Extraction de caractéristiques, segmentation d'image et morphologie mathématique

Corinne Vachier

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

EXTRACTION DE CARACTERISTIQUES, SEGMENTATION D'IMAGE ET MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE

THESE

présentée à
l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
par

Corinne VACHIER

pour obtenir le titre de Docteur en Morphologie Mathématique

Thèse soutenue le 18 Décembre 1995 devant le jury composé de:

MM.	Bernard	PICINBONO	*Président*
	Philippe	BOLON	*Rapporteur*
	Serge	MULLER	*Rapporteur*
	Jean-Louis	LAMARQUE	
	Fernand	MEYER	
	Michel	SCHMITT	
	Jean	SERRA	

À mes parents
À mon doudou

Remerciements

Cette thèse est le résultat d'une collaboration étroite entre le Centre de Morphologie Mathématique de l'Ecole des Mines de Paris et General Electric Medical Systems. Je tiens ici à exprimer ma très sincère gratitude à tous ceux et toutes celles qui ont pris sur le temps pour m'aider et m'entourer de leurs conseils tout au long de ce travail ; ils ont contribué pour une grande part à l'aboutissement de cette thèse.

Mes plus vifs remerciements vont tout d'abord à Jean Serra pour m'avoir accueillie au Centre de Morphologie Mathématique, mais aussi pour sa grande disponibilité, son expérience qu'il sait transmettre à chacun, sa gentillesse et la confiance qu'il accorde aux jeunes thésards. Je le remercie aussi d'avoir accepté de faire partie du jury. Je tiens aussi à exprimer ma sincère gratitude à Fernand Meyer qui a assumé la charge de directeur de thèse et qui a su diriger et orienter mes recherches tout en me laissant une grande liberté. Je lui suis également très reconnaissante pour sa disponibilité et pour m'avoir fait profiter de son expérience. L'aboutissement de cette thèse doit beaucoup à ses conseils comme à ses critiques. Mes plus vifs remerciements vont également à Serge Muller qui a supervisé ce travail tout au long de son déroulement et dont les conseils et critiques m'ont beaucoup aidée. Je tiens aussi à le remercier pour la confiance qu'il m'a accordée dès le début ainsi que pour avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteur. Merci beaucoup à Bernard Picinbono d'accepter de présider le jury de cette thèse. J'en suis très honorée. J'espère avoir su tirer le plus grand profit de l'enseignement qu'il m'a dispensé il y a quelques années déjà. Je tiens à remercier vivement Philippe Bolon d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Mes plus vifs remerciements vont également au Professeur Jean-Louis Lamarque qui a accepté de faire partie du jury et qui nous permet ainsi de profiter de sa grande compétence en sénologie. Enfin, je remercie vivement Michel Schmitt d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens également à remercier Christophe Gratin et Michel Bilodeau qui, durant mon séjour au Centre de Morphologie Mathématique, m'ont sans cesse aidé de leurs conseils et auxquels je dois une lecture critique approfondie de la première version de ce manuscript. Je remercie également vivement Luc Vincent, de l'autre côté de l'Atlantique, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour m'avoir aidé à le diffuser.

Merci enfin à l'ensemble de l'équipe du Centre de Morphologie Mathématique (je cite en vrac et je m'excuse déjà si ma RAM oublie quelqu'un ou quelqu'une). Les disparus : Roro Bremond, Hugues Talbot (et je salue le Poitou au passage !), Jean-François Rivest, Jean-Nono Mialet, René Peyrard, Pierre Soille, Tilman Jochems, Christophe Gratin et Michel Grimaud. Un merci tout particulier à Oscar grâce à qui nous avons gagné le tournoi de boules l'année dernière. Les indéracinables ensuite : Jean-Claude Klein, Serge Beucher, les deux Michel (Bilodeau et Gauthier), Marc Waroquier et Laura Andriamasinoro. Un merci tout particulier à Liliane Pipault qui, par sa disponibilité, sa gentillesse et sa bonne humeur, contribue beaucoup à l'excellente ambiance qui règne au centre. Je salue enfin tous les thésards, ceux du centre et ceux de General Electric, ceux qui commencent et ceux qui terminent : Fabrice Lemonnier, Nicolas Bez (pour les discussions dans la

navettomobile), Sylvie Bothorel, Beatris Marcotegui, Pascal Laurenge, François Calmel (même s'il ne fait pas partie du clan des thésards)... Je leur sais gré à tous, non seulement de leur aide concrète, mais surtout de l'atmosphère chaleureuse et amicale qu'ils ont tous contribué à créer au Centre de Morphologie Mathématique, dans la navettomobile ou ailleurs.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Avant propos

De nombreuses opérations relevant de l'analyse d'image et auparavant effectuées "manuellement" peuvent aujourd'hui être résolues automatiquement par des systèmes de vision artificielle, et ceci dans des domaines très diversifiés. Nous pouvons citer entre autre la télédétection, le contrôle de qualité lors de la fabrication de matériaux, les systèmes d'assistance à la conduite de véhicules... ou encore les applications en imagerie médicale, qui correspond au cadre dans lequel notre travail s'est déroulé.

Parmi les nouvelles techniques développées par l'industrie pour l'imagerie médicale (pour l'IRM, la radiologie...), les systèmes d'analyse d'image occupent aujourd'hui une place importante et tout-à-fait originale, d'abord parce qu'ils ont su prouver leur intérêt dans des domaines tels que la restauration d'images ou encore la vision tri-dimensionnelle, mais également parce qu'ils sont en voie de se justifier dans d'autres domaines jusqu'alors inexplorés telle l'aide au diagnostic. Le travail que nous allons présenter ici est le résultat de recherches menées pour la mise au point d'un système de détection automatique des sur-densités anormales du sein sur des clichés mammographiques numérisés. Ce travail a été effectué en collaboration avec General Electric Medical Systems. Il vient en suite directe de celui effectué pour la détection automatique des micro-calcifications, qui fut également l'objet d'une collaboration entre le Centre de Morphologie Mathématique et General Electric Medical Systems. La qualité des résultats obtenus sur ce premier point encouragea les équipes de General Electric à poursuivre vers l'étape suivante : la détection des sur-densités anormales du sein.

Pour des raisons de confidentialité industrielle, cette application ne sera pas présentée en détail dans ce mémoire. Fort heureusement, lorsqu'un opérateur (c'est-à-dire celui qui est confronté à un problème d'analyse d'image) développe de nouveaux outils pour résoudre son application, ces outils sont très souvent exploitables dans d'autres domaines. Ce mémoire contient donc sinon l'ensemble du moins une grande part des interrogations, des réflexions et des conclusions que la résolution de notre problème a suscité ; simplement, d'autres exemples sont utilisés pour illustrer notre propos.

Le problème central de tout système de vision artificielle consiste à traduire sous forme algorithmique ce que réalise la vision humaine : à partir d'un flot d'information brute, trier cette information et en extraire le sens. Tous ces systèmes fonctionnent aujourd'hui sur une connaissance a priori du problème à traiter. Même les systèmes basés sur un apprentissage doivent être redéfinis selon le problème à résoudre. L'homme pour sa part est bien plus performant puisqu'il s'adapte seul, accroît lui-même ses connaissances, ce qu'aucun système artificiel ne saurait faire aujourd'hui.

Les systèmes de vision artificielle utilisent aujourd'hui deux classes principales et fondamentales de techniques : celles des *techniques numériques* (pour la segmentation et la quantification d'images) et celles de l'*intelligence artificielle* (pour l'analyse sémantique de données). Dans de nombreux systèmes de vision, les techniques numériques sont utilisées comme préambule aux techniques de l'intelligence artificielle.

Tout au long de notre travail, notre problème central a été la segmentation d'image, c'est-à-dire l'extraction des différentes régions d'une image. Cette définition est en fait incomplète, car lorsqu'on parle des régions d'une image, on sous-entend généralement les "bonnes" régions de l'image, celles qui présentent un intérêt pour le problème étudié. Parler de segmentation d'image sans parler d'une définition préalable des régions d'intérêt n'a réellement pas de sens : pour une image donnée, il n'y a pas une unique bonne segmentation, mais des segmentations possibles dont la pertinence est directement liée à l'utilisation que l'on veut en faire. C'est d'ailleurs ainsi que la vision humaine procède puisque le contexte intervient toujours dans la perception que l'on a des choses. L'approche morphologique des problèmes de segmentation d'image puise certainement une grande partie de sa justification et de sa force dans le respect de ce principe. Avant de chercher à segmenter une image, on se pose d'abord la question de ce que l'on cherche à segmenter : c'est-à-dire que, dans un premier temps, on se fixe comme objectif d'identifier et de localiser les régions pertinentes dans l'image avant de chercher à en extraire les contours. C'est pour cette raison que, même si notre problème central a été la segmentation d'image, une partie importante de notre travail a d'abord consisté à développer des outils permettant d'extraire, de trier et de caractériser l'information brute présente sur une image, c'est-à-dire des outils permettant de comprendre une image, d'identifier les éléments qui la constituent. Ces outils allaient ensuite nous permettre d'orienter convenablement nos algorithmes de segmentation.

Pour illustrer la génèse de la morphologie mathématique, J. Serra écrit : "Percevoir, c'est transformer". Le problème de l'extraction de caractéristiques d'une image est en fait un problème de transformation d'image puis d'interprétation de cette transformation et du comportement de l'image par rapport à cette transformation. Une grande partie de ce mémoire se propose d'explorer, sur ce principe, de nouvelles méthodes pour extraire les caractéristiques des structures ou régions présentes sur une image. Notre but n'est pas tant d'introduire de nouvelles transformations d'images que de chercher comment mieux exploiter celles que nous connaissons déjà. Notre approche est très clairement orientée vers les objets de l'image : ce qui nous intéresse ce n'est pas une caractérisation de la scène dans son ensemble mais une caractérisation de chaque élément composant la scène, du plus insignifiant au plus important. La morphologie mathématique s'adapte justement très bien à ce type d'approche : les transformations morphologiques opèrent dans le plan de l'image et s'interprètent très aisément.

Ce mémoire est rédigé avec le souci constant de décrire les opérateurs que nous introduisons et leurs algorithmes de la manière la plus précise et la plus générale possible. Ceci nous amène ensuite à étudier à part les cas particuliers les plus pertinents. De nombreux exemples sont utilisés pour permettre au lecteur de mieux percevoir visuellement comment ces opérateurs agissent et quelles sont leurs particularités. Nous espérons également ainsi mettre en lumière leur intérêt et leurs utilisations potentielles. Les débouchés pratiques des outils que nous étudions ne sont pas tous immédiats ; de même que nous ne prétendons pas donner une solution à tous les problèmes de segmentation d'image. Le but de cette thèse est simplement d'apporter une pierre à l'édifice et de se donner de nouveaux moyens pour résoudre plus aisément certains des problèmes de l'analyse d'image.

1.2 Plan et contenu de l'ouvrage

L'annexe A regrouppe l'ensemble des notations utilisées dans cet ouvrage. Le lecteur non familier avec la morphologie mathématique pourra commencer sa lecture par l'annexe B, consacrée aux éléments de base nécessaires à une bonne compréhension de notre propos. Nous donnons en annexe C les algorithmes en pseudo-code présentés dans le corps de l'ouvrage. Indépendemment des annexes, ce mémoire est découpé en cinq chapitres :

Chapitre 2 : Transformations morphologiques et extraction de caractéristiques

Ce chapitre introductif présente des notions importantes pour toute la suite de notre propos. L'objet de ce chapitre est plus précisément de répondre à la question suivante : lorsqu'on cherche à identifier et à caractériser les objets ou régions présents sur une image, quels sont les outils morphologiques (binaires ou numériques) dont on dispose ? Nous distinguons deux approches : les méthodes granulométriques (et ses dérivées telles que la notion de squelette) et l'approche par extréma. Dans ce chapitre, nous nous attachons également à mettre en évidence les différences entre les outils développés pour la morphologie binaire et ceux spécifiques à la morphologie numérique. Ce point situe d'emblée l'orientation de notre recherche.

Chapitre 3 : Des fonctions d'extinction numériques

Ce chapitre introduit une nouvelle classe de transformations morphologiques, *les fonctions d'extinction*, et présente une méthode générale permettant d'extraire les caractérisques des différentes régions d'une image. Le principe consiste à étudier, pour chaque région, sa persistance lorsqu'on applique des transformations morphologiques de plus en plus sélectives. Un certain nombre de cas particuliers sont étudiés plus en détail ; leur intérêt est illustré sur de nombreux exemples et notamment une application au filtrage d'image est présentée.

Chapitre 4 : Calcul efficace des fonctions d'extinction

Ici, nous proposons des méthodes efficaces de calcul des opérateurs introduits au chapitre 3. Nous insistons particulièrement sur l'importance de disposer de méthodes de calcul efficace : c'est à ce niveau, que les fonctions d'extinction puisent une grande part de leur justification et de leur intérêt. Ces considérations algorithmiques mettent en évidence une notion importante : celle d'arbre de fusion des extréma de l'image.

Chapitre 5 : Application à la segmentation d'image

Ce chapitre est consacré à l'utilisation des outils présentés dans les chapitres 3 et 4 (les fonctions d'extinction et les arbres de fusion des extréma qui leur sont associés) pour la segmentation d'image. Leur intérêt sera discuté à travers des exemples variés. Ces exemples ont été choisis parce qu'ils posent de réelles difficultés en termes de segmentation d'image : grande complexité des régions à extraire, présence de bruit et d'information parasite qui perturbent les processus de segmentation... On insistera également sur les avantages offerts par les fonctions d'extinction et les arbres de fusion pour la mise au point des algorithmes de segmentation d'image par rapport à d'autres méthodes plus traditionnelles.

Chapitre 6 : Application à la détection automatique des opacités du sein

Ce chapitre est consacré à notre application. Nous décrivons les principales orientations choisies pour la résolution de ce problème et nous donnons les résultats obtenus. Pour des raisons de confidentialité industrielle, nous ne décrirons pas nos algorithmes en détail.

Chapitre 7 : Conclusion et perspectives

Dans ce dernier chapitre, nous résumons les principaux résultats présentés dans ce mémoire ainsi que les extensions et les suites possibles de ce travail.

Chapitre 2

Transformations morphologiques et extraction de caractéristiques

Ce chapitre introduit un point très important de notre travail : le problème de l'extraction de caractéristiques. Par ce terme nous entendons l'ensemble des méthodes permettant d'extraire des informations à partir d'images complexes sans connaissance a priori sur l'image, informations relatives à la texture mais aussi et surtout au contenu structurel de l'image.

Ce premier point abordé dès le début de la thèse eut une double incidence sur notre travail. Tout d'abord, il fut l'occasion du premier contact réel avec les transformations morphologiques et leur utilisation pour la résolution de problèmes spécifiques et complexes. Dans le même temps, il posait clairement la question de l'extension de notions importantes binaires au cas numérique. C'est ce dernier point qui décida de l'orientation du travail que nous présentons dans les chapitres suivants.

2.1 Introduction

Le terme d'*extraction de caractéristiques* recouvre en fait deux problèmes distincts : la quantification de texture et l'extraction des caractéristiques des structures ou régions présentes sur une image. Ces problèmes sont distincts, non pas tant dans les méthodes de résolution auxquelles ils font appel, mais dans la manière même qu'on a de les aborder.

L'extraction des caractéristiques d'un signal procède généralement par une transformation de ce signal : sa réponse à une transformation donnée est utilisée pour en déduire une caractérisation. L'information est pertinente à partir du moment où la transformation est *discriminante* : deux signaux distincts (dans un contexte donné) ont des réponses distinctes à la transformation. Dans le cas de l'analyse de textures, cette condition est généralement suffisante. Pour la satisfaire, on peut être amené à considérer non pas une transformation mais plusieurs transformations et l'ensemble des réponses à ces transformations. Lorsque le problème se pose en termes d'extraction de caractéristiques des structures ou régions présentes dans l'image, cette condition ne suffit généralement pas. En effet, il faut également être en mesure d'*interpréter* les caractéristiques déduites.

Les transformations de la morphologie mathématique satisfont cette deuxième condition. En effet, elles opèrent sur les structures de l'image en répondant à une question du type : cette structure satisfait-elle ce critère (où le critère est défini par le biais d'un élément structurant et d'un opérateur topologique simple) ? Leur interprétation ne pose généralement pas de problème.

Nous distinguerons ici deux types d'approches au problème de l'extraction de caractéristiques. La première considère des familles de transformations morphologiques et étudie comment l'image est transformée par ces transformations : c'est le point de vue de l'analyse granulométrique. La deuxième considère de manière plus systématique chaque structure ou région de l'image et définit des critères pour les caractériser : c'est l'approche par extrema.

2.2 Le point de vue de l'analyse granulométrique

Une ouverture fait disparaitre les objets d'une image binaire lorsqu'ils ne contiennent pas l'élément structurant. A partir du concept d'ouverture, il est donc possible de "tamiser" un ensemble de particules en considérant simplement une famille d'ouvertures associées à des éléments structurants de taille croissante (voir figures 2.1, 2.2 et 2.3).

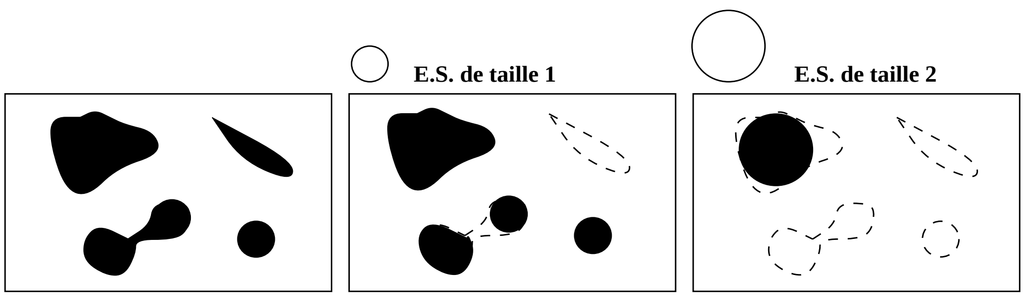


Figure 2.1: Effet d'ouvertures de taille croissante sur un ensemble

2.2.1 Granulométries et résidus granulométriques

Les notions de granulométrie et de transformation granulométrique ont été introduites par G. Matheron en 1967 [49].

Définition 2.1 (granulométrie [49]) *Soit* $(\psi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ *une famille de transformations dépendant d'un paramètre unique* λ*. Cette famille constitue une granulométrie si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

$$\forall\lambda \geq 0, \psi_\lambda \textit{ est croissante } \ (f \leq g \Rightarrow \psi_\lambda(f) < \psi_\lambda(g)) \tag{2.1}$$

$$\forall\lambda \geq 0, \psi_\lambda \textit{ est anti-extensive } (\psi_\lambda < Id) \tag{2.2}$$

$$\forall\lambda \geq 0, \forall\mu \geq 0, \psi_\lambda\psi_\mu = \psi_\mu\psi_\lambda = \psi_{\max(\lambda,\mu)} \tag{2.3}$$

Remarquons que la propriété 2.3 implique l'idempotence des ψ_λ.

On montre que si B est convexe, alors la famille des ouvertures par les homothétiques $(\lambda B)_{\lambda \geq 0}$ de ce convexe est une granulométrie (si B est convexe, la famille des éléments structurants déduits de B par addition de Minkowski (les λB) sont homothétiques à B). Insistons sur le fait que l'élément structurant utilisé doit impérativement être convexe pour que la dernière propriété soit vérifiée, c'est-à-dire pour que l'opération granulométrique ait un sens physique.

On définit de manière duale les anti-granulométries associées à une famille croissante de transformations extensives satisfaisant, de plus, la dernière propriété. Ainsi, la famille des fermetures $(\varphi_{\lambda B})_{\lambda \geq 0}$, avec B convexe, est une anti-granulométrie. Le couple constituée par une granulométrie et l'anti-granulométrie qui lui est associée (constituée des transformations duales) permet de généraliser ce concept à des images biphasées.

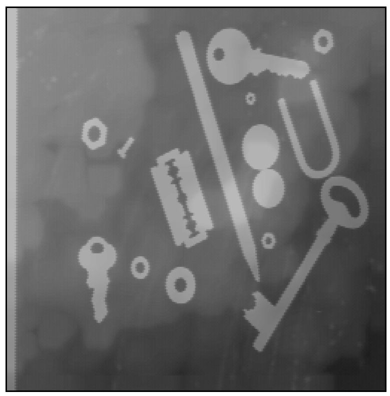
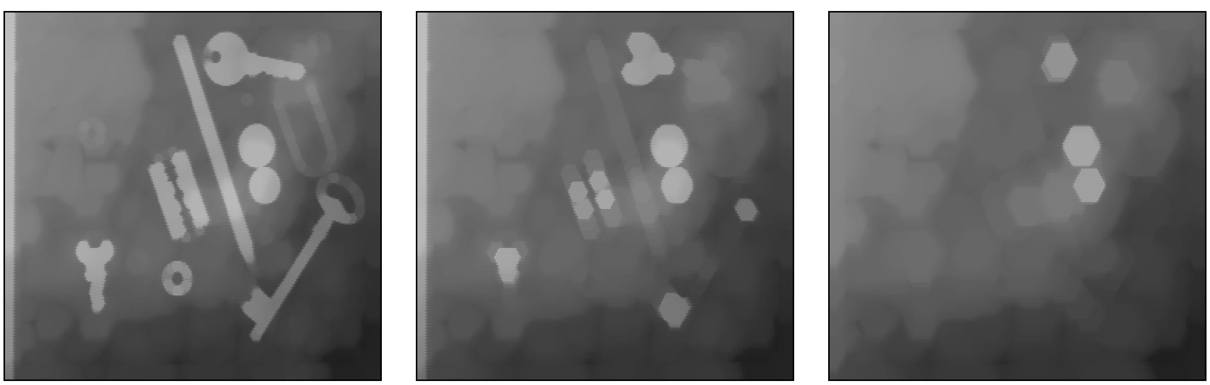


Figure 2.2: Image originale (Tools)



a- ouverture de taille 3 | b- ouverture de taille 6 | c- ouverture de taille 10

Figure 2.3: Granulométrie par ouvertures de l'image Tools

Effectuer une analyse granulométrique d'une image binaire ou numérique f consiste alors à associer à chaque valeur λ une mesure sur l'image $\psi_\lambda(f)$. Les courbes déduites sont appelées courbes granulométriques [13]. En pratique, on utilise souvent le *spectre granulométrique* qui est la dérivée de la courbe granulométrique et qui considère l'information perdue d'un niveau granulométrique à un autre.

Définition 2.2 (Résidus granulométriques [62]) *Soit $(\psi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ une granulométrie. On appelle résidus granulométriques les différences entre les résultats obtenus pour deux niveaux granulométriques successifs :*

$$\forall \lambda \geq 0, R_\lambda(X) = \psi_\lambda(X) \setminus \psi_{\lambda+1}(X) \geq 0 \tag{2.4}$$

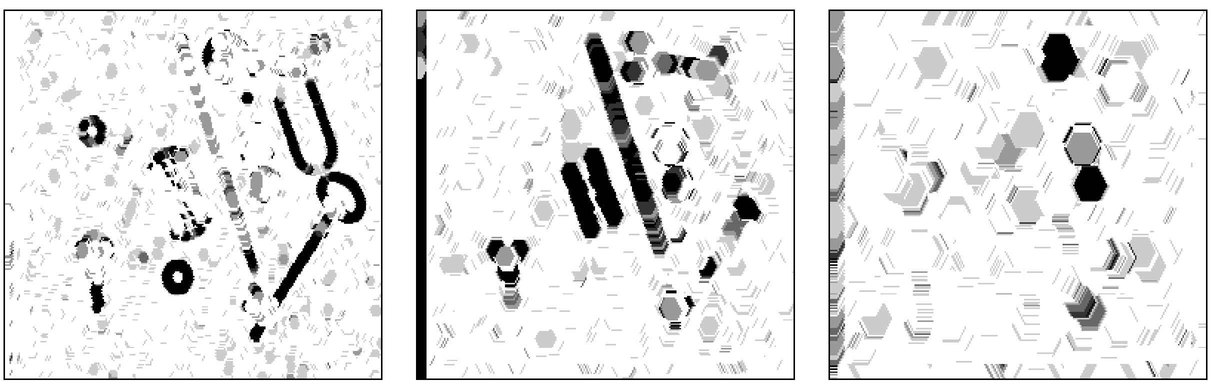
Dans cette définition l'opèrateur "\" représente la différence ensembliste ($X \setminus Y = X \cap Y^c$).

La famille constituée des images résidus $(R_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ synthétise toute l'information granulométrique et constitue une représentation complète de l'image :

$$X = \bigcup_{\lambda \geq 0}(R_\lambda(X)) \quad \text{et} \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow R_\lambda(X) \cap R_\mu(X) = \emptyset \tag{2.5}$$

Dans la famille $(R_\lambda)_{\lambda \geq 0}$, l'information est hiérarchisée selon un critère déterminé par la transformation ψ. En effet, R_λ représente ce qui est préservé au niveau λ mais éliminé au niveau $(\lambda + 1)$ de la granulométrie.

Si ψ_λ est une ouverture par l'élément structurant λB (B convexe) et si X est homothétique à B ($X = \lambda_0 B$), alors : $\lambda \leq \lambda_0 \Rightarrow \gamma_{\lambda B}(X) = X$ et $\lambda > \lambda_0 \Rightarrow \gamma_{\lambda B}(X) = \emptyset$. Par conséquent : $R_{\lambda_0}(X) = X$ et $\lambda \neq \lambda_0 \Rightarrow R_\lambda(X) = \emptyset$. Deux objets identiques mais homothétiques de rapport λ seront donc présents sur des résidus différents, correspondant à des niveaux hiérarchiques homothétiques, où le rapport est λ.



a- residu de niveau 3 b- residu de niveau 6 c- residu de niveau 10

Figure 2.4: Résidus de la granulométrie par ouvertures de l'image Tools

Remarquons que, parmi tous les convexes B utilisables pour effectuer des granulométries, les boules (et leurs approximations dans le cas digital : hexagones, carrés ...) sont privilégiées : en effet ce choix permet de s'affranchir au mieux des considérations de forme.

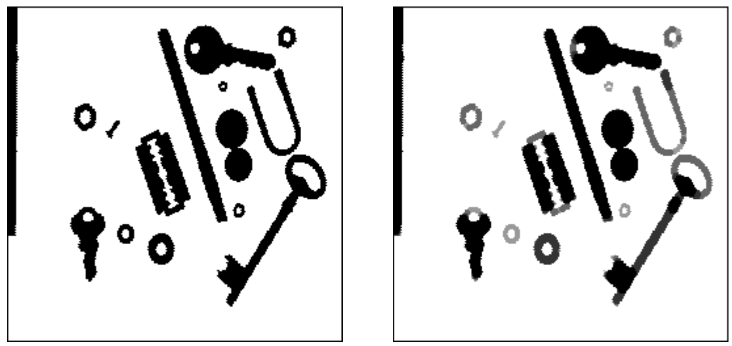
Enfin, insistons sur le fait que tout ce que nous venons de dire vaut sans aucune restriction pour le cas numérique :

$$R_\lambda(f) = \psi_\lambda(f) - \psi_{\lambda+1}(f) \text{ et } f = R_0(f) + R_1(f) + R_2(f) + ... + R_\lambda(f) + ... \tag{2.6}$$

Définition 2.3 (Fonction granulométrique) *Soit X un ensemble, la fonction granulométrique de X notée g_X associe à tout point x de X la taille λ du plus grand ouvert de X $(\gamma_\lambda(X))$ contenant x :*

$$g_X(x) = \lambda_0 \quad si \quad x \in \gamma_{\lambda_0}(X) \ et \ \forall \lambda > \lambda_0, x \notin \gamma_\lambda(X) \tag{2.7}$$

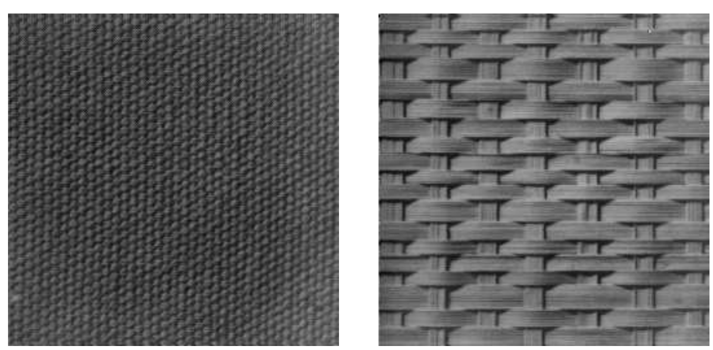
La figure 2.5 donne un exemple d'une fonction granulométrique. Notons que cette notion n'est définie que dans le cas binaire. Dans le cas numérique, on se contente des couples $((R_\lambda(f), \lambda)_{\lambda \geq 0}$ (voir figure 2.4).



a- image originale binaire b- fonction granulometrique associee

Figure 2.5: Fonction granulométrique d'une image binaire

La figure 2.6 donne un exemple de spectres granulométriques par ouvertures obtenus pour des images de textures : à chaque valeur λ, on associe le volume du résidu granulométrique d'indice λ. De nombreuses autres mesures sont possibles. Elles sont généralement à redéfinir selon le type d'image (binaire ou numérique) et le problème à résoudre. Les plus classiques sont : la surface (respectivement le volume), le nombre de particules connexes (respectivement le nombre d'extrema) dans le cas binaire (respectivement numérique).



a- texture "r77" b- texture "r65"

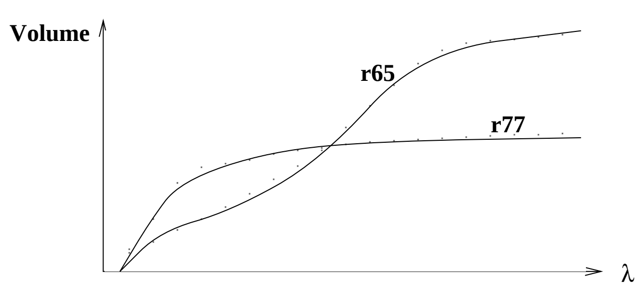


Figure 2.6: Exemple de spectres granulométriques

Ce type d'approche est bien adapté à l'analyse de textures où l'information à extraire est quantitative : quelle est la quantité de signal perdu à chaque niveau granulométrique ? Dans le cas de problèmes de reconnaissance de formes par exemple, on utilise généralement une autre transformation morphologique, apparentée aux granulométries par ouvertures : le squelette morphologique.

2.2.2 Squelette morphologique et fonction d'extinction

La notion de squelette (*axe médian*) a été introduite pour la première fois en 1961 par H. Blum [7, 8]. Sa définition, basée sur le concept de "feu de prairie", fut ensuite formalisée en terme de *boule maximale* par L. Calabi [9]. Enfin, une définition opératoire en terme d'érosions et de dilatations morphologiques fut proposée en 1978 par C. Lantuéjoul [38]. A partir de ces travaux, de nombreuses définitions ont été proposées pour la notion de squelette, notamment le squelette par zone d'influence binaire [38] qui a ensuite donné naissance à la notion de ligne de partage des eaux numérique [4, 2]. Citons également les travaux de F. Meyer sur le squelette digital [55, 56]. Nous ne parlerons ici que du *squelette morphologique* ou *squelette par boules maximales*. Outre les références précédentes, cette partie doit beaucoup à la lecture des travaux de J. Serra [81], de S. Peleg et A. Rosenfeld [69] et de P. Maragos [44], en autres, sur ce sujet.

Dans tout ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas discret.

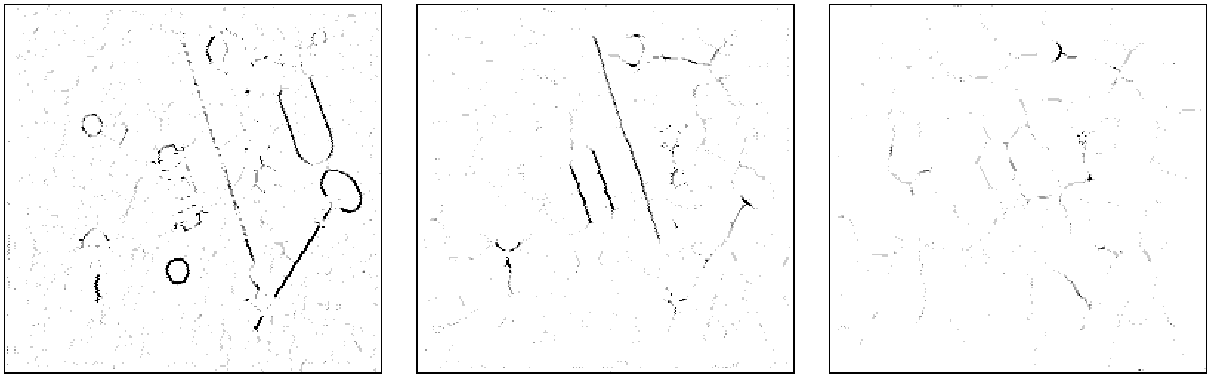
Nous avons vu que les granulométries par ouvertures décomposent les images et classent les composantes extraites selon leur taille et/ou leur forme (selon le choix de l'élément structurant). Le concept de taille sous-jacent introduit naturellement une hiérarchisation des composantes sur les résidus granulométriques, hiérarchisation compatible avec l'homothétie : deux structures homothétiques sont représentées dans les résidus de niveaux correspondant au rapport d'homothétie. Les particules du résidu R_λ sont de taille strictement inférieure à $(\lambda + 1)$ (voir relation 2.4).

Le squelette morphologique (ou squelette par boules maximales) possède les mêmes propriétés de décomposition hiérarchisée de l'image et permet en outre de satisfaire la condition suivante : deux structures homothétiques ont des squelettes identiques ; simplement, les composantes (ou résidus) de leur squelette correspondent à des niveaux hiérarchiques différents. Les résidus du squelette contrairement aux résidus granulométriques sont de taille fine (de taille inférieure à l'élément structurant). Pour cette raison, le squelette fournit une représentation particulièrement bien adaptée à la reconnaissance de formes : il est alors possible de comparer les composantes du squelette à un prototype unique de la forme recherchée sans qu'il soit nécessaire de se soucier d'un critère de taille.

Définition 2.4 (Squelette morphologique [51]) *Le squelette morphologique (ou squelette par boules maximales) d'un ensemble X, noté $S(X)$ est défini par :*

$$S(X) = \bigcup_{\lambda \geq 0}(S_\lambda(X)) \quad \textit{avec :} \quad S_\lambda(X) = \epsilon_\lambda(X) \setminus \delta_1(\epsilon_{\lambda+1}(X)) = \epsilon_\lambda(X) \setminus \gamma_1(\epsilon_\lambda(X)) \quad (2.8)$$

Dans le cas numérique, le squelette de f est défini par la famille $(S_\lambda(f))_{\lambda \geq 0}$ avec : $S_\lambda(f) = \epsilon_\lambda(f) - \gamma_1(\epsilon_\lambda(f))$.



a- residu de niveau 3 b- residu de niveau 6 c- residu de niveau 10

Figure 2.7: Résidus du squelette morphologique de l'image Tools

Les $S_\lambda(X)$ sont appelées composantes ou résidus du squelette : ce sont les chapeaux haut de forme des érodés successifs de X. Dans le cas binaire, le squelette correspond donc à l'ensemble des lieux des centres des boules maximales inclues dans X. Pour cette raison, ce squelette est également appelé squelette par boules maximales.

Les résidus du squelette sont de taille fine :

$$\forall\lambda \geq 0, \epsilon_1(S_\lambda(f)) = \emptyset \tag{2.9}$$

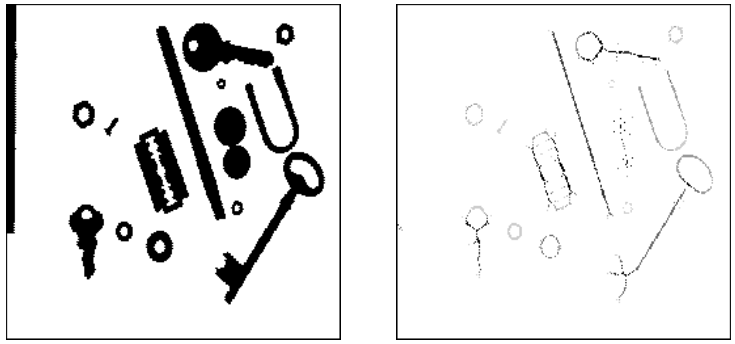
Si le support de X est fini (ce qui est le cas en pratique) alors, l'ensemble $(S_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est fini.

On montre que le squelette par boules maximales peut être obtenu, dans le cas discret, en recherchant les *maxima locaux* de la fonction distance, c'est-à-dire les points qui n'ont pas de voisin immédiat d'altitude supérieure [96]. Nous rappelons que la fonction distance d'un ensemble X (notée $f_d(X)$) associe à tout point de X sa distance au complémentaire de X, c'est-à-dire la taille de la boule maximale centrée en ce point et incluse dans X (voir définition B.8). Les différentes lignes de niveau de la fonction distance correspondent aux frontières des érodés successifs de X.

$$f_d(X)(x) = \lambda + 1 \quad \text{si } x \in \epsilon_\lambda(X) \setminus \epsilon_{\lambda+1}(X) \tag{2.10}$$

Le lien entre le squelette et la fonction distance peut notamment être utilisé pour introduire de nouveau types de squelette, simplement en modifiant la fonction distance que l'on utilise [55]. Enfin, des algorithmes efficaces séquentiels [55] ou à base de files d'attente [2] permettent d'obtenir le squelette par ouverture très rapidement.

A tout point du squelette $S(X)$, on peut associer le rayon de la boule maximale correspondante, c'est-à-dire sa valeur sur la fonction distance. On définit ainsi la *fonction d'extinction* de X (également appelée *fonction d'étanchéité*).



a- image originale binaire b- fonction d'extinction associee

Figure 2.8: Fonction d'extinction d'une image binaire

Définition 2.5 (Fonction d'extinction [62]) *Soit X un ensemble. La fonction d'extinction de X notée $f^e(X)$ est la fonction égale à la fonction distance et ayant pour support le squelette morphologique de X.*

Dans le cas numérique, la fonction d'extinction désigne simplement l'ensemble des résidus du squelette hiérarchisés par l'indice λ, c'est-à-dire la famille de couples : $(S_\lambda(f), \lambda)_{\lambda \geq 0}$.

La fonction d'extinction constitue une représentation exacte de l'image : X peut être intégralement reconstruite à partir des composantes de son squelette. En effet, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} X &= (X \setminus \gamma_1(X)) \cup \gamma_1(X) \\ &= S_0(X) \cup \delta_1(\epsilon_1(X)) \end{aligned}$$

On applique la même décomposition à $\epsilon_1(X)$:

$$\begin{aligned} \epsilon_1(X) &= (\epsilon_1(X) \setminus \gamma_1(\epsilon_1(X))) \cup \gamma_1(\epsilon_1(X)) \\ &= S_1(X) \cup \delta_1(\epsilon_2(X)) \end{aligned}$$

Ce qui donne (nous rappelons que la dilatation est distributive par rapport à l'union) :

$$\begin{aligned} X &= S_0(X) \cup \delta_1(\, S_1(f) \cup \delta_1(\epsilon_2(f))\,) \\ &= S_0(X) \cup \delta_1(S_1(X)) \cup \delta_2(\epsilon_2(X)) \end{aligned}$$

On applique la même décomposition à $\epsilon_2(X)$

$$X = S_0(X) \cup \delta_1(S_1(X)) \cup \delta_2(S_2(X)) \cup \delta_3(\epsilon_3(X))$$

Et ainsi de suite ... tant que $\epsilon_n(X) \neq \emptyset$.

Finalement, le processus de reconstruction s'écrit (algorithme de reconstruction de Serra [81]) :

$$X = \bigcup_{\lambda \geq 0} \delta_\lambda(S_\lambda(X)) \tag{2.11}$$

On remarque que, pour reconstruire les ouverts d'un ensemble X (les $\gamma_{\lambda_0}(X)$), il suffit de restreindre la classe des λ à $\lambda \geq \lambda_0$:

$$X = \bigcup_{0 \leq \lambda < \lambda_0} \delta_\lambda(S_\lambda(X)) \bigcup \gamma_{\lambda_0}(X) \quad \text{et} \quad \gamma_{\lambda_0}(X) = \bigcup_{\lambda \geq \lambda_0} \delta_\lambda(S_\lambda(X))$$

Cette relation montre comment le squelette est lié à la notion d'ouverts (et donc de granulométrie).

La propriété de reconstruction vaut évidemment pour les fonctions numériques mais fait alors intervenir un processus additif plus complexe. Soit f une fonction numérique, on a :

$$f \quad = \quad (f - \gamma_1(f)) \quad + \quad \gamma_1(f) \quad = \quad S_0(f) \quad + \quad \delta_1(\epsilon_1(f))$$

On applique la même décomposition à $\epsilon_1(f)$:

$$f \quad = \quad S_0(f) \quad + \quad \delta_1(S_1(f) \quad + \quad \delta_1(\epsilon_2(f)))$$

La dilatation n'est pas distributive par rapport à l'addition. Cette expression ne se simplifie donc pas. On applique la même décomposition aux érodés successifs de f. Finalement, le processus de reconstruction dans le cas numérique sécrit :

$$f = S_0(f) + \delta_1(\ S_1(f) + \delta_1(\ S_2(f) + \delta_1(S_3(f) + ... + \delta_1(S_\lambda(f) + ...)\ )\ )\ ) \tag{2.12}$$

P. Maragos [44] a proposé une autre définition du squelette permettant une reconstruction de l'image faisant intervenir un processus d'union (supremum en numérique) identique à celui utilisé dans le cas binaire (relation 2.11).

Définition 2.6 (Squelette de Maragos [44]) *Soit f un fonction numérique, les composantes du squelette de f, notées $D_\lambda(f)$ sont définies par :*

$$\forall \lambda \geq 0, D_\lambda(f)(x) = \begin{cases} \epsilon_n(f)(x) & si\ \epsilon_\lambda(f)(x) > \gamma_1(\epsilon_\lambda(f))(x) \\ -\infty & si\ \epsilon_\lambda(f)(x) = \gamma_1(\epsilon_\lambda(f))(x) \end{cases} \tag{2.13}$$

Nous donnons figure 2.9 un exemple illustrant les premières composantes du squelette selon l'une ou l'autre des deux définitions proposées. Les deux squelettes ont même support. Par contre, les niveaux de gris des composantes différent.

$$D_\lambda(f) = Ind(S_\lambda(f)) \times \epsilon_\lambda(f) \text{ avec : } Ind(g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) > 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Nous verrons dans la section suivante, sur des exemples concrets, comment ces deux définitions peuvent être exploitées.

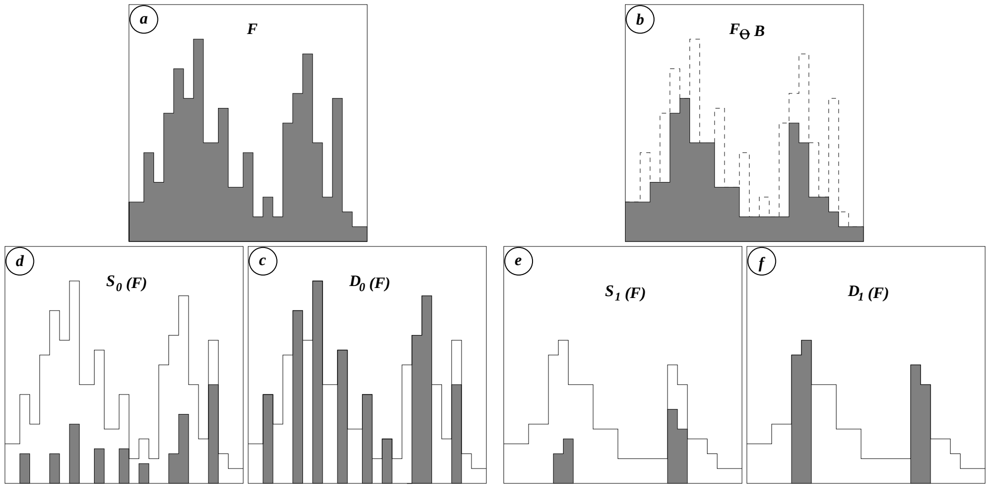


Figure 2.9: Définitions possibles des composantes du squelette numérique

Examinons comment s'écrit le processus de reconstruction de f à partir des composantes $D_\lambda(f)$. On a $f = D_0(f) \vee \gamma_1(f)$ car $f \geq \gamma_1(f)$.

$$f \;=\; D_0(f) \;\vee\; \gamma_1(f) \;=\; D_0(f) \;\vee\; \delta_1(\epsilon_1(f))$$

On applique la même décomposition à $\epsilon_1(f)$:

$$\begin{aligned} f &= D_0(f) \;\vee\; \delta_1(D_1(f) \;\vee\; \gamma_1(\epsilon_1(f))) \\ &= D_0(f) \;\vee\; \delta_1(D_1(f) \;\vee\; \delta_1(\epsilon_2(f))) \end{aligned}$$

La dilatation est distributive par rapport à l'union. Cette expression se simplifie donc, comme dans le cas binaire :

$$f \;=\; D_0(f) \;\vee\; \delta_1(D_1(f) \;\vee\; \delta_2(\epsilon_2(f)))$$

Et ainsi de suite pour les érodés successifs de f...

$$f \;=\; \bigvee_{0 \leq \lambda < \lambda_0} D_\lambda(f) \bigvee \gamma_{\lambda_0}(f)$$

La reconstruction de f à partir des composantes de son squelette s'exprime donc par une relation semblable à celle du cas binaire [44] :

$$f = \bigvee_{\lambda \geq 0} \delta_\lambda(D_\lambda(f)) \tag{2.15}$$

Nous avons vu, dans ce paragraphe, que la notion de squelette et celle de fonction d'extinction fournit une représentation complète et intelligible de l'image : l'information est triée et hiérarchisée. Il est dès lors possible d'extraire une caractérisation des objets d'une image binaire ou numérique par la considération de leur squelette : la forme du squelette est caractéristique de la forme de l'objet (indépendamment de sa taille), les valeurs d'extinction associées à chaque composante définissent une caractéristique en taille de l'objet.

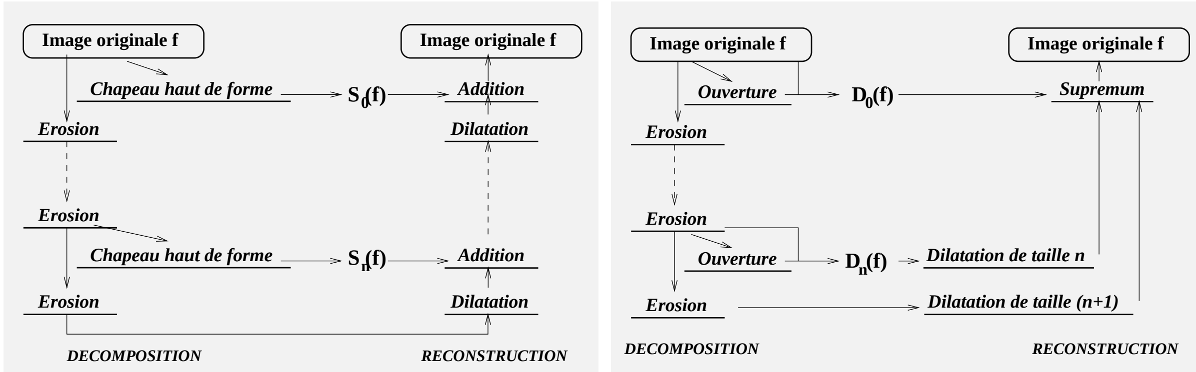


Figure 2.10: Modification du processus de reconstruction de l'image selon la définition du squelette utilisée : à gauche, la reconstruction ne peut commencer que lorsque tous les résidus du squelette sont calculés ; à droite, les étapes de décomposition et de reconstruction peuvent s'effectuer en parallèle.

2.2.3 Le filtrage par décomposition morphologique d'image

Un mode de représentation hiérarchique se révèle souvent efficace pour extraire le sens d'une observation complexe. Ceci a été exploité dans de nombreux types de représentations tels que les techniques de résolution multi-échelle et les applications des transformées d'ondelettes qui s'y rattachent par exemple.

La notion de squelette introduit naturellement une décomposition exacte et hiérarchique de l'image. Exacte car l'image peut être intégralement reconstruite à partir de son squelette et hiérarchique de par le concept de taille contenu dans la définition. De plus, cette représentation est une représentation par primitives compatible avec l'homothétie : la reconnaissance d'une forme particulière peut alors s'effectuer en comparant les composantes du squelette à un prototype unique sans qu'aucun critère de taille ne soit à prendre en compte. Ces propriétés ont déjà été exploitées dans le cadre d'une représentation hiérarchique d'images [87]. Nous donnons ici un exemple d'application au filtrage d'image.

Cette section est organisée comme suit : dans un premier temps, nous donnons un algorithme générale de filtrage d'image par calcul du squelette morphologique ; dans un deuxième temps, cette méthode est appliquée pour la résolution d'un problème concret d'extraction de structures rectilignes sur des images microscopiques de fibres de verre.

Décomposition, filtrage, reconstruction

Nous nous plaçons dans le cas numérique. Tout ce que nous dirons peut être adapté très simplement au cas binaire.

Nous avons vu qu'une image numérique f peut être reconstruite de façon exacte à partir des composantes de son squelette morphologique selon le processus (voir relation 2.12) :

$$f = S_0(f) + \delta_1(S_1(f) + \delta_1(S_2(f) + \delta_1(S_3(f) + ... + \delta_1(S_\lambda(f) + ...))))$$

Une reconstruction partielle de f peut être obtenue si ce processus est effectué à partir de sous-fonctions des $S_\lambda(f)$ (notées $S'_\lambda(f)$).

$$\text{Supposons } \forall\lambda \geq 0, S'_\lambda(f) \leq S_\lambda(f) \text{ , alors :}$$

$$f' = S'_0(f) + \delta_1(S'_1(f) + \delta_1(S'_2(f) + \delta_1(S'_3(f) + ... + \delta_1(S'_\lambda(f) + ...)))) \leq f \tag{2.16}$$

Bien entendu, cela vaut également si l'on considère les composantes $D_\lambda(f)$ définies par Maragos (définition 2.6 et relation 2.15) :

$$\text{Supposons } \forall\lambda \geq 0, D'_\lambda(f) \leq D_\lambda(f) \text{ , alors : } f' = \bigvee_{\lambda\geq 0} \delta_\lambda(D'_\lambda(f)) \leq f \tag{2.17}$$

En fait, la notion de squelette permet d'établir un principe général de filtrage que nous appelons *filtrage par décomposition morphologique* [91, 94] qui consiste en trois étapes :

1. Décomposition de l'image : calcul des résidus du squelette $S_\lambda(f)$ ou $D_\lambda(f)$

2. Filtrage des résidus de la décomposition : calcul des $S'_\lambda(f)$ ou des $D'_\lambda(f)$

3. Reconstruction partielle de l'image à partir des résidus filtrés : calcul de f'

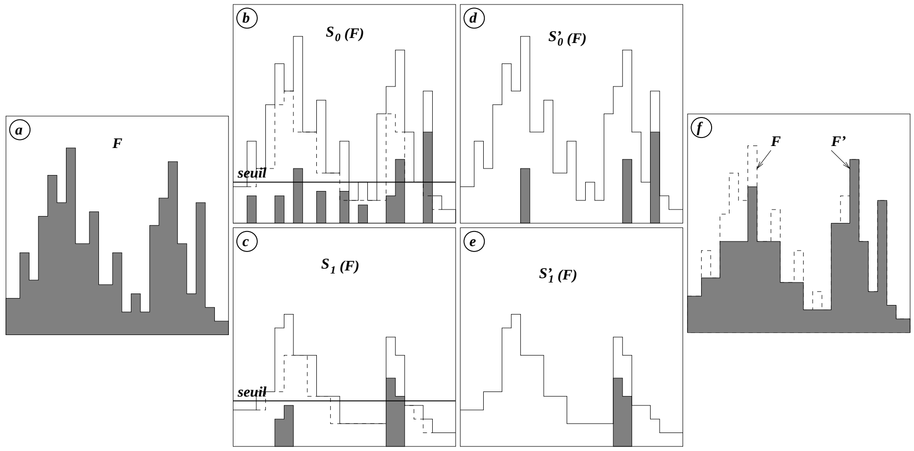


Figure 2.11: Décomposition (b,c) filtrage par seuillage (d,e) et reconstruction partielle (f)

Nous n'avons imposé jusqu'ici aucune condition sur le filtrage des résidus. Dans la pratique cependant, il ne sera bien souvent pas nécessaire de traiter tous les résidus de la décomposition mais seulement ceux significatifs dans le contexte de l'étude : on se restreindra aux premiers résidus si l'on s'intéresse aux structures de petite taille par exemple. Dans ce cas, il n'est pas utile de calculer l'ensemble des résidus :

$$f = S_0(f) + \delta_1(S_1(f) + \delta_1(... + \delta_1(\epsilon_{\lambda+1}(f)))) \quad \text{ou} \quad f = (\bigvee_{0\leq\lambda\leq n} \delta_\lambda(D_\lambda(f))\ ) \vee \gamma_{\lambda+1}(f)$$
$$f = S'_0(f) + \delta_1(S'_1(f) + \delta_1(... + \delta_1(\epsilon_{\lambda+1}(f)))) \quad \text{ou} \quad f' = (\bigvee_{0\leq\lambda\leq n} \delta_\lambda(D'_\lambda(f))\ ) \vee \gamma_{\lambda+1}(f)$$

Le nombre de résidus du squelette considérés est déterminé par la taille maximale des structures à étudier. Les structures de plus grande taille ne seront pas affectées par le filtrage. C'est d'ailleurs de cette façon que sont définis la plupart des filtres morphologiques : la taille d'une ouverture par exemple est définie selon la taille maximale des structures à éliminer.

Remarquons que le filtre ainsi défini est anti-extensif $f' \leq f$ et agit donc sur les structures claires de l'image (voir figure 2.11). La transformation duale peut être obtenue en considérant le squelette par fermetures ou bien en appliquant le même processus à l'image inversée (et en inversant le résultat).

Nous avons résumé figures 2.12 et 2.13 les algorithmes de filtrage par décomposition selon que l'on adopte l'une ou l'autre des deux définitions du squelette : squelette morphologique ou squelette de Maragos. Dans le premier cas, le processus de reconstruction est effectué pas à pas et ne peut commencer que lorsque l'étape de filtrage est entièrement terminée. Dans le second cas, les étapes de décomposition, de filtrage et de reconstruction peuvent s'effectuer en parallèle, ce qui présente de grands avantages : notamment, il n'est plus nécessaire, contrairement au cas précédent, de stocker l'ensemble des résidus. Ils sont entièrement traités les uns après les autres. De plus, ce principe de reconstruction est très intéressant du point de vue de l'interprétation : les images $\delta_\lambda(D_\lambda(f))$ correspondent en effet aux structures de taille λ telles qu'elles apparaissent sur l'image originale. Ici, l'image est vue comme la superposition de sous-images correspondant chacune aux structures d'une taille donnée.

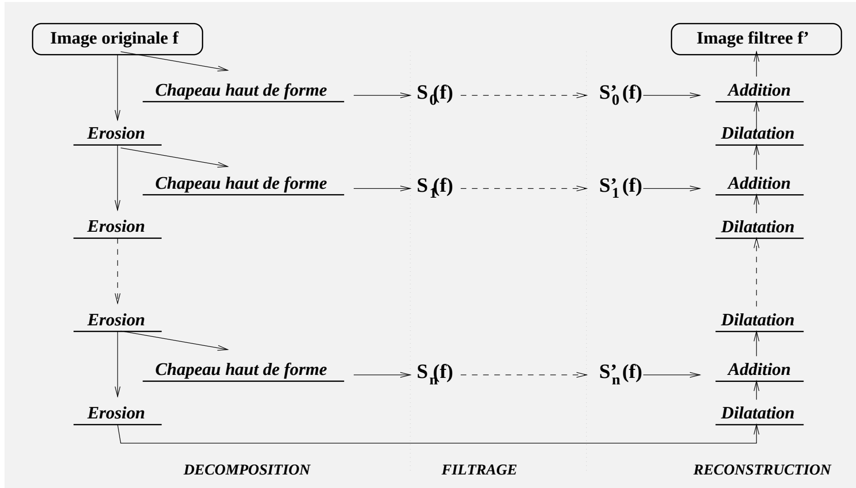


Figure 2.12: Algorithme de décomposition / Filtrage / Reconstruction - Première méthode

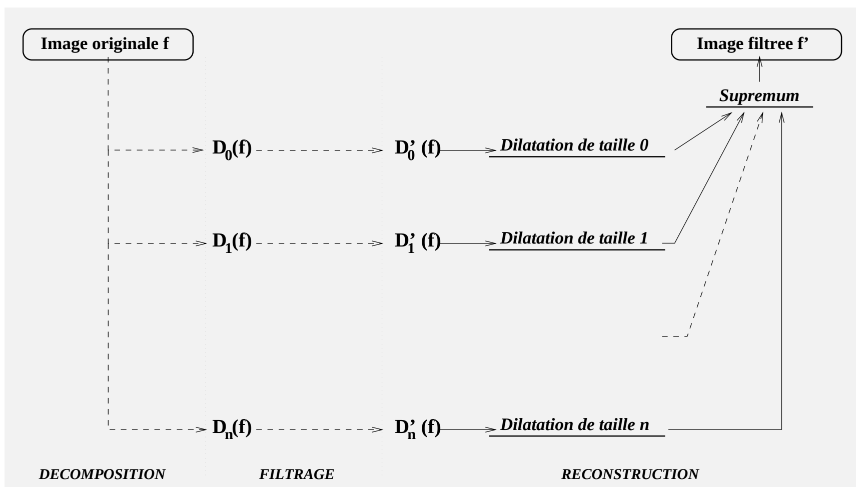


Figure 2.13: Algorithme de décomposition / Filtrage / Reconstruction - Deuxième méthode

Par contre, il sera bien souvent plus intéressant d'étudier les composantes du squelette morphologiques (les $S_n(f)$) plutôt que celles du squelette de Maragos. En effet, nous avons vu que le squelette morphologique considère les chapeaux haut-de-forme des érodés successifs de l'image : les composantes $S_\lambda(f)$ contiennent donc une information relative au contraste des objets par rapport au fond de l'image dans leur voisinage. L'intérêt de choisir cette définition est donc de s'assurer d'une certaine robustesse vis-à-vis des variations d'intensité qui peuvent exister de part et d'autre d'une image, ce qui n'est pas le cas si la définition de Maragos est choisie.

On peut penser concilier les avantages de chacune des deux définitions en filtrant les composantes S_λ puis en effectuant la reconstruction selon l'algorithme de Maragos. Pour cela, on utilise la relation 2.14 et, connaissant les composantes filtrées $S'_\lambda(f)$, on pose :

$$D'_\lambda(f) = Ind(S'_\lambda(f)) \times \epsilon_\lambda(f)$$

Nous reprenons l'exemple de la figure 2.11 pour illustrer comment le résultat du filtrage est modifé lorsque la reconstruction est effectuée à partir des composantes D'_λ : il peut y avoir un rehaussement artificiel du contraste relatif des structures reconstruites (voir figure 2.14).

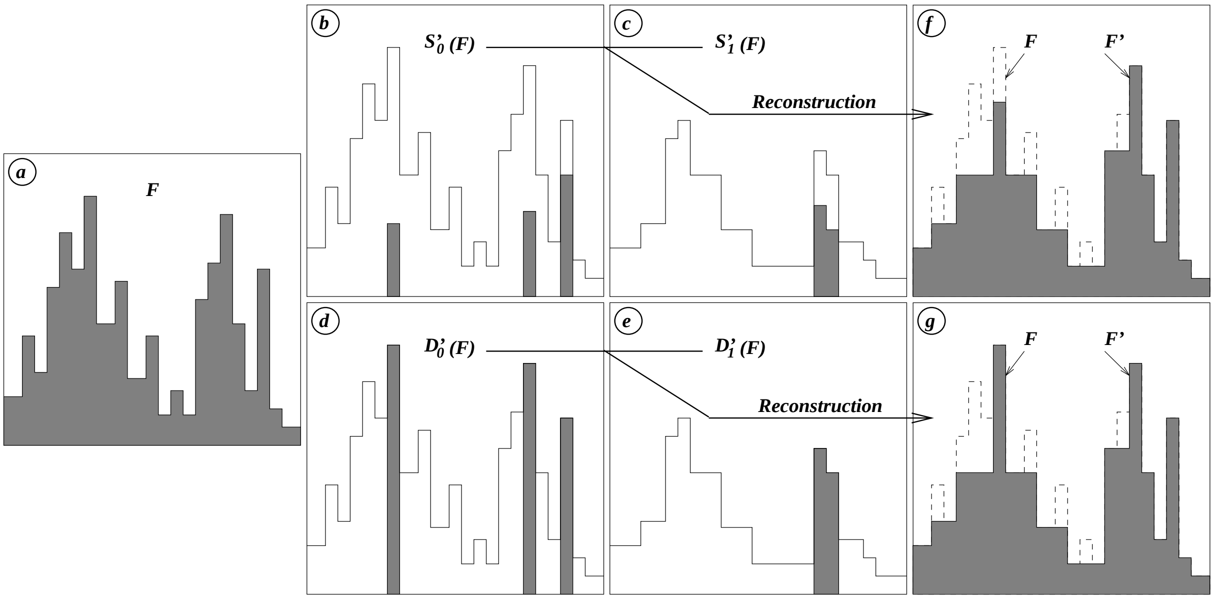


Figure 2.14: Influence du choix des composantes sur le résultat du filtrage

La figure 2.15 fournit une illustration de la technique de filtrage que nous venons de définir. A est l'image originale. Le filtrage par décomposition utilisé considère les 4 premiers résidus du squelette morphologique ($S_0(f)$, $S_1(f)$, $S_2(f)$ et $S_3(f)$) et l'algorithme de reconstruction utilisé est celui de Maragos. Les résidus filtrés sont obtenus par un seuillage, c'est-à-dire que le critère de filtrage est le contraste :

$$S'_i(f)(x) = \begin{cases} S_i(f)(x) & \text{si } S_i(f)(x) \geq s_i \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Les seuils s_i sont choisis de moins en moins sélectifs : $s_0 = 20$, $s_1 = 15$, $s_2 = 10$, $s_3 = 5$. Le résultat du filtrage est l'image B. L'image C est obtenue en appliquant le même filtre par décomposition à l'image B inversée (puis en inversant le résultat).

Les image D et E ont été obtenues en appliquant respectivement un filtre alterné séquentiel de taille 3 et un filtre médian de taille 3 à l'image originale A. Cet exemple illustre bien l'originalité du filtrage par décomposition : ce type d'approche permet un traitement plus fin des structures de l'image, qui sont examinées taille par taille. Ici, une struture de grande taille peut très bien être éliminée si son contraste est faible alors qu'une structure plus petite mais de plus grand contraste sera préservée (les détails dans les plumes du chapeau par exemple). Ce type d'approche ne peut être effectué par les filtres morphologiques classiques : les ouvertures par exemple agissent uniquement sur un critère de taille ou de forme. Citons tout de même, le *filtre gommette* qui, bien que faisant appel à un tout autre principe, permet également un filtrage plus fin que l'ouverture et tenant compte de la notion de contraste : voir le paragraphe B.4 de l'annexe B.

Figure 2.15: Exemple de filtrage par décomposition morphologique sur l'image "Lena" (seuillage des résidus de la décomposition). A : image originale. B : filtrage par décomposition morphologique des structures claires (seuillage des 4 premiers résidus du squelette morphologique). C : filtrage par décomposition morphologique des structures sombres (on applique la transformation duale sur B). Comparaison avec le filtre alterné séquentiel de taille 3 (D) et le filtre médian de taille 3 (E).

Application à l'extraction de structures linéaires

Nous illustrons notre propos par un problème concret à résoudre par analyse d'image : celui de l'extraction de structures (localement) rectilignes sur des images complexes, problème fréquemment rencontré en étude microscopique de matériaux [86]. L'image de la figure 2.16 a été obtenue par analyse microscopique d'un amas de fils. Les structures à détecter sont des fibres localement rectilignes de largeur variable, pouvant se chevaucher et zigzaguer.

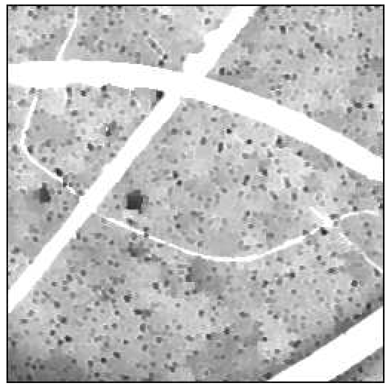


Figure 2.16: Image originale "Fibres"

Les algorithmes classiques d'extraction d'éléments rectilignes utilisent soit un changement de représentation (algorithmes dérivés de la transformation de Hough), soit des filtres contenant l'information directionnelle (filtres directionnels de Granlund [18], filtres morphologiques directionnels [82, 89]), soit une approche par connexion d'éléments rectilignes ([34], [55], [20]). La méthode que nous présentons utilise des transformations directionnelles linéaires et non-linéaires agissant sur les composantes du squelette de l'image. Elle nécessite peu de connaissance a priori sur l'image et est particulièrement robuste au bruit.

Nous donnons figure 2.17 les premiers résidus de la décomposition (les $S_\lambda(f)$). Nous avons utilisé un élément structurant carré 8-connexe de taille 2 (5×5 pixels). La présence

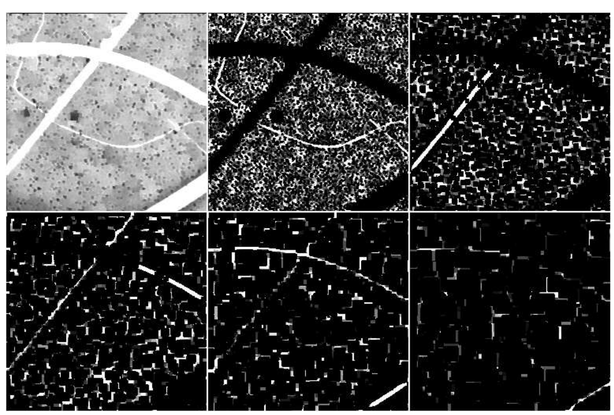


Figure 2.17: Image originale "Fibres" et premiers résidus de la décomposition

de bruit de forte amplitude rend la détection des traces des fibres les plus fines extrêmement délicate.

Pour détecter les structures rectilignes sur les images issues de la décomposition, nous allons d'abord en établir un “prototype”. Sur les images résidus, la linéarité des structures n'est pas évidente, même si visuellement elle ne fait aucun doute. En fait, les éléments rectilignes correspondent à un ensemble de pixels localement rectilignes (pouvant être approximés par des segments de droite) dont les intensités peuvent varier de façon importante. Nous modéliserons les variations en niveau de gris le long de ces structures par des discontinuités locales dont on supposera la taille faible devant la longueur totale de l'élément rectiligne (figure 2.18).

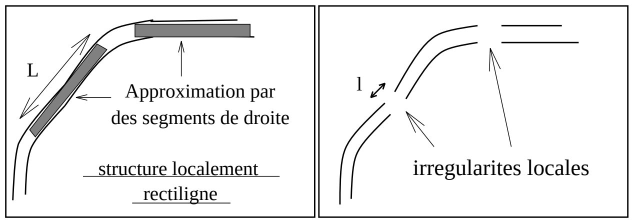


Figure 2.18: Modélisation des éléments rectilignes

Nous voyons apparaître deux paramètres : celui lié à la taille des segments approximant les éléments rectilignes et celui lié à la taille des irrégularités locales. A cause du bruit et du fait que les petites structures ont des rayons de courbure supérieurs à ceux des grosses structures, ces paramètres varient selon le niveau hiérarchique du résidu considéré (figure 2.17).

Pour extraire l'information directionnelle d'une image, l'élément structurant utilisé doit être défini de manière à contenir également cette information directionnelle. L'élément structurant optimal pour extraire les éléments rectilignes de direction iest un segment de direction i variable. La détection se fera donc direction par direction et i devra parcourir l'ensemble des orientations du plan.

Si les structures étaient régulières (absence de bruit), alors leur extraction pourrait être réalisée grâce à de simples ouvertures linéaires. Ce n'est pas le cas ici. Il est donc nécessaire de procéder à certains prétraitements avant d'effectuer ces ouvertures linéaires.

L'algorithme de détection que nous proposons comporte trois étapes. Chacune de ces étapes tente de reproduire sous forme algorithmique l'analyse effectuée visuellement : l'œil néglige les irrégularités locales au profit de la tendance générale.

Nous allons travailler direction par direction. La première étape consiste donc à *extraire l'information directionnelle* et ceci pour chaque direction du plan. Les images résidus ont été obtenues en effectuant des chapeaux haut de forme avec un élément structurant de taille fixe b (taille de l'élément structurant B utilisé dans la décomposition). Toutes les structures sur les images résidus sont donc caractérisées par un critère de taille connu : dans au moins une direction, leur largeur est strictement inférieure à b. Nous supposerons que les structures rectilignes recherchées sont constituées de petits éléments rectilignes de longueur (taille dans une autre direction) supérieure à b.

Pour réduire l'information contenue sur les images résidus aux seules structures rectilignes de direction i, nous effectuons une ouverture dans la direction i de taille supérieure à b. Les structures étant hachées (discontinuités locales), il est préférable de choisir la taille de l'ouverture faible (pratiquement, on la choisit égale à b) (cf. figure 2.19). Cette opération permet de compenser le fait que les images résidus sont issues de transformations non-directionnelles.

En parcourant l'ensemble des directions du plan, nous obtenons une famille de sous-fonctions des résidus, chacune de ces sous-fonctions privilégiant l'information liée à une direction donnée (voir figure 2.19).

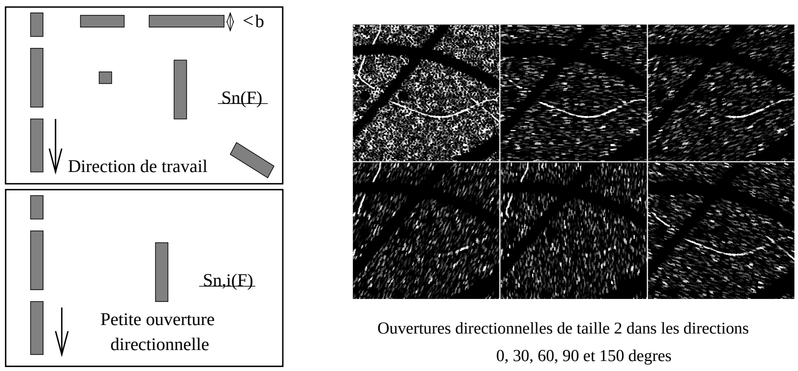


Figure 2.19: Extraction de l'information directionnelle

Dans un deuxième temps, l'information directionnelle ayant été extraite, il est nécessaire d'effectuer un *renforcement de l'information directionnelle* pour compenser les irrégularités locales. Nous proposons d'effectuer une moyenne directionnelle sur un segment de taille adaptée à la taille des irrégularités locales (figure 2.20).

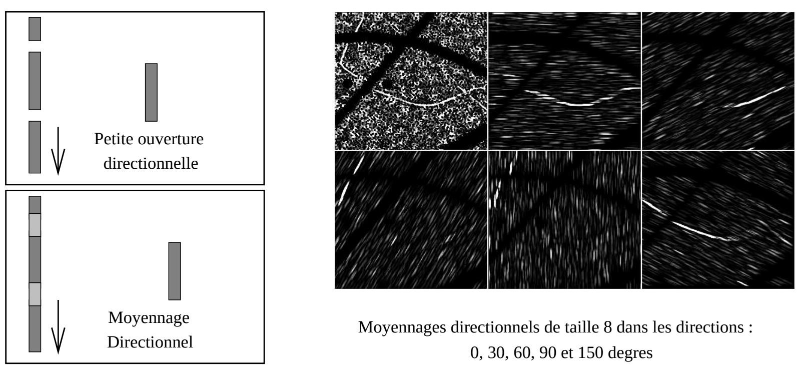


Figure 2.20: Renforcement de l'information directionnelle

Ce moyennage directionnel permet de connecter les structures rectilignes de direction i présentant des discontinuités. Elle a également des effets indésirables : elle modifie totalement les profils en niveaux de gris de nos images et engendre un étalement des structures dans la direction i (amplification du bruit) : voir figure 2.20. D'autres opérateurs peuvent se révéler mieux adaptés pour effectuer cette étape de connexion. Citons les filtres de rang (une fermeture ou encore un filtre médian) ou bien encore l'utilisation d'une moyenne pondérée.

A ce stade de l'algorithme, nous nous sommes ramenés à un problème de détection de segments de droites d'une certaine longueur L. L'*extraction des éléments rectilignes* est effectué par une ouverture directionnelle de direction i et de taille L (figure 2.21). L'image finale des marqueurs des structures rectilignes est obtenue en regroupant les informations extraites pour chaque direction (supremum) puis en seuillant le résultat (figure 2.22).

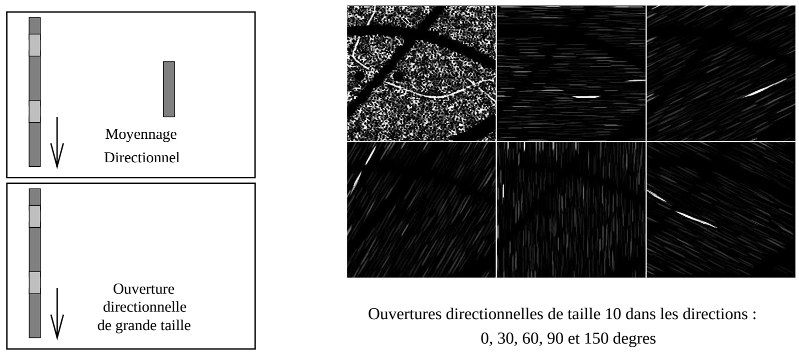


Figure 2.21: Extraction des éléments rectilignes de direction i

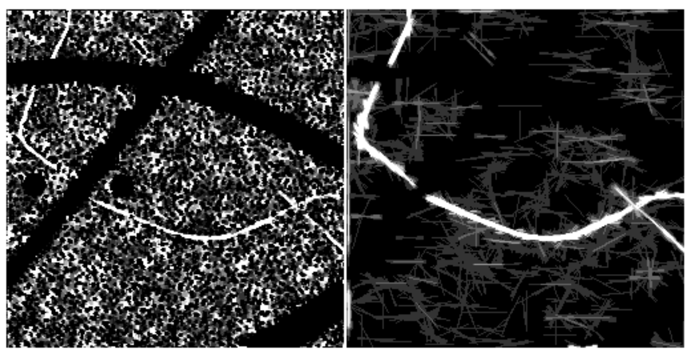


Figure 2.22: Regroupement des résultats obtenus dans chaque direction du plan (32 directions).

Remarquons que le nombre de directions i à explorer est lié à la taille de la transformation effectuée : si $2l + 1$ est la taille de l'élément structurant, le nombre de directions à explorer est de l'ordre de $\pi \times l$.

Il est également à noter que dans le cas où le rapport signal sur bruit est suffisamment grand, et que les structures rectilignes ne présentent aucune irrégularité, l'algorithme de détection peut être réduit à des ouvertures directionnelles.

Sur cet exemple, il est particulièrement intéressant de reconstruire taille par taille les structures rectilignes. En effet, un tel traitement a pour but la segmentation des fibres en vue d'effectuer sur elles des mesures, afin d'évaluer la qualité du matériau [86]. Un processus de reconstruction taille par taille est donc particulièrement bien adapté à ce type de problème puisqu'il permet de lier directement les mesures effectuées à la taille des structures étudiées. L'algorithme de reconstruction, basé sur la définition de Maragos (voir figure 2.13), est donc le mieux adapté à notre étude. Ce processus présente en outre l'avantage, comme nous l'avons indiqué, d'un traitement "parallèle" des résidus

: il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des résidus pour entamer le processus de reconstruction. Cet aspect est d'importance si un grand nombre de résidus est étudié pour prévenir des problèmes d'encombrement de mémoire (il n'est pas nécessaire de stocker les résultats obtenus pour chaque résidu).

La figure 2.23 résume l'algorithme général d'extraction des structures rectilignes de l'image. Nous voyons qu'un autre intérêt de cet algorithme par décomposition est de permettre la segmentation des fibres lorsqu'elles se chevauchent. Par contre, les niveaux de gris le long des fibres n'étant pas uniformes, certaines fibres peuvent être présentes sur plusieurs résidus.

