

Table des matières

Introduction générale	5
1 Etude Bibliographique et cadre de l'étude	11
1.1 Problématique du travail proposé	11
1.2 Quelques modèles utilisés pour décrire le comportement viscoélastique	14
1.2.1 Modèles à dérivées fractionnaires	14
1.2.2 Modèles issus d'un comportement dissipatif	16
1.2.3 Modèles issus d'observations de spectres de relaxation	18
1.3 Conclusion	20
2 Expérimentation	21
2.1 Comportement élastique linéaire isotrope	22
2.2 Principe de caractérisation du matériau	25
2.3 Chaînes de mesure	26
2.4 Les essais dynamiques	30
2.5 Les essais quasi-statiques (fréquences inférieures à 1.25 Hz)	34
2.5.1 Balayage sinus	34
2.5.2 Les essais triangulaires périodiques	38
2.6 Les essais de relaxation	41
2.7 Conclusion	42
3 Choix du modèle	43
3.1 Modèles rhéologiques élémentaires	43
3.1.1 Modèle de Kelvin-Voigt	44
3.1.2 Modèle de Maxwell	45
3.1.3 Modèle de Zener	45
3.1.4 Analyse et comparaison avec nos résultats expérimentaux	46
3.2 Modèles rhéologiques composés	49
3.3 Spring-Pot et modèles fractionnaires	51

3.3.1	Le spring-pot	51
3.4	Modèles fractionnaires	52
3.4.1	Modèle Zener Fractionnaire (ZF)	54
3.4.2	Modèle Maxwell Fractionnaire (MF)	55
3.4.3	Modèle Kelvin-Voigt Fractionnaire (KVF)	56
3.5	Modèles phénoménologiques	59
3.5.1	Modèle de Biot	60
3.5.2	Modèle Hystérétique Causal	61
3.5.3	Présentation d'un nouveau modèle fractionnaire, relation avec les modèles précédents	65
3.6	Modèles avec amortissement visqueux	68
3.6.1	Modèle Spring-Pot avec Amortissement Visqueux	69
3.6.2	Modèle de Biot avec Amortissement Visqueux	69
3.6.3	Modèle Fractionnaire avec Amortissement Visqueux	73
3.7	Conclusion	74
4	Identification à partir des essais dynamiques	77
4.1	Données expérimentales	77
4.2	Procédure d'identification	79
4.2.1	Le principe	79
4.2.2	Estimation des paramètres pour le modèle de Biot avec amortissement visqueux	79
4.2.3	Modifications du critère de convergence et résultats pour BTAV selon les critères	81
4.2.4	Résultats pour le modèle MFAV pour les différents critères	86
4.2.5	Comparaison entre les modèles et l'expérience.	89
4.3	Fiabilité de la procédure d'identification	91
4.3.1	Test de sensibilité pour le modèle BTAV	91
4.3.2	Test de sensibilité pour le modèle MFAV	92
4.4	Influence de la précharge et de l'amplitude sur les paramètres	94
4.4.1	Analyse des résultats	94
4.4.2	Prise en compte de l'effet Payne et de l'effet de la précharge	97
4.5	Conclusion : Validation du modèle et de l'interpolation linéaire	102
5	Vérification de la prédictivité :	
	essais quasi-statiques et essais de relaxation	103
5.1	Les essais quasi-statiques	104
5.1.1	Rappel des essais	104
5.1.2	Calcul de la réponse temporelle du plot à une sollicitation périodique	105

5.1.3	Calcul de la réponse temporelle du plot à une sollicitation quelconque	112
5.2	Les essais statiques de relaxation	117
5.2.1	Quelques rappels théoriques et pratiques	117
5.2.2	Calcul théorique de la réponse en contrainte dans le cas du modèle BTAV	120
5.2.3	Calcul théorique de la réponse en contrainte dans le cas du modèle MFAV	120
5.2.4	Comparaison calculs théoriques et essai de relaxation . . .	122
5.2.5	L'effet tonneau	125
5.3	Conclusion	126
6	Etude de la dissipativité du matériau	129
6.1	Présentation des résultats des expériences	130
6.1.1	Les essais à balayage sinus à basses fréquences	130
6.1.2	Les essais quasi-statiques triangulaires à basses fréquences	133
6.2	Calcul de l'énergie dissipée lors d'un cycle	134
6.3	Calcul de la dissipation pour les essais sinusoïdaux	135
6.3.1	Calcul théorique de l'énergie dissipée	135
6.3.2	Energies dissipées expérimentales et théoriques	136
6.4	Calcul de la dissipation pour les essais triangulaires	140
6.4.1	Expression théorique de l'énergie dissipée	140
6.4.2	Etude de la validité de l'hypothèse de linéarité et de la décomposition en somme harmoniques	141
6.5	Conclusion	144
	Conclusion générale	147
	Annexe 1 : Dérivation non entière	149
6.6	Introduction	149
6.7	L'approche classique par les limites	149
6.8	Définition à partir des primitives n-ième	150
6.9	Utilisation de la transformée de Fourier	151
6.9.1	Propriétés générales	152
6.10	Conclusion sur la dérivation non entière	153
	Annexe 2 : Figures des essais dynamiques	155
	Annexe 3 : Fonction Gamma	163
	Annexe 4 du chapitre 5	165

Annexe 5 du chapitre 5	167
Bibliographie	169

Introduction générale

– Bref historique sur l'origine des élastomères et leur utilité

La quasi-totalité du caoutchouc naturel provient des latex sécrétés par l'hévéa. En présence d'air, ce latex (substance visqueuse provenant de l'incision de l'écorce de cet arbre) sèche et devient caoutchouc.



Grossièrement, le latex ne contient qu'un tiers de caoutchouc et le reste est essentiellement de l'eau. En fait, les propriétés physiques des élastomères sont très semblables à celles du caoutchouc naturel. Dans son état naturel, le caoutchouc est inutilisable car il est plastique et se déforme mais ne peut reprendre sa forme initiale. C'est dans les années 1839 que les frères Charles et Nelson Goodyear inventent la vulcanisation avec le soufre qui permet au caoutchouc, à température ambiante, d'être étiré et de revenir à l'état initial sans déformation permanente, quand la contrainte est relâchée. Goodyear appela son nouveau caoutchouc du caoutchouc vulcanisé.

Du point de vue chimique, la fabrication des caoutchoucs synthétiques part du principe de polymérisation de l'isoprène (C_5H_8). Cette polymérisation consiste à ajouter des ions H^+ à l'isoprène pour former n chaînes de molécules

d'isoprène $(C_5H_8)_n$. Il faut environ $n = 10000$ pour former du caoutchouc synthétique. Ainsi, la polymérisation est l'opération par laquelle les monomères (isoprène pour le caoutchouc naturel) s'assemblent pour former un polymère (matières plastiques....etc). Par conséquent, le caoutchouc appartient à la famille des polymères et à la classe des élastomères dont les molécules sont des très longues chaînes dont le motif de base est appelé un monomère. En 1909, les élastomères artificiels font leurs premières apparitions et sont synthétisés à partir de l'isoprène qui est le principal constituant du caoutchouc. De nos jours, les élastomères représentent un grand nombre d'applications industrielles (propriétés en isolation vibratoire, en acoustique, en étanchéité, en électricité, en thermique ...). L'industrie de la transformation du caoutchouc regroupe de nombreux produits. L'application principale (plus de la moitié en masse et en chiffre d'affaire) est dédiée aux pneumatiques dont une des fonctions principales est d'assurer l'isolation vibratoire de la liaison au sol.



Une petite moitié (sur 20 millions de tonnes de matière première) est dédiée aux "pièces techniques en caoutchouc".

Elle regroupe des composants (tuyaux, joints, courroies, profilés d'étanchéité...) et des produits finis (gants, bottes, tétines, préservatifs, rubans adhésifs...).

Dans plus des 2/3 des applications, les propriétés d'élasticité, la fonction d'isolation vibratoire et la dissipation d'énergie vibratoire conduisent au choix du caoutchouc pour la réalisation industrielle du produit technique.

Ces propriétés intrinsèques au matériau sont classiquement étudiées indépendamment de la forme du produit fini grâce à des éprouvettes de formes normalisées. Il existe principalement deux formes d'éprouvettes : les éprouvettes «altère plane», dédiées aux caractérisation du module d'Young complexe pour les essais de traction et les éprouvettes cylindriques (plots) qui permettent de caractériser le module d'Young complexe lors d'essais en compression.

Certaines éprouvettes (non normalisées) ayant une forme d'altère de révolution



avec des inserts métalliques aux extrémités permettent de réaliser des essais aussi bien en traction qu'en compression.

Les applications industrielles d'éléments de suspension en élastomère assurent souvent 2 fonctions : la tenue mécanique d'un système et son isolation vibratoire (une suspension moteur par exemple). Le caoutchouc est donc soumis à une double contrainte : une charge statique (très souvent en compression) qui représente la part du poids supporté par l'élément et une charge dynamique qui vient des sollicitations vibratoires relatives entre le référentiel et l'élément suspendu.

– Thème de la recherche

Une grande partie des essais réalisés dans le cadre des recherches présentées intègre cette double sollicitation statique et dynamique. Les essais ont donc été conduits principalement sur des plots cylindriques normalisés dédiés à ce type d'essais. Les campagnes d'essais ainsi réalisées permettront d'identifier les non linéarités en fonction de la précharge (sollicitation statique) ou en fonction de l'amplitude d'excitation dynamique.

Dans de nombreuses applications, les élastomères sont soumis à des sollicitations à basses fréquences (en dessous de 100Hz). Par exemple, une suspension de moteur automobile possède des fréquences du corps rigide suspendu inférieures à 20 Hz. Les vibrations issues du profil routier sont de quelques Herz et le fonctionnement du moteur se situe entre 10Hz et 100 Hz avec des harmoniques d'amplitudes décroissantes jusqu'à 1000 Hz.

L'observation du module d'Young complexe entre 0 et 200 Hz montre que les évolutions les plus rapides des caractéristiques se situent à basses fréquences (inférieure à 10 Hz). Au delà, le module comme la phase suivent une évolution lente quasi linéaire.

Les essais réalisés et les modèles développés dans cette thèse correspondent principalement à un domaine de fréquences inférieur à 100 Hz (cf. Annexe 2 : Figures des essais dynamiques).

Les applications des méthodes basées sur les systèmes différentiels fractionnaires deviennent de plus en plus fréquentes dans de nombreux domaines scientifiques et en particulier celui de la rhéologie expérimentale des solides. Après avoir analysé les modèles simples de la viscoélasticité linéaire, et les modèles fractionnaires fondés sur la dérivation et l'intégration non entière, et choisi celui ou ceux qui paraissent le mieux adaptés au comportement de notre matériau, notre recherche s'est penchée sur l'analyse de la dépendance des paramètres du modèle en fonction des conditions d'essais. Ceci afin de prendre en compte d'une part la non linéarité de comportement observée. Ensuite, le passage dans le domaine temporel permettra de connaître le signal-réponse à une excitation quelconque, renseignement utile pour étudier l'état d'évolution du matériau.

– Plan du mémoire

Pour atteindre cet objectif, ce mémoire comporte six chapitres.

Après avoir posé la problématique de notre travail, le premier chapitre sera consacré à une synthèse bibliographique concernant les caractéristiques viscoélastiques des élastomères.

Le deuxième chapitre comportera trois étapes. Dans un premier temps, après avoir évoqué quelques propriétés statiques des matériaux type élastomères où l'effet tonneau est constaté sur les bords latéraux du plot lors des essais en compression, nous donnerons une interprétation physique grâce à l'appui des graphes illustrant ce phénomène puis une estimation sur les modules d'élasticité et de souplesse apportée dans la littérature (§ 2.1). Dans un second temps, nous décrirons le banc de mesures et les différents types d'essais réalisés. Enfin, les résultats expérimentaux obtenus seront présentés en précisant les conditions d'expériences pour analyser et éventuellement prendre en compte les effets non linéaires constatés.

Le troisième chapitre présentera différents modèles viscoélastiques linéaires existants. Il s'agira tout d'abord d'une étude sur la particularité de leur fonction et d'une analyse critique puis comparative sur la qualité de ces modèles. Ensuite, après avoir analysé leur adéquation avec les essais effectués, l'un d'entre eux sera retenu et un nouveau modèle basé sur la dérivation fractionnaire sera proposé.

Le quatrième chapitre portera sur l'identification paramétrique basée sur les essais en sollicitations harmoniques dans le domaine des basses fréquences (0-100 Hz). Il s'agit de mettre en évidence les combinaisons modèles théoriques et critères de convergence les plus satisfaisantes, c'est à dire celles qui fournissent une meilleure corrélation entre les courbes du modèle et de la mesure. Les modèles numériques seront validés par un test de sensibilité qui examinera la fiabilité de

la procédure d'identification proposée. Nous étudierons ensuite l'évolution des paramètres des modèles en fonction de la précharge et de l'amplitude puis nous proposerons une loi d'évolution locale pour ces paramètres.

Le cinquième chapitre est divisé en deux grandes parties. La première étudiera dans le domaine temporel la prédictivité de nos modèles à une sollicitation connue et quelconque grâce à l'utilisation des séries de Fourier et à la transformée de Fourier rapide. Ainsi, la modélisation retenue permettra d'accéder aussi bien aux caractéristiques fréquentielles que temporelles. Dans une seconde partie, l'étude portera sur les essais statiques de relaxation où nous identifierons certains paramètres du modèle retenu.

La dernière application, présentée au sixième chapitre, sera dédiée à l'exploitation des résultats obtenus dans le cinquième chapitre, pour l'étude de la modélisation des propriétés dissipatives du matériau. Nous exposerons d'abord les essais à balayage sinus puis les essais sous sollicitations périodiques triangulaires au voisinage du dixième et au centième de hertz, pour différentes valeurs d'amplitudes d'excitation (qui augmentent et diminuent d'une façon linéaire) et de précharges imposées. Nous comparerons les valeurs de l'énergie dissipée obtenues lors de ces essais avec celles prédites par les modèles retenus.

– **Les principaux points abordés se résument en sept étapes :**

- 1-** la réalisation des relevés expérimentaux sur le plot élastomère pour divers types d'essais,
- 2-** la définition et l'analyse des caractéristiques des modèles connus de la littérature,
- 3-** l'étude comparative sur la qualité de ces modèles de comportement de matériaux viscoélastiques et de nos essais,
- 4-** le choix d'un ou des modèles rhéologiques avec peu de paramètres capables d'approcher le comportement réel de notre élastomère,
- 5-** la mise au point d'une méthode numérique d'identification paramétrique des comportements viscoélastiques satisfaisante pour le(s) modèle(s) rhéologique(s) choisi(s), puis d'une loi locale d'évolution des paramètres de(s) modèle(s),
- 6-** la prédictivité du modèle dans le domaine temporel pour une sollicitation quelconque,
- 7-** l'analyse des propriétés dissipatives.

Enfin, pour clore notre travail nous présenterons une conclusion générale où nous rassemblerons tous les points importants de notre étude et nous donnerons

quelques perspectives pouvant servir de point de départ à un nouveau sujet de recherche.

Chapitre 1

Etude Bibliographique et cadre de l'étude

Ce début de chapitre est divisé en deux parties. Dans un premier temps, il aborde la problématique du sujet qui a été la principale motivation de notre recherche. Dans la dernière partie sont présentés succinctement les principes mécaniques sur lesquels les rhéologues se sont basés pour proposer l'état de l'art de leurs modélisations possibles. Les modèles considérés sont linéaires et prennent difficilement en compte les non linéarités observées. Après avoir évoqué leurs caractéristiques, nous présenterons les différentes études de comportement réalisées et liées à notre thème de recherche qui est consacré essentiellement à l'étude paramétrique des modèles, à la modélisation liée à l'analyse des mesures expérimentales en basses fréquences (0-100Hz).

1.1 Problématique du travail proposé

Pour prendre connaissance des caractéristiques viscoélastiques de notre matériau, le plot élastomère normalisé est décrit expérimentalement par le module d'Young complexe sous forme du module de son module complexe et de sa phase. Cette fonction est caractérisée dans le domaine fréquentiel par le rapport de la FFT de la force sur le déplacement qui permet une description correcte du comportement dynamique dans une plage fréquentiel de 0-100 Hz. Dans cette étude, on se limite au cas du comportement unidimensionnel. Les essais sous sollicitations harmoniques sont représentés en figure (1.1). D'après les résultats expérimentaux, le module et la phase du module d'Young complexe ont des allures sensiblement identiques : ce sont des fonctions monotones. Le comportement dans le plan de phase peut être défini comme une fonction affine de la fréquence jusqu'à 100 Hz. Dans le plan Nyquist (ou Cole&Cole), la fonction est croissante et la courbe a une forme convexe (cf. fig.1.1).

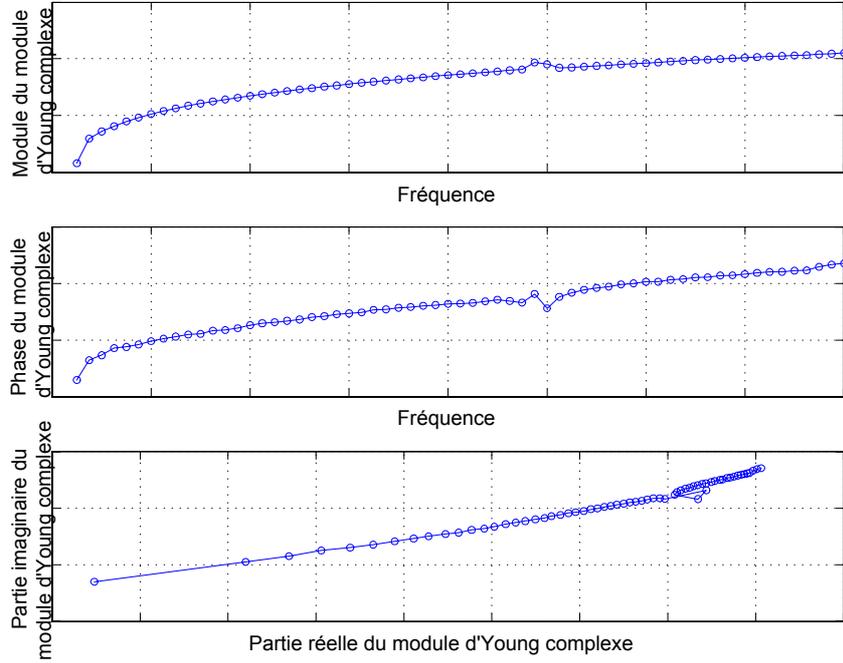


FIG. 1.1 – Allures de courbes du module d'Young complexe

Le modèle le plus simple employé dans la littérature pour décrire le comportement d'un matériau viscoélastique est celui de Kelvin-Voigt (Fig. 1.2) qui définit, pour un solide viscoélastique, le comportement de type visqueux. Il est composé par deux types de modèle simple : le modèle de Hooke est représenté par un ressort élastique caractérisé par une déformation réversible avec une proportionnalité de contrainte-tension et un rétablissement instantané sur le dégagement de l'effort, l'autre modèle de base est celui de Newton représenté par un amortisseur et caractérisé par une déformation irréversible avec une proportionnalité entre l'effort et le taux de temps de déformation. Ainsi, le modèle de Kelvin-Voigt (Fig. 1.2) est composé d'un ressort de module d'élasticité E_1 en parallèle avec un amortisseur de viscosité η .

Son module complexe dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$M(\omega) = E_1 + i\eta\omega \quad (1.1)$$

Le modèle de Kelvin-Voigt permet de bien prendre en compte l'élasticité différée ainsi que le comportement affine pour des fréquences élevées mais demeure insuffisant pour bien représenter les courbures du module et de la phase du module d'Young complexe. De plus, il se représente dans le plan Nyquist par une demi-droite issue du point de coordonnées $(E, 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ce qui physiquement n'est pas représentatif d'un matériau viscoélastique.

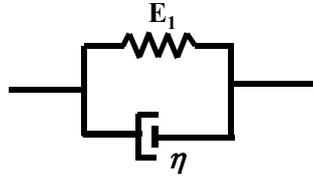


FIG. 1.2 – Modèle de Kelvin-Voigt

L'analyse de ces données expérimentales nous a donc conduit à une réflexion sur les modèles viscoélastiques et à la recherche de modèles adaptés, ayant un nombre réduit de paramètres.

A partir de considérations thermodynamiques, Mandel [24] a montré que n'importe quel corps viscoélastique linéaire peut être représenté par une succession d'un ensemble infini de modèles de Maxwell en parallèle (appelé modèle de Maxwell généralisé - Fig. 1.3), suivi en parallèle d'un modèle de Kelvin-Voigt (E_0, η) avec $E_0 = 0$ pour un comportement fluide.

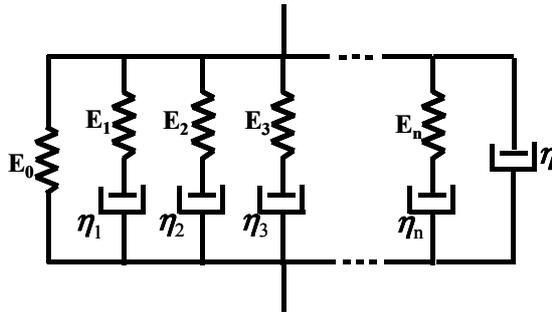


FIG. 1.3 – Maxwell généralisé

Les auteurs Garibaldi et Onah [13] ajoutent que le modèle généralisé de Kelvin-Voigt (figure 1.4) donne aussi une meilleure description du comportement viscoélastique. Dans le cas réel, l'emploi de tels modèles nécessitent un nombre

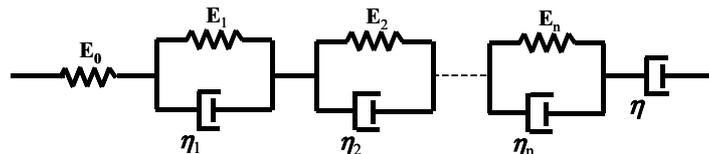


FIG. 1.4 – Kelvin-Voigt généralisé

important de paramètres à identifier pour bien prendre en compte de façon précise le phénomène réel. Ainsi, la problématique de ce type d'approche est le faible nombre de paramètres à considérer pour pouvoir reproduire correctement le comportement des matériaux viscoélastiques.

1.2 Quelques modèles utilisés pour décrire le comportement viscoélastique

De nombreux auteurs ont tenté de modéliser le comportement linéaire et non linéaire des matériaux viscoélastiques par différentes méthodes selon les essais expérimentaux employés. A la vue de multiples applications analytiques proposées par les auteurs, différentes démarches sont présentées pour la modélisation des matériaux viscoélastiques. L'objectif de cette section n'est donc pas de faire un inventaire précis de tous les travaux menés jusqu'à présent. Après avoir rappelé quelques notions sur la dérivée fractionnaire appliquées à la viscoélasticité, nous nous contenterons de présenter quelques approches les plus couramment rencontrées dans la littérature pour la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques.

1.2.1 Modèles à dérivées fractionnaires

Un très grand nombre de mathématiciens comme Grundwald, Cauchy, Leibniz, Riemann-Liouville, Oldham, Rubin, Podlubny, Oustaloup... ont présenté diverses origines des dérivées et d'intégrations non entières. Dans leurs ouvrages, des définitions et des approches numériques de la dérivée non entière sont développées. Parmi elles, nous avons établi, dans la partie Annexe 1 de ce mémoire, une synthèse sur la définition de la dérivée et de l'intégration non entière. Les mécaniciens ont utilisé cet outil pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux. L'approche classique consiste à lier la contrainte à la déformation par une forme s'écrivant :

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^{\alpha_k} \sigma}{dt^{\alpha_k}} = E \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^N b_k \frac{d^{\beta_k} \varepsilon}{dt^{\beta_k}} \quad (1.2)$$

où les indices α_k et β_k représentent des ordres de dérivation non entiers. Lorsqu'ils sont entiers, on retrouve les modèles rhéologiques usuels en unidimensionnel de type :

$$\sigma(t) + P(\sigma) = E \varepsilon(t) + Q(\varepsilon) \quad (1.3)$$

où P et Q sont des opérateurs différentiels qui s'écrivent respectivement :

$$P(\sigma) = \sum_{n=1}^N a_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} \quad (1.4)$$

$$Q(\varepsilon) = \sum_{n=1}^N b_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} \quad (1.5)$$

avec N entier, a_n et b_n sont des coefficients caractéristiques du matériau.

Dans le cas où α_k et β_k sont des valeurs fractionnaires comprises entre 0 et 1, on obtient une formulation en dérivées fractionnaires. En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (1.2) et en ne considérant que le premier terme de la somme, le module complexe lié à la fréquence possède cinq paramètres : E, a, b, α et β :

$$M(\omega) = \frac{E + b(i\omega)^\beta}{1 + a(i\omega)^\alpha} \quad (1.6)$$

D'après les expériences, les auteurs Bagley-Torvik ont montré que ce modèle peut être utilisé pour modéliser un grand nombre de matériaux viscoélastiques. Le modèle de Bagley-Torvik (1.6) a aussi été proposé par Vinh Tuong [46] en 1967, pour étudier le comportement des matériaux viscoélastiques en régime harmonique. Il est devenu une référence pour la modélisation et l'identification du comportement des polymères et des élastomères sur une large gamme de fréquences sauf dans les cas des matériaux comportant plusieurs zones de transitions différentes. Nous le rencontrons dans la thèse de Soula [40] qui a développé les domaines d'application de la dérivée non entière et dans l'article de M. Soula et de Y. Chevalier [47]. Il s'agit d'identifier les quatre paramètres du module d'Young complexe en fonction de la fréquence à partir des essais "simples" de vibration en extension ou en torsion sur des tiges viscoélastiques. Les résultats des paramètres sont estimés à partir des courbes d'essais représentées dans un diagramme de Bode du module d'Young complexe.

Un modèle particulièrement proche de celui de Bagley et Torvik est le modèle de Zener fractionnaire (ZF) dont le module complexe est équivalent à la relation (1.6). Son écriture a pour forme :

$$M(\omega) = E \frac{1 + E \tau_1 (i\omega)^\alpha}{1 + \frac{E}{E_0} \tau_1 (i\omega)^\alpha} \quad (1.7)$$

avec $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$ et $E = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$.

Avec ce modèle ZF (1.7), des travaux de modélisation ont été menés dans la thèse de Cosson [11]. Cosson a réalisé des essais dynamiques en traction-compression uniaxiale imposée par un exciteur électrodynamique sur des plots

constitués d'un cylindre en élastomère. La plage de fréquence d'étude se situe entre 10 et 3000 Hz. L'identification est réalisée en minimisant une fonction écart construite à partir des mesures de la fonction de transfert et de l'expression analytique du modèle de Zener fractionnaire à quatre paramètres. Il conclut que l'étude sur ce modèle ne suffit pas pour représenter le comportement en basses fréquences.

Nous montrerons dans la suite de notre étude que les modèles de Maxwell fractionnaire et de Kelvin-Voigt fractionnaire peuvent être déduits du modèle de Zener fractionnaire.

En rhéologie, le principe pour obtenir ce dernier modèle est de remplacer l'amortisseur par le spring-pot qui est l'élément de base du comportement uniaxial s'appuyant sur le calcul fractionnaire. Grâce à un paramètre adimensionnel α ($0 \leq \alpha \leq 1$), il permet une transition continue entre le modèle rhéologique solide idéal représenté par un ressort (ou spring : $\alpha = 0$) et le modèle fluide idéal par un amortisseur (ou dash-pot : $\alpha = 1$).

La relation contrainte-déformation pour le spring-pot s'écrit :

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t) \quad (1.8)$$

où $D^\alpha \langle \cdot \rangle$ est l'opérateur de dérivée fractionnaire. η est le coefficient d'amortissement visqueux et E le module d'Young élastique.

Son module complexe s'écrit :

$$M(\omega) = E\tau^\alpha (i\omega)^\alpha \quad (1.9)$$

où $\tau^\alpha = \frac{\eta}{E}$ homogène à un temps (s)

Les travaux de Heymans et al. [18] ont présenté un modèle fractal pour le comportement viscoélastique. Pour décrire un milieu complexe, leurs études ont mené à un modèle rhéologique constitué d'éléments simples de ressorts et d'amortisseurs. Nous présenterons plus en détail ce modèle dans le chapitre trois de notre travail. Ce modèle a conduit naturellement à une interprétation fractionnaire : les auteurs ont établi une expression du module complexe dans lequel intervient la forme d'expression complexe du spring-pot.

1.2.2 Modèles issus d'un comportement dissipatif

Certains essais expérimentaux sur une grande variété de matériaux (les polymères en général) ont montré que l'énergie dissipée au cours d'un cycle est indépendante de la fréquence et proportionnelle au carré de l'amplitude de la déformation.

$$E_{cycle} = \beta \varepsilon^2 \quad (1.10)$$

où β est une constante indépendante de la fréquence.

Cette énergie est caractérisée par un type d'amortissement appelé amortissement hystérétique connu aussi sous la terminologie d'amortissement structural. C'est un phénomène associé à la contrainte cyclique. On montre que l'énergie dissipée au cours d'un cycle est égale à la boucle d'hystérésis. Makris [23] a donc recherché un modèle viscoélastique linéaire dont la dissipation d'énergie est équivalente à (1.10). Il aboutit à un modèle hystérétique idéal de la forme :

$$M(\omega) = \kappa + i\gamma \operatorname{sgn}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (1.11)$$

où κ est une constante et γ représente le coefficient d'amortissement hystérétique.

Cette relation définit un module complexe à partie réelle paire et à partie imaginaire impaire. Makris montre ainsi que son modèle est non causal. En s'appuyant sur les relations de Kramers-Kronig, il construit un modèle connu sous le nom d'hystérétique causal :

$$M(\omega) = E \left\{ 1 + \alpha \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + i\alpha \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right\} \quad (1.12)$$

Dans un même ordre d'idées, Argoul [3] propose que lorsque α est voisin de 0 dans l'expression du module complexe de spring-pot le comportement soit de type hystérétique. Argoul arrive aussi à la même expression du module complexe de ce modèle.

Il est aussi important de noter que les phénomènes d'hystérésis ont fait l'objet de préoccupations auprès de certains auteurs dans la recherche d'un modèle capable de modéliser les boucles d'hystérésis apparaissant lors des décharges. Dans ce domaine, nous trouvons trois auteurs qui ont travaillé sur l'identification du comportement non linéaire en grandes déformations :

Soulimani [43] et Cantournet et al. [7] ont étudié la formulation thermodynamique par deux approches différentes. La compréhension de la structure physique des élastomères a permis à Cantournet et al. d'établir un modèle thermodynamique avec variables internes. Un modèle rhéologique par frottement est présenté et prend compte d'une part de la non linéarité comportementale et de l'hystérésis d'autre part. Puis, la thèse de Soulimani aborde l'approche fonctionnelle qui généralise l'intégrale héréditaire aux grandes déformations. Cette approche intégrale traduit la relation qui lie déformation et contrainte à chaque instant et utilise le principe de Boltzmann.

Enfin, le travail effectué par Saad [33] dans le cadre d'une thèse a permis de construire un modèle basé sur une loi hyperviscoélastique proposée par Simo [38] qui tente d'identifier le comportement non linéaire en grandes déformations des cales en caoutchouc à basses fréquences (0-100 Hz) sous précharge constante. Le principe est de linéariser cette loi pour traduire le fait que le module dynamique mesuré dépend fortement de la précharge. On observe que le module dynamique diminue avec l'amplitude de l'excitation imposée. Cet effet de diminution en fonction de l'amplitude est appelé «effet Payne». Ce phénomène a été mis en évidence par l'auteur Payne en 1965. Les résultats expérimentaux obtenus par Saad ont aussi montré que l'amplitude du module d'Young augmente avec la précharge imposée. Les auteurs Soula et Chevalier [41] ont aussi spécifié dans leurs travaux ce phénomène et ont tenté de modéliser ce comportement dans le domaine fréquentiel par les dérivées fractionnaires.

Toutes ces approches pour la modélisation du comportement en grandes déformations n'ont pas été abordées dans notre étude mais il est important de signaler leur existence. Dans notre cas, nous explorons le domaine des faibles contraintes et des faibles déformations.

1.2.3 Modèles issus d'observations de spectres de relaxation

En se basant sur des observations des spectres de relaxation, Biot [6] puis Mandel [24] ont proposé une fonction de relaxation des contraintes qui apparaît comme une superposition continue d'exponentielles décroissantes :

$$r(t) = \left(E + \int_0^\infty R(z) \exp\left(-\frac{t}{z}\right) dz \right) H(t) + \eta \delta(t) \quad (1.13)$$

où E et η sont des scalaires positifs, $R(z)$ est le spectre de relaxation, $\delta(t)$ et $H(t)$ sont respectivement la distribution de Dirac et la fonction de Heaviside.

Dans la théorie de la viscoélasticité, Christensen [10] a largement discuté sur le sens physique du phénomène de spectre de relaxation apparaissant dans la parenthèse de la fonction (1.13). Il développe les fonctions de relaxation des modèles simples et généralisé comme Kelvin-Voigt, Maxwell puis Kelvin-Voigt généralisé et Maxwell généralisé. Garibaldi et Onah [13] ont décrit la spécificité de chacun de ces modèles. De ces deux représentations généralisées, se dégage une différence sur leur comportement. En effet, comme pour le modèle simple de Maxwell, le modèle Maxwell généralisé fournit une meilleure description du

comportement en relaxation¹ que celle du comportement en fluage². Par contre, le modèle Kelvin-Voigt généralisé connaît l'effet inverse : sa description est mieux adaptée pour un comportement en fluage plutôt que celui en relaxation. Seul le modèle de Zener permet de prendre en compte à la fois la relaxation et le fluage. Cependant, pour obtenir une bonne description du comportement viscoélastique, il faudrait davantage de ressorts et d'amortisseurs pour constituer une succession de termes en exponentielles décroissantes dans les expressions analytiques de relaxation et de fluage. En effet, le modèle de Zener ne possède qu'un seul temps de relaxation qui est insuffisant à la modélisation correcte du phénomène.

C'est dans ce sens que les études des fonctions temporelles (fluage ou relaxation) prennent une importance particulière pour les rhéologues qui veulent interpréter le comportement des matériaux étudiés par des modèles rhéologiques. On obtient que tout milieu viscoélastique peut être représenté par un modèle de Maxwell généralisé.

D'autre part, en employant une technique expérimentale basée sur la spectrométrie dynamique, Alcoutlabi [2] s'est rendu compte que les tracés de comportement des polymères amorphes solides ([8] et [29]) sur un domaine de température (entre $T_g-190^\circ C$ et $T_g+25^\circ C$ où T_g est la température de transition vitreuse) et de fréquence très étendue (entre $10^{-5} Hz$ et $> 10^3 Hz$) dans le plan complexe Nyquist sont dissymétriques : les tangentes aux deux extrémités font avec l'axe réel deux angles différents. Ce phénomène est le siège de divers phénomènes de relaxations mécaniques : α et β . Ce constat lui a conduit à développer un Modèle Fractionnaire Etendu du Solide (MFES) : c'est une extension du modèle de Zener constitué de deux modèles de Zener modifiés en parallèle. Le premier modèle de Zener modifié a deux éléments de type fractionnaire. Le deuxième modèle de Zener modifié a un seul élément fractionnaire. Chacun de ces éléments rend compte chaque phénomène de relaxation. En maniant habilement les paramètres des puissances fractionnaires, ils permettent le contrôle des angles et ainsi, les pentes des courbes. Ce modèle proposé possède six paramètres et leur détermination s'effectue de manière géométrique et se situe dans le plan Nyquist.

Par ailleurs, dans le même contexte d'étude, les auteurs Edgar Reyes-Melo et al. [30] ont revu et amélioré la démarche d'Alcoutlabi pour proposer un nouveau modèle basé sur le concept de calcul fractionnaire tenant compte des trois phénomènes de relaxations mécaniques : α , β et γ . Leurs travaux ont permis d'étudier le comportement des polymères à l'état solide sur une large gamme

¹la relaxation est un type d'essai qui consiste à imposer à un échantillon initialement au repos une déformation constante ε_0 . On étudie alors la réponse en contrainte $\sigma(t)$ en fonction du temps nécessaire pour produire cette déformation.

²le fluage est le comportement dual de la relaxation. C'est une expérience typique pour caractériser la réponse retardée d'un matériau que l'on soumet à un chargement constant dans le temps.

de fréquence (entre 10^{-9} *Hz* et 10^{19} *Hz*). Le modèle prédictif comporte dix paramètres à identifier.

1.3 Conclusion

La compréhension sur le comportement des polymères est complexe. On trouve dans la littérature différentes techniques d'approches sur la modélisation des comportements observés et aussi de nombreuses méthodes d'identification. Pour notre part, notre étude portera sur le choix de spectres de relaxation capables de prendre en compte les courbures visibles sur les tracés afin de rechercher des modèles simples, avec peu de paramètres, adaptés aux comportement à basses fréquences (0-100 Hz). Le choix des modèles porte sur le comportement viscoélastique linéaire. L'utilisation des modèles utilisant la notion de dérivation fractionnaire est une alternative possible. Cette approche consiste à lier la contrainte à la déformation par une équation différentielle dont l'ordre de dérivation est non entier. Cette méthode a permis d'exprimer des relations de comportement ayant un nombre réduit de paramètres. La question est de savoir si cette modélisation prend bien en compte le comportement non linéaire à faible déformation de notre plot en élastomère. Ce dernier sera soumis à plusieurs essais en sollicitations harmoniques autour de plusieurs compressions initiales ou précharges et avec des amplitudes différentes, en sollicitations triangulaires périodiques et en échelon de déformation. Nous exploiterons ensuite les modèles retenus pour simuler ces différents chargements.

Chapitre 2

Expérimentation

L'étude présentée dans cette thèse s'attache à décrire le comportement sous sollicitations uniaxiales d'un plot cylindrique en élastomère. Nous avons réalisé trois types d'essais :

- des essais dynamiques classiques sous sollicitations périodiques sinusoïdales pour déterminer le module d'Young complexe. Il s'agit d'essais à basses fréquences (1-100 Hz) en compressions uniaxiales pour différentes précharges statiques et différentes amplitudes fixes,
- des essais quasi-statiques à très basses fréquences (moins de 1 Hz) en sollicitations sinusoïdales mais aussi triangulaires périodiques pour étudier la dissipation de notre matériau à vitesse de sollicitation constante,
- et des essais de relaxation pour mettre en évidence le phénomène viscoélastique sur des échelles de temps plus importantes.

L'ensemble de ces essais a été réalisé en grande partie à l'Institut Supérieur de MEcanique de Paris (ISMEP) et une partie au Laboratoire d'Analyse des Matériaux et Identification (LAMI) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC) pour le cas des essais quasi-statiques. Nous rappellerons d'abord le cadre théorique de notre étude et la méthode de caractérisation utilisée, puis nous décrirons les chaînes de mesures en spécifiant les caractéristiques techniques de chaque appareil de mesure nécessaires à l'étude ; enfin nous présenterons les résultats des différents essais.

2.1 Comportement élastique linéaire isotrope

Pour déterminer dans le cas d'un comportement linéaire le module de Young E d'un matériau, on place un échantillon en sandwich entre deux surfaces rigides, parallèles et planes et on les soumet à une compression. En supposant que la déformation est homogène, c'est à dire qu'il n'y a pas d'autre déformation que la déformation verticale, on obtient E en faisant le quotient de la contrainte par la déformation imposée.

En pratique on mesure la force verticale imposée F et le déplacement vertical ΔH de la surface supérieure du plot.

Pour un plot cylindrique de hauteur H_0 et de section S , on a pour un déplacement ΔH , une déformation $\varepsilon = \frac{\Delta H}{H_0}$ et pour une force F , une contrainte $\sigma = \frac{F}{S}$. Donc, le module d'Young E est donné par :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{S} \times \frac{H_0}{\Delta H} = K \times \frac{H_0}{S} \quad (2.1)$$

La rigidité dynamique K du plot étant définie par :

$$K = \frac{F}{\Delta H} \quad (2.2)$$

le passage de E à K s'effectue par une multiplication par $\frac{S}{H_0}$ qui est un facteur de forme lié au plot :

$$K = E \times R_f \quad \text{avec } R_f = \frac{S}{H_0}$$

Mais en pratique les conditions précédentes ne sont pas réalisées lors d'un essai en compression d'une éprouvette cylindrique de caoutchouc. On constate une déformation des bords latéraux comme le montre la figure (2.4). Ce phénomène est appelé "effet tonneau". Le rapport contrainte/déplacement ne donne plus dans ce cas, le module de Young mais le module "apparent" E_a .

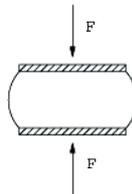


FIG. 2.1 – Déformation d'une éprouvette de caoutchouc sous essai de compression simple - Effet tonneau.

Deux états de déformations standard pour les matériaux élastiques linéaires isotropes permettent d'expliquer ce phénomène : l'état de compression hydrostatique et l'état de glissement simple illustrés respectivement par les figures (2.2) et (2.3).

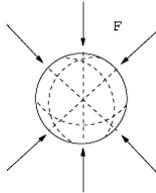


FIG. 2.2 – Compression hydrostatique

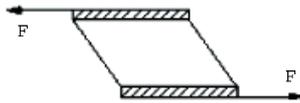


FIG. 2.3 – Glissement simple

Chacun de ces états est décrit par un module élastique indépendant : respectivement le module de rigidité à la compression K et le module de rigidité en cisaillement G (ou encore module de Coulomb). On peut ensuite exprimer le module d'Young E du matériau, en fonction de deux modules précédents :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (2.3)$$

De même, le coefficient de Poisson ν s'écrit :

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (2.4)$$

Pour les élastomères non chargés⁽¹⁾, les ordres de grandeurs des coefficients précédemment introduits sont : $G \approx 0.7$ MPa, $K \approx 10^3$ MPa, $E \approx 2$ MPa et finalement $\nu \approx 0.49$. On note que la valeur de K est très supérieure à celle de G , en supposant que $G \ll K$, les relations (2.3) et (2.4) deviennent :

$$\begin{aligned} E &\approx 3G \\ \nu &\approx 0.5 \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹Les caoutchoucs sont chargés lorsqu'ils sont mélangés avec des particules solides, de noir de carbones, suie, carbonate de magnésium, kaolin, argile, silice, silicate, etc... Le rôle de ces charges est de renforcer la résistance mécanique des élastomères par des charges nanoscopiques.

En examinant deux cas extrêmes pour les dimensions de l'éprouvette à savoir : la hauteur de l'échantillon est très supérieure ou très inférieure aux dimensions de sa section, on déduit que la configuration de notre éprouvette illustrée en figure (2.4) possède un module d'élasticité apparent E_a dont la valeur est intermédiaire entre E et K . De nombreuses études ont été menées pour donner des approximations du module apparent suivant les différentes formes de section de l'éprouvette. De façon générale, lorsque l'élastomère adhère aux deux surfaces rigides entre lesquelles il est comprimé, il est possible d'écrire que (cf. [39]) :

$$\frac{1}{E_a} = \frac{1}{K} + \frac{1}{E(1 + \beta Q^2)} \quad \Leftrightarrow \quad E_a = \frac{E(1 + \beta Q^2)}{\left[1 + \frac{E}{K}(1 + \beta Q^2)\right]} \quad (2.6)$$

où Q désigne un facteur de forme qui est défini comme le rapport d'une surface chargée sur la surface totale non chargée et β est une constante dépendant de la charge de l'élastomère en noir de carbone. Ces charges permettent l'augmentation du module élastique, l'amélioration de la résistance à la rupture et à l'usure, l'aptitude à dissiper une partie de l'énergie mécanique reçue (pour des élastomères non chargés en noir de carbone on a : $\beta = 2$).

Pour des éprouvettes de section circulaire, carrée ou modérément rectangulaire et avec des facteurs de forme Q modérés, la formule précédente devient :

$$E_a = E(1 + \beta Q^2) \quad (2.7)$$

Dans le cas de notre plot cylindrique $Q = \frac{\pi R_0^2}{2\pi R_0 H_0} = \frac{R_0}{2H_0} = \frac{14.350}{2 \cdot 13} = 0.55$ et en supposant $\beta = 2$, la relation entre le module de Young E et le module apparent E_a est :

$$E_a = E(1 + 2Q^2) = 1.60 E$$

Pour un plot rectangulaire de longueur L et de largeur l , on aurait $Q = \frac{lL}{2H_0(L+l)}$.

Indépendamment de la constitution chimique du matériau, Gent [14] avait démontré grâce à des considérations physiques la formule :

$$E_a = E \left(1 + \frac{R_0^2}{2H_0^2} \right) \quad (2.8)$$

qui n'est autre que (2.6) avec $\beta = 2$ c'est à dire pour des élastomères non chargés.

Ainsi, le module d'Young complexe acquis lors des mesures est le module d'Young apparent E_a . Dans la suite de notre étude, ne connaissant pas a priori β nous le confondrons avec E .

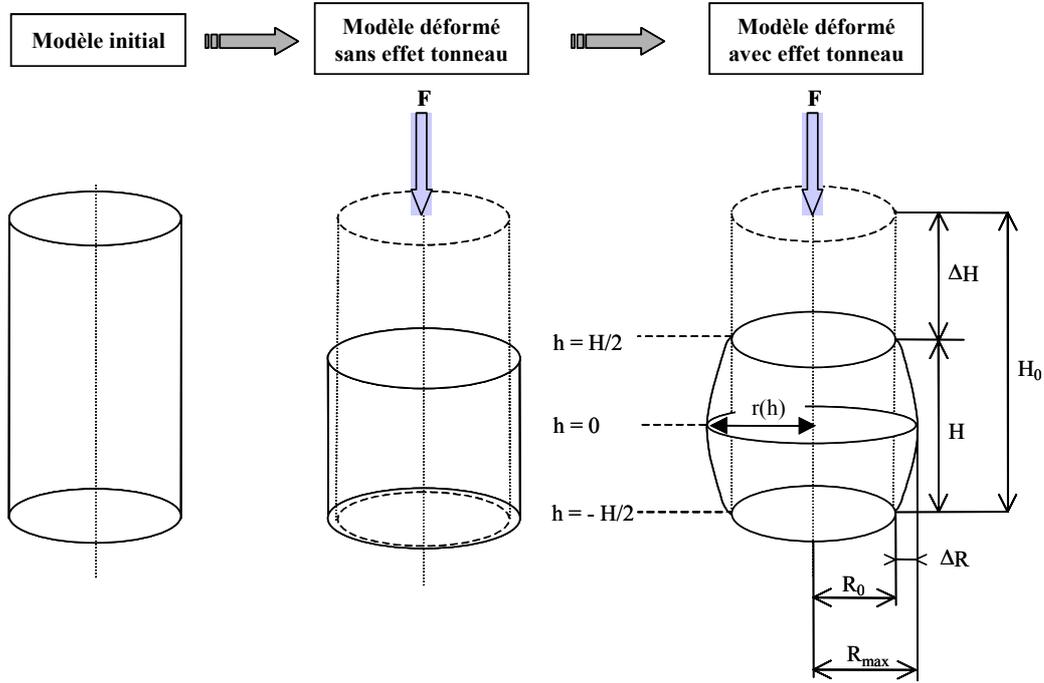


FIG. 2.4 – Effet tonneau

2.2 Principe de caractérisation du matériau

Nous faisons l'hypothèse que notre matériau a un comportement viscoélastique. Notre but est donc d'identifier le module de Young complexe $M(\omega)$ en fonction de la pulsation ω . Nous savons que dans ce cas, en notant respectivement $\hat{\varepsilon}(\omega)$ et $\hat{\sigma}(\omega)$ les transformées de Fourier de la déformation imposée $\varepsilon(t)$ et de la contrainte $\sigma(t)$ correspondante, nous avons la relation :

$$\hat{\sigma}(\omega) = M(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega) \quad (2.9)$$

avec la transformée de Fourier définie par :

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.10)$$

Cette relation implique que pour une déformation sinusoïdale de pulsation ω avec $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ alors la contrainte doit être de même pulsation ω mais déphasée de φ :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.11)$$

On en déduit les relations suivantes :

$$|M(\omega)| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \arg(M(\omega)) = \varphi \quad (2.12)$$

Des essais à balayage harmonique sont utilisés pour déterminer expérimentalement les valeurs du module d'Young complexe pour différentes pulsations ω . En pratique, lors de ces essais unidirectionnels, ce que mesurent les appareils ce sont des forces et des déplacements. Nous avons vu que l'on passe de la rigidité dynamique K du plot au module de Young du matériau grâce à la relation :

$$E = \frac{K}{R_f} \quad \text{avec } K = \frac{F}{\Delta h} \quad (2.13)$$

où R_f est un facteur de forme lié au plot. Dans notre cas, le plot est caractérisé par sa hauteur $H_0 = 13.0 \text{ mm}$, et son rayon $R_0 = 14.350$ donc le facteur de forme est $R_f = \frac{\pi R_0^2}{H_0} = 49.763 \text{ mm}$.

Dans ce qui suit, nous mesurerons les contraintes en *MPa*, les forces en *Newton* et les longueurs en *mm*.

Différentes représentations sont utilisées pour décrire le module complexe. On peut partir de la représentation polaire

$$M(\omega) = \rho(\omega) \exp(i\varphi(\omega)) \quad (2.14)$$

et représenter le module $\rho(\omega)$ du module complexe et sa phase $\varphi(\omega)$ en fonction de ω (c'est le diagramme de Bode), ou bien utiliser la notation cartésienne

$$M(\omega) = X(\omega) + i Y(\omega) \quad (2.15)$$

et représenter la partie réelle $X(\omega)$ et la partie imaginaire $Y(\omega)$ en fonction de ω . Les deux représentations sont intéressantes et nous utiliserons donc systématiquement les deux et nous mettrons en abscisse la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ en plutôt que la pulsation comme c'est l'usage.

Nous utiliserons aussi la représentation de la partie imaginaire Y en fonction de la partie réelle X , dite dans le plan de Nyquist (ou Cole&Cole), car elle est, elle aussi, utile.

2.3 Chaînes de mesure

Le banc d'essais qui a été réalisé pour mesurer la rigidité dynamique de notre échantillon est représenté sur les figures (2.5 et 2.6). L'excitation est réalisée à l'aide d'un vérin hydraulique muni d'un capteur de déplacement transfo-différentiel (type LVDT : Linear Variable Differential Transformer). Le système est également muni d'un capteur de force intégré dans l'embase du montage d'essai. Les signaux force et déplacement, après conditionnement analogique sont renvoyés sur un analyseur de spectre en vue de leur traitement numérique. L'ensemble des essais est piloté par un micro-ordinateur.

