



**HAL**  
open science

**Méthodes en maillages mobiles auto-adaptatifs pour des systèmes hyperboliques en une et deux dimensions d'espace**  
Maud Poret

► **To cite this version:**

Maud Poret. Méthodes en maillages mobiles auto-adaptatifs pour des systèmes hyperboliques en une et deux dimensions d'espace. Mathématiques [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2005. Français. NNT : 2005ENPC0001 . pastel-00001053

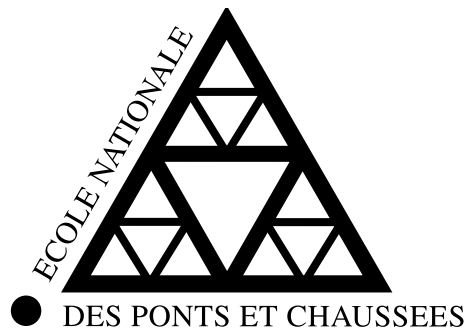
**HAL Id: pastel-00001053**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001053>**

Submitted on 10 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Méthodes en maillages mobiles auto-adaptatifs  
pour des systèmes hyperboliques  
en une et deux dimensions d'espace

par Maud PORET

Soutenue le 6 janvier 2005 devant le jury composé de MM. :

Thierry COUPEZ	Examineur
Alain DERVIEUX	Rapporteur
Frédéric HECHT	Rapporteur
Bruno KOOBUS	Examineur
Stéphane LANTERI	Examineur
Serge PIPERNO	Directeur de thèse

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Serge PIPERNO qui m'a accueillie au sein de son projet de recherche et a accepté de diriger mes travaux. Je lui suis reconnaissante de son soutien.

Mes remerciements vont également à Messieurs Alain DERVIEUX et Frédéric HECHT pour leur présence dans le jury de soutenance et pour avoir accepté de porter un jugement sur mon travail.

Messieurs Thierry COUPEZ et Bruno KOOBUS me font l'honneur de participer à ce jury. Je les en remercie.

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur Stéphane LANTERI de sa présence dans ce jury, mais aussi de son dynamisme et de sa sympathie au sein du projet CAIMAN.

Je remercie tous les membres du projet CAIMAN et, en particulier Sabine BARRERE et Nathalie GLINSKY-OLIVIER.

J'exprime également toute ma gratitude à Monsieur Serge NICAISE, directeur du laboratoire de Mathématiques de Valenciennes et à l'ensemble de son personnel pour leur accueil chaleureux. J'ai énormément apprécié leur contact, et garde un excellent souvenir des années en tant qu'ATER, passées à leur côté.

J'adresse tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur soutien tout au long de mes études. Je pense notamment à Christophe, Laurine, Martine, Emmanuel..., et évidemment à Gilles, sans le réconfort et l'affection duquel je n'aurais pu réaliser ce travail. Enfin, je remercie ma famille pour leurs encouragements permanents. Un grand merci à mes parents. Cette thèse leur est dédiée.



# Table des matières

<b>Chapitre 1. Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Méthodes sur un maillage variable en 1D</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 2. Méthode des volumes finis en maillage mobile (1D)</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction . . . . .	10
2.2 Généralités sur les schémas numériques . . . . .	11
2.2.1 Équations hyperboliques, lois de conservation scalaires . . . . .	11
2.2.2 Formulation en volumes finis . . . . .	12
2.2.3 Schémas conservatifs . . . . .	14
2.2.4 Précision spatiale des schémas numériques . . . . .	16
2.2.5 Stabilité, principe du maximum . . . . .	17
2.3 La méthode de Godunov en maillage mobile . . . . .	18
2.3.1 Principe général . . . . .	18
2.3.2 Conservativité et consistance . . . . .	19
2.3.3 Équation d’advection . . . . .	21
2.3.4 Équation de Burgers . . . . .	21
2.3.5 Extension à une précision d’ordre supérieur . . . . .	22
2.4 Schéma arbitrairement explicite-implicite . . . . .	23
2.4.1 Équation d’advection . . . . .	24
2.4.2 Équation de Burgers . . . . .	31
2.5 Schéma à topologie non constante . . . . .	36
2.5.1 Addition de points . . . . .	38
2.5.2 Soustraction de points . . . . .	47
2.6 Conclusion . . . . .	55
<b>Chapitre 3. Adaptation dynamique de maillage (1D)</b>	<b>57</b>
3.1 Introduction . . . . .	58
3.2 Le schéma numérique . . . . .	60
3.3 Maillage mobile auto-adaptatif . . . . .	61
3.3.1 Algorithme d’adaptation automatique . . . . .	63
3.3.2 Non-retournement des volumes de contrôle . . . . .	65
3.3.3 Premier algorithme d’adaptation de maillage . . . . .	66
3.3.4 Second algorithme d’adaptation de maillage . . . . .	70

3.4	Conclusion . . . . .	76
<b>Chapitre 4. Algorithmes de variation de la topologie (1D)</b>		<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	78
4.2	Addition . . . . .	78
4.2.1	Choix de la procédure d'addition . . . . .	80
4.2.2	Équation d'advection . . . . .	82
4.2.3	Équation de Burgers . . . . .	89
4.3	Soustraction . . . . .	95
4.3.1	Équation d'advection . . . . .	99
4.3.2	Équation de Burgers . . . . .	101
4.3.3	Choix de la procédure de soustraction . . . . .	101
4.4	Conclusion . . . . .	104
<b>II Méthodes sur un maillage variable en 2D</b>		<b>105</b>
<b>Chapitre 5. Méthodes de volumes finis 2D en maillage mobile</b>		<b>109</b>
5.1	Introduction . . . . .	110
5.2	Lois de conservation . . . . .	111
5.3	Principes de la discrétisation dans $\mathcal{E}$ . . . . .	112
5.3.1	Méthode des volumes finis . . . . .	112
5.3.2	Calcul des paramètres géométriques . . . . .	114
5.3.3	Schéma de Roe sur un maillage mobile . . . . .	116
5.3.4	Extension à une précision d'ordre supérieur . . . . .	119
5.3.5	Intégration en temps . . . . .	120
5.4	Schéma à topologie non-constante . . . . .	121
5.4.1	Addition de points . . . . .	121
5.4.2	Soustraction de points . . . . .	130
5.4.3	“Le swapping” . . . . .	136
5.5	Conclusion . . . . .	140
<b>Chapitre 6. Adaptation dynamique de maillages (2D)</b>		<b>141</b>
6.1	Introduction . . . . .	142
6.2	Maillage mobile auto-adaptatif à topologie fixe . . . . .	144
6.2.1	Principe . . . . .	144
6.2.2	Adaptation statique . . . . .	147
6.2.3	Adaptation dynamique . . . . .	150
6.3	Addition . . . . .	162
6.3.1	Principes . . . . .	162
6.3.2	Critère . . . . .	162
6.3.3	Algorithme . . . . .	163
6.3.4	Exemples d'application . . . . .	164
6.4	Soustraction . . . . .	167
6.4.1	Principes . . . . .	167
6.4.2	Critère . . . . .	169

---

6.4.3	Algorithme . . . . .	169
6.4.4	Exemple d'application . . . . .	170
6.5	“Swapping” . . . . .	172
6.5.1	Principes . . . . .	172
6.5.2	Critère . . . . .	172
6.5.3	Algorithme . . . . .	173
6.5.4	Exemple d'application . . . . .	174
6.6	Algorithme général d'adaptation . . . . .	174
6.6.1	Principes . . . . .	175
6.6.2	Algorithme . . . . .	177
6.6.3	Applications numériques . . . . .	177
6.7	Conclusion . . . . .	181
<b>Chapitre 7. Résultats numériques</b>		<b>183</b>
7.1	Introduction . . . . .	184
7.2	Problèmes physiques considérés . . . . .	184
7.3	Calculs de solutions stationnaires . . . . .	188
7.3.1	Cas transsonique . . . . .	188
7.3.2	Cas supersonique . . . . .	191
7.4	Calculs de solutions instationnaires . . . . .	197
7.4.1	Cas supersonique . . . . .	197
7.4.2	Cas transsonique . . . . .	202
7.5	Conclusion . . . . .	203
<b>III Conclusion</b>		<b>209</b>





# Chapitre 1

## Introduction

La simulation numérique est née au début des années 1950 avec, entre autre, le développement de l'industrie automobile, aéronautique et spatiale. Elle offre une meilleure compréhension des phénomènes, et permet ainsi d'éviter certaines expériences en laboratoire coûteuses. Elle n'a cessé depuis de connaître un essor constant du fait d'une part de son efficacité, mais aussi à cause de l'accroissement permanent de la puissance de calcul des processeurs. Elle couvre désormais d'autres domaines d'application que la mécanique des fluides. On peut notamment citer l'électromagnétisme, l'environnement, l'imagerie médicale, etc...

Malgré les progrès continus de la technologie, le temps de calcul reste un enjeu industriel important, et il en découle la notion d'efficacité pour un schéma numérique. Des méthodes ont alors été développées pour réduire la complexité des simulations. Parmi celles-ci se trouve l'adaptation de maillage.

Lors des simulations basées sur des méthodes d'éléments ou de volumes finis, la précision de la solution numérique et la qualité du maillage sont étroitement liées. Ainsi, la simulation numérique d'écoulements en mécanique des fluides demande souvent un maillage raffiné dans certaines régions du domaine (près des discontinuités pour les écoulements stationnaires, couches limites, tourbillons, recirculations, décrochements, rattachements pour des écoulements instationnaires).

L'adaptation de maillage consiste à modifier la discrétisation du domaine en augmentant la concentration nodale là où l'erreur est élevée, et inversement en la diminuant là où l'erreur est faible. Ce processus permet d'une part de réduire la taille des mailles dans les régions de forte activité, donc d'améliorer la qualité des résultats numériques, et d'autre part de diminuer le temps de calcul des simulations puisque l'effort de calcul porte majoritairement là où il est nécessaire.

Dans le cadre d'écoulements instationnaires, l'utilisation de l'adaptation de maillage est d'autant plus justifiée que les phénomènes physiques peuvent se déplacer dans tout le domaine d'étude. Ne connaissant pas *a priori* l'évolution de la solution, la discrétisation doit nécessairement être uniformément fine, afin de capturer les phénomènes avec la même précision. Une conséquence de ceci est l'augmentation considérable du temps de calcul, qui, s'il devient prohibitif, remet en cause la crédibilité industrielle de la méthode employée. L'adaptation de maillage s'avère une excellente solution.

Généralant au temps  $t$  un maillage adapté à la solution, elle évite de mailler finement une grande partie du domaine, où aucune activité significative ne s'exerce, et permet ainsi de réduire notablement le coût de calcul.

\* \* \*

L'objet de cette thèse est la construction et l'analyse de méthodes d'adaptation dynamique de maillage, pour la simulation numérique d'écoulements de fluides en domaine déformable.

Au vu de son efficacité, et de sa diversité de mise en œuvre, l'adaptation de maillage fait l'objet de nombreux travaux. Dans la littérature, deux théories s'affrontent. La première propose des remaillages intermédiaires avec, en général, extrapolation non-conservative. Dans la seconde, l'adaptation est le fruit de restaurations du maillage au cours du temps, *via* deux procédés, souvent alternatifs, que sont le maillage mobile auto-adaptatif et les méthodes de type raffinement/déraffinement. Rares sont les méthodes qui proposent une implémentation dynamique de l'adaptation. Par "implémentation dynamique", nous comprenons que l'adaptation de maillage est réalisée dynamiquement au cours du temps, en même temps que l'intégration de la solution. Tel est notre objectif.

Les applications concrètes que nous visons, concernent la simulation de la partie fluide d'un problème d'interaction fluide-structure. Une interaction fluide-structure met en jeu une structure mobile ou déformable et un écoulement en contact avec une partie de la structure. Mentionnons par exemple l'écoulement compressible transsonique autour d'un profil d'aile d'avion en mouvement. Des méthodes numériques ont alors été développées pour simuler de tels écoulements. Parmi celles-ci, se trouvent les méthodes à maillage dynamique. Elles reposent sur une discrétisation du domaine, qui est mobile, et s'adaptent particulièrement bien aux formulations en volumes finis et à l'utilisation de flux numériques classiques.

Nous cherchons donc précisément à mettre au point un schéma numérique, inspiré des méthodes à maillage dynamique, et capable d'intégrer des opérations élémentaires sur le maillage, nécessaires à son adaptation.

Le cadre de notre étude sera celui des lois de conservation en une et deux dimensions d'espace. Nous utilisons des formulations en volumes finis des équations sur un maillage non-structuré mobile. L'évaluation des termes convectifs repose sur l'extension du solveur de Riemann aux maillages dynamiques, en particulier sur le solveur de Godunov en une dimension, et sur le solveur approché de Roe en deux dimensions. L'intégration en temps du système discret est réalisée par un schéma implicite linéarisé.

Le cadre de notre étude étant défini, nous cherchons de nouveaux algorithmes dans cette même famille de méthodes, mais écrits sur des maillages à topologie non-constante. Nous cherchons précisément à étendre les méthodes de volumes finis mobiles à des cas de volumes naissants ou disparaissants, dans l'optique de raffiner ou

déraffiner la discrétisation. Nous espérons ensuite compléter ces outils par des critères d'adaptation afin de les intégrer dans un code de calcul, où le maillage s'adapte automatiquement et dynamiquement à l'écoulement considéré.

\* \* \*

Le plan de cette thèse est le suivant.

La première partie reprend en détail les principaux points énoncés ci-dessus, en une dimension d'espace. Même si l'enjeu industriel n'est pas directement présent pour des simulations en une dimension, il peut être intéressant d'examiner leurs comportements afin de mieux comprendre les mécanismes intervenant en deux dimensions d'espace.

Les méthodes numériques basées sur une formulation en volumes finis sur un maillage mobile y sont exposées. Parallèlement, nous modifions les schémas envisagés afin de les écrire en maillages mobiles à topologie variable.

Nous proposons ensuite des méthodes d'adaptation dynamique de maillages, dans un premier temps sans changement de topologie, puis avec raffinement et déraffinement éventuels.

Dans la deuxième partie, nous cherchons à étendre au cas à deux dimensions d'espace les différents schémas numériques étudiés dans la première partie. Le cadre de notre étude sera alors celui des équations d'Euler dans un domaine déformable.

Nous rappelons tout d'abord la méthodologie adoptée pour résoudre un tel problème sur un maillage non-structuré mobile. Une généralisation aux maillages mobiles à topologie non-constante est également présentée.

Ces différents outils d'adaptation, que sont le maillage mobile et le raffinement/déraffinement, sont ensuite complétés par des critères d'adaptation.

L'algorithme résultant de ce travail est finalement appliqué pour le calcul d'écoulements stationnaires et instationnaire autour de profils de type NACA.



## Première partie

# Méthodes sur un maillage variable en une dimension d'espace



Dans cette partie, nous nous intéressons à des méthodes de type volumes finis sur des maillages mobiles auto-adaptatifs, en une dimension d'espace.

Dans le Chapitre 2, nous présentons des méthodes numériques utilisant une formulation en volumes finis sur un maillage variable (mobile et potentiellement auto-adaptatif) pour la résolution d'équations hyperboliques, linéaires ou non, en une dimension d'espace. On suppose que les mouvements et les modifications du maillage sont connus a priori. La difficulté principale pour les maillages raffinés provient du fait que l'on doit utiliser un schéma implicite en temps pour des raisons de stabilité. Nous introduisons ici un schéma localement implicite. Parallèlement, nous modifions les schémas envisagés afin de les écrire en maillages mobiles à topologie non constante.

Dans les deux chapitres suivants, nous proposons des méthodes d'adaptation dynamique des maillages pour la résolution d'équations hyperboliques, linéaires ou non, stationnaires ou non, en une dimension d'espace. Pour ce faire, nous proposons deux approches souvent alternatives dans la littérature. La première repose sur des maillages mobiles à topologie constante, elle est présentée dans le Chapitre 3. La seconde consiste à raffiner, voire déraffiner, localement et dynamiquement, le maillage et fait l'objet du Chapitre 4.





# Chapitre 2

## Méthode des volumes finis sur un maillage mobile en une dimension d'espace

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	10
2.2	Généralités sur les schémas numériques . . . . .	11
2.3	La méthode de Godunov en maillage mobile . . . . .	18
2.4	Schéma arbitrairement explicite-implicite . . . . .	23
2.5	Schéma à topologie non constante . . . . .	36
2.6	Conclusion . . . . .	55

---

Ce chapitre est largement inspiré du rapport de recherche INRIA N° 4042 [51].

### Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons des méthodes numériques utilisant une formulation en volumes finis sur un maillage variable (mobile et potentiellement auto-adaptatif) pour la résolution d'équations hyperboliques, linéaires ou non, en une dimension d'espace. La difficulté pour les maillages raffinés provient du fait que l'on doit utiliser un schéma implicite en temps pour des raisons de stabilité. Nous introduisons ici un schéma localement implicite. Parallèlement, nous modifions les schémas envisagés afin de les écrire en maillages mobiles à topologie non constante.

## 2.1 Introduction

Comme on l'a dit plus haut, la simulation numérique des écoulements en Mécanique des Fluides demande souvent un maillage très raffiné dans certaines régions du domaine (discontinuités pour le calcul de solutions stationnaires [16], couches limites, tourbillons, recirculations, décrochements, rattachements pour des écoulements instationnaires [8]). Il en va de même pour la résolution numérique de lois de conservation scalaires. Même si l'enjeu industriel n'est pas directement présent pour des simulations en une dimension d'espace, il peut être intéressant d'examiner si l'on peut adapter automatiquement le maillage en fonction de l'évolution de la solution. Notons ici que l'on peut alors faire varier la topologie d'un maillage monodimensionnel, en faisant apparaître ou disparaître localement des points. On peut aussi déplacer les nœuds du maillage de manière à obtenir une concentration nodale plus élevée dans les zones importantes de l'écoulement.

L'objectif principal de ce travail est donc l'étude et l'implémentation de méthodes numériques conservatives, reposant sur une formulation en volumes finis, et dont la particularité est l'utilisation de **maillages variables**. Ce qu'on entend ici par maillage variable est plus général que ce qui est entendu habituellement : nous souhaitons étendre les méthodes de maillages mobiles à des cas de maillages dont la topologie est elle-même variable dans le temps.

Insistons sur le fait que, dans une méthode en maillages variables, la résolution numérique des équations a lieu en même temps. Cette dernière, qui demande la reformulation de l'équation de départ, est plutôt assez facile pour des méthodes en volumes finis conservatives [22, 42].

Dans cette perspective, nous nous intéressons ici au mouvement, à l'ajout et à la suppression de points de la discrétisation. Pour des raisons de simplicité, nous nous plaçons dans cette partie dans le cadre restreint des équations hyperboliques scalaires monodimensionnelles. Plus particulièrement, nous testerons les méthodes envisagées sur les équations suivantes : l'advection linéaire et l'équation de Burgers, qui est un bon exemple de loi de conservation non linéaire (mais convexe). Cependant, nous aurons en permanence le souci de pouvoir étendre simplement les idées proposées en deux et trois dimensions d'espace. Dans cette démarche générale, le premier point abordé dans ce chapitre concerne les propriétés classiques de stabilité (principe du maximum, décroissance de la variation totale, stabilité  $L^2$ ) des schémas de volumes finis en maillages mobiles que l'on cherche à conserver pour des ajouts et suppressions de points. Le maillage étant amené à être raffiné localement, on introduit un schéma spatialement variable et localement implicite en temps. Dans les deux chapitres suivants, nous chercherons à coupler le mouvement, les opérations d'ajouts et suppressions de points à des critères d'adaptation instationnaire. Nous nous limiterons donc ici à des maillages variables non auto-adaptatifs.

Ce chapitre se présente comme suit. Dans un premier temps, dans la Section 2.2, nous rappelons les notions classiques des méthodes de volumes finis sur un maillage fixe

et nous montrons comme celles-ci s'adaptent facilement à des maillages mobiles, aussi bien pour ce qui est des formulations en volumes finis (moyennes sur des volumes déformables) que pour ce qui est des flux numériques et des solveurs de Riemann approchés sur lesquels ils s'appuient.

La Section 2.3 est ensuite consacrée à l'extension de la méthode de Godunov au maillage mobile ainsi qu'à la résolution numérique de l'équation d'advection et de Burgers à l'aide de cette dernière. À cause des maillages raffinés, l'utilisation d'un schéma explicite, dont la stabilité est assurée seulement sous une condition de type CFL, devient vite problématique et trop restrictive sur le pas de temps, puisqu'elle est reliée aux mailles les plus petites du maillage. Pour pouvoir utiliser un pas de temps plutôt lié à la précision numérique recherchée et aux échelles de temps caractéristiques des phénomènes étudiés, on considérera un schéma implicite. Un aspect original du schéma implicite considéré est qu'il est implicite seulement localement (dans la mesure où le maillage est très raffiné seulement localement, il n'est pas limitant d'être explicite dans l'ensemble du maillage). Ce schéma en temps localement implicite est présenté et étudié en détail dans la Section 2.4.

Dans la dernière section (Section 2.5), nous nous intéressons aux schémas envisagés écrits en maillages mobiles à topologie non constante. Il s'agit là de généraliser des méthodes de volumes finis à des volumes disparaissants (volume nul à la fin du pas de temps courant) ou naissants (volume nul au début du pas de temps courant). On cherche à démontrer des propriétés minimales pour le schéma proposé, notamment la stabilité discrète ou la décroissance de la variation totale.

## 2.2 Généralités sur les schémas numériques

Dans cette section, nous rappelons les notions fondamentales relatives aux méthodes numériques en volumes finis, à savoir les formulations elles-mêmes, la notion de schéma conservatif, la consistance au sens des volumes finis et la précision, la stabilité (décroissance de la variation totale, monotonie), etc.

### 2.2.1 Équations hyperboliques, lois de conservation scalaires

Pour une fonction scalaire  $u(x, t)$  dépendant du temps et de l'espace (à une dimension), un problème de Cauchy pour une équation hyperbolique s'écrit sous forme conservative :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) \end{cases}, \quad (2.1)$$

où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  et les indices  $x$  et  $t$  représentent des dérivations en espace et en temps.  $u^0$  est la donnée initiale.

A priori, la fonction de flux  $f$  peut être quelconque. On se limitera néanmoins aux cas où cette fonction est convexe, ce qui simplifie notablement l'expression de la solution exacte des problèmes de Riemann. Nous distinguons entre autres l'équation

d'advection :

$$u_t + cu_x = 0, \quad (2.2)$$

où  $f(u) = cu$  est linéaire ( $c \in \mathbb{R}$ ), et l'équation de Burgers :

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad (2.3)$$

où  $f(u) = \frac{u^2}{2}$  est non linéaire et strictement convexe. Ces deux équations reproduisent chacune partiellement différents aspects des équations d'Euler régissant la mécanique des fluides compressibles non-visqueux.

### 2.2.2 Formulation en volumes finis

Nous décrivons ici le cadre général des méthodes de volumes finis pour la résolution numérique de l'équation de conservation (2.1). Rappelons que les méthodes de volumes finis peuvent être vues comme des méthodes d'éléments finis discontinus (de degré 0). Cependant, on préfère souvent à cette vision très "éléments finis" une interprétation plus physique. Il faut revenir à la fois à certaines réalités physiques, par exemple aux équations de la mécanique des fluides compressibles (qui sont aussi des lois de conservation pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie), et au principe essentiel de la loi de conservation initiale. Pour le premier point, on sait que, même si la donnée initiale  $u^0$  est très régulière, il n'y a pas forcément de solution régulière "au sens classique" de la loi de conservation (2.1). Il est donc souvent inutile de considérer des éléments finis de degré plus que 0. D'autre part, même quand la solution est irrégulière et présente des discontinuités (on parle alors de solution faible, dans un sens variationnel à définir), elle vérifie certaines relations de saut (de Rankine-Hugoniot). Ces relations sont intimement liées à la nature conservative de l'équation initiale. La méthode des volumes finis a donc été choisie et construite parce que les inconnues numériques sont des approximations numériques des moyennes de la solution dans des volumes, ce qui s'accorde très bien avec la notion de principe de conservation.

Pour résoudre numériquement (2.1) en temps et en espace, on adopte un processus itératif temporel, où l'on cherche à approcher la solution à des instants successifs  $t^n$ . On définit alors le pas de temps éventuellement variable  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . Le principe fondamental des méthodes de volumes finis, présenté sur la Figure 2.1, est le suivant : on partage à tout instant  $t$  le domaine spatial  $\Omega$  en volumes finis ou cellules (ce principe général est valable en toute dimension) définies en une dimension d'espace comme suit :

$$\mathcal{C}_i(t) = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}(t); x_{i+\frac{1}{2}}(t) \right].$$

En avançant par pas de temps discrets successifs, on obtient des partitions successives du domaine spatial en volumes finis définis à l'instant  $t^n$  par :

$$\mathcal{C}_i^n \equiv \mathcal{C}_i(t^n) = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}(t^n); x_{i+\frac{1}{2}}(t^n) \right] \equiv \left[ x_{i-\frac{1}{2}}^n; x_{i+\frac{1}{2}}^n \right].$$

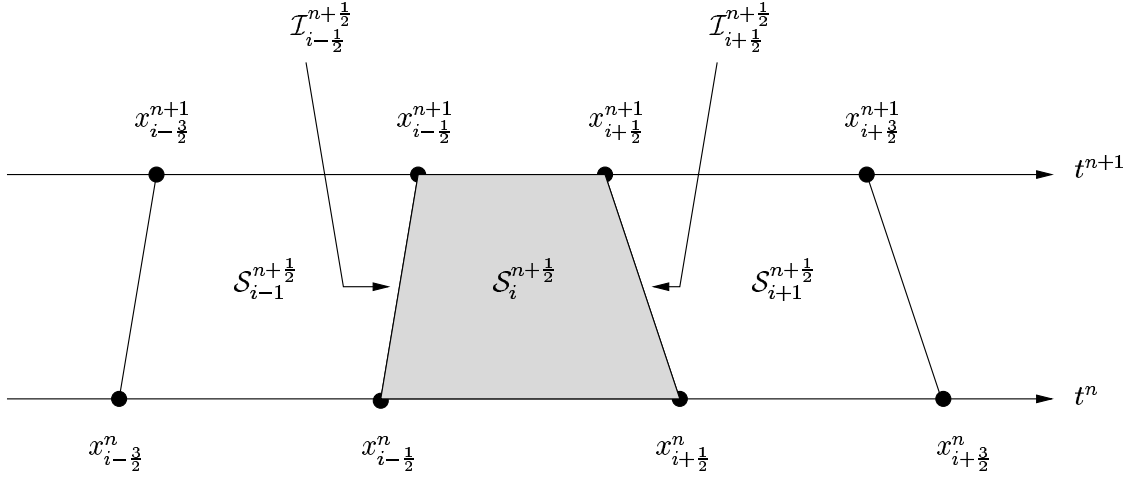


FIG. 2.1 – Principe des formulations en volumes finis.

On s'intéresse alors aux valeurs moyennes de la fonction inconnue dans ces volumes de contrôle (ce qui n'est pas moralement tout-à-fait équivalent à approcher la solution par une constante sur ces cellules, ce qui serait le cas dans une approche en éléments finis  $P_0$ ).

Plus précisément, les inconnues numériques  $u_i^n$  sont supposées représenter des approximations à l'instant  $t^n$  de la moyenne de la solution inconnue  $u$  sur la cellule  $\mathcal{C}_i^n$ , soit

$$u_i^n \sim \frac{1}{\Delta x_i^n} \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x, t^n) dx ,$$

avec, pour tout  $i$  et pour tout  $n$ ,  $\Delta x_i^n = x_{i+1/2}^n - x_{i-1/2}^n > 0$ .

Sur la Figure 2.1, on a représenté les deux sous-ensembles de  $\Omega \times \mathbb{R}^+$  supplémentaires suivants :

- $\mathcal{I}_{i+1/2}^{n+1/2} = \bigcup_{t \in [t^n; t^{n+1}]} (x_{i+1/2}(t), t)$  ;
- $\mathcal{S}_i^{n+1/2} = \bigcup_{t \in [t^n; t^{n+1}]} \mathcal{C}_i(t) \times \{t\}$ .

On introduit maintenant la vitesse moyenne (sur l'intervalle de temps  $[t^n; t^{n+1}]$ ) du point  $x_{i+1/2}$  (ces points sont les extrémités des volumes finis). Elle est simplement donnée par :

$$\omega_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i+1/2}^n}{\Delta t^n} .$$

Pour plus de lisibilité, nous nous contenterons d'écrire dans la suite  $\mathcal{S}_i$ ,  $\mathcal{I}_{i+1/2}$  et  $\omega_{i+1/2}$  à la place de  $\mathcal{S}_i^{n+1/2}$ ,  $\mathcal{I}_{i+1/2}^{n+1/2}$  et  $\omega_{i+1/2}^{n+1/2}$ .

Si nous intégrons formellement l'équation de conservation (2.1) sur chaque volume  $\mathcal{S}_i$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{S}_i} (u_t + f(u)_x) dx dt \stackrel{Green}{=} \int_{\partial\mathcal{S}_i} (u \cdot \eta_t^{ext} + f(u) \cdot \eta_x^{ext}) d\sigma \\
0 &= \int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x, t^n) dx \\
&+ \int_{\mathcal{I}_{i-\frac{1}{2}}} \left\{ u(x_{i-\frac{1}{2}}(t^-(\sigma)), t^-(\sigma)) \frac{\omega_{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\omega_{i-\frac{1}{2}}^2}} + f(u(x_{i-\frac{1}{2}}(t^-(\sigma)), t^-(\sigma))) \frac{-1}{\sqrt{1+\omega_{i-\frac{1}{2}}^2}} \right\} d\sigma \\
&+ \int_{\mathcal{I}_{i+\frac{1}{2}}} \left\{ u(x_{i+\frac{1}{2}}(t^+(\sigma)), t^+(\sigma)) \frac{-\omega_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\omega_{i+\frac{1}{2}}^2}} + f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t^+(\sigma)), t^+(\sigma))) \frac{1}{\sqrt{1+\omega_{i+\frac{1}{2}}^2}} \right\} d\sigma
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} t^\pm(\sigma) = t^n + \frac{\sigma}{\sqrt{1+\omega_{i\pm\frac{1}{2}}^2}} \\ \text{avec } \sigma \in [0, L] \text{ où } L^2 = (\Delta t^n)^2 + (x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}^n)^2 \end{cases} .$$

Pour obtenir l'expression précédente, on a simplement paramétré les courbes dans l'espace-temps  $\mathcal{I}_{i-\frac{1}{2}}$  et  $\mathcal{I}_{i+\frac{1}{2}}$ . Ainsi, nous trouvons après simplification (paramétrage directement par le temps  $t$ ) :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx &= \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x, t^n) dx \\
&+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ f(u(x_{i-\frac{1}{2}}(t), t)) - \omega_{i-\frac{1}{2}} u(x_{i-\frac{1}{2}}(t), t) \right\} dt \quad (2.4) \\
&- \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t), t)) - \omega_{i+\frac{1}{2}} u(x_{i+\frac{1}{2}}(t), t) \right\} dt.
\end{aligned}$$

### 2.2.3 Schémas conservatifs

On déduit de l'expression (2.4), que si l'on considère un domaine infini ou fini avec des conditions aux limites périodiques, on a immédiatement que

$$\int_{\bigcup_i \mathcal{C}_i^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx = \int_{\bigcup_i \mathcal{C}_i^n} u(x, t^n) dx,$$

ce qui signifie que l'intégrale totale de  $u$  se conserve dans le temps. Une autre conséquence est que la variation de l'intégrale de  $u$  sur une union de cellules consécutives

ne dépend que de flux aux bords de cette union. En effet, il découle aussi de (2.4) que

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i_g \leq i \leq i_d} C_i^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx &= \int_{\bigcup_{i_g \leq i \leq i_d} C_i^n} u(x, t^n) dx \\ &+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ f(u(x_{i_g - \frac{1}{2}}(t), t)) - \omega_{i_g - \frac{1}{2}} u(x_{i_g - \frac{1}{2}}(t), t) \right\} dt \\ &- \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ f(u(x_{i_d + \frac{1}{2}}(t), t)) - \omega_{i_d + \frac{1}{2}} u(x_{i_d + \frac{1}{2}}(t), t) \right\} dt . \end{aligned}$$

Nous considérons ici des schémas dits conservatifs, qui ont une propriété similaire, et qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0} \quad (2.5)$$

où les termes  $\phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  sont des flux numériques qui approchent l'intégrale des flux au cours du pas de temps, autrement dit :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t), t)) - \omega_{i+\frac{1}{2}} u(x_{i+\frac{1}{2}}(t), t) \right\} dt.$$

En général, le flux numérique entre  $S_i$  et  $S_{i+1}$  est donné par  $\phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^*, u_{i+1}^*, \omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$ , où la fonction  $\phi$  est une fonction de flux numérique et ses deux premiers arguments sont les valeurs de l'inconnue de part et d'autre de l'interface. Dans l'expression précédente, on n'a pas précisé la nature du schéma en temps utilisé : on peut choisir de prendre  $u_i^* = u_i^n$  et on obtient un schéma explicite du premier ordre en temps, ou  $u_i^* = u_i^{n+1}$  et on obtient un schéma implicite du premier ordre en temps, ou d'autres solutions.

**Remarque 1** On peut remarquer qu'une solution exacte et assez régulière de (2.1), qui vérifie aussi (2.4), satisfait une sorte de schéma conservatif exact, puisque

$$\int_{C_i^n} u(x, t^n) dx = \Delta x_i^n \bar{u}_i^n ,$$

où  $\bar{u}_i^n$  est la moyenne exacte de  $u$  sur  $C_i^n$  à l'instant  $t^n$  et

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{exact} = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ f(u(x_{i+\frac{1}{2}}(t), t)) - \omega_{i+\frac{1}{2}} u(x_{i+\frac{1}{2}}(t), t) \right\} dt.$$

### 2.2.4 Précision spatiale des schémas numériques

La précision spatiale des schémas en volumes finis est souvent interprétée en termes d'erreur de troncature (dans une approche plutôt inspirée des différences finies). C'est pourquoi la précision spatiale en volumes finis non uniformes (et *a fortiori* mobiles ou variables) est moins couramment précisée.

Précision (au sens des volumes finis) pour un maillage fixe uniforme :

Pour un maillage fixe et uniforme, l'approximation numérique fournie par le schéma spatial est d'autant meilleure que l'erreur de troncature est faible. Celle-ci est donnée par :

$$\epsilon^x = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} - (f(u))_x .$$

**Définition 1** Le schéma (spatial) est dit **consistant** si, pour une solution  $u$  suffisamment régulière,

$$\epsilon^x = O(\Delta x) \text{ quand } \Delta x \rightarrow 0 .$$

Le schéma conservatif (2.5) sur un maillage fixe uniforme est consistant si la fonction de flux numérique  $\phi$  vérifie

$$\phi(u, u, 0) = f(u) .$$

De même, l'approximation spatiale est **d'ordre  $p$**  si

$$\epsilon^x = O(\Delta x^p) \text{ quand } \Delta x \rightarrow 0 .$$

Précision (au sens des volumes finis) pour un maillage mobile et non uniforme :

Pour un maillage mobile, l'erreur de troncature est définie par :

$$\epsilon^x = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} - (f(u) - wu)_x .$$

**Définition 2** Le schéma (spatial) est dit **consistant** si, pour une solution  $u$  suffisamment régulière,

$$\epsilon^x = O(\bar{\Delta}x) \text{ quand } \bar{\Delta}x \rightarrow 0 ,$$

où  $\bar{\Delta}x$  est une mesure du plus grand volume d'une cellule dans le maillage.

Le schéma conservatif (2.5) sur un maillage mobile est consistant si la fonction de flux numérique  $\phi$  vérifie

$$\phi(u, u, w) = f(u) - wu .$$



### 2.2.5 Stabilité, principe du maximum

Les solutions faibles entropiques bornées de la loi de conservation scalaire (2.1) (une solution faible est solution de la forme variationnelle issue de l'équation de départ ; une solution entropique vérifie des inégalités d'entropie, ou de manière équivalente, ne contient pas de discontinuités dont sortent des courbes caractéristiques), bien que pouvant être discontinues, ont de remarquables propriétés [21] :

- aucun maximum ni minimum local n'apparaît ;
- la valeur d'un minimum local ne peut pas décroître, la valeur d'un maximum local ne peut pas croître ;
- la variation totale  $TV(u(x(t), t))$  est (donc) une fonction non croissante du temps  $t$ . Celle-ci est définie par :

$$TV(u(x(t), t)) = \int_{\mathbb{R}} |u_x(x(t), t)| dx.$$

Il est alors intéressant d'examiner si la solution numérique  $u_i^n$  obtenue avec le schéma (2.5) possède les mêmes propriétés. Il faut alors traduire sous forme discrète les notions de monotonie proposées ci-dessus. Harten [20] a introduit la propriété pour un schéma numérique de ne pas faire croître la variation totale (Total Variation Diminishing schemes) de la manière suivante :

**Définition 3** *Un schéma est dit **TVD** (à variation totale décroissante) si et seulement si, pour toute donnée discrète  $(u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ , pour laquelle le schéma produit à l'instant suivant la nouvelle donnée discrète  $(u_i^{n+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ , on a :*

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n),$$

où  $TV(u)$ , la variation totale discrète d'une donnée  $u$ , est donnée par

$$TV(u) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_i - u_{i-1}|.$$

**Définition 4** *On dit qu'un schéma numérique vérifie le **principe du maximum** si et seulement si pour toute donnée discrète  $(u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ , pour laquelle le schéma produit à l'instant suivant la nouvelle donnée discrète  $(u_i^{n+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ , on a :*

$$\forall n, \forall i, \min(u^n) \leq u_i^{n+1} \leq \max(u^n).$$

Il vérifie donc également

$$\forall n, \forall i, \min(u^0) \leq u_i^n \leq \max(u^0).$$

Enfin, nous pouvons introduire un dernier critère de stabilité plus classique :

**Définition 5** *En notant  $u^n = (u_i^n)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ , un schéma numérique  $u^{n+1} = \mathcal{L}(u^n)$  est dit **stable** pour la norme  $\| \cdot \|$  si et seulement si  $\forall u \in \mathbb{R}^N$ ,  $\|\mathcal{L}(u)\| \leq \|u\|$ .*

Nous utiliserons essentiellement les normes suivantes :

$$\|u^n\|_2 = \left( \sum_{j=1}^N \Delta x_j^n |u_j^n|^2 \right)^{1/2}, \quad \|u^n\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq N} |u_j^n|,$$

appelées respectivement normes  $L^2$  et  $L^\infty$ . Un schéma qui vérifie le principe du maximum nous assure que les valeurs  $u_i^n$  restent bornées. Le principe du maximum entraîne donc une propriété de stabilité de type  $L^\infty$ . De même, un schéma conservatif TVD sera également stable en norme  $L^\infty$  (en effet, on voit facilement, au moins pour des problèmes périodiques, que les valeurs prises par  $u$  seront majorées et minorées par des bornes dépendant de sa moyenne – constante au cours des itérations – de sa variation totale – majorée par sa valeur initiale – et par le nombre de points).

Dans les sections suivantes, nous étudions l'extension de la méthode de Godunov aux maillages mobiles, et nous cherchons sous quelles conditions (notamment sur le pas de temps) les schémas explicites obtenus préservent le principe du maximum, sont TVD et stables au sens de la norme  $L^2$ . Nous verrons ensuite des schémas implicites en temps, inconditionnellement stables, qui permettent d'éviter la restriction sur le pas de temps imposée par la limite de stabilité des schémas précédents. Nous finirons par l'étude de ces schémas écrits en topologie non constante.

## 2.3 La méthode de Godunov en maillage mobile

Nous commençons cette section par l'adaptation de la méthode de Godunov [29] aux maillages mobiles. Ensuite, nous présentons cette dernière et discutons de ses propriétés pour la résolution numérique de l'équation d'advection (2.2) et de l'équation de Burgers (2.3).

### 2.3.1 Principe général

Nous décrivons ici un pas de temps de cette méthode (voir [50] pour plus de détails) :

1. on dispose initialement des variables  $u_i^n$  données par la méthode des volumes finis ; on considère alors le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad t \geq t^n \\ u(x, t^n) = u_i^n & \text{si } x \in C_i^n \equiv [x_{i-\frac{1}{2}}^n; x_{i+\frac{1}{2}}^n], \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad (2.6)$$

dont la donnée initiale est une fonction en escalier.

2. en chaque interface  $x_{i+\frac{1}{2}}^n$ , la donnée "initiale" du problème de Cauchy ci-dessus ressemble à un problème de Riemann. On démontre même que la solution (faible entropique bornée) de ce problème de Cauchy est localement égale à la solution du problème de Riemann local (à condition que des ondes issues des autres

interfaces ne viennent pas interférer, ce qui se traduit par une condition de type CFL sur le pas de temps). On résout alors le problème de Riemann local : la donnée initiale de ce problème de Riemann est  $u = u_i^n$  si  $x < x_{i+\frac{1}{2}}^n$  et  $u = u_{i+1}^n$  si  $x > x_{i+\frac{1}{2}}^n$ . Notons  $\hat{u}(x, t^{n+1})$  une solution de (2.6) obtenue par juxtaposition des solutions exactes des problèmes de Riemann locaux (au moins pour un pas de temps assez petit pour que ces solutions globales n'interfèrent pas).

3. afin de récupérer une fonction en escalier, on calcule la moyenne de  $\hat{u}$  sur chaque cellule. On pose alors :

$$u_i^{n+1} := \frac{1}{\Delta x_i^{n+1}} \int_{C_i^{n+1}} \hat{u}(x, t^{n+1}) dx.$$

4. rappelons ici que des hypothèses fortes sont supposées satisfaites pour les mesures des volumes finis, ainsi que sur les vitesses de maillage ; on admet que

$$\begin{cases} \forall i, \forall n, \Delta x_i^n > 0 \\ \forall i, \forall n, \Delta x_i^{n+1} = \Delta x_i^n + \Delta t^n (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) \end{cases} . \quad (2.7)$$

Il faut noter que la condition sur  $\Delta x_i^{n+1}$  (deuxième équation) impose une limite conjointe sur le pas de temps  $\Delta t^n$  et les vitesses de maillage  $\omega_{i-\frac{1}{2}}$  et  $\omega_{i+\frac{1}{2}}$  (surtout lorsqu'elles pointent l'une vers l'autre). On notera ici que la formule donnée ci-dessus pour le calcul de  $\Delta x_i^{n+1}$ , d'une part est équivalente en une dimension d'espace au recalcul des volumes finis à partir des positions des interfaces et, d'autre part implique qu'un champ constant est conservé. Cette propriété de conservation géométrique [56] est particulièrement importante en plusieurs dimensions d'espace (une littérature abondante existe sur ce thème ; voir par exemple [31, 19]).

### 2.3.2 Conservativité et consistance

**Lemme 1** *Le schéma de Godunov en maillage mobile est **conservatif** au sens des volumes finis et donc de l'équation (2.5). Le flux numérique entre  $S_i$  et  $S_{i+1}$  peut effectivement s'écrire sous la forme  $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})$  (c'est donc un schéma de nature explicite en temps), où la fonction de flux numérique  $\phi$  est donnée par :*

$$\phi(u_g, u_d, \omega) = f(\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(\omega; u_g, u_d)) - \omega \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(\omega; u_g, u_d). \quad (2.8)$$

et  $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(x/t; u_g, u_d)$  est la valeur en  $(x, t)$  de la solution (faible entropique bornée) autosimilaire du problème de Riemann entre les états à gauche  $u_g$  et à droite  $u_d$ .

*Preuve :* Soit la donnée initiale  $u$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x, t^n) = u_i^n \quad \text{si } x \in C_i^n .$$

Intégrons  $u$  la solution faible de (2.1) construite par la méthode de Godunov sur  $\mathcal{S}_i$ . D'après (2.4) et en supposant que les ondes issues des problèmes de Riemann voisins n'interfèrent pas, nous trouvons :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x, t^n) dx \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[ f \left( \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x_{i-\frac{1}{2}}(t) - x_{i-\frac{1}{2}}(t^n)}{t - t^n}; u_{i-1}^n, u_i^n \right) \right) - \omega_{i-\frac{1}{2}} \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x_{i-\frac{1}{2}}(t) - x_{i-\frac{1}{2}}(t^n)}{t - t^n}; u_{i-1}^n, u_i^n \right) \right] dt \\ &\quad + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[ f \left( \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x_{i+\frac{1}{2}}(t) - x_{i+\frac{1}{2}}(t^n)}{t - t^n}; u_i^n, u_{i+1}^n \right) \right) - \omega_{i+\frac{1}{2}} \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x_{i+\frac{1}{2}}(t) - x_{i+\frac{1}{2}}(t^n)}{t - t^n}; u_i^n, u_{i+1}^n \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Or  $u_i^{n+1}$  est obtenue en faisant la moyenne de  $u$  sur  $\mathcal{C}_i^{n+1}$ . Ainsi

$$\int_{\mathcal{C}_i^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx = \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1}.$$

D'autre part,  $u$  est constante par morceaux sur chacune des cellules  $\mathcal{C}_i^n$  à l'instant  $t^n$ . Nous avons alors :

$$\int_{\mathcal{C}_i^n} u(x, t^n) dx = \Delta x_i^n u_i^n.$$

Enfin, les mouvements des bornes du volume fini considéré sont des mouvements rectilignes au cours du pas de temps. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [t^n; t^{n+1}], \quad \frac{x_{i-\frac{1}{2}}(t) - x_{i-\frac{1}{2}}(t^n)}{t - t^n} &= \omega_{i-\frac{1}{2}}, \\ \forall t \in [t^n; t^{n+1}], \quad \frac{x_{i+\frac{1}{2}}(t) - x_{i+\frac{1}{2}}(t^n)}{t - t^n} &= \omega_{i+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les deux dernières intégrales se simplifient, quand nous remarquons que les solutions des problèmes de Riemann locaux sont autosimilaires. Le schéma de Godunov peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n \\ &\quad + \Delta t^n \left( \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) \right), \end{aligned}$$

où la fonction de flux numérique  $\phi$  est celle donnée en (2.8). Nous avons bien démontré que la méthode de Godunov en maillage mobile peut s'écrire comme un schéma conservatif avec cette fonction de flux numérique.  $\square$

**Lemme 2** *Le schéma de Godunov en maillage mobile est **consistant** au sens de la Définition 2.*

*Preuve :* La consistance est immédiate puisque  $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(\omega; u, u) = u$ ,  $\forall w, \forall u$ , d'où l'identité de consistance  $\phi(u, u, \omega) = f(u) - \omega u$ . Ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Remarque 2** Nous pouvons remarquer que pour  $\omega = 0$  (maillage fixe), nous avons

$$\phi(u_g, u_d, 0) = f(\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(0; u_g, u_d)).$$

Nous retrouvons donc bien la fonction de flux numérique de la méthode de Godunov en maillage fixe.

### 2.3.3 Équation d'advection

Nous nous intéressons ici à la résolution numérique de l'équation d'advection (2.2). La méthode de Godunov fournit la fonction de flux numérique suivante :

$$\phi_{\mathcal{G}}(u_g, u_d, \omega) = \begin{cases} (c - \omega) u_g & \text{si } \omega < c \\ (c - \omega) u_d & \text{si } \omega > c \\ 0 & \text{si } \omega = c \end{cases},$$

que nous pouvons aussi écrire :

$$\boxed{\phi_{\mathcal{G}}(u_g, u_d, \omega) = (c - \omega)^+ u_g + (c - \omega)^- u_d} \quad (2.9)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x^+ = \max(x, 0) = \frac{x + |x|}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R}, x^- = \min(x, 0) = \frac{x - |x|}{2} \end{cases}.$$

Le Lemme 3 de la section suivante nous permettra d'établir que sous la condition

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{Z}, \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \leq 1} \quad (2.10)$$

le schéma est TVD et préserve le principe du maximum. De plus, le Théorème 3 nous permettra d'affirmer que, sous une condition similaire, toujours de type CFL, le schéma est stable en norme  $L^2$ . On voit bien ici que les conditions de stabilité (propriété TVD ou au sens d'une norme) de type CFL vont se montrer extrêmement restrictives sur le pas de temps  $\Delta t^n$  dès que l'on voudra utiliser des maillages raffinés. Il faudra alors passer à des schémas au moins localement implicites.

### 2.3.4 Équation de Burgers

Pour l'équation de Burgers (2.3), les seules solutions entropiques bornées d'un problème de Riemann sont les suivantes :

$$\text{CHOC } u_g > u_d : u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{u_g + u_d}{2} \\ u_d & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{u_g + u_d}{2} \end{cases};$$

$$\text{DÉTENTE } u_g < u_d : u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } \frac{x}{t} < u_g \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_g < \frac{x}{t} < u_d \\ u_d & \text{si } \frac{x}{t} > u_d \end{cases} .$$

Ainsi, la fonction de flux numérique associée au schéma de Godunov s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{G}}(u_g, u_d, \omega) = \begin{cases} \frac{u_g^2}{2} - \omega u_g & \text{si } \omega \leq u_g \leq u_d \text{ ou } u_g - \omega \geq |u_d - \omega| \\ \frac{u_d^2}{2} - \omega u_d & \text{si } u_g \leq u_d \leq \omega \text{ ou } |u_g - \omega| \leq -(u_d - \omega) \\ -\frac{\omega^2}{2} & \text{si } u_g \leq \omega \leq u_d \end{cases} ,$$

ou de manière plus compacte :

$$\boxed{\phi_{\mathcal{G}}(u_g, u_d, \omega) = \frac{1}{2} \max \left( (u_g - \omega)^{+2}, (u_d - \omega)^{-2} \right) - \frac{1}{2} \omega^2.} \quad (2.11)$$

### 2.3.5 Extension à une précision d'ordre supérieur

Jusqu'à présent, l'approximation spatiale est seulement d'ordre un (les arguments des flux numériques ne sont que des valeurs moyennes dans les cellules voisines). On peut construire des schémas conservatifs d'ordre plus élevé en remplaçant les arguments de la fonction de flux numérique  $\phi_{\mathcal{G}}$  par d'autres arguments obtenus par interpolation linéaire sur chaque cellule (voir par exemple [47]).

Le flux (version explicite) s'écrit désormais  $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{\mathcal{G}}(u_{i+\frac{1}{2}}^n -, u_{i+\frac{1}{2}}^n +, \omega_{i+\frac{1}{2}})$  où les états interpolés ( $u_{i+\frac{1}{2}}^n -$  et  $u_{i+\frac{1}{2}}^n +$ ) de chaque côté de l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}^n$  sont donnés par :

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^n - = u_i^n + \frac{\Delta x_i^n}{2} \left( (1 - \beta) \Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n + \beta \Delta u_i^n \right) \\ u_{i+\frac{1}{2}}^n + = u_{i+1}^n - \frac{\Delta x_{i+1}^n}{2} \left( (1 - \beta) \Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n + \beta \Delta u_{i+1}^n \right) \end{cases} ,$$

où  $\beta$  est un paramètre de décentrage, et les grandeurs  $\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n$  et  $\Delta u_i^n$  sont définies par :

$$\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\frac{\Delta x_i^n}{2} + \frac{\Delta x_{i+1}^n}{2}} \quad \text{et} \quad \Delta u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\frac{\Delta x_{i-1}^n}{2} + \Delta x_i^n + \frac{\Delta x_{i+1}^n}{2}} .$$

Il n'existe malheureusement pas de schéma linéaire d'ordre supérieur à un qui soit aussi à variation totale décroissante. Ainsi, on a recourt classiquement à des limiteurs de pente [55] pour réduire la précision près des discontinuités et obtenir un schéma monotone et précis presque partout (voir [47] pour une revue de ces limiteurs de pente).

Les états interpolés s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^n = u_i^n + \frac{\Delta x_i^n}{2} \left( (1-\beta)\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n + \beta\Delta u_i^n \right) \varphi \left( \frac{\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta u_i^n} \right) \\ u_{i+\frac{1}{2}}^n = u_{i+1}^n - \frac{\Delta x_{i+1}^n}{2} \left( (1-\beta)\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n + \beta\Delta u_{i+1}^n \right) \varphi \left( \frac{\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta u_{i+1}^n} \right) \end{cases},$$

où la fonction de limitation  $\varphi$  est par exemple  $\varphi(r) = 2r^+/(r^2 + 1)$  (limiteur de Van Albada, avec  $\beta = \frac{1}{2}$ ).

## 2.4 Schéma arbitrairement explicite-implicite

Comme nous l'avons rappelé précédemment, l'utilisation de schémas explicites en temps avec des maillages raffinés induit des restrictions trop fortes sur le pas de temps pour des raisons de stabilité. La sévérité de ces conditions de type CFL provient des "plus petites" cellules du maillage. Pour s'affranchir de ces limitations, nous considérons des schémas arbitrairement explicites-implicites ou AEI (comme pour les méthodes ALE, qui sont arbitrairement - en fait localement suivant le choix de l'utilisateur - Lagrangiennes et Eulériennes) qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} = 0, \quad (2.12)$$

où les flux numériques sont donnés par :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}). \quad (2.13)$$

Dans l'équation précédente, les variables  $u_i^{n+\theta_i}$  sont des inconnues dépendant des grandeurs  $u_i^n$  et  $u_i^{n+1}$ . Par exemple, pour un maillage fixe (et seulement un maillage fixe), on pourra considérer une dépendance du type :

$$[\text{maillage fixe}] \quad \theta_i \in [0, 1] \quad \text{et} \quad u_i^{n+\theta_i} = (1 - \theta_i)u_i^n + \theta_i u_i^{n+1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

Si le paramètre  $\theta_i$  est uniformément nul (i.e.  $\forall i, \theta_i = 0$ ), nous reconnaissons le schéma explicite en temps, qui a fait l'objet de la section précédente. Si le paramètre  $\theta_i$  est uniformément égal à 1 (i.e.  $\forall i, \theta_i = 1$ ), nous retrouvons un schéma implicite du premier ordre en temps. Dès que  $\exists i \mid \theta_i \neq 0$ , le schéma est implicite. On voit cependant que, si un groupe limité de cellules adjacentes présentent un paramètre  $\theta_i$  non nul, le schéma ainsi défini est implicite seulement localement. Un système linéaire (ou non linéaire) de taille limitée devra alors être résolu.

Dans un premier temps, sur l'exemple de l'équation d'advection (2.2), nous discutons des propriétés du schéma AEI (arbitrairement explicite-implicite) adapté à la méthode de Godunov en maillage mobile. Nous nous intéresserons ensuite à la résolution numérique de l'équation de Burgers (2.3), qui nous amènera à la construction d'un schéma implicite linéarisé.

## 2.4.1 Équation d'advection

### 2.4.1.1 Écriture du schéma AEI

D'après (2.9), le flux numérique du schéma AEI associé à la méthode de Godunov en maillage mobile s'écrit :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ u_i^{n+\theta_i} + (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}. \quad (2.15)$$

Avant d'étudier les propriétés de ce schéma, introduisons quelques notations :

$$\forall i, \quad \Delta x_i^{n+\theta_i} = (1 - \theta_i) \Delta x_i^n + \theta_i \Delta x_i^{n+1}, \quad (2.16a)$$

$$\forall i, \quad u_i^{n+\theta_i} = \frac{(1 - \theta_i) \Delta x_i^n u_i^n + \theta_i \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1}}{\Delta x_i^{n+\theta_i}}. \quad (2.16b)$$

On comprend bien ici que l'expression (2.16b) est équivalente à (2.14) seulement lorsque le maillage est fixe. D'une certaine manière, la pondération par un coefficient  $\theta_i$  est transformée en une pondération par  $(1 - \theta_i) \Delta x_i^n / [(1 - \theta_i) \Delta x_i^n + \theta_i \Delta x_i^{n+1}]$ . Nous déduisons de (2.12) que

$$\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} = \Delta x_i^n u_i^n - \Delta t^n \left( \phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} \right). \quad (2.17)$$

Nous effectuons alors les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{cases} (1 - \theta_i) \times (2.17) + \theta_i \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} \\ -\theta_i \times (2.17) + (1 - \theta_i) \Delta x_i^n u_i^n \end{cases}.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} \Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} = \Delta x_i^{n+\theta_i} u_i^{n+\theta_i} - (1 - \theta_i) \Delta t^n \left( \phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} \right), \\ \Delta x_i^n u_i^n = \Delta x_i^{n+\theta_i} u_i^{n+\theta_i} + \theta_i \Delta t^n \left( \phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} \right). \end{cases}$$

Nous déduisons de (2.7) que

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^{n+\theta_i} + \frac{(1 - \theta_i) \Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left( u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left( u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$\begin{aligned} u_i^n &= u_i^{n+\theta_i} - \frac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n} \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left( u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left( u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.18b)$$

Afin de déterminer  $u_i^{n+1}$ , il nous faut connaître les valeurs  $u_i^{n+\theta_i}$ . Or, d'après (2.18b), nous constatons que :



- $u^{n+\theta} \equiv (u_i^{n+\theta_i})_i$  est solution d'un système linéaire de la forme  $Au^{n+\theta} = u^n$ , dont la matrice  $A$  ne dépend que de grandeurs connues au début du pas de temps ;
- le système  $Au^{n+\theta} = u^n$  se réduit en fait aux points où  $\theta_i \neq 0$  ;
- enfin, la matrice  $A$  est à diagonale strictement dominante. On peut alors utiliser une méthode de relaxation pour inverser le système, comme par exemple la méthode de Jacobi.

Une fois  $u^{n+\theta}$  connu, on déterminera  $u^{n+1}$  en utilisant (2.18a) ou la définition (2.16b) de  $u_i^{n+\theta_i}$ , seulement pour les points où  $\theta_i \neq 0$ .

### 2.4.1.2 Stabilité du schéma AEI

Avant de présenter quelques exemples numériques, nous étudions les propriétés de stabilité du schéma : en particulier la vérification du principe du maximum, le caractère TVD et la stabilité (en norme  $L^2$ ). Nous proposons ci-dessous trois théorèmes pour chacun de ces critères de stabilité.

**Théorème 1** *Sous la condition*

$$\forall i, \quad \forall n, \quad \frac{(1 - \theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] \leq 1, \quad (2.19)$$

le schéma AEI (2.12-2.15-2.16-2.7) vérifie le principe du maximum.

*Preuve* : on a

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \left\{ 1 - \frac{(1 - \theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] \right\} u_i^{n+\theta_i} \\ &+ \frac{(1 - \theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \right]. \end{aligned}$$

Sous la condition (2.19), nous remarquons que

$$\forall i, \quad \forall n, \quad u_i^{n+1} \geq \min_i u_i^{n+\theta_i} \quad \text{et} \quad u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^{n+\theta_i}.$$

Ainsi

$$\begin{cases} \min u^{n+1} & \geq \min u^{n+\theta}, \\ \max u^{n+1} & \leq \max u^{n+\theta}. \end{cases}$$

D'autre part, soit  $i$  l'indice tel que  $\max u^{n+\theta} = u_i^{n+\theta_i}$ . En utilisant l'équation (2.18b) pour cet indice  $i$  particulier, nous montrons aisément que  $u_i^n \geq \max_i u_i^{n+\theta_i}$ , ce qui implique  $\max_i u_i^n \geq \max_i u_i^{n+\theta_i}$ . Par un raisonnement analogue, nous trouvons  $\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+\theta_i}$ .

En somme, nous avons les inégalités suivantes

$$\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^n,$$

qui permettent de conclure la preuve du théorème.  $\square$

**Théorème 2** *Sous la condition*

$$\forall i, \forall n, \Delta t^n \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ \frac{(1 - \theta_{i+1})}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \frac{(1 - \theta_i)}{\Delta x_i^{n+1}} \right] \leq 1, \quad (2.20)$$

le schéma AEI (2.12-2.15-2.16-2.7) est TVD.

*Preuve* : on a successivement, à partir de la forme modifiée (2.18a), en utilisant des changements d'indice (vers la gauche et vers la droite) puis en utilisant l'hypothèse (2.20) du théorème,

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| 1 - \frac{(1 - \theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1 - \theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right| |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\ &\quad + \frac{(1 - \theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ |u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}| \\ &\quad + \frac{(1 - \theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} \left[ -(c - \omega_{i+\frac{3}{2}})^- \right] |u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| 1 - \frac{(1 - \theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1 - \theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right| |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\ &\quad + \frac{(1 - \theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\ &\quad + \frac{(1 - \theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[ -(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}|, \end{aligned}$$

et finalement

$$TV(u^{n+1}) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}| := TV(u^{n+\theta}).$$

D'autre part, en utilisant cette fois la forme modifiée (2.18b), nous avons

$$\begin{aligned} TV(u^n) &\geq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| 1 + \frac{\theta_{i+1}\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ - \frac{\theta_i\Delta t^n}{\Delta x_i^n} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right| |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\ &\quad - \frac{\theta_i\Delta t^n}{\Delta x_i^n} (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ |u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}| \\ &\quad + \frac{\theta_{i+1}\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n} (c - \omega_{i+\frac{3}{2}})^- |u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}| \\ &\geq TV(u^{n+\theta}). \end{aligned}$$

Nous avons donc bien démontré que, sous la condition (2.20),  $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$ , ce qui conclut la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 3** *Sous la condition (2.20), le schéma AEI (2.12-2.15-2.16-2.7) vérifie le principe du maximum et est TVD.*

Pour vérifier la remarque précédente, il suffit de démontrer que (2.20) $\Rightarrow$ (2.19). Pour cela, on note que la condition (2.20) s'écrit aussi :

$$\Delta t^n |c - \omega_{i+\frac{1}{2}}| \leq \begin{cases} \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1}}{1 - \theta_{i+1}} & \text{si } c - \omega_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \frac{\Delta x_i^{n+1}}{1 - \theta_i} & \text{si } c - \omega_{i+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases}.$$

Sous la condition (2.20), il suffit d'examiner les valeurs de

$$T_i = \frac{(1 - \theta_i) \Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right],$$

suivant les signes de  $c - \omega_{i-\frac{1}{2}}$  et de  $c - \omega_{i+\frac{1}{2}}$ . Plus précisément, il suffit de vérifier que, dans tous les cas,  $T_i \leq 1$ . On a :

	$c - \omega_{i-\frac{1}{2}} \geq 0$	$c - \omega_{i-\frac{1}{2}} \leq 0$
$c - \omega_{i+\frac{1}{2}} \geq 0$	$T_i = \frac{(1 - \theta_i) \Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) \leq 1$	$T_i = 0$
$c - \omega_{i+\frac{1}{2}} \leq 0$	$T_i = (1 - \theta_i) \frac{\Delta x_i^{n+1} - \Delta x_i^n}{\Delta x_i^{n+1}} \leq 1$	$T_i = -\frac{(1 - \theta_i) \Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}}) \leq 1$

Dans tous les cas, on trouve bien  $T_i \leq 1$ , ce qui prouve (2.19).

**Remarque 4** *Si le schéma AEI est en fait explicite ( $\theta_i = 0$  pour tout  $i$ ), les deux conditions (2.20) et (2.19) sont équivalentes à la condition de stabilité sur le schéma explicite (2.10) de la section précédente. Les problèmes de stabilité liés aux mailles les plus petites pourront bien être évités en prenant  $\theta_i = 1$  sur ces cellules.*

**Théorème 3** *En supposant que les volumes des cellules sont uniformément minorés au cours des itérations (i.e.  $\exists K > 0 \mid (\forall i, \forall n, K < \Delta x_i^n)$ ) et sous la condition*

$$\forall i, \forall n, \begin{cases} 2\Delta t^n |c - \omega_{i+\frac{1}{2}}| \left( \frac{(1 - \theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n} \right) \leq 1 & \text{si } c - \omega_{i+\frac{1}{2}} \leq 0 \\ 2\Delta t^n |c - \omega_{i+\frac{1}{2}}| \left( \frac{(1 - \theta_{i+1})^2}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} - \frac{\theta_{i+1}^2}{\Delta x_{i+1}^n} \right) \leq 1 & \text{si } c - \omega_{i-\frac{1}{2}} \geq 0 \end{cases}, \quad (2.21)$$

le schéma AEI (2.12-2.15-2.16-2.7) est stable en norme  $L^2$ .

*Preuve* : l'idée de la preuve est d'utiliser une forme quadratique définie positive de type énergie comme fonction de Lyapunov des inconnues numériques. Plus précisément,

1. on définit une énergie discrète  $E^n = \sum_i \Delta x_i^n u_i^{n^2}$ . Cette énergie est équivalente à la norme  $L^2$  grâce à l'hypothèse de minoration uniforme sur les volumes des cellules;
2. on montre que sous la condition (2.21),  $\Delta E = E^{n+1} - E^n \leq 0$ , c'est-à-dire que l'énergie ne croît pas (ceci à cause du caractère décentré des flux numériques qui induisent de la dissipation numérique).
3. on en déduit que ( $\forall n, E^n \leq E^0$ ), donc que ( $\forall n, \|u^n\|_2 \leq \sqrt{E^0/K}$ ). Toutes les variables restent bornées et il est alors prouvé que le schéma est stable en norme  $L^2$ .

La partie difficile de la preuve est donc la démonstration du point 2. On déduit de (2.18a-2.18b) l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sum_i (\Delta x_i^{n+1} - \Delta x_i^n) u_i^{n+\theta_i^2} \\ &\quad + 2\Delta t^n u_i^{n+\theta_i} \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}) \right. \\ &\quad \quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i}) \right] \\ &\quad + \Delta t^{n^2} \left( \frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n} \right) \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}) \right. \\ &\quad \quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i}) \right]^2. \end{aligned}$$

D'après (2.7),  $\Delta x_i^{n+1} - \Delta x_i^n = \Delta t^n \left( (c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right)$ . Or, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_i \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right] u_i^{n+\theta_i^2} &= \sum_i (c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) (u_i^{n+\theta_i^2} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}^2}) \\ &= \sum_i (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_i^{n+\theta_i^2} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}^2}) \\ &\quad + (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}^2} - u_i^{n+\theta_i^2}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sum_i \Delta t^n (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left( -u_i^{n+\theta_i^2} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}^2} + 2u_i^{n+\theta_i} u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right) \\ &\quad + \Delta t^n (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \left( u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}^2} + u_i^{n+\theta_i^2} - 2u_i^{n+\theta_i} u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \right) \\ &\quad + \Delta t^{n^2} \left( \frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n} \right) \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i}) \right. \\ &\quad \quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i}) \right]^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta E = \sum_i & -\Delta t^n \left| c - \omega_{i+\frac{1}{2}} \right| \left( u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right)^2 \\ & + \Delta t^{n^2} \left( \frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n} \right) \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}) \right. \\ & \quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i}) \right]^2 . \end{aligned}$$

Il suit de cette égalité que

$$\begin{aligned} \Delta E \leq \sum_i & -\Delta t^n \left| c - \omega_{i+\frac{1}{2}} \right| \left( u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right)^2 \\ & + 2\Delta t^{n^2} \left( \frac{(1-\theta_i)^2}{\Delta x_i^{n+1}} - \frac{\theta_i^2}{\Delta x_i^n} \right) \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^{n+\theta_i} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}})^2 \right. \\ & \quad \left. + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_i^{n+\theta_i})^2 \right] . \end{aligned}$$

Sous la condition (2.21), nous avons  $\Delta E \leq 0$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 2.4.1.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques élémentaires. Nous cherchons ici à démontrer que le schéma AEI localement implicite présenté fonctionne correctement. Nous proposons le cas test simple suivant :

- on considère l'équation d'advection avec  $c = 1$  ;
- on convecte (vers la droite, dans le sens des  $x$  positifs) un front de type Heaviside situé en  $x = -1$  à  $t = 0$  ; la simulation est menée jusqu'à  $t = 2$  ;
- le maillage est extrêmement raffiné autour du point  $x = 0$  (la taille du maillage est néanmoins une fonction relativement régulière, au moins continue) ; on a représenté la taille des mailles en fonction de  $x$  sur la Figure 2.2(b).
- le pas de temps est fixé de telle sorte que 20% des cellules (celles dont les tailles sont les plus petites) sont traitées avec  $\theta_i = 1$ , tandis que les autres sont avancées en temps avec un schéma explicite. Pour les cellules les plus petites, on a pris un nombre de Courant localement égal à 30.

On voit sur la Figure 2.2(a) que le schéma obtenu est effectivement TVD. Néanmoins, les discontinuités de traitement (on passe brutalement de  $\theta_i = 0$  à  $\theta_i = 1$ ) peuvent provoquer des discontinuités dans l'allure de la solution : la diffusion numérique n'est pas uniforme et est clairement beaucoup plus forte lorsque les gradients de la solution sortent de la partie la plus raffinée du maillage.

On considère maintenant toujours l'équation d'advection avec  $c = 1$ , mais où la donnée initiale est un front de type Heaviside situé en  $x = 0$  à  $t = 0$ . On a représenté sur la Figure 2.3(a) la solution obtenue à  $t = 0.1$  pour un maillage se déplaçant uniformément vers la droite à la vitesse  $c$  (voir Figure 2.3(b)). Le choc étant stationnaire dans ce référentiel, la solution obtenue est très peu diffusée.

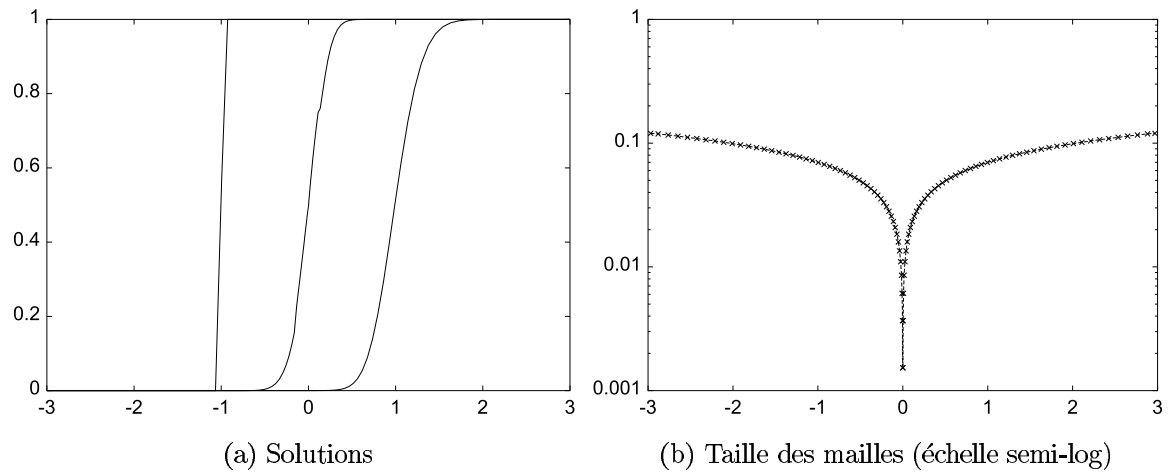


FIG. 2.2 – Solutions et taille des mailles à  $t = 0$ ,  $t = 1$  et  $t = 2$   
*Maillage fixe & schéma localement implicite.*

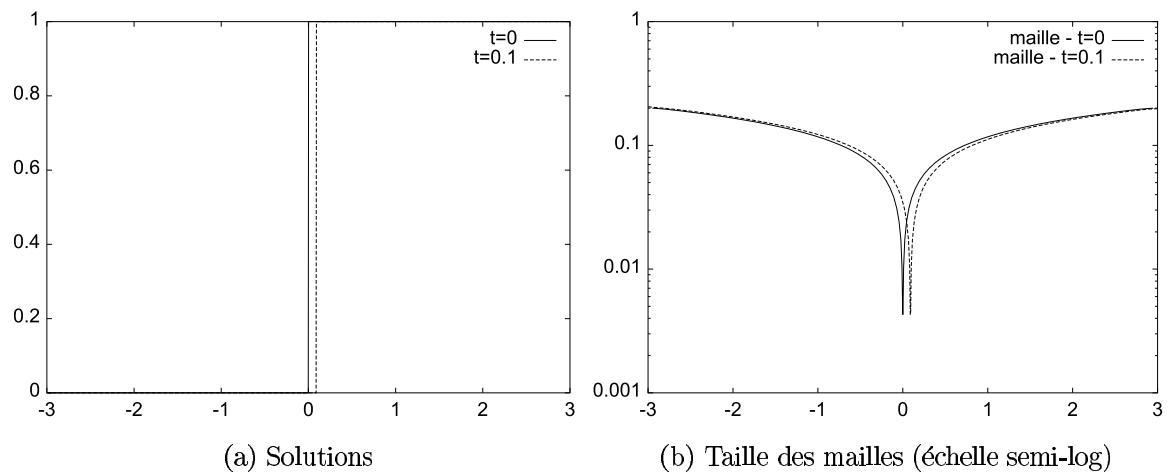


FIG. 2.3 – Solutions et taille des mailles à  $t = 0$  et à  $t = 0.1$   
*Maillage mobile à la vitesse  $c$  & schéma localement implicite.*

## 2.4.2 Équation de Burgers

### 2.4.2.1 Schéma implicite linéarisé

Nous appliquons maintenant le schéma (2.12)-(2.13) à l'équation de Burgers. Nous utilisons la fonction de flux numérique de Godunov (2.11), qui est désormais non linéaire. A chaque pas de temps, dès que le schéma est, au moins localement implicite, nous sommes confrontés à la résolution d'un système non linéaire. Afin de revenir à un système linéaire, nous cherchons à construire un schéma implicite linéarisé. Pour ce faire, nous remplaçons dans (2.12) le flux numérique  $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}})$  par

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2}} = & \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) + \phi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ & + \phi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n), \end{aligned}$$

où  $\phi'_u(u, v, \omega)$  et  $\phi'_v(u, v, \omega)$  désignent respectivement les dérivées par rapport à  $u$  et  $v$  de  $\phi(u, v, \omega)$  (ou des approximations de ces dérivées). Nous obtenons les itérations en temps suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} = & \phi(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ & + \phi'_u(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}})(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_{i-1}^n) \\ & - \phi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n) \\ & + \left[ \phi'_v(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right] (u_i^{n+\theta_i} - u_i^n). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cette équation peut également se mettre sous une forme proche de (2.18b) :

$$\begin{aligned} u_i^n = & u_i^{n+\theta_i} - \frac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n} \left\{ \phi(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right. \\ & + \phi'_u(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}})(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_{i-1}^n) \\ & - \phi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n) \\ & + \left[ \phi'_v(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right] (u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ & \left. + (\omega_{i-\frac{1}{2}} - \omega_{i+\frac{1}{2}}) u_i^{n+\theta_i} \right\}. \end{aligned}$$

Posons  $\delta_i = \theta_i \frac{\Delta x_i^{n+1}}{\Delta x_i^{n+\theta_i}} (u_i^{n+1} - u_i^n)$ . En utilisant l'identité

$$\Delta x_i^{n+\theta_i} (u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) = \theta_i \Delta x_i^{n+1} (u_i^{n+1} - u_i^n),$$

on montre que le vecteur  $\delta = (\delta_i)_i$  est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\Delta x_i^{n+\theta_i}}{\theta_i} \delta_i - \Delta t^n \left\{ \phi'_u(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) \delta_{i-1} - \phi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \delta_{i+1} \right. \\ \quad \left. + \left[ \phi'_v(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right] \delta_i \right\} = b_i \\ \text{où } b_i = (\Delta x_i^n - \Delta x_i^{n+1}) u_i^n + \Delta t^n \left( \phi(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right). \end{cases} \quad (2.23)$$

Ce genre de système linéaire est habituellement résolu par une méthode itérative de relaxation de type Jacobi ou Gauss-Seidel, car la matrice sous-jacente est classiquement à diagonale strictement dominante (pour des méthodes de volumes finis avec flux décentrés). On peut s'interroger ici sur la possibilité d'utiliser une méthode de relaxation pour la résolution du système linéaire obtenu. On cherche alors à examiner si la matrice sous-jacente est ici encore à diagonale strictement dominante.

Curieusement, si l'on utilise un critère classique de dominance diagonale par ligne, la condition obtenue est inexploitable. Rappelons les deux lemmes suivants, le premier étant un résultat très classique et le second étant apparemment moins connu.

**Lemme 3** Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  une matrice réelle à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire telle que

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|. \quad (2.24)$$

Soit  $D$  la diagonale de  $A$ . Alors une méthode de Jacobi converge pour la résolution d'un système linéaire de type  $Ax = b$ , i.e. le rayon spectral de la matrice  $\mathbb{I} - D^{-1}A$  est strictement inférieur à 1.

*Preuve* : une itération de Jacobi s'écrit  $Dx^{k+1} + (A - D)x^k = b$ , soit en fonction de l'erreur  $\varepsilon^k = x^k - A^{-1}b$ ,  $\varepsilon^{k+1} = -D^{-1}(A - D)\varepsilon^k$ , ce qui explique l'équivalence entre la convergence de la méthode de Jacobi et l'inéquation sur le rayon spectral de la matrice  $\mathbb{I} - D^{-1}A$ . Or on a :

$$\forall i, \quad \varepsilon_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} a_{ij} \varepsilon_j^k, \quad \text{d'où } \forall i, \quad |\varepsilon_i^{k+1}| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |\varepsilon_j^k|.$$

On en déduit alors

$$\max_i |\varepsilon_i^{k+1}| \leq M \max_i |\varepsilon_i^k|, \quad \text{avec } M = \max_i \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,$$

ce qui prouve que la méthode de Jacobi converge.  $\square$

**Lemme 4** Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  une matrice réelle à diagonale strictement dominante par colonnes, c'est-à-dire telle que

$$\forall j = 1, \dots, N, \quad |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|. \quad (2.25)$$

Soit  $D$  la diagonale de  $A$ . Alors une méthode de Jacobi converge pour la résolution d'un système linéaire de type  $Ax = b$ , i.e. le rayon spectral de la matrice  $\mathbb{I} - D^{-1}A$  est strictement inférieur à 1.



