



**HAL**  
open science

# Méthodes de Galerkin Discontinu pour la résolution du système de Maxwell sur des maillages localement raffinés non-conformes

Nicolas Canouet

► **To cite this version:**

Nicolas Canouet. Méthodes de Galerkin Discontinu pour la résolution du système de Maxwell sur des maillages localement raffinés non-conformes. Mathématiques [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2003. Français. NNT : 2003ENPC0009 . pastel-00000555

**HAL Id: pastel-00000555**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00000555>**

Submitted on 10 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

---

Méthodes de Galerkin Discontinu pour  
la résolution du système de Maxwell  
sur des maillages localement raffinés  
non-conformes

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 décembre 2003

pour l'obtention du

Diplôme de Doctorat

Spécialité: Mathématiques Appliquées

par

Nicolas Canouet

Composition du jury

*Président :* Jean-Michel Ghidaglia

*Rapporteurs :* Eliane Bécache  
Peter Monk

*Directeur de thèse :* Loula Fézoui

*Examineurs :* Isabelle Terrasse  
Claude Dedeban

---

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Je souhaite remercier très sincèrement Madame Loula Fézoui qui a encadré ces travaux avec passion. Je n'oublierai jamais son dévouement exceptionnel et son soutien sans faille.

Je suis très honoré que Madame Eliane Bécache et Monsieur Peter Monk aient accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie vivement Madame Isabelle Terrasse et Monsieur Jean-Michel Ghidaglia qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je remercie toute l'équipe du département Antennes de France Télécom R&D de La Turbie. Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Claude Dedeban pour m'avoir permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions. Je souhaite également remercier Messieurs Pierre-Yves Garel et Philippe Ratajczak pour les nombreux conseils qu'ils ont su me donner.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Serge Piperno qui a suivi et guidé quotidiennement ces travaux avec gentillesse et talent. J'ai aussi eu le plaisir de travailler avec Monsieur Stéphane Lanteri. Je souhaite ici le remercier autant pour son soutien que pour avoir su me faire partager sa passion pour la culture chinoise.

Je n'oublie pas de saluer tous mes sympathiques camarades du projet CAIMAN de l'INRIA Sophia Antipolis. Merci donc à Nathalie, Sabine, Christel et Guillaume. Souhaitons aussi bonne chance pour la suite à Pierre, Said, Martine, Jessy, Hugo et à la famille Bernackix.

Les mots me manquent pour remercier mes parents et ma sœur pour leur soutien constant et leurs encouragements.

Merci enfin à Nathalie pour tout ce qu'elle m'apporte.



# Table des matières

Introduction	1
--------------	---

<b>Chapitre 1</b>	
<b>Introduction Générale</b>	<b>5</b>

1.1	Equations de Maxwell . . . . .	5
1.2	Conditions d'interface et conditions aux limites . . . . .	7
1.2.1	Equations de Maxwell au sens des distributions . . . . .	7
1.2.2	Conditions aux limites pour une frontière métallique . . . . .	8
1.2.3	Conditions aux limites pour une frontière absorbante . . . . .	9
1.3	Approche en régime harmonique . . . . .	9
1.4	Principales méthodes de résolution . . . . .	9
1.4.1	Différences Finies . . . . .	9
1.4.2	Eléments Finis . . . . .	11
1.4.3	Volumes Finis . . . . .	11
1.5	Motivations pour les maillages orthogonaux . . . . .	12
1.6	Le schéma Volumes Finis Centrés (VFC) . . . . .	13
1.6.1	Présentation du schéma . . . . .	14
1.6.2	Propriétés . . . . .	15
1.6.3	Raffinement de maillage . . . . .	15
1.6.3.1	Réflexions parasites . . . . .	15
1.6.3.2	Dispersion . . . . .	22
1.6.4	Conclusion . . . . .	23

<b>Chapitre 2</b>	
$\beta$ -schéma	

2.1	Famille des $\beta$ -schémas . . . . .	26
-----	--	----

2.2	Cas mono-dimensionnel . . . . .	27
2.2.1	Ecriture du schéma . . . . .	27
2.2.2	Propriétés . . . . .	29
2.2.3	Applications aux grilles raffinées . . . . .	33
2.2.4	Résultats numériques . . . . .	33
2.2.4.1	Calculs à petit pas de temps sur une grille uniforme . . . . .	33
2.2.4.2	Evolution d'un pulse sur une grille raffinée . . . . .	34
2.3	Cas bi-dimensionnel . . . . .	35
2.3.1	Présentation du schéma . . . . .	35
2.3.2	Minimisation de l'erreur de dispersion . . . . .	39
2.3.2.1	Deux approches . . . . .	39
2.3.2.2	Comparaison des deux approches . . . . .	40
2.3.2.3	Compatibilité avec la condition de stabilité . . . . .	42
2.3.3	Application aux grilles raffinées conformes . . . . .	43
2.3.4	Application aux grilles raffinées non-conformes . . . . .	44
2.3.4.1	Définition du gradient . . . . .	44
2.3.4.2	Evolution d'un mode propre . . . . .	45
2.3.4.3	Un dipôle résonnant . . . . .	47
2.4	Cas tri-dimensionnel . . . . .	49
2.4.1	Cas conforme . . . . .	49
2.4.2	Instabilités dans le cas non-conforme . . . . .	52
2.5	Conclusion . . . . .	52

<b>Chapitre 3</b>
-------------------

<b>Méthode Galerkin Discontinu</b>
------------------------------------

3.1	Présentation de la méthode . . . . .	56
3.1.1	Discrétisation spatiale . . . . .	56
3.1.2	Discrétisation temporelle . . . . .	58
3.1.3	Conditions aux limites . . . . .	58
3.1.4	Stabilité du schéma . . . . .	58
3.2	Choix des fonctions de base . . . . .	59
3.3	Etude de l'erreur de dispersion . . . . .	61
3.4	Conservation de la divergence . . . . .	65
3.4.1	Cas tétraédrique . . . . .	68

---

3.4.2	Cas hexaédrique . . . . .	68
3.4.3	Validation numérique : cas d'une cavité chargée . . . . .	69
3.5	Matériau fictif absorbant . . . . .	72
3.5.1	Principe . . . . .	73
3.5.2	Approximation numérique . . . . .	74
3.5.3	Conditions aux limites . . . . .	75
3.5.4	Illustration numérique . . . . .	75
3.6	Résultats numériques . . . . .	77
3.6.1	Abri métallique . . . . .	77
3.6.2	Diffraction par un cube métallique . . . . .	80
3.6.3	Résonateur diélectrique . . . . .	83
3.6.4	Propagation d'un dipôle sur des grilles raffinées . . . . .	89
3.7	Conclusion . . . . .	90

<b>Chapitre 4</b>
-------------------

<b>Méthode adaptée au cas conforme</b>
--

4.1	Modification du calcul des flux . . . . .	93
4.2	Stabilité du schéma . . . . .	96
4.3	Choix de $\alpha$ . . . . .	105
4.3.1	Etude de l'erreur de dispersion . . . . .	105
4.3.2	Validation numérique . . . . .	107
4.4	Stratégie sur une grille raffinée . . . . .	109
4.5	Résultats numériques . . . . .	112
4.5.1	Maillage hexaédrique . . . . .	112
4.5.2	Maillage raffiné conforme . . . . .	113
4.6	Cas non-conforme . . . . .	115
4.6.1	Energie piégée . . . . .	115
4.6.2	Illustration numérique . . . . .	117
4.7	Conclusion . . . . .	118

<b>Chapitre 5</b>
-------------------

<b>Traitement du cas non-conforme</b>
---------------------------------------

5.1	L'espace $\mathbb{P}_{div}^2$ . . . . .	122
5.2	Stratégie pour un maillage non-conforme . . . . .	123



5.3	Résultats numériques . . . . .	126
5.3.1	Propagation d'un dipôle . . . . .	126
5.3.2	Cavité chargée . . . . .	130
5.3.3	Abri métallique . . . . .	131
5.3.4	Antenne patch . . . . .	135
5.3.5	Dipôle imprimé . . . . .	139
5.4	Conclusion . . . . .	145
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>147</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>

# Introduction

On s'intéresse dans ce document à la résolution numérique des équations de Maxwell dans le domaine temporel. Cette approche apporte une solution au problème pour toute une bande de fréquence en une seule simulation. Elle permet de plus l'analyse de milieux hétérogènes ou de problèmes non-linéaires.

Ce travail a été réalisé au département Antennes France Télécom R&D de La Turbie. La complexité croissante des antennes requiert des outils d'analyse numérique toujours plus performants. La miniaturisation liée à l'essor de la téléphonie mobile impose notamment la prise en compte de géométries qui peuvent être très petites devant les longueurs d'onde qui entrent en jeu. Pour être suffisamment précises, la plupart des méthodes numériques nécessitent l'usage de maillages assez réguliers. La taille des problèmes à traiter peut alors être considérable.

L'objet de cette thèse est de proposer une méthode numérique capable de résoudre avec précision le problème de Maxwell temporel avec des maillages localement raffinés. Ainsi, en utilisant une discrétisation fine pour la prise en compte de détails géométriques et une discrétisation plus grossière dans les zones de propagation, on réduit significativement la taille des problèmes à traiter. Le gain est d'autant plus important que le raffinement est réalisé de manière non-conforme. Nous nous intéressons ici uniquement aux maillages orthogonaux qui sont très faciles à mettre en œuvre et demandent peu de stockage informatique. Notre objectif est donc de traiter des maillages orthogonaux localement raffinés de manière conforme ou non-conforme. De nombreuses études ont été menées pour étendre le schéma Différences Finies de Yee à ce type de maillage. Le comportement de ce schéma impose de raffiner en espace et en temps. La plupart de ces travaux reposent sur des techniques d'interpolation qui se sont révélées instables [16], [40], [50]. Une méthode performante assurant la stabilité a été proposée dans [32]. Cette méthode est implicite aux interfaces entre les différentes sous-grilles. Les méthodes que nous exposons ici sont explicites et ne font pas intervenir de pas de temps local.

Ce document comprend cinq chapitres. Dans un premier chapitre, on rappelle les équations de Maxwell et leurs propriétés. On décrit ensuite les méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution du système de Maxwell. On détaille aussi les difficultés (stabilité, dispersion, réflexions aux interfaces ...) que l'on rencontre lorsqu'on utilise des maillages localement raffinés. On décrit enfin un schéma Volumes Finis Centrés (VFC, [54]) qui a été le point de départ de notre travail. Ce schéma repose sur un calcul de flux centré et un schéma saute-mouton pour la discrétisation temporelle. Son intérêt majeur est qu'il est stable sous une condition de type CFL sur tout type de maillages. Il permet donc

notamment de traiter de manière stable des maillages non-conformes. On montre alors que des phénomènes de dispersion et de réflexions parasites dégradent sur de tels maillages la qualité des solutions.

Afin de contrôler les erreurs de dispersion, on propose dans le chapitre deux d'augmenter la précision du schéma VFC. Pour ce faire, on utilise un  $\beta$ -schéma [11], [17]. Le calcul des flux (toujours centré) repose sur une interpolation dépendant d'un paramètre  $\beta$ . On agit sur le paramètre  $\beta$  pour minimiser l'erreur de dispersion. Les résultats obtenus dans le cas de maillages raffinés conformes sont très satisfaisants. Malheureusement, le schéma introduit s'est révélé instable dans le cas 3D non-conforme.

Dans le troisième chapitre, on introduit une classe de schémas Galerkin Discontinu nous garantissant la stabilité sur tout type de maillages. La méthode Galerkin Discontinu a été introduite en 1973 par Reed et Hill [52] pour la résolution de l'équation de transport de neutrons puis a été analysée par Le Saint et Raviart [41]. La méthode repose sur une base de fonctions discontinues d'un élément à un autre. L'ordre de l'approximation est choisi arbitrairement dans chaque élément. La méthode peut être vue comme une approche Eléments Finis où aucune continuité n'est assurée entre les éléments ou une approche Volumes Finis d'ordre élevé. La discontinuité de la représentation permet de n'imposer aucune contrainte sur la maillage. En particulier, les maillages non-conformes sont autorisés. De très bons résultats ont d'ailleurs été obtenus en mécanique des fluides avec ce type de maillages [53]. De plus, la méthode étant très locale, elle est facilement parallélisable [7], [9], [26], [31]. La méthode Galerkin Discontinu connaît ainsi un réel engouement depuis une quinzaine d'années. Elle est maintenant fréquemment utilisée pour résoudre des systèmes différentiels hyperboliques [6], [18], paraboliques [28], [29] et elliptiques [1], [2], [62]. Cependant, elle a été peu utilisée pour résoudre le système de Maxwell instationnaire. Un schéma a été proposé dans le cas bidimensionnel dans [55]. Ce schéma s'est montré très performant pour traiter des milieux hétérogènes. Il est néanmoins coûteux (à cause notamment du schéma de Runge-Kutta utilisé pour l'intégration temporelle) et diffusif, compromettant ainsi toute simulation en temps long. Ces inconvénients ont été contournés en partie dans [37] par l'usage de polynômes de Lagrange d'ordre élevé sur des maillages non-structurés conformes. Nous proposons ici d'utiliser un schéma temporel de type saute-mouton moins coûteux qu'un schéma Runge-Kutta. De plus, associé à une approximation centrée pour le calcul des intégrales de surface, il permet de conserver un équivalent discret de l'énergie électromagnétique. Le schéma est alors non-diffusif. On présente ensuite un ensemble de fonctions de base adapté aux maillages orthogonaux moins coûteux que les espaces  $\mathbb{P}^1$  ou  $\mathbb{Q}^1$  classiquement utilisés. On montre que ce choix de fonctions de base permet de conserver faiblement les relations de divergence. Une étude de l'erreur de dispersion montre que la méthode est peu sensible aux variations du rapport pas de temps sur pas d'espace. Il s'agit donc d'une méthode apte à traiter de manière stable et avec une faible erreur de dispersion des maillages raffinés avec un pas de temps constant. On montre toutefois que lorsque le maillage est non-conforme, des réflexions parasites dues à l'interface entre les grilles dégradent les résultats.

On montre dans le quatrième chapitre qu'il est possible de diminuer encore l'erreur de dispersion du schéma Galerkin Discontinu. On introduit pour cela un paramètre dans le calcul des intégrales de surface. Cette approche n'est valable que lorsque les maillages sont

---

conformes. En effet, elle conduit dans le cas non-conforme à un schéma capable de piéger de l'énergie dans les sous-grilles les plus fines.

Le cinquième chapitre est consacré au cas des maillages non-conformes. On propose d'utiliser le schéma Galerkin Discontinu présenté au troisième chapitre. Afin de supprimer les réflexions parasites constatées dans ce même chapitre, on augmente le degré de l'approximation aux interfaces non-conformes. Plusieurs applications montrent alors que la méthode peut traiter de manière très satisfaisante des maillages non-conformes dont le taux de raffinement peut être élevé.



# 1

## Introduction Générale

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Equations de Maxwell . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>Conditions d'interface et conditions aux limites . . . . .</b>	<b>7</b>
1.2.1	Equations de Maxwell au sens des distributions . . . . .	7
1.2.2	Conditions aux limites pour une frontière métallique . . . . .	8
1.2.3	Conditions aux limites pour une frontière absorbante . . . . .	9
<b>1.3</b>	<b>Approche en régime harmonique . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.4</b>	<b>Principales méthodes de résolution . . . . .</b>	<b>9</b>
1.4.1	Différences Finies . . . . .	9
1.4.2	Eléments Finis . . . . .	11
1.4.3	Volumes Finis . . . . .	11
<b>1.5</b>	<b>Motivations pour les maillages orthogonaux . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>1.6</b>	<b>Le schéma Volumes Finis Centrés (VFC) . . . . .</b>	<b>13</b>
1.6.1	Présentation du schéma . . . . .	14
1.6.2	Propriétés . . . . .	15
1.6.3	Raffinement de maillage . . . . .	15
1.6.4	Conclusion . . . . .	23

---

### 1.1 Equations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques dans les milieux continus sont décrits par les quatre champs vectoriels  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  qui représentent respectivement champ et induction électriques, champ et induction magnétiques et par les grandeurs  $\rho$  (densité de charge volumique) et  $\mathbf{j}$  (densité de courant électrique).

Les équations de Maxwell relient entre elles ces quantités

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{j} &= 0 && \text{loi de Maxwell-Ampère,} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 && \text{loi de Maxwell-Faraday,} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} - \rho &= 0 && \text{loi de Gauss électrique,} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 && \text{loi de Gauss magnétique.}\end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps la loi de Gauss électrique et en prenant la divergence de la loi de Maxwell-Ampère, on obtient la loi de la conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (1.1)$$

Les équations de Maxwell ne sont pas suffisantes pour déterminer le champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$ . Il convient d'ajouter des relations tenant compte du milieu étudié. Nous considérerons dans cette étude des matériaux linéaires isotropes. Pour ces matériaux, les lois de comportement sont données par

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu(\mathbf{x})\mathbf{H},\end{aligned} \quad (1.2)$$

où la permittivité  $\varepsilon(\mathbf{x})$  et la perméabilité  $\mu(\mathbf{x})$  sont des scalaires strictement positifs. Dans le vide, ces quantités sont constantes et ont pour valeurs

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m, \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} H/m.\end{aligned}$$

La vitesse de la lumière dans le vide est ainsi donnée par  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 m/s$ .

On considère dans ce document des courants sources donnés ou des conducteurs à perte. Dans ce dernier cas, la densité de courant  $\mathbf{j}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  sont reliés par une loi dite de conduction. En l'absence de source de courant électrique, la loi la plus simple est la loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

où la conductivité du matériau  $\sigma$  est une grandeur scalaire positive ou nulle. Ainsi, les équations de Maxwell dans les milieux linéaires isotropes deviennent

$$\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{j} = 0, \quad (1.3)$$

$$\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E} - \rho = 0, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} \mu(\mathbf{x}) \mathbf{H} = 0. \quad (1.6)$$

En fait, les équations (1.5) et (1.6) sont redondantes (pour tout temps  $t$  positif) pour une donnée initiale vérifiant ces contraintes. Les schémas numériques que l'on présente reposent donc uniquement sur la discrétisation des équations (1.3) et (1.4). Nous montrerons au chapitre 3 que le schéma Galerkin Discontinu que nous proposons vérifie les équations (1.5) et (1.6) dans un sens que nous précisons.

## 1.2 Conditions d'interface et conditions aux limites

### 1.2.1 Equations de Maxwell au sens des distributions

Des répartitions de charges et des courants localisés sur des courbes ou des surfaces se rencontrent fréquemment dans les applications. L'écriture des équations de Maxwell au sens des distributions permet de prendre en compte ces singularités et d'explicitier de manière générale les conditions aux limites ou d'interfaces associées à ce type de problème. On rappelle que pour toute distribution vectorielle  $T_A$  (associée à un champ de vecteur  $\mathbf{A}$ ) et toute surface  $S$  orientée (normale  $\mathbf{n}$ ) telles que  $T_A$  soit dérivable au sens des fonctions sur le complémentaire de  $S$ , divergence et rotationnel de  $T_A$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(T_A) &= \operatorname{div}(\mathbf{A}) + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{A}]_S \delta_S, \\ \operatorname{rot}(T_A) &= \operatorname{rot}(\mathbf{A}) + \mathbf{n} \times [\mathbf{A}]_S \delta_S, \end{aligned} \quad (1.7)$$

où  $\delta_S$  est la distribution de Dirac sur la surface  $S$  et  $[\mathbf{A}]_S$  est le saut de  $\mathbf{A}$  à travers la surface  $S$ .

Revenons à présent aux distributions vectorielles et scalaires associées aux grandeurs intervenant dans les équations (1.3), (1.4), (1.5) et (1.6). On suppose que toutes ces grandeurs sont au moins dérivables dans le complémentaire de  $S$ . On décompose la distribution scalaire  $T_\rho$  en la somme d'une densité de charge volumique  $\rho$  et densité de charge surfacique  $\rho_S$  ( $T_\rho = \rho + \rho_S$ ). On décompose de manière analogue la distribution



volumique  $T_{\mathbf{j}}$ . Ainsi, les équations de Maxwell au sens des distributions s'écrivent

$$\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{n} \times [\mathbf{H}]_S = -\mathbf{j} - \mathbf{j}_S \delta_S, \quad (1.8)$$

$$\mu(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} + \mathbf{n} \times [\mathbf{E}]_S = 0, \quad (1.9)$$

$$\text{div } \varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E} + \mathbf{n} \cdot [\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}]_S = \rho + \rho_S \delta_S, \quad (1.10)$$

$$\text{div } \mu(\mathbf{x})\mathbf{H} + \mathbf{n} \cdot [\mu(\mathbf{x})\mathbf{H}]_S = 0. \quad (1.11)$$

Par identification avec les équations de Maxwell au sens des fonctions, on établit les conditions d'interface sur la surface  $S$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}]_S = \mathbf{j}_S, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}]_S = 0, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}]_S = \rho_S, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mu(\mathbf{x})\mathbf{H}]_S = 0. \quad (1.15)$$

Ainsi, en l'absence de courant  $\mathbf{j}_S$ , les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont continues à travers toute surface. Par contre, même en l'absence de charges, les composantes normales des champs électrique et magnétique ne sont pas en général continues.

### 1.2.2 Conditions aux limites pour une frontière métallique

On assimile les parois métalliques au modèle idéal et fictif du conducteur parfait : la conductivité  $\sigma$  est supposée infinie (les charges se portent instantanément à la surface du conducteur). On considère que les champs sont nuls à l'intérieur du métal. Si on note  $\mathbf{E}_S$  et  $\mathbf{H}_S$  les champs électrique et magnétique à la surface du métal, les relations de saut deviennent

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_S = \mathbf{j}_S, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_S = 0, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_S = \frac{\rho_S}{\varepsilon}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_S = 0. \quad (1.19)$$

Les courants surfaciques  $\mathbf{j}_S$  et les charges surfaciques  $\rho_S$  ne sont pas des sources appliquées connues mais leur présence est rendue nécessaire par le modèle de conducteur parfait. Nous imposerons donc uniquement les conditions (1.16) et (1.17).

### 1.2.3 Conditions aux limites pour une frontière absorbante

Lorsque les ondes se propagent dans un domaine infini, nous devons borner le domaine de calcul. On cherche donc des conditions aux limites totalement absorbantes (i.e. ne générant aucune onde parasite à la frontière artificielle). Nous utiliserons pour une frontière placée dans le vide la condition absorbante d'ordre un de Silver-Müller :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}). \quad (1.20)$$

En pratique, cette condition nécessite de placer la frontière du domaine assez loin des objets et engendre donc des problèmes de grande taille. De nombreux travaux ont été menés pour proposer des conditions aux limites d'ordre élevé plus performantes [21], [39]. Toutefois, la méthode la plus efficace pour absorber les ondes électromagnétiques semble être d'utiliser un matériau fictif absorbant (PML: Perfectly Matched Layer) proposée par Bérenger [5]. Nous verrons que les PML s'adaptent très bien à la méthode Galerkin Discontinu.

## 1.3 Approche en régime harmonique

Le traitement en régime harmonique des équations de Maxwell consiste à prendre la transformée de Fourier de celles-ci (dépendance implicite en  $e^{i\omega t}$ ) et traiter le problème fréquence par fréquence. On peut alors utiliser des méthodes très précises comme les équations intégrales [4]. Toutefois, ces méthodes ne peuvent traiter des milieux inhomogènes ou non-linéaires contrairement aux méthodes temporelles [24], [35]. Elles ne permettent pas de modéliser des éléments actifs (diodes par exemple). De plus, lorsqu'on est intéressé par plusieurs fréquences, plusieurs calculs sont nécessaires alors qu'un seul calcul dans le domaine temporel suivi d'une transformée de Fourier permet d'obtenir des résultats sur une large bande de fréquence. On obtient ainsi une représentation des phénomènes électromagnétiques continue en fréquence. Enfin, les nouvelles technologies UWB (Ultra Wide Band) en mode impulsionnel nécessite une étude dans le domaine temporel. On s'intéressera uniquement dans ce document à la résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel.

## 1.4 Principales méthodes de résolution

### 1.4.1 Différences Finies

Cette méthode FDTD (Finite Difference Time Domain) introduite par Yee [63] est la plus couramment utilisée. L'espace est divisé en pavés identiques. Les différentes composantes des champs ne sont pas calculées aux mêmes endroits. Les dérivées temporelles sont prises en compte par un schéma saute-mouton d'ordre 2 (les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ne sont pas calculés aux mêmes instants) et chacune des dérivées spatiales est discrétisée par des différences centrées (aussi d'ordre 2)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h/2) - f(x_0 - h/2)}{h} + O(h^2).$$

Le schéma résultant est simple, peu coûteux et très facile à mettre en œuvre. De nombreux travaux ont été menés pour le doter de conditions aux limites absorbantes. Il ressort de [60] que l'usage de PML (Perfectly Matches Layer [5]) est la manière la plus efficace de procéder. Le schéma est stable pour un matériau homogène sous la condition CFL suivante

$$C\Delta t \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right)} \leq 1, \quad (1.21)$$

où  $C = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  est la vitesse de propagation du milieu et  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  déterminent les cotés des pavés. L'utilisation de cubes ne permet pas de bien prendre en compte des géométries complexes. On doit donc utiliser des maillages très fins autour de toute géométrie complexe. L'emploi de grille régulière conduit alors à des tailles de problèmes prohibitives. Il est alors indispensable de raffiner localement le maillage. Deux difficultés majeures se présentent. La première est la dispersion. On rappelle que pour toute onde harmonique de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = {}^t(k_x, k_y, k_z)$ , on a dans le cas continu la relation de dispersion

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 C^2. \quad (1.22)$$

La relation de dispersion discrète vérifiée par le schéma de Yee est

$$\omega^2 = C^2 |\mathbf{k}|^2 + \frac{C^2 |\mathbf{k}|^4}{12} \left( C^2 \Delta t^2 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{|\mathbf{k}|^4} \right) + O(\Delta^4). \quad (1.23)$$

Une étude de la variation du terme d'ordre deux de cette relation permet d'affirmer que pour une discrétisation spatiale donnée, baisser le pas de temps  $\Delta t$  augmente l'erreur de dispersion. De plus, cette erreur est minimale lorsque  $\Delta t$  est le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité. Pour ne pas conduire à un schéma trop dispersif, tout raffinement spatial doit s'accompagner d'un raffinement temporel du même rapport. Le rapport pas de temps sur pas d'espace est alors constant sur tout le domaine et optimal pour la relation de dispersion. Le second écueil est la stabilité. De nombreux raffinements spatio-temporels reposant sur le schéma de Yee ont été proposés ([16], [40], [50] par exemple). Toutes ces méthodes utilisent des interpolations plus ou moins sophistiquées et se révèlent instables sur des calculs en temps long. Plus récemment, une nouvelle méthode [32] a été proposée en dimension trois d'espace garantissant un raccord stable entre les grilles, basée sur la conservation d'une énergie électromagnétique discrète. Cette méthode nécessite la construction et la résolution d'un système linéaire à l'interface des grilles. Les auteurs précisent de plus que si on souhaite utiliser des taux de raffinements supérieurs à deux, on doit avoir recours à des raffinements successifs de rapport deux. En effet, si le taux de raffinement est supérieur à deux, des modes parasites se propagent. Ces modes parasites ne sont évanescents que lorsqu'on baisse le pas de temps  $\Delta t$ . Le schéma devient alors trop dispersif. Notons que cette approche s'adapte à d'autres équations de propagation [3].

Dans le cas d'objets métalliques, on peut aussi remédier à ce défaut de discrétisation en "marche d'escalier" par la méthode des domaines fictifs [22]. Cette méthode nécessite l'introduction d'un maillage surfacique de l'objet sur lequel on calcule des courants traités comme sources par le schéma Différences Finis. L'avantage de cette méthode par

rapport aux méthodes Eléments Finis ou Volumes Finis est avant tout pratique. Il est en effet beaucoup plus facile de construire un maillage surfacique qu'un maillage volumique tétraédrique. De plus, le coût est moindre car on a pas à stocker la structure de données d'un maillage tétraédrique tri-dimensionnel. Toutefois, la taille du maillage volumique étant contrainte par celle du maillage surfacique, les problèmes à traiter restent de grande taille.

### 1.4.2 Eléments Finis

La méthode Eléments Finis en domaine temporel repose sur une formulation variationnelle des équations de Maxwell. Les Eléments Finis nodaux classiques ne peuvent être utilisés pour les équations de Maxwell. En effet, ils ne respectent pas les conditions d'interface et les relations de divergence. Des Eléments Finis mixtes ont alors été introduits [44], [47]. La continuité de la composante normale du champ magnétique et celle de la composante tangentielle du champ électrique sont alors assurées. Cette approche permet de bien prendre en compte les milieux hétérogènes et les géométries par des maillages non-structurés.

Le schéma numérique n'est pas explicite en temps : une matrice creuse réelle, symétrique, définie positive est à inverser à chaque itération temporelle. Bien que ne présentant pas de difficulté, cette inversion entraîne des temps de calculs importants. Des techniques de condensation de masse permettent avec des approximations numériques de diagonaliser la matrice à inverser. Malheureusement, ces techniques sont difficiles à mettre en œuvre pour les éléments finis utilisés pour l'électromagnétisme [27], [43], [47]. Des travaux sont en cours sur ce sujet pour le cas de maillages hexaédriques [20]. Un autre inconvénient est la difficulté de disposer de conditions absorbantes efficaces.

L'analyse théorique de l'erreur de dispersion ne peut se faire que sur des maillages structurés [45], [46]. Comme le schéma Différences Finies de Yee, cette méthode est dispersive dès lors que le pas de temps est petit devant le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité. Ainsi, on constate numériquement que si le maillage n'est pas structuré, une certaine régularité est requise pour que les solutions ne soient pas trop dispersées. Les problèmes à traiter peuvent alors être à nouveau de très grande taille.

Une solution pour réduire le coût et disposer de parois absorbantes performantes est l'hybridation avec la FDTD. A notre connaissance, les techniques d'hybridation sont à ce jour instables [33], [42].

### 1.4.3 Volumes Finis

Le système de Maxwell peut s'écrire sous une forme conservative. Il est donc naturel d'adapter à la résolution des équations de Maxwell des schémas conservatifs ayant déjà prouvé leur efficacité (en mécanique des fluides par exemple). Il s'agit de plus d'un système hyperbolique. On peut utiliser cette propriété pour construire des schémas Volumes Finis décentrés ([17], [58] par exemple). Associés à une discrétisation temporelle de type Runge-Kutta, ces schémas sont très précis. Ils ne sont toutefois pas satisfaisants car ils sont diffusifs. Ainsi, si on simule l'évolution d'un mode propre dans une cavité métallique avec de tels schémas, la solution obtenue après un long temps de calcul est d'énergie nulle alors

que l'énergie de la solution exacte est conservée au cours du temps. Signalons que des travaux ont été menés pour minimiser l'erreur de diffusion [11]. Signalons également des travaux récents [8] qui proposent de prendre en compte la formule de Kirchoff dans le calcul des flux.

Un schéma Volumes Finis Centrés (VFC) conservant un équivalent discret de l'énergie électromagnétique a été récemment proposé [54]. Il repose sur un calcul de flux centrés et une discrétisation temporelle de type saute-mouton. Tout comme le schéma de Yee, il est d'ordre 2 en temps et en espace sur une grille régulière orthogonale. Il permet aussi de traiter des maillages tétraédriques de manière totalement explicite. L'atout majeur de ce schéma est de conserver une énergie discrète sur tout maillage (même non-conforme). Il s'agit donc d'un très bon candidat pour le raffinement de maillage car la stabilité est assurée. On détaillera dans la section 1.6 ce schéma. On illustrera alors les difficultés (dispersion, réflexions parasites) que l'on rencontre lorsqu'on souhaite raffiner localement le maillage. Les schémas que l'on étudiera dans ce document se ramènent dans leur expression la plus simple au schéma VFC ( $\beta = 0$  pour le  $\beta$ -schéma et approximation constante par élément pour la méthode Galerkin Discontinu).

## 1.5 Motivations pour les maillages orthogonaux

La génération de maillages volumiques de qualité est une difficulté réelle en électromagnétisme [33]. Les structures à étudier sont en effet très complexes (antennes hélicoïdales, fentes et fils minces, ...). On ne s'intéressera dans ce document qu'aux maillages orthogonaux. D'une part, ces maillages sont plus faciles à construire que des maillages tétraédriques ou hexaédriques quelconques. D'autre part, ils sont moins coûteux car ils ne nécessitent pas de stocker une structure de données. Enfin, le raffinement de maillage autorise finalement une discrétisation précise des géométries. On distingue deux types de raffinements : conforme et non-conforme. Les maillages non-conformes sont bien sûr les plus intéressants car ils permettent de réduire de manière spectaculaire la taille des problèmes. On rappelle qu'un maillage est dit conforme si l'intersection de deux éléments du maillage (ici des hexaèdres orthogonaux pour le cas 3D) est réduite soit à l'ensemble vide, soit à un point, soit à une arête. On montre sur la figure 1.1 un exemple de raffinement conforme et un exemple de raffinement non-conforme dans le cas 2D. La figure 1.2 présente elle un exemple de raffinement non-conforme dans le cas 3D. Dans toute la suite du document, on désignera par raffinement 1 :  $n$ , tout maillage où le rapport entre l'arête la plus grande et l'arête la plus petite est  $n$ . La figure 1.2 représente donc un exemple de raffinement 1:2 et la figure 1.1 un exemple de raffinement 1:4.

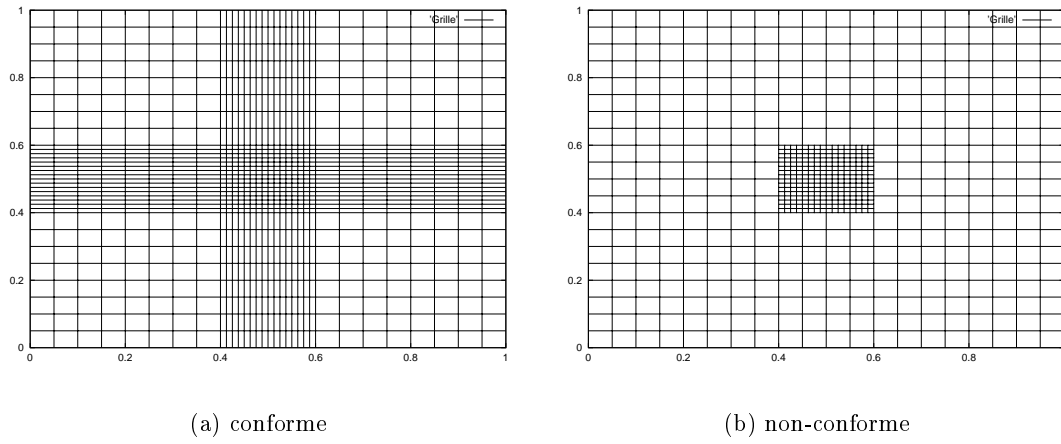


FIG. 1.1 – Exemple de raffinement 1:4 - Cas 2D

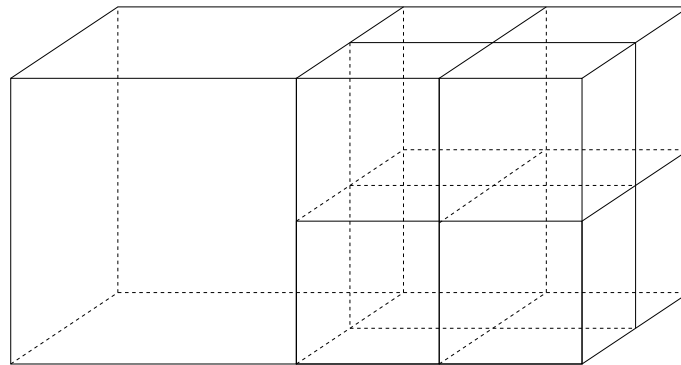


FIG. 1.2 – Raffinement 1:2 non-conforme - Cas 3D

## 1.6 Le schéma Volumes Finis Centrés (VFC)

On présente ici brièvement le schéma VFC [54]. On en rappelle les principales propriétés. La plus remarquable est la conservation d'une énergie discrète sur tout maillage. Ce schéma permet donc de traiter de manière stable des maillages raffinés. Nous allons toutefois montrer que des phénomènes de réflexion et de dispersion rendent la méthode inutilisable dans ce contexte.

### 1.6.1 Présentation du schéma

Soit le système de Maxwell en variables  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{H}), \\ \mu(x) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot}(\mathbf{E}). \end{cases} \quad (1.24)$$

On intègre le système sur chaque élément noté  $V$  du maillage

$$\begin{cases} \int_V \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \int_V \text{rot}(\mathbf{H}), \\ \int_V \mu(x) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \int_V \text{rot}(\mathbf{E}). \end{cases} \quad (1.25)$$

En supposant que  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et les champs sont constants sur chaque cellule  $V$  et en utilisant une formule de Green pour les termes de droite des équations, on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{V} \sum_{V' \text{ voisin de } V} \int_{\partial V \cap \partial V'} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\partial V \cap \partial V'}, \\ \mu(x) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{V} \sum_{V' \text{ voisin de } V} \int_{\partial V \cap \partial V'} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\partial V \cap \partial V'}, \end{cases} \quad (1.26)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $V$ .

Il reste à évaluer les flux aux interfaces des cellules. Ces intégrales sont calculées de manière centrée

$$\mathbf{H}_{\partial V \cap \partial V'} = \frac{\mathbf{H}_V + \mathbf{H}_{V'}}{2}. \quad (1.27)$$

Le schéma semi-discret peut s'écrire sous la forme (en omettant l'indice  $V$ )

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Psi_1(\mathbf{H}), \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\Psi_2(\mathbf{E}), \end{cases} \quad (1.28)$$

où  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  représentent la somme des flux numériques de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  respectivement. Il s'agit d'un schéma conservatif dont les flux sont consistants.

Le schéma temporel utilisé est le schéma saute-mouton d'ordre 2. Le schéma s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{E}^n + \Delta t \Psi_1(\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})/\varepsilon, \\ \mathbf{H}^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \Psi_2(\mathbf{E}^{n+1})/\mu. \end{cases} \quad (1.29)$$

## 1.6.2 Propriétés

### Stabilité dans le cas structuré

Soit un maillage composé de parallélépipèdes identiques où le domaine de calcul est infini. Alors la stabilité du schéma est assurée pour un matériau homogène par la condition de CFL suivante

$$C\Delta t \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right)} \leq 2. \quad (1.30)$$

Cette condition est 2 fois moins contraignante que la condition (1.21) de stabilité du schéma de Yee.

### Ordre du schéma

Par la méthode des équations équivalentes [61], on montre que le schéma est d'ordre deux en espace et en temps sur toute grille structurée uniforme.

### Stabilité du schéma dans le cas non-structuré

On montre dans [49] que le schéma est stable en norme  $L^2$  sur tout maillage en polyèdres si pour toutes cellules adjacentes  $V$  et  $V'$  le pas de temps  $\Delta t$  vérifie

$$\Delta t^2 < 16 \frac{VV'}{PP'} \min(\varepsilon\mu', \varepsilon'\mu), \quad (1.31)$$

où  $V$  est le volume de la cellule  $V$  et  $P$  l'aire de sa frontière. Cette propriété reste vraie même lorsque le maillage est non-conforme.

### Dispersion numérique

Pour toute onde harmonique de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = {}^t(k_x, k_y, k_z)$ , la relation de dispersion discrète vérifiée par le schéma VFC est donnée par

$$\omega^2 = C^2|\mathbf{k}|^2 + \frac{C^2|\mathbf{k}|^4}{12} \left( C^2\Delta t^2 - 4 \frac{k_x^4\Delta x^2 + k_y^4\Delta y^2 + k_z^4\Delta z^2}{|\mathbf{k}|^4} \right) + O(\Delta^4). \quad (1.32)$$

L'erreur de dispersion est donc du même ordre que celle du schéma de Yee. Toutefois, pour avoir un terme d'ordre 2 identique à celui de Yee, le maillage utilisé pour le schéma VFC doit être 2 fois plus fin. Tout comme les méthodes différences finies et éléments finis, le terme d'ordre 2 de la relation de dispersion discrète est élevé dès que le pas de temps  $\Delta t$  est petit devant le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité.

## 1.6.3 Raffinement de maillage

### 1.6.3.1 Réflexions parasites

On propose une étude dans le cas 1D du comportement du schéma VFC sur une grille raffinée. Nous allons montrer que le schéma VFC est d'ordre 1 sur une telle grille et qu'il



existe une pondération du calcul des flux permettant de rendre le schéma d'ordre 2. On cherche donc à résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases} \quad (1.33)$$

On considère dans un premier temps une grille uniforme (pas d'espace fixe  $\Delta x$ ). Sur une telle grille, le schéma VFC discrétisant (1.33) s'écrit

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (v_{j+1}^{n+1/2} - v_{j-1}^{n+1/2}), \\ v_j^{n+3/2} = v_j^{n+1/2} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}), \end{cases} \quad (1.34)$$

où  $n$  désigne l'indice temporel et  $j$  l'indice spatial. Cherchons des solutions de (1.34) sous la forme

$$\begin{cases} u_j^n = U e^{i(\omega n \Delta t - k j \Delta x)}, \\ v_j^{n+1/2} = V e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - k j \Delta x)}, \end{cases} \quad (1.35)$$

où la fréquence  $\omega$  est fixée.  $U$  et  $V$  sont alors solutions de

$$\begin{pmatrix} \frac{2i \sin(\omega \Delta t / 2)}{\Delta t} & \frac{-ic \sin(k \Delta x)}{\Delta x} \\ \frac{-ic \sin(k \Delta x)}{\Delta x} & \frac{2i \sin(\omega \Delta t / 2)}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 0. \quad (1.36)$$

$U$  et  $V$  sont solutions si et seulement si le déterminant de la matrice est nul soit

$$\frac{2\Delta x}{c\Delta t} |\sin(\omega \Delta t / 2)| = |\sin(k \Delta x)|. \quad (1.37)$$

On choisit le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité (soit  $c\Delta t / \Delta x = 2$ ). L'égalité (1.37) est vérifiée si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\omega \Delta t}{2} &= k \Delta x \\ \text{ou bien} & \\ &= -k \Delta x \\ \text{ou bien} & \\ &= k \Delta x + \pi \\ \text{ou bien} & \\ &= \pi - k \Delta x. \end{aligned}$$

De plus, le système (1.36) permet de lier les amplitudes  $U$  et  $V$  par

$$\frac{U}{V} = \frac{2\Delta x \sin(\omega\Delta t/2)}{c\Delta t \sin(k\Delta x)}. \quad (1.38)$$

On a donc finalement quatre types d'onde solutions de (1.34) données par

$$\begin{cases} u_j^n = U e^{i(\omega n \Delta t - k j \Delta x)}, \\ v_j^{n+1/2} = V e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - k j \Delta x)}, \\ U = V, \end{cases} \begin{cases} u_j^n = U e^{i(\omega n \Delta t + k j \Delta x)}, \\ v_j^{n+1/2} = V e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t + k j \Delta x)}, \\ U = -V, \end{cases} \begin{cases} u_j^n = (-1)^j U e^{i(\omega n \Delta t - k j \Delta x)}, \\ v_j^{n+1/2} = (-1)^j V e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - k j \Delta x)}, \\ U = -V, \end{cases} \begin{cases} u_j^n = (-1)^j U e^{i(\omega n \Delta t + k j \Delta x)}, \\ v_j^{n+1/2} = (-1)^j V e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t + k j \Delta x)}, \\ U = V. \end{cases} \quad (1.39)$$

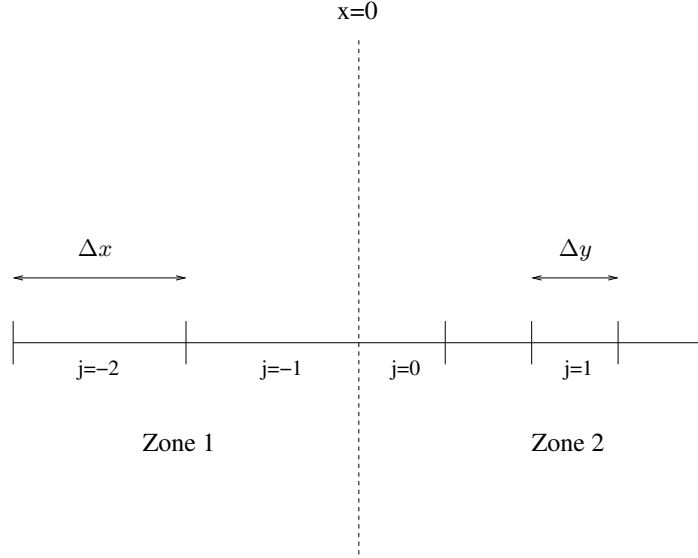


FIG. 1.3 – *Etude des réflexions*

Travaillons à présent sur un maillage constitué de deux zones régulières (figure 1.3). La zone 1 a un pas d'espace  $\Delta x$  et la zone 2 un pas d'espace  $\Delta y$ . On a deux nombres d'onde distincts sur chacune des grilles

$$k^- = \frac{\omega}{c^-} \quad (x < 0) \quad \text{et} \quad k^+ = \frac{\omega}{c^+} \quad (x > 0). \quad (1.40)$$

La relation (1.37) permet d'écrire

$$\frac{\sin(k^+ \Delta y)}{\Delta y} = \frac{\sin(k^- \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\implies k^+ = k^- + O(\Delta^2).$$

On cherche une solution du schéma VFC s'écrivant comme une superposition de solutions données dans (1.39). On choisit une onde incidente d'amplitude 1 à support dans la zone 1. Dans la zone 1, l'interface du raffinement de maillage génère une onde réfléchie (amplitude  $R$ ) et une onde réfléchie parasite (amplitude  $P$ ) alors que dans la grille fine se propagent une onde transmise (amplitude  $T$ ) et une onde transmise parasite (amplitude  $Q$ ). On cherche finalement une solution s'écrivant comme la superposition de cinq ondes données dans le tableau 1.1.