La micro console MTS a pour fonction principale d'asservir le vérin en déplacement (ou en force) par le contrôle en boucle fermée du système d'essai. Elle gère le suivi des signaux et les dysfonctionnements de l'asservissement. Elle est muni d'un « compresseur » qui permet le contrôle en puissance du signal d'entrée et assure l'asservissement du vérin hydraulique. Elle dispose de deux tiroirs spécifiques destinés au traitement des signaux provenant des capteurs de force et de déplacement.

L'analyseur FFT (Fast Fourier Transform) gère et contrôle le balayage en fréquence du signal sinus en incrémentant, après chaque acquisition, la fréquence d'excitation.

La machine d'essai MTS 830 se compose d'un bâti suspendu à très basse fréquence (<1 Hz) sur lequel sont fixées rigidement deux colonnes verticales reliées par une traverse mobile qui supporte un vérin hydraulique.

Au vérin hydraulique sont associés :

- deux accumulateurs
- une servovalve
- un groupe hydraulique
- un capteur de déplacement du type LVDT.

Ces organes assurent le fonctionnement et l'asservissement en déplacement du vérin. Le capteur de force est fixé sur le bâti et le capteur de déplacement sur la base supérieure du vérin. L'ensemble du système est piloté par un micro-ordinateur muni d'une carte d'interface de type GPIB (General Purpose Interface Bus) reliée à l'analyseur FFT.

Nous allons maintenant présenter les trois types d'essais. Il est important de souligner ici que nous avons négligé tout phénomène thermique dû à un gradient de température dans le matériau. Prenant conscience de l'importance de ce paramètre, les essais ont été réalisés dans une pièce bien ventilée. Pour s'en dissuader, nous avons effectué des essais successifs afin d'obtenir des résultats homogènes. Nous montrerons sur la figure (2.8) un exemple d'essais obtenus

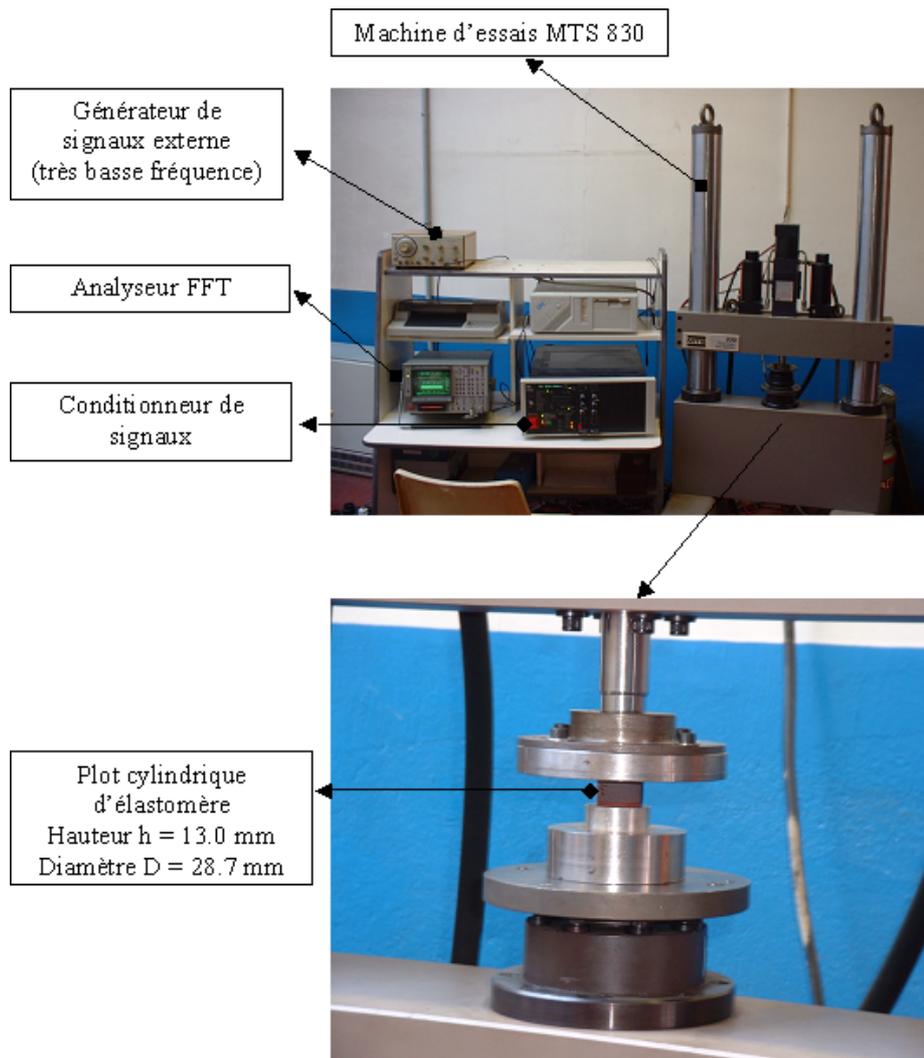


FIG. 2.5 – Banc d'essais

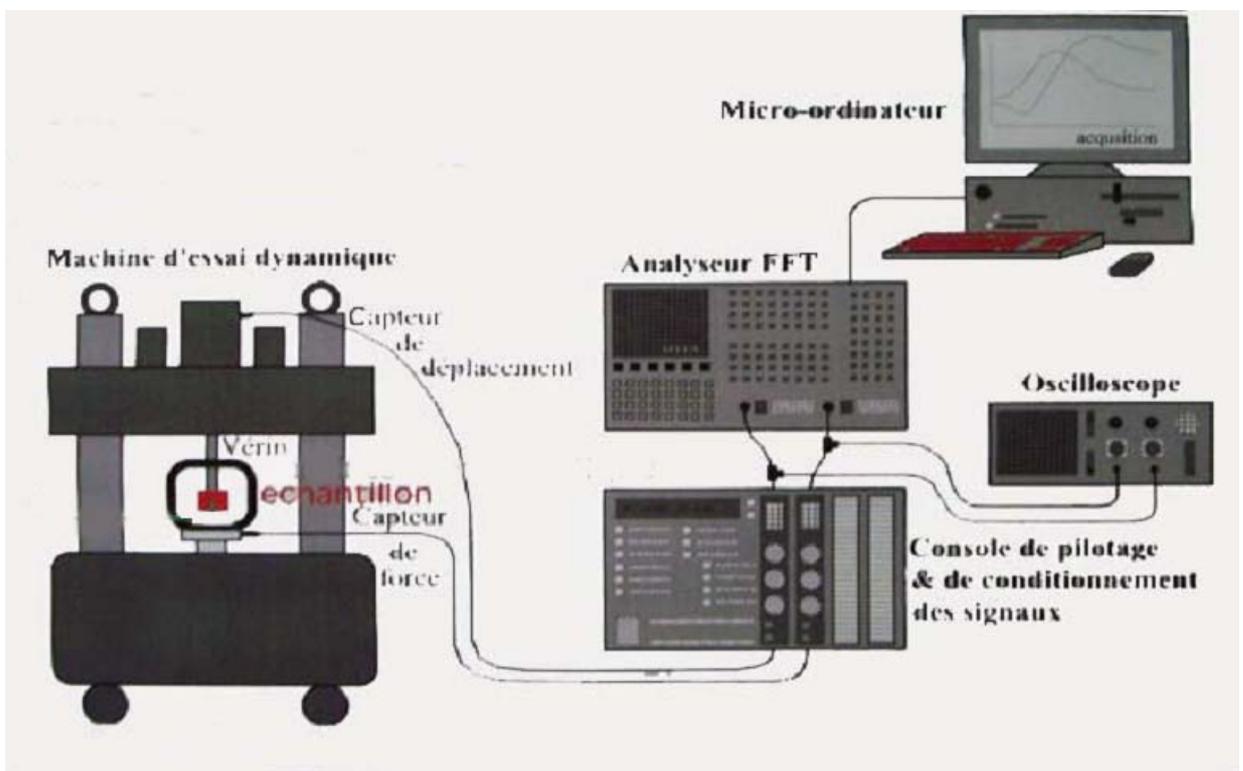


FIG. 2.6 – Schéma synoptique du banc d'essai

2.4 Les essais dynamiques

Ces essais ont été réalisés pour évaluer le comportement dynamique de notre matériau et sont effectués en y appliquant une sollicitation du type sinus. Nous savons qu'un matériau élastomère a un comportement différent selon l'amplitude maximale A des déplacements sinusoïdaux et selon la précharge P statique préalablement imposée ([41], [19] et [33]). Les non-linéarités sont comportementales et sont indépendantes de non linéarités de type géométrique.

Les essais ont été réalisés pour des précharges P de 100, 200, 300 et 400 N qui sont respectivement équivalentes à des contraintes de 0.15, 0.31, 0.46 et 0.62 MPa et pour des amplitudes A de 0.02 mm , 0.05 mm et 0.1 mm équivalentes respectivement à des déformations de 0.15, 0.38 et 0.77 %. Dans la suite de notre étude, nous ferons références aux valeurs des précharges en Newton et aux valeurs en millimètres des amplitudes pour avoir des écritures plus simples d'emploi.

Les appareils de mesure dont nous disposons nous ont permis de calculer le module d'Young complexe pour des fréquences allant 1.25 à 80 Hz par pas fréquentiel de 1.25 Hz . A chaque essai, on attend que le cycle soit stabilisé pour éviter de prendre en compte les perturbations dues au régime transitoire.

Les appareils ne permettent pas de faire des mesures correctes pour des fréquences inférieures à 1.25 Hz comme on peut le constater sur la figure (fig. 2.7) qui montre un essai obtenu dans les trois plans du module complexe pour une précharge de 200 N et d'amplitude fixe 0.05 mm . Autour de 50 Hz , fréquence du courant d'alimentation, nous avons également constaté quelques distorsions au niveau des mesures. Au delà de 80 Hz , il n'est pas possible de réaliser une mesure fiable.

Les graphes regroupant les résultats de ces mesures se trouvent en Annexe 2 : Figures des essais dynamiques.

Avant l'acquisition des mesures, le plot est « cyclé » jusqu'à ce que ses caractéristiques dynamiques soient identiques entre deux relevés consécutifs. La répétabilité pour un essai dynamique d'amplitude d'excitation de 0.05 mm pour différentes précharges obtenues a été vérifiée et illustrée en figure (fig. 2.8). En effet, nous avons constaté que les erreurs se marquaient plus au début des acquisitions : les essais présentant une différence sont ceux de 200 N et de 300 N à 0.05 mm affichant respectivement une erreur relative voisine de 6 % et de 2 % en terme de valeurs du module d'Young complexe. Le reste des essais (100 N et 400 N d'amplitude 0.05 mm) présente le moins d'erreurs avec environ 1 %. En cours d'acquisition (milieu et fin), les erreurs sont minimales voisinant une moyenne de 1.13 %. En général, ces essais de répétabilité ont permis de vérifier la convergence du comportement vers des caractéristiques stables.

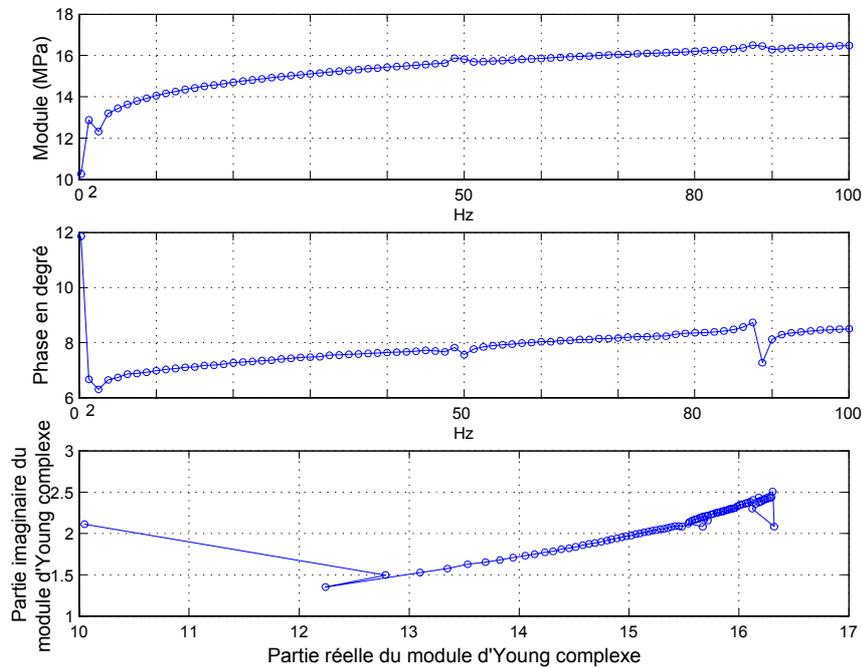


FIG. 2.7 – Module d'Young complexe - Précharge 200 N et amplitude 0.05 mm

Le module d'Young complexe est exprimé en MPa et la phase exprimée en degré en fonction de la fréquence. Il est présenté d'une part, pour une amplitude constante en fonction des précharges et d'autre part, pour une précharge constante en fonction des amplitudes. Nous avons choisi de représenter le module complexe dans les plans du module et Nyquist. Les figures (2.9) et (2.10) montrent d'une part un essai à précharge 200 N avec les amplitudes 0.02, 0.05 et 0.1 mm et d'autre part, un essai d'amplitude 0.05 mm avec les précharges 100, 200, 300 et 400 N. Les flèches indiquent le sens de variation des graphes pour les précharges croissantes (resp. les amplitudes croissantes). Il y a rigidification avec l'augmentation de la précharge et adoucissement avec l'augmentation de l'amplitude.

La variation de l'amplitude n'a aucun effet sur la partie imaginaire du module complexe qui, on le verra plus tard, définit la dissipativité du matériau. Quant à la précharge, elle est sans effet sur la phase. La précharge imposée et l'amplitude des sollicitations ont des effets opposés quand elles en ont.

En dynamique, on observe que la rigidité du matériau diminue en fonction de l'amplitude d'excitation pour une précharge fixe. Ce phénomène identifié depuis 1965 est appelé effet Payne. De plus, il existe une rigidification sensible selon les fortes précharges imposées.

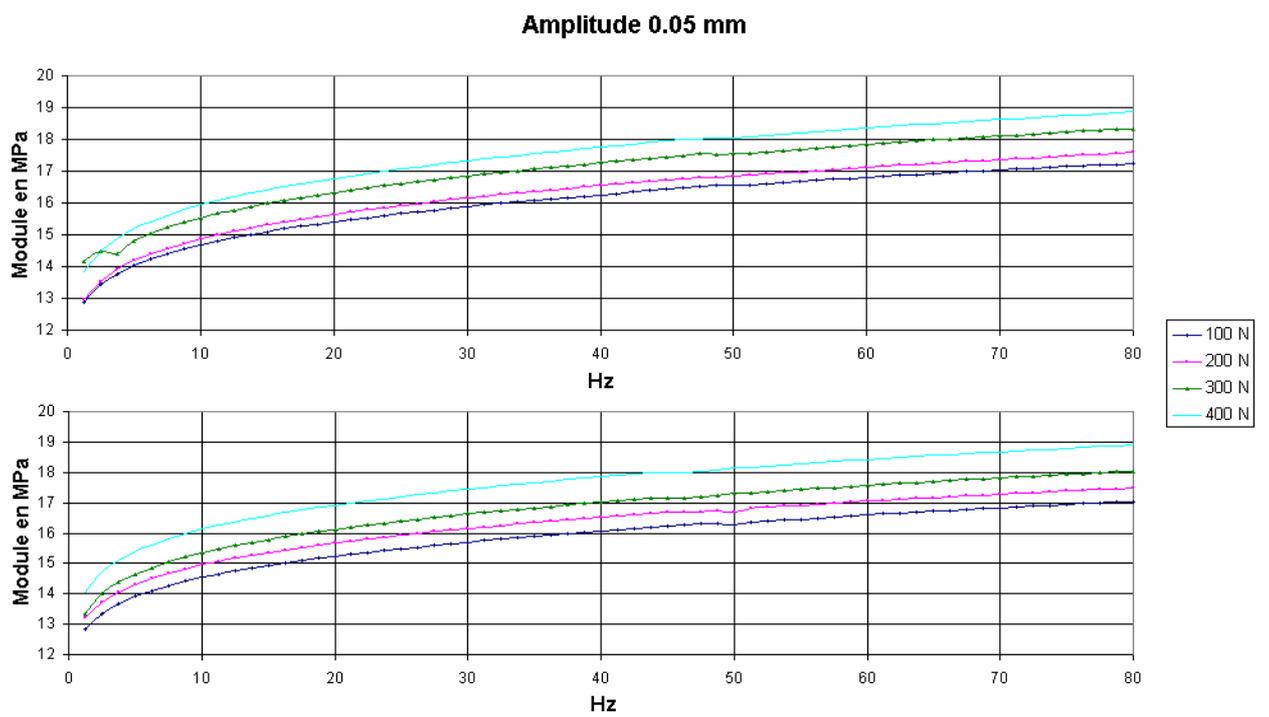


FIG. 2.8 – Essais dynamiques répétés d'amplitude 0.05 mm selon les précharges

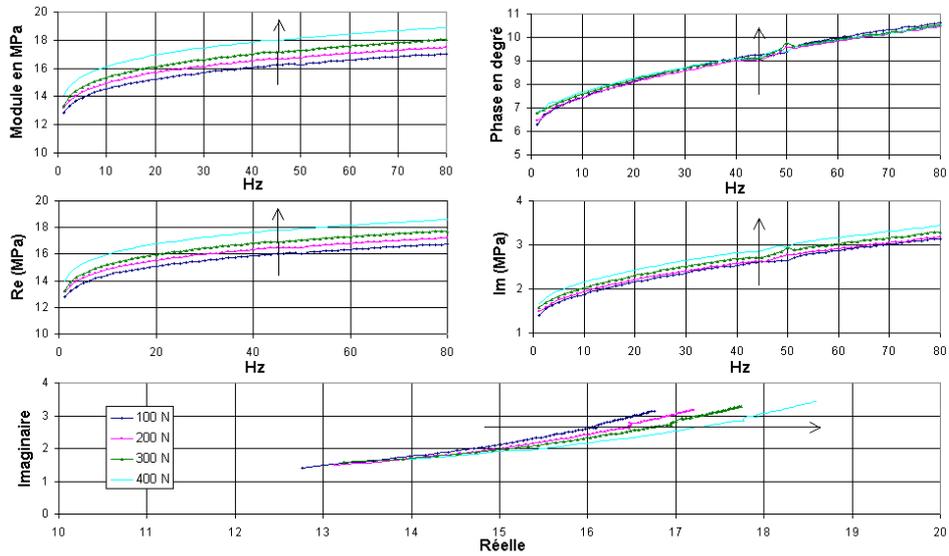


FIG. 2.9 – Etude de l’influence de la précharge (Essai à amplitude 0.05 mm selon les précharges)

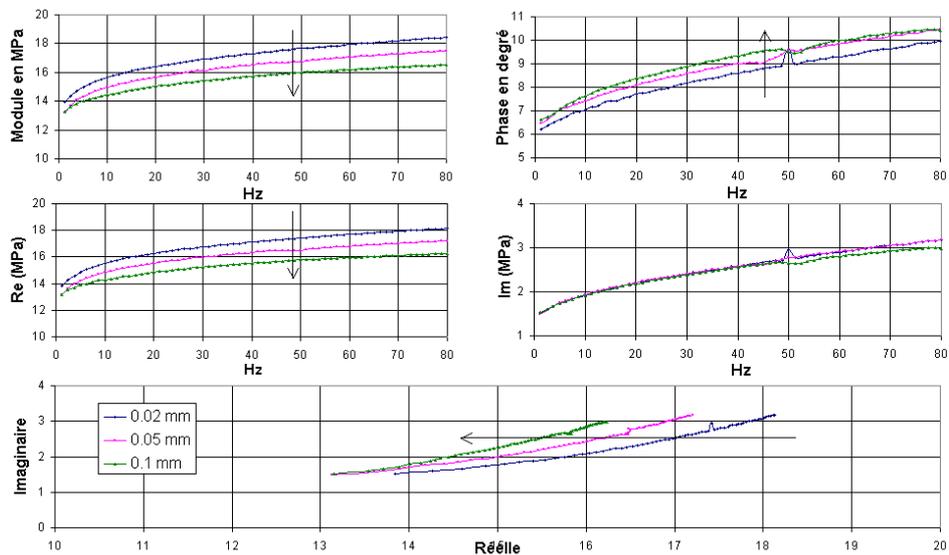


FIG. 2.10 – Etude de l’influence de l’amplitude (Essai à précharge 200 N selon les amplitudes)

2.5 Les essais quasi-statiques (fréquences inférieures à 1.25 Hz)

2.5.1 Balayage sinus

L'asservissement en boucle fermée du banc d'essai ne permettait pas de descendre en dessous de la fréquence de 1.25 Hz. Nous avons donc fait des essais en fonctionnement manuel pour compléter les courbes de rigidité et de phase.

Par mesure de sécurité sur la conversion des signaux analogiques en numériques, un appareil de filtrage de signaux a été mis entre la console MTS et l'oscilloscope numérique qui gère le bon fonctionnement des signaux enregistrés via la carte d'interface GPIB reliée entre ce dernier et au micro ordinateur. Cette mise en oeuvre peut être schématisée sur la figure (2.11) et est importante pour le post-traitement numérique car nous avons utilisé la transformée de Fourier rapide (FFT) pour calculer la rigidité dynamique. Ainsi, partant du contrôle des signaux force et déplacement considérés, la rigidité dynamique est obtenue en calculant le rapport des FFT de l'amplitude de la force sur l'amplitude de déplacement. La figure (2.12) montre un exemple de mesure à balayage sinus obtenue pour une précharge 300 N et d'amplitude 0.05 mm à la fréquence de 0.5 Hz.

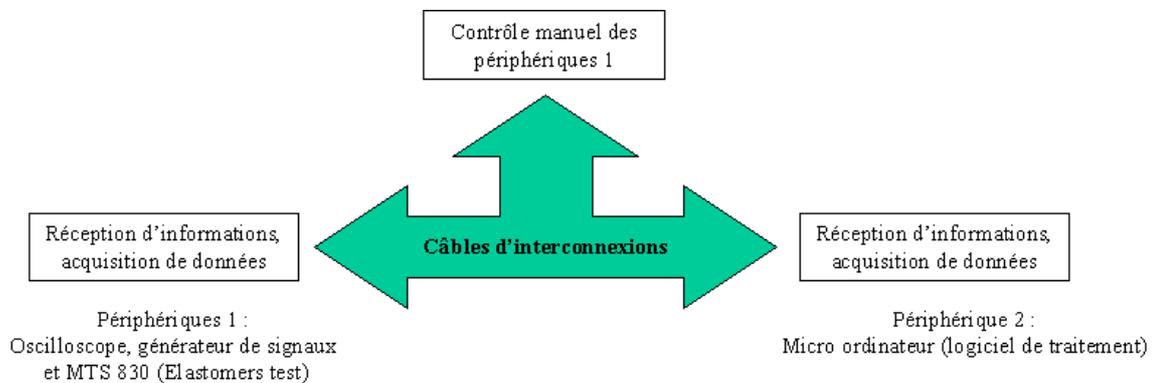


FIG. 2.11 – Concept du control manuel

La figure (2.14) illustre les résultats des essais obtenus par le système d'acquisition en boucle fermé pour une amplitude 0.05 mm selon les précharges 100, 200, 300 et 400 N et complète les résultats obtenus par un contrôle manuel aux fréquences : 0.2, 0.5 et 1 Hz.

Les valeurs des modules et des phases obtenues pour les fréquences inférieures à 1.25 Hz sont résumées dans les tableaux 1 et 2 :

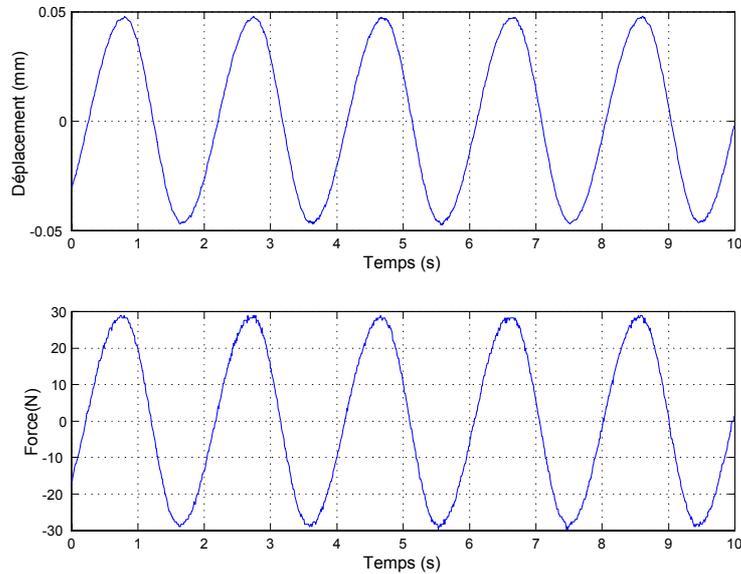


FIG. 2.12 – Signaux déplacement et force pour une précharge 300 N et d’amplitude 0.05 mm à 0.5 Hz

Amplitude 0.05 mm - Module en MPa				
Hz / N	100	200	300	400
0.2	11,28	11,83	11,99	12,56
0.5	11,69	12,19	12,23	13,14
1	12,77	13,14	13,15	13,89

Tableau 1 : Valeurs des modules pour les fréquences inférieures à 1.25 Hz

Amplitude 0.05 mm - Phase en degré				
Hz / N	100	200	300	400
0.2	3.60	5,99	5,98	6,01
0.5	5,93	5,98	6,36	6,54
1	6,35	6,42	6,70	6,78

Tableau 2 : Valeurs des phases pour les fréquences inférieures à 1.25 Hz

Nous pouvons observer que les points obtenus par des essais asservis en boucle ouverte prolongent les courbes obtenues pour les fréquences supérieures à 1 Hz. La figure (2.13) montre les résultats obtenus pour une précharge de 300 N et

une amplitude d'excitation de 0.05 mm et pour des fréquences allant de 0.2 Hz à 80 Hz. En Annexe, sont présentées les courbes de tous les essais dynamiques complétées pour des fréquences inférieures à 1.25 Hz.

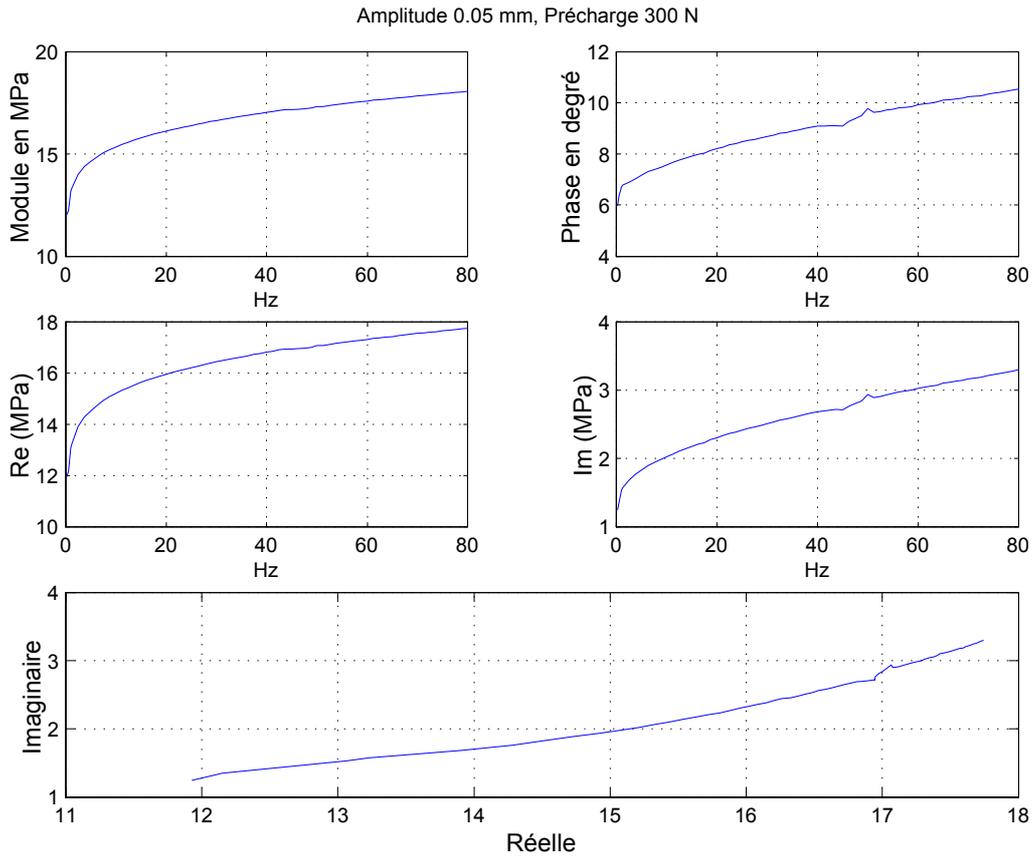


FIG. 2.13 – Mesure du module complexe d'un essai à précharge 300 N et d'amplitude 0.05 mm (0.2 - 80 Hz)

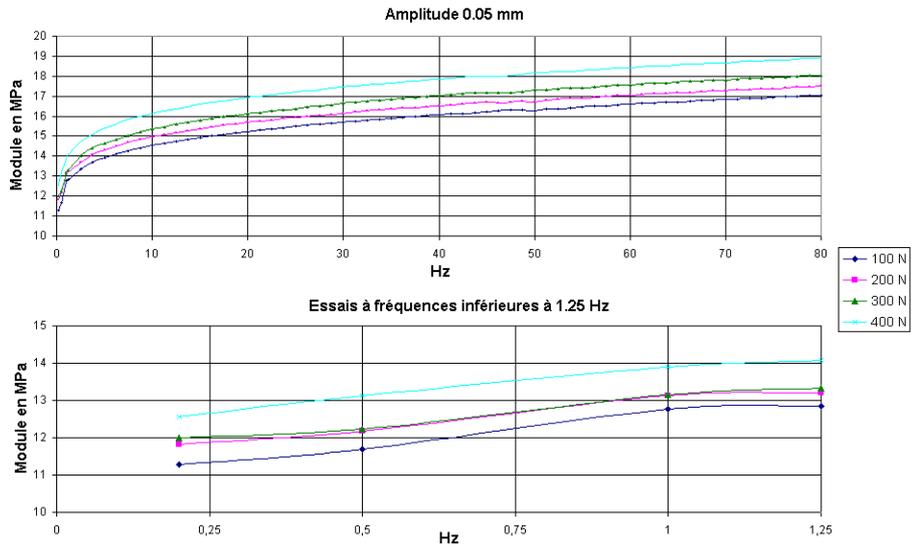


FIG. 2.14 – Courbes du module selon les précharges - Points inférieurs à 1.25 Hz

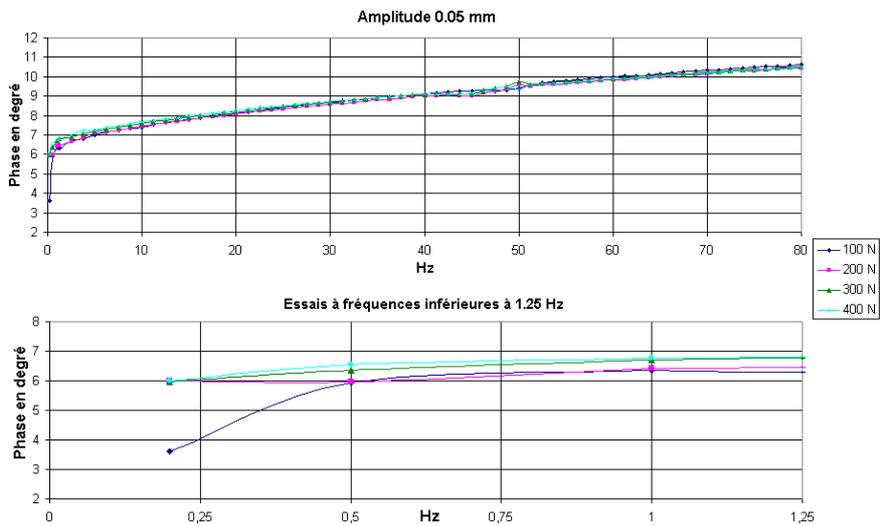


FIG. 2.15 – Courbes de phase selon les précharges - Points inférieurs à 1.25 Hz

Pour ces essais, le mode de fonctionnement manuel nous a permis d'avoir en plus le comportement temporel. Nous avons donc utilisé ces essais pour étudier la dissipation lors d'un cycle.

2.5.2 Les essais triangulaires périodiques

Ces essais ont pour but principal d'étudier le comportement hystérétique à vitesse de sollicitation constante de notre plot mais ils seront également utilisés pour vérifier la prédictivité de nos modèles. Nous avons aussi utilisé ces essais pour étudier ensuite la dissipation lors d'un cycle. Ces essais périodiques à balayage triangulaire ont été réalisés en trois étapes :

– 1^{ère} étape :

Cinq essais ont été effectués à la fréquence de 0.3 Hz . La précharge imposée était voisine de 250 N . Cinq amplitudes de déplacement ont été utilisées successivement : 0.05 , 0.1 , 0.2 , 0.3 et 0.4 mm . La figure (2.16) montre l'évolution de la force en fonction du déplacement. Elle met en évidence les boucles d'hystérésis dont les aires permettront d'évaluer l'énergie dissipée durant un cycle pour chaque amplitude.

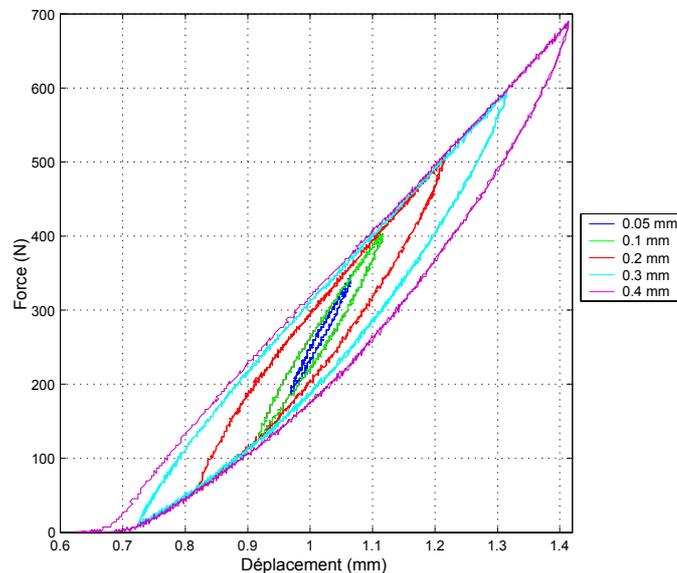


FIG. 2.16 – Evolution de la force en fonction du déplacement selon les amplitudes

– 2^{ème} étape :

Cet essai est réalisé avec une précharge et une amplitude théoriques respectives de 200 N et de 0.25 mm . La fréquence du signal est de 0.5 Hz sur une

durée totale de 8 secondes. Les figures (2.17) et (2.18) illustrent la réponse du matériau à un signal triangulaire périodique.

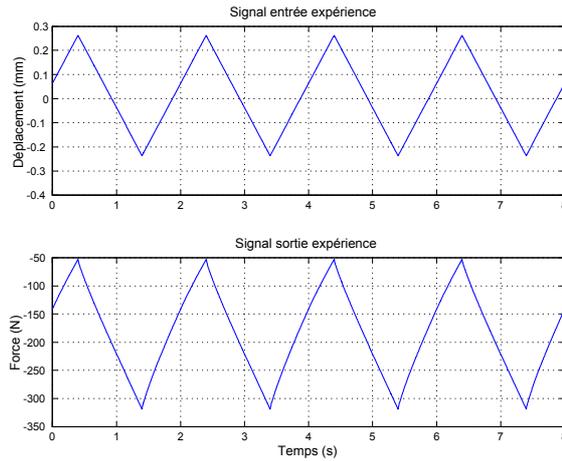


FIG. 2.17 – Entrée et sortie de signaux triangulaires périodiques

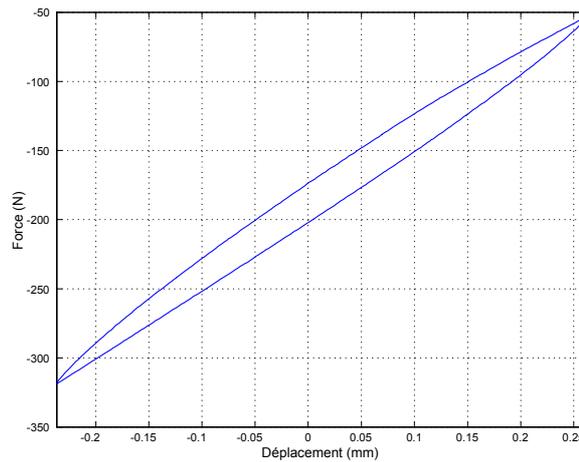


FIG. 2.18 – Evolution de la force en fonction du déplacement

– 3^{ème} étape :

Enfin, nous avons aussi procédé à une étude du comportement de notre matériau à des très basses fréquences de l'ordre du 100^{ième} de Hertz. Pour cela, quatre essais (cf. figure 6.5) ont été effectués. Autour d'une précharge statique de 250 N constante, nous avons réalisé quatre essais pour des amplitudes de 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5 mm. Ces essais ont permis de compléter notre travail. Ils ont été effectués au LAMI.

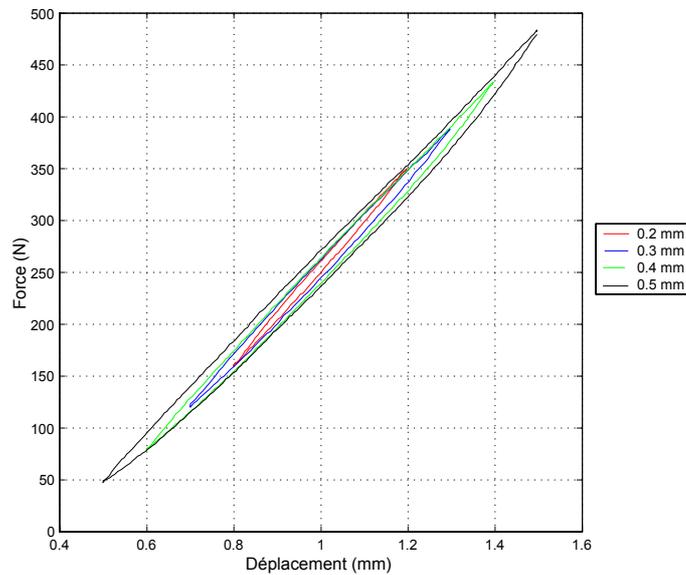


FIG. 2.19 – Evolution de la force en fonction du déplacement à 0.01 Hz

Comme nous pouvons le voir sur ces essais triangulaires, notre matériau présente des propriétés dissipatives. La quantité d'énergie dissipée correspond à l'aire des boucles d'hystérésis (figure 2.18). Elle traduit les propriétés d'amortissement du matériau. Ce phénomène sera étudié plus en détail dans le chapitre cinq de ce mémoire.

2.6 Les essais de relaxation

Ces essais ont été réalisés grâce à la machine MTS 830 et le conditionneur de signaux.

La mesure des forces est réalisée grâce à une cellule de force de capacité maximale 2 kN. La mesure du déplacement relatif au vérin est contrôlée par la micro console MTS munie d'une cellule de déplacement de capacité maximale 2.5 mm.

L'échantillon a été soumis à un déplacement imposé quasi instantané d'amplitude Δh . La vitesse de charge est voisine de 5 mm.s^{-1} . Il est ensuite maintenu sous déformation constante (par blocage à haute pression du vérin).

La force et le déplacement sont mesurés en fonction du temps pendant environ 1200 secondes.

Deux essais ont été effectués : l'un en plaçant deux films en téflon sur les faces inférieure et supérieure du plot pour limiter l'effet tonneau ([14], [15] et [17]) et l'autre sans téflon. Le taux de déformation imposée était d'environ : $\varepsilon_0 = 8 \%$ correspondant à une amplitude $\Delta h = 1 \text{ mm}$. La figure (2.20) montre l'évolution de la contrainte σ divisée par ε_0 .

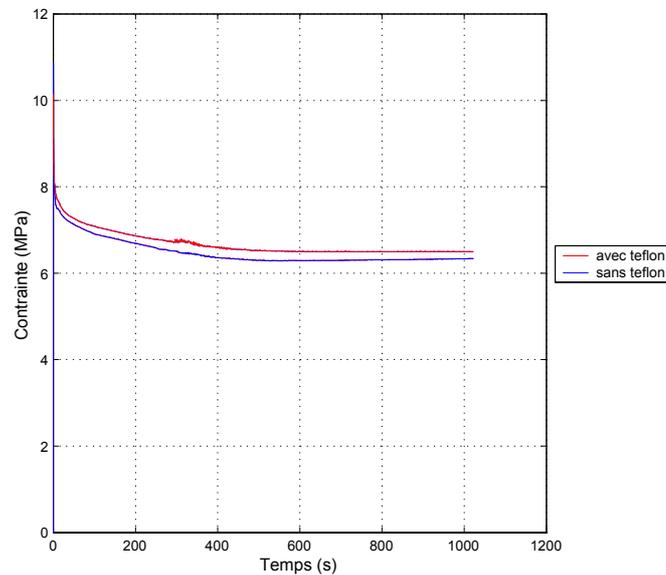


FIG. 2.20 – Courbes de relaxation à 7.69 % en déformation (ou pour 1 mm de déplacement imposé)

On observe que la réponse en contrainte σ à une déformation ε_0 constante à partir de l'instant $t = 0 \text{ s}$, diminue avec le temps et tend vers d'un état d'équilibre $\sigma = E\varepsilon_0$. Ce phénomène est appelé "relaxation" des contraintes.

Le comportement dual est appelé “fluage” : sous l’application d’une force constante appliquée presque instantanément, on suit la déformation qui n’est pas tout à fait instantanée. Si l’effort était arrêté immédiatement, un rétablissement complet se produirait. Pendant quelques secondes à plusieurs minutes, le matériau commencera à se déformer, d’abord rapidement puis de plus en plus lentement. Ces expériences de relaxation et de fluage combinent à la fois le comportement élastique et visqueux.

Dans la littérature, de nombreux auteurs qualifient les matériaux ayant ce comportement de matériaux à mémoire ; cette mémoire leur permet de recouvrer leur forme initiale et leurs dimensions après des déformations plus ou moins importantes et prolongées.

2.7 Conclusion

A travers les résultats des essais obtenus, le comportement non linéaire de notre plot est identifié car sa réponse dépend de la précharge, de l’amplitude d’excitation et de la fréquence. En prenant ainsi compte toutes ces propriétés mécaniques assez complexes de notre matériau, les chapitres qui suivent, présentent l’étude des modèles et concernent différentes techniques utilisées pour cette modélisation fondée sur une analyse des données expérimentales. Les essais dynamiques vont être utilisés pour caractériser le matériau. Ils vont permettre de définir le module complexe $M(\omega; P, A)$ pour chaque précharge P et chaque amplitude A . Ces données, après des analyses approfondies, seront utilisées pour identifier les paramètres des modèles retenus. Ensuite, les essais quasi-statiques vont permettre de vérifier la prédictivité de ces modèles. Enfin, nous comparerons aussi les essais de relaxation avec les résultats prédits par nos modèles.

Chapitre 3

Choix du modèle

Ce chapitre concerne l'étude de modèles rhéologiques permettant de décrire le comportement linéaire de matériaux viscoélastiques. Le but final de cette recherche est de déterminer quel modèle décrit le mieux, à l'aide d'un minimum de paramètres, le comportement observé expérimentalement pour notre échantillon pour la plage de fréquence considérée.

Ce chapitre est réparti en trois grandes étapes. Dans une première étape, nous présenterons les différents modèles rhéologiques classiques ainsi qu'une analyse de leur comportement pour chaque modèle [19]. La deuxième étape sera consacrée à l'étude des modèles composés qui conduiront à l'emploi du Spring-Pot et des modèles utilisant les dérivées fractionnaires. Ensuite nous étudierons les modèles d'amortissement hystérétique. Nous préciserons comment ces derniers sont apparentés avec le Spring-Pot. Enfin, l'étude analytique des différents modèles nous permettra de choisir un modèle adapté et même de proposer un modèle complètement nouveau, mais qui s'avèrera très performant pour décrire le comportement en compression de notre matériau viscoélastique.

3.1 Modèles rhéologiques élémentaires

L'assemblage plus ou moins complexe des modèles rhéologiques de base constitués uniquement de ressorts ou d'amortisseurs visqueux (figure 3.1) est utilisé habituellement pour décrire le comportement des corps viscoélastiques linéaires. On se limite ici au cas uni-dimensionnel.

L'élasticité est définie par la loi de Hooke : $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$. Le ressort représente un élément élastique idéal : la contrainte σ est proportionnelle à la déformation ε . La loi du frottement visqueux de Newton : $\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t)$ se représente par un amortisseur : la contrainte σ est proportionnelle à la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$.

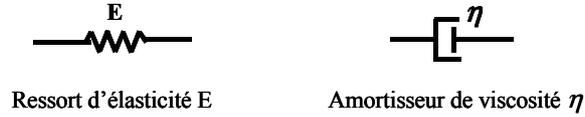


FIG. 3.1 – Unités rhéologiques élémentaires

En combinant ces éléments purement élastiques et purement dissipatifs, nous obtenons des modèles viscoélastiques linéaires (figure 3.2) classiques de la littérature. Ils sont au nombre de trois : Kelvin-Voigt, Maxwell et Zener. Pour chaque modèle, la loi de comportement liant contrainte-déformation et module complexe est rappelée.

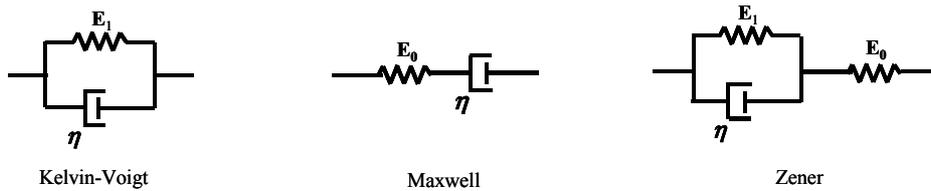


FIG. 3.2 – Modèles rhéologiques usuels

3.1.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle résulte de l'association en parallèle d'un ressort de module d'élasticité E_1 et d'un amortisseur de viscosité η . L'équation différentielle de comportement du modèle s'écrit donc :

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

et son module complexe est :

$$(Kelvin - Voigt) \quad M(\omega) = E_1 + i\eta\omega \quad (3.1)$$

En posant $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$, ce dernier peut aussi s'écrire :

$$M(\omega) = E_1(1 + i\tau_1\omega) \quad (3.2)$$

La fonction de fluage est :

$$f(t) = \frac{1}{E_1}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$$

3.1.2 Modèle de Maxwell

Ce modèle est formé de l'association en série d'un ressort et d'un amortisseur : L'équation différentielle de comportement du modèle est :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{E_0} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) \quad (3.3)$$

Le module complexe correspondant a pour expression :

$$\frac{1}{M(\omega)} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{i\eta\omega} \quad (3.4)$$

que l'on peut aussi écrire en posant $\tau_0 = \frac{\eta}{E_0}$:

$$(Maxwell) \quad M(\omega) = E_0 \frac{i\tau_0\omega}{1 + i\tau_0\omega} \quad (3.5)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire du module, on obtient :

$$M(\omega) = \frac{E_0 (\omega\tau_0)^2}{1 + (\omega\tau_0)^2} + i \frac{\eta\omega}{1 + (\omega\tau_0)^2} \quad (3.6)$$

La fonction de relaxation est :

$$r(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$$

3.1.3 Modèle de Zener

Le modèle de Zener (figure 3.2) est constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt de paramètres (E_1, η) en série avec un ressort de module d'élasticité E_0 . Si ε_0 et ε_1 représentent respectivement la déformation de chacun des ressorts et σ la contrainte associée, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \\ \sigma &= E_0 \varepsilon_0 \\ \sigma &= E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

où ε est la déformation totale du modèle.

En combinant ces trois relations ci-dessus, l'équation de comportement s'écrit :

$$(E_0 + E_1) \sigma(t) + \eta \dot{\sigma}(t) = E_0 \left(E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}(t) \right) \quad (3.8)$$

Le module complexe s'écrit :

$$\frac{1}{M(\omega)} = \frac{1}{E_1 + i\eta\omega} + \frac{1}{E_0} \quad (3.9)$$

En notant $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$, $\tau = \frac{\eta}{E_0 + E_1}$, $E = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$, on obtient :

$$(Zener) \quad M(\omega) = E \frac{1 + i\tau_1\omega}{1 + i\tau\omega} \quad (3.10)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, la relation (3.10) devient :

$$M(\omega) = E \frac{1 + \tau_1\tau\omega^2}{1 + (\tau\omega)^2} + iE \frac{(\tau_1 - \tau)\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (3.11)$$

Les paramètres τ et τ_1 sont appelés respectivement temps à l'équilibre et temps caractéristique de relaxation. Le paramètre η est un coefficient d'amortissement et peut être relié à τ ou τ_1 . E est assimilé à un module d'élasticité différée, dans la mesure où, au bout d'un temps infini, il relie linéairement contrainte et déformation ($\dot{\sigma} = \dot{\varepsilon} = 0$). Enfin, E_0 est le module d'élasticité instantanée.

Les expressions des modules complexes des modèles de Kelvin-Voigt et Maxwell sont des cas particuliers du modèle de Zener (3.9). En effet,

- Si $E_0 \rightarrow \infty$ on retrouve le modèle de Kelvin-Voigt (3.1), avec $E \rightarrow E_1$, $\tau \rightarrow 0$ et $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$.
- Si $E_1 \rightarrow 0$ on retrouve le modèle de Maxwell (3.4), et on a alors $E \rightarrow 0$, $\tau_1 \rightarrow \infty$, $E\tau_1 \rightarrow \eta$, et $\tau = \frac{\eta}{E_0}$.