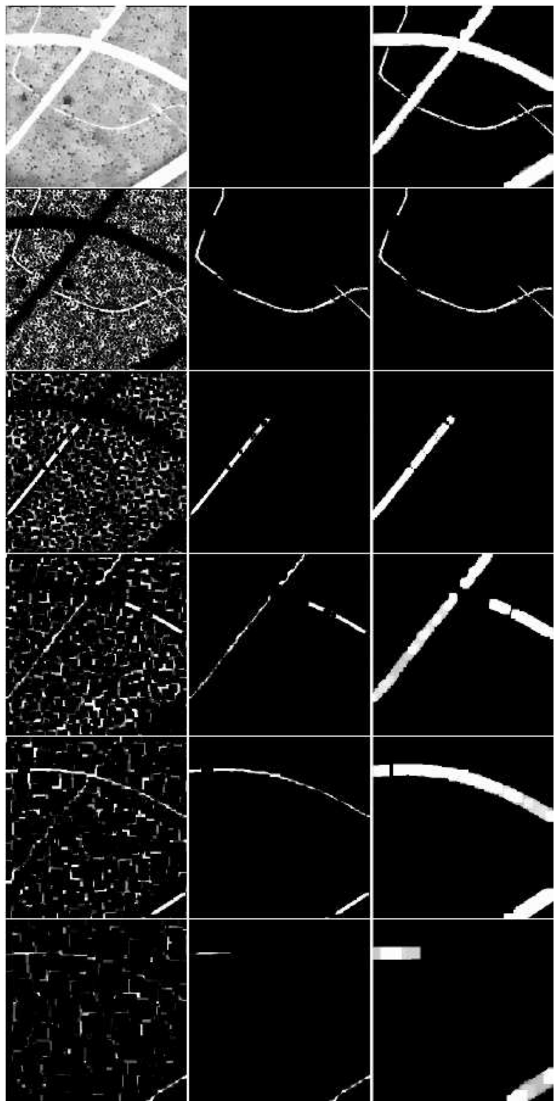


Figure 2.23: Extraction de structures rectilignes par décomposition, filtrage, reconstruction. Colonne de gauche : image originale et premiers résidus du squelette. Colonne centrale : image binaire des structures rectilignes. Colonne de droite : reconstruction des structures rectilignes taille par taille (résultat final en haut à droite)

Efficacité et limites de la méthode

L'algorithme d'extraction de structures rectilignes que nous venons de décrire doit, pour une bonne part, son efficacité au principe de décomposition utilisé qui permet de se ramener au cas où les structures recherchées sont de taille unitaire.

Cependant le principe de décomposition utilisé situe dans le même temps les limites de l'algorithme. En effet, une irrégularité non significative sur l'image originale peut se transformer, au niveau du résidu, en une discontinuité notable : voir figure 2.24. Ce phénomène est dû aux érosions successives appliquées à l'image (les résidus sont définis comme les chapeaux haut de forme des érodés successifs de l'image). En effet, une érosion de taille n dilate les pores de l'image d'une taille n. Cette distorsion est donc d'autant plus importante que n est grand, c'est-à-dire pour les résidus de haut niveau. L'algorithme n'est donc pas bien adapté à l'extraction des structures les plus larges.

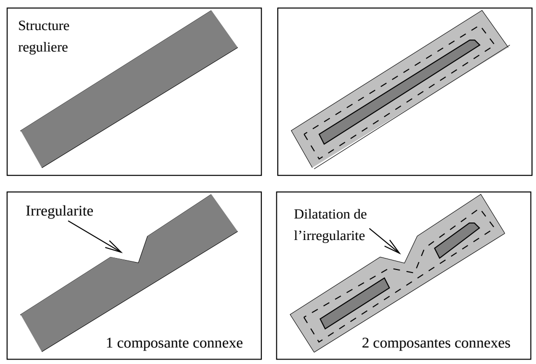


Figure 2.24: Effet d'amplification des irrégularités locales

D'autre part, le fait de travailler sur des primitives de taille fine accentue le problème du nombre de directions à explorer : en effet, plus une structure est fine, plus l'information directionnelle est définie de manière précise. De plus larges structures supportent une plus grande imprécision (voir figure 2.25). Le fait de recourir à une décomposition morphologique des larges structures impose donc de travailler avec un plus grand nombre de directions que si le traitement était effectué directement sur l'image originale.

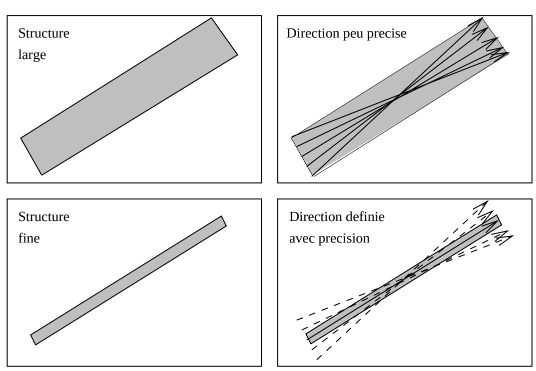


Figure 2.25: Lien entre la taille des structures rectilignes et la précision de la mesure de direction

2.2.4 Granulométries et connexité

L'originalité du point de vue de l'analyse granulométrique est de définir une méthode générale permettant d'extraire les caractéristiques d'une image sans qu'il soit nécessaire d'introduire la notion de particule ou de structure. Cette caractéristique est bien illustrée dans l'exemple "Fibres" que nous venons de présenter. A l'inverse des opérations usuelles de tamisage, qui ne peuvent s'appliquer à des milieux continus, la granulométrie n'est pas associée à la notion de composante connexe.

La notion de connexité est cependant très importante en analyse d'image : elle permet d'introduire dans le cas binaire une définition simple de la notion de particule ou d'objet (voir section B.1.1). Dans certaines applications, il peut être intéressant d'utiliser des transformations granulométriques compatibles avec la notion de connexité. Les granulométries satisfaisant ces propriétés sont les granulométries par reconstruction, c'est-à-dire basées sur des transformations par reconstruction, par exemple les ouvertures par reconstruction γ_λ^{rec} (voir section B.3) :

$$\gamma_\lambda^{rec}(f) = \delta^\infty(f, \gamma_\lambda(f)) = \delta^\infty(f, \epsilon_\lambda(f)) \tag{2.18}$$

Alors qu'une ouverture morphologique peut scinder une composante connexe en plusieurs composantes connexes, les ouvertures par reconstruction soit préservent la particule connexe intégralement, soit l'éliminent intégralement (voir figure 2.26). Les exemples des figures 2.27 et 2.28 mettent en évidence les bonnes propriétés des granulométries par reconstruction vis-à-vis des structures de l'image.

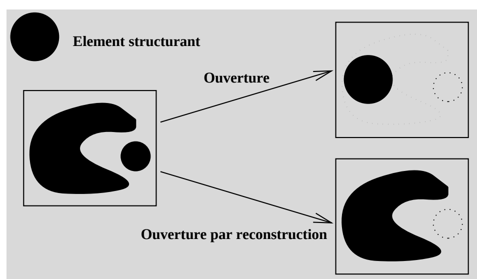


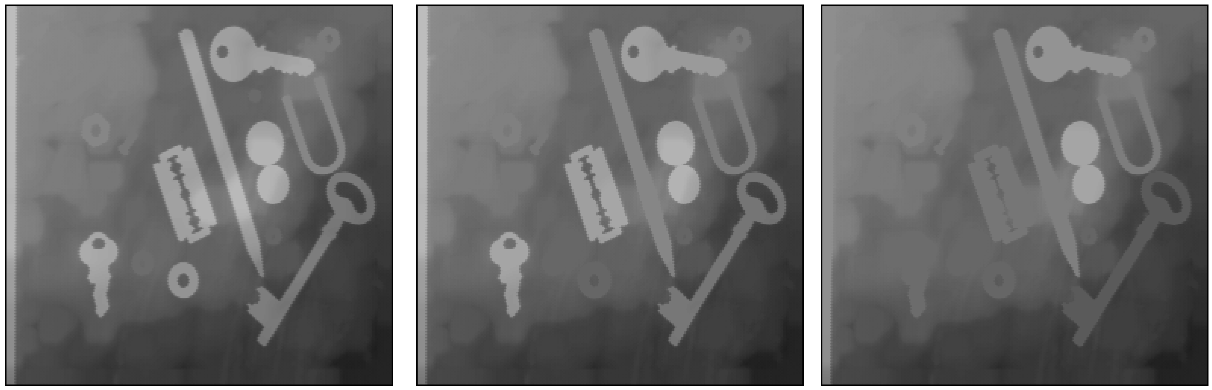
Figure 2.26: Comparaison de l'ouverture et de l'ouverture par reconstruction

Considérons une granulométrie par ouvertures par reconstruction. La fonction granulométrique d'une image binaire attribue une valeur unique à chaque composante connexe X de l'image : voir figure 2.29. Cette valeur g_X correspond à la taille maximale de l'ouverture qu'il est possible de calculer sans que la particule connexe soit éliminée : la taille de l'*ouverture ultime* [82] associée à X.

$$\text{si } X \text{ est connexe, } g_X \begin{aligned} &= sup\{\lambda \geq 0 \mid \gamma_\lambda^{rec}(X) \neq \emptyset\} \\ &= sup\{\lambda \geq 0 \mid \gamma_\lambda(X) \neq \emptyset\} \\ &= sup\{\lambda \geq 0 \mid \epsilon_\lambda(X) \neq \emptyset\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

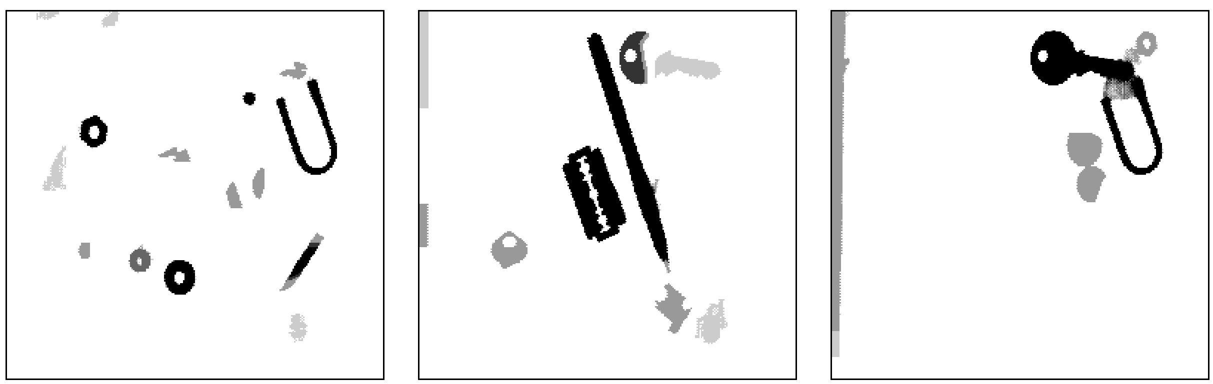
L'équivalence de ces trois définitions se déduit de manière triviale de la définition 2.18.

Nous avons vu que les fonctions granulométriques sont définies pour les fonctions binaires. De même, la notion d'ouverture ultime qui lui est liée est définie relativement à des ensembles. Nous proposons dans la deuxième partie de cette thèse une généralisation de ces notions au cas des fonctions numériques.



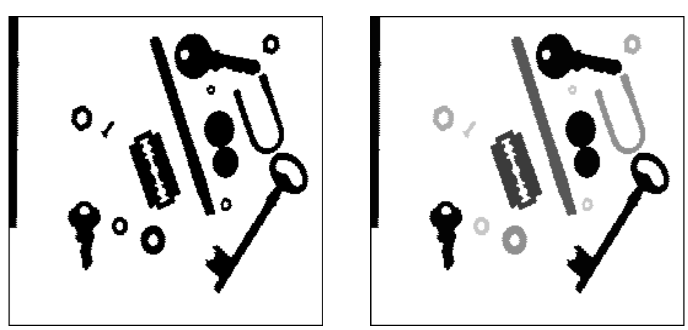
a- ouverture par rec. de taille 3 b- ouverture par rec. de taille 6 c- ouverture par rec. de taille 10

Figure 2.27: Granulométrie par ouvertures par reconstruction de l'image Tools



a- residu de niveau 3 b- residu de niveau 6 c- residu de niveau 10

Figure 2.28: Résidus de la granulométrie par ouvertures par reconstruction de l'image Tools



a- image originale binaire b- fonction granulometrique associee

Figure 2.29: Fonction granulométrique dans le cas d'ouvertures par reconstruction

2.3 L'approche par extrema

Nous avons vu qu'une particularité importante des approches granulométriques est qu'elles sont indépendantes d'une quelconque définition de la notion de particule ou de structure. Les granulométries par reconstruction sont les seules à être directement liées à la notion de connexité donc de particule.

Dans de nombreux problèmes d'analyse d'image et particulièrement dans les problèmes de segmentation d'image, la question de l'extraction de caractéristiques se pose non pas en termes de mesures quantitatives sur les images mais en termes de mesures qualitatives au niveau des structures présentes sur l'image. C'est la question incontournable dans les problèmes de segmentation : quelles sont les structures ou régions pertinentes de l'image ? Dans le cas binaire, ce problème trouve généralement des solutions simples, la notion de particule pouvant se définir par la notion de connexité (et lorsque ce n'est pas le cas, des transformations telles que l'érodé ultime permettent de se ramener simplement à ce cas). Dans le cas numérique, la notion de structure est plus complexe à définir que dans le cas binaire. Une solution classique consiste à considérer les extrema de l'image comme des marqueurs des structures ou régions de l'image.

Considérons une fonction numérique $f : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$. Le graphe de f peut être considéré comme un relief topographique. Ce type de représentation est couramment utilisé en morphologie mathématique, particulièrement lorsqu'il s'agit de passer de la définition formelle d'une transformation à sa définition algorithmique. Les structures claires de l'image correspondent aux pics du relief et les structures sombres aux vallées. Les *maxima régionaux* de f sont les sommets de la surface topographique : ils marquent donc les structures claires de l'image. Les *minima régionaux* sont situés au fond des vallées et marquent les structures sombres de l'image (cf. figure 2.30). Examinons ces notions plus en détail [39, 41, 40, 83].

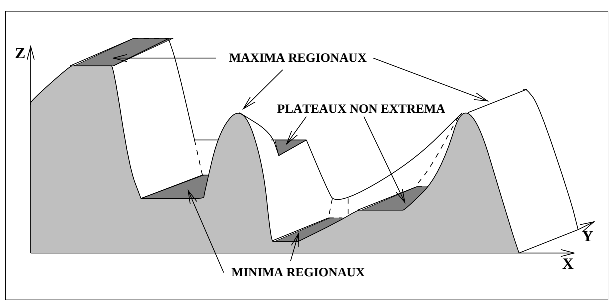


Figure 2.30: Extrema d'une image numérique

Définition 2.7 (Plateau) *Le plateau d'une fonction $f : E \subset \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$ au point x noté $Plt_x(f)$ est la plus large composante connexe de f contenant x et d'altitude constante égale à $f(x)$:*

$$Plt_x(f) = C_x(\{y \in E \mid f(y) = f(x)\}) \tag{2.20}$$

Nous rappelons que C_x désigne l'ouverture connexe ponctuelle qui extrait de tout ensemble la composante connexe contenant x.

On distingue trois types de plateaux : les maxima régionaux, les minima régionaux et les plateaux non-extrema.

Définition 2.8 (Maxima et minima régionaux) *Un maximum (respectivement minimum) régional M d'une image f est un plateau sans voisin plus haut (respectivement sans voisin plus bas).*

2.3.1 Extraction des extrema d'une image numérique

Les notions de maximum et de minimum régionaux ne sont pas locales : dans le cas général, on ne peut pas décider si un pixel p appartient à un extremum simplement en examinant les pixels voisins de p. Il faut parcourir l'ensemble du plateau contenant p. C'est pourquoi on parle généralement de *maximum régional* et de *minimum régional*.

Si l'on considère les seuils de f, un maximum d'altitude h de cette fonction sera une composante connexe du seuil $X_h^+(f) = \left\{x \in \mathbf{Z}^2, f(x) \geq h\right\}$ ne contenant aucune composante connexe de tout seuil $X_s^+(f)$ où $s > h$. Enfin, d'après la définition 2.8, un maximum régional M de f d'altitude h, satisfait :

$$\forall h' > h, X_{h'}^+(f) \cap M = \emptyset$$

Les maxima d'altitude h de f sont donc les composantes de $X_h^+(f)$ non reconstruites par $X_{h+1}^+(f)$, soit encore, les composantes de $X_h^+(f)$ non reconstruites par $X_h^+(f-1)$.

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{M}ax(f)$ (respectivement $\mathcal{M}in(f)$) désignera l'ensemble des maxima régionaux (respectivement minima régionaux) de f. Pour extraire les maxima régionaux de f, il suffit donc d'effectuer une reconstruction de f par dilatation géodésique de $(f-1)$ sous f (voir section B.3), de soustraire le résultat de f et de considérer les ensembles connexes de pixels strictement positifs [2] :

$$\mathcal{M}ax(f) = X_1^+\left(f - \delta^\infty(f, f-1)\right) \tag{2.21}$$

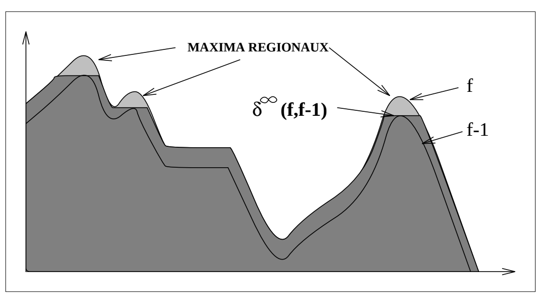


Figure 2.31: Extraction des maxima régionaux par une reconstruction géodésique

L'extraction des minima régionaux de f relève du même procédé appliqué à $(-f)$; on peut également effectuer une reconstruction géodésique par érosion de $(f+1)$ au dessus de f.

$$\mathcal{M}in(f) = X_1^+\left(\epsilon^\infty(f, f+1) - f\right) \tag{2.22}$$

Si les extrema d'une image numérique semblent bien adaptés pour marquer les structures sombres et claires d'une image, dans la pratique, plusieurs difficultés peuvent apparaître :

-**Cas des plateaux non extrema** Dans le cas où les zones plates de l'image sont très étendues, *des plateaux non extrema peuvent correspondre à des régions d'intérêt dans l'image* (voir figure 2.32). En considérant uniquement les extrema de l'image, ces régions échappent à l'analyse.

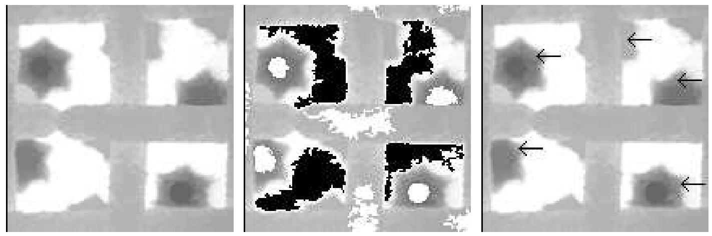


Figure 2.32: Les plateaux non extrema peuvent correspondre à des régions d'intérêt dans l'image (à gauche : image originale ; au centre : extrema régionaux (minima en blanc, maxima en noir) ; à droite : quelques plateaux non extrema)

Une manière de résoudre ce problème peut consister à introduire artificiellement de nouveaux extrema régionaux au niveau des larges plateaux non extrema de l'image. Cette démarche consiste à *compléter le relief* [55] : pour chaque pixel x, le plateau contenant x est extrait (Plt_x), la fonction distance sur ce plateau (composante connexe) est calculée et on associe au pixel x la valeur $f(x)$ plus sa valeur sur la fonction distance (distance de x au bord du plateau) :

$$\forall x \in E, f_c(x) = f(x) + d(x, Fr(Plt_x(f)))$$

Cette opération a pour effet de créer de nouveaux maxima régionaux. Si on soustrait à

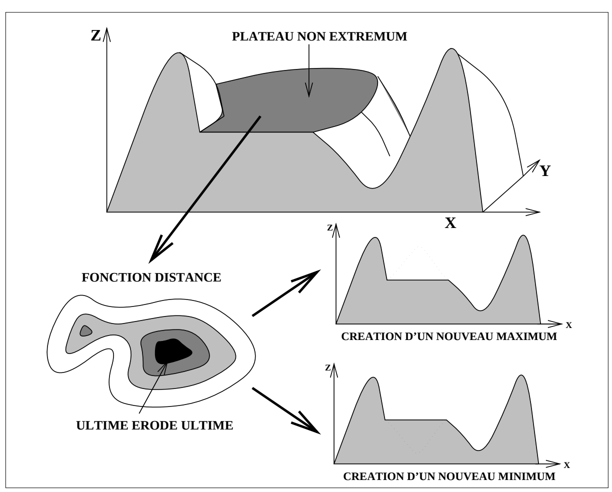


Figure 2.33: On complète le relief à l'aide de la fonction distance

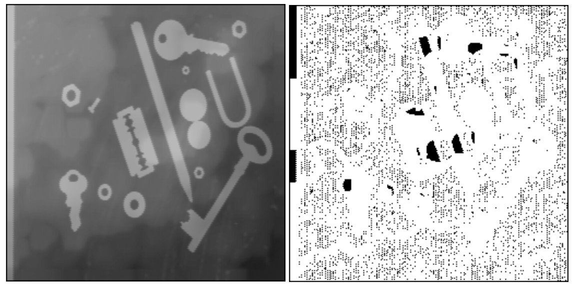


Figure 2.34: Image "tools" et ses maxima régionaux

l'altitude de chaque pixel d'un plateau sa valeur sur la fonction distance, on crée alors de nouveaux minima régionaux (voir figure 2.33).

La plupart des images réelles sont bruitées et ce problème ne se pose pas : chaque région d'intérêt est marquée par au moins un extremum régional. Par contre, le problème inverse apparaît : celui du sur nombre d'extrema régionaux dans l'image (voir figure 2.34).

-**Sensibilité au bruit** La deuxième difficulté est d'ordre pratique : *la notion d'extrema est très sensible au bruit.* Une structure marquée par un seul maximum régional sera marquée par plusieurs extrema si on ajoute du bruit (cf. figure 2.35 et 2.34).

Une solution à ce problème consiste à filtrer l'image de sorte à éliminer les structures (et les extrema correspondants) non significatives : les compositions d'ouvertures et de fermetures par exemple permettent de filtrer les structures de petite taille tout en préservant celles de taille plus importante. Ce point sera repris plus en détail dans ce qui suit.

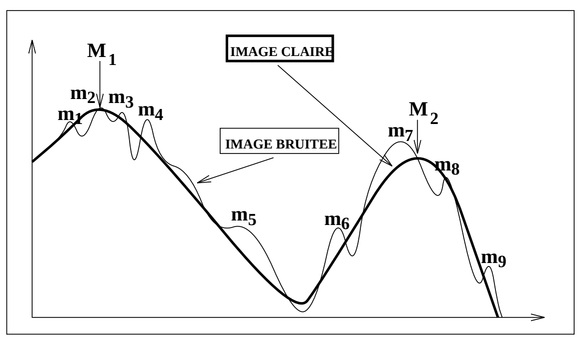


Figure 2.35: Influence du bruit sur les extrema d'une image

-**Relations entre les structures de l'image** Lorsqu'on utilise les extrema de l'image pour marquer les structures ou régions présentes dans l'image, la question qui se pose d'emblée est la suivante : *comment à partir des extrema de l'image mettre en évidence l'aspect hiérarchisé de l'observation ?* (deux petits disques clairs identiques sont inclus dans une régions plus sombre dans l'exemple de la figure 2.36).

Des méthodes structurelles ont été proposées pour résoudre ce problème complexe. Citons notamment les travaux R. W. Ehrich [15] et ceux de P. V. Sankar et A. Rosenfeld [78] basés sur une mise en correspondance des pics des signaux. Nous aurons l'occasion,

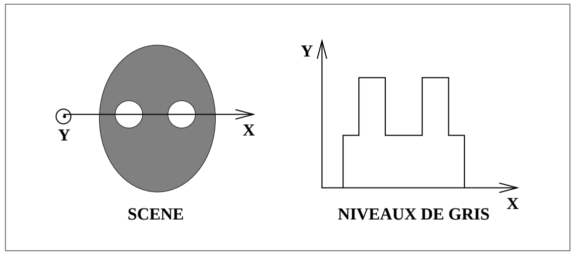


Figure 2.36: Comment extraire les relations hiérarchiques entre les structures d'une image ?

dans la suite de cette thèse, d'approfondir ce point et de décrire plus en détail ces techniques d'analyse.

2.3.2 Extraction des h-extrema

Nous avons vu que les extrema d'une image numérique sont sensibles au bruit. Le résultat de l'extraction des extrema d'une image est souvent un nombre trop grand de composantes qui, pour la plupart, marquent des pics de bruit dans l'image, mais non le contenu structurel de l'image. L'idée des h-extrema [3, 21] est d'utiliser la définition algorithmique des extrema et de la modifier de telle sorte que le résultat de la transformation soit un ensemble de composantes connexes moins important. Une étude détaillée de cette transformation peut être trouvée dans la thèse de M. Grimaud [21].

D'une manière générale, on constate que la reconstruction d'une fonction f par dilatation géodésique de la même fonction translatée $(f - h)$ permet d'extraire les pics de l'image. Cette opération $\delta^{\infty}(f, f-h)$ (que nous appellerons *h-reconstruction)* permet d'introduire la notion de *h-extrema* :

Définition 2.9 (h-extrema [21]) *Les h-extrema d'une fonction numérique f sont les composantes connexes de l'ensemble $\mathcal{M}ax_h(f)$ défini par :*

$$\mathcal{M}ax_h(f) = X_1^+(f - \delta^{\infty}(f, f-h)) \tag{2.23}$$

La figure 2.37 illustre les extrema extraits par cette transformation pour une grande valeur de h. Plus h augmente plus les extrema extraits sont étendus et seuls les extrema à fort contraste persistent.

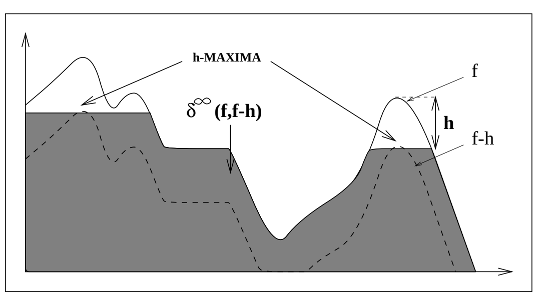
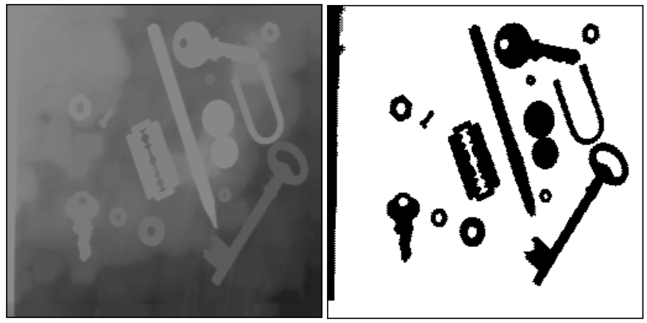


Figure 2.37: Extraction des h-extrema de l'image par reconstruction



a- h-reconstruction   b- h-maxima

Figure 2.38: Extraction des h-extrema de l'image Tools (256 niveaux de gris, $h = 50$)

Enfin, les rh-extrema [80, 79] permettent d'introduire un critère supplémentaire (spatial) de sélection des maxima. Les rh-extrema d'une image numérique f ($\mathcal{M}ax_{r,h}(f)$) sont obtenus en effectuant non plus une reconstruction géodésique (dilatation géodésique de taille infinie) mais en effectuant une dilatation géodésique de taille finie r de f par $(f - h)$ (cf. figure 2.39). Les dômes de faible contraste (paramètre h) ou trop larges (paramètre r) ne sont pas extraits par cette transformation.

$$f_M^h(x) = \begin{cases} f(x) - h & \text{si } x \in \mathcal{M}ax(f) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Y_1 = X_1^+\left(f - \delta^r\left(f, f_M^h\right)\right) \quad Y_2 = X_1^+\left(\delta^r\left(f, f_M^h\right)\right)$$

$$\mathcal{M}ax_{r,h}(f) = Y_1 \setminus \delta^\infty\left(Y_1, Y_2^c\right)$$

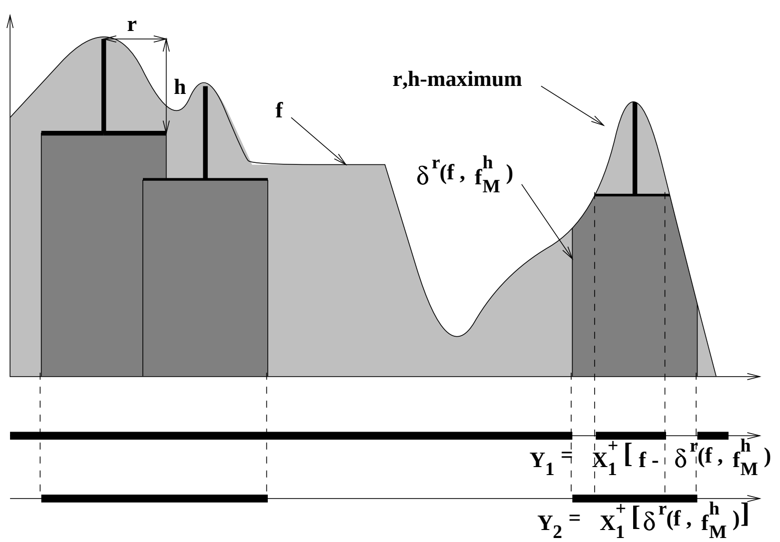


Figure 2.39: Extraction des rh-extrema par une dilatation géodésique de taille finie

Cette transformation présente quelques désavantages. D'une part, il peut arriver que des pixels n'appartenant pas à des maxima soient extraits. Il faut donc ne retenir des composantes connexes extraites que celles contenant un maximum régional de l'image originale. D'autre part, cette transformation est sensible au bruit. Pour cette raison, il est généralement nécessaire de filtrer l'image avant de calculer les rh-maxima, ce qui ajoute un paramètre supplémentaire à l'algorithme. Pour cette raison cette transformation est délicate à mettre en oeuvre et peu utilisée dans la pratique. Pour plus de précision sur ce point on pourra consulter la référence [21].

2.3.3 Valuation des extrema selon leur contraste : la dynamique

Le concept de dynamique a été introduit par M. Grimaud [21, 22] et permet de valuer les extrema (minima ou maxima) d'une image numérique selon leur contraste, ou, plus exactement, selon le contraste des structures qu'ils marquent.

Soit M un maximum régional d'altitude h. M. Grimaud définit la dynamique de M en considérant l'ensemble des chemins $(p_0, p_1, ..., p_n)$ (voir définition B.2 en annexe A) vérifiant : $p_0 \in M$ et $f(p_n) > f(p_0)$, c'est-à-dire les chemins liant M à un point de plus haute altitude. Parmi l'ensemble de tous les chemins satisfaisant cette condition, on choisit celui de plus faible dénivelée, c'est-à-dire tel que la quantité $inf\{f(x), x \in (p_0, p_1, ..., p_n)\}$ soit maximale.

Définition 2.10 (Dynamique [21]) *La dynamique d'un maximum régional M d'une image numérique f est la dénivellation minimale à franchir quand, partant de M, on cherche à atteindre un point de plus haute altitude :*

$$dyn(M) = f(M) \quad - \sup_{\substack{\mathcal{C}=(p_0,p_1,...,p_n) \\ p_0 \in M \ et \ f(p_n)>f(p_0)}} \{ \ inf\{f(x), x \in \mathcal{C}\} \ \}$$

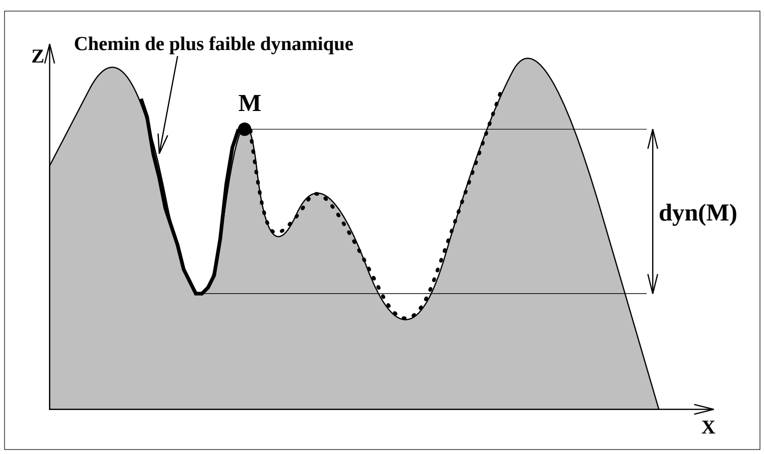
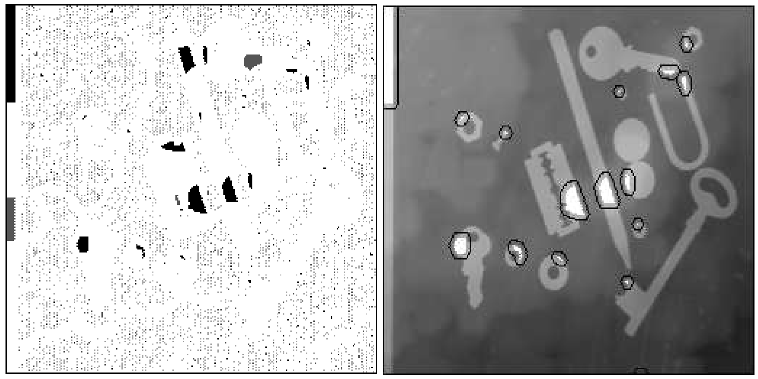


Figure 2.40: Dynamique d'un maximum régional

Comme nous l'avons dit, la dynamique permet de valuer les extrema d'une image numérique selon leur contraste sur l'image, ou plus exactement, selon le contraste des structures qu'ils marquent. La distribution en dynamique d'une image numérique est donc une caractérisation du contraste des structures ou régions présentes sur cette image.



a- dynamique des maxima b- maxima de forte dynamique

Figure 2.41: Maxima régionaux de l'image Tools de forte dynamique (> 50)

La sélection des régions significatives (en termes de contraste) peut alors s'effectuer par un simple seuillage des valeurs de dynamique des extrema (voir figure 2.41). Une caractéristique importante de cette transformation est de ne tenir compte d'aucun critère spatial (forme, taille ...) : sur la figure 2.41 on obtient un marqueur pour la clef ou pour le crayon comme pour les écrous de petite taille.

2.3.4 Relation entre la dynamique et les h-extrema

Comparons sur les figures 2.38 et 2.41 les h-extrema extraits pour une valeur $h = 50$ et les maxima extraits par seuillage de la dynamique avec un seuil de même valeur. Nous remarquons qu'à chaque h-maximum peut être associé un et un seul maximum de dynamique supérieure ou égale à 50. En fait, ces deux notions sont étroitement liées :

Théorème 2.1 ([21]) *Les maxima de dynamique supérieure ou égale à h sont les seuls points d'altitude égale à h dans la fonction $(f - \delta^{\infty}(f, f - h))$.*

La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans la thèse de M. Grimaud [21].

Notons que h est la valeur maximale atteinte par $(f - \delta^{\infty}(f, f - h))$. En effet, dans $\delta^{\infty}(f, f - h)$, la fonction $(f - h)$ est dilatée ; la dilatation est extensive, par conséquent : $\delta^{\infty}(f, f - h) \geq f - h$.

Ce théorème exprime que, pour extraire les maxima de f de dynamique supérieure ou égale à h, il suffit de calculer $(f - \delta^{\infty}(f, f - h))$ puis de seuiller le résultat au niveau h :

$$X_h^+(f - \delta^{\infty}(f, f - h)) = \{M \in \mathcal{M}ax(f) \mid dyn(M) \geq h\} \tag{2.24}$$

La similitude entre cette relation et la définition des h-maxima est immédiate (voir relation 2.23). Ici, le niveau de seuillage est h et non plus 1.

La relation 2.24 peut également s'écrire :

$$dyn(M) = sup\{h \geq 0 \mid M \cap X_h^+(f - \delta^{\infty}(f, f - h)) \neq \emptyset\} \tag{2.25}$$

Cette relation permet une nouvelle interprétation de la dynamique : pour calculer la dynamique d'un maximum M, on calcule $X_h^+(f - \delta^{\infty}(f, f - h))$ pour des valeurs coissantes de h et on retient le niveau h pour lequel M est éliminé dans l'image résultat.

La dynamique peut donc être vue comme une mesure de la persistance des structures de l'image quand on applique des filtres de contraste de plus en plus sélectifs (on calcule $(f - \delta^{\infty}(f, f-h))$ pour des valeurs croissantes de h).

2.4 Discussion

Les méthodes granulométriques et celles basées sur l'étude des extrema de l'image peuvent paraître très dissemblables. Pourtant, elles sont étroitement liées.

Nous avons vu que les granulométries par reconstruction permettent de définir dans le cas binaire une méthode de valuation des composantes connexes d'une image numérique par le biais de la *fonction granulométrique* (relation 2.19). Soit $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des composantes connexes d'une image binaire X :

$$\forall Y \in \mathcal{C}(X), g_X(Y) = sup\{\lambda \geq 0 \mid Y \cap \delta^{\infty}(X, \epsilon_{\lambda}(X)) \neq \emptyset\} \tag{2.26}$$

Chaque composante connexe est valué avec une mesure de sa persistance (le niveau pour lequel elle disparaît) lorsqu'on applique des ouvertures de taille croissante.

La dynamique quant à elle introduit une méthode de valuation des extrema d'une image numérique et nous avons vu le lien qui existe entre cette notion et une famille de reconstructions géodésiques (relation 2.25) :

$$\forall M \in \mathcal{M}ax(f), dyn(M) = sup\{h \geq 0 \mid M \cap X_h^+(f - \delta^{\infty}(f, f-h)) \neq \emptyset\} \tag{2.27}$$

Chaque maximum est valué avec une mesure de sa persistance (le niveau pour lequel il disparaît) lorsqu'on applique des filtres de contraste de taille croissante.

Les similitudes entre les relations 2.26 et 2.27 montrent que les fontions granulométriques binaires et la dynamique fonctionnent selon un même principe : on mesure la persistance des structures ou des particules de l'image lorsqu'on applique des filtres de taille croissante. Alors que les fonctions granulométriques usuelles valuent les particules binaires selon un critère spatial (taille et/ou forme), la dynamique value les extrema d'une image numérique (et donc les structures de l'image qu'ils marquent) selon un critère de contraste et indépendamment de leur taille ou de leur forme.

Dans la pratique, la dynamique est une transformation très utile lorsque l'on cherche à extraire les extrema significatifs d'une image (par exemple dans les problèmes de segmentation). Une de ses caractéristiques est de ne dépendre d'aucune considération de taille ou de forme. Cet avantage devient pourtant un inconvénient dès lors qu'une caractérisation spatiale des structures doit être prise en considération. Une manière de résoudre ce problème consiste généralement à associer à la dynamique un filtrage spatial de l'image, par des ouvertures morphologiques par exemple.

La question qui se pose alors est : est-il possible de valuer les extrema d'une image numérique selon un critère spatial (de taille ou de forme) selon le modèle des granulométries par ouvertures binaires ?

Chapitre 3

Des fonctions d'extinction numériques

La plupart des transformations morphologiques ont d'abord été introduites pour les ensembles binaires puis étendues aux fonctions numériques. Un exemple bien connu est celui de la ligne de partage des eaux définie comme une extension de la notion de SKIZ binaire [82, 2].

Aujourd'hui encore certains outils binaires n'ont pas d'équivalent en morphologie numérique. C'est le cas par exemple de l'ensemble des outils disponibles pour caractériser des particules binaires (les mesures de surface, de forme...). De ce fait, on aborde généralement ce type de problème en morphologie numérique en se ramenant au cas binaire que l'on sait résoudre par un seuillage, une segmentation de l'image... Une telle démarche s'accompagne inévitablement d'une perte d'information et est de plus généralement assez complexe et peu systématique : des prétraitements paramétriques sont souvent nécessaires. La question qui se pose alors est : est-il possible d'étendre au cas numérique la démarche réalisée dans le cas binaire ? C'est de cette question que traite le présent chapitre. Nous proposons ici de nouveaux opérateurs morphologiques, *les fonctions d'extinction numériques*, définis comme une extension des fonctions de type granulométrique déjà connues en morphologie binaire.

3.1 Introduction

Les transformations morphologiques agissent sur les structures d'une image qui sont soit préservées, soit éliminées selon qu'elles satisfont ou pas le critère de filtrage (critère de taille, de forme, de contraste...) : une ouverture morphologique par un élément structurant B élimine les structures claires de l'image ne contenant pas B et préserve les autres ; une h-reconstruction élimine les structures claires de l'image ayant un contraste inférieur à h et préserve les structures de plus fort contraste (voir figure 3.1).

En considérant des transformations de plus en plus sélectives, on élimine progressivement les structures de l'image des moins significatives aux plus significatives (au sens du critère de filtrage). Si l'on repère une structure donnée et qu'on l'étudie tout au long du processus de filtrage, l'indice pour lequel elle disparait entièrement constitue une mesure

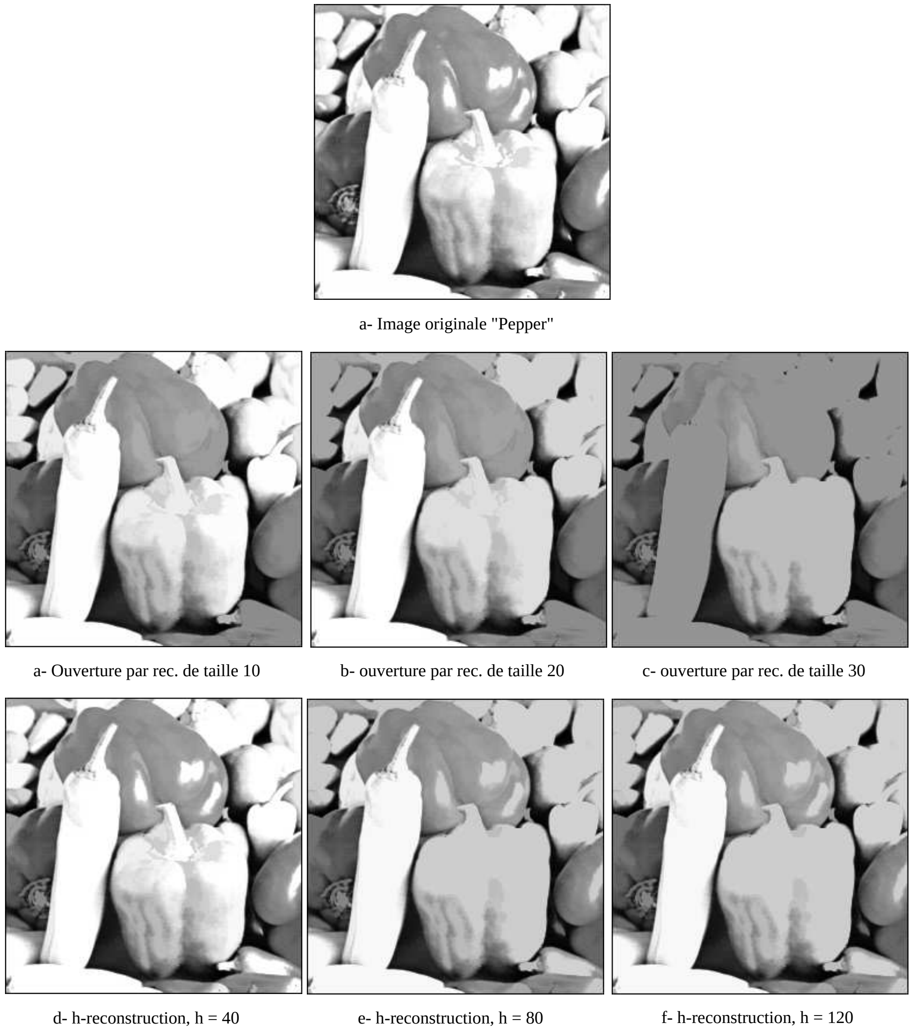


Figure 3.1: Exemples de filtrage hiérarchique sur l'image "Pepper"

de sa persistance vis-à-vis de la transformation. Cette mesure permet donc de caractériser la structure vis-à-vis du critère de filtrage étudié. Si l'on applique ce principe à toutes les structures de l'image, on obtient alors une caractérisation entière de la scène.

Considérons pour illustrer notre propos, l'exemple de la figure 3.1. Nous avons appliqué ici deux types de filtre : un filtre de taille (ouvertures de taille croissante) et un filtre de contraste (h-reconstructions avec h croissant). Repérons une structure de l'image : le poivron allongé par exemple. Cet objet persiste sur l'image après une ouverture de taille 20 et est éliminé par l'ouverture de taille 30. On peut en déduire que la taille du poivron allongé est supérieure à 20 et inférieure à 30 (ou plus exactement : le poivron allongé contient la boule de taille 20 mais pas la boule de taille 30). On peut également à la vue des images ouvertes conclure que la taille du poivron rond et plus grande que celle du poivron allongé : le poivron rond persiste après une ouverture de taille 30. En étudiant les images issues des filtres de contraste, on extrait les caractéristiques en contraste des objets de l'image : le poivron allongé persiste au filtre de contraste de paramètre $h = 120$; il a un contraste supérieur à 120. Le poivron rond, quant à lui, a un contraste plus faible que le poivron alongé.

Le principe que nous venons de décrire est à la base de la définition de la *fonction d'extinction* qui est l'objet de ce chapitre.

L'idée d'utiliser des familles de filtres de taille croissante pour analyser des images n'est pas nouvelle : elle est à la base des méthodes d'analyse granulométrique. Cette approche diffère cependant dans le principe des granulométries classiques : au lieu de mesurer pour chaque indice granulométrique la quantité de particules éliminées, on associe à chaque particule de l'image l'indice pour lequel la particule est éliminée. On passe donc d'une analyse *globale* de l'image à une analyse *objet par objet* de l'image.

3.2 Fonction d'extinction : principe et définition

Notre but est d'étudier le comportement de chaque structure d'une image lorsqu'on applique des familles de transformations de plus en plus sélectives. Cela nécessite tout d'abord de définir la notion de structure et ensuite de considérer des transformations compatibles avec cette définition.

Dans le cas binaire, une structure (on parlera plus volontiers de particule) est généralement définie comme une composante connexe (voir section B.1.1). Dans le cas numérique, les extrema de l'image semblent bien adaptés pour marquer les structures présentes sur l'image (voir section 2.3). Ce choix présente en outre l'intérêt d'être cohérent par rapport au choix binaire : les opérateurs morphologiques ayant de bonnes propriétés vis-à-vis des composantes connexes binaires ont également de bonnes propriétés vis-à-vis des extrema des fonctions numériques. Ces opérateurs sont les opérateurs dits *connexes*. Lorsqu'on applique une transformation connexe, il existe des relations simples entre les composantes connexes (ou les extrema) des images d'entrée et de sortie.

3.2.1 Les opérateurs morphologiques connexes

La notion d'opérateur connexe a récemment été formalisée par J. Serra et P. Salembier [83] et est à la base des transformations les plus évoluées de la morphologie mathématique telles que la reconstruction numérique [31], la dynamique [21], l'ouverture surfacique numérique [97] et a donné naissance à des techniques de segmentation pyramidale performantes [83, 14].

Nous rappelons que $A \triangle B$ désigne la différence symétrique entre A et B :

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

Nous rappelons également que $\mathcal{C}(A)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de A.

Définition 3.1 (Opérateur connexe binaire [83]) *Un opérateur binaire ψ est dit connexe si pour tout ensemble A de E, la différence symétrique entre A et $\psi(A)$ (notée $A \triangle \psi(A)$) est exclusivement constituée de composantes connexes de A ou de son complémentaire A^c :*

$$\psi \text{ est connexe } \Leftrightarrow \mathcal{C}(A \triangle \psi(A)) \subset \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(A^c) \tag{3.1}$$

La caractéristique de ces opérateurs est donc de préserver les relations de connexité : si deux points p et q de $E \subset \mathbb{Z}^2$ sont connexes dans A ou dans A^c (il existe un chemin d'extrémités p et q inclus dans A ou A^c), alors les points p et q sont encore connexes soit dans l'ensemble transformé, soit dans son complémentaire. Autrement dit, les opérateurs connexes binaires n'agissent sur les ensembles qu'en préservant ou en supprimant leurs composantes connexes. Ainsi, un opérateur connexe ne fait pas de compromis : chaque particule (de A ou de son complémentaire) est soit entièrement préservée, soit entièrement éliminée (voir figure 3.2).

Remarquons que si on impose, en plus, à l'opérateur ψ d'être anti-extensif, alors $(A \triangle \psi(A))$ est exclusivement constitué de composantes connexes de A. De la même façon, si ψ est extensif, alors $(\psi(A) \triangle A)$ est exclusivement constitué de composantes connexes de A^c.

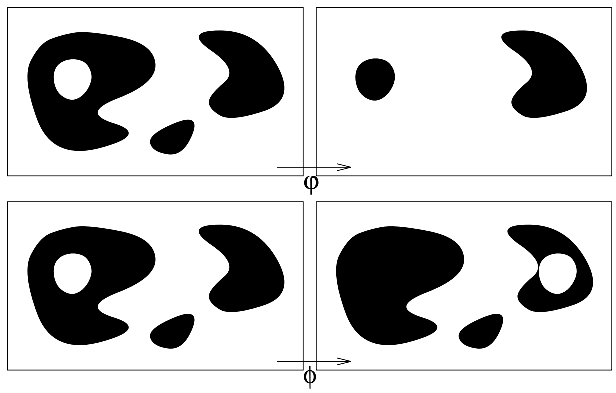


Figure 3.2: Exemple d'opérateur connexe binaire φ. ϕ n'est pas connexe

On définit les opérateurs connexes pour les fonctions numériques en partant des opérateurs connexes binaires que l'on fait agir sur les sections planes (ou plateaux : voir définition 2.7) des fonctions numériques [83, 14]. La propriété de conservation de la connexité dans le cas binaire vaut alors pour les plateaux des fonctions numériques. Il est ainsi possible de définir autant d'opérateurs connexes pour les fonctions numériques qu'il en existe pour les ensembles.

Définition 3.2 (Opérateur connexe numérique [83]) *Un opérateur numérique ψ est connexe si et seulement si il étend les plateaux de l'image d'entrée :*

$$\psi \text{ est connexe } \Leftrightarrow \forall x \in E, Plt_x(f) \subset Plt_x(\psi(f)) \tag{3.2}$$

Les opérateurs connexes numériques ont donc pour caractéristique d'élargir (on parlera également de propagation) et de fusionner les plateaux de l'image [83]. Cette définition n'impose aucune condition sur la manière dont les niveaux d'intensité de la fonction sont modifiés.

Nous donnons figure 3.3 un exemple d'opérateur connexe numérique (ici, une ouverture par reconstruction) et les maxima de l'image originale et de l'image filtrée. Les maxima de l'image filtrée sont moins nombreux et plus étendus que ceux de l'image originale.

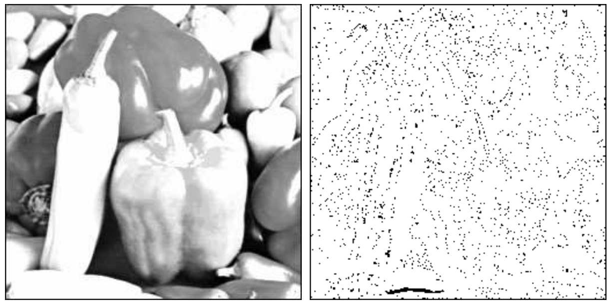


Image originale "Pepper" et ses maxima

Ouverture par reconstruction de taille 20 et maxima de l'image ouverte

Figure 3.3: Effet des opérateurs connexes numériques sur les zones plates de l'image

Opérateurs connexes et Pyramide

La classe des opérateurs connexes est de manière évidente stable pour les opérations de composition, de sup et d'inf [83, 14]. Considérons donc une pyramide d'opérateurs [83], c'est-à-dire une famille indicée d'opérateurs $\{\psi_\lambda\}$ tels que :

1. pour tout couple (λ, μ), le produit de composition $(\psi_\lambda \circ \psi_\mu)$ appartient encore à la famille

2. $\forall \lambda \geq \mu > 0, \exists \nu > 0, \psi_\lambda = \psi_\nu \circ \psi_\mu$

Lorsque les opérateurs qui engendrent cette famille sont connexes, la famille s'enrichit d'une propriété très importante. Nous avons vu qu'un opérateur connexe n'agit sur les fonctions qu'en en propageant les zones plates. Si l'on considère les fonctions issues de la pyramide $(\psi_\lambda(f))_{\lambda \geq 0}$, alors : les zones plates des $\psi_\lambda(f)$ s'élargissent avec λ : les zones de gradient nul sont emboitées les unes dans les autres (voir figure 3.4). Cette propriété est particulièrement intéressante dans le cadre de la segmentation d'image et est à la base de techniques de segmentation pyramidales très performantes [83, 14].

Figure 3.4: Emboitement des zones de gradient nul dans le cas d'une pyramide d'opérateurs connexes

Construction d'opérateurs connexes

Remarquons tout d'abord que dans le cas général, les ouvertures et les fermetures morphologiques ne sont pas connexes ; elles ne le sont que dans le cas particulier d'un espace à une dimension et lorsque l'élément structurant utilisé est connexe et, dans ce cas, elles correspondent à des ouvertures par reconstruction : les seules ouvertures connexes sont les ouvertures par reconstruction.

D'une manière générale, on construit des opérateurs connexes à partir de la reconstruction géodésique [31, 83] : partant d'une transformation quelconque ψ, il est possible de construire l'opérateur connexe associé en composant ψ avec l'opération de reconstruction (voir section B.3) : $\psi^{rec}(f) = \delta^{\infty}(f, \psi(f))$ (si ψ est anti-extensif) ou bien $\psi^{rec}(f) = \epsilon^{\infty}(f, \psi(f))$ (si ψ est extensif). La reconstruction par dilatation géodésique agit au niveau des structures claires de l'image et la reconstruction par érosion géodésique sur les structures sombres de l'image.

Un exemple simple est celui des h-reconstructions (voir section 2.3.2) : ψ correspond à un décalage négatif ou positif de l'image. Les h-reconstructions sont construites en composant cette opération de décalage avec une reconstruction numérique.

Remarquons que le processus de reconstruction numérique peut être vu comme un processus de reconstruction binaire appliqué aux seuils successifs de l'image :

$$\forall x \in E, \delta^{\infty}(f, \psi(f))(x) = sup\left\{s \leq f\left(x\right) \mid C_x\left(X_s^+\left(f\right)\right) \cap X_s^+\left(\psi(f)\right) \neq \emptyset\right\} \tag{3.3}$$

Nous rappelons que $X_s^+(f)$ désigne le seuil au niveau s de f : $X_s^+(f) = \{x \in E \mid f(x) \geq s\}$ et que C_x désigne l'ouverture connexe ponctuelle : $C_x(X)$ extrait de X la composante connexe contenant x.

3.2.2 Fonction d'extinction : définition

Dans tout ce qui suit $\Psi = (\psi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ désignera une famille décroissante de transformations connexes anti-extensives :

1. $\forall \lambda \geq 0, \psi_\lambda(f)$ est connexe
2. $\forall \mu \geq \lambda \geq 0 \Longrightarrow \psi_\lambda \leq \psi_\mu$
3. $\forall \lambda \geq 0, \psi_\lambda(f) \leq f$ et $\psi_0 = Id$

Nous allons, dans un premier temps, définir la notion de fonction d'extinction dans le cas des fonctions binaires, et, dans un second temps, étendre cette définition aux fonctions numériques. Nous nous restreignons dans tout ce qui suit au cas discret. Les notions introduites valent dans le cas continu pour l'ensemble restreint des fonctions lipschitziennes.

Cas des ensembles

Soit Y un ensemble quelconque et X un sous-ensemble connexe de Y. Nous avons supposé les opérateurs ψ_λ connexes et *anti-extensifs* donc $\psi_\lambda(Y)$ est exclusivement constitué de composantes connexes de Y, c'est-à-dire, puisque X est supposé connexe : $\psi_\lambda(X) = X$ ou bien $\psi_\lambda(X) = \emptyset$.

Par hypothèse, ψ_λ est décroissant vis-à-vis de l'indice λ donc :

$$\text{Si } X \text{ est connexe, } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que : } \begin{cases} \mu \leq \lambda \Rightarrow \psi_\mu(X) = X \\ \psi_{\lambda+1}(X) = \emptyset \end{cases}$$

L'indice λ caractérise la persistance de la particule connexe X par rapport à la famille Ψ.

Définition 3.3 (Valeur d'extinction d'un ensemble connexe) *Soit X un ensemble connexe, et $\Psi = (\psi_\lambda)_\lambda$ une famille décroissante de transformations connexes anti-extensives. La valeur d'extinction de X par rapport à Ψ notée $\mathcal{E}_\Psi(X)$ est la valeur maximale λ telle que ψ_λ préserve X :*

$$\mathcal{E}_\Psi(X) = sup\{\lambda \geq 0 \mid \psi_\lambda(X) = X\} \tag{3.4}$$

Si Ψ est une granulométrie par ouvertures par reconstruction, alors $\mathcal{E}_\Psi(X)$ est la taille de l'ouverture ultime associée à X (voir la relation 2.19 au paragraphe 2.2.4) :

$$\mathcal{E}_\Gamma(X) = sup\{\lambda \geq 0 \mid \gamma_\lambda^{rec}(X) = X\} = sup\{\lambda \geq 0 \mid \gamma_\lambda(X) \neq \emptyset\}$$

Dans ce cas, si Y est un ensemble quelconque, la fonction ayant pour support Y et pour valeurs numériques les valeurs d'extinction des composantes connexes de Y est exactement la fonction granulométrique par reconstruction associée à Y.

Dans tout ce qui suit, nous noterons $\mathcal{C}(Y)$ l'ensemble des composantes connexes de l'ensemble Y. On définit la fonction d'extinction d'un ensemble Y sur le modèle des fonctions granulométriques (voir paragraphe 2.2.4) :

Définition 3.4 (Fonction d'extinction d'un ensemble) *Soit Y un ensemble, et $\Psi = (\psi_\lambda)_\lambda$ une famille décroissante de transformations connexes anti-extensives. La fonction d'extinction de Y par rapport à Ψ notée $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}_{\Psi}(Y)$ associe à chaque composante connexe de Y sa valeur d'extinction par rapport à Ψ :*

$$\forall x \in Y, \mathcal{F}^{\mathcal{E}}_{\Psi}(Y)(x) = \begin{cases} \mathcal{E}_\Psi(X) & si\ \exists X \in \mathcal{C}(Y), x \in X \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{3.5}$$

On définit de manière duale les valeurs d'extinction des composantes connexes de Y^c en considérant une famille croissante de transformations connexes extensives : $\overline{\Psi} = (\overline{\Psi}_\lambda)_{\lambda \geq 0}$. Nous rappelons que si ψ_λ est anti-extensif, alors $\overline{\psi}_\lambda$ défini par $\overline{\psi}_\lambda(Y) = (\psi_\lambda(Y^c))^c$ est extensif. On a :

$$\mathcal{F}^{\mathcal{E}}_{\overline{\Psi}}(Y) = \mathcal{F}^{\mathcal{E}}_{\Psi}(Y^c)$$

La figure 3.5 correspond à une opération classique en imagerie binaire : on asssocie à chaque composante connexe sa surface. L'image numérique des composantes valuées selon leur surface peut être vue comme une fonction d'extinction binaire associée à la famille de transformations $(\psi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ avec :

$$\forall X \text{ connexe }, \psi_\lambda(X) = \begin{cases} X & \text{si } Surf(X) \geq \lambda \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

où $Surf(X)$ désigne la surface de X (nombre de pixels de la composante connexe X).

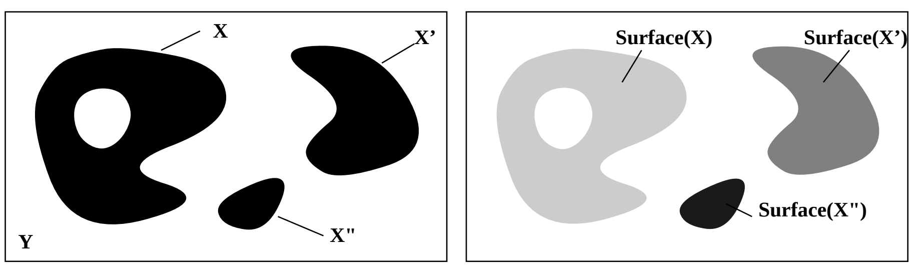


Figure 3.5: Fonction d'extinction d'une image binaire : sur cet exemple, on associe à chaque composante connexe un niveau de gris égal à sa surface.

C'est l'extension au cas numérique de telles opérations binaires classiques qui nous intéresse ici.

Cas des fonctions numériques

Le fait que la fonction d'extinction binaire soit définie à partir d'opérateurs connexes permet d'étendre cette notion aux fonctions numériques. On passe alors de l'analyse des composantes connexes des ensembles à l'analyse des extrema régionaux des fonctions numériques. En effet, nous avons vu que les opérateurs connexes ont de bonnes propriétés vis-à-vis des extrema des fonctions numériques.

Nous nous intéressons, dans un premier temps, à l'étude des maxima de l'image : on se restreint donc à des transformations agissant uniquement sur les structures claires de l'image, c'est-à-dire des transformations anti-extensives. Nous supposerons donc, dans tout ce qui suit, que Ψ est une famille décroissante de transformations connexes anti-extensives.

Nous notons $\mathcal{M}ax(f)$ l'ensemble des maxima régionaux d'une fonction numérique f.

ψ_λ est par hypothèse un opérateur connexe donc il n'agit sur l'image qu'en propageant les zones plates et en particulier les maxima :

$$\forall M \in \mathcal{M}ax(f), x \in M \Rightarrow M \subset Plt_x(\psi_\lambda(f))$$

Un maximum de f est étendu par ψ_λ pour donner soit un maximum, soit un plateau non-maximum de $\psi_\lambda(f)$.

Les images $\psi_\lambda(f)$ sont constituées de plateaux de plus en plus étendus à mesure que λ augmente, pour finalement (pour une valeur λ infinie, c'est à dire suffisamment grande) ne constituer qu'un seul plateau unique. Une image constante définit un plateau à la fois maximum (sans voisin plus haut) et à la fois minimum (sans voisin plus bas). Par convention, lorsqu'on étudie les maxima de l'image, nous considérons de tels plateaux comme des minima (lorsqu'on étudie les minima, nous les considérons comme des maxima). Cette convention permet d'assurer, pour tout maximum M de f, l'existence d'un niveau λ tel que M n'appartienne plus à un maximum de $\psi_\lambda(f)$.

Finalement, comme ψ_λ est décroissant vis-à-vis de l'indice λ, on a :

$$\forall M \in \mathcal{M}ax(f), \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que : } \begin{cases} \mu \leq \lambda \Rightarrow M \in \mathcal{M}ax(\psi_\mu(f)) \\ M \notin \mathcal{M}ax(\psi_{\lambda+1}(f)) \end{cases}$$

On impose que M soit maximum régional pour toute valeur $\mu \leq \lambda$. En effet, on calcule la valeur d'extinction de M dès que le plateau de $\psi_\mu(f)$ contenant M n'est plus maximum régional, mais ce plateau peut éventuellement, pour des indices suivants, fusionner avec un autre plateau pour redonner un maximum régional.

Définition 3.5 (Valeur d'extinction d'un maximum régional) *Soit M un maximum régional d'une fonction numérique f, et $\Psi = (\psi_\lambda)_\lambda$ une famille décroissante de transformations connexes anti-extensives. La valeur d'extinction de M par rapport à Ψ notée $\mathcal{E}_\Psi(M)$ est la valeur maximale λ telle que M reste maximum régional de $\psi_\lambda(f)$:*

$$\mathcal{E}_\Psi(M) = sup\{\lambda \geq 0 \mid \forall \mu \leq \lambda, M \subset \mathcal{M}ax(\psi_\mu(f))\} \tag{3.6}$$

Si l'on suppose que les structures claires d'une image sont toutes marquées par un maximum régional, alors la valeur d'extinction associée à un maximum régional M caractérise la persistance de la structure claire qu'il marque lorsqu'on filtre de plus en plus sélectivement l'image. Le critère de filtrage introduit par la famille Ψ, définit la caractéristique des structures de l'image qui est ainsi extraite.

On définit sur le modèle binaire la fonction d'extinction numérique, qui associe aux maxima d'une image leurs valeurs d'extinction :

Définition 3.6 (Fonction d'extinction d'une fonction numérique) *Soit f une fonction numérique et $\Psi = (\psi_\lambda)_\lambda$ une famille décroissante de transformations connexes anti-extensives. La fonction d'extinction de f respectivement à Ψ notée $\mathcal{F}_\Psi^{\mathcal{E}}(f)$ associe à chaque maximum régional de f sa valeur d'extinction par rapport à Ψ :*

$$\forall x \in E, \mathcal{F}_\Psi^{\mathcal{E}}(f)(x) = \begin{cases} \mathcal{E}_\Psi(M) & si\ \exists M \in \mathcal{M}ax(f), x \in M \\ -\infty & sinon \end{cases} \tag{3.7}$$

On définit de manière duale les valeurs d'extinction des minima régionaux d'une image numérique à partir d'une famille de transformations anti-extensives. Cela revient également à appliquer ψ_λ à $(-f)$ puis à inverser le résultat. On a :

$$\mathcal{F}_{\overline{\Psi}}^{\mathcal{E}}(f) = \mathcal{F}_\Psi^{\mathcal{E}}(-f)$$

La figure 3.6 illustre la fonction d'extinction obtenue dans le cas d'ouvertures par reconstruction.

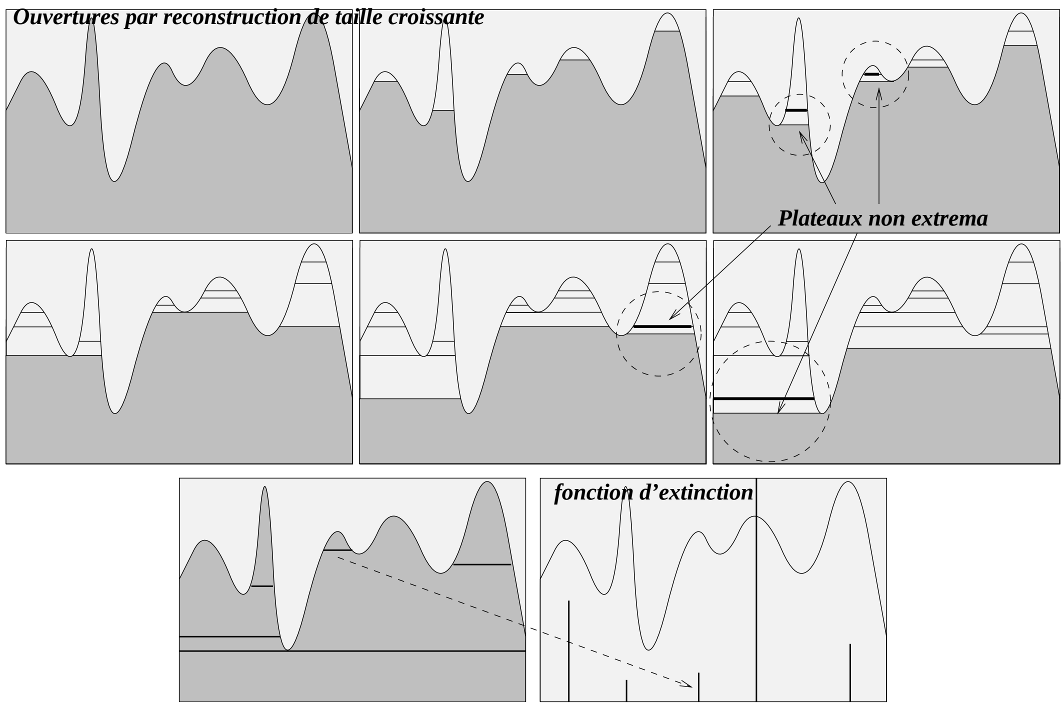


Figure 3.6: Fonction d'extinction d'une image numérique : sur cet exemple, à chaque maximum (chaque dôme de l'image), on associe la taille maximale de l'ouverture par reconstruction qui préserve (au moins partiellement) le dôme.

Remarques sur les conditions imposées à la famille Ψ : La notion de valeur d'extinction peut théoriquement être définie à partir de toute famille d'opérateurs connexes. Les conditions supplémentaires que nous avons imposées (famille d'opérateurs extensifs ou anti-extensifs) permettent d'assurer que les notions définies ont un sens physique

: lorsqu'on étudie les structures claires de l'image, on considère des transformations agissant de manière privilégiée sur les structures claires de l'image, c'est-à-dire des transformations anti-extensives. Les transformations extensives seront utilisées pour l'étude des structures sombres de l'image.

3.3 Etude approfondie de quelques cas particuliers

Dans cette partie, nous allons étudier plus précisément les fonctions d'extinction associées à quelques transformations morphologiques simples. Les images "Tools" et "Road" (figures 3.8 et 3.7) nous serviront d'illustration.

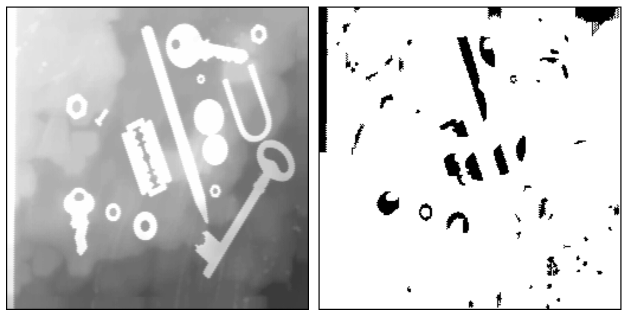


Figure 3.7: Image "Tools" et ses maxima régionaux

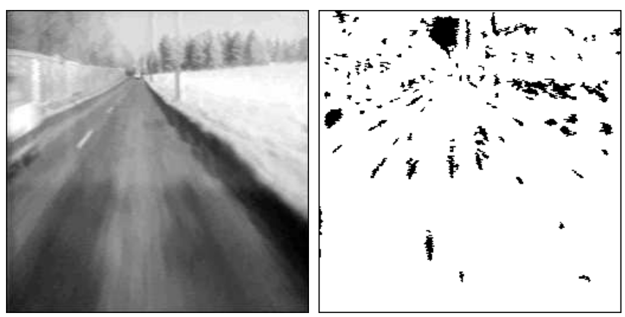


Figure 3.8: Image "Road" et ses maxima régionaux

3.3.1 La dynamique : une fonction d'extinction particulière

Un des outils les plus performants aujourd'hui utilisés en morphologie mathématique pour sélectionner les extrema significatifs d'une image selon leur contraste est la dynamique [21, 22]. Nous avons vu qu'un lien étroit existe entre la dynamique et une famille de transformations morphologiques agissant selon un critère de contraste : les h-reconstructions ($\delta^\infty(f, f-h)$) (voir la relation 2.25 au paragraphe 2.3.4).

$\delta^\infty(f, f-h)$ est une transformation connexe, croissante et anti-extensive [21]. Elle satisfait également une loi d'absoption pyramidale de type additif :

$$t_h(f) = \delta^\infty(f, f-h) \qquad t_h(f) \circ t_{h'}(f) = t_{h+h'}(f)$$

La famille $(\delta^\infty(f, f-h))_{h\geq 0}$ satisfait l'ensemble des conditions que nous avons imposées pour définir une fonction d'extinction. La valeur d'extinction d'un maximum régional M d'une fonction f par rapport à la famille $(\delta^\infty(f, f-h))_{h\geq 0}$ est alors définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}\dashv\S(f), \mathcal{E}^d(M) = sup\{h \geq 0 \mid \forall t \leq h, M \cap \mathcal{M}ax(\delta^\infty(f, f-t)) \neq \emptyset\}$$

Nous allons montrer que $\mathcal{E}^d(M) = dyn(M) - 1$, c'est-à-dire que l'on a (puisque que les valeurs de h sont discrètes) :

$$dyn(M) = inf\{h \geq 0 \mid M \cap \mathcal{M}ax(\delta^\infty(f, f-h)) = \emptyset\} \tag{3.8}$$

Avant de démontrer la relation 3.8, quelques remarques importantes pour la suite peuvent être faites à propos de la dynamique et des h-reconstructions.

• Nous rappelons que la dynamique d'un maximum régional M est la dénivellation minimale à franchir, quand, partant de M, on cherche à atteindre un point de plus haute altitude (définition 2.10 de M. Grimaud). Cette définition se formalise en :

$$dyn(M) = f(M) - sup\{s \leq f(M) \mid \exists x \in C_M(X_s^+(f)), f(x) > f(M)\} \tag{3.9}$$

Si M est le maximum de plus haute altitude de f, on convient d'associer à M une dynamique infinie [21].

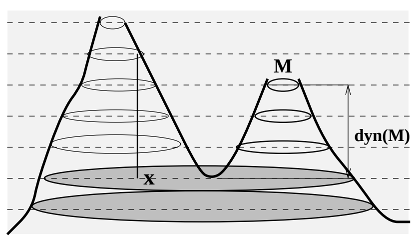


Figure 3.9: Principe de la dynamique : on cherche le col le plus haut qui unit le dôme de sommet M à un autre dôme de plus haut sommet.

• Les transformations par reconstruction s'expriment également en considérant les seuils successifs de l'image (voir relation 3.3) :

$$\delta^\infty(f, f-h)(x) = sup\{s \leq f(x) \mid C_x(X_s^+(f)) \cap X_s^+(f-h) \neq \emptyset\}$$

Ce qui s'écrit également :

$$\delta^\infty(f, f-h)(x) = sup\{s \leq f(x) \mid \exists y \in C_x(X_s^+(f)), f(y) - h \geq s\} \tag{3.10}$$

• Nous rappelons également que si M est un maximum régional de f d'altitude notée $f(M)$, de dynamique $dyn(M)$, alors (voir théorème 2.1) :

$$\forall h \leq dyn(M),\ \delta^\infty(f, f-h)(M) = f(M) - h \tag{3.11}$$

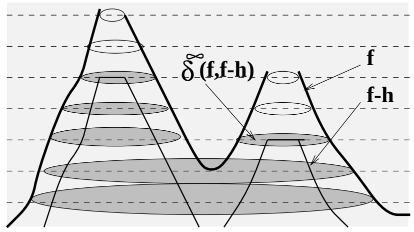


Figure 3.10: Principe des h-reconstructions : les dômes de l'image sont arasés.

Démontrons la relation 3.8

Soit M un maximum régional de f. Nous noterons $dyn(M)$ sa dynamique, $f(M)$ son altitude dans f.

- Montrons que si $h = dyn(M)$, alors M n'est pas inclus dans un maximum régional de $\delta^\infty(f, f-h)$.

  Soit $s = f(M) - dyn(M)$. Si $h = dyn(M)$, on a :

  $$\begin{array}{ll} s = \delta^\infty(f, f-h)(M) & \text{d'après 3.11} \\ \exists x \in C_M(X_s^+(f)),\ f(x) > f(M) & \text{d'après 3.9 (voir figure 3.9)} \end{array}$$

  Evaluons $\delta^\infty(f, f-h)(x)$. La dilatation est extensive, donc $\delta^\infty(f, f-h) \geq f - h$ et par conséquent : $\delta^\infty(f, f-h)(x) > f(x) - h > f(M) - h$

  D'après 3.11, $f(M)-h = \delta^\infty(f, f-h)(M)$, donc : $\delta^\infty(f, f-h)(x) > \delta^\infty(f, f-h)(M)$

  Montrons que $x \in C_M(X_s^+(\delta^\infty(f, f-h)))$. $\delta^\infty(f, f-h)$ est connexe : elle agit sur les seuils de f composante connexe par composante connexe (une composante connexe est soit entièrement préservée soit entièrement éliminée). Par conséquent : $C_M(X_s^+(f)) \subset C_M(X_s^+(\delta^\infty(f, f-h)))$.

  Finalement : $\left\{ \begin{array}{l} s = \delta^\infty(f, f-h)(M) \\ \exists x \in C_M(X_s^+(\delta^\infty(f, f-h))),\ \delta^\infty(f, f-h)(x) > \delta^\infty(f, f-h)(M) \end{array} \right.$

  Le plateau de $\delta^\infty(f, f-h)$ contenant M admet donc au moins un voisin de plus haute altitude. Ce n'est pas un maximum régional. (*cqfd*)

- Montrons que si $h < dyn(M)$, alors M est inclus dans un maximum régional de $\delta^\infty(f, f-h)$. Pour cela, nous allons montrer que si M n'est pas inclus dans un maximum régional, alors $h \geq dyn(M)$.

  On pose $s = \delta^\infty(f, f-h)(M) \geq f(M) - h$. Si M n'est pas inclus dans un maximum de $\delta^\infty(f, f-h)$, alors le plateau contenant M admet au moins un voisin de plus haute altitude :

  $$\exists x \in C_M(X_s^+(\delta^\infty(f, f-h))),\ \delta^\infty(f, f-h)(x) > s$$

  $\delta^\infty(f, f-h)(x) \geq s + 1$. D'après 3.10 : $\exists y \in C_x(X_{s+1}^+(f)), f(y) - h \geq s + 1 > s$

Evaluons $f(y)$: $s \geq f(M) - h$ donc $f(y) - h > f(M) - h$ soit $f(y) > f(M)$

De plus, $y \in C_M(X_s^+(f))$. En effet : $C_x(X_{s+1}^+(f)) \subset C_x(X_s^+(f)) = C_M(X_s^+(f))$.

y vérifie : $y \in C_M(X_s^+(f))$ et $f(y) > f(M)$, donc d'après 3.9 : $s \leq f(M) - dyn(M)$. Or $s \geq f(M) - h$, par conséquent, on a forcément : $h \geq dyn(M)$ (*cqfd*)

(*cqfd*)

La conclusion de tout ceci est que la dynamique correspond, à une constante près, aux valeurs d'extinction associées à la famille $(\delta^\infty(f, f-h))_{h\geq 0}$:

$$\forall M \in \mathcal{M}\dashv\S(f), \mathcal{E}^d(M) = dyn(M) - 1$$

La dynamique apparaît donc comme une fonction d'extinction particulière associée à des filtres morphologiques de contraste. Elle correspond à une mesure de persistance des structures de l'image quand on applique des filtres morphologiques de contraste de plus en plus sélectifs.