*Preuve* : la matrice  $A^t$ , transposée de  $A$ , est à diagonale strictement dominante par lignes. Le lemme précédent montre que  $\rho(\mathbb{I} - D^{-1}A^t) < 1$ . Comme le rayon spectral d'une matrice est égal à celui de sa transposée, on a aussi  $\rho(\mathbb{I} - AD^{-1}) < 1$ , puisque  $D$  est diagonale.

Une itération de Jacobi pour la résolution d'un système  $Ax = b$  s'écrit comme précédemment en fonction de l'erreur  $\varepsilon^{k+1} = -D^{-1}(A - D)\varepsilon^k$ . Considérons la nouvelle variable  $\mu^k = D\varepsilon^k$ . On a  $\mu^{k+1} = -(A - D)D^{-1}\mu^k = (\mathbb{I} - AD^{-1})\mu^k$ . Comme  $\rho(\mathbb{I} - AD^{-1}) < 1$ , la méthode de Jacobi converge.  $\square$

Comme on l'a vu plus haut, c'est ce dernier lemme qui est facilement exploitable pour trouver une condition suffisante de convergence de la méthode de Jacobi pour le système (2.23). On démontre alors très facilement la proposition suivante :

**Proposition 1** *Pour la résolution du système linéaire (2.23), la méthode de Jacobi converge si,  $\forall i$ ,*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Delta x_i^{n+\theta_i}}{\theta_i \Delta t^n} - \phi'_v(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) + \phi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right| \\ & > \left| \phi'_u(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) \right| + \left| \phi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \right|. \end{aligned} \quad (2.26)$$

**Remarque 5** *On a en fait trouvé une condition suffisante pour la convergence de la méthode de Jacobi, qui permet donc de déterminer les valeurs des  $\delta_i$ . On montre que l'on revient très facilement au calcul des valeurs des  $u_i^{n+1}$ . En fait, le seul problème pourrait apparaître quand  $\theta_i = 0$ , mais dans ce cas, le schéma est explicite dans la cellule  $i$  et la valeur de  $u_i^{n+1}$  est tout de suite connue en utilisant l'équation (2.22).*

Nous reviendrons ultérieurement sur la condition (2.26). On peut noter dès maintenant que cette condition est automatiquement vérifiée si on a de manière générale  $\phi'_u(u, v, \omega) \geq 0$  et  $\phi'_v(u, v, \omega) \leq 0$ , ce qui est le cas pour l'équation d'advection. De toute façon, avant d'appliquer le schéma (2.22), il faut s'assurer que la fonction de flux numérique choisie est dérivable, ce qui n'est pas le cas du flux de Godunov (2.11). Une idée est d'approcher la dérivée de ces flux par la dérivée d'autres flux cette fois dérivables. Afin d'y parvenir, nous adaptions ici les schémas de Engquist-Osher et de Roe [60] aux maillages mobiles.

#### 2.4.2.2 Schéma mixte Godunov-Engquist-Osher

La méthode de Godunov consiste à prendre comme fonction de flux numérique

$$\phi_{\mathcal{G}}(u_g, u_d, \omega) = f(\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(\omega; u_g, u_d)) - \omega \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(\omega; u_g, u_d)$$

où  $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(x/t; u_g, u_d)$  est la valeur en  $x/t$  de la solution exacte du problème de Riemann dont les états à gauche et à droite sont  $u_g$  et  $u_d$ . La méthode de Engquist-Osher consiste à choisir comme fonction de flux numérique

$$\phi_{\mathcal{EO}}(u_g, u_d, \omega) = f(w(\omega; u_g, u_d)) - \omega w(\omega; u_g, u_d)$$

où  $w(\omega; u_g, u_d)$  est une approximation de la solution exacte  $\mathcal{S}_R(\omega; u_g, u_d)$  du problème de Riemann, donnée par

$$w(\omega; u_g, u_d) = \begin{cases} u_g & \text{si } \omega \leq u_g \\ \omega & \text{si } \min(u_g, u_d) \leq \omega \leq \max(u_g, u_d) \\ u_d & \text{si } \omega \geq u_d \end{cases} .$$

Il est facile de vérifier que

$$\phi_{\mathcal{EO}}(u_g, u_d, \omega) = \frac{1}{2}(u_g - \omega)^2 + \frac{1}{2}(u_d - \omega)^2 - \frac{1}{2}\omega^2 . \quad (2.27)$$

Nous déduisons de cette expression que

$$\frac{\partial \phi_{\mathcal{EO}}}{\partial u_g} = (u_g - \omega)^+, \quad \frac{\partial \phi_{\mathcal{EO}}}{\partial u_d} = (u_d - \omega)^- .$$

La fonction de flux numérique de Engquist-Osher est donc dérivable. Nous proposons donc le schéma (2.12) avec comme flux numérique

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2}} &= \phi_{\mathcal{G}}(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{\partial \phi_{\mathcal{EO}}}{\partial u_g}(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ &+ \frac{\partial \phi_{\mathcal{EO}}}{\partial u_d}(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n) . \end{aligned}$$

**Remarque 6** Comme on a  $\frac{\partial \phi_{\mathcal{EO}}}{\partial u_g} \geq 0$  et  $\frac{\partial \phi_{\mathcal{EO}}}{\partial u_d} \leq 0$ , la condition (2.26) est automatiquement vérifiée et la méthode de Jacobi converge.

### 2.4.2.3 Schéma mixte Godunov-Roe

La méthode de Roe consiste à prendre comme fonction de flux numérique

$$\phi_{\mathcal{R}}(u_g, u_d, \omega) = f(w(\omega; u_g, u_d)) - \omega w(\omega; u_g, u_d),$$

où  $w(\omega; u_g, u_d)$  est la solution exacte du problème de Riemann approché linéarisé

$$u_t + \tilde{A}(u_g, u_d) u_x = 0,$$

avec  $\tilde{A}(u_g, u_d)$  une jacobienne approchée vérifiant  $\tilde{A}(u_g, u_d) \cdot (u_d - u_g) = f(u_d) - f(u_g)$ . Pour l'équation de Burgers (2.3), on a  $\tilde{A}(u_g, u_d) = (u_g + u_d)/2 := u_M$ . Ainsi, nous obtenons :

$$w(\omega; u_g, u_d) = \begin{cases} u_g & \text{si } \omega \leq u_M, \\ u_d & \text{si } \omega \geq u_M. \end{cases}$$

La fonction de flux numérique s'écrit alors

$$\phi_{\mathcal{R}}(u_g, u_d, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_g^2 - \omega u_g & \text{si } \omega \leq u_M \\ \frac{1}{2}u_d^2 - \omega u_d & \text{si } \omega \geq u_M \end{cases} , \quad (2.28)$$

ou encore

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{R}}(u_g, u_d, \omega) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(u_g - \omega)^2 + \frac{1}{2}(u_d - \omega)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left| \frac{u_g + u_d}{2} - \omega \right| (u_d - u_g) - \frac{\omega^2}{2}.\end{aligned}$$

Il apparaît clairement que cette fonction de flux numérique n'est pas dérivable. Comme pour les schémas en maillage fixe, nous avons alors recours à la fonction de flux numérique de Roe corrigée :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{R}}^c(u_g, u_d, \omega) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(u_g - \omega)^2 + \frac{1}{2}(u_d - \omega)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left| \frac{u_g + u_d}{2} - \omega \right|_{\epsilon} (u_d - u_g) - \frac{\omega^2}{2}\end{aligned}\tag{2.29}$$

avec

$$|x|_{\epsilon} = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq \epsilon \\ \frac{\epsilon^2 + x^2}{2\epsilon} & \text{si } |x| \leq \epsilon \end{cases}.$$

Nous considérerons alors le schéma (2.12) avec comme flux numérique :

$$\begin{aligned}\phi_{i+\frac{1}{2}} &= \phi_{\mathcal{G}}(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{\partial \phi_{\mathcal{R}}^c}{\partial u_g}(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ &\quad + \frac{\partial \phi_{\mathcal{R}}^c}{\partial u_d}(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n).\end{aligned}$$

**Remarque 7** Comme les inégalités  $\frac{\partial \phi_{\mathcal{R}}}{\partial u_g} \geq 0$  et  $\frac{\partial \phi_{\mathcal{R}}}{\partial u_d} \leq 0$  ne sont pas nécessairement vérifiées, on ne peut conclure a priori de manière générale sur la convergence de la méthode de Jacobi.

#### 2.4.2.4 Résultats numériques

Nous présentons ici quelques résultats numériques élémentaires sur l'exemple de l'équation de Burgers. Pour ce faire, nous appliquons le schéma implicite linéarisé muni du flux numérique mixte de Godunov-Engquist-Osher, et où le pas de temps est constant au cours du temps, égal à 0.1. Nous considérons les cas tests simples suivants :

- détente : nous vérifions en premier lieu le bon comportement du schéma proposé sur le cas d'une détente ( $u_g = 0$ ,  $u_d = 1$ ) et pour le maillage de la Figure 2.4(b) supposé fixe. On remarque sur le résultat présenté en Figure 2.4(a) que le schéma est effectivement TVD et conserve donc de bonnes propriétés de monotonie. On note aussi que la diffusion numérique est évidemment plus faible dans la zone où le maillage est fin.

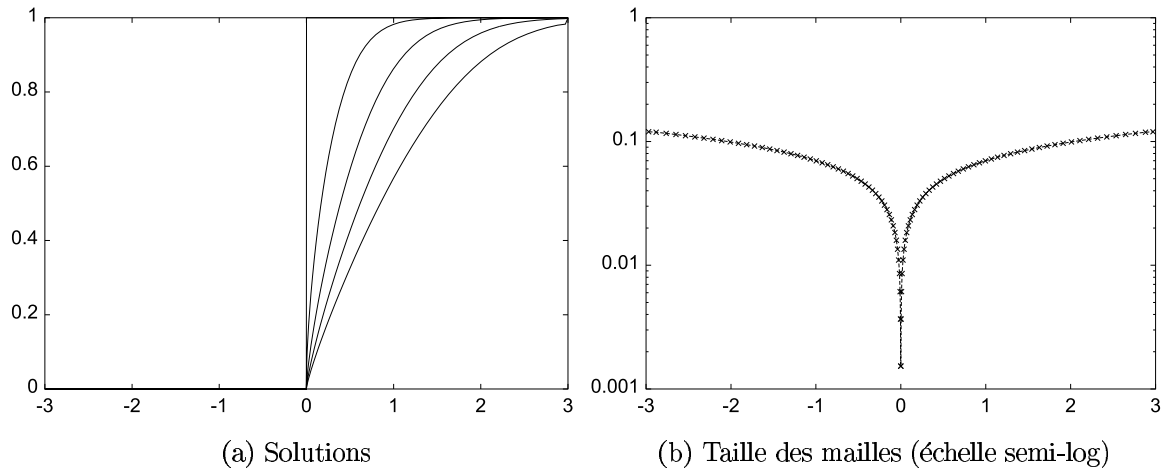


FIG. 2.4 – Equation de Burgers : Détente

*Maillage fixe et schéma implicite linéarisé (pour différents instants successifs).*

- choc : nous nous sommes ensuite attachés à la simulation numérique d'un choc ( $u_g = 1$ ,  $u_d = 0$ ) dans les mêmes conditions. Malheureusement, après seulement une itération temporelle, nous observons des instabilités numériques, visibles sur la Figure 2.5(a) (voir le Chapitre 4 pour plus d'explications). A titre de rappel, la Figure 2.5(b) montre les solutions à des instants successifs pour un maillage uniforme sur le domaine.

Sur la Figure 2.6(a), on a représenté la solution obtenue à  $t = 0.1$  pour un maillage se déplaçant uniformément vers la droite à la vitesse du choc (la vitesse est  $u_M = 1/2$  - voir Figure 2.6(b)). On voit que la solution obtenue est très peu diffusée, puisque le choc doit être stationnaire dans ce référentiel. On souhaite obtenir ce même genre d'amélioration pour des solutions quelconques de l'équation de Burgers.

## 2.5 Schéma à topologie non constante

Jusqu'à présent, le déplacement du maillage était considéré comme une donnée et, de plus, il était supposé se déplacer à topologie constante. Nous aimerions par la suite qu'il se déplace et s'adapte de manière automatique. Dans cette perspective d'auto-adaptation, nous nous intéressons ici à des modifications de la topologie (ajouts de points, suppressions de points). L'ajout de points correspond à une volonté de raffiner localement le maillage. La suppression permet, elle, de réduire le nombre de points inutiles.

Rappelons ici que nous nous limiterons dans la suite à des variations de topologie sans étape de remaillage. Il ne s'agit pas de modifier la topologie du maillage entre deux pas de temps, en utilisant par exemple une méthode de projection de l'ancien maillage vers le nouveau maillage. Ce genre d'approche est évidemment très classique en adaptation de maillage. Ce que nous souhaitons faire ici, et c'est une des originalités

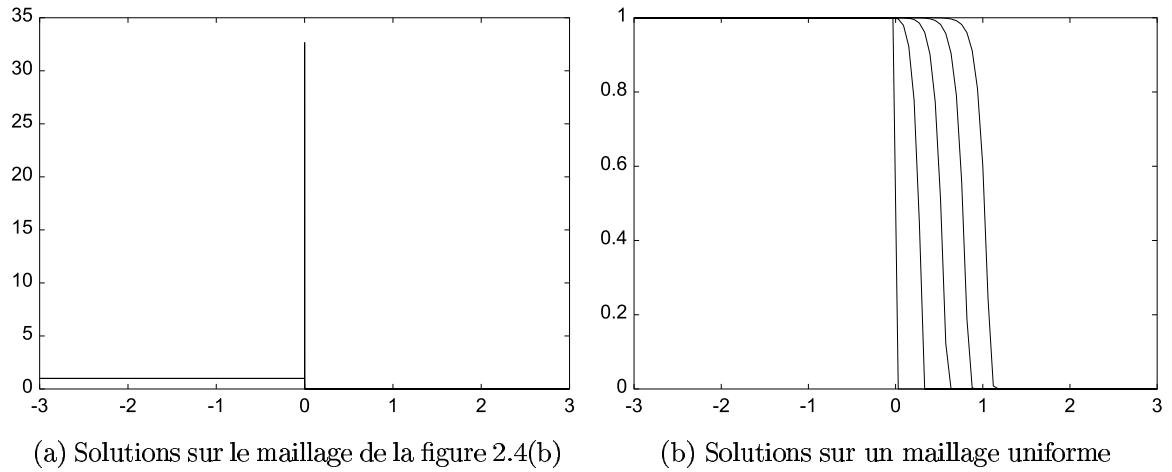


FIG. 2.5 – Equation de Burgers : Choc  
*Maillage fixe et schéma implicite linéarisé (pour différents instants successifs).*

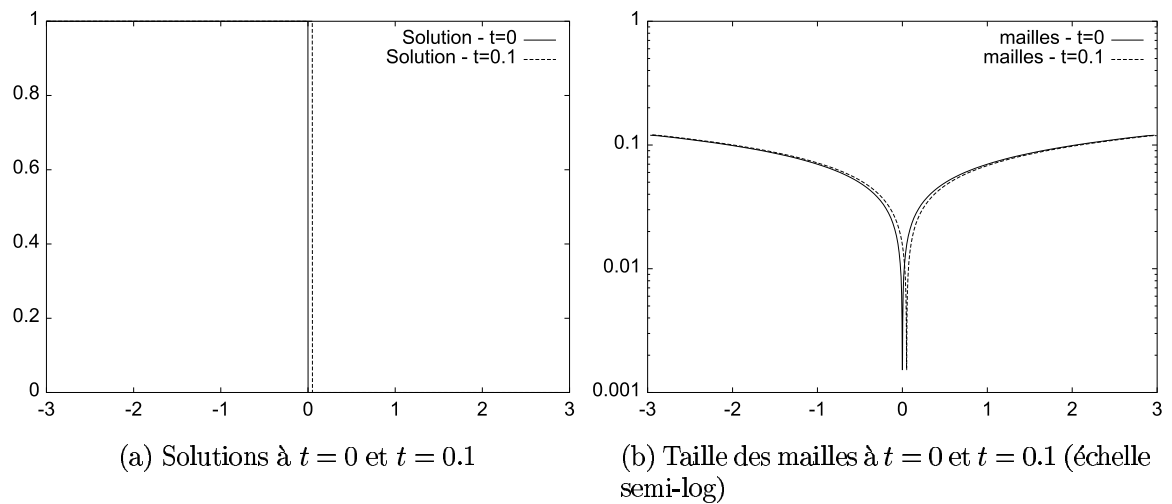


FIG. 2.6 – Equation de Burgers : Choc  
*Maillage mobile à la vitesse du choc et schéma implicite linéarisé.*

de notre approche, c'est intégrer la modification de la topologie dans la méthode de volumes finis elle-même. Pour chacune des situations (ajout et suppression de points), nous adaptons les schémas étudiés précédemment et examinons leurs propriétés.

### 2.5.1 Addition de points

Pour simplifier notre étude, nous nous situons dans le cadre précis de la Figure 2.7, où  $M$  nouveaux volumes finis  $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}, \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}]$  pour  $j = 1, \dots, M$ , sont créés à partir du point  $x_{\frac{1}{2}}^n$ , interface entre les deux cellules  $[x_{-\frac{1}{2}}^n, x_{\frac{1}{2}}^n]$  et  $[x_{\frac{1}{2}}^n, x_{\frac{3}{2}}^n]$ .

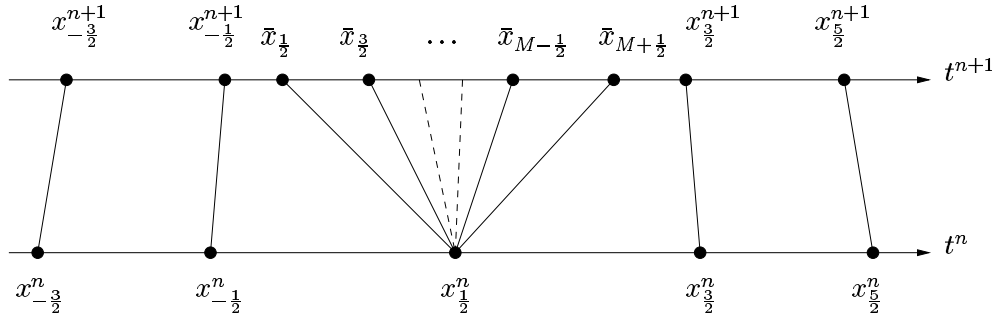


FIG. 2.7 – Addition de points en une dimension.

Introduisons quelques notations :

– nous posons

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{x}_{j+\frac{1}{2}} - x_{\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^n} & \text{pour } j = 0, \dots, M ; \\ \Delta \bar{x}_j = \bar{x}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{x}_{j-\frac{1}{2}} & \text{pour } j = 1, \dots, M \end{cases}$$

– nous notons  $\bar{u}_j$  l'approximation de  $u$  sur  $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}, \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}]$  pour  $j = 1, \dots, M$ .

D'autre part, nous supposons que  $\bar{\omega}_{\frac{1}{2}} \leq \bar{\omega}_{\frac{3}{2}} \leq \dots \leq \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}$  et  $\forall i, \Delta x_i^{n+1} > 0$ . Nous avons alors les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \Delta x_i^{n+1} = \Delta x_i^n + \Delta t^n [\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}], & i \notin \{0, 1\}, \\ \Delta x_0^{n+1} = \Delta x_0^n + \Delta t^n [\bar{\omega}_{\frac{1}{2}} - \omega_{-\frac{1}{2}}], \\ \Delta x_1^{n+1} = \Delta x_1^n + \Delta t^n [\omega_{\frac{3}{2}} - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}], \\ \Delta \bar{x}_j = \Delta t^n [\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}], & \forall j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

L'adaptation du schéma conservatif (2.12)-(2.13)-(2.16) au maillage à topologie non

constante est encore un schéma conservatif de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad i \notin \{0, 1\} \end{aligned} \quad (2.30a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_0^{n+1} u_0^{n+1} - \Delta x_0^n u_0^n}{\Delta t^n} + \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^{n+\theta_0}, \omega_{-\frac{1}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (2.30b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_1^{n+1} u_1^{n+1} - \Delta x_1^n u_1^n}{\Delta t^n} + \phi(u_1^{n+\theta_1}, u_2^{n+\theta_2}, \omega_{\frac{3}{2}}) \\ - \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (2.30c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{x}_j \bar{u}_j}{\Delta t^n} + \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \quad 1 \leq j \leq M. \end{aligned} \quad (2.30d)$$

Comme dans la section précédente, nous voudrions savoir sous quelles conditions le schéma (2.30) muni du flux de Godunov vérifie le principe du maximum, est TVD et stable en norme  $L^2$ . Sur l'exemple de l'équation d'advection, nous formulons ces conditions. Pour l'équation de Burgers, nous nous contentons de présenter le schéma implicite linéarisé correspondant à (2.30).

### 2.5.1.1 Équation d'advection

Nous rappelons que pour l'équation d'advection, la fonction de flux numérique de Godunov (fonction de flux fondée sur le solveur de Riemann exact) est donnée par  $\phi_G(u_g, u_d, \omega) = (c - \omega)^+ u_g + (c - \omega)^- u_d$ .

**Théorème 4** *Sous les conditions*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(1 - \theta_0) \Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}} \left[ (c - \omega_{-\frac{1}{2}})^+ - (c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- \right] \leq 1, \\ \frac{(1 - \theta_1) \Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}} \left[ (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{\frac{3}{2}})^- \right] \leq 1, \\ \frac{(1 - \theta_i) \Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] \leq 1, \quad \forall i \notin \{0, 1\}, \end{array} \right. \quad (2.31)$$

**le schéma en maillage mobile avec ajouts de points (2.30)-(2.15)-(2.16) vérifie le principe du maximum.**

*Preuve :* nous voulons simplement démontrer que

$$\min\{u_i^n, i \in \mathbb{Z}\} \leq \min \left\{ \{u_i^{n+1}, i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\bar{u}_j, 1 \leq j \leq M\} \right\}, \\ \max \left\{ \{u_i^{n+1}, i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\bar{u}_j, 1 \leq j \leq M\} \right\} \leq \max\{u_i^n, i \in \mathbb{Z}\}.$$

Par un raisonnement analogue à celui de la démonstration du Théorème 1, nous arrivons à montrer que, sous les trois conditions données dans le théorème,

$$\min_{i \in \mathbb{Z}} u_i^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} u_i^{n+\theta_i} \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} u_i^{n+1} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} u_i^{n+1} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} u_i^{n+\theta_i} \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} u_i^n.$$

Il nous reste à montrer que

$$\min_{i \in \mathbb{Z}} u_i^n \leq \min_{1 \leq j \leq M} \bar{u}_j \leq \max_{1 \leq j \leq M} \bar{u}_j \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} u_i^n.$$

Or  $\forall j = 1, \dots, M$ , nous avons

$$\bar{u}_j = \frac{\left[ (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^+ - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^+ \right] u_0^{n+\theta_0} + \left[ (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- \right] u_1^{n+\theta_1}}{(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})} \quad (2.32)$$

Comme  $\bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}} < \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}$  et comme les fonctions  $x \rightarrow x^+$  et  $x \rightarrow x^-$  sont croissantes, on a :

$$\bar{u}_j = \frac{\alpha u_0^{n+\theta_0} + \beta u_1^{n+\theta_1}}{\alpha + \beta}, \quad \text{avec } \alpha + \beta > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

ce qui entraîne  $\min_{i \in \{0,1\}} u_i^{n+\theta_i} \leq \bar{u}_j \leq \max_{i \in \{0,1\}} u_i^{n+\theta_i}$ , et permet de conclure la démonstration.  $\square$

**Théorème 5** *Sous les conditions*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} \ \forall i \neq 0, & \Delta t^n \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ \frac{(1 - \theta_{i+1})}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \frac{(1 - \theta_i)}{\Delta x_i^{n+1}} \right] \leq 1, \\ \text{(ii)} & -\Delta t^n (c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- \frac{(1 - \theta_0)}{\Delta x_0^{n+1}} \leq 1, \\ \text{(iii)} & \Delta t^n (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ \frac{(1 - \theta_1)}{\Delta x_1^{n+1}} \leq 1, \end{array} \right. \quad (2.33)$$

le schéma en maillage mobile avec ajouts de points (2.30)-(2.15)-(2.16) est à variation totale décroissante (TVD).

*Preuve :* nous voulons montrer que  $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$ . Calculons  $TV(u^{n+1})$  :

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \\ &= \sum_{i=-\infty}^{i=-1} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| + |u_0^{n+1} - \bar{u}_1| + \sum_{j=1}^{M-1} |\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j| \\ &\quad + |u_1^{n+1} - \bar{u}_M| + \sum_{i=1}^{i=+\infty} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}|. \end{aligned}$$



D'après la démonstration du Théorème 2 et sous l'hypothèse (i), nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=-\infty}^{i=-2} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \\
& \sum_{i=-\infty}^{i=-2} \left[ 1 - \frac{(1-\theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\
& + \sum_{i=-\infty}^{i=-1} \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \left[ -(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\
& + \sum_{i=-\infty}^{i=-3} \frac{(1-\theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}|.
\end{aligned}$$

Nous déduisons de cette inégalité

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{i=-2} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| & \leq \sum_{i=-\infty}^{i=-3} |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\
& + \left( 1 - \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} (c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ \right) |u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}}| \\
& + \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} \left[ -(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- \right] |u_0^{n+\theta_0} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}|.
\end{aligned}$$

Nous montrons de même que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{i=+\infty} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| & \leq \sum_{i=3}^{i=+\infty} |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\
& + \left( 1 + \frac{(1-\theta_2)\Delta t^n}{\Delta x_2^{n+1}} (c - \omega_{\frac{5}{2}})^- \right) |u_3^{n+\theta_3} - u_2^{n+\theta_2}| \\
& + \frac{(1-\theta_2)\Delta t^n}{\Delta x_2^{n+1}} (c - \omega_{\frac{3}{2}})^+ |u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}|.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi les égalités suivantes (où l'on a divisé les égalités par  $|u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}|$  pour limiter la place nécessaire à l'écriture des équations) :

$$\frac{\sum_{j=1}^{M-1} |\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j|}{|u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}|} = \sum_{j=1}^{M-1} \left| \frac{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{3}{2}})^-}{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{3}{2}})^-} - \frac{(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^-}{(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^-} \right|.$$

Tous les termes de la somme de droite étant positifs, nous obtenons

$$\frac{\sum_{j=1}^{M-1} |\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j|}{|u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}|} = \frac{(c - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^-}{(c - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^-} - \frac{(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}})^-}{(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}})^-}.$$

L'hypothèse (i) pour  $i = -1$  et  $i = 1$  implique les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
|u_0^{n+1} - u_{-1}^{n+1}| &\leq \\
&\left(1 - \frac{(1 - \theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1 - \theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^-\right) |u_0^{n+\theta_0} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}| \\
&- \frac{(1 - \theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- |u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}| \\
&+ \frac{(1 - \theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ |u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}}|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_2^{n+1} - u_1^{n+1}| &\leq \\
&\left(1 - \frac{(1 - \theta_2)\Delta t^n}{\Delta x_2^{n+1}}(c - \omega_{\frac{3}{2}})^+ + \frac{(1 - \theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \omega_{\frac{3}{2}})^-\right) |u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}| \\
&+ \frac{(1 - \theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ |u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}| \\
&- \frac{(1 - \theta_2)\Delta t^n}{\Delta x_2^{n+1}}(c - \omega_{\frac{5}{2}})^- |u_2^{n+\theta_2} - u_3^{n+\theta_3}|.
\end{aligned}$$

Enfin, nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
|u_0^{n+1} - \bar{u}_1| &\leq \\
&\left| \frac{(1 - \theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- + \frac{\Delta t^n}{\Delta \bar{x}_1} \left( (c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}})^- \right) \right| |u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}| \\
&+ \frac{(1 - \theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^+ |u_0^{n+\theta_0} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_1^{n+1} - \bar{u}_M| &\leq \\
&\left| \frac{(1 - \theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ - \frac{\Delta t^n}{\Delta \bar{x}_M} \left( (c - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}})^+ - (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ \right) \right| |u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}| \\
&- \frac{(1 - \theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \omega_{\frac{3}{2}})^- |u_1^{n+\theta_1} - u_2^{n+\theta_2}|.
\end{aligned}$$

En faisant la somme de tous les termes, nous trouvons

$$TV(u^{n+1}) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| + |u_0^{n+\theta_0} - u_1^{n+\theta_1}| X$$

$$\text{avec } \begin{cases} X = |A| - A + |B| - B \\ A = \frac{(1 - \theta_0)\Delta t^n}{\Delta x_0^{n+1}}(c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^+ + \frac{\Delta t^n}{\Delta \bar{x}_1} \left( (c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}})^- \right) \\ B = \frac{\Delta t^n}{\Delta \bar{x}_M} \left( (c - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}})^+ - (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ \right) - \frac{(1 - \theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+. \end{cases}$$

Des hypothèses (ii) et (iii) nous déduisons que  $A \geq 0$  et  $B \geq 0$ . Nous trouvons donc

$$TV(u^{n+1}) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right|.$$

Il nous reste à montrer

$$TV(u^n) \geq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right|. \quad (2.34)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} TV(u^n) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^n - u_{i-1}^n| \\ &= \sum_{i=-\infty}^{i=-2} |u_{i+1}^n - u_i^n| + \sum_{i=2}^{i=+\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \\ &\quad + |u_0^n - u_{-1}^n| + |u_1^n - u_0^n| + |u_2^n - u_1^n|. \end{aligned}$$

Des expressions des  $u_i^n$  en fonction des  $u_i^{n+\theta_i}$  pour tout  $i$ , nous déduisons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |u_{i+1}^n - u_i^n| &\geq \left[ 1 + \frac{\theta_{i+1} \Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ - \frac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] |u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i}| \\ &\quad - \frac{\theta_i \Delta t^n}{\Delta x_i^n} (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ |u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}| \\ &\quad + \frac{\theta_{i+1} \Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n} (c - \omega_{i+\frac{3}{2}})^- |u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}|, \quad \forall i \notin \{-1, 0, 1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_2^n - u_1^n| &\geq \left[ 1 + \frac{\theta_2 \Delta t^n}{\Delta x_2^n} (c - \omega_{\frac{3}{2}})^+ - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n} (c - \omega_{\frac{3}{2}})^- \right] |u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}| \\ &\quad - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n} (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ |u_1^{n+\theta_1} - u_0^{n+\theta_0}| \\ &\quad + \frac{\theta_2 \Delta t^n}{\Delta x_2^n} (c - \omega_{\frac{5}{2}})^- |u_3^{n+\theta_3} - u_2^{n+\theta_2}|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_0^n - u_{-1}^n| &\geq \left[ 1 + \frac{\theta_0 \Delta t^n}{\Delta x_0^n} (c - \omega_{-\frac{1}{2}})^+ - \frac{\theta_{-1} \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n} (c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- \right] |u_0^{n+\theta_0} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}| \\ &\quad - \frac{\theta_{-1} \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n} (c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ |u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}}| \\ &\quad + \frac{\theta_0 \Delta t^n}{\Delta x_0^n} (c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- |u_1^{n+\theta_1} - u_0^{n+\theta_0}|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_1^n - u_0^n| \geq & \left[ 1 + \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n} (c - \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}})^+ - \frac{\theta_0 \Delta t^n}{\Delta x_0^n} (c - \bar{\omega}_{\frac{1}{2}})^- \right] |u_1^{n+\theta_1} - u_0^{n+\theta_0}| \\
& - \frac{\theta_0 \Delta t^n}{\Delta x_0^n} (c - \omega_{-\frac{1}{2}})^+ |u_0^{n+\theta_0} - u_{-1}^{n+\theta-1}| \\
& + \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n} (c - \omega_{\frac{3}{2}})^- |u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}|.
\end{aligned}$$

En additionnant toutes ces inégalités, nous trouvons finalement (2.34), ce qui conclut donc la démonstration.  $\square$

**Remarque 8** *Les hypothèses du Théorème 5 sont en fait plus fortes que celles du Théorème 4. Sous les conditions (2.33), le schéma de Godunov en maillage mobile à topologie non constante est TVD et vérifie le principe du maximum.*

Comme pour la Remarque 3, il suffit de démontrer que (2.33) $\Rightarrow$ (2.31). Cette démonstration est tout-à-fait similaire et est laissée au lecteur.

### 2.5.1.2 Équation de Burgers

Nous nous contentons ici d'écrire le schéma implicite linéarisé correspondant à (2.30) sur l'exemple de l'équation de Burgers (2.3), qui consiste à considérer les itérations de la forme :

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\
& \quad - \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall i \notin \{0, 1\}, \\
& \frac{\Delta x_0^{n+1} u_0^{n+1} - \Delta x_0^n u_0^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{\frac{1}{2}}) \\
& \quad - \mathcal{F}(u_{-1}^{n+\theta-1}, u_0^{n+\theta_0}, \omega_{-\frac{1}{2}}) = 0, \\
& \frac{\Delta x_1^{n+1} u_1^{n+1} - \Delta x_1^n u_1^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_1^{n+\theta_1}, u_2^{n+\theta_2}, \omega_{\frac{3}{2}}) \\
& \quad - \mathcal{F}(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}) = 0, \\
& \frac{\Delta \bar{x}_j \bar{u}_j}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) \\
& \quad - \mathcal{F}(u_0^{n+\theta_0}, u_1^{n+\theta_1}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \quad 1 \leq j \leq M,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = & \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\
& + \psi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\
& + \psi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n),
\end{aligned}$$

où  $\phi$  est la fonction de flux numérique de Godunov (2.11) et  $\psi$  est la fonction de flux numérique soit de Engquist-Osher (2.27), soit de Roe corrigée (2.28).

### 2.5.1.3 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous testons l'addition de points sur l'équation d'advection, mais dans trois contextes différents. Pour chacun d'eux, nous appliquons le schéma implicite correspondant à (2.30), où le pas de temps  $\Delta t$  est fixé au cours du temps, égal précisément à 0.1 et le maillage à  $t = 0$  est uniforme sur le domaine. L'objectif est ici de démontrer que l'algorithme proposé est bien implémentable, avec les propriétés de monotonie demandées.

- nous cherchons tout d'abord à contrôler le comportement du schéma sur l'équation stationnaire  $u_t = 0$  (advection avec  $c = 0$ ), où la donnée initiale  $u^0$  est un front de type Heaviside situé en  $x = 0$ . A chaque itération temporelle, on décide de l'addition d'un sommet en l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , si  $x_{i+\frac{1}{2}}$  est proche de 0 (précisément compris entre -0.5 et 0.5). La simulation numérique est menée jusqu'à  $t = 1$ . En faisant ainsi, on use évidemment abondamment de l'addition. On remarque toutefois sur la Figure 2.8 l'efficacité et le comportement satisfaisant d'un tel procédé.

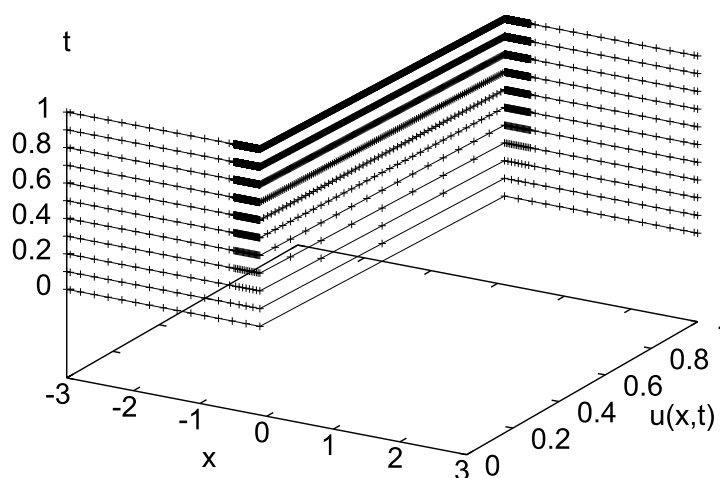


FIG. 2.8 – Advection :  $u_t = 0$

*Schéma implicite avec addition de sommets pour différents instants successifs  
( $t = 0$  : 30 sommets  $\rightarrow$   $t = 1$  : 2432 sommets).*

- on s'intéresse ensuite à la résolution numérique de l'advection avec  $c = 1$ . On adopte le principe additif suivant : connaissant la solution exacte de ce problème ( $u(x, t) = u^0(x - ct)$ ), on décide à l'instant  $t = t^{n+1}$  de l'addition d'un sommet en l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}^n$  si  $x_{i+\frac{1}{2}}^n - ct$  est compris entre -1 et 1. La Figure 2.9 montre le résultat après une seule itération en temps. La solution obtenue présente un aspect peu satisfaisant : on observe des “paliers” en les nœuds issus de l'addition. Ces “paliers” sont le résultat de l'application de la formule (2.32).

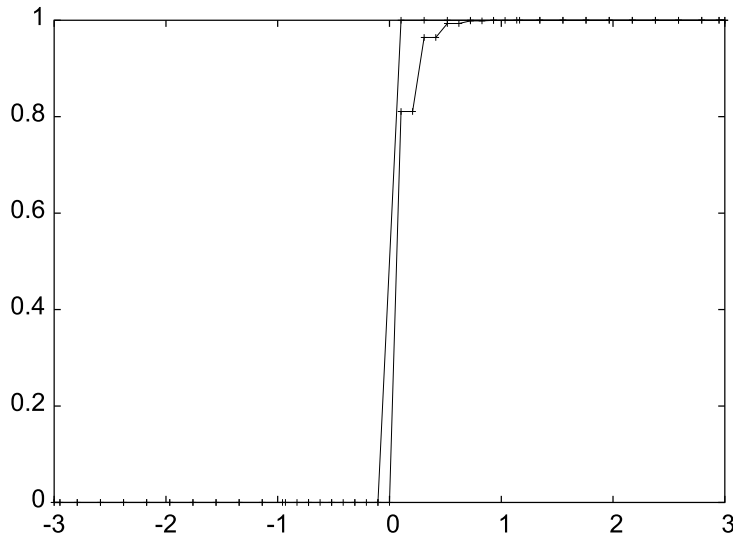


FIG. 2.9 – Solutions à  $t = 0$  et  $t = 0.1$  pour l'advection  $u_t + u_x = 0$   
Schéma implicite avec addition de 10 sommets

- Considérant le même problème de Cauchy que précédemment, on propose maintenant d'ajouter des nœuds à des vitesses proches de  $c$ . La Figure 2.10 montre la solution obtenue après une itération temporelle : il apparaît clairement des différences de diffusion numérique (après ajout de points, la diffusion numérique est plus grande derrière la discontinuité où le maillage est de plus maintenu fixe et plus faible devant la discontinuité où la vitesse des mailles est proche de  $c$ ).

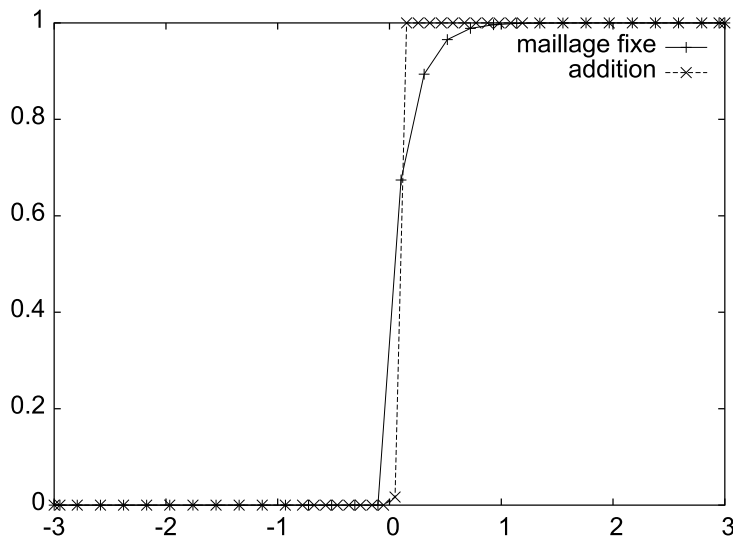


FIG. 2.10 – Solution à  $t = 0.1$  pour l'advection  $u_t + u_x = 0$   
Schéma implicite avec addition de 10 sommets se déplaçant à la vitesse  $c$ .

## 2.5.2 Soustraction de points

Comme dans la section précédente, nous examinons la possibilité de construire des méthodes de volumes finis avec flux conservatifs fondées sur des maillages à topologie variable. Nous nous intéressons ici au cas de la soustraction (ou l'élimination) de points. Nous nous plaçons plus précisément dans le cadre de la Figure 2.11 : les points-interfaces  $x_{-\frac{1}{2}}^n$  et  $x_{\frac{1}{2}}^n$  se rejoignent à l'instant  $t^{n+1}$  pour n'en former qu'un seul, ce qui implique la suppression de la cellule  $\mathcal{C}_0 = [x_{-\frac{1}{2}}^n, x_{\frac{1}{2}}^n]$ .

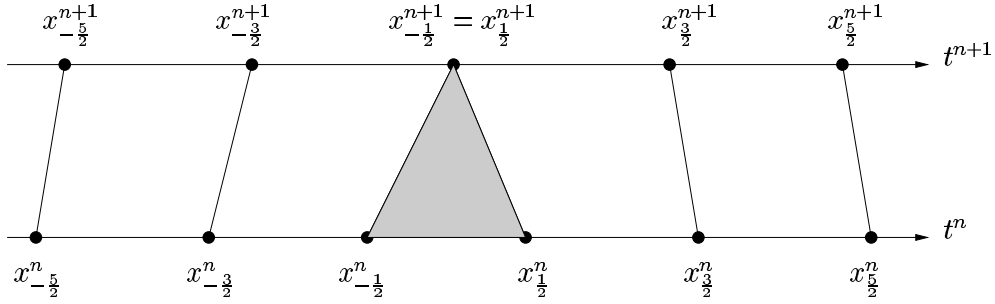


FIG. 2.11 – Suppression d'un point du maillage.

Le schéma (2.12)-(2.13) nous donne une contrainte forte sur les vitesses des points convergents, à savoir

$$\omega_{-\frac{1}{2}} - \omega_{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_0^n}{\Delta t^n} > 0.$$

Sous cette contrainte, nous considérons le schéma suivant pour un pas de temps :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall i \notin \{-1, 0, 1\} \end{aligned} \quad (2.35a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{-1}^{n+1} u_{-1}^{n+1} - \Delta x_{-1}^n u_{-1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_{-2}^{n+\theta_{-2}}, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, \omega_{-\frac{3}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (2.35b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_1^{n+1} u_1^{n+1} - \Delta x_1^n u_1^n}{\Delta t^n} + \phi(u_1^{n+\theta_1}, u_2^{n+\theta_2}, \omega_{\frac{3}{2}}) \\ - \phi(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (2.35c)$$

avec  $\theta_i \in [0, 1]$  et les définitions suivantes :

- $\Delta x_i^{n+\theta_i}$  et  $u_i^{n+\theta_i}$  sont définis par (2.16) pour  $i \neq 0$  ;
- on définit en outre  $\Delta x_0^{n+1} = 0$  (ceci implique les conventions naturelles suivantes :  $\Delta x_0^{n+\theta_0} = (1 - \theta_0)\Delta x_0^n$  et  $u_0^{n+\theta_0} = u_0^n$ ) ;
- $u_0^*$  est choisi tel que

$$-\frac{\Delta x_0^n u_0^n}{\Delta t^n} + \phi(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) - \phi(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) = 0,$$

ce qui implique que la valeur fictive  $u_0^*$  peut être interprétée comme une valeur de  $u_0^{n+1}$  et que le schéma garde sa forme générale, y compris pour la cellule qui disparaît au cours du pas de temps.

Comme dans la sous-section concernant l'addition de points, nous discutons des propriétés de ce schéma muni du flux numérique de Godunov sur l'équation d'advection et présentons le schéma implicite linéarisé correspondant pour l'équation de Burgers.

### 2.5.2.1 Équation d'advection

**Théorème 6** *Sous la condition*

$$\forall i \neq 0, \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right] \frac{(1 - \theta_i) \Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} \leq 1, \quad (2.36)$$

**le schéma en maillage mobile avec soustraction de point (2.35)-(2.15)-(2.16) vérifie le principe du maximum.**

*Preuve :* pour  $i \leq -2$  et  $i \geq 2$ , nous retrouvons (2.18). De plus, nous avons aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{-1}^{n+1} = u_{-1}^{n+\theta-1} + \frac{(1 - \theta_{-1}) \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} \left[ (c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- (u_{-1}^{n+\theta-1} - u_0^*) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + (c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ (u_{-2}^{n+\theta-2} - u_{-1}^{n+\theta-1}) \right], \\ u_{-1}^n = u_{-1}^{n+\theta-1} - \frac{\theta_{-1} \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n} \left[ (c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- (u_{-1}^{n+\theta-1} - u_0^*) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + (c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ (u_{-2}^{n+\theta-2} - u_{-1}^{n+\theta-1}) \right], \end{array} \right. \quad (2.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{n+1} = u_1^{n+\theta_1} + \frac{(1 - \theta_1) \Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}} \left[ (c - \omega_{\frac{3}{2}})^- (u_1^{n+\theta_1} - u_2^{n+\theta_2}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + (c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ (u_0^* - u_1^{n+\theta_1}) \right], \\ u_1^n = u_1^{n+\theta_1} - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n} \left[ (c - \omega_{\frac{3}{2}})^- (u_1^{n+\theta_1} - u_2^{n+\theta_2}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + (c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ (u_0^* - u_1^{n+\theta_1}) \right]. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Comme dans la démonstration du Théorème 1, nous montrons simplement que, sous la condition (2.36) pour  $i \leq -2$  et  $i \geq 2$ , nous avons :

$$\min_{i \neq 0} u_i^{n+\theta_i} \leq \min_{i \neq -1,1} u_i^{n+1} \leq \max_{i \neq -1,1} u_i^{n+1} \leq \max_{i \neq 0} u_i^{n+\theta_i}.$$

Sous la même hypothèse pour  $i = -1$  et  $i = 1$ , nous obtenons :

$$\min_{i \neq 0} (u_i^{n+\theta_i}, u_0^*) \leq u_{-1}^{n+1}, u_1^{n+1} \leq \max_{i \neq 0} (u_i^{n+\theta_i}, u_0^*).$$

En résumé, nous avons

$$(2.36) \Rightarrow \left( \min_{i \neq 0} (u_i^{n+\theta_i}, u_0^*) \leq \min_{i \neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_{i \neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_{i \neq 0} (u_i^{n+\theta_i}, u_0^*) \right).$$



En outre,  $\omega_{-\frac{1}{2}} > \omega_{\frac{1}{2}}$ . Nous distinguons alors trois cas possibles suivant la position relative de  $c$  par rapport à  $\omega_{-\frac{1}{2}}$  et  $\omega_{\frac{1}{2}}$ . On est nécessairement dans un des trois cas suivants :

- $c < \omega_{\frac{1}{2}}$        $\Rightarrow u_0^* = \frac{(\omega_{\frac{1}{2}} - c)u_1^{n+\theta_1} + (\omega_{-\frac{1}{2}} - \omega_{\frac{1}{2}})u_0^n}{\omega_{-\frac{1}{2}} - c} \Rightarrow u_0^* \in (u_0^n, u_1^{n+\theta_1}),$
- $c > \omega_{-\frac{1}{2}}$        $\Rightarrow u_0^* = \frac{(c - \omega_{-\frac{1}{2}})u_{-1}^{n+\theta_{-1}} + (\omega_{-\frac{1}{2}} - \omega_{\frac{1}{2}})u_0^n}{c - \omega_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow u_0^* \in (u_0^n, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}),$
- $\omega_{\frac{1}{2}} \leq c \leq \omega_{-\frac{1}{2}}$        $\Rightarrow u_0^* = u_0^n.$

Ainsi, dans tous les cas :  $\min(u_0^n, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_1^{n+\theta_1}) \leq u_0^* \leq \max(u_0^n, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_1^{n+\theta_1})$ .  
Donc on a en somme :

$$(2.36) \Rightarrow \left( \min_i u_i^{n+\theta_i} \leq \min_{i \neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_{i \neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^{n+\theta_i} \right).$$

Pour terminer la démonstration, il faut comparer les extrema des  $u_i^n$  et des  $u_i^{n+\theta_i}$ . Considérons l'indice  $i$  qui minimise  $u_i^{n+\theta_i}$ . On est forcément dans un des quatre cas suivants :

- Si  $i \neq -1, 0, 1$  alors  $u_i^n \leq u_i^{n+\theta_i}$ . Donc  $u_i^n \leq \min_i u_i^{n+\theta_i}$  et  $\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+\theta_i}$ ;
- Si  $i = -1$  alors  $u_{-2}^{n+\theta_{-2}} \geq u_{-1}^{n+\theta_{-1}}$  et  $u_0^* \geq u_{-1}^{n+\theta_{-1}}$ . Donc  $u_{-1}^n \leq u_{-1}^{n+\theta_{-1}} = \min_i u_i^{n+\theta_i}$ ;
- Si  $i = 1$  alors  $u_2^{n+\theta_2} \geq u_1^{n+\theta_1}$  et  $u_0^* \geq u_1^{n+\theta_1}$ . Donc  $u_1^n \leq u_1^{n+\theta_1} = \min_i u_i^{n+\theta_i}$ ;
- Si  $i = 0$  alors  $\min_i u_i^n \leq u_0^n = \min_i u_i^{n+\theta_i}$ .

Dans tous les cas,  $\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+\theta_i}$ . Par un raisonnement analogue, nous trouvons  $\max_i u_i^n \geq \max_i u_i^{n+\theta_i}$ . Finalement, nous déduisons des inégalités ci-dessus que

$$\min_i u_i^n \leq \min_{i \neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_{i \neq 0} u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^n,$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Théorème 7** Sous les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \forall i \notin \{-1, 0\}, \quad 1 - (1 - \theta_{i+1}) \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + (1 - \theta_i) \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}} (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \geq 0, \\ (ii) \quad 1 - (1 - \theta_1) \frac{\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}} (c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ \geq 0, \\ (iii) \quad 1 + (1 - \theta_{-1}) \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} (c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- \geq 0, \end{array} \right. \quad (2.39)$$

le schéma en maillage mobile avec soustraction de point (2.35)-(2.15)-(2.16) est à variation totale décroissante (TVD).

*Preuve* : en utilisant les égalités (2.18) pour  $i \notin \{-1, 0, 1\}$  et (2.37)-(2.38), et en appliquant le même raisonnement que pour la démonstration du Théorème 2, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
TV(u^{n+1}) &\leq \\
&\left( \sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \right) \left| 1 - \frac{(1-\theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}}(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ + \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right| \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| \\
&+ \left( \sum_{i=-\infty}^{-3} + \sum_{i=1}^{+\infty} \right) \left( -\frac{(1-\theta_{i+1})\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^{n+1}}(c - \omega_{i+\frac{3}{2}})^- \right) \left| u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}} - u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} \right| \\
&+ \left( \sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=2}^{+\infty} \right) \frac{(1-\theta_i)\Delta t^n}{\Delta x_i^{n+1}}(c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \\
&+ \left( -\frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- \right) \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| + \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| \\
&+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ (u_1^{n+\theta_1} - u_0^*) + \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- (u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}) \right| \\
&+ \left( -\frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \omega_{\frac{3}{2}})^- \right) \left| u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1} \right| \\
&+ \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}} + (c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ \left| u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}} \right|.
\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (i), nous déduisons :

$$\begin{aligned}
TV(u^{n+1}) &\leq \\
&\left( \sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \right) \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| \\
&+ \left( -\frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- \right) \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| \\
&+ \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| \\
&+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - \frac{(1-\theta_1)\Delta t^n}{\Delta x_1^{n+1}}(c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ (u_1^{n+\theta_1} - u_0^*) + \frac{(1-\theta_{-1})\Delta t^n}{\Delta x_{-1}^{n+1}}(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- (u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}) \right|
\end{aligned}$$

De plus, en remarquant que  $u_1^{n+\theta_1} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} = u_1^{n+\theta_1} - u_0^* + u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}$  et en utilisant les deux autres conditions (ii) et (iii), nous trouvons :

$$TV(u^{n+1}) \leq \left( \sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \right) \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| + \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| + \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right|.$$

Similairement, en utilisant les différentes valeurs de  $u_i^n$  données en (2.18) pour  $i \notin \{-1, 0, 1\}$  et (2.37)-(2.38), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
TV(u^n) &\geq \\
&\left( \sum_{i=-\infty}^{-1} + \sum_{i=2}^{+\infty} \right) \left| u_i^{n+\theta_i} - u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} \right| \\
&+ \frac{\theta_{-1} \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n} (c - \omega_{-\frac{3}{2}})^+ \left| u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-2}^{n+\theta_{-2}} \right| - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n} (c - \omega_{\frac{3}{2}})^- \left| u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1} \right| \\
&+ \frac{\theta_{-1} \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n} (c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n} (c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| \\
&+ \left| (u_1^{n+\theta_1} - u_0^n) - \frac{\theta_1 \Delta t^n}{\Delta x_1^n} \left[ -(c - \omega_{\frac{3}{2}})^- (u_2^{n+\theta_2} - u_1^{n+\theta_1}) + (c - \omega_{\frac{1}{2}})^+ (u_0^* - u_1^{n+\theta_1}) \right] \right| \\
&+ \left| u_0^n - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} + \frac{\theta_{-1} \Delta t^n}{\Delta x_{-1}^n} \left[ -(c - \omega_{-\frac{1}{2}})^- (u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}) + (c - \omega_{\frac{3}{2}})^+ (u_{-2}^{n+\theta_{-2}} - u_{-1}^{n+\theta_{-1}}) \right] \right|
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$TV(u^n) \geq \left( \sum_{i=-\infty}^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \right) \left| u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_i^{n+\theta_i} \right| + \left| u_0^n - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| + \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^n \right|.$$

Pour conclure la démonstration, il nous suffit donc de prouver que

$$\left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| + \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| \leq \left| u_0^n - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| + \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^n \right|. \quad (2.40)$$

Comme dans la preuve du théorème précédent, nous distinguons trois cas :

- si  $\omega_{\frac{1}{2}} \leq c \leq \omega_{-\frac{1}{2}}$ , nous avons  $u_0^* = u_0^n$ . L'inégalité (2.40) est donc vérifiée.
- si  $c < \omega_{\frac{1}{2}}$  alors  $u_0^* \in (u_0^n, u_1^{n+\theta_1})$ . Ainsi, on a

$$\left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^n \right| = \left| u_1^{n+\theta_1} - u_0^* \right| + \left| u_0^* - u_0^n \right|.$$

Comme  $\left| u_0^n - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| \geq \left| u_0^* - u_{-1}^{n+\theta_{-1}} \right| - \left| u_0^* - u_0^n \right|$ , on a encore (2.40).

- si  $c > \omega_{-\frac{1}{2}}$ , alors  $u_0^* \in (u_0^n, u_{-1}^{n+\theta_{-1}})$ . On montre comme ci-dessus que (2.40) est toujours satisfaite.

Ceci conclut donc la démonstration du Théorème.  $\square$

**Remarque 9** Sous la condition (2.39), le schéma en maillage mobile avec soustraction de point (2.35)-(2.15)-(2.16) vérifie le principe du maximum et est TVD.

Comme pour les Remarques 3 et 8, il suffit de démontrer que (2.39) $\Rightarrow$ (2.36). Cette démonstration est tout-à-fait similaire et est laissée au lecteur.

### 2.5.2.2 Équation de Burgers

Nous nous contentons ici d'écrire le schéma implicite linéarisé correspondant à (2.35) sur l'exemple de l'équation de Burgers, qui consiste à considérer les itérations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall i \notin \{-1, 0, 1\}, \\ \\ \frac{\Delta x_{-1}^{n+1} u_{-1}^{n+1} - \Delta x_{-1}^n u_{-1}^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_{-2}^{n+\theta_{-2}}, u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, \omega_{-\frac{3}{2}}) = 0, \\ \\ \frac{\Delta x_1^{n+1} u_1^{n+1} - \Delta x_1^n u_1^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_1^{n+\theta_1}, u_2^{n+\theta_2}, \omega_{\frac{3}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) = 0, \end{array} \right.$$

avec  $u_0^*$  tel que

$$-\frac{\Delta x_0^n u_0^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Dans la suite, on utilise les linéarisations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ \quad + \psi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ \quad + \psi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n), \quad \forall i \notin \{-1, 0\} \\ \\ \mathcal{F}(u_{-1}^{n+\theta_{-1}}, u_0^*, \omega_{-\frac{1}{2}}) = \phi(u_{-1}^n, u_0^n, \omega_{-\frac{1}{2}}) \\ \quad + \psi'_u(u_{-1}^n, u_0^n, \omega_{-\frac{1}{2}})(u_{-1}^{n+\theta_{-1}} - u_{-1}^n) \\ \quad + \psi'_v(u_{-1}^n, u_0^n, \omega_{-\frac{1}{2}})(u_0^* - u_0^n), \\ \\ \mathcal{F}(u_0^*, u_1^{n+\theta_1}, \omega_{\frac{1}{2}}) = \phi(u_0^n, u_1^n, \omega_{\frac{1}{2}}) \\ \quad + \psi'_u(u_0^n, u_1^n, \omega_{\frac{1}{2}})(u_0^* - u_0^n) \\ \quad + \psi'_v(u_0^n, u_1^n, \omega_{\frac{1}{2}})(u_1^{n+\theta_1} - u_1^n), \end{array} \right.$$

où  $\phi$  est la fonction de flux numérique de Godunov (2.11) et la fonction  $\psi$  est la fonction de flux numérique soit de Engquist-Osher (2.27), soit de Roe corrigée (2.28).

### 2.5.2.3 Résultats numériques

Nous souhaitons ici modestement vérifier que l'algorithme est bien implémentable, et par suite démontrer qu'il satisfait les propriétés de monotonie demandées. Nous proposons les deux cas test simples suivants :

- nous cherchons tout d'abord à résoudre numériquement l'équation stationnaire  $u_t = 0$ , où la donnée initiale est un front de type Heaviside situé en  $x = 0$ . Le maillage à  $t = 0$  comporte volontairement un nombre excessif de nœuds afin de rendre légitime l'utilisation de la soustraction, et par ailleurs de souligner la robustesse de la méthode proposée. L'utilisation d'une discrétisation aussi raffinée de part et d'autre du choc est évidemment superflue. On propose alors à chaque pas de temps d'éliminer une cellule sur deux dans la partie du domaine où la solution est constante. Sur la Figure 2.12, on observe la solution obtenue à différents instants successifs à l'aide d'une telle méthodologie.

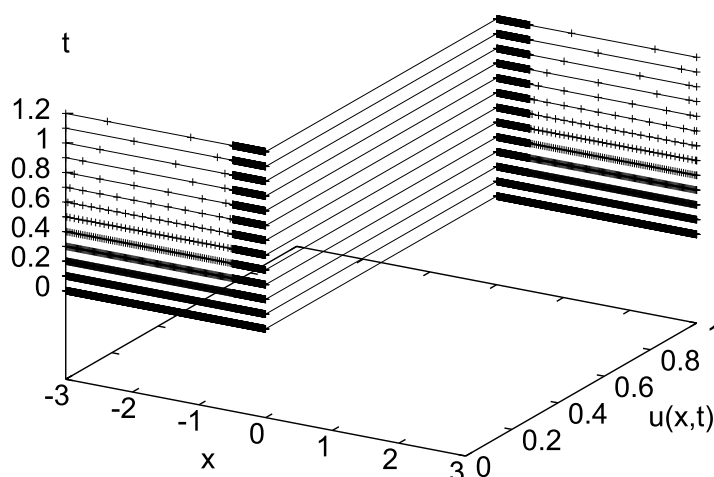


FIG. 2.12 – Advection :  $u_t = 0$

*Schéma implicite avec soustraction de sommets pour différents instants successifs ( $t = 0 : 3000$  sommets  $\rightarrow t = 1, 2 : 502$  sommets).*

- la prochaine application concerne l'advection avec  $c = 1$ . On adopte une démarche similaire à celle précédemment adoptée : on décide de l'élimination de la cellule  $C_i^n$  à l'instant  $t = t^{n+1}$  si (i) la solution est constante au voisinage de  $x_i^n$  et si de plus, (ii) le nœud  $x_i^n$  n'appartient pas à  $[-1+ct; 1+ct]$ , zone d'activité (puisque la solution exacte est  $u(x, t) = u^0(x - ct)$ ). En procédant ainsi, il est clair que nous risquons de supprimer à l'instant  $t$  des nœuds, qui se seraient montrés précieux à l'instant  $t + \Delta t$ . Une conséquence importante de cette utilisation abusive de la soustraction est la diffusion numérique observée sur les résultats des figures 2.13 et 2.14.

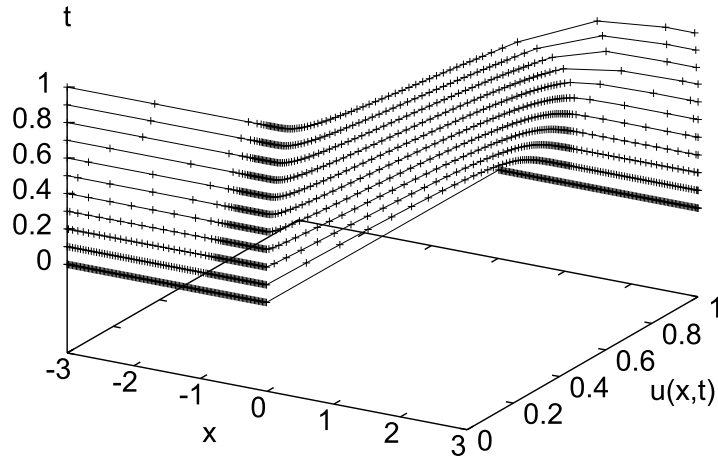


FIG. 2.13 – Advection :  $u_t + cu_x = 0$

*Schéma implicite avec soustraction de sommets pour différents instants successifs  
( $t = 0 : 300$  sommets  $\rightarrow t = 1 : 65$  sommets).*

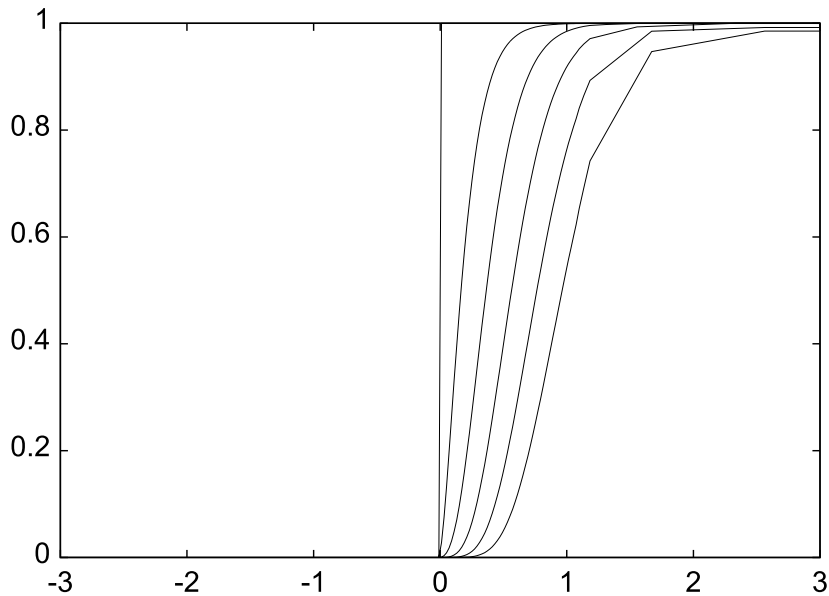


FIG. 2.14 – Advection :  $u_t + cu_x = 0$

*Schéma implicite avec soustraction de sommets pour différents instants successifs  
( $t = 0 : 300$  sommets  $\rightarrow t = 1 : 65$  sommets).*

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de volumes finis fondée sur des maillages variables, c'est-à-dire mobiles et à topologie non constante (nous avons considéré des additions et soustractions de points). Dans le but d'adapter cette méthode numérique à des maillages localement raffinés et adaptés, nous avons introduit un schéma en temps AEI arbitrairement explicite/implicite, qui, tout en étant seulement localement implicite, conserve les propriétés attendues des méthodes plus classiques en volumes finis : principe du maximum, caractère TVD et stabilité. Nous avons présentés quelques résultats numériques élémentaires et limités qui seront complétés par des résultats obtenus dans le chapitre suivant, où des algorithmes d'adaptation locale du maillage seront rajoutés : on pourra alors envisager de faire disparaître et apparaître des points en fonction du gradient local, ou des critères couramment utilisés en adaptation de maillage. Ainsi, une première étape consistera en l'obtention d'un code en maillages variables en une dimension d'espace pour les équations d'advection et de Burgers. Dans la deuxième partie de cette thèse, ces idées seront étendues à deux dimensions d'espace.





# Chapitre 3

## Adaptation dynamique de maillage pour les lois de conservation en une dimension d'espace

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>58</b>
<b>3.2</b>	<b>Le schéma numérique</b>	<b>60</b>
<b>3.3</b>	<b>Maillage mobile auto-adaptatif</b>	<b>61</b>
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>76</b>

---

Ce chapitre est largement inspiré du rapport de recherche INRIA N° 4696 [39].

### Résumé

Nous proposons ici une méthode d'adaptation dynamique de maillages pour la résolution d'équations hyperboliques, linéaires ou non, stationnaires ou non, en une dimension d'espace. Pour ce faire, nous couplons deux approches souvent alternatives dans la littérature : l'une repose sur des maillages mobiles à topologie constante, qui est présentée dans ce chapitre, et l'autre consiste à raffiner, voire déraffiner, localement et dynamiquement le maillage et fera l'objet du Chapitre 4. Cette approche s'appuie aussi sur la méthode des volumes finis, proposée au Chapitre 2, écrite sur un maillage variable (mobile et à topologie éventuellement variable) avec des flux numériques décentrés (méthode de Godunov).

### 3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une méthode d'adaptation dynamique de maillage pour la résolution d'équations hyperboliques, éventuellement non-linéaires, en une dimension d'espace. Comme dans le chapitre précédent, nous nous intéressons au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) \end{cases}, \quad (3.1)$$

où  $u(x, t)$  est une fonction scalaire,  $f$  une fonction de classe  $C^1$ ,  $u^0$  désigne la donnée initiale ( $t \geq 0$ ). Les indices  $x$  et  $t$  représentent respectivement des dérivations en espace et en temps.

Les problèmes concrets en mécanique des fluides prescrivent souvent un maillage très raffiné dans certaines zones : près des discontinuités, dans les couches limites visqueuses, près des décrochements ou des recirculations, dans les régions importantes de l'écoulement. Suivant l'étendue de ces dernières, en général plus conséquente pour les écoulements instationnaires que stationnaires, le coût de calcul s'avère parfois prohibitif. Il semble alors naturel d'adapter dynamiquement le maillage à la solution afin de réduire sa taille.

La littérature distingue sur le thème de l'adaptation de maillage deux philosophies. La première propose des remaillages intermédiaires avec extrapolation en général non conservative [9, 57]. Dans la seconde, le nouveau maillage résulte de rénovations de l'ancien via deux options souvent alternatives, que sont le maillage mobile et le raffinement-déraffinement. Suivant la première option, les nœuds du maillage bougent de manière à migrer dans les régions de forts gradients et où davantage de points sont nécessaires. Pour ce faire, nous disposons de divers outils :

- selon P.A. Gnoffo [18], J.T. Batina [2] et B. Palmerio [43, 44] (voir aussi F.J. Blom [7]), sur chaque nœud s'exerce une force virtuelle, qui dépend des nœuds voisins et qui l'incite à se déplacer dans une direction. Cette force dérive d'une modélisation physique (ressorts portés par les arêtes du maillage [2], pression à l'intérieur des éléments [43], ressorts de torsion [13], etc.).
- E. Dorfy et L. Drury [11], S. Li et L. Petzold [32], W. Huang et R.D. Russell [24, 25] puis accompagnés par Y. Ren [23], modélisent le mouvement du maillage par une équation aux dérivées partielles, communément appelée MMPDE (Moving Mesh Partial Differential Equation).

Malgré la diversité des techniques proposées, le point commun, qui constitue le moteur de cette démarche, est le principe d'équidistribution. Le maillage est donc le fruit de l'équidistribution d'une fonction de contrôle  $M$ . Elle est fréquemment choisie pour mesurer l'erreur numérique entre la solution approchée et la solution exacte. Elle peut toutefois caractériser d'autres grandeurs mathématiques, comme par exemple le gradient.

A l'inverse de la première option, la procédure de raffinement-déraffinement influe sur le nombre de points de la discrétisation spatiale. Un critère, souvent motivé par une estimation de l'erreur, décide de l'ajout ou de la suppression des nœuds [6, 34]. L'ajout de points correspond à une volonté de raffiner localement. La suppression permet de réduire le nombre de points "inutiles". Rapidement des variantes ont vu le jour. Nous pouvons citer N. Maman [35] ainsi que F. Benkhaldoun, T. Fernandez, B. Larrouturou et P. Leyland [3], qui opèrent des raffinements hiérarchiques sur des maillages non-structurés, ou encore M.J. Berger avec A. Jameson [4] ou J. Oliger [5], qui raffinent non seulement en espace mais également en temps des maillages structurés.

Un des objectifs de cette thèse est de simuler des phénomènes d'interaction fluide-structure. Ils mettent en jeu une structure mobile et un fluide, en écoulement autour ou contre une partie de la structure. Pour des problèmes où le mouvement de maillage est une nécessité, il serait évidemment judicieux de profiter du déplacement du maillage pour l'adapter. La littérature sur la simulation numérique des interactions fluide-structure s'appuie ainsi très majoritairement sur des maillages mobiles à topologie constante [2, 13, 19, 31]. Nous adoptons donc également cette démarche à l'originalité près que nous la couplons avec une procédure dynamique de raffinement-déraffinement spatial. L'adjonction de l'adaptation au schéma numérique se traduit mathématiquement par différentes techniques. Chacune d'elles souligne plus ou moins l'interaction entre le maillage et la solution. Une approche rigoureuse consiste à considérer le maillage comme une des inconnues du système discret à résoudre [17, 23]. Néanmoins, déterminer simultanément le maillage et la solution est une démarche extrêmement complexe. Une première difficulté réside dans l'augmentation très importante du nombre de variables. On peut aussi remarquer que cette démarche induit immédiatement la non-linéarité du système global (semi-discrétisé en espace), et ce, même si la loi de conservation est linéaire.

Pour des raisons de simplicité, nous envisageons une approche différente, qui dissocie la détermination du maillage de la résolution de l'équation hyperbolique. Dans un premier temps, nous contentant du maillage et de la solution courants, nous cherchons le nouveau maillage. Connaissant son évolution entre deux instants successifs, nous appliquons ensuite le schéma numérique.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans un premier temps, nous rappelons très brièvement l'extension de la méthode de Godunov aux maillages mobiles (présentée au chapitre précédent) pour des lois de conservations scalaires en une dimension d'espace. Nous nous intéressons en particulier à la résolution numérique de l'équation d'advection et de Burgers. Ensuite, nous intégrons le schéma dans un code de volumes finis, où les nœuds se déplacent de manière automatique.

Dans le chapitre suivant, nous étudierons plus en détails l'intégration effective d'une procédure concrète de raffinement-déraffinement spatial (en une dimension) dans le schéma écrit en topologie variable, étudié dans le Chapitre 2.

## 3.2 Le schéma numérique

Dans cette section, nous rappelons les principales caractéristiques de la méthode de Godunov en maillage mobile pour la résolution d'équations hyperboliques en une dimension d'espace.

Équations : on s'intéresse surtout à l'advection linéaire avec  $f(u) = c u$  dans (3.1) (avec  $c \in \mathbb{R}$ ), et à l'équation de Burgers (non-linéaire) où  $f(u) = u^2/2$ .

Méthode des volumes finis : le domaine spatial est partitionné à tout instant  $t$  en cellules de contrôle  $\mathcal{C}_i(t) = [x_{i-\frac{1}{2}}(t), x_{i+\frac{1}{2}}(t)]$  avec  $x_{i+\frac{1}{2}} = (x_i + x_{i+1})/2$ . Les inconnues numériques sont des approximations à l'instant  $t^n$  de la moyenne de la solution inconnue  $u$  sur la cellule  $\mathcal{C}_i^n = \mathcal{C}_i(t^n)$  :

$$u_i^n \sim \frac{1}{\Delta x_i^n} \int_{\mathcal{C}_i^n} u(x, t^n) dx ,$$

avec  $\Delta x_i^n = x_{i+\frac{1}{2}}^n - x_{i-\frac{1}{2}}^n \equiv x_{i+\frac{1}{2}}(t^n) - x_{i-\frac{1}{2}}(t^n) > 0$  (voir Figure 3.1). On suppose

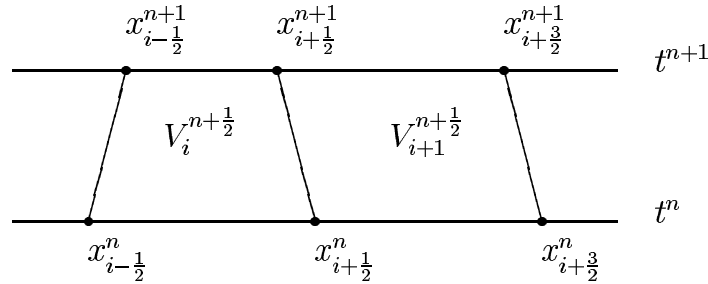


FIG. 3.1 – Principe des formulations en volumes finis.

également que  $\dot{x}_i = \partial_t x_i$  est constante pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  pendant tout pas de temps. On note  $\omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}^n) / \Delta t^n$  (avec  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ ) la vitesse moyenne entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$  du point  $x_{i+\frac{1}{2}}(t)$ . Ainsi, sachant que les cellules ne se retournent pas ( $\Delta x_i^n > 0$ ), il est clair que le volume  $V_i^{n+\frac{1}{2}} = \bigcup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \mathcal{C}_i(t) \times \{t\}$  est un trapèze. Le schéma est obtenu en intégrant (3.1) sur chaque volume  $V_i^{n+\frac{1}{2}}$ .

Schéma conservatif : de la forme

$$\frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n = 0,$$

où les flux numériques dépendent des états voisins par l'intermédiaire d'une fonction de flux numérique  $\phi$ , i.e.  $\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$ .

Méthode de Godunov : en maillage mobile ou non, la fonction de flux numérique s'appuie sur la solution exact (autosimilaire) de problèmes de Riemann locaux [22] :

$$\phi_{\mathcal{G}}(u_g, u_d, \omega) = f(\mathcal{S}_R(\omega; u_g, u_d)) - \omega \mathcal{S}_R(\omega; u_g, u_d), \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{S}_R(x/t; u_g, u_d)$  est la valeur en  $(x, t)$  de la solution autosimilaire du problème de Riemann dont les états à gauche et à droite sont  $u_g$  et  $u_d$ . Avec des flux explicites en temps, ce schéma est stable (principe du maximum, caractère TVD, stabilité en norme  $L^2$ ) sous une condition de type CFL, donc très restrictive sur un maillage localement raffiné.

Schéma localement implicite en temps : pour s'affranchir de ces restrictions, on a considéré un schéma arbitrairement explicite-implicite (AEI) où les flux numériques sont de la forme  $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$ . Ici, les variables  $u_i^{n+\theta_i}$  sont des inconnues dépendant des grandeurs  $u_i^n$  et  $u_i^{n+1}$ , et sont déterminées par (2.16a) et (2.16b). Le schéma est implicite dès que  $\exists i \mid \theta_i \neq 0$ . Il peut être localement implicite.

Résolution du schéma implicite : pour l'équation d'advection, le système linéaire issu du schéma (2.12-2.13)-(2.9) est à diagonale strictement dominante. On peut donc le résoudre de manière itérative avec une méthode de relaxation (de type Jacobi). Pour l'équation de Burgers, on préfère linéariser les flux numériques (voir Section 2.5.1.2) plutôt que résoudre un système non-linéaire.

### 3.3 Maillage mobile auto-adaptatif

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé des méthodes numériques capables de gérer des maillages mobiles. Dans cette section, nous cherchons à induire un mouvement pertinent aux sommets d'un maillage, afin que leurs mouvements permettent de minimiser (au moins de réduire) l'erreur locale de discrétisation en espace. Nous tentons donc ici de répondre à la question : "Comment faire bouger les nœuds du maillage?". Les techniques proposées dans la littérature sont nombreuses mais s'appuient toutes sur le même moteur : *le principe d'équidistribution*.

Dans le but d'en donner une interprétation mathématique, nous introduisons un changement de coordonnées spatiales. Notons  $N + 1$  le nombre de points de discrétisation spatiale. Les coordonnées physiques sont toujours notées  $x_i(t)$ . On introduit des coordonnées fictives dans le domaine de calcul, liées aux sommets du maillage. Elles sont notées  $\xi_i = \frac{i}{N}$ . Nous définissons le changement de variables des coordonnées fictives vers les coordonnées physiques par  $x_i(t) = x(\xi_i, t)$ . La transformation  $x(\xi, t)$  satisfait le principe d'équidistribution si

$$\forall \xi \in [a; b], \int_a^{x(\xi, t)} M(s, t) ds = \xi \cdot \int_a^b M(s, t) ds. \quad (3.3)$$

La fonction  $M(x, t) > 0$  est appelée fonction de contrôle. La distribution des points repose fortement sur le choix de cette fonction. Elle mesure fréquemment, en théorie, l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte. Elle peut toutefois caractériser d'autres grandeurs mathématiques. Un choix usuel consiste à prendre

$$M = \sqrt{1 + |u_x|^2},$$

afin de canaliser les nœuds dans les régions de forts gradients. Néanmoins, leur concentration se révèle parfois excessive. Il est alors conseillé d'utiliser une version régularisée, comme par exemple

$$M = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} |u_x|^2}. \quad (3.4)$$

L'introduction du paramètre  $\alpha > 0$  permet de jouer sur l'intensité de la concentration nodale (mais aussi sur l'importance relative entre les gradients de la fonction et la taille locale des mailles).

