



HAL
open science

Véhicule hybride et commande optimale

Grégory Rousseau

► **To cite this version:**

Grégory Rousseau. Véhicule hybride et commande optimale. domain_other. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008. Français. NNT : 2008ENMP1604 . pastel-00005237

HAL Id: pastel-00005237

<https://pastel.hal.science/pastel-00005237>

Submitted on 23 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS
PAR

GRÉGORY ROUSSEAU

EN VUE DE L'OBTENTION DU TITRE DE

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

SUJET DE LA THÈSE :

VÉHICULE HYBRIDE ET COMMANDE OPTIMALE

SOUTENUE LE 19 DÉCEMBRE 2008 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE

M.	HUGUES MOUNIER	PRÉSIDENT
M.	WILFRID PERRUQUETTI	RAPPORTEUR
M.	YANN CHAMAILLARD	RAPPORTEUR
MME.	DELPHINE SINOQUET	ENCADRANT IFP
M.	ANTONIO SCIARRETTA	ENCADRANT IFP
M.	PIERRE ROUCHON	DIRECTEUR DE THÈSE

Remerciements

Je remercie en premier lieu Gilles Corde de m'avoir contacté pour cette thèse.

Mes plus sincères remerciements s'adressent à Delphine Sinoquet, mon encadrante de thèse. Au-delà de son éternelle bonne humeur, elle a su m'encourager dans les moments difficiles et me guider tout au long de cette thèse. Je lui dois mes connaissances actuelles en optimisation.

Je remercie aussi Antonio Sciarretta d'avoir participé à mon encadrement. Je remercie également Huy Tran pour le temps important qu'il m'a consacré. Ses grandes qualités scientifiques ont sans nul doute contribué à améliorer mes travaux de thèse. Les réunions de travail auxquelles j'ai participé avec Delphine et lui, ponctuées par ses quelques accès d'enthousiasme débordant, resteront parmi mes meilleurs souvenirs de thèse.

Je tiens à remercier Pierre Rouchon, mon directeur de thèse, qui a su me guider vers la bonne voie dès le début de mes travaux de thèse, et qui a grandement participé à la qualité de mon mémoire. Ses recommandations et remarques furent à chaque fois riches de sens.

Je remercie Yann Chamaillard et Wilfrid Perruquetti d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, ainsi que Hugues Mounier d'avoir été membre de mon jury. Leurs remarques constructives m'ont permis de mieux préparer et d'apprécier le jour de la soutenance sans trop de stress.

Je remercie tous les Lyonnais pour leur aide et leur enthousiasme vis-à-vis de mes travaux sur le véhicule prototype Smart. En particulier, Rachid pour sa gentillesse et sa grande disponibilité ; Stéphane Venturi pour les multiples essais qu'il a menés sur le véhicule avec ou sans moi, et grâce à qui j'ai pu obtenir des résultats en toute fin de thèse ; Paolino Tona pour son aide et sa disponibilité ; Richard Tilagone et Dominique Soleri pour m'avoir permis de tester mes travaux sur ce véhicule, et pour l'enthousiasme qu'ils ont témoigné.

Je souhaite également remercier Roland Masson de m'avoir intégré dans le département Mathématiques Appliquées de l'IFP, ainsi que l'ensemble des membres de la division R11 avec qui j'ai pu avoir des discussions intéressantes ou agréables. En particulier, je pense aux deux récents docteurs m'ayant montré la voie, Séverine et Elodie, avec qui j'ai passé de très bons moments lors des déjeuners et des quelques pauses café. La fin de la thèse ne signifie heureusement pas la fin de nos contacts. J'ai aussi une pensée pour les futurs docteurs Long et Philippe, avec qui j'ai passé de longs et agréables moments lors des déjeuners, ou lors de quelques flocs (et il y en aura d'autres).

Je remercie tous les membres des départements R113 ou R114 du bâtiment Giroflées pour les discussions matinales lors des pauses café ou pour leur bonne humeur, en particulier Mathieu, Thomas, Fabrice, Philippe P-G, Bilal, Ricardo, Youssef, Alexandre, Laurent. Une pensée pour Carole et Zakia, éternelles donatrices de sourires et de bonne humeur. Une autre pensée pour Virginie, avec qui j'ai eu trop peu d'agréables discussions. Un grand merci à Michel Guion grâce à qui j'ai pu finir mon mémoire de thèse dans de bonnes conditions matérielles. Mes remerciements vont aussi à Van Bui Tran, avec qui j'ai eu des discussions très intéressantes, et pour l'intérêt qu'il a porté à mes quelques connaissances sur le thème du contrôle optimal. Merci à Aurélie pour les agréables pauses café et pour ses encouragements.

Je remercie tous mes proches, amis, famille pour leur soutien tout au long de ma thèse. C'est avec plaisir que je leur consacrerai dorénavant bien plus de temps qu'auparavant.

Enfin, un remerciement spécial à Stéphanie, ma femme, pour avoir accepté que je reprenne les études après une période d'activité, avec toutes les conséquences que cela implique, et pour son soutien constant tout au long de ces trois années.

Résumé :

Dans le contexte automobile actuel, étroitement lié à la volonté de réduire les émissions de CO₂ dans l'atmosphère, les véhicules hybrides demeurent un passage obligé à court et moyen terme.

Un véhicule hybride possède deux sources d'énergie pour assurer sa propulsion : en général un moteur thermique constitue la principale source d'énergie, tandis qu'un moteur électrique représente la source secondaire. La capacité d'un véhicule hybride à consommer moins de carburant, et à rejeter moins de CO₂, provient de la présence du moteur électrique. Celui-ci peut être utilisé soit conjointement avec le moteur thermique, soit seul, aucun carburant n'étant alors consommé. La présence de ces deux sources d'énergie impose au système global d'être régi par une stratégie de contrôle déterminant la répartition du couple entre les deux moteurs en fonction de l'état de charge de la batterie. Cette répartition peut être déterminée pour être optimale vis-à-vis de critères tels que la consommation de carburant, les émissions de polluants, etc.

L'objectif de la thèse est de développer des méthodes d'optimisation de la répartition de couple entre les deux moteurs d'un véhicule hybride, dans l'objectif de minimiser les émissions de CO₂. Une première étape a consisté à développer des modèles représentatifs d'une architecture type adaptés aux types d'optimisation réalisée.

Les algorithmes d'optimisation diffèrent selon qu'ils soient capables de traiter des problèmes hors-ligne, ou temps-réel. Parmi les algorithmes d'optimisation hors-ligne étudiés, la programmation dynamique a été utilisée pour déterminer le dimensionnement optimal des éléments principaux d'une architecture hybride, et en déterminer le gain théorique par rapport à une motorisation traditionnelle. Par ailleurs, un algorithme de tir original nommé SCOP a été développé, celui-ci permettant de traiter des problèmes de commande optimale avec contraintes sur l'état, tout en multipliant les performances par 50 par rapport à la méthode de programmation dynamique.

Une stratégie de contrôle temps-réel, basée sur l'Equivalent Consumption Minimization Strategy (ECMS) utilisant le principe de Pontryagin, a été développée et implémentée sur un prototype de véhicule hybride, une Smart équipée d'un alerno-démarrreur. Les résultats obtenus démontrent de l'action de la stratégie pour la réduction de la consommation de carburant et des émissions de CO₂.

Abstract :

In the actual automobile market, tightly connected to the overall will to decrease CO₂ emissions, hybrid vehicles seem to be a necessary short and medium-term milestone.

Typically, a hybrid vehicle has two energy sources : a regular gas engine is usually the main energy source, and an electric motor as a secondary energy source. The ability of a hybrid vehicle to consume less fuel and to emit less CO₂ comes from its electric motor. It can be used either alongside with the engine, or alone, with no gas being burnt. Because of the two energy sources, the global powertrain needs to be managed by a strategy that chooses the power split between the engine and the motor, based on the state of charge of the battery. This power split can be optimized based on criteria like fuel consumption, CO₂ emissions, etc.

The objective of this thesis is to develop optimization methods to find the optimal power split between the motor and the engine of a hybrid vehicle, in order to minimize the CO₂ emissions. The first step is to develop models corresponding to a reference hybrid powertrain, which are adapted to the optimization algorithms.

The optimization algorithms are different depending if offline or real-time optimization is considered. Among the studied offline algorithms, dynamic programming was used to determine the optimal size of the main elements of the powertrain, and to determine the optimal gain compared to a traditional vehicle. Additionally, an original shooting algorithm called SCOP has been developed, and is able to

treat optimal control problems with state constraints. This algorithm is about 50 times faster than dynamic programming.

A real-time control strategy, based on the Equivalent Consumption Minimization Strategy (ECMS) and using Pontryagin's Principle, was developed and used on a hybrid prototype vehicle : a Smart equipped with a starter alternator. The results demonstrate the positive impact of the strategy to reduce the fuel consumption and the CO2 emissions.

Table des matières

Introduction	11
1 Problématique du contrôle des véhicules hybrides	15
1.1 Les différentes architectures hybrides	15
1.1.1 Les modes de fonctionnement	15
1.1.2 Architecture parallèle	16
1.1.3 Architecture micro-hybride	17
1.1.4 Architecture série	18
1.1.5 Architecture combinée	18
1.1.6 Autres architectures	20
1.1.7 Les véhicules hybrides en France	20
1.2 La problématique de contrôle optimal	21
1.2.1 Minimisation de la consommation de carburant sur cycle normalisé	22
1.2.2 Problème en temps-réel où le futur n'est pas connu	23
1.3 Définition des classes de problèmes d'optimisation étudiés	24
I Optimisation hors-ligne	27
2 Étude théorique de la solution d'un problème générique de commande optimale	31
2.1 Conditions d'optimalité en l'absence de contraintes sur l'état	31
2.2 Conditions d'optimalité en présence de contraintes sur l'état	33
2.3 Étude de problèmes académiques	35
2.3.1 Recherche d'une solution pour un problème simple du type (1.1)	35
2.3.2 Recherche d'une solution pour un problème simple du type (1.2)	37
3 Méthodes numériques	43
3.1 Méthode directe : optimisation non-linéaire sous contraintes	44
3.1.1 Résolution numérique	44
3.1.2 Paramétrisation simplifiée du contrôle (découpage par zones)	44
3.2 Méthodes de tir	45
3.2.1 Méthode de tir simple	45
3.2.2 Méthode de tir multiple	45
3.3 Approche par l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman	46
3.3.1 Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman et fonction valeur	46
3.3.2 Programmation Dynamique	47
3.3.3 Méthode de résolution	49
3.3.4 Commentaires sur la méthode de programmation dynamique	51
3.3.5 Résolution du problème (1.2) avec la programmation dynamique	51
3.4 L'algorithme SCOP	53

3.4.1	Principe	53
3.4.2	Description de la méthode	53
3.4.3	Exemple sur un cas simple	54
3.4.4	Commentaires sur la méthode SCOP	58
3.4.5	Application aux véhicules hybrides	58
3.4.6	Etude de convergence de SCOP	62
3.4.7	Perspectives	62
4	Application sur un véhicule Citroën C1 hybridé	65
4.1	Objectifs	65
4.2	Modèles utilisés pour l'optimisation hors-ligne	66
4.2.1	Véhicule	66
4.2.2	Batterie	66
4.2.3	Moteur électrique et convertisseur	67
4.2.4	Moteur thermique.	67
4.3	Critères et variables d'optimisation	68
4.4	Impact des fonctionnalités de l'architecture.	69
4.4.1	Véhicule conventionnel	69
4.4.2	Résultats sur le cas de référence	70
4.4.3	Résultats d'une hybridation partielle	73
4.4.4	Résultats d'une hybridation partielle et sans Stop-and-Start	74
4.4.5	Impact de la récupération au freinage	74
4.5	Impact de la taille des éléments	74
4.5.1	Impact de la puissance du moteur électrique sur la consommation	74
4.5.2	Impact de la variation de la capacité de la batterie	75
4.6	Conclusion	76
II	Contrôle temps réel	79
5	Stratégies temps-réel pour véhicules hybrides	83
5.1	Stratégies de commande temps-réel	83
5.1.1	Lois empiriques	83
5.1.2	Réseaux de neurones	83
5.1.3	ECMS	84
5.2	Comparaison optimisation hors-ligne / lois temps-réel	85
5.3	Perspectives	86
6	Application VEHGAN (VEhicule Hybride au Gaz Naturel)	87
6.1	Présentation du véhicule	87
6.2	Objectifs	90
6.3	Considérations et contraintes liées à l'architecture	90
6.3.1	Freinage récupératif	91
6.3.2	Couple positif du moteur électrique	91
6.3.3	Couple négatif du moteur électrique	92
6.3.4	Tension de fonctionnement des supercapacités	93
6.4	Modèles développés pour la source de puissance électrique	93
6.4.1	Moteur électrique	94
6.4.2	Supercapacité	94

Table des matières

6.4.3	Lien DC/AC	95
6.4.4	Modèle dynamique du système électrique	95
6.5	Calage des paramètres du modèle et validation	96
6.6	Optimisation hors-ligne : programmation dynamique	98
6.6.1	Variable d'état et définition du problème d'optimisation	98
6.6.2	Prise en compte des contraintes	100
6.6.3	Hypothèses	100
6.6.4	Définition des contrôles	101
6.6.5	Résultats de l'optimisation hors-ligne	101
6.6.6	Discussion des résultats	105
6.7	Développement de lois temps-réel	105
6.7.1	Stop-and-Start	105
6.7.2	Loi temps-réel pour la gestion d'énergie (ECMS)	106
6.7.3	Structure du contrôle sur le véhicule	107
6.7.4	Contrôle de p	108
6.8	Résultats de la stratégie ECMS	109
6.8.1	Tests en simulation - comparaison lois optimales / sous-optimales	109
6.8.2	Tests sur véhicule réel	111
6.9	Conclusion / Perspectives	114
	Conclusion	117
	Annexes	123
	A SCOP : a Sequential Constraint-free Optimal control Problem algorithm	123
	B Design Optimization and Optimal Control for Hybrid Vehicles	131

Introduction

Après un débat de plusieurs années sur la présence – ou non – d'un réchauffement climatique, la plupart des experts s'accordent à dire que la température de la terre augmente bel et bien. Cette augmentation est directement liée aux gaz à effet de serre. Parmi les gaz responsables de l'effet de serre, effet qui tend à conserver la chaleur issue des rayons du soleil, le CO₂ a vu sa concentration augmenter de 30% depuis 1750, tandis que le méthane a augmenté de 150%. C'est pourtant le CO₂ qui constitue le principal contributeur parmi les gaz à effet de serre, celui-ci étant clairement lié aux activités humaines : ses émissions proviennent à 90% de la combustion des énergies fossiles (produits pétroliers, charbon, gaz naturel), et en particulier à 34 % du secteur des transports, qui reste le premier secteur en terme d'émissions de gaz à effet de serre. Le CO₂ n'est cependant pas un gaz polluant qui joue sur la qualité de l'air : il contribue à l'effet de serre, mais n'est pas dangereux pour l'homme.

Dans le secteur des transports, la combustion des produits pétroliers dans les moteurs à combustion rejette plusieurs gaz polluants, dont trois sont particulièrement nocifs pour l'homme :

1. le monoxyde de carbone (CO) : il réduit la capacité du sang à transporter l'oxygène. Il est produit suite à une combustion incomplète du carburant généralement due à un manque d'oxygène dans le mélange, ce phénomène touchant bien plus les moteurs à essence que les moteurs Diesel.
2. les hydrocarbures imbrûlés (HC) : ils sont, pour certains d'entre eux, cancérigènes, et apparaissent lors d'une combustion incomplète. Bénéficiant d'une combustion plus complète, les moteurs Diesel sont encore les plus propres sur ce point.
3. les oxydes d'azote (NO_x) : ces gaz réagissent dans l'atmosphère pour former du dioxyde d'azote générant troubles respiratoires, maux de tête et participant à la formation de smog, d'ozone de surface et de pluies acides. Jusqu'à présent, les moteurs Diesel rejettent une quantité de NO_x environ sept fois supérieure aux motorisations essence.

Les particules rejetées par les moteurs thermiques sont aussi très nocives pour l'homme : elles pénètrent dans les poumons, et peuvent provoquer de nombreuses maladies respiratoires et cardiovasculaires. Principalement rejetées par les moteurs Diesel, elles sont en majeure partie captées par les filtres à particules. Cependant, selon certaines études, ces derniers parviendraient à supprimer effectivement une grande quantité de particules, mais relâcheraient en contre-partie des particules plus fines, qui rentreraient plus profondément dans les poumons.

Afin de limiter les rejets de particules et de gaz nocifs des véhicules, des normes européennes limitant les émissions de polluants sont entrées en vigueur dès 1988, évoluant à quatre reprises depuis cette date : les normes d'émission Euro. Ces normes obligent les constructeurs à améliorer leurs véhicules, en imposant des seuils maximaux d'émission de gaz polluants pour les véhicules neufs.

Malgré le contexte climatique très préoccupant, dont l'augmentation de la température terrestre est l'effet le plus visible, c'est surtout l'augmentation du prix du pétrole qui rend le secteur des transports si soucieux de l'avenir, et qui le pousse à chercher des solutions pour réduire la consommation de carburant et les émissions de CO₂, celles-ci étant directement corrélées. S'il n'existe aucune norme relative à la

quantité de CO₂ que peuvent rejeter les véhicules, les constructeurs et le gouvernement ont pris acte des efforts nécessaires pour stabiliser ou réduire ces émissions.

Face à la volonté, déjà présente à l'époque, de pouvoir disposer d'un moyen de transport écologique et qui ne soit pas dépendant du pétrole, beaucoup croyaient aux véhicules électriques, qui ont pris un véritable essor dans les années 90. Ces véhicules ne réussirent néanmoins pas à s'implanter sur le marché, et à concurrencer les véhicules thermiques, et ce malgré des atouts indéniables : absence de pollution et d'émission locale à effet de serre, silence de fonctionnement, indépendance vis-à-vis du pétrole, etc., le véhicule électrique souffrait de trop grands maux : une autonomie de moins de 100 km, un temps de recharge de la batterie trop long, un coût élevé dû aux batteries, etc. La voiture électrique était, de plus, opposée au concept même de l'automobile : chacun souhaite pouvoir tout faire avec sa voiture, celle-ci devenant un outil de liberté individuelle. Le véhicule électrique, de part sa faible autonomie et son temps de recharge, ne répondait pas à ces fondamentaux.

Parallèlement à cet échec technique et commercial, les moteurs thermiques n'ont cessé de se perfectionner. D'une part, l'apparition de l'électronique dans les systèmes de gestion des moteurs a permis aux constructeurs de contrôler plus efficacement et plus précisément les actionneurs du moteur. D'autre part, de nouveaux actionneurs ont progressivement fait leur apparition : vanne d'EGR (Exhaust Gas Recirculation) qui permet de réintroduire des gaz d'échappement dans la chambre de combustion, mais aussi arbre à came à levée variable, turbo à géométrie variable, etc. Afin de réduire les émissions de polluants pour suivre les normes en vigueur, des dispositifs de post-traitement ont été développés, et sont maintenant présents sur tous les véhicules, permettant de limiter les rejets de NO_x, CO et de HC. Ces améliorations ne permettront cependant que de converger progressivement vers une consommation de carburant plus faible, mais pas de la diminuer notablement.

Dans ce contexte global, les véhicules hybrides représentent une solution à moyen-terme ayant un fort potentiel pour la réduction de la consommation de carburant, des émissions de CO₂, et des rejets de polluants.

Un véhicule hybride possède deux sources d'énergies pour assurer sa propulsion. On appelle donc hybride tout véhicule qui, en plus de sa source d'énergie primaire, dispose d'un stockage réversible d'énergie sous une seconde forme (hydraulique avec réserve de pression, cinétique avec volant d'inertie, électrique...). Dans la pratique, il s'agit essentiellement du mariage de l'électrique et du thermique, mais cette solution est aussi utilisée pour les voitures à hydrogène qui sont également des hybrides électrique-hydrogène. Le premier véhicule hybride de série, la Toyota Prius sortie en 1997 (au Japon), a démontré les possibilités que peuvent apporter le couplage de moteurs électriques alimentés par des batteries à une motorisation traditionnelle.

La présence de deux sources d'énergie distinctes permet en effet de disposer de degrés de liberté supplémentaires pour le contrôle du véhicule : le moteur électrique peut par exemple être utilisé en remplaçant momentanément le moteur thermique, ou bien en l'assistant, dans le but de minimiser un ou plusieurs critères (bruit / consommation / etc.).

Les véhicules hybrides, s'ils sont très intéressants dans la problématique actuelle de réduction de la consommation de carburant et des émissions de polluants, nécessitent aussi d'avoir un contrôle adapté, d'une part aux objectifs à atteindre, et d'autre part à leur architecture. Le contrôle d'un véhicule hybride est en effet assez différent de celui d'un véhicule traditionnel, dans le sens où, celui-ci disposant de deux sources d'énergie, un contrôleur "haut-niveau" doit déterminer quelle est la puissance que doit fournir chacun des moteurs. Le contrôle d'un véhicule hybride doit donc être adapté à son architecture et à ses

fonctionnalités (possibilité de récupérer de l'énergie au freinage, de couper le moteur thermique tout en utilisant le moteur électrique pour la traction, etc.).

Dans ce mémoire, on s'intéressera essentiellement au problème de la réduction de la consommation de carburant pour un véhicule hybride, celui-ci pouvant être posé comme un problème de commande optimale : la consommation de carburant doit être minimisée, sous la contrainte d'un système dynamique correspondant au dispositif de stockage de l'énergie électrique.

La résolution du problème de la minimisation de la consommation de carburant doit être considérée de deux manières. La première correspond à la minimisation sur cycle prédéfini, et donc connu à l'avance. Ce problème de minimisation *hors-ligne* fait appel à des algorithmes d'optimisation souvent utilisés tels que la programmation dynamique. Les résultats obtenus en résolvant ce problème de minimisation permettent de qualifier l'architecture hybride, et d'en déterminer le potentiel maximal, en terme de gain en consommation si c'est le critère à minimiser. Mais les résultats peuvent aussi et surtout servir à déduire des stratégies de commandes qui seront utilisées en temps-réel.

Le second problème correspond à la minimisation de la consommation en *temps-réel*, sur cycle a priori inconnu. Les outils utilisés pour la conception de stratégies de contrôle en temps-réel sont en général assez variés : de simples cartographies jusqu'à des contrôleurs sous-optimaux basés sur la théorie de la commande optimale.

Dans cette thèse, nous traiterons ces deux problèmes d'optimisation et les mettrons en oeuvre sur des cas réels de véhicule.

Les principales contributions de cette thèse sont les suivantes :

- Un algorithme rapide, nommé SCOP (Sequential Constraint-free Optimal control Problem algorithm), permettant de résoudre des problèmes de commande optimale avec contraintes d'état, qui a été validé numériquement avec une comparaison par rapport à la programmation dynamique et aussi étudié théoriquement dans deux cas simples. Des résultats numériques obtenus avec cet algorithme ont été présentés dans deux papiers : [Rousseau et al., 2006b] et [Rousseau et al., 2006a], tandis qu'une démonstration de la convergence de SCOP dans deux cas simples se trouve dans [Rousseau et al., 2008c].
- La mise en oeuvre d'une optimisation hors-ligne pour le dimensionnement des principaux éléments d'une architecture hybride sur une Citroën C1. Ce travail a été en partie présenté dans [Rousseau et al., 2008b].
- La mise en oeuvre sur un prototype d'une loi de commande sous-optimale, suivie d'essais sur véhicules. Quelques résultats se trouvent dans [Rousseau et al., 2008a].

Organisation et contenu de ce mémoire.

Ce mémoire se divise en deux parties, précédées par un chapitre introductif :

- **Chapitre I**

Ce chapitre introductif donne une description des différentes architectures hybrides, et pose le problème de la minimisation de la consommation de carburant.

Dans ce premier chapitre sont présentés les différentes architectures hybrides, leurs spécificités, et les différents modes de fonctionnement. Quelques-uns des véhicules hybrides, déjà sur le marché, sont également décrits.

Les apports du véhicule hybride, comparé aux véhicules traditionnels, sont ensuite abordés. Le problème de la minimisation de la consommation de carburant est ensuite défini sous la forme d'un problème de contrôle optimal. On définit alors dans ce chapitre les classes de problèmes de commande optimale qui seront traités dans ce mémoire.

- **Partie I**

La première partie de la thèse porte sur l'optimisation hors-ligne : de la définition du problème d'optimisation et des conditions d'optimalité, jusqu'à l'application de méthodes numériques pour résoudre ce problème. Les différentes approches permettant de résoudre le problème d'optimisation sont abordées, en faisant apparaître les liens existant entre elles. L'une des méthodes numériques décrites est ensuite utilisée pour une étude paramétrique à l'aide d'un modèle réaliste de véhicule, permettant de dimensionner les principaux éléments d'une architecture hybride.

Le premier chapitre rappelle la formulation d'un problème général de commande optimale, et indique les conditions d'optimalité de la solution de ce problème en considérant successivement les problèmes d'optimisation avec et sans contraintes sur l'état. Les deux problèmes d'optimisation hors-ligne sont ensuite traités dans des cas simples.

Le deuxième chapitre dresse un état de l'art des méthodes numériques qui peuvent être employées pour résoudre ce problème d'optimisation. En particulier, deux méthodes sont présentées et appliquées sur notre application dans la suite du mémoire : la programmation dynamique et SCOP, un algorithme original basé sur le Principe de Pontryagin.

Dans le troisième chapitre sont présentés les résultats d'une étude paramétrique avec un modèle réaliste de véhicule hybride : on étudie l'impact, sur la consommation de carburant, des paramètres de conception d'une architecture hybride donnée, ainsi que l'inhibition de certains modes de fonctionnement. Le véhicule considéré est une Citroën C1, équipée d'un moteur électrique alimenté par une batterie.

- **Partie II**

La seconde partie traite de la problématique du contrôle temps-réel, ainsi que d'une application sur véhicule hybride au gaz naturel, la Smart VEHGAN.

Un état de l'art des principales lois de commandes pour véhicules hybrides, utilisées en temps-réel, est présenté dans le premier chapitre. En particulier, on distingue dans ce chapitre les lois empiriques, à base de règles, des lois basées sur la commande optimale, telles que l'ECMS. Une loi originale basée sur SCOP est discutée à la fin de ce chapitre.

Le second chapitre est entièrement consacré au développement de lois temps-réel pour un prototype de véhicule hybride : la Smart VEHGAN (Véhicule Hybride au GAZ Naturel). Souhaitant utiliser une loi temps-réel basée sur la commande optimale (ECMS), des modèles représentatifs du système électrique de ce véhicule sont développés. Une optimisation hors-ligne de la répartition de puissance sur cycle normalisé est ensuite menée, parallèlement au développement d'une loi temps-réel, ensuite validée en simulation. Des résultats provenant d'essais du véhicule sur banc à rouleaux viennent compléter les résultats obtenus en simulation.

Chapitre 1

Problématique du contrôle des véhicules hybrides

1.1 Les différentes architectures hybrides

Par définition, un véhicule hybride est un véhicule dans lequel sont intégrées deux sources d'énergie différentes, typiquement un moteur conventionnel (thermique) et un moteur électrique.

On définit communément trois familles d'architectures hybrides :

- Les hybrides parallèles, pour lesquels le moteur thermique fournit directement un couple aux roues,
- Les hybrides séries, où le moteur thermique n'est pas directement lié aux roues,
- Les hybrides combinés, dont l'architecture reprend les caractéristiques des hybrides série et parallèle.

On décrira aussi dans ce chapitre l'architecture micro-hybride, puisque cette architecture correspond à celle du véhicule qui est étudié dans le Chapitre 6.

Selon l'architecture choisie, le véhicule hybride peut exploiter plusieurs fonctionnalités qui peuvent participer à la réduction de la consommation de carburant, ou à la récupération d'énergie électrique.

1.1.1 Les modes de fonctionnement

Le Stop-and-Start Nommé aussi Stop-and-Go ou Stop-Start selon les constructeurs, ce système permet au moteur thermique d'être démarré rapidement, et sans vibration, après un arrêt de courte durée. Cette fonctionnalité est en particulier destinée à être utilisée lors d'arrêt aux feux rouges, ou bien dans des embouteillages. Le gain apporté par ce système provient de la disparition de la consommation de carburant au ralenti, lorsque le moteur thermique n'est pas utilisé pendant plusieurs secondes. En contrepartie, une faible quantité d'énergie électrique est utilisée à chaque démarrage pour ramener le moteur à son régime de ralenti.

Le mode régénération Dans ce mode, le moteur électrique fournit un couple négatif, le moteur thermique fournissant alors un couple supérieur au couple de consigne (demandé par le conducteur). L'énergie provenant du moteur électrique est ensuite stockée dans les batteries, afin d'être réutilisée ultérieurement.

Le mode freinage récupératif Il s'agit du fonctionnement d'un moteur électrique utilisé pour fournir un couple résistant, dans le but de récupérer l'énergie cinétique du véhicule sous la forme d'une énergie électrique, qui est ensuite stockée.

Le mode boost Le mode boost correspond à une assistance du moteur thermique par le moteur électrique, celui-ci développant un couple positif conjointement au moteur thermique. Ce mode peut être actionné pour décharger le moteur thermique afin de placer celui-ci sur un point de fonctionnement de meilleure efficacité. Il peut aussi être utilisé lors d'une importante demande de couple, lorsque le moteur thermique développe un couple insuffisant par rapport au couple de consigne.

Le mode alternateur Le mode alternateur correspond au fonctionnement classique d'un alternateur que l'on trouve sur chaque véhicule. Au lieu d'imposer un couple au moteur électrique, on impose une consigne de tension aux bornes de la batterie (ou aux bornes de la supercapacité), le moteur électrique se chargeant ensuite de réguler cette tension. Ce mode n'est pas optimal d'un point de vue énergétique, puisqu'il est utilisé, sur les véhicules traditionnels, quel que soit le point de fonctionnement du moteur thermique, même lorsque celui-ci est au ralenti.

Le mode thermique pur Il s'agit du mode classique durant lequel le moteur électrique n'est pas utilisé. Ce mode peut être utilisé pour des raisons de rendement (par exemple, lors d'un trajet sur autoroute, pour lequel le moteur thermique est utilisé à un bon rendement), ou bien parce que la batterie est déchargée.

Le mode électrique pur Il s'agit du mode pour lequel le moteur thermique est arrêté. Dans ce mode, les conséquences directes sont l'absence de bruit, l'absence de rejet de polluants ("zéro émission"), et une consommation de carburant nulle. La durée durant laquelle ce mode pourra être actif dépend de la capacité de la batterie. Si celle-ci est faible, ce mode pourra être activé durant quelques minutes tout au plus, le moteur thermique devant alors être rallumé pour ramener la batterie à un état de charge correct.

1.1.2 Architecture parallèle

Dans la configuration parallèle, les moteurs thermique et électrique sont tout deux directement connectés à la transmission, donc aux roues. Les deux moteurs peuvent participer d'une façon *parallèle* au déplacement du véhicule, en transmettant chacun une puissance mécanique aux roues.

Sur la Figure 1.1 est représenté le schéma de principe de l'architecture parallèle, ainsi que les transferts d'énergie possibles entre les différents organes. La configuration générale de cette architecture est composée du moteur thermique, d'un moteur électrique, de la batterie, d'un inverseur (non représenté), et d'une transmission (boîte de vitesse et embrayage). Sur ce schéma n'ont pas été représentés le démarreur et l'alternateur, ceux-ci étant des éléments présents sur la quasi-totalité des véhicules en circulation.

L'emplacement du moteur électrique peut être différent : celui-ci peut être situé au niveau des roues avant, ou bien en liaison avec le train arrière, pour obtenir alors un véhicule à quatre roues motrices.

Une architecture hybride parallèle est complexe à contrôler, et demande un travail supplémentaire pour l'intégration physique des sources de puissance. En effet, sur l'architecture hybride parallèle, les deux sources de couple (moteur thermique et moteur électrique) sont directement reliées au train moteur, la consigne de couple devant donc être répartie à chaque instant entre les deux sources de couple. Néanmoins, des gains non négligeables peuvent être obtenus, même en utilisant des composants électriques de faible puissance et de faible capacité. Aussi, ces gains permettent de compenser le surcoût de cette architecture et le surpoids lié aux batteries et au moteur électrique.

1.1 Les différentes architectures hybrides

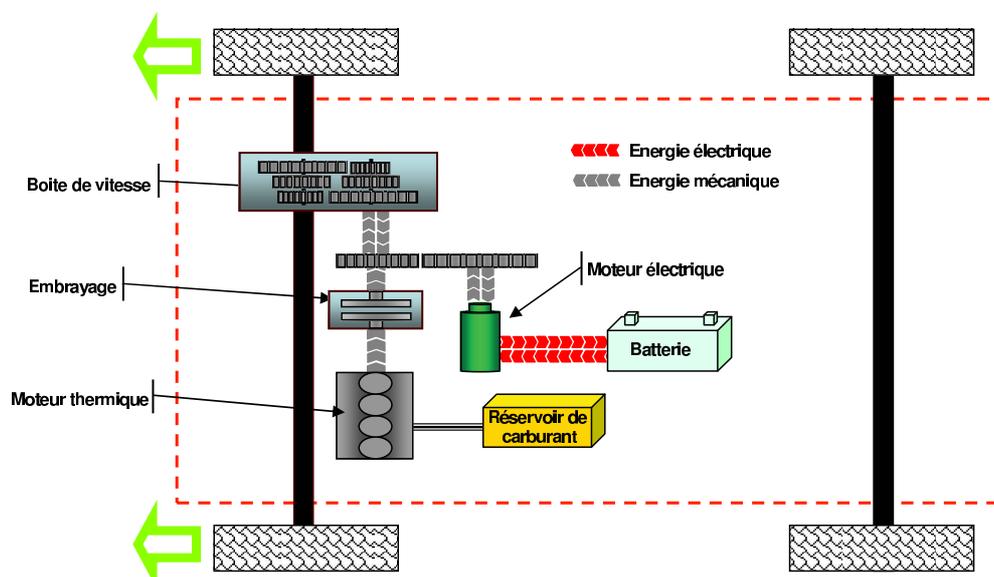


FIG. 1.1: Schéma de principe de l'architecture *hybride parallèle*.

1.1.3 Architecture micro-hybride

L'architecture micro-hybride correspond à une version allégée de l'hybride parallèle, pour laquelle le moteur électrique reste constamment mécaniquement lié au moteur thermique. La liaison pourra s'effectuer de diverses manières : par engrenage, ou bien par courroie.

La Figure 1.2 représente l'architecture micro-hybride, composée d'un moteur thermique et d'un moteur électrique en liaison directe avec le moteur thermique.

C'est en fait la forme la plus simple des différentes architectures hybrides, puisque les véhicules micro-hybrides sont essentiellement des véhicules conventionnels équipés d'un alterno-démarrreur, permettant notamment de profiter du Stop-and-Start et éventuellement du freinage récupératif. Si les gains que l'on peut obtenir sont les plus faibles parmi toutes les architectures (ils ne dépassent guère 10%), c'est aussi celle dont l'implantation des organes dans le véhicule, tels que la batterie et le moteur électrique, est la plus simple.

Les inconvénients majeurs de cette architecture résident dans sa définition même : il n'est pas possible d'utiliser le moteur électrique seul pour la propulsion du véhicule, notamment à faible charge lorsque l'efficacité du moteur thermique est faible. De plus, l'énergie qui peut être obtenue lors d'un freinage récupératif sera amputée par le couple de frottement du moteur thermique (pertes par pompage et frottements moteur), puisque le moteur thermique ne peut être désaccouplé du moteur électrique, ce qui réduit la quantité d'énergie récupérable.

Remarque 1.1.1. *Les véhicules munis du Stop-and-Start, et n'exploitant pas la régénération par freinage récupératif ou par moteur thermique, peuvent ou non être considérés comme des véhicules hybrides en tant que tels. En effet, s'ils sont munis d'un moteur électrique pour l'entraînement du moteur thermique (dont la puissance est supérieure à celle d'un démarreur classique), le moteur électrique ne participe pas, en revanche, à la traction "hybride" du véhicule. Cette question de l'appartenance – ou non – des véhicules uniquement munis du Stop-and-Start au monde des véhicules hybrides a été abordée par [Scordia, 2004], et ne sera pas traitée ici.*

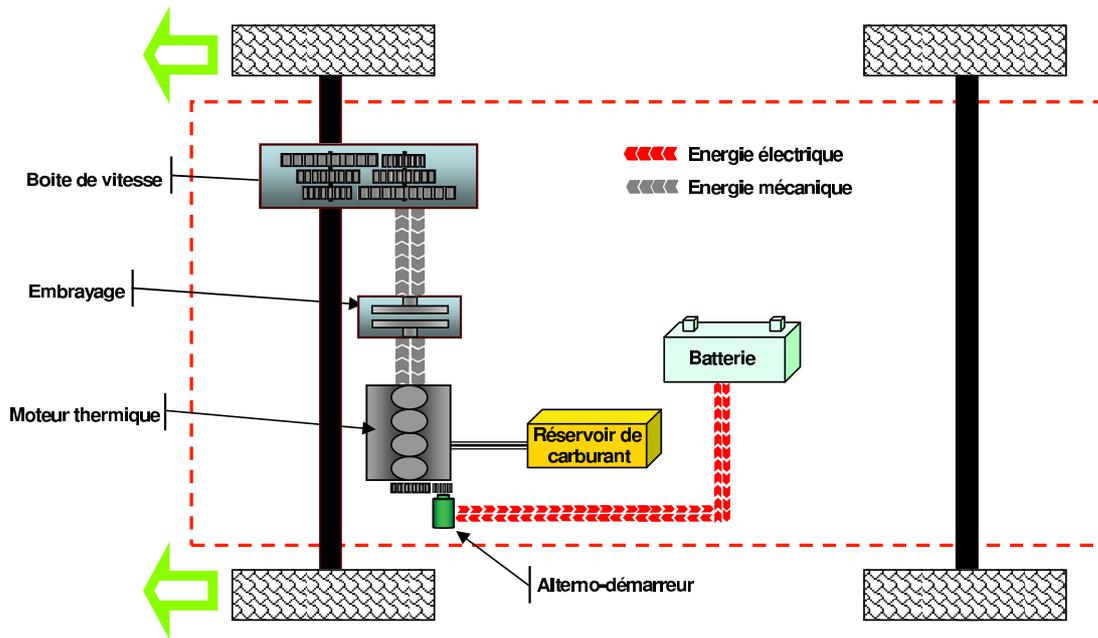


FIG. 1.2: Schéma de principe de l'architecture *micro-hybride*.

1.1.4 Architecture série

Dans l'architecture série, seul le moteur électrique est connecté directement aux roues et leur transmet un couple. Le moteur électrique est donc dimensionné pour pouvoir assurer seul la traction du véhicule, selon la demande de couple du conducteur.

La Figure 1.3 schématise le fonctionnement d'un véhicule hybride série. Le moteur électrique est alimenté soit par des batteries, soit par une génératrice entraînée par le moteur thermique, soit par un mélange des deux. Cette configuration permet à la batterie d'être rechargée soit :

- par le moteur thermique, via la génératrice. Dans ce cas, le moteur thermique est contrôlé de manière à fonctionner à son rendement optimum.
- par le moteur électrique, qui sera alors utilisé en mode générateur, lors d'un freinage récupératif.

L'intérêt de cette architecture réside dans la capacité à pouvoir faire fonctionner le moteur thermique au point de fonctionnement souhaité, quelles que soient les conditions extérieures telles que la vitesse du véhicule ou la demande de couple, puisque le moteur thermique est complètement déconnecté du train moteur. En revanche, l'énergie mécanique produite par le moteur thermique est ensuite transformée en énergie électrique via la génératrice, puis à nouveau transformée en énergie mécanique par le moteur électrique. Ainsi, la cascade de rendement du train moteur est assez défavorable à la réduction de l'énergie consommée, c'est pour cette raison que les véhicules hybrides série dépassent rarement le stade du prototype.

1.1.5 Architecture combinée

La catégorie des architectures combinées correspond aux hybrides série/parallèle, dont la Toyota Prius fait partie. Appelée aussi *hybride parallèle à dérivation de puissance*, cette architecture intègre un moteur électrique, une génératrice, et un moteur thermique. Grâce à une gestion efficace des puissances demandées d'un côté, et fournies de l'autre, il est possible de contrôler en régime le moteur thermique, et de partager son couple entre les demandes du véhicule, et la recharge de la batterie. La Figure 1.4 schématise le fonctionnement d'un hybride combiné.

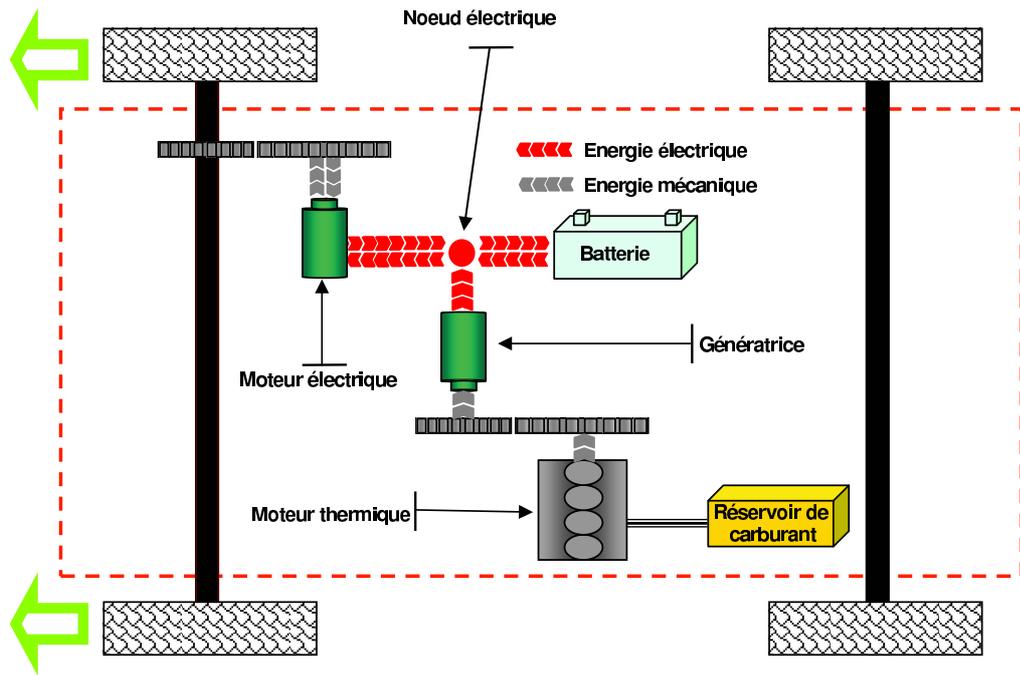


FIG. 1.3: Schéma de principe de l'architecture *hybride série*.

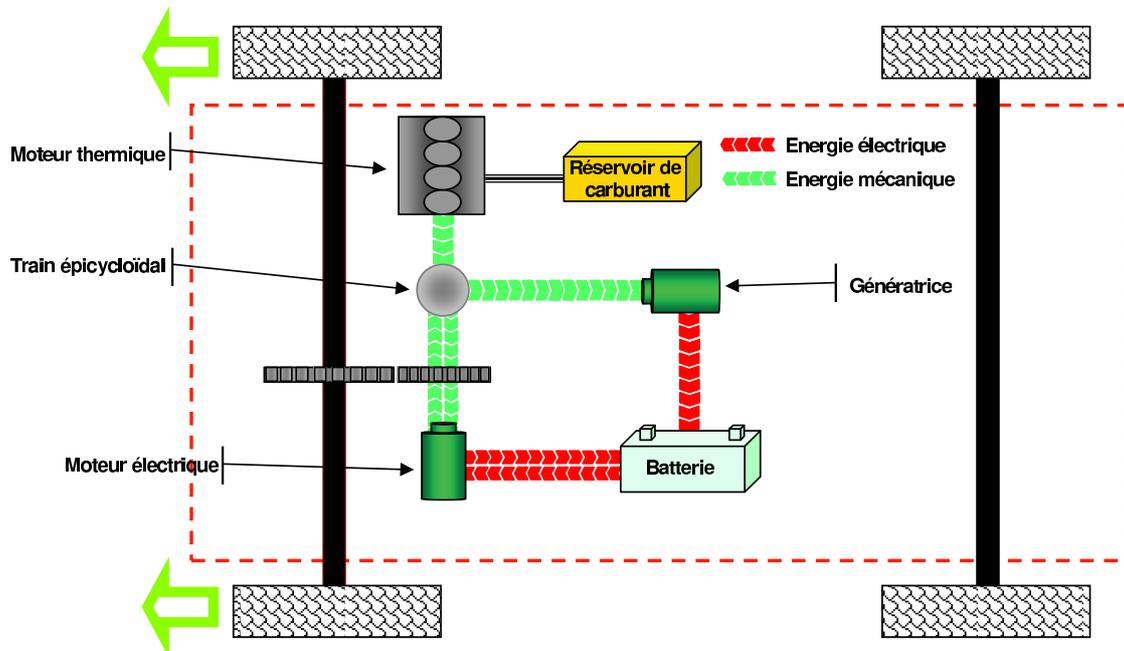


FIG. 1.4: Schéma de principe de l'architecture *hybride combinée*, type Prius.

1.1.6 Autres architectures

On trouve quelques autres architectures, qui restent souvent au stade de prototypes, mais dont le potentiel est intéressant.

- Architecture de type parallèle, avec moteurs dans les roues. Plusieurs constructeurs ont déjà présenté des prototypes de véhicules hybrides dont deux moteurs électriques, ou davantage, sont localisés dans les roues. D'un point de vue énergétique, cette solution est idéale, puisque les moteurs sont situés au plus près du point de transmission finale de la puissance, qui se trouve au niveau du point de contact entre le pneu et la route. Notamment, cet emplacement permet d'éviter de subir les rendements des transmissions, qui réduisent sensiblement l'énergie récupérable. Parmi les autres intérêts de cette architecture, chaque roue peut être contrôlée indépendamment les unes des autres, ce qui peut être intéressant pour l'utilisation de l'ESP (*Electronic Stability Program*, système de stabilisation du véhicule en courbe, agissant sur les systèmes de freinages pour corriger la trajectoire du véhicule).
- Les architectures hébergeant plusieurs trains épicycloïdaux, permettant une variation continue des rapports.

1.1.7 Les véhicules hybrides en France

Depuis quelques années, le marché des véhicules hybrides s'est largement développé. Bien que les constructeurs – notamment français – soient encore timides quant au nombre de modèles proposés, on voit régulièrement présentés des prototypes de véhicules hybrides lors des salons automobiles.

Sur le marché français, on compte aujourd'hui quatre modèles disponibles à la vente :

- La Honda Civic IMA (Integrated Motor Assist) est sortie en France en 2004, suite à la présentation de la Honda Insight au salon de Francfort de 1999. Son système IMA lui permet de disposer de l'assistance du moteur électrique lors des demandes importantes de puissance, de récupérer de l'énergie aux freinages, et de profiter du Stop-and-Start à l'arrêt. C'est donc une architecture micro-hybride.
- La Toyota Prius. Sortie en décembre 1997 au Japon, puis en 2000 aux USA et en Europe, la Prius fut le premier véhicule hybride de série. C'est aujourd'hui le véhicule hybride le plus connu dans le monde, et aussi le plus vendu : à ce jour, plus d'un million de Prius ont été vendues à travers le monde.
L'originalité de l'architecture de la Prius provient de son train planétaire, ou train épicycloïdal. Celui-ci permet de choisir librement la puissance fournie par le moteur thermique, le surplus de puissance (par rapport à la demande du conducteur) étant alors absorbé par la génératrice.
- La C3 Stop-and-Start est sortie en France en 2004. Équipée d'un alerno-démarrreur lui permettant de couper le moteur lors des embouteillages (système Stop-and-Start), elle était toutefois incapable de profiter du freinage récupératif et de la régénération par le moteur thermique. D'un prix de vente de 15350 euros, ce véhicule n'a pas eu le succès escompté, le dispositif Stop-and-Start n'étant disponible que sur les véhicules équipés d'une boîte mécanique robotisée Sensodrive, alors que les français restent en général attachés aux boîtes de vitesse manuelles, son prix était de plus jugé trop élevé.
- La Lexus RX400H. Ce véhicule possède une traction intégrale grâce à ses deux moteurs électriques. A l'avant, on trouve un moteur électrique avec une génératrice pour la récupération d'énergie, ainsi qu'un moteur thermique. Ceux-ci sont liés avec un train planétaire, suivant le même schéma que la Toyota Prius. A l'arrière, un second moteur électrique permet d'entraîner les roues arrières, sans liaison mécanique entre les deux essieux. Le surpoids des batteries est ainsi compensé par la disparition de la transmission. En cycle mixte, les émissions de CO₂ sont de seulement

1.2 La problématique de contrôle optimal

192 g/km, pour une consommation de 8.1 l/100km, contre 262 g/km et une consommation de 9.9 l/100km pour un modèle de même catégorie, la Volkswagen Touareg V6 3.0 TDI. Le prix de cette Lexus réserve néanmoins ce véhicule hybride aux clients les plus fortunés, le modèle de base se situant à un prix dépassant les 50000 euros.

Aujourd'hui, plusieurs constructeurs ont annoncé la sortie de véhicules munis du Stop-and-Start : Renault s'engage à appliquer ce système sur tous ses véhicules d'ici 2009-2010. Fiat ajoutera aux catalogues de la Panda et de la 500 une version avec alerno-démarrreur à l'automne 2008. PSA a annoncé début 2008 que son système Stop-and-Start sera généralisé à l'ensemble de sa gamme le plus tôt possible, tablant sur des ventes d'un million de véhicules munis du Stop-and-Start en 2011.

Ce système est donc adopté progressivement par l'ensemble des constructeurs, puisqu'il constitue une solution peu coûteuse permettant de réduire la consommation de carburant.

1.2 La problématique de contrôle optimal

Sur un véhicule à motorisation traditionnelle, le couple fourni par le moteur thermique dépend au premier ordre de la quantité de carburant injectée. Certains actionneurs influent eux aussi sur le couple fourni par le moteur thermique (l'avance à l'allumage, dans le cas des moteurs à allumage commandé, les angles d'ouverture et de fermeture des soupapes), mais restent davantage utilisés pour limiter les fumées et les rejets de polluants.

