11*10^(-5),a=asol_[10]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=11.25*10^(-5),a=asol_[11]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=11.5*10^(-5),a=asol_[12]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=11.75*10^(-5),a=asol_[13]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=12*10^(-5),a=asol_[14]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=12.25*10^(-5),a=asol_[15]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L), [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=12.5*10^(-5),a=asol_[16]]))
]:
> Yvalues:=[seq(asol_[i],i=6..16)]:
> eq_fit1:=
fit[leastsquare][[x,y],
y=h2*x^2+h1*x+h0, {h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit1),x):aepsilon:=%(epsilon):
```

Taille critique de la fissure en fonction du déplacement imposé

```
> aepslist:=seq([Xvalues[i],Yvalues[i]],i=1..11):
> #,TITLE('taille de la fissure en fct de la déformation imposée
(epsilon) pour G=Gc, Problème à contrainte nulle aux bords')
> #plotsetup('ps',plotoutput='Exemple/a_fct_de_epsilon_critiq_pb2.eps',
plotoptions='color,noborder,portrait,height=400pt,width=500pt,n
oborder,leftmargin=0,bottommargin=0');
```

Limites de l'interpolation :

```
> borneinfeps:=Xvalues[11];bornesupeps:=Xvalues[1];
> display({PLOT(POINTS(aepslist,SYMBOL(CROSS,30))),
PLOT(CURVES([aepslist]),COLOR(RGB, 0, 0,1),
AXESLABELS('eps','a'),THICKNESS(4))});
```

Taille a "critique" de la fissure en fonction du déplacement

```
> #display({PLOT(POINTS(aepslist,SYMBOL(CROSS,30))),
plot(aepsilon,epsilon=borneinfeps..bornesupeps,labels=[epsilon,a],colo
r=blue,thickness=4)});plotsetup(default);
```

### E.6.4 Déformation moyenne (critique) en fonction de la taille de la fissure pour laquelle il y a propagation

```
> Xvalues:=[seq(asol_[i],i=6..16)]:
> Yvalues:=[10*10^(-5), 10.25*10^(-5), 10.5*10^(-5), 10.75*10^(-5),
11*10^(-5), 11.25*10^(-5), 11.5*10^(-5), 11.75*10^(-5), 12*10^(-5),
12.25*10^(-5), 12.5*10^(-5)]:
> eq_fit:=
fit[leastsquare][[x,y],y=h6*x^6+h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+h1*x+h0,
{h6,h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit),x):Da:=%(a):
```

```
> Dalist:=seq([Xvalues[i],Yvalues[i]],i=1..11):
> display(
{PLOT(POINTS(Dalist,SYMBOL(DIAMOND))),plot(Da,a=asol_[16]..asol_[6],1
abels=[a,D],color=blue)});
```

### E.6.5 Déplacement imposé (critique) en fonction de la taille de la fissure pour laquelle il y a propagation

```
> Xvalues:=seq(asol_[i],i=6..16):
> Yvalues:=[
evalf(eval( D22*(1+z/L) , [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=10*10^(-5)
,a=asol_[6]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L)
,[L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=10.25*10^(-5),a=asol_[7]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L) , [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=10.5*10^(-5)
,a=asol_[8]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L)
,[L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=10.75*10^(-5),a=asol_[9]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L) , [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=11*10^(-5)
,a=asol_[10]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L)
,[L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=11.25*10^(-5),a=asol_[11]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L) , [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=11.5*10^(-5)
,a=asol_[12]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L)
,[L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=11.75*10^(-5),a=asol_[13]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L) , [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=12*10^(-5)
,a=asol_[14]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L)
,[L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=12.25*10^(-5),a=asol_[15]])),
evalf(eval( D22*(1+z/L) , [L=L1,nu=nu12,E=E12,D22=12.5*10^(-5)
,a=asol_[16]]))
]:
> eq_fit1:= fit[leastsquare[[x,y],y=h6*x^6+h5*x^5+h4*x^4+h3*x^3+h2*x^2+
h1*x+h0, {h6,h5,h4,h3,h2,h1,h0}]]([Xvalues, Yvalues]):
unapply(rhs(eq_fit1),x):epsilon:=%(a):
> epsalist:=seq([Xvalues[i],Yvalues[i]],i=1..11):

> display({PLOT(POINTS(epsalist,SYMBOL(DIAMOND))),
plot(epsilon,a=asol_[16]..asol_[6],color=red,labels=[a,eps])
},view=0..0.0004) ;
```

### E.6.6 Superposition des deux courbes

```
> display(
{PLOT(POINTS(Dalist,SYMBOL(CROSS,30))),PLOT(POINTS(epsalist,SYMBOL(CR
OSS,30))),
plot(epsilon,a=asol_[16]..asol_[6],color=red,labels=[a,def],thickness
=4) , plot(Da,a=asol_[16]..asol_[6],color=blue,thickness=4) } ) ;
```

### E.6.7 Tracé des surfaces (D,a,G) , (D,a,Gcritique) et intersection des deux

```
> GG63d :=seq([10*10^(-5) ,GG6[i][1],GG6[i][2]],i=1..49):
> GG653d:=seq([10.25*10^(-5) ,GG65[i][1],GG65[i][2]],i=1..49):
> GG73d :=seq([10.5*10^(-5) ,GG7[i][1],GG7[i][2]],i=1..49):
> GG753d :=seq([10.75*10^(-5),GG75[i][1],GG75[i][2]],i=1..49):
> GG83d:=seq([11*10^(-5) ,GG8[i][1],GG8[i][2]],i=1..49):
> GG853d:=seq([11.25*10^(-5) ,GG85[i][1],GG85[i][2]],i=1..49):
> GG93d:=seq([11.5*10^(-5) ,GG9[i][1],GG9[i][2]],i=1..49):
> GG953d:=seq([11.75*10^(-5) ,GG95[i][1],GG95[i][2]],i=1..49):
> GG103d:=seq([12*10^(-5) ,GG10[i][1],GG10[i][2]],i=1..49):
> GG1053d:=seq([12.25*10^(-5),GG105[i][1],GG105[i][2]],i=1..49):
> GG113d:=seq([12.5*10^(-5) ,GG11[i][1],GG11[i][2]],i=1..49):
```

```

> for i from 0 to 10 do DD:=10^(-4)+(0.25)*10^(-4)*i/10;
  GaD3d_[i]:= [DD, eval(aD,D=DD),
    eval(eval(Gs1, [D11n=c1*D22n,D12n=c2*D22n]), [D22n=DD, a=eval(aD,D=DD)])]
  end do;

> for i from 0 to 10 do
  DD:=10^(-4)+(0.25)*10^(-4)*i/10:
  for j from 0 to 10 do
  aa:=j/10*(L1):
  seqq_[j]:= [DD,aa,eval(Gslc22,a=aa)] end do:
  seqqq_[i]:= [seq(seqq_[j],j=0..10)]:
  end do:

> inters:= [
  [10*10^(-5) , asol_[6] , eval(fctGs16 ,a=asol_[6])],
  [10.25*10^(-5) , asol_[7] , eval(fctGs165,a=asol_[7])],
  [10.5*10^(-5) , asol_[8] , eval(fctGs17 ,a=asol_[8])],
  [10.75*10^(-5) , asol_[9] , eval(fctGs175,a=asol_[9])],
  [11*10^(-5) , asol_[10] , eval(fctGs18 ,a=asol_[10])],
  [11.25*10^(-5) , asol_[11] , eval(fctGs185,a=asol_[11])],
  [11.5*10^(-5) , asol_[12] , eval(fctGs19 ,a=asol_[12])],
  [11.75*10^(-5) , asol_[13] , eval(fctGs195,a=asol_[13])],
  [12*10^(-5) , asol_[14] , eval(fctGs110,a=asol_[14])],
  [12.25*10^(-5) , asol_[15] , eval(fctGs1105,a=asol_[15])],
  [12.5*10^(-5) , asol_[16] , eval(fctGs111 ,a=asol_[16])]
]:

> surface:=evalf([seq(seqqq_[i],i=0..10)]):

> nn:=
[[GG63d], [GG653d], [GG73d], [GG753d],
[GG83d], [GG853d], [GG93d], [GG953d],
[GG103d], [GG1053d], [GG113d]]:

> #plotsetup('ps', plotoutput='Exemple/lieu_fiss_pb2.eps', plotopt
ions='color,noborder,portrait,height=800pt,width=1000pt,noborder,leftm
argin=0,bottommargin=0');

> display({
PLOT3D(MESH(surface),AXESSTYLE(BOX),STYLE(WIREFRAME),AXESLABELS('D22',
'a','G'),COLOR(RGB,0,0,0)), PLOT3D(MESH(nn),STYLE(PATCHNOGRID)),
PLOT3D(CURVES(inters),COLOR(RGB,1,0,0),THICKNESS(4))
},orientation=[-20,70]);plotsetup(default);

```

## E.7 Essai de traction

fonction f2/epsilon :

```
> f2sureps:
```

Taux restitution d'énergie en fonction de a et D :

```
> Gsl:
```

### E.7.1 Partie 1 : linéaire, avant fissuration

Taille initiale de fissures :

```
> Gamma0:=asol_[16]*1.1/L1;
```

Pente de la courbe force déplacements :

```
> p0:=eval(f2sureps,Gamm=Gamma0):evalf(%);
```

Taux de restitution d'énergie critique noté  $G_c$  (Gamma0) :

```
> G_[c0]:=eval(Gslc22,a=Gamma0*L1):evalf(%);
```

Déformation moyenne critique et déplacement pour lesquels  $G=G_c$  :

```
> Dc:=eval(Da,a=Gamma0*L1):
> epsilon:=eval(epsilona,a=Gamma0*L1):
```

Tracé de la courbe de traction tant que les fissures ne se propagent pas :

```
> lin1:=plot(p0*epsilon,epsilon=0..epsilonc):display(%);
```

## E.7.2 Partie 2 : pendant propagation de fissures

Gamma en fonction de epsilon :

```
> Gammepsilon:=aepsilon/L1:
> aepsilon:
> f2sureps:
```

f2 en fonction de epsilon, en tenant compte de la propagation :

```
> f22:=eval(f2sureps,Gamm=Gammepsilon)*epsilon:
```

Tracé :

```
> lin2:=plot(f22,epsilon=epsilonc..bornesupeps):display(%);
```

## E.7.3 Courbe complète

```
> #plotsetup('ps',plotoutput='Exemple/courbe_tract.eps',plotoptions='
color,noborder,portrait,height=800pt,width=1000pt,noborder,leftmargin=
0,bottommargin=0');
```

Courbe de tracion du corps sain :

```
> tampon:=plot(E12*10^(-9)*epsilon,epsilon=0..bornesupeps,color=blue):
> display({lin1,lin2,tampon},thickness=3,labels=[eps,f2],axes=boxed);
plotsetup(default);
```

Evolution de  $\Gamma^*$  au cours de l'essai :

```
> #plotsetup('ps',plotoutput='Exemple/courbe_fiss.eps',plotoptions=
'color,noborder,portrait,height=800pt,width=1000pt,noborder,leftmargin=0,
bottommargin=0');
> display(
{plot(Gamma0,epsilon=0..epsilonc*1.01,color=brown,thickness=4),
plot(Gammepsilon,epsilon=epsilonc*1.012..bornesupeps,color=brown,thickness=4
)});
```

## E.8 Tracé de la courbe de perméabilité

perméabilité en fonction de D22

```
> eval(permmm, [nu=nu12, E=E12, L=L1, a=Gamma0*L1, D11=0]): evalf(%):
```

perméabilité en fonction de epsilon

```
> eval(permmm, D22=epsilon/eval(1/(1+z/L))):  
eval(%, [nu=nu12, D11=0, E=E12, L=L1, a=Gamma0*L1]): perm0:=evalf(%):
```

### E.8.1 Partie 1 : avant propagation

```
> permeabilite0:=plot(perm0, epsilon=0..1.01*epsilon): display(%);
```

### E.8.2 Partie 2 : pendant propagation

```
> eval(permmm, [nu=nu12, L=L1, E=E12, a=Gammepsilon*L1, D11=fctc1*D22,  
D22=epsilon/eval(1/(1+z/L))]):  
eval(%, [L=L1, Gamm=Gammepsilon, a=Gammepsilon*L1, nu=nu12, E=E12,  
D22=epsilon/eval(1/(1+z/L))]):  
eval(%, [nu=nu12, L=L1, E=E12, a=Gammepsilon*L1]): perm1:=evalf(%):  
  
> permeabilite1:=plot(perm1, epsilon=epsilon*1.04..bornesupeps):  
display(%);
```

### E.8.3 Courbe complète

```
> plotsetup('ps', plotoutput='courbe_perm.eps', plotoptions='color,noborder,  
portrait,height=800pt,width=1000pt,noborder,leftmargin=0,bottommargin=0');  
> display(  
{plot(perm0, epsilon=0..bornesupeps, color=blue),  
plot(perm0, epsilon=0..1.06*epsilon),  
plot(perm1, epsilon=epsilon*1.06..bornesupeps)}, thickness=4);  
plotsetup(default);
```



## Annexe F

# Expression du tenseur de perméabilité intrinsèque

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):with(plots):with(student):
> with(linalg):
> read "contdefres.m";read "determinationHres.m";
> nu12:=0.2;E12:=27*10^9;L1:=1/100;Gamma:=1/100;a1:=Gamma*L1;l1:=3*L1;
```