La figure 3.11 illustre le lien entre la dynamique et les h-reconstructions. Sur cet exemple, à chaque maximum de l'image filtrée $\delta^\infty(f, f-h)$ correspond un et un seul maximum de l'image originale de dynamique supérieure à h. Nous verrons, dans le chapitre suivant, comment le cas particulier de deux maxima de même altitude peut modifier ce résultat et comment cette configuration pathologique peut être traitée.

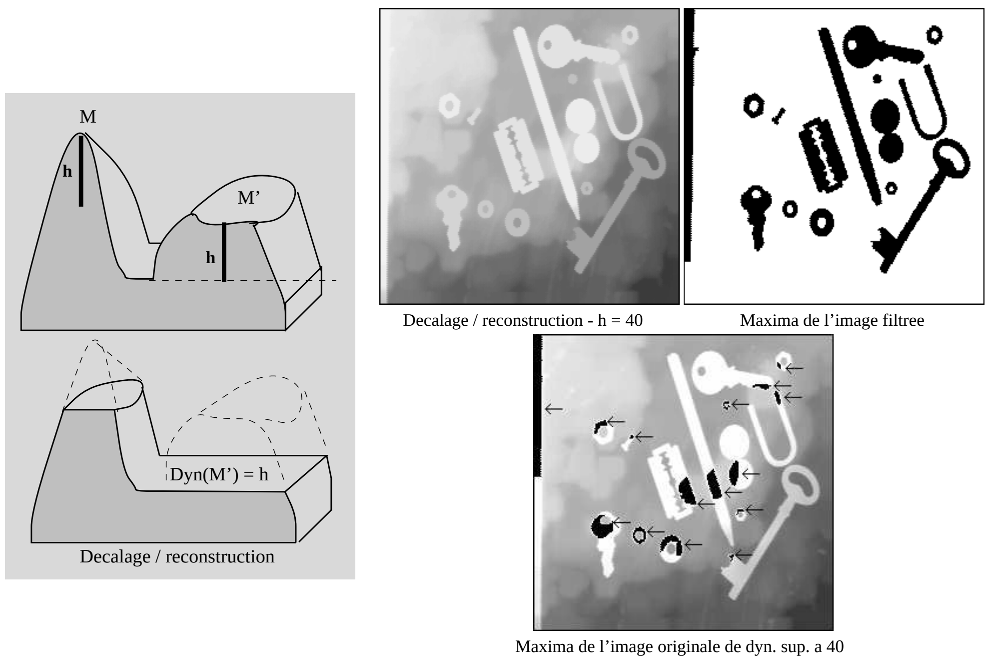


Figure 3.11: La dynamique et les filtres morphologiques de contraste : principe et illustration sur l'exemple "Tools"

La figure 3.12 donne un exemple d'utilisation de la dynamique pour extraire d'une image les extrema significatifs en termes de contraste. La dimension spatiale des régions n'est pas prise en compte : la marque sur la route fortement contrastée est marquée par un maximum de forte dynamique malgré sa petite taille. Par contre le ciel qui correspond à une large région de faible contraste est marqué par un maximum de faible dynamique. Ce résultat était prévisible : le ciel est une région significative en termes de taille, non en termes de contraste.

La dynamique peut également être calculée sur une image gradient. Les minima du gradient correspondent aux plateaux de l'image originale. En calculant la dynamique sur une image gradient, on traite simultanément les structures claires et sombres de l'image de départ (les maxima et les minima de l'image originale sont des minima de l'image gradient). Remarquons que l'interprétation de la dynamique ainsi calculée n'est pas la même que lorsqu'elle est calculée sur l'image originale : ce n'est plus une mesure de contraste des structures qui est déduite mais une mesure caractéristique de la force et de l'homogénéité des contours des régions (voir figure 3.14).

Notons, enfin, la fragilité de la dynamique lorsqu'elle est calculée sur une image gradient : des variations locales d'intensité, au niveau des lignes de crête du gradient, peuvent modifier radicalement les valeurs de dynamique (voir figure 3.15). Nous aurons l'occasion de revenir plus en détails sur ce point important dans le chapitre 5 (voir notamment la figure 5.16). Le même phénomène apparaît également sur l'image originale lorsque le contour d'une région est flou (faible transition des niveaux de gris à la frontière de la région) ; ceci peut influencer également, de manière plus ou moins significative, la dynamique calculée sur l'image originale.

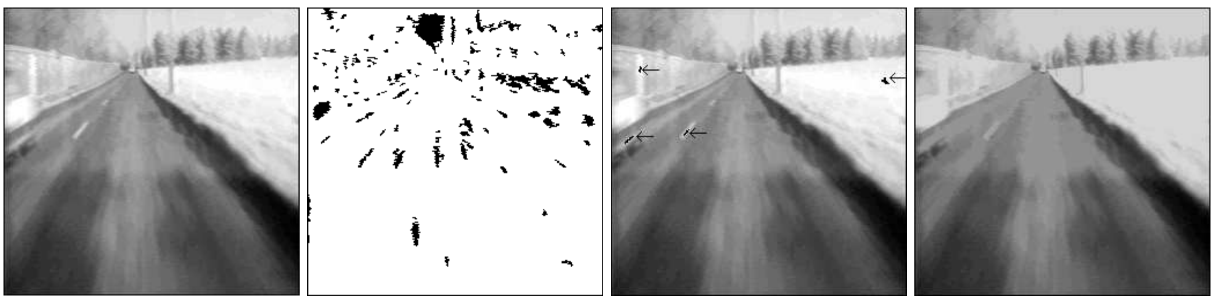


Image originale "Road" | Maxima de l'image originale | les 4 maxima de plus forte dynamique | h-reconstruction equivalente

Figure 3.12: Utilisation de la dynamique pour extraire les extrema les plus significatifs en termes de contraste : on ne retient que les 4 maxima de plus forte dynamique ; nous donnons, pour référence, le résultat d'une h-reconstruction de paramètre h égal à la plus faible valeur de dynamique prise par ces 4 maxima.

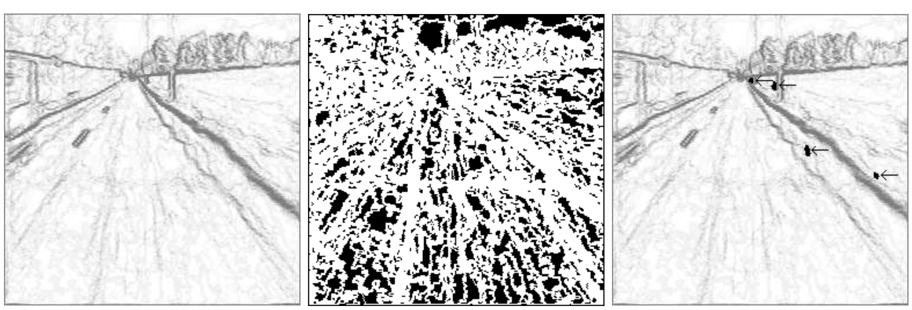


Image gradient | Minima de l'image gradient | les 4 minima de plus forte dynamique

Figure 3.13: Exemple où la dynamique est calculée sur une image gradient

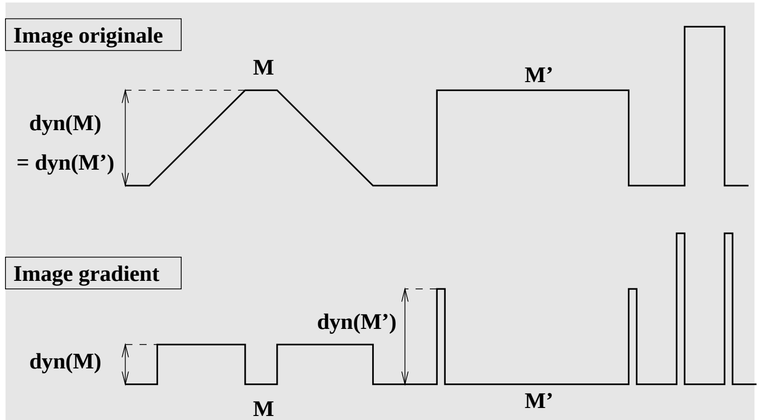


Figure 3.14: Comparaison entre la dynamique calculée sur l'image originale et la dynamique calculée sur l'image gradient : lorsqu'elle est calculée sur le gradient, la dynamique est caractéristique de la force et de l'homogénéité des contours des régions.

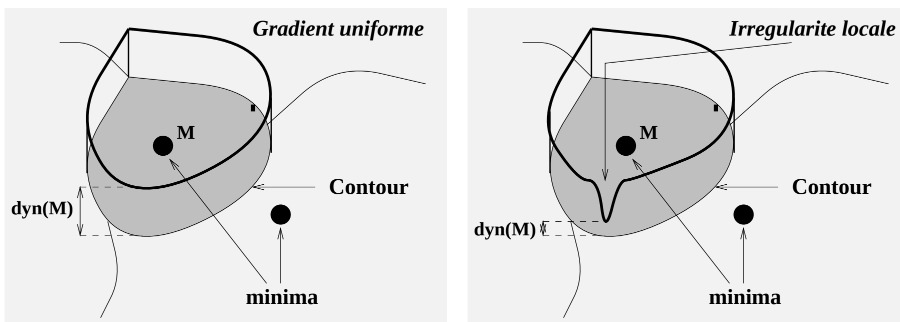


Figure 3.15: Illustration du manque de robustesse de la dynamique calculée sur une image gradient : des variations locales d'intensité modifient radicalement les valeurs de dynamique extraites.

3.3.2 Fonction d'extinction associée aux ouvertures par reconstruction

Les transformations classiquement utilisées pour filtrer les structures d'une image selon un critère de taille sont les ouvertures et les fermetures. Dans le cas binaire, la fonction granulométrique définie à partir d'ouvertures par reconstruction permet de valuer les composantes connexes d'un ensemble selon leur taille ou plus exactement selon la taille maximale de la boule qu'ils peuvent contenir.

La fonction d'extinction numérique associée aux ouvertures par reconstruction introduit un équivalent numérique de la fonction granulométrique binaire : on associe aux minima ou aux maxima d'une image numérique une valeur caractéristique de la taille des structures qu'ils marquent (voir figure 3.16) :

$$\mathcal{E}_\Gamma(M) = sup\{\lambda \geq 0 \mid \forall \mu \leq \lambda, M \cap \mathcal{M}ax(\delta^\infty(f, \gamma_\mu(f))) \neq \emptyset\}$$

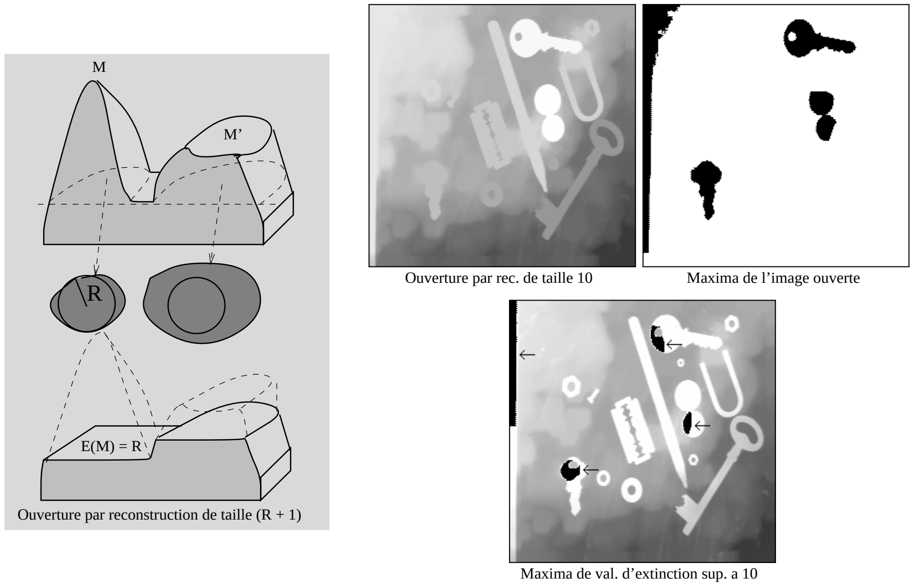


Figure 3.16: Valeurs d'extinction associées aux ouvertures par reconstruction : principe et illustration sur l'exemple "Tools"

Notons la similitute entre cette relation et celle donnant la dynamique en fonction des h-reconstructions (relation 3.8) : le décalage d'image $(f - t)$ est simplement remplacé par une ouverture morphologique $(\gamma_\mu(f))$. On passe ainsi d'une étude en contraste à une étude en taille. La fonction d'extinction associée aux ouvertures par reconstruction apparait ainsi comme un équivalent spatial de la dynamique.

Selon le choix de l'élément structurant, on peut ainsi valuer les extrema d'une image numérique selon un critère de taille et/ou de forme et ceci indépendamment de toute considération relative au contraste des structures.

Cependant, quel que soit le choix de l'élément structurant, les valeurs d'extinction associées aux ouvertures par reconstruction classiques ne correspondent jamais à une caractérisation essentiellement en taille : le concept de forme contenu dans l'élément structurant implique que la caractérisation déduite est toujours fonction de la morphologie de la région. Ainsi sur l'exemple "Tools" de la figure 3.16, le crayon, la lame de rasoir et les clefs ont des surfaces de même ordre. Seules les clefs constituées d'une partie ronde ont de fortes valeurs d'extinction (l'élément structurant utilisé est un hexagone, par conséquent les objets "ronds" sont privilégiés). La figure 3.17 illustre le comportement des valeurs d'extinction lorsqu'on change l'élément structurant utilisé. Pour que la valeur d'extinction associée au crayon soit significative de sa taille réelle, l'élément structurant utilisé doit être adapté à sa forme (un segment de même direction par exemple est mieux adapté que l'hexagone). Mais un tel élément structurant ne convient plus pour les objets de forme différente...

On s'aperçoit donc que pour extraire les caractéristiques en taille et seulement en taille des structures d'une image par le biais d'ouvertures morphologiques, il faudrait en toute rigueur considérer toutes les configurations morphologiques possibles d'éléments

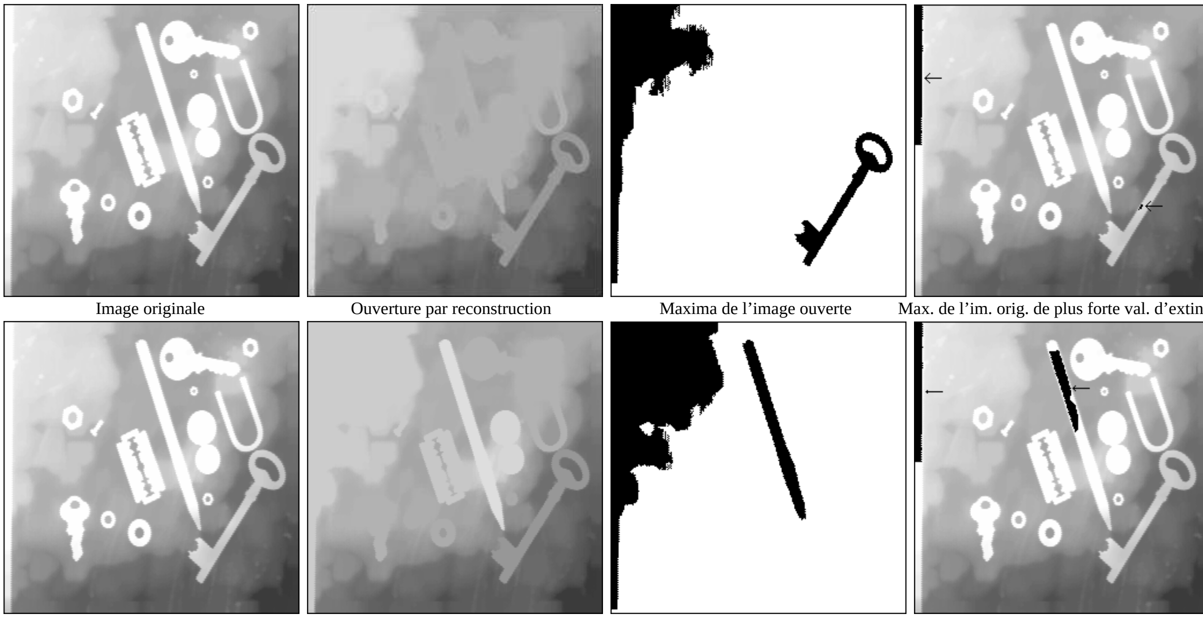


Image originale — Ouverture par reconstruction — Maxima de l'image ouverte — Max. de l'im. orig. de plus forte val. d'extinct.

Image originale — Ouverture par reconstruction — Maxima de l'image ouverte — Max. de l'im. orig. de plus forte val. d'extinct.

Figure 3.17: Influence de l'élément structurant sur les valeurs d'extinction associées aux ouvertures par reconstruction : cas d'un segment de surface constante et de direction 30^o (en haut) puis 160^o (en bas)

structurants (solution peu envisageable) ou bien considérer un élément structurant déformable capable d'adapter sa forme à celle de chaque structure étudiée : ceci est réalisé par l'*ouverture surfacique*.

3.3.3 Fonction d'extinction surfacique

L'ouverture surfacique numérique a été introduite récemment par L. Vincent [97] comme une généralisation de l'ouverture surfacique binaire qui consiste à extraire d'une image binaire les composantes connexes de surface supérieure à une valeur donnée : on définit l'ouverture surfacique numérique en appliquant la transformation binaire à chaque composante connexe des seuils successifs de f.

Définition 3.7 (Ouverture surfacique [97]) *L'ouverture surfacique d'une image numérique f de taille λ notée $\gamma^a_\lambda(f)$ est définie par :*

$$\gamma^a_\lambda(f)(x) = sup\{h \leq f(x) \mid Surf(C_x(X^+_h(f))) \geq \lambda\} \tag{3.12}$$

Dans cette définition, $Surf(X)$ désigne la surface de l'ensemble X (nb de pixels appartenant à X).

L'ouverture surfacique peut être vue comme une transformation avec un élément structurant plan qui adapte localement sa forme aux structures de l'image. L. Vincent montre la relation liant cette ouverture aux ouvertures morphologiques classiques définies à partir d'éléments structurants fixes : une ouverture surfacique de taille λ est égale à un suprémum des ouvertures morphologiques définies à partir d'éléments structurants connexes de surface supérieure ou égale à λ [97].

$$\gamma_\lambda^a = \bigvee \{\gamma_B \mid B \text{ connexe et } Surf\,(B) \geq \lambda\} \tag{3.13}$$

Outre le fait de s'affranchir du choix de l'élément structurant, l'ouverture surfacique présente l'intérêt, par rapport aux ouvertures morphologiques classiques, de conduire à un algorithme de calcul efficace [97]. Le principe de cet algorithme est un processus d'inondation de l'image similaire à celui utilisé dans l'algorithme de calcul de la *ligne de partage des eaux* [2, 96]. Les algorithmes relevant de tels processus sont parmi les plus rapides de la morphologie mathématique.

Nous appellerons *valeurs d'extinction surfaciques* les valeurs d'extinction associées aux ouvertures et aux fermetures surfaciques. Elles seront notées $\mathcal{E}^a$. Ces valeurs correspondent à la persistence des structures de l'image lorsqu'on applique des ouvertures ou des fermetures surfaciques de taille croissante.

$$\forall M \in \mathcal{M}ax(f), \mathcal{E}^a(M) = sup\{\lambda \geq 0 \mid M \cap \mathcal{M}ax(\gamma_\lambda^a(f)) \neq \emptyset\} \tag{3.14}$$

Contrairement aux valeurs d'extinction associées aux ouvertures morphologiques classiques, les valeurs d'extinction surfaciques permettent d'extraire une caractérisation en taille des structures de l'image sans qu'aucun critère de forme ne soit pris en compte : sur l'exemple de la figure 3.18, les clefs, le crayon et la lame de rasoir ont de toute évidence des surfaces équivalentes. Les valeurs d'extinction surfaciques qui leur sont associées sont également du même ordre de grandeur.

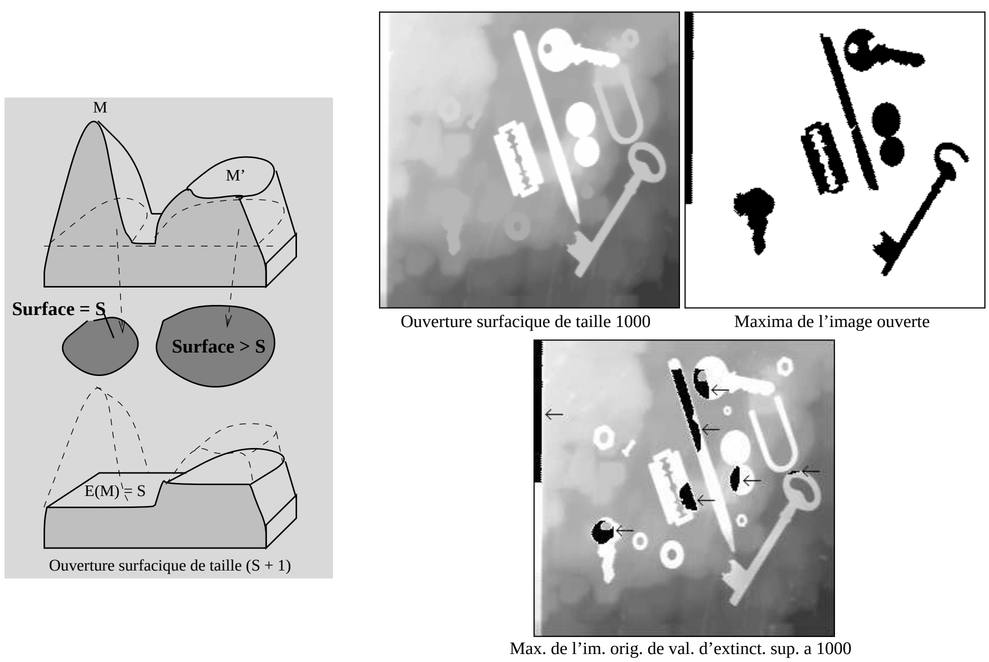


Figure 3.18: Valeurs d'extinction surfaciques : principe et illustration sur l'exemple "Tools"

La figure 3.19 donne un exemple d'utilisation de la fonction d'extinction surfacique pour extraire d'une image les extrema significatifs en termes de taille. Le contraste et la forme des régions ne sont pas pris en compte. A chaque grande région de l'image (la route, le ciel, le bord de route enneigé et le mur) est associé un et un seul maximum de forte valeur d'extinction surfacique. Ce résultat peut être comparé à celui obtenu précédemment grâce à la dynamique (voir figure 3.12).

La figure 3.20 illustre la comparaison entre la dynamique et les valeurs d'extinction surfaciques. On construit bien ainsi un équivalent spatial de la dynamique. A un maximum de faible dynamique peut être associée une valeur d'extinction surfacique importante et vice versa.

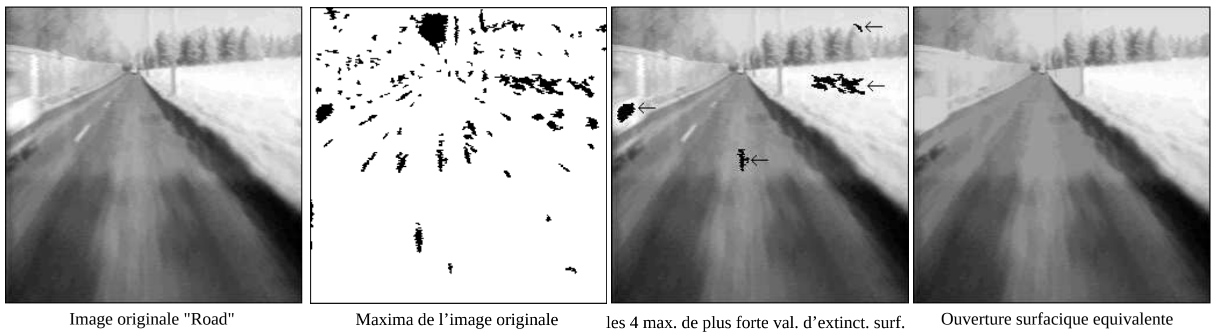


Figure 3.19: Utilisation de la fonction d'extinction surfacique pour extraire les extrema les plus significatifs en termes de taille : on ne retient ici que les 4 maxima de plus forte valeur d'extinction. L'image de gauche est le résultat de l'ouverture surfacique de taille λ, où λ correspond à la plus faible valeur d'extinction des 4 maxima retenus. Seules les régions claires qui persistent sur l'image filtrée sont marquées.

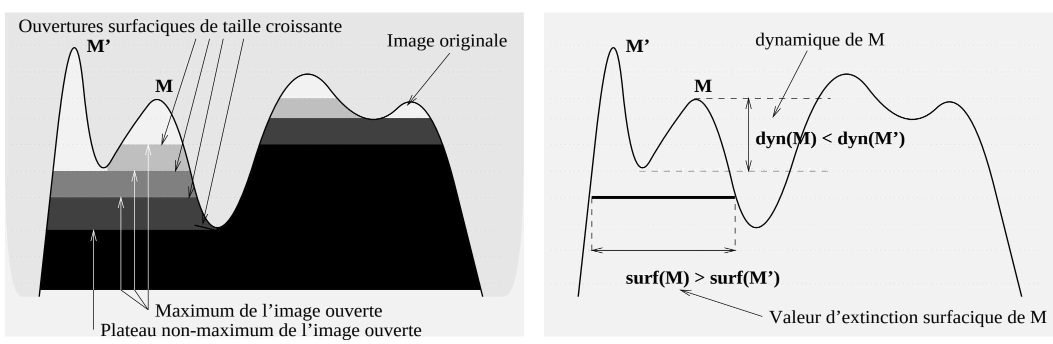


Figure 3.20: Comparaison entre la dynamique et la fonction d'extinction surfacique : ces deux opérateurs agissent selon deux critères distincts, les hiérarchies entre les extrema de l'image qui s'en déduisent diffèrent. Sur cet exemple : à un pic ponctuel de forte amplitude, on associe une forte valeur de dynamique et une faible valeur d'extinction surfacique.

Tout comme la dynamique, la fonction d'extinction surfacique peut également être calculée sur une image gradient (voir figure 3.21). Comme nous l'avons vu, le fait de travailler sur une image gradient permet de traiter simultanément de manière non indépendante les structures claires et sombres de l'image. Les valeurs d'extinction surfaciques calculées sur l'image gradient sont également une mesure de la surface des régions de l'image : contrairement à la dynamique, dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques, il n'y a pas de différence d'interprétation entre la mesure calculée sur l'image originale et celle calculée sur l'image gradient, même si ces mesures peuvent être différentes (voir figure 3.22).

En fait, il semble tout-à-fait pertinent de calculer la fonction d'extinction surfacique sur une image gradient. En effet, la notion de taille d'une région est étroitement liée à la notion de contour de la région, information que le calcul d'une image gradient permet d'extraire (voir figure 3.22). La distribution en taille ainsi obtenue est d'autant plus fiable que les contours des régions sont précisément définis (lignes de crêtes fermées, pas de discontinuité locale sur l'image gradient). Lorsque ce n'est pas le cas, l'incertitude sur la taille calculée est à la mesure de l'incertitude sur le contour de la région étudiée.

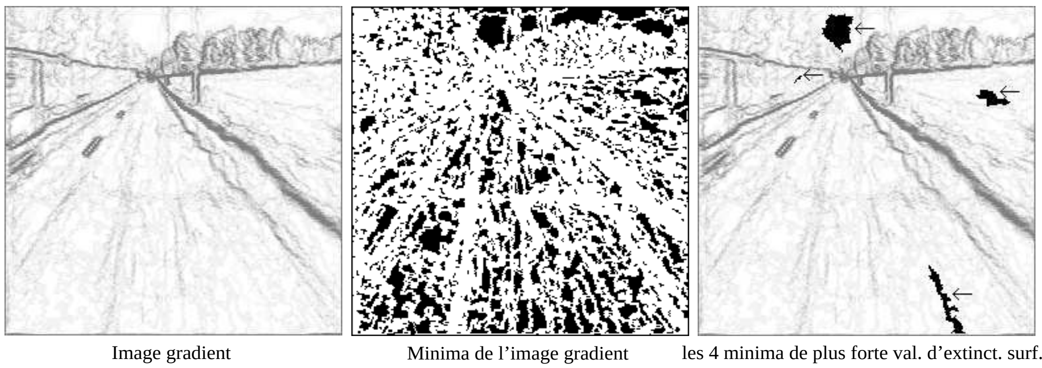


Figure 3.21: Exemple où la fonction d'extinction surfacique est calculée sur une image gradient

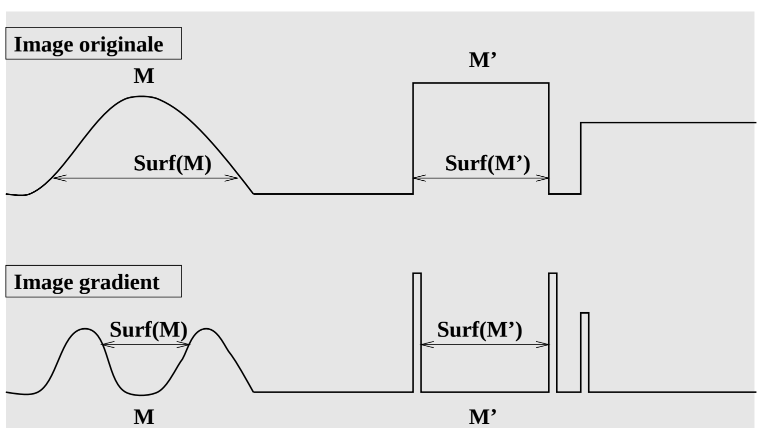


Figure 3.22: Comparaison entre la fonction d'extinction surfacique calculée sur l'image originale et la fonction d'extinction surfacique calculée sur l'image gradient. Contrairement au cas de la dynamique, il n'y a pas ici de différence d'interprétation entre la mesure calculée sur l'image originale et celle clculée sur l'image gradient, même si ces mesures peuvent être différentes.

3.3.4 Arasement volumique et fonction d'extinction volumique

L'ouverture surfacique permet d'introduire un équivalent spatial de la notion de dynamique. Notre but ici est de concilier ces deux critères (taille et profondeur) de manière à introduire une valuation caractéristique du volume des structures sur l'image.

Introduction d'une nouvelle transformation : l'*Arasement volumique*

Nous rappelons que $C_x(X)$ extrait la composante connexe de X contenant x et que $X_s^+(f)$ désigne le seuil de f au niveau s : $X_s^+(f) = \{x \in E \mid f(x) \geq s\}$. Nous rappelons également que le sous-graphe d'une fonction numérique f peut être vu comme une superposition de ses seuils successifs : voir figure 3.23.

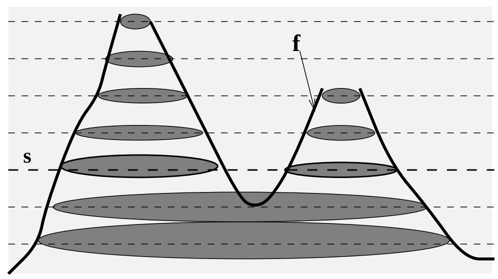


Figure 3.23: Une fonction numérique f peut être vue comme une superposition de ses seuils successifs

Nous avons vu que les transformations $\delta^\infty(f, f-h)$ et $\gamma_\lambda^a(f)$ (qui sont à la base de la dynamique et de la fonction d'extinction surfacique) sont définies par :

$$\forall x \in E, \quad \delta^\infty(f, f-h)(x) \quad = sup\,\{s \leq f(x) \mid \quad \exists y \in C_x(X_s^+(f)), \quad f(y) - s \geq h\}$$

$$\forall x \in E, \quad \gamma_\lambda^a(f)(x) \qquad = sup\,\{s \leq f(x) \mid \quad Surf(C_x(X_s^+(f))) \quad \geq \lambda\}$$

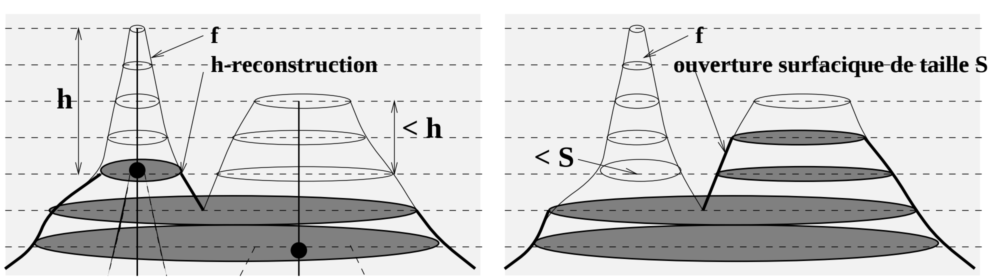


Figure 3.24: Principe des h-reconstructions et de l'ouverture surfacique : élimination des dômes de hauteur ou de surface trop faible

$\delta^\infty(f, f-h)$ élimine les dômes de l'image (c'est-à-dire les structures claires de l'image) de hauteur inférieure à h ; les autres sont arasés sur une hauteur h (donc partiellement préservés). $\gamma_\lambda^a(f)$ élimine les dômes de l'image de surface inférieure à λ ; les autres sont arasés (voir figure 3.24). Nous nous proposons ici de définir une transformation agissant sur les dômes de l'image selon leur volume.

$\gamma_\lambda^a(f)$ peut être vue comme une ouverture par un élément structurant plan de surface λ déformable. $\delta^\infty(f, f-h)$ peut être vue comme une érosion (suivie d'une reconstruction géodésique) par un segment vertical de hauteur h centré en bas. Une manière de concilier les critères de taille et de hauteur peut consister à considérer un élément structurant non plan et non ponctuel.

On peut notamment considérer la composée $\gamma_\lambda^a(\delta^\infty(f, f-h))$. Cette transformation peut être vue comme une érosion (suivie d'une reconstruction géodésique) par un élément structurant définit par un segment de hauteur h et une base déformable de surface λ (le centre de l'élement structurant étant situé sur sa base). On vérifie aisément que :

$$\gamma_\lambda^a(\delta^\infty(f, f-h)) = inf(\gamma_\lambda^a(f), \delta^\infty(f, f-h))$$

$\gamma_\lambda^a(\delta^\infty(f, f-h))$ élimine donc les dômes de l'image de hauteur ou de surface trop petite. Mais ce n'est pas exactement le volume des dômes qui est pris en compte. Un dôme de volume $V > h \times \lambda$ peut très bien être éliminé par $\gamma_\lambda^a(\delta^\infty(f, f-h))$ (voir figure 3.25).

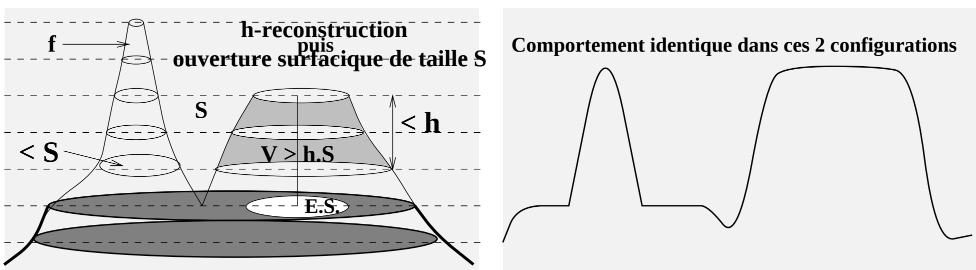


Figure 3.25: $\gamma_\lambda^a(\delta^\infty(f, f-h))$ agit selon la surface et la hauteur des dômes mais non selon leur volume.

Considérons maintenant une érosion par un élément structurant non plan quelconque (voir figure 3.26). Si on effectue une reconstruction de f par cet érodé, alors, tous les dômes de l'image ne contenant pas cet élément structurant non plan sont éliminés. Les autres sont érodés. Nous définissons l'*arasement volumique* comme une érosion associée à un élément structurant non plan de volume donné λ déformable capable d'adapter localement sa forme aux structures de l'image.

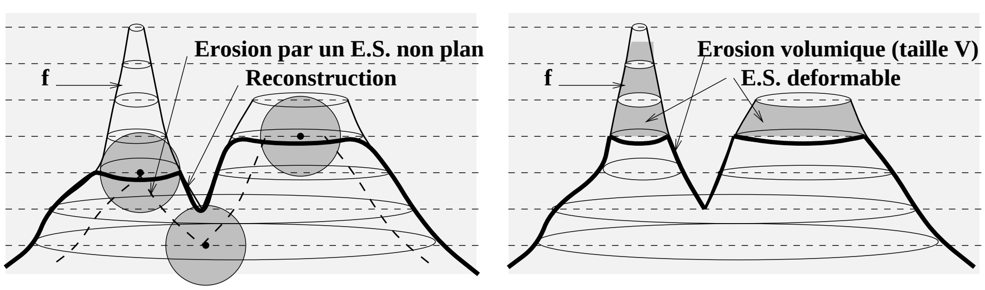


Figure 3.26: érosion à partir d'un élément structurant à niveaux de gris déformable

Dans tout ce qui suit, $Vol_x^s(f)$ désignera la quantié :

$$Vol_x^s(f) = \sum_{y \in C_x(X_s^+(f))} (f(y) - s) \tag{3.15}$$

Définition 3.8 (Arasement volumique) *Soit f une fonction numérique. L'arasement volumique de taille λ de f notée $a^v_\lambda(f)$ est défini par :*

$$\forall x \in E, a^v_\lambda(f)(x) = sup\{s \leq f(x) \mid Vol^s_x(f) \geq \lambda\} \tag{3.16}$$

$a^v_\lambda(f)$ élimine les dômes de l'image (c'est-à-dire les structures claires de l'image) de volume strictement inférieur à λ ; les autres sont arasés (voir figure 3.27).

On définit de manière duale une transformation agissant sur les structures sombres de l'image :

$$\forall x \in E, \overline{a}^v_\lambda(f)(x) = -a^v_\lambda(-f) = inf\{s \geq f(x) \mid \sum_{y \in C_x(X^-_s(f))} (s - f(y)) \geq \lambda\} \tag{3.17}$$

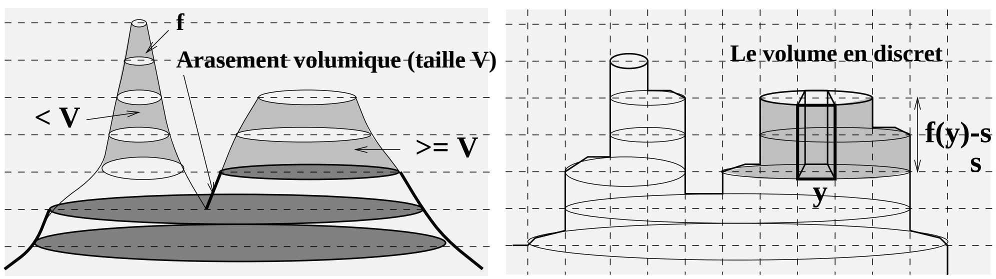


Figure 3.27: Principe de l'arasement volumique : élimination des dômes de volume trop faible

Propriétés de l'arasement volumique

• La transformation a^v_λ n'est pas une érosion car elle ne commute pas avec l'inf : $\exists(f,g) \mid a^v_\lambda(f \wedge g) \neq a^v_\lambda(f) \wedge a^v_\lambda(g)$. Nous rappelons que $\delta^\infty(f, f-h)$ ne définit pas non plus une érosion.

- a^v_λ est de manière évidente
- connexe
- anti-extensive : $a^v_\lambda(f) \leq f$ et $a^v_0 = Id$
- croissante : $f \leq g \Longrightarrow a^v_\lambda(f) \leq a^v_\lambda(g)$
- décroissante vis-à-vis de l'indice λ : $\forall f, \lambda \geq \mu \Longrightarrow a^v_\lambda(f) \leq a^v_\mu(f)$

Ces propriétés sont également vérifées par l'ouverture surfacique et par les h-reconstructions ; nous rappelons qu'elles correspondent aux conditions que nous avons imposées pour définir la notion de fonction d'extinction.

• a^v_λ n'est pas idempotente (comme l'ouverture surfacique) et $a^v_\lambda \circ a^v_\mu \leq a^v_{\lambda+\mu}$ mais on n'a pas toujours l'égalité donc a^v_λ ne satisfait pas une loi de composition additive (comme les h-reconstructions) (voir figure 3.29).

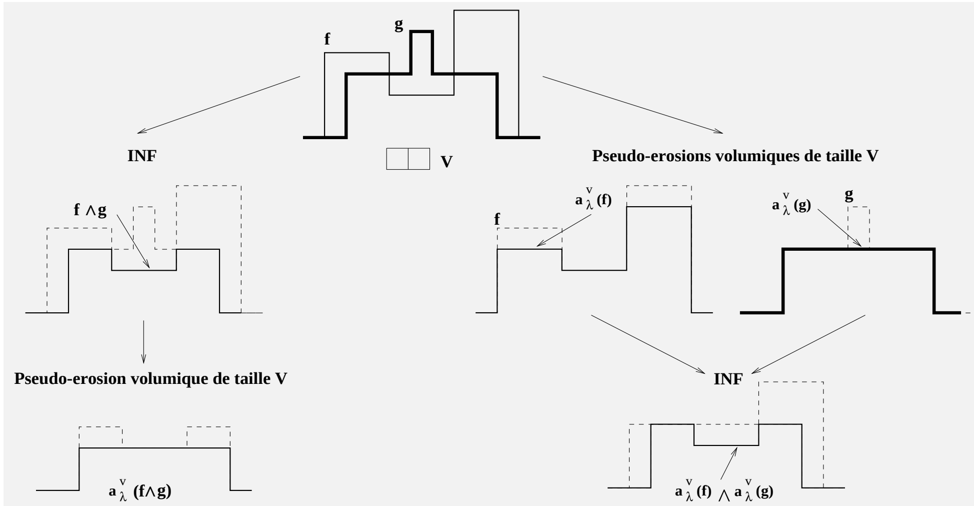


Figure 3.28: L'arasement volumique ne commute pas avec l'inf : ce n'est pas une érosion. Sur cet exemple $a^v_\lambda(f) \wedge a^v_\lambda(g) \neq a^v_\lambda(f \wedge g)$

En conclusion, les propriétés de la la transformation a^v_λ ne sont pas aussi riches que celles des transformations morphologiques classiques utilisées pour le filtrage d'image. Doit-on en déduire que cette transformation n'est pas intéressante ? Nous ne le pensons pas. Notamment, le fait qu'elle soit connexe, croissante, anti-extensive et décroissante vis-à-vis de l'indice λ permet d'utiliser la famille $(a^v_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ pour l'étude des maxima de l'image.

On peut également s'interroger sur le sens physique d'une telle transformation qui mélange des grandeurs spatiales et des grandeurs relatives à la luminance. En effet, par construction, le résultat d'une telle transformation est complètement modifié par anamorphose. En réalité, c'est en liant l'information spatiale et celle de luminance qu'il est possible d'approcher la perception humaine : à contrastes égaux, l'oeil perçoit avec plus ou moins d'intensité des objets de petite ou de grande taille. Nous verrons dans le chapitre suivant, que sur le principe du volume, d'autres critères peuvent être introduits pour mélanger ces informations : rapport contraste sur surface par exemple.

Valeurs d'extinction volumiques

Comme $(a^v_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une famille décroissante de transformations connexes anti-extensives, on peut lui associer une fonction d'extinction que nous appellerons *fonction d'extinction volumique* et qui associe à tout maximum M d'une image f une *valeur d'extinction volumique* définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}ax(f), \mathcal{E}^v(M) = sup\{\lambda \geq 0 \mid \forall \mu \leq \lambda, M \cap \mathcal{M}ax(a^v_\mu(f)) \neq \emptyset\} \tag{3.18}$$

La figure 3.30 illustre l'intérêt de la notion de valeur d'extinction volumique pour distinguer des objets ayant des dynamiques et des valeurs d'extinction surfaciques égales (voir figure 3.30).

On peut également remarquer que, si f ne contient que des structures de même taille, alors la hiérarchie engendrée par la fonction d'extinction volumique est identique à celle

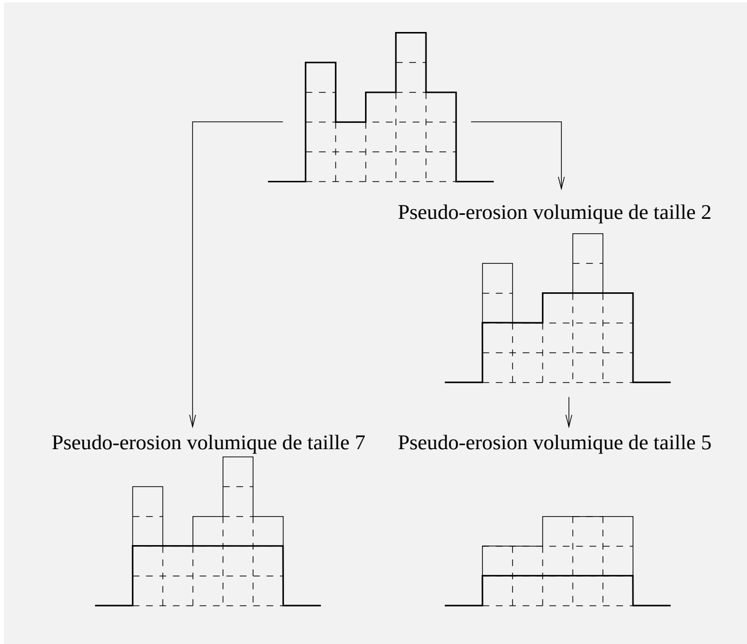


Figure 3.29: $a^v_\lambda \circ a^v_\mu \leq a^v_{\lambda+\mu}$ mais on n'a pas toujours l'égalité : sur cet exemple notamment.

engendrée par la dynamique. De même, si toutes les structures de l'image sont de même hauteur, la hiérarchie engendrée est identique à celle que l'on obtiendrait à partir de la fonction d'extinction surfacique.

Les figures 3.31 et 3.32 illustrent le principe et le comportement de la fonction d'extinction volumique. Par un simple seuillage des maxima valués avec leur valeur d'extinction volumique, il est possible d'extraire des marqueurs des régions les plus significatives de l'image en termes de volume. On retient : les régions très fortement contrastées même si elles sont de petite taille (l'écrou sur l'image "Tools" de la figure 3.31), les régions de très grande taille même si elles sont faiblement contrastées (la grande clef) ainsi que les régions ayant un contraste moyen et une taille moyenne. Sur l'exemple 3.32, le résultat obtenu est similaire à celui que l'on obtenait dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques : on extrait un marqueur pour la route, le mur, le bord de route enneigé et le ciel.

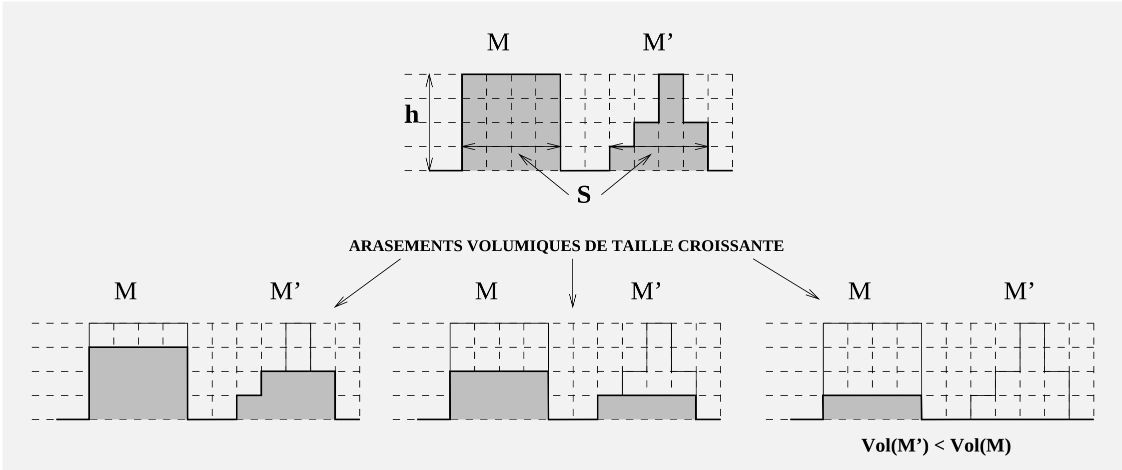


Figure 3.30: Les valeurs d'extinction volumiques permettent de distinguer des régions ayant des caractéristiques en taille et en contraste identiques

La fonction d'extinction volumique peut également être calculée sur une image gradient (voir figure 3.33). Comme dans le cas de la dynamique, l'information extraite dans ce cas n'est pas la même que celle que l'on extrait en calculant la fonction d'extinction volumique sur l'image originale. Ici, c'est la taille et la force des contours des régions qui sont pris en compte et non pas la taille et le contraste des régions (voir figure 3.34). Par rapport à la fonction d'extinction surfacique calculée sur l'image gradient, la fonction d'extinction volumique présente l'avantage de prendre en compte la qualité des contours des régions en plus de leur taille.

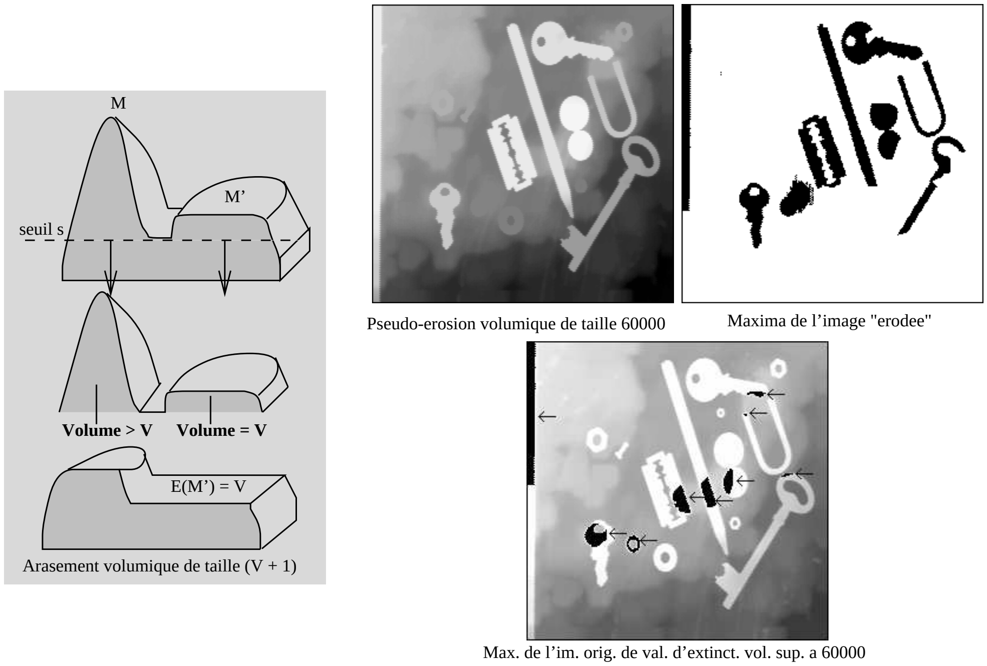


Figure 3.31: Valeurs d'extinction volumiques : principe et illustration sur l'exemple "Tools"

3.4 Définition symétrique à l'aide des transformations alternées séquentielles

Nous avons jusqu'ici introduit la notion de valeur d'extinction d'un extremum d'une image numérique en considérant des transformations soit anti-extentives soit extensives, c'est-à-dire agissant soit sur les maxima (les régions claires) soit sur les minima (les régions sombres) de l'image. Or, la plupart des images réelles se composent de régions sombres et claires juxtaposées ou emboitées et pour bon nombre d'applications, il peut être nécessaire de traiter celles-ci de manière non indépendante.

Prenons l'exemple de la dynamique. Le calcul de la dynamique des maxima et des minima d'une image est lié à deux familles distinctes de filtres de contraste agissant soit sur les maxima soit sur les minima de l'image. A chaque fois, les minima et les maxima sont traités séparément et indépendamment les uns des autres. De ce fait, considérer l'ensemble des extrema de l'image valués par leur dynamique ne correspond pas à une analyse réellement symétrique des régions sombres et claires de l'image.

Une solution peut consister à calculer les fonctions d'extinction associées aux minima de l'image gradient. Nous avons vu que cette solution semble tout-à-fait correcte dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques mais qu'elle ne convient pas dans le cas de la dynamique. En effet, en étudiant une image gradient à la place de l'image originale, on perd énormément d'information et notamment celle liée au contraste des régions (il y a modification totale des niveaux d'intensité).

Notre but ici est d'introduire une définition réellement symétrique de la fonction d'extinction (c'est-à-dire applicable à l'image originale) de telle sorte que tous les ex-

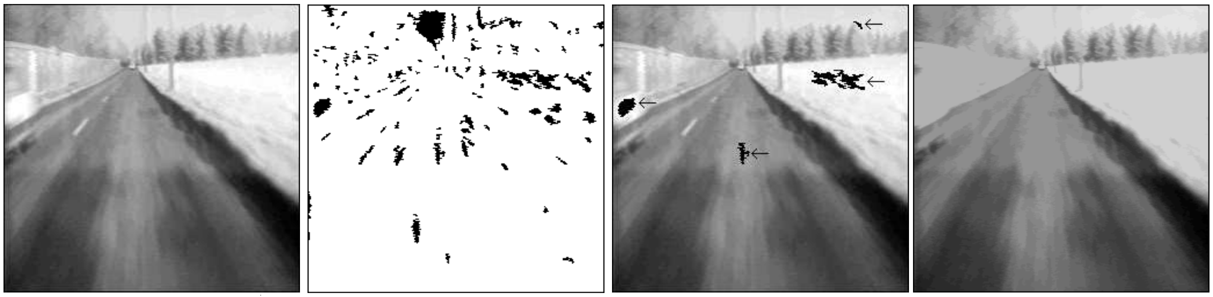


Image originale "Road" | Maxima de l'image originale | les 4 max. de plus forte val. d'extinct. vol. | Arasement volum. de taille equivalente

Figure 3.32: Utilisation de la fonction d'extinction volumique pour extraire les extrema les plus significatifs en termes de volume. On ne retient ici que les 4 maxima de plus forte valeur d'extinction volumique. L'image de gauche est le résultat de l'arasement volumique de paramètre λ, où λ correspond à la plus faible valeur d'extinction des 4 maxima retenus. Seules les régions claires qui persistent sur l'image filtrée sont marquées.

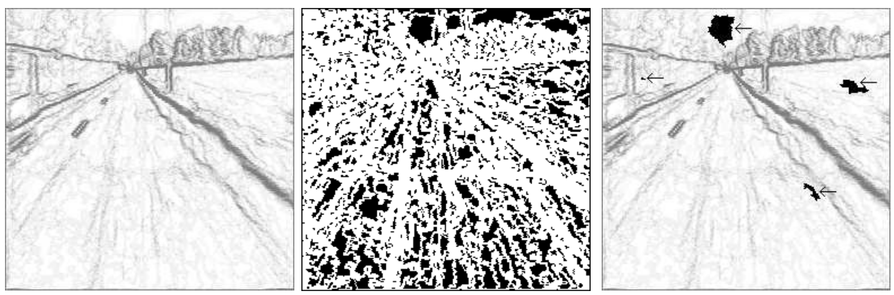


Image gradient | Minima de l'image gradient | les 4 minima de plus forte val. d'extinct. vol.

Figure 3.33: Exemple où la fonction d'extinction volumique est calculée sur une image gradient

trema de l'image soient traités simultanément et surtout de manière non indépendante.

3.4.1 Les transformations alternées séquentielles

Dans ce paragraphe, $(\psi_\lambda)_\lambda$ désignera une famille de transformations anti-extensives. On notera $\overline{\psi}_\lambda$ la transformation duale de ψ_λ définie par :

$$\forall \lambda \geq 0, \forall f, \overline{\psi}_\lambda(f) = -\psi_\lambda(-f)$$

On supposera de plus que ψ_λ est décroissant vis-à-vis de l'indice λ et que $\psi_0 = Id$. On a alors :

$$\psi_\lambda < \psi_{\lambda-1} < .... < \psi_1 < Id < \overline{\psi}_1 < ... < \overline{\psi}_{\lambda-1} < \overline{\psi}_\lambda$$

L'algorithme classiquement utilisé pour passer d'une transformation non symétrique ψ_λ à une transformation symétrique consiste à appliquer alternativement la transformation ψ_λ et la transformation duale sur l'image. La transformation résultante porte le nom de *transformation alternée séquentielle* [29].

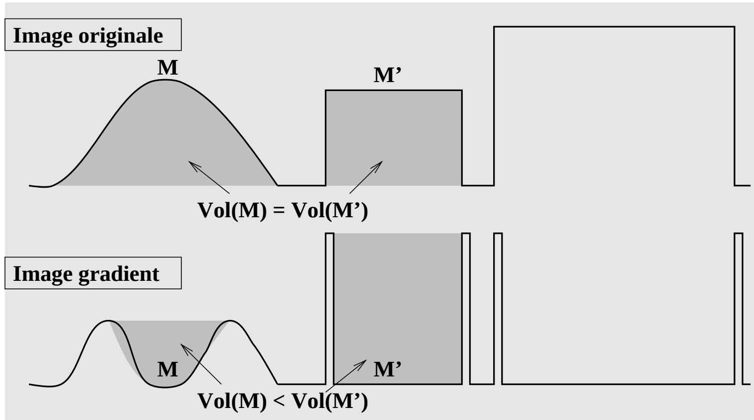


Figure 3.34: Comparaison entre la fonction d'extinction volumique calculée sur l'image originale et la fonction d'extinction volumique calculée sur l'image gradient : lorsqu'elle est calculée sur l'image gradient, la fonction d'extinction volumique est caractéristique de la taille et de la force des contours des régions de l'image.

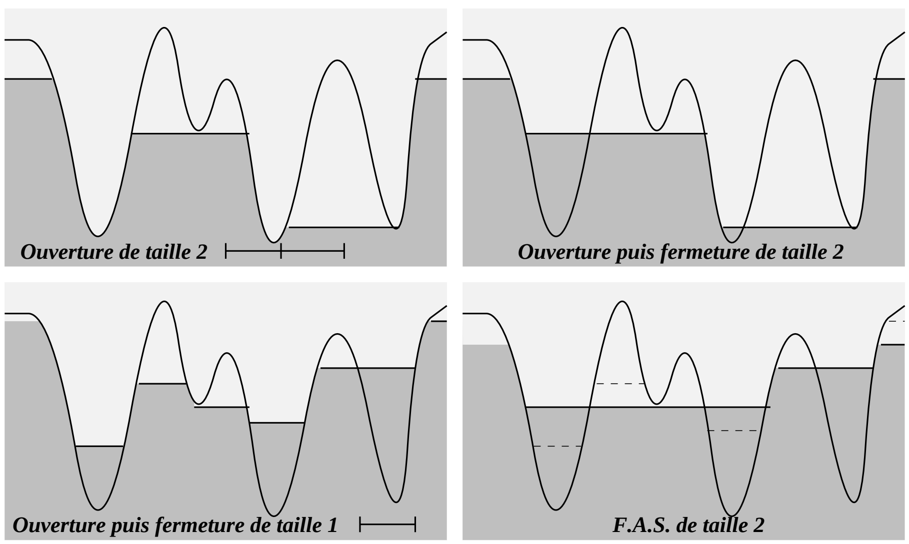


Figure 3.35: Comparaison entre le filtre alterné séquentiel de taille 2 ($\varphi_2 \circ \gamma_2 \circ \varphi_1 \circ \gamma_1$) et une ouverture fermeture de taille 2 ($\varphi_2 \circ \gamma_2$)

Si ψ_λ est idempotente, le filtre alterné séquentiel associé est défini par (voir figure 3.35) :

$$\psi_\lambda^{AS} = (\overline{\psi}_\lambda \circ \psi_\lambda) \circ (\overline{\psi}_{\lambda-1} \circ \psi_{\lambda-1}) \circ ... \circ (\overline{\psi}_1 \circ \psi_1) = (\overline{\psi}_\lambda \circ \psi_\lambda) \circ \psi_{\lambda-1}^{AS} \tag{3.19}$$

ou bien :

$$\psi_\lambda^{AS} = (\psi_\lambda \circ \overline{\psi}_\lambda) \circ (\psi_{\lambda-1} \circ \overline{\psi}_{\lambda-1}) \circ ... \circ (\psi_1 \circ \overline{\psi}_1) = (\psi_\lambda \circ \overline{\psi}_\lambda) \circ \psi_{\lambda-1}^{AS} \tag{3.20}$$

Dans le cas où ψ_λ n'est pas idempotente, on considère la transformation (voir figure 3.36) :

$$\psi_\lambda^{AS} = \underbrace{(\overline{\psi}_1 \circ \psi_1) \circ (\overline{\psi}_1 \circ \psi_1) \circ ... \circ (\overline{\psi}_1 \circ \psi_1)}_{\lambda \text{ fois}} = (\overline{\psi}_1 \circ \psi_1) \circ \psi_{\lambda-1}^{AS} \tag{3.21}$$

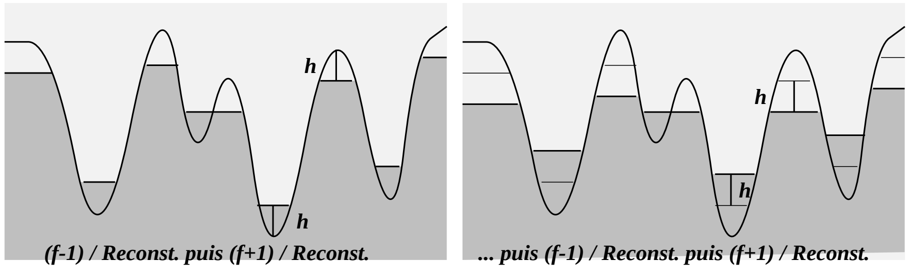


Figure 3.36: h-reconstructions (décalage positif puis négatif) appliquées alternativement sur les structures claires et sombres de l'image

ou bien :

$$\psi_\lambda^{AS} = \underbrace{(\psi_1 \circ \overline{\psi}_1) \circ (\psi_1 \circ \overline{\psi}_1) \circ ... \circ (\psi_1 \circ \overline{\psi}_1)}_{\lambda \text{ fois}} = (\psi_1 \circ \overline{\psi}_1) \circ \psi_{\lambda-1}^{AS} \tag{3.22}$$

Les filtres alternés séquentiels ont fait l'objet d'études approfondies [82, 29] et sont aujourd'hui très utilisées. Ces transformations ne sont ni auto-duales, ni idempotentes : elles sont à la limite auto-duales lorsque les valeurs λ sont continues et que la valeur initale de λ tend vers zéro. On choisit l'une ou l'autre des deux définitions 3.19 ou 3.20 (ou bien 3.21 ou 3.22) selon que l'on désire privilégier les structures claires ou les structures sombres de l'image. Ce choix est laissé à l'utilisateur et doit être redéfini pour chaque problème traité. Enfin, ces transformations ne sont ni extensives, ni anti-extensives, c'est-à-dire que les fonctions f et $\Psi_\lambda^{AS}(f)$ ne sont pas comparables (Ψ_λ^{AS} ne vérifie ni $\Psi_\lambda^{AS}(f) \geq f$ ni $\Psi_\lambda^{AS}(f) \leq f$).

Une propriété importante des transformations alternées est la suivante : si ψ est un filtre par reconstruction, alors $\overline{\psi}\psi$ est un filtre fort, c'est-à-dire qu'il présente de bonnes propriétés de stabilité et de robustesse vis-à-vis du bruit d'origine aléatoire. Cette propriété n'est généralement pas vérifiée lorsque ψ n'est pas un filtre par reconstruction.

Les transformations alternées séquentielles ont un comportement symétrique vis-à-vis des structures claires et sombres de l'image qui sont traitées de façon inter-dépendantes. En pratique, il y a peu de différence entre ψ_λ^{AS} et $(\overline{\psi}_\lambda \circ \psi_\lambda)$ ou $(\psi_\lambda \circ \overline{\psi}_\lambda)$, excepté dans des configurations particulières telles que celles de structures emboitées. Or, sur des images complexes, ces configurations sont courantes (voir figure 3.37).

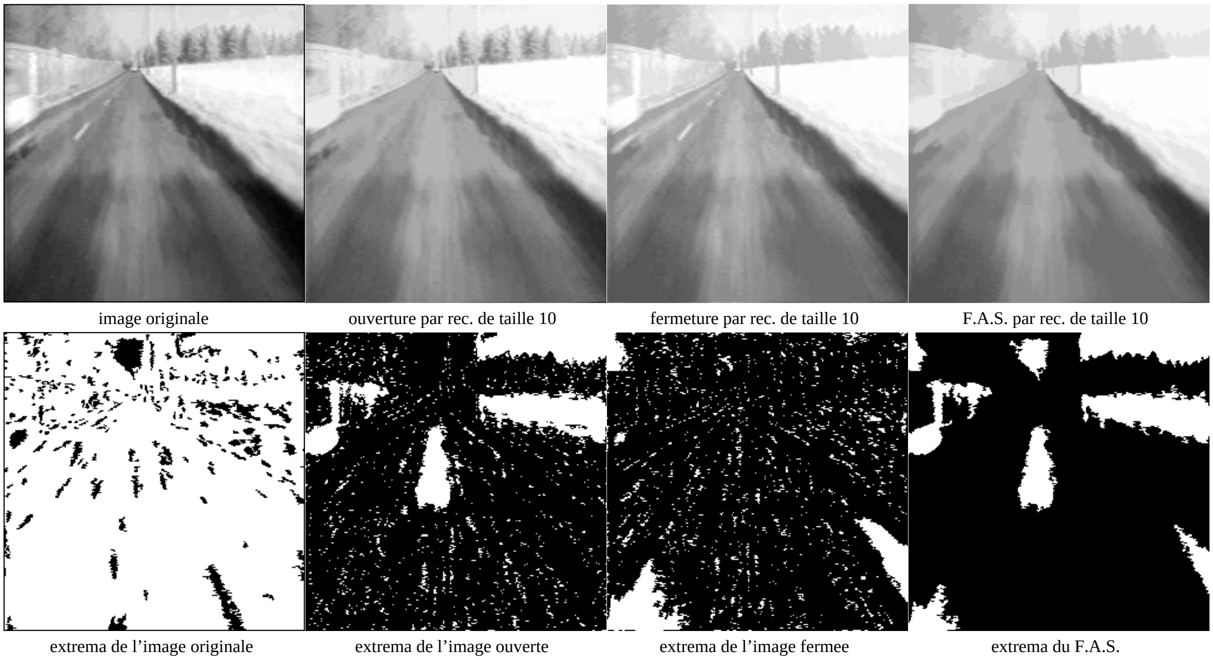


Figure 3.37: Effet d'un Filtre Alterné Séquentiel par reconstruction sur les extrema d'une image numérique

3.4.2 Valeurs d'extinction symétriques des extrema d'une image numérique

Nous avons défini jusqu'ici la notion de valeur d'extinction en considérant des familles de transformations par reconstruction extensives ou anti-extensives. Ces transformations agissent sur les images numériques, nous l'avons vu, en propageant leurs minima ou leurs maxima. Les transformations alternées séquentielles par reconstruction qui leur sont associées agissent sur les images numériques en propageant leurs extrema (voir figure 3.37).

Définition 3.9 (Valeur d'extinction symétrique d'un extremum) *Soit M un extremum régional d'une fonction numérique f et $\Psi = (\psi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ une famille de transformations par reconstruction (extensives ou bien anti-extensives). La valeur d'extinction symétrique de M par rapport à Ψ notée $\mathcal{E}_\Psi^{sym}(M)$ est la taille maximale λ de la T.A.S. ($\psi_\lambda^{AS} = (\overline{\psi}_\lambda \circ \psi_\lambda) \circ \psi_{\lambda-1}^{AS}$) qu'il est possible de calculer sans éliminer M :*

$$\forall M \in \mathcal{E}xtr(f),$$
$$\mathcal{E}_\Psi^{sym}(M) = sup \left\{ \lambda \geq 0 \mid \forall \mu \leq \lambda, \left[\begin{array}{l} M \in \mathcal{M}ax(\psi_\mu^{AS}(f)) \ si\ M \in \mathcal{M}ax(f) \\ M \in \mathcal{M}in(\psi_\mu^{AS}(f)) \ si\ M \in \mathcal{M}in(f) \end{array} \right. \right\} \tag{3.23}$$

Dans cette définition, $\mathcal{E}xtr(f)$ désigne l'ensemble de extrema régionaux de f.

D'une manière gènérale, comme la classe des opérateurs connexes est stable pour la composition, la notion de valeur d'extinction peut être définie à partir de toute famille (homogène ou non) construite par composition d'opérateurs connexes...

Les figures 3.38 et 3.39 illustrent la comparaison entre la fonction d'extinction associée aux h-reconstructions (c'est-à-dire *la dynamique*) et celle associée aux h-reconstructions alternées séquentielles (que nous appelons la *dynamique symétrique*). Sur l'exemple "Tools", les résultats obtenus dans les cas de la dynamique et de la dynamique symétrique diffèrent pour tous les outils troués : dans de telles configurations en effet, les structures sombres et claires de l'image sont traitées de manière non indépendante par les transformations alternées séquentielles. De ce fait, sur cet exemple, la dynamique symétrique d'un trou est plus faible que sa dynamique.

Par définition, à chaque extremum de l'image filtrée par la transformation alternée séquentielle de taille h correspond un et un seul extremum de l'image originale de dynamique symétrique supérieure à h. Et on a :

$$\forall M \in \mathcal{E}xtr(f), dyn^{sym}(M) \leq dyn(M)$$

La différence entre la dynamique et la dynamique symétrique est de l'ordre de la différence entre une transformation alternée ($\epsilon^{\infty}(f, f+h) \circ \delta^{\infty}(f, f-h)$) et une transformation alternée séquentielle ($\epsilon^{\infty}(f, f+h) \circ \delta^{\infty}(f, f-h) \circ ... \circ \epsilon^{\infty}(f, f+1) \circ \delta^{\infty}(f, f-1)$).

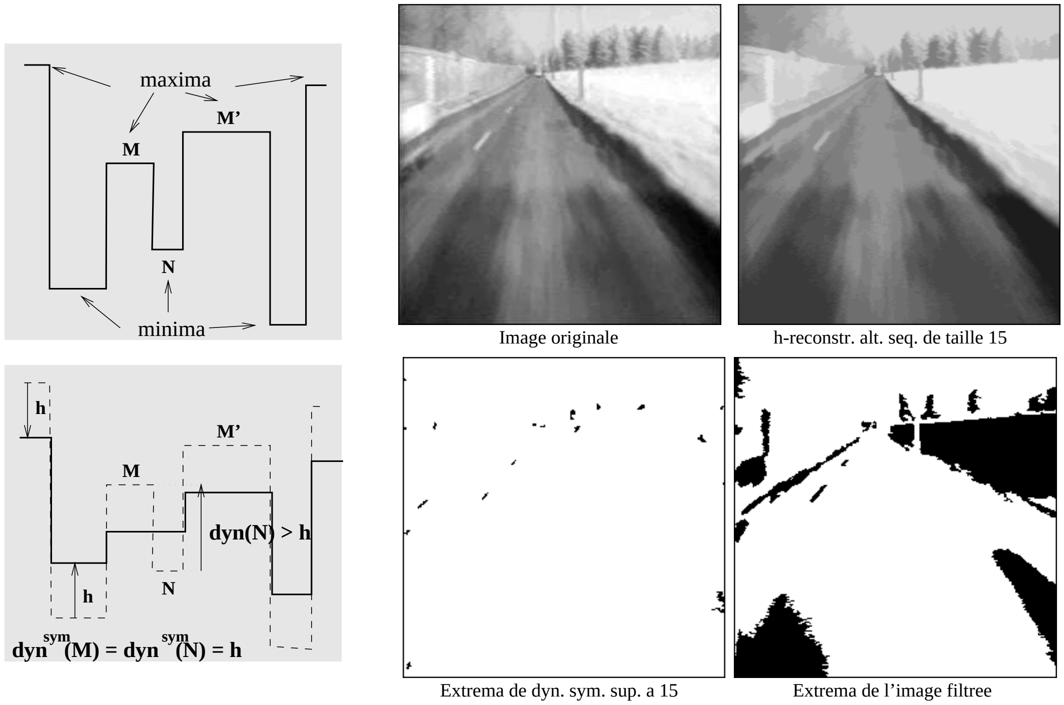


Figure 3.38: Dynamique symétrique : principe et illustration sur l'exemple “Road”

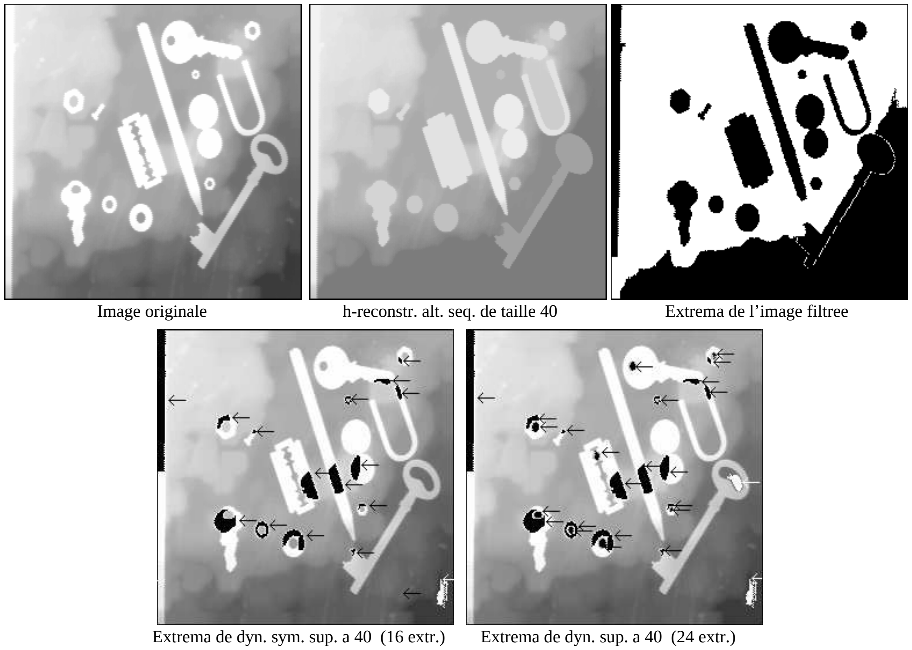


Figure 3.39: Comparaison entre la dynamique et la dynamique symétrique sur l'exemple de l'image "Tools" : ces opérateurs diffèrent dans le cas de structures emboîtées (les clés, les écrous...).

3.5 Utilisation des fonctions d'extinction pour le filtrage d'image

Nous avons introduit la notion de valeur d'extinction comme un outil permettant de valuer les extrema d'une image numérique selon un critère prédéfini : le contraste, la taille, la forme, le volume... Prenons l'exemple des valeurs d'extinction surfaciques : à chaque structure ou région de l'image de taille supérieure ou égale à λ est associé un unique extremum de l'image de valeur d'extinction surfacique supérieure ou égale à λ.

Dès lors une application immédiate est le filtrage d'image : comment, à partir de cette donnée, éliminer de l'image les structures non significatives et préserver intégralement les structures d'intérêt ? La reconstruction géodésique est pour ce type de problème une solution intéressante.

3.5.1 Principe

Supposons que l'on s'intéresse uniquement aux structures claires de l'image, et que l'on dispose d'un ensemble de marqueurs quelconques (connexes ou non) $\mathcal{M}arq = (M_i)_{i \in I}$ pointant sur les structures d'intérêt dans l'image. Pour reconstruire uniquement les structures marquées dans $\mathcal{M}arq$, on effectue une reconstruction géodésique à partir de l'ensemble e ces marqueurs [21] :

$$\delta^{\infty}(f, f \wedge f_{\mathcal{M}arq}) \text{ avec : } \forall x \in E, f_{\mathcal{M}arq}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in \mathcal{M}arq \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous notons, pour simplifier, $+\infty$ (respectivement $-\infty$) la valeur maximale (respectivement minimale) prise par f.

$\delta^{\infty}(f, f \wedge f_{\mathcal{M}arq})$ reconstruit uniquement les structures claires de f marquées dans $\mathcal{M}arq$; les autres sont éliminées (voir figure 3.40).

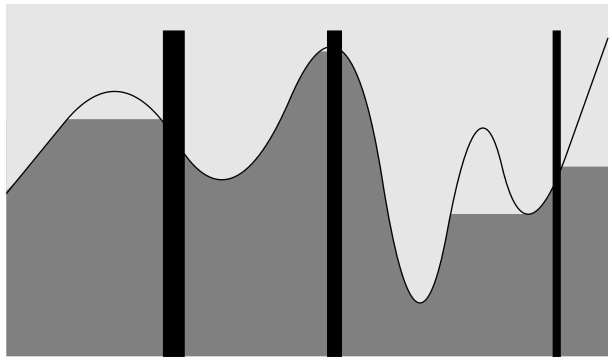


Figure 3.40: Principe de la reconstruction numérique : dilatation géodésique de marqueurs (en noir) sous une fonction. Le résultat est en gris.

Si l'on s'intéresse aux structures sombres de l'image, on fait alors intervenir le processus dual, c'est-à-dire une reconstruction géodésique par érosion.

Pour qu'une région claire (resp. sombre) marquée soit entièrement reconstruite il faut et il suffit que le marqueur coïncide avec le maximum régional le plus haut (resp. minimum le plus bas) inclus dans la région.