Sur les véhicules hybrides, la présence d'un ou de plusieurs moteurs électriques amène plusieurs degrés de liberté dans la façon dont une consigne de couple, demandée par le conducteur, peut être réalisée. Ces degrés de liberté peuvent être utilisés pour remplir différents objectifs, parfois complémentaires :

- La minimisation de la consommation de carburant, et par là même des émissions de CO₂, en utilisant de manière adéquate le(s) moteur(s) électrique(s). Intuitivement, c'est lorsque l'efficacité du moteur thermique est faible que le moteur électrique pourrait prendre sa place.
- La réduction des rejets de polluants (CO, NO_x, HC). Ces derniers peuvent être diminués en optimisant la répartition de couple des différents moteurs, mais surtout en réduisant la durée de montée en température du catalyseur sur moteur essence, un catalyseur étant inefficace tant qu'il n'a pas atteint sa température idéale.
- L'absence des émissions de polluants et de la consommation de carburant, obtenue par l'arrêt du moteur thermique grâce à l'utilisation du mode électrique pur. Le bruit du véhicule est alors grandement réduit, et limité au seul bruit de roulement des pneus sur la route. Très intéressant dans les centres-villes, la durée d'utilisation de ce mode est néanmoins limitée par la capacité de la batterie.

Parmi ces possibilités, la réduction du bruit ne donne pas lieu à la résolution d'un problème de contrôle, le mode purement électrique pouvant être actionné directement par le conducteur. Ce mode peut aussi être une conséquence de la loi de gestion d'énergie.

La réduction du temps de montée en température du catalyseur peut être obtenue simplement en augmentant le couple du moteur thermique durant les premières secondes de fonctionnement, afin d'augmenter la température des gaz d'échappement.

La réduction de la consommation, quant à elle, représente une vraie difficulté : on doit en effet choisir quand et de quelle façon utiliser le moteur électrique, et s'assurer que la batterie (ou tout autre système de stockage) garde un état de charge suffisant tout au long du cycle.

Ce problème de gestion efficace des sources d'énergie peut s'écrire comme un problème d'optimisation. On distinguera alors deux problèmes différents : la minimisation de la consommation sur cycle, et la minimisation de la consommation en temps-réel.

1.2.1 Minimisation de la consommation de carburant sur cycle normalisé

L'intérêt principal d'un véhicule hybride provient de sa capacité à pouvoir consommer moins de carburant, comparé à un véhicule équivalent équipé seulement d'un moteur thermique. Cette possibilité existe grâce à la présence de deux sources d'énergie distinctes, ces deux sources possédant chacune une zone d'efficacité maximale qui leur est propre.

De plus, le véhicule hybride peut profiter d'une partie de l'énergie cinétique du véhicule lors d'un freinage récupératif, lui permettant de récupérer une certaine quantité d'énergie gratuite et de la stocker, celle-ci étant normalement dissipée par effet Joule dans le système de freinage.

La détermination de la consommation de carburant d'un véhicule s'effectue sur un cycle de conduite. Le conducteur du véhicule doit suivre une consigne de vitesse, donnée en fonction du temps, les rapports de la boîte de vitesse étant en général imposés le long du cycle (lorsque le véhicule est équipé d'une boîte mécanique). L'évaluation de la consommation de carburant, et des rejets de polluants permet ensuite de pouvoir comparer ces résultats avec ceux d'autres véhicules ayant suivi le même cycle.

Dans ce mémoire, on utilisera un cycle de référence, le cycle NEDC : New European Driving Cycle. Il est constitué de 4 séquences répétées du cycle ECE-15, constituant la partie urbaine, puis d'une partie extra-urbaine à l'aide d'une séquence du cycle EUDC (Extra-Urban Driving Cycle). La Figure 1.5 représente l'allure du cycle NEDC.

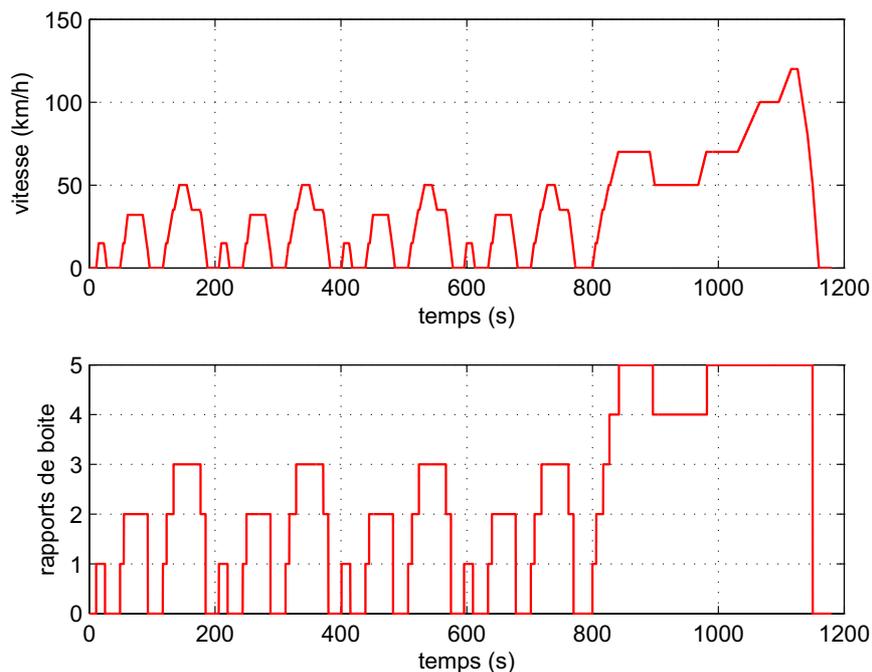


FIG. 1.5: Cycle NEDC : Vitesse véhicule (haut) et rapports de vitesse imposés (bas).

Le cycle NEDC se distingue du cycle MVEG (dont la consigne de vitesse est identique) par ses conditions initiales au départ du cycle : le cycle NEDC nécessite que le véhicule démarre à froid, sans que le moteur ait été démarré au préalable. Cette condition est très importante, étant donné que les véhicules actuels polluent le plus lors des premières secondes qui suivent la mise en route du moteur thermique, d'une part à cause de la mauvaise combustion due à une température trop basse, et d'autre part à cause du délai nécessaire à l'amorçage du catalyseur sur véhicule à allumage commandé.

1.2 La problématique de contrôle optimal

Ce cycle est directement utilisé pour l'homologation des véhicules aux normes Euro 4, et à partir de septembre 2009, aux normes Euro 5. Il constitue donc un passage obligatoire pour l'évaluation de la consommation de carburant. Cependant ce cycle est peu représentatif d'un trajet urbain. Ainsi, on considérera aussi dans ce mémoire le cycle Artemis urbain (voir [André, 2004]), correspondant à cycle de conduite réelle, donc bien plus représentatif d'un fonctionnement classique du véhicule.

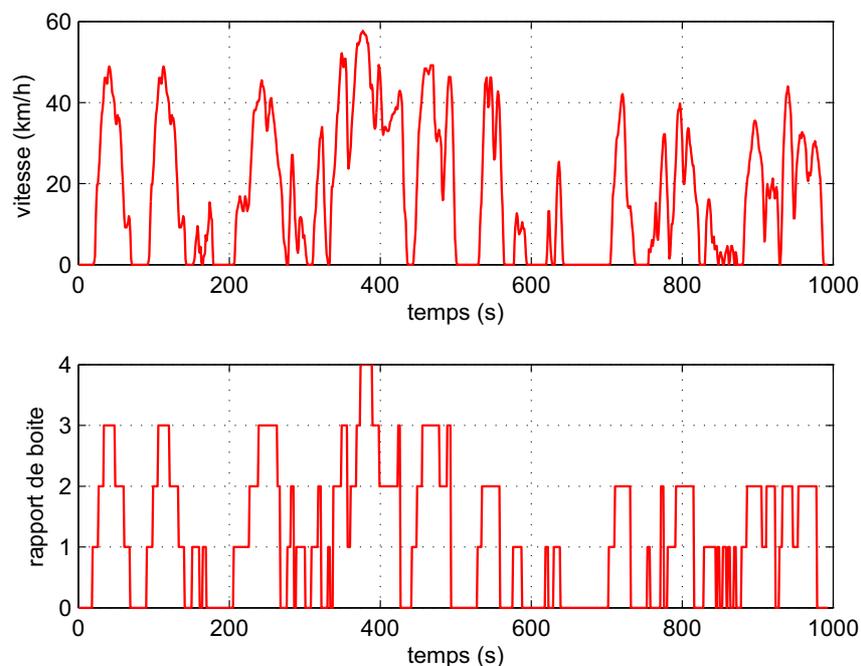


FIG. 1.6: Cycle Artemis : Vitesse véhicule (haut) et rapports de vitesse imposés (bas).

La minimisation de la consommation de carburant sur cycle nécessite de connaître les efficacités des différentes sources d'énergies du véhicule. Pour cela, on fait donc appel à des modèles physiques, ou bien à des cartographies.

Dans le cadre de l'évaluation et de la minimisation de la consommation de carburant de véhicules hybrides, ces derniers doivent remplir une condition supplémentaire : les états de charge des éléments de stockage d'énergie électrique (des batteries en général), mesurés au début et à la fin du cycle, doivent être sensiblement égaux. Cette condition assure d'avoir une balance énergétique nulle au niveau du stockage de l'énergie électrique, c'est à dire d'avoir une consommation globale qui ne provienne que de l'énergie contenue dans le carburant.

Ce problème de minimisation peut être vu comme un problème de contrôle optimal : déterminer quelle est la consommation minimale de carburant d'un véhicule hybride, sous la contrainte de fonctionnement du système électrique. La condition qui impose d'avoir un état de charge final proche de l'état de charge initial peut s'écrire comme une contrainte sur la valeur finale de l'état de charge, l'état de charge initial étant alors lui aussi fixé.

1.2.2 Problème en temps-réel où le futur n'est pas connu

S'il est possible de connaître la loi de commande optimale sur un cycle donné en résolvant directement le problème d'optimisation, il n'est pas possible d'appliquer les mêmes techniques pour la loi de gestion d'énergie temps-réel.

Sur cycle connu, la commande optimale déterminée après optimisation tient compte – à chaque instant t – de ce que se passe entre l’instant t et la fin du cycle : si un grand freinage survient à la fin du cycle, la commande optimale choisira de consommer de l’énergie électrique en utilisant le moteur électrique, ayant la connaissance du freinage final durant lequel le freinage récupératif pourra être activé.

Sur une utilisation en temps-réel, le trajet que suivra le conducteur n’est pas connu à l’avance (si l’on exclut toute information qui pourrait être obtenue par un GPS, par exemple). Ainsi, il n’est pas possible de déterminer une loi de commande qui soit optimale d’un point de vue global, et qui nous assure d’obtenir un bilan batterie nul à la fin d’un trajet. On parle alors de loi sous-optimale.

1.3 Définition des classes de problèmes d’optimisation étudiés

Le problème d’optimisation correspond à la minimisation de la consommation de carburant d’un véhicule hybride sur un cycle connu à l’avance, tout en ayant une balance énergétique nulle au niveau de la batterie entre le début et la fin du cycle. Ce problème peut donc être vu comme un problème de commande optimale. Il s’agit à partir d’un état initial fixé, d’atteindre un certain état final, tout en minimisant un critère.

Le système dynamique considéré dans ce problème de commande optimale est la batterie qui fournit l’énergie nécessaire au moteur électrique. L’état de charge de la batterie, noté x , constitue donc la variable d’état de ce problème de commande optimale. La consommation instantanée de carburant est notée L , et la commande définissant la répartition de couple (ou de puissance) entre les moteurs électrique et thermique est notée u . On considère aussi des contraintes de bornes sur la commande u , notées u_{\min} et u_{\max} dues aux saturations des actionneurs ; les contraintes de bornes sur la variable d’état du système dynamique sont quant à elles notées x_{\min} et x_{\max} .

Les classes de problèmes de contrôle optimal qui sont étudiés dans ce mémoire sont définies ci-après.

Problèmes de type (1.1) (hors-ligne)

La première classe de problèmes correspond au cas d’un véhicule hybride dont le moteur thermique reste constamment allumé. On souhaite connaître la consommation de carburant optimale de ce véhicule sur un cycle donné. Cette consommation peut être minimisée grâce à l’utilisation d’un moteur électrique alimenté par une batterie, celle-ci ayant une équation dynamique de la forme $\dot{x}(t) = f(t, u(t))$, et dont la dépendance de f en x est faible (et supposée nulle ici). Le problème d’optimisation s’écrit

$$\begin{cases} \min_u \int_0^T L(t, u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = -s(t)(1 - u(t)) = f(t, u(t)), & x(0) = x(T) = x_0 \\ u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t) \\ x_{\min}(t) \leq x(t) \leq x_{\max}(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $\forall t \in [0, T]$, la fonction à minimiser $u \mapsto L(t, u)$ est croissante, la commande $t \mapsto u(t)$ et ses bornes $t \mapsto u_{\min}(t)$ et $t \mapsto u_{\max}(t)$ sont continues par morceaux (KC^0), et la fonction $t \mapsto s(t)$ est elle aussi continue par morceaux. L’état initial $x(0)$ est donné par une constante x_0 .

La fonction s représente le cycle suivi, c’est à dire qu’à une consigne de vitesse du véhicule (donnée par le cycle) correspond un régime du moteur électrique, modulo le rapport de boîte (si présence d’une boîte de vitesses entre le moteur et les roues). Ainsi, s est telle que $s > 0$ si le véhicule accélère ou est à vitesse constante, et $s \leq 0$ si le véhicule freine.

Dans ce problème, les dépendances en temps de $L(t, u)$, $s(t)$, $u_{\min}(t)$, $u_{\max}(t)$, $x_{\min}(t)$ et $x_{\max}(t)$ proviennent donc du cycle que suit le conducteur à chaque instant t . La présence d’une boîte de vitesses sur

1.3 Définition des classes de problèmes d'optimisation étudiés

le véhicule, dont le rapport de nature discrète intervient dans $L(t, u)$, $s(t)$, $u_{\min}(t)$ et $u_{\max}(t)$, peut donc provoquer des discontinuités, ce qui explique que les fonctions soient continues par morceaux.

La résolution de ce problème dans un cas simple est étudiée dans la section 2.3.1, tout d'abord dans le cas sans contrainte, puis en considérant successivement les contraintes sur la commande puis sur l'état. Si ce problème peut être facilement résolu lorsqu'on introduit des contraintes sur la commande, on montre que l'introduction des contraintes sur l'état est plus problématique pour l'obtention d'une solution.

Selon la commande $u(t)$ et le signe de $s(t)$, on peut déduire l'évolution de $\dot{x}(t)$, donc de l'état de charge de la batterie :

- $s(t) > 0$ et $u(t) = 0$: mode électrique pur, $\dot{x}(t) < 0$, le moteur thermique reste allumé et consomme du carburant (mais ne fournit plus de couple).
- $s(t) > 0$ et $u(t) < 1$: mode moteur ou boost, $\dot{x}(t) < 0$ (la batterie se décharge, le moteur électrique fournit un couple).
- $s(t) > 0$ et $u(t) = 1$: mode thermique pur, $\dot{x}(t) = 0$
- $s(t) > 0$ et $u(t) > 1$: mode régénération $\dot{x}(t) > 0$ (la batterie se recharge grâce au moteur thermique).
- $s(t) < 0$ et $u(t) < 1$: mode freinage récupératif, $\dot{x}(t) > 0$ (la batterie se recharge grâce à l'énergie cinétique du véhicule).
- $s(t) < 0$ et $u(t) = 1$: freinage assuré par le système de freinage mécanique (frottement des plaquettes sur les disques de frein), $\dot{x}(t) = 0$.

Problèmes de type (1.2) (hors-ligne)

On suppose maintenant que le véhicule possède une fonctionnalité supplémentaire : le moteur thermique peut être arrêté pendant une certaine durée, lors de l'utilisation du Stop-and-Start, ou du mode électrique pur. Le redémarrage du moteur engendre une consommation d'énergie liée à l'entraînement de la masse inertielle du moteur thermique, celui-ci étant amené d'un régime nul jusqu'au régime de ralenti.

Ce second problème d'optimisation fait intervenir une variable d'état discrète notée $r(t) \in \{0, 1\}$, dont le rôle est de représenter l'état du moteur thermique : allumé ou éteint. Il s'agit donc d'arrêter et de remettre en route le moteur thermique aux "bons moments" pour minimiser la consommation globale.

Ce problème d'optimisation s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u,r} \left\{ \int_0^T r(t)L(t,u(t))dt + \int_0^T C_0 \max(0,\dot{r}(t))dt \right\} \\ \dot{x}(t) = -s(t)(1-r(t)u(t)) = f(t,u(t),r(t)), \quad x(0) = x(T) = x_0 \\ u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t) \\ x_{\min}(t) \leq x(t) \leq x_{\max}(t) \\ r(t) \in \{0, 1\}. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Le terme $\int_0^T \max(0,\dot{r}(t))dt$ représente ainsi le nombre de redémarrages sur le cycle, le coût $C_0 > 0$ étant alors représentatif de la dépense énergétique d'un démarrage. Le terme \dot{r} est donc un dirac, qui est positif si $\dot{r} > 0$, et négatif si $\dot{r} < 0$. On vérifie donc que lors d'un démarrage, la variable discrète $r(t)$ passe instantanément de 0 à 1, le véhicule dépensant alors la quantité d'énergie C_0 ; lors d'un arrêt du moteur, r passe de 1 à 0, le terme $C_0 \max(0,\dot{r}(t))$ est donc nul, l'arrêt du moteur thermique ne consommant pas d'énergie.

C'est donc une façon compacte d'écrire le problème de la minimisation de la consommation de carburant sur cycle, en prenant en compte un coût C_0 à chaque redémarrage du moteur thermique. La résolution de ce problème est abordée dans les sections 2.3.2 et 3.3.5.

Problèmes de type (1.3) (temps-réel)

Le troisième problème traité correspond à la minimisation de la consommation de carburant en temps-réel au temps t . L'idée étant de minimiser la consommation globale de carburant d'un trajet futur entre t et $+\infty$, on peut écrire ce problème comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u,v} \left\{ \int_t^{+\infty} r(\tau)L(\tau,u(\tau))d\tau + \int_t^{+\infty} C_0 \max(0,\dot{r}(\tau))d\tau \right\} \\ \dot{x}(t) = -s(t)(1 - r(t)u(t)) = f(t,u(t),r(t)), \quad x(t) = x_t \\ u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t) \\ x_{\min}(t) \leq x(t) \leq x_{\max}(t) \\ r(t) \in \{0,1\}. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

où l'instant t représente l'instant auquel une commande est appliquée en temps-réel par le contrôleur.

Dans ce problème, c'est donc le conducteur qui décide à chaque instant $t \in [0, +\infty]$ quelle sera la dépendance en temps, et quelle sera l'allure de $s(t)$ (et de la consommation qui dépend elle aussi du cycle). On peut donc considérer que l'information est entièrement connue entre 0 et t (puisque c'est le passé), les intentions du conducteur donc le cycle étant inconnu entre t et $+\infty$ (puisque c'est le futur).

Les façons de traiter ce type de problèmes sont énumérées dans le Chapitre 5, l'une d'elles étant appliquée en simulation et sur un véhicule réel dans le Chapitre 6.

Première partie

Optimisation hors-ligne

Introduction

Les problèmes d'optimisation du type (1.1) et (1.2) peuvent être résolus suivant différentes approches, dédiées à la résolution de problèmes d'optimisation dynamique ([Bertsekas, 2001], [Bryson and Ho, 1975], [Sethi and Thompson, 2006]). On distingue notamment :

- les méthodes directes. Elles requièrent la discrétisation des commandes $u(t)$ selon une grille $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$.
- la programmation dynamique, qui découle d'une discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.
- les méthodes indirectes, basées sur le principe de Pontryagin.

Certaines méthodes se prêtent assez bien à la résolution du problème en présence de contraintes d'état, comme nous le verrons par la suite, néanmoins toutes ne nécessitent pas le même temps de calcul pour converger vers la solution optimale. Dans ce contexte, la programmation dynamique a été choisie, puisqu'elle permet de résoudre le problème en un temps "raisonnable", tout en conservant une structure d'implémentation qui permet d'utiliser plusieurs types de modèles de véhicules hybrides. Cette méthode est décrite par la suite, et est appliquée pour une étude paramétrique dont le but est d'évaluer la consommation de carburant d'une architecture hybride, en variant certains paramètres de dimensionnement.

Les méthodes indirectes, telles que les méthodes de tir simple ou de tir multiple, revêtent aussi un intérêt non négligeable, car elles permettent de réduire de manière importante le temps de calcul lié à l'optimisation. Dans la suite de ce chapitre, on présente un algorithme original nommé SCOP, basé sur le principe de Pontryagin, qui constitue une alternative aux méthodes de tir multiple, sous certaines hypothèses. Une étude de cet algorithme sur un cas particulier est présentée dans la section 3.4.6, ainsi qu'une application sur un problème de minimisation de la consommation de carburant d'un véhicule hybride sur cycle prédéfini.

Chapitre 2

Étude théorique de la solution d'un problème générique de commande optimale

Dans ce chapitre, on cherche à obtenir les conditions d'optimalité des solutions des problèmes du type (1.1) et (1.2). Pour chacun des problèmes, l'état final $x(T)$ est imposé par la contrainte d'égalité $x(T) = x(0)$. Néanmoins, on trouve surtout dans la littérature les conditions d'optimalité pour des problèmes dont l'état final est contraint par une fonction (notée ϕ par la suite), dont on peut ensuite tirer une condition sur la valeur du multiplicateur au temps final [Bertsekas, 2001], [Bryson and Ho, 1975]. Ces problèmes sont pour cette raison connus sous le nom de *problèmes aux deux bouts* : l'état x au temps initial est imposé via $x(0) = x_0$, et l'état adjoint p vérifie une condition d'optimalité au temps final (condition présentée par la suite).

Ici, nous présentons le cas d'un problème classique de commande optimale, dont on déduit les conditions d'optimalité. On soulignera néanmoins à chaque fois les conditions qui sont différentes de celles que l'on obtient dans le cas des problèmes (1.1) et (1.2).

On considère le problème de commande optimale

$$(PO) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in U} \left\{ J(u) := \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + \phi(x(T), T) \right\} \\ \text{avec :} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où U représente l'espace des commandes admissibles, et où l'état scalaire x à l'instant final T est contraint par la fonction ϕ . Il s'agit de trouver, parmi toutes les solutions possibles du système $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ reliant x_0 à $x(T)$, celle qui minimise la fonctionnelle $J(u)$. Une telle trajectoire, si elle existe, est dite *optimale*.

2.1 Conditions d'optimalité en l'absence de contraintes sur l'état

On peut qualifier la solution optimale de (PO) par des conditions d'optimalité, conditions nécessaires pour qu'une trajectoire soit optimale, ou fasse partie des candidats retenus pour une trajectoire optimale. On se place dans un premier temps dans le cas du problème (PO), sans contrainte sur l'état.

Définissons tout d'abord l'Hamiltonien H associé au problème (PO), sous sa forme générale

$$H(x, u, t, p) = L(x, u, t) + p(t)f(x, u, t), \quad (2.2)$$

où H est défini $\forall u \in U$, p étant le multiplicateur de Lagrange (ou état adjoint) associé à la contrainte d'égalité $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$.

Conditions d'optimalité

Les conditions d'optimalité du problème (PO) s'écrivent

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*, u^*, t, p^*) \quad (2.3a)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, u^*, t, p^*) \quad (2.3b)$$

$$x(0) = x_0, \quad p(T) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{t=T} \quad (2.3c)$$

$$u^*(t) = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} H(x, u, t, p). \quad (2.3d)$$

Ces conditions d'optimalité définissent donc des conditions que doit remplir la solution du problème (PO) . Dans le cas où l'état final est fixé, tel que $x(T) = x(0) = x_0$, alors la condition d'optimalité (2.3c) est remplacée par

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_0. \quad (2.4)$$

Principe de Pontryagin

Le principe de Pontryagin énonce que si $u^* \in U$ est une commande optimale, alors

$$H(x^*, u^*, p^*, t) \leq H(x^*, u, p^*, t), \quad \forall u \in U, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.5)$$

où $x^*(t)$ et $p^*(t)$ sont respectivement l'état et l'état adjoint optimaux. Cette propriété correspond à la condition d'optimalité (2.3d), et donne une condition locale d'optimalité d'une trajectoire (x, t) .

Justification des conditions d'optimalité

Les conditions d'optimalité du problème peuvent se retrouver en ré-écrivant (2.1) sous une forme différente. On considère tout d'abord que $u \in \mathbb{R}$ (pas de contraintes sur la commande). On adjoint l'équation différentielle de (2.1) à J à l'aide d'un multiplicateur $p(t)$

$$\hat{J}(u) = \int_0^T [L(x(t), u(t), t) + p(t)(f(x, u, t) - \dot{x})] dt + \phi(x(T), T). \quad (2.6)$$

En intégrant par partie le membre de droite de (2.6), et en utilisant la définition de l'Hamiltonien, on obtient

$$\hat{J}(u) = -p(T)x(T) + p(0)x(0) + \int_0^T [H(x, u, t, p) + \dot{p}(t)x(t)] dt + \phi(x(T), T). \quad (2.7)$$

On considère maintenant une petite variation δu du vecteur $u(t)$, ainsi qu'une variation δx du vecteur $x(t)$, menant à une variation de \hat{J} , avec pour temps initial et final $t = 0$ et $t = T$.

$$\delta \hat{J}(u) = [p(t)\delta x]_{t=0} + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - p(t) \right) \delta x \right]_{t=T} + \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H(x, u, t, p)}{\partial x} + \dot{p}(t) \right) \delta x + \frac{\partial H(x, u, t, p)}{\partial u} \delta u \right] dt \quad (2.8)$$

2.2 Conditions d'optimalité en présence de contraintes sur l'état

Si la commande $u^*(t)$ est optimale, alors une variation telle que $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$ engendre au premier ordre une variation nulle de \hat{J} . Nous énonçons donc par la suite les conditions pour annuler les termes de $\delta\hat{J}$.

Le premier terme $[p\delta x]_{t=0}$ est directement nul, étant donné que l'état initial $x(t=0)$ est imposé. L'annulation du second terme constitue la condition sur la valeur finale du multiplicateur, donnée par l'équation (2.3c)

$$p(T) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{t=T}. \quad (2.9)$$

Le troisième terme de droite de (2.8) s'annule si

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, u^*, t, p^*), \quad (2.10)$$

ce qui constitue la condition d'optimalité donnée par (2.3b). Enfin, à l'optimum, $\delta\hat{J}(u^*) = 0$ pour une variation arbitraire δu . Cette propriété implique forcément

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, u^*, t, p^*) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.11)$$

On notera que cette condition est plus faible que celle donnée par (2.3d). Néanmoins, le lecteur peut se référer à [Pontryagin et al., 1974] pour une démonstration plus complète.

Ces conditions sont utilisées dans les méthodes de tir et en particulier dans l'algorithme SCOP, présenté dans la section (3.4).

Remarque 2.1.1. *On notera qu'en présence de contraintes sur la commande u , la précédente justification utilisant l'équation (2.11) n'a plus de sens. Le principe de Pontryagin reste néanmoins valide même pour des commandes $u \in U$ discrètes ou non-différentiables, auquel cas on cherchera u^* tel que*

$$u^* = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} H(x, u, t, p). \quad (2.12)$$

Remarque 2.1.2. *Dans le cas d'une contrainte d'égalité sur $x(T)$, telle que $x(T) = x_0$, la fonction ϕ n'apparaît plus dans (2.1), (2.6), (2.7) et (2.8). De plus, le terme $[p(t)\delta x]_{t=T}$ devient forcément nul, étant donné que $x(T)$ est imposé. Ainsi, la condition (2.9) disparaît, au profit de la condition $x(T) = x_0$.*

2.2 Conditions d'optimalité en présence de contraintes sur l'état

Les conditions d'optimalité qui viennent d'être définies sont incomplètes lorsque des contraintes sur l'état sont introduites dans le problème d'optimisation. On doit prendre en compte ces contraintes via l'introduction de nouveaux multiplicateurs.

L'introduction de ces nouveaux multiplicateurs rend difficile la résolution du problème dans le cas où x est contraint. On citera [Bryson and Ho, 1975] qui comporte plusieurs exemples simples d'application du principe de Pontryagin, dont la résolution s'effectue directement (i.e. sans devoir passer par une méthode de tir), ou encore [Evans, 2000].

Le problème d'optimisation général avec contraintes sur l'état (PO_{sce}) s'écrit à présent

$$(PO_{sce}) \begin{cases} \min_{u \in U} \left\{ J(u) := \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + \phi(x(T), T) \right\} \\ \text{avec :} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0 \\ g(x(t), t) \leq 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

où $g(x(t), t)$ est la fonction définissant les contraintes sur l'état.

Deux écoles existent pour la formulation des conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale avec contraintes sur l'état, telles qu'elles sont expliquées dans [Hartl et al., 1995] : la méthode directe et la méthode indirecte. La méthode directe consiste à associer directement la contrainte sur l'état à l'Hamiltonien H , c'est cette méthode qui est décrite ci-après. Dans la méthode indirecte, on associe à l'Hamiltonien la dérivée totale de la contrainte sur l'état. Le lecteur est invité à lire [Hartl et al., 1995] pour une présentation plus détaillée de la méthode indirecte.

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien dans (2.2). Pour prendre en compte les contraintes sur l'état, on introduit un nouveau multiplicateur μ associé à la contrainte $g(x(t), t) \leq 0$. A partir de cette expression, on construit le Lagrangien (ou Hamiltonien augmenté), tel que

$$\mathcal{L}(x, u, t, p, \mu) = H(x, u, t, p) + \mu(t)g(x, t), \quad (2.14)$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g(x, t) \leq 0$.¹

Pour introduire le théorème suivant, nous définissons tout d'abord la notion de point de jonction, tirée de [Hartl et al., 1995] (voir aussi [Bonnans and Hermant, 2008]).

Définition 2.2.1. *Un sous-intervalle $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$ avec $\tau_1 < \tau_2$ est appelé arc intérieur d'une trajectoire $x(\cdot)$ si $g(x, t) < 0$ pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Un sous-intervalle $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$ avec $\tau_1 < \tau_2$ est appelé arc frontière d'une trajectoire $x(\cdot)$ si $g(x, t) = 0$ pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Les points extrêmes gauche et droite d'un arc frontière $[\tau_1, \tau_2]$ sont appelés points d'entrée et de sortie respectivement. Un point de contact τ_0 est un point isolé satisfaisant $g(x, \tau_0) = 0$ et $g(x, t) \neq 0$ pour tout $t \neq \tau_0$ au voisinage de τ_0 . Points d'entrée, points de sortie, et points de contact sont appelés points de jonction.*

Théorème 2.2.1. *Soit $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$ une paire optimale pour le problème précédent (PO_{sce}) pendant un intervalle fixé $[0, T]$. On suppose que $x^*(\cdot)$ possède un nombre fini de points de jonction. Alors il existe une variable adjointe $p(\cdot)$ continue par morceaux sur $[0, T]$, un multiplicateur μ continu par morceaux sur $[0, T]$, un vecteur $\eta(\tau_i)$ pour chaque point de discontinuité de $p(\cdot)$ tels que $(p(t), v(t), \eta(\tau_1), \eta(\tau_2), \dots) \neq 0$ pour tout t , et telles que les conditions suivantes soient vraies presque partout :*

$$\begin{aligned} u^* &= \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} H(x^*, u^*, t, p^*), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(x^*, u^*, t, p^*, \mu^*) &= \frac{\partial H^*}{\partial u}(x^*, u^*, t, p^*) = 0, \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*, u^*, t, p^*, \mu^*) \\ \mu(t) &\geq 0, \quad \mu(t)g(x, t) = 0 \end{aligned}$$

À n'importe quel point τ où $g(x, \tau) = 0$ et pour n'importe quel point de contact τ , la trajectoire de l'état adjoint p peut avoir une discontinuité donnée par la condition de saut suivante :

$$\begin{aligned} p(\tau^-) &= p(\tau^+) + \eta(\tau) \frac{\partial g}{\partial x}(x, \tau), \\ H^*[\tau^-] &= H^*[\tau^+] - \eta(\tau) \frac{\partial g}{\partial t}(x, \tau), \\ \eta(\tau) &\geq 0, \quad \eta(\tau)g^*[\tau] = 0. \end{aligned}$$

¹On notera que pour davantage de généralité, on peut aussi introduire dans le Lagrangien un autre multiplicateur v , associé à une contrainte mixte sur l'état x et sur la commande u .

2.3 Étude de problèmes académiques

Ce théorème indique que le multiplicateur p associé à l'état peut subir un saut au point de jonction $t = \tau$, ou lors d'un point de contact. On notera néanmoins que l'auteur dans [Hartl et al., 1995] ne fait aucune hypothèse sur l'ordre de la contrainte sur l'état, celle-ci pouvant donc être d'ordre supérieur à 1. [Bonnans and Hermant, 2007] démontrent que lorsque les contraintes sont du premier ordre, le multiplicateur p reste continu lorsqu'une contrainte devient active, ou inactive. Cette propriété sera utile pour la démonstration de la convergence de SCOP, dans la section 3.4.6.

2.3 Étude de problèmes académiques

On aborde ici les quelques problèmes dont la formulation générale a été donnée dans la section 1.3, et qui sont ici traités avec des cas simples pour l'expression de L , u_{\min} , u_{\max} , x_{\min} , et x_{\max} . On rappelle que l'état x correspond pour notre application à l'état de charge de la batterie, et que la commande u représente la répartition de couple entre les différents moteurs du véhicule hybride.

2.3.1 Recherche d'une solution pour un problème simple du type (1.1)

On considère ici un problème simple du type (1.1), où la fonction $L(t)$ est donnée par un polynôme du second degré en u , tel que

$$\min_u \int_0^T \left(\frac{1}{2} a(t) u^2(t) + b(t) u(t) + c(t) \right) dt \quad (2.15a)$$

$$\dot{x}(t) = -s(t)(1 - u(t)), \quad x(0) = x(T) = x_0 \quad (2.15b)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad (2.15c)$$

$$0 \leq x(t) \leq 1. \quad (2.15d)$$

avec $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, et $c(t) > 0$, des fonctions du cycle suivit par le conducteur à chaque instant t , et $s(t)$ une fonction du cycle à valeurs dans \mathbb{R} , et des contraintes de bornes constantes sur l'état et sur la commande. On considère tout d'abord le problème sans contrainte, puis avec contraintes, et on cherchera à le résoudre dans ces différents cas.

Cas sans contrainte sur la commande et sur l'état

On considère tout d'abord le problème de minimisation (2.15a-2.15b), sans les contraintes sur l'état (2.15d) et sur la commande (2.15c). Ce problème se résout aisément en utilisant le principe de Pontryagin (présenté dans la section 2.1) : on forme l'Hamiltonien H

$$H(u, t, p) = \frac{1}{2} a(t) u^2(t) + b(t) u(t) + c(t) - p(t) s(t) (1 - u(t)), \quad (2.16)$$

qui ne dépend pas de x , puis on écrit les conditions d'optimalité que doit vérifier la solution :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(u^*, t, p^*) \quad (2.17a)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(u^*, t, p^*), \quad (2.17b)$$

ce qui mène aux égalités $a(t)u^*(t) + b(t) + p^*(t)s(t) = 0$ et $p^*(t) = p_0$. Comme $a > 0$, il découle, pour le problème dont la commande n'est pas contrainte, une solution de la forme

$$u_{nc}^*(t) = -\frac{p_0 s(t) + b(t)}{a(t)}. \quad (2.18)$$

On trouve ensuite la valeur de p_0 en ré-injectant $u_{nc}^*(t)$ dans l'équation d'état de (2.15b), et en résolvant ensuite l'équation

$$\int_0^T \dot{x}(t) dt = x(T) - x(0) = - \int_0^T s(t) \left(1 + \frac{p_0 s(t) + b(t)}{a(t)} \right) dt, \quad (2.19)$$

soit finalement, avec $x(0) = x(T)$,

$$p_0 = - \frac{\int_0^T s(t) \left(1 + \frac{b(t)}{a(t)} \right) dt}{\int_0^T \frac{s^2(t)}{a(t)} dt}, \quad (2.20)$$

ce qui permet de connaître la commande optimale $u_{nc}^*(t)$ du problème (2.15a-2.15b), ainsi que la trajectoire optimale $x^*(t)$ de l'état.

Cas avec contraintes sur la commande

Si l'on considère le problème (2.15a-2.15b-2.15c), la présence de contraintes sur u ne nous permet plus d'écrire une expression analytique pour p_0 . On peut cependant toujours définir la solution du problème non contraint $u_{nc}^*(t)$ par l'expression

$$u_{nc}^*(t) = - \frac{p_0 s(t) + b(t)}{a(t)},$$

et projeter $u_{nc}^*(t)$ sur le domaine admissible $[0, 1]$ imposé par les contraintes de bornes sur u (équation 2.15c). On trouve ensuite la valeur de p_0 en utilisant une méthode de tir (voir section 3.2) pour vérifier la contrainte d'égalité sur $x(T)$.

Cas avec contraintes sur la commande et sur l'état

On considère maintenant le problème (2.15) complet, avec les contraintes sur la commande et sur l'état. Pour prendre en compte les contraintes sur l'état, on les introduit à l'expression de l'Hamiltonien. Les contraintes issues de $0 \leq x(t) \leq 1$ s'écrivent $-x(t) \leq 0$ et $x(t) - 1 \leq 0$. On définit alors deux multiplicateurs $\mu_1 \geq 0$ et $\mu_2 \geq 0$, qui vérifient

$$\mu_1(t)(-x(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \mu_2(t)(x(t) - 1) = 0. \quad (2.21)$$

On construit ensuite le Lagrangien (ou Hamiltonien augmenté uniquement des contraintes sur l'état) qui s'écrit

$$\mathcal{L}(x, u, t, p, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2} a(t) u^2(t) + b(t) u(t) + c(t) - p(t) s(t) (1 - u(t)) - \mu_1(t) x(t) + \mu_2(t) (x(t) - 1). \quad (2.22)$$

L'écriture des conditions d'optimalité sur \mathcal{L} mène à

$$\dot{p}^*(t) = \mu_1^*(t) - \mu_2^*(t) \quad (2.23a)$$

$$0 = a(t) u^*(t) + b(t) + p^*(t) s(t). \quad (2.23b)$$

Ainsi $p^*(t)$ évolue selon l'équation (2.23a) quand une contrainte sur l'état est active. En revanche, lorsque x ne se trouve pas sur un arc frontière, c'est à dire $0 < x < 1$, alors $\mu_1^* = \mu_2^* = 0$, et $p(t)$ reste constant (on est ramené localement à un problème sans contrainte sur l'état).

2.3 Étude de problèmes académiques

Lorsqu'une contrainte sur l'état est active, la commande optimale reste de la même forme, c'est à dire

$$u^*(t) = \min \left(\max \left(-\frac{p(t)s(t) + b(t)}{a(t)}, 0 \right), 1 \right).$$

En remarquant que $x = 0$ ou $x = 1$ implique forcément $u = 1$, on peut connaître la loi d'évolution de $p^*(t)$ lorsqu'une contrainte sur l'état est active,

$$p^*(t) = -\frac{a(t) + b(t)}{s(t)},$$

cette équation nous indiquant donc la forme de $\mu_1(t)$ et de $\mu_2(t)$. On peut donc remarquer que l'écriture des conditions d'optimalité nous permet de connaître la loi d'évolution de $p^*(t)$ lorsque les contraintes sont actives, ou inactives (p^* est alors constant), mais en revanche il n'est pas possible de connaître à quels instants les contraintes deviendront actives. Il n'est donc pas possible non plus de savoir le nombre de fois où ces contraintes deviendront actives.

En conséquence, l'utilisation d'un algorithme de tir multiple (section 3.2.2) n'est pas possible sur un problème simple tel que le problème (2.15), sans connaissance sur la trajectoire optimale de l'état et sur les contraintes violées. L'algorithme SCOP, capable quant à lui de traiter ce problème, sera présenté dans la section 3.4.

2.3.2 Recherche d'une solution pour un problème simple du type (1.2)

On s'intéresse maintenant au problème d'optimisation de la répartition de couple sur un cycle durant lequel le moteur thermique peut être éteint, problème du type (1.2). Ce problème comporte une variable d'état x continue et bornée, et une variable d'état discrète r continue par morceaux prenant les valeurs 0 ou 1. On considère comme dans la section 2.3.1 que L est définie par un polynôme en u , le problème simple s'écrivant alors

$$\min_{u,v} \left\{ \int_0^T r(t) \left(\frac{1}{2} a(t) u^2(t) + b(t) u(t) + c(t) \right) dt + \int_0^T C_0 \max(0, \dot{r}(t)) dt \right\} \quad (2.24a)$$

$$\dot{x}(t) = -s(t)(1 - r(t)u(t)), \quad x(0) = x(T) = x_0 \quad (2.24b)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad (2.24c)$$

$$0 \leq x(t) \leq 1 \quad (2.24d)$$

$$r(t) \in \{0, 1\}, \quad (2.24e)$$

où la commande u et l'état x sont bornés par 0 et 1. On définit une seconde commande, notée v , telle que $v(t) = \dot{r}(t)$.

Afin d'étudier plus facilement le problème (2.24), on relaxe la nature discrète de r , et on suppose que r est continu entre 0 et 1. L'idée est de considérer et de chercher à résoudre le problème continu, en espérant que la solution du problème relaxé continu tende vers la solution du problème discret. On cherche donc à étudier ce problème dans le cas simplifié où les deux variables d'état x et r sont continues.

Cas sans contrainte sur la commande u et sur les états x et r

Dans un premier temps, on étudie le problème (2.24) sans les contraintes (2.24c) et (2.24d), et sans les contraintes de bornes sur r . On doit toutefois observer que la variable d'état r , lorsqu'elle est non bornée entre 0 et 1, n'a plus aucune signification physique, rendant le problème d'optimisation et sa solution

décorrélés de l'application traitée. Néanmoins, on pourra analyser plus facilement le comportement des variables d'état et des multiplicateurs associés. On considérera les contraintes de bornes sur r dans un second temps.

L'Hamiltonien H associé au problème (2.24a -2.24b) s'écrit

$$H(r, u, v, t, p_x, p_r) = r(t) \left(\frac{1}{2} a(t) u^2(t) + b(t) u(t) + c(t) \right) + C_0 \max(0, v(t)) - p_x(t) s(t) (1 - r(t) u(t)) + p_r(t) v(t), \quad (2.25)$$

où p_x et p_r sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange associés aux variables d'état x et r . On écrit les conditions d'optimalité, valables $\forall t \in [0, T]$:

$$\dot{p}_x^*(t) = - \frac{\partial H}{\partial x}(r^*, u^*, v^*, t, p_x^*, p_r^*) \quad (2.26a)$$

$$\dot{p}_r^*(t) = - \frac{\partial H}{\partial r}(r^*, u^*, v^*, t, p_x^*, p_r^*) \quad (2.26b)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(r^*, u^*, v^*, t, p_x^*, p_r^*) \quad (2.26c)$$

$$v^*(t) = \underset{v}{\operatorname{argmin}} H(r^*, u^*, v, t, p_x^*, p_r^*). \quad (2.26d)$$

On remarque que les conditions d'optimalité sur u et sur v sont complètement découplées, on peut donc les traiter indépendamment l'une de l'autre. Les équations (2.26) mènent respectivement à

$$\dot{p}_x^*(t) = 0 \quad (2.27a)$$

$$\dot{p}_r^*(t) = - \left(\frac{1}{2} a(t) u^{*2}(t) + b(t) u^*(t) + c(t) \right) - p_x^*(t) s(t) u^*(t) \quad (2.27b)$$

$$0 = r^*(t) (a(t) u^*(t) + b(t)) + p_x^*(t) r^*(t) s(t) \quad (2.27c)$$

$$v^*(t) = \underset{v}{\operatorname{argmin}} \{ C_0 \max(0, v(t)) + p_r^*(t) v(t) \}. \quad (2.27d)$$

L'équation (2.27a) indique que le multiplicateur de Lagrange p_x^* associé à x est constant $\forall t \in [0, T]$, les contraintes sur l'état x n'ayant pas été considérées. Dans l'équation (2.27c), $r(t)$ est directement factorisable. Cette équation possède donc deux solutions :

1. $r^*(t) = 0$ qui correspond à un fonctionnement en mode électrique pur (moteur thermique éteint), la valeur de $u^*(t)$ pouvant alors être quelconque,
2. $r^*(t) \neq 0$ et $a(t) u^*(t) + b(t) + p_x^*(t) s(t) = 0$ avec laquelle on retrouve l'expression de la commande optimale du problème non contraint précédent (2.15a-2.15b) (identique au problème (2.24a -2.24b) avec $r \equiv 1, \forall t \in [0, T]$), c'est à dire

$$u^*(t) = - \frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)}, \quad (2.28)$$

où p_x^* est donc constant sur $[0, T]$ (équation 2.27a et pas de contrainte de borne sur x).

On suppose que $u^*(t) = - \frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)}$ lorsque $r(t) = 0$. Il est alors naturel de reporter l'expression de $u^*(t)$ dans l'équation (2.27b), qui devient

$$\dot{p}_r^*(t) = - \left[\frac{1}{2} a(t) \left(- \frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)} \right)^2 + b(t) \left(- \frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)} \right) + c(t) \right] - p_x^* s(t) \left(- \frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)} \right). \quad (2.29)$$

2.3 Étude de problèmes académiques

En remarquant que

$$-\left[b(t) \left(-\frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)} \right) + c(t) \right] - p_x^* s(t) \left(-\frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)} \right) = \frac{(p_x^* s(t) + b(t))^2}{a(t)} - c(t),$$

on en déduit une expression très simple pour $\dot{p}_r^*(t)$, donnée par

$$\dot{p}_r^*(t) = \frac{1}{2a(t)} \left(p_x^* s(t) + b(t) \right)^2 - c(t). \quad (2.30)$$

Comme les termes $a(t)$ et $c(t)$ sont positifs $\forall t \in [0, T]$, le signe de $\dot{p}_r^*(t)$ dépend directement de $c(t)$ qui correspond à la consommation à couple nul (au ralenti). On vérifie par ailleurs que si $c \equiv 0$, alors $\dot{p}_r^*(t) \geq 0$, ce qui implique qu'il y a *au plus* un changement de signe de $p_r^*(t)$ sur $[0, T]$.

La condition d'optimalité donnée par l'équation (2.27d) relie la commande v^* au multiplicateur p_r . Pour résoudre cette équation, il suffit de rechercher v telle que la fonction $v \mapsto C_0 \max(0, v) + p_r^* v$ soit minimale, selon la valeur de $p_r^*(t)$. On identifie alors deux valeurs particulières $-C_0$ et 0 autour desquels v^* est susceptible de changer. La Figure 2.1 donne l'allure de la fonction $v \mapsto C_0 \max(0, v) + p_r^* v$ selon la valeur de p_r .

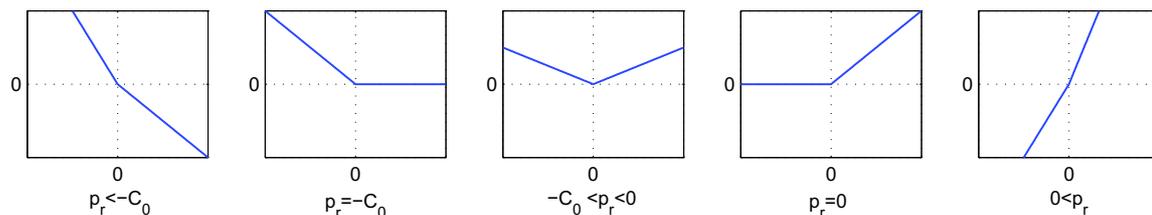


FIG. 2.1: Courbes de $v \mapsto (C_0 \max(0, v) + p_r^* v)$ en fonction de p_r .

On obtient finalement :

- Si $p_r^*(t) < -C_0$ alors $v^*(t) = +\infty$,
- Si $p_r^*(t) = -C_0$ alors $v^*(t)$ est indéterminé ($v^*(t) \in \mathbb{R}^+$),
- Si $-C_0 < p_r^*(t) < 0$ alors $v^*(t) = 0$,
- Si $p_r^*(t) = 0$ alors $v^*(t)$ est indéterminé ($v^*(t) \in \mathbb{R}^-$),
- Si $0 < p_r^*(t)$ alors $v^*(t) = -\infty$,

où $p_r^*(t) = p_r(0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2a(\tau)} \left(p_x^* s(\tau) + b(\tau) \right)^2 - c(\tau) \right] d\tau$. Il suffit alors de fixer un couple de variables parmi $r(0)$, $p_r(0)$, $r(T)$, et $p_r(T)$, par exemple $r(T) = 0$, et $p_r(0) = 0$.

Comme l'équation qui régit l'évolution de $p_r^*(t)$ dépend du cycle via les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, et $s(t)$, on peut faire l'hypothèse que $p_r^*(t)$ ne prend que ponctuellement les valeurs 0 et $-C_0$. C'est donc l'évolution du multiplicateur $p_r(t)$ au cours du temps qui, comparé aux bornes 0 et C_0 , impose la commande optimale $v^*(t)$ et commande l'état $r(t)$.

Prise en compte des contraintes de bornes sur r

On reprend à nouveau le problème précédent, dans lequel on tient maintenant compte des contraintes de bornes sur la variable d'état r . On rappelle qu'il n'y a pas de contraintes sur x et sur u . La variable d'état r étant bornée entre 0 et 1, on définit deux multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ associés respectivement aux contraintes sur l'état $-r \leq 0$ et $r - 1 \leq 0$. Le Lagrangien \mathcal{L} associé au problème (2.24a -2.24b) avec les contraintes de borne $0 \leq r(t) \leq 1$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r, u, v, t, p_x, p_r, \lambda_1, \lambda_2) = & r(t) \left(\frac{1}{2} a(t) u^2(t) + b(t) u(t) + c(t) \right) + C_0 \max(0, v(t)) \\ & - p_x(t) s(t) (1 - r(t) u(t)) + p_r(t) v(t) - \lambda_1(t) r(t) + \lambda_2(t) (r(t) - 1) \end{aligned} \quad (2.32)$$

où p_x et p_r sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange associés aux variables d'état x et r , et λ_1 et λ_2 sont les multiplicateurs associés aux contraintes de bornes sur r . Les conditions d'optimalité (qui ne diffèrent de (2.27) que par la prise en compte des contraintes de bornes sur r et des multiplicateurs λ_1 et λ_2 associés) s'écrivent maintenant

$$\dot{p}_x^*(t) = 0 \quad (2.33a)$$

$$\dot{p}_r^*(t) = - \left(\frac{1}{2} a(t) u^{*2}(t) + b(t) u^*(t) + c(t) \right) - p_x^*(t) s(t) u^*(t) + \lambda_1^*(t) - \lambda_2^*(t) \quad (2.33b)$$

$$0 = r^*(t) (a(t) u^*(t) + b(t)) + p_x^*(t) r^*(t) s(t) \quad (2.33c)$$

$$v^*(t) = \underset{v}{\operatorname{argmin}} \{ C_0 \max(0, v(t)) + p_r^*(t) v(t) \} \quad (2.33d)$$

On retrouve les mêmes expressions de p_x^* et u^* que dans le cas où r n'est pas borné, c'est à dire

1. $p_x^*(t) = p_x^* = \text{constante} \forall t \in [0, T]$ (pas de contraintes de bornes sur x),
2. $u^*(t) = - \frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)}$.