### F.1 Expression du champ de vitesse en coordonnées cylindriques, on vérifie que l'équation d'équilibre est bien satisfaite

```
> f:=(theta,r)->-((a^2*b^2)/(2*(a^2+b^2)))/mueq*dpdz*(1-r^2/a^2+(1/a^2-1/b^2)*r^2*(sin(theta))^2);
> diff(f(theta,r),r,r)+(1/r)*diff(f(theta,r),r)+(1/r)^2*diff(f(theta,r),theta,theta):
> simplify(%);
```

$$\frac{dpdz}{mueq}$$

### F.2 Expression du champ de vitesse en coordonnées cartésiennes, calcul de la moyenne

```
> v:=-((a^2*b^2)/(2*(a^2+b^2)))/mueq*dpdz*(1-y1^2/a^2-y2^2/b^2);
> int(v,y1=0..a*sqrt(1-y2^2/b^2));
> debit:=4*int(%,y2=0..b) assuming b::positive;
> permeabilite:=-debit*mueq/dpdz/Pi/(a*b);
```

$$permeabilite := \frac{1}{4} \frac{b^2 a^2}{a^2 + b^2}$$

### F.3 Champ de déplacements dans le domaine fissuré

#### F.3.1 Mode 1

Coordonnées cylindriques

```
> u1I:=(K1+K1p)/(2*mu)*sqrt(r/(2*Pi))*cos(theta/2)*(k-cos(theta)):
> u2I:=(K1+K1p)/(2*mu)*sqrt(r/(2*Pi))*sin(theta/2)*(k-cos(theta)):
```

Coordonnées cartésiennes

```
> u1IR:=eval(u1I,[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+arctan((y2/(y1-a)))]):
> u2IR:=eval(u2I,[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),
theta=epsilon*Pi+arctan((y2/(y1-a)))]):
```

### F.3.2 Mode 2

Coordonnées cylindriques

```
> u1[II]:=(K2/(2*mu))*sqrt(r/(2*Pi))*sin(theta/2)*(k+cos(theta)+2):
> u2[II]:=-K2/(2*mu)*sqrt(r/(2*Pi))*cos(theta/2)*(k+cos(theta)-2):
```

Coordonnées cartésiennes

```
> u1IIR:=eval(u1[II],[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),theta=epsilon*Pi+arctan((y2
/(y1-a)))]):
> u2IIR:=eval(u2[II],[r=sqrt(y2^2+(y1-a)^2),theta=epsilon*Pi+arctan((y2
/(y1-a)))]):
```

### F.3.3 Considérons les champs de déplacement moyens imposés D11 et D22

```
> eval(AA,[s11=1,s22=0]).eval(Dimp,D12=0):EE:=simplify(% ,size):
> u1IIIR:=EE[1,1]*y1;
> u2IIIR:=EE[2,1]*y2;
```

### F.3.4 Déplacement total

```
> u1:=u1IR+u1IIR+u1IIIR;
> u2:=u2IR+u2IIR+u2IIIR;
```

## F.4 Déplacements sur les lèvres de la fissure

```
> u1_[fissup]:=eval(u1IR+u1IIR+u1IIIR,[y2=0,epsilon=1]):
> u1_[fissinf]:=eval(u1IR+u1IIR+u1IIIR,[y2=0,epsilon=-1]):

> u2_[fissup]:=eval(u2IR+u2IIR+u2IIIR,[y2=0,epsilon=1]);
> u2_[fissinf]:=eval(u2IR+u2IIR+u2IIIR,[y2=0,epsilon=-1]):

> y1_[fissup]:=y1+u1_[fissup]:
> y1_[fissinf]:=y1+u1_[fissinf]:

> y2_[fissup]:=u2_[fissup]:
> y2_[fissinf]:=u2_[fissinf]:

> adef:=eval(y1_[fissup],y1=a);
> bdef:=simplify(eval(y2_[fissup],y1=0),size) assuming
a::positive:simplify(% ,size) assuming a::positive;
```

## F.5 Déformation sur les lèvres de la fissure

```
> diff(u1_[fissup],y1):simplify(% ) assuming y1<a:
> ME11fiss:=simplify((1/a)*int(% ,y1=0..a),size);
```

```

> diff(u2_[fissup],y2):simplify(%) assuming y1<a:
> ME22fiss:=simplify((1/a)*int(%,y1=0..a),size);
> 1/2*(diff(u2_[fissup],y1)+diff(u1_[fissup],y2)):
> simplify(%) assuming y1<a:
> ME12fiss:=simplify((1/a)*int(%,y1=0..a),size);

```

## F.6 Perméabilité en fonction des paramètres macroscopiques

```

> permeabilite2:=eval(permeabilite,[a=adef,b=bdef]):
> macug0(%) :subs(sqrt(g^2/l^2)=g/l,%):
> subs((D11+D22)*nu-D11=D22*nu-D11(1-nu),%);

```

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8}(\nu - 1)^2 ((s22 \Sigma22 + \Sigma11 - \Sigma11 s11) \nu + \Sigma11 (-1 + s11))^2 g^2 (1 + \nu)^2 \\
& \left( \frac{1}{4} \frac{g}{l} - \frac{1}{4} \frac{(\nu D22 - D11(1 - \nu)) (1 + \nu) g}{El} \right)^2 \left( l^2 \nu^2 E^2 \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{4} \frac{g}{l} - \frac{1}{4} \frac{(\nu D22 - D11(1 - \nu)) (1 + \nu) g}{El} \right)^2 \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{(\nu - 1)^2 ((s22 \Sigma22 + \Sigma11 - \Sigma11 s11) \nu + \Sigma11 (-1 + s11))^2 g^2 (1 + \nu)^2}{l^2 \nu^2 E^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

## F.7 Paramètre d'ouverture ( $\nu$ )

```

> Nu:=pi*a*b/(L^2+pi*a*b);
> eval(Nu,[a=adef,b=bdef]):macug0(%) :
> simplify(%,size) assuming g::positive, l::positive:
> save u1,u2,adef,bdef,permeabilite,permmm, "permeabilite.m";