3.1.4 Analyse et comparaison avec nos résultats expérimentaux

Nous allons donc étudier le comportement du modèle de Zener, le comportement du modèle de Maxwell s'en déduit en faisant $E = 0$. Nous comparerons avec celui de Kelvin-Voigt.

Partant de la relation proposée en (3.11), nous introduisons une variable adimensionnelle $u = \tau\omega$, et en notant $X(\omega)$ la partie réelle et $Y(\omega)$ la partie imaginaire du module complexe, on a $X(\omega) = x(u)$ et $Y(\omega) = y(u)$ avec :

$$x(u) = E_0 - \frac{(E_0 - E)}{u^2 + 1} \quad \text{et} \quad y(u) = (E_0 - E) \frac{u}{u^2 + 1} \quad (3.12)$$

La figure (3.3) montre l'allure des courbes du modèle dans les plans de la partie réelle et imaginaire respectivement.

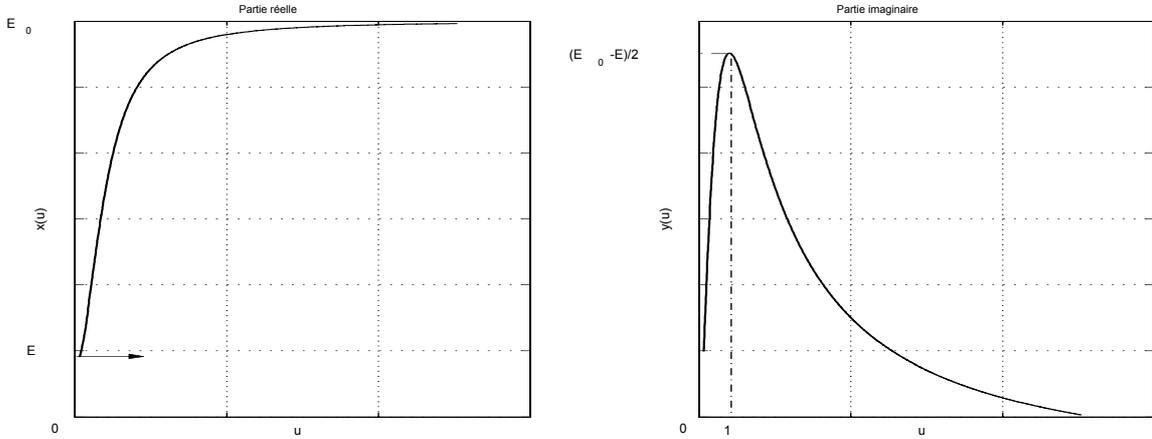


FIG. 3.3 – Représentation dans les plans réel (à gauche) et imaginaire (à droite) pour le modèle Zener

Pour de fréquences variant de 0 à l'infini, la partie réelle $x(u)$ croît de E jusqu'à la valeur asymptotique E_0 .

Pour les modèles de Zener et de Maxwell, la partie imaginaire $y(u)$, part de l'origine et croît jusqu'à un maximum pour $u = 1$. Puis cette partie imaginaire tend vers 0 pour les très hautes fréquences. La partie imaginaire $Y(\omega)$ passe donc par un maximum :

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\tau} \quad \text{et} \quad Y_{\max} = \frac{E_0 - E}{2}$$

Pour le modèle de Kelvin-Voigt, l'analyse précédente ne s'applique pas, car $\tau = 0$. On a simplement $X(\omega) = E_1$ et $Y(\omega) = \eta\omega$.

Comme nos essais ont une partie imaginaire croissante en fonction de la fréquence, le modèle de Kelvin-Voigt est de ce point de vue le moins mauvais candidat.

Si on étudie maintenant le comportement des modèles de Zener (et de Maxwell) dans le plan Nyquist, en éliminant u dans les équations (3.12), on obtient l'équation d'un cercle :

$$(E_0 - X)^2 + Y^2 = (E_0 - E)(E_0 - X) \quad (3.13)$$

centré sur l'axe des X . La valeur de $X(\omega)$ pour laquelle $Y(\omega)$ est nulle est $X = E$ correspondant à $\omega = 0$. D'autre part, lorsque ω tend vers l'infini, $X(\omega)$ tend vers la valeur E_0 .

La partie imaginaire est maximum pour une pulsation $\omega = \frac{1}{\tau}$, les coordonnées de ce point sont : $X_{\max} = \frac{E_0 + E}{2}$ et $Y_{\max} = \frac{E_0 - E}{2}$.

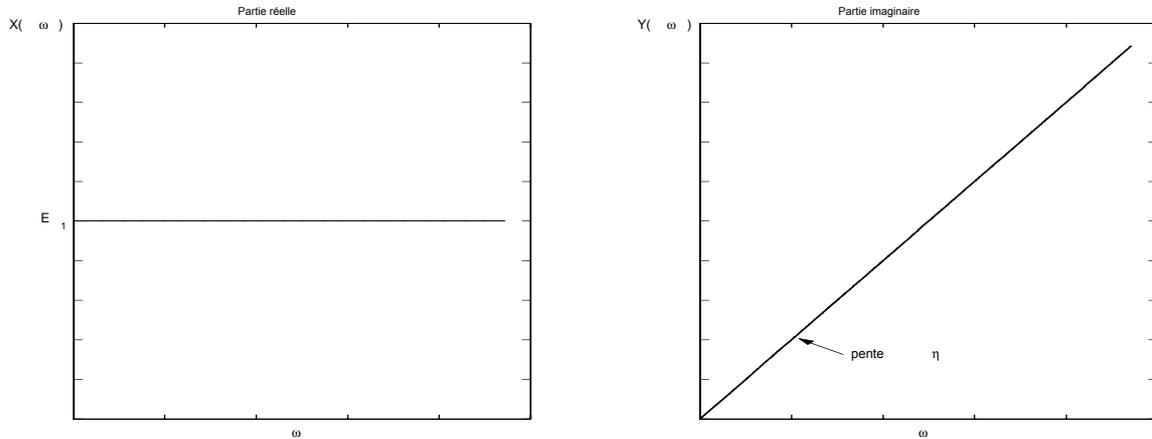


FIG. 3.4 – Représentation dans les plans partie réelle (à gauche) et partie imaginaire (à droite) en fonction de ω pour le modèle de Kelvin-Voigt

La figure (3.5) présente l'allure de la fonction (3.13) dans le plan Nyquist :

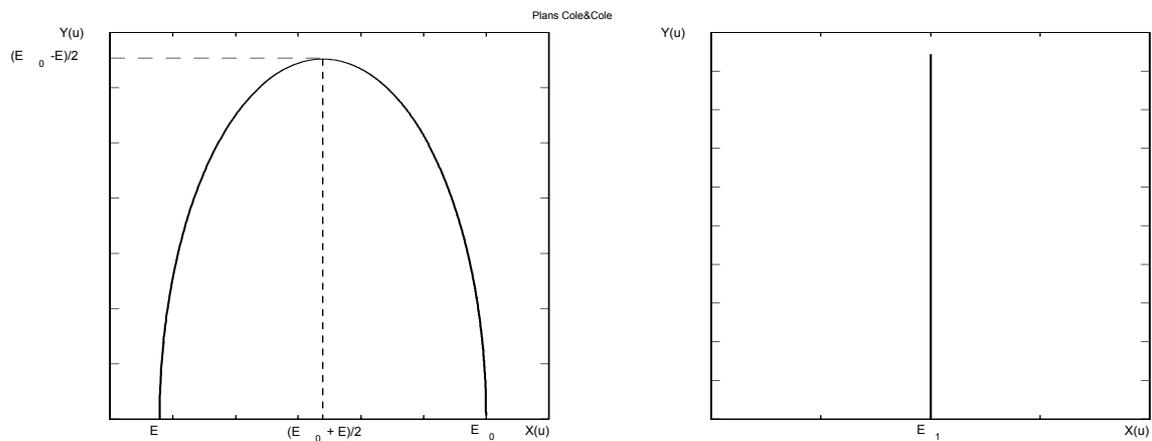


FIG. 3.5 – Représentation dans le plan Nyquist pour les modèles Zener et Kelvin-Voigt

Nous pouvons observer que la courbe est concave or nos essais font apparaitre une courbe convexe dans le plan Nyquist.

Quant au modèle de Kelvin-Voigt , il est représenté dans le plan Nyquist par une demi-droite verticale issue du point de coordonnées $(E_1, 0)$ ce qui ne correspond pas non plus à nos courbes expérimentales.

En résumé, parmi ces trois modèles, le modèle de Kelvin-Voigt est le plus proche de ce que nous recherchons. Il permet d'avoir un comportement affine

acceptable pour les fréquences élevées mais il ne rend pas du tout compte du comportement à basses fréquences de notre matériau.

3.2 Modèles rhéologiques composés

Au vu des faiblesses observées pour les trois modèles cités précédemment dans le plan Nyquist, il est évident qu'ils s'adaptent très mal à nos données expérimentales et qu'ils ne peuvent pas fournir une bonne modélisation pour notre matériau. On peut généraliser ces modèles en considérant un groupement quelconque d'éléments linéaires de type ressort ou amortisseur [24], ce qui conduit à une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\sigma(t) + \sum_{n=1}^N a_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} = E \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N b_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} \quad (3.14)$$

avec N entier, a_n et b_n sont des coefficients caractéristiques du matériau.

Le modèle de Maxwell généralisé (1.3), constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt en parallèle avec plusieurs modèles de Maxwell, fait partie de ce type de modèles. Ce modèle donne une bonne description du comportement pour une grande variété de matériaux viscoélastiques. Cependant, il nécessite un nombre important de paramètres et leur identification devient onéreuse numériquement.

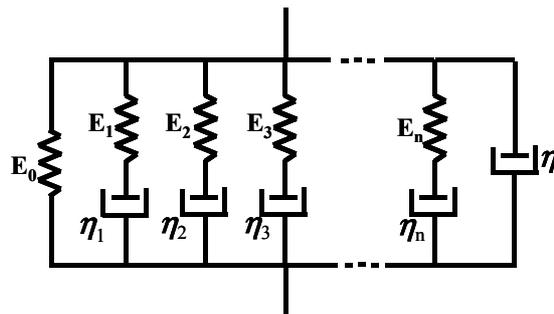


FIG. 3.6 – Maxwell généralisé

Dans leurs travaux, Heymans et Bauwens [18], ont imaginé de décrire les propriétés viscoélastiques des polymères solides à l'aide d'un assemblage fractal d'unités rhéologiques élémentaires constituées de ressorts et d'amortisseurs. Ce modèle rhéologique complexe, composé d'éléments élastiques de module E et d'éléments de viscosité η est représenté dans la figure (Fig. 3.7).

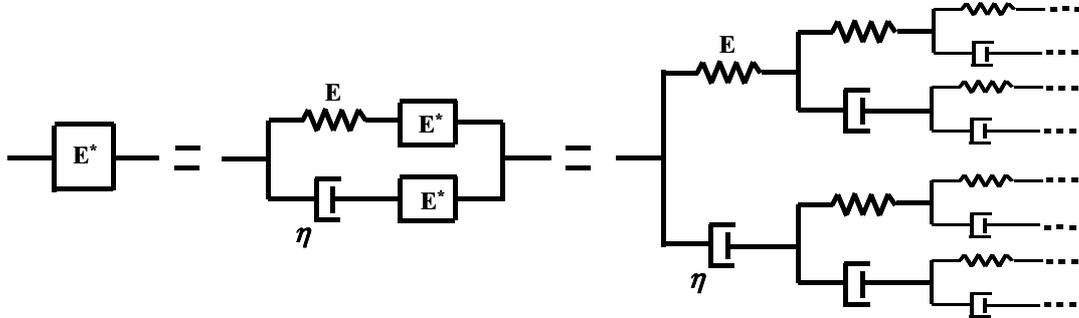


FIG. 3.7 – Modèle fractal pour le comportement viscoélastique

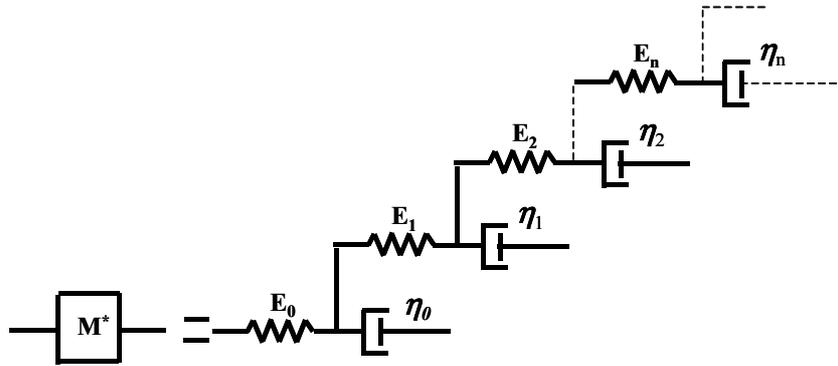


FIG. 3.8 – Arrangement hiérarchique en parallèle des éléments de Maxwell

Le module de Young complexe correspondant, noté ici E^* , vérifie donc l'équation :

$$E^* = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E^*} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{i\eta\omega} + \frac{1}{E^*} \right)^{-1} \quad (3.15)$$

En simplifiant cette équation (3.15), on obtient :

$$E^* = (i\eta\omega E)^{\frac{1}{2}} = E (i\omega\tau)^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

où $\tau = \frac{\eta}{E}$ représente la constante de temps de relaxation du modèle.

Partant d'une idée similaire, Schiessel et Blumen [35] ont proposé un modèle rhéologique constitué d'arrangements en parallèle d'éléments hiérarchiques de Maxwell (figure 3.8). Le défaut des modèles rhéologiques composés est qu'ils font intervenir un grand nombre de paramètres, qu'il est difficile d'identifier.

Dans le cas où les modules d'élasticité ($E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$) sont tous égaux à E et les viscosités ($\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$) toutes égales à η , on retrouve l'expression (3.16) pour le module complexe. Cette expression assez simple, puisqu'elle ne dépend que de 2 paramètres, permet de rendre compte d'un modèle rhéologique plutôt complexe.

Ces deux derniers exemples aboutissent à un module complexe de la forme $M(\omega) = E (i\omega\tau)^{\frac{1}{2}}$, faisant intervenir une puissance fractionnaire de $i\omega$. Cette idée a donc été exploitée et généralisée grâce à l'introduction d'un nouveau élément rhéologique : le spring-pot.

3.3 Spring-Pot et modèles fractionnaires

3.3.1 Le spring-pot

Le spring-pot est un élément rhéologique supposé avoir un module complexe de la forme :

$$M(\omega) = E (i\omega\tau)^\alpha \quad (3.17)$$

et dont le symbole rhéologique est :

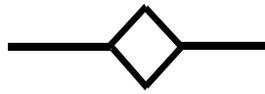


FIG. 3.9 – Spring-Pot

Pour $\alpha = 0$, on retrouve un ressort de module d'élasticité E et pour $\alpha = 1$ on retrouve un amortisseur visqueux de viscosité $\eta = E\tau$. On rappelle que le paramètre adimensionnel α permet une transition continue entre le modèle rhéologique solide idéal (ressort ou spring : $\alpha = 0$) et le modèle fluide idéal (amortisseur visqueux ou dash-pot : $\alpha = 1$).

La relation fréquentielle entre contrainte et déformation est donc :

$$\hat{\sigma}(\omega) = E (i\omega\tau)^\alpha \hat{\varepsilon}(\omega) = E\tau^\alpha (i\omega)^\alpha \hat{\varepsilon}(\omega) \quad (3.18)$$

Ceci implique que la relation temporelle correspondante fasse intervenir une nouvelle notion mathématique, appelée dérivation fractionnaire d'ordre α (ou encore non-entière) et dont une des définitions est :

$$D^\alpha(\varepsilon)(t) = \int (i\omega)^\alpha \hat{\varepsilon}(\omega) \exp(+i\omega t) d\omega$$

D'autres définitions sont possibles et un rappel est présenté en Annexe 1.

La relation contrainte-déformation pour le spring-pot s'écrit classiquement :

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t) \quad (3.19)$$

Il est à noter que contrairement aux apparences, ce modèle ne dépend que de deux paramètres indépendants : α et $E\tau^\alpha$. On donne aussi sa fonction de relaxation et le module opérationnel $K(p)$ obtenu en prenant la transformée de Laplace de la dérivée de la fonction de relaxation :

$$r(t) = E\tau^\alpha \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H(t) \quad (3.20)$$

et

$$K(p) = E\tau^\alpha p^\alpha \quad (3.21)$$

En posant $p = i\omega$, on retrouve la forme du module complexe exprimée en (3.17).

Les courbes de relaxation pour $0 < \alpha < 1$ ont une décroissance en puissance de t au lieu d'avoir une décroissance exponentielle en temps t . On constate que la fonction de relaxation du spring-pot est proportionnelle au temps élevé à une puissance fractionnaire. Ainsi, les modèles fractionnaires permettent d'associer dans la fonction de relaxation une décroissance en $t^{-\alpha}$. C'est dans cette optique que les auteurs Nutting [25] et Scoot Blair ont réussi à avoir une approche correcte du comportement viscoélastique sur la décroissance de la fonction de relaxation.

3.4 Modèles fractionnaires

En remplaçant dans les modèles classiques vus précédemment, l'amortisseur visqueux par le spring-pot, nous obtenons des modèles rhéologiques fractionnaires que nous appellerons Kelvin-Voigt fractionnaire, Maxwell fractionnaire, Zener fractionnaire. Ces modèles sont décrits sur la figure (3.10) ci-dessous :

On peut utiliser la même démarche pour les modèles composés vus plus haut (3.14). On obtient des lois de comportement utilisant les dérivées fractionnaires du type :

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^{\alpha_k} \sigma}{dt^{\alpha_k}} = E \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^N b_k \frac{d^{\beta_k} \varepsilon}{dt^{\beta_k}} \quad (3.22)$$

où α_k et β_k sont des valeurs comprises entre 0 et 1.

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (3.22), le module complexe

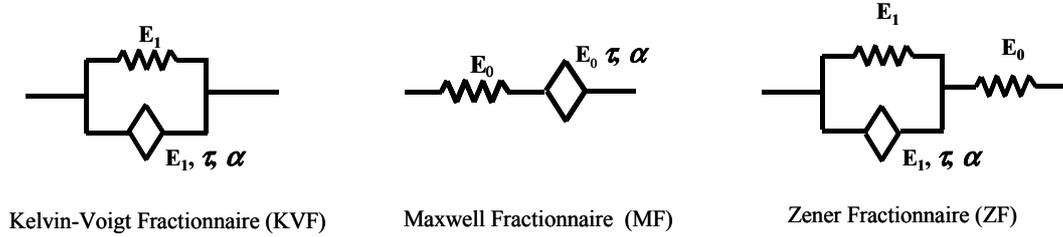


FIG. 3.10 – Exemples de modèles fractionnaires

correspondant est de la forme :

$$M(\omega) = \frac{E + \sum_{k=1}^N b_k (i\omega)^{\beta_k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k (i\omega)^{\alpha_k}} \quad (3.23)$$

En se basant sur des essais expérimentaux, les auteurs Bagley et Torvik [45], ont montré que l'on peut se contenter d'utiliser les premiers termes de chaque série (3.22) pour modéliser un grand nombre de matériaux viscoélastiques. Il en résulte un modèle à cinq paramètres : E , a , b , α et β :

$$M(\omega) = \frac{E + b(i\omega)^\beta}{1 + a(i\omega)^\alpha} \quad (3.24)$$

Bagley et Torvik ont précisé les conditions que doivent vérifier les paramètres pour que le modèle soit conforme aux principes de la thermodynamique et aux résultats expérimentaux dont ils disposaient. Ces conditions sont au nombre de cinq : a , b et E doivent être positifs, $\alpha = \beta$ pour que le module reste borné et non nul pour des fréquences très grandes et l'inégalité $\frac{b}{a} \geq E$ vient de ce que le module $|M(\omega)|$ doit être une fonction positive et croissante de ω variant de E à $\frac{b}{a}$.

La loi constitutive du modèle Bagley et Torvik s'écrit :

$$(\text{Bagley} - \text{Torvik}) \quad \sigma + aD^\alpha(\sigma) = E\varepsilon + bD^\beta(\varepsilon) \quad (3.25)$$

Le modèle correspondant est alors identique, en posant $b = E\tau^\alpha$ et $\frac{b}{a} = E_0$, au modèle de Zener fractionnaire que nous allons étudier dans le prochain paragraphe. Nous étudierons ensuite le modèle de Maxwell fractionnaire (MF) et enfin Kelvin-Voigt Fractionnaire (KVF).

3.4.1 Modèle Zener Fractionnaire (ZF)

En substituant l'élément amortissement visqueux par un spring-pot dans le modèle classique de Zener, nous obtenons un modèle dit de Zener Fractionnaire (ZF) représenté à la figure (3.10).

Ainsi le modèle ZF part du même principe que le modèle Zener auquel on remplace l'amortisseur par un spring-pot (E_1, τ et α). En s'inspirant de la relation (3.8), on en déduit la loi de comportement du modèle Zener Fractionnaire (ZF) :

$$(ZF) \quad \sigma + \frac{E}{E_0} \tau^\alpha D^\alpha(\sigma) = E\varepsilon + E\tau^\alpha D^\alpha(\varepsilon) \quad (3.26)$$

avec $E = \frac{E_1 E_0}{E_1 + E_0}$. Son module complexe s'exprime alors par :

$$(ZF) \quad M(\omega) = E \frac{1 + (i\tau\omega)^\alpha}{1 + \frac{E}{E_0} (i\tau\omega)^\alpha} \quad (3.27)$$

Pour simplifier l'écriture du module complexe de ZF (3.27), nous avons posé dans ce qui suit $c = \frac{E}{E_0}$.

La figure (3.11) présente les courbes de la fonction $\rho(\omega) = |M(\omega)|$ pour différentes valeurs de α . Cette fonction croît depuis E et tend vers E_0 pour les hautes fréquences. En utilisant la relation $(i\tau\omega)^\alpha = (\tau\omega)^\alpha [\cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + i\sin(\alpha\frac{\pi}{2})]$, on obtient :

$$\rho(\omega) = |M(\omega)| = E \sqrt{\frac{1 + 2|\tau\omega|^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + |\tau\omega|^{2\alpha}}{1 + 2c|\tau\omega|^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + c^2|\tau\omega|^{2\alpha}}}$$

L'expression analytique de la tangente de la phase vaut :

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{(1 - c) (\tau\omega)^\alpha \sin(\alpha\frac{\pi}{2})}{c (\tau\omega)^{2\alpha} + (1 + c) (\tau\omega)^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + 1} \quad (3.28)$$

L'étude de la dérivée de la phase en fonction de la fréquence permet d'obtenir les coordonnées du maximum.

$$u_{Max} = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} \quad \text{et} \quad (\tan \varphi)_{Max} = \frac{(1 - c) \sin(\alpha\frac{\pi}{2})}{2\sqrt{c} + (c + 1) \cos(\alpha\frac{\pi}{2})}$$

Partant de l'expression (3.27) de ZF, on déduit respectivement les expressions de la partie réelle et imaginaire du module complexe. En posant $u = \tau\omega$ et $X(\omega) = x(u)$ et $Y(\omega) = y(u)$ on obtient :

$$X(\omega) = E \frac{c(\tau\omega)^{2\alpha} + (c + 1) (\tau\omega)^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + 1}{1 + 2c|\tau\omega|^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + c^2|\tau\omega|^{2\alpha}} \quad (3.29)$$

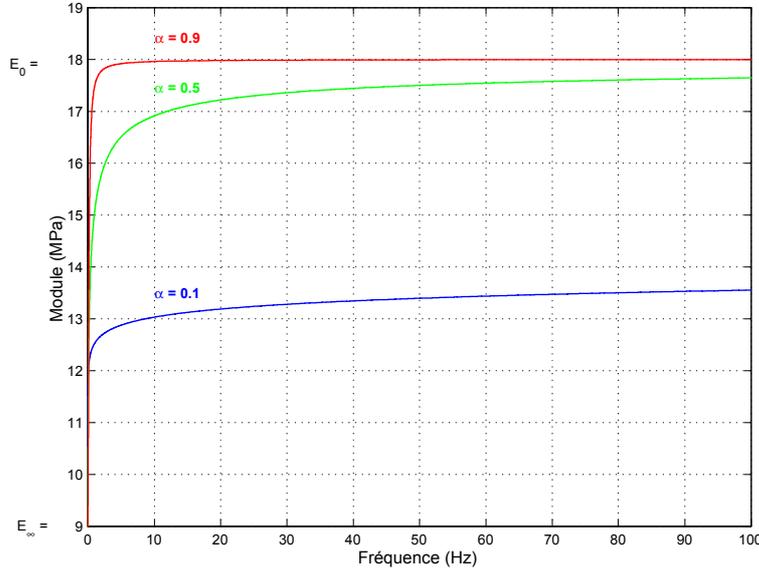


FIG. 3.11 – Module du module complexe pour le modèle ZF en fonction de la fréquence ($E_\infty = E = 9 \text{ MPa}$, $E_0 = 19 \text{ MPa}$ et $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$)

$$Y(\omega) = E \frac{(1-c)(\tau\omega)^\alpha \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{1 + 2c|\tau\omega|^\alpha \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + c^2|\tau\omega|^{2\alpha}} \quad (3.30)$$

A partir des expressions données en relation (3.29) et (3.30), on trace la figure (3.13), les courbes dans le plan Nyquist (ou Cole & Cole) pour le modèle ZF et pour trois valeurs de α . On rappelle que les courbes expérimentales dans le plan de Nyquist sont croissantes et convexes. Or, l'analyse du modèle ZF dans ce même plan donne une courbe concave. Ce modèle n'est donc pas bien adapté à nos expériences.

3.4.2 Modèle Maxwell Fractionnaire (MF)

En s'inspirant de la démarche faite précédemment, le module complexe du modèle de Maxwell Fractionnaire (MF) se déduit de celui de Maxwell simple en remplaçant $i\tau_0\omega$ dans (3.5) par $(i\tau\omega)^\alpha$:

$$(MF) \quad M(\omega) = E_0 \frac{(i\tau\omega)^\alpha}{1 + (i\tau\omega)^\alpha} \quad (3.31)$$

Il peut aussi s'écrire :

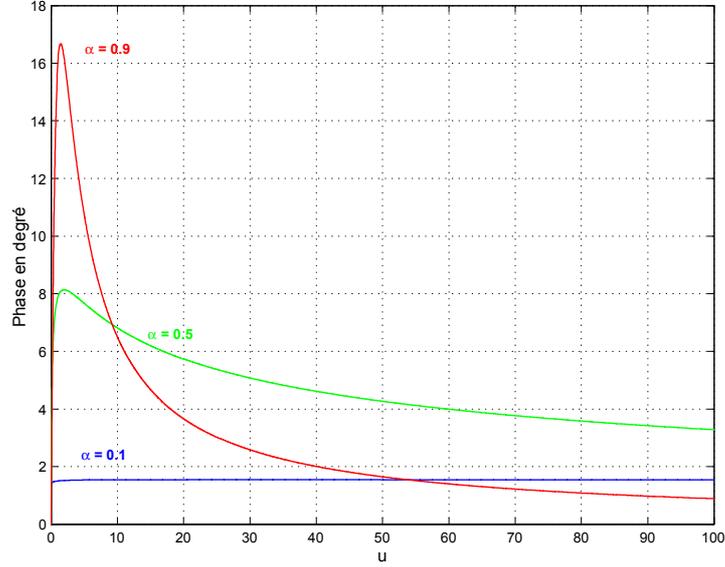


FIG. 3.12 – Phase du module complexe pour le modèle ZF

$$M(\omega) = E_0 \frac{(\tau\omega)^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + i(\tau\omega)^\alpha \sin(\alpha\frac{\pi}{2})}{1 + (\tau\omega)^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + i(\tau\omega)^\alpha \sin(\alpha\frac{\pi}{2})} \quad (3.32)$$

Après calcul, les expressions des parties réelle et imaginaire sont respectivement :

$$X(\omega) = E_0 \frac{(\tau\omega)^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + (\tau\omega)^{2\alpha}}{1 + (\tau\omega)^{2\alpha} + 2(\tau\omega)^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2})} \quad (3.33)$$

$$Y(\omega) = E_0 \frac{(\tau\omega)^\alpha \sin(\alpha\frac{\pi}{2})}{1 + (\tau\omega)^{2\alpha} + 2(\tau\omega)^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2})} \quad (3.34)$$

Le modèle Maxwell fractionnaire (MF) se comporte de la même manière que celui de Zener Fractionnaire (ZF) dans le plan Nyquist (il suffit de faire $E = 0$ dans le modèle ZF).

3.4.3 Modèle Kelvin-Voigt Fractionnaire (KVF)

Enfin, pour le modèle Kelvin-Voigt Fractionnaire (KVF), le module complexe est défini à partir de (3.2) par :

$$(KVF) \quad M(\omega) = E_1 \{1 + (i\tau\omega)^\alpha\} \quad (3.35)$$

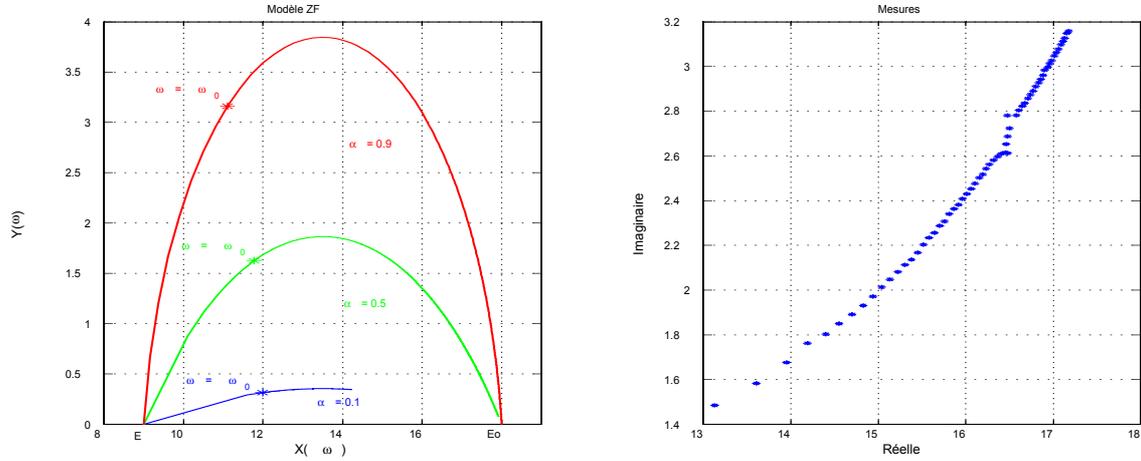


FIG. 3.13 – Modèle ZF et courbe expérimentale dans les plans Nyquist

On peut remarquer que le modèle KVF peut être obtenu en faisant tendre E_0 vers l'infini à partir de la relation (3.27) où on a alors $E = E_1$. L'expression de $|M(\omega)|$ devient :

$$|M(\omega)| = E_1 \sqrt{1 + 2|\tau\omega|^\alpha \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + |\tau\omega|^{2\alpha}} \quad (3.36)$$

Pour le modèle KVF, b tend vers 0 et ω_m est rejeté à l'infini ; il n'y a pas de pulsation où la dissipativité est maximale et φ_{Max} tend vers $\alpha\frac{\pi}{2}$. En écrivant que $\varphi_{Max} > \varphi$ donc que $\tan(\varphi_{Max}) > \tan(\varphi)$ et en posant $d = \sqrt{c} > 0$ dans (3.28), on obtient une inégalité dont le premier membre est un trinôme du second degré en d :

$$d^2 \left[\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - \tan\varphi \cdot \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \right] - 2d \tan\varphi - \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - \tan\varphi \cdot \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) > 0 \quad (3.37)$$

Pour s'assurer de sa positivité, après avoir étudié les racines, on vérifie que $\tan(\alpha\frac{\pi}{2}) > \tan(\varphi)$ ce qui implique que : $\varphi < \alpha\frac{\pi}{2}$.

Les parties réelle et imaginaire sont :

$$X(\omega) = E_1 \left\{ (\tau\omega)^\alpha \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + 1 \right\} \quad \text{et} \quad Y(\omega) = E_1 \left\{ (\tau\omega)^\alpha \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

On en déduit que :

$$Y = \tan\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)(X - E_1) \quad (3.38)$$

Le graphe dans le plan Nyquist, correspondant au modèle de KVF, est une droite d'équation (3.38). La figure (??) illustre cette propriété pour différentes valeurs de α .

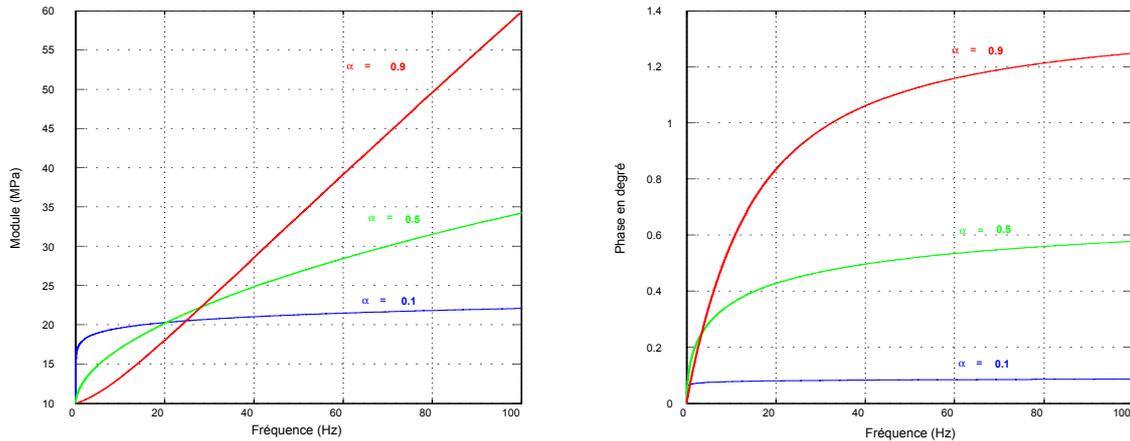


FIG. 3.14 – Représentation du modèle KVF dans les plans du module et de la phase pour différentes valeurs de α

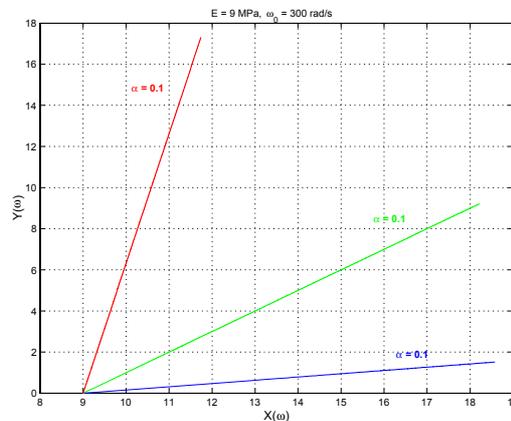


FIG. 3.15 – Représentation du modèle KVF dans le plan Nyquist pour différentes valeurs de α

Nous pouvons constater que le modèle KVF est satisfaisant dans les plans du module et de la phase du module d'Young complexe (cf. figure 3.14) : il donne une bonne description du comportement dynamique de notre matériau pour des valeurs de α très strictement inférieures à 0.9. Parmi les modèles fractionnaires étudiés, c'est le seul modèle qui apporte une amélioration sur les tracés dans ces

plans. Cependant, le KVF se prête mal dans le plan Nyquist où pour différentes valeurs de α , nous avons des droites.

3.5 Modèles phénoménologiques

Des modèles phénoménologiques ont été construits à partir de considérations expérimentales : des essais ont montré que pour certains matériaux sous chargement cyclique, la dissipation est pratiquement indépendante de la vitesse de déformation tant que les déformations restent en dessous de la limite élastique. C'est pour cette raison que des modèles de comportement viscoélastique indépendants de la fréquence de la contrainte cyclique ont été envisagés. Notre recherche de modèle s'est basée sur l'idée de Mandel [24] qui a montré qu'un modèle viscoélastique peut être vu comme la somme d'une superposition en parallèle de modèles de Maxwell et d'un modèle de Kelvin-Voigt de paramètres (E, η) avec $E \neq 0$ (comportement solide) et éventuellement nul. Dans le cas de N modèles de Maxwell de paramètres (E_i, τ_i) , la fonction de relaxation peut s'écrire :

$$r(t) = \sum_{i=1}^{i=N} E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) H(t) + EH(t) + \eta\delta(t)$$

$H(t)$ et $\delta(t)$ sont respectivement les distributions de Heaviside et de Dirac. Cette représentation nécessite un grand nombre de paramètres (E_i, τ_i) pour modéliser correctement le comportement viscoélastique, ce qui rend l'identification difficile. On peut étendre cette somme discrète et passer à une forme continue en faisant intervenir une densité appelé spectre de relaxation et noté $R(z)$ où z représente l'ensemble des temps de relaxation des modèles de Maxwell. La fonction de relaxation $r(t)$ s'écrit alors :

$$r(t) = \left(\int_0^{\infty} R(z) \exp\left(-\frac{t}{z}\right) dz \right) H(t) + EH(t) + \eta\delta(t) \quad (3.39)$$

Une série de distributions de Dirac $\delta(z - \tau_i)$ à la place de $R(z)$ dans (3.39) permet de retrouver le modèle de Maxwell généralisé. Le modèle peut être interprété comme la superposition continue d'éléments de Maxwell en parallèle avec les distributions de modules et de viscosités données respectivement par $R(z)dz$ et $zR(z)dz$.

Pour faire apparaître une transformée de Laplace, on peut aussi faire le changement de variable $s = \frac{1}{z}$, on obtient alors :

$$r(t) = \left(\int_0^{\infty} F(s) \exp(-st) ds \right) H(t) + EH(t) + \eta\delta(t) \quad (3.40)$$

où $F(s) = \frac{1}{s^2}R\left(\frac{1}{s}\right)$ et où s est une pulsation.

On peut aisément relier le module opérationnel $K(p)$ qui est la transformée de Carson de la fonction de relaxation et le spectre de relaxation par :

$$K(p) = p \int_0^\infty \frac{F(s)}{p+s} ds + E + \eta p = p \int_0^\infty \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2(p+s)} ds + E + \eta p \quad (3.41)$$

et par conséquent le module complexe s'en déduit :

$$M(\omega) = i\omega \int_0^\infty \frac{F(s)}{i\omega+s} ds + E + i\eta\omega = i\omega \int_0^\infty \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2(i\omega+s)} ds + E + i\eta\omega \quad (3.42)$$

3.5.1 Modèle de Biot

En recherchant un modèle de comportement de type solide dont les parties réelle et imaginaire du module complexe soient proches de quantités indépendantes de la fréquence, Biot [6] en 1958 propose un spectre de relaxation de la forme :

$$R(z) = \frac{A}{z} H(\tau - z) \quad (3.43)$$

où A et τ sont des constantes positives.

En posant $\tau = \frac{1}{\omega_0}$, on a également :

$$F(s) = \frac{A}{s} H(s - \omega_0) \quad (3.44)$$

La fonction de relaxation $r(t)$ (cf. 3.39 avec $\eta = 0$) s'écrit alors :

$$r(t) = A \int_0^\tau \frac{\exp\left(\frac{-t}{z}\right)}{z} dz + EH(t) \quad (3.45)$$

En faisant un changement de variable : $\frac{t}{z} = u$ et en tenant compte de $\tau = \frac{1}{\omega_0}$, la fonction de relaxation précédente, après simplification, se met sous la forme :

$$r(t) = A \int_{\omega_0 t}^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du + EH(t) \quad (3.46)$$

ou encore en posant $A = E\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$, on obtient :

$$r(t) = E\alpha E_1(\omega_0 t) + EH(t) \quad (3.47)$$

où $E_1(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$ est l'exponentielle intégrale.

L'expression (3.46) est d'utilisation plus commode que celle énoncée en (3.45), Biot a présenté son modèle en utilisant ω_0 plutôt que τ , ce que nous ferons nous aussi dans la suite de notre étude.

En dérivant la fonction de relaxation (3.46), on obtient :

$$k(t) = -E\alpha \frac{\exp(-\omega_0 t)}{t} H(t) + E\delta(t) \quad (3.48)$$

où la dérivée est prise au sens des distributions.

Le module opérationnel $K(p)$ est obtenu en prenant la transformée de Laplace de $k(t)$:

$$K(p) = E\alpha \ln \left(1 + \frac{p}{\omega_0} \right) + E \quad (3.49)$$

En substituant p par $i\omega$, le module complexe de ce modèle se déduit de (3.49) :

$$\text{(Biot)} \quad M(\omega) = E \left\{ 1 + \alpha \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} + i\alpha \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \right\} \quad (3.50)$$

On peut vérifier que les parties réelle et imaginaire du module complexe sont "presque" constantes sur une large plage de fréquence pour ω assez grand et plus précisément pour ω très supérieur à ω_0 .

3.5.2 Modèle Hystérétique Causal

Le modèle Hystérétique Causal provient d'un modèle d'amortissement structural indépendant de la fréquence, appelé modèle hystérétique idéal qui a fait son apparition en 1940. En fait, ce modèle est construit à partir des considérations expérimentales : des essais expérimentaux ont montré que pour certains matériaux sous chargement cyclique la dissipation est indépendante de la vitesse de déformation tant que les déformations restent en dessous de la limite élastique. C'est pour cette raison que des modèles de comportement viscoélastique indépendants de la fréquence de la contrainte cyclique ont été envisagés. Partant de cette observation, un modèle appelé hystérétique idéal, a été introduit et défini par un module complexe de la forme :

$$M(\omega) = \kappa + i\gamma \operatorname{sgn} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (3.51)$$

Le nom de modèle hystérétique provient du fait que l'énergie dissipée au cours d'un cycle, représentée par l'aire de la boucle d'hystérésis, est indépendante de la fréquence et ne dépend que du carré de l'amplitude des oscillations.

Mais ce modèle a un défaut majeur : il est non causal.

Makris [23] a proposé en 1997, le modèle hystérétique causal dont la partie imaginaire du module complexe est la même que celle du modèle hystérétique idéal mais dont la partie réelle est construite, en s'appuyant sur les relations de Kramers-Kronig de sorte que le modèle obtenu soit causal. Makris est parti du principe que la partie réelle du modèle (3.51) devait être la transformée de Hilbert de la fonction $\gamma \text{sgn}(\omega)$ pour que la fonction temps-réponse soit causale.

En effet, si une fonction f est causale alors, en notant H la fonction de Heaviside ou fonction échelon, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = H(t)f(t) \quad (3.52)$$

Si f_p et f_i désignent respectivement les parties paire et impaire de la fonction f , c'est à dire :

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad (3.53)$$

$$f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad (3.54)$$

alors en utilisant la causalité de f et sachant que $H(t) = \frac{\text{sgn}(t)+1}{2}$ où $\text{sgn}(t)$ désigne la fonction signe. On montre que :

$$\begin{aligned} f_p(t) &= f_i(t) \text{sgn}(t) \\ f_i(t) &= f_p(t) \text{sgn}(t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Si on note X et Y les parties réelle et imaginaire de f , on a :

$$F(f) = F(f_p) + F(f_i) = X + iY$$

donc d'après les propriétés de la transformées de Fourier $F(f_p) = X$ (réelle et paire) et $F(f_i) = iY$ (imaginaire pure et impaire) et en utilisant les relations (3.55) on obtient :

$$\begin{aligned} X &= iY * F(\text{sgn}) \\ iY &= X * F(\text{sgn}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Or la transformée de Fourier de la fonction non sommable $\text{sgn}(t)$ est une distribution. On a :

$$F(\text{sgn})(\nu) = -i \text{v.p.} \left(\frac{1}{\pi\nu} \right)$$

Les relations (3.56) entraînent que :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= Y(\nu) * \frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{\nu} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2Y(u)}{\nu - u} du \\ Y(\nu) &= X(\nu) * \left(-\frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{\nu} \right) \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2X(u)}{\nu - u} du \end{aligned}$$

On passe de Y à X par la transformation de Hilbert (et réciproquement de X à Y par son opposé).

Si on impose que la partie imaginaire du module complexe soit de la forme :

$$Y(\nu) = \gamma \operatorname{sgn}(\nu)$$

alors pour que le modèle soit causal, il faut que la partie réelle vérifie :

$$X(\nu) = Y(\nu) * \frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{\nu} \right) = \gamma \frac{1}{\pi} \operatorname{sgn}(\nu) * v.p. \left(\frac{1}{\nu} \right) \quad (3.57)$$

Or $v.p. \left(\frac{1}{\nu} \right)$ est la dérivée au sens des distributions de $\ln \left| \frac{1}{\nu} \right| + C$ où C est une constante arbitraire. Quant à $\operatorname{sgn}(\nu)$, sa dérivée au sens des distributions est $2\delta(\nu)$. Sachant que la dérivée d'un produit de convolution de deux distributions $U * V$ est indifféremment $U' * V$ ou $U * V'$, on en déduit que pour $U = \operatorname{sgn}(\nu)$ et $V = \ln(|\omega|) + C$ on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\nu) * v.p. \left(\frac{1}{\nu} \right) &= U * V' = U' * V \\ &= 2\delta(\nu) * (\ln |\nu| + C) \\ &= 2 (\ln |\nu| + C) \end{aligned}$$

Par conséquent $X(\nu) = \gamma \frac{2}{\pi} (\ln(|\nu|) + C)$ et donc le modèle hystérétique causal s'écrit :

$$M(\omega) = X \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) + iY \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) = \gamma \frac{2}{\pi} \left(\ln \left| \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \right| + C \right) + i\gamma \operatorname{sgn} \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)$$

Il est d'usage de poser $\gamma = E\alpha \frac{\pi}{2}$, on obtient alors :

$$M(\omega) = E\alpha \ln \left| \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \right| + E\alpha C + iE\alpha \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega)$$

Il est aussi classique de faire apparaître une constante ω_0 positive et d'écrire plutôt

$$M(\omega) = E \left(1 + \alpha \ln \left| \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right| \right) + iE\alpha \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (3.58)$$

Pour passer de l'un à l'autre, il suffit d'écrire la constante arbitraire C sous la forme

$$\alpha C = 1 - \alpha \ln \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \right)$$

avec ω_0 arbitraire.

On note que cette expression (3.58) n'a un sens physique que si la partie réelle du module complexe est positive et donc que pour les ω assez grands, tels que $\omega > \omega_0 \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$. On note aussi que ce modèle hystérétique causal n'a que 2 degrés de liberté : $\gamma = E\alpha$ et $E(1 - \alpha \ln \omega_0)$.

Auparavant, Argoul [3] en 1990, avait remarqué lorsque α est voisin de 0, le comportement du spring-pot se rapproche du comportement hystérétique causal. En faisant un développement limité à l'ordre 1 en α voisin de 0 dans l'expression du module complexe du spring-pot (3.17), il obtient le module complexe du modèle Hystérétique Causal.

On souligne aussi que le modèle Hystérétique Causal est une approximation du modèle de Biot quand $\omega \gg \omega_0$: lorsque ω_0 tend vers 0 dans (3.50), on obtient le module complexe du modèle Hystérétique Causal.

La figure (3.16) représente un schéma récapitulant les relations entre ces différents modèles.

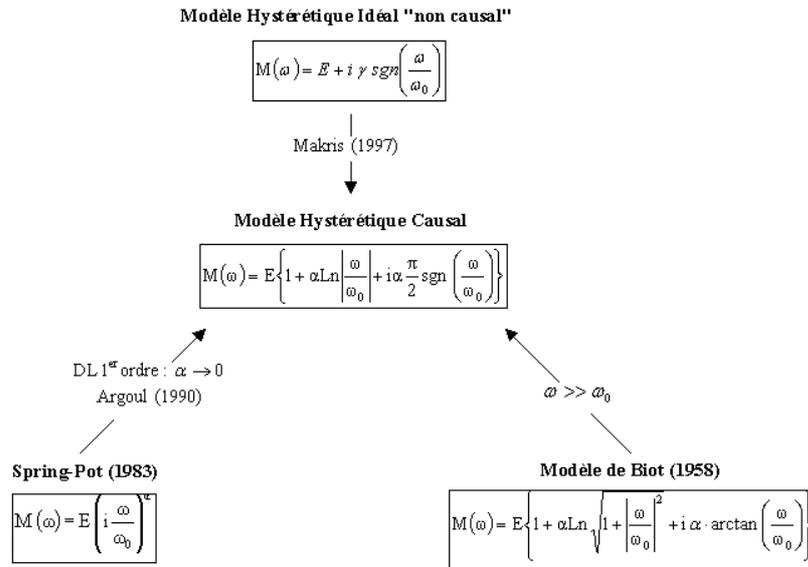


FIG. 3.16 – Relation entre les modèles phénoménologiques

3.5.3 Présentation d'un nouveau modèle fractionnaire, relation avec les modèles précédents

Nous avons vu que le modèle hystérétique causal peut être vu comme le développement au premier ordre au voisinage de $\alpha = 0$ du modèle de spring-pot. Suivant une démarche identique, nous avons remarqué que le module complexe du modèle de Biot n'est autre que le développement limité à l'ordre 1 par rapport à α de l'expression aux dérivées fractionnaires suivante :

$$M(\omega) = E \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha \quad (3.59)$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} M(\omega) &= E \exp \left(\alpha \ln \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \underset{\alpha=0}{\simeq} E \left(1 + \alpha \ln \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \\ &\underset{\alpha=0}{\simeq} E + E\alpha \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} + iE\alpha \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \end{aligned}$$

Nous introduisons donc un nouveau modèle, que nous appelons Modèle Fractionnaire (MF) et dont le module complexe est donné en (3.59).

De plus, nous pouvons aussi remarquer que lorsque le rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$ est très grand, le module complexe (3.59) se comporte comme $M(\omega) = E \left(i \frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha$. Nous retrouvons alors le comportement du spring-pot.

La figure (3.16 bis) illustre les liens entre ce nouveau modèle et les modèles antérieurs, et précise les paramètres des modèles.