La condition d'optimalité (2.33b), avec l'expression de $u^*(t)$ ci-dessus, se simplifie comme précédemment, menant à

$$\dot{p}_r^*(t) = \frac{1}{2a(t)} \left(p_x^* s(t) + b(t) \right)^2 - c(t) + \lambda_1^*(t) - \lambda_2^*(t). \quad (2.34)$$

On peut à nouveau écrire l'ensemble des équations qui décrivent les propriétés et l'évolution des variables x^* , r^* , p_x^* , p_r^* , u^* , v^* , λ_1^* et λ_2^* :

$$\dot{x}^*(t) = -s(t) (1 - r^*(t) u(t)), \quad x^*(0) = x^*(T) = x_0 \quad (2.35a)$$

$$\dot{r}^*(t) = v^*(t), \quad r^*(T) = 0 \quad (2.35b)$$

$$p_x^*(t) = p_x^* = \text{constante} \quad (2.35c)$$

$$\dot{p}_r^*(t) = \frac{1}{2a(t)} \left(p_x^* s(t) + b(t) \right)^2 - c(t) + \lambda_1^*(t) - \lambda_2^*(t), \quad p_r^*(0) = 0 \quad (2.35d)$$

$$u^*(t) = - \frac{p_x^* s(t) + b(t)}{a(t)} \quad (2.35e)$$

$$v^*(t) = \underset{v}{\operatorname{argmin}} \{ C_0 \max(0, v(t)) + p_r^*(t) v(t) \} \quad (2.35f)$$

$$\lambda_1^*(t) \geq 0 \quad (2.35g)$$

$$\lambda_2^*(t) \geq 0 \quad (2.35h)$$

$$r^*(t) \in [0, 1]. \quad (2.35i)$$

2.3 Étude de problèmes académiques

où l'on se retrouve dans le cas d'un problème avec contraintes sur l'état r , les évolutions de $\lambda_1(t)$ et de $\lambda_2(t)$ étant inconnues.

On peut néanmoins observer que p_r correspond au coût marginal associé à la variable d'état r , et en ce sens c'est donc la valeur de p_r qui doit être comparée avec 0 et C_0 , pour savoir s'il est intéressant d'arrêter le moteur (coût nul) ou de le démarrer (coût C_0).

De plus, on possède maintenant, via l'expression de $p_r(t)$ et les bornes 0 et C_0 , une commande supplémentaire v sur le moteur thermique qui nous permettrait de posséder un contrôleur temps-réel avec deux états : l'état de charge de la batterie, et l'état du moteur thermique. L'idée serait alors d'utiliser cette commande en temps réel avec un horizon glissant, par exemple.

Chapitre 3

Méthodes numériques

On distingue trois types de méthodes numériques en commande optimale : les méthodes directes, les méthodes indirectes, et enfin les méthodes basées sur la résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, ramenant le problème à un problème d'optimisation non-linéaire. Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir, un problème en appliquant le principe de Pontryagin. Enfin, les méthodes basées sur la résolution des équations HJB peuvent s'appliquer soit directement, soit en utilisant une résolution séquentielle, grâce à la programmation dynamique.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques-unes des méthodes numériques communément utilisées pour le type de problèmes qui sont traités dans ce mémoire. Nous tenterons de montrer les équivalences entre les méthodes, lorsqu'elles existent, autant d'un point de vue numérique que théorique.

Enfin, un algorithme de tir original, nommé SCOP, est présenté. Il permet de résoudre des problèmes du type (1.1) mais n'est pas applicable, à l'heure actuelle, sur des problèmes du type (1.2).

Dans le cas de l'optimisation de la répartition de puissance d'un véhicule hybride sur cycle prédéfini, on se trouve dans le cadre de problèmes de type (1.1) et (1.2). La fonction L correspond à la consommation instantanée de carburant, la commande u est soumise à des contraintes de bornes dépendantes du temps, correspondant aux saturations des différents actionneurs.

Dans un souci de clarté, les méthodes seront écrites pour une résolution de problèmes du type (1.1), dans lequel la contrainte dure sur $x(T)$ est remplacée par une fonction de pénalisation ϕ , comme pour le problème (PO) (équations (2.1)). Ce problème s'écrit

$$(PO_{appl}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in U} \left\{ J(u) = \int_0^T L(u(t), t) dt + \phi(x(T), T) \right\} \\ \text{avec :} \\ \dot{x} = f(u(t), t), \quad x(0) = x_0 \\ x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \\ u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t), \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Cependant, dans le cas des problèmes du type (1.2), la programmation dynamique a été appliquée, les méthodes indirectes n'étant pas utilisables à cause de la présence de l'état discret.

3.1 Méthode directe : optimisation non-linéaire sous contraintes

La méthode directe est la méthode la plus évidente lorsque l'on doit résoudre un problème de commande optimale. En discrétisant l'état et la commande dans le problème (3.1), on se ramène à un problème d'optimisation non-linéaire en dimension finie (N variables) :

$$\begin{cases} \min_{u_k \in U_k} J(u) := \sum_{k=0}^{N-1} L_k(u_k) \Delta t + \phi(x_N) \\ \text{avec : } x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad x(0) = x_0. \\ x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \\ u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

où $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k)$ représente la version discrète de l'équation d'état $\dot{x} = f(u(t), t)$, discrétisée en utilisant par exemple la méthode d'Euler explicite.

Pour résoudre ce problème, on suppose que le temps est subdivisé de manière égale, tel que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, le pas de discrétisation étant noté Δt . On suppose que la commande reste constante par morceau durant le pas de temps Δt . Les contraintes sur la commande ou sur l'état sont appliquées sur les valeurs discrétisées.

3.1.1 Résolution numérique

La résolution de ce problème peut s'effectuer par exemple via un algorithme de type SQP (Sequential Quadratic Programming), [Nocedal and Wright, 2000].

Cette méthode a été implémentée, mais la mise en oeuvre du problème et la prise en compte des contraintes est assez complexe et contraignante, et le temps nécessaire à la convergence est important. Pour ces raisons, la programmation non-linéaire n'a pas été retenue pour l'étude paramétrique présentée dans la section 4.

3.1.2 Paramétrisation simplifiée du contrôle (découpage par zones)

Dans la précédente méthode, les paramètres du contrôle u sont les $u_k, k = 0, \dots, N - 1$. Au lieu de rechercher les N commandes optimales, problème d'optimisation complexe si N est élevé, on peut imposer des règles pour la définition de u , règles définies par des paramètres dont le nombre serait $N_r \ll N$. La difficulté est alors de trouver empiriquement des règles intuitives permettant de définir la commande u d'une façon simple, à l'aide d'un nombre restreint de paramètres.

Dans l'application étudiée, cela pourrait revenir à définir des seuils de couples et/ou de régime au-dessus desquels certaines valeurs de u seraient figées.

Plutôt que d'optimiser une commande en fonction du temps, on peut imposer des zones de fonctionnement (voir [Voise et al., 2005]) pour le moteur électrique, ainsi que pour le fonctionnement simultané des deux moteurs, etc. Dans un second temps, une loi de gestion d'énergie propre à chaque zone pourra être définie, permettant une utilisation de cette stratégie en temps-réel. Cette paramétrisation permet de réduire grandement la taille du problème d'optimisation, puisque seules quelques variables devront être utilisées dans la définition du problème d'optimisation.

Cette technique ne peut se faire sans connaissance du système : on définit, par exemple, une commande \tilde{u} telle que :

$$\tilde{u} = \begin{cases} u_1 & \text{si } T_{rq} < T_a, \\ u_2 & \text{si } T_a \leq T_{rq} < T_b, \\ u_3 & \text{si } T_b \leq T_{rq}. \end{cases} \quad (3.3)$$

La stratégie obtenue, après optimisation, reste évidemment sous-optimale, puisque la paramétrisation enlève des degrés de liberté à la commande.

3.2 Méthodes de tir

Les méthodes de tir consistent à résoudre directement les conditions d'optimalité du problème (PO). Elles sont basées sur le Principe de Pontryagin. Ces méthodes sont notamment très utilisées dans le contrôle des véhicules spatiaux, où la précision est primordiale. Elles ont pour avantage d'être numériquement très précises, et relativement rapides comparées aux méthodes indirectes.

3.2.1 Méthode de tir simple

La méthode de tir consiste à itérer sur la valeur de p pour atteindre une valeur objectif. On définit une fonction de tir, notée Γ , telle que

$$\Gamma(p_0) = p(T) - \phi'(x(T), T). \quad (3.4)$$

La résolution des conditions d'optimalité revient alors à ajuster la valeur de p_0 telle que

$$\Gamma(p_0) = 0. \quad (3.5)$$

En pratique, pour résoudre ce type de problème, on utilisera une méthode numérique itérative, qui consiste à itérer sur la valeur de p_0 lorsque l'on possède une expression analytique pour les équations (2.3b) et (2.3d).

Cette méthode convient donc bien à la résolution de problèmes dont la forme est analytique, permettant de calculer une forme elle aussi analytique pour l'expression de u^* . Lorsque la valeur initiale du paramètre p_0 est bien choisie, sa convergence est assez rapide. Néanmoins, cette méthode n'est plus valide en présence de contraintes actives sur l'état. En effet, l'état adjoint p ne suit plus la loi d'évolution définie par (2.3b) lorsque l'état x touche ponctuellement ou longe une contrainte, puisqu'un nouveau multiplicateur associé à la contrainte sur l'état doit être introduit.

3.2.2 Méthode de tir multiple

Dans certains problèmes d'optimisation, le système différentiel régissant l'évolution des variables d'état n'est pas le même au cours de la trajectoire.

L'évolution des variables d'état pour ce type de problème s'écrit par exemple :

$$(\dot{x}(t), \dot{p}(t)) = \begin{cases} f_0(t, x(t), p(t)) & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ f_1(t, x(t), p(t)) & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ f_N(t, x(t), p(t)) & \text{si } t_N \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3.6)$$

x étant l'état, p étant l'état adjoint, et $t_1, t_2, \dots, t_N \in [0, T]$ étant des temps de commutation.

Lorsqu'il est possible de dériver une expression analytique de la commande optimale, la méthode de tir multiple ([Bryson and Ho, 1975], [Evans, 2000]) se trouve être bien adaptée. Elle consiste à résoudre

le problème d'optimisation comme dans la méthode de tir simple, avec des conditions de continuité (ou conditions de jonction) sur les variables d'état et d'état adjoint, lors d'un changement du système différentiel.

Ce type d'algorithme se trouve donc bien adapté à la résolution de problèmes d'optimisation avec contraintes d'état. En effet, dans ce cas les temps $t_1, t_2, \dots, t_N \in [0, T]$ peuvent être des temps de jonction avec un arc frontière (contrainte sur l'état active pendant un temps donné), ou bien des temps de contact avec la frontière (l'état touche une contrainte, mais la quitte aussitôt).

Un très bon exemple se trouve dans [Bonnans and Hermant, 2008], exemple qui est repris dans [Rousseau et al., 2008c], voir section (3.4.6) : il s'agit de connaître la trajectoire optimale d'une corde élastique attachée à ses deux extrémités, et qui repose sur un support plan. Lorsque la corde ne touche pas le support, l'équation représentant la trajectoire de la corde est parfaitement connue. En revanche, lorsque la corde touche le support, il devient difficile de connaître sa trajectoire, notamment à quels endroits elle touche le support puis le quitte.

On peut alors "découper" la trajectoire en 3 tronçons, chaque partie étant décrite par une équation différentielle différente. Les temps de commutation représentent alors les abscisses auxquels la corde touche puis quitte le support. Dans certains problèmes très simples, on peut résoudre le problème, en écrivant les conditions d'optimalité associées. Différents cas sont énumérés dans [Bryson and Ho, 1975] : système continu avec état final fixé à un temps donné, état final fixé à un temps final libre (incluant les problèmes à temps minimal), etc. L'auteur résout les problèmes posés en adjoignant l'équation d'état et les contraintes associées à l'état, à la fonction à minimiser, puis définit les conditions d'optimalité associées au problème via une méthode de perturbation (telle que celle qui est utilisée dans (2.8)). Le lecteur pourra aussi se référer à [Sethi and Thompson, 2006] pour des applications relatives aux problèmes économiques.

Dans le cas de contraintes du premier ordre sur l'état, [Bonnans and Hermant, 2008] a prouvé que l'état adjoint était continu sous certaines hypothèses. Pour des contraintes d'ordre supérieur cependant, des "conditions de saut" sur l'état adjoint doivent être considérées dans le problème d'optimisation, la continuité de celui-ci n'étant pas assurée.

L'inconvénient majeur de ces méthodes provient du fait qu'il soit nécessaire de connaître la forme de la trajectoire optimale pour pouvoir intégrer une équation différentielle valide, ce qui revient à connaître le nombre de contraintes actives.

3.3 Approche par l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

3.3.1 Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman et fonction valeur

Considérons à nouveau le problème d'optimisation général (3.1), qu'on englobe dans la classe des problèmes avec état et instants initiaux (x, t) quelconques, où x suit la loi d'évolution $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. On définit la fonction valeur (ou fonction coût) $V(x(t), t)$

$$V(x(t), t) := \min_{u \in U} \left[\int_t^T L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \phi(x(T), T) \right]. \quad (3.7)$$

On suppose que $V(x(t), t)$ existe et est C^1 . Soit Δt l'intervalle de temps, d'après l'équation d'évolution on a alors :

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + f(x(t), u(t), t) \Delta t. \quad (3.8)$$

3.3 Approche par l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

Considérons qu'une commande quelconque soit appliquée durant le laps de temps Δt . Alors on aura au premier ordre :

$$V(x(t), t) \leq V(x(t) + f(x(t), u(t), t)\Delta t, t + \Delta t) + L(x(t), u(t), t)\Delta t. \quad (3.9)$$

L'égalité dans (3.9) n'est obtenue que si une commande optimale est appliquée durant l'intervalle de t à $t + \Delta t$. On peut donc écrire :

$$V(x(t), t) = \min_{u \in U} \{V(x(t) + f(x(t), u(t), t)\Delta t, t + \Delta t) + L(x(t), u(t), t)\Delta t\} \quad (3.10)$$

Par un développement de Taylor au premier ordre, on obtient :

$$V(x(t), t) = \min_{u \in U} \{V(x(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t)f(x(t), u(t), t)\Delta t + \frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t)\Delta t + L(x(t), u(t), t)\Delta t\}. \quad (3.11)$$

Comme V et $\frac{\partial V}{\partial t}$ ne dépendent pas de u , on peut écrire, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) = \min_{u \in U} \left[L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t)f(x(t), u(t), t) \right]. \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) est appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (ou équation HJB). Elle correspond à l'équation représentant le problème de minimisation (PO) (défini dans la section 2). La fonction valeur V est ainsi solution d'une équation aux dérivées partielles où apparaissent l'équation du système $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$ et la fonction à minimiser $L(x, u, t)$. Trouver $V(x, t)$ dans (3.7) revient donc à résoudre l'équation (3.12).

3.3.2 Programmation Dynamique

La programmation dynamique est fréquemment utilisée pour résoudre les problèmes du type (3.1) (voir [Wu et al., 2002], [Scordia, 2004], [Sundström et al., 2008b]) pour des applications sur véhicules hybrides) : cette méthode repose sur le principe d'optimalité de Bellman, énoncé par R. Bellman :

"Une suite de commandes optimales est telle que, quels que soient l'état et l'instant considérés sur une trajectoire optimale, les commandes ultérieures constituent pour le problème ayant cet état et cet instant comme éléments initiaux une suite de commandes optimales."

Le principe d'optimalité de Bellman indique qu'une commande optimale peut être construite séquentiellement, tout d'abord en calculant la commande optimale pour le dernier pas de temps, ensuite pour les deux derniers, puis pas à pas jusqu'à considérer le problème dans sa globalité.

Principe

La programmation dynamique est donc une méthode d'optimisation en temps rétrograde, qui permet de calculer une approximation de la fonction V solution de l'équation HJB, discrétisée en espace et en temps. Pour cela, on calcule de façon séquentielle la trajectoire optimale entre deux instants, pour un état initial donné.

On définit le Principe de Programmation Dynamique, valide $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall t_k, t_{k+1}$ tels que $t_k < t_{k+1} \leq T$, avec $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ par

$$V(x, t_k) = \min_{u \in U} \{ \Delta t L(x, u, t_k) + V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1}) \}. \quad (3.13)$$

et la fonction $V(x, t_k)$ s'écrit, au temps $t_k = T$

$$V(x, T) = \phi(x_N). \quad (3.14)$$

Justification de l'équation (3.13)

Pour tout (x_0, t_0) fixé et tout $u_0 \in U$ donné, on considère la trajectoire

$$t \mapsto \tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0)$$

définie par le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0) = f(\tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0), u_0, t_0) \\ \tilde{x}(t = t_0; x_0, t_0, u_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

dont la solution existe au voisinage de t_0 . Soit la fonction composée

$$\tilde{V}(t; x_0, t_0, u_0) = V(\tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0), t)$$

qui représente la valeur de V sur la trajectoire \tilde{x} . Alors, pour tout t , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{V}(t; x_0, t_0, u_0) &= \frac{\partial}{\partial t} V(\tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0), t) + \frac{\partial}{\partial x} V(\tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0), t) \frac{d}{dt} \tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} V(\tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0), t) + \frac{\partial}{\partial x} V(\tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0), t) f(\tilde{x}(t; x_0, t_0, u_0), t_0, u_0). \end{aligned}$$

En spécifiant $t = t_0$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \tilde{V}(t = t_0; x_0, t_0, u_0) = \frac{\partial}{\partial t} V(x_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial x} V(x_0, t_0) f(x_0, t_0, u_0).$$

Cette relation est valide pour tout (x_0, t_0, u_0) . La fonction composée \tilde{V} nous aide à discrétiser l'équation HJB en temps. En effet, entre l'instant t_k et $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, on a, pour tout $u \in U$

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, t_k) + f(x, u, t_k) \frac{\partial V}{\partial x}(x, t_k) = \frac{d}{dt} \tilde{V}(t = t_k; x, t_k, u),$$

qu'on peut approcher par la différence finie

$$\frac{\tilde{V}(t = t_{k+1}; x, t_k, u) - \tilde{V}(t = t_k; x, t_k, u)}{\Delta t}.$$

Or, il est immédiat que

$$\tilde{V}(t = t_k; x, t_k, u) = V(x, t_k, u).$$

D'autre part

$$\tilde{V}(t = t_{k+1}; x, t_k, u) = V(\tilde{x}(t = t_{k+1}; x, t_k, u), t_{k+1}),$$

et on peut approcher la position $\tilde{x}(t = t_{k+1}; x, t_k, u)$ par sa version discrète

$$\frac{\tilde{x}(t = t_{k+1}; x, t_k, u) - x}{\Delta t} = f(x, u, t_k)$$

du système différentiel (3.15) pour $x_0 = x, t_0 = t_k$. Finalement, on a l'approximation

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t_k) + f(x, u, t_k) \frac{\partial V}{\partial x}(x, t_k) \approx \frac{V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1}) - V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1})}{\Delta t}.$$

3.3 Approche par l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

En reportant cette approximation dans l'équation HJB, et en multipliant par Δt , on aboutit à

$$\min_{u \in U} \{V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1}) - V(x, t_k) + \Delta t L(x, u, t_k)\} = 0.$$

Comme $V(x, t_k)$ ne dépend pas de u , on peut réécrire la relation précédente sous la forme d'un schéma rétrograde

$$V(x, t_k) = \min_{u \in U} \{V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1}) + \Delta t L(x, u, t_k)\}. \quad (3.16)$$

On retrouve ainsi le principe de Programmation Dynamique.

3.3.3 Méthode de résolution

Pour l'application de la programmation dynamique, on doit résoudre l'équation (3.13) à chaque pas de temps. On se place maintenant dans l'ensemble $[x_{\min}, x_{\max}] \subset \mathbb{R}$. Il n'est cependant pas possible de résoudre cette équation $\forall x \in [x_{\min}, x_{\max}]$. Aussi, on a recours à une discrétisation de l'espace d'état, l'équation (3.13) étant alors évaluée à chaque pas de temps, et à chaque pas d'espace. Cette discrétisation dans le cas d'un problème à un seul état impose de parcourir une grille, l'axe horizontal représentant le temps, l'axe vertical l'espace. Pour chaque point de la grille, un certain nombre de commandes admissibles sont testées, la commande optimale retenue étant celle qui minimise le terme de droite dans (3.13).

L'algorithme de programmation dynamique s'écrit :

Algorithme 1: Programmation Dynamique

Données: $x_{\min}, x_{\max}, \Delta x, \Delta t, x_0, T$

Définir $V(x, T) = \beta(x_0 - x)^2$

début

pour $t_k = (T - \Delta t) : -\Delta t : 0$ **faire**

pour $x = x_{\min} : \Delta x : x_{\max}$ **faire**

 Calculer $u^*(x, t_k) = \operatorname{argmin}_{u \in U} \{V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1}) + \Delta t L(x, u, t_k)\}$

fin

fin

$x(0) = x_0$;

pour $t_k = 0 : \Delta t : (T - \Delta t)$ **faire**

$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u^*(x(t_k), t_k), t_k)$

fin

fin

Cet algorithme comporte donc une partie *backward*, qui résout le problème d'optimisation défini par (3.13) un certain nombre de fois (voir section 3.3.4) du temps $t = T - 1$ au temps $t = 0$. Cette étape terminée, l'ensemble des commandes optimales sont connues pour chaque noeud de la grille de discrétisation. Il suffit ensuite de parcourir la grille dans le sens *forward*, de l'état au temps initial $x(0) = x_0$ jusqu'au temps final $x(T)$, en sélectionnant la commande optimale du noeud près duquel on se trouve.

Le calcul de $V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1})$ nécessite l'utilisation d'un schéma numérique. Nous choisissons un schéma explicite, tel qu'il est décrit dans [Guilbaud, 2002] : le *schéma décentré* ou *schéma upwind*.

Il est défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} V(x^i, t_k) = \min_{u \in U} \left[\Delta L(u, t_k) + V(x^i, t_{k+1}) + \max(f(x^i, u, t_k), 0) \frac{V(x^i, t_{k+1}) - V(x^{i-1}, t_{k+1})}{\Delta x} \Delta t \right. \\ \left. + \min(f(x^i, u, t_k), 0) \frac{V(x^{i+1}, t_{k+1}) - V(x^i, t_{k+1})}{\Delta x} \Delta t \right] \\ V(x^i, T) = \phi(x^i, T), \end{cases} \quad (3.17)$$

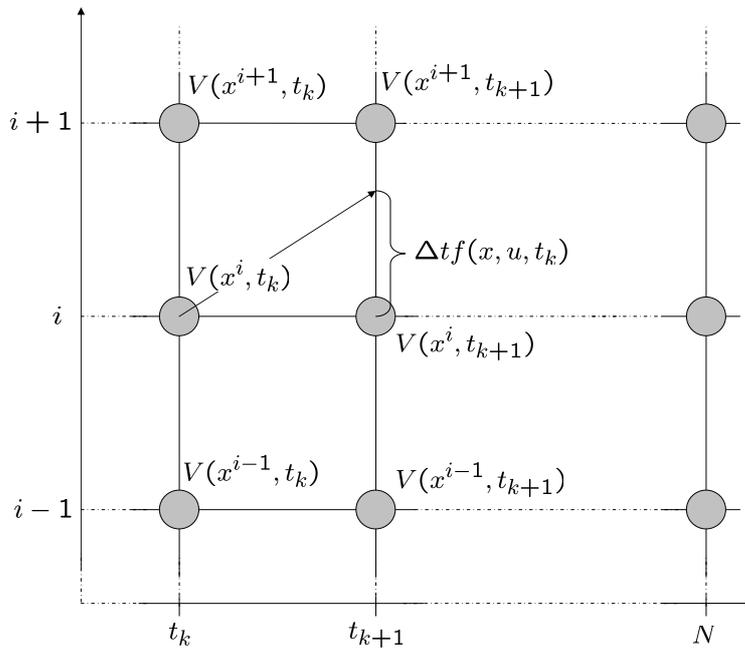


FIG. 3.1: Schéma upwind pour le calcul de $V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1})$

Pour l'utilisation de ce schéma, et pour en garantir la stabilité, la condition CFL (Courant, Friedrichs, Lewy) doit être vérifiée. Cette condition nous assure qu'en tout point de la grille $x^i(t_k)$, et pour tout $u \in U$, le point

$$x^i(t_k) + \Delta t f(x^i, u, t_k)$$

se trouve dans l'enveloppe convexe des voisins immédiats de x^i . Elle s'exprime sous la forme

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |f| \leq 1$$

Contrairement à [Guilbaud, 2002] qui propose d'utiliser la méthode dite du "trapèze", c'est à dire une grille agrandie qui se réduit d'un cran dans les directions d'espace à chaque pas de temps, on choisi de conserver une grille de dimension constante. Afin de ne pas avoir à introduire de condition artificielle en dehors du domaine qui consistait à pondérer les valeurs calculées lorsque les contraintes d'état sont franchies, nous choisissons de calculer préalablement les contrôles admissibles, ceux-ci tenant compte des contraintes sur l'état. Ainsi, si l'on se trouve près d'un bord, seuls les contrôles admissibles permettant de ne pas franchir la contrainte sur l'état seront retenus.

3.3 Approche par l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

La valeur de la fonction $V(x, t)$ à $t = T$ est choisie égale à $\beta(x_0 - x)^2$, permettant d'imposer un coût à $V(x, T)$ dès que x s'écarte trop de x_0 . Le coefficient β est choisi arbitrairement.

Pour gérer l'interpolation de la fonction coût dans le cas de forts gradients, on pourra aussi se référer à [Sundström et al., 2008a].

3.3.4 Commentaires sur la méthode de programmation dynamique

Le principal désavantage de la programmation dynamique est son temps de calcul. En effet, même si le problème d'optimisation à résoudre, grâce à la résolution de l'équation HJB discrétisée, est très simple, il doit être effectué un très grand nombre de fois.

Pour Δt et Δx les pas de temps et d'espace, on peut définir les nombres de pas de temps N_t et d'espace N_x nécessaires à la construction de la grille. Ils sont donnés par

$$N_t = T/\Delta t \quad (3.18)$$

$$N_x = (x_{\max} - x_{\min})/\Delta x. \quad (3.19)$$

Pour minimiser le terme $V(x + \Delta t f(x, u, t_k), t_{k+1}) + \Delta t L(x, u, t_k)$ dans l'expression (3.13), on teste un nombre fini de valeurs. On note N_u ce nombre. En notant Δt_{mod} le temps nécessaire à l'évaluation de $L_k(x_k, u_k)$ et de $f_k(x_k, u_k)$, le temps d'exécution global est donné par la formule

$$T_{glb} = N_t N_x N_u \Delta t_{mod}, \quad (3.20)$$

où le produit $N_t N_x N_u$ représente le nombre d'évaluations du modèle, pour un triplet (x, u, t) donné. Typiquement, pour le type de problème lié à notre application, on choisit des pas de temps, d'espace, et un nombre N_u égaux à $N_t \approx 2000$, $N_x \approx 100$, $N_u = 50$, ce qui conduit à 10.000.000 évaluations du modèle. Il est donc impératif d'utiliser un modèle simple pour l'évaluation de $L_k(x_k, u_k)$ et $f_k(x_k, u_k)$, sans quoi le temps de calcul devient prohibitif.

On notera que si l'on considère non plus une seule, mais deux variables d'état x_1 et x_2 , le nombre d'évaluations s'écrira $N_t N_{x_1} N_{x_2} N_u$, ce qui augmente considérablement le temps de calcul. C'est pourquoi la programmation dynamique est bien adaptée à des problèmes dont le nombre de variables d'état est faible.

La commande optimale est obtenue sous la forme d'une matrice de dimension $N_t N_x$, celle-ci étant tabulée suivant la discrétisation appliquée lors de la résolution. Durant le parcours *forward*, la commande optimale au pas k doit être choisie en recherchant la paire (x_k, t_k) (de la grille discrétisée) la plus proche du point courant, puis en sélectionnant la commande optimale qui avait été sauvegardée pour cette paire.

3.3.5 Résolution du problème (1.2) avec la programmation dynamique

Dans le problème continu (1.2), r peut prendre les valeurs 0 ou 1, sa dérivée \dot{r} n'étant pas bornée. Pour résoudre ce problème avec la programmation dynamique, on conserve cette seconde variable d'état discrète, mais on suppose aussi que sa dérivée $\dot{r} = v$ est discrète.

Les équations d'évolution des deux variables d'état x et r , une fois discrétisées, nous permettent d'écrire

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) = x(t_k) + f(t_k, u(t_k), r(t_k))\Delta t \\ r(t_{k+1}) = r(t_k) + v(t_k)\Delta t, \end{cases} \quad (3.21)$$

où Δt correspond au pas de discrétisation utilisé dans la programmation dynamique. Ici, on suppose que v est bornée, et peut prendre les valeurs $\{0, -\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\}$. Cette paramétrisation nous assure que le terme $v\Delta t$ ne prend que des valeurs entières, ce qui constitue une condition nécessaire pour que r ne puisse prendre que les valeurs $\{0, 1\}$. Le coût de redémarrage (voir section (1.3)) s'écrit donc $C_0 \max(0, v)\Delta t$, puisque ce coût doit rester indépendant du pas de discrétisation choisi.

Le problème discrétisé qui est résolu par la programmation dynamique s'écrit alors

$$\begin{cases} \min_{u(t_k) \in U_k, v(t_k) \in \{0, -\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\}} \sum_{k=0}^{N-1} (r(t_k)L(t_k, u(t_k))\Delta t + C_0 \max(0, v(t_k))\Delta t) + \phi(x_N) \\ \text{avec :} \\ x(t_{k+1}) = x(t_k) + f(t_k, u(t_k), r(t_k))\Delta t, \quad x(0) = x_0 \\ r(t_{k+1}) = r(t_k) + v(t_k)\Delta t \\ x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max} \\ r \in \{0, 1\}, \end{cases} \quad (3.22)$$

où $U_k = \{u(t_k) \mid u_{\min} \leq u(t_k) \leq u_{\max}\}$ est l'ensemble des commandes admissibles au temps t_k . La fonction valeur associée à ce problème à deux variables d'état x et r s'écrit finalement

$$V_k(x, r) = \min_{u \in U_k, v \in \{0, -\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t}\}} \{rL(x, u, t_k)\Delta t + C_0 \max(0, v)\Delta t + V(x + \Delta t f(u, r, t_k), r + v\Delta t, t_{k+1})\}. \quad (3.23)$$

La Figure 3.2 montre la grille de discrétisation utilisée pour la résolution de l'équation (3.23). On remarquera que dans le cas où $r = 0$ aux temps t_k et t_{k+1} , i.e. $v(t_k) = 0$, le mode de fonctionnement obligatoire est le mode électrique pur, ce qui implique que la variation $\Delta t f(r, u, t_k)$ soit unique et indépendante de u .

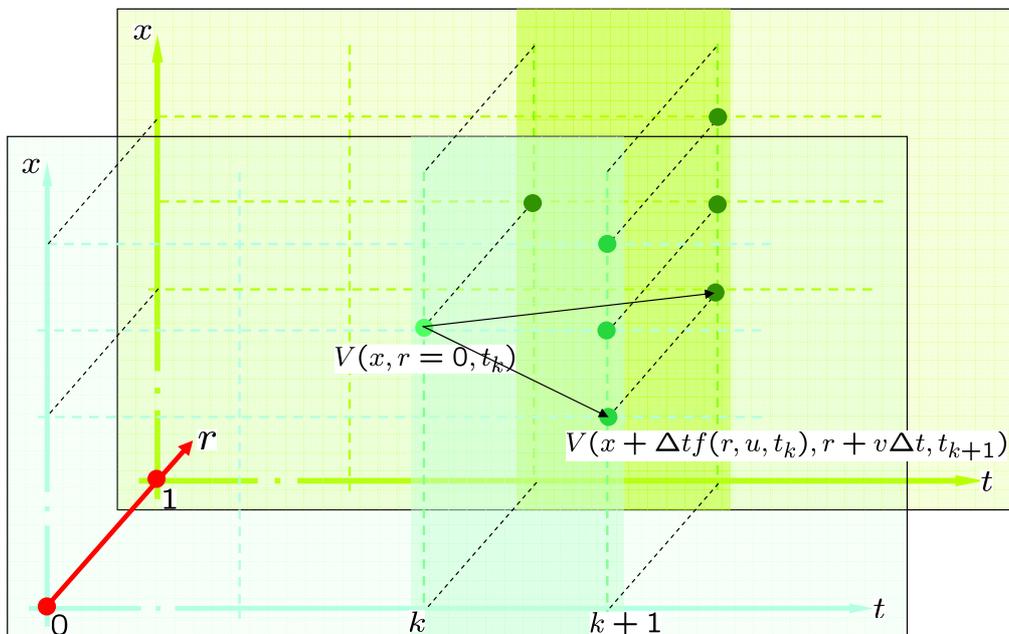


FIG. 3.2: Grille de discrétisation utilisée en programmation dynamique pour la résolution du problème (1.2).

3.4 L'algorithme SCOP

L'algorithme SCOP (Sequential Constraint-free Optimal control Problem algorithm) est une méthode originale de résolution séquentielle utilisant une méthode de tir simple. Elle permet de résoudre des problèmes qui sont exactement du type (1.1), que l'on rappelle ici :

$$(PO_2) \begin{cases} \min_u \left\{ J(u) = \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt \right\} \\ \text{avec :} \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \\ x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \\ u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t), \end{cases} \quad (3.24)$$

c'est-à-dire des problèmes d'optimisation de systèmes dynamiques avec contraintes de bornes sur l'état, et dont l'état initial $x(0)$ et l'état final $x(T)$ sont imposés.

3.4.1 Principe

Le principe de SCOP repose sur une résolution séquentielle d'un problème d'optimisation utilisant un algorithme de tir simple. Contrairement aux algorithmes de tir multiple, pour lesquels la trajectoire doit être connue préalablement, et qui nécessitent une valeur adéquate pour l'initialisation de la valeur du multiplicateur associé à la dynamique sur l'état (voir section (3.2)), SCOP peut fonctionner sans connaissance préalable de la trajectoire optimale, ou des contraintes sur l'état qui deviendront actives.

3.4.2 Description de la méthode

L'idée de l'algorithme consiste à résoudre le problème (3.24) en résolvant séquentiellement le sous-problème sans contrainte d'état (\mathcal{Q}_k) défini par

$$(\mathcal{Q}_k)[t_k, X_k] \quad \min_{u(\cdot) \in U} \int_{t_i}^{t_k} L(x_k(t), u(t), t) dt \quad (3.25)$$

avec

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = f(x_k(t), u(t), t) \quad (3.26a)$$

$$x_k(t_i) = \zeta \quad (3.26b)$$

$$x_k(t_k) = X_k, \quad (3.26c)$$

où $x_k(t_i)$ correspond à une valeur initiale en t_i , et (t_k, X_k) sont deux paramètres pouvant évoluer jusqu'à ce que $x(t_k)$ atteigne une valeur "correcte".

L'algorithme complet s'écrit

Algorithme 2: SCOP

données $k = 0, t_i = 0, t_0 = T, \text{ and } X_0 = \zeta;$
début
 Résoudre $(\mathcal{Q}_0)[t_0, X_0]$
tant que $t_i \neq T$ **faire**
 tant que $\exists t \in]t_i, t_k[\mid x_k(t) \leq x_{\min} \text{ ou } x_k(t) \geq x_{\max}$ **faire**
 Définir $\Delta_k(t) = \max\{x_{\min} - x_k(t), x_k(t) - x_{\max}\}$
 Déterminer $t_{k+1} = \operatorname{argmax}_{t \in [t_i, t_k]} \Delta_k(t)$
 Calculer $X_{k+1} = \Pi_{[x_{\min}, x_{\max}]}(x_k(t_{k+1}))$
 Résoudre $(\mathcal{Q}_{k+1})[t_{k+1}, X_{k+1}]$
 $k = k + 1;$
fin
si $t_{k+1} == T$ **alors**
 Arrêt de l'algorithme, trajectoire optimale obtenue.
 $t_i = T$
sinon
 $t_i = t_{k+1}; \zeta = X_{k+1}; t_{k+1} = T$
fin
fin

Le symbole $\Pi_{[x_{\min}, x_{\max}]}(X)$ correspond à l'opérateur de troncature

$$\Pi_{[x_{\min}, x_{\max}]}(X) = \begin{cases} x_{\min} & \text{si } X < x_{\min} \\ X & \text{si } X \in [x_{\min}, x_{\max}] \\ x_{\max} & \text{si } X > x_{\max}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Dans cet algorithme, on cherche à résoudre le problème (\mathcal{Q}_k) de manière séquentielle, jusqu'à obtenir une trajectoire optimale. L'intervalle de temps pour lequel l'optimisation est effectuée est restreint à chaque fois qu'une contrainte d'état est activée. Le calcul de $x(t), t \in [0, T]$ est réalisé en utilisant un schéma explicite classique, la trajectoire étant alors discrétisée en temps.

Lorsque l'état x longe une contrainte de borne, la résolution du problème $(\mathcal{Q}_{k+1})[t_{k+1}, X_{k+1}]$, pour le temps initial t_i , mène à $t_{k+1} = t_{i+1}$, le problème (3.25, 3.26) étant alors résolu entre deux pas de temps (t_i, t_{i+1}) . C'est notamment le cas du problème qui est présenté dans l'article, section (3.4.6), dans lequel il s'agit de minimiser l'énergie d'une corde reposant sur un support plan.

3.4.3 Exemple sur un cas simple

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(PO3) \begin{cases} \min_u \left\{ J(u) = \int_0^T \alpha^2(t) u^2(t) dt \right\} \\ \text{avec :} \\ \mathbf{f}(t) = (u(t) - 1)\alpha(t), \quad x(0) = 0,5, \quad x(T) = 0,5, \end{cases} \quad (3.28)$$

Ce problème sans contrainte se résout aisément. En écrivant l'Hamiltonien

$$H(t, u, p) = \alpha^2(t) u^2(t) + p(t)(u(t) - 1)\alpha(t), \quad (3.29)$$

3.4 L'algorithme SCOP

les conditions d'optimalité mènent à

$$\begin{aligned} \dot{p} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} p &= p_0 \\ u^* &= -\frac{p}{2\alpha}. \end{aligned}$$

La commande optimale dépend donc du scalaire p_0 , qui devient la nouvelle inconnue. Il suffit d'intégrer l'équation du système, en utilisant l'expression de $\alpha(t)$ pour trouver la valeur de p_0 :

$$\int_0^T \dot{x}(t) dt = \int_0^T (u^* - 1)\alpha(t) dt.$$

On choisit $\alpha(t)$ strictement croissant sur $[0, T]$, tel que H soit fortement convexe. Avec $\alpha(t) = (t^2 + 200t + 5000)/10000$, et $T = 20$, on trouve $p_0 = -1,4267$.

La commande optimale s'écrit donc : $u^*(t) = \frac{1,4267}{2\alpha(t)}$. La Figure 3.3 montre les résultats obtenus.

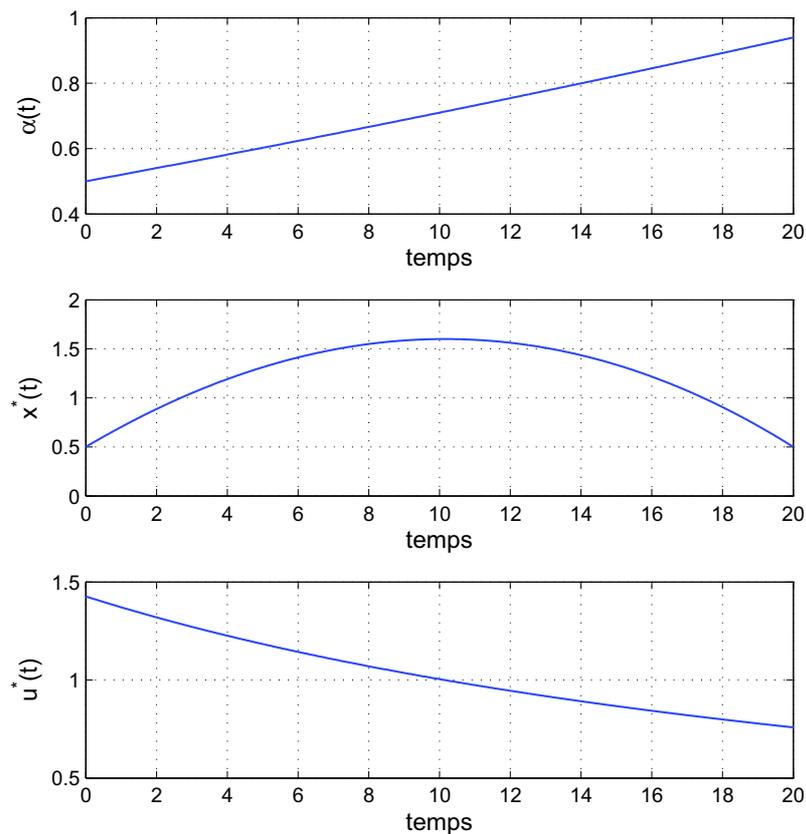


FIG. 3.3: Trajectoires optimales pour le problème (3.28) sans contrainte sur l'état : $\alpha(t)$ (haut), $x^*(t)$ (milieu) et $u^*(t)$ (bas).

On introduit maintenant une contrainte de borne sur x : $x \leq 1$. Il est clair que le contrôle précédemment trouvé ne permet pas de satisfaire cette contrainte, la trajectoire passant au delà de $x = 1,5$. Ce nouveau problème peut être résolu avec diverses méthodes : la programmation dynamique, une méthode de Tir multiple (grâce à la connaissance de la forme de la trajectoire), etc. Nous choisissons ici SCOP, pour sa rapidité d'exécution et sa simplicité. L'application de SCOP sur ce nouveau problème nous permet d'obtenir les trajectoires suivantes, Figure 3.4 :

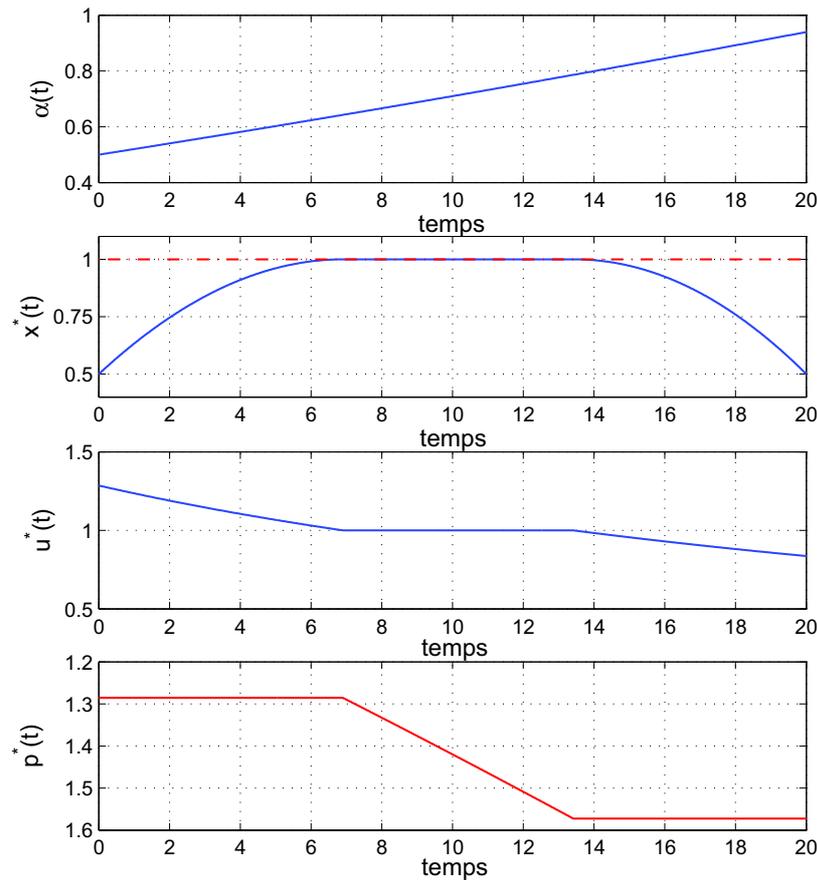


FIG. 3.4: Trajectoires optimales pour le problème (3.28), contraint par $x \leq 1$: $\alpha(t)$ (haut), $x^*(t)$ (haut), $u^*(t)$ (bas) et $p^*(t)$ (bas).

On constate que la trajectoire optimale de l'état $x^*(t)$ vérifie bien la contrainte imposée $x \leq 1$. Le multiplicateur $p^*(t)$ n'est plus constant sur $[0, 20]$: il reste constant lorsque les contraintes d'état sont inactives, mais évolue ensuite dès qu'une contrainte est saturée. On peut retrouver numériquement son évolution, étant donné que sur la portion où $x = 1$, on a nécessairement $u = 1$, ce qui impose $p = -2\alpha$. La trajectoire optimale de $x(t)$ a été validée en résolvant le même problème d'optimisation avec la programmation dynamique.

On suppose finalement qu'une légère perturbation s'applique sur $\alpha(t)$ lorsque la contrainte $x \leq 1$ est d'ordinaire active. Cette perturbation, si elle est relativement peu élevée, peut se trouver "effacée" par les erreurs de discrétisation lors de la résolution par un algorithme classique, comme la programmation dynamique (voir résultats Figure 3.6). SCOP nous permet d'obtenir les résultats suivants :

3.4 L'algorithme SCOP

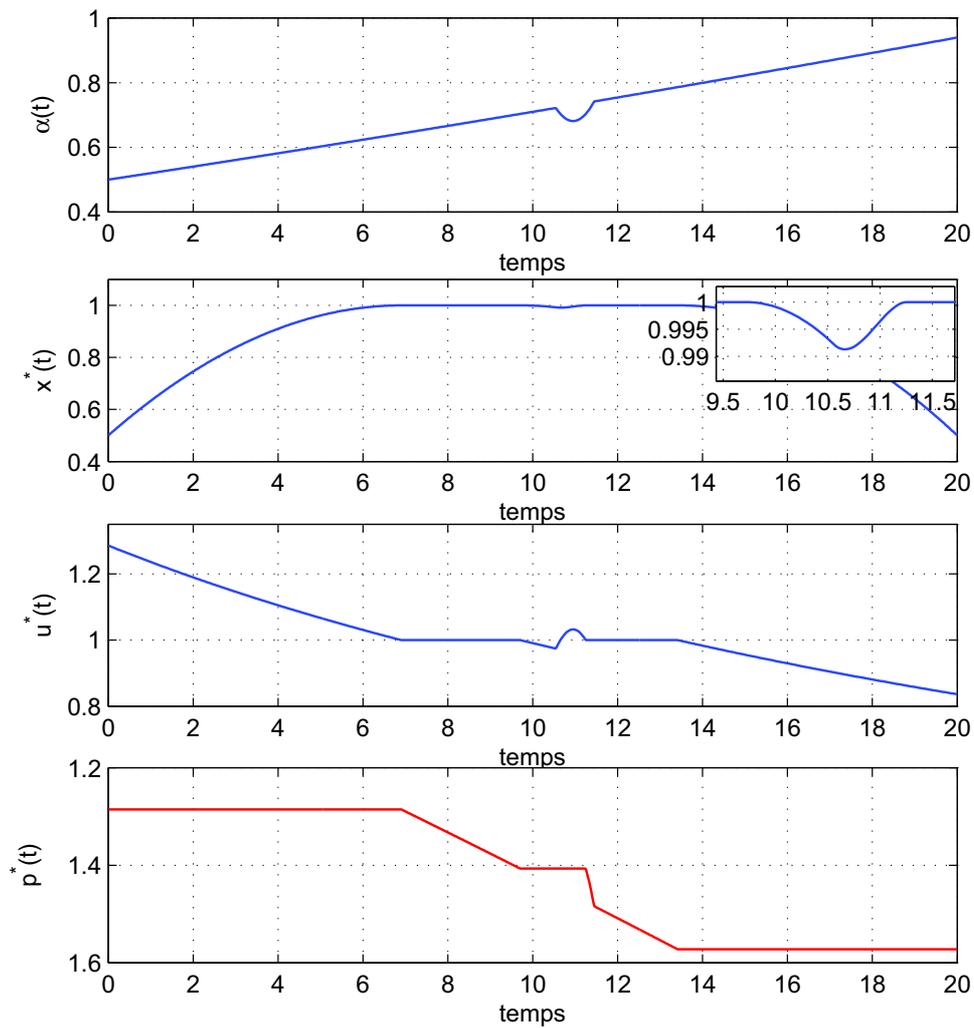


FIG. 3.5: Trajectoires optimales pour le problème (3.28), contraint par $x \leq 1$ et α modifié.

Il est notamment intéressant de comparer le temps de calcul nécessaire à une résolution par programmation dynamique, à celui que l'on obtient avec SCOP. La Figure 3.6 indique le temps nécessaire à l'obtention des différentes courbes.

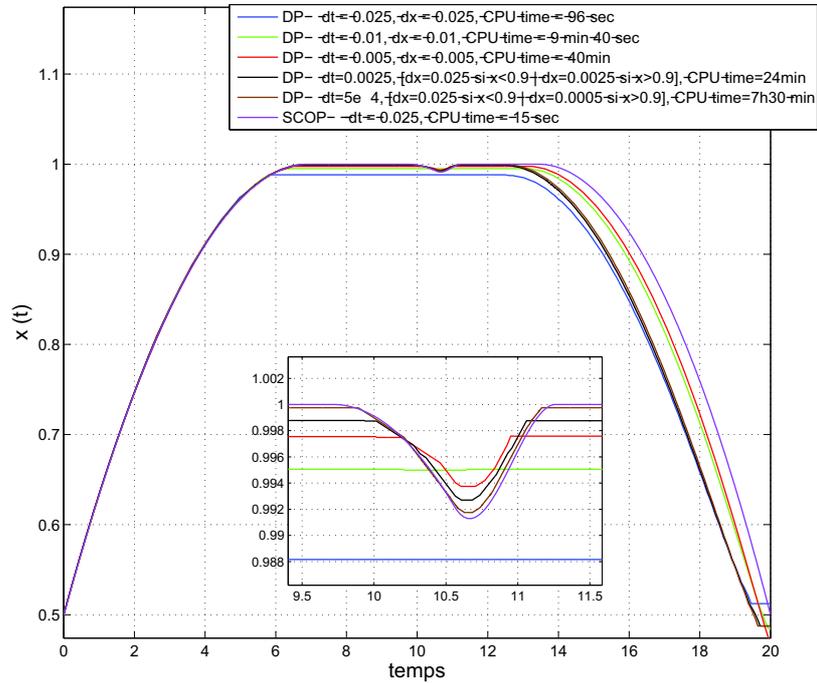


FIG. 3.6: Trajectoires optimales & temps de calcul avec SCOP et Programmation Dynamique (DP) pour le cas présenté Figure 3.5.