```



# Bibliographie

- [1] ADDA-BEDIA, M., ARIAS, R., AMAR, M. B., AND LUND, F. Dynamic instability of brittle fracture. *Physical review letters* 82, 11 (1999), 2314–2317.
- [2] ADLER, P. M. Mécanique des fluides - perméabilité d'un milieu poreux aléatoire dérivé d'une percolation de site. *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 302, 10 (1986), 691–693.
- [3] AGIASOFITOU, E., AND KALPAKIDES, V. K. The concept of a balance law for a cracked elastic body and the configurational force and moment at the crack tip. *International Journal of Engineering Science* 44 (2006), 127–139.
- [4] ALARCON-RUIZ, L., AND BROCATO, M. Experimental analysis of thermal damage and permeability in concrete. In *Euromat 2005* (2005). Czech Technical University, Praha (Check Rep.).
- [5] ANDRIEUX, S., AND LORENTZ, E. Rupture et plasticité. Majeure 1 Mécanique, Ecole Polytechnique, 2006-2007.
- [6] ARBOGAST, T., AND LEHR, H. L. Homogenization of a darcy-stokes system modeling vuggy porous media. *Computational Geosciences* 10, 3 (2006), 291–302.
- [7] ARMERO, F. On the characterisation of localized solutions in inelastic solids : an analysis of wave propagation in a softening bar. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 191 (2001), 181–213.
- [8] ARMERO, F., AND GARIKIPATI, K. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localisation in solids. *International Journal of Structures* 33, 20-22 (1996), 2863–2885.
- [9] ARNDT, M., AND GRIEBEL, M. Derivation of higher order gradient continuum models from atomistic models for crystalline solids. *Society for Industrial and Applied Mathematics* 4, 2 (2005), 531–562.
- [10] ATKINSON, C., AND CRASTER, R. V. Theoretical aspects of fracture mechanics. *Progress in Aerospace Sciences* 31, 1 (1995), 1–83.
- [11] ATKINSON, C., AND ESHELBY, J. The flow of energy into the tip of a moving crack. *International Journal of Fracture* 4 (1968), 3–8.
- [12] AUSTRALIAN RESEARCH CONCIL. Generalised continua for modelling materials and rocks with microstructure. <http://w3.civil.uwa.edu.au/DEER/>, 2005.

- 
- [13] BAROGHEL-BOUNY, V. *Caractérisation microstructurale et hydrique des pâtes de ciment et des bétons ordinaires et à hautes performances*. PhD thesis, Ecole Nationale Des Ponts et Chaussées, 1994.
- [14] BARY, B. *Etude du couplage hydraulique dans le béton endommagé*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure Cachan, 1996.
- [15] BARY, B., AND BOURNAZEL, J.-P. Hydromechanical coupling in concrete : An application of damage theory. In *Proceedings of the 4th International Conference on Computational plasticity, Barcelone (1995)*, pp. 1547–1558.
- [16] BARY, B., BOURNAZEL, J.-P., AND BOURDAROT, E. Poro-damage approach applied to hydro-fracture analysis of concrete. *Journal of Engineering Mechanics* (2000), 937–943.
- [17] BAŽANT, Z. P. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. *Journal of Engineering Mechanics* 102, 2 (1976), 331–344.
- [18] BAŽANT, Z. P. Mechanics of distributed cracking. *Applied Mechanics Reviews* 39 (1986), 675–705.
- [19] BAŽANT, Z. P., AND GUO, Z. Size effect and asymptotic matching approximations in strain gradient theories of micro-scale plasticity. *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), 5633–5657.
- [20] BAŽANT, Z. P., AND PRAT, P. C. Microplane model for brittle-plastic material : I. theory. *Journal of Engineering Mechanics* 114, 10 (1988), 1672–1702.
- [21] BELYTSCHKO, T., FISH, J., AND ENGLEMAN, B. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 70 (1988), 59–89.
- [22] BEMER, E., BOUTÉCA, M., VINCKÉ, O., HOTEIT, N., AND OZANAM, O. Poromechanics : From linear to nonlinear poroelasticity and poroviscoelasticity. *Oil and gas science technology* 56, 6 (2001), 531–544.
- [23] BERTHOLLET, A. *Contribution à la modélisation du béton vis-à-vis du vieillissement et de la durabilité : interaction des déformations de fluage et du comportement non-linéaire du matériau*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2003.
- [24] BIED, A. E. *Etude expérimentale et modélisation du comportement des roches granulaires : écrouissage, radoucissement et rupture en mode localisé*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2000. CERMES/ENPC-LCPC.
- [25] BOCHENEK, A. The investigation of aggregate grain size effect on fracture toughness of ordinary concrete structures. *International Journal of Fracture* 41 (1989), 197–205.
- [26] BONGUÉ-BOMA, M., AND BROCATO, M. Liquids with vapour bubbles. *Computers and Mathematics with Applications* (2007). In Press.
- [27] BORJA, R. I. Cam-clay plasticity. part v : A mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), 5301–5338.

- [28] BOROGHEL-BOUNY, V. Etude de la sorption de l'eau dans le béton durci. Mémoire de D.E.A. de l' Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1989.
- [29] BOURDAROT. Application of a porodamage model to analysis of concrete dams. Tech. rep., EDF/CNEH, 1991.
- [30] BREUER, S., AND JÄGERING, S. Numerical calculation of the elastic and plastic behavior os saturated porous media. *International Journal of Solids and Structures* 36, 31-32 (1999), 4821–4840.
- [31] BREYSSE, D., AND GÉRARD, B. Modelling of permeability in cement-based materials : part 1-uncracked medium. *Cement and concrete research* 27, 5 (1997), 761–775.
- [32] BROCATO, M., AND CAPRIZ, G. Polycrystalline microstructure. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* 58, 1 (2000). Geom., Cont. and Micros., I.
- [33] BROCATO, M., EHRLACHER, A., AND TAMAGNY, P. On dissipation and stability of grains boundaries in polycrystals. *Journal of tha mechanical behaviour of materials* (2000).
- [34] BROCATO, M., TAMAGNY, P., AND EHRLACHER, A. Moving grain boundaries in polycrystals. *Moving Boundaries VI : Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems* 29 (2001).
- [35] BUI, H.-D. *Mécanique de la rupture fragile*. Centre National de la Recherche Scientifique, 1978.
- [36] CAPRIZ, G. *Continua with microstructure*. Springer, 1998.
- [37] CAPRIZ, G., AND BISCARI, P. Special solutions in a generalized theory of nematics. *Rendiconti di Matematica* 14 (1994), 291–307.
- [38] CAPRIZ, G., AND MAZZINI, G. A  $\sigma$ - algebra and a concept of limit for bodies. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 10, 6 (2000), 801–813.
- [39] CHABARD, J.-P. Ecoulements compressibles, transferts thermiques. Documents pédagogiques.
- [40] CHARMET, J.-C. Mécanique du solide et des matériaux. Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique.
- [41] CHAT, X., DORMIEUX, L., AND XU, Y. Approche micromécanique du comportement d'un milieu mésolfissuré non saturé. *Mécaniques & Industries* 4 (2003), 435–442.
- [42] CHEN, J.-S., LIN, K.-Y., AND YOUNG, S.-Y. Effects of crack width and permeability on moisture-induced damage of pavements. *Journal of Materials in Civil Engineering* 16, 3 (2004), 276–283.
- [43] CHIA, K. S., AND ZHANG, M.-H. Water permeability and chloride penetrability of high-strength lightweight aggregate concrete. *Cement and Concrete Research* 32 (2002), 639–645.
- [44] CHILDS, E., AND COLLIS-GEORGE, N. The permeability of porous materials. In *Proceedings of the Royal Society of London* (1950), vol. 201 of A, pp. 392–405.