On s'intéresse à la solution suivante du schéma

$$j < 0, \begin{cases} u_{j+1/2}^n = e^{i\omega n \Delta t} \left( e^{-ik^- j \Delta x} + (R + (-1)^j P) e^{ik^- j \Delta x} \right), \\ v_{j+1/2}^{n+1/2} = e^{i\omega n \Delta t} \left( e^{-ik^- j \Delta x} - (R - (-1)^j P) e^{ik^- j \Delta x} \right), \end{cases} \quad (1.41)$$

Support	Type d'onde	Dépendance spatiale	Amplitude	Propagation
Zone 1	Onde incidente	$-k^- \Delta x$	$U=V=1$	$\longrightarrow$
	Onde réfléchie	$k^- \Delta x$	$U=R, V=-R$	$\longleftarrow$
	Onde réfléchie parasite	$\pi + k^- \Delta x$	$U=V=P$	$\longleftrightarrow$
Zone 2	Onde transmise	$-k^+ \Delta y$	$U=V=T$	$\longrightarrow$
	Onde transmise parasite	$\pi - k^+ \Delta y$	$U=Q, V=-Q$	$\longleftarrow$

TAB. 1.1 – Types d'ondes se propageant

$$j \geq 0, \begin{cases} u_{j+1/2}^n = e^{i\omega n \Delta t} \left( T e^{-ik^+ j \Delta y} + (-1)^j Q e^{-ik^+ j \Delta y} \right), \\ v_{j+1/2}^{n+1/2} = e^{i\omega n \Delta t} \left( T e^{-ik^+ j \Delta y} - (-1)^j Q e^{-ik^+ j \Delta y} \right). \end{cases} \quad (1.42)$$

On s'intéresse aux deux cellules appartenant à l'interface. La mise à jour des inconnues nécessite l'évaluation de  $u$  et  $v$  en  $x = 0$ . Comme on l'a vu, cette évaluation est calculée de manière centrée

$$u_{x=0}^n = \frac{u_{-1/2}^n + u_{1/2}^n}{2} \quad \text{et} \quad v_{x=0}^{n+1/2} = \frac{v_{-1/2}^{n+1/2} + v_{1/2}^{n+1/2}}{2}.$$

On propose d'introduire une pondération dépendant d'un paramètre  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ ) dans le calcul de ce flux

$$u_{x=0}^n = \alpha u_{-1/2}^n + (1 - \alpha) u_{1/2}^n \quad \text{et} \quad v_{x=0}^{n+1/2} = \alpha v_{-1/2}^{n+1/2} + (1 - \alpha) v_{1/2}^{n+1/2}. \quad (1.43)$$

Pour les cellules  $j = -1$  et  $j = 0$ , le schéma s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta t} (u_{-1/2}^{n+1} - u_{-1/2}^n) + \alpha v_{-1/2}^{n+1/2} + (1 - \alpha) v_{1/2}^{n+1/2} - (v_{-1/2}^{n+1/2} + v_{-3/2}^{n+1/2})/2 = 0, \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} (v_{-1/2}^{n+3/2} - v_{-1/2}^{n+1/2}) + \alpha u_{-1/2}^{n+1} + (1 - \alpha) u_{1/2}^{n+1} - (u_{-1/2}^{n+1} + u_{-3/2}^{n+1})/2 = 0, \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} (u_{1/2}^{n+1} - u_{1/2}^n) - \alpha v_{-1/2}^{n+1/2} - (1 - \alpha) v_{1/2}^{n+1/2} + (v_{1/2}^{n+1/2} + v_{3/2}^{n+1/2})/2 = 0, \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} (v_{1/2}^{n+3/2} - v_{1/2}^{n+1/2}) - \alpha u_{-1/2}^{n+1} - (1 - \alpha) u_{1/2}^{n+1} + (u_{1/2}^{n+1} + u_{3/2}^{n+1})/2 = 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

En injectant les solutions (1.41) et (1.42) dans les équations (1.44), on obtient

$$\begin{cases} \frac{2i\Delta x \sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t} U_{-1/2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) V_{-1/2} + (1 - \alpha) V_{1/2} - \frac{1}{2} V_{-3/2} = 0, \\ \frac{2i\Delta x \sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t} V_{-1/2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) U_{-1/2} + (1 - \alpha) U_{1/2} - \frac{1}{2} U_{-3/2} = 0, \\ \frac{2i\Delta y \sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t} U_{1/2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) V_{1/2} - \alpha V_{-1/2} + \frac{1}{2} V_{3/2} = 0, \\ \frac{2i\Delta y \sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t} V_{1/2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) U_{1/2} - \alpha U_{-1/2} + \frac{1}{2} U_{3/2} = 0, \end{cases} \quad (1.45)$$

où

$$\begin{cases} U_{-3/2} = e^{-ik^-3\Delta x/2} + e^{ik^-3\Delta x/2}(R + iP), & V_{-3/2} = e^{-ik^-3\Delta x/2} + e^{ik^-3\Delta x/2}(-R + iP), \\ U_{-1/2} = e^{-ik^- \Delta x/2} + e^{ik^-3\Delta x/2}(R + iP), & V_{-1/2} = e^{-ik^- \Delta x/2} + e^{ik^-3\Delta x/2}(-R + iP), \\ U_{1/2} = e^{-ik^+\Delta y/2}(T - iQ), & V_{1/2} = e^{-ik^+\Delta y/2}(T + iQ), \\ U_{3/2} = e^{-ik^+\Delta y/2}(T + iQ), & V_{3/2} = e^{-ik^+\Delta y/2}(T - iQ). \end{cases}$$

On effectue ensuite des développements limités sur le système (1.45) et on détermine par identification les développements limités des coefficients  $R$ ,  $P$ ,  $T$  et  $Q$ . A l'ordre 1, on obtient (en confondant  $R$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $Q$  avec leurs termes d'ordre 0)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \alpha - 1/2 & 0 & 1 - \alpha \\ \alpha - 1/2 & 1/2 & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 1/2 & \alpha - 1/2 \\ -\alpha & 0 & \alpha - 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + R + iP \\ 1 - R + iP \\ T - iQ \\ T + iQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

La matrice du système (1.46) est inversible pour tout  $\alpha$  non nul. La résolution du système donne pour tout  $\alpha$ ,  $T = 1$ ,  $P = 0$ ,  $Q = 0$  et  $R = 0$ . On vient de montrer que  $\forall \alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} T &= 1 + O(\Delta), \\ P &= O(\Delta), \\ Q &= O(\Delta), \\ R &= O(\Delta). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Le schéma est donc au moins d'ordre 1 à l'interface et ce quelle que soit la valeur du paramètre de pondération.

On cherche maintenant à déterminer la valeur du terme d'ordre 1 des quantités  $R$ ,  $P$ ,  $T$  et  $Q$ . On note ces termes d'ordre 1  $R^*$ ,  $P^*$ ,  $T^*$  et  $Q^*$ . Un développement limité à l'ordre

2 sur le système (1.45) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \Delta x/2 & (\alpha - 1/2)\Delta x & 0 & (1 - \alpha)\Delta y \\ (\alpha - 1/2)\Delta x & \Delta x/2 & (1 - \alpha)\Delta y & 0 \\ 0 & -\alpha\Delta x & \Delta y/2 & (\alpha - 1/2)\Delta x \\ -\alpha\Delta x & 0 & (\alpha - 1/2)\Delta y & \Delta y/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ik^- \Delta x/2(1 + R^* + iP^*) \\ -ik^- \Delta x/2(1 - R^* + iP^*) \\ T^* - iQ^* \\ T^* + iQ^* \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -ik^+ \Delta y/2 \\ -ik^+ \Delta y/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Si  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq 1$ , le système (1.48) admet une unique solution donnée par

$$\begin{pmatrix} -ik^- \Delta x/2(1 + R^* + iP^*) \\ -ik^- \Delta x/2(1 - R^* + iP^*) \\ T^* - iQ^* \\ T^* + iQ^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-ik^+ \Delta y(1 - \alpha)}{2\Delta x\alpha} \\ \frac{-ik^+ \Delta y(1 - \alpha)}{2\Delta x\alpha} \\ -ik^+/2 \\ -ik^+/2 \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

Le schéma est d'ordre 2 à l'interface si et seulement si  $R^* = P^* = Q^* = 0$  et  $T^* = -ik^+ \Delta y/2$ . Or nous avons vu que  $k^+ = k^- + O(\Delta^2)$ . On vérifie alors que le schéma est d'ordre 2 si et seulement si

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x + \Delta y}. \tag{1.50}$$

On appelle le schéma résultant, schéma VFC avec flux pondérés. Les flux à l'interface sont calculés comme suit

$$u_{x=0}^n = \frac{\Delta y}{\Delta x + \Delta y} u_{-1/2}^n + \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta y} u_{1/2}^n \quad \text{et} \quad v_{x=0}^{n+1/2} = \frac{\Delta y}{\Delta x + \Delta y} v_{-1/2}^{n+1/2} + \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta y} v_{1/2}^{n+1/2}. \tag{1.51}$$

On remarque que si le maillage est uniforme ( $\Delta x = \Delta y$ ),  $\alpha$  vaut 1/2. On retrouve le fait que le schéma VFC est d'ordre deux sur une grille uniforme.

On illustre notre propos avec la simulation représentée sur la figure 1.4. Il s'agit de la propagation d'un pulse 1D avec un maillage constitué de deux grilles de pas d'espace différent. Un pulse est initialisé dans la zone 1 et on stoppe la simulation dès lors que le support du pulse est dans la zone 2. On voit clairement que la solution du schéma VFC (figure 1.4-(a)) présente de fortes réflexions. Comme prévu, la solution VFC flux pondérés (figure 1.4-(b)) est elle de bien meilleure qualité.

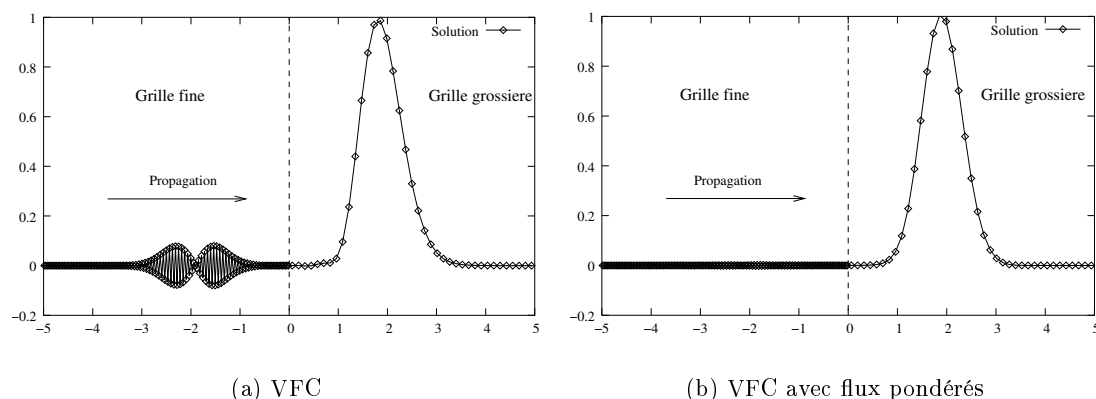


FIG. 1.4 – Propagation d'un pulse 1D sur une grille raffinée : solution en espace

L'extension tridimensionnelle de la formule (1.51) est une formule de pondération par les volumes. L'approximation (1.27) devient

$$\mathbf{H}_{\partial V \cap \partial V'} = \frac{V'}{V + V'} \mathbf{H}_V + \frac{V}{V + V'} \mathbf{H}_{V'}. \quad (1.52)$$

Mis à part le cas mono-dimensionnel, on ne sait pas démontrer la stabilité d'un tel schéma sur une grille qui n'est pas uniforme. Ce schéma se révèle d'ailleurs instable sur un maillage non-conforme. Finalement, la pondération (1.52) n'est pas une solution pour traiter des maillages localement raffinés.

### 1.6.3.2 Dispersion

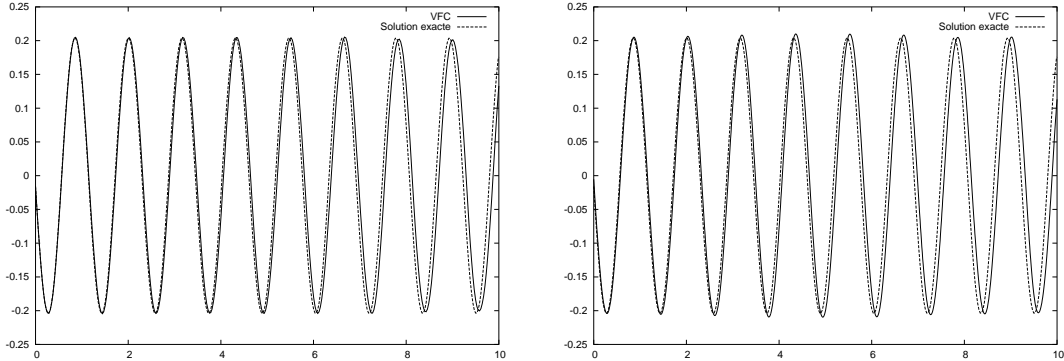
On a vu que le schéma VFC est dispersif dès que le pas de temps  $\Delta t$  est petit devant le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité. Cette configuration est celle que l'on rencontre lorsqu'on souhaite raffiner le maillage : le pas de temps est fixé par la condition de stabilité imposée par la grille. Par conséquent, ce même pas de temps est trop petit dans la grille grossière.

Pour mettre en évidence ce défaut, on simule l'évolution du mode propre (1,1,1). L'intérêt de cas test stationnaire est que l'énergie de la solution exacte est conservée. On peut donc réaliser des simulations en temps long et mesurer le degré de dispersion d'un schéma. La solution exacte du mode propre (1,1,1) de fréquence  $\omega$  dans une cavité métallique cubique

de taille  $1m$  est donnée par [36]

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = -\frac{C_0}{2\omega} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z) \sin(\omega t), \\ H_y = \frac{C_0}{\omega} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z) \sin(\omega t), \\ H_z = -\frac{C_0}{2\omega} \cos(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z) \sin(\omega t), \\ E_x = -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \cos(\omega t), \\ E_y = 0, \\ E_z = -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \cos(\omega t). \end{array} \right. \quad (1.53)$$

On simule donc l'évolution du mode propre (1,1,1) ( $\omega = 300$  MHz). On considère un maillage cubique de la cavité correspondant à 15 points par longueur d'onde. On raffine localement le centre de la cavité d'une manière conforme puis d'une manière non-conforme. Le taux de raffinement est 4. La simulation est stoppée au bout de 10 périodes. Il s'agit donc d'une simulation courte. On montre sur la figure 1.5 l'évolution en temps de la composante  $H_x$  en un point de la grille fine pour les deux types de raffinement considérés. On constate dans les deux cas que la solution est très rapidement dispersée.



(a) Raffinement conforme

(b) Raffinement non-conforme

FIG. 1.5 – Schéma VFC : mode propre 3D sur une grille localement raffinée 1:4 / Evolution temporelle en un point de la grille grossière de la composante  $H_x$

#### 1.6.4 Conclusion

Malgré la propriété de stabilité, le schéma VFC est inutilisable sur des grilles raffinées. Afin de contrôler ces phénomènes de dispersion, on propose dans le chapitre suivant de calculer les flux par une interpolation dépendant d'une combinaison convexe d'un gradient



centré et d'une pente. On ajustera ensuite le paramètre de la combinaison pour minimiser l'erreur de dispersion.

# $\beta$ -schéma

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Famille des <math>\beta</math>-schémas</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>Cas mono-dimensionnel</b> . . . . .	<b>27</b>
2.2.1	Ecriture du schéma . . . . .	27
2.2.2	Propriétés . . . . .	29
2.2.3	Applications aux grilles raffinées . . . . .	33
2.2.4	Résultats numériques . . . . .	33
<b>2.3</b>	<b>Cas bi-dimensionnel</b> . . . . .	<b>35</b>
2.3.1	Présentation du schéma . . . . .	35
2.3.2	Minimisation de l'erreur de dispersion . . . . .	39
2.3.3	Application aux grilles raffinées conformes . . . . .	43
2.3.4	Application aux grilles raffinées non-conformes . . . . .	44
<b>2.4</b>	<b>Cas tri-dimensionnel</b> . . . . .	<b>49</b>
2.4.1	Cas conforme . . . . .	49
2.4.2	Instabilités dans le cas non-conforme . . . . .	52
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>52</b>

---

Dans la perspective de maîtriser les phénomènes de dispersion sur des grilles raffinées, on étudie ici la classe des  $\beta - \gamma$  schémas. Ces schémas ont déjà été utilisés pour la résolution de systèmes hyperboliques linéaires ou non-linéaires [11], [25]. Afin d'obtenir un schéma non diffusif,  $\gamma$  est choisi nul. Associé à une discrétisation temporelle de type saute-mouton, nous montrerons qu'un choix judicieux de  $\beta$  permet de réduire considérablement les effets dispersifs dans les milieux homogènes. Bien qu'un équivalent discret de l'énergie électromagnétique soit conservé sur tout maillage uniforme, nous ne sommes pas en mesure d'assurer la stabilité du schéma sur un maillage orthogonal quelconque. Des instabilités numériques sont d'ailleurs observées dans le cas d'un maillage tri-dimensionnel raffiné de manière non-conforme. L'approche exposée dans ce chapitre permet cependant de traiter en 3D des grilles fortement raffinées de manière conforme sans que les solutions soient dégradées par des phénomènes de dispersion. Aucune instabilité n'a alors été observée dans ce cas.

## 2.1 Famille des $\beta$ -schémas

On présente ici dans le cas tri-dimensionnel la famille de schémas à laquelle on s'intéresse. Considérons donc le système de Maxwell en variables  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{H}), \\ \mu(x) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot}(\mathbf{E}). \end{cases} \quad (2.1)$$

On intègre le système sur chaque élément noté  $V$  du maillage

$$\begin{cases} \int_V \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \int_V \text{rot}(\mathbf{H}), \\ \int_V \mu(x) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \int_V \text{rot}(\mathbf{E}). \end{cases} \quad (2.2)$$

En supposant que  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et les champs sont constants sur chaque cellule  $V$  et en utilisant une formule de Green pour les termes de droite des équations, on obtient le système

$$\begin{cases} V\varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \sum_{v' \text{ voisin de } V} \int_{\partial V \cap \partial v'} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\partial V \cap \partial v'}, \\ V\mu(x) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \sum_{v' \text{ voisin de } V} \int_{\partial V \cap \partial v'} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\partial V \cap \partial v'}, \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $V$ .

Il reste à évaluer les intégrales aux interfaces des cellules. Ces intégrales s'interprètent physiquement comme les courants électriques et magnétiques aux interfaces et sont calculés de manière centrée

$$\mathbf{H}_{\partial V \cap \partial v'} = \frac{\mathbf{H}_{VV'} + \mathbf{H}_{V'V}}{2}, \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{H}_{VV'}$  et  $\mathbf{H}_{V'V}$  sont calculés en fonction d'un paramètre  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 1/2$ )

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{VV'} = \mathbf{H}_V + (1 - 2\beta) \frac{\mathbf{H}_{V'} - \mathbf{H}_V}{\|G_V G_{V'}\|^2} (\overrightarrow{G_V G_{V'}} \cdot \overrightarrow{G_V G_{V'}}) + 2\beta \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{H}_V \cdot \overrightarrow{G_V G_{V'}}, \\ \mathbf{H}_{V'V} = \mathbf{H}_{V'} + (1 - 2\beta) \frac{\mathbf{H}_{V'} - \mathbf{H}_V}{\|G_V G_{V'}\|^2} (\overrightarrow{G_V G_{V'}} \cdot \overrightarrow{G_{V'} G_{VV'}}) + 2\beta \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{H}_{V'} \cdot \overrightarrow{G_{V'} G_{VV'}}, \end{cases}$$

où  $G_V$  désigne le centre de gravité du volume  $V$ ,  $G_{VV'}$  le centre de gravité de  $\partial V \cap \partial V'$  et  $\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{H}_V$  est un gradient approché de  $\mathbf{H}$  sur  $V$ . Il y a plusieurs façons de définir ce gradient en particulier pour des maillages non structurés (voir [30] par exemple). On détaillera dans les sections suivantes notre choix. On peut remarquer que si le maillage est uniforme ( $\implies \overrightarrow{G_V G_{VV'}} = -\overrightarrow{G_{V'} G_{VV'}}$ ), les pentes  $(\mathbf{H}_{V'} - \mathbf{H}_V)$  n'interviennent pas dans le calcul de

(2.4).

Nous choisissons de discrétiser les dérivées temporelles par un schéma d'ordre 2 de type saute-mouton. Après discrétisation spatiale, le système approché peut s'écrire sur chaque cellule comme suit (en omettant l'indice  $V$ )

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Psi_1(\mathbf{H}), \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\Psi_2(\mathbf{E}), \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  représentent la somme des flux numériques de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  respectivement. Le schéma s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \Psi_1(\mathbf{H}^n) / \varepsilon, \\ \mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{H}^n - \Delta t \Psi_2(\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}}) / \mu. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Remarque 2.1.1** Une analyse menée dans le cas mono-dimensionnel au chapitre précédent a permis d'augmenter l'ordre du schéma Volumes Finis Centrés (VFC) en pondérant le calcul des flux. Cette pondération s'étend au cas tri-dimensionnel (formule (1.52)). Lorsque le maillage est conforme, on retrouve ici exactement cette formule (1.52) avec  $\beta=0$ .

## 2.2 Cas mono-dimensionnel

### 2.2.1 Ecriture du schéma

On étudie le schéma dans le cas du système de Maxwell à une dimension d'espace pour une grille uniforme (les cellules sont donc des segments de taille identique). On considère le cas transverse magnétique et on désigne par  $H$  la composante en  $y$  du champ magnétique et par  $E$  la composante en  $z$  du champ électrique

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

On définit le gradient du champ sur chaque cellule d'indice  $i$  par :

$$\nabla H_i = \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta x}.$$

Il s'agit d'un gradient centré.

Toutes les expressions données ci-dessous ne sont valables que sur un maillage uniforme ( $\Delta x$  constant). La fonction de flux numérique entre la cellule  $i$  et  $i+1$  est

$$\text{flux}_Q(i, i+1) = \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2} - \beta \frac{Q_{i+2} - Q_i}{2} + \beta \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2}.$$

On aboutit dans le cas du vide au schéma ( $\nu = \Delta t / \Delta x$ )

$$\begin{cases} H_i^{n+\frac{1}{2}} = H_i^{n-\frac{1}{2}} + \nu / \mu_i \left( \text{flux}_E(i, i+1) - \text{flux}_E(i-1, i) \right) \\ E_i^{n+1} = E_i^n + \nu / \varepsilon_i \left( \text{flux}_H(i, i+1) - \text{flux}_H(i-1, i) \right). \end{cases} \quad (2.8)$$

c'est à dire

$$\begin{cases} H_i^{n+\frac{1}{2}} = H_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\nu}{2\mu_i} \left( -\frac{\beta}{2} E_{i+2}^n + \beta' E_{i+1}^n - \beta' E_{i-1}^n + \frac{\beta}{2} E_{i-2}^n \right) \\ E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{\nu}{2\varepsilon_i} \left( -\frac{\beta}{2} H_{i+2}^{n+\frac{1}{2}} + \beta' H_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \beta' H_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} H_{i-2}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et  $\beta' = \beta + 1$ .

### Conditions aux limites pour une frontière métallique

Les simulations numériques présentées dans cette étude font intervenir des conditions aux limites de type métallique. On note en dimension trois  $\mathbf{E}_s$  et  $\mathbf{H}_s$  les champs électrique et magnétique sur la surface extérieure du métal. Ces champs vérifient alors

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = 0 \text{ et } \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s = 0.$$

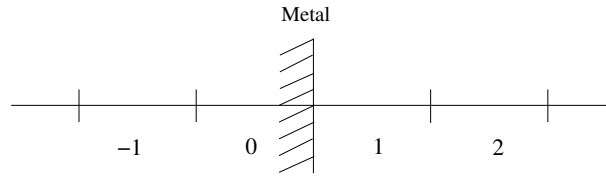


FIG. 2.1 – Condition métallique : méthode des images

On modélise en 1D ces relations par la méthode des images. Avec les notations de la figure 2.1, on pose

$$\begin{cases} H_0^{n+\frac{1}{2}} = H_1^{n+\frac{1}{2}} \\ H_{-1}^{n+\frac{1}{2}} = H_2^{n+\frac{1}{2}} \\ E_0^n = -E_1^n \\ E_{-1}^n = -E_2^n. \end{cases}$$

Les fonctions de flux numériques sont alors données par

$$\begin{cases} \text{flux}_H(0,1) = H_1 + \beta \frac{H_1 - H_2}{2} \\ \text{flux}_H(1,2) = \frac{H_1 + H_2}{2} + \beta \frac{-H_3 + H_2}{4} \\ \text{flux}_E(0,1) = 0 \\ \text{flux}_E(1,2) = \frac{E_1 + E_2}{2} + \beta \frac{-E_3 + E_2 + 2E_1}{4}. \end{cases}$$

### 2.2.2 Propriétés

**Proposition 2.2.1** *Le schéma (2.9) est stable en milieu homogène sous la condition de CFL ( $C = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ )*

$$C \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{4}{|2(1 + \beta) \sin(\theta) - \beta \sin(2\theta)|}. \quad (2.10)$$

On donne dans le tableau 2.1 quelques valeurs du CFL en fonction de  $\beta$ .

	CFL
$\beta = 0$	2
$\beta = \frac{1}{4}$	1.57
$\beta = \frac{1}{3}$	1.46
$\beta = 1$	0.9

TAB. 2.1 – CFL en fonction de  $\beta$

**Preuve 2.2.1** On montre ce résultat en utilisant le critère de stabilité de Von Neumann. On note

$$\mathbf{Q}_l^n = \begin{pmatrix} H_l^{n-\frac{1}{2}} \\ E_l^n \end{pmatrix}.$$

On procède à l'analyse de Fourier en définissant

$$\hat{\mathbf{Q}}_l^n = g^n(\theta) \exp(i l \theta \Delta x). \quad (2.11)$$

A l'itération  $(n + 1)$  le mode de Fourier s'écrit

$$\hat{\mathbf{Q}}_l^{n+1} = G_\theta \hat{\mathbf{Q}}_l^n, \quad (2.12)$$

où la matrice d'amplification  $G_\theta$  est donnée par :

$$G_\theta = \text{Id} + \begin{pmatrix} -\alpha^2 & i\alpha \\ i\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $\alpha = \frac{\Delta t}{2\Delta x} |2(1 + \beta) \sin(\theta) - \beta \sin(2\theta)|$ .

La condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma (condition de Von Neuman) s'écrit

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \max_{s=1,2} \lambda_\theta^s \leq 1,$$

où les valeurs  $\lambda_\theta^s$  représentent les valeurs propres de la matrice  $G_\theta$ .

Considérons la matrice  $M = G_\theta - \text{Id}$ . Le polynôme caractéristique de  $M$  est

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha.$$

Supposons  $\alpha \leq 4$ . Les valeurs propres de  $M$  sont données par

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{4\alpha - \alpha^2}}{2}$$

$$\implies \max_i |1 + \lambda_i| = \sqrt{\frac{(2 - \alpha)^2 + (4\alpha - \alpha^2)}{4}} = 1.$$

Ce qui implique la stabilité du schéma.

Réciproquement, montrons que pour  $\alpha > 4$ , le schéma est instable.

Nous avons pour  $\alpha > 4$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}.$$

On suppose que

$$|1 + \lambda_i| \leq 1$$

$$\implies \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \leq 4.$$

Ce qui est absurde. Ceci achève la démonstration de la proposition. ■

**Proposition 2.2.2** *Lorsque le milieu est homogène, le  $\beta$ -schéma (2.9) est d'ordre deux en espace et en temps sur un maillage uniforme. De plus, si  $\beta < 1/3$  et  $C \frac{\Delta t}{\Delta x} = \sqrt{4(1 - 3\beta)}$  le schéma est d'ordre 4 en espace et en temps. La dispersion numérique est aussi d'ordre 4.*

Pour vérifier le degré de dispersion d'un schéma, on établit la relation qui relie la pulsation  $w$  d'une onde harmonique au vecteur d'onde  $k$ . Elle est donnée dans le cas continu par  $w^2 = |k|^2 C^2$ . On établit l'équation des ondes discrète dans le vide à partir du schéma et par une analyse harmonique on établit la relation de dispersion discrète. Dans le cas présent on obtient

$$w^2 = |k|^2 C^2 + \frac{k^4 C^2 \Delta x^2}{12} \left( \frac{C^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} - 4(1 - 3\beta) \right) + O(\Delta^4). \quad (2.13)$$

On trouve ainsi que la dispersion est d'ordre 2 dans le cas général et qu'elle est d'ordre 4 sous la condition évoquée ci-dessus.

On utilise pour montrer le résultat précédent la méthode des équations équivalentes. La démarche est de chercher l'équation que vérifie une fonction régulière solution des équations discrètes.

**Preuve 2.2.2** Supposons qu'il existe  $(H, E) \in C_{x,t}^\infty \times C_{x,t}^\infty$  tels que

$$\forall i, \forall n, H(i\Delta x, n\Delta t) = H_i^n \text{ et } E(i\Delta x, n\Delta t) = E_i^n.$$

En substituant ces valeurs dans le schéma (2.9) et après un développement de Taylor à l'ordre trois, on montre que  $(H, E)$  vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) + \Delta x^2 \frac{\partial^3 E}{\partial x^3}(x, t) \left( \frac{1 - 3\beta}{6} - \frac{C\Delta t^2}{24\Delta x^2} \right) + O(\Delta^4) \\ \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) + \Delta x^2 \frac{\partial^3 H}{\partial x^3}(x, t) \left( \frac{1 - 3\beta}{6} - \frac{C\Delta t^2}{24\Delta x^2} \right) + O(\Delta^4). \end{array} \right.$$

Ceci montre que le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace et que lorsque  $C\Delta t/\Delta x = \sqrt{4(1-3\beta)}$  le schéma est d'ordre 4. Ceci montre aussi que la dispersion (donnée par les dérivées impaires) est bien d'ordre 4. Ceci n'est bien sûr possible que lorsque  $\beta < \frac{1}{3}$ .

Il reste tout de même à vérifier que le schéma est stable sous cette condition i.e.

$$\forall \beta < \frac{1}{3}, \sqrt{4(1-3\beta)} < \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{4}{|2(1+\beta)\sin(\theta) - \beta\sin(2\theta)|}, \quad (2.14)$$

soit

$$\forall \beta < \frac{1}{3}, \forall \theta \in [0, 2\pi], F(\beta, \theta) = \sin^2(\theta)(1-3\beta)(1+2\beta\sin^2(\theta/2))^2 - 1 < 0.$$

En posant  $s = \sin^2(\theta/2)$  ( $s \in [0, 1]$ ) et  $h(s) = s(1-s)(1+2\beta s)^2$ , on vérifie que

$$F(\beta, \theta) = 4(1-3\beta)h(s) - 1.$$

On cherche à montrer que la maximum de  $F$  est négatif. Puisque  $(1-3\beta) > 0$ , on cherche d'abord le maximum de  $h$ . On vérifie que le maximum de  $h$  est atteint pour

$$s_{\max} = \frac{3\beta - 1 + \sqrt{9\beta^2 + 2\beta + 1}}{8\beta} \in [0, 1].$$

On a alors

$$\forall \beta < \frac{1}{3}, \forall \theta \in [0, 2\pi], F(\beta, \theta) \leq 4(1-3\beta)h(s_{\max}) - 1.$$

L'étude du sens de variation sur l'intervalle  $[0, 1/3]$  de

$$\beta \longrightarrow 4(1-3\beta)h(s_{\max}) - 1$$

nous permet de vérifier que  $4(1-3\beta)h(s_{\max}) - 1 < 0 \forall \beta \in [0, 1/3]$ . Ceci nous permet de montrer la relation (2.14) et d'assurer la stabilité du schéma.

On montre sur la figure 2.2 le CFL maximum autorisé par la limite de stabilité et le CFL permettant de rendre le  $\beta$ -schéma d'ordre 4 en fonction de  $\beta$  ( $\beta \in [0, \frac{1}{3}]$ ). ■

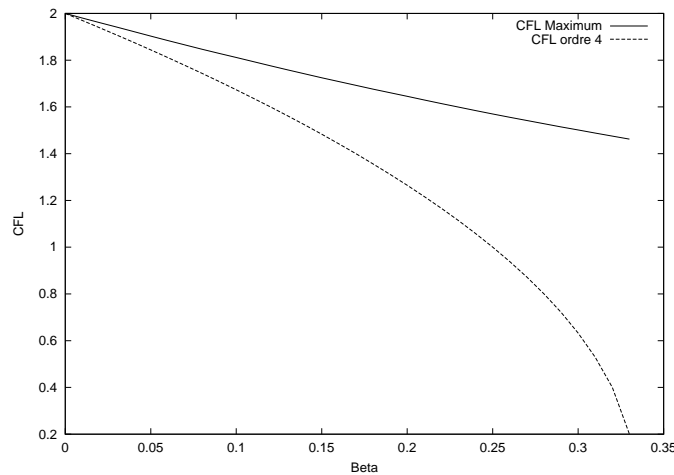


FIG. 2.2 – CFL maximum et celui de l'ordre 4 en fonction de  $\beta$



**Remarque 2.2.1** Cette relation entre le paramètre  $\beta$  et l'erreur de dispersion rend cette classe de schémas très intéressante pour le raffinement de maillage. L'idée que nous exploiterons par la suite sera de choisir le paramètre  $\beta$  de telle sorte que le schéma soit d'ordre 4 pour un  $\Delta x$  et un  $\Delta t$  donnés. Cette approche nous permettra de construire une méthode non dispersive.

**Remarque 2.2.2** Dans l'équation équivalente nous n'avons aucun terme de dérivée paire (terme de diffusion). Ceci explique pourquoi le schéma conserve comme nous allons le voir une énergie discrète sur une grille uniforme.

**Proposition 2.2.3**  $\forall \beta \in [0,1]$ , le  $\beta$ -schéma conserve un équivalent discret de l'énergie électromagnétique.

**Preuve 2.2.3** On définit l'énergie discrète pour le schéma saute-mouton par

$$2\mathcal{E}_h^n = \sum_i (E_i^n)^2 + H_i^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_i^{n-\frac{1}{2}}.$$

On note  $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et on suppose la grille infinie.  
La variation d'énergie est donnée par

$$\begin{aligned} & 2\Delta\mathcal{E}_h^n \\ = & 2\mathcal{E}_h^{n+1} - 2\mathcal{E}_h^n \\ = & \sum_i (E_i^{n+1})^2 - (E_i^n)^2 + \left( H_i^{n+\frac{3}{2}} \cdot H_i^{n+\frac{1}{2}} - H_i^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_i^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ = & \sum_i (E_i^{n+1} - E_i^n)(E_i^{n+1} + E_i^n) + H_i^{n+\frac{1}{2}} \left( H_i^{n+\frac{3}{2}} - H_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + H_i^{n+\frac{1}{2}} \left( H_i^{n+\frac{1}{2}} - H_i^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ = & \sum_i (E_i^{n+1} + E_i^n) \frac{\nu}{2} \left( -\frac{\beta}{2} H_{i+2}^{n+\frac{1}{2}} + (1+\beta) H_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - (1+\beta) H_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} H_{i-2}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ & + H_i^{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\nu}{2} \left( -\frac{\beta}{2} E_{i+2}^n + (1+\beta) E_{i+1}^n - (1+\beta) E_{i-1}^n + \frac{\beta}{2} E_{i-2}^n \right) \right) \\ & + H_i^{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\nu}{2} \left( -\frac{\beta}{2} E_{i+2}^{n+1} + (1+\beta) E_{i+1}^{n+1} - (1+\beta) E_{i-1}^{n+1} + \frac{\beta}{2} E_{i-2}^{n+1} \right) \right) \\ = & \sum_i \frac{\nu\beta}{2} \left( -E_i^{n+1} H_{i+2}^{n+\frac{1}{2}} + E_i^{n+1} H_{i-2}^{n+\frac{1}{2}} - E_{i+2}^{n+1} H_i^{n+\frac{1}{2}} + E_{i-2}^{n+1} H_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ & + \frac{\nu(1+\beta)}{2} \left( E_i^{n+1} H_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_i^{n+1} H_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + E_{i+1}^{n+1} H_i^{n+\frac{1}{2}} - E_{i-1}^{n+1} H_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ & + \frac{\nu\beta}{2} \left( -E_i^n H_{i+2}^{n+\frac{1}{2}} + E_i^n H_{i-2}^{n+\frac{1}{2}} - E_{i+2}^n H_i^{n+\frac{1}{2}} + E_{i-2}^n H_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ & + \frac{\nu(1+\beta)}{2} \left( E_i^n H_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_i^n H_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + E_{i+1}^n H_i^{n+\frac{1}{2}} - E_{i-1}^n H_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ = & 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que le schéma conserve l'énergie discrète et ce pour tout  $\beta$  et pour tout  $\nu$ .  
 ■

### 2.2.3 Applications aux grilles raffinées

On rappelle (proposition 2.2.2) que pour tout pas de temps  $\Delta t$  et tout pas d'espace  $\Delta x$  vérifiant  $0 < \Delta t/\Delta x < 2$ , il existe  $\beta$  tel que le  $\beta$ -schéma associé soit d'ordre 4. La valeur de  $\beta$  est  $1/3 - \Delta t^2/12\Delta x^2$ .

Soit alors un maillage 1D constitué de cellules de taille variable  $\Delta x_i$ . La condition de stabilité (2.10) nous incite à poser  $\Delta t = 2 \min_i \Delta x_i$ . On définit alors sur chaque cellule le paramètre  $\beta_i$

$$\beta_i = \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{12\Delta x_i^2}. \quad (2.15)$$

Les flux sont alors évalués de la manière suivante (en notant  $Q_i = {}^t(H_i, E_i)$ )

$$\text{flux}_Q(i, i+1) = \frac{Q_{i,i+1} + Q_{i+1,i}}{2},$$

avec

$$\begin{cases} Q_{i,i+1} = Q_i + \left[ (1 - 2\beta_{i+1}) \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\frac{1}{2}(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} + 2\beta_{i+1} \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{\Delta x_i + \frac{1}{2}(\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i-1})} \right] \frac{\Delta x_i}{2} \\ Q_{i+1,i} = Q_{i+1} - \left[ (1 - 2\beta_i) \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\frac{1}{2}(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} + 2\beta_i \frac{Q_{i+2} - Q_i}{\Delta x_{i+1} + \frac{1}{2}(\Delta x_{i+2} + \Delta x_i)} \right] \frac{\Delta x_{i+1}}{2}. \end{cases}$$

Ainsi le schéma construit a une dispersion locale d'ordre 4 (dans toute zone où  $\beta$  est constant i.e. où  $\Delta x$  est constant). Le schéma sera donc très peu dispersif même dans les zones où le rapport  $\Delta t/\Delta x$  est petit. Cette propriété nous permet de traiter des grilles raffinées sans avoir à introduire un pas de temps local. On peut noter le choix "étonnant" des  $\beta$  dans la formule d'interpolation. En effet, si on note  $n_i$  le nœud appartenant à la cellule  $i$  et à la cellule  $i+1$ ,  $Q_{i,i+1}$  désigne la valeur de  $Q$  en  $n_i$  interpolée à partir de la représentation sur la cellule  $i$ . On aurait tendance à utiliser pour cette interpolation la valeur  $\beta_i$ . Nous proposons plutôt d'utiliser  $\beta_{i+1}$ . De même, on utilise  $\beta_{i+1}$  au lieu de  $\beta_i$  pour calculer  $Q_{i+1,i}$ . Ce choix s'est révélé être le plus performant numériquement.

### 2.2.4 Résultats numériques

#### 2.2.4.1 Calculs à petit pas de temps sur une grille uniforme

Pour pouvoir comparer le nouveau schéma que nous venons de décrire au schéma de Yee, nous allons considérer l'évolution d'un mode propre dans une cavité fermée maillée de façon uniforme mais avec un pas de temps dix fois plus petit que le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité. On montre sur la figure 2.3 les cinq dernières périodes d'une simulation portant sur cinquante périodes. La solution du schéma de Yee est comparée d'une part à la solution exacte et à la solution obtenue par un  $\beta$ -schéma d'autre part. On voit clairement que la solution issue du  $\beta$ -schéma se compare mieux à la

solution exacte et que son taux de dispersion est nettement inférieur. On réalise la même expérience en initialisant les schémas par un pulse. La simulation est stoppée dès lors que le pulse a fait dix aller-retours (figure 2.3). Le caractère peu dispersif du  $\beta$ -schéma est à nouveau mis en évidence. Dans le cas de grilles raffinées, on s'attend donc à ce que les résultats soient peu dégradés par des phénomènes de dispersion.

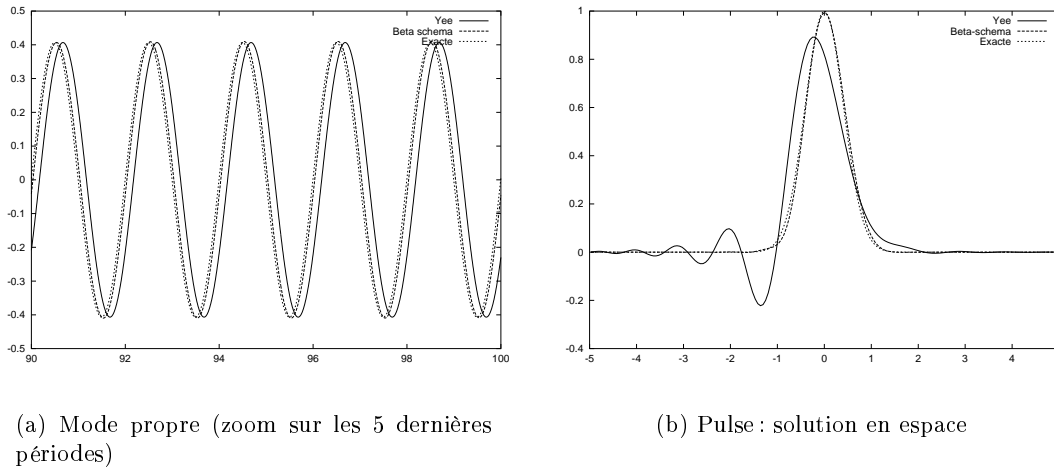


FIG. 2.3 – Grille uniforme et petit pas de temps : Yee vs  $\beta$ -schéma

#### 2.2.4.2 Evolution d'un pulse sur une grille raffinée

On considère maintenant l'évolution d'un pulse gaussien dans une cavité métallique (voir figure 2.4) constituée de deux grilles régulières dont le rapport entre les pas d'espace est dix. A l'initialisation, le champ est donné par

$$\begin{cases} H_i^{-\frac{\Delta t}{2}} = -\exp(5(x - \frac{c\Delta t}{2} + 2)^2) \\ E_i^0 = \exp(5(x + 2)^2). \end{cases} \quad (2.16)$$

La figure 2.5 présente la solution en espace du champ  $E$  lorsque la simulation est terminée. La solution obtenue après dix aller-retours est de très bonne qualité. On présente aussi sur la même figure une simulation en temps long : le pulse fait cent aller-retours. Une telle simulation nécessite 200000 itérations temporelles. On peut alors remarquer que la solution est dispersée. Au regard de la durée de la simulation et du fort taux de raffinement, ce résultat est quand même satisfaisant.