La reconstruction numérique à partir de marqueurs est utilisée depuis longtemps déjà pour filtrer des images. Elle a d'ailleurs déjà été mise à profit par M. Grimaud dans le cas de la dynamique et a donné naissance au *filtre en dynamique* [21]. Le point délicat de tels algorithmes ne réside pas dans le principe de reconstruction mais dans l'obtention de marqueurs des structures devant être reconstruites dans l'image. C'est à ce niveau que les outils que nous avons présentés dans ce chapitre offrent de nouvelles perspectives.

3.5.2 Les "filtres" d'extinction

Les fonctions d'extinction que nous venons de définir associent à chaque extremum d'une image une caractéristique de la structure qu'il marque dans l'image : le contraste, la taille, la forme, le volume, la régularité et la force du contour...

Pour un critère fixé, la fonction d'extinction permet d'extraire des marqueurs des régions les plus significatives de l'image (au sens du critère choisi) : il suffit de sélectionner par un simple seuillage les extrema de l'image ayant une valeur d'extinction suffisamment grande. Si l'on s'intéresse aux structures claires de l'image, le "filtre" d'extinction prend la forme suivante :

$$\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(f) = \delta^{\infty}(f, f \wedge f_{\mathcal{M}arq}) \quad \text{avec :} \quad \mathcal{M}arq = \mathcal{M}ax_s = \{M \in \mathcal{M}ax(f) \mid \mathcal{E}(M) \geq s\}$$

où $\mathcal{E}(M)$ désigne la valeur d'extinction de M (par rapport à une famille $(\psi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ donnée) calculée sur l'image f.

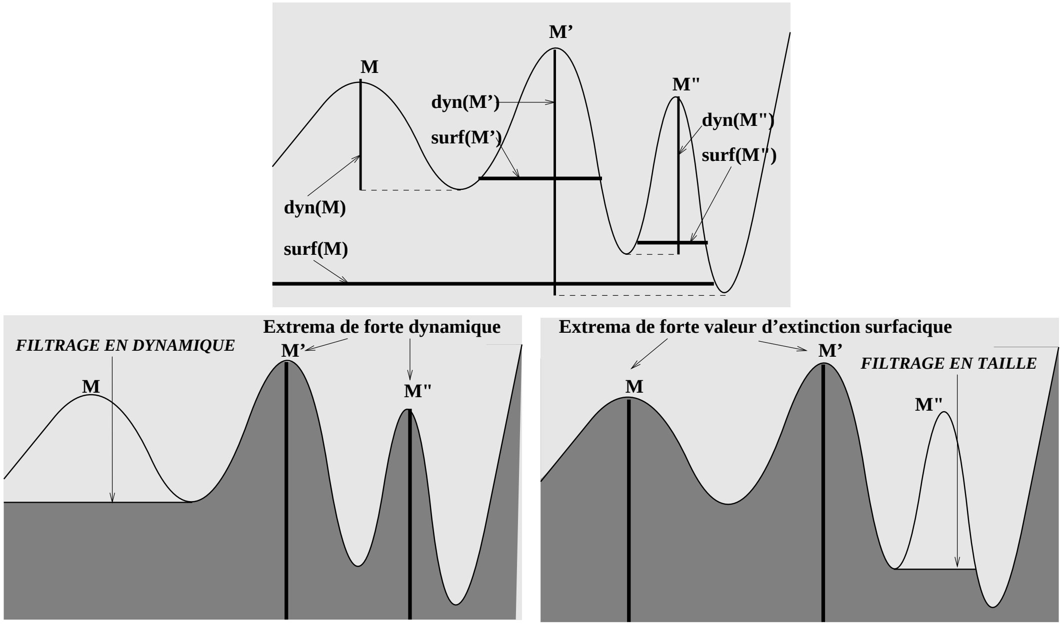


Figure 3.41: Principe des “filtres” d'extinction : les régions marquées par des extrema de forte valeur d'extinction sont intégralement préservées, les autres sont éliminées.

On dispose évidemment de l'opérateur dual pour agir sur les structures sombres de l'image : $\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},-}(f) = -\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(-f)$

Comme les marqueurs considérés correspondent toujours à des extrema régionaux de l'image, on est sûr que les structures intéressantes sont intégralement reconstruites. La figure 3.41 illustre ce principe de filtrage dans le cas de la dynamique et des valeurs d'extinction surfaciques.

3.5.3 Propriétés

- $\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}$ est, par construction, une transformation anti-extensive, idempotente et décroissante vis-à-vis de l'indice s :
$$\forall f,\ \mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(f) \leq f$$
$$\forall f,\ s_1 \leq s_2 \Rightarrow \mathcal{R}_{s_1}^{\mathcal{E},+}(f) \geq \mathcal{R}_{s_2}^{\mathcal{E},+}(f) \text{ et } \forall s \geq 0,\ \mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(f)) = \mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(f)$$

- Ces transformations sont, par construction, connexes.

- L'ensemble des maxima de $\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(f)$ est un sous-ensemble de l'ensemble des maxima de f. Dans le cas de la dynamique et des valeurs d'extinction surfaciques, calculer la valeur d'extinction d'un maximum M de $\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(f)$ sur $\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(f)$ ou sur f conduit au même résultat (voir figure 3.42). Par contre, ceci n'est pas vrai dans le cas des valeurs d'extinction volumiques.

- Ces transformations *ne sont pas croissantes* : elles ne définissent donc pas des filtres morphologiques (voir figure 3.43).

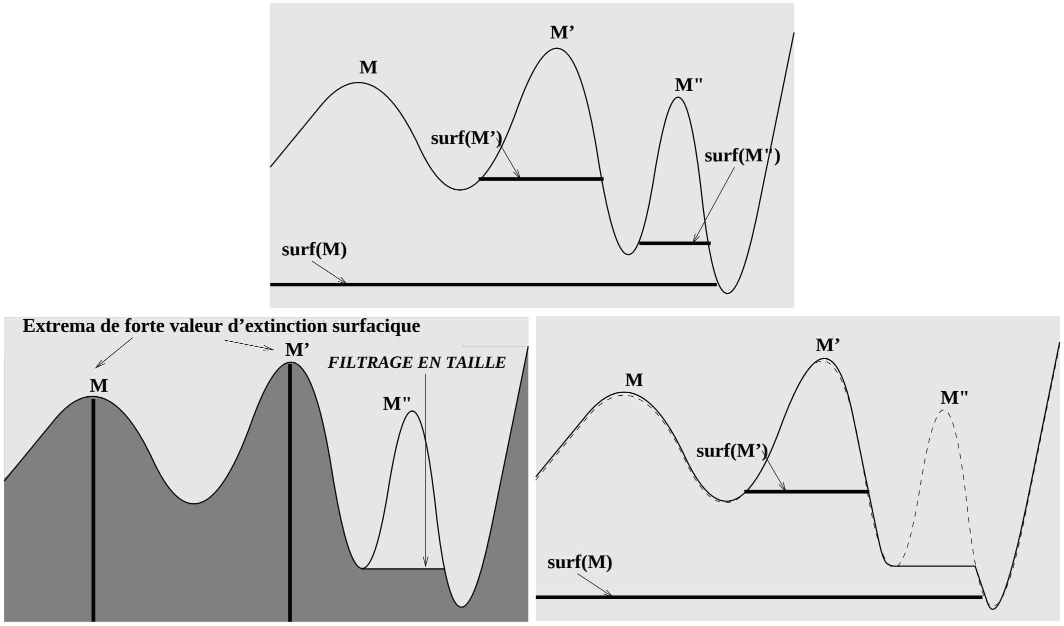


Figure 3.42: La valeur d'extinction surfacique d'un maximum M n'est pas modifiée lorsqu'on élimine les maxima de moins grande surface que M. Ici, après reconstruction, la région marquée par M'' est éliminée. Les valeurs d'extinction surfaciques associées à M et M' (calculées sur l'image filtrée) restent inchangées.

- Ces transformations vérifient des lois d'absorption de type granulométrique :

$$\forall \lambda \geq 0, \forall \mu \geq 0, \mathcal{R}_{\lambda}^{\mathcal{E},+} \circ \mathcal{R}_{\mu}^{\mathcal{E},+} = \mathcal{R}_{max(\lambda,\mu)}^{\mathcal{E},+}$$

En effet, lorsqu'on effectue deux reconstructions géodésiques successives à partir de deux ensembles de marqueurs, c'est l'ensemble de marqueurs le plus restreint qui commande le résultat.

Cependant, elles ne correspondent pas à des transformations granulométriques puisqu'elles ne sont pas croissantes.

3.5.4 Exemples

Nous nous proposons de comparer les filtres d'extinction dans le cas de la dynamique et des valeurs d'extinction surfaciques et volumiques lorsque celles-ci sont calculées soit sur l'image originale, soit sur l'image gradient. L'image "Tools" nous servira d'illustration (voir figure 3.44).

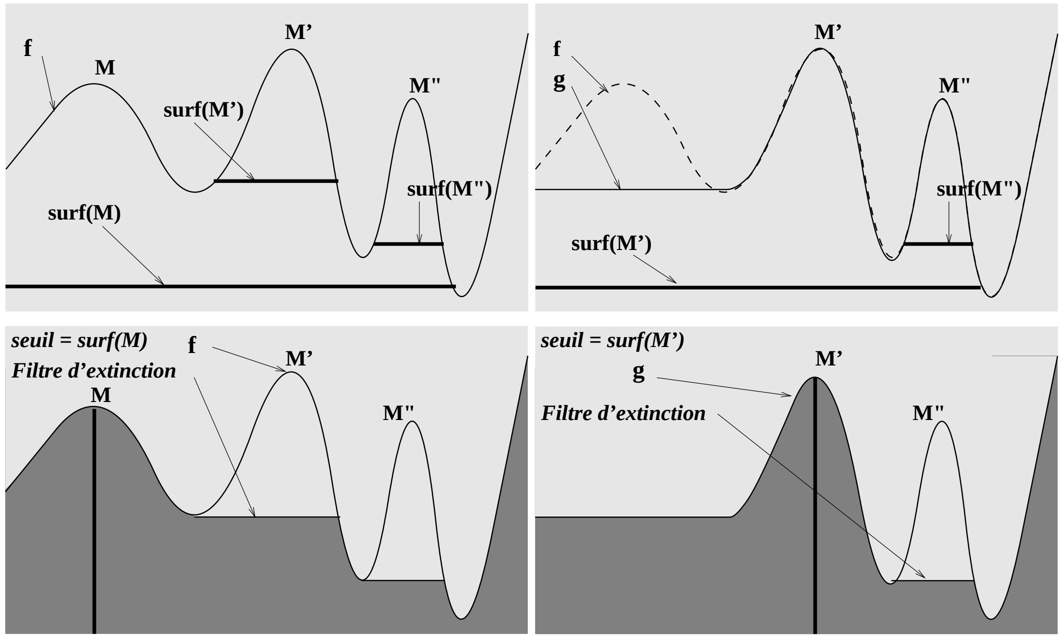


Figure 3.43: Non croissance des filtres d'extinction. Sur cet exemple, on calcule un filtre d'extinction surfacique. On a $f \geq g$ mais $\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(f)$ et $\mathcal{R}_s^{\mathcal{E},+}(g)$ ne sont pas comparables.

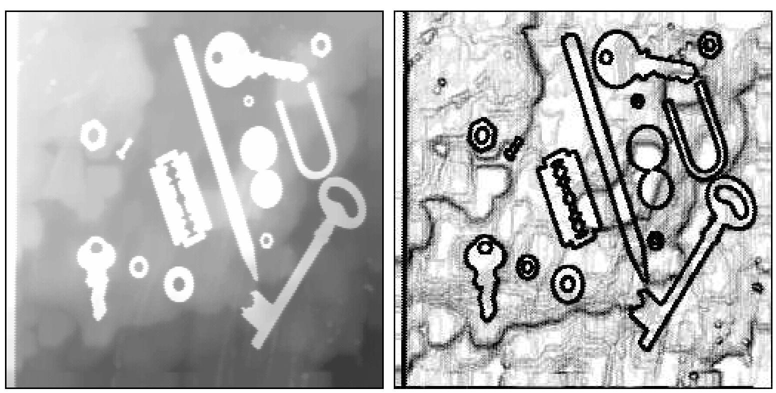


Figure 3.44: Image "Tools" et son gradient (gradient morphologique de taille 1)

- La figure 3.45 donne un premier exemple du filtrage obtenu lorsque les marqueurs considérés sont les maxima les plus significatifs de l'image en termes de contraste, de taille et de volume. Dans un premier temps, les valeurs d'extinction des maxima régionaux de l'image originale sont calculées. Les marqueurs sont obtenus en sélectionnant les maxima de plus forte valeur d'extinction. Le filtre d'extinction consiste enfin en une reconstruction géodésique de l'image à partir des marqueurs obtenus. Dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques par exemple, les seuls outils préservés par le filtrage sont les outils de grande surface.

Nous comparons ce résultat à celui obtenu en appliquant le filtre équivalent : nous avons vu que si les valeurs d'extinction sont définies à partir de la famille de transformations $(\psi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ alors, les maxima de valeur d'extinction supérieure ou égale à un seuil s

donné marquent des structures de l'image qui persistent lorsqu'on applique ψ_s à l'image.

Ainsi, le filtre d'extinction surfacique de seuil 1000 est comparé à une ouverture surfacique de taille 1000. On remarque que les images issues des deux filtrages sont comparables : les mêmes structures sont éliminées, les mêmes structures sont préservées. Cependant, les structures d'intérêt sont intégralement préservées par le filtre d'extinction alors qu'elles sont arasées en hauteur par le filtre ψ_s. Ceci est particulièrement visible sur nos exemple si l'on compare le filtre d'extinction surfacique de seuil 1000 et l'ouverture surfacique de taille 1000. Une des clés (celle située dans le coin bas à gauche) a presque entièrement été éliminée par l'ouverture (l'élimination n'est pas encore totale cependant : voir figure 3.18)) ; elle est intégralement reconstruite par le filtre d'extinction.

D'une manière générale, si $\mathcal{R}_s^{\mathcal{E}_\psi,+}$ désigne le filtre d'extinction et si ψ_λ est la transformation associée aux valeurs d'extinction étudiées, alors on a :

$$\mathcal{R}_s^{\mathcal{E}_\psi,+}(f) \geq \psi_s(f)$$

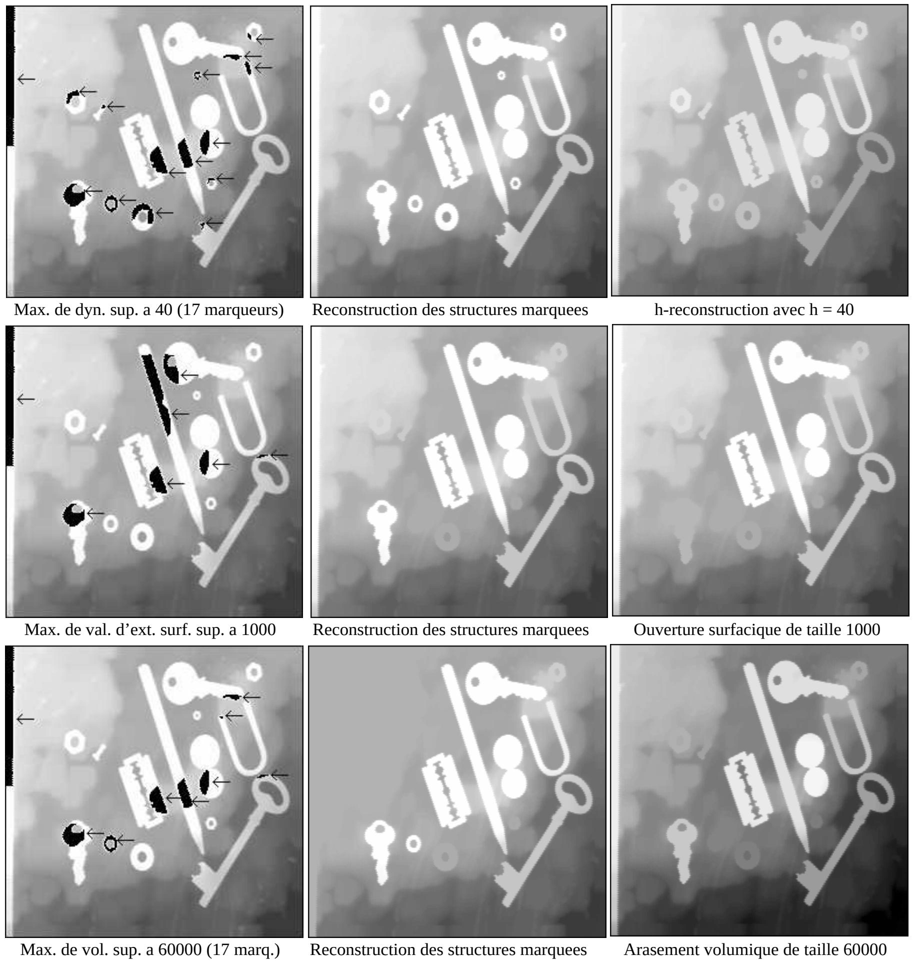
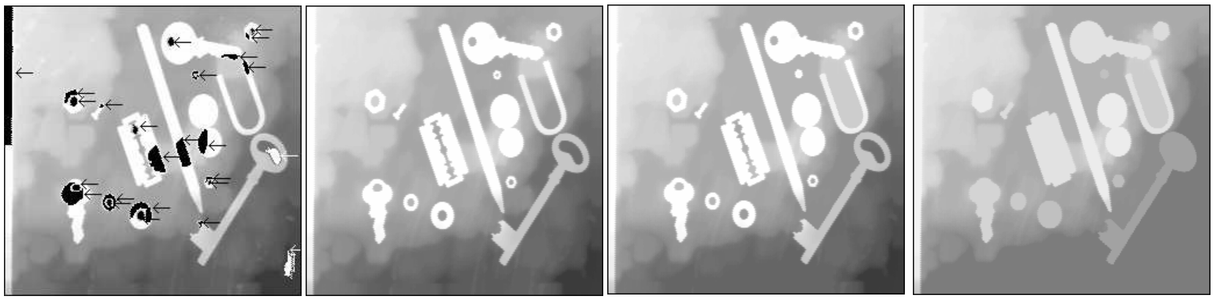


Figure 3.45: Exemple d'utilisation des valeurs d'extinction pour le filtrage d'image. En haut, les marqueurs correspondent aux maxima de forte dynamique. Au centre, les marqueurs correspondent aux maxima de forte valeur d'extinction surfacique. En bas, les marqueurs correspondent aux maxima de forte valeur d'extinction volumique. On compare les résultats à ce que l'on obtiendrait à partir des filtres équivalents : par une h-reconstruction, par une ouverture surfacique et par un arasement volumique.

- Le même traitement peut être appliqué aux structures sombres de l'image. Nous donnons figure 3.46 le résultat obtenu dans le cas de la dynamique. Après avoir reconstruit les structures blanches de fort contraste (marquées par des maxima de dynamique supérieure ou égale à 40), on reconstruit, sur l'image résultat, les structures sombres de fort contraste à partir des minima de l'image originale de dynamique supérieure ou égale au même seuil $s = 40$.

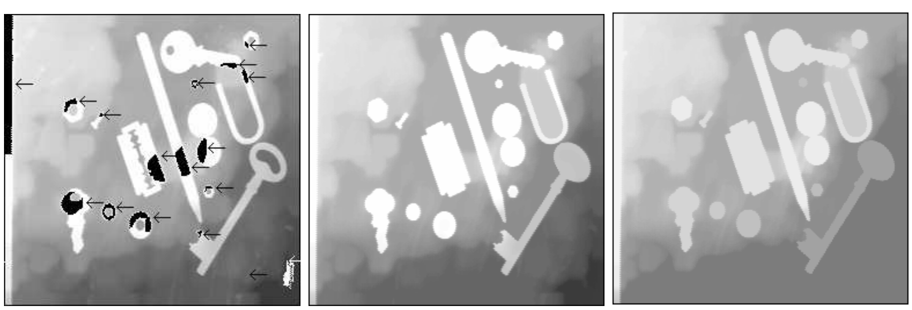
Le résultat est comparé à ce que l'on obtiendrait en effectuant sur l'image originale des h-reconstructions alternée séquentielle (pour une même taille $h = 40$). La différence entre ces deux filtrages est notable : sur l'image filtrée déduite de la dynamique les objets troués sont intégralement reconstruits (objet plus trou) ; Par contre, ces trous ont été fermés par les h-reconstructions alternées séquentielles. La dynamique considère les structures claires et sombres de manière indépendante alors que celles-ci inter-agissent lorsqu'on calcule la transformation alternée séquentielle. De ce fait, lorsque les structures sont emboitées les résultats diffèrent : c'est le cas notamment pour la lame de rasoir, les clefs et les écrous qui sont troués. Mais nous avons justement introduit la dynamique symétrique pour résoudre ce type de problème...



Extr. de dyn. sup. a 40 | Reconstruction des structures claires | Reconstruction des structures sombres | h-rec. alt. seq. (40 iterations)

Figure 3.46: Filtrage des structures claires et sombres de l'image de faible contraste en utilisant la dynamique des extrema de l'image - Comparaison avec le résultat obtenu à partir d'un filtre de contraste symétrique

Si l'on applique le même processus de filtrage en considérant la dynamique symétrique (on extrait les extrema de l'image de dynamique symétrique supérieure à 40 puis on effectue deux reconstructions successives sur les blancs puis sur les noirs), alors, le résultat obtenu est comparable à celui déduit des h-reconstructions alternées séquentielles (voir figure 3.47). Sur cet exemple, les "trous" dans les outils et les outils eux mêmes ont des dynamiques identiques mais des dynamiques symétriques différentes. C'est pour cette raison, que dans le cas de la dynamique symétrique, les trous des outils ne sont pas reconstruits.



Extr. de dyn. sym. sup. a 40 | Reconstr. des struct. claires et sombres | h-rec. alt. seq. (40 iterations)

Figure 3.47: Filtrage des structures claires et sombres de l'image de faible contraste en utilisant la dynamique symétrique des extrema de l'image

• Reprenons l'exemple de la figure 3.45 où le critère de filtrage est la taille des structures. Pour filtrer les structures claires et sombres de l'image de taille inférieure à une valeur s donnée, plusieurs solutions sont possibles :

- calculer les fonctions d'extinction surfaciques des extrema de l'image originale et seuiller le résultat au niveau s.

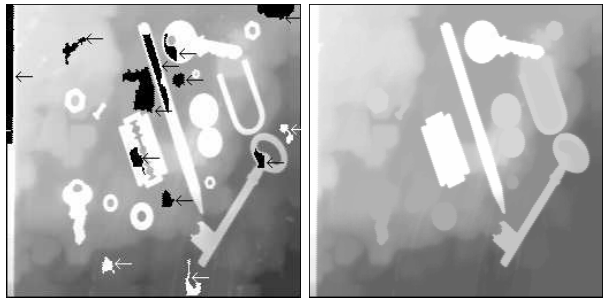
- calculer la fonction d'extinction surfacique symétrique des extrema de l'image originale et seuiller le résultat au niveau s.

- calculer la fonction d'extinction surfacique des minima de l'image gradient et seuiller le résultat au niveau s.

La dernière solution est de toute évidence la plus simple. En effet, nous avons déjà vu que les valeurs d'extinction surfaciques, qu'elles soient calculées sur l'image originale ou sur l'image gradient, correspondent toujours à une mesure de la taille des structures. Le calcul sur l'image gradient présente en outre l'intérêt de considérer simultanément et de manière inter-dépendante les structures claires et sombres de l'image (voir figure 3.48).

La dynamique des minima du gradient peut également être utilisée pour filtrer les structures de l'image originale. Dans ce cas, le critère de filtrage n'est pas le contraste mais la force et la régularité des contours des structures (voir figure 3.49).

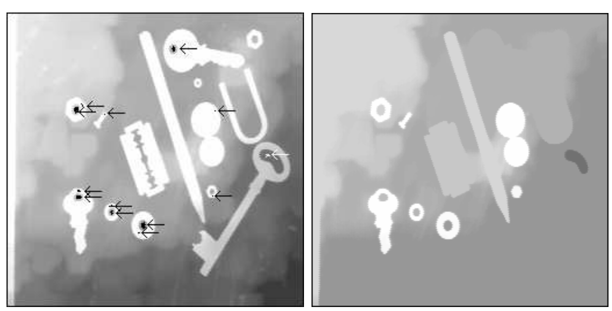
Enfin, les valeurs d'extinction volumiques calculées sur l'image gradient permettent d'éliminer les régions de l'image de faible taille ou bien ayant des contours mal définis (voir figure 3.50).



Minima du gradient de
val. d'extinct. surf. sup. a 1000

Reconstruction des structures marquees

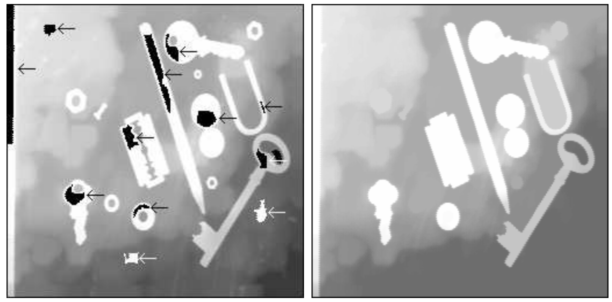
Figure 3.48: Filtrage des structures claires et sombres de l'image de faible taille en utilisant les valeurs d'extinction surfaciques des minima de l'image gradient



Les 13 minima du gradient de
plus forte dynamique

Reconstruction des structures marquees

Figure 3.49: Filtrage des structures claires et sombres de l'image aux contours mal définis en utilisant la dynamique des minima de l'image gradient



Les 13 minima du gradient de plus forte val. d'extinct. volumique — Reconstruction des structures marquees

Figure 3.50: Filtrage des structures claires et sombres de l'image en utilisant les valeurs d'extinction volumiques des minima de l'image gradient

3.6 Récapitulation et discussion

Dans cette partie, nous avons proposé une méthode générale permettant de valuer les extrema d'une fonction numérique selon une caractéristique des structures qu'ils marquent. Les *valeurs d'extinction* correspondent à une mesure de la persistence des structures de l'image quand on applique des transformations de plus en plus sélectives. Nous avons insisté sur les valeurs d'extinction surfaciques et volumiques qui apparaissent comme des compléments pertinents de la notion de dynamique déjà connue (voir figure 3.51).

Filtrage de référence	Fonct. d'extinct. associée	Caractéristiques considérées
h-reconstructions $(\delta^\infty(f, f-h))_{h\geq 0}$	Dynamique *maxima (ou minima)*	*image originale :* contraste *gradient :* qualité du contour
h-reconstructions Alternées Séquentielles	Dynamique Symétrique *maxima et minima*	*image originale :* contraste
Ouvertures Surfaciques $(\gamma^a_\lambda)_{\lambda\geq 0}$	Fonct. d'extinct. Surfacique *maxima (ou minima)*	*image originale ou gradient :* surface
Ouvertures par Reconstruction Elément Struct. B $(\gamma_{\lambda B})_{\lambda\geq 0}$	— *maxima (ou minima)*	*image originale ou gradient :* surface et forme
Arasement Volumique $(a^v_\lambda)_{\lambda\geq 0}$	Fonct. d'extinct. Volumique *maxima (ou minima)*	*image originale :* volume *grad. :* surf. et qualité cont.

Figure 3.51: Les fonctions d'extinction : tableau récaputalif des opérateurs présentés

Un des atouts majeurs de la dynamique est qu'il existe un algorithme rapide pour son calcul. Cette question n'a pas encore été abordée pour les nouveaux outils que nous venons d'introduire.

Remarquons simplement que le calcul des fonctions d'extinction ne peut être effectué par une application directe de la définition que nous avons donnée : en effet, il faudrait alors calculer les transformées $\psi_\lambda(f)$ (ou $\psi_\lambda^{AS}(f)$ dans le cas symétrique) pour des valeurs croissantes de λ et ceci tant que $\psi_\lambda(f)$ n'est pas une fonction constante ; il faudrait également pour chaque valeur de λ extraire les maxima et/ou minima régionaux de $\psi_\lambda(f)$ et les comparer à ceux de $\psi_{\lambda-1}(f)$. Tout ceci n'est en réalité pas envisageable ! Ce type d'algorithme est en effet très couteux en temps de calcul sur des processeurs non spécialisés.

La question du calcul efficace des fonctions d'extinction apparaît alors inévitable pour que ces outils puissent êtres utilisables.

Chapitre 4

Calcul efficace des fonctions d'extinction

Les transformations les plus évoluées de la morphologie mathématique sont, pour la plupart, définies comme des combinaisons de plus en plus complexes de transformées élémentaires. Ainsi, la ligne de partage des eaux a originellement été introduite comme une extension du SKIZ binaire aux fonctions numériques, le SKIZ étant lui-même défini à partir de l'épaississement, résultat de la combinaison de deux dilatations élémentaires. La définition de ces transformations pose alors le problème de celui de leur programmation algorithmique : en effet, la combinaison de transformations élémentaires est généralement coûteux en temps de calcul et nécessite des processeurs spécialisés. Ce fut le cas pour la ligne de partage des eaux dont le calcul nécessitait initialement un très grand nombre de parcours de l'image et était très long sur les machines non câblées. Les travaux de L. Vincent [96, 98] et de F. Meyer [57] aboutirent à un algorithme original et très efficace qui constitue aujourd'hui un des grands atouts de cette transformation. Dans le même temps, la définition algorithmique de la ligne de partage des eaux introduisait une nouvelle manière de considérer cette transformation et enrichissait par là-même ce concept.

La notion de fonction d'extinction ne déroge pas à cette règle. Définie à partir de familles de transformations morphologiques élémentaires, le problème de son calcul efficace se pose immédiatement. Une partie de notre travail a donc consisté à établir un algorithme efficace pour le calcul des valeurs d'extinction. C'est de ce sujet que traite le présent chapitre. De la même façon que pour la ligne de partage des eaux, l'aspect algorithmique de la notion de fonction d'extinction conduit à une nouvelle interprétation de cette transformée et permet d'établir un lien avec des techniques d'analyse d'image par arbres hiérarchiques de représentation, ce que l'on appelle parfois l'*analyse dendronique*.

4.1 Introduction

Nous avons vu que les fonctions d'extinction sont des opérateurs définis à partir de familles d'opérateurs connexes. Or, les opérateurs connexes n'agissent sur les images numériques qu'en propageant les plateaux de l'image. Une manière efficace de programmer les opérateurs connexes consiste donc à effectuer une propagation de ces plateaux.

Ce type d'algorithme a déjà été utilisé pour le calcul de la dynamique [21] ou encore des ouvertures surfaciques [97] et est à la base d'algorithmes de segmentation pyramidale performants [14].

Les algorithmes par propagation utilisent généralement des files d'attente hiérarchiques pour stocker les pixels à propager. Ces files d'attente (First In First Out) sont aujourd'hui bien connues ; nous nous dispenserons donc d'en refaire une présentation complète. Pour plus de détails sur ce point, on pourra consulter les ouvrages de la liste non exhaustive suivante : [57, 96, 21, 19, 14].

Nous allons voir que, dans le cas non symétrique, le calcul des valeurs d'extinction surfaciques et volumiques fait appel à un processus similaire à celui utilisé pour le calcul de la dynamique. Le cas symétrique fait, par contre, appel à un processus plus complexe.

4.2 Algorithme de calcul des fonctions d'extinction

4.2.1 Cas non symétrique : calcul par inondation du relief

Nous allons voir que, dans le cas non symétrique, on peut utiliser un processus d'inondation similaire à celui utilisé pour le calcul de la ligne de partage des eaux [96, 57] et de la dynamique [21]. Ces algorithmes sont généralement décrits à partir des minima de l'image. Nous n'allons pas trahir cette tradition. Nous décrirons donc les algorithmes pour le calcul des valeurs d'extinction des minima de l'image. Le même processus appliqué à l'image inversée permet d'obtenir les valeurs associées aux maxima de l'image.

On utilise généralement pour décrire les processus d'inondation une description particulière de l'image vue comme un relief topographique où les structures claires sont les pics du relief et les structures sombres correspondent aux vallées du relief.

On suppose le relief troué à l'endroit des minima et on le plonge dans une étendue d'eau supposée infinie. L'eau va progressivement inonder le relief en pénétrant par les minima et l'on suppose que pour chaque minimum-source, l'eau se teinte d'une couleur donnée (le label du minimum) (voir figure 4.1). Chaque minimum donne naissance à un lac de plus en plus étendu à mesure que le niveau d'eau augmente.

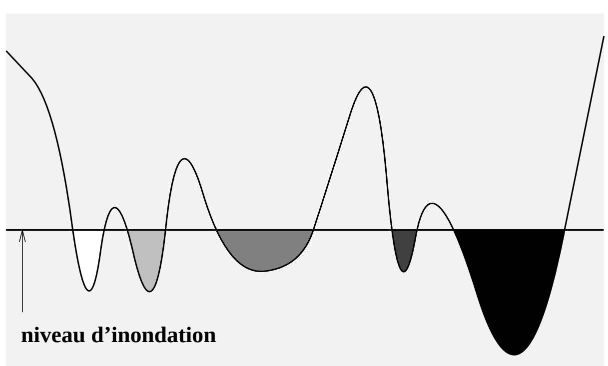


Figure 4.1: Principe de l'inondation d'un relief : l'eau pénètre par les minima ; le niveau d'inondation est maintenu constant.

Lorsque deux lacs provenant de deux sources différentes se rencontrent, on est sur un

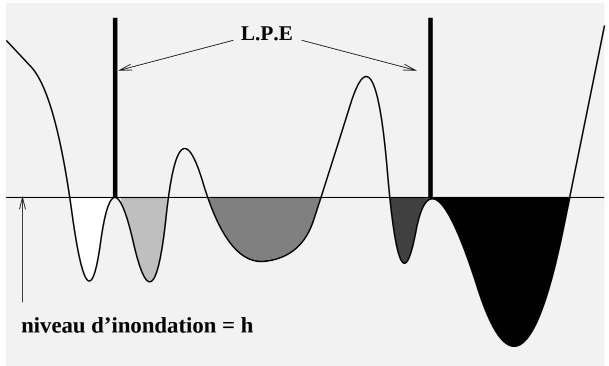


Figure 4.2: Inondation et ligne de partage des eaux : lorsque deux eaux provenant de deux sources différentes se rencontrent, on est sur un point de la ligne de partage des eaux.

point de la *ligne de partage des eaux* [2]. Soit M et M' les minima sources des lacs qui se rencontrent. On note h le niveau courant d'inondation.

Au niveau d'inondation h, le lac de source M correspond à la composante connexe du seuil de niveau h de f contenant M :

$$C_M(X_h^-(f)) \text{ avec : } X_h^-(f) = \{x \in E \mid f(x) \leq h\}$$

Si les lacs de source M et M' se rencontrent au niveau h, alors :

$$M' \in C_M(X_h^-(f)) \quad (\text{ou encore : } M \in C_{M'}(X_h^-(f)) \;)$$

Rappelons brièvement l'algorithme de calcul de la dynamique proposé par M. Grimaud [21].

• *Calcul de la dynamique*

Nous avons vu que la dynamique d'un minimum M est définie par (voir section 3.3.1, relation 3.9) :

$$dyn(M) = inf\{s \geq f(M) \mid \exists x \in C_M(X_s^-(f)),\ f(x) < f(M)\} - f(M)$$

Pour calculer la dynamique d'un minimum M, il suffit donc de déterminer le niveau d'inondation minimal h tel que le lac de source M rencontre un lac de source plus profonde. On a alors : $dyn(M) = h - f(M)$.

Par conséquent, lors du processus d'inondation, lorsque deux lacs de sources différentes M et M' se rencontrent, la dynamique du minimum-source le moins profond est calculée. Si M est le minimum-source le moins profond et si h est le niveau d'inondation courant, alors : $dyn(M) = h - f(M)$ (voir figure 4.3).

On peut également aboutir aux mêmes conclusions en raisonnant en termes de filtrage : une h-reconstruction (décalage-reconstruction) de paramètre $h - f(M)$ préserve partiellement la cuvette associée à M' mais élimine totalement celle associée à M : M est inclus dans un plateau non-extremum de l'image filtrée $\epsilon^\infty(f, f + (h - f(M)))$ (voir figure 4.3).

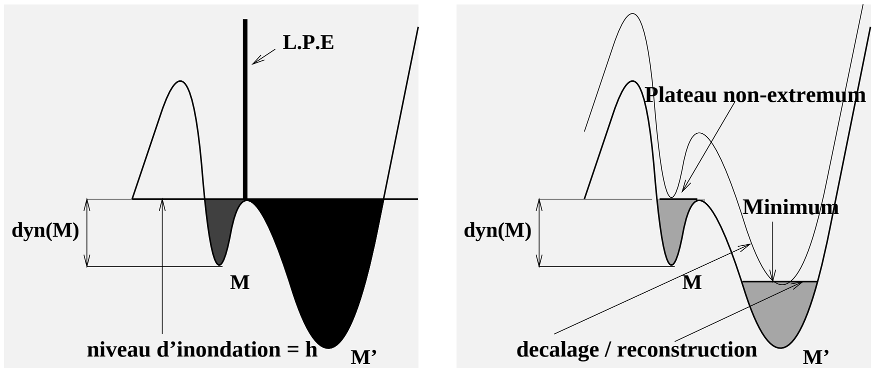


Figure 4.3: Calcul de la dynamique : lorsque deux lacs de sources différentes se rencontrent, la dynamique de la source associée au lac de plus faible profondeur est calculée.

Une configuration ambigüe peut être rencontrée : elle correspond au cas où M et M' sont de même altitude. Par une h-reconstruction de paramètre $(h - alt(M)) = (h - alt(M'))$, M et M' fusionnent pour donner un unique minimum régional (voir figure 4.4). M. Grimaud propose plusieurs solutions pour résoudre cette configuration pathologique : celle que nous retenons consiste à attribuer fictivement une altitude plus faible à l'un des deux minima (choisi par exemple au hasard), de telle sorte que le traitement décrit ci-dessus puisse être appliqué.

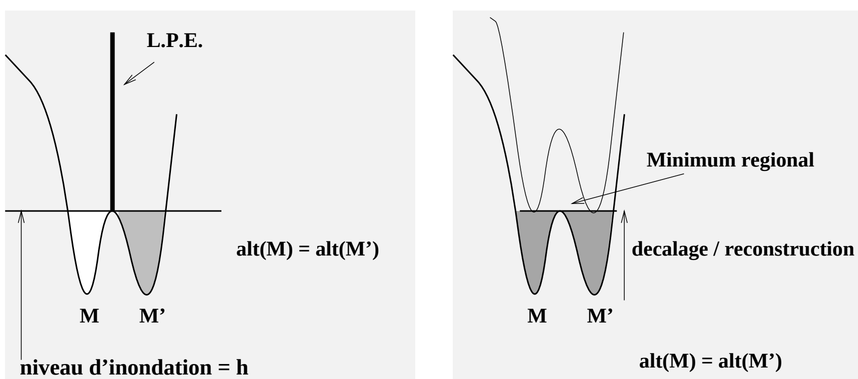


Figure 4.4: Configuration pathologique pour le calcul de la dynamique : deux lacs de même profondeur se rencontrent.

Une fois la dynamique de l'un des deux minima calculée (ici M), les deux lacs fusionnent, ou plus exactement l'un absorbe l'autre : le lac associé au minimum le plus profond (M') absorbe l'autre (M) : $M \longrightarrow M'$. L'inondation continue en considérant que ces lacs n'en font plus qu'un (si M a auparavant absorbé d'autres lacs, alors M' absorbe également ces autres lacs). Le processus d'absorption se traduit algorithmiquement par un chaînage des minima de l'image : à l'origine M est son propre père ; après fusion des deux lacs, M a pour père M'. Nous appelons l'arbre ainsi construit *arbre de fusion des minima* (voir figure 4.5).

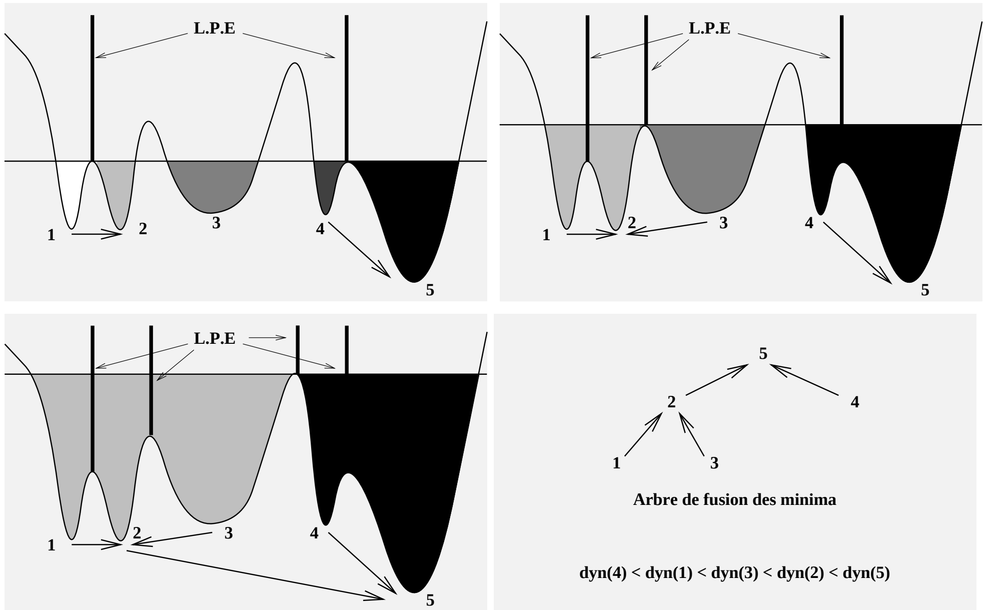


Figure 4.5: Algorithme de calcul de la dynamique - Construction d'un arbre de fusion des minima de l'image : lorsque deux lacs de sources différentes se rencontrent le plus fort (le lac le plus profond) absorbe le plus faible (le lac le moins profond) et la dynamique de la source du lac le plus faible est calculée. Tout ce passe ensuite comme si la source du lac absorbé n'existait plus.

L'arbre de fusion des minima déduit de la dynamique satisfait les conditions suivantes :

$$\text{si } M \longrightarrow M' \text{ alors : } \begin{cases} dyn(M') \geq dyn(M) \\ \text{l'altitude à franchir pour aller de } M \text{ à } M' \text{ est minimale} \end{cases}$$

Ces deux conditions ne permettent pas d'assurer l'unicité du minimum M'. L'algorithme que nous venons de décrire introduit naturellement une solution au problème du choix de M' : ici, M' est choisi “au hasard” parmi tous les candidats possibles. Nous verrons à la fin de ce paragraphe que d'autres solutions peuvent être adoptées [90].

L'algorithme de calcul de la dynamique est donc basé sur une inondation de l'image et sur l'étude des points de rencontre des différents lacs. Ensuite, le mécanisme de traitement des minima utilise :

1. une *mesure* sur les lacs (c'est-à-dire un calcul quantitatif sur les composantes connexes des seuils de l'image) : la profondeur.

2. un *critère d'attribution de cette mesure* à l'un ou l'autre des deux minima dont les lacs se rencontrent : on décide que le lac le moins profond est traité.

Nous allons voir que pour calculer les valeurs d'extinction surfaciques et volumiques, il suffit de modifier, dans cet algorithme, le critère (le calcul quantitatif) que l'on considère.

• *Calcul des valeurs d'extinction surfaciques*

Nous rappelons la définition des valeurs d'extinction surfaciques (voir section 3.3.3, relation 3.14, nous rappelons que $\varphi^a_\mu(f)$ désigne la fermeture surfacique de taille μ) :

$$\forall M \in \mathcal{M}in(f), \mathcal{E}^a(M) = sup\{\lambda \geq 0 \mid \forall \mu \leq \lambda,\ M \subset \mathcal{M}in(\varphi^a_\mu(f))\}$$

Soit M un minimum régional de f. Au niveau d'inondation h, le lac associé à la source M correspond à la composante connexe du seuil h de f contenant M : $C_M(X^-_h(f))$. La surface de ce lac vaut : $Surf(C_M(X^-_h(f)))$.

Considérons le niveau d'inondation minimal s tel que le lac de source M rencontre un autre lac de plus grande surface :

$$s = inf\{h \geq f(M) \mid \exists x \in C_M(X^-_h(f)),\ Surf(C_x(X^-_{h-1}(f)) > Surf(C_M(X^-_{h-1}(f))\}$$

Nous allons montrer que :

$$\mathcal{E}^a(M) = Surf(C_M(X^-_{s-1}(f))$$

c'est-à-dire que, si $\lambda_0 = Surf(C_M(X^-_{s-1}(f))$ alors :

$$\begin{cases} \forall \lambda \leq \lambda_0,\ M \text{ appartient à un minimum régional de } \varphi_\lambda(f) & (i) \\ M \text{ n'appartient pas à un minimum régional de } \varphi_{\lambda_0+1}(f) & (ii) \end{cases}$$

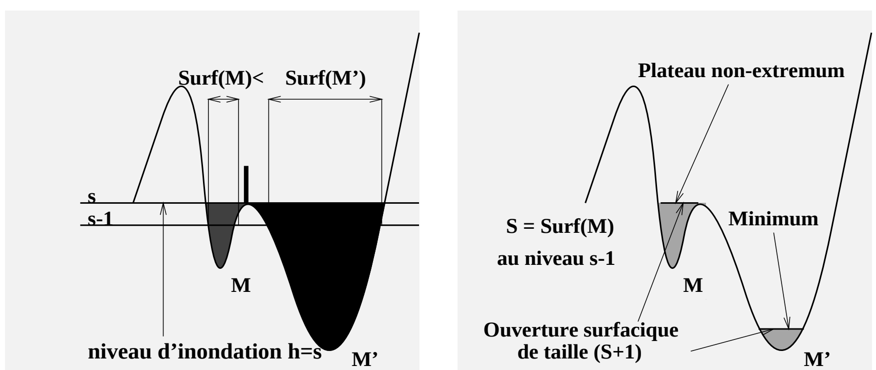


Figure 4.6: Calcul des valeurs d'extinction surfaciques : lorsque deux lacs de sources différentes se rencontrent, la valeur d'extinction surfacique de la source associée au lac de plus faible surface est calculée.

Démontration

• *(i)* Considérons φ^a_λ la fermeture surfacique de taille λ. Montrons que si le plateau de $\varphi^a_\lambda(f)$ contenant M n'est pas minimum régional, alors : $\lambda > \lambda_0$.

  Posons $h = \varphi^a_\lambda(f)(M)$. Si le plateau contenant M n'est pas minimum régional de $\varphi^a_\lambda(f)$ alors, il admet au moins un voisin de plus faible altitude :

$$\exists x \in C_M(X^-_h(\varphi^a_\lambda(f)))\ ,\ \varphi^a_\lambda(f)(x) < \varphi^a_\lambda(f)(M) = h$$

On a donc : $\varphi^a_\lambda(f)(x) \leq h-1$. Par définition de la fermeture surfacique (voir définition 3.12), on a :

$$Surf(C_x(X^-_{h-1}(f))) \geq \lambda$$

De même : $\varphi^a_\lambda(f)(M) = h$, donc :

$$Surf(C_M(X^-_{h-1}(f))) < \lambda$$

$x \in C_M(X^-_h(\varphi^a_\lambda(f)))$ donc $x \in C_M(X^-_h(f))$ car φ^a_λ est extensive. On a donc :

$$x \in C_M(X^-_h(f)) \text{ et } Surf(C_x(X^-_{h-1}(f))) > Surf(C_M(X^-_{h-1}(f)))$$

Au niveau d'inondation h, le lac de source M rencontre un autre lac (celui contenant x) de plus grande surface. Par conséquent : $h \geq s$.

Or $h = \varphi^a_\lambda(f)(M)$. Donc si $h \geq s$ alors, par définition de la fermeture surfacique, on a : $\lambda > Surf(C_M(X^-_{s-1}(f)))$, c'est-à-dire : $\lambda > \lambda_0$ *(cqfd)*

- *(ii)* Considérons la fermeture surfacique de taille $\lambda = \lambda_0 + 1$ et montrons que M n'est pas minimum régional de $\varphi^a_\lambda(f)$.

  $\lambda_0 = Surf(C_M(X^-_{s-1}(f))) < \lambda$, par conséquent : $\varphi_\lambda(f)(M) \geq s$

  Or, au niveau s, le lac contenant M s'unit avec un autre lac de plus grande surface :

  $$\exists x \in C_M(X^-_s(f)), Surf(C_x(X^-_{s-1}(f))) > Surf(C_M(X^-_{s-1}(f)))$$

  $Surf(C_x(X^-_{s-1}(f))) > \lambda_0$. Par conséquent : $\varphi_\lambda(f)(x) \leq s-1$

  $x \in C_M(X^-_s(f))$ et φ^a_λ est connexe, donc : $x \in C_M(X^-_s(\varphi^a_\lambda(f)))$. Finalement, on a :

  $$\exists x \in C_M(X^-_s(\varphi^a_\lambda(f))),\ \varphi^a_\lambda(f)(x) < \varphi^a_\lambda(f)(M) = s$$

  Le plateau de $\varphi^a_\lambda(f)$ contenant M admet au moins un voisin de plus basse altitude. Ce n'est pas un minimum régional. *(cqfd)*

(cqfd)

Ainsi, le calcul des valeurs d'extinction surfaciques peut s'effectuer selon un processus identique à celui utilisé dans le cas de la dynamique. Lorsque deux lacs de sources différentes(M et M') se rencontrent, on compare les surfaces de deux lacs au niveau d'inondation immédiatement précédent : $(h-1)$ si h est le niveau courant d'inondation. Si le lac associé à M' est de plus grande surface que celui associé à M, alors on calcule la valeur d'extinction surfacique associée à M (voir figure 4.6).

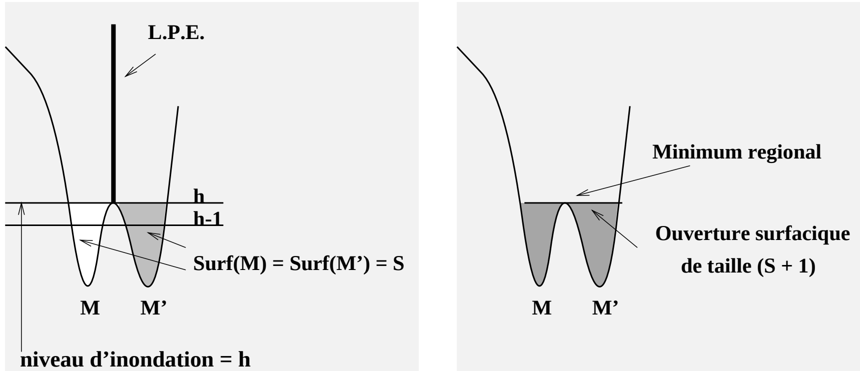


Figure 4.7: Configuration pathologique pour le calcul des valeurs d'extinction surfaciques : deux lacs de même surface se rencontrent.

Nous avons vu que, dans le cas de la dynamique, une configuration pathologique correspond au cas de deux lacs de même profondeur. Dans le cas du calcul des valeurs d'extinction surfaciques, la configuration pathologique correspond au cas de deux lacs de même surface λ (voir figure 4.7). Une fermeture surfacique de taille $(\lambda + 1)$ produit alors un large minimum résultat de la fusion entre M et M'. Selon la définition que nous avons proposée pour les valeurs d'extinction (définition 3.14), on attribue à M et M' des valeurs d'extinction surfaciques identiques. Nous préférons, sur le modèle de la dynamique, résoudre l'indétermination et leur attribuer deux valeurs d'extinction distinctes. De la même façon que dans le cas de la dynamique, on attribue donc fictivement une surface plus importante à l'un des deux lacs (choisi par exemple au hasard). Plutôt que de choisir au hasard, on peut également utiliser la dynamique pour trancher : on associe fictivement une surface plus grande à celui des deux minima correspondant au lac le plus profond (bien entendu toutes les configurations ne peuvent être résolues ainsi : le cas de deux lacs de même surface et de même profondeur peut être rencontré mais dans ce cas le choix au hasard est peut être plus légitime). De la même façon, l'information de surface peut être utilisée dans les cas d'indétermination rencontrés lors du calcul de la dynamique.

Lorsqu'après une rencontre (entre M et M'), le minimum M a été traité (c'est-à-dire que sa surface est calculée), le processus d'inondation se poursuit en considérant que M' a absorbé M (voir figure 4.8). L'algorithme conduit encore à la construction d'un arbre de fusion des minima de l'image mais cet arbre est différent de celui construit pour le calcul de la dynamique. Il satisfait ici les conditions suivantes :

$$\text{si } M \longrightarrow M' \text{ alors : } \begin{cases} \mathcal{E}^a(M') \geq \mathcal{E}^a(M) \\ \text{l'altitude à franchir pour aller de } M \text{ à } M' \text{ est minimale} \end{cases}$$

Le calcul des valeurs d'extinction associées aux ouvertures par reconstruction (définies à l'aide d'un élément structurant B quelconque) relève du même processus, excepté qu'on ne considére plus la surface des lacs au niveau $(h-1)$ mais la taille maximale de la boule λB contenue dans chaque lac au niveau $(h-1)$. Un calcul de surface est très simple à réaliser : lorsqu'un pixel est extrait de la file d'attente, un lac se propage en ce pixel et la nouvelle surface de ce lac est obtenue par une simple incrémentation. Par contre,

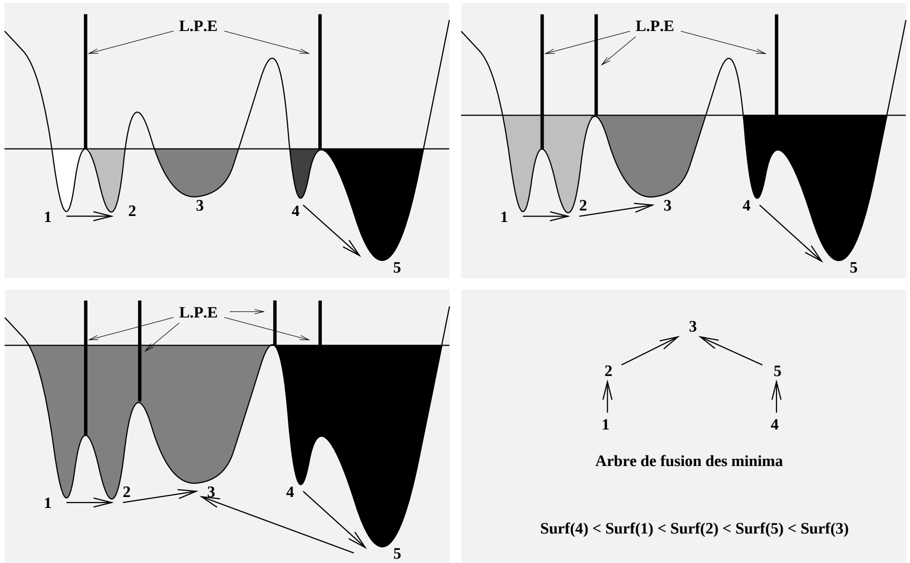


Figure 4.8: Algorithme de calcul des valeurs d'extinction surfaciques - Construction d'un arbre de fusion des minima de l'image : lorsque deux lacs de sources différentes se rencontrent, le plus fort (le lac de plus grande surface) absorbe le plus faible (le lacs de plus petite surface). La valeur d'extinction surfacique de la source du lac absorbé est calculée.

déterminer la taille de la boule contenue dans cette nouvelle surface est plus complexe à mettre en oeuvre et plus coûteux en temps d'exécution.

- *Calcul des valeurs d'extinction volumiques*

Nous rappelons que la valeur d'extinction volumique d'un maximum M est la taille maximale de l'arasement volumique qui préserve M (voir section 3.3.4).

Nous rappelons également la notation suivante :

$$Vol_x^s(f) = \sum_{y \in C_x(X_s^-(f))} (s - f(y))$$

On peut montrer que, pour calculer la valeur d'extinction volumique d'un minimum M, il suffit de considérer le niveau d'inondation minimal s tel que le lac de source M rencontre un autre lac de plus grand volume.

Soit : $$s = inf\{h \geq f(M) \mid \exists x \in C_M(X_h^-(f)),\ Vol_x^{h-1}(f) > Vol_M^{h-1}(f)\}$$

Alors : $$\mathcal{E}^v(M) = Vol_M^{s-1}(f)$$

La démonstration de ce théorème est tout-à-fait similaire à celle présentée ci-dessus dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques.

Le calcul des valeurs d'extinction volumiques relève donc du même processus que dans le cas de la dynamique ou des valeurs d'extinction surfaciques, excepté que l'on ne considère plus la surface des lacs ou leur profondeur mais leur volume. Lorsque deux lacs

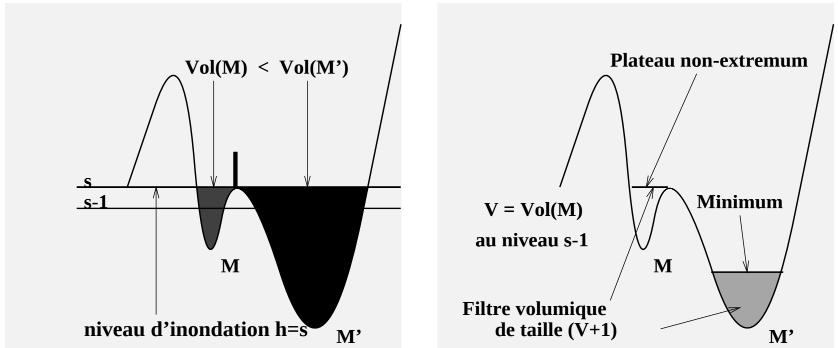


Figure 4.9: Calcul des valeurs d'extinction volumiques : lorsque deux lacs de sources différentes se rencontrent, la valeur d'extinction volumique associée au lac de plus faible volume est calculée.

se rencontrent au niveau h, la valeur d'extinction volumique du minimum source du lac de plus faible volume est calculée (voir figure 4.9).

Le calcul du volume des lacs est une opération qui s'effectue très simplement. En effet, connaissant le volume pour un niveau h donné. On déduit le volume au niveau supérieur $h+1$ selon la relation (voir figure 4.10) :

$$Vol_{h+1}(lac) = Vol_h(lac) + Surf_h(lac)$$

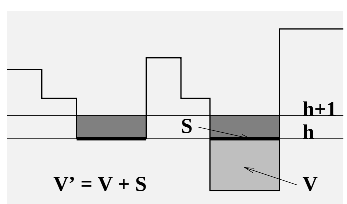


Figure 4.10: Calcul du volume d'un lac au niveau $h+1$ connaissant son volume et sa surface au niveau h

La configuration pathologique correspond ici au cas de deux lacs de même volume et se résoud de la même façon que dans le cas de la dynamique ou des ouvertures surfaciques : on attribue fictivement un volume plus grand à l'un des deux lacs (choisit par exemple au hasard).

Cet algorithme conduit encore à la construction d'un arbre de fusion des minima différent de ceux obtenus dans le cas de la dynamique ou dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques (voir figure 4.11). L'arbre construit dans le cas des valeurs d'extinction volumiques satisfait :

$$\text{si } M \longrightarrow M' \text{ alors : } \begin{cases} \mathcal{E}^v(M') \geq \mathcal{E}^v(M) \\ \text{l'altitude à franchir pour aller de } M \text{ à } M' \text{ est minimale} \end{cases}$$

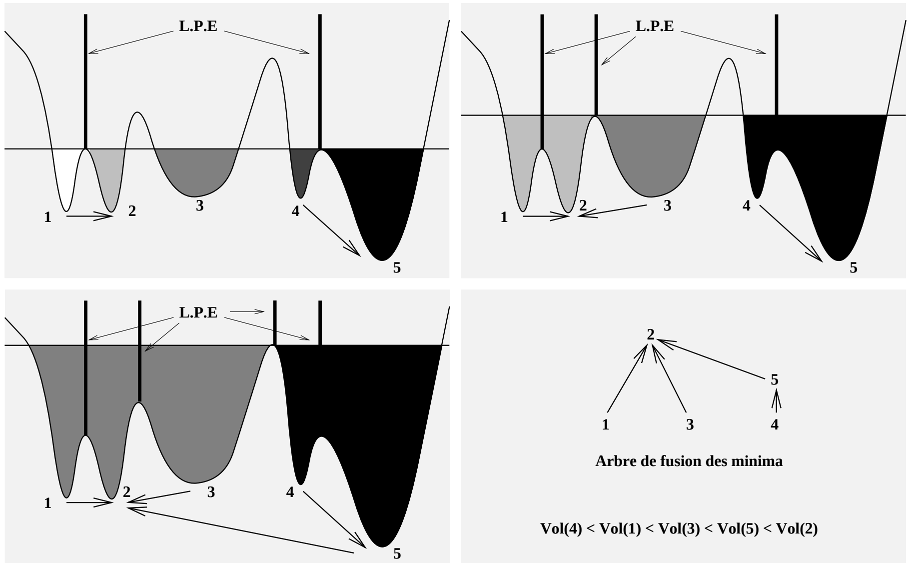


Figure 4.11: Algorithme de calcul des valeurs d'extinction volumiques - Construction d'un arbre de fusion des minima de l'image : lorsque deux lacs se rencontrent, le plus fort (celui de plus grand volume) absorbe le plus faible (celui de plus petit volume).

Calcul efficace de l'arasement volumique

L'algorithme de calcul de l'arasement volumique fait appel à un processus d'inondation similaire à celui que nous venons d'utiliser. Si λ est la taille du filtre volumique à calculer, le principe consiste à propager les minima de l'image jusqu'à ce que chaque lac ainsi formé ait atteint un volume supérieur ou égal à λ.

La propagation des minima est réalisée par une inondation en utilisant encore une fois des files d'attentes hiérarchiques. Un minimum est inséré dans la file d'attente avec un niveau de priorité égal à son altitude.

Lorsque, pour un niveau d'inondation donné, un lac atteint un volume correct (c'est-à-dire supérieur ou égal à λ), alors, on note ce niveau d'inondation (étiquetage du minimum).

Lorsque deux lacs se rencontrent, ils fusionnent : le nouveau lac résultant de la fusion a un volume égal à la somme des volumes des lacs qui fusionnent. L'inondation se poursuit tant qu'il reste des lacs de volume inférieur à λ.

On obtient finalement l'image transformée simplement par une lecture de l'image des lacs : si x est extérieur à un lac, alors son niveau de gris en sortie est celui sur l'image d'entrée. Si x est dans un lac de label l, son niveau de gris en sortie est $sup(f(x), h(l))$ où h est le niveau d'inondation que l'on a associé au label l lors de l'inondation (voir figure 4.12).

- *Remarques*

Efficacité de l'algorithme proposé pour le calcul des valeurs d'extinction non symétriques

L'efficacité des algorithmes du type de ceux décrits et utilisant des files d'attente hiérarchique est aujourd'hui bien connue. Lorsque les calculs effectués sur les lacs sont de type algébriques (cas de la profondeur, de la surface ou du volume ...), la vitesse d'exécution

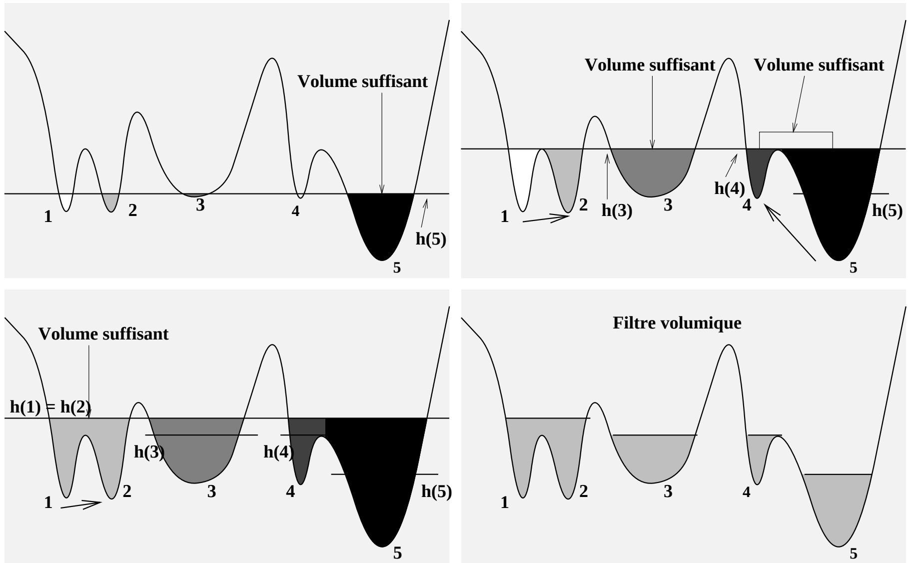


Figure 4.12: Calcul du filtre volumique par inondation du relief : lorsqu'un lac atteint un volume suffisant, le niveau d'inondation courant est noté. Les points de ce lac prendront ce niveau de gris dans l'image de sortie.

de ces algorithmes est de l'ordre de celle du calcul de la ligne de partage des eaux et entre donc dans la catégorie des algorithmes rapides de la morphologie mathématique. En effet, nous avons vu que de telles mesures sont programmables par incrémentation : le volume par exemple des lacs à l'altitude h se déduit très simplement de celui calculé à une altitude inférieure. Lorsqu'un pixel est extrait de la file d'attente au niveau h, on peut immédiatement noter sa contribution au volume du lac pour le niveau h (sans que la connaissance d'autres points soit nécessaire). Par contre, le calcul des valeurs d'extinction associées aux ouvertures morphologiques par reconstruction fait appel à des processus plus complexes et plus coûteux en temps de calcul. Nous donnons en annexe C les algorithmes en pseudo-code décrits ici pour le calcul des valeurs d'extinction surfaciques et volumiques.

Les calculs de la dynamique et des valeurs d'extinction surfaciques et volumiques peuvent tout à fait être effectués en parallèle. Par contre, chacun de ces calculs prévoit la construction d'arbres de fusion des minima différents (voir les figures 4.5, 4.8 et 4.11). Dans le cas d'un calcul en parallèle il faut donc prévoir autant de structures d'arbre que l'on calcule de valeurs d'extinction. Nous donnnons figure 4.13 des exemples d'arbres de fusion obtenus dans le cas de la dynamique et des valeurs d'extinction surfaciques et volumiques.

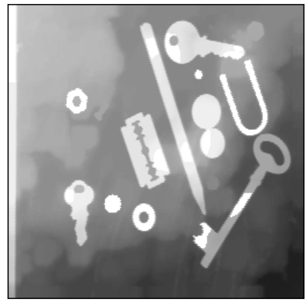
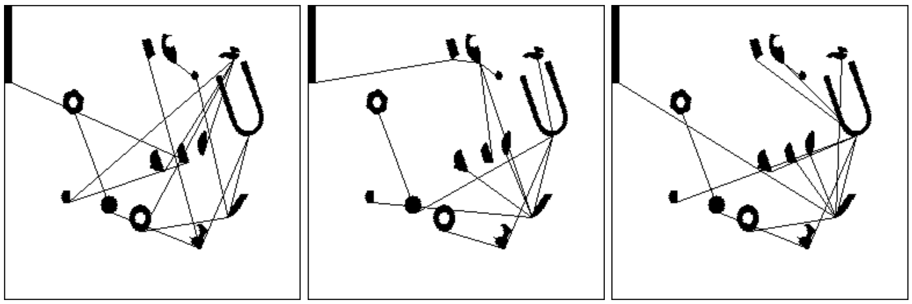


Image originale et ses maxima (en blanc)



Arbres de fusion des maxima obtenus dans le cas :

- de la dynamique - des valeurs d'extinction surfaciques - des valeurs d'extinction volumiques

Figure 4.13: Les algorithmes de calcul des valeurs d'extinction des maxima conduisent à la construction d'arbres de fusion des maxima de l'image

Valuation des branches des arbres de fusion des minima de l'image

Nous avons introduit les fonctions d'extinction à partir de familles de transformations connexes (les ψ_λ). Nous avons vu que les transformations connexes ont pour propriété caractéristique d'étendre (et donc de fusionner) les plateaux de l'image d'entrée. L'information contenue dans un arbre de fusion est, de ce point de vue, très riche.

Prenons l'exemple de l'arbre de fusion des minima obtenu pour le calcul des valeurs d'extinction surfaciques. Cet arbre traduit *comment* les structures de l'image se comportent lorsqu'on applique des fermetures surfaciques de tailles croissantes. En effet, les valeurs d'extinction associées aux noeuds de l'arbre indiquent le niveau λ maximal de filtrage qui préserve (au moins partiellement) la structure associée à ce noeud ; les branches de l'arbre indiquent *comment* les régions de l'image fusionnent lorsqu'on filtre progresivement l'image : $M \to M'$ signifie : à partir d'un certain niveau λ de filtrage, les minima M et M' sont inclus dans un même plateau des images filtrées $\psi_\lambda(f)$. Pour que l'information contenue dans l'arbre soit plus riche encore, on peut valuer les branches de l'arbre avec le niveau λ à partir duquel ces régions fusionnent.

Nous avons vu que pour valuer les noeuds de l'arbre (pour le calcul des valeurs d'extinction) on utilise l'information du lac le plus faible (lac le moins profond, de plus petite surface ou de plus petit volume). Pour valuer les branches de l'arbre, on utilise l'information du lac le plus fort. Ainsi, dans le cas de la dynamique, lorsque deux lacs de sources différentes se rencontrent, une branche de l'arbre est créée. Cette branche est valuée avec la profondeur du lac le plus profond (voir figure 4.14). Dans le cas de la fonction d'extinction surfacique, la branche créée est valuée selon la surface du lac de plus grande surface (surface au niveau d'inondation immédiatement précédent du lac le plus étendu plus un). De même, dans le cas de la fonction d'extinction volumique, la branche créée est valuée selon le volume du lac de plus grand volume (volume au niveau d'inondation immédiatement précédent du lac le plus fort plus un).

L'arbre dont les branches sont ainsi valuées mémorise donc *quand* et *comment* les régions de l'image fusionnent quand on applique la famille $(\psi_\lambda(f))_\lambda$. L'information est donc aussi riche que celle obtenue en calculant les $\psi_\lambda(f)$ pour des valeurs croissantes de λ ; par contre, ces informations ont été obtenue en une seule passe (un seul calcul effectué sur l'image). Dans le cas de la fonction d'extinction surfacique par exemple, le cas des fermetures surfaciques de tailles croissantes nécessite n inondations de l'image alors que l'arbre de fusion est obtenu en une seule inondation de l'image.

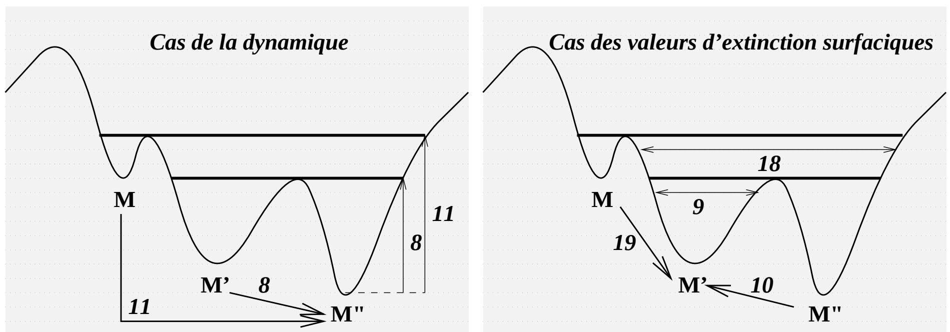


Figure 4.14: Valuation des branches de l'arbre des minima : lorsque deux lacs de sources différentes se rencontrent, une branche de l'arbre est créée ; cette branche est valuée en utilisant l'information du lac le plus fort : avec la profondeur du lac le plus profond dans le cas de la dynamique (notre exemple), selon la surface du lac de plus grande surface dans le cas de la fonction d'extinction surfacique, selon le volume du lac de plus grand volume dans le cas de la fonction d'extinction volumique.

Différentes options possibles pour le chaînage des minima Nous avons vu que, dans les trois cas étudiés, la construction des arbres de fusion des minima repose sur un méme mécanisme. Si $M \to M'$ dans l'arbre de fusion, alors M' satisfait : *parmi tous les M'' plus persistants que M ($\mathcal{E}(M'') \geq \mathcal{E}(M)$), M' est celui que l'on peut atteindre à partir de M en montant le moins.*

$$M' \text{ est plus persistant que } M : \mathcal{E}(M') \geq \mathcal{E}(M) \tag{4.1}$$

$$\text{l'altitude à franchir pour aller de } M \text{ à } M' \text{ est minimale} \tag{4.2}$$

Ces conditions n'assurent pas l'unicité de M. L'algorithme que nous avons proposé introduit naturellement une solution au choix de M. D'autres choix auraient pu être effectués : celui proposé figure 4.15 permet d'assurer une condition supplémentaire de "proximité" entre M et M'. C'est d'ailleurs à partir d'un arbre de ce type que les exemples de la figure 4.13 ont été obtenus. On peut se poser la question de l'utilité de modifier ainsi les relations de fusion : nous reviendrons sur ce point dans la section 5.3 du chapitre suivant où nous discuterons de l'intérêt ces représentations dans des applications de segmentation hiérarchique d'images.

Soulignons que cette modification ne change rien quant à l'interpétation de l'arbre. A partir du moment où les conditions 4.1 et 4.2 sont satisfaites, alors : l'arbre dont les noeuds et les branches sont valués comme indiqué précédemment mémorise *quand* et *comment* les régions de l'image fusionnent quand on applique la famille $(\psi_\lambda(f))_{\lambda\geq 0}$.

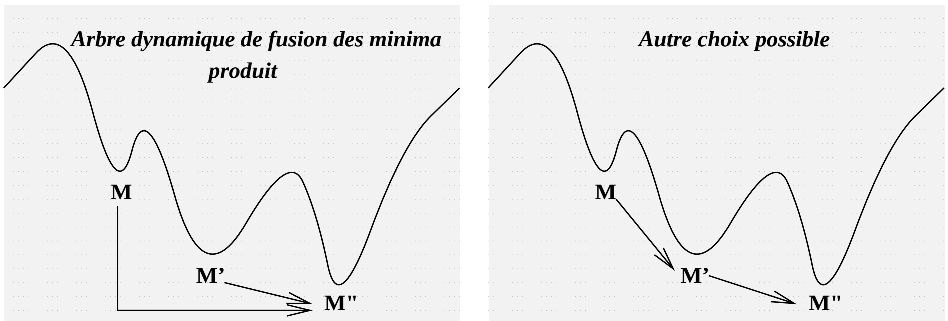


Figure 4.15: Plusieurs options sont possibles pour le chaînage des minima : sur cet exemple, M' et M'' ont des valeurs de dynamique plus grandes que M ; la hauteur à franchir pour aller de M vers M' ou M'' est la même. On peut créer une branche liant soit M à M' soit M à M''.

Mécanisme général de l'algorithme et introduction de nouvelles mesures

Chacun des cas que nous venons de présenter fait appel au même mécanisme de calcul :

1. Une *inondation de l'image* (en d'autres termes, on considère les seuils de l'image pour des niveaux croissants). Chaque lac (chaque composante connexe des seuils successifs de l'image) correspond à une région particulière dans l'image.

2. Une *opération sur les lacs* (on évalue la profondeur, la surface, le volume... des lacs). On extrait ainsi des caractéristiques des régions de l'image.

3. Un *mode de hiérarchisation des lacs* (on décide comment la mesure extraite va finalement être attribuée aux régions). Lorsque deux lacs se rencontrent, il faut décider lequel des deux absorbe l'autre (par exemple : le plus fort absorbe le plus faible).

On peut intervenir dans ce mécanisme à deux niveaux : pour le choix de la (ou des) mesure(s) effectuées sur les lacs et pour le choix du mode d'affectation de la mesure à une région. C'est en modifiant l'un de ces points (ou les deux) qu'il est possible d'introduire de nouveaux opérateurs. On peut par exemple, choisir comme mesure le rapport profondeur sur surface (nous avons vu qu'un tel opérateur est bien adapté pour modéliser la perception visuelle de l'Homme). Ensuite, le choix de l'affectation (lorsque deux lacs se rencontrent) reste à définir : on peut par exemple, sur le modèle des opérateurs précédents, traiter le lac ayant le plus faible rapport profondeur sur surface...

4.2.2 Calcul de la dynamique symétrique par propagation des extrema

Nous avons défini les valeurs d'extinction symétriques à partir de familles de transformations appliquées alternativement sur les structures claires et sombres de l'image. Leur intérêt est de permettre une étude simultanée et non indépendante à la fois des minima et des maxima de l'image.

Nous avons vu qu'une solution permettant de traiter les régions claires et sombres de l'image consistait à travailler sur l'image gradient. Dans le cas de la dynamique, cette solution n'est pas correcte car la mesure extraite sur le gradient n'est pas la même que celle extraite sur l'image originale (la dynamique calculée sur le gradient caractérise la force et l'homogénéité du contour, non le contraste des régions). C'est pour cette raison que nous avons introduit la notion de dynamique symétrique. Dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques, nous avons vu que l'étude de l'image gradient est une bonne solution pour traiter de manière symétrique les minima et les maxima de l'image. Enfin, dans le cas du volume, comme dans le cas de la dynamique, les valeurs extraites ne s'interprètent pas de la même manière si elles sont calculées sur l'image originale ou sur l'image gradient.

Nous allons, dans cette partie, présenter un algorithme de calcul efficace de la dynamique symétrique. La définition de valeurs d'extinction volumiques symétriques est tout-à-fait envisageable. Par contre, leur calcul ne trouve a priori pas de solution simple... Ce problème ne sera donc pas abordé.

Nous rappelons que la dynamique symétrique d'un minimum (resp. maximum) M est définie par la taille maximale des h-reconstructions alternées séquentielles qu'il est possible de calculer sans éliminer M : sans que M cesse d'être minimum (resp. maximum) de l'image filtrée.