W. Huang, Y. Ren et R.D. Russell [23] modélisent le mouvement du maillage par une équation aux dérivées partielles, communément appelée MMPDE (Moving Mesh Partial Differential Equation), obtenue en dérivant par rapport à  $t$  et/ou par rapport à  $\xi$ , la relation d'équidistribution (3.3). Ils déterminent ainsi de nombreuses MMPDEs, parmi lesquelles

$$\text{MMPDE 1 :} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( M \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial M}{\partial \xi} \dot{x} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial M}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right),$$

ou encore

$$\text{MMPDE 4 :} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( M \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} \right) = - \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( M \frac{\partial x}{\partial \xi} \right).$$

Le paramètre  $\tau$  peut être considéré comme un paramètre de relaxation temporelle. A titre indicatif, il existe également la version plus complexe suivante :

$$\text{MMPDE 7 :} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( M \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( M \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} / \frac{\partial x}{\partial \xi} = - \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( M \frac{\partial x}{\partial \xi} \right),$$

qui correspond à la méthode proposée par E. Dorfy et L. Drury [11].

Une fois l'équation différentielle de mouvement de maillage (MMPDE) choisie, celle-ci est discrétisée. On obtient ainsi un système d'équations non-linéaires, qui dépend naturellement des positions du maillage à la fin du pas de temps courant  $x_i^{n+1}$ , mais aussi des valeurs à la fin du pas de temps courant des inconnues numériques  $u_i^{n+1}$ , en raison de la discrétisation de la fonction de contrôle  $M$ . Afin de déterminer simultanément le maillage  $\mathcal{M}^{n+1}$  et la solution  $u^{n+1}$  à la fin du pas de temps courant, il faut alors coupler ce système aux équations issues du schéma numérique, ici aux équations (2.12-2.13).

Ce procédé, d'une extrême rigueur, souligne la forte interaction entre le maillage et la solution. Sa mise en œuvre s'avère néanmoins complexe. Une première difficulté réside dans l'augmentation considérable du nombre de variables (approximations de la solution et position du maillage). D'autre part, l'expérience montre un usage fréquent de schémas temporels totalement implicites, c'est-à-dire  $\theta_i = 1 \forall i$  dans (2.16). A ces remarques, s'ajoute la non-linéarité du système, et ce, même si la loi de conservation est linéaire. Nos efforts pour conserver une démarche linéaire, en particulier la construction du schéma implicite linéarisé pour l'équation de Burgers, deviennent alors inutiles.

Pour des raisons de simplicité, nous souhaitons dissocier la détermination du maillage du calcul de la solution. À ce stade de notre étude, nous disposons uniquement des grandeurs à l'instant  $t^n$ . Une méthode simple consiste à adapter le maillage  $\mathcal{M}^{n+1}$  à la solution courante  $u^n$ . Pour ce faire, nous adoptons le point de vue de J.T. Batina [2] et de B. Palmerio [43, 44], connu dans la littérature sous le nom de "spring analogy". Notre choix est en partie justifié par le fait que cette analogie élastique trouve des extensions naturelles en plusieurs dimensions d'espace. Dans la suite, nous essaierons dans la mesure du possible d'évaluer, pour chacune des procédures géométriques envisagées, la possibilité d'extension en plusieurs dimensions d'espace.

### 3.3.1 Algorithme d'adaptation automatique

Nous supposons que chaque sommet  $x_i^n$  est connecté aux sommets voisins  $x_j^n$  par une force, notée  $F_{ij}$ . Nous postulons que le nouveau maillage recherché résulte de l'obtention d'un état d'équilibre dynamique virtuel pour chaque sommet du maillage, qui s'écrit :

$$\forall i, \quad \sum_{j|x_j^n \text{ voisin de } x_i^n} F_{ij} = 0.$$

Ces équations offrent une formulation différente du principe d'équidistribution. En effet, à travers la recherche de l'état d'équilibre, nous cherchons à équi-répartir l'ensemble des forces pour chaque sommet. Afin d'atteindre cet objectif, nous proposons une méthode itérative. Nous commençons par initialiser les variables en posant

$$\forall i, \quad x_i^{(0)} = x_i^n \text{ et } u_i^{(0)} = u_i^n.$$

Dans le but d'équidistribuer la fonction de contrôle (3.4), nous calculons itérativement l'ensemble des forces qui s'appliquent sur chaque sommet  $x_i^{(k)}$  de la manière suivante (on s'est délibérément replacé en une dimension d'espace, et les sommets sont implicitement numérotés de la gauche vers la droite et de  $-\infty$  vers  $+\infty$ ) :

$$F_i^{(k)} = \left[ \left( x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left( u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)} \right)^2 \right] - \left[ \left( x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left( u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)} \right)^2 \right].$$

Notre intention est que pour tout  $i$ ,  $F_i^{(k)} \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Il faut en fait distinguer plusieurs cas, suivant le signe de  $F_i^{(k)}$ .

**Cas où  $F_i^{(k)} > 0$ .** Il semble logique que le déplacement du nœud  $x_i^{(k)}$  traduise une attirance vers  $x_{i+1}^{(k)}$ , et donc un éloignement de  $x_{i-1}^{(k)}$ . Nous suggérons alors de poser

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)},$$

où le paramètre  $\tau_i^{(k)} > 0$  est déterminé à partir des équations suivantes :

$$(i) \quad \left( x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k+1)} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left( u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k+1)} \right)^2 = \left( x_i^{(k+1)} - x_{i-1}^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left( u_i^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k)} \right)^2,$$

$$(ii) \quad u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}}{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}}.$$

L'équation (i) ci-dessus signifie que la valeur recherchée pour  $x_i^{(k+1)}$  est telle que la force  $F_i^{(k)}$  calculée avec  $x_i^{(k+1)}$  à la place de  $x_i^{(k)}$  est nulle. La seconde équation (ii) signifie que la valeur  $u_i^{(k+1)}$  est simplement interpolée linéairement dans l'intervalle  $[x_i^{(k)}; x_{i+1}^{(k)}]$  puisque  $F_i^{(k)} > 0$  et le point  $x_i$  va se déplacer vers la droite.

Après développement, nous trouvons simplement

$$\tau_i^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}}{\frac{1}{\alpha} (u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}) (u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) + (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) (x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})}.$$

**Proposition 2** Si  $F_i^{(k)} > 0$ , alors  $\tau_i^{(k)} > 0$ .

*Preuve* : l'inégalité se vérifie aisément. Le numérateur étant positif, il suffit de démontrer que le dénominateur l'est également. Nous posons :

$$D_i^{(k)} = (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) (x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) + \frac{1}{\alpha} (u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}) (u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}), \quad (3.5)$$

que nous pouvons encore écrire sous la forme

$$D_i^{(k)} = (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) + \frac{1}{\alpha} (u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}) (u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) + (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)})^2 + \frac{1}{\alpha} (u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)})^2.$$

Nous déduisons de l'information  $F_i^{(k)} > 0$  que

$$D_i^{(k)} > \frac{1}{2} \left[ (x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})^2 + \frac{1}{\alpha} (u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})^2 \right] > 0.$$

Ce qui conclut la démonstration de la proposition.  $\square$

**Cas où  $F_i^{(k)} = 0$ .** Les forces étant identiques de part et d'autre du nœud  $x_i^{(k)}$ , nous proposons de prendre  $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}$  et  $u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)}$ .

**Cas où  $F_i^{(k)} < 0$ .** Le traitement de ce cas est similaire à celui du cas  $F_i^{(k)} > 0$ . Nous l'obtenons par symétrie. Nous proposons les formules suivantes : si  $F_i^{(k)} < 0$ , nous posons

$$\begin{aligned} (i) \quad x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)}, \\ (ii) \quad u_i^{(k+1)} &= u_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} \frac{u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}}, \\ (iii) \quad \tau_i^{(k)} &= \frac{1}{2} \frac{x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}}{\frac{1}{\alpha} (u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) (u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) + (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) (x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})} > 0. \end{aligned}$$



### 3.3.2 Non-retournement des volumes de contrôle

Il nous faut désormais vérifier que les nœuds  $x_i^{(k+1)}$  sont tels que  $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0$ . Nous multiplions alors  $\tau_i^{(k)}$  par un paramètre  $\beta$ , compris entre 0 et 1. Explicitement, l'algorithme global se résume ainsi : itérer

$$(i) \quad F_i^{(k)} = \left[ (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)})^2 + \frac{(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)})^2}{\alpha} \right] - \left[ (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})^2 + \frac{(u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})^2}{\alpha} \right];$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \text{si } F_i^{(k)} > 0, & \begin{cases} \tau_i^{(k)} = \frac{\beta}{2} \frac{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}}{(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)})(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})/\alpha + (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)})(x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})} \\ u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} (u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}) / (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) \end{cases} \\ \text{si } F_i^{(k)} < 0, & \begin{cases} \tau_i^{(k)} = \frac{\beta}{2} \frac{x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}}{(u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})/\alpha + (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})(x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})} \\ u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)} (u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) / (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) \end{cases} \\ \text{si } F_i^{(k)} = 0, & \begin{cases} \tau_i^{(k)} = 0 \\ u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} \end{cases} \end{cases}$$

$$(iii) \quad x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \tau_i^{(k)} F_i^{(k)};$$

jusqu'à ce que  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \text{TOL}$ . Nous cherchons sous quelles conditions sur  $\beta$ , les contraintes de non-retournement des cellules sont satisfaites. Nous pouvons montrer la proposition suivante.

**Proposition 3** *Si  $\beta \leq \frac{1}{2}$ , alors les cellules du maillage ne se retournent pas.*

*Preuve :* nous allons démontrer que, à chaque itération de l'algorithme ci-dessus, les points du maillage restent dans le même ordre. Cela sera également vrai à convergence (après un nombre fini d'itérations!). Nous différencions quatre cas suivant les signes de  $F_i^{(k)}$  et de  $F_{i+1}^{(k)}$  :

1. si  $F_i^{(k)} \leq 0$  et  $F_{i+1}^{(k)} \geq 0$ , nous avons alors que  $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} \geq x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} > 0$  sans aucune condition supplémentaire sur  $\beta$ ;
2. si  $F_i^{(k)} \geq 0$  et  $F_{i+1}^{(k)} \geq 0$ , nous constatons que

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} \geq x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} - \tau_i^{(k)} F_i^{(k)}.$$

Remplaçant  $\tau_i^{(k)}$  par son expression, nous trouvons que

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} \geq (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) \left[ 1 - \frac{\beta F_i^{(k)}}{2 D_i^{(k)}} \right],$$

où  $D_i^{(k)} > 0$  est donné par l'égalité (3.5). Étant donné que  $0 \leq \beta \leq 1$ , nous remarquons que

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} \geq (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}) \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{F_i^{(k)}}{D_i^{(k)}} \right].$$

Or, nous avons  $2D_i^{(k)} - F_i^{(k)} = (x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1}^{(k)})^2 + \frac{1}{\alpha} (u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})^2 > 0$ . Nous déduisons de cette information que  $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0 \forall \beta$ ;

3. Si  $F_i^{(k)} \leq 0$  et  $F_{i+1}^{(k)} \leq 0$ , un raisonnement similaire au précédent nous permet de conclure que  $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0$  sans aucune condition sur  $\beta$ ;

4. Nous nous situons ici dans le cas où  $F_i^{(k)} > 0$  et  $F_{i+1}^{(k)} < 0$ . Nous avons l'égalité suivante :

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} = x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} + \tau_{i+1}^{(k)} F_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)} F_i^{(k)}.$$

Substituant  $\tau_i^{(k)}$  et  $\tau_{i+1}^{(k)}$  par leur expression, nous obtenons

$$x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} = \kappa (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}),$$

où  $\kappa = 1 + \frac{\beta}{2} \frac{F_{i+1}^{(k)}}{D_{i+1}^{(k)}} - \frac{\beta}{2} \frac{F_i^{(k)}}{D_i^{(k)}}$ . Or, nous avons  $-\frac{F_{i+1}^{(k)}}{D_{i+1}^{(k)}} < 2$  et  $\frac{F_i^{(k)}}{D_i^{(k)}} < 2$ . Il s'en suit que  $\kappa > 1 - 2\beta$ . La condition  $\beta \leq \frac{1}{2}$  nous garantit dès lors que  $x_{i+1}^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0$ .

Ceci conclut la démonstration de la propriété.  $\square$

Dans la suite de ce rapport, **nous posons**  $\beta = \frac{1}{2}$ . Rappelons ici que l'algorithme ci-dessus remplit trois fonctions :

- équirépartition des points;
- interpolation des valeurs de  $u$  au cours des itérations (ces valeurs sont utilisées pour l'équidistribution des points, mais pas pour la résolution en temps de l'équation de conservation);
- assurance de non-retournement des volumes finis.

### 3.3.3 Premier algorithme d'adaptation de maillage

Nous montrons sur la Figure 3.2 une mise en application de cette méthode, que nous nommons **Spring** en référence à "spring analogy". Sur le premier graphe sont représentés  $(x_i^{(0)}, u_i^{(0)})$  pour  $i = 1$  à 50. Les noeuds  $x_i^{(0)}$  sont répartis uniformément et  $u_i^{(0)} = u(x_i^{(0)})$  avec  $u(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$ . Sur le deuxième graphe sont représentés  $(x_i^{(k)}, u_i^{(k)})$  après convergence de l'algorithme décrit ci-dessus. Il apparaît que les noeuds tendent à se concentrer au voisinage de 0 donc dans la région de plus fort gradient, ce qui était bien le but recherché.

Après convergence de l'algorithme, nous posons finalement  $x_i^{n+1} = x_i^{(k)}$  pour tout indice  $i$ . Connaissant l'évolution du maillage entre deux instants successifs, il nous

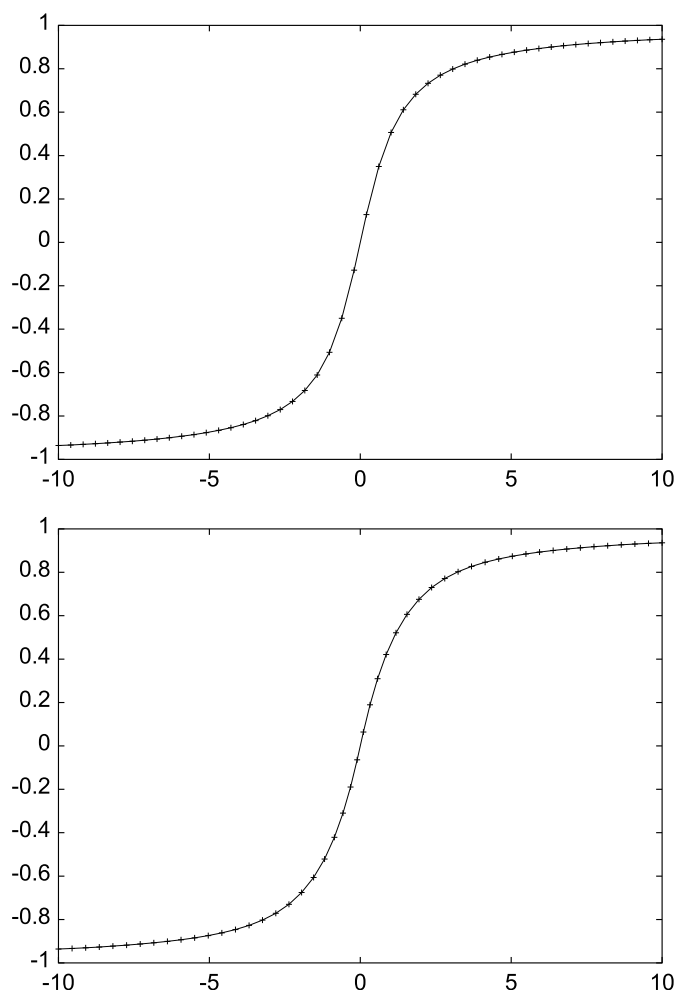


FIG. 3.2 – Répartitions initiale (en haut) et finale (en bas) des nœuds générée par Spring avec  $\alpha = 0.1$ .

reste à appliquer la méthode de volumes finis en maillage variable (2.12-2.13) pour calculer  $u^{n+1}$ .

Afin d'illustrer son efficacité et l'impact de l'adaptation de maillage sur ce dernier, nous présentons quelques résultats numériques. Sur les Figures 3.3(a) et 3.4(a), nous montrons une itération en temps du schéma (2.12-2.13) appliquée à l'équation d'advection  $u_t = 0$  avec respectivement  $\alpha = 0.1$  et  $\alpha = 0.01$  dans Spring. Pour chaque figure, nous avons représenté la solution initiale  $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$  sur un maillage uniforme et la solution à  $t = 0.1$ . Les Figures 3.3(b) et 3.4(b) représentent la taille des mailles à  $t = 0.1$ . Nous remarquons d'ores et déjà que plus  $\alpha$  est petit, plus la concentration des nœuds dans les zones de forts gradients est élevée (ce qui est logique, car l'importance de la taille de la maille décroît avec  $\alpha$ ). D'autre part, nous observons, principalement sur la Figure 3.4(a), que la solution approchée est plus abrupte que la solution initiale. Ce phénomène s'explique par le fait que les nœuds se déplacent dans un souci d'équidistribution de la fonction de contrôle  $M$ . La vitesse du maillage

ne correspond pas alors à la vitesse du flux, qui dans ce cas précis est nulle puisque  $c = 0$ . Afin d'atténuer cette différence, nous évitons de choisir le paramètre  $\alpha$  trop petit et proposons de prendre un maillage initial  $\mathcal{M}^0$  préalablement adapté à la solution initiale  $u^0$ .

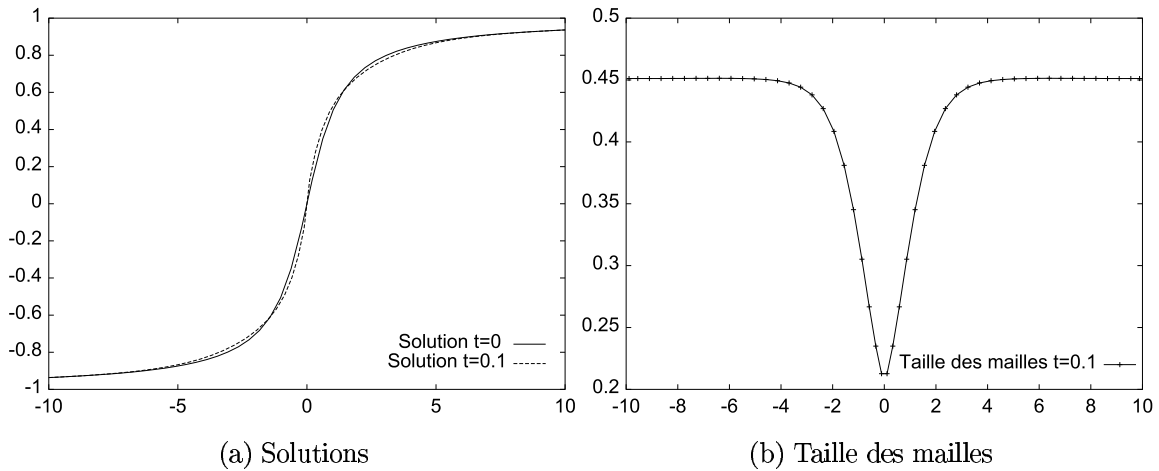


FIG. 3.3 – Solutions et taille des mailles à  $t = 0$  et à  $t = 0.1$  avec  $\alpha = 0.1$ .

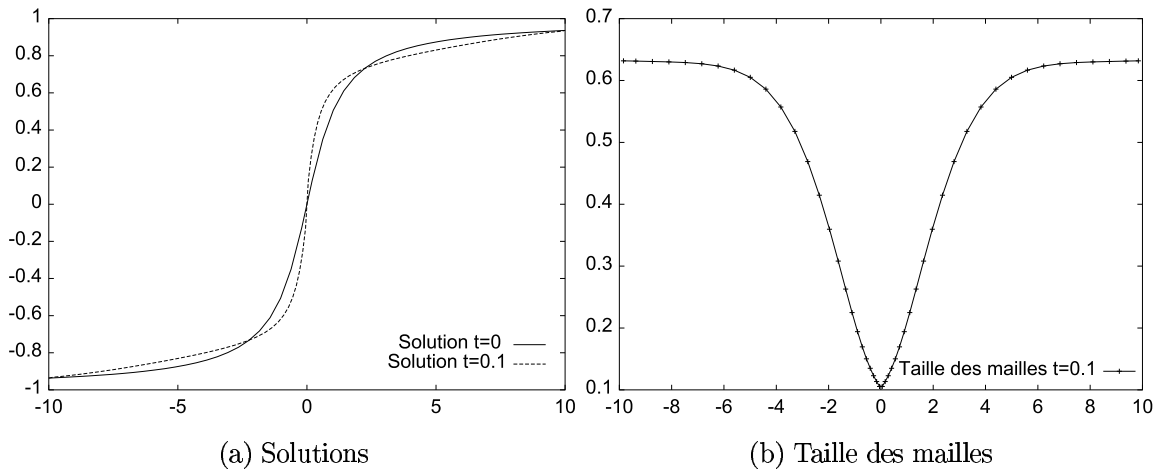
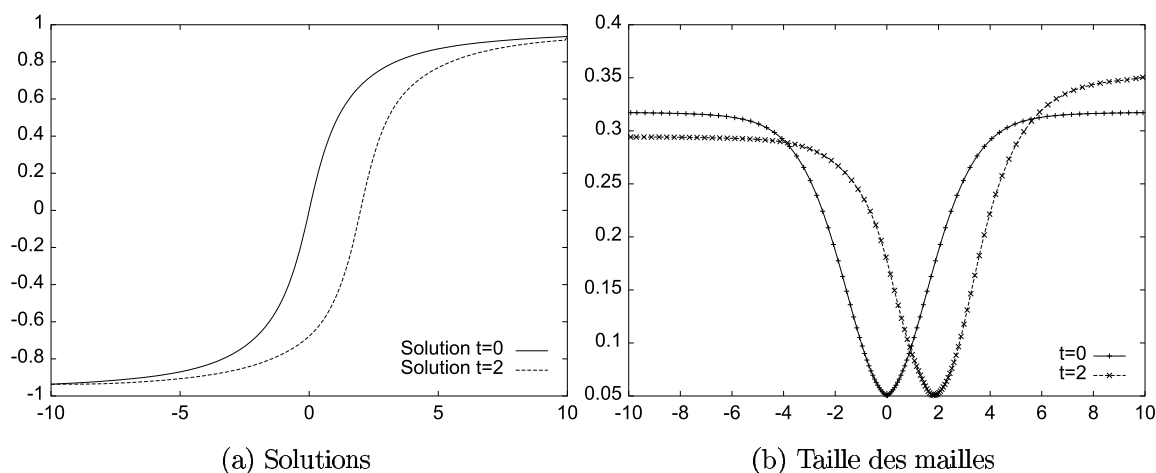
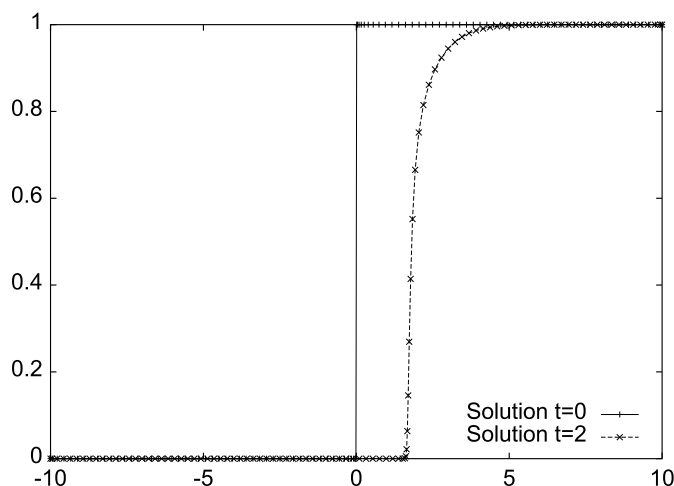


FIG. 3.4 – Solutions et taille des mailles à  $t = 0$  et à  $t = 0.1$  avec  $\alpha = 0.01$ .

Nous considérons désormais l'équation d'advection (2.2) avec la vitesse  $c = 1$ . Sur la Figure 3.5(a), nous montrons la solution initiale et la solution obtenue à  $t = 2$  avec le schéma numérique (2.12-2.13) en prenant un pas de temps  $\Delta t^n$  constant au cours du temps et égal à 0.1. Nous évitons les restrictions sur le pas de temps  $\Delta t^n$  imposées par les conditions de type CFL en posant  $\theta_i = 1$  pour tout  $i$ . La solution exacte de cette équation étant  $u(x, t) = u^0(x - ct)$ , l'évolution du maillage, représentée sur la Figure 3.5(b), semble satisfaisante. Néanmoins, pour des solutions moins régulières, ce

FIG. 3.5 – Solutions et taille des mailles à  $t = 0$  et à  $t = 2$ .

processus peut fournir un maillage raffiné dans des régions importantes pour  $u^n$  mais sans intérêt pour  $u^{n+1}$ . Nous déduisons de cette explication la diffusion numérique observée sur la Figure 3.6, où la donnée initiale est la fonction de Heaviside. Cette diffusion pourrait être éliminée en raffinant plus abondamment dans une zone assez large. Pour cela, il suffirait de propager les hautes valeurs de la fonction de contrôle  $M$  sur une certaine "épaisseur".

FIG. 3.6 – Solutions à  $t = 0$  et à  $t = 2$ .

Afin d'éviter ce décalage, J.M. Stockie, J.A. Mackenzie et R.D. Russell [53] (ou de manière presque analogue, J.G. Verwer, J.G. Blom et J.M. Sanz-Serna [61]) proposent d'adapter le maillage  $\mathcal{M}^{n+1}$  à  $\tilde{u}^{n+1}$ , prédiction de la solution recherchée  $u^{n+1}$ . Ils suggèrent alors l'algorithme suivant :

### Algorithme d'adaptation de maillage 1

1.  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  ;
2.  $\mathbf{u}^0$  et  $\mathcal{M}^0$ , les données initiales, représentent la solution et le maillage à  $t = 0$  ;
3. Itérations sur  $n$ 
  - (a)  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  ;
  - (b)  $\mathbf{x}_i^{n+1,0} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t^n \omega_i^n$  tel que  $x_i^{n+1,0} - x_{i-1}^{n+1,0} > 0$  (Par exemple,  $x_i^{n+1,0} = x_i^n$ ) ;
  - (c) Appliquer le schéma numérique  $\longrightarrow \mathbf{u}_i^{n+1,0}$  ;
  - (d) Itérations sur  $m$ 
    - i. Adapter le maillage à la solution courante  $u_i^{n+1,m}$  (à l'aide, par exemple, de l'algorithme **Spring**)  $\longrightarrow \mathbf{x}_i^{n+1,m+1}$  ;
    - ii. Appliquer le schéma numérique avec
$$\omega_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,m+1} - x_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^n}$$
et  $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,m+1} = \frac{1}{2}(x_i^{n+1,m+1} + x_{i+1}^{n+1,m+1})$ .  
 $\longrightarrow \mathbf{u}_i^{n+1,m+1}$  ;
    - iii. Si  $\|x^{n+1,m+1} - x^{n+1,m}\| > \text{TOL}$  alors  $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m} + \mathbf{1}$  et poursuivre en 3.(d) ;
  - (e)  $\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^{n+1,m+1}$  et  $\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^{n+1,m+1}$  ;
4.  $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}$  et poursuivre en 3.

À chaque itération en temps, cet algorithme a recours au minimum deux fois au schéma numérique : une fois pour l'étape de prédiction, une deuxième fois pour le calcul de la solution à l'instant  $t^{n+1}$ . Sans remettre en cause l'efficacité de la méthode, nous craignons un coût élevé en deux et trois dimensions d'espace. Nous envisageons, de ce fait, une approche différente, qui consiste à prédire la vitesse optimale du maillage entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ .

### 3.3.4 Second algorithme d'adaptation de maillage

La vitesse d'un choc  $s = \frac{dx}{dt}$ , dont les valeurs à droite et à gauche sont notées  $u_d$  et  $u_g$ , est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot :

$$f(u_d) - f(u_g) = s(u_d - u_g) . \quad (3.6)$$

Nous espérons profiter de cette relation pour inciter certains points, que nous qualifions de stratégiques, à se déplacer à la vitesse du choc. Nous dirons qu'un point  $x_i$  est stratégique si

$$\cos \alpha_i > K ,$$

où  $\alpha_i$  désigne l'angle dessiné sur la Figure 3.7. En d'autres termes, le nœud  $x_i$  est dit stratégique si nous observons en ce dernier un changement de pente considérable. En pratique, nous prenons  $K = -\frac{1}{2}$ . Cette approche est pour l'instant peu généralisable en plus d'une dimension. On peut cependant penser à des adaptations, par exemple fondées sur la courbure locale du graphe, pour repérer des zones stratégiques dans la solution.

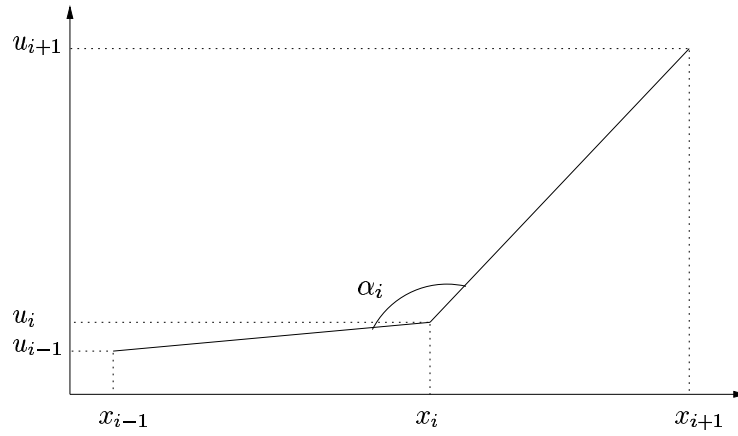


FIG. 3.7 – Représentation de l'angle  $\alpha_i$ .

Pour s'appuyer sur ces nœuds stratégiques, notre démarche est la suivante. En premier lieu, nous différencions les nœuds stratégiques des autres. Pour chacun d'entre eux, nous déterminons ensuite quelles sont les valeurs à droite et à gauche du choc. Si le point  $x_i^n$  est stratégique, nous proposons de prendre :

$$\begin{cases} u_g = u_j^n \text{ tel que } j = \max\{l \mid l < i \text{ et } |u_l^n - u_{l-1}^n| < \epsilon_1\} \\ u_d = u_k^n \text{ tel que } k = \min\{l \mid l > i \text{ et } |u_l^n - u_{l+1}^n| < \epsilon_2\} \end{cases} . \quad (3.7)$$

Notre objectif est que, pour les nœuds stratégiques,  $x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t^n s_i^n$ , où  $s_i^n$  est donné par la relation de Rankine-Hugoniot (3.6) et (3.7). Si nous effectuons naïvement ces affectations, nous risquons de nous heurter aux contraintes de non-retournement des cellules. Afin de les respecter, nous optons pour une méthode itérative, davantage préventive. Nous commençons par une phase d'initialisation dans laquelle nous posons

$$\begin{aligned} x_i^{n+1,0} &= x_i^n , \\ \delta_i^0 &= 0 , \\ \delta_i^{R,0} &= \begin{cases} \Delta t^n s_i^n & \text{si } x_i^n \text{ est stratégique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

La grandeur  $\delta_i^{R,0}$  correspond au déplacement recherché pour le point  $x_i^n$ . Nous calculons itérativement le déplacement effectif par une méthode reposant encore sur une analogie

élastique. De manière imagée, ce déplacement effectif est calculé en tout point en supposant que le maillage lui-même est la trace d'un matériau élastique (des ressorts, dont la raideur est égale à l'inverse de la longueur des arêtes, relient les points voisins). L'algorithme s'écrit de la manière suivante :

$$\delta_i^m = \frac{\gamma_{i-\frac{1}{2}}\delta_{i-1}^{m-1} + \gamma_i\delta_i^{R,m-1} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}\delta_{i+1}^{m-1}}{\gamma_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_i + \gamma_{i+\frac{1}{2}}},$$

où  $\gamma_{i-\frac{1}{2}}$ ,  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i+\frac{1}{2}}$  sont des fonctions poids, que nous avons choisies indépendantes de  $m$ . Elles permettent d'uniformiser le mouvement du maillage. Nous posons précisément

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{x_{i+1}^{n+1,0} - x_i^{n+1,0}}$$

et  $\gamma_i = \gamma_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}$ . Nous effectuons ensuite les affectations

$$x_i^{n+1,m} = x_i^{n+1,m-1} + \varepsilon\delta_i^m,$$

avec  $\varepsilon = \min_i \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}$ ,

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{i+1}^{m-1} - x_i^{m-1} + \delta_{i+1}^m - \delta_i^m > 0 \\ \eta \frac{x_{i+1}^{m-1} - x_i^{m-1}}{\delta_i^m - \delta_{i+1}^m} & \text{sinon} \end{cases},$$

et  $\eta$  est un paramètre compris entre 0 et 1. L'introduction de la variable  $\varepsilon$  nous garantit que les cellules ne se retournent pas. Si  $\|x^{n+1,m} - x^{n+1,m-1}\| > \text{TOL}$ , nous incrémentons  $m$  et poursuivons les itérations, sans oublier de réinitialiser  $\delta_i^{R,m}$  comme suit

$$\delta_i^{R,m} = \begin{cases} \delta_i^{R,m-1} - \delta_i^m & \text{si } \cos \alpha_i^n > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Après convergence de la méthode, que nous nommons **Info**, nous posons finalement  $x_i^{n+1} = x_i^{n+1,m}$  et pouvons désormais appliquer le schéma numérique pour calculer  $u_i^{n+1}$ .

Avant d'illustrer la méthode par des résultats numériques, nous souhaitons ici mettre l'accent sur l'une de ses caractéristiques. Supposons que la solution courante est très régulière. Elle peut, de ce fait, ne posséder aucun point stratégique. L'application de la méthode décrite ci-dessus nous donne alors  $x_i^{n+1} = x_i^n$  pour tout  $i$ . L'algorithme **Spring** aurait pour sa part, suscité un déplacement de certains nœuds. L'adaptation n'est certes pas optimale mais a l'avantage de produire une évolution du maillage cohérente avec l'évolution de la solution, comme le montre la Figure 3.5(b). En résumé, nous avons à notre disposition deux méthodes, l'une qui semble mieux convenir aux solutions régulières, l'autre qui cadre davantage avec les solutions où apparaissent chocs et discontinuités. Afin de traiter un éventail le plus large possible de problèmes, nous proposons de les coupler en une seule, qui s'écrit algorithmiquement comme suit :



**Algorithme d'adaptation de maillage 2 (Spring+Info)**

1.  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\mathbf{u}^0$  et  $\mathcal{M}^0$  désignent la solution et le maillage initiaux;
3. Itérations sur  $n$ 
  - (a) Repérer les **noeuds stratégiques** et calculer, pour ces derniers, la vitesse recherchée  $\mathbf{s}_i^n$ ;
  - (b) Appliquer **Spring** avec  $F_i^{(k)} = 0$  si  $x_i^n$  est stratégique. Pour ces noeuds,  $x_i^{(k)} = x_i^n$  pour tout  $k$ .  
 $\longrightarrow \mathbf{x}_i^{(k)}$ ;
  - (c) Appliquer **Info** aux noeuds  $x_i^{(k)}$  (Seul changement :  $x_i^{n+1,0} = x_i^{(k)}$ ).  
 $\longrightarrow \mathbf{x}_i^{n+1,m}$ ;
  - (d)  $\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^{n+1,m}$ ;
  - (e) Appliquer le schéma numérique  $\longrightarrow \mathbf{u}_i^{n+1}$ ;
4.  $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}$  et poursuivre en 3.

Sur la Figure 3.8, sont représentées la solution initiale et la solution à  $t = 2$  de l'équation d'advection avec  $c = 1$ , obtenue en appliquant l'algorithme **Spring+Info** décrit ci-dessus avec un pas de temps  $\Delta t^n$  constant au cours du temps, égal à 0.1. Les noeuds stratégiques se déplaçant à la vitesse du flux, en particulier ici à la vitesse  $c$ , nous observons sur la Figure 3.8 le bon comportement de la solution approchée.

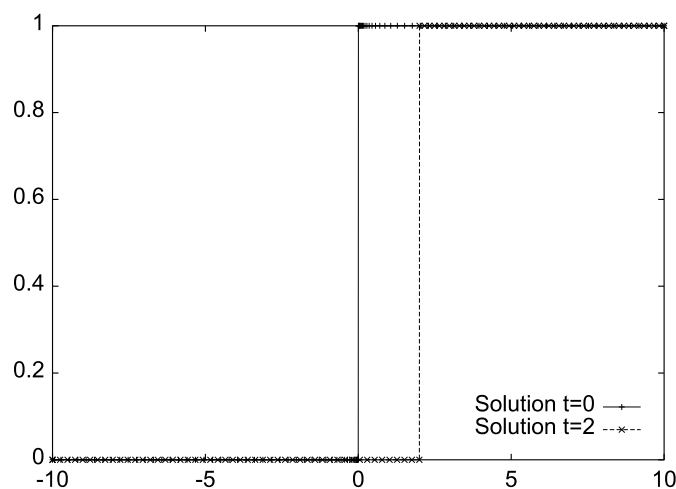


FIG. 3.8 – Solutions à  $t = 0$  et à  $t = 2$  avec l'algorithme **Spring+Info**.

D'autre part, si nous appliquons cet algorithme à la même équation mais avec la

donnée initiale  $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$ , les résultats seraient alors les mêmes que ceux observés sur les Figures 3.5(a) et 3.5(b), puisque la régularité des solutions implique la non-existence de noeuds stratégiques.

Dans le but de valider notre méthode sur des équations non-linéaires, nous considérons le problème de Cauchy (3.1) pour l'équation de Burgers (2.3), avec différentes données initiales. Pour ce choix de la fonction non-linéaire  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ , la relation de Rankine-Hugoniot (3.6) s'écrit

$$\frac{u_d^2}{2} - \frac{u_g^2}{2} = s(u_d - u_g),$$

c'est-à-dire, si  $u_d \neq u_g$ ,

$$s = \frac{u_d + u_g}{2}.$$

Pour tous les exemples numériques qui suivent, nous appliquons le schéma avec un pas de temps constant au cours du temps, égal à 0.1. Pour éviter les limitations sur le pas de temps imposées par les conditions de stabilité de type CFL, nous optons pour la version totalement implicite de ce dernier ( $\forall i, \theta_i = 1$ ).

Sur la Figure 3.9(a), nous montrons la solution initiale  $u^0(x) = -\frac{x}{1+|x|}$  et la solution approchée à  $t = 2$ . Du fait de la régularité des solutions, à chaque itération en temps, le maillage  $\mathcal{M}^{n+1}$  est uniquement le fruit de la procédure `Spring`, qui, nous rappelons, adapte  $\mathcal{M}^{n+1}$  à la solution courante  $u^n$ . Au fur et à mesure des itérations, la solution se raidissant au voisinage de 0, nous observons logiquement sur la Figure 3.9(b) un raffinement progressif du maillage en ce voisinage.

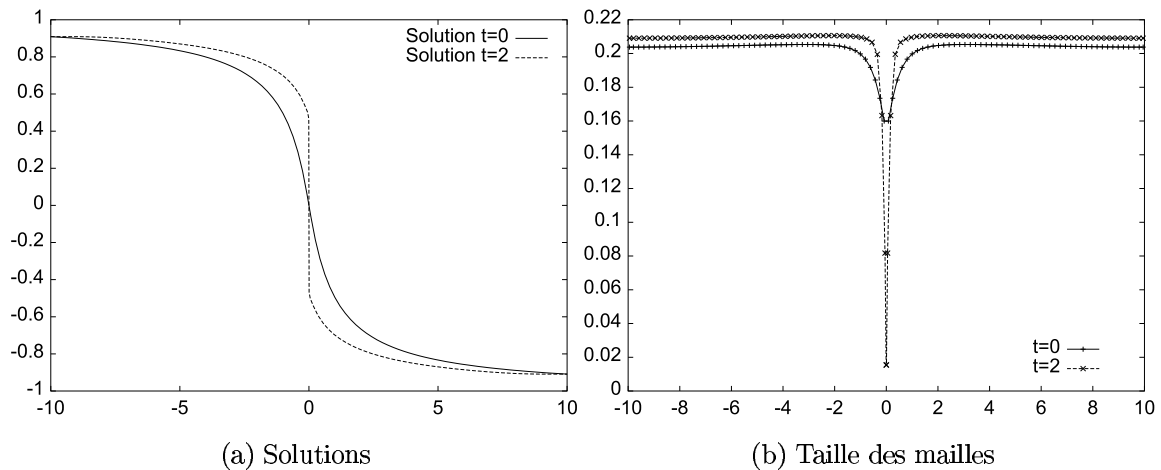


FIG. 3.9 – Solutions et taille des mailles à  $t = 0$  et à  $t = 2$ .

Sur les Figures 3.10 ou 3.11, nous simulons un choc. À chaque itération en temps, la solution courante possède deux points stratégiques, de part et d'autre du choc. Nous incitons ces derniers à se déplacer à la vitesse  $\frac{u_d + u_g}{2}$ , en particulier ici  $\frac{1}{2}$ . La vitesse

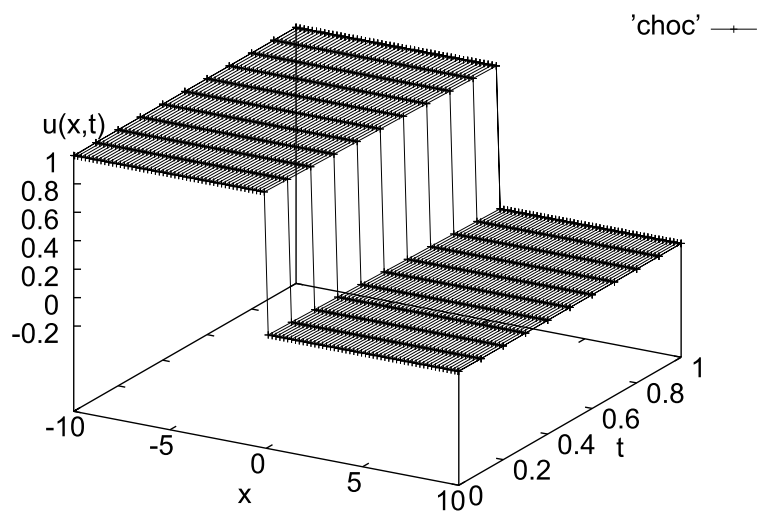
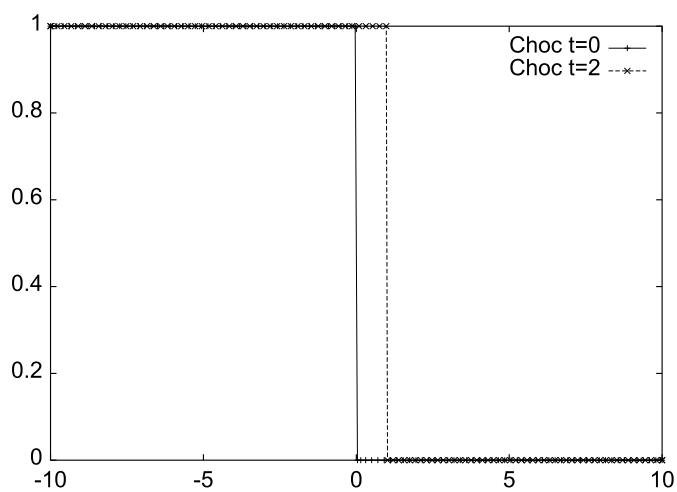


FIG. 3.10 – Chocs à différents instants successifs.

FIG. 3.11 – Chocs à  $t = 0$  et à  $t = 2$ .

du maillage étant adéquate, les solutions obtenues via le schéma numérique sont très satisfaisantes.

Sur la Figure 3.12, nous représentons la solution initiale  $u^0(x) = H(x)$ , où  $H(x)$  est la

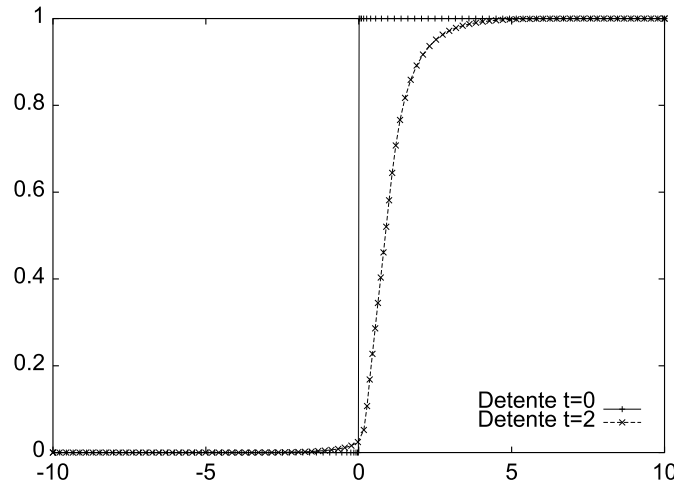


FIG. 3.12 – Détentes à  $t = 0$  et à  $t = 2$ .

fonction de Heaviside, et la solution à  $t = 2$  générée par notre méthode. La solution initiale possède deux nœuds stratégiques, que nous incitons via `Info` à se déplacer à la vitesse  $\frac{1}{2}$ . La vitesse étant inadéquate, le schéma fournit après une itération en temps une solution légèrement diffusée. Aux itérations suivantes, la solution courante ne possède aucun point stratégique à cause de la diffusion du schéma. Donc, seul la procédure `Spring` opère. Le maillage  $\mathcal{M}^{n+1}$  est alors adapté à la solution courante  $u^n$ , et non à  $u^{n+1}$ . Nous justifions ainsi la diffusion numérique observée sur la Figure 3.12.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode assez classique d'adaptation dynamique de maillage, qui repose sur des maillages mobiles à topologie constante. Elle s'appuie néanmoins sur une formulation non-globale (pas de résolution couplée d'équations pour le maillage et pour la solution elle-même). D'autre part, elle essaie d'intégrer des informations concernant l'instationnarité de la solution recherchée. La littérature sur l'adaptation de maillage concerne plutôt des adaptations non-dynamiques (pas d'intégration de la solution pendant le changement de maillage), mais avec raffinements et déraffinements. De même, la littérature sur la simulation numérique des interactions fluide-structure utilise minoritairement ces raffinements et déraffinements locaux. Nous nous intéressons donc dans le chapitre suivant à l'addition et à la soustraction locales de points. L'originalité de notre travail réside dans la conception de l'addition et de la soustraction. De cette conception naît une extension du schéma au maillage à topologie variable, que nous espérons naturellement extensible à plus d'une dimension d'espace.

# Chapitre 4

## Algorithmes de variation de la topologie (1D)

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	78
4.2	Addition . . . . .	78
4.3	Soustraction . . . . .	95
4.4	Conclusion . . . . .	104

---

Ce chapitre est largement inspiré du rapport de recherche INRIA N<sup>o</sup> 4696 [39].

### Résumé

Pour compléter la méthode d'adaptation dynamique de maillage, introduite dans le Chapitre 3, que nous proposons pour la résolution d'équations hyperboliques, linéaires ou non, stationnaires ou non, en une dimension d'espace, nous introduisons dans ce chapitre une algorithmique relative aux raffinements et déraffinements dynamiques et locaux du maillage. Cette approche s'appuie aussi sur la méthode de volumes finis, proposée au Chapitre 2, écrite sur un maillage variable (mobile et à topologie éventuellement variable) avec des flux numériques décentrés (méthode de Godunov).

## 4.1 Introduction

Comme nous l'avons dit précédemment, pour des problèmes où le mouvement de maillage est une nécessité (par exemple pour des phénomènes d'interaction fluide-structure), il serait évidemment judicieux de profiter du déplacement du maillage pour l'adapter, éventuellement à topologie variable, ce qui est très peu fait dans la littérature. Dans cette thèse, nous adoptons résolument cette double approche, dont l'aspect original est d'intégrer l'adaptation dynamique, y compris le changement de topologie, à la formulation en volumes finis établie au Chapitre 2.

Dans ce chapitre, nous examinons et proposons des algorithmes de raffinement (Section 4.2) et de déraffinement (Section 4.3) dynamique de maillage. Pour chaque cas, nous testons les procédures proposées sur l'advection (linéaire) et l'équation de Burgers.

## 4.2 Addition

Dans un souci d'adaptation, nous nous intéressons ici à l'addition locale de points. À ce stade de notre étude, nous destinons cette procédure à deux usages éventuels : soit elle vient se greffer au mouvement du maillage, soit nous la considérons comme une méthode d'adaptation à part entière. Malgré l'abondance de la littérature sur ce sujet [6, 34], nous remarquons, à notre connaissance, une certaine analogie dans son implémentation. Un critère, souvent motivé par une estimation de l'erreur locale de troncature, décide de l'ajout ou non de nœuds sur le maillage courant  $\mathcal{M}^n$ , comme le montre la Figure 4.1. Les modifications du maillage, s'il y en a, nous amènent à réinitialiser la solution courante  $u^n$ , par le biais souvent de l'interpolation. Nous disposons alors d'un maillage  $\widehat{\mathcal{M}}^n$  et d'une solution  $\widehat{u}^n$ , sur lesquels nous appliquons finalement le schéma numérique.

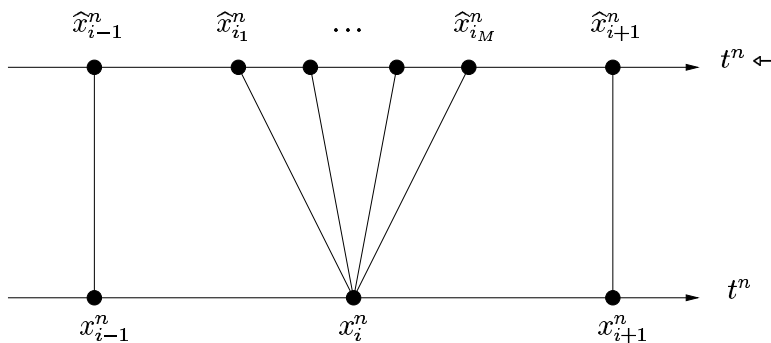


FIG. 4.1 – Addition classique.

Nous proposons ici une approche originale. Nous regardons l'addition comme la division à l'instant  $t^{n+1}$  d'un ensemble de points confondus à l'instant  $t^n$ . De cette conception, découlent deux variantes, relativement semblables en une dimension mais

différentes en dimensions supérieures. L'une est fondée sur les mouvements des interfaces entre volumes finis, alors que l'autre repose sur les mouvements des sommets à partir desquels sont construits les volumes finis.

- la première approche est représentée sur la Figure 4.2. En l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}^n$  se trouvent une, voire plusieurs cellules de mesure nulle à l'instant  $t^n$  et non-nulle à l'instant  $t^{n+1}$ .

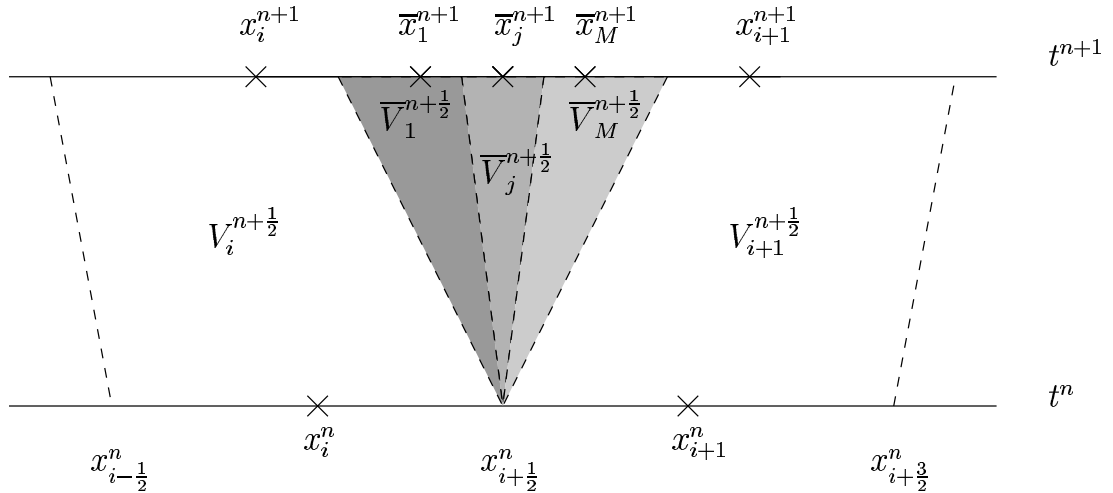


FIG. 4.2 – Addition basée sur les interfaces.

- la seconde est représentée sur la Figure 4.3. L'addition est le fait de la distinction à l'instant  $t^{n+1}$  d'un ensemble de  $M$  sommets  $\bar{x}_1^n, \dots, \bar{x}_M^n$ , confondus avec le sommet  $x_i^n$  à l'instant  $t^n$ . A la différence de la première optique, les cellules ainsi créées ne sont pas toutes de mesure nulle à l'instant  $t^n$ . En effet, nous remarquons que  $\Delta \bar{x}_1^n = x_i^n - x_{i-\frac{1}{2}}^n \neq 0$  et  $\Delta \bar{x}_M^n = x_{i+\frac{1}{2}}^n - x_i^n \neq 0$ .

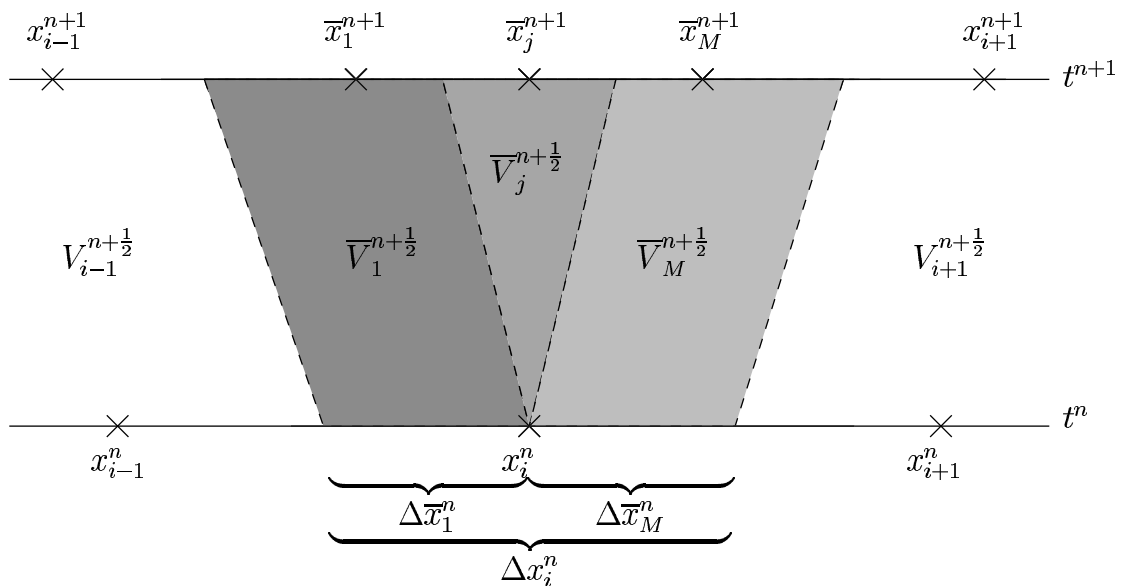


FIG. 4.3 – Addition basée sur les sommets des cellules.

Suivant l'une ou l'autre des deux stratégies, nous appliquons ensuite un schéma numérique, adaptation du schéma proposé au Chapitre 2, qui prend en compte les modifications de la topologie. Nous pensons ainsi éviter les erreurs d'interpolation, qui sont inévitables dans les méthodes classiques.

### 4.2.1 Choix de la procédure d'addition

Avant de présenter le schéma numérique, il nous faut faire un choix parmi les deux méthodes proposées. Dans la perspective d'adapter cette procédure en deux dimensions d'espace, il nous semble plus naturel d'opter pour celle qui repose sur les sommets des cellules. D'après la Figure 4.4, où sont représentés des exemples de cellules centrées aux nœuds (à partir d'une triangulation de type éléments finis), il nous paraît difficile en deux dimensions d'imposer certains mouvements à une interface entre cellules ou de faire coïncider deux interfaces. Il semble plus adapté de gérer les sommets de la triangulation. La situation serait similaire si les volumes finis étaient les triangles eux-mêmes. Il semble plus naturel de gérer des mouvements de sommets que des mouvements de segments entre sommets.

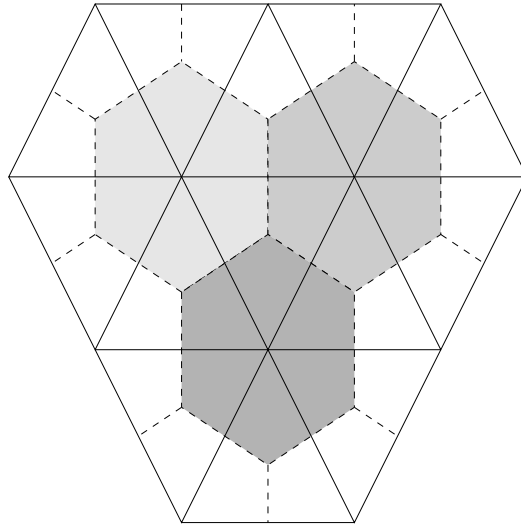


FIG. 4.4 – Exemple de maillage non-structuré en triangle en deux dimensions.

Nous nous situons donc dans le cadre précis de la Figure 2.7, où le nœud  $x_i^n$  se subdivise à l'instant  $t^{n+1}$  en  $M$  sommets, notés  $\bar{x}_1^{n+1}, \dots, \bar{x}_M^{n+1}$ . Afin de nous remémorer le schéma écrit en topologie variable, nous introduisons ici quelques notations. Nous posons :

$$\begin{cases} x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = (x_{i-1}^{n+1} + \bar{x}_1^{n+1})/2, \\ x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\bar{x}_M^{n+1} + x_{i+1}^{n+1})/2, \\ \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\bar{x}_j^{n+1} + \bar{x}_{j+1}^{n+1})/2, \forall j = 1, \dots, M-1. \end{cases}$$



Nous définissons la taille des mailles comme suit :

$$\begin{cases} \Delta \bar{x}_1^{n+1} &= \bar{x}_{\frac{3}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ \Delta \bar{x}_j^{n+1} &= \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \forall j = 2, \dots, M-1, \\ \Delta \bar{x}_M^{n+1} &= x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{x}_{M-\frac{1}{2}}^{n+1}, \end{cases}$$

et déterminons la vitesse du maillage de la manière suivante :

$$\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_i^n}{\Delta t^n}, \quad \forall j = 1, \dots, M-1.$$

Nous notons  $\bar{u}_j^n$  et  $\bar{u}_j^{n+1}$  les approximations de  $u$  sur  $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^n, \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^n]$  et  $[\bar{x}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}, \bar{x}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}]$  respectivement, pour  $j = 1, \dots, M$ . Dans un premier temps, nous proposons de prendre  $\bar{u}_j^n = u_i^n$  pour tout  $j$ . D'autre part, nous supposons que :

$$\begin{aligned} - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}} &\leq \bar{\omega}_{\frac{5}{2}} \leq \dots \leq \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}; \\ - \Delta \bar{x}_1^{n+1} &> 0, \Delta \bar{x}_M^{n+1} > 0 \text{ et } \Delta x_j^{n+1} > 0, \quad \forall j. \end{aligned}$$

Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \Delta x_j^{n+1} &= \Delta x_j^n + \Delta t^n (\omega_{j+\frac{1}{2}} - \omega_{j-\frac{1}{2}}), \quad j \notin \{i-1, i+1\}, \\ \Delta \bar{x}_1^{n+1} &= \Delta \bar{x}_1^n + \Delta t^n (\bar{\omega}_{\frac{3}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}), \\ \Delta \bar{x}_M^{n+1} &= \Delta \bar{x}_M^n + \Delta t^n (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}), \\ \Delta \bar{x}_j^{n+1} &= \Delta t^n (\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}), \quad \forall j = 2, \dots, M-1. \end{cases}$$

Comme pour le schéma écrit sur un maillage à topologie constante, nous déterminons les variables  $\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x}_j^{n+\bar{\theta}_j} &= (1 - \bar{\theta}_j) \Delta \bar{x}_j^n + \bar{\theta}_j \Delta \bar{x}_j^{n+1}, \\ \Delta \bar{x}_j^{n+\bar{\theta}_j} \bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j} &= (1 - \bar{\theta}_j) \Delta \bar{x}_j^n \bar{u}_j^n + \bar{\theta}_j \Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}. \end{aligned}$$

Pour  $j = 2, \dots, M-1$ , étant donné que  $\Delta \bar{x}_j^n = 0$ , nous avons  $\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j} = \bar{u}_j^{n+1}$ .

Finalement, l'adaptation du schéma conservatif (2.12-2.13-2.16) au maillage à topolo-

gie non-constante est encore un schéma conservatif de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \forall j, |j-i| \neq 1, \end{aligned} \quad (4.1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (4.1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) \\ - \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (4.1c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{x}_1^{n+1} \bar{u}_1^{n+1} - \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_2^{n+\bar{\theta}_2}, \bar{\omega}_{\frac{3}{2}}) \\ - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (4.1d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{x}_M^{n+1} \bar{u}_M^{n+1} - \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ - \phi(\bar{u}_{M-1}^{n+\bar{\theta}_{M-1}}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (4.1e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}, \bar{u}_{j+1}^{n+\bar{\theta}_{j+1}}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) \\ - \phi(\bar{u}_{j-1}^{n+\bar{\theta}_{j-1}}, \bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \forall j, 1 < j < M. \end{aligned} \quad (4.1f)$$

Sur l'exemple de l'équation d'advection, nous simplifions le schéma décrit ci-dessus. Nous rappelons ensuite sous quelles conditions, il est TVD. Pour l'équation de Burgers, nous nous contentons de présenter le schéma implicite linéarisé correspondant.

## 4.2.2 Équation d'advection

Nous rappelons, que pour l'équation d'advection, la fonction de flux numérique de Godunov est donnée par  $\phi_G(u_G, u_D, \omega) = (c - \omega)^+ u_G + (c - \omega)^- u_D$ . Avant de mentionner sous quelles conditions le schéma (4.1) muni du flux de Godunov est TVD, nous souhaitons revenir sur son écriture afin, éventuellement, de la simplifier.

D'après l'équation (4.1f), pour  $j = 2, \dots, M - 1$ , autrement dit pour  $j$  tel que  $\Delta \bar{x}_j^n = 0$ , nous avons :

$$\frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi_G(\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}, \bar{u}_{j+1}^{n+\bar{\theta}_{j+1}}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi_G(\bar{u}_{j-1}^{n+\bar{\theta}_{j-1}}, \bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0.$$

En utilisant le fait que  $\bar{u}_j^{n+\bar{\theta}_j} = \bar{u}_j^{n+1}$  et  $\Delta \bar{x}_j^{n+1} = \Delta t^n (\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})$ , nous obtenons

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- \bar{u}_{j+1}^{n+\bar{\theta}_{j+1}} - (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^+ \bar{u}_{j-1}^{n+\bar{\theta}_{j-1}}}{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^+}.$$

Nous avons supposé que  $\bar{\omega}_{\frac{3}{2}} \leq \bar{\omega}_{\frac{5}{2}} \leq \dots \leq \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}$ . Trois cas de figures se présentent :

- Si  $c \leq \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}$ , nous avons  $\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_{j+1}^{n+\bar{\theta}_{j+1}} = \dots = \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}$  ;
- Si  $c \geq \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}$ , nous avons  $\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_{j-1}^{n+\bar{\theta}_{j-1}} = \dots = \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}$  ;
- Si  $\bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}} < c < \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}$ , nous déduisons des deux lignes précédentes que

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M} - (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}}{(c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})}.$$

Ces trois cas de figures peuvent être synthétisés en une unique formule. En effet, nous observons que, dans tous les cas, on a :

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{\left[ (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^+ - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^+ \right] \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1} + \left[ (c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}})^- - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})^- \right] \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}}{(c - \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) - (c - \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}})}. \quad (4.2)$$

Cette formulation revient en fait, à appliquer, pour  $j = 2, \dots, M - 1$ , le schéma suivant :

$$\frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi_{\mathcal{G}}(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) - \phi_{\mathcal{G}}(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Profitant de l'égalité (4.2), nous pouvons également remplacer dans le schéma (4.1) les équations (4.1d) et (4.1e) par respectivement

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{x}_1^{n+1} \bar{u}_1^{n+1} - \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{\frac{3}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) &= 0, \\ \frac{\Delta \bar{x}_M^{n+1} \bar{u}_M^{n+1} - \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) &= 0. \end{aligned}$$

Pour résumer, appliquer le schéma (4.1) muni de la fonction de flux numérique de Godunov (2.9) à l'équation d'advection, équivaut à appliquer le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \phi(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \quad i-1 \neq j \neq i+1, \\ \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \\ \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) - \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \\ \frac{\Delta \bar{x}_1^{n+1} \bar{u}_1^{n+1} - \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{\frac{3}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \\ \frac{\Delta \bar{x}_M^{n+1} \bar{u}_M^{n+1} - \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) = 0, \\ \frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \quad 1 < j < M. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Comme dans la première section, nous voudrions savoir sous quelles conditions le schéma (4.3) muni du flux de Godunov est TVD. Dans le Chapitre 2, nous avons formulé ces conditions pour le schéma où l'addition s'appuie sur les interfaces (voir Théorème 2). Par un raisonnement analogue, nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 8** *Sous les conditions*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) \quad \forall j \notin \{i-1, i\}, & \Delta t^n \left[ (c - \omega_{j+\frac{1}{2}})^{+\frac{1-\theta_{j+1}}{\Delta x_{j+1}^{n+1}}} - (c - \omega_{j+\frac{1}{2}})^{-\frac{1-\theta_j}{\Delta x_j^{n+1}}} \right] \leq 1, \\ (ii) & \Delta t^n \left[ (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^{+\frac{1-\bar{\theta}_1}{\Delta \bar{x}_1^{n+1}}} - (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^{-\frac{1-\theta_{i-1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1}}} \right] \leq 1, \\ (iii) & \Delta t^n \left[ (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^{+\frac{1-\theta_{i+1}}{\Delta x_{i+1}^{n+1}}} - (c + \omega_{i+\frac{1}{2}})^{-\frac{1-\bar{\theta}_M}{\Delta \bar{x}_M^{n+1}}} \right] \leq 1, \\ (iv) & -\Delta t^n (c - \bar{\omega}_{\frac{3}{2}})^{-\frac{1-\bar{\theta}_1}{\Delta \bar{x}_1^{n+1}}} \leq 1, \\ (v) & \Delta t^n (c - \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}})^{+\frac{1-\bar{\theta}_M}{\Delta \bar{x}_M^{n+1}}} \leq 1, \end{array} \right.$$

le schéma en maillage mobile avec ajout de points (4.3) est TVD.

Dans un premier temps, nous nous contentons d'ajouter des nœuds sans faire bouger le maillage. Par exemple, considérant que  $|u_i^n - u_{i+1}^n|$  est grand, nous décidons de l'addition à l'instant  $t^{n+1}$  de deux nœuds entre  $x_i^n$  et  $x_{i+1}^n$ , répartis uniformément, l'un confondu avec  $x_i^n$  à l'instant  $t^n$ , l'autre avec  $x_{i+1}^n$ . Le maillage ainsi généré est schématisé sur la Figure 4.5.

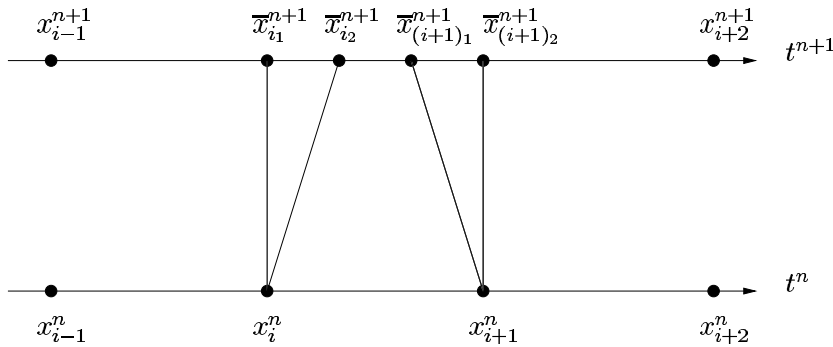


FIG. 4.5 – Addition "uniforme".

Sur la Figure 4.6, nous avons représenté la solution initiale et la solution approchée après seulement une itération en temps du schéma pour l'équation d'advection avec  $c = 0$  (on résout donc  $u_t = 0!$ ). Nous remarquons sur la solution approchée la présence de marches. Nous l'expliquons par le fait qu'en l'interface  $\bar{x}_{j+\frac{1}{2}}$ , la méthode de Godunov résout un problème de Riemann, dont les états à gauche et à droite sont égaux à l'instant  $t^n$ . En effet, nous avons posé  $\bar{u}_1^n = \bar{u}_M^n = u_i^n$ .

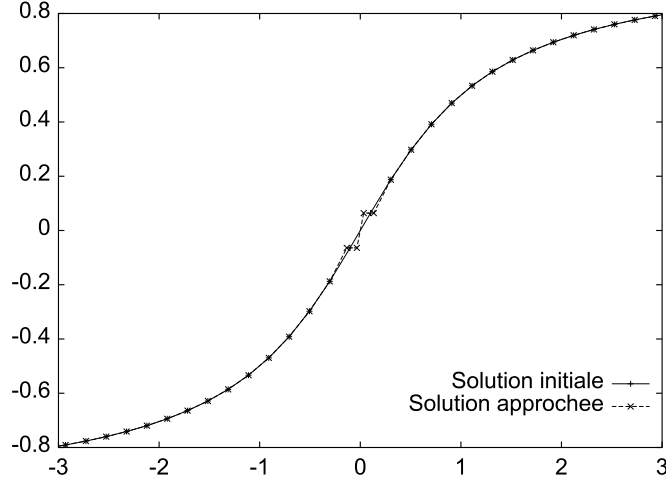


FIG. 4.6 – Solutions à  $t = 0$  (100 nœuds) et à  $t = 0.1$  (102 nœuds).

Nous n'aurions pas rencontré cette difficulté si nous avions choisi de raisonner sur les interfaces. Si nous nous plaçons dans le cadre de la Figure 4.2, l'adaptation du schéma (2.12-2.13-2.16) au maillage à topologie non-constante s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \phi(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \forall j \notin \{i, i+1\}, \\ \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} - \Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \bar{\omega}_{\frac{1}{2}}) \\ \quad - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^{n+\theta_i}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \\ \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) \\ \quad - \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \bar{\omega}_{M+\frac{1}{2}}) = 0, \\ \frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \phi(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \forall j, 1 \leq j \leq M. \end{array} \right.$$

En chaque interface, le schéma résout également un problème de Riemann, où cette fois les états à gauche et à droite sont distincts. Malgré cette remarque, nous persistons dans notre choix qui, nous le rappelons, consiste à opérer sur les sommets du maillage, dans l'optique du passage à plus d'une dimension en espace.

Pour remédier au problème de marches, il faut donc affecter d'autres grandeurs que  $u_i^n$  à  $\bar{u}_1^n$  et  $\bar{u}_M^n$ . Pour ce faire, nous écrivons  $\bar{u}_1^n$  et  $\bar{u}_M^n$  comme une combinaison linéaire de  $u_{i-1}^n$ ,  $u_i^n$  et  $u_{i+1}^n$ , soit

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^n &= \lambda u_{i-1}^n + \mu u_i^n + \nu u_{i+1}^n, \\ \bar{u}_M^n &= \lambda' u_{i-1}^n + \mu' u_i^n + \nu' u_{i+1}^n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nous demandons aux paramètres  $\lambda, \nu, \mu, \lambda', \nu'$  et  $\mu'$  de conserver certaines propriétés intrinsèques :

- préservation de la conservativité du schéma; en d'autres termes, il leur est demandé d'être tels que  $\Delta x_i^n u_i^n = \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n + \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n$ . Nous obtenons alors les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \bar{x}_M^n \lambda' + \Delta \bar{x}_1^n \lambda' = 0, \\ \Delta \bar{x}_M^n \nu' + \Delta \bar{x}_1^n \nu' = 0, \\ \Delta \bar{x}_M^n (\mu' - 1) + \Delta \bar{x}_1^n (\mu - 1) = 0. \end{cases}$$

- préservation d'un champ constant; si  $u_{i-1}^n = u_i^n = u_{i+1}^n$ , il semble légitime de vouloir que  $\bar{u}_1^n = u_i^n$ , ce qui se traduit par la condition suivante :

$$\lambda + \mu + \nu = 1.$$

- préservation d'un champ linéaire; si

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\frac{\Delta x_{i-1}^n + \Delta x_i^n}{2}} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\frac{\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n}{2}} = \nabla,$$

nous voulons que

$$\frac{\bar{u}_1^n - u_{i-1}^n}{\frac{\Delta x_{i-1}^n + \Delta \bar{x}_1^n}{2}} = \frac{u_{i+1}^n - \bar{u}_M^n}{\frac{\Delta \bar{x}_M^n + \Delta x_{i+1}^n}{2}} = \nabla,$$

autrement dit

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^n &= u_i^n - \frac{\Delta \bar{x}_M^n}{2} \nabla, \\ \bar{u}_M^n &= u_i^n + \frac{\Delta \bar{x}_1^n}{2} \nabla. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si nous identifions les termes en  $u_{i-1}^n$  pour  $\bar{u}_1^n$  dans les expressions (4.4) et (4.5), nous avons alors que

$$\lambda(\Delta x_{i-1}^n + \Delta x_i^n) - \nu(\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n) = \Delta \bar{x}_M^n.$$

Pour déterminer les inconnues  $\lambda, \nu, \mu, \lambda', \nu'$  et  $\mu'$ , nous disposons donc de trois groupes d'équations

$$\begin{cases} \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu' - 1}{\mu - 1} = -\frac{\Delta \bar{x}_1^n}{\Delta \bar{x}_M^n}, \\ \text{(au sens } \exists \alpha \mid \lambda' = \alpha \lambda, \nu' = \alpha \nu, \mu' - 1 = \alpha(\mu - 1), -\Delta \bar{x}_1^n = \alpha \Delta \bar{x}_M^n), \\ \lambda + \mu + \nu = 1, \\ \lambda(\Delta x_{i-1}^n + \Delta x_i^n) - \nu(\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n) = \Delta \bar{x}_M^n. \end{cases}$$

Nous proposons de poser  $\mu = 1$ . En résolvant le système écrit ci-dessus, nous trouvons facilement que

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^n &= u_i^n - \frac{\Delta \bar{x}_M^n}{\Delta x_{i-1}^n + 2\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ \bar{u}_M^n &= u_i^n + \frac{\Delta \bar{x}_1^n}{\Delta x_{i-1}^n + 2\Delta x_i^n + \Delta x_{i+1}^n} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Les Figures 4.7(a) et 4.8(a) montrent la solution initiale sur un maillage composé de 100 nœuds et la solution approchée générée par le schéma (4.3) et (4.6). Elles sont consacrées à la résolution de l'équation d'advection avec  $c = 0$  et les données initiales respectives  $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$  et  $u^0(x) = H(x)$ . Comme précédemment, nous nous

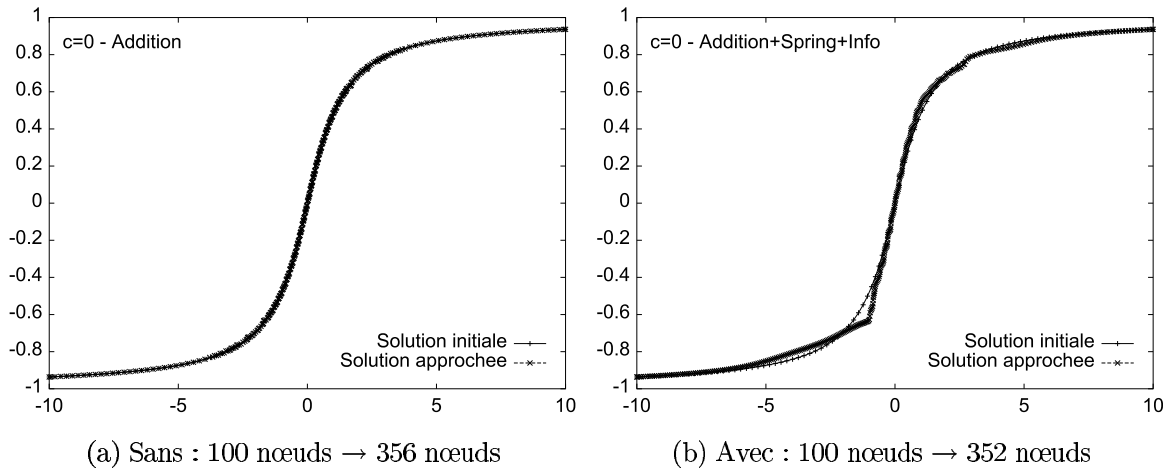


FIG. 4.7 – Solution initiale et solution approchée.