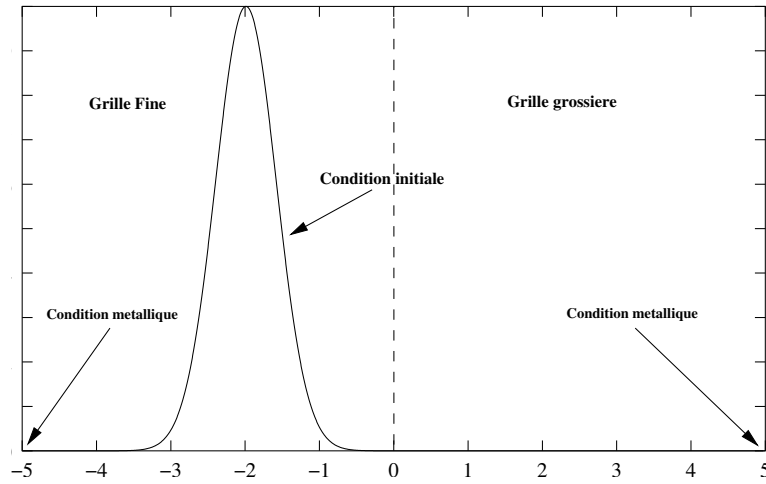


FIG. 2.4 – Présentation du test

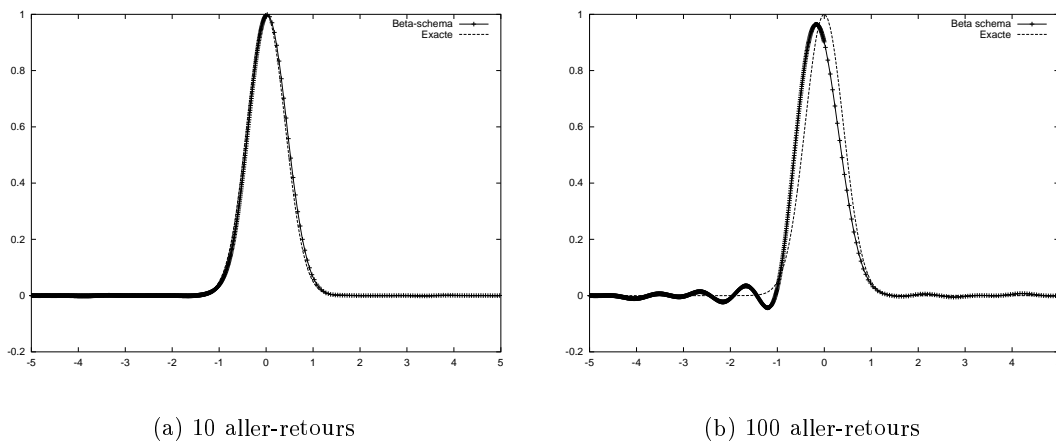


FIG. 2.5 – Evolution d'un pulse dans une cavité métallique : solution en espace à la fin de la simulation

## 2.3 Cas bi-dimensionnel

### 2.3.1 Présentation du schéma

On étend ici le  $\beta$ -schéma présenté dans la section précédente à la résolution du système de Maxwell 2D sur des maillages orthogonaux. Considérons ce système dans le vide pour

la polarisation transverse électrique

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Afin de tirer parti du caractère orthogonal du maillage, on introduit un paramètre pour chaque direction. Le paramètre  $\beta_x$  ( $0 \leq \beta_x \leq 1/2$ ) (respectivement  $\beta_y$  ( $0 \leq \beta_y \leq 1/2$ )) sera utilisé pour toute interpolation dans la direction  $x$  (respectivement  $y$ ). Cette manière de procéder s'insère dans le formalisme classique des  $\beta$ -schémas (section 2.1) en notant  $\beta = {}^t(\beta_x, \beta_y) \cdot \tilde{\mathbf{n}}$ , où  $\tilde{\mathbf{n}}$  est la normale unitaire non orientée de l'arête sur laquelle on évalue les champs. On repère chaque élément  $\mathbf{V}$  par son indice dans la direction  $x$  et son indice dans la direction  $y$  (figure 2.6). On utilise à nouveau un gradient centré dont la définition dans le cas conforme est

$$\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{E}_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{E_x(i+1,j) - E_x(i-1,j)}{2\Delta x} & \frac{E_x(i,j+1) - E_x(i,j-1)}{2\Delta y} \\ \frac{E_y(i+1,j) - E_y(i-1,j)}{2\Delta x} & \frac{E_y(i,j+1) - E_y(i,j-1)}{2\Delta y} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\text{et } \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{H}_{i,j} = \left( \frac{H_z(i+1,j) - H_z(i-1,j)}{2\Delta x}, \frac{H_z(i,j+1) - H_z(i,j-1)}{2\Delta y} \right). \quad (2.19)$$

$\mathbf{V}_{i-1,j+1}$	$\mathbf{V}_{i,j+1}$	$\mathbf{V}_{i+1,j+1}$
$\mathbf{V}_{i-1,j}$	$\mathbf{V}_{i,j}$	$\mathbf{V}_{i+1,j}$
$\mathbf{V}_{i-1,j-1}$	$\mathbf{V}_{i,j-1}$	$\mathbf{V}_{i+1,j-1}$

FIG. 2.6 – Numérotation des éléments du maillage

Dans le cas d'un maillage uniforme où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont constants, ceci donne lieu au

schéma suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i,j) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \left( -\frac{\beta_x}{2} E_y^n(i+2,j) + \beta'_x E_y^n(i+1,j) - \beta'_x E_y^n(i-1,j) + \frac{\beta_x}{2} E_y^n(i-2,j) \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} \left( -\frac{\beta_y}{2} E_x^n(i,j+2) + \beta'_y E_x^n(i,j+1) - \beta'_y E_x^n(i,j-1) + \frac{\beta_y}{2} E_x^n(i,j-2) \right) \\ E_x^{n+1}(i,j) = E_x^n(i,j) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y} \left( -\frac{\beta_y}{2} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j+2) + \beta'_y H_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1) - \beta'_y H_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j-1) + \frac{\beta_y}{2} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j-2) \right) \\ E_y^{n+1}(i,j) = E_y^n(i,j) \\ \quad - \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \left( -\frac{\beta_x}{2} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+2,j) + \beta'_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j) - \beta'_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-1,j) + \frac{\beta_x}{2} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-2,j) \right), \end{array} \right. \quad (2.20)$$

où  $\beta'_x = \beta_x + 1$  et  $\beta'_y = \beta_y + 1$ .

Les conditions aux limites métalliques sont traitées de la même manière que dans le cas mono-dimensionnel.

**Proposition 2.3.1** *Dans le cas d'un maillage uniforme, le  $\beta$ -schéma est stable sous la condition suivante*

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left( 2(1 + \beta_x) \sin(\theta) - \beta_x \sin(2\theta) \right)^2 + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \left( 2(1 + \beta_y) \sin(\varphi) - \beta_y \sin(2\varphi) \right)^2 \leq 16$$

$\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi]$ .

**Preuve 2.3.1** On montre ce résultat sur un maillage uniforme  $(\Delta x, \Delta y)$  en utilisant le critère de stabilité de Von Neumann. On note

$$\mathbf{Q}_{l,k}^n = \begin{pmatrix} E_x^n(l,k) \\ E_y^n(l,k) \\ H_z^{n-\frac{1}{2}}(l,k) \end{pmatrix}.$$

On procède à l'analyse de Fourier en définissant

$$\hat{\mathbf{Q}}_{l,k}^n = g^n(\theta, \varphi) \exp(i(l\theta\Delta x + \varphi\Delta y)). \quad (2.21)$$

A l'itération  $(n+1)$  le mode de Fourier s'écrit

$$\hat{\mathbf{Q}}_{l,k}^{n+1} = G_{\theta, \varphi} \hat{\mathbf{Q}}_{l,k}^n. \quad (2.22)$$

On note  $\alpha(\theta, \Delta x) = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( -\beta_x \sin(2\theta) + 2(1 + \beta_x) \sin(\theta) \right)$ . La matrice d'amplification  $G_{\theta, \varphi}$  s'écrit alors

$$G_{\theta, \varphi} = \text{Id} + \begin{pmatrix} -\alpha^2(\varphi, \Delta y) & \alpha(\theta, \Delta x)\alpha(\varphi, \Delta y) & -i\alpha(\varphi, \Delta y) \\ \alpha(\theta, \Delta x)\alpha(\varphi, \Delta y) & -\alpha^2(\theta, \Delta x) & i\alpha(\theta, \Delta x) \\ -i\alpha(\varphi, \Delta y) & i\alpha(\theta, \Delta x) & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma (condition de Von Neuman) s'écrit

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi], \quad \max_{s=1,2,3} \lambda_{\theta,\varphi}^s \leq 1$$

où les valeurs  $\lambda_{\theta,\varphi}^s$  représentent les valeurs propres de la matrice  $G_{\theta,\varphi}$ .

Considérons la matrice  $M = G_{\theta,\varphi} - \text{Id}$ . Le polynôme caractéristique de  $M$  est

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha),$$

avec  $\alpha = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left( 2(1 + \beta_x) \sin(\theta) - \beta_x \sin(2\theta) \right)^2 + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \left( 2(1 + \beta_y) \sin(\varphi) - \beta_y \sin(2\varphi) \right)^2$ .

Supposons  $\alpha \leq 4$ . Les valeurs propres de  $M$  sont données par

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{4\alpha - \alpha^2}}{2} \text{ et } \lambda_3 = 0$$

$$\implies \max_i |1 + \lambda_i| = \sqrt{\frac{(2 - \alpha)^2 + (4\alpha - \alpha^2)}{4}} = 1.$$

Ce qui implique la stabilité du schéma.

Réciproquement, montrons que pour  $\alpha > 4$ , le schéma est instable.

Nous avons pour  $\alpha > 4$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}$$

On suppose que

$$\begin{aligned} |1 + \lambda_i| &\leq 1 \\ \implies \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} &\leq 4, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. ■

On donne dans le tableau 2.2 quelques valeurs du CFL en fonction de  $\beta$  lorsque  $\Delta x = \Delta y$  et  $\beta_x = \beta_y = \beta$ . On désigne par CFL la valeur maximale que peut prendre  $\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}$ .

On rappelle que la valeur du CFL pour le schéma de Yee est 1.

	CFL
$\beta = 0$	2
$\beta = \frac{1}{4}$	1.57
$\beta = \frac{1}{3}$	1.46
$\beta = 1$	0.9

TAB. 2.2 – CFL en fonction de  $\beta$

**Proposition 2.3.2** *Le  $\beta$ -schéma est d'ordre deux en espace et en temps sur un maillage uniforme.*

**Preuve 2.3.2** Supposons qu'il existe  $(H_z, E_x, E_y) \in C_{x,y,t}^\infty \times C_{x,y,t}^\infty$  tels que

$$\forall i, \forall j, \forall n, H_z(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) = H_z^n(i, j), E_x(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) = E_x^n(i, j) \text{ et } E_y(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) = E_y^n(i, j).$$

En substituant ces valeurs dans le schéma (2.20) et après un développement de Taylor à l'ordre trois, on montre que  $(H_z, E_x, E_y)$  vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \left( \frac{1 - 3\beta_y}{6} \Delta y^2 - \frac{\Delta t^2}{24} \right) \frac{\partial^3 E_x}{\partial y^3}(x, y, t) - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^3 E_x}{\partial x^2 \partial y}(x, y, t) \\ \quad - \left( \frac{1 - 3\beta_x}{6} \Delta x^2 - \frac{\Delta t^2}{24} \right) \frac{\partial^3 E_y}{\partial x^3}(x, y, t) + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^3 E_y}{\partial x \partial y^2}(x, y, t) + O(\Delta^4) \\ \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = \left( \frac{1 - 3\beta_y}{6} \Delta y^2 - \frac{\Delta t^2}{24} \right) \frac{\partial^3 H_z}{\partial y^3}(x, y, t) - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^2 \partial y}(x, y, t) + O(\Delta^4) \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = \left( \frac{1 - 3\beta_x}{6} \Delta x^2 - \frac{\Delta t^2}{24} \right) \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3}(x, y, t) + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x \partial y^2}(x, y, t) + O(\Delta^4). \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Ce qui prouve que le schéma est bien d'ordre deux en espace et en temps sur un maillage uniforme.

**Remarque 2.3.1** Comme dans le cas mono-dimensionnel, nous n'avons dans l'équation équivalente (2.23) aucun terme de dérivées paires. Le schéma n'est donc pas diffusif.

## 2.3.2 Minimisation de l'erreur de dispersion

### 2.3.2.1 Deux approches

L'équation équivalente (2.23) montre bien que contrairement au cas mono-dimensionnel, il n'existe pas de choix de  $(\beta_x, \beta_y)$  permettant d'obtenir un schéma d'ordre quatre. L'erreur de dispersion du  $\beta$ -schéma en dimension deux sera donc en général d'ordre deux. Nous pouvons par contre minimiser ce terme d'ordre deux par un choix adapté de  $(\beta_x, \beta_y)$ .

La première idée est d'utiliser la formule 1D dans les directions  $x$  et  $y$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_x = \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{12\Delta x^2}, \\ \beta_y = \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{12\Delta y^2}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Cette approche permet donc d'annuler le terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion pour toute onde harmonique dont le vecteur d'onde est colinéaire à  $x$  ou à  $y$ . On nomme cette approche " $\beta$  par direction".

Comme le montre la proposition 2.3.3, ce choix n'est pas le plus judicieux lorsque  $\Delta x = \Delta y$ . L'approche résultant de la proposition 2.3.3 sera nommée " $\beta$  par cellule".



**Proposition 2.3.3** *Pour un maillage uniforme où  $\Delta x = \Delta y$ , le maximum du terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion est minimisé lorsque*

$$\beta_x = \beta_y = \frac{1}{3} - \frac{\nu^2}{18} \quad \text{avec } \nu = \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}.$$

**Preuve 2.3.3** Dans le cas où  $\Delta x = \Delta y$ ,  $\beta_x$  n'a aucune raison d'être différent de  $\beta_y$ . Ainsi  $\beta = \beta_x = \beta_y$ . Pour toute onde harmonique dont la direction du vecteur d'onde est donnée par l'angle  $\theta$ , la relation de dispersion discrète du schéma s'écrit

$$w^2 = |k|^2 C^2 + \frac{k^4 C^2}{3} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1} \left( \frac{\nu^2}{4} - 2(1 - 3\beta)(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \right) + O(\Delta^4).$$

On cherche donc

$$\begin{aligned} & \min_{\beta} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{\nu^2}{4} - 2(1 - 3\beta)(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \right| \\ &= \min_{\beta} \max_{\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]} \left| \frac{\nu^2}{4} - 2(1 - 3\beta)\alpha \right| \\ &= \min_{\beta} \max \left( \left| \frac{\nu^2}{4} - (1 - 3\beta) \right|, \left| 2(1 - 3\beta) - \frac{\nu^2}{4} \right| \right). \end{aligned}$$

Une étude de fonction permet d'écrire que ce minimum est réalisé si et seulement si

$$\frac{\nu^2}{4} - (1 - 3\beta) = 2(1 - 3\beta) - \frac{\nu^2}{4},$$

c'est à dire si  $\beta = \frac{1}{3} - \frac{\nu^2}{18}$ . ■

### 2.3.2.2 Comparaison des deux approches

Comparons à présent l'erreur de dispersion des deux approches présentées précédemment. Pour toute onde harmonique dont la direction du vecteur d'onde est donnée par l'angle  $\theta$ , la relation de dispersion discrète du  $\beta$ -schéma s'écrit

$$\begin{aligned} w^2 &= |k|^2 C^2 + \frac{k^4 C^2}{3} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1} \left( \frac{\nu^2}{8} - (1 - 3\beta_x) \Delta x^2 \cos^4(\theta) \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right) \\ &+ \frac{k^4 C^2}{3} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1} \left( \frac{\nu^2}{8} - (1 - 3\beta_y) \Delta y^2 \sin^4(\theta) \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right) + O(\Delta^4). \end{aligned} \tag{2.25}$$

On suppose à présent que  $\Delta x = \Delta y$  et que  $k^2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1} = 1$ . Ces hypothèses correspondent approximativement à un maillage de 4 points par longueur d'onde. Si de plus  $C = 1$ , la vitesse numérique  $C_{app}$  est donnée par

$$C_{app} = 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\nu^2}{4} - 2(1 - 3\beta_x) \cos^4(\theta) - 2(1 - 3\beta_y) \sin^4(\theta) \right) + O(\Delta^4).$$

Avec les mêmes hypothèses, la vitesse numérique  $C_{app}$  pour le schéma différences finies de Yee est donnée par

$$C_{app} = 1 + \frac{1}{12} \left( \nu^2 - 2(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \right) + O(\Delta^4).$$

On montre sur les figures 2.7 le maximum du terme d'ordre deux de la relation de dispersion pour les trois schémas (Yee, “ $\beta$  par direction”, “ $\beta$  par cellule”) pour différents types de maillage en fonction de  $\nu$  ( $\nu$  varie dans la plage de stabilité des trois schémas). On peut noter que lorsque  $\nu$  devient petit, les  $\beta$ -schémas sont très peu dispersifs par rapport au schéma de Yee. Ainsi, dans le cas du raffinement de maillage, utiliser en 2D un  $\beta$  local comme nous l'avons fait en 1D paraît tout à fait prometteur. On remarque aussi qu'il suffit de baisser  $\nu$  pour améliorer la précision des  $\beta$ -schémas. Lorsque  $\Delta x = \Delta y$  (figure 2.7-(a)), l'approche  $\beta$  par cellule est comme prévue la plus précise. Dès lors que  $\Delta x \neq \Delta y$  (figures 2.7-(b), 2.7-(c) et 2.7-(d)), l'approche  $\beta$  par direction est nettement plus précise. L'erreur de dispersion dans ce cas ne semble pas dépendre du rapport  $\Delta x/\Delta y$ . On réservera donc l'approche  $\beta$  par cellule au cas où sur chaque cellule  $\Delta x = \Delta y$ .

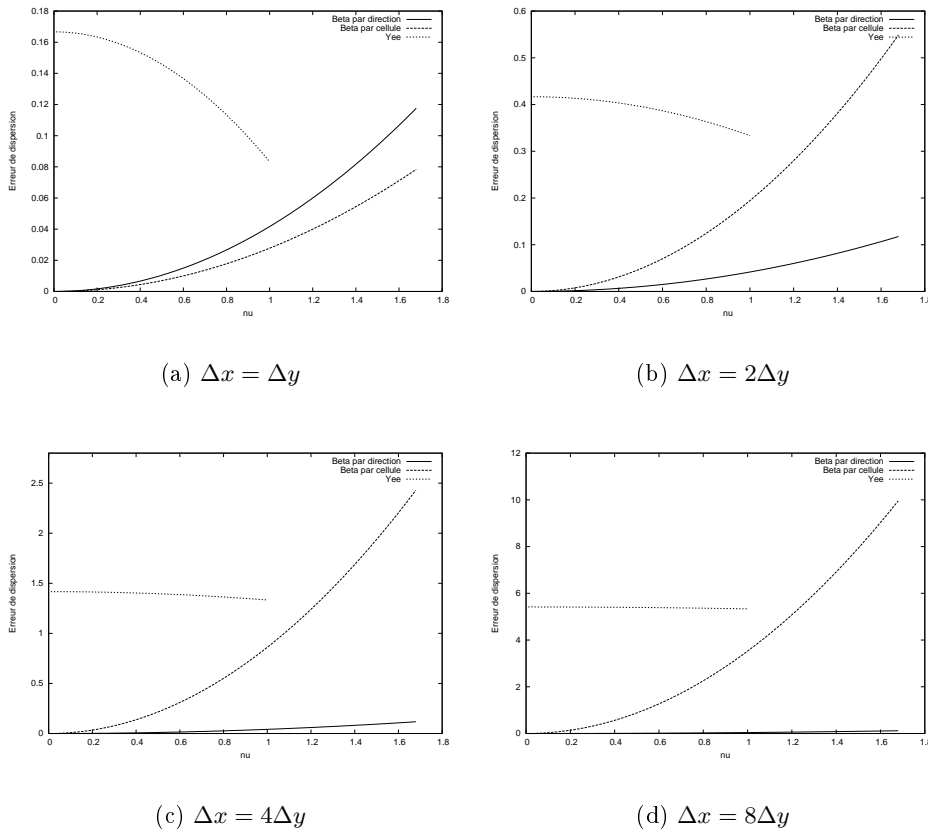


FIG. 2.7 – Maximum du terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion

La figure 2.8 montre le diagramme polaire de la vitesse numérique pour le  $\beta$ -schéma ( $\beta$  par cellule) et le schéma de Yee lorsque  $\Delta x = \Delta y$  pour deux valeurs de  $\nu$ . La valeur optimale de  $\nu$  est 1. On constate à nouveau que même pour cette valeur, le  $\beta$ -schéma est moins dispersif. Pour  $\nu = 1/2$ , le schéma de Yee devient très dispersif alors que le  $\beta$ -schéma devient extrêmement précis, et ce dans toutes les directions.

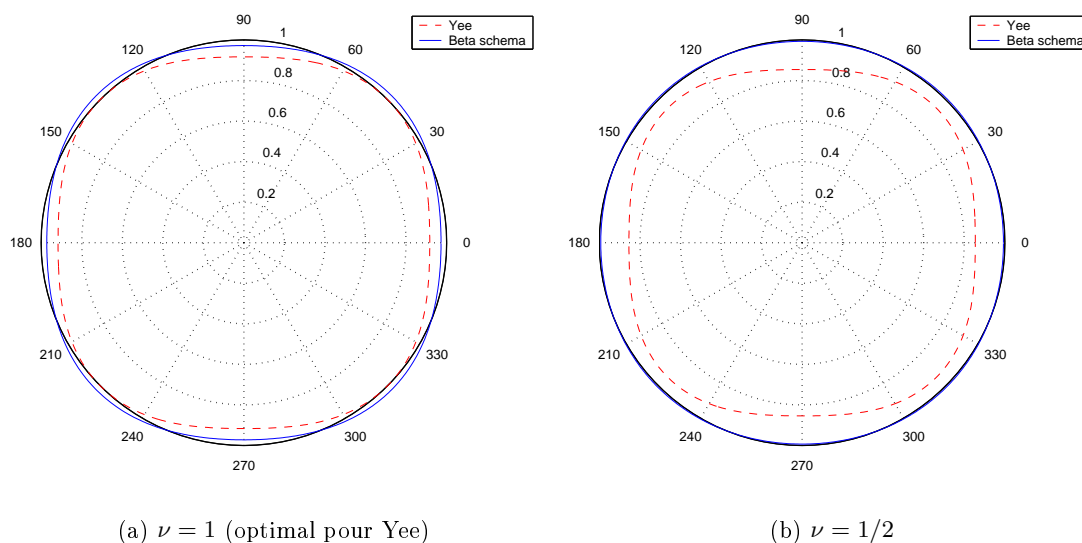
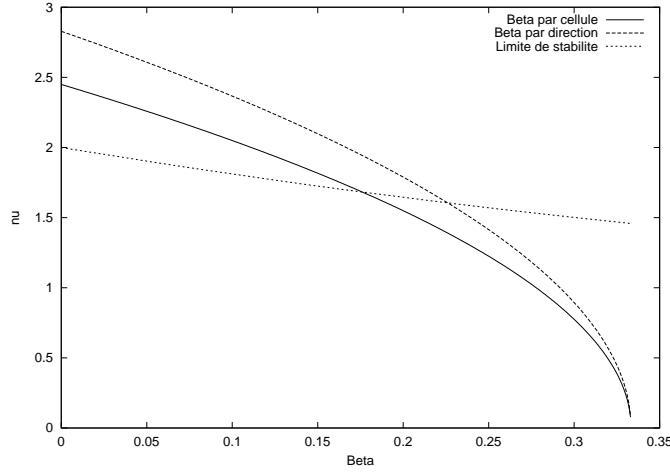


FIG. 2.8 – Diagramme polaire de la vitesse numérique normalisée pour Yee et  $\beta$ -schéma ( $\beta$  par cellule)

### 2.3.2.3 Compatibilité avec la condition de stabilité

Il reste à vérifier que le choix de  $(\beta_x, \beta_y)$  en fonction de  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  est compatible avec la condition de stabilité. La figure 2.9 nous permet de constater graphiquement lorsque  $\Delta x = \Delta y$  (et donc  $\beta_x = \beta_y = \beta$ ) que ce n'est le cas qu'à partir d'un CFL voisin de 1.68 pour le schéma " $\beta$  par cellule" et de 1.61 pour le schéma " $\beta$  par direction". En effet, pour  $\nu$  donné (en ordonnée sur la figure 2.9), on lit en abscisse les valeurs de  $\beta$  pour les deux approches. Pour ces valeurs de  $\beta$ , on lit ensuite en ordonnée la valeur maximale de  $\nu$  assurant la stabilité.

FIG. 2.9 – CFL en fonction de  $\beta$  -  $\Delta x = \Delta y$ 

### 2.3.3 Application aux grilles raffinées conformes

On propose de choisir  $\beta_x$  et  $\beta_y$  en fonction du CFL local afin de diminuer les phénomènes de dispersion. Dans chaque cellule où  $\Delta x$  est différent de  $\Delta y$ , on sélectionne donc l'approche  $\beta$  par direction. Lorsque  $\Delta x$  est égal à  $\Delta y$ , on choisit la formule  $\beta$  par cellule. On considère un maillage 2D constitué de rectangles de taille variable  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$ . On choisit un pas d'espace  $\Delta t$  de telle sorte que la condition de stabilité soit satisfaite localement sur tout élément du maillage. Tel est le cas si

$$\Delta t = 1.61 \min_{i,j} \left( \sqrt{\frac{1}{\Delta x_{i,j}^2} + \frac{1}{\Delta y_{i,j}^2}} \right)^{-1}.$$

On définit alors

$$\begin{aligned} \beta_x(i,j) = \beta_y(i,j) &= \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{9\Delta x_{i,j}^2} && \text{si } \Delta x_{i,j} = \Delta y_{i,j}, \\ \beta_x(i,j) &= \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{12\Delta x_{i,j}^2} \text{ et } \beta_y(i,j) = \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{12\Delta y_{i,j}^2} && \text{si } \Delta x_{i,j} \neq \Delta y_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pour mettre en évidence l'efficacité de la méthode, on simule l'évolution du mode (1,1) propre dans une cavité carrée et fermée avec un raffinement 1:4 pour le premier cas et un raffinement 1:10 pour le second. La simulation porte sur 70 périodes (8000 itérations dans le premier cas et 20000 dans le second). Le pas de temps que nous avons choisi nous permet de vérifier localement la condition de stabilité. Nous ne sommes pas capables de montrer que la stabilité globale est assurée. Nous avons toutefois constaté dans les tests numériques que le schéma est stable avec ce choix de pas de temps. On montre sur les figures 2.10 et 2.11 les résultats obtenus pour le champ  $H_z$  sur les 4 dernières périodes. On compare le  $\beta$ -schéma à la solution exacte. Les résultats sont très satisfaisants.

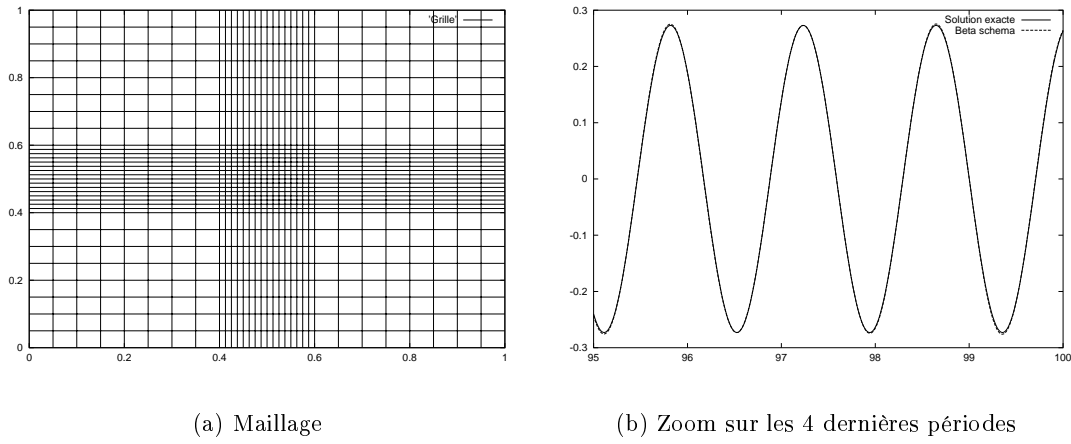


FIG. 2.10 – Raffinement 1:4 - Mode propre - Champ Hz - 70 périodes

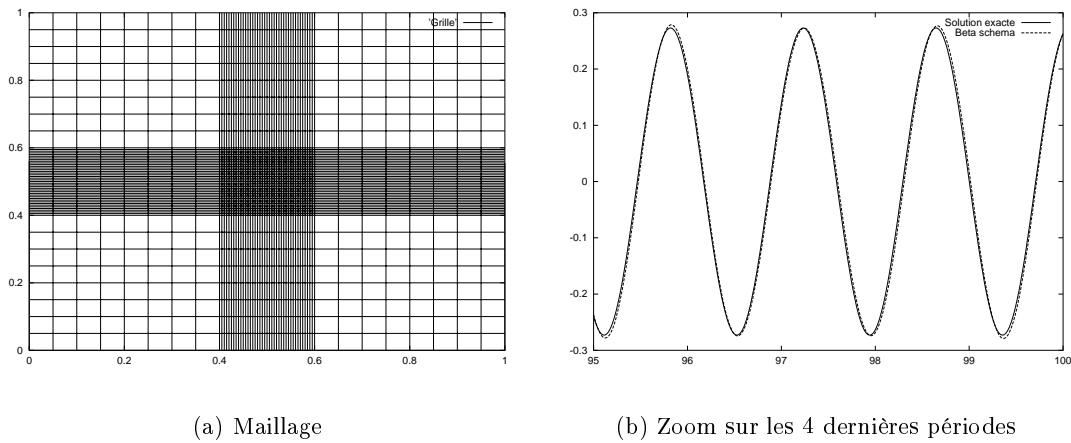


FIG. 2.11 – Raffinement 1:10 - Mode propre - Champ Hz - 70 périodes

### 2.3.4 Application aux grilles raffinées non-conformes

#### 2.3.4.1 Définition du gradient

Tout comme dans le cas conforme, on choisit  $\beta_x$  et  $\beta_y$  en fonction du CFL local. On s'intéresse cependant à des grilles où chaque cellule est un carré ( $\Delta x = \Delta y$ ). On retient donc l'approche  $\beta$  par cellule. La condition de stabilité nous suggère de choisir

$$\Delta t = 1.68 \min_{i,j} \left( \sqrt{\frac{1}{\Delta x_{i,j}^2} + \frac{1}{\Delta y_{i,j}^2}} \right)^{-1}.$$

Nous n'avons défini le gradient que dans le cas conforme (formules (2.18) et (2.19)). On étend ces définitions au cas non-conforme en utilisant un gradient moyen défini pour tout vecteur  $\mathbf{T}$  par

$$\text{Aire}(V) \vec{\nabla} \mathbf{T}_V \simeq \int_V \vec{\nabla} \mathbf{T} = \sum_{V' \text{ voisin de } V} \int_{\partial V \cap \partial V'} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$$

avec

$$\int_{\partial V \cap \partial V'} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = |\partial V \cap \partial V'| \frac{\mathbf{T}_V + \mathbf{T}_{V'}}{2} \tilde{\mathbf{n}}_{VV'},$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}_{VV'}$  est la normale unitaire orientée de  $V$  vers  $V'$ .

Ainsi, pour toute fonction scalaire  $Q$ , les dérivées de  $Q$  sur les cellules de la figure 2.12 sont calculées comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_2}{\partial x} = \frac{1}{2d_g} \left( \frac{Q_3 + Q_4}{2} - Q_1 \right), \\ \frac{\partial Q_3}{\partial x} = \frac{1}{2d_f} (Q_5 - Q_2). \end{cases}$$

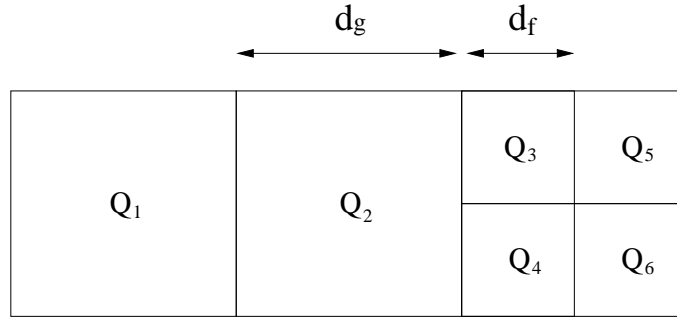
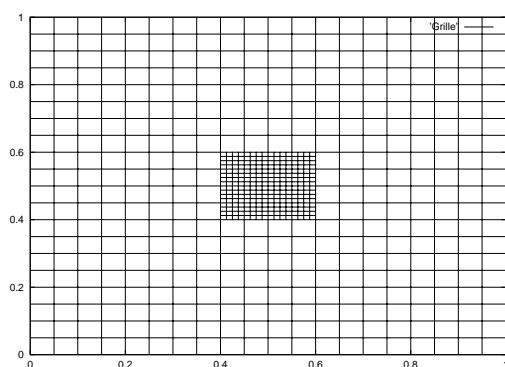


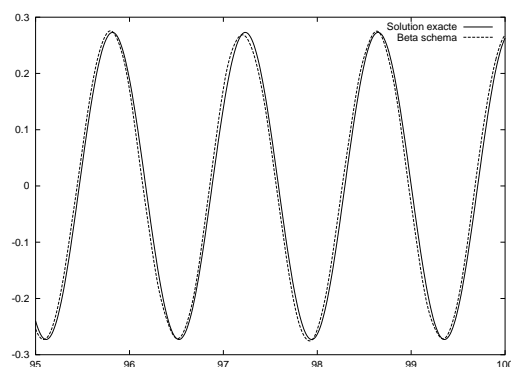
FIG. 2.12 – Notation des éléments

### 2.3.4.2 Evolution d'un mode propre

On simule l'évolution du mode propre (1,1) dans une cavité carrée et fermée dont le milieu est raffiné de manière non-conforme. On présente des résultats pour des taux de raffinement identiques à ceux traités dans le cas conforme (soit 1:4 et 1:10). La simulation porte sur 70 périodes. On montre sur la figure 2.15 l'évolution temporelle du champ  $H_z$  en un point de la grille grossière sur les 30 premières périodes pour les 2 raffinements considérés. Dans les deux cas, la solution calculée se compare très bien à la solution exacte. Les figures 2.13 et 2.14 montrent la solution zoomée sur les 4 dernières périodes de la simulation (qui en comporte 70). Ces résultats sont à comparer à ceux obtenus dans le cas conforme (figures 2.10 et 2.11). Bien que moins précis que dans le cas conforme, les résultats sont tout de même très satisfaisants compte tenu des forts taux de raffinement traités.

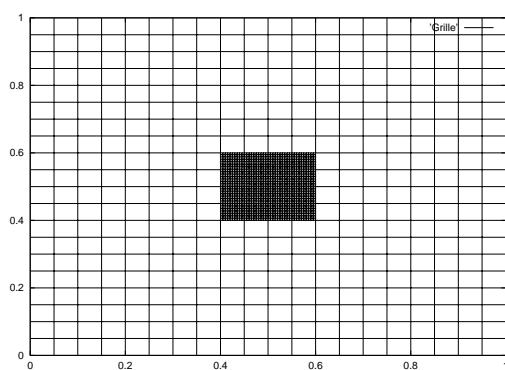


(a) Maillage

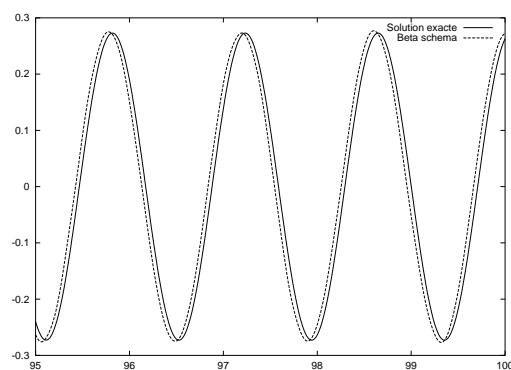


(b) Zoom sur les 4 dernières périodes

FIG. 2.13 – Raffinement 1:4 non-conforme - Mode propre - Champ Hz - 70 périodes



(a) Maillage



(b) Zoom sur les 4 dernières périodes

FIG. 2.14 – Raffinement 1:10 non-conforme - Mode propre - Champ Hz - 70 périodes

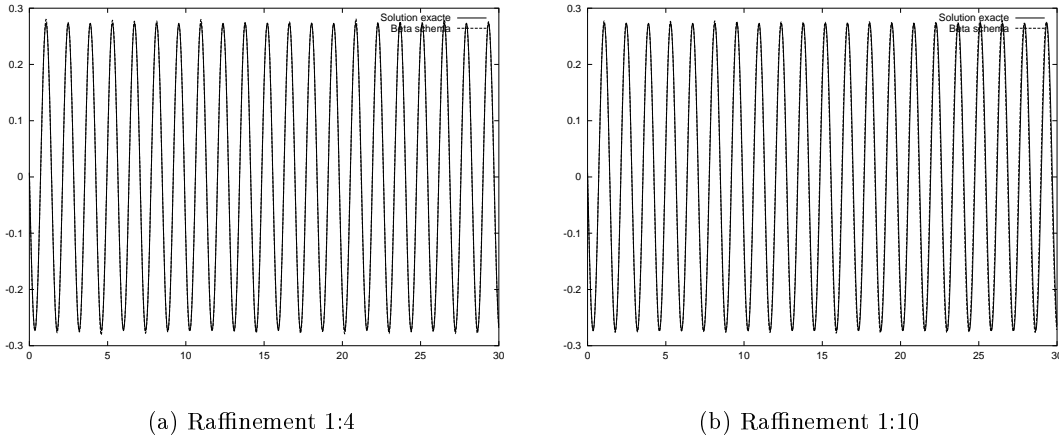


FIG. 2.15 – Mode propre - Raffinement non-conforme - Zoom sur les 30 premières périodes

### 2.3.4.3 Un dipôle résonnant

On propose ici de simuler l'évolution d'un dipôle rayonnant placé au milieu d'une cavité métallique constituée de vide. Pour ce faire, on intègre sur chaque cellule  $V$  du maillage l'équation du système de Maxwell liant le champ électrique  $\mathbf{E}$ , le champ magnétique  $\mathbf{H}$  et la densité de courant  $\mathbf{j}$

$$\int_V \epsilon(x) \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \int_V \text{rot}(\mathbf{H}) - \int_V \mathbf{j}.$$

Or, la densité de courant et le moment dipolaire sont liés par la relation

$$\int_V \mathbf{j} = -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}.$$

On simule pour la polarisation TM un dipôle électrique dont le moment dipolaire  $p$  est

$$p(t) = 10^{-10} \exp \left( - \left( \frac{t - 3T}{T} \right)^2 \right)$$

où  $T = 2ns$ . La boîte métallique a pour dimension 1 mètre  $\times$  1 mètre. Le dipôle électrique est placé au centre de la cavité. Un mode de résonance s'établit. On stoppe le calcul à  $t = 33$  ns. On réalise cette simulation sur 3 maillages différents (figure 2.16)

- un maillage uniforme  $80 \times 80$  cellules  $\rightarrow$  solution de référence
- un maillage  $40 \times 40$  cellules raffiné 2 fois au milieu du domaine
- un maillage  $20 \times 20$  cellules raffiné 4 fois au milieu du domaine.

On montre sur la figure 2.17 l'évolution temporelle du champ  $E_z$  en un point de la grille fine. La figure 2.18 représente la solution en espace du champ  $E_z$  lorsque le calcul est terminé. Le but de cette simulation est de montrer que l'établissement du mode de résonance est très peu affecté par la présence d'une grille raffinée de manière non-conforme.



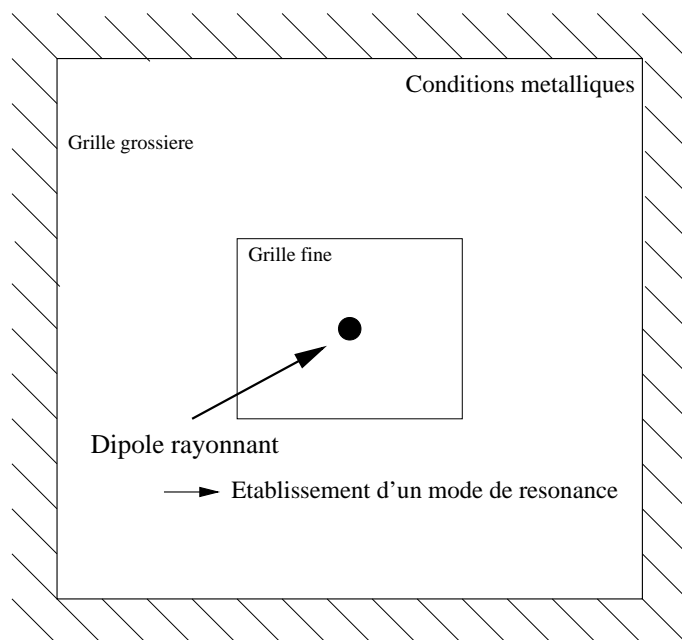
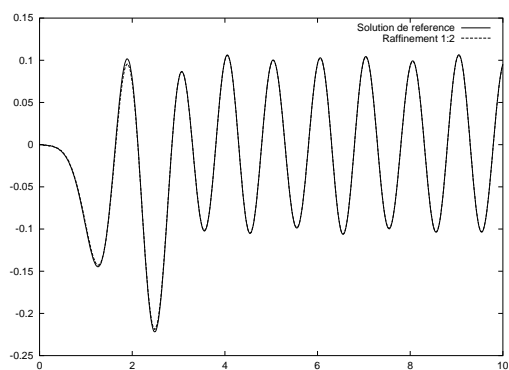
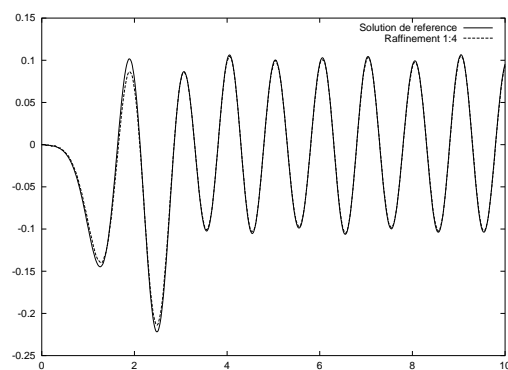


FIG. 2.16 – *Dipôle résonnant*

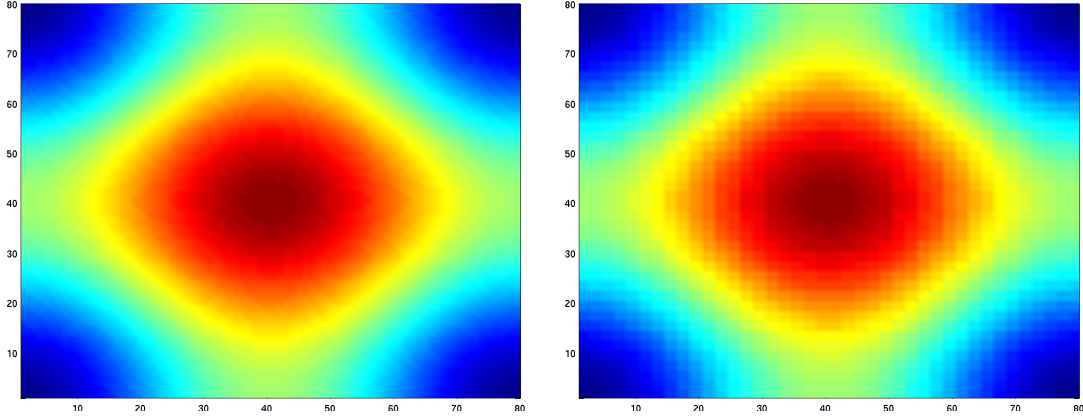


(a) Raffinement 1:2



(b) Raffinement 1:4

FIG. 2.17 – *Evolution du dipôle au cours du temps en un point de la grille fine / Comparaison à une solution de référence*



(a) Solution de référence

(b) Raffinement 1:4

 FIG. 2.18 – Dipôle résonnant - Champ  $E_z$  à la fin de la simulation

## 2.4 Cas tri-dimensionnel

### 2.4.1 Cas conforme

On se place d'abord dans le cas d'un maillage conforme. On étend directement au cas 3D le schéma présenté en 2D.

