



HAL
open science

**Formulation, développement et validation d'éléments
finis de type coques volumiques sous-intégrés stabilisés
utilisables pour des problèmes à cinématique et
comportement non linéaires**

Vuong-Dieu Trinh

► **To cite this version:**

Vuong-Dieu Trinh. Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous-intégrés stabilisés utilisables pour des problèmes à cinématique et comportement non linéaires. Sciences de l'ingénieur [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2009. Français. NNT : 2009ENAM0008 . pastel-00005082

HAL Id: pastel-00005082

<https://pastel.hal.science/pastel-00005082>

Submitted on 6 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Ecole doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur

de

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité "Mécanique"

*présentée et soutenue publiquement
par*

Vuong-Dieu TRINH

le 20 avril 2009

**FORMULATION, DÉVELOPPEMENT ET VALIDATION
D'ÉLÉMENTS FINIS DE TYPE COQUES VOLUMIQUES SOUS-
INTÉGRÉS STABILISÉS UTILISABLES POUR DES PROBLÈMES
A CINÉMATIQUE ET COMPORTEMENT NON LINÉAIRES**

Directeur de thèse : Alain COMBESURE

Co-encadrement de la thèse : Farid ABED-MERAIM

Jury :

Alain COMBESURE, Professeur, LaMCoS, INSA de Lyon Examineur
Bruno COCHELIN, Professeur, LAM, Ecole Centrale de Marseille..... Rapporteur
Pierre VILLON, Professeur, Laboratoire Roberval, UTC..... Rapporteur
Jean-Philippe PONTHOT, Professeur, LTAS, Université de Liège Examineur
Farid ABED-MERAIM, Maître de Conférences, LPMM, ENSAM de Metz Examineur
Patrick MASSIN, Directeur du LaMSID, UMR EDF-CNRS 2832 Examineur
Jean-François BILLAUD, Ingénieur, CETIM Examineur
Xavier DESROCHES, Docteur, LaMSID, UMR EDF-CNRS 2832..... Invité

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
Arts et Métiers ParisTech, centre de Metz

Table des matières

TABLE DES MATIÈRES	1
TABLE DES FIGURES	3
LISTE DES TABLEAUX	4
INTRODUCTION	6
CONTEXTE	7
MOTIVATION DE LA THÈSE	8
OBJECTIFS ET CONTENU DE LA THÈSE	9
CHAPITRE I ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE	11
1. ÉTUDES DE LA MMC ET DE LA MEF	12
1.1. Cinématique des milieux continus	12
1.2. Contraintes, équations d'équilibre et déformations	13
1.3. Relation de comportement	15
1.4. Principe des travaux virtuels	16
1.5. Principe variationnel	17
1.6. Discrétisation par éléments finis	18
2. MODÉLISATIONS DE COQUES EXISTANTES	21
2.1. Modélisation de coque tridimensionnelle dégénérée	21
2.2. Modélisations de coque en formulation mixte	23
2.3. Modélisations solide-coques	27
CHAPITRE II ÉLÉMENTS COQUES VOLUMIQUES SHB EN LINÉAIRE	30
1. ÉLÉMENT COQUE VOLUMIQUE SHB6	31
1.1. Modélisation SHB6 en linéaire	31
1.1.1. Cinématique et interpolation	32
1.1.2. Opérateur gradient discrétisé	32
1.1.3. Formulation variationnelle utilisée pour l'élément SHB6	37
1.1.4. Analyse des modes de « hourglass » pour l'élément SHB6	40
1.1.5. Projection par « Assumed local strain method »	43
1.1.6. Matrice de rigidité géométrique $\underline{\mathbf{K}}_{\sigma}$	45
1.1.7. Forces suiveuses et matrice de pression $\underline{\mathbf{K}}_p$	46
1.2. Validation de l'élément coque volumique SHB6 en linéaire	48
1.2.1. Poutre en flexion simple	48
1.2.2. Plaque en flexion et cisaillement dans son plan	50
1.2.3. Poutre vrillée soumise à un effort tranchant	53
1.2.4. Coque sphérique pincée	55
1.2.5. Coque sphérique pincée avec mélange d'éléments	56
1.2.6. Coque cylindrique pincée avec diaphragmes	59
1.2.7. Plaque circulaire soumise à une force ponctuelle	61
1.2.8. Étude fréquentielle d'une poutre libre encastrée	63
1.2.9. Flambement d'un cylindre libre sous pression externe	65
2. ÉLÉMENTS COQUES VOLUMIQUES SHB15 ET SHB20	68

2.1.	<i>Modélisation SHB15 en linéaire</i>	68
2.1.1.	Cinématique et interpolation	69
2.1.2.	Opérateur gradient discrétisé	69
2.2.	<i>Modélisation SHB20 en linéaire</i>	80
2.2.1.	Cinématique et interpolation	80
2.2.2.	Opérateur gradient discrétisé	81
2.2.3.	Formulation variationnelle utilisée pour les éléments SHB15 et SHB20	92
2.2.4.	Matrice de rigidité géométrique $\underline{\underline{K}}_{\sigma}$	95
2.2.5.	Forces suiveuses et matrice de pression $\underline{\underline{K}}_p$	97
2.3.	<i>Validation des éléments coques volumiques SHB15 et SHB20 en linéaire</i>	100
2.3.1.	Poutre en flexion simple	100
2.3.2.	Plaque en flexion et cisaillement dans son plan	101
2.3.3.	Poutre vrillée soumise à un effort tranchant.....	102
2.3.4.	Coque sphérique pincée.....	103
2.3.5.	Coque cylindrique pincée avec diaphragmes	104
2.3.6.	Plaque circulaire soumise à une force ponctuelle.....	106
2.3.7.	Étude fréquentielle d'une poutre libre encastrée	107
2.3.8.	Flambement d'un cylindre libre sous pression externe	107
2.3.9.	Poutre en flexion avec divers élancements.....	109
2.3.10.	Flambage d'une coque cylindrique avec raidisseur.....	109

CHAPITRE III ÉLÉMENTS COQUES VOLUMIQUES SHB EN NON LINÉAIRE .114

1.	NON-LINÉARITÉS GÉOMÉTRIQUES	114
2.	NON-LINÉARITÉS MATÉRIAUX	116
3.	CAS TESTS NON LINÉAIRES GÉOMÉTRIQUES ET MATÉRIAUX	119
3.1.	<i>Poutre console soumise à un effort tranchant</i>	119
3.2.	<i>Flambage d'un panneau cylindrique épais soumis à une force ponctuelle</i>	121
3.3.	<i>Flambage d'un panneau cylindrique mince soumis à une force ponctuelle</i>	127
3.4.	<i>Coque cylindrique sans diaphragmes soumise à une force ponctuelle</i>	130

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES135

BIBLIOGRAPHIE137

Table des figures

Figure 1. Schéma de fonctionnement d'une centrale nucléaire.....	7
Figure 2. Exemple de maillage 3D et centrales nucléaires.....	8
Figure 3. Cinématique des milieux continus	12
Figure 4. Facette de normale	14
Figure 5. Modèles coques 3D d'Ahmad.....	21
Figure 6. Modèles coques 3D de Kim Y.H.	22
Figure 7. Hypothèse cinématique de Reissner–Mindlin.....	23
Figure 8. Élément de référence de coque triangulaire à 3 nœuds.....	24
Figure 9. Élément de référence SHB6 et ses points d'intégration.....	31
Figure 10. Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre en flexion simple ; un exemple de maillage (12x2x1)x2.....	49
Figure 11. Géométrie, chargement et déformée de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan ; un exemple de maillage (12x4x1)x2.....	50
Figure 12. Poutre vrillée soumise à un effort tranchant ; un exemple de maillage (12x4x1)x2.....	54
Figure 13. Hémisphère pincé ; un exemple de maillage 3x(5x5x1)x2.....	56
Figure 14. Hémisphère pincé (SHB6 à un seul sommet) ; un exemple de maillage 4x(7x7x1).....	57
Figure 15. Maillage mixte de l'hémisphère pincé (SHB6 aux 3 sommets).....	58
Figure 16. Géométrie, chargement et déformée de la coque cylindrique pincée avec diaphragmes.....	60
Figure 17. Géométrie, chargement et déformée de la plaque circulaire soumise à une force ponctuelle ; un exemple de maillage 3x(4x4x1)x2.....	61
Figure 18. Géométrie, chargement et modes propres de la poutre libre encastree ; un exemple de maillage (30x3x1)x2.....	65
Figure 19. Géométrie, chargement et conditions aux limites du cylindre sous pression externe ; un exemple de maillage (20x30x1)x2.....	66
Figure 20. Courbe de convergence et modes de flambement du cylindre sous pression externe ; un exemple de maillage (20x30x1)x2.....	67
Figure 21. Géométrie de l'élément de référence SHB15 et ses points d'intégration	68
Figure 22. Géométrie de l'élément de référence SHB20 et ses points d'intégration	80
Figure 23. Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre en flexion avec divers élancements ; un exemple de maillage (10x1x1) SHB20.....	110
Figure 24. Géométrie, conditions aux limites et 1 ^{er} mode de flambage d'un quart de coque cylindrique avec raidisseur ; un exemple de maillage mixte de 260 éléments SHB8PS pour le raidisseur et 360 éléments SHB6 pour la coque principale.....	112
Figure 25. Géométrie initiale et 1 ^{er} mode de flambage de la coque cylindrique avec raidisseur ; un exemple de maillage de : a) 300 éléments SHB15 ; b) 100 éléments SHB20.....	113
Figure 26. Géométrie, chargement et déplacement de la poutre console en non-linéaire géométrique	121
Figure 27. Géométrie, chargement, conditions aux limites et déformée du panneau cylindrique épais sous force ponctuelle ; un exemple de maillage SHB6 de (30x30x2)x2.....	122
Figure 28. Géométrie, chargement, conditions aux limites et déformée du panneau cylindrique mince sous force ponctuelle ; un exemple de maillage SHB6 de (25x25x2)x2.....	128
Figure 29. Géométrie, chargement, conditions aux limites et déformée de la coque cylindrique sous force ponctuelle ; un exemple de maillage SHB20 de (20x20x1).....	131

Liste des tableaux

Tableau 1. Données géométriques, matériau et de chargement pour le test de la poutre en flexion simple	48
Tableau 2. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre en flexion simple	49
Tableau 3. Données de géométrie, matériau et de chargement du cas test de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan.....	50
Tableau 4. Résultats du déplacement du point A suivant Oy de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan	53
Tableau 5. Données de géométrie, chargement et de matériau de la poutre vrillée	54
Tableau 6. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre vrillée.....	54
Tableau 7. Données de géométrie, matériau et de chargement de l'hémisphère pincé.....	55
Tableau 8. Déplacement du nœud A suivant Ox de l'hémisphère pincé.....	56
Tableau 9. Déplacement du point A suivant Ox, maillage mixte SHB8PS et SHB6 en un seul sommet	57
Tableau 10. Déplacement du point A suivant Ox maillage mixte SHB8PS et SHB6 aux trois sommets de l'hémisphère pincé.....	58
Tableau 11. Données de géométrie, chargement et de matériau du test de la coque cylindrique pincée avec diaphragmes	59
Tableau 12. Déplacement du point A suivant Oz de la coque cylindrique pincée avec diaphragmes.....	60
Tableau 13. Données de géométrie, chargement et de matériau de la plaque circulaire soumise à un effort ponctuel.....	62
Tableau 14. Déplacement du point A suivant Oz de la plaque circulaire soumise à un effort ponctuel	62
Tableau 15. Données géométriques et matériau de la poutre libre encastree.....	63
Tableau 16. Fréquences propres de la poutre libre encastree.....	64
Tableau 17. Données géométriques et matériau du cas test de flambement d'un cylindre libre sous pression externe	65
Tableau 18. Pressions critiques de flambage du cylindre sous pression externe	66
Tableau 19. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre en flexion simple	100
Tableau 20. Déplacement du point A suivant Oy de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan.....	101
Tableau 21. Déplacement suivant Oz du point A de la poutre vrillée.....	102
Tableau 22. Déplacement du nœud A suivant Ox de l'hémisphère pincé.....	103
Tableau 23. Déplacement du point A suivant Oz du cylindre pincé avec diaphragmes	105
Tableau 24. Déplacement du point A suivant Oz de la plaque circulaire soumise à un effort ponctuel	106
Tableau 25. Pression critique de flambage du cylindre libre sous pression externe	108
Tableau 26. Données géométriques, matériau et de chargement pour le test de la poutre en flexion simple avec divers élancements	109
Tableau 27. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre en flexion simple avec divers élancements	110
Tableau 28. Résultats du test de flambement de la coque cylindrique avec raidisseur.....	112
Tableau 29. Paramètres géométriques et matériau de la coque cylindrique avec raidisseur..	112
Tableau 30. Données géométriques et matériau de la poutre console.....	119
Tableau 31. Solution de référence pour le cas test de la poutre console en non-linéaire géométrique	120

Tableau 32. Résultats obtenus pour le cas test de la poutre console en non-linéaire géométrique	120
Tableau 33. Données de géométrie et de matériau du panneau cylindrique épais sous force ponctuelle	122
Tableau 34. Résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz du panneau cylindrique épais soumis à une force ponctuelle	123
Tableau 35. Données de matériau élasto-plastique du panneau cylindrique sous force ponctuelle	124
Tableau 36. Données de matériau élasto-plastique du panneau cylindrique épais sous force ponctuelle	124
Tableau 37. Résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz du panneau cylindrique épais soumis à une force ponctuelle	126
Tableau 38. Données de géométrie et de matériau du panneau cylindrique mince sous force ponctuelle	127
Tableau 39. Résultats de référence	129
Tableau 40. Données de géométrie et de matériau de la coque cylindrique sous force ponctuelle	130
Tableau 41. Résultats obtenus des déplacements des points A, B et C de la coque cylindrique soumise à une force ponctuelle.....	132

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) de l'ENSAM CER de Metz, le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCoS) de l'INSA de Lyon et le Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables (LaMSID), dans le cadre d'un partenariat avec EDF R&D et le CETIM. Je remercie Monsieur le Professeur El Mostafa DAYA, directeur du LPMM et Monsieur Patrick MASSIN, directeur du LaMSID, pour leurs accueils chaleureux et pour avoir accepté que j'effectue mes travaux de recherche au sein de leurs laboratoires dans de bonnes conditions.

Je remercie tout particulièrement M. Farid ABED-MERAIM qui m'a encadré tout le long de l'étude, m'inspirant la rigueur nécessaire et un certain professionnalisme. Il s'est fortement impliqué dans ce travail et je lui en suis reconnaissant.

Messieurs les Professeurs Bruno COCHELIN et Pierre VILLON m'ont fait le plaisir et l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, je les remercie vivement pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté la lourde tâche que comporte le travail de rapporteur.

Je remercie également sincèrement Monsieur le Professeur Jean-Philippe PONTHOT, d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce travail de thèse ; Monsieur le Directeur du LaMSID Patrick MASSIN et Monsieur Jean-François BILLAUD qui ont examiné mon travail avec soin et ont valorisé mon travail d'un point de vue industriel, ce qui est une de mes grandes préoccupations.

Je remercie M. Xavier DESROCHES pour m'avoir fait le plaisir de participer à mon jury de thèse. J'ai eu également beaucoup de plaisir à travailler avec lui au cours de l'étude.

Jean-Michel PROIX et Jean-François BILLAUD ont été des partenaires précieux, voire indispensables, tant d'un point de vue technique qu'humain, je les remercie sincèrement car ils ont grandement participé à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tous mes collègues du LPMM et du LaMSID qui m'ont aidé en répondant à mes questions. Que ma famille et tous mes amis soient assurés de mon immense gratitude et de ma sincère reconnaissance pour leur soutien permanent.

Il me faudrait des siècles entiers pour remercier mon directeur de thèse Monsieur le Professeur Alain COMBESURE, car celui qui m'apprend une lettre, je serai pour lui un esclave. Quant à lui, il était pour moi le bon directeur qui m'a imprégné la mécanique des structures, et le vrai Professeur reconnu par sa modestie, et ses idées claires, pertinentes et encourageantes qui ont fait de moi un jeune ingénieur chercheur ambitieux prêt à conquérir le monde.

Enfin, il est sûr que j'oublie certaines personnes... qu'ils m'en excusent. Trois années m'ont permis de rencontrer beaucoup de personnes, qui ont toutes eu un rôle dans ma vie et par conséquent dans la construction de ce travail. Ils se reconnaîtront.

Introduction

Contexte

Le groupe EDF est un leader européen de l'énergie, présent sur tous les métiers de l'électricité, de la production au négoce et de plus en plus actif sur la chaîne du gaz en Europe. Acteur principal du marché français de l'électricité nucléaire, il est solidement implanté en Grande-Bretagne, en Allemagne et en Italie.

EDF garantit la maîtrise technique et économique de ses moyens de production d'électricité, de la conception à la fin de vie. Les exigences de sûreté et de disponibilité nécessitent d'étayer les décisions de mise en exploitation, de réparation ou de remplacement par la simulation numérique. L'analyse du comportement réel et des risques des structures mécaniques et de génie civil en fonctionnement passe par la maîtrise des modélisations non linéaires en mécanique et en thermique. Pour répondre à ces enjeux, le département Analyses Mécaniques et Acoustiques de la division Recherche et Développement d'EDF a développé un code de calcul mécanique par éléments finis nommé Code-Aster.

Au sein des unités de production, on peut dénombrer des matériels : réacteurs nucléaires, tuyauteries, enceinte de confinement, pompes, tour de refroidissement...etc. (voir Figure 1 ainsi qu'un *Exemple de maillage 3D et centrales nucléaires* Figure 2). Ce sont des structures minces (une dimension très faible par rapport au deux autres dimensions). Pour modéliser ces structures, nous pouvons utiliser des éléments finis de type coque 2D. Pourtant, ces structures sont souvent raccordées aux autres structures épaisses (fondations, supports, murs ...) qui sont modélisées par des éléments finis volumiques 3D. La liaison entre deux types d'éléments 2D et 3D nous pose donc un problème de raccordement entre ces maillages 2D et 3D. Le développement d'un élément fini de type coque-solide qui a un comportement coque mais avec une géométrie tridimensionnelle devient ainsi un réel besoin.

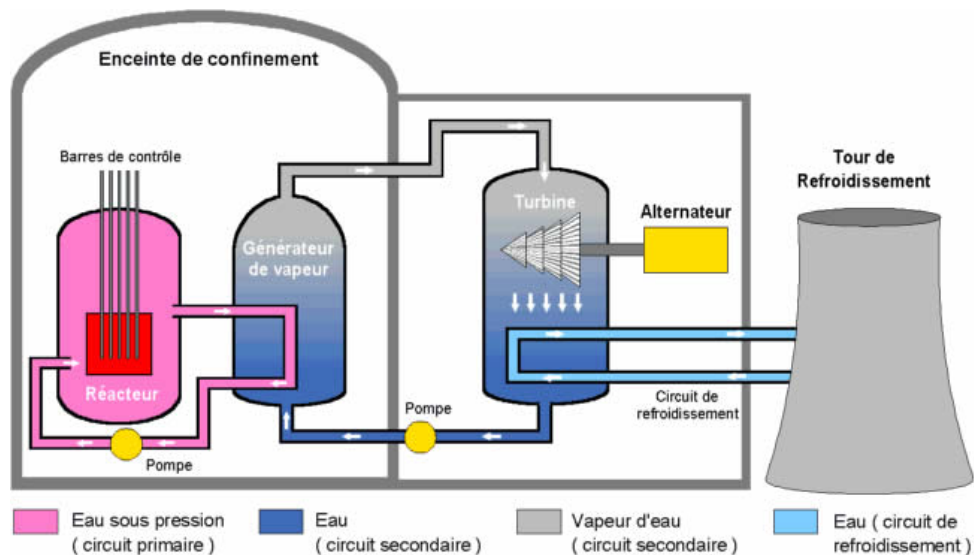


Figure 1. Schéma de fonctionnement d'une centrale nucléaire

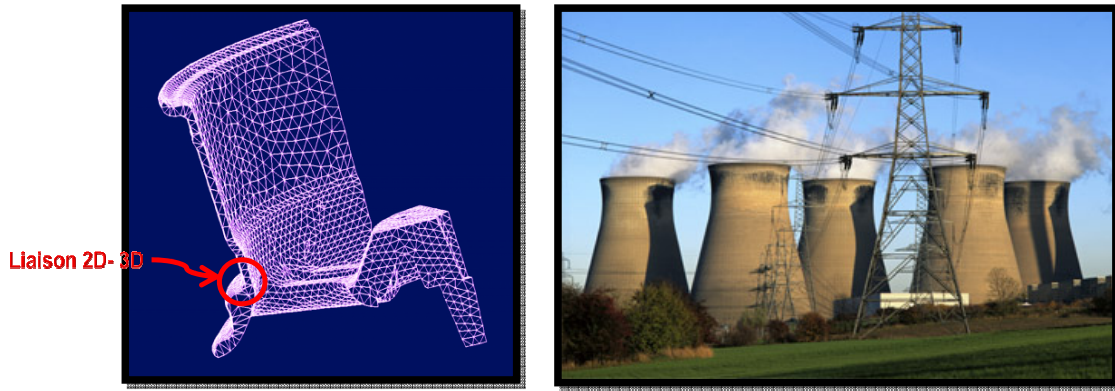


Figure 2. Exemple de maillage 3D et centrales nucléaires

Un élément de type solide-coque de géométrie hexaédrique à cinq points de Gauss a récemment été implanté dans le code ASTER. Les bonnes performances de cet élément, nommé SHB8PS, ont été mises en évidence par Abed-Meraim et Combescure [2], ainsi que par Legay dans [52]. Cet élément représente une coque épaisse obtenue à partir d'une formulation purement tridimensionnelle. Il possède huit nœuds et cinq points d'intégration répartis selon la direction de l'épaisseur. La loi de comportement tridimensionnelle a également été modifiée pour se rapprocher du comportement des coques et éviter certains verrouillages (cisaillement, membrane). Pour éliminer les modes à énergie nulle dus à la sous-intégration, une technique efficace de stabilisation a été utilisée en suivant la démarche de Belytschko et Bindeman [21], Belytschko et al. [23]. De même, l'opérateur gradient discrétisé a été modifié pour l'élimination des différents blocages. Ainsi, la version obtenue de cet élément possède les avantages suivants :

- Capacité à modéliser des structures tridimensionnelles minces avec peu d'éléments de maillage grâce à l'élanement important toléré (gain de temps de calcul significatif) ;
- Maillage simplifié de géométries complexes où coques et éléments solides doivent cohabiter (renforts ou brides par exemple) sans avoir les problèmes classiques de raccordements de maillages faits de différents types d'éléments.

Motivation de la thèse

Toutefois, l'élément hexaédrique SHB8PS ne permet pas de mailler des géométries de formes complexes quelconques. Le développement d'un élément similaire mais de géométrie prismatique est donc nécessaire : SHB6.

Plusieurs travaux de recherche sur l'élément de coque volumique SHB6 à six nœuds ont été réalisés et implantés dans le code de calcul INCA. L'élément SHB6 est également sous-intégré. Outre la réduction considérable des temps de calculs, la méthode de sous-intégration permet de réduire nombre des différents verrouillages rencontrés dans la mise en œuvre numérique des éléments finis. Cependant, cette sous-intégration n'a pas que des avantages : elle introduit malheureusement des modes parasites associés à une énergie nulle. En statique, ceci peut conduire à une singularité de la matrice de raideur globale pour certaines conditions aux limites. En dynamique transitoire, en revanche, cela conduit à des modes en sablier « hourglass » qui vont déformer le maillage de façon irréaliste et qui finissent par faire

diverger la solution. Cette déficience du rang de la matrice de raideur, due à la sous-intégration, doit donc être comblée en rajoutant à la rigidité élémentaire une matrice de stabilisation. Le noyau de la nouvelle rigidité, obtenue par ce moyen, doit se réduire aux seuls modes correspondants aux mouvements de corps rigides.

Les premières études menées sur le SHB6 (Abed-Meraim et al.) ont prouvé que cet élément ne présentait pas de modes de *hourglass*, mais après implantation, elles ont aussi montré que celui-ci présentait un sévère blocage numérique, notamment dans les problèmes dominés par la flexion où un cisaillement parasite induit un verrouillage en cisaillement. La méthode « *Assumed strain* » a ensuite été utilisée pour éliminer certains verrouillages de cet élément SHB6. Le principe de cette méthode, largement utilisée dans la littérature, consiste à projeter l'opérateur gradient discrétisé $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ sur un sous-espace approprié afin d'éviter les différents problèmes liés au verrouillage. Les auteurs ont réalisé différentes projections pour trouver celle qui élimine le maximum de verrouillages. Leurs travaux ont apporté quelques améliorations à l'élément SHB6 qui a montré une assez bonne convergence dans plusieurs cas-tests adaptés aux éléments de coques. Cependant, certains verrouillages sévères de type cisaillement ou membrane persistaient encore dans certaines situations montrant que la formulation de l'élément SHB6 pouvait encore être améliorée du point de vue du verrouillage.

Motivés par ces premiers résultats encourageants, nous poursuivons l'effort mené sur l'élément SHB6 pour aboutir à une version qui souffre le moins de verrouillage.

Objectifs et contenu de la thèse

Ce travail entre dans le cadre général du développement et de la validation d'éléments finis de type coques volumiques, stables et efficaces dans le code de calcul ASTER développé par EDF R&D. Ce projet regroupe quatre partenaires : le LaMSID-EDF R&D, le CETIM, le LaMCoS de l'INSA de Lyon et le LPMM de l'ENSAM CER de Metz.

Le premier objectif est de développer des éléments finis à géométrie volumique capables de représenter correctement et efficacement le comportement de structures minces. En effet, dans sa démarche de conception et de validation des structures, l'ingénieur est souvent confronté à des calculs en éléments finis très coûteux en temps. Aussi, le recours à des éléments à interpolation linéaire et aux méthodes de sous-intégration est de plus en plus courant. Afin d'éviter les verrouillages, nous utilisons la méthode « *Assumed strain* ». Ces techniques sont exposées dans le premier chapitre de la thèse.

Le premier chapitre fait état d'une revue bibliographique qui apporte des éléments théoriques sur les différentes méthodes de développement des éléments finis coques volumiques réalisées par des recherches durant ces dernières décennies.

Le deuxième chapitre décrit la formulation de l'élément fini solide-coque SHB6 et des modifications introduites dans sa formulation. Ensuite, une série de cas tests standards de la littérature lui sera appliquée. À travers ces exemples numériques, les améliorations introduites par rapport aux différents blocages seront mises en évidence. Des résultats relatifs à la rapidité de convergence seront aussi donnés et des comparaisons seront faites avec d'autres éléments finis 3D.

Le deuxième chapitre présente également une extension de cette famille d'éléments finis de type solide-coque. Nous développons donc deux éléments finis de géométrie prismatique et hexaédrique, respectivement, mais de formulation quadratique nommés SHB15 et SHB20. Ce sont successivement des éléments à 15 et 20 nœuds. Ils sont également sous-intégrés par 15 et 20 points de Gauss et possèdent une direction privilégiée selon l'épaisseur de l'élément. Une série de cas tests numériques standards est également exposée pour montrer les gains et avantages en termes de convergence ainsi qu'en termes de temps de calcul apportés par ces éléments par rapport aux autres éléments finis 3D.

Par ailleurs, l'élément SHB8PS actuel a été couplé à seulement certaines lois de comportement telles que élastique ou élasto-plastique avec écrouissage isotrope de type von Mises. Le second objectif de cette étude est d'élargir le champ d'application de l'élément SHB8PS ainsi que les autres éléments finis solide-coques SHB6, SHB15 et SHB20 à d'autres lois de comportement du code ASTER. Le troisième chapitre présente le principe théorique de ce couplage ainsi que des cas tests pour valider cette approche.

Chapitre I

Étude bibliographique

Dans sa démarche de conception et de validation des structures, l'ingénieur en mécanique a de plus en plus recours aux outils numériques de simulation. La méthode numérique la plus répandue et certainement la plus utilisée de nos jours est la méthode des éléments finis (MEF). Cependant, la méthode des éléments finis classique, basée sur la formulation tridimensionnelle du principe des travaux virtuels et utilisant des approximations de bas degrés, devient inefficace lorsqu'elle est appliquée à des structures minces (arches, planchers, voiles ...). Or, ces dernières constituent la majorité des structures industrielles et de génie civil. Pour résoudre ce problème, plusieurs travaux de recherche ont été menés dans lesquels les auteurs ont développé plusieurs techniques et plusieurs modélisations différentes de l'approche coque. Dans l'objectif de développer des éléments solide-coques performants, nous allons présenter brièvement certaines techniques et modélisations d'éléments finis de type coque issus de la littérature que nous trouvons proches de notre objectif. Cette étude bibliographique sur le développement des modélisations de coques réalisées le long des trois dernières décennies, nous donne une vision globale des avantages et des inconvénients de chaque modélisation. Cela nous permet d'avoir une direction de travail plus pertinente. Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques notions de base de la mécanique des milieux continus (MMC), de la MEF, et des modélisations de type coques existantes.

1. Études de la MMC et de la MEF

Le contenu de ce paragraphe résulte d'une petite synthèse des références consultées suivantes: Batoz et Dhatt [16], Dhatt et Touzot [34], Zienkiewicz et Taylor [91]. Nous commençons d'abord par un rappel des théories de base de la mécanique des milieux continus.

1.1. Cinématique des milieux continus

Considérons un corps solide quelconque à l'état initial appelé configuration initiale Ω_0 . Ce corps qui est soumis à différentes sollicitations statiques et/ou dynamiques, se transforme au cours du temps t . À un instant t quelconque, il arrive à un nouvel état appelé configuration actuelle Ω_t (voir Figure 3).

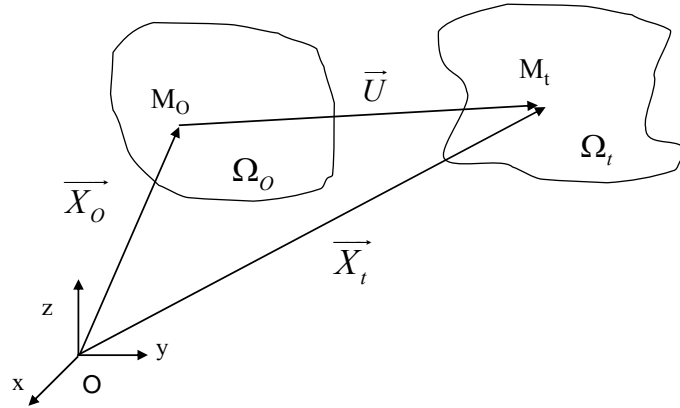


Figure 3. Cinématique des milieux continus

Afin de décrire cette transformation, nous utilisons un repère cartésien global $O(x, y, z)$. Donc, un point M_0 matériel quelconque appartenant à Ω_0 est repéré par le vecteur des coordonnées $\vec{X}_0(x_0, y_0, z_0)$. À l'instant t , le point M_0 devient un nouveau point M_t appartenant à Ω_t , qui est maintenant repéré par le vecteur des coordonnées $\vec{X}_t(x_t, y_t, z_t)$. Dans le cadre d'une description lagrangienne, nous pouvons écrire :

$$\vec{X}_t = \vec{X}_0 + \vec{M}_0\vec{M} = \vec{X}_0 + \vec{U} \quad (1)$$

où le vecteur \vec{U} est appelé le déplacement du point M_0 .

L'équation (1) peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{x}_o + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2)$$

Nous avons :

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_o} \\ \frac{\partial x}{\partial y_o} \\ \frac{\partial x}{\partial z_o} \end{bmatrix} \cdot d\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_o} & \frac{\partial x}{\partial y_o} & \frac{\partial x}{\partial z_o} \\ \frac{\partial y}{\partial x_o} & \frac{\partial y}{\partial y_o} & \frac{\partial y}{\partial z_o} \\ \frac{\partial z}{\partial x_o} & \frac{\partial z}{\partial y_o} & \frac{\partial z}{\partial z_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_o \\ dy_o \\ dz_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+u_{,x_o} & u_{,y_o} & u_{,z_o} \\ v_{,x_o} & 1+v_{,y_o} & v_{,z_o} \\ w_{,x_o} & w_{,y_o} & 1+w_{,z_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_o \\ dy_o \\ dz_o \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_o \quad (3)$$

La matrice \mathbf{F} est appelée le tenseur gradient de transformation. Nous écrivons également :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{L}_0; \quad \mathbf{L}_0 = \mathbf{D}_0 + \mathbf{W}_0$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} u_{,x_o} & u_{,y_o} & u_{,z_o} \\ v_{,x_o} & v_{,y_o} & v_{,z_o} \\ w_{,x_o} & w_{,y_o} & w_{,z_o} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_0 = \frac{1}{2}[\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_0^T] = \begin{bmatrix} u_{,x_o} & \frac{1}{2}(u_{,y_o} + v_{,x_o}) & \frac{1}{2}(u_{,z_o} + w_{,x_o}) \\ & v_{,y_o} & \frac{1}{2}(v_{,z_o} + w_{,y_o}) \\ sym & & w_{,z_o} \end{bmatrix};$$

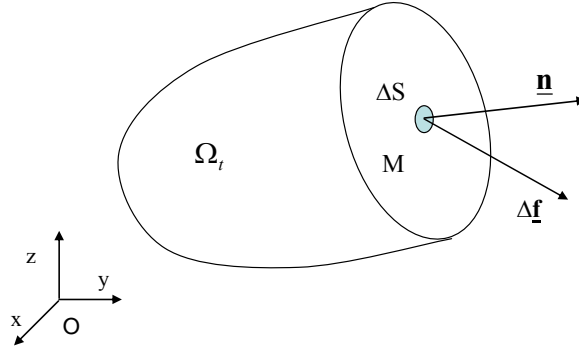
$$\mathbf{W}_0 = \frac{1}{2}[\mathbf{L}_0 - \mathbf{L}_0^T] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \theta_x = \frac{1}{2}(w_{,y_o} - v_{,z_o}); \theta_y = \frac{1}{2}(u_{,z_o} - w_{,x_o}); \theta_z = \frac{1}{2}(v_{,x_o} - u_{,y_o})$$

où $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ représentent des rotations infinitésimales autour des axes x, y, z , ne produisant aucune déformation. \mathbf{D}_0 est le tenseur des déformations linéarisées, ou petites déformations.

1.2. Contraintes, équations d'équilibre et déformations

Considérons la force $\Delta \mathbf{f}$ qui s'exerce sur un élément de surface ΔS de normale \mathbf{n} au point M dans la configuration Ω_t (voir Figure 4).


 Figure 4. Facette de normale \mathbf{n}

Le vecteur des contraintes au point M est défini par le postulat de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma}(M, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} \right) \quad (4)$$

Il existe ainsi une infinité de vecteurs des contraintes au point M dépendant de l'orientation du vecteur \mathbf{n} . Soient $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{i})$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{j})$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k})$ les vecteurs des contraintes agissant, respectivement, sur les facettes de normales \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} du repère cartésien $O(x, y, z)$. Leurs composantes sont définies de la manière suivante en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{i}) &= \sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{yx} \mathbf{j} + \sigma_{zx} \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{j}) &= \sigma_{xy} \mathbf{i} + \sigma_{yy} \mathbf{j} + \sigma_{zy} \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}) &= \sigma_{xz} \mathbf{i} + \sigma_{yz} \mathbf{j} + \sigma_{zz} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy au point M est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

L'équilibre des moments autour des axes passant par M , en l'absence de couples répartis à l'intérieur et à la surface du solide conduit à :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} ; \sigma_{xz} = \sigma_{zx} ; \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (7)$$

Nous définissons ainsi le vecteur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ à six composantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{zy}] \quad (8)$$

Le solide dans la configuration actuelle Ω_t est soumis à des sollicitations comme des forces surfaciques \mathbf{f}_s appliquées sur une partie de la frontière $\partial_1 \Omega_t$, des déplacements

imposés \mathbf{u}_d appliqués sur une partie de la frontière $\partial_2\Omega_t$, et des forces volumiques \mathbf{f}_v (qui peuvent contenir des termes d'inertie). La somme des parties de la frontière $\partial_1\Omega_t$ et $\partial_2\Omega_t$ représente la frontière totale fermée $\partial\Omega_t$ de Ω_t . L'équilibre du système s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} & \forall M \in \Omega_t \\ \mathbf{u}(M) = \mathbf{u}_d & \forall M \in \partial_2\Omega_t \\ \boldsymbol{\sigma}(M) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_s & \forall M \in \partial_1\Omega_t \end{cases} \quad (9)$$

où $\mathbf{div} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$

Dans notre étude des structures minces, subissant des transformations élastiques caractérisées par de grands déplacements et de petites déformations, on utilise la mesure des déformations de Green–Lagrange linéarisé :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ sym & & w_{,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ sym & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Les déformations $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ (parfois notées $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) sont les déformations dites normales ; $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ (ou $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$) sont les déformations de cisaillement.

1.3. Relation de comportement

Pour un matériau donné, sa relation de comportement ou sa loi constitutive permet de déterminer les contraintes en fonction des déformations, des variables internes ... Pour les matériaux dits élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations se traduisent sous la forme simple générale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (12)$$

où \mathbf{C} est un tenseur de comportement d'ordre 4 dont les composantes font intervenir les caractéristiques physiques du matériau, $\boldsymbol{\sigma}_0$ est le tenseur de contrainte à l'état initial (pour simplifier l'écriture du problème, nous supposons que $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$ dans la suite).

Les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ étant symétriques, nous avons :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \text{ et } C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (13)$$

En notation de Voigt, nous écrivons ainsi :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (14)$$

où \mathbf{C} est une matrice de comportement 6x6. $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont donnés en (8) et (11).

En élasticité tridimensionnelle, la matrice de comportement d'un matériau élastique linéaire homogène et isotrope est de la forme suivante :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \text{sym} & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

où E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson

1.4. Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels consiste à satisfaire l'équation d'équilibre local (9) sous forme intégrale, on dit aussi sous forme « faible » :

$$W = - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_v) dV = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \quad (16)$$

où \mathbf{u}^* représente un ensemble de fonctions tests : les déplacements virtuels. On peut transformer le premier terme de cette équation en effectuant une intégration par parties :

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) dV = \int_{\Omega_t} u_i^* \sigma_{ij,j} dV = \int_{\partial\Omega_t} u_i^* \sigma_{ij} n_j dS - \int_{\Omega_t} u_{i,j}^* \sigma_{ij} dV \quad (17)$$

Afin de réduire le nombre d'inconnues du problème, on choisit un champ des déplacements virtuels nul sur $\partial_2\Omega_t$ (i.e. cinématiquement admissible). Nous avons ainsi :

$$\int_{\partial\Omega_t} u_i^* \sigma_{ij} n_j dS = \int_{\partial_1\Omega_t} u_i^* \sigma_{ij} n_j dS + \int_{\partial_2\Omega_t} u_i^* \sigma_{ij} n_j dS = \int_{\partial_1\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS \quad (18)$$

On obtient finalement la forme faible de l'équilibre du système dans la configuration actuelle Ω_t :

$$\begin{cases} W = \int_{\Omega_t} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v dV - \int_{\partial_1\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 & \forall \mathbf{u}^* \\ W_{\text{int}} = \int_{\Omega_t} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\sigma} dV ; W_{\text{ext}} = \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v dV + \int_{\partial_1\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS / \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_2\Omega_t \end{cases} \quad (19)$$

On définit les déformations virtuelles :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* & \varepsilon_{yy}^* & \varepsilon_{zz}^* & 2\varepsilon_{xy}^* & 2\varepsilon_{xz}^* & 2\varepsilon_{yz}^* \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} u_{,x}^* & v_{,y}^* & w_{,z}^* & u_{,y}^* + v_{,x}^* & u_{,z}^* + w_{,x}^* & v_{,z}^* + w_{,y}^* \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (20)$$

En introduisant les équations (14) et (20) dans (19), on obtient l'expression du principe des travaux virtuels sous forme intégrale en fonction de \mathbf{u}^* et \mathbf{u} :

$$\begin{cases} W(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v dV - \int_{\partial_1\Omega_t} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_s dS = 0 & \forall \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_2\Omega_t \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_2\Omega_t \end{cases} \quad (21)$$

Un problème d'élasticité consiste ainsi à trouver \mathbf{u} satisfaisant l'expression (21). Cette forme variationnelle sert de base pour construire les modèles déplacements en éléments finis.

1.5. Principe variationnel

Nous pouvons définir un modèle général où toutes les relations du problème d'élasticité (9), (11) et (14) sont représentées sous forme variationnelle comme la forme intégrale suivante :

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\Omega_t} \left(\mathbf{u}^{*T} \cdot (\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_v) + \boldsymbol{\sigma}^{*T} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \right) dV \\ &- \int_{\partial_1\Omega_t} \mathbf{u}^{*T} \cdot (\mathbf{f}_s - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{\partial_2\Omega_t} [\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}]^T \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d) dS = 0 \quad \forall \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^* \end{aligned} \quad (22)$$

Après intégration par parties du premier terme de l'équation (22), on obtient :

$$\begin{aligned}
 W = & \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^{*T}]^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{*T} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right) - \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{u}^{*T} \cdot \mathbf{f}_v \right) dV \\
 & - \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^{*T} \cdot (\mathbf{f}_s - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{\partial_2 \Omega_t} \left([\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}]^T \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d) + \mathbf{u}^{*T} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \right) dS = 0 \quad \forall \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*
 \end{aligned} \quad (23)$$

L'expression (23) est un principe variationnel de type mixte (faisant intervenir les variables mixtes : déplacements, déformations, contraintes).

Il existe une fonctionnelle Π telle que sa variation en $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ corresponde à W de l'équation (23). En identifiant $\delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^*$, $\delta \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}^*$, $\delta \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}^*$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = & \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right) - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_v \right) dV \\
 & - \int_{\partial_1 \Omega_t} \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{f}_s - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{\partial_2 \Omega_t} \left([\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]^T \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d) \right) dS \quad \text{avec} \quad \delta \Pi = W = 0
 \end{aligned} \quad (24)$$

L'expression (24) est parfois appelée fonctionnelle mixte à 3 champs de Hu–Washizu.

1.6. Discrétisation par éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique particulière d'approximation des fonctions solutions par sous-domaines (éléments). Les inconnues notées \mathbf{U} sont des valeurs de ces fonctions en certains points ou nœuds de chaque élément. La forme variationnelle définie sur le milieu continu est ainsi représentée par une forme variationnelle discrétisée qui fait intervenir les inconnues nodales \mathbf{U} . Nous pouvons résumer les démarches de la MEF comme suit :

- Représenter le domaine de volume V par un ensemble d'éléments de volume V_e :

$$V = \sum V_e$$

- Représenter la géométrie de chaque élément V_e par une relation d'interpolation :

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_I N_I(\xi, \eta, \zeta) x_I = N_I(\xi, \eta, \zeta) x_I$$

où x est la position d'un point quelconque ; x_I sont des coordonnées des nœuds I définissant V_e ; (ξ, η, ζ) sont des coordonnées paramétriques ; N_I sont des fonctions d'interpolation (fonctions de forme) dépendant des variables paramétriques.

- Représenter la fonction solution u sur chaque élément :

$$u(\xi, \eta, \zeta) = N_I^*(\xi, \eta, \zeta) u_I \quad ; \quad u^*(\xi, \eta, \zeta) = N_I^*(\xi, \eta, \zeta) u_I^*$$

où u sont fonctions solutions ; u^* sont fonctions virtuelles ; u_I sont des variables nodales caractérisant la fonction solution ; u_I^* sont des variables nodales virtuelles ; N_I^* sont des fonctions de forme dépendant des variables paramétriques. Si $N_I^* \equiv N_I$ nous avons des éléments iso-paramétriques.