Partant de la relation (3.59), le module opérationnel de ce modèle s'écrit alors :

$$K(p) = E (1 + \tau p)^\alpha = E \tau^\alpha (\omega_0 + p)^\alpha \quad (3.60)$$

Le terme $E \tau^\alpha (\omega_0 + p)^\alpha$ peut être vu comme une version du module opérationnel du spring-pot translatée de ω_0 et la réponse impulsionnelle correspondant à ce terme est la réponse impulsionnelle du spring-pot multipliée par $\exp(-\omega_0 t)$; ce qui traduit une mémoire plus « rapidement » évanescence que celle du spring-pot. On trouve, d'après la relation (3.20), la réponse impulsionnelle du "nouveau" modèle fractionnaire :

$$k(t) = k_{SP}(t) \exp(-\omega_0 t) H(t) \quad (3.61)$$

où $k_{SP}(t) = \frac{d}{dt} [r_{SP}(t)]$ avec $r_{SP}(t)$ donnée en (3.20) : $r_{SP}(t) = E \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\omega_0^\alpha} H(t)$.

On note que $K(p=0) = pTL \{r(t)\}(p) = E$; grâce au théorème de la valeur finale ($\lim_{p \rightarrow 0} pTL \{r(t)\}(p) = r(\infty)$), on obtient que $r(\infty) = E$.

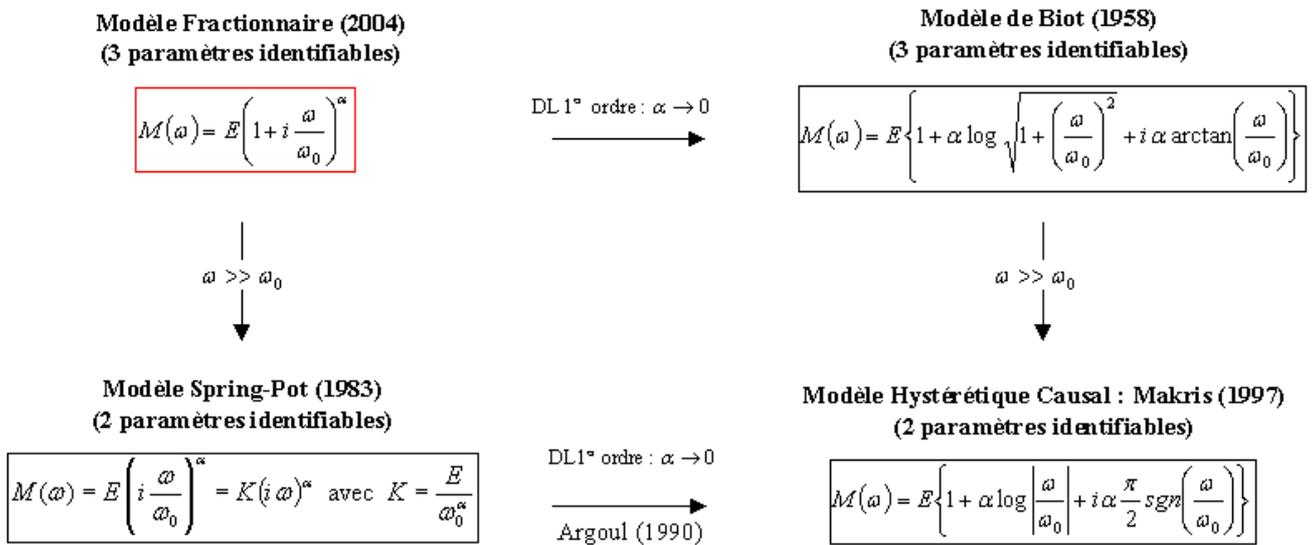


Fig. 3.16 bis – Liens entre les modules complexes des modèles fractionnaires

Intégrons l'expression précédente entre t ($t > 0$) et $+\infty$:

$$\int_t^{+\infty} k(u) du = \int_t^{+\infty} k_{SP}(u) \exp(-\omega_0 u) du \quad (3.62)$$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale de droite. La relation (3.62) devient :

$$-r(t) + r(+\infty) = [r_{SP}(u) \exp(-\omega_0 u)]_t^{+\infty} + \omega_0 \int_t^{+\infty} r_{SP}(u) \exp(-\omega_0 u) du \quad (3.63)$$

avec $r_{SP}(u) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)\omega_0^\alpha} \frac{H(u)}{u^\alpha}$

Comme $r(+\infty) = E$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} r_{SP}(u) = 0$ ($0 < \alpha \leq 1$), la relation (3.63) s'écrit :

$$r(t) = EH(t) + \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)\omega_0^\alpha} \frac{H(t)}{t^\alpha} \exp(-\omega_0 t) - \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)\omega_0^{\alpha-1}} \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-\omega_0 u)}{u^\alpha} du \quad (3.64)$$

et finalement (après changement de variable $v = \omega_0 u$) :

$$r(t) = EH(t) + \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)\omega_0^\alpha} \frac{H(t)}{t^\alpha} \exp(-\omega_0 t) - \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\omega_0 t}^{+\infty} \frac{\exp(-v)}{v^\alpha} dv \quad (3.65)$$

L'intégrale apparaissant dans (3.65) est reliée à la fonction Gamma γ incomplète¹. On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-v)}{v^\alpha} dv = \Gamma(1-\alpha) = \int_0^{\omega_0 t} \frac{\exp(-v)}{v^\alpha} dv + \int_{\omega_0 t}^{+\infty} \frac{\exp(-v)}{v^\alpha} dv \quad (3.66)$$

et $\int_{\omega_0 t}^{+\infty} \frac{\exp(-v)}{v^\alpha} dv = \Gamma(1-\alpha) - \int_0^{\omega_0 t} \frac{\exp(-v)}{v^\alpha} dv = \Gamma(1-\alpha) - \gamma(1-\alpha, \omega_0 t)$.

La relation (3.65) devient alors :

$$r(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)\omega_0^\alpha} \frac{H(t)}{t^\alpha} \exp(-\omega_0 t) + E \frac{\gamma(1-\alpha, \omega_0 t)}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (3.67)$$

ou bien

$$r(t) = r_{SP}(t) \exp(-\omega_0 t) + E \frac{\gamma(1-\alpha, \omega_0 t)}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (3.68)$$

Nous avons regroupé sur la figure (3.17) le comportement en relaxation des modèles de Biot et du "nouveau" modèle fractionnaire puis les modèles spring-pot et hystérétique causal. On remarque que la fonction de relaxation du modèle

¹ $\gamma(a, x) = \int_0^x \exp(-v) v^{a-1} dv$

fractionnaire (MF) est similaire à celle du spring-pot mais leur comportement diffère puisque le spring-pot tend vers la valeur nulle lorsque le temps tend vers l'infini alors que le MF tend vers la valeur E. On note aussi que les modèles hystérétique causal et Biot sont semblables sur toute la période de temps. En revanche, le fait de faire intervenir le terme en $t^{-\alpha}$ dans les modèles MF et SP permet de prendre en compte une décroissance moins rapide de la fonction de relaxation caractéristique du comportement évanescents des matériaux viscoélastiques.

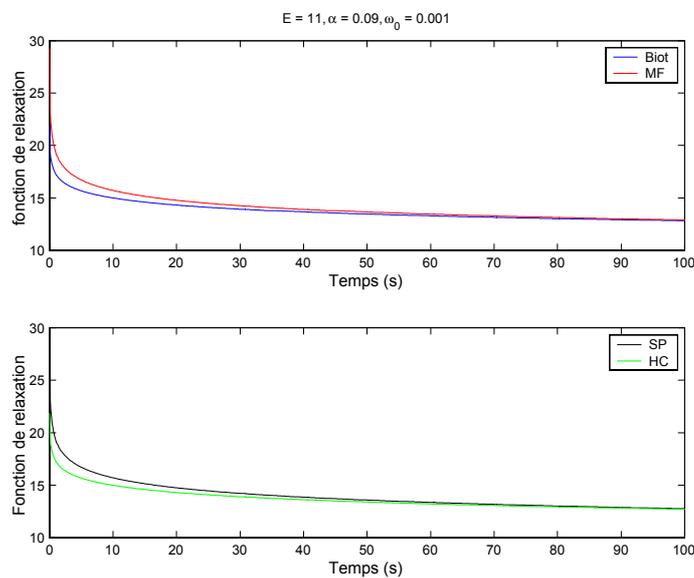


FIG. 3.17 – Comportement des modèles phénoménologiques en relaxation

3.6 Modèles avec amortissement visqueux

Nous avons remarqué en étudiant nos données expérimentales que, pour les fréquences élevées, la partie imaginaire du module complexe est une fonction affine de la fréquence. Ceci nous a donc amené à rajouter un amortissement visqueux aux modèles comme le spring-pot, ou celui de Biot afin d'obtenir des modèles à partie imaginaire affine pour les grandes valeurs de la pulsation ω . Cette démarche rejoint exactement l'idée de Mandel qui a montré que n'importe quel corps viscoélastique linéaire peut être représenté par des modèles de Maxwell et un modèle de Kelvin-Voigt en parallèle. Nous allons donc nous intéresser à l'étude analytique des modèles suivants :

- Spring-pot avec amortissement visqueux (SPAV)

- Biot avec amortissement visqueux (BTAV)
- et le nouveau modèle fractionnaire avec amortissement visqueux (MFAV)

3.6.1 Modèle Spring-Pot avec Amortissement Visqueux

En rajoutant un amortissement visqueux η en parallèle avec un Spring-Pot, on obtient le modèle que nous désignerons par SPAV. En choisissant d'utiliser le paramètre $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$, son module complexe s'écrit alors :

$$M(\omega) = E \left(i \frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha + i\eta\omega \quad (3.69)$$

Le module du module complexe de ce modèle a pour forme :

$$|M(\omega)| = \sqrt{E^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2\alpha} + 2E \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha \eta\omega \sin \left(\alpha \frac{\pi}{2} \right) + \eta^2\omega^2} \quad (3.70)$$

Lorsque ω tend vers l'infini et comme $\alpha < 1$ l'expression du module tend vers $i\eta\omega$ ce qui se traduit pour le graphe de la partie imaginaire par une droite asymptote de pente η . Lorsque α est voisin de zéro, on retrouve le modèle Hystérétique Causal avec un amortissement visqueux.

La fonction tangente de phase vaut :

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{E \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \sin \left(\alpha \frac{\pi}{2} \right) + \eta\omega}{E \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha \cos \left(\alpha \frac{\pi}{2} \right)} \quad (3.71)$$

C'est une fonction croissante de la fréquence et quand la fréquence est grande la phase du module complexe dépend linéairement du paramètre η . On peut aussi noter la même remarque dans le plan de la partie imaginaire du module complexe en fonction de la fréquence.

L'étude montre que ce modèle donne une assez bonne représentation de la réalité lorsque α est voisin de zéro et nous avons présenté sur la figure (3.18) les variations du module complexe dans les cinq représentations usuelles pour différentes valeurs de α .

3.6.2 Modèle de Biot avec Amortissement Visqueux

Pour tenir compte du comportement de la partie imaginaire du module complexe de notre élastomère, nous avons, de la même façon, ajouté en parallèle un amortisseur visqueux η au modèle de Biot. Ainsi, le modèle étudié porte le nom

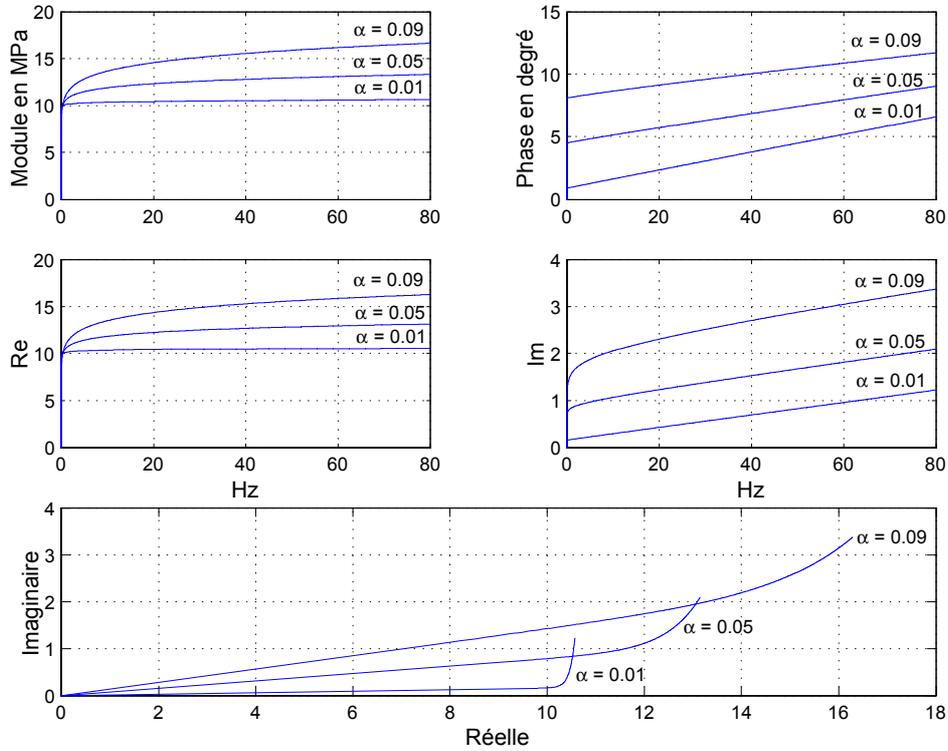


FIG. 3.18 – Module complexe du modèle SPAV pour différentes valeurs de α .

suivant : Biot avec amortissement visqueux (BTAV).

La représentation rhéologique associée à ce modèle est décrite sur la figure (3.19).

Le module complexe du modèle BTAV s'écrit alors :

$$M(\omega) = E \left\{ 1 + \alpha \ln \sqrt{1 + \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|^2} + i \alpha \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \right\} + i \eta \omega \quad (3.72)$$

Dans l'écriture précédente, E , η et ω_0 sont strictement positifs et $0 < \alpha < 1$. Pour ce modèle, on constate que lorsque α tend vers 0, on retrouve le modèle de Kelvin-Voigt formé de l'assemblage d'un amortisseur η et d'un ressort E en parallèle.

La partie imaginaire du module complexe Im en fonction de ω illustrée en figure (3.20), a pour équation :

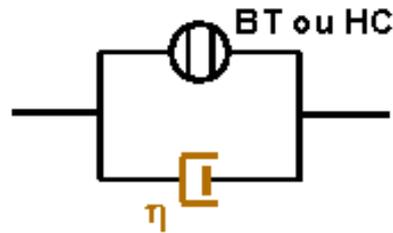


FIG. 3.19 – Représentation symbolique des modèles BTAV et HCAV

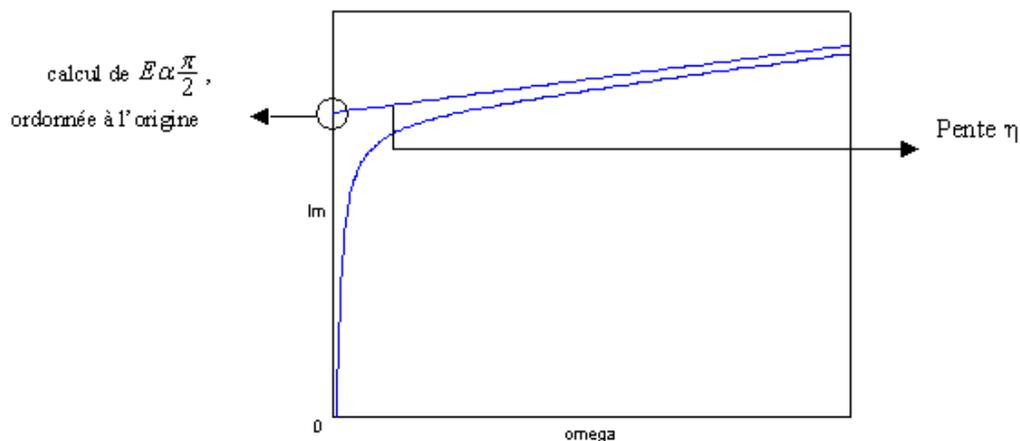
$$Y(\omega) = E\alpha \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \eta\omega \quad (3.73)$$

La courbe a pour asymptote, pour des fréquences élevées, la droite d'équation :

$$Y(\omega) \simeq E\alpha \frac{\pi}{2} + \eta\omega \quad (3.74)$$

La courbe correspondante dans le plan Nyquist a l'allure présentée en figure (3.22). Cette courbe présente un point d'inflexion pour :

$$X_{Inflexion} = \frac{E\alpha}{2} \ln\left(2 + \frac{E\alpha}{\eta\omega_0}\right) + E \quad (3.75)$$

FIG. 3.20 – Partie imaginaire de $M(\omega)$ pour le modèle BTAV

Or, les essais dont nous disposons pour notre élastomère nous donnent des courbes d'allures convexes. On en déduit que les valeurs de la partie réelle

expérimentales X_{Exp} sont telles que si on doit représenter ces expériences pour ce modèle, il faut que les valeurs expérimentales $X(\omega_i)$ soient supérieures à $X_{Inflexion}$:

$$X_{Inflexion} < X(\omega_i) \quad (3.76)$$

De plus, nous avons choisi de faire varier le paramètre α voisin de zéro suivant trois valeurs : 0.01, 0.05 et 0.09. Nous pouvons constater un bon accord entre le modèle et l'expérience. Par contre, lorsque α est supérieur à 0.1, cet accord n'est plus très bon car dans le plan de phase, il existe un maximum comme le montre la figure (3.21).

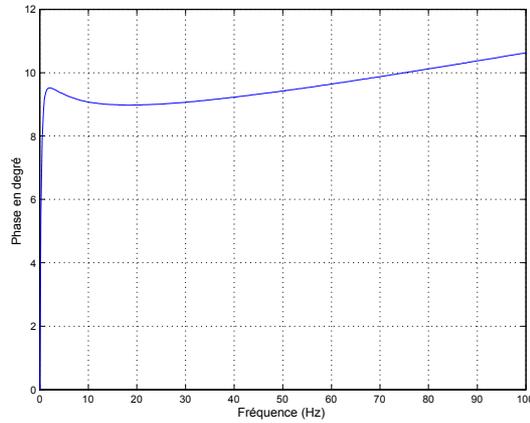


FIG. 3.21 – Représentation de la phase de $M(\omega)$ pour le modèle BTAV ($\alpha = 0.15$)

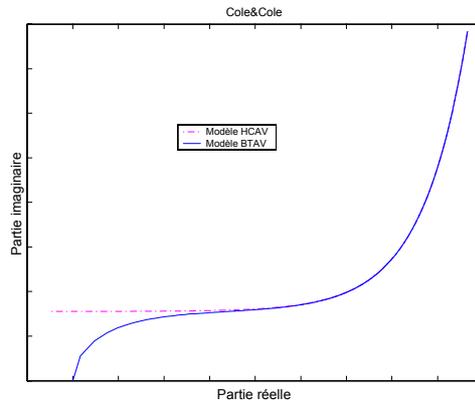


FIG. 3.22 – Représentation des modèles HCAV et BTAV dans le plan Cole&Cole

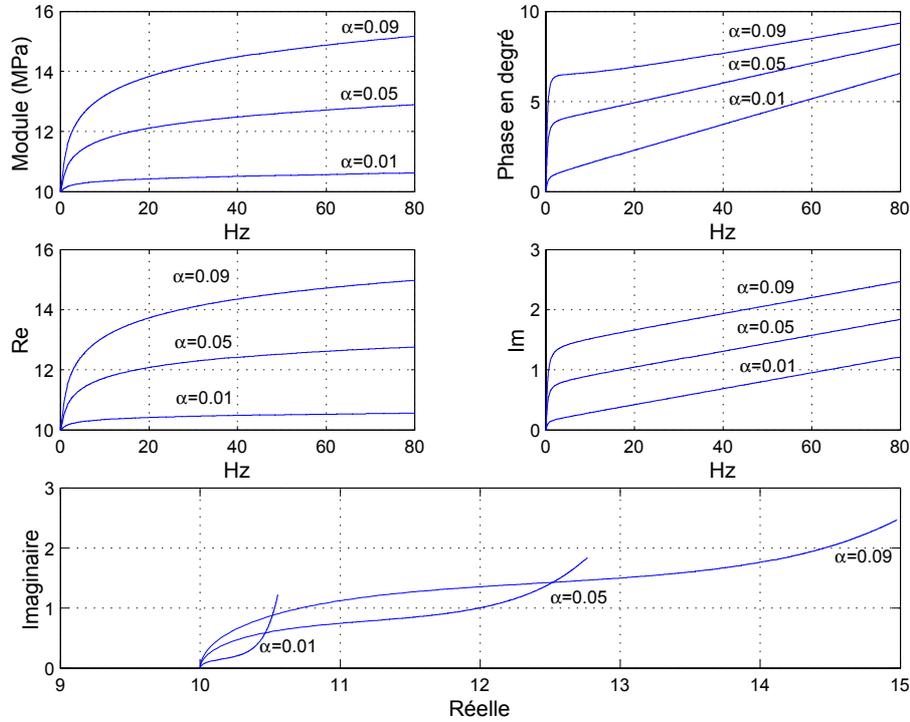


FIG. 3.23 – Module complexe du modèle BTAV pour différentes valeurs de α .

3.6.3 Modèle Fractionnaire avec Amortissement Visqueux

De la même façon, en ajoutant un amortisseur visqueux au modèle fractionnaire que nous avons proposé au paragraphe 3.5.3, nous obtenons un modèle que nous désignerons par MFAV et dont le module complexe est défini par :

$$M(\omega) = E \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha + i\eta\omega \quad (3.77)$$

Ce modèle possède les mêmes propriétés que ceux de BTAV lorsque α est voisin de 0 et que ceux du SPAV lorsque $\omega \gg \omega_0$.

On montre sur la figure (3.24) les variations du module complexe en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de α . En comparant avec nos résultats expérimentaux (cf. chapitre 2 section 2.5), il apparaît que ce "nouveau" modèle semble très bien prendre en compte le comportement viscoélastique de notre élastomère.

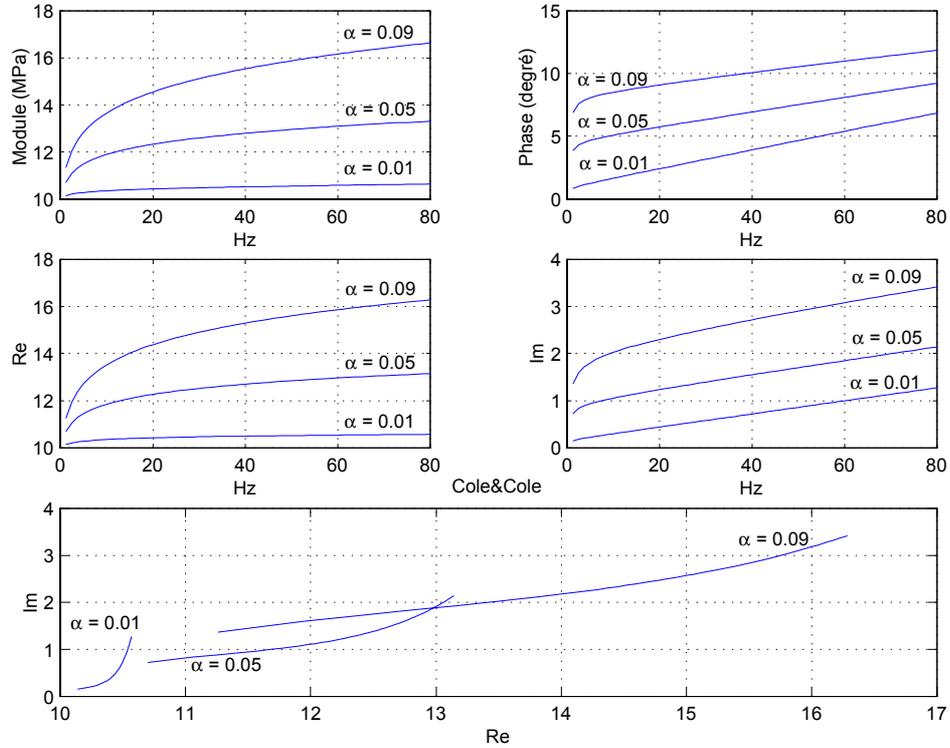


FIG. 3.24 – Module complexe du modèle MFAV pour différentes valeurs de α

3.7 Conclusion

Les modèles classiques ne sont pas adaptés à nos mesures et même les modèles classiques modifiés comme Zener fractionnaire, Maxwell fractionnaire et Kelvin-Voigt fractionnaire ne conviennent pas, essentiellement parce que la représentation du module complexe dans le plan Nyquist est concave ou rectiligne pour ces modèles et qu'elle est convexe pour notre matériau.

Le modèle de Biot est intéressant mais il ne rend pas compte de la croissance à peu près linéaire de la partie imaginaire du module complexe pour les fréquences élevées. L'ajout en parallèle au modèle de Biot d'un amortisseur visqueux permet de pallier à ce défaut, et rend ce modèle appelé BTAV assez attractif pour modéliser notre élastomère. Ce modèle est en fait très proche du modèle hystérétique causal avec amortissement visqueux. La comparaison de ces deux modèles et du spring-pot nous a incité à introduire un nouveau modèle désigné par MFAV qui semble très satisfaisant. Ce nouveau modèle est caractérisé par quatre paramètres : E , α , η et ω_0 comme celui de BTAV. Le prochain chapitre

présentera une procédure d'identification des paramètres des modèles BTAV et MFAV à partir d'essais harmoniques. Les résultats seront analysés et commentés.

Chapitre 4

Identification à partir des essais dynamiques

Après l'étude des différents modèles viscoélastiques faite au chapitre précédent et au vue de nos données expérimentales, nous avons retenu deux modèles viscoélastiques linéaires : le modèle de Biot avec Amortissement Visqueux (BTAV) et le Modèle Fractionnaire avec Amortissement visqueux (MFAV). Ils dépendent tous les deux de quatre paramètres qui interviennent de façon non linéaire.

L'objectif de ce chapitre est l'identification des paramètres correspondants pour notre élastomère. Dans une première partie, nous allons d'abord brièvement présenter les données expérimentales que nous allons utiliser, puis nous présenterons une procédure d'estimation des paramètres pour le modèle BTAV, ensuite nous appliquerons la même démarche pour le nouveau Modèle Fractionnaire avec Amortisseur Visqueux (MFAV). Suivra ensuite une comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques obtenus avec ces deux modèles.

Dans la partie suivante, nous étudierons la fiabilité de la procédure d'identification et sa sensibilité à des perturbations des données. Enfin, dans une dernière partie, nous analyserons l'effet Payne, c'est à dire l'influence de l'amplitude des sollicitations et également celle de la précharge, et nous proposerons des formules permettant de faire évoluer la valeur des paramètres selon la précharge et l'amplitude.

4.1 Données expérimentales

Il s'agit des essais de compressions uniaxiales sous sollicitations harmoniques. Les mesures permettent d'obtenir le module complexe en fonction de la fréquence qui varie de 0.2 à 80 Hz ce qui donne un total de 67 points de mesures pour des pulsations ω_i variant de 1.26 à 502.6 rad/s . Afin d'analyser l'influence de la précharge et l'effet Payne, des mesures ont été effectuées pour différentes

précharges : 100, 200, 300 et 400 N et pour trois amplitudes différentes d'excitations harmoniques : 0.02, 0.05 et 0.1 mm .

Nous présentons en figure (4.1) les résultats expérimentaux concernant l'expérience avec une amplitude constante de 0.05 mm et avec une précharge statique de 200 N . Le module complexe est représenté classiquement sous cinq formes : le module du module d'Young complexe, la phase, les parties réelle et imaginaire en fonction de la fréquence et enfin le plan Nyquist ou Cole&Cole. Nous nous baserons sur cet essai pour présenter les techniques d'identification. Nous verrons que, pour ce qui concerne l'identification des paramètres des modèles, les parties réelle et imaginaire jouent un rôle fondamental dans l'analyse du comportement du matériau. Bien entendu, cette procédure d'identification s'applique aux autres essais et l'ensemble des valeurs identifiées sera présenté dans le paragraphe 4.4.

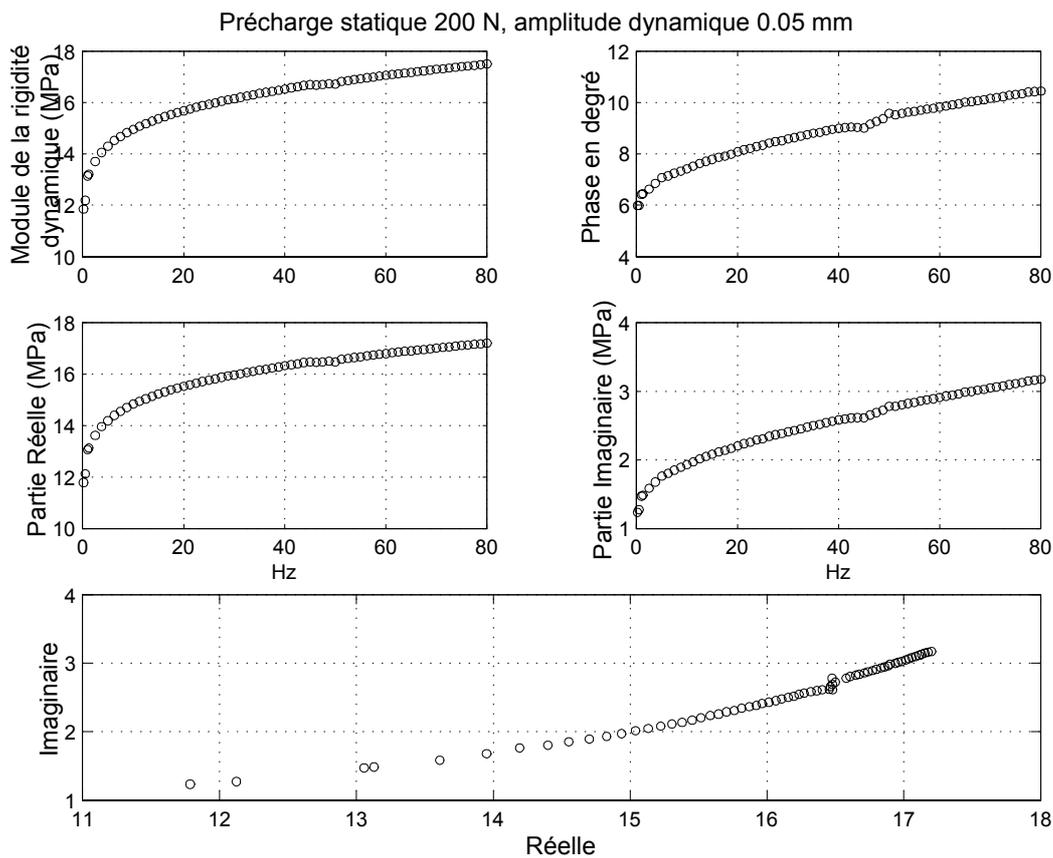


FIG. 4.1 – Mesures expérimentales de rigidité dynamique (Précharge statique 200 N, Amplitude dynamique 0.05 mm)

4.2 Procédure d'identification

4.2.1 Le principe

Le principe de l'identification des paramètres d'un modèle aux sens des moindres carrés consiste à minimiser une distance entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques correspondantes. Le choix de cette distance est important et définit le critère de convergence. Dans notre cas, les mesures nous donnent les valeurs expérimentales du module complexe pour les valeurs ω_i de la pulsation : $\widetilde{M}(\omega_i) = \widetilde{X}(\omega_i) + i\widetilde{Y}(\omega_i)$ avec $i = 1, \dots, N$ (ici $N = 67$). Nous cherchons les valeurs des paramètres du modèle qui minimisent l'écart entre \widetilde{M} et le module complexe théorique M . Cet écart est défini par :

$$\left\| \widetilde{M} - M \right\|^2 = \sum_{i=1}^N \left[\left(\widetilde{X}(\omega_i) - X(\omega_i) \right)^2 + \left(\widetilde{Y}(\omega_i) - Y(\omega_i) \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

Si les paramètres définissant le modèle interviennent de façon linéaire dans l'expression du module complexe $M(\omega)$, ce problème de minimisation conduit à un système linéaire par rapport à ces paramètres. Et il y a alors une solution unique si les données expérimentales sont indépendantes.

Dans le cas où les paramètres interviennent de façon non linéaire, il faut utiliser une méthode itérative et pour que cette méthode ait des chances de converger vers les valeurs espérées, il faut initialiser l'itération avec un jeu de paramètres assez proche du jeu de paramètres optimaux. Il est alors nécessaire de se servir des propriétés du modèle pour trouver des valeurs initiales raisonnables, ce qui sera fait dans le prochain paragraphe. Eventuellement, pour améliorer la convergence, on pourra être amené à modifier le critère (4.1), ce que l'on verra au paragraphe 4.2.3.

4.2.2 Estimation des paramètres pour le modèle de Biot avec amortissement visqueux

On rappelle que le module complexe du modèle de Biot avec amortissement visqueux (que nous désignons par l'abréviation BTAV) s'écrit :

$$M(\omega) = E \left\{ 1 + \alpha \ln \sqrt{1 + \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|^2} + i\alpha \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \right\} + i\eta\omega \quad (4.2)$$

Les paramètres interviennent de façon non linéaires mais si on regroupe les paramètres E et α en un seul paramètre ($E\alpha$) alors on peut noter que E , ($E\alpha$) et η interviennent de façon linéaire. La non linéarité est seulement due au paramètre ω_0 .

Les parties réelle et imaginaire sont :

$$X(\omega) = E + (E\alpha) \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.3)$$

$$Y(\omega) = (E\alpha) \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \eta\omega \quad (4.4)$$

On va d'abord utiliser les résultats expérimentaux concernant la partie imaginaire $Y(\omega)$ (cf. figure 4.1), pour obtenir des estimations des paramètres : $(E\alpha)$, η et ω_0 .

1- Estimation de η et de $(E\alpha)$

Le comportement asymptotique de la partie imaginaire (4.4) est :

$$Y(\omega) \simeq E\alpha \frac{\pi}{2} + \eta\omega \quad (4.5)$$

Le paramètre η est estimé à partir de la pente de l'asymptote de la courbe pour ω grand et $E\alpha$ est déduit de la valeur de l'ordonnée à l'origine. Les estimations de ces deux paramètres seront notées : η_0 et $(E\alpha)_0$.

2- Estimation de ω_0

Pour estimer ce paramètre, on peut utiliser la partie courbe du graphe de la partie imaginaire. En effet, en partant de l'expression (4.4) de la partie imaginaire $Y(\omega)$, on remarque que pour tout ω on a :

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \tan\left(\frac{Y(\omega) - \eta\omega}{(E\alpha)}\right) \quad (4.6)$$

donc pour chaque ω_i , on doit avoir :

$$\forall \omega_i, \quad \omega_0 = \frac{\omega_i}{\tan\left[\frac{Y(\omega_i) - \eta_0 \omega_i}{(E\alpha)_0}\right]} \quad (4.7)$$

Evidemment, cette estimation est numériquement très mauvaise si ω_i est grand car on obtient ω_0 comme un quotient de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Comme la partie imaginaire est courbe pour des fréquences inférieures à 10 Hz ce qui correspond environ aux dix premiers ω_i , le paramètre ω_0 est estimé à l'aide de ces $N_p = 10$ premiers

points. Sa valeur approchée ω_{0_1} , déduite de la relation 4.7, est définie par la moyenne :

$$\omega_{0_1} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\omega_i}{\tan \left[\frac{Y(\omega_i) - \eta_0 \omega_i}{(E\alpha)_0} \right]} \quad (4.8)$$

Le paramètre E n'intervient que dans la partie réelle $X(\omega)$ du module complexe $M(\omega)$.

3- Estimation de E

Partant de la relation (4.3), nous avons :

$$X(\omega) = E - E\alpha \ln \omega_0 + \frac{E\alpha}{2} \ln(\omega_0^2 + \omega^2) \quad (4.9)$$

Pour les ω très supérieurs à ω_0 , l'équation ci-dessus se comporte comme :

$$X(\omega) \simeq E - E\alpha \ln \omega_0 + E\alpha \ln \omega \quad (4.10)$$

En posant $K_1 = E - E\alpha \ln \omega_0$ et $E\alpha = (E\alpha)_1$, on peut obtenir une estimation de ces paramètres par une méthode de régression linéaire :

$$X(\omega) = K_1 + (E\alpha)_1 \ln \omega \quad (4.11)$$

On obtient une nouvelle estimation de $(E\alpha)_1$ de $E\alpha$, qui n'est pas très différente de la précédente. Connaissant déjà ω_{0_1} , on en déduit une estimation de E noté E_1 par :

$$E_1 = K_1 + (E\alpha)_1 \log \omega_{0_1} \quad (4.12)$$

Ainsi, les valeurs estimées des paramètres : $E_1, (E\alpha)_1, \omega_{0_1}$ et η_0 , on obtient par la méthode des moindres carrés non linéaires les valeurs approchées des quatre paramètres du modèle BTAV : $E, E\alpha, \eta$ et ω_0 .

Pour calculer ces paramètres nous avons utilisé le logiciel MATLAB qui possède une boîte à outils relative à l'optimisation. Nous avons utilisé la méthode de Levenberg-Marquadt qui est implémentée dans la fonction LSQNONLIN.

4.2.3 Modifications du critère de convergence et résultats pour BTAV selon les critères

En appliquant la procédure d'identification définie ci-dessus, on obtient les valeurs suivantes pour les paramètres estimés et les paramètres finalement identifiés à l'aide du critère 1 (4.1) :

Paramètres	E (MPa)	α	η (MPa/s)	ω_0 (rad/s)
Estimés	11.17	0.102	0.00215	1.06
Identifiés : critère 1	11.07	0.0939	0.00340	1.59

Tableau 4.1 : Résultats de l'identification des paramètres de BTAV (critère 1)

En traçant sur un même graphique (4.2) les données expérimentales et le modèle BTAV obtenu en première approximation ainsi que celui obtenu ensuite grâce au critère 1 (4.1), on observe que l'identification de la partie imaginaire pourrait être meilleure, en particulier la valeur finale du paramètre η est un peu surestimée.

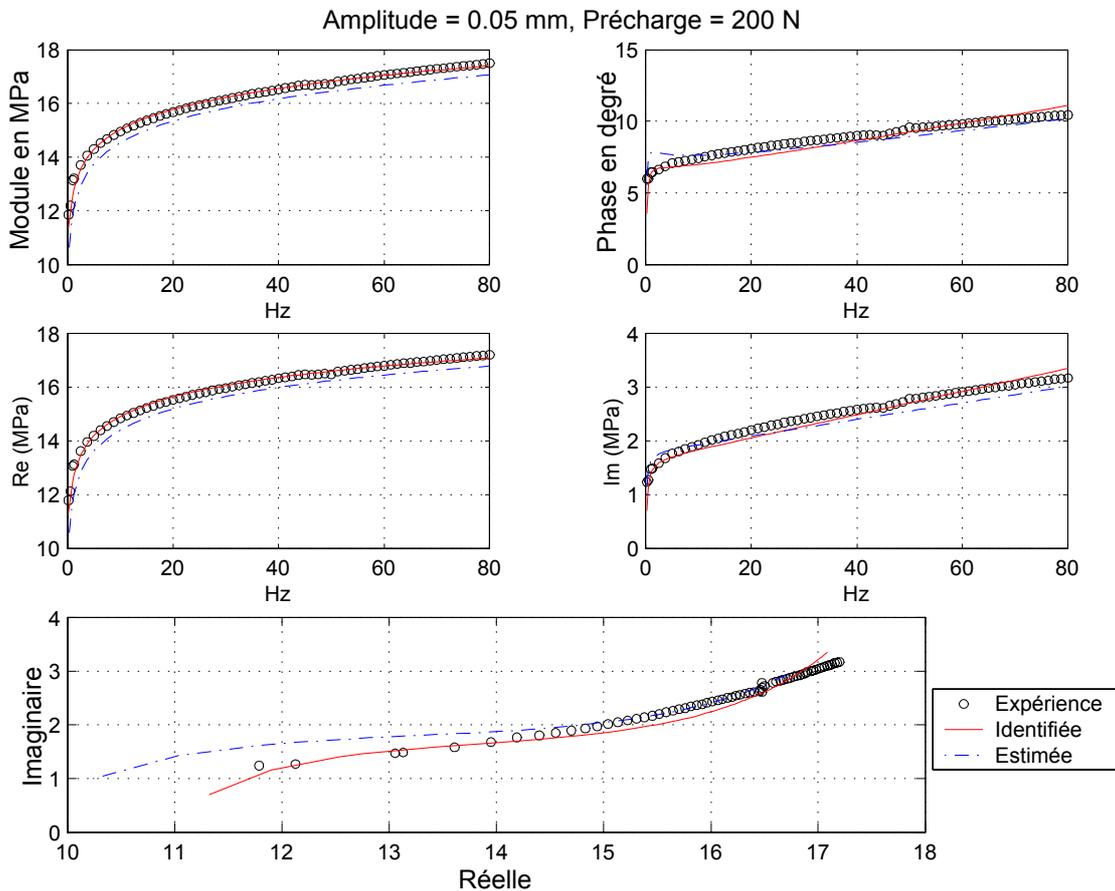


FIG. 4.2 – Comparaison entre les données expérimentales et le modèle BTAV obtenu en première estimation et celui obtenu avec le critère 1

Or, on peut remarquer que la partie imaginaire du module complexe est d'un ordre de grandeur (moyenne de 2 *MPa*) très inférieur à celui de la partie réelle (moyenne de 15 *MPa*). Ceci en utilisant le *critère 1* (4.1) favorise l'identification de la partie réelle, car en valeur absolue, la partie imaginaire de l'écart entre les deux courbes est moins importante que la partie réelle. Pour donner une même importance aux écarts relatifs, on peut penser utiliser un critère de la forme :

$$\left\| \widetilde{M} - M \right\|^2 = \sum_{i=1}^N \left[\left(\widetilde{X}(\omega_i) - X(\omega_i) \right)^2 + \left(\widetilde{X}(\omega_i) \right)^2 \left(\frac{\widetilde{Y}(\omega_i) - Y(\omega_i)}{\widetilde{Y}(\omega_i)} \right)^2 \right] \quad (4.13)$$

En fait, il suffit de calculer une valeur moyenne β^2 du terme $\left(\frac{\widetilde{X}(\omega_i)}{\widetilde{Y}(\omega_i)} \right)^2$ permettant de pondérer le critère de convergence et on définit ainsi un *critère 2* par :

$$\left\| \widetilde{M} - M \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \left[\left(\widetilde{X}(\omega_i) - X(\omega_i) \right)^2 + \beta^2 \left(\widetilde{Y}(\omega_i) - Y(\omega_i) \right)^2 \right] \quad (4.14)$$

Nous avons obtenu une amélioration sensible de l'évaluation de la pente de la courbe représentée dans le plan imaginaire du module complexe ainsi que la représentation Nyquist (cf. figure 4.3). Les valeurs estimées et identifiées sont résumées dans le tableau 4.2 ci-dessous :

Paramètres	E (<i>MPa</i>)	α	η (<i>MPa/s</i>)	ω_0 (<i>rad/s</i>)
Estimés	11.17	0.102	0.00215	1.06
Identifiés : critère 2	10.16	0.112	0.00294	1.06

Tableau 4.2 : Résultats de l'identification des paramètres de BTAV (critère 2)

Nous pouvons encore observer une légère sur-estimation de la phase ou de la partie imaginaire entre 70 et 80 *Hz*. Pour corriger ce défaut, le critère 2 est repris mais en plus une contrainte est imposée sur le paramètre η . La valeur estimée du paramètre η doit être une borne supérieure des valeurs acceptables. Pour cela, une contrainte bloquant les valeurs admissibles de η sous la valeur estimée η_0 est ajoutée ce qui donne le critère 2bis.

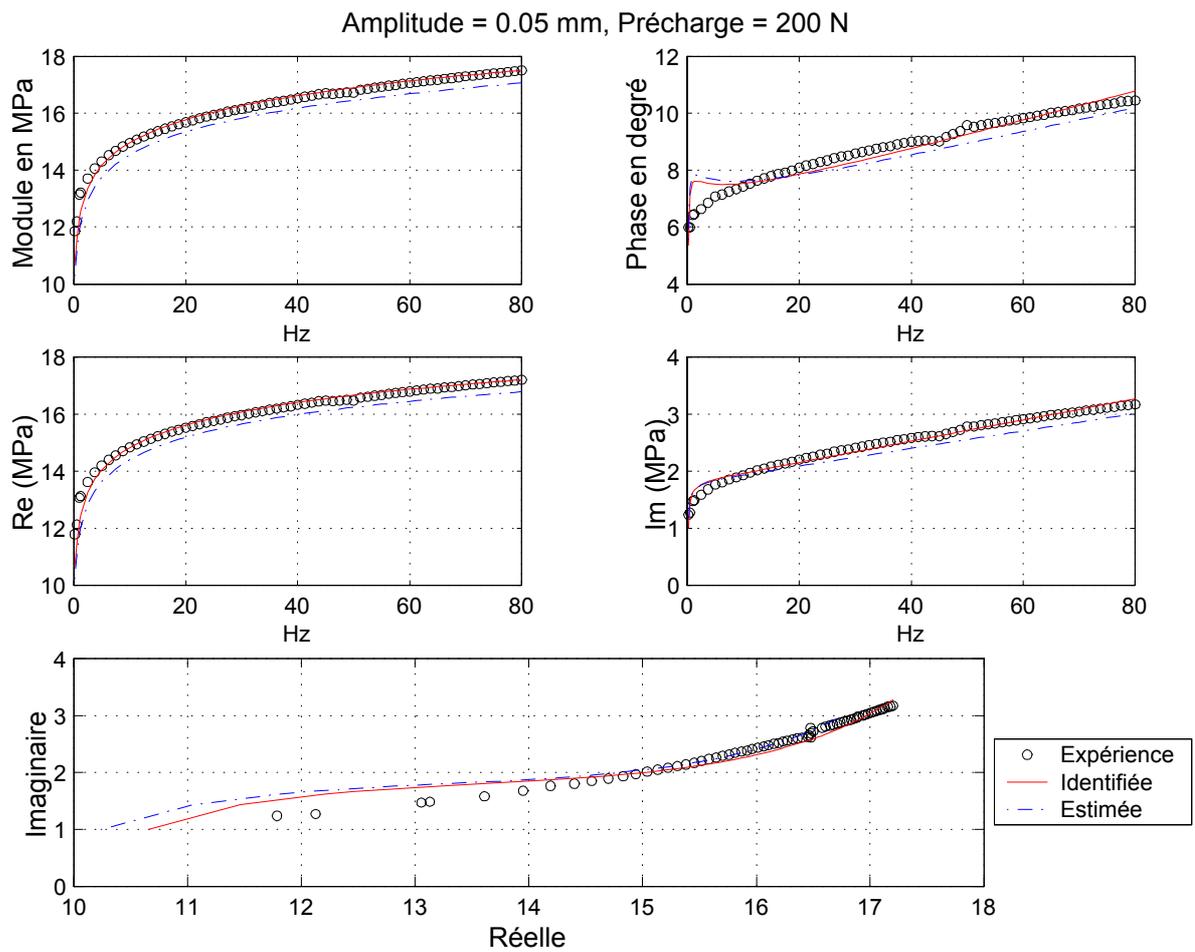


FIG. 4.3 – Comparaison entre les données expérimentales et le modèle BTAV obtenu en première estimation et celui obtenu avec le critère 2

Paramètres	E (MPa)	α	η (MPa/s)	ω_0 (rad/s)
Estimés	11.17	0.102	0.00215	1.06
Identifiés : critère 2bis	10.25	0.125	0.00215	1.97

Tableau 4.3 : Résultats de l'identification des paramètres de BTAV (critère 2bis)

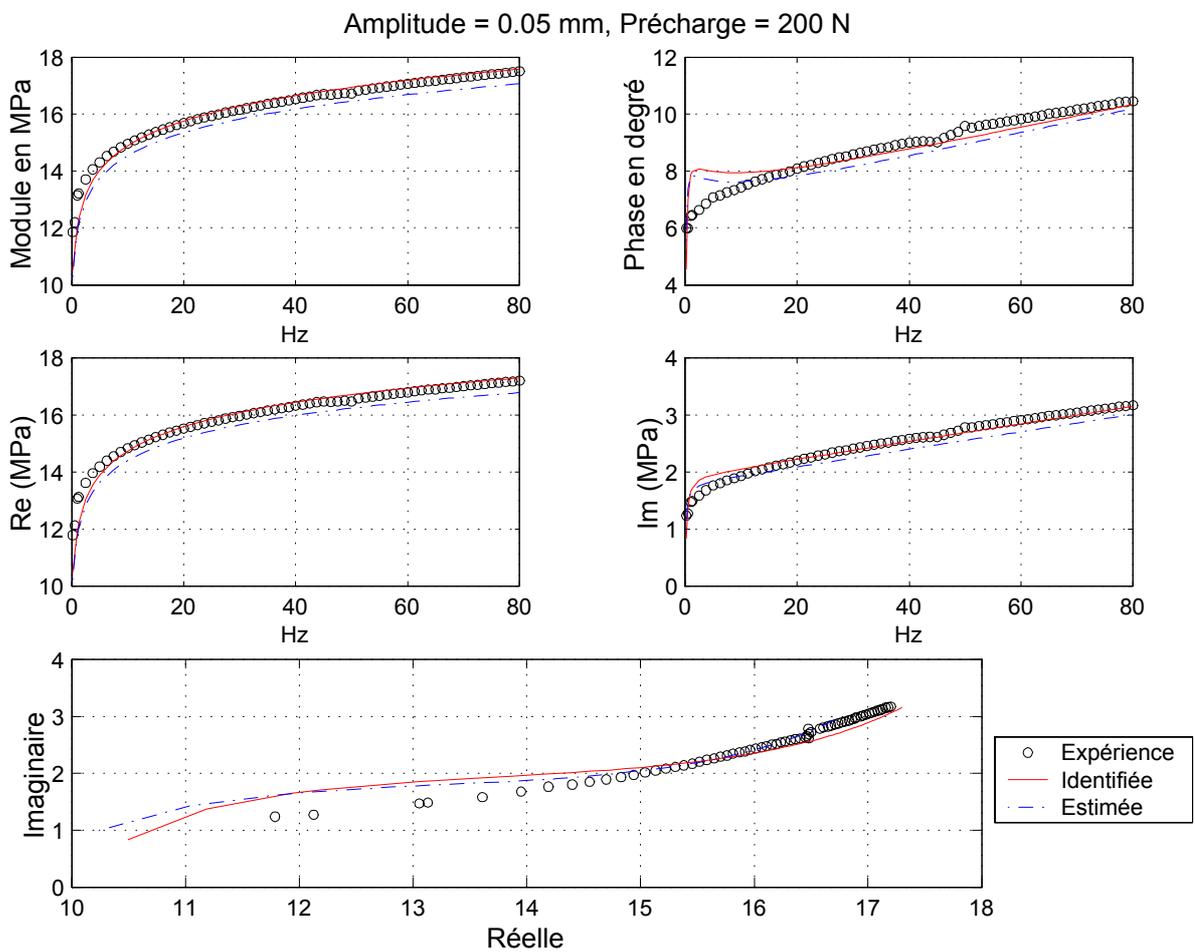


FIG. 4.4 – Comparaison entre les données expérimentales et le modèle BTAV obtenu en première estimation et celui obtenu avec le critère 2bis

On observe que les courbures sont améliorées dans les plans de phase et de la partie imaginaire du module complexe mais l'identification est légèrement sous estimée dans le plan Nyquist.