Le temps nécessaire pour la convergence de SCOP est d'environ 15 secondes, tandis que pour obtenir une courbe proche de celle de SCOP, la programmation dynamique requiert plus de 7 heures, qui plus est en utilisant un maillage plus fin à proximité de la contrainte d'état $x \leq 1$. On remarque que sur certaines courbes, la contrainte sur la valeur de l'état final est mal vérifiée, cela peut être partiellement corrigé en pénalisant davantage cette contrainte dans l'expression du coût au temps T .

3.4.4 Commentaires sur la méthode SCOP

L'algorithme SCOP a été appliqué sur différents problèmes, avec les hypothèses suivantes :

- une ou deux contraintes de bornes sur un seul état, indépendantes de la variable d'évolution (le temps t , ou bien l'abscisse x dans le cas d'une corde suspendue),
- une équation du système linéaire en x (ou sans dépendance en x).

Les limites de cet algorithme concernent le domaine d'applicabilité, qui est encore mal connu. Cet algorithme a été appliqué à des problèmes dont l'équation du système est telle que \dot{x} dépend linéairement de x , voire ne contient pas x dans l'équation d'évolution. La convergence de SCOP vers la solution optimale a été démontrée pour deux applications différentes (voir section 3.4.6). En dehors de ces hypothèses, la convergence de l'algorithme n'a pas été testée.

3.4.5 Application aux véhicules hybrides

Le problème de l'optimisation de la répartition de couple sur véhicule hybride est peu différent de celui traité dans la section 3.4.3. Le terme $\alpha(t)$ est plus complexe, et correspond à une demande de couple, et le terme à minimiser, noté L est une fonction convexe en couple.

Hypothèses de simplification

Il n'est a priori pas possible d'appliquer l'algorithme SCOP sur des problèmes d'optimisation du type (1.2), à cause du terme $C_0 \max(0, \mathbf{f})$, le critère à minimiser dépendant alors de la variable d'état discrète r et de sa dérivée. On considérera donc ici le problème du type (1.1).

D'autre part, afin de disposer d'une solution analytique, on approche la cartographie de consommation par un polynôme du second degré, noté L_p , polynôme convexe en couple T_e . Cette approximation nous permet de modéliser simplement la consommation de carburant avec une faible erreur (par rapport à la cartographie réelle).

Enfin, on considère que le rendement du moteur électrique est constant. Le problème d'optimisation à résoudre est donc le problème (3.24) avec $L = L_p$.

Résolution

Pour résoudre le problème d'optimisation, on passe par une série de sous-problèmes, de la forme définie par (3.25) et (3.26). Ces sous-problèmes sont résolus par une méthode de tir : on forme l'Hamiltonien, et l'on minimise celui-ci sur l'espace propre au sous-problème, sous la contrainte d'atteindre un certain état final. L'Hamiltonien s'écrit

$$H(u, t, p) = L_p(u, t) + p(t)f(u, t). \quad (3.30)$$

Comme H ne dépend pas de x , la condition d'optimalité (2.3b) mène à $\dot{p} = 0$, c'est à dire $p = p_0$. En omettant les contraintes sur la commande, on trouve le minimum de H en calculant $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, ce qui conduit à

$$\frac{\partial L_p}{\partial u} + p_0 \frac{\partial f}{\partial u} = 0. \quad (3.31)$$

Avec $L(\omega_e, T_e) = \sum_{i,j=0}^2 K_{ij} \omega_e^i T_e^j$, la commande optimale u_{nc}^* du problème non contraint s'écrit

$$u_{nc}^*(t) = - \frac{\sum_{i=0}^2 K_{i1} \omega(t)^i + p_0 K \omega(t)}{2 \sum_{i=0}^2 K_{i2} \omega(t)^i T_{rq}(t)}. \quad (3.32)$$

Il suffit ensuite de projeter $u_{nc}^*(t)$ sur l'espace admissible $[u_{\min}(t), u_{\max}(t)]$ pour connaître la commande optimale $u^*(t)$.

Comparaison résultats de SCOP / Programmation dynamique

SCOP est appliqué sur le cas du véhicule étudié dans le Chapitre 4, et comparé aux résultats obtenus avec la programmation dynamique. On choisit volontairement le cycle Artemis sur lequel doit être optimisée la répartition de couple, celui-ci n'étant pas construit artificiellement comme le cycle NEDC, et comportant davantage de variété dans les conditions de fonctionnement des deux moteurs électrique et thermique. La taille de la batterie a été volontairement considérée égale à 150kW/h, pour que la trajectoire d'état de charge soit contrainte par les bornes admissibles, $x_{\min} = 50\%$ et $x_{\max} = 70\%$.

La Figure 3.7 représente les trajectoires obtenues par SCOP et par la programmation dynamique, pour le même suivi de cycle.

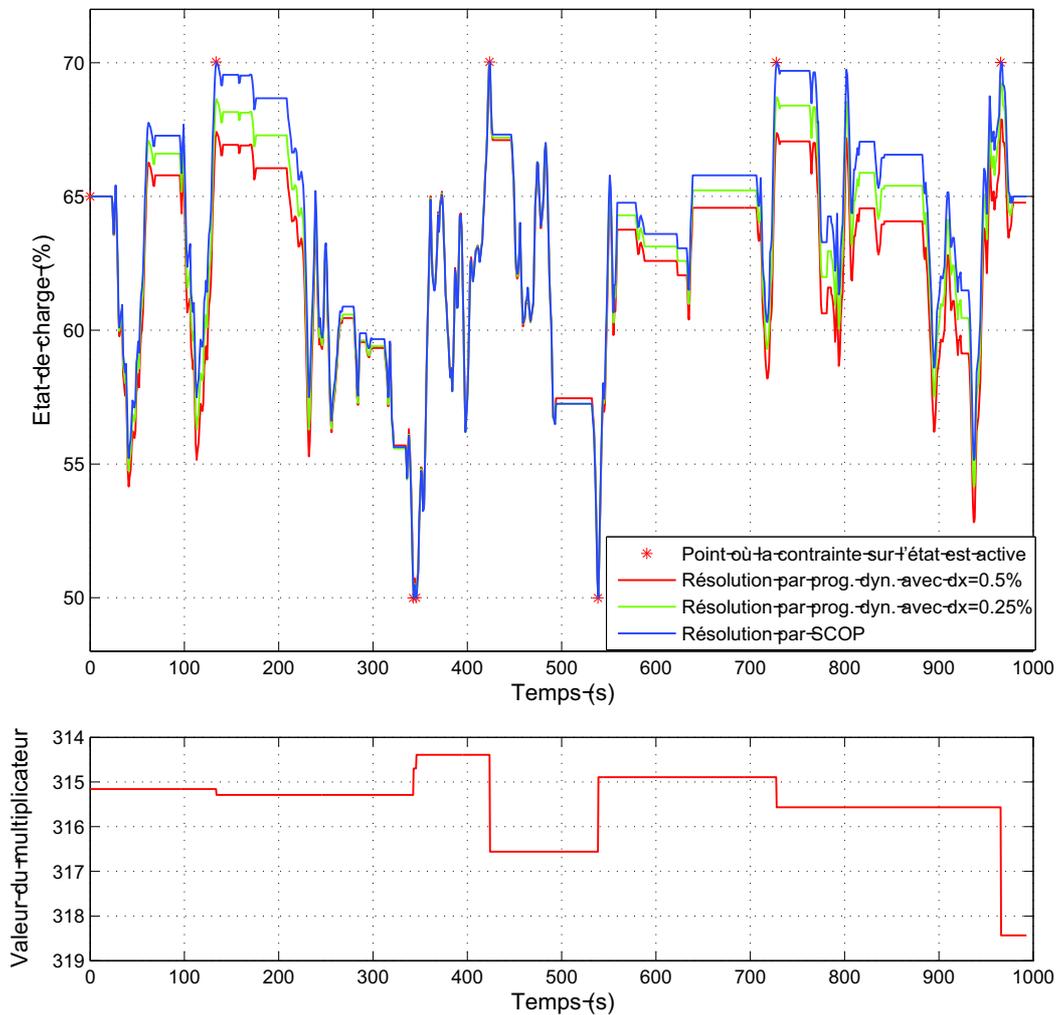


FIG. 3.7: Comparaison de trajectoires optimales obtenues par programmation dynamique et SCOP (haut), trajectoire optimale du multiplicateur de Lagrange p à l'aide de SCOP (bas)

On peut remarquer que les trajectoires optimales de l'état obtenues par la programmation dynamique tendent à se rapprocher de la solution donnée par SCOP à mesure que l'on réduit le pas de discrétisation sur l'état. Des courbes similaires comparant la programmation dynamique à SCOP, pour une autre application de véhicule hybride, se trouvent dans [Rousseau et al., 2006b].

L'algorithme SCOP permet de connaître les valeurs du multiplicateur $p(t)$ associé à la trajectoire optimale de l'état (voir Figure 3.7 (bas)). Ainsi, la connaissance de ces valeurs est particulièrement intéressante pour la mise au point de lois temps-réels, telles que l'ECMS (voir section 5.1.3).

Enfin, grâce à la connaissance de $p(t)$, on peut tracer les trajectoires $(\omega_e(t), T_e(t))$, en résolvant l'équation $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, et en exprimant le couple T_e en fonction du régime ω_e . La Figure 3.8 représente ces courbes, ainsi que les points de fonctionnement du moteur thermique (ω_e, T_e) , du moteur électrique, et les points de consigne, l'ensemble étant exprimé au niveau du moteur thermique.

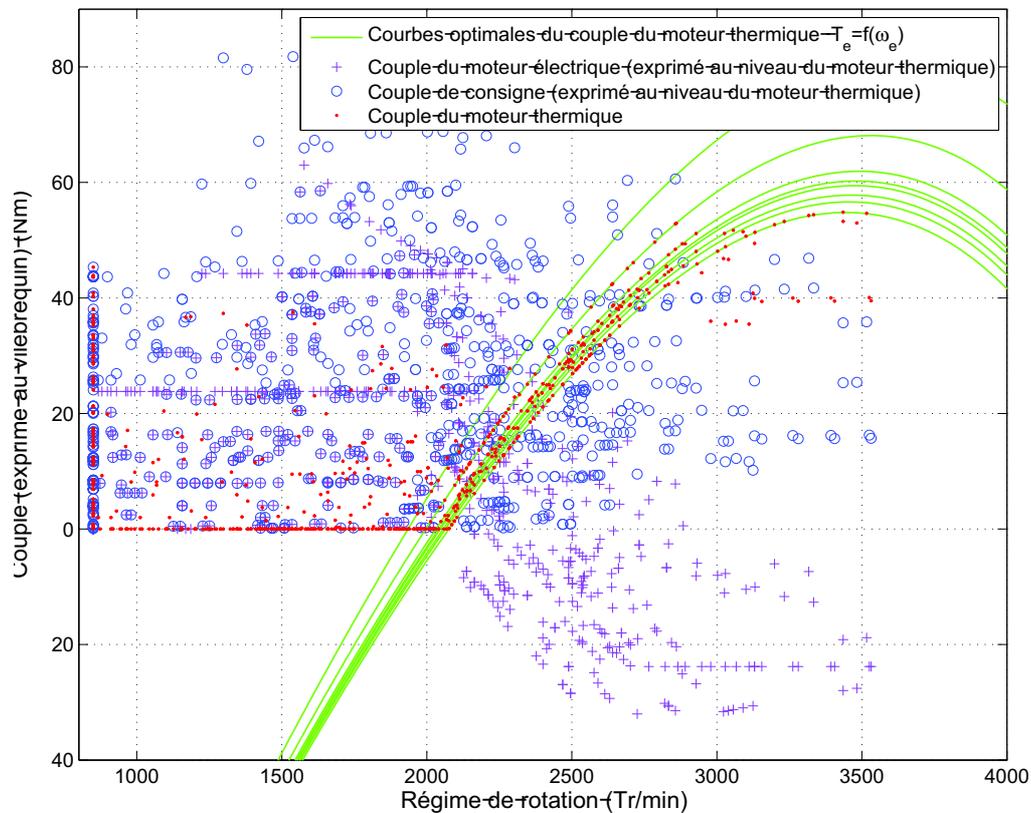


FIG. 3.8: Couple de consigne, couple du moteur électrique (ramené au niveau du moteur thermique) et couple du moteur thermique en fonction du régime. / Faisceaux de courbes représentant les points de fonctionnement optimaux du moteur thermique pour le véhicule de référence sur le cycle Artemis.

On remarque aisément que la majorité des points de fonctionnement se situe sur les courbes vertes. Lorsque c'est possible, le moteur thermique se place sur une de ces courbes, utilisant soit le mode régénération pour fournir un couple T_e supérieur au couple de consigne, soit le mode boost pour fournir un couple T_e inférieur au couple de consigne. Comme l'expression $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, dont sont dérivées les courbes optimales du couple du moteur thermique, ne prennent pas en compte les contraintes sur u , les points de fonctionnement du moteur thermique ne peuvent tous se placer sur ces courbes.

De plus, en traçant les points de consigne (qui correspondent aussi aux points de fonctionnement du moteur thermique pour un véhicule identique non muni d'un moteur électrique), ainsi que les points de fonctionnement optimaux du moteur thermique pour le véhicule hybride, que l'on superpose à la cartographie de consommation spécifique (issu du calcul polynomial, donc légèrement différente de la Figure 4.1 qui représente la vraie cartographie), Figure 3.9, on remarque que les points de fonctionnement optimaux ne sont pas forcément ceux qui sont placés dans la zone de meilleur rendement. C'est en fait un compromis global entre la minimisation de la consommation, la contrainte d'égalité sur l'état final, et la prise en compte de l'ensemble des contraintes sur la commande.

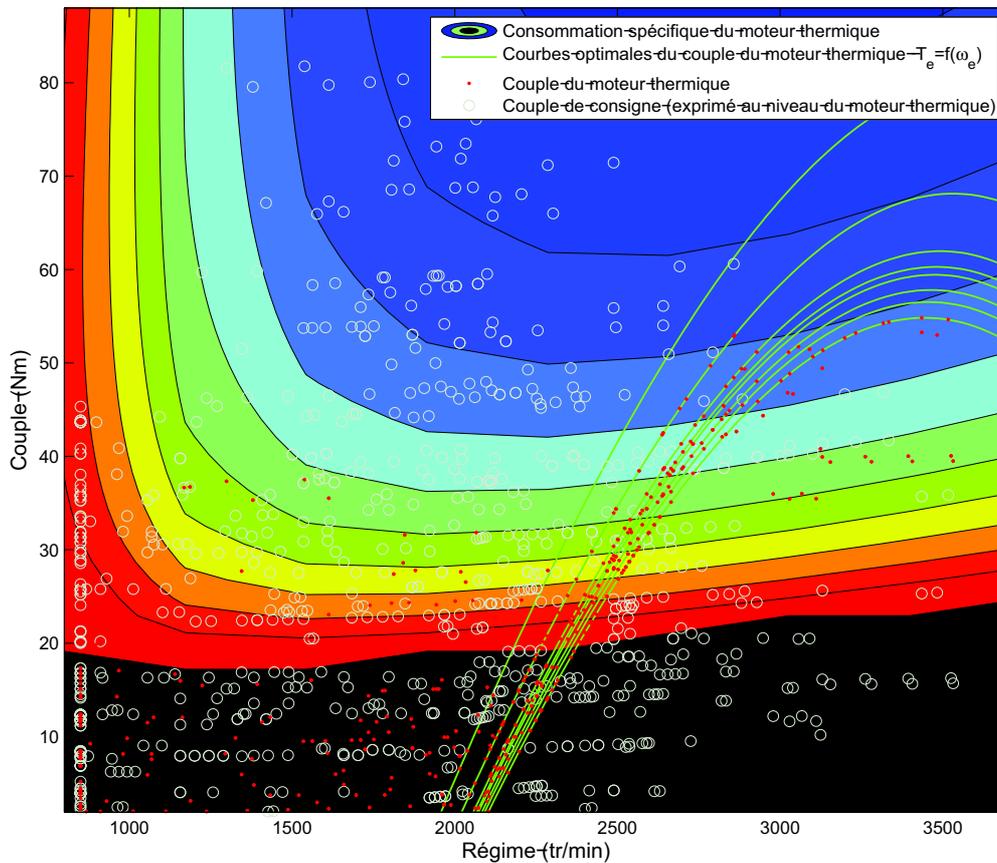


FIG. 3.9: Couple de consigne, couple du moteur électrique (ramené au niveau du moteur thermique) et couple du moteur thermique en fonction du régime. / Faisceaux de courbes représentant les points de fonctionnement optimaux du moteur thermique pour le véhicule de référence sur le cycle Artemis.

3.4.6 Etude de convergence de SCOP

La démonstration de la convergence de SCOP est présentée dans l'article nommé *SCOP : a Sequential Constraint-free Optimal control Problem algorithm* qui fut présenté au CCDC 2008 (Chinese Control and Decision Conference), à Yantai, Chine (voir Annexes A).

Cette démonstration a été menée pour deux cas simples :

1. L'optimisation de la répartition de couple sur un modèle très simplifié de véhicule hybride, dans le cas d'une demande de puissance monotone sur $[0, T]$.
2. La minimisation énergétique d'une corde reposant sur un support plan, et attachée à ses deux extrémités,

3.4.7 Perspectives

Les perspectives de SCOP sont assez larges, d'un point de vue du champs d'application. Cet algorithme a été testé dans le cas d'un système à un seul état, sur deux cas d'application assez différents. Sa

3.4 L'algorithme SCOP

convergence a été démontrée sur ces deux applications, l'une d'elle (le véhicule hybride) sous certaines hypothèses, notamment de monotonie sur $\alpha(t)$. Néanmoins on constate, par comparaison avec la programmation dynamique, que SCOP fonctionne aussi sans l'hypothèse de monotonie sur $\alpha(t)$, et avec la présence de contraintes de borne dépendant du temps sur $u(t)$.

SCOP a aussi été testé avec une vraie cartographie de consommation (non polynomiale), pour laquelle il faut procéder à un vrai "tir", en procédant par une minimisation sur l'Hamiltonien H à chaque pas de temps. Dans ce cas, il n'existe pas de solution analytique pour u , le temps de convergence de SCOP augmente donc de manière substantielle.

L'utilisation de SCOP pour la résolution de problèmes de contrôle optimal dont l'état ne serait plus un scalaire n'a pas été étudiée, ni son implémentation. Pour un système comportant plusieurs états, la résolution devra notamment gérer les situations où plusieurs états violent des contraintes de façon simultanée.

D'autre part, la validité des résultats de SCOP dans le cas d'un problème dont les contraintes d'état dépendraient du temps est encore inconnue. Il serait néanmoins intéressant de poursuivre les recherches dans ce sens.

Chapitre 4

Application sur un véhicule Citroën C1 hybridé

4.1 Objectifs

L'objectif est de déterminer pour un véhicule hybride donné, quelles sont les tailles et puissances des moteurs les mieux adaptées au suivi d'un cycle Européen. On parlera de taille optimale d'un composant lorsque celui-ci permettra de minimiser la consommation de carburant, tout en n'étant pas surdimensionné. Pour déterminer ces tailles, on calculera la commande optimale sur le cycle NEDC, qui nous donnera la consommation minimale sur ce cycle.

Le problème de commande optimale résolu dans ce chapitre, dont les résultats sont présentés ci-après, correspond au problème du type (1.2). La résolution utilisée fait appel à la programmation dynamique (voir section 3.3.5).

Le véhicule qui sert de base à cette étude est une Citroën C1, sur laquelle sont implantés des éléments de traction électrique. Ce véhicule n'existe pas dans la réalité, néanmoins il permettra d'évaluer l'influence – sur la consommation de carburant – d'un paramètre dimensionnant (capacité, puissance, etc.) d'un élément d'une architecture hybride.

Dans cette étude, nous considérons qu'un moteur électrique est disposé en aval de la transmission, en liaison directe avec les roues. Le moteur thermique, quant à lui, reste indirectement lié au train avant via une boîte de vitesses classique et un embrayage, comme sur un véhicule traditionnel. L'architecture considérée ici correspond donc à un hybride parallèle.

Avec cette configuration, la position du moteur électrique lui permet d'être indépendant du moteur thermique, ce qui autorise donc l'utilisation du moteur électrique seul comme source de puissance, le moteur thermique étant alors arrêté. D'autre part, le fait de placer le moteur électrique au niveau des roues (au rapport de réduction près) permet de profiter pleinement du freinage récupératif, tout en ne gardant qu'un seul embrayage comme sur les véhicules conventionnels.

Le modèle de référence utilisé pour l'optimisation de la consommation sur cycle doit reproduire aussi fidèlement que possible les "stabilisés" du cycle, i.e. les zones de fonctionnement où la vitesse du véhicule est constante. Ce sont en effet ces parties qui sont prépondérantes et qui constituent la part la plus importante de la consommation de carburant sur cycle.

Ce véhicule Citroën C1 hybridé possède les caractéristiques suivantes :

- la masse du véhicule est de 910 kg. Nous considérons la même masse pour le véhicule hybridé.
- le moteur thermique est un moteur essence de 1 litre de cylindrée.
- la boîte de vitesse est une boîte manuelle à 5 rapports.

4.2 Modèles utilisés pour l'optimisation hors-ligne

Les techniques utilisées pour résoudre le problème de l'optimisation hors-ligne nécessitent d'avoir des modèles dont le temps d'exécution soit faible. Aussi les modèles choisis, présentés par la suite, permettent de connaître les tendances d'évolution du gain en consommation lors de la variation d'une grandeur caractéristique de ces modèles.

4.2.1 Véhicule

Lors de l'optimisation de la répartition de couple d'un véhicule hybride sur cycle, le véhicule suit une consigne de vitesse en km/h, donnée en fonction du temps. Pour pouvoir suivre cette consigne, le véhicule doit fournir un couple aux roues, noté T_{rq} , tel que :

$$T_{rq}r_{roues} - \sum F_{res} = m\gamma, \quad (4.1)$$

où le couple T_{rq} correspond au couple aux roues nécessaire au véhicule pour suivre le cycle de vitesse, r_{roues} est le rayon des roues, $\sum F_{res}$ représente les forces qui s'appliquent au véhicule (aérodynamique, résistance au roulement, etc.), m représente la masse totale du véhicule, et γ est son accélération.

Pour un véhicule hybride, le couple T_{rq} peut être fourni par le moteur électrique, dont le couple est T_m , et par le moteur thermique dont le couple est T_e (e comme *engine*). Les différents rapports de réduction mènent à l'égalité suivante :

$$T_{rq}(t) = R_p R_b(t) T_e(t) + R_h T_m(t) + T_{bk}(t), \quad (4.2)$$

où les rapports $R_b(t)$, R_p , et R_h correspondent respectivement au rapport de boîte (défini par le conducteur), rapport de pont (caractéristique du véhicule) et au rapport de réduction entre les roues et l'axe du moteur électrique. Le couple T_{bk} correspond au couple de freinage, quand le véhicule doit être ralenti.

4.2.2 Batterie

Pour le cas de référence à partir duquel on effectuera des variations paramétriques sur les éléments de l'architecture hybride, la batterie possède :

- Une énergie spécifique, correspondant à la capacité de la batterie. Pour notre véhicule, on considère une batterie de capacité identique à celle de la Prius, c'est à dire 1,3 kW/h.
- Une puissance spécifique, correspondant à un courant maximal que peut débiter la batterie, sous une tension donnée. En ce qui concerne cette batterie, nous considérons la puissance spécifique de la Prius (2^{de} génération) qui possède une puissance spécifique de 1300W/kg. La tension de fonctionnement se situe à 300V.

L'état de charge de la batterie, notée x dans la suite, est une image de la quantité d'énergie présente dans la batterie. On peut raisonnablement écrire :

$$x(t) = \frac{Q(t)}{Q_0}, \quad (4.3)$$

$Q(t)$ représentant la charge de la batterie, et Q_0 la capacité de la batterie. L'état de charge x varie ici entre 0 et 1.

Comme on considère de faibles variations d'état de charge, on représente la batterie par une capacité, en négligeant de plus la résistance interne de la batterie. On considère par ailleurs que la tension à ses bornes est constante, i.e. $U_c(t) = U_c$. À partir de l'équation régissant l'évolution de la charge aux bornes d'une capacité

4.2 Modèles utilisés pour l'optimisation hors-ligne

$$I_c(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}, \quad (4.4)$$

$I_c(t)$ étant le courant absorbé (ou fournit) par le convertisseur, on obtient :

$$x(t) = -\frac{1}{Q_0} \int_0^t I_c(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

A partir de l'expression (4.8), le courant s'exprime par

$$I_c(t) = \frac{\omega_m(t) T_m(t)}{\eta_m U_c}. \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) s'écrit à nouveau

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega_m(t) T_m(t)}{Q_0 U_c}.$$

soit

$$\dot{x}(t) = -K \omega_m(t) T_m(t), \quad (4.7)$$

avec $K = -\frac{1}{Q_0 U_c}$.

4.2.3 Moteur électrique et convertisseur

Au premier ordre, le moteur électrique peut être représenté par un élément transformant de manière instantané le courant absorbé en un couple (et inversement). Le rendement du moteur est exprimé en fonction du régime de rotation ω_m et du courant I_c . Le couple du moteur électrique T_m s'écrit alors

$$T_m(t) = \eta_m(\omega_m, I_c) \frac{U_c(t) I_c(t)}{\omega_m(t)}, \quad (4.8)$$

où U_c correspond à la tension aux bornes du convertisseur relié au moteur électrique, I_m est le courant absorbé (ou fournit) par le convertisseur, et η_m est le rendement du moteur électrique.

On considère dans cette étude que le moteur électrique possède une efficacité constante de 0,85. C'est en partie cette donnée qui conditionnera l'intérêt – ou non – d'utiliser successivement le moteur thermique pour régénérer la batterie, puis le moteur électrique pour réduire le couple du moteur thermique. Si cette hypothèse peut manquer de réalisme, elle permet de bien découpler les phénomènes, et d'analyser plus facilement les résultats.

4.2.4 Moteur thermique.

Le moteur thermique est caractérisé par son couple T_e , son régime ω_e , et sa consommation instantanée L [Heywood, 1988]. On considère que le temps de réponse du moteur est instantané. La consommation de carburant est modélisée par une cartographie donnant la consommation en fonction du régime ω_e (tr/min) et du couple délivré T_e (en Nm). La consommation du moteur thermique s'écrit L , et s'exprime en (g/s).

La Figure 4.1 représente la consommation spécifique du moteur de la Citroën C1, qui est une image du rendement global du moteur. Sur cette figure apparaissent clairement les zones de meilleure efficacité, qui correspondent aux zones où la consommation spécifique est la plus faible.

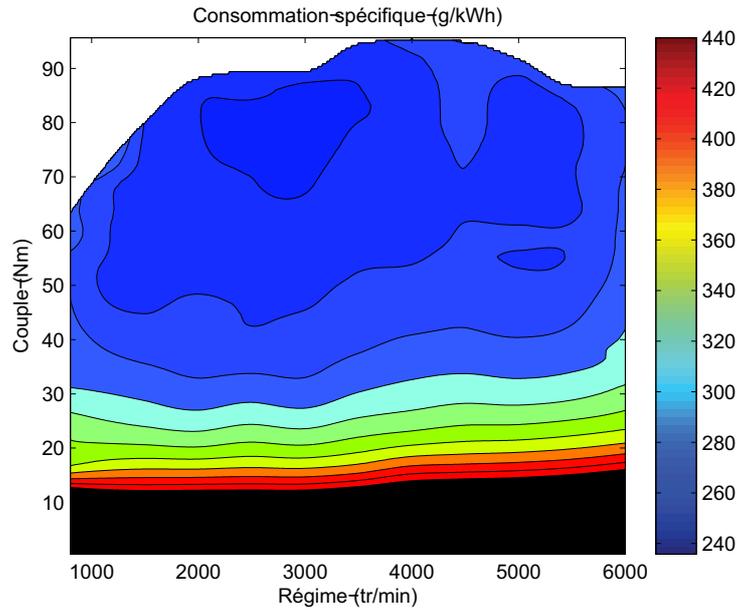


FIG. 4.1: Représentation de la consommation spécifique du moteur thermique de la Citroën C1

D'autre part, le couple du moteur est limité par un couple maximal T_e^{\max} , dépendant du régime ω_e , représenté par une cartographie. La Figure 4.2 représente l'allure du couple maximal T_e^{\max} en fonction du régime ω_e .

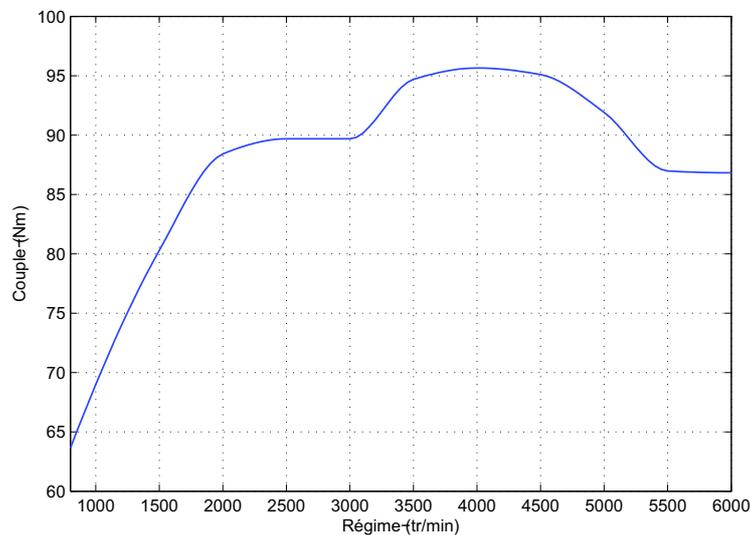


FIG. 4.2: Représentation du couple maximal T_e^{\max} en fonction du régime ω_e

4.3 Critères et variables d'optimisation

Le critère à minimiser reste identique au précédent : on souhaite trouver le minimum de la consommation de carburant sur un cycle prédéfini à l'avance. Pour cette étude, le cycle NEDC s'impose natu-

4.4 Impact des fonctionnalités de l'architecture.

rellement, étant celui qui sert de référence pour le suivi des normes actuelles Euro 4 pour les véhicules neufs.

Lorsque l'on souhaite définir certaines caractéristiques d'un véhicule hybride, plusieurs composants peuvent être définis directement par le constructeur. Modifier certaines grandeurs caractéristiques de ces composants aura de multiples impacts, qui permettent d'expliquer la variation de consommation :

- T_m^{\max} : la puissance maximale du moteur électrique (à régime donné). Cette valeur influe à différents niveaux, mais aura uniquement une influence sur les contraintes sur la commande u :
 - a La capacité du véhicule à passer en mode purement électrique, i.e. à couper le moteur thermique. Cela dépend directement du couple maximal que peut fournir le moteur électrique pour assurer un suivi de la vitesse de consigne.
 - b La possibilité de réduire le couple du moteur thermique pour passer sur des points de meilleure efficacité.
 - c L'énergie récupérable lors d'un freinage, ou lors d'une régénération avec le moteur thermique.
- La capacité de la batterie. Si celle-ci est faible, les contraintes de bornes sur l'état de charge seront souvent actives, réduisant les possibilités de réduction de consommation.

On définit pour le problème d'optimisation étudié les commandes suivantes :

1. Le facteur de répartition u , représentant la répartition de couple entre le moteur électrique et le moteur thermique. Il relie le couple de consigne T_{rq} aux couples des moteurs thermique T_e et électrique T_m via les relations suivantes :

$$\begin{cases} T_e(t) &= \frac{1}{R_p R_b(t)} u(t) T_{rq}(t) \\ T_m(t) &= \frac{1}{R_h} (1 - u(t)) T_{rq}(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

2. La commande marche / arrêt du moteur thermique : v , qui permet de commander l'état du moteur thermique noté r , dont les valeurs admissibles sont 0 et 1, correspondant respectivement à *arrêt moteur thermique* et *démarrage moteur thermique*.

Ces commandes correspondent à celles qui ont été déjà définies dans le problème discrétisé et utilisées via la programmation dynamique (voir section 3.3.5).

4.4 Impact des fonctionnalités de l'architecture.

4.4.1 Véhicule conventionnel

Le véhicule conventionnel est uniquement équipé d'un moteur thermique classique fonctionnant à l'essence. Celui-ci est donc utilisé pour le suivi du cycle en accélération et en vitesse stabilisée, le dispositif de freinage mécanique se chargeant de ralentir le véhicule durant les phases de freinage.

La consommation du véhicule conventionnel sur le cycle NEDC, calculée avec notre modèle, est de 4,11 l/100 km. La Figure 4.3 montre les points de fonctionnement du moteur thermique sur le cycle NEDC, superposés à sa consommation spécifique.

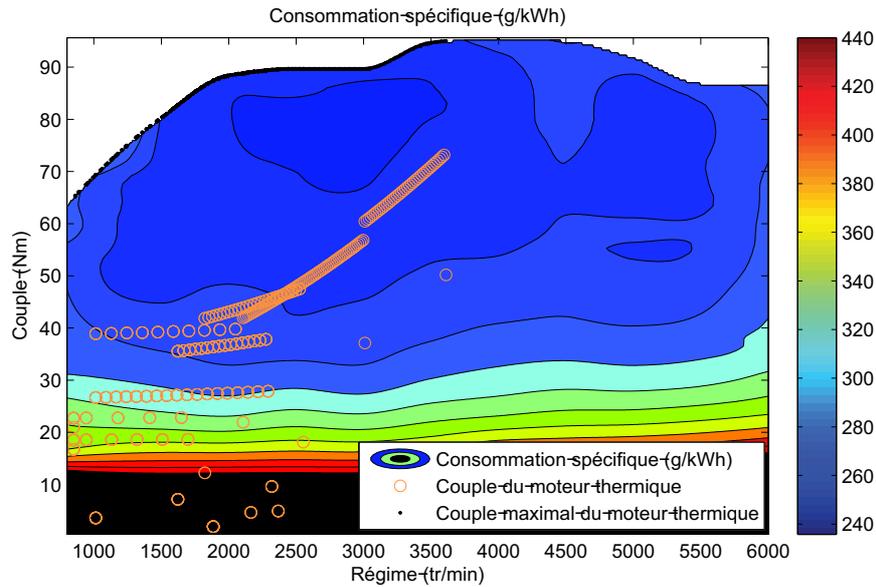


FIG. 4.3: Points de fonctionnement (régime/couple) du moteur thermique sur le cycle NEDC superposés à la consommation spécifique.

L'indice de couleur est une image de l'efficacité : la couleur marron indique les zones de faible rendement, tandis que la couleur bleue foncée indique les zones de meilleur rendement (où la consommation spécifique est la plus faible). On peut remarquer que les points de fonctionnement du moteur thermique sont situés dans une zone de faible régime et faible couple, correspondant au quatre cycles ECE15, ainsi que dans une zone de régime et de couple plus élevés, correspondant à la partie EUDC du cycle NEDC. Les points de fonctionnement du moteur durant les cycles ECE15 sont particulièrement défavorables d'un point de vue énergétique, le rendement du moteur thermique étant faible. D'autre part, on peut remarquer que peu de points se trouvent dans la zone de bon rendement.

Remarque 4.4.1. Peu de points (cercles orange) apparaissent sur la Figure 4.3 : les points sont en fait superposés. Cela est dû au cycle qui comporte des portions identiques répétées plusieurs fois, et au calcul du couple nécessaire au suivi de la vitesse de consigne. Le modèle ne comportant pas de modélisation du conducteur (c'est un modèle backward), le cycle est parfaitement suivi, ce qui explique que les portions du cycle qui sont identiques donnent lieu exactement aux mêmes points de fonctionnement du moteur thermique.

4.4.2 Résultats sur le cas de référence

Le cas de référence correspond au véhicule conventionnel, équipé en plus d'un moteur électrique de 10kW, et d'une batterie de 1,3 kWh. Le moteur électrique se trouve en aval de la transmission, permettant à celui-ci d'assurer seul la traction du véhicule, le moteur thermique étant alors éteint. Sur cette application, un démarreur suffisamment puissant permet d'entraîner rapidement le moteur thermique pour pouvoir faire du Stop-and-Start. On considère que, pour ce véhicule hybride, le poids global est identique à celui du véhicule conventionnel. L'optimisation est réalisée sur le cycle NEDC dans un premier temps, à l'aide de la programmation dynamique. La consommation de ce véhicule hybride, après optimisation, est de 2,9 l/100 km, ce qui correspond à un gain de 29,4 %.

Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 4.4.

4.4 Impact des fonctionnalités de l'architecture.

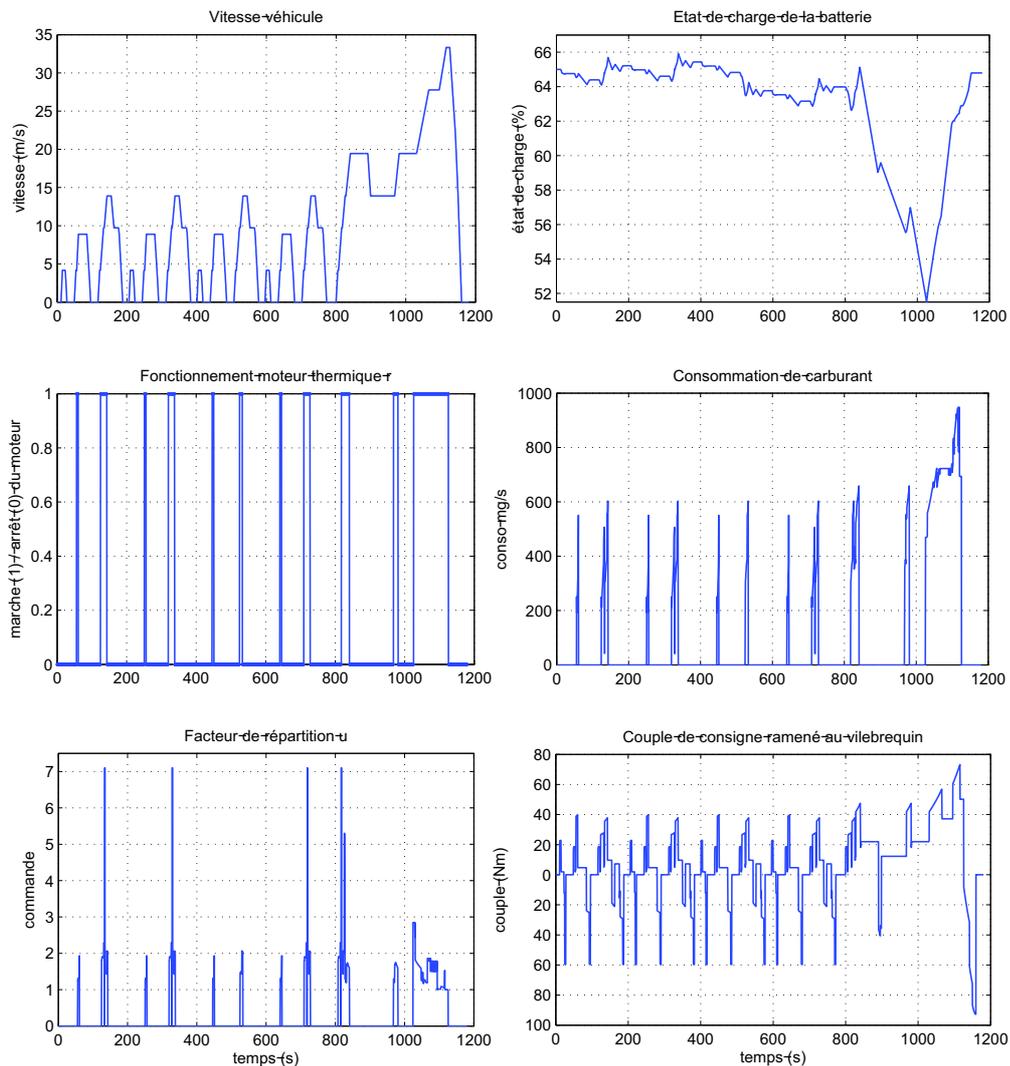


FIG. 4.4: Couples, vitesses et consommation de carburant pour le cas de référence de la C1 sur le cycle NEDC.

On remarque que le moteur thermique n'est utilisé que lors des accélérations, lorsque le couple de consigne est assez élevé. D'autre part, lorsqu'il est utilisé, son couple est souvent supérieur au couple de consigne, afin de recharger la batterie grâce au moteur électrique. L'état de charge décroît notablement entre $t = 800$ s et $t = 1000$ s, à cause d'une utilisation importante du moteur électrique, puis augmente durant le freinage récupératif.

Remarque 4.4.2. *Le facteur de répartition de couple entre les deux moteurs, correspondant à la commande u , n'a de sens que lorsque le moteur thermique est allumé. Dans le cas où celui-ci est éteint, $u = 0$ par défaut.*

La Figure 4.5 montre le déplacement des points de fonctionnement du moteur thermique sur le cycle NEDC. Une partie de ceux-ci se sont déplacés vers les zones de meilleurs rendements, tandis que les autres sont ramenés à zéro, le moteur étant alors éteint.

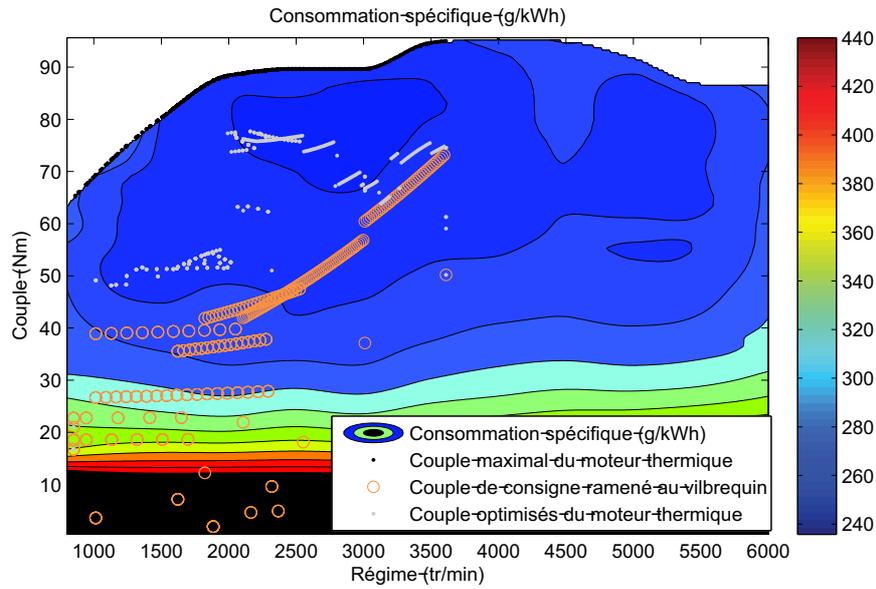


FIG. 4.5: Points de fonctionnement (régime/couple) du moteur thermique en mode conventionnel et en mode hybride sur le cycle NEDC superposés à la consommation spécifique.

Il est intéressant d'étudier plus en détail les résultats des 200 premières secondes du cycle, Figure 4.6.

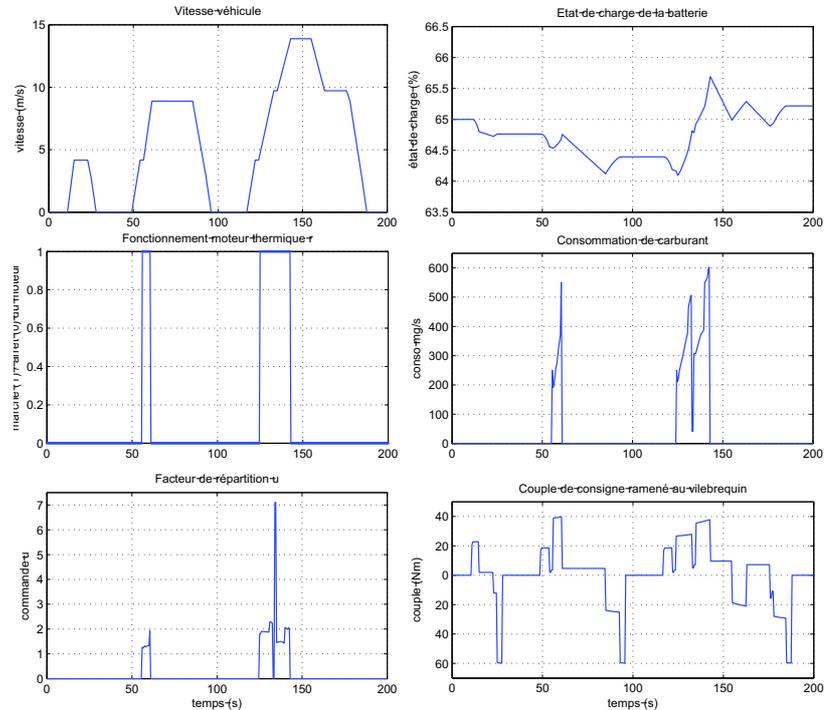


FIG. 4.6: Couples, vitesses et consommation de carburant pour le cas de référence de la C1 sur le cycle NEDC (zoom sur les 200 premières secondes du cycle).

Le moteur thermique n'est utilisé que durant la deuxième et la troisième accélération, lorsque celles-

4.4 Impact des fonctionnalités de l'architecture.

ci lui permettent de fonctionner à un bon rendement. D'autre part, durant ces phases de fonctionnement, $u \geq 1$ ce qui indique qu'une partie du couple du moteur thermique est utilisée pour la recharge de la batterie durant le mode régénération. Lors de ces phases de régénération de la batterie, il n'est pas toujours possible – ou optimal – d'avoir un fonctionnement du moteur thermique à rendement maximum, pour plusieurs raisons :

- si le moteur électrique a déjà atteint son couple minimal, alors le couple du moteur thermique ne peut plus être augmenté davantage, et le point de rendement maximal ne peut être atteint.
- le fonctionnement en régénération permet de récupérer une énergie supplémentaire. Cette énergie supplémentaire doit pouvoir être utilisée intelligemment dans le but de réduire la consommation.
- la contrainte sur l'état final doit toujours être vérifiée, même si il est évident qu'il ne serait pas valable d'un point de vue énergétique d'avoir un état de charge final bien supérieur à l'état de charge initial.

l'énergie supplémentaire récupérée lors du fonctionnement en régénération permet de récupérer une énergie supplémentaire. Cette énergie supplémentaire doit pouvoir être utilisée intelligemment dans le but de réduire la consommation.

4.4.3 Résultats d'une hybridation partielle

On suppose maintenant que l'architecture est de type micro-hybride, ce qui implique que le moteur électrique ne peut assurer seul la demande de couple du conducteur. Le mode purement électrique est donc interdit. En revanche, le Stop-and-Start reste autorisé lorsque la vitesse du véhicule est nulle. Le moteur électrique pourra tout aussi être utilisé pour de l'assistance, ou pour de la régénération, moteur thermique allumé.

La consommation de carburant optimale de ce véhicule micro-hybride s'élève à 3,40 l/100km, ce qui revient à un gain de 17,4% comparé au véhicule conventionnel. L'interdiction de couper le moteur thermique explique la réduction importante du gain attendu (de 29,4 % à 17,4 %). Néanmoins, ce résultat reste intéressant, le prix de cette solution technique étant peu élevé. La Figure 4.7 montre le comportement optimal du véhicule lors des 200 premières secondes du cycle NEDC.

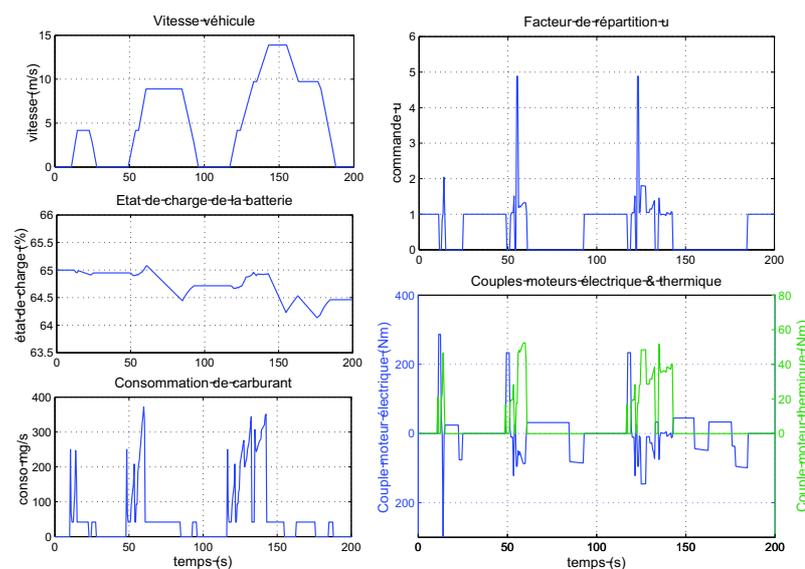


FIG. 4.7: Couples, vitesses et consommation de carburant pour le cas de référence de la C1, sans mode électrique pur, sur le cycle NEDC.

On constate, par exemple entre $t = 65$ s et $t = 90$ s, qu'il reste plus intéressant de maintenir le moteur thermique allumé sans qu'il produise de couple, même si celui-ci consomme du carburant, que de l'utiliser pour fournir le couple avec un rendement faible.

4.4.4 Résultats d'une hybridation partielle et sans Stop-and-Start

Lorsque le moteur électrique est situé au niveau des roues, on peut imaginer que le véhicule ne comportera pas forcément un système, destiné à faire du Stop-and-Start. Aussi, le véhicule correspondrait ici davantage à un véhicule conventionnel, auquel est greffé un système capable de fournir un peu d'énergie, ou d'en récupérer une partie lors des freinage ou des phases de régénération.

La consommation du véhicule, sur lequel le moteur électrique ne ferait que de l'assistance et de la récupération d'énergie s'élève à 3,64 l/100 km. Cette consommation correspond à un gain de 11,5 % par rapport au véhicule conventionnel.