Lorsqu'on applique des h-reconstructions alternées sur une image, les dômes de cette image sont progressivement arasés et les vallées sont progressivement comblées. L'algorithme de calcul de la dynamique symétrique que nous proposons est basé sur une propagation des extrema de l'image. Au niveau h, un maximum (resp. minimum) est propagé de tel sorte qu'il soit arasé sur une hauteur h (resp. comblé sur une profondeur h) : voir figure 4.16.

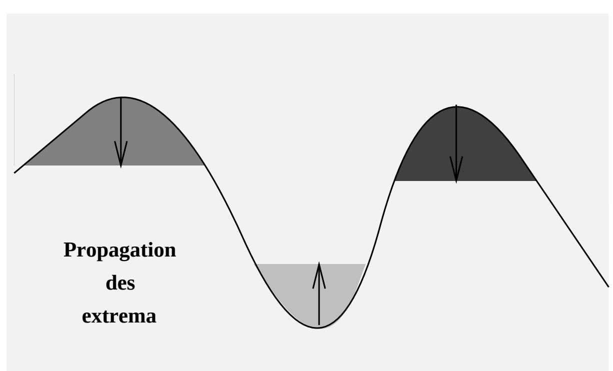


Figure 4.16: Principe de la propagation des extrema

Dans tout ce qui suit, M désignera un extremum de f (ensemble connexe de pixels) qui va être progressivement propagé à ses pixels voisins. Nous noterons $f(M)$ le niveau de gris de M dans f. Nous noterons $alt(M)$ le niveau de gris de l'extremum au cours de la propagation : $alt(M) \leq f(M)$ si M est un maximum (arasement des dômes) et $alt(M) \geq f(M)$ si M est un minimum (rehaussement des vallées).

La propagation des plateaux de l'image est conditionnée par les règles suivantes :

- Pour qu'un plateau se propage, il doit correspondre à un extremum régional (minimum ou maximum) : les plateaux non-extrema ne se propagent pas. Cette condition est dûe au fait que les transformations considérées sont des transformations par reconstruction qui n'agissent qu'en propageant les extrema de l'image.

- Lorsqu'on passe du niveau hiérarchique h, au niveau hiérarchique $(h+1)$, l'altitude des plateaux extrema est modifée : elle est décrémentée si le plateau est un maximum et incrémentée si le plateau est un minimum.

- Au niveau h, un plateau extremum se propage en ses pixels voisins x tels que $\mid f(x) - f(M) \mid = h$ (c'est toujours le niveau de gris de M dans l'image originale f qui est pris en compte).

- Lorsque deux plateaux M et M' de même altitude courante ($alt(M) = alt(M')$) se rencontrent, ils fusionnent : la fusion des deux produit soit un minimum, soit un maximum, soit un plateau non-extremum.

Le processus symétrique est plus complexe que celui utilisé dans le cas non symétrique. Nous allons le décrire plus en détails.

- *Initialisation de la file d'attente*

Initialement, l'ensemble des plateaux à propager est l'ensemble des extrema de l'image. Dans une étape préliminaire, les extrema de l'image sont donc extraits et étiquetés (dans l'image de sortie) : on attribue à chacun un niveau de gris particulier permettant ensuite de le reconnaître (pour cette étape on pourra consulter [96]). Il faut pour ce point prévoir un algorithme d'étiquetage capable de traiter correctement le cas où un minimum et un maximum sont voisins : on doit alors leur attribuer deux labels différents alors que leur union ne définit qu'une seule composante connexe.

Les pixels de $\mathcal{M}$ sont étiquetés *minima* ou *maxima*. Les pixels voisins de $\mathcal{M}$ sont étiquetés *voisin* et sont entrés dans la file d'attente au niveau de priorité égal à : $\mid f(x) - f(M) \mid$. Si un pixel est voisin de plusieurs extrema, il est entré plusieurs fois dans la file d'attente : voir figure 4.17.

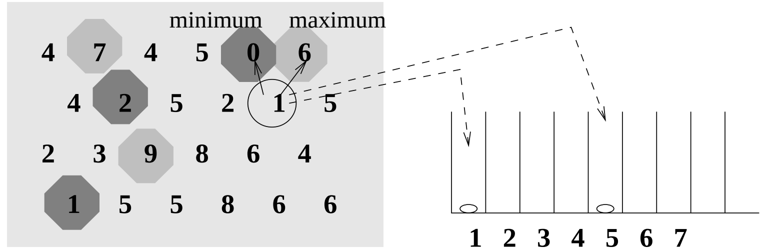


Figure 4.17: Calcul des valeurs d'extinction symétriques : initialisation de la file d'attente hiérarchique. Si un pixel est voisin de deux extrema, il est entré deux fois dans la file d'attente.

• *Propagation des extrema*

(1) Tant que la file d'attente est non vide, on extrait les pixels de niveau de priorité minimal. Si ce pixel a déjà un label, on extrait le pixel suivant de la file d'attente ; dans le cas contraire, on le traite.

Soit x le pixel courant extrait de la file et h le niveau de priorité courant.

(2) On cherche le voisin p de x étiqueté *minimum* ou *maximum* tel que $\mid alt(p) - alt(x) \mid = h$. Si on trouve p on continue. Dans le cas contraire, x a un voisin p étiqueté *en attente* (étiquette des plateaux non-extrema) ; dans ce cas p est ré-inséré dans la file d'attente au niveau de priorité $(h+1)$ et on retourne à l'étape (1). Nous verrons en **(3)** sous quelle condition une nappe est étiquetée *en attente*.

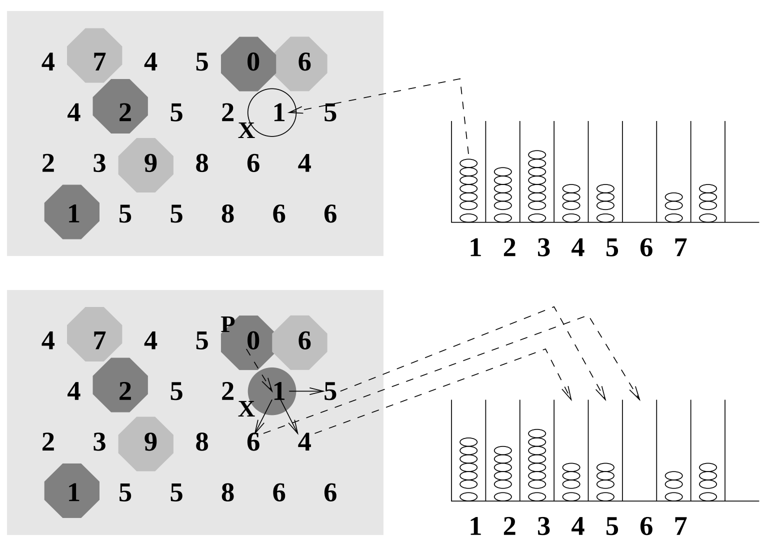


Figure 4.18: Extraction et traitement des pixels de la file d'attente. Un pixel x est extrait de la file d'attente. Un plateau extremum se propage en x et les voisins de x non traités sont insérés dans la file d'attente.

(3) Soit p un voisin de x étiqueté minimum ou maximum vérifiant $\mid alt(p) - alt(x) \mid = h$. x est alors mis au label de p et étiqueté minimum ou maximum (même étiquette que p).

Les pixels voisins de x sont entrés dans la file d'attente. Pour ce point, on peut ne considérer qu'une partie des voisins de x : ceux qui ne sont pas voisins de p (voir figure 4.18).

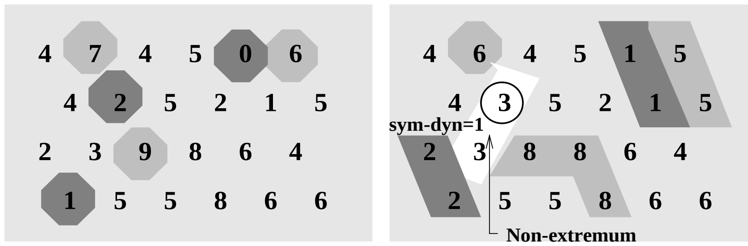


Figure 4.19: Lorsqu'un extremum étendu cesse d'être extremum, sa propagation est arrêtée et sa dynamique symétrique est calculée. (Ici, le niveau de priorité courant est égal à 1.)

Lors de cette opération, selon le niveau de gris des voisins de x, on est en mesure de dire si le plateau propagé en x est toujours extremum ou non. En effet, si x est étiqueté *minimum* (resp. *maximum*) et que x a un voisin d'altitude strictement inférieure (resp. strictement supérieure) à $alt(x)$ alors, le plateau contenant x est un plateau non-extremum. Dans ce cas, x est étiqueté *en attente* (voir figure 4.19) et la propagation du plateau est arrêtée (et tant que cette situation ne changera pas l'altitude courante du plateau ne sera pas modifiée).

Ce plateau correspond à un extremum M de l'image originale qui a été étendu. Si le plateau contenant M cesse d'être extremum, alors la dynamique symétrique de M est calculée ; elle est exactement égale au niveau de priorité courant h : $dyn^{sym}(M) = h$.

(4) Lorsque deux nappes de labels différents et de même altitude courante se rencontrent, elles fusionnent : l'un des deux plateaux absorbe l'autre. Le nouveau plateau résultant de la fusion peut correspondre soit à un minimum (Min), soit à un maximum (Max), soit à un plateau non extremum (Plt).

La difficulté de cet algorithme réside précisément en ce point : le moment où deux plateaux étendus fusionnent. Nous avons vu qu'il est nécessaire de déterminer pour chaque fusion, si le résultat est un maximum, un minimum ou bien un plateau non-extremum. D'abord, parce que c'est ainsi que l'on détermine la dynamique symétrique des extrema de l'image (si un minimum par exemple est propagé en un plateau non minimum au niveau h, la dynamique symétrique de ce minimum est égale à h). Ensuite parce qu'il est nécessaire de savoir si un plateau est extremum ou non pour décider s'il est propagé ou non. Or, dans l'algorithme tel que nous l'avons présenté jusqu'ici, cette information n'est pas accessible directement. En effet, pour connaître la nature d'un plateau, il faut étudier l'altitude de tous les pixels qui lui sont voisins : il n'y a pas de règle simple. La fusion d'un minimum et d'un maximum par exemple peut donner un plateau non-extremum mais aussi un maximum ou un minimum (cas de deux régions emboitées).

Tout le problème est de trouver une solution qui évite d'avoir à relire l'image. En effet, lorsque le nombre d'extrema est élevé (ce qui est généralement le cas) de nombreuses

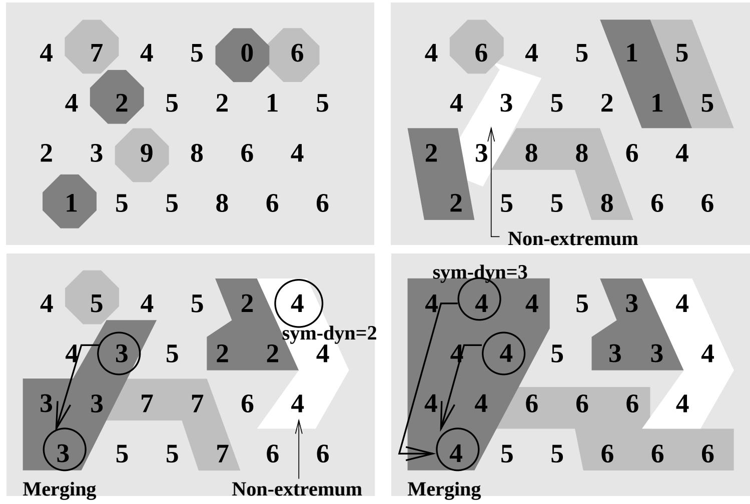


Figure 4.20: Lorsque deux plateaux de même altitude se rencontrent, ils fusionnent

fusions ont lieu et on ne peut se permettre d'effectuer à chaque fois une lecture de l'image pour accéder aux voisins des nappes qui fusionnent !

La solution que nous proposons consiste à travailler non pas avec une seule file d'attente mais avec une file d'attente par extremum. Ainsi, lorsqu'un pixel est voisin d'un plateau, il est inséré dans la file d'attente associée à ce plateau. De même, lorsqu'on cherche à déterminer la nature d'un plateau, il suffit de relire les pixels de la file d'attente qui lui est associée.

Lorsque deux plateaux M et M' fusionnent $M \to M'$, les pixels dans la file d'attente associée à M sont insérés dans celle associée à M'. Leur altitude est prise en compte pour déduire la nature du plateau résultant de la fusion. Notons qu'il faut également tenir compte de l'altitude des plateaux voisins pour que la conclusion soit valable : aussi, lorsque deux plateaux d'altitudes différentes se rencontrent, même s'ils ne fusionnent pas (puisqu'ils ne sont pas à la même altitude), cette rencontre est mémorisée.

Le fait de travailler avec plusieurs files d'attente n'est pas source en soi d'augmentation de temps de calcul. De plus, cette variante facilite la gestion des plateaux *en attente* (les plateaux non-extrema) : lorsqu'un plateau n'est pas extremum, sa propagation est arrêtée c'est-à-dire que la file d'attente qui lui est associée est elle-même mise *en attente*. Ceci facilite également l'étape **(2)** : lorsqu'on extrait x d'une file d'attente, on connait immédiatement le label du plateau voisin et on sait que ce plateau n'est pas en attente, sinon x n'aurait pas été extrait.

Lorsque deux plateaux fusionnent, la nature du plateau résultant de la fusion détermine comment s'opère la fusion (lequel des deux plateaux absorbe l'autre) et si la dynamique symétrique d'un extremum (ou des deux) est calculée :

- $Min \cup Plt$

  si $Min \cup Plt = Min$: $\quad Plt \longrightarrow Min$
  sinon : $\quad Plt \longrightarrow Min$ et $dyn^{sym}(Min) = h$

- $Min \cup Max$

  Si $Min \cup Max = Min$: $\quad Max \longrightarrow Min$ et $dyn^{sym}(Max) = h$

  Si $Min \cup Max = Plt$: $\quad Max \longrightarrow Min$ et $\begin{cases} dyn^{sym}(Min) = h \\ dyn^{sym}(Max) = h \end{cases}$

- $Min \cup Min$

  Si deux minima fusionnent, le résultat est encore un minimum. Celui de plus basse altitude absorbe l'autre et la dynamique symétrique de celui qui est absorbé est calculée.

On a bien entendu des règles équivalentes pour les maxima de l'image (remplacer Min par Max dans les relations).

Si $M \longrightarrow M'$, alors la propagation se poursuit en considérant que le label M n'existe plus et est remplacé par le label M' (voir figure 4.21). L'algorithme produit un chaînage des extrema comme dans le cas non symétrique (on trouvera en annexe C une description complète de cet algorithme en pseudo-code).

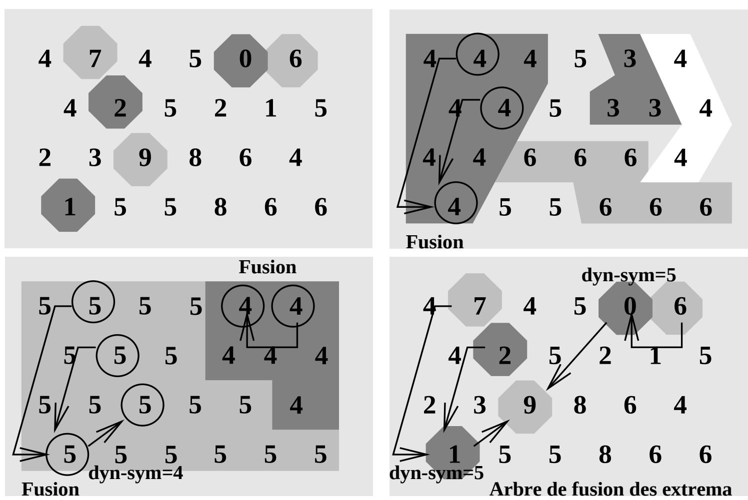


Figure 4.21: L'algorithme de calcul de la dynamique symétrique produit un arbre de fusion des extrema de l'image : les plateau de l'image fusionnent progresivement ; à chaque fusion, une branche de l'arbre est créée.

Remarques sur l'algorithme de calcul de la dynamique symétrique :

• Cet algorithme peut également être utilisé tel que nous le présentons pour calculer les h-reconstructions alternées séquentielles. Il suffit d'arrêter le processus de propagation au niveau de priorité h, si h est la taille des h-reconstructions alternées séquentielles devant être calculées.

• L'algorithme de calcul de la dynamique symétrique produit un **arbre de fusion des extrema de l'image**. Contrairement au cas symétrique, ici, les minima et les maxima sont étudiés conjointement (voir figures 4.20 et 4.22).

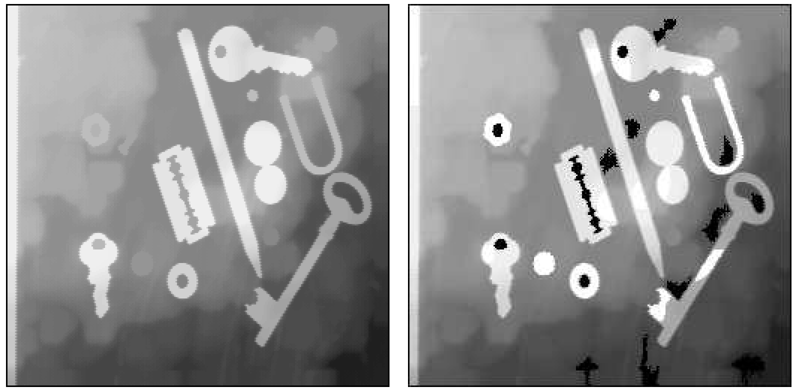
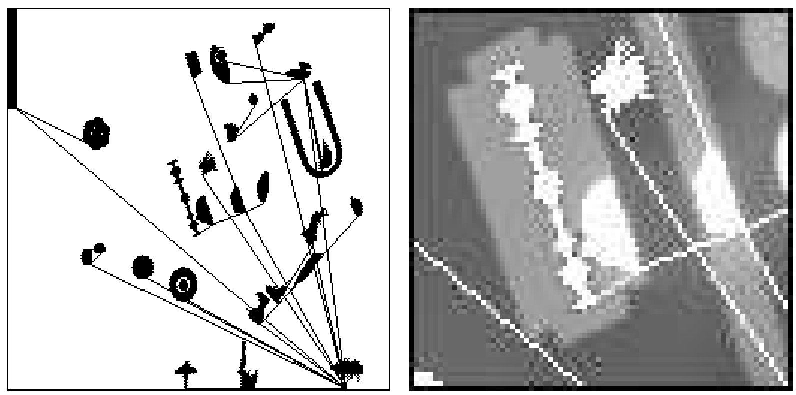


Image originale et ses extrema



Arbres de fusion des extrema obtenu dans le cas de la dynamique symetrique

Figure 4.22: Exemple “Tools” : arbre de fusion des extrema de l'image dérivé de la dynamique symétrique

Considérons l'exemple de la figure 4.22 et comparons l'arbre obtenu à celui obtenu dans le cas non symétrique (voir figure 4.13) : ici, minima et maxima de l'image sont liés. L'intérêt de la définition symétrique apparaît ainsi clairement : elle est plus proche de ce que réalise la vision humaine qui considère simultanément toutes les régions de l'image qu'elles soient claires ou sombres.

Sur l'image 4.13, La lame de rasoir par exemple correspond précisément au cas de structures emboitées : une structure sombre à l'intérieur d'une plus large structure claire. Nous avons grossi cette partie de manière à mieux percevoir l'arbre dans cette région. La lame de rasoir se compose d'une partie claire (la lame proprement dite) et d'une partie centrale sombre (trou central dans la lame). La partie claire est marquée par un maximum régional et le trou central de la lame correspond à un minimum régional. La définition symétrique de la dynamique crée un arbre liant les parties sombres et claires de la lame. Ce type de représentation est très intéressant lorsqu'on cherche à extraire le contenu sémantique d'une observation. En effet, l'arbre déduit peut être intérprété de la façon suivante : la lame est constituée d'une partie claire et d'une partie plus sombre. Nous reviendrons dans le paragraphe suivant de ce chapitre sur les perspectives qu'offrent de telles représentations par arbre.

L'arbre de fusion ainsi créé contient toute l'information qu'on aurait pu obtenir en calculant des h-reconstructions alternées séquentielles de taille croissante. La dynamique symétrique permet de déterminer, pour chaque structure de l'image, pour quelle taille de la h-reconstruction alternée séquentielle elle est éliminée. Les branches de l'arbre traduisent comment les plateaux de l'image fusionnent lorsqu'on calcule cette famille de transformations (voir figure 4.23) ; chaque branche peut, comme dans le cas non symétrique, être valuée avec le niveau h pour lequel elle est créée.

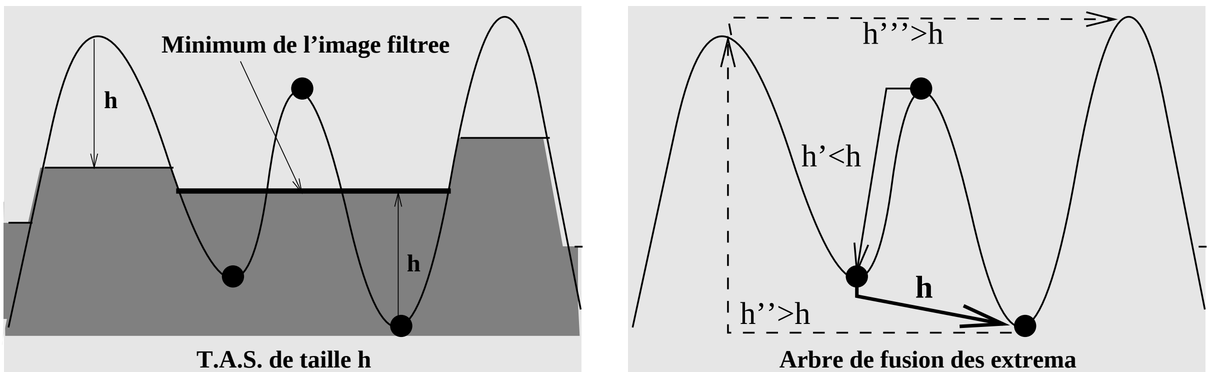


Figure 4.23: L'arbre de fusion dynamique des extrema mémorise quand et comment les plateaux de l'image fusionnent lorsqu'on calcule des h-reconstructions alternées séquentielles de taille croissante

4.2.3 Efficacité des algorithmes

Nous avons vu que le calcul des valeurs d'extinction surfaciques et volumiques dans le cas non symétrique pouvait être effectué par un algorithme tout à fait similaire à celui utilisé pour le calcul de la ligne de partage des eaux et de la dynamique. Ce type d'algorithme est très efficace. Pour donner un ordre de grandeur, sur une station de travail SUN SPARC 1, le temps de calcul des valeurs d'extinction de plus de 1000 minima sur une image de taille 256×256 est de l'ordre de 7 ou 8 secondes. En comparaison, le temps de calcul d'une reconstruction numérique est de l'ordre de 4 secondes. De plus, les temps de calcul varient peu d'une image à l'autre (pour une même taille d'image) et lorsque le nombre de minima augmente : en effet l'algorithme par inondation traite toujours le même nombre de fois chaque pixel de l'image. De plus, les temps de calcul ne varient pas selon que l'on calcule la dynamique, les valeurs d'extinction surfaciques ou les valeurs d'extinction volumiques : les traitements algébriques effectués pour chaque pixel diffèrent mais n'influent pas de manière significative sur les temps de calcul. Nous donnons figure 4.24 des exemples de temps de calcul évalués sur les images "Tools" et "Road" originales (grand nombre d'extrema) et filtrées (faible nombre d'extrema).

	Grand nombre de minima		Faible nombre de minima	
	Tools	*Road*	*Tools filtree*	*Road filtree*
	1533 minima	*1118 minima*	*61 minima*	*92 minima*
L.P.E	**5.72s**	**5.77s**	**5.72s**	**5.83s**
Dynamique	**7.77s**	**7.07s**	**7.02s**	**7.08s**
Val. d'ext. surf.	**7.77s**	**6.97s**	**6.53s**	**6.58s**
Val. d'ext. volum.	**7.97s**	**7.02s**	**6.53s**	**6.67s**

Figure 4.24: Temps de calcul des valeurs d'extinction non symétriques (temps évalués sur une station SUN SPARC 1 et pour des images de taille (256×256))

L'algorithme de calcul de la dynamique symétrique est par contre plus coûteux en temps de calcul et la durée du traitement augmente fortement lorsque le nombre d'extrema traité augmente. Cette variation est dûe à la lourdeur des étapes de fusion : en effet, cette partie de l'algorithme nécessite une relecture de certaines files d'attente et correspond à un enchaînement de tests logiques prohibitifs en temps de calcul. Cette fonction est d'autant plus souvent appelée que le nombre d'extrema est grand (voir figure 4.25). Lorsque le nombre de minima diminue, le temps de calcul de la dynamique symétrique est alors de l'ordre de deux fois celle de la dynamique : ce qui est tout à fait acceptable puisque minima et maxima sont traités par un seul calcul (c'est d'ailleurs pour cette raison que dans le tableau 4.25 le temps de calcul de la dynamique symétrique est comparé au temps de calcul de la dynamique des minima additonné à celui de la dynamique des maxima).

	Grand nombre d'extrema		Faible nombre d'extrema	
	Tools	*Road*	*Tools filtree*	*Road filtree*
	1936 extrema	*2319 extrema*	*142 extrema*	*181 extrema*
Dynamique des maxima + Dynamique des minima	**14.85s**	**14.77s**	**14.85s**	**14.80s**
Dynamique symetrique	**54.25s**	**76.38s**	**15.37s**	**12.98s**

Figure 4.25: Temps de calcul de la dynamique symétrique (temps évalués sur une station SUN SPARC 1 et pour des images de taille (256×256))

Il est probable que d'autres méthodes de programmation puissent être développées dans le cas non symétrique. Un algorithme basé sur un fléchage de l'image par exemple peut être bien adapté pour ce type de problème. Pour notre part, nous n'avons pas exploré d'autres méthodes.

4.3 Lien avec l'analyse dendronique

Pour extraire le sens d'une observation complexe, un point de vue hiérarchique est souvent une solution efficace. Ceci a déjà été mis à profit depuis longtemps. Nous pouvons citer les méthodes de classification hiérarchiques [85], les techniques de résolution multi-échelles [43] et les applications des transformées d'ondelettes qui s'y rattachent [23]. Citons enfin les structures arborescentes de représentations des signaux (bi- ou tri-dimensionels) définissant une vue hiérarchique du seuillage utilisé comme processus structurant : celle inspirée des travaux de R.A. Kirsch [30] qui mettent en correspondance les composantes connexes des seuils successifs des signaux [10, 42] et celle inspirée des travaux de R. W. Ehrich [15], de P. V. Sankar et A. Rosenfeld [78] plus synthétique définissant des relations de dominance entre les pics des signaux [28, 70, 71]. C'est particulièrement sur cette dernière méthode que se portera notre attention du fait de la similitude qui existe entre cette approche et la notion d'arbres de fusion des extrema que nous venons d'introduire.

Très récemment, les travaux de P. Hanusse et P. Guillateaux [27] ont permis d'entrevoir le grand intérêt de la méthode de représentation proposée par R. W. Ehrich pour la représentation simplifiée d'images et la résolution des problèmes de reconnaissance de forme. P. Hanusse et P. Guillateaux ont établi une méthode générale et efficace pour produire la structure arborescente appelée *dendrone* et pour l'utiliser comme outil d'analyse de l'image, définissant ainsi l'*analyse dendronique*.

4.3.1 Définition et rôle de l'analyse dendronique

Les méthodes de représentation des fonctions numériques par arbre relationnel sont nées de la difficulté qui existe à interpréter les valeurs brutes d'un signal. La connaissance des extrema du signal et des relations hiérarchiques liant ces extrema semble être une information pertinente pour la résolution de ce type de problèmes.

Pour tenir compte des relations de dominance entre les extrema d'un signal, il faut utiliser une représentation tenant compte à la fois de la répartition spatiale de ces extrema et de leur amplitude relative : c'est à ces contraintes que la représentation proposée par R. W. Ehrich se propose de répondre. Cette approche apparaît immédiatement pertinente et ceci a été confirmé si l'on en juge par le nombre de travaux y faisant référence [28, 70, 71]. Le seul point d'ombre de cette technique originellement définie pour les signaux mono-dimensionnels était justement d'étendre ce principe au cas des fonctions numériques. Comme nous l'avons dit ci-dessus, ce problème a eté récemment résolu par P. Hanusse et P. Guillateaux. Nous allons en rappeler le principe.

Considérons l'image comme un relief initialement englouti sous la mer. La mer se retire progressivement découvrant le paysage. D'une hauteur de marée à une autre, plusieurs évènements peuvent se produire : une nouvelle île apparaît, une île voit sa surface croître, deux îles fusionnent pour n'en donner qu'une seule. A chacun de ces évènements correspond une étape dans la construction du dendrone : quand une île apparaît, un noeud terminal du dendrone est créé (on note en ce noeud la position et l'altitude de l'île) ; au fur et à mesure que l'île grossit, on garde trace du centre de masse de la base de l'île ; quand deux îles fusionnent, l'information de leur base est collectée, un nouveau noeud est créé correspondant à l'agrégat des deux îles, avec comme information de sommet celle de l'une des deux sous-îles, et sa propre information de base. C'est ce phénomène d'agrégation qui est à l'origine de la structure d'arbre : les branches de l'arbre lient la nouvelle île-agrégat aux deux sous-îles.

La figure 4.26 illustre cette définition. On le voit ici, dans la définition proposée par R. W. Ehrich, ce n'est pas la hauteur absolue des extrema mais leur hauteur relative qui est prise en compte pour construire la hiérarchie [16].

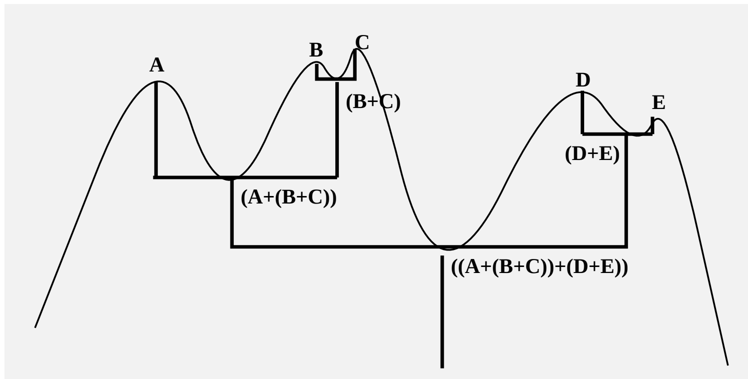


Figure 4.26: Définition algorithmique du dendrone

Les noeuds du dendrone sont étiquetés de telle sorte que le dendrone contienne toute l'information utile de l'image : la surface, l'élongation, l'orientation de la base d'une île ... Des exemples d'utilisation de ce dendrone pour la reconnaissance de forme peuvent être trouvées dans [27]. La reconnaissance de formes effectuée à l'aide du dendrone doit son efficacité à la valeur sémantique de celui-ci, plus élevée que celle de l'image. Les noeuds du dendrone pointent sur les régions de l'image, les branches du dendrone traduisent les relations hiérarchiques d'inclusion entre les régions de l'image. L'étiquetage des noeuds du dendrone permet en plus de *qualifier* toutes ces régions.

4.3.2 Arbres de fusion des minima et dendrone

On remarque aisément que la définition algorithmique du dendrone est très proche de celle de la LPE et des valeurs d'extinction. En effet, si l'on inverse l'image (on "retourne" le relief), la marée descendante correspond pour l'image inversée à une immersion du relief, les noeuds terminaux du dendrone correspondent aux minima de l'image, l'agrégation de deux îles correspond à la fusion de deux lacs.

Nous avons vu que le calcul des valeurs d'extinction dans le cas non symétrique était effectué au niveau des points de ligne de partage des eaux (lorsque deux eaux provenant de deux sources différentes se rencontrent) et que les arbres des minima construits correspondent à des fusions entre ces lacs. Il y a donc un lien étroit entre la notion d'arbre des minima introduite à partir de la définition algorithmique des fonctions d'extinction et ce dendrone.

La figure 4.28 illustre la comparaison entre le dendrone et l'arbre des minima construit pour le calcul de la dynamique. Notons que l'arbre des minima est orienté alors que le dendrone ne l'est pas. Une relation simple lie le dendrone à l'arbre des minima déduit de la dynamique : considérons deux minima A et B de l'image. Si $A \longrightarrow B$ dans l'arbre des minima alors A et B sont liés au noeud $(A + B)$ dans le dendrone. Nous avons vu qu'à chaque fonction d'extinction correspond un arbre de fusion des minima particulier. Par contre le dendrone est défini de façon unique car ses branches sont non-orientées.

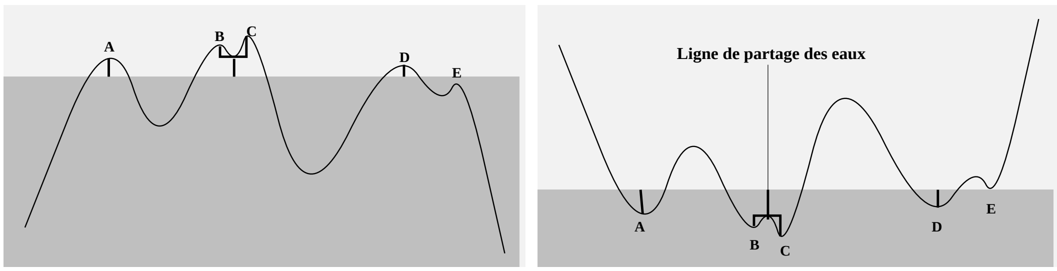


Figure 4.27: Lien entre la définition algorithmique du dendrone et celle de la ligne de partage des eaux

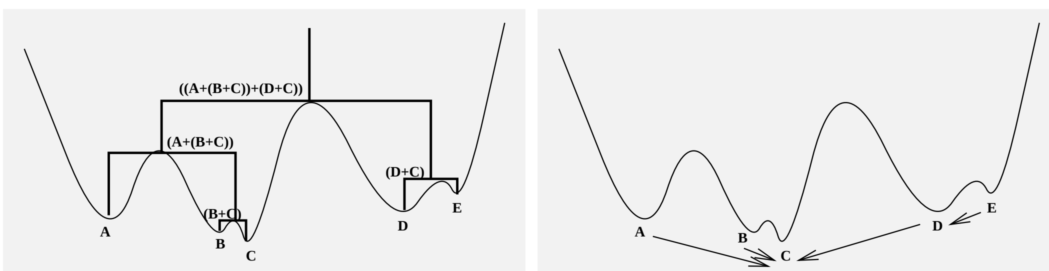


Figure 4.28: Comparaison des définitions algorithmiques du dendrone et de l'arbre dynamique de fusion des minima

D'un point de vue algorithmique, construire le dendrone ou bien un arbre de fusion des minima est absolument équivalent. Seule la structure utilisée et la façon de mémoriser les relations de fusion entre les lacs change.

Les noeuds du dendrone sont généralement étiquetés selon des mesures effectuées sur les bases des îles de telle sorte que l'information contenue par le dendrone caractérise complètement la scène : la surface des îles, leur élongation (les diamètres de Feret par exemple), leur orientation, la dénivelée entre un noeud et son "père"... (voir figure 4.29).

A priori, ces mesures sont introduites intuitivement comme des mesures sur les régions de l'image, avec le sous-entendu que la base des îles définit une segmentation correcte des régions. La notion de fonction d'extinction permet de nuancer le sens donné à ces mesures : F. Meyer a montré que la dynamique peut être calculée directement sur le dendrone [58]. Nous allons voir qu'il en est de même pour les valeurs d'extinction surfaciques et volumiques.

Considérons un noeud terminal quelconque du dendrone que nous noterons M (sur la figure 4.29 : M est un maximum régional). On calcule la dynamique de M de la façon suivante [58] : partant de M, on remonte progressivement vers le sommet du dendrone. Chaque noeud rencontré est un ascendant de M qui admet, en dehors de M, d'autres

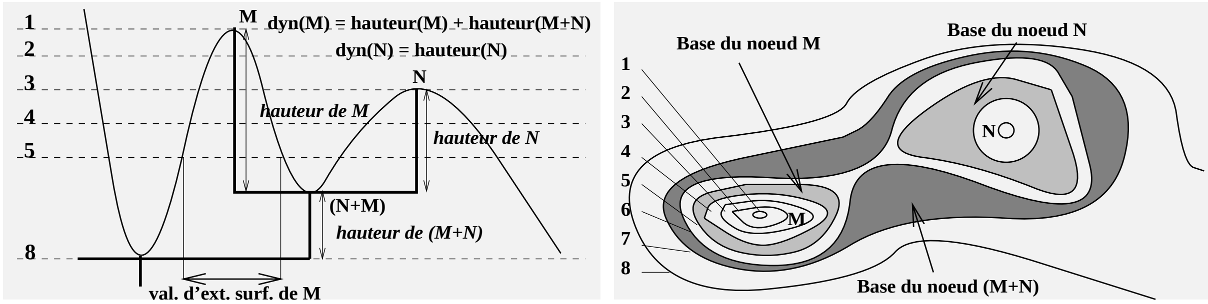


Figure 4.29: Etiquetage des noeuds du dendrone : chaque branche est étiquetée par sa hauteur, la surface de la base de l'île qui lui est associée...

descendants. On arrête la remontée dès que le noeud courant A admet un descendant de plus haute altitude que M. La dynamique de M est alors égale à l'altitude du noeud A moins sa propre altitude, soit encore la somme des hauteurs des branches allant de M à A (sur la figure 4.29, $A = (M + N)$).

Le calcul des valeurs d'extinction surfaciques sur le dendrone étiqueté relève d'un processus similaire : on parcours les ascendants de M ; on arrête la remontée, dès que l'ascendant courant A s'unit avec un autre noeud de plus grande surface (ayant une base de plus grande surface). La valeur d'extinction surfacique de M est alors égale à la surface de la base de ce noeud courant A (sur la figure 4.29, $A = M$).

Pour calculer la valeur d'extinction volumique de M, on cherche le premier ascendant A de M ayant un "frère" de plus grand volume. La valeur d'extinction volumique de M est alors égale au volume de A.

Nous avons vu qu'il est possible de calculer l'ensemble des valeurs d'extinction parallèlement mais que cela nécessitait la construction de plusieurs arbres de fusion. L'intérêt d'une structure non-orientée telle que le dendrone par rapport aux arbres de fusion orientés, est de permettre de rassembler toute l'information sur un unique arbre.

4.3.3 Apport du point de vue symétrique

L'analyse dendronique est uniquement définie à partir d'une vue non symétrique de l'image : on étudie soit les pics, soit les vallées de l'image. Ce principe peut bien évidemment être appliqué à une image gradient de telle sorte que les structures claires et sombres de l'image soient traitées simultanément. Mais nous savons que dans ce cas, une partie de l'information présente sur l'image originale est perdue.

Nous avons vu que la notion de valeur d'extinction symétrique associée à des familles de transformations alternées séquentielles permettent de définir un arbre de fusion des extrema de l'image. Le point de vue symétrique permet donc de définir un équivalent symétrique du dendrone traitant simultanément pics et vallées de l'image.

Nous avons vu que le passage de l'arbre de fusion des minima au dendrone s'effectue très simplement : $A \longrightarrow B$ se traduisant par la création du noeud $(A+B)$ dans le dendrone. La construction d'un dendrone symétrique peut s'effectuer selon le même algorithme que celui utilisé pour calculer la dynamique symétrique et qui aboutit à un arbre de fusion symétrique des extrema de l'image : on effectue une propagation des extrema de l'image

; lorsque deux nappes fusionnent, un nouveau noeud est créé, résultat de l'agrégation des deux nappes : si $A \longrightarrow B$ dans l'arbre de fusion des extrema, alors A et B sont des noeuds terminaux du dendrone symétrique et A et B ont pour pére le nouveau noeud $(A + B)$. Encore une fois, seule la structure utilisée (de type "arbre non orienté" et non plus de type "arbre orienté") diffère dans l'algorithme (voir figure 4.30).

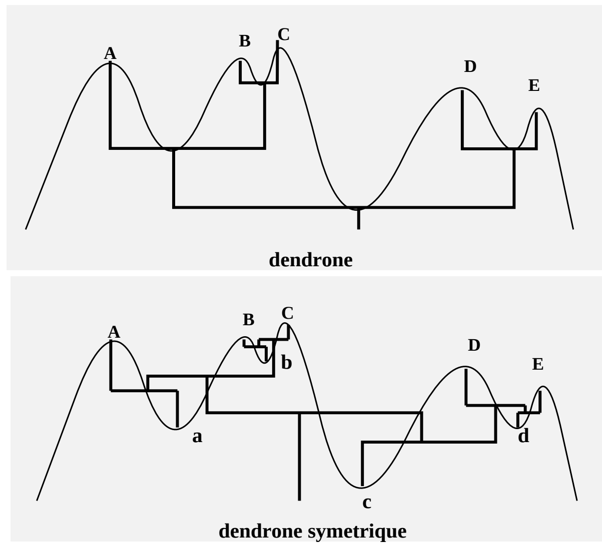


Figure 4.30: Définition symétrique du dendrone à partir de la notion de dynamique symétrique : on reprend le processus de propagation des extrema utilisé pour le calcul de la dynamique symétrique. Lorsque deux plateaux fusionnent, une branche de l'arbre est crée ainsi qu'un nouveau noeud (correspondant à l'union des deux plateaux).

4.4 Discussion

La définition algorithmique des fonctions d'extinction met en évidence une notion sous-jacente très importante : celle d' *arbres de fusion des extrema* de l'image. Dans le cas non symétrique, l'arbre construit lie soit les minima soit les maxima de l'image ; dans le cas symétrique l'ensemble des extrema de l'image sont liés entre eux. De plus ces arbres contiennent toute l'information qu'il est possible d'extraire de l'image en calculant les familles croissantes de filtres morphologiques associées.

L'utilisation de telles représentations arborescentes dans le cas non symétrique n'est pas nouvelle. Par contre, la notion de dynamique symétrique introduit de nouvelles perspectives pour l'analyse d'image par arbre qui peut par ce biais être définie symétriquement pour les structures claires et sombres de l'image.

A partir de cette structure arborescente, il est possible de centraliser toute l'information recueillie : le contraste, la surface, le volume... ; nous avons vu qu'on peut également l'utiliser pour introduire d'autres mesures sur les régions de l'image... Nous allons voir enfin, dans le chapitre suivant, comment cette information est exploitable pour la segmentation d'images.

Chapitre 5

Application à la segmentation d'image

La segmentation (c'est-à-dire la partition d'une image en régions connexes homogènes) est un point central de l'analyse d'image. Etape obligée de tout système d'analyse intelligente de scènes (modules d'assitance à la conduite, d'aide au diagnostique médical, de télésurveillance... pour ne citer que quelques exemples), la segmentation est également utilisée dans des domaines a priori moins évidents tels que le codage d'image (*codage orienté objet*), l'analyse de matériaux...

Analyser et comprendre une scène sous-entend d'abord extraire, segmenter et mettre en correspondance les différentes régions de la scène. La question de l'interprétation de cette information est généralement un problème intervenant dans une seconde étape et qui fait appel à des techniques ne relevant plus à proprement parler de l'analyse d'image mais de l'intelligence artificielle.

En morphologie mathématique, la segmentation d'image est presque essentiellement basée sur une méthode : la Ligne de Partage des Eaux (LPE) calculée sur une image gradient à partir de marqueurs des régions à extraire. Trouver ces marqueurs est toujours un problème délicat. Or, sur ce point précisément, les fonctions d'extinction que nous avons introduites laissent présager un apport important.

5.1 Introduction : la segmentation par LPE

Le problème de la segmentation d'image peut être abordé par le biais de diverses techniques, des plus immédiates comme le simple seuillage, aux plus complexes comme celles fondées sur la géométrie des objets [81], la géométrie informatique [72], la croissance hiérarchique de régions [74, 65, 66, 14]... Aujourd'hui, la segmentation d'image en morphologie mathématique est presque essentiellement basée sur une seule transformation : la *ligne de partage des eaux*. Les autres méthodes (basées sur le seuillage ou bien sur des transformations de base de la morphologie mathématique telles que le chapeau haut de forme ou encore les décompositions morphologiques d'images, les squelettes ...) ne sont utilisées que dans des cas "pathologiques" du fait de leur complexité (voir par exemple [86, 94]) ou bien de leur extrême simplicité et pour lesquels la ligne de partage des eaux ne constitue pas une solution optimale.

La ligne de partage des eaux (LPE) trouve son origine en topographie et en hydrologie [11, 74] et apparaît comme le prolongement naturel de transformations morphologiques ensemblistes [2, 4] (le squelette par zone d'influence SKIZ, les transformations homotopiques et géodésiques). La LPE fut élaborée à l'aide des transformations morphologiques pour la première fois en 1977 par C. Lantuejoul [39, 4]. La formalisation de ce concept comme outil de segmentation fut effectuée par S. Beucher en 1989 [2]. Enfin, les travaux de F. Meyer sur la notion de marqueurs achevèrent de rendre la ligne de partage des eaux opérationnelle pour la résolution des problèmes de segmentation [61, 6, 5, 98].

L'approche par ligne de partage des eaux possède certaines similarités avec les techniques de croissance de régions. Bien plus qu'une autre méthode de segmentation par croissance de région, le concept de ligne de partage des eaux formalise le problème de la partition d'une image et permet de le définir indépendamment d'un autre problème sous-jacent qui est celui de l'extraction des régions significatives : un problème de segmentation peut, par le biais de ce concept, être divisé en deux parties indépendantes : une partie mécanique et totalement automatique (le calcul de la ligne de partage des eaux) et une partie intelligente à la charge de l'utilisateur (l'utilisation de connaissances a priori pour extraire les régions pertinentes de l'image). Cette dernière partie est particulièrement primordiale puisqu'elle détermine la segmentation finale de manière radicale.

5.1.1 La Ligne de Partage des Eaux (LPE)

Nous nous contenterons ici de rappeler brièvement le principe de la LPE sans entrer dans les détails. Pour une présentation plus complète, on pourra se référer aux ouvrages de référence en ce domaine : la thèse de S. Beucher [2], celle de L. Vincent [96] et la publication de F. Meyer [57] pour la partie plus algorithmique, ainsi qu'aux ouvrages de la liste non exhaustive suivante [4, 2, 6, 61, 98, 57, 5].

Minima régionaux, bassins versants et LPE

La notion de LPE est étroitement liée à celle de minimum régional. Nous rappelons qu'un minimum régional est un ensemble connexe de pixels d'altitude constante tel qu'il n'est pas possible, partant de cet ensemble de rejoindre un point de la surface d'altitude inférieure sans avoir à grimper.

Une manière de déterminer les minima régionaux d'une image peut consister en l'expérience suivante : considérons le relief sous un nuage de pluie. Une goutte d'eau tombant en un point x va couler le long du relief et va finalement rejoindre le fond d'une vallée : un minimum régional. Soit M un minimum régional de l'image. Si une goutte d'eau tombant en x rejoint finalement M, alors x appartient au *bassin versant* de M [96] (cf. figure 5.1).

Définition 5.1 (Bassin versant d'un minimum régional [96]) *Soit M un minimum régional d'une image numérique f. Le bassin versant associé à M (noté $BV(M)$) est l'ensemble des pixels x tels qu'une goutte d'eau tombant en x rejoint finalement M.*

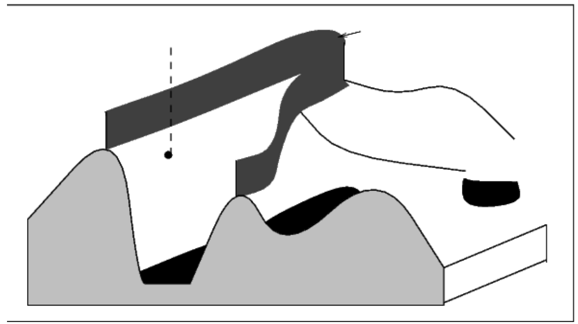


Figure 5.1: Minima régionaux, bassins versants et LPE

La notion de bassin versant permet d'associer à chaque minimum régional une portion de l'image : la vallée qui lui correspond. L'ensemble des bassins versants associés à chaque minimum régional de l'image définit une *partition* de l'image. L'ensemble des points de séparation de deux bassins versants adjacents forme la *ligne de partage des eaux*.

Plusieurs techniques permettent de calculer la ligne de partage des eaux d'une image. Pour certaines configurations du relief, les résultats obtenus peuvent varier légèrement [2]. Dans tout ce qui suit, nous considérerons que la LPE a été obtenue par un algorithme d'inondation (tel que nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent). Cette technique est la plus utilisée aujourd'hui [96, 57]. La LPE produite par inondation peut-être formulée à l'aide d'une distance topographique [2].

La ligne de partage des eaux est généralement calculée non pas sur l'image originale mais sur son gradient : ainsi les points de partage des eaux correspondent aux points crête du gradient autour des minima, c'est-à-dire aux lieux de forte transition d'intensité sur l'image originale. Les régions extraites par cette transformation satisfont alors au critère d'homogénéité.

La figure 5.2 donne un exemple de la segmentation ainsi obtenue. Par définition, le nombre de régions est égal au nombre de minima régionaux de l'image gradient. Comme nous le voyons sur cet exemple, cette transformation conduit généralement à une sur-segmentation de l'image et n'est donc pas directement utilisable.

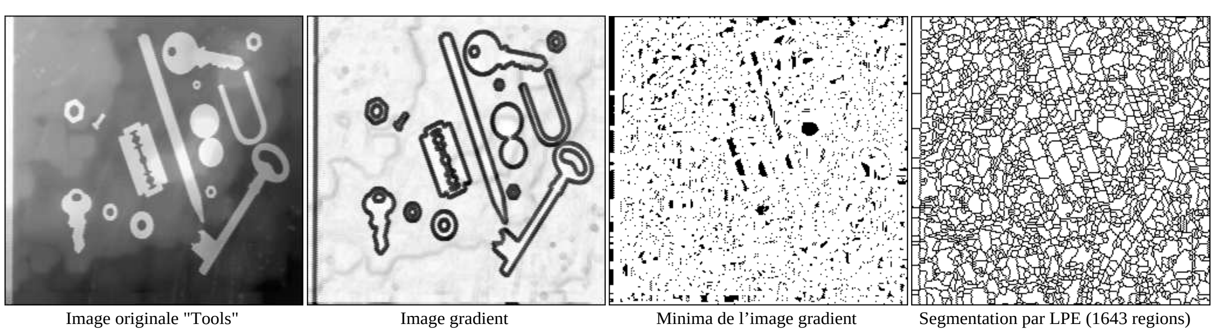


Figure 5.2: Le calcul direct de la LPE produit une sur-segmentation de l'image

La cause de la sur-segmentation est, par définition, le grand nombre de minima présents dans l'image. Pour prévenir ce problème, F. Meyer propose de calculer la LPE à partir d'un nombre moins important de minima. L'idée consiste à modifier l'homotopie de l'image sur laquel on calcule la LPE, c'est-à-dire d'imposer d'autres minima à cette image : les *marqueurs* des régions devant être segmentées dans l'image [61].

Marqueurs et zones d'influence

On entend par marqueur une ou plusieurs composante(s) connexe(s) permettant de localiser (même grossièrement) les régions devant être segmentées dans l'image. La question de l'obtention de ces marqueurs est un problème central dans tous les algorithmes de segmentation par LPE. Ce point sera largement abordé dans toute la suite de ce chapitre. Rappelons tout d'abord brièvement, le principe de la segmentation par LPE à partir de marqueurs.

Notons f_M l'image (binaire) des marqueurs définie comme suit :

$$f_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \text{Marqueur} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des minima régionaux de cette fonction est exactement égal à l'ensemble des marqueurs des régions à segmenter. Une manière de contrôler le résultat de la segmentation est de modifier les minima de l'image sur laquelle on calcule la LPE (l'image gradient le plus souvent), c'est-à-dire d'imposer nos marqueurs (les zéros de f_M) comme seuls minima régionaux de l'image g. Ceci est réalisé très simplement par une reconstruction géodésique de $(g \wedge f_M)$ par f_M [61] (voir figure 5.3) :

$$g' = \epsilon^{\infty}((g \wedge f_M), f_M) \tag{5.1}$$

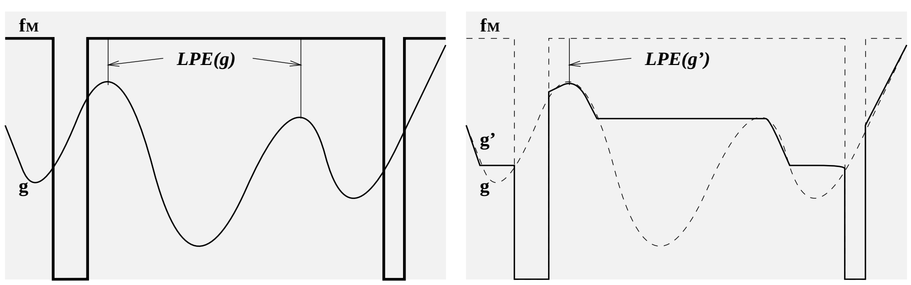


Figure 5.3: Modification de l'homotopie d'une image gradient : on impose d'autres minima à l'image en utilisant une reconstruction géodésique

On peut alors associer à chaque marqueur-minimum un bassin versant sur l'image dont l'homotopie a été modifiée (g') et définir ainsi une nouvelle partition de l'image. La figure 5.4 illustre notre propos. Sur cet exemple, les marqueurs considérés ont été obtenus par un filtrage préalable de l'image (ici par un filtre alterné séquentiel de taille 3) puis en considérant les extrema régionaux de l'image filtrée. Cette méthode permet d'assurer que les régions segmentées ont une taille minimale : elles contiennent la boule de taille 3. On a ainsi souvent recours à une étape de pré-filtrage de l'image (image originale ou image gradient) dans les algorithmes de segmentation par LPE. En effet, la plupart du temps, un problème de segmentation est défini par un cahier des charges précis des régions

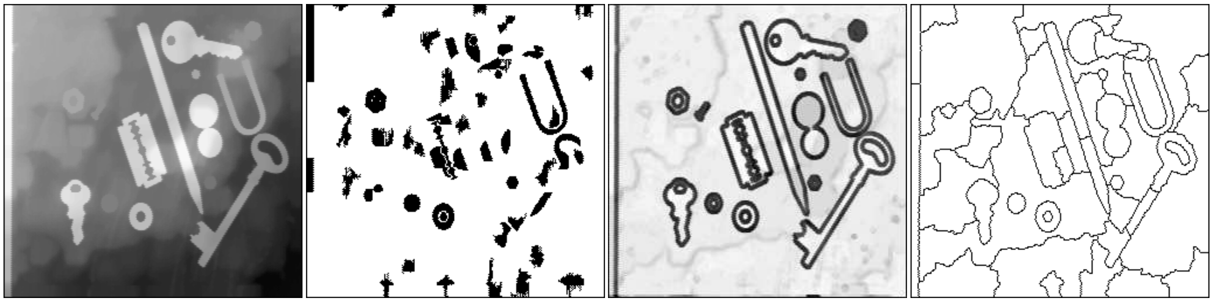


Figure 5.4: Segmentation obtenue après modification de l'homotopie du gradient

à extraire. C'est au niveau du ou des filtres utilisés que les connaissances a priori sont généralement introduites dans l'algorithme de segmentation. L'ajustement des paramètres de filtrage est alors, dans de nombreux cas, le seul point mécanique de l'algorithme.

La modification de l'homotopie du gradient est en fait une étape fictive qui n'apparaît pas explicitement dans l'algorithme aujourd'hui utilisé pour calculer la LPE. En effet, la définition algorithmique de la LPE plus générale que la définition formelle permet de dissocier cette notion de celle de minima régionaux [96, 57]. Considérant un ensemble de marqueurs quelconques (connexes ou non), chaque marqueur représente une source d'inondation du relief. La LPE associée à ces marqueurs correspond alors aux barrages qu'il faut ériger pour que deux lacs provenant de deux sources distinctes ne se rencontrent pas lorsque le niveau d'inondation du relief progresse.

Lorsque la LPE est calculée à partir de marqueurs quelconques, les régions ainsi définies autour des marqueurs sont appelées *zones d'influence*.

Notons que, dans le cas où les marqueurs sont connexes, alors, le nombre de régions est exactement égal au nombre de marqueurs. Cette propriété n'est pas forcément satisfaite dans le cas de marqueurs non connexes.

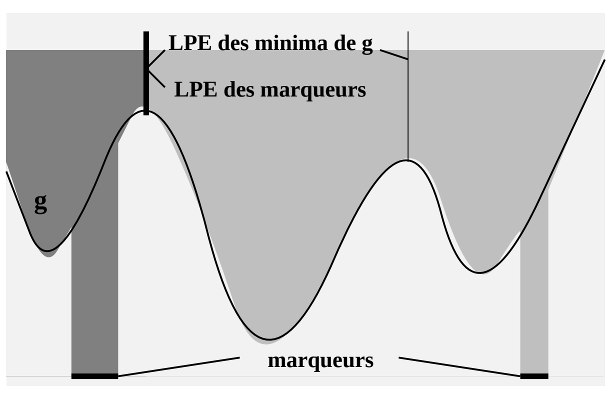


Figure 5.5: Algorithme de calcul de la LPE à partir de marqueurs quelconques : l'eau pénètre dans le relief à partir des marqueurs et non plus des minima.

5.1.2 Les points clefs de la segmentation par LPE

Nous avons vu que les algorithmes de segmentation par ligne de partage des eaux consistent en trois étapes :

1. Extraire des marqueurs des régions à segmenter

2. Déterminer l'image sur laquelle on calcul la LPE (image gradient le plus souvent)

3. Calculer la LPE associée aux marqueurs

La LPE s'avère être une technique puissante de segmentation, à partir du moment où les étapes préparatoires (1 et 2) qui lui sont associées sont correctement effectuées : la segmentation finalement obtenue est en effet entièrement conditionnée par les marqueurs sélectionnés et l'image sur laquelle la LPE est calculée.

L'expérience montre que les images que l'on rencontre dans la pratique sont rarement d'aussi bonne qualité que l'image “Tools” précédemment étudiée. L'exemple de la figure 5.6 en est une illustration. Il sagit ici de segmenter des cellules musculaires séparées sur l'image par des filaments clairs. Cet exemple est particulier car on peut calculer directement la LPE sur l'image originale. Soulignons que les lignes de séparation entre les différentes cellules présentent de fortes irrégularités locales d'intensité.

A chaque cellule est associé un et un seul marqueur connexe localisant très approximativement les régions à extraire (nous avons obtenus ces marqueurs “à la main” en les choisissant parmi les minima régionaux de l'image). La LPE est calculée directement sur l'image originale. Nous constatons que certaines cellules sont mal segmentées.

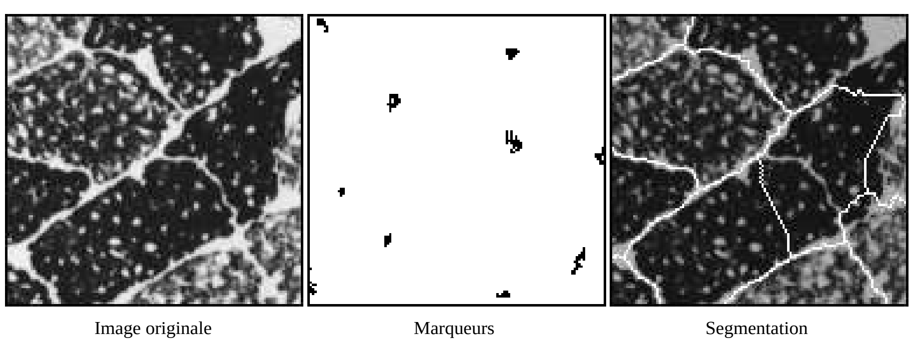


Figure 5.6: Exemple ”Muscle” : la segmentation des cellules est délicate

Pour améliorer la segmentation dans ce cas, on peut agir sur deux points : les marqueurs et l'image sur laquelle la LPE est calculée (image originale dans notre exemple, image gradient le plus souvent).

Influence du choix des marqueurs sur la segmentation

Les figures 5.7 et 5.8 illustrent l'importance du choix des marqueurs dans le cas où les contours des objets pour une raison ou pour une autre sont mal définis : présence de bruit, information localement manquante, imprécision sur la position du contour (dans le cas de régions emboîtées par exemple)... D'une manière générale, plus les contours des régions à extraire sont mal définis, plus il est nécessaire que ces régions soient marquées de manière précise pour que la segmentation soit correcte.

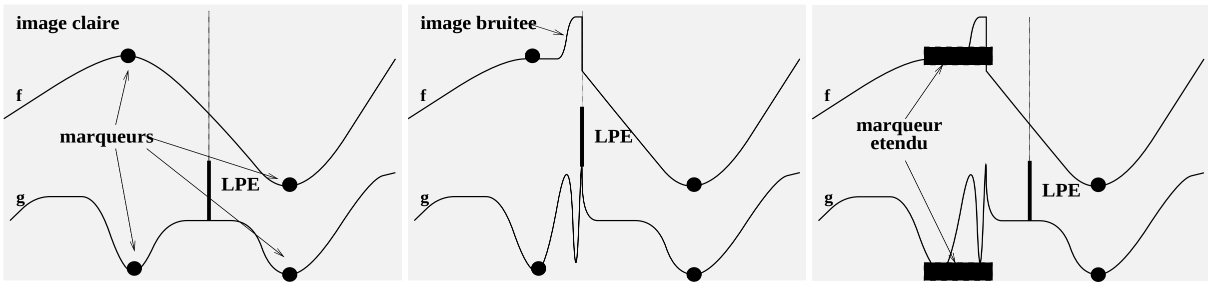


Figure 5.7: Influence des marqueurs sur la segmentation : la présence de bruit de forte amplitude par exemple peut modifier la segmentation (figure centrale) ; une solution peut alors consister à utiliser des marqueurs plus précis des régions d'intérêt (figure de droite).

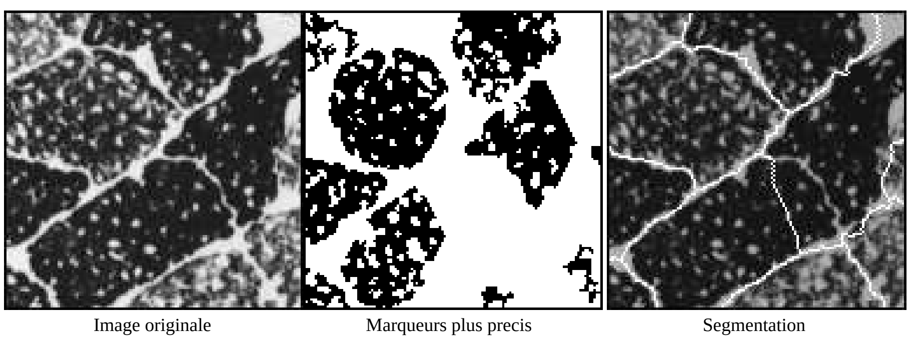


Figure 5.8: La qualité de la segmentation est fonction de la précision des marqueurs (résultat à comparer à celui de la figure 5.6)

Qualité de l'image sur laquelle est calculée la LPE

La LPE est très souvent calculée sur une image gradient. En effet, les contours des régions ou objets d'une image correspondent aux zones de forte transition d'intensité sur l'image et donc aux lignes de crêtes de l'image gradient. Si cette information est localement manquante, alors cela se traduit au niveau du gradient par une discontinuité locale d'intensité. La LPE peut alors ne plus suivre du tout les lignes de crêtes aux environs de cette discontinuité (voir figure 5.9). De tels phénomènes se rencontrent fréquemment lorsqu'on analyse des images réelles. L'idée est alors de corriger l'image sur laquelle on calcule la LPE, c'est-à-dire de renforcer l'information de contour, avant de procéder au calcul de la LPE. Plusieurs actions sont envisageables.

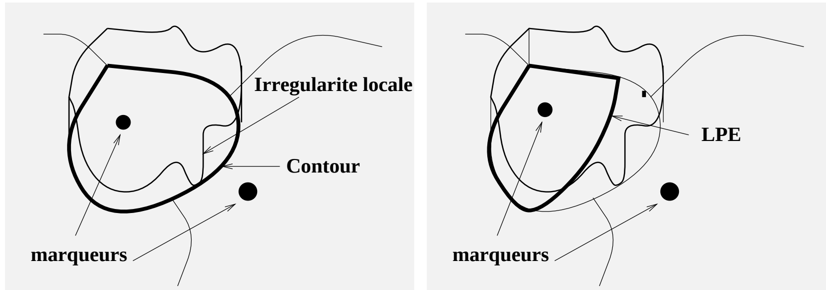


Figure 5.9: Influence de la qualité du gradient sur la segmentation : une irrégularité locale peut modifier notablement la position de la LPE.

• **Correction par fermeture**

Une procédure désormais classique permettant de renforcer les contours des régions consiste à appliquer une fermeture. La taille de la fermeture est définie en fonction de celle des irrégularités locales devant être compensées.

Cette opération a pour conséquence de modifier totalement la répartition des niveaux de gris de l'image : l'information fine relative aux contours est notablement dégradée, il peut y avoir une amplification du bruit ponctuel. De ce fait, les contours extraits par cette méthode sont très souvent fort imprécis (voir figure 5.10).

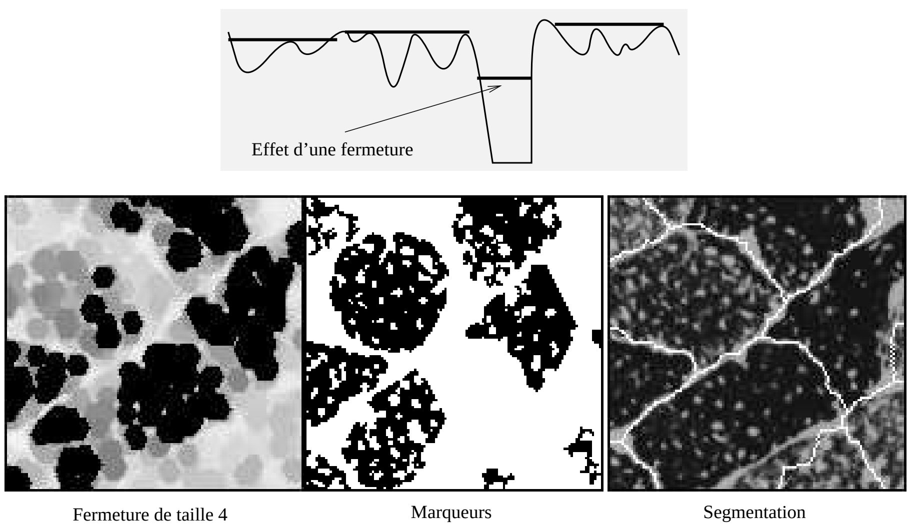


Figure 5.10: Correction de l'image par une fermeture morphologique puis segmentation (résultat à comparer à la figure 5.8).

• **Correction par "Addition / Dilatation"**

Cette méthode a été introduite par F. Meyer [56]. Elle permet de corriger les défauts de la fermeture tout en conservant ses bonnes propriétés.

Rappelons tout d'abord qu'une fermeture est le résultat de la composition d'une dilatation et d'une érosion. Le fait que la fermeture corrige les irrégularités locales est dû à la partie dilatation : en dilatant l'image des contours, les irrégularités locales sont "bouchées". L'érosion quant à elle est utilisée pour compenser l'étalement des valeurs hautes engendré par la dilatation. Or, lorsque deux lignes crêtes du gradient sont suffisamment proches, la dilatation peut fusionner ces lignes de crêtes. Dans ce cas, l'érosion ne joue pas son rôle correctif (les lignes de crête proches restent jointes) et on perd définitivement l'information fine des contours.

Ainsi, on peut dire que les bonnes priopriétés de la fermeture sont dues à la dilatation et que ses inconvénients sont dus à l'érosion qui ne joue pas correctement son rôle dans certaines configurations.

Pour remédier à cela, une solution peut consister à remplacer l'érosion par une moyenne entre l'image originale et l'image dilatée : on calcule $\frac{1}{2}(f + \delta_1(f))$. Ainsi, l'étalement des niveaux de gris qui résulte de la dilatation est corrigé sans que les profils en niveaux de gris entre les lignes de crête soient radicalement modifiés.

Cette opération doit être itérée un nombre de fois égal à la taille des irrégularités locales. Ainsi, si une fermeture de taille n est nécessaire, le processus de dilatation/addition sera itéré n fois ; on calcule :

$$\frac{1}{2}(\delta_{(i-1)}(f) + \delta_i(f)) \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ avec } \delta_0(f) = f$$

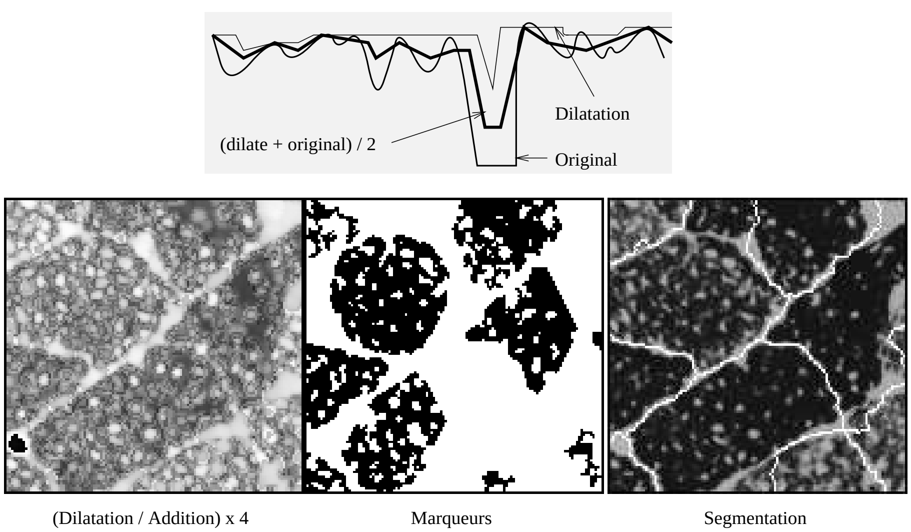


Figure 5.11: Correction par dilatation/moyennage - Effet sur la segmentation

Observons sur notre exemple comment cette correction agit sur le résultat obtenu par LPE (voir figure 5.11). L'image gradient corrigée semble visuellement meilleure bien que le signal soit encore très altéré par cette transformation. Notamment, comme dans le cas de la fermeture, le bruit local est amplifié : cela se traduit sur notre exemple par une dégradation notable du contour des cellules les plus denses.

- **Correction utilisant une sur-segmentation de l'image**

Le principal défaut des méthodes que nous venons de présenter vient du fait que les transformations utilisées ne sont ni locales ni directionnelles et qu'elles ne prennent pas en compte la structure particulière des zones d'intérêt de l'image : les lignes de crête. De ce fait, la correction de défauts locaux s'accompagne d'une altération générale du signal : amplification du bruit local, dégradation de l'information fine des lignes de crête...

L'idée consiste alors à prendre en compte l'information locale et fine des lignes de crête des images en utilisant une sur-segmentation de l'image. En effet, lorsque les lignes de crête à extraire présentent des irrégularités locales, la qualité de la segmentation se détériore lorsqu'on diminue le nombre de régions, mais lorsque ce nombre est suffisamment élevé, les régions sont correctement segmentées : certains contours non-significatifs sont extraits mais l'information relative aux contours significatifs est présente (voir figure 5.12).

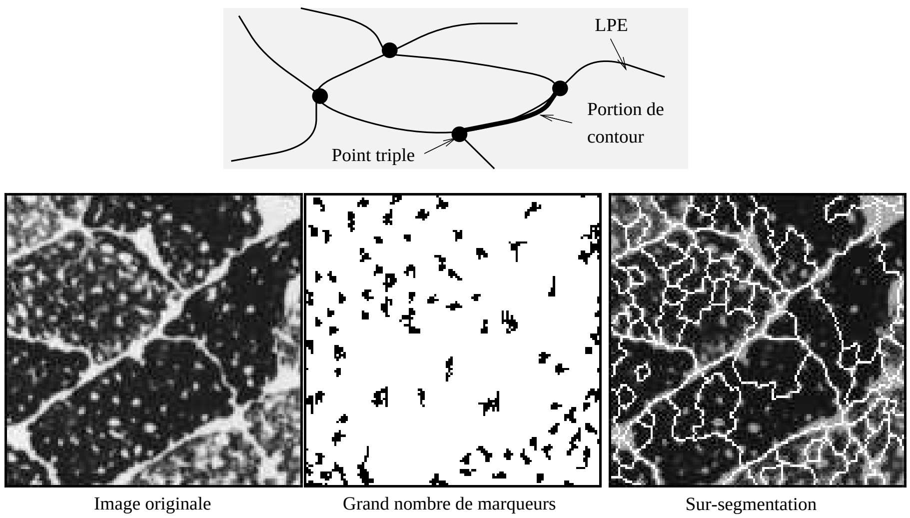


Figure 5.12: On utilise la sur-segmentation pour effectuer une correction locale du gradient

Cette idée a été émise et utilisée pour la première fois par S. Beucher notamment pour introduire un processus de segmentation hiérarchique de l'image et résoudre le problème de la sur-segmentation des images [2] : après avoir calculé une première segmentation (lLPE associée à tous les minima de l'image gradient), on calcule l'image mosaïque associée (on associe à chaque bassin versant, un niveau de gris égal au niveau de gris moyen de l'image originale sur cette région), puis une nouvelle segmentation est calculée sur le gradient de l'image mosaïque et ainsi de suite... On construit ainsi un processus de fusion de régions : deux régions fusionnent lorsque leur niveau de gris moyen est proche. Notons à ce propos que d'autres critères de fusion peuvent être utilisés [14, 48]. Le recours à une image mosaïque s'avère être souvent une bonne solution lorsque la LPE est calculée sur une image gradient et que l'on cherche à extraire des régions aux contours localement mal définis. En effet, on prend ainsi en compte non plus les valeurs locales du gradient sous la fonction numérique mais les différences entre les "contrastes moyens" de deux régions voisines. Par contre, cette méthode utilise à la fois l'information de l'image originale et celle du gradient. Dans notre exemple notamment, la LPE est calculée directement sur l'image originale et cette méthode n'est donc pas utilisable.

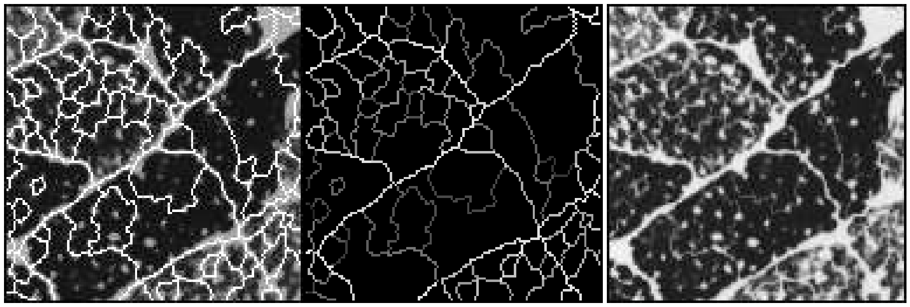


Figure 5.13: Correction du gradient par des moyennes locales sous les portions de LPE

Notre but ici est de renforcer les niveaux de gris le long des lignes de crête de l'image sans utiliser d'autre connaissance que celle relative à l'image étudiée. Nous considérons pour cela chaque arc de contour extrait par une première segmentation de l'image : un arc est défini comme l'ensemble des pixels situés entre deux points triples (points de la LPE ayant 3 voisins sur la LPE pour la trame hexagonale) (voir figure 5.12).

On applique alors un processus correctif non plus sur toute l'image (comme précédemment) mais uniquement sous chaque portion de LPE. On limite ainsi le risque d'altérer le signal entre les lignes de crête de l'image comme cela se produisait pour les deux précédentes méthodes.

On peut, à partir de ce principe, appliquer une fermeture ou toute autre transformation susceptible de corriger correctement les irrégularités locales du gradient sous les contours de la sur-segmentation. La figure 5.13 illustre le résultat obtenu en calculant des moyennes locales.

Nous avons appliqué l'algorithme suivant :

1. Calcul d'une première segmentation à partir d'un nombre important de marqueurs. Le résultat est une sur-segmentation de l'image.

2. Elimination des points triples de la LPE : chaque portion de LPE définit alors une composante connexe.

3. Labelisation des portions de contours.

4. Calcul de la moyenne de l'image sous chaque portion.

5. On affecte à chaque point triple la plus grande valeur calculée sur les portions qui lui sont adjacentes.

6. On prend le sup entre l'image originale et l'image des moyennes locales : ceci de telle sorte que les irrégularités locales soient corrigées sans que, en dehors de ces points sensibles, les niveaux de gris des lignes de crête ne soient modifiés.