- Représenter la forme variationnelle discrétisée sur chaque élément en fonction de \mathbf{U}_e et \mathbf{U}_e^* :

$$W_e = \mathbf{U}_e^{*T} \cdot (\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{U}_e - \mathbf{f}_e)$$

où \mathbf{K}_e est la matrice de rigidité élémentaire ; \mathbf{f}_e est le vecteur élémentaire des sollicitations.

- Assembler la forme variationnelle :

$$W = \sum_e W_e = \sum_e \mathbf{U}_e^{*T} \cdot (\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{U}_e - \mathbf{f}_e) = \mathbf{U}^{*T} \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{F}) = 0 \quad \forall \mathbf{U}^*$$

soit
$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

où \mathbf{K} , \mathbf{F} , \mathbf{U} , \mathbf{U}^* sont successivement la matrice de rigidité globale, le vecteur global des sollicitations, l'ensemble des variables nodales, l'ensemble des variables nodales virtuelles obtenus par assemblage des matrices élémentaires.

- Résoudre les relations $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$ en tenant compte des conditions aux limites. Pour un problème linéaire : $\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}$.
- Évaluer des quantités relatives à chaque élément :
 - extraire \mathbf{U}_e de \mathbf{U}
 - calculer des déformations, des contraintes ...

Pour des problèmes non-linéaires, l'état de la configuration à l'instant $t+1$ dépend de celui à l'instant t . Donc, la matrice de rigidité dépend également des variables que l'on cherche. Le problème ne peut donc pas être résolu explicitement. On va donc, le résoudre de façon itérative par l'intermédiaire d'une suite de problèmes linéaires. Nous présentons ici le principe de la méthode de Newton–Raphson par exemple :

- Supposons que l'on ait \mathbf{U}_t à l'instant t tel que :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U}_t)] \cdot \mathbf{U}_t - \mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_t) \neq \mathbf{0}$$

- On cherche $\mathbf{U}_{t+1} = \mathbf{U}_t + \Delta \mathbf{U}$ vérifiant :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U}_{t+1})] \cdot \mathbf{U}_{t+1} - \mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_{t+1}) = \mathbf{0}$$

- En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{U}_{t+1}) &= \mathbf{R}(\mathbf{U}_t + \Delta\mathbf{U}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_t) + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}_t} \right] \cdot \Delta\mathbf{U} + o^2 \\ &\approx \mathbf{R}(\mathbf{U}_t) - [\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_t)] \cdot \Delta\mathbf{U} \end{aligned}$$

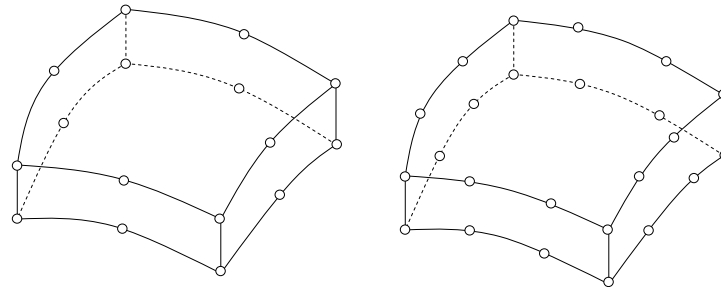
- On a alors le problème linéaire $[\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_t)] \cdot \Delta\mathbf{U} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_t)$ à résoudre. Une fois trouvé $\Delta\mathbf{U}$, on remet à jour $\mathbf{U}_{t+1} = \mathbf{U}_t + \Delta\mathbf{U}$ et ainsi de suite.

2. Modélisations de coques existantes

2.1. Modélisation de coque tridimensionnelle dégénérée

Parmi les premiers à avoir tenté de fournir une réponse au problème de coque, on peut citer Ahmad [3] dans les années 70. Ces modèles, nommés éléments finis tridimensionnels dégénérés, se basent sur des éléments iso-paramétriques volumiques n'ayant que deux nœuds suivant la direction de l'épaisseur (voir

Figure 5). Ainsi, ces éléments respectent l'hypothèse de sections droites classiquement admise pour les coques. À cela est ajoutée une modification du principe des puissances virtuelles afin de négliger l'énergie engendrée par la déformation normale transverse. Cette modification impose, en particulier, l'utilisation d'une relation de comportement matériau prenant en compte l'hypothèse des contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$).



a) Modèle à 16 noeuds

b) Modèle à 24 noeuds

Figure 5. Modèles coques 3D d'Ahmad

L'auteur définit les contraintes par la formule suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{C} est une matrice de comportement du matériau (5x5) anisotrope en général. Dans le cas d'un matériau isotrope, cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix}$$

où E est le module d'Young, ν est le coefficient de Poisson, et une constante k introduite dans les deux derniers termes de cisaillement vaut $6/5 = 1,2$. Le rôle de k est d'améliorer l'approximation de déplacement en cisaillement. Selon la définition des déplacements de cette modélisation, la distribution des déformations de cisaillement est constante à travers l'épaisseur de l'élément, mais en réalité cette distribution est approximativement parabolique. La valeur $k = 1,2$ est le rapport des énergies de déformation de ces deux approches.

Il reste ensuite à choisir un degré d'interpolation suffisant dans les directions du plan moyen pour éviter les phénomènes de blocage en cisaillement transverse. La qualité principale de cette modélisation, outre son aspect volumique, est qu'elle s'appuie seulement sur des degrés de liberté de déplacement. Aucun degré de liberté de rotation n'étant introduit, le passage de l'analyse linéaire à non-linéaire et la connexion aux éléments volumiques 3D deviennent des opérations simples. Son inconvénient est la modification du principe de puissances virtuelles, ce qui revient à modifier la relation de comportement de matériau.

Basés sur cette modélisation, un ensemble d'éléments ont été développés par plusieurs auteurs. Nous pouvons mentionner ici les travaux de Brendel et Ramm [27], Parisch [64], Hughes et Liu [47].

Afin d'éviter de modifier le comportement du matériau, Kim et al. [49] ont proposé un élément iso-paramétrique hexaédrique à 20 nœuds (voir Figure 6). La cinématique, interpolée par l'intermédiaire des degrés de liberté de déplacement (DDL) aux nœuds, est associée à une loi matériau tridimensionnelle classique pour le calcul des contraintes. Afin de réduire les blocages en cisaillement transverse, l'évaluation du principe de puissances virtuelles est effectuée par une intégration numérique réduite 2x2x3 points de Gauss. Pourtant, cette modélisation reste chère en temps de calcul par rapport aux éléments coques car elle fait intervenir 9 DDL le long d'une fibre épaisseur, alors que les éléments coques n'en font intervenir que 6. Cela incite à plutôt s'orienter vers des éléments de faible degré.

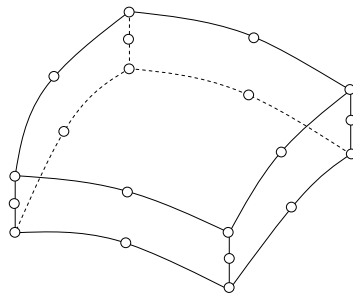


Figure 6. Modèles coques 3D de Kim Y.H.

2.2. Modélisations de coque en formulation mixte

Avant d'aborder les modélisations de coque en formulation mixte, nous rappelons ci-après les hypothèses cinématiques de Reissner–Mindlin. Afin de rester le plus généraliste possible, on se limitera à la modélisation capable de prendre en compte le cisaillement transverse. Cette théorie s'appuie sur l'hypothèse des sections droites qui consiste à supposer qu'une droite normale à la surface moyenne de la coque reste droite au cours de la transformation. Cette droite subit donc seulement une rotation sans élongation (voir Figure 7).

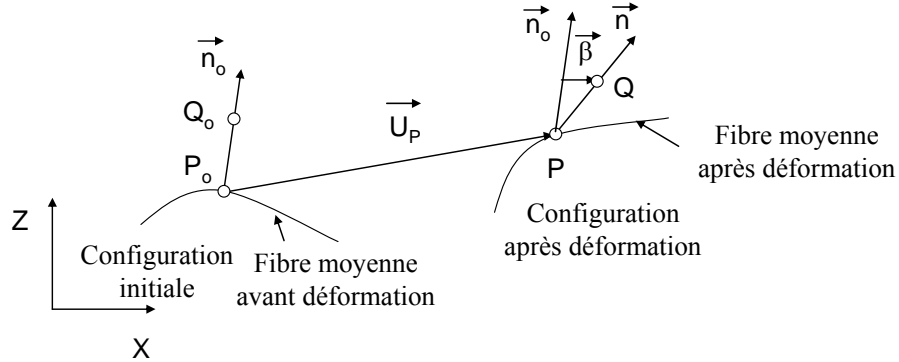


Figure 7. Hypothèse cinématique de Reissner–Mindlin

Ainsi, la cinématique peut s'écrire :

$$\vec{U}_Q = \vec{U}_P + z\vec{\beta}$$

où $\vec{\beta}$ est un vecteur de rotation de la fibre droite, P_0 représente la projection d'un point Q_0 sur la surface moyenne de la configuration initiale, P représente la projection du point Q sur la surface moyenne de la configuration déformée et z est la distance du point Q_0 par rapport à la surface moyenne.

Donc, le déplacement d'un point quelconque de la coque est identifié par le déplacement de sa projection sur la surface moyenne et par la rotation de la fibre droite associée à ce point. Les modélisations de coques basées sur cette hypothèse sont nommées « Mixte » car elles possèdent non seulement des inconnues en déplacement, mais aussi des inconnues en rotation à chaque nœud.

À notre connaissance, la première modélisation de plaque de type mixte fût celle d'Hermann [44]. Mais ce n'est qu'à la fin des années 70 qu'ils ont été introduits pour tenter de surmonter les difficultés liées au blocage en cisaillement transverse, quand le rapport entre largeur et épaisseur de la plaque L/h devient grand, ainsi qu'aux modes parasites. L'apport de Malkus et Hughes [58] sur la notion d'équivalence entre les modèles mixtes et ceux en déplacements avec intégration sélective fût d'une grande utilité, en permettant une justification des techniques d'intégration réduite ou sélective. En général, les variables cinématiques w, β_x, β_y sont interpolées par les relations suivantes :

$$w = \sum_{I=1}^n N_I w_I \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n N_I \begin{Bmatrix} \beta_{xI} \\ \beta_{yI} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

où w_I , β_{xI} et β_{yI} sont successivement des déplacements et des rotations aux nœuds ; N_I sont des fonctions de forme (fonctions d'interpolation), et n est le nombre total de nœuds de l'élément. Pour un élément triangulaire à trois nœuds et à l'interpolation linéaire (voir Figure 8), par exemple, nous avons :

$$N_1 = 1 - \xi - \eta ; \quad N_2 = \xi ; \quad N_3 = \eta \quad \text{où} \quad \xi \in [0,1] ; \quad \eta \in [0,1-\xi] \quad \text{et} \quad n = 3$$

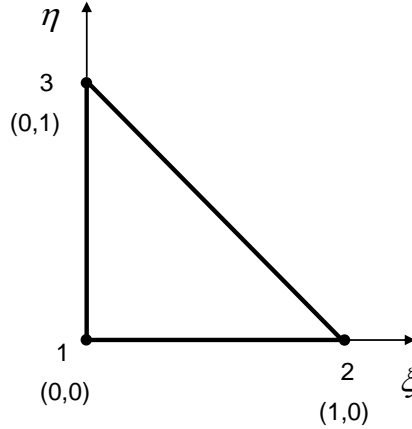


Figure 8. Éléments de référence de coque triangulaire à 3 nœuds

Batoz et al. [14], Batoz et Ben Tahar [15] ont montré qu'un élément mixte simple, triangulaire à 3 nœuds avec approximations linéaires en déplacement w et rotations β_x, β_y et efforts tranchants T_x, T_y constants, conduit à un blocage sévère en cisaillement transverse (CT).

Afin d'éliminer ce blocage, plusieurs auteurs ont utilisé la technique nommée des fonctions « bulle ». Le principe de cette technique est d'enrichir l'interpolation de la formule (25) en introduisant des variables généralisées. Par exemple, l'approximation de l'élément coque triangulaire à 3 nœuds ci-dessus peut être enrichie en introduisant une variable α de la façon suivante :

$$w = \sum_{I=1}^3 N_I w_I + \sum_{J=1}^3 N_J \alpha_J \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n N_I \begin{Bmatrix} \beta_{xI} \\ \beta_{yI} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

où α_j sont les déplacements des points sur les trois côtés du triangle et $N_j = (1 - \xi - \eta)\xi\eta$. Le terme N_j représente une fonction « bulle » qui est nulle sur les trois côtés du triangle. Plus généralement, ces variables généralisées peuvent être introduites dans l'interpolation des déplacements ou des rotations et l'ordre des fonctions « bulle » peut être quadratique, cubique ou d'ordre 4. En se basant sur cette technique, une famille d'éléments finis de plaque ou coque a vu le jour. Nous citons en particulier :

- L'élément de Pinsky et Jasti [67] basé sur un modèle mixte général dans lequel l'approche des variables cinématiques est associée à un ensemble de fonctions « bulle » indépendantes exprimées en fonction des paramètres généralisés que les auteurs éliminent par condensation statique au niveau local. L'élément « 4-node bubble » est défini par une interpolation bilinéaire des variables cinématiques w ,

β_x, β_y et par une approximation cubique des fonctions « bulle » internes. Il y a 29 paramètres, au total, à éliminer par condensation statique, ce qui est élevé pour un élément de plaque.

- La famille d'éléments mixtes-hybrides de Saleeb et Chang [73], Saleeb et al. [74] : l'élément quadrilatéral HMPL5 est associé à 3 fonctions « bulle » w, β_x, β_y représentées par le 5^{ème} nœud interne. Les fonctions d'interpolation des variables cinématiques sont biquadratiques, celles des variables mécaniques comme moments $\{M\}$ et efforts de cisaillement $\{T\}$ étant linéaires. L'élément triangulaire HMPL3 est plus simple à formuler (w, β_x, β_y : linéaires, $\{M\}$: constant et $\{T\}$: linéaire).
- L'élément T63B3 de Zienkiewicz et Lefebvre [93] est un triangle à 6 nœuds avec fonctions « bulle » d'ordre 4 pour β_x, β_y . Il possède 12 variables internes (3 pour chacune des variables T_x, T_y, β_x et β_y) qui sont éliminées au niveau local par condensation statique. Cet élément est considéré par plusieurs auteurs comme robuste. De bons résultats ont été obtenus pour les problèmes standards de plaques minces et épaisses.
- Onate et Castro [60], Onate et al. [61], Papadopoulos et Taylor [62] ont proposé une famille d'éléments DRM (Discrete Reissner Mindlin) triangulaires et quadrilatéraux avec des degrés de liberté additionnels au milieu des côtés. Ces éléments, basés sur le modèle de déplacement avec déformations de CT indépendantes, généralisent ceux de Kirchhoff discrets DKT et DKQ de Batoz et Ben Tahar [15], Batoz et Dhatt [19].

Pourtant, tous les éléments mixtes précédents ont un inconvénient majeur qui est le temps de calcul élevé causé par l'introduction des fonctions « bulle ». Ils nécessitent plus de points d'intégration numérique au calcul des matrices élémentaires. De plus, le temps de calcul devient encore plus grand lorsque l'on traite des problèmes non-linéaires... L'augmentation des variables généralisées associées aux fonctions « bulle » est également un inconvénient, lié cette fois-ci aux opérations d'inversion de matrices lors du processus de condensation statique.

Sans passer par l'utilisation des fonctions « bulle », une autre famille d'éléments de plaque ou coque de type mixte-hybride a été développée. Nous citons ici l'élément quadrilatéral MiQ4 présenté par Ayad et al. [8]. Cet élément utilise la même interpolation de l'équation (25) pour les variables cinématiques. En revanche, les variables mécaniques $\{M\}$ et $\{T\}$ sont définis par :

$$\{M\} = [P_M] \{\alpha_M\} ; \langle M \rangle^T = \langle M_x \quad M_y \quad M_{xy} \rangle$$

$$[P_M] = \begin{bmatrix} \langle p \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p \rangle \end{bmatrix} ; \langle p \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle$$

et par :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} \\ M_{xy,x} + M_{y,y} \end{Bmatrix} = [P_T] \{\alpha_M\} ; [P_T] = \begin{bmatrix} \langle p_1 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle & \langle p_1 \rangle \end{bmatrix} ;$$

$$\langle p_1 \rangle = \langle 0 \quad j_{11} \quad j_{12} \quad \eta j_{11} + \xi j_{12} \rangle ; \langle p_2 \rangle = \langle 0 \quad j_{21} \quad j_{22} \quad \eta j_{21} + \xi j_{22} \rangle$$

où j_{mn} sont des termes de la matrice Jacobienne inverse et $\{\alpha_M\}$ représentent des paramètres indéterminés.

Ainsi, les variables mécaniques $\{M\}$ et $\{T\}$ liées à $\{\alpha_M\}$ ne sont plus indépendantes, comme c'est le cas dans les modèles mixtes classiques. La condensation statique permet d'éliminer les paramètres $\{\alpha_M\}$ et d'obtenir des éléments mixtes-hybrides à variables nodales de type déplacement et rotation. L'utilisation des équations d'équilibre pour définir $\{T\}$ en fonction de $\{\alpha_M\}$ diminue le nombre d'inconnues du problème, ce qui facilite les opérations matricielles lors du processus de condensation statique. Malheureusement, l'élément MiQ4 est bloqué en CT. Afin d'éliminer ce blocage, Ayad et al. [8] ont développé le « Modèle Mixte Projeté en Cisaillement » (Mixed Shear Projected Model). Deux modèles de plaque appelés MiSP3 (triangulaire à 3 nœuds) et MiSP4 (quadrilatéral à 4 nœuds) ont vu le jour. Ces derniers considèrent le vecteur des déformations de CT $\{\gamma\}$ indépendamment de l'interpolation des variables w, β_x, β_y , tout en gardant le nombre de paramètres généralisés $\{\alpha_M\}$ de départ. Le vecteur $\{\gamma\}$ est choisi en fonction des déformations tangentielles $\{\gamma_k\}$ sur les côtés d'un élément :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = [j][A] \{\gamma_k\}$$

Ensuite, les quantités $\{\gamma_k\}$ sont projetées sur les deux axes locaux ξ, η de l'élément en utilisant les hypothèses de Mindlin sous forme discrète :

$$\int_{\text{côtés}} \left(\gamma_s - \left(\beta_s + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right) ds = 0 \quad ; \quad s \text{ est l'axe } \xi \text{ ou } \eta \quad (27)$$

À partir des relations (27), les quantités $\{\gamma_k\}$ peuvent être déterminées en fonction des variables cinématiques $\langle w, \beta_x, \beta_y \rangle$ aux nœuds. Les paramètres $\{\alpha_M\}$, éliminés au niveau local par condensation statique, sont aussi donnés en fonctions des variables $\langle w, \beta_x, \beta_y \rangle$ aux nœuds.

Cette approche a été utilisée également pour les modèles en déplacements de Bathe et Dvorkin [11], Chapelle et Bathe [30], Cheung et Chen [32]. Les modèles MiSP3 et MiSP4 ne présentent pas de blocage de CT et passent bien les patch-tests standards. Ils peuvent être interprétés comme une amélioration du modèle mixte standard.

Pourtant, les modélisations mixtes présentées ci-dessus basées sur l'approche en contrainte plane négligent, donc, la variation de l'épaisseur des éléments au cours des

transformations. Cela devient un inconvénient quand la variation de l'épaisseur n'est pas négligeable (ex. la mise en forme des tôles). Il est nécessaire, dans ces cas, d'utiliser des théories de coques plus sophistiquées pour tenir compte de la variation de l'épaisseur. Ainsi, Buechter et al. [28] ont proposés un élément de coque à 4 nœuds et 7 degrés de liberté par nœud, utilisant une loi de comportement 3D et qui soit apte à reproduire les comportements de structures volumiques ou minces. Le modèle possède en chaque nœud 5 variables cinématiques classiques associées aux coques (3 déplacements et 2 rotations) et 2 nouvelles variables permettant de prendre en compte la variation de longueur de la fibre épaisseur. Plusieurs modélisations de ce type ont été également proposées par Parish [66], Betsch et al. [24], Bischoff et Ramm [25], Brank et al. [26], et Cardoso et Yoon [29].

De plus, les formulations de coques mixtes ont un point commun : les éléments sont modélisés par leurs surfaces moyennes. Or, dans la réalité, les structures minces (plaques, coques) et les structures volumiques tridimensionnelles coexistent fréquemment, et ces deux types d'éléments doivent pouvoir être utilisés simultanément. Cela limite l'utilisation des modèles mixtes surtout dans les structures dont l'épaisseur varie.

Des éléments effectifs à la fois pour des structures minces et des structures 3D, simplifieraient considérablement la modélisation de telles structures, et éviteraient deux procédures supplémentaires : la définition arbitraire de zones de séparation (ex. zones structurales avec parties 3D) pour assurer la continuité structurale et la connexion des différents types d'éléments (ex. coque avec 3D). De plus, les éléments 3D ont plusieurs avantages : le non recours à la cinématique élaborée et complexe de coques ; l'utilisation des lois de comportement générales tridimensionnelles ; le calcul direct des variations d'épaisseurs ; la facilité de traitement des grandes rotations avec adaptation simple des configurations, la connexion naturelle aux autres éléments 3D, et le traitement naturel des conditions de contact sur les deux faces de la structure. Par conséquent, beaucoup d'efforts ont été investis pour développer de tel type d'éléments finis nommés « solide-coques » que nous allons présenter dans les prochains paragraphes.

2.3. Modélisations solide-coques

Pour donner un contexte historique des développements des éléments finis de type solide-coques, nous pouvons commencer par des travaux de Wilson et al. [88] qui ont proposé un élément iso-paramétrique hexaédrique à 8 nœuds et de 3 degrés de liberté en déplacement par nœud. Cet élément est associé à une loi de comportement modifiée de façon à prendre en compte les contraintes planes. Malheureusement, le faible degré d'interpolation du modèle est très sensible au phénomène de blocage. Quand les structures modélisées sont en flexion dominante ou quand le rapport épaisseur sur largeur tend vers zéro, le blocage en CT se manifeste de façon plus évidente. Afin de surmonter ces verrouillages, Wilson et al. [88] ont introduit la méthode appelée « modes incompatibles ». Grâce à cette technique, le comportement de l'élément hexaédrique à 8 nœuds a été nettement amélioré et surtout dans les problèmes à flexion dominante. Mais, cet élément ne passait pas le patch test pour une forme géométrique autre que le parallélogramme. Une version modifiée de cet élément, qui permet de passer le patch test, a été ensuite introduite par Taylor et al. [82]. Plus récemment, Simo et Rifai [78] ont montré que l'introduction des modes incompatibles pouvait être justifiée dans le contexte des méthodes mixtes de type « *Assumed Strain* ».

En parallèle avec l'apparition de la méthode des « modes incompatibles », une solution alternative pour résoudre ces problèmes de verrouillage fût la méthode d'intégration réduite et sélective présentée dans les travaux de Zienkiewicz et al. [94], Hughes [45], Hughes et al. [46]. Elle consiste à utiliser dans le schéma d'intégration numérique moins de points pour l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire que dans une intégration exacte. Cette méthode a également été poursuivie par Prathap et Bhashyam [68], Flanagan et Belytschko [38] et bien d'autres. Cependant, l'intégration réduite conduit généralement à des éléments instables caractérisés par la présence de modes à énergie nulle (aussi connus sous le nom de modes cinématiques ou modes de *hourglass*). Pour éliminer les modes de *hourglass* causés par l'utilisation de l'intégration réduite, plusieurs approches ont été utilisées telles que l'intégration sélective réduite et la méthode appelée « projection gamma » introduite par Flanagan et Belytschko [38]. Rappelons que le concept d'intégration réduite a connu une forte popularité grâce principalement à son faible coût en termes de temps de calcul. Aussi, la stabilisation appliquée à de tels éléments sous-intégrés doit respecter cette exigence. Or, l'intégration sélective réduite est au moins aussi coûteuse que l'intégration exacte puisqu'elle intègre exactement la partie déviatorique de la déformation. Ainsi, les éléments stabilisés par la méthode de l'intégration sélective réduite perdent une grande partie de leur intérêt et de leur efficacité. En revanche, la méthode de projection de Flanagan et Belytschko [38] permet à la fois, de stabiliser les éléments sous-intégrés et de préserver leur faible coût. Elle consiste à rajouter à la matrice de rigidité une raideur artificielle dont le multiplicateur reste indéterminé. Cette matrice de stabilisation est obtenue par une projection orthogonale (i.e., elle doit être orthogonale aux modes rigides, et doit fournir une énergie non nulle lorsque l'un des modes de *hourglass* est activé). Le multiplicateur indéterminé doit être introduit par l'utilisateur du code et peut être soit de type viscosité artificielle, soit de type rigidité artificielle.

Une approche alternative pour contrôler les modes de *hourglass*, basée sur le principe variationnel de Hu–Washizu, a été utilisée par Belytschko et al. [23] pour formuler deux éléments à intégration réduite quadrilatéral et hexaédrique. Leur élément quadrangle à quatre nœuds présente des blocages pour les matériaux incompressibles mais possède un bon comportement dans les problèmes de flexion dans le plan. Ce concept a été poursuivi par Liu et al. [56], Wang et Belytschko [87], Bachrach [10] et bien d'autres afin de résoudre les problèmes impliquant des matériaux incompressibles.

Au cours des années 1990, les travaux de Simo et Armero [76], Simo et al. [77], Simo et Rifai [78] ont introduit une nouvelle méthode nommée « *Enhanced Assumed Strain* » (EAS). Le principe de cette méthode consiste à enrichir le champ de déformations en rajoutant un champ de variables qui produit des modes de déformations supplémentaires. Ces champs de variables sont ensuite projetés sur un sous-espace approprié afin d'éviter les différents types de blocages.

Cette méthode a été appliquée dans les modélisations de coques en 2D et 3D donnant des résultats très prometteurs. Pourtant, l'inconvénient majeur de ces éléments était l'inefficacité en temps de calcul. En fait, le nombre de variables rajoutées (ce nombre peut atteindre 30 ou plus dans certaines formulations 3D, rend difficile le traitement des matrices de rigidité), et l'utilisation des interpolations d'ordre 4 font augmenter significativement le temps de calcul total. Plusieurs efforts ont été poursuivis par la suite afin d'améliorer les performances des éléments solide-coques. Ces techniques utilisent généralement soit la méthode d'intégration réduite, avec stabilisation des modes de *hourglass*, soit l'intégration complète, avec élimination des sources de verrouillage, comme illustrées dans les travaux de

Domissy [36], Cho et al. [33], Lemosse [55], Sze et Yao [81], Doll et al. [35], Hauptmann et al. [41], Hauptmann et Schweizerhof [42], Hauptmann et al. [43], Miehe [59], Klinkel et al. [50], Klinkel et Wagner [51], Vu-Quoc et Tan [84], Chen et Wu [31], Kim et al. [48], Alves de Sousa et al. [4], Reese [70], Abed-Meraim et Combescure [1], Legay et Combescure [52] et bien d'autres. Les deux approches ont été largement utilisées et évaluées à travers plusieurs applications structurales dans les travaux de Belytschko et Bindeman [22], Zhu et Cescotto [90], Wriggers et Reese [89], Klinkel et Wagner [51], Wall et al. [86], Reese et al. [71], Puso [69], pour n'en citer que quelques uns.

Chapitre II

Éléments coques volumiques SHB en linéaire

Dans ce chapitre, nous allons présenter les modélisations éléments finis coques volumiques SHB adaptées à l'étude des structures minces dans le cas linéaire.

La première section présentera la modélisation de l'élément fini coque volumique prismatique SHB6 à six nœuds. Afin d'évaluer ses performances, une série de cas tests linéaires standards de la littérature lui sera appliquée. Au travers de ces exemples numériques, des résultats relatifs à la rapidité de convergence seront aussi donnés et des comparaisons seront faites avec d'autres éléments finis 3D.

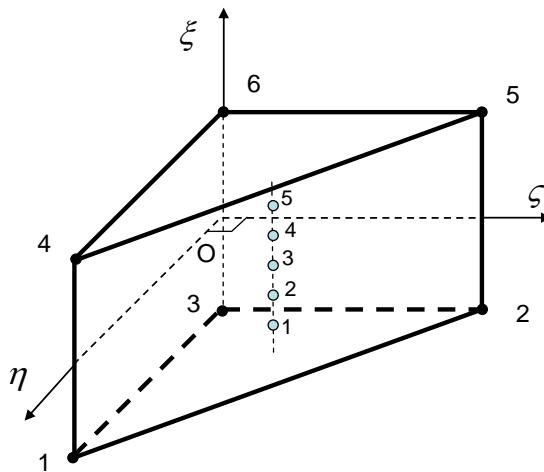
Dans la deuxième section, nous ferons une extension de cette famille d'éléments finis coques volumiques SHB en quadratique. Nous présenterons donc les modélisations de l'élément prismatique SHB15 à quinze nœuds et de l'élément hexaédrique SHB20 à vingt nœuds. Les performances de ces éléments finis seront également mises en évidence à travers une série de cas tests numériques dans le cas linéaire en comparant avec d'autres éléments finis 3D quadratiques.

1. Élément coque volumique SHB6

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la formulation de l'élément coque volumique linéaire SHB6. L'élément SHB6 est un prisme à six nœuds purement tridimensionnel avec trois degrés de liberté en déplacement à chaque nœud, et il a une direction privilégiée appelée « épaisseur » qui est normale au plan moyen du prisme. L'intégration numérique réduite est utilisée. L'intégration à travers l'épaisseur s'appuie sur cinq points de Gauss. L'intégration dans les deux autres directions est faite avec un seul point de Gauss situé au centre de gravité de l'élément. Une analyse des modes de *hourglass* pour cet élément sera également présentée. Elle montre que cet élément ne présente pas de mode de *hourglass*. La stabilisation n'est, donc, pas nécessaire. Pour améliorer sa rapidité de convergence, nous proposons des projections de type « *Assumed Strain* » sur l'opérateur gradient de l'élément. Afin d'évaluer ses performances, une série de cas tests linéaires standards de la littérature lui sera appliquée. À travers ces exemples numériques, les améliorations introduites par rapport aux différents blocages seront mises en évidence. Des résultats relatifs à la rapidité de convergence seront aussi donnés et des comparaisons seront faites avec d'autres éléments finis 3D.

1.1. Modélisation SHB6 en linéaire

L'élément SHB6 est formulé dans les axes locaux du plan moyen. Les directions x, y, z (ou encore x_1, x_2, x_3) sont respectivement parallèles aux axes ξ, η, ζ . La Figure 9 représente la géométrie d'un élément de référence SHB6 élémentaire et ses points d'intégration.



Coordonnées des nœuds :

1(-1,1,0) 2(-1,0,1) 3(-1,0,0) 4(1,1,0) 5(1,0,1) 6(1,0,0)

Figure 9. Élément de référence SHB6 et ses points d'intégration

1.1.1. Cinématique et interpolation

L'élément SHB6 est un élément linéaire iso-paramétrique. Les coordonnées spatiales x_i sont reliées aux coordonnées nodales x_{il} au moyen des fonctions de forme N_I par les formules :

$$x_i = x_{il} N_I(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{I=1}^6 x_{il} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad (28)$$

Dans la suite, et sauf mention contraire, on adoptera la convention de sommation pour les indices répétés. Les indices en minuscule i varient de 1 à 3 et représentent les directions des coordonnées spatiales. Ceux en majuscule I varient de 1 à 6 et correspondent aux nœuds de l'élément.

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément u_i en termes des déplacements nodaux u_{il} :

$$u_i = u_{il} N_I(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{I=1}^6 u_{il} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad (29)$$

1.1.2. Opérateur gradient discrétisé

L'interpolation du champ de déplacement de l'élément (29) va nous permettre de définir le taux de déformation et d'écrire les relations reliant les déformations aux déplacements nodaux. On commence d'abord par écrire le gradient $u_{i,j}$ du champ de déplacement :

$$u_{i,j} = u_{il} N_{I,j} \quad (30)$$

Par convention, une virgule précédant un indice en minuscule représente une différentiation par rapport aux coordonnées spatiales (i.e., $u_{i,j}$ désigne $\partial u_i / \partial u_j$). Le tenseur de déformation ε_{ij} est donné ensuite par la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (31)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques linéaires $N_I(\xi, \eta, \zeta)$ associées à l'élément prismatique à six nœuds :

$$\mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\xi)\eta \\ (1-\xi)\zeta \\ (1-\xi)(1-\eta-\zeta) \\ (1+\xi)\eta \\ (1+\xi)\zeta \\ (1+\xi)(1-\eta-\zeta) \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\zeta = [0,1]; \quad \eta = [0,1-\zeta]; \quad \xi = [-1,1]$$

L'origine du repère est confondue avec le coin droit du triangle du plan médian de l'élément (celui qui possède un angle droit, voir Figure 9).

Ces fonctions de forme transforment un prisme régulier dans l'espace (ξ, η, ζ) en un prisme quelconque dans l'espace (x_1, x_2, x_3) ou bien (x, y, z) . En combinant les équations (28), (29) et (32), on arrive à développer le champ de déplacement comme un terme constant, des termes linéaires en x_i , et des termes faisant intervenir les fonctions h_α :

$$\begin{cases} u_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 \\ i = 1, 2, 3 \\ h_1 = \xi\eta, \quad h_2 = \xi\zeta \end{cases} \quad (33)$$

En effet, l'équation (28) permet d'écrire ξ , η et ζ en fonction seulement des x_i , des h_α et d'un paramètre constant. En injectant ensuite ces dernières relations dans l'équation (29), on trouve les expressions (33) recherchées.

En évaluant l'équation (33) aux nœuds de l'élément, on arrive aux trois systèmes de six équations suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i = a_{0i}\mathbf{S} + a_{1i}\mathbf{x}_1 + a_{2i}\mathbf{x}_2 + a_{3i}\mathbf{x}_3 + c_{1i}\mathbf{h}_1 + c_{2i}\mathbf{h}_2 \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (34)$$

Dans l'équation précédente et dans toute la suite, les caractères soulignés ou gras désignent des tenseurs d'ordre au moins un (vecteurs, tenseurs de contraintes, de déformation...).

Ainsi les vecteurs \mathbf{d}_i et \mathbf{x}_i représentent, respectivement, les déplacements et les coordonnées nodales et sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i^T = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6}) \\ \mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}, x_{i6}) \end{cases} \quad (35)$$

Les vecteurs \mathbf{S} et \mathbf{h}_α ($\alpha = 1, 2$) sont donnés quant à eux par :

$$\begin{cases} \mathbf{S}^T = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \mathbf{h}_1^T = (-1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{h}_2^T = (0, -1, 0, 0, 1, 0) \end{cases} \quad (36)$$

Pour arriver à une écriture avantageuse de l'opérateur gradient discrétisé \mathbf{B} , on va introduire les trois vecteurs \mathbf{b}_i définis par :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{N}_{,i}(\mathbf{0}) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \Big|_{\xi=\eta=\zeta=0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (37)$$

En fait, ce calcul est pratique car nous verrons par la suite qu'il est nécessaire de déterminer la quantité suivante :

$$\left(\mathbf{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \right) = \mathbf{N}_{,j}^T(\xi, \eta, \zeta)$$

Si nous nous plaçons en $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$ alors nous retrouvons :

$$\mathbf{b}_j^T = \mathbf{N}_{,j}^T(0, 0, 0) = \mathbf{cste}^T$$

où \mathbf{N}^T représente le vecteur à six composantes : $(N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6)$.

$$\mathbf{b}_i^T = \mathbf{N}_{,i}^T(\mathbf{0}) = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_4}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_5}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_6}{\partial x_i} \right) \Big|_{\xi=\eta=\zeta=0}$$

$$\frac{\partial N_I}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial N_I}{\partial \xi} j_{1j} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} j_{2j} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} j_{3j} \right)$$

avec $I = 1, 2, \dots, 6$ et $j = 1, 2, 3$

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{pmatrix}$$

En $\xi = \eta = \zeta = 0$, nous avons :

$$\begin{array}{lll}
 \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}\eta = 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1-\xi) = \frac{1}{2} & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = 0 \\
 \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}\zeta = 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}(1-\xi) = \frac{1}{2} \\
 \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1-\eta-\zeta) = -\frac{1}{2} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1-\xi) = -\frac{1}{2} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2}(1-\xi) = -\frac{1}{2} \\
 \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\eta = 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1+\xi) = \frac{1}{2} & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = 0 \\
 \frac{\partial N_5}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\zeta = 0 & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} = 0 & \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}(1+\xi) = \frac{1}{2} \\
 \frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1-\eta-\zeta) = \frac{1}{2} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1+\xi) = -\frac{1}{2} & \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2}(1+\xi) = -\frac{1}{2}
 \end{array}$$

Il vient donc que :

$$\mathbf{b}_i^T = (j_{1i} \quad j_{2i} \quad j_{3i}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Rappelons que ces vecteurs \mathbf{b}_i représentent la forme la plus simple de l'opérateur gradient discrétisé sous intégré introduit par Hallquist [40] dans le premier cas de l'hexaèdre à huit nœuds et basé sur l'évaluation des dérivées des fonctions de forme iso-paramétriques à l'origine du référentiel (ξ , η et ζ). Belytschko et al. [23] ont donné les expressions explicites pour les vecteurs \mathbf{b}_i dans le cas de l'élément fini hexaédrique à huit nœuds.

De plus, on peut vérifier par des considérations algébriques que les conditions d'orthogonalité suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{h}_\alpha = 0 \\ \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{S} = 0 \\ \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \\ \mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{S} = 0 \\ \mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = 2\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right. ; \text{ avec } \begin{array}{l} i, j = 1, 2, 3 \\ \alpha, \beta = 1, 2 \end{array} \quad (38)$$

A ce stade, on peut déterminer les constantes inconnues qui interviennent dans l'écriture (34) du champ de déplacement en multipliant scalairement l'équation (34) par \mathbf{b}_j^T et \mathbf{h}_α^T , respectivement, et en utilisant les relations d'orthogonalité (38). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i &= a_{0i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_2 \\ &= 0 + a_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_3 + 0 = a_{ji}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{d}_i &= a_{0i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{h}_2 \\ &= 0 + (\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_j) (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 2c_{1i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{d}_i &= a_{0i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{h}_2 \\ &= 0 + (\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_j) (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 2c_{2i}\end{aligned}$$

On en déduit les constantes a_{ji} et $c_{\alpha i}$:

$$\begin{cases} a_{ji} = \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i \\ c_{\alpha i} = \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{d}_i \end{cases} \quad (39)$$

où $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$ est défini par l'équation (40) suivante :

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \frac{1}{2} \left[\mathbf{h}_\alpha - \left(\sum_{j=1}^3 (\mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j \right) \right] \quad \alpha = 1, 2 \quad (40)$$

Le champ de déplacement se met finalement sous la forme très pratique suivante :

$$\begin{aligned}u_i &= a_{0i} + a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + a_{3i} x_3 + c_{1i} h_1 + c_{2i} h_2 \\ &= a_{0i} + \mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{d}_i x_1 + \mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{d}_i x_2 + \mathbf{b}_3^T \cdot \mathbf{d}_i x_3 + \boldsymbol{\gamma}_1^T \cdot \mathbf{d}_i h_1 + \boldsymbol{\gamma}_2^T \cdot \mathbf{d}_i h_2 \\ &= a_{0i} + (\mathbf{b}_1^T x_1 + \mathbf{b}_2^T x_2 + \mathbf{b}_3^T x_3 + \boldsymbol{\gamma}_1^T h_1 + \boldsymbol{\gamma}_2^T h_2) \cdot \mathbf{d}_i\end{aligned} \quad (41)$$

En différentiant la formule ci-dessus par rapport à x_j , on obtient le gradient de déplacement :

$$u_{i,j} = \left(\mathbf{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = (\mathbf{b}_j^T + h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) \cdot \mathbf{d}_i \quad (42)$$

L'opérateur gradient discrétisé reliant le tenseur de déformation au vecteur des déplacements nodaux par :

$$\nabla^s(\mathbf{u}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (43)$$

où :

$$\nabla^s(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} \quad (44)$$

prend alors la forme matricielle pratique :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad (45)$$

Cette écriture de l'opérateur gradient discrétisé utilisant les formules de Hallquist [40] est très commode car les vecteurs $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$, qui interviennent dans l'expression de \mathbf{B} , vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{x}_j = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (46)$$

Ceci permet de manipuler séparément chacun des modes de déformation pour obtenir simplement la forme du champ de déformation postulée. Notons qu'un élément basé sur la formulation (45) est convergent lorsqu'il est évalué exactement. Cependant, l'évaluation de cet opérateur \mathbf{B} , donné en (45), en chacun des points d'intégration rend cet élément coûteux en temps de calcul pour les applications pratiques, et une forme simplifiée de cet élément est souvent préférée.

1.1.3. Formulation variationnelle utilisée pour l'élément SHB6

L'extension de la forme faible du principe variationnel de Hu–Washizu au cas de la mécanique des solides non linéaires est due à Fish et Belytschko [37]. Pour un simple élément, on a :

$$\delta\pi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{V_e} \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV + \delta \int_{V_e} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot (\nabla^s \dot{\mathbf{u}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, dV - \delta \dot{\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (47)$$

où δ représente une variation, $\dot{\mathbf{u}}$ le champ de vitesse, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est le taux de déformation postulée, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ la contrainte postulée, $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte évaluée par la loi constitutive, $\dot{\mathbf{d}}$ les vitesses nodales, \mathbf{f}^{ext} les forces nodales externes, et $\nabla^s \dot{\mathbf{u}}$ la partie symétrique du gradient du champ de vitesses.

Notons que le point placé au-dessus du symbole du taux de déformation postulée, $\dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}$ ne signifie pas une dérivation par rapport au temps.

La formulation « *Assumed strain* » (projection de l'opérateur gradient discrétisé \mathbf{B} sur un sous espace approprié afin d'éviter les différents problèmes de blocage) est basée sur une forme simplifiée du principe variationnel de Hu–Washizu comme elle a été décrite par Simo et Hughes [75]. Dans cette forme simplifiée, la contrainte postulée est choisie orthogonale à la différence entre la partie symétrique du gradient de vitesse et le taux de déformation postulée. Ainsi, le second terme dans l'équation (47) s'élimine et l'on obtient :

$$\delta\pi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}) = \int_{V_e} \delta\dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV - \delta\dot{\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (48)$$

Sous cette forme, le principe variationnel est indépendant de l'interpolation de la contrainte, puisque la contrainte postulée n'intervient plus et n'a donc pas besoin d'être définie. Les équations discrétisées nécessitent donc la seule interpolation du déplacement \mathbf{u} et du taux de déformation postulée $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ dans l'élément. Avec les notations vectorielles précédentes on a :

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{I=1}^6 N_I(x) \mathbf{d}_I(t) \quad (49)$$

Ceci conduit à :

$$\nabla^s \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{d}(t) \quad (50)$$

La déformation postulée est définie quant à elle par :

$$\dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}(x, t) = \bar{\mathbf{B}}(x) \cdot \dot{\mathbf{d}}(t) \quad (51)$$

Remplaçant l'expression (51) dans le principe variationnel (48), on obtient :

$$\delta\dot{\mathbf{d}}^T \cdot \left(\int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV - \mathbf{f}^{ext} \right) = 0 \quad (52)$$

Comme $\delta\dot{\mathbf{d}}$ peut être choisi arbitrairement, l'équation précédente conduit à :

$$\mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext} \quad (53)$$

avec :

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (54)$$

Dans l'équation ci-dessus, il est bien précisé que la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est calculée par la loi constitutive à partir du taux de déformation postulée $\dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}$. Pour les problèmes non linéaires, $\boldsymbol{\sigma}$ peut aussi être une fonction intégrale du taux de déformation postulée et des autres variables internes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \boldsymbol{\alpha}, \dots) \quad (55)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ représente les variables internes. La formulation ainsi obtenue est valable pour des problèmes incluant les deux types de non linéarités : géométriques et matériaux. Dans le cas de problèmes linéaires, on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d} \quad (56)$$

La matrice de comportement élastique \mathbf{C} , dans le cas d'un matériau isotrope, est choisie comme suit :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

Dans cette matrice, E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson. Cette loi est spécifique aux éléments SHB. Elle ressemble à celle que l'on aurait dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes, mise à part le terme (3,3). Nous pouvons noter que ce choix entraîne un comportement anisotrope artificiel. Ce choix permet de satisfaire tous les tests sans introduire de blocage.