- 
- [45] CHOKSI, R., AND FONSECA, I. Bulk and interfacial energy densities for structured deformations of continua. *Arch. Rational Mech. Anal.* 138 (1997), 37–103.
- [46] CHUNG, J. H., AND CONSOLAZIO, G. R. Numerical modeling of transport phenomena in reinforced concrete exposed to elevated temperatures. *Cement and Concrete Research* 35, 3 (2005), 597–608.
- [47] COUSSY, O. *Poromechanics*. John Wiley and Sons, Ltd, 2004.
- [48] COUSSY, O., DORMIEUX, L., AND DETOURNAY, E. From mixture theory to biot’s approach for porous media. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 34 (1998), 4619–4635.
- [49] DAL PONT, S. *Lien entre la perméabilité et l’endommagement dans les bétons à haute température*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (LAMI), 2004.
- [50] DE BORST, R., Ed. *Computational Modeling of Concrete Structures (EURO-C)* (1998). Milan Jirásek.
- [51] DE BUHAN, P., CHATEAU, X., AND DORMIEUX, L. The constitutive equations of finite strain poroelasticity in the light of a micro-macro approach. *European Journal of Mechanics A.Solids* 17, 6 (1998), 909–921.
- [52] DEL PIERO, G., AND OWEN, D. R. *Structured deformations*, vol. 58. XXII Scuola Estiva di Fisica Matematica, 1997. Quaderni dell’ istituto nazionale di alta matematica.
- [53] DENARIÉ, E. *Etude expérimentale des couplages viscoélasticité-croissances des fissures dans les bétons de ciment*. PhD thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2000.
- [54] DEUDÉ, V., DORMIEUX, L., KONDO, D., AND MAGHOUS, S. Micromechanical approach to nonlinear poroelasticity : Application to cracked rocks. *Journal of Engineering Mechanics* 128, 8 (2002), 848–855.
- [55] DILLARD, T., FOREST, S., AND IENNY, P. Micromorphic next term continuum modelling of the deformation and fracture behaviour of nickel foams. *European Journal of Mechanics - A/Solids Volume* 25, 3 (2006), 526–549.
- [56] DJOKO, J., LAMICHHANE, B., REDDY, B., AND WOHLMUTH, B. Conditions for the equivalence between the hu-washizu and related formulations, and computational behaviour in the incompressible limit. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195, 33-36 (2006,), 4161–4178.
- [57] DONG, S., WANG, Y., AND XIA, Y. Stress intensity factors for central cracked circular disk subjected to compression. *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004), 1135–1148.
- [58] DORMIEUX, L., AND COUSSY, O. Introduction à la mécanique des milieux poreux. Cours de mécanique de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.
- [59] EHRLACHER, A. Mécanique de la rupture fragile. D.E.A. MSMS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003-2004.

- [60] EPSTEIN, M. The eshelby tensor and the theory of continuous distributions of inhomogeneities. *Mechanics research communications* 29 (2002), 501–506.
- [61] ERINGEN, A., AND SUHUBI, E. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-1. *International Journal of Engineering Science* 2, 2 (1964), 189–203.
- [62] ESHELBY, J. The force on an elastic singularity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 244 (1951), 87–112.
- [63] ESHELBY, J. The continuum theory of lattice defects. *Journal of physics C : Solid State Physics* 3 (1956), 79–156. F. Seitz and D. Turnbull Ed.s, Academic press.
- [64] ESHELBY, J. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society A241* (1957), 376–396.
- [65] ESHELBY, J. The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity* 5, 3-4 (1975), 321–335.
- [66] ET HUGUES HORNAIN, G. A. *Grandubé- Grandeurs associées à la durabilité des bétons*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- [67] FARAHAT, A. M., KAWAKAMI, M., AND OHTSU, M. Strain-space plasticity model for the compressive hardening-softening behaviour of concrete. *Construction and Building Materials* 9, 1 (1995), 45–59.
- [68] FERAILLE, A. *Le rôle de l'eau dans le comportement à haute température des bétons*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2000.
- [69] FERRETTI, E., VIOLA, E., AND DI LEO, A. Crack trajectory in tensioned concrete plates using the cell method. In *Fifth World Congress on Computational Mechanics* (2002), p. II. 313.
- [70] FETT, T. Stress intensity factors and t-stress for single and double-edge-cracked circular disks under mixed boundary conditions. *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), 69–83.
- [71] FISH, J., AND YU, Q. Computational mechanics of fatigue and life predictions for composite materials and structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002), 4827–4849.
- [72] FOREST, S., BARBE, F., AND CAILLETAUD, G. Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials. *International Journal of Solids and Structures* 37, 46-47 (2000), 7105–7126.
- [73] FOREST, S., AND SIEVERT, R. Nonlinear microstrain theories. *International Journal of Solids and Structures* 43, 24 (2006), 7224–7245.
- [74] FRANGI, A., AND NOVATI, G. Bem-fem coupling for fracture mechanics applications. In *Fifth world congress on computational mechanics* (2002).
- [75] GARBOCZI, E. J. Permeability, diffusivity, and microstructural parameters : A critical review. *Cement and Concrete Research* 20 (1990), 591–601.

- [76] GATUINGT, F. Etude bibliographique sur les méthodes numériques avancées de représentation de fissuration localisée. Tech. rep., Science pratique, 2000.
- [77] GAWIN, D., MAJORANA, C. E., AND SCHREFLER, B. Numerical analysis of hygro-thermal behaviour and damage of concrete at high temperature. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 4 (1999), 37–74.
- [78] GAWIN, D., PESAVENTO, F., AND SCHREFLER, B. Simulation of damage-permeability coupling in hygro-thermo-mechanical analysis of concrete at high temperature. *Communication in numerical methods in engineering* 18 (2002), 113–119.
- [79] GAWIN, D., PESAVENTO, F., AND SCHREFLER, B. Modelling of hygro-thermal behaviour of concrete at high temperature with thermo-chemical and mechanical material degradation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), 1731–1771.
- [80] GERMAIN, P. The method of virtual power in continuum mechanics, part 2 : Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 25, 3 (1973), 556–575.
- [81] GIOVINE, P. Pressure field and viscosities in a bearing when the lubricant is bubbly. AMS Classification : 76A05 ; 76N10, 1999.
- [82] GIOVINE, P. A variational principle applied to the dynamics of a liquid with diffusing gas bubbles. *Arch. Mech.* 58, 4-5 (2006), 1–18.
- [83] GRASBERGER, S., AND MESCHKE, G. A hygro-thermal-poroplastic damage model for durability analyses of concrete structures. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* (2000).
- [84] GROSS, D., KOLLING, S., MUELLER, R., AND SCHMIDT, I. Configurational forces and their application in solid mechanics. *European Journal of Mechanics A/Solids* 22 (2003), 669–692.
- [85] GUPTA, A. Noether’s theorem and its application in configurational mechanics. Tech. rep., University of California, Berkeley.
- [86] GURTIN, M. E. The nature of configurational forces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 131, 1 (1995), 67–100.
- [87] GURTIN, M. E., AND JABBOUR, M. E. Interface evolution in three-dimensions with curvature energy and surface diffusion : interface-controlled evolution, phase transitions, epitaxial growth of elastic films. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 163 (2002), 171–208.
- [88] GURTIN, M. E., AND PODIO-GUIDUGLI, P. Configurational forces and a the basic laws for cracks propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44, 6 (1996), 905–927.
- [89] GURTIN, M. E., AND PODIO-GUIDUGLI, P. Configurational forces and a constitutive theory for crack propagation that allows for kinking and curving. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 8 (1998), 1343–1378.
- [90] GÉRARD, B., AND MARCHAND, J. Influence of cracking on the diffusion properties of cement-based materials. part i : Influence of continuous cracks on the steady-state regime. *Cement and Concrete research* 30 (2000), 37–43.