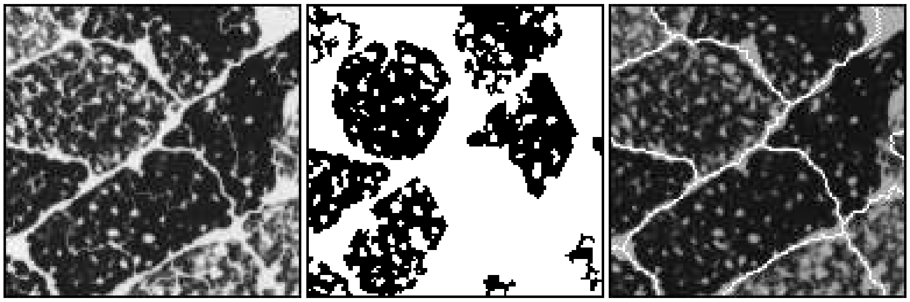


Figure 5.14: Segmentation obtenue après correction de l'image par des moyennes locales sous les portions de LPE (LPE obtenue par une première sur-segmentation de l'image)

Cette méthode peut être assimilée aux transformations géodésiques qui considèrent une image sur laquelle elles s'appliquent et un masque géodésique délimitant la portion de l'image allant être transformée. Ici, l'information directionnelle est bien prise en compte puisque les portions de LPE suivent exactement les lignes de crête de l'image.

Nous donnons figure 5.14 la segmentation obtenue par cet algorithme de correction. Cette fois-ci le résultat est correct. Des exemples d'utilisation de tels processus correctifs pour la segmentation d'images complexes pourront également être trouvés dans [48].

Plusieurs remarques peuvent être faites à propos de cet algorithme :

- Tout d'abord, nous ne discutons pas ici de la question de la *bonne* sur-segmentation à considérer. Bien entendu, la solution la plus simple car non paramétrique consiste à calculer la LPE associée à l'ensemble des minima régionaux du gradient. On s'expose alors au risque d'obtenir un nombre très important de petites régions et des portions de contours de très petite taille. Or, pour que la correction proposée soit valable, la taille de chaque portion de LPE doit être grande devant celle des irrégularités locales du gradient de telle sorte que la moyenne soit calculée sur un nombre suffisant de points de forte valeur. De plus, si la sur-segmentation est trop importante, et les moyennes locales calculées sur un petit nombre de points, on risque d'introduire des distorsions sur l'image : amplification du bruit local, jonction de lignes de crête... D'autre part, si le nombre de régions est trop faible, on s'expose alors au risque de perdre les contours significatifs. Il faut donc faire un compromis entre un nombre de régions trop important qui peut être à l'origine d'artéfacts de gradient et un nombre trop faible de régions qui peut rendre la correction inopérante [48].

- Il faut souligner également que cette méthode fonctionne si les irrégularités sont seulement locales. En effet, il n'est pas possible, par ce biais, d'extrapoler l'information de contour qui n'existe pas sur l'image gradient. Il faut dans ce cas avoir recours à d'autres méthodes plus élaborées.

5.1.3 Conclusion

Dans cette première partie introductive, nous avons décrit les étapes clefs des algorithmes de segmentation basés sur la LPE. Si cette technique a prouvée son efficacité à résoudre des problèmes complexes de segmentation d'image, il n'en reste pas moins que la mise en oeuvre des algorithmes de segmentation par LPE est bien souvent délicate.

D'une manière quelque peu simplificatrice, la LPE fonctionne bien si les contours des régions à extraire sont clairement définis et si on marque correctement ces régions. Or, la plupart du temps, ces conditions ne sont naturellement pas satisfaites. L'utilisateur doit alors avoir recours à un certains nombre de transformations d'image pour orienter convenablement le comportement de l'algorithme de segmentation qu'il construit.

Le point central de tout algorithme de segmentation par LPE est certainement l'extraction de marqueurs des régions à segmenter. Tout-à-fait volontairement, la question de la résolution de ce problème n'a pas été réellement abordée dans cette section : elle est au centre de nos préoccupations dans les sections suivantes de ce chapitre.

5.2 Extraction de marqueurs à l'aide des fonctions d'extinction

Nous avons vu l'importance du rôle des marqueurs dans les algorithmes de segmentation. C'est par leur intermédiaire qu'on répond à la question : qu'est-ce qu'on cherche à segmenter ? La question de la segmentation proprement dite des régions choisies relève ensuite d'un processus entièrement automatique : le calcul de la LPE associée aux marqueurs.

Pour résoudre ce problème , on dispose généralement d'informations a priori permettant de caractériser les régions recherchées : selon leur taille, leur forme, leur contraste, des caractéristiques relatives à leur contour... Extraire des marqueurs des régions d'intérêt dans l'image consiste alors à traduire sous forme algorithmique l'ensemble de ces informations.

Il serait fastidieux voire même impossible d'énumérer l'ensemble des méthodes qu'il est possible d'utiliser pour mener à bien cette étape d'extraction de marqueurs : chaque problème de segmentation d'image nécessite la plupart du temps l'élaboration d'une technique spécifique.

On peut cependant distinguer une approche “type” très souvent utilisée : elle consiste à filtrer l'image originale (ou l'image gradient) puis à extraire les extrema (les minima, les maxima ou les deux) de l'image filtrée. Ce sont les connaissances a priori qu'on a des régions recherchées qui décident du choix du (ou des) filtre(s) à utiliser. La mise au point d'une telle procédure est bien souvent délicate et s'effectue généralement par tâtonnements...

Les fonctions d'extinction que nous avons introduites présentent trois grands atouts par rapport aux approches "classiques" :

- Tout d'abord elles sont *explicites*, ce qui facilite la transcription du "cahier des charges" en langage machine : les valeurs d'extinction surfaciques par exemple permettent d'extraire la taille des régions de l'image, la dynamique calculée sur l'image originale correspond à une mesure du contraste des régions de l'image, la dynamique calculée sur l'image gradient correspond à une mesure de la force et de la régularité des contours des régions de l'image ...

- Une fois le (ou les) critères à prendre en compte choisi(s), le problème de l'extraction de marqueurs des régions de l'image satisfaisant ce(s) critère(s) ne consiste plus qu'en un simple seuillage de la (ou des) fonction(s) d'extinction correspondante(s).

- Enfin, la rapidité des algorithmes de calcul des fonctions d'extinction rend leur utilisation conviviale.

5.2.1 Présentation sur quelques exemples

Nous nous proposons d'illustrer notre propos par quelques exemples concrets de segmentation. A partir de ces exemples, nous espérons éclairer le lecteur sur la spécificité de chacun des outils que nous allons étudier : la dynamique (symétrique ou non), les fonctions d'extinction surfacique et volumique. Quelques autres illustrations pourront également être trouvées dans [93, 95].

Comportement de la fonction d'extinction surfacique calculée sur le gradient

- **Segmentation de cellules musculaires**

Nous reprenons l'exemple des cellules musculaires que nous avons déjà étudié. Nous avions alors sciemment négligé de mentionner comment les marqueurs des cellules pouvaient être obtenus. Examinons maintenant ce point.

Les régions d'intérêt (les cellules) sont presque essentiellement caractérisées par leur taille. En effet, nous avons vu que le contour des cellules n'est pas une information fiable puisque certains contours présentent de fortes irrégularités locales.

Nous proposons donc d'utiliser la fonction d'extinction surfacique associée aux minima de l'image pour extraire des marqueurs des cellules. Nous avons retenu les 20 minima de l'image de plus forte valeur d'extinction surfacique, puis nous avons calculé la LPE associée à ces marqueurs directement sur l'image originale sans procéder à aucun renforcement préalable des contours des cellules. La segmentation ainsi obtenue est comparée à celle dérivée de la dynamique des minima (on retient les 20 minima de l'image de plus forte dynamique). Malgré la mauvaise qualité des contours, les cellules sont correctement segmentées (voir figure 5.15).

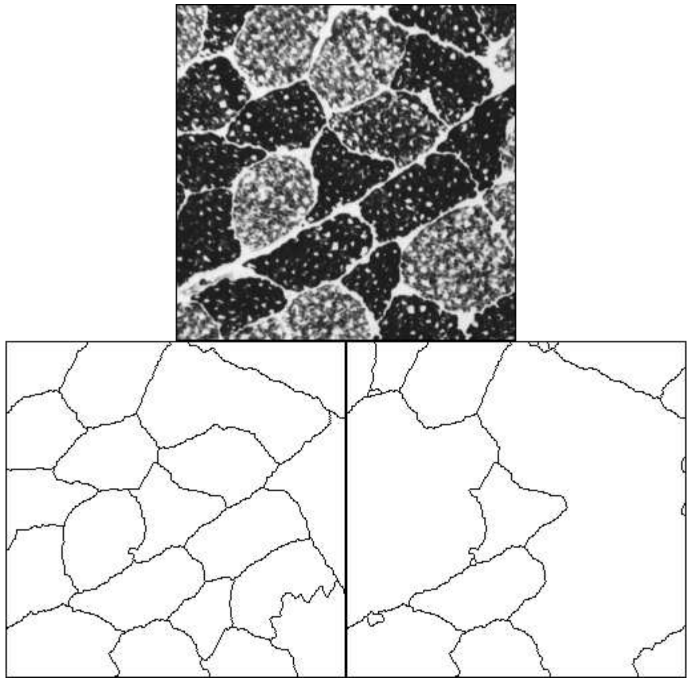


Figure 5.15: Exemple "Muscle" : segmentation des 20 régions les plus significatives de l'image en termes de surface (image de gauche) ou de dynamique (image de droite)

La dynamique, par contre, n'est pas bien adaptée à ce problème : elle ne permet d'extraire que les cellules aux contours forts et uniformes ; on extrait, en outre, de très petites régions non significatives.

D'une manière générale, on constate que les valeurs d'extinction surfaciques sont moins sensibles aux irrégularités locales des contours que la dynamique (voir figure 5.16).

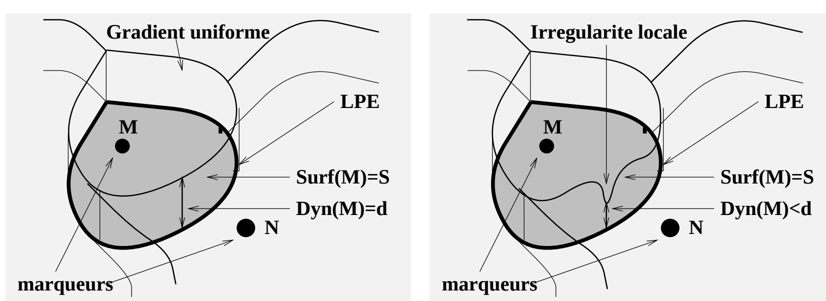


Figure 5.16: Comparaison des sensibilités des valeurs d'extinction surfaciques et de la dynamique aux variations locales d'intensité : la dynamique prend en compte le plus bas niveau de gris sous chaque arc de LPE ; dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques seule la position des arcs de LPE intervient.

- **Segmentation d'une vue aérienne**

Sur cet exemple, nous cherchons à segmenter les différents champs de l'image (voir figure 5.17). Du fait de la mauvaise qualité du gradient, ce problème est assez délicat : les contours des champs sont imprécis. Malgré cela, les valeurs d'extinction surfaciques des minima du gradient permettent de segmenter assez correctement les principales régions de l'image.

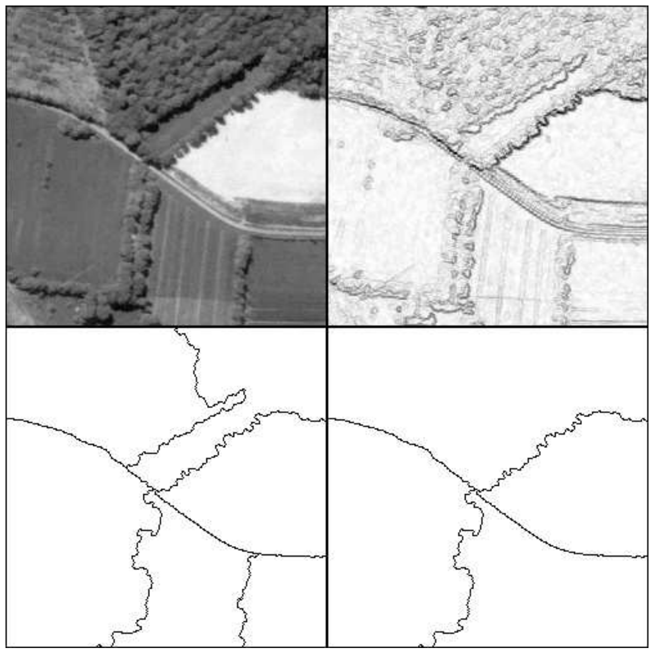


Figure 5.17: Exemple "Aer" : segmentation des régions de l'image de surface supérieure ou égale à 4000 puis à 6000 pixels

Dynamique, fonctions d'extinction surfacique et volumique : comportements comparés

- **Simplification d'image par segmentation sans perte du sens**

Nous nous plaçons ici dans un tout autre cadre : la segmentation est utilisée ici pour simplifier l'image (en réduisant le nombre de zones plates de l'image) avec comme contrainte de minimiser la perte d'information. Ce genre de procédé est utilisé notamment (sous une forme plus complexe) pour le codage d'image [59].

On procède de la façons suivante : extraction de marqueurs des régions significatives de l'image, segmentation, calcul de la mosaïque (on associe à chaque région segmentée un niveau de gris égal à la valeur moyenne de l'image originale sur cette région).

La pertinence d'une région est définie par la perception visuelle qu'on en a : une large région même peu contrastée doit être préservée. Une petite région fortement contrastée doit l'être également car l'oeil la perçoit tout aussi bien... L'outil le mieux adapté à l'ensemble de ces contraintes est a priori la fonction d'extinction volumique qui considère simultanément l'information de taille et de contraste.

Les fonctions d'extinction sont calculées sur le gradient : ainsi les structures sombres et claires sont traitées de manière non indépendantes. Pour que la dynamique et les valeurs d'extinction volumiques tiennent compte du "contraste" relatif entre les régions de l'image, nous construisons l'image gradient de la façon suivante : dans un premier temps une première sur-segmentation est calculée à partir de l'ensemble des minima du gradient morphologique (voir section B.2.1) de l'image originale. Le gradient que nous utilisons est défini comme le gradient morphologique de la mosaïque associée à cette sur-segmentation (voir figure 5.18). Ainsi, les niveaux de gris sous une portion de contour correspondent à la différence de contraste moyen entre les régions adjacentes [2]. Cette opération a également pour conséquence de réduire le nombre de minima à traiter.

Figure 5.18: Exemple "Lena" : Sur-segmentation, image mosaïque et gradient

La dynamique et les valeurs d'extinction volumiques et surfaciques des minima de cette nouvelle image gradient sont calculées. Nous retenons à chaque fois comme marqueurs les 100 minima de plus fortes valeurs et nous calculons les segmentations puis les images mosaïques associées (voir figure 5.19). Comme prévu, les valeurs d'extinction volumiques permettent d'obtenir la meilleure qualité visuelle d'image. Dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques, certaines larges régions non significatives sont extraites (dans le fond de l'image en arrière plan notamment) et certains détails importants manquent (l'oeil droit de Léna par exemple). Dans le cas de la dynamique, c'est l'inverse qui se produit. Cette exemple confirme la remarque déjà faite précédemment : un critère qui concilie taille et contraste permet d'orienter la détection vers un résultat compatible avec le système visuel humain.

Figure 5.19: Exemple "Lena" : segmentation des 100 régions les plus significatives en termes de volume (à gauche), de surface (au centre), de dynamique (à droite). Les valeurs d'extinction ont été calculées sur le gradient de l'image mosaïque.

Comparaison entre la dynamique et la dynamique symétrique

- **Segmentation d'une vue aérienne**

Jusqu'à présent, pour traiter les images biphasées et considérer simultanément et de manière non indépendante les structures claires et sombres de l'image, nous avons calculé les fonctions d'extinction sur des images gradient. Pour la surface et le volume cela semble tout-à-fait pertinent. Par contre, les exemples précédents montrent que, dans le cas de la dynamique, cette démarche ne convient pas. Examinons donc les comportements de la dynamique et de la dynamique symétrique dans un processus de segmentation.

Nous reprenons l'exemple "Aer" déjà étudié à l'aide des valeurs d'extinction surfaciques. Nous avons choisi cet exemple car chaque champ présente une texture particulière : ceci va nous permettre d'étudier la différence entre la dynamique et la dynamique symétrique pour des textures différentes. Sur la figure 5.20 nous constatons qu'il n'y a aucune différence au niveau des régions homogènes (au niveau du lac par exemple) et une différence notable dans le cas des régions fortement texturées (régions boisées par exemple).

Si les marqueurs extraits à partir de la dynamique symétrique semblent tout-à-fait corrects (à chaque champ dans l'image correspond un et un seul marqueur), la segmentation déduite n'est pas pertinente : dans le cas de la dynamique symétrique comme dans le

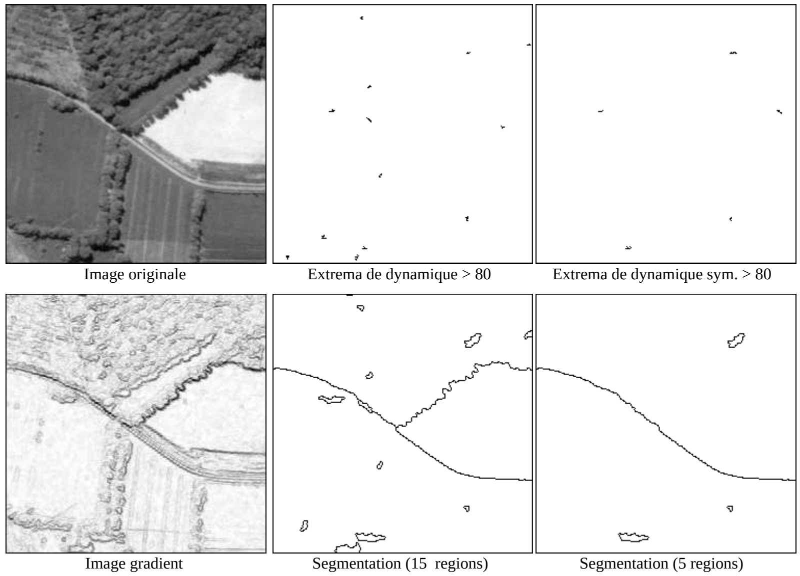


Figure 5.20: Exemple "Aer" : segmentation des régions fortement contrastées de l'image en utilisant la dynamique des extrema de l'image originale ou leur dynamique symétrique

cas de la dynamique, les contours extraits ne correspondent pas aux contours des champs mais à ceux de sur-densités locales ou bien à du bruit.

Ce comportement est tout-à-fait caractéristique de la dynamique et de la dynamique symétrique. Nous le schématisons figure 5.21. Nous avons représenté une région fortement contrastée, bruitée et aux contours "incertains". Le bruit local de forte amplitude correspond à des pics étroits de haute intensité donc de forte dynamique. Lorsqu'on extrait un marqueur de la région en utilisant la dynamique ou la dynamique symétrique des extrema de l'image, alors ce marqueur pointe justement sur cette sur-densité locale qui n'est pas réellement significative. Dans de telles configurations, la LPE ne permet pas d'extraire les contours recherchés. C'est pour cette raison d'ailleurs que la dynamique est souvent associée à un pré-filtrage spatial de l'image de telle sorte à éliminer l'influence du bruit sur le résultat.

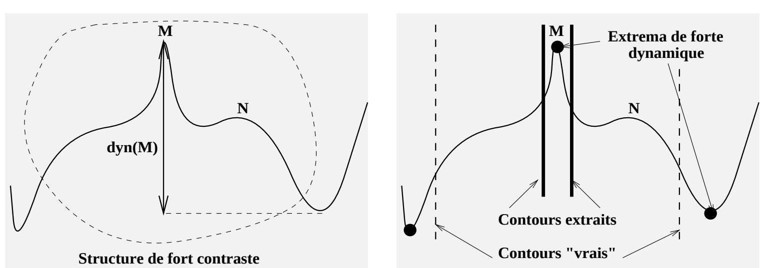


Figure 5.21: Extraction des marqueurs des régions de fort contraste par sélection des extrema de forte dynamique ou de forte dynamique symétrique : les marqueurs peuvent être localisés sur des pics de forte amplitude non significatifs.

5.2.2 Comparaison avec une opération équivalente de filtrage

Nous avons introduit les fonctions d'extinction comme des opérateurs dérivés de familles croissantes de filtres connexes : un extremum est valué avec la taille maximale du filtre qu'il est possible d'appliquer sans qu'il soit éliminé. A chaque extremum de l'image filtrée de taille λ correspond un et un seul extremum de l'image originale de valeur d'extinction supérieure ou égale à λ. Les deux opérations suivantes permettent de marquer les mêmes régions de l'image :

- Seuillage de la fonction d'extinction au niveau λ
- Calcul de l'image filtrée de taille λ et extraction de ses extrema (minima ou maxima ou les deux selon le cas)

Par contre, les marqueurs extraits par ces deux méthodes diffèrent : par seuillage de la fonction d'extinction on extrait des marqueurs locaux (ce sont des extrema de l'image originale) ; par le filtrage, on extrait des marqueurs étendus (les filtres utilisés pour définir les fonction d'extinction sont connexes : ils ont pour propriété caractéristique de propager et de fusionner les plateaux de l'image d'entrée).

Comparons les segmentations déduites de ces deux approches sur l'exemple de la dynamique symétrique (voir figure 5.22). La segmentation calculée à partir des extrema de l'image originale de dynamique symétrique supérieure à 80 est comparée à celle dérivée

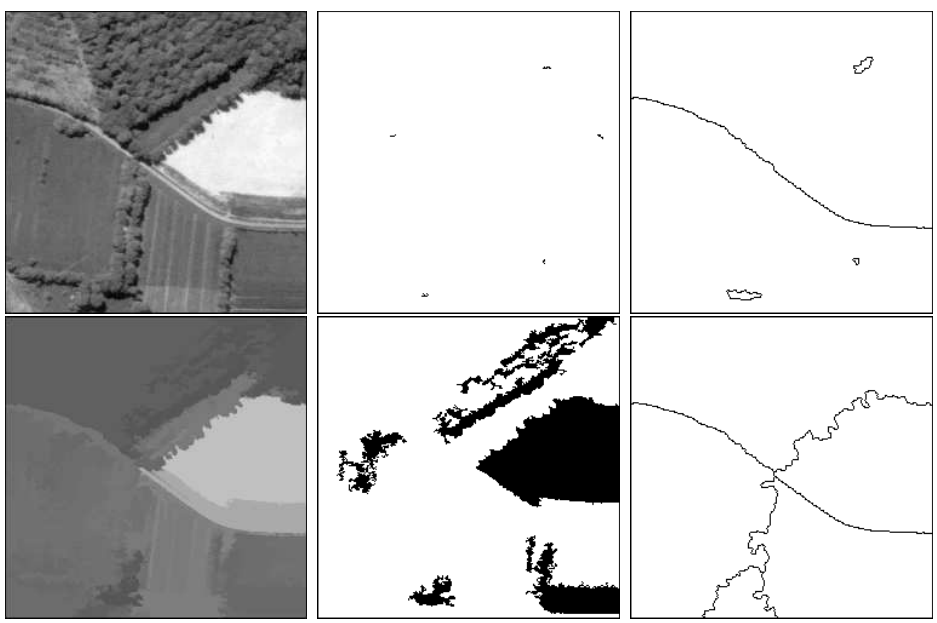


Figure 5.22: Comparaison entre la segmentation obtenue à partir de la dynamique symétrique et celle obtenue en calculant le filtre de contraste équivalent. De haut en bas et de gauche à droite : Image originale, extrema de dynamique symétrique supérieure à 80, segmentation associée à ces marqueurs (LPE calculée sur l'image gradient), filtrage de l'image originale (h-reconstruction alternées séquentielles de taille 80), extrema de l'image filtrée, segmentation associée (LPE calculée sur la même image gradient)

du calcul de la transformation alternée séquentielle associée : h-reconstructions alternées séquentielles de "taille" 80. Le recours au filtrage permet d'obtenir un meilleur résultat.

Ce résultat était prévisible car nous avons vu que les marqueurs extraits sont différents même s'ils pointent sur les mêmes structures. Par contre, ce comportement est assez caractéristique de la dynamique. Examinons la figure 5.23 qui explique cette situation. Les extrema de forte dynamique correspondent, comme nous l'avons vu, à des sur-densités et bien souvent à du bruit local de faible amplitude. Les contours de ces petites régions étant souvent fortement marqués, la LPE vient se positionner à ce niveau. Par le filtrage, on extrait des marqueurs étendus qui permettent un meilleur contrôle du positionnement des arcs de LPE. Ce comportement ne se produit pas dans le cas des valeurs d'extinctions surfaciques et volumiques puisque la dimension spatiale des régions est prise en compte : les marqueurs des régions de grande taille ou de grand volume se positionnent en dehors des sur-densités de faible amplitude.

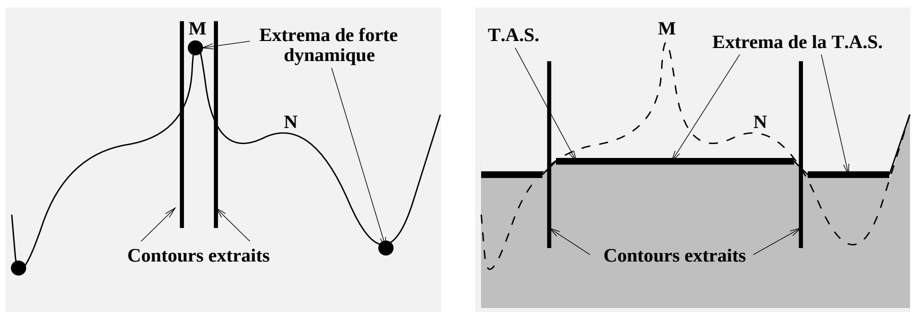


Figure 5.23: Les extrema de forte dynamique pointent sur des sur-densités locales

Ainsi, il serait préférable pour certaines applications en segmentation d'image de calculer des filtres de contraste plutôt que d'utiliser la dynamique ou la dynamique symétrique ? En fait, nous allons voir qu'un résultat équivalent à celui déduit du filtrage peut être obtenu en utilisant l'information contenue dans les arbres de fusion des extrema construits lors du calcul de la dynamique ou de la dynamique symétrique.

5.2.3 Utilisation des arbres de fusion des extrema pour l'extraction de marqueurs plus précis

Nous avons vu au chapitre 4 que le calcul d'une fonction d'extinction produit un arbre de fusion des minima ou des extrema de l'image et que cet arbre contient toute l'information qu'il est possible d'extraire en calculant la famille croissante de filtres correspondants (voir section 4.2). Rappelons brièvement les règles de construction de ces arbres.

Les noeuds de l'arbre de fusion correspondent aux extrema de l'image et sont valués avec leur valeur d'extinction, c'est-à-dire avec la taille maximale du filtre qu'il est possible de calculer sans que la structure pointée par M soit intégralement filtrée. Une branche orientée et valuée (par une valeur λ) de l'arbre lie deux extrema M et M' ($[M \to M']$) si M et M' appartiennent à un même plateau de l'image filtrée (paramètre de filtrage égal à λ) : $\psi_\lambda(f)$ (voir section 4.2, figures 4.14 et 4.23). L'orientation va de M à M' si la valeur d'extinction de M' est plus grande que celle associée à M.

Nous allons utiliser cette information pour approcher au plus près la segmentation déduite par filtrage sans qu'il soit nécessaire d'effectuer l'opération de filtrage en elle-même.

Soit s le niveau choisi pour seuiller la fonction d'extinction. Nous considérons donc tous les extrema de valeur d'extinction supérieure à s. A chacun de ces extrema correspond un et un seul extremum étendu de l'image filtrée $\psi_s(f)$.

Dans une première étape, les branches de l'arbre valués avec une valeur strictement supérieure à s sont coupées. On définit ainsi plusieurs petits arbres dont le point commun est le suivant : si l'on considère les noeuds d'un sous-arbre donné, ceux-ci sont tous inclus dans un même plateau de l'image filtrée de taille s. Il ne reste plus alors qu'à sélectionner ceux inclus dans un extremum de l'image filtrée de taille s. Il suffit pour cela de ne retenir, parmi l'ensemble des petits arbres, que ceux dont le sommet a une valeur d'extinction supérieure ou égale à s (voir figure 5.24).

On obtient ainsi un ensemble de marqueurs non connexes qui vérifie : à chaque marqueur correspond un et un seul extremum de l'image filtrée de taille s ; chaque marqueur est entièrement inclus dans un extremum de l'image filtrée $\psi_s(f)$.

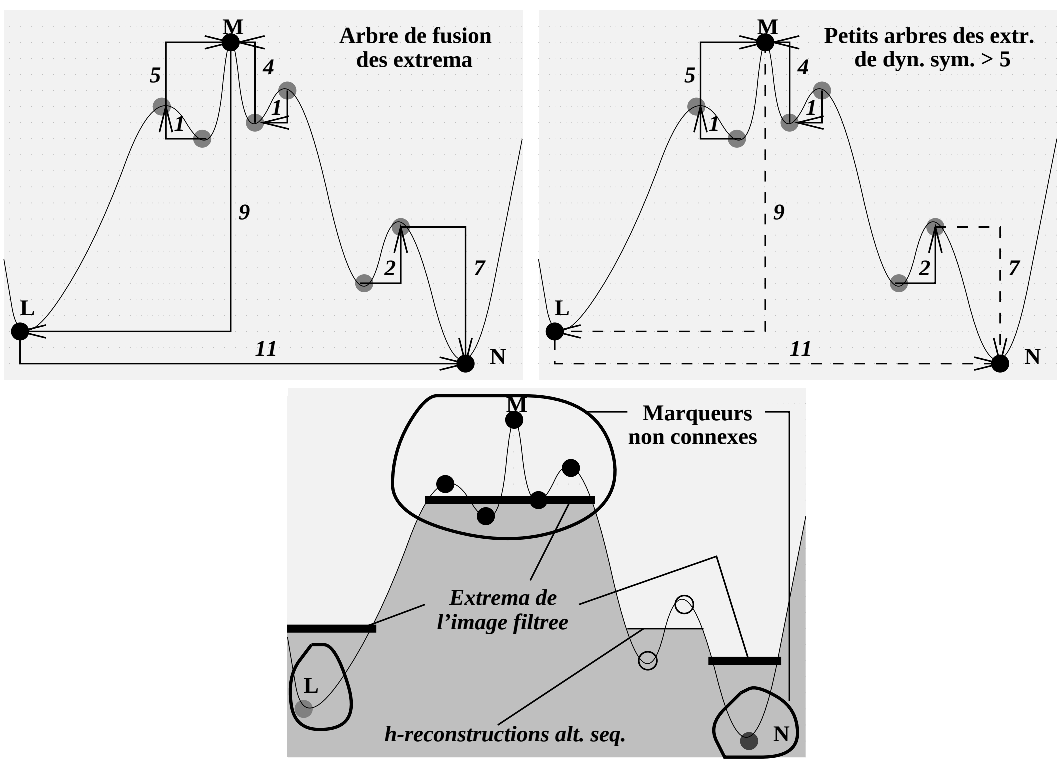


Figure 5.24: Extraction de marqueurs à partir de l'arbre dynamique de fusion des extrema de l'image (arbre déduit du calcul de la dynamique symétrique). Si s est le seuil en dynamique choisi, on élague les branches de l'arbre de valeur strictement supérieure à s : on obtient plusieurs petits arbres. On ne retient que les arbres dont le sommet a une valeur d'extinction supérieure à s. On aboutit ainsi à un ensemble de marqueurs non connexes proche de l'ensemble des extrema de l'image filtrée (par le filtre équivalent de taille s).

Cette méthode permet d'obtenir des marqueurs plus précis des régions à segmenter que celle qui consiste juste à sélectionner les extrema de l'image. Mais elle ne permet pas de retrouver exactement les extrema étendus extraits de l'image filtrée. Cependant, comme la plupart des images réelles sont bruitées, et que, de ce fait, le nombre d'extrema traités est élevé, on est sûr que la différence entre les extrema étendus de l'image filtrée et les marqueur non-connexes ainsi extraits est faible (les petits arbres extraits sont "touffus").

Nous rappelons que le calcul de la ligne de partage des eaux à partir de marqueurs non connexes relève du même processus que celui utilisé dans le cas de marqueurs connexes : pour un marqueur donné (auquel on a associé un label), chacune de ses composantes connexes donne naissance à un lac, mais les lacs ainsi produit ont même label ; de ce fait, leur rencontre ne produit pas d'arc de LPE.

Nous donnons figure 5.25 la segmentation obtenue par cette méthode sur l'image "Aer" : le résultat est très proche de celui dérivé du calcul des h-reconstructions alternées séquentielles (comparaison avec la figure 5.22). Nous avons vu que les opérateurs connexes étendent les zones plates de l'image d'entrée ce qui se traduit au niveau du gradient par un emboîtement des zones de gradient nul. En fait, la démarche réalisée ici à partir de l'arbre de fusion des extrema revient à imposer ces règles d'emboîtement aux zones de gradient nul.

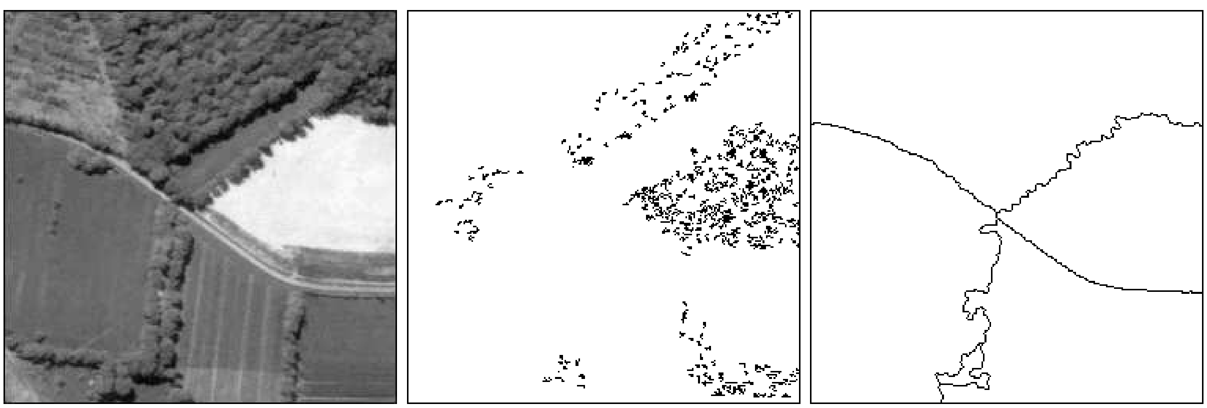


Figure 5.25: Exemple "Aer" : extraction de marqueurs précis en utilisant l'arbre dynamique de fusion des extrema de l'image

Nous avons illustré ce processus dans le cas de la dynamique symétrique (voir figure 5.25). Tout ce que nous venons de dire vaut également pour les valeurs d'extinction non symétriques. Cependant, l'arbre dérivé de la dynamique ou des valeurs d'extinction surfaciques et volumiques (non symétriques) lie soit les maxima soit les minima de l'image mais pas les deux, ce qui constitue un fort handicap dans de nombreux cas : lorsqu'il est nécessaire de considérer simultanément les structures claires et sombres de l'image et que le recours à l'étude de l'image gradient n'est pas envisageable.

5.2.4 Discussion

Une procédure classique dans les algorithmes de segmentation pour l'extraction de marqueurs consiste à filtrer l'image puis à considérer les extrema de l'image filtrée. Choisir le "bon" filtre et la "bonne " taille du filtre est généralement une étape laborieuse dans les algorithmes de segmentation : en effet, il faut généralement itérer le processus en adaptant petit-à-petit les paramètres ... jusqu'à temps que les résultats escomptés soient atteints.

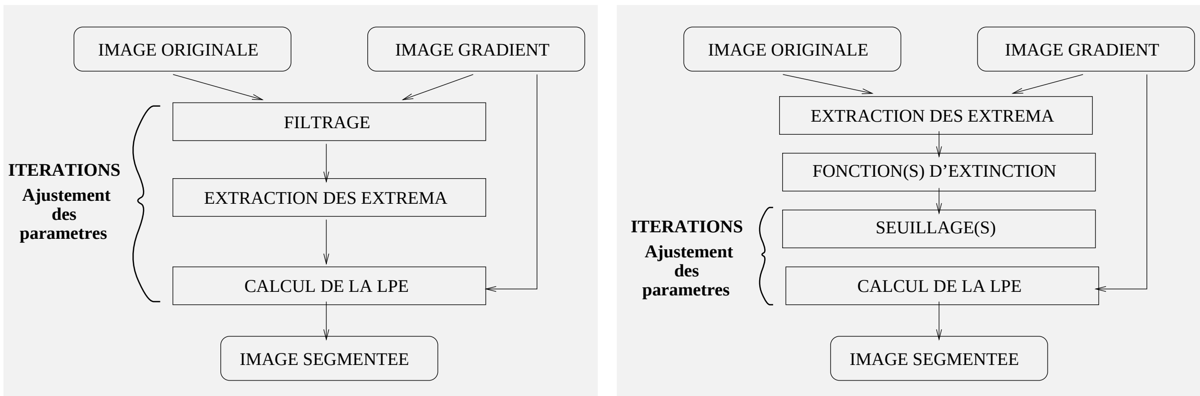


Figure 5.26: Apport des fonctions d'extinction pour la mise au point des algorithmes de segmentation par LPE

Les fonctions d'extinction ouvrent en ce sens de grandes perspectives pour la mise au point des algorithmes de segmentation par LPE. En effet, on obtient directement toutes les informations utiles qu'on aurait pu obtenir en calculant des filtres équivalents de taille croissante. Leur programmation efficace constitue donc un de leur principaux atouts. De plus, les fonctions d'extinction permettent de disposer des distributions en taille, en contraste, en volume ... de l'ensemble des régions de l'image. Cette connaissance peut faciliter le choix des paramètres de seuillage et permet notamment d'extraire très aisément les n régions les plus significatives de l'image.

Nous avons illustré figure 5.26 l'apport des fonctions d'extinction dans la mise au point des algorithmes de segmentation par rapport à des opérations équivalentes de filtrage.

Même à l'aide des fonctions d'extinction, la mise au point de ces algorithmes nécessite le plus souvent plusieurs itérations. En effet, pour un critère donné, c'est l'étude de l'image segmentée qui permet la plupart du temps de décider si le seuil choisi est correct ou pas.

En conséquence, nous nous proposons maintenant de répondre à la question suivante : est-il possible d'obtenir en une seule fois les N segmentation qu'on obtient en effectuant N seuillages successifs des fonctions d'extinction puis en calculant les N segmentations associées ?

5.3 Segmentation hiérarchique interactive

Nous avons vu que la Ligne de Partage des Eaux associe à un ensemble de marqueurs (localisant les régions d'intérêt dans l'image) des *zones d'influence* définissant ainsi une partition de l'image.

Le point de vue de la segmentation hiérarchique est de calculer les segmentations associées à un ensemble de plus en plus réduit (ou de plus en plus important) de marqueurs. La vision hiérarchique de l'image qui s'en déduit est très riche et est de grand intérêt pour bon nombre d'applications notamment pour les problèmes de reconnaissance automatique de formes...

Tout le problème de la segmentation hiérarchique consiste à se donner des règles pour définir les marqueurs à chaque niveau hiérarchique. De nombreuses méthodes ont été développées, basées par exemple sur l'utilisation de mosaïques [2], de filtres de plus en plus (ou de moins en moins) sélectifs [77, 14, 59]...

Les points délicats de ces algorithmes sont au moins au nombre de deux : la définition proprement dite des marqueurs et le calcul des segmentations pour tous les niveaux hiérarchiques (opération généralement coûteuse en temps de calcul). Nous avons proposé des outils pouvant être utilisés pour la résolution du premier point : les fonctions d'extinction. Nous nous attachons à présent au second point.

5.3.1 Zones d'influence hiérarchiques et arbre de fusion

Nous supposerons dans tout ce qui suit que l'on dispose d'un ensemble de marqueurs quelconques (connexes ou non) étiquetés. Nous supposerons de plus que ces marqueurs sont valués : $\mathcal{M} = (M_i, \nu(M_i))_{i \in I}$. Les valeurs $\nu(M_i)$ permettent de situer le degré d'importance de chaque marqueur M_i dans l'ensemble $\mathcal{M}$: elles introduisent naturellement une hiérarchisation des différentes structures de l'image pointées par ces marqueurs.

Nous définissons la segmentation au niveau hiérarchique h par la LPE associée à l'ensemble restreint de marqueurs : $\{M_i \in \mathcal{M} \mid \nu(M_i) \geq h\}$.

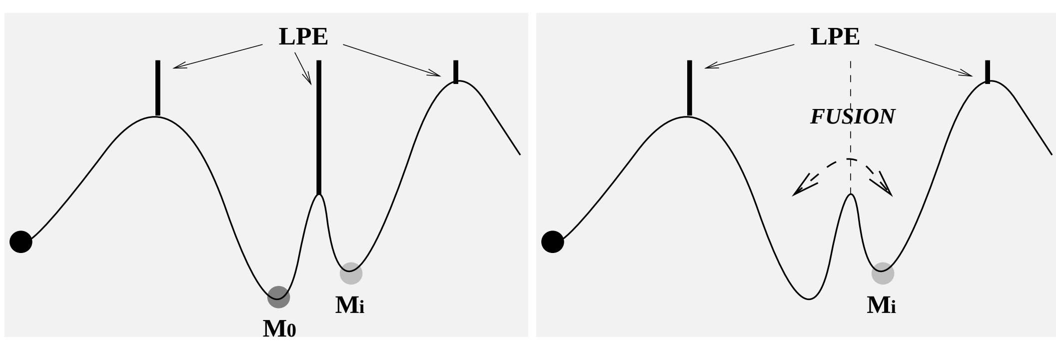


Figure 5.27: Un processus de segmentation hiérarchique par croissance de régions : l'élimination d'un marqueur se traduit par l'élimination d'un arc de LPE.

Nous noterons $ZI_h(M_i)$ la zone d'influence associée à M_i au niveau hiérarchique h. L'ensemble $\{ZI_h(M_i), i \in I \mid \nu(M_i) \geq h\}$ définit donc la segmentation de niveau h et l'ensemble $\{ZI_{h-1}(M_i), i \in I \mid \nu(M_i) \geq h-1\}$ la segmentation de niveau $(h-1)$.

Nous supposerons, dans un premier temps, que les altitudes des cols (altitude des points les plus bas sous les arcs de LPE) sont toutes distinctes ; le cas particuliers de deux cols de même altitude sera examiné ensuite. Cette hypothèse faite, le processus de segmentation hiérarchique correspond à une croissance de régions : il y a disparition progressive des arcs de LPE, c'est-à-dire fusion progressive des zones d'influence (voir figure 5.27 et 5.28).

Soit M_0 un marqueur valué par $\nu(M_0) = h-1$. Quand on calcule la LPE sans M_0 (au niveau hiérarchique h), la région qui lui est associée ($ZI_{h-1}(M_0)$) est absorbée par une région voisine ($ZI_{h-1}(M_i)$); l'arc de LPE séparant ces deux régions est éliminé.

$$ZI_h(M_i) = ZI_{h-1}(M_i) \cup ZI_{h-1}(M_0) \text{ et } M_i \text{ satisfait :}$$

$$\nu(M_i) \geq \nu(M_0) = h-1 \tag{5.2}$$

$$ZI_{h-1}(M_0) \text{ et } ZI_{h-1}(M_i) \text{ sont voisines} \tag{5.3}$$

Parmi tous les M_j satisfaisant les conditions 5.2 et 5.3, on choisit celui tel que :

$$\text{la hauteur à franchir pour aller de } M_i \text{ à } M_0 \text{ soit minimale} \tag{5.4}$$

Ces relations expriment que la connaissance des zones d'influence au niveau 0 et des relations de fusion entre les marqueurs (définies par les relations 5.2, 5.4 et 5.3) suffit pour déduire l'ensemble des zones d'influence pour tous les niveaux hiérarchiques.

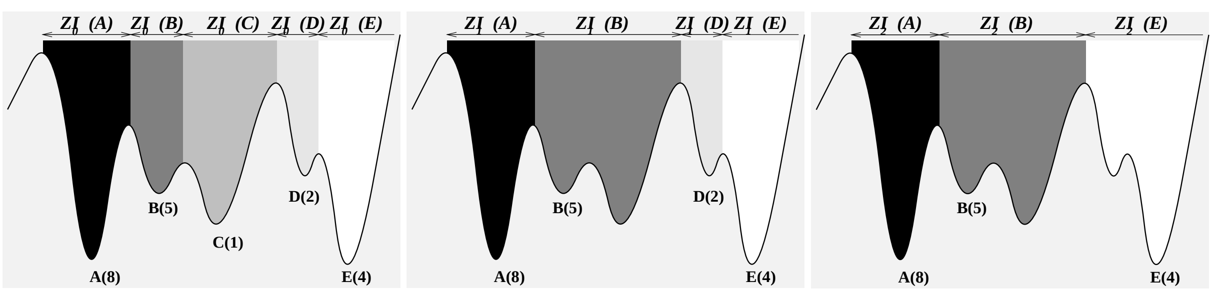


Figure 5.28: Processus de segmentation hiérarchique : on restreint progressivement l'ensemble des marqueurs des régions à segmenter (nous avons indiqué en indice les valeurs hiérarchiques associées aux minima ; les valeurs considérées ont été choisies au hasard). Définition hiérarchique des zones d'influence associées aux marqueurs.

Nous allons montrer maintenant comment extraire l'information décrite par ces trois relations, lors du calcul de la segmentation de niveau 0 (lors du calcul des zones d'influence de niveau 0). Nous allons voir que l'on est amené à construire un arbre de fusion des marqueurs M_i.

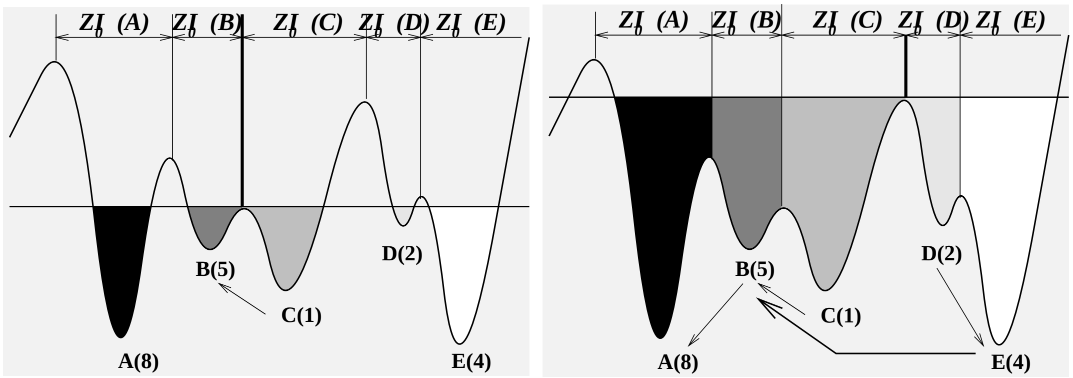


Figure 5.29: Calcul de la segmentation de niveau 0 (algorithme classique de calcul de la LPE) : on mémorise en même temps, comment les régions fusionnent au cours du processus de segmentation hiérarchique : lorsque deux lacs de sources différentes se rencontrent, le plus fort (celui associé à la plus forte valeur hiérarchique) absorbe l'autre.

Nous reprenons le processus d'inondation classiquement utilisé pour le calcul de la LPE. Les minima de l'image (ou les marqueurs) sont des sources d'inondation du relief, et l'eau inonde le relief, en pénétrant par ces minima-sources. L'inondation a lieu à niveau constant. Lorsque deux eaux provenant de deux sources différentes se rencontrent, on est sur un point de la LPE. Soit B et C les deux sources des lacs qui se rencontrent (voir figure 5.29). Nous supposerons $\nu(B) \geq \nu(C)$ (dans le cas contraire, on échange les rôles de B et C). Avec $M_0 = C$, $M_i = B$ la condition 5.2 est satisfaite. Les lacs de source B et C sont des sous-ensemble des zones d'influence (de niveau 0) de B et C (par définition). Par conséquent, si les lacs de source B et C se rencontrent, alors $ZI_0(B)$ et $ZI_0(C)$ sont voisines. De plus, cela est vrai jusqu'au niveau hiérarchique : $h = inf(\nu(B), \nu C) = \nu(C)$ (tant qu'aucune des deux régions n'est absorbée). La condition 5.3 est donc satisfaite. Enfin, la condition 5.4 est également satisfaite par M' puisque par inondation, on considère les points cols les plus bas en premier. Par conséquent, on sait que lorsque C est éliminé de l'ensemble des marqueurs (au niveau hiérarchique $h = \nu(C) + 1$), la zone d'influence de C s'unit avec celle de B. Une branche de l'arbre peut donc être créée liant B et C : $[C \rightarrow B]$. Cette branche indique que B absorbe C au niveau hiérarchique $h = \nu(C) + 1$. L'inondation se poursuit alors en considérant que la source C n'existe plus (fusion des lacs de source B et C).

Plaçons-nous maintenant à un niveau plus élevé de l'inondation. Une partie de l'arbre est déjà construit. Soient C et D les sources des lacs qui se rencontrent (voir figure 5.29).

C et D peuvent avoir déjà été traités (comme c'est le cas sur notre exemple), c'est-à-dire que leur comportement dans le processus de segmentation hiérarchique est connu ; ils ont des ascendants dans l'arbre construit. Ce sont leurs ascendants de plus haut niveau qui vont être maintenant traités ; sur notre exemple : E ou A. Sur notre exemple, $\nu(A) > \nu(E)$, on applique donc le même raisonnement que précédemment à E : au niveau hiérarchique $h = \nu(E)+1$, la zone d'influence associée à E ($ZI_{h-1}(E) = ZI_0(E) \bigcup ZI_0(D)$ sur notre exemple) est absorbée par la région contenant C. Mais à ce niveau hiérarchique, cette région a elle-même déjà été absorbée par B. $\nu(B) > \nu(E)$ donc E est absorbée par la zone d'influence (de niveau $h = \nu(E)$) associée à B. Une nouvelle branche de l'arbre est donc construite : $[E \rightarrow B]$

La construction de l'arbre est effectué lors du calcul des zones d'infuence (de niveau 0) associées aux marqueurs ce qui permet de tout faire en une seule “passe”. En effet, nous avons vu que les zones d'influence au niveau hiérarchique h se déduisent de celles de niveau 0. Pour produire l'image des zones d'influence au niveau hiérarchique h (image sur laquelle les pixels appartenant à $ZI_h(M_i)$ ont comme niveau de gris le label de M_i), il suffit de suivre la procédure suivante :

- Lecture de l'image des zones d'influence (avec leurs labels) au niveau hiérarchique 0 : les $ZI_0(M_i)$.

- Pour chaque zone d'influence de niveau 0, on se place au noeud de l'arbre correspondant (noeud M_i). Partant de ce noeud, on remonte progressivement vers le sommet de l'arbre. On s'arrête lorsqu'on atteint un noeud M_j vérifiant : $\nu(M_j) \geq h$. On attribue à la zone d'influence de niveau 0 associée à M_i le label de M_j.

Quelques remarques :

- Nous avons supposé jusqu'ici que la segmentation au niveau h se déduit de celle de niveau $(h-1)$ par élimination d'un ou plusieurs arcs de LPE. Cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite : l'élimination d'un marqueur peut provoquer le déplacement d'un arc de LPE lorsque deux points col ont même niveau de gris. La figure 5.30 illustre notre propos.

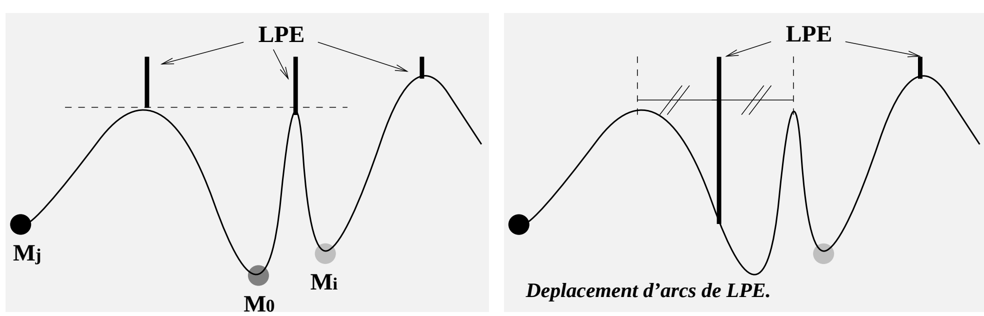


Figure 5.30: L'élimination d'un marqueur peut provoquer le déplacement d'un (ou plusieurs) arc(s) de LPE

Dans ce cas, la condition 5.4 n'a plus d'effet sur le choix de M_i et l'ensemble des trois relations 5.2, 5.4 et 5.3 ne suffit pas à assurer l'unicité de M_i : deux régions voisines envahissent en même temps une région sans marqueur (celle anciennement associée à M_0) qui est scindée en deux.

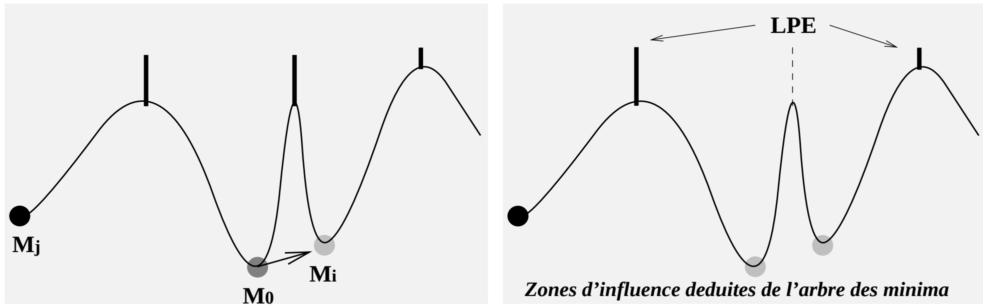


Figure 5.31: L'arbre de fusion des minima fournit naturellement une solution aux configurations pathologiques

L'algorithme de calcul de l'arbre de fusion résoud naturellement cette indétermination : on choisit M_i absorbant M_0 au hasard parmi tous les candidats possibles (l'un des arcs de LPE est traité avant l'autre) : voir figure 5.31.

- Le processus que nous venons de décrire et qui aboutit à la construction de l'arbre de fusion possède de très grandes similitudes avec les processus décrits pour le calcul des valeurs d'extinction (cas non symétrique). Examinons ce point plus en détail.

  A l'origine de ces notions, un mécanisme de construction commun : une inondation de l'image (c'est-à-dire une étude des seuils successifs de l'image et des régions connexes ainsi définies). Les branches des arbres de fusion sont construites lorsque, en passant au seuil suivant, deux régions distinctes fusionnent. Les branches de l'arbre sont orientées : la région la plus persistante (celle associée au minimum de plus forte valeur d'extinction ou, ici, celle associée au plus grand niveau hiérarchique ν_i) absorbe l'autre. La différence entre le processus présenté pour le calcul des valeurs d'extinction et le processus décrit ici réside dans deux points :

  – Ici, aucune mesure sur les lacs n'est effectuée : ce sont des valeurs posées à priori qui sont utilisées pour hiérarchiser les minima.

  – Ici, les règles de fusion entre les régions sont plus complexes que celles utilisées lors du calcul des valeurs d'extinction. Cette différence vient de la condition 5.3. Lorsque nous avons introduit l'algorithme de calcul des valeurs d'extinction et la notion d'arbre de fusion nous avons alors évoqué la possibilité de modifier certaines branches de l'arbre en imposant une condition supplémentaire (voir figure 4.15 à la fin de la section 4.2). L'utilité d'une telle mesure est désormais illustrée.

  Ceci nous conduit à faire une troisième remarque :

- Si les ν_{M_i} correspondent à la dynamique des minima où à leur valeur d'extinction surfacique ou volumique, alors, le calcul des ν_{M_i} peut être effectué en même temps que le calcul des segmentations de niveau 0 et en même temps que celui de l'arbre de fusion contenant l'information de la segmentation hiérarchique. Ainsi, tout le processus de segmentation hiérarchique peut être calculé en une seule inondation d'image.

Enfin, nous pouvons comparer l'information contenue par l'arbre de fusion orienté à celle contenue dans une structure de représentation non orientée. Nous illustrons notre propos par la figure 5.32.

Nous reprenons l'arbre non orienté classiquement utilisé (celui que nous avons déjà présenté au chapitre précédent). Cet arbre traduit comment les composantes connexes des seuils successifs d'une image fusionnent lorsqu'on augmente progressivement le niveau de seuillage de l'image.

Nous avons défini le processus de segmentation de segmentation hiérarchique à partir de valeurs hiérarchiques ν_i quelconques. De ce fait, l'arbre de fusion non orienté permet de savoir à quel niveau un arc de LPE est éliminé ; mais il ne permet pas de connaître comment les régions fusionnent entre elles.

Lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux arcs de LPE (comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant), l'arbre de fusion non orienté contient suffisamment d'information et peut donc être utilisé. Par contre, nous donnerons un autre exemple d'utilisation pour lequel l'arbre non-orienté ne convient plus et pour lequel l'arbre orienté devra être utilisé.

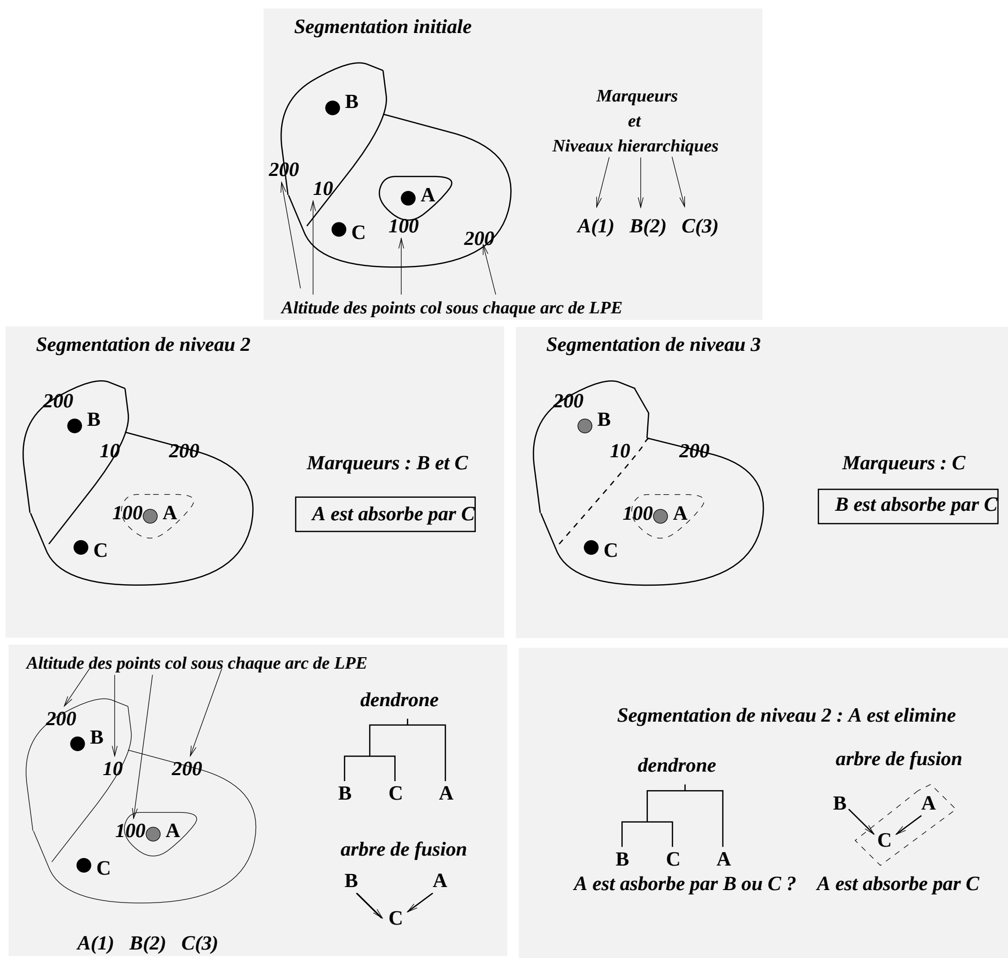


Figure 5.32: Les arbres non-orientés contiennent moins d'information que les arbres de fusion orientés : ils permettent de mémoriser à quel niveau un arc de LPE est éliminé, mais ils ne permettent pas de mémoriser pas comment les régions fusionnent entre elles

5.3.2 Valuation des arcs de LPE

Partant d'un ensemble valué de marqueurs, trouver la “bonne” segmentation signifie ajuster le paramètre de seuillage des valeurs associées à ces marqueurs. Dans de nombreux cas, la connaissance de la segmentation est nécessaire pour déterminer si le seuil choisi est correct ou non.

Nous proposons ici de valuer les arcs de LPE de telle sorte que la segmentation de niveau h puisse être obtenue par un simple seuillage de l'image des arcs valués. Toute l'information utile est contenue dans l'arbre de fusion des minima. Il ne reste plus qu'à d'écrire l'algorithme permettant d'extraire cette information.

Un algorithme a récemment été proposé par L. Najman et M. Schmitt [68, 67] dans le cas où les ν_i correspondent à la dynamique. Leur algorithme utilise une structure d'arbre non orienté similaire à celle utilisée par P. Hanusse et P. Guillataux (voir section 4.3). Nous avons vu que l'information contenue dans l'arbre non orienté est moins riche que celle contenue dans l'arbre de fusion orienté mais que cette information est suffisante pour permettre de valuer correctement les arcs de LPE, et ceci quelque soient les valeurs hiérarchiques considérées (et pas seulement dans le cas de la dynamique). Nous allons rappeler brièvement cet algorithme (en l'adaptant aux cas où la hiérarchie sur les marqueurs est quelconque). Notons que cette opération peut également être effectuée à partir des arbres de fusion orientés...

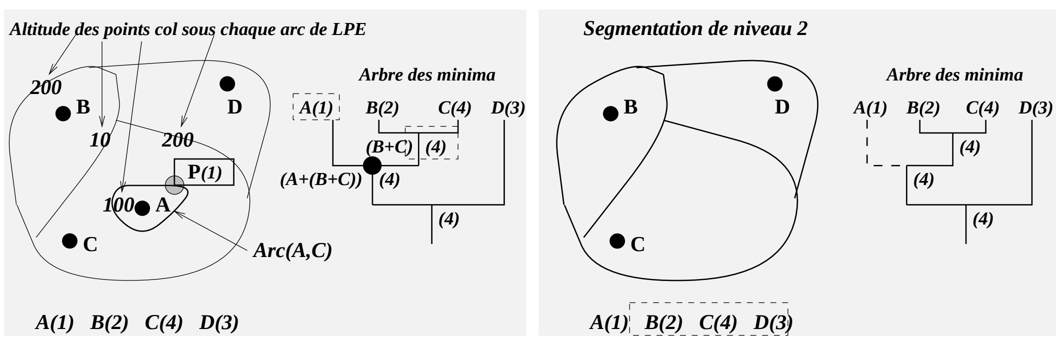


Figure 5.33: Valuation des arcs de LPE à partir de l'arbre des minima

Nous supposerons que les noeuds de l'arbre ont été préalablement étiquetés : on associe à chaque noeud terminal (correspondant à un marqueur) sa valeur hérarchique ν_i ; on associe à un noeud non terminal le sup des valeurs associées à ces “fils” : voir figure 5.33.

Nous considérons la segmentation de niveau 0 (effectuée à partir de tous les marqueurs) et nous nous plaçons en un point de LPE (P), point séparant deux zones d'influence de labels différents : $P \in \mathcal{A}rc(M_i, M_j)$. Notre but est de valuer chaque arc $\mathcal{A}rc(M_i, M_j)$ avec le niveau hiérarchique h maximal tel que cet arc persiste dans la segmentation de niveau h. L'arc $\mathcal{A}rc(M_i, M_j)$ persiste tant que les régions associées à M_i et M_j n'ont pas fusionné. La valuation de cet arc est donc obtenue en cherchant le premier ascendant commun de M_i et M_j dans l'arbre. Ce noeud admet deux fils. On associe à l'arc $\mathcal{A}rc(M_i, M_j)$, le min des valeur hiérarchiques associées à ces deux fils.

Sur l'exemple de la figure 5.33, on cherche à déterminer le niveau hiérarchique maximal h tel que l'arc de LPE séparant A et C persiste dans la segmentation de niveau h.

L'ascendant commun de A et C est le noeud $(A+(B+C))$. Il a deux fils : A et $(B+C)$. La valeur hiérarchique associée à A est inférieure à celle associée à $(B \cup C)$, donc l'arc séparant A et C persiste tant que A est préservé. Il est donc valué avec $\nu(A) = 1$.

L'image des arcs ainsi valués contient toute l'information qu'on peut obtenir en seuillant l'image des marqueurs valués au niveau h puis en calculant la LPE associée à cet ensemble de marqueurs et ceci pour des valeurs croissantes de h (voir figure 5.34). On obtient alors la segmentation associée à l'ensemble $\{M_i, \nu(M_i) \geq h\}$ par un simple seuillage de l'image des arcs valués au niveau h (voir figure 5.34).

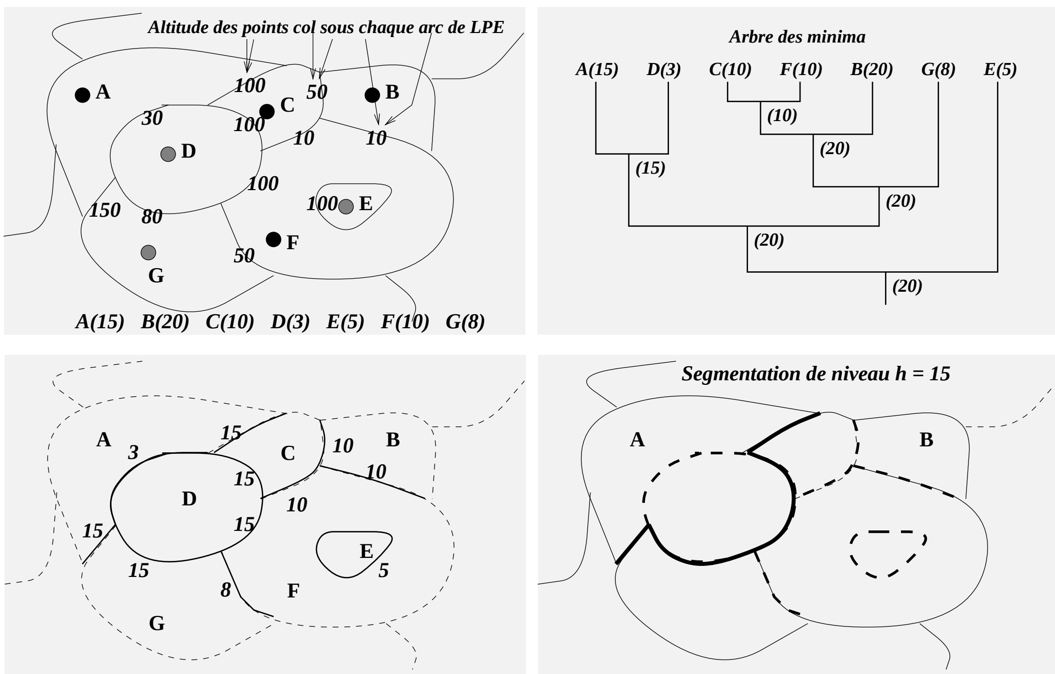


Figure 5.34: Valuation des arcs de LPE en utilisant l'arbre non orienté des minima : on obtient la segmentation de niveau h par un simple seuillage de l'image des arcs valués

Il n'y a absolument aucune relation entre les valeurs associées par cette méthode aux arcs de LPE et les valeurs de l'image sous ces arcs ; excepté dans le cas particulier où l'image étudiée est une image gradient et où les valeurs $\nu(M_i)$ correspondent à la dynamique des minima du gradient : dans ce cas, en effet, les valeurs de dynamique correspondent aux niveaux de gris de certains points col sous les arcs de LPE (si les minima du gradient ont tous une altitude nulle), et les valuations déduites pour les arcs sont liées aux niveaux de gris de l'image. La segmentation hiérarchique déduite de la dynamique des minima calculée sur le gradient est en fait équivalente à celle que l'on obtiendrait par un seuillage progressif du gradient (voir figure 5.35).

Nous donnons figure 5.36 des exemples obtenus dans le cas où les valeurs $\nu(M_i)$ correspondent : à la dynamique des extrema de l'image originale, à la fonction d'extinction surfacique des minima du gradient et à la fonction d'extinction volumique des minima du gradient. Nous avons préalablement imposé les extrema de l'image originale comme seuls minima du gradient.

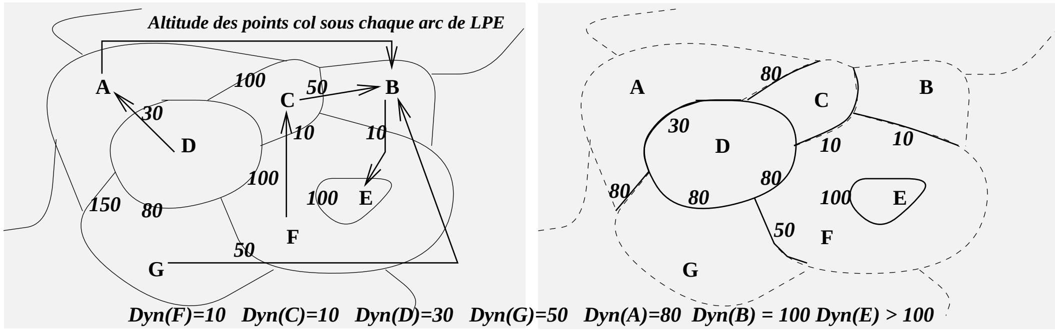


Figure 5.35: La segmentation hiérarchique déduite de la dynamique des minima du gradient correspond à celle que l'on obtiendrait par un seuillage progressif du gradient

Figure 5.36: Exemple “Pepper” : valuation des arcs de LPE selon, de gauche à droite, le contraste, la surface et le volume des régions de l'image

Récapitulation :

Les notions de fonctions d'extinction et d'arbres de fusion des minima définissent des algorithmes de segmentation dont la mise au point s'effectue très simplement, selon les étapes suivantes (voir figure 5.37) :

1. Utilisation des connaissances a priori (quelles régions cherche-t-on à extraire ?) :

    - Choix de la (ou des) fonction(s) d'extinction (dynamique, surfacique, volumique) calculée(s) sur l'image originale ou sur l'image gradient.
    - Les valeurs hiérarchiques associées aux marqueurs (les $\nu(M_i)$ peuvent être définies comme des combinaisons de plusieurs fonctions d'extinction (exemple : combinaison de la surface calculée sur l'image gradient et de la dynamique calculée sur l'image originale).

    Cette étape nécessite une ou deux inondations de l'image (selon que l'on calcule les fonctions d'extinction sur l'image originale ou sur l'image gradient ou bien sur les deux).

2. Calcul de la segmentation initiale (à partir de tous les marqueurs) et construction de l'arbre de fusion des marqueurs : une unique inondation de l'image est nécessaire.

3. Valuation des arcs de LPE en utilisant l'arbre de fusion des minima : une seule lecture de l'image de la segmentation de niveau 0 est nécessaire.

4. Choix du niveau de seuillage des valeurs hiérarchiques associées aux régions sur l'image des arcs de LPE valués pour obtenir la segmentation recherchée (*segmentation interactive*).

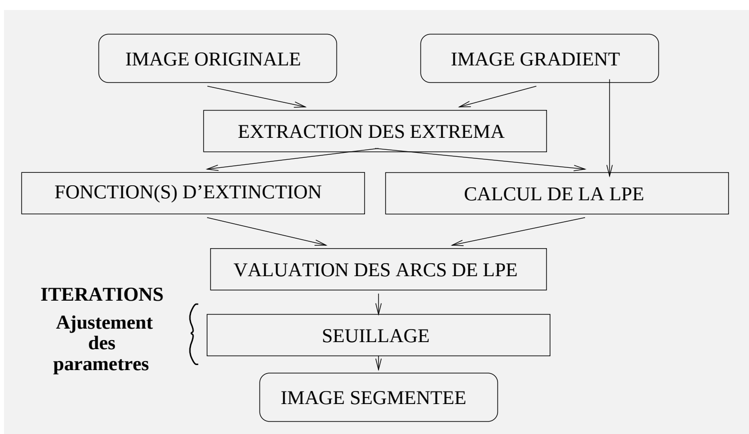


Figure 5.37: Interaction entre la sélection de marqueurs et la segmentation déduite selon la sélection effectuée

5.3.3 Autre exemple d'utilisation

Dans de nombreuses applications de segmentation, il peut être nécessaire d'évaluer par un autre critère que l'analyse visuelle la qualité de la segmentation obtenue (pour le codage d'images notamment). On peut notamment utiliser l'erreur quadratique moyenne entre le signal d'entrée (l'image originale) et celui de sortie (l'image mosaïque). Notons que d'autres opérateurs peuvent être mieux adaptés au cas particulier du codage d'image (ceux basés sur la variance par exemple).

A partir d'une segmentation donnée, on calcule l'image mosaïque associée. Nous rappelons que l'image mosaïque m_h est obtenue en affectant à chaque région segmentée la moyenne de l'image originale (f) sous cette région :

$$\forall M_i,\ \nu(M_i) \geq h,\ \forall x \in ZI_h(M_i),\ m_h(f)(x) = \frac{1}{surf(ZI_h(M_i))} \sum_{y \in ZI_h(M_i)} f(y)$$

Pour des valeurs hiérarchiques ν fixées, on estime la qualité de la segmentation au niveau hiérarchique h à partir de l'erreur quadratique moyenne entre f et la mosaïque de niveau h (estimateur non biaisé) :

$$err(h) = \sum_x (f(x) - m_h(x))^2$$

L'image mosaïque m_h est constituées de régions uniformes. Ces régions correspondent aux zones d'influence de niveau h : $\{ZI_h(M_i), \nu(M_i) \geq h\}$. On peut effectuer le calcul de l'erreur zone d'influence par zone d'influence :

$$err(h) = \sum_{i|\nu(M_i)\geq h} \ \sum_{x \in ZI_h(M_i)} (f(x) - moy_h(f)(x))^2 \tag{5.5}$$

Or, les zones d'influence de niveau h se déduisent de celles de niveau 0. Il est donc possible de calculer très efficacement la fonction $err(h)$ en utilisant l'arbre de fusion des minima. Remarquons que, pour cette application, il faut utiliser l'arbre de fusion orienté des minima. En effet, nous avons vu que la structure non orientée est moins riche que la structure orientée : elle permet de mémoriser quand mais pas comment les régions fusionnent entre elles (voir figure 5.32). Nous utilisons donc ici l'arbre orienté de fusion des minima. Nous rappelons que $[M \longrightarrow M']$ signifie que $ZI_{h-1}(M)$ est absorbée par $ZI_{h-1}(M')$ au niveau $h = \nu(M) + 1$ (M' est le premier ascendant de M).

Nous supposons dans tout ce qui suit que les valeurs $\nu(M_i)$ associées aux marqueurs sont toutes distinctes. Cette restriction ne pose a priori pas de problème : on peut toujours, de manière simple, se ramener à ce cas (il suffit, dans le cas où deux marqueurs ont même niveau hiérarchique, d'attribuer, à l'un des deux, la valeur immédiatement supérieure et d'incrémenter d'autant les valeurs hiérarchiques plus grandes).

A chaque marqueur est associé un label. Dans tout ce qui suit, nous supposerons, pour simplifier, que M_i a pour label i. N désignera le nombre de marqueurs ($1 \leq i \leq N$).

Nous utilisons une table de correspondance $Tab[h]$ permettant de connaître, pour chaque niveau hiérarchique, le marqueur qui va être éliminé :

$$Tab[h] = i \text{ si } \nu(M_i) = h$$

Si $\forall i, \nu(M_i) \neq h$ alors : $Tab[h] = 0$. Nous noterons H le niveau hiérarchique maximal (la valeur maximale atteinte par les $\nu(M_i)$).

Nous allons calculer l'erreur pour les différents niveaux hiérarchiques. $Surf[i]$ correspondra à la surface de la zone d'influence contenant le marqueur de label i. $Som[i]$ correspondra à la somme des niveaux de gris de f sur la zone d'influence contenant le marqueur de label i. Enfin, $Moy[h][i]$ correspondra à la moyenne des niveaux de gris de f sur la zone d'influence de niveau h contenant le marqueur de label i. Ces tableaux sont initialisés à zéro.

Pour calculer la fonction $err(h)$, on applique la procédure suivante :

- Lecture de l'image originale et de l'image des zones d'influence (avec leurs labels) de niveau hiérarchique 0 (les $ZI_0(M_j)$). Pour chaque pixel x, faire :

$$Surf[i]^{++} \text{ et } Sum[i] += f(x) \quad \text{si } x \in ZI_0(M_i)$$

- Calcul des moyennes de l'image sur chaque zone d'influence de niveau 0 :

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq N,\ Moy[0][i] = Som[i]\ /\ Surf[i]$$

- Pour chaque niveau hiérarchique ($\forall h,\ 0 \leq h \leq H-1$), faire :
  - Si $Tab[h] \neq 0$ (le marqueur de label $k = Tab[h]$ est éliminé au niveau $(h+1)$) alors, on cherche, dans l'arbre de fusion orienté des minima, l'ascendant du noeud de label $k = Tab[h]$. Soit asc le label de cet ascendant, faire :

$$Sum[asc] += Sum[k] \text{ et } Surf[asc] += Surf[k]$$

  - Calcul des moyennes de l'image sur chaque zone d'influence de niveau (h+1) :

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq N,\ \begin{cases} Moy[h+1][i] = Som[i]\ /\ Surf[i] & \text{si } \nu(M_i) \geq h+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Pour chaque niveau hiérarchique ($\forall h,\ 1 \leq h \leq H$), faire :
  - Pour toutes les régions de l'image ($\forall i,\ 1 \leq i \leq N$), faire :
    - si $Moy[h][i] = 0$ alors, on cherche dans l'arbre de fusion le premier ascendant asc de i tel que $Moy[h][asc] \neq 0$. Soit asc cet ascendant, faire :

$$Moy[h][i] = Moy[h][asc]$$

- Calcul de l'erreur quadratique moyenne pour tous les niveaux hiérarchiques :

  Lecture de l'image originale et de l'image des zones d'influence de niveau 0. Pour chaque pixel x faire :

$$\forall h,\ 0 \leq h \leq H,\ err[h] += (f(x) - Moy[h][i])^2 \text{ si } x \in ZI_0(M_i)$$

Le calcul de la fonction $err(h)$ pour tous les niveaux hiérarchique h de segmentation ne nécessite donc que deux lectures d'image : la première lecture est utilisée pour calculer les surfaces des zones d'influence au niveau 0 et pour déterminer la valeur moyenne de l'image sur ces zones ; la seconde lecture est utilisée pour calculer l'erreur pixel par pixel. Un tel calcul n'est absolument pas envisageable sans utiliser l'arbre de fusion des minima : calculer les n segmentations hiérarchiques, puis les n images mosaïques puis l'erreur pour chaque niveau n serait en effet très coûteux en temps de calcul.