- Les gradients sont calculés de manière centrée.
- Lorsque le maillage est cubique ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ), on introduit un paramètre  $\beta$  et on cherche à minimiser le maximum de l'erreur de dispersion comme nous l'avons fait dans le cas bi-dimensionnel (proposition 2.3.1). Pour toute onde plane dont le vecteur d'onde est donné par  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|^t (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi)$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ), on montre que le  $\beta$ -schéma vérifie la relation de dispersion discrète

$$w^2 = |\mathbf{k}|^2 C^2 + |\mathbf{k}|^4 C^2 \frac{\Delta x^2}{3} \left[ \frac{\nu^2}{12} - (1 - 3\beta)((\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \cos^4(\phi) + \sin^4(\phi)) \right] + O(\Delta^4), \quad (2.27)$$

$$\text{où } \nu = \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}.$$

On cherche alors à minimiser le maximum de l'erreur de dispersion soit à calculer

$$\min_{\beta} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \max_{\phi \in [-\pi/2, \pi/2]} \left| \frac{\nu^2}{12} - (1 - 3\beta)((\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \cos^4(\phi) + \sin^4(\phi)) \right|, \quad (2.28)$$

soit

$$\min_{\beta} \max_{\alpha \in [1/3, 1]} \left| \frac{\nu^2}{12} - (1 - 3\beta)\alpha \right|. \quad (2.29)$$

En effet,

$$\cos^4(\phi)/2 + \sin^4(\phi) \leq (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \cos^4(\phi) + \sin^4(\phi) \leq \cos^4(\phi) + \sin^4(\phi) \leq 1.$$

On vérifie facilement

$$\min_{\phi \in [-\pi/2, \pi/2]} \cos^4(\phi)/2 + \sin^4(\phi) = 1/3.$$

La résolution de (2.29) nous permet de minimiser le maximum de l'erreur de dispersion avec

$$\beta = \frac{1}{3} - \frac{\nu^2}{24}. \quad (2.30)$$

- Lorsque le maillage n'est pas cubique, on cherche à annuler le terme d'ordre deux de la relation de dispersion discrète pour toute onde plane dont le vecteur d'onde est colinéaire à un des axes. On introduit alors trois paramètres

$$\begin{cases} \beta_x = \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{12\Delta x^2}, \\ \beta_y = \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{12\Delta y^2}, \\ \beta_z = \frac{1}{3} - \frac{\Delta t^2}{12\Delta z^2}. \end{cases} \quad (2.31)$$

- Lorsque le maillage est raffiné, ces paramètres sont définis localement.

On montre par une analyse de Fourier que le schéma est stable sous une condition de type CFL sur toute grille régulière ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  constants). Cette condition est

$$\Delta t^2 (f(\beta_x, \Delta x, \theta) + f(\beta_y, \Delta y, \phi) + f(\beta_z, \Delta z, \psi)) \leq 16, \quad \forall (\theta, \phi, \psi) \in [0, 2\pi]^3, \quad (2.32)$$

où  $f(\beta, \Delta, \gamma) = \left( \frac{2(1 + \beta) \sin(\gamma) - \beta \sin(2\gamma)}{\Delta} \right)^2$ .

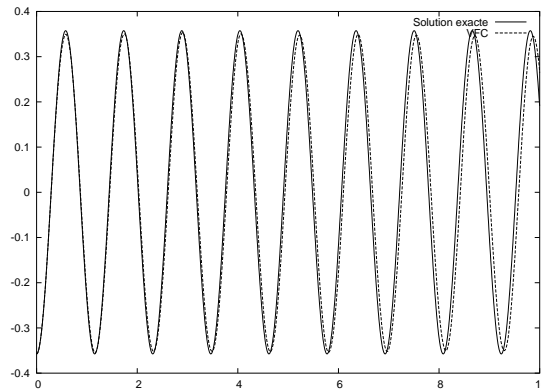
Le tableau 2.3 recense les valeurs maximales de  $\nu = \Delta t \sqrt{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2}}$  autorisées par la condition de stabilité pour différentes valeurs de  $\beta$  lorsque le maillage est cubique.

	$\nu$
$\beta = 0$	2
$\beta = \frac{1}{4}$	1.57
$\beta = \frac{1}{3}$	1.46
$\beta = 1$	0.9

TAB. 2.3 – CFL en fonction de  $\beta = \beta_x = \beta_y = \beta_z$  (maillage cubique)

On vérifie numériquement que  $\forall \nu \leq 1.61$ , le  $\beta$ -schéma associé à la formule (2.30) ou (2.31)

est stable sur toute grille régulière. Afin de vérifier que le schéma proposé est aussi très peu dispersif en 3D, on simule l'évolution du mode propre (1,1,1) dans une cavité cubique métallique. Le centre de la cavité est raffiné de manière conforme. Le taux de raffinement est 8. Le maillage de la grille grossière est de 15 points par longueur d'onde. La durée de la simulation est de 80 périodes. La figure 2.19 montre l'évolution temporelle en un point du champ  $E_z$  sur les 8 premières périodes. On compare la solution calculée par le  $\beta$ -schéma et celle calculée par le schéma VFC. La solution du schéma VFC est déjà dispersée alors que celle du  $\beta$ -schéma se compare parfaitement à la solution exacte. On montre sur la figure 2.20 le champ  $E_z$  sur les 8 dernières périodes de la simulation. Les résultats sont toujours de très bonne qualité : la solution obtenue par le  $\beta$ -schéma après 80 périodes est bien moins dispersée que celle obtenue par le schéma VFC après 8 périodes.



(a) Volumes Finis Centrés

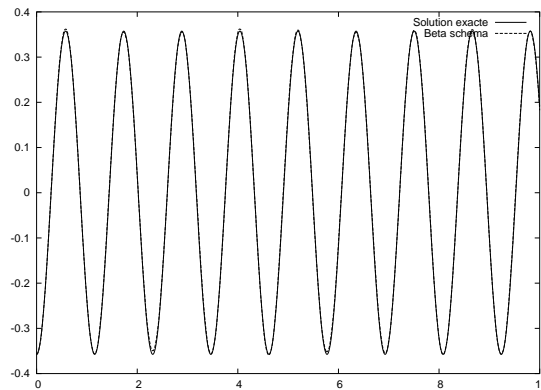
(b)  $\beta$ -schéma

FIG. 2.19 – Raffinement conforme 3D (rapport maximum entre les volumes :  $8^3$ ) - Mode propre : évolution temporelle du champ  $E_z$  sur les 8 premières périodes

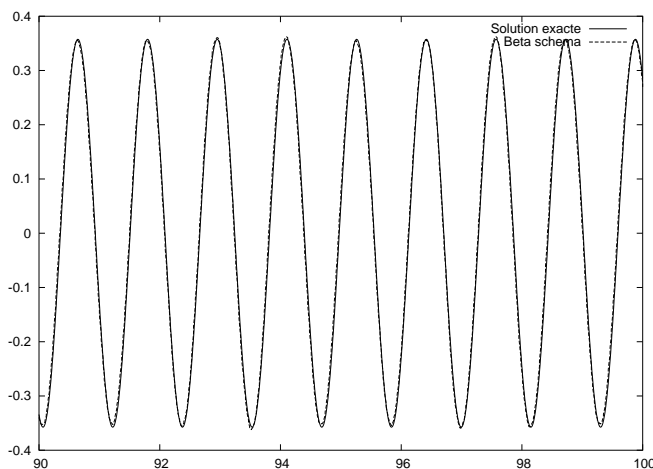


FIG. 2.20 – *Raffinement conforme 3D (rapport maximum entre les volumes :  $8^3$ ) - Mode propre : évolution temporelle du champ  $E_z$  sur les 8 dernières périodes*

### 2.4.2 Instabilités dans le cas non-conforme

Nous avons obtenu dans le cas 2D des résultats très encourageants sur des grilles non-conformes. Malheureusement, le  $\beta$ -schéma tel que nous l'avons défini s'est montré instable en 3D sur ces mêmes grilles non-conformes. Nous n'avons d'ailleurs démontré la stabilité de ce schéma que sur une grille uniforme (et donc avec  $\beta$  constant). Ce schéma Volumes Finis utilise une technique d'interpolation pour augmenter la précision du calcul des flux. A l'image des méthodes de raffinement spatio-temporel en Différences finies basées sur des interpolations, cette technique nous permet de maîtriser l'erreur de dispersion mais nous interdit d'établir un résultat de stabilité. Il est difficile d'analyser la nature de cette instabilité dans le cas d'un maillage 3D non-conforme. Cette approche nous laisse donc peu d'espoir de trouver une formule d'interpolation permettant de proposer un schéma stable. Nous allons par la suite nous intéresser à une famille de schémas Galerkin Discontinu faisant aussi intervenir un calcul de flux précis tout en garantissant a priori la stabilité sur tout type de maillage.

## 2.5 Conclusion

La méthode Volumes Finis présentée ici permet d'améliorer la précision du schéma VFC. Les propriétés de ce dernier (conservation d'une énergie discrète, stabilité) n'ont pu être démontrées que sur des grilles uniformes. Les flux sont ici calculés par une formule d'interpolation qui dépend d'un paramètre  $\beta$ . Dans le cas d'un maillage localement raffiné, ce paramètre est ajusté localement afin de minimiser l'erreur de dispersion. Nous pouvons donc traiter des grilles raffinées sans avoir recours à un raffinement temporel. Dans le cas non-conforme, les très bons résultats obtenus en 2D n'ont pu être étendus en 3D. La méthode s'est en effet révélée instable dans ce cas. Néanmoins, nous proposons une méthode

tri-dimensionnelle à même de traiter des grilles raffinées conformes. Les résultats obtenus sont incontestablement meilleurs que ceux obtenus par le schéma VFC. Ce schéma est d'autant plus intéressant que la différence de coût est peu importante (calcul des gradients et baisse du CFL de 20 %).



# Méthode Galerkin Discontinu

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation de la méthode</b>	<b>56</b>
3.1.1	Discrétisation spatiale	56
3.1.2	Discrétisation temporelle	58
3.1.3	Conditions aux limites	58
3.1.4	Stabilité du schéma	58
<b>3.2</b>	<b>Choix des fonctions de base</b>	<b>59</b>
<b>3.3</b>	<b>Etude de l'erreur de dispersion</b>	<b>61</b>
<b>3.4</b>	<b>Conservation de la divergence</b>	<b>65</b>
3.4.1	Cas tétraédrique	68
3.4.2	Cas hexaédrique	68
3.4.3	Validation numérique: cas d'une cavité chargée	69
<b>3.5</b>	<b>Matériau fictif absorbant</b>	<b>72</b>
3.5.1	Principe	73
3.5.2	Approximation numérique	74
3.5.3	Conditions aux limites	75
3.5.4	Illustration numérique	75
<b>3.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>77</b>
3.6.1	Abri métallique	77
3.6.2	Diffraction par un cube métallique	80
3.6.3	Résonateur diélectrique	83
3.6.4	Propagation d'un dipôle sur des grilles raffinées	89
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

---

On présente ici une méthode Galerkin Discontinu adaptée aux maillages hexaédriques orthogonaux. Bien qu'ayant été utilisée dans de nombreux domaines [19], l'approche Galerkin Discontinu a été peu souvent exploitée pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Un schéma Galerkin Discontinu reposant sur un solveur de Riemann pour le calcul des flux et un schéma Runge-Kutta pour la discrétisation temporelle a récemment été proposé dans le cas bi-dimensionnel [54]. Les défauts de ce type de schéma sont son coût et son caractère diffusif. Une réponse a été apportée dans [37] où les auteurs



proposent une méthode d'ordre élevé permettant de réduire la diffusion et de travailler avec peu de points par longueur d'onde. Cette approche n'est pas intéressante pour les applications qui sont visées ici (analyse temporelle d'antennes) puisqu'elles nécessitent la prise en compte de structures petites devant la longueur d'onde. Nous proposons ici de remédier à ces inconvénients en associant une formule centrée pour le calcul des flux à un schéma saute-mouton d'ordre deux pour l'intégration en temps. Comme le schéma VFC [49] dont il reprend les ingrédients, Le schéma proposé est non-diffusif et stable. On présente également un choix de fonctions de base adapté aux maillages orthogonaux. Ce choix est peu coûteux et permet d'assurer la conservation de la divergence. On montre enfin que contrairement au schéma de Yee ou au schéma VFC l'erreur de dispersion est peu dépendante du CFL local. Cette propriété nous permet d'envisager d'utiliser la méthode Galerkin Discontinu sur des maillages localement raffinés.

### 3.1 Présentation de la méthode

#### 3.1.1 Discrétisation spatiale

On présente tout d'abord dans un cadre général la méthode Galerkin Discontinu que nous avons développée. On considère le système de Maxwell en variables  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  avec densité volumique de courant  $\mathbf{j}$

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{H}) - \mathbf{j}, \\ \mu(x) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot}(\mathbf{E}). \end{cases} \quad (3.1)$$

On se donne alors un maillage quelconque (conforme ou non-conforme) constitué de cellules  $V_i$ . On appelle interface entre deux cellules toute intersection distincte d'un point ou d'une arête. Une interface dans le cas conforme est donc une face. On la note  $F_{ik} = V_i \cap V_k$ . On note  $\mathbf{n}_{ik}$  l'intégrale sur  $F_{ik}$  de la normale orientée de  $V_i$  vers  $V_k$ . On désigne par  $\tilde{\mathbf{n}}_{ik}$  la normale unitaire ( $\tilde{\mathbf{n}}_{ik} = \mathbf{n}_{ik}/\|\mathbf{n}_{ik}\|$ ). On note  $\mathcal{V}_i$  l'ensemble des cellules voisines de  $V_i$ . On note enfin  $\varepsilon_i$  (respectivement  $\mu_i$ ) la valeur moyenne de  $\varepsilon$  (respectivement  $\mu$ ) sur la cellule  $V_i$ . Sur chacune des cellules, on se donne un espace vectoriel de dimension  $d_i$  et un ensemble de fonctions de base vectorielles  $\varphi_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ , où  $d_i$  est le nombre de degrés de liberté dans la cellule  $V_i$ . Ces fonctions de bases n'assurent aucune continuité d'une cellule à une autre. En multipliant le système (3.1) par la fonction de base  $\varphi_{ij}$  et en intégrant sur  $V_i$ , on obtient

$$\begin{cases} \int_{V_i} \varepsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \varphi_{ij} = \int_{V_i} (\text{rot}(\mathbf{H}) - \mathbf{j}) \cdot \varphi_{ij}, \\ \int_{V_i} \mu_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \varphi_{ij} = - \int_{V_i} \text{rot}(\mathbf{E}) \cdot \varphi_{ij}. \end{cases} \quad (3.2)$$

En utilisant l'identité  $\text{rot}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - \text{div}(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ , on obtient

$$\begin{cases} \int_{V_i} \varepsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} = \int_{V_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{H} - \int_{V_i} \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} - \int_{\partial V_i} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \mathbf{H}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \\ \int_{V_i} \mu_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} = - \int_{V_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{E} + \int_{\partial V_i} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \mathbf{E}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}$  est la normale unitaire extérieure à  $V_i$ . On note à présent  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  la projection orthogonale de  $\mathbf{E}$  et de  $\mathbf{H}$  dans l'espace vectoriel  $\text{Vect}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i)$ . Nous aurons sur tout le domaine de calcul la représentation discontinue suivante des champs

$$\begin{cases} \mathbf{E} \simeq \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} E_{ij} \boldsymbol{\varphi}_{ij}, \\ \mathbf{H} \simeq \sum_i \mathbf{H}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} H_{ij} \boldsymbol{\varphi}_{ij}, \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $E_{ij}$  (respectivement  $H_{ij}$ ) désigne le  $j^{\text{ieme}}$  degré de liberté de  $\mathbf{E}_i$  (respectivement  $\mathbf{H}_i$ ). On note  $\vec{\mathbf{E}}_i$  (respectivement  $\vec{\mathbf{H}}_i$ ) le vecteur colonne  $(E_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$  (respectivement  $(H_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$ ). On a la propriété suivante

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \text{Vect}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i), \int_{V_i} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\varphi} = \int_{V_i} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad \text{et} \quad \int_{V_i} \mathbf{H}_i \cdot \boldsymbol{\varphi} = \int_{V_i} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi}. \quad (3.5)$$

Les inconnues numériques de la méthode sont des approximations des  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  qui peuvent être ainsi directement utilisées pour calculer les intégrales volumiques de (3.3).

Aucune continuité n'est imposée d'une cellule à une autre. Sur chaque interface  $F_{ik}$ , les valeurs des champs sont donc à définir. On propose d'utiliser une approximation centrée

$$k \in \mathcal{V}_i, \forall x \in F_{ik}, \mathbf{E}(x) = \frac{\mathbf{E}_i(x) + \mathbf{E}_k(x)}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(x) = \frac{\mathbf{H}_i(x) + \mathbf{H}_k(x)}{2}. \quad (3.6)$$

On utilise cette approximation centrée pour évaluer les intégrales surfaciques. On aboutit finalement au système semi-discret

$$\begin{cases} \left( \varepsilon_i M_i \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}_i}{\partial t} \right)_j = \int_{V_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{H}_i - \int_{V_i} \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \frac{\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_k}{2}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}, \\ \left( \mu_i M_i \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}_i}{\partial t} \right)_j = - \int_{V_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{E}_i + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \frac{\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_k}{2}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}, \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $M_i$  est la matrice de masse locale associée à la cellule  $V_i$

$$(M_i)_{jk} = \int_{V_i} {}^t \boldsymbol{\varphi}_{ij} \boldsymbol{\varphi}_{ik}, \quad 1 \leq j, k \leq d_i. \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Discrétisation temporelle

Concernant l'intégration temporelle, on utilise un schéma saute-mouton d'ordre 2 identique à celui utilisé pour le schéma VFC (section 1.6.1). Les degrés de liberté associés au champ électrique  $\mathbf{E}$  sont calculés aux instants  $t^n = n\Delta t$  et sont notés  $E_{ij}^n$ . Les degrés de liberté associés au champ magnétique sont quant à eux calculés aux instants  $t^{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$  et sont notés  $H_{ij}^{n+1/2}$ . Les quantités  $\mathbf{E}_i^n$ ,  $\mathbf{H}_i^{n+1/2}$ ,  $\vec{\mathbf{E}}_i^n$  et  $\vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2}$  sont définies de manière analogue. Le vecteur  $\mathbf{j}^{n+1/2}$  désigne la valeur du courant source  $\mathbf{j}$  à l'instant  $(n+1/2)\Delta t$ . Le schéma s'écrit alors

$$\begin{cases} \left( \varepsilon_i M_i \frac{\vec{\mathbf{E}}_i^{n+1} - \vec{\mathbf{E}}_i^n}{\Delta t} \right)_j = \int_{V_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{H}_i^{n+1/2} - \int_{V_i} \mathbf{j}^{n+1/2} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \frac{\mathbf{H}_i^{n+1/2} + \mathbf{H}_k^{n+1/2}}{2}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}, \\ \left( \mu_i M_i \frac{\vec{\mathbf{H}}_i^{n+3/2} - \vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2}}{\Delta t} \right)_j = - \int_{V_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{E}_i^{n+1} + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \frac{\mathbf{E}_i^{n+1} + \mathbf{E}_k^{n+1}}{2}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}. \end{cases} \quad (3.9)$$

**Remarque 3.1.1** On peut d'ores et déjà remarquer que pour une discrétisation  $\mathbb{P}^0$  (i.e.  $\forall i, d_i = 1$  et  $\varphi_{i1} = 1$ ), le schéma (3.9) est exactement le schéma VFC décrit dans la section 1.6.

### 3.1.3 Conditions aux limites

Soit une cellule  $V_i$  au bord du domaine. On considère alors une cellule fictive  $V_k$  et on note  $F_{ik}$  la face frontière. Les conditions aux limites sont prises en compte en imposant des valeurs aux champs sur les cellules fictives  $V_k$ .

Pour tout face métallique  $F_{ik}$ , on utilise

$$\forall x \in F_{ik}, \begin{cases} \mathbf{E}_k^n(x) = -\mathbf{E}_i^n(x), \\ \mathbf{H}_k^{n+1/2}(x) = \mathbf{H}_i^{n+1/2}(x). \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour simuler des conditions absorbantes, on utilise la condition d'ordre un de Silver-Müller. Cette condition nécessite de placer la frontière assez loin des objets diffractants. On propose de prendre en compte cette condition de Silver-Müller par les relations suivantes

$$\forall x \in F_{ik}, \begin{cases} \mathbf{H}_k^{n+1/2}(x) = c_i \varepsilon_i \tilde{\mathbf{n}}_{ik} \times \mathbf{E}_i^n(x), \\ \mathbf{E}_k^{n+1}(x) = -c_i \mu_i \tilde{\mathbf{n}}_{ik} \times \mathbf{H}_i^{n+1/2}(x), \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $c_i = 1/\sqrt{\mu_i \varepsilon_i}$  est la vitesse locale du milieu.

### 3.1.4 Stabilité du schéma

On rappelle ici un résultat donné dans [48] et qui reste vrai même lorsque le maillage est non-conforme. Les auteurs ont montré que la classe de schéma décrite par (3.9) conserve

exactement un équivalent discret de l'énergie électromagnétique lorsque les conditions aux limites sont métalliques. Ainsi, le schéma est non-diffusif. De plus, sous une condition de type CFL sur  $\Delta t$ , cette énergie discrète est une forme quadratique définie positive des inconnues numériques  $\vec{\mathbf{E}}_i^n$  et  $\vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2}$ . La stabilité du schéma est ainsi assurée. La condition de stabilité donnée dans [48] est une condition suffisante très restrictive que nous n'utiliserons pas dans la pratique. La condition de stabilité que nous utiliserons sera déterminée numériquement. Notons que dans ce formalisme très général, la seule contrainte est de choisir sur chaque élément les mêmes fonctions de base pour représenter  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . L'expression de cette énergie discrète  $\mathcal{E}^n$  à l'instant  $n$  est donnée par

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2} \sum_{\text{Cellules } i} \varepsilon_i {}^t \vec{\mathbf{E}}_i^n M_i \vec{\mathbf{E}}_i^n + \mu_i {}^t \vec{\mathbf{H}}_i^{n-1/2} M_i \vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2}. \quad (3.12)$$

## 3.2 Choix des fonctions de base

Comme nous l'avons vu dans la section 3.1.4, le schéma Galerkin Discontinu (3.9) est stable quelles que soient les fonctions de bases que l'on choisit pourvu qu'elles soient identiques pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . On ne considère ici que des maillages hexaédriques orthogonaux. On souhaite approcher les champs par des fonctions linéaires. Une approche classique serait d'utiliser une base de  $\mathbb{P}^1$ . On propose ici une base de fonctions qui nécessite moins de degrés de liberté. On notera l'espace vectoriel engendré par ces fonctions de base  $\mathbb{P}_{div}^1$ . Considérons donc un maillage hexaédrique orthogonal. Pour chaque cellule  $V_i$ , on note  $\mathbf{G}_i = {}^t(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i})$  son centre de gravité et  $\Delta = {}^t(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$  sa taille. On introduit alors l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$  engendré par les fonctions de base suivantes

$$\begin{cases} \varphi_{i1} = {}^t(1, 0, 0), & \varphi_{i2} = {}^t(y - y_{G_i}, 0, 0), & \varphi_{i3} = {}^t(z - z_{G_i}, 0, 0), \\ \varphi_{i4} = {}^t(0, 1, 0), & \varphi_{i5} = {}^t(0, x - x_{G_i}, 0), & \varphi_{i6} = {}^t(0, z - z_{G_i}, 0), \\ \varphi_{i7} = {}^t(0, 0, 1), & \varphi_{i8} = {}^t(0, 0, x - x_{G_i}), & \varphi_{i9} = {}^t(0, 0, y - y_{G_i}). \end{cases} \quad (3.13)$$

On appellera GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  le schéma Galerkin Discontinu résultant du choix des fonctions de base  $\mathbb{P}_{div}^1$ .

**Remarque 3.2.1** *Toute fonction appartenant à l'espace discontinu  $\mathbb{P}_{div}^1$  est à divergence nulle dans chaque cellule  $V_i$ . C'est la raison pour laquelle nous avons choisi la notation  $\mathbb{P}_{div}^1$ . On étudiera la conservation des relations de divergence dans la section 3.4.*

**Remarque 3.2.2** *La base de  $\mathbb{P}_{div}^1$  est orthogonale. On a en effet*

$$\forall k, \forall l (1 \leq k, l \leq 9), \int_{V_i} \varphi_{ik} \cdot \varphi_{il} = 0 \text{ si } k \neq l.$$

*Par conséquent, les matrices de masse locales  $M_i$  sont diagonales.*

**Remarque 3.2.3** Un développement de Taylor sur un champ de vecteur  $\mathbf{E}$  dans l'élément  $V_i$  autour de  $\mathbf{G}_i = {}^t(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i})$ , nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) = & \mathbf{E}(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}) + (x - x_{G_i}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}) \\ & + (y - y_{G_i}) \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}) + (z - z_{G_i}) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}) + O(\Delta^2). \end{aligned}$$

En identifiant avec la projection de  $\mathbf{E}$  dans l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$ , on déduit que dans chaque cellule  $V_i$ , les degrés de liberté de  $\mathbf{E}$  représentent les quantités

$$\begin{aligned} E_{i1} & \longrightarrow E_x(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}), \\ E_{i2} & \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} E_x(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}), \\ E_{i3} & \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z} E_x(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}), \\ E_{i4} & \longrightarrow E_y(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}), \\ E_{i5} & \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} E_y(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}), \\ E_{i6} & \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z} E_y(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}), \\ E_{i7} & \longrightarrow E_z(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}), \\ E_{i8} & \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} E_z(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}), \\ E_{i9} & \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} E_z(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}). \end{aligned}$$

Contrairement à une discrétisation  $\mathbb{P}^1$ ,  $E_x$  (respectivement  $E_y$  et  $E_z$ ) ne varie pas dans la direction  $x$  (respectivement  $y$  et  $z$ ). Il s'agit d'une propriété que partage l'espace des éléments finis cubiques de plus bas degré de Nédélec pour  $H(\text{rot})$  [47]. L'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$  requiert donc un degré de liberté de moins par composante de champ que l'espace  $\mathbb{P}^1$ . L'espace  $\mathbb{Q}^1$  est encore plus coûteux puisque un degré de liberté par composante de champ est nécessaire sur chaque sommet de cubes. On recense dans le tableau 3.1 le nombre de degrés de liberté nécessaire pour un champ dans chaque tétraèdre pour diverses discrétisations.

	$\mathbb{P}^0$	$\mathbb{P}_{div}^1$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{Q}^1$
Degrés de liberté	3	9	12	24

TAB. 3.1 – Nombre de degrés de liberté pour un champ

On sait que le schéma résultant de ce choix de fonctions de base est stable (conservation de l'énergie : section 3.1.4). Nous avons constaté numériquement sur un maillage cubique que la limite de stabilité de  $\nu = \Delta t \sqrt{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2}}$  est 0.65. Cette valeur est à comparer avec la limite de stabilité du schéma de Yee et celle du schéma VFC (tableau 3.2). On rappelle que le schéma VFC est équivalent au schéma Galerkin Discontinu que nous venons de décrire avec une approximation  $\mathbb{P}^0$ . On s'attendait donc à ce que la condition de stabilité soit plus restrictive pour le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ . Nous avons vu (section 1.6) que le schéma  $\mathbb{P}^0$  n'a pas les propriétés pour traiter des grilles raffinées (dispersion, réflexions parasites). Il est donc indispensable de monter en ordre.

	Yee	VFC	$\mathbb{P}_{div}^1$
$\nu$	1	2	0.65

TAB. 3.2 – Condition de stabilité

### 3.3 Etude de l'erreur de dispersion

On propose ici d'étudier l'erreur de dispersion du schéma Galerkin Discontinu  $\mathbb{P}_{div}^1$  et de la comparer à celle du schéma de Yee. Notre étude se limitera au calcul de la relation de dispersion discrète pour des ondes planes dont le vecteur d'onde est colinéaire à  ${}^t(1,0,0)$ ,  ${}^t(1,1,0)$  ou  ${}^t(1,1,1)$ .

On détaille le calcul pour une onde plane colinéaire à  ${}^t(1,0,0)$ . On considère une grille régulière ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  constants). On repère pour cette démonstration les cellules par leurs indices  $j$ ,  $m$  et  $p$ . On a noté précédemment  $E_{id}$  le  $d^{ieme}$  degré de liberté de  $\mathbf{E}$  dans la cellule  $i$ . On désigne à présent par  $E_{jmp,d}$  le  $d^{ieme}$  degré de liberté de  $\mathbf{E}$  dans la cellule  $(j,m,p)$ . On cherche ainsi une solution du schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{jmp,4}^{n+\frac{1}{2}} = H_4 e^{i(\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t + jk\Delta x)}, \\ H_{jmp,5}^{n+\frac{1}{2}} = H_5 e^{i(\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t + jk\Delta x)}, \\ E_{jmp,7}^n = E_7 e^{i(\omega n \Delta t + jk\Delta x)}, \\ E_{jmp,8}^n = E_8 e^{i(\omega n \Delta t + jk\Delta x)}, \\ H_{jmp,d}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad d \neq 4, \quad d \neq 5, \\ E_{jmp,d}^n = 0, \quad d \neq 7, \quad d \neq 8. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

**Remarque 3.3.1** La recherche d'une solution du schéma ayant pour vecteur d'onde  ${}^t(k,0,0)$  est un problème 1D dans lequel seul l'indice  $j$  intervient. Les amplitudes  $H_4$ ,  $H_5$ ,  $E_7$  et  $E_8$  sont relatives à la valeur moyenne de  $H_y$ , la dérivée en  $x$  de  $H_y$ , la valeur moyenne de  $E_z$  et la dérivée en  $x$  de  $E_z$  (remarque 3.2.3).

On introduit les réels  $s, t, u, v$  et les matrices  $P$  et  $Q$

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{i \sin(k\Delta x)}{\Delta x}, \\ t = \frac{1}{2}(1 - \cos(k\Delta x)), \\ u = \frac{3}{\Delta x^2}(2 \cos(k\Delta x) - 2), \\ v = \frac{-3i \sin(k\Delta x)}{\Delta x}, \end{array} \right.$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s & t \\ 0 & 0 & u & v \\ s & t & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathbf{V} = {}^t(H_4, H_5, E_7, E_8)$ . Toute solution du schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  sous la forme (3.14) vérifie

$$\frac{2i}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \mathbf{V} = Q^{-1} P \mathbf{V}. \quad (3.15)$$

Afin d'établir une relation entre  $\omega, k$  et  $c$ , on calcule les valeurs propres de  $Q^{-1}P$ . A l'ordre deux, les quatre valeurs propres de  $Q^{-1}P$  sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1/k &= 1 + k^2 \Delta x^2 / 48 + O(k^4 \Delta x^4), \\ \lambda_2/k &= -1 - k^2 \Delta x^2 / 48 + O(k^4 \Delta x^4), \\ \lambda_3/k &= 3 + 5k^2 \Delta x^2 / 16 + O(k^4 \Delta x^4), \\ \lambda_4/k &= -3 - 5k^2 \Delta x^2 / 16 + O(k^4 \Delta x^4). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les vecteurs propres associés à  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  tendent vers  ${}^t(0, \pm i, 0, \pm 1)$  lorsque  $\Delta x$  tend vers 0. Il s'agit de modes parasites:  $H_{jmp,4}$  (valeur moyenne de  $H_y$  dans la cellule  $(j, m, p)$ ) et  $E_{jmp,7}$  (valeur moyenne de  $E_z$  dans la cellule  $(j, m, p)$ ) sont nuls. En considérant  $\lambda_1, \lambda_2$  et (3.15), on obtient

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{12} + \frac{k^4 c^2 \Delta x^2}{24} + O(\Delta x^4). \quad (3.17)$$

En supposant que le maillage est cubique ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ) et en notant  $\nu = c \Delta t \sqrt{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2}}$ , la relation (3.17) s'écrit

$$\omega^2 = k^2 c^2 \left( 1 + k^2 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} + \frac{1}{24} \right) + O(k^4 \Delta x^4) \right). \quad (3.18)$$

Considérons à présent une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = {}^t(k_x, k_y, k_z)$  et un maillage régulier ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  constants). On cherche alors des solutions du schéma sous la forme

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{H}}_{j,m,p}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{\mathbf{H}}_0 e^{i(\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t + jk_x\Delta x + mk_y\Delta y + pk_z\Delta z)}, \\ \vec{\mathbf{E}}_{j,m,p}^n = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega n\Delta t + jk_x\Delta x + mk_y\Delta y + pk_z\Delta z)}, \end{cases}$$

où  $\vec{\mathbf{H}}_0$  et  $\vec{\mathbf{E}}_0$  sont des vecteurs réels de dimension neuf. En injectant une telle solution dans le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ , on aboutit à un système similaire à (3.15) où la matrice  $Q^{-1}P$  est maintenant de taille  $18 \times 18$ . Après calcul des valeurs propres de  $Q^{-1}P$ , sélection des modes non-parasites et développements limités, on obtient pour un maillage cubique les relations de dispersion discrète suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{2} {}^t(1,1,0) : \quad \omega^2 &= |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} - \frac{1}{168} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right), \\ \mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{3} {}^t(1,1,1) : \quad \omega^2 &= |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} - \frac{1}{36} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

On rappelle pour le schéma de Yee les relations de dispersion correspondantes

$$\begin{aligned} \mathbf{k} = |\mathbf{k}| {}^t(1,0,0) : \quad \omega^2 &= |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} - \frac{1}{12} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right), \\ \mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{2} {}^t(1,1,0) : \quad \omega^2 &= |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} - \frac{1}{24} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right), \\ \mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{3} {}^t(1,1,1) : \quad \omega^2 &= |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} - \frac{1}{36} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

On a représenté sur les figures 3.1 et 3.2 le terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion pour les trois vecteurs d'onde considérés précédemment pour les schémas GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  et Yee. Ces termes d'ordre deux ont été tracés en fonction de  $\nu$  sur les plages de stabilité respectives des schémas ( $\nu \in [0, 0.65]$  pour GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  et  $\nu \in [0, 1]$  pour Yee) et ont été normalisés par le maximum de l'erreur (atteint par le schéma de Yee pour  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| {}^t(1,0,0)$  et  $\nu = 0$  : on donne donc  $(\omega^2 - |\mathbf{k}|^2 c^2)/(|\mathbf{k}|^4 c^2 \Delta x/12)$ ).

Cette étude n'est pas aussi complète qu'une analyse pour  $\mathbf{k}$  quelconque. La difficulté d'une telle analyse réside pour nous dans le calcul des valeurs propres de  $Q^{-1}P$ . Les trois directions de propagation étudiées caractérisent néanmoins le comportement du schéma. Des figures 3.1 et 3.2, on peut tirer les deux enseignements suivants.

1. Lorsque  $\nu$  est maximal (par rapport à la limite de stabilité), l'erreur maximale commise par les deux schémas est équivalente (0.67 pour Yee et 0.64 pour GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ ).
2. Lorsque  $\nu$  devient petit, l'erreur maximale du schéma de Yee augmente alors qu'elle diminue pour GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ . On donne dans le tableau 3.3 plusieurs valeurs (en fonction de  $\nu$ ) des erreurs maximale et minimale commises par les deux schémas. Contrairement



au schéma de Yee, baisser  $\nu$  (i.e. baisser  $\Delta t$ ) ne dégrade pas la précision du schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ . Cette méthode semble donc pouvoir traiter des maillages localement raffinés sans devoir introduire un pas de temps local pour contrôler l'erreur de dispersion.

	Erreur maximale		Erreur minimale	
	GD- $\mathbb{P}_{div}^1$	Yee	GD- $\mathbb{P}_{div}^1$	Yee
$\nu_{max}$	0.64	0.67	0.07	0
$\nu_{max}/2$	0.53	0.91	0.04	0.25
$\nu_{max}/4$	0.51	0.98	0.06	0.31
0	0.5	1	0.07	0.33

TAB. 3.3 – Valeurs maximales et minimales des termes d'erreur de dispersion d'ordre 2 pour différentes valeurs de  $\nu$

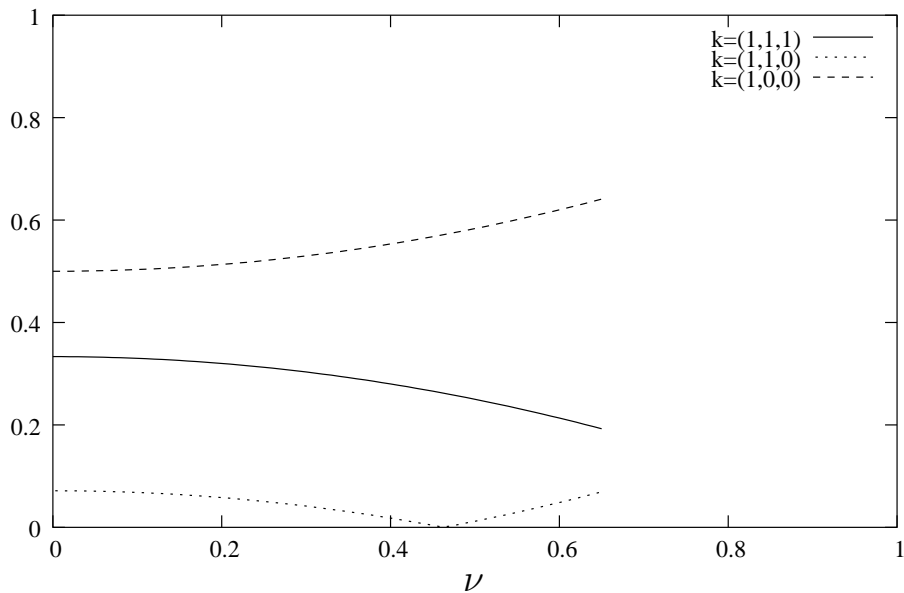


FIG. 3.1 – Galerkin Discontinu  $\mathbb{P}_{div}^1$ : terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion en fonction de  $\nu$  pour différents  $\mathbf{k}$

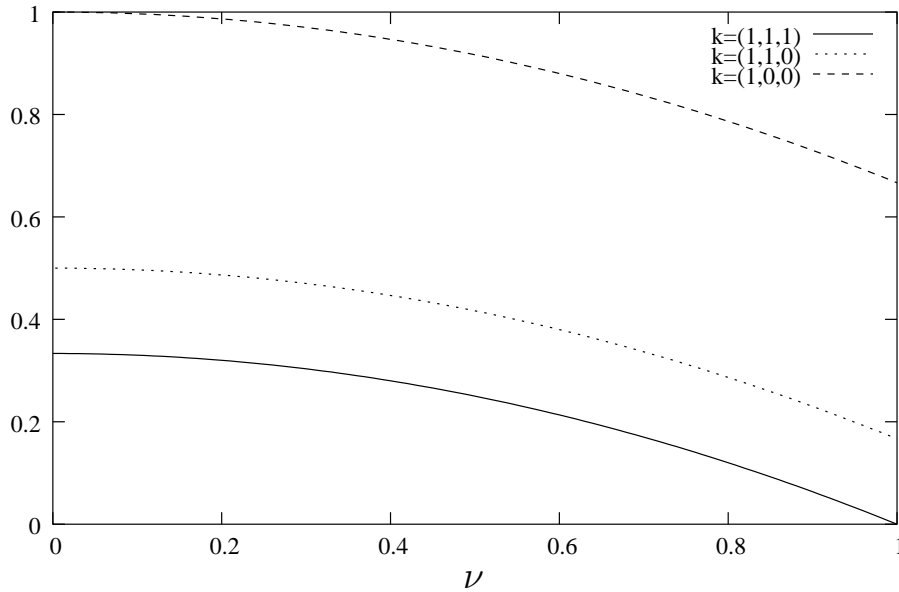


FIG. 3.2 – Schéma de Yee : terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion en fonction de  $\nu$  pour différents  $\mathbf{k}$

### 3.4 Conservation de la divergence

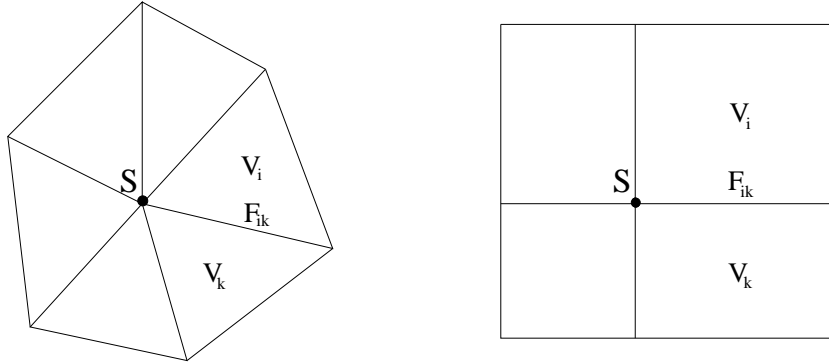
Les relations

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mu(\mathbf{x})\mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E} &= \rho, \end{aligned} \quad (3.21)$$

sont redondantes dans les équations de Maxwell. Plus précisément, si ces relations sont vérifiées à  $t = 0$  (et que  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  sont solutions des équations de Maxwell), elles sont alors vérifiées pour tout  $t$  positif. Nous n'avons pas tenu compte de (3.21) dans notre discrétisation. On cherche ici à montrer que la méthode Galerkin Discontinu vérifie faiblement

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mu(\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}) &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n) &= \rho^{n+1} - \rho^n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Considérons un maillage conforme tétraédrique ou hexaédrique orthogonal. Soit  $S$  un sommet de ce maillage. On note  $C$  l'ensemble des éléments  $V_i$  auxquels le sommet  $S$  appartient. On représente un tel volume  $C$  sur la figure 3.3 pour l'équivalent 2D d'un maillage tétraédrique et hexaédrique orthogonal. On désigne par  $\mathcal{V}_i$  l'ensemble des voisins de l'élément  $V_i$ ,  $F_{ik} = V_i \cap V_k$  et  $\tilde{\mathbf{n}}_{ik}$  la normale unitaire orientée de  $V_i$  vers  $V_k$ .


 FIG. 3.3 – Volume d'intégration  $C$  autour du sommet  $S$  : cas 2D

Notre démonstration comporte deux étapes.

1. On se donne un espace vectoriel Galerkin Discontinuu  $\mathcal{G}$  et une fonction test  $\varphi$ . Si  $\varphi$  continue à support dans  $C$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  sur chacun des éléments contenus dans  $C$  et telle que  $\nabla\varphi$  appartient à l'espace vectoriel Galerkin Discontinuu  $\mathcal{G}$ , on montre alors que toute solution du schéma Galerkin Discontinuu associé à l'espace vectoriel  $\mathcal{G}$  vérifie

$$\int_C \varphi \operatorname{div} \mu(\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}) = 0, \quad (3.23)$$

$$\int_C \varphi \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n) = \int_C \varphi(\rho^{n+1} - \rho^n). \quad (3.24)$$

2. On décrit ensuite les espaces vectoriels  $\mathcal{G}$  et les fonctions test  $\varphi$  vérifiant les hypothèses requises ci-dessus pour les cas de maillages tétraédriques et hexaédriques (sections 3.4.1 et 3.4.2).

Montrons d'abord la première étape. On se donne une fonction test  $\varphi$  continue à support dans  $C$  et  $\mathcal{C}^\infty$  sur chacun des éléments contenus dans  $C$ . On suppose de plus que  $\nabla\varphi$  appartient à l'espace vectoriel Galerkin Discontinuu  $\mathcal{G}$  dans lequel on travaille. La continuité de  $\varphi$  nous permet d'écrire

$$[\nabla\varphi]_{ik} \times \tilde{\mathbf{n}}_{ik} = 0 \quad \forall F_{ik} \subset C. \quad (3.25)$$

On montre alors que

$$\int_C \varphi \operatorname{div} \mu(\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}) = 0. \quad (3.26)$$

Soit en effet  $(\mathbf{E}_i^n, \mathbf{H}_i^{n+1/2})_{i,n}$  une solution du schéma Galerkin Discontinu (3.9). On a alors

$$\begin{aligned}
 & \int_C \varphi \operatorname{div} \mu(\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}) \\
 &= - \int_C \nabla \varphi \cdot \mu(\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}) \quad (\varphi \text{ à support dans } C) \\
 &= \Delta t \sum_{V_i \subset C} \left( \int_{V_i} \operatorname{rot}(\nabla \varphi|_{V_i}) \cdot \mathbf{E}_i^n - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{F_{ik}} \nabla \varphi|_{V_i} \cdot \left( \frac{\mathbf{E}_i^n + \mathbf{E}_k^n}{2} \times \tilde{\mathbf{n}}_{ik} \right) \right). \quad (\nabla \varphi \in \mathcal{G})
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Nous avons  $\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0$ . En réécrivant la somme (3.27), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_C \varphi \operatorname{div} \mu(\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}) \\
 &= -\Delta t \sum_{F_{ik} \subset C} \int_{F_{ik}} \nabla \varphi|_{V_i} \cdot \left( \frac{\mathbf{E}_i^n + \mathbf{E}_k^n}{2} \times \tilde{\mathbf{n}}_{ik} \right) + \nabla \varphi|_{V_k} \cdot \left( \frac{\mathbf{E}_i^n + \mathbf{E}_k^n}{2} \times \tilde{\mathbf{n}}_{ki} \right) \\
 &= -\Delta t \sum_{F_{ik} \subset C} \int_{F_{ik}} [\nabla \varphi]_{ik} \cdot \left( \frac{\mathbf{E}_i^n + \mathbf{E}_k^n}{2} \times \tilde{\mathbf{n}}_{ik} \right) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

car  $[\nabla \varphi]_{ik} \times \tilde{\mathbf{n}}_{ik} = 0$ .