4.2.4 Résultats pour le modèle MFAV pour les différents critères

On rappelle l'expression du module complexe du modèle fractionnaire avec amortissement visqueux que nous désignons par l'abréviation MFAV :

$$M(\omega) = E \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha + i\eta\omega \quad (4.15)$$

Les quatre paramètres E , α , ω_0 et η interviennent de façon non linéaire d'où la nécessité d'initialiser les paramètres du modèle. Comme le modèle BTAV n'est qu'une approximation au premier ordre pour des α voisins de zéro de ce nouveau modèle, les paramètres identifiés pour le modèle BTAV vont être utilisés pour initialiser le modèle MFAV.

Nous venons de voir que le critère 2bis fournit la meilleure corrélation entre les courbes du modèle BTAV et de la mesure. Par conséquent, nous utiliserons les paramètres identifiés à partir du critère 2bis du modèle BTAV pour initialiser MFAV. Les résultats sont résumés dans le tableau 4.4 ci-dessous et sont illustrés pour chaque critère par les figures (4.5), (4.6) et (4.7) :

Paramètres	E (MPa)	α	η (MPa/s)	ω_0 (rad/s)
Estimés	10.25	0.125	0.00215	1.97
Identifiés : critère 1	10.69	0.0699	0.00283	0.527
Identifiés : critère 2	10.18	0.0775	0.00219	0.467
Identifiés : critère 2bis	10.60	0.0786	0.00210	0.833

Tableau 4.4 : Résultats de l'identification des paramètres de MFAV

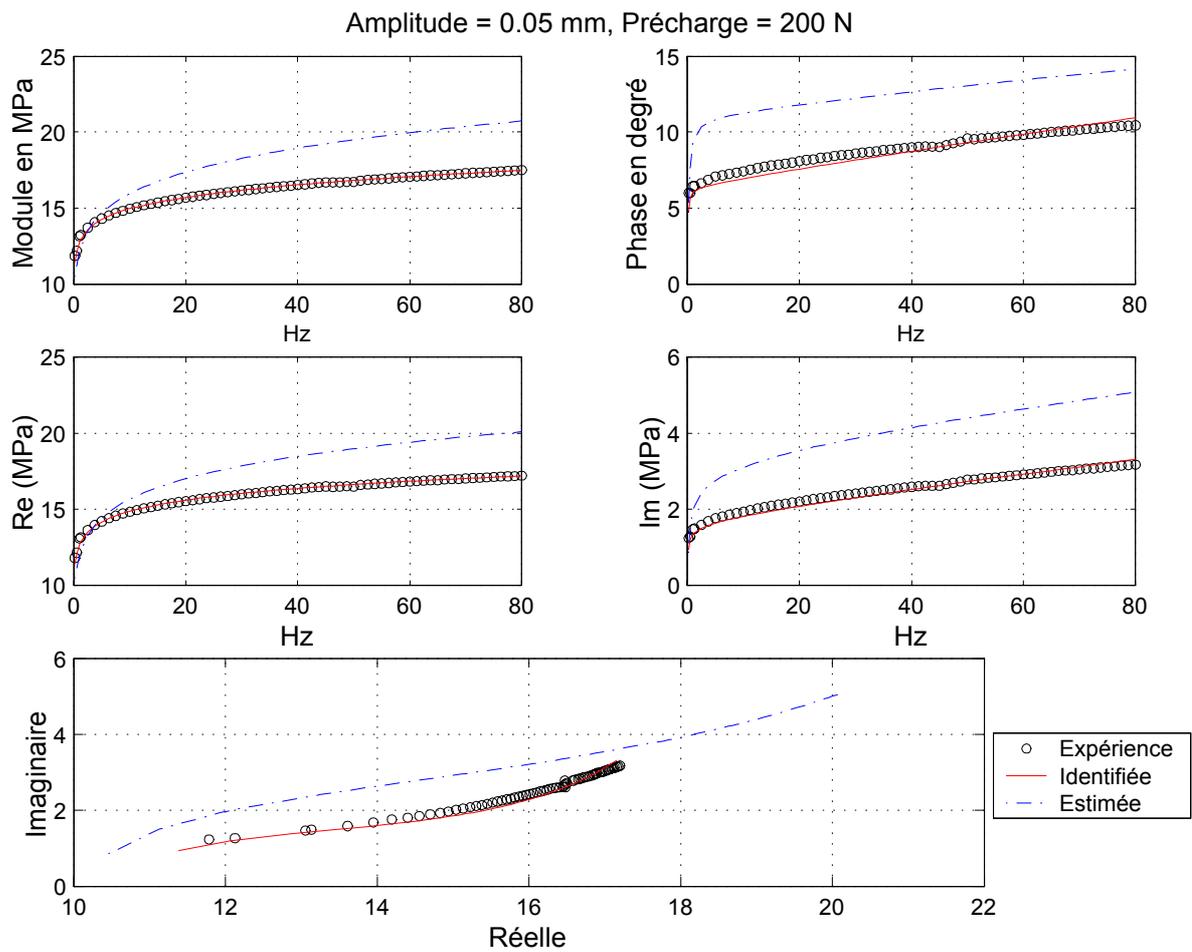


FIG. 4.5 – Comparaison entre les données expérimentales et le modèle MFAV obtenu en première estimation et celui obtenu avec le critère 1

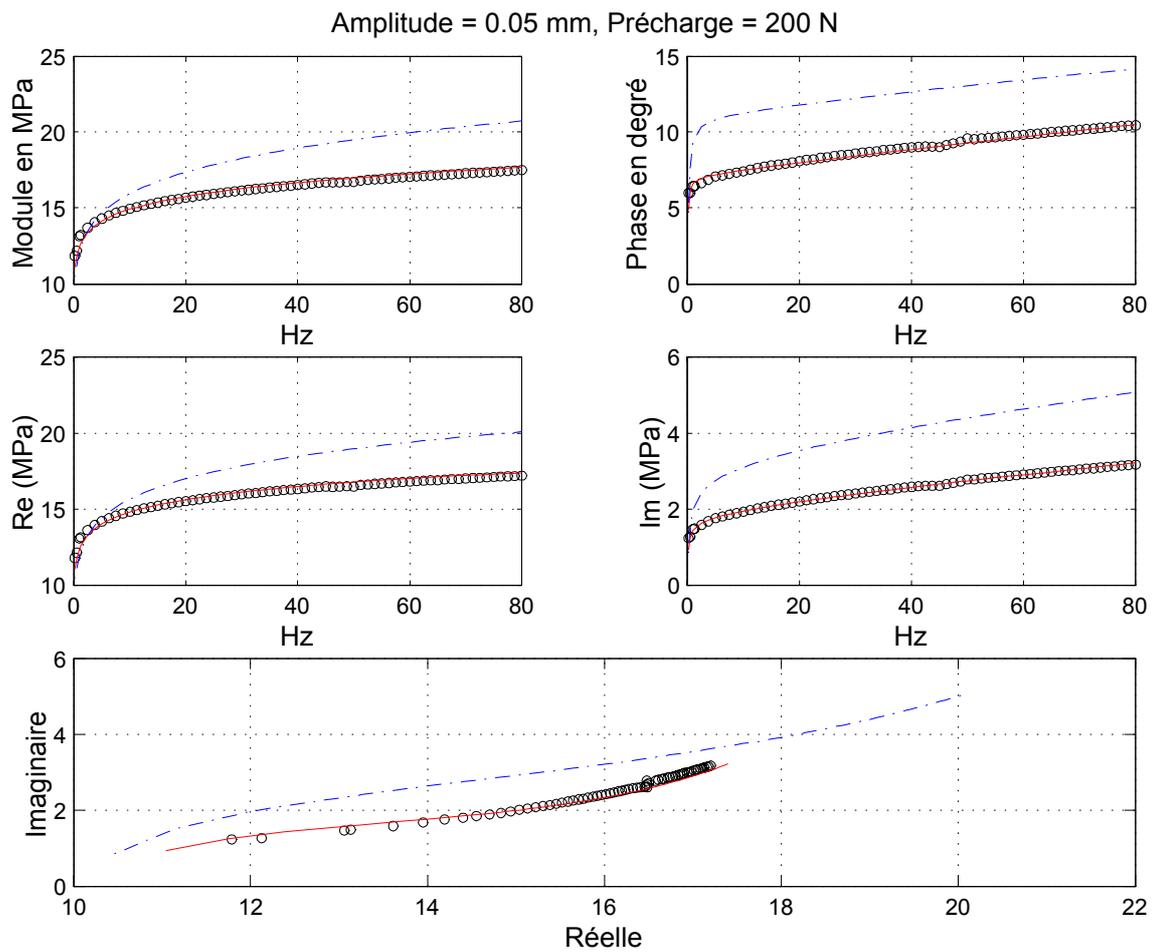


FIG. 4.6 – Comparaison entre les données expérimentales et le modèle MFAV obtenu en première estimation et celui obtenu avec le critère 2

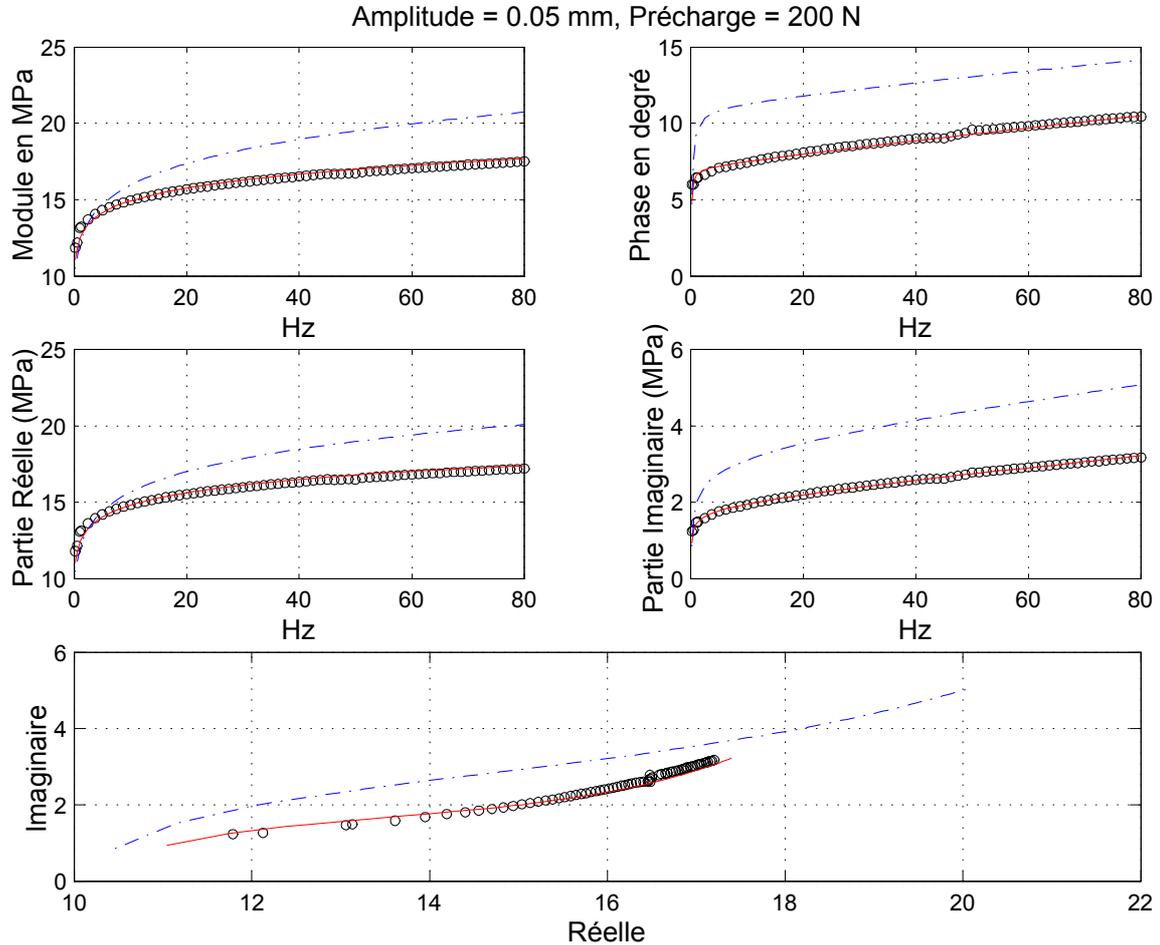


FIG. 4.7 – Comparaison entre les données expérimentales et le modèle MFAV obtenu en première estimation et celui obtenu avec le critère 2bis

Bien que les résultats numériques d'identification des paramètres pour les critères 2 et 2 bis soient légèrement différents, les résultats graphiques (cf. figures 4.6 et 4.7) sont pratiquement semblables et on peut remarquer qu'il n'y a pas de différence notable. Par la suite, nous avons choisi le critère 2bis pour comparer les résultats obtenus avec le modèle MFAV avec ceux obtenus avec le modèle BTAV. L'analyse comparative de ces deux modèles fait l'objet du prochain paragraphe.

4.2.5 Comparaison entre les modèles et l'expérience.

Ayant choisi le critère 2bis, cette section compare les résultats obtenus pour les deux modèles avec les données expérimentales. On a ainsi représenté sur la figure

(4.8) la superposition de trois courbes : la première est la donnée expérimentale, le second est le modèle BTAV identifié avec le critère 2bis et le troisième est le MFAV identifié avec le même critère.

On constate que le modèle BTAV présente pour les basses fréquences une phase largement sur-estimée et qui en plus présente une légère décroissance entre 5 et 20 Hz . Alors que le modèle MFAV suit parfaitement les données expérimentales sur toute la plage de fréquence considérée. Le modèle MFAV est, sans conteste, le modèle le mieux adapté à notre élastomère, surtout si on veut se concentrer sur le comportement à basses fréquences.

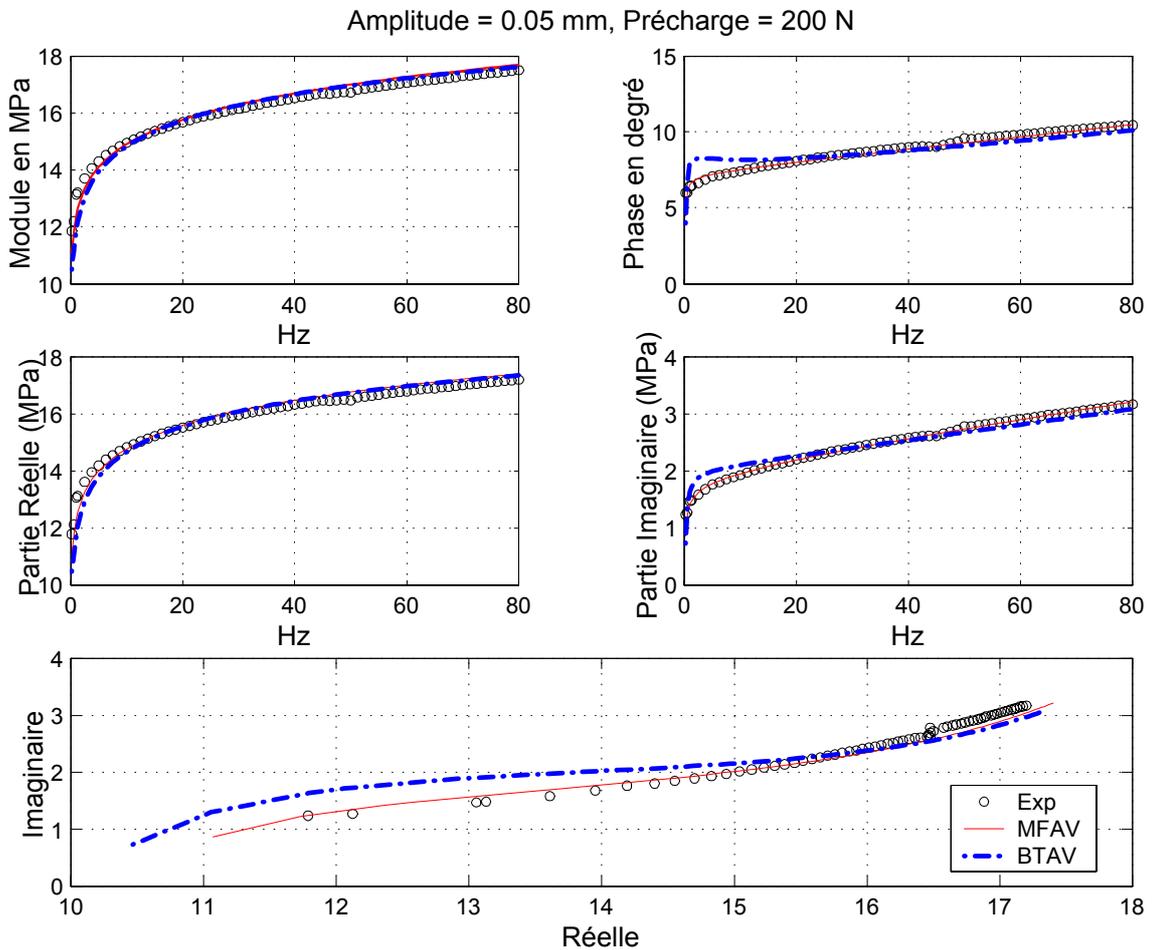


FIG. 4.8 – Comparaison entre les données expérimentales et les courbes obtenues grâce aux modèles BTAV et MFAV par le critère 2bis

4.3 Fiabilité de la procédure d'identification

Pour nous assurer de la fiabilité de la procédure d'identification, nous avons choisi arbitrairement les valeurs des paramètres E , α , η et ω_0 , et à partir des deux modèles, nous avons créé deux jeux de données numériques constituant des données expérimentales fictives. En appliquant la procédure d'identification définie ci-dessus à des données volontairement bruitées, nous avons pu tester la fiabilité de la procédure et sa sensibilité à des erreurs de mesures. Les valeurs choisies pour les paramètres sont de l'ordre de grandeur des valeurs identifiées, nous avons pris :

$$E = 10 \text{ MPa}, \quad E\alpha = 1.3, \quad \eta = 0.00215 \text{ MPa/s}, \quad \omega_0 = 2 \text{ rad/s}$$

4.3.1 Test de sensibilité pour le modèle BTAV

Nous avons soumis la procédure d'identification à un test de sensibilité en simulant les données expérimentales fictives qui sont non bruitées puis bruitées séparément à 10% et à 20% sur les parties réelle et imaginaire du module complexe (cf. tableau 4.5 et figure 4.9). Les résultats d'identification ont été obtenus avec le critère 2bis et sont résumés dans le tableau 4.5. La figure (4.9) présente les résultats des paramètres identifiés pour des données bruitées à 20%. Le tableau 4.6 donne les erreurs relatives exprimées en pourcentage pour chaque paramètre du modèle BTAV.

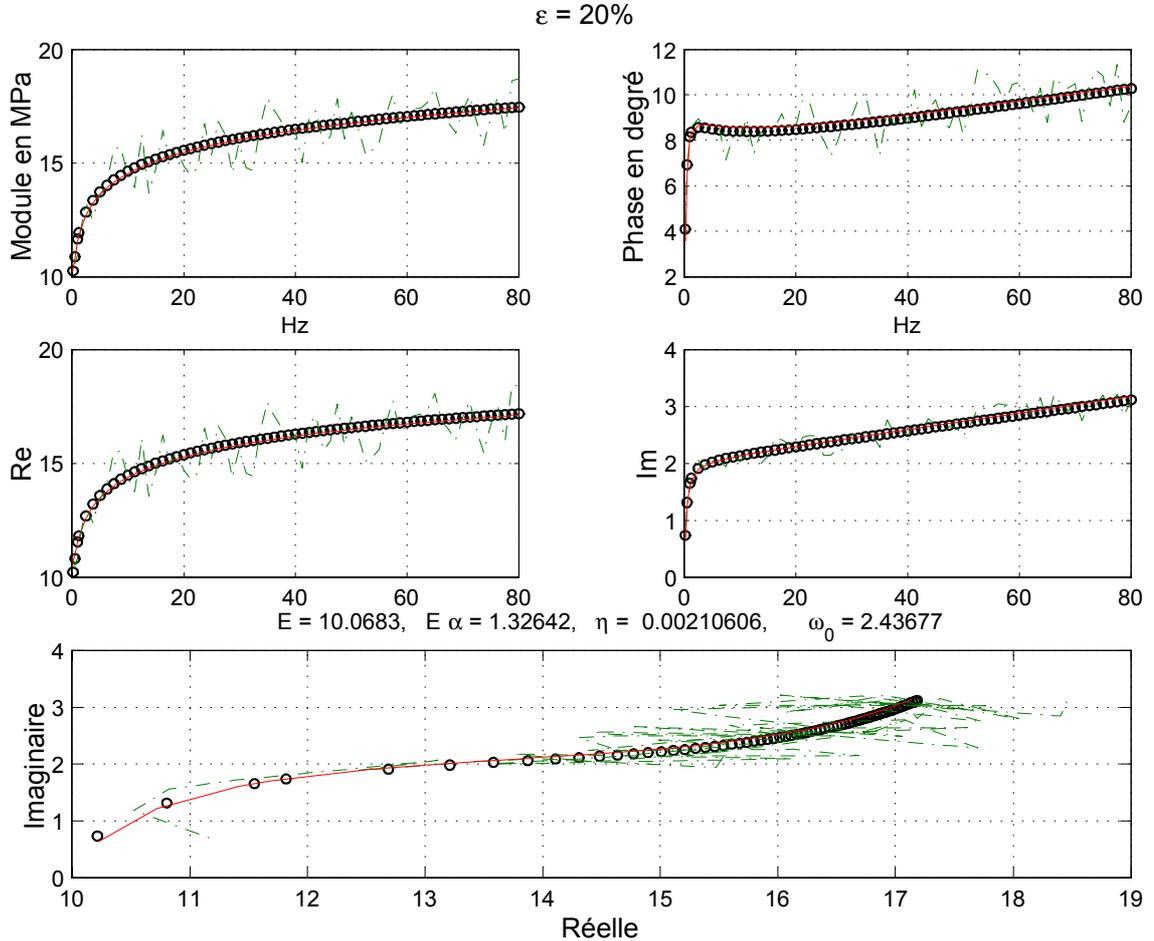
ε (%)	E (MPa)	$E\alpha$ (MPa)	α	η (MPa/s)	ω_0 (rad/s)
0	10	1.3	0.13	0.00215	2
10	9.98	1.302	0.130	0.00211	2.112
20	10.07	1.326	0.132	0.00211	2.437

Tableau 4.5 : Résultats de l'identification des paramètres simulés de BTAV (critère 2bis)

ε (%)	$\frac{\Delta E}{E}$	$\frac{\Delta(E\alpha)}{E\alpha}$	$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$	$\frac{\Delta\eta}{\eta}$	$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}$
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.16	0.15	0.30	1.98	5.61
20	0.68	2.03	1.34	2.04	21.84

Tableau 4.6 : Erreur relative exprimée en pourcentage

Globalement, les résultats montrent que même pour un bruit de 20% les erreurs relatives sur les paramètres sont inférieures à 3% sauf pour ω_0 . Mais pour 10% de bruit, l'erreur relative sur ω_0 reste inférieure à 6%. Le paramètre E est le plus stable. Même avec 20% de bruit, l'erreur relative sur E est de moins de 1%.

FIG. 4.9 – Identification des paramètres simulés du modèle MFAV pour $\epsilon=20\%$.

4.3.2 Test de sensibilité pour le modèle MFAV

Nous renouvelons la même méthode en prenant les mêmes valeurs des paramètres de départ que précédemment et en soumettant cette fois le modèle MFAV à un test de sensibilité en simulant les données expérimentales fictives. Les résultats sont résumés dans le tableau 4.7 ci-dessous :

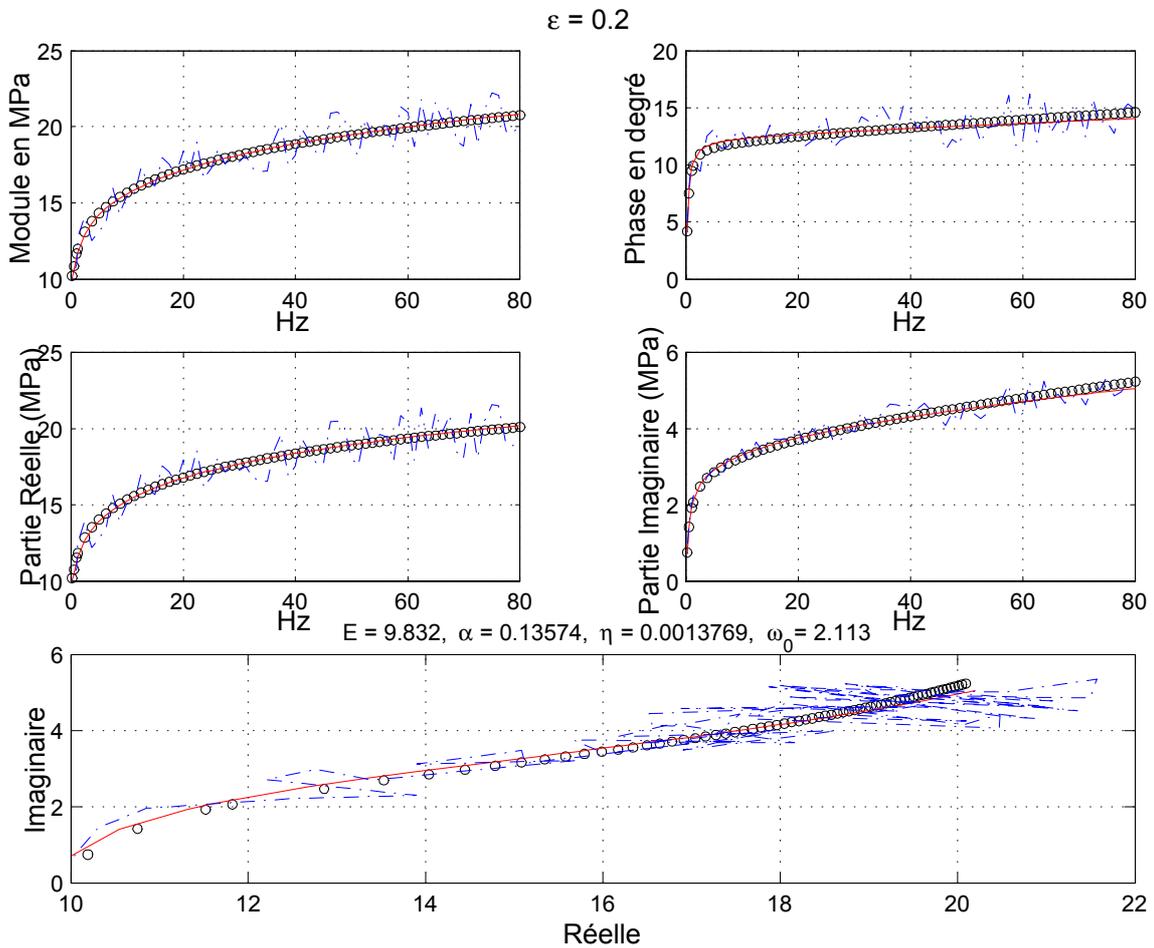
ϵ (%)	E (MPa)	$E\alpha$ (MPa)	α	η (MPa/s)	ω_0 (rad/s)
0	10	1.3	0.13	0.00215	2
10	9.91	1.291	0.1303	0.00218	1.93
20	9.83	1.335	0.1357	0.00138	2.11

Tableau 4.7 : Résultats de l'identification des paramètres simulés de MFAV

(critère 2bis)

ε (%)	$\frac{\Delta E}{E}$	$\frac{\Delta(E\alpha)}{E\alpha}$	$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$	$\frac{\Delta\eta}{\eta}$	$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}$
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.92	0.66	0.26	1.41	3.70
20	1.68	2.66	4.42	35.96	5.65

Tableau 4.8 : Erreur relative exprimée en pourcentage

FIG. 4.10 – Identification des paramètres simulés du modèle MFAV pour $\varepsilon=20\%$.

Au vu des erreurs obtenues dans le tableau 4.8, on constate encore une fois que le paramètre E est le plus stable et présente une erreur relative de moins de 2%.

4.4 Influence de la précharge et de l'amplitude sur les paramètres

Sur les essais dynamiques, on constate nettement une influence de la précharge et de l'amplitude. En fait, le module complexe est une fonction de la pulsation ω dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, mais son expression dépend des paramètres comme la précharge P et l'amplitude des sollicitations périodiques A , on a donc $M(\omega; P, A)$. Cette partie tente d'analyser les résultats obtenus selon la précharge et selon l'amplitude afin d'aboutir à une modélisation simple des variations des paramètres des modèles, tenant compte de ce phénomène.

4.4.1 Analyse des résultats

On observe une variation régulière des paramètres E , α et η en fonction de l'amplitude et de la précharge.

Localement, c'est à dire pour des précharges entre 100 et 400 N et pour des amplitudes d'oscillations inférieures à 0,1 mm, il apparait que les valeurs des paramètres E et α varient linéairement en fonction de la précharge P et de l'amplitude A : la figure (4.11) (resp. figure 4.12) représente la variation des valeurs de E (resp. α) identifiés avec le modèle BTAV a) et le modèle MFAV b) selon la précharge et selon l'amplitude.

Le paramètre η semble dépendre linéairement de l'amplitude A et être indépendant de la précharge P . Nous avons représenté sur les figures suivantes (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14) les variations des paramètres E , α , η et ω_0 des deux modèles selon la précharge P et l'amplitude A . Les précharges utilisées sont 100, 200, 300 et 400 N , les amplitudes sont 0.02, 0.05 et 0.1 mm . Les résultats des deux modèles considérés BTAV et MFAV sont présentés côte à côte.

Quant à ω_0 , sauf pour $P = 100 N$, il semble être indépendant de P et de A , et être de l'ordre de 2 rad/s pour BTAV et de 1 rad/s pour MFAV.

Le tableau 4.9 résume l'ensemble des valeurs des paramètres E , α , η et ω_0 identifiés des modèles BTAV et MFAV pour les précharges de 100 à 400 N et les amplitudes 0.02 à 0.1 mm .

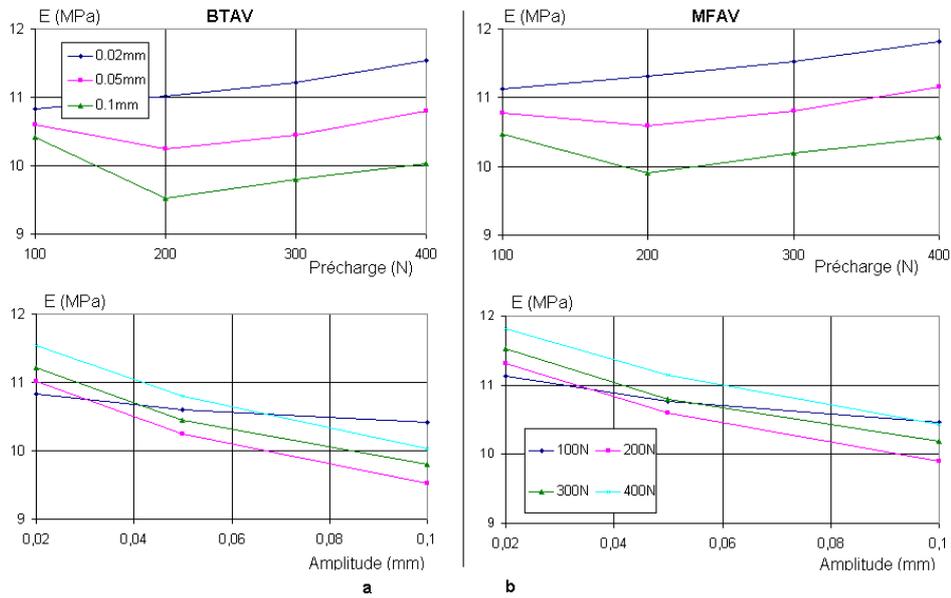


FIG. 4.11 – Variation des valeurs du paramètre E identifié avec BTAV a) et MFAV b) selon la précharge et l'amplitude

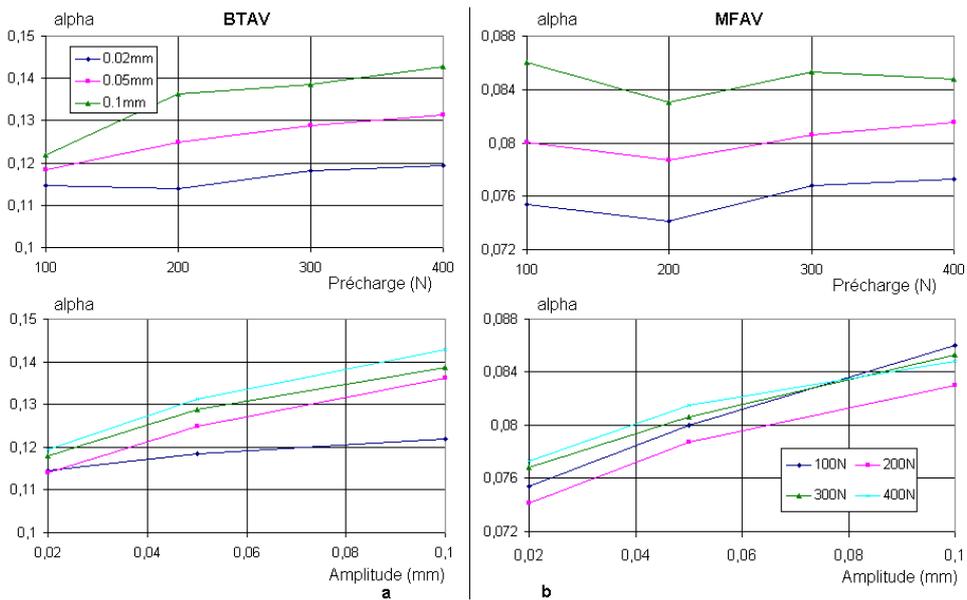


FIG. 4.12 – Variation des valeurs du paramètre α identifié avec BTAV a) et MFAV b) selon la précharge et selon l'amplitude

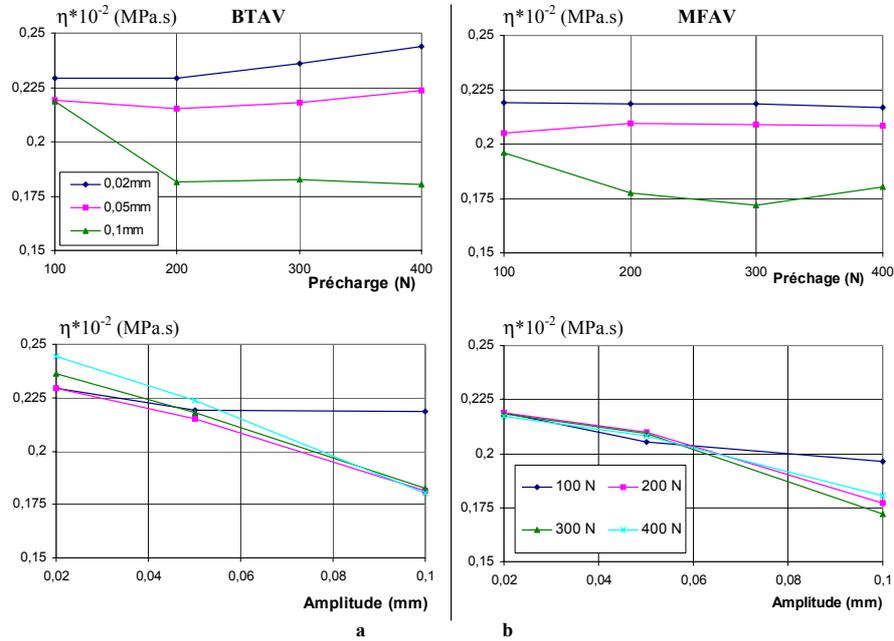


FIG. 4.13 – Variation des valeurs du paramètre η identifié avec BTAV a) et MFAV b) selon la précharge et l'amplitude

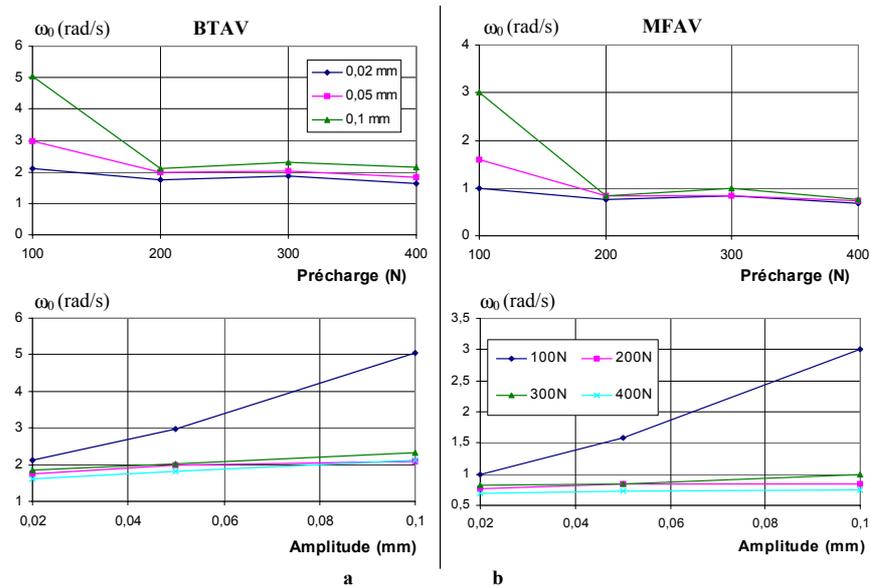


FIG. 4.14 – Variation des valeurs du paramètre ω_0 identifié avec BTAV a) et MFAV b) selon la précharge et l'amplitude

E (MPa)	BTAV			E (MPa)	MFAV		
P / A	0.02	0.05	0.1	P / A	0.02	0.05	0.1
100	10.8314	10.6068	10.4215	100	11.1333	10.7700	10.4678
200	11.0168	10.2485	9.5208	200	11.3165	10.5966	9.9023
300	11.2218	10.4407	9.7961	300	11.5267	10.8021	10.1871
400	11.5316	10.7966	10.0331	400	11.8190	11.1509	10.4273

α	BTAV			α	MFAV		
P / A	0.02	0.05	0.1	P / A	0.02	0.05	0.1
100	0.1146	0.1184	0.1220	100	0.0754	0.0800	0.0860
200	0.1140	0.1250	0.1363	200	0.0741	0.0786	0.0830
300	0.1181	0.1288	0.1386	300	0.0768	0.0806	0.0853
400	0.1195	0.1314	0.1428	400	0.0773	0.0815	0.0848

$\eta \cdot 10^{-2}$ (MPa.s)	BTAV			$\eta \cdot 10^{-2}$ (MPa.s)	MFAV		
P / A	0.02	0.05	0.1	P / A	0.02	0.05	0.1
100	0.2293	0.2191	0.2187	100	0.2192	0.2051	0.1961
200	0.2292	0.2149	0.1815	200	0.2187	0.2097	0.1774
300	0.2362	0.2178	0.1826	300	0.2183	0.2091	0.1718
400	0.2441	0.2238	0.1803	400	0.2171	0.2082	0.1803

ω_0 (rad/s)	BTAV			ω_0 (rad/s)	MFAV		
P / A	0.02	0.05	0.1	P / A	0.02	0.05	0.1
100	2.1239	2.9700	5.0503	100	0.9935	1.5884	3.0012
200	1.7509	1.9741	2.0866	200	0.7643	0.8329	0.8352
300	1.8559	2.0124	2.3229	300	0.8289	0.8446	0.9954
400	1.6129	1.8282	2.1289	400	0.6881	0.7290	0.7554

Tableau 4.9 : Valeurs des paramètres pour les deux modèles

4.4.2 Prise en compte de l'effet Payne et de l'effet de la précharge

L'analyse des résultats précédents montre donc que localement pour $100 \text{ N} \leq P \leq 400 \text{ N}$ et pour $0.02 \text{ mm} \leq A \leq 0.1 \text{ mm}$, les paramètres des modèles dépendent linéairement de P et A . Ainsi, par exemple, on pourrait écrire que le paramètre E est défini localement par :

$$E(P, A) = c_E + c_{EP} \cdot P + c_{EA} \cdot A \quad (4.16)$$

où c_E , c_{EP} , et c_{EA} sont les trois coefficients constants.

Mais le fait que P soit exprimée en Newton et que A soit en millimètre ne rende pas facile la comparaison des influences respectives de la précharge et de l'amplitude. Or la précharge imposée induit une réduction de la hauteur du plot appelée déplacement statique induit qui se mesure en millimètre. Si on note d ce déplacement statique, on peut établir une correspondance linéaire avec la précharge P . Des mesures ont été faites au LAMI et les résultats de ces mesures sont représentés sur la figure (4.15).

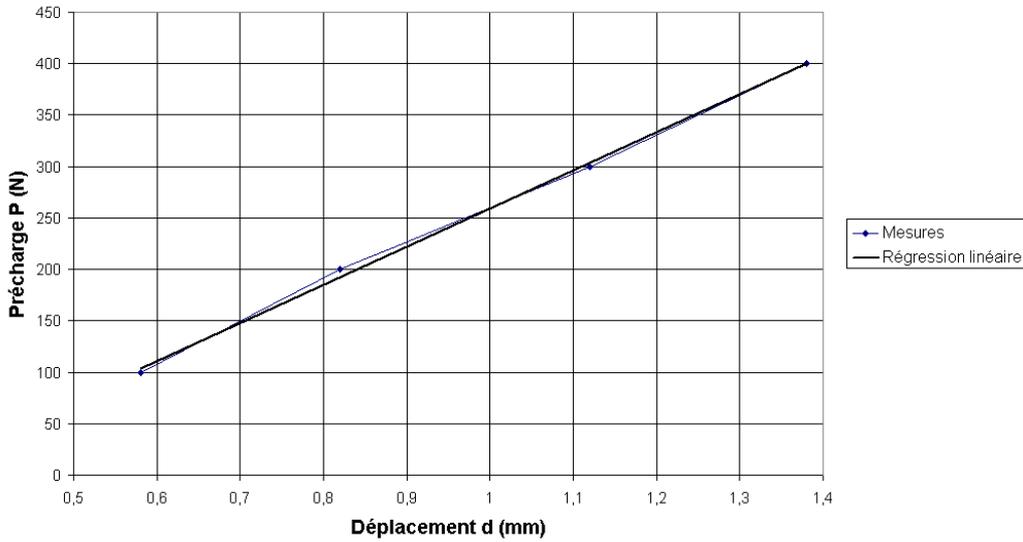


FIG. 4.15 – Evolution de la précharge en fonction du déplacement statique induit

La relation liant P (N) et d (mm) a été obtenue par une régression linéaire. On a :

$$P = 369.8d - 110.5 \quad (4.17)$$

ou encore :

$$d = 0.0027P + 0.3 \quad (4.18)$$

Cette dernière relation doit être utilisée avec précaution car elle n'est valable que dans la plage de précharge P : [100 N, 400 N]. Ayant ainsi converti la précharge en déplacement, on peut alors écrire :

$$E(d, A) = E_0 (1 + r_{E_d} * d + r_{E_A} * A) \quad (4.19)$$

avec r_{E_d} et r_{E_A} en mm^{-1} .

De la même façon, on peut écrire :

$$\alpha(d, A) = \alpha_0 (1 + r_{\alpha_d} * d + r_{\alpha_A} * A) \quad (4.20)$$

$$\eta(A) = \eta_0 (1 + r_{\eta_A} * A) \quad (4.21)$$

Les valeurs des coefficients correspondantes aux deux modèles sont données dans le tableau 4.10 ci-dessous :

BTAV	X_0	r_{X_d}	r_{X_A}
E	10.853	0.05817	-1.638
α	0.1008	0.1085	2.528
η	0.002497	0	-2.681
MFAV	X_0	r_{X_d}	r_{X_A}
E	11.0344	0.06522	-1.519
α	0.07181	0.03650	1.379
η	0.002310	0	-2.286

Tableau 4.10 : Coefficients définissant la dépendance des paramètres en fonction du déplacement d et de l'amplitude A

Les relations (4.19), (4.20) et (4.21) sont des interpolations pour n'importe quelle amplitude A comprise entre $0.02 \text{ mm} < A < 0.1 \text{ mm}$ et n'importe quel déplacement induit d compris entre $0.57 \text{ mm} < d < 1.38 \text{ mm}$ (cet intervalle est équivalent à $100 \text{ N} < P < 400 \text{ N}$). L'écart maximum entre les valeurs interpolées et les valeurs identifiées des paramètres, est de l'ordre de 1% pour E et α et d'environ 1,5% pour η , ce qui est de l'ordre de précision des mesures.

On a donc par exemple pour BTAV :

$$\eta(A) = 0.0025(1 - 2.681 A) \quad (4.22)$$

sachant que A est toujours positif, cette formule ne peut être valable que si $A < 0.37 \text{ mm}$. Par conséquent, on ne peut extrapoler ces relations sans précautions : il faut s'assurer de ne pas sortir du domaine de validité. Il est bien sûr tentant de vouloir extrapoler et utiliser ces relations en dehors du domaine $100 \text{ N} \leq P \leq 400 \text{ N}$ et $0.02 \text{ mm} \leq A \leq 0.1 \text{ mm}$. Mais cela ne peut pas se faire sans discernement. En effet, pour BTAV on a $\eta(A) = 0.0025(1 - 2.681 A)$ sachant que η est toujours positif, cette formule n'est plus valable si : $A > \frac{1}{|r_{\eta_A}|} = 0.373 \text{ mm}$. La figure (4.16) montre les tracés des paramètres E et η pour le modèle BTAV en fonction de l'amplitude A avec un déplacement statique moyen de 1 mm . Ces fonctions (4.19 et 4.21) sont décroissantes en fonction de l'amplitude, mais on sait que les paramètres E et η restent toujours strictement positifs. Dans ces deux formules, (4.19) et (4.21) ne peuvent être valables pour de trop grandes amplitudes. C'est pour cette raison que nous avons proposé une courbe d'extrapolation possible pour A strictement supérieure à 0.1 mm (cf. figure 4.16).

Nous avons supposé que E reste supérieur à 6.2 MPa (cf. chapitre 5) et que η reste supérieur à 0.001 MPa.s .

Cependant cette interpolation linéaire des paramètres du modèle en fonction de la précharge et surtout de l'amplitude des oscillations imposées permet de prendre en compte de façon assez simple les aspects non linéaires du comportement de l'élastomère considéré.

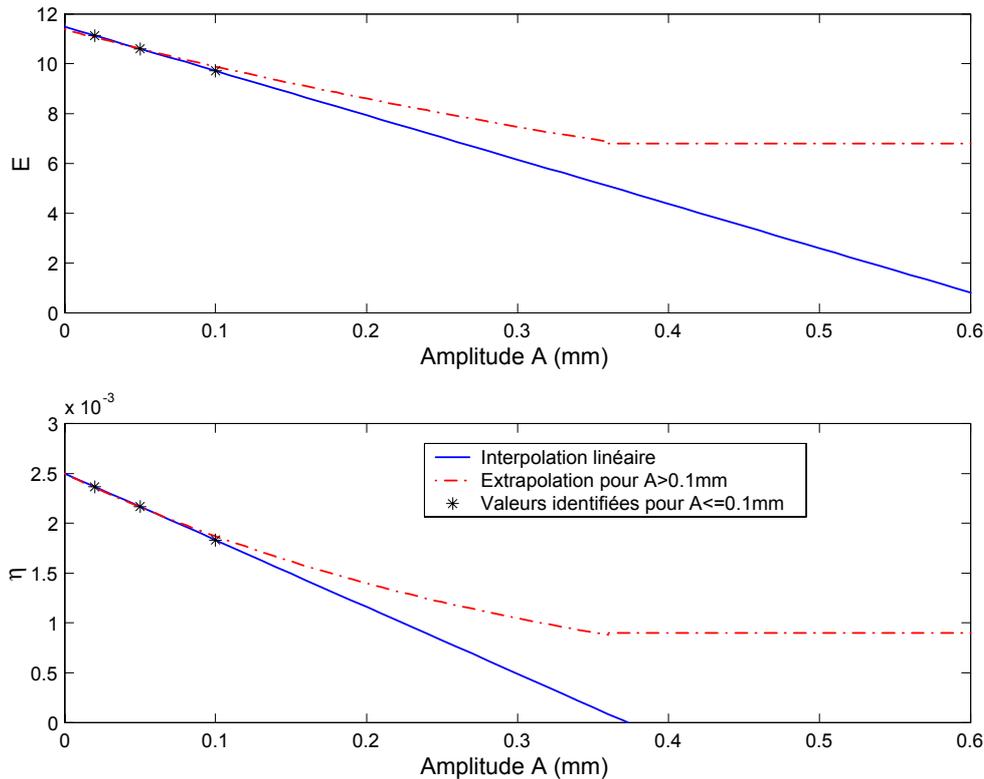


FIG. 4.16 – Exemple possible de convergence des paramètres E et η pour BTAV

Pour vérifier la validité de ces formules (4.19, 4.20 et 4.21) dans le cas d'une extrapolation a priori raisonnable, nous avons représenté sur la figure (4.17) le module complexe obtenu par extrapolation par rapport à l'amplitude pour les deux modèles dans le cas d'une précharge de 200 N correspondant à un déplacement $d = 0.84 \text{ mm}$ et une amplitude d'excitation de 0.2 mm . A cette amplitude, nous avons rencontré quelques problèmes d'asservissement entre le vérin et l'appareil d'acquisition de mesures (MTS 830) : les mesures sont prises jusqu'à 50 Hz .