Les forces internes de l'élément s'écrivent alors simplement en termes de la matrice de rigidité élémentaire :

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{d} \quad (57)$$

où :

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{B}} \, dV \quad (58)$$

Dans une approche standard en déplacement, le taux de déformation postulée s'identifie à la partie symétrique du gradient de vitesse, ce qui revient à remplacer $\bar{\mathbf{B}}$ par \mathbf{B} dans les expressions précédentes. On obtient donc simplement :

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \, dV \quad (59)$$

Cet élément prismatique à 6 nœuds, nommé « SHB6 », possède 5 points d'intégration qui se trouvent sur la même droite suivant l'épaisseur. Leurs coordonnées (ξ, η, ζ) et leurs poids d'intégration sont les racines du polynôme de Gauss–Legendre donnés dans le tableau suivant :

	η	ζ	ξ	$w(\xi, \eta, \zeta)$
P(1)	1/3	1/3	-0.906179845938664	0.236926885056189
P(2)	1/3	1/3	-0.538469310105683	0.478628670499366
P(3)	1/3	1/3	0	0.568888888888889
P(4)	1/3	1/3	0.538469310105683	0.478628670499366
P(5)	1/3	1/3	0.906179845938664	0.236926885056189

Ainsi, dans une approche standard en déplacement l'expression de la rigidité \mathbf{K}_e est :

$$\mathbf{K}_e = \sum_{j=1}^5 w(P_j) \mathbf{J}(P_j) \mathbf{B}^T(P_j) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(P_j)$$

où $\mathbf{J}(P_j)$ est le Jacobien, calculé au point de Gauss j de la transformation entre la configuration unitaire de référence et un prisme arbitraire.

1.1.4. Analyse des modes de « hourglass » pour l'élément SHB6

Les modes de « hourglass » sont des modes cinématiques qui sont dus à la sous-intégration et sont associés à une énergie nulle alors qu'ils induisent une déformation non nulle. Cette anomalie s'explique par la différence, qu'induit la sous-intégration, entre le noyau de l'opérateur de rigidité discrétisé et celui continu. Commençons d'abord par remarquer que l'opérateur gradient discrétisé sous-intégré (i.e., associé à cinq points d'intégration situés en $\zeta = \eta = \frac{1}{3}, \xi = \xi_{Gi}$) prend la forme de l'équation (45) avec $\alpha = 1, 2$.

Analysons maintenant le noyau de la matrice de rigidité obtenue par sous-intégration. Dans ce cas linéaire, la rigidité est égale à :

$$\mathbf{K}_e = \sum_{j=1}^5 w(P_j) \mathbf{J}(P_j) \mathbf{B}^T(P_j) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(P_j) \quad (60)$$

On voit ainsi que l'examen du noyau de la rigidité sous-intégrée revient à l'étude du rang de la matrice \mathbf{B} dans la mesure où la matrice de comportement \mathbf{C} n'est pas singulière. En d'autres termes, il suffit de rechercher les modes de déplacement \mathbf{d} à déformation nulle, c'est à dire vérifiant :

$$\nabla^s \mathbf{u} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (61)$$

Nous allons chercher désormais quels sont les modes de déformations qui donnent une énergie de déformation nulle. L'énergie de déformation s'écrit $w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$, et comme $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}$, nous avons donc :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{d}^T \cdot \left[\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \, dV \right] \cdot \mathbf{d}$$

et si nous considérons l'approximation suivante : \mathbf{B} est calculé aux points d'intégration de Gauss $\zeta = \eta = 1/3$ et $\xi = \xi_{Gj}$, nous obtenons :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{d}$$

Ainsi rechercher les modes de déformations à énergie nulle, c'est rechercher le noyau de \mathbf{K}_e :

$$\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B}(\xi_{Gj}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \forall \xi_{Gj}$$

En d'autres termes, les modes de *hourglass* sont les vecteurs \mathbf{X} tels que :

$$\mathbf{B}(\xi_{Gj}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \forall \xi_{Gj} \quad (62)$$

Il est naturel de retrouver dans le noyau de la rigidité \mathbf{K}_e les modes associés aux mouvements de corps rigides. Pour un élément tridimensionnel tel que le prisme à 6 nœuds, ces mouvements rigidifiant sont composés de trois translations et de trois rotations. Ainsi le noyau de l'opérateur continu de rigidité est de dimension six et se réduit aux seuls modes suivants :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{z} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{x} & -\mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (63)$$

On vérifie aisément que chacun des six vecteurs colonnes ci-dessus satisfait à l'équation (62) et appartient donc au noyau de \mathbf{K}_e . Il suffit, pour le voir, d'utiliser l'expression (45) de \mathbf{B} et les conditions d'orthogonalité (38) et (46). Les trois premiers vecteurs colonnes correspondent aux translations selon les axes Ox, Oy et Oz, respectivement. Les trois autres vecteurs sont relatifs aux rotations autour des axes Oz, Oy et Ox.

Nous recherchons désormais, outre les modes rigides précédents, des modes qui annulent également l'opérateur gradient discrétisé donné en (45). Prenons une base de dix-huit vecteurs suivants :

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

$$i = 1 \text{ à } 18$$

On peut montrer que les vecteurs ci-dessus sont linéairement indépendants dans l'espace de dimension dix-huit. Pour cela, nous étudions un système de dix-huit d'équations suivantes dont a_i sont des inconnus :

$$\sum_{i=1}^{18} a_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (\text{b})$$

En multipliant cette équation (b) successivement avec $(\mathbf{b}_i^T \ \mathbf{0} \ \mathbf{0})$, $(\mathbf{0} \ \mathbf{b}_i^T \ \mathbf{0})$ et $(\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{b}_i^T)$, $i = 1, 2, 3$, et en utilisant les relations orthogonales (46), nous obtenons :

$$\begin{cases} (\mathbf{b}_i^T \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{18} a_i \mathbf{e}_i \right) = a_{3i+1} = 0 \\ (\mathbf{0} \ \mathbf{b}_i^T \ \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{18} a_i \mathbf{e}_i \right) = a_{3i+2} = 0 \\ (\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{b}_i^T) \cdot \left(\sum_{i=1}^{18} a_i \mathbf{e}_i \right) = a_{3i+3} = 0 \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{c})$$

Nous faisons la même opération avec $(\mathbf{h}_\alpha^T \ \mathbf{0} \ \mathbf{0})$, $(\mathbf{0} \ \mathbf{h}_\alpha^T \ \mathbf{0})$, et $(\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{h}_\alpha^T)$, $\alpha = 1, 2$, nous avons :

$$\begin{cases} (\mathbf{h}_\alpha^T \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{18} a_i \mathbf{e}_i \right) = 2a_{3\alpha+10} = 0 \\ (\mathbf{0} \ \mathbf{h}_\alpha^T \ \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{18} a_i \mathbf{e}_i \right) = 2a_{3\alpha+11} = 0 \\ (\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{h}_\alpha^T) \cdot \left(\sum_{i=1}^{18} a_i \mathbf{e}_i \right) = 2a_{3\alpha+12} = 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{d})$$

En combinant les relations (a), (b), (c), et (d), nous trouvons :

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad (\text{e})$$

Cela montre que les vecteurs \mathbf{e}_i sont linéaires indépendants, et ils forment, donc, une base pour l'espace vectoriel de dimension dix-huit.

Nous appelons maintenant un vecteur \mathbf{X} quelconque du noyau de la matrice \mathbf{K}_e . Ce vecteur est alors représenté par la base \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{18} c_i \mathbf{e}_i \quad (\text{f})$$

En utilisant l'équation (62), l'équation (45), et la relation (46), nous avons :

$$\begin{pmatrix} c_4 + h_{1,x}(\xi_I) c_{13} + h_{2,x}(\xi_I) c_{16} \\ c_8 + h_{1,y}(\xi_I) c_{14} + h_{2,y}(\xi_I) c_{17} \\ c_{12} + h_{1,z}(\xi_I) c_{15} + h_{2,z}(\xi_I) c_{18} \\ c_5 + c_7 + h_{1,y}(\xi_I) c_{13} + h_{1,x}(\xi_I) c_{14} + h_{2,y}(\xi_I) c_{16} + h_{2,x}(\xi_I) c_{17} \\ c_9 + c_{11} + h_{1,z}(\xi_I) c_{14} + h_{1,y}(\xi_I) c_{15} + h_{2,z}(\xi_I) c_{17} + h_{2,y}(\xi_I) c_{18} \\ c_6 + c_{10} + h_{1,z}(\xi_I) c_{13} + h_{1,x}(\xi_I) c_{15} + h_{2,z}(\xi_I) c_{16} + h_{2,x}(\xi_I) c_{18} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad ; \quad I = 1, \dots, 5 \quad (\text{g})$$

En évaluant l'équation (g) aux cinq points de Gauss, nous trouvons :

$$\begin{cases} c_4 = c_{13} = c_{16} = 0 \\ c_8 = c_{14} = c_{17} = 0 \\ c_{12} = c_{15} = c_{18} = 0 \\ c_5 + c_7 = 0 \\ c_9 + c_{11} = 0 \\ c_6 + c_{10} = 0 \end{cases}$$

Donc, nous avons :

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} -\mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_6 \begin{pmatrix} -\mathbf{z} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + c_9 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Cela veut dire qu'il n'y a pas d'autres modes que les modes rigides qui annulent l'opérateur gradient discrétisé donné en (45). Autrement dit, l'élément SHB6 ne présente pas de modes de *hourglass*.

1.1.5. Projection par "Assumed local strain method"

La première étape consiste à se placer dans le repère local de l'élément défini par le repère (ξ, η, ζ) décrit dans la Figure 9. Les déformations seront désormais calculées dans ce repère. L'opérateur gradient discrétisé \mathbf{B} sera projeté sur un sous espace approprié afin d'éviter les différents problèmes de blocage. Cette méthode est variationnellement cohérente avec le principe de Hu–Washizu si l'interpolation de la contrainte est choisie judicieusement (Simo et Hughes [75]). Cependant, il est très difficile de sélectionner de manière générale et

systématique le bon champ de déformation postulée. Les champs de déformation postulés ne doivent présenter ni de blocage en membrane ni de blocage en cisaillement.

Nous présentons ici un choix efficace et acceptable. L'opérateur \mathbf{B} est tout d'abord séparé en deux parties \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2 . La matrice \mathbf{B}_1 contient les gradients dans le plan moyen de la coque et la déformation normale, tandis que \mathbf{B}_2 contient les gradients associés aux déformations de cisaillement transverse.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \\
 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

Les blocages constatés dans l'élément proviennent des cisaillements transverses. On va chercher un schéma d'intégration qui permette de sous-intégrer cette partie de l'énergie. Pour ce faire on cherche à contrôler chaque composante entrant dans l'énergie de cisaillement transverse. Étant donnée la forme de la matrice \mathbf{B} nous avons donc 12 termes non nuls qui interviennent dans la déformation. Ils seront contrôlés par l'introduction du paramètre c dans la matrice \mathbf{B}_2 . La matrice \mathbf{B}_2 devient alors $\bar{\mathbf{B}}_2$ telle que :

$$\bar{\mathbf{B}}_2 = c \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité s'écrit maintenant :

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{B}} dV = \int_{V_e} \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_1 dV + \int_{V_e} \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{B}}_2 dV + \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}_2^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_1 dV + \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}_2^T \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{B}}_2 dV = \\
 = \mathbf{K}_{e1} + \mathbf{K}_{e2} + \mathbf{K}_{e3} + \mathbf{K}_{e4}$$

Les matrices \mathbf{K}_{e1} , \mathbf{K}_{e2} , \mathbf{K}_{e3} et \mathbf{K}_{e4} sont intégrées avec les cinq points de Gauss définis précédemment. La décomposition additive donnée plus haut, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, pour l'opérateur gradient discrétisé, fait que les termes croisés \mathbf{K}_{e2} et \mathbf{K}_{e3} s'annulent. Suite aux nombreux tests numériques, il a été choisi de caractériser la matrice $\bar{\mathbf{B}}_2$ par le coefficient : $c = 0,45$, qui joue le rôle ici d'un facteur de réduction du cisaillement.

Ce choix donne à l'élément un bon comportement dans les cas tests de référence. Il est clair que cette stratégie, comme celle mise en place pour les éléments coques volumiques quadratiques, n'est adaptée qu'au comportement quasi isotrope du matériau choisi.

1.1.6. Matrice de rigidité géométrique \mathbf{K}_σ

La matrice \mathbf{K}_σ a pour objectif de résoudre les problèmes de flambement. Nous rappelons ici que les modes de flambement sont les vecteurs propres du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$(\mathbf{K} + \mu\mathbf{K}_\sigma) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \lambda\mathbf{K}_\sigma \cdot \mathbf{u}$$

avec $\lambda = -\mu$, et μ est le coefficient multiplicateur du chargement.

En introduisant la déformation quadratique \mathbf{e}^Q telle que :

$$e_{ij}^Q(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^3 \delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} = \delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}$$

On peut définir cette matrice de rigidité géométrique par :

$$\delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K}_\sigma \cdot \Delta\mathbf{u} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}^Q(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta\mathbf{u}^T \cdot \nabla \Delta\mathbf{u} d\Omega$$

Afin d'exprimer cette matrice dans l'espace discrétisé, introduisons les opérateurs gradient quadratique discrétisés \mathbf{B}^Q tels que :

$$\mathbf{e}^Q(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} e_{11}^Q \\ e_{22}^Q \\ e_{33}^Q \\ e_{12}^Q + e_{21}^Q \\ e_{13}^Q + e_{31}^Q \\ e_{23}^Q + e_{32}^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{11}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{22}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{33}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{12}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{13}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{23}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

Les différents termes \mathbf{B}_{ij}^Q sont donnés par les équations suivantes :

$$\mathbf{B}_{11}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_{22}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_{33}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{12}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{13}^Q = c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{23}^Q = c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix}$$

avec les vecteurs \mathbf{B}_i ($i = 1, 2, 3$) définis comme :

$$\mathbf{B}_i = (\mathbf{b}_i + h_{\alpha,i} \boldsymbol{\gamma}_\alpha)$$

Remarque : Nous devons multiplier les matrices \mathbf{B}_{13}^Q et \mathbf{B}_{23}^Q par le coefficient $c^2 = 0,45^2 = 0,2025$ car l'élément SHB6 est projeté par la technique « *Assumed local strain method* » voir section 1.1.5.

Avec ces notations, la contribution à la matrice de rigidité géométrique, \mathbf{k}_σ , au point de Gauss ξ_j est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\sigma(\xi_j) = & \sigma_{11}(\xi_j) \mathbf{B}_{11}^Q(\xi_j) + \sigma_{22}(\xi_j) \mathbf{B}_{22}^Q(\xi_j) + \sigma_{33}(\xi_j) \mathbf{B}_{33}^Q(\xi_j) \\ & + \sigma_{12}(\xi_j) \mathbf{B}_{12}^Q(\xi_j) + \sigma_{13}(\xi_j) \mathbf{B}_{13}^Q(\xi_j) + \sigma_{23}(\xi_j) \mathbf{B}_{23}^Q(\xi_j) \end{aligned}$$

Par intégration sur les points de Gauss de l'élément, la matrice de rigidité géométrique s'obtient par la formule :

$$\mathbf{K}_\sigma = \sum_{j=1}^5 \omega(\xi_j) \mathbf{J}(\xi_j) \mathbf{k}_\sigma(\xi_j)$$

1.1.7. Forces suiveuses et matrice de pression \mathbf{K}_p

Les forces de pression suiveuses sont présentes dans la matrice tangente via la matrice \mathbf{K}_p , car les forces externes suiveuses dépendent du déplacement. Les forces de pression suiveuses s'écrivent :

$$\int_{\partial\Omega} p \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{u} dS = \int_{\partial\Omega_0} p \det[F(\mathbf{u})] \mathbf{n}_0^T \cdot F(\mathbf{u})^{-T} dS_0 = p \mathbf{F}_0 - p \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{U}$$

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$$

en utilisant les notations :

- ❖ $\mathbf{n}_0^T = (n_1, n_2, n_3)$, normale à la surface extérieure de l'élément dans la configuration de référence ;
- ❖ $\tilde{\mathbf{b}}_i$, vecteur de dimension 3, dérivée des fonctions de forme aux 3 nœuds de la face de l'élément chargée en pression ;
- ❖ S_0 aire de la face chargée en pression. Pour l'élément SHB6, cette surface S_0 vaut $\frac{1}{2}$.

La formulation précédente conduit à une matrice non-symétrique. On sait que l'on peut néanmoins utiliser une formulation symétrique si les forces extérieures dues à la pression dérivent d'un potentiel. C'est le cas si les forces de pression ne travaillent pas sur la frontière du domaine modélisé. On considère donc que la partie symétrique de la matrice suffit. La matrice symétrisée prend la forme suivante :

$$\mathbf{K}_p = S_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\ \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\ \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\ \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\ \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

C'est une matrice (9×9), qu'il faut multiplier par les déplacements des 3 nœuds de la face sur laquelle on applique une pression.

1.2. Validation de l'élément coque volumique SHB6 en linéaire

Pour valider le nouvel élément SHB6, nous l'avons testé sur un ensemble de cas tests élastiques. La réalisation de divers cas tests nous permet de voir l'influence du choix d'une projection de l'opérateur gradient discrétisé sur les résultats de problèmes significatifs en mécanique. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence, et d'autre part, à la solution donnée par l'élément fini volumique usuel existant PRI6 et à l'élément SHB6 initial sans projection. Tous les maillages n'ont qu'un seul élément dans l'épaisseur. Dans tous les tableaux apparaissent le nombre de découpage dans chacune des directions, le nombre total d'éléments étant le double (car chaque rectangle est découpé en deux triangles). L'élément projeté sera dénommé *SHB6*.

1.2.1. Poutre en flexion simple

Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion simple. En effet dans ce cas test, la flexion est dominante devant le cisaillement.

A l'extrémité droite, la poutre est soumise à un effort tranchant de $\|\vec{P}\| = 4\text{ N}$ dans la direction verticale Oz. Ce chargement est réparti de façon adéquate aux nœuds de l'extrémité droite. On simule un encastrement parfait à l'extrémité gauche de la poutre (voir Figure 10a).

Les données de géométrie, matériau et chargement du test sont listées dans le Tableau 1.

Tableau 1. Données géométriques, matériau et de chargement pour le test de la poutre en flexion simple

Longueur	$L = 50\text{ m}$
Largeur	$l = 4\text{ m}$
Épaisseur	$e = 1\text{ m}$
Module d'Young	$E = 6,825 \times 10^7\text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Chargement	$\ \vec{P}\ = 4\text{ N}$

La solution est trouvée analytiquement et provient de la RDM car on s'attend à ce que les déplacements soient faibles devant la longueur de la poutre (hypothèse des petites perturbations et comportement élastique linéaire).

$$flèche = u_z = \frac{PL^3}{3EI} \quad \text{avec} \quad I = \frac{lh^3}{12} = \frac{le^3}{12}$$

$$flèche = u_z = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{4 \times 4 \times 50^3}{6,825 \times 10^7 \times 4 \times 1^3} = 7,326 \times 10^{-3}\text{ m}$$

Les résultats de simulation du déplacement du nœud A suivant la direction Oz sont donnés dans le Tableau 2.

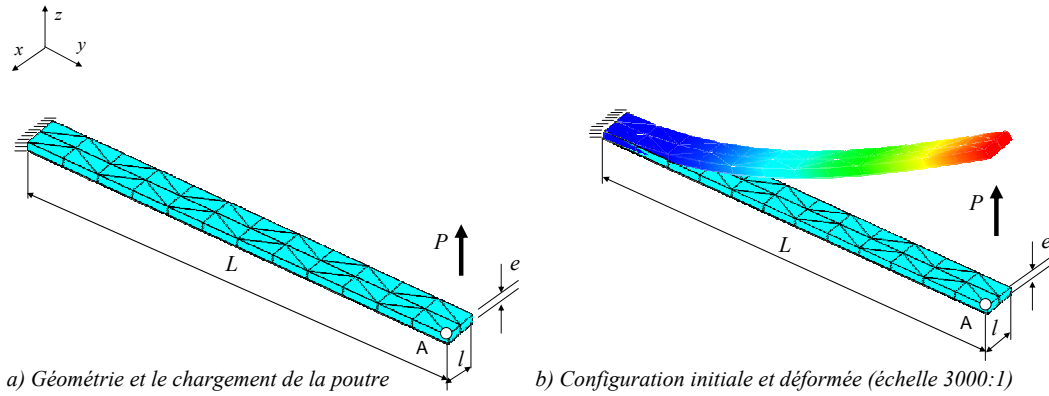
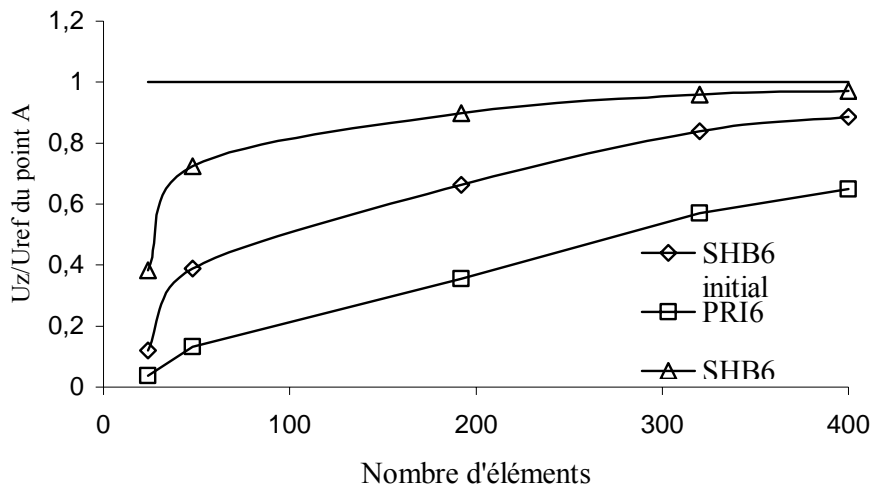


Figure 10. Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre en flexion simple ; un exemple de maillage $(12 \times 2 \times 1) \times 2$

Tableau 2. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre en flexion simple

Maillages	PRI6		SHB6 initial		SHB6	
	w	w/w _{ref}	w	w/w _{ref}	w	w/w _{ref}
$(6 \times 2 \times 1) \times 2$; 24	2,678E-04	0,037	8,826E-04	0,121	2,799E-03	0,382
$(12 \times 2 \times 1) \times 2$; 48	9,687E-04	0,132	2,852E-03	0,390	5,303E-03	0,724
$(24 \times 4 \times 1) \times 2$; 192	2,606E-03	0,356	4,849E-03	0,662	6,581E-03	0,899
$(40 \times 4 \times 1) \times 2$; 320	4,175E-03	0,570	6,145E-03	0,840	7,017E-03	0,959
$(50 \times 4 \times 1) \times 2$; 400	4,752E-03	0,649	6,493E-03	0,887	7,112E-03	0,972



Graphe 1. Déplacement normalisé du point A de la poutre en flexion simple

Le Graphe 1 représente les déplacements normalisés du point A du problème sous forme graphique. Nous trouvons que tous les éléments testés convergent vers la solution de référence. Nous notons également que l'élément SHB6 converge le plus rapidement vers la solution de référence.

1.2.2. Plaque en flexion et cisaillement dans son plan

Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en cisaillement. En effet dans ce cas test, le cisaillement est dominant. Par ailleurs ce cas test a été repris par de nombreux auteurs de la littérature et notamment [21].

La plaque est encastée parfaitement à l'extrémité gauche. Le chargement est une force P appliquée à l'extrémité droite de la poutre ce qui entraîne une répartition de contraintes parabolique sur la hauteur et constante sur l'épaisseur. Le problème est un cas de contraintes planes. Par ailleurs, on s'attend à ce que les déplacements ne soient pas « infiniment petits » devant les dimensions de la structure (voir Figure 11a).

Les données de géométrie, matériau et de chargement du problème sont regroupées dans le Tableau 3.

Tableau 3. Données de géométrie, matériau et de chargement du cas test de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan

Longueur	$L = 48 \text{ mm}$
Hauteur	$H = 12 \text{ mm}$
Épaisseur	$h = 1 \text{ mm}$
Module d'Young	$E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,25$
Chargement	$\ \vec{P}\ = 40 \text{ N}$

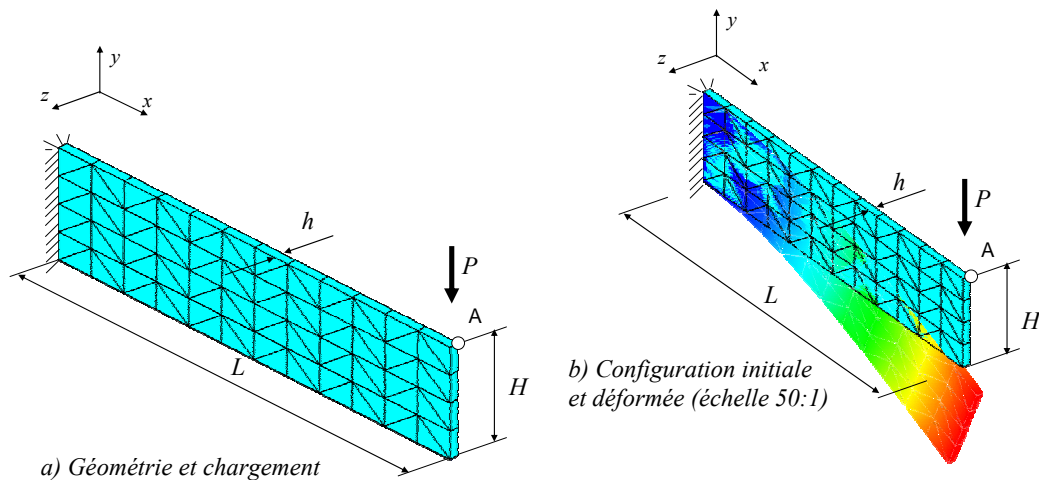


Figure 11. Géométrie, chargement et déformée de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan ; un exemple de maillage $(12 \times 4 \times 1) \times 2$

La solution de référence de ce cas test est calculée par la méthode de la fonction d'Airy. Nous n'utilisons pas les formules de RDM.

La fonction d'Airy est :

$$\phi = Axy + \frac{C}{6}xy^3 + By + Dy^3.$$

Le tenseur de fonction de contrainte est :

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Axy + \frac{C}{6}xy^3 + By + Dy^3 \end{bmatrix}$$

On a aussi la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \text{rot}(\text{rot}(\underline{\underline{\phi}})) = \text{rot} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & Ax + \frac{C}{2}xy^2 + B + 3Dy^2 \\ 0 & 0 & -Ay - \frac{C}{6}y^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} Cxy + 6Dy & -A - \frac{C}{2}y^2 & 0 \\ -A - \frac{C}{2}y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sur la face libre $y = +\frac{H}{2}$ on a :

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} Cx\frac{H}{2} + 6D\frac{H}{2} & -A - \frac{CH^2}{8} & 0 \\ -A - \frac{CH^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui conduit à :

$$-A - \frac{CH^2}{8} = 0 \Rightarrow A = -\frac{CH^2}{8}$$

Sur la face $x = L$:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} CLy + 6Dy & -A - \frac{C}{2}y^2 & 0 \\ -A - \frac{C}{2}y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui entraîne :

$$D = -\frac{CL}{6}$$

Il nous faut calculer :

$$P = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{xy} \, ds = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(-A - \frac{C}{2} y^2 \right) dy \, dz = h \left[-Ay - \frac{C}{6} y^3 \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \frac{ChH^3}{12}$$

Il vient donc que nous avons : $C = \frac{12P}{hH^3}$ ce qui entraîne $D = -\frac{2PL}{hH^3}$ et $A = -\frac{3P}{2hH}$.

Finalement, le tenseur de contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{12Py(x-L)}{2hH^3} & \frac{6P}{2hH^3} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) & 0 \\ \frac{6P}{2hH^3} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{12Py(x-L)}{2hH^3} ; \quad \sigma_{yy} = 0 ; \quad \sigma_{xy} = \frac{6P}{2hH^3} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right)$$

Nous pouvons rechercher désormais le déplacement. D'après Beltrami :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} s \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad \text{avec } s = tr(\underline{\underline{\sigma}})$$

D'où :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{12Py(x-L)}{2EhH^3} & \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{6P}{2hH^3} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) & 0 \\ \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{6P}{2hH^3} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) & -\nu \frac{12Py(x-L)}{2EhH^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{12Py(x-L)}{2EhH^3} \end{bmatrix}$$

En utilisant le fait que $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$, on obtient les résultats de référence suivants :

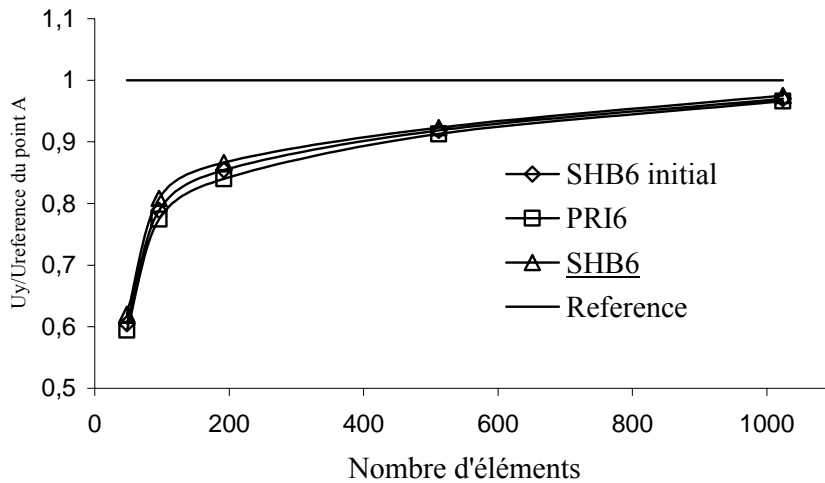
$$|v| = 0,3573 \, mm \quad (\text{déplacement suivant Oy du point A})$$

Les résultats de simulation pour le déplacement du nœud A suivant la direction Oy sont donnés dans le Tableau 4.

Tableau 4. Résultats du déplacement du point A suivant O_y de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan

Maillages	PRI6		SHB6 initial		SHB6	
	U_y	U_y/U_{ref}	U_y	U_y/U_{ref}	U_y	U_y/U_{ref}
(6x4x1)x2 ; 48	-2,124E-04	0,594	-2,162E-04	0,605	-2,216E-04	0,620
(12x4x1)x2 ; 96	-2,767E-04	0,775	-2,819E-04	0,789	-2,888E-04	0,808
(24x4x1)x2 ; 192	-3,001E-04	0,840	-3,053E-04	0,854	-3,096E-04	0,866
(16x16x1)x2 ; 512	-3,262E-04	0,913	-3,283E-04	0,919	-3,298E-04	0,923
(32x16x1)x2 ; 1024	-3,453E-04	0,966	-3,466E-04	0,970	-3,486E-04	0,976

Le Graphe 2 représente les déplacements normalisés du point A du problème sous forme graphique. Nous constatons que les trois éléments SHB6, PRI6 et SHB6 se comportent de manière similaire. Ils convergent bien vers la solution de référence.



Graph 2. Déplacement normalisé du point A de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan

1.2.3. Poutre vrillée soumise à un effort tranchant

Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. Ce cas test a été repris dans de nombreux travaux de la littérature ([1], [2], [52]).

Le bord délimité par la surface en $y = 0$ est encasté. Le chargement appliqué est un effort vertical $\|P\| = 1 \text{ N}$ (voir Figure 12a).

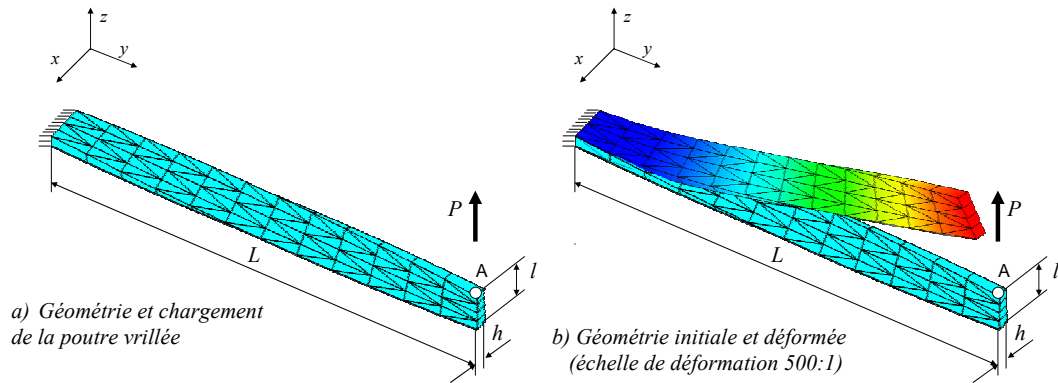
Les données de géométrie, matériau et de chargement de ce cas test de poutre vrillée soumise à un effort tranchant sont représentées dans le Tableau 5.

Tableau 5. Données de géométrie, chargement et de matériau de la poutre vrillée

Longueur	$L = 12 \text{ m}$
Largeur	$l = 1,1 \text{ m}$
Épaisseur	$h = 0,32 \text{ m}$
Module d'Young	$E = 29 \times 10^6 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,22$
Chargement vertical	$\ P\ = 1 \text{ N}$

La solution de référence a été établie par moyenne de résultats de plusieurs logiciels de calcul mettant en œuvre la méthode des éléments finis en faisant converger les calculs avec des éléments réputés fiables. Le déplacement du point A suivant Oz obtenu avec le chargement P est :

$$w_A = 0,542 \times 10^{-02} \text{ m}$$

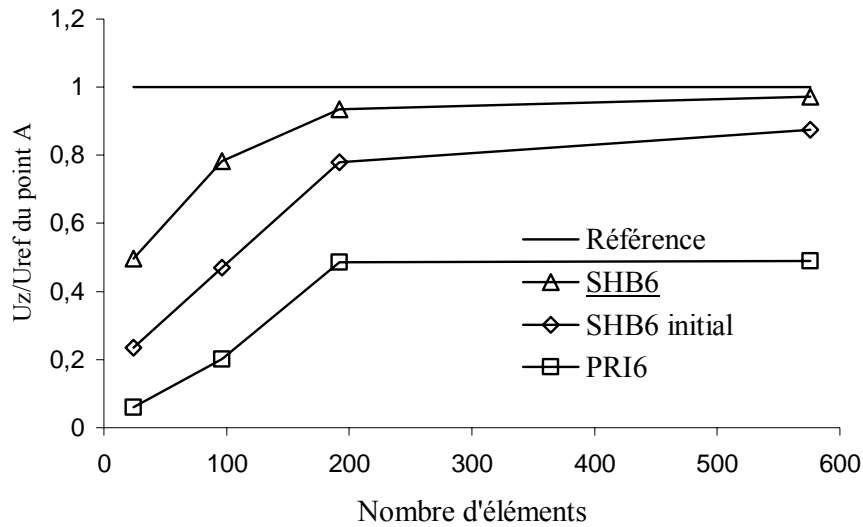
Figure 12. Poutre vrillée soumise à un effort tranchant ; un exemple de maillage $(12 \times 4 \times 1) \times 2$

Les résultats sont ceux du nœud A. On observe les déplacements de ce nœud suivant z pour le chargement vertical P. Les points de Gauss sont placés à travers l'épaisseur de la poutre.

Avec le chargement vertical P, les résultats obtenus sont donnés dans le Tableau 6.

Tableau 6. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre vrillée

Maillages	PRI6		SHB6 initial		SHB6	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
$(6 \times 2 \times 1) \times 2 = 24$	3,293E-04	0,061	1,270E-03	0,234	2,687E-03	0,496
$(12 \times 4 \times 1) \times 2 = 96$	1,093E-03	0,202	2,550E-03	0,470	4,248E-03	0,784
$(24 \times 4 \times 1) \times 2 = 192$	2,630E-03	0,485	4,222E-03	0,779	5,069E-03	0,935
$(36 \times 8 \times 1) \times 2 = 576$	2,650E-03	0,489	4,745E-03	0,875	5,267E-03	0,972



Graph 3. Déplacement normalisé du point A suivant Oz de la poutre vrillée

Ces résultats sont représentés sous forme graphique sur le Graphe 3. Nous nous rendons compte que l'élément SHB6 initial verrouille un peu lors du passage de ce cas test. L'élément SHB6 est le plus performant par rapport aux SHB6 initial et PRI6, puisque sa courbe de convergence est située au-dessus des deux autres quel que soit le nombre d'éléments utilisé (voir Graphe 3).

1.2.4. Coque sphérique pincée

Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. Il a été traité par de nombreux auteurs, parmi eux ([1], [2], [52], [56], [57]).

Les conditions aux limites sont théoriquement libres. Toutefois pour éviter les mouvements de corps rigides, nous bloquons le déplacement suivant z en bloquant un des pôles. Par ailleurs le problème ayant deux plans de symétries, nous ne traiterons qu'un quart de la géométrie de l'hémisphère. Le problème stipule que $\|4\vec{F}\| = 4 N$, donc $\|\vec{F}\| = 1 N$ (voir Figure 13a).

Les données de géométrie, de matériau et de chargement de ce cas test sont données dans le Tableau 7.

Tableau 7. Données de géométrie, matériau et de chargement de l'hémisphère pincé

Rayon moyen	$R = 10 \text{ m}$
Épaisseur	$h = 0,04 \text{ m}$
Module d'Young	$E = 6,825 \times 10^7 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Chargement	$\ F\ = 1 N$

La solution de référence a été établie par moyenne de résultats numériques de plusieurs progiciels de calcul mettant en œuvre la méthode des éléments finis. L'incertitude sur la solution de référence est moins de 2%. Le déplacement de référence du nœud A suivant Ox est $u_A = 92,4 \times 10^{-03} \text{m}$.

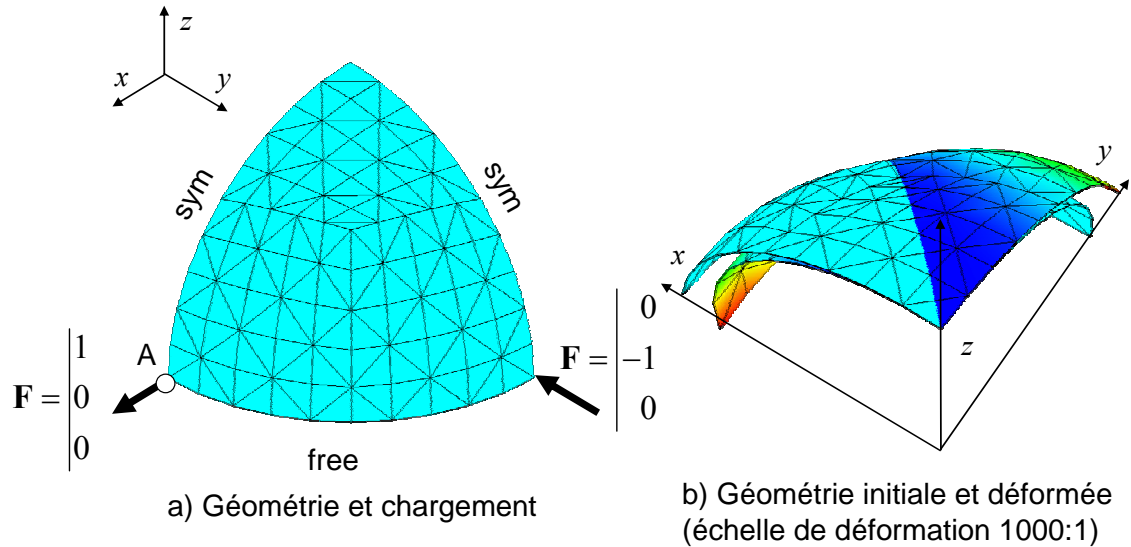


Figure 13. Hémisphère pincé ; un exemple de maillage $3x(5x5x1)x2$

Les résultats sont ceux du nœud A. On observe les déplacements de ce nœud suivant Ox. Les résultats obtenus sont représentés dans le Tableau 8.

Tableau 8. Déplacement du nœud A suivant Ox de l'hémisphère pincé

Maillages	PRI6		SHB6 initial		SHB6	
	Ux	Ux/Uref	Ux	Ux/Uref	Ux	Ux/Uref
$3x(5x5x1)x2 ; 150$	1,042E-04	0,001	5,892E-04	0,006	1,606E-03	0,017
$3x(11x11x1)x2 ; 726$	4,572E-04	0,005	1,209E-03	0,013	4,276E-03	0,046
$3x(22x22x1)x2 ; 2904$	2,015E-03	0,022	5,424E-03	0,059	1,805E-02	0,195
$3x(180x180x1)x2 ; 194400$	5,072E-02	0,549	6,418E-02	0,695	8,470E-02	0,917
$3x(250x250x1)x2 ; 375000$	6,435E-02	0,696	7,482E-02	0,810	8,840E-02	0,957

Nous constatons que les trois éléments ont un blocage sévère. Bien que l'élément SHB6 converge très lentement vers la solution de référence, il reste cependant meilleur que le SHB6 initial et bien meilleur que le PRI6.

1.2.5. Coque sphérique pincée avec mélange d'éléments

Le problème précédent a été repris en mélangeant les éléments SHB6 et SHB8PS. Les éléments SHB6 sont successivement placés au sommet, (loin du point d'application des efforts), et aux trois coins du quart d'hémisphère. Pour le premier cas, l'angle de maillage en SHB8PS est de 75° . Pour les autres cas, les SHB8PS sont disposés sur 60° , 75° ou 80° . Pour

le premier cas où les SHB6 sont mis au sommet de l'hémisphère (voir Figure 14), on constate une convergence très similaire à celle de la version améliorée de l'élément SHB8PS.