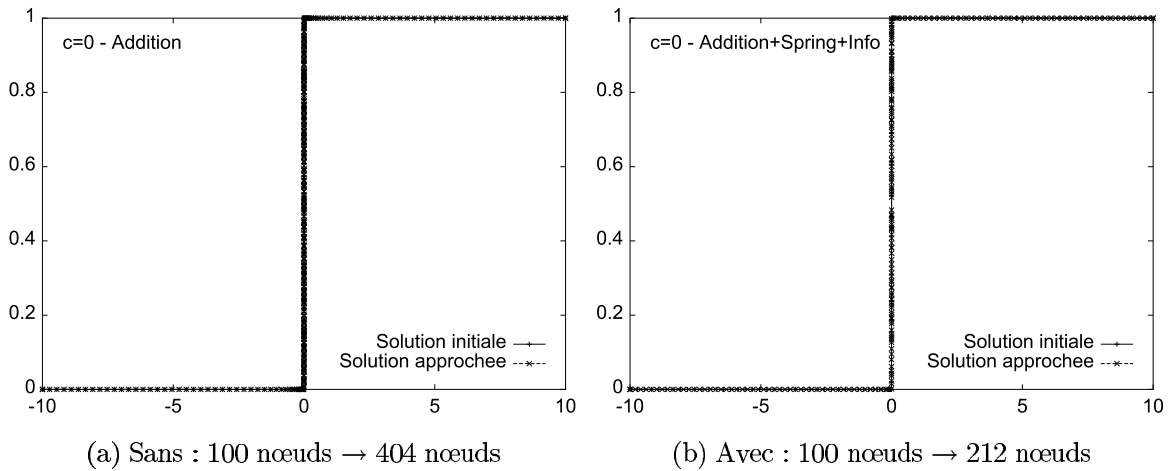


FIG. 4.8 – Solution initiale et solution approchée.

sommes contentés d'ajouter deux nœuds uniformément entre les sommets  $x_i^n$  et  $x_{i+1}^n$ , fixes au cours du temps, si  $|u_{i+1}^n - u_i^n|$  est jugé grand. En particulier, nous avons choisi comme critère :  $|u_{i+1}^n - u_i^n| \geq \text{cste} \times \text{TV}$ , où TV désigne la variation totale moyenne de la solution courante. D'autre part, afin d'éviter une surabondance de points, nous avons ajouté une contrainte de taille minimale des cellules de contrôle (de la forme  $x_{i+1}^n - x_i^n \geq \Delta x^{\min}$ ).

Les Figures 4.9(a) et 4.10(a) montrent la solution initiale sur un maillage composé de 100 nœuds et la solution approchée générée par le schéma (4.3) et (4.6) pour

la résolution de l'équation d'advection avec  $c = 1$  avec les mêmes données initiales (respectivement  $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$  et  $u^0(x) = H(x)$ ).

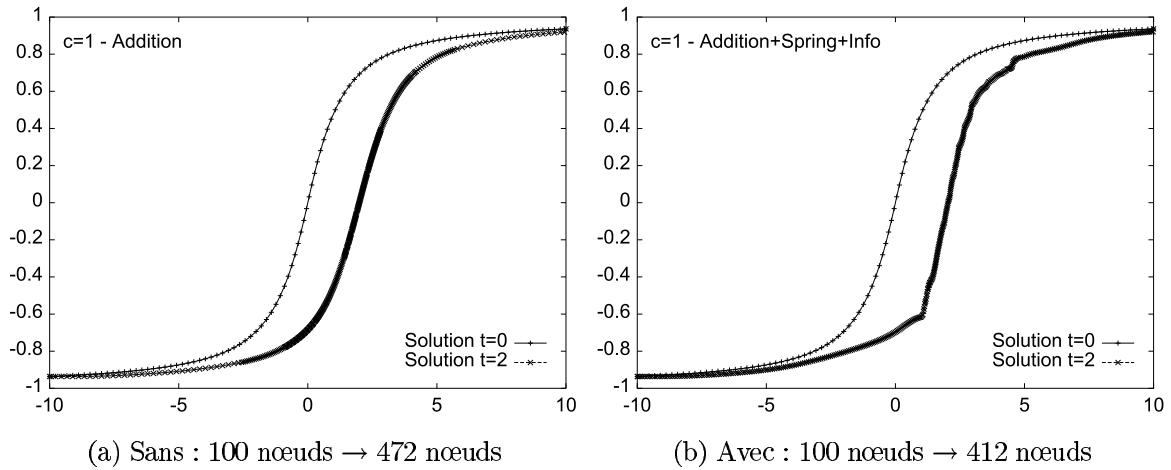


FIG. 4.9 – Solutions à  $t = 0$  et  $t = 2$ .

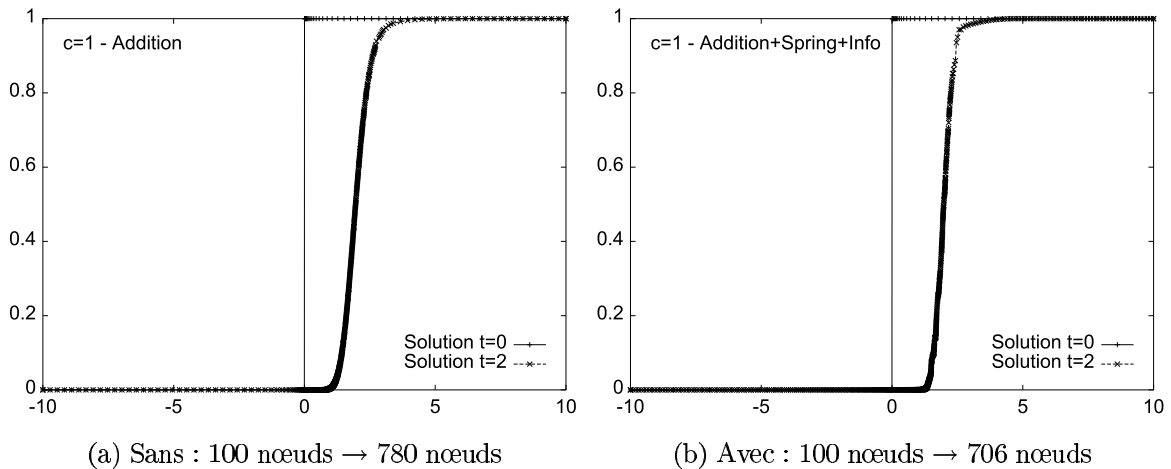


FIG. 4.10 – Solutions à  $t = 0$  et  $t = 2$ .

Une autre approche consiste à considérer l'addition comme complément au maillage mobile auto-adaptatif. Pour ce faire, nous proposons la démarche suivante :

1. en premier lieu, un critère décide de l'ajout éventuel de points ; supposons que le nœud  $x_i^n$  se subdivise à l'instant  $t^{n+1}$  en  $M$  ( $M \geq 1$ ) nœuds, notés  $\bar{x}_1^{n+1}, \dots, \bar{x}_M^{n+1}$  ; à chaque  $\bar{x}_j^{n+1}$ , nous associons une grandeur  $\bar{x}_j^n$ , que nous considérons comme la position du point à l'instant  $t^n$  ;
2. par une interpolation, nous calculons ensuite  $\bar{u}_j^n$ , qui correspond à une estimation de la solution  $u^n$  en ce point ;



3. nous appliquons alors l'algorithme **Spring+Info**, décrit dans la section précédente, afin de déterminer la position des nœuds  $\bar{x}_j^{n+1}$ ;
4. il nous reste finalement à appliquer le schéma numérique.

Les Figures 4.7(b), 4.8(b), 4.9(b) et 4.10(b) illustrent cette démarche. Les Figures 4.7(b) et 4.9(b) sont consacrées à la résolution de l'équation d'advection avec respectivement  $c = 0$  et  $c = 1$ , où la donnée initiale est  $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$ . Nous avons alors choisi de poser  $\alpha = 0.1$  dans la mise en œuvre de l'algorithme **Spring**. Il en est de même pour les Figures 4.8(b) et 4.10(b) à la différence que la donnée initiale est la fonction de Heaviside et avons pris  $\alpha = 0.01$ . Le fait de faire bouger les points provoque quelques instabilités, principalement observables sur les Figures 4.7(b) et 4.9(b).

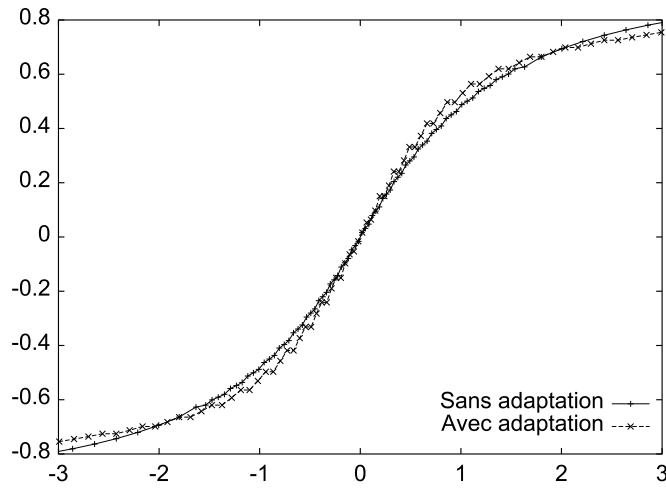


FIG. 4.11 – Solutions après une itération en temps.

Sur la Figure 4.11, nous avons représenté les solutions obtenues après une itération en temps avec et sans adaptation. Avec adaptation, les nœuds, y compris ceux résultant de l'addition, se déplacent dans un souci d'équidistribution. Or, certains ont tendance à s'éloigner des régions où leur addition semble légitime d'après nos critères. Nous justifions ainsi les irrégularités observées. Nous proposons alors de proscrire le déplacement des points issus de l'addition. Pour ces derniers, nous posons  $F_i^{(k)} = 0$  dans l'algorithme **Spring**. Les Figures 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 représentent les résultats obtenus avec cet artifice.

### 4.2.3 Équation de Burgers

Nous nous contentons ici d'écrire le schéma implicite linéarisé correspondant à (4.3) sur l'exemple de l'équation de Burgers. Il consiste à utiliser la fonction de flux numérique suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_i^{n+\theta_i}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) &= \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^{n+\theta_i} - u_i^n) \\ &\quad + \psi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n), \end{aligned}$$

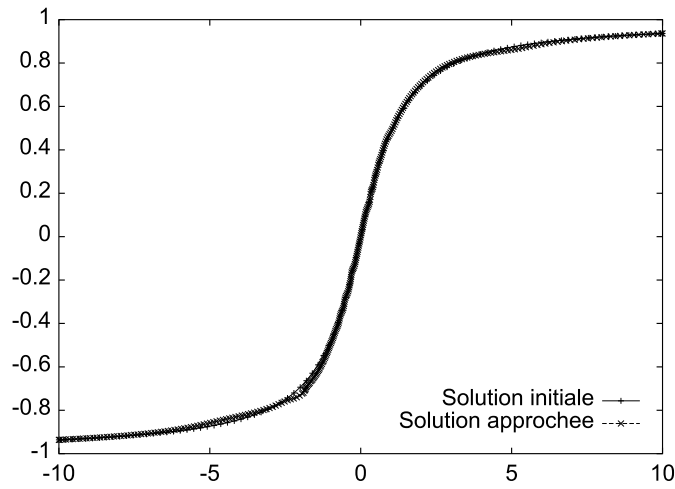


FIG. 4.12 – Solution initiale (100 nœuds) et solution approchée (316 nœuds).

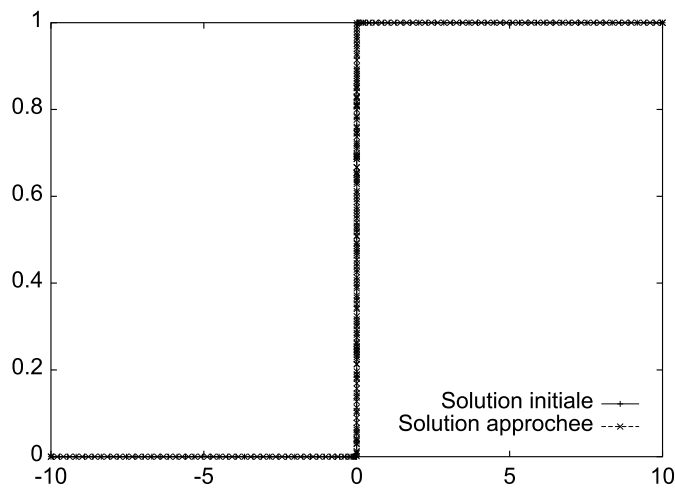
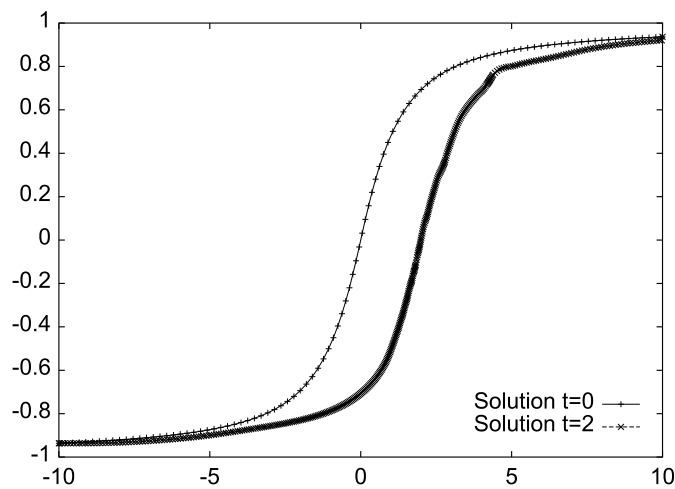


FIG. 4.13 – Solution initiale (100 nœuds) et solution approchée (254 nœuds).

FIG. 4.14 – Solutions à  $t = 0$  (100 nœuds) et  $t = 2$  (418 nœuds).

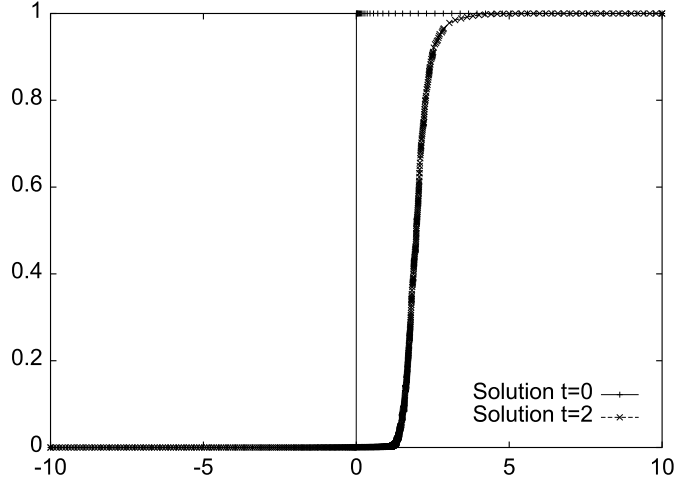


FIG. 4.15 – Solutions à  $t = 0$  (100 nœuds) et  $t = 2$  (748 nœuds).

où  $\phi$  est la fonction de flux numérique de Godunov et la fonction  $\psi$  est soit la fonction de flux numérique de Engquist-Osher, soit la version entropique du flux de Roe [51]. On considère alors ses itérations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \forall j \notin \{i-1, i+1\}, \\ \\ \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \\ \\ \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \\ \\ \frac{\Delta \bar{x}_1^{n+1} \bar{u}_1^{n+1} - \Delta \bar{x}_1^n \bar{u}_1^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{\frac{3}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \\ \\ \frac{\Delta \bar{x}_M^{n+1} \bar{u}_M^{n+1} - \Delta \bar{x}_M^n \bar{u}_M^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(\bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{M-\frac{1}{2}}) = 0, \\ \\ \frac{\Delta \bar{x}_j^{n+1} \bar{u}_j^{n+1}}{\Delta t^n} + \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \phi(\bar{u}_1^{n+\bar{\theta}_1}, \bar{u}_M^{n+\bar{\theta}_M}, \bar{\omega}_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \forall j = 2, \dots, M-1. \end{array} \right.$$

Comme pour l'advection, nous ajoutons au préalable des nœuds uniformément, c'est-à-dire sans faire appel aux procédures Spring et Info. Les résultats ainsi obtenus

sont présentés sur les Figures 4.16 et 4.17, où les données initiales sont respectivement  $u^0(x) = H(x)$  et  $u^0(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ .

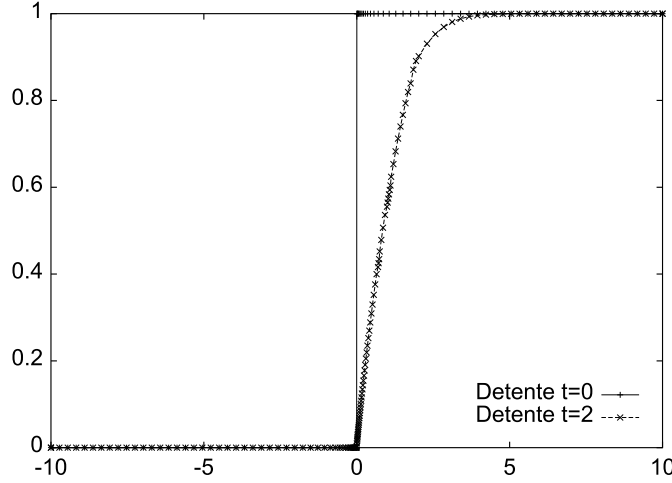


FIG. 4.16 – Détentes à  $t = 0$  (100 nœuds) et  $t = 2$  (146 nœuds).

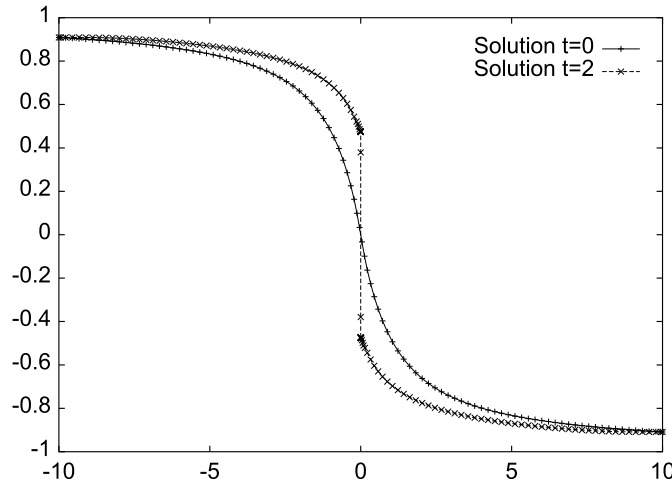
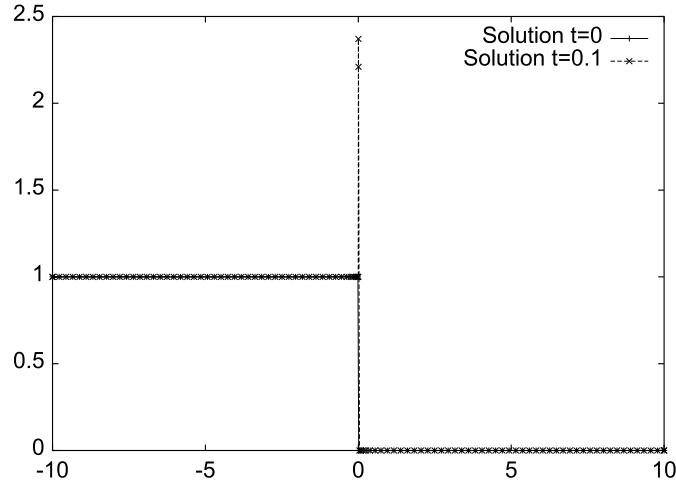
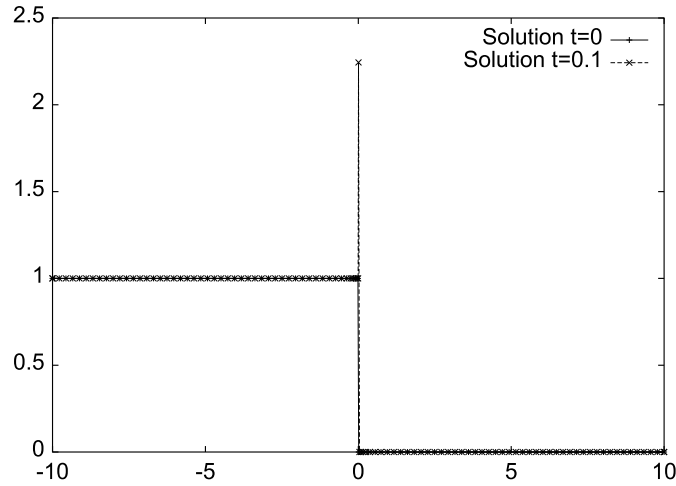


FIG. 4.17 – Solutions à  $t = 0$  (100 nœuds) et  $t = 2$  (124 nœuds).

Lorsque la donnée initiale est  $u^0(x) = 1 - H(x)$ , nous observons après seulement une itération en temps des instabilités, imagées en la Figure 4.18. Or, nous remarquons que ces instabilités se produisent également sans addition de points. En effet, nous montrons sur la Figure 4.19 une itération en temps de notre schéma sur un maillage fixe à topologie constante.

Nous rappelons que le schéma implicite linéarisé correspondant à (2.12-2.13-2.16) s'écrit alors pour tout  $j$  :

$$\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} = \Delta x_j^n u_j^n - \Delta t^n \left( \mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) \right), \quad (4.7)$$

FIG. 4.18 – Solutions à  $t = 0$  (100 nœuds) et  $t = 0.1$  (102 nœuds).FIG. 4.19 – Solutions à  $t = 0$  et  $t = 0.1$ .

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) &= \phi_{\mathcal{G}}(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \psi'_u(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_j^{n+\theta_j} - u_j^n) \\ &\quad + \psi'_v(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}} - u_{j+1}^n). \end{aligned}$$

Effectuons l'opération  $-\theta_j \times (4.7) + (1 - \theta_j)\Delta x_j^n u_j^n$ . Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} &\left[ \Delta x_j^n + \theta_j \Delta t^n \left( \psi'_u(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}}) + \omega_{j+\frac{1}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \psi'_v(u_{j-1}^n, u_j^n, \omega_{j-\frac{1}{2}}) - \omega_{j-\frac{1}{2}} \right) \right] (u_j^{n+\theta_j} - u_j^n) \\ &- \theta_j \Delta t^n \psi'_u(u_{j-1}^n, u_j^n, \omega_{j-\frac{1}{2}})(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}} - u_{j-1}^n) \\ &+ \theta_j \Delta t^n \psi'_v(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}} - u_{j+1}^n) \\ &= \theta_j \Delta t^n \left[ \phi_{\mathcal{G}}(u_{j-1}^n, u_j^n, \omega_{j-\frac{1}{2}}) - \phi_{\mathcal{G}}(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}}) + (\omega_{j-\frac{1}{2}} - \omega_{j+\frac{1}{2}})u_j^n \right]. \end{aligned}$$

Le vecteur  $\delta^n = (\delta_j^n)_j = (u_j^{n+\theta_j} - u_j^n)_j$  est donc solution d'un système linéaire  $A\delta^n = b$ . Notons  $A = (a_{j,k})_{j,k}$  et  $b = (b_j)_j$ . Utilisant le fait que  $\omega_{j-\frac{1}{2}} = 0, \forall j$ , nous avons :

$$\begin{cases} a_{j,k} &= 0 \text{ pour } k < j-1 \text{ ou } k > j+1, \\ a_{j,j} &= \Delta x_j^n + \theta_j \Delta t^n (\psi'_u(u_j^n, u_{j+1}^n, 0) - \psi'_v(u_{j-1}^n, u_j^n, 0)), \\ a_{j,j-1} &= -\theta_j \Delta t^n \psi'_u(u_{j-1}^n, u_j^n, 0), \\ a_{j,j+1} &= \theta_j \Delta t^n \psi'_v(u_j^n, u_{j+1}^n, 0), \\ b_j &= \theta_j \Delta t^n (\phi_{\mathcal{G}}(u_{j-1}^n, u_j^n, 0) - \phi_{\mathcal{G}}(u_j^n, u_{j+1}^n, 0)). \end{cases}$$

Nous proposons de prendre  $\psi = \phi_{\mathcal{EO}}$ , où  $\phi_{\mathcal{EO}}$  désigne la fonction de flux numérique de Engquist-Osher, qui s'écrit en maillage mobile comme suit :

$$\phi_{\mathcal{EO}}(u_g, u_d, \omega) = \frac{1}{2}(u_g - \omega)^{+2} + \frac{1}{2}(u_d - \omega)^{-2} - \frac{1}{2}\omega^2.$$

Nous déduisons de cette expression que  $\frac{\partial \phi_{\mathcal{EO}}}{\partial u_g} = (u_g - \omega)^+$ ,  $\frac{\partial \phi_{\mathcal{EO}}}{\partial u_d} = (u_d - \omega)^-$ . Remplaçant  $\phi_{\mathcal{G}}$ ,  $\psi'_u$  et  $\psi'_v$  par leurs expressions, nous trouvons :

$$\begin{cases} a_{j,k} &= 0 \text{ pour } k < j-1 \text{ ou } k > j+1, \\ a_{j,j} &= \Delta x_j^n + \theta_j \Delta t^n |u_j^n|, \\ a_{j,j-1} &= -\theta_j \Delta t^n (u_{j-1}^n)^+, \\ a_{j,j+1} &= \theta_j \Delta t^n (u_{j+1}^n)^-, \\ b_j &= \frac{\theta_j \Delta t^n}{2} \left( \max \left( (u_{j-1}^n)^{+2}, (u_j^n)^{-2} \right) - \max \left( (u_j^n)^{+2}, (u_{j+1}^n)^{-2} \right) \right). \end{cases}$$

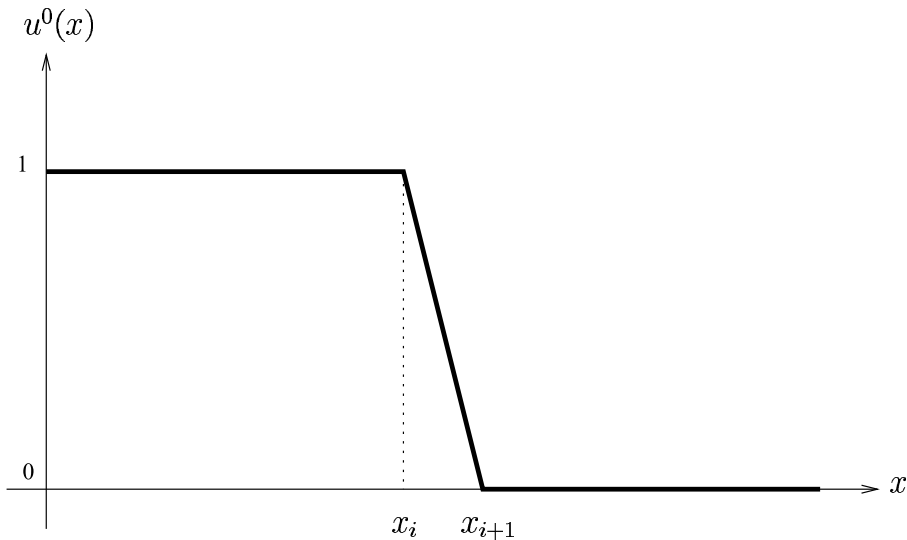


FIG. 4.20 – Représentation discrète initiale d'un choc.

Dans les simulations numériques rapportées sur les Figures 4.18 et 4.19, nous nous situons ici dans le cadre précis de la Figure 4.20 ci-dessus. La matrice  $A$  et le vecteur

$b$  s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} a_{j,j-1} &= \begin{cases} -\Delta t^n \theta_j & \text{si } 2 \leq j \leq i+1, \\ 0 & \text{si } i+2 \leq j \leq N, \end{cases} \\ a_{j,j} &= \begin{cases} \Delta x_j^n + \Delta t^n \theta_j & \text{si } 1 \leq j \leq i, \\ \Delta x_j^n & \text{si } i+1 \leq j \leq N, \end{cases} \\ a_{j,j+1} &= 0, \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

et

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+1, \\ \frac{\Delta t^n \theta_{i+1}}{2} & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

La résolution du système linéaire nous donne

$$\delta_j^n = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+1, \\ \frac{\theta_{i+1}}{2} \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n} & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

Dans l'implémentation du schéma, nous avons choisi  $\theta_j = 1, \forall j$ . Nous avons alors

$$u_j^{n+1} = u_j^{n+\theta_j} = u_j^n + \delta_j^n = \begin{cases} u_j^n & \text{si } j \neq i+1, \\ u_j^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t^n}{\Delta x_{i+1}^n} & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

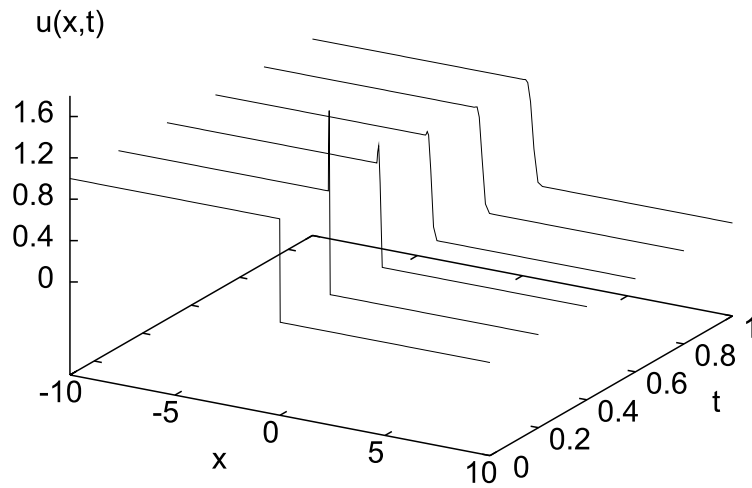
Les instabilités, observées sur la Figure 4.19, proviennent donc du  $(i+1)^{\text{ème}}$  terme, en particulier du second membre  $b$ , non nul, en ce point. Si nous prenons un pas de temps dix fois plus petit, autrement dit égal à 0.01, elles tendent à disparaître, comme le montre la Figure 4.21.

Nous greffons désormais l'addition de points aux algorithmes de mouvement de maillage. La technique est la même que pour l'advection. Les résultats ainsi obtenus sont présentés sur les Figures 4.22 et 4.23, où les données initiales sont respectivement  $u^0(x) = H(x)$  et  $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$ .

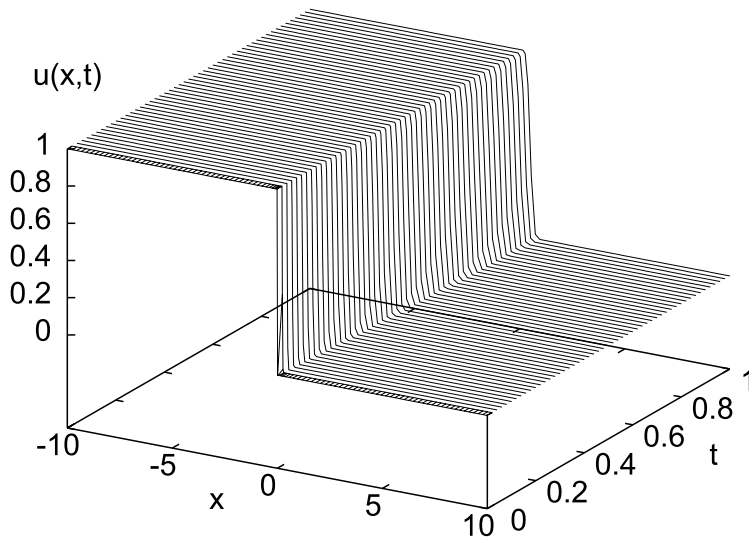
Dans cette section, nous nous sommes intéressés à l'addition locale de points et avons présenté un schéma numérique cohérent avec notre conception de l'addition. L'ajout de points correspond à une volonté de raffiner localement le maillage. Si nous observons les Figures 3.8, 3.11 ou encore 4.13, nous remarquons des populations relativement importantes de nœuds dans des régions de faible activité. C'est pourquoi, nous consacrons la section suivante à la soustraction de points, dont le but est de réduire le nombre de points "inutiles".

## 4.3 Soustraction

Dans cette section, nous nous intéressons à des algorithmes mettant en œuvre la soustraction (i.e. l'élimination) de points dans un maillage. Dans la littérature, son



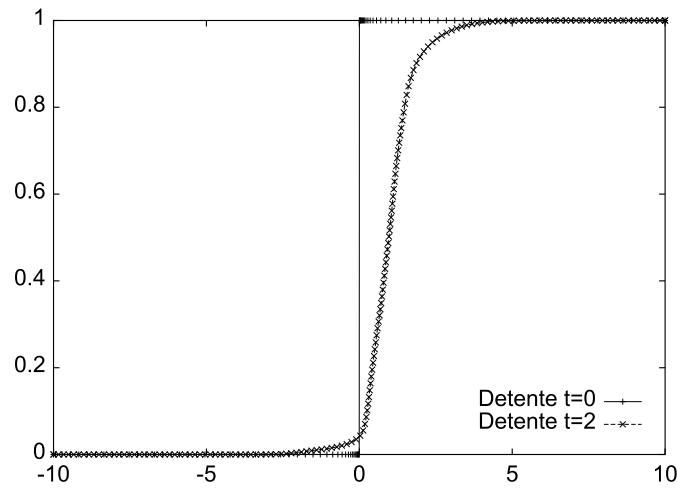
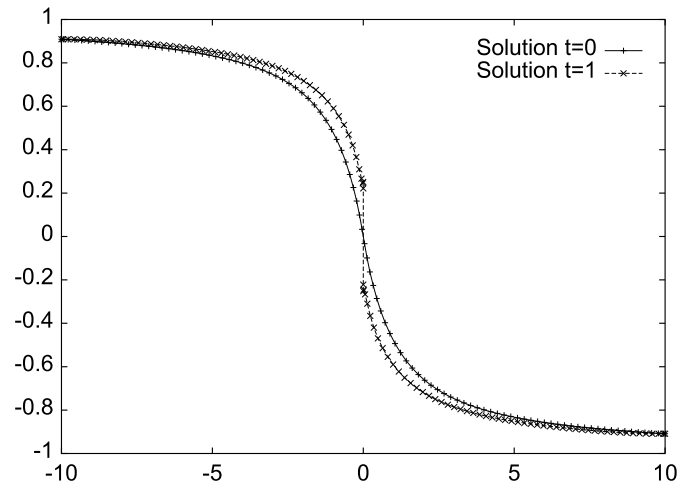
(a)  $\Delta t^n = 0.1$



(b)  $\Delta t^n = 0.01$

FIG. 4.21 – Solutions en fonction du temps.



FIG. 4.22 – Détentes à  $t = 0$  (100 nœuds) et  $t = 2$  (164 nœuds).FIG. 4.23 – Solutions à  $t = 0$  (100 nœuds) et  $t = 1$  (108 nœuds).

implémentation est similaire à celle de l'addition "classique". Un critère fondé en général sur une estimation d'erreur permet de décider de la suppression d'une cellule sur le maillage courant  $\mathcal{M}^n$ , comme le schématise la Figure 4.24. La solution courante est alors réinitialisée sur le nouveau maillage  $\widehat{\mathcal{M}}^n$  par le biais de l'interpolation. Nous disposons donc d'un maillage  $\widehat{\mathcal{M}}^n$  et d'une solution  $\widehat{u}^n$ , sur lesquels nous appliquons finalement le schéma numérique.

Nous proposons une approche différente, dont la conception s'apparente à celle de l'addition, présentée dans la section précédente. Nous voyons la soustraction comme la fusion à un certain temps de deux interfaces.

Nous nous situons donc dans le cadre précis de la Figure 4.25 ci-dessus, où les interfaces  $x_{i-\frac{1}{2}}^n$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}^n$  se rencontrent à l'instant  $t^{n+1}$  pour n'en former qu'une seule. Cette fusion a pour effet la suppression de la cellule  $\mathcal{C}_i^n$  à l'instant  $t^{n+1}$ . Comme pour l'addition de point, il existe une approche duale pour laquelle le raisonnement est plutôt centré sur les sommets. On y reviendra ultérieurement. Le schéma (2.12-2.13)

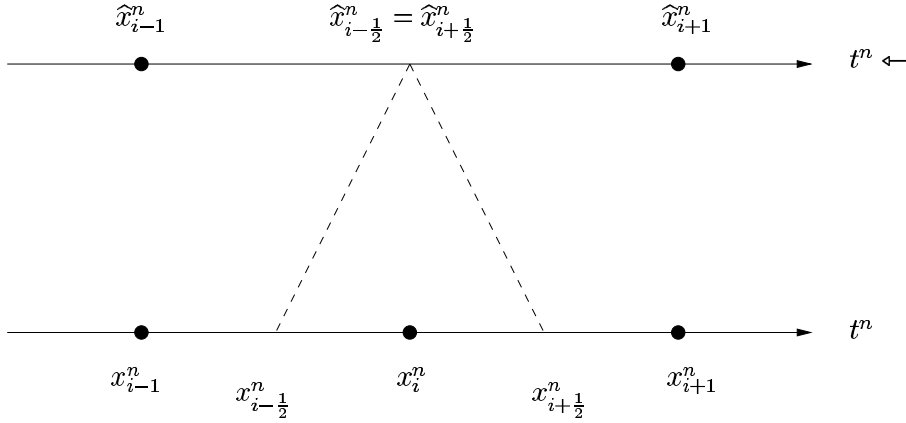


FIG. 4.24 – Algorithme "classique" de soustraction de points dans un maillage.

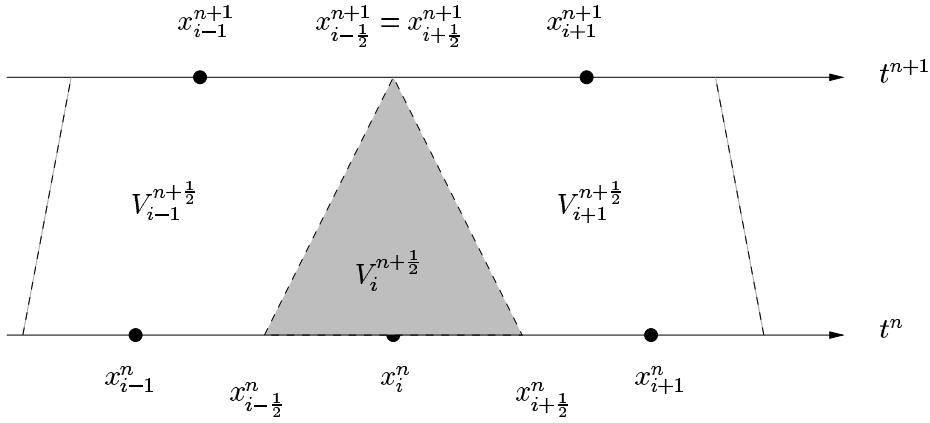


FIG. 4.25 – Fusion de deux points-interfaces.

nous donne une contrainte forte sur les vitesses des points convergents, à savoir :

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} - \omega_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_i^n}{\Delta t^n} > 0. \quad (4.8)$$

Pour un pas de temps, nous considérons le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \phi(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_j^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \quad |j-i| > 1, \end{aligned} \quad (4.9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^*, \omega_{i-\frac{1}{2}}) \\ - \phi(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (4.9b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \phi(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) \\ - \phi(u_i^*, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \end{aligned} \quad (4.9c)$$

avec  $\theta_j \in [0, 1]$ ,  $\Delta x_j^{n+\theta_j}$  et  $u_j^{n+\theta_j}$  définis par (2.16) pour  $j \neq i$ . Nous avons en outre  $\Delta x_i^{n+1} = 0$ , ce qui implique  $\Delta x_i^{n+\theta_i} = (1 - \theta_i)\Delta x_i^n$  et  $u_i^{n+\theta_i} = u_i^n$ . Nous choisissons  $u_i^*$  tel que

$$-\frac{\Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \phi(u_i^*, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^*, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0. \quad (4.10)$$

La valeur fictive  $u_i^*$  peut être interprétée comme une valeur de  $u_i^{n+1}$ . D'autre part, le schéma conserve sa forme générale, y compris pour la cellule qui disparaît au cours du pas de temps.

Comme dans la section concernant l'addition de points, nous évoquons, dans un premier temps, les propriétés de ce schéma muni du flux numérique de Godunov sur l'équation d'advection et présentons ensuite le schéma implicite linéarisé correspondant pour l'équation de Burgers.

### 4.3.1 Équation d'advection

Le Théorème 7 (page 49) nous assure que le schéma (4.9) en maillage mobile avec soustraction de points est à variation totale décroissante sous les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \forall j \notin \{i-1, i\}, \quad \Delta t^n \left[ (c - \omega_{j+\frac{1}{2}})^+ \frac{1 - \theta_{j+1}}{\Delta x_{j+1}^{n+1}} - (c - \omega_{j+\frac{1}{2}})^- \frac{1 - \theta_j}{\Delta x_j^{n+1}} \right] \leq 1, \\ (ii) \quad -\Delta t^n (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^- \frac{1 - \theta_{i-1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1}} \leq 1, \\ (iii) \quad \Delta t^n (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ \frac{1 - \theta_{i+1}}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} \leq 1. \end{array} \right.$$

Nous décidons de la suppression de la cellule  $C_i^n$  à l'instant  $t^{n+1}$  si  $|u_i^n - u_{i-1}^n| < \varepsilon$  et  $|u_i^n - u_{i+1}^n| < \varepsilon$ . Comme pour l'addition, nous pouvons ajouter à ce critère la contrainte,  $x_{i+1}^n - x_{i-1}^n < \Delta x^{\max}$ , afin d'éviter une soustraction excessive. Si la solution est instationnaire, nous risquons de supprimer des cellules, jugées insignifiantes à l'instant  $t^n$ , néanmoins utiles à l'instant  $t^{n+1}$ . Nous proposons alors de coupler la procédure de soustraction avec l'algorithme **Spring+Info**, afin d'être cohérent avec l'évolution de l'écoulement. Les Figures 4.26 et 4.27 représentent la solution initiale  $H(x)$  et la solution de l'équation d'advection avec respectivement  $c = 0$  et  $c = 1$ , générée par le schéma avec  $\Delta t^n \equiv 0.1$ . Il est clair que dans ce cas la soustraction de point élimine progressivement presque tous les points du maillage, ce qui montre sa robustesse.

La Figure 4.28 montre la solution initiale  $u^0(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$  et la solution à  $t = 2$  obtenue également en prenant  $\Delta t^n \equiv 0.1$  pour l'équation d'advection avec  $c = 1$ .  $\varepsilon$  est alors égal à 0.0001. La solution initiale est représentée sur un maillage de 1000 nœuds, alors que la solution à  $t = 2$  n'en comporte que 867. A titre indicatif, si  $\varepsilon = 0.001$ , après 20 itérations en temps, il ne reste que 308 cellules.

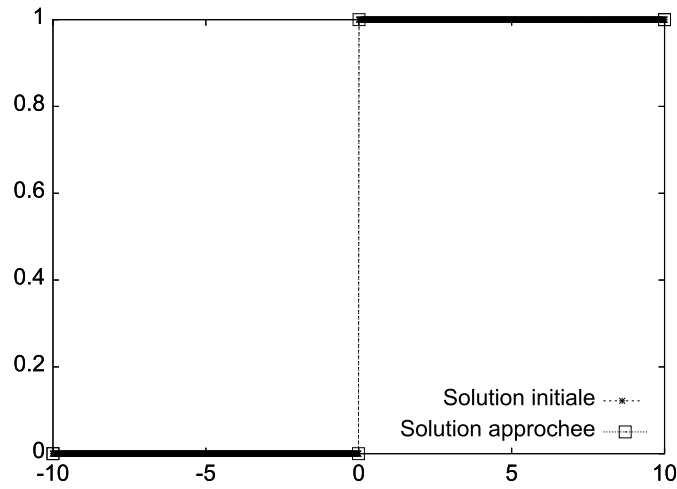


FIG. 4.26 – Solution initiale (1000 nœuds) et solution approchée (4 nœuds).

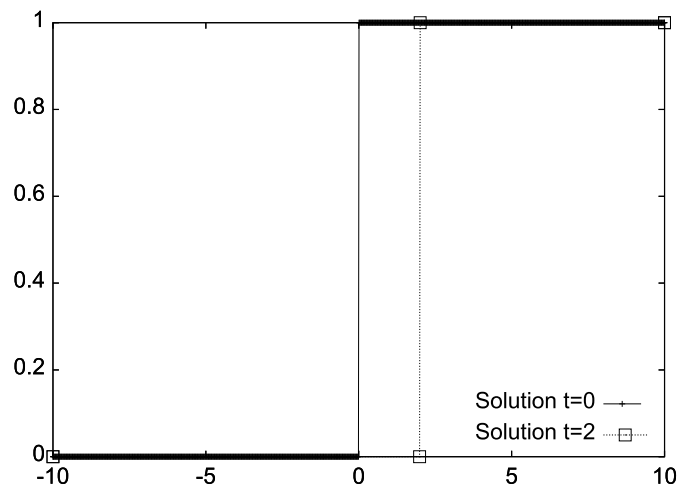


FIG. 4.27 – Solutions à  $t = 0$  (1000 nœuds) et  $t = 2$  (4 nœuds).

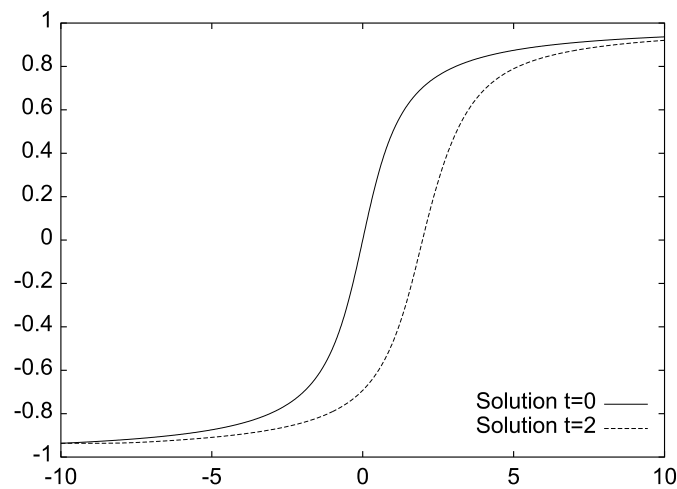


FIG. 4.28 – Solutions à  $t = 0$  (1000 nœuds) et  $t = 2$  (867 nœuds).

### 4.3.2 Équation de Burgers

Nous nous contentons ici d'écrire le schéma implicite linéarisé correspondant à (4.9) sur l'exemple de l'équation de Burgers. Il consiste à considérer les itérations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x_j^{n+1} u_j^{n+1} - \Delta x_j^n u_j^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_{j-1}^{n+\theta_{j-1}}, u_i^{n+\theta_j}, \omega_{j-\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall j, |j-i| > 1, \\ \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1} - \Delta x_{i-1}^n u_{i-1}^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^*, \omega_{i-\frac{1}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_{i-2}^{n+\theta_{i-2}}, u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, \omega_{i-\frac{3}{2}}) = 0, \\ \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - \Delta x_{i+1}^n u_{i+1}^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, u_{i+2}^{n+\theta_{i+2}}, \omega_{i+\frac{3}{2}}) \\ \quad - \mathcal{F}(u_i^*, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \end{array} \right.$$

avec  $u_i^*$  choisi tel que

$$-\frac{\Delta x_i^n u_i^n}{\Delta t^n} + \mathcal{F}(u_i^*, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^*, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Nous utilisons les linéarisations suivantes :

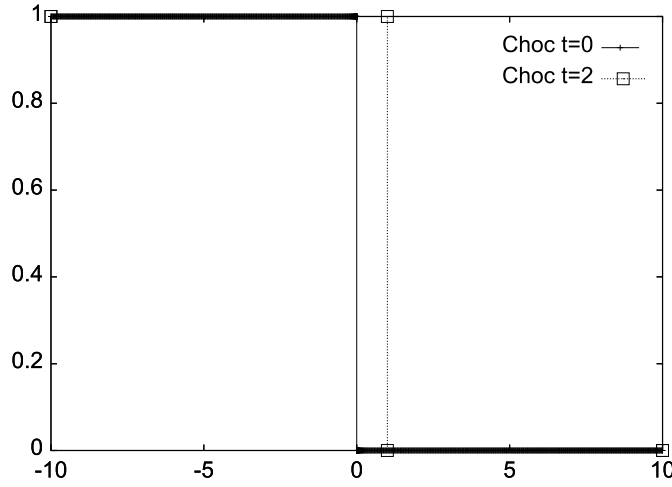
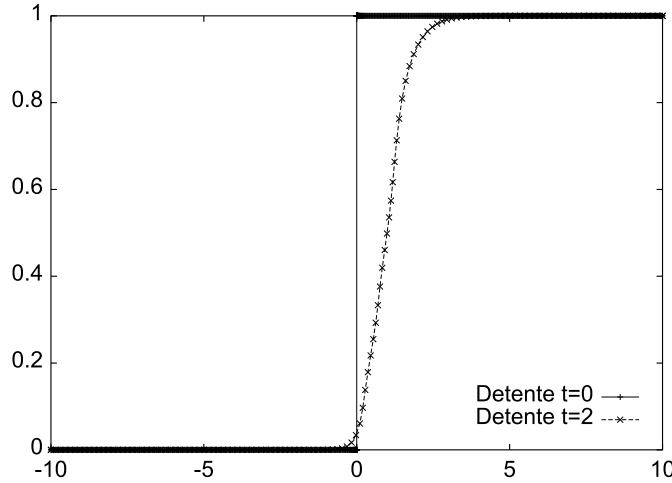
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(u_j^{n+\theta_j}, u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}}, \omega_{j+\frac{1}{2}}) = \phi(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}}) \\ \quad + \psi'_u(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_j^{n+\theta_j} - u_j^n) \\ \quad + \psi'_v(u_j^n, u_{j+1}^n, \omega_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1}^{n+\theta_{j+1}} - u_{j+1}^n), \quad \forall j \notin \{i-1, i\} \\ \mathcal{F}(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}}, u_i^*, \omega_{i-\frac{1}{2}}) = \phi(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}})(u_{i-1}^{n+\theta_{i-1}} - u_{i-1}^n) \\ \quad + \psi'_v(u_{i-1}^n, u_i^n, \omega_{i-\frac{1}{2}})(u_i^* - u_i^n), \\ \mathcal{F}(u_i^*, u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}) = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}}) + \psi'_u(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_i^* - u_i^n) \\ \quad + \psi'_v(u_i^n, u_{i+1}^n, \omega_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\theta_{i+1}} - u_{i+1}^n), \end{array} \right.$$

où  $\phi$  est la fonction de flux numérique de Godunov (2.11) et la fonction  $\psi$  est soit la fonction de flux numérique de Engquist-Osher, soit la version entropique du flux de Roe.

Comme pour l'advection, nous décidons de la suppression de la cellule  $C_i^n$  à l'instant  $t^{n+1}$  si  $|u_i^n - u_{i-1}^n| < \varepsilon$  et  $|u_i^n - u_{i+1}^n| < \varepsilon$ . Nous utilisons également la version implicite du schéma écrit ci-dessus. La Figure 4.29 représente un choc à  $t = 0$  et  $t = 2$ . La Figure 4.30 montre une détente aux mêmes instants.

### 4.3.3 Choix de la procédure de soustraction

Nous nous interrogeons ici sur la généralisation d'une telle méthode de soustraction-élimination de points aux dimensions supérieures. Comme pour l'addition, nous pen-

FIG. 4.29 – Chocs à  $t = 0$  (1000 nœuds) et  $t = 2$  (4 nœuds).FIG. 4.30 – Détentes à  $t = 0$  (1000 nœuds) et  $t = 2$  (138 nœuds).

sons qu'il est plus naturel de gérer, en deux et trois dimensions d'espace, la fusion de sommets plutôt que la fusion d'interfaces, comme nous l'avons présentée ci-dessus. Nous proposons donc une approche différente où la soustraction naît de la rencontre de deux sommets à l'instant  $t^{n+1}$ , schématisée sur la Figure 4.31.

Une différence avec la première optique est que  $\Delta x_j^{n+1} \neq 0 \forall j$ . Nous pouvons ainsi appliquer le schéma (2.12-2.13-2.16) comme il est écrit dans la première section. Il nous reste finalement à fusionner les cellules  $\mathcal{C}_i^{n+1}$  et  $\mathcal{C}_{i+1}^{n+1}$  en une seule, notée  $\mathcal{C}$ , de mesure  $\Delta x = \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}$ , sur laquelle nous approchons (de manière conservative) la moyenne de la solution par

$$u = \frac{\Delta x_i^{n+1} u_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}}.$$

À première vue, cette démarche s'apparente plus à la soustraction "classique", décrite au début de la section, qu'à l'approche précédemment proposée. Néanmoins,

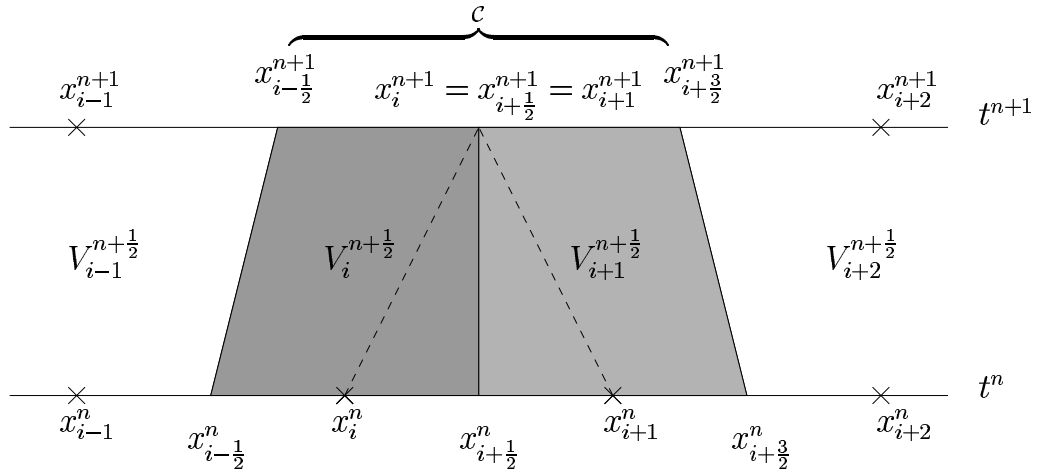


FIG. 4.31 – Soustraction par fusion de deux sommets.

nous nous sommes limités ici à la fusion de deux sommets. Rien ne nous empêche de considérer la fusion de  $M$  sommets  $x_{i_1}^n, \dots, x_{i_M}^n$  où  $M \geq 2$ . Par exemple, situons-nous dans le cadre de la Figure 4.32 ( $M = 3$ ), où les sommets  $x_{i-1}^n, x_i^n$  et  $x_{i+1}^n$  se rencontrent à l'instant  $t^{n+1}$  pour n'en former qu'un seul.

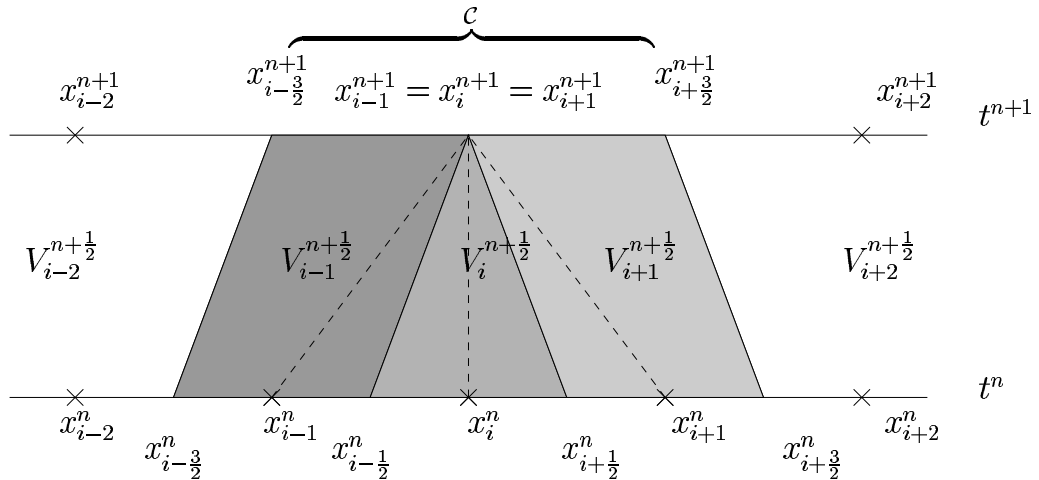


FIG. 4.32 – Soustraction par fusion de plusieurs (plus de deux) sommets.

La géométrie du maillage ainsi obtenue est semblable à la géométrie du maillage représenté sur la Figure 4.25. Nous appliquons donc exactement le schéma (4.9) avec (4.10) et retrouvons la contrainte (4.8). Une étape supplémentaire réside dans la fusion des cellules  $\mathcal{C}_j$  pour  $j = 1, \dots, M$  en une seule, notée  $\mathcal{C}$ , de mesure

$$\Delta x = \sum_{j=1}^M \Delta x_{i_j}^{n+1} = \Delta x_{i_1}^{n+1} + \Delta x_{i_M}^{n+1},$$

sur laquelle nous approchons de manière toujours conservative la moyenne de la solu-

tion par

$$u = \frac{\Delta x_{i_1}^{n+1} u_{i_1}^{n+1} + \Delta x_{i_M}^{n+1} u_{i_M}^{n+1}}{\Delta x_{i_1}^{n+1} + \Delta x_{i_M}^{n+1}}.$$

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et implémenté différents algorithmes de variation de topologie pour l'adaptation dynamique de maillage, complémentaires au schéma numérique proposé dans le Chapitre 2 et aux algorithmes d'adaptation dynamique à topologie constante détaillés dans le Chapitre 3. Nous disposons donc d'un ensemble de méthodes numériques permettant l'adaptation dynamique de maillage de manière complète et intégrée à la méthode de volumes finis initiale. Nous obtenons un schéma qui conservent des propriétés essentielles de précision, de monotonie et de stabilité (prouvées dans le cas de l'advection linéaire). Ce schéma est adaptable à l'équation de Burgers, traitée en utilisant une linéarisation du schéma arbitrairement explicite-implicite (quelques instabilités peuvent apparaître, qui ne sont pas directement reliées à l'adaptation dynamique de maillage). Enfin, nous avons veillé à ce que les procédures soient adaptables aussi facilement que possible aux dimensions supérieures.



## Deuxième partie

### Méthodes sur un maillage variable en deux dimensions d'espace



Dans cette partie, nous nous intéressons à des méthodes de type volumes finis sur des maillages mobiles auto-adaptatifs, en deux dimensions d'espace.

Dans le Chapitre 5, nous rappelons tout d'abord la méthodologie adoptée pour résoudre numériquement le système des équations d'Euler bidimensionnelles dans un domaine à frontière mobile et en maillage non-structuré mobile. Dans le cadre d'une formulation ALE, il convient d'approcher numériquement de nouveaux termes convectifs; ceci est fait à l'aide d'une généralisation du solveur de Roe aux maillages dynamiques. L'intégration en temps du système discret est réalisée par un schéma implicite linéarisé. Dans le but d'adapter automatiquement le maillage à la solution, nous nous intéressons ensuite au schéma proposé écrit sur un maillage mobile à topologie non constante.

Dans le Chapitre 6, on complète les outils d'adaptation de maillages, présentés au Chapitre 5, par des critères d'adaptation. On propose en même temps une algorithmique relative à chaque outil envisagé. Pour ce faire, nous cherchons dans un premier temps à induire un mouvement pertinent aux sommets du maillage (le nombre de sommets et la topologie du maillage étant fixes). Nous proposons ensuite des stratégies d'addition et de soustraction de points fondées sur les techniques de raffinement et déraffinement suggérées au Chapitre 5. Afin d'illustrer les algorithmes proposés, nous étudions quelques cas-tests sur l'équation d'advection en deux dimensions d'espace.

Dans le Chapitre 7, on cherche à appliquer les méthodes numériques proposées dans l'ensemble de la thèse à des calculs d'écoulements bidimensionnels en maillages non structurés, mobiles et à topologie variable. Après avoir rappelé brièvement les méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations d'Euler en maillages mobiles non-structurés, on abordera deux types de calculs assez différents (autour de profils de type NACA) : des calculs d'écoulements stationnaires, puis des calculs instationnaires autour de profils mobiles et/ou déformables, similaires à ce que l'on peut rencontrer en simulations d'interactions fluide-structure en aérodynamique.



# Chapitre 5

## Méthode des volumes finis sur un maillage mobile pour la résolution des équations d'Euler en deux dimensions d'espace

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	110
5.2	Lois de conservation . . . . .	111
5.3	Principes de la discrétisation dans $\mathcal{E}$ . . . . .	112
5.4	Schéma à topologie non-constante . . . . .	121
5.5	Conclusion . . . . .	140

---

### Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord la méthodologie adoptée pour résoudre numériquement le système des équations d'Euler bidimensionnelles dans un domaine à frontière mobile. Utilisant une formulation en volumes finis sur un maillage non-structuré et mobile, l'évaluation des termes convectifs repose sur la généralisation du solveur de Roe aux maillages dynamiques, alors que l'intégration en temps du système discret est réalisée par un schéma implicite linéarisé. Dans le but d'adapter automatiquement le maillage à la solution, nous nous intéressons ensuite au schéma proposé écrit sur un maillage mobile à topologie non-constante.

## 5.1 Introduction

Une grande variété de problèmes en Mécanique des Fluides traite des écoulements dans un domaine à frontière mobile. A titre d'exemple, mentionnons l'écoulement compressible transsonique autour d'un profil d'aile d'avion en mouvement ou l'effet de la houle sur un obstacle.

La déformation du domaine au cours du temps demande qu'à chaque instant, sa discrétisation soit calculée et remise à jour. Guillard et N'Konga [40, 42] ont alors introduit une méthode à maillage dynamique, qui s'adapte particulièrement bien aux formulations en volumes finis des lois de conservation et à l'utilisation de flux numériques classiques. Son seul inconvénient est le besoin de modifier les coordonnées des points du maillage après chaque pas de temps, et donc de recalculer à chaque itération temporelle les variables géométriques associées au déplacement.

Dans cette thèse, nous souhaitons profiter de la nécessité de bouger le maillage pour l'adapter automatiquement et dynamiquement à la solution. Poursuivant cet objectif, nous pensons aussi aux opérations de raffinement et déraffinement, couramment utilisées dans la littérature. Néanmoins, nous proposons une démarche différente, qui fait l'originalité de notre travail : nous voyons le raffinement comme la distinction à un instant donné de nœuds préalablement confondus, et inversement le déraffinement comme la fusion à un instant donné de deux nœuds préalablement distincts. Ainsi, les opérations de raffinement et de déraffinement apparaissent comme une généralisation des méthodes de volumes finis mobiles à des volumes respectivement naissants ou disparaissants.

Ce chapitre est donc consacré à la présentation des méthodes à maillages dynamiques de Guillard et N'Konga, ainsi qu'à leur généralisation aux maillages mobiles à topologie non-constante. Le cadre de notre étude sera celui des équations d'Euler en deux dimensions d'espace.

L'évaluation des termes convectifs repose sur l'extension des solveurs de Riemann aux maillages dynamiques, en particulier sur le solveur approché de Roe. Les schémas explicites sont généralement caractérisés par une condition de stabilité de type CFL. Afin de s'affranchir de ces limitations, nous construisons une méthode implicite par linéarisation des flux. Dans le chapitre suivant, nous chercherons à coupler le mouvement, les opérations d'addition et soustraction de nœuds de la discrétisation à des critères automatiques d'adaptation instationnaire. Nous nous limiterons donc ici à des maillages variables non auto-adaptatifs.

Ce chapitre reprend et détaille les principaux points évoqués ci-dessus. Après une présentation sommaire du modèle mathématique dans la Section 5.2, nous décrivons dans la Section 5.3 les caractéristiques de la méthodologie numérique utilisée pour la résolution du système des équations d'Euler. Pour ce faire, nous rappelons dans un premier temps les principes des méthodes de volumes finis utilisant un maillage mobile non-structuré et une formulation centré-sommet. Une attention particulière est ensuite portée à l'évaluation des termes convectifs, en particulier à l'extension du solveur de

Roe aux maillages dynamiques, ainsi qu'au schéma d'Euler implicite linéarisé pour l'intégration en temps.

Dans le but d'adapter automatiquement le maillage à la solution, nous nous sommes finalement intéressés dans la Section 5.4 au schéma étudié écrit sur un maillage mobile à topologie non-constante. Nous cherchons précisément à étendre les méthodes de volumes finis mobiles à des volumes naissants (volume nul au début du pas de temps) ou disparaissants (volume nul à la fin du pas de temps), comme il l'a été fait en une dimension d'espace.

## 5.2 Lois de conservation

Nous introduisons maintenant le cadre de notre étude : les équations d'Euler dans un domaine à frontière mobile. Les équations d'Euler modélisent des écoulements non-visqueux pour un gaz parfait, et constituent de ce fait le modèle de base de la dynamique des gaz compressibles.

Soit  $\mathcal{D}(t) \subset \mathbb{R}^2$  le domaine occupé par le fluide à l'instant  $t$ . On définit l'espace spatio-temporel contenant le fluide entre les instants  $t = 0$  et  $t = T$  par :

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t=0}^{t=T} \mathcal{D}(t) \times \{t\} .$$

Les équations d'Euler en deux dimensions d'espace forment un système hyperbolique de lois de conservation. Il s'écrit sous forme conservative pour  $(\vec{x}, t) \in \mathcal{E}$  :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}(W) = 0 \quad (5.1)$$

avec

$$W = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T, \quad \vec{\mathcal{F}}(W) = (F(W), G(W))^T \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)^T .$$

$W = W(\vec{x}, t)$  est le vecteur des variables conservatives.  $\vec{\mathcal{F}}(W)$  est le flux convectif dont les composantes sont données par :

$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix} .$$

où  $\rho, u, v, E$  et  $p$  représentent respectivement la masse volumique, les composantes selon  $x$  et  $y$  de la vitesse, l'énergie totale par unité de volume et la pression. La pression  $p$  est déduite des autres variables par la loi d'état des gaz parfaits :

$$p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right) ,$$

où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques ( $\gamma = 1.4$  pour un gaz diatomique).

Chaque ligne de l'équation vectorielle (5.1) traduit une équation de conservation. Ci-dessous, nous écrivons explicitement chaque ligne et indiquons le principe de conservation qui lui correspond :

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0 : \text{conservation de la masse;} \\ \left. \begin{aligned} (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y &= 0 \\ (\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y &= 0 \end{aligned} \right\} &\text{conservation de la quantité de mouvement;} \\ E_t + [(E + p)u]_x + [(E + p)v]_y &= 0 : \text{conservation de l'énergie.} \end{aligned}$$

### 5.3 Principes de la discrétisation dans $\mathcal{E}$

Dans cette section, nous rappelons les principes des méthodes à maillages dynamiques introduites par Guillard et N'Konga [40, 42] pour la résolution numérique du système des équations d'Euler (5.1) dans le domaine spatio-temporel  $\mathcal{E}$ .

#### 5.3.1 Méthode des volumes finis

On cherche à approcher la solution du système des équations d'Euler (5.1) par un schéma en volumes finis conservatif. On adopte alors un processus itératif temporel, qui consiste à déterminer la solution à des instants successifs  $t^n$ . On désigne par  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  le pas de temps.

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\mathcal{D}(t)$ , composée de  $NS$  sommets ( $NS$  indépendant de  $t$ ). A chaque sommet  $s_i \in \mathcal{T}_h$ , on associe une surface de contrôle, notée  $\mathcal{C}_i(t)$ , obtenue en joignant successivement les milieux des arêtes incidentes à  $s_i$  et les centres de gravité des triangles contenant  $s_i$  (voir la Figure 5.1). On obtient ainsi une seconde discrétisation de  $\mathcal{D}(t)$  souvent qualifiée de discrétisation duale de  $\mathcal{T}_h$ .

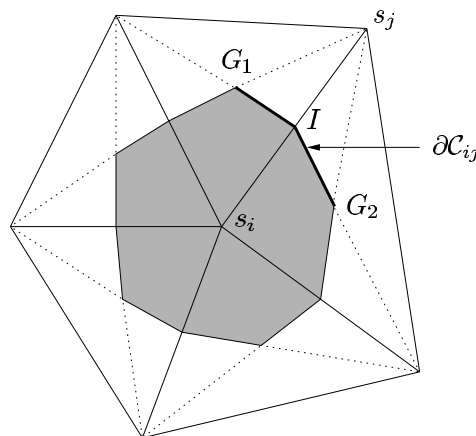


FIG. 5.1 – Surface de contrôle  $\mathcal{C}_i(t^n)$



On note  $\mathcal{N}(i)$  l'ensemble des sommets voisins de  $s_i$ . Malgré la mobilité des nœuds de la discrétisation au cours du temps, on suppose dans cette section la topologie du maillage constante. Une conséquence importante de cette hypothèse est l'invariance de l'ensemble  $\mathcal{N}(i)$  au cours du temps. La frontière de la cellule  $\mathcal{C}_i(t)$ , notée  $\partial\mathcal{C}_i(t)$ , se décompose en intersections de frontières de cellules voisines :

$$\partial\mathcal{C}_i(t) = \bigcup_{j \in \mathcal{N}(i)} \partial\mathcal{C}_{ij}(t),$$

où  $\partial\mathcal{C}_{ij}(t) = \partial\mathcal{C}_i(t) \cap \partial\mathcal{C}_j(t)$  (voir la Figure 5.1).

A ce stade de notre étude, on dispose de partitions séquentielles du domaine de calcul en cellules de contrôle, définies à l'instant  $t^n$  par :

$$\mathcal{C}_i^n \equiv \mathcal{C}_i(t^n).$$

On définit Soient  $\mathcal{Q}_i$  le volume balayé par la cellule  $\mathcal{C}_i(t)$  entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , et  $\mathcal{S}_{ij}$  la surface balayée par l'interface  $\partial\mathcal{C}_{ij}(t)$  entre les mêmes instants (voir la Figure 5.2) :

$$\mathcal{Q}_i = \bigcup_{t=t^n}^{t=t^{n+1}} \mathcal{C}_i(t) \times \{t\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{ij} = \bigcup_{t=t^n}^{t=t^{n+1}} \partial\mathcal{C}_{ij}(t) \times \{t\}.$$

La frontière de  $\mathcal{Q}_i$ , notée  $\partial\mathcal{Q}_i$ , se compose de l'ensemble  $\{\mathcal{S}_{ij} : j \in \mathcal{N}(i)\}$ , des cellules  $\mathcal{C}_i^n$  et  $\mathcal{C}_i^{n+1}$  :

$$\partial\mathcal{Q}_i = (\mathcal{C}_i^n \times \{t^n\}) \cup (\mathcal{C}_i^{n+1} \times \{t^{n+1}\}) \cup \left( \bigcup_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{S}_{ij} \right).$$

Les équations discrètes s'obtiennent en intégrant les équations (5.1) sur le volume de contrôle  $\mathcal{Q}_i$ . Après application de la formule de Green, on obtient :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{\mathcal{C}_i(t)} \frac{\partial}{\partial t} W \, d\vec{x} \, dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\mathcal{C}_i(t)} \vec{\mathcal{F}}(W) \cdot \vec{n}(t) \, d\sigma \, dt = 0,$$

où  $\vec{n}(t)$  est la normale unitaire sortante en tout point de  $\partial\mathcal{C}_i(t)$ . Appelons  $\vec{w}$  le champ des vitesses du maillage. Du théorème de transport de Reynolds, qui établit la relation

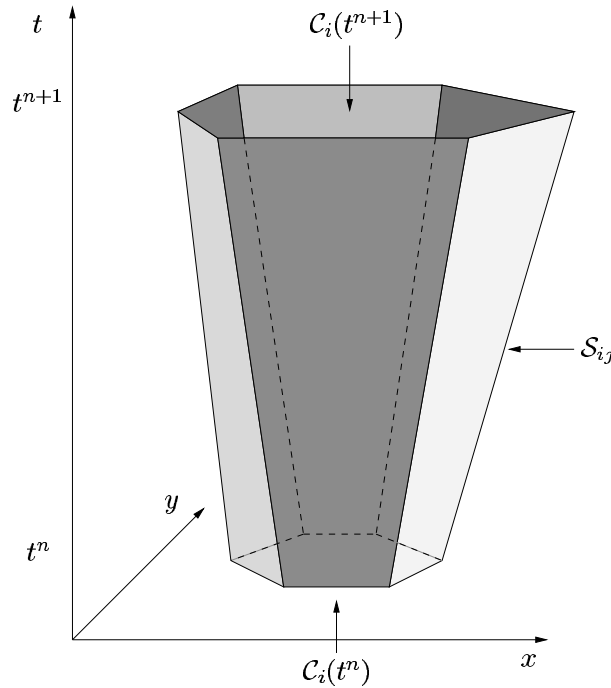
$$\frac{d}{dt} \left( \iint_{\mathcal{C}_i(t)} W \, d\vec{x} \right) = \iint_{\mathcal{C}_i(t)} \frac{\partial}{\partial t} W \, d\vec{x} + \int_{\partial\mathcal{C}_i(t)} W \vec{w} \cdot \vec{n}(t) \, d\sigma,$$

on déduit que

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{d}{dt} \left( \iint_{\mathcal{C}_i(t)} W \, d\vec{x} \right) dt + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\mathcal{C}_{ij}(t)} (\vec{\mathcal{F}}(W) - W \vec{w}) \cdot \vec{n}(t) d\sigma dt = 0.$$

En utilisant des moyennes par cellule, on écrit finalement :

$$\boxed{A_i^{n+1} W_i^{n+1} - A_i^n W_i^n + \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\vec{\mathcal{F}}_{ij} \cdot \vec{\eta}_{ij} - \sigma_{ij} \|\vec{\eta}_{ij}\| W_{ij}) = 0} \quad (5.2)$$

FIG. 5.2 – Volume  $Q_i$ 

où  $W_i^n$  est la moyenne de  $W$  dans la cellule  $C_i^n$ ,  $A_i^n$  est l'aire de cette cellule,  $W_{ij}$  est la valeur moyenne de  $W$  sur  $S_{ij}$ ,  $\vec{F}_{ij}$  est la valeur moyenne de  $\vec{F}(W)$  sur  $S_{ij}$ ,  $\vec{\eta}_{ij}$  est la valeur moyenne du vecteur normal à l'interface  $\partial C_{ij}$  entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$  :

$$\vec{\eta}_{ij} = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial C_{ij}(t)} \vec{n}(t) \, d\sigma dt, \quad (5.3)$$

et  $\sigma_{ij}$  est la vitesse normale moyenne de l'interface  $\partial C_{ij}$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t^n$  :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\Delta t^n \|\vec{\eta}_{ij}\|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial C_{ij}(t)} \vec{w} \cdot \vec{n}(t) \, d\sigma dt. \quad (5.4)$$

Contrairement aux méthodes de maillage fixe, le schéma (5.2) se caractérise par la présence du champ de vitesse de maillage  $\vec{w}$ . On remarque toutefois que seule sa composante normale  $\vec{w} \cdot \vec{n}$  intervient via  $\sigma_{ij}$  dans l'expression du flux numérique à travers chaque surface  $S_{ij}$ .

De l'estimation de ces variables géométriques et numériques naît le schéma. Les sous-sections suivantes sont consacrées à leur étude, et offrent ainsi une justification à la formulation définitive du schéma.

### 5.3.2 Calcul des paramètres géométriques

Le choix des paramètres géométriques  $\vec{\eta}_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  peut être justifié par des considérations sur la conservation du volume. Pour qu'un schéma soit conservatif, il faut que

le volume lui-même soit conservé. La mise à jour des aires des cellules doit être faite en respectant une loi de conservation géométrique [56]. Pour ce faire, on applique le schéma (5.2) à un champ scalaire uniforme à la place de  $W$ . Il prend ainsi la forme :

$$\boxed{A_i^{n+1} - A_i^n = \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \sigma_{ij} \|\vec{\eta}_{ij}\| .} \quad (5.5)$$

Les paramètres  $\vec{\eta}_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  sont alors choisis de telle sorte que l'aire de  $\mathcal{S}_{ij}$  soit approchée au mieux par  $\Delta t^n \sigma_{ij} \|\vec{\eta}_{ij}\|$ .