On observe que le modèle MFAV donne une très bonne représentation dans le plan de la partie imaginaire du module complexe sur toute la gamme de fréquence.

Même si les deux modèles sous-estiment les courbes expérimentales dans les plans du module et de la partie réelle du module complexe pour les fréquences inférieures à 30 Hz, il y a toujours une certaine difficulté à s'ajuster à la courbe expérimentale dans les plans Nyquist et de la phase. Mais au dessus de la fréquence de 30 Hz, ces deux modèles prennent compte de façon satisfaisante le comportement de notre plot en particulier le modèle MFAV.

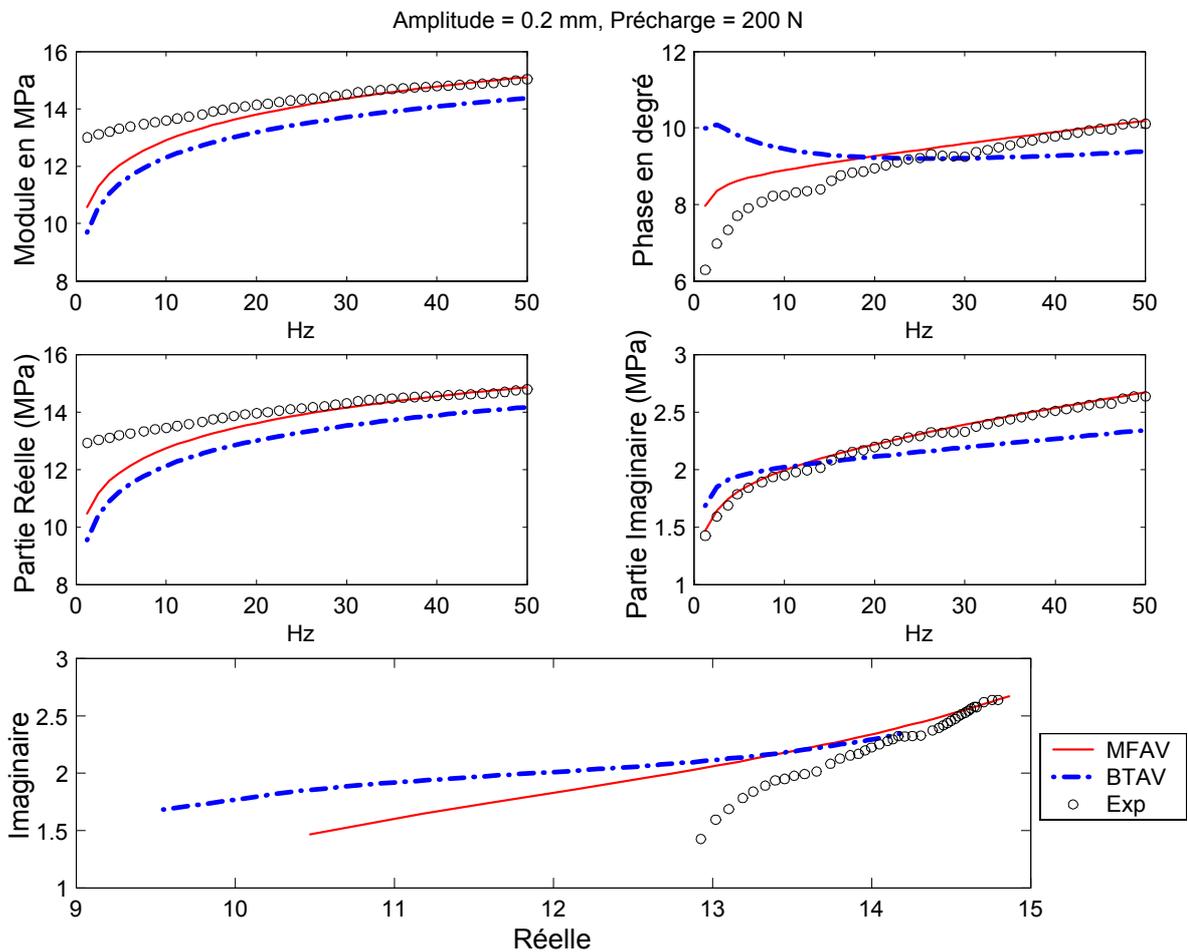


FIG. 4.17 – Comparaison et interpolation des modèles BTAV et MFAV dans le cas d'une précharge de 200 N ($d = 0.84$ mm) et d'amplitude d'excitation 0.2 mm

4.5 Conclusion : Validation du modèle et de l'interpolation linéaire

Nous avons étudié deux modèles susceptibles de représenter le comportement de notre matériau en basse fréquence ($0.2 - 80Hz$). Ces deux modèles dépendent de quatre paramètres qui ont été identifiés en utilisant une méthode de moindres carrés non linéaire de type Levenberg-Marquadt avec une pondération sur la partie imaginaire et une contrainte imposée sur le paramètre η (critère 2bis). Nous avons proposé une identification initiale des paramètres en utilisant les propriétés des parties réelle et imaginaire du module complexe de BTAV en fonction de la pulsation ω . Puis, les valeurs identifiées de ce dernier modèle ont servi à initialiser la procédure d'identification du modèle MFAV. La réussite des techniques d'identification dépend à la fois d'une bonne estimation initiale des paramètres mais aussi du choix d'un critère approprié.

Les résultats des tests de fiabilité ont montré la robustesse des moyens techniques mis en oeuvre dans la procédure d'identification. La différence entre les deux modèles apparaît à très basses fréquences où le modèle MFAV permet de mieux décrire les comportements aux fréquences inférieures à $10 Hz$ tandis que le modèle BTAV laisse apparaître une décroissance locale de la phase.

Enfin, nous avons établi des relations d'interpolation linéaire pour prendre en compte la dépendance des paramètres en fonction du déplacement induit par une précharge statique et de l'amplitude des oscillations. Elles ne sont valables que pour des précharges et des amplitudes dynamiques comprises entre $100 N$ et $400 N$ puis entre $0.02 mm$ et $0.1 mm$ respectivement.

Mais, nous avons pu vérifier qu'une extrapolation raisonnable donne encore une assez bonne corrélation avec l'expérience. Ainsi, on peut présumer que pour définir le comportement d'un élastomère dans un certain domaine de précharge $[P_{\min}, P_{\max}]$ et un certain domaine d'amplitude $[A_{\min}, A_{\max}]$ il suffira de faire quatre expériences, correspondant à toutes les combinaisons possibles des conditions extrêmes et les valeurs des paramètres dans les cas intermédiaires pourront en être déduites par interpolation linéaire.

Chapitre 5

Vérification de la prédictivité : essais quasi-statiques et essais de relaxation

Dans le chapitre précédent, nous avons identifié les deux modèles que nous avons retenus, à savoir le modèle de Biot avec Amortissement Visqueux et le nouveau Modèle Fractionnaire avec Amortissement Visqueux. De plus, nous avons établi des relations permettant d'explicitier les paramètres de ces modèles en fonction du déplacement statique et de l'amplitude des oscillations imposées afin de tenir compte du comportement non linéaire de notre élastomère.

L'objectif principal de ce présent chapitre est d'étudier la prédictivité de nos modèles dans le domaine temporel c'est à dire comparer les prévisions théoriques de ces modèles aux résultats expérimentaux. Deux sortes d'essais sont considérés : des essais périodiques triangulaires à basses fréquences et des essais de relaxation.

Dans la première partie, on considère deux sortes de sollicitations : il s'agit dans un premier temps de comparer la réponse temporelle à une sollicitation triangulaire périodique des modèles identifiés avec celle du plot mesurée. On analyse aussi l'influence de la prise en compte des variations des paramètres selon le déplacement et l'amplitude. Enfin, dans un second temps, on propose à l'aide des algorithmes de transformées de Fourier rapides (FFT) le calcul de la réponse temporelle de ces modèles à une sollicitation quelconque. A partir des mêmes essais expérimentaux, la réponse des deux modèles identifiés calculée par ce procédé est comparée à celle obtenue par la mesure.

Dans la seconde partie, nous étudions la réponse à un échelon de déformation (nous ferons deux essais : l'un avec du téflon pour éliminer l'effet tonneau, l'autre sans). Les résultats expérimentaux de ces essais de relaxation sont comparés avec les résultats prédits par les deux modèles choisis et identifiés.

5.1 Les essais quasi-statiques

5.1.1 Rappel des essais

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un essai triangulaire (déjà évoqué dans le chapitre 2) dont les conditions sont les suivantes : le plot est soumis à un déplacement périodique triangulaire autour d'une précharge théorique de 200 N et d'amplitude d'oscillation de 0.25 mm. La figure (5.1) montre l'évolution du déplacement et de la force en fonction du temps.

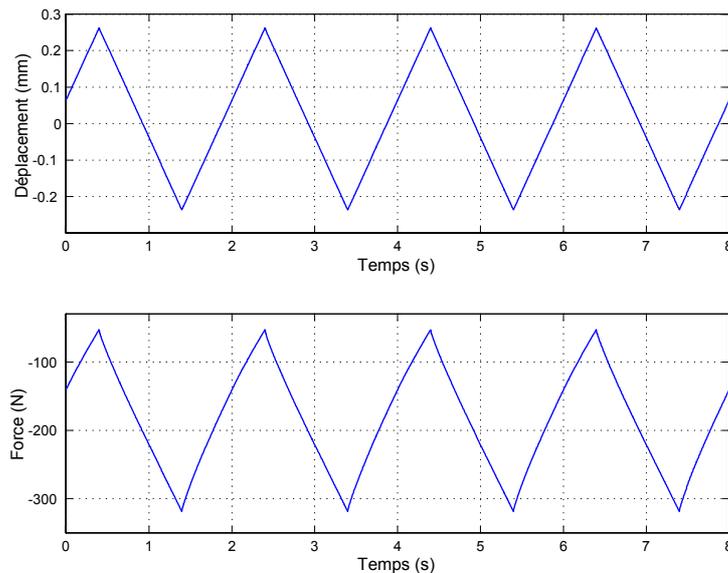


FIG. 5.1 – Essai triangulaire périodique (Précharge 200 N, Amplitude 0.25 mm)

On constate que cette sollicitation n'est pas parfaitement de moyenne nulle. Quand à la réponse en force, elle est décalée elle aussi à cause de la précharge imposée. Il faut donc commencer par traduire le signal d'entrée déplacement et le signal de sortie force pour obtenir des signaux de valeurs moyennes nulles (cf. figure 5.2) que l'on va comparer avec le résultat obtenu par la modélisation, c'est l'objet de ce chapitre.

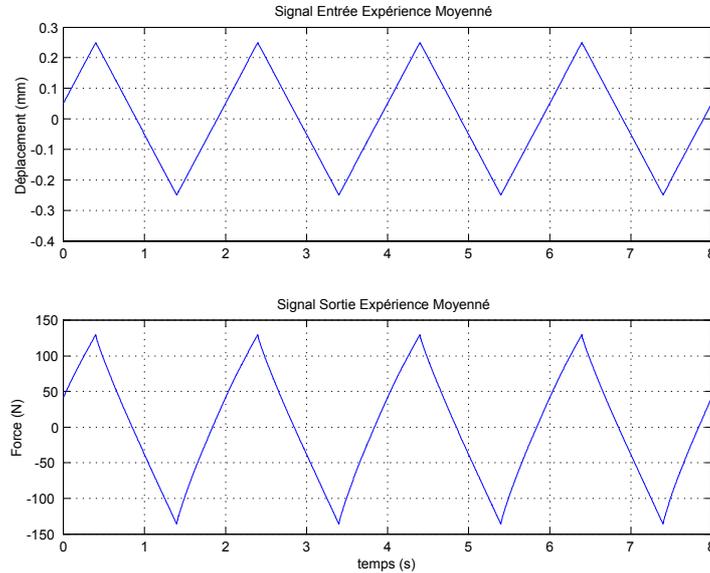


FIG. 5.2 – Entrée et sortie de signaux périodiques moyennés

5.1.2 Calcul de la réponse temporelle du plot à une sollicitation périodique

Le déplacement périodique triangulaire d'entrée est décomposé en série de Fourier. Sa période est notée T , on a :

$$h(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-in\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (5.1)$$

où les c_n représentent les coefficients de la décomposition en série de Fourier complexe du signal considéré.

On en déduit la force correspondante en tenant compte du facteur de forme $R_f = \frac{S}{H_0}$:

$$F(t) = R_f \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n M\left(n\frac{2\pi}{T}\right) \exp\left(-in\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (5.2)$$

où $M\left(n\frac{2\pi}{T}\right)$ est le module complexe calculé pour la fréquence $\frac{n}{T}$ (ou la pulsation $\omega = \frac{n2\pi}{T}$) de l'harmonique correspondant.

Bien entendu, numériquement on ne considère qu'un nombre fini d'harmoniques puisque l'on sait que pour une sollicitation continue les c_n tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

On utilise ensuite les valeurs des paramètres identifiés des modèles BTAV et MFAV pour $P = 200N$ et pour l'amplitude de 0.1 mm car c'est l'amplitude la plus proche de 0.25 mm pour laquelle on connaît le module complexe. Ces valeurs sont rappelées dans le tableau 5.1 ci-dessous :

Paramètres identifiés des modèles	E	α	η	ω_0
BTAV	9.52	0.1363	0.001815	2.09
MFAV	9.90	0.0830	0.001774	0.835

Tableau 5.1 : Valeurs des paramètres identifiés des modèles BTAV et MFAV pour 200 N et 0.1 mm

Nous avons calculé la force correspondante avec la méthode ci-dessus. Les résultats expérimentaux étant légèrement décalés verticalement par rapport aux résultats calculés, nous avons alors pris en compte la variation de hauteur du plot en remplaçant, dans le facteur de forme R_f , H_0 par la somme $H_0 + h(t)$ (où $h(t)$ est le déplacement d'entrée), et nous avons alors obtenu un résultat théorique en bon accord avec l'expérience. La figure (5.3) montre le déplacement et la force en fonction du temps pour l'expérience et par le calcul avec BTAV et avec MFAV. On constate sur la figure (5.3) que le modèle MFAV sur-estime légèrement les résultats de l'essai.

Pour voir les différences entre les modèles et l'expérience, dans la figure (5.4) nous avons agrandi une partie des courbes de la figure (5.3) :

Nous pouvons aussi constater dans le plan force-déplacement de la figure (5.5) que les résultats du modèle MFAV reproduisent un peu moins bien l'expérience que ceux du modèle BTAV qui sont très satisfaisants.

Prise en compte de la variation du module complexe avec l'amplitude

Nous avons, pour cette étude, choisi la valeur du module complexe obtenue pour 200 N et 0.1 mm d'amplitude c'est à dire pour un déplacement statique induit $d = 0.57\text{ mm}$ et $A = 0.1\text{ mm}$. Nous avons utilisé cette valeur pour tous les harmoniques, or ces harmoniques n'ont pas tous la même amplitude. Dans l'étude qui va suivre, nous allons remplacer $M\left(n\frac{2\pi}{T}; d, A\right)$ par $M\left(n\frac{2\pi}{T}; d, |c_n|\right)$. Nous proposons donc la formulation suivante qui est plus précise :

$$F(t) = R_f \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n M\left(n\frac{2\pi}{T}; d, |c_n|\right) \exp\left(-in\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (5.3)$$

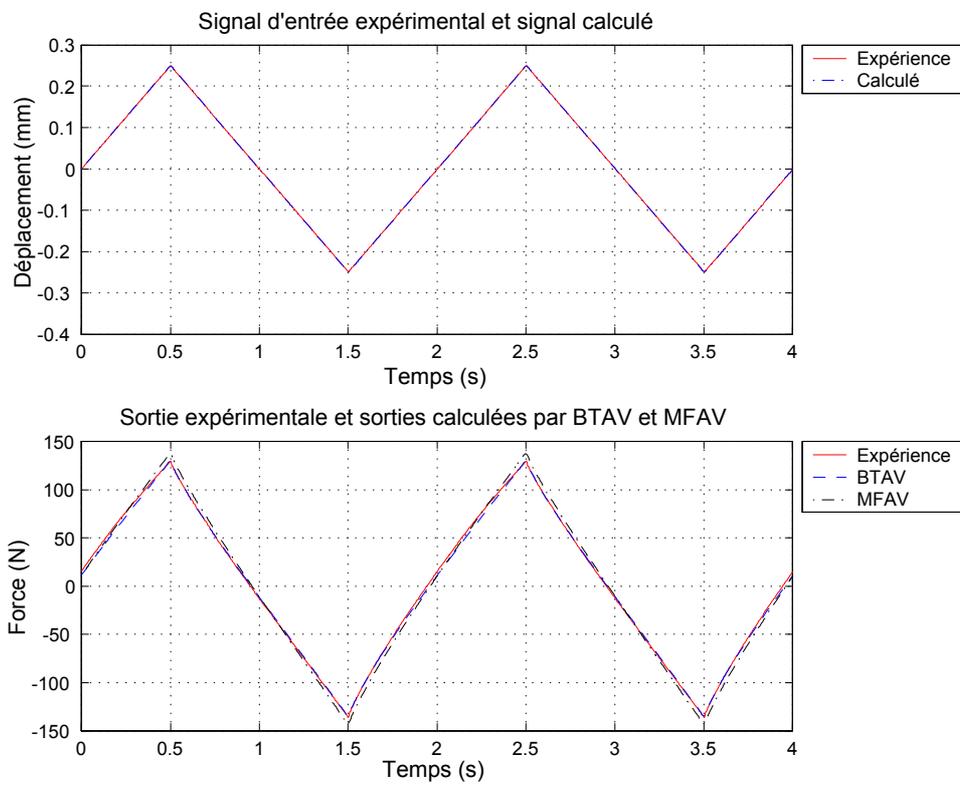


FIG. 5.3 – Comparaison expérience et calcul par les séries pour BTAV et MFAV

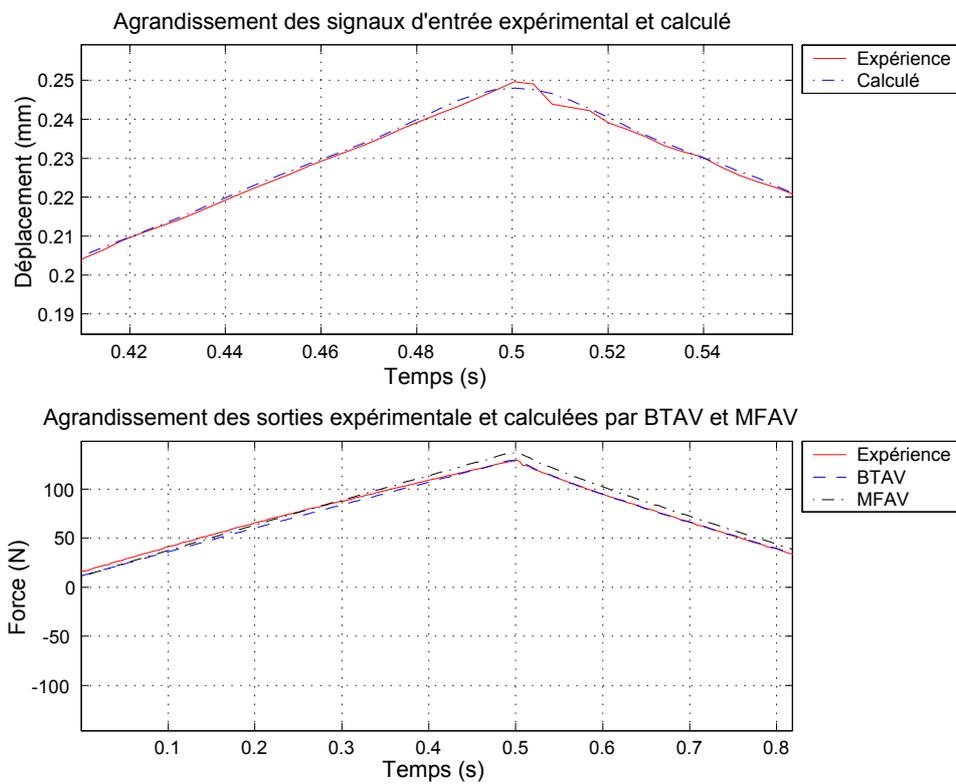


FIG. 5.4 – Comparaison expérience et calcul par les séries pour BTAV et MFAV
- Zoom local

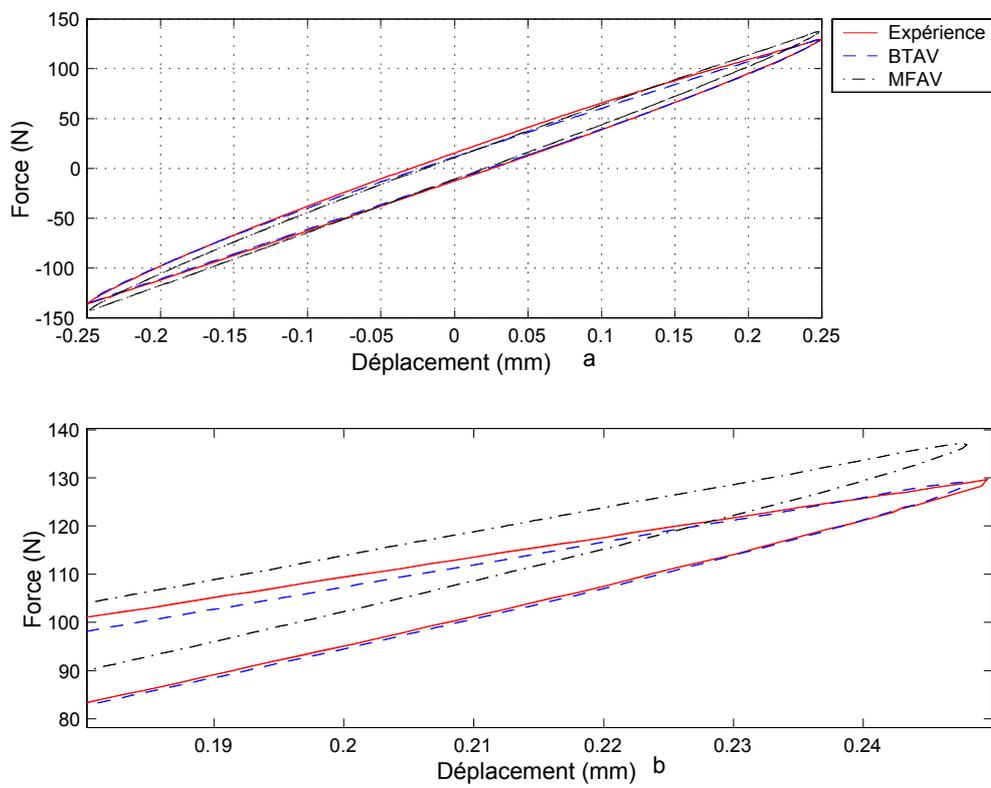


FIG. 5.5 – Comparaison expérience et calcul par les séries pour BTAV et MFAV dans le plan force-déplacement

Le cas BTAV

En utilisant la relation (5.3) pour le modèle BTAV, nous avons tracé figures (5.6) et (5.7) trois courbes superposées : l'expérience (en trait continu), BTAV (en trait discontinu) et BTAV avec interpolation linéaire (en trait -.) c'est à dire en prenant en compte la variation du module complexe avec l'amplitude.

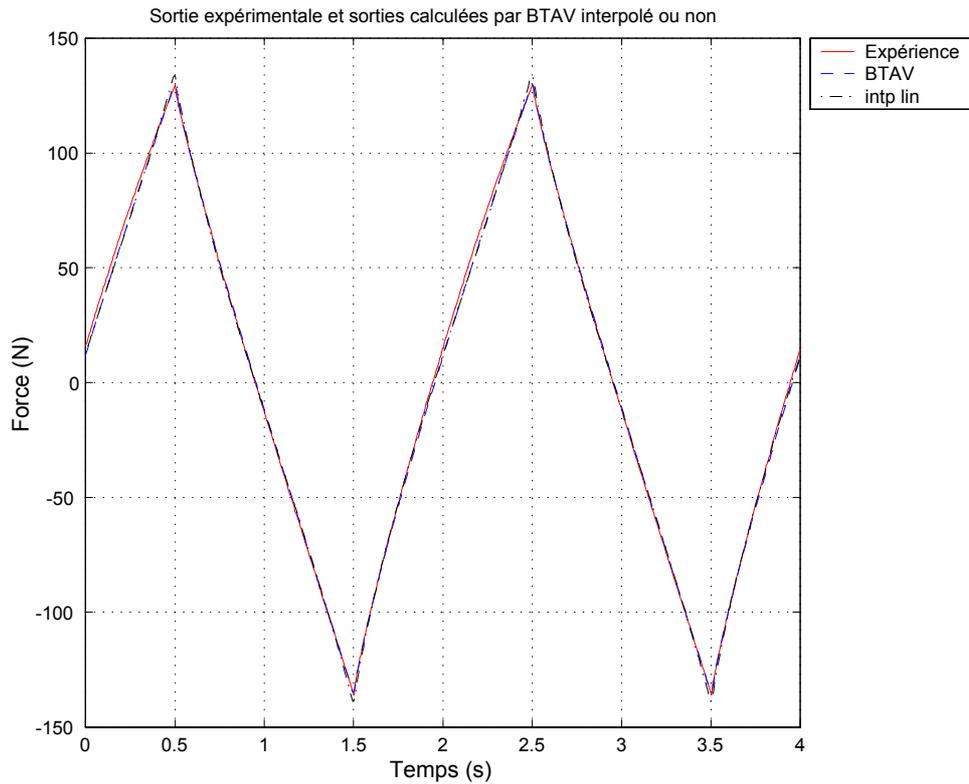


FIG. 5.6 – Influence de l'interpolation linéaire en fonction de l'amplitude pour BTAV

On constate que les forces calculées avec l'interpolation linéaire sont légèrement sur-estimées par rapport à l'expérience. Par contre, les premiers calculs sont en très bon accord avec l'expérience.

Le cas MFAV

En procédant la même façon que pour BTAV, on étudie l'influence de l'interpolation linéaire du modèle MFAV en comparant les résultats obtenus pour le modèle MFAV avec la relation (5.2) et la relation (5.3). Les figures (5.8) et (5.9)

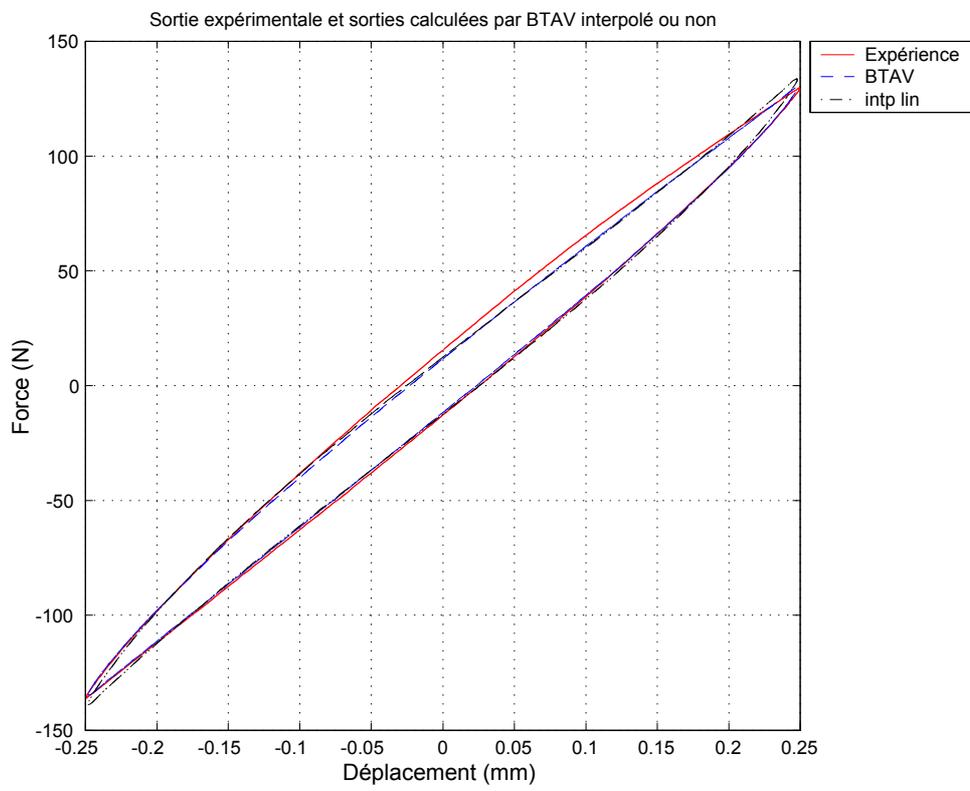


FIG. 5.7 – Influence de l'interpolation linéaire en fonction de l'amplitude pour BTAV

comparent pour le modèle MFAV, l'expérience et la simulation pour un module complexe sans variation et avec variation linéaire en fonction de l'amplitude.

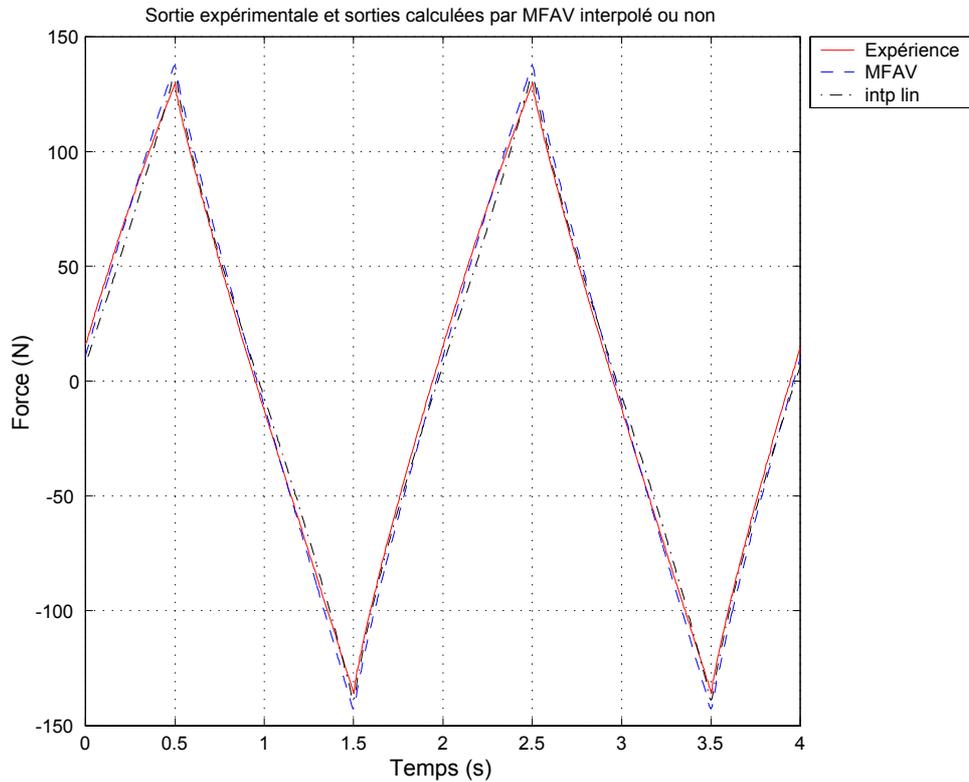


FIG. 5.8 – Influence de l'interpolation linéaire en fonction de l'amplitude pour MFAV

Ici, encore la prise en compte de la variation du module complexe avec l'amplitude n'a qu'une faible incidence sur les résultats. Mais on peut penser que cela pourrait être plus pertinent pour un déplacement imposé qui ne serait constitué que de deux harmoniques seulement avec des amplitudes très différentes et proches respectivement des valeurs extrêmes A_{\min} et A_{\max} utilisées pour identifier les modèles.

5.1.3 Calcul de la réponse temporelle du plot à une sollicitation quelconque

Nous avons, pour le calcul de la réponse temporelle à une sollicitation périodique quelconque, utilisé la transformée de Fourier et négligé la variation

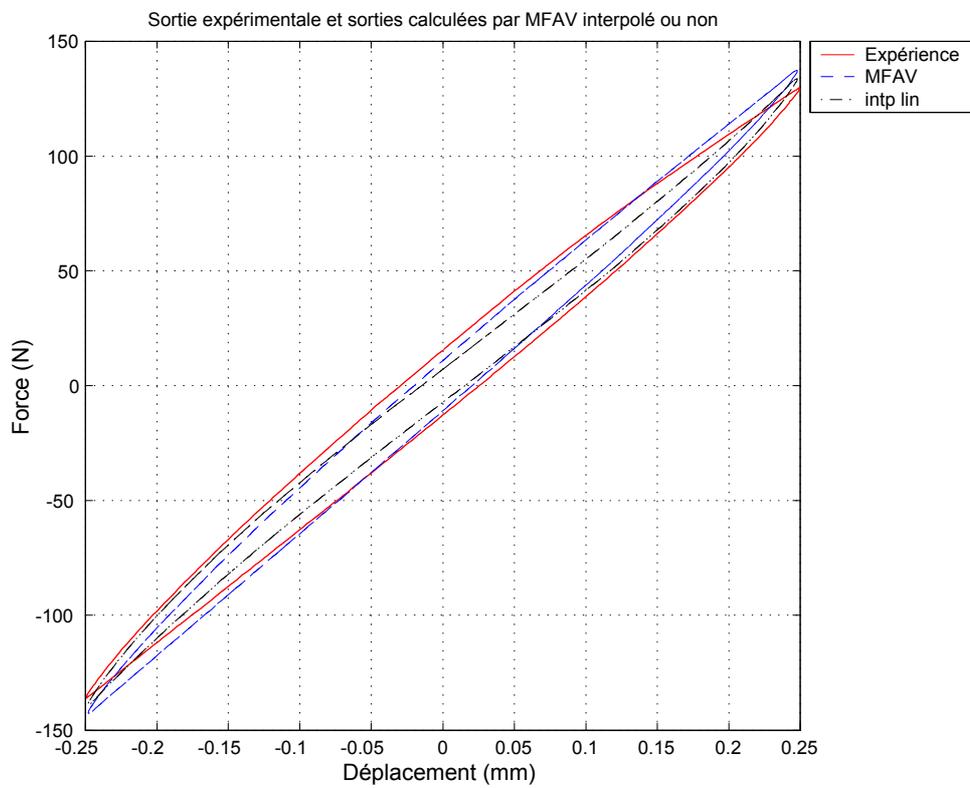


FIG. 5.9 – Influence de l'interpolation linéaire en fonction de l'amplitude pour MFAV

linéaire en fonction du déplacement d et de l'amplitude A . On sait que :

$$\hat{\sigma}(\omega) = M(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega) \quad (5.4)$$

où $\hat{\varepsilon}(\omega)$ et $\hat{\sigma}(\omega)$ sont respectivement les transformées de Fourier des déformations $\varepsilon(t)$ et des contraintes $\sigma(t)$.

En utilisant la transformée de Fourier inverse F^{-1} , on reconstruit le signal temporel :

$$\sigma(t) = F^{-1}(\hat{\sigma}(\omega))(t) = F^{-1}(M(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega))(t) \quad (5.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} M(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega) \exp(i\omega t) \quad (5.6)$$

Si on veut obtenir la force en fonction du déplacement, il suffit de tenir compte du facteur de forme.

$$F(t) = R_f \int_{-\infty}^{+\infty} M(\omega) \hat{h}(\omega) \exp(i\omega t) \quad (5.7)$$

Bien sûr numériquement, on utilise la transformée de Fourier rapide ou FFT.

Pour vérifier la validité de cette méthode, on utilise la même expérience que précédemment. Les résultats sont encore une fois tout à fait satisfaisants. Le modèle MFAV simulé par la FFT (cf. figures 5.10 et 5.11), surestime un peu l'amplitude des oscillations comme avec les séries.

Les signaux étant causaux, nous avons vérifié que nous avons aussi tracé sur la figure (5.10) les courbes des parties imaginaires du module complexe des modèles BTAV et MFAV. Les tracés montrent que les résultats des calculs sont nuls. Par conséquent, les signaux de sortie sont bien causaux.

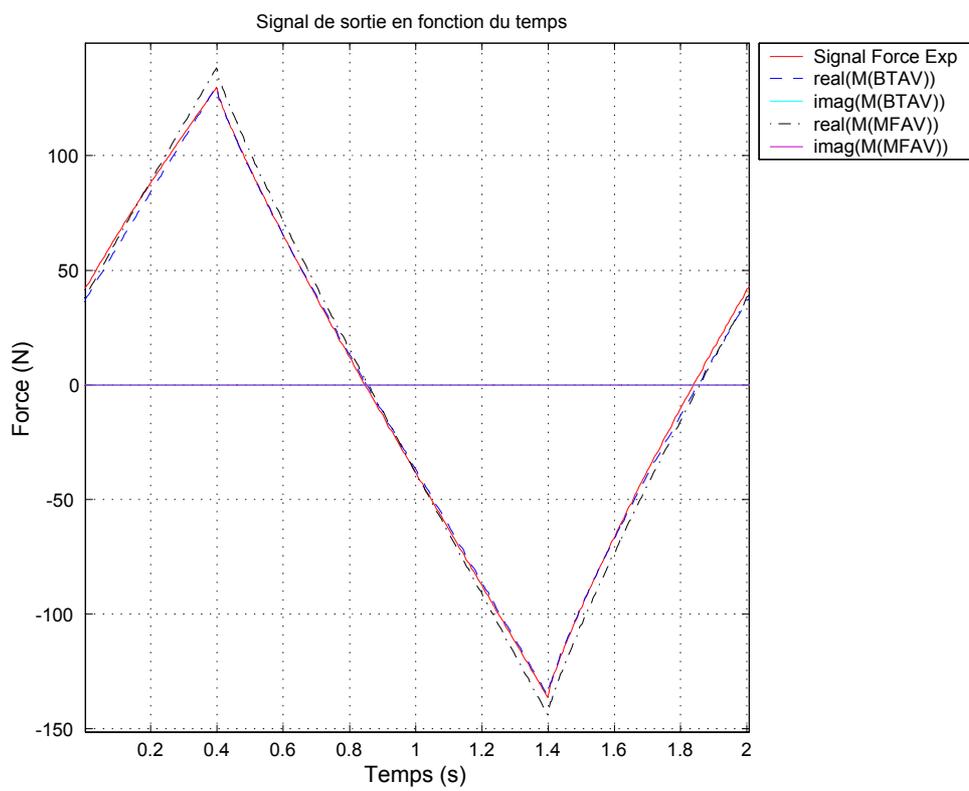


FIG. 5.10 – Comparaison de la contrainte expérimentale mesurée au cours du temps et des contraintes calculées par la FFT pour BTAV et MFAV

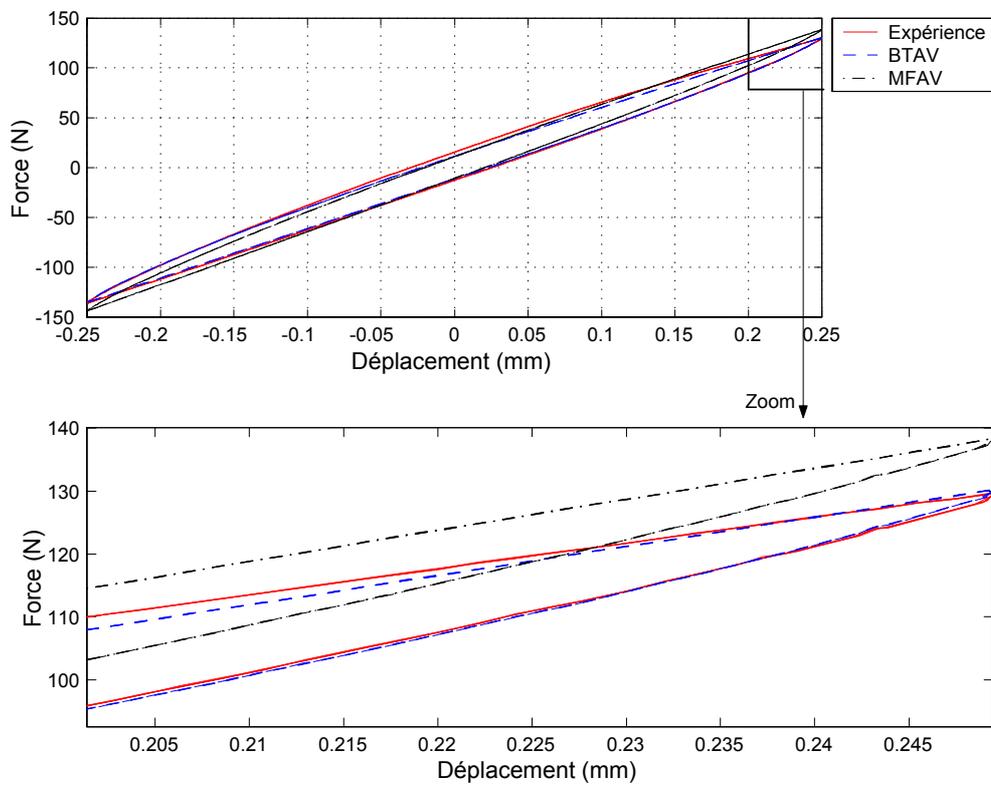


FIG. 5.11 – Comparaison du cycle déformations-contraintes pour l'expérience et les modèles BTAV et MFAV avec la FFT

5.2 Les essais statiques de relaxation

5.2.1 Quelques rappels théoriques et pratiques

Lorsqu'on se place dans le cas de petits déplacements, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant [34] peut être exprimée sous la forme de produit de convolution prise au sens des distributions :

$$\sigma(t) = (r * \dot{\varepsilon})(t) = (\dot{r} * \varepsilon)(t) \quad (5.8)$$

où r est la fonction de relaxation des contraintes.

La réponse en contrainte à une histoire quelconque de déformation peut se mettre sous la forme intégrale :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t-u) \dot{\varepsilon}(u) du \quad (5.9)$$

En procédant à des changements de variables successifs et en considérant que les fonctions r et $\dot{\varepsilon}$ sont causales, on obtient :

$$\sigma(t) = \int_0^t r(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (5.10)$$

Si on considère la réponse en contrainte à un échelon de déformation d'amplitude ε_0 , le caractère visqueux du comportement fait apparaître le phénomène de relaxation des contraintes. En imposant une déformation sous forme : $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t-t_0)$ où $H(t)$ est la distribution de Heaviside, on observe un saut à l'instant $t = t_0$ puis une décroissance en fonction du temps correspondant respectivement à l'élasticité instantanée et à l'anélasticité du matériau, comme le montre la figure (5.12). On constate que $\sigma(t)$ est nulle pour $t < t_0$, $\sigma(t)$ présente un saut positif pour $t = t_0$ et $\sigma(t)$ est décroissante pour $t > t_0$. On a donc :

$$\sigma(t) = r(t) * \varepsilon_0 \delta(t-t_0) = \varepsilon_0 r(t-t_0) \quad (5.11)$$

où δ est la distribution de Dirac.

Dans la pratique, le déplacement est imposé de façon progressive, à peu près linéaire, en un temps t_0 aussi petit que possible. On observe une rampe d'équation $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \frac{t}{t_0}$ entre $0 < t < t_0$ suivi d'un échelon $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ constant de déformation pour $t > t_0$. Le schéma représentatif réel est caractérisé par la figure (5.13) :

A partir de la relation (5.10), on en déduit l'expression de la contrainte :

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \int_0^t r(t-\tau) 1_{[0,t_0]}(\tau) d\tau \quad (5.12)$$

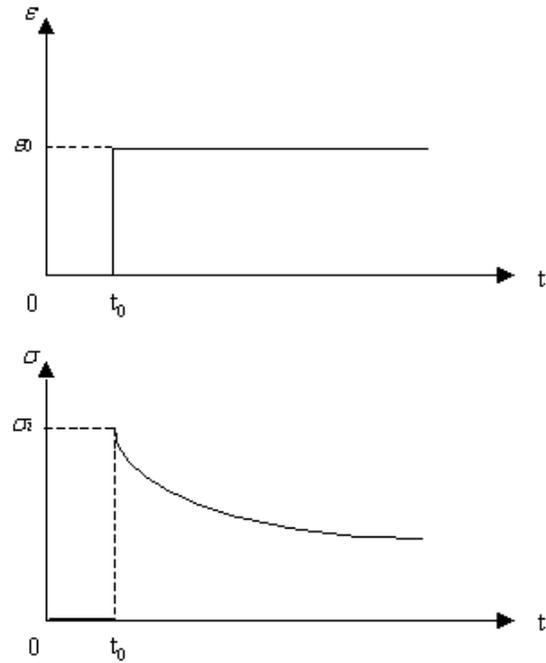


FIG. 5.12 – Théorie d'un essai de relaxation

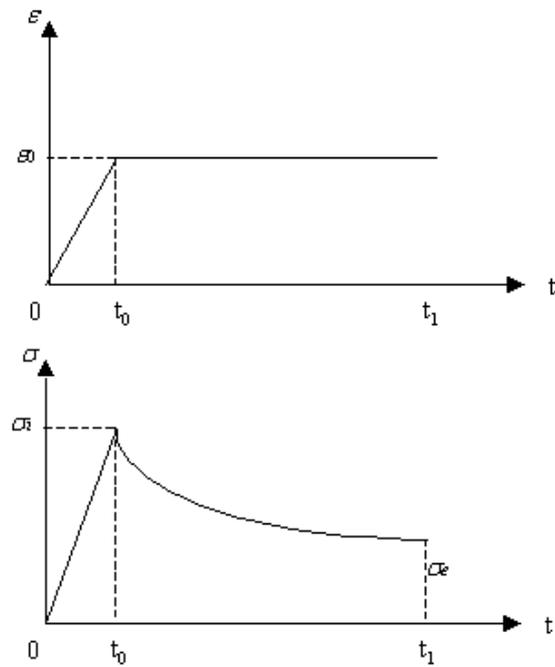


FIG. 5.13 – Essai réel de relaxation

où $1_{[0,t_0]}$ est la fonction indicatrice.

Pour $t < 0$:

$$\sigma(t) = 0 \quad (5.13)$$

Pour $0 < t < t_0$:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \int_0^t r(t-\tau) d\tau = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \int_0^t r(u) du \quad (5.14)$$

Pour $t > t_0$:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \int_0^{t_0} r(t-\tau) d\tau = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \int_{t-t_0}^t r(u) du \quad (5.15)$$

Si on note $R(t)$ une primitive de $r(u)$ définie par :

$$R(t) = \int_0^t r(u) du \quad \text{pour } t > 0 \quad (5.16)$$

on a :

Pour $0 < t < t_0$:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} R(t) \quad (5.17)$$

Pour $t > t_0$:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} [R(t) - R(t-t_0)] \quad (5.18)$$

En prenant un exemple simple du modèle de Kelvin-Voigt, la fonction de relaxation s'écrit :

$$r(t) = EH(t) + \eta\delta(t) \quad (5.19)$$

Sa primitive a donc pour expression :

$$R(t) = \int_0^t [EH(u) + \eta\delta(u)] du = Et + \eta \quad (5.20)$$

d'où :

Pour $0 < t < t_0$:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \frac{t}{t_0} + \eta \frac{\varepsilon_0}{t_0} \quad (5.21)$$

Pour $t > t_0$:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \quad (5.22)$$

5.2.2 Calcul théorique de la réponse en contrainte dans le cas du modèle BTAV

On rappelle que la fonction de relaxation du modèle de BTAV est (cf. chapitre 3 § 3.5.1) :

$$r(t) = E[1 + \alpha E_1(\omega_0 t)] + \eta \delta(t) \quad (5.23)$$

où E_1 est l'exponentielle intégrale : $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-y)}{y} dy$

D'après ce qui a été énoncé dans le paragraphe précédent, l'expression de la contrainte du modèle BTAV est formée à partir d'une primitive de la fonction de relaxation du modèle de Kelvin-Voigt et d'une primitive de la fonction exponentielle intégrale $E_1(\omega_0 t)$ (cf. Annexe : Calcul de la primitive de $E_1(\omega_0 t)$). D'après les relations (5.14) et (5.21) on a :

– pour $0 < t < t_0$:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \frac{t}{t_0} + \frac{\eta\varepsilon_0}{t_0} + E\alpha g(t) \varepsilon_0 \quad (5.24)$$

où $g(t) = \frac{t}{t_0} E_1(\omega_0 t) + \frac{1 - \exp(-\omega_0 t)}{\omega_0 t_0}$ est une fonction positive et croissante avec $g(0) = 0$.

L'étude de fonction de $\sigma(t)$ montre que la contrainte atteint un maximum en $M\left(t_0, E\varepsilon_0 + E\alpha\varepsilon_0 g(t_0) + \frac{\eta\varepsilon_0}{t_0}\right)$. De plus, on constate que ce maximum ne dépend que de la valeur de $\omega_0 t_0$.

– pour $t > t_0$, à l'aide de (5.22) l'équation (5.15) devient après calcul :

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 + E\alpha [g(t) - g(t - t_0)] \varepsilon_0 \quad (5.25)$$

Les deux cas d'étude peuvent être résumés par la représentation de trois graphes correspondant à trois fonctions : 1) fonction rampe 2) fonction échelon. et 3) $\sigma(t)$ pour $0 < t < t_0$ et $t > t_0$.