Même si cette architecture ne demanderait que peu de modifications au niveau du train moteur (ajout de moteurs électriques dans les roues), cette architecture seule ne présente que peu d'intérêt, étant donné le faible gain à attendre.

4.4.5 Impact de la récupération au freinage

En interdisant la récupération au freinage pour le cas précédent, correspondant alors à une hybridation partielle sans utilisation du Stop-and-Start, la consommation est de 3,87 l/100 km, ce qui correspond à un gain de 6 % sur le cycle NEDC, soit une perte de 5,5 % par rapport au cas où le freinage récupératif est autorisé. On constate le même ordre de grandeur en interdisant le freinage récupératif dans le cas de l'hybride parallèle, présenté en section 4.4.2 : on passe de 29,4 % à 23,3 % de gain en consommation de carburant.

La récupération au freinage participe donc à la réduction de la consommation à hauteur de 5,5 à 6 % sur le cycle NEDC pour le véhicule de type C1. Ce n'est donc pas l'énergie gratuite récupérée lors d'un freinage récupératif qui permet de diminuer significativement la consommation de carburant, mais bien la capacité du véhicule à couper son moteur thermique, que ce soit à l'arrêt, ou en phase de vitesse non nulle.

4.5 Impact de la taille des éléments

4.5.1 Impact de la puissance du moteur électrique sur la consommation

Le moteur électrique peut être utilisé pour différentes fonctions : (i) freiner le véhicule lors d'un freinage récupératif, (ii) assister le moteur thermique lors d'une demande de couple, (iii) régénérer la batterie en demandant un surplus de couple au moteur thermique, (iv) assurer seul la traction du véhicule, le moteur thermique étant alors éteint.

Selon la puissance maximale et minimale du moteur électrique, certaines de ces fonctions seront soit dégradées (limitations des couples d'assistance et de régénération à cause des contraintes), soit impossibles (couple insuffisant dans le cas du mode purement électrique).

Pour mesurer l'impact de la puissance du moteur électrique, on se place à chaque fois dans le cas de référence, pour lequel seul la puissance du moteur électrique varie. On néglige ici le poids du moteur électrique, et son impact sur le poids global du véhicule, qui reste néanmoins faible.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 4.1.

4.5 Impact de la taille des éléments

TAB. 4.1: Etude de l'impact de la puissance maximale du moteur électrique

	Consommation (l/100km)	Gain (%)
Véhicule conventionnel	4,12	
HEV Moteur P = 3 kW	3,09	25 %
HEV Moteur P = 5 kW	3,00	27,0 %
HEV Moteur P = 7,5 kW	2,98	27,6 %
HEV Moteur P = 10 kW	2,90	29,4 %
HEV Moteur P = 15 kW	2,90	29,4 %
HEV Moteur P = 20 kW	2,90	29,4 %

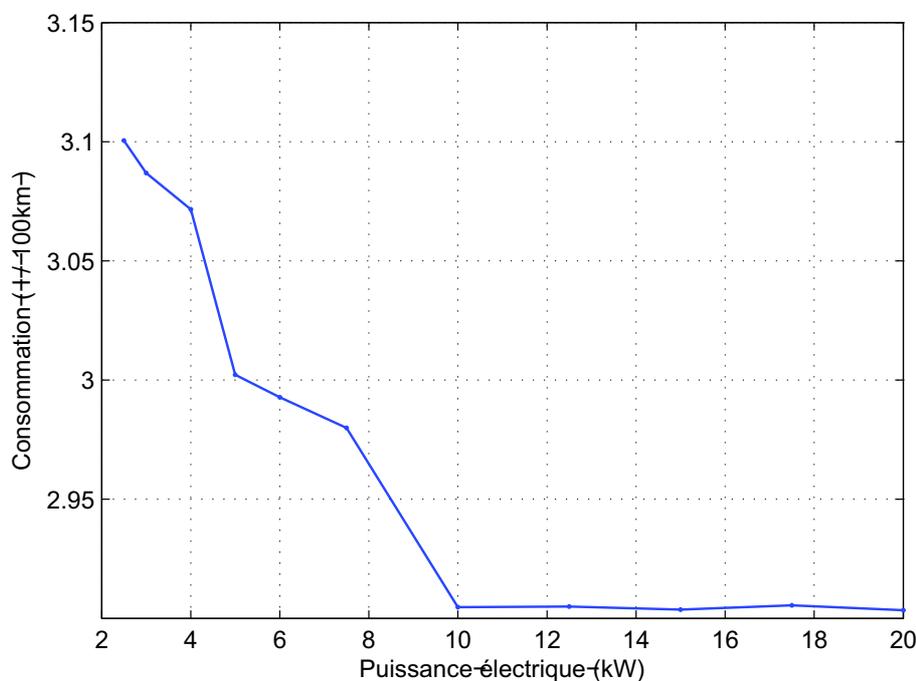


FIG. 4.8: Consommation de carburant en fonction de la puissance du moteur électrique.

4.5.2 Impact de la variation de la capacité de la batterie

L'énergie aux bornes d'une batterie s'écrit

$$E = \frac{1}{2}CU^2 \quad (4.10)$$

Aussi, pour une tension identique, la capacité de la batterie représente directement l'énergie disponible et utilisable par le moteur électrique. Selon l'architecture du véhicule hybride, le moteur électrique pourra être utilisé seul pour la traction du véhicule, i.e. en fonctionnement purement électrique, le moteur thermique étant éteint ; celui-ci pourra aussi être simplement utilisé pour de l'assistance au moteur thermique, la puissance électrique nécessaire étant alors moins grande.

Il est intéressant de connaître quelle est la variation de la consommation avec la capacité de la batterie, sans tenir compte de son poids, car cela permet d'isoler les phénomènes qui apparaissent lors de la variation simultanée de plusieurs paramètres (capacité et poids du véhicule).

En accord avec le type du modèle utilisé, comme la dynamique de la batterie \dot{x} ne dépend pas de x , ainsi évidemment que la consommation de carburant, on peut affirmer le résultat suivant : la variation d'état de charge Δx consécutive à une commande donnée ne dépend pas de l'état de charge auquel on se trouve. En conséquence, tant que l'état de charge de la batterie x ne vient pas toucher ses bornes x_{\min} et x_{\max} , la consommation de carburant reste la même. Il est donc évident qu'une batterie de taille trop importante est inutile pour un cycle donné, et de plus coûte cher.

Les résultats suivants ont été obtenus sur cycle NEDC, et correspondent à la consommation de carburant optimale pour une capacité de batterie définie.

On remarque comme attendu qu'au delà d'une certaine capacité de batterie, celle-ci n'a plus d'influence sur la valeur de la consommation de carburant. En traçant l'évolution de l'état de charge pour les différentes capacités de batterie, on peut observer la relation liant la présence de contraintes d'états activées et leur nombre, avec la valeur de la consommation de carburant.

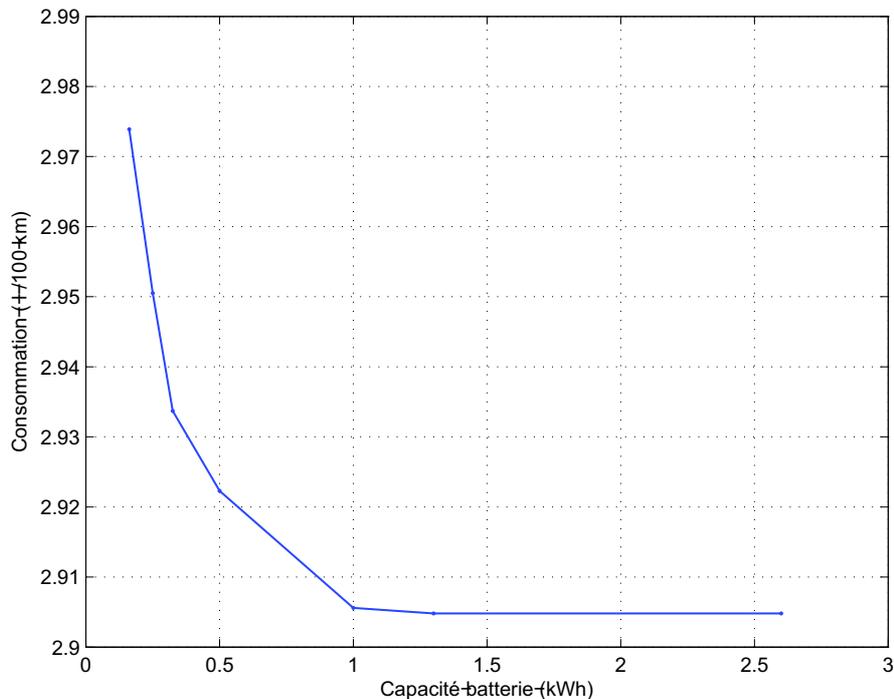


FIG. 4.9: Consommation de carburant en fonction de la taille de la batterie sur cycle NEDC pour le véhicule de référence.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre ont été présentées quelques applications d'une méthode numérique applicable au problème de l'optimisation de la répartition de puissance du véhicule hybride.

Pour ce type de problème, la programmation dynamique est bien adaptée, puisqu'elle permet de prendre facilement en compte les contraintes sur la commande, ainsi que les contraintes de bornes sur

4.6 Conclusion

l'état. Un second état a été introduit, permettant de prendre en compte l'état du moteur thermique, et la surconsommation que produit un démarrage de celui-ci. Il est aussi possible de considérer cette surconsommation comme une pénalisation destinée à restreindre le nombre d'arrêts du moteur thermique aux seuls cas qui se trouvent être vraiment favorables.

L'algorithme de programmation dynamique, a donné lieu à l'IFP à un outil de qualification de chaîne de traction pour véhicule hybride. Cet outil nous a permis de quantifier le gain maximum (dans le sens de lois optimales grâce à un futur connu) que l'on peut obtenir sur le véhicule C1 hybridé sur cycle NEDC, selon la taille des éléments constitutifs d'une architecture hybride. On remarque particulièrement, pour ce type de véhicule sur cycle NEDC :

- La commande optimale consiste à proscrire le fonctionnement du moteur thermique dans les zones de faible couple, et de privilégier une traction uniquement par moteur électrique. Ce comportement, en plus d'être optimal d'un point de vue énergétique, est particulièrement intéressant dans les zones urbaines où le moteur thermique pourra être coupé.
- L'architecture micro-hybride offre un gain moitié moindre que l'architecture parallèle, à cause de l'interdiction de couper le moteur thermique à vitesse non nulle.
- Le Stop-and-Start est une solution intéressante, et à moindre coût, pour réduire la consommation de carburant. C'est aussi la raison pour laquelle les constructeurs annoncent l'apparition prochaine de nombreux véhicules équipés de cette fonction.
- L'optimisation des paramètres de dimensionnement tend à montrer qu'un moteur électrique de 10 kW associé à une batterie de 1 kWh est optimal sur ce véhicule, et sur le cycle NEDC. Cette conclusion est une indication intéressante pour le constructeur, néanmoins il s'agira de considérer aussi la clientèle à qui ce véhicule est destiné.

Deuxième partie

Contrôle temps réel

Introduction

Dans un véhicule hybride, la répartition de puissance entre les différents moteurs est déterminée par la loi de gestion d'énergie, idéalement en prenant en compte plusieurs informations : régime des moteurs, demande de couple, température, etc.

Une stratégie de gestion d'énergie temps-réel doit permettre de réduire notablement la consommation de carburant sur cycle normalisé, tout en maintenant l'état de charge de la batterie (ou la tension, lors de l'utilisation de supercapacité) à un niveau correct.

La difficulté majeure de ce problème provient du futur : il est inconnu. Dans cette situation, on ne peut prévoir ce qui va se passer dans les minutes ou les heures à venir. Ainsi, là où la stratégie optimale indique – par exemple – qu'il faut vider la batterie sur le début du cycle NEDC, la stratégie temps-réel ne pourra prévoir l'existence d'un trajet final à vitesse plus importante, propice au rechargement de la batterie lors du freinage final. Ce type de différence implique qu'une dégradation des gains en consommation est inévitable, lorsque l'on passe d'une loi optimale à une loi temps-réel.

Parmi véhicules aujourd'hui en circulation, en figurent certains dont le trajet est défini à l'avance, et pour lesquels on peut avoir un certain nombre d'informations sur le futur, comme les véhicules de transport en commun. En effet, les bus suivent toujours le même parcours, ponctué par des arrêts pour déposer et emmener les usagers, suivis de redémarrages à accélérations similaires. En plus de ces arrêts, les variations de niveaux des routes, ou encore les feux tricolores sont parfaitement connus. Peu d'auteurs semblent avoir exploré cette voie, dont l'usage toucherait une faible part du parc automobile. Néanmoins, l'article de [Dubray and P.Beguery, 2000] indique qu'une méthode de reconnaissance de cycle, dont le rôle est de reconnaître la tendance du cycle, ne permet cependant pas de gagner beaucoup plus en consommation, l'optimisation en temps-réel restant une optimisation locale.

Certains auteurs [Sciarretta et al., 2004] présentent des lois de contrôle utilisant la télémétrie, c'est à dire une localisation par GPS, qui permet – lorsque la destination finale est connue et indiquée par le conducteur – de connaître les variations d'altitude au cours du trajet (utiles pour le freinage récupératif), les passages dans les villes (conduite plus souple, où la demande de couple est plus faible), etc. Le contrôle utilisé est basé sur l'ECMS, une application du principe de Pontryagin.

Dans ce chapitre, nous présenterons un état de l'art des stratégies de contrôle utilisées pour la répartition de couple. Suivra ensuite la méthode retenue, avec quelques exemples en simulation. Enfin, ce chapitre se terminera par une étude complète du contrôle d'un prototype de véhicule hybride de type micro-hybride, sur lequel a été développée et testée une loi temps-réel. Des essais sur banc à rouleaux ont aussi été menés, et sont présentés en fin de chapitre.

Chapitre 5

Stratégies temps-réel pour véhicules hybrides

5.1 Stratégies de commande temps-réel

On trouve dans la littérature beaucoup de lois de gestion d'énergie en ligne, certaines à base de règles, d'autres basées sur la théorie de la commande optimale. Les sous-sections suivantes présentent l'état de l'art des lois de commandes temps-réel pour véhicule hybride.

5.1.1 Lois empiriques

Les lois empiriques sont souvent utilisées, car elles ont l'avantage d'être en générale assez simples, et facilement implémentables. On pourra par exemple se référer à [Lin et al., 2003], dont l'étude des résultats d'optimisation permettent d'élaborer facilement une loi à base de règles, ou encore à [Wu et al., 2002], qui utilisent les mêmes techniques.

Ces lois de gestion d'énergie se basent en général sur un découpage du plan (régime / couple) pour le fonctionnement du moteur thermique, afin de déterminer des zones de fonctionnement de chaque source d'énergie. Néanmoins, ces stratégies doivent ensuite être complétées par une pénalisation tenant compte de la mesure de l'état de charge de la batterie, celui-ci devant rester dans la zone d'admissibilité de la batterie.

Ainsi, si cette famille de loi peut être relativement performante si elle est testée sur un cycle identique à celui qui a été utilisé pour la mise en oeuvre de la stratégie, rien n'indique qu'elle le sera sur un cycle inconnu.

5.1.2 Réseaux de neurones

Une architecture hybride peut être commandée à l'aide d'un réseau de neurones. Celui-ci reçoit en entrée certaines informations : état de charge de la batterie, régime du moteur thermique, couple de consigne, etc., ses sorties étant les couples des moteurs électrique et thermique.

Le contrôle d'une architecture hybride par réseaux de neurones peut donc être une solution attrayante. Elle permet en effet d'obtenir un contrôle embarqué d'une structure assez légère, puisque le réseau de neurones n'est qu'une suite d'additions et de multiplications. Cela étant, l'utilisation d'un réseau de neurones nécessite que celui-ci ait été entraîné préalablement. Cette étape peut s'avérer assez coûteuse en temps de calcul, puisqu'il devra être entraîné sur un large panel de cycles différents.

D'autre part, l'inconvénient du réseau de neurone est qu'il ne pourra jamais être entraîné sur l'ensemble des conditions de fonctionnement possibles. Ainsi, si des conditions de fonctionnement particulières surviennent, la réponse du réseau de neurones peut ne pas être optimale.

[Scordia, 2004] a développé un contrôleur à base de réseaux de neurones. Si les résultats paraissent relativement bons, l'auteur se place à chaque fois dans des conditions (notamment sur la valeur de l'état de charge au début du cycle) telles que l'état de charge final égale l'état de charge initial. Dans ces conditions, il n'est pas possible de savoir si ce contrôleur parvient à avoir un bilan batterie proche de zéro à la fin du cycle, ni de savoir de combien l'état de charge final s'éloigne de l'état de charge initial.

5.1.3 ECMS

L'ECMS (Equivalent Consumption Minimization Strategy) est une stratégie de commande temps-réel basée sur la théorie de la commande optimale. Présentée dans [Paganelli et al., 2002a], cette stratégie a ensuite été utilisée par de nombreux auteurs sur diverses applications ([Paganelli et al., 2002b]).

Elle consiste à considérer la batterie comme un réservoir de carburant auxiliaire, et à choisir la commande qui minimise l'énergie totale prélevée aux deux réservoirs. C'est donc la variation d'énergie globale qui est comparée pour différentes commandes, à chaque instant.

Pour pouvoir sommer la variation d'énergie électrique à celle du carburant, un coefficient p , dont l'unité est homogène à des g/J, est associé à la variation d'énergie électrique, ce qui permet de former la quantité suivante à minimiser :

$$L(u(t), t)\Delta t + p(t)\dot{x}(t)\Delta t, \quad (5.1)$$

où p peut être vu comme un multiplicateur de Lagrange, l'expression (5.1) étant alors l'Hamiltonien H qui doit être minimisé. La variation de $L(u(t), t)\Delta t$ dépend directement de l'efficacité du moteur thermique, ce qui explique que cette méthode est une optimisation *locale* car instantanée.

Le coefficient p agit en fait comme un variateur du "prix" de l'énergie électrique. Plus p est grand, plus l'énergie électrique coûte cher à utiliser, et plus il sera intéressant d'en récupérer (en faisant de la régénération). Plus p est faible, et plus l'énergie électrique est peu chère, donc intéressante à utiliser conjointement avec le moteur thermique, ou bien seule.

Il devient donc évident que le coefficient p est influencé par la quantité d'énergie gratuite, récupérable lors des freinages.

Contrôle de p et gestion des contraintes

L'ECMS est une stratégie d'optimisation instantanée, qui tend à choisir à chaque instant la commande minimisant l'Hamiltonien. Dans l'expression (5.1), l'ensemble des grandeurs qui varient en fonction du temps sont déterminées par les mesures instantanées (régime, couple) et / ou via des modèles ou des cartographies. Le coefficient p , quant à lui, attribue une valeur à l'énergie électrique, donc détermine la façon dont évoluera l'état de charge de la batterie (ou de l'élément capacitif fournissant l'énergie au moteur électrique). C'est donc la variable qui doit être contrôlée. Ainsi, l'avantage de cette stratégie est qu'elle repose sur le contrôle *d'un seul et unique paramètre*, p , l'ensemble des grandeurs étant ensuite calculées en fonction des mesures et de ce paramètre.

Pour mettre en oeuvre une stratégie comme l'ECMS, deux éléments supplémentaires doivent être déterminés : la valeur initiale de p , et le type de contrôle sur p .

Contrôle de p

Le contrôle du paramètre p représente en réalité le seul degré de liberté dans l'ECMS. En considérant les conditions d'optimalité en l'absence de contraintes d'état, énoncées dans la section (2.1), on sait que $p(t)$ doit vérifier

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, u, t, p) \quad (5.2)$$

5.2 Comparaison optimisation hors-ligne / lois temps-réel

Si H ne dépend pas de x , c'est à dire si la dynamique de l'état de charge $\dot{x}(t)$ ne dépend pas de l'état de charge $x(t)$, alors l'état adjoint $p(t)$ optimal est nécessairement constant $\forall t \in [0, T]$. Néanmoins, en l'absence d'informations sur le parcours futur du véhicule, il n'est pas possible de connaître la valeur de p qui permettra d'atteindre exactement l'état de charge final souhaité au bout d'un temps donné. Il est donc nécessaire de contrôler $p(t)$ pour s'assurer que l'état de charge reste dans une zone admissible. On peut distinguer plusieurs façons de contrôler $p(t)$, la liste suivante n'étant pas exhaustive :

1. On définit une valeur initiale de p , puis on fait évoluer p d'une certaine façon lorsqu'on touche une contrainte d'état. Néanmoins, le choix de la valeur initiale peut être déterminant.
2. dans [Sciarretta and Guzzella, 2007], l'auteur définit le multiplicateur $s(t)$ tel que

$$s(t) = p(t)s_{\text{dis}} + (1 - p(t))s_{\text{chg}}$$

où s_{dis} and s_{chg} sont deux valeurs limites, et où $p(t)$ correspond à un facteur de probabilité dépendant de l'énergie totale déjà prélevée à la batterie, de l'énergie mécanique prélevée aux roues, et d'un paramètre lié aux informations données par un système de télémétrie (tel qu'un GPS).

3. dans [Paganelli et al., 2002b], l'auteur définit une fonction de pénalité f_{pen} jouant le même rôle que le multiplicateur p , telle que

$$f_{\text{pen}} = 1 - (1 - 0,8x_{\text{soc}})x_{\text{soc}}^3$$

où x_{soc} est une variable dépendante de l'état de charge x tel que $x_{\text{soc}} = \frac{x - (x_{\text{min}} - x_{\text{max}})/2}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}$. Cette loi est donc une heuristique, permettant de contrôler la fonction de pénalité lorsque qu'on s'éloigne d'une valeur désirée d'état de charge, ici $(x_{\text{min}} - x_{\text{max}})/2$.

4. dans [Ambühl et al., 2007], l'auteur se base sur les résultats de programmation dynamique pour déterminer une valeur du multiplicateur en fonction de l'état de charge. Celui-ci est paramétré selon la loi :

$$p(x, t) = k_p(t)(x_0 - x) + p_0(t) \quad (5.3)$$

où les termes $k_p(t)$ et $p_0(t)$ correspondent à une pente et à un offset. L'auteur utilise l'équivalence entre la programmation dynamique et le principe de Pontryagin [Bertsekas, 2001], qui indique que

$$p(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x^*, t) \quad (5.4)$$

où $V(x^*, t)$ correspond à la fonction valeur définie par l'équation (3.7), et évaluée sur la trajectoire optimale $x^*(t)$.

L'auteur évalue la quantité $\frac{\partial V}{\partial x}(x, t)$ sur une grille temps/espace à l'aide des résultats d'optimisation, puis approche le polynôme (5.3) par des moindres carrés. Si l'approche est intéressante, l'auteur indique néanmoins que le facteur $p_0(t)$ dans (5.3) est spécifique à chaque cycle.

Le contrôle de $p(t)$ peut donc être réalisé de différentes manières, sa valeur étant bien-sûr meilleure (car calculable) dès que l'on dispose de connaissances sur le futur parcours du véhicule.

5.2 Comparaison optimisation hors-ligne / lois temps-réel

Dans le cadre de l'ECMS, la détermination de la valeur initiale de p est une vraie difficulté. De plus, une fois la valeur initiale de p correctement définie, la loi de gestion d'énergie se doit de commander

chacun des moteurs de façon à minimiser la consommation de carburant, tout en veillant à conserver un état de charge qui reste dans une zone admissible.

L'article *Design Optimization and Optimal Control for Hybrid Vehicles* paru au congrès EngOpt 2008, (voir Annexes B), montre une comparaison entre une loi de gestion d'énergie optimale obtenue par la programmation dynamique, et une loi sous-optimale de type ECMS, testée sur un modèle de type AMESim Drive ([Dabadie et al., 2005]), pour un véhicule de caractéristiques légèrement différentes de celles du véhicule traité dans la section 4. Pour cet essai, la valeur initiale du multiplicateur p employée dans l'ECMS a été déterminée à l'aide des résultats de programmation dynamique, ainsi que par un recalage par essais-erreurs, pour obtenir une valeur plus précise.

Avec la programmation dynamique, on obtient une consommation optimale de 3,81 l/100km sur le cycle NEDC avec le modèle AMESim, ce qui correspond à un gain de 20% par rapport à un véhicule non hybride. L'application de la loi temps-réel ECMS permet d'atteindre une consommation de 3,97 l/100km, soit un gain de 16,6 %. La différence entre ces deux résultats provient de la prise en compte du redémarrage dans l'optimisation hors-ligne, qui est gérée de manière optimale grâce à la connaissance du futur. En revanche, pour une utilisation temps-réel, il n'est pas possible de choisir quel est le moment optimal pour arrêter le moteur thermique, le futur étant inconnu.

5.3 Perspectives

Les résultats obtenus dans la section 5.2 sont cohérents avec ce que permet la loi ECMS. La difficulté du choix de p_0 , et du contrôle de p est réelle, et seules des lois telles que celles présentées dans la section 5.1.3 permettent de moduler p de façon à conserver un état de charge qui ne dévie pas trop d'une valeur moyenne.

Cependant, lorsque la capacité de la batterie est faible, et lorsque l'état de charge a un réel risque de toucher plusieurs fois les contraintes de bornes, une commande basée sur le fonctionnement de SCOP (μ non nul à proximité d'une contrainte) pourrait donner des résultats intéressants.

Par ailleurs, l'ECMS pourrait être très efficace dans le cas où la connaissance – même partielle – du futur serait accessible, par exemple via des informations données par un GPS. Dans un autre cadre, les transports en commun tels que les bus, ayant des trajets connus à l'avance, pourraient permettre de déterminer une valeur de p en fonction du trajet.

Parmi les perspectives, celle d'utiliser le même type de contrôle pour p , que ce que nous donne SCOP, à savoir maintenir p constant lorsqu'on se trouve loin des contraintes, et agir sur μ lorsqu'on se trouve près d'une contrainte de borne, serait à envisager, et à tester.

Chapitre 6

Application VEHGAN (VEhicule Hybride au GAZ Naturel)

6.1 Présentation du véhicule

Le Véhicule VEHGAN (VEhicule Hybride au GAZ Naturel) est un véhicule développé sur la base d'une Smart Fortwo. A vocation urbaine, tout comme la version initiale développée par Smart, ce véhicule a été modifié pour cumuler les avantages de l'hybridation, et ceux apportés par l'utilisation d'un carburant à faible teneur en carbone, le gaz naturel.



FIG. 6.1: *Le véhicule VEHGAN*

Ce prototype a vu le jour à la suite d'un projet Predit soutenu par l'ANR et cofinancé par l'ADEME.

Les partenaires de ce projet sont l'IFP, Gaz de France, VALEO, ainsi que l'INRETS [Tilagone et al., 2005].

L'architecture de ce véhicule est de type micro-hybride, et comprend un moteur thermique équipé d'un alterno-démarrreur, ainsi que des supercapacités qui alimentent celui-ci.

Contrairement au véhicule d'origine qui héberge un moteur essence de 1000 cm³ de cylindrée, ce véhicule est équipé d'un moteur suralimenté au gaz naturel de 660 cm³. La Figure 6.2 représente la consommation spécifique du moteur thermique, en fonction de son point de fonctionnement (régime / couple).

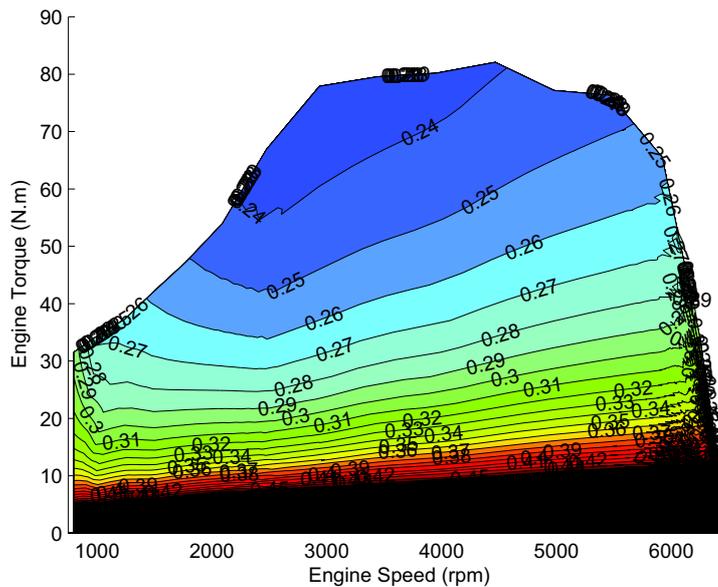


FIG. 6.2: Consommation spécifique du moteur au gaz naturel du véhicule VEHGAN (kg/kWh).

La consommation spécifique étant une image de l'efficacité du moteur thermique, on peut remarquer que celle-ci augmente avec le couple, et ce quel que soit le régime de fonctionnement. Cette particularité est très importante. En effet, elle implique directement qu'une utilisation simultanée du moteur thermique et du moteur électrique (en mode boost) entraînera une dégradation de l'efficacité du moteur thermique au nouveau point de fonctionnement, par rapport à un fonctionnement où le moteur thermique aurait fourni le couple de consigne à lui seul. En conséquence, le seul moyen de faire fonctionner le moteur thermique sur des points de meilleur rendement est d'utiliser le moteur électrique en régénération, pour augmenter le couple fourni par le moteur thermique.

La transmission est réalisée au moyen d'une boîte robotisée à 6 rapports. La présence d'un tel type de boîte de vitesse permet à l'utilisateur de choisir lui-même le rapport qu'il souhaite engager, via une commande au volant, ou bien de laisser le contrôle-moteur décider lui-même du rapport le mieux adapté aux conditions de fonctionnement. Dans ce cas, le rapport choisi sera un compromis entre efficacité du moteur thermique, bruit, potentiel d'accélération, etc. Pour ce type de véhicule, la présence d'une boîte robotisée nous autorise à suivre – ou non – les rapports imposés par le cycle. Dans la suite de ce mémoire, nous choisissons de suivre les rapports imposés par le cycle NEDC, afin de se concentrer sur la gestion d'énergie entre les différents moteurs.

Enfin, l'ensemble de la partie électrique est une solution VALEO pour hybrides légers, nommée

6.1 Présentation du véhicule

StARS (Starter Alternator Reversible System), voir Figure 6.3. Il s'agit d'un ensemble comprenant un alerno-démarrreur alimenté par des supercapacités.



FIG. 6.3: *Implantation du système StARS sur un moteur thermique*

L'alerno-démarrreur est un moteur électrique réversible de 3 KW, relié au moteur thermique via une courroie d'accessoires. Le rapport de réduction entre les régimes du moteur thermique ω_e et du moteur électrique ω_m est $\omega_m/\omega_e = 1,96$.

Le contrôleur VALEO, qui commande l'ensemble de la solution StARS, autorise différents modes de fonctionnement :

- Le mode démarrreur : comparé à un démarrreur classique, l'alerno-démarrreur du système StARS est capable d'entraîner le moteur thermique à un régime élevé, assurant un démarrage du moteur en moins de 0.4 s. Cette fonctionnalité est nécessaire pour le Stop-and-Start, permettant d'assurer un démarrage rapide et sans vibrations.
- Le mode alternateur : il correspond à la fonction classique d'alternateur sur véhicule, la tension de consigne étant cependant modifiable par l'utilisateur. L'alerno-démarrreur étant connecté aux supercapacités, dont la plage de fonctionnement se situe entre 16V et 24V, la tension de consigne par défaut sera de 16V.
- Le mode régénération : dans ce mode, l'utilisateur impose une consigne de couple, et non de tension.
- Le mode boost, durant lequel le moteur électrique fournit un couple positif, pour assister le moteur thermique. C'est clairement le but affiché de ce projet : réduire la cylindrée du moteur thermique (downsizing) tout en gardant des prestations similaires, d'une part grâce à un turbocompresseur, et d'autre part grâce à l'apport d'un moteur électrique dans les zones de faibles régimes, pour lesquels le couple maximum du moteur thermique est faible.

Le schéma de la Figure 6.4 représente l'implantation du système électrique au sein du réseau électrique 12V existant.

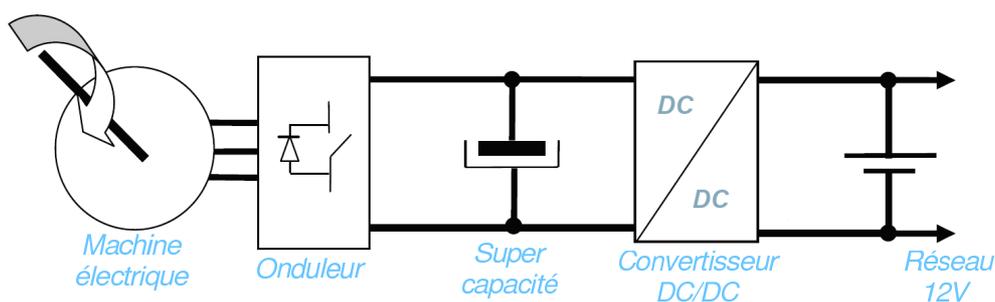


FIG. 6.4: Architecture électrique VEHGAN

Les supercapacités sont les éléments réversibles utilisés ici pour stocker l'énergie nécessaire au moteur électrique. Contrairement aux batteries, les supercapacités possèdent une puissance spécifique supérieure, mais une énergie spécifique plus faible. Elles sont donc surtout utilisées pour de l'assistance courte, ou de la récupération d'énergie, et sont bien adaptées à ce véhicule.

Enfin, un onduleur permet de relier le réseau triphasé du moteur électrique aux supercapacités, tandis qu'un convertisseur DC/DC réalise la liaison entre le réseau 12V du véhicule, et les supercapacités dont la tension varie entre 16V et 24V.

6.2 Objectifs

Ce véhicule, de part son architecture micro-hybride, peut faire du Stop-and-Start lors des arrêts temporaires. Lorsque le véhicule est en mouvement, le moteur électrique peut être utilisé pour amener un surplus de couple (mode boost), ou bien pour recharger les supercapacités (mode régénération). Le mode boost (apport d'un surplus de couple) peut donc être activé pour différents besoins :

1. Lors d'une demande importante de couple, que le moteur thermique n'est pas capable de fournir, le moteur électrique assiste donc le moteur thermique. Cette situation peut particulièrement survenir lorsque le régime du moteur thermique est faible, le turbocompresseur étant alors lui-même à un régime trop faible pour être actif.
2. Pour réduire la consommation de carburant, en déchargeant le moteur thermique, une partie du couple demandé par le conducteur étant alors fourni par le moteur électrique.

L'activation du mode boost, dans le cas d'une assistance du moteur électrique pour assurer la consigne de couple, ne participe pas à la minimisation de la consommation de carburant, mais permet d'obtenir un meilleur agrément véhicule à bas régime. Cet aspect ne sera pas traité ici.

En revanche, l'utilisation du moteur électrique pour réduire la consommation de carburant est l'un des objectifs initiaux de ce projet, et est traité dans la suite de ce chapitre. Dans cette optique, le mode boost, mais aussi et surtout le mode régénération, doivent être considérés pour réduire la consommation de carburant. Dans la section 6.3 sont décrites les principales contraintes liées à l'architecture et aux éléments de ce véhicule. Dans le but de développer une loi de commande temps-réel, des modèles représentatifs sont nécessaires, et développés quant à eux dans la section 6.4.

6.3 Considérations et contraintes liées à l'architecture

Comme cela a été introduit dans le Chapitre 1.1, chaque architecture possède sa complexité, mais aussi ses avantages et ses défauts, le prix de l'ensemble de la motorisation hybride étant lui-même un

6.3 Considérations et contraintes liées à l'architecture

élément essentiel. Dans les sections suivantes sont décrites les spécificités liées à l'architecture de la Smart VEHGAN, ainsi qu'aux éléments en eux-mêmes.

6.3.1 Freinage récupératif

L'architecture est un micro-hybride, le moteur électrique est donc mécaniquement lié au moteur thermique (pas de désaccouplement possible des deux moteurs). Le moteur électrique étant situé en amont de la transmission, le freinage récupératif ne peut s'effectuer que lorsqu'un rapport est engagé.

La présence du mode régénération permet de profiter du freinage récupératif, donc de récupérer une partie de l'énergie cinétique, qui est normalement dissipée par effet Joule (frottement des plaquettes de frein sur les disques) sur les véhicules conventionnels. En pratique, l'énergie récupérée durant un freinage récupératif reste faible sur ce véhicule, pour plusieurs raisons :

1. Le véhicule est relativement léger : il ne pèse que 820 kg, supercapacités comprises. L'énergie cinétique étant directement dépendante du poids, l'énergie récupérable reste faible.
2. Le système de freinage est assuré par le système ABS d'origine. N'ayant pas la main sur le contrôleur du système de frein, il n'est pas possible de réguler le couple du moteur électrique en modifiant celui du système de frein. D'autre part, à l'heure actuelle, seule une mesure de type binaire nous informe s'il y a un freinage ou non, la mesure de l'enfoncement de la pédale de frein n'étant pas disponible, comme c'est le cas dans le contrôle moteur d'aujourd'hui.
3. Comme indiqué dans la section 1.1.1, la répartition de freinage entre le train avant et le train arrière ne permet de récupérer qu'une partie de l'énergie cinétique du véhicule, la répartition de freinage habituellement choisie étant de 70% sur l'avant et 30% sur l'arrière. Cette répartition est nécessaire à cause du transfert de masse lors d'une décélération, afin d'assurer une stabilité du véhicule durant un freinage.
4. L'architecture étant un micro-hybride, le moteur électrique reste mécaniquement lié au moteur thermique (pas de désaccouplement possible des deux moteurs). De plus, comme le moteur électrique est situé en amont de la transmission, le freinage récupératif ne peut être actif que lorsqu'un rapport de boîte est engagé. Aussi, la récupération au freinage est amputée du couple de frottement du moteur thermique (appelé frein moteur). Ce couple de frottement correspond aux pertes par pompage du moteur thermique, ajoutées aux pertes par frottement du moteur thermique et de la transmission.

L'ensemble de ces considérations limite l'énergie récupérable au freinage, celle-ci restant assez faible sur ce véhicule. De plus, les accélérations et freinages du cycle NEDC ne sont pas très importantes, ce qui ne permet donc pas de récupérer beaucoup d'énergie lors des freinages.

6.3.2 Couple positif du moteur électrique

Sur cette machine, le mode boost ne dispose que de cinq niveaux de couple positif, le moteur électrique ne pouvant fournir un couple continu. Ces cinq niveaux sont obtenus en modifiant la position du capteur de position du rotor et le courant d'excitation. La Figure 6.5 indique les couples mesurés sur banc moteur, pour différents régimes, à la tension $U_s = 24V$.

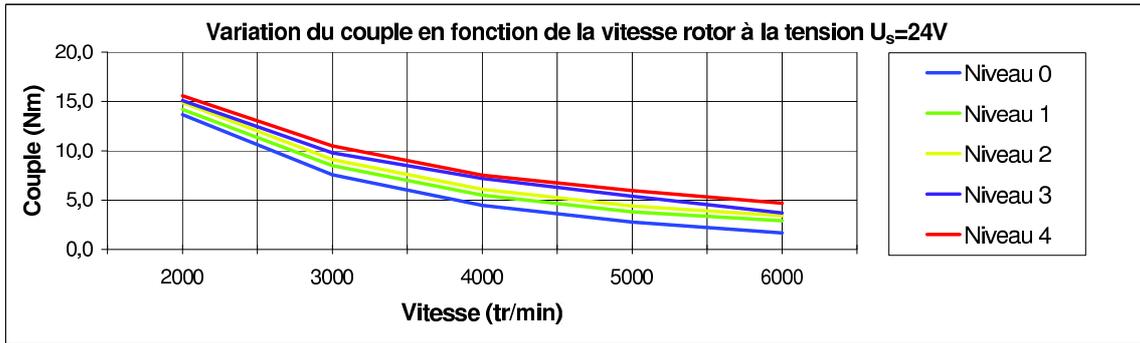


FIG. 6.5: Valeur du couple maximal pour les cinq niveaux de couple disponibles à $U_s = 24V$, en fonction du régime ω_m (mesures issues d'essais sur banc moteur Valeo).

Ces cinq niveaux dépendent des conditions de fonctionnement : tension $U_s(t)$, régime de rotation $\omega_m(t)$, température interne de fonctionnement, etc. et ne fournissent donc pas un couple constant. La Figure 6.6 illustre la variation du couple, pour le niveau 4, en fonction du régime et de la tension U_s .

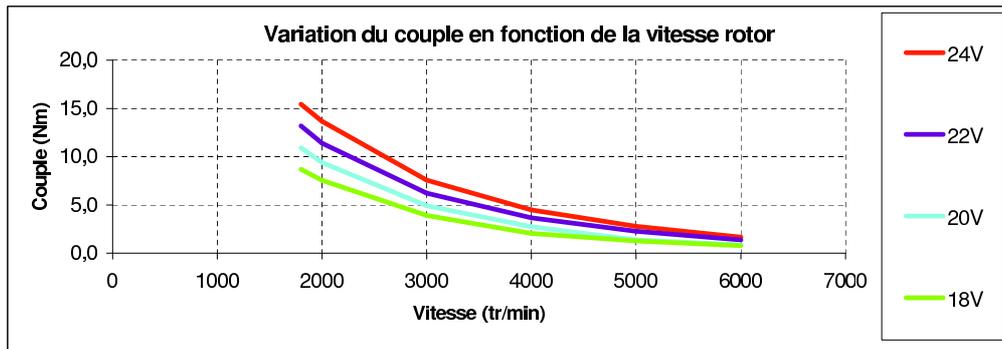


FIG. 6.6: Valeur du couple maximal pour un niveau de couple donné en fonction du régime ω_m , pour différentes tensions U_s (mesures issues d'essais sur banc moteur Valeo).

Cette contrainte pèse très lourd dans l'utilisation du moteur électrique. En effet, les valeurs de couples à disposition ne sont qu'au nombre de cinq, et sont très proches les unes des autres. Ces valeurs ne permettent donc pas de tester plusieurs couples admissibles assez différents, qui seraient susceptibles de déplacer le point de fonctionnement du moteur thermique, et d'en optimiser l'efficacité.

D'après les spécifications fournies par Valeo, la différence entre les couples minimal et maximal, pour un point de fonctionnement donné, n'excède pas 2 Nm. D'après la Figure 6.5, cette différence varie entre 2 et 3 Nm selon le régime.

6.3.3 Couple négatif du moteur électrique

Le mode régénération, lorsque l'on impose un couple négatif au moteur électrique, peut être activé dans deux cas : lors d'un freinage récupératif, ou bien lors d'une régénération par le moteur thermique.

Dans ce mode, le moteur électrique est seulement limité par son couple minimum, toutes les valeurs intermédiaires entre cette limite et le couple nul restant réalisable. En conséquence, on pourra choisir librement le couple lors d'une régénération par le moteur thermique. De plus, contrairement au mode boost, on communique directement au contrôleur Valeo, via un protocole CAN, quel est le couple souhaité. Si la température du rotor (non mesurée actuellement) a une influence sur le couple du moteur

6.4 Modèles développés pour la source de puissance électrique

électrique, le couple varie néanmoins faiblement avec l'évolution de la tension.

En ce qui concerne le freinage récupératif, celui-ci nécessite de connaître la consigne de freinage donnée par l'enfoncement de la pédale de frein, mais aussi de dialoguer avec le système de freinage qui utilise la fonction ABS (Antilock Brake System), cette fonction assurant au véhicule un freinage sans blocage des roues.

En l'absence d'une mesure disponible indiquant l'enfoncement de la pédale, nous commandons le moteur électrique avec un couple de -4 Nm (couple au rotor, à multiplier par 1,96 pour avoir son action au niveau du moteur thermique) lors d'un freinage, ceci afin d'assurer d'avoir un comportement peu modifié. D'autre part, on applique ce même couple en mode cut-off, ce mode correspondant à un relâchement de la pédale d'accélérateur (donc arrêt de l'injection de carburant), entraînant le frein moteur.

6.3.4 Tension de fonctionnement des supercapacités

Les supercapacités de la VEHGAN sont prévues pour fonctionner entre $U_s = 16$ V et $U_s = 24$ V. On pourra cependant autoriser la borne inférieure à être légèrement franchie, notamment dans le cas où un arrêt du moteur thermique à $U_s = 16$ V provoque forcément un redémarrage, durant lequel la tension U_s chute à une valeur proche de 15 V.

La borne supérieure, quant à elle, ne doit pas être franchie (présence d'une sécurité dans le contrôleur Valeo).

6.4 Modèles développés pour la source de puissance électrique

L'optimisation de la répartition de couple pour minimiser la consommation requiert de disposer de modèles représentatifs de la partie électrique fournissant le couple. En effet, la spécificité du véhicule, en particulier du système de stockage d'énergie électrique, ne permet pas d'utiliser des modèles tels que ceux qui ont été développés dans la section 4.2. Le moteur électrique n'est pas alimenté par une batterie, mais par des supercapacités, dont la tension U_s ne peut être considérée comme constante durant un essai.

Les modèles développés sont amenés à être utilisés d'une part conjointement avec un algorithme de programmation dynamique, puis en temps-réel via une stratégie de contrôle sur véhicule. Dans cette optique, il n'est pas nécessaire de posséder un modèle global qui soit complexe, notamment afin d'avoir un temps d'optimisation qui reste raisonnable.

De plus, il est surtout important, dans cette application, de posséder des modèles qui reproduisent parfaitement le comportement du système en stabilisé, et dont le comportement transitoire est correctement reproduit. En effet, la connaissance du comportement transitoire des éléments du système est surtout intéressante pour l'élaboration des consignes de couple des moteurs thermiques et électriques, mais elle est peu utile pour la minimisation de la consommation de carburant, celle-ci étant davantage une image des fonctionnements en stabilisé.

Enfin, le moteur électrique de la solution StARS de Valeo est un alterno-démarrreur, qui représente un produit phare de leur gamme. En conséquence, peu d'informations nous ont été fournies par l'équipementier, que ce soit au niveau du contrôle du couple réalisé par le contrôleur Valeo, de la configuration interne au moteur, ou bien de courbes issues d'essais dynamiques.

Pour ces raisons, les modèles présentés dans la suite de ce mémoire ne sont pas particulièrement fins, mais s'exécutent en un temps de calcul assez faible, et reproduisent suffisamment bien le comportement des éléments de la source de couple électrique par rapport aux besoins.

6.4.1 Moteur électrique

Le moteur électrique du système StARS est une machine synchrone réversible autopilotée comportant 6 aimants permanents.

Un modèle réaliste, comme il a été décrit par [Sciarretta et al., 2004], donne l'évolution du couple pour ce type de moteur

$$T_m(t) = \frac{3}{2} p \Phi_m \frac{R_{st} U_q(t) - p \omega_m(t) R_{st} \Phi_m - p \omega_m(t) L_{st} U_d(t)}{R_{st}^2 + p^2 \omega_m^2(t) L_{st}^2}, \quad (6.1)$$

où $\omega_m(t)$ est la vitesse du rotor, R_{st} est la résistance du stator, $\Phi_m(t)$ est le flux, $U_q(t)$ et $U_d(t)$ sont les tensions d-q du stator, L_{st} est l'inductance du stator, et p est le nombre de paires de pôles. Pour des raisons de simplification, nous choisissons de modéliser ce moteur en utilisant les équations décrivant le comportement d'un moteur à courant continu (DC), cela en négligeant la contribution des termes non-linéaires. Nous remplaçons donc (6.1) par

$$T_m(t) = \frac{1}{R_a} (K_m(t) U_a(t) - K_a(t) K_m(t) \omega_m(t)), \quad (6.2)$$

où $\omega_m(t)$ est la vitesse du moteur, $U_a(t)$ joue le rôle de la tension DC de l'armature,

$$U_a(t) = K_a(t) \omega_m(t) + R_a I_a(t), \quad (6.3)$$

$I_a(t)$ joue le rôle du courant d'armature, R_a celui de la résistance d'armature. Comme nous le verrons par la suite, les quantités $K_a(t)$ et $K_m(t)$ ne sont pas constantes comme elles le sont pour un moteur DC, étant donné qu'elles représentent l'influence des tensions et courants variables du repère d-q, modulées par l'unité de contrôle du moteur. Les équivalences entre les grandeurs réelles du modèle AC, et les grandeurs fictives du modèle DC, ici $U_a(t)$, $I_a(t)$, $K_a(t)$, $K_m(t)$, et $R_a(t)$ peuvent être retrouvées en comparant (6.1) et (6.2–6.3).

6.4.2 Supercapacité

Le moteur électrique est alimenté en énergie par une supercapacité. Les supercapacités, appelées aussi supercondensateurs, constituent une nouvelle technologie de stockage, apparue dans les années 90. Comparées aux batteries, leur énergie spécifique est plus faible, ce qui ne leur permet pas d'avoir une grande autonomie. En revanche, leur puissance spécifique est supérieure à celle des accumulateurs électrochimiques (batteries), ce qui rend ces éléments assez bien adaptés à un rôle d'assistance ou de récupération aux freinages pour les véhicules hybrides. Dans [Thounthong, 2005], l'auteur présente plus en détail cet élément, et indique les modèles plus ou moins représentatifs, selon la complexité et le réalisme désiré. Devant l'usage requis, nous choisissons un modèle relativement simple pour la représentation de cet élément.

Un circuit équivalent simple de supercapacité peut être construit à partir de capacités en série avec une résistance [Guzzella and Sciarretta, 2005], [Thounthong, 2005]. La loi de Kirchhoff's mène à :

$$U_s(t) = \frac{Q(t)}{C} - R_s I_s(t), \quad I_s(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}, \quad (6.4)$$

où $U_s(t)$ est la tension aux bornes, $I_s(t)$ est le courant délivré, R_s est la résistance équivalente, C est la capacité, et $Q(t)$ représente la charge.

6.4.3 Lien DC/AC

La connexion électrique entre le moteur électrique et la supercapacité est réalisée grâce à un onduleur. Nous considérons ici que l'onduleur n'a aucune perte, i.e. $P_s(t) = P_a(t)$ avec $P_s(t)$ la puissance fournie (respectivement absorbée, dans le cas d'une régénération) par la supercapacité, et $P_a(t)$ la puissance absorbée (respectivement fournie) par le moteur électrique. Nous supposons ici que le niveau de couple positif du moteur électrique est contrôlé via le rapport de tension $\lambda(t)$ de l'onduleur tel que

$$U_s(t) = \frac{1}{\lambda(t)} U_a(t), \quad I_s(t) = \lambda(t) I_a(t). \quad (6.5)$$

À cause de la présence de contraintes physiques internes au moteur, il n'est pas possible de contrôler le moteur électrique de manière continue en agissant sur la variable de contrôle $\lambda(t)$ pour un couple de consigne positif (voir section 6.3.2). En pratique, suivant les spécifications fournies par Valeo, le contrôleur dispose de seulement cinq niveaux de couples. Nous considérons donc que ces cinq niveaux de couple correspondent à cinq valeurs discrètes de λ à chaque instant t , dépendantes des conditions de fonctionnement du système ($\omega_m(t)$ et $U_s(t)$)

$$\lambda \in (\lambda_i)_{i \in \llbracket 0,4 \rrbracket}. \quad (6.6)$$

On rappelle que la différence entre les couples minimal et maximal (obtenus avec $\lambda \in (\lambda_i)_{i \in \llbracket 0,4 \rrbracket}$ pour un point de fonctionnement donné) n'excède pas 2 Nm.