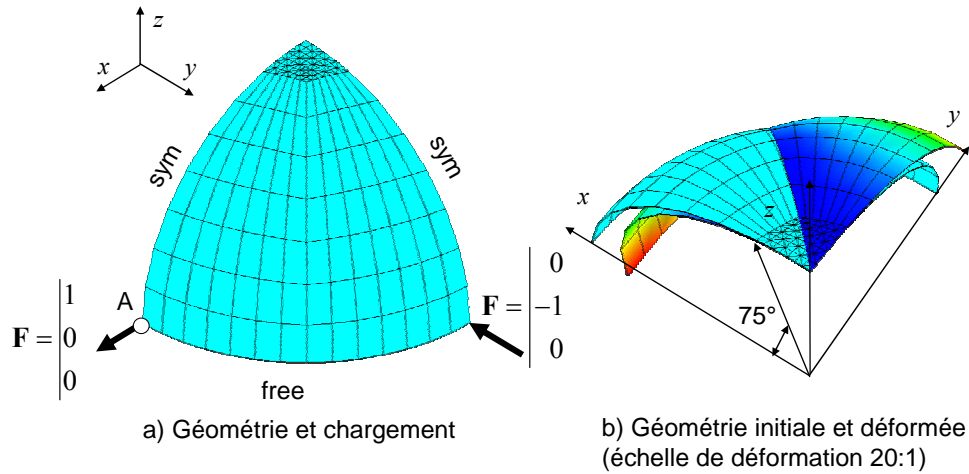
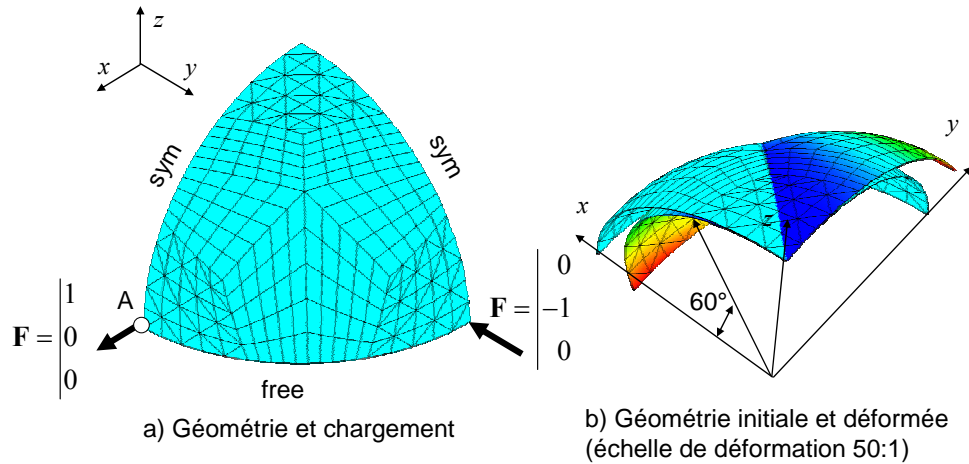


Figure 14. Hémisphère pincé (SHB6 à un seul sommet) ; un exemple de maillage 4x(7x7x1)

Les résultats obtenus pour le premier cas sont représentés dans le Tableau 9.

Tableau 9. Déplacement du point A suivant Ox, maillage mixte SHB8PS et SHB6 en un seul sommet

Maillages	PRI6 + CUB8		SHB6 initial + SHB8PS		SHB6 + SHB8PS	
	U _x	U _x /U _{ref}	U _x	U _x /U _{ref}	U _x	U _x /U _{ref}
4x(3x3x1) ; 36	7,768E-05	0,001	6,493E-02	0,703	7,257E-02	0,785
4x(5x5x1) ; 100	2,062E-04	0,002	8,131E-02	0,880	8,866E-02	0,960
4x(7x7x1) ; 156	3,875E-04	0,004	8,585E-02	0,929	9,080E-02	0,983



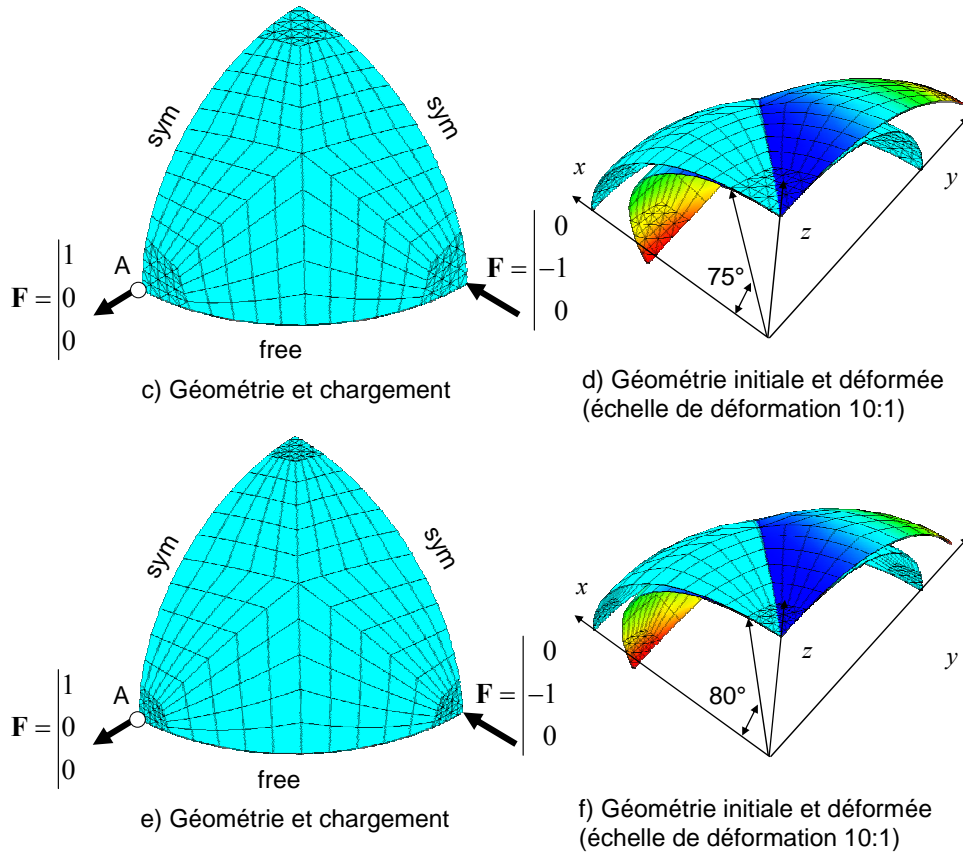
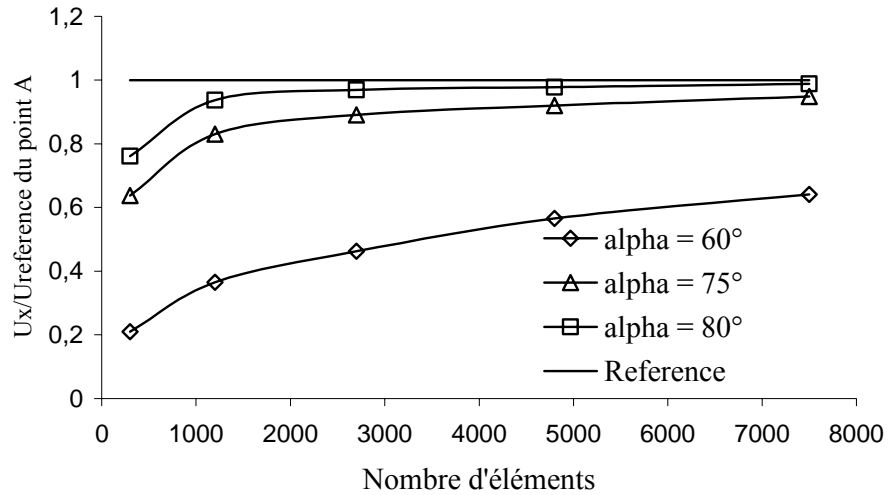


Figure 15. Maillage mixte de l'hémisphère pincé (SHB6 aux 3 sommets)

Pour les autres cas, on observe que la convergence est assez rapide lorsque l'angle de maillage en SHB8PS est supérieur ou égal à 75° (voir Tableau 10 et Graphe 4). Lorsque les SHB6 occupent une large part du maillage, on revient à la convergence lente des SHB6 seuls. Ce test montre aussi que la convergence lente observée est probablement due à la très pauvre base des éléments finis triangulaire linéaires. Il montre également que l'élément SHB6 se mélange naturellement aux éléments coques massifs à 8 nœuds SHB8PS. Il permet, donc, de faire des calculs sur toutes les géométries de pièces, ce qui n'est pas possible avec uniquement des éléments hexaédriques.

Tableau 10. Déplacement du point A suivant Ox
maillage mixte SHB8PS et SHB6 aux trois sommets de l'hémisphère pincé

Maillages	Maillage mélangé SHB8PS et SHB6 aux trois sommets					
	alpha = 60°		alpha = 75°		alpha = 80°	
	Ux	Ux / Uref	Ux	Ux / Uref	Ux	Ux / Uref
12x(5x5) ; 300	1,939E-02	0,210	5,893E-02	0,638	7,031E-02	0,761
12x(10x10) ; 1200	3,376E-02	0,365	7,668E-02	0,830	8,655E-02	0,937
12x(15x15) ; 2700	4,276E-02	0,463	8,233E-02	0,891	8,958E-02	0,969
12x(20x20) ; 4800	5,226E-02	0,566	8,506E-02	0,921	9,038E-02	0,978
12x(25x25) ; 7500	5,925E-02	0,641	8,762E-02	0,948	9,134E-02	0,989



Graph 4. Déplacement normalisé du point A suivant Ox ;
maillage mixte SHB8PS et SHB6 aux trois sommets de l'hémisphère pincé

1.2.6. Coque cylindrique pincée avec diaphragmes

Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. Ce test a été étudié par plusieurs auteurs ([4], [48], [57], [79]).

Les deux extrémités de la coque sont fermées par un diaphragme infiniment rigide. Un huitième du cylindre est maillé grâce aux symétries du problème. La coque est soumise à un effort ponctuel au point A, $\|\vec{P}\| = 1$ (Figure 16).

Les données de géométrie, chargement et de matériau pour ce cas test sont listées dans le Tableau 11.

Tableau 11. Données de géométrie, chargement et de matériau
du test de la coque cylindrique pincée avec diaphragmes

Longueur	$L = 600$
Rayon moyen	$R = 300$
Épaisseur	$h = 3$
Module d'Young	$E = 3 \times 10^6$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Chargement	$\ P\ = 1$

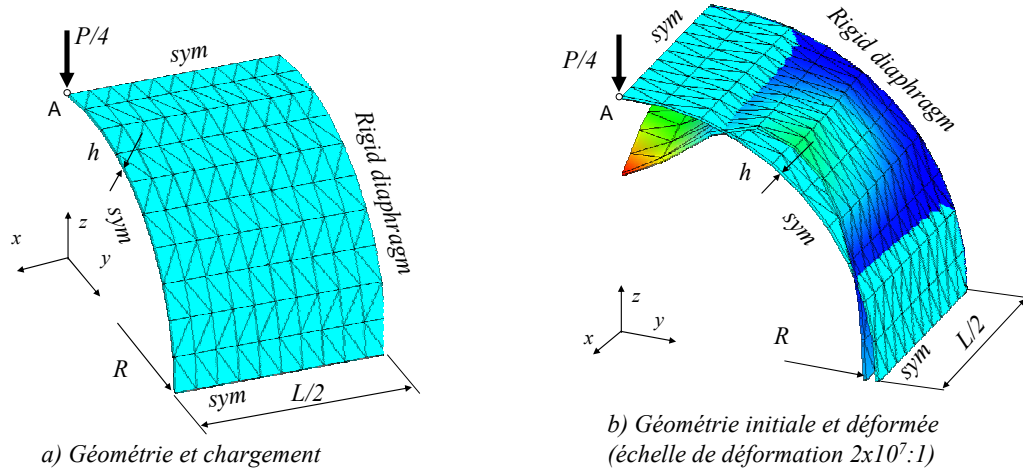


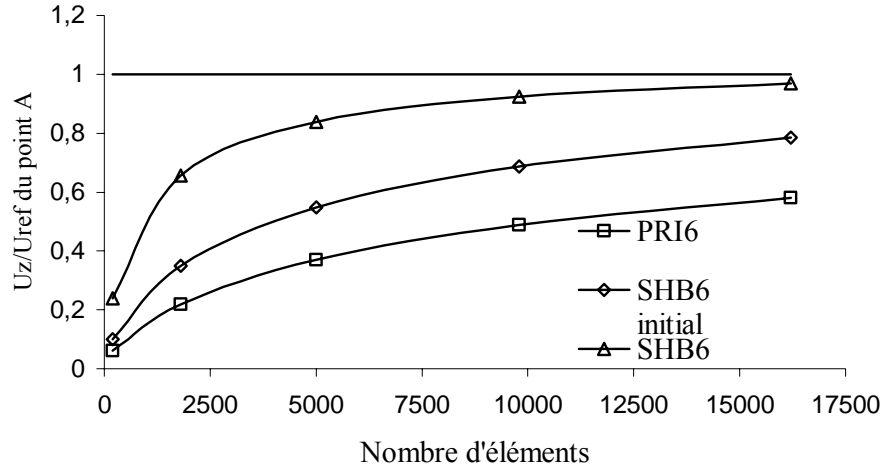
Figure 16. Géométrie, chargement et déformée de la coque cylindrique pincée avec diaphragmes

La solution de référence du problème a été établie par moyenne de résultats numériques de plusieurs logiciels de calcul mettant en œuvre la méthode des éléments finis. Le déplacement de référence suivant Oz du point A est $V_A = 1,82488E-5$.

Les résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz sont donnés dans le Tableau 12.

Tableau 12. Déplacement du point A suivant Oz de la coque cylindrique pincée avec diaphragmes

Maillages	PRI6		SHB6 initial		SHB6	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
(10x10x1)x2 ; 200	1,126E-06	0,062	1,815E-06	0,099	4,379E-06	0,240
(30x30x1)x2 ; 1800	3,991E-06	0,219	6,370E-06	0,349	1,198E-05	0,656
(50x50x1)x2 ; 5000	6,744E-06	0,370	9,997E-06	0,548	1,531E-05	0,839
(70x70x1)x2 ; 9800	8,934E-06	0,490	1,255E-05	0,688	1,687E-05	0,924
(90x90x1)x2 ; 16200	1,059E-05	0,580	1,434E-05	0,786	1,770E-05	0,970



Graph 5. Déplacement normalisé du point A suivant Oz de la coque cylindrique pincée avec diaphragmes

L'élément SHB6 converge vers la solution de référence nettement mieux que le SHB6 initial et le PRI6 (voir Graph 5).

1.2.7. Plaque circulaire soumise à une force ponctuelle

Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. Ce test a été repris dans de nombreux travaux, notamment par [21].

Le contour bas circulaire de la plaque est encastré, il permet donc de supprimer les mouvements de corps rigides. La plaque est soumise à un effort ponctuel au centre $\|P\| = 1 N$. On remarquera, par ailleurs la symétrie du problème. On ne modélisera qu'un quart de la plaque et on considérera les conditions de symétries. La charge appliquée à ce quart de plaque circulaire sera égale au quart de la charge totale (voir Figure 17).

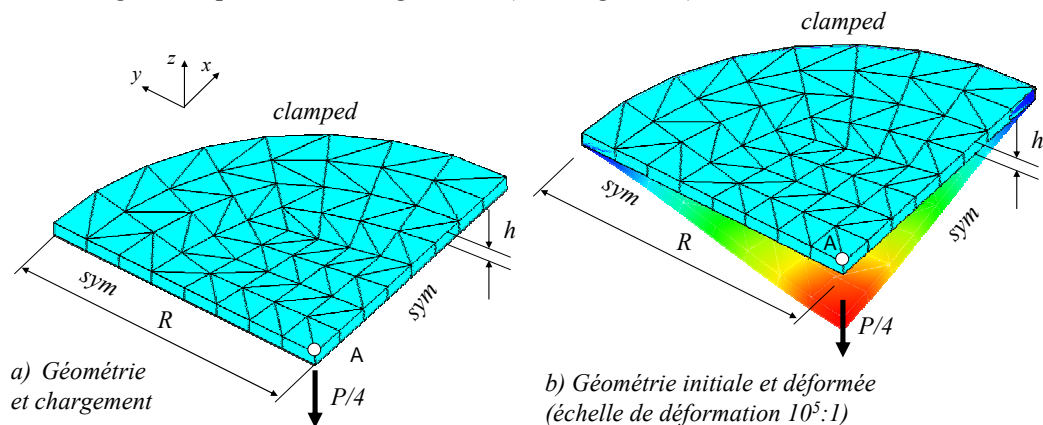


Figure 17. Géométrie, chargement et déformée de la plaque circulaire soumise à une force ponctuelle ; un exemple de maillage $3x(4x4x1)x2$

Les données de géométrie, de chargement et de matériau ce cas test sont listées dans le Tableau 13.

Tableau 13. Données de géométrie, chargement et de matériau de la plaque circulaire soumise à un effort ponctuel

Rayon moyen	$R = 10 \text{ m}$
Épaisseur	$h = 0,5 \text{ m}$
Module d'Young	$E = 10 \times 10^6 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,25$
Chargement	$\ P\ = 1 \text{ N}$

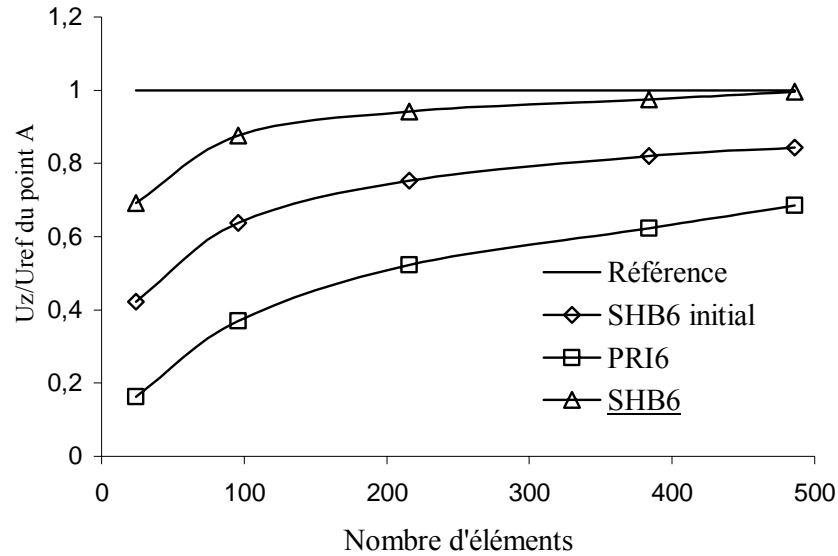
Nous ne possédons pas de résultats de référence analytique du déplacement vertical du point A au centre. Toutefois, l'élément SHB8PS semble converger vers $-2,65736 \times 10^{-05} \text{ m}$. C'est ce résultat que nous prendrons comme référence étant donné la performance de l'élément SHB8PS.

Les résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz sont donnés dans le Tableau 14.

Tableau 14. Déplacement du point A suivant Oz de la plaque circulaire soumise à un effort ponctuel

Maillages	PRI6		SHB6 initial		SHB6	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
3x(2x2x1)x2 ; 24	-4,315E-06	0,162	-1,121E-05	0,422	-1,838E-05	0,692
3x(4x4x1)x2 ; 96	-9,845E-06	0,370	-1,697E-05	0,638	-2,328E-05	0,876
3x(6x6x1)x2 ; 216	-1,388E-05	0,522	-2,001E-05	0,753	-2,505E-05	0,942
3x(8x8x1)x2 ; 384	-1,657E-05	0,624	-2,178E-05	0,820	-2,590E-05	0,974
3x(9x9x1)x2 ; 486	-1,823E-05	0,686	-2,239E-05	0,843	-2,647E-05	0,996

Sur ce cas test, l'élément SHB6 se comporte de façon très satisfaisante. Il converge mieux vers la solution de référence que les deux autres éléments SHB6 initial et PRI6 (voir Graphe 6).



Graph 6. Déplacement normalisé du point A de la plaque circulaire soumise à un effort ponctuel

1.2.8. Étude fréquentielle d'une poutre libre encastrée

Ce test a pour objectif de tester l'élément SHB6 en vibration. La matrice de masse de l'élément SHB6 est prise comme celle de l'élément solide prismatique à 6 nœuds.

Nous cherchons à déterminer les différentes fréquences d'une poutre dont une extrémité est encastrée, comprises entre 0 et 150 Hz (voir Figure 18).

Les données géométriques et matériau du problème sont regroupées dans le Tableau 15.

Tableau 15. Données géométriques et matériau de la poutre libre encastrée

Longueur	L = 1 m
Largeur	b = 0,1 m
Épaisseur	h = 0,01 m
Module d'Young	E = 2,1x10 ¹¹ Pa
Coefficient de Poisson	ν = 0,3
Densité volumique	ρ = 7800 kg/m ³

La solution analytique des fréquences de vibration en flexion de la poutre est telle que :

$$\omega_k = \frac{\lambda_k}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad \text{avec} \quad \cos \lambda_k \cosh \lambda_{k+1} = 0$$

Les solutions analytiques des fréquences de vibration de flexion obtenues dans les deux directions classées dans l'ordre croissant nous donnent le tableau suivant :

Fréquence 1	8,391 Hz	Fréquence 3	83,8 Hz
Fréquence 2	52,5 Hz	Fréquence 4	147,1 Hz

Les résultats numériques de simulation sont présentés dans le Tableau 16.

Tableau 16. Fréquences propres de la poutre libre encastree

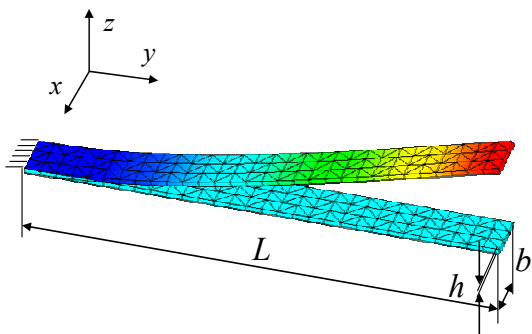
SHB6								
Maillage	f1ref=8.4		f2ref=52.5		f3ref=83.8		f4ref=147.1	
	f1	f1/f1ref	f2	f2/f2ref	f3	f3/f3ref	f4	f4/f4ref
(30x3x1)x2 = 180	9,559	1,14	59,61	1,14	97,06	1,16	165,60	1,13
(40x4x1)x2 = 320	9,184	1,09	57,15	1,09	91,80	1,10	159,20	1,08
(80x8x1)x2 = 1280	8,652	1,03	54,10	1,03	85,87	1,02	151,00	1,03
(120x12x1)x2 = 2880	8,538	1,02	53,40	1,02	84,57	1,01	149,20	1,01

PRI6								
Maillage	f1ref=8.4		f2ref=52.5		f3ref=83.8		f4ref=147.1	
	f1	f1/f1ref	f2	f2/f2ref	f3	f3/f3ref	f4	f4/f4ref
(30x3x1)x2 = 180	19,2	2,29	96,40	1,84	120,40	1,44	337,90	2,30
(40x4x1)x2 = 320	15,8	1,88	91,30	1,74	99,10	1,18	277,70	1,89
(80x8x1)x2 = 1280	11,2	1,33	70,30	1,34	85,60	1,02	196,90	1,34
(120x12x1)x2 = 2880	10	1,19	62,80	1,20	84,40	1,01	175,90	1,20

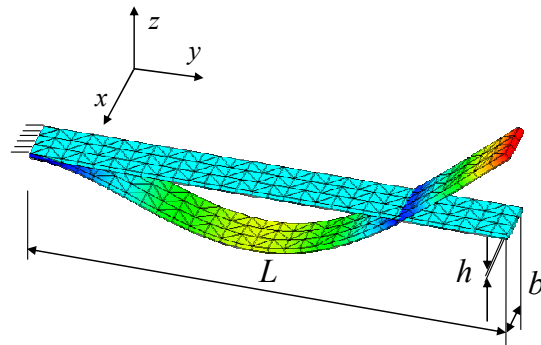
SHB6 initial								
Maillage	f1ref=8.4		f2ref=52.5		f3ref=83.8		f4ref=147.1	
	f1	f1/f1ref	f2	f2/f2ref	f3	f3/f3ref	f4	f4/f4ref
(30x3x1)x2 = 180	12,3	1,46	76,80	1,46	97,10	1,16	213,90	1,45
(40x4x1)x2 = 320	11,1	1,32	69,04	1,32	91,80	1,10	192,80	1,31
(80x8x1)x2 = 1280	9,28	1,10	58,10	1,11	85,90	1,03	162,70	1,11
(120x12x1)x2 = 2880	8,848	1,05	55,40	1,06	84,50	1,01	155,10	1,05

Nous trouvons que la convergence de l'élément SHB6 est raisonnable. Il converge mieux vers la solution de référence que les deux autres éléments SHB6 initial et PRI6.

1^{er} mode de flexion suivant l'épaisseur



2nd mode de flexion suivant l'épaisseur



1^{er} mode de flexion suivant la largeur

3^{ème} mode de flexion suivant l'épaisseur

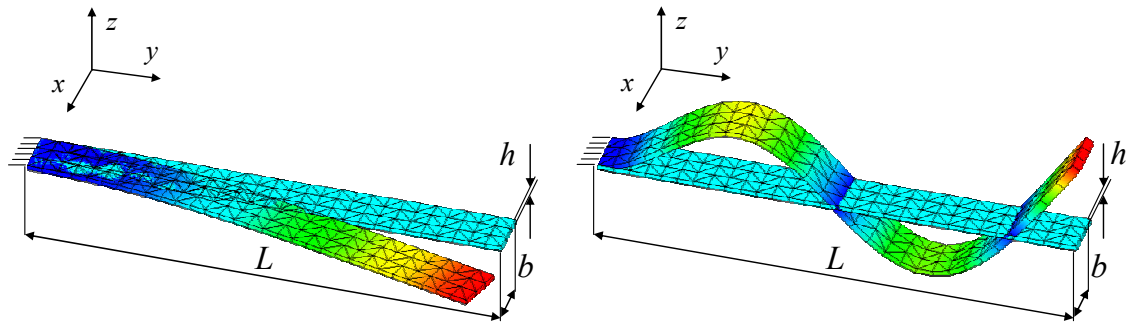


Figure 18. Géométrie, chargement et modes propres de la poutre libre encastrée ; un exemple de maillage (30x3x1)x2

1.2.9. Flambement d'un cylindre libre sous pression externe

Ce test représente un calcul de stabilité d'une enveloppe cylindrique mince libre à ses extrémités soumises à une pression externe. On calcule les charges critiques conduisant au flambement élastique d'Euler. La matrice de rigidité géométrique utilisée dans la résolution du problème aux valeurs propres est celle qui est due aux contraintes initiales.

La charge critique et le mode propre obtenus sont comparés à une solution de référence analytique.

Les données géométriques et matériau du cas test sont listées dans le Tableau 17.

Tableau 17. Données géométriques et matériau du cas test de flambement d'un cylindre libre sous pression externe

Hauteur	$L = 2 \text{ m}$
Rayon moyen	$R = 2 \text{ m}$
Épaisseur	$e = 0,02 \text{ m}$
Module d'Young	$E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$

La symétrie du problème permet de modéliser un quart de cylindre, avec des conditions de symétrie spécifiques au bord inférieur.

Les conditions aux limites et chargement du cas test sont (voir Figure 19) :

- * Pression uniformément répartie de $P_{cr} = 1 \text{ Pa}$ sur la partie cylindrique.
- * Conditions de symétrie : sur AB : $U_z = 0$; sur BC : $U_x = 0$; sur DA : $U_y = 0$.

La pression critique de référence est donnée en [83] par l'expression suivante :

$$P_{cr} = \frac{En^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{e}{R} \right)^3 \text{ où } n \text{ est le numéro du mode (ici } n = 2, 4, 6).$$

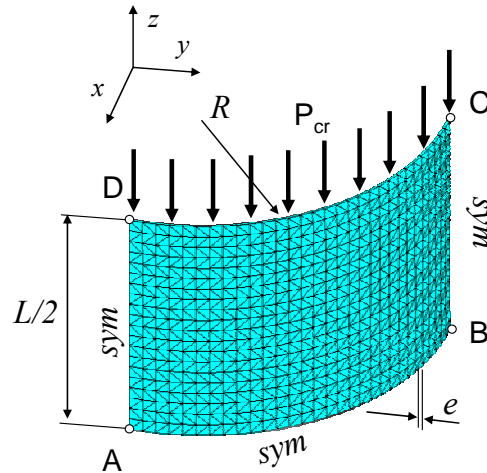


Figure 19. Géométrie, chargement et conditions aux limites du cylindre sous pression externe ; un exemple de maillage $(20 \times 30 \times 1) \times 2$

Les pressions critiques de référence (en Pa) sont :

Mode (n)	Pression critique de référence (Pa)
2	73260
4	293040
6	659340

Les résultats obtenus sont représentés dans le Tableau 18.

Tableau 18. Pressions critiques de flambage du cylindre sous pression externe

Maillages	PRI6 (mode 2)		PRI6 (mode 4)		PRI6 (mode 6)	
	P	P/P _{cr}	P	P/P _{cr}	P	P/P _{cr}
$(20 \times 30 \times 1) \times 2 = 1200$	7,733E+05	10,56	3,094E+06	10,56	6,963E+06	10,56
$(20 \times 40 \times 1) \times 2 = 1600$	4,723E+05	6,45	1,887E+06	6,44	4,241E+06	6,43
$(20 \times 50 \times 1) \times 2 = 2000$	3,336E+05	4,55	1,333E+06	4,55	2,992E+06	4,54
$(20 \times 60 \times 1) \times 2 = 2400$	2,585E+05	3,53	1,032E+06	3,52	2,318E+06	3,52
$(20 \times 70 \times 1) \times 2 = 2800$	2,133E+05	2,91	8,520E+05	2,91	1,913E+06	2,90

Maillages	SHB6 initial (mode 2)		SHB6 initial (mode 4)		SHB6 initial (mode 6)	
	P	P/P _{cr}	P	P/P _{cr}	P	P/P _{cr}
$(20 \times 30 \times 1) \times 2 = 1200$	1,022E+05	1,40	4,156E+05	1,42	9,607E+05	1,46
$(20 \times 40 \times 1) \times 2 = 1600$	8,894E+04	1,21	3,589E+05	1,22	8,193E+05	1,24
$(20 \times 50 \times 1) \times 2 = 2000$	8,284E+04	1,13	3,332E+05	1,14	7,564E+05	1,15
$(20 \times 60 \times 1) \times 2 = 2400$	7,957E+04	1,09	3,194E+05	1,09	7,231E+05	1,10
$(20 \times 70 \times 1) \times 2 = 2800$	7,761E+04	1,06	3,113E+05	1,06	7,033E+05	1,07

Maillages	SHB6 (mode 2)		SHB6 (mode 4)		SHB6 (mode 6)	
	P	P/Pcr	P	P/Pcr	P	P/Pcr
(20x30x1)x2 ; 1200	9,127E+04	1,25	3,685E+05	1,26	8,417E+05	1,28
(20x40x1)x2 ; 1600	8,272E+04	1,13	3,323E+05	1,13	7,532E+05	1,14
(20x50x1)x2 ; 2000	7,885E+04	1,08	3,161E+05	1,08	7,138E+05	1,08
(20x60x1)x2 ; 2400	7,678E+04	1,05	3,074E+05	1,05	6,929E+05	1,05
(20x70x1)x2 ; 2800	7,554E+04	1,03	3,022E+05	1,03	6,805E+05	1,03

Flambage d'un cylindre libre sous pression externe

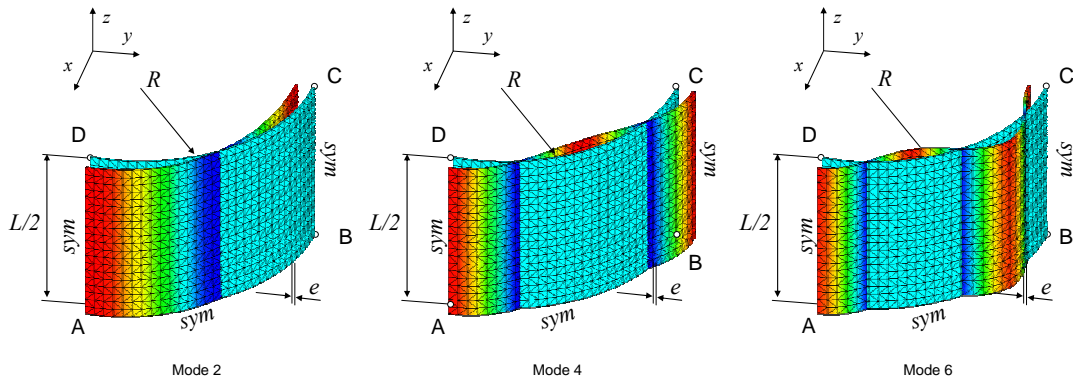
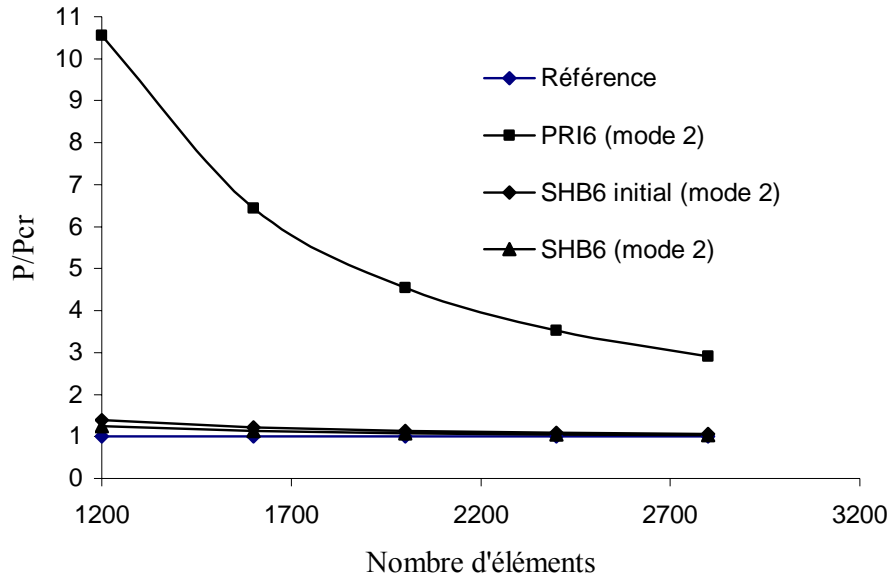


Figure 20. Courbe de convergence et modes de flambement du cylindre sous pression externe ; un exemple de maillage (20x30x1)x2

Les résultats montrent que l'élément SHB6 converge bien vers la solution de référence.

2. Éléments coques volumiques SHB15 et SHB20

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les modélisations des éléments finis coques volumiques quadratiques SHB15 et SHB20.

L'élément SHB15 est un prisme à quinze nœuds purement tridimensionnel avec trois degrés de liberté en déplacement à chaque nœud, et il a également une direction privilégiée appelée « épaisseur » qui est normale au plan moyen du prisme. L'intégration numérique réduite utilisant 3x5 points de Gauss est employée. L'intégration dans le plan utilise 3 points et celle à travers l'épaisseur s'appuie sur cinq points de Gauss (voir Figure 21).

L'élément SHB20 est un hexaèdre à vingt nœuds purement tridimensionnel avec trois degrés de liberté en déplacement à chaque nœud, et il a aussi une direction privilégiée appelée « épaisseur » qui est normale au plan moyen de l'hexaèdre. L'intégration numérique réduite utilisant 4x5 points de Gauss est employée. L'intégration dans le plan utilise 4 points et celle à travers l'épaisseur s'appuie sur cinq points de Gauss (voir Figure 22)

On montre que ces éléments finis n'ont pas besoin de stabilisation et, pour l'instant, nous n'avons pas utilisé de projections. Afin d'évaluer leurs performances, une série de cas tests linéaires standards de la littérature leurs sera appliquée. Des résultats relatifs à la rapidité de convergence seront aussi donnés avec des comparaisons avec d'autres éléments finis 3D.

2.1. Modélisation SHB15 en linéaire

L'élément SHB15 est formulé dans les axes locaux du plan moyen. Les directions x, y, z (ou encore x_1, x_2, x_3) sont respectivement parallèles aux axes ξ, η, ζ . La Figure 21 représente la géométrie d'un élément de référence SHB15 et ses points d'intégration.

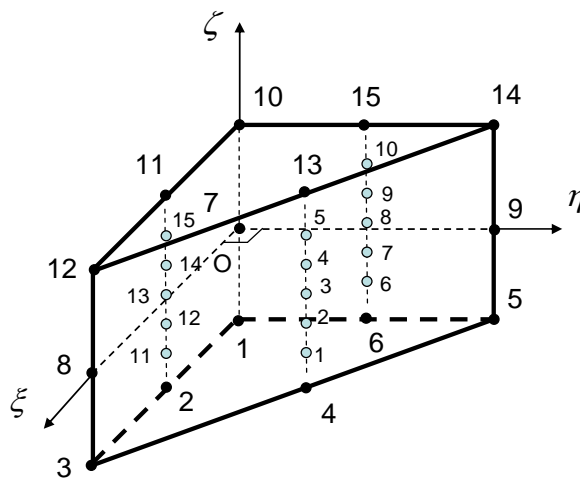


Figure 21. Géométrie de l'élément de référence SHB15 et ses points d'intégration

Coordonnées des noeuds :

$$\begin{aligned}
 &1(0,0,-1) ; \quad 2\left(\frac{1}{2},0,-1\right) ; \quad 3(1,0,-1) ; \quad 4\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right) ; \quad 5(0,1,-1) ; \quad 6\left(0,\frac{1}{2},-1\right) ; \\
 &\quad\quad\quad 7(0,0,0) ; \quad\quad\quad\quad\quad\quad 8(1,0,0) ; \quad\quad\quad\quad\quad\quad 9(0,1,0) ; \\
 &10(0,0,1) ; \quad 11\left(\frac{1}{2},0,1\right) ; \quad 12(1,0,1) ; \quad 13\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) ; \quad 14(0,1,1) ; \quad 15\left(0,\frac{1}{2},1\right).
 \end{aligned}$$

2.1.1. Cinématique et interpolation

L'élément SHB15 est un élément quadratique iso-paramétrique. Les coordonnées spatiales x_i sont reliées aux coordonnées nodales x_{il} au moyen des fonctions de forme N_l par les formules :

$$x_i = x_{il} N_l(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{l=1}^{15} x_{il} N_l(\xi, \eta, \zeta) \quad (64)$$

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément u_i en termes des déplacements nodaux u_{il} :

$$u_i = u_{il} N_l(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{l=1}^{15} u_{il} N_l(\xi, \eta, \zeta) \quad (65)$$

2.1.2. Opérateur gradient discrétisé

L'interpolation du champ de déplacement de l'élément (65) va nous permettre de définir le taux de déformation et d'écrire les relations reliant les déformations aux déplacements nodaux. On commence d'abord par écrire le gradient $u_{i,j}$ du champ de déplacement :

$$u_{i,j} = u_{il} N_{l,j} \quad (66)$$

Le tenseur de déformation ε_{ij} est donné ensuite par la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (67)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques quadratiques $N_l(\xi, \eta, \zeta)$ associées à l'élément prismatique à quinze nœuds :

$$\mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} (\zeta - 1)(1 - \xi - \eta)(\zeta + 2\xi + 2\eta)/2 \\ 2\xi(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta) \\ \xi(1 - \zeta)(2\xi - 2 - \zeta)/2 \\ 2\xi\eta(1 - \zeta) \\ \eta(2\eta - 2 - \zeta)(1 - \zeta)/2 \\ 2\eta(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta) \\ (1 - \zeta^2)(1 - \xi - \eta) \\ (1 - \zeta^2)\xi \\ (1 - \zeta^2)\eta \\ (-\zeta - 1)(1 - \xi - \eta)(2\xi + 2\eta - \zeta)/2 \\ 2\xi(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta) \\ \xi(1 + \zeta)(2\xi - 2 + \zeta)/2 \\ 2\xi\eta(1 + \zeta) \\ \eta(2\eta - 2 + \zeta)(1 + \zeta)/2 \\ 2\eta(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta) \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$\xi \in [0, 1]; \quad \eta \in [0, 1 - \xi]; \quad \zeta \in [-1, 1].$$

L'origine du repère est confondue avec le coin droit du triangle du plan médian de l'élément (celui qui possède un angle droit, voir Figure 21).