Calcul de  $\vec{\eta}_{ij}$  : soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  les triangles qui ont le segment  $[s_i, s_j]$  comme arête. Pour évaluer  $\vec{\eta}_{ij}$  (5.3), on décompose l'intégrale sur l'interface  $\partial\mathcal{C}_{ij}$  en une somme d'intégrales sur les segments composant  $\partial\mathcal{C}_{ij}$  (voir la figure 5.3). Ainsi, on écrit :

$$\vec{\eta}_{ij} = \vec{\eta}_{ij}^{\tau_1} + \vec{\eta}_{ij}^{\tau_2} \quad (5.6)$$

avec

$$\vec{\eta}_{ij}^{\tau} = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\mathcal{C}_{ij}(t) \cap \tau} \vec{n}(t) \, d\sigma dt.$$

$\partial\mathcal{C}_{ij} \cap \tau$  est le segment  $[G_\tau, I_{ij}]$  où  $G_\tau$  est le centre de gravité de  $\tau$  et  $I_{ij}$  le milieu du segment  $[s_i, s_j]$ . Appliquant la formule des trapèzes, on pose finalement :

$$\vec{\eta}_{ij}^{\tau} = \frac{1}{2} (\vec{n}_{ij}^{\tau, n} + \vec{n}_{ij}^{\tau, n+1}) \quad (5.7)$$

$$\text{où } \vec{n}_{ij}^{\tau, \star} = \int_{\partial\mathcal{C}_{ij}(t^\star) \cap \tau} \vec{n} \, d\sigma.$$

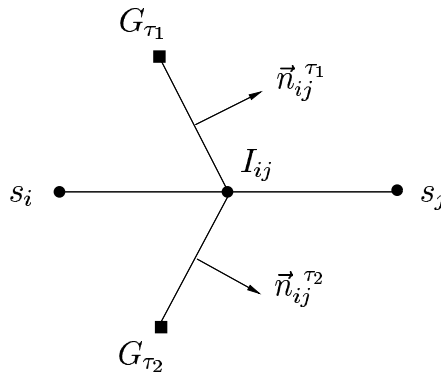


FIG. 5.3 – Interface  $\partial\mathcal{C}_{ij}$  séparant les sommets  $s_i$  et  $s_j$  à  $t = t^*$

Calcul de  $\sigma_{ij}$  :

- Une première méthode consiste à approcher la surface  $\mathcal{S}_{ij}$  par une surface plane  $S_{ij}$ , générée par le balayage du segment  $[G_{\tau_1}, G_{\tau_2}]$  entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . La vitesse moyenne de l'interface  $\partial\mathcal{C}_{ij}$  pendant l'incrément de temps  $\Delta t^n$ , notée

$\vec{w}_{ij}$ , est alors approchée par la moyenne des vitesses des centres de gravité  $G_{\tau_1}$  et  $G_{\tau_2}$ , et  $\sigma_{ij}$  par l'égalité suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\|\vec{\eta}_{ij}\|} \vec{w}_{ij} \cdot \vec{\eta}_{ij} = \frac{1}{\|\vec{\eta}_{ij}\|} \frac{\vec{w}(G_{\tau_1}) + \vec{w}(G_{\tau_2})}{2} \cdot \vec{\eta}_{ij} . \quad (5.8)$$

Si, pour mettre à jour les aires des cellules au temps  $t^{n+1}$ , nous appliquons (5.5) muni des formules (5.6-5.8), nous remarquons que  $A_i^{n+1}$  ne correspond pas exactement à l'aire de la cellule  $C_i^{n+1}$ . En effet, les aires ainsi calculées sont les aires des cellules obtenues en joignant uniquement les centres de gravité des triangles attachés au sommet considéré.

- On peut alors appliquer un raisonnement analogue à celui adopté pour le calcul de  $\vec{\eta}_{ij}$  afin de respecter davantage la géométrie spécifique de l'interface  $\partial C_{ij}$  [37, 40, 41]. On décompose l'intégrale sur  $\partial C_{ij}$  en une somme d'intégrales sur les segments composant  $\partial C_{ij}$  :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\tau_1} + \sigma_{ij}^{\tau_2}$$

avec

$$\sigma_{ij}^{\tau} = \frac{1}{\Delta t^n \|\vec{\eta}_{ij}\|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial C_{ij}(t) \cap \tau} \vec{w} \cdot \vec{n}(t) \, d\sigma dt .$$

La vitesse normale moyenne  $\sigma_{ij}^{\tau}$  du segment  $\partial C_{ij}(t) \cap \tau$  est alors obtenue comme suit :

$$\sigma_{ij}^{\tau} = \frac{1}{\|\vec{\eta}_{ij}\|} (\vec{w}_{ij}^{\tau} \cdot \vec{\eta}_{ij}^{\tau}) ,$$

où  $\vec{w}_{ij}^{\tau}$  représente la vitesse moyenne de  $\partial C_{ij} \cap \tau$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t^n$ . Si l'on appelle  $s_i, s_j$  et  $s_k$  les sommets de  $\tau$ , on a précisément :

$$\vec{w}_{ij}^{\tau} = \frac{\vec{w}(G_{\tau}) + \vec{w}(I_{ij})}{2} = \frac{1}{12} (5\vec{w}_i + 5\vec{w}_j + 2\vec{w}_k) .$$

Cette démarche a la particularité, par rapport à la première, d'offrir une formulation qui garantit la conservation d'un écoulement uniforme, et la conservation géométrique.

### 5.3.3 Schéma de Roe sur un maillage mobile

On s'intéresse ici à l'évaluation du flux numérique, noté  $\phi_{ij}$ , entre les volumes  $Q_i$  et  $Q_j$ , défini par :

$$\phi_{ij} = \vec{\mathcal{F}}_{ij} \cdot \vec{\nu}_{ij} - \sigma_{ij} W_{ij}$$

avec  $\vec{\nu}_{ij} = \frac{\vec{\eta}_{ij}}{\|\vec{\eta}_{ij}\|}$ . Le schéma (5.2) peut alors se mettre sous la forme :

$$\boxed{A_i^{n+1} W_i^{n+1} - A_i^n W_i^n + \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{\eta}_{ij}\| \phi_{ij} = 0.} \quad (5.9)$$

Soit  $\vec{\nu}$  la normale au segment  $\partial\mathcal{C}_{ij}(t^{n+\frac{1}{2}})$ , extérieure à la cellule  $\mathcal{C}_i$  dans le plan  $(x, y)$ . On note  $\nu$  et  $s$  les coordonnées portées respectivement par la normale  $\vec{\nu}$  et la tangente au segment  $\partial\mathcal{C}_{ij}(t^{n+\frac{1}{2}})$  (voir la figure 5.4). Le calcul de la valeur moyenne  $W_{ij}$  peut être réalisé par la méthode proposée par Godunov en 1959 (comme il l'a été fait en une dimension dans la Section 2.3). Sa construction repose sur la juxtaposition des solutions exactes des problèmes de Riemann, qui apparaissent en chaque interface suivant la direction de la normale  $\vec{\nu}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu} = 0 \\ W(\nu, s, t^n) = \begin{cases} W_i & \text{si } \nu < 0 \\ W_j & \text{si } \nu > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.10)$$

avec  $\mathcal{F} = \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\nu}$  et  $\vec{\nu} = \vec{\nu}_{ij}$ .

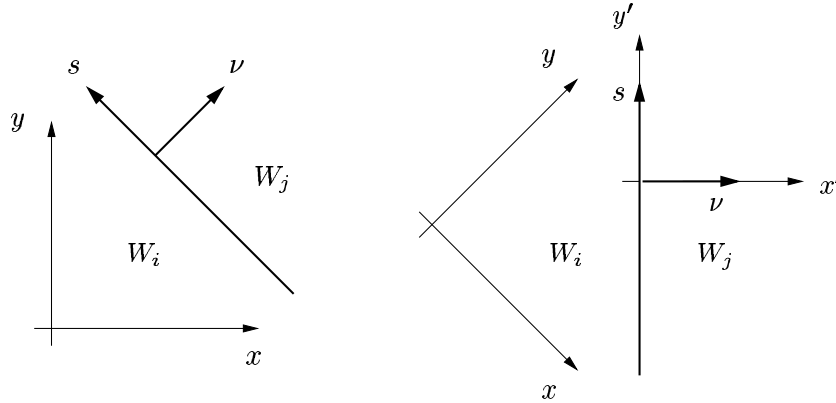


FIG. 5.4 – Problème de Riemann en deux dimensions d'espace

La résolution exacte de ce problème étant trop coûteuse, on se ramène souvent à des solveurs de Riemann approchés, en particulier ici à la généralisation du solveur de Roe aux maillages dynamiques [22]. Pour chaque problème de Riemann, Roe [52] écrit une version linéarisée en remplaçant  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}$  par  $\tilde{\mathcal{A}}_{ij} \frac{\partial W}{\partial \nu}$  dans (5.10). La matrice  $\tilde{\mathcal{A}}_{ij} = \tilde{\mathcal{A}}(W_i, W_j)$  est une matrice constante construite de manière à satisfaire les trois propriétés suivantes :

1. L'hyperbolicité :  $\tilde{\mathcal{A}}_{ij}$  est diagonalisable, de telle sorte le problème de Riemann approché est aussi de nature hyperbolique ;
2. La consistance :

$$\tilde{\mathcal{A}}(W, W) = \mathcal{A}(W)$$

où  $\mathcal{A} \equiv \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial W}$  est la matrice jacobienne du flux  $\mathcal{F}$  ;

3. La relation de saut de Rankine-Hugoniot :

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ij}(W_j - W_i) = \mathcal{F}(W_j) - \mathcal{F}(W_i) . \quad (5.11)$$

La matrice jacobienne de Roe s'écrit :

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ij} = \mathcal{A}(\tilde{W}_{ij})$$

où  $\tilde{W}_{ij}$  est une moyenne particulière des états  $W_i$  et  $W_j$ . On note :

$$W_i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_i u_i \\ \rho_i v_i \\ E_i \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} \rho_j \\ \rho_j u_j \\ \rho_j v_j \\ E_j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{W}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{ij} \\ \tilde{\rho}_{ij} \tilde{u}_{ij} \\ \tilde{\rho}_{ij} \tilde{v}_{ij} \\ \tilde{E}_{ij} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{ij} &= \frac{\sqrt{\rho_i} \rho_i + \sqrt{\rho_j} \rho_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \\ \tilde{u}_{ij} &= \frac{\sqrt{\rho_i} u_i + \sqrt{\rho_j} u_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \quad \tilde{v}_{ij} = \frac{\sqrt{\rho_i} v_i + \sqrt{\rho_j} v_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \\ \tilde{H}_{ij} &= \frac{\sqrt{\rho_i} E_i + \sqrt{\rho_j} E_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \end{aligned}$$

où  $H = \frac{E+p}{\rho}$  est l'enthalpie totale par unité de volume.

Le flux numérique  $\phi_{ij}$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = \phi_{\mathcal{R}}(W_i, W_j, \vec{n}_{ij}, \sigma_{ij}) &= \frac{\mathcal{F}(W_i) + \mathcal{F}(W_j)}{2} - \sigma_{ij} \frac{W_i + W_j}{2} \\ &\quad + |\tilde{\mathcal{A}}_{ij} - \sigma_{ij} I| \cdot \frac{W_i - W_j}{2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Le symbole  $|\cdot|$  signifie que l'on prend les valeurs absolues des valeurs propres dans la diagonalisation de  $\tilde{\mathcal{A}}_{ij} - \sigma_{ij} I$ . En d'autres termes, si l'on appelle  $T$  la matrice des vecteurs propres de  $\mathcal{A}$  et  $\Lambda$  la matrice des valeurs propres de  $\mathcal{A}$ , on a :

$$|\mathcal{A} - \sigma I| = T |\Lambda - \sigma I| T^{-1}.$$

**Remarque 10** La propriété (5.11) permet de simplifier le calcul du flux. En effet, si on note  $\mathcal{G}$  la fonction définie par  $\mathcal{G}(W) = \mathcal{F}(W) - \sigma W$  et  $\mathcal{B}$  sa matrice jacobienne, on remarque que :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \sigma I = T (\Lambda - \sigma I) T^{-1}.$$

Le flux numérique (5.12) peut alors se mettre sous la forme :

$$\phi_{ij} = \frac{\mathcal{G}(W_i) + \mathcal{G}(W_j)}{2} + |\mathcal{B}(\tilde{W}_{ij})| \cdot \frac{W_i - W_j}{2}.$$

Soit  $\Gamma$  la matrice définie par  $\Gamma = \Lambda - \sigma I$ . Utilisant les notations :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^\pm &= T \Gamma^\pm T^{-1} \\ \Gamma^\pm &= \text{diag}(\gamma_k^\pm) \\ \gamma_k^+ &= \max(\gamma_k, 0) \\ \gamma_k^- &= \min(\gamma_k, 0) \end{cases},$$

on observe que  $|\mathcal{B}| = \mathcal{B}^+ - \mathcal{B}^-$ . D'autre part, de la relation de saut de Rankine-Hugoniot (5.11) résulte que :

$$\mathcal{G}(W_i) - \mathcal{G}(W_j) = \mathcal{B}(\tilde{W}_{ij})(W_i - W_j) .$$

Ainsi, la fonction de flux numérique s'écrit désormais :

$$\phi_{\mathcal{R}}(W_i, W_j, \vec{\eta}_{ij}, \sigma_{ij}) = \mathcal{G}(W_j) + \mathcal{B}^+(\tilde{W}_{ij})(W_i - W_j)$$

ou bien

$$\phi_{\mathcal{R}}(W_i, W_j, \vec{\eta}_{ij}, \sigma_{ij}) = \mathcal{G}(W_i) - \mathcal{B}^-(\tilde{W}_{ij})(W_i - W_j) .$$

Outre une écriture simplifiée, ces deux expressions génèrent surtout un schéma moins coûteux à implémenter.

**Remarque 11** La fonction de flux numérique de Roe (5.12) produit un **schéma conservatif, décentré, consistant** puisqu'on a bien  $\phi(W, W, \vec{\eta}, \sigma) = \mathcal{F}(W) - \sigma W$  et précis au premier ordre en espace.

### 5.3.4 Extension à une précision d'ordre supérieur

Pour augmenter l'ordre de précision spatiale, on considère ici une approche de type MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) introduite par Van Leer [59] et adapté au cas non-structuré par Fezoui [14] : on utilise la même fonction de flux numérique que le schéma décentré d'ordre 1, mais appliquée à des arguments différents, obtenus par interpolation linéaire dans chaque cellule. Le flux s'écrit :

$$\phi_{ij} = \phi(W_{ij}, W_{ji}, \vec{\eta}_{ij}, \sigma_{ij})$$

où  $\phi$  est la fonction de flux numérique (ici  $\phi = \phi_{\mathcal{R}}$  fonction de flux de Roe (5.12)) et,  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$  sont les états interpolés de chaque coté de l'interface entre les cellules  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$ .

Pour déterminer  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$ , on effectue tout d'abord une interpolation linéaire sur les variables physiques, et non sur les variables conservatives. Notons  $\widehat{W} = (\rho, u, v, p)^T$  le vecteurs des variables physiques. Les formules d'interpolation s'écrivent en variables physiques :

$$\begin{cases} \widehat{W}_{ij} &= \widehat{W}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\widehat{W}_j - \widehat{W}_i) + \beta (\vec{\nabla}\widehat{W})_i \cdot \vec{s}_i \vec{s}_j \\ \widehat{W}_{ji} &= \widehat{W}_j - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\widehat{W}_j - \widehat{W}_i) - \beta (\vec{\nabla}\widehat{W})_j \cdot \vec{s}_i \vec{s}_j \end{cases} . \quad (5.13)$$

où  $\beta$  est un paramètre à choisir et les gradients nodaux  $(\vec{\nabla}\widehat{W})_i$  sont obtenus en moyennant les gradients calculés sur l'ensemble des triangles contenant le sommet  $s_i$  (on peut aussi considérer les triangles amont et aval) :

$$(\vec{\nabla}\widehat{W})_i = \frac{1}{\text{aire}(\mathcal{C}_i)} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_i} \frac{\text{aire}(\tau)}{3} \sum_{s_k \in \tau} \widehat{W}_k \vec{\nabla}\varphi_{i_k} ,$$

où  $\mathcal{T}_i$  est l'ensemble des triangles qui ont le nœud  $s_i$  comme sommet et  $\varphi_{i_k}$  est la fonction  $P_1$  définie au sommet  $s_k$  et associée aux triangles  $\tau$ . On déduit ensuite de (5.13) les états interpolés en variables conservatives  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$ .

Le schéma ainsi obtenu est d'ordre deux. On a choisi d'utiliser un schéma demi-décentré, correspondant à  $\beta = 1/2$ . Le schéma obtenu étant linéaire et d'ordre supérieur à 1, ne préserve pas la monotonie de la variable  $W$ . On introduit classiquement des limiteurs de pente [55] dans le calcul des états interpolés afin de réduire la précision près des discontinuités et d'obtenir un schéma monotone et précis presque partout (voir [47] pour une revue de ces limiteurs de pente). La limitation est appliquée aux variables physiques (les composantes de  $\widehat{W}$ ), ce qui donne de meilleurs résultats, probablement parce qu'il est très important d'éviter des oscillations sur des variables telles que la densité ou la pression (variables qui doivent rester positives). On utilise ici un limiteur de pente de type Van Albada [58] (voir [49] et [27] pour une description plus détaillée) et on renvoie le lecteur à [28] pour de plus amples détails sur le traitement des conditions aux limites.

### 5.3.5 Intégration en temps

Utilisant des maillages raffinés, l'utilisation d'un schéma explicite, dont la stabilité est assurée sous une condition de type CFL, devient vite problématique et trop restrictive sur le pas de temps. Afin de s'affranchir de ces limitations, l'intégration en temps du système discret peut être réalisée par un schéma implicite. Le flux implicite associé à la fonction de flux numérique de Roe en maillage mobile (5.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \{ & \mathcal{A}(W_i^{n+1}) \cdot W_i^{n+1} + \mathcal{A}(W_j^{n+1}) \cdot W_j^{n+1} - \sigma_{ij}(W_i^{n+1} + W_j^{n+1}) \\ & + |\tilde{\mathcal{A}}(W_i^{n+1}, W_j^{n+1}) - \sigma_{ij}I| \cdot (W_i^{n+1} - W_j^{n+1}) \}. \end{aligned}$$

Nous sommes alors confrontés à la résolution d'un système d'équations non-linéaires sur  $W^{n+1}$ . Afin de revenir à un système linéaire, on utilise une formulation implicite linéarisée telle que celle décrite par Fezoui et Stoufflet [15]. Elle consiste à linéariser le flux de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(W^n, W^{n+1}) = \frac{1}{2} \{ & \mathcal{A}(W_i^n) \cdot W_i^{n+1} + \mathcal{A}(W_j^n) \cdot W_j^{n+1} - \sigma_{ij}(W_i^{n+1} + W_j^{n+1}) \\ & + |\tilde{\mathcal{A}}(W_i^n, W_j^n) - \sigma_{ij}I| \cdot (W_i^{n+1} - W_j^{n+1}) \}. \end{aligned}$$

Ce flux, dit implicite linéarisé, se met aussi sous la forme d'un  $\delta$ -schéma :

$$\phi_{ij}(W^n, W^{n+1}) = \phi_{ij}^n + \phi_{ij}(W^n, \delta W)$$

où  $\delta W = W^{n+1} - W^n$ . Les équations (5.9) prennent ainsi la forme :

$$A_i^{n+1} \delta W_i + \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{n}_{ij}\| \phi_{ij}(W^n, \delta W) = -(A_i^{n+1} - A_i^n) W_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{n}_{ij}\| \phi_{ij}^n. \quad (5.14)$$

Cette formulation a l'avantage par rapport à la première d'exhiber une partie explicite  $\phi_{ij}^n$ . Ainsi, si l'on cherche une solution précise au second ordre, une méthode efficace



consiste à calculer la composante explicite  $\phi_{ij}^n$  par une méthode d'ordre 2 (voir Paragraphe 5.3.4). Le système linéaire défini par l'équation (5.14) est habituellement résolu par une méthode itérative de relaxation de type Jacobi ou Gauss-Seidel.

Les schémas implicite et implicite linéarisé ainsi obtenus sont théoriquement inconditionnellement stables. Comme on l'a vu plus haut, le schéma implicite conduit à la résolution d'un système non-linéaire, que nous résolvons par exemple à l'aide de la méthode de Newton. Le schéma implicite linéarisé équivaut au schéma totalement implicite dans lequel on fait une seule itération de Newton. En pratique, pour des raisons de simplicité, la matrice jacobienne de la méthode de Newton est souvent remplacée par une matrice jacobienne approchée, plus économique en termes de calcul. On parle alors de méthode de Newton modifiée. Une conséquence importante de cette simplification est qu'une méthode de Newton modifiée n'est pas forcément convergente au voisinage de la solution (voir [54] pour plus de détails).

## 5.4 Schéma à topologie non-constante

Dans la littérature sur l'adaptation de maillage, une variante aux méthodes de maillages mobiles est le raffinement et le déraffinement. Nous proposons ici une approche différente de ce qui est habituellement fait : nous voyons le raffinement comme la subdivision à un instant donné d'un nœud en plusieurs autres, et réciproquement le déraffinement comme la fusion de nœuds préalablement distincts. En d'autres termes, raffiner équivaut encore à déplacer dans différentes directions des sommets, qui jusqu'à présent étaient confondus. Inversement, pour déraffiner localement la discrétisation, les points concernés convergent en un même endroit pour n'en former qu'un seul. Ainsi, le raffinement et le déraffinement n'apparaissent plus comme une variante aux méthodes de maillages mobiles, mais plutôt comme une généralisation de ces méthodes à des cas de volumes naissants ou disparaissants (voir la Section 2.5 pour la généralisation en une dimension). Dans cette section, nous décrivons en détail le raisonnement mathématique, qui découle de notre conception de l'addition et de la soustraction de points, et discutons notamment de ses conséquences sur la mise en œuvre des méthodes en maillages dynamiques, étudiées dans la Section 5.3.

### 5.4.1 Addition de points

#### 5.4.1.1 Principe

Nous survolons ici volontairement certaines hypothèses nécessaires au bon déroulement de notre schéma. Nous préférons tout d'abord exposer son cheminement dans un contexte idéal, afin de mieux cerner ensuite certaines situations qui pourraient entraver son application.

Pour un pas de temps donné, la démarche est la suivante :

1. on dispose **initialement** à l'instant  $t^n$  d'un maillage  $\mathcal{M}^n$ , composé de  $NS$  sommets. On note  $W^n$  la solution approchée de (5.1) sur ce maillage, donnée par la méthode des volumes finis.
2. un critère, reposant sur un estimateur d'erreur à posteriori (ou un indicateur), décide de la **subdivision à l'instant  $t^{n+1}$  du nœud  $s_i^n$  en  $M$  nœuds**, notés  $s_{i_1}^{n+1}, s_{i_2}^{n+1}, \dots, s_{i_M}^{n+1}$  (voir la Figure 5.5 où  $M = 3$ ).

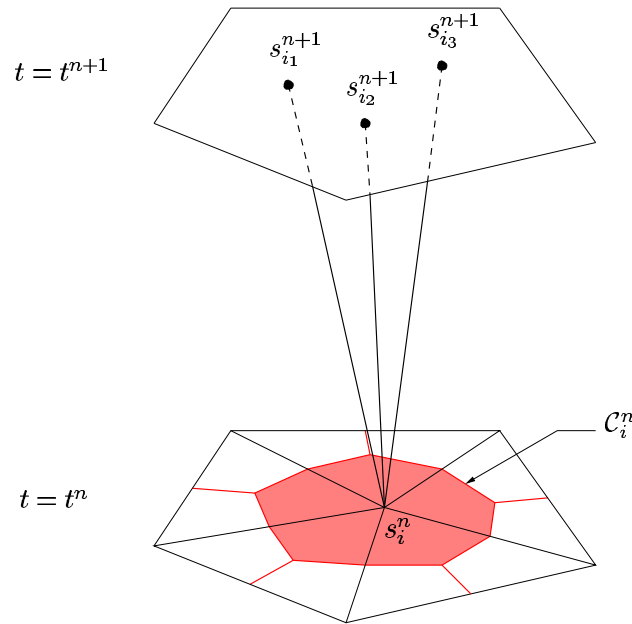


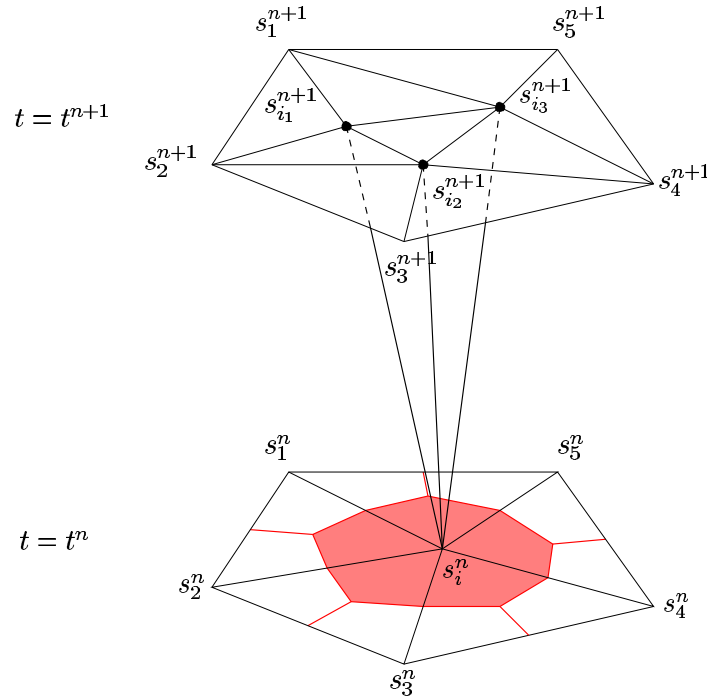
FIG. 5.5 – Division du sommet  $s_i^n$  en 3 sommets à  $t = t^{n+1}$ .

Pour éviter le retournement problématique des arêtes du maillage, nous supposons :

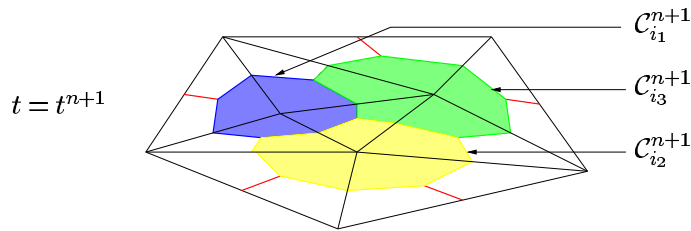
$$\forall k \in \{1, \dots, M\}, \quad s_{i_k} \in \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_h^n | s_i \in \tau} \tau,$$

où  $\mathcal{T}_h^n$  désigne la triangulation à  $t = t^n$ . Cette hypothèse semble cohérente avec la volonté de raffiner localement le maillage. En effet, instinctivement, il paraît naturel de localiser les nœuds issus de la subdivision du sommet  $s_i^n$  au voisinage de  $s_i^n$  (où, nous le rappelons, un critère a jugé la concentration nodale insuffisante) que dans une autre région du domaine où un autre sommet que  $s_i^n$  serait plus apte à jouer le rôle de sommet “père”.

3. il nous faut à présent **relier les nouveaux sommets aux anciens** afin de compléter la triangulation du domaine de calcul (voir la Figure 5.6). On distingue dans la littérature diverses techniques de remaillage, qui peuvent s'appliquer au sous-domaine connexe considéré ici, comme par exemple la triangulation de Delaunay, couramment utilisée.
4. (i) **Construction du maillage dual à  $t = t^{n+1}$  :**

FIG. 5.6 – Triangulation à  $t = t^{n+1}$ .

La triangulation du domaine  $\mathcal{T}_h^{n+1}$  étant désormais connue, on peut définir la discrétisation duale de  $\mathcal{T}_h^{n+1}$ . En particulier, les cellules de contrôle  $\mathcal{C}_{i_k}^{n+1}$ , associées aux sommets  $s_{i_k}^{n+1}$  (pour  $k = 1, \dots, M$ ), sont construites en appliquant le procédé habituel des formulations centré-sommet : on joint successivement les milieux des arêtes incidentes à  $s_{i_k}^{n+1}$  et les centres de gravité des triangles contenant  $s_{i_k}^{n+1}$  (voir la Figure 5.7).

FIG. 5.7 – Cellules de contrôle à  $t = t^{n+1}$ .

(ii) **Mise à jour des cellules de contrôle à  $t = t^n$  :**

Pour pouvoir appliquer le schéma numérique (5.9), nous avons besoin d'initialiser les cellules  $\mathcal{C}_{i_k}^{n+1}$  au temps  $t^n$ . Pour ce faire, nous proposons de dissocier les deux caractéristiques, qui définissent un maillage, à savoir : la géométrie, représentée par les coordonnées des sommets, et la topologie constituée par les connexions entre les nœuds. Concrètement, nous posons  $s_{i_k}^n = s_i^n$  pour tout  $k \in \{1, \dots, M\}$ , et projetons ensuite la topologie définie

par la triangulation  $\mathcal{T}_h^{n+1}$  au temps  $t^n$ . Ainsi, le maillage au temps  $t^n$  (et au temps  $t^{n+1}$ ) se compose maintenant de  $NS + M$  sommets. Un élément  $\tau$  de  $\mathcal{T}_h^{n+1}$  peut être à l'instant  $t = t^n$  :

- soit un triangle (non-dégénéré) ;
- soit un triangle avec deux sommets confondus, donc une arête, comme  $\{s_1; s_{i_1}; s_{i_3}\}$ ,  $\{s_2; s_{i_2}; s_{i_1}\}$  et  $\{s_4; s_{i_3}; s_{i_2}\}$  de la Figure 5.7 ;
- soit un triangle avec trois sommets confondus, donc un point, comme par exemple  $\{s_{i_1}; s_{i_2}; s_{i_3}\}$ .

Les cellules de contrôle sont obtenues comme précédemment en joignant successivement les milieux des arêtes incidentes au sommet considéré et les centres de gravité des triangles qui contiennent ce sommet. Les arêtes et triangles “particuliers” sont traités comme à l'accoutumée, ce qui se traduit ici par :

- le milieu des segments  $[s_{i_1}^n; s_{i_2}^n]$ ,  $[s_{i_2}^n; s_{i_3}^n]$  et  $[s_{i_3}^n; s_{i_1}^n]$  est  $s_i^n$  ;
- les centres de gravité des triangles  $\{s_1^n; s_{i_1}^n; s_{i_3}^n\}$ ,  $\{s_2^n; s_{i_2}^n; s_{i_1}^n\}$ ,  $\{s_4^n; s_{i_3}^n; s_{i_2}^n\}$  sont  $\frac{2}{3}s_i^n + \frac{1}{3}s_j^n$  avec respectivement  $j = 1, 2, 4$  ;
- le centre de gravité du triangle  $\{s_{i_1}^n; s_{i_2}^n; s_{i_3}^n\}$  est  $s_i^n$ .

La figure 5.8 schématise la mise à jour des cellules  $C_{i_k}^n$  pour  $k \in \{1, \dots, M\}$  sur l'exemple introductif étudié ici.

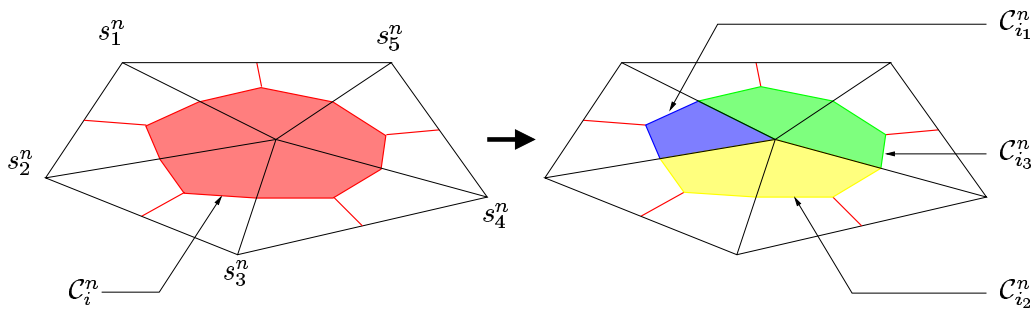
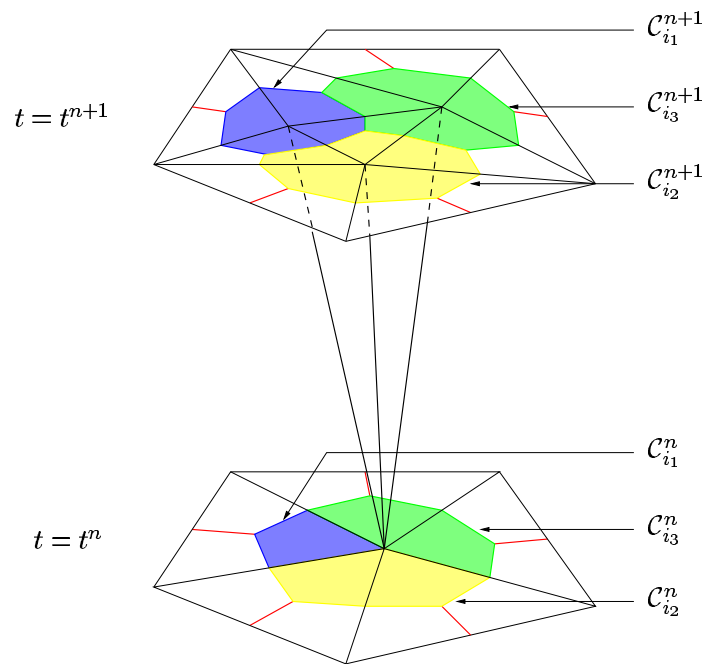
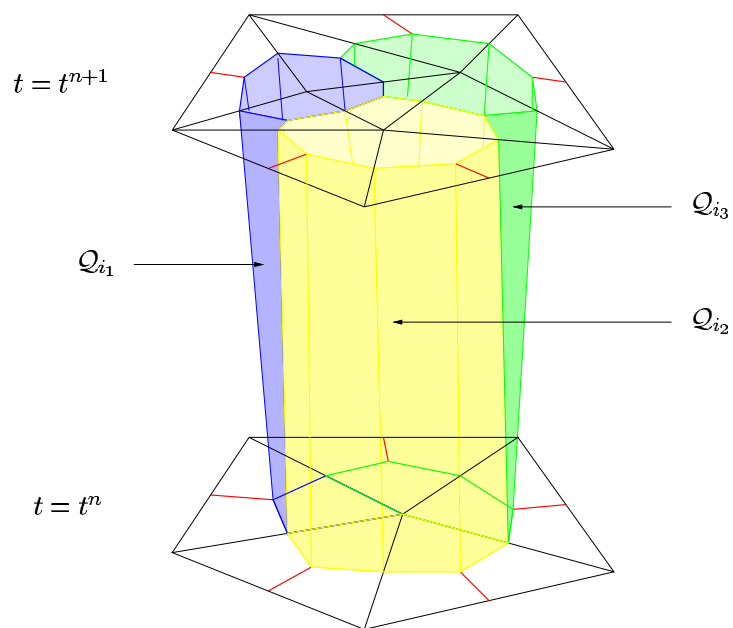


FIG. 5.8 – Mise à jour des cellules de contrôle à  $t = t^n$ .

5. connaissant à présent explicitement l'évolution du maillage pendant l'intervalle de temps  $\Delta t^n$  (voir Figure 5.9), nous pouvons finalement **appliquer le schéma numérique (5.9)**. Les équations discrètes pour les nœuds  $s_{i_k}$  s'obtiennent comme dans la Section 5.3 en intégrant la loi de conservation sur les volumes de contrôle  $\mathcal{Q}_{i_k}$ , représentés sur Figure 5.10. Pour déterminer  $W^{n+1}$ , nous avons donc besoin de connaître les valeurs moyennes de la solution sur les cellules  $C_{i_k}^n$ . Nous proposons logiquement de prendre  $W_{i_k}^n = W_i^n$  pour tout  $k \in \{1, \dots, M\}$ .

FIG. 5.9 – Évolution du maillage entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ .FIG. 5.10 – Volumes de contrôle pendant l'intervalle de temps  $\Delta t^n$ .

**Remarque 12** Dans l'exemple introductif présenté ci-dessus, les cellules  $C_{i_k}$  pour  $k \in \{1, \dots, M\}$  ont toutes une surface non nulle au temps  $t^n$ . Toutefois, suivant la triangulation générée au point 3 (et si les nœuds issus de la subdivision du sommet  $s_i^n$  sont en nombre suffisant), il n'est pas impossible de créer une ou plusieurs cellules  $C_{i_k}$ , qui ont une aire nulle à l'instant  $t = t^n$  (car réduites au sommet  $s_i^n$ ). L'introduction de telles cellules ne remet en aucun cas en cause l'application du schéma numérique (5.9). La seule différence notable est que les aires de ces cellules à l'instant  $t = t^n$ , notées  $A_{i_k}^n$ , valent zéro.

### 5.4.1.2 Schéma

Le schéma numérique (5.9) appliqué à la configuration d'ajout de points précédente prend ainsi la forme :

$$\begin{cases} A_{i'}^{n+1} W_{i'}^{n+1} - A_{i'}^n W_{i'}^n + \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i')} \|\vec{\eta}_{i'j}\| \phi_{i'j} = 0 \quad \forall i' = 1, \dots, NS \text{ et } i' \neq i \\ A_{i_k}^{n+1} W_{i_k}^{n+1} - A_{i_k}^n W_{i_k}^n + \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i_k)} \|\vec{\eta}_{i_kj}\| \phi_{i_kj} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, M \end{cases}$$

où, en plus des notations introduites jusqu'à maintenant, nous avons :

- $\mathcal{N}(j) = \{j' \mid s_{j'} \text{ est un sommet voisin de } s_j \text{ dans la triangulation } \mathcal{T}_h^{n+1}\}$  pour  $j = i'$  ou  $i_k$  (par exemple, d'après la Figure 5.6,  $\mathcal{N}(i_1) = \{1; 2; i_2; i_3\}$ );
- les cellules  $C_{i_k}$  sont déterminées en joignant successivement les milieux des arêtes incidentes à  $s_{i_k}$ , qu'elles soient dégénérées ou non, et les centres de gravité des triangles contenant le sommet  $s_{i_k}$ , qu'ils soient dégénérés ou non;
- $A_{i_k}^n$  et  $A_{i_k}^{n+1}$  représentent l'aire de la cellule  $C_{i_k}$  aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ ;
- $W_{i_k}^n = W_i^n$ ;
- les paramètres géométriques  $\vec{\eta}_{i_kj}$  et  $\sigma_{i_kj}$  pour  $j \in \mathcal{N}(i_k)$  sont donnés par les formules générales (5.6-5.7) et (5.8);
- $\phi_{i_kj} = \phi_{\mathcal{R}}(W_{i_k}, W_j, \vec{\eta}_{i_kj}, \sigma_{i_kj})$ , où  $\phi_{\mathcal{R}}$  est la fonction de flux numérique de Roe (5.12).

**Remarque 13** Les cellules de contrôle  $C_{i_k}$  au temps  $t^n$  sont construites en 4(ii) de telle sorte que :

$$\bigcup_{i=1}^M C_{i_k}^n = C_i^n.$$

D'autre part, comme  $W_{i_k}^n = W_i^n$  pour  $k \in \{1, \dots, M\}$ , nous remarquons que :

$$\sum_{k=1}^M A_{i_k}^n W_{i_k}^n = A_i^n W_i^n.$$

Une conséquence importante à ceci est la préservation de la conservativité du schéma.

### 5.4.1.3 Avantages et inconvénients

Dans la littérature, on rencontre de nombreux travaux sur le raffinement de maillage, qui se différencient souvent sur le critère choisi, ou sur les techniques de remaillage utilisées, etc. Toutefois, on observe très souvent une certaine analogie dans sa mise en œuvre, à savoir : (i) un critère décide au temps  $t^n$  de l'addition de  $M$  nœuds notés  $\hat{s}_1^n, \dots, \hat{s}_M^n$  ; (ii) le domaine de calcul est ensuite remaillé par une technique de remaillage local ou autres ; (iii) les valeurs moyennes de la solution  $\hat{W}_j^n$  sur les cellules associées aux nœuds  $\hat{s}_j^n$  sont initialisées au moyen d'une interpolation ; (iv) on applique finalement le schéma numérique pour approcher la solution à l'instant  $t^{n+1}$ .

Suivant notre conception très dynamique de l'addition, présentée plus haut, l'étape d'interpolation n'est pas nécessaire pour mettre à jour la solution sur les cellules nouvellement créées. En effet, la moyenne de la solution sur ces dernières est simplement initialisée à la moyenne de la solution sur la cellule centrée au sommet "père". N'ayant pas recours aux techniques d'interpolation, nous nous protégeons des erreurs d'interpolation, aussi infimes soient-elles.

Par ailleurs, nous avons ici introduit la méthode dans un contexte général afin de souligner son adaptabilité à d'autres utilisations que seront les nôtres dans la Chapitre 6. La seule hypothèse nécessaire à son bon fonctionnement est que les nœuds issus de la subdivision du sommet  $s_i^n$  se situent au voisinage de  $s_i^n$ . Nous comprenons maintenant mieux quelle en est la raison : il s'agit d'éviter le retournement problématique des arêtes du maillage. De plus, cette hypothèse semble cohérente avec la notion de raffinement local.

Par souci de généralisation et donc dans le but de ne pas restreindre la localisation des nœuds issus de l'addition, le principal inconvénient de notre démarche, telle qu'elle est décrite dans la section 5.4.1.1, est l'étape de remaillage local 3. La qualité du maillage et la qualité de l'approximation sont intimement liées. Une étude de l'erreur d'approximation montre que la qualité de l'approximation dépend de la forme des éléments : il est recommandé d'avoir des éléments qui soient suffisamment réguliers. De plus, les contraintes imposées à un maillage sont parfois contradictoires : pour avoir un résultat précis, il est important d'avoir une densité nodale élevée dans les zones où les grandeurs physiques varient fortement, mais pour éviter des temps de calcul trop élevés, il est conseillé de minimiser le nombre de triangles qui contiennent un sommet. Remailler un domaine, même si ce n'est que localement, n'est donc pas chose simple, surtout si l'on cherche à optimiser la qualité géométrique, la qualité topologique et la qualité physique. Or, l'addition de sommets, telle que nous la concevons, doit être une opération élémentaire. Dans la section suivante, nous présentons la méthode adoptée pour y parvenir.

### 5.4.1.4 Choix de la procédure additive

Comme nous l'avons dit plus haut, l'addition de sommets doit être une opération élémentaire. Nous souhaitons donc que la connexion des nouveaux nœuds aux anciens soit immédiate. Dans ce but, on peut facilement adapter à notre philosophie trois

techniques d'ajout de points, classiques dans la littérature.

Addition d'un point au centre d'un triangle :

La première optique consiste à générer un nœud au centre de gravité d'un triangle. Pour appliquer notre schéma, on a juste besoin de connaître quel est son sommet "père" au temps  $t^n$ . On choisit aléatoirement l'un des trois sommets du triangle pour jouer ce rôle. Par exemple, sur la Figure 5.11, le nœud  $s_4^{n+1}$  est le fruit de la division au temps  $t^{n+1}$  du sommet  $s_1^n$ .

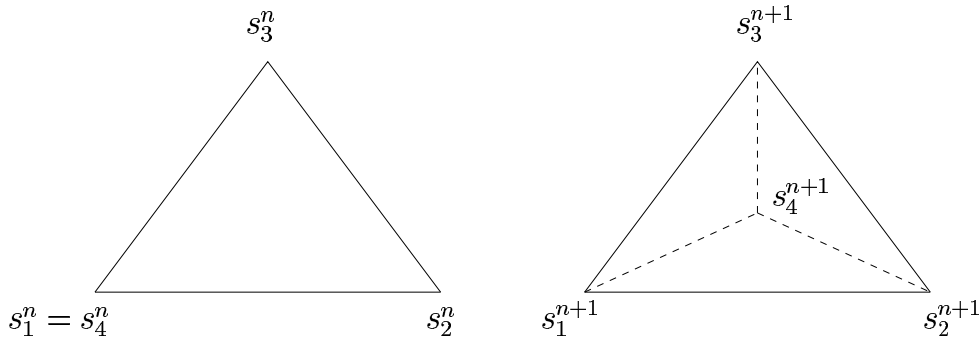


FIG. 5.11 – Addition d'un nœud au centre d'un triangle.

Nous n'adoptons cependant pas cette technique de découpage, car elle est connue pour créer des triangles de mauvaise qualité.

Addition d'un point au milieu d'une arête :

Cette deuxième approche crée un nœud au milieu d'une arête. Comme ci-dessus, pour pouvoir appliquer notre schéma, on dit que ce dernier provient de la subdivision au temps  $t^{n+1}$  d'un des deux sommets de l'arête considérée. Par exemple, sur la Figure 5.12, c'est le nœud  $s_1^n$  qui joue le rôle de sommet "père" pour  $s_5^{n+1}$ .

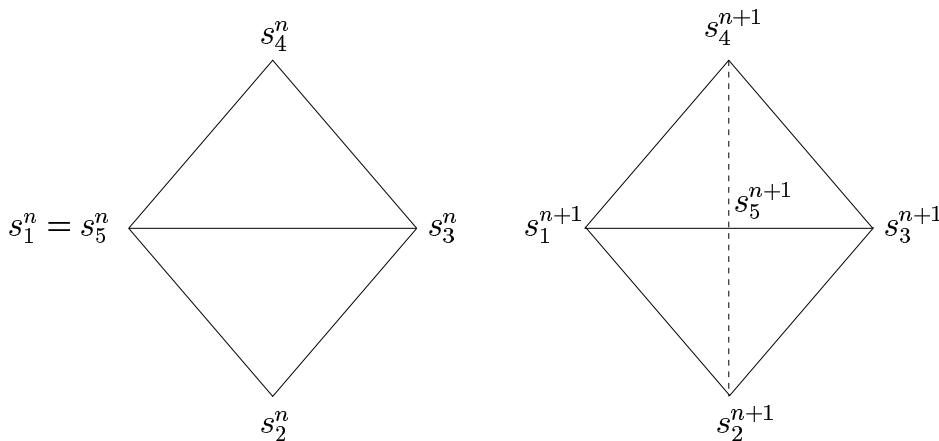


FIG. 5.12 – Addition d'un nœud au milieu d'une arête.



Addition d'un point sur les trois arêtes d'un triangle :

Pour un triangle donné, il est aussi possible d'ajouter un nœud sur chacune de ses arêtes. Chaque nouveau nœud est le fruit de la division au temps  $t^{n+1}$  de l'un des deux sommets de l'arête sur laquelle il se situe. Pour maintenir la conformité du maillage, on génère les segments reliant les nouveaux nœuds avec le sommet de l'élément non divisé ayant l'arête en commun avec le triangle considéré. La Figure 5.13 représente une configuration possible.

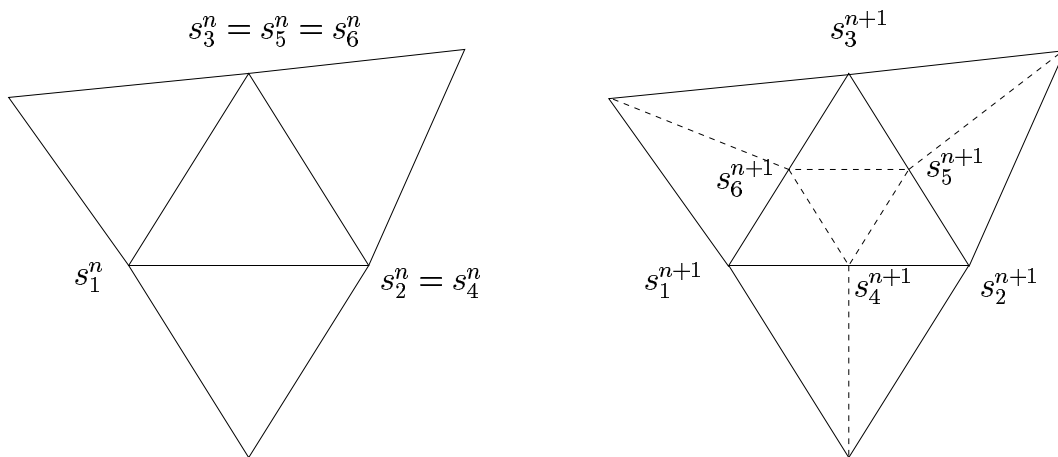


FIG. 5.13 – Addition d'un nœud au milieu des trois arêtes d'un triangle.

La première technique de découpage proposée générant des triangles de mauvaise qualité, la solution que nous avons retenue est de reporter les décisions de division sur les arêtes du maillage. Il se peut alors qu'on ajoute un nœud sur exactement deux arêtes d'un triangle. La connexion des nouveaux nœuds aux anciens n'est plus alors aussi triviale que précédemment. De plus, elle engendre souvent des éléments trop dissemblables. C'est pourquoi, nous interdisons les éléments où seules deux arêtes doivent être coupées, et prenons la décision que si deux arêtes d'un même élément doivent être coupées, la troisième l'est aussi. Par le biais de cette méthodologie, nous sommes donc amenés à rencontrer les deux dernières approches détaillées plus haut : l'addition d'un point au milieu d'une arête (les triangles qui ont cette arête en commun sont alors coupés en deux) ; l'addition d'un nœud au milieu des trois arêtes d'un triangle (le triangle considéré est coupé en quatre, et les triangles voisins à ce dernier par une de ses arêtes en deux par souci de conformité ou en quatre si leurs autres arêtes doivent aussi être divisées en deux).

Dans cette section, nous avons volontairement présenté la méthode d'addition dynamique de points dans un contexte général afin d'insister sur sa simplicité de mise en œuvre, et surtout d'illustrer sa facilité d'adaptation à d'autres pratiques que seront les nôtres dans le Chapitre 6. L'addition de points sans restriction sur leurs localisations nécessite, que ce soit dans notre méthode ou dans beaucoup d'autres, un remaillage. Notre but était ici de montrer que nous pouvons facilement contourner les difficultés

qui en découlent en localisant les nœuds ajoutés au milieu d'une arête par exemple, puisque la connexion de ces derniers aux sommets du maillage est alors immédiate. Nous ne détaillerons donc pas ici davantage l'algorithme employé, et reviendrons plus longuement sur celui-ci dans le prochain chapitre (Chapitre 6).

## 5.4.2 Soustraction de points

Cette section est consacrée à l'opération duale de l'addition de points : la soustraction. On souhaite ici réduire le nombre de points dans les régions où la solution varie faiblement.

### 5.4.2.1 Principe

Comme pour l'addition, nous cherchons à étendre la notion de soustraction au mouvement de maillage : pour éliminer un sommet de la discrétisation, nous suggérons que celui-ci converge vers la position d'un autre sommet pour former un seul et unique nœud. Or, si nous voulons appliquer le schéma numérique (5.9) sans nous heurter au problème de retournement d'arêtes, deux sommets quelconques du maillage ne peuvent évidemment fusionner. Pour pallier en partie ces difficultés, nous proposons pour supprimer un point de contracter une arête incidente à ce point.

Pour un pas de temps donné, la démarche est la suivante :

1. on dispose **initialement** à l'instant  $t^n$  d'un maillage  $\mathcal{M}^n$ , composé de  $NS$  sommets. On note  $W^n$  la solution approchée de (5.1) sur ce maillage, donnée par la méthode des volumes finis.
2. un critère décide de la **contraction de l'arête  $[s_i; s_j]$  au temps  $t^{n+1}$** . Géométriquement, ceci signifie que  $s_i^{n+1} = s_j^{n+1}$  (voir la Figure 5.14).

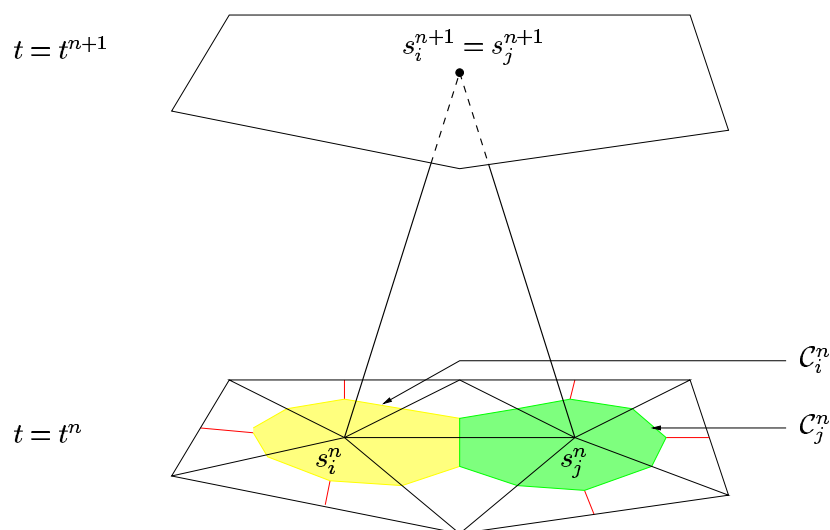
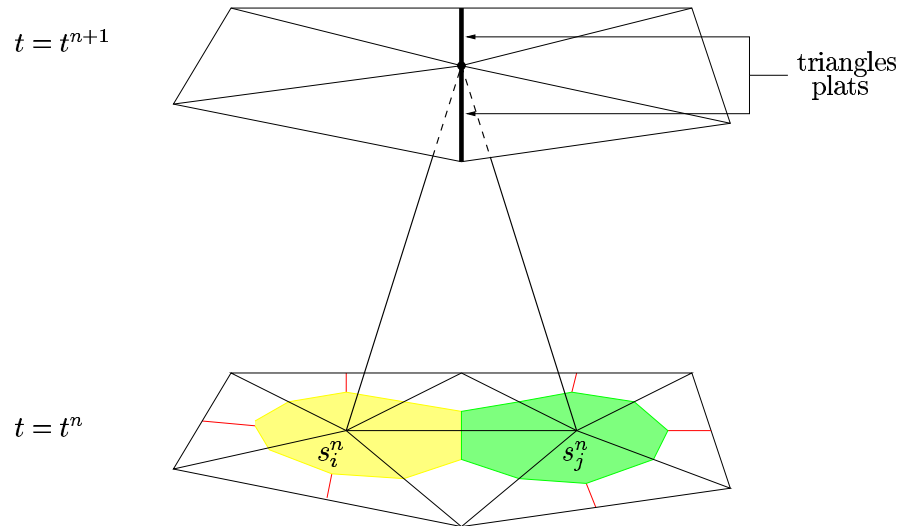


FIG. 5.14 – Contraction de l'arête  $[s_i; s_j]$  au temps  $t^{n+1}$ .

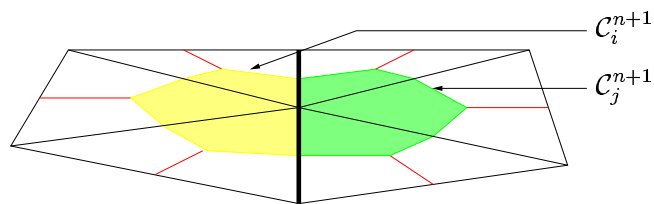
3. on projette ensuite au temps  $t^{n+1}$  la topologie définie au temps  $t^n$ . En d'autres termes, les connexions entre les nœuds à l'instant  $t^{n+1}$  sont inchangées. Ainsi, les éléments qui ont  $s_i$  et  $s_j$  comme sommets, deviennent des triangles plats au temps  $t^{n+1}$ , puisqu'ils possèdent alors deux sommets confondus (voir la Figure 5.15), et l'arête  $[s_i; s_j]$  se ramène à un point.

FIG. 5.15 – Triangulation à  $t = t^{n+1}$ .

4. les cellules de contrôle au temps  $t^{n+1}$  sont obtenues classiquement en joignant successivement les milieux des arêtes incidentes au sommet considéré et les centres de gravité des triangles qui contiennent ce sommet. Les triangles plats, mentionnés ci-dessus, et l'arête  $[s_i; s_j]$ , ne nécessitent aucun traitement particulier :

- le milieu du segment  $[s_i; s_j]$  au temps  $t^{n+1}$  est  $s_i^{n+1}$  ;
- le centre de gravité des triangles plats  $\tau = \{s_i; s_j; s_k\}$  au temps  $t^{n+1}$  est  $\frac{2}{3}s_i^{n+1} + \frac{1}{3}s_k^{n+1}$ .

La Figure 5.16 schématise les cellules de contrôle au temps  $t^{n+1}$  sur l'exemple introductif étudié ici.

FIG. 5.16 – Cellules de contrôle à  $t = t^{n+1}$ .

5. connaissant l'évolution du maillage pendant l'intervalle de temps  $\Delta t^n$  (voir la Figure 5.17), nous pouvons à présent **appliquer le schéma numérique (5.9)**, pour calculer la valeur moyenne de la solution sur chaque cellule  $\mathcal{C}_k^{n+1}$ , notamment sur les cellules  $\mathcal{C}_i^{n+1}$  et  $\mathcal{C}_j^{n+1}$ .

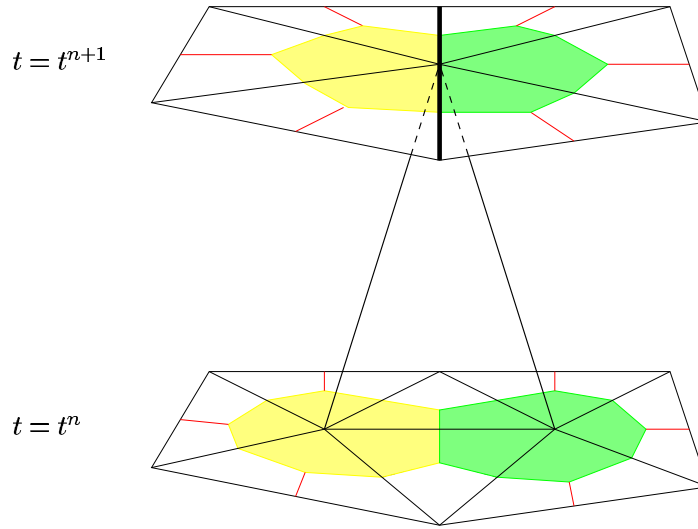


FIG. 5.17 – Évolution du maillage pendant l'intervalle de temps  $\Delta t^n$ .

6. A ce stade de notre raisonnement, le maillage se compose toujours de  $NS$  sommets, même si deux d'entre eux sont confondus. Nous souhaitons ici **rendre effective la fusion des sommets  $s_i$  et  $s_j$** . Pour ce faire, nous remplaçons  $s_i$  et  $s_j$  par le sommet  $\bar{s}$  défini par :

$$\bar{s}^{n+1} = s_i^{n+1} = s_j^{n+1},$$

et définissons l'ensemble des sommets voisins de  $\bar{s}^{n+1}$ , noté  $\bar{\mathcal{N}}$ , comme suit :

$$\bar{\mathcal{N}} = (\mathcal{N}(i) - \{j\}) \cup (\mathcal{N}(j) - \{i\}).$$

La discrétisation se compose donc maintenant de  $NS - 1$  sommets. Les triangles incidents à l'arête  $[s_i; s_j]$  sont détruits. Les éléments modifiés par l'opération sont uniquement ceux incidents à un et un seul sommet de l'arête (voir la Figure 5.18). La cellule de contrôle centrée au nœud  $\bar{s}^{n+1}$ , notée  $\bar{\mathcal{C}}^{n+1}$ , coïncide ainsi avec la réunion des cellules  $\mathcal{C}_i^{n+1}$  et  $\mathcal{C}_j^{n+1}$  :

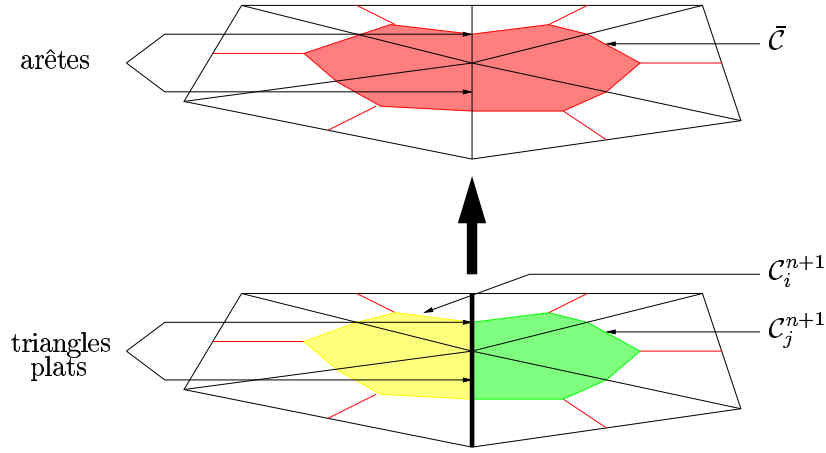
$$\bar{\mathcal{C}}^{n+1} = \mathcal{C}_i^{n+1} \cup \mathcal{C}_j^{n+1},$$

comme le montre la Figure 5.18.

Il nous reste finalement à initialiser  $\bar{W}^{n+1}$ , la moyenne de  $W$  dans la cellule  $\bar{\mathcal{C}}^{n+1}$ . Nous posons alors :

$$\bar{W}^{n+1} = \frac{A_i^{n+1}W_i^{n+1} + A_j^{n+1}W_j^{n+1}}{A_i^{n+1} + A_j^{n+1}}, \quad (5.15)$$

afin de respecter la conservativité du schéma.

FIG. 5.18 – Mise à jour des cellule de contrôle à  $t = t^{n+1}$ .

#### 5.4.2.2 Schéma

Cette section a un but récapitulatif : nous souhaitons ici rappeler de manière concise le schéma numérique à appliquer après une décision de soustraction. Nous avons plus haut exposé la méthode dans le cas de la fusion de exactement deux sommets. Si dans une partie du domaine, la solution ne montre aucune activité significative, il est alors envisageable, sous réserve de non-retournement des arêtes du maillage, de supprimer plus d'un nœud en contractant plusieurs arêtes incidentes à un même sommet. Dans un souci de généralisation, nous choisissons ici d'écrire le schéma numérique adapté à cette configuration.

Nous considérons donc ici la contraction de  $M$  arêtes incidentes au sommet  $s_i$ , sous évidemment l'hypothèse que le maillage généré demeure conforme. Par cet artifice, nous cherchons à éliminer  $M$  nœuds voisins du sommet  $s_i$ . Afin de simplifier les notations mathématiques, nous introduisons l'ensemble  $\mathcal{P}(i)$  des sommets  $s_j$  de la discrétisation tels que  $s_j^{n+1} = s_i^{n+1}$ . Notons que  $s_i \in \mathcal{P}(i)$ , et que  $\mathcal{P}(i)$  comporte alors  $M + 1$  points.

La méthode consiste dans un premier temps à appliquer le schéma numérique (5.9) à toutes les cellules de contrôle sans exception :

$$\boxed{A_{i'}^{n+1}W_{i'}^{n+1} - A_{i'}^nW_{i'}^n + \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i')} \|\vec{\eta}_{i'j}\| \phi_{i'j} = 0 \quad \forall i'}$$

où les cellules de contrôle au temps  $t^{n+1}$  sont définies par une formulation centré-sommet classique, les normales, les vitesses normales moyennes des interfaces, les flux aux interfaces, etc, sont déterminés comme dans la Section 5.3.

Nous désirons à présent rendre effective la fusion des  $M + 1$  sommets de  $\mathcal{P}(i)$ . Pour ce faire :

- nous remplaçons, dans la triangulation, les sommets de  $\mathcal{P}(i)$  par un seul et unique sommet, appelé  $\bar{s}_i$ , défini à l'instant  $t^{n+1}$  par :

$$\boxed{\bar{s}_i^{n+1} = s_i^{n+1}.}$$

- l'ensemble des connexions du sommet  $\bar{s}_i$  avec les autres sommets de la triangulation est donné par :

$$\boxed{\bar{\mathcal{N}}(i) = \left( \bigcup_{j \in \mathcal{P}(i)} \mathcal{N}(j) \right) - \mathcal{P}(i).} \quad (5.16)$$

- la cellule de contrôle centrée au sommet  $\bar{s}_i$  est alors définie par l'expression suivante :

$$\boxed{\bar{\mathcal{C}}_i^{n+1} = \bigcup_{j \in \mathcal{P}(i)} \mathcal{C}_j^{n+1}.}$$

- la moyenne de  $W$  dans la cellule  $\bar{\mathcal{C}}_i^{n+1}$  est calculée comme suit :

$$\boxed{\bar{W}_i^{n+1} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{P}(i)} A_j^{n+1} W_j^{n+1}}{\sum_{j \in \mathcal{P}(i)} A_j^{n+1}}} \quad (5.17)$$

afin de préserver la conservativité du schéma.

Le maillage se compose donc maintenant de  $NS - M$  sommets : les  $M + 1$  sommets de  $\mathcal{P}(i)$  ont fusionné en un seul et unique sommet  $\bar{s}_i$ . Les triangles incidents à toute arête contractée ont été détruits. Les éléments modifiés par l'opération sont uniquement ceux incidents à un et un seul des deux sommets d'une arête contractée.

### 5.4.2.3 Avantages et inconvénients

Dans la littérature, on observe souvent une similitude dans la mise en œuvre des procédures de déraffinement, qui consiste essentiellement en quatre étapes, détaillées ci-après : (i) un critère décide au temps  $t^n$  de la suppression de nœuds dans les régions où la solution varie faiblement ; (ii) le domaine de calcul est ensuite remaillé avec les nœuds restants ; (iii) la solution courante  $W^n$  est actualisée sur le nouveau maillage, noté  $\hat{\mathcal{M}}^n$ , par le biais de techniques d'interpolation ; (iv) disposant d'un maillage  $\hat{\mathcal{M}}^n$  et d'une solution  $\hat{W}^n$ , fruit de l'étape (iii), on applique finalement le schéma numérique pour calculer la solution au temps  $t^{n+1}$ . Certaines sont éventuellement accompagnées d'une étape de prédiction de la solution.

Notre approche repose sur une conception plus dynamique de la soustraction. En effet, la soustraction est réalisée dynamiquement au cours du pas de temps courant en même temps que la résolution du problème de Cauchy. L'ordonnancement des tâches ne peut donc être le même que ci-dessus. En particulier, les étapes (ii) et (iii) avant

L'application du schéma numérique sont ici inutiles. En revanche, après l'application du schéma, le maillage et donc la solution  $W^{n+1}$  doivent être mis à jour afin de concrétiser la soustraction. Or, nous rappelons que, pour supprimer un sommet, nous avons choisi de contracter une arête incidente à ce sommet. Une conséquence de cette opération est que la triangulation qui en découle, est alors immédiate en raison de l'expression (5.16). D'autre part, pour mettre à jour la solution sur cette nouvelle triangulation, on opère simplement une moyenne sur les cellules concernées par la soustraction, en appliquant la formule (5.17), qui a l'avantage de maintenir la conservativité.

La méthode proposée a la particularité d'offrir une formulation facile à mettre en œuvre. Néanmoins en pratique, certaines précautions s'imposent. En vue du schéma numérique que nous souhaitons appliquer, on remarque, comme il l'a été dit en début de section, qu'il n'est pas possible de faire fusionner deux nœuds quelconques du maillage par éviter tout retournement éventuel des arêtes. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi pour supprimer un sommet de contracter une arête incidente à ce sommet. Or, la contraction d'une arête ne garantit pas *a fortiori* la conformité du maillage. Par exemple, si nous nous plaçons dans le cadre de la Figure 5.19, le sommet 0 ne peut fusionner avec le sommet 6 en prenant sa position, car sinon l'élément  $\{0, 1, 2\}$  résultant de cette opération a une aire négative. Avant de contracter une arête, il

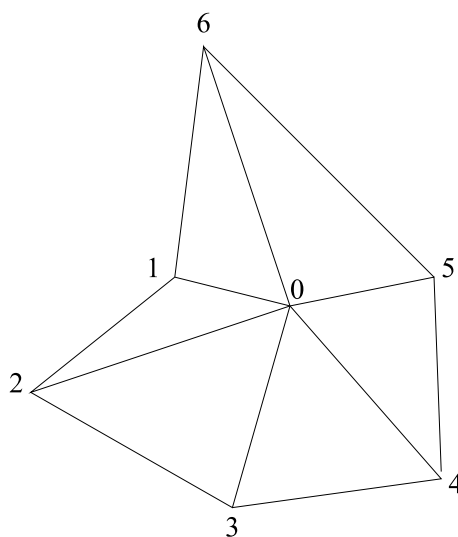


FIG. 5.19 – Une configuration problématique pour la soustraction.

faut donc s'assurer que le maillage obtenu après cette opération est conforme. Pour ce faire, L. Moulard, qui adopte entre autres la contraction d'arêtes pour déraffiner, définit dans sa thèse [38] un domaine de contraction possible (voir page 78 de [38] pour plus de détails). Nous n'insistons pas ici davantage sur ce problème, mais soulignons son importance dans la mise en œuvre de la méthode, et surtout sur sa réussite. Dans le Chapitre 6, nous proposons un algorithme, qui plaide pour une utilisation raisonnée de la soustraction, et prévient le retournement éventuel des arêtes du maillage.

### 5.4.3 “Le swapping”

Nous avons jusqu’à présent exposé différentes méthodes, qui, accompagnées d’algorithmes de gestion automatique, présentés dans le Chapitre 6, permettent d’adapter le maillage à l’écoulement considéré. En raison des travaux sur l’adaptation de maillage et des phénomènes que nous souhaitons étudier, il est fort probable que ces algorithmes, et leurs combinaisons, produisent des triangles de mauvaise qualité. Il existe alors des méthodes de régularisation, qui ont pour but d’améliorer la qualité du maillage. L’une d’elles, et non la moins efficace, est le retournement d’arêtes, plus connu dans la littérature sous le nom de “swapping” [12, 38].

#### 5.4.3.1 Principe

Utilisant les notations de la Figure 5.20, cette opération consiste à échanger l’arête  $[B; D]$ , commune aux triangles  $\{A; B; D\}$  et  $\{B; C; D\}$ , par le segment reliant les sommets de  $\{A; B; D\}$  et  $\{B; C; D\}$  opposés à l’arête  $[B; D]$ , donc par  $[A; C]$ .

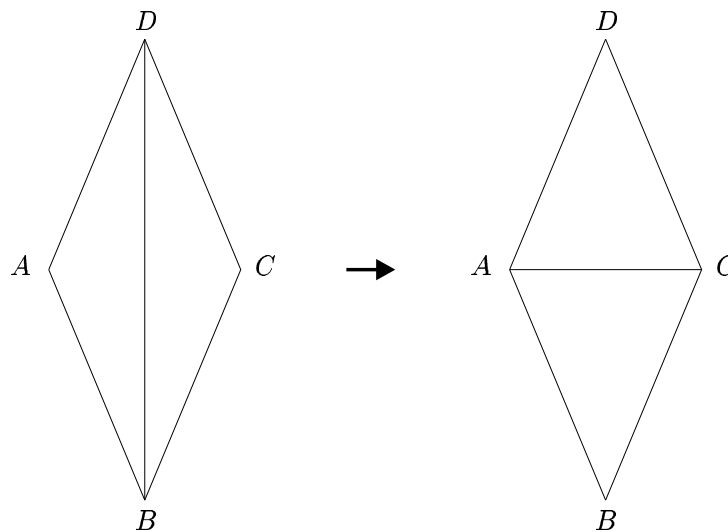


FIG. 5.20 – Échange d’une arête.

En pratique, le “swapping” repose couramment sur une approche statique [12, 38]. Par l’utilisation de l’adjectif “statique”, nous comprenons qu’après avoir échangé les arêtes concernées à un instant  $t$ , on recalcule la solution  $W$  à ce même instant sur le nouveau maillage, pour pouvoir ensuite déterminer la solution à un instant futur  $t + \Delta t$ .

Or, nous avons désormais à notre disposition des outils, à savoir l’addition et la soustraction, qui, combinés, offrent une implémentation dynamique du “swapping”. En effet, échanger l’arête  $[B; D]$  avec l’arête  $[A; C]$  revient en une suite ordonnée d’opérations élémentaires. Pour un pas de temps donné, la démarche est la suivante :



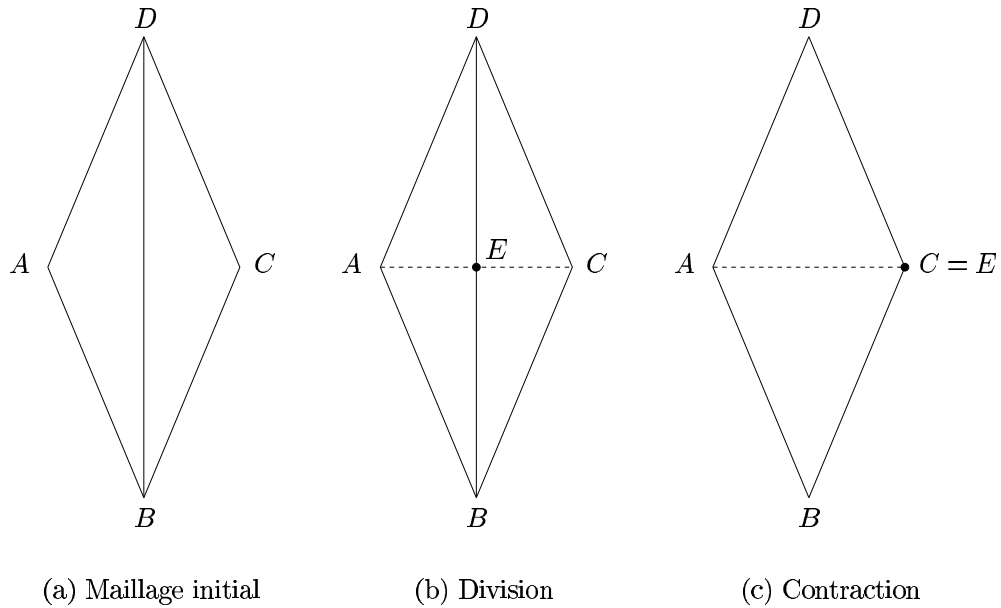


FIG. 5.21 – Décomposition du “swapping” en opérations élémentaires.

1. **division de l’arête  $[B; D]$**  : dans un premier temps, on ajoute un nœud  $E$  au milieu de l’arête  $[B; D]$ , qui est aléatoirement le fruit de la subdivision de l’un de ses sommets à l’instant  $t^{n+1}$ , comme il l’a été fait dans le Paragraphe 5.4.1.4 (voir Figure 5.21(b)).
2. **contraction de l’arête  $[C; E]$  (ou de l’arête  $[A; E]$ )** : le sommet  $E$  fusionne ensuite avec le sommet  $C$  (ou respectivement avec le sommet  $A$ ) en prenant sa position (voir Figure 5.21(c)).

#### 5.4.3.2 Mise en œuvre

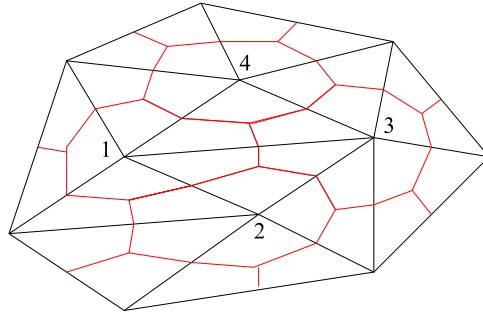
Afin de bien comprendre tous les mécanismes, qui interviennent lors du “swapping”, nous proposons de les analyser sur un exemple. Nous considérons donc le cadre de la Figure 5.22, où nous cherchons à échanger les arêtes  $\bar{13}$  et  $\bar{24}$  au temps  $t^{n+1}$ .

Appliquant le principe décrit ci-dessus, la méthodologie est la suivante :

#### 1. Évolution du maillage

##### (a) Division de l’arête $\bar{13}$ :

- i. un nœud, noté 0, est ajouté au milieu de l’arête  $\bar{13}$ . Sur la Figure 5.23, nous supposons que ce nœud est issu de la division du sommet 1 au temps  $t^{n+1}$ ;
- ii. le nœud 0 est connecté aux sommets 2 et 4;

FIG. 5.22 – Maillage au temps  $T = t^n$ .

- iii. les cellules de contrôle au temps  $t^n$  sont mises à jour en projetant au temps  $t^n$  la topologie définie au temps  $t^{n+1}$  en 1(a)ii ;

(b) **Contraction de l'arête  $\overline{02}$**  :

- i. le sommet 0 converge vers le sommet 2 ;
- ii. les cellules de contrôle au temps  $t^{n+1}$  sont ensuite déterminées en utilisant aussi la topologie définie en 1(a)ii.

2. **Application du schéma** : connaissant à présent l'évolution du maillage entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , on applique le schéma numérique pour chaque cellule de contrôle (dont la cellule centrée au sommet 0, représentée en bleue sur la Figure 5.23) :

$$A_{i'}^{n+1}W_{i'}^{n+1} - A_{i'}^nW_{i'}^n + \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i')} \|\vec{n}_{i'j}\| \phi_{i'j} = 0 \quad \forall i',$$

où les normales, les vitesses normales moyennes des interfaces, les flux aux interfaces, etc, sont déterminés comme dans la Section 5.3.

3. **Concrétisation de la fusion des sommets 0 et 2** : afin de rendre effective la fusion des sommets 0 et 2, nous réunissons les cellules  $\mathcal{C}_0^{n+1}$  et  $\mathcal{C}_2^{n+1}$  en une seule cellule, et mettons à jour la solution  $W$  sur cette dernière à l'aide de la formule conservative (5.15) (voir Section 5.4.2.1-Item 6).

Cette technique d'amélioration locale du maillage est particulièrement simple. Cependant, elle a, comme l'addition et la soustraction, ses propres limites. En effet, il existe globalement deux cas, représentés sur la Figure 5.24, pour lesquels on ne peut effectuer un échange d'arête [12]. Avant d'échanger une arête, il faut donc s'assurer que le maillage obtenu après cette opération reste conforme. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au Chapitre 6.