Sous les mêmes hypothèses, on montre de manière analogue que

$$\begin{aligned}
 & \int_C \varphi \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n) \\
 &= - \int_C \nabla \varphi \cdot \varepsilon(\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n) \\
 &= \Delta t \sum_{V_i \subset C} \int_{V_i} \nabla \varphi \cdot \mathbf{j}^{n+1/2}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

On écrit formellement que

$$\begin{aligned}
 & \Delta t \int_C \nabla \varphi \cdot \mathbf{j}^{n+1/2} \\
 &= -\Delta t \int_C \varphi \operatorname{div} \mathbf{j}^{n+1/2} \\
 &= \int_C \varphi(\rho^{n+1} - \rho^n) + O(\Delta t^2).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

L'erreur en  $O(\Delta t^2)$  est due au fait que  $\mathbf{j}^{n+1/2}$  désigne la valeur du courant source  $\mathbf{j}$  à l'instant  $(n + 1/2)\Delta t$ .

Si on définit

$$\mathbf{j}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{j}, \quad (3.31)$$

on montre alors que

$$\int_C \varphi \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n) = \int_C \varphi(\rho^{n+1} - \rho^n). \quad (3.32)$$

### 3.4.1 Cas tétraédrique

Soit  $\varphi$  une fonction  $\mathbb{P}^{k+1}$  ( $k \geq 0$ ) continue sur  $C$  à support dans  $C$ . On a alors  $\nabla\varphi$  appartient à l'espace  $\mathbb{P}^k$  discontinu. Le schéma Galerkin Discontinu  $\mathbb{P}^k$  vérifie donc (3.26) et (3.32) pour toute fonction test  $\varphi \in \mathbb{P}^{k+1}$  à support dans  $C$ .

### 3.4.2 Cas hexaédrique

Dans le cas d'un maillage hexaédrique conforme, un sommet  $S$  appartient à huit hexaèdres.  $C$  est donc la réunion de huit cubes. Le plus petit espace vectoriel de fonctions polynomiales à support dans  $C$  est  $\mathbb{Q}_1$ . Considérons donc une fonction  $\varphi \in \mathbb{Q}^1$  continue à support dans  $C$ . Alors dans chaque hexaèdre,  $\nabla\varphi$  appartient à l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  engendré par les fonctions

$$\begin{cases} \varphi_1 = {}^t(1,0,0), & \varphi_2 = {}^t(y,0,0), & \varphi_3 = {}^t(z,0,0), & \varphi_4 = {}^t(yz,0,0), \\ \varphi_5 = {}^t(0,1,0), & \varphi_6 = {}^t(0,x,0), & \varphi_7 = {}^t(0,z,0), & \varphi_8 = {}^t(0,xz,0), \\ \varphi_9 = {}^t(0,0,1), & \varphi_{10} = {}^t(0,0,x), & \varphi_{11} = {}^t(0,0,y), & \varphi_{12} = {}^t(0,0,xy). \end{cases} \quad (3.33)$$

Le plus petit espace Galerkin Discontinu assurant la conservation de la divergence au sens de la relation (3.26) sur un maillage hexaédrique est donc l'espace  $\mathcal{E}$ . Cet espace  $\mathcal{E}$  n'est pas contenu dans l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$  que nous avons considéré. L'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$  ne permet donc pas de vérifier (3.26).  $\mathcal{E}$  est par exemple engendré sur chaque élément  $V_i$  (de centre de gravité  $\mathbf{G}_i = {}^t(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i})$ ) par les neuf fonctions de base (3.13) engendrant  $\mathbb{P}_{div}^1$  et par

$$\begin{cases} \varphi_{i10} = {}^t((y - y_{G_i})(z - z_{G_i}), 0, 0), \\ \varphi_{i11} = {}^t(0, (x - x_{G_i})(z - z_{G_i}), 0), \\ \varphi_{i12} = {}^t(0, 0, (x - x_{G_i})(y - y_{G_i})). \end{cases} \quad (3.34)$$

On note GD- $\mathcal{E}$  le schéma Galerkin Discontinu obtenu avec les fonctions de base (3.13) et (3.34). Les douze degrés de liberté du champ  $\mathbf{E}$  sont notés pour ce schéma  $\vec{\mathbf{E}}_{i,\mathcal{E}}$ . Pour le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ , les neuf degrés de liberté sont notés  $\vec{\mathbf{E}}_{i,\mathbb{P}_{div}^1}$ . Nous avons alors sur tout maillage conforme

$$\forall 1 \leq j \leq 9, \quad (\vec{\mathbf{E}}_{i,\mathcal{E}})_j = (\vec{\mathbf{E}}_{i,\mathbb{P}_{div}^1})_j. \quad (3.35)$$

On vérifie en effet facilement que sur tout élément  $V_i$  et sur toute face  $F_{ik}$

$$\forall 1 \leq j \leq 9, \forall 10 \leq l \leq 12, \left\{ \begin{array}{l} \int_{V_i} \text{rot}(\varphi_{ij}) \cdot \varphi_{il} = 0, \\ \int_{F_{ik}} (\varphi_{ij} \times \varphi_{il}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik} = 0, \\ \int_{F_{ik}} (\varphi_{ij} \times \varphi_{kl}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik} = 0. \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Autrement dit, les neuf degrés de liberté calculés avec le schéma  $\mathbb{P}_{div}^1$  ont exactement les mêmes valeurs que les neuf premiers degrés de liberté calculés par le schéma GD- $\mathcal{E}$ . Les trois degrés de liberté supplémentaires introduits par l'espace  $\mathcal{E}$  peuvent ainsi être interprétés comme des termes correctifs assurant la conservation de la divergence. De plus, si on intègre les représentations des deux schémas sur chaque élément, nous avons

$$\int_{V_i} \mathbf{E}_{i,\mathcal{E}} = \int_{V_i} \mathbf{E}_{i,\mathbb{P}_{div}^1}. \quad (3.37)$$

Pour conclure, le schéma GD- $\mathcal{E}$  est le schéma Galerkin Discontinu du type (3.9) le moins coûteux qui assure la conservation de la divergence au sens (3.26) sur un maillage hexaédrique orthogonal. Bien que ne vérifiant pas (3.26), le schéma  $\mathbb{P}_{div}^1$  permet d'obtenir dans chaque élément la même valeur moyenne que GD- $\mathcal{E}$  pour un coût moindre (neuf degrés de liberté par champ contre douze).

**Remarque 3.4.1** *On vérifie que dans le cas 2D que si  $\varphi \in \mathbb{Q}^1$ , alors  $\nabla\varphi \in \mathbb{P}_{div}^1$ . L'usage de l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$  nous permet alors dans ce cas d'assurer la conservation de la divergence.*

### 3.4.3 Validation numérique : cas d'une cavité chargée

On s'intéresse ici à un cas nous permettant de vérifier les relations de conservation de la divergence. On considère une cavité métallique  $\Omega = [0,1]^3$  dans laquelle on impose un courant source

$$\mathbf{j}(t,x,y,z) = \cos(t) \begin{pmatrix} \pi \cos(\pi x)(\sin(\pi z) + \sin(\pi y)) + (2\pi^2 - 1)x \sin(\pi y) \sin(\pi z) \\ \pi \cos(\pi y)(\sin(\pi x) + \sin(\pi z)) + (2\pi^2 - 1)y \sin(\pi z) \sin(\pi x) \\ \pi \cos(\pi z)(\sin(\pi y) + \sin(\pi x)) + (2\pi^2 - 1)z \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

La loi de conservation de la charge nous donne

$$\rho(t,x,y,z) = \sin(t)(\sin(\pi y) \sin(\pi z) + \sin(\pi z) \sin(\pi x) + \sin(\pi x) \sin(\pi y)). \quad (3.39)$$

On vérifie alors que

$$\mathbf{E}(t,x,y,z) = \sin(t) \begin{pmatrix} x \sin(\pi y) \sin(\pi z) \\ y \sin(\pi z) \sin(\pi x) \\ z \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{H}(t,x,y,z) = \pi \cos(t) \begin{pmatrix} \sin(\pi x)(z \cos(\pi y) - y \cos(\pi z)) \\ \sin(\pi y)(x \cos(\pi z) - z \cos(\pi x)) \\ \sin(\pi z)(y \cos(\pi x) - x \cos(\pi y)) \end{pmatrix}$$

sont solutions de

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{j},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0,$$

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \rho,$$

$$\text{div}(\mathbf{H}) = 0,$$

$$\vec{n} \times \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

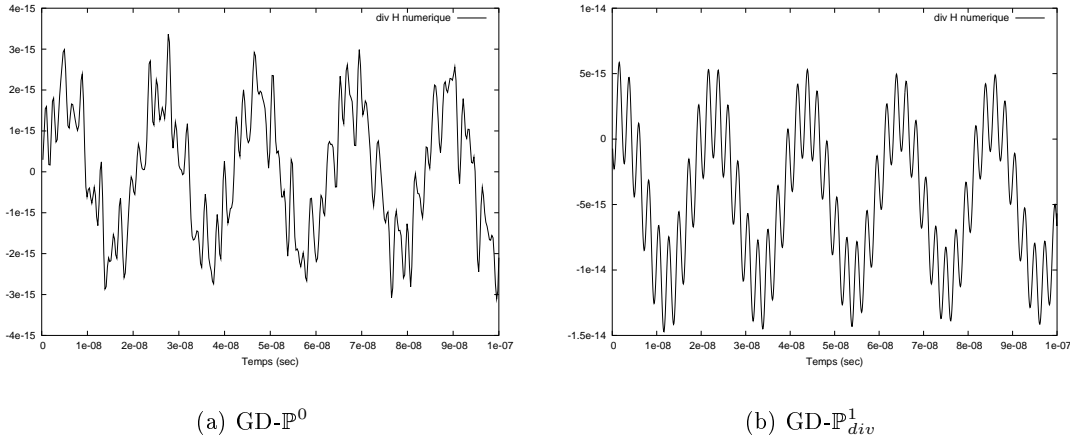
On définit les divergences numériques de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  en s'inspirant de l'analyse précédente. On considère donc un sommet  $S$  et on note  $C$  l'ensemble des éléments  $V_i$  auxquels le sommet  $S$  appartient. Soit  $\varphi$  la fonction appartenant à  $\mathbb{Q}^1$  valant 1 au sommet  $S$  et 0 sur tout sommet de  $C$  distinct de  $S$ . On propose de calculer (car  $\varphi$  à support dans  $C$ )

$$\int_C \varphi \text{div}(\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}) = - \int_C \nabla \varphi \cdot (\mathbf{H}^{n+1/2} - \mathbf{H}^{n-1/2}) \quad (3.40)$$

$$\text{et } \int_C \varphi \text{div}(\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n) = - \int_C \nabla \varphi \cdot (\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n). \quad (3.41)$$

On calcule les quantités (3.40) et (3.41) pour les schémas GD- $\mathbb{P}^0$  et GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ . On utilise un maillage cubique à 26 points par longueur d'onde avec GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  et un maillage cubique à 37 points par longueur d'onde avec GD- $\mathbb{P}^0$ . Les nombres de degrés de liberté requis pour les deux simulations sont alors quasiment identiques.

On montre sur la figure 3.4 la valeur de (3.40) pour les schémas GD- $\mathbb{P}^0$  et GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ . Bien que nous n'ayons pas su démontrer que cette quantité est nulle, nous constatons numériquement dans les deux cas qu'elle est très proche de zéro (de l'ordre de  $10^{-15}$ ).


 FIG. 3.4 – Cavité chargée :  $\text{div}(\mathbf{H})$  numérique

La figure 3.5 représente la valeur numérique de la divergence de  $\mathbf{E}$ . Nous avons d’un point de vue continue

$$\int_C \varphi \text{div} \varepsilon(\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n) = \int_C \varphi(\rho^{n+1} - \rho^n).$$

On compare donc l’expression (3.41)    $\int_C \varphi(\rho^{n+1} - \rho^n)$ .

On constate que dans le cas du schéma GD- $\mathbb{P}^0$  ces deux quantités sont très différentes alors qu’elles sont quasiment identiques pour le schéma GD- $\mathbb{P}^1_{div}$ . On explique cela par le fait que le schéma GD- $\mathbb{P}^1_{div}$  calcule la même valeur moyenne que le schéma GD- $\mathcal{E}$  qui vérifie (3.32).



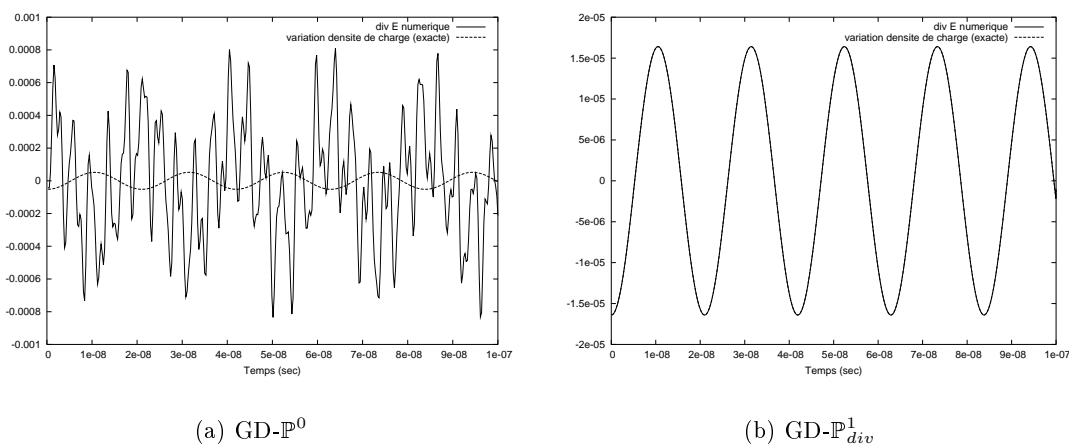


FIG. 3.5 – Cavité chargée : comparaison entre  $\text{div}(\mathbf{E})$  numérique et  $\rho$  exact

On montre enfin sur la figure 3.6 l’évolution en temps de la composante  $E_z$  en un point de la cavité. La solution obtenue avec le schéma GD- $\mathbb{P}^1_{div}$  se compare très bien à la solution exacte alors celle obtenue avec le schéma GD- $\mathbb{P}^0$  est peu satisfaisante.

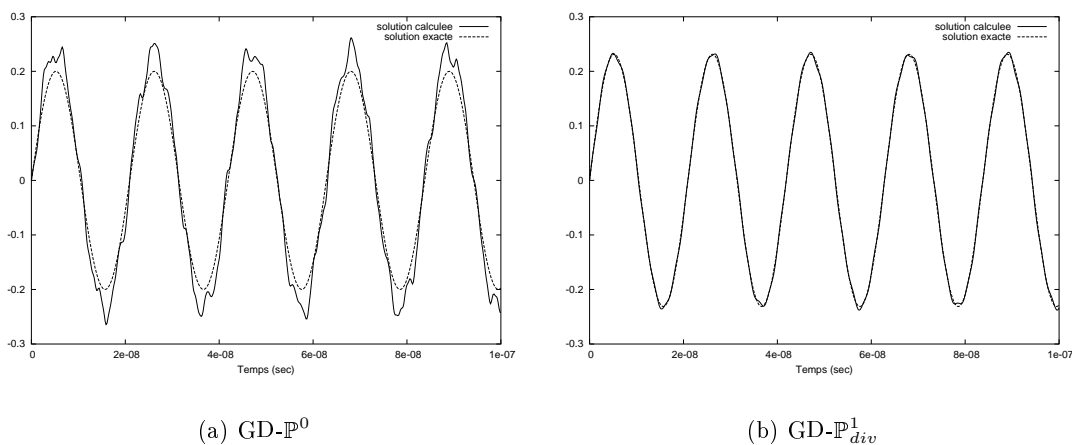


FIG. 3.6 – Cavité chargée :  volution en temps de  $E_z$  en un point de la cavité

### 3.5 Matériau fictif absorbant

Il semble que la méthode la plus efficace pour absorber les ondes électromagnétiques est la technique des PML (Perfectly Matched Layer) introduite par Bérenger [5]. Il s’agit d’utiliser des couches de matériaux fictifs à pertes. Cette méthode propos e pour le schéma Différences Finies de Yee s’adapte aux méthodes Volumes Finis [10]. Nous allons

montrer que les PML s'adaptent aussi très bien au schéma Galerkin Discontinu et que les performances sont meilleures que celles de la condition absorbante d'ordre un de Silver-Müller (1.20).

### 3.5.1 Principe

On scinde le domaine de calcul en deux zones distinctes. Dans l'une, on résout les équations de Maxwell classiquement et dans l'autre on résout les équations de Maxwell écrites dans un milieu fictif absorbant. Le matériau proposé par Bérenger permet d'obtenir un coefficient théorique de réflexion nul pour une onde plane arrivant sur l'interface vide-milieu et ce quels que soient la fréquence ou l'angle d'incidence. Chaque composante du champ électromagnétique est décomposée en deux sous-composantes (par exemple  $E_x = E_{xy} + E_{xz}$ ). Ainsi dans le milieu PML, 12 composantes sont à calculer. On introduit également des conductivités par direction

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^t(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^* = {}^t(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*),$$

vérifiant

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{\mu}.$$

On définit  $\sigma_x$  (resp  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ ) de la manière suivante

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_0 \left| \frac{x-a}{A-a} \right|^n & \text{si } |x| > |a|, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $A$  et  $a$  désignent respectivement l'abscisse d'un point de l'interface vide-PML et l'abscisse d'un point de la frontière du domaine de calcul.

On écrit les 12 équations du milieu PML sous la forme suivante

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + S_1(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{E}_1 = r_1(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2), \\ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + S_2(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{E}_2 = r_2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2), \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} + S_1(\boldsymbol{\sigma}^*) \mathbf{H}_1 = -r_1(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2), \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} + S_2(\boldsymbol{\sigma}^*) \mathbf{H}_2 = -r_2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2), \end{cases} \quad (3.42)$$

où  $\mathbf{E}_1 = {}^t(E_{xy}, E_{yz}, E_{zx})$ ,  $\mathbf{E}_2 = {}^t(E_{xz}, E_{yx}, E_{zy})$ ,  $\mathbf{H}_1 = {}^t(H_{xy}, H_{yz}, H_{zx})$  et  $\mathbf{H}_2 = {}^t(H_{xz}, H_{yx}, H_{zy})$ . Les opérateurs  $S_1$  et  $S_2$  sont donnés par ( $\mathbf{v} = {}^t(v_x, v_y, v_z)$ )

$$S_1(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_y & 0 & 0 \\ 0 & v_z & 0 \\ 0 & 0 & v_x \end{pmatrix} \text{ et } S_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_z & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 \\ 0 & 0 & v_y \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Les opérateurs différentiels  $r_1$  et  $r_2$  sont définis par

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_y \\ \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \text{ et } r_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

### 3.5.2 Approximation numérique

On approche  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  dans  $\mathbb{P}_{div}^1$ . Comme dans la section 3.1.1, les équations (3.42) sont multipliées par une fonction de base  $\varphi_{ij}$  et on intègre sur chaque cellule  $V_i$

$$\begin{cases} \int_{V_i} {}^t\varphi_{ij}\varepsilon_i \left( \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + S_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E}_1 \right) = \int_{V_i} (r_1(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)) \cdot \varphi_{ij}, \\ \int_{V_i} {}^t\varphi_{ij}\varepsilon_i \left( \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + S_2(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E}_2 \right) = \int_{V_i} (r_2(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)) \cdot \varphi_{ij}, \\ \int_{V_i} {}^t\varphi_{ij}\mu_i \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} + S_1(\boldsymbol{\sigma}^*)\mathbf{H}_1 \right) = - \int_{V_i} (r_1(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)) \cdot \varphi_{ij}, \\ \int_{V_i} {}^t\varphi_{ij}\mu_i \left( \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} + S_2(\boldsymbol{\sigma}^*)\mathbf{H}_2 \right) = - \int_{V_i} (r_2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)) \cdot \varphi_{ij}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Une intégration par partie nous permet d'écrire

$$\begin{cases} \int_{V_i} {}^t\varphi_{ij}\varepsilon_i \left( \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + S_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E}_1 \right) = \int_{V_i} r_1(\varphi_{ij}) \cdot (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) - \int_{\partial V_i} S_1(\tilde{\mathbf{n}})\varphi_{ij} \cdot (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2), \\ \int_{V_i} {}^t\varphi_{ij}\varepsilon_i \left( \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + S_2(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E}_2 \right) = \int_{V_i} r_2(\varphi_{ij}) \cdot (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) - \int_{\partial V_i} S_2(\tilde{\mathbf{n}})\varphi_{ij} \cdot (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2), \\ \int_{V_i} {}^t\varphi_{ij}\mu_i \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} + S_1(\boldsymbol{\sigma}^*)\mathbf{H}_1 \right) = - \int_{V_i} r_1(\varphi_{ij}) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) + \int_{\partial V_i} S_1(\tilde{\mathbf{n}})\varphi_{ij} \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2), \\ \int_{V_i} {}^t\varphi_{ij}\mu_i \left( \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} + S_2(\boldsymbol{\sigma}^*)\mathbf{H}_2 \right) = - \int_{V_i} r_2(\varphi_{ij}) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) + \int_{\partial V_i} S_2(\tilde{\mathbf{n}})\varphi_{ij} \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2). \end{cases} \quad (3.46)$$

Chaque intégrale est calculée de la même manière que dans la section 3.1.1 (projection des champs dans  $\mathbb{P}_{div}^1$  pour les intégrales volumiques et approximation centrée pour les intégrales surfaciques). Il reste à préciser le schéma temporel. Chaque équation scalaire du système (3.46) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E = f(H(t)).$$

On suppose  $\sigma \neq 0$ . On choisit de discrétiser cette équation par un schéma exponentiel. Pour ce faire on résout l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E = f(H^{n+1/2}), \quad t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t] \\ E_{t=n\Delta t} = E^n. \end{cases} \quad (3.47)$$

L'écriture de la solution de (3.47) à  $t = (n + 1)\Delta t$  nous permet d'écrire lorsque  $\sigma \neq 0$  le schéma suivant

$$E^{n+1} = e^{-\sigma\Delta t}E^n + \frac{1 - e^{-\sigma\Delta t}}{\sigma}f(H^{n+1/2}). \quad (3.48)$$

Lorsque  $\sigma \rightarrow 0$ , ce schéma est consistant avec le schéma saute-mouton

$$E^{n+1} = E^n + \Delta t f(H^{n+1/2}). \quad (3.49)$$

De même, les équations scalaires du type

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sigma^* H = g(E^n),$$

sont discrétisées par ( $\sigma^* \neq 0$ )

$$H^{n+1/2} = e^{-\sigma^*\Delta t}H^{n-1/2} + \frac{1 - e^{-\sigma^*\Delta t}}{\sigma^*}g(E^n). \quad (3.50)$$

### 3.5.3 Conditions aux limites

Afin de borner le domaine de calcul, le milieu PML doit être tronqué. Comme le suggère Bérenger, nous avons d'abord utilisé dans le milieu PML des conditions aux limites métalliques. On a donc imposé sur les champs reconstruits  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  et  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$  la condition métallique (3.10). Des instabilités numériques sur des calculs en temps long ont alors été remarquées. Signalons que nous avons essayé des schémas différents du schéma exponentiel pour l'intégration temporelle qui n'ont eu aucun impact sur ces phénomènes d'instabilité.

Pour tronquer le milieu PML, nous proposons d'utiliser la condition absorbante (3.11) sur  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  et  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ . Avec cette condition aux limites, nous n'avons à ce jour constaté aucun phénomène d'instabilité même sur des simulations en temps long.

### 3.5.4 Illustration numérique

Pour montrer l'efficacité des PML, on simule la propagation d'un dipôle électrique dans le vide. Le dipôle est localisé dans le cube  $V$  et colinéaire à l'axe  $z$ :  $\mathbf{j} = {}^t(0,0,j_z)$ . Le dipôle est modélisé par une source volumique

$$\int_V j_z = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Le profil du moment dipolaire  $\rho$  est une gaussienne

$$\rho(t) = 10^{-10} \exp\left(-\left(\frac{t - 3T}{T}\right)^2\right), \quad (T = 2ns).$$

Si on suppose  $\mathbf{j}$  constant sur  $V$ , on vérifie que l'on a pour les fonctions de base  $\mathbb{P}_{div}^1$

$$\begin{cases} \int_V \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} = 0, \quad \forall j \neq 7, \\ \int_V \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i7} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{cases}$$

Pour un dipôle placé en  $(x_d, y_d, z_d)$  et  $j_z = -f(t)\delta(x_d, y_d, z_d)$ , la solution des équations de Maxwell dans le vide avec une telle source est donnée en tout temps  $t$  et en tout point  $(x, y, z)$  par

$$\begin{aligned}
 H_x &= -y(f'(t-r)/r^2 + f(t-r)/r^3)/4\pi, \\
 H_y &= x(f'(t-r)/r^2 + f(t-r)/r^3)/4\pi, \\
 H_z &= 0, \\
 E_x &= xy(f'(t-r)/r^3 + 3f(t-r)/r^4 + 3F(t-r)/r^5)/4\pi, \\
 E_y &= yz(f'(t-r)/r^3 + 3f(t-r)/r^4 + 3F(t-r)/r^5)/4\pi, \\
 E_z &= z^2(f'(t-r)/r^3 + 3f(t-r)/r^4 + 3F(t-r)/r^5)/4\pi \\
 &\quad - (f'(t-r)/r + f(t-r)/r^2 + F(t-r)/r^5)/4\pi \\
 &\quad + F(t-r)\delta(x_d, y_d, z_d)/4\pi,
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

où  $r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_d)^2}$  et  $F(t) = \int_{x=0}^t f(x)dx$ .

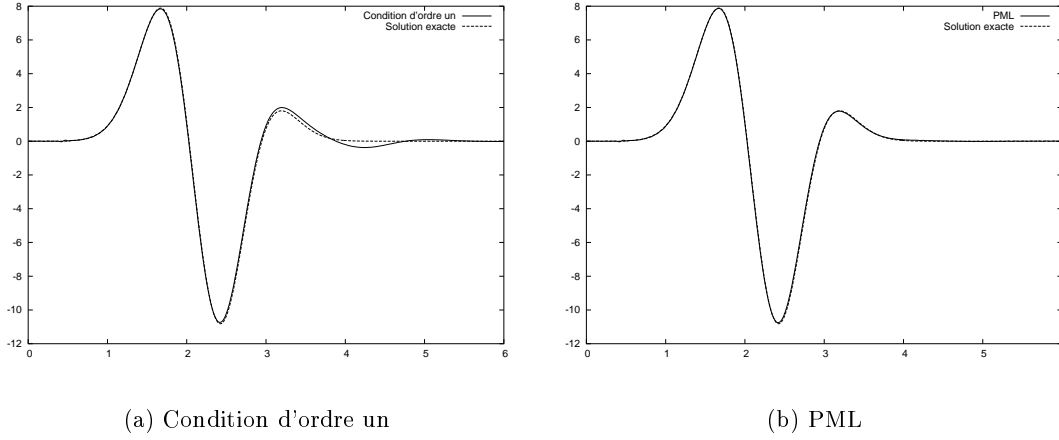
On se donne un domaine de calcul de  $40^3$  cellules. On place le dipôle au centre du domaine. Chaque cellule a pour taille  $5cm \times 5cm \times 5cm$ . Ce maillage inclut la couche PML qui a une épaisseur de 8 cellules. On compare les résultats obtenus avec les PML à ceux obtenus avec la condition d'ordre un de Silver-Müller. On rappelle que la discrétisation du milieu PML nécessite 2 fois plus de degrés de liberté que la discrétisation des équations de Maxwell. Ainsi, pour la simulation avec condition d'ordre un, on considère un domaine de calcul de  $48^3$  cellules. Le nombre de degrés de liberté est alors identique pour les deux simulations. En effet, la simulation avec PML nécessite 17576 éléments dans le vide et 46424 dans les PML. Sachant que chaque champ requiert 9 degrés de liberté dans le vide et 18 dans les PML, on a un nombre de degrés de liberté par champ égal à

$$9 \times (17576 + 2 \times 46424) = 993816.$$

Pour la simulation avec condition absorbante d'ordre un, on a un nombre de degrés de liberté par champ égal à

$$9 \times 48^3 = 995328.$$

On montre sur la figure 3.7 l'évolution temporelle de la composante  $H_x$  en un point situé à 10 cellules du dipôle et à 2 cellules de la couche PML. Alors que la solution obtenue avec PML se compare parfaitement à la solution analytique, la solution obtenue avec la condition d'ordre un est perturbée par des réflexions. Si on souhaite obtenir des résultats de même précision, on doit utiliser un domaine de  $60^3$  cellules. Utiliser les PML permet alors pour ce cas d'avoir 50 % de degrés de liberté en moins pour une précision identique.

FIG. 3.7 – Condition d'ordre un vs PML : évolution en temps de  $H_x$ 

## 3.6 Résultats numériques

### 3.6.1 Abri métallique

On présente ici un cas test dont les résultats pour un code Différences Finies sont donnés dans [56]. Il s'agit d'un abri métallique possédant une ouverture (figure 3.8). Les dimensions de cet abri sont  $Lx = 13m$ ,  $Ly = 10m$  et  $Lz = 7m$ . La porte est centrée sur la face  $x$  et a pour dimensions  $ly = 5m$  et  $lz = 4m$ . La taille du domaine de calcul est  $21m \times 18m \times 11m$ . La structure est illuminée par un champ incident du type quotient exponentiel (IEMN Q-EXP) d'amplitude maximale 1 V/m en polarisation verticale ( $Ez, Hy$ ). La fréquence maximum du signal est 100 MHz. La longueur d'onde minimale  $\lambda_{min}$  est donc trois mètres. Le champ incident a la forme

$$E_z = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \left( e^{-\alpha(t - (x - xr)/c_0 - tpq)} + e^{\beta(t - (x - xr)/c_0 - tpq)} \right)^{-1},$$

où  $\alpha = 8.5 \cdot 10^8$ ,  $\beta = 3.6 \cdot 10^6$ ,  $tpq = 20 \cdot 10^{-9}$  et  $xr = -4m$ .

On utilise un maillage orthogonal uniforme. Le pas de discrétisation est  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1/3m$  ce qui correspond à 9 points par longueur d'onde. Les calculs sont réalisés en champ total. On présente sur la figure 3.9 l'évolution en temps de la composante  $E_z$  en un point de l'espace libre externe  $E = (-3m, 4m, 3.5m)$  et en un point de l'espace libre interne  $I = (2m, 5m, 3.5m)$ . La figure 3.10 montre sur plusieurs coupes la valeur de  $|\mathbf{E}|$  à  $t = 0.12 \text{ ns}$ . On montre enfin sur la figure 3.11 la valeur de  $|\mathbf{E}|$  à  $t = 0.12 \text{ ns}$  sur la surface externe de l'abri. Dans tous les cas les résultats obtenus se comparent très bien avec ceux obtenus dans [56] avec le schéma Différences Finies. Le pas de discrétisation utilisé pour les Différences Finies est  $\Delta = 1/5m$ . Le problème a alors 612 864 degrés de liberté par composante de champ. Nous avons pu utiliser avec la méthode Galerkin

Discontinuu un maillage plus grossier ( $\Delta = 1/3m$ ) de 119 680 éléments soit un problème à traiter de 359 040 degrés de liberté.

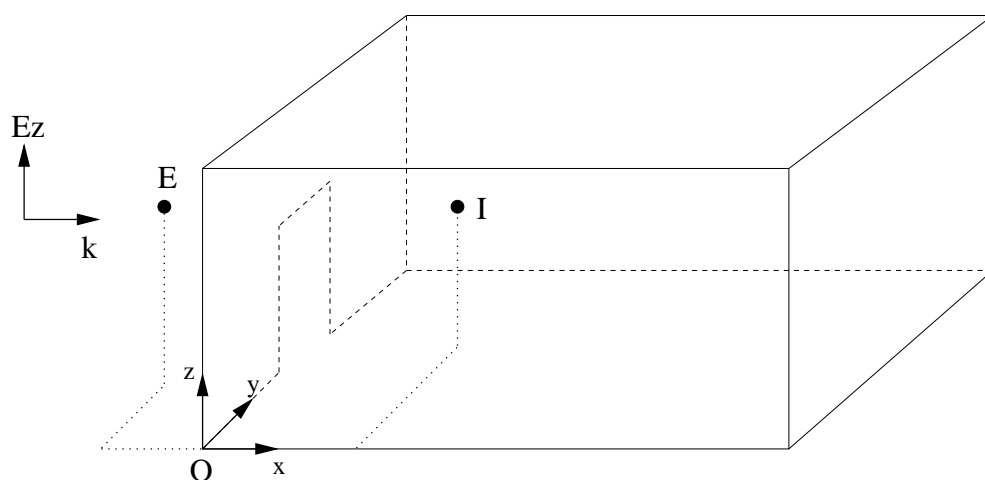
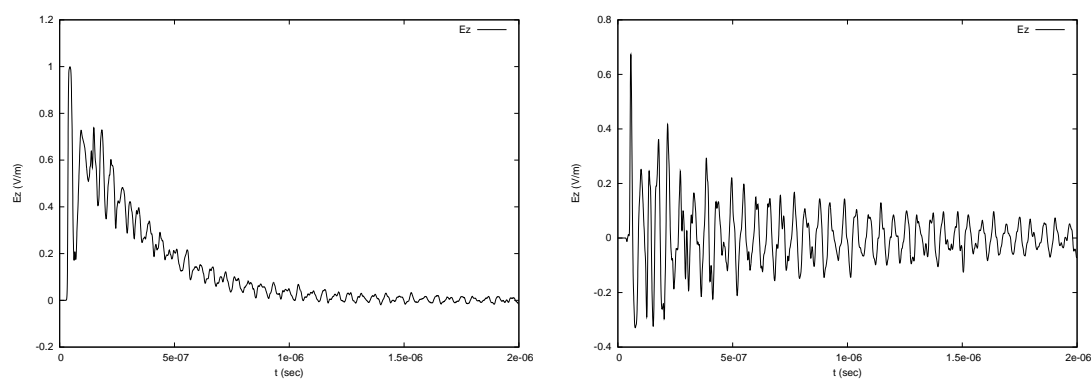


FIG. 3.8 – Abri métallique avec ouverture



(a)  $E_z$  au point E extérieur à l'abri

(b)  $E_z$  au point I intérieur à l'abri

FIG. 3.9 – Evolution en temps de  $E_z$

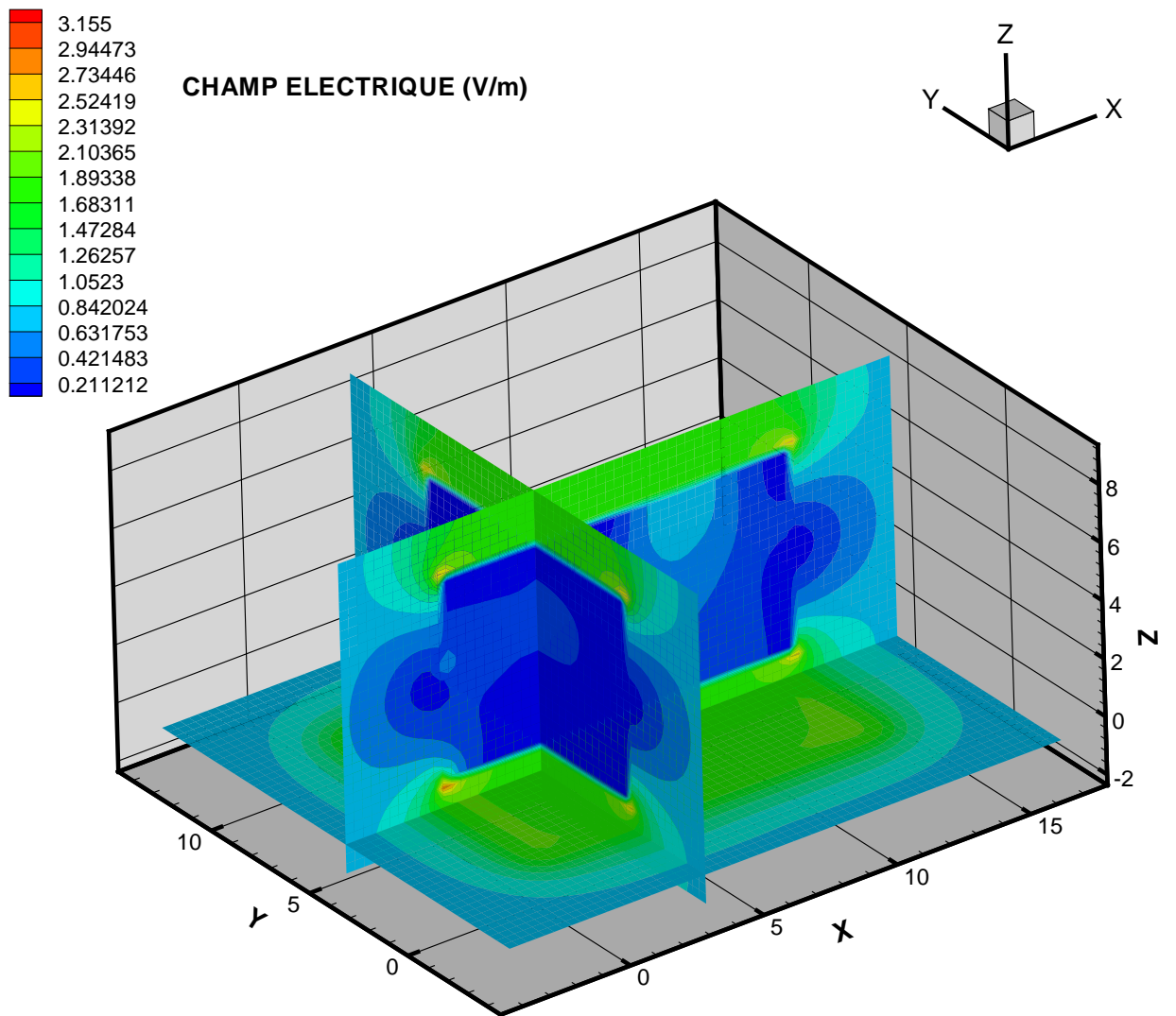


FIG. 3.10 –  $|\mathbf{E}|$  à  $t = 0.12 \text{ ns}$



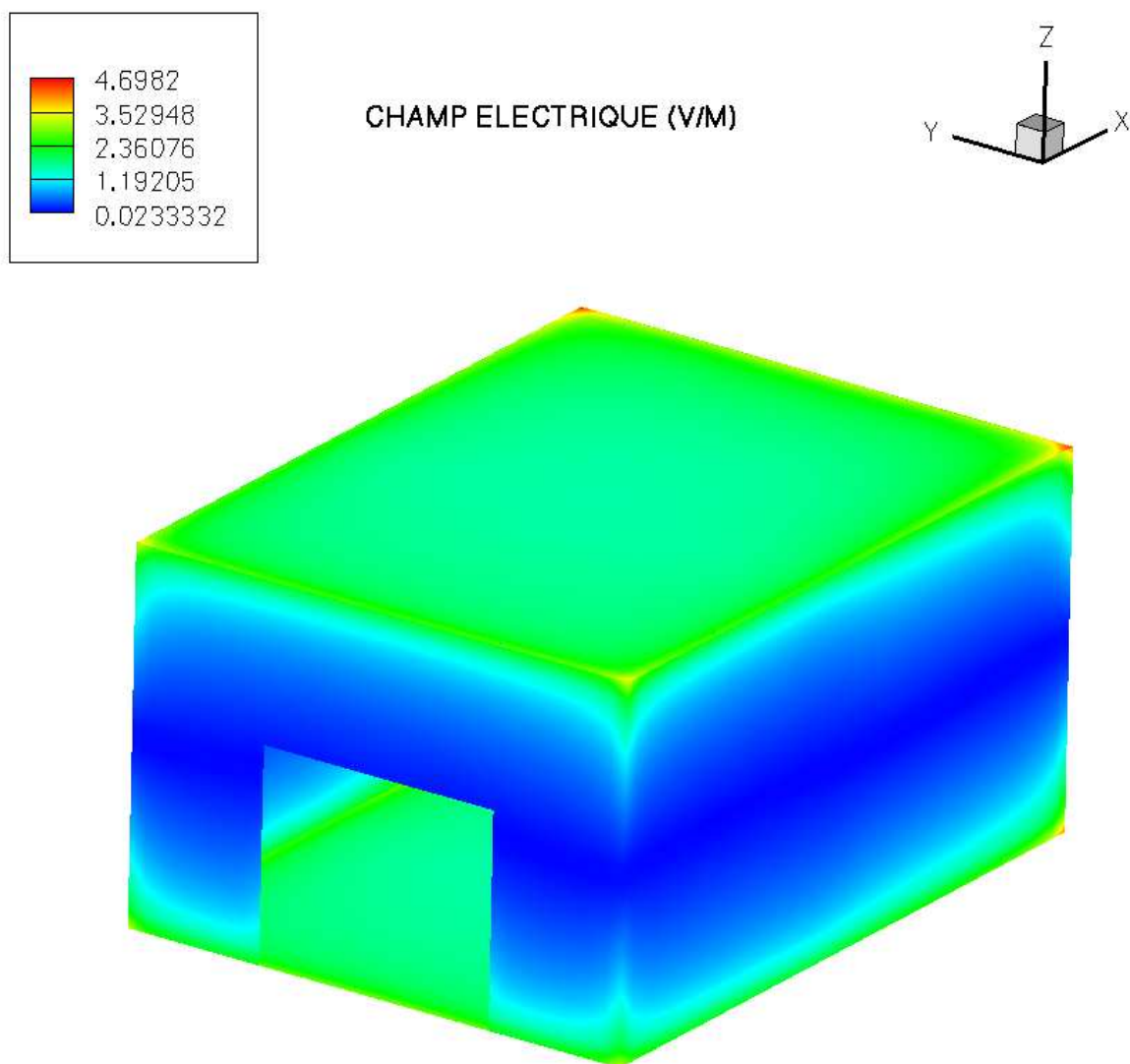


FIG. 3.11 –  $|\mathbf{E}|$  à  $t = 0.12$  ns sur la surface externe de l'abri

### 3.6.2 Diffraction par un cube métallique

On étudie la diffraction d'un cube métallique de dimensions  $1m \times 1m \times 1m$  illuminé par une onde plane de fréquence 300 MHz. La longueur d'onde  $\lambda$  est donc 1 m. On utilise une discrétisation correspondant à dix points par longueur d'onde. Afin d'évaluer l'influence des conditions aux limites, on réalise trois simulations.

1. Une simulation où on utilise la condition absorbante (CLA) d'ordre un (3.11) et où on place la frontière absorbante à une longueur d'onde du cube. La taille du domaine de calcul est  $4\lambda \times 4\lambda \times 4\lambda$ . On a ainsi 63 000 éléments soit 189 000 degrés de liberté

(le nombre de degrés de liberté est donné par composante de champ).

2. Une simulation où on utilise la condition absorbante d'ordre un et où on place la frontière absorbante à une longueur d'onde et demie du cube. La taille du domaine de calcul est  $5\lambda \times 5\lambda \times 5\lambda$ . On a ainsi 124 000 éléments soit 372 000 degrés de liberté.
3. Une simulation où on utilise les PML. La couche PML est placée à une longueur d'onde du cube et son épaisseur est  $\lambda/2$  (soit 5 cellules). On a alors 124 000 éléments dont 61 000 dans la couche PML. On a alors à traiter 555 000 degrés de liberté.

Les calculs sont effectués en champ diffracté et sont menés jusqu'à ce qu'un régime harmonique soit atteint. Pour évaluer la périodicité du signal, on définit à la période  $n$  le résidu  $r^n$

$$r^n = \frac{\mathcal{E}^n - \mathcal{E}^{n-1}}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1}, \quad (3.52)$$

où  $\mathcal{E}^n$  est l'équivalent discret de l'énergie électromagnétique défini à la section 3.1.4. On stoppe les calculs lorsque  $|r^n| < 0.01$ . Pour les deux simulations avec CLA d'ordre un, cette condition est vérifiée pour  $n = 6$ . Une longueur d'onde entre l'objet et le bord du domaine est donc suffisante pour ce cas de diffraction. Si on utilise des PML, on a  $|r^n| < 0.01$  pour  $n = 5$ . L'emploi de PML n'accélère que faiblement la convergence. On montre sur la figure 3.12 la valeur du résidu pour les trois simulations. Les vitesses de convergence sont très comparables.