Ces fonctions de forme transforment un prisme régulier dans l'espace (ξ, η, ζ) en un prisme quelconque dans l'espace (x_1, x_2, x_3) ou bien (x, y, z) . En combinant les équations (64), (65) et (68), on arrive à développer le champ de déplacement comme un terme constant, des termes linéaires en x_i , et des termes faisant intervenir les fonctions h_α :

$$\begin{cases} u_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + \\ c_{4i}h_4 + c_{5i}h_5 + c_{6i}h_6 + c_{7i}h_7 + c_{8i}h_8 + c_{9i}h_9 + c_{10i}h_{10} + c_{11i}h_{11} \\ i = 1, 2, 3 \\ h_1 = \xi\zeta, \quad h_2 = \eta\zeta, \quad h_3 = \xi\eta, \quad h_4 = \xi\eta\zeta, \quad h_5 = \xi^2, \quad h_6 = \eta^2, \\ h_7 = \zeta^2, \quad h_8 = \xi^2\zeta, \quad h_9 = \eta^2\zeta, \quad h_{10} = \xi\zeta^2, \quad h_{11} = \eta\zeta^2 \end{cases} \quad (69)$$

En évaluant l'équation (69) aux nœuds de l'élément, on arrive aux trois systèmes de quinze équations suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i = a_{0i}\mathbf{S} + a_{1i}\mathbf{x}_1 + a_{2i}\mathbf{x}_2 + a_{3i}\mathbf{x}_3 + c_{1i}\mathbf{h}_1 + c_{2i}\mathbf{h}_2 + c_{3i}\mathbf{h}_3 + \\ c_{4i}\mathbf{h}_4 + c_{5i}\mathbf{h}_5 + c_{6i}\mathbf{h}_6 + c_{7i}\mathbf{h}_7 + c_{8i}\mathbf{h}_8 + c_{9i}\mathbf{h}_9 + c_{10i}\mathbf{h}_{10} + c_{11i}\mathbf{h}_{11} \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (70)$$

Ainsi les vecteurs \mathbf{d}_i et \mathbf{x}_i représentent, respectivement, les déplacements et les coordonnées nodales et sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i^T = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6}, u_{i7}, u_{i8}, u_{i9}, u_{i10}, u_{i11}, u_{i12}, u_{i13}, u_{i14}, u_{i15}) \\ \mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}, x_{i6}, x_{i7}, x_{i8}, x_{i9}, x_{i10}, x_{i11}, x_{i12}, x_{i13}, x_{i14}, x_{i15}) \end{cases} \quad (71)$$

Les vecteurs \mathbf{S} et \mathbf{h}_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots, 11$) sont donnés quant à eux par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \\ \mathbf{h}_1^T = \left(0 \quad -\frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \right) \\ \mathbf{h}_2^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \right) \\ \mathbf{h}_3^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \right) \\ \mathbf{h}_4^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \right) \\ \mathbf{h}_5^T = \left(0 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \right) \\ \mathbf{h}_6^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \right) \\ \mathbf{h}_7^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \\ \mathbf{h}_8^T = \left(0 \quad -\frac{1}{4} \quad -1 \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \right) \\ \mathbf{h}_9^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{4} \quad -1 \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \right) \\ \mathbf{h}_{10}^T = \left(0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \right) \\ \mathbf{h}_{11}^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. \quad (72)$$

Pour arriver à une écriture avantageuse de l'opérateur gradient discrétisé \mathbf{B} , on va introduire les trois vecteurs \mathbf{b}_i définis par :

$$\mathbf{b}_i^T = \mathbf{N}_{,i}(\mathbf{0}) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \Big|_{\xi=\eta=\zeta=0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (73)$$

En fait, ce calcul est pratique car nous verrons par la suite qu'il est nécessaire de déterminer la quantité suivante :

$$\left(\mathbf{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^{11} h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \right) = \mathbf{N}_{,j}^T(\xi, \eta, \zeta)$$

Si nous nous plaçons en $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$ alors nous obtenons :

$$\mathbf{b}_j^T = \mathbf{N}_{,j}^T(0, 0, 0) = \mathbf{cste}^T$$

où \mathbf{N}^T représente le vecteur à quinze composantes : $(N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_{15})$.

$$\mathbf{b}_i^T = \mathbf{N}_{,i}^T(\mathbf{0}) = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x_i} \quad \dots \quad \frac{\partial N_{15}}{\partial x_i} \right)_{|\xi=\eta=\zeta=0}$$

$$\frac{\partial N_I}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial N_I}{\partial \xi} j_{1j} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} j_{2j} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} j_{3j} \right)$$

avec $I = 1, 2, \dots, 15$ et $j = 1, 2, 3$

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{pmatrix}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{array}{lll}
 N_{1,\xi} = \frac{(1-\zeta)}{2}(4\xi+4\eta+\zeta-2) & N_{1,\eta} = \frac{(1-\zeta)}{2}(4\xi+4\eta+\zeta-2) & N_{1,\zeta} = \frac{(1-\xi-\eta)}{2}(2\xi+2\eta+2\zeta-1) \\
 N_{2,\xi} = 2(1-\zeta)(1-2\xi-\eta) & N_{2,\eta} = -2(1-\zeta)\xi & N_{2,\zeta} = -2\xi(1-\xi-\eta) \\
 N_{3,\xi} = \frac{(1-\zeta)}{2}(-2+4\xi-\zeta) & N_{3,\eta} = 0 & N_{3,\zeta} = \frac{\xi}{2}(1-2\xi+2\zeta) \\
 N_{4,\xi} = 2(1-\zeta)\eta & N_{4,\eta} = 2(1-\zeta)\xi & N_{4,\zeta} = -2\xi\eta \\
 N_{5,\xi} = 0 & N_{5,\eta} = \frac{(1-\zeta)}{2}(-2+4\eta-\zeta) & N_{5,\zeta} = \frac{\eta}{2}(1-2\eta+2\zeta) \\
 N_{6,\xi} = -2(1-\zeta)\eta & N_{6,\eta} = 2(1-\zeta)(1-\xi-2\eta) & N_{6,\zeta} = -2\eta(1-\xi-\eta) \\
 N_{7,\xi} = -1+\zeta^2 & N_{7,\eta} = -1+\zeta^2 & N_{7,\zeta} = -2\zeta(1-\xi-\eta) \\
 N_{8,\xi} = 1-\zeta^2 & N_{8,\eta} = 0 & N_{8,\zeta} = -2\zeta\xi \\
 N_{9,\xi} = 0 & N_{9,\eta} = 1-\zeta^2 & N_{9,\zeta} = -2\zeta\eta \\
 N_{10,\xi} = \frac{(1+\zeta)}{2}(4\xi+4\eta-\zeta-2) & N_{10,\eta} = \frac{(1+\zeta)}{2}(4\xi+4\eta-\zeta-2) & N_{10,\zeta} = \frac{(1-\xi-\eta)}{2}(-2\xi-2\eta+2\zeta+1) \\
 N_{11,\xi} = 2(1+\zeta)(1-2\xi-\eta) & N_{11,\eta} = -2(1+\zeta)\xi & N_{11,\zeta} = 2\xi(1-\xi-\eta) \\
 N_{12,\xi} = \frac{(1+\zeta)}{2}(-2+4\xi+\zeta) & N_{12,\eta} = 0 & N_{12,\zeta} = \frac{\xi}{2}(-1+2\xi+2\zeta) \\
 N_{13,\xi} = 2(1+\zeta)\eta & N_{13,\eta} = 2(1+\zeta)\xi & N_{13,\zeta} = 2\xi\eta \\
 N_{14,\xi} = 0 & N_{14,\eta} = \frac{(1+\zeta)}{2}(-2+4\eta+\zeta) & N_{14,\zeta} = \frac{\eta}{2}(-1+2\eta+2\zeta) \\
 N_{15,\xi} = -2(1+\zeta)\eta & N_{15,\eta} = 2(1+\zeta)(1-2\eta-\xi) & N_{15,\zeta} = 2\eta(1-\xi-\eta)
 \end{array}$$

Donc, en $\xi = \eta = \zeta = 0$, nous avons :

$$\mathbf{b}_i^T = (j_{1i} \quad j_{2i} \quad j_{3i}) \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De plus, on peut vérifier par des considérations algébriques que les conditions d'orthogonalité suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{h}_\alpha = 0; \quad \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{S} = 0; \quad \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \\
 \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{S} = 0; \quad \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{S} = 0; \quad \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{S} = 0; \quad \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{S} = 4; \quad \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{S} = 4; \\
 \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{S} = 12; \quad \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{S} = 0 \quad \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{S} = 0 \quad \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{S} = 4 \quad \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{S} = 4 \\
 \mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = \begin{bmatrix}
 3 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & 3 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{13}{4} & \frac{1}{8} & 3 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\
 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{13}{4} & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & 3 & 12 & 0 & 0 & 4 & 4 \\
 \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 4 & 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3
 \end{bmatrix} \\
 \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 11 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \\
 \delta \text{ désigne le symbol de Kronecker}
 \end{array} \right. \quad (74)$$

À ce stade, on peut déterminer les constantes inconnues qui interviennent dans l'écriture (69) du champ de déplacement en multipliant scalairement l'équation (70) par \mathbf{b}_j^T , \mathbf{S}^T et \mathbf{h}_α^T , respectivement, et en utilisant les relations d'orthogonalité (74). On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_2 + c_{3i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_3 + \\
 c_{4i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_4 + c_{5i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_5 + c_{6i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_6 + c_{7i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_7 + c_{8i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_8 + c_{9i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_9 + c_{10i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_{10} + c_{11i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\
 = 0 + a_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_3 + 0 = a_{ji}
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = 15a_{0i} + (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \frac{1}{2}c_{3i} + 0c_{4i} + 4c_{5i} + 4c_{6i} + 12c_{7i} + 0c_{8i} + 0c_{9i} + 4c_{10i} + 4c_{11i} \\ a_{0i} = \frac{1}{15} \left(\mathbf{S}^T - (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i - \frac{1}{15} \left(\frac{1}{2}c_{3i} + 4c_{5i} + 4c_{6i} + 12c_{7i} + 4c_{10i} + 4c_{11i} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = (\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 3c_{1i} - \frac{1}{2}c_{2i} + 0c_{3i} + \frac{1}{4}c_{4i} + 0c_{5i} + 0c_{6i} + 0c_{7i} + \frac{5}{2}c_{8i} + \frac{1}{4}c_{9i} + 0c_{10i} + 0c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = (\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) - \frac{1}{2}c_{1i} + 3c_{2i} + 0c_{3i} + \frac{1}{4}c_{4i} + 0c_{5i} + 0c_{6i} + 0c_{7i} + \frac{1}{4}c_{8i} + \frac{5}{2}c_{9i} + 0c_{10i} + 0c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = \frac{1}{2}a_{0i} + (\mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \frac{1}{8}c_{3i} + 0c_{4i} + \frac{1}{8}c_{5i} + \frac{1}{8}c_{6i} + \frac{1}{2}c_{7i} + 0c_{8i} + 0c_{9i} + \frac{1}{4}c_{10i} + \frac{1}{4}c_{11i} \\ \left(\mathbf{h}_3^T - \frac{1}{30} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_3^T - \frac{1}{30} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + \frac{13}{120}c_{3i} - \frac{1}{120}c_{5i} - \frac{1}{120}c_{6i} + \frac{1}{10}c_{7i} + \frac{7}{60}c_{10i} + \frac{7}{60}c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = (\mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + \frac{1}{4}c_{1i} + \frac{1}{4}c_{2i} + 0c_{3i} + \frac{1}{8}c_{4i} + 0c_{5i} + 0c_{6i} + 0c_{7i} + \frac{1}{8}c_{8i} + \frac{1}{8}c_{9i} + 0c_{10i} + 0c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = 4a_{0i} + (\mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \frac{1}{8}c_{3i} + 0c_{4i} + \frac{13}{4}c_{5i} + \frac{1}{8}c_{6i} + 3c_{7i} + 0c_{8i} + 0c_{9i} + \frac{5}{2}c_{10i} + \frac{1}{4}c_{11i} \\ \left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) - \frac{1}{120}c_{3i} + \frac{131}{60}c_{5i} - \frac{113}{120}c_{6i} - \frac{1}{5}c_{7i} + \frac{43}{30}c_{10i} - \frac{49}{60}c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = 4a_{0i} + (\mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \frac{1}{8}c_{3i} + 0c_{4i} + \frac{1}{8}c_{5i} + \frac{13}{4}c_{6i} + 3c_{7i} + 0c_{8i} + 0c_{9i} + \frac{1}{4}c_{10i} + \frac{5}{2}c_{11i} \\ \left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) - \frac{1}{120}c_{3i} - \frac{113}{120}c_{5i} + \frac{131}{60}c_{6i} - \frac{1}{5}c_{7i} - \frac{49}{60}c_{10i} + \frac{43}{30}c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = 12a_{0i} + (\mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \frac{1}{2}c_{3i} + 0c_{4i} + 3c_{5i} + 3c_{6i} + 12c_{7i} + 0c_{8i} + 0c_{9i} + 4c_{10i} + 4c_{11i} \\ \left(\mathbf{h}_7^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_7^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + \frac{1}{10}c_{3i} - \frac{1}{5}c_{5i} - \frac{1}{5}c_{6i} + \frac{12}{5}c_{7i} + \frac{4}{5}c_{10i} + \frac{4}{5}c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = (\mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + \frac{5}{2}c_{1i} + \frac{1}{4}c_{2i} + 0c_{3i} + \frac{1}{8}c_{4i} + 0c_{5i} + 0c_{6i} + 0c_{7i} + \frac{9}{4}c_{8i} + \frac{1}{8}c_{9i} + 0c_{10i} + 0c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = (\mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + \frac{1}{4}c_{1i} + \frac{5}{2}c_{2i} + 0c_{3i} + \frac{1}{8}c_{4i} + 0c_{5i} + 0c_{6i} + 0c_{7i} + \frac{1}{8}c_{8i} + \frac{9}{4}c_{9i} + 0c_{10i} + 0c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = 4a_{0i} + (\mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \frac{1}{4}c_{3i} + 0c_{4i} + \frac{5}{2}c_{5i} + \frac{1}{4}c_{6i} + 4c_{7i} + 0c_{8i} + 0c_{9i} + 3c_{10i} + \frac{1}{2}c_{11i} \\ \left(\mathbf{h}_{10}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_{10}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + \frac{7}{60}c_{3i} + \frac{43}{30}c_{5i} - \frac{49}{60}c_{6i} + \frac{4}{5}c_{7i} + \frac{29}{15}c_{10i} - \frac{17}{30}c_{11i} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{11i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{h}_{11} \\ = 4a_{0i} + (\mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \frac{1}{4}c_{3i} + 0c_{4i} + \frac{1}{4}c_{5i} + \frac{5}{2}c_{6i} + 4c_{7i} + 0c_{8i} + 0c_{9i} + \frac{1}{2}c_{10i} + 3c_{11i} \\ \left(\mathbf{h}_{11}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_{11}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + \frac{7}{60}c_{3i} - \frac{49}{60}c_{5i} + \frac{43}{30}c_{6i} + \frac{4}{5}c_{7i} - \frac{17}{30}c_{10i} + \frac{29}{15}c_{11i} \end{array} \right.$$

Nous pouvons écrire donc :

$$\begin{bmatrix}
 3 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & 3 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{13}{120} & 0 & -\frac{1}{120} & -\frac{1}{120} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{7}{60} & \frac{7}{60} \\
 \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{120} & 0 & \frac{131}{60} & -\frac{113}{120} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{43}{30} & -\frac{49}{60} \\
 0 & 0 & -\frac{1}{120} & 0 & -\frac{113}{120} & \frac{131}{60} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{49}{60} & \frac{43}{30} \\
 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{12}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\
 \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{7}{60} & 0 & \frac{43}{30} & -\frac{49}{60} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{29}{15} & -\frac{17}{30} \\
 0 & 0 & \frac{7}{60} & 0 & -\frac{49}{60} & \frac{43}{30} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & -\frac{17}{30} & \frac{29}{15}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_{1i} \\
 c_{2i} \\
 c_{3i} \\
 c_{4i} \\
 c_{5i} \\
 c_{6i} \\
 c_{7i} \\
 c_{8i} \\
 c_{9i} \\
 c_{10i} \\
 c_{11i}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 (\mathbf{h}_1^T - (\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 (\mathbf{h}_2^T - (\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_3^T - \frac{1}{30} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_3^T - \frac{1}{30} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 (\mathbf{h}_4^T - (\mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_7^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_7^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 (\mathbf{h}_8^T - (\mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 (\mathbf{h}_9^T - (\mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_{10}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_{10}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_{11}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_{11}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i
 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix}
 c_{1i} \\
 c_{2i} \\
 c_{3i} \\
 c_{4i} \\
 c_{5i} \\
 c_{6i} \\
 c_{7i} \\
 c_{8i} \\
 c_{9i} \\
 c_{10i} \\
 c_{11i}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{17}{2} & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{17}{2} & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{256}{17} & 0 & \frac{36}{17} & \frac{36}{17} & 2 & 0 & 0 & -\frac{58}{17} & -\frac{58}{17} \\
 -8 & -8 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{36}{17} & 0 & \frac{316}{187} & \frac{146}{187} & 1 & 0 & 0 & -\frac{324}{187} & -\frac{171}{187} \\
 0 & 0 & \frac{36}{17} & 0 & \frac{146}{187} & \frac{316}{187} & 1 & 0 & 0 & -\frac{171}{187} & -\frac{324}{187} \\
 0 & 0 & \frac{17}{17} & 0 & \frac{187}{187} & \frac{187}{187} & 1 & 0 & 0 & -\frac{187}{187} & -\frac{187}{187} \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\
 -9 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -9 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{58}{17} & 0 & -\frac{324}{187} & -\frac{171}{187} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{505}{187} & \frac{585}{374} \\
 0 & 0 & -\frac{58}{17} & 0 & -\frac{171}{187} & -\frac{324}{187} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{585}{374} & \frac{505}{187}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 (\mathbf{h}_1^T - (\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 (\mathbf{h}_2^T - (\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_3^T - \frac{1}{30} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_3^T - \frac{1}{30} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 (\mathbf{h}_4^T - (\mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_7^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_7^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 (\mathbf{h}_8^T - (\mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 (\mathbf{h}_9^T - (\mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_{10}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_{10}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\
 \left(\left(\mathbf{h}_{11}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_{11}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i
 \end{bmatrix}$$

En posant :

$$\left[\mathbf{n}_{\alpha\beta} \right] = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{256}{17} & 0 & \frac{36}{17} & \frac{36}{17} & 2 & 0 & 0 & -\frac{58}{17} & -\frac{58}{17} \\ -8 & -8 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{36}{17} & 0 & \frac{316}{187} & \frac{146}{187} & 1 & 0 & 0 & -\frac{324}{187} & -\frac{171}{187} \\ 0 & 0 & \frac{36}{17} & 0 & \frac{146}{187} & \frac{316}{187} & 1 & 0 & 0 & -\frac{171}{187} & -\frac{324}{187} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -9 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{58}{17} & 0 & -\frac{324}{187} & -\frac{171}{187} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{505}{187} & \frac{585}{374} \\ 0 & 0 & -\frac{58}{17} & 0 & -\frac{171}{187} & -\frac{324}{187} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{585}{374} & \frac{505}{187} \end{bmatrix}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 11$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\alpha}^T &= n_{\alpha 1} (\mathbf{h}_1^T - (\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 2} (\mathbf{h}_2^T - (\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \\
 &+ n_{\alpha 3} \left[\left(\mathbf{h}_3^T - \frac{1}{30} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_3^T - \frac{1}{30} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right] + n_{\alpha 4} (\mathbf{h}_4^T - (\mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \\
 &+ n_{\alpha 5} \left[\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right] + n_{\alpha 6} \left[\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right] \\
 &+ n_{\alpha 7} \left[\left(\mathbf{h}_7^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_7^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right] + n_{\alpha 8} (\mathbf{h}_8^T - (\mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 9} (\mathbf{h}_9^T - (\mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + \\
 &n_{\alpha 10} \left[\left(\mathbf{h}_{10}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_{10}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right] + n_{\alpha 11} \left[\left(\mathbf{h}_{11}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_{11}^T - \frac{4}{15} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right]
 \end{aligned}$$

Nous obtenons alors : $c_{\alpha i} = \gamma_{\alpha}^T \cdot \mathbf{d}_i$

Ce qui peut se résumer à :

$$a_{ji} = \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i, \quad c_{\alpha i} = \gamma_{\alpha}^T \cdot \mathbf{d}_i \quad (75)$$

Le champ de déplacement se met finalement sous la forme très pratique suivante :

$$\begin{aligned}
 u_i &= a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + c_{4i}h_4 + c_{5i}h_5 + c_{6i}h_6 \\
 &\quad + c_{7i}h_7 + c_{8i}h_8 + c_{9i}h_9 + c_{10i}h_{10} + c_{11i}h_{11} \\
 u_i &= a_{0i} + \mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{d}_i x_1 + \mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{d}_i x_2 + \mathbf{b}_3^T \cdot \mathbf{d}_i x_3 + \boldsymbol{\gamma}_1^T \cdot \mathbf{d}_i h_1 + \boldsymbol{\gamma}_2^T \cdot \mathbf{d}_i h_2 + \\
 &\quad + \boldsymbol{\gamma}_3^T \cdot \mathbf{d}_i h_3 + \boldsymbol{\gamma}_4^T \cdot \mathbf{d}_i h_4 + \boldsymbol{\gamma}_5^T \cdot \mathbf{d}_i h_5 + \boldsymbol{\gamma}_6^T \cdot \mathbf{d}_i h_6 + \boldsymbol{\gamma}_7^T \cdot \mathbf{d}_i h_7 \\
 &\quad + \boldsymbol{\gamma}_8^T \cdot \mathbf{d}_i h_8 + \boldsymbol{\gamma}_9^T \cdot \mathbf{d}_i h_9 + \boldsymbol{\gamma}_{10}^T \cdot \mathbf{d}_i h_{10} + \boldsymbol{\gamma}_{11}^T \cdot \mathbf{d}_i h_{11} \\
 u_i &= a_{0i} + (\mathbf{b}_1^T x_1 + \mathbf{b}_2^T x_2 + \mathbf{b}_3^T x_3 + \boldsymbol{\gamma}_1^T h_1 + \boldsymbol{\gamma}_2^T h_2 + \boldsymbol{\gamma}_3^T h_3 + \boldsymbol{\gamma}_4^T h_4 + \boldsymbol{\gamma}_5^T h_5 \\
 &\quad + \boldsymbol{\gamma}_6^T h_6 + \boldsymbol{\gamma}_7^T h_7 + \boldsymbol{\gamma}_8^T h_8 + \boldsymbol{\gamma}_9^T h_9 + \boldsymbol{\gamma}_{10}^T h_{10} + \boldsymbol{\gamma}_{11}^T h_{11}) \cdot \mathbf{d}_i
 \end{aligned} \tag{76}$$

En différentiant la formule ci-dessus par rapport à x_j , on obtient le gradient de déplacement :

$$u_{i,j} = \left(\mathbf{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^{11} h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = (\mathbf{b}_j^T + h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) \cdot \mathbf{d}_i \tag{77}$$

L'opérateur gradient discrétisé reliant le tenseur de déformation au vecteur des déplacements nodaux par :

$$\nabla^s(\mathbf{u}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \tag{78}$$

où :

$$\nabla^s(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} \tag{79}$$

prend alors la forme matricielle pratique :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & 0 \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & 0 & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ 0 & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \tag{80}$$

Cette écriture de l'opérateur gradient discrétisé utilisant les formules de Hallquist [40] est très pratique car les vecteurs $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$, qui interviennent dans l'expression de \mathbf{B} , vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{x}_j = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \tag{81}$$

Ceci permettrait de manipuler séparément chacun des modes de déformation pour obtenir simplement une forme de champ de déformation postulée. Notons que la formulation (80) nous permet aussi de vérifier que l'élément est stable vis-à-vis de modes de *hourglass* en étudiant le noyau de l'opérateur gradient discrétisé. Il est à noter aussi qu'aucune projection de cet opérateur n'est faite dans la suite, dans la mesure où les tests actuels appliqués à cet élément n'ont pas mis en évidence de verrouillages particuliers.

2.2. Modélisation SHB20 en linéaire

L'élément SHB20 est formulé dans les axes locaux du plan moyen. Les directions x, y, z (ou encore x_1, x_2, x_3) sont respectivement parallèles aux axes ξ, η, ζ . La Figure 22 représente la géométrie d'un élément de référence SHB20 et ses points d'intégration.

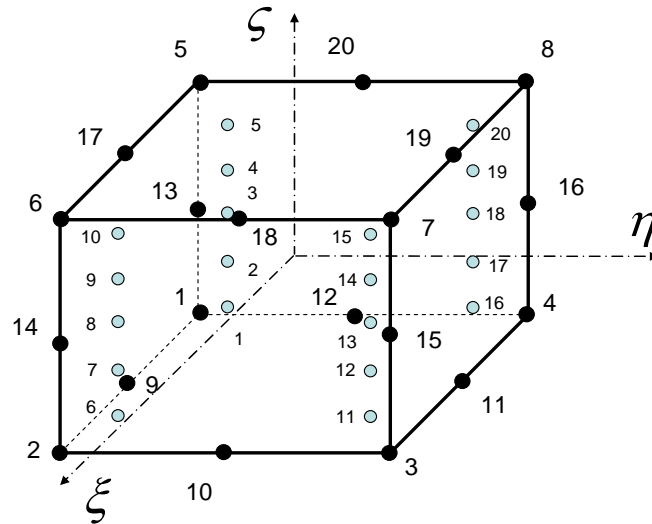


Figure 22. Géométrie de l'élément de référence SHB20 et ses points d'intégration

Coordonnées des nœuds :

1(-1,-1,-1)	2(1,-1,-1)	3(1,1,-1)	4(-1,1,-1)
5(-1,-1,1)	6(1,-1,1)	7(1,1,1)	8(-1,1,1)
9(0,-1,-1)	10(1,0,-1)	11(0,1,-1)	12(-1,0,-1)
13(-1,-1,0)	14(1,-1,0)	15(1,1,0)	16(-1,1,0)
17(0,-1,1)	18(1,0,1)	19(0,1,1)	20(-1,0,1)

2.2.1. Cinématique et interpolation

L'élément SHB20 est aussi un élément quadratique iso-paramétrique. Les coordonnées spatiales x_i sont reliées aux coordonnées nodales x_{II} au moyen des fonctions de forme N_I par les formules :

$$x_i = x_{II} N_I(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{I=1}^{20} x_{II} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad (82)$$

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément u_i en termes des déplacements nodaux u_{il} :

$$u_i = u_{il} N_l(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{l=1}^{20} u_{il} N_l(\xi, \eta, \zeta) \quad (83)$$

2.2.2. Opérateur gradient discrétisé

L'interpolation du champ de déplacement de l'élément (83) va nous permettre de définir le taux de déformation et d'écrire les relations reliant les déformations aux déplacements nodaux. On commence d'abord par écrire le gradient $u_{i,j}$ du champ de déplacement :

$$u_{i,j} = u_{il} N_{l,j} \quad (84)$$

Le tenseur de déformation ε_{ij} est donné ensuite par la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (85)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques quadratiques $N_l(\xi, \eta, \zeta)$ associées à l'élément hexaédrique à vingt nœuds :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-2-\xi-\eta-\zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-2+\xi-\eta+\zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-2+\xi-\eta-\zeta) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-2+\xi+\eta+\zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-2+\xi+\eta-\zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-2-\xi+\eta+\zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-2-\xi+\eta-\zeta) & N_9 &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-2-\xi-\eta+\zeta) & N_{10} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\zeta) \\ N_{11} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) & N_{16} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1+\eta) \\ N_{12} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1-\zeta) & N_{17} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_{13} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1-\eta) & N_{18} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1+\zeta) \\ N_{14} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1-\eta) & N_{19} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_{15} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1+\eta) & N_{20} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (86)$$

$$\xi \in [-1;1]; \quad \eta \in [-1;1]; \quad \zeta \in [-1;1].$$

L'origine du repère est confondue avec le centre du plan médian de l'élément.

Ces fonctions de forme transforment un cube régulier dans l'espace (ξ, η, ζ) en un cube quelconque dans l'espace (x_1, x_2, x_3) ou bien (x, y, z) . En combinant les équations (82), (83) et (86), on arrive à développer le champ de déplacement comme un terme constant, des termes linéaires en x_i , et des termes faisant intervenir les fonctions h_α :

$$\begin{cases} u_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + c_{4i}h_4 + c_{5i}h_5 + c_{6i}h_6 + c_{7i}h_7 \\ \quad + c_{8i}h_8 + c_{9i}h_9 + c_{10i}h_{10} + c_{11i}h_{11} + c_{12i}h_{12} + c_{13i}h_{13} + c_{14i}h_{14} + c_{15i}h_{15} + c_{16i}h_{16} \\ i = 1, 2, 3 \\ h_1 = \xi\zeta, h_2 = \eta\zeta, h_3 = \xi\eta, h_4 = \xi^2, h_5 = \eta^2, h_6 = \zeta^2, h_7 = \xi\eta\zeta, h_8 = \xi^2\eta, h_9 = \xi^2\zeta, \\ h_{10} = \eta^2\xi, h_{11} = \eta^2\zeta, h_{12} = \zeta^2\xi, h_{13} = \zeta^2\eta, h_{14} = \xi^2\eta\zeta, h_{15} = \xi\eta^2\zeta, h_{16} = \xi\eta\zeta^2 \end{cases} \quad (87)$$

En évaluant l'équation (87) aux nœuds de l'élément, on arrive aux trois systèmes de vingt équations suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i = a_{0i}\mathbf{S} + a_{1i}\mathbf{x}_1 + a_{2i}\mathbf{x}_2 + a_{3i}\mathbf{x}_3 + c_{1i}\mathbf{h}_1 + c_{2i}\mathbf{h}_2 + c_{3i}\mathbf{h}_3 + \dots + c_{16i}\mathbf{h}_{16} \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (88)$$

Ainsi les vecteurs \mathbf{d}_i et \mathbf{x}_i représentent, respectivement, les déplacements et les coordonnées nodales et sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i^T = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \dots, u_{i20}) \\ \mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{i20}) \end{cases} \quad (89)$$

Les vecteurs \mathbf{S} et \mathbf{h}_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots, 16$) sont donnés quant à eux par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{S}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \\
 \mathbf{h}_1^T = (1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1) \\
 \mathbf{h}_2^T = (1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0) \\
 \mathbf{h}_3^T = (1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 \mathbf{h}_4^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) \\
 \mathbf{h}_5^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \\
 \mathbf{h}_6^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \\
 \mathbf{h}_7^T = (-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 \mathbf{h}_8^T = (-1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 \mathbf{h}_9^T = (-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) \\
 \mathbf{h}_{10}^T = (-1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 \mathbf{h}_{11}^T = (-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \\
 \mathbf{h}_{12}^T = (-1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1) \\
 \mathbf{h}_{13}^T = (-1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0) \\
 \mathbf{h}_{14}^T = (1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 \mathbf{h}_{15}^T = (1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 \mathbf{h}_{16}^T = (1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)
 \end{array} \right. \quad (90)$$

Pour arriver à une écriture avantageuse de l'opérateur gradient discrétisé \mathbf{B} , on va introduire les trois vecteurs \mathbf{b}_i définis par :

$$\mathbf{b}_i^T = \mathbf{N}_{,i}(\mathbf{0}) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \Big|_{\xi=\eta=\zeta=0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (91)$$

En fait, ce calcul est pratique car nous verrons par la suite qu'il est nécessaire de déterminer la quantité suivante :

$$\left(\mathbf{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^{16} h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \right) = \mathbf{N}_{,j}^T(\xi, \eta, \zeta)$$

Si nous nous plaçons en $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$ alors nous obtenons :

$$\mathbf{b}_j^T = \mathbf{N}_{,j}^T(0, 0, 0) = \mathbf{cste}^T$$

où \mathbf{N}^T représente le vecteur à vingt composantes : $(N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_{20})$.

$$\mathbf{b}_i^T = \mathbf{N}_{,i}^T(\mathbf{0}) = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x_i} \quad \dots \quad \frac{\partial N_{20}}{\partial x_i} \right) \Big|_{\xi=\eta=\zeta=0}$$

$$\frac{\partial N_I}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial N_I}{\partial \xi} j_{1j} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} j_{2j} + \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} j_{3j} \right)$$

avec $I = 1, 2, \dots, 20$ et $j = 1, 2, 3$

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{pmatrix}$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -0,125(1-\eta)(1-\zeta)(-1-2\xi-\eta-\zeta) & N_{1,\eta} &= -0,125(1-\xi)(1-\zeta)(-1-\xi-2\eta-\zeta) \\ N_{2,\xi} &= 0,125(1-\eta)(1-\zeta)(-1+2\xi-\eta-\zeta) & N_{2,\eta} &= -0,125(1+\xi)(1-\zeta)(-1+\xi-2\eta-\zeta) \\ N_{3,\xi} &= 0,125(1+\eta)(1-\zeta)(-1+2\xi+\eta-\zeta) & N_{3,\eta} &= 0,125(1+\xi)(1-\zeta)(-1+\xi+2\eta-\zeta) \\ N_{4,\xi} &= -0,125(1+\eta)(1-\zeta)(-1-2\xi+\eta-\zeta) & N_{4,\eta} &= 0,125(1-\xi)(1-\zeta)(-1-\xi+2\eta-\zeta) \\ N_{5,\xi} &= -0,125(1-\eta)(1+\zeta)(-1-2\xi-\eta+\zeta) & N_{5,\eta} &= -0,125(1-\xi)(1+\zeta)(-1-\xi-2\eta+\zeta) \\ N_{6,\xi} &= 0,125(1-\eta)(1+\zeta)(-1+2\xi-\eta+\zeta) & N_{6,\eta} &= -0,125(1+\xi)(1+\zeta)(-1+\xi-2\eta+\zeta) \\ N_{7,\xi} &= 0,125(1+\eta)(1+\zeta)(-1+2\xi+\eta+\zeta) & N_{7,\eta} &= 0,125(1+\xi)(1+\zeta)(-1+\xi+2\eta+\zeta) \\ N_{8,\xi} &= -0,125(1+\eta)(1+\zeta)(-1-2\xi+\eta+\zeta) & N_{8,\eta} &= 0,125(1-\xi)(1+\zeta)(-1-\xi+2\eta+\zeta) \\ N_{9,\xi} &= -0,5\xi(1-\eta)(1-\zeta) & N_{9,\eta} &= -0,25(1-\xi^2)(1-\zeta) \\ N_{10,\xi} &= 0,25(1-\eta^2)(1-\zeta) & N_{10,\eta} &= -0,5\eta(1+\xi)(1-\zeta) \\ N_{11,\xi} &= -0,5\xi(1+\eta)(1-\zeta) & N_{11,\eta} &= 0,25(1-\xi^2)(1-\zeta) \\ N_{12,\xi} &= -0,25(1-\eta^2)(1-\zeta) & N_{12,\eta} &= -0,5\eta(1-\xi)(1-\zeta) \\ N_{13,\xi} &= -0,25(1-\eta)(1-\zeta^2) & N_{13,\eta} &= -0,25(1-\xi)(1-\zeta^2) \\ N_{14,\xi} &= 0,25(1-\eta)(1-\zeta^2) & N_{14,\eta} &= -0,25(1+\xi)(1-\zeta^2) \\ N_{15,\xi} &= 0,25(1+\eta)(1-\zeta^2) & N_{15,\eta} &= 0,25(1+\xi)(1-\zeta^2) \\ N_{16,\xi} &= -0,25(1+\eta)(1-\zeta^2) & N_{16,\eta} &= 0,25(1-\xi)(1-\zeta^2) \\ N_{17,\xi} &= -0,5\xi(1-\eta)(1+\zeta) & N_{17,\eta} &= -0,25(1-\xi^2)(1+\zeta) \\ N_{18,\xi} &= 0,25(1-\eta^2)(1+\zeta) & N_{18,\eta} &= -0,5\eta(1+\xi)(1+\zeta) \\ N_{19,\xi} &= -0,5\xi(1+\eta)(1+\zeta) & N_{19,\eta} &= 0,25(1-\xi^2)(1+\zeta) \\ N_{20,\xi} &= -0,25(1-\eta^2)(1+\zeta) & N_{20,\eta} &= -0,5\eta(1-\xi)(1+\zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{1,\zeta} &= -0,125(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta-2\zeta) & N_{11,\zeta} &= -0,25(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 N_{2,\zeta} &= -0,125(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta-2\zeta) & N_{12,\zeta} &= -0,25(1-\eta^2)(1-\xi) \\
 N_{3,\zeta} &= -0,125(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta-2\zeta) & N_{13,\zeta} &= -0,5\zeta(1-\xi)(1-\eta) \\
 N_{4,\zeta} &= -0,125(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta-2\zeta) & N_{14,\zeta} &= -0,5\zeta(1+\xi)(1-\eta) \\
 N_{5,\zeta} &= 0,125(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta+2\zeta) & N_{15,\zeta} &= -0,5\zeta(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_{6,\zeta} &= 0,125(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta+2\zeta) & N_{16,\zeta} &= -0,5\zeta(1-\xi)(1+\eta) \\
 N_{7,\zeta} &= 0,125(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta+2\zeta) & N_{17,\zeta} &= 0,25(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_{8,\zeta} &= 0,125(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta+2\zeta) & N_{18,\zeta} &= 0,25(1-\eta^2)(1+\xi) \\
 N_{9,\zeta} &= -0,25(1-\xi^2)(1-\eta) & N_{19,\zeta} &= 0,25(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 N_{10,\zeta} &= -0,25(1-\eta^2)(1+\xi) & N_{20,\zeta} &= 0,25(1-\eta^2)(1-\xi)
 \end{aligned}$$

Donc, en $\xi = \eta = \zeta = 0$, nous avons :

$$\mathbf{b}_i^T = (j_{1i} \ j_{2i} \ j_{3i}) \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

De plus, on peut vérifier par des considérations algébriques que les conditions d'orthogonalité suivantes sont satisfaites :

$$\mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 12 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 16$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{h}_\alpha = 0 ; \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij} ; \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{S} = 16 ; \\
 & \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{S} = 16 ; \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{S} = 16 ; \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \\
 & \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{S} = 0 ; \\
 & \alpha = 1, 2, \dots, 16 ; \quad i, j = 1, 2, 3 \\
 & \delta \text{ désigne le symbol de Kronecker}
 \end{aligned} \tag{92}$$

À ce stade, on peut déterminer les constantes inconnues qui interviennent dans l'écriture (87) du champ de déplacement en multipliant scalairement l'équation (88) par \mathbf{b}_j^T , \mathbf{S}^T et \mathbf{h}_α^T , respectivement, et en utilisant les relations d'orthogonalité (92). On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\ = 0 + a_{1i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{x}_3 + 0 = a_{ji} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\ = 20a_{0i} + (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_j) (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + 0c_{3i} + 16c_{4i} + 16c_{5i} + 16c_{6i} + 0c_{7i} + 0c_{8i} + \dots + 0c_{16i} \\ a_{0i} = \frac{1}{20} (\mathbf{S}^T - (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i - \frac{1}{20} (16c_{4i} + 16c_{5i} + 16c_{6i}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\ = 0 + (\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_j) (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 12c_{1i} + 0c_{2i} + 0c_{3i} + \dots + 8c_{15i} + 0c_{16i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\ = 0 + (\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_j) (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 12c_{2i} + 0c_{3i} + \dots + 8c_{14i} + 0c_{15i} + 0c_{16i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\ = 0 + (\mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_j) (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + 12c_{3i} + 0c_{4i} + 0c_{5i} + \dots + 8c_{16i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\ = 16a_{0i} + (\mathbf{h}_4^T \cdot \mathbf{x}_j) (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + \dots + 16c_{4i} + 12c_{5i} + 12c_{6i} + \dots + 0c_{16i} \\ \left(\mathbf{h}_4^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_4^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + \frac{16}{5} c_{4i} - \frac{4}{5} c_{5i} - \frac{4}{5} c_{6i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\ = 16a_{0i} + (\mathbf{h}_5^T \cdot \mathbf{x}_j) (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + 0c_{3i} + 12c_{4i} + 16c_{5i} + 12c_{6i} + 0c_{7i} + \dots + 0c_{16i} \\ \left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) - \frac{4}{5} c_{4i} + \frac{16}{5} c_{5i} - \frac{4}{5} c_{6i} \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 16a_{0i} + (\mathbf{h}_6^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + 0c_{3i} + 12c_{4i} + 12c_{5i} + 16c_{6i} + \dots + 0c_{16i} \\
 \left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left[\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] (\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) - \frac{4}{5} c_{4i} - \frac{4}{5} c_{5i} + \frac{16}{5} c_{6i} \\
 \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \dots + 8c_{7i} + 0c_{8i} + \dots + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \dots + 12c_{8i} + 0c_{9i} + \dots + 8c_{13i} + \dots + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \dots + 12c_{9i} + 0c_{10i} + 8c_{11i} + 0c_{12i} + \dots + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \dots + 12c_{10i} + 0c_{11i} + 8c_{12i} + 0c_{13i} + \dots + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \dots + 8c_{9i} + 0c_{10i} + 12c_{11i} + 0c_{12i} + \dots + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \dots + 8c_{10i} + 0c_{11i} + 12c_{12i} + 0c_{13i} + \dots + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + \dots + 8c_{8i} + 0c_{9i} + \dots + 12c_{13i} + \dots + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 8c_{2i} + 0c_{3i} + \dots + 8c_{14i} + 0c_{15i} + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{d}_{15}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 8c_{1i} + 0c_{2i} + \dots + 8c_{15i} + 0c_{16i} \\
 \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{d}_i = a_{0i} \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{S} + a_{1i} \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{x}_1 + a_{2i} \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{x}_2 + a_{3i} \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{x}_3 + c_{1i} \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{h}_1 + c_{2i} \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + c_{16i} \mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{h}_{16} \\
 = 0 + (\mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{x}_j)(\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i) + 0c_{1i} + 0c_{2i} + 8c_{3i} + 0c_{4i} + \dots + 0c_{16i}
 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire donc :

$$\begin{bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ c_{3i} \\ c_{4i} \\ c_{5i} \\ c_{6i} \\ c_{7i} \\ c_{8i} \\ c_{9i} \\ c_{10i} \\ c_{11i} \\ c_{12i} \\ c_{13i} \\ c_{14i} \\ c_{15i} \\ c_{16i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_1^T - (\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_2^T - (\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_3^T - (\mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ \left(\left(\mathbf{h}_4^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_4^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\ \left(\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\ \left(\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left[\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right] \mathbf{b}_j^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_7^T - (\mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_8^T - (\mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_9^T - (\mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_{10}^T - (\mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_{11}^T - (\mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_{12}^T - (\mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_{13}^T - (\mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_{14}^T - (\mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_{15}^T - (\mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \\ (\mathbf{h}_{16}^T - (\mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \cdot \mathbf{d}_i \end{bmatrix}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\alpha}^T &= n_{\alpha 1} (\mathbf{h}_1^T - (\mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 2} (\mathbf{h}_2^T - (\mathbf{h}_2^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 3} (\mathbf{h}_3^T - (\mathbf{h}_3^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \\
 &+ n_{\alpha 4} \left[\left(\mathbf{h}_4^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_4^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right] + n_{\alpha 5} \left[\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_5^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right] \\
 &+ n_{\alpha 6} \left[\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) - \left(\left(\mathbf{h}_6^T - \frac{4}{5} \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{x}_j \right) \mathbf{b}_j^T \right] + n_{\alpha 7} (\mathbf{h}_7^T - (\mathbf{h}_7^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \\
 &+ n_{\alpha 8} (\mathbf{h}_8^T - (\mathbf{h}_8^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 9} (\mathbf{h}_9^T - (\mathbf{h}_9^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 10} (\mathbf{h}_{10}^T - (\mathbf{h}_{10}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \\
 &+ n_{\alpha 11} (\mathbf{h}_{11}^T - (\mathbf{h}_{11}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 12} (\mathbf{h}_{12}^T - (\mathbf{h}_{12}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 13} (\mathbf{h}_{13}^T - (\mathbf{h}_{13}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) \\
 &+ n_{\alpha 14} (\mathbf{h}_{14}^T - (\mathbf{h}_{14}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 15} (\mathbf{h}_{15}^T - (\mathbf{h}_{15}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T) + n_{\alpha 16} (\mathbf{h}_{16}^T - (\mathbf{h}_{16}^T \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j^T)
 \end{aligned}$$

$$\left[\mathbf{n}_{\alpha\beta} \right] = \begin{bmatrix}
 \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\
 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}
 \end{bmatrix}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 16$

Nous obtenons alors : $c_{\alpha i} = \boldsymbol{\gamma}_{\alpha}^T \cdot \mathbf{d}_i$

Ce qui peut se résumer à :

$$a_{ji} = \mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{d}_i \quad c_{\alpha i} = \boldsymbol{\gamma}_{\alpha}^T \cdot \mathbf{d}_i \quad (93)$$

Le champ de déplacement se met finalement sous la forme très pratique suivante :

$$\begin{aligned}
 u_i &= a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + \dots + c_{16i}h_{16} \\
 u_i &= a_{0i} + \mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{d}_i x_1 + \mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{d}_i x_2 + \mathbf{b}_3^T \cdot \mathbf{d}_i x_3 + \boldsymbol{\gamma}_1^T \cdot \mathbf{d}_i h_1 + \boldsymbol{\gamma}_2^T \cdot \mathbf{d}_i h_2 \dots + \boldsymbol{\gamma}_{16}^T \cdot \mathbf{d}_i h_{16} \\
 u_i &= a_{0i} + (\mathbf{b}_1^T x_1 + \mathbf{b}_2^T x_2 + \mathbf{b}_3^T x_3 + \boldsymbol{\gamma}_1^T h_1 + \boldsymbol{\gamma}_2^T h_2 + \boldsymbol{\gamma}_3^T h_3 + \dots + \boldsymbol{\gamma}_{16}^T h_{16}) \cdot \mathbf{d}_i
 \end{aligned} \quad (94)$$

En différentiant la formule ci-dessus par rapport à x_j , on obtient le gradient de déplacement :

$$u_{i,j} = \left(\mathbf{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^{16} h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \right) \cdot \mathbf{d}_i = \left(\mathbf{b}_j^T + h_{\alpha,j} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \right) \cdot \mathbf{d}_i \quad (95)$$

L'opérateur gradient discrétisé reliant le tenseur de déformation au vecteur des déplacements nodaux par :

$$\nabla^s(\mathbf{u}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (96)$$

où:

$$\nabla^s(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} \quad (97)$$

prend alors la forme matricielle pratique :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \underline{0} \\ \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \underline{0} & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \underline{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad (98)$$

Cette écriture de l'opérateur gradient discrétisé utilisant les formules de Hallquist [40] est très commode car les vecteurs $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$, qui interviennent dans l'expression de \mathbf{B} , vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes:

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{x}_j = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (99)$$

Ceci permettrait de manipuler séparément chacun des modes de déformation pour obtenir simplement une forme de champ de déformation postulée. Notons que la formulation (98) nous permet aussi de vérifier que l'élément est stable vis-à-vis de modes de *hourglass* en étudiant le noyau de l'opérateur gradient discrétisé. Il est à noter aussi qu'aucune projection de cet opérateur n'est faite dans la suite, dans la mesure où les tests actuels appliqués à cet élément n'ont pas mis en évidence de verrouillages particuliers.