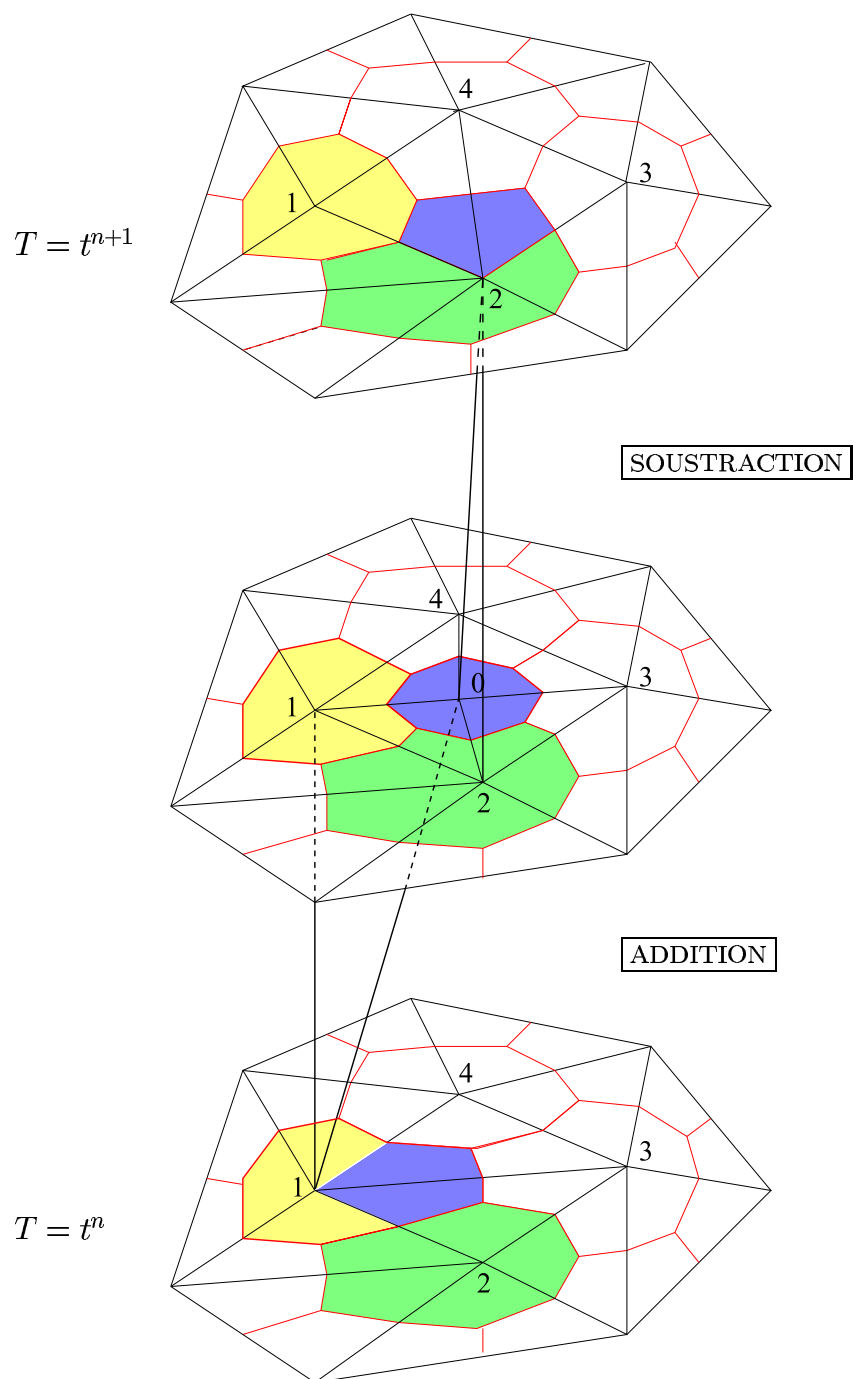


FIG. 5.23 – Mise en œuvre du “swapping”.

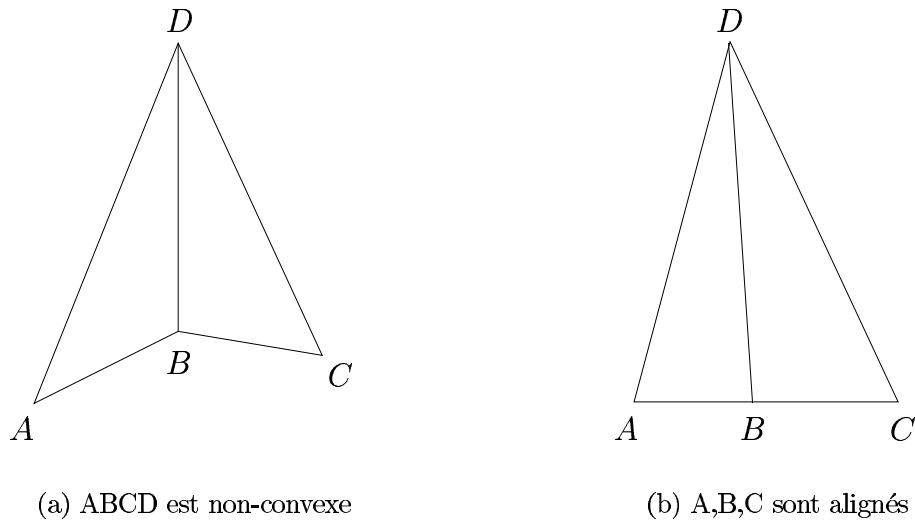


FIG. 5.24 – Cas d’échange d’arêtes impossibles

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une généralisation des méthodes à maillages dynamiques de Guillard et N’Konga [40, 42] à des maillages variables (dynamiques et à topologie variable). Un avantage non-négligeable de disposer d’un schéma, qui sait gérer les éventuelles modifications de la topologie, est de pouvoir raffiner ou déraffiner dynamiquement le maillage en fonction de l’évolution de la solution. Dans ce but, nous avons défini deux opérations élémentaires : l’addition et la soustraction. Nous disposons donc de trois outils d’adaptation de maillage : (i) le maillage mobile ; (ii) l’addition (division d’une arête) ; (iii) la soustraction (contraction d’une arête). Par ailleurs, nous avons aussi introduit un quatrième outil : le “swapping”, qui peut servir de complément aux trois autres si le maillage obtenu s’est fortement dégradé. Il nous faut à présent fournir une “notice d’utilisation”, autrement dit les intégrer dans un code d’adaptation automatique. Tel est l’objectif du Chapitre 6.

# Chapitre 6

## Méthodes d'adaptation dynamique de maillages non-structurés bidimensionnels

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>142</b>
<b>6.2</b>	<b>Maillage mobile auto-adaptatif à topologie fixe</b>	<b>144</b>
<b>6.3</b>	<b>Addition</b>	<b>162</b>
<b>6.4</b>	<b>Soustraction</b>	<b>167</b>
<b>6.5</b>	<b>“Swapping”</b>	<b>172</b>
<b>6.6</b>	<b>Algorithme général d'adaptation</b>	<b>174</b>
<b>6.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>181</b>

---

### Résumé

L'objectif de ce chapitre est de compléter les outils d'adaptation de maillages, présentés au Chapitre 5, par des critères d'adaptation, et ainsi générer une algorithmique relative à chaque outil et aux éventuelles associations. Pour ce faire, nous cherchons dans un premier temps à induire un mouvement pertinent aux sommets du maillage (le nombre de sommets étant fixe). Nous proposons ensuite une stratégie d'addition et de soustraction de points basée sur les techniques de raffinement et déraffinement suggérées au Chapitre 5. Afin d'illustrer l'algorithme d'adaptation de maillage, nous considérons les équations de la mécanique des fluides, plus spécifiquement ici l'équation de convection bidimensionnelle.

## 6.1 Introduction

Lors des simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments ou de volumes finis, la qualité du maillage et la précision de la solution numérique sont étroitement liées. Plus la densité des sommets est élevée, plus la solution numérique sera précise, mais plus le temps de calcul sera important. Pour soulever cette ambiguïté, il est souvent utile de faire un compromis entre la précision numérique recherchée et la complexité des simulations. Une des idées développées pour parer à cette difficulté est l'adaptation de maillage.

L'adaptation de maillage consiste à modifier le maillage en augmentant la concentration nodale là où l'erreur est élevée, et inversement en la diminuant là où l'erreur est faible. Ce processus permet d'une part de réduire la taille des mailles dans les régions de forte activité, donc d'améliorer la qualité des résultats numériques, et d'autre part de diminuer le temps de calcul des simulations puisque l'effort de calcul porte majoritairement là où il est nécessaire (les zones de faible activité étant allégées en nœuds).

Dans le cadre de simulations instationnaires, l'utilisation de l'adaptation de maillage est d'autant plus justifiée que les phénomènes physiques se déplacent dans le domaine d'étude. En effet, sans adaptation, si nous souhaitons capturer les phénomènes physiques avec la même précision au cours de la simulation, ne connaissant pas *a priori* l'évolution de la solution, la discrétisation doit nécessairement être fine et uniforme. Ceci a pour conséquence d'augmenter considérablement le coût de calcul jusqu'à éventuellement rendre la simulation inaccessible.

L'adaptation de maillage fait l'objet de nombreux travaux de par évidemment son efficacité, mais aussi de par la diversité des méthodes induites. En effet, pour mettre en œuvre l'adaptation, on rencontre dans la littérature différentes approches, qui peuvent néanmoins être classées en trois catégories, dont nous rappelons brièvement ci-dessous quels en sont les principes.

L'une d'elles représente les méthodes de maillage mobile à nombre de sommets fixe et à topologie constante (les connectivités entre les nœuds sont inchangées pendant l'intégralité de la simulation). Se contentant des nœuds existants, elles visent à induire un mouvement pertinent aux sommets du maillage, afin que leurs mouvements permettent de minimiser (au moins de réduire) l'erreur locale de discrétisation en espace. Citons par exemple [2, 18, 43, 44]. Le mouvement des nœuds est obtenu en résolvant une équation d'équilibre sur le domaine, sous la contrainte que chaque élément garde une aire (volume en trois dimensions) positive. Au fil de la simulation, la déformation subie par les éléments peut être extrêmement pénalisante, notamment sur l'étape d'interpolation mais aussi sur le respect de la contrainte.

Une autre catégorie regroupe les méthodes de type raffinement/déraffinement. Elles consistent à découper un élément en plusieurs autres, ou inversement à fusionner certains éléments du maillage. La décision de raffiner ou déraffiner repose généralement sur un estimateur (ou un indicateur) d'erreur. Leur facilité de mise en œuvre leur vaut d'être très répandues dans la littérature. On peut citer entre autres [6, 35, 36, 45]. La principale critique qui leur est faite, est qu'elles ne génèrent pas de maillages réellement anisotropes, et donc ne permettent pas une capture optimale des phénomènes direc-

tionnels.

Nous pouvons enfin citer les techniques de remaillage. Elles consistent à remailler le domaine de calcul, soit localement, soit dans son intégralité. Pour ce faire, elles utilisent une méthode de génération de maillage (méthode de Delaunay-Voronoi, méthode de type frontale, etc.), généralement gouvernée par une métrique relative à un estimateur d'erreur. Les travaux sont nombreux sur ce thème. Nous pouvons notamment mentionner [1, 8, 9, 16, 30, 33, 46, 57]. La construction d'un nouveau maillage à un temps donné peut s'avérer être une opération coûteuse en temps de calcul. Outre une utilisation raisonnée (toutes les  $n$  itérations par exemple), certains optent pour les méthodes de décomposition de domaine, couplées à des codes de calcul parallèle [10].

Dans le Chapitre 5, nous avons fait le choix des méthodes à maillage dynamique pour résoudre des problèmes d'écoulements en domaine déformable. Les méthodes à maillage dynamique s'appuient sur une discrétisation du domaine qui est mobile. Il nous semble alors judicieux de profiter de la nécessité de bouger le maillage pour l'adapter à l'écoulement considéré.

Dans le cadre de simulations dépendant du temps, nous sommes confrontés au problème de l'évolution de la solution. Disposant au temps  $t^n$  de la solution et du maillage courants, notés respectivement  $W^n$  et  $\mathcal{M}^n$ , l'approche la plus rigoureuse consiste à déterminer le maillage  $\mathcal{M}^{n+1}$  adapté à la solution, elle-même recherchée,  $W^{n+1}$ . Or, chercher un maillage adapté à une solution à calculer est une démarche non-linéaire. Les inconnues sont la solution aux nœuds du maillage et la position des nœuds. En plus de rendre le système non-linéaire, ceci a aussi pour effet d'augmenter considérablement le nombre d'inconnues, donc d'accroître la complexité des simulations. Par souci de simplicité, nous faisons le choix d'adapter le maillage  $\mathcal{M}^{n+1}$  à la solution courante  $W^n$ . Nous introduisons alors une distribution de forces, soit attractives, soit répulsives, entre les nœuds du maillage. Le mouvement des nœuds résulte de l'obtention de l'état d'équilibre sur le domaine.

Par ailleurs, nous avons également exposé dans le chapitre précédent un schéma de volumes finis capable de gérer l'addition et la soustraction de nœuds. L'addition est vue comme la distinction de nœuds préalablement confondus, alors que la soustraction correspond à la convergence en un unique point de nœuds auparavant distincts. Ainsi, le raffinement et le déraffinement n'apparaissent plus comme une variante aux méthodes de maillages mobiles auto-adaptatifs, mais plutôt comme une généralisation de ces méthodes à des cas de volumes naissants ou disparaissants. Nous nous intéressons donc aussi ici à l'intégration de procédures additives et/ou soustractives. La décision de raffiner ou déraffiner repose sur des critères locaux, dépendant par exemple du gradient de la solution ou d'une de ses composantes.

Ce chapitre se compose de cinq parties. La première partie est consacrée aux méthodes de maillages mobiles auto-adaptatifs à topologie constante. Nous étudions leurs comportements sur des problèmes tout d'abord stationnaires, puis instationnaires. La deuxième, troisième et quatrième parties sont consacrées respectivement à la mise en œuvre de l'addition, de la soustraction et du "swapping". Dans la dernière sec-

tion de ce chapitre, nous proposons un algorithme, association de toutes les techniques précédemment cités. Pour chaque méthode, nous présenterons quelques applications sur l'équation de convection.

## 6.2 Maillage mobile auto-adaptatif à topologie fixe

Dans cette section, nous cherchons à induire un mouvement pertinent aux sommets du maillage afin d'obtenir une densité nodale plus élevée dans les régions de forte activité. Les techniques sont nombreuses dans la littérature, et reposent généralement sur un même moteur : le principe d'équidistribution. Dans le Chapitre 3 (Section 3.3), nous en avons donné une interprétation mathématique, et rappelé la notion de MMPDE (Moving Mesh Partial Differential Equation), introduite par Huang, Ren et Russel dans [23, 24, 25]. Nous ne revenons pas ici sur ce point, et renvoyons le lecteur page 61 de cette thèse pour plus de détails. Comme il l'a été fait en une dimension, nous adoptons ici le point de vue de Batina [2] et de Palmerio [43, 44], connu dans la littérature sous le nom de "spring analogy". Plus précisément, nous introduisons une distribution de forces, attractives ou répulsives, entre les nœuds du maillage. Le mouvement des nœuds résulte de l'obtention de l'état d'équilibre sur le domaine.

La première partie de cette section est donc consacrée aux fondements mathématiques de cette stratégie. On s'intéresse ensuite à son implémentation dans le cadre de problèmes stationnaires et instationnaires.

### 6.2.1 Principe

On suppose dans cette section la topologie du maillage constante, c'est-à-dire (i) le nombre de sommets  $NS$  de la discrétisation est supposé fixe et (ii) pour  $i = 1, \dots, NS$ , l'ensemble  $\mathcal{N}(i)$  des sommets voisins du nœud  $s_i$  est supposé invariant au cours du temps. Une conséquence de (ii) est que le retournement des arêtes est formellement proscrit par souci de conformité. Ce point constitue la principale contrainte des algorithmes d'adaptation de maillage. Nous reviendrons ultérieurement sur ce problème.

Nous supposons maintenant que chaque sommet  $s_i$  est connecté à ses sommets voisins  $s_j$  ( $j \in \mathcal{N}(i)$ ) par un vecteur force, noté  $\vec{F}_{ij}$ , qui s'écrit :

$$\vec{F}_{ij} = f_{ij}(\vec{s}_j - \vec{s}_i)$$

où  $f_{ij}$  représente la raideur du ressort portée par l'arête  $[s_i, s_j]$  (voir la Figure 6.1). Les inconnues sont les coordonnées des nœuds  $s_i$  pour  $i = 1, \dots, NS$ .

Nous postulons que le nouveau maillage recherché résulte de l'obtention d'un état d'équilibre dynamique virtuel pour chaque sommet du maillage, à savoir :

$$\forall i, \quad \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \vec{F}_{ij} = \vec{0}.$$

Pour atteindre cet objectif, on isole l'équation d'équilibre précédente sur chaque cellule



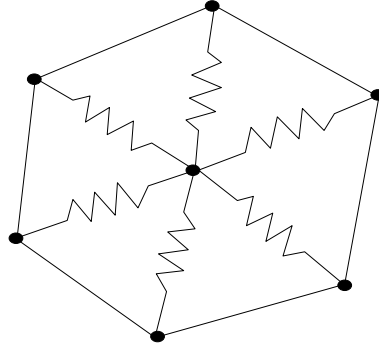


FIG. 6.1 – Représentation schématique des forces exercées par un nœud sur ses voisins.

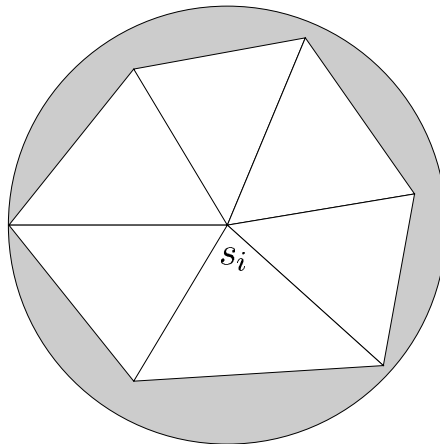
$\mathcal{C}_i$ , et on la résout en supposant les sommets voisins de  $s_i$  statiques. On écrit alors :

$$\vec{s}_i^{new} = \vec{s}_i^{old} + \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} f_{ij} (\vec{s}_j^{old} - \vec{s}_i^{old})}{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} f_{ij}}. \quad (6.1)$$

Notons  $\vec{\delta}_i = \vec{s}_i^{new} - \vec{s}_i^{old}$  le déplacement du nœud  $s_i$ , déduit de (6.1). On montre aisément que :

$$\|\vec{\delta}_i\| \leq \max_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{s}_j^{old} - \vec{s}_i^{old}\|.$$

Cette inégalité ne garantit pas la conformité du maillage. Sur la Figure 6.2, est dessiné le cercle de centre  $s_i$  de rayon  $\max_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{s}_j^{old} - \vec{s}_i^{old}\|$  afin de visualiser l'ensemble des localisations possibles pour  $s_i$ . D'ores et déjà, supposant les sommets voisins de  $s_i$  immobiles, on remarque que  $s_i$  peut se transporter dans une partie grisée, et ainsi provoquer le retournement d'arêtes.

FIG. 6.2 – Localisations possibles pour  $s_i^{new}$  avec (6.1).

Nous proposons dès lors de multiplier  $\vec{\delta}_i$  par un facteur  $\gamma_i$ , compris entre 0 et 1, afin de limiter le déplacement de  $s_i$ , et ainsi minimiser, idéalement interdire, le risque de retournement d'arêtes. Précisément, nous considérons la formule :

$$\vec{s}_i^{new} = \vec{s}_i^{old} + \gamma_i \vec{\delta}_i . \quad (6.2)$$

**Contrainte n°1 :** Nous cherchons tout d'abord  $\gamma_i$  tel que la contrainte :

$$\|\vec{s}_i^{new} - \vec{s}_i^{old}\| < \frac{1}{2} \min_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{s}_j^{old} - \vec{s}_i^{old}\| \quad (6.3)$$

soit satisfaite. Nous posons alors :

$$\gamma_i = \beta \min \left( 1, \frac{1}{2} \min_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{\|\vec{s}_j^{old} - \vec{s}_i^{old}\|}{\|\vec{\delta}_i\|} \right)$$

avec  $0 \leq \beta \leq 1$  (fixé). La conformité du maillage n'est cependant toujours pas assurée. En effet, si nous nous plaçons dans le cadre de la Figure 6.3, c'est-à-dire dans le cadre

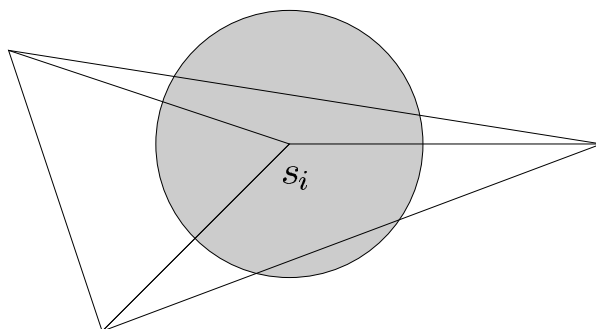


FIG. 6.3 – champ d'action pour  $s_i$  sous la contrainte (6.3).

de triangles relativement étirés, le déplacement de  $s_i$  peut, malgré (6.3), entraîner le retournement des arêtes du maillage.

**Contrainte n°2 :** Poursuivant notre raisonnement, on peut évidemment envisager un algorithme encore plus restrictif sur le mouvement des sommets. Introduisons avant quelques notations. Soient  $\mathcal{T}_i$  l'ensemble des triangles attachés au nœud  $s_i$ , et  $h_\tau(i)$  la hauteur issue de  $s_i$  du triangle  $\tau \in \mathcal{T}_i$ . On propose ici de limiter le déplacement de  $s_i$  en norme, à la plus petite hauteur issue de  $s_i$  des triangles de  $\mathcal{T}_i$ . Nous cherchons précisément  $\gamma_i$  tel que :

$$\begin{cases} h_i^* - \gamma_i \|\vec{\delta}_i\| \geq \nu h_i^* \\ \text{où } h_i^* = \min_{\tau \in \mathcal{T}_i} h_\tau(i) \end{cases} , \quad (6.4)$$

où  $0 \leq \nu \leq 1$  (fixé). Après déplacement du sommet  $s_i$ , la contrainte (6.4) nous assure que la plus petite hauteur issue de  $s_i$  est dans le pire des cas  $\nu h_i^*$ . Or, si le maillage

initial est déjà fortement étiré (c'est-à-dire  $h_i^*$  petit), nous ne souhaitons pas l'étirer davantage. Pour ce faire, nous ajoutons à (6.4) la condition suivante :

$$h_i^* - \gamma_i \|\vec{\delta}_i\| \geq \max(\bar{h}, \nu h_i^*) \quad (6.5)$$

où  $\bar{h}$  désigne une hauteur de référence, plus spécifiquement la plus petite hauteur admise pour tous les éléments du maillage.

**Remarque 14** *D'autres stratégies sont évidemment possibles. Par exemple, partant de l'expression (6.1), on sait quelle sera la direction de  $\vec{\delta}_i$ . Suivant cette dernière et la géométrie du maillage considéré, il se peut qu'une contrainte du type (6.5) pénalise inutilement la migration du nœud  $s_i$ . On peut alors envisager de limiter le déplacement de  $\vec{\delta}_i$  en fonction de sa direction, et/ou de mettre à jour les coordonnées des nœuds au fur et à mesure des itérations (6.1), c'est-à-dire considérer les formules de la forme :*

$$\vec{s}_i^{new} = \vec{s}_i^{old} + \gamma_i \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} f_{ij}(\vec{s}_j - \vec{s}_i^{old})}{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} f_{ij}}$$

$$\text{où } s_j = \begin{cases} s_j^{new} & \text{si le sommet } s_j \text{ a déjà été traité} \\ s_j^{old} & \text{sinon} \end{cases} .$$

Cette dernière suggestion demande de recalculer à chaque itération sur les sommets la raideur  $f_{ij}$  des ressorts fictifs portés par les arêtes incidentes au sommet dernièrement actualisé. Par souci de simplicité pour une première implémentation et par souci d'économie en terme de coût de calcul, nous n'approfondissons pas davantage ces idées en dépit de leur apparente fiabilité. Nous retenons, malgré le risque, bien que limité, de retournement d'arêtes, la stratégie présentée précédemment, qui consiste à appliquer le schéma (6.2) couplé aux contraintes (6.3) ou (6.5). Voyons à présent son implémentation, et par suite son comportement, dans le cadre tout d'abord d'une adaptation statique, puis sur un problème de convection.

## 6.2.2 Adaptation statique

### 6.2.2.1 Algorithme d'adaptation statique

Soient  $\mathcal{M}^n$ , une discrétisation du domaine au temps  $t^n$ , et  $W^n$ , la solution calculée sur  $\mathcal{M}^n$ . On se propose ici de déterminer le maillage  $\mathcal{M}^n$  adapté à  $W^n$ . Afin d'atteindre cet objectif, nous proposons une méthode itérative, dont la construction repose sur la démarche présentée ci-dessus.

Nous commençons par initialiser les variables en posant

$$\forall i, \quad s_i^{(0)} = s_i^n \quad \text{et} \quad W_i^{(0)} = W_i^n .$$

Nous supposons ensuite que chaque sommet exerce sur ses voisins une force d'attraction-répulsion, notée  $\vec{F}_{ij}^{(k)}$  ( $= f_{ij}^{(k)}(\vec{s}_j^{(k)} - \vec{s}_i^{(k)})$ ) et supposée ici connue. La question

du choix de  $\vec{F}_{ij}^{(k)}$  sera abordée ultérieurement. Appliquant la méthode définie en (6.2), nous proposons le schéma itératif suivant :

$$\vec{s}_i^{(k+1)} = \vec{s}_i^{(k)} + \gamma_i^{(k)} \vec{\delta}_i^{(k)}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \vec{\delta}_i^{(k)} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} f_{ij}^{(k)} (\vec{s}_j^{(k)} - \vec{s}_i^{(k)})}{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} f_{ij}^{(k)}} \\ \gamma_i^{(k)} \text{ tel que (6.3) ou (6.5)} \end{cases} .$$

Les contraintes (6.3) et (6.5) s'écrivent précisément ici :

$$\text{contrainte (6.3)} : \quad \|\vec{s}_i^{(k+1)} - \vec{s}_i^{(k)}\| < \frac{1}{2} \min_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{s}_j^{(k)} - \vec{s}_i^{(k)}\|$$

$$\text{contrainte (6.5)} : \quad h_i^* - \gamma_i^{(k)} \|\vec{s}_i^{(k+1)} - \vec{s}_i^{(0)}\| \geq \max(\bar{h}, \nu h_i^*)$$

où  $h_i^*$  désigne la plus petite hauteur initial (au temps  $t^n$ ) issue de  $s_i$  des triangles attachés à  $s_i$ .

La méthode présentée ci-dessus nécessite à chaque itération de calculer  $f_{ij}^{(k)}$ .  $f_{ij}^{(k)}$  dépend naturellement des sommets  $s_i^{(k)}$  et  $s_j^{(k)}$ , mais aussi, à cause de l'impact adaptatif que nous conférons à la méthode, de la solution en ces sommets. Nous devons donc, à chaque itération, mettre également à jour la solution. Dans la littérature, on a alors communément recours à l'interpolation. Or, nous avons à notre disposition, dans le Chapitre 5, un schéma numérique (5.2), dont l'une des particularités est l'utilisation de maillages mobiles. D'autre part, nous pouvons assimiler la mise à jour de la solution sur le nouveau maillage à la résolution d'une équation stationnaire ( $W_t = 0$ ). Pour la résoudre, nous proposons donc d'appliquer le schéma (5.2), qui, adapté à la configuration présente, s'écrit :

$$A_i^{(k+1)} W_i^{(k+1)} = A_i^{(k)} W_i^{(k)} + \Delta t^{(k)} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{\eta}_{ij}^{(k)}\| \sigma_{ij}^{(k)} W_{ij}^{(k)}, \quad (6.6)$$

où  $W_{ij}^{(k)}$  est donné par la méthode de Godunov (5.10), c'est-à-dire :

$$W_{ij}^{(k)} = \begin{cases} W_i^{(k)} & \text{si } \nu_{ij}^{(k)} < 0 \\ W_j^{(k)} & \text{si } \nu_{ij}^{(k)} > 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

(les notations utilisées ici sont les mêmes que dans le Chapitre 5).

L'algorithme décrit ci-dessus peut se résumer comme suit :

**Algorithme d'adaptation statique (Spring-2D)**

1.  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\mathcal{M}^{(0)} (:= \mathcal{M}^n)$  et  $\mathbf{W}^{(0)} (:= W^n)$ , les données initiales, représentent le maillage et la solution sur ce maillage au temps  $t = t^n$ ;
3. Itérations sur  $k$ 
  - (a) Calculer  $\mathbf{f}_{ij}^{(k)}$  pour toutes les arêtes du maillage;
  - (b)  $\forall i$ , calculer  $\vec{\delta}_i^{(k)}$  et  $\gamma_i^{(k)}$ ;
  - (c) Poser  $\forall i$  :
 
$$\vec{s}_i^{(k+1)} := \vec{s}_i^{(k)} + \gamma_i^{(k)} \vec{\delta}_i^{(k)};$$
  - (d) Si  $\|\vec{s}^{(k+1)} - \vec{s}^{(k)}\| > TOL$  ou  $k \leq KMAX$  alors :
    - i. Appliquer le schéma (6.6-6.7)  $\longrightarrow \mathbf{W}^{(k+1)}$ ;
    - ii.  $\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + \mathbf{1}$ ;
    - iii. Poursuivre en 3;
4. Poser  $\forall i$ ,  $\vec{s}_i^n := \vec{s}_i^{(k+1)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}^n$ .

Avant de tester l'algorithme décrit ci-dessus sur des exemples simples, il reste à présent à définir  $f_{ij}^{(k)}$ . Dans le Chapitre 3, nous avons vu que le mouvement du maillage dépend du choix de la fonction de contrôle  $M$ . Une fonction de contrôle est une fonction, qui exprime les grandeurs mathématiques que nous souhaitons équirépartir sur le maillage. Par exemple, afin d'augmenter la densité nodale dans les régions de forts gradients, un choix usuel consiste à prendre :

$$M = \sqrt{1 + \alpha |\partial W / \partial s|^2}$$

où  $\partial W / \partial s$  représente le gradient de la solution dans la direction de l'arête et  $\alpha$  est un réel positif permettant de moduler l'importance accordée à  $|\partial W / \partial s|$ . Nous posons alors :

$$f_{ij} = \sqrt{1 + \alpha \left( \frac{W_j - W_i}{\|\vec{s}_j - \vec{s}_i\|} \right)^2}. \quad (6.8)$$

Nous remarquons cependant que si  $\|\vec{s}_j - \vec{s}_i\| \rightarrow 0$  (autrement dit si  $s_j$  est proche  $s_i$ ) alors  $f_{ij} \rightarrow +\infty$ , et redoutons de ce fait le retournement de l'arête  $[s_i, s_j]$ . Nous suggérons alors de définir  $f_{ij}$  comme suit :

$$f_{ij} = \sqrt{\|\vec{s}_j - \vec{s}_i\|^2 + \alpha (W_j - W_i)^2}. \quad (6.9)$$

D'autres grandeurs mathématiques que le gradient peuvent être privilégiées. Palmério dans [43, 44] cherche à équirépartir le saut de la solution  $|W_j - W_i|$  sur toutes les arêtes du maillage, et pose alors :

$$f_{ij} = \alpha |W_j - W_i| + C_0 \quad (6.10)$$

où  $C_0$  est une constante, dont le but est de freiner le déplacement des sommets. Cette méthode est différente des deux précédentes, car  $f_{ij}$  est ici indépendante de  $s_i$  et  $s_j$ . D'autres choix sont évidemment possibles. Nous n'en détaillons pas ici davantage. Nous préférons observer le comportement des trois méthodes proposées ci-dessus sur quelques exemples.

### 6.2.2.2 Applications numériques

Nous testons dans cette section l'algorithme d'adaptation statique présenté précédemment sur des exemples simples. Nous considérons comme critère d'adaptation (6.10), (6.8), ou (6.9), et imposons comme contrainte (6.3). On effectue au maximum 100 itérations d'adaptations de maillage. Le maillage initial est un maillage uniforme du domaine de calcul.

Exemple 1 :  $W(x, y) = e^{-50(x-\frac{1}{2})^2}$  → voir Figure 6.4

Exemple 2 :  $W(x, y) = e^{-100((x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2)}$  → voir Figures 6.5 et 6.8

Exemple 3 :  $W(x, y) = e^{-8(9(x-\frac{1}{2})^2+16(y-\frac{1}{2})^2-1)^2}$  → voir Figures 6.6 et 6.9

Exemple 4 :  $W(x, y) = e^{-200((y-\frac{7}{10})-2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2})^2}$  → voir Figures 6.7 et 6.10

Comme nous l'avons annoncé ci-dessus, nous constatons pour l'Exemple 1, en particulier sur la Figure 6.4(a), que le critère (6.10) muni de  $C_0 = 0$  stimule considérablement les sommets, car son but est alors d'équiperartir le saut de la solution. Nous vérifions sur la Figures 6.4(b), que l'introduction d'un paramètre  $C_0$  non-nul restreint fortement la migration des sommets, et prévient ainsi le retournement des arêtes. D'autre part, comparant les résultats obtenus sur les Figures 6.4(c) et 6.4(e), nous remarquons logiquement que la méthode (6.8) incite davantage les sommets à migrer dans les régions de forts gradients, par rapport à la méthode (6.9). Ainsi, pour l'exemple 1, les noeuds, dont l'abscisse est proche de 0.5, ont tendance avec le critère (6.8) à se déplacer vers la gauche ou vers la droite, mais à ne pas rester à leur place. Ce constat est encore plus visible sur la Figure 6.8(c). Le critère (6.9) privilégie, quant à lui, davantage la longueur des arêtes. Le mouvement des nœuds est de ce fait plus modéré qu'avec (6.8) pour  $\alpha$  identique (voir par exemple les Figures 6.8(c) et 6.8(e)).

## 6.2.3 Adaptation dynamique

### 6.2.3.1 Algorithme d'adaptation dynamique

Nous cherchons dans cette section à compléter le schéma (5.9), écrit sur un maillage mobile (à topologie constante), par un algorithme d'adaptation de maillages. Les problèmes abordés ici seront aussi bien stationnaires qu'instationnaires.

Dans le cadre de simulations dépendant du temps, nous sommes confrontés au problème de l'évolution de la solution. La rigueur impliquerait de chercher le maillage adapté à la solution à calculer. Or, déterminer simultanément le maillage et la solution

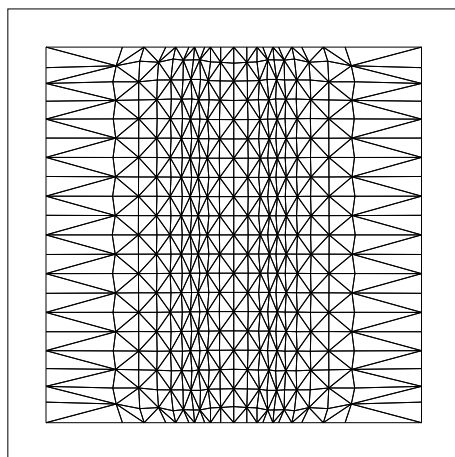
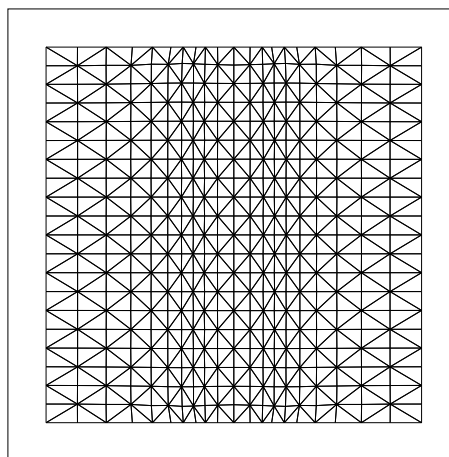
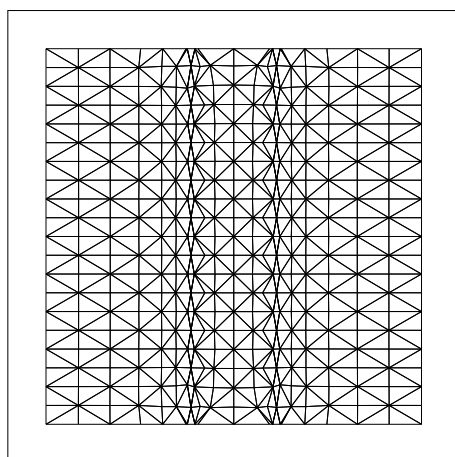
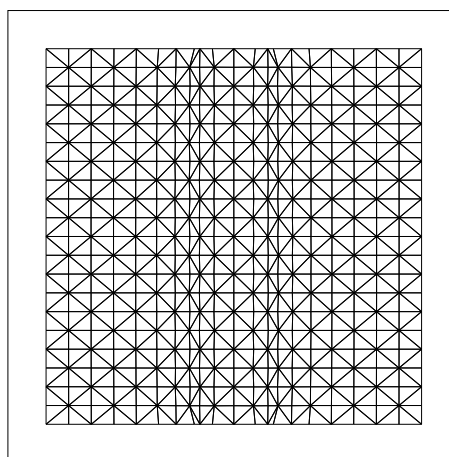
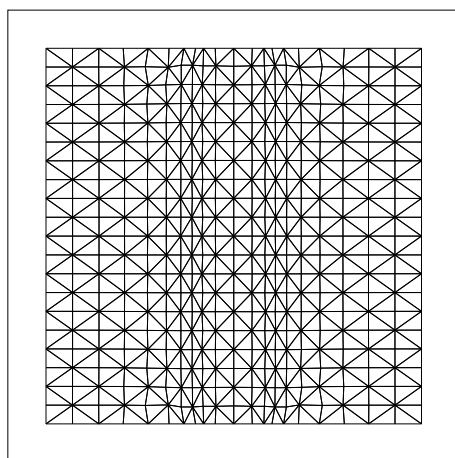
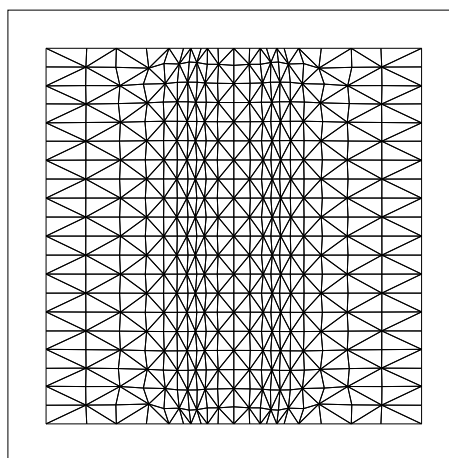
(a) (6.10) avec  $\alpha = 1$  et  $C_0 = 0$ (b) (6.10) avec  $\alpha = 10$  et  $C_0 = 1$ (c) (6.8) avec  $\alpha = 1$ (d) (6.8) avec  $\alpha = 0.1$ (e) (6.9) avec  $\alpha = 1$ (f) (6.9) avec  $\alpha = 10$ 

FIG. 6.4 – Application de Spring\_2D sur Exemple 1.

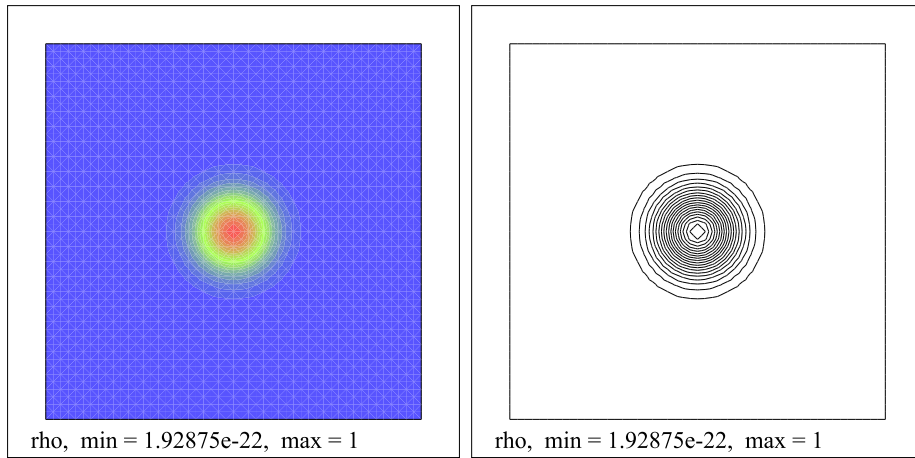


FIG. 6.5 – Exemple 2.

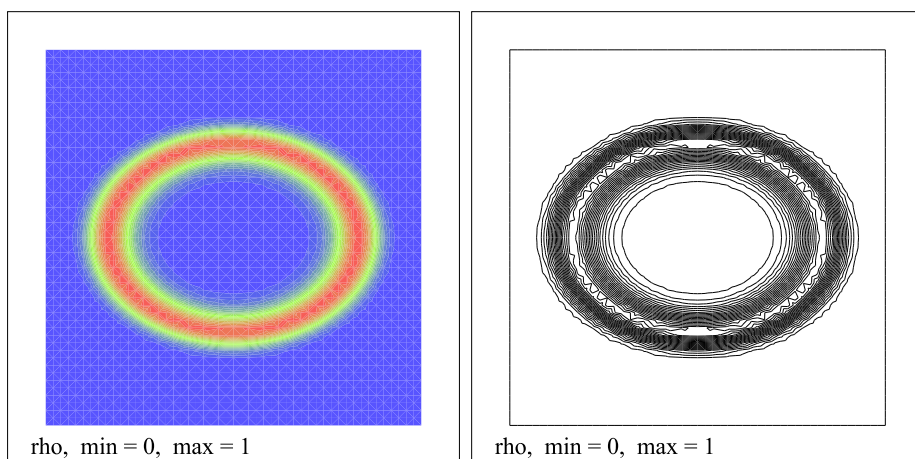


FIG. 6.6 – Exemple 3.

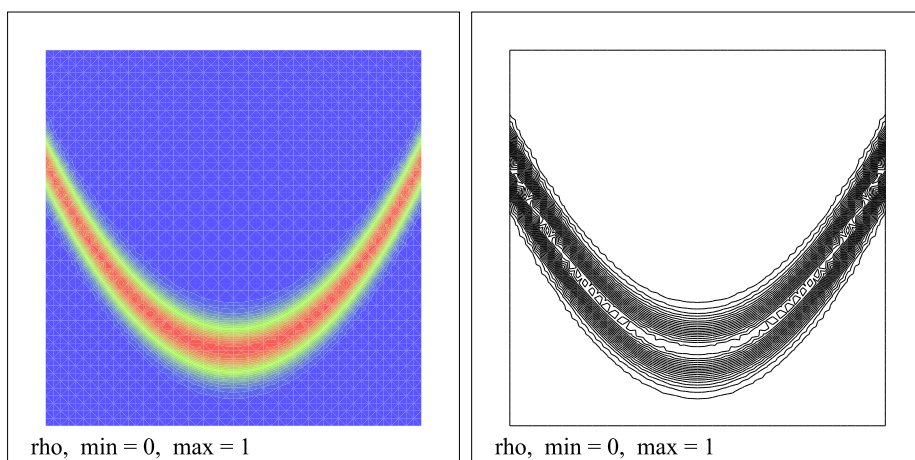


FIG. 6.7 – Exemple 4.



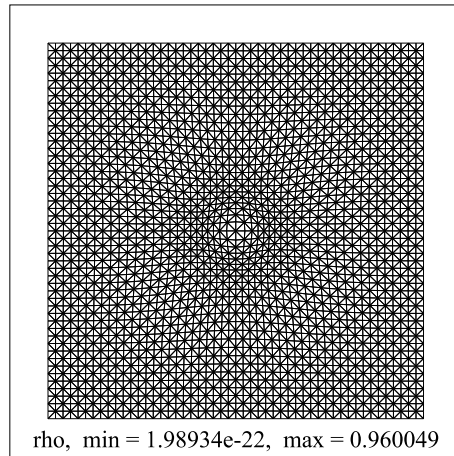
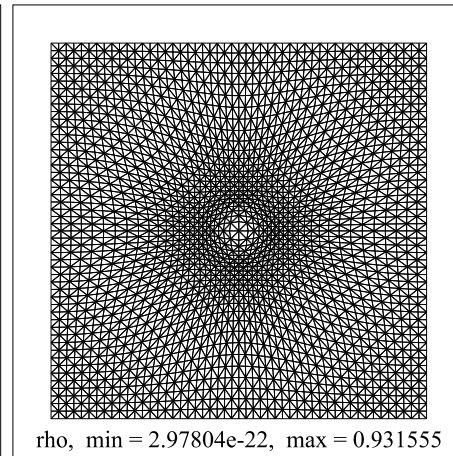
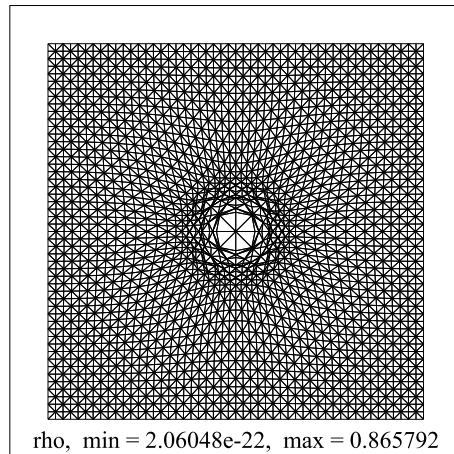
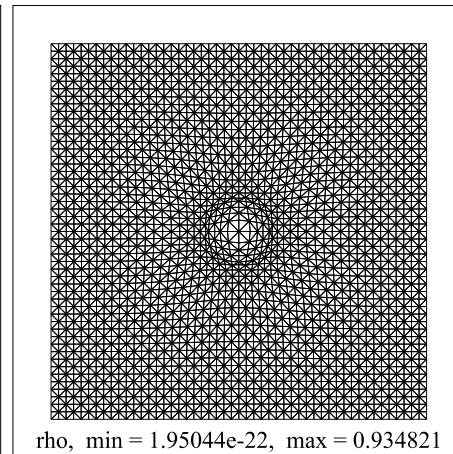
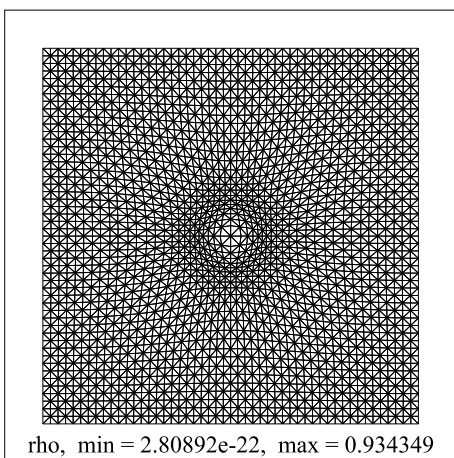
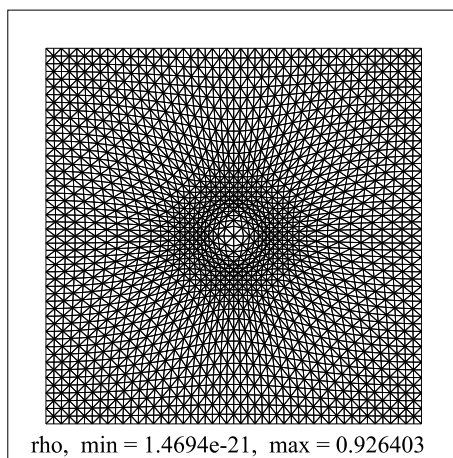
(a) (6.10) avec  $\alpha = 10$  et  $C_0 = 1$ (b) (6.10) avec  $\alpha = 100$  et  $C_0 = 1$ (c) (6.8) avec  $\alpha = 1$ (d) (6.8) avec  $\alpha = 0.1$ (e) (6.9) avec  $\alpha = 1$ (f) (6.9) avec  $\alpha = 10$ 

FIG. 6.8 – Application de Spring\_2D sur Exemple 2.

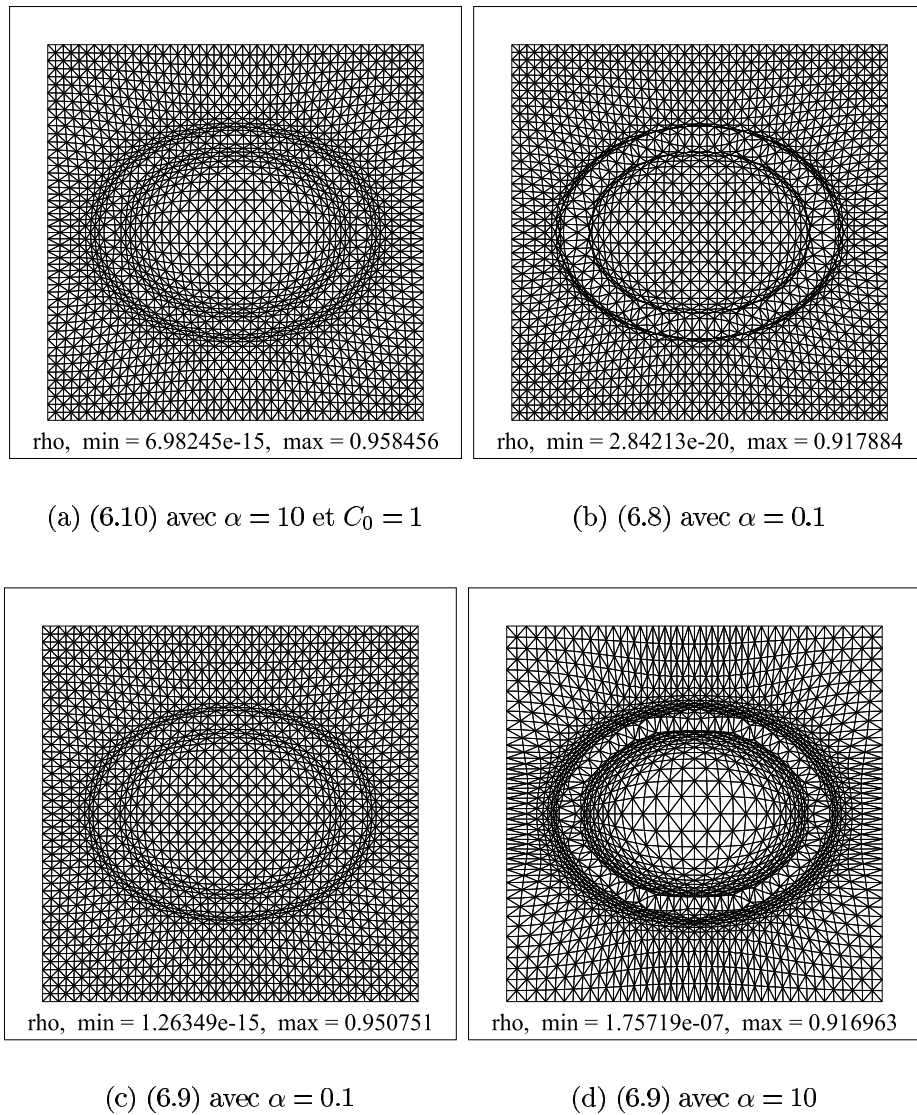


FIG. 6.9 – Application de Spring-2D sur Exemple 3.

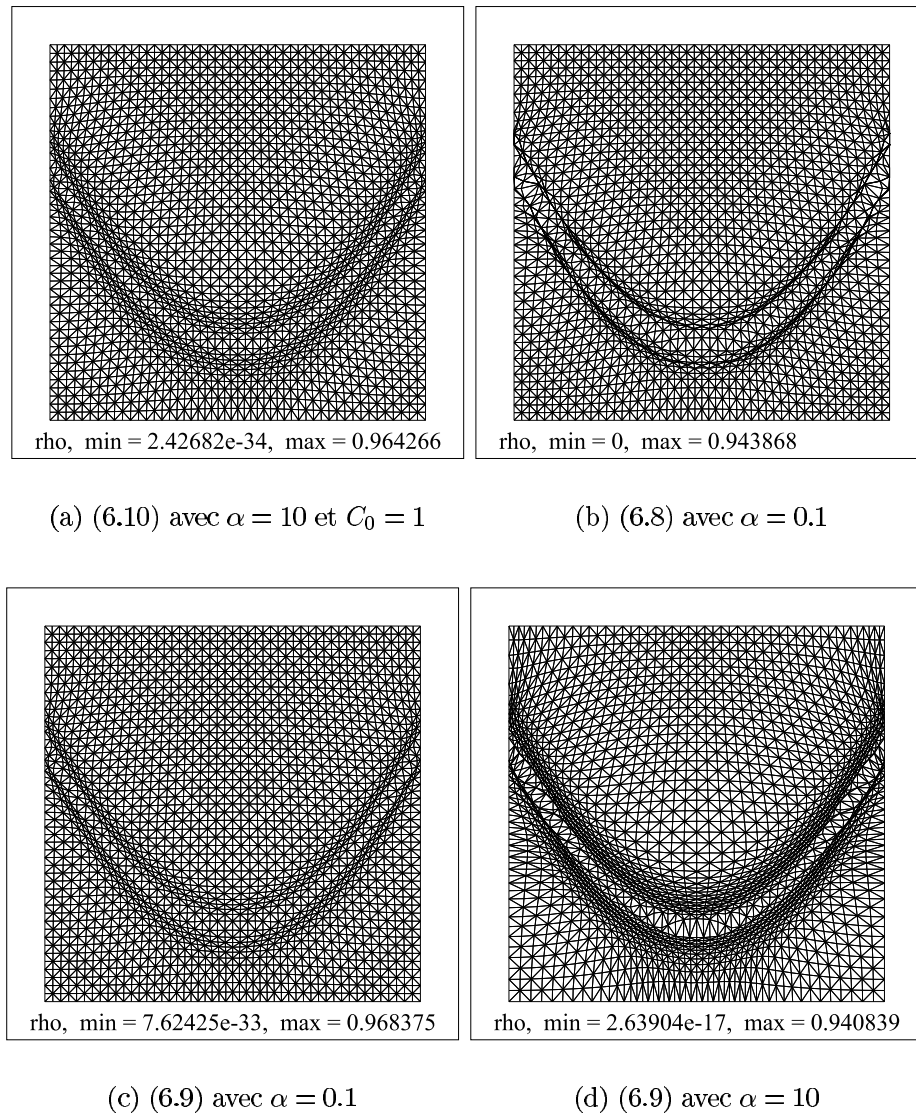


FIG. 6.10 – Application de Spring-2D sur Exemple 4.

est une démarche non-linéaire, dont les inconnues sont bien entendu la solution aux nœuds du maillage et les coordonnées des nœuds. Afin d'éviter les difficultés d'une telle démarche, nous préférons dissocier la détermination du maillage de la résolution de l'équation. Nous proposons dans ce sens d'adapter le maillage à la solution courante. Plus précisément, disposant du maillage courant  $\mathcal{M}^n$  et de la solution sur ce maillage  $W^n$ , nous cherchons le maillage au temps  $t^{n+1}$  en l'adaptant à la solution au temps  $t^n$ . Revenus à un problème d'adaptation statique, nous suggérons de le résoudre à l'aide de `Spring_2D`. L'algorithme de résolution s'écrit alors explicitement comme suit :

**Schéma avec algorithme d'adaptation dynamique (Movmesh\_2D)**

1.  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  ;
2.  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathbf{W}^0$ , les données initiales, représentent le maillage et la solution au temps  $t = 0$  ;
3. **Itérations sur  $n$** 
  - (a) Déterminer  $\Delta t^n$  ;
  - (b)  $t^{n+1} := t^n + \Delta t^n$  ;
  - (c) `Movmesh_2D` :
    - i. Appliquer `Spring_2D`  $\longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}^n$  ;
    - ii. Poser  $\mathcal{M}^{n+1} := \tilde{\mathcal{M}}^n$  ;
  - (d) Appliquer le schéma numérique (5.9) :

$$A_i^{n+1}W_i^{n+1} - A_i^nW_i^n + \Delta t^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\vec{\eta}_{ij}\| \phi_{ij} = 0$$

où :

- $\forall i$ , la vitesse du sommet  $s_i$  est donnée par  $\vec{w}_i = \frac{\vec{s}_i^{n+1} - \vec{s}_i^n}{\Delta t}$ ,
  - $\vec{\eta}_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  valent respectivement (5.6) et (5.8),
  - le flux numérique  $\phi_{ij}$  est défini en (5.12).
- $\longrightarrow \mathbf{W}^{n+1}$  ;
- (e) Si  $t^{n+1} \leq TMAX$  alors :
    - i.  $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}$  ;
    - ii. Poursuivre en 3 ;

La détermination du maillage étant à présent indépendante de la résolution de l'équation, l'algorithme d'adaptation dynamique, présenté ci-dessus, se distingue de par la simplicité de sa mise en œuvre. Le principal préjudice est d'accepter que le maillage ait au cours de la simulation un temps de retard par rapport à la solution. Le terme "adaptation" peut, du fait de son caractère non-optimal, sembler inapproprié. Par "adaptation", nous entendons ici modestement que le mouvement du maillage soit

cohérent avec l'évolution de la solution. Notons enfin que nous avons choisi de procéder ainsi pour des raisons uniquement de simplicité, et en aucun cas pour des raisons de limites du schéma numérique.

### 6.2.3.2 Applications numériques

Dans cette section, nous cherchons à appliquer l'algorithme d'adaptation dynamique présenté ci-dessus sur un exemple simple, précisément l'équation de convection/diffusion :

$$\begin{cases} W_t + c(x, y) \cdot \nabla W = \Delta W, & (x, y, t) \in \Omega \times [0, T], \\ W(x, y, 0) = W^0(x, y), & (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (6.11)$$

où  $c$  est le vecteur champ de vitesses du fluide. Le domaine considéré est  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Le schéma est testé sur ce problème accompagné de différentes fonctions initiales  $W^0$ . Le maillage initial est choisi uniforme, et nous appliquons l'algorithme `Spring_2D` en imposant comme contrainte (6.3).

Nous ne présentons pas ici de problèmes stationnaires. En vue de la stratégie adoptée, les résultats obtenus sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus dans la Section 6.2.2.2. Nous présentons uniquement les solutions fournies par l'algorithme sur des problèmes instationnaires. Plus précisément, les deux premiers exemples concernent un écoulement se déplaçant uniquement de la gauche vers la droite ( $c(x, y) = 0.3x \vec{e}_x$ ). Dans les exemples suivants, on introduit un effet convectif tournant ( $c(x, y) = (0.5 - y) \vec{e}_x + (x - 0.5) \vec{e}_y$ ).

Exemple 1 :  $W^0(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(5\left(x - \frac{1}{10}\right)\right) + \frac{1}{2}$  → voir Figure 6.11

Exemple 2 :  $W^0(x, y) = e^{-100\left(\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)}$  → voir Figure 6.12

Exemple 3 :  $W^0(x, y) = e^{-100\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{10}\right)^2\right)}$  → voir Figure 6.13

Exemple 4 :  $W^0(x, y) = \begin{cases} e^{-64\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)} & \text{si } x < 0.5 \\ e^{-64\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)} & \text{si } x > 0.5 \end{cases}$  → voir Figure 6.14

Comme nous l'avons dit plus haut, nous remarquons sur ces exemples que l'adaptation de maillage n'est pas optimale, car elle a toujours un temps de retard par rapport à la solution. Le pas de temps ( $\Delta t = 0.1$ ) étant choisi relativement petit pour de telles simulations, le mouvement du maillage demeure cependant cohérent avec l'évolution de la solution.

Une variante aux techniques de maillage mobile auto-adaptatif sont les méthodes de raffinement/déaffinement. Dans le Chapitre 5, nous avons proposé une procédure d'addition et de soustraction de points, à notre connaissance originale. Elle consiste à assimiler l'ajout d'un nœud à la subdivision à un instant  $t$  de deux sommets, qui étaient jusqu'à présent confondus. Inversement, la soustraction correspond à la convergence en un unique point de deux nœuds auparavant distincts. Les sections suivantes sont consacrées à leur mise en œuvre.

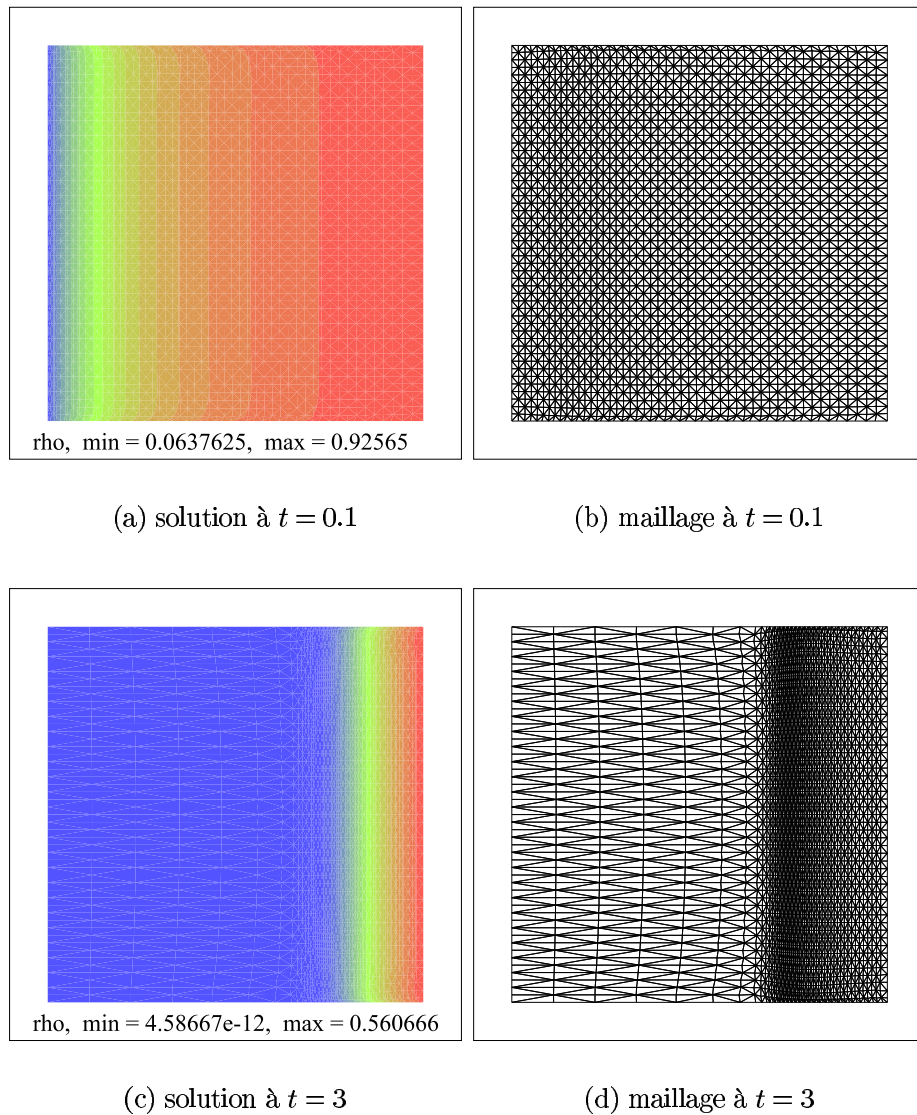
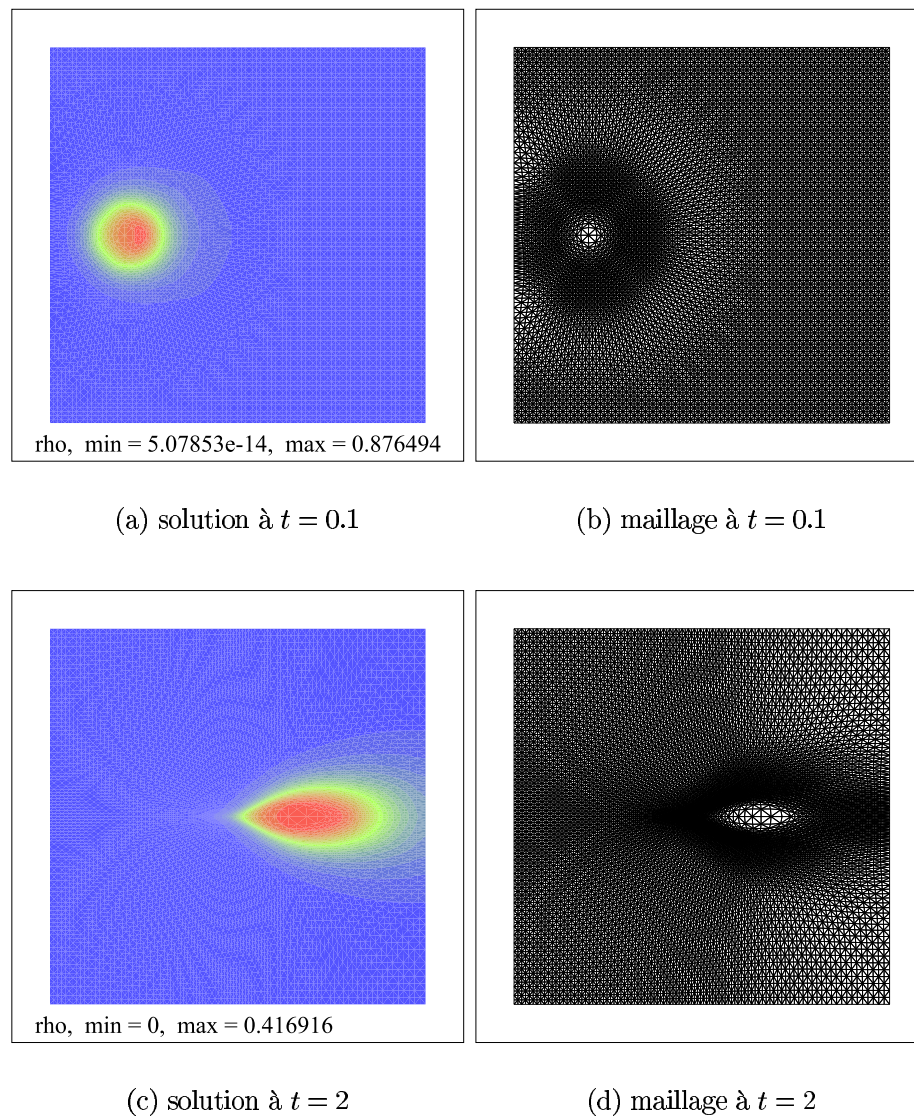
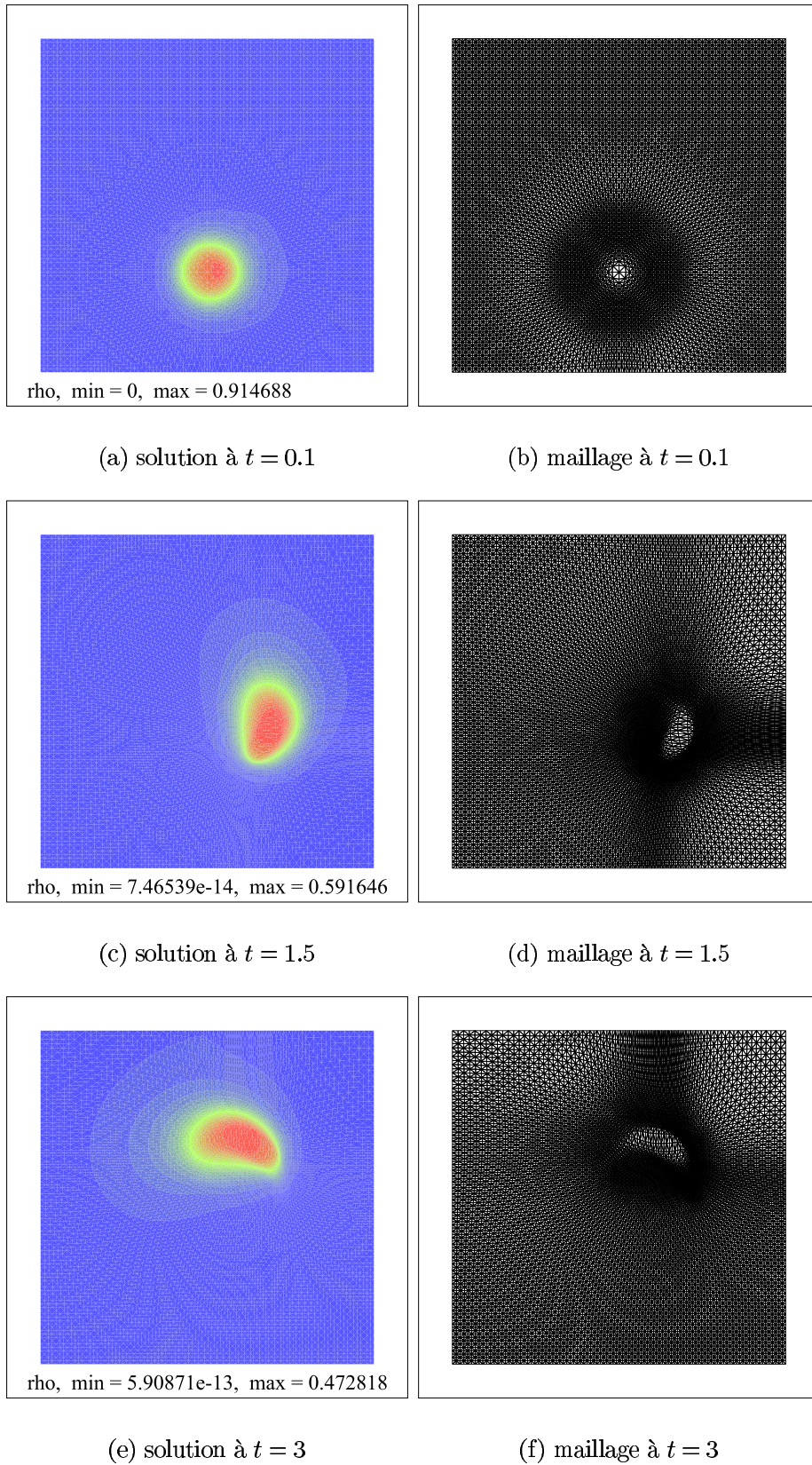
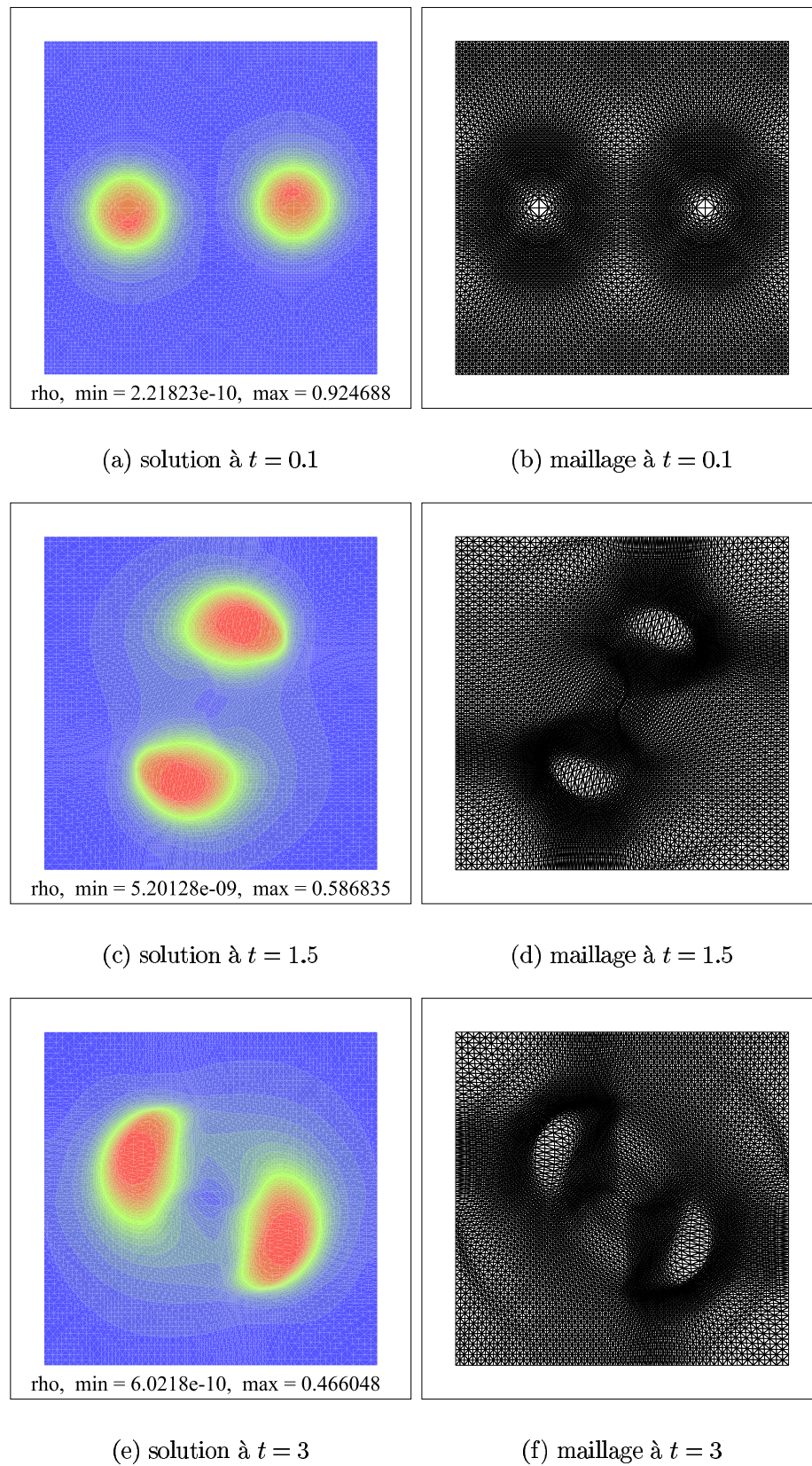


FIG. 6.11 – Exemple 1 : Movmesh\_2D avec (6.10) ( $\alpha = 5000$  et  $C_0 = 1$ ) .

FIG. 6.12 – Exemple 2 : Movmesh\_2D avec (6.9) ( $\alpha = 100$ ) .

FIG. 6.13 – Exemple 3 : Movmesh\_2D avec (6.9) ( $\alpha = 50$ ) .



FIG. 6.14 – Exemple 4 : Movmesh\_2D avec (6.9) ( $\alpha = 50$ ).

## 6.3 Addition

Nous souhaitons ici intégrer l'addition (Section 5.4.1) dans un code de calcul, afin de raffiner le maillage automatiquement et dynamiquement au cours de la simulation. Avant de présenter notre algorithme, nous rappelons ci-après ses principes et concepts. Nous présentons enfin quelques exemples d'applications élémentaires.

### 6.3.1 Principes

Rappelons tout d'abord quelques choix stratégiques suggérés au Chapitre 5 :

- **Utilisation des segments** : les décisions de division sont reportées sur les arêtes du maillage. Ainsi, les connexions des nouveaux nœuds aux anciens sont plus aisées.
- **Division d'un triangle en deux ou quatre** : nous interdisons les éléments, où seules deux arêtes doivent être coupées, afin d'éviter de générer des éléments trop dissemblables. Si deux arêtes d'un élément doivent être coupées, la troisième l'est aussi.

Nous n'insistons pas ici davantage sur ces points, et renvoyons le lecteur à la Section 5.4.1.4 de cette thèse pour plus de détails.

D'autre part, si un élément est fortement étiré, le couper en deux (ou en quatre) nuit gravement à la qualité du maillage. En effet, les deux triangles (respectivement quatre) issus de cette opération sont encore plus étirés que le triangle initial. Nous proposons dès lors d'éviter de découper de tels éléments. Pour ce faire, avant de prendre la décision d'ajouter un nœud sur une arête, nous calculons pour chaque triangle sa plus petite hauteur. Si celle-ci est jugée trop petite, aucune décision de division ne sera prise sur toutes ses arêtes. Elles pourront néanmoins être coupées par souci de conformité.

### 6.3.2 Critère

Toutes les méthodes d'adaptation de maillages reposent sur le choix d'un critère. On distingue deux types de critères : ceux estimant l'erreur locale commise par le schéma (voir [26]), et ceux relatifs à des grandeurs significatives d'activité, comme le gradient.

Pour des raisons de simplicité, nous optons pour un critère du deuxième type. Précisément, nous ajoutons un nœud au milieu du segment  $[s_i, s_j]$  si

$$c_{ij} > cref^+$$

où  $c_{ij} = \sqrt{\|\vec{s}_j - \vec{s}_i\|^2 + \alpha(W_j - W_i)^2}$  et  $cref^+$  est un paramètre de référence positif fixé. Le paramètre  $\alpha$  (comme pour les méthodes de maillages mobiles décrites ci-dessus) permet de jouer sur l'importance relative entre les gradients de la fonction et la taille des mailles.

### 6.3.3 Algorithme

Pour plus de lisibilité, nous décomposons le code de calcul en procédures. Introduisons avant quelques notations. Soient  $NS$  le nombre de sommets,  $NSG$  le nombre d'arêtes et  $NT$  le nombre de triangles de la discrétisation.

La première procédure s'appelle `Addition_2D`. En entrée sont donnés un maillage et la solution sur ce maillage. Elle fournit en sortie un tableau sur les segments, noté  $icut$ , qui définit si une arête  $isg$  doit être coupée ( $icut(isg) = 1$ ) ou non ( $icut(isg) = 0$ ), en raison des principes et critères présentés dans les sections précédentes. Voici un aperçu général de `Addition_2D` :

<b>Procédure Addition_2D</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\forall isg = 1, \dots, NSG</math>, poser <math>icut(isg) := 0</math>;</li> <li>2. <math>\forall isg = 1, \dots, NSG</math>, calculer <math>c_{isg}</math> (critère sur <math>isg</math>);</li> <li>3. <math>\forall jt = 1, \dots, NT</math>, <b>faire</b> : <ol style="list-style-type: none"> <li>(a) Calculer <math>h_{jt}^*</math>, la plus petite hauteur de <math>jt</math>;</li> <li>(b) <b>Si</b> <math>h_{jt}^* &lt; \bar{h}</math> <b>alors</b> poser <math>c_{isg} := -c_{isg}</math>;</li> </ol> </li> <li>4. <math>\forall isg = 1, \dots, NSG</math>, <b>faire</b> : <ol style="list-style-type: none"> <li><b>Si</b> <math>c_{isg} &gt; cref^+</math> <b>alors</b> <math>icut(isg) = 1</math>;</li> </ol> </li> <li>5. <math>\forall jt = 1, \dots, NT</math>, <b>si</b> uniquement deux des trois arêtes de <math>jt</math>, notées <math>jsg1</math> et <math>jsg2</math>, vérifient <math>icut(jsg1) = 1</math> et <math>icut(jsg2) = 1</math>, <b>alors</b> on pose : <ol style="list-style-type: none"> <li><math>icut(jsg3) = 1</math>.</li> </ol> </li> </ol>

Dans le but d'éviter un nombre d'additions excessif, nous pouvons envisager de limiter le nombre d'additions. Pour ce faire, nous définissons un nombre maximal d'additions souhaité, noté  $NS_{max}^+$ . Le nombre de sommets issus de l'addition, notés  $NS^+$  est mis à jour au fur et à mesure des itérations. Quand  $NS^+ \geq NS_{max}^+$ , alors on sort de la boucle 4. Notons cependant que le nombre d'additions effectives peut être légèrement supérieur à  $NS^+$  en raison de 5.