- [91] HAN, G., AND DUSSEAULT, M. B. Description of fluid flow around a wellbore with stress-dependent porosity and permeability. *Journal of petroleum science and engineering* 40 (2003), 1–16.
- [92] HASHEMINEJAD, S. M. Modal impedances for a spherical source in a fluid-filled spherical cavity embedded within a fluid-infiltrated elastic porous medium. *International Journal of Solids and Structures* 35, 1 (1998), 129–148.
- [93] HÄUPL, P., GRUNEWALD, J., AND FECHNER, H. Coupled heat air and moisture transfer in building structures. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40, 7 (1997), 1633–1642.
- [94] HERRMANN, K., MÜLLER, W. H., AND NEUMANN, S. Linear elastic-plastic fracture mechanics revisited by use of fourier transforms - theory and application. *Computational materials science* 16 (1999), 186–196.
- [95] HILL, R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (1958), 236–249.
- [96] HORII, H., AND CHEN, S.-C. Computational fracture analysis of concrete gravity dams by crack-embedded elements - toward an engineering evaluation of seismic safety. *Engineering fracture mechanics* 70 (2003), 1029–1045.
- [97] HSU, T., SLATE, F., STURMAN, G., AND WINTER, G. Microcracking of plain concrete and the shape of the stress-strain curve. *ACI Journal* 60, 2 (1963), 209–224.
- [98] HU, J., AND STROEVEN, P. Depercolation threshold of porosity in model cement : approach by morphological evolution during hydration. *Cement and Concrete Composite* 27 (2005), 19–25.
- [99] <http://nw-ialad.uibk.ac.at>, 2005. European research network funded by the E.C.
- [100] JARIĆ, J., AND GOLUBOVIĆ, Z. Configurational forces and couples for crack propagation. *Theoretical and applied mechanics* 28-29 (2002), 185–203.
- [101] JIRÁSEK, M. Non-local damage models : practical aspects and open issues. Tech. rep., LSC-DGC, Swiss Federal Institute of Technology at Lausanne (EDFL), Switzerland.
- [102] JIRÁSEK, M. Comparative study of finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188 (2000), 307–330.
- [103] JIRÁSEK, M. Objective modeling of strain localisation. *Revue Française de Génie Civil*, 6 (2002), 1119–1132.
- [104] JIRÁSEK, M., AND BELYTSCKO, T. Computational resolution of strong discontinuities. In *Fifth world congress on computational mechanics* (2002).
- [105] JIRÁSEK, M., AND ZIMMERMANN, T. Embedded crack model : I. basic formulation. *International journal for numerical methods in engineering* 50 (2001), 1269–1290.

- 
- [106] JOURNÉES CEA-EDF-INIRIA. *Endommagement non local- Aspects Physiques et Théoriques* (1990).
- [107] KACHANOV, M., AND SEVOSTIANOV, I. On quantitative characterization of microstructures and effective properties. *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), 309–336.
- [108] KALPAKIDES, V., AND AGIASOFITOU, E. Configurational balance laws for dynamical fracture. *Theoretical and Applied Mechanics 28-29* (2002), 205–219.
- [109] KAPLAN, M. Strains and stresses of concrete at initiation of cracking and near failure. *Journal of The American Concrete Institute* (1963), 853–880.
- [110] KHAN, M., AND LYNSDALE, C. Strength, permeability, and carbonation of high-performance concrete. *Cement and Concrete Research* 32 (2002), 123–131.
- [111] KONDO, V. R. . D. Calibration and numerical validation of a micromechanical damage model. In *NUMOG VI* (1997), P. . Pande, Ed., pp. 135–140.
- [112] KRÄTZIG, W. B., AND PÖLLING, R. Elasto-damage-theories and elasto-plastic fracturing-theories - a comparison. *Computational Materials Science* 13 (1998), 117–131.
- [113] KRÄTZIG, W. B., AND PÖLLING, R. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. *Computers and Structures* 82 (2004), 1201–1215.
- [114] KRESSE, O., AND TRUSKINOVSKY, L. Mobility of lattice defects : discrete and continuum approaches. *Journal of the mechanics and physics of solid* 51 (2003), 1305–1332.
- [115] LANDIS, C. M., PARDOEN, T., AND HUTCHINSON, J. W. Crack velocity dependent toughness in rate dependent materials. *Mechanics of materials* 32, 11 (2000), 663–678.
- [116] LI, S., SAUER, R., AND WANG, G. A circular inclusion in a finite domain. i. the dirichlet-eshelby problem. *Acta mechanica* 179, 1-2 (2005), 67–90.
- [117] LI, S., AND SIMKINS JR., D. C. Conserving galerkin weak formulations for computational fracture mechanics. *Numerical methods in engineering* 18 (2002), 835–850.
- [118] LITOROWICZ, A. Identification and quantification of cracks in concrete by optical fluorescent microscopy. *Cement and concrete Research* 36 (2006), 1508–1515.
- [119] LOWES, L. N. *Finite element modeling of reinforced concrete beam-column bridge connections*. PhD thesis, University of California, Berkeley, Engineering - Civil Engineering, 1999.
- [120] MAKOWSKI, J., AND STUMPF, H. Thermodynamically based concept for the modelling of continua with microstructure and evolving defects. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), 1943–1961.
- [121] MAKOWSKI, J., AND STUMPF, H. The fundamental role of nonlocal and local balance laws of material forces in finite elastoplasticity and damage mechanics. *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), 3940–3959.