2.2.3. Formulation variationnelle utilisée pour les éléments SHB15 et SHB20

L'extension de la forme faible du principe variationnel de Hu–Washizu au cas de la mécanique des solides non linéaires est due à Fish et Belytschko [37] Pour un simple élément, on a :

$$\delta\pi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{V_e} \delta\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV + \delta \int_{V_e} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot (\nabla^s(\dot{\mathbf{u}}) - \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \, dV - \delta \dot{\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (100)$$

où δ représente une variation, $\dot{\mathbf{u}}$ le champ de vitesse, $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ est le taux de déformation postulée, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ la contrainte postulée, $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte évaluée par la loi constitutive, $\dot{\mathbf{d}}$ les vitesses nodales, \mathbf{f}^{ext} les forces nodales externes, et $\nabla^s(\dot{\mathbf{u}})$ la partie symétrique du gradient du champ de vitesses. Notons que le point placé au-dessus du symbole du taux de déformation postulée, $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, ne signifie pas une dérivation par rapport au temps.

La formulation « *Assumed strain* » (projection de l'opérateur gradient discrétisé \mathbf{B} sur un sous espace approprié afin d'éviter les différents problèmes de blocage) est basée sur une forme simplifiée du principe variationnel de Hu–Washizu comme elle a été décrite par Simo et Hughes [75]. Dans cette forme simplifiée, la contrainte postulée est choisie orthogonale à la différence entre la partie symétrique du gradient de vitesse et le taux de déformation postulée. Ainsi, le second terme dans l'équation (100) s'élimine et l'on obtient :

$$\delta\pi(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \int_{V_e} \delta\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV - \delta \dot{\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (101)$$

Sous cette forme, le principe variationnel est indépendant de l'interpolation de la contrainte, puisque la contrainte postulée n'intervient plus et n'a donc pas besoin d'être définie. Les équations discrétisées nécessitent donc la seule interpolation du déplacement \mathbf{u} et du taux de déformation postulée $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ dans l'élément. Avec les notations vectorielles précédentes on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \sum_{I=1}^{15} N_I(x) \mathbf{d}_I(t) && \text{(élément SHB15)} \\ \text{ou :} \quad \mathbf{u}(x, t) &= \sum_{I=1}^{20} N_I(x) \mathbf{d}_I(t) && \text{(élément SHB20)} \end{aligned} \quad (102)$$

Ceci conduit à :

$$\nabla^s(\mathbf{u}(x, t)) = \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{d}(t) \quad (103)$$

La déformation postulée est définie quant à elle par :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(x, t) = \bar{\mathbf{B}}(x) \cdot \dot{\mathbf{d}}(t) \quad (104)$$

Remplaçant l'expression (104) dans le principe variationnel (100), on obtient :

$$\delta \dot{\mathbf{d}}^T \cdot \left(\int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f}^{ext} \right) = 0 \quad (105)$$

Comme $\delta \dot{\mathbf{d}}$ peut être choisi arbitrairement, l'équation précédente conduit à :

$$\mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext} \quad (106)$$

avec :

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (107)$$

Dans l'équation ci-dessus, il est bien précisé que la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est calculée par la loi constitutive à partir du taux de déformation postulée $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. Pour les problèmes non linéaires, $\boldsymbol{\sigma}$ peut aussi être une fonction intégrale du taux de déformation postulée et des autres variables internes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \boldsymbol{\alpha}, \dots) \quad (108)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ représente les variables internes. La formulation ainsi obtenue est valable pour des problèmes incluant les deux types de non linéarités : géométriques et matériau. Dans le cas de problèmes linéaires, on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d} \quad (109)$$

La matrice de comportement élastique \mathbf{C} , dans le cas d'un matériau isotrope, est choisie comme suit :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

Dans cette matrice, E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson. Cette loi est spécifique aux éléments SHB. Elle ressemble à celle que l'on aurait dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes, mise à part le terme (3,3). Nous pouvons noter que ce choix entraîne un comportement anisotrope artificiel. Ce choix permet de satisfaire tous les tests sans introduire de blocage.

Les forces internes de l'élément s'écrivent alors simplement en termes de la matrice de rigidité élémentaire :

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{d} \quad (110)$$

où :

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{B}} \, dV \quad (111)$$

Dans une approche standard en déplacement, qui sera retenue dans la suite, le taux de déformation postulée s'identifie à la partie symétrique du gradient de vitesse, ce qui revient à remplacer $\bar{\mathbf{B}}$ par \mathbf{B} dans les expressions précédentes. On obtient donc simplement :

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \, dV \quad (112)$$

L'élément prismatique à 15 nœuds, nommé « SHB15 », possède 15 points d'intégration. Leurs coordonnées (ξ, η, ζ) et leurs poids d'intégration sont les racines du polynôme de Gauss–Legendre donnés dans le tableau suivant :

Point de Gauss	ξ	η	ζ	$w(\xi, \eta, \zeta)$
P(1)	1/2	1/2	$\zeta_{G1} = -0.906179845938664$	0.23692688 5056189/6
P(2)	1/2	1/2	$\zeta_{G2} = -0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(3)	1/2	1/2	$\zeta_{G3} = 0$	0.568888888888889/6
P(4)	1/2	1/2	$\zeta_{G4} = 0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(5)	1/2	1/2	$\zeta_{G5} = 0.906179845938664$	0.23692688 5056189/6
P(6)	0	1/2	$\zeta_{G6} = -0.906179845938664$	0.23692688 5056189/6
P(7)	0	1/2	$\zeta_{G7} = -0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(8)	0	1/2	$\zeta_{G8} = 0$	0.568888888888889/6
P(9)	0	1/2	$\zeta_{G9} = 0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(10)	0	1/2	$\zeta_{G10} = 0.906179845938664$	0.23692688 5056189/6
P(11)	1/2	0	$\zeta_{G11} = -0.906179845938664$	0.23692688 5056189/6
P(12)	1/2	0	$\zeta_{G12} = -0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(13)	1/2	0	$\zeta_{G13} = 0$	0.568888888888889/6
P(14)	1/2	0	$\zeta_{G14} = 0.538469310105683$	0.478628670499366/6
P(15)	1/2	0	$\zeta_{G15} = 0.906179845938664$	0.23692688 5056189/6

Ainsi, l'expression de la rigidité \mathbf{K}_e est :

$$\mathbf{K}_e = \sum_{j=1}^{15} w(\xi_{Gj}) \mathbf{J}(\xi_{Gj}) \mathbf{B}^T(\xi_{Gj}) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\xi_{Gj})$$

Les coordonnées des points de Gauss et leurs poids pour l'élément SHB20 sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Point de Gauss	ξ	η	ζ	$w(\xi, \eta, \zeta)$
P(1)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G1} = -0.906179845938664$	0.236926885056189
P(2)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G2} = -0.538469310105683$	0.478628670499366
P(3)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G3} = 0$	0.568888888888889
P(4)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G4} = 0.538469310105683$	0.478628670499366
P(5)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G5} = 0.906179845938664$	0.236926885056189
P(6)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G6} = -0.906179845938664$	0.236926885056189
P(7)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G7} = -0.538469310105683$	0.478628670499366
P(8)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G8} = 0$	0.568888888888889
P(9)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G9} = 0.538469310105683$	0.478628670499366
P(10)	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G10} = 0.906179845938664$	0.236926885056189
P(11)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G11} = -0.906179845938664$	0.236926885056189
P(12)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G12} = -0.538469310105683$	0.478628670499366
P(13)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G13} = 0$	0.568888888888889
P(14)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G14} = 0.538469310105683$	0.478628670499366
P(15)	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G15} = 0.906179845938664$	0.236926885056189
P(16)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G16} = -0.906179845938664$	0.236926885056189
P(17)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G17} = -0.538469310105683$	0.478628670499366
P(18)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G18} = 0$	0.568888888888889
P(19)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G19} = 0.538469310105683$	0.478628670499366
P(20)	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\zeta_{G20} = 0.906179845938664$	0.236926885056189

Ainsi, l'expression de la rigidité \mathbf{K}_e est :

$$\mathbf{K}_e = \sum_{j=1}^{20} w(P_{Gj}) \mathbf{J}(P_{Gj}) \mathbf{B}^T(P_{Gj}) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(P_{Gj})$$

2.2.4. Matrice de rigidité géométrique \mathbf{K}_σ

La matrice \mathbf{K}_σ a pour l'objectif de résoudre les problèmes de flambement. Nous rappelons ici que les modes de flambement sont les vecteurs propres du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$(\mathbf{K} + \mu \mathbf{K}_\sigma) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{K}_\sigma \cdot \mathbf{u}$$

avec $\lambda = -\mu$, et μ est le coefficient multiplicateur du chargement.

En introduisant la déformation quadratique \mathbf{e}^Q :

$$e_{ij}^Q(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^3 \delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} = \delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}$$

On peut définir cette matrice de rigidité géométrique par :

$$\delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K}_\sigma \cdot \Delta\mathbf{u} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}^Q(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta\mathbf{u}^T \cdot \nabla \Delta\mathbf{u} d\Omega$$

Afin d'exprimer cette matrice dans l'espace discrétisé, introduisons les opérateurs gradient quadratique discrétisés \mathbf{B}^Q sous forme matricielle tels que :

$$\mathbf{e}^Q(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} e_{11}^Q \\ e_{22}^Q \\ e_{33}^Q \\ e_{12}^Q + e_{21}^Q \\ e_{13}^Q + e_{31}^Q \\ e_{23}^Q + e_{32}^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{11}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{22}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{33}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{12}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{13}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}_{23}^Q \cdot \Delta\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

Les différents termes \mathbf{B}_{ij}^Q sont donnés par les équations suivantes :

$$\mathbf{B}_{11}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_{22}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_{33}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{12}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{13}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{23}^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix}$$

avec les vecteurs \mathbf{B}_i ($i = 1, 2, 3$) définis comme :

$$\mathbf{B}_i = (\mathbf{b}_i + h_{\alpha,i} \gamma_\alpha)$$

Avec ces notations, la contribution à la matrice de rigidité géométrique, \mathbf{k}_σ , au point de Gauss ξ_j est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\sigma(P_{Gj}) = & \sigma_{11}(P_{Gj}) \mathbf{B}_{11}^Q(P_{Gj}) + \sigma_{22}(P_{Gj}) \mathbf{B}_{22}^Q(P_{Gj}) + \sigma_{33}(P_{Gj}) \mathbf{B}_{33}^Q(P_{Gj}) \\ & + \sigma_{12}(P_{Gj}) \mathbf{B}_{12}^Q(P_{Gj}) + \sigma_{13}(P_{Gj}) \mathbf{B}_{13}^Q(P_{Gj}) + \sigma_{23}(P_{Gj}) \mathbf{B}_{23}^Q(P_{Gj}) \end{aligned}$$

Par intégration sur les points de Gauss de l'élément, la matrice de rigidité géométrique s'obtient par la formule :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\sigma &= \sum_{j=1}^{15} \omega(P_{Gj}) \mathbf{J}(P_{Gj}) \mathbf{k}_\sigma(P_{Gj}) \quad \text{pour l'élément SHB15} \\ \mathbf{K}_\sigma &= \sum_{j=1}^{20} \omega(P_{Gj}) \mathbf{J}(P_{Gj}) \mathbf{k}_\sigma(P_{Gj}) \quad \text{pour l'élément SHB20} \end{aligned}$$

2.2.5. Forces suiveuses et matrice de pression \mathbf{K}_p

Les forces de pression suiveuses sont présentes dans la matrice tangente via la matrice \mathbf{K}_p , car les forces externes suiveuses dépendent du déplacement. Les forces de pression suiveuses s'écrivent :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{u} \, dS &= \int_{\partial\Omega_0} p \det[\mathbf{F}(\mathbf{u})] \mathbf{n}_0^T \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u})^{-T} \, dS_0 = p \mathbf{F}_0 - p \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{F}(\mathbf{u}) &= \mathbf{I} + \nabla(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

en utilisant les notations :

- ❖ $\mathbf{n}_0^T = (n_1, n_2, n_3)$, normale à la surface extérieure de l'élément dans la configuration de référence ;
- ❖ $\tilde{\mathbf{b}}_i$, vecteur de dimension 6 (pour le SHB15) ou 8 (pour le SHB20), dérivée des fonctions de forme aux 6 (pour le SHB15) ou 8 (pour le SHB20) nœuds de la face de l'élément chargée en pression ;
- ❖ S_0 aire de la face chargée en pression.

La formulation précédente conduit à une matrice non-symétrique. On sait que l'on peut néanmoins utiliser une formulation symétrique si les forces extérieures dues à la pression dérivent d'un potentiel. C'est le cas si les forces de pression ne travaillent pas sur la frontière du domaine modélisé. On considère donc que la partie symétrique de la matrice suffit. La matrice symétrisée prend la forme suivante :

$$\mathbf{K}_P = S_0 \begin{bmatrix}
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0}
 \end{bmatrix} \text{ pour l'élément SHB15}$$

et :

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_P = S_0 \left[\begin{array}{ccc}
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 - \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_1 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 - \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_1^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T n_3 - \tilde{\mathbf{b}}_3^T n_2 & \mathbf{0}
 \end{array} \right] \text{ pour l'élément SHB20}$$

C'est une matrice (18×18) (pour le SHB15) et (24×24) (pour le SHB20), qu'il faut multiplier par les déplacements des 6 (pour le SHB15) ou 8 (pour le SHB20) nœuds de la face sur laquelle on applique une pression.

2.3. Validation des éléments coques volumiques SHB15 et SHB20 en linéaire

Comme l'élément SHB6, nous allons évaluer la performance des éléments SHB15 et SHB20 sur un ensemble de cas tests linéaires. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence, et d'autre part, à la solution donnée par les éléments finis volumiques usuels existants PENTA15 et HEXA20. Tous les maillages n'ont qu'un élément dans l'épaisseur. Dans tous les tableaux apparaissent le nombre de découpage dans chacune des directions et le nombre d'éléments total. Comme les données et les méthodes de calcul des résultats de référence de chaque cas test ont été déjà détaillées dans la section de validation de l'élément SHB6, nous ne les rappellerons plus ici. Nous allons présenter directement des résultats numériques de simulation et des remarques pour chaque modélisation SHB15 ou SHB20.

2.3.1. Poutre en flexion simple

Nous reprenons les mêmes données du test 1.2.1. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion simple. En effet dans ce cas test, la flexion est dominante devant le cisaillement.

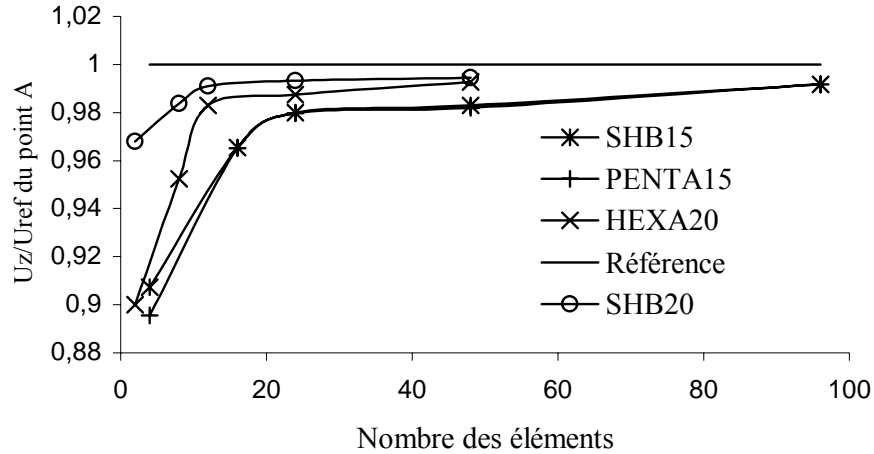
Les résultats obtenus du déplacement du nœud A suivant la direction Oz sont représentés dans le Tableau 19.

Tableau 19. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre en flexion simple

Maillages	PENTA15		SHB15	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
2x1x2 ; 4	6,555E-03	0,895	6,642E-03	0,907
4x2x2 ; 16	7,064E-03	0,965	7,067E-03	0,965
6x2x2 ; 24	7,172E-03	0,980	7,173E-03	0,980
6x4x2 ; 48	7,188E-03	0,982	7,194E-03	0,983
12x4x2 ; 96	7,260E-03	0,992	7,260E-03	0,992

Maillages	HEXA20		SHB20	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
2x1 ; 2	6,589E-03	0,900	7,085E-03	0,968
4x2 ; 8	6,971E-03	0,952	7,201E-03	0,984
6x2 ; 12	7,196E-03	0,983	7,254E-03	0,991
6x4 ; 24	7,229E-03	0,988	7,271E-03	0,993
12x4 ; 48	7,266E-03	0,993	7,280E-03	0,995

Tous les éléments testés convergent vers la solution de référence. On note que les modélisations SHB15 et SHB20 convergent un peu plus rapidement que leurs homologues PENTA15 et HEXA20 (voir Graphe 7).



Graph 7. Déplacement normalisé du point A de la poutre en flexion simple

2.3.2. Plaque en flexion et cisaillement dans son plan

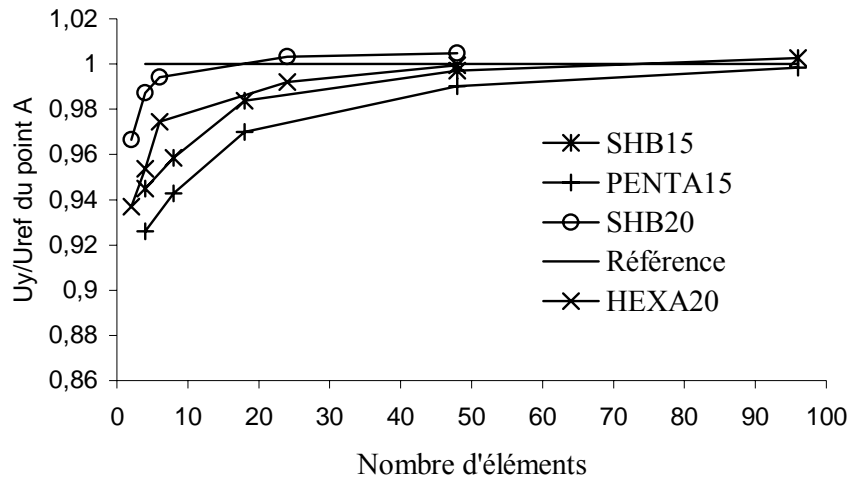
Nous reprenons les mêmes données du test 1.2.2. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en cisaillement. En effet dans ce cas test, le cisaillement est dominant. Par ailleurs ce cas test a été repris par de nombreux auteurs de la littérature et notamment [21].

Les résultats obtenus du déplacement du nœud A suivant la direction Oy sont représentés dans le Tableau 20.

Tableau 20. Déplacement du point A suivant Oy de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan

Maillages	PENTA15		SHB15	
	U_y	U_y/U_{ref}	U_y	U_y/U_{ref}
2x1x2 ; 4	-3,309E-04	0,926	-3,376E-04	0,945
2x2x2 ; 8	-3,368E-04	0,943	-3,425E-04	0,959
3x3x2 ; 18	-3,465E-04	0,970	-3,515E-04	0,984
6x4x2 ; 48	-3,538E-04	0,990	-3,563E-04	0,997
12x4x2 ; 96	-3,567E-04	0,998	-3,582E-04	1,003
Maillages	HEXA20		SHB20	
	U_y	U_y/U_{ref}	U_y	U_y/U_{ref}
2x1 ; 2	-3,348E-04	0,937	-3,453E-04	0,966
2x2 ; 4	-3,408E-04	0,954	-3,528E-04	0,987
3x2 ; 6	-3,482E-04	0,975	-3,552E-04	0,994
6x4 ; 24	-3,545E-04	0,992	-3,585E-04	1,003
12x4 ; 48	-3,571E-04	0,999	-3,591E-04	1,005

Nous trouvons que les quatre éléments convergent bien vers la solution de référence.



Graph 8. Déplacement normalisé du point A de la plaque en flexion et cisaillement dans son plan

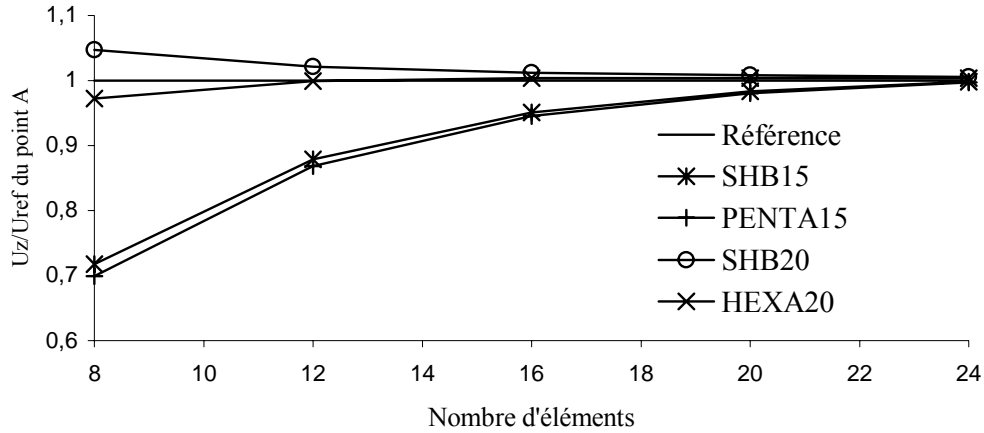
2.3.3. Poutre vrillée soumise à un effort tranchant

Nous reprenons les mêmes données du test 1.2.3. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. Ce cas test a été repris par de nombreux travaux de la littérature ([1], [2], [52]).

On observe les déplacements du nœud A suivant la direction Oz pour le chargement vertical P. Les points de Gauss sont placés à travers l'épaisseur de la poutre. Les résultats obtenus sont représentés dans le Tableau 21.

Tableau 21. Déplacement suivant Oz du point A de la poutre vrillée

Maillages	PENTA15		SHB15	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
2x2x2 ; 8	3,790E-03	0,699	3,887E-03	0,717
3x2x2 ; 12	4,707E-03	0,868	4,763E-03	0,879
4x2x2 ; 16	5,126E-03	0,946	5,153E-03	0,951
5x2x2 ; 20	5,315E-03	0,981	5,329E-03	0,983
6x2x2 ; 24	5,403E-03	0,997	5,411E-03	0,998
Maillages	HEXA20		SHB20	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
4x2 ; 8	5,272E-03	0,973	5,675E-03	1,047
6x2 ; 12	5,417E-03	0,999	5,534E-03	1,021
8x2 ; 16	5,439E-03	1,003	5,486E-03	1,012
10x2 ; 20	5,440E-03	1,004	5,465E-03	1,008
12x2 ; 24	5,438E-03	1,003	5,452E-03	1,006



Graph 9. Déplacement normalisé du point A suivant Oz de la poutre vrillée

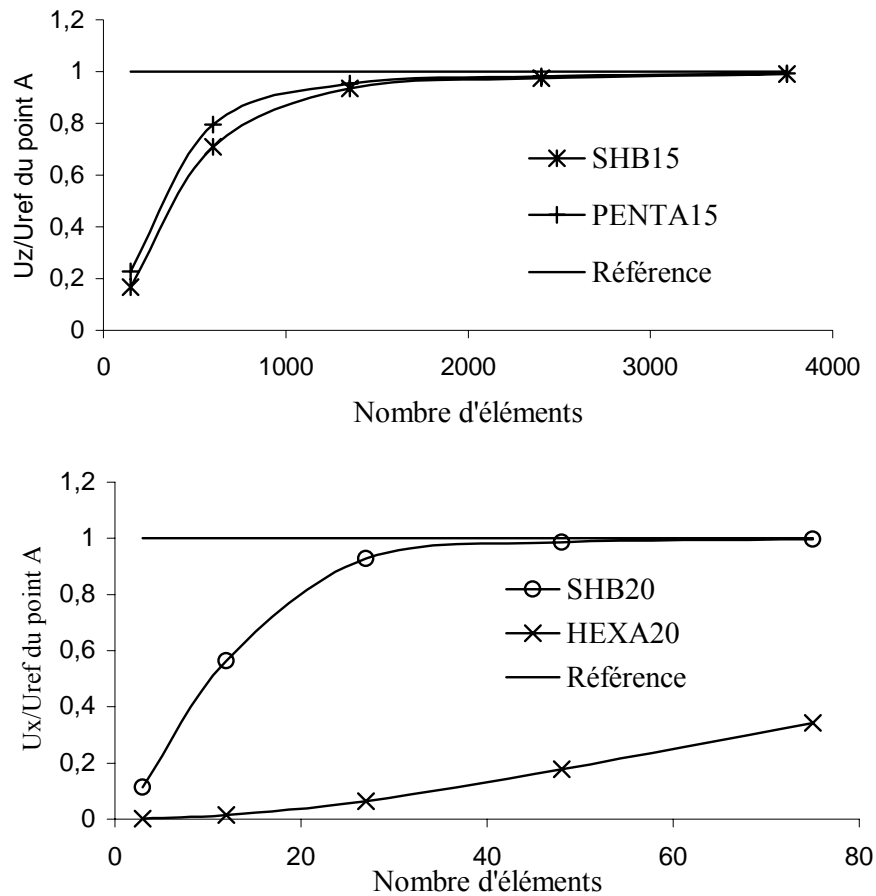
Nous constatons que les quatre éléments convergent très bien vers la solution de référence. Les éléments hexaèdres convergent plus rapidement que les éléments pentaèdres.

2.3.4. Coque sphérique pincée

Nous reprenons les mêmes données du test 1.2.4. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. Ce cas test a été traité par de nombreux auteurs ([1], [2], [52], [56], [57]). On observe les déplacements du nœud A suivant la direction Ox. Les résultats obtenus sont donnés dans le Tableau 22.

Tableau 22. Déplacement du nœud A suivant Ox de l'hémisphère pincée

Maillages	PENTA15		SHB15	
	Ux	Ux/Uref	Ux	Ux/Uref
3x(5x5x2) ; 150	2,115E-02	0,229	1,557E-02	0,168
3x(10x10x2) ; 600	7,345E-02	0,795	6,544E-02	0,708
3x(15x15x2) ; 1350	8,814E-02	0,954	8,631E-02	0,934
3x(20x20x2) ; 2400	9,069E-02	0,981	8,999E-02	0,974
3x(25x25x2) ; 3750	9,179E-02	0,993	9,162E-02	0,992
Maillages	HEXA20		SHB20	
	Ux	Ux/Uref	Ux	Ux/Uref
3x(1x1) ; 3	9,928E-05	0,001	1,058E-02	0,115
3x(2x2) ; 12	1,287E-03	0,014	5,213E-02	0,564
3x(3x3) ; 27	5,984E-03	0,065	8,564E-02	0,927
3x(4x4) ; 48	1,635E-02	0,177	9,099E-02	0,985
3x(5x5) ; 75	3,161E-02	0,342	9,209E-02	0,997



Graph 10. Déplacement normalisé du point A suivant Ox de l'hémisphère pincé

Nous trouvons que les éléments SHB15 et PENTA15 convergent relativement lentement vers la solution de référence et de manière très similaire. L'élément SHB20 converge rapidement et beaucoup mieux que le HEXA20 (voir Graph 10).

2.3.5. Coque cylindrique pincée avec diaphragmes

Nous reprenons les mêmes données du test 1.2.6. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. Ce test a été étudié par plusieurs auteurs ([4], [48], [57], [79]).

La solution de référence a été établie par moyenne de résultats numériques de plusieurs logiciels de calcul mettant en œuvre la méthode des éléments finis. Le déplacement de référence suivant Oz du point A est : $V_A = 1,82488E-5$

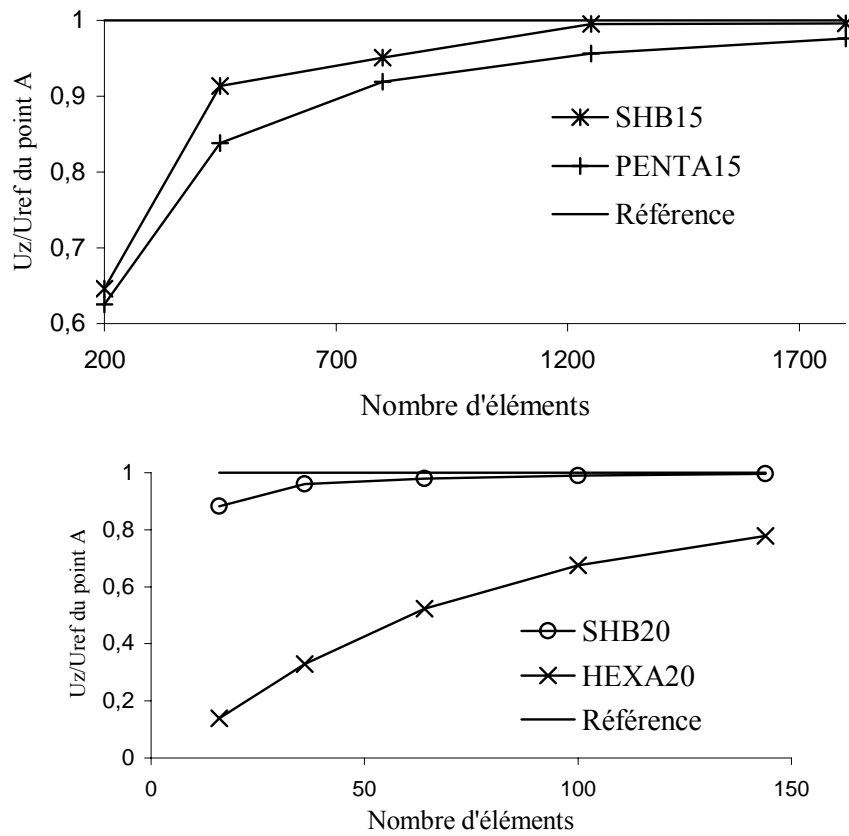
Les résultats obtenus sont représentés dans le Tableau 23.

Nous trouvons que les éléments SHB15 et PENTA15 convergent de la même manière vers la solution de référence mais plus lentement que les éléments SHB20 et HEXA20. En plus, l'élément SHB20 converge nettement mieux que le HEXA20 (voir Graph 11).

Tableau 23. Déplacement du point A suivant Oz du cylindre pincé avec diaphragmes

Maillages	PENTA15		SHB15	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
10x10x2 ; 200	1,141E-05	0,625	1,179E-05	0,646
15x15x2 ; 450	1,530E-05	0,838	1,667E-05	0,913
20x20x2 ; 800	1,677E-05	0,919	1,736E-05	0,951
25x25x2 ; 1250	1,745E-05	0,956	1,817E-05	0,996
30x30x2 ; 1800	1,781E-05	0,976	1,818E-05	0,996

Maillages	HEXA20		SHB20	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
4x4 ; 16	2,554E-06	0,140	1,611E-05	0,883
6x6 ; 36	5,987E-06	0,328	1,753E-05	0,961
8x8 ; 64	9,539E-06	0,523	1,787E-05	0,979
10x10 ; 100	1,233E-05	0,675	1,805E-05	0,989
12x12 ; 144	1,419E-05	0,777	1,818E-05	0,996



Graphe 11. Déplacement normalisé du point A suivant Oz du cylindre pincé avec diaphragmes

2.3.6. Plaque circulaire soumise à une force ponctuelle

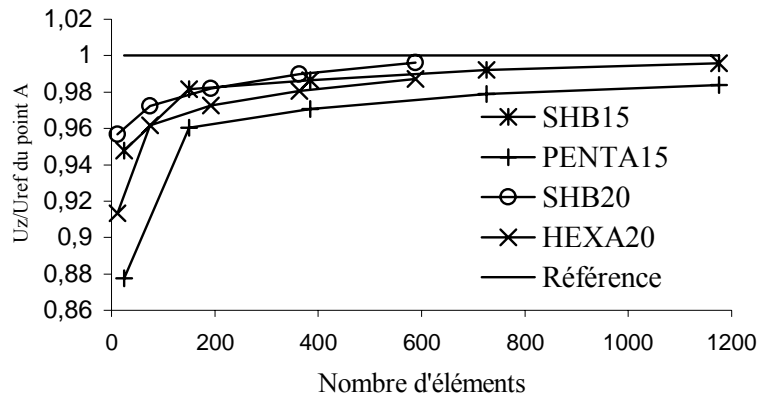
Nous reprenons les mêmes données du test 1.2.7. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. Ce test a été repris dans de nombreux travaux, notamment par [21].

Les résultats obtenus du déplacement suivant Oz du point A de la plaque circulaire sont représentés dans le Tableau 24.

Tableau 24. Déplacement du point A suivant Oz de la plaque circulaire soumise à un effort ponctuel

Maillages	PENTA15		SHB15	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
3x(2x2x2) ; 24	-2,332E-05	0,878	-2,518E-05	0,948
3x(5x5x2) ; 150	-2,552E-05	0,960	-2,609E-05	0,982
3x(8x8x2) ; 384	-2,579E-05	0,971	-2,621E-05	0,986
3x(11x11x2) ; 726	-2,602E-05	0,979	-2,636E-05	0,992
3x(14x14x2) ; 1176	-2,615E-05	0,984	-2,646E-05	0,996

Maillages	HEXA20		SHB20	
	Uz	Uz/Uref	Uz	Uz/Uref
3x(2x2) ; 12	-2,427E-05	0,913	-2,543E-05	0,957
3x(5x5) ; 75	-2,556E-05	0,962	-2,584E-05	0,972
3x(8x8) ; 192	-2,585E-05	0,973	-2,609E-05	0,982
3x(11x11) ; 363	-2,606E-05	0,981	-2,630E-05	0,990
3x(14x14) ; 588	-2,623E-05	0,987	-2,647E-05	0,996



Graph 12. Déplacement normalisé du point A suivant Oz de la plaque circulaire soumise à un effort ponctuel

Nous remarquons que les éléments SHB quadratiques convergent vers la solution de référence un peu mieux que leurs homologues purement 3D (voir Graphe 12).

2.3.7. Étude fréquentielle d'une poutre libre encastrée

Nous reprenons les mêmes données du test 1.2.8. Ce test a pour objectif de tester l'élément SHB15 et SHB20 en vibration. La matrice de masse de ces éléments est prise comme celle d'un élément solide 3D.

Nous cherchons à déterminer les différentes fréquences d'une poutre dont une extrémité est encastrée, comprises entre 0 et 150 Hz.

Les résultats numériques de simulation sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage PENTA15	f1ref=8.4		f2ref=52.5		f3ref=83.8		f4ref=147.1	
	f1	f1/f1ref	f2	f2/f2ref	f3	f3/f3ref	f4	f4/f4ref
(5x1x1)x2 = 10	8,80	1,05	57,93	1,10	85,16	1,02	178,85	1,22
(10x2x1)x2 = 40	8,47	1,01	53,45	1,02	83,50	1,00	151,62	1,03
(15x3x1)x2 = 90	8,46	1,01	53,15	1,01	83,38	0,99	149,79	1,02
(20x4x1)x2 = 160	8,44	1,01	52,98	1,01	83,33	0,99	148,78	1,01

Maillage SHB15	f1ref=8.4		f2ref=52.5		f3ref=83.8		f4ref=147.1	
	f1	f1/f1ref	f2	f2/f2ref	f3	f3/f3ref	f4	f4/f4ref
(5x1x1)x2 = 10	8,55	1,02	54,39	1,04	84,28	1,01	147,52	1,00
(10x2x1)x2 = 40	8,47	1,01	53,45	1,02	83,50	1,00	151,61	1,03
(15x3x1)x2 = 90	8,46	1,01	53,14	1,01	83,37	0,99	149,79	1,02
(20x4x1)x2 = 160	8,44	1,01	52,97	1,01	83,33	0,99	148,77	1,01

Maillage HEXA20	f1ref=8.4		f2ref=52.5		f3ref=83.8		f4ref=147.1	
	f1	f1/f1ref	f2	f2/f2ref	f3	f3/f3ref	f4	f4/f4ref
(5x1x1) = 5	8,80	1,05	57,93	1,10	85,16	1,02	178,85	1,22
(10x2x1) = 20	8,47	1,01	53,45	1,02	83,50	1,00	151,62	1,03
(15x3x1) = 45	8,46	1,01	53,15	1,01	83,38	0,99	149,79	1,02
(20x4x1) = 80	8,44	1,01	52,98	1,01	83,33	0,99	148,78	1,01

Maillage SHB20	f1ref=8.4		f2ref=52.5		f3ref=83.8		f4ref=147.1	
	f1	f1/f1ref	f2	f2/f2ref	f3	f3/f3ref	f4	f4/f4ref
(5x1x1) = 5	8,55	1,02	54,39	1,04	84,28	1,01	147,52	1,00
(10x2x1) = 20	8,47	1,01	53,45	1,02	83,50	1,00	151,61	1,03
(15x3x1) = 45	8,46	1,01	53,14	1,01	83,37	0,99	149,79	1,02
(20x4x1) = 80	8,44	1,01	52,97	1,01	83,33	0,99	148,77	1,01

Nous trouvons que les éléments SHB15 et SHB20 donnent de très bons résultats.

2.3.8. Flambement d'un cylindre libre sous pression externe

Nous reprenons les mêmes données du test 1.2.9. Ce test représente un calcul de stabilité d'une enveloppe cylindrique mince libre à ses extrémités soumises à une pression externe. On calcule les charges critiques conduisant au flambement élastique d'Euler. La matrice de rigidité géométrique utilisée dans la résolution du problème aux valeurs propres est celle qui est due aux contraintes initiales.

Les résultats obtenus pour la pression critique de flambement de ce cylindre libre sous pression externe sont donnés dans le Tableau 25.

Nous trouvons que les éléments SHB15 et SHB20 convergent bien vers la solution de référence. L'élément SHB20 converge plus rapidement que l'élément SHB15.

Tableau 25. Pression critique de flambage du cylindre libre sous pression externe

Maillages	SHB15 (mode 2)		SHB15 (mode 4)		SHB15 (mode 6)	
	P	P/Pcr	P	P/Pcr	P	P/Pcr
10x10x2 = 200	104437	1,43	426033	1,45	989590	1,50
12x10x2 = 240	85940	1,17	346880	1,18	791970	1,20
14x10x2 = 280	78860	1,08	316700	1,08	717470	1,09
16x10x2 = 320	75740	1,03	303500	1,04	684900	1,04
20x10x2 = 400	73380	1,00	293600	1,00	660700	1,00

Maillages	PENTA15 (mode 2)		PENTA15 (mode 4)		PENTA15 (mode 6)	
	P	P/Pcr	P	P/Pcr	P	P/Pcr
10x10x2 = 200	9,62E+004	1,31	3,97E+005	1,35	9,38E+005	1,42
12x10x2 = 240	8,35E+004	1,14	3,41E+005	1,16	7,92E+005	1,20
14x10x2 = 280	7,82E+004	1,07	3,17E+005	1,08	7,29E+005	1,11
16x10x2 = 320	7,57E+004	1,03	3,06E+005	1,04	6,98E+005	1,06
20x10x2 = 400	7,36E+004	1,00	2,96E+005	1,01	6,71E+005	1,02

Maillages	SHB20 (mode 2)		SHB20 (mode 4)		SHB20 (mode 6)	
	P	P/Pcr	P	P/Pcr	P	P/Pcr
3x3 = 9	72907	1,00	307450	1,05	833900	1,26
4x4 = 16	72404	0,99	294900	1,01	703970	1,07
5x5 = 25	72225	0,99	291110	0,99	671897	1,02
6x6 = 36	72141	0,98	289618	0,99	659686	1,00
7x7 = 49	72096	0,98	288923	0,99	654143	0,99

Maillages	HEXA20 (mode 2)		HEXA20 (mode 4)		HEXA20 (mode 6)	
	P	P/Pcr	P	P/Pcr	P	P/Pcr
3x3 = 9	3,91E+006	53,33	2,07E+007	70,58	3,41E+007	51,73
4x4 = 16	1,26E+006	17,27	6,19E+006	21,14	1,71E+007	25,92
5x5 = 25	5,56E+005	7,60	2,57E+006	8,76	6,91E+006	10,48
6x6 = 36	3,05E+005	4,16	1,35E+006	4,61	3,50E+006	5,31
7x7 = 49	1,98E+005	2,70	8,51E+005	2,91	2,14E+006	3,24

2.3.9. Poutre en flexion avec divers élancements

Ce test représente un calcul quasi-statique d'une poutre en flexion, encadrée à une extrémité et soumise à une force verticale à l'autre extrémité. Ce test permet de valider un calcul élastique linéaire et pour cinq valeurs d'élancement (épaisseurs variables) dans chaque modélisation.

Les déplacements obtenus sont comparés à la solution analytique élastique d'une poutre en flexion. Ce test permet également de montrer les limites des éléments SHB en termes d'élancement.

À l'extrémité droite, la poutre est soumise à un effort tranchant de $\|\vec{P}\| = 1\text{ N}$ dans la direction verticale Oz. Ce chargement est réparti de façon adéquate aux nœuds de l'extrémité droite. On simule un encastrement parfait à l'extrémité gauche de la poutre (voir Figure 23). Les données de géométrie, matériau et de chargement du problème sont listées dans le Tableau 26.

Tableau 26. Données géométriques, matériau et de chargement pour le test de la poutre en flexion simple avec divers élancements

Longueur	$L = 1000\text{ m}$
Largeur	$B = 100\text{ m}$
Épaisseurs variables	$e = 100\text{ à }0,2\text{ m}$
Module d'Young	$E = 2 \times 10^{11}\text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Chargement	$\ \vec{P}\ = 1\text{ N}$

Le déplacement de référence du point A suivant la direction Oz est déterminé par la formule suivante :

$$flèche = u_z = \frac{PL^3}{3EI} \text{ où } I = \frac{Be^3}{12}$$

Les résultats de calcul du déplacement du nœud A suivant la direction Oz sont donnés dans le Tableau 27.

Nous trouvons que les éléments SHB20, SHB15 et SHB8PS convergent très bien vers la solution de référence et ils peuvent arriver à un élancement (rapport largeur/épaisseur) de 500 pour un maillage grossier de 10 ou 20 éléments seulement. L'élément SHB6 admet une limite d'élancement nettement plus faible que les autres éléments SHB. Son élancement peut atteindre 2 seulement.