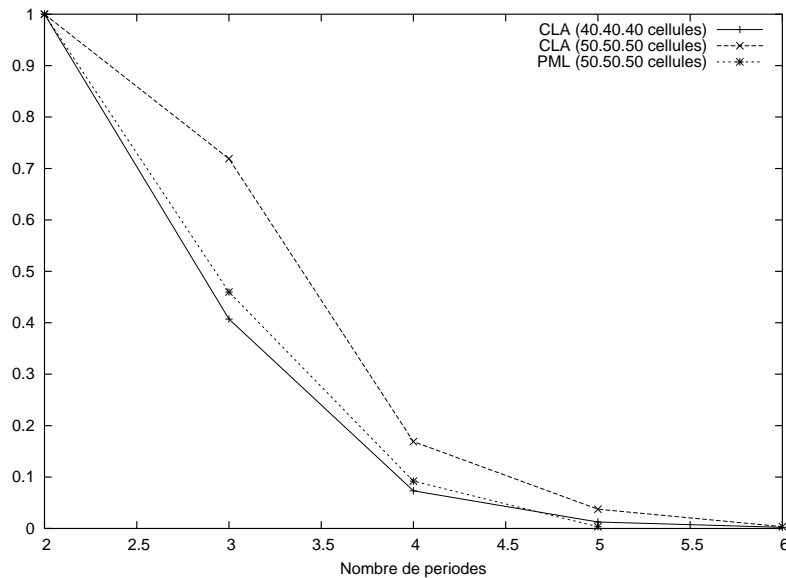
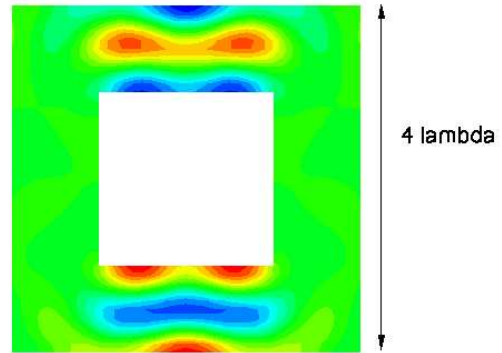
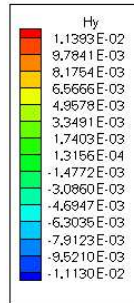


FIG. 3.12 – Courbes de résidus

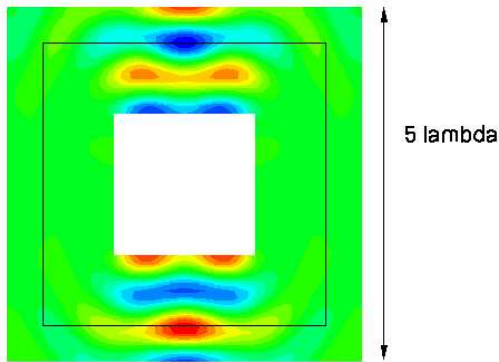
On montre sur les figures 3.13 et 3.14 une coupe dans le plan  $y = 0$  (le point  $(0,0,0)$  est le centre du domaine de calcul) des composantes  $H_y$  et  $E_z$  à la sixième période pour les trois simulations. Les résultats sont très proches.

Champ diffracté  
 $H_y$  (A/m)

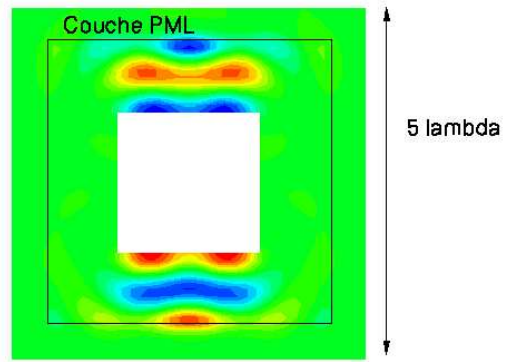
Plan  $y=0$



$40^3$  cellules et CLA

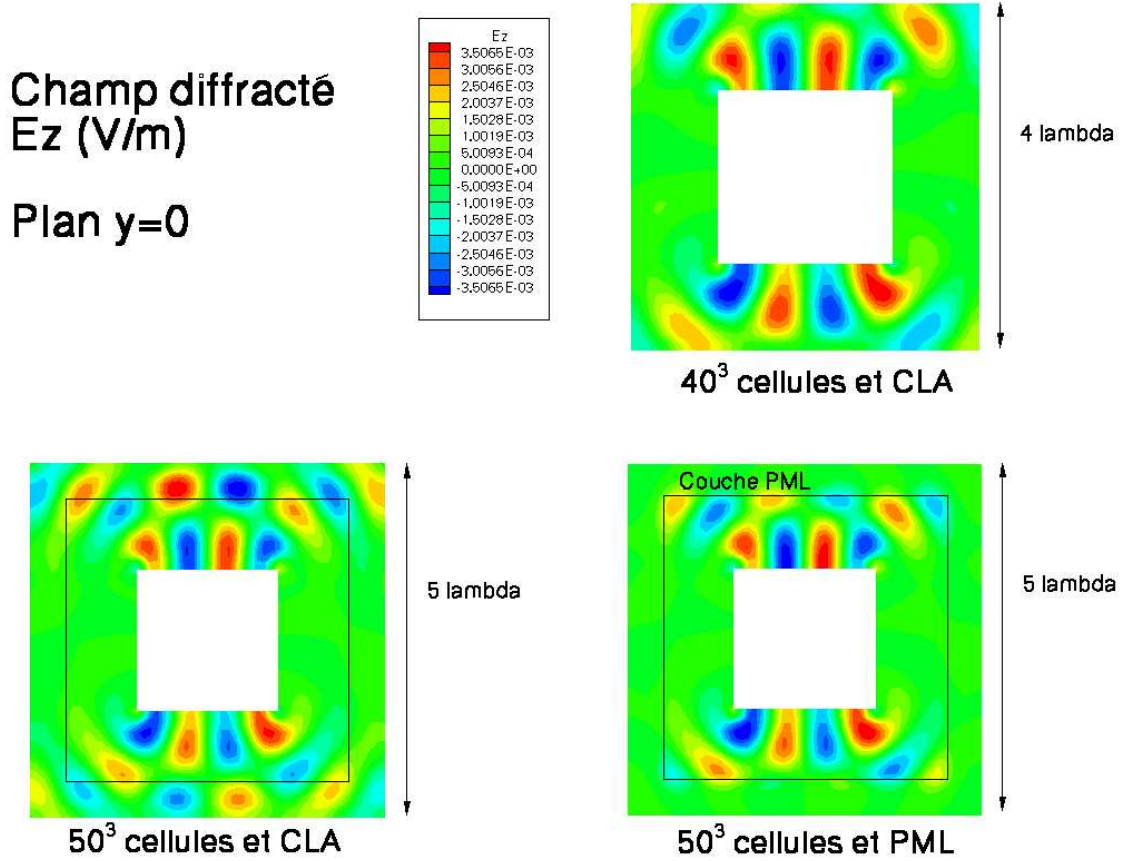


$50^3$  cellules et CLA



$50^3$  cellules et PML

FIG. 3.13 – Champ  $H_y$  dans le plan  $y = 0$  à la sixième période

FIG. 3.14 – Champ  $E_z$  dans le plan  $y = 0$  à la sixième période

### 3.6.3 Résonateur diélectrique

On souhaite tester la méthode Galerkin Discontinu sur un cas fortement hétérogène. Nous proposons de traiter un résonateur diélectrique (RD) cylindrique qui est une structure très sélective en fréquence. La nomenclature des différents modes de cette structure, les techniques d'alimentation ainsi que les cartes de champ proche sont détaillées dans [57]. On trouve dans [33] des résultats de la simulation que nous allons traiter avec des méthodes Equations Intégrales, Différences Finies et Eléments Finis.

On cherche à calculer les fréquences de résonance d'un résonateur cylindrique isolé de permittivité  $\varepsilon_r = 36.7$ , de hauteur  $a = 12.65$  mm et de rayon  $r = 9.8$  mm. Le volume de discrétisation est de  $50 \times 50 \times 40$  cellules avec un pas d'espace  $\Delta x = 1$  mm. Les différents modes sont excités en utilisant des dipôles électriques. Pour le mode TE, le dipôle est placé horizontalement près du bord à mi-hauteur du RD. Pour le mode hybride HEM, le dipôle est placé horizontalement au centre dans le plan  $xy$  et au deux tiers de la hauteur. Ces différentes positions sont représentées sur la figure 3.15. Enfin, pour le mode TM le dipôle

est placé verticalement au milieu. Dans les trois cas, le profil temporel du dipôle est une gaussienne de fréquence centrale 3 GHz et de demi-largeur 1.5 GHz.

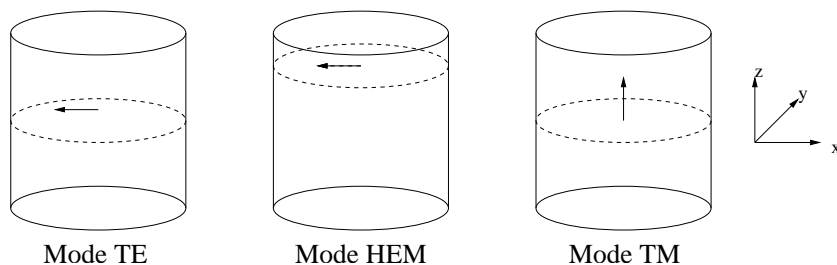


FIG. 3.15 – Position du dipôle électrique pour exciter les différents modes

On réalise trois simulations correspondant aux trois positions du dipôle décrites précédemment. Une transformée de Fourier des signaux temporels permet d'obtenir les fréquences de résonances des différents modes. Les différentes réponses en fréquence sont représentées sur la figure 3.16. Le fait d'avoir utilisé un dipôle dans le RD comme alimentation nous interdit (contrairement à une ligne micro-ruban ou une sonde coaxiale) toute comparaison avec des mesures. Il existe toutefois des formules approchées donnant les fréquences de résonance de la structure que nous traitons. La précision de ces formules données dans [57] est évaluée à 2%. On compare donc les résultats que nous avons obtenus à ces formules approchées dans le tableau 3.4.

Mode	TE	HEM	TM
Formule approchée	2.128	2.946	3.384
Galerkin Discontinu	2.07	2.82	3.30
Erreur relative	2.72 %	4.27 %	2.48 %

TAB. 3.4 – Fréquences de résonances (GHz)

On peut trouver dans [33] les résultats obtenus pour cette simulation avec des méthodes Eléments Finis (FETD) et Différences Finis (FDTD). Le maillage qui a été utilisé en FDTD est identique à celui que nous avons utilisé (100000 éléments) alors que le maillage tétraédrique utilisé en FETD comprend 107760 éléments. L'utilisation d'un tel maillage permet de mieux prendre en compte la géométrie cylindrique du RD. On donne dans le tableau 3.5 les erreurs relatives sur la fréquence de résonance par rapport à la formule approchée obtenues avec ces deux méthodes. On constate alors que les trois méthodes ont une précision sensiblement équivalente. Il est difficile d'établir une hiérarchie dans la mesure où la formule de référence n'est qu'une formule approchée.

Mode	TE	HEM	TM
FDTD	0.23 %	2.64 %	2.57 %
FETD	3.4 %	1.15 %	2.5 %

TAB. 3.5 – Fréquence de résonance: erreurs relatives par rapport à la formule approchée pour des méthodes FDTD et FETD [33]

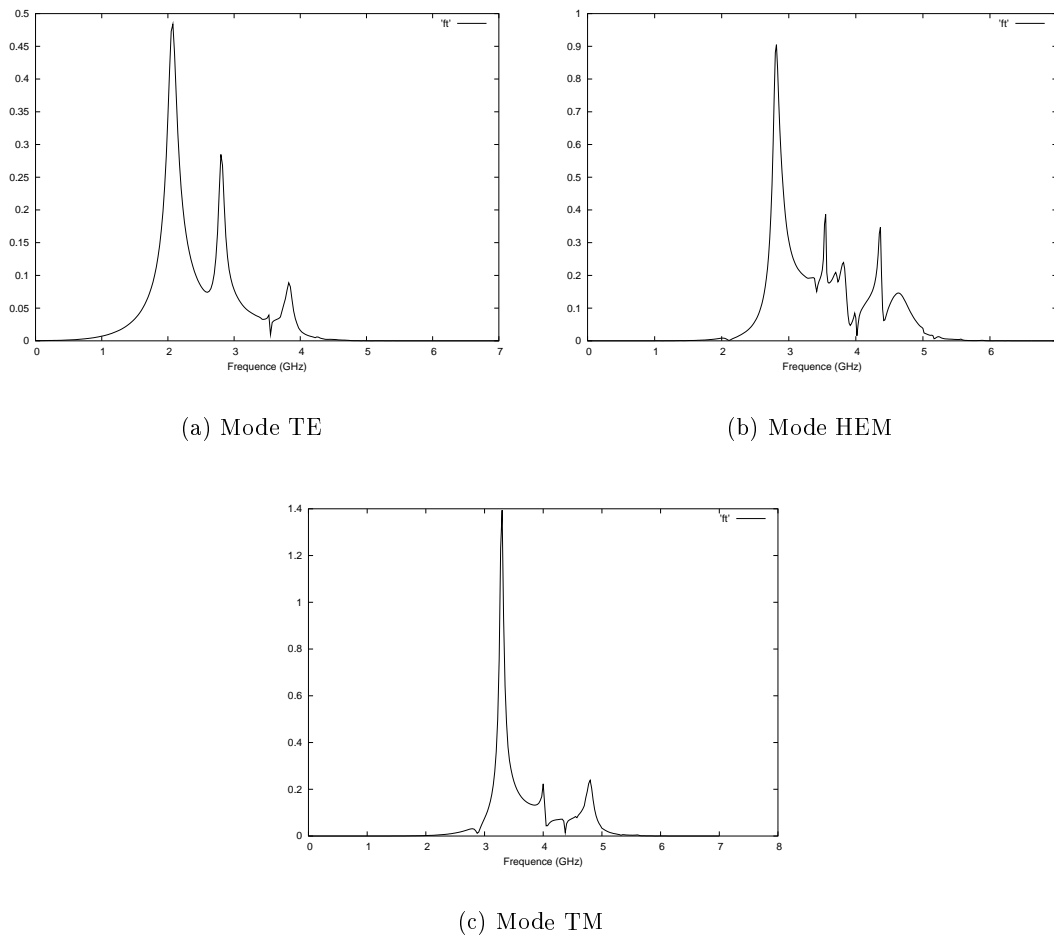


FIG. 3.16 – Réponse en fréquence

On montre enfin les cartes de champs obtenues sur le plan équatorial (plan  $xy$  de symétrie du RD) et sur le plan méridien (plan  $xz$  de symétrie du RD). Les contours du cylindre sont tracés sur les différentes figures. Ces mêmes cartes de champs sont montrées pour les méthodes FDTD et FETD dans [33]. Les répartitions et les polarisations des champs que l'on doit retrouver sont détaillées dans [57]. Pour le mode TM (figure 3.17),

on retrouve bien la circulation du champ magnétique avec une concentration d'énergie sous forme de couronne. Pour le mode TE (figure 3.18), on peut noter des oscillations du champ électrique dans le plan équatorial. Des oscillations similaires sont aussi présentes avec les méthodes FDTD et FETD. Ces oscillations sont attribuées à la présence du dipôle dans le plan d'étude qui perturbent la répartition du champ électrique. On retrouve tout de même la circulation du champ total électrique avec une concentration en anneau. Une simulation avec une méthode Equation Intégrale en champ diffracté permet de s'affranchir de ce problème de source dont le fort niveau perturbe les champs [57]. La figure 3.19 montre enfin les cartes de champ pour le mode HEM. Les répartitions de champ sont à nouveau retrouvées correctement.

Le schéma Galerkin Discontinu est donc capable de traiter des hétérogénéités fortes. Notons enfin que d'un point de vue géométrique, la méthode proposée dans ce chapitre (et en général les formulations Volumes Finis centrés éléments [54]) permet de bien définir l'interface entre deux matériaux. Ce n'est pas le cas du schéma de Yee où, compte tenu de la discrétisation spatiale utilisée, les arêtes se trouvant à l'interface entre deux milieux diélectriques doivent être prises en compte dans un milieu intermédiaire dont il faut déterminer la permittivité équivalente [23].

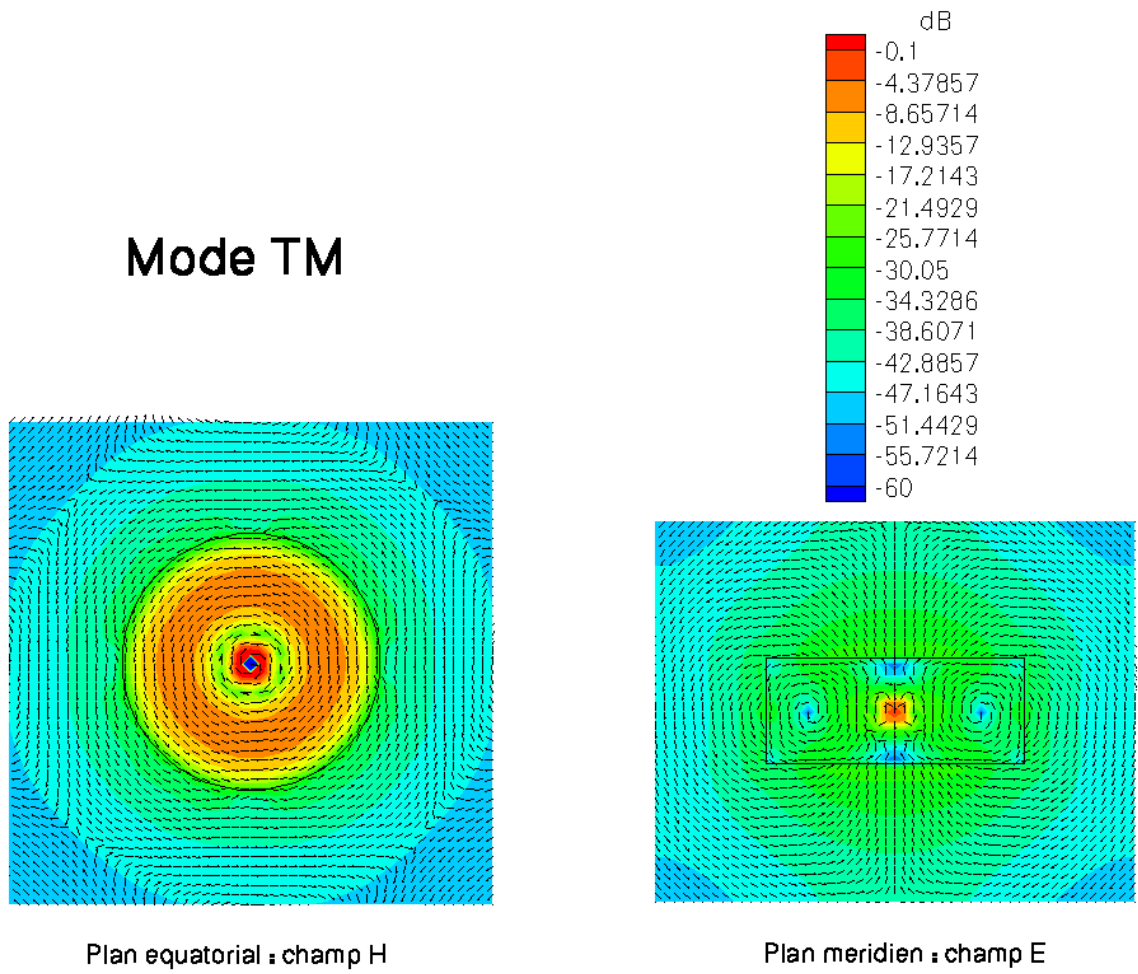


FIG. 3.17 – Résonateur diélectrique : carte de champ (mode TM)



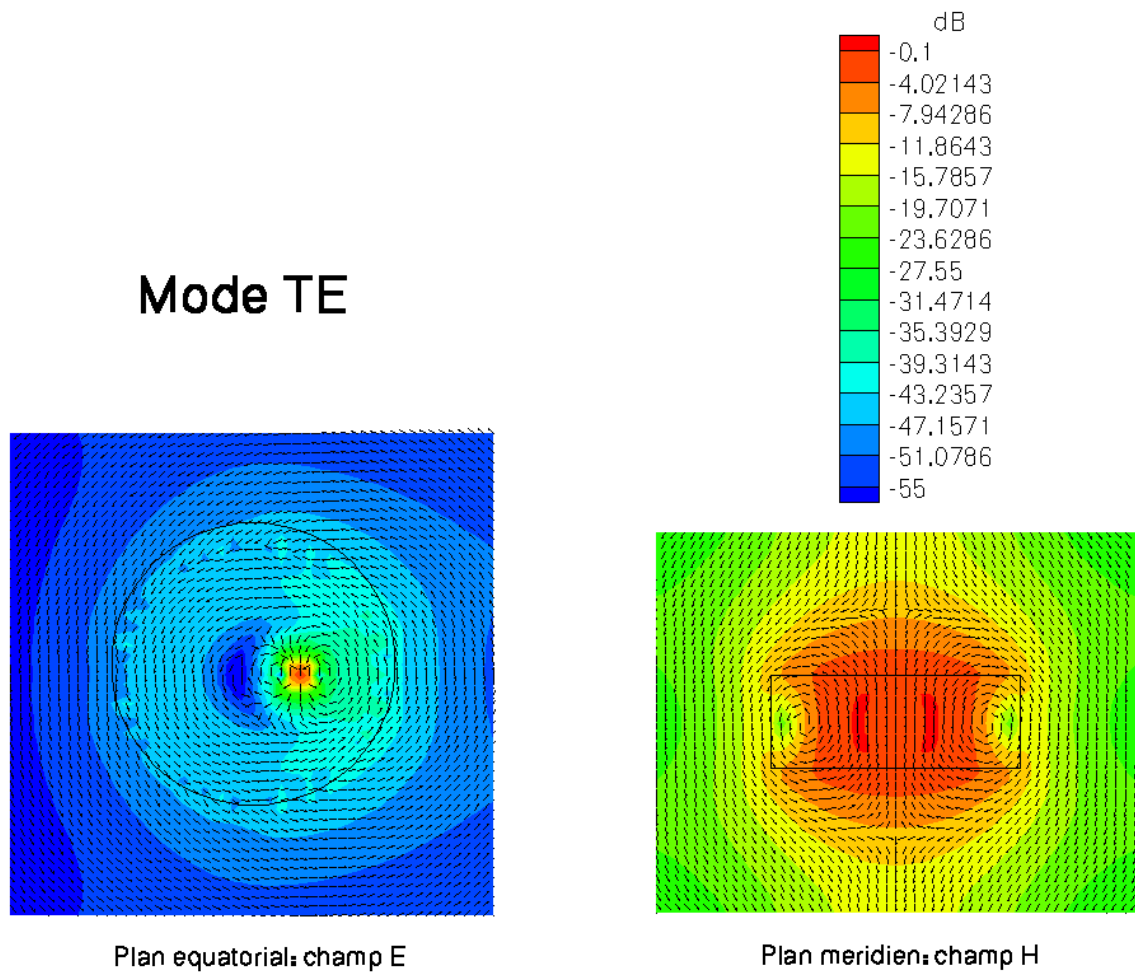


FIG. 3.18 – Résonateur diélectrique : carte de champ (mode TE)

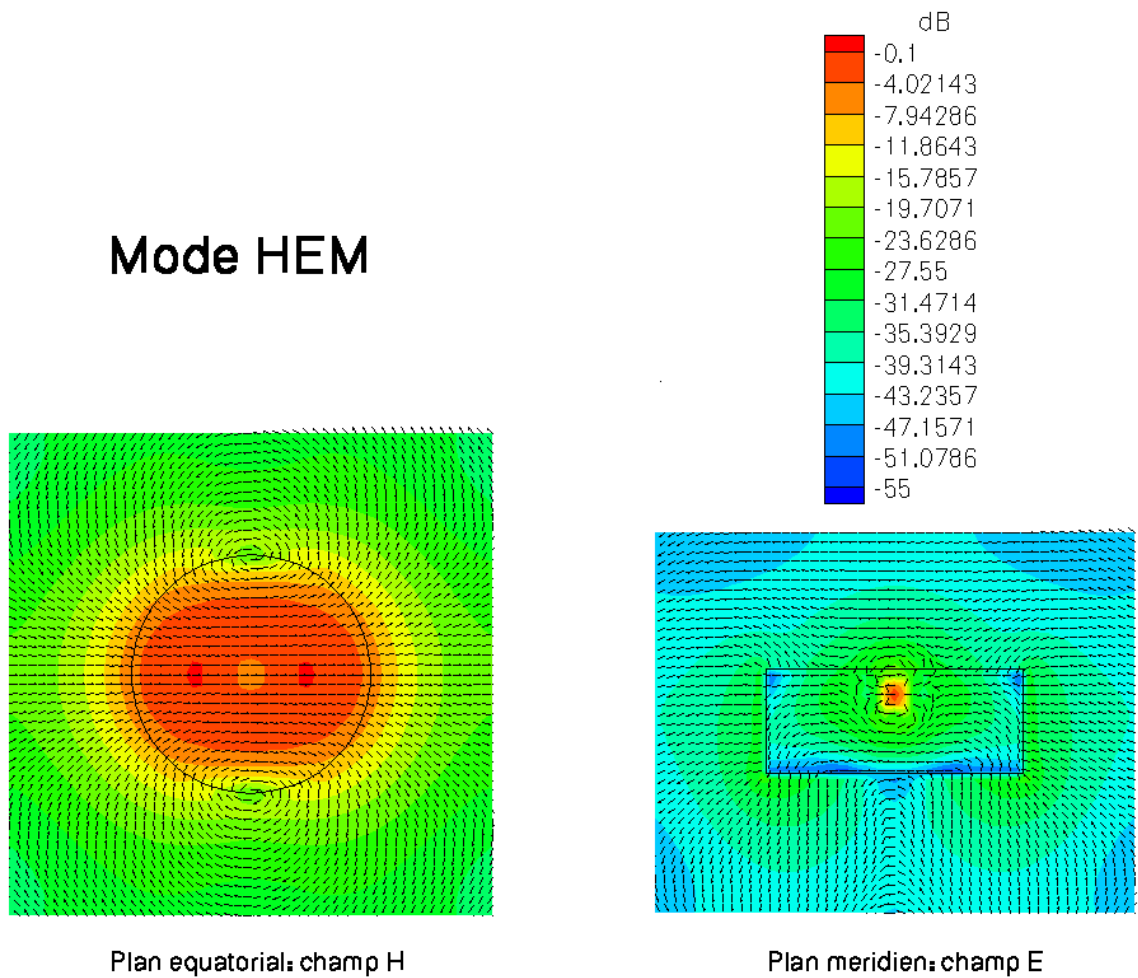
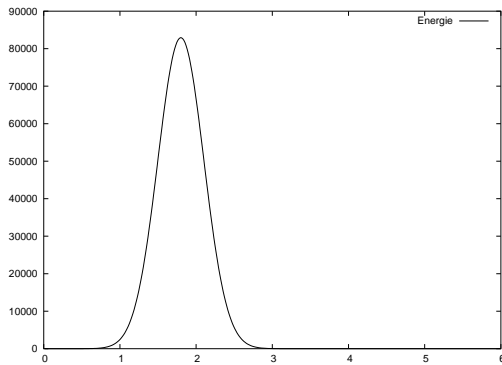


FIG. 3.19 – Résonateur diélectrique : carte de champ (mode HEM)

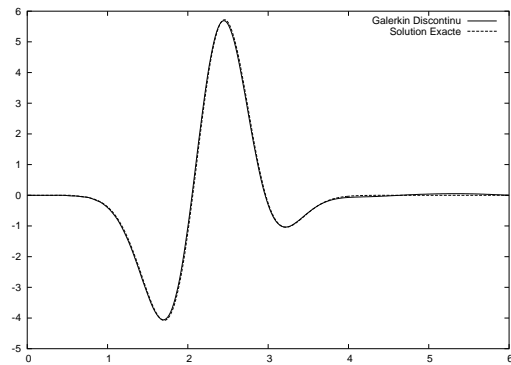
### 3.6.4 Propagation d'un dipôle sur des grilles raffinées

On simule la propagation du dipôle décrit dans la section 3.5.4. On considère un maillage de  $40^3$  cellules. Le centre de ce maillage est ensuite raffiné d'abord de manière conforme puis de manière non-conforme. Le taux de raffinement est 4. L'objectif est de voir si la présence d'une grille raffinée perturbe la propagation. Pour chacun des deux raffinements, on présente l'évolution en temps en un point de la grille grossière de la composante  $H_x$  et la variation d'énergie au cours du temps dans la grille fine. On peut voir que lorsque le raffinement est conforme (figures 3.20-(a) et 3.20-(b)), la solution obtenue se compare très bien à la solution exacte. Par contre, lorsque le raffinement est non-conforme (figures 3.20-(c) et 3.20-(d)), la solution est fortement dégradée par des réflexions parasites que l'on attribue aux interfaces non-conformes. Ces réflexions sont bien illustrées par la

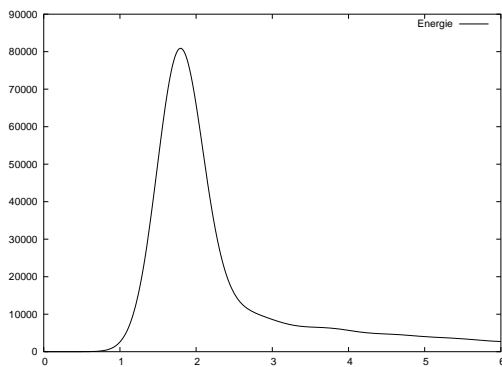
courbe d'énergie.



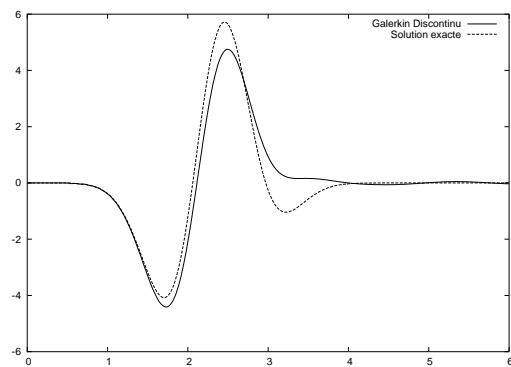
(a) Variation d'énergie dans la grille fine (cas conforme)



(b) Evolution en un point de la grille grossière de  $H_x$  (cas conforme)



(c) Variation d'énergie dans la grille fine (cas non-conforme)



(d) Evolution en un point de la grille grossière de  $H_x$  (cas non-conforme)

FIG. 3.20 – Propagation d'un dipôle sur une grille raffinée : comparaison conforme (haut) et non-conforme (bas)

### 3.7 Conclusion

On a présenté une méthode Galerkin Discontinuu conservant une énergie discrète et stable sur tout type de maillages orthogonaux. Le choix de fonctions de base que nous proposons permet d'assurer la conservation des relations de divergence sur un maillage conforme. Le schéma a été doté de parois absorbantes performantes : les PML. Nous avons aussi vu qu'il était apte à traiter des discontinuités de matériaux. On a de plus montré que l'erreur de dispersion est peu dépendante du rapport local pas de temps sur pas d'espace.

La méthode a donc les bonnes propriétés pour traiter des grilles raffinées. Nous allons toutefois voir dans le chapitre suivant qu'il est possible dans le cas d'un maillage conforme de diminuer encore l'erreur de dispersion. Cependant, dans le cas non-conforme, des réflexions parasites dégradent les résultats. Nous verrons au chapitre 5 comment remédier à ce problème.



# Méthode adaptée au cas conforme

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Modification du calcul des flux</b>	<b>93</b>
<b>4.2</b>	<b>Stabilité du schéma</b>	<b>96</b>
<b>4.3</b>	<b>Choix de <math>\alpha</math></b>	<b>105</b>
4.3.1	Etude de l'erreur de dispersion	105
4.3.2	Validation numérique	107
<b>4.4</b>	<b>Stratégie sur une grille raffinée</b>	<b>109</b>
<b>4.5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>112</b>
4.5.1	Maillage hexaédrique	112
4.5.2	Maillage raffiné conforme	113
<b>4.6</b>	<b>Cas non-conforme</b>	<b>115</b>
4.6.1	Energie piégée	115
4.6.2	Illustration numérique	117
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>118</b>

---

On présente ici une modification du calcul des flux pour la méthode Galerkin Discontinu présentée au chapitre précédent. On propose d'introduire dans le calcul des flux un paramètre sur lequel on agira pour contrôler la dispersion. Cette démarche s'inspire de ce qui a été fait avec les  $\beta$ -schémas (chapitre 2). Ceci nous permettra de vérifier la relation de dispersion à l'ordre quatre dans la direction  ${}^t(1,1,1)$ . Nous verrons alors que lorsque le maillage est raffiné de manière conforme, l'erreur de dispersion est comparable à celle réalisée avec un schéma de Yee avec pas de temps local. Nous verrons aussi que cette approche n'a pu être étendue au cas non-conforme.

## 4.1 Modification du calcul des flux

On reprend exactement les notations de la section 3.1.1. Les premières étapes de la discrétisation sont également identiques. On rappelle qu'après avoir multiplié les équations de Maxwell par une fonction test  $\varphi_{ij}$  et après avoir intégré sur un volume  $V_i$ , on a le

système

$$\begin{cases} \int_{V_i} \varepsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} = \int_{V_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{H} - \int_{V_i} \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} - \int_{\partial V_i} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \mathbf{H}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \\ \int_{V_i} \mu_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} = - \int_{V_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{E} + \int_{\partial V_i} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \mathbf{E}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}. \end{cases} \quad (4.1)$$

On utilisera dans ce chapitre exclusivement les fonctions de base de l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$  (section 3.2). Ainsi, pour tout volume  $V_i$ , le nombre de fonctions de base  $d_i$  est égal à 9.

On propose de modifier le calcul des flux, soit l'évaluation des termes

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V_i} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \mathbf{H}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \\ & \int_{\partial V_i} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \mathbf{E}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On rappelle (formule (3.6)) que pour tout voisin  $V_k$  de  $V_i$ , on évaluait dans le chapitre précédent l'intégrale sur leur face commune  $F_{ik}$  par

$$\begin{aligned} \int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \mathbf{H}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} & \simeq \frac{1}{2} \int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times (\mathbf{H}_i(x) + \mathbf{H}_k(x))) \cdot \tilde{\mathbf{n}} \\ & \simeq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^9 H_{il} \int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \boldsymbol{\varphi}_{il}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} + H_{kl} \int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \boldsymbol{\varphi}_{kl}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\mathbf{H}$  est ainsi approché par la demi-somme de ses représentations de part et d'autre de la face. Cette valeur est ensuite intégrée exactement.

La modification que allons introduire réside dans la formule (4.3) de calcul des intégrales sur les faces. Cette modification s'inspire du  $\beta$ -schéma (chapitre 2). Avec ce schéma, les champs sur les faces sont évalués en prenant la demi-somme de deux états constants de part et d'autre de la face. Sur les deux éléments auxquels la face appartient, ces états constants sont calculés à partir d'une interpolation dépendant d'une combinaison entre une pente et un gradient. Nous avons vu que lorsque le maillage est uniforme, seul le gradient (pondéré par le paramètre  $\beta$ ) intervient. On peut réécrire dans ce cas la formule (2.4)

$$\forall x \in F_{ik}, \mathbf{H}(x) \simeq \frac{1}{2} \left( \mathbf{H}_i + 2\beta \overline{\overline{\nabla}} \mathbf{H}_i \cdot \overrightarrow{G_i G_{F_{ik}}} + \mathbf{H}_k + 2\beta \overline{\overline{\nabla}} \mathbf{H}_k \cdot \overrightarrow{G_k G_{F_{ik}}} \right), \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{H}_i$  (respectivement  $\mathbf{H}_k$ ) et  $G_i$  (respectivement  $G_k$ ) désignent la valeur moyenne et le centre de gravité sur l'élément  $i$  (respectivement  $k$ ).

On peut s'inspirer de cette approche pour le schéma Galerkin Discontinu. On rappelle (remarque 3.2.3) que les degrés de liberté  ${}^t(H_{i1}, H_{i4}, H_{i7})$  désigne la valeur moyenne de  $\mathbf{H}$  dans l'élément  $i$  et que les autres degrés de liberté sont relatifs aux dérivées. En introduisant

une paramètre  $\alpha > 0$ , on calcule

$$\begin{aligned} \forall x \in F_{ik}, \mathbf{H}(x) \simeq & \frac{1}{2} \left( H_{i1} + H_{i4} + H_{i7} + \alpha \sum_{l=2, l \neq 4, l \neq 7}^9 H_{il} \varphi_{il}(G_{F_{ik}}) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( H_{k1} + H_{k4} + H_{k7} + \alpha \sum_{l=2, l \neq 4, l \neq 7}^9 H_{kl} \varphi_{kl}(G_{F_{ik}}) \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

En notant

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \\ 1 \\ \alpha \\ \alpha \\ 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

on propose finalement de substituer la formule (4.3) par

$$\int_{F_{ik}} (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \mathbf{H}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} \simeq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^9 \alpha_l \left( \int_{F_{ik}} \boldsymbol{\varphi}_{ij} \right) \times (H_{il} \varphi_{il}(G_{F_{ik}}) + H_{kl} \varphi_{kl}(G_{F_{ik}})) \cdot \tilde{\mathbf{n}}. \quad (4.7)$$

Deux modifications sont introduites par rapport à la formule (4.3). D'une part on introduit un paramètre  $\alpha$  et d'autre part on simplifie le calcul des intégrales sur les faces en utilisant la valeur de certaines fonctions de base aux centres de gravité des faces. On appelle le schéma résultant du nouveau calcul de flux (4.7) schéma Galerkin Discontinu Pondéré (GDP).

On peut aussi interpréter le schéma GDP comme un schéma où les flux sont calculés par une combinaison dépendant de  $\alpha$  des représentations  $\mathbb{P}^0$  et  $\mathbb{P}_{div}^1$

$$\begin{aligned} \forall x \in F_{ik}, 2\mathbf{H}(x) \simeq & (1 - \alpha) (H_{1l} \varphi_{1l}(G_{F_{ik}}) + H_{k1} \varphi_{k1}(G_{F_{ik}})) \\ & + (1 - \alpha) (H_{4l} \varphi_{4l}(G_{F_{ik}}) + H_{k4} \varphi_{k4}(G_{F_{ik}})) \\ & + (1 - \alpha) (H_{7l} \varphi_{7l}(G_{F_{ik}}) + H_{k7} \varphi_{k7}(G_{F_{ik}})) \\ & + \alpha \sum_{l=1}^9 (H_{il} \varphi_{il}(G_{F_{ik}}) + H_{kl} \varphi_{kl}(G_{F_{ik}})). \end{aligned} \quad (4.8)$$

On vérifie facilement que (4.8) conduit à (4.7).



**Remarque 4.1.1** *Lorsqu'on travaille sur un maillage conforme et dans l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$ , il est facile de vérifier que*

$$\forall j = 1..9, \forall l = 1..9, \begin{cases} \int_{F_{ik}} (\varphi_{ij} \times \varphi_{il}) = \left( \int_{F_{ik}} \varphi_{ij} \right) \times \varphi_{il}(G_{F_{ik}}), \\ \int_{F_{ik}} (\varphi_{ij} \times \varphi_{kl}) = \left( \int_{F_{ik}} \varphi_{ij} \right) \times \varphi_{kl}(G_{F_{ik}}). \end{cases} \quad (4.9)$$

*Par rapport à la formule (4.3), on ne fait dans ce cas pas de nouvelles approximations dans la formule (4.7). On ne fait qu'introduire un paramètre  $\alpha$ .*

## 4.2 Stabilité du schéma

Nous avons modifié le calcul des flux. Les hypothèses du théorème issu de [48] de la conservation de l'énergie discrète ne sont plus vérifiées. La stabilité du schéma GDP n'est donc pas assurée. Nous allons toutefois montrer qu'il existe une énergie (différente de l'équivalent  $L^2$  de l'énergie électromagnétique) qui se conserve. Cette énergie nous permettra d'assurer la stabilité du schéma sous une condition de type CFL.

**Proposition 4.2.1** *Le schéma GDP conserve sur tout maillage orthogonal (conforme ou non-conforme) une énergie dont l'expression à l'instant  $n\Delta t$  est donnée par*

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2} \sum_{\text{Cellules } i} \varepsilon_i {}^t \vec{\mathbf{E}}_i^n M_i^\alpha \vec{\mathbf{E}}_i^n + \mu_i {}^t \vec{\mathbf{H}}_i^{n-1/2} M_i^\alpha \vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2}, \quad (4.10)$$

où la matrice d'énergie diagonale  $M_i^\alpha$  est définie par

$$(M_i^\alpha)_{j,j} = \alpha_j \int_{V_i} |\varphi_{ij}|^2, \quad 1 \leq j \leq 9.$$

**Preuve 4.2.1** Pour plus de lisibilité, on propose une démonstration dans le cas bi-dimensionnel. La démonstration est identique dans le cas tri-dimensionnel. On considère donc le système de Maxwell 2D dans la polarisation TE

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

On se donne un maillage orthogonal infini (conforme ou non-conforme). Chaque élément  $C_i$  est donc un rectangle de taille  $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ . On note  $\varepsilon_i$  et  $\mu_i$  respectivement la permittivité et la perméabilité du milieu sur l'élément  $C_i$ .

On appelle interface l'intersection de deux éléments lorsqu'il s'agit d'arêtes. On les note  $a_{ij} = C_i \cap C_j$ . Sur chaque interface  $a_{ij}$ , on note  $\vec{n}_{ij} = {}^t(n_{ijx}, n_{ijy})$  l'intégrale de la normale

unitaire orientée de  $C_i$  vers  $C_j$  le long de  $a_{ij}$ . On note enfin  $\vec{n}_{ij}$  le vecteur unitaire associé et  $\mathcal{V}_i$  l'ensemble des éléments  $C_j$  voisins de  $C_i$  (i.e  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ ).