6.4.4 Modèle dynamique du système électrique

La relation de causalité du système complet est schématisée sur la Figure 6.7. Les deux variables d'entrée sont d'une part le régime du moteur $\omega_m(t)$, imposé par le cycle de conduite, et d'autre part le contrôle $\lambda(t)$. La variable de sortie est le couple $T_m(t)$ fourni par le moteur électrique.

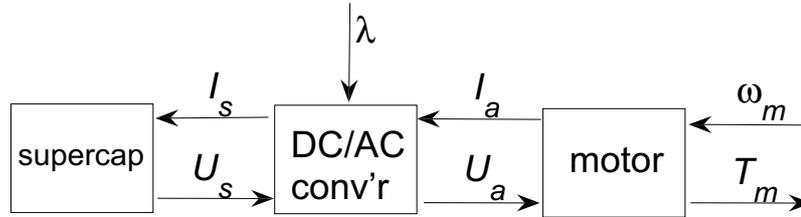


FIG. 6.7: Représentation dynamique du système électrique

Pour obtenir l'équation dynamique entre le couple et la vitesse, nous dérivons chaque terme de la première équation de (6.4), ce qui mène à

$$\dot{\mathcal{U}}_s(t) = -\frac{I_s(t)}{C} - R_s \mathcal{I}_s(t). \quad (6.7)$$

A partir de (6.3) et (6.5) nous obtenons

$$I_s(t) = \lambda(t) \frac{\lambda(t) U_s(t) - K_a(t) \omega_m(t)}{R_a}. \quad (6.8)$$

En remplaçant, dans (6.7), $I_s(t)$ et $\mathring{K}_s(t)$ par leur expression issue de (6.8), on obtient finalement

$$\mathring{U}_s(t) = \frac{1}{1 + \lambda^2(t) \frac{R_s}{R_a}} \left[-U_s \left(\frac{\lambda^2(t)}{CR_a} + \frac{2R_s}{Ra} \lambda(t) \mathring{K}(t) \right) + \frac{\lambda(t) K_a(t) \omega_m(t)}{CR_a} + \frac{R_s}{R_a} \left(\mathring{K}(t) K_a(t) \omega_m(t) + \lambda(t) \mathring{K}_a(t) \omega_m(t) + \lambda(t) K_a(t) \mathring{\mathfrak{d}}_m(t) \right) \right]. \quad (6.9)$$

Avec la paramétrisation de $K_a(t)$ décrite dans la section 6.5 suivante, à savoir $K_a(t) = \frac{K_{a0}}{\omega_m(t)}$, on peut simplifier l'expression 6.9 en supprimant les termes en $\mathring{\mathfrak{d}}_m$ et en $\mathring{K}_a(t)$:

$$\mathring{U}_s(t) = \frac{1}{1 + \lambda^2(t) \frac{R_s}{R_a}} \left[-U_s \left(\frac{\lambda^2(t)}{CR_a} + \frac{2R_s}{Ra} \lambda(t) \mathring{K}(t) \right) + \frac{\lambda(t) K_a(t) \omega_m(t)}{CR_a} + \frac{R_s}{R_a} \left(\mathring{K}(t) K_a(t) \omega_m(t) \right) \right]. \quad (6.10)$$

Cette équation dynamique est ensuite utilisée pour le calage des paramètres.

6.5 Calage des paramètres du modèle et validation

Les mesures et grandeurs représentatives du système sont la tension des supercapacités U_s , le courant I_s qui en est débité, et le couple T_m développé par le moteur électrique. Ce sont donc ces grandeurs qui sont simulées grâce au modèle, puis recalées en les comparant aux données réelles. Les paramètres dont on recherche la valeur sont les résistances R_a et R_s , la capacité C , et les gains K_a et K_m .

Le modèle global de la source de puissance électrique n'a été recalé et testé que lorsque le couple du moteur électrique est positif, à partir de quelques essais dynamiques effectués sur bancs par Valeo. En revanche, nous n'avons obtenu que très tardivement des courbes provenant d'essais dynamiques pour des couples négatifs, donc la réponse dynamique de ce modèle n'a pas été recalée pour des couples négatifs. Des cartographies (fournies par Valeo) sont utilisées en lieu et place du modèle du moteur électrique et de l'onduleur, le modèle de la supercapacité restant quant à lui encore utilisé.

Les essais réalisés sur banc correspondent à des commandes du moteur électrique pour le premier niveau de couple, aucune donnée ou mesure ne nous ayant été transmise en ce qui concerne la façon dont évolue la tension à des niveaux de couples inférieurs.

Afin de calibrer les paramètres du modèle sur les courbes des essais expérimentaux, on effectue un transitoire de régime sur $\omega_m(t)$. L'expression de $\mathring{U}_s(t)$ dépendant d'un terme proportionnel à $\mathring{\mathfrak{d}}_m(t)$, on peut s'attendre à une baisse instantanée de quelques volts de la tension $U_s(t)$, suivie d'une baisse plus lente imposée par le terme proportionnel à $\lambda(t)^2 U_s(t)$.

Les Figures 6.8 et 6.9 représentent les réponses du modèle comparées aux mesures sur bancs fournies par Valeo. Sont représentés ici la tension des supercapacités U_s et le courant du moteur électrique I_s pour différents régimes ω_m .

6.5 Calage des paramètres du modèle et validation

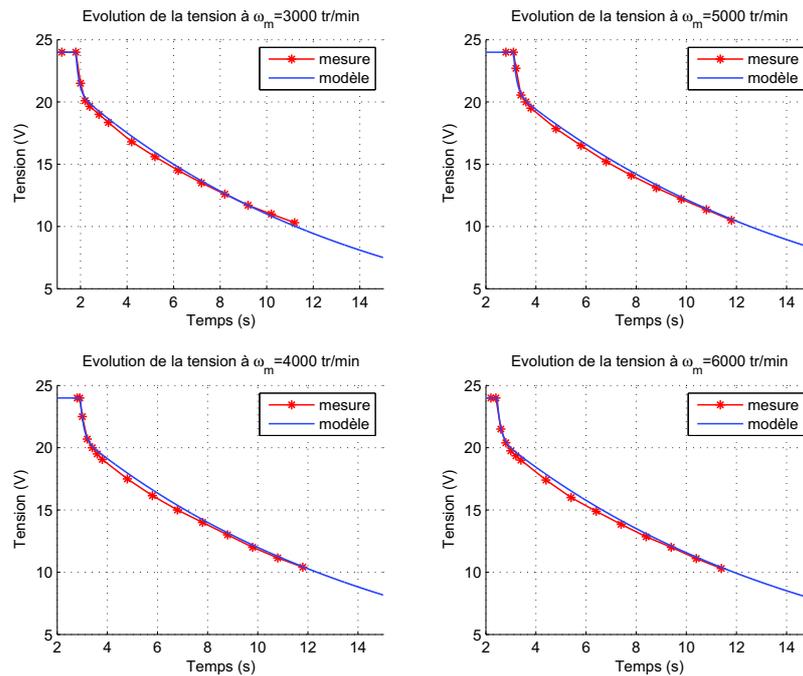


FIG. 6.8: Evolution de la tension U_s de la supercapacité pour un boost avec le niveau 4, pour différents régimes.

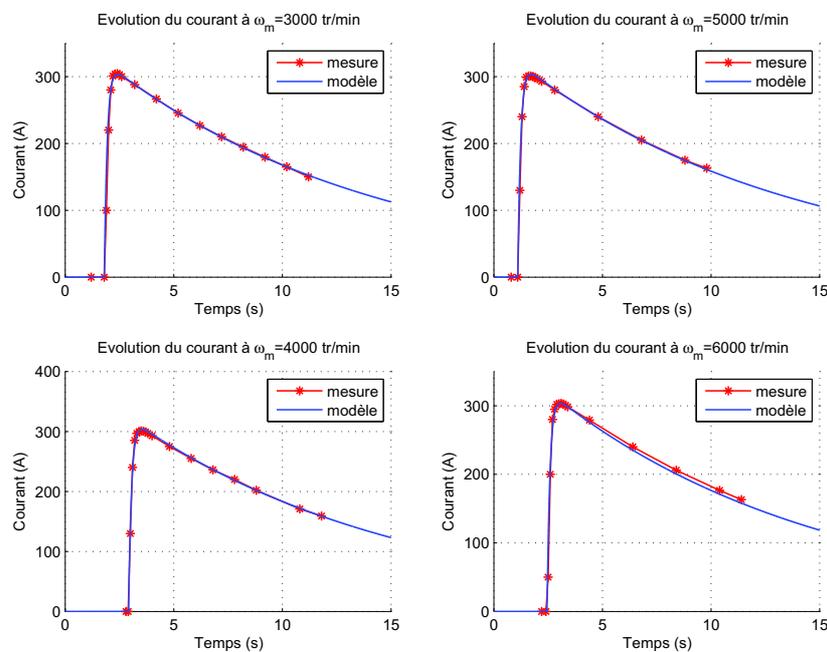


FIG. 6.9: Evolution du courant I_s de la supercapacité pour un boost avec le niveau 4, pour différents régimes.

Les données expérimentales ont été post-traitées par Valeo avec un filtre passe-bas de constante de temps proche de 100 ms, filtre qui est en conséquence aussi appliqué sur les réponses du modèle. Dans la pratique, la chute de tension observée sur la Figure 6.8 est quasi-instantanée. Quatre régimes moteur sont appliqués, de 3000 tr/min à 6000 tr/min, permettant de juger du réalisme du modèle avec des conditions de fonctionnement différentes.

La tension initiale aux bornes de la supercapacité est $U_{s0} = 24$ V pour l'ensemble des essais. Lors du transitoire de régime sur $\omega_m(t)$, la tension aux bornes de la supercapacité subit une chute rapide d'environ 4 V, suivie par une décroissance plus douce. En conséquence, le courant de la supercapacité $I_s(t)$ (Figure 6.9) subit une augmentation rapide mais peu brutale due au filtre ; elle est ensuite suivie par une diminution lente, qui devrait théoriquement faire tendre le courant $I_s(t)$ vers 0 quand la supercapacité est complètement déchargée.

La comparaison entre données expérimentales et simulations des Figures 6.8 et 6.9 montre que l'approche développée est capable de reproduire le comportement global du système, et ses principales dynamiques. Les paramètres ayant été recalés par une étape d'optimisation, nous avons pu établir que les paramètres K_a et K_m n'étaient pas constants, et variaient selon la paramétrisation suivante :

$$K_a(t) = \frac{K_{a0}}{\omega_m(t)}, \quad K_m(t) = K_{m0} \frac{U_s(t)}{\omega_m(t)}. \quad (6.11)$$

Les valeurs recalées du modèle sont listées dans la Table 6.1.

TAB. 6.1: Valeurs numériques des paramètres du modèle, après optimisation.

Parameter	Value
C	196 C
R_a	30.7 Ω
R_s	6 m Ω
K_{a0}	8
K_{m0}	125

6.6 Optimisation hors-ligne : programmation dynamique

On s'intéresse ici à la minimisation de la consommation sur cycle normalisé, durant lequel le moteur thermique reste allumé. Il s'agit donc d'un problème du même type que le problème (1.1), qui sera défini dans la section suivante.

Pour déterminer quel est le potentiel du véhicule en terme de réduction de la consommation de carburant, nous appliquons un algorithme d'optimisation (déjà présenté dans la section 3.3.2), la programmation dynamique.

6.6.1 Variable d'état et définition du problème d'optimisation

Lorsque l'on recherche la loi de commande optimale d'un véhicule hybride, la programmation dynamique est habituellement appliquée au système dynamique représentant la batterie, dont l'état de charge correspond alors à l'état (discrétisé) utilisé. Ce choix, s'il est légitime, nécessite aussi de devoir estimer l'état de charge de la batterie, information sujette notamment aux incertitudes du modèle quant à la température de la batterie.

6.6 Optimisation hors-ligne : programmation dynamique

Dans l'application traitée, la Smart n'est pas équipée d'une batterie pour l'alimentation du moteur électrique, mais de supercapacités. Contrairement à la batterie, aux bornes de laquelle la tension évolue peu et peut être considérée – au premier ordre – comme constante, la tension aux bornes de supercapacités est très variable. De plus, la tension aux bornes de supercapacités est une image de l'énergie présente dans celle-ci, lorsque la tension est mesurée à vide. Aussi, plutôt que de considérer l'état de charge comme variable d'évolution, on choisit de considérer une tension.

On rappelle que la tension aux bornes des supercapacités s'écrit

$$U_s(t) = \frac{Q(t)}{C} - R_s I_s(t), \quad (6.12)$$

d'après le modèle de circuit RC choisi. Comme la tension U_s dépend directement du courant, donc des chutes ohmiques dues à la résistance R_s , il est plus logique de choisir la tension U_c telle que

$$U_c(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad (6.13)$$

comme variable d'état, $U_c(t)$ évoluant bien en fonction de l'énergie présente dans les supercapacités. On a alors directement

$$\dot{U}_c(t) = -I_s(t). \quad (6.14)$$

Dynamique de $U_c(t)$ pour un couple positif (mode boost)

Dans le cas où le moteur électrique fournit un couple positif, $I_s(t)$ est défini par l'équation (6.8). Avec $U_s(t) = U_c(t) - R_s I_s(t)$, l'équation (6.8) s'écrit

$$I_s(t) = \lambda(t) \frac{\lambda(t)(U_c(t) - R_s I_s(t)) - K_a(t)\omega_m(t)}{R_a}. \quad (6.15)$$

En isolant $I_s(t)$, et en remplaçant $K_a(t)$ par $K_{a0}/\omega(t)$, on trouve

$$I_s(t) = \frac{\lambda^2(t)U_c(t) - \lambda(t)K_{a0}}{R_a + \lambda^2(t)R_s}. \quad (6.16)$$

On obtient ainsi, dans le cas où le courant $I_s(t)$ est positif,

$$\dot{U}_c(t) = -\frac{1}{C} \frac{\lambda^2(t)U_c(t) - \lambda(t)K_{a0}}{R_a + \lambda^2(t)R_s}. \quad (6.17)$$

Dans la suite, on notera que la tension U_c varie selon la loi

$$\dot{U}_c(t) = f_1(U_c(t), \lambda(t), t) \quad (6.18)$$

lorsque le courant I_s est positif, i.e. en mode boost.

Dynamique de $U_c(t)$ pour un couple négatif (mode régénération)

Dans le cas où le courant $I_s(t)$ est négatif, celui-ci est une fonction de la tension U_s (donc de U_c), du régime ω_m , et du couple demandé T_m qui constitue le contrôle, le courant $I_s(t)$ étant alors donné par des cartographies de fonctionnement statique. On considère que $I_s(t)$ s'écrit

$$I_s(t) = \text{Map}(U_c(t), \omega_m(t), T_m(t)), \quad (6.19)$$

où $Map(\cdot)$ désigne les cartographies utilisées, ce qui mène à l'expression suivante de $\mathcal{U}_c(t)$ dans le cas où le courant I_s est négatif (mode régénération).

$$\mathcal{U}_c(t) = -\frac{1}{C}Map(U_c(t), \omega_m(t), T_m(t)). \quad (6.20)$$

On considère que $\mathcal{U}_c(t)$ varie donc selon la loi

$$\mathcal{U}_c(t) = f_2(U_c(t), T_m(t), t), \quad (6.21)$$

lorsque le courant I_s est négatif, i.e. en mode régénération.

Problème d'optimisation

Le problème d'optimisation à résoudre s'écrit finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in U} \left\{ J(u) := \int_0^T L(t, \lambda(t), T_m(t)) dt + \phi(U_c(T), T) \right\} \\ \text{avec :} \\ \mathcal{U}_c = \begin{cases} f_1(U_c(t), \lambda(t), t) & \text{si } T_m(t) > 0 \\ f_2(U_c(t), T_m(t), t) & \text{si } T_m(t) < 0 \end{cases}, \quad U(0) = U_0 \\ T_m^{\min}(t) \leq T_m(t) \leq T_m^{\max}(t) \\ U_c^{\min} \leq U_c(t) \leq U_c^{\max}, \end{array} \right. \quad (6.22)$$

où le moteur électrique est soit commandé avec $\lambda(t)$ pour un couple positif, soit avec $T_m(t)$ pour un couple négatif.

6.6.2 Prise en compte des contraintes

Les contraintes de couple minimal et maximal dépendent de la tension U_s aux bornes des supercapacités, et non de la tension U_c . On a les contraintes suivantes :

- Le couple délivré T_m dépend de la tension U_s . Les valeurs de couple maximal (lors d'un mode boost) ou de couple minimal (lors d'un mode régénération) doivent donc être prises en compte à partir de la tension U_s , et non de la tension U_c . La chute de tension aux bornes des supercapacités, lors de l'établissement du courant, pouvant atteindre 3 V, celle-ci doit être prise en compte pour connaître le couple réellement délivré.
- La contrainte sur la tension maximale est une contrainte sur la tension U_s . Elle provient d'une sécurité du système Valeo.
- La contrainte sur la tension minimale (voir section 6.3.4) pourra être définie par rapport à U_c , pour laisser davantage de marge au système.

6.6.3 Hypothèses

Dans le problème de minimisation de la consommation, le faible potentiel de cette architecture nous amène à aussi considérer la puissance électrique prélevée par les consommateurs de courant, comme c'est le cas sur véhicule. Celle-ci est composée d'une part des consommateurs réguliers (boîtiers de contrôle-commande, carte de puissance pour l'alimentation électrique des principaux actionneurs, etc.), ainsi que des consommateurs ponctuels (phares, clignotants, feux de stop, autoradio, etc.). La présence d'un convertisseur DC/DC entre la batterie et la supercapacité nous permet de supposer que la puissance électrique est prélevée de la supercapacité vers la batterie, celle-ci alimentant ensuite les consommateurs

6.6 Optimisation hors-ligne : programmation dynamique

de courant. À partir de quelques mesures sur véhicule, nous considérons que 140 W sont prélevés de manière continue par les auxiliaires.

D'autre part, les modèles AMESim disponibles au moment de ces travaux ne pouvant fonctionner avec le mode Stop-and-Start, l'ensemble des résultats obtenus en simulation correspondent à des essais où le Stop-and-Start n'est à aucun moment activé.

6.6.4 Définition des contrôles

Pour la commande du moteur électrique, onze valeurs distinctes sont testées :

- cinq couples positifs, qui correspondent aux cinq niveaux définis par $\lambda \in (\lambda_i)_{i \in \llbracket 0,4 \rrbracket}$, et donc aux cinq couples admissibles par le moteur électrique,
- cinq couples négatifs, arbitrairement choisis, pour le mode régénération,
- une valeur nulle correspondant au moteur électrique non utilisé, i.e. $T_m = 0$.

6.6.5 Résultats de l'optimisation hors-ligne

L'optimisation hors ligne est utilisée alternativement à partir de consignes provenant de deux modèles : l'un étant un modèle *backward* sous Simulink, et l'autre étant un modèle *forward* sous AMESim. Dans les deux cas, on utilisera le modèle sous Simulink pour établir la loi de commande optimale sur le cycle, avec la programmation dynamique. La loi optimale obtenue est ensuite testée en boucle ouverte sur le modèle dont sont issues les consignes utilisées lors de l'optimisation.

1. Simulation de la loi optimale sur le modèle sous Simulink : on utilise ici un modèle sous Simulink, dans lequel la source de puissance électrique est modélisée par les modèles présentés en section 6.4.4, et la consommation de carburant est représentée par une cartographie, donc par un modèle statique. La loi de commande optimale est ensuite simulée sur ces mêmes modèles. La démarche complète est détaillée par la suite.
2. Simulation de la loi optimale sur le modèle sous AMESim : L'optimisation est réalisée à l'aide du modèle sous Simulink, les consignes (régime, couple, etc.) étant issues du modèle AMESim. La loi de commande optimale est ensuite testée sur le modèle AMESim. La démarche suivie est détaillée par la suite.

Résultats sur modèle sous Simulink

Dans un premier temps, on calcule la trajectoire (ω_e, T_{rq}) suivie par le véhicule en utilisant des modèles du même type que ceux de la section 4.2. Les modèles utilisés étant des modèles backward, le régime du moteur thermique ω_e est donc calculé pour suivre exactement la trajectoire. Les temps de passage de vitesse sont négligés. Le couple T_{rq} calculé pour suivre exactement le cycle de conduite doit donc être réparti de manière optimale pour minimiser la consommation de carburant. La solution optimale obtenue est ensuite simulée sur ces mêmes modèles, sous Simulink.

La Figure 6.10 regroupe les résultats obtenus. A gauche sont représentées certaines grandeurs significatives sur l'ensemble du cycle NEDC, tandis qu'à droite, un zoom sur les 200 premières secondes permet de mieux observer les variations.

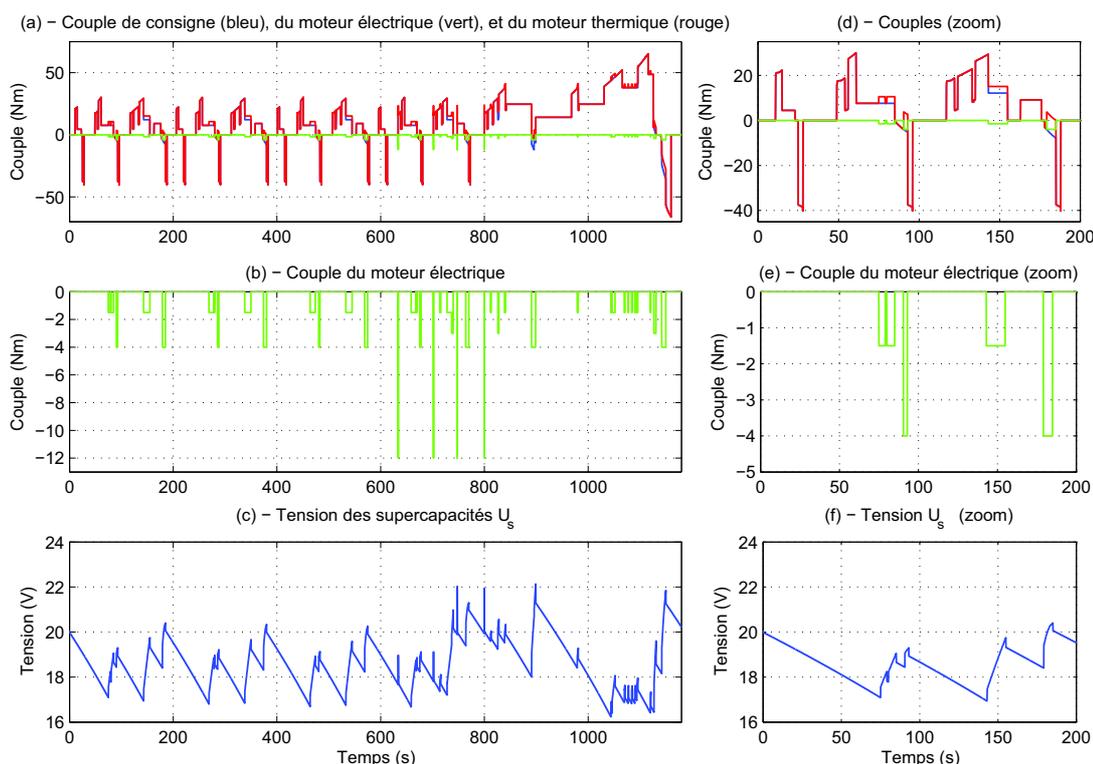


FIG. 6.10: Simulations sur modèle Simulink à partir de la commande optimale obtenue par programmation dynamique. A gauche : Couples des moteurs électrique, thermique, et de consigne (a) et (b) / Tension des supercapacités (c). A droite : Zoom des mêmes grandeurs durant les 200 premières secondes du cycle NEDC (d), (e), et (f).

D'après les courbes obtenues, la tension des supercapacités évolue entre 16 V et 22 V. On peut la voir décroître de manière continue (Figure 6.10 (f)), par exemple entre $t = 0$ s et $t = 70$ s, à cause de la puissance de 140 W qui est prélevée pour alimenter les accessoires. Cependant il ne semble pas qu'une zone de la plage de fonctionnement des supercapacités soit privilégiée par rapport à une autre. En ce qui concerne les modes de fonctionnement, on constate que le mode boost n'est jamais utilisé. Ce résultat est particulièrement important : il signifie que d'un point de vue énergétique, il n'est pas rentable d'utiliser ce mode, et s'explique par l'étude de la cartographie, déjà abordée dans la section 6.1, et par les rendements du système StARS.

Il est aisé de constater que le freinage récupératif actuel (limité à -4 Nm pour cet essai) ne permet de récupérer qu'une faible quantité d'énergie, qui reste insuffisante pour compenser la puissance de 140 W prélevée par les auxiliaires au cours du cycle. Ainsi, si le moteur électrique fournit un couple positif durant un mode boost, l'énergie électrique nécessaire à ce couple devra provenir du mode régénération, pour lequel le moteur thermique fournit un surplus de couple destiné à recharger les supercapacités.

Le rendement moyen en mode boost se situe autour de $\eta_{boost} = 60\%$, tandis que le rendement η_{regen} du mode régénération approche les 80%. Ainsi, si on note \mathcal{E}_b la quantité d'énergie mécanique produite par l'activation du mode boost pendant une certaine durée, l'énergie mécanique \mathcal{E}_r qui devra être récupérée pendant une régénération s'écrit

$$\mathcal{E}_r \approx \frac{\mathcal{E}_b}{\eta_{boost}\eta_{regen}},$$

c'est à dire $\mathcal{E}_r \approx 2\mathcal{E}_b$, ce qui revient à considérer que, pour qu'il soit valable d'utiliser le mode boost, celui-ci doit être utilisé lorsque le rendement du moteur thermique est deux fois moins bon qu'au point de fonctionnement où le mode régénération est actif. En pratique, cette situation n'arrive pas, notamment parce que le moteur thermique possède un bon rendement.

En ce qui concerne les autres modes, le mode régénération est bien actif dans certaines conditions, en particulier lorsque le couple de consigne est faible, ce qui correspond à une vitesse du véhicule qui est constante (voir Figure 6.10 droite). Le couple de régénération reste la plupart du temps supérieur ou égal à -3 Nm, les couples de -4 Nm correspondant au couple appliqué lors des freinages récupératifs.

La consommation de carburant optimale, obtenue avec les résultats de programmation dynamique, atteint 430,2 g sur le cycle NEDC, c'est à dire 107,42 g/km de CO₂. Cette consommation est calculée avec un modèle statique du moteur thermique, qui donne la consommation de carburant en fonction du couple T_e et du régime ω_e .

Pour un véhicule identique, en l'absence de stratégie de gestion d'énergie, l'alternateur doit fournir la puissance électrique de 140W, prélevant constamment un faible couple sur le moteur thermique. Lorsque le freinage récupératif est inactif, la consommation de carburant est de 435,4 g, soit 108,72 g/km de CO₂, la stratégie optimale permettant de ne gagner que 1,2 % sur la consommation de carburant. En activant le freinage récupératif, la consommation de carburant décroît faiblement à 433,4 g, soit 108,22 g/km de CO₂, ce qui indique que le freinage récupératif contribue peu à la réduction de la consommation de carburant.

Résultats sur modèle AMESim

Dans un second temps, il est intéressant de tester la commande optimale, déterminée par la programmation dynamique, sur le modèle AMESim, dont le comportement est davantage représentatif du véhicule. Ce modèle est représenté sur la Figure 6.14. Dans le but d'optimiser la répartition de couple, le modèle AMESim est simulé une première fois pour obtenir la consigne de couple du conducteur, qui diffère, par différents points, de celle qui est déterminée par un modèle *backward* tel que celui utilisé au début de la section 6.6.5 :

- Le conducteur appuie sur la pédale d'accélérateur donnant lieu à un ratio (d'enfoncement pédale), celui-ci est alors interprété par le contrôle moteur comme une consigne de couple, cette consigne est donc positive ou nulle.
- Le modèle AMESim est un modèle *forward* : un modèle de conducteur se charge de suivre le cycle de vitesse, en anticipant les accélérations et les freinages. La consigne de couple est donc, en ce sens, différente de celle d'un modèle *backward*.
- Le freinage récupératif est automatiquement actif dès que le conducteur cesse d'accélérer, afin d'augmenter l'effet ressenti comme un frein moteur, tout en récupérant de l'énergie.

L'approche consiste ensuite à utiliser la consigne de couple optimale, déterminée par la programmation dynamique, sur le modèle AMESim.

Les résultats obtenus sur le modèle AMESim sont représentés sur la Figure 6.11,

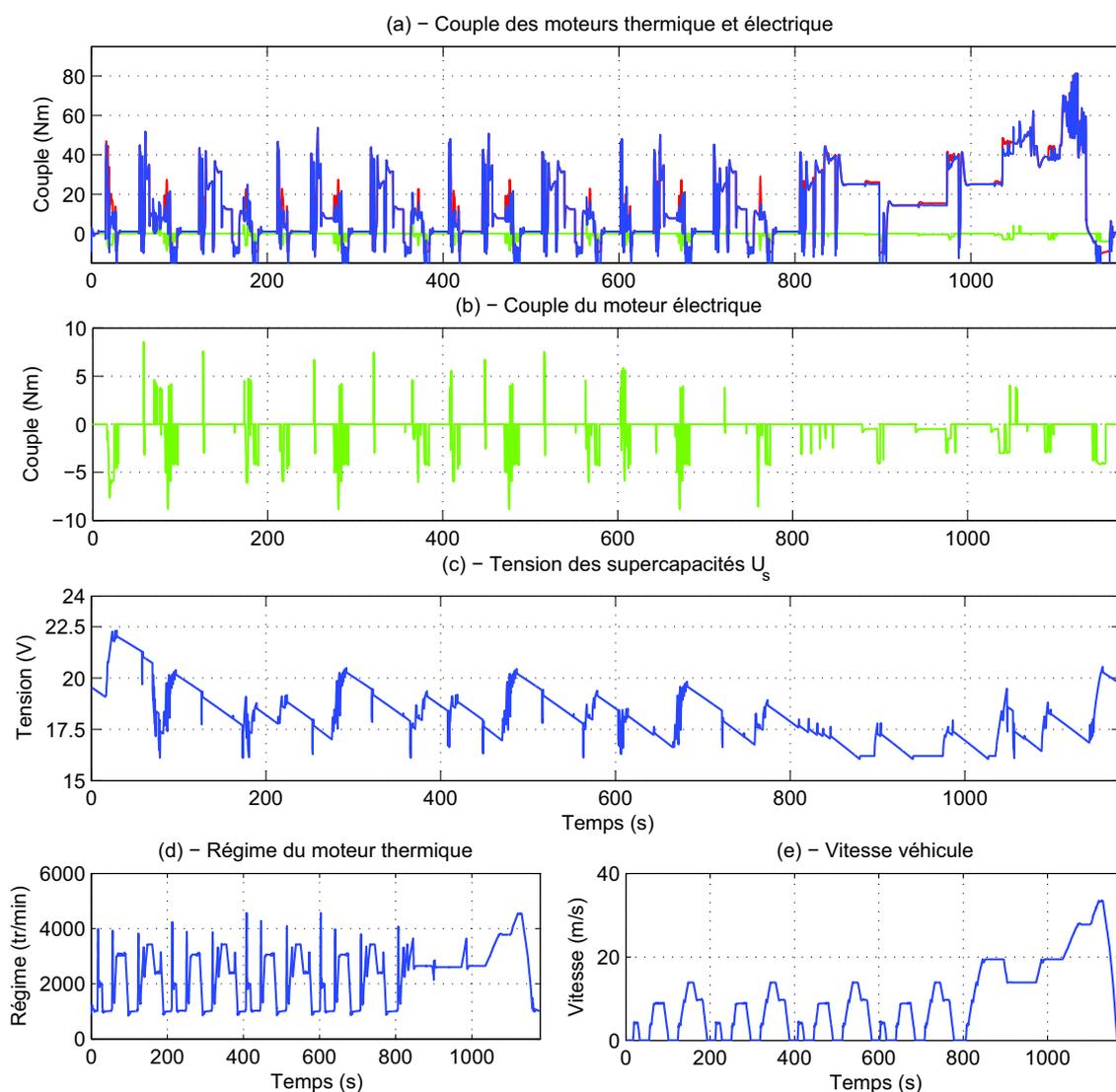


FIG. 6.11: Simulations sur modèle AMESim à partir de la commande optimale obtenue par programmation dynamique. Evolution de la tension des supercapacités contrôlée par la loi de commande obtenue par la programmation dynamique.

Contrairement au modèle backward, le modèle AMESim représente les principaux actionneurs du groupe motopropulseur : le moteur thermique avec turbo, les échanges de température, mais aussi la boîte de vitesse et l’embrayage. En particulier, les actionneurs que sont le moteur thermique et le moteur électrique possèdent des dynamiques qui ne sont pas prises en compte lors de la résolution du problème de commande optimale par la programmation dynamique. De plus, la présence d’un modèle de conducteur, qui anticipe les accélérations et les freinages, modifie la consigne de couple par rapport à un modèle backward, utilisé pour le calcul de la consigne de couple pour le modèle Simulink. Comme l’indique la Figure 6.11 (d), le moteur thermique reste allumé tout au long de l’essai, le Stop-and-Start restant inactif.

On remarque par ailleurs que le moteur électrique est parfois utilisé pour faire du boost, même si cela reste pour de faibles durées.

Après simulation, la consommation obtenue atteint 453 g de carburant sur cycle NEDC, c’est à dire 113,52 g/km de CO₂, contre 458 g en utilisant l’alternateur pour la fourniture de l’énergie nécessaire

6.7 Développement de lois temps-réel

auxiliaires (sans freinage récupératif). On retrouve un gain similaire au précédent : 1,1 % de gain en consommation, ce gain étant dû à la loi de répartition de puissance optimale ainsi qu'au freinage récupératif.

6.6.6 Discussion des résultats

A la vue des résultats obtenus, cette architecture ne permet pas d'obtenir un gain dépassant les 2 % sur cycle NEDC. Comme cela a été mentionné dans la section 6.6.5, les rendements du système électrique en mode boost et régénération ne sont pas suffisants pour qu'il soit intéressant, d'un point de vue de la réduction de la consommation, d'utiliser successivement ces deux modes sur le cycle NEDC. En conséquence, le moteur électrique n'est quasiment utilisé que pour la consommation de courant des auxiliaires.

Malgré les conclusions qui tendent à minimiser l'attrait de cette architecture sur un véhicule de type Smart, le développement d'une loi de répartition d'énergie revêt néanmoins un intérêt pour plusieurs raisons :

1. La puissance consommée par les auxiliaires représente une certaine partie de la consommation de carburant, qui peut donc être minimisée, comme cela a été montré.
2. Le freinage récupératif, activé dès lors que la pédale d'accélérateur était relâchée durant ces essais, ne donnait lieu qu'à un faible couple, de -4 Nm. Une meilleure gestion de ce freinage permettrait sans nul doute de récupérer d'avantage d'énergie.
3. L'un des objectifs de ce véhicule est de proposer une motorisation thermique moins puissante et moins consommatrice de carburant, qui puisse être épaulée par un moteur électrique. Dans ce contexte, une loi de gestion d'énergie est nécessaire pour pouvoir disposer d'une énergie dans les supercapacités qui soit suffisamment importante pour pouvoir utiliser le moteur électrique à chaque instant.

6.7 Développement de lois temps-réel

Pour le contrôle du moteur électrique, il est plus aisé de découpler la commande du Stop-and-Start, de la commande du moteur électrique visant à réduire la consommation de carburant.

6.7.1 Stop-and-Start

Le Stop-and-Start correspond à un arrêt du moteur thermique, suivi d'un redémarrage rapide de celui-ci. Pour activer le Stop-and-Start, c'est à dire pour autoriser l'arrêt du moteur thermique, la situation idéale serait de connaître la durée de l'arrêt du véhicule, pour savoir s'il est rentable d'un point de vue énergétique de stopper le moteur thermique. Il suffit en effet de comparer l'énergie nécessaire à un redémarrage (carburant injecté jusqu'au ralenti, ajouté à l'énergie électrique nécessaire à l'entraînement du moteur thermique) avec l'énergie économisée si le véhicule avait été au ralenti, pour déterminer s'il est plus intéressant de couper le moteur thermique ou non, selon la durée de l'arrêt.

Dans ces conditions, de simples règles sont généralement suffisantes pour déterminer quand éteindre le moteur thermique, et quand il doit être rallumé. On pourra utiliser les règles suivantes :

- arrêt du moteur thermique si la vitesse des roues passe en dessous de 6 km/h, si la pédale de frein est enfoncée, et si la tension des supercapacités est suffisante pour assurer un redémarrage.
- démarrage du moteur thermique dès que le frein est relâché.

6.7.2 Loi temps-réel pour la gestion d'énergie (ECMS)

La loi temps-réel qui a été choisie pour contrôler le moteur électrique est L'ECMS (voir section 5.1.3). Basée sur une minimisation de la consommation équivalente, elle consiste à considérer les supercapacités (ou bien, d'une manière plus générale, l'élément où est stockée l'énergie électrique) comme un réservoir additionnel. L'ECMS choisit ensuite la source d'énergie la moins 'chère', parmi les deux sources.

Pour cela, on forme l'Hamiltonien, correspondant à la variation d'énergie globale sur un pas de temps Δt , tel que

$$H(u, t, p) = L(u, t)\Delta t + p\mathcal{E}_{elec}(u, t)\Delta t, \quad (6.23)$$

où $L\Delta t$ représente la variation de la consommation de carburant sur un pas de temps Δt , et $\mathcal{E}_{elec}\Delta t$ correspond à la variation d'énergie électrique sur ce même pas de temps. Dans cette stratégie, le contrôle optimal est donc celui qui minimise l'Hamiltonien par rapport à u , en prenant en compte toutes les contraintes. On utilise les modèles décrits dans la section 6.4 pour l'évaluation des quantités $L(u, t)\Delta t$ et $\mathcal{E}_{elec}(u, t)\Delta t$.

Dans cette stratégie, la variation de l'état de charge est habituellement choisi comme image de la variation de la quantité d'énergie électrique prélevée. Ici, nous ne disposons que de la tension U_s et de sa variation \mathcal{U}_s . Comme la variation $\Delta t\mathcal{U}_s$ dépend de U_s , nous considérons plutôt la variation de l'énergie électrique contenue dans les supercapacités. Cette énergie s'écrit $E_{elec} = \frac{1}{2}CU_s^2$, ce qui mène donc à

$$\mathcal{E}_{elec} = CU_s\mathcal{U}_s. \quad (6.24)$$

Ainsi, on cherche la commande u^* qui minimise

$$H(u, t, p) = L(u, t)\Delta t + pCU_s(u, t)\mathcal{U}_s(u, t)\Delta t \quad (6.25)$$

sous les contraintes de couples maximal et minimal des deux moteurs. En choisissant une telle forme pour l'Hamiltonien, p est idéalement constant lorsque la tension U_s évolue librement dans sa plage de fonctionnement. On s'assure d'autre part que cette hypothèse est juste, les mesures de rendement du système StARS, dans les modes moteur et régénération, indiquant un rendement presque constant quelle que soit la tension de fonctionnement U_s .

Le contrôleur implémenté dans la structure générale du contrôle moteur du véhicule tient compte de toutes les contraintes inhérentes au véhicule, et en particulier des hypothèses suivantes :

- Le mode régénération du moteur électrique ne peut être actif en dessous de $\omega_e = 1500$ tr/min. Cette contrainte n'a pas lieu d'être, néanmoins elle est intégrée au contrôleur Valeo ¹.
- Pour récupérer davantage d'énergie lors du ralentissement du véhicule, on a appliqué un freinage de $T_m = -2,5$ Nm dès que l'injection de carburant est coupée. Ce freinage n'est pas à proprement parler un freinage récupératif, puisque la pédale de frein n'est pas actionnée. Néanmoins, cela permet de récupérer un peu d'énergie tout en ralentissant un peu plus le véhicule (sans que cela devienne désagréable pour le conducteur, du point de vue de l'agrément).

¹Cette valeur est historique : sur d'anciens projets Valeo, la solution StARS était montée en liaison avec le moteur thermique avec un rapport de réduction de 3. La limite de régénération était fixée à $\omega_e = 1000$ tr/min, soit $\omega_m = 3000$ tr/min. La valeur de cette limitation n'ayant pas été modifiée par l'équipementier, on la retrouve au régime $\omega_e = 3000/1,96 \simeq 1500$ tr/min, le rapport de réduction de la VEHGAN étant de 1,96.

6.7.3 Structure du contrôle sur le véhicule

Contrôle en couple

Le moteur thermique est contrôlé de façon à prendre en compte la dynamique de ses actionneurs. En particulier, sur un moteur, le contrôle de la boucle d'air et de la boucle de carburant est déterminant pour assurer un bon suivi de la trajectoire de couple, mais aussi pour obtenir un mélange proche du mélange stoechiométrique (minimise les rejets de polluants). Si l'injection de carburant dans le cylindre est quasi-instantanée, il n'en est pas de même pour la boucle d'air. En effet, l'alimentation en air est assurée par un papillon motorisé, dont la dynamique est rapide, mais c'est ensuite le collecteur d'admission qui joue le rôle de filtre et retarde l'entrée de l'air dans le cylindre.

La boucle d'air et la boucle de carburant ont donc deux dynamiques assez différentes. Sur véhicule, pour s'assurer que la richesse du mélange reste proche de 1, on a recourt à une estimation de la quantité d'air dans le cylindre. Cette estimation est phasée avec la mesure de la quantité d'air dans le cylindre lors de phases de fonctionnement stabilisé ; par contre, pendant les phases transitoires, l'estimation est en retard par rapport à la consigne de masse d'air, ce qui permet à la boucle de carburant d'injecter une quantité de carburant calée sur la quantité d'air réellement présente dans le cylindre.

Dans l'ECMS, on évalue la quantité de carburant nécessaire à la production d'un couple par le moteur thermique, couple qui est calé par rapport à la consigne de couple du conducteur, mais aussi par rapport au couple du moteur électrique. Cette approche n'est donc pas adaptée au contrôle actuellement utilisé, dans le sens où l'injection de carburant est corrélée à la mesure de la quantité d'air dans le cylindre, alors que le conducteur commande le papillon motorisé sans commander directement la quantité d'essence injectée.

Compromis contrôle optimal / agrément

L'ECMS consiste à minimiser l'Hamiltonien en temps-réel selon l'équation (6.25).

On définit par $u_{t_k}^j$, $j = 1, \dots, 11$ les commandes testées à chaque instant t_k . Le vecteur de commandes comporte onze composantes (voir section 6.6.4). La commande optimale $u_{t_k}^*$ est la $j^{\text{ième}}$ composante du vecteur de commandes qui minimise l'Hamiltonien, tout en vérifiant les contraintes provenant des actionneurs (contraintes sur la commande) et des supercapacités (contraintes sur l'état).

Cette minimisation en temps-réel peut donner lieu à des variations rapides du contrôle sous-optimal déterminé par l'ECMS, qui ne sont pas acceptables d'un point de vue de l'agrément, et qui ne seraient pas réalisables par les actionneurs. Pour pallier à ce phénomène, on applique une pondération à l'Hamiltonien H , et on forme \tilde{H} selon la loi suivante

$$\tilde{H}(u, t, p) = H(u, t, p) + g(u_{t_k}, u_{t_{k-1}}^*) \quad (6.26)$$

$$\text{avec } g(u_{t_k}, u_{t_{k-1}}^*) = \begin{cases} -a & \text{si } u_{t_k} = u_{t_{k-1}}^*, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où a est une valeur déterminée expérimentalement² lors d'essais en simulations, en étudiant l'évolution de l'Hamiltonien au cours du temps pour l'ensemble des commandes.

On ne cherche alors plus à minimiser l'Hamiltonien H , mais la fonction \tilde{H} . Cette pondération revient à favoriser le choix d'une commande qui était celle du pas précédent³, parmi les commandes admissibles. En contrepartie, la consommation de carburant devrait être un peu dégradée.

²On aurait dû considérer non pas $-a$ mais $-aU_s$, l'Hamiltonien évoluant selon $U_s \Delta U_s$. Néanmoins, les résultats présentés ont été obtenus avec une pondération égale à $-a$.

³En réalité on ne considère pas les commandes u_{t_k} et $u_{t_{k-1}}^*$, mais les composantes du vecteur de commande.

6.7.4 Contrôle de p

Beaucoup d'auteurs ont présenté leur travaux concernant le contrôle du multiplicateur p (voir section 5.1.3). Étant donnée la faible plage de variation de la tension, c'est à dire entre 16V et 24V, on fait l'hypothèse que l'efficacité de la supercapacité est constante sur toute la plage de fonctionnement. D'après la section 5.1.3, on a donc nécessairement $\dot{p} = 0$ tant qu'aucune contrainte sur l'état n'est active.

Aussi, le contrôle de p qui est utilisé sur le véhicule est le suivant :

- Si $16 + \Delta U < U_s < 24 - \Delta U$, $p(t) = \text{constante} = p_0$.
- Si $16 + \Delta U > U_s$ et si les conditions de fonctionnement sont réunies pour autoriser une régénération (sans que cela soit forcément optimal pour autant), alors p est contrôlé par un intégrateur, i.e. $p(t) = p(t - \delta t) + K_1 \delta t$, avec $K_1 > 0$.
- Si $U_s < 24 - \Delta U$ et si les conditions de fonctionnement sont réunies pour autoriser un fonctionnement en mode boost, (sans que cela soit forcément optimal pour autant), alors p est contrôlé par un intégrateur, i.e. $p(t) = p(t - \delta t) - K_2 \delta t$, avec $K_2 > 0$.

où ΔU correspond à un seuil de tension, afin d'anticiper la variation de p près des bornes, et d'éviter que la tension ne franchisse celles-ci.

Les gains K_1 et K_2 jouent donc le rôle du contrôle de p lorsque l'on active une contrainte sur l'état. Ces gains ont été optimisés à l'aide du modèle sous Simulink sur le cycle NEDC, en appliquant la commande boucle ouverte obtenue par l'ECMS. L'idée est de rechercher les valeurs de K_1 et de K_2 qui minimisent la consommation.

La Figure 6.12 donne l'allure de la variation de consommation pour différentes valeurs de K_1 et de K_2 . On remarque que la consommation de carburant est plus importante lorsque K_1 est faible, ce qui s'explique par un rendement du moteur électrique légèrement moins bon à faible tension. De la même manière, le rendement du moteur électrique étant légèrement meilleur aux tensions plus élevées, le gain K_2 reste faible. Malgré la faible différence de consommation (qui reste inférieure à 0,25 %) selon les valeurs de K_1 et de K_2 , la consommation optimale est obtenue pour $K_1 = 0,16$ et $K_2 = 0,08$.

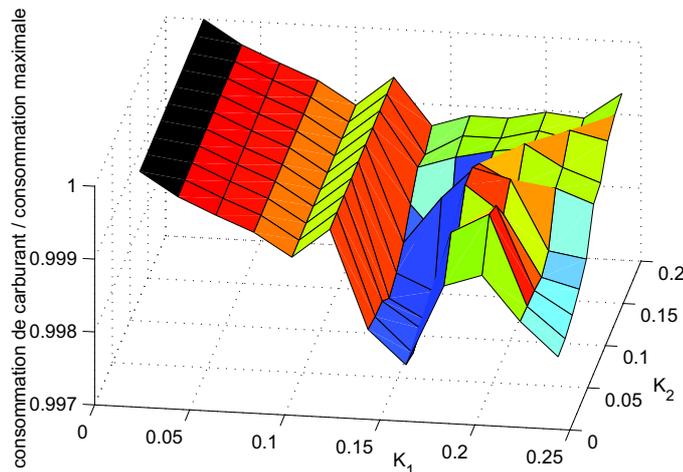


FIG. 6.12: Allure de variation de consommation de carburant sur cycle NEDC selon les gains K_1 et K_2 .

La Figure 6.13 donne l'allure de la tension U_s et du multiplicateur de Lagrange p sur le cycle NEDC avec la loi ECMS, en simulation avec le modèle Simulink. La tension initiale U_s a ici été choisie égale à 15V, comme c'est le cas sur véhicule lors d'un essai normalisé. Néanmoins, les valeurs de K_1 et K_2 obtenues pour $U_s(t = 0) = 15$ V conviennent aussi pour des tensions initiales supérieures, la valeur initiale p_0 ayant été bien choisie.

6.8 Résultats de la stratégie ECMS

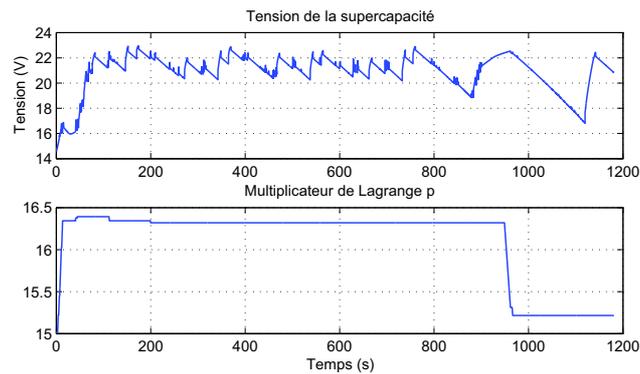


FIG. 6.13: Allure de la tension U_s et du multiplicateur de Lagrange associé p

6.8 Résultats de la stratégie ECMS

6.8.1 Tests en simulation - comparaison lois optimales / sous-optimales

Les tests ont été menés sur un modèle *forward* sous environnement AMESim, qui comporte un modèle de conducteur, chargé de suivre une consigne de vitesse. On rappelle que ce modèle ne permettait pas, au moment de ces travaux, de simuler le mode Stop-and-Start : les résultats de simulation suivants correspondent à une gestion d'énergie sans Stop-and-Start. La Figure 6.14 représente le modèle utilisé.