La figure 5.38 donne les profils des fonctions $\sqrt{err(h)}$ obtenues lorsque les valeurs hiérarchiques ν correspondent à la dynamique des régions (la dynamique est calculée sur l'image originale), aux valeurs d'extinction surfaciques ou volumiques des minima du gradient. D'après ces courbes, c'est la fonction d'extinction volumique qui permet d'obtenir le meilleur résultat ce qui est également confirmé par l'analyse visuelle des images mosaïques (voir figure 5.39).

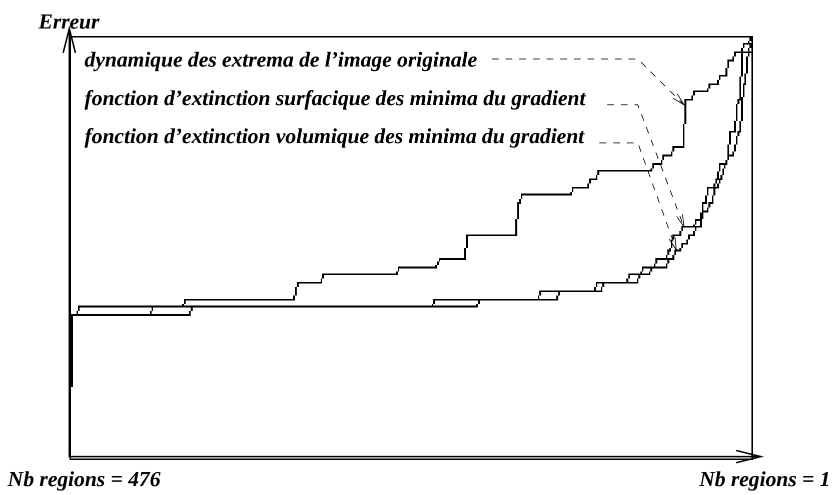


Figure 5.38: Erreur entre l'image originale et l'image mosaïque selon le critère de sélection choisi et selon le nombre de régions considérées

Figure 5.39: Images mosaïques obtenues en sélectionnant les 80 régions les plus significatives en termes de contraste (à gauche), de taille (au centre) et de volume (à droite)

5.4 Conclusion

La notion de fonction d'extinction permet de généraliser l'approche utilisée dans le cas de la dynamique pour sélectionner les extrema significatifs d'une image dans les algorithmes de segmentation ; en ce sens, elles correspondent à un outil important lorsque la surface ou le volume des régions doit être pris en compte.

Nous avons vu que le grand intérêt de la notion de fonction d'extinction par rapport aux méthodes basées sur l'utilisation de filtrage est de rendre plus aisée et plus rapide la mise au point des algorithmes de segmentation. Du point de vue de l'utilisateur, c'est-à-dire de celui qui se trouve confronté au problème de segmentation, cela représente certainement un progrès important. En effet, plus le test d'une méthode s'effectue de manière simple et efficace, plus l'utilisateur a la possiblité de tester un nombre important d'approches différentes et plus il a de chance d'atteindre le résultat qu'il recherche.

Enfin, nous avons vu que les fonctions d'extinction ouvrent la voie à des algorithmes de segmentation interactifs. De tels outils sont très intéressants, notamment pour la création de logiciels évolués de traitement d'image dédiés à des utilisateurs non spécialistes. L'utilisateur entre son cahier des charges : segmentation des régions de fort contraste, de grande taille, de faible volume... Ensuite, son travail consiste simplement à sélectionner, par seuillage de l'image des arcs de LPE valués, la segmentation qu'il juge correcte...

Chapitre 6

Application à la détection automatique des opacités du sein

L'analyse d'image est une science appliquée, développée pour résoudre des problèmes de vision. A l'intérieur des domaines privilégiés de l'analyse d'image, la morphologie mathématique a pris une part tout à fait originale, grâce à son approche aussi bien pragmatique que théoriquement bien fondée. C'est sans doute grâce à la symbiose entre une rigueur mathématique féconde et une volonté d'appliquer ses principes à des vrais problèmes que la morphologie mathématique a connu le succès qu'elle mérite, auprès, en particulier, des industriels.

Nous présentons ici l'application qui fut le cadre de notre travail. L'analyse automatique des images mammographiques est un problème qui n'a été abordé qu'assez récemment (puisque les premières recherches dans ce domaine ont moins de dix ans) et qui vient en parallèle avec un travail de développement de techniques de mammographies numériques. Ce domaine de recherche est aujourd'hui en plein essor.

Cette application fait largement appel aux notions que nous avons présentées dans cette thèse (ainsi qu'à d'autres notions plus classiques de la morphologie mathématique). Nous avons indiqué, dans la mesure du possible, la démarche générale adoptée sans toutefois entrer dans les détails. Pour des raisons de confidentialité industrielle, nous ne décrirons pas nos algorithmes.

6.1 Introduction

Le cancer du sein constitue la première cause de mortalité chez les femmes agées de 35 à 50 ans. En France, le nombre de décès annuels dus à cette maladie est évalué à 9000. En outre, on recence 26000 nouveaux cas de maladie par an, ce qui permet de dire qu'une française sur 12 ou 13 sera un jour touché par la maladie. Ces chiffres ne sont pas spécifiques à la France. Dans toutes les sociétés industralisées, à l'exception du Japon, l'incidence du cancer du sein est devenue très importante.

Plus la maladie est détectée à un stade précoce, plus les chances de guérison sont grandes. Un dépistage systématique des maladies du sein constitue donc une étape importante de la chaîne de traitement des maladies du sein.

La recherche de méthodes de détection automatique des maladies du sein est assez récente. Aujourd'hui, l'analyse des mammographies numérisées semble être une des méthodes les plus encourageantes.

6.1.1 Le cancer du sein et son dépistage

Sans chercher à décrire dans le détail les processus de la maladie, un bref rappel de notions générales est cependant nécessaire pour situer le cadre de notre travail. Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet pourra, par exemple, se référer aux ouvrages suivants [35, 36, 37, 24]. On pourra également se référer à la thèse de M. Grimaud [21], en ce qui concerne le problème de la détection automatique des micro-calcifications.

La glande mammaire

Le sein est composé de trois entités anatomiques : la peau, la glande mammaire et les tissus adipeux sous-cutanés et rétromammaire.

La glande mammaire est encore appelée matrice conjonctivo-graisseuse. Le tissu conjonctif qui en assure le soutien est perforé en tout sens tel une éponge. A l'intérieur de la matrice conjonctive se développent les systèmes vasculaire, lymphatique et glandulaire. Le système glandulaire, à fonction de lactation, se compose de lobules (qui sécrètent le lait en période de lactation) s'ouvrant sur des canaux galactophoriques (qui drainent le lait vers le mamelon). Comme tous les organes creux, l'ensemble du système excréteur (lobules et canaux galactophoriques) est tapissé de *tissu épithélial*.

Le cancer du sein

La définition d'une normalité de la glande mammaire se heurte à plusieurs difficultés d'ordre théorique et histophysiologique. Tout au long de la vie génitale, la glande mammaire va subir de perpétuels remaniements sous les influences hormonales et auxquels des modifications cellulaires sont liées. Certaines évolutions sont irréversibles (celles apparaissant à la puberté ou à la ménaupause), d'autres sont temporaires (pendant le cycle menstruel, la grossesse ou l'allaitement).

Une très grande majorité des cancers du sein se développent à partir du tissu épithélial. Ils correspondent à un développement anarchique des cellules composant ce tissu. Les tumeurs malignes développées à partir du tissu conjonctif sont beaucoup plus rares. Lorsque les cellules malignes restent localisées dans le système excréteur, on parle de cancer *in situ*, qui se situe à la frontière du processus cancéreux et dont l'évolution est impossible à prédire. Lorsque les cellules malignes envahissent le tissu conjonctif voisin, on parle alors de *cancer invasif*.

Le taux de gravité d'un cancer est très fortement lié à la dissémination métastasique. Si les cellules malignes restent localisées, la chirurgie ou la radiothérapie permettent d'obtenir des taux de guérison élevés. Dans le cas contraire, le taux de mortalité est plus important et les traitements plus agressifs. Une tumeur devient généralement cliniquement décelable après plus plus de dix ans et la dissémination métastasique, rapide dans le cas du cancer du sein, peut intervenir avant que la tumeur ait atteint ce seuil de détectabilité. Cependant, plus la tumeur est détectée précocement, plus la probalité d'apparition de métastases est faible et plus les chances de guérision sont grandes (le taux de survie se situe entre 90 et 98% pour une détection des tumeurs infracentimétriques).

Toutes les dégénérescences des tissus mammaires ne débouchent pas systématiquement sur un processus cancéreux. Ainsi, 80% des nodules détectés cliniquement sont bénins. Cependant un suivi particulier de leur évolution est nécessaire.

Les différents modes de dépistage

Si la biologie a permis de mieux comprendre les étapes initiales de la cancérisation, les causes du dérèglement cellulaire sont encore dans leur ensemble inconnues. Des études statistiques ont cependant permis de mettre en évidence certains facteurs de risque qui sont : l'âge, le sexe (1% des cancers du sein sont trouvés chez les hommes), les antécédents familiaux (et particulièrement si la mère ou une soeur est atteinte du cancer du sein). D'autres facteurs tels que l'alimentation, le faible nombre de grossesses ou la première grossesse après 30 ans et une longue activité menstruelle (règles précoces ou ménaupause tardive) sont aujourd'hui très controversés. Ces facteurs de risque ne peuvent permettre de distinguer une population à risque ou d'envisager des programmes de prévention. L'âge et l'hérédité sont cependant suffisamment importants pour qu'il puissent être pris en compte dans un processus de dépistage ou pour moduler un processus de surveillance.

Actuellement, 80% des tuméfactions mammaires sont détectées par la patiente elle-même (douleur, palpation) [88]. Ceci met en évidence la déficience des autres modes de dépistage. De plus, dans le cas où le patient est à l'origine du dépistage, le stade de la maladie est alors avancé (dans 60% des cas, la tumeur fait plus de 3 cm). La palpation par le patient ne peut donc pas être considéré comme une méthode de dépistage.

La technique de diagnostic la plus précise est sans conteste l'*histologie*. Cette analyse servira de sucroît à orienter la thérapeutique. Pour cela, on effectue une biopsie, geste chirurgical pouvant s'avérer traumatisant sur les plans physique et psychologique pour le patient et de plus coûteux. On cherche donc à limiter son exécution en augmentant la fiabilité des autres techniques.

Les signes cliniques (présence de nodules, écoulement mammelonnaire, aspect anormal de la peau) peuvent aider au dépistage mais ne peuvent permettre d'établir un diagnostic. On a généralement recours à la mammographie dès la rencontre d'un signe clinique suspect.

La mammographie est aujourd'hui reconnue comme la technique de dépistage la plus performante. Elle autorise la détection de lésions infra-centimétriques et permet donc d'intervenir à un stade très précoce de la maladie. De plus, elle permet également de mettre en évidence les signes secondaires tels que les microcalcifications. Les risques de cancer radio-induit ont de plus été considérablement minimisés grâce à la réduction des doses de rayons X. La mammographie constitue également une aide au diagnostic en permettant au radiologue d'évaluer le degré de malignité des lésions détectées et ainsi d'orienter la thérapeutique (acte chirugical, examens complémentaires ...).

D'autres techniques ont été explorées (la xérographie, autre technique de radiographie mammaire, l'échographie ou encore les techniques de transillumination, de thermographie, ou de densitométrie) ; elles ne peuvent pas être utilisées pour le dépistage. Certaines d'entre elles sont utilisées dans l'étape de diagnostic. De plus grands espoirs sont fondés sur l'utilisation de la résonnance magnétique (IRM) qui se trouve toujours dans une phase exploratoire.

En conclusion, le dépistage ainsi que le diagnostic du cancer du sein reposent actuellement sur l'examen clinique et la mammographie. L'ensemble des autres techniques étant utilisées comme des techniques complémentaires d'aide au diagnostic [32].

6.1.2 Mammographies et opacités du sein

Quelques années après la découverte des rayons X par Roentgen (1895), le chirurgien allemand Salomon signalait déjà la présence de microcalcifications lors de l'examen radiographique d'une masse tumorale mammaire. La mammographie, en tant que technique radiographique spécifique est apparue beaucoup plus tard. Leborgne fut le premier à adapter un système radiologique à l'exploration des tissus mammaires. Les systèmes radiographiques conventionnels ne convenaient en effet pas pour différencier convenablement les tissus mammaires. Par la suite, les travaux d'Egan imposèrent la mammographie comme méthode d'exploration chez les femmes présentant une anomalie mammaire. Enfin, les travaux conjugués du Pr Gros de Strasbourg et d'une équipe de recherche de la CGR aboutirent à l'élaboration du premier appareil spécialisé pour l'examen radiologique du sein. L'innovation la plus importante était l'utilisation d'un tube à rayons X équipé d'une anode en molybdène qui permettait d'obtenir un excellent contraste des différents composants de la glande mammaire.

L'image radiographique du sein

L'image mammographique révèle un contraste relatif entre les trois principaux constituants de la glande mammaire : le tissu conjonctif jeune, le tissu fibreux (évolution du tissu conjonctif jeune), les tissus graisseux. Les tissus graisseux et la matrice conjonctivo-fibreuse sont à l'opposé quant à l'absorption des rayons X. Il devient dès lors très aisé de les distinguer sur la radiographie (voir figure 6.1). Le tissu épithélial ayant un coefficient d'absorption proche de celui du tissu conjonctif n'est pas perceptible sur les radiographies.

De la même manière qu'il est délicat de parler de normalité pour la glande mammaire, il est difficile de définir une image mammographique normale. On parlera plutôt de seins à l'aspect différencié, graisseux, nodulaire ... Pour simplifier, nous dégagerons à titre indicatif trois types de seins : graisseux (ou clair) souvent parsemé de densités linéaires correspondant à des reliquats de tissu conjonctif, dense (tissu conjonctif intact) et mixte (aspect intermédiaire). Généralement, un sein pré-ménauposique est un sein dense dont l'interprétation est plus difficile alors qu'un sein post-ménauposique est souvent clair (évolution vers un sein graisseux). Ces schémas ne sont cependant pas totalement fiables. Les cas où les rôles sont inversés sont fréquents. De plus, au cours du cycle menstruel, ou pendant la grossesse et l'allaitement, le contenu en eau de la glande mammaire varie. Or, l'image radiologique est très sensible à cette variation : la radiographie correspondante à un sein à forte charge hydrique est plus délicate à analyser (image moins contrastée, sein plus dense).

Une image mammographique normale se définit en fait comme un cliché ne contenant aucune structure anormale [36]. Le radiologue va donc chercher et analyser des *signes* *radiologiques* traduisant des lésions de la glande mammaire.

Lors d'un examen radiologique en vue d'un diagnostic, le radiologue effectue plusieurs clichés du même sein sous différentes incidences. Ceci pour plusieurs raisons. Chaque incidence privilégiant une zone particulière de la glande mammaire, plusieurs clichés réalisés sous différentes incidences permettront au radiologue d'obtenir une bonne vision de l'ensemble du sein. D'autres part, la projection et la superposition des structures volumiques du sein sur une surface plane fournissent une information biaisée. Ainsi, la superposition de structures fibreuses normales du sein peut donner l'illusion d'un noyau tumoral. Une autre incidence permettra d'affirmer ou d'infirmer la présence d'une tumeur. Enfin, l'utilisation de différentes incidences est indispensable pour localiser une lésion avec précision. Les incidences utilisées sont :

- face : le faisceau est vertical, abordant le sein par le haut.
- profil externe : le faisceau est horizontal abordant le sein par l'extérieur.
- prolongement axillaire : le faisceau est à 45 degrés (bonne visibilité du creux axillaire).
- oblique à 30 degrés : le faisceau aborde le sein par l'extérieur à 30 degrés avec la verticale.

Figure 6.1: Exemple d'image radiographique du sein (sein dense) : les tissus graisseux et la matrice conjonctivo-fibreuse sont à l'opposé quant à l'absorption des rayons X

Les opacités du sein

Une opacité correspond à une plage de *surdensité anormale* (sur l'exemple de la figure 6.1, nous avons indiqué l'opacité par une flèche). Anormale, car les surdensités normales sont nombreuses sur un cliché mammographique... Une sur-densité anormale ne se distingue pas d'une sur-densité normale par un critère précis, mais par une combinaisons de différentes caractéristiques : taille, densité, contour, forme, texture... C'est l'expérience qui permet au radiologue de distinguer une opacité sur une mammographie. Une surdensité sur plusieurs clichés effectués sous plusieurs incidences implique une forte présomption en faveur de l'opacité.

Une opacité traduit une anomalie des tissus conjonctifs ou épithélial. Elle sera donc aisemment visible au niveau d'une zone graisseuse et beaucoup plus difficilement perceptible dans une zone dense de tissu conjonctif.

Toute opacité anormale ne correspond pas forcément à un processus cancéreux. Là encore, ce sont des informations de densité, taille, forme, contour... qui permettent d'orienter le diagnostic vers la malignité ou la bénignité. Par exemple, une opacité stellaire évoque très fortement une tumeur cancéreuse alors qu'une opacité arrondie et homogène est bénigne dans 90% des cas.

Les opacités ne constituent pas le seul signe radiologique en mammographie. La présence de microcalcifications, une rupture architecturale ou une désorganisation fibreuse, une disymétrie de densité entre les deux seins ou encore un épaississement cutané évoquent également un processus pathologique. Enfin, l'analyse précise d'une opacité ne suffit pas toujours à préjuger de sa nature. Il est nécessaire, la plupart du temps, de confronter le résultat avec celui obtenu par un examen clinique ou par l'analyse des autres signes radiologiques.

6.2 Processus de détection automatique des opacités du sein

Lors d'un examen mammographique, le radiologue ne fait, comme on l'a vu que résoudre un problème de vision. Pour ce faire, il dispose d'informations (sa connaissance du problème) et s'aide de son expérience (l'apprentissage qu'il a reçu). C'est à partir de ce constat et des récents développements des techniques de l'analyse d'image, que l'idée d'utiliser la machine pour faciliter le travail du radiologue est née. La recherche menée dans ce sens en est encore actuellement à un stade peu avancé. Pour l'instant, seul le problème de la détection des micro-calcifications a prouvé sa faisabilité [21]. Les résultats plus qu'encourageants obtenus dans ce domaine ont permis d'espérer un aboutissement heureux du problème plus complexe qui est celui des opacités.

6.2.1 Description générale de notre approche

La difficulté de notre problème réside, pour une large part, dans la complexité et la diversité des images et des objets (les opacités) à étudier. Les différents constituants du sein perceptibles sur les clichés mammographiques (graisse, fibres conjonctives et éventuellement lésions) rendent les images particulièrement complexes. De plus, les caractéristiques de ces éléments (en taille, en intensité, en contraste, en forme...) peuvent varier de façon radicale d'une image à l'autre.

Les exemples de la figure 6.2 illustrent ce point important (nous indiquons les signes pathologiques correspondant au dépistage du radiologue par une flèche). Un oeil non expert différencie très difficilement les sur-densités anormales présentes sur les clichés ; leur détection est d'autant plus difficile que la matrice conjonctivo-fibreuse est très développée (cas des seins denses ou mixtes, voir l'exemple “g029fg”). Ces exemples illustrent également la grande variabilité de l'aspect de la glande mammaire : le cliché “g017fd” correspond à un sein clair, le chiché “g029fg” à un sein mixte.

Les clichés sur lesquels nous avons travaillé ont été fournis par le Docteur Godschalk (Paris). Ils ont été effectués sur des sénographes 600T de GE-CGR avec des couples écran/film MinR/OrthoM1. Les images que nous présentons ont été obtenues par numérisation des clichés radiographiques (précision 300 microns, taille des images $600 \times 900 \times 12$ bits). Nous ne nous étendrons pas sur l'étape de numérisation. Ce qui importe, par contre, c'est de disposer d'images de bonne qualité. Cela signifie que la radiographie effectuée par le médecin doit être faite avec beaucoup de soin (bon calibrage du matétiel) et que le numériseur utilisé ne doit pas introduire de distorsion trop importante sur les images. Nous supposerons ces conditions satisfaites. (Signalons que la distribution des niveaux de gris sur les images que nous présentons ici a été modifiée pour mettre en évidence les régions d'intérêt dans la glande.)

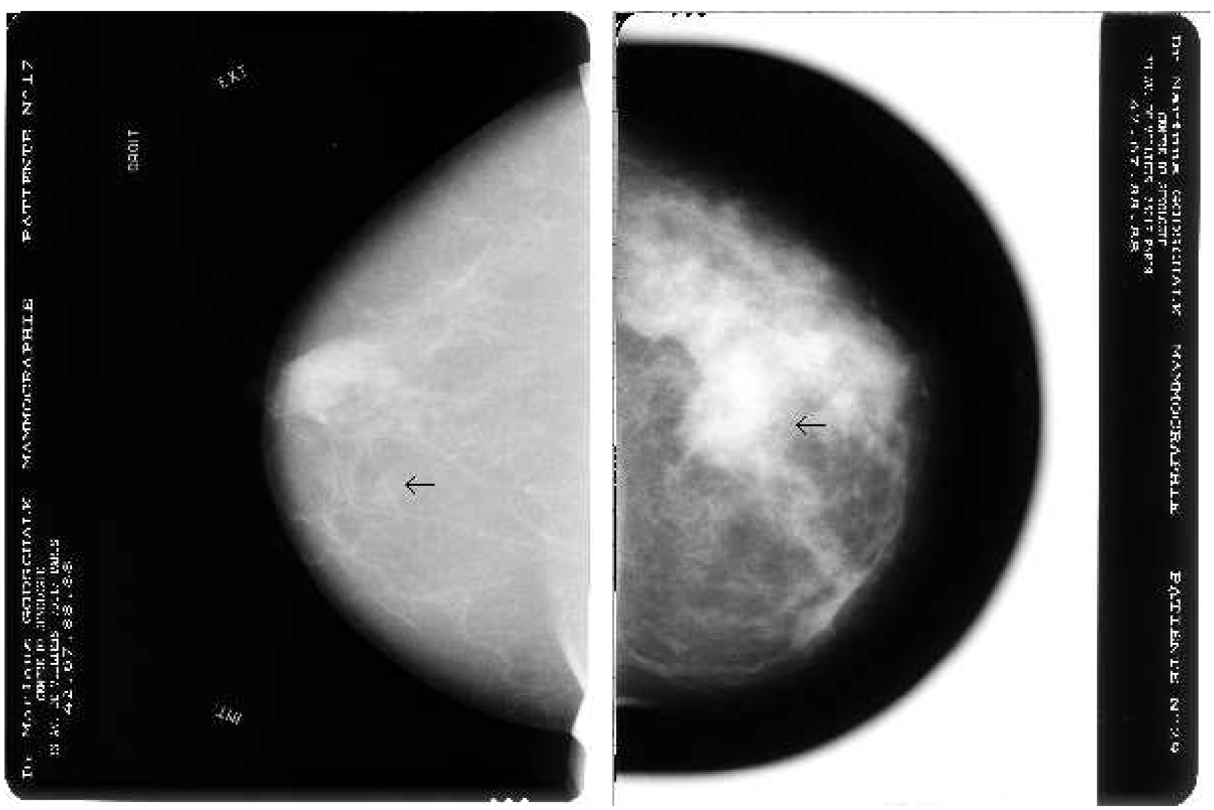


Figure 6.2: Exemples “g017fd” (face sein droit) et “g029fg” (face sein gauche)

Cahier des charges

La détection des opacités du sein sur les mammographies n'est pas une opération mathématique qui permet d'aboutir à un résultat absolument certain. La preuve en est que, dans les cas litigieux, le radiologue a généralement recours à d'autres techniques plus précises (l'histologie notamment) pour valider son diagnostic. Les mammographies sont utilisées pour déceler d'éventuels signes pathologiques et décider de la nécessité d'examens complémentaires plus approfondis.

Le but de notre étude se définit, dans ce cadre, comme une aide au diagnostic médical ; c'est-à-dire que l'on cherche à effectuer automatiquement une lecture de la mammographie, qui sera ensuite comparée à celle du médecin. Notre cahier des charges est donc entièrement déterminé par la grande responsabilité du diagnostic médical : la machine peut éventuellement donner de fausses alertes au médecin mais ne doit pas omettre de signaler une pathologie. Bien entendu, pour que le système de détection soit pertinent, le nombre de fausses alertes ne doit pas être trop important...

Les principales étapes du processus

La structure du système de détection des opacités que nous proposons s'inspire globalement de l'approche du médecin lors de l'examen radiologique. Dans un premier temps, on cherche à détecter et à segmenter les sur-densités du sein. Dans un deuxième temps, on décide, par leur examen (c'est-à-dire en tenant compte de leurs catactéristiques), si oui ou non elles correspondent à des sur-densités anormales.

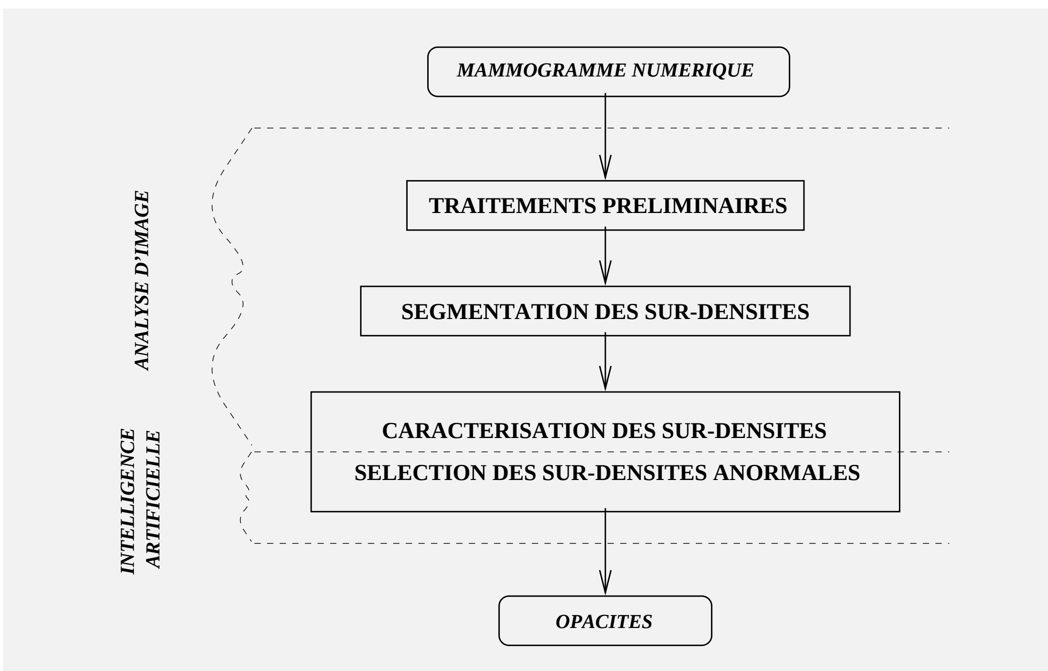


Figure 6.3: Les principales étapes de l'algorithme de détection des opacités du sein

Le premier point est un problème purement d'analyse d'image et plus exactement de segmentation d'image : on cherche à segmenter les sur-densités du sein. Le deuxième point se situe entre les domaines de l'analyse d'image et de l'intelligence artificielle : la caractérisation des sur-densités segmentées entre dans le cadre de l'analyse d'image ; par contre, l'étape de décision proprement dite (qui utilise ces connaissances pour conclure quant à la nature des sur-densités) est du ressort de l'intelligence artificielle.

La figure 6.3 résume les principales étapes de notre algorithme. L'entrée du système correspond soit à un mammogramme numérique comme nous l'avons indiqué soit à un mammogramme classique qui est ensuite numérisé (l'obtention de mammogrammes numériques est une technique qui est aujourd'hui en phase d'élaboration).

Une étape préliminaire vient s'ajouter aux deux principaux points que nous venons d'exposer. Son rôle est d'assurer l'efficacité et la robustesse de notre algorithme. C'est à ce niveau par exemple, que l'on réduit la fenêtre de travail (le glande mammaire peut n'occuper qu'une petite partie du cliché radiographique), que l'on "normalise" les clichés (on compense, par exemple, certaines distorsions pouvant être introduites par l'étape de numérisation [21]). C'est également à ce niveau que des algorithmes de restauration d'image peuvent éventuellement être ajoutés, si, par exemple, les clichés à étudier sont rayés...

6.2.2 Mise en oeuvre

Nous décrivons ici les méthodes adoptées pour résoudre les principaux points de notre algorithme, en insistant sur ceux qui utilisent les notions présentées dans cette thèse, c'est-à-dire principalement sur les étapes de segmentation.

Segmentation de la glande mammaire

Dans une première étape, nous nous proposons d'extraire de l'image la région correspondant à la glande mammaire. A priori cette étape n'est pas indispensable. Un de ses intérêts est de réduire la fenêtre de travail et donc de réduire les temps des traitements qui suivront. Ce point n'est certainement pas négligeable pour l'utilisateur (c'est-à-dire le médecin) qui doit pouvoir disposer du résultat founi par la machine relativement rapidement.

La glande mammaire est une des régions de plus grande taille sur le cliché radiographique. L'algorithme de segmentation de la glande mammaire est donc basé sur l'utilisation de la fonction d'extinction surfacique et de la LPE. Nous donnons les résultats obtenus sur quelques exemples : figure 6.4. L'algorithme n'est sensible ni à la taille de la glande mammaire, ni à la présence ou non d'informations parasites sur le cliché (la présence d'une étiquette blanche par exemple ne modifie pas le comportement de l'algorithme).

Un des grands atouts de cet algorithme est d'être peu paramétrique. En effet, les connaissances nécessaires pour initialiser le système sont : la taille minimale d'une glande mammaire et le niveau de gris moyen de la glande sur la mammographie numérisée. De plus, une estimation grossière de ces paramètres suffit pour que l'algorithme ait un comportement correct ; lorsqu'on modifie les conditions de numérisation notamment, ces paramètres n'ont pas à être réajustés. Cet algorithme a été testé sur une base d'une centaine d'images. Dans chacun des cas, le résultat obtenu était satisfaisant.

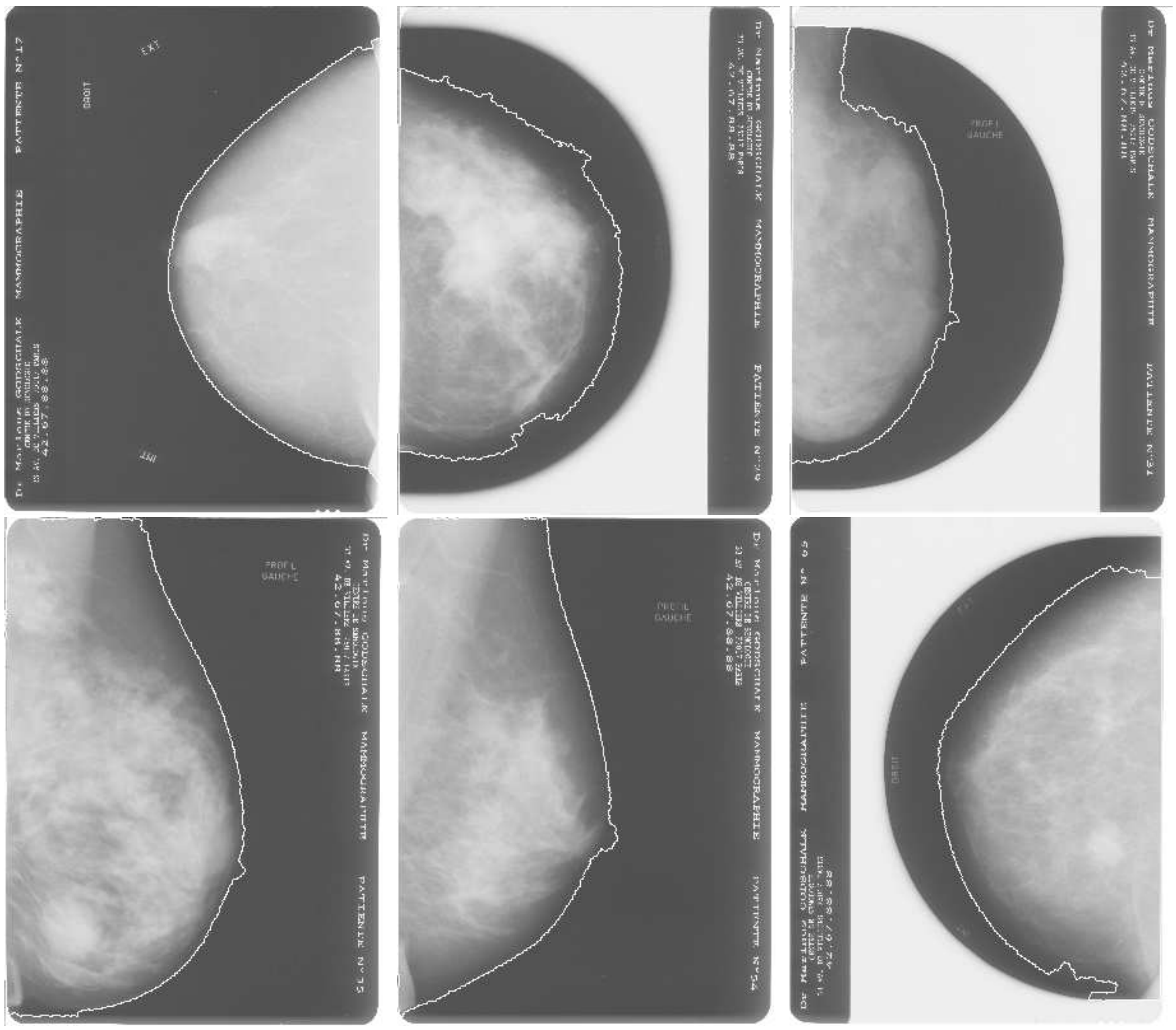


Figure 6.4: Segmentation de la glande mammaire en utilisant la fonction d'extinction surfacique

Segmentation des sur-densités

L'étape suivante consiste à extraire les régions d'intérêt dans la glande mammaire : les sur-densités. Nous ne parlons pas encore de sur-densité anormale car cette distinction ne sera effectuée que dans une étape suivante. Ici, notre but est de segmenter correctement toutes les sur-densités présentes dans la glande mammaire, quelles soient pathologiques ou non, et ceci quelque soit leur taille ou leur forme...

Sur les mammogrammes numérisés, une sur-densité correspond à une région à *fort* contraste. Ce terme est assez peu précis mais tout à fait caractéristique de la réalité. En effet, les sur-densités d'intérêt peuvent avoir sur le cliché un contraste d'une valeur très faible ou très grande selon leur nature, la nature du sein (dense ou clair), leur position dans l'espace... Malgré cela, le contraste (c'est-à-dire la dynamique) reste la caractéristique la plus pertinente pour extraire ces sur-densités. Nous utilisons donc un algorithme de segmentation basé sur la LPE ; les marqueurs des sur-densités sont obtenus en considérant les maxima de plus forte dynamique (dynamique calculée sur l'image originale). Cet algorithme est donc très peu paramétrique : un seul seuil en contraste est nécessaire. Ce seuil est fixé par le contraste minimal des sur-densités que le système doit détecter.

Nous indiquons les résultats obtenus sur les exemples précédents : figures 6.5, 6.6 et 6.7. Un des grands atouts de cet algorithme est de donner une segmentation correcte pour toutes les régions recherchées de l'image : qu'elles soient de petite ou de grande taille, de forme ronde (comme certaines opacités) ou allongée (comme les structures fibreuses), de faible ou fort contraste, homogène ou non, aux contours bien définis ou incertains (même si le résultat reste approximatif lorsqu'une partie de l'information relative au contour manque). La bonne qualité de la segmentation obtenue ne peut que faciliter l'étape suivante de notre algorithme : la sélection parmi les candidats segmentés des sur-densités anormales (ou tout du moins suspectes).

Les exemples "g031pg" et "g029fg" illustrent le comportement de l'algorithme de segmentation dans des cas particulièrement difficiles : les opacités sont enfouies dans la masse fibreuse environnante ; une portion de leur contour manque. L'imprécision sur les contours que l'on extrait est à la mesure de l'imprécision visuelle sur les contours de ces opacités.

On le voit sur ces exemples, on segmente un grand nombre de structures non pathologiques (des structures fibreuses notamment) et ce nombre est d'autant plus important que le sein est dense. Ceci est dû au fait que nous n'utilisons que l'information de contraste pour sélectionner les régions devant être segmentées. Une autre solution aurait pu consister à sélectionner plus sévèrement ces régions en introduisant des connaissances supplémentaires (prendre en compte la forme des régions, par exemple, peut permettre d'éliminer les marqueurs des structures fibreuses). Nous avons préféré réaliser ce tri dans une étape suivante, de manière à séparer très nettement les étapes de segmentation et de sélection.

Nous avons testé cet algorithme sur une base de 24 images. Dans tous les cas, les sur-densités suspectes sont extraites et correctement segmentées (les contours ne sont médiocres que dans des cas particulièrement difficiles). Enfin, le nombre de sur-densités non suspectes extraites est fonction de la texture du sein (ce nombre peut être très important pour les seins denses et est la plupart du temps très faible pour les seins clairs).

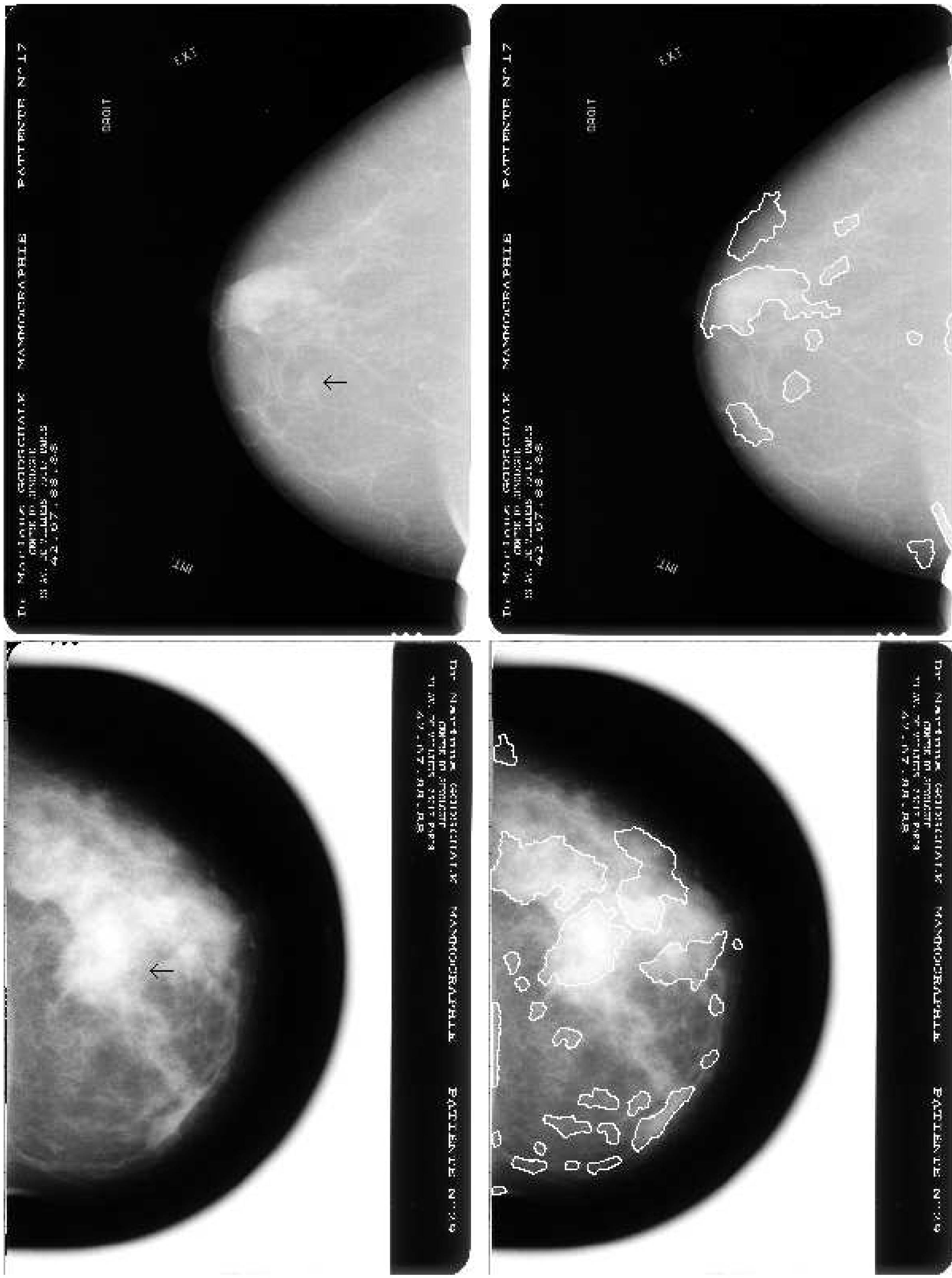


Figure 6.5: Exemples “g017fd” et “g029fg” : segmentation des sur-densités en utilisant la dynamique (à gauche : image originale - à droite : résultat de la segmentation)

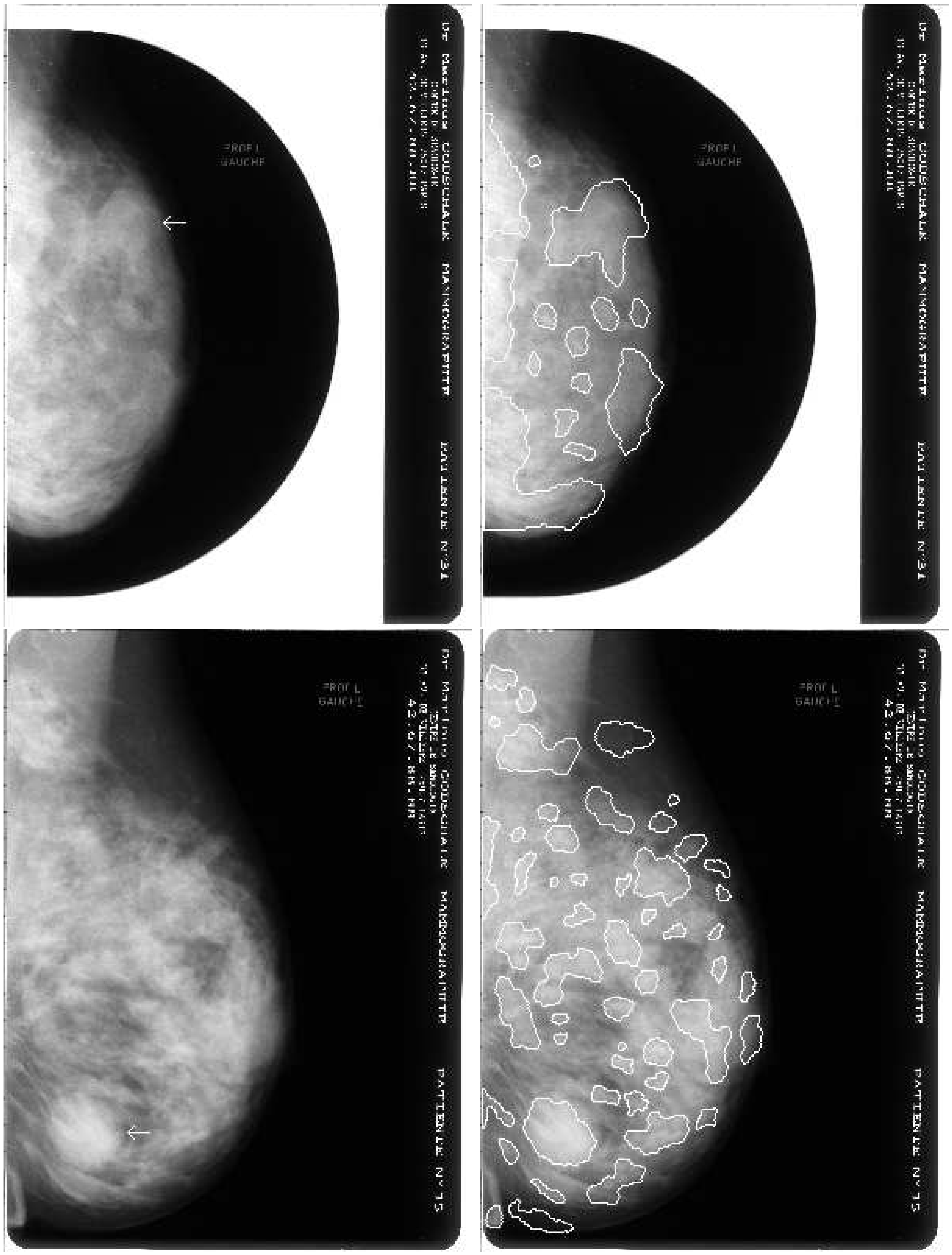


Figure 6.6: Exemples “g031pg” et “g035pg” : segmentation des sur-densités en utilisant la dynamique (à gauche : image originale - à droite : résultat de la segmentation)

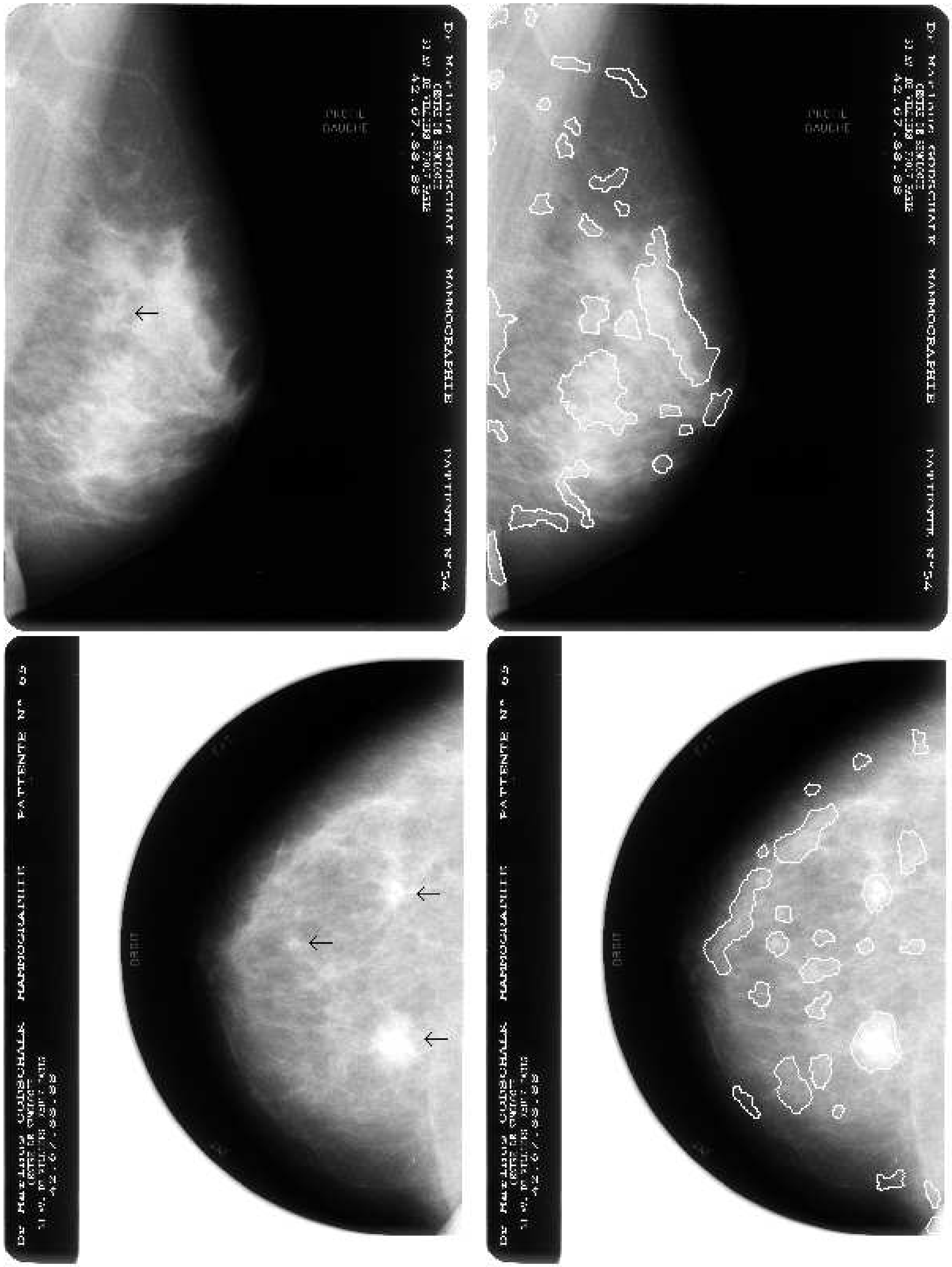


Figure 6.7: Exemples "g054pg" et "g065fd" : segmentation des sur-densités en utilisant la dynamique (à gauche : image originale - à droite : résultat de la segmentation)

Sélection des sur-densités anormales

Une fois la segmentation effectuée, nous disposons des contours des régions à haute densité sur l'image. Parmi cet ensemble de candidats, il s'agit maintenant de sélectionner ceux correspondant à des signes radiologiques. Pour ce faire, nous procédons de la façon suivante : on établit une *carte d'indentité* des candidats (c'est-à-dire des régions segmentées) et une carte d'identité des sur-densités anormales (ensemble de caractéristiques permettant de conclure à une pathologie). La confrontation de ces deux modèles permet ensuite de conclure, pour chaque candidat, si oui ou non il correspond à une lésion.

Ce point est certainement le plus délicat de notre algorithme. En effet, les indices utilisés par le radiologue pour conclure quant à la nature d'une sur-densité sont très nombreux et de nature très variables : la taille, le contraste, la texture, la nature du contour (uniforme ou non)... toutes ces données étant confrontées entre elles (c'est-à-dire qu'il faut généralement plus d'un indice positif pour conclure à une pathologie), ainsi qu'à l'aspect général de la glande (selon le contexte, un indice prend plus ou moins d'importance). Ainsi, on ne dispose pas d'un unique modèle de sur-densité anormale mais de plusieurs modèles plus ou moins fiables, c'est-à-dire auxquels on peut attribuer une probabilité. Par exemple, une petite sur-densité ronde, à l'aspect étoilée peut correspondre à une pathologie mais également à une intersection de structures fibreuses vue sous un certain angle... Pour conclure, il faut disposer d'autres informations : par exemple, la présence d'un halo sombre autour de la région suspecte permet de renforcer l'hypothèse de la pathologie ; on peut également utiliser une autre mammographie, prise sous une autre incidence, pour conclure...

Le système utilisé actuellement est très primaire et nécessite d'être perfectionné : nous avons élaboré quelques modèles des pathologies relativement simples qui sont ensuite utilisés comme référence pour la décision. Les caractéristiques principales des régions qui sont prises en compte sont : la forme, le contraste, la taille, la texture, le niveau de gris moyen (comparé à celui du fond de l'image en son voisinage), l'uniformité (de la région et de son contour).

Aujourd'hui, les paramètres d'initialisation du système de décision ainsi que les règles de décision elles-mêmes sont fixés manuellement. Etant donné la diversité et la complexité des objets à reconnaître, il est d'ores et déjà évident que ce système devra évoluer, dans le futur, vers un système basé sur l'apprentissage.

Nous donnons les résultats obtenus sur nos exemples figures 6.8, 6.9 et 6.10. Les vrais positifs (VP), c'est-à-dire lésions correctement détectées, sont indiquées en noir. Nous indiquons en blanc, les faux positifs (FP) les fausses alarmes du système. Plus le sein est dense (donc difficilement "lisible") plus le nombre de fausses alarmes est important (voir exemple "g035pg").

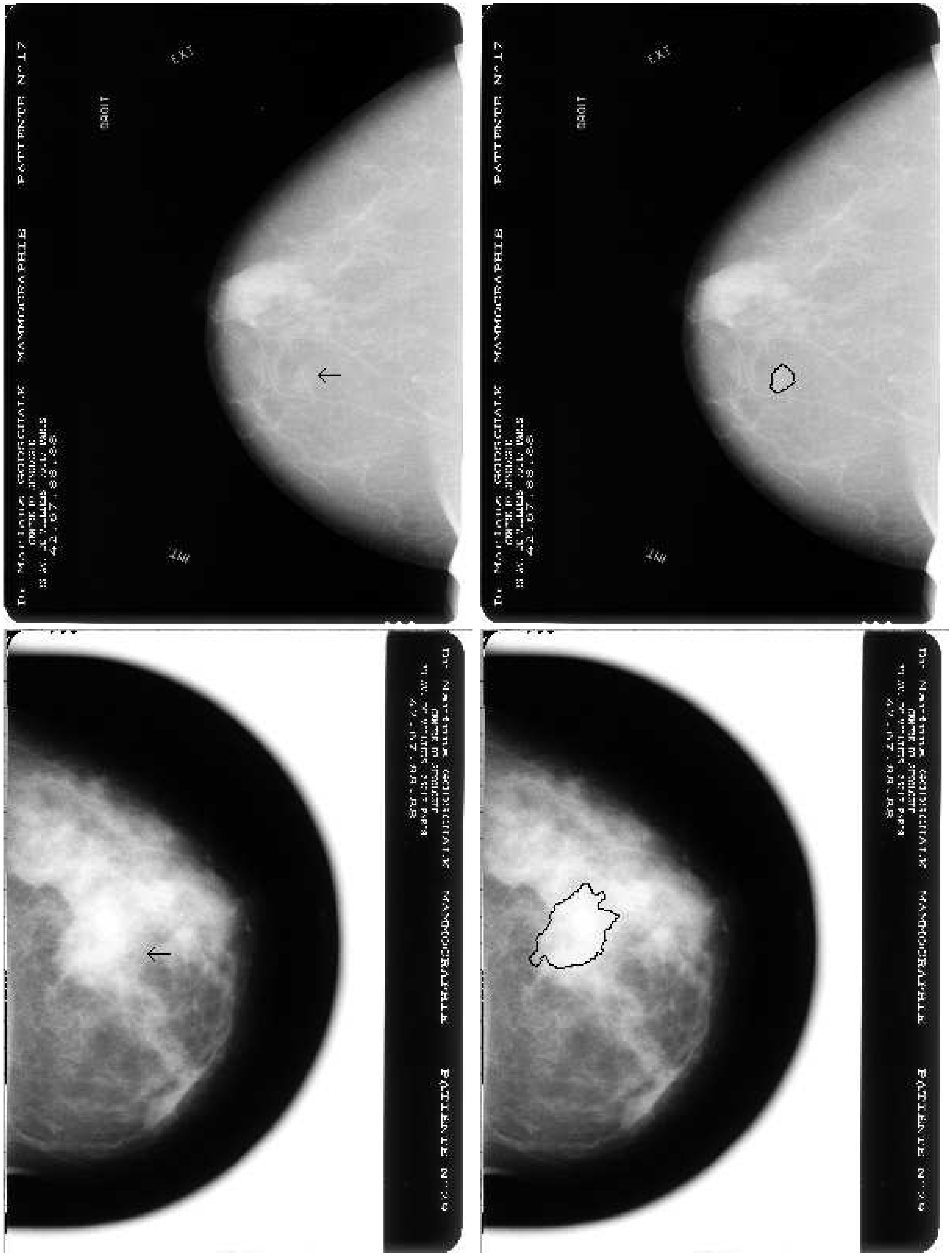


Figure 6.8: Exemples “g017fd” et “g029fg” : sélection des opacités parmi les candidats segmentés (à gauche : diagnostic du radiologue - à droite : résultat de l’algorithme de détection automatique ; VP en noir et FP en blanc)

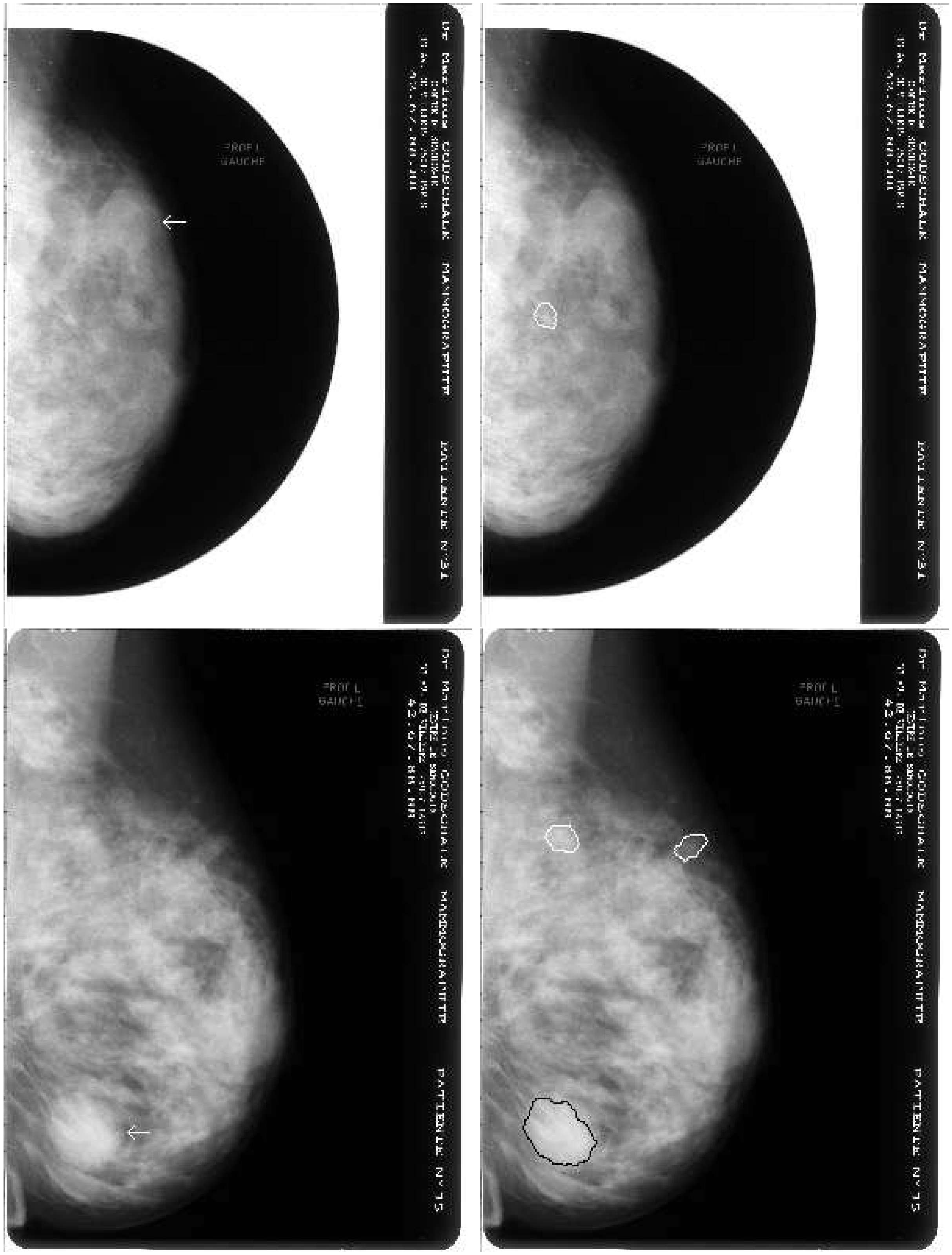


Figure 6.9: Exemples "g031pg" et "g035pg" : sélection des opacités parmi les candidats segmentés (à gauche : diagnostic du radiologue - à droite : résultat de l'algorithme de détection automatique ; VP en noir et FP en blanc)

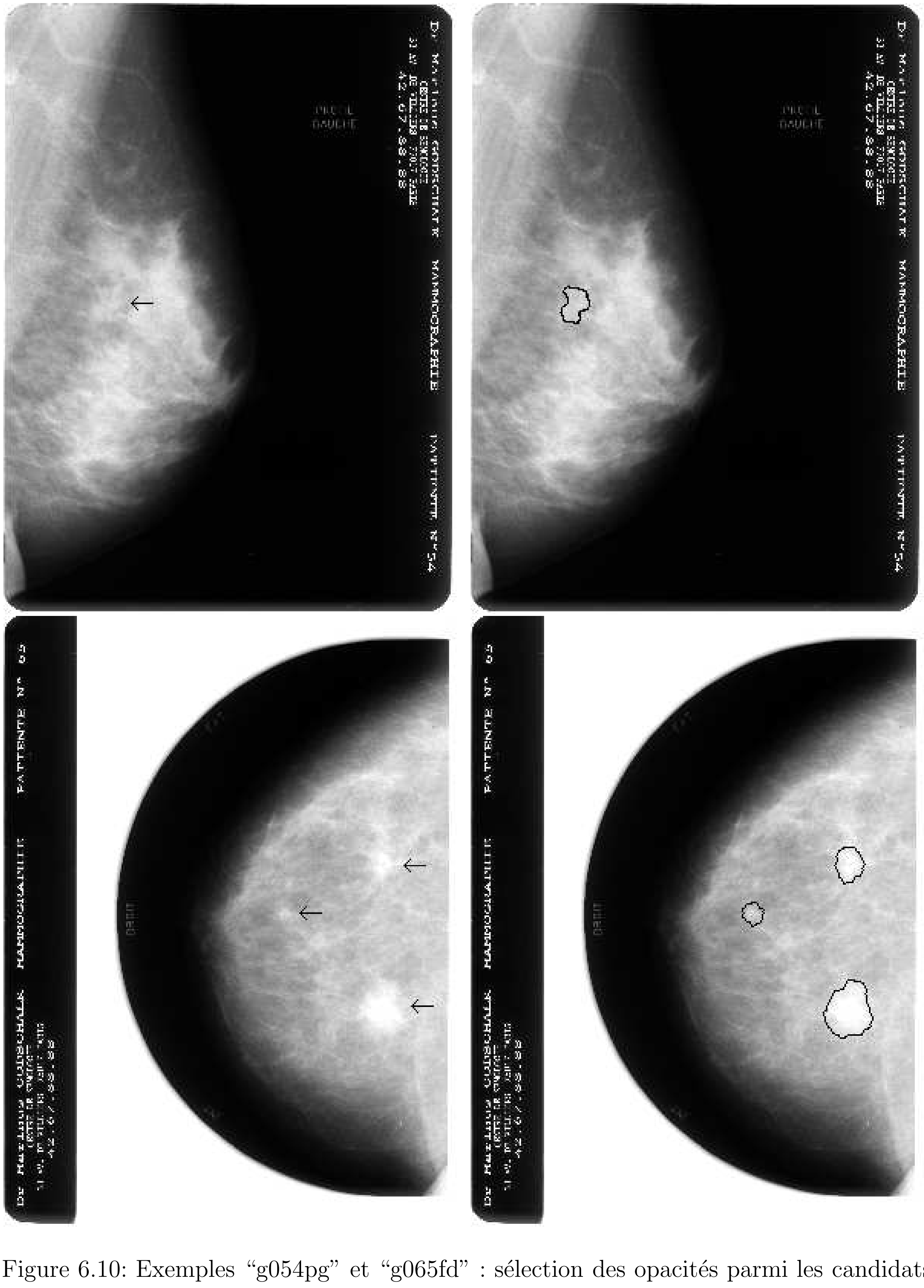


Figure 6.10: Exemples “g054pg” et “g065fd” : sélection des opacités parmi les candidats segmentés (à gauche : diagnostic du radiologue - à droite : résultat de l’algorithme de détection automatique ; VP en noir et FP en blanc)

6.3 Résultats et conclusion

Nous avons mis au point puis expérimenté cet algorithme sur une base de 24 images. Nous résumons les résultats obtenus figure 6.11. Nous appelons :

- *Vrais Positifs (VP)* les lésions correctement détectées par le système
- *Faux Négatifs (FN)* les lésions non détectées par le système
- *Faux Positifs (FP)* les fausses alarmes du système (régions retenues mais ne correspondant pas à des lésions)

On estime la qualité de l'algorithme selon sa sensibilité (nombre de lésions détectées divisé par le nombre de lésions devant être détectées : $\frac{VP}{(VP+FN)}$) et selon le nombre de Faux positifs par image.

Nb d'images	Nb d'opacités	VP	FN	FP	Sensibilité	Nb FP / image
24	30	22	8	10	73,5%	0,33

Figure 6.11: Performances de l'algorithme de détection des sur-densités anormales du sein sur une base de 24 images

Bien évidemment, il s'agit, dans cette application, d'atteindre une haute sensibilité sans que le nombre de faux positifs par image soit trop important. Ici, le nombre de faux positifs par image est assez élevé et nécessite encore d'être diminué. De même, la sensibilité devrait pourvoir être augmentée.

Notons qu'on ne doit accorder à ces résultats qu'une importance relative. En effet, pour valider de tels algorithmes, il est nécessaire d'utiliser une base entièrement différente de la base d'apprentissage, ce qui n'est pas le cas ici. Une étape importante dans notre travail consiste à tester notre algorithme sur un nombre beaucoup plus important d'images. Ceci est actuellement en cours de réalisation. Néammoins ces résultats sont très encourageants et prouvent clairement la faisabilité de la résolution de notre problème.

L'étude menée pour la détection automatique des opacités du sein n'a pas encore atteint son point final. Cependant, des étapes importantes ont été franchies dans ce domaine jusqu'ici inexploré. Tout d'abord, cette étude a permis de montrer la faisabilité de l'application. Ensuite, les résultats obtenus pour la partie segmentation, qui est plus spécifiquement du domaine de l'analyse d'image, sont très encourageants même si certains perfectionnements doivent encore être apportés, notamment pour diminuer la sensibilité de l'algorithme vis à vis des conditions de radiographie et de numérisation (en ce qui concerne la segmentation de la glande mammaire, les résultats obtenus sont satisfaisants pour toutes les images, c'est-à-dire que cette partie de l'algorithme est complètement opérationnelle). Aujourd'hui, l'effort doit principalement porter sur la partie décisionnelle de l'algorithme, c'est-à-dire sur la mise en oeuvre d'un système de décision évolué permettant d'atteindre une meilleure sensibilité et de diminuer le nombre de faux positifs par image. Si l'on dispose aujourd'hui globalement des bons critères à prendre en compte pour décider si un candidat correspond ou non à une opacité, il reste encore à mettre en oeuvre la structure de décision plus évoluée que celle utiliée aujourd'hui (faisant appel notamment aux techniques de l'intelligence artificielle) et capable de gérer ces critères.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Lorsqu'on cherche à résoudre un problème d'analyse d'images, la morphologie mathématique se présente comme une boîte à outils bien fournie et qui ne cesse de s'enrichir au fur et à mesure que ses utilisateurs explorent des domaines nouveaux. Au terme de cette présentation, il semble utile de situer l'apport de nos “outils” à l'intérieur de la grande boîte des transformations morphologiques.

7.1 Apport de cette thèse

- **Le filtrage d'image par décomposition morphologique**

Ce premier point abordé en début de travail prend une place tout à fait particulière parmi les transformations morphologiques. Ici, on n'opère pas directement sur l'image qui est d'abord décomposée. L'information présente sur l'image est ainsi hiérarchisée. L'ensemble des traitements effectués peut, par ce biais, être adapté à chaque niveau hiérarchique. Dans le domaine où nous l'avons exploré de manière approfondie (l'extraction de structures présentant une certaine caractéristique morphologique), cette approche donne des résultats très satisfaisants. Un point négatif cependant semble difficile à contourner : les temps très importants de calcul. De ce fait, on peut difficilement envisager d'utiliser cette transformation pour des applications développées sur des systèmes non dédiés.

- **L'arasement volumique**

Nous classons à part cette transformation que nous avons introduite “dans la foulée”, mais qui a son importance dans la boîte à outils des transformations morphologiques. Elle vient directement compléter la panoplie des filtres morphologiques agissant sur des critères de taille ou de contraste. La méthode de calcul efficace que nous avons proposée permet, de plus, de ranger cette transformation parmi les plus rapides de la morphologie mathématique.

- **Les fonctions d'extinction numériques**

La définition et l'étude des fonctions d'extinction a constitué la plus grande partie de notre travail. Elles peuvent être classées dans la boîte à outils morphologiques comme des outils de seconde génération, au même niveau que la dynamique, puisqu'elles se définissent à partir de transformations déjà existantes.

Les fonctions d'extinction introduisent une méthode générale permettant de valuer les extrema d'une image numérique selon des caractéristiques des régions qu'ils marquent dans l'image : on mesure, pour chaque région de l'image, sa persistence lorsqu'on applique des transformations morphologiques de taille croissante. Cette méthode s'applique à n'importe quelle famille de transformations connexes ; ce sont les considérations algorithmiques qui réduisent aujourd'hui le nombre d'opérateurs utilisés dans la pratique. Par contre, l'adaptation de cette approche au cas des transformations non connexes est un problème plus délicat dont la résolution ne trouve, a priori, pas de solution simple. C'est pour cette raison que nous ne l'avons pas abordée.

La dynamique, la dynamique symétrique, les fonctions d'extinction surfaciques et volumiques se révèlent être des transformations tout-à-fait complémentaires. Elles introduisent naturellement une hiérarchisation des régions de l'image (selon leur contraste, leur taille ou leur volume) et sont de ce fait, très utiles pour tous les problèmes de marquage de régions tels qu'ils peuvent se poser dans les applications de segmentation. Par rapport aux méthodes classiques de filtrage, les fonctions d'extinction facilitent grandement la tâche de l'opérateur.

Il apparaît de manière évidente que les potentialités des fonctions d'extinction sont très prometteuses dès lors que l'on dispose d'algorithmes de calcul efficaces. Or, les algorithmes que nous avons proposés sont de ce point de vue très intéressants : calculer la fonction d'extinction surfacique des minima d'une image par exemple est, en termes de temps de traitements, équivalent au calcul d'une fermeture surfacique. Par contre, l'information contenue dans la fonction d'extinction surfacique (et dans l'arbre de fusion des minima qui s'en déduit) est aussi riche que celle que l'on obtiendrait en calculant n fermetures surfaciques de taille croissante... (Notons d'ailleurs à ce propos que de très récents développements hardware permettent aujourd'hui de réaliser les algorithmes de "type" LPE en des temps records sur les architectures spécialisées.) Par contre, adapter ces algorithmes à d'autres fonctions d'extinction (celles, par exemple, associées aux ouvertures par reconstruction classiques, définies à partir d'éléments structurants) est un problème plus délicat. Ce point est d'importance car il limite les fonctions d'extinction utilisées en pratique. Par contre, il présente l'intérêt de situer d'emblée la direction dans laquelle doivent être portés les efforts...

- **Arbres de fusion des extrema de l'image**

Les arbres de fusion des extrema de l'image qui se déduisent des fonctions d'extinction se sont également révélés être de grande importance. D'abord, nous avons vu que l'information qu'ils contiennent est aussi riche que celle qu'on extrait en calculant des familles croissantes de filtres morphologiques. De ce fait, ils complètent tout-à-fait l'information contenue dans les fonctions d'extinction. Nous avons également montré comment de tels arbres pouvaient être utilisés dans des processus de segmentation hiérarchique. Encore une fois, l'apport final de cet outil est dédié à l'opérateur dont le travail est facilité.

- **Détection automatique des opacités du sein**
  L'architecture générale que nous avons proposée et mise en oeuvre pour la résolution de ce problème semble être tout-à-fait pertinente. Les recherches dans ce domaine sont aujourd'hui encore assez peu avancées, si l'on en juge par le faible nombre de publications parues sur ce thème. Néammoins, les résultats que nous avons obtenus (mêmes s'ils restent encore à les confirmer sur une base plus représentative d'images) sont encourageant et permettent d'espérer un aboutissement heureux de cette étude.

7.2 Extensions et suites possibles de ce travail

La segmentation est sans doute la tâche qui, en analyse d'image, mobilise le plus d'efforts. Dans le même temps, elle constitue certainement une des sources les plus fécondes pour la mise en oeuvre de nouvelles techniques. La notion de fonction d'extinction est née d'une nécessité de faciliter et de systématiser la mise au point des algorithmes de segmentation. Cette idée nécessite clairement d'être étendue : pourquoi, en effet, se limiter à des informations de type contraste, taille ou volume ? D'autres caractéristiques se révèlent être, d'expérience, de première importance dans bon nombre d'applications : la forme, la texture, la position dans l'espace...

De ce point de vue, l'algorithme de calcul des valeurs d'extinction que nous avons proposé peut certainement être le point de départ pour l'introduction de nouveaux outils. En effet, les valeurs d'extinctions que nous avons introduites ne sont rien d'autres que des mesures sur les bassins versants de l'image, associées à une vision hiérarchique de ces bassins versants qui fusionnent. Pourquoi ne pas adapter ce principe à d'autres mesures associées à d'autres hiérarchies ?

Le second point qu'il nous semble important d'étudier plus en avant est celui du choix de la bonne structure à utiliser pour stocker l'ensemble de ces informations. Nous ne pensons pas que les structures arborescentes telles que nous les avons présentées soient bien adaptées à des évolutions futures. Notamment, il semble tout-à-fait pertinent (à partir d'un processus de segmentation hiérarchique tel que celui que nous avons évoqué au chapitre 4) de situer une évolution possible de ce travail vers un mode de représentation hiérarchique et simplifié de l'image ou plus exactement de l'information qu'elle contient. Dans une telle perspective une structure plus ouverte constitue certainement un choix plus judicieux : nous pensons notamment aux graphes proposés par L. Vincent. Adapter l'ensemble de nos algorithmes à une structure de ce type ne pose a priori pas de problème majeur. Leur utilisation dans un contexte de segmentation interactive a d'ailleurs déjà été l'objet d'une étude approfondie effectuée par F. Meyer [60].

Bien entendu cette liste est non exhaustive et bon nombre d'extensions supplémentaires peuvent certainement être imaginées...

Annexe A

Notations

Ensembles et fonctions

E	Compact de $\mathbf{Z}^2$
$\mathcal{F}$	Ensemble des fonctions de E dans $\mathbf{Z}$
X	Elément de E
f	Elément de $\mathcal{F}$
$\mathcal{C}(X)$	Ensemble des composantes connexes de X
$X_s^+(f)$	Seuil de f au niveau s : $X_s^+(f) = \{x \in E \mid f(x) \geq s\}$
$X_s^-(f)$	Seuil de f au niveau s : $X_s^-(f) = \{x \in E \mid f(x) \leq s\}$
$\mathcal{M}ax(f)$	Ensembles des maxima régionaux de f
$\mathcal{M}in(f)$	Ensembles des minima régionaux de f
$\mathcal{E}xtr(f)$	Ensembles des extrema régionaux de f
$\mathcal{P}lt(f)$	Ensemble des plateaux de f

Logique

$\exists\ (!)\ x, ...$	il existe (un unique) x tel que ...
$\forall x, ...$	pour tout x, ...
$x \in X$	x élément de X
$X \subset Y$	X est un sous-ensemble de Y
X^c	Ensemble complémentaire de X
$X \setminus Y$	Différence ensembliste : $X \setminus Y = X \cap Y^c$
$X \triangle Y$	différence symétrique : $X \triangle Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y)$
$\wedge, \vee$	inf et sup
λB	homothétique de B de rapport λ
$f \leq g$	$\forall x \in E,\ f(x) \leq g(x)$

Transformations morphologiques

B	Elément structurant (E.S.)
$\delta_\lambda\,(\delta_{\lambda B})$	Dilatation de taille λ (employant B comme E.S.)
$\epsilon_\lambda\,(\epsilon_{\lambda B})$	Erosion de taille λ (employant B comme E.S.)

γ_λ	Ouverture de taille λ
φ_λ	Fermeture de taille λ
$\delta^n(f,g)$	Dilatation géodésique de taille n de g sous f
$\epsilon^n(f,g)$	Erosion géodésique de taille n de g sur f
$\delta^\infty(f,g)$	Reconstruction de f par dilatation géodésique de g
$\epsilon^\infty(f,g)$	Reconstruction de f par érosion géodésique de g
γ_λ^{rec}	Ouverture par reconstruction
φ_λ^{rec}	Fermeture par reconstruction
$\delta^\infty(f,f-h)$	h-reconstructions : décalage (positif) / reconstruction
$\epsilon^\infty(f,f+h)$	h-reconstructions : décalage (négatif) / reconstruction
C_x	Ouverture connexe pontuelle (binaire)
γ_λ^a	Ouverture surfacique de taille λ
φ_λ^a	Fermeture surfacique de taille λ
a_λ^v	Arasement volumique de taille λ
ψ_λ^{AS}	Filtre (ou Transformation) Alterné(e) Séquentiel(le) de taille λ
$dyn(M)$	Dynamique de M
$dyn^{sym}(M)$	Dynamique symétrique de M
$\mathcal{E}_\psi(M)$	Valeur d'extinction de M par rapport à ψ
$\mathcal{E}_\psi^{sym}(M)$	Valeur d'extinction symétrique de M par rapport à ψ
$\mathcal{F}_\psi^{\mathcal{E}}(f)$	Fonction d'extinction de f par rapport à ψ
$\mathcal{E}^a(M)$	Valeur d'extinction surfacique de M
$\mathcal{E}^v(M)$	Valeur d'extinction volumique de M

Annexe B

Rappels de morphologie mathématique

La morphologie mathématique (MM) correspond à une technique non linéaire de traitement du signal née dans les années 60 des travaux de G. Matheron et J. Serra. Elle correspond initialement à une continuation des travaux de recherche sur la théorie des ensemble de H. Hadwiger [25, 26] et de H. Minkowsky [63, 64]. La plus grande partie de cette théorie a été développée au Centre de Morphologie Mathématique (CMM) de l'Ecole des Mines de Paris.