Pour toute grille orthogonale conforme ou non-conforme, on a les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \vec{n}_{ij} = 0 \\ \vec{n}_{ij} = -\vec{n}_{ji} \\ \sum_{j \in \mathcal{V}_i} |n_{ijx}| = 2\Delta y_i \text{ et } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} |n_{ijy}| = 2\Delta x_i. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Dans le cas 2D TE, l'usage des fonctions de base  $\mathbb{P}_{div}^1$  nécessite trois degrés de liberté pour  $H_z$  contre deux degrés de liberté pour  $E_x$  et  $E_y$ . Pour faciliter l'écriture matricielle du schéma, on écrira que  $E_x$  et  $E_y$  ont chacun trois degrés de liberté avec un de ces degrés de liberté nul. On note  $\mathbf{H}_{zi}$ ,  $\mathbf{E}_{xi}$  et  $\mathbf{E}_{yi}$  les vecteurs à trois composantes contenant les degrés de liberté de  $H_z$ ,  $E_x$  et  $E_y$  dans l'élément  $i$ . Notre convention est que le deuxième degré de liberté de  $E_x$  est nul et le troisième degrés de liberté de  $E_y$  est nul. Ainsi, les composantes des champs ont dans l'élément  $i$  la représentation suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z = (\mathbf{H}_{zi})_1 + (\mathbf{H}_{zi})_2 \cdot (x - x_{G_i}) + (\mathbf{H}_{zi})_3 \cdot (y - y_{G_i}). \\ E_x = (\mathbf{E}_{xi})_1 + (\mathbf{E}_{xi})_3 \cdot (y - y_{G_i}), \\ E_y = (\mathbf{E}_{yi})_1 + (\mathbf{E}_{yi})_2 \cdot (x - x_{G_i}). \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Le schéma GDP s'écrit alors en 2D

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i M_i \frac{\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -M_i^y \mathbf{E}_{xi}^{n+1} + M_i^x \mathbf{E}_{yi}^{n+1} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} -(K_{ij} + K_{ji})n_{ijx} + (G_{ij} + G_{ji})n_{ijy} \\ -\Delta x_i (K_{ij} + K_{ji})|n_{ijx}|/2 \\ \Delta y_i (G_{ij} + G_{ji})|n_{ijy}|/2 \end{pmatrix}, \\ \epsilon_i M_i \frac{\mathbf{E}_{xi}^{n+1} - \mathbf{E}_{xi}^n}{\Delta t} = -M_i^y \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (F_{ij} + F_{ji})n_{ijy} \\ 0 \\ \Delta y_i (F_{ij} + F_{ji})|n_{ijy}|/2 \end{pmatrix}, \\ \epsilon_i M_i \frac{\mathbf{E}_{yi}^{n+1} - \mathbf{E}_{yi}^n}{\Delta t} = M_i^x \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (F_{ij} + F_{ji})n_{ijy} \\ \Delta x_i (F_{ij} + F_{ji})|n_{ijx}|/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (4.13)$$

où les flux entre les éléments  $C_i$  et  $C_j$  sont

$$\begin{cases} F_{ij} = \frac{H_{zi}^1}{2} + \alpha \frac{\Delta x_i \tilde{n}_{ijx}}{4} H_{zi}^2 + \alpha \frac{\Delta y_i \tilde{n}_{ijy}}{4} H_{zi}^3, \\ G_{ij} = \frac{E_{xi}^1}{2} + \alpha \frac{\Delta y_i \tilde{n}_{ijy}}{4} E_{xi}^3, \\ K_{ij} = \frac{E_{yi}^1}{2} + \alpha \frac{\Delta x_i \tilde{n}_{ijx}}{4} E_{yi}^2. \end{cases}$$

Les matrices  $M_i$ ,  $M_i^x$  et  $M_i^y$  ont les expressions suivantes

$$M_i = \begin{pmatrix} \Delta x_i \Delta y_i & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x_i^3 \Delta y_i / 12 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y_i^3 \Delta x_i / 12 \end{pmatrix},$$

$$M_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta x_i \Delta y_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_i^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta x_i \Delta y_i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit la matrice d'énergie  $M_i^\alpha = \begin{pmatrix} \Delta x_i \Delta y_i & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta x_i^3 \Delta y_i / 12 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta y_i^3 \Delta x_i / 12 \end{pmatrix}.$

On définit alors l'énergie discrète

$$\mathcal{E}^n = \sum_i \varepsilon_i {}^t \mathbf{E}_{xi}^n M_i^\alpha \mathbf{E}_{xi}^n + \varepsilon_i {}^t \mathbf{E}_{yi}^n M_i^\alpha \mathbf{E}_{yi}^n + \mu_i {}^t \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} M_i^\alpha \mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}}.$$

La variation d'énergie est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\ &= \sum_i ({}^t \mathbf{E}_{xi}^{n+1} + {}^t \mathbf{E}_{xi}^n) \varepsilon_i M_i^\alpha (\mathbf{E}_{xi}^{n+1} - \mathbf{E}_{xi}^n) \\ &\quad + ({}^t \mathbf{E}_{yi}^{n+1} + {}^t \mathbf{E}_{yi}^n) \varepsilon_i M_i^\alpha (\mathbf{E}_{yi}^{n+1} - \mathbf{E}_{yi}^n) + {}^t \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \mu_i M_i^\alpha (\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Le système (4.13) permet d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i M_i^\alpha \frac{\mathbf{H}_{\mathbf{zi}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{\mathbf{zi}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\alpha M_i^y \mathbf{E}_{\mathbf{xi}}^{n+1} + \alpha M_i^x \mathbf{E}_{\mathbf{yi}}^{n+1} - \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (K_{ij} + K_{ji})n_{ijx} - (G_{ij} + G_{ji})n_{ijy} \\ \alpha \Delta x_i (K_{ij} + K_{ji})|n_{ijx}|/2 \\ -\alpha \Delta y_i (G_{ij} + G_{ji})|n_{ijy}|/2 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_i M_i^\alpha \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{xi}}^{n+1} - \mathbf{E}_{\mathbf{xi}}^n}{\Delta t} = -\alpha M_i^y \mathbf{H}_{\mathbf{zi}}^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (F_{ij} + F_{ji})n_{ijy} \\ 0 \\ \alpha \Delta y_i (F_{ij} + F_{ji})|n_{ijy}|/2 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_i M_i^\alpha \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{yi}}^{n+1} - \mathbf{E}_{\mathbf{yi}}^n}{\Delta t} = \alpha M_i^x \mathbf{H}_{\mathbf{zi}}^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (F_{ij} + F_{ji})n_{ijy} \\ \alpha \Delta x_i (F_{ij} + F_{ji})|n_{ijx}|/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

En notant  $\mathbf{E}_{\mathbf{xi}} = \mathbf{E}_{\mathbf{xi}}^{n+1} + \mathbf{E}_{\mathbf{xi}}^n$ ,  $\mathbf{E}_{\mathbf{yi}} = \mathbf{E}_{\mathbf{yi}}^{n+1} + \mathbf{E}_{\mathbf{yi}}^n$  et  $\mathbf{H}_{\mathbf{zi}} = \mathbf{H}_{\mathbf{zi}}^{n+\frac{1}{2}}$ , on peut alors évaluer la variation d'énergie

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta t(a + b + c + d), \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} a &= \sum_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} n_{ijy} E_{xi}^0 H_{zi}^0 - n_{ijx} E_{yi}^0 H_{zi}^0 + \frac{\alpha^2}{4} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} n_{ijy} E_{xi}^2 H_{zi}^2 - n_{ijx} E_{yi}^1 H_{zi}^1, \\ b &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} n_{ijy} E_{xi}^0 H_{zj}^0 - n_{ijx} E_{yi}^0 H_{zj}^0 n_{ijy} H_{zi}^0 E_{xj}^0 - n_{ijx} H_{zi}^0 E_{yj}^0, \\ c &= \frac{\alpha^2}{8} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \Delta x_i \Delta x_j n_{ijx} (E_{yi}^1 H_{zj}^1 + H_{zi}^1 E_{yj}^1) - \Delta y_i \Delta y_j n_{ijy} (E_{xi}^2 H_{zj}^2 + H_{zi}^2 E_{xj}^2), \\ d &= \sum_i \alpha \Delta x_i \Delta y_i (H_{zi}^1 E_{yi}^0 - H_{zi}^2 E_{xi}^0 - E_{xi}^2 H_{zi}^0 + E_{yi}^1 H_{zi}^0), \\ &\quad + \sum_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \alpha \frac{\Delta y_i |n_{ijy}|}{2} (E_{xi}^0 H_{zi}^2 + E_{xi}^2 H_{zi}^0) - \alpha \frac{\Delta x_i |n_{ijx}|}{2} (E_{yi}^0 H_{zi}^1 + E_{yi}^1 H_{zi}^0). \end{aligned}$$

Nous avons

$$- a = 0 \text{ car } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} n_{ijx} = 0 \text{ et } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} n_{ijy} = 0.$$

$$- b = 0.$$

Vérifions le par exemple pour les termes en  $E_x^0 H_z^0$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} n_{ijy} E_{xi}^0 H_{zj}^0 + n_{ijy} H_{zi}^0 E_{xj}^0 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a_{ij}} n_{ijy} E_{xi}^0 H_{zj}^0 + n_{ijy} H_{zi}^0 E_{xj}^0 + n_{j iy} E_{xj}^0 H_{zi}^0 + n_{j iy} H_{zj}^0 E_{xi}^0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- car  $n_{ijx} = -n_{jix}$  et  $n_{ijy} = -n_{jiy}$ .
- $c = 0$  pour les mêmes raisons.
- $d = 0$  car  $\forall i, \sum_{j \in \mathcal{V}_i} |n_{ijx}| = 2\Delta y_i$  et  $\sum_{j \in \mathcal{V}_i} |n_{ijy}| = 2\Delta x_i$ .

Finalement  $\Delta \mathcal{E} = 0$ . ■

**Proposition 4.2.2** *Sous la condition (4.14) et  $\alpha > 0$ , l'énergie  $\mathcal{E}^n$  est une forme quadratique définie positive bornée des inconnues numériques. La condition (4.14) nous assure donc la stabilité du schéma.*

$$\begin{cases} \frac{\Delta t^2}{d_{min}^2} < \min \left( \frac{4}{25}, \frac{16}{225\alpha^2} \right) \min_{i,j \in \mathcal{V}_i} (\epsilon_i \mu_j, \epsilon_j \mu_i), \\ \frac{\Delta t^2 d_{max}^2}{d_{min}^4} < \frac{2}{75\alpha} \min_{i,j \in \mathcal{V}_i} (\epsilon_i \mu_j, \epsilon_j \mu_i). \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $d_{min} = \min_i (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ ,  $d_{max} = \max_i (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ , et  $\mathcal{V}_i$  l'ensemble des cellules voisines de la cellule  $i$ .

**Preuve 4.2.2** On considère un maillage conforme infini constitué de cellules  $I_{i,j,k}$  de taille  $(\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k)$ . On note  $V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ . Pour tirer parti du caractère structuré du maillage sur lequel on travaille, on modifie quelque peu les notations de la section 4.1. On rappelle que dans l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$ , chaque composante scalaire des champs a trois degrés de liberté. Par convention, on écrit ici que chaque composante scalaire a quatre degrés de liberté avec un de ses degrés de liberté qui est nul. Chaque champ a donc ici douze degrés de liberté (dont trois sont nuls). Par rapport aux fonctions de base de  $\mathbb{P}_{div}^1$  (3.13), ces douze degrés de liberté sont repérés pour par exemple le champ  $\mathbf{E}$  par

$$\begin{aligned} E_{x,1} &\longrightarrow \varphi_1, & E_{x,2} &\longrightarrow 0, & E_{x,3} &\longrightarrow \varphi_2, & E_{x,4} &\longrightarrow \varphi_3, \\ E_{y,1} &\longrightarrow \varphi_4, & E_{y,2} &\longrightarrow \varphi_5, & E_{y,3} &\longrightarrow 0, & E_{y,4} &\longrightarrow \varphi_6, \\ E_{z,1} &\longrightarrow \varphi_7, & E_{z,2} &\longrightarrow \varphi_8, & E_{z,3} &\longrightarrow \varphi_9, & E_{z,4} &\longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sur chaque cellule  $(i,j,k)$ , on note  $G = (x_G, y_G, z_G)$  le centre de gravité de la cellule. On définit les réels

$$\begin{aligned} a_1 &= a_5 = a_9 = V_{i,j,k}, \\ a_2 &= a_6 = a_{10} = \int_{V_{i,j,k}} (x - x_G)^2, \\ a_3 &= a_7 = a_{11} = \int_{V_{i,j,k}} (y - y_G)^2, \\ a_4 &= a_8 = a_{12} = \int_{V_{i,j,k}} (z - z_G)^2. \end{aligned}$$

Pour  $m = 1 \dots 4$ , on définit

$$\begin{aligned}
 E_m^n(i, j, k) &= \varepsilon_{i, j, k} (a_m E_{x, m}^n(i, j, k)^2 + a_{m+3} E_{y, m}^n(i, j, k)^2 + a_{m+6} E_{z, m}^n(i, j, k)^2), \\
 H_m^n(i, j, k) &= \mu_{i, j, k} (a_m H_{x, m}^{n-1/2}(i, j, k) H_{x, m}^{n+1/2}(i, j, k) + a_{m+3} H_{y, m}^{n-1/2}(i, j, k) H_{y, m}^{n+1/2}(i, j, k) \\
 &\quad + a_{m+6} H_{z, m}^{n-1/2}(i, j, k)^2 H_{z, m}^{n+1/2}(i, j, k)^2), \\
 B_m^n(i, j, k) &= \mu_{i, j, k} (a_m H_{x, m}^{n-1/2}(i, j, k)^2 + a_{m+3} H_{y, m}^{n-1/2}(i, j, k)^2 + a_{m+6} H_{z, m}^{n-1/2}(i, j, k)^2).
 \end{aligned}$$

On introduit enfin les quantités

$$\begin{aligned}
 f_x(\mathbf{E}_x^n) &= \frac{\Delta y_j \Delta z_k \Delta t}{2} (E_{x, 1}^n(i+1, j, k) - E_{x, 1}^n(i-1, j, k) + \alpha \Delta x_i E_{x, 2}^n(i, j, k) \\
 &\quad - \alpha \frac{\Delta x_{i+1}}{2} E_{x, 2}^n(i+1, j, k) - \alpha \frac{\Delta x_{i-1}}{2} E_{x, 2}^n(i-1, j, k)), \\
 f_y(\mathbf{E}_x^n) &= \frac{\Delta x_i \Delta z_k \Delta t}{2} (E_{x, 1}^n(i, j+1, k) - E_{x, 1}^n(i, j-1, k) + \alpha \Delta y_j E_{x, 3}^n(i, j, k) \\
 &\quad - \alpha \frac{\Delta y_{j+1}}{2} E_{x, 3}^n(i, j+1, k) - \alpha \frac{\Delta y_{j-1}}{2} E_{x, 3}^n(i, j-1, k)), \\
 f_z(\mathbf{E}_x^n) &= \frac{\Delta x_i \Delta y_j \Delta t}{2} (E_{x, 1}^n(i, j, k+1) - E_{x, 1}^n(i, j, k-1) + \alpha \Delta z_k E_{x, 4}^n(i, j, k) \\
 &\quad - \alpha \frac{\Delta z_{k+1}}{2} E_{x, 4}^n(i, j, k+1) - \alpha \frac{\Delta z_{k-1}}{2} E_{x, 4}^n(i, j, k-1)), \\
 g_x(\mathbf{E}_x^n) &= \frac{V_{i, j, k} \Delta t}{4} (E_{x, 1}^n(i+1, j, k) + E_{x, 1}^n(i-1, j, k) - 2E_{x, 1}^n(i, j, k) \\
 &\quad - \alpha \frac{\Delta x_{i+1}}{2} E_{x, 2}^n(i+1, j, k) + \alpha \frac{\Delta x_{i-1}}{2} E_{x, 2}^n(i-1, j, k)), \\
 g_y(\mathbf{E}_x^n) &= \frac{V_{i, j, k} \Delta t}{4} (E_{x, 1}^n(i, j+1, k) + E_{x, 1}^n(i, j-1, k) - 2E_{x, 1}^n(i, j, k) \\
 &\quad - \alpha \frac{\Delta y_{j+1}}{2} E_{x, 3}^n(i, j+1, k) + \alpha \frac{\Delta y_{j-1}}{2} E_{x, 3}^n(i, j-1, k)), \\
 g_z(\mathbf{E}_x^n) &= \frac{V_{i, j, k} \Delta t}{4} (E_{x, 1}^n(i, j, k+1) + E_{x, 1}^n(i, j, k-1) - 2E_{x, 1}^n(i, j, k) \\
 &\quad - \alpha \frac{\Delta z_{k+1}}{2} E_{x, 4}^n(i, j, k+1) + \alpha \frac{\Delta z_{k-1}}{2} E_{x, 4}^n(i, j, k-1)).
 \end{aligned}$$

Avec ces notations, l'énergie s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^n &= \sum_{i,j,k} \sum_{m=1}^4 (E_m^n(i,j,k) + H_m^n(i,j,k)) \\
&= \sum_{i,j,k} \sum_{m=1}^4 (E_m^n(i,j,k) + B_m^n(i,j,k)) \\
&\quad + \sum_{i,j,k} H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k) (f_z(\mathbf{E}_y^n) - f_y(\mathbf{E}_z^n)) + H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k) g_z(\mathbf{E}_y^n) - H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k) g_y(\mathbf{E}_z^n) \\
&\quad + \sum_{i,j,k} H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k) (f_x(\mathbf{E}_z^n) - f_z(\mathbf{E}_x^n)) + H_{y,2}^{n-1/2}(i,j,k) g_x(\mathbf{E}_z^n) - H_{y,4}^{n-1/2}(i,j,k) g_z(\mathbf{E}_x^n) \\
&\quad + \sum_{i,j,k} H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k) (f_y(\mathbf{E}_x^n) - f_x(\mathbf{E}_y^n)) + H_{z,3}^{n-1/2}(i,j,k) g_y(\mathbf{E}_x^n) - H_{z,2}^{n-1/2}(i,j,k) g_x(\mathbf{E}_y^n).
\end{aligned}$$

On scinde la somme en 6 termes

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1^n &= \sum_{i,j,k} H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k) f_z(\mathbf{E}_y^n) + H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k) g_z(\mathbf{E}_y^n) + \frac{a_1}{2} \mu_{i,j,k} H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad + a_3 \mu_{i,j,k} H_{x,2}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \frac{a_5}{5} \varepsilon_{i,j,k+1} E_{y,1}^n(i,j,k+1)^2 + \frac{a_5}{5} \varepsilon_{i,j,k-1} E_{y,1}^n(i,j,k-1)^2 \\
&\quad + \frac{a_5}{10} \varepsilon_{i,j,k} E_{y,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_5}{6} \varepsilon_{i,j,k+1} E_{y,3}^n(i,j,k+1)^2 \\
&\quad + \frac{2a_8}{5} \varepsilon_{i,j,k-1} E_{y,3}^n(i,j,k-1)^2 + \frac{a_8}{5} \varepsilon_{i,j,k} E_{y,3}^n(i,j,k)^2 \\
\mathcal{E}_2^n &= \sum_{i,j,k} -H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k) f_y(\mathbf{E}_z^n) - H_{x,2}^{n-1/2}(i,j,k) g_y(\mathbf{E}_z^n) + \frac{a_1}{2} \mu_{i,j,k} H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad + a_4 \mu_{i,j,k} H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_9}{5} \varepsilon_{i,j+1,k} E_{z,1}^n(i,j+1,k)^2 + \frac{a_9}{5} \varepsilon_{i,j-1,k} E_{z,1}^n(i,j-1,k)^2 \\
&\quad + \frac{a_9}{10} \varepsilon_{i,j,k} E_{z,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_{11}}{5} \varepsilon_{i,j+1,k} E_{z,3}^n(i,j+1,k)^2 \\
&\quad + \frac{2a_{11}}{5} \varepsilon_{i,j-1,k} E_{z,3}^n(i,j-1,k)^2 + \frac{a_{11}}{5} \varepsilon_{i,j,k} E_{z,3}^n(i,j,k)^2 \\
\mathcal{E}_3^n &= \sum_{i,j,k} H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k) f_x(\mathbf{E}_z^n) + H_{x,2}^{n-1/2}(i,j,k) g_x(\mathbf{E}_z^n) + \frac{a_5}{2} \mu_{i,j,k} H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad + a_6 \mu_{i,j,k} H_{y,2}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \frac{a_9}{5} \varepsilon_{i+1,j,k} E_{z,1}^n(i+1,j,k)^2 + \frac{a_9}{5} \varepsilon_{i-1,j,k} E_{z,1}^n(i-1,j,k)^2 \\
&\quad + \frac{a_9}{10} \varepsilon_{i,j,k} E_{z,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_{10}}{5} \varepsilon_{i+1,j,k} E_{z,2}^n(i+1,j,k)^2 \\
&\quad + \frac{2a_{10}}{5} \varepsilon_{i-1,j,k} E_{z,2}^n(i-1,j,k)^2 + \frac{a_{10}}{5} \varepsilon_{i,j,k} E_{z,2}^n(i,j,k)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_4^n &= \sum_{i,j,k} -H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k)f_z(\mathbf{E}_x^n) - H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)g_z(\mathbf{E}_x^n) + \frac{a_5}{2}\mu_{i,j,k}H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
 &\quad + a_8\mu_{i,j,k}H_{y,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{5}\varepsilon_{i,j,k+1}E_{x,1}^n(i,j,k+1)^2 + \frac{a_1}{5}\varepsilon_{i,j,k-1}E_{x,1}^n(i,j,k-1)^2 \\
 &\quad + \frac{a_1}{10}\varepsilon_{i,j,k}E_{x,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_4}{5}\varepsilon_{i,j,k+1}E_{x,3}^n(i,j,k+1)^2 \\
 &\quad + \frac{2a_4}{5}E_{x,3}^n(i,j,k-1)^2 + \frac{a_4}{5}E_{x,3}^n(i,j,k)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_5^n &= \sum_{i,j,k} H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k)f_y(\mathbf{E}_x^n) + H_{z,3}^{n-1/2}(i,j,k)g_y(\mathbf{E}_x^n) + \frac{a_9}{2}\mu_{i,j,k}H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
 &\quad + a_{11}\mu_{i,j,k}H_{z,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{5}\varepsilon_{i,j+1,k}E_{x,1}^n(i,j+1,k)^2 + \frac{a_1}{5}\varepsilon_{i,j-1,k}E_{x,1}^n(i,j-1,k)^2 \\
 &\quad + \frac{a_1}{10}\varepsilon_{i,j,k}E_{x,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_3}{5}\varepsilon_{i,j+1,k}E_{x,2}^n(i,j+1,k)^2 \\
 &\quad + \frac{2a_3}{5}E_{x,2}^n(i,j-1,k)^2 + \frac{a_3}{5}E_{x,2}^n(i,j,k)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_6^n &= \sum_{i,j,k} -H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k)f_x(\mathbf{E}_y^n) - H_{z,2}^{n-1/2}(i,j,k)g_x(\mathbf{E}_y^n) + \frac{a_9}{2}\mu_{i,j,k}H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
 &\quad + a_{10}\mu_{i,j,k}H_{z,2}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_5}{5}\varepsilon_{i+1,j,k}E_{y,1}^n(i+1,j,k)^2 + \frac{a_5}{5}\varepsilon_{i-1,j,k}E_{y,1}^n(i-1,j,k)^2 \\
 &\quad + \frac{a_5}{10}\varepsilon_{i,j,k}E_{y,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_6}{5}\varepsilon_{i+1,j,k}E_{y,2}^n(i+1,j,k)^2 \\
 &\quad + \frac{2a_6}{5}\varepsilon_{i-1,j,k}E_{y,2}^n(i-1,j,k)^2 + \frac{a_6}{5}\varepsilon_{i,j,k}E_{y,2}^n(i,j,k)^2.
 \end{aligned}$$

On a

$$\mathcal{E}^n = \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i^n. \tag{4.16}$$

On peut minorer chacun de ces 6 termes de manière identique. Ainsi, en notant  $\mu = \mu_{i,j,k}$



et  $\varepsilon = \min_{l=-1,0,1} \varepsilon_{i+l,j+l,k+l}$ , on minore  $\mathcal{E}_1^n$  par

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,k} \frac{a_1}{10} \mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_5}{10} \varepsilon E_{y,1}^n(i,j,k+1)^2 - \frac{\Delta x_i \Delta y_j \Delta t}{2} |H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,1}^n(i,j,k+1)| \\
& + \frac{a_1}{10} \mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_5}{10} \varepsilon E_{y,1}^n(i,j,k-1)^2 - \frac{\Delta x_i \Delta y_j \Delta t}{2} |H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,1}^n(i,j,k-1)| \\
& + \frac{a_1}{10} \mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_8}{5} \varepsilon E_{y,3}^n(i,j,k)^2 - \frac{\alpha \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \Delta t}{2} |H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,3}^n(i,j,k)| \\
& + \frac{a_1}{10} \mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_8}{5} \varepsilon E_{y,3}^n(i,j,k+1)^2 - \frac{\alpha \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{k+1} \Delta t}{4} |H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,3}^n(i,j,k+1)| \\
& + \frac{a_1}{10} \mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_8}{5} \varepsilon E_{y,3}^n(i,j,k-1)^2 - \frac{\alpha \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{k+1} \Delta t}{4} |H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,3}^n(i,j,k-1)| \\
& + \frac{a_4}{5} \mu H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_5}{10} \varepsilon E_{y,1}^n(i,j,k+1)^2 - \frac{V_{i,j,k} \Delta t}{4} |H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,1}^n(i,j,k+1)| \\
& + \frac{a_4}{5} \mu H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_5}{10} \varepsilon E_{y,1}^n(i,j,k-1)^2 - \frac{V_{i,j,k} \Delta t}{4} |H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,1}^n(i,j,k-1)| \\
& + \frac{a_4}{5} \mu H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_5}{10} \varepsilon E_{y,1}^n(i,j,k)^2 - \frac{V_{i,j,k} \Delta t}{2} |H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,1}^n(i,j,k)| \\
& + \frac{a_4}{5} \mu H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_8}{5} \varepsilon E_{y,3}^n(i,j,k+1)^2 - \alpha \frac{V_{i,j,k} \Delta z_{k+1} \Delta t}{8} |H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,3}^n(i,j,k+1)| \\
& + \frac{a_4}{5} \mu H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_8}{5} \varepsilon E_{y,3}^n(i,j,k-1)^2 - \alpha \frac{V_{i,j,k} \Delta z_{k-1} \Delta t}{8} |H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)| |E_{y,3}^n(i,j,k-1)|
\end{aligned}$$

On note  $d_{min} = \min_i (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$  et  $d_{max} = \max_i (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ . On vérifie que  $\mathcal{E}_1^n \geq 0$  et que  $\mathcal{E}_1^n = 0 \implies \forall (i,j,k), E_{y,1}^n(i,j,k) = 0, E_{y,3}^n(i,j,k) = 0, H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k) = 0$  et  $H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k) = 0$  si  $\Delta t$  est tel que

$$\begin{cases} \frac{\Delta t^2}{d_{min}^2} < \frac{4}{25} \min_{i,j \in \mathcal{V}_i} (\varepsilon_i \mu_j, \varepsilon_j \mu_i), \\ \frac{\Delta t^2 d_{max}^2}{d_{min}^4} < \frac{2}{75\alpha} \min_{i,j \in \mathcal{V}_i} (\varepsilon_i \mu_j, \varepsilon_j \mu_i), \\ \frac{\Delta t^2}{d_{min}^2} < \frac{16}{225\alpha^2} \min_{i,j \in \mathcal{V}_i} (\varepsilon_i \mu_j, \varepsilon_j \mu_i). \end{cases}$$

Des minoration identiques sur les cinq autres termes de (4.16) nous permettent de vérifier que sous la condition (4.14) l'énergie discrète est une forme quadratique définie positive. Elle est de plus bornée (proposition 4.2.1). Le schéma GDP est donc stable. ■

## 4.3 Choix de $\alpha$

### 4.3.1 Etude de l'erreur de dispersion

On considère un maillage cubique ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ). Par une analyse identique à celle de la section 3.3, on montre que le schéma GDP vérifie pour les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  donnés ci-dessous les relations de dispersion suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{k} = |\mathbf{k}| \begin{matrix} t \\ (1,0,0) \end{matrix} : \quad \omega^2 &= |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^4 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} + \frac{3\alpha - 2}{18\alpha + 6} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta^4) \right), \\ \mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{2} \begin{matrix} t \\ (1,1,0) \end{matrix} : \quad \omega^2 &= |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^4 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} + \frac{18\alpha^2 - 27\alpha + 8}{216\alpha^2 - 48} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta^4) \right), \\ \mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{3} \begin{matrix} t \\ (1,1,1) \end{matrix} : \quad \omega^2 &= |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^4 \Delta x^2 \left( \frac{\nu^2}{36} + \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{54\alpha^2 - 18} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta^4) \right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

On rappelle que l'on note  $\nu = \Delta t \sqrt{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2}}$ . On rappelle que le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  commet l'erreur de dispersion la plus grande dans la direction  $\begin{matrix} t \\ (1,0,0) \end{matrix}$  (figure 3.1). On peut annuler ce terme avec le schéma GDP. Il ne s'agit pas d'un choix pertinent car on augmente alors de manière importante l'erreur de dans la direction  $\begin{matrix} t \\ (1,1,1) \end{matrix}$ . Il est plus judicieux d'annuler le terme d'ordre deux pour  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{3} \begin{matrix} t \\ (1,1,1) \end{matrix}$ . Notons qu'il s'agit de la seule direction où le schéma de Yee est moins dispersif que le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  (section 3.3). On propose ici d'atteindre comme le schéma de Yee l'ordre quatre dans cette direction. Le terme d'ordre deux pour  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{3} \begin{matrix} t \\ (1,1,1) \end{matrix}$  est nul si et seulement si

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{4} \right) - \alpha + \frac{1}{3} - \frac{\nu^2}{12} = 0. \tag{4.18}$$

Le polynôme (4.18) possède deux racines réelles ( $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ) données par

$$\begin{cases} \alpha_1(\nu) = \frac{1}{1 + \nu^2/2} \left( 1 - \sqrt{\frac{4 - 2\nu^2 + \nu^4}{12}} \right) \\ \alpha_2(\nu) = \frac{1}{1 + \nu^2/2} \left( 1 + \sqrt{\frac{4 - 2\nu^2 + \nu^4}{12}} \right). \end{cases} \tag{4.19}$$

On constate numériquement sur une grille régulière que le schéma GDP est stable lorsque

$$\begin{aligned} \nu \leq 1 \text{ et } \alpha &= \alpha_1(\nu) \\ \nu \leq 1/2 \text{ et } \alpha &= \alpha_2(\nu). \end{aligned} \tag{4.20}$$

On rappelle que lorsque  $\alpha = 0$  le schéma GDP est équivalent au schéma GD- $\mathbb{P}^0$  et est équivalent au schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  lorsque  $\alpha = 1$ . On s'attendait donc à ce que la limite de stabilité soit moins contraignante pour  $\alpha = \alpha_1(\nu)$  car  $\alpha_1(\nu) \leq \alpha_2(\nu)$ .

On représente sur les figures 4.1 et 4.2 le terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion pour  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{2} \begin{smallmatrix} t \\ 1,1,0 \end{smallmatrix}$  et  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \begin{smallmatrix} t \\ 1,0,0 \end{smallmatrix}$  pour  $\alpha = \alpha_1(\nu)$  et  $\alpha = \alpha_2(\nu)$  lorsque  $\nu$  varie dans les plages de stabilité (4.20). Les termes d'ordre deux ont été normalisés par le même terme que les termes d'erreur des schémas GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  et Yee (représentés sur les figures 3.1 et 3.2). Les figures 4.1, 4.2, 3.1 et 3.2 peuvent donc être comparées. On peut donc remarquer sur ces figures que les erreurs sont plus faibles pour  $\alpha = \alpha_1(\nu)$ . Nous choisissons donc d'utiliser  $\alpha = \alpha_1(\nu)$  qui a de plus l'avantage d'avoir une condition de stabilité deux fois moins contraignante que pour  $\alpha = \alpha_2(\nu)$ .

On note de plus que lorsque  $\alpha = \alpha_1(\nu)$  il existe une valeur de  $\nu$  annulant le terme d'ordre deux de la relation de dispersion vérifiée pour  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{2} \begin{smallmatrix} t \\ 1,1,0 \end{smallmatrix}$ . On note cette valeur  $\nu_{opt}$  ( $\nu_{opt} \simeq 0.6119$ ). Sur un maillage cubique, nous avons donc deux possibilités :

1. choisir  $\nu = 1 \implies$ 
  - ordre quatre dans la direction  $\begin{smallmatrix} t \\ 1,1,1 \end{smallmatrix}$
  - termes d'ordre deux pour  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|/\sqrt{2} \begin{smallmatrix} t \\ 1,1,0 \end{smallmatrix}$  et  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \begin{smallmatrix} t \\ 1,0,0 \end{smallmatrix}$  quasiment identiques à Yee
2. choisir  $\nu = \nu_{opt} \simeq 0.6119 \implies$ 
  - ordre quatre dans les directions  $\begin{smallmatrix} t \\ 1,1,1 \end{smallmatrix}$  et  $\begin{smallmatrix} t \\ 1,1,0 \end{smallmatrix}$
  - termes d'ordre deux pour  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \begin{smallmatrix} t \\ 1,0,0 \end{smallmatrix} \simeq 0.62$  (2/3 pour Yee).

Nous choisissons d'utiliser la seconde possibilité qui nous permet de proposer un schéma moins dispersif que le schéma de Yee. Lorsque le maillage est cubique, on désignera dorénavant par GDP le schéma décrit dans la section 4.1 avec  $\nu = \nu_{opt}$  et  $\alpha = \alpha_1(\nu_{opt})$ .

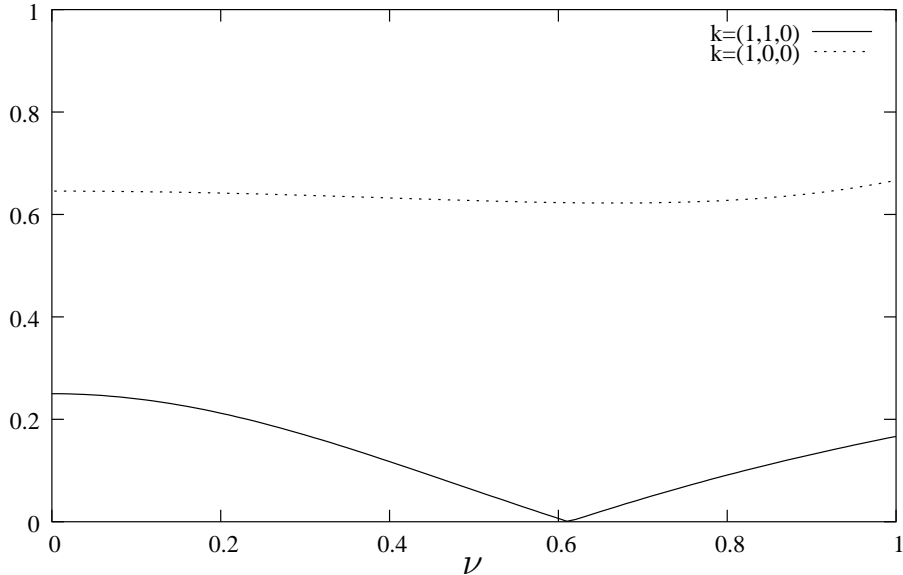


FIG. 4.1 –  $\alpha = \alpha_1(\nu)$  : terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion en fonction de  $\nu$  pour  $\mathbf{k} = \begin{smallmatrix} t \\ 1,1,0 \end{smallmatrix}$  et  $\mathbf{k} = \begin{smallmatrix} t \\ 1,0,0 \end{smallmatrix}$

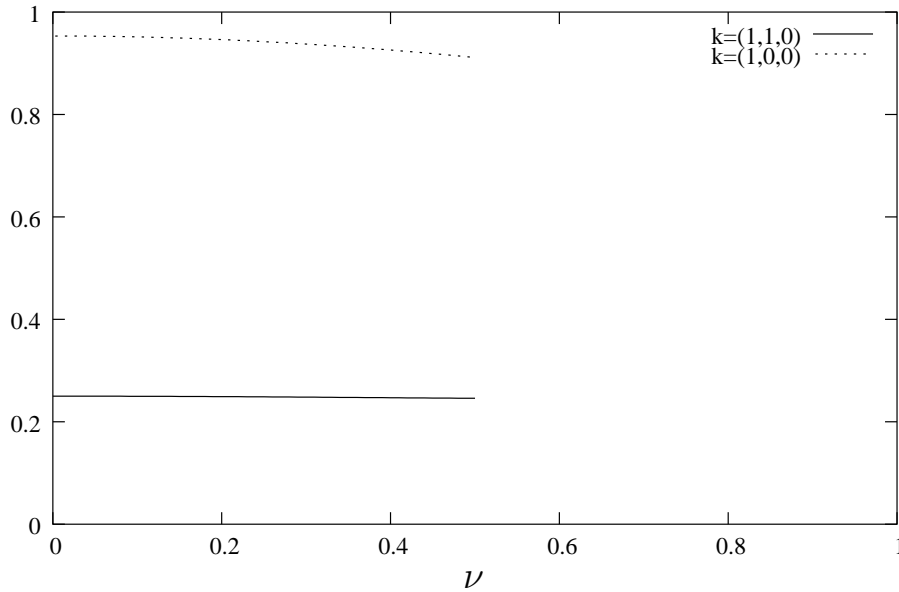


FIG. 4.2 –  $\alpha = \alpha_2(\nu)$  : terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion en fonction de  $\nu$  pour  $\mathbf{k} = {}^t(1,1,0)$  et  $\mathbf{k} = {}^t(1,0,0)$

### 4.3.2 Validation numérique

On propose de valider l'étude analytique de l'erreur de dispersion avec le cas test du mode propre. L'intérêt de ce cas test est multiple. Il autorise les simulations en temps long et la connaissance de la solution exacte nous permet de mesurer l'erreur de dispersion. On peut de plus choisir facilement le vecteur d'onde. On réalise les mêmes simulations pour les schémas GDP, GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  et Yee. Le maillage est un maillage cubique correspondant à 17 points par longueur d'onde. On utilise pour chacun des schémas le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité. La durée des simulations correspond à 150 périodes. On considère d'abord le mode TE (1,0,1) (figure 4.3). Comme prévu, le schéma de Yee est le plus dispersif. Le schéma GDP (qui est d'ordre quatre dans cette direction) est quand à lui plus performant que le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ .

On traite ensuite le cas le plus favorable pour le schéma de Yee : le mode (1,1,1) (figure 4.4). Les schémas de Yee et GDP (qui sont tous deux d'ordre quatre dans cette direction) présentent des courbes d'erreur similaires alors que l'erreur commise par le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  est plus importante.

Ces deux tests valident le choix du paramètre  $\alpha$ . La précision du schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  est en effet améliorée et le schéma GDP proposé est moins dispersif que le schéma de Yee.

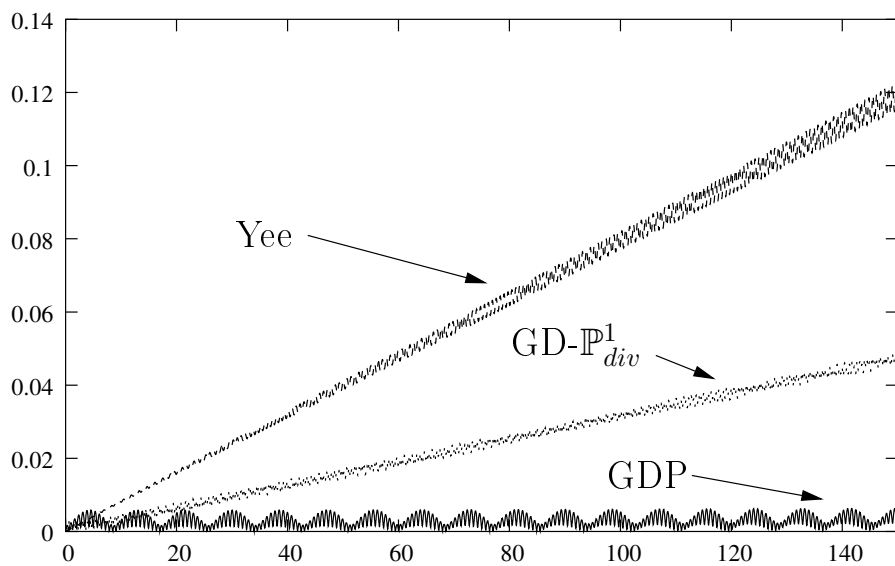


FIG. 4.3 – Mode de résonance TE (1,0,1) : erreur  $L^2$  au cours du temps

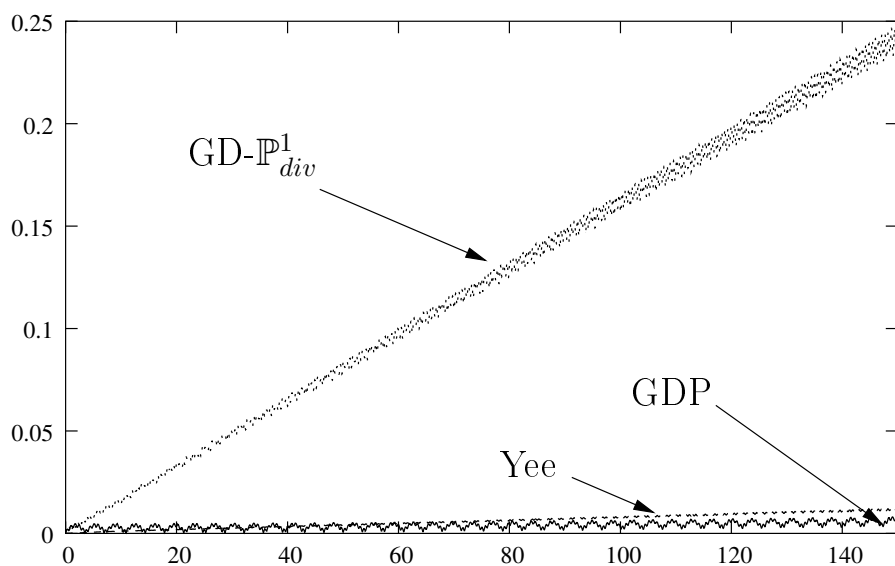


FIG. 4.4 – Mode de résonance (1,1,1) : erreur  $L^2$  au cours du temps

## 4.4 Stratégie sur une grille raffinée

On considère à présent une grille orthogonale constituée de cellules  $i$  de taille  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ . On note

$$\begin{cases} d_{min} = \min_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2} \\ d_{max} = \max_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} \Delta t = d_{min} \implies \text{stabilité}, \\ \alpha = \alpha_1(\Delta t/d_{max}). \end{cases} \quad (4.21)$$

Supposons à présent que les cellules les plus petites et les plus grossières soient des cubes (ce qui est le cas en pratique que le maillage soit conforme ou pas). On a donc  $d_{min} = \sqrt{3}\Delta x_{min}$  et  $d_{max} = \sqrt{3}\Delta x_{max}$ . Le choix (4.21) nous assure donc l'ordre quatre dans la grille grossière pour la direction  ${}^t(1,1,1)$ . Cette propriété est réellement intéressante puisque c'est précisément dans cette zone que l'erreur est la plus importante lorsque le maillage est raffiné. Notons qu'il n'est pas possible lorsque le taux de raffinement est supérieur ou égal à deux d'être aussi d'ordre quatre dans la grille grossière dans la direction  ${}^t(1,1,0)$ . La condition de stabilité nous impose en effet

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_{min}}{\sqrt{3}}. \quad (4.22)$$

Or l'ordre quatre dans la direction  ${}^t(1,1,0)$  est réalisé si

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\Delta t/\Delta x_{max} &= \nu_{opt} \\ \implies \frac{\Delta x_{max}}{\Delta x_{min}} &\leq \nu_{opt}^{-1} \simeq 1.63. \end{aligned} \quad (4.23)$$

On propose de comparer les erreurs de dispersion sur un maillage raffiné pour les schémas GDP, GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  et Yee avec ou sans pas de temps local. Supposons à nouveau un maillage constitué d'une grille fine cubique (pas d'espace  $\Delta x_{min}$ ) et d'une grille grossière cubique (pas d'espace  $\Delta x_{max}$ ). On note  $n = \Delta x_{max}/\Delta x_{min}$ .

On écrit la relation de dispersion dans la direction  ${}^t(1,0,0)$  en fonction de  $\Delta x_{min}$  pour les différents schémas.

1. Pour le schéma GDP ( $\nu = 1$ ,  $\alpha = \alpha_1(\nu)$ )

– dans la grille fine :

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^4 \Delta x_{min}^2 \left( \frac{\nu^2}{36} + \frac{3\alpha - 2}{18\alpha + 6} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta^4) \right),$$

– dans la grille grossière :

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^4 \Delta x_{min}^2 n^2 \left( \frac{\nu^2}{36n^2} + \frac{3\alpha - 2}{18\alpha + 6} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta^4) \right).$$

2. Pour le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  ( $\nu = 0.65$ )

– dans la grille fine :

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x_{min}^2 \left( \frac{\nu^2}{36} + \frac{1}{24} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right),$$

– dans la grille grossière :

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x_{min}^2 n^2 \left( \frac{\nu^2}{36n^2} + \frac{1}{24} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right).$$

3. Pour le schéma de Yee ( $\nu = 1$ )

– dans la grille fine :

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x_{min}^2 \left( \frac{\nu^2}{36} - \frac{1}{12} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right),$$

– dans la grille grossière (sans pas de temps local) :

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x_{min}^2 n^2 \left( \frac{\nu^2}{36n^2} - \frac{1}{12} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right),$$

– dans la grille grossière (avec pas de temps local) :

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^2 \Delta x_{min}^2 n^2 \left( \frac{\nu^2}{36} - \frac{1}{12} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta x^4) \right).$$

On procède de manière analogue pour les directions  ${}^t(1,1,0)$  et  ${}^t(1,1,1)$ . On a recensé dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 les valeurs des facteurs de  $\Delta x_{min}^2$  pour les différents schémas dans la grille fine et dans la grille grossière pour des raffinements de rapport 4 ( $n = 4$ ) et 10 ( $n = 10$ ). On a utilisé la même normalisation que celle utilisée pour les termes contenus dans le tableau 3.3 (i.e. on donne  $(\omega^2 - |\mathbf{k}|^2 c^2) / (|\mathbf{k}|^4 c^2 \Delta x_{min} / 12)$ ). Les valeurs données pour le schéma de Yee avec pas de temps local ont été calculées dans le cas idéal où  $\nu = 1$  (le schéma est alors d'ordre quatre dans la direction  ${}^t(1,1,1)$ ) ce qui n'est pas toujours possible dans la pratique. Ainsi, pour le raffinement spatio-temporel proposé dans [32], les auteurs précisent que pour maîtriser la propagation d'ondes parasites il faut baisser le CFL. La baisse est très faible pour un raffinement 1:2 ( $\nu = 0.98$ ) mais importante pour les raffinements supérieurs ( $\nu = 0.65$  pour un raffinement 1:4). Les auteurs suggèrent alors

d'utiliser des raffinements successifs de rapport 2.

De la lecture des tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 , trois points sont à retenir.

1. Dans les trois directions considérées, le schéma GDP est aussi peu dispersif que le schéma de Yee avec pas de temps local.
2. Le schéma GDP n'améliore la précision du schéma  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$  dans la grille grossière que dans la direction  ${}^t(1,1,1)$ . Cette amélioration est de taille puisque l'ordre quatre est atteint.
3. Dans les directions  ${}^t(1,1,0)$  et  ${}^t(1,0,0)$ , le schéma  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$  est moins dispersif que le schéma de Yee avec pas de temps local. Il est par contre plus dispersif dans la direction  ${}^t(1,1,1)$ . La valeur de l'erreur (pour un raffinement 1:10) est alors 33 (à comparer par exemple à l'erreur pour Yee avec pas de temps local pour  ${}^t(1,0,0)$  qui vaut 66.7). Le schéma  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$  est donc aussi un bon candidat pour traiter les maillages raffinés. Cette remarque est importante car comme nous allons le voir, le schéma GDP ne peut être utilisé sur des grilles non-conformes (résultats dégradés par des réflexions parasites aux interfaces non-conformes).