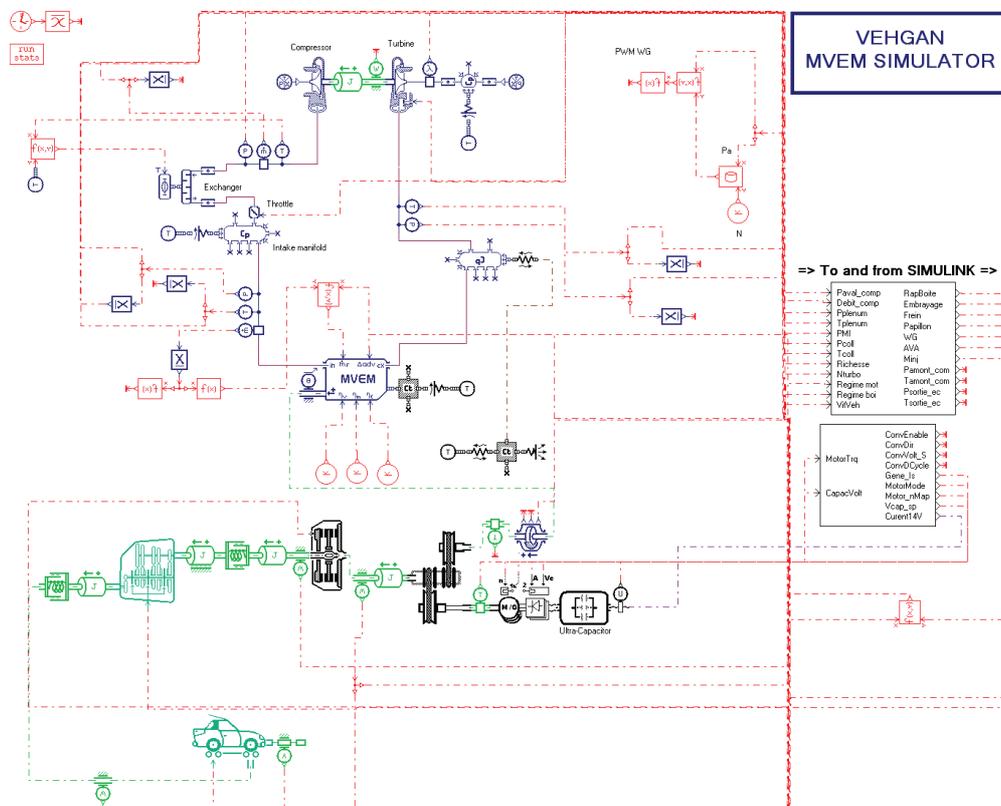


FIG. 6.14: Modèle AMESim de la VEHGAN utilisé en co-simulation.

Les modèles du moteur électrique et des supercapacités sont les mêmes que ceux qui sont utilisés dans l'ECMS. La détermination de la valeur initiale de p a été effectuée à l'aide d'essais successifs, de façon à ce que la tension ait tendance à rester entre ses bornes 16 V et 24 V.

La Figure 6.15 montre les courbes d'évolution des principales grandeurs sur le cycle NEDC.

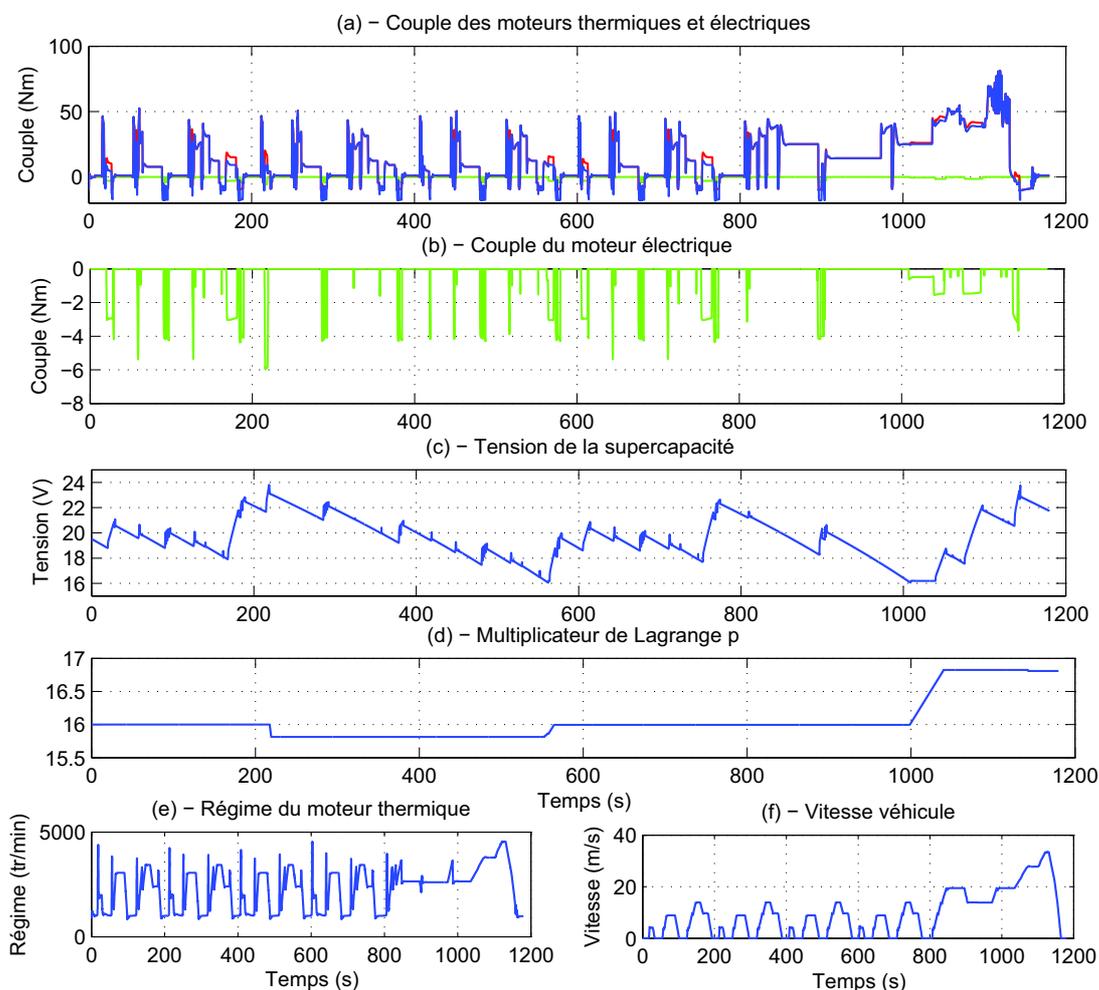


FIG. 6.15: Couple de consigne, couple de consigne du moteur thermique, et couple de consigne du moteur électrique (a), couple de de consigne du moteur électrique (b), Tension supercapacité (c), commande p (d), régime du moteur thermique (e), et vitesse véhicule (f) en simulation sur cycle normalisé NEDC avec la loi ECMS.

Cette stratégie a permis d'obtenir une consommation de 452,7 g, soit 113,4 g de CO_2 , pour une tension finale de 21,73 V. Ainsi, on retrouve à peu près les mêmes résultats de ceux obtenus avec la programmation dynamique. Le tableau 6.2 regroupe les résultats obtenus sur le modèle AMESim.

Les résultats de programmation dynamique doivent normalement refléter le gain maximal que l'on peut obtenir avec la loi de commande optimale. Ici, on remarque immédiatement que l'ECMS permet d'obtenir des résultats légèrement meilleurs que ce que permet la programmation dynamique. On peut expliquer cette différence par plusieurs raisons :

- Les pas de discrétisation choisis, dans le calcul de programmation dynamique, n'étaient pas suffisamment fins. Le contrôle optimal retenu est donc très sous-optimal lorsqu'il est appliqué sur un pas de temps trop long.

6.8 Résultats de la stratégie ECMS

TAB. 6.2: Valeur de consommation de carburant sur le cycle NEDC en simulation

	Therm. pur	Therm. pur & récup. freinage	Prog. Dyn.	ECMS
Consommation (g)	458	454,1	453	452,7
Emissions de CO ₂ (g/km)	114,7	113,8	113,52	113,44

- Les changements brusques de la commande du moteur électrique (par exemple passage du mode boost au mode régénérateur) peuvent en fait être néfastes pour la minimisation de la consommation. Pour l'ECMS, la mise en place d'une prise en compte de la commande précédente (voir section 6.7.3) permet d'éviter ce type de basculement.

Néanmoins, on remarque que l'ensemble de ces consommations sont proches, le potentiel de ce véhicule restant assez limité.

6.8.2 Tests sur véhicule réel

Après la mise au point de la stratégie de gestion d'énergie grâce à des modèles représentatifs du véhicule, celle-ci a été testée directement sur véhicule. L'objectif est double :

1. Obtenir un comportement de la tension U_s qui soit conforme aux attentes. En ce sens, la tension doit évoluer "librement" entre ses bornes, sans rester longtemps sur l'une d'elle. Dans le cas où la tension s'approche d'une borne, la commande module la valeur de p de telle manière à ce que la tension s'éloigne de la borne, en favorisant l'un ou l'autre des modes de fonctionnement du moteur. Les bornes sur la tension pourront ensuite être adaptées à la conduite souhaitée : pour une conduite "sportive", la tension devra rester assez élevée, afin de disposer d'une source d'énergie dans le cas où le mode boost est activé. Dans le cas d'une conduite souple, on donnera la priorité à la minimisation de la consommation
2. Minimiser la consommation de carburant par rapport à celle du véhicule conventionnel.

Sur ces essais à bord du véhicule, la supercapacité fournit l'énergie nécessaire aux accessoires, via le convertisseur DC/DC. En conséquence, lorsqu'il n'y a pas de régénération, la tension de la supercapacité U_s décroît presque linéairement avec le temps.

Test sur véhicule réel sur un trajet quelconque

Les premiers tests menés sur véhicule, sur un trajet quelconque, avaient pour objectif de tester la stratégie développée et de s'assurer que la mise en route et l'arrêt du moteur électrique étaient transparents pour le conducteur. Durant cet essai, le Stop-and-Start a été désactivé.

La Figure 6.16 indique l'allure de la tension U_s et du multiplicateur p lorsque l'on se rapproche de l'une ou l'autre des bornes, sur un trajet quelconque.

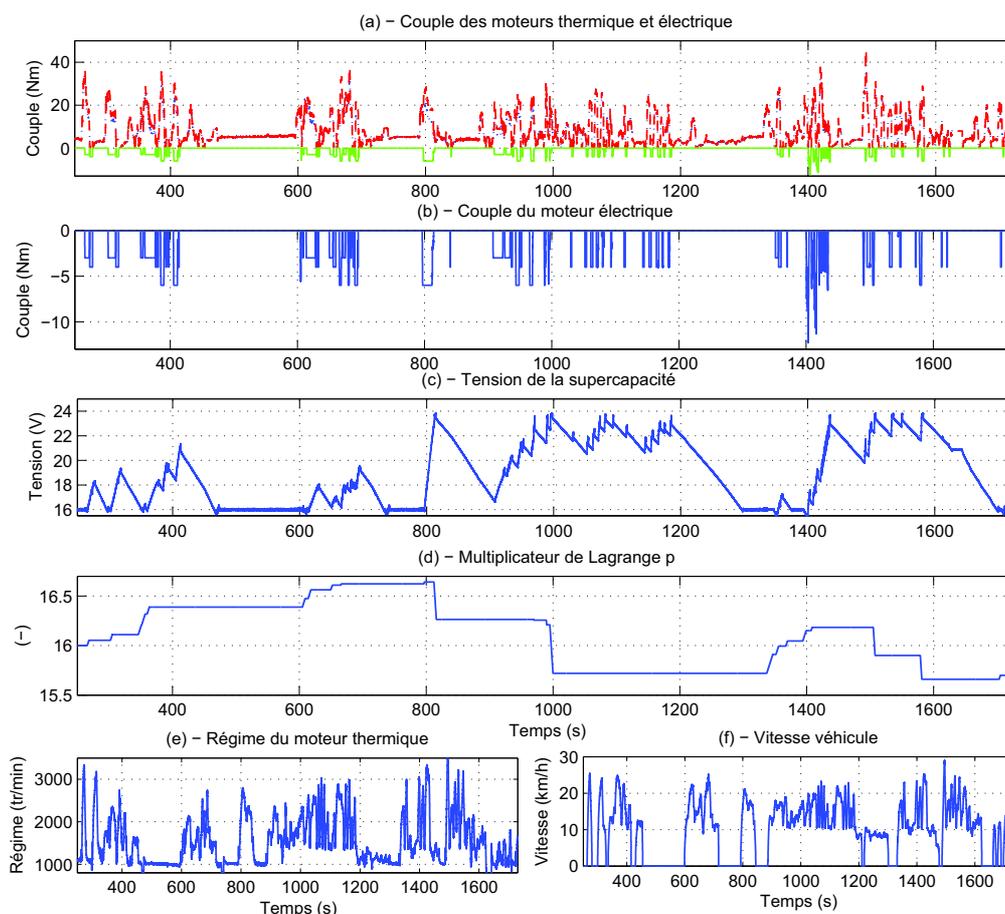


FIG. 6.16: Couple de consigne, couple de consigne du moteur thermique, et couple de consigne du moteur électrique (a), couple de de consigne du moteur électrique (b), tension supercapacité (c), commande p (d), régime du moteur thermique (e), et vitesse véhicule (f) - Mesures sur véhicule, sur une portion de route avec la loi ECMS, sans Stop-and-Start.

On constate que la tension reste entre les valeurs limites 16 V et 24 V, le multiplicateur p évoluant de manière à forcer le moteur électrique à recharger la supercapacité lorsque cela est nécessaire. Le moteur thermique fournit alors un surplus de couple pour compenser le couple du moteur électrique. Entre les temps $t = 470$ s et $t = 600$ s, on peut voir que le mode alternateur est utilisé, puisque la tension est maintenue à 16 V. Ce mode est utilisé ici comme un mode de secours, pour s'assurer que la tension des supercapacités ne diminue pas. Durant cette période, le multiplicateur p n'est pas incrémenté, puisqu'on ne se trouve pas dans des conditions où la régénération est possible. Sans cette précaution, p pourrait être incrémenté tant que la tension U_s n'a pas quitté la contrainte, alors qu'elle n'a pas les moyens de le faire, puisque les conditions requises pour la régénération ne sont pas présentes.

Test sur véhicule réel sur Cycle NEDC

La même stratégie a été testée sur véhicule pour un suivi du cycle normalisé NEDC (voir section 1.2.1). L'essai a été réalisé dans les conditions suivantes : le moteur est froid, la tension initiale des supercapacités se situe autour de 15 V. Pour cet essai, le Stop-and-Start a été activé, et permet donc de limiter la consommation de carburant lors des phases de ralenti. En contrepartie, la tension décroît à chaque démarrage du moteur thermique, la supercapacité étant utilisée pour l'entraînement du moteur

6.8 Résultats de la stratégie ECMS

électrique utilisé comme un démarreur.

Enfin, pour récupérer un peu d'énergie électrique durant les freinages, le mode régénération est activé dès que le conducteur presse la pédale de frein, le moteur électrique prélevant alors un couple constant $T_e = -2,5$ Nm. La valeur initialement appliquée de -4 Nm pour le couple de régénération a été jugée trop importante à la suite de quelques tests sur véhicule, c'est pourquoi elle a été réduite à -2.5 Nm.

Sur la Figure 6.17 sont représentés la tension de la supercapacité et le multiplicateur de Lagrange p , ainsi que les principales grandeurs représentatives de l'essai.

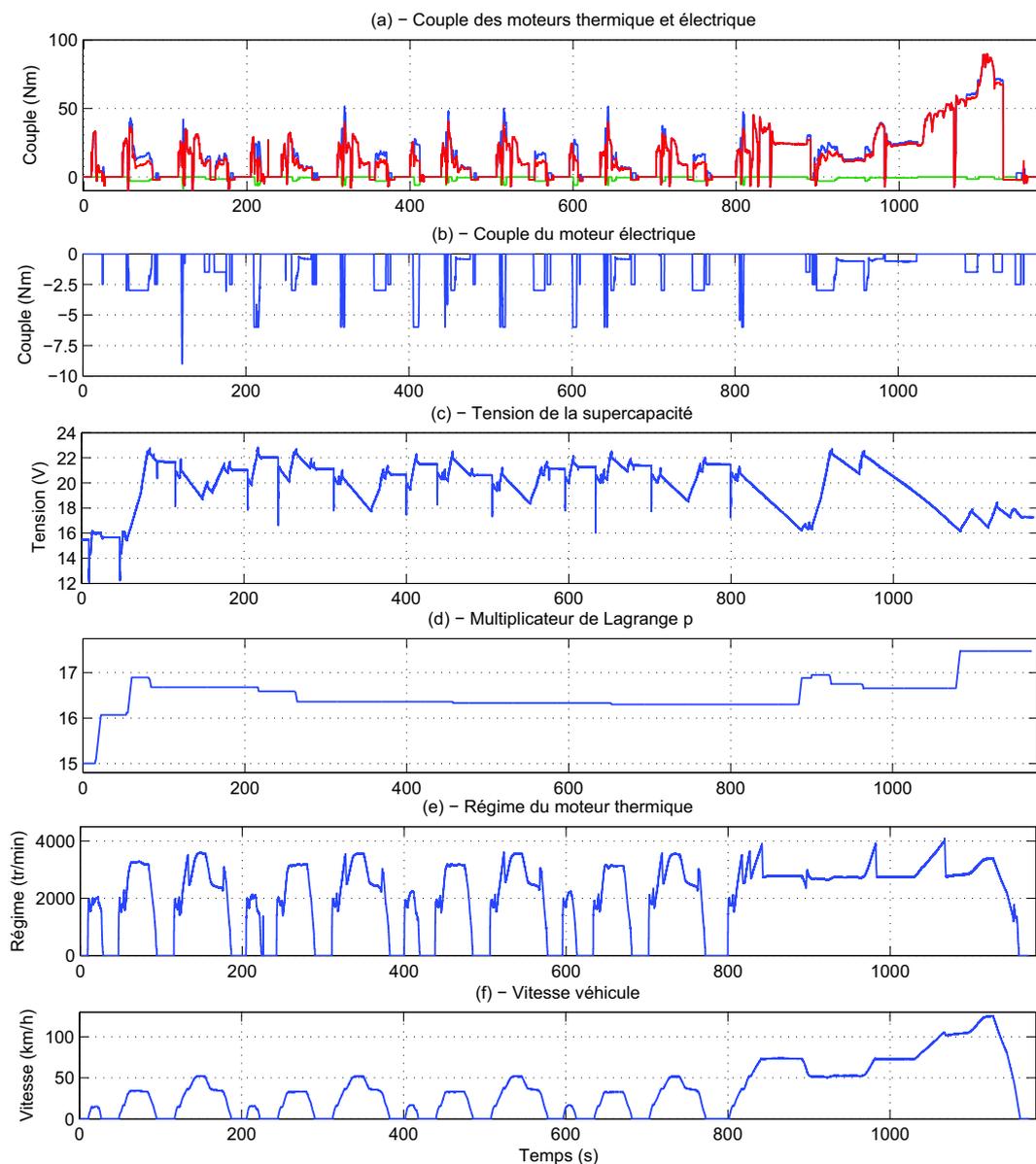


FIG. 6.17: Couple de consigne conducteur, couple de consigne du moteur thermique, et couple de consigne du moteur électrique (a), couple de consigne du moteur électrique (b), Tension supercapacité (c), commande p (d), régime du moteur thermique (e), et vitesse véhicule (f) pour le véhicule Smart sur cycle normalisé NEDC avec la loi ECMS.

La tension évolue bien d'une borne à l'autre et sans les franchir, la commande du multiplicateur p

permettant de favoriser ou non une recharge de la supercapacité. La valeur initiale $p_0 = 15$ a été choisie en connaissance de la faible tension au début du cycle ($U_s = 15$ V), il fallait donc que p_0 soit assez élevée pour favoriser la recharge, et suffisamment faible pour qu'après avoir quitté la contrainte $U_s = 16$ V, la valeur du multiplicateur p ne soit pas trop grande. D'après la trajectoire de p , et sa valeur à la fin des quatre cycles ECE (à $t=800$ s) la valeur optimale de celui-ci se situe autour de 16,3 pour un trajet urbain. Sa valeur augmente sur la fin du cycle, le borne $U_s = 16$ V ayant été approchée à plusieurs reprises.

Sur la première partie du cycle, les chutes de tension sont provoquées soit par les démarrages (chutes brusques), soit par la consommation de courant des auxiliaires (baisse continue). On peut observer qu'au début du cycle, la tension passe ponctuellement sous les 16V après un redémarrage, la tension initiale étant de 15 V et les conditions de régénération n'étant alors pas remplies (couple de consigne trop important / régime trop faible / etc.) pour qu'une régénération des supercapacités soit autorisée.

D'après la courbe (b) de la Figure 6.17, le couple de freinage atteint rarement le couple exact -2,5 Nm, ce qui indique que le mode freinage récupératif est rarement utilisé. On explique cela par plusieurs raisons :

- Le freinage récupératif est dû au mode régénération, avec lequel on applique un couple dès que la pédale de frein est enfoncée. Néanmoins, il n'est possible de freiner le véhicule de cette manière que lorsqu'un rapport est engagé. Dans le cas contraire, les moteurs thermique et électrique sont découplés du train moteur, et donc des roues. Le freinage du véhicule est alors assuré par le système de freinage mécanique.
- La limitation en régime, interne au contrôleur Valeo, empêche d'utiliser le mode régénération sous la vitesse de $\omega_e = 1500$ tr/min.
- Le ralentissement naturel du véhicule apporté par le frein moteur (lorsque le conducteur relâche la pédale d'accélérateur) est souvent suffisant pour ralentir le véhicule, sans que le conducteur n'ai besoin de freiner davantage.

Ces raisons expliquent notamment que la tension soit si peu élevée à la fin du cycle, et malgré le grand freinage de 130 km/h jusqu'à 0 km/h propre au cycle NEDC.

Cet essai réalisé au banc à rouleaux dans des conditions valides a permis, grâce à cette stratégie, d'obtenir des émissions de 93,2 g/km de CO₂, ce qui constitue le meilleur résultat à ce jour pour ce véhicule. A titre de comparaison, un essai similaire obtenu avec Stop-and-Start, mais sans freinage récupératif ni gestion énergétique (donc la stratégie ECMS présentée), avait permis d'obtenir des émissions de 95 g/km de CO₂ quelques jours auparavant. Durant cet essai, la recharge des supercapacités était réalisée au moyen du mode alternateur, qui maintenait alors la tension à 16 V, celle-ci étant ponctuellement dépassée lors des freinages.

Le gain apporté par cette stratégie est donc de 1,9 % sur le cycle NEDC pour ce véhicule. Ce gain peut paraître faible, néanmoins il constitue un très bon résultat aux vues des nombreuses contraintes qui pèsent sur ce véhicule, dues aux limitations de son architecture (faible énergie récupérée durant un freinage récupératif pour un micro-hybride) et en particulier de son moteur électrique qui est très limité en mode boost.

6.9 Conclusion / Perspectives

Cette étude a permis de mettre en oeuvre une loi de gestion d'énergie adaptée à un véhicule de type micro-hybride. En particulier, un module de gestion énergétique a été développé sous Simulink, et intégré au contrôle moteur du véhicule.

Ce module utilise une loi de commande sous-optimale basée sur le principe de Pontryagin, celle-ci permettant de favoriser une recharge ou une décharge des supercapacités en fonction d'un seul et unique paramètre p . Pour pouvoir appliquer cette stratégie connue sous le nom d'ECMS, des modèles représentatifs de l'architecture hybride, et en particulier de chaque source d'énergie, ont été développés.

La stratégie a ensuite été testée sur le cycle normalisé NEDC sur véhicule réel, et dans des conditions valides pour ce type d'essai. Malgré les nombreuses limitations de cette architecture, les résultats sont "relativement bons", atteignant presque 2% de gain en émission de CO₂ par rapport à une stratégie qui maintient simplement la tension à $U_s = 16V$.

Parmi les perspectives, la stratégie actuelle pourrai probablement être améliorée, par exemple en testant davantage de couples admissibles pour chacun des modes (il y en a 5 pour chaque mode actuellement).

De plus, l'amélioration de la gestion du freinage récupératif permettrait sans aucun doute de gagner encore un peu d'énergie électrique. À l'heure actuelle, le freinage mécanique reste indépendant du freinage que peut apporter le moteur électrique. Une interface doit donc être créée pour permettre le dialogue entre le contrôle de l'ABS, et celui du moteur électrique.

En ce qui concerne la gestion d'énergie, celle-ci pourra aussi être adaptée à la conduite souhaitée : par exemple garder une réserve d'énergie importante pour une utilisation intensive du mode boost, ou bien laisser totalement la main à la loi de gestion d'énergie, quitte à laisser la tension descendre jusqu'à 16 V, cette valeur interdisant alors l'utilisation du mode boost.

Conclusion

Conclusion

Du fait de normes de plus en plus contraignantes, et d'une prise de conscience globale concernant le réchauffement climatique, les véhicules hybrides représentent – à court terme – une solution pour réduire la consommation de carburant, les émissions de CO₂, et les rejets de polluants. C'est d'ailleurs pour ces raisons qu'une majorité de constructeurs automobiles prévoient de proposer un véhicule avec motorisation hybride parmi leur gamme, et de proposer le stop-and-start en option d'ici 2009 à 2010.

Au cours de cette thèse, nous avons étudié les principales architectures hybrides, notamment pour mettre en perspective les avantages et les inconvénients de chacune. Nous nous sommes concentrés sur le point le plus important qu'offre l'architecture hybride : la possibilité de réduire significativement la consommation de carburant, en commandant le moteur électrique de façon adéquate. Cette étape a demandé le développement de modèles adaptés aux algorithmes d'optimisation et à l'objectif fixé : déterminer la loi de répartition d'énergie optimale, sur cycle et en temps-réel.

Une étude détaillée des différentes approches pour résoudre les problèmes de commande optimale a ensuite été menée, ainsi que des méthodes numériques qui pouvaient être appliquées. On a montré que la résolution de ces problèmes en présence de contraintes sur l'état était délicate, notamment lorsqu'on passe par l'écriture des conditions d'optimalité. Parmi les méthodes capables de résoudre ces problèmes, la programmation dynamique a été choisie comme méthode de référence pour sa facilité à prendre en compte les contraintes sur la commande et sur l'état.

Un algorithme original, nommé SCOP, représente une alternative très intéressante à la programmation dynamique. Basé sur le principe de Pontryagin, cet algorithme permet de résoudre le problème d'optimisation de la répartition de couple en un temps 50 à 100 fois moindre que celui que requiert la programmation dynamique. La convergence de cet algorithme a été prouvée sur deux cas simples : celui d'une corde reposant sur un support plan, et celui d'un problème de répartition de puissance d'un véhicule hybride, sur une portion de cycle.

L'algorithme SCOP, qui permet de trouver la trajectoire optimale de l'état x et de l'état adjoint p , permet aussi de valider l'approche donnée par l'ECMS. Cette stratégie temps-réel, qui consiste à considérer la batterie comme un réservoir additionnel de carburant, est basée sur la qualité des modèles développés, mais aussi et surtout sur la façon dont est commandé p , dont l'action favorise l'utilisation du moteur électrique pour le mode boost ou pour le mode régénération. La mise en oeuvre de cette loi de commande sur un cas simple montre la difficulté liée à l'estimation de la valeur initiale p_0 .

Dans ce contexte, l'optimisation hors-ligne de la consommation sur cycle, et l'utilisation de la programmation dynamique, présente un fort intérêt :

- La consommation obtenue donne le potentiel de gain maximal de l'architecture hybride. La loi de commande optimale indique notamment quels sont les modes de fonctionnement du moteur électrique qui sont privilégiés, et quels sont ceux qui ne participent pas à la réduction de la consommation. La section 6.6.5 illustre parfaitement ces propos, les résultats de programmation dynamique

sur le modèle du véhicule VEHGAN donnant le potentiel de gain maximal, ainsi que les commandes optimales sur le cycle NEDC.

- Lors de l'utilisation de l'ECMS, la détermination d'une valeur initiale de p est délicate. Les résultats de programmation dynamique peuvent permettre de calculer une estimation de p sur cycle le long de la trajectoire optimale.
- Le développement de lois de commande temps-réel nécessite, dans sa phase de validation, une comparaison à d'autres lois, et si possible à la loi optimale fournie par l'optimisation hors-ligne.

Enfin, les algorithmes d'optimisation utilisés jusqu'alors ont été appliqués sur un prototype de véhicule hybride : une Smart au gaz naturel équipée d'un alterno-démarrreur. Sur ce véhicule, l'alternodémarrreur peut aussi être utilisé pour les modes boost et régénération, néanmoins ses contraintes d'utilisation ne permettent pas de l'utiliser sur une grande plage de fonctionnement, notamment en ce qui concerne le mode boost. Ainsi, le gain en consommation de carburant de ce véhicule reste donc assez limité.

Après le développement et la validation en simulation d'une loi de commande de type ECMS, celle-ci a été implémentée sur le véhicule Smart et testée sur banc à rouleaux. Les premiers résultats sont prometteurs, la stratégie de type ECMS développée permettant de diminuer de presque 2% les émissions de CO₂ sur le cycle NEDC. D'autre part, le comportement de la tension des supercapacités correspond bien aux attentes, et le comportement dynamique du véhicule (agrément) est très correct, la mise en route du moteur électrique étant transparente pour le conducteur.

Perspectives

Le problème d'optimisation abordé, et résolu par les méthodes de programmation dynamique et par SCOP, concernait la minimisation de la consommation de carburant sur cycle. La minimisation des rejets de polluant n'a pas été abordée dans cette thèse, le problème d'optimisation associé présentant moins d'intérêt : on sait en effet que la majorité des rejets de polluants de HC, NO_x, et de CO a lieu avant que le catalyseur n'ait eu le temps de monter en température, et lorsque le moteur est encore "froid". Une fois que celui-ci a atteint sa température de fonctionnement, il devient très efficace.

Néanmoins, il aurait pu être intéressant de résoudre plutôt le problème de la minimisation du temps de mise en action du catalyseur. Celui-ci peut être résolu en utilisant la programmation dynamique, mais en l'appliquant sur un modèle à deux variables d'état : l'une représentant la dynamique de la température du collecteur d'échappement, et l'autre la dynamique de la température du catalyseur (par exemple pour un modèle à deux états).

Cependant, la solution de ce problème, dans le cadre d'un véhicule hybride, est presque évidente : il suffit de "charger" le moteur thermique (appliquer un couple résistant) autant que possible, de façon à ce que les gaz d'échappement soient les plus chauds. Du point de vue du contrôle de l'architecture hybride, cela revient à activer la régénération aussi souvent que possible.

Un second point vient immédiatement à l'esprit : la minimisation de la consommation de carburant *et* des émissions de polluants. Ce problème reste dépendant d'une inconnue : la pondération à appliquer entre les deux critères à minimiser, l'un et l'autre rendant compte de phénomènes physiques différents. Pour les raisons énoncées plus haut, ce problème n'a pas été étudié, néanmoins il pourrait être intéressant de voir comment se dégrade le gain en consommation, par rapport à une diminution notable des rejets de polluants.

Du point de vue des méthodes numériques employées, si la programmation dynamique se révèle classique pour résoudre le type de problème traité dans ce mémoire, SCOP peut constituer une méthode extrêmement rapide et précise pour la détermination du potentiel d'un véhicule hybride. Il est, d'autre

part, construit sur les mêmes bases que l'ECMS, permettant éventuellement d'utiliser les mêmes modèles pour l'optimisation hors-ligne et la loi temps-réel.

L'algorithme SCOP a aussi été appliqué avec succès sur un autre type de problème, pour lequel le multiplicateur de Lagrange n'était pas constant par morceaux : la minimisation de l'énergie d'une corde reposant sur un support plan.

Cet algorithme doit encore être testé sur d'autres types de problèmes, pour lesquels les hypothèses sont plus larges : contraintes de bornes sur l'état dépendant du temps, etc. En particulier, le problème de la minimisation de la consommation de carburant d'un véhicule hybride dont le moteur thermique peut être arrêté puis rallumé (avec une surconsommation de carburant), possède deux variables d'état soumises à des contraintes de borne, et pourrait donc constituer un problème intéressant à traiter avec l'algorithme SCOP.

Annexes

Annexe A

SCOP : a Sequential Constraint-free Optimal control Problem algorithm

SCOP: a Sequential Constraint-free Optimal control Problem algorithm

G. Rousseau¹, Q. H. Tran¹, D. Sinoquet¹

1. Département Mathématiques Appliquées, IFP, 1 et 4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex, FRANCE
E-mail: Gregory.Rousseau@ifp.fr, Q-Huy.Tran@ifp.fr, Delphine.Sinoquet@ifp.fr

Abstract: In this paper, we propose a new computational algorithm for optimal control problems with a scalar state subject to simple-bound constraints. Unlike multiple shooting algorithms, the number of active constraints does not need to be known in advance. This method is also much faster than dynamic programming. Convergence is proved for two particular cases. SCOP is applied for an optimization problem of fuel consumption for a hybrid vehicle.

Key Words: Optimal Control, Pontryagin’s Principle, State Constraints, Shooting Algorithm

1 INTRODUCTION

Optimal control problems involving dynamic systems and state boundary constraints can be solved following various approaches. These approaches can be mainly divided into two families: (i) direct methods, which assume that the optimal control problem has been discretized in time and space, and which lead to classical but often large-sized non-linear optimization problems; (ii) indirect methods ([6]), which take advantage of Pontryagin’s maximum principle at the continuous level, using shooting algorithms.

While direct methods are well suited for non-analytic models, their main drawback is the computational time. A good example is the Dynamic Programming algorithm (DP) ([6], [8]). Nevertheless DP can be easily extended to take state constraints into account.

Besides, Pontryagin’s principle gives optimality conditions which are often solved by a shooting method. However, the presence of state constraints is a tremendous obstacle, and requires the use of a multiple shooting algorithm. Furthermore, the active state constraints should be known ([3]).

This contribution presents optimal control problems with a bounded scalar state. We devise a numerical method that does not require any a priori knowledge on active constraints. Proof of convergence is given for two applications: a hybrid vehicle and an elastic rope. Finally, we carry out a numerical test in order to show that the method still works fine on a realistic case: this application is the optimization of torque split between the engine and the electric motor of a hybrid vehicle with respect to fuel consumption with constraints on the state of charge of the battery ([1], [2], [9]).

2 Description of the method

2.1 Statement of the problem

Let us consider the abstract optimal control problem

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^S L(z(s), u(s), s) ds \quad (1)$$

subject to

$$\frac{dz}{ds}(s) = f(z(s), u(s), s) \quad (2a)$$

$$z(0) = \zeta_0 \quad (2b)$$

$$z(S) = \zeta_S \quad (2c)$$

$$z(s) \geq z_{\min} \quad (2d)$$

$$z(s) \leq z_{\max}, \quad (2e)$$

where $z(\cdot) \in \mathbb{R}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, and $s > 0$ stand for the state, the control and the evolution variable. We assume that

$$z_{\min} < \min\{\zeta_0, \zeta_S\} \leq \max\{\zeta_0, \zeta_S\} < z_{\max}. \quad (3)$$

2.2 The SCOP method

Our idea consists in solving problem (\mathcal{P}) by a sequence of unconstrained subproblems (\mathcal{Q}_k) , defined as

$$(\mathcal{Q}_k)[s_k, Z_k] \quad \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^{s_k} L(z_k(s), u(s), s) ds \quad (4)$$

subject to

$$\frac{dz_k}{ds}(s) = f(z_k(s), u(s), s) \quad (5a)$$

$$z_k(0) = \zeta_0 \quad (5b)$$

$$z_k(s_k) = Z_k, \quad (5c)$$

where (s_k, Z_k) are two parameters meant to evolve until s_k reaches some “correct” value. The overall algorithm reads

Algorithm 1. SCOP

data: $k = 0, s_0 = S,$ and $Z_0 = \zeta_S;$

begin

Solve $(\mathcal{Q}_0)[s_0, Z_0]$

while $\exists s \in]0, s_k[\mid z_k(s) \leq z_{\min}$ **or** $z_k(s) \geq z_{\max}$ **do**

Define $\Delta_k(s) = \max\{z_{\min} - z_k(s), z_k(s) - z_{\max}\}$

Determine $s_{k+1} = \operatorname{argmax}_{s \in [0, s_k]} \Delta_k(s)$

Compute $Z_{k+1} = \Pi_{[z_{\min}, z_{\max}]}(z_k(s_{k+1}))$

Solve $(\mathcal{Q}_{k+1})[s_{k+1}, Z_{k+1}]$

end

end

The symbol $\Pi_{[z_{\min}, z_{\max}]}(Z)$ denotes the truncation operator

$$\Pi_{[z_{\min}, z_{\max}]}(Z) = \begin{cases} z_{\min} & \text{if } Z < z_{\min} \\ Z & \text{if } z_{\min} \leq Z \leq z_{\max} \\ z_{\max} & \text{if } Z > z_{\max}. \end{cases} \quad (6)$$

Our claim is that if

$$\forall s \in [0, s_k], \quad z_{\min} \leq z_k(s) \leq z_{\max} \quad (7)$$

occurs at some intermediate iteration k or at the limit $k \rightarrow \infty$, then $z_k(s)$ coincides with the optimal trajectory $z(s)$ of problem (\mathcal{P}) over the interval $[0, s_k]$.

The benefit of this method lies in the fact that each unconstrained problem (\mathcal{Q}_k) can be solved either analytically or by a single shooting algorithm via a constraint-free Pontryagin's principle.

3 Pontryagin's principle for a problem without state constraint

For later use, let us recall Pontryagin's principle for problem (\mathcal{P}) in which the constraints (2d)–(2e) have been left out. Let

$$H(z, u, s, p) = L(z, u, s) + p(s)f(z, u, s) \quad (8)$$

be the Hamiltonian, considered as a function of four variables. Then, the optimal process satisfies

$$\frac{dz}{ds}(s) = H_p(z(s), u(s), s, p(s)) \quad (9a)$$

$$\frac{dp}{ds}(s) = -H_z(z(s), u(s), s, p(s)) \quad (9b)$$

$$u(s) = \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{U}} H(z(s), v, s, p(s)). \quad (9c)$$

When there is no constraint on the control u , e.g. for $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, condition (9c) can be expressed, at least formally, as

$$0 = H_u(z(s), u(s), s, p(s)). \quad (10)$$

4 Analysis for a hybrid vehicle model

In this section, we set $s \equiv t, z(s) \equiv x(t), S = T$ and $Z_k \equiv X_k$. Consider the optimal control problem

$$(\mathcal{H}) \quad \min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}} \int_0^T \alpha^2(t) u^2(t) dt \quad (11)$$

subject to

$$\dot{x}(t) = -\alpha(t)(1 - u(t)) \quad (12a)$$

$$x(0) = \chi_0 \quad (12b)$$

$$x(T) = \chi_0 \quad (12c)$$

$$x(t) \leq x_{\max}. \quad (12d)$$

This problem corresponds to a simplified model of torque split for a hybrid vehicle powered by an engine and an electric motor (see section 6 for a detailed description of a realistic hybrid vehicle). The integrand $\alpha^2 u^2$ represents the fuel consumption to be minimized, $-\alpha(1 - u)$ is the battery law, and $x(t)$ is the state of charge of the battery at time t . Note that $x(0) = x(T) = \chi_0 < x_{\max}$. We assume that $\alpha(t)$ is positive, differentiable and strictly increasing with respect to $t \in [0, T]$. For convenience, we introduce

$$\beta(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau, \quad \text{for } t > 0, \quad (13a)$$

$$\beta(0) = \alpha(0). \quad (13b)$$

It is straightforward to check that β is an increasing function of $t \in [0, T]$.

Lemma 4.1. *There exists a unique $\bar{t} \in]0, T[$ such that*

$$\alpha(\bar{t}) = \beta(T) \quad (14)$$

Proof. This follows from the intermediate value theorem and from the strictly increasing property of α . \square

First, we write down the exact solution of (\mathcal{H}) .

Proposition 4.1. *Let*

$$\bar{x} = \chi_0 + \bar{t}[\beta(T) - \beta(\bar{t})] \quad (15)$$

where \bar{t} is defined in Lemma 4.1.

1. *If $x_{\max} > \bar{x}$, then the optimal trajectory is given by*

$$x(t) = \chi_0 + t[\beta(T) - \beta(t)]. \quad (16)$$

In this case, the constraint $x(t) \leq x_{\max}$ is never active.

2. *If $x_{\max} \leq \bar{x}$, then there exists a unique $t^* \in]0, T[$ such that, for $t \in [0, t^*]$, the trajectory is given by*

$$x(t) = \chi_0 - \frac{p_0^*}{2} t - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau, \quad (17)$$

where (t^*, p_0^*) is the unique solution to the system

$$x_{\max} - \chi_0 = -\frac{p_0^*}{2} t^* - \int_0^{t^*} \alpha(\tau) d\tau, \quad (18a)$$

$$\alpha(t^*) = -\frac{p_0^*}{2}. \quad (18b)$$

Proof. Case 1. Applying (9)–(10) to the Hamiltonian

$$H(x, u, t, p) = \alpha^2 u^2 - p\alpha(1 - u), \quad (19)$$

we end up with

$$\dot{p} = 0, \quad 2\alpha^2 u + p\alpha = 0, \quad (20)$$

from which we infer that

$$p(t) = p_0, \quad u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{\alpha(t)}. \quad (21)$$

Integration with respect to time of the dynamic law

$$\dot{x}(t) = -(\alpha + \frac{1}{2}p_0) \quad (22)$$

yields

$$x(t) = \chi_0 - \frac{p_0}{2}t - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Invoking the final condition $x(T) = \chi_0$, we obtain (16). Since

$$\dot{x}(t) = \beta(T) - \alpha(t), \quad \dot{x}(t) = -\dot{\alpha}(t) < 0, \quad (24)$$

we see that the only critical point $\bar{t} \in [0, T]$ achieves a maximum for $x(\cdot)$, i.e.,

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) = x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (25)$$

where \bar{x} is defined in (15). Therefore, if $x_{\max} > \bar{x}$, the optimal trajectory is (16).

Case 2. If $x_{\max} < \bar{x}$, let t^* be the contact point where the trajectory hits the boundary. From the continuity of the Lagrange multipliers established in [3] by Bonnans and Hermant, we derive the matching conditions

$$x(t^*) = x_{\max} \quad (26a)$$

$$\dot{x}(t^*) = 0. \quad (26b)$$

For $t < t^*$, the optimal trajectory $x(\cdot)$ is of the form (23), in which we write the co-state as p_0^* instead of p_0 for clarity. Plugging (23) into (26), we obtain (18).

Let us eliminate p_0^* from (18a)–(18b), so as to have

$$t^* \alpha(t^*) - \int_0^{t^*} \alpha(\tau) d\tau = x_{\max} - x_0. \quad (27)$$

From (27), existence and uniqueness of t^* can be obtained by arguing that the function

$$\psi(t) = t\alpha(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \quad (28)$$

is strictly increasing and that

$$\psi(0) < x_{\max} - x_0 < \psi(T). \quad (29)$$

This completes the proof. \square

We now proceed to investigate the behavior of SCOP. It is obvious that if $x_{\max} > \bar{x}$, then once $(\mathcal{Q}_0)[t_0 = T, X_0 = \chi_0]$ has been solved, the trajectory $x_0(\cdot)$ is the optimal one (16) and the algorithm stops.

Theorem 4.1. For $x_{\max} \leq \bar{x}$, the sequence $\{t_k\}_{k \geq 0}$ produced by SCOP is well-defined, strictly decreasing and converges to t^* as $k \rightarrow \infty$.

This sequence is governed by the implicit recursion

$$\alpha(t^{k+1}) = \frac{x_{\max} - x_0}{t_k} + \beta(t_k) \quad (30)$$

and can be interpreted as a fixed point approximation to the continuous relation

$$\alpha(t^*) = \frac{x_{\max} - x_0}{t^*} + \beta(t^*), \quad (31)$$

which is a consequence of (27).

Proof. Implicit recursion. Except for $X_0 = \chi_0$, we have $X_k = x_{\max}$ for $k \geq 1$, as long as the algorithm goes on. According to (23),

$$x_k(t) = \chi_0 - \frac{p_k}{2}t - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau, \quad (32)$$

at the k -th step. By construction of Algorithm 1, we have

$$x_k(t_k) = x_{\max} \quad (33a)$$

$$\dot{x}_k(t_{k+1}) = 0. \quad (33b)$$

Plugging (32) into (33) leads to

$$x_{\max} - x_0 = -\frac{p_k}{2}t_k - \int_0^{t_k} \alpha(\tau) d\tau \quad (34a)$$

$$\alpha(t_{k+1}) = -\frac{p_k}{2}, \quad (34b)$$

from which we deduce (30) by eliminating p_k .

Existence and uniqueness. We are going to show that if $t^k > t^*$, then t^{k+1} exists and $t^{k+1} > t^*$, so that by induction the whole sequence can be generated.

Equation (30) is guaranteed to have a unique solution as soon as

$$\alpha(0) < \frac{x_{\max} - x_0}{t_k} + \beta(t^k) < \alpha(t^k)$$

The left inequality is obvious, since $\alpha(0) = \beta(0) \leq \beta(t^k)$ (and β is an increasing function). As for the right inequality, it is equivalent to

$$x_{\max} - x_0 < \psi(t^k), \quad (35)$$

where ψ was introduced in (28). However, we have seen in (27) that

$$x_{\max} - x_0 = \psi(t^*). \quad (36)$$

Because ψ is strictly increasing,

$$\psi(t^*) < \psi(t^k) \Leftrightarrow t^* < t^k, \quad (37)$$

and this equivalence ensures existence and uniqueness of $t^{k+1} \in]0, t^k[$ for $t^k > t^*$.

To prove that $t^{k+1} > t^*$, we resort to the auxiliary function

$$\Phi_k(\theta) = t^k \alpha(\theta) - \int_0^{\theta} \alpha(\tau) d\tau. \quad (38)$$

Since α is strictly increasing, Φ_k is strictly increasing too. Thus, we simply have to prove that

$$\Phi_k(t^*) < \Phi_k(t^{k+1}). \quad (39)$$

This amounts to

$$t^k \alpha(t^*) - \int_0^{t^k} \alpha(\tau) d\tau < x_{\max} - x_0 \quad (40a)$$

$$= t^* \alpha(t^*) - \int_0^{t^*} \alpha(\tau) d\tau, \quad (40b)$$

where the last equality is due to (27). Now, (40b) can be re-written under the form

$$(t^k - t^*) \alpha(t^*) < \int_{t^*}^{t^k} \alpha(\tau) d\tau, \quad (41)$$

which holds true because α is strictly increasing.

Convergence. Since $\{t^k\}$ is decreasing and bounded from below by t^* , it has a limit \tilde{t} . Passing to the limit in the recursion (30), we get the desired result, namely $\tilde{t} = t^*$. \square

5 Analysis for an elastic rope

In this section, the notations are switched to $s \equiv x$, $z(s) \equiv y(x)$, $S \equiv 1$ and $Z_k \equiv Y_k$. Consider the control problem

$$(\mathcal{E}) \quad \min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}} \int_0^1 [\frac{1}{2}u^2(x) + gy(x)] dx \quad (42)$$

subject to

$$y'(x) = u(x) \quad (43a)$$

$$y(0) = 0 \quad (43b)$$

$$y(1) = 0 \quad (43c)$$

$$y(x) \geq -h. \quad (43d)$$

This problem corresponds to an elastic rope fixed at its end-points and bending under a uniform gravity force g . The integrand $\frac{1}{2}u^2 + gy$ represents the potential energy to be minimized in order to find the equilibrium vertical position $y(x)$ as a function of abscissa x , under the constraint due to the level $-h < 0$ of the floor on which the rope can lie.

Proposition 5.1. *The exact solution of (\mathcal{E}) is given by the following rule.*

1. If $h > \frac{1}{8}g$, then the equilibrium position is

$$y(x) = -\frac{1}{2}gx(1-x). \quad (44)$$

In this case, the constraint $y(x) \geq -h$ is never active.

2. If $h \leq \frac{1}{8}g$, let

$$x^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (45)$$

Then, for $x \in [0, x^*]$, the equilibrium position is

$$y(x) = -\sqrt{2hg}x + \frac{1}{2}gx^2. \quad (46)$$

Proof. The proof follows the same steps as in the previous section, first by considering the unconstrained case, then by expressing the matching condition at the contact point. We refer readers to [4] for further details. \square

We now address the question of convergence for SCOP. It is obvious that if $h > \frac{1}{8}g$, then once $(\mathcal{Q}_0)[x_0 = 1, Y_0 = 0]$ has been solved, the trajectory $y_0(\cdot)$ is the optimal one (44) and the algorithm stops.

Theorem 5.1. *For $h \leq \frac{1}{8}g$, the sequence $\{x_k\}_{k \geq 0}$ produced by SCOP is well-defined, strictly decreasing and converges to x^* as $k \rightarrow \infty$.*

This sequence is governed by the explicit recursion

$$x^{k+1} = \frac{1}{2} \left[x_k + \frac{2h}{gx_k} \right] \quad (47)$$

and can be interpreted as a fixed point approximation to the continuous relation

$$x^* = \frac{1}{2} \left[x^* + \frac{2h}{gx^*} \right] \quad (48)$$

that is a consequence of (45).

Proof. Except for $Y_0 = 0$, we have $Y_k = -h$ for $k \geq 1$, as long as the algorithm goes on. As a consequence of Pontryagin's principle (9)–(10), the optimal trajectory is of the form

$$y_k(x) = -p_k x + \frac{1}{2}gx^2 \quad (49)$$

at the k -th step. By construction of Algorithm 1, we have

$$y_k(x_k) = -h \quad (50a)$$

$$y'_k(x_{k+1}) = 0. \quad (50b)$$

Plugging (49) into (50) leads to

$$-h = -p_k x_k + \frac{1}{2}gx_k^2 \quad (51a)$$

$$0 = -p_k + gx_{k+1}, \quad (51b)$$

from which we deduce (47) by eliminating p_k . It is now an easy algebra exercise to check that the sequence $\{x_k\}_{k \geq 0}$ is decreasing and converges to x^* . \square

It is remarkable that the sequence (47) is the classical Babylonian algorithm that computes the square-root of the positive real number $2h/g$. Figures 1 and 2 display the SCOP results compared to those obtained with a multiple shooting algorithm which needs to know the active constraints.

The two trajectories superimpose perfectly. Figure 2 illustrates that SCOP retrieves the exact position of x^* .