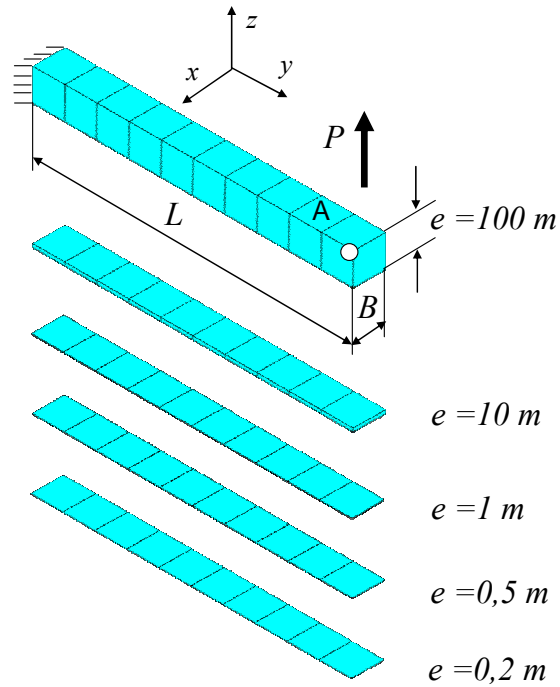


Figure 23. Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre en flexion avec divers élancements ; un exemple de maillage (10x1x1) SHB20

Tableau 27. Déplacement du point A suivant Oz de la poutre en flexion simple avec divers élancements

Épaisseur e (m)	Élancement B/e	Maillages	Référence	SHB20	
			Uref (m)	Uz (m)	Uz/Uref
100	1	(10x1x1)	2,00E-10	2,02E-10	1,009
10	10	(10x1x1)	2,00E-07	2,00E-07	0,998
1	100	(10x1x1)	2,00E-04	1,99E-04	0,997
0,5	200	(10x1x1)	1,60E-03	1,59E-03	0,996
0,2	500	(10x1x1)	2,50E-02	2,51E-02	1,004

Épaisseur e (m)	Élancement B/e	Maillages	Référence	SHB15	
			Uref (m)	Uz (m)	Uz/Uref
100	1	(10x1x1)x2	2,00E-10	2,02E-10	1,009
10	10	(10x1x1)x2	2,00E-07	1,99E-07	0,997
1	100	(10x1x1)x2	2,00E-04	1,99E-04	0,995
0,5	200	(10x1x1)x2	1,60E-03	1,63E-03	1,019
0,3	333,33	(10x1x1)x2	7,41E-03	7,32E-03	0,988

Épaisseur e (m)	Élancement B/e	Maillages	Référence	SHB8PS	
			Uref (m)	Uz (m)	Uz/Uref
100	1	(10x1x1)	2,00E-10	2,01E-10	1,005
10	10	(10x1x1)	2,00E-07	1,99E-07	0,997
1	100	(10x1x1)	2,00E-04	1,99E-04	0,997
0,5	200	(10x1x1)	1,60E-03	1,60E-03	0,998
0,2	500	(10x1x1)	2,50E-02	2,50E-02	0,999

Épaisseur e (m)	Élancement B/e	Maillages	Référence	SHB6	
			Uref (m)	Uz (m)	Uz/Uref
100	1	(10x1x1)x2	2,00E-10	2,02E-10	1,009
50	2	(10x1x1)x2	1,60E-09	1,50E-09	0,937
40	2,5	(10x1x1)x2	3,13E-09	2,82E-09	0,902
25	4	(10x1x1)x2	1,28E-08	1,06E-08	0,826
20	5	(10x1x1)x2	2,50E-08	1,97E-08	0,787

2.3.10. Flambage d'une coque cylindrique avec raidisseur

Ce test mécanique quasi-statique linéaire permet de valider les éléments SHB en stabilité linéaire sans prise en compte des pressions suiveuses et en flambage d'Euler. Il montre les capacités de ces éléments à traiter des problèmes de coques minces avec raidisseur. Il s'agit d'une portion d'un sous-marin soumise à une pression externe (voir Figure 24a). Ce cas test a déjà été traité dans les références [52], [53], et [54]. Les paramètres géométriques et matériau de ce cas test sont donnés dans le Tableau 29. Notons que le problème est symétrique, nous étudions donc un quart de la coque cylindrique seulement. Le but de ce cas test est de déterminer la pression critique d'Euler de la coque par une analyse de flambage linéaire basée sur le calcul de valeur propre de la matrice globale.

Dans cette analyse linéaire, la pression critique d'Euler est déterminée ainsi que le mode de flambage correspondant. Cet état critique est associé à la pression minimale à laquelle la matrice de rigidité globale devient singulière et, il est obtenu par la résolution des valeurs propres du problème suivant :

$$(\mathbf{K}_e + \lambda_c \mathbf{K}_\sigma) \cdot \mathbf{X}_c = \mathbf{0} \quad (113)$$

où λ_c est le chargement de flambage critique et \mathbf{X}_c est le mode de flambage associé. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux trouvés par élément SHB8PS. Nous prenons la valeur de $7,06 \times 10^6$ obtenue par le calcul avec un maillage de 440 éléments SHB8PS comme résultat de référence. Nous avons testé les trois éléments SHB6, SHB15 et SHB20 sur plusieurs maillages différents. Ces résultats sont représentés dans le Tableau 28. Le mode de flambage associé est représenté dans la Figure 24b et Figure 25.

Tableau 28. Résultats du test de flambement de la coque cylindrique avec raidisseur

Maillages	Pcr calculée
260 éléments HEXA8 et 360 éléments PRI6	7,61E+06
260 éléments SHB8PS et 360 éléments SHB6 initial	7,20E+06
260 éléments SHB8PS et 360 éléments <u>SHB6</u>	7,04E+06
300 éléments PENTA15	7,10E+06
300 éléments SHB15	7,06E+06
100 éléments HEXA20	7,14E+06
100 éléments SHB20	7,00E+06

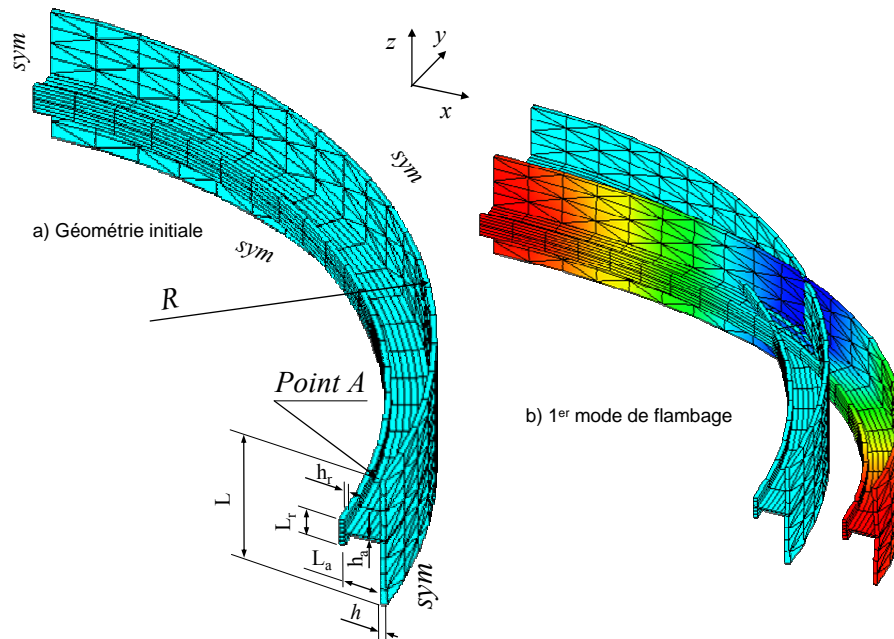


Figure 24. Géométrie, conditions aux limites et 1^{er} mode de flambage d'un quart de coque cylindrique avec raidisseur ; un exemple de maillage mixte de 260 éléments SHB8PS pour le raidisseur et 360 éléments SHB6 pour la coque principale

Tableau 29. Paramètres géométriques et matériau de la coque cylindrique avec raidisseur

Rayon moyen	$R = 2,488$
Hauteur	$L = 0,6$
Épaisseur	$h = 0,024$
Longueur de l'âme	$L_a = 0,156$
Épaisseur de l'âme	$h_a = 0,01$
Longueur du raidisseur	$L_r = 0,120$
Épaisseur du raidisseur	$h_r = 0,024$
Module d'Young	$E = 2 \times 10^{11}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$

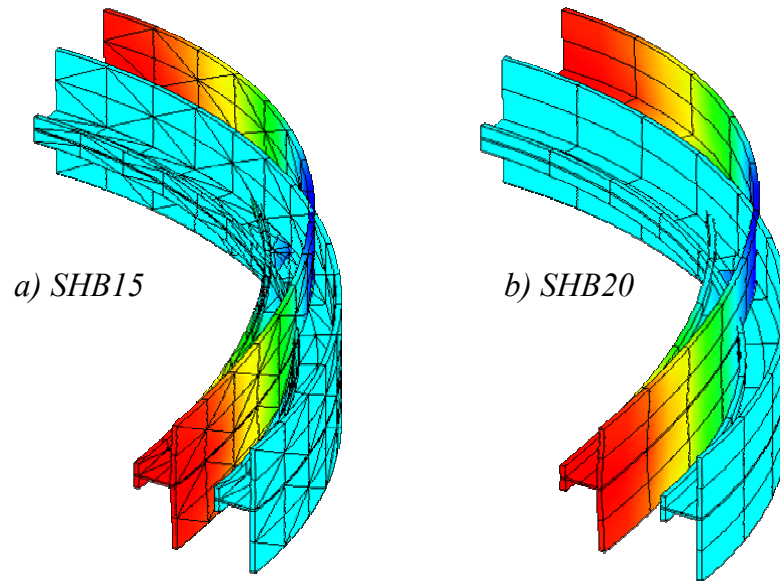


Figure 25. Géométrie initiale et 1^{er} mode de flambage de la coque cylindrique avec raidisseur ; un exemple de maillage de : a) 300 éléments SHB15 ; b) 100 éléments SHB20

Chapitre III

Éléments coques volumiques SHB en non linéaire

1. Non-linéarités géométriques

On traite ici le cas des grands déplacements, mais rotations faibles et petites déformations. On adopte pour cela une formulation lagrangienne mise à jour.

En non linéaire, nous cherchons à écrire l'équilibre entre forces internes et forces externes à la fin de l'incrément de charge (repéré par l'indice 2) :

$$\mathbf{F}_2^{\text{int}} = \mathbf{F}_2^{\text{extr}}$$

L'expression des forces internes s'écrit :

$$\mathbf{F}_2^{\text{int}} = \int_{\Omega_2} \mathbf{B}_2^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 dV$$

Dans l'équation précédente l'opérateur \mathbf{B}_2 est l'opérateur permettant de passer du déplacement à la déformation linéaire calculée sur la géométrie à la fin du pas, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_2$ est la contrainte de Cauchy à la fin du pas et l'intégration est faite sur le volume Ω_2 déformé à la fin du pas.

Remarques importantes :

- ❖ Pour l'élément SHB6, la matrice \mathbf{B}_2 est également modifiée par « *Assumed local strain method* ». Elle prend la formule suivante :

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha, x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha, x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha, x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha, x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha, x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ c(\mathbf{b}_3^T + h_{\alpha, x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) & \mathbf{0} & c(\mathbf{b}_1^T + h_{\alpha, x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) \\ \mathbf{0} & c(\mathbf{b}_3^T + h_{\alpha, x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) & c(\mathbf{b}_2^T + h_{\alpha, x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) \end{bmatrix}, \text{ avec } c = 0,45$$

- ❖ Pour les éléments SHB15 ou SHB20, la matrice \mathbf{B}_2 n'a pas besoin de modification. Elle prend donc, la forme générale suivante :

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ (\mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) & \mathbf{0} & (\mathbf{b}_1^T + h_{\alpha,x_1} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{b}_3^T + h_{\alpha,x_3} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) & (\mathbf{b}_2^T + h_{\alpha,x_2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T) \end{bmatrix}$$

Nous avons choisi cette formulation lagrangienne mise à jour.

L'élément disponible à ce jour dans *Aster* est programmé en petites rotations incrémentales. En effet, l'incrément de déformation est calculé en utilisant uniquement la déformation linéaire :

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla_1 (\Delta \mathbf{u}) + \nabla_1^T (\Delta \mathbf{u}))$$

L'opérateur gradient est calculé sur la géométrie de début de pas. Cette écriture de la déformation est limitée aux petites rotations (<5 degrés).

On peut sans difficulté étendre la formulation aux grandes rotations en incluant dans la déformation les termes de second ordre :

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla_1 (\Delta \mathbf{u}) + \nabla_1^T (\Delta \mathbf{u}) + \nabla_1^T (\Delta \mathbf{u}) \cdot \nabla_1 (\Delta \mathbf{u}))$$

En élasticité, la loi de comportement s'écrit :

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = \mathbf{C}' : \Delta \mathbf{E}$$

où \mathbf{C}' est la matrice de Hooke. Remarquons que pour les éléments SHB, cette matrice est une matrice orthotrope transverse qui s'écrit dans les axes du lamina :

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

La formule permettant de calculer la contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}_2$ à partir de la contrainte de Piola–Kirchhoff II $\boldsymbol{\pi}_2$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\pi}_2 \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_1(\Delta\mathbf{u}) \end{array} \right.$$

La combinaison des quatre dernières équations avec l'expression des forces internes donne la formulation de l'élément en grandes déformations en lagrangien mis à jour.

Remarquons que cette formulation lagrangienne mise à jour est totalement équivalente à la formulation lagrangienne totale pour laquelle les forces internes s'écrivent :

$$\mathbf{F}_2^{\text{int}} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u}))_0^T \cdot \boldsymbol{\pi}_2 dV$$

Dans ce cas toutes les intégrations sont faites sur la géométrie initiale Ω_0 la contrainte $\boldsymbol{\pi}_2$ utilisée est la contrainte de Piola–Kirchhoff II. Cette dernière méthode est probablement préférable lorsque le maillage se déforme significativement et permet donc de traiter les problèmes en grandes déformations mais nécessite le développement de l'opérateur $\mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u})$.

L'incrément de déformation en lagrangien total est exprimé sur la géométrie initiale de la structure.

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla_0(\Delta\mathbf{u}) + \nabla_0^T(\Delta\mathbf{u}) + \nabla_0^T(\Delta\mathbf{u}) \cdot \nabla_0(\Delta\mathbf{u}))$$

La combinaison des deux équations précédentes donne la formulation de l'élément en grandes déformations en comportement linéaire matériau.

Dans le cas des petits déplacements, on confond géométrie en début et fin de pas, contrainte de Cauchy et de Piola–Kirchhoff II, de plus on utilise l'expression linéaire des déformations.

2. Non-linéarités matériaux

Comme les éléments SHB ont un comportement 3D orthotrope particulier, par conséquent, ils ne sont pas utilisables pour un matériau de comportement non-linéaire quelconque disponible dans le code Aster. Afin d'éviter cette limite d'utilisation, nous proposons une méthode de construction particulière de la matrice tangente \mathbf{C}^T qui permet de connecter ces éléments SHB à toutes les lois de comportement disponibles dans le code Aster. Nous voulons déterminer la matrice \mathbf{C}^T de la relation suivante :

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{C}^T : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

où :

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \begin{bmatrix} \pi_{2xx} \\ \pi_{2yy} \\ \pi_{2zz} \\ \pi_{2xy} \\ \pi_{2xz} \\ \pi_{2yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1xx} \\ \sigma_{1yy} \\ \sigma_{1zz} \\ \sigma_{1xy} \\ \sigma_{1xz} \\ \sigma_{1yz} \end{bmatrix} + \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{xx} - \Delta \varepsilon_{xx}^p \\ \Delta \varepsilon_{yy} - \Delta \varepsilon_{yy}^p \\ \Delta \varepsilon_{zz} - \Delta \varepsilon_{zz}^p \\ \Delta \varepsilon_{xy} - \Delta \varepsilon_{xy}^p \\ \Delta \varepsilon_{xz} - \Delta \varepsilon_{xz}^p \\ \Delta \varepsilon_{yz} - \Delta \varepsilon_{yz}^p \end{bmatrix}$$

Nous supposons d'abord que l'élément est en état de contrainte plane dans le repère local de chaque point d'intégration de Gauss et les déformations hors plan sont élastiques. Cela entraîne alors immédiatement que les déformations totales hors plan sont égales aux déformations élastiques. Nous avons donc :

$$\Delta \varepsilon_{zz}^p = \Delta \varepsilon_{yz}^p = \Delta \varepsilon_{xz}^p = 0$$

En utilisant ensuite les formules et la programmation usuelle de la plasticité avec un état de contraintes planes. Nous trouvons donc la matrice tangente en contraintes planes \mathbf{C}^{CPT} qui vérifie les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \pi_{2xx} \\ \pi_{2yy} \\ \pi_{2xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1xx} \\ \sigma_{1yy} \\ \sigma_{1xy} \end{bmatrix} + \mathbf{C}^{CPT} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{xx} - \Delta \varepsilon_{xx}^p \\ \Delta \varepsilon_{yy} - \Delta \varepsilon_{yy}^p \\ \Delta \varepsilon_{xy} - \Delta \varepsilon_{xy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx}^{CPT} & C_{xxxy}^{CPT} & C_{xxxxy}^{CPT} \\ C_{yyxx}^{CPT} & C_{yyyy}^{CPT} & C_{yyxy}^{CPT} \\ C_{xyxx}^{CPT} & C_{xyyy}^{CPT} & C_{xyxy}^{CPT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{xx} - \Delta \varepsilon_{xx}^p \\ \Delta \varepsilon_{yy} - \Delta \varepsilon_{yy}^p \\ \Delta \varepsilon_{xy} - \Delta \varepsilon_{xy}^p \end{bmatrix}$$

Ensuite, les contraintes hors plan sont calculées de façon élastique. Nous avons donc :

$$\pi_{2zz} = \sigma_{1zz} + E \Delta \varepsilon_{zz} \quad \pi_{2yz} = \sigma_{1yz} + \mu \Delta \varepsilon_{yz} \quad \pi_{2xz} = \sigma_{1xz} + \mu \Delta \varepsilon_{xz}$$

La matrice de comportement tangente pour le comportement choisi est évidente et s'écrit :

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} C_{xxxx}^{CPT} & C_{xxxy}^{CPT} & 0 & C_{xxxxy}^{CPT} & 0 & 0 \\ C_{yyxx}^{CPT} & C_{yyyy}^{CPT} & 0 & C_{yyxy}^{CPT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ C_{xyxx}^{CPT} & C_{xyyy}^{CPT} & 0 & C_{xyxy}^{CPT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Nous pouvons écrire maintenant la contrainte à la fin du pas comme suivante :

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{C}^T : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

où :

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,xx} \\ \pi_{2,yy} \\ \pi_{2,zz} \\ \pi_{2,xy} \\ \pi_{2,xz} \\ \pi_{2,yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,xx} \\ \sigma_{1,yy} \\ \sigma_{1,zz} \\ \sigma_{1,xy} \\ \sigma_{1,xz} \\ \sigma_{1,yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xxxx}^{CPT} & C_{xxyy}^{CPT} & 0 & C_{xxxy}^{CPT} & 0 & 0 \\ C_{yyxx}^{CPT} & C_{yyyy}^{CPT} & 0 & C_{yyxy}^{CPT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ C_{xyxx}^{CPT} & C_{xyyy}^{CPT} & 0 & C_{xyxy}^{CPT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{xx} - \Delta \varepsilon_{xx}^p \\ \Delta \varepsilon_{yy} - \Delta \varepsilon_{yy}^p \\ \Delta \varepsilon_{zz} \\ \Delta \varepsilon_{xy} - \Delta \varepsilon_{xy}^p \\ \Delta \varepsilon_{xz} \\ \Delta \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

Nous devons trouver la contrainte à la fin du pas qui vérifie l'équilibre. Cette équation est résolue dès que l'incrément de déformation plastique est connu. Cette déformation se détermine en imposant à la contrainte finale d'être plastiquement admissible. Cette méthode est complètement similaire à la méthode tridimensionnelle usuelle sauf qu'il n'y a pas de solution explicite à ce problème si on utilise par exemple l'approximation efficace du retour radial pour calculer la solution. Nous avons choisi de résoudre ce problème non linéaire par une méthode de Newton.

Cette méthode permet ainsi de connecter simplement les éléments SHB à toutes les lois de comportement disponibles dans le Code Aster.

3. Cas tests non linéaires géométriques et matériaux

Dans cette section, nous allons tester les éléments SHB sur un ensemble de cas tests non linéaires géométriques et/ou matériaux. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, à la solution de référence. Tous les maillages n'ont qu'un élément dans l'épaisseur, sauf nécessité particulière motivée par l'application de conditions aux limites appropriées dans le cas de flambage par point limite. Dans tous les tableaux apparaissent le nombre de découpage dans chacune des directions et le nombre total d'éléments.

3.1. Poutre console soumise à un effort tranchant

Le cas test de la poutre console est un cas test élastique non-linéaire géométrique (grands déplacements). C'est un cas test répandu dans la littérature scientifique sur les éléments finis et qui a été traité notamment dans la référence [80].

La poutre est encastree à une extrémité. Sur l'autre extrémité libre une force concentrée P est appliquée suivant la direction z . Cette force est appliquée par incréments successifs pour aller de 0 à P_{\max} :

$$P_0 = \frac{EI}{L^2} = 1 \text{ N} \quad \text{et} \quad P_{\max} = 4P_0$$

Les données géométriques et matériau sont représentées dans le Tableau 30.

Tableau 30. Données géométriques et matériau de la poutre console

Longueur	$L = 10 \text{ m}$
Largeur	$b = 1 \text{ m}$
Épaisseur	$h = 0,1 \text{ m}$
Module d'Young	$E = 1,2 \times 10^6 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0$

Le matériau est linéaire élastique. Ce problème est donc de type non-linéaire géométrique. Le déplacement est mesuré à l'extrémité de la poutre. La solution de référence provient de l'article de Sze et al. [80] utilisant (16x1x1) éléments coques S4R d'Abaqus et est donnée dans le Tableau 31.

Nous avons testé les trois éléments SHB6, SHB15 et SHB20 sur plusieurs maillages différents. Nous avons retenu trois maillages qui donnent de bonnes convergences par rapport à la solution de référence (moins de 1% d'erreur). Ces résultats sont représentés dans le Tableau 32 et sur le Graphe 13.

Tableau 31. Solution de référence pour le cas test de la poutre console en non-linéaire géométrique

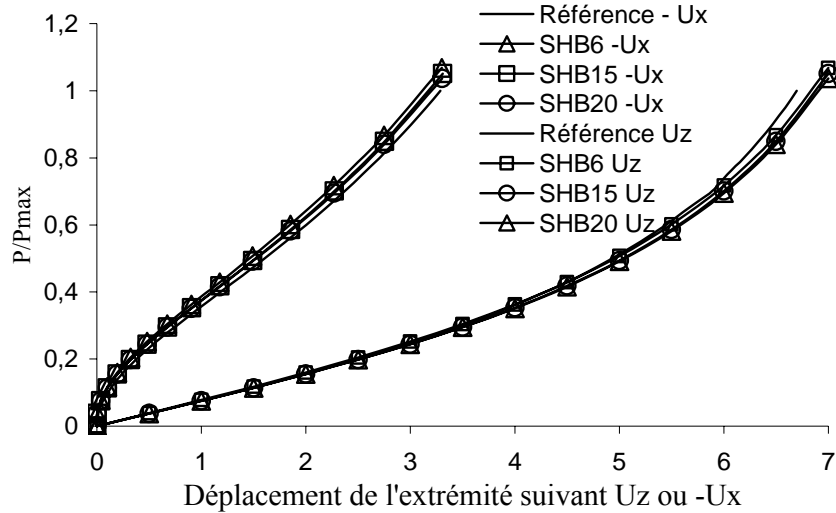
P/P_{\max}	$-U_x (m)$	$U_z (m)$	P/P_{\max}	$-U_x (m)$	$U_z (m)$	P/P_{\max}	$-U_x (m)$	$U_z (m)$
0,05	0,026	0,663	0,4	1,184	4,292	0,75	2,541	6,031
0,1	0,103	1,309	0,45	1,396	4,631	0,8	2,705	6,190
0,15	0,224	1,922	0,5	1,604	4,933	0,85	2,861	6,335
0,2	0,381	2,493	0,55	1,807	5,202	0,9	3,01	6,467
0,25	0,563	3,015	0,6	2,002	5,444	0,95	3,151	6,588
0,3	0,763	3,488	0,65	2,190	5,660	1	3,286	6,698
0,35	0,971	3,912	0,7	2,370	5,855			

Tableau 32. Résultats obtenus pour le cas test de la poutre console en non-linéaire géométrique

<u>SHB6</u> maillage 100x10x2 ; 2000 éléments			SHB15 maillage 15x1x2 ; 30 éléments			SHB20 maillage 5x1x1 ; 5 éléments		
P/P_{\max}	$-U_x (m)$	$U_z (m)$	P/P_{\max}	$-U_x (m)$	$U_z (m)$	P/P_{\max}	$-U_x (m)$	$U_z (m)$
0,000	0,000	0	0,000	0,000	0	0,000	0,000	0
0,039	0,004	0,5	0,038	0,004	0,5	0,038	0,004	0,5
0,078	0,037	1	0,075	0,037	1	0,075	0,037	1
0,118	0,101	1,5	0,114	0,101	1,5	0,114	0,101	1,5
0,160	0,196	2	0,155	0,196	2	0,155	0,196	2
0,204	0,322	2,5	0,198	0,322	2,5	0,198	0,322	2,5
0,252	0,482	3	0,244	0,482	3	0,244	0,482	3
0,305	0,675	3,5	0,295	0,676	3,5	0,295	0,675	3,5
0,363	0,906	4	0,353	0,907	4	0,351	0,906	4
0,429	1,176	4,5	0,418	1,177	4,5	0,416	1,176	4,5
0,507	1,490	5	0,494	1,492	5	0,492	1,490	5
0,601	1,852	5,5	0,586	1,855	5,5	0,582	1,852	5,5
0,717	2,268	6	0,701	2,273	6	0,695	2,269	6
0,867	2,747	6,5	0,849	2,754	6,5	0,840	2,749	6,5
1,068	3,300	7	1,051	3,311	7	1,037	3,304	7

La Figure 26 illustre la géométrie, le chargement, les conditions aux limites et le déplacement de cette poutre console.

Nous trouvons que les trois éléments SHB convergent bien vers la solution de référence. L'élément SHB6 converge le moins rapidement. Il nous faut un maillage de 2000 éléments SHB6 pour avoir une convergence avec moins de 1% d'erreur.



Graph 13. Résultats du cas test de la poutre console en non-linéaire géométrique

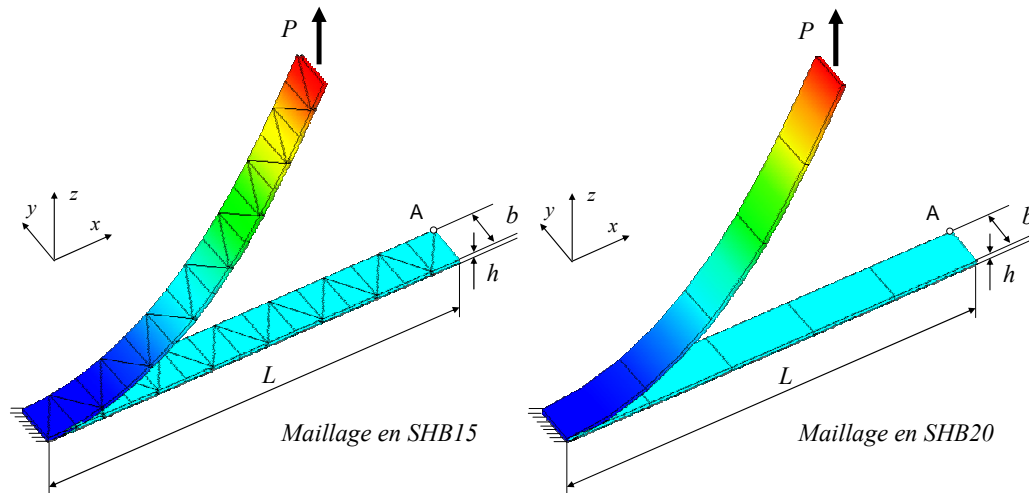


Figure 26. Géométrie, chargement et déplacement de la poutre console en non-linéaire géométrique

3.2. Flambage d'un panneau cylindrique épais soumis à une force ponctuelle

Nous allons traiter ce problème dans les deux cas suivants :

- 1^{er} cas : le matériau utilisé est élastique. Donc, nous avons un problème de flambage élastique (par point limite) non-linéaire géométrique ;
- 2^{ème} cas : le matériau utilisé est élasto-plastique. Donc, nous avons un problème non-linéaire géométrique et matériau.

Nous présentons d'abord le 1^{er} cas. Les données géométriques et matériau sont représentées dans le Tableau 33 et Figure 27a.

Tableau 33. Données de géométrie et de matériau du panneau cylindrique épais sous force ponctuelle

Rayon moyen	$R = 2540 \text{ mm}$
Largeur	$L = 254 \text{ mm}$
Épaisseur	$h = 12,7 \text{ mm}$
Angle	$\alpha = 0,1 \text{ radian}$
Module d'Young	$E = 3102,75 \text{ N/mm}^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$

Ce cas test a été traité par Sze et al. [80] ou Klinkel et Wagner [51]. Comme le problème est symétrique, nous étudions seulement un quart de la structure. Le panneau est en appui simple sur le côté BC (fibre neutre du panneau), libre sur le côté CD et soumis à une force ponctuelle P au point A suivant la direction verticale Oz (voir Figure 27a). Pour pouvoir tenir compte des bonnes conditions aux limites du problème, nous maillons le panneau avec deux couches d'éléments dans l'épaisseur. Nous étudions ici trois maillages :

- 1^{er} maillage fait par $(30 \times 30 \times 2) \times 2$ éléments SHB6 (Figure 27)
- 2^{ème} maillage fait par $(10 \times 10 \times 2) \times 2$ éléments SHB15
- 3^{ème} maillage fait par $(10 \times 10 \times 2)$ éléments SHB20.

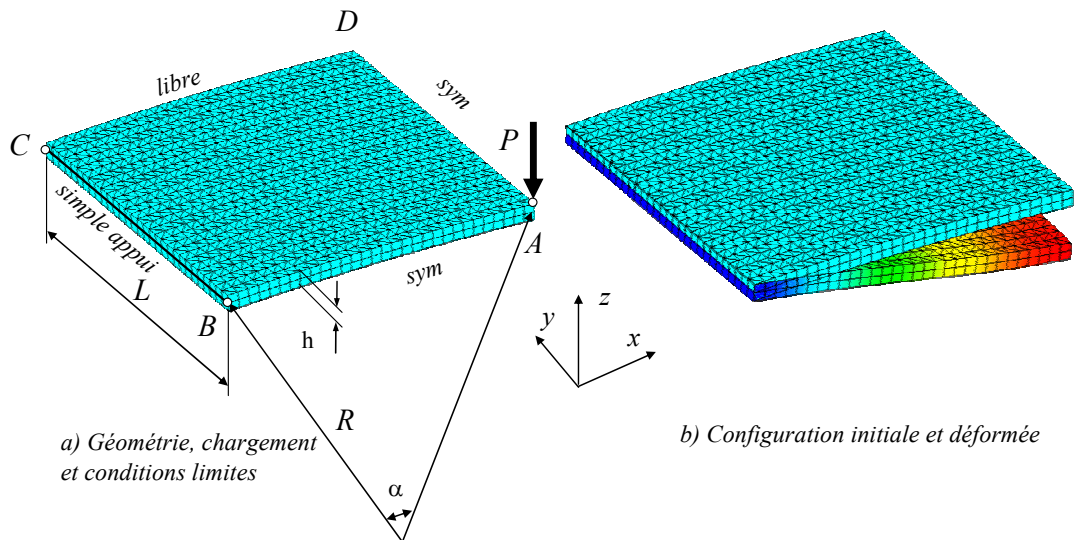
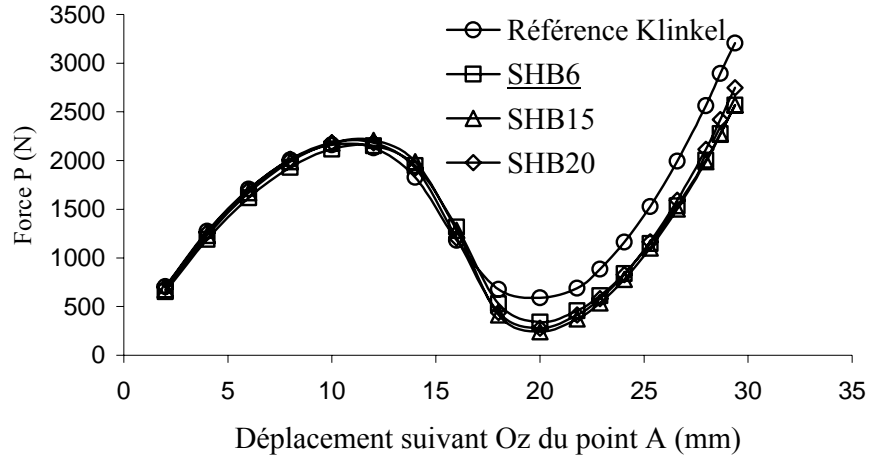


Figure 27. Géométrie, chargement, conditions aux limites et déformée du panneau cylindrique épais sous force ponctuelle ; un exemple de maillage SHB6 de $(30 \times 30 \times 2) \times 2$

Nous déterminons le déplacement vertical suivant Oz du point A pour chaque maillage en fonction de la force ponctuelle P (P varie de 0 à $P_{\max} = 3000\text{N}$). Ensuite, nous comparons ces résultats avec le résultat de référence de Klinkel.



Graphe 14. Déplacement du point A du panneau cylindrique épais soumis à une force ponctuelle

Les résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz pour les trois maillages sont donnés dans le Tableau 34, et sur le Graphe 14. Nous trouvons que les trois éléments SHB donnent des résultats assez proches de ceux de la référence jusqu'au moment où le déplacement du point A atteint $U_z = 16\text{mm}$ ensuite, le chargement P est un peu sous-estimé.

Tableau 34. Résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz du panneau cylindrique épais soumis à une force ponctuelle

Déplacement du point A	Référence de Klinkel	SHB6	SHB15	SHB20
U_z (mm)	P (N)	P (N)	P (N)	P (N)
2	706	651,97	674,49	698,049
4	1273	1189,92	1229,64	1263,31
6	1707	1616,83	1668,66	1701,51
8	2007	1930,47	1989,55	2012,2
10	2160	2119,03	2180,48	2183,92
12	2129	2151,3	2208,97	2183,07
14	1827	1948,47	1989,13	1922,24
16	1180	1316,44	1282,1	1203,39
18	677	527,37	414,75	440,53
20	592	339,53	240,64	277,26
21,78	690,9	458,32	374,8	413,39
22,875	885	612,62	539,53	582,19
24,049	1161,3	839,38	778,51	829,63
25,293	1527,9	1147,28	1100,5	1167,06
26,601	1993,2	1534,22	1503,03	1593,78
27,964	2564,7	2002,76	1988,04	2114,07
28,663	2892,9	2275,99	2269,37	2419,56
29,374	3205,5	2569,49	2570,7	2748,76

Maintenant, nous traitons le 2^{ème} cas. Nous gardons les mêmes données géométriques et les mêmes conditions aux limites du 1^{er} cas. Nous n'avons pas de solution de référence existante. Donc, nous allons établir une solution de référence en faisant un calcul obtenu avec un maillage de (20x20) éléments coques S4R5 du logiciel Abaqus. Nous utilisons un matériau élasto-plastique de von Mises à écrouissage isotrope linéaire dont les paramètres sont définis dans le Tableau 35. Nous calculons le déplacement vertical suivant Oz du point d'application A en fonction de la force ponctuelle P (P varie de 0 à P_{max} = 3000N). Ces résultats obtenus sont pris comme des résultats de référence (voir le Tableau 37 et le Graphe 16).

Tableau 35. Données de matériau élasto-plastique du panneau cylindrique sous force ponctuelle

Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Limite élastique	$\sigma_y = 7 \text{ MPa}$
Module d'Young élastique	$E = 3102,75 \text{ N/mm}^2$

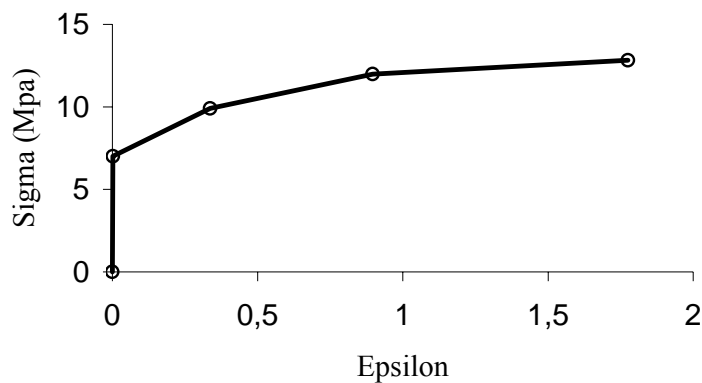
Comme le problème est symétrique, nous étudions seulement un quart de la structure. Le panneau est en appui simple sur la côté BC (fibre neutre du panneau), libre sur la côté CD et soumis à une force ponctuelle P au point A suivant la direction verticale Oz (voir Figure 27a). Pour pouvoir tenir compte des bonnes conditions aux limites du problème, nous maillons le panneau avec deux couches d'éléments. Nous étudions ici quatre maillages :

- 1^{er} maillage fait par (20x20x2)x2 éléments SHB6
- 2^{ème} maillage fait par (15x15x2)x2 éléments SHB15
- 3^{ème} maillage fait par (15x15x2) éléments SHB20
- 4^{ème} maillage fait par (15x15x2) éléments SHB8PS

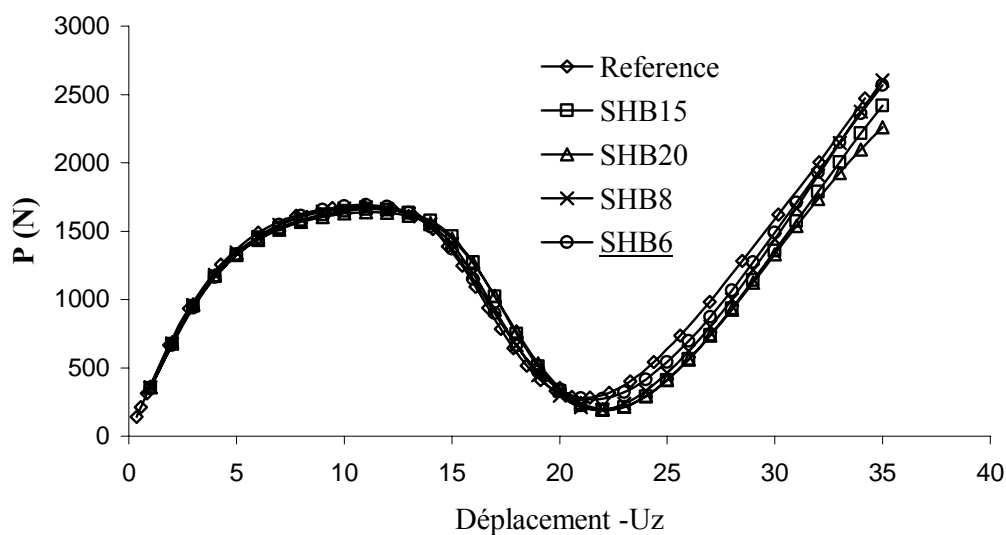
Nous utilisons le même matériau élasto-plastique que nous avons utilisé pour établir la solution de référence. Mais ses paramètres sont définis par une courbe de traction qui est donnée dans le Tableau 36 et le Graphe 15.

Tableau 36. Données de matériau élasto-plastique du panneau cylindrique épais sous force ponctuelle

Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Module d'Young élastique	$E = 3102,75 \text{ MPa}$
Courbe de traction	
ε	$\sigma \text{ (MPa)}$
0	0
0,00226	7,00
0,33647	9,92
0,89609	11,99
1,77495	12,83



Graphe 15. Courbe de traction



Graphe 16. Déplacement du point A du panneau cylindrique épais soumis à une force ponctuelle

Les résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz pour les quatre maillages sont donnés dans le Tableau 37 et le Graphe 16. Nous trouvons que les quatre éléments SHB donnent des résultats très proches de ceux de référence.

Tableau 37. Résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz
du panneau cylindrique épais soumis à une force ponctuelle

Référence S4R5 (20x20)		SHB15 (15x15x2)x2		SHB20 (15x15x2)		SHB6 (20x20x2)x2		SHB8PS (15x15x2)	
P (N)	-Uz (mm)	P (N)	-Uz	P (N)	-Uz	P (N)	-Uz	P (N)	-Uz
142,86	0,38	352,47	1	359,80	1	347,18	1	356,01	1
212,12	0,56	673,61	2	685,98	2	663,68	2	680,10	2
313,18	0,84	949,82	3	962,68	3	940,16	3	961,42	3
663,01	1,88	1165,50	4	1174,45	4	1161,22	4	1181,76	4
935,40	2,81	1326,03	5	1327,83	5	1328,51	5	1342,39	5
1256,16	4,27	1440,18	6	1435,66	6	1453,66	6	1460,32	6
1486,88	6,01	1523,50	7	1513,04	7	1546,50	7	1544,48	7
1611,34	7,78	1582,59	8	1566,93	8	1612,48	8	1604,52	8
1668,63	9,44	1622,78	9	1604,55	9	1657,57	9	1642,67	9
1684,32	10,92	1647,94	10	1627,78	10	1684,50	10	1664,80	10
1664,07	12,20	1659,59	11	1637,92	11	1692,74	11	1672,32	11
1609,39	13,25	1656,14	12	1634,56	12	1679,45	12	1661,91	12
1515,47	14,10	1633,39	13	1612,58	13	1633,32	13	1627,26	13
1389,34	14,83	1576,94	14	1557,96	14	1534,58	14	1549,31	14
1246,23	15,48	1461,83	15	1446,69	15	1370,25	15	1404,65	15
1092,67	16,09	1272,62	16	1265,40	16	1147,98	16	1188,20	16
936,65	16,68	1021,40	17	1026,26	17	898,70	17	925,85	17
783,66	17,26	750,54	18	767,45	18	661,49	18	663,15	18
641,40	17,86	509,29	19	532,77	19	470,93	19	444,77	19
515,27	18,48	331,50	20	353,76	20	341,81	20	293,77	20
409,86	19,13	224,84	21	242,15	21	276,87	21	211,27	21
331,35	19,82	188,07	22	198,15	22	272,67	22	195,98	22
286,65	20,58	213,38	23	216,90	23	321,25	23	238,85	23
280,89	21,40	291,69	24	290,27	24	414,61	24	330,43	24
316,17	22,30	411,86	25	408,81	25	543,03	25	460,89	25
402,51	23,29	564,80	26	560,65	26	698,19	26	620,14	26
543,08	24,37	740,27	27	734,95	27	873,92	27	800,67	27
734,60	25,59	934,08	28	924,97	28	1066,81	28	1000,94	28
980,60	26,97	1141,02	29	1125,11	29	1274,12	29	1215,47	29
1283,32	28,48	1355,07	30	1332,05	30	1488,68	30	1439,23	30
1620,02	30,17	1573,73	31	1538,18	31	1708,53	31	1671,24	31
2006,17	32,05	1790,40	32	1736,45	32	1929,11	32	1908,12	32
2469,96	34,18	2003,85	33	1922,91	33	2147,68	33	2143,78	33
		2213,82	34	2097,14	34	2360,37	34	2374,22	34
		2419,09	35	2258,98	35	2568,76	35	2602,79	35

3.3. Flambage d'un panneau cylindrique mince soumis à une force ponctuelle

Ce cas test a été traité par plusieurs auteurs et en particulier dans Sze et al. [80]. Ce test représente un calcul de stabilité d'un panneau cylindrique simplement supporté soumis à un effort concentré en son centre. Le comportement du panneau change complètement et montre nettement des points de retour en charge et en déplacement « snap-through/snap-back ». Dans ce cas un pilotage en déplacement diverge et un pilotage en longueur d'arc doit être choisi. Il permet de valider les modélisations SHB dans le domaine quasi-statique non-linéaire géométrique en présence de fortes instabilités.

Les données géométriques et matériau sont représentées dans le Tableau 38 et Figure 28a.

Tableau 38. Données de géométrie et de matériau du panneau cylindrique mince sous force ponctuelle

Rayon moyen	$R = 2540 \text{ mm}$
Largeur	$L = 254 \text{ mm}$
Épaisseur	$h = 6,35 \text{ mm}$
Angle	$\alpha = 0,1 \text{ radian}$
Module d'Young	$E = 3102,75 \text{ N/mm}^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$

Comme le problème est symétrique, nous étudions seulement un quart de la structure. Le panneau est en appui simple sur le côté BC (fibre neutre du panneau), libre sur la côté CD et soumis à une force ponctuelle P au point A suivant la direction verticale Oz (voir Figure 28a). Pour pouvoir tenir compte des bonnes conditions aux limites du problème, nous maillons le panneau avec deux couches d'éléments. Nous étudions ici quatre maillages :

- 1^{er} maillage fait par $(25 \times 25 \times 2) \times 2$ éléments SHB6 (Figure 27)
- 2^{ème} maillage fait par $(20 \times 20 \times 2)$ éléments SHB8PS
- 3^{ème} maillage fait par $(20 \times 20 \times 2) \times 2$ éléments SHB15
- 4^{ème} maillage fait par $(20 \times 20 \times 2)$ éléments SHB20.