5.2.3 Calcul théorique de la réponse en contrainte dans le cas du modèle MFAV

En procédant de la même manière pour MFAV dont la fonction de relaxation a pour forme (cf. chapitre 3 § 3.5.3) :

$$r(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)\omega_0^\alpha} \frac{H(t)}{t^\alpha} \exp(-\omega_0 t) + E \frac{\gamma(1-\alpha, \omega_0 t)}{\Gamma(1-\alpha)} + \eta \delta(t) \quad (5.26)$$

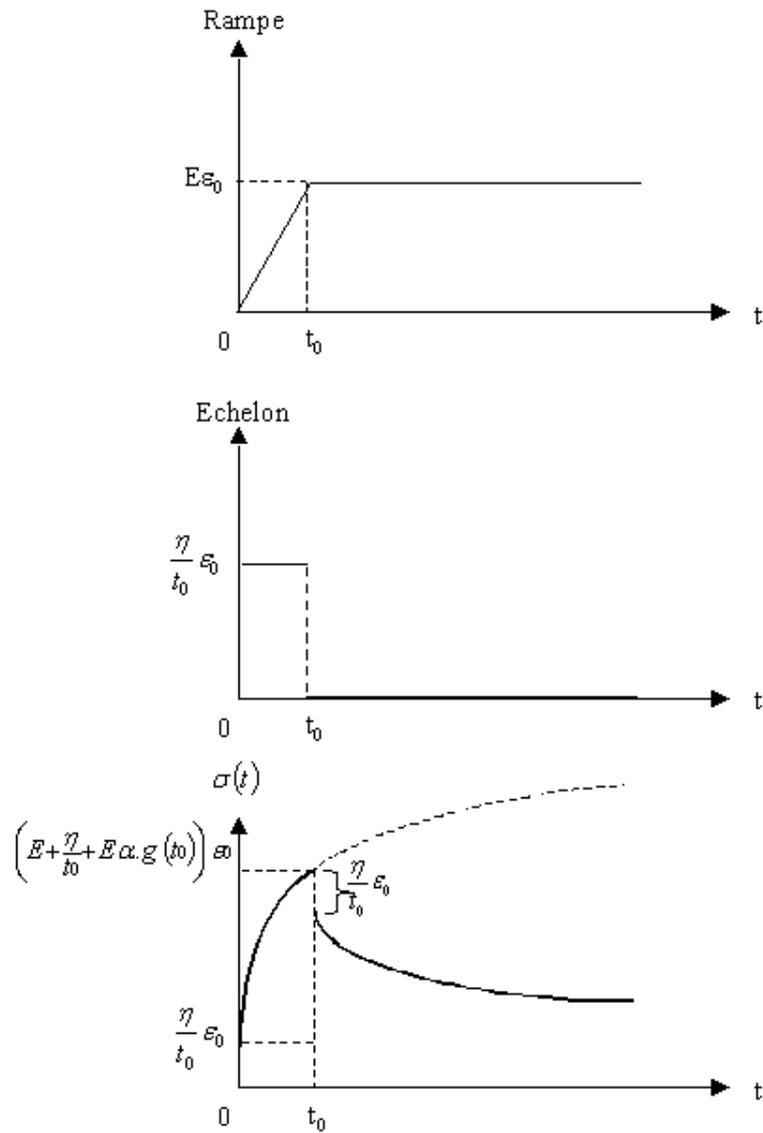


FIG. 5.14 – Etude théorique de la réponse en contrainte du modèle BTAV

On donne aussi sa primitive (cf. Annexe 4 et 5 : Calcul des primitives de $r_{SP} \exp(-\omega_0 t)$ et de $\gamma(1 - \alpha, \omega_0 t)$) :

$$R(t) = \int_0^t r(u) du = \frac{E}{\Gamma(1 - \alpha)\omega_0} \{ \gamma(1 - \alpha, \omega_0 t) [1 + \omega_0 t] - \gamma(2 - \alpha, \omega_0 t) \} + \eta \quad (5.27)$$

l'expression de la contrainte du modèle MFAV s'écrit :

– pour $0 < t < t_0$:

$$\sigma(t) = \frac{E}{\Gamma(1 - \alpha)} \{ F(0, t) + G(0, t) \} \frac{\varepsilon_0}{t_0} + \eta \frac{\varepsilon_0}{t_0} \quad (5.28)$$

– pour $t > t_0$,

$$\sigma(t) = \frac{E}{\Gamma(1 - \alpha)} [F(t - t_0, t) + G(t - t_0, t)] \frac{\varepsilon_0}{t_0} \quad (5.29)$$

5.2.4 Comparaison calculs théoriques et essai de relaxation

Nous avons donc tracé la courbe de relaxation théorique en utilisant les valeurs des paramètres identifiés au chapitre 4. Nous avons choisi une précharge $P = 100 N$ la plus petite car en relaxation il n'y en a pas et la plus grande amplitude $A = 0.1 mm$ car, en fait, le déplacement imposé est de $1 mm$. Or, les courbes obtenues ne correspondent absolument pas à la courbe expérimentale (cf. figure 5.15). En fait, la contrainte expérimentale tend vers $6 MPa$ environ ce qui est très inférieure à $E_{BTAV} = 10.4215$ (valeur identifiée pour BTAV) et $E_{MFAV} = 10.4678$ (valeur identifiée pour MFAV). Nous avons donc décidé de recalculer les valeurs de E et $E\alpha$ en utilisant l'essai de relaxation et en supposant que ω_0 continuait à rester égal à $2 rad/s$ dans cet essai. La formule (5.25) est linéaire par rapport aux constantes E et Ea , il est donc aisé par les moindres carrés d'identifier ces deux paramètres pour le modèle BTAV. Les résultats numériques obtenus sont : $E = 6.77 MPa$ et $E\alpha = 3.13 MPa$. La figure (5.15) montre la comparaison entre une mesure de relaxation pour $1 mm$ d'amplitude et le modèle BTAV identifié dans les deux cas d'étude : d'une part, en utilisant les valeurs identifiées obtenues au chapitre 4 (courbe BTAV "ancien") et d'autre part, en utilisant les moindres carrés linéaires (courbe BTAV "nouveau"). De plus, la figure (5.16) montre un grossissement de la partie montante de l'essai réalisé (cf. figure 5.15).

La courbe théorique obtenue a bien cette fois-ci améliorée la limite à l'infini par rapport à la courbe expérimentale. Mais on observe qu'elle décroît beaucoup

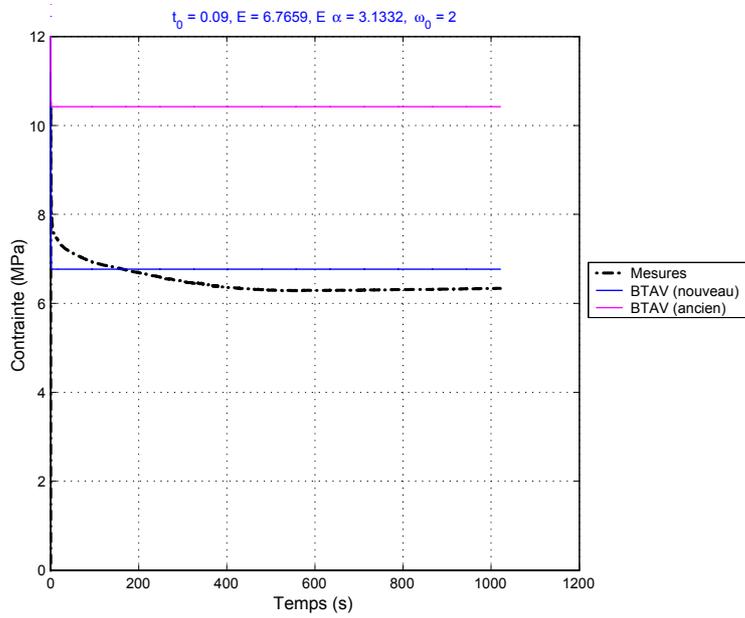


FIG. 5.15 – Comparaison des courbes expérimentale et identifiées

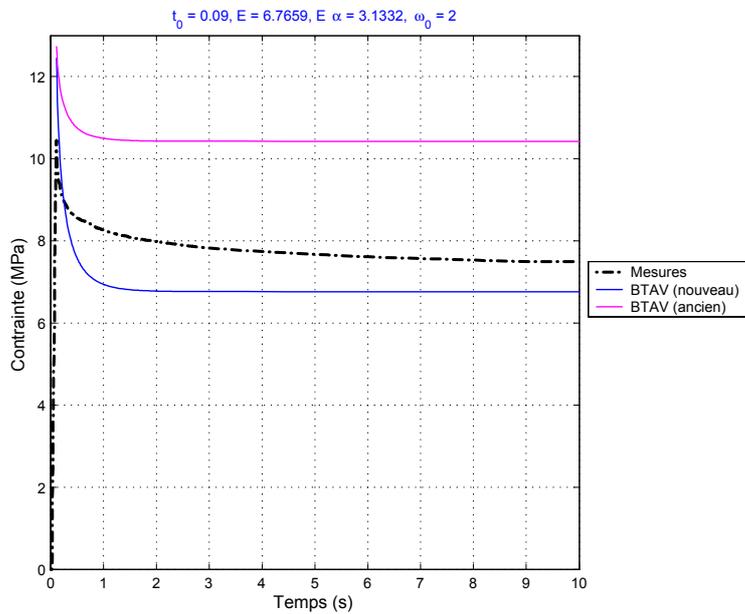


FIG. 5.16 – Comparaison des courbes expérimentale et identifiées - Zoom local

trop rapidement. En changeant la valeur de ω_0 et en prenant 0.001 rad/s à la place de 2 rad/s , on obtient une courbe très proche de la courbe expérimentale et il en est de même pour la courbe théorique pour MFAV avec les mêmes valeurs $E = 6.2 \text{ MPa}$, $E\alpha = 0.33 \text{ MPa}$ et $\omega_0 = 0.001 \text{ rad/s}$ (cf. figure 5.17).

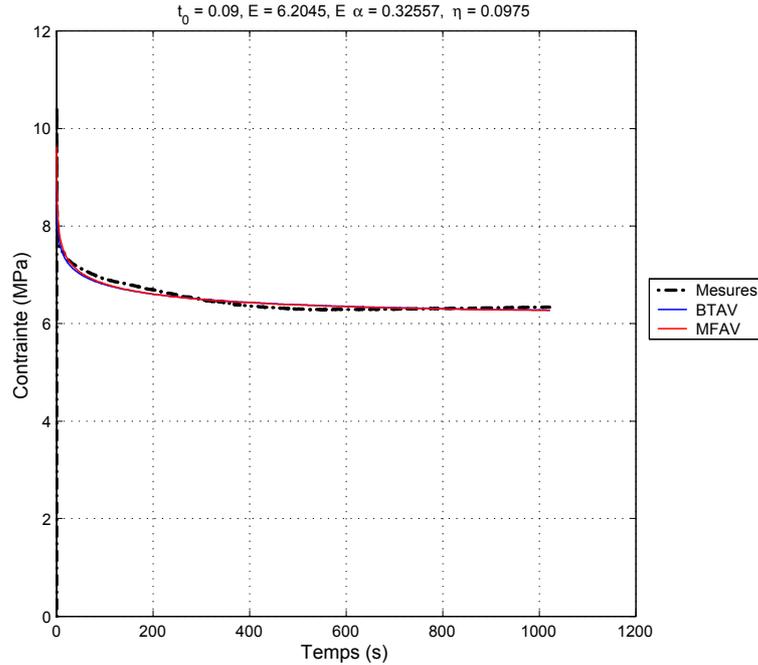


FIG. 5.17 – Courbes expérimentale et identifiées des modèles BTAV et MFAV

La courbe de relaxation pour $t > t_0$ ne dépend pas de η . Si on veut avoir une estimation de η , il faut évaluer le saut de la courbe de réponse au point $t = t_0 = 0.09 \text{ s}$. Ce saut vaut théoriquement $\eta \frac{\varepsilon_0}{t_0}$, donc si on mesure le maximum de la contrainte à $E\varepsilon_0 + E\alpha\varepsilon_0 g(t_0) + \frac{\eta\varepsilon_0}{t_0} = 10.4 \text{ MPa}$ alors on obtient une estimation de $\eta = 9.75 \times 10^{-2} \text{ MPa.s}$ ce qui est supérieure à la valeur identifiée, dans le cas dynamique, obtenue pour BTAV par exemple qui est de $\eta_{BTAV} = 0.2187 \times 10^{-2} \text{ MPa.s}$. La figure (5.18) montre le même essai de relaxation (cf. figure 5.17) avec les modèles BTAV et MFAV identifiés à partir du saut précédemment calculé.

La différence entre les valeurs identifiées à l'aide des essais harmoniques et les valeurs obtenues à l'aide de l'essai de relaxation peut, peut être, être justifiée par la figure (4.16), où on voit une proposition d'extrapolation de la variation du paramètre E en fonction de l'amplitude.

Lorsque l'amplitude des sollicitations augmente E diminue, mais E ne peut pas devenir nul et la limite de E obtenue grâce à l'essai de relaxation qui est de l'ordre de 6 MPa est peut être cette limite inférieure obtenue lorsque l'amplitude

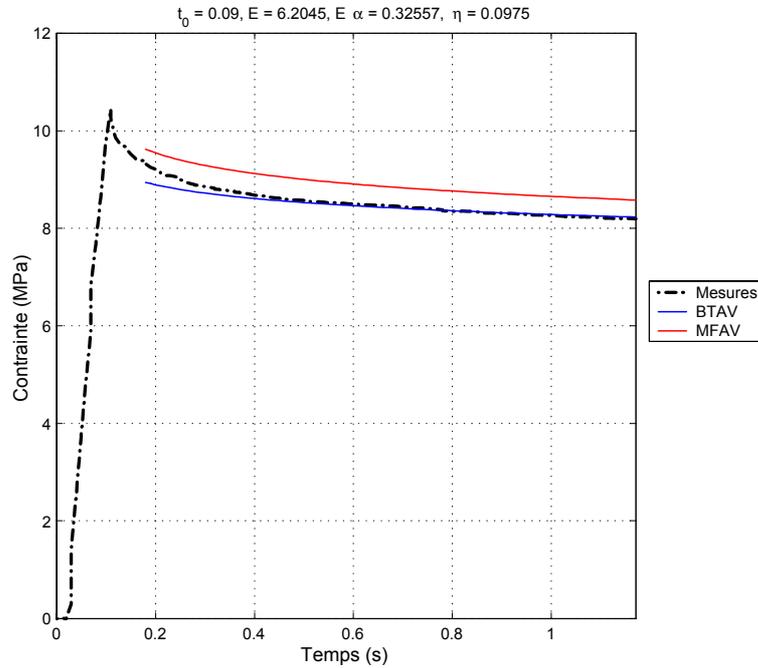


FIG. 5.18 – Représentation du saut des courbes de réponse identifiées

d'excitation devient très grande (ici pour un essai de relaxation c'est 1 *mm*). On peut aussi obtenir un meilleur résultat en modifiant le paramètre α et en lui donnant une valeur plus élevée.

5.2.5 L'effet tonneau

Nous avons ainsi effectué une mesure de relaxation sans teflon et aussi en plaçant du teflon sur les parties inférieure et supérieure du plot afin de limiter tout effet tonneau sur les bords latéraux. Nous avons remarqué qu'il n'y avait pas beaucoup de différence notable. Les paramètres identifiés du modèle BTAV sont : $E_{teflon} = 6.4 \text{ MPa}$ et $E\alpha = 0.33 \text{ MPa}$. Ces écarts très réduits entre les différents paramètres identifiés peuvent s'expliquer du fait que la déformation imposée est négligeable. De ce fait, la présence du teflon n'a donc pas d'utilité dans ce cas d'étude. La figure (5.19) montre cette courbe expérimentale de relaxation avec le modèle BTAV identifié. Sur cette même figure, nous avons ensuite utilisé les paramètres d'identification du BTAV pour tracer la fonction de contrainte du modèle MFAV.

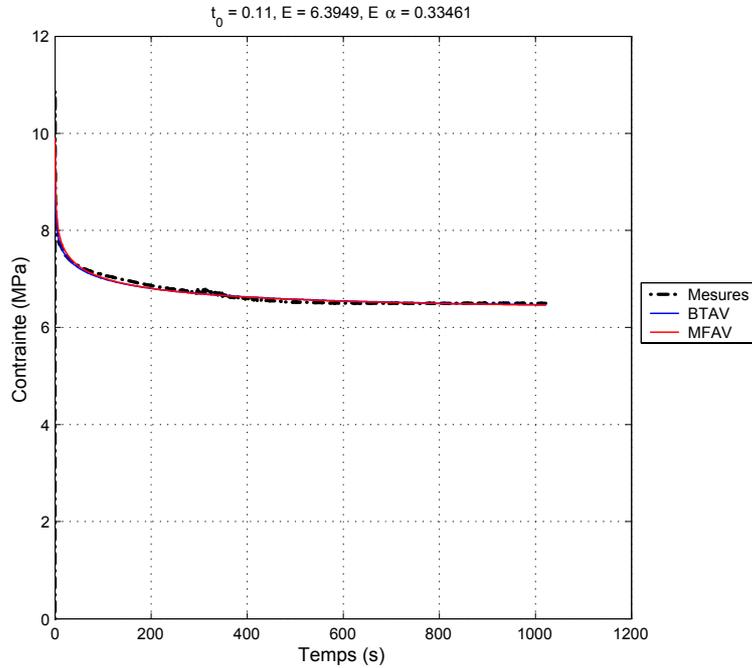


FIG. 5.19 – Identification de la courbe de relaxation - Essai avec teflon

5.3 Conclusion

Au terme de ce chapitre consacré à l'étude des essais quasi-statiques et statique, nous avons constaté que ω_0 influe sur les autres paramètres et en particulier sur E . Alors que E , α et η semblent être des paramètres intrinsèques du matériau, ω_0 est un facteur d'échelle en temps dont l'identification semble lié aux essais considérés. Ainsi pour les essais dynamiques, nous avons proposé que ω_0 soit inférieur à la pulsation minimale considérée ($\omega_0 = 2 \text{ rad/s} < 1.25 * 2\pi \text{ rad/s}$) alors que pour les essais de relaxation le temps total étant d'environ de 1000 s, la fréquence correspondante est de 1/1000 (Hz) soit $\omega_0 = 0.001 \text{ rad/s} < 2\pi/1000 \text{ rad/s}$. Si ω_0 est choisit égal à 2 rad/s la relaxation théorique a une décroissance trop rapide par rapport au phénomène physique. Il faut donc choisir ω_0 plus petit; plus ω_0 diminue plus le E correspondant diminue aussi. Or, E est la valeur minimale de la fonction de relaxation et on constate un bon accord entre la valeur expérimentale de la fonction de relaxation à 1000 s et les valeurs identifiés de E obtenues par les essais dynamiques. Ces considérations nous ont amené à choisir $\omega_0 = 0.001 \text{ rad/s}$.

D'autre part, nous avons établi des relations de passage entre le domaine fréquentiel et temporel du point de vue numérique. Nous avons ainsi obtenu un certain nombre de relations auxquelles doit satisfaire le comportement non

linéaire de notre plot en quasi-statique. Ces relations reposent sur le concept du calcul par les séries de Fourier et par la FFT. Ces procédés ont été menés avec succès d'autant plus qu'avec la méthode de la FFT, nous pouvons prédire à partir de nos deux modèles la réponse temporelle du plot à une quelconque sollicitation. Le modèle BTAV donne d'excellents résultats mais le modèle MFAV simulé par les séries ou par la FFT conduit à des résultats légèrement surestimés. Quant à la partie statique, nous avons obtenu les expressions des contraintes des modèles BTAV et MFAV qui ont été élaborés à partir de la théorie de relaxation. Leur loi de comportement a permis d'obtenir une bonne identification des courbes de relaxation en contrainte. Ainsi, cette étude nous a permis de mieux appréhender nos deux modèles qui permettront, dans le chapitre intitulé : Dissipation, d'étudier plus en détail les propriétés dissipatives de notre matériau. Il portera notamment sur la détermination quantitative des énergies pour les essais en sinus et triangulaires. On comparera les valeurs des énergies dissipées entre ces deux méthodes.

Chapitre 6

Etude de la dissipativité du matériau

L'intérêt des élastomères réside dans leur capacité remarquable à dissiper de l'énergie et à servir d'amortisseur. L'utilisation de ces élastomères est variée par exemple l'isolation vibratoire ou acoustique, la prévention des risques sismiques, etc Il est donc essentiel de connaître avec précision les propriétés dissipatives de ce matériau. Nous allons centrer notre étude sur son comportement dissipatif à basses fréquences car de nombreuses études ont été faites sur le comportement à hautes fréquences, mais il apparaît maintenant important de maîtriser aussi les vibrations à basses fréquences. Cette étude s'appuie sur deux types d'essais : les balayage sinus puis les essais sous sollicitations périodiques triangulaires pour différentes valeurs d'amplitudes d'excitation et de précharges imposées.

Le but de cette étude est multiple. Il s'agit tout d'abord de comparer la valeur de l'énergie dissipée sur une période calculée à partir des données expérimentales lors des essais harmoniques avec les valeurs obtenues théoriquement en utilisant les modèles BTAV et puis MFAV. Ensuite, on vérifiera à l'aide des essais triangulaires, si l'on peut utiliser la décomposition d'un signal en une somme d'harmoniques. Enfin, on analysera le comportement expérimental de l'énergie dissipée lorsque la fréquence tend vers zéro. En effet, les résultats obtenus semblent diverger de la théorie pour les très basses fréquences. Il apparaît que l'énergie dissipée tend vers une limite finie non nulle lorsque la vitesse de sollicitation tend vers zéro. Or, une énergie dissipée indépendante de la vitesse est la caractéristique des phénomènes dits hystérétiques par opposition aux phénomènes visqueux. Cet aspect du comportement sera analysé à la fin de ce chapitre.

6.1 Présentation des résultats des expériences

6.1.1 Les essais à balayage sinus à basses fréquences

Comme nous l'avons déjà expliqué dans le chapitre 2 sur l'expérimentation, pour mesurer le module complexe à basses fréquences nous avons fait des essais sous sollicitations harmoniques uniaxiales aux fréquences de 0.2, 0.5 et 1 Hz, pour des précharges P de 100 N, 200 N, 300 N et 400 N et pour des amplitudes A de 0.02 mm, 0.05 mm et 0.1 mm. Ces essais non automatisés comme ceux de 1.25 Hz à 80 Hz, nous ont permis d'avoir accès aux valeurs temporelles du déplacement et de la force et ainsi de pouvoir tracer les graphes correspondants dans le plan force-déplacement pour une période. Ne pouvant représenter l'ensemble des 36 essais réalisés, nous avons choisi d'illustrer le comportement de notre matériau à l'aide de 3 figures caractéristiques dans le plan force-déplacement :

1) La figure (6.1) montre l'effet de la précharge pour une amplitude de 0.1 mm et une fréquence de 0.2 Hz fixes. Ce graphe montre que le matériau se rigidifie lorsque la précharge augmente.

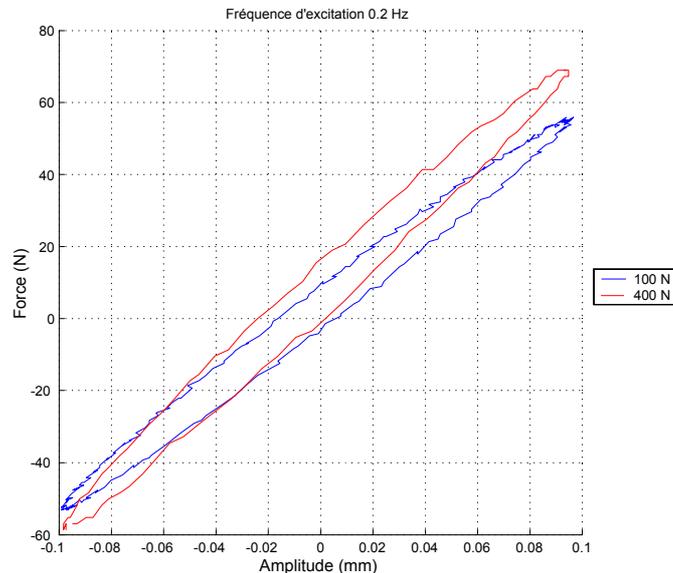


FIG. 6.1 – Courbes d'hystérésis selon les précharges

2) La figure (6.2) montre l'influence de l'amplitude pour une précharge de 300 N et une fréquence de 0.5 Hz. L'énergie dissipée représentée par l'aire des boucles d'hystérésis augmente très nettement avec l'amplitude .

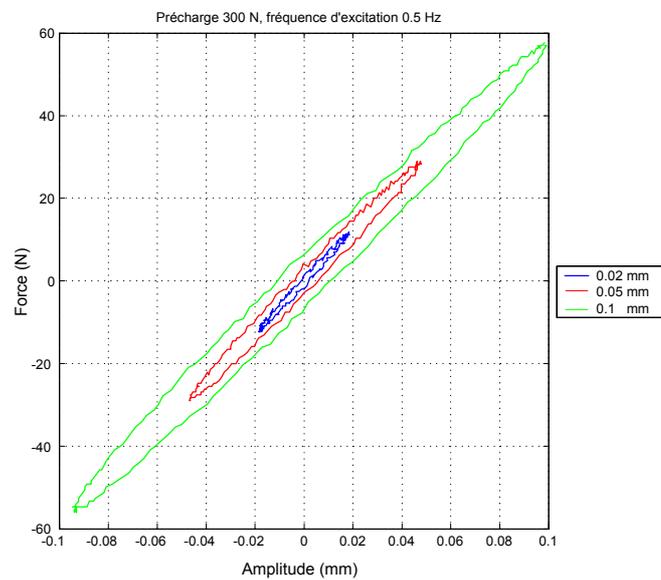


FIG. 6.2 – Courbes d'hystérésis selon les amplitudes

3) Enfin, la dernière figure (6.3) montre l'influence de la fréquence pour une précharge de 400 N et une amplitude de 0.1 mm fixes. On constate que l'énergie dissipée augmente très légèrement en fonction de la vitesse de sollicitation.

On observe que ces courbes présentent des irrégularités. Afin de pouvoir les traiter, nous avons lissé les 36 courbes par la méthode des moindres carrés linéaires (polynôme du second degré) et nous présentons sur la figure (6.4) un exemple de lissage réalisé sur un essai à précharge de 100 N, d'amplitude d'excitation de 0.05 mm et de fréquence 0.5 Hz.

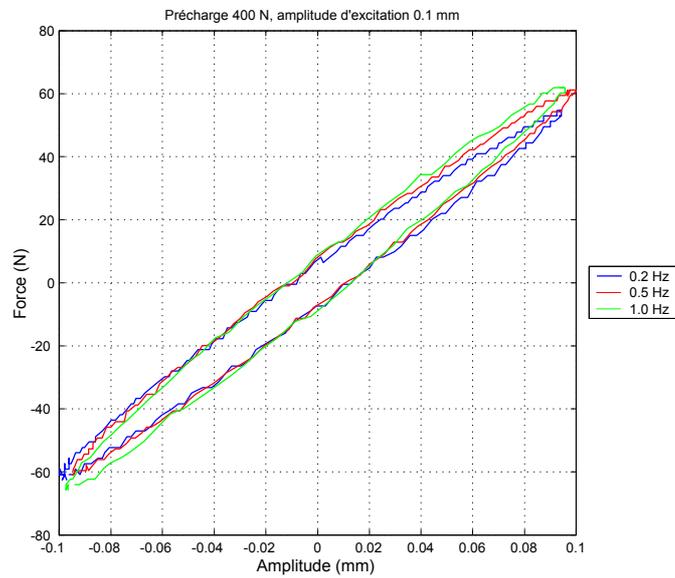


FIG. 6.3 – Courbes d'hystérésis selon les fréquences

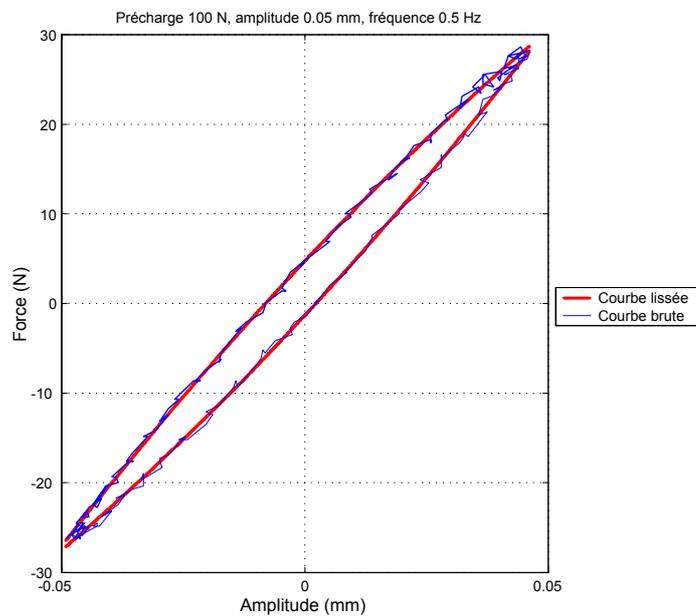


FIG. 6.4 – Lissage d'une courbe d'hystérésis

6.1.2 Les essais quasi-statiques triangulaires à basses fréquences

Nous avons utilisé les quatre essais sous sollicitation uniaxiale triangulaires périodiques effectués au LAMI. Pour une précharge fixe voisine de 250 N , cinq amplitudes ont été réalisés : 0.2 , 0.3 , 0.4 et 0.5 mm . La fréquence théorique imposée est voisine du centième de Hertz. L'acquisition de ces essais a été faite après que le matériau ait subi environ 3 à 5 cycles afin d'enregistrer un état stable du matériau. On rappelle que la figure (6.5) illustre les résultats des essais réalisés à cette fréquence.

Nous avons effectué trois autres essais sous les mêmes conditions que précédemment : pour une précharge fixe voisine de 200 N et d'amplitude 0.25 mm , les mesures ont été réalisées aux fréquences voisines de 0.2 , 0.6 et 1 Hz . La figure (6.6) illustre les résultats des essais réalisés à ces trois fréquences.

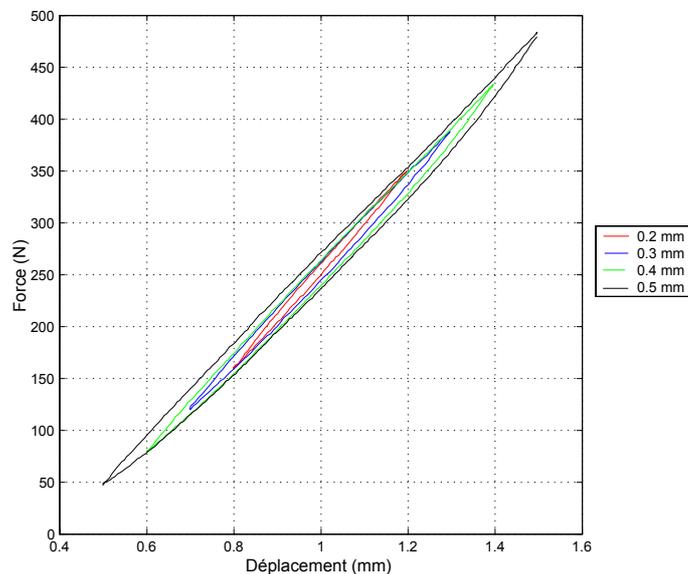


FIG. 6.5 – Evolution de la force en fonction du déplacement à 0.01 Hz

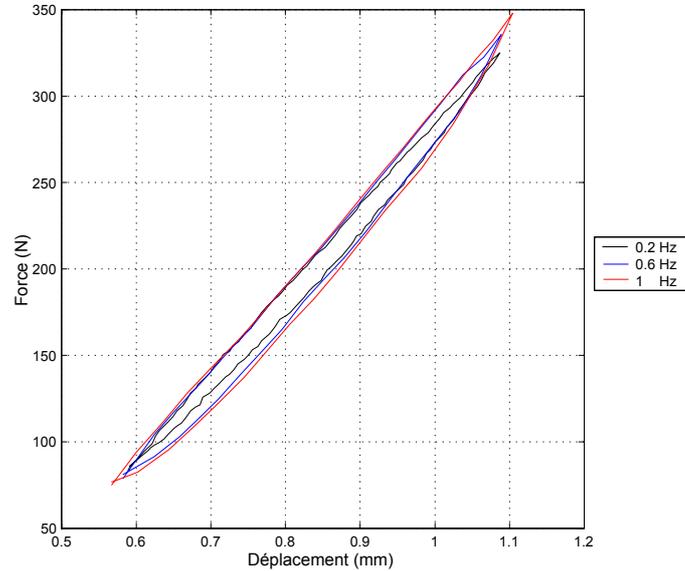


FIG. 6.6 – Courbes d'hystérésis selon les fréquences

6.2 Calcul de l'énergie dissipée lors d'un cycle

Lors de sollicitations uniaxiales périodiques de l'énergie est dissipée lors de chaque cycle, ce qui se traduit dans le plan force-déplacement par une boucle dont l'aire donne la valeur de cette énergie. L'expression de cette énergie E_d est donnée par

$$E_d = \oint F dh \quad (6.1)$$

où dh est la variation du déplacement et F la force appliquée. Si F est en Newton, et le déplacement en mm alors E_d est en milli Joule.

Si on se place plutôt du point de vue comportement des matériaux, on a la formule suivante :

$$dE_d = \sigma d\epsilon dV \quad (6.2)$$

d'où pour un volume donné et un cycle :

$$E_d = \oint \int_{V_{ol}} \sigma d\epsilon dV \quad (6.3)$$

6.3 Calcul de la dissipation pour les essais sinusoïdaux

6.3.1 Calcul théorique de l'énergie dissipée

Lorsque l'éprouvette est soumise à des déplacements harmoniques de période T de type $h(t) = A \sin(\omega_T t)$ avec $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$, la force transmise s'exprime par un signal harmonique qui, à cause du caractère viscoélastique du matériau, accuse un retard sur le déplacement se traduisant par un angle de phase φ d'où $F(t) = F_0 \sin(\omega_T t + \varphi)$. La relation (6.1) devient après simplification :

$$E_d(\omega_T) = \oint F dh \quad (6.4)$$

$$= F_0 A \int_0^T \omega_T \cos(\omega_T t) \sin(\omega_T t + \varphi) dt \quad (6.5)$$

$$= \pi F_0 A \sin(\varphi) \quad (6.6)$$

Si on veut adopter le point de vue matériau, on va utiliser les relations où $\sigma_0 = \frac{F_0}{S}$ et $\varepsilon_0 = \frac{A}{h}$ avec S la surface de la section circulaire du plot et H_0 la hauteur initiale du plot. On en déduit après calcul que :

$$E_d(\omega_T) = \pi \sigma_0 \varepsilon_0 S h \sin(\varphi) \quad (6.7)$$

Or le module dynamique complexe $M(\omega)$ s'écrit :

$$M(\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\varphi} \quad (6.8)$$

La partie imaginaire est donc : $\text{Im}[M(\omega)] = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \varphi$, d'où :

$$E_d(\omega_T) = \pi \varepsilon_0^2 S H_0 \text{Im}[M(\omega_T)] \quad (6.9)$$

En introduisant le volume du plot $V = S \times h$, on en déduit que :

$$E_d(\omega_T) = \pi \varepsilon_0^2 V \text{Im}[M(\omega_T)] \quad (6.10)$$

Si on veut revenir à une formulation avec l'amplitude A du déplacement, on obtient la formule :

$$E_d(\omega_T) = \pi A^2 R_f \text{Im}[M(\omega_T)] \quad (6.11)$$

en posant $R_f = \frac{V}{H_0^2} = \frac{S}{H_0}$ qui est le facteur de forme lié à la géométrie du plot.

Donc, ayant choisi et identifié un modèle, on peut prévoir l'énergie dissipée lors d'un essai sinus.

Les expressions des modules complexes pour les deux modèles retenus sont :

– Module complexe du modèle BTAV :

$$M(\omega) = E \left[1 + \alpha \ln \sqrt{1 + \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|^2} + i\alpha \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right] + i\eta\omega \quad (6.12)$$

– Module complexe du MFAV :

$$M(\omega) = E \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha + i\eta\omega \quad (6.13)$$

On en déduit les expressions complètes de l'énergie des modèles BTAV et MFAV en utilisant leur partie imaginaire :

$$Im[M(\omega_T)]_{BTAV} = E\alpha \arctan \left(\frac{\omega_T}{\omega_0} \right) + \eta\omega_T \quad (6.14)$$

$$Im[M(\omega_T)]_{MFAV} = E \exp \left(\alpha \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_0} \right)^2} \right) \sin \left[\alpha \arctan \left(\frac{\omega_T}{\omega_0} \right) \right] + \eta\omega_T \quad (6.15)$$

Nous allons donc utiliser les essais sinusoïdaux pour étudier la dissipation et comparer les valeurs obtenues pour cette dissipation par trois moyens différents :

- la valeur expérimentale obtenue grâce à l'aire dans le plan force-déplacement (6.1),
- la valeur théorique calculée à partir du modèle BTAV et de (6.11),
- la valeur théorique à partir du modèle MFAV et de (6.11).

6.3.2 Energies dissipées expérimentales et théoriques

Pour les 36 essais dynamiques réalisés aux fréquences de 0.2, 0.5 et 1 Hz, les énergies dissipées au cours d'un cycle ont été calculées par la méthode des trapèzes après lissage des données.

En utilisant les relations (6.11), (6.14) et (6.15), nous pouvons évaluer la dissipation prévue par les deux modèles pour n'importe quel essai dynamique sinusoïdal. En toute rigueur, comme on a vu que le module complexe dépend de la précharge et de l'amplitude des sollicitations, et que nos essais concernent 4 précharges différentes et 3 amplitudes, il faudrait tracer 12 courbes théoriques

pour chaque modèles, mais on a vu précédemment que l'influence de la précharge est faible, et de plus, les amplitudes varient peu. Pour la clarté du graphe, nous n'avons représenté que 3 courbes théoriques pour chaque modèle dans la figure (6.7) (nous avons pris les modules complexes correspondant à une précharge de 200 N avec 0.02, 0.05 et 0.1 mm d'amplitude). Cette figure permet de comparer les énergies expérimentales obtenues pour des précharges P de 100 N, 200 N, 300 N et 400 N et pour des amplitudes A de 0.02 mm, 0.05 mm et 0.1 mm avec les valeurs théoriques. On constate clairement l'importance de l'amplitude : l'énergie dissipée dépend de A^2 .

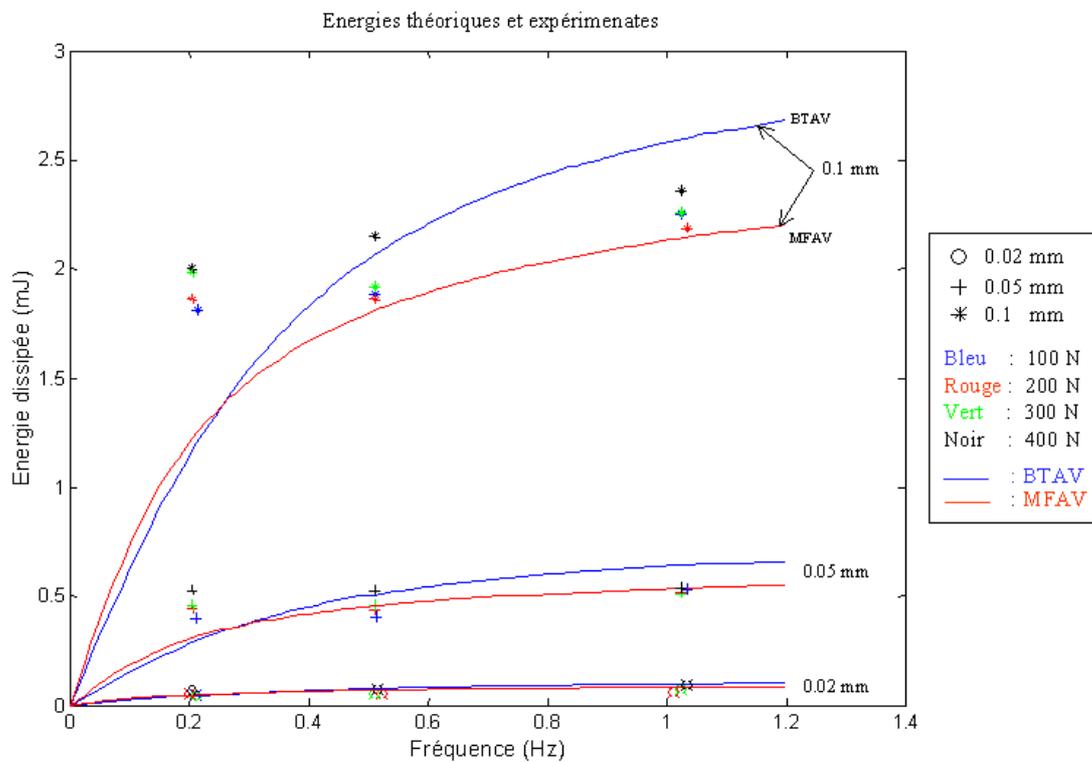


FIG. 6.7 – Comparaison des énergies théoriques et expérimentales selon l'amplitude et la précharge

Pour pouvoir analyser la validité des modèles, il est donc utile de s'affranchir de l'influence de l'amplitude A et du facteur R_f lié à la géométrie du plot. Nous avons donc représenté dans la figure (6.8) les parties imaginaires des modules complexes des deux modèles retenus BTAV et MFAV, ainsi que les 36 valeurs expérimentales $\frac{E_d(\omega T)}{\pi R_f A^2}$. Encore une fois nous avons choisi pour la clarté de la figure de ne tracer qu'une courbe théorique par modèle (nous avons pris celle correspondant à une précharge de 200 N et 0.05 mm d'amplitude). Cette simplification est d'autant plus justifiée que toutes les courbes représentant la partie imaginaire théorique passent par l'origine et donc elles sont forcément très proches les unes des autres pour les basses fréquences.

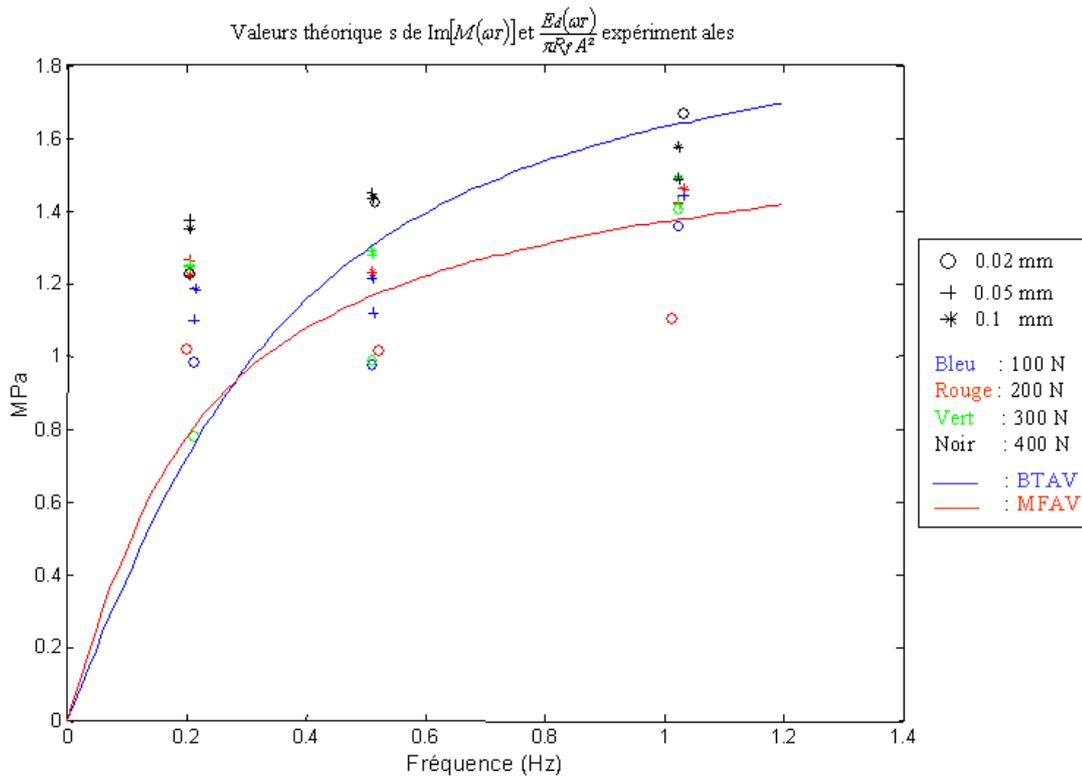


FIG. 6.8 – Comparaison des valeurs des parties imaginaires théoriques et expérimentales

Les résultats sont rassemblés sur la figure (6.9)

Fréquence (Hz)	Aire (mJ)	Ed / ($\pi R^2 A^2$)	Im [BTAV]	Im [MFAV]	P (N)	A (mm)
0,2124	0,0509	0,9830	0,7184	0,8092	100	0,0182
0,2124	0,3978	1,0999	0,7291	0,8035	100	0,0481
0,2151	1,8083	1,1874	0,7458	0,7955	100	0,0987
0,2	0,0523	1,0212	0,7147	0,8045	200	0,0181
0,2065	0,4448	1,2664	0,7437	0,8143	200	0,0474
0,2065	1,8619	1,2226	0,7513	0,7993	200	0,0987
0,2124	0,0419	0,7831	0,7831	0,8579	300	0,0185
0,2065	0,4558	1,2498	0,7730	0,8350	300	0,0483
0,2056	1,9833	1,2462	0,7781	0,8185	300	0,1009
0,2056	0,0671	1,2275	0,7921	0,8616	400	0,0187
0,2056	0,5288	1,3750	0,8011	0,8549	400	0,0496
0,2056	2,0042	1,3514	0,8092	0,8435	400	0,0974
0,512	0,0552	0,9679	1,2362	1,1643	100	0,0191
0,5146	0,404	1,1170	1,2616	1,1649	100	0,0481
0,512	1,8843	1,2151	1,2740	1,1457	100	0,0996
0,5224	0,0546	1,0205	1,3102	1,2149	200	0,0185
0,512	0,4401	1,2322	1,3153	1,2002	200	0,0478
0,512	1,8578	1,2299	1,3258	1,1800	200	0,0983
0,512	0,0534	0,9874	1,3516	1,2388	300	0,0186
0,512	0,4539	1,2815	1,3676	1,2326	300	0,0476
0,512	1,9199	1,2946	1,3795	1,2153	300	0,0974
0,5172	0,075	1,4171	1,4020	1,2678	400	0,0184
0,512	0,5287	1,4497	1,4190	1,2635	400	0,0483
0,512	2,1452	1,4347	1,4343	1,2503	400	0,0978
1,024	0,0721	1,3623	1,5682	1,3850	100	0,0184
1,0343	0,5345	1,4416	1,5873	1,3766	100	0,0487
1,024	2,248	1,4882	1,5988	1,3556	100	0,0983
1,0139	0,0598	1,1057	1,6253	1,4164	200	0,0186
1,024	0,5183	1,4212	1,6466	1,4113	200	0,0483
1,0343	2,1851	1,4614	1,6696	1,4006	200	0,0978
1,024	0,0761	1,4071	1,6956	1,4589	300	0,0186
1,024	0,5165	1,4163	1,7132	1,4511	300	0,0483
1,024	2,2541	1,4922	1,7294	1,4364	300	0,0983
1,0343	0,0897	1,6766	1,7700	1,5027	400	0,0185
1,024	0,5422	1,4867	1,7810	1,4914	400	0,0483
1,024	2,3615	1,5794	1,7992	1,4799	400	0,0978

FIG. 6.9 – Comparaisons des valeurs numériques de la partie imaginaire théoriques avec celles de $\frac{E_d}{\pi R A^2}$ expérimentales pour différentes valeurs de précharges, d'amplitudes et de fréquences

L'analyse de la figure (6.8) met en évidence un phénomène inattendu. Pour les fréquences de 0.5 Hz et 1 Hz, il y a un assez bon accord entre les résultats expérimentaux et la théorie. Et on constate sur la figure (6.7) que, pour la fréquence de 1 Hz, le modèle MFAV donne une meilleure estimation de l'énergie dissipée que le modèle BTAV. Par contre, pour les fréquences de 0.2 Hz, l'ensemble des résultats expérimentaux divergent très nettement des résultats attendus. En fait, il semble que l'énergie dissipée par unité de volume et pour une déformation ε_0 fixée, tende vers une limite non nulle lorsque la fréquence tend vers zéro, ou plus précisément que la partie imaginaire du module complexe de notre élastomère tend vers la valeur 1.1 MPa lorsque la fréquence tend vers zéro. Ceci semble indiquer qu'il y a un phénomène dissipatif, indépendant de la fréquence, donc non visqueux. Ce phénomène purement hystérétique (car indépendant de la vitesse) n'est pas identifiable à plus haute fréquence car le phénomène viscoélastique l'emporte. Des essais complémentaires seraient utiles pour pouvoir être sûr de cette conjecture.

6.4 Calcul de la dissipation pour les essais triangulaires

Pour étudier le comportement à vitesse constante, des essais triangulaires ont été réalisés et analysés.

6.4.1 Expression théorique de l'énergie dissipée

Dans le cas des sollicitations triangulaires périodiques, la relation (6.10) ne s'applique plus car il faut tenir compte des coefficients c_n de la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée triangulaire. Sous l'hypothèse de linéarité du phénomène, lorsque le déplacement périodique est décomposé en série de Fourier complexe :

$$h(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\omega t) \quad (6.16)$$

$$= \sum_1^{+\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (6.17)$$

la force s'écrit donc :

$$F(t) = R_f \sum_{-\infty}^{+\infty} M(n\omega_T) c_n \exp(in\omega_T t) \quad (6.18)$$

où $M(n\omega_T)$ désigne le module complexe du modèle BTAV ou MFAV pour l'harmonique d'ordre n . L'expression de l'énergie dans le cas des signaux triangulaires au cours d'une période T est alors définie par :

$$\begin{aligned} E_d(\omega_T) &= \oint F dh & (6.19) \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[R_f \sum_p M(p\omega_T) c_p \exp(ip\omega_T t) \right] \left[\sum_q iq\omega_T c_q \exp(iq\omega_T t) \right] dt \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité des harmoniques et la relation $M(-p\omega_T) = \overline{M(p\omega_T)}$, l'énergie s'écrit :

$$E_d(\omega_T) = \pi R_f \sum_1^{+\infty} 4n |c_n|^2 \text{Im}[M(n\omega_T)] \quad (6.20)$$

$$= \pi R_f \sum_1^{+\infty} n b_n^2 \text{Im}[M(n\omega_T)] \quad (6.21)$$

Bien entendu, numériquement on ne considère qu'un nombre fini N d'harmoniques.

Si il n'y a qu'un harmonique non nul, on retrouve biensûr la formule précédente.