6 Numerical results for a realistic hybrid vehicle

In this section, SCOP algorithm is applied to a realistic model of a hybrid vehicle. The engine is characterized by its static fuel consumption map, depending on engine speed ω and delivered torque T_{eng} . For this application, a quadratic polynomial is used

$$L(\omega, T_{\text{eng}}) = \sum_{i,j=0}^2 K_{ij} \omega^i T_{\text{eng}}^j.$$

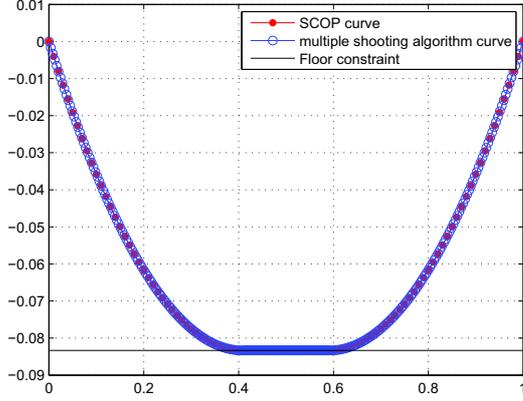


Figure 1: Elastic line trajectory constrained by the floor level

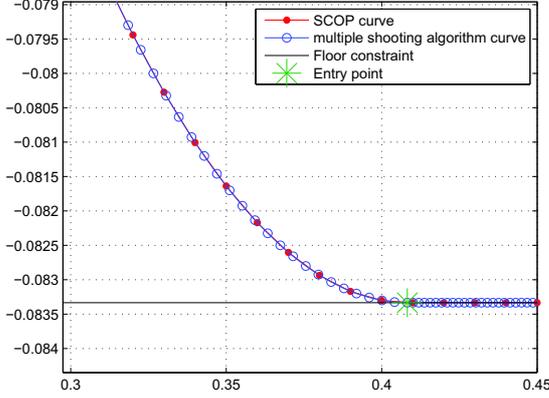


Figure 2: Elastic line trajectory constrained by the floor level (zoom)

The electric motor is characterized by its torque T_{mot} , and is fed by a battery. The state variable x , the state of charge of the battery, is defined by

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega(t)T_{\text{mot}}(t)K'}{U_{\text{batt}}(t)n_{\text{capa}}} = -K\omega(t)T_{\text{mot}}(t), \quad (52)$$

with U_{batt} the battery voltage, assumed to be constant, $\omega(t)$ the electric motor speed, K' a scaling constant, and n_{capa} the nominal capacity of the battery. Then the state x depends on the electric power.

In this problem, a prescribed vehicle cycle is imposed (the Artemis Urban cycle for instance, see [7] for more details), and supplies the speed $\omega(t)$ and torque $T_{\text{rq}}(t)$ of the vehicle. We assume that both the engine and the electric motor have the same rotation speed ω , and that the requested torque T_{rq} must be provided according to $T_{\text{rq}} = T_{\text{eng}} + T_{\text{mot}}$.

Let us introduce the torque split control $u(t)$, defined as

$$u(t)T_{\text{rq}}(t) = T_{\text{eng}}(t) \quad (53a)$$

$$(1 - u(t))T_{\text{rq}}(t) = T_{\text{mot}}(t). \quad (53b)$$

Because of maximum and minimum electric motor torque (during battery regeneration), and of maximum engine torque, the control $u(t)$ is constrained by values u_{min} and u_{max} depending on the speed $\omega(t)$.

The resulting optimal control problem is thus similar to problem (1–2) with

$$L(u(t), t) = \sum_{i,j=0}^2 K_{ij}\omega^i(t)T_{\text{rq}}^j(t)u^j(t) \quad (54)$$

and

$$f(u(t), t) = -K\omega(t)T_{\text{rq}}(t)(1 - u(t)). \quad (55)$$

We apply SCOP algorithm with the following expression of u_k^* , solution of (\mathcal{Q}_k) , deduced from (9):

$$u_k^*(t) = -\frac{\sum_{i=0}^2 K_{i1}\omega^i(t) + p_k K\omega(t)}{2 \sum_{i=0}^2 K_{i2}\omega^i(t)T_{\text{rq}}(t)}. \quad (56)$$

Figure 3 shows for prescribed driving cycle (Artemis Urban cycle) (a) the requested speed of the vehicle, (b) the corresponding engine speed (depending on the vehicle characteristics), (c) the requested torque, that can be provided by the engine, or by the electric motor, or both.

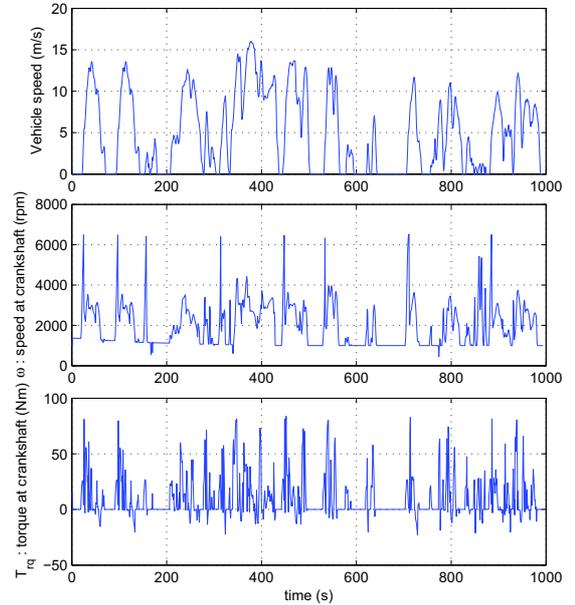


Figure 3: Vehicle speed requested by Artemis Urban cycle (top) / requested engine speed (middle) / requested torque (bottom)

Figure 4 shows a comparison between the state trajectory obtained with SCOP, and those obtained with a classical dynamic programming algorithm.

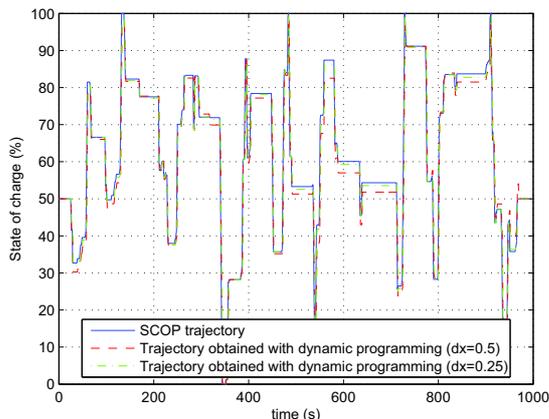


Figure 4: Optimal state trajectories obtained with DP and SCOP (empty battery : $x_{\min} = 0$, full battery : $x_{\max} = 100$).

The trajectories are very close to one another. However, the computational times are not the same: the dynamic programming algorithm needs 135s for $dx = 0.5$, while SCOP needs only about 1s to obtain the optimal trajectory. One can also notice that the dynamic programming trajectory converges to SCOP trajectory, as the state step size decreases and tends to 0.

An interesting result is that the analytic expression of the optimal trajectory (56) can be used to build a real-time control strategy parameterized by p (see [1], [2], [9]). For instance, an efficient control is ECMS (Equivalent fuel Consumption Minimization Strategy), where a parameter needs to be defined to determine the equivalence between fuel consumption and battery energy. This parameter is proportional to p .

7 CONCLUSIONS AND FUTURE WORKS

In this paper, we have proposed an original method to solve optimal control problems with state constraints. A proof of convergence, in some particular cases, has been established. Although the proof of convergence needs some strong assumptions, SCOP has been successfully applied to more general cases.

The first application is the energy minimization of a rope fixed at its endpoints. This problem can also be solved by using a multiple shooting algorithm, however for this algorithm the shape of the trajectory (with number of junction points) needs to be known.

The second presented application is the optimization of fuel consumption of a hybrid vehicle. In this problem, it is often impossible to know the number of active constraints and when a state constraint becomes active. Classically a dynamic programming (DP) algorithm is used to solve this kind of problem. SCOP allows to retrieve the optimal trajectory of state-constrained optimal problems in a very small computational time, about 100 times faster than DP. Thus the presented applications of SCOP illustrate its

potentiality compared to classical methods. However, the range of applicability of the method remains to be clarified.

8 ACKNOWLEDGMENTS

The authors wish to thank Pierre Rouchon and Audrey Hermant for several stimulating discussions.

REFERENCES

- [1] G. Rousseau, D. Sinoquet, and P. Rouchon, Constrained Optimization of Energy Management for a Mild-Hybrid Vehicle, *Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP*, Vol. 62, pp. 623-634, 2007
- [2] L. Guzzella and A. Sciarretta, *Vehicle Propulsion Systems: Introduction to Modeling and Optimization*, Springer; 2005.
- [3] J. F. Bonnans and A. Hermant. Well-Posedness of the Shooting Algorithm for State Constrained Optimal Control Problems with a Single Constraint and Control, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(4),1398-1430, 2007.
- [4] J. F. Bonnans and A. Hermant. Stability and Sensitivity Analysis for Optimal Control Problems with a First-order State Constraint, to appear.
- [5] R.F. Hartl, S.P. Sethi, and R.G. Vickson. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 37:181-218,1995.
- [6] A. E. Bryson and Y. Ho, *Applied Optimal control*, Hemisphere Publishing Corp., Washington, 1975.
- [7] M. André, The ARTEMIS European driving cycles for measuring car pollutant emissions, *Science of The Total Environment*, Vol. 334-335, pp. 73-84
- [8] D.P. Bertsekas, *Dynamic programming and optimal control*, Athena scientific, Belmont, 2001 Vol. 334-335, pp. 73-84
- [9] A. Sciarretta and L. Guzzella and M. Back, A Real-Time Optimal Control Strategy for Parallel Hybrid Vehicles with on-board Estimation of the Control Parameters, *Proceedings of IFAC Symposium on Advances in Automotive Control AAC04*, 2004, 502-507
- [10] F. Bonnans and P. Rouchon, *Commande et optimisation de systèmes dynamiques*, Éditions de l'École polytechnique, 2005,

Annexe B

Design Optimization and Optimal Control for Hybrid Vehicles

EngOpt 2008 - International Conference on Engineering Optimization
Rio de Janeiro, Brazil, 01 - 05 June 2008.

Design Optimization and Optimal Control for Hybrid Vehicles

Gregory Rousseau, Delphine Sinoquet, Antonio Sciarretta, Yohan Milhau

IFP, Rueil-Malmaison, France
gregory.rousseau@ifp.fr, delphine.sinoquet@ifp.fr
antonio.sciarretta@ifp.fr, yohan.milhau@ifp.fr

1. Abstract

Growing environmental and global crude oil supplies concerns are stimulating research on new vehicle technologies. Hybrid-electric vehicles appear to be one of the most promising technologies for reducing fuel consumption and pollutant emissions. Different types of hybrid-electric powertrains exist: from the mild-hybrid vehicle, equipped with a small electric motor, to the combined hybrid like the Toyota prius.

This paper presents a parametric study focused on variations of the size of the powertrain components, and optimization of the power split between the engine and electric motor with respect to fuel consumption.

To perform this optimization on a prescribed driving cycle (for instance, the New European Driving Cycle), a dynamic programming algorithm based on a reduced model is implemented. This simplified model allows a fast optimization with a fine parameterization of the controller: it furnishes the optimal power repartition at each time step regarding fuel consumption under constraints on the battery state of charge. The obtained results may be used to determine the best components of a given powertrain, for a prescribed vehicle cycle.

The optimal split obtained thanks to dynamic programming algorithm can not be used directly on a vehicle as a real time control law, as the future can not be known in advance in normal driving conditions. To overcome this difficulty, we implement, as a real-time strategy, the Equivalent Consumption Minimization Strategy (ECMS): the battery being considered as an auxiliary reversible fuel reservoir, an instantaneous minimization of ECMS is performed. This control law is inferred from Pontryagin's Minimum Principle, where the Lagrange multiplier can be deduced from previous optimization results on given driving cycles. Offline optimization results and real-time control laws are compared for a realistic hybrid vehicle application.

2. Keywords: Hybrid vehicles, optimal control, dynamic programming, Pontryagin's principle.

3. Introduction

Growing environmental concerns coupled with concerns about global crude oil supplies stimulate research on new vehicle technologies. Hybrid-electric vehicles (HEV) appear to be one of the most promising technologies for reducing fuel consumption and pollutant emissions [1]. Indeed, it is well known that the kinetic energy gained by the classical vehicle after an acceleration can not be recuperated when braking. One of the advantage of the hybrid vehicle is its ability to recuperate a part (depending of efficiencies) of this energy, to store it in a battery, and to re-use it latter. This electric energy can therefore be used by an electric motor to power the vehicle and to save fuel.

The control of hybrid powertrains is more complex than control of classic engine. Actually, the control laws have to deal with the state of charge of the battery, which provides the level of remaining electric energy, and with the variable efficiency of each element of the powertrain. Optimization of energy management strategies on given driving cycles is often used to derive sub-optimal control laws to be implemented on the vehicle (see among others [2], [3], [4], [5]).

In this paper, we focus on a parallel hybrid powertrain. The vehicle used for this parametric study is a Citroën C1, with a gasoline engine capacity of 1000cc. From this vehicle, we consider an additional source of power given by an electric motor located near the wheels. This motor takes its energy from an additional battery. A model of this powertrain has been implemented in AMESim* environment for validation purposes, and also in Matlab, for optimization. The latter model is a simplified static model, that allows fast computations. Two different optimization algorithms are presented and applied on this model, depending on the needs:

*AMESim is a LMS software to build system models with physics-based building blocks

- a classical Dynamic Programming algorithm ([2], [3], [4]), which provides the optimal control strategy on a prescribed cycle, and the potential of a powertrain.
- a sub-optimal control law, based on the Principle of Pontryagin, used as a real-time control law.

4. System Modelling and Optimal Control Problem

4.1. Optimal Control Problem

The optimal control problem under study consists in minimizing the fuel consumption of the vehicle along a prescribed vehicle cycle, taking into account physical constraints from battery, engine and electric motor. The general optimization problem is the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u \left\{ J(u) := \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + g(x(T), T) \right\} \\ \text{subject to:} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0 \\ x_{min} \leq x(t) \leq x_{max} \\ u_{min}(t) \leq u(t) \leq u_{max}(t) \end{array} \right\} \quad (1)$$

where 0 and T are respectively the initial and the final times of the prescribed driving cycle, $u(t)$ is the control, $x(t)$ is the state, $L(x(t), u(t), t)$ is the instantaneous fuel consumption, $f(x(t), u(t), t)$ is the function that controls the variations of the dynamic system, and $g(x(T), T)$ is a penalization term handling a constraint on the final state of charge of the battery.

In this problem, the state has two components:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) : & \text{the state of charge (SOC) of the battery} \\ x_2(t) : & \text{the state of the engine (on/off)}. \end{cases} \quad (2)$$

While $x_1(t)$ is a continuous state governed by $\dot{x}_1(t) = f_1(u(t), t)$, the second state $x_2(t)$ takes only the values 0 or 1 corresponding to *engine stop / engine start*. The introduction of $x_2(t)$ permits to take into account an extra fuel consumption when the engine is being started.

The control vector has three components, to be optimized:

$$u = \begin{cases} u_1 : & \text{the power split ratio between the engine and the electric motor} \\ u_2 : & \text{the gear} \\ u_3 : & \text{starting up / stopping the engine} \end{cases} \quad (3)$$

where u_1 is the classical control for HEV, u_2 may be optimized too, especially for automatic transmissions or CVT transmissions (continuous variation of the gear ratio), and u_3 is linked to x_2 state.

In this optimization problem, the fuel consumption is given by

$$L(x(t), u(t), t) = \begin{cases} L_1(u_1(t), t) & \text{if } x_2 = 1 & \text{(engine started)} \\ 0 & \text{if } x_2 = 0 & \text{(engine stopped)} \\ L_2 & \text{if } x_2 = 0 \text{ and } u_3 = 1 & \text{(engine start-up)} \end{cases} \quad (4)$$

where $L_1(u_1(t), t)$ is the fuel consumption given by a map depending on engine speed $\omega_e(t)$ and provided torque $T_e(t)$, and L_2 is the extra fuel consumption at engine start-up.

This minimization problem must be solved on a prescribed cycle, for instance the NEDC cycle, Figure 1. Thanks to a vehicle model (mass, wheel diameter, aerodynamic coefficients, etc.) and the speed request $V(t)$, the requested torque and speed at the wheels are computed: $(T_w(t), \omega_w(t))$. In this optimization problem, we consider the cycle as a wheel torque $T_w(t)$ and wheel speed $\omega_w(t)$ trajectory to be followed.

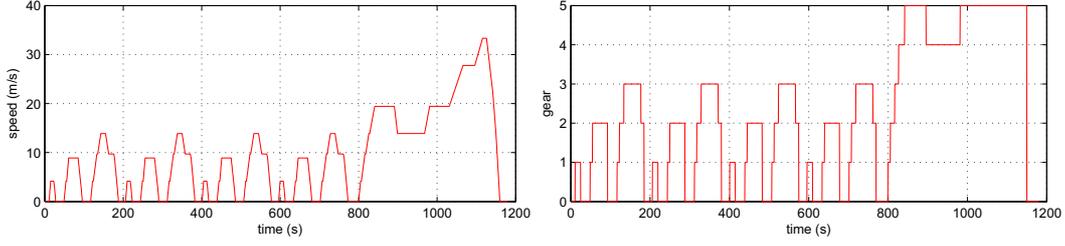


Figure 1: NEDC driving cycle: vehicle speed at left / gear ratio at right

In this application, we consider that the engine is located upstream of the gearbox, as on conventional vehicles. Besides, the electric motor is located downstream of the gearbox, beside the wheels. Let us introduce now some useful notations to describe the powertrain and to define the control $u(t)$:

- the requested torque at wheels is written as $T_w(t) = R_{far}R_{gr}T_e(t) + T_m(t) + T_{bk}(t)$, and can be achieved thanks to the engine torque $T_e(t)$ multiplied by the front axle ratio R_{far} and by the gear ratio R_{gr} , and thanks to the motor torque $T_m(t)$. A brake torque $T_{bk}(t)$ can also be applied by braking system.
- the engine torque is $T_e(t) = u(t)T_w(t)/(R_{far}R_{gr})$,
- the electric motor torque is $T_m(t) = (1 - u(t))T_w(t)$.

During braking phases, $T_w(t) < 0$, the braking torque can complete the electric motor torque to slow down the vehicle: $T_{bk}(t) = T_w(t) - T_m^{min}(t)$ with $T_m^{min}(t)$ the minimal electric motor torque depending on the engine speed, thus depending on time.

A simple model of the battery is implemented, the state of charge of the battery evolving as

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{\omega_m(t)T_m(t)K'}{U_{batt}(t)n_{capa}} \quad (5)$$

with $\omega_m(t)$ the electric motor speed, $U_{batt}(t)$ the battery voltage, K' a scaling constants, and n_{capa} the nominal capacity of the battery. In the following, we assume that the battery voltage is constant along the cycle. We set $K = \frac{K'}{U_{batt} \cdot n_{capa}}$ and by replacing $T_m(t)$ by its expression, we obtain

$$\dot{x}_1(t) = -K\omega_m(t)(1 - u(t))T_w(t). \quad (6)$$

In this optimal control problem, we make several assumptions about the powertrain: (i) the wheel speed ω_w is equal to the electric motor speed ω_m , (ii) as the optimization problem is applied on a full hybrid vehicle, the engine can be stopped when the torque is provided only by the electric motor. As mentioned above in the definition of $L(x(t), u(t), t)$, a fuel consumption penalty, the necessary energy to start the engine, must be considered, (iii) recharging the battery is possible for negative torques (braking request) or by an additional engine torque beyond the driver request torque. In the last case, the command $u_1(t)$ is larger than 1, (iv) we consider that the average efficiency of the electric motor is 0.85.

As in the general optimal control problem (1), the command variable $u(t)$ and the state variable $x(t)$ are submitted to several constraints :

- the engine can only produce a positive torque, and is limited to a maximal torque which depends on engine speed $\omega(t)$: $0 \leq T_e(t) \leq T_e^{max}(\omega(t))$,
- the electric motor torque is bounded: $T_m^{min}(\omega(t)) \leq T_m(t) \leq T_m^{max}(\omega(t))$,
- the storage capacity implies a minimal and a maximal state of charge of the battery (which are fixed to 50% and 70% in our study): $x_{(1)min} \leq x_1(t) \leq x_{(1)max}$,

- the final state of charge is constrained to be close to the initial state of charge to maintain a null electrical energy balance (to avoid to discharge totally the battery for minimizing the consumption) $x_1(0) = x_1(T)$.

Constraints on command $u(t)$ are directly derived from the constraints on maximal and minimal engine and electric motor torque

$$u(t)T_{rq}(t) \leq T_e^{max}(t), \quad (7)$$

$$T_m^{min}(t) \leq (1 - u(t))T_{rq}(t) \leq T_m^{max}(t). \quad (8)$$

In the following, we will note $U(t)$ (respectively U_k in discrete time) the feasible domain of $u(t)$ (constraints (7) and (8)).

5. Dynamic Programming

The Dynamic Programming method (DP) is classically applied to solve the problem (1) ([3], [4]) : it relies on a very simple idea, the principle of optimality, stated by Richard Bellman. It states that an optimal policy can be built step by step, first by building an optimal control for the "tail subproblem" involving the last step, then by extending the optimal policy to the "tail subproblem" involving the last two stages, and by iterating until an optimal control has been built for the complete time interval. Thus, the optimization problem is solved backward from final time to initial time.

The optimal control problem (1) is thus discretized in time:

$$\min_{u \in U} J(u) := \sum_{k=0}^{N-1} L_k(x_k, u_k) \Delta t + g(x_N), \quad (9)$$

where $L_k(x_k, u_k)$ is the cumulated fuel consumption over the time interval $[k, k + 1]$, x_k is the state vector at time k , and N is the final time of the driving cycle. The constraint on the final state of charge $x_0 = x_N$ has been introduced via a penalization term $g(x_N) = \beta(x_N - x_0)^2$ (β , a constant to be chosen).

From Bellman principle, the minimum cost-to-go $V_k(x_k)$ for the time interval $[k, N]$, $0 \leq k \leq N - 1$, is then expressed as follows :

$$V_k(x_k) = \min_{u_k \in U} (L(x_k, u_k) \Delta t + V_{k+1}(f_k(x_k, u_k))), \quad (10)$$

where f_k corresponds to the system dynamic, given by:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) = \begin{pmatrix} x_{(1)k} + f_{(1)k}(u_k, k) \\ u_{(3)k} \end{pmatrix} \quad (11)$$

f_k being the function that modelizes the battery state of charge dynamic in the discrete form of (6), as well as the engine state. At time N , the cost function is

$$V_N(x_N) = g(x_N). \quad (12)$$

This optimization problem is solved backward from final time step to initial time step using a discretization of function V in the control space and in the state space, that gives a 3-D grid (time t , state of charge x_1 , and engine state x_2 nodes). A standard time step used in our examples is $\Delta t = 0.5s$, the discretization step Δx_1 for the state x_1 is 0.25 %, and x_2 takes only 0 or 1 values. Thus, the number of state nodes is $M = 2((x_{(1)max} - x_{(1)min})/\Delta x_1)$.

A standard DP algorithm consists in computing, at each step k and at each state value, all feasible controls, and calculating the optimal control that minimizes the sum $(L_k(x_k, u_k) + V_{k+1}(f_k(x_k, u_k)))$.

This method allows a fast optimization: $(N - 1)M$ constrained optimization problems (10) of only one parameter u_k are solved with a fine time discretization of the controller. This provides the optimal power repartition u_k^* at each time step (we refer to [9] for some theoretical results on the convergence of the method and error estimations).

A direct constrained optimization of (9) is an alternative method but leads to a large non linear optimization problem with a large number of inequality constraints. This is the reason why the DP algorithm is often preferred when the number of state variables is small (one or two state variables).

6. Variations of the size of some powertrain elements

On conventional vehicles, the maximal engine power is mainly defined by its capacity. Economic vehicles have a small engine, with a small fuel consumption, but with a low maximal torque. When engine capacity is higher, fuel consumption is higher, but maximal engine torque is also higher.

In hybrid vehicles, engine capacity has still almost the same impact on fuel consumption. However, the presence of a second energy source, which implies at least an electric motor and a battery, gives other degrees of freedom to decrease the fuel consumption.

The following results have been obtained by testing different sizes of elements of the powertrain. This approach has been preferred to parametric optimization, which is a quite complicated problem. The reader can nevertheless see some examples in [10].

6.1. Reference case

The reference case is a Citroën C1 with a 1000 cc gasoline engine. We consider on this vehicle that an electric motor of 10 kW is located downstream of the gearbox, at the same level as the wheels, and that a battery of 1.3 kW/h provides the electric energy to the motor. The potential of this vehicle is assessed on the NEDC cycle, and gives the following results:

Table 1: Fuel consumption for the reference case

	Fuel consumption (l/100km)	Gain (%)
Conventional vehicle	4.76	
HEV	3.76	20.99 %

6.2. Variations of battery capacity with constant battery weight

The battery capacity affects the constraints on the state of charge: x_{min} and x_{max} . As the system dynamic does not depend on the state x , the fuel consumption will not evolve with the battery capacity as soon as the state of charge remains inside its bounds x_{min} , x_{max} without touching them. Table 2 gives optimal fuel consumption on NEDC cycle for varying capacities.

Table 2: Study of the impact of the battery capacity

	Fuel consumption (l/100km)	Gain (%)
Conventional vehicle	4.76	
HEV with battery 0.325 kWh	3.78	20.40 %
0.65 kWh	3.76	20.99 %
1.3 kWh	3.76	21 %
2.6 kWh	3.76	21 %
5.2 kWh	3.76	21 %

6.3. Variations of battery capacity and battery weight

By considering the variations of battery capacity and the corresponding variations of its weight, not only the available electric power is changed, but also the global weight of the vehicle. In this context, the necessary power to match the requested vehicle speed of the cycle becomes higher as the weight of the battery increases. Thus, the variation of battery capacity causes the engine to change its operating points: same engine speeds, but different requested torques. Also, the vehicle will potentially be able to

recover much more electric energy during braking, if control constraints are not activated. Consequently, the analysis of these results is not trivial.

We consider in the following that the battery weight varies according to 1kg for 50Wh. The Table 3 shows obtained results.

Table 3: Study of the impact of the battery capacity with weight variations

	Fuel consumption (l/100km)	Gain (%)
Conventional vehicle	4.76	
HEV with battery 0.325 kWh	3.78	20.40 %
0.65 kWh	3.76	20.84 %
1.04 kWh	3.76	21.01 %
1.3 kWh	3.76	20.99 %
1.625 kWh	3.76	20.90 %
1.95 kWh	3.76	20.79 %

It is noticeable that those results show a different trend than the results of Table 2. An optimal value is reached for $n_{capa} = 1.04$ kWh, as seen on Figure 2.

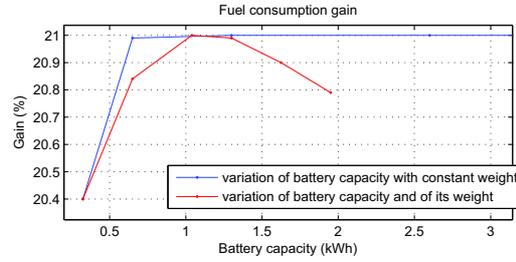


Figure 2: Variation of gain of fuel consumption with battery capacity

6.4. Variations of maximal and minimal electric motor torques

The car manufacturers are interested in estimating the best size of an electric motor for a hybrid vehicle, according to its use, as there is no need to have a very powerful motor if half of its maximum power is never reached.

The variations of maximal and minimal electric motor power may change the fuel consumption, but it also changes the state of charge trajectory (see results in Table 4).

Table 4: Study of the impact of the maximal motor power

	Fuel consumption (l/100km)	Gain (%)
Conventional vehicle	4.76	
HEV with motor P= 5 kW	3.80	20.15 %
HEV with motor P= 10 kW	3.76	20.99 %
HEV with motor P= 15 kW	3.74	21.25 %
HEV with motor P= 20 kW	3.74	21.25 %

For this vehicle used on the NEDC cycle, the fuel consumption does not evolve anymore if the electric motor power is larger than $P = 15$ kW. Smaller powers of electric motor do not affect much the fuel consumption, as the gain for an electric motor is still 20.15% for a power of 5 kW.

7. Real-time control strategy

7.1. Validation of DP results on a more realistic model

Results obtained with the dynamic programming applied on the matlab model are tested on a more realistic model implemented in AMESim, corresponding to the reference case, see Figure 3.

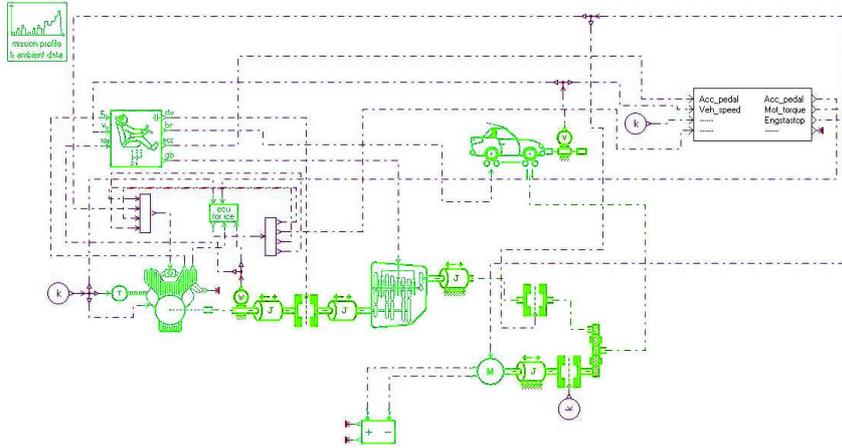


Figure 3: Validation AMESim model

By comparison with the matlab model used for optimization, this AMESim model includes all axle inertias, lag times of engine and electric motor, and a driver model which controls acceleration and brake pedal to follow the speed request from the cycle. Figure 4 shows the behavior of AMESim model with the optimal control of electric motor obtained from dynamic programming on the Matlab model.

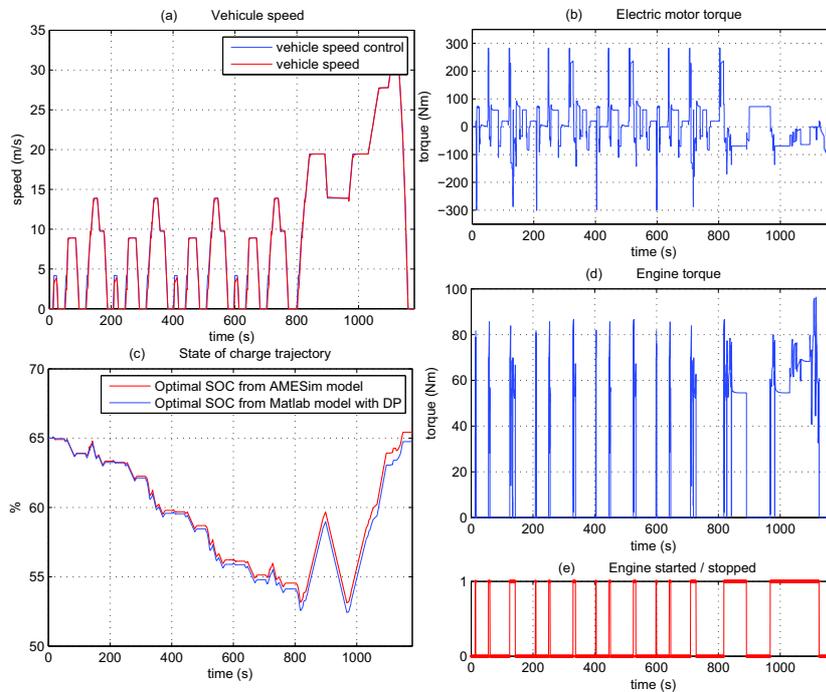


Figure 4: Results of optimal control applied on AMESim model

Figure 4(a) shows the effective vehicle speed (blue), compared with the speed request from the cycle (red). Figure 4(b) and (d) show the motor and engine torques, while Figure 4(e) specifies if the engine is started or stopped. Figure 4(c) shows a comparison between optimal SOC trajectory obtained with matlab model, and the one obtained with AMESim model.

The global fuel consumption obtained with AMESim model is 310.2 g (3.81 l/100km) while the one with matlab model is 310.34 g (3.75 l/100km), but the vehicle linear displacement is not the same: Matlab model covers 11.01km, but AMESim model only covers 10.84km, because of inertia that cause a bad follow-up of the vehicle cycle at low speeds. The resulting error between the two models is about 1.5%.

7.2. Real-time control strategy

In this section, suboptimal control law is derived from the optimization results. The chosen real-time control law is the Equivalent Consumption Minimization Strategy: it is based on instantaneous equivalent fuel consumption, the battery being considered as a second energy source. ECMS aims to choose the cheapest energy source, between fuel tank and battery storage.

This strategy is derived from the Pontryagin's Principle, which set optimality conditions for the continuous optimization problem (1). Some important theoretical results can be found in [8]. To apply this strategy, we form the Hamiltonian function \mathcal{H} given by

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = \hat{L}(x(t), u(t), t)\Delta t + p(t)\dot{x}_1(t)\Delta t, \quad (13)$$

where $\hat{L}(x(t), u(t), t)\Delta t$ represents the variation of fuel consumption over a time step Δt , given by

$$\hat{L}(x(t), u(t), t) = \begin{cases} L_1(u(t), t) & \text{if } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x_2 = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$\dot{x}_1\Delta t$ corresponds to the variation of state of charge over a time step, and p is a Lagrange multiplier associated with the constraint $\dot{x}_1(t) = f_1(u(t), t)$. The state constraints have not been considered in the definition of (13). In this strategy, the optimal control is the admissible one which minimizes \mathcal{H} , taking into account all the control constraints. The same models as the ones used in dynamic programming algorithm are used in ECMS, which is the advantage of this model-based strategy.

7.2. Meaning of p

The coefficient p corresponds to the *price* of electric energy. The larger is p , the more expensive is the electrical energy, and the more interesting to be recovered. The smaller is p , the cheaper is the electrical energy, and the more interesting to be used to power the vehicle conjointly with the engine.

The variation of p depends on the time evolution of the dynamic state variable x_1 , according to the Euler-Lagrange equations, namely

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1}(x(t), u^*(t), p(t), t). \quad (15)$$

As either \hat{L} or \dot{x}_1 do not depend on x_1 , Equation (15) gives

$$\dot{p}(t) = 0. \quad (16)$$

As a results, when no state constraint is active, p is constant for the considered system (6). When a state constraint becomes active, the sign of \dot{p} is completely known, depending on the active constraint: $x = x_{min}$ or $x = x_{max}$.

7.3. Control of p

In ECMS, the value of p is often controlled thanks to rules [5], [11], mainly depending of the state of charge. Indeed, as the future is not known, it can be better to keep the state of charge x_1 far from its bounds, and to control p as a function of x_1 with a feedback controller. However, in this paper, we

consider that p remains constant, and we just try to show the potential of this strategy with an adequate initial value of p .

An estimation of p can be obtained by calculating the equivalent Lagrange multiplier with the dynamic programming results. From [7], equivalence between Pontryagin's principle and dynamic programming can be found

$$p(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x), \quad (17)$$

where $V(t, x)$ corresponds to the cost-to-go function in continuous time, already defined in (10). Using these results allows to estimate that p should be into the range $[-3400; -3000]$. Because of some differences between the model used with dynamic programming and the AMESim model, a trial & error method has been applied to end up with $p = -3075$ [†]. This value allows to reach a final state $x(T)$ close to the initial state $x(0)$.

7.4. Results of the ECMS Real-time controller

The Figure 5 shows some results obtained with this real-time control strategy, with a correct value of p .

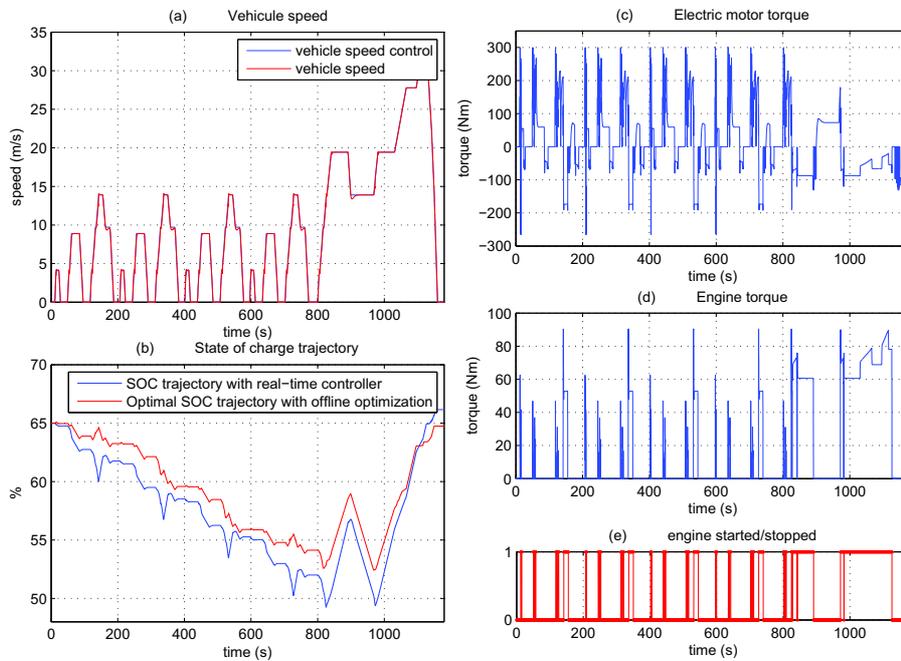


Figure 5: Results obtained with a sub-optimal strategy applied on AMESim model

Figure 5(a) shows that the hybrid vehicle still follows the speed request from the cycle. However, some differences appear on the state of charge, Figure 5(b). The fuel consumption obtained with this sub-optimal strategy is 326.8 g, corresponding to 3.97 l/100km. Compared to conventional vehicle, this controller – with an ideal value of p in this example – allows to save 16.6% of fuel on the NEDC cycle. Some rules to control p with the state of charge should be implemented to make this controller more robust.

[†]if the variations of fuel and chemical energies are used instead of the variations $\dot{L}(u(t), t)\Delta t$ and $\dot{x}_1(t)\Delta t$, the coefficient p can be scaled to a smaller value.

8. Conclusions

In this paper, has been presented an optimization study applied on a full hybrid vehicle, with classical offline optimization tool, and an example of a real-time control strategy.

A simple model in Matlab has been used with a dynamic programming algorithm. This allows to get the optimal sizes and powers of elements of the hybrid powertrain. Nevertheless, these results are obtained on the NEDC cycle, so the optimal sizes can be a little different on other cycles.

After a validation of the optimal trajectory and torques applied on a more realistic model in AMESim, a model-based sub-optimal controller has been implemented, using Pontryagin's Principle and optimality conditions. Even if an average value of p can be estimated from offline optimization results, the choice of an adequate initial value remains a delicate task, and p should be controlled regarding to the evolution of the state of charge of the battery.

9. References

- [1] German J.M. (2003) Hybrid powered vehicles. *Society of Automotive Engineers*.
- [2] Sciarretta A. and Guzzella L. and Back M. (2004) A Real-Time Optimal Control Strategy for Parallel Hybrid Vehicles with on-board Estimation of the Control Parameters, *Proceedings of IFAC Symposium on Advances in Automotive Control AAC04*, 502-507.
- [3] Scordia J. (2005) Systematic elaboration of online energy management laws for hybrid vehicles, *Proceedings of the EVS 21 - Electric Vehicle Symposium*, Monte Carlo, Monaco.
- [4] Wu B. and Lin C-C. and Filipi Z. and Peng H. and Assanis D. (2002) Optimization of Power Management Strategies for a Hydraulic Hybrid Medium Truck. *Proceeding of the 2002 Advanced Vehicle Control Conference, Hiroshima, Japan*.
- [5] Delprat, S., et al. (2004) Control of a parallel hybrid powertrain: optimal control, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 53, No. 3, pp.872-881.
- [6] Guzzella L. and Sciarretta A. (2005) *Vehicle Propulsion Systems*, Springer.
- [7] Bryson E. and Ho Y.C. (1975) *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Corp.
- [8] Pontryagin L.S. and Boltyanskii V.G. and Gamkrelidze R.V. and Mishchenko E.F. (1965) *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, CRC Press.
- [9] Guilbaud T. (2002) Méthodes numériques pour la commande optimale. *Thèse*, Université de Paris VI.
- [10] J. F. Bonnans, T. Guilbaud, A. Ketfi-Cherif, C. Sagastizbal, D. von Wissel, H. Zidani (2002) Parametric optimization of hybrid car engines. *OPTIMIZATION AND ENGINEERING*, **334-335**, 73-84.
- [11] J. Liu and H. Peng (2006) Control Optimization for a Power-Split Hybrid Vehicle. *2006 American Control Conference, Minneapolis, USA*.

Bibliographie

- [Ambühl et al., 2007] Ambühl, D., Sciarretta, A., Onder, C., Guzzella, L., Sterzing, S., Mann, K., Kraft, D., and Küsel, M. (2007). A causal operation strategy for hybrid electric vehicles based on optimal control theory. *4th Symposium Hybrid Vehicles and Energy Management, Braunschweig*.
- [Anatone et al., 2005] Anatone, M., Cipollone, R., Donati, A., and Sciarretta, A. (2005). Control-oriented modeling and fuel optimal control of a series hybrid bus. *SAE Technical Paper*, (2005-01-1163).
- [André, 2004] André, M. (2004). The artemis european driving cycles for measuring car pollutant emissions. *Science of The Total Environment*, 334-335 :73–84.
- [Beguery et al., 2001] Beguery, P., Dubray, A., and Gentil, S. (2001). Optimisation des lois de gestion d'énergie d'un véhicule hybride serie. *Journées automatiques et automobiles*.
- [Bertsekas, 2001] Bertsekas, D. (2001). *Dynamic programming and optimal control*, volume 1. Athena scientific.
- [Bonnans et al., 2002] Bonnans, J. F., Guilbaud, T., Ketfi-Cherif, A., Sagastizábal, C., von Wissel, D., and Zidani, H. (2002). Parametric optimization of hybrid car engines. *Optimization and Engineering*.
- [Bonnans and Hermant, 2007] Bonnans, J. F. and Hermant, A. (2007). Well-posedness of the shooting algorithm for state constrained optimal control problems with a single constraint and control. *SIAM Journal on Control and Optimization*.
- [Bonnans and Hermant, 2008] Bonnans, J. F. and Hermant, A. (2008). Stability and sensitivity analysis for optimal control problems with a first-order state constraint. *ESAIM : COCV*.
- [Boudarel et al., 1969] Boudarel, R., Guichet, P., and Delmas, J. (1969). *Commande optimale des processus, Méthodes variationnelles et leurs applications*, volume 4. Athena scientific.
- [Bryson and Ho, 1975] Bryson, E. and Ho, Y. (1975). *Applied Optimal Control*. Hemisphere Pub. Corp.
- [Dabadie et al., 2005] Dabadie, J., Menegazzi, P., Trigui, R., and Jeanneret, B. (2005). A new tool for advanced vehicle simulations. *ICE - International Conference on Engine for Automotive, 7th, Capri*, (2005-24-044).
- [Delprat, 2002] Delprat, S. (2002). *Evaluation de stratégies de commande pour véhicules hybrides parallèles*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis.
- [Dubray and P.Beguery, 2000] Dubray, A. and P.Beguery (2000). Energy management strategy of hybrid electric vehicles and driving cycles. *Management and Control of Production and Logistics 2000, vol.3*.
- [Evans, 2000] Evans, L. C. (2000). *An Introduction To Mathematical Optimal Control Theory*. University of California Berkeley.
- [German, 2003] German, J. (2003). Hybrid powered vehicles. *Society of Automotive Engineers (SAE)*.
- [Guilbaud, 2002] Guilbaud, T. (2002). *Méthodes numériques pour la commande optimale*. PhD thesis, Université de Paris VI.

- [Guzzella, 2006] Guzzella, L. (2006). Modeling and control of advanced propulsion systems. *E-COSM - Rencontres Scientifiques de l'IFP*, pages 1–03.
- [Guzzella and Sciarretta, 2005] Guzzella, L. and Sciarretta, A. (2005). *Vehicle Propulsion Systems*. Springer.
- [Hartl et al., 1995] Hartl, R. F., Sethi, S. P., and Vickson, R. G. (1995). A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 37(2).
- [Heywood, 1988] Heywood, J. (1988). *Internal Combustion Engine Fundamentals*. McGraw-Hill Book Company, New-York.
- [Hofman et al., 2007] Hofman, T., Steinbuch, M., Druten, R. V., and Serrarens, A. (2007). Rule-based energy management strategies for hybrid vehicles. *International Journal of Electric and Hybrid Vehicles*.
- [Lin et al., 2001] Lin, C. C., Filipi, Z., Wang, Y., Louca, L., Peng, H., Assanis, D., and Stein, J. (2001). Integrated, feed-forward hybrid electric vehicle simulation in simulink and its use for power management studies. *SAE Technical Paper*, (2001-01-1334).
- [Lin et al., 2003] Lin, C. C., Peng, H., Grizzle, J., and Kang, J. (2003). Power management strategy for a parallel hybrid electric truck. *Int. J. of IEEE-Transactions on Control Systems Technology*.
- [Liu and Peng, 2006] Liu, J. and Peng, H. (2006). Control optimization for a power-split hybrid vehicle. *2006 American Control Conference, Minneapolis, USA*.
- [Nocedal and Wright, 2000] Nocedal, J. and Wright, S. (2000). *Numerical Optimization*. Springer.
- [Paganelli et al., 2002a] Paganelli, G., Delprat, S., Guerra, T., Rimaux, J., and Santin, J. J. (2002a). Equivalent consumption minimization strategy. *IEEE 55th Vehicular Technology*.
- [Paganelli et al., 2002b] Paganelli, G., Guezenec, Y., and Rizzoni, G. (2002b). Optimizing control strategy for hybrid fuel cell vehicle. *SAE 2002 World Congress*.
- [Pontryagin et al., 1974] Pontryagin, L., Boltyanskii, V., Gamkrelidze, R., and Mishchenko, E. (1974). *Théorie mathématique des processus optimaux*. Editions Mir moscou.
- [Rousseau et al., 2006a] Rousseau, G., Sciarretta, A., and Sinoquet, D. (2006a). Hybrid electric vehicles : From optimization toward real-time control strategies. *First Workshop on Hybrid and Solar Vehicles, Salerno, Italy*.
- [Rousseau et al., 2007] Rousseau, G., Sciarretta, A., and Sinoquet, D. (2007). Real-time control strategies for hybrid vehicles issued from optimization algorithm. *4th Symposium Hybrid Vehicles and Energy Management, Braunschweig*.
- [Rousseau et al., 2008a] Rousseau, G., Sciarretta, A., and Sinoquet, D. (2008a). Optimal energy management of a mild-hybrid vehicles. *4th European Conference on Alternative Energies for the Automotive Industry*.
- [Rousseau et al., 2006b] Rousseau, G., Sinoquet, D., and Rouchon, P. (2006b). Constrained optimization of energy management for a mild-hybrid vehicle. *E-COSM - Rencontres Scientifiques de l'IFP*.
- [Rousseau et al., 2008b] Rousseau, G., Sinoquet, D., Sciarretta, A., and Milhau, Y. (2008b). Design optimization and optimal control for hybrid vehicles. *EngOpt 2008 - International Conference on Engineering Optimization, Rio de Janeiro, Brazil*.
- [Rousseau et al., 2008c] Rousseau, G., Tran, Q. H., and Sinoquet, D. (2008c). Scop : a sequential constraint-free optimal control problem algorithm. *2008 Chinese Control and Decision Conference (2008 CCDC), Yantai, China*.
- [Sciarretta and Guzzella, 2007] Sciarretta, A. and Guzzella, L. (2007). Control of hybrid electric vehicles. *IEEE Control Systems magazine*, 27(2) :60–70.

BIBLIOGRAPHIE

- [Sciarretta et al., 2004] Sciarretta, A., Guzzella, L., and Back, M. (2004). A real-time optimal control strategy for parallel hybrid vehicles with on-board estimation of the control parameters. *Proceedings of IFAC Symposium on Advances in Automotive Control AAC04*, pages 502–507.
- [Scordia, 2004] Scordia, J. (2004). *Approche systématique de l'optimisation du dimensionnement et de l'élaboration de lois de gestion d'énergie de véhicules hybrides*. PhD thesis, Université Henri Poincaré - Nancy 1.
- [Sethi and Thompson, 2006] Sethi, S. P. and Thompson, G. L. (2006). *Optimal control theory : applications to management science and economics*.
- [Sundström et al., 2008a] Sundström, O., Ambühl, D., and Guzzella, L. (2008a). On implementation of dynamic programming for optimal control problems with final state constraints. *to appear*.
- [Sundström et al., 2008b] Sundström, O., Guzzella, L., and Soltic, P. (2008b). Optimal hybridization in two parallel hybrid electric vehicles using dynamic programming. *Proceedings of the 17th World Congress of The International Federation of Automatic Control*.
- [Thounthong, 2005] Thounthong, P. (2005). *Conception d'une source hybride utilisant une pile a combustible et des supercondensateurs*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [Tilagone and Venturi, 2004] Tilagone, R. and Venturi, S. (2004). Development of natural gas demonstrator based on an urban vehicle with a down-sized turbocharged engine. *Oil and Gas Science and Technology*, 59(6) :581–591.
- [Tilagone et al., 2005] Tilagone, R., Venturi, S., and Monnier, G. (2005). Natural gas - an environmentally friendly fuel for urban vehicles : the smart demonstrator approach. *SAE transactions, Journal of fuels and lubricants*, 114(4) :1066–1073.
- [Tona et al., 2007] Tona, P., Moulin, P., Venturi, S., and Tilagone, R. (2007). Amt control for a mild-hybrid urban vehicle with a downsized turbocharged cng engine. *SAE 2007 World Congress, Detroit*.
- [Trigui et al., 2005] Trigui, R., Harel, F., Jeanneret, B., Badin, F., and Dérou, S. (2005). Optimisation globale de la commande d'un moteur synchrone à rotor bobiné. effets sur la consommation simulée de véhicules électriques et hybrides. *ICE - International Conference on Engine for Automotive, 7th, Capri*, (2005-24-044).
- [Voise et al., 2005] Voise, L., Rousseau, G., and Sinoquet, D. (2005). Modélisation d'un véhicule hybride pour l'optimisation des paramètres de contrôle. Technical report, Rapport interne IFP.
- [Wu et al., 2002] Wu, B., Lin, C.-C., Filipi, Z., Peng, H., and Assanis, D. (2002). Optimization of power management strategies for a hydraulic hybrid medium truck. *Proceeding of the 2002 Advanced Vehicle Control Conference, Hiroshima, Japan*.