- [122] MALEKI, K. *Modélisation numérique du couplage entre l'endommagement et la perméabilité des roches- Application à l'étude des ouvrages de stockage souterrain*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- [123] MARIANO, P. M. Configurational forces in continua with microstructure. *Journal of Applied Mathematics and Phys* 51 (2000), 752–791.
- [124] MARKOV, K. Z. *Heterogeneous Media - Micromechanics Modeling Methods and Simulations*. Heterogeneous Media : Modelling and Simulation. Birkhauser, 2000.
- [125] MARLE, C. *Cours de production - Les écoulements polyphasiques en milieu poreux*, vol. IV. Institut Français du Pétrole - Ecole Nationale Supérieure du Pétrole et des Moteurs, 1972.
- [126] MAUGIN, G. Material forces : concepts and applications. *American Society of Mechanical Engineers* 48, 5 (1995), 213–245.
- [127] MAUGIN, G. A. Recent advances in  $m^3$  (mechanics on the material manifold). In *Theoretical and applied mechanics* (2002), vol. 28-29, pp. 221–233. Belgrade.
- [128] MAURAN, S., RIGAUD, L., AND COUDEVYLLE, O. Application of the carman kozeny correlation to a high-porosity and anisotropic consolidated medium : The compressed expanded natural graphite. *Transport in Porous Media* 43 (2001), 355–376.
- [129] MAZARS, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et ma rupture du béton de structure*. PhD thesis, L.M.T. ; Université de Paris ; France, 1984.
- [130] MAZARS, J. Description of the behaviour of composite concretes under complex loadings through continuum damage mechanics. In *Tenth US National Congress of Applied Mechanics. ASME* (1989), J. E. Lamb, Ed., The American Society of Mechanical Engineering.
- [131] MOHR, P., HANSEN, W., AND JENSEN, E. Transport properties of concrete pavements with excellent long-term in-service performance. *Cement and Concrete Research* 30 (2000), 1903–1910.
- [132] MONLOUIS-BONNAIRE, J., VERDIER, J., AND PERRIN, B. Prediction of the relative permeability to gas flow of cement-based materials. *Cement and Concrete Research* 34 (2004), 737–744.
- [133] MOSLER, J., AND MESCHKE, G. Embedded crack vs. smeared crack models : a comparison of element wise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2003), 3351–3375.
- [134] MOUNAJED, G., AND BOUSSA, H. Synthèse des différents modèles et approches de couplage thermo-hygro-mécanique. Tech. rep., Centre Scientifique et Technique du Bâtiment.
- [135] M'ULLER, I. Eshelby tensor and phase equilibrium. Technical university of Berlin.
- [136] NEMATI, K. Preserving microstructure of concrete under load using the wood's metal technique. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 37 (2000), 133–142.
- [137] NICOLAS, M. Ecoulement dans les milieux poreux. DEA mécanique énergétique.

- 
- [138] OLIVER, J. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1 : fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), 3575–3600.
- [139] OLIVER, J., AND HUESPE, A. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), 3195–3220.
- [140] OLIVER, J., HUESPE, A. E., PULIDO, M. D. G., AND SAMANIEGO, E. On the strong discontinuity approach in finite deformation settings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 56 (2003), 1051–1082.
- [141] OLIVER, J., HUESPE, A. E., PULIDO, M. D. G., AND SAMANIEGO, E. Computational modeling of cracking of concrete in strong discontinuity settings. *Computer and Concrete* 1, 1 (2004), 61–76.
- [142] OLIVIER, J., AND MASSAT, M. Ion diffusion in microcracked concrete. *Cement and Concrete Research* 22 (1992), 503–514.
- [143] ONATE, E., AND (EDS), S. I., Eds. *A fully coupled multiphase FE model of hygro-thermo-Mechanical behaviour of concrete at high temperature* (1998).
- [144] ORTIZ, M. Microcrack coalescence and macroscopic crack growth initiation in brittle solids. *International Journal of Solids Structures* 24, 3 (1988), 231–250.
- [145] ORTIZ, M., LEROY, Y., AND NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering* 61 (1987), 189–214.
- [146] OVID’KO, I., AND SHEINERMAN, A. Triple junction nanocracks in fatigued nanocrystalline materials. *Acta Materialia* 52 (2003), 1201–1209.
- [147] OŽBOLT, J., PIVONKA, P., AND LACKNER, R. Three-dimensional FE analysis of concrete - material models and mesh sensitivity. In *Fifth world congress on computational mechanics* (2002), H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner, Ed.
- [148] PATZÁK, B., AND MILAN JIRÁSEK. Process zone resolution by extended finite elements. *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), 957–977.
- [149] PICANDET, V. *Influence d’un endommagement mécanique sur la perméabilité et sur la diffusivité hydrique des bétons*. PhD thesis, Ecole doctorale de mécanique, thermique, et génie civil de Nantes, 2001.
- [150] PICANDET, V., KHELIDJ, A., AND BASTIAN, G. Effect of axial compressive damage on gas permeability of ordinary and high-performance concrete. *Cement and Concrete Research* 31 (2001), 1525–1532.
- [151] PIERO, G. D., AND TRUSKINOVSKY, L. Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), 1135–1148.
- [152] PIJAUDIER-CABOT, G. *Non local characteristics of strain-softening materials*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, 1987.

- [153] PODIO-GUIDUGLI, P. Configurational balances via variational arguments. *Interfaces and Free Boundaries* 3, 2 (2001), 223–232.
- [154] PODIO-GUIDUGLI, P. Configurational forces : are they needed ? *Mechanics Research Communications* 29 (2002), 513–519.
- [155] PRAMONO, E., AND WILLIAM, K. Fracture energy-based plasticity formulation of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics* 115, 6 (1989), 1183–1204.
- [156] QUINTANILLA, J., AND TORQUATO, S. Microstructure functions for a model of statically inhomogeneous random media. *Physical review E* 55, 2 (1997), 1558–1565.
- [157] QUINTANILLA, J., AND TORQUATO, S. Percolation for a model of statistically inhomogeneous random media. *Journal of chemical physics* 111, 13 (1999).
- [158] QUOC, H. U. *Théorie de dégradation du béton et développement d'un nouveau model d'endommagement en formulation incrémentale tangente*. PhD thesis, L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [159] QUOC, H. U. *Théorie de dégradation du béton et développement d'un nouveau modèle d'endommagement en formulation incrémentale tangente*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [160] RADI, E., BIGONI, D., AND LORET, B. Steady crack growth in elastic-plastic fluid-saturated porous media. *International Journal of Plasticity* 18 (2002), 345–358.
- [161] REINHARDT, H.-W., AND JOOSS, M. Permeability and self-healing of cracked concrete as a function of temperature and crack width. *Cement and Concrete Research* 33 (2003), 981–985.
- [162] RENAUD, V. Endommagement et rupture d'un solide multifissuré. D.e.a. de génie civil, Université des sciences et techniques de Lille Flandres-Artois, 1993.
- [163] RENAUD, V., KONDO, D., AND HENRY, J. Numerical evaluation of effective moduli in brittle rocks with multiple interacting cracks. In *Numerical methods in geotechnical engineering* (1994), Smith, Ed., pp. 401–407.
- [164] RINGOT, E., AND BASCOUL, A. About the analysis of microcracking in concrete. *Cement and concrete composites* 23 (2001), 261–166.
- [165] ROY, D., SHI, D., SCHEETZ, B., AND BROWN, P. Concrete microstructure and its relationships to pore structure, permeability, and general durability. In *Durability of Concrete : The GM Idorn International Symposium, American Concrete Institute* (1990), Annual ACI Convention in Toronto, Ontario, Canada, pp. 139–52.
- [166] SAFFMAN, P. G. A theory of dispersion in a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics* 6 (1959), 321–349.
- [167] SAITO, M. Characteristics of microcracking in concrete under static and repeated tensile loading. *Cement and Concrete Research* 17, 2 (1987), 211–218.