	GDP	$\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$	Yee sans pas de temps local	Yee avec pas de temps local
Grille fine	0.33	0.64	0.67	0.67
Grille grossière (raffinement 1:4)	10.2	8.1	15.6	10.6
Grille grossière (raffinement 1:10)	64.4	50.1	99.7	66.7

TAB. 4.1 – Direction  ${}^t(1,0,0)$  : valeur du terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion

	GDP	$\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$	Yee sans pas de temps local	Yee avec pas de temps local
Grille fine	0.57	0.07	0.16	0.16
Grille grossière (raffinement 1:4)	3.1	1	7.6	2.67
Grille grossière (raffinement 1:10)	24	7	49.6	16.7

TAB. 4.2 – Direction  ${}^t(1,1,0)$  : valeur du terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion



	GDP	GD- $\mathbb{P}_{div}^1$	Yee sans pas de temps local	Yee avec pas de temps local
Grille fine	0.33	0.19	0	0
Grille grossière (raffinement 1:4)	0	5.2	5	0
Grille grossière (raffinement 1:10)	0	33.2	33	0

TAB. 4.3 – Direction  ${}^t(1,1,1)$  : valeur du terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion

## 4.5 Résultats numériques

### 4.5.1 Maillage hexaédrique

L'analyse de l'erreur de dispersion menée dans la section 4.3.1 n'est valable que lorsque les maillages sont cubiques. Nous n'avons pas réalisé une telle analyse lorsque le maillage est hexaédrique régulier. Compte tenu de la difficulté de calculer les valeurs propres de  $Q^{-1}P$  (section 3.3), nous ne sommes en mesure de donner la relation de dispersion discrète vérifiée par le schéma GDP sur un maillage d'hexaèdres identiques de taille  $(n\Delta x, \Delta x, \Delta x)$  que lorsque  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|{}^t(1,0,0)$ . Dans ce cas, cette relation est

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^4 \Delta x^2 \left( \frac{n\nu^2}{24n + 12} + \frac{n^2(3\alpha - 2)}{18\alpha + 6} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta^4) \right). \quad (4.24)$$

Pour le schéma de Yee, cette relation est

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2 \left( 1 + |\mathbf{k}|^4 \Delta x^2 \left( \frac{n\nu^2}{24n + 12} - \frac{n^2}{12} \right) + O(|\mathbf{k}|^4 \Delta^4) \right). \quad (4.25)$$

On donne dans le tableau 4.4 les valeurs du terme d'ordre deux des relations de dispersion discrètes (normalisées comme dans le tableau dans le tableau 3.3) pour les schémas GDP ( $\alpha = \alpha_1(\nu)$ ), GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  ( $\alpha = 1$ ) et Yee pour  $n = 4$  et  $n = 10$ . Pour chacun des schémas, ces valeurs sont données pour le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité. Le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  est alors le schéma qui présente l'erreur de dispersion la plus faible.

	GD- $\mathbb{P}_{div}^1$	GDP ( $\alpha = \alpha_1(\nu)$ )	Yee
$n = 4$	8.2	15.8	15.8
$n = 10$	50	99.9	99.8

TAB. 4.4 – Valeur du terme d'ordre deux de l'erreur de dispersion ( $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|{}^t(1,0,0)$ ) pour un maillage de type  $(n\Delta x, \Delta x, \Delta x)$

On propose maintenant d'évaluer la précision des schémas présentés précédemment sur des maillages hexaédrique non-cubique en simulant l'évolution des modes propres TE  $(1,0,1)$  et  $(1,1,1)$ .

On considère un maillage constitué d'héxaèdres identiques de taille  $(4\Delta, \Delta, \Delta)$ . On étudie une cavité cubique métallique. La discrétisation dans la direction  $x$  correspond à 28 points par longueur d'onde alors que la discrétisation dans les directions  $y$  et  $z$  correspond à 7 points par longueur d'onde. La simulation porte sur 45 périodes.

On montre sur les figures 4.5-(a) et 4.5-(b) l'erreur  $L^2$  au cours du temps pour les schémas GDP,  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$  et Yee pour les deux modes propres considérés. On constate dans les deux cas que le schéma GDP est le plus dispersif. Le choix de  $\alpha$  n'est donc pas adapté à ce type de maillage. Pour le mode  $(1,1,1)$ , Yee et  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$  présentent une précision similaire alors que pour le mode  $(1,0,1)$ , le schéma  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$  est nettement plus précis.

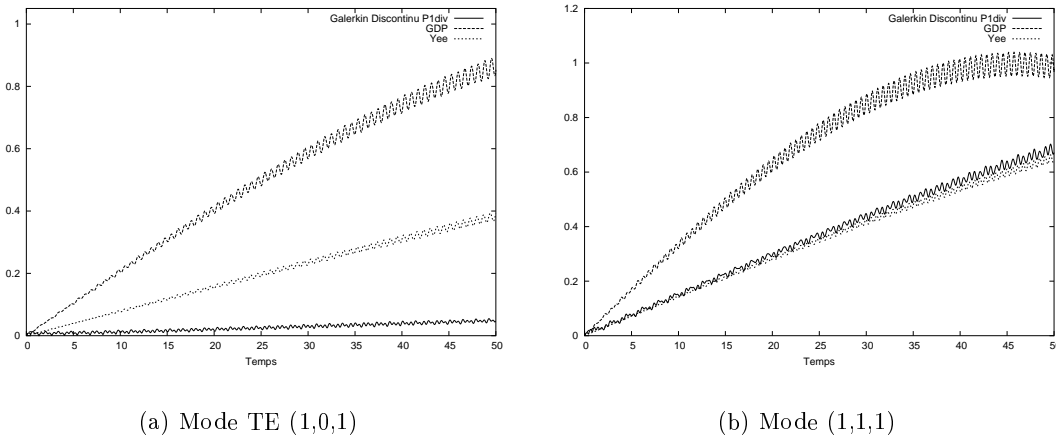


FIG. 4.5 – Erreur  $L^2$  au cours du temps

Afin d'adapter le schéma GDP, nous aurions pu définir des “ $\alpha$  par direction” soit plus précisément considérer  $\alpha = {}^t(1, \alpha_y, \alpha_z, 1, \alpha_x, \alpha_z, 1, \alpha_x, \alpha_y)$ . Lorsque  $\mathbf{k} \neq {}^t(1, 0, 0)$ , nous ne sommes pas capable de calculer sur des maillages héxaédriques (et non cubiques) les relations de dispersion discrète. Nous ne sommes alors pas en mesure de déterminer le  $\alpha$  optimal.

#### 4.5.2 Maillage raffiné conforme

On propose ici de comparer les schémas GDP et  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$  sur des grilles raffinées de manière conforme. On considère à nouveau une cavité cubique métallique. On raffine de manière conforme le centre de la cavité. Le taux de raffinement est 10. Le maillage est donc constitué de cube de taille  $\Delta x_{min}^3$  (grille fine), de cubes de taille  $1000\Delta x_{min}^3$  (grille grossière) et d'héxaèdres de taille  $100\Delta x_{min}^3$  (voir figure 1.1 pour une exemple de maillage conforme). Le maillage de la grille grossière correspond à 17 points par longueur d'onde. La simulation est stoppée après 45 périodes. On simule les modes propres  $(1,1,1)$  et TE  $(1,0,1)$  et on montre sur les figures 4.6-(a) et 4.6-(b) les courbes d'erreur obtenues. Pour le mode TE  $(1,0,1)$ , les résultats sont meilleurs pour  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$ . L'analyse de dispersion

(section 4.3.1) et les résultats en maillage hexaédrique (section 4.5.1) annonçaient un tel résultat. Concernant le mode (1,1,1), le schéma GDP est bien moins dispersif. On rappelle qu'avec ce schéma, l'erreur de dispersion est d'ordre quatre dans la direction  $t(1,1,1)$ . On a vu néanmoins que (section 4.5.1) sur les hexaèdres (non cubiques), le schéma GDP est le plus dispersif dans cette direction. C'est donc la précision dans la grille grossière qui semble prévaloir.

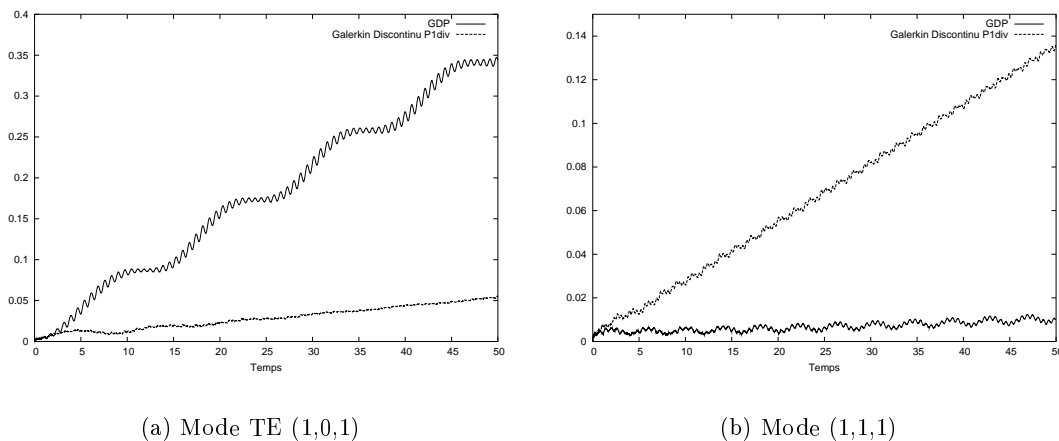


FIG. 4.6 – Erreur  $L^2$  au cours du temps

On montre sur la figure 4.7 l'évolution de l'énergie (4.10) du schéma GDP (proposition 4.2.1) au cours du temps pour le mode (1,1,1). On peut vérifier que l'énergie (4.10) est bien conservée. On montre pour ce même cas sur la figure 4.8 une coupe en espace (plan  $x + y + z = 3/2$ ) de la composante  $E_z$  à la fin du calcul. La solution calculée se compare très bien à la solution exacte.

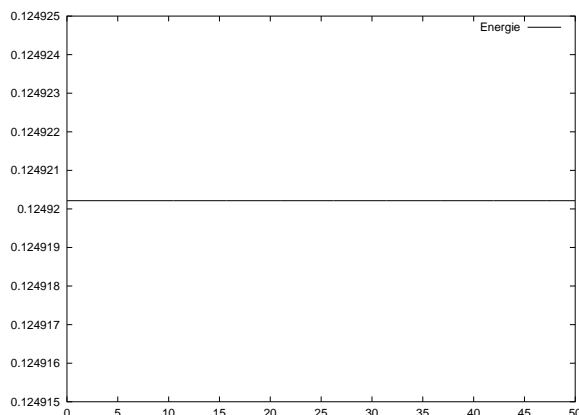


FIG. 4.7 – Schéma GDP: Energie au cours du temps / Raffinement conforme 1:10

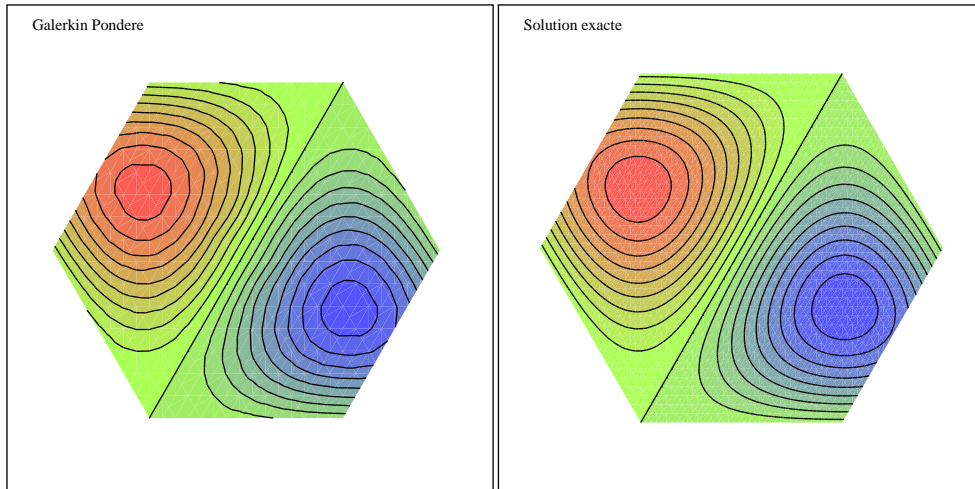


FIG. 4.8 – Composante  $E_z$  calculée par les schéma GDP (gauche) et exacte (droite) sur le plan d'équation  $x + y + z = 3/2$  / Raffinement conforme 1:10

## 4.6 Cas non-conforme

### 4.6.1 Energie piégée

On cherche à résoudre les équations de Maxwell 2D sur le maillage non-conforme décrit sur la figure 4.9 avec le schéma GPD

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

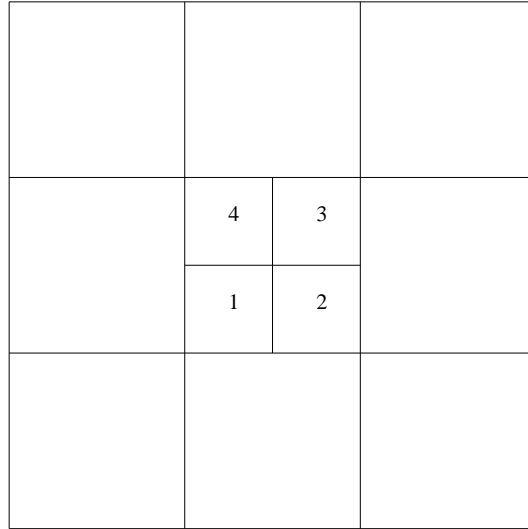


FIG. 4.9 – Numérotation des éléments

On utilise les mêmes notations que celles de la démonstration de la propriété 4.2.1. On note par  $\mathbf{Q}_i^j = {}^t(E_{xi}^j, E_{yi}^j, H_{zi}^j)$  le vecteur contenant les  $j^{ieme}$  ( $j = 1..3$ ) degrés de liberté des composantes  $E_x, E_y, E_z$  sur la cellule  $i$  (on omet les indices temporels). Supposons que à  $t = 0$ , ces degrés de liberté vérifient

$$\forall j = 1..3, \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_1^j = -\mathbf{Q}_4^j, \\ \mathbf{Q}_1^j = -\mathbf{Q}_2^j, \\ \mathbf{Q}_2^j = -\mathbf{Q}_3^j, \\ \mathbf{Q}_i^j = 0, \quad \forall i > 4. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

On vérifie alors facilement par récurrence que, à chaque itération du schéma GDP, le support des  $\mathbf{Q}_i^j$  est non vide et restreint aux cellules 1, 2, 3 et 4. Autrement dit, sur un maillage raffiné non-conforme, le schéma GDP admet des solutions non nulles dont le support est contenu dans la grille fine. Ce schéma est donc capable de piéger de l'énergie. Cette (mauvaise) propriété n'est pas le fait de l'introduction du paramètre  $\alpha$  mais la conséquence de l'approximation supplémentaire faite dans le calcul des flux (formule (4.7)). On rappelle que cette approximation a uniquement lieu dans le cas non-conforme (remarque 4.1.1). Cette propriété n'est pas partagée par le schéma  $\mathbb{P}_{div}^1$ . En effet, considérons à nouveau le maillage de la figure 4.9 et cherchons une solution du schéma à support sur les cellules 1, 2, 3 et 4. On note par  $\Delta x$  la longueur de la plus petite arête du maillage. On

montre alors que à  $t = 0$ ,  ${}^t(H_{z1}^1, H_{z1}^2, H_{z1}^3, H_{z2}^1, \dots, H_{z4}^3)$  est solution de

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & A_2 & A_2 & 0 \\ A_3 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (H_{z1}^j)_{j=1..3} \\ (H_{z2}^j)_{j=1..3} \\ (H_{z3}^j)_{j=1..3} \\ (H_{z4}^j)_{j=1..3} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.28)$$

où

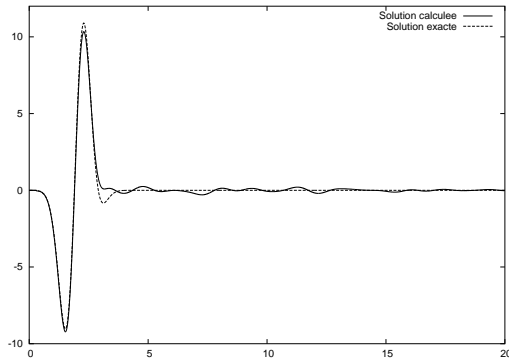
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta x/2 & 0 \\ -1 & \Delta x/2 & -\Delta x/6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x/2 & 0 \\ -1 & -\Delta x/2 & -\Delta x/6 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Delta x/2 \\ -1 & \Delta x/6 & \Delta x/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x/2 \\ -1 & -\Delta x/6 & -\Delta x/2 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

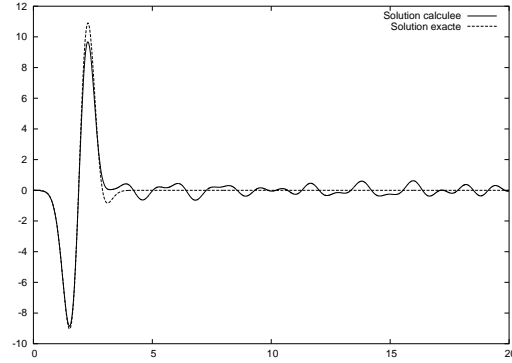
Le seul vecteur solution de ce système est le vecteur nul. Le schéma  $\mathbb{P}_{div}^1$  n'admet donc pas de solution non nulle dont le support reste dans la grille fine.

### 4.6.2 Illustration numérique

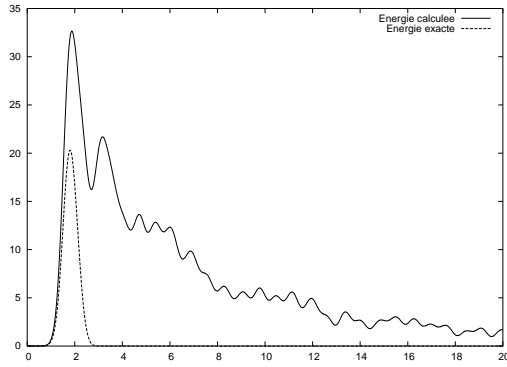
On propose une simulation proche de celle détaillée dans la section 3.6. Il s'agit de la propagation d'un dipôle dans le vide. Le dipôle est placé au centre du domaine de calcul. On raffine de manière non-conforme une partie du domaine ne contenant pas le dipôle. Le taux de raffinement est 4. On présente sur la figure (4.10) l'évolution en temps de  $E_z$  en un point de la grille fine ainsi que la variation d'énergie dans la grille fine pour les schémas  $\mathbb{P}_{div}^1$  et GDP. Pour montrer que les problèmes d'énergie piégée sont dus à la simplification du calcul des flux, les résultats présentés pour le schéma GDP ont été obtenus avec  $\alpha = 1$ . On constate donc que sur un maillage non-conforme, les résultats obtenus par le schéma GDP sont encore plus mauvais que ceux obtenus par le schéma  $\mathbb{P}_{div}^1$ . L'aptitude du schéma GDP à piéger de l'énergie est donc confirmée. Ce schéma est donc inadapté pour traiter de telles grilles.



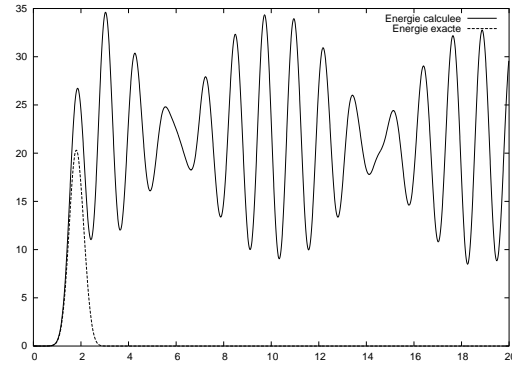
(a) Evolution de  $E_z$  en un point de la grille fine / schéma  $\mathbb{P}^1_{div}$



(b) Evolution de  $E_z$  en un point de la grille fine / schéma GDP



(c) Variation d'énergie dans la grille fine / schéma  $\mathbb{P}^1_{div}$



(d) Variation d'énergie dans la grille fine / schéma GDP

FIG. 4.10 – Propagation d'un dipôle sur un maillage non-conforme (raffinement 1:4) / Comparaison schéma  $\mathbb{P}^1_{div}$  (gauche) et schéma GDP (droite)

## 4.7 Conclusion

Nous avons proposé ici de modifier le calcul dans la méthode présentée au chapitre 3. Cette modification repose sur l'introduction d'un paramètre réel  $\alpha$ . Nous avons montré que le schéma modifié appelé GDP était stable sur tout type de maillage. Le schéma GDP est plus performant que le schéma GD- $\mathbb{P}^1_{div}$  (chapitre 3) dans les deux configurations suivantes.

### 1. Maillage cubique uniforme

Le schéma GDP est d'ordre quatre dans les directions  ${}^t(1,1,1)$  et  ${}^t(1,1,0)$  et semble moins dispersif que le schéma de Yee. Il n'est pas plus coûteux que le schéma GD- $\mathbb{P}^1_{div}$ . La seule opération supplémentaire est la multiplication des flux par le

réel  $\alpha$  et la limite de stabilité est très proche pour les deux schémas (0.61 contre 0.65).

## 2. Maillage localement raffiné de manière conforme

Le schéma GDP traite des grilles raffinées en étant d'ordre quatre sur la grille grossière dans la direction  ${}^t(1,1,1)$ . On a vu que l'erreur de dispersion globale était tout à fait comparable à celle que l'on obtiendrait avec un schéma de Yee utilisant un pas de temps local. Nous proposons donc une méthode capable de traiter avec peu de dispersion des grilles fortement raffinées conformes de manière explicite.

Cette approche ne s'étend pas au cas non-conforme (énergie piégée). L'analyse de dispersion a toutefois montré que le schéma  $\text{GD-}\mathbb{P}_{div}^1$  était aussi à même de traiter des maillages raffinés. Nous allons voir dans le chapitre suivant comment utiliser ce schéma avec des maillages non-conformes.





# Traitement du cas non-conforme

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>L'espace <math>\mathbb{P}_{div}^2</math></b>	<b>122</b>
<b>5.2</b>	<b>Stratégie pour un maillage non-conforme</b>	<b>123</b>
<b>5.3</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>126</b>
5.3.1	Propagation d'un dipôle	126
5.3.2	Cavité chargée	130
5.3.3	Abri métallique	131
5.3.4	Antenne patch	135
5.3.5	Dipôle imprimé	139
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>145</b>

---

Nous avons présenté au chapitre 3 une méthode Galerkin Discontinu adaptée aux maillages localement raffinés. Le schéma proposé est en effet stable et l'erreur de dispersion dépend peu du rapport local pas de temps sur pas d'espace. Nous avons aussi vu que dans le cas de maillages non-conformes, des réflexions parasites aux interfaces non-conformes dégradent les résultats.

Nous avons proposé au chapitre 4 de diminuer encore l'erreur de dispersion en modifiant le calcul des flux. Cette approche est à proscrire lorsque le maillage est non-conforme car le schéma peut piéger de l'énergie dans la grille fine.

Ainsi, et bien que possédant d'intéressantes propriétés, les schémas présentés aux chapitres 3 et 4 ne peuvent pas traiter de manière satisfaisante les maillages non-conformes. On propose ici de supprimer (ou tout au moins diminuer fortement) les réflexions en utilisant d'une part le schéma Galerkin Discontinu  $\mathbb{P}_{div}^1$  (chapitre 3) et en augmentant d'autre part le degré de l'approximation aux interfaces non-conformes.

On montre sur la figure 5.1 un exemple 2D de représentation linéaire sur une interface non-conforme. On a d'un côté (grille grossière) une représentation linéaire et de l'autre (grille fine) une représentation linéaire par morceaux. Utiliser sur la grille grossière un polynôme de degré deux semble donc plus adapté pour capter la représentation des champs sur la grille fine. Pour ce faire, on introduit un espace contenu dans  $\mathbb{P}^2$  que l'on nomme  $\mathbb{P}_{div}^2$ .

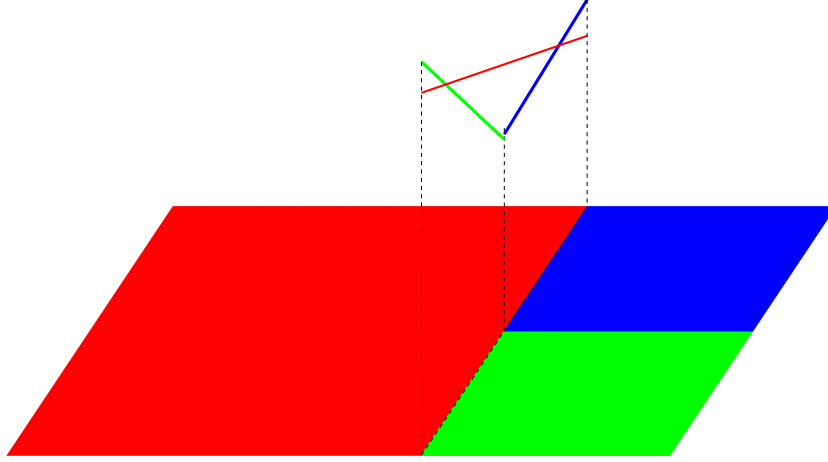


FIG. 5.1 – Interface non-conforme : approximation linéaire

## 5.1 L'espace $\mathbb{P}_{div}^2$

On étend ici au degré 2 l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$ . Soit un maillage hexaédrique orthogonal constitué de cellules  $V_i$ . On note  $\mathbf{G}_i = {}^t(x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i})$  le centre de gravité de  $V_i$ . On définit l'espace  $\mathbb{P}_{div}^2$ . Cet espace est d'une part généré par les fonctions de base de  $\mathbb{P}_{div}^1$

$$\begin{cases} \varphi_{i1} = {}^t(1, 0, 0), & \varphi_{i2} = {}^t(y - y_{G_i}, 0, 0), & \varphi_{i3} = {}^t(z - z_{G_i}, 0, 0), \\ \varphi_{i4} = {}^t(0, 1, 0), & \varphi_{i5} = {}^t(0, x - x_{G_i}, 0), & \varphi_{i6} = {}^t(0, z - z_{G_i}, 0), \\ \varphi_{i7} = {}^t(0, 0, 1), & \varphi_{i8} = {}^t(0, 0, x - x_{G_i}), & \varphi_{i9} = {}^t(0, 0, y - y_{G_i}). \end{cases} \quad (5.1)$$

D'autre part,  $\mathbb{P}_{div}^2 \setminus \mathbb{P}_{div}^1$  est généré par

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_{i10} = {}^t((y - y_{G_i})(z - z_{G_i}), 0, 0), & \vec{\varphi}_{i11} = {}^t((y - y_{G_i})^2 - \Delta y_i^2/12, 0, 0), \\ \vec{\varphi}_{i12} = {}^t((z - z_{G_i})^2 - \Delta z_i^2/12, 0, 0), & \vec{\varphi}_{i13} = {}^t(0, (x - x_{G_i})(z - z_{G_i}), 0), \\ \vec{\varphi}_{i14} = {}^t(0, (x - x_{G_i})^2 - \Delta x_i^2/12, 0), & \vec{\varphi}_{i15} = {}^t(0, (z - z_{G_i})^2 - \Delta z_i^2/12, 0), \\ \vec{\varphi}_{i16} = {}^t(0, 0, (x - x_{G_i})(y - y_{G_i})), & \vec{\varphi}_{i17} = {}^t(0, 0, (x - x_{G_i})^2 - \Delta x_i^2/12), \\ \vec{\varphi}_{i18} = {}^t(0, 0, (y - y_{G_i})^2 - \Delta y_i^2/12). \end{cases} \quad (5.2)$$

Représenter un champ dans  $\mathbb{P}_{div}^2$  nécessite donc 18 degrés de liberté par élément soit beaucoup moins que les classiques représentations  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathbb{Q}^2$  (cf tableau 5.1).

**Remarque 5.1.1** La base engendrant  $\mathbb{P}_{div}^2$  est orthogonale et contient les fonctions de base de  $\mathbb{P}_{div}^1$ . Ainsi, toutes les matrices de masse locales sont diagonales. Aucune inversion n'est donc nécessaire. Il est donc très facile de programmer un schéma hybride  $\mathbb{P}_{div}^1/\mathbb{P}_{div}^2$ .

	$\mathbb{P}_{div}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{Q}^2$
Degrés de liberté	18	30	60

TAB. 5.1 – Nombre de degrés de liberté pour un champ

**Remarque 5.1.2** *Tout comme l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$ , un champ représenté dans l'espace  $\mathbb{P}_{div}^2$  a sa première composante qui ne varie pas en  $x$ , sa seconde qui ne varie pas en  $y$  et sa troisième qui ne varie pas en  $z$ . La divergence d'un tel champ est alors nulle dans chaque élément.*

Classiquement, augmenter le degré de l'approximation conduit à une condition de stabilité plus restrictive. Sur une grille régulière, nous avons constaté numériquement pour le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^2$  que la limite de stabilité de  $\nu = \Delta t \sqrt{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2}}$  est 0.4. On rappelle dans le tableau 5.2 les limites de stabilité des schémas de Yee et GD avec des discrétisations  $\mathbb{P}^0$  et  $\mathbb{P}_{div}^1$ .

	Yee	$\mathbb{P}^0$	$\mathbb{P}_{div}^1$	$\mathbb{P}_{div}^2$
$\nu$	1	2	0.65	0.4

TAB. 5.2 – Condition de stabilité

## 5.2 Stratégie pour un maillage non-conforme

Afin d'adapter les représentations des champs de part et d'autre de l'interface, on propose (figure 5.2) d'utiliser l'espace  $\mathbb{P}_{div}^2$  uniquement sur les cellules appartenant à l'interface et à la grille grossière. Ainsi, sur toute interface non-conforme, les champs sont linéaires par morceaux dans la grille fine et quadratiques dans la grille grossière. On vérifie alors numériquement deux points.

1. Lorsque le taux de raffinement est égal à  $n > 2$ , il ne semble pas nécessaire d'utiliser des polynômes de degré  $n$  (on peut se limiter aux polynômes de degré 2).
2. Utiliser l'espace  $\mathbb{P}_{div}^2$  de part et d'autre de l'interface n'améliore pas les résultats.

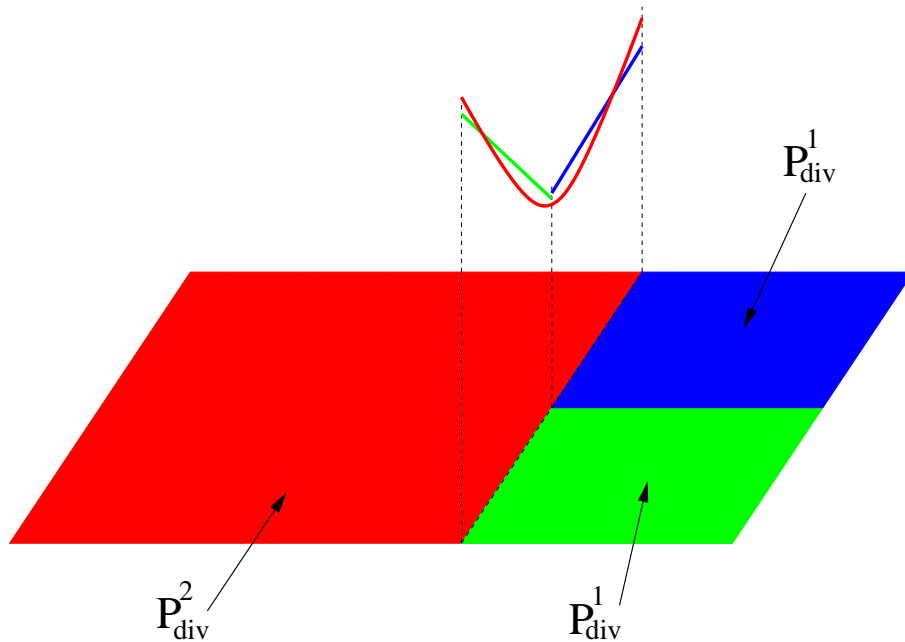
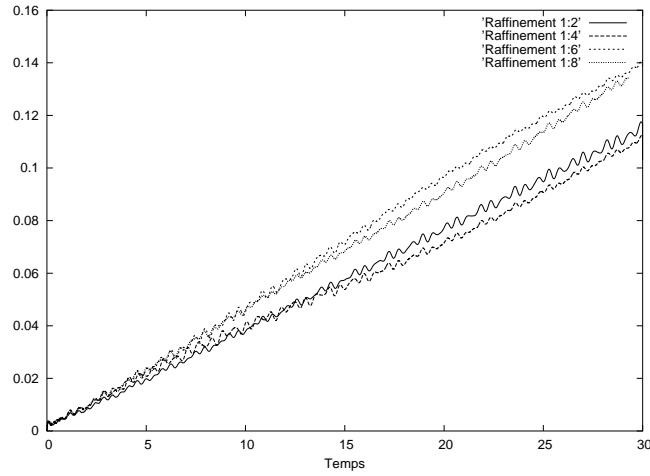


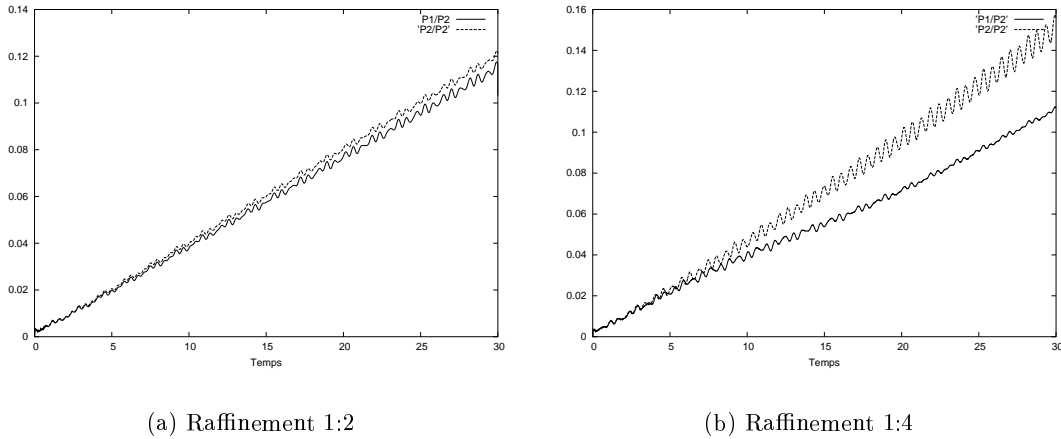
FIG. 5.2 – Interface non-conforme : représentation  $\mathbb{P}^1_{div} / \mathbb{P}^2_{div}$

On propose d'illustrer ces deux assertions avec le cas test du mode propre dont la solution exacte est connue (section 1.6.3.2).

Pour la première assertion, on considère une cavité métallique dont une partie est raffinée de manière non-conforme. On montre sur la figure 5.3 l'erreur  $L^2$  au cours temps pour plusieurs taux de raffinement. Le maillage de la grille grossière correspond à 15 points par longueur d'onde. La durée de la simulation est de 30 périodes. On constate alors que l'erreur varie peu lorsqu'on augmente le taux de raffinement. Contrairement à ce que suggère la figure 5.2, il n'apparaît pas indispensable de considérer des polynômes de degré  $n$  lorsque le taux de raffinement est égal à  $n > 2$ . On remarque aussi que le fait que l'erreur  $L^2$  varie peu avec le taux de raffinement confirme que l'erreur de dispersion de la méthode dépend peu du rapport local pas de temps sur pas d'espace.


 FIG. 5.3 – Erreur  $L^2$  (mode propre) pour différents raffinements

Pour la seconde assertion, on compare les résultats obtenus précédemment à ceux obtenus en choisissant une représentation  $\mathbb{P}_{div}^2$  de part et d'autre de l'interface. Cette représentation est plus riche (et donc plus coûteuse) que la représentation  $\mathbb{P}_{div}^1 / \mathbb{P}_{div}^2$ . On pourrait s'attendre à ce que les résultats soient améliorés. Les courbes d'erreur (figure 5.4) pour les raffinements 1:2 et 1:4 montrent en fait le contraire. Des résultats similaires sont obtenus pour des taux de raffinement supérieurs. Il faut donc utiliser l'espace  $\mathbb{P}_{div}^2$  uniquement sur les cellules appartenant à la fois à l'interface et à la grille grossière.



(a) Raffinement 1:2

(b) Raffinement 1:4

 FIG. 5.4 – Erreur  $L^2$  (mode propre) - Comparaison  $\mathbb{P}_{div}^1 / \mathbb{P}_{div}^2$  à l'interface et  $\mathbb{P}_{div}^2 / \mathbb{P}_{div}^2$  à l'interface

Le schéma hybride  $\mathbb{P}_{div}^1 / \mathbb{P}_{div}^2$  reste dans la classe des schémas (section 3.1.4) conservant un équivalent discret de l'énergie électromagnétique et stables sous une

condition de type CFL. Rappelons que la condition de stabilité théorique donnée dans [48] est très contraignante. La condition que l'on utilise en pratique est donc à déterminer numériquement. La modification apportée au schéma présenté au chapitre 3 est réellement très peu coûteuse. En effet :

1. Seules les cellules appartenant à la fois à l'interface et à la grille grossière sont concernées par la discrétisation  $\mathbb{P}_{div}^2$ . A titre d'exemple, supposons que l'on veuille raffiner dans un domaine de  $20 \times 20 \times 20$  cellules une partie de  $5 \times 5 \times 5$  cellules. Quel que soit le taux de raffinement, on utilisera la représentation  $\mathbb{P}_{div}^2$  dans seulement 216 éléments. Si le taux de raffinement est égal à quatre, cela représente à peine 1% des éléments.
2. Le pas de temps est imposé par la taille des éléments de la grille fine. Or on utilise dans la grille fine exclusivement l'espace  $\mathbb{P}_{div}^1$ . Si on détermine le pas de temps en utilisant la condition de stabilité  $\mathbb{P}_{div}^1$  dans la grille fine ( $\sqrt{3}\Delta t/\Delta x_{min} \leq 0.65$ ), la condition de stabilité  $\mathbb{P}_{div}^2$  dans la grille grossière ( $\sqrt{3}\Delta t/\Delta x_{max} \leq 0.4$ ) est alors vérifiée dès lors que  $\Delta x_{max}/\Delta x_{min} \geq 2$ . Ainsi, sur un maillage non-conforme, on constate numériquement que le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  et le schéma hybride GD- $\mathbb{P}_{div}^1 / \mathbb{P}_{div}^2$  ont la même limite de stabilité.

## 5.3 Résultats numériques

### 5.3.1 Propagation d'un dipôle

Pour montrer que l'usage de l'espace  $\mathbb{P}_{div}^2$  aux interfaces non-conformes diminue considérablement les réflexions parasites dues à la non-conformité, on simule la propagation d'un dipôle électrique dans le vide. Le domaine de résolution est  $[0,1]^3$  composé de  $21^3$  cellules. Le dipôle est placé au centre du domaine. On raffine de manière non-conforme la partie  $[0.24,0.43]^3$  avec un taux de raffinement égal à dix. On montre sur les figures 5.5 et 5.6 la solution en temps de la composante  $H_y$  en un point situé dans la grille fine. On constate que contrairement à celle calculée avec le schéma  $\mathbb{P}_{div}^1$  (figure 5.6) la solution calculée avec le schéma  $\mathbb{P}_{div}^1/\mathbb{P}_{div}^2$  (figure 5.5) n'est pas dégradée par des réflexions parasites.

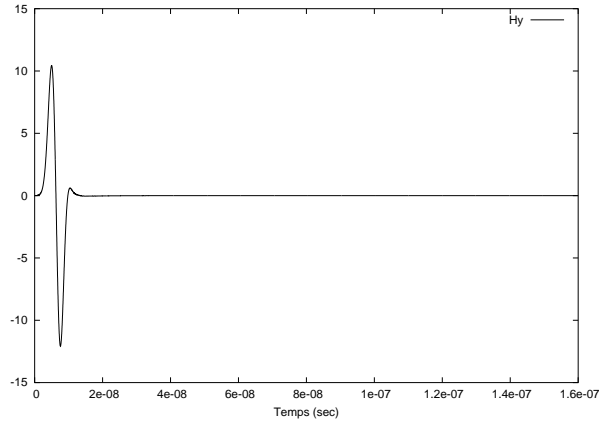


FIG. 5.5 – Schéma hybride  $\mathbb{P}_{div}^1/\mathbb{P}_{div}^2$  : Évolution temporelle de  $H_y$  en un point de la grille fine, maillage non-conforme 1:10

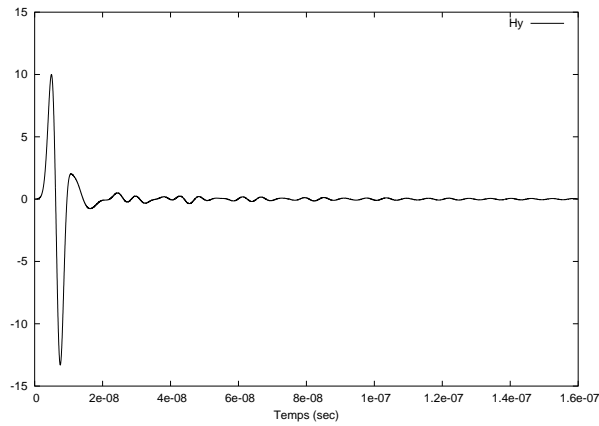
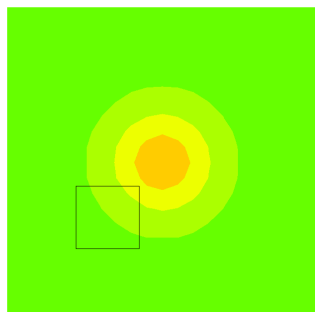


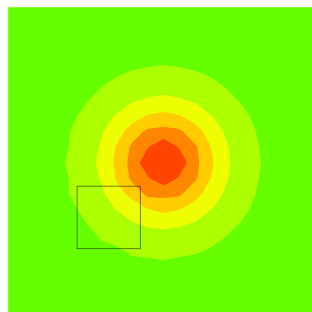
FIG. 5.6 – Schéma hybride  $\mathbb{P}_{div}^1$  : Évolution temporelle de  $H_y$  en un point de la grille fine, maillage non-conforme 1:10

On présente sur les figures 5.7 et 5.8 les valeurs de la composante  $H_x$  sur le plan  $z = 0.3$  à différents instants du calcul pour les schémas GD- $\mathbb{P}_{div}^1/\mathbb{P}_{div}^2$  et GD- $\mathbb{P}_{div}^1$ . Il s'agit d'un plan intersectant la zone raffinée. Le carré tracé sur les figures 5.7 et 5.8 délimite la zone raffinée. On peut constater que lorsque on utilise le schéma GD- $\mathbb{P}_{div}^1$  (figure 5.8) la propagation est fortement perturbée par la présence de la zone raffinée. On peut voir sur la figure 5.7 que l'usage de GD- $\mathbb{P}_{div}^1/\mathbb{P}_{div}^2$  permet d'obtenir de très bons résultats. Les réflexions parasites semblent en effet maîtrisées et le front d'onde est très peu perturbé.





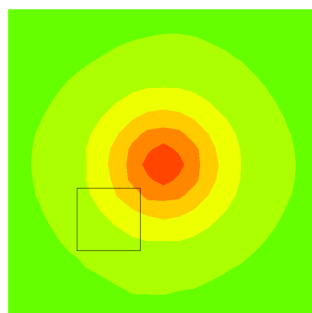
(a)  $t = 4$  ns



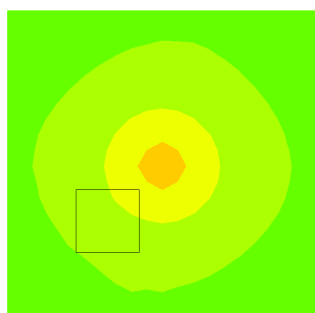
(b)  $t = 4.7$  ns



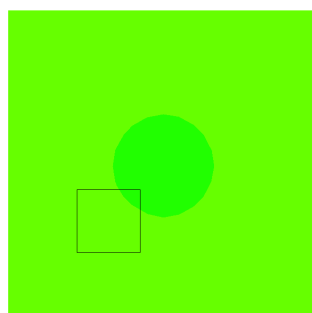
(c)  $t = 5.3$  ns



(d)  $t = 6$  ns



(e)  $t = 6.5$  ns



(f)  $t = 7$  ns