Connaissant  $icut(isg) \forall isg$ , il faut à présent actualiser la topologie du maillage. Concrètement, ceci implique :

- pour chaque arête, telle que  $icut(isg) = 1$ , créer un nœud, qui, au temps  $t^n$  est confondu avec une extrémité de  $isg$ , et qui au temps  $t^{n+1}$  se situe au milieu de l'arête;
- créer les arêtes, qui au temps  $t^n$  sont réduites à un point, et mettre à jour les extrémités des arêtes divisées;
- créer les triangles, qui au temps  $t^n$  sont de volume nul, et mettre à jour les sommets des triangles coupés en deux ou quatre;
- actualiser  $NS$ ,  $NSG$  et  $NT$ .

Tel est le but de la procédure `Newtopo1_2D`.

Le code s'écrit finalement :

**Schéma avec raffinement**

1.  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  ;
2.  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathbf{W}^0$ , les données initiales, représentent le maillage et la solution au temps  $t = 0$ .
3. **Itérations sur  $n$** 
  - (a) Déterminer  $\Delta t^n$  ;
  - (b)  $t^{n+1} := t^n + \Delta t^n$  ;
  - (c) Appliquer `Addition_2D` ;
  - (d) Appliquer `Newtopo1_2D` ;
  - (e) Appliquer le schéma numérique (5.9) sur la nouvelle topologie ;
  - (f) Si  $t^{n+1} \leq TMAX$  alors :
    - i.  $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}$  ;
    - ii. Poursuivre en 3 ;

### 6.3.4 Exemples d'application

Cette section est consacrée à la validation de l'algorithme précédent sur l'équation de convection-diffusion (6.11). Dans un premier temps, nous observons son comportement sur un problème stationnaire. Le maillage initial est un maillage uniforme composé de 2601 sommets. Nous prenons  $\alpha = 100$ ,  $\bar{h} = h_0^*/2$  (où  $h_0^*$  est la plus petite hauteur du maillage au temps  $t = 0$ ) et  $cref^+ = 2 \sum_{[s_i, s_j]} c_{ij} / NSG$ .

Exemple 1 :  $W(x, y) = \exp^{-100((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2)}$  → voir Figure 6.15

Exemple 2 :  $W(x, y) = \exp^{-8(9(x-\frac{1}{2})^2 + 16(y-\frac{1}{2})^2 - 1)^2}$  → voir Figure 6.16

Nous présentons maintenant quelques exemples de problèmes instationnaires (les mêmes que ceux abordés dans la Section 6.2.3.2). Le maillage initial est toujours ici uniforme, et composé de 2601 sommets. Le seul paramètre que nous modifions est  $\bar{h}$ . Il est ici choisi deux fois plus petit, afin de raffiner davantage.

Exemple 3 :  $W(x, y) = \exp^{-100((x-\frac{1}{4})^2 + (y-\frac{1}{2})^2)}$  → voir Figure 6.17

Exemple 4 :  $W(x, y) = \exp^{-100((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{3}{10})^2)}$  → voir Figure 6.18

Au fur et à mesure des itérations, la procédure de raffinement génère des nœuds dans les régions de forts gradients. Or, pour des problèmes instationnaires (Exemple 3 et 4), ces régions se déplacent au cours du temps. Ainsi, les maillages obtenus à un

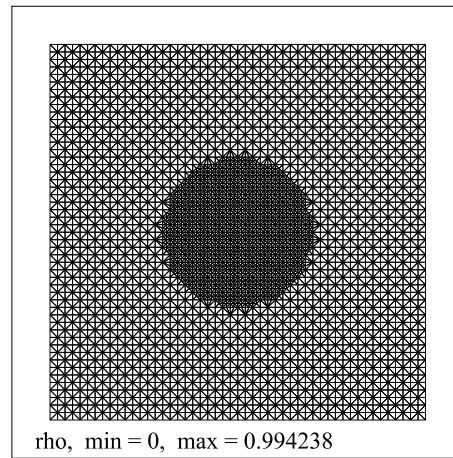


FIG. 6.15 – Addition pour Exemple 1 (+964 nœuds).

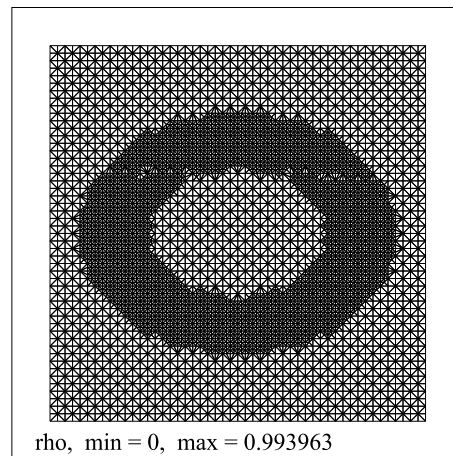


FIG. 6.16 – Addition pour Exemple 2 (+2293 nœuds).

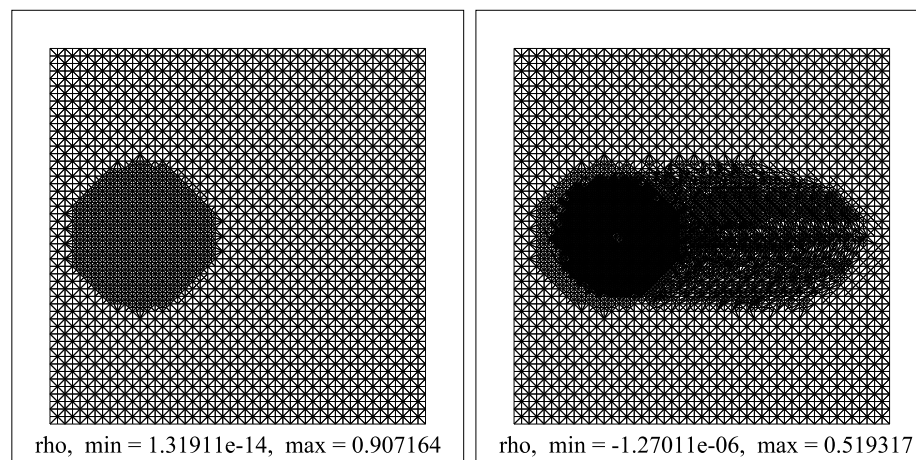
(a)  $t = 0.1$  (+901 nœuds)(b)  $t = 1.5$  (+6132 nœuds)

FIG. 6.17 – Exemple 3 : maillage obtenu à différents instants après raffinement.

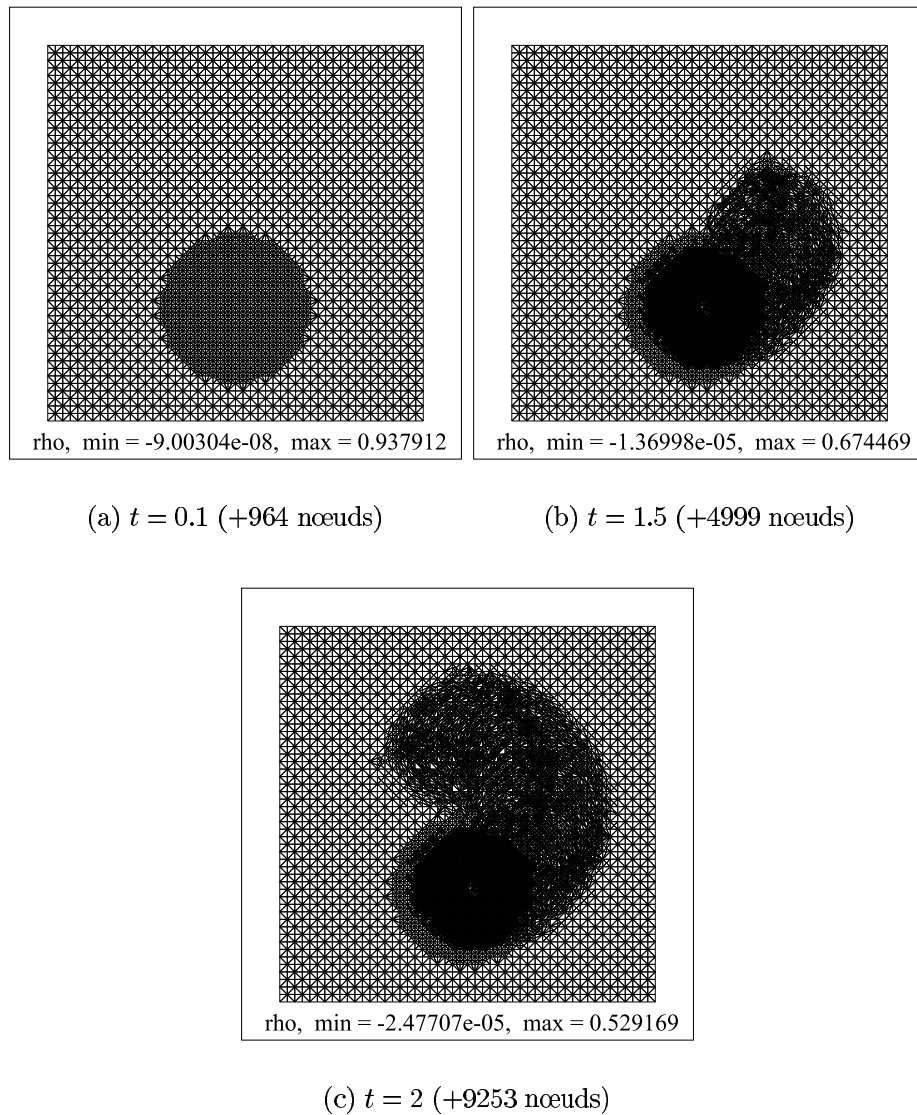


FIG. 6.18 – Exemple 4 : maillage obtenu à différents instants après raffinement.

instant  $t$  (voir les Figures 6.17 et 6.18) sont raffinés dans une partie du domaine relativement importante par rapport aux zones d'activité de la solution à ce même instant. D'où la nécessité de la soustraction. En complément avec l'addition, elle permettrait de réduire le nombre de points devenus "inutiles". Voyons à présent son implémentation.

## 6.4 Soustraction

Nous cherchons dans cette section à compléter la soustraction (Section 5.4.2) par un critère d'adaptation automatique afin de définir une algorithmique relative à cette opération. Dans un premier temps, nous rappelons quelques principes nécessaires pour prévenir le retournement des arêtes. Nous présentons ensuite l'algorithme, et effectuons quelques applications sur l'équation de convection/diffusion en guise de validation.

### 6.4.1 Principes

Nous rappelons que pour supprimer un sommet, nous contractons une arête incidente à ce sommet. Cependant, dans certaines configurations, la contraction d'une arête peut causer le retournement des éléments du maillage. Tel est le cas de la Figure 5.19.

Avant de contracter une arête, nous devons donc nous assurer que sa contraction préserve la conformité du maillage. Pour chaque arête, candidate à la soustraction, nous calculons l'aire des éléments attachés à ses extrémités si la contraction était effective. Si l'une d'elles est négative, nous interdisons à cette arête de se contracter. Soient  $\mathcal{T}_k$  l'ensemble des triangles qui ont le nœud  $s_k$  comme sommet,  $isg$  l'arête  $[s_i, s_j]$ , candidate à la contraction,  $\mathcal{A}(\tau)$  l'aire du triangle  $\tau \in \mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_j$ , et  $\tilde{\mathcal{A}}(\tau)$  l'aire de  $\tau$  si  $isg$  se contracte. Précisément, nous interdisons au segment  $isg$  de se contracter si :

$$\exists \tau \in \mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_j, \tilde{\mathcal{A}}(\tau) < \frac{1}{3}\mathcal{A}(\tau).$$

Cette condition est plus restrictive que celle émise ci-dessus. Elle garantit en plus que les triangles, suite à la suppression du nœud  $s_i$  (ou  $s_j$ ), gardent une aire supérieure au tiers de leur aire initiale.

On devine immédiatement que la suppression de segments incidents à un même sommet peut être problématique. En fait, la contraction d'une arête  $isg$  et la contraction d'une arête  $jsg$  (pas nécessairement avec un sommet commun), dans une région du domaine relativement petite, peuvent interagir entre elles sur l'admissibilité du maillage. Considérons par un exemple la Figure 6.19. On observe sur cette dernière que la contraction de l'arête  $isg$  (respectivement  $jsg$ ) maintient la conformité du maillage, mais la combinaison de ces deux contractions provoque le retournement des arêtes du maillage. En vue d'éviter ce genre de problème, nous interdisons la contraction de toutes les arêtes des triangles attachés à un sommet voisin aux extrémités d'une arête, supposée se contracter.

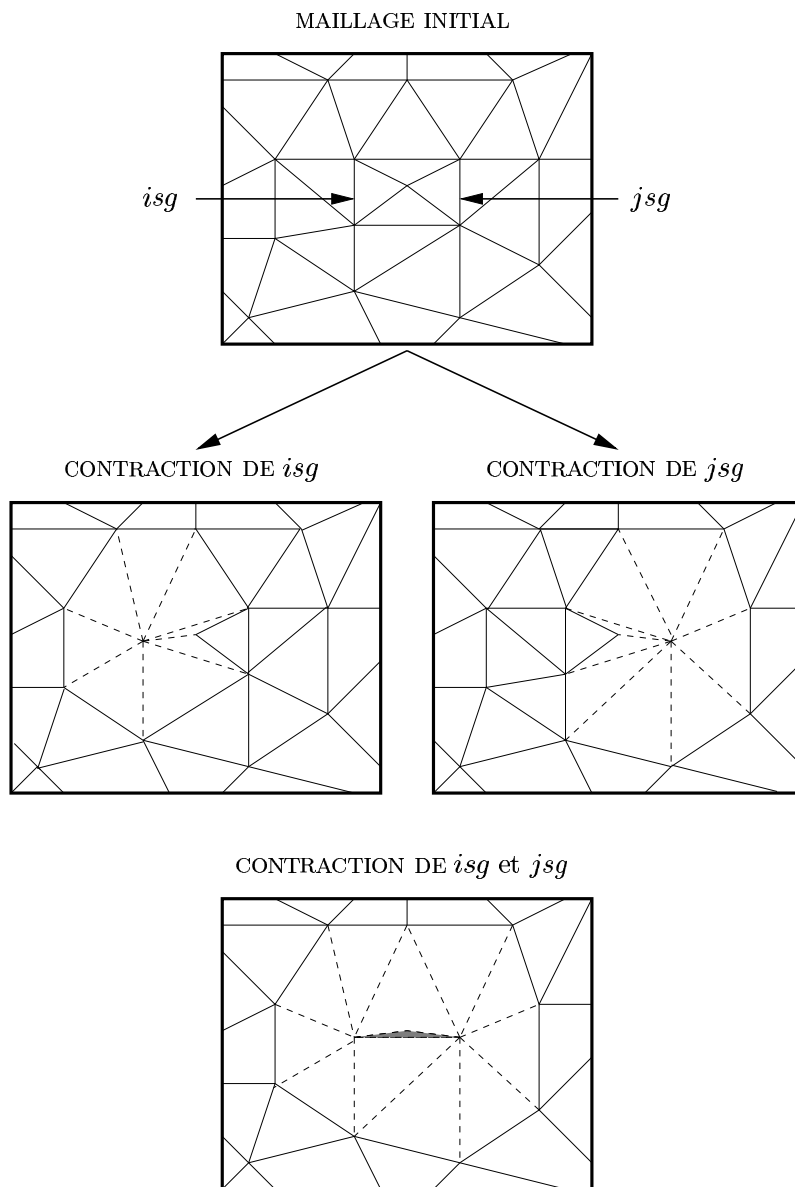


FIG. 6.19 – Configuration problématique pour la soustraction.



### 6.4.2 Critère

L'utilisation de la soustraction se fera en complément de l'addition. Nous adoptons donc ici le même critère que pour l'addition. Précisément, une arête  $[s_i, s_j]$  est candidate à la contraction si

$$c_{ij} < cref^-$$

où  $c_{ij} = \sqrt{\|\vec{s}_j - \vec{s}_i\|^2 + \alpha(W_j - W_i)^2}$  et  $cref^-$  est un paramètre de référence positif fixé. En vertu des principes précédemment décrits, les segments  $[s_i, s_j]$ , supposés se contracter, sont rangés par ordre croissant en fonction de leur critère respectif. Ainsi, un segment  $isg$ , dont la valeur  $c_{isg}$  est plus petite que  $c_{jsg}$ , sera prioritaire sur  $jsg$  pour se contracter.

### 6.4.3 Algorithme

Nous décomposons l'algorithme en procédures. La première sera notée `Soustraction_2D`. Elle indique quelles arêtes seront contractées. La deuxième, `Newtopo2_2D`, génère la nouvelle topologie du maillage suite à la suppression de certains sommets.

En entrée de `Soustraction_2D`, sont fournis un maillage et la solution sur ce maillage. En sortie, elle génère un tableau *icontract*, qui définit si une arête  $isg$  se contracte ( $icontract(isg) = 1$ ), est interdit à la contraction ( $icontract(isg) = -1$ ), ou ne se contracte pas ( $icontract(isg) = -1$ ). En vue de la méthodologie décrite ci-dessus, voici un aperçu général de `Soustraction_2D` :

#### Procédure `Soustraction_2D`

1.  $\forall isg = 1, \dots, NSG$ , poser  $icontract(isg) := 0$  et calculer  $c_{isg}$  ;
2.  $\forall isg = 1, \dots, NSG$ , **faire** :
  - Si**  $c_{ij} < cref^-$  **alors** ranger  $isg$  dans un tableau *candidat* tel que
 
$$C_{candidat(i)} \leq C_{candidat(i+1)}$$
3.  $\forall i = 1, \dots, NC$  ( $NC$  taille du tableau *candidat*), **faire** :
  - (a)  $isg := candidat(i)$  ;
  - (b) **Si**  $icontract(isg) = -1$  **alors** aller en 3 ;

**Sinon**

  - i.  $\forall \tau \in \mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_j$  **faire** :
    - A. calculer  $\tilde{\mathcal{A}}(\tau)$  ;
    - B. **Si**  $\tilde{\mathcal{A}}(\tau) < \frac{1}{3}\mathcal{A}(\tau)$  **alors** aller en 3 ;
  - ii.  $icontract(isg) := 1$  ;
  - iii.  $\forall jsg$ , une arête d'un triangle attaché à un sommet voisin d'une extrémité de  $isg$ , poser  $icontract(jsg) = -1$ .

On connaît à présent la liste des arêtes contractées, donc la position des nœuds aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . On peut alors appliquer le schéma numérique (5.9) pour déterminer la solution sur chaque cellule. Il reste maintenant à rendre effective la contraction des arêtes  $isg = [s_i, s_j]$ , telles que  $icontract(isg) = 1$ . Tel est le but de la procédure `Newtopo2_2D`. Précisément, elle consiste à :

- supprimer aléatoirement un des sommets de  $isg$ . Supposons ici que nous décidons de supprimer  $s_j$  ;
- supprimer les arêtes  $isg$  ;
- supprimer les éléments, dont  $isg$  est une arête ;
- remplacer le sommet  $s_j$  par  $s_i$  pour les arêtes et triangles, où  $s_j$  est un sommet ;
- mettre à jour  $NS$ ,  $NSG$ ,  $NT$ .

En résumé, l'algorithme s'écrit comme suit :

#### Schéma avec déraffinement

1.  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  ;
2.  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathbf{W}^0$ , les données initiales, représentent le maillage et la solution au temps  $t = 0$ .
3. **Itérations sur  $n$** 
  - (a) Déterminer  $\Delta t^n$  ;
  - (b)  $t^{n+1} := t^n + \Delta t^n$  ;
  - (c) Appliquer `Soustraction_2D` ;
  - (d) Appliquer le schéma numérique (5.9) sur la topologie définie au temps  $t^n$  ;
  - (e) Appliquer `Newtopo2_2D` ;
  - (f) Si  $t^{n+1} \leq TMAX$  alors :
    - i.  $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}$  ;
    - ii. Poursuivre en 3 ;

#### 6.4.4 Exemple d'application

Nous ne montrons ici que les résultats obtenus pour un problème stationnaire. En particulier, nous reprenons l'Exemple 1 de la Section 6.3.4. Le maillage initial est uniforme, se compose de 2601 nœuds. Nous choisissons dans `Soustraction_2D`  $cref^- = 0.1 \sum_{[s_i, s_j]} c_{ij} / NSG$ .

Les résultats sont représentés sur la Figure 6.20. Nous avons interdit aux segments, dont un sommet se trouve sur la frontière, de se contracter, ce qui explique le nombre fixe de nœuds sur cette dernière.

Pour des problèmes instationnaires, l'algorithme précédent risque de supprimer

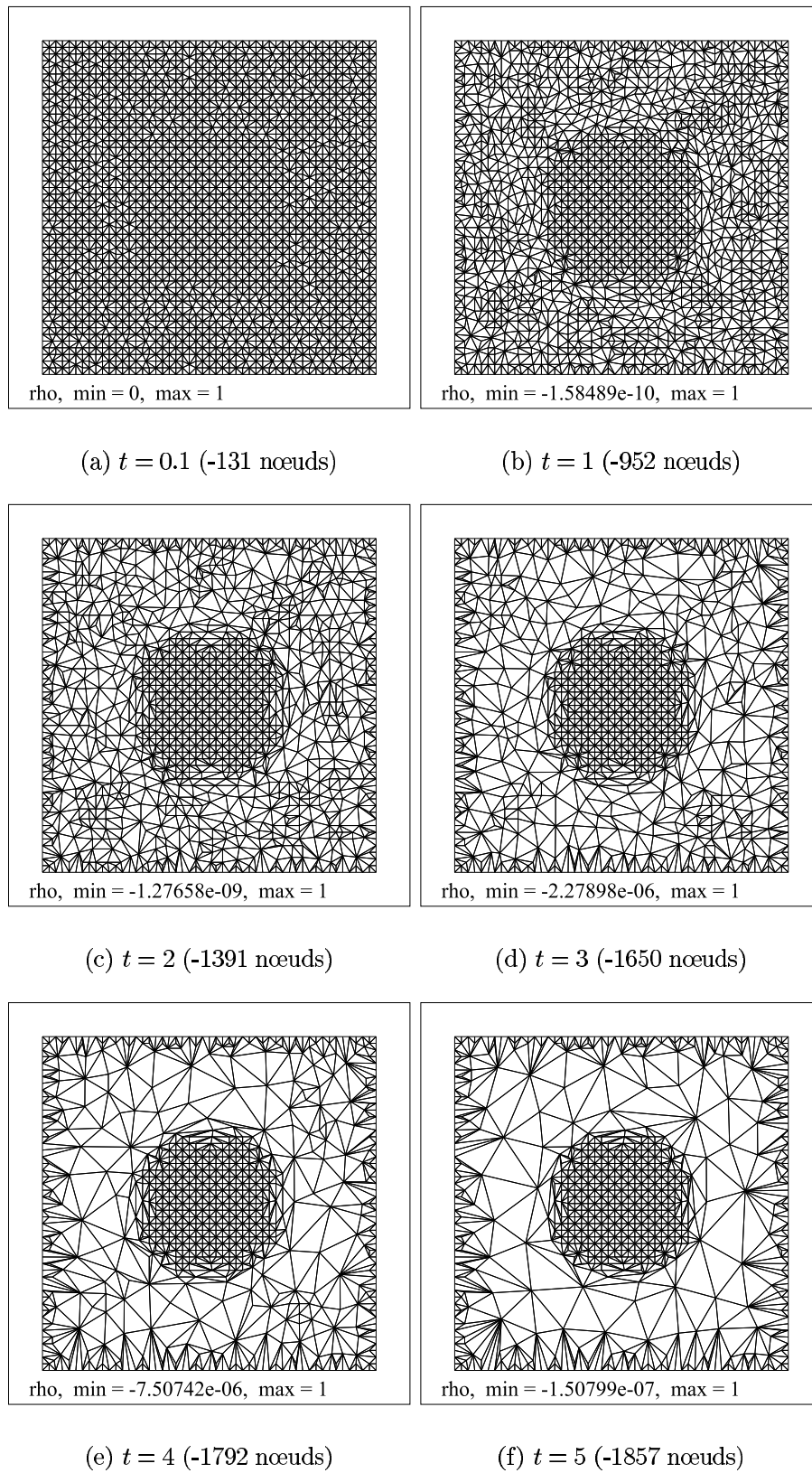


FIG. 6.20 – Exemple 1 :  $W(x, y) = \exp^{-100((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2)}$   
maillages obtenus à différents instants après déraffinement.

des sommets dans des régions du domaine, sans activité significative au temps  $t$ , mais présentant de forts gradients au temps  $t + \Delta t$ . L'intérêt de la soustraction réside, pour de tels problèmes, dans son utilisation en complément de l'addition. Nous renvoyons le lecteur à la dernière section de ce chapitre, consacrée à la mise en œuvre d'un algorithme, couplant maillage mobile auto-adaptatif, raffinement et déraffinement.

## 6.5 “Swapping”

Nous avons proposé dans la Section 5.4.3 une technique d'inversion d'arêtes : le “swapping”, qui repose sur une combinaison de l'addition et de la soustraction. Son but est d'améliorer la qualité du maillage. L'objet de cette section est l'écriture d'un algorithme relatif à cet outil.

### 6.5.1 Principes

Soit  $\mathcal{Q}$  un quadrangle formé par deux triangles,  $\tau_i$  et  $\tau_j$ , adjacents par une arête. Le “swapping” consiste à échanger cette arête par l'autre diagonale de  $\mathcal{Q}$ , afin d'améliorer la qualité géométrique des éléments (voir Figure 5.20). Nous déduisons aisément de ce concept que les autres arêtes de  $\tau_i$  et  $\tau_j$  ne peuvent être sujettes au “swapping”.

D'autre part, comme nous l'avons mentionné dans le Chapitre 5, il existe deux cas, pour lesquels on ne peut effectuer un échange d'arête (voir la Figure 5.24). Avant d'appliquer cet outil, il faut donc s'assurer que la configuration étudiée ne se reporte pas à l'un d'eux.

Nous renvoyons le lecteur à la Section 5.4.3 pour plus de détails sur ses principes et sa mise en œuvre.

### 6.5.2 Critère

Par le biais du “swapping”, nous cherchons à améliorer la qualité géométrique des éléments du maillage. Il ne s'agit pas ici d'adapter le maillage à la solution. Les décisions d'inversion d'arêtes reposent donc uniquement sur un critère purement géométrique. En particulier, nous utilisons comme indicateur de la qualité d'un triangle  $\tau$ , le rapport entre le rayon du cercle inscrit  $r$  et le rayon du cercle circonscrit  $R$  (comme dans [12]) :

$$\vartheta_\tau = 1 - 2\frac{r}{R}.$$

Pour un triangle  $\tau$  proche du triangle équilatéral, la valeur de  $\vartheta_\tau$  sera proche de 0. Inversement, un triangle déformé sera caractérisé par une valeur de  $\vartheta_\tau$  proche de 1. Un triangle  $\tau$  sera dit “mauvais” si :

$$\vartheta_\tau > \vartheta^*.$$

### 6.5.3 Algorithme

Avant de présenter l’algorithme relatif à l’application dynamique du schéma (5.9), détaillons la procédure **Swapping**. **Swapping** consiste à déterminer, en raison des principes définis plus haut, quelles arêtes s’inversent. Elle renvoie donc en sortie un tableau sur les segments, noté *iswap*, qui détermine si *isg* est sujette ( $iswap(isg) = 1$ ) ou non ( $iswap(isg) = 0$ ) au “swapping”. Voici une vue d’ensemble de **Swapping** :

<b>Procédure Swapping</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\forall isg = 1, \dots, NSG</math>, poser <math>iswap(isg) := 0</math>;</li> <li>2. <math>\forall jt = 1, \dots, NT</math>, calculer <math>\vartheta_{jt}</math>;</li> <li>3. <math>\forall jt = 1, \dots, NT</math>, <b>faire</b> :           <ol style="list-style-type: none"> <li><b>Si</b> <math>\vartheta_{jt} &gt; \vartheta^*</math> <b>alors</b> classer <math>jt</math> dans un tableau <math>jtbad</math> tel que               <math display="block">\vartheta_{jtbad(i)} \geq \vartheta_{jtbad(i+1)}</math> </li> </ol> </li> <li>4. <math>\forall j = 1, \dots, NTB</math> (taille du tableau <math>jtbad</math>), <b>faire</b> :           <ol style="list-style-type: none"> <li>(a) <math>jt1 = jtbad(j)</math>;</li> <li>(b) <math>\bar{\vartheta} := 1</math></li> <li>(c) <math>\forall jsg</math>, une arête de <math>jt1</math>, <b>faire</b> :               <ol style="list-style-type: none"> <li>i. soit <math>jt2</math> le triangle adjacent à <math>jt1</math> par <math>jsg</math>;</li> <li>ii. <math>\vartheta_{max}^1 = \max(\vartheta_{jt1}, \vartheta_{jt2})</math>;</li> <li>iii. <math>\vartheta_{max}^2 = \max(\vartheta_{kt1}, \vartheta_{kt2})</math> où <math>kt1</math> et <math>kt2</math> sont les triangles issus du “swapping” de <math>jsg</math>;</li> <li>iv. <b>Si</b> <math>\vartheta_{max}^2 &lt; \min(\vartheta_{max}^1, \bar{\vartheta})</math> <b>alors</b> :                   <ol style="list-style-type: none"> <li>A. <math>\bar{\vartheta} := \vartheta_{max}^2</math>;</li> <li>B. <math>jsgref = jsg</math>;</li> </ol> </li> </ol> </li> <li>(d) <math>iswap(jsgref) := 1</math>;</li> <li>(e) Si le triangle adjacent à <math>jt</math> par <math>jsgref</math> appartient à <math>jtbad</math>, le supprimer.</li> </ol> </li> </ol>

Nous ne détaillons pas ici le calcul des paramètres. Nous précisons juste que le calcul de  $\vartheta$  se fait algorithmiquement de telle sorte que si un triangle  $\tau$  se retourne alors  $\vartheta_{\tau} \geq 1$ . Ainsi, dans l’algorithme précédent, si l’échange d’une arête provoque le retournement d’éléments, alors  $\vartheta_{max}^2 \geq 1$ , et donc, du fait de 4(c)iv, l’arête  $jsg$  ne sera pas concernée par cette opération.

A ce stade de l’algorithme, nous connaissons la liste des arêtes à inverser. Nous rappelons que pour échanger une arête  $isg$ , nous faisons appel successivement à l’addition et à la soustraction. Plus précisément, (i) un sommet  $s$  est ajouté au milieu de  $isg$ , (ii)  $s$  fusionne ensuite avec un sommet  $s'$ , opposé à  $isg$  (voir page 136). Notons  $jsg$

l'arête  $[s, s']$ . Ainsi, utilisant les mêmes notations que dans les sections précédentes, mettre à jour la topologie revient à dresser la liste des segments à découper (poser  $icut(isg) = 1$ ), la liste des segments à contracter (poser  $icontract(jsg) = 1$ ), puis à appliquer successivement `Newtopo1_2D` (Section 6.3) et `Newtopo2_2D` (Section 6.4).

L'application du schéma numérique (5.9) nécessitant de connaître la topologie du maillage, qui prend en compte l'addition, mais pas la soustraction, l'algorithme s'écrit finalement :

#### Schéma avec swapping

1.  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  ;
2.  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathbf{W}^0$ , les données initiales, représentent le maillage et la solution au temps  $t = 0$ .
3. **Itérations sur  $n$** 
  - (a) Déterminer  $\Delta t^n$  ;
  - (b)  $t^{n+1} := t^n + \Delta t^n$  ;
  - (c) Appliquer `Swapping` ;
  - (d) Appliquer `Newtopo1_2D` ;
  - (e) Appliquer le schéma (5.9) sur la topologie définie en 3d ;
  - (f) Appliquer `Newtopo2_2D` ;
  - (g) Si  $t^{n+1} \leq TMAX$  alors :
    - i.  $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}$  ;
    - ii. Poursuivre en 3 ;

#### 6.5.4 Exemple d'application

On considère un maillage initial, qui se compose de quelques triangles fortement étirés. La Figure 6.21 représente ce dernier et le maillage obtenu après avoir appliqué la procédure `Swapping`. 8 inversions d'arêtes sont effectuées.

## 6.6 Algorithme général d'adaptation

Pour chaque méthode, proposée dans le Chapitre 5, nous avons proposé un algorithme, destiné à adapter automatiquement et dynamiquement le maillage à la solution au cours de la simulation. Nous cherchons maintenant à associer ces différentes méthodes pour générer un algorithme, où maillage mobile, raffinement et déraffinement interagiront dans un même but.

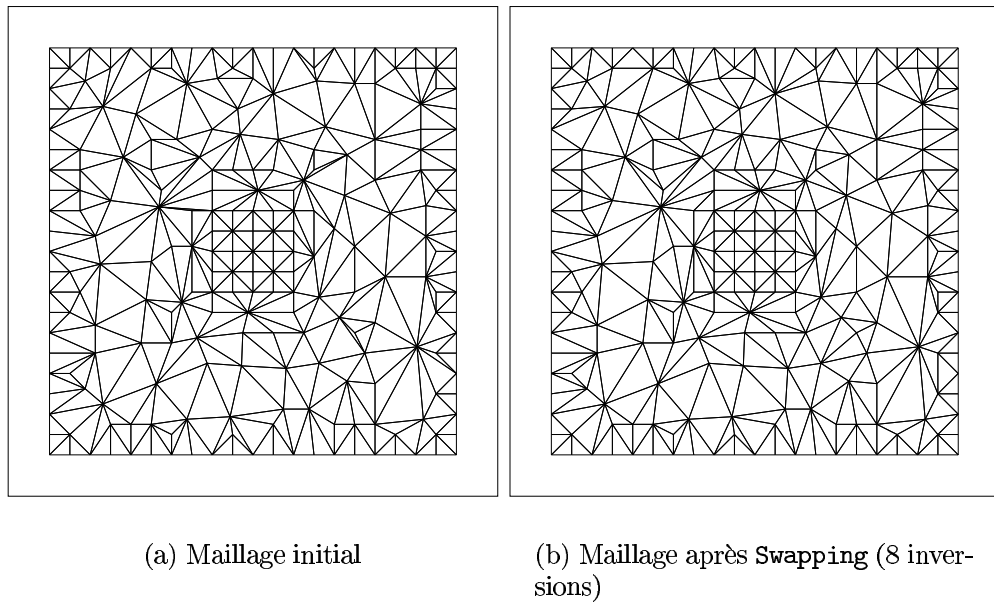


FIG. 6.21 – Application de Swapping.

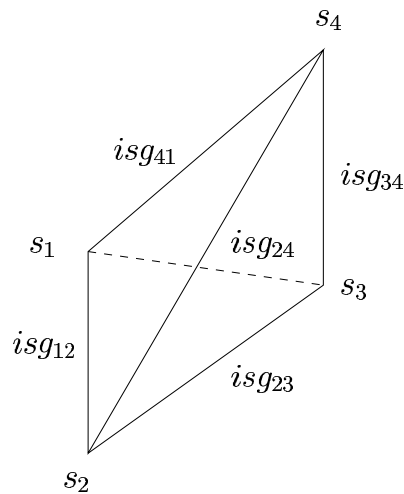
### 6.6.1 Principes

L'élaboration de cet algorithme ne repose évidemment pas sur une simple superposition des procédures, relative à chaque méthode. En effet, chaque procédure nécessite de prendre une série de précautions avant d'en appliquer une autre. Par exemple, les arêtes d'un triangle, qui bénéficient du "swapping", ne peuvent évidemment au même temps  $t$  se contracter. Avant d'étudier en détail les interactions malheureuses qu'une procédure peut avoir sur une autre, il faut définir un ordre d'application.

Il nous semble judicieux dans un premier temps d'avoir recours à la procédure Swapping, afin d'éviter d'appliquer le raffinement, ou déraffinement, ou la méthode de maillage mobile auto-adaptatif sur des triangles étirés, et de risquer de les étirer davantage. Par ailleurs, nous faisons le choix de raffiner ensuite, puis de déraffiner, pour finalement faire bouger les sommets. En faisant ainsi, nous espérons appliquer la procédure Movmesh\_2D aux sommets effectifs au temps  $t^{n+1}$ , c'est-à-dire sur les sommets issus de l'addition, mais pas sur les sommets qui fusionnent avec un autre au temps  $t^{n+1}$ . Reprenons en détail chaque procédure et voyons quelles restrictions elle impose aux autres.

Pour le bon déroulement des étapes décrites ci-dessous, l'initialisation à zéro de tous les tableaux sur les segments *icut*, *icontract*, *iswap* se fait avant l'appel des procédures.

1. Procédure Swapping : Plaçons nous dans le cadre de la Figure 6.22, où on échange l'arête  $[s_2, s_4]$  avec l'arête  $[s_1, s_3]$ . On interdit logiquement à toutes les arêtes des triangles  $\{s_1, s_2, s_4\}$  et  $\{s_2, s_3, s_4\}$  de se contracter, et également de se diviser.

FIG. 6.22 – Echange de  $[s_2, s_4]$  avec  $[s_1, s_3]$ .

Pour ce faire, pour ces arêtes  $isg \in \{isg_{12}, isg_{23}, isg_{34}, isg_{41}\}$ , nous posons :

$$\begin{aligned} icontract(isg) &= -1 \\ icut(isg) &= -1 \end{aligned} \quad .$$

Par mesure de sécurité, nous étendons l'interdiction de se contracter à toutes les arêtes incidentes à  $s_1, s_2, s_3$  ou  $s_4$ . Nous incluons ces restrictions dans la procédure `Swapping`.

2. Procédure Addition\_2D : Connaissant maintenant les arêtes, pour lesquelles l'addition est interdite, on applique `Addition_2D`. Désormais, on sait sur quelles arêtes  $isg$ , un sommet est ajouté. Appelons  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , les triangles qui ont le segment  $isg$  en commun. Il serait illogique de supprimer des nœuds au voisinage de  $isg$ . Comme pour la procédure `Swapping`, nous empêchons à toutes les arêtes  $jsg$  incidentes aux sommets de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de se contracter (ie nous posons  $icontract(jsg) = -1$ ). Nous incluons également ces restrictions dans la procédure `Addition_2D`.
3. Procédure Soustraction\_2D : Connaissant à présent les arêtes, pour lesquelles  $icontract(isg) = -1$ , nous appliquons `Soustraction_2D`. Aucune précaution n'est ici nécessaire avant l'application `Movmesh_2D`.
4. Procédure Movmesh\_2D : En entrée, l'utilisateur doit fournir un maillage et la solution sur ce maillage. Afin d'éviter d'appliquer la méthode de maillage mobile sur les sommets éliminés à la fin du pas de temps, et au contraire d'appliquer cette même méthode sur les sommets nés de l'addition, on fournit en entrée un maillage, qui tient compte de ces modifications. La solution sur le maillage, qui en découle, est déterminée par une interpolation. Remarquons que cette solution



est une variable locale à la procédure `Movmesh_2D`, et donc n'intervient pas de ce fait dans le calcul de la solution au temps  $t^{n+1}$  par le biais du schéma (5.9).

Suite à ces remarques, chaque procédure, citées plus haut, a subi des modifications par rapport à sa version originale. Désormais, quand nous évoquons les procédures `Swapping`, `Addition_2D`, `Soustraction_2D` et `Movmesh_2D`, nous parlons de ces procédures avec leurs éventuelles restrictions supplémentaires.

### 6.6.2 Algorithme

#### Algorithme général

1.  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathbf{W}^0$ , les données initiales, représentent le maillage et la solution au temps  $t = 0$ .
3. **Itérations sur  $n$** 
  - (a) Déterminer  $\Delta t^n$ ;
  - (b)  $t^{n+1} := t^n + \Delta t^n$ ;
  - (c)  $\forall isg = 1, \dots, NSG$ , poser
    - i.  $icut(isg) := 0$ ;
    - ii.  $icontract(isg) := 0$ ;
    - iii.  $iswap(isg) := 0$
  - (d) Appliquer `Swapping`;
  - (e) Appliquer `Addition_2D`;
  - (f) Appliquer `Soustraction_2D`;
  - (g) Appliquer `Newtopo1_2D`;
  - (h) Appliquer `Movmesh_2D`;
  - (i) Appliquer le schéma (5.9) sur la topologie définie en 3g;
  - (j) Appliquer `Newtopo2_2D`;
  - (k) Si  $t^{n+1} \leq TMAX$  alors :
    - i.  $\mathbf{n} \leftarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}$ ;
    - ii. Poursuivre en 3;

### 6.6.3 Applications numériques

Nous nous intéressons tout d'abord au comportement de cet algorithme sur un problème stationnaire. Nous présentons en particulier sur la Figure 6.23 les résultats obtenus pour l'Exemple 1 de la Section 6.3.4 :

Exemple 1 :  $W(x, y) = \exp^{-100\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right)}$ .

Le maillage initial est uniforme (2601 sommets).  $cref^+$  et  $cref^-$  sont initialisés respectivement comme suit :

$$cref^+ = \frac{\sum_{[s_i, s_j]} c_{ij}}{NSG} \quad \text{et} \quad cref^- = \frac{1}{10} \frac{\sum_{[s_i, s_j]} c_{ij}}{NSG}.$$

Un paramètre  $NS^+ = 100$  est également introduit afin d'éviter un nombre d'additions excessif. Nous remarquons au début des itérations temporelles que le nombre de sommets ajoutés est sensiblement le même que le nombre de sommets supprimés. Ensuite, la précision demandée par l'addition étant atteinte, l'algorithme se contente d'ajouter peu de nœuds, mais continue à éliminer ceux se trouvant dans une zone du domaine peu active. Au temps  $t = 3$ , on a eu recours 941 fois à l'addition et 1944 fois à la soustraction par rapport au maillage de départ.

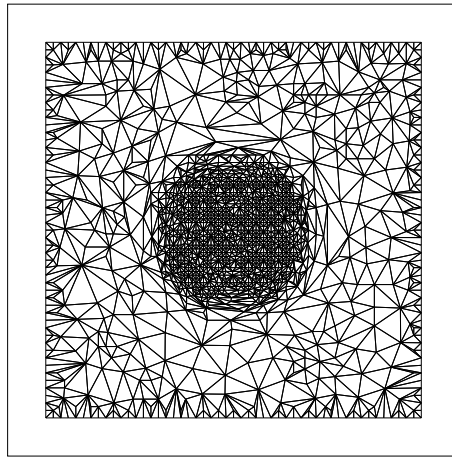


FIG. 6.23 – Exemple 1  
Maillage à  $t = 3$  (941 additions et 1944 soustractions).

Les deux exemples suivants concernent une équation instationnaire. Dans un premier temps, nous considérons :

Exemple 2 :  $W^0(x, y) = \exp^{-100\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right)}$   $\longrightarrow$  voir Figure 6.24

où la convection est dirigée vers la droite. On autorise ici un plus grand nombre d'addition en posant  $NS^+ = 1000$ . En échange, on pose :

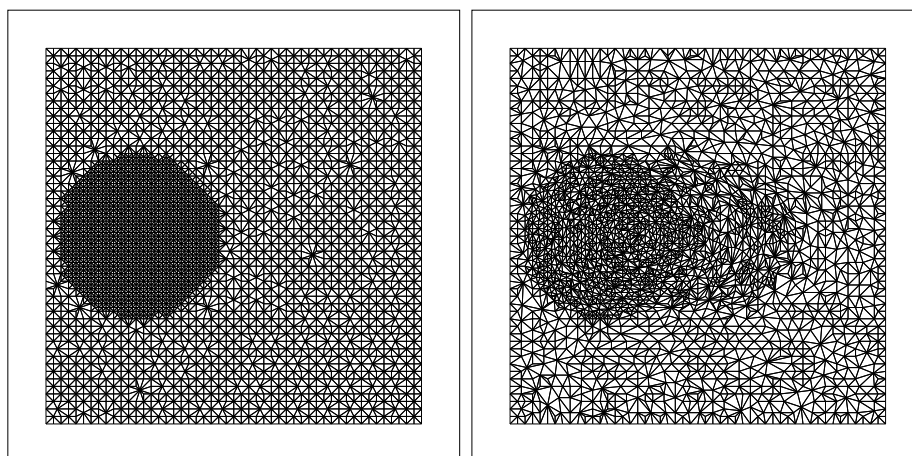
$$cref^- = \frac{1}{2} \frac{\sum_{[s_i, s_j]} c_{ij}}{NSG}.$$

Comme précédemment, beaucoup de sommets sont ajoutés au début des itérations temporelles. Du fait de la diffusion du schéma numérique, le nombre d'additions baisse ensuite.

On s'intéresse ensuite à l'évolution du maillage pour une tâche tournante :

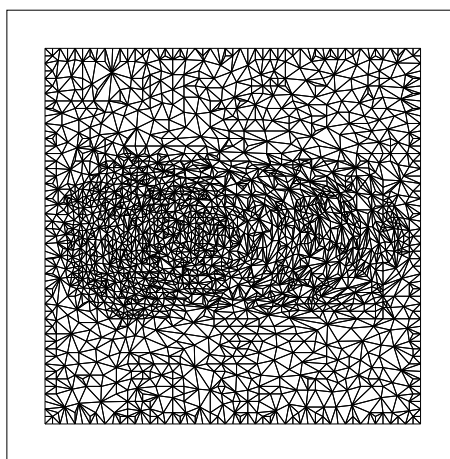
Exemple 3 :  $W^0(x, y) = \exp^{-100\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{10}\right)^2\right)}$   $\longrightarrow$  voir Figure 6.25.

On observe les mêmes phénomènes que ci-dessus.



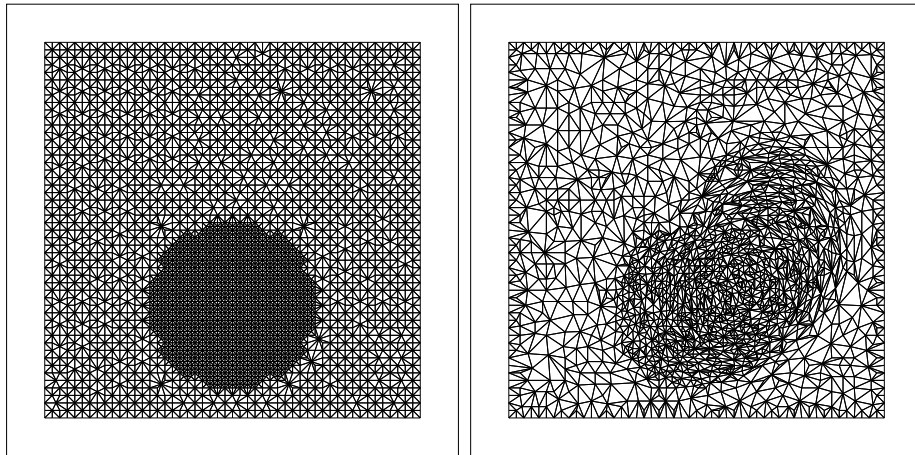
(a) Maillage à  $t = 0.1$  (147 additions & 142 soustractions)

(b) Maillage à  $t = 0.8$  (1412 additions & 1391 soustractions)



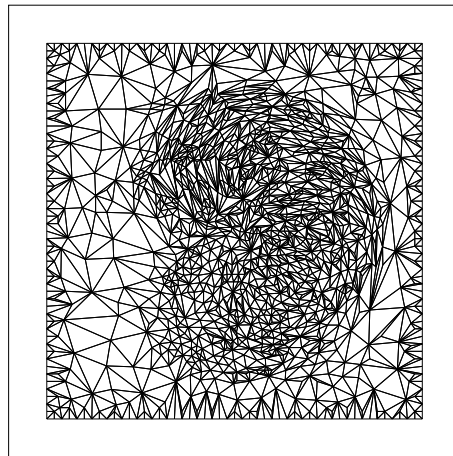
(c) Maillage à  $t = 1.5$  (1638 additions & 2121 soustractions)

FIG. 6.24 – Exemple 2.



(a) Maillage à  $t = 0.1$  (1196 additions & 141 soustractions)

(b) Maillage à  $t = 0.8$  (1497 additions & 2210 soustractions)



(c) Maillage à  $t = 1.5$  (1936 additions & 3182 soustractions)

FIG. 6.25 – Exemple 3.

## 6.7 Conclusion

Dans le Chapitre 5, nous avons proposé des outils, destinés à adapter dynamiquement le maillage à la solution. Pour chacun d'eux, nous proposons dans ce chapitre un algorithme d'adaptation automatique de maillages, complémentaire au schéma numérique étudié dans le Chapitre 5. Précisément, dans un premier temps, nous présentons dans ce chapitre une méthode d'adaptation, relativement classique, qui repose sur des maillages mobiles à topologie constante. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'implémentation des méthodes de raffinements et déraffinements dynamiques (intégration de la solution pendant le changement de maillage). Disposant d'un ensemble d'algorithmes, propres à chaque outil, nous proposons finalement un algorithme final, qui permet de coupler maillage mobile auto-adaptatif, addition et suppression de nœuds. Nous avons présenté, pour chaque code, des résultats numériques élémentaires. Or, nos travaux sont nés de l'intérêt, que pourrait offrir un tel schéma pour des interactions fluide-structure. Le chapitre suivant est donc consacré à la validation de la méthode sur un problème semblable, du point de vue de la mécanique des fluides, à ce qu'on peut rencontrer en interaction fluide-structure. Il s'agit de l'écoulement autour d'un profil d'aile d'avion en mouvement.



# Chapitre 7

## Résultats numériques

### Sommaire

---

7.1	Introduction . . . . .	184
7.2	Problèmes physiques considérés . . . . .	184
7.3	Calculs de solutions stationnaires . . . . .	188
7.4	Calculs de solutions instationnaires . . . . .	197
7.5	Conclusion . . . . .	203

---

### Résumé

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les méthodes numériques proposées dans cette thèse à des calculs relativement réalistes d'écoulements bidimensionnels en maillage non structurés, mobiles et à topologie variable. Après avoir présenté brièvement les problèmes physiques considérés, on abordera deux types de calculs assez différents : des calculs d'écoulements stationnaires autour de profils de type NACA, puis des calculs instationnaires autour de profils mobiles et/ou déformables, similaires à ce que l'on peut rencontrer en simulations d'interactions fluide-structure en aérodynamique.

## 7.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les méthodes numériques proposées dans cette thèse à des calculs relativement réalistes d'écoulements bidimensionnels en maillages non structurés, mobiles et à topologie variable. On cherche ici à atteindre l'objectif initial de la thèse : dans l'hypothèse où l'on cherche par exemple à calculer des écoulements instationnaires autour d'objets mobiles et déformables, ce qui est le cas en général lorsque l'on cherche à simuler numériquement des interactions fluide-structure dans un cadre aérodynamique, il pourrait être très judicieux de profiter du mouvement de maillage rendu nécessaire par l'utilisation d'une formulation ALE (arbitrairement Lagrangienne-Eulérienne) pour l'adapter dynamiquement, c'est-à-dire le raffiner dans les zones de fort gradient et le déraffiner dans les zones de faible gradient. On a donc réellement besoin des méthodes numériques proposées dans cette thèse, capables de fonctionner sur maillages mobiles et à topologie variable.

Ce chapitre se compose de 3 parties. La section 7.2 présente les cas-tests physiques qui vont être étudiés. Une fois le cadre général posé, on s'attachera à résoudre des problèmes de deux types différents. Dans la section 7.3, on cherche des solutions stationnaires des équations d'Euler. Il s'agit non seulement de trouver des solutions stationnaires, mais aussi d'adapter le maillage au cours du calcul (raffinement et déraffinement). On verra notamment que le choix des différents paramètres intervenant dans l'ensemble des algorithmes proposés est très difficile, et que l'on doit souvent adopter des choix assez restrictifs pour obtenir une convergence. Enfin, dans la section 7.3, on cherchera des solutions instationnaires des équations d'Euler, autour de profils en mouvement rigide. Il s'agira alors de vérifier la possibilité d'obtenir une véritable adaptation dynamique. En effet, pour un écoulement transsonique, les positions des chocs générés de chaque côté d'un profil de type NACA oscillent au cours des oscillations du profil lui-même, et, dans une situation idéale, les zones les plus raffinées du maillage devraient suivre les positions de ces chocs.

## 7.2 Problèmes physiques considérés

On présente ici les deux cas-tests physiques considérés. Il s'agit dans les deux cas d'écoulements bidimensionnels autour d'un profil de type NACA0012. Ces écoulements peuvent être vus comme des simplifications bidimensionnelles de véritables écoulements tridimensionnels. Dans le premier cas, le profil est fixe et l'on recherche une solution stationnaire des équations d'Euler. Dans le second cas, le profil est rigidement mobile (avec deux degrés de liberté) et l'on s'intéresse à des écoulements instationnaires. Le mouvement du profil peut être imposé ou libre (dans ce dernier cas, on peut étudier la stabilité aéroélastique du système couplé profil-écoulement). On décrira les deux cas-tests de la même façon, puisque le cas du profil fixe est un cas particulier du cas profil mobile.



Le profil est rigidement mobile. Son mouvement est entièrement régi par un modèle à deux degrés de liberté : sa rotation  $\theta$  et son déplacement vertical  $h$ . Ces deux inconnues du problème (dans le cas du mouvement libre) évoluent avec le temps suivant des lois de type :

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_\theta\ddot{\theta} + c_h\dot{h} + k_h h = F_h \\ S_\theta\ddot{h} + I_\theta\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + k_\theta\theta = F_\theta \end{cases} \quad (7.1)$$

où  $m$ ,  $I_\theta$  et  $S_\theta$  sont respectivement la masse du profil, et ses moments statique et d'inertie autour de l'axe de rotation considéré (situé en  $a_h b$ , où  $b$  est la demi-corde du profil);  $c_h$  et  $c_\theta$  sont des coefficients d'amortissement pour chaque degré de liberté, et  $k_h$  et  $k_\theta$  sont des raideurs donnant les fréquences propres du système structural isolé. Enfin,  $F_h$  et  $F_\theta$  sont respectivement la force de portance et le moment (autour du centre de rotation) exercés par le fluide sur le profil d'aile. Le profil est décrit sur la Figure 7.1.

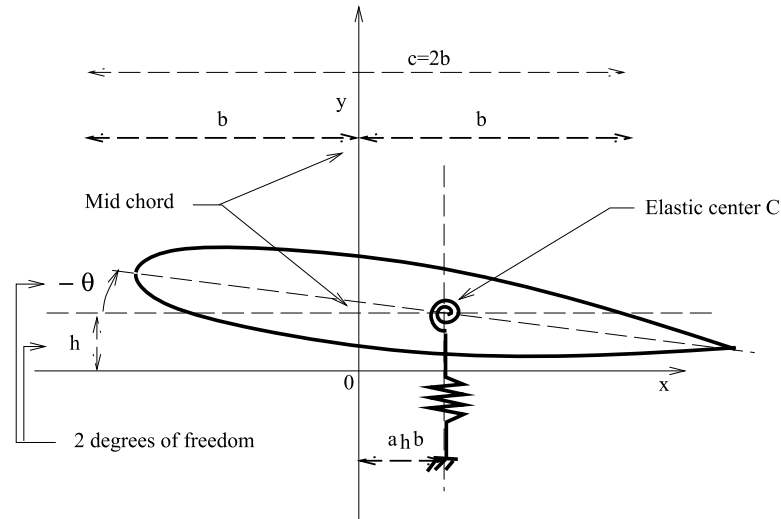


FIG. 7.1 – Le profil mobile à deux degrés de liberté.

On donne ici les coefficients choisis pour les calculs instationnaires avec mouvement libre du profil. Trois grandeurs fixent les unités (on peut considérer que le solveur fluide est adimensionné) de masse, de longueur et de temps. Elles sont données dans la Table 7.1). La structure est ensuite définie à partir de nombres sans dimension. Ils

$m$	1.0 Kg
$c$	1.0 m
$\omega_\theta$	100 $s^{-1}$

$a_h$	-1
$x_\theta$	1.8
$\xi_\theta$	0
$\xi_h$	0
$\gamma_\theta$	1.865
$\lambda$	1

TAB. 7.1 – Hypothèses fixant les unités et coefficients sans dimension.

sont donnés dans la Table 7.1. Enfin, toutes les inconnues restantes sont données à partir des définitions suivantes :

$$\begin{cases} b = c/2 \\ \omega_h = \lambda\omega_\theta \\ k_h = m\omega_h^2 \\ c_h = 2\xi_h\omega_h m \end{cases} \quad \begin{cases} S_\theta = mbx_\theta \\ I_\theta = mb^2\gamma_\theta^2 \\ k_\theta = I_\theta\omega_\theta^2 \\ c_\theta = 2\xi_\theta\omega_\theta I_\theta \end{cases} \quad (7.2)$$

Nous revenons ici sur la définition de la force de portance  $F_h$  et du moment de rotation  $F_\theta$  exercés sur le profil. Pour un écoulement non-visqueux, les seules forces exercées par l'écoulement à la surface du profil sont des forces de pression dirigées suivant la normale à la paroi (voir Figure 7.2). Ainsi,  $F_h$  et  $F_\theta$  sont simplement donnés par :

$$F_h = \int_{\Gamma} p\vec{n} \cdot \vec{j} ds \quad (7.3)$$

$$F_\theta = \int_{\Gamma} p(\vec{r}(s) \times \vec{n})_z ds \quad (7.4)$$

où  $\vec{r}$  est la position relative par rapport au centre de rotation, comme montré sur la Figure 7.2.

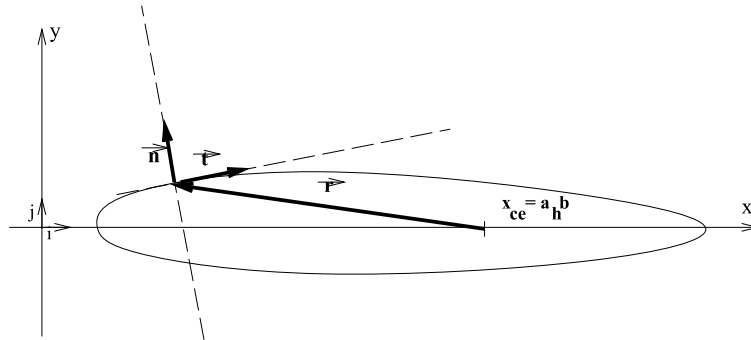


FIG. 7.2 – Détail de l'intégration de  $F_h$  et  $F_\theta$ .

Pour ce qui est du fluide, on suppose qu'il est compressible parfait non-visqueux. On suppose aussi qu'il est uniforme à l'infini dans toutes les directions. Ainsi, le vecteur  $W$  des variables conservatives (qui va représenter l'écoulement) sera supposé constant et connu (égal à  $W_\infty$ ) à l'extérieur de la frontière infinie  $\Gamma_\infty$  du maillage (qu'il faut évidemment borner). Cette frontière infinie (voir Figure 7.3) est considérée comme fixe (même lorsque le profil d'aile est mobile). On notera aussi que le maillage sera aussi considéré comme à topologie constante au voisinage de la frontière infinie  $\Gamma_\infty$ . Comme le profil est mobile, sa frontière mobile  $\Gamma(t)$  définit alors avec  $\Gamma_\infty$  le domaine fluide variable en temps  $\Omega(t)$ .

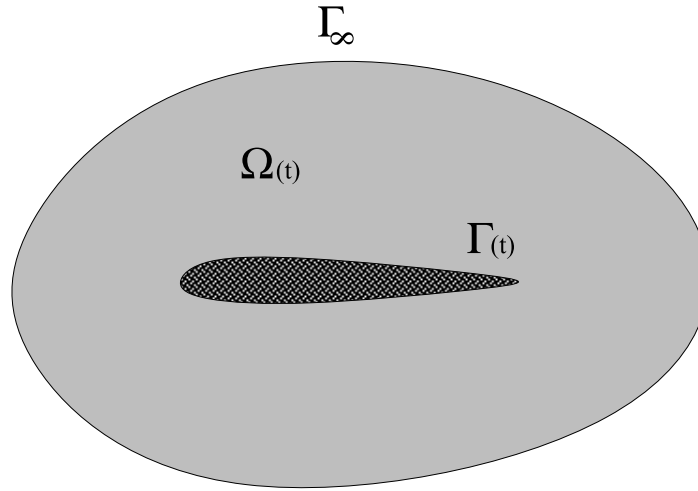


FIG. 7.3 – Domaine fluide variable en temps.

Le fluide est supposé non-visqueux et vérifie les équations d'Euler. Le vecteur des variables conservatives  $W$  est donné par :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

où  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  et  $E$  sont respectivement la densité, les composantes horizontales et verticales de la vitesse du fluide, et l'énergie totale par unité de volume.  $W$  est solution des équations d'Euler à chaque instant dans le domaine  $\Omega(t)$ . Les équations d'Euler s'écrivent en fonction de ces variables :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (E + P)u \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (E + P)v \end{pmatrix}_y = 0, \quad (7.6)$$

où la pression  $P$  est donnée par la loi d'état des gaz parfaits :

$$P = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right) \quad \text{avec } \gamma = 1.4. \quad (7.7)$$

Les conditions aux limites pour le fluide sont les suivantes :

1.  $W = W_\infty$  le long de la frontière infinie  $\Gamma_\infty$
2.  $\vec{u} \cdot \vec{n} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{n}$  le long du profil mobile  $\Gamma(t)$  (on a utilisé la notation évidente  $\vec{u} \equiv (u, v)^t$  pour la vitesse du fluide, et  $\vec{r}$  désigne la position du point où la condition est imposée,  $\vec{n}$  est la normale au profil en ce point et à cet instant, et le “ $\dot{\cdot}$ ” désigne une dérivation en temps).

Le problème est finalement entièrement déterminé par la donnée de l'écoulement à l'infini, donc par la valeur de  $W_\infty$ . Cet écoulement à l'infini est entièrement déterminé par la donnée de quatre coefficients sans dimension  $M_\infty$ ,  $V^*$ ,  $\theta_0$  et  $\mu$ , par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\infty = \frac{m}{\pi \mu b^2} \\ (u_\infty \ v_\infty) = (b\omega_\theta V^* \cos(\theta_0) \ b\omega_\theta V^* \sin(\theta_0)) \\ P_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\gamma M_\infty^2} \\ E_\infty = \frac{P_\infty}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 \end{array} \right. \quad (7.8)$$

Des valeurs typiques des quatre paramètres sans dimension sont données dans la Table 7.2). Elles correspondent au cas d'un écoulement critique, où l'interaction entre le profil librement mobile et le fluide est instable (le fluide fournit de l'énergie au profil et les oscillations de celui-ci sont amplifiées).

$M_\infty$	0.8
$V^*$	5.477
$\mu$	60

TAB. 7.2 – Coefficients sans dimension définissant le fluide à l'infini.

Pour résoudre numériquement le système des équations d'Euler, on utilise le schéma décrit dans le Chapitre 5 de cette thèse. L'intégration en temps est réalisée par un schéma implicite linéarisé. Le flux numérique est décentré d'ordre deux (MUSCL avec  $\beta = 1/2$ ).

## 7.3 Calculs de solutions stationnaires

### 7.3.1 Cas transsonique

On s'intéresse dans cette section au calcul de solutions stationnaires autour du profil d'aile. On commence par le cas d'un écoulement transsonique, pour lequel l'incidence est nulle et le nombre de Mach à l'infini vaut  $M_\infty = 0.85$ . On cherche à obtenir une solution stationnaire qui doit présenter des chocs stationnaires sur les deux côtés du profil. Le but est d'obtenir des solutions précises, avec un maillage qui s'est adapté automatiquement au cours du calcul.

Obtenir le but recherché s'est avéré très complexe. Ceci est essentiellement dû au grand nombre de paramètres relatifs au mouvement et à l'adaptation de maillage. On a choisi l'algorithme (6.10) portant uniquement sur la densité de l'écoulement, avec  $\alpha = 50$  et  $C_0 = 1$  et un nombre de Courant maximum de 50.

On part d'un maillage très régulier comportant 2280 sommets, présenté sur la Figure 7.4. Le maillage est ensuite modifié au cours de itérations (il commence par

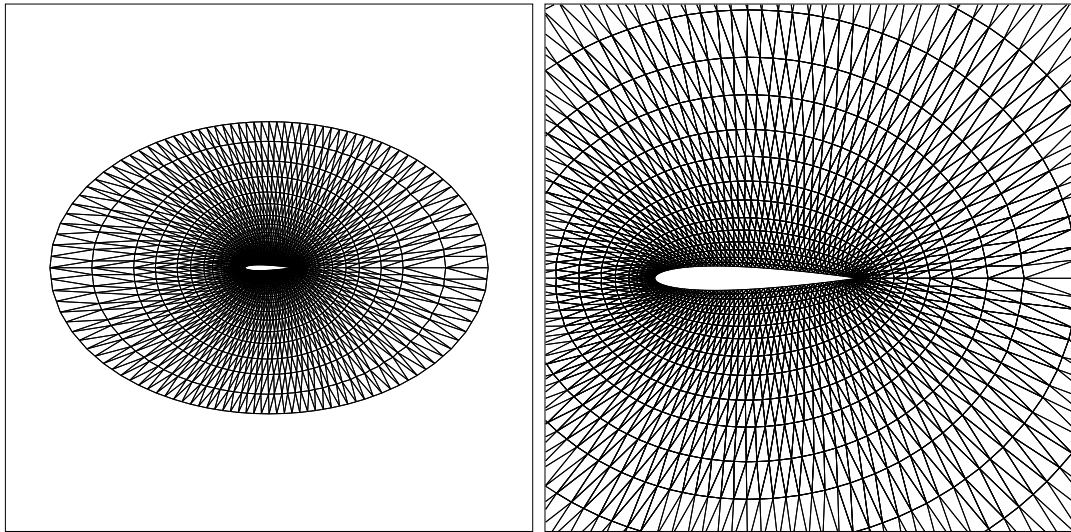


FIG. 7.4 – Maillage initial (et zoom près du profil) pour le cas transsonique.

être déaffiné, puis raffiné aux endroits où les chocs apparaissent). On montre sur la Figure 7.5 le maillage au milieu du calcul (itération 200).

Enfin, le maillage prend sa forme finale vers l'itération 450. Il est représenté sur la Figure 7.6. On observe que le comportement des algorithmes d'addition de points n'est pas optimal, puisque le maillage semble rester raffiné (et étiré) dans des zones où le gradient de densité a fortement diminué (car le choc s'est déplacé).

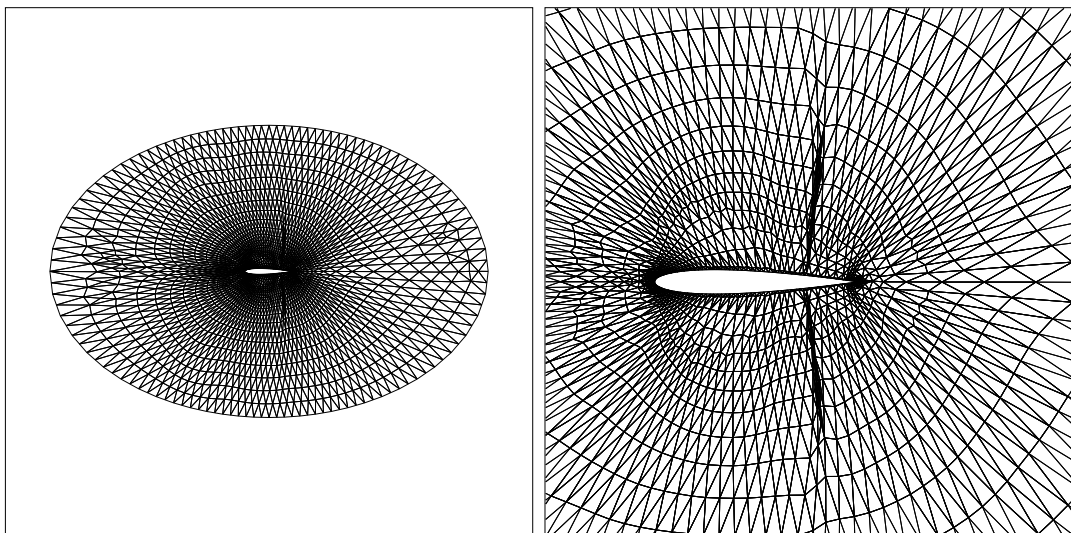


FIG. 7.5 – Maillage intermédiaire (et zoom près du profil) pour le cas transsonique.

Pour donner une idée plus précise du comportement des algorithmes de raffinement et de déaffinement du maillage, on a représenté sur la Figure 7.7, au cours des itérations, le nombre total de points dans le maillage NS, le nombre total de points ajoutés dans le maillage NA et le nombre total de points éliminés dans le maillage NE.

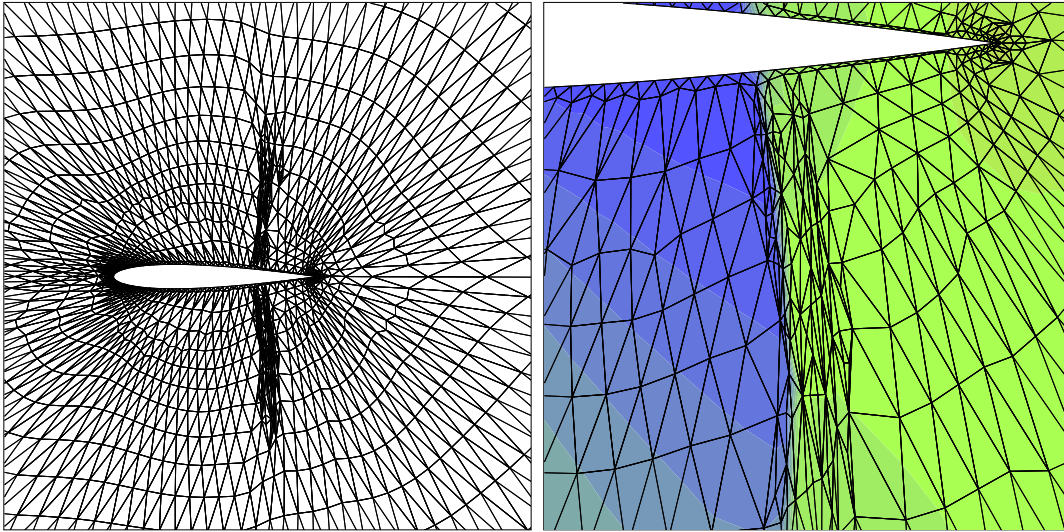


FIG. 7.6 – Maillage final - zooms près du profil- pour le cas transsonique.

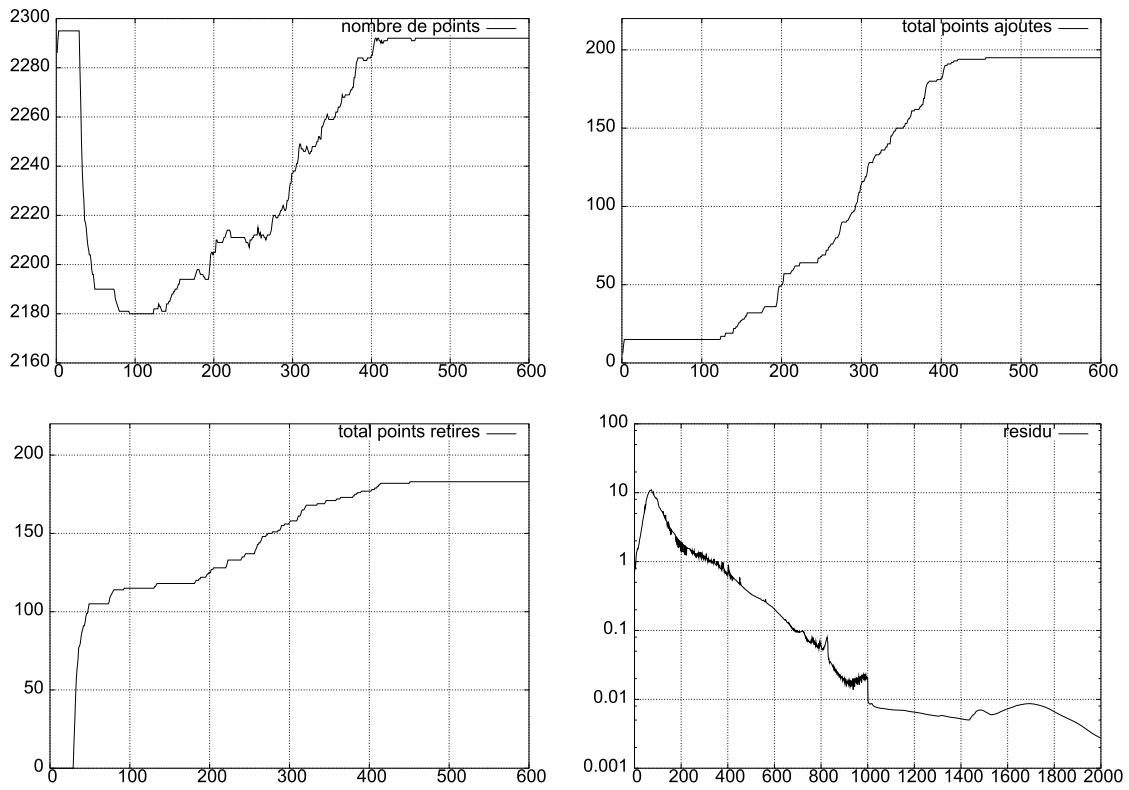


FIG. 7.7 – NS, NA et NE (500 premières itérations) et résidu (cas transsonique).

On a représenté sur la Figure 7.8 les champs de densité  $\rho$ , de nombre de Mach et d'entropie. Les solutions obtenues à la convergence sont tout-à-fait acceptables. Elles sont néanmoins probablement moins bonnes que ce que l'on pourrait obtenir avec un algorithme classique de remaillage et d'adaptation.

### 7.3.2 Cas supersonique

On s'intéresse maintenant à un écoulement supersonique dans la même configuration que précédemment. On choisit un écoulement sans incidence avec un nombre de Mach à l'infini égal à  $M_\infty = 2$ . Dans ce cas encore, la convergence vers une solution stationnaire calculée sur un maillage adaptée automatiquement n'est pas facile à obtenir, surtout si l'on cherche à limiter le nombre global d'éléments dans le maillage. On utilise ici encore l'algorithme (6.10) portant uniquement sur la densité de l'écoulement, avec  $\alpha = 20$  et  $C_0 = 1$  et un nombre de Courant maximum de 50.

On part du même maillage que précédemment (maillage très régulier, 2280 sommets, représenté sur la Figure 7.4). Le maillage prend sa forme finale vers l'itération 500. Il est représenté sur la Figure 7.9. On observe ici que le comportement des algorithmes d'addition de points est tout-à-fait acceptable. On peut remarquer également que l'on a fait le choix de ne pas toucher aux éléments frontières. Cependant, on peut remarquer dans l'allure du maillage que certains éléments restent très étirés, ceci est encore plus visible dans un zoom du maillage présenté sur la Figure 7.10. Les algorithmes que nous avons proposés ne sont donc pas très efficaces pour régulariser les éléments. Ici encore, on peut obtenir une idée plus précise du comportement des algorithmes de raffinement et de déraffinement du maillage en représentant, au cours des itérations, le nombre total de points dans le maillage NS, le nombre total de points ajoutés NA et le nombre total de points éliminés NE. Ces courbes sont présentées sur la Figure 7.11. On peut observer que le nombre de sommets dans le maillage se stabilise vers les 4000 sommets (ce nombre de sommets dépend des paramètres utilisés pour les critères de raffinement et de déraffinement). On observe aussi que le résidu oscille assez fortement lors des itérations où un raffinement est nécessaire (surtout vers la convergence), puis chute de manière satisfaisante pour atteindre la convergence.

On a représenté sur les Figures 7.12 et 7.13 (vues générales et zooms) les champs de densité  $\rho$ , de nombre de Mach, d'entropie et de vitesse dans la solution stationnaire obtenue.

Les solutions obtenues à la convergence sont assez acceptables, bien qu'elles pâtissent des nombreux éléments étirés présents dans le maillage (on peut l'observer sur certaines isovalues de l'entropie par exemple).