- [168] SALENÇON, J. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et chaussées, 1983.
- [169] SANCHEZ-PALENCIA, E. *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag; Berlin Heidelberg New York, 1980. Non-Homogeneous Media and Vibration theory.
- [170] SCHEIDEGGER, A. E. *The physics of flow through porous media*. University of Toronto Press 1974, 1960.
- [171] SCHEIDEGGER, A. E. Fluid dynamics ii. In *Encyclopedia of physics*, S. Flugge, Ed., vol. VIII/2. Springer-verlag, 1963, ch. Hydrodynamics in Porous Media, pp. 625–662.
- [172] SCHREFLER, B., AND PESAVENTO, F. Multiphase flow in deforming porous material. *Computers and geotechnics* 31 (2004), 237–250.
- [173] SEGEV, R., AND RODNAY, G. Cauchy's theorem on manifolds. *Journal of Elasticity*, 56, 2 (1999), 129–144.
- [174] SELLIER, A., AND BARY, B. Coupled damage tensors and weakest link theory for the description of crack induced anisotropy in concrete. *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), 1925–1939.
- [175] SHOWALTER, R. Micro-structure models of diffusion in fissured media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 189, 3 (1995), 731–756.
- [176] SHOWALTER, R. Diffusion in poro-elastic media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 251 (2000), 310–340.
- [177] SHOWALTER, R. Diffusion in deforming porous media. *Mathematics Subject Classification*. (2002).
- [178] SHREFLER, B. A., AND SCOTTA, R. A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3223 (2001), 3223–3246.
- [179] SIERRA, R. *Contribution à l'étude de l'hydratation des silicates calciques hydrauliques*. PhD thesis, L.C.P.C. Paris, 1974.
- [180] SIERRA, R. Répartition des différentes formes d'eau dans la structure des pâtes pures de  $c^3s$  et de ciment portland. Tech. Rep. 117, LPC, 1982.
- [181] SILVERSTEIN, D. L., AND FORT, T. Prediction of water configuration in wet unsaturated porous media. *Langmuir* 16 (2000), 839–84.
- [182] SIMONIN, F. *Comportement thermomécanique de bétons réfractaires alumineux contenant du spinelle de magnésium*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2000.
- [183] SINGH, M., AND MOHANTY, K. K. Permeability of spatially correlated porous media. *Chemical Engineering Science* 55 (2000), 5393–5403.

- [184] SOROUSHIAN, P., AND ELZAFRANEY, M. Damage effect on concrete performance and microstructure. *Cement Concrete and Composites* 26 (2004), 853–859.
- [185] STAVROULAKIS, G., ENGELHARDT, M., AND GALLEGRO, R. Crack identification in elasticity. In *Fifth world congress on computational mechanics* (2002).
- [186] STROEVEN, P. A stereological approach to roughness of fracture surfaces and tortuosity of transport paths in concrete. *Cement and Concrete Composites* 22 (2000), 331–341.
- [187] SVENDSEN, B. Formulation of balance relations and configurational fields for continua with microstructure and moving point defects via invariance. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), 1183–1200.
- [188] TOD, S. R. Bed-limited cracks in effective medium theory. *Geophysical Journal International* 152 (2003), 344–352.
- [189] TONTI, E. A direct discrete formulation of field laws : the cell method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 2, 2 (2001), 237–258.
- [190] TRUSDELL, C., AND TOUPIN, R. The classical field theories. In *Encyclopedia of physics*, S. Flugge, Ed., vol. III/1. Springer-verlag, 1960, ch. Principles of Classical Mechanics and Field Theory.
- [191] TSIVILIS, S., AND CHANIOTAKIS, E. The effect of clinker and limestone quality on the gas permeability, water absorption and pore structure of limestone cement concrete. *Cement and Concrete Research* 21 (1999), 139–146.
- [192] TUMIDAJSKI, P., AND LIN, B. On the validity of the katz-thompson equation for permeability in concrete. *Cement and Concrete Research*, 28 (1998), 643–647.
- [193] VERSLUYS. Die kapillarität der boden. *J. Int. Mitt. Bodenk.* 7 (1917), 117.
- [194] WANG, K., JANSEN, D. C., AND SHAH, S. P. Permeability study of cracked concrete. *Cement and Concrete Research* 27, 3 (1997), 381–393.
- [195] WARD, M., AND COOK, D. The mechanism of tensile creep in concrete. *Magazine of concrete research* 21, 68 (1999), 151–158.
- [196] WELLS, G., AND SLUYS, L. Application of embedded discontinuities for softening solids. *Engineering fracture Mechanics* 65 (2000), 263–281.
- [197] WELLS, G., AND SLUYS, L. Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture. *Engineering fracture Mechanics* 65 (2000), 263–281.
- [198] WITTMANN, F. Structure and mechanical properties of concrete. *Architectural Reports of the Tohoku University*, 22 (1983), 93–112.
- [199] XU, K. *Structures multiéchelles- Modèles pour la description des matériaux poreux et l'estimation de leurs propriétés de transport* -. PhD thesis, Université Joseph Fourier- Grenoble I-, 1992.

- [200] YANG, Q., CHEN, X., AND THAM, L. Relationship of crack fabric tensors of different orders. *Mechanics Research Communication* 31 (2004), 661–666.
- [201] YE, G. Percolation of capillary pores in hardening cement pastes. *Cement and concrete research* 35 (2005), 167–176.
- [202] ZEGHLOUL, A. Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture. DEA Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés, 2003-2004.
- [203] ZHANG, M. Microstructure, crack propagation, and mechanical properties of cement pastes containing high volumes of fly ashes. *Cement and Concrete Research* 25, 6 (1995), 1165–1178.