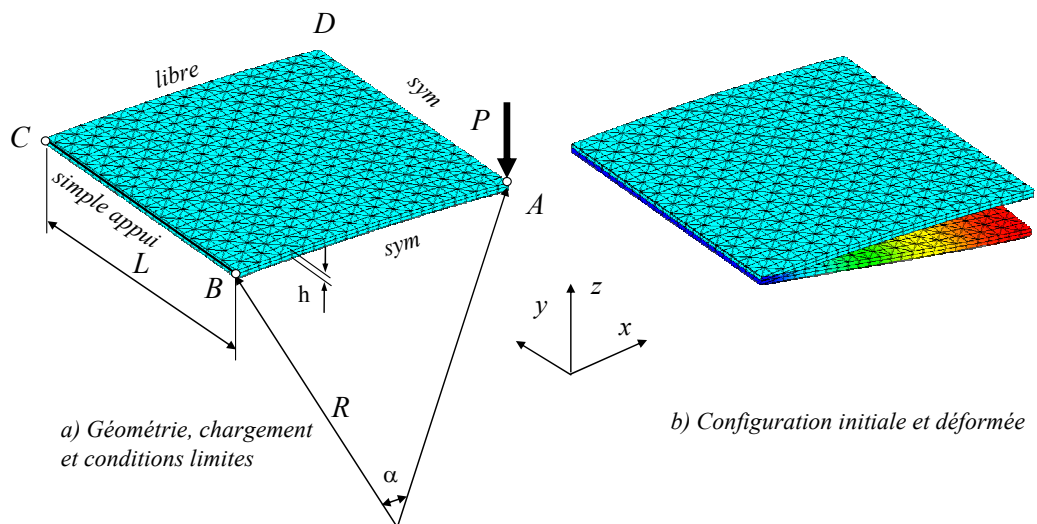
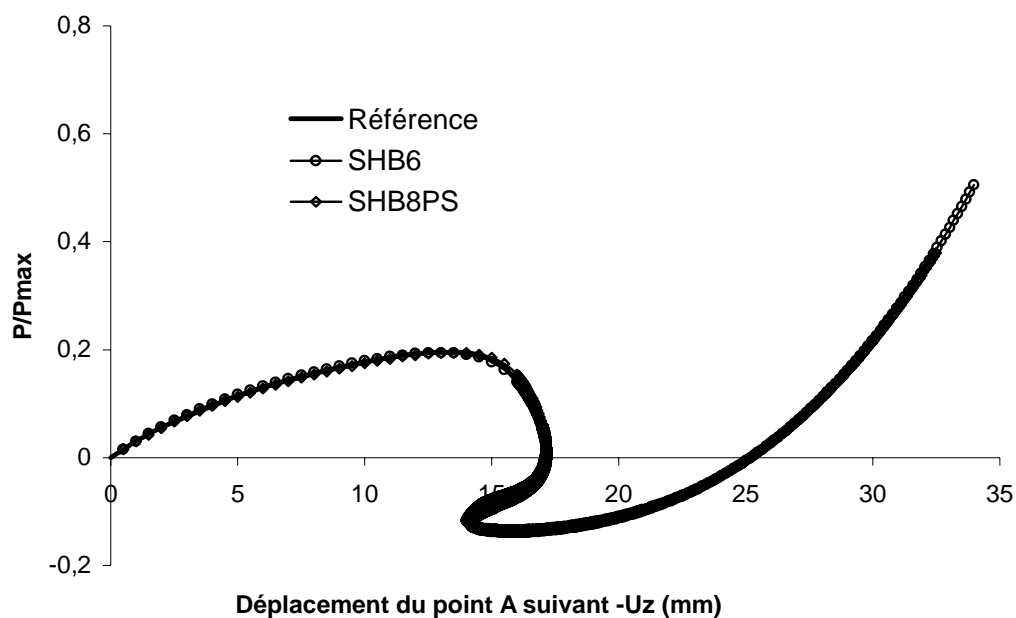
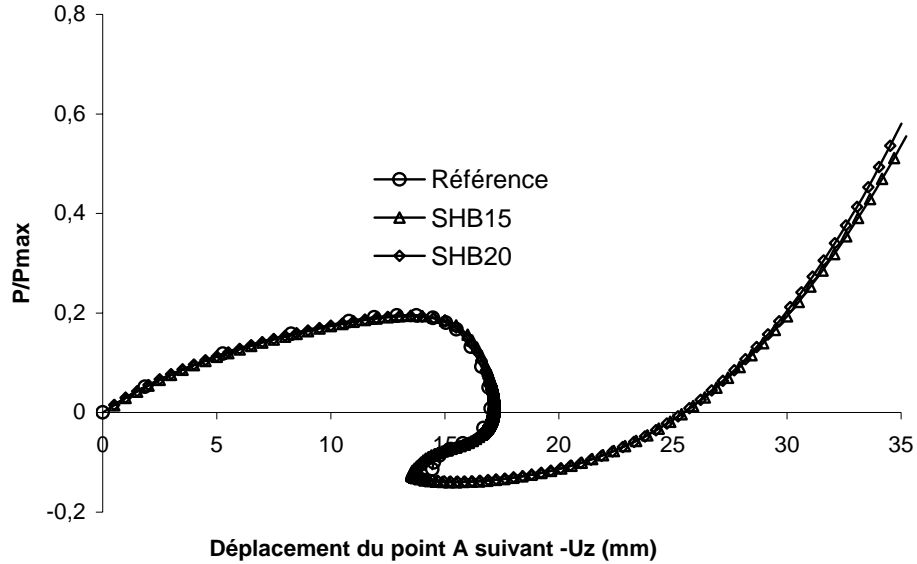


Figure 28. Géométrie, chargement, conditions aux limites et déformée du panneau cylindrique mince sous force ponctuelle ; un exemple de maillage SHB6 de $(25 \times 25 \times 2) \times 2$



Grphe 17. Déplacement du point A du panneau cylindrique mince soumis à une force ponctuelle



Graph 18. Déplacement du point A du panneau cylindrique mince soumis à une force ponctuelle

Nous déterminons le déplacement vertical suivant Oz du point A pour chaque maillage en fonction de la force ponctuelle P (P varie de 0 à $P_{\max} = 3000\text{N}$). Ensuite, nous comparons ces résultats avec le résultat de référence de Sze et al. (Tableau 39).

Tableau 39. Résultats de référence

-Uz (mm)	P (N)	P/Pmax	-Uz (mm)	P (N)	P/Pmax
0	0	0	14,767	-258,3	-0,0861
1,846	155,1	0,0517	14,52	-300,3	-0,1001
5,271	354,6	0,1182	14,451	-342,6	-0,1142
8,257	474,9	0,1583	14,862	-374,1	-0,1247
10,799	551,1	0,1837	15,778	-386,4	-0,1288
11,904	574,2	0,1914	16,961	-381,3	-0,1271
12,892	585,9	0,1953	18,32	-358,8	-0,1196
13,752	585	0,195	19,817	-316,5	-0,1055
14,472	570,3	0,1901	21,42	-247,5	-0,0825
15,05	541,8	0,1806	23,1	-145,2	-0,0484
15,501	501,3	0,1671	24,824	-1,8	-0,0006
16,145	396,9	0,1323	26,565	187,8	0,0626
16,602	276,9	0,0923	28,302	428,1	0,1427
16,915	151,2	0,0504	30,023	720,9	0,2403
17,008	24,9	0,0083	31,72	1067,7	0,3559
16,697	-93,6	-0,0312	33,388	1469,4	0,4898
15,78	-186,6	-0,0622	35,024	1925,1	0,6417
15,206	-221,7	-0,0739			

Les résultats obtenus du déplacement du point A suivant Oz pour les quatre maillages sont représentés sur les Graphe 17 et Graphe 18Graphe 20. Nous trouvons que les quatre éléments SHB donnent des résultats bien cohérents avec ceux de référence.

3.4. Coque cylindrique sans diaphragmes soumise à une force ponctuelle

Nous présentons ici un calcul de flambage élastique non-linéaire d'une coque cylindrique soumise à une force ponctuelle. Les données géométriques et matériau sont représentées dans le Tableau 40 et Figure 29a.

Tableau 40. Données de géométrie et de matériau de la coque cylindrique sous force ponctuelle

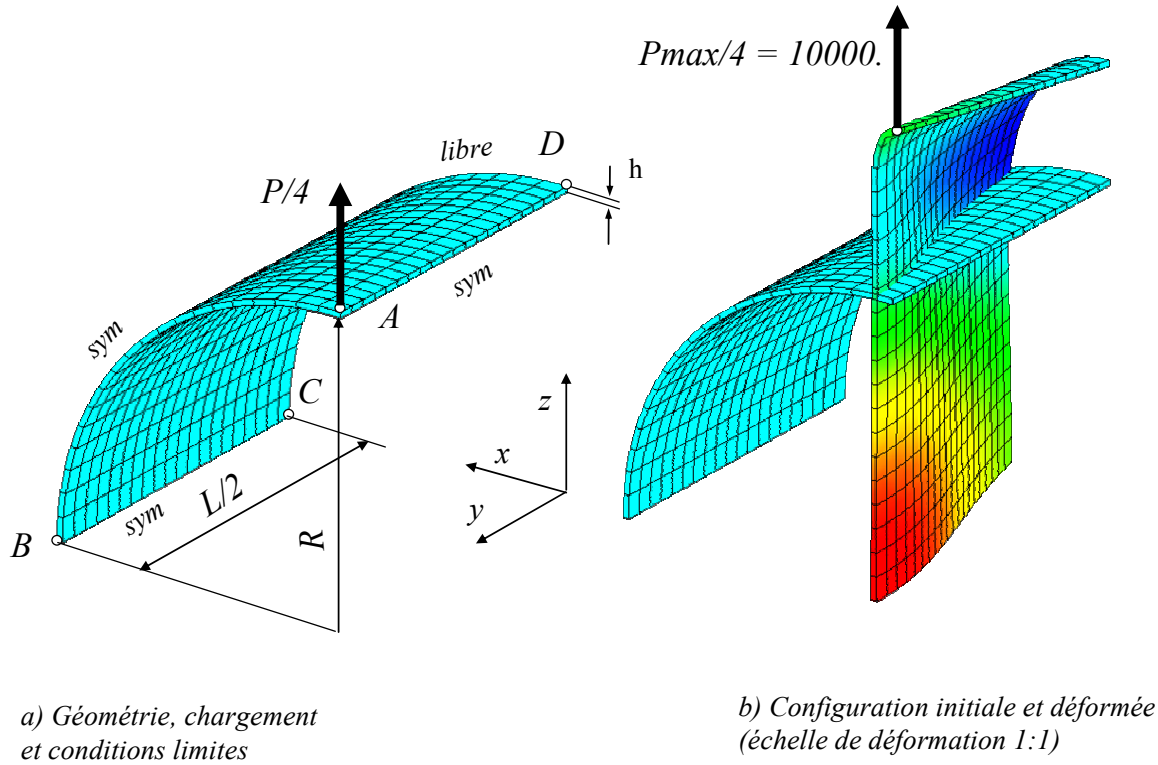
Rayon moyen	R = 4,953
Longueur	L = 10,35
Épaisseur	h = 0,094
Module d'Young	E = 10,5x10 ⁶
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3125$
Chargement	Pmax = 40000

Ce cas test a été traité par Sze et al. [80]. Comme le problème est symétrique, nous étudions seulement un huitième de la structure. Par des conditions de symétrie, les déplacements des surfaces de symétrie sont nuls suivant la direction de leurs normales :

- Face AB : $v\left(x, \frac{L}{2}, z\right) = 0 \quad \forall x, z$
- Face AD : $u(0, y, z) = 0 \quad \forall y, z$
- Face BC : $w(x, y, 0) = 0 \quad \forall x, y$

La coque est libre sur la côté CD et soumise à une force ponctuelle P au point A suivant la direction verticale Oz (voir Figure 29a). La force P est appliquée par incréments successifs pour aller de 0 à Pmax = 40000. Nous étudions ici trois maillages :

- 1^{er} maillage fait par (45x45x1)x2 éléments SHB6
- 2^{ème} maillage fait par (25x25x1)x2 éléments SHB15
- 3^{ème} maillage fait par (20x20x1) éléments SHB20 (Figure 29).



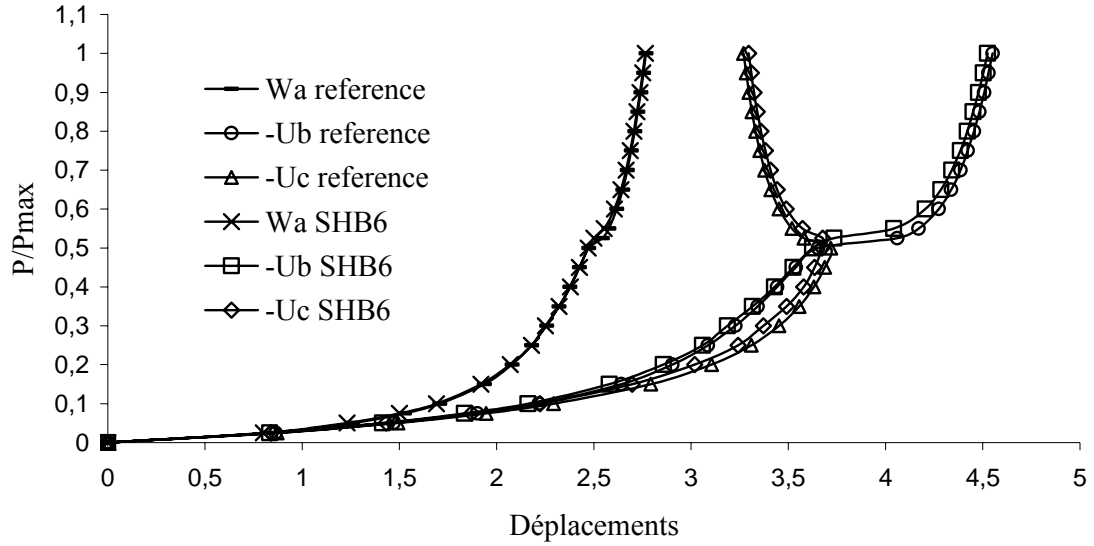
a) Géométrie, chargement et conditions limites
b) Configuration initiale et déformée (échelle de déformation 1:1)
 Figure 29. Géométrie, chargement, conditions aux limites et déformée de la coque cylindrique sous force ponctuelle ; un exemple de maillage SHB20 de (20x20x1)

Pour chaque maillage, nous calculons le déplacement vertical suivant Oz du point d'application A de la force ponctuelle P ainsi que le déplacement suivant Ox des point B et C (voir la position des point A, B et C sur la Figure 29a). Ensuite, nous comparons ces résultats avec les résultats de référence de Sze et al. [80].

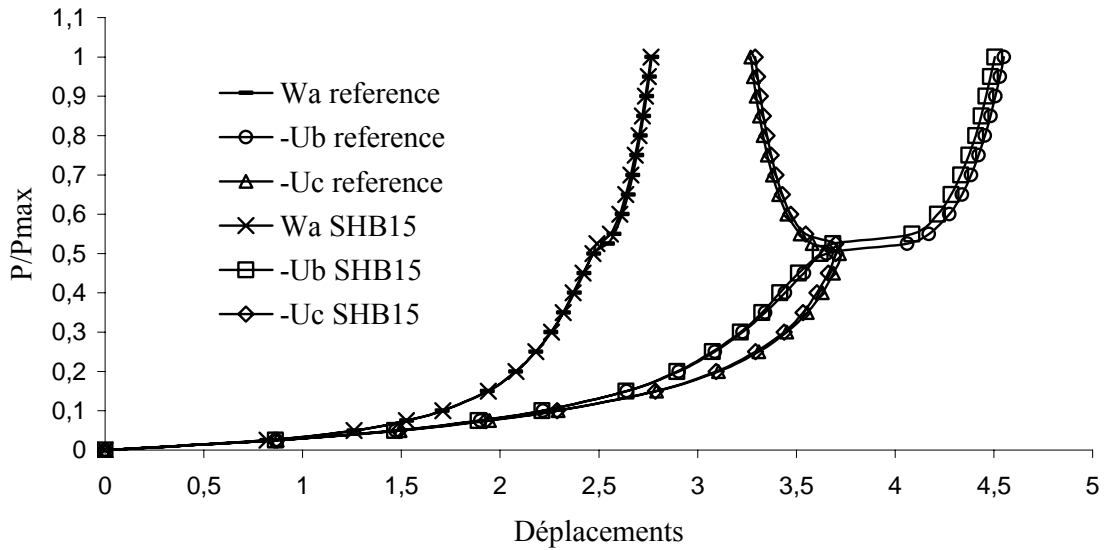
Les résultats obtenus sont donnés dans le Tableau 41 et sur les Graphe 19, Graphe 20, Graphe 21. Nous trouvons que trois éléments SHB donnent des résultats bien cohérents avec ceux de référence.

Tableau 41. Résultats obtenus des déplacements des points A, B et C de la coque cylindrique soumise à une force ponctuelle

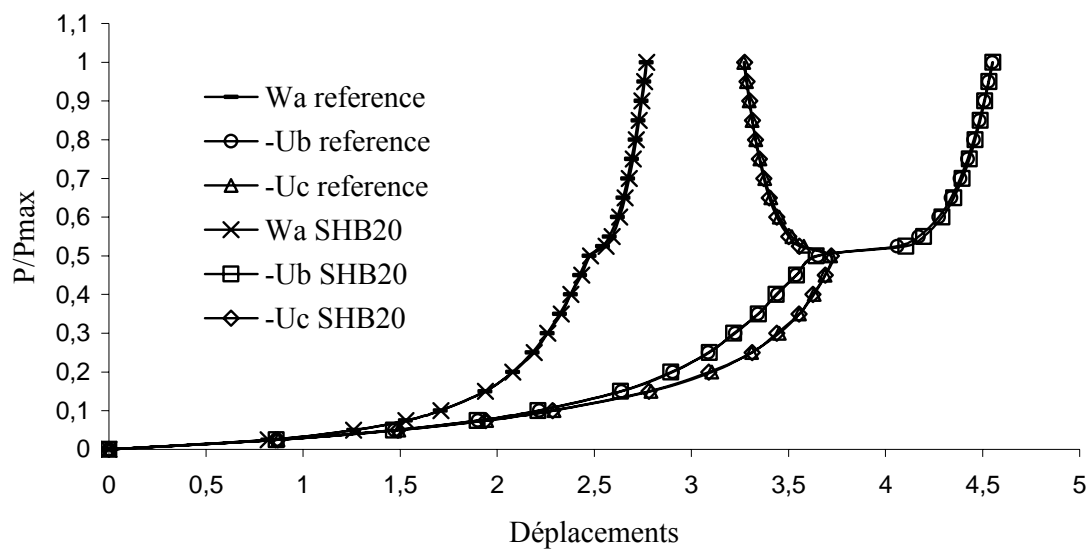
Solution de référence				SHB15 (25x25x1)x2			SHB20 (20x20x1)			SHB6 (45x45x1)x2		
P/P _{max}	W _A	-U _B	-U _C	W _A	-U _B	-U _C	W _A	-U _B	-U _C	W _A	-U _B	-U _C
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,025	0,819	0,864	0,872	0,82	0,862	0,87	0,82	0,862	0,87	0,8	0,833	0,841
0,05	1,26	1,471	1,493	1,26	1,466	1,488	1,26	1,466	1,488	1,23	1,413	1,432
0,075	1,527	1,901	1,946	1,525	1,89	1,93	1,53	1,897	1,941	1,5	1,835	1,872
0,1	1,707	2,217	2,293	1,71	2,213	2,289	1,71	2,211	2,285	1,69	2,161	2,223
0,15	1,936	2,641	2,792	1,94	2,638	2,786	1,94	2,636	2,782	1,92	2,579	2,696
0,2	2,079	2,904	3,106	2,08	2,895	3,093	2,08	2,894	3,09	2,07	2,857	3,018
0,25	2,18	3,087	3,31	2,18	3,075	3,293	2,19	3,093	3,313	2,18	3,059	3,241
0,3	2,257	3,227	3,452	2,26	3,217	3,438	2,26	3,219	3,441	2,25	3,187	3,372
0,35	2,321	3,342	3,556	2,32	3,325	3,534	2,33	3,345	3,555	2,32	3,316	3,49
0,4	2,376	3,443	3,632	2,37	3,416	3,604	2,38	3,437	3,626	2,38	3,429	3,579
0,45	2,425	3,539	3,688	2,42	3,511	3,662	2,435	3,543	3,69	2,425	3,525	3,634
0,5	2,473	3,653	3,718	2,47	3,621	3,699	2,48	3,644	3,721	2,47	3,626	3,674
0,525	2,543	4,061	3,58	2,49	3,685	3,7	2,562	4,106	3,557	2,5	3,735	3,677
0,55	2,577	4,171	3,518	2,559	4,085	3,547	2,592	4,197	3,503	2,553	4,042	3,573
0,6	2,618	4,274	3,452	2,606	4,215	3,472	2,631	4,292	3,441	2,606	4,205	3,489
0,65	2,648	4,338	3,41	2,637	4,284	3,429	2,659	4,352	3,402	2,639	4,285	3,443
0,7	2,672	4,385	3,378	2,662	4,333	3,397	2,681	4,396	3,373	2,665	4,34	3,409
0,75	2,692	4,423	3,353	2,684	4,374	3,372	2,7	4,432	3,35	2,687	4,385	3,382
0,8	2,71	4,455	3,332	2,703	4,408	3,351	2,717	4,462	3,331	2,706	4,421	3,359
0,85	2,726	4,483	3,313	2,72	4,436	3,333	2,732	4,488	3,314	2,722	4,451	3,341
0,9	2,741	4,508	3,297	2,735	4,46	3,318	2,746	4,512	3,3	2,737	4,478	3,324
0,95	2,755	4,53	3,283	2,75	4,484	3,304	2,759	4,534	3,287	2,751	4,503	3,309
1	2,768	4,551	3,269	2,764	4,505	3,291	2,771	4,554	3,275	2,764	4,525	3,295



Grphe 19. Déplacement du point A, B et C de la coque cylindrique soumise à une force ponctuelle ; un exemple de maillage SHB6 de $(45 \times 45 \times 1) \times 2$



Grphe 20. Déplacement du point A, B et C de la coque cylindrique soumise à une force ponctuelle ; un exemple de maillage SHB15 de $(25 \times 25 \times 1) \times 2$



Graph 21. Displacement of point A, B and C of the cylindrical shell under a point force; an example of SHB20 meshing (20x20x1)

Conclusions et perspectives

La présente étude entre dans le cadre général du développement et de la validation d'une famille d'éléments finis de solide-coques construite à partir d'une formulation purement 3D avec trois degrés de liberté en déplacement à chaque nœud. Nous avons développé 3 éléments finis solide-coques SHB6, SHB15 et SHB20. Ces éléments ont été bien implantés dans le code des éléments finis implicite ASTER.

L'élément SHB6 est un prisme à six nœuds et il a une direction privilégiée appelée « épaisseur » qui est normale au plan moyen du prisme. L'intégration numérique réduite est utilisée pour économiser du temps de calcul. L'intégration à travers l'épaisseur s'appuie sur cinq points de Gauss. L'intégration dans les deux autres directions est faite avec un seul point de Gauss situé au centre de gravité de l'élément. Une analyse des modes de *hourglass* pour cet élément montre que cet élément ne présente pas de mode de parasite à énergie nulle. La stabilisation n'est donc pas nécessaire. Afin d'améliorer sa rapidité de convergence et de réduire les blocages en membrane ou en cisaillement, nous avons appliqué une projection de type « *Assumed Strain* » à l'opérateur gradient de l'élément. L'élément SHB6 projeté est dénommé SHB6. Afin d'évaluer ses performances, une série de cas tests linéaires et non-linéaires standards dans la littérature lui a été appliquée. À travers ces exemples numériques, l'élément SHB6 montre des améliorations significatives par rapport à l'élément tridimensionnel à six nœuds nommé PRI6. En plus, ce type d'élément se connecte naturellement à l'élément solide-coque à huit-nœuds SHB8PS. Cela permet de modéliser facilement des structures à géométrie complexe. Surtout dans le cas où l'on ne peut pas utiliser l'élément hexaédrique SHB8PS seul pour modéliser la structure. Pourtant, la convergence de l'élément SHB6 reste lente dans le cas test d'une coque hémisphérique pincée, qui est probablement dû au fait que les déformations des éléments triangulaires linéaires sont constantes. De même, sa limite d'élanement (rapport largeur/épaisseur de la structure) reste faible autour de 2. Il est donc, conseillé de mailler la structure avec l'élément solide-coque hexaédrique à huit-nœuds SHB8PS partout où c'est possible, et de n'utiliser l'élément SHB6 que pour mailler le reste.

L'élément SHB15 est un prisme à quinze nœuds, et il a également une direction privilégiée appelée « épaisseur » qui est normale au plan moyen du prisme. L'intégration numérique réduite est utilisée. Cette intégration utilise quinze points de Gauss au total : trois dans le plan de l'élément et cinq à travers l'épaisseur.

L'élément SHB20 est un hexaèdre à vingt nœuds, et il a aussi une direction privilégiée appelée « épaisseur » qui est normale au plan moyen de l'hexaèdre. L'intégration numérique réduite est utilisée. Cette intégration utilise vingt points de Gauss au total : quatre dans le plan de l'élément et cinq à travers l'épaisseur.

Ces éléments finis solide-coques quadratiques ne nécessitent pas de stabilisations ou de projections. La série de cas tests linéaires et non-linéaires standards dans la littérature montrent que ces éléments sont performants. Ils n'ont pas de blocages et convergent bien vers les solutions de référence. Les comparaisons en termes de convergence faites avec d'autres éléments finis 3D quadratiques (PENTA15 ou HEXA20) montrent que l'élément SHB20 converge plus rapidement que l'élément HEXA20 pour les cas tests où la déformation membranaire ou le cisaillement transverse sont dominés comme la coque sphérique pincée

(voir 2.3.4) et la coque cylindrique pincée avec diaphragmes (voir 2.3.5). En plus, les éléments SHB15 et SHB20 peuvent se connecter naturellement ; et leurs limites d'élanement sont élevées jusqu'à 500. Nous pouvons donc les utiliser pour modéliser des structures minces et avec des formes géométriques complexes.

Cette famille d'éléments finis solide-coques SHB (SHB6, SHB8PS, SHB15 et SHB20) est actuellement connectée à toutes les lois de comportement disponibles du code ASTER. Dans la suite de ce travail, il sera intéressant d'évaluer la performance de cette famille en termes de convergence et de temps de calcul par rapport aux autres éléments 3D et aux autres éléments coques classiques pour une série plus complète de cas tests non-linéaires.

Bibliographie

- [1] Abed-Meraim F, Combescure A. SHB8PS a new intelligent assumed strain continuum mechanics shell element for impact analysis on a rotating body. *First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, U.S.A., 2001.
- [2] Abed-Meraim F, Combescure A. SHB8PS, a new adaptive, assumed strain continuum mechanics shell element for impact analysis. *Computers and Structures*, 80:791–803, 2002.
- [3] Ahmad S. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:419–451, 1970.
- [4] Alves de Sousa R.J, Cardoso R.P.R, Fontes Valente R.A, Yoon J.W, Gracio J.J, Natal Jorge R.M. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid–shell element with multiple integration points along thickness: Part I – Geometrically linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:952–977, 2005.
- [5] Alves de Sousa R.J, Cardoso R.P.R, Fontes Valente R.A, Yoon J.W, Gracio J.J, Natal Jorge R.M. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid–shell element with multiple integration points along thickness: Part II – Nonlinear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67:160–188, 2006.
- [6] Alves de Sousa R.J, Yoon J.W, Cardoso R.P.R, Fontes Valente R.A, Gracio J.J. On the use of a reduced enhanced solid–shell (RESS) element for sheet forming simulations. *International Journal of Plasticity*, 23:490–515, 2007.
- [7] Ashwell D.G, Sabir A.B. A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain function. *Int. J. Mech. Science*, 14:171–185, 1972.
- [8] Ayad R, Batoz J.L, Dhatt G. Un élément quadrangulaire de plaque basé sur une formulation mixte-hybride avec projection en cisaillement. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 4:415–440, 1995.
- [9] Ayad R, Dhatt G, Batoz J.L. A new hybrid-mixed variational approach for Reissner–Mindlin plates: The MiSP model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:1149–1179, 1998.
- [10] Bachrach W.E. An efficient formulation of hexahedral elements with high accuracy for bending and incompressibility. *Computers and Structures*, 26:453–467, 1987.
- [11] Bathe K.J, Dvorkin E.N. Four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:367–383, 1985.
- [12] Bathe K.J, Dvorkin E.N. Formulation of general shell elements – The use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:697–722, 1986.
- [13] Bathe K.J, Ho L.W. A simple and effective element for analysis of general shell structures. *Computers and Structures*, 13:673–681, 1981.
- [14] Batoz J.L, Bathe K.J, Ho L.W. A study of three node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1771–1812, 1980.
- [15] Batoz J.L, Ben Tahar M. Evaluation of a new thin plate quadrilateral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1655–1678, 1982.

- [16] Batoz J.L, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Vol 1, Solides élastiques, Editions Hermès, 1990.
- [17] Batoz J.L, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Vol 2, Poutres et plaques, Editions Hermès, 1990.
- [18] Batoz J.L, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Vol 3, Coques, Editions Hermès, 1990.
- [19] Batoz J.L, Dhatt G. Revue et bilan des éléments de plaque de type Kirchhoff discret. Calcul des Structures et I.A, Vol 2, Fouet et al. Eds. Pluralis, 137–160, 1988.
- [20] Belytschko T. Correction of article by Flanagan D.P, Belytschko T. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:467–468, 1983.
- [21] Belytschko T, Bindeman L.P. Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 88:311–340, 1991.
- [22] Belytschko T, Bindeman L.P. Assumed strain stabilization of eight node hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 105:225–260, 1993.
- [23] Belytschko T, Ong J.S.J, Liu W.K, Kennedy J.M. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43:251–276, 1984.
- [24] Betsch P, Gruttmann F, Stein E. A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 130:57–79, 1996.
- [25] Bischoff M, Ramm E. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4427–4449, 1997.
- [26] Brank B, Korelc J, Ibrahimbegovic A. Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation. *Computers and Structures*, 80:699–717, 2002.
- [27] Brendel B, Ramm E. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. Internat. Conf. on Engineering Application of Finite Element Method, Hovik, Norway, May 9-11, 1979.
- [28] Buechter N, Ramm E, Roehl D. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:2551–2568, 1994.
- [29] Cardoso R.P.R, Yoon J.W. One point quadrature shell element with through-thickness stretch. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1161–1199, 2005.
- [30] Chapelle D, Bathe K.J. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computers and Structures*, 66:19–36, 1998.
- [31] Chen Y.I, Wu G.Y. A mixed 8-node hexahedral element based on the Hu–Washizu principle and the field extrapolation technique. *Structural Engineering and Mechanics*, 17:113–140, 2004.
- [32] Cheung Y, Chen W.J. Refined hybrid method for plane iso-parametric element using an orthogonal approach. *Computers and Structures*, 42:683–694, 1992.

- [33] Cho C, Park H.C, Lee S.W. Stability analysis using a geometrically nonlinear assumed strain solid shell element model. *Finite Elements in Analysis and Design*, 29:121–135, 1998.
- [34] Dhatt G, Touzot G. Une présentation de la méthode des éléments finis. Edition des Universités de Laval, Québec, 1986.
- [35] Doll S, Schweizerhof K, Hauptmann R, Freischlager C. On volumetric locking of low-order solid and solid–shell elements for finite elastoviscoplastic deformations and selective reduced integration. *Engineering Computations*, 17:874–902, 2000.
- [36] Domissy E. Formulation et évaluation d'éléments finis volumiques modifiés pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques. Ph.D. *Thesis*, UT Compiègne, France, 1997.
- [37] Fish J, Belytschko T. Elements with embedded localization zones for large deformation problems. *Computers and Structures*, 30:247–256, 1988.
- [38] Flanagan D.P, Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:679–706, 1981.
- [39] Hsiao K.M. Non-linear analysis of general shell structures by flat triangular shell element. *Computers and Structures*, 25:665–75, 1987.
- [40] Hallquist J.O. Theoretical manual for DYNA3D. UC1D-19401 Lawrence Livermore National Lab., University of California, 1983.
- [41] Hauptmann R, Doll S, Harnau M, Schweizerhof K. Solid–shell elements with linear and quadratic shape functions at large deformations with nearly incompressible materials. *Computers and Structures*, 79:1671–1685, 2001.
- [42] Hauptmann R, Schweizerhof K. A systematic development of 'solid–shell' element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:49–69, 1998.
- [43] Hauptmann R, Schweizerhof K, Doll S. Extension of the 'solid–shell' concept for application to large elastic and large elastoplastic deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49:1121–1131, 2000.
- [44] Hermann L.R. A bending analysis for plates. *Proc. 1st Conf. on Matrix Meth. In structural Mech. Ohio*, page 577–602, October 1965.
- [45] Hughes T.J.R. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1413–1418, 1980.
- [46] Hughes T.J.R, Cohen M, Haroun M. Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates. *Nuclear Engineering Design*, 46:203–222, 1978.
- [47] Hughes T.J.R, Liu W.K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. Three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26:331–362, 1981.
- [48] Kim K.D, Liu G.Z, Han S.C. A resultant 8-node solid–shell element for geometrically nonlinear analysis. *Computational Mechanics*, 35:315–331, 2005.
- [49] Kim Y.H, Jones R.F, Lee S.W. Study of 20-node solid element. *Communication in Applied Numerical Methods in Engineering*, 6:197–205, 1990.

- [50] Klinkel S, Gruttmann F, Wagner W. A continuum based 3D-shell element for laminated structures. *Computers and Structures*, 71:43–62, 1999.
- [51] Klinkel S, Wagner W. A geometrical non-linear brick element based on the EAS-method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4529–4545, 1997.
- [52] Legay A. Une méthode de calcul efficace pour l'étude paramétrique du flambage non-linéaire des structures tridimensionnelles : application à la fiabilité. *Thèse de doctorat du LMT de Cachan*, 2002.
- [53] Legay A, Combescure A. Efficient algorithms for parametric non-linear instability analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37:709–722, 2002.
- [54] Legay A, Combescure A. Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57:1299–1322, 2003.
- [55] Lemosse D. Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces. *Thèse*, INSA–Rouen, France, 2000.
- [56] Liu W.K, Guo Y, Tang S, Belytschko T. A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154:69–132, 1998.
- [57] MacNeal R, Harder R.L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1:3–20, 1985.
- [58] Malkus D.S, Hughes T.J.R. Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15:63–81, 1978.
- [59] Miehe C. A theoretical and computational model for isotropic elastoplastic stress analysis in shells at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155:193–233, 1998.
- [60] Onate E, Castro J. Derivation of plate based on assumed shear strain fields. *In New Advances in Computational Structural Mechanics*. Ladevèze & Zienkiewicz Eds, 237–288, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [61] Onate E, Zienkiewicz O.C, Suarez B, Taylor R.L. A general methodology for deriving shear constrained Reissner–Mindlin plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:345–367, 1992.
- [62] Papadopoulos P, Taylor R.L. A triangular element based on Reissner–Mindlin plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:1029–1049, 1990.
- [63] Papadrakis M, Samartin A, Onate E. Reliability analysis of stability of shells based on combined finite element and response surface methods, 2000.
- [64] Parisch H. Geometrical nonlinear analysis of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14:159–178, 1978.
- [65] Parisch H. A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20:323–350, 1979.
- [66] Parisch H. An investigation of a finite rotation four-node shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:127–150, 1991.

- [67] Pinsky P.M, Jasti R.V. A mixed finite element formulation for Reissner–Mindlin plates based on the use of bubble functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1677–1702, 1989.
- [68] Prathap B.G, Bhashyam G.R. Reduced integration and the shear flexible beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:195–210, 1982.
- [69] Puso M.A. A highly efficient enhanced assumed strain physically stabilized hexahedral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49:1029–1064, 2000.
- [70] Reese S. A large deformation solid–shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69: 1671–1716, 2007.
- [71] Reese S, Wriggers P, Reddy B.D. A new locking-free brick element technique for large deformation problems in elasticity. *Computers and Structures*, 75:291–304, 2000.
- [72] Sabir A.B, Lock A.C. A curved cylindrical shell finite element. *Int. J. Mech. Science*, 14:125–135, 1972.
- [73] Saleeb A.F, Chang T.Y. An efficient quadrilateral element for plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1123–1155, 1987.
- [74] Saleeb A.F, Chang T.Y, Yingyeunyong S. A mixed formulation of C^0 - linear triangular plate–shell element – the role of edge shear constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1101–1128, 1988.
- [75] Simo J.C, Hughes T.J.R. On the variational foundations of assumed strain methods. *J. Appl. Mech. ASME*, 53:51–54, 1986.
- [76] Simo J.C, Armero F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1413–1449, 1992.
- [77] Simo J.C, Armero F, Taylor R.L. Improved versions of assumed enhanced strain trilinear elements for 3D finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:359–386, 1993.
- [78] Simo J.C, Rifai M.S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990.
- [79] Stolarski H, Belytschko T, Carpenter N. A simple triangular curved shell element. *Engineering Computation*, 1:210–218, 1984.
- [80] Sze K.Y, Liu X.H, Lo S.H. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:1551–1569, 2004.
- [81] Sze K.Y, Yao L.Q. A hybrid stress ANS solid–shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I–solid–shell element formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:545–564, 2000.
- [82] Taylor R.L, Beresford P.J, Wilson E.L. A nonconforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:1211–1219, 1976.
- [83] Timoshenko S.P, Gere J.M. *Théorie de la stabilité élastique*, deuxième édition DUNOD, 500, 1966.

- [84] Vu-Quoc L, Tan X.G. Optimal solid–shells for non-linear analysis of multilayer composites. Part I: statics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:975–1016, 2003.
- [85] Vu-Quoc L, Tan X.G. Optimal solid–shells for non-linear analysis of multilayer composites. Part II: dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:1017–1059, 2003.
- [86] Wall W.A, Bischoff M, Ramm E. A deformation dependent stabilization technique, exemplified by EAS elements at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:859–871, 2000.
- [87] Wang X.J, Belytschko T. An efficient flexurally super convergent hexahedral element, *Engineering Computation*, 4:281–288, 1987.
- [88] Wilson E.L, Taylor R.L, Doherty W.P, Ghaboussi J. Incompatible displacement models. In *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, (Eds. S.J. Fenves et al.), 43–57, Academic Press, New York, 1973.
- [89] Wriggers P, Reese S. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 135:201–209, 1996.
- [90] Zhu Y.Y, Cescotto S. Unified and mixed formulation of the 8-node hexahedral elements by assumed strain method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129:177–209, 1996.
- [91] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. The finite element method, Fourth Edition, Basic formulation and linear problems. Vol 1, Editions Mac Graw-Hill Book Company, 1998.
- [92] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. The finite element method, Fourth Edition, Solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity. Vol 2, Editions Mac Graw-Hill Book Company, 1998.
- [93] Zienkiewicz O.C, Lefebvre D. A robust triangular plate bending element of the Reissner–Mindlin type. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1169–1184, 1988.
- [94] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, Too J.M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3:275–290, 1971.

DÉVELOPPEMENT ET VALIDATION D'ÉLÉMENTS FINIS DE TYPE COQUES VOLUMIQUES SOUS-INTÉGRÉS STABILISÉS UTILISABLES POUR DES PROBLÈMES A CINÉMATIQUE ET COMPORTEMENT NON-LINÉAIRES

RÉSUMÉ: Le recours aux logiciels de simulation basés sur la méthode des éléments finis devenant de plus en plus systématique dans les différents secteurs de l'industrie, l'efficacité et la précision de ces derniers deviennent des propriétés déterminantes. Dans les situations les plus courantes, les structures minces nécessitent une analyse précise et efficace, rendue possible par les éléments coques. En présence de structures dans lesquelles coexistent des parties minces et des zones plus épaisses, l'utilisation de ces éléments est encore plus cruciale. Ce travail est une contribution au développement et à la validation d'éléments finis solide-coques. Les déplacements nodaux sont les seuls degrés de liberté et ils sont munis d'un ensemble de points d'intégration distribués le long d'une direction préférentielle, désignée comme "l'épaisseur". Une intégration réduite dans le plan moyen est utilisée. La loi élastique 3D est modifiée pour s'approcher de la situation coque et atténuer les verrouillages. Grâce à ses formulations particulières, ces éléments solide-coques se connectent naturellement aux éléments 3D et présentent une bonne performance dans des applications de structures minces et pour des problèmes dominés par la flexion. Il s'agit des trois nouveaux éléments isoparamétriques SHB6, SHB15, et SHB20. L'analyse détaillée d'une potentielle déficience du rang de la matrice de raideur a révélé que ces derniers ne possèdent pas de modes à énergie nulle et qu'aucune stabilisation n'est donc nécessaire. Néanmoins, nous proposons des modifications basées sur la méthode bien connue "Assumed Strain", pour l'opérateur gradient discrétisé de l'élément SHB6, dans le but d'améliorer sa vitesse de convergence. Pour illustrer les capacités de ces éléments, ses performances sont évaluées sur un ensemble de cas tests en configurations linéaire ou non-linéaire, communément utilisés dans la littérature pour tester les éléments finis de type coques. En particulier, il est montré que le nouvel élément SHB6 joue un rôle très utile en tant que complément à l'élément hexaèdre SHB8PS, ce qui nous permet ainsi de mailler des géométries arbitraires.

Mots-clés: *solide-coque SHB, méthode de déformation postulée, blocage en cisaillement et membrane, hourglass, benchmark tests, flambement.*

DEVELOPMENT AND VALIDATION OF FINITE ELEMENTS OF TYPE SOLID-SHELLS REDUCED INTEGRATION STABILIZED USABLE FOR NON LINEAR CINEMATIC AND BEHAVIOR PROBLEMS

ABSTRACT: The appeal to the software of simulation based on the finites elements method becoming more and more systematic in the various industrial sectors, the efficiency and the precision of these last ones become determining properties. In the most current situations, the thin structures require a precise and effective analysis, made possible by shell elements. In the presence of structures in which coexist thin parts and thicker zones, the use of these elements is even more crucial. This work is a contribution to the development and to the validation of finites elements solid-shells. The nodal displacements are the only degrees of freedom and they are provided of a set of integration's points distributed along a preferential direction called as "the thickness". A reduced integration in the average plan is used. The 3D elastic behaviour is modified to approach the situation of shells and reduce the locking. Because of its particular formulations, these elements solid- shells connect naturally in the 3D elements and present a good performance in applications of thin structures and for problems dominated by the flexion. It is about three new elements iso-parametric SHB6, SHB15 and SHB20. The detailed analysis of potential deficiency of the kernel of the stiffness matrix revealed that these last ones don't have modes associated with a zero-energy and the stabilization is thus not necessary. Nevertheless, we propose modifications based on the method "Assumed Strain", for the operator discretized gradient of the element SHB6, with the purpose to improve its speed of convergence. To illustrate the capacities of these elements, its performances are evaluated on varied patch-tests in linear or non-linear configurations, which are used in the literature to test the finites elements of type shells. In particular, it is shown that the new element SHB6 plays a very useful role as complement in the hexahedral element SHB8PS, what so allows us to mesh arbitrary geometries.

Keywords: *assumed-strain, solid-shell SHB, shear and membrane locking, hourglass, benchmark problems, buckling.*