Depuis lors, la MM a pris une importance considérable, si l'on en juge par les conférences, articles, livres qui la présentent, ainsi que par le nombre croissant de matériels spécialisés, de programmes d'application et de réalisations industrielles qui y font appel et ceci dans tous les domaines où l'analyse d'image est aujourd'hui utilisée.

Ce chapitre n'est qu'une présentation sommaire de certaines notions de la morphologie mathématique qu'il nous parait utile de rappeler dans cette thèse. Les lecteurs qui désireront approfondir certains points pourront notamment se reporter aux ouvrages de référence en ce domaine : les deux livres de J. Serra[81, 82], ceux de G. Matheron [49, 50] et le livre de Coster et Chermant [13].

B.1 Notions élémentaires

Les transformations de la morphologie mathématique agissent sur des ensembles en morphologie binaire et sur des fonctions en morphologie numérique, le résultat d'une transformation étant de même nature que l'objet sur lequel elle s'applique (un ensemble est transformé en un ensemble, une fonction en une fonction). La morphologie binaire est basée sur les opérations booléennes de base sur les ensembles : l'union $\cup$ et l'intersection $\cap$. Dans le cas numérique, les opérations de base sont le *sup* et l'*inf*.

B.1.1 La notion de connexité

La notion de connexité a été formalisée pour l'analyse d'image par G. Matheron et J. Serra [81, 82]. Elle permet notamment d'introduire la notion d'*ouverture connexe ponctuelle* (C_x) :

Définition B.1 (Ouverture connexe ponctuelle) *Une ouverture C_x est appelée ouverture connexe ponctuelle si elle vérifie les trois axiomes suivants :*

$$\forall x \in E, C_x(\{x\}) = \{x\} \tag{B.1}$$
$$\forall A \in E, \forall x \in E, C_x(A) \cap C_y(A) \neq \emptyset \Rightarrow C_x(A) = C_y(A) \tag{B.2}$$
$$\forall A \in E, \forall x \in E, C_x(A) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A \tag{B.3}$$

Autrement dit, l'ensemble $C_x(A)$ est soit la composante connexe A si x appartient à A, soit l'ensemble vide si x n'appartient pas à A.

En discret, on travaille sur une grille ou trame permettant de définir des relations de voisinage entre les pixels (points de la trame) d'une image. Ce graphe (noté G) n'est qu'un ensemble de couples de pixels (soit un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$) , c'est-à-dire :

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}^2, p \text{ voisin de } q \Leftrightarrow (p, q) \in G$$

On suppose toujours qu'un pixel n'est pas son propre voisin et que la relation *est voisin de* est transitive et symétrique. Le voisinage d'un pixel p au sens de la trame est :

$$\forall p \in \mathbb{Z}^2, N_G(p) = \{q \in \mathbb{Z}^2, (p, q) \in G\}$$

Définition B.2 (Chemin) *Un chemin C de longueur $l(C) = n$ et d'extrémités p et q dans la trame G est un (n+1)-uplet $(p_0, p_1, p_2, ..., p_n)$ de pixels tels que :*

$$p_0 = p \textit{ et } p_n = q \tag{B.4}$$
$$\forall i \in [1, n], p_i \in N_G(p_{i-1}) \tag{B.5}$$
$$\tag{B.6}$$

La notion de connexité est introduite à partir de la notion de chemin géodésique :

Définition B.3 (Connexité) *Soit A un ensemble de pixels inclus dans $\mathbb{Z}^2$ et x un pixel de A. La composante connexe de A qui contient x ($C_x(A)$) est l'union des chemins d'origine x inclus dans A.*

Nous verrons que le terme *chemin géodésique* vient du fait que le chemin est astreint à être entièrement inclus dans A.

Définition B.4 (Distance géodésique) *La distance géodésique $d_X(y, x)$ d'un point x à un point y à l'intérieur d'un ensemble X est la longueur du plus court chemin de x à y restant à l'intérieur de X:*

$$d_X(y, x) = \inf \{l(C_{x,y}), C_{x,y} \in X\} \tag{B.7}$$

Cette distance vaut, par définition, $+\infty$ s'il n'existe aucun chemin entre x et y à l'intérieur de X, c'est-à-dire si $x \notin X$ ou si $y \notin X$.

La distance géodésique d'un point x à un ensemble X notée $D(x, X)$ vaut alors :

$$D(x,X) = \inf\{y \in X, d_X(x,y)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

La notion de distance permet d'introduire celle de *fonction distance*, qui à chaque point x d'un ensemble X fait correspondre la distance de ce point au plus proche point du complémentaire de X :

$$f_d(X)(x) = \inf\{d(x,y), y \in X^c\} \tag{B.8}$$

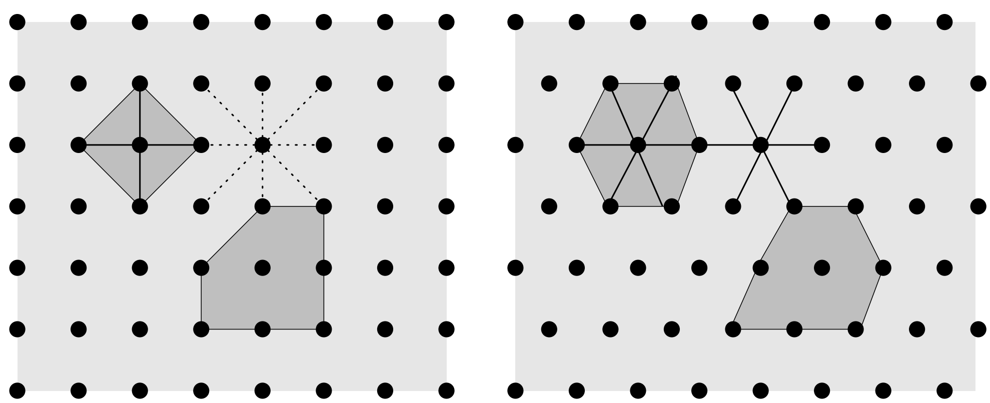


Figure B.1: Trames carrée et hexagonale : la trame hexagonale vaut pour la forme et pour le fond

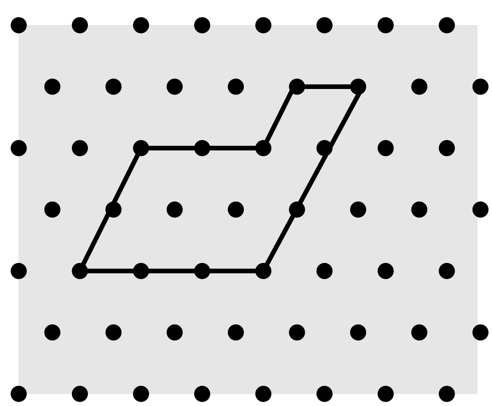


Figure B.2: Sur la trame discrète, il n'y a pas unicité du chemin de longueur minimale entre deux points

Définir une distance et une connexité sur la trame revient donc à définir des relations de voisinage entre les pixels de cette trame. Ainsi, on distingue plusieurs types de connexités : hexagonale (6 voisins sur la trame), carrée (4 ou 8 voisins sur la trame). La trame hexagonale est certainement la plus utilisée par les morphologues car elle possède de bonnes propriétés de symétrie (voir figure B.1): même connexité définie pour la forme et pour le fond (ce qui n'est pas le cas des trames carrées).

B.1.2 Morphologies binaire et numérique

Dans tout ce qui suit ψ désignera une transformation alternativement binaire ou numérique sans qu'il soit fait de distinction. Le contexte permettra alors de déterminer si l'on est dans le cas binaire ou dans le cas numérique (au cas où une ambiguïté subsisterait, nous préciserions de quelle type de transformation il s'agit).

Morphologie binaire Dans le cas binaire, ψ agit sur des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire des ensembles de $\mathbb{R}^2$ ($\psi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$). Dans ce cas la relation d'ordre est l'inclusion.

Morphologie numérique Dans le cas numérique, ψ agit sur des fonctions de R^2 dans R. $\mathcal{F}$ désignera l'ensemble de ces fonctions ($\mathcal{F} = \left\{ f : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R} \right\}$). $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Dans ce cas la relation d'ordre est la suivante :

$$\forall f, g \in \mathcal{F},\ f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq g(x)$$

En pratique, les transformations s'appliquent dans un domaine fini du plan discrèt $\mathbf{Z}^2$, domaine le plus généralement rectangulaire : les images correspondent alors à des tableaux de données. Une image numérique sera à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Une image binaire peut alors être considérée comme une image numérique à valeurs binaires (prenant exclusivement les valeurs 0 ou 1 par exemple : 0 pour le fond et 1 pour la forme).

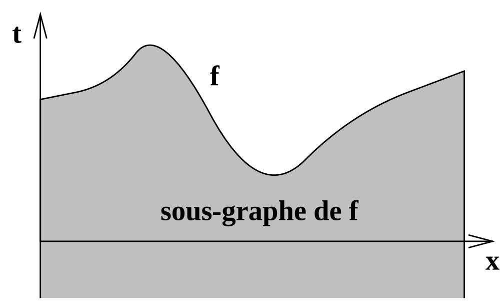


Figure B.3: Sous-graphe d'une image numérique

On définit le *sous-graphe* SG d'une image à niveaux de gris comme la partie de l'espace à trois dimensions située en dessous du graphe de l'image (voir figure B.3). Plus précisément :

$$SG(f) = \{(x, t) \in \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}, t \leq f(x)\}$$

B.1.3 Propriétés de base des transformations morphologiques

Les transformations morphologiques sont dotées de propriétés importantes dont nous rappelons dès à présent les définitions. Ces propriétés de base des opérateurs morphologiques sont celles relatives aux opérations sur les ensembles.

Extensivité ψ sera dite extensive si et seulement si son résultat est plus grand que l'ensemble ou la fonction de départ :

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), X \subseteq \psi(X) \quad ou \quad \forall f \in \mathcal{F}, f \leq \psi(f)$$

Dans le cas contraire ($X \supseteq \psi(X)$ ou bien $f \geq \psi(f)$), ψ sera dite *anti-extensive.*

Un opérateur anti-extensif agit de manière privilégiée sur les grains des images binaires (les structures claires des images numériques). Au contraire, un opérateur extensif traite les pores des images binaires (les structures sombres des images numériques).

Croissance ψ sera dite croissante si et seulement si elle préserve l'ordre :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), X \subseteq Y \Rightarrow \psi(X) \subseteq \psi(Y) \quad ou \quad \forall f, g \in \mathcal{F}, f \leq g \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g)$$

Dans le cas contraire ($X \subseteq Y \Rightarrow \psi(Y) \subseteq \psi(X)$ ou bien $f \leq g \Rightarrow \psi(f) \geq \psi(g)$), ψ sera dite *décroissante.*

Idempotence Une transformation ψ est dite *idempotente* si, appliquer plusieurs fois ψ revient à appliquer ψ une seule fois :

$$\psi \circ \psi = \psi$$

Dualité Enfin, deux transformations ψ_1 et ψ_2 sont *duales* si et seulement si appliquer l'une revient à appliquer l'autre sur le complémentaire de l'ensemble puis à complémenter le résultat final :

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \psi_1(X) = (\psi_2(X^c))^c \quad ou \quad \forall f \in \mathcal{F}, \psi_1(f) = -(\psi_2(-f))$$

Homothopie Une dernière propriété dont il est utile de parler est la conservation (ou la non conservation) de l'homothopie. D'une manière simple, on peut dire que deux ensembles (ou fonctions) sont homothopes si on peut passer de l'un à l'autre par une transformation continue. Une transformation qui préserve l'homothopie ne crée ni de détruit de particule.

B.2 Transformations morphologiques élémentaires

B.2.1 Erosion et dilatation

L'érosion et la dilatation sont les opérateurs de base de la morphologie mathématique. Elles sont à l'origine d'un très grand nombre de transformations plus élaborées (fonction distance, squelette ...). Dans tout ce qui suit, nous nous contenterons d'évoquer ces opérateurs, leurs définitions et propriétés. Les lecteurs désireux de plus d'informations pourront se reporter aux ouvrages de référence en ce domaine [81, 82]. L'ensemble des notations utilisées ici (notations "standard") seront conservées par la suite.

Définition

Considérons un ensemble X et un élément structurant B (ensemble donné dont on définit le *centre*, c'est-à-dire dont on repère un point particulier quelconque). La **dilatation** de X par B (notée $\delta_B(X)$) est l'union des points x de $\mathbb{R}^2$ tels que B_x (B translaté en x) intersecte X :

$$\delta_B(X) = \{x \in \mathbb{R}^2, B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

L'**érosion** $\epsilon_B(X)$ de X par B est l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^2$ tels que B soit entièrement inclus dans X lorsque B est centré en x.

$$\epsilon_B(X) = \{x \in \mathbb{R}^2, B_x \subset X\}$$

Dans le cas numérique, si B est un élément structurant plan, alors dilater une image f par B revient à donner à tout pixel x du domaine E (compact de $\mathbb{R}^2$) la valeur maximale de l'image f dans la fenêtre d'observation définie par B, lorsque B est centré en x :

$$\delta_B(f)(x) = max\{x_k, k \in B\}$$

Et de la même manière pour l'érosion, on a :

$$\epsilon_B(f)(x) = min\{x_k, k \in B\}$$

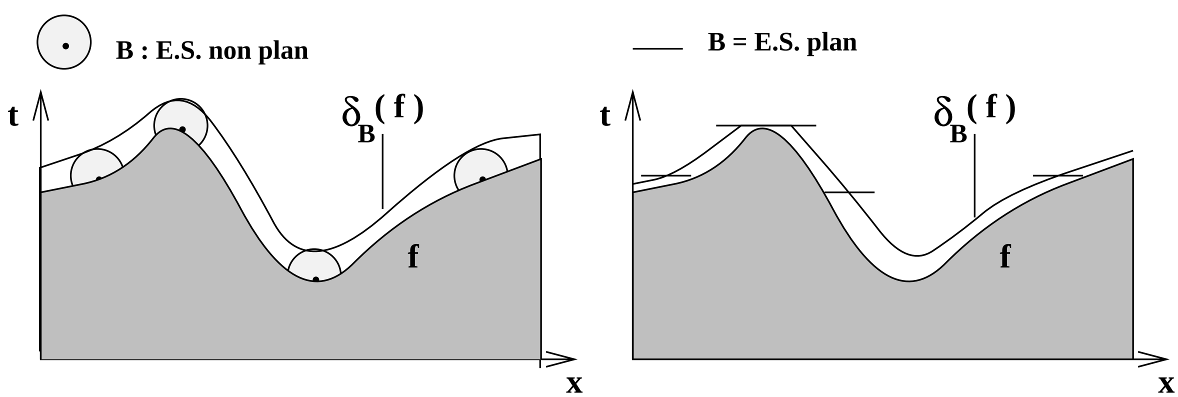


Figure B.4: Dilatation par un des éléments structurants plan et non plan.

Si B est non plan, alors érosion et dilatation numériques doivent être définies par l'addition de Minkowsky.

Il y a beaucoup à dire sur les propriétés de l'érosion et de la dilatation. Nous ne retenons ici que les principales :

- Erosion et dilatation sont des transformations croissantes

- Erosion et dilatation sont deux transformations duales

- Erosion et dilatation ne sont pas idempotentes : la dilatation par la boule de taille n par exemple peut être obtenue par n itérations de dilatations par la boule de taille unitaire. D'une manière générale :

$$\delta_{B_1} \circ \delta_{B_2} = \delta_{\delta_{B_1}(B_2)}$$

- Ces transformations sont irréversibles

Des résidus : les gradients morphologiques

A partir de la dilatation et de l'érosion morphologique, on définit les gradients morphologiques comme des résidus de ces transformations. Le gradient morphologique (symétrique) est défini comme le résidu de la dilatation et de l'érosion :

$$grad(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f)$$

Il est possible de définir le gradient morphologique à partir d'un couple d'éléments structurants quelconque. On définit ainsi le gradient par dilatation et le gradient par érosion en considérant une des deux transformations de taille nulle (c'est-à-dire égale à l'identité) :

$$grad^+(f) = \delta_B(f) - f$$
$$grad^-(f) = f - \epsilon_B(f)$$

Ces gradients non symétriques sont également appelés gradients *internes* et *externes*.

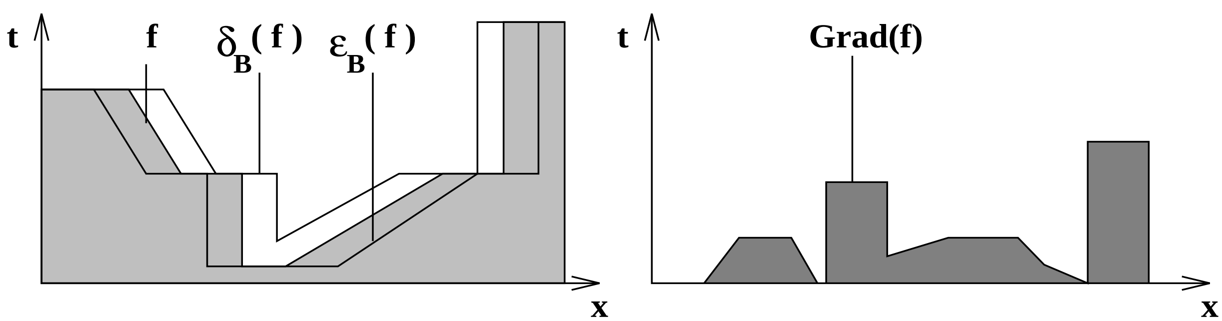


Figure B.5: Gradient morphologique (symétrique) : dilaté - érodé

Les gradients permettent d'extraire les zones de variation d'intensité. Les valeurs crêtes correspondent à des zones de forte transition et coïncident généralement avec les contours des objets. Cette information est très utile pour les problèmes de segmentation d'image.

B.2.2 Ouverture, fermeture, filtres morphologiques

Définition

En morphologie mathématique, une ouverture est une opération croissante, anti-extensive et idempotente. Parmi cette classe de transformations, les ouvertures morphologiques γ_B sont définies à partir de la dilatation et de l'érosion :

$$\gamma_B = \delta_{\check{B}} \circ \epsilon_B$$

On définit la fermeture de manière duale par :

$$\varphi_B = \epsilon_{\breve{B}} \circ \delta_B$$

où $\breve{B}$ est le transposé de B, c'est-à-dire le symétrique de B par rapport à l'origine. Lorsque B est symétrique, on peut écrire : $\gamma_B = \delta_B \circ \epsilon_B$ et $\varphi_B = \epsilon_B \circ \delta_B$.

D'une manière intuitive, l'ouverture fait disparaître les pics d'une image numérique (structures claires) et la fermeture les vallées (structures sombres) et ceci selon un critère de taille et de forme déterminé par l'élément structurant (voir figure B.6). Ces opérateurs, tout comme la dilatation et l'érosion n'ont pas d'inverse. Dans le cas binaire, on remarque aisément que ces transformations ont tendance à lisser les contours des particules, l'ouverture en supprimant les proéminances, la fermeture en comblant les golfes. En outre, l'ouverture peut déconnecter les ensembles, créer plusieurs particules connexes à partir d'une seule. Au contraire la fermeture peut relier deux particules connexes pour n'en faire qu'une. Enfin, l'ouverture et la fermeture ne sont pas des transformations homothopiques.

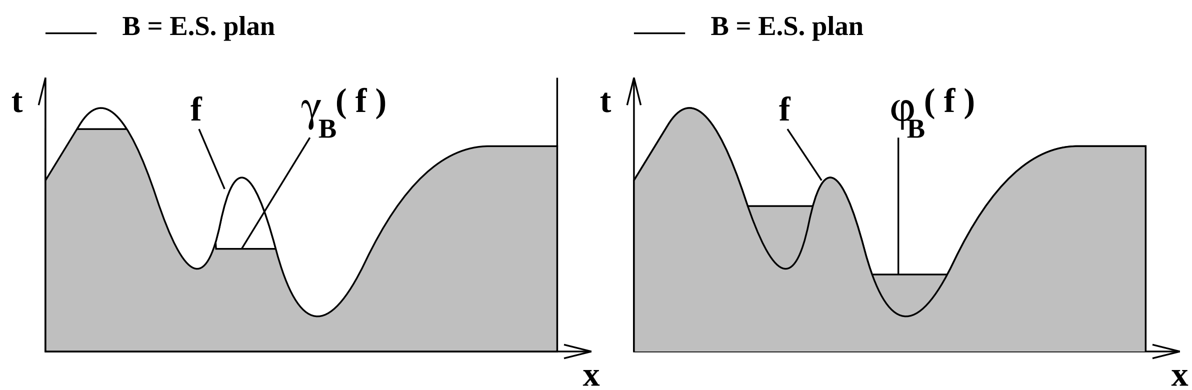


Figure B.6: Ouverture et fermeture morphologiques

Des résidus : les chapeaux haut de forme

On appelle *transformation chapeau haut de forme* (ou *top hat*), le résidu entre l'identité et une ouverture (chapeau haut de forme blanc)

$$TH_n^+(f) = f - \gamma_n(f)$$

ou bien entre une fermeture et l'identité (chapeau haut de forme noir).

$$TH_n^-(f) = \phi_n(f) - f$$

Le chapeau haut de forme blanc permet de détecter ce que l'ouverture a fait disparaitre, c'est-à-dire les pics ou structures claires de l'image originale (voir figure B.7). Le chapeau haut de forme noir détecte, quant à lui, les vallées ou structures sombres de l'image.

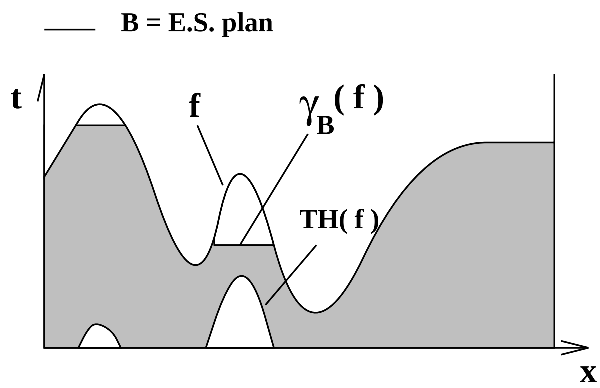


Figure B.7: Chapeau haut de forme blanc

Les filtres morphologiques

Si en traitement du signal classique, on désigne par “filtre” à peu près tous les types de traitements, en morphologie mathématique ce terme a une signification bien précise [82].

Définition B.5 (Filtre morphologique) *Un filtre morphologique est une transformation ψ croissante et idempotente :*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, f \leq f' \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g)) \tag{B.9}$$

$$\forall f \in \mathcal{F}, \psi(f) = \psi(\psi(f)) \tag{B.10}$$

En général, ni une érosion ni une dilatation n’est un filtre morphologique puisque ces opérations ne sont pas idempotentes (sauf lorsque l’élément structurant est réduit à un point, ce qui donne l’identité) . Par contre, les ouvertures et les fermetures sont des filtres morphologiques et, d’une manière générale, les compositions de fermetures et d’ouvertures sont des filtres morphologiques.

L’étude théorique des filtres morphologiques permet d’introduire un certain nombre de transformations, combinaisons d’ouvertures et de fermetures de tailles différentes, associées à des familles d’éléments structurants homogènes ou non. Elles sont particulièrement intéressantes dans tous les problèmes de restauration des images à teintes de gris. Parmi ces transformations, on distingue la classe des filtres alternés dont la principale propriété est d’avoir un comportement symétrique vis-à-vis des structures sombres et claires de l’image.

La théorie des filtres morphologique est assez longue et ne saurait tenir dans ces quelques pages. Nous nous contenterons d’insister sur une notion très importante en morphologie mathématique et qui sert de base à notre travail : la notion de géodésie.

B.3 Transformations géodésiques et reconstruction

L’idée de reconstruction géodésique a fait son apparition en morphologie mathématique en 1976 avec la thèse de J.C. Klein [31] comme l’opération qui consiste à reconstituer les composantes connexes d’un ensemble A lorsque leur intersection avec les composantes connexes d'un second ensemble B est non vide. L'ensemble de référence B est généralement appelé *marqueur* et l'ensemble A *masque géodésique*. L'idée généralisait en quelque sorte la technique classique qui consiste à garder ou à rejeter, indépendamment les unes des autres, les composantes connexes d'un ensemble selon leur mesure (surface, volume, diamétre de feret ...) par exemple.

Aujourd'hui, les transformations les plus évoluées de la morphologie mathématique font presque toutes appel à la notion de géodésie.

Dans tout ce qui suit, nous noterons simplement la dilatation par $\delta(X)$ (au lieu de $\delta_B(X)$).

B.3.1 Dilatation et érosion géodésiques

Géodésie binaire

On définit les transformations géodésiques en considérant uniquement la partie de l'élément structurant à l'intérieur du masque (ensemble connexe ou non).

Définition B.6 (Dilatation géodésique binaire) *La dilatation géodésique de taille n notée $\delta^n(R, X)$ d'un ensemble X inclus dans un masque R est définie par :*

$$\delta^1(R, X) = \delta_1(X) \cap R \qquad \delta^n(R, X) = \underbrace{\delta_1(\delta_1(...\delta_1(X) \cap R) \cap R) \cap R}_{n\ fois}$$

L'érosion géodésique est la transformation duale :

$$\epsilon^n(R, R/X) = R/\delta^n(R, X)$$

dans cette définition, X/Y désigne la différence ensembliste : $\forall X, Y \in E, X/Y = X \cap Y^c$

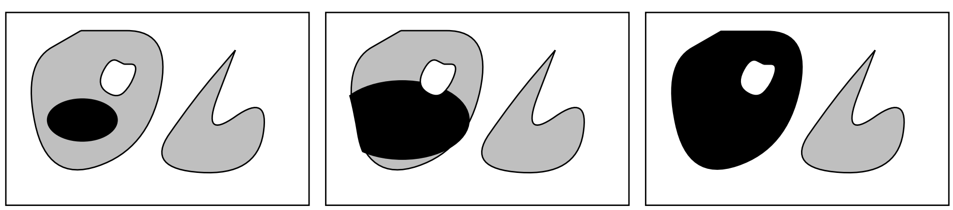


Figure B.8: dilatation géodésique et reconstruction géodésique

Un des premiers intérêts de la dilatation géodésique est de permettre l'opération dite de **reconstruction**. A partir de marqueurs désignant en quelque sorte les objets que l'on désire préserver, une dilatation géodésique de taille infinie (en pratique jusqu'à idempotence) permettra de retrouver les particules marquées dans leur intégralité. En effet, on vérifie aisément la relation :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), X \subset Y \Rightarrow \delta^\infty(Y, X) = Y$$

La notion de reconstruction est un outil fondamental de la morphologie mathématique et a donné naissance à des transformations *évoluées* telles que les méthodes de bouchage de trous, les algorithmes de détection des particules touchant le bord d'un champ, la notion d'érodé ultime et les algorithmes de séparation de particules qui en découlent.

Géodésie numérique

La dilatation géodésique est définie d'une manière similaire dans les cas binaires et numériques. Dans de nombreux cas, le masque géodésique est encore une image binaire. Dans ce cas, les transformations géodésiques sont utilisées pour restreindre la zone de travail. Le masque géodésique peut également correspondre à une image numérique. On définit alors les transformations géodésiques numériques en considérant uniquement la partie du graphe de l'image située sous le masque géodésique et ceci à chaque itération.

Définition B.7 (Dilatation géodésique numérique) *La dilatation géodésique d'une fonction numérique f sous le masque géodésique numérique f_R ($f \leq f_R$) est définie par :*

$$\delta^1(f_R, f) = inf(\delta_1(f), f_R)$$

$$\delta^n(f_R, f) = \underbrace{\delta^1(f_R, \delta^1(f_{R,} ... \delta^1(f_R, f)))}_{n\ fois}$$

On définit l'érosion géodésique de manière duale.

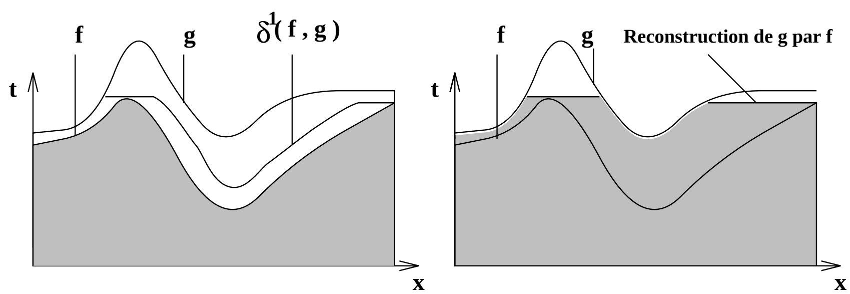


Figure B.9: dilatation de f géodésiquement à g de taille 1 et reconstruction géodésique de g par f

De la même manière que dans le cas binaire, la dilatation géodésique est généralement utilisée pour reconstruire partiellement une image numérique. Dans ce cas l'image étudiée joue le rôle du masque géodésique f_R et l'image que nous dilatons est définie de sorte à marquer les structures ou régions devant être reconstruites. Dans ce cas, la taille de la dilatation géodésique appliquée est infinie (en réalité jusquà idempotence) (cf. figure B.9). Si l'ensemble des marqueurs coïncide avec l'ensemble des maxima régionaux de l'image, alors la dilatation géodésique conduit à une reconstruction totale de l'image :

$$\delta^\infty(f, f_M) = f \text{ avec } f_M(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in \mathcal{M}\dashv\S(\{) \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\mathcal{M}\dashv\S(\{)$ est l'ensemble des maxima régionaux de f.

B.3.2 Les transformations par reconstruction

Les transformations par reconstruction sont définies par composition d'une transformation morphologique élémentaire et de la reconstruction géodésique, par dilatation dans le cas d'une transformation anti-extensive, et par érosion dans le cas d'une transformation extensive.

La famille des filtres par reconstruction est constituée des ouvertures et fermetures par reconstruction et des transformations obtenues par composition, sup ou inf de ces transformations. Ces filtres, outre les propriétés de croissance et d'idempotence ont de bonnes propriétés vis-à-vis des composantes connexes des images binaires ou des plateaux des images numériques.

Définition B.8 (Ouverture par reconstruction) *Soit γ une ouverture quelconque. On définit l'ouverture par reconstruction qui lui est associée par :*

$$\gamma_\lambda^{rec}(g) = \delta^{rec}(\gamma_\lambda(g), g) = \delta^{rec}(\epsilon_\lambda(g), g)$$

La fermeture par reconstruction est définie de manière duale :

$$\varphi_\lambda^{rec}(g) = \epsilon^{rec}(\varphi_\lambda(g), g) = \epsilon^{rec}(\delta_\lambda(g), g)$$

D'une manière générale, on a :

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall \lambda \geq 0, 0 \leq \gamma_\lambda(f) \leq \gamma_\lambda^{rec}(f) \leq f$$

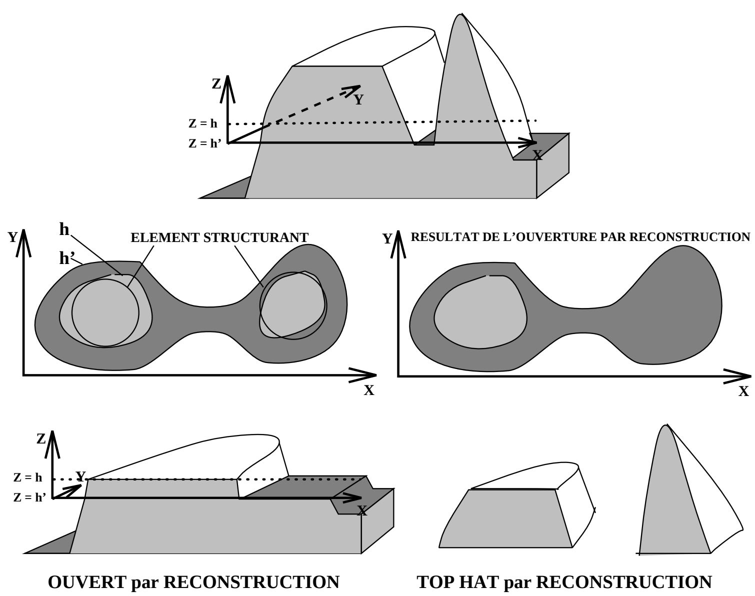


Figure B.10: Ouverture par reconstruction et décomposition de l'image par ses seuils

Des résidus : les chapeaux haut de forme par reconstruction A partir des ouvertures et des fermetures par reconstruction, on définit les chapeaux haut de forme par reconstruction : résidus entre l'image et son ouvert par reconstruction ou résidu entre le fermé par reconstruction et l'image originale :

$$THb_\lambda^{rec}(f) = f - \gamma_\lambda^{rec}(f)$$

$$THn_\lambda^{rec}(f) = \varphi_\lambda^{rec}(f) - f$$

B.4 Un intermédiaire entre ouverture et ouverture par reconstruction : le filtre gommette

Le filtre gommette a été introduit par F. Meyer. L'idée consiste à construire un filtre "intermédiaire" entre l'ouverture et l'ouverture par reconstruction en étudiant les résidus de ces deux transformations, c'est-à-dire les chapeaux haut de forme qui leur sont associés.

Définition

Soit f l'image originale. Considérons, $TH_n(f)$ et $TH_n^{rec}(f)$ les chapeaux haut de forme (blancs) résidus de l'ouverture et de l'ouverture par reconstruction de taille n :

$$TH_n(f) = f - \gamma_n(f) \quad \text{et} \quad TH_n^{rec}(f) = f - \gamma_n^{rec}(f)$$

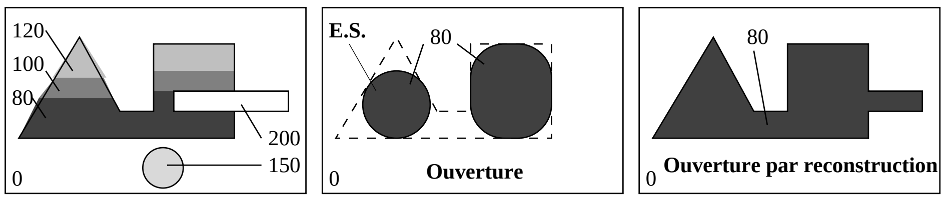


Figure B.11: Ouverture et ouverture par reconstruction

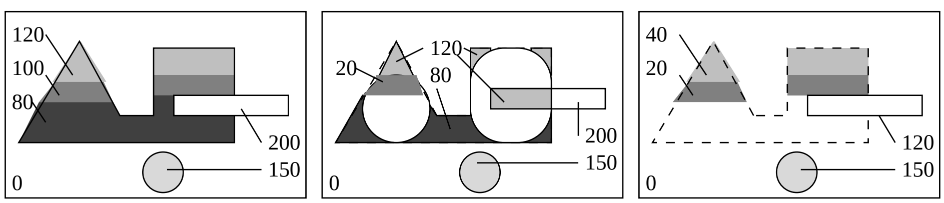


Figure B.12: Résidus de l'ouverture et de l'ouverture par reconstruction : les chapeaux haut de forme

$TH_n(f)$ est consitué des caps, îlots et isthmes clairs de taille inférieure à n. Leur niveau de gris sur l'image $TH_n(f)$ correspond à leur contraste par rapport au fond de l'image en leur voisinage. Nous appelons ces composantes *gommettes*.

$TH_n^{rec}(f)$ est constitué des îlots clairs de l'image de taille inférieure à n. Leur niveau de gris sur l'image $TH_n^{rec}(f)$ correspond à leur contraste par rapport aux structures voisines de plus grande taille (qui ont résisté à l'ouverture) (cf. figures B.11 et B.12).

L'ouverture gomme toutes les gommettes ce qui engendre une dégradation des contours des structures persistantes sur l'image ouverte. A l'opposé l'ouverture par reconstruction préserve toutes les gommettes sauf les îles, ce qui peut conduire à une sur-reconstruction (reconstruction des isthmes) ainsi qu'à une atténuation du contraste des structures.

L'idée du filtre gommette est de sélectionner les gommettes du chapeau haut de forme devant être éliminées de telle sorte que la dégradation de l'image filtrée soit minimisée.

Une solution consiste à sélectionner les gommettes par un seuillage de leur contraste sur l'image du chapeau haut de forme par reconstruction :

$$S_s(TH_n^{rec}(f))(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } TH_n^{rec}(f)(x) \geq s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$S_s(TH_n^{rec}(f))$ marque les gommettes considérées comme des structures à part entière ; ces structures sont de petite taille (elles ne contenient pas l'élément structurant courant) et doivent donc être éliminées par le filtre gommette. Les gommettes non marquées seront préservées : les caps et isthmes et certaines îles de faible contraste par rapport aux structures voisines.

Définition B.9 (Filtre gommette) *Le filtre gommette de taille n et de seuil s est défini par :*

$$Gom_{n,s}(f) = f - \delta^\infty(TH_n(f), S_s(TH_n^{rec}(f)))$$

Nous noterons $\overline{Gom_{n,s}}$ le filtre dual défini à partir des chapeaux haut de formes noirs (résidus de fermetures).

La figures B.13 et B.14 illustrent l'effet de cette transformation en comparaison avec une ouverture morphologique et une ouverture par reconstruction. La mise en oeuvre de cette transformation nécessite de déterminer deux paramètres : un paramètre de taille et un paramètre de contraste, ce qui augmente la difficulté.

Propriétés

- $0 \leq \delta^\infty(TH_n(f), S_s(TH_n^{rec}(f))) \leq TH_n(f)$ donc, en notant Id la fonction identité :

  $$\forall s \geq 0, \forall n \geq 0,\ \gamma_n \leq Gom_{n,s} \leq Id$$

- Si $s = \infty$ alors aucune gommette n'est sélectionnée donc aucune gommette n'est éliminée :

  $$\forall n \geq 0,\ Gom_{n,\infty} = Id$$

  Si $s = 0$ alors toutes les gommettes sont sélectionnées et éliminées :

  $$\forall n \geq 0,\ Gom_{n,0} = \gamma_n$$

- $\forall n \geq 0,\ \gamma_n^{rec} \geq \gamma_n$ donc : $TH_n(f) \geq TH_n^{rec}(f)$. Par conséquent, on peut écrire :
  $\delta^\infty(TH_n(f), S_s(TH_n^{rec}(f))) \geq \delta^\infty(TH_n^{rec}(f), S_s(TH_n^{rec}(f)))$
  Si $s = 1$, alors $\delta^\infty(TH_n^{rec}(f), S_s(TH_n^{rec}(f))) = TH_n^{rec}(f)$ et donc :
  $Gom_{n,1} = f - \delta^\infty(TH_n(f), S_s(TH_n^{rec}(f))) \leq f - TH_n^{rec}(f) = \gamma_n^{rec}(f)$, c'est-à-dire :

  $$\forall n \geq 0, \gamma_n \leq Gom_{n,1} \leq \gamma_n^{rec}$$

  Si s est différent de 1, alors le filtre gommette et l'ouverture par reconstruction ne sont pas comparables. Cette transformation ne peut donc être considérée comme un intermédiaire entre l'ouverture et l'ouverture par reconstruction que pour les valeurs de seuil égales à 1.

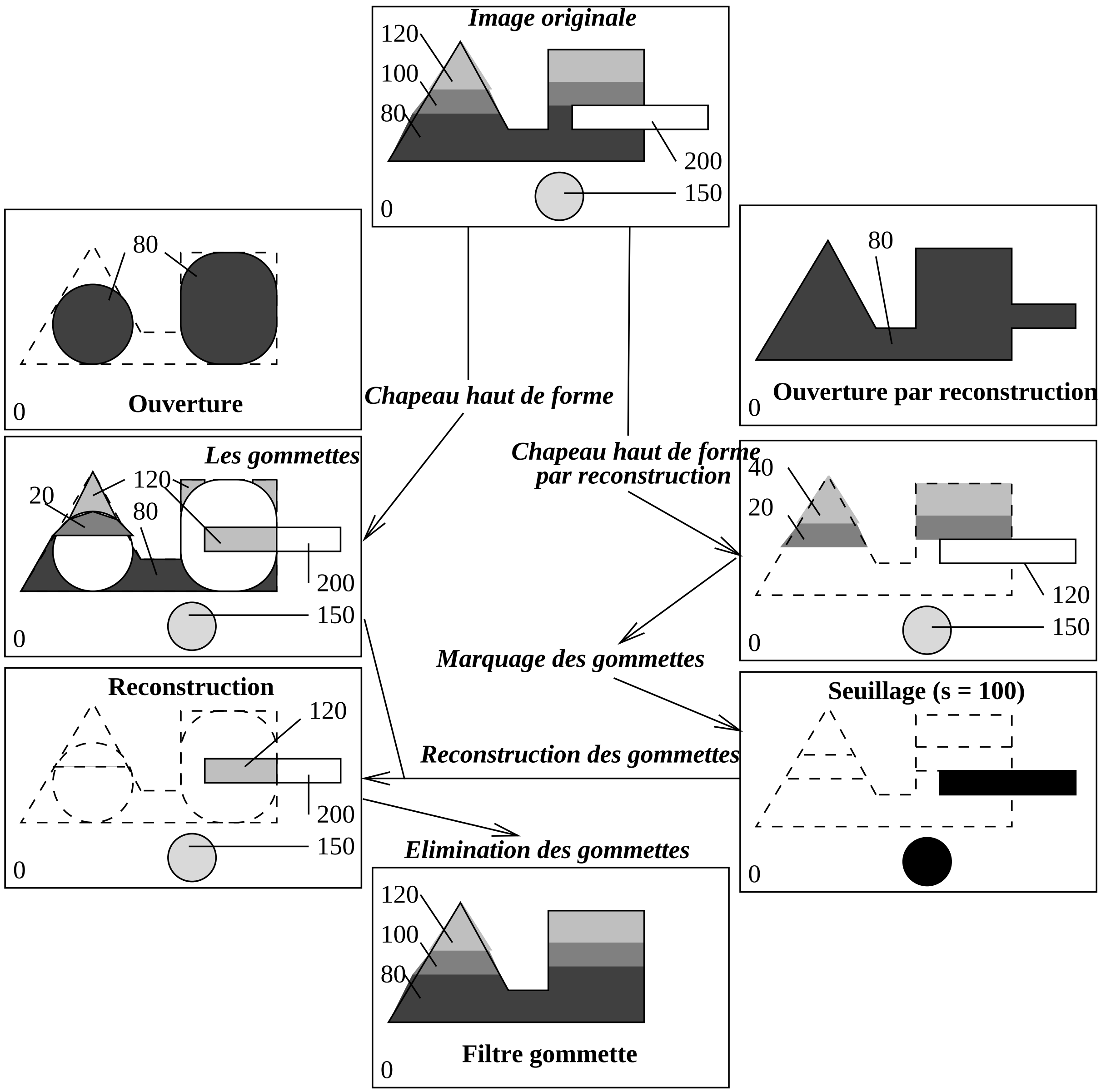


Figure B.13: Principe du filtre gommette

- $\forall n \geq 0, \gamma_{n+1} \leq \gamma_n$ et $\gamma_{n+1}^{rec} \leq \gamma_n^{rec}$, donc : $TH_{n+1} \geq TH_n$ et $TH_{n+1}^{rec} \geq TH_n^{rec}$
  Pour un seuil s fixé : $S_s(TH_{n+1}^{rec}(f)) \geq S_s(TH_n^{rec}(f))$ et
  $\delta^\infty(TH_{n+1}(f), S_s(TH_{n+1}^{rec}(f))) \geq \delta^\infty(TH_n(f), S_s(TH_n^{rec}(f)))$. On a donc :

$$\forall s \geq 0, \forall n \geq 0, Gom_{n+1,s} \leq Gom_{n,s}$$

- Plus on sélectionne sévèrement les gommettes, moins la transformation est sévère. En effet : $S_{s+1}(TH_n^{rec}(f)) \leq S_s(TH_n^{rec}(f))$. Donc :

$$\forall s \geq 0, \forall n \geq 0, Gom_{n,s+1} \geq Gom_{n,s}$$

- La transformation gommette est de façon immédiate anti-extensive ($Gom_{n,s}(f) \leq f$) et idempotente. Par contre, dans le cas général (si s est non nul), elle n'est ni croissante, ni décroissante. Donc, **ce n'est pas un filtre morphologique**. Cette transformation est appelée *filtre* gommette : ce qui correspond donc à un abus de langage par rapport à la définition morphologique des filtres. En fait, de par ces propriétés, cette transformation correspond à un amincissement.

Image originale

Ouverture de taille 3

Ouverture par reconstruction de taille 3

Filtre gomette de taille 3 et de seuil 5

Figure B.14: Ouverture, ouverture par reconstruction et filtre gommette

B.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évoqué un certain nombre d'opérateurs classiques de la MM. Nous pouvons faire à leur propos quelques remarques d'ordre général :

- Toutes les transformations de la MM valent pour des signaux continus, multi-dimensionnels.

- Les opérateurs morphologiques vont généralement par paire (dualité par rapport à la complémentation ou l'inversion de l'image).

- Les outils morphologiques nécessitent la plupart du temps une connaissance *à priori* de ce que l'on cherche. Et ceci pour plusieurs raisons : d'une part, la notion d'élément structurant permet d'indiquer ce que l'on désire éliminer dans l'image et ce que l'on désire préserver ; d'autres part, la plupart des opérateurs morphologiques ne sont pas inversibles, il y a donc perte d'information, même si ces traitements améliorent sensiblement la qualité de l'image.

- La transformation d'image peut être utilisée à plusieurs fins : la restauration d'image, l'extraction de caractéristiques et la segmentation d'image ou encore le codage (mais notons que les techniques de codage évoluées font presque toutes appel aux techniques des précédents type de problèmes). Les transformations morphologiques peuvent être utilisées comme outil d'analyse et de compréhension des images : on transforme une image, on sait ce que l'on fait, on étudie comment l'image réagit, on en déduit une caractérisation de l'image. Toute la difficulté de ce type de démarches réside probablement dans le choix judicieux des transformations.

Annexe C

Algorithmes en pseudo-code

Cet annexe rassemble l'ensemble des algorithmes décrits dans cet ouvrage et présentés ici en pseudo-code. La plupart de ces algorithmes utilisent des files d'attente hiérarchiques (FAH). Une description complète de la gestion de ces files pourra notamment être trouvée dans [21].

Algorithme de calcul des valeurs d'extinction surfaciques

Dans ce qui suit f désignera l'image originale, LAB l'image des minima avec leur label (niveaux de gris compris entre 1 et le nombre de minima). En ce qui concerne l'algorithme d'extraction des minima et celui permettant de leur attribuer un label, on pourra, par exemple, se référer à la thèse de L. Vincent [96].

$Surf_h[]$ et $Surf_{h-1}[]$ sont des tableaux de valeurs. $Surf_h[l]$ (resp. $Surf_{h-1}[l]$) correspond à la surface du lac associée au minimum de label l pour le niveau d'inondation courant h (resp. pour le niveau précédent $h' \leq h-1$). Ces tableaux sont initialisés à 0.

On utilise la structure d'arbre suivante :

$Arbre[l]$		Description du noeud l
	$type$	Minimum, maximum, plateau non-extremum
	alt	Niveau de gris du minimum dans l'image originale Champ initialisé à zéro
	VE	Valeur d'extinction du minimum Champ initialisé à zéro
	asc	Permier ascendant (père) du minimum-noeud Champ initialisé à l
	$desc[]$	Tableau contenant les descendants du minimum-noeud Champ initialisé à 0
	$Vbranche$	Champ utilisé pour valuer les branches de l'arbre Champ initialisé à 0

Les étapes du calcul des valeurs d'extinction surfaciques sont :

- (Initialisation de la file d'attente)

  Pour tous les pixels x de l'image faire :

  - si $LAB(x) \neq 0$ faire :
    - $Surf_h[LAB(x)]^{++}$
    - Pour tous les voisins p de x faire :
      - Si $LAB(p) = 0$ faire :
        - insertion de p dans la FAH au niveau de priorité $f(p)$.
        - $LAB(p) = -LAB(x)$

- (inondation de l'image)

  niveau = 0

  Tant que la file d'attente est non vide faire :

  - extraction du pixel de plus faible priorité de la FAH. Soit x ce pixel.
  - $LAB(x) = -LAB(x)$
  - si $f(x) > niveau$ faire :
    - Pour tous les labels l faire : $Surf_{h-1}[l] = Surf_h[l]$
    - niveau = $f(x)$
  - Pour tous les voisins p de x faire :
    - si $LAB(p) > 0$ faire :
      - label = LAB(x) Tant que ($label \neq asc[label]$) faire : label = asc[label]
      - label' = LAB(p) Tant que ($label' \neq asc[label']$) faire : label' = asc[label']
      - si $label \neq label'$ (*fusion*) faire :
        - si $Surf_{h-1}[label] < Surf_{h-1}[label']$ faire : l = label, label = label', label' = l
        - $Arbre[label'].VE = Surf_{h-1}[label']$
        - $Arbre[label'].asc = label$
        - $l = 1$ Tant que $Arbre[label].desc[l] \neq 0$ faire l^{++}
        - $Arbre[label].desc[l] = label'$
        - $Surf_h[label] += Surf_h[label']$
        - $Arbre[label'].Vbranche = Surf_{h-1}[label] + 1$
    - si $LAB(p) = 0$ (*propagation*) faire :
      - insertion de p dans la FAH au niveau de priorité $f(p)$.
      - $LAB(p) = -LAB(x)$

- (traitement du minimum le plus persistant)

  Pour tous les labels l faire :

  - Si $Arbre[l].VE = 0$ faire : $Arbre[l].VE$ = surface de l'image

Fin

Algorithme de calcul des valeurs d'extinction volumiques

Nous reprenons les mêmes notations que celles utilisées dans le cas des valeurs d'extinction surfaciques.

$Vol[l]$ désignera le volume du lac de label l. Ce tableau est initalisé à zéro.

- (Initialisation de la file d'attente)

  Pour tous les pixels x de l'image faire :

  - si $LAB(x) \neq 0$ faire :
    - $Surf_h[LAB(x)]^{++}$
    - $Arbre[LAB(x)].alt = f(x)$
    - Pour tous les voisins p de x faire :
      - ∗ Si $LAB(p) = 0$ faire :
        - · insertion de p dans la FAH au niveau de priorité $f(p)$.
        - · $LAB(p) = -LAB(x)$

  Pour tous les labels l faire $Vol[l] = -alt \times Surf_h[l]$

- (inondation de l'image)

  niveau = 0

  Tant que la file d'attente est non vide faire :

  - extraction du pixel de plus faible priorité de la FAH. Soit x ce pixel.
  - $LAB(x) = -LAB(x)$
  - si $f(x) > niveau$ faire :
    - Pour tous les labels l faire : $Surf_{h-1}[l] = Surf_h[l]$
    - $Vol[l] += Surf_h[l] \times (f(x) - niveau)$
    - niveau = $f(x)$
  - Pour tous les voisins p de x faire :
    - si $LAB(p) > 0$ faire :
      - ∗ label = LAB(x) Tant que ($label \neq asc[label]$) faire : label = asc[label]
      - ∗ label' = LAB(p) Tant que ($label' \neq asc[label']$) faire : label' = asc[label']
      - ∗ si $label \neq label'$ ($fusion$) faire :
        - · si $Vol[label] < Vol[label']$ faire : l = label, label = label', label' = l
        - · $Arbre[label'].VE = Vol[label']$
        - · $Arbre[label'].asc = label$
        - · $l = 1$ Tant que $Arbre[label].desc[l] \neq 0$ faire l^{++}
        - · $Arbre[label].desc[l] = label'$
        - · $Arbre[label'].Vbranche = Vol[label] + 1$
        - · $Surf_h[label] += Surf_h[label']$

        · $Vol[label] += Vol[label']$
    – si $LAB(p) = 0$ (*propagation*) faire :
        ∗ insertion de p dans la FAH au niveau de priorité $f(p)$.
        ∗ $LAB(p) = -LAB(x)$

- (traitement du minimum le plus persistant)

  Pour tous les labels l faire :

  - Si $Arbre[l].VE = 0$ faire : $Arbre[l].VE =$ volume de l'image

Fin

Algorithme de calcul de la dynamique symétrique

f désignera l'image originale, LAB l'image des extrema avec leurs labels : les labels des minima sont des valeurs comprises entre 1 et *nbmin*. $altc[l]$ correspond au niveau de gris de l'extremum de label l dans l'image transformée.

$Renc[][]$ est une matrice binaire initalisée à zéro. $Renc[l][l'] = 1$ ou $Renc[l'][l] = 1$ si les plateaux de label l et l' sont voisins sur l'image trasnformée.

A chaque label l (à chaque extremum de l'image originale) est associée une file d'attente hiérarchique $FAH[l]$ ($FAH[l][h]$ contient les pixels voisins du plateau de label l et ayant le niveau de priorité h).

- (Initialisation de la file d'attente)

  Pour tous les pixels x de l'image faire :

  - si $LAB(x) \neq 0$ faire :
    - si $LAB(x) \leq nbmin$ faire $Arbre[LAB(x)].type = min$
    - sinon faire $Arbre[LAB(x)].type = max$
    - $Arbre[LAB(x)].alt = f(x)$
    - $Altc[LAB(x)] = f(x)$
    - Pour tous les voisins p de x faire :
      ∗ si $LAB(p) = 0$ faire : insertion de p dans FAH[LAB(x)] au niveau hiérarchique $\mid f(p) - f(x) \mid$.
      ∗ si $(LAB(p) \neq 0)$ et $(LAB(p) \neq LAB(x))$ faire :
        $Renc[LAB(x)][LAB(p)] = 1$

- (Propagation des extrema)

  $niveau = 0 \quad end = 0$

  Tant que $(end = 0)$ faire :

- $niveau^{++}$
- Pour tous les labels l tels que ($Arbre[l].asc = l$ et $Arbre[l].type \neq nonextr$) faire (*Propagation des extrema*) :
  - si ($Arbre[l].type = max$) faire : $altc[l]^{--}$
  - si ($Arbre[l].type = min$) faire : $altc[l]^{++}$
  - Tant que $FAH[l][niveau]$ est non vide faire :
    - extraction du premier pixel de FAH[l][niveau]. Soit x ce pixel. Si $LAB(x) \neq 0$, on passe au suivant.
    - $LAB(x) = l$
    - Pour tous les voisins p de x faire :
      - si $LAB(p) > 0$ faire :
        - $l' = LAB(p)$ Tant que ($Arbre[l'].asc \neq l'$) faire : l' = Arbre[l'].asc
        - si ($l \neq l'$) faire : $Renc[l][l'] = 1$
      - si $LAB(p) = 0$ faire :
        - Insertion de p dans $FAH[l]$ au niveau $\mid Arbre[l].alt - f(p) \mid$
        - Si ($Arbre[l].type = min$ et $f(p) < Arbre[l].alt$) faire : $Arbre[l].type = nonextr$
        - Si ($Arbre[l].type = max$ et $f(p) > Arbre[l].alt$) faire : $Arbre[l].type = nonextr$
- Pour tous les labels l tels que ($Arbre[l].asc = l$) faire (*fusions ?*) :
  - si ($Arbre[l].type = nonextr$) et ($Arbre[l].VE = 0$) faire : $Arbre[l].VE = niveau$
  - Pour tous les label l' tels que ($Arbre[l'].asc = l'$ et $altc[l] = altc[l']$ et ($Renc[l][l'] = 1$ ou $Renc[l'][l] = 1$)) faire :
    - $sup = 0 \quad inf = 0$
    - Pour tous les pixels de $FAH[l]$ faire :
      - si ($f(x) < altc[l]$) faire : inf = 1
      - si ($f(x) < altc[l]$) faire : sup = 1
    - Pour tous les labels i faire :
      - si ($Renc[i][l] = 1$ ou $Renc[l][i] = 1$ ou $Renc[i][l'] = 1$ ou $Renc[l'][i] = 1$) faire :
        si ($altc[i] < altc[l]$) faire : inf = 1
        si ($altc[i] > altc[l]$) faire : sup = 1
    - si ($sup = 0$) et ($inf = 0$) (*plateau*) faire : $end = 1$, $sup = 1$, $inf = 1$
    - si ($sup = 1$) et ($inf = 1$) (*plateau*) faire :
      - si ($Arbre[l].VE = 0$) faire $Arbre[l].VE = niveau$
      - si ($Arbre[l'].VE = 0$) faire $Arbre[l'].VE = niveau$
    - si ($sup = 1$) et ($inf = 0$) (*plateau*) faire :
      - si ($Arbre[l].type \neq min$) faire : label = l, l = l', l' = label
      - si $Arbre[l'].VE = 0$ faire : $Arbre[l'].VE = niveau$

- $*$ si $(sup = 0)$ et $(inf = 1)$ $(plateau)$ faire :
  - · si $(Arbre[l].type \neq max)$ faire : label = l, l = l', l' = label
  - · si $Arbre[l'].VE = 0$ faire : $Arbre[l'].VE = niveau$
- $*$ $Arbre[l'].asc = l$
- $*$ $label = 1$ Tant que $Arbre[l].desc[label] \neq 0$ faire $label^{++}$
- $*$ $Arbre[l].desc[label] = l'$
- $*$ $Arbre[l'].Vbranche = niveau$
- $*$ Pour tous les labels $label$ faire :
  - · si $Renc[l'][label] = 1$ faire : $Renc[l'][label] = 0$ et $Renc[l][label] = 1$
  - · si $Renc[label][l'] = 1$ faire : $Renc[label][l'] = 0$ et $Renc[label][l] = 1$
- $*$ Pour tous les pixels q dans $FAH[l']$ faire :
  - · insertion de q dans $FAH[l]$ au niveau de priorité $\mid f(q) - Arbre[l].alt$

- (traitement de l'extremum le plus persistant)

  niveau++

  Pour tous les labels l faire :

  - Si $Arbre[l].VE = 0$ faire : $Arbre[l].VE$ = niveau

Fin

Table des figures

Bibliographie

[1] S. Beucher. Squelettes connexes et non connexes. Rapport Interne CMM N-7/89/MM, Ecole des Mines de Paris, Juin 1989.

[2] S. Beucher. *Segmentation d'images et morphologie mathématique.* Thèse Ecole des Mines de Paris, Juin 1990.

[3] S. Beucher, J.M. Blosseville, M. Bilodeau, F. Lenoir, S. Espie. Titan : système de mesure du trafic par analyse d'images. Rapport commun INRETS/CMM N-7/89/MM, Ecole des Mines de Paris, Oct. 1987.

[4] S. Beucher, C. Lantuéjoul. Use of watersheds in contour detection. *Proc. Int. Workshop on image processing, real-time edge and motiom detection-estimation, Rennes(France)*, pages 17–21, Sept. 1979.

[5] S. Beucher, F. Meyer. The morphological approach to segmentation : The watershed transformation. *Mathematical Morphology in Image Processing*, pages 433–482, 1993.

[6] S. Beucher, L. Vincent. Introduction aux outils morphologiques de segmentation. *ANRT ed.*, 1990.

[7] H. Blum. An associative machine for dealing with the visual field and some of its bilogical implications. *Biological Prototypes and synthetic systems. 2nd Annual Bionics Symposium, Cornell Univ., E. E. Bernard and M. R, Kare eds., Plenum Press, New-York*, 1:244–260, 1961.

[8] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors for shape. *Symp. on Models for the perception of speech and visual form. Boston*, pages 362–380, Nov. 1964.

[9] L. Calabi, W.E. Hartnett. Shape recognition prairies fires, convex deficiencies and skeletons. *American Mathematical Monthly*, 75(4), 1968.

[10] J. Camillerapp. *L'utilisation du contexte en reconnaissance des formes.* Thèse Université Paris VI, Mai 1976.

[11] S.H. Collins. Terrain parameters directly from a digital terrain model. *The Canadian Surveyor*, 29, n^O 5:507–518, 1975.

[12] J-P. Coquerez, S. Philippe, P. Bolon. *Analyse d'image, filtrage et segmentation.* Masson, Oct. 1995.

[13] M. Coster, J.-L. Chermant. *Précis d'Analyse d'Images*. Editions CNRS, 1985.

[14] J. Crespo. *Morphological Connected Filters and Intra-Region Smoothing for Image Segmentation*. PhD thesis, The Academic Faculty, Georgia Institute of Technology, Nov. 1993.

[15] R.W. Ehrich, J.P. Foith. Representation of random waveforms by relational trees. *IEEE Trans. on Computers*, C-25, N^o 7, 1976.

[16] C. Faure. Comparaison de signaux représentés par des arbres relationnels. $5^{ième}$ *congrès RFIA*, Nov. 1985.

[17] C. Giardina, E. Dougherty. *Morphological Methods in Image and Signal Processing*. Englewood Clliffs : Prentice-Hall, 1988.

[18] G.H. Granlund. Description of texture using the general operator approach. *IEEE Proceedings, 5th International Conference on Pattern Recognition*, pages 776–779, 1980.

[19] C. Gratin. *De la représentation des images au traitement morphologique d'images tri-dimensionnelles*. Thèse Ecole des Mines de Paris, Janv. 1993.

[20] C. Gratin, R. Peyrard. Détection d'éléments rectilignes. Rapport interne CMM N-29/91/MM, Ecole des Mines de Paris, 1991.

[21] M. Grimaud. *La géodésie numérique en morphologie mathématique. Application à la détection automatique de microcalcifications en mammographie numérique*. Thèse Ecole des Mines de Paris, Dec. 1991.

[22] M. Grimaud. New measure of contrast : dynamics. *Image Algebra and Morphological Processing III, San Diego CA, Proc. SPIE*, 1992.

[23] A. Grossmann, P. Tchamitchian. *Wavelets*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[24] Y. Grumbach. *Exploration radiologique du sein*. Masson, Paris, 1983.

[25] H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer, 1957.

[26] H. Hadwiger. Normale körper im euklidischen raum und ihre topologishen und metrischen eigenschaften. *Math. Zeitschr.*, 71:124–149, 1959.

[27] P. Hanusse, P. Guillataux. Sémantique des images par analyse dendronique. *AFCET*, 2:577–588, Nov. 1991.

[28] R. M. Haralick. Statistical and structural approaches to texture. *proceedings of the IEEE*, 67:786–804, Mai 1979.

[29] H. Heijmans. A new class of alternating sequential filters. *Proc. of 1995 IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, pages 30–33(Vol.I), Juin 1995.

[30] R. A. Kirsch. Resynthesis of biological images from tree structured decomposition data. *IFIP Working Conf. on Graph. Lang. Vancouver*, pages 1–19, Mai 1972.

[31] J. C. Klein. *Conception et réalisation d'une unité logique pour l'analyse quantitative d'images.* Thèse Université de Nancy, 1976.

[32] D.B. Kopans, J. Meyer, N. Sadowsky. Breast imaging. *New Engl. J. Med*, pages 310(15) 960–967, 1984.

[33] M. B. Kurdy. *Transformées morphologiques directionnelles et adaptatives : application aux sciences des matériaux.* Thèse Ecole des Mines de Paris, 1990.

[34] M. B. Kurdy, D. Jeulin. Directional mathematical morphology operations. *Acta Stereol. Proc ECS 5 Freiburg I. BR.*, pages 473–480, 1989.

[35] J. L. Lamarque. *Le Sein radiodiagnostic clinique.* Médecine et Sciences Internationales, 1981.

[36] J. L. Lamarque, L. Boyer. *Mammographie : Techniques - Sémiologie - Dépistage.* Ed. Pradel, 1991.

[37] J. L. Lamarque, B. Guérin. *Détection et analyse automatique : applications.* 2$^{\text{ième}}$ cours international de mastologie et d'imagerie du sein, Monaco, Oct. 1991.

[38] C. Lantuéjoul. *La squelettisation et son application aux mesures topologiques des mosaïques polycristallines.* Thèse Ecole des Mines de Paris, 1978.

[39] C. Lantuéjoul, H. Digabel. Interactive algorithms. *Proc. of 2nd European Symposium or Quant. analysis of microstructures in material sciences, biology and medicine*, pages 39–49, Oct. 1977.

[40] C. Lantuéjoul, F. Maisonneuve. Geodesic methods in quantitative image analysis. *Pattern Recognition*, 17:117–187, 1984.

[41] F. Maisonneuve. Extrema régionaux : algorithmes parallèles. Rapport Interne CMM N^o 781, Ecole des Mines de Paris, 1982.

[42] H. Maitre, D. Attal, Y. Benigot. Une méthode arborescente de lecture automatique de gels de séquences de nucléotides. *AFCET*, 1:531–538, Nov. 1984.

[43] S. Mallat. *Multiresolution representations and wavelets.* PhD thesis, Dépt. d'informatique et des sciences de l'information, Université de Pennsylvanie, Philadelphie PA 19104, 1988.

[44] P. Maragos. Pattern spectrum of images and morphological shape-size complexity. *IEEE Proc. ICASSP 87.*, pages 241–244, 1987.

[45] P. Maragos, R. Schafer. Morphological filters - part i: their set-theoretic analysis and relations to linear-shift-invariant filters. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, 35:1153–1169, Août 1987.

[46] P. Maragos, R. Schafer. Morphological filters - part ii: their relations to median, order-statistic, ans stack filters. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, 35:1170–1184, Août 1987.

[47] P. Maragos, R. Schafer. Morphological systems for multidimensional signal processing. *Proc. of the IEEE*, pages 690–710, Avr. 1990.

[48] B. Marcotegui, F. Meyer. Morphological segmentation of images sequences. *ISMM'94 : Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, pages 101–108, Sept. 1994.

[49] G. Matheron. *Eléments pour une Théorie des Milieux Poreux.* Masson, Paris, 1967.

[50] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry.* John Wiley and Sons, New York, 1975.

[51] G. Matheron. Quelques propriétés topologiques du squelette. Rapport Interne CMM, Ecole des Mines de Paris, 1978.

[52] G. Matheron. *Examples of topological properties of skeletons.* Academic Press, 1988.

[53] G. Matheron. *Mathematical morphology.* London: Academic Press, 1988.

[54] F. Meyer. *Cytologie quantitative et morphologie mathématique.* Thèse Ecole des Mines de Paris, 1979.

[55] F. Meyer. Skeleton and perceptual graphs. *Signal Processing*, 16:335–363, 1989.

[56] F. Meyer. Digital euclidean skeletons. *Visual Communicationss and Image Processing'90, SPIE, Lausanne*, 1360:251–262, 1990.

[57] F. Meyer. Un algorithme optimal de lignes de partage des eaux. $8^{ième}$ *congrès RFIA, Lyon-Villeurbanne*, pages 847–857, 1991.

[58] F. Meyer. Arbre des minima et dynamique. Note interne CMM N-04/93/MM, Ecole des Mines de Paris, Mars 1993.

[59] F. Meyer. Morphological image segmentation for coding. *Projet RACE N-01/93/MM*, Janv. 1993.

[60] F. Meyer. Minimum spanning forests for morphological segmentation. *ISMM'94 : Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, pages 77–84, Sept. 1994.

[61] F. Meyer, S. Beucher. Morphological segmentation. *JVCIR*, 11, *N°* 1:21–46, 1990.

[62] J.N. Mialet, P. Salembier, J. Serra. *Cours de Morphologie mathématique.* Centre de Morphologie mathématique - Université de Barcelone, 1993.

[63] H. Minkowsky. Allgemeine lehrs atze uber konvexe polyeder. *Nachr. Ges. Wiss. G ottingen*, pages 198–219, 1897.

[64] H. Minkowsky. uber die begriffe l ange, oberfl ache und volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 9:115–121, 1901.

[65] O. Monga. An optimal region growing algorithm for image segmentation. *International Journal of Pattern Recognition and Artifical Intelligence*, 3(4), Dec. 1987.

[66] O. Monga. *Segmentation d'images par croissance hiérarchique de régions.* Thèse Université de Paris XI, 1988.

[67] L. Najman. *Morphologie mathématique : de la segmentation d'images à l'analyse multivoque.* Thèse Paris Dauphine, Avr. 1994.

[68] L. Najman, M. Schmitt. A dynamic hierarchical segmentation algorithm. *ISMM'94 : Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing - Poster Contributions*, pages 13–14, Sept. 1994.

[69] S. Peleg, A. Rosenfeld. A min-max medial axis transformation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, pages 208–210, 1981.

[70] F. Poirier. *Le système Sherpa : Etiquetage et classification automatique par apprentissage pour le décodage automatique de la parole continue.* Thèse Université Paris XI Orsay, 1985.

[71] F. Poirier. Mise en correspondance d'un signal temporel et d'une description formelle. application à l'étiquetage automatique de la parole. *AFCET*, 1989.

[72] F.P. Preparata, M.I. Shamos. *Comutational geometry : an introduction.* Springer Verlag, 1985.

[73] F. Prêteux. *Description et Interprétation des Images par la Morphologie Mathématique. Application à l'Imagerie Médicale.* Thèse Université Paris VI, 1987.

[74] T.H. Puecker, D.H. Douglas. Detection of surface specific points by local parallel processing of discrete terrain elevation data. *Computer Graphics and Image Processing*, 4:375–387, 1975.

[75] J.-F. Rivest, P. Soille, S. Beucher. Morphological gradients. *ISET's symposium on electronic imaging science and techniology, SPIE*, Fev. 1992.

[76] P. Salembier, M. Kunt. Size-sensitive multiresolution decomposition of images with rank order based filters. *Signal Processing,27(2)*, pages 205–241, Mai 1992.

[77] P. Salembier, J. Serra. Morphological multiscale segmentation of images. *Proc. SPIE VCOP'92, Boston, MA*, pages 1992–2001, 1993.

[78] P. V. Sankar, A. Rosenfeld. Hierarchical representation of waveforms. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligent*, PAMI-1,N^o 1, 1979.

[79] M. Schmitt. *Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle.* Thèse Ecole des Mines de Paris, Fev. 1989.

[80] M. Schmitt, F. Prêteux. Un nouvel algorithme en morphologie mathématique : les r-h maxima et r-h minima. *Proc. 2ieme Semaine Internationale de l'Image Electronique*, pages 469–475, Avr. 1986.

[81] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology.* Academic Press, 1982.

[82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology. Theoretical Advances.* Academic Press, 1988.

[83] J. Serra, P. Salembier. Connected operators and pyramids. *Proc. of SPIE. Image Algebra and Mathematical Morphology'93, San Diego*, Juil. 1993.

[84] J. Serra, L. Vincent. An overview of morphological filtering. *Systems and Signal Processing*, 11(No. 1):47–108, 1992.

[85] J.-C. Simon. *La reconnaissance des formes par algorithmes.* Masson, 1985.

[86] H. Talbot. *Analyse morphologique de fibres minérales d'isolation.* Thèse Ecole des Mines de Paris, Oct. 1993.

[87] A. Toet. A hierarchical morphological image decomposition. *Pattern Recognition Letters 11*, pages 267 – 274, Avr. 1990.

[88] A. Le Treut, M. H. Dilhuidy. *Mammographie Guide d'interprétation.* Arnette, 1988.

[89] A.V. Tuzikov, P. Soille, D. Jeulin. Extraction of grid lines on stamped metallic pieces using mathematical morphology - final report on ocas project. Rapport interne CMM N-22/91/MM, Ecole des Mines de Paris, Juil. 1991.

[90] C. Vachier. A propos d'arbres... Rapport interne CMM, Ecole des Mines de Paris, 1992.

[91] C. Vachier, F. Meyer. Extraction des structures fibreuses en mammographie. application à la détection automatique des opacités du sein. Rapport commun CMM/GEMS N-42/91/MM, Ecole des Mines de Paris, 1991.

[92] C. Vachier, F. Meyer. Segmentation automatique de gouttelettes de vapeur d'eau. Rapport interne CMM N-16/91/MM, Ecole des Mines de Paris, Juin 1991.

[93] C. Vachier, F. Meyer. Extinction value: a new measurement of persistence. *Proc. of 1995 IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, pages 254–257(Vol.I), Juin 1995.

[94] C. Vachier, F. Meyer, C. Gratin, H. Talbot. Filtrage par décomposition morphologique : application à l'extraction de structures rectilignes. *Neuvième Congrès de Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle*, Janv. 1994.

[95] C. Vachier, L. Vincent. Valuation of image extrema using alternating filters by reconstruction. *Image Algebra and Morphological Processing, San Diego CA, Proc. SPIE*, Juil. 1995.

[96] L. Vincent. *Algorithmes morphologiques à base de files d'attente et de lacets. Extension aux graphes.* Thèse Ecole des Mines de Paris, Mai 1990.

[97] L. Vincent. Morphological area openings and closings for grayscale images. *Shape in Picture, NATO Workshop, Driebergen*, Sept. 1992.

[98] L. Vincent, P. Soille. Watersheds in digital space and efficient algorithm based on immersion simulations. *IEEE Transactions on PAMI*, 13(No. 6):583–598, 1991.

Résumé

Cette thèse se propose d'explorer de nouvelles méthodes morphologiques permettant d'extraire les caractéristiques des régions qui composent une image. Ces méthodes sont ensuite destinées à être appliquées au problème de la segmentation d'image. Nous présentons tout d'abord deux approches classiques du problème de l'extraction de caractéristiques : celles basées sur les granulométries (opérations de tamisage) et celles basées sur l'étude des extrema des images numériques, en consacrant une attention particulière à la notion de dynamique. La dynamique value les extrema d'une image selon le contraste des régions qu'ils marquent ; nous montrons qu'elle équivaut à une opération de tamisage en contraste et que son principe rejoint celui des granulométries.

Nous nous concentrons ensuite sur une généralisation du principe de la dynamique. Nous basons notre approche sur les opérateurs morphologiques connexes. Ces opérateurs ont pour spécificité d'agir sur les images en fusionnant leurs zones plates. Lorsqu'on applique des opérateurs connexes de plus en plus sélectifs, des régions de l'image disparaissent progressivement. Le niveau pour lequel une région disparaît caractérise la région au sens du critère du filtrage (en forme, en taille, en contraste, en volume...). Ceci nous conduit à introduire une nouvelle classe de transformations morphologiques, les fonctions d'extinction, qui valuent les extrema des images numériques selon les caractéristiques des régions qu'ils marquent. Une particularité importante des fonctions d'extinction, mise en évidence par l'algorithme de calcul efficace que nous proposons, est de fournir une description hiérarchique des régions de l'image. Ceci se traduit, dans le calcul algorithmique, par la construction d'un arbre de fusion des extrema de l'image.

Les fonctions d'extinction peuvent être utilisées pour sélectionner les régions pertinentes d'une image et sont donc de grand intérêt dans les applications de filtrage et surtout de segmentation d'image (pour extraire les marqueurs des régions avant le calcul de la ligne de partage des eaux). Ce dernier point fait l'objet d'une étude approfondie. Nous donnons de nombreux exemples permettant d'illustrer leur intérêt pour la segmentation d'images complexes. Les résultats obtenus par cette méthode sont comparés à ceux déduits de méthodes de marquage plus traditionnelles. L'apport le plus significatif des fonctions d'extinction pour la segmentation d'image est de systématiser et de simplifier considérablement la mise au point des algorithmes. Notamment, elles permettent de mettre en oeuvre des processus rapides de segmentation hiérarchique interactive.

Mots clés : Analyse d'image, Morphologie mathématique, Segmentation, Extraction de caractéristiques, Opérateurs connexes, Hiérarchies, Fonction d'extinction, Arbres de fusion des extrema.

Abstract

The purpose of this thesis is to investigate new morphological methods for extracting the characteristics of an image regions. These methods are destined to be applied to image segmentation. Two different approaches are first presented : the first one is based on granulometries (classical sieving process), the second one considers the image extrema. We then focus on the latter and on the study of dynamics. This transformation associates with each image extremum the contrast of the region it marks. We show that it can be considered as a contrast sieving process and that it is closely linked to granulometric approaches.

We then propose a generalization of the dynamics concept using connected morphological operators. These operators act on grey level images by simply propagating their flat zones. By computing more and more selective connected filters, image structures progressively disappear. The level for which one given structure is totally eliminated characterizes the structure in terms of the filtering criterion : in terms of contrast, size, shape... This leads us to introduce a new class of morphological transformations, the extinction functions, which associate with each image extremum a characteristic of the region it marks. An extinction function key concept is that of merging tree of image extrema which corresponds to a hierarchical description of the image regions.

Extinction functions can be used for selecting significant regions in an image. They are therefore of great interest in filtering and segmentation applications (for solving the well known marking step before computing watershed transform). We illustrate the latter point with many segmentation examples. The results obtained by this method are compared with the results deduced from more classical approaches. The most significant contribution of extinction functions in segmentation applications is to simplify the adjustment of segmentation algorithms based on the watershed transform. In particular, they allow to produce efficient hierarchical interactive segmentation algorithms.

Mots clés : Image analysis, Mathematical morphology, Segmentation, Feature extraction, Connected operators, Hierarchy, Extinction functions, Merging tree of extrema.