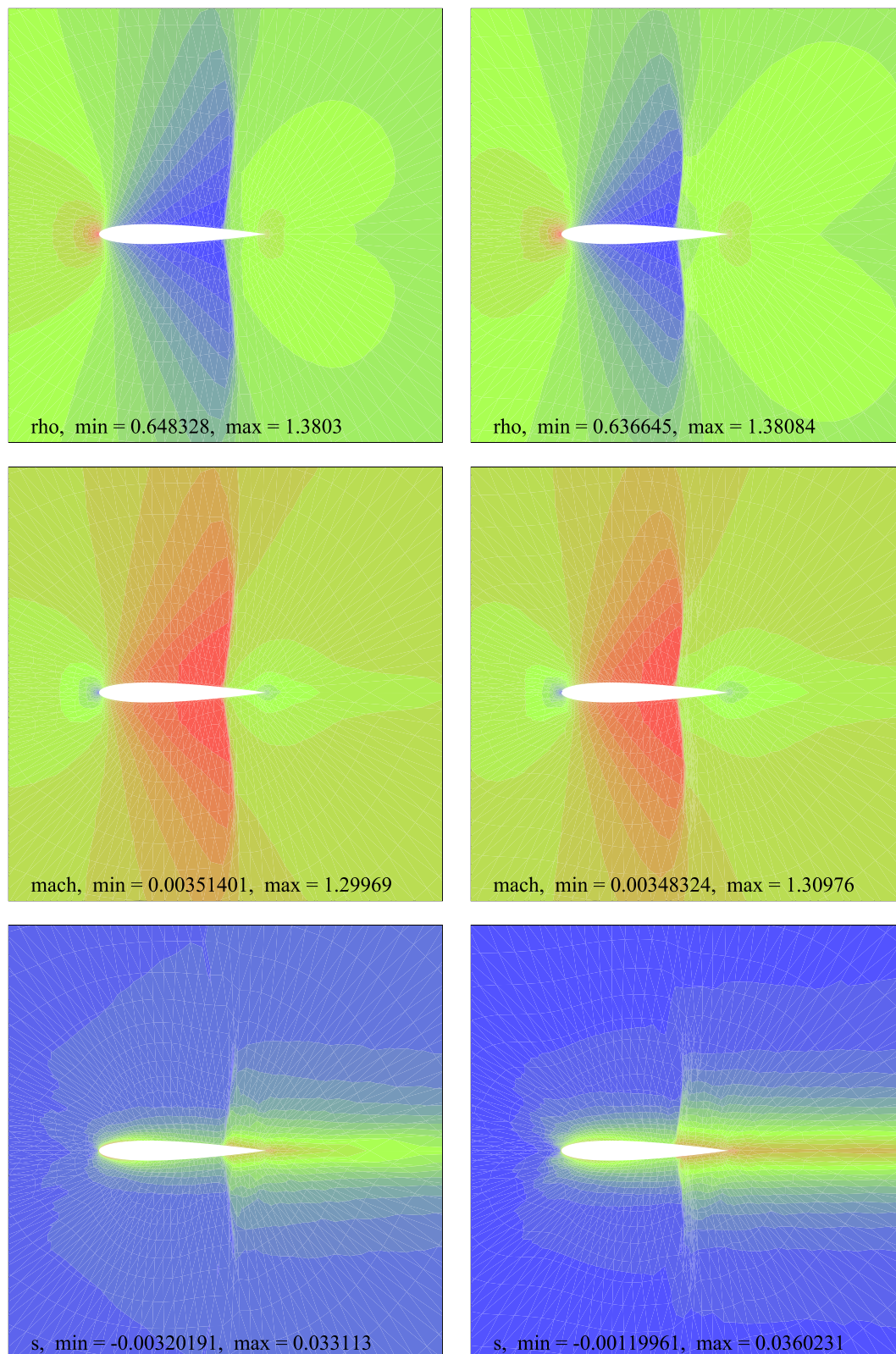


FIG. 7.8 – De haut en bas : champs  $\rho$ ,  $M$  et  $s$ ; à droite à l'itération 200 et à gauche la solution convergée (cas transsonique).



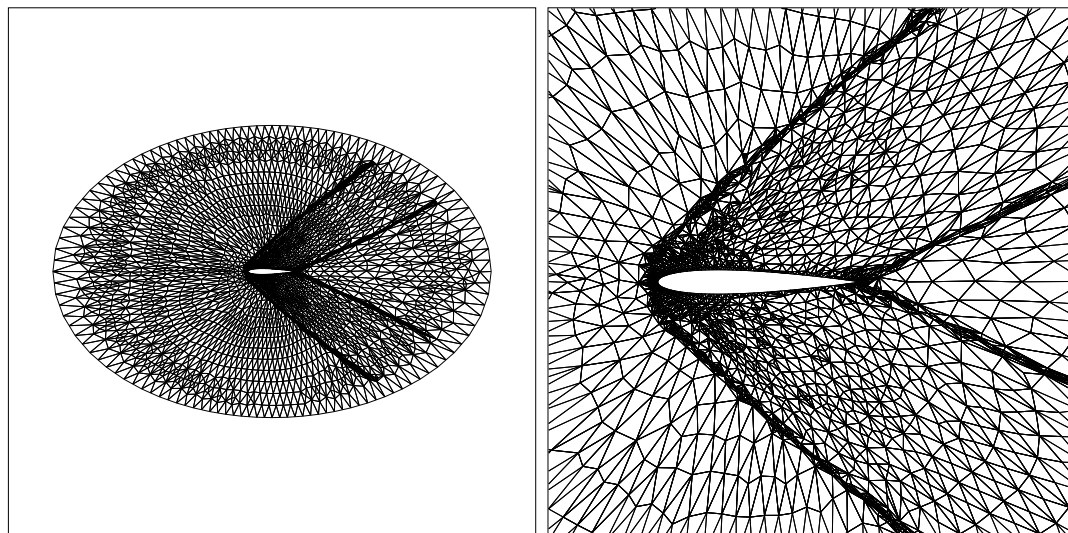


FIG. 7.9 – Maillage final (vue globale et zoom près du profil) pour le cas supersonique.

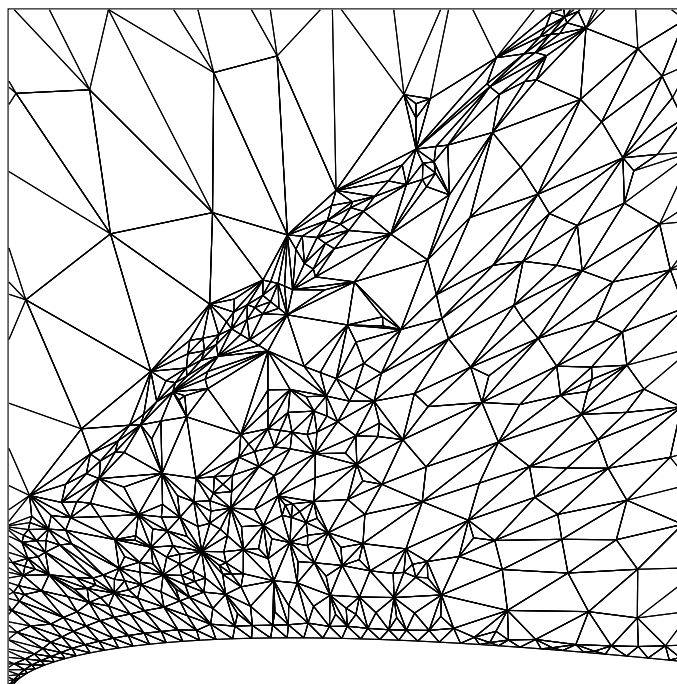


FIG. 7.10 – Maillage final (zoom détaillé) pour le cas supersonique.

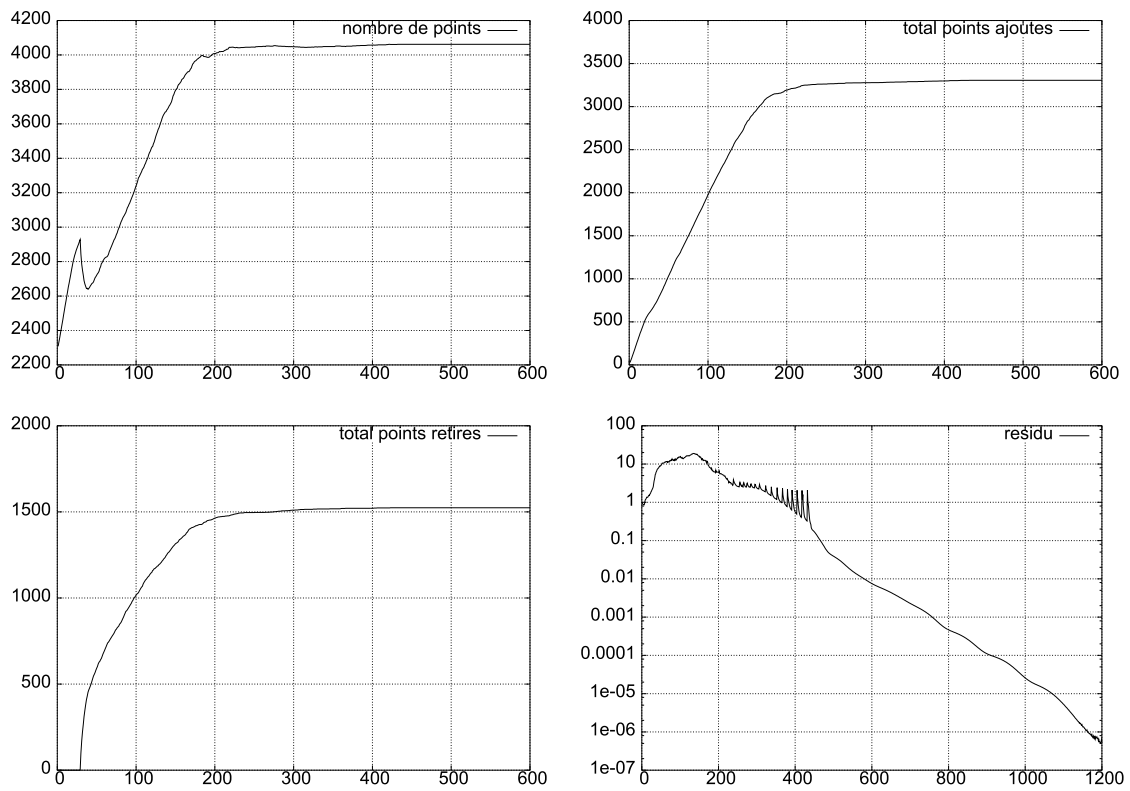


FIG. 7.11 – NS, NA et NE (500 premières itérations) et résidu (cas supersonique).

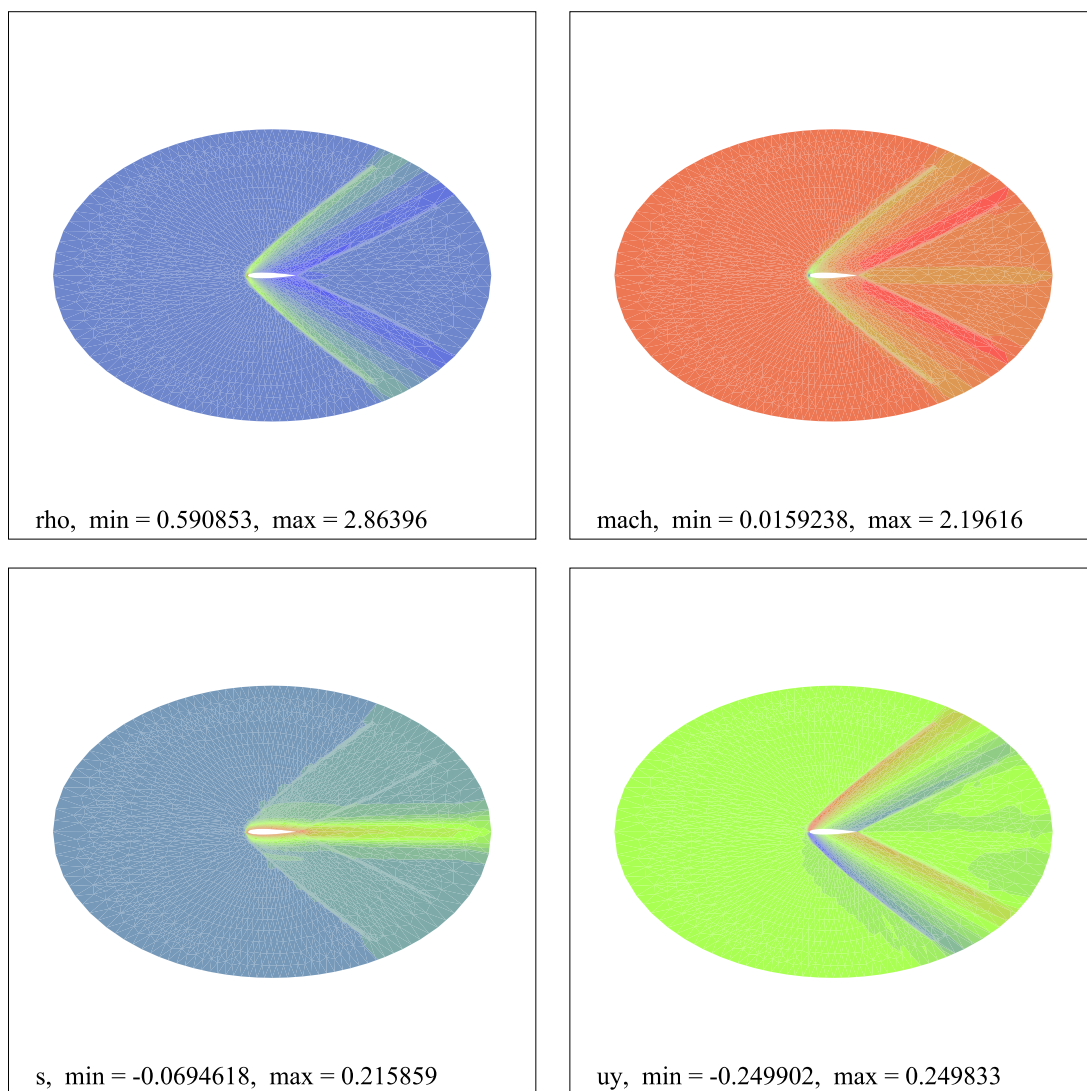


FIG. 7.12 – De droite à gauche et de haut en bas : champs  $\rho$ ,  $M$ ,  $s$  et  $u_y$  pour la solution convergée (cas supersonique).

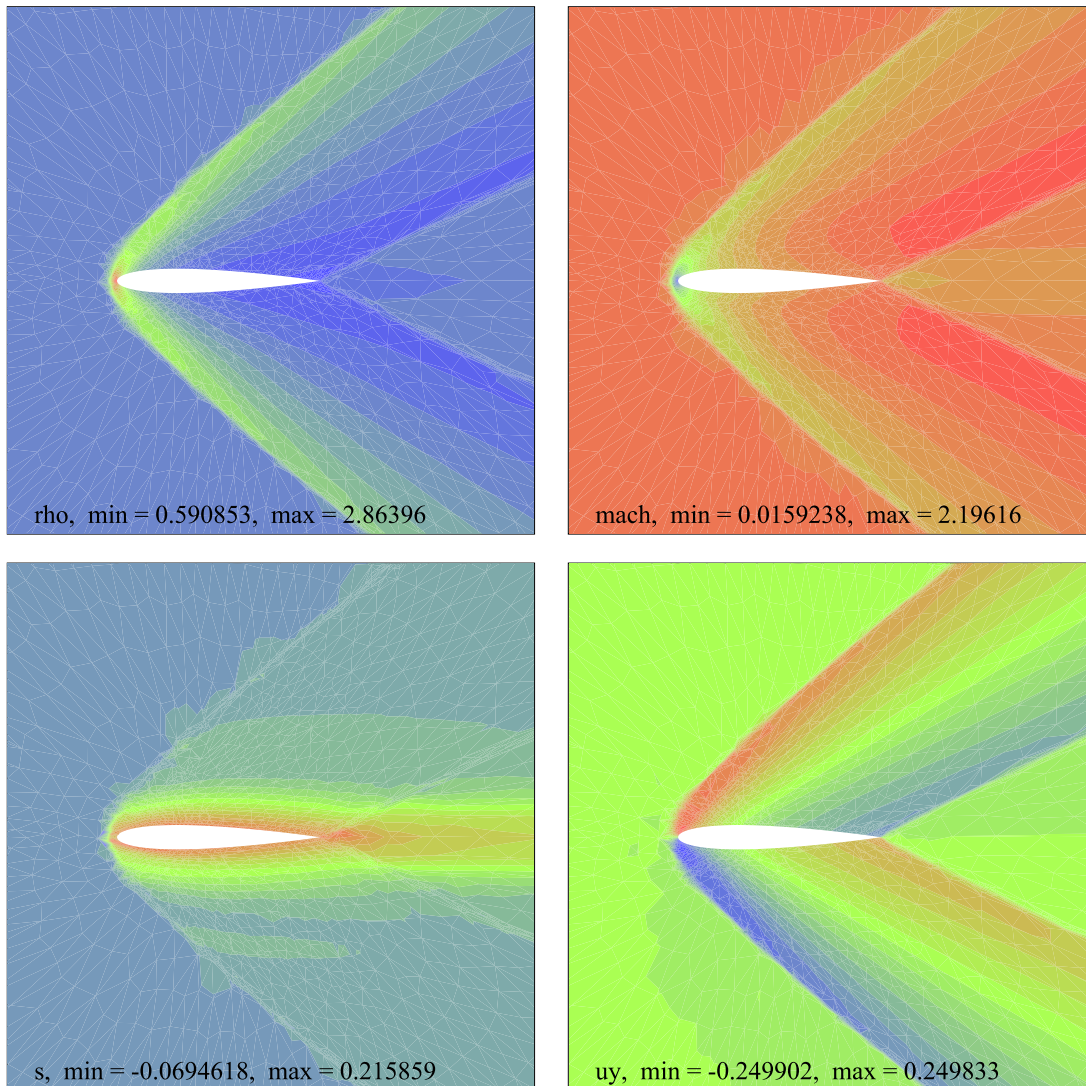


FIG. 7.13 – De droite à gauche et de haut en bas : champs  $\rho$ ,  $M$ ,  $s$  et  $u_y$  pour la solution convergée (cas supersonique).

## 7.4 Calculs de solutions instationnaires

### 7.4.1 Cas supersonique

On cherche dans cette section à utiliser enfin l'ensemble des algorithmes proposés dans cette thèse sur un problème instationnaire où il peut s'avérer utile d'adapter continuellement le maillage à la solution (sans véritable étape externe de remaillage).

On commence par un cas-test assez académique supersonique avec oscillation du profil d'aile. Le but est de vérifier le comportement des algorithmes proposés sur un cas numériquement plus simple qu'un écoulement transsonique. On fait osciller le profil dans un écoulement avec un nombre de Mach égal à l'infini égal à  $M_\infty = 2$ . Les oscillations du profil sont d'amplitude croissante linéairement jusqu'à obtenir une amplitude de 5 degrés. Les oscillations se font à une fréquence assez élevée (de période  $T = 0.5$ , ce qui correspond à une vitesse réduite de l'écoulement égale à  $V^* = 0.159$ ). Pendant les oscillations, on a choisi de fixer le pas de temps à  $\Delta t = 0.01$ , ce qui correspond donc à cinquante pas de temps par période, mais aussi à un nombre de Courant maximal proche de 40.

L'algorithme choisi (algorithme (6.10) portant sur la densité de l'écoulement, avec  $\alpha = 20$  et  $C_0 = 1$ ) fonctionne assez bien. Le jeu de paramètres choisis donne un algorithme qui sur ce cas a tendance à faire croître indéfiniment le maillage (ceci pourrait être corrigé en adaptant les paramètres pendant le calcul). Ceci est présenté sur la Figure 7.14.

Pour se donner une idée des écoulements obtenus, on a représenté sur les Figures 7.15 à 7.17 les maillages, les champs de densité  $\rho$  et de nombre de Mach obtenus à différents instants au cours d'une demi-oscillation.

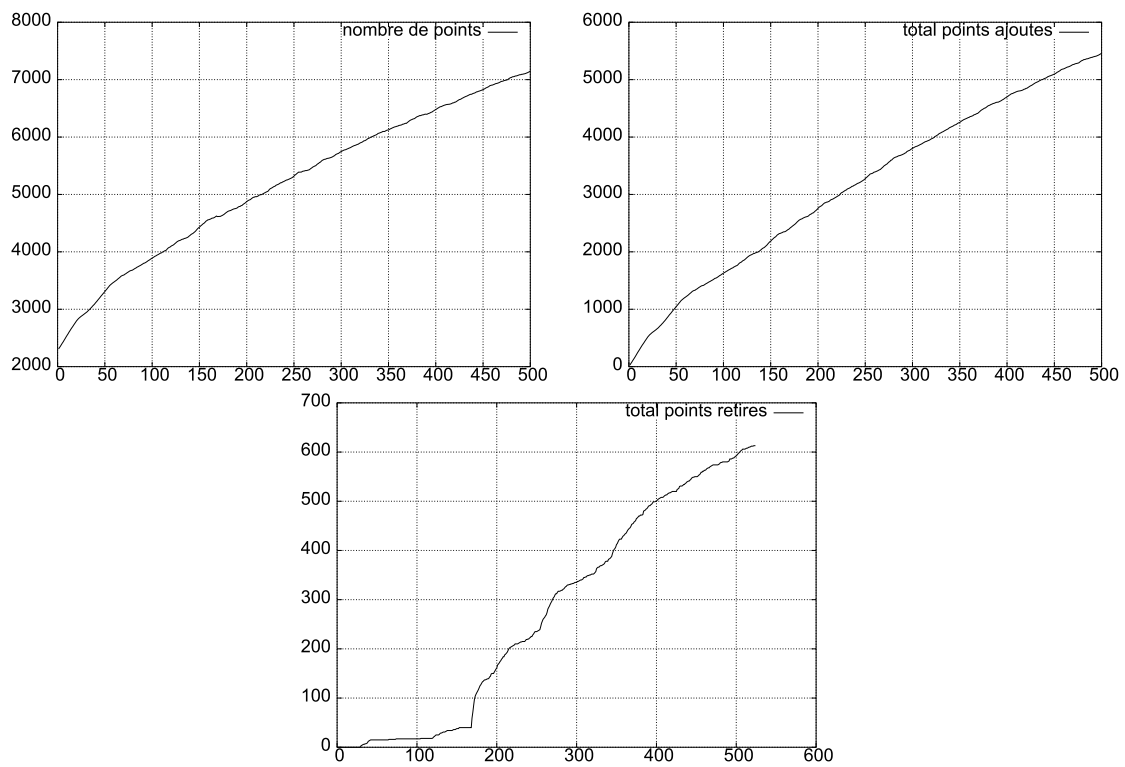
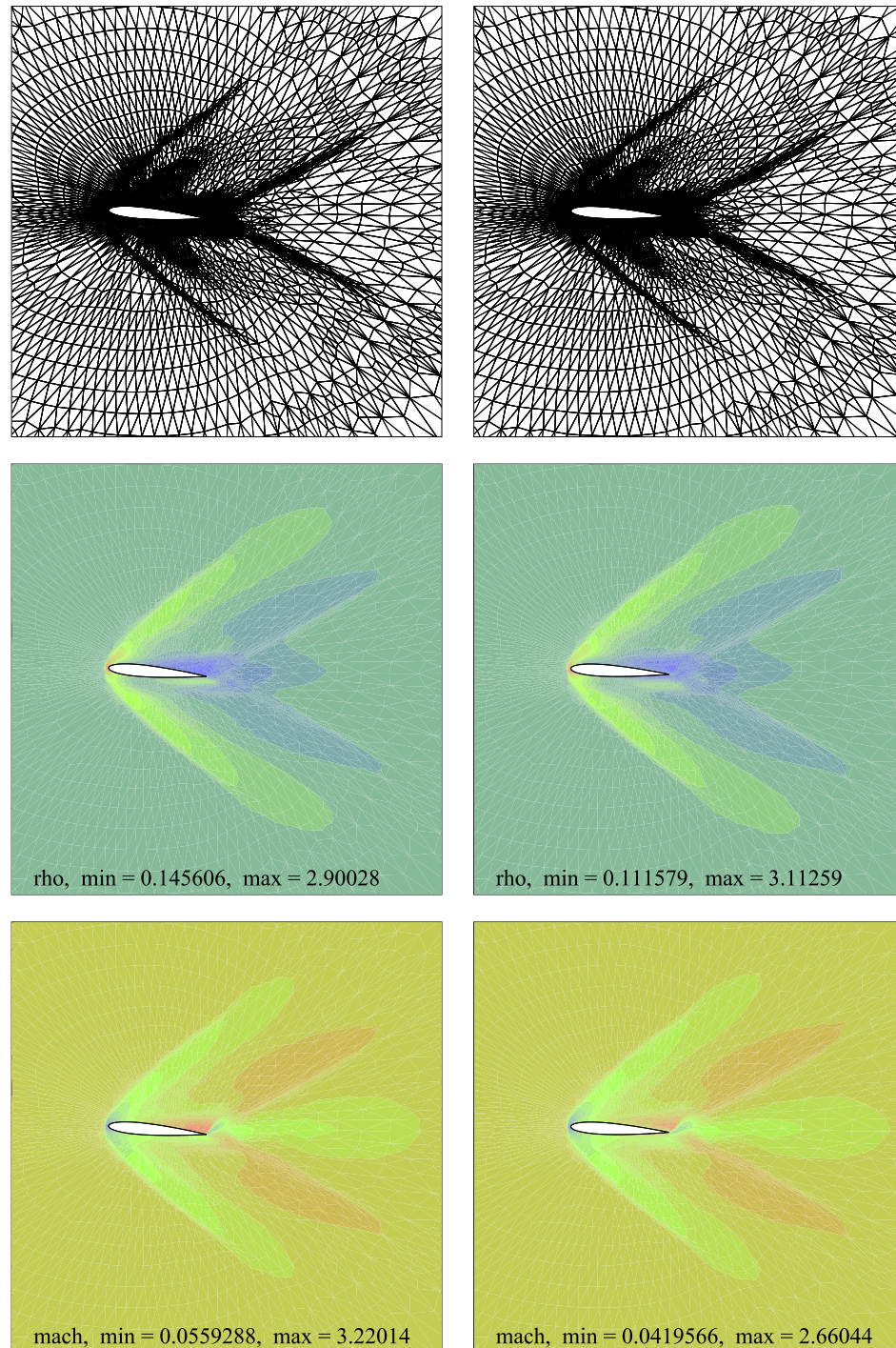


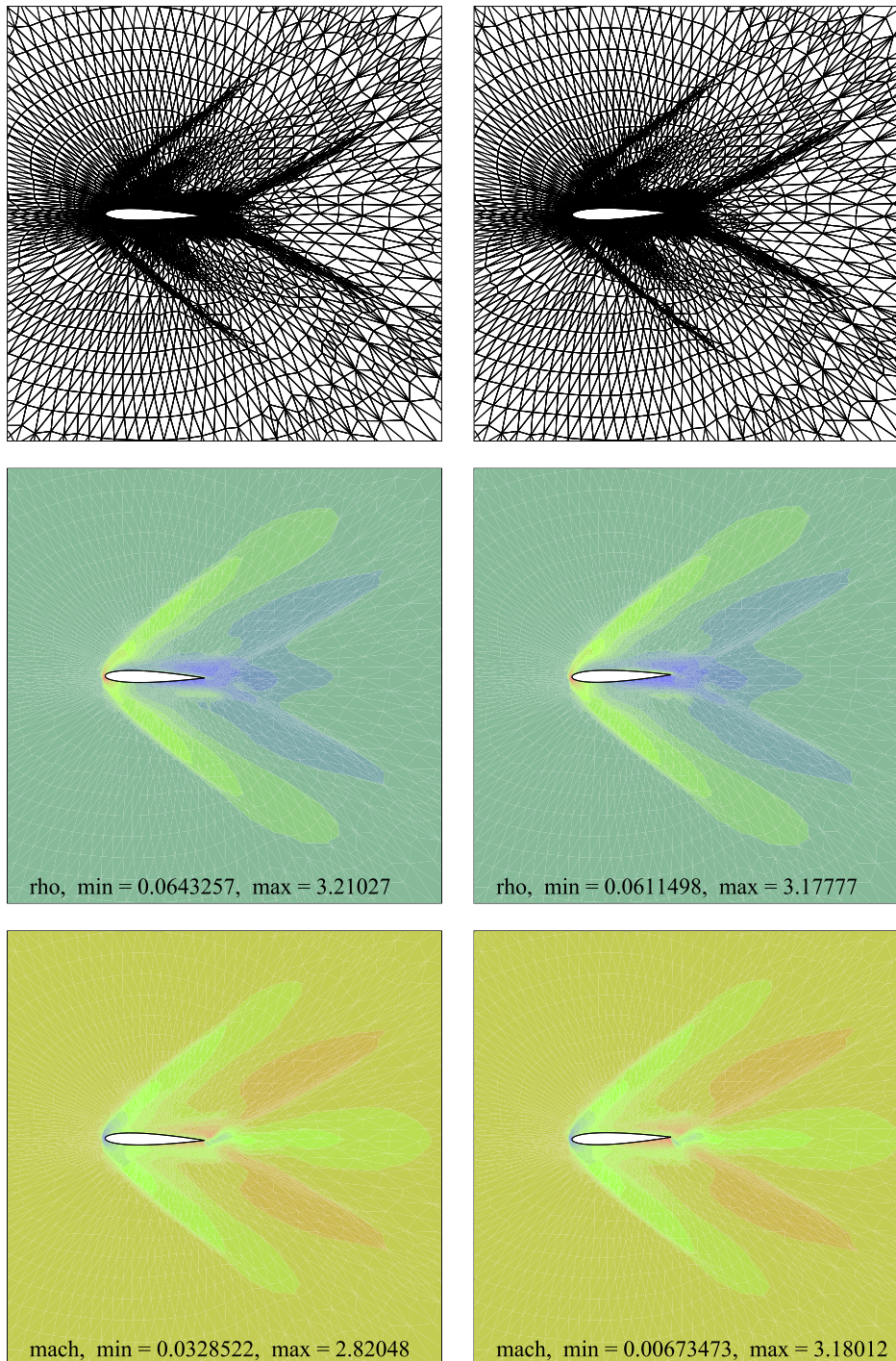
FIG. 7.14 – NS, NA et NE (500 premières itérations - cas supersonique oscillant).



Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = 4.986$

Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = 3.381$

FIG. 7.15 – Maillage,  $\rho$  et  $M$  (cas supersonique oscillant).

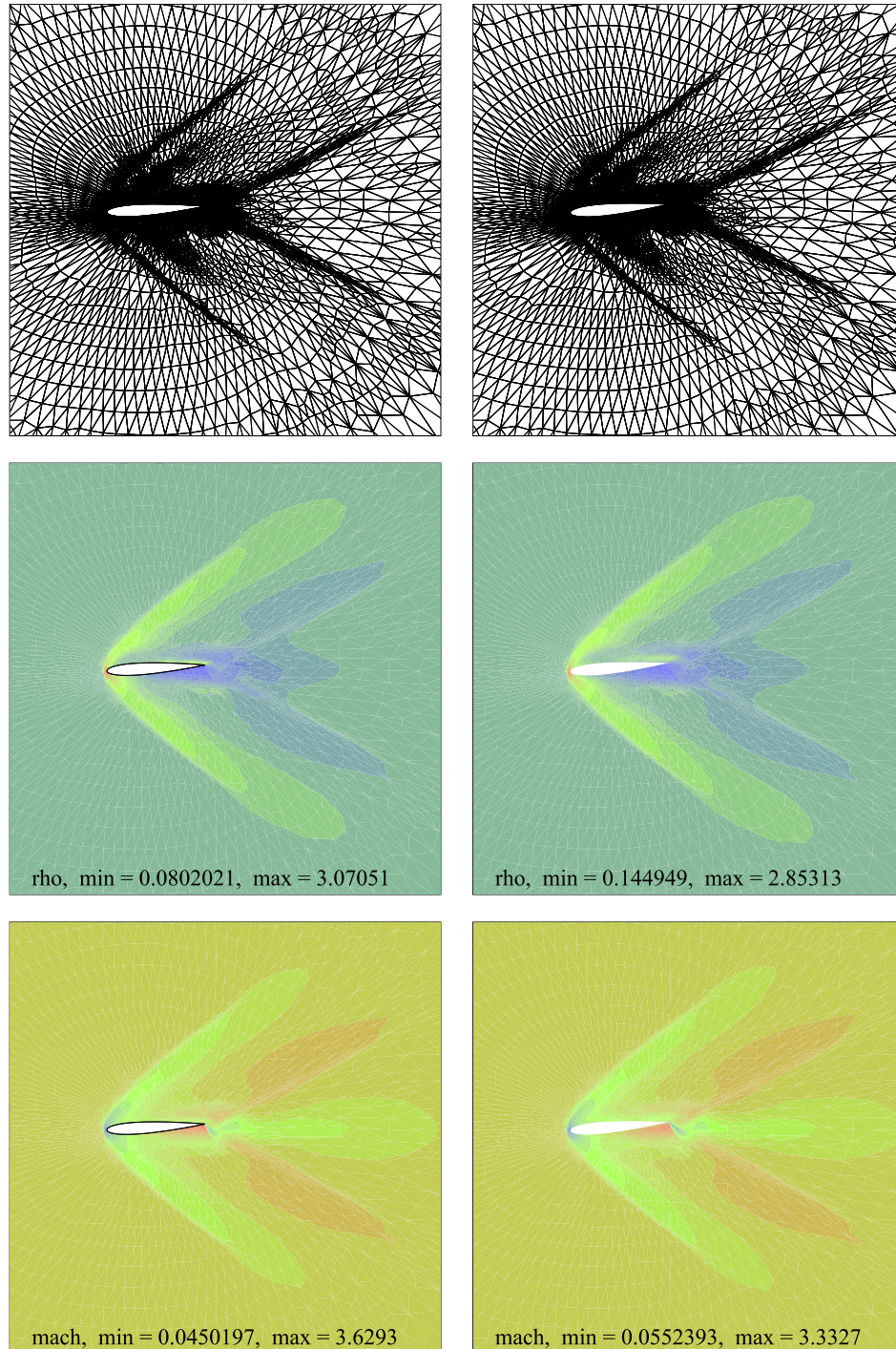


Maillage, densité  $\rho$  et nombre de Mach  $M$  pour  $\theta = 1.189$

Maillage, densité  $\rho$  et nombre de Mach  $M$  pour  $\theta = -1.298$

FIG. 7.16 – Maillage,  $\rho$  et  $M$  (cas supersonique oscillant).





Maillage, densité  $\rho$  et nombre de Mach  $M$  pour  $\theta = -3.463$

Maillage, densité  $\rho$  et nombre de Mach  $M$  pour  $\theta = -4.993$

FIG. 7.17 – Maillage,  $\rho$  et  $M$  (cas supersonique oscillant).

### 7.4.2 Cas transsonique

On considère maintenant un cas-test où le profil d'aile est oscillant dans un écoulement transsonique. On cherche à reproduire des simulations comparables à ce que l'on peut trouver dans [48]. On considère toujours le même profil, cette fois-ci dans un écoulement transsonique à  $M_\infty = 0.85$ . On force des oscillations harmoniques en rotation d'amplitude maximale de 2 degrés, avec une pulsation propre correspondant à  $V^* = 5.477$  (pour une vitesse du fluide égale à 1 à l'infini, cela correspond à  $T_\theta = 17.2$ ). Les oscillations sont déclenchées à  $t = 1$  et l'on utilise le même choix d'algorithmes (méthode (6.10) portant sur la densité de l'écoulement, avec  $\alpha = 50$  et  $C_0 = 1$ ). Pendant les oscillations, on fixe le pas de temps à  $\Delta t = 0.05$ , ce qui correspond donc à environ 340 pas de temps par période et à un nombre de Courant maximal proche de 70 (on n'arrive hélas pas à utiliser un pas de temps plus grand).

On obtient des résultats partiellement satisfaisants : les solutions calculées sont acceptables, le maillage ne grossit pas indéfiniment, mais très peu de soustractions de points sont effectuées (peut-être pourrait-on trouver un jeu de paramètres plus intéressant), comme on peut le voir sur la sur la Figure 7.18.

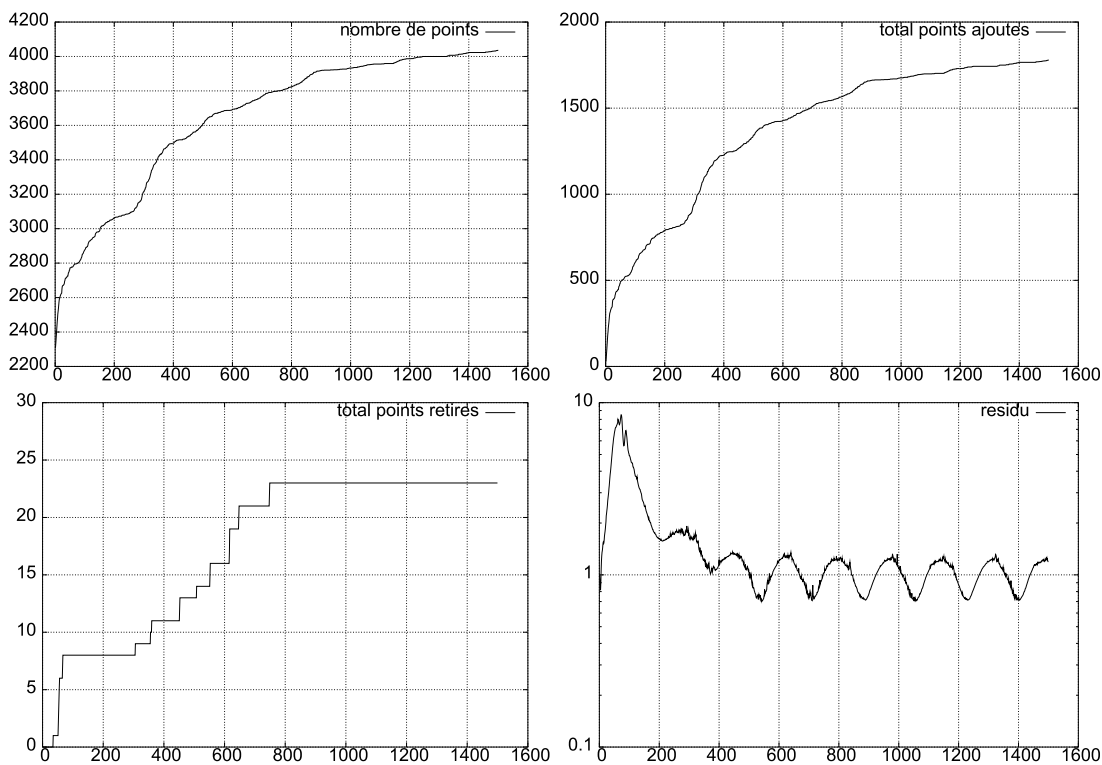


FIG. 7.18 – NS, NA, NE et résidu - cas transsonique oscillant.

On a tracé en fonction du temps, sur la Figure 7.19, les courbes donnant la traînée, la portance et le moment des forces exercées par le fluide sur le profil (ces quantités sont adimensionnées). On observe que la traînée se stabilise assez vite. D'autre part, la portance et le moment sont globalement en opposition de phase (ce qui montre que le régime est plutôt stable).

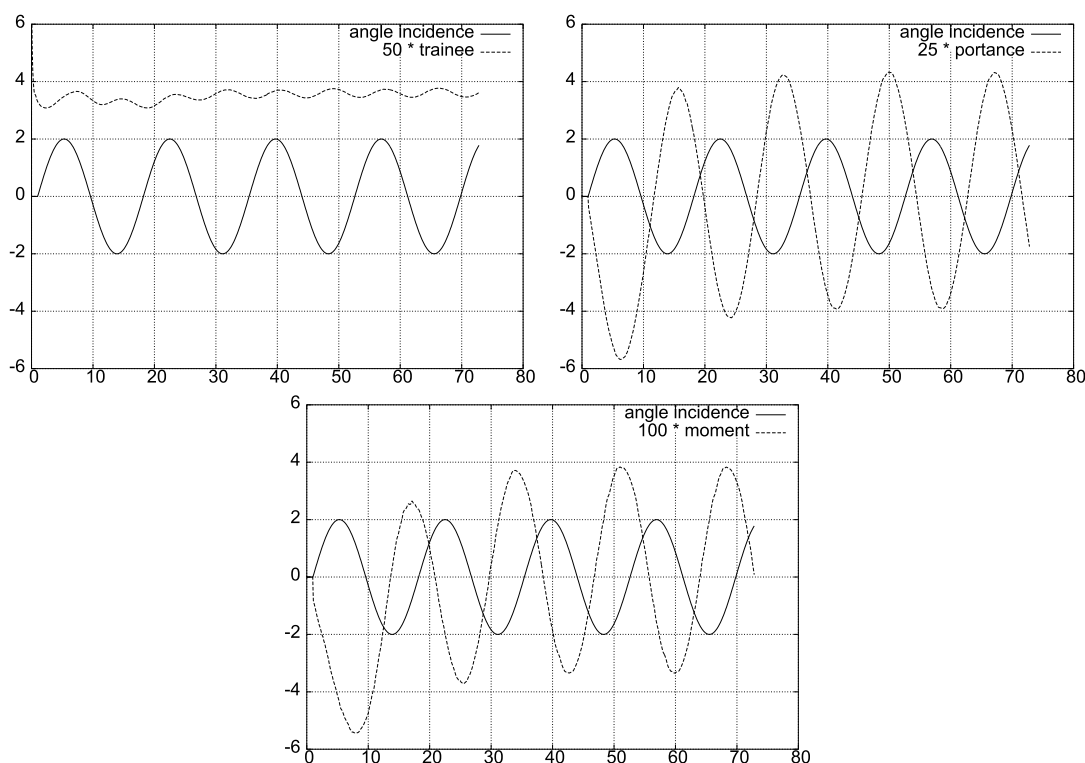


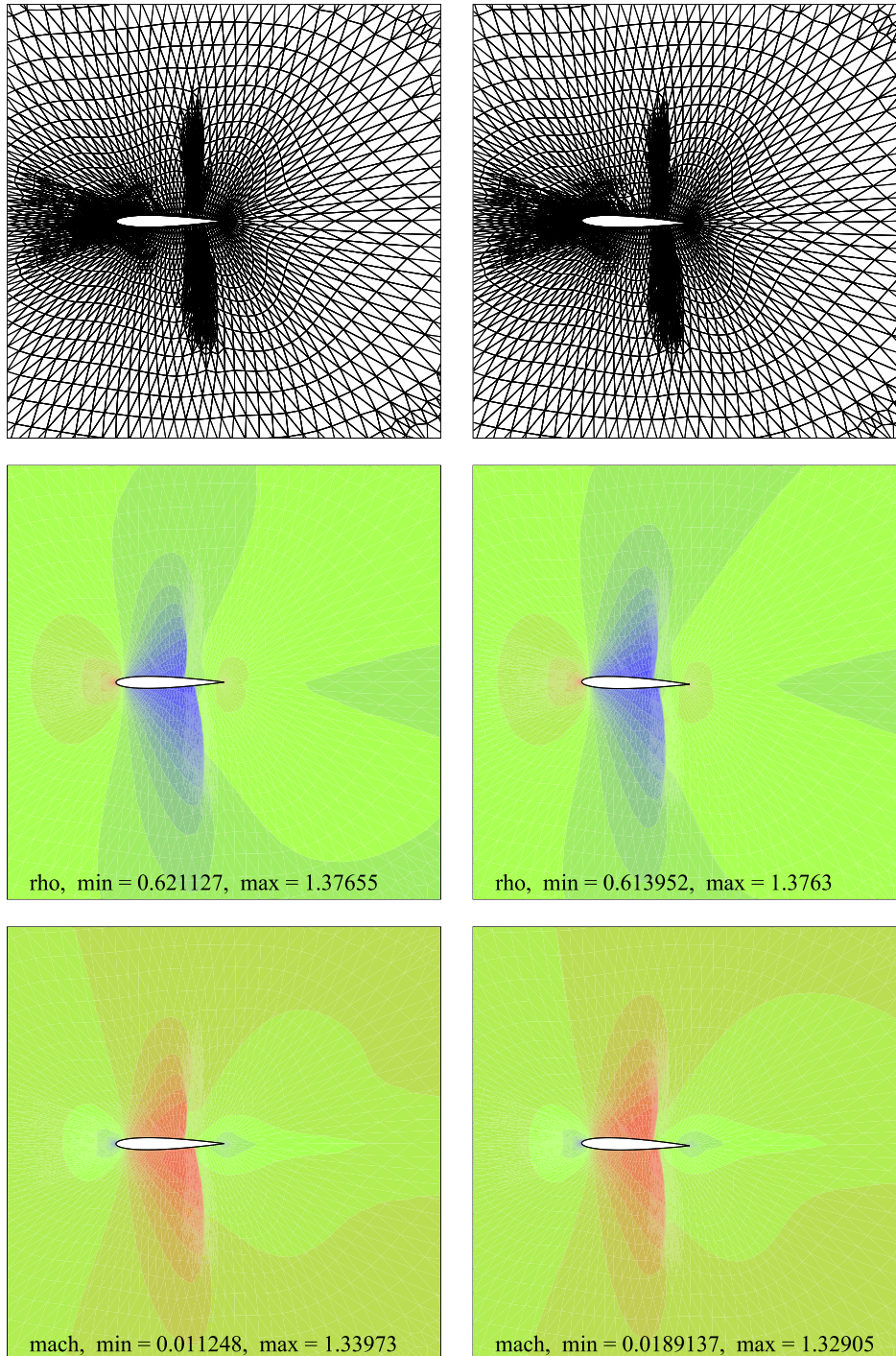
FIG. 7.19 – Traînée, portance et moment des forces en fonctions du temps - cas transonique oscillant.

Pour se donner une idée des écoulements obtenus, on a représenté sur les Figures 7.20 à Figures 7.23 les maillages, les champs de densité  $\rho$  et de nombre de Mach obtenus à différents instants au cours d’une oscillation.

## 7.5 Conclusion

Dans cette section, on a utilisé une partie des algorithmes proposés dans cette thèse pour résoudre des problèmes stationnaires ou instationnaires sur des maillages dynamiques auto-adaptatifs (nous n’avons pas utilisé le swapping, assez délicat à mettre en œuvre en deux dimensions d’espace). Nous n’avons pas décrit en détail les modifications très légères et les ajustements de paramètres secondaires que nous avons dû apporter pour obtenir un comportement satisfaisant. Dans l’ensemble, il est possible de faire fonctionner ces méthodes, mais elles s’avèrent assez peu robustes et sensibles à de petites modifications. Enfin, il conviendrait, outre le fait de continuer des tests plus systématiques et de trouver des cas-tests plus compliqués, de revoir au moins deux aspects de nos méthodes :

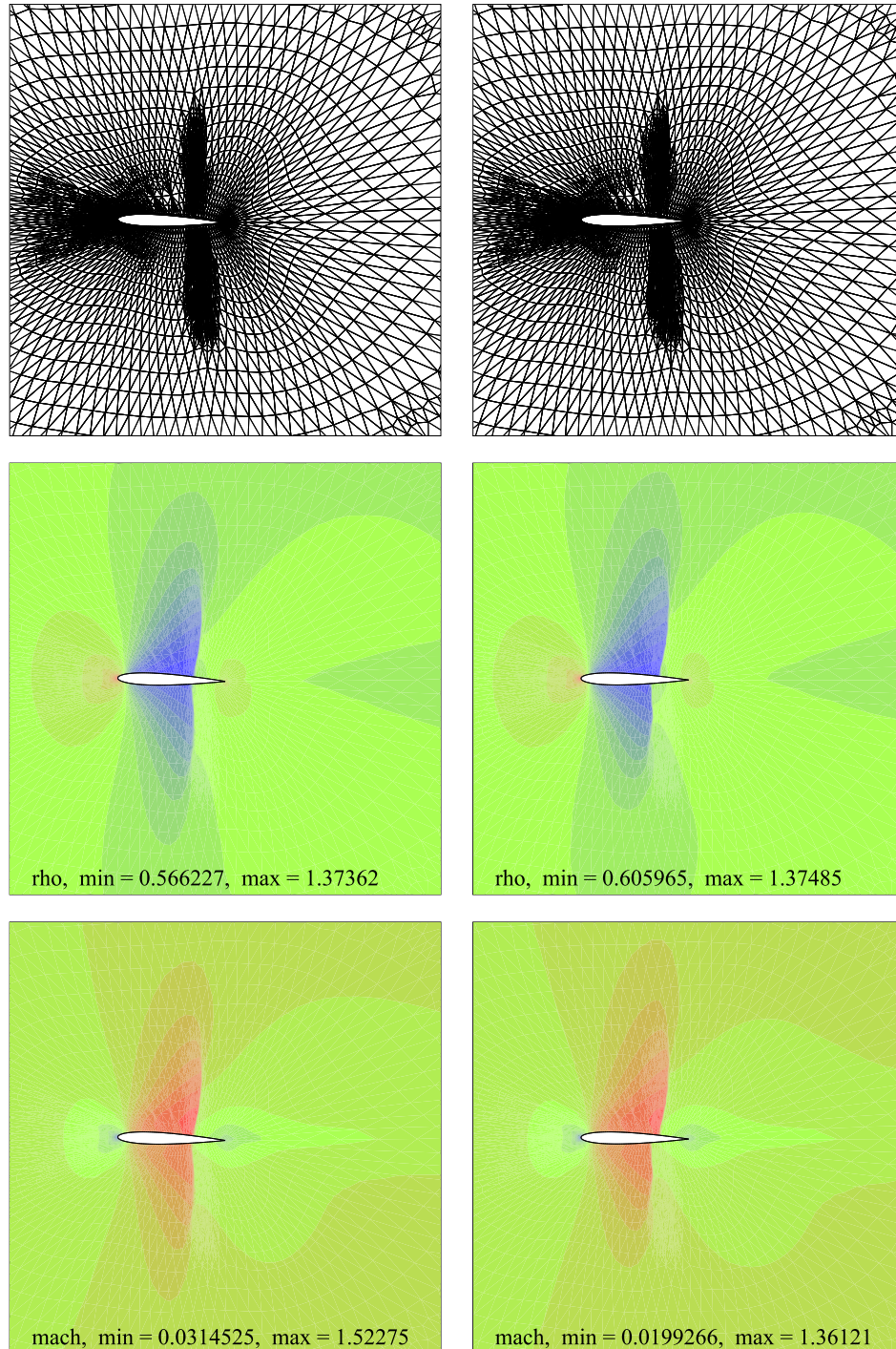
- les algorithmes proposés ont tendance à étirer les mailles, ce qui est en général source de problème. Il faudrait intégrer des méthodes de régularisation (plutôt isotropes) ;
- le déraffinement de maillage semble un peu inefficace sur des maillages localement étirés.



Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = 0.13$

Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = -1.50$

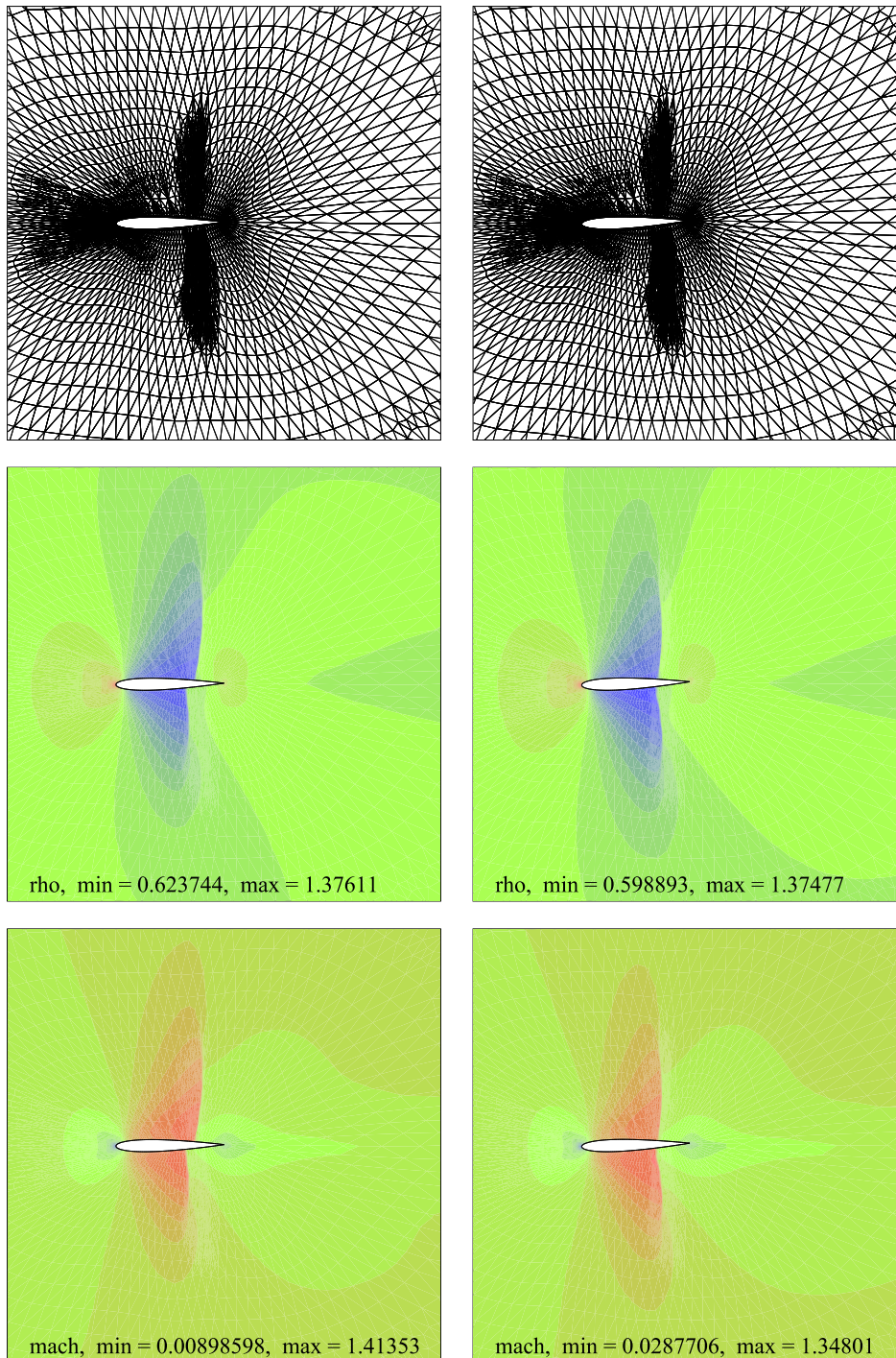
FIG. 7.20 – Maillage,  $\rho$  et  $M$  (cas supersonique oscillant).



Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = -1.96$

Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = -0.90$

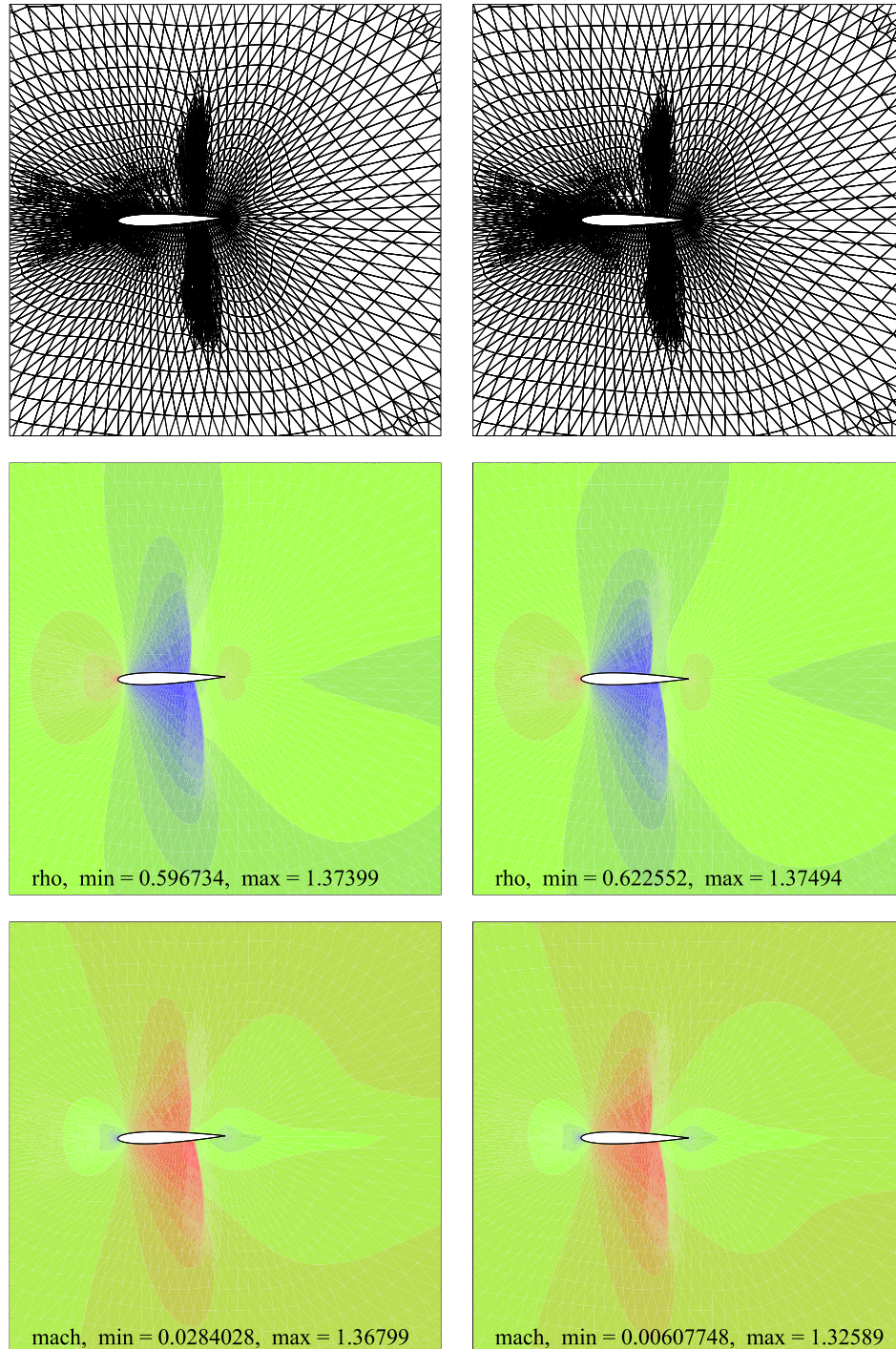
FIG. 7.21 – Maillage,  $\rho$  et  $M$  (cas supersonique oscillant).



Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = 0.86$

Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = 1.95$

FIG. 7.22 – Maillage,  $\rho$  et  $M$  (cas supersonique oscillant).



Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = 1.53$

Maillage, densité  $\rho$  et nombre  
de Mach  $M$  pour  $\theta = -0.08$

FIG. 7.23 – Maillage,  $\rho$  et  $M$  (cas supersonique oscillant).





# Troisième partie

## Conclusion



---

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la construction de méthodes d'adaptation dynamique de maillages, pour la résolution de lois de conservation en une et deux dimensions d'espace.

Nous nous sommes tout d'abord placés dans un cadre monodimensionnel. Notre premier travail a été de construire une méthode de volumes finis, dont la particularité est l'utilisation de maillages mobiles à topologie non-constante (addition et soustraction de points). Son originalité réside dans notre conception de l'addition et de la soustraction de points. L'addition est vue comme la distinction de nœuds préalablement confondus, alors que la soustraction correspond à la convergence en un unique point de nœuds auparavant distincts. Ainsi, le raffinement et le déraffinement n'apparaissent plus comme une variante aux méthodes de maillages mobiles auto-adaptatifs, mais plutôt comme une généralisation de ces dernières à des cas de volumes naissants ou disparaissants.

Pour l'advection linéaire, nous avons montré que le présent schéma, accompagné du solveur de Godunov en maillages mobiles, satisfait les propriétés classiques des méthodes de volumes finis (principe du maximum, décroissance de la variation totale, stabilité  $L^2$ ) sous certaines contraintes de type CFL. Afin de s'affranchir de ces limitations, l'intégration en temps est réalisée par un schéma localement implicite pour l'équation d'advection linéaire et implicite linéarisé pour l'équation de Burgers.

Nous avons ensuite cherché à intégrer le schéma dans un code, où le maillage s'adapte automatiquement et simplement. Pour ce faire, nous avons introduit une méthode assez classique d'adaptation de maillages, qui repose sur des maillages mobiles à topologie constante. Elle s'appuie néanmoins sur une formulation non-globale (pas de résolution couplée d'équations pour le maillage et pour la solution elle-même). Nous avons ensuite implémenté différents algorithmes de variation de la topologie. Quelques résultats numériques élémentaires ont été obtenus pour l'advection linéaire et pour l'équation de Burgers.

Nous nous sommes ensuite attachés à étendre ces idées en deux dimensions d'espace. Nous nous sommes précisément intéressés à la résolution numérique du système des équations d'Euler bidimensionnelles (fluide compressible parfait non-visqueux) dans un domaine déformable.

Comme pour l'étude monodimensionnelle, nous avons proposé une généralisation des méthodes en maillages dynamiques à des maillages variables (pour des maillages non-structurés). L'évaluation des termes convectifs repose sur une extension du solveur de Roe en maillages dynamiques. Nous avons ainsi défini deux opérations élémentaires sur le maillage : l'addition et la soustraction. Nous avons également introduit une troisième opération, combinaison des deux autres : le "swapping", qui vise à améliorer la qualité géométrique des éléments du maillage si celle-ci s'est fortement dégradée.

Nous avons ensuite cherché à compléter ces différents outils (que sont le maillage mobile, l'addition, la soustraction, le "swapping") par des critères d'adaptation, afin de générer une algorithmique relative à chacun de ces outils ou à leurs éventuelles associations. La première vise à induire un mouvement pertinent aux sommets du maillage. Pour ce faire, nous avons introduit une distribution de forces, soit attrac-

tives, soit répulsives, entre les nœuds du maillage. Le mouvement des nœuds est obtenu en résolvant une équation d'équilibre sur le domaine. Quant aux techniques de type raffinement/déraffinement, elles reposent sur des critères locaux comme le gradient. Pour chaque algorithme, nous avons présenté quelques cas-tests élémentaires sur l'équation d'advection en deux dimensions.

Enfin, nous avons cherché à appliquer les méthodes numériques proposées à des calculs d'écoulements stationnaires autour de profils de type NACA, puis à des écoulements instationnaires autour de profils mobiles et/ou déformables, similaires à ce que l'on pourrait rencontrer en simulation d'interactions fluide-structure en aérodynamique. Les résultats obtenus sont acceptables, mais probablement moins bons que ceux que l'on pourrait obtenir avec un algorithme classique de remaillage ou d'adaptation. D'autre part, nous nous sommes heurtés à quelques difficultés dans la mise en œuvre de l'algorithme, révélatrices de son manque de robustesse. En premier lieu, trouver un jeu de paramètres (ceux intervenant dans les différents algorithmes d'adaptation) s'avère un exercice très difficile. De plus, on doit souvent adopter des choix très restrictifs pour obtenir la convergence. Ainsi, les algorithmes ne fonctionnent pas de manière optimale. En effet, on observe par exemple l'apparition d'éléments fortement étirés dans certaines régions du domaine de calcul.

Malgré la modestie de nos résultats, nous ne pouvons, à ce stade de notre étude, conclure de la non-fiabilité du raisonnement proposé, consistant à assimiler l'addition (respectivement la soustraction) à la subdivision dynamique (respectivement à la fusion) de sommets. Les difficultés mentionnées ci-dessus proviennent essentiellement du comportement non-optimal des algorithmes d'adaptation proposés et du choix de leur combinaison. De nombreux travaux supplémentaires sont donc indispensables pour fournir une analyse plus critique et plus argumentée. Il conviendrait dans un premier temps, outre le fait de continuer des tests plus systématiques, de revoir quelques aspects de la méthode, nécessaires à son amélioration. On songe, par exemple, à coupler les méthodes de maillages adaptatifs à des algorithmes de correction, d'amélioration locale, de type régularisation de maillages. La question de la régularité des maillages est déterminante. En effet, les autres outils fonctionneront d'autant mieux que le maillage courant sera régulier. Ainsi, l'addition d'outils plus efficaces de régularisation de maillages (par exemple à topologie constante) pourrait non seulement améliorer grandement les résultats, mais aussi rendre l'ensemble des algorithmes proposés plus robuste. Il faut garder à l'esprit que si l'on est capable de conserver une certaine régularité aux maillages, alors on peut choisir d'être à la fois très laxiste sur l'addition de points tout en demandant de nombreuses soustractions de points.

D'un point de vue pratique, il serait également intéressant d'intégrer les outils présentés dans cette thèse avec d'autres méthodes adaptatives existantes, afin de mener une étude comparative sur le temps de calcul nécessaire pour converger, la précision des résultats numériques obtenus, etc. On peut enfin mentionner que nous nous sommes limités dans cette thèse à des approches de type volumes finis centrés-sommets avec extension MUSCL. Cette approche n'est certainement pas la plus adaptée à des maillages parfois très irréguliers ; on pourrait évidemment reproduire des études similaires sur des

volumes finis centrés-éléments, ou avec des méthodes plus performantes en maillages étirés [62], ou encore avec des méthodes de type Galerkin discontinu dont la précision spatiale s'étend naturellement au-delà de l'ordre deux.



# Bibliographie

- [1] F.. Alauzet. *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides.* mathématiques appliquées, Université de Montpellier II, octobre 2003.
- [2] J.T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA J.*, 28 :1381–1388, August 1990.
- [3] F. Benkhaldoun, T. Fernandez, B. Larrouturou, and P. Leyland. A dynamical adaptative method based on local refinement and unrefinement for triangular finite-element meshes : preliminary results. Technical Report RR-1271, INRIA, July 1990.
- [4] M.J. Berger and A. Jameson. Automatic adaptative grid refinement for the Euler equations. *AIAA J.*, 23(4) :561–568, April 1985.
- [5] M.J. Berger and J. Olinger. Adaptative mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *J. Comput. Phys.*, 53 :483–512, 1984.
- [6] R. Biswas and R. Strawn. A new procedure for dynamic adaptation of three-dimensional unstructured grids. *Appl. Numer. Math.*, 13(6) :437–452, 1994.
- [7] F. Blom and P. Leyland. Analysis of fluid-structure interaction on moving airfoils by means of an improved ale method. In *AIAA 28th Fluid Dynamics Conference, Snowmass Village, Colorado*, June 1997. AIAA paper 97-1770.
- [8] M. J. Castro-Díaz, H. Bourouchaki, P.-L. George, F. Hecht, and B. Mohammadi. Anisotropic adaptive mesh generation in two dimensions for cfd. In J.-A. Désidéri, P. Le Tallec, E. Oñate, J. Périaux, and E. Stein, editors, *Proceedings of the Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering*, pages 181–186, Paris, France, September 9-13 1996. John Wiley & Sons.
- [9] M.J. Castro Diaz, F. Hecht, and B. Mohammadi. New progress in anisotropic grid adaptation for inviscid and viscous flows simulations. Technical Report RR-2671, INRIA, October 1995.
- [10] T. Coupez, H. Dignonnet, and R. Ducloux. Parallel meshind and remeshing. *Appl. Math. Modelling*, 25 :153–175, August 2000.
- [11] E.A. Dorfi and L. O’C. Drury. Simple adaptative grids for 1-D initial Value Problems. *J. Comput. Phys.*, 69 :175–195, 1987.
- [12] B. Duval. *Optimisation de maillages non structurés dans des géométries déformables.* physique, Université de Rouen, mai 1996.

- 
- [13] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 163 :231–245, 1998.
- [14] L. Fezoui. Résolution des équations d’Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis. Technical Report RR-358, INRIA, January 1985.
- [15] L. Fezoui and B. Stoufflet. A class of implicit upwind schemes for euler simulations with unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 84 :174–206, 1989.
- [16] M. Fortin, M.-G. Vallet, J. Dompierre, Y. Bourgault, and W.G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation : Theory, validation and applications. In J.-A. Désidéri, P. Le Tallec, E. Oñate, J. Périaux, and E. Stein, editors, *Proceedings of the Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering*, pages 174–180, Paris, France, September 9-13 1996. John Wiley & Sons.
- [17] R.M. Furzeland, J.G. Verwer, and P.A. Zegeling. A numerical study of three moving-grid methods for one-dimensional partial differential equations which are based on the method of lines. *J. Comput. Phys.*, 89 :349–388, 1990.
- [18] P.A. Gnoffo. A finite volume, adaptative grid algorithm applied to planetary entry flowfields. *AIAA J.*, 21(9) :1249–1254, September 1983.
- [19] H. Guillard and C. Farhat. On the significance of the gcl for flow computations on moving meshes. In *AIAA 7th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, January 11-14 1999. AIAA paper 99-0793.
- [20] A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 49 :357–393, 1983.
- [21] A. Harten, J. M. Hyman, and P. D. Lax. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2(29) :297–322, 1976.
- [22] A. Harten and J.M. Hyman. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 50 :235–269, 1983.
- [23] W. Huang, Y. Ren, and R.D. Russell. Moving mesh partial differential equations (MMPDEs) based on the equidistribution principle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(3) :709–730, June 1994.
- [24] W. Huang and R.D. Russell. Analysis of moving mesh partial differential equations with spatial smoothing. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(3) :1106–1126, June 1997.
- [25] W. Huang and R.D. Russell. Adaptative mesh movement - the MMPDE approach and its applications. *J. Comput. Appl. Math.*, 128 :383–398, 2001.
- [26] A. Ilinca, R. Camarero, J.Y. Trépanier, and M. Reggio. Error estimator and adaptative moving grids for finite volumes schemes. *AIAA J.*, 33 :2058–2065, November 1995.
- [27] B. Koren. Upwind discretization of the steady navier-stokes equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 11(1) :99–117, 1990.
- [28] S. Lanteri and C. Farhat. Rapport de recherche aéroélasticité. 2ème partie : étude bibliographique et analyse des méthodes. Contrat DRET/AMDBA/PGSoft/-INRIA, 1992.



- 
- [29] B. Larrouturou. *Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur*. Ecole Polytechnique, 1995.
- [30] D. Leservoisier, P.L. George, and A. Dervieux. Métrique et optimisation de maillage. Technical Report RR-4172, INRIA, April 2001.
- [31] M. Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 134 :71–90, 1996.
- [32] S. Li and L. Petzold. Moving mesh methods with upwinding schemes for time-dependent PDEs. *J. Comput. Phys.*, 131 :368–377, 1997.
- [33] R. Löhner. An adaptive finite element solver for transient problems with moving bodies. *Comput. & Structures*, 30(1/2) :303–317, 1988.
- [34] R. Löhner and Baum J.D. Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 14 :1407–1419, 1992.
- [35] N. Maman. *Algorithmes d'adaptation dynamique de maillages en éléments finis. Application à des écoulements réactifs instationnaires*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1992.
- [36] D.J. Mavriplis. Multigrid solution of the two-dimensional euler equations on unstructured triangular meshes. *AIAA J.*, 26 :824–831, July 1988.
- [37] K. Mer. *Modèles de viscosités du quatrième ordre pour l'advection-diffusion en maillage non-structuré*. Thèse de doctorat en sciences de l'ingénieur, Université de Nice-Sophia-Antipolis, décembre 1996.
- [38] L. Moulard. *Optimisation de maillages non structurés : Applications à la génération, à la correction et à l'adaptation*. mathématiques appliquées, Université de Grenoble I, octobre 1994.
- [39] Maud Mériaux and Serge Piperno. Adaptation dynamique de maillage pour les lois de conservation hyperboliques en une dimension. Technical Report RR-4696, INRIA, 2003.
- [40] B. N'Konga. *Développement de méthodes numériques pour les écoulements tri-dimensionnels réactifs dans un domaine déformable*. Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Décembre 1992.
- [41] B. N'Konga and H. Guillard. Godunov type method on non-structured meshes for three-dimensional moving boundary problems. Technical Report RR-1883, INRIA, April 1993.
- [42] B. N'Konga and H. Guillard. Godunov type method on non-structured meshes for three-dimensional moving boundary problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 113 :183–204, 1994.
- [43] B. Palmerio. A consistent ALE-rezoned mesh adaptation algorithm for compressible flow finite-element calculations. Technical Report RR-0829, INRIA, April 1988.
- [44] B. Palmerio. An attraction-repulsion mesh adaptation model for flow solution on unstructured grids. *Computers Fluids*, 23(3) :487–506, 1994.

- 
- [45] L. Palmerio, B. and Fezoui, C. Olivier, and A. Dervieux. On tvd criteria for mesh adaptation for euler and navier-stokes calculations. Technical Report RR-1175, INRIA, March 1990.
- [46] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *J. Comput. Phys.*, 72 :449–466, 1987.
- [47] S. Piperno. Schémas tvd d'ordre élevé pour la résolution de l'équation de burgers. Technical Report 96-49, CERMICS, January 1996.
- [48] S. Piperno. Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 25 :1207–1226, 1997.
- [49] S. Piperno and S. Depeyre. Criteria for the design of limiters yielding efficient high resolution tvd schemes. *Comput. & Fluids*, 27(2) :183–197, 1998.
- [50] S. Piperno, N. Glinsky-Olivier, and R. Rivière. Initiation à la simulation numérique d'écoulements compressibles. Cours de la Semaine européenne, ENPC, ParisTech, November 1998.
- [51] Maud Poret and Serge Piperno. Méthodes de volumes finis en maillages variables pour des équations hyperboliques en une dimension. Technical Report RR-4042, INRIA, 2000.
- [52] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43 :357–371, 1981.
- [53] J.M. Stockie, J.A. Mackenzie, and Russell R.D. A moving mesh method for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(5) :1791–1813, 2001.
- [54] B. Stoufflet. *Résolution numérique des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles par des schémas implicites en éléments finis*. mathématiques appliquées, Université de Paris VI, mars 1984.
- [55] P. K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(5) :995–1011, 1984.
- [56] P.D. Thomas and C.K. Lombard. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA J.*, 17 :1030–1037, October 1979.
- [57] M.G. Vallet. Génération de maillages anisotropes adaptés - application à la capture de couches limites. Technical Report RR-1360, INRIA, December 1990.
- [58] G.D. Van Albada, B. Van Leer, and W.W. jun. Roberts. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astronom. and Astrophys.*, 108 :76–84, 1982.
- [59] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme v : a second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 32 :361–370, 1979.
- [60] B. Van Leer. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe. Technical Report 81-11, ICASE, March 1981.
- [61] J.G. Verwer, J.G. Blom, and J.M. Sanz-Serna. An adaptive moving grid method for one-dimensional systems of partial differential equations. *J. Comput. Phys.*, 82 :454–486, 1989.

- [62] C. Viozat, C. Held, K. Mer, and A. Dervieux. On vertex-centered unstructured finite-volume methods for stretched anisotropic triangulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(35-36) :4733–4766, 2001.

## RÉSUMÉ

Le travail présenté dans cette thèse est une contribution au développement des méthodes à maillage dynamique pour la résolution de système d'EDP en mécanique des fluides. Plus précisément, on met au point des schémas de volumes finis pour des maillages non-structurés, mobiles et à topologie éventuellement variable, basés sur la méthode de Godunov. L'addition et la soustraction de nœuds reposent sur une généralisation des méthodes à maillage dynamique à des cas de volumes naissants ou disparaissants. Dans une première partie on se restreint aux équations hyperboliques en une dimension. On montre que, pour l'advection linéaire, le schéma satisfait les propriétés classiques des méthodes de volumes finis (principe du maximum, décroissance de la variation totale, stabilité  $L^2$ ) sous certaines contraintes de type CFL. Afin de s'affranchir de ces restrictions, l'intégration en temps du système discret est réalisée par une formulation implicite. La seconde partie de ce travail porte sur l'extension des schémas en deux dimensions d'espace. Le modèle mathématique abordé est décrit par les équations d'Euler. Par ailleurs, on cherche à intégrer le schéma dans un code où le maillage s'adapte automatiquement et simplement. On introduit alors une distribution de forces, soit attractives, soit répulsives, entre les nœuds du maillage. Le mouvement des nœuds résulte de l'obtention de l'état d'équilibre sur le domaine. Le raffinement et le déraffinement reposent sur des critères locaux, comme le gradient. Le dernier travail de cette thèse est consacré à la simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure afin de valider les algorithmes proposés. L'application concrète visée ici est l'écoulement compressible autour d'une aile d'avion en mouvement.

**Mots-clés :** équations d'Euler - volumes finis - maillage mobile non-structuré - méthode de Godunov - adaptation de maillage - raffinement/déraffinement - interaction fluide-structure

## ABSTRACT

The present work is a contribution to the development of dynamic meshes methods for solving partial differential equations in fluid mechanics. More precisely, we devise a finite-volume scheme, on non-structured dynamic meshes with a potentially variable topology, based on the Godunov's method. The node addition and subtraction are based on a generalization of dynamic meshes methods to inflating or fading volumes. First, we study this scheme for one-dimensional hyperbolic equations. We prove for linear advection that it meets the classical properties of finite-volume methods (maximum principle, decreasing of the global variation,  $L^2$  stability) under CFL-type constraints. To avoid these restrictions, the temporal integration is realized by an implicit formulation. In the second part of this work, we extend our method to the two space-dimensional case. The flow is described by a mathematical model given by the Euler equations. Furthermore, we implement this scheme in a way that enables meshes to adapt easily and automatically. For this purpose, we introduce a spring distribution between the mesh nodes, which can be either attractive or repulsive. Node moves result from the achievement of the equilibrium state. Refinement and unrefinement are based on local criteria, such as the gradient. Finally, we focus on the numerical simulation of fluid-structure interaction phenomena, in the aim of validating our works. The concrete application handled is a compressible flow around an in-flight aircraft wing profile.

**Key words :** Euler equations - finite-volume methods - unstructured dynamic meshes - Godunov method - mesh adaptation - refinement/unrefinement - fluid-structure interaction