6.4.2 Etude de la validité de l'hypothèse de linéarité et de la décomposition en somme harmoniques

Avec les essais présentés dans la section 7.1.2 et en appliquant la relation (6.20), nous avons comparé les calculs des énergies à partir du modèles BTAV (précharge de 200 N et d'amplitude 0.1 mm) en utilisant la décomposition du signal pour les cinq premiers harmoniques avec les résultats basés sur les expériences. Les résultats sont résumés dans le tableau 6.1.

Hz	$A (mm)$	$E_d \text{ EXP}$	$E_d (b_1)$	$E_d (b_3)$	$E_d (b_5)$	$E_d (b_7)$	$E_d (b_9)$	$\sum E_d (b_i)$
0.0231	0.199	2.976	0.382	0.042	0.015	0.007	0.004	0.450
0.0208	0.298	7.865	0.775	0.085	0.030	0.015	0.009	0.913
0.0118	0.398	13.991	0.786	0.087	0.031	0.016	0.009	0.929
0.0095	0.498	25.337	0.988	0.109	0.039	0.020	0.012	1.168
0.2004	0.249	5.741	4.667	0.334	0.084	0.033	0.016	5.135
0.6006	0.257	8.854	9.583	0.460	0.105	0.039	0.019	10.206
0.9775	0.273	11.251	12.517	0.546	0.123	0.046	0.022	13.252

Tableau 6.1 : Comparaison modèle BTAV et valeurs des énergies dissipées

A très basse fréquence de l'ordre du centième de Hertz, les résultats montrent que le modèle ne rend pas bien compte du comportement dissipatif de notre matériau. Le module complexe théorique est très inférieur au module complexe expérimental.

A partir de la fréquence de 0.2 Hz, les résultats des calculs des énergies pour le premier harmonique sont satisfaisants et semblent mieux correspondre aux valeurs des énergies réelles. La figure (6.10) montre la comparaison des énergies expérimentales avec celles théoriques calculées pour le modèle BTAV avec l'amplitude $A = 0.25 \text{ mm}$, pour le premier harmonique notées $E_d(b_1)$ et pour les cinq premiers harmoniques notées $\sum E_d(b_i)$. Dans le cas d'un essai triangulaire, l'harmonique du premier amplitude noté b_1 est égal à $b_1 = \frac{8.A}{\pi^2}$.

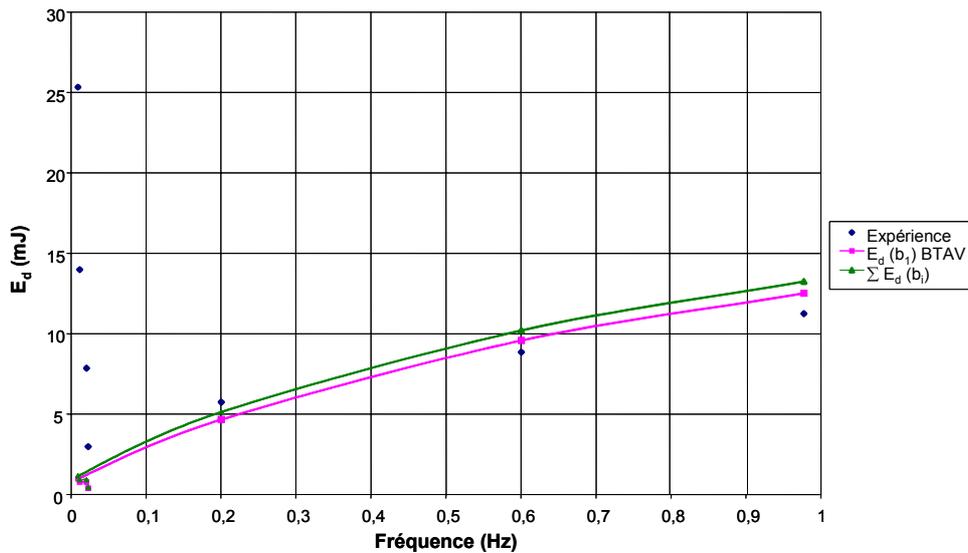


FIG. 6.10 – Comparaison des énergies en fonction de la fréquence - Modèle BTAV et expérience

Comme pour les essais en sinus, nous avons représenté sur la figure (6.11) les parties imaginaires des modules complexes des deux modèles BTAV et MFAV, ainsi que les sept valeurs expérimentales $\frac{E_d(1.\omega_T)}{\pi R_f b_1^2}$ calculées pour le premier harmonique d'amplitude b_1 (cf. Tableau 6.2). De même, par souci de clarté, nous avons tracé une courbe théorique pour chaque modèle correspondant (précharge 200 N et d'amplitude 0.1 mm).

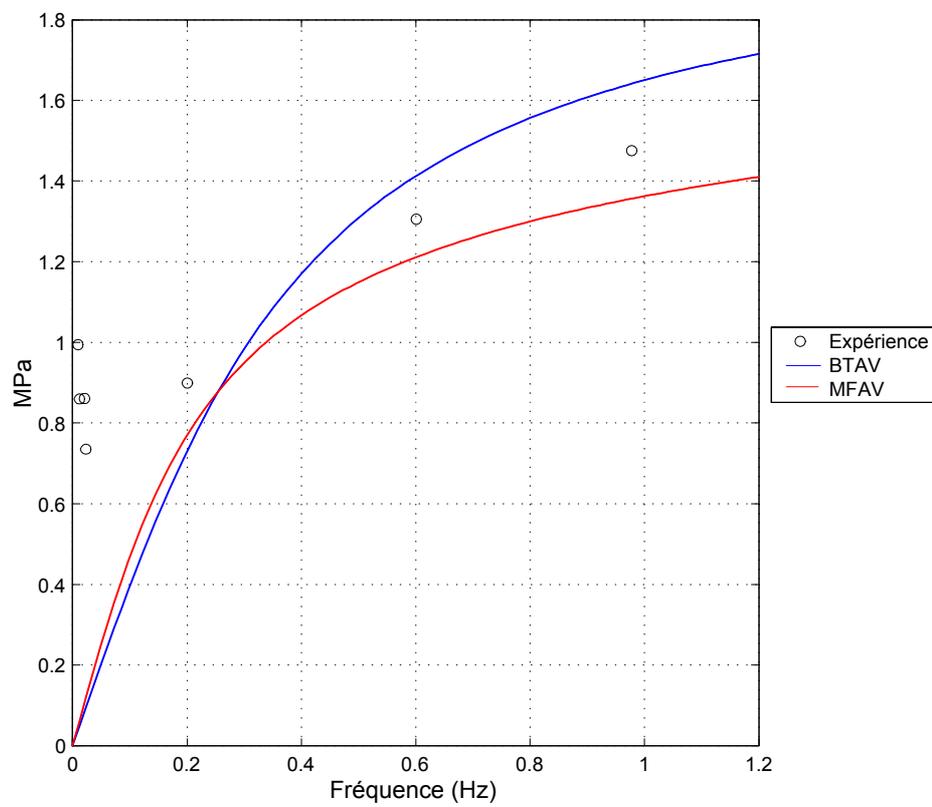


FIG. 6.11 – Comparaison des valeurs expérimentales $\frac{E_d(\omega_T)}{\pi R_f b_1^2}$ et de la partie imaginaire $\text{Im}[M(\omega_\omega)]$ - Etude dans cas des essais triangulaires

Fréquence (Hz)	0.0231	0.0208	0.0118	0.0095	0.2004	0.6006	0.9775
b_1 1 ^{er} harmonique (mm)	0.1609	0.2417	0.3227	0.4037	0.2020	0.2083	0.2209
$\frac{E_d(1.\omega_T)}{\pi R_f b_1^2}$ (MPa)	0.7351	0.8608	0.8595	0.9943	0.8996	1.3054	1.4751

Tableau 6.2 : Valeurs des énergies dissipées normalisées sur un cycle selon les fréquences

Ces essais quasi-statiques réalisés à la fréquence voisine de 0.02 Hz nous assurent bien de la convergence des mesures des expériences aux basses fréquences, nous pouvons observer d'après la figure (6.11) que la valeur mesurée semble bien converger vers une limite finie non nulle. En effet, pour une même amplitude de l'ordre de 0.2 mm , l'énergie mesurée après avoir normalisée tend vers la valeur limite de 0.86 MPa . En d'autre terme, ces essais en appui avec ceux effectués dans le cas sinusoïdal confirment bien la conjecture supposée : le comportement de notre matériau est bien de type hystérétique pour des faibles fréquences.

6.5 Conclusion

Lors d'un cycle d'essais sinusoïdaux ou triangulaires, nous avons vu que les trajets de charge et décharge sont différents. On observe alors que le cycle n'est pas complètement aplati. Ce phénomène est qualifié d'hystérésis et apparaît quel que soit le niveau de déformation et de charge statique. L'aire du cycle représente l'énergie dissipée au cours d'une période T . Cette dissipation peut provenir d'effets thermiques liés au chargement répété du matériau comme le cas actuel de nos essais qui subissent des frottements internes dans le matériau (glissements entre les chaînes par exemple).

L'étude réalisée s'est attachée à décrire le comportement dissipatif du matériau élastomère pour deux types d'essais à très basses fréquences (sinusoïdaux et triangulaires) et à vérifier si la modélisation des propriétés dissipatives de ce matériau grâce à nos deux modèles était valable. Nous avons donc comparé les résultats prédits par nos deux modèles avec ceux obtenus expérimentalement. Or, à très basses fréquences, les valeurs expérimentales divergent de la théorie. Les résultats obtenus sur les essais sinusoidaux semblent montrer que la partie imaginaire du module complexe est quasiment indépendante de la fréquence des sollicitations entre 0 et 0.5 Hz et tend vers une limite de l'ordre de 1.1 MPa alors que pour tous les modèles viscoélastiques la partie imaginaire du module complexe s'annule lorsque la fréquence est nulle. Ce phénomène se reproduit sur les essais triangulaires où nous avons réalisé des essais au centième de hertz mais la convergence de la partie imaginaire tend vers une limite un peu plus bas de l'ordre

de 0.9 *MPa*. Il semble donc qu'il y ait, à très basse fréquence, un phénomène dissipatif indépendant de la vitesse de sollicitation, et que donc, à ce titre, on qualifie de purement hystérétique. Pour des fréquences plus élevées, il est masqué par la viscoélasticité.

Conclusion générale

Le but de ce travail était d'appréhender le comportement dynamique à basses fréquences en compression uniaxiale d'un plot élastomère. Une analyse détaillée des qualités respectives des modèles existants nous a permis de déterminer quel modèle nous semblait le plus approprié pour décrire le comportement viscoélastique de notre matériau. Deux modèles (BTAV et MFAV) répondants aux qualités requises ont été retenus pour conduire une analyse détaillée . Ces deux modèles étudiés trouvent leur origine dans une rhéologie basée sur des opérateurs de dérivation non entière et présentent une partie commune définie par le modèle de Kelvin Voigt dont le rôle se situe principalement en statique (Ressort) et dans la partie supérieure du domaine fréquentiel (amortisseur).

Après avoir identifié ces deux modèles retenus, nous avons testé leur efficacité à prédire le comportement de notre matériau dans le cas des sollicitations triangulaires et cette vérification s'est avérée très satisfaisante. Dans ce cas, nous avons pu aussi prendre en compte les comportements non linéaires du matériau comme l'effet Payne et en faisant dépendre les coefficients de l'amplitude des sollicitations et de la précharge imposée. Les essais de relaxation sont intrinsèquement des essais très différents des essais périodiques types harmoniques ou triangulaires ; et eux par contre ont donné lieu à des prédictions très éloignées de la réalité. L'analyse des résultats nous a amené à émettre certaines hypothèses pour comprendre l'écart entre nos prédictions a priori et les expériences. Nous pensons que l'amplitude des déformations imposées fait décroître le module du module d'Young complexe mais cette amplitude est bien trop grande pour pouvoir appliquer une simple formule d'interpolation linéaire proposée dans un domaine très étroit. Mais E n'est pas le seul paramètre à devoir être modifié, il semble que α devrait augmenté et/ou ω_0 diminué.

Enfin, l'analyse de l'énergie dissipée pour des sollicitations périodiques a montré que la formule exacte pour les signaux harmoniques :

$$E_d = \pi R_f A^2 \operatorname{Im} [M(\omega)]$$

peut être remplacée dans le cas des signaux périodiques quelconques par :

$$E_d = \pi R_f b_1^2 \operatorname{Im} [M(\omega)]$$

où $|b_1|$ est l'amplitude du premier harmonique.

Il ne semble pas pertinent de prendre en compte les énergies des autres harmoniques. Mais le résultat le plus inattendu vient de l'étude à très basse fréquence qui a fait apparaître un phénomène hystérétique de coefficient de l'ordre de 1 MPa environ.

Il est clair qu'il serait intéressant de pousser plus loin les investigations concernant le comportement hystérétique de ce matériau et d'analyser les évolutions des paramètres et en particulier du paramètre E pour de très larges amplitudes afin de voir par exemple si E diminue avec l'amplitude jusqu'à atteindre la limite obtenue lors d'un essai de relaxation.

Annexe 1 : Dérivation non entière

Nous présentons dans cette annexe quelques rappels sur l'intégration et la dérivation d'ordre non entier. Nous nous limiterons au cas des ordres réels bien qu'on puisse aussi définir des ordres de dérivation et d'intégration complexes. Les principaux auteurs ayant contribué à l'histoire de la dérivation d'ordre non entier sont : Leibniz (1695), Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), H. Weyl (1885), Hadamard (1892), L. Schwartz (1945) et Ross (1975).

Parmi les ouvrages de références existants dans la littérature, nous avons utilisés en particulier ([22], [36], [26], [27] et [28]).

6.6 Introduction

Il y a trois approches différentes pour aborder la définition de la dérivation :

- la notion classique de limites de différences divisées
- la notion de réciproque de l'intégration successive
- l'utilisation de la transformée de Fourier.

Nous allons aborder successivement ces 3 aspects de la dérivation car les 3 peuvent être utilisés pour passer à la dérivation d'ordre non entier.

6.7 L'approche classique par les limites

Soit une fonction f , sa dérivée au point x , est définie par :

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (6.22)$$

lorsque cette limite existe.

Si on calcule la dérivée de la fonction dérivée f' ainsi obtenue, on obtient la dérivée seconde f'' . On donne ainsi un sens à la dérivée n-ième (ou dérivée

d'ordre n) de la fonction f , où n est un nombre entier positif :

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x - jh) \quad (6.23)$$

où $\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$.

Or la fonction Gamma (cf. Annexe 2) est telle que :

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z) \quad (6.24)$$

et donc on obtient $\Gamma(n + 1) = n!$ pour tout n entier positif ou nul. Mais, on peut prolonger la fonction Gamma au plan complexe privé des entiers négatifs ou nuls.

On peut aussi écrire :

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \frac{-n(1-n)(2-n)\dots(j-n-1)}{j!} \quad (6.25)$$

Et, en remplaçant l'entier positif n par α réel ou complexe mais non entier, en utilisant la fonction Gamma et la relation (6.24), la relation précédente devient :

$$\frac{-\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(j-\alpha-1)}{j!} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)} \quad (6.26)$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier α par :

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=x-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)} f(x - jh) \quad (6.27)$$

à condition que α ne soit pas un entier.

L'utilisation de cette définition, d'un point de vue numérique, suppose de pouvoir définir la fonction f aux points $x_j = x - jh$ pour $j = 0, \dots, n$ pour h choisi assez petit, c'est à dire sur $[a, x]$.

6.8 Définition à partir des primitives n-ième

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$, on définit une suite de fonctions F_n nulles en a et qui vérifient $F'_{n+1} = F_n$ avec $F_0 = f$. La fonction F_n est une primitive n-ième de la fonction f . On montre la formule suivante :

$$F_n(x) = \int_a^x \frac{(x-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(\tau) d\tau \quad (6.28)$$

appelée formule de Cauchy et qui exprime par une intégrale unique la primitive n -ième de la fonction f dont toutes les dérivées s'annulent en a . En notant cette fonction $I_a^n f$ on a :

$$I_a^n f = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} * f \quad (6.29)$$

Or, la formule (6.28) ci-dessus a encore un sens lorsqu'on donne à n une valeur $-\beta$ réelle strictement positive inférieure à 1.

$$D_a^\beta f = I_a^{-\beta} f = \frac{x^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} * f = \int_a^x \frac{(x-\tau)^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} f(\tau) d\tau \quad (6.30)$$

Cette formule est appelée formule de Riemann-Liouville.

Elle permet pour des β compris entre -1 et 0 de définir une dérivée d'ordre non entier.

Plus généralement pour un α non entier quelconque positif, on définit la dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville par la relation :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f(\tau) d\tau \quad \text{avec } n \text{ entier vérifiant : } 0 < n-1 \leq \alpha < n \quad (6.31)$$

Si f est n fois dérivable on obtient aussi :

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (6.32)$$

On montre que pour des fonctions ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n la dérivée de Grünwald-Letnikov définie au paragraphe précédant est la même que la dérivée au sens de Riemann-Liouville.

En général a est choisit égal à 0 car on travaille souvent avec des fonctions causales. Pour $a = 0$ et f causale, on peut aussi écrire la formule (6.31) par :

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{(x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} H(x) * f \right) \quad \text{avec } n \text{ entier vérifiant : } 0 < n-1 \leq \alpha < n \quad (6.33)$$

Cette expression est définie au sens des distributions dès que f est localement sommable. Cette formule permet de définir d'une façon élégante les dérivées d'ordre non entier quelconques.

6.9 Utilisation de la transformée de Fourier

Un moyen simple de définir la dérivée non entière est la transformée de Fourier qui a l'avantage d'avoir des expressions très commodes d'emploi.

En considérant la fonction $f(t)$ réelle ou complexe de t , la fonction $f(t)$ est supposée de carré sommable, c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2$ a une valeur finie. Sa transformée de Fourier notée \hat{f} est définie par :

$$\hat{f}(\omega) = F[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-j\omega t) dx \quad (6.34)$$

La formule d'inversion s'écrit :

$$f(x) = F^{-1}[f(\omega)](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(j\omega x) d\omega \quad (6.35)$$

En considérant $f'(x)$ la dérivée de f , nous avons :

$$F[f'(x)](\omega) = i\omega \hat{f}(\omega) \quad (6.36)$$

Et plus généralement :

$$F[f^{(n)}(x)](\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

Il est alors naturel de supposer que la transformée de Fourier de la dérivée fractionnaire notée D^α de la fonction f s'écrit :

$$F[D^\alpha f(x)](\omega) = (i\omega)^\alpha \hat{f}(\omega) \quad (6.37)$$

En utilisant les relations (6.35) et (6.37), nous pouvons en déduire l'expression de la dérivée d'ordre non entier (ou fractionnaire) d'une fonction f avec la condition $-1 < \alpha$:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^\alpha \hat{f}(\omega) \exp(j\omega x) d\omega \quad (6.38)$$

On notera que dans ce cas la fonction f n'est pas seulement définie sur $[a, +\infty[$ mais éventuellement sur \mathbb{R} tout entier.

6.9.1 Propriétés générales

Quelques propriétés sont brièvement présentées. Leur démonstration est exposée dans [26]..

1. Linéarité :

$$\frac{d^\alpha [f_1 + f_2]}{dx^\alpha} = \frac{d^\alpha f_1}{dx^\alpha} + \frac{d^\alpha f_2}{dx^\alpha} \quad (6.39)$$

2. Dérivation d'un produit :

$$\frac{d^\alpha [fg]}{dx^\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \frac{d^{\alpha-j} f}{dx^{\alpha-j}} \frac{d^j g}{dx^j} \quad (6.40)$$

avec $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!}$

3. Dérivation d'une constante :

$$\frac{d^\alpha C}{dx^\alpha} = C \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (6.41)$$

6.10 Conclusion sur la dérivation non entière

La dérivée fractionnaire prend en compte les valeurs de f à tous les instants du passé. Elle donne une caractérisation globale de la fonction $f(x)$. En tenant compte de tout le passé de la fonction, elle permet de discriminer les fonctions dont le passé est différent. Une telle propriété est donc utilisée pour caractériser des courbes de fonctions dont le nombre de paramètres est réduit.

Annexe 2 : Figures des essais dynamiques

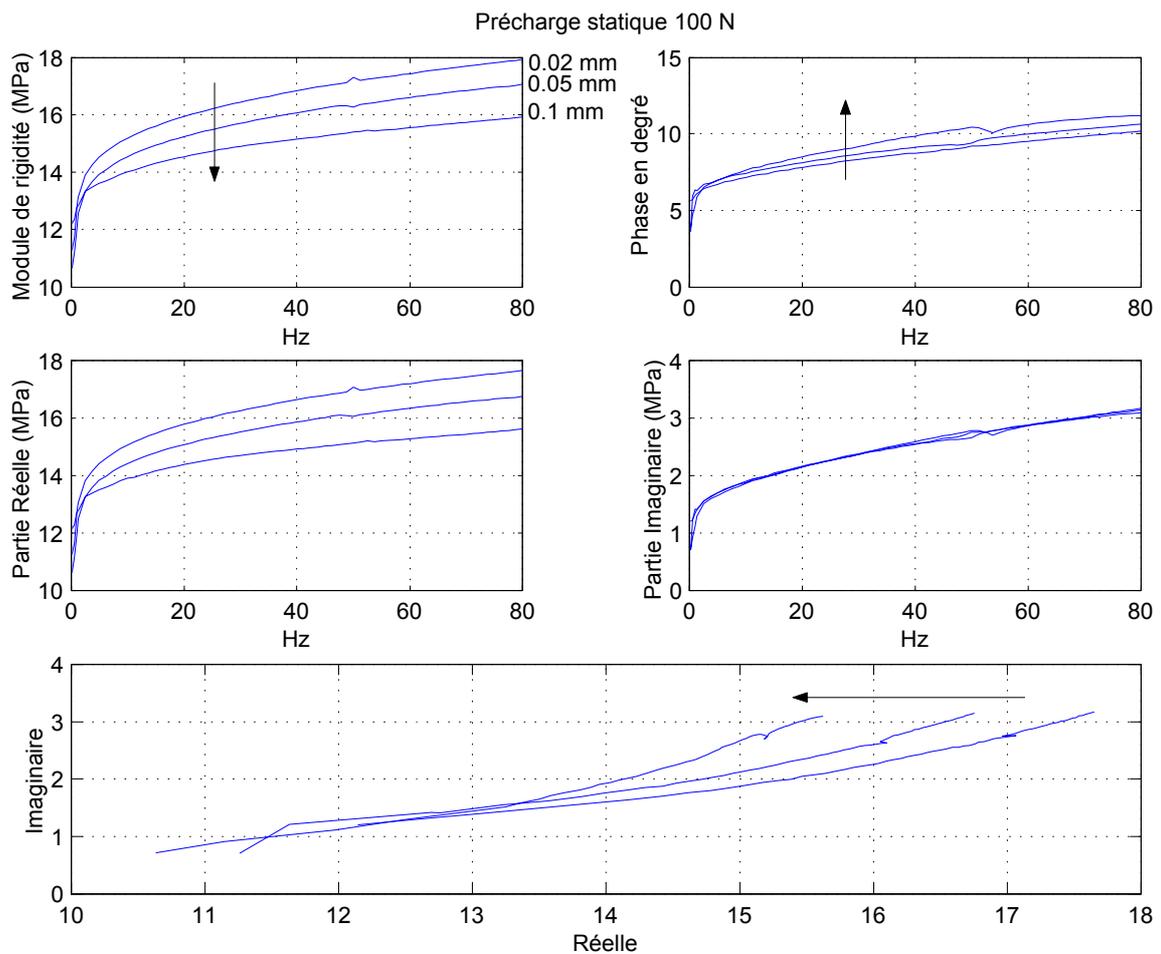


FIG. 6.12 – Module complexe selon les amplitudes (précharge statique de 100 N)

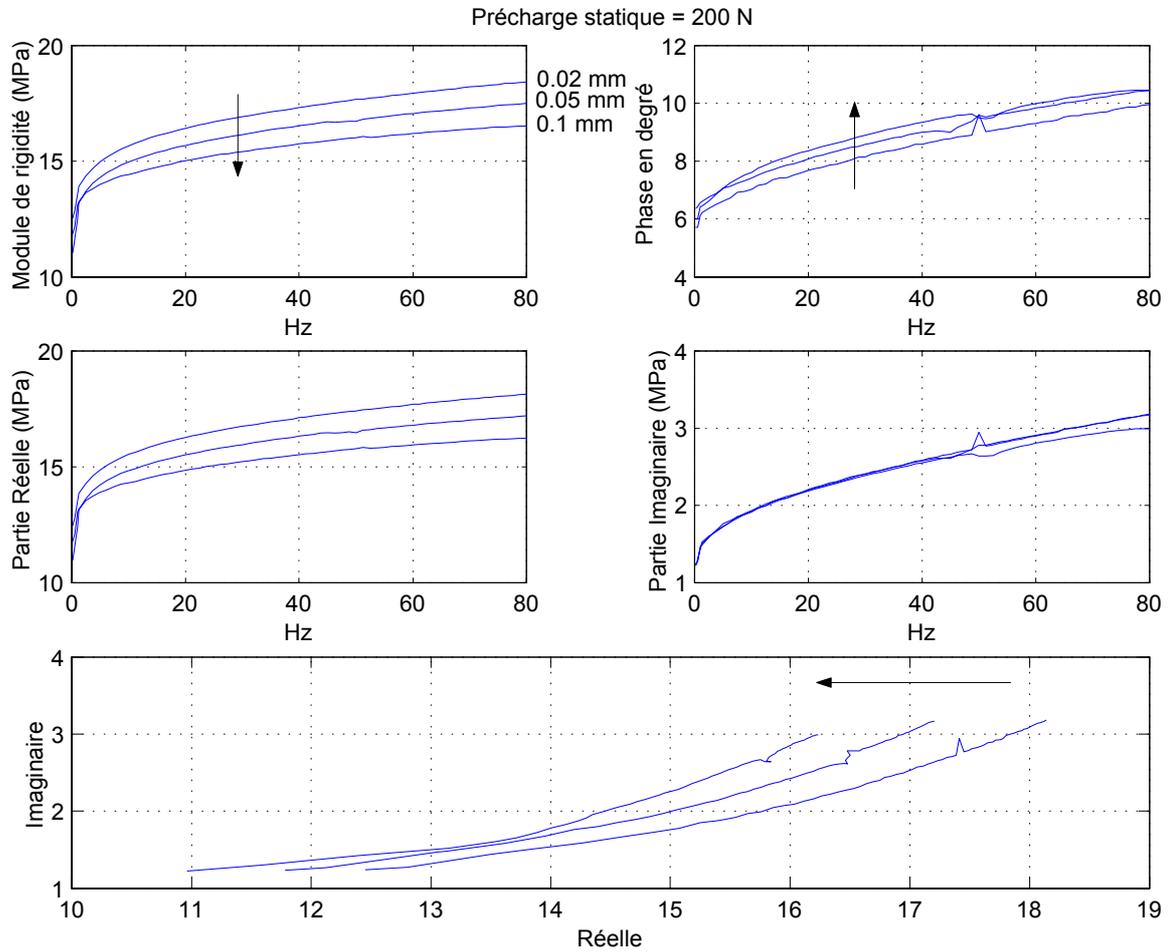


FIG. 6.13 – Module complexe selon les amplitudes (précharge statique de 200 N)

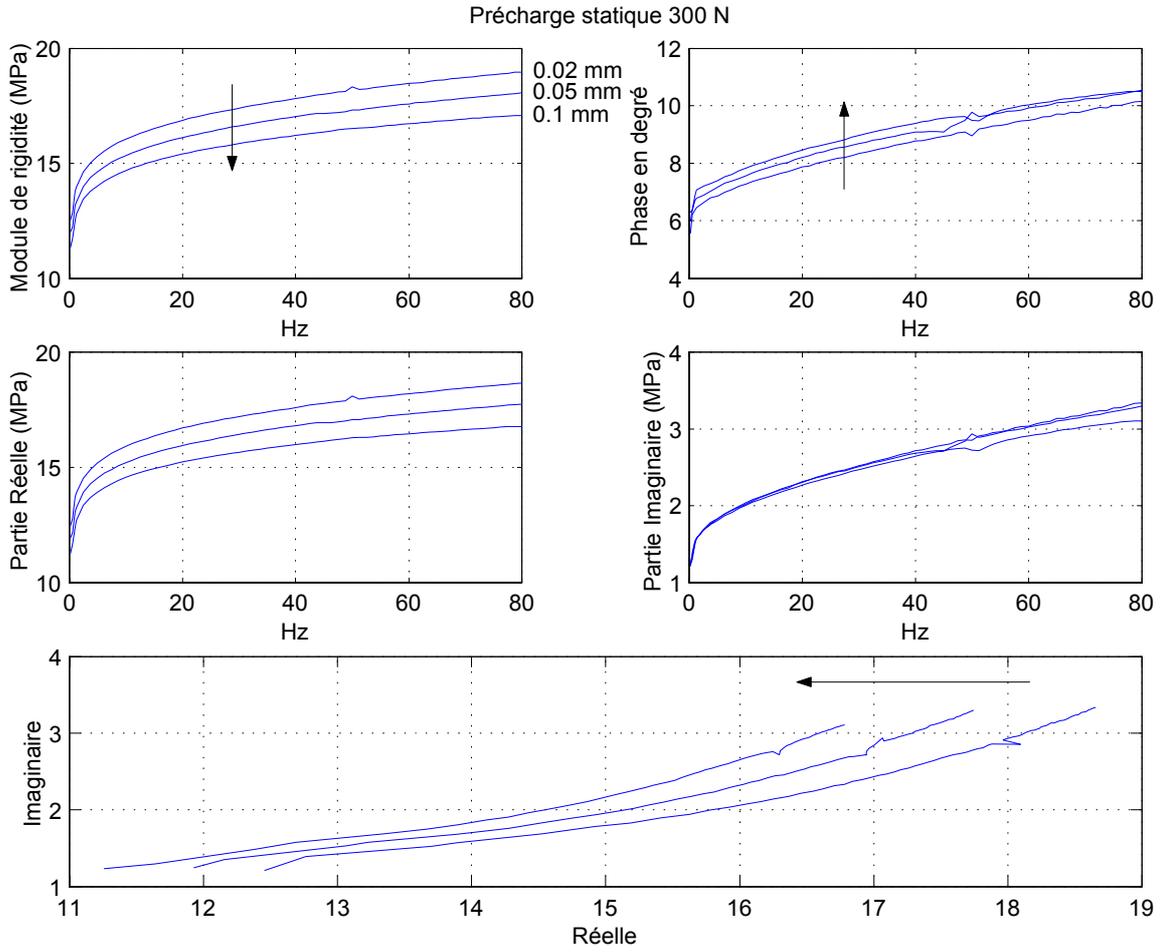


FIG. 6.14 – Module complexe selon les amplitudes (précharge statique de 300 N)

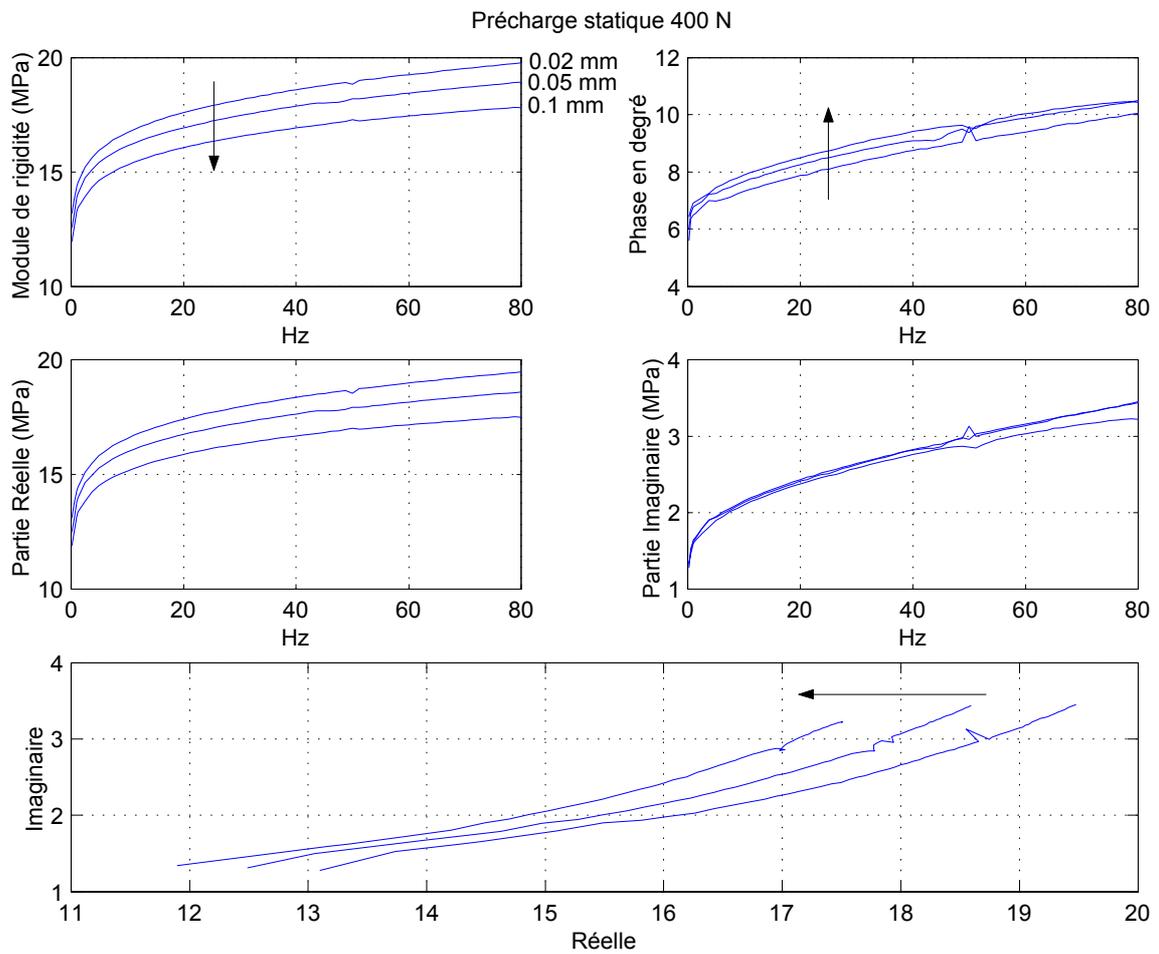


FIG. 6.15 – Module complexe selon les amplitudes (précharge statique de 400 N)

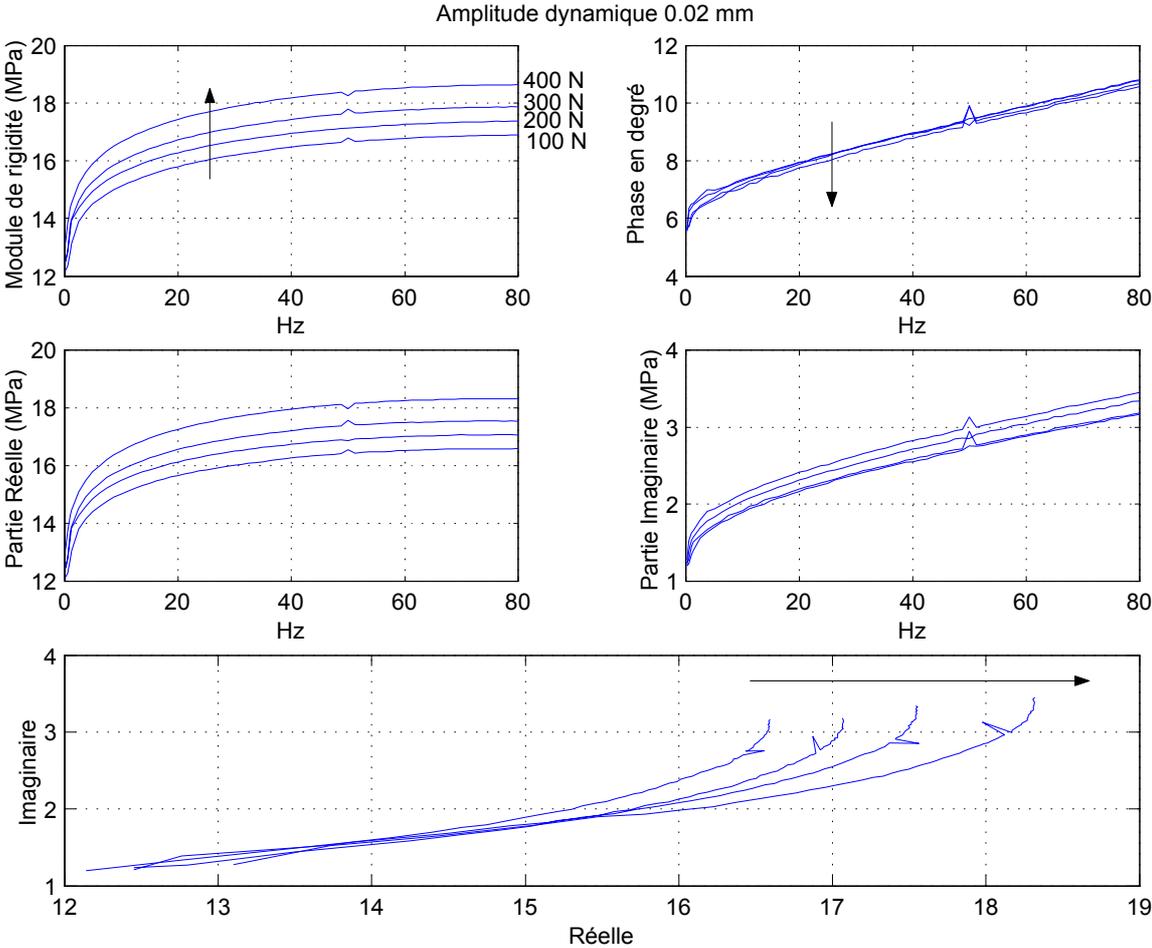


FIG. 6.16 – Module complexe selon les précharges (amplitude dynamique 0.02 mm)

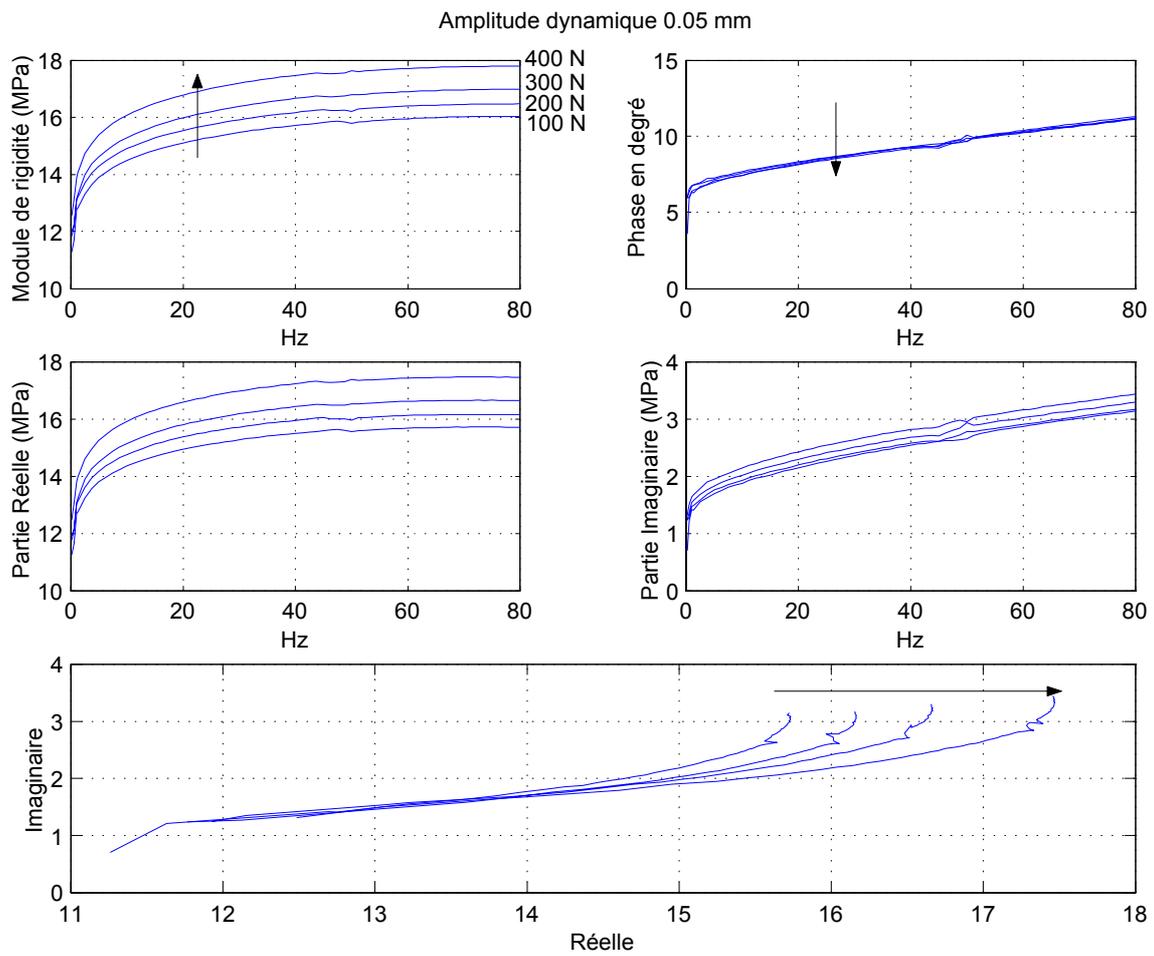


FIG. 6.17 – Module complexe selon les précharges (amplitude dynamique 0.05 mm)

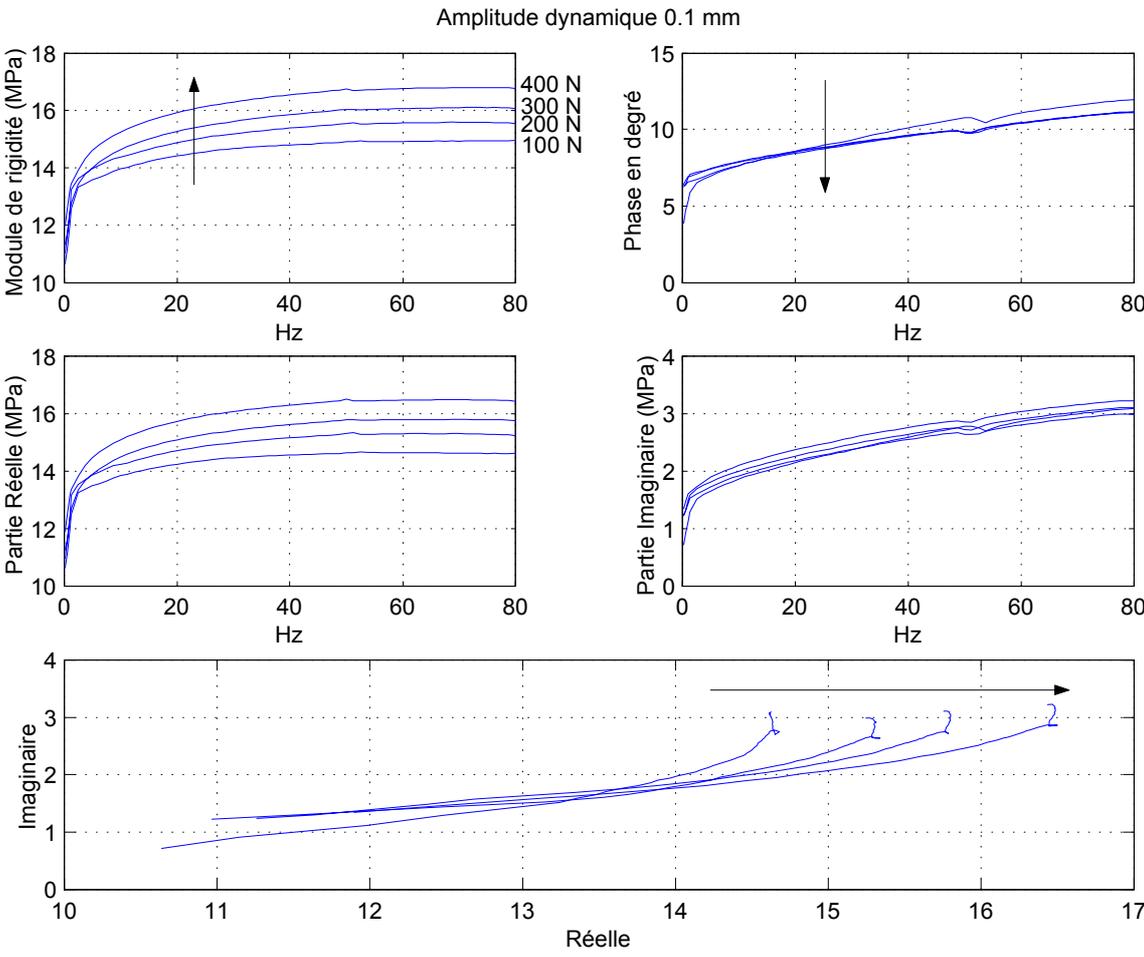
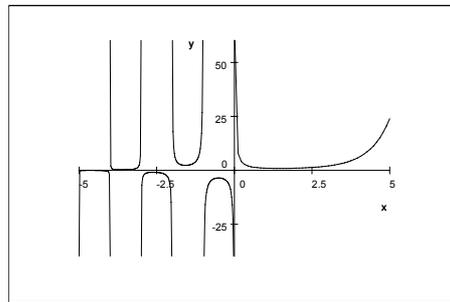


FIG. 6.18 – Module complexe selon les précharges (amplitude dynamique 0.1 mm)

Annexe 3 : Fonction Gamma

Pour z réelle strictement positive, la fonction Gamma continue en z est définie comme une intégrale sommable :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \quad (6.42)$$



Allure de la fonction Gamma

Propriétés

$$\Gamma(1) = 1 \quad (6.43)$$

Si z est un réel strictement supérieur à -1 et n un entier naturel :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (6.44)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (6.45)$$

Si $0 < z < 1$:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (6.46)$$

Pour z quelconque différent de $0, -1, -2, \dots$ et n un entier quelconque vérifiant :
 $z + n > 0$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \quad (6.47)$$

Etude de la fonction Γ au voisinage de $z = -n$ avec n entier ≥ 0 .

Posons $z = u - n$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(u+1)}{u(u-1)(u-2)\dots(u-n)} \underset{u \rightarrow 0}{\simeq} \frac{(-1)^n}{n!u} \quad (6.48)$$

Γ admet donc les points $z = -n$ pour pôles simples avec le résidu $\frac{(-1)^n}{n!u}$
 Nous retenons en particulier que :

$$\Gamma(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{z} \quad (6.49)$$

Annexe 4 du chapitre 5

Calcul de la primitive de $r_{SP}(t) \exp(-\omega_0 t)$

On rappelle que la fonction $r_{SP}(t)$ est la fonction de relaxation du spring-pot. En le multipliant par la fonction $\exp(-\omega_0 t)$ et en l'intégrant entre les bornes $t = a$ et $t = b$, on a :

$$F(a, b) = \int_a^b r_{SP}(t) \exp(-\omega_0 t) dt = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha) \omega_0^\alpha} \int_a^b t^{-\alpha} \exp(-\omega_0 t) dt \quad (6.50)$$

En faisant un changement de variable $v = \omega_0 t$ dans l'intégrale, on obtient :

$$F(a, b) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha) \omega_0} \int_{\omega_0 a}^{\omega_0 b} v^{-\alpha} \exp(-v) dv \quad (6.51)$$

On retrouve la forme de la fonction Gamma incomplète γ (voir Annexe 5) en séparant l'intégrale en deux parties comme suit :

$$F(a, b) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha) \omega_0} \left[\int_{\omega_0 a}^0 v^{-\alpha} \exp(-v) dv + \int_0^{\omega_0 b} v^{-\alpha} \exp(-v) dv \right] \quad (6.52)$$

d'où

$$F(a, b) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha) \omega_0} [-\gamma(-\alpha+1, \omega_0 a) + \gamma(-\alpha+1, \omega_0 b)] \quad (6.53)$$

Annexe 5 du chapitre 5

Calcul de la primitive de $\gamma(1 - \alpha, \omega_0 t)$

On rappelle que la fonction gamma incomplète s'écrit : $\gamma(\beta, x) = \int_0^x \exp(-v) v^{\beta-1} dv$
Posons

$$G(a, b) = \int_a^b \gamma(1 - \alpha, \omega_0 u) du \quad (6.54)$$

En posant $\omega_0 u = v$, on obtient :

$$G(a, b) = \frac{1}{\omega_0} \int_{\omega_0 a}^{\omega_0 b} \gamma(1 - \alpha, v) dv \quad (6.55)$$

En intégrant par parties, on a :

$$G(a, b) = \frac{1}{\omega_0} \left\{ [v \cdot \gamma(1 - \alpha, v)]_{\omega_0 a}^{\omega_0 b} - \int_{\omega_0 a}^{\omega_0 b} v^{1-\alpha} \exp(-v) dv \right\} \quad (6.56)$$

car $\frac{\partial \gamma(1-\alpha, x)}{\partial x} = x^{-\alpha} \exp(-x)$.

Finalement, on obtient :

$$G(a, b) = \frac{1}{\omega_0} \left[\omega_0 b \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 b) - \omega_0 a \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 a) + \int_0^{\omega_0 a} v^{1-\alpha} \exp(-v) dv - \int_0^{\omega_0 b} v^{1-\alpha} \exp(-v) dv \right] \quad (6.57)$$

d'où

$$G(a, b) = \frac{1}{\omega_0} [\omega_0 b \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 b) - \omega_0 a \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 a) + \gamma(2 - \alpha, \omega_0 a) - \gamma(2 - \alpha, \omega_0 b)] \quad (6.58)$$

$$G(a, b) = b \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 b) - a \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 a) + \frac{1}{\omega_0} [\gamma(2 - \alpha, \omega_0 a) - \gamma(2 - \alpha, \omega_0 b)] \quad (6.59)$$

En prenant comme bornes de l'intégral $a = 0$ et $b = t$ d'une part puis $a = t - t_0$ et $b = t$ d'autre part, on obtient les deux expressions suivantes :

$$G(0, t) = t \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 t) - \frac{\gamma(2 - \alpha, \omega_0 t)}{\omega_0} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} G(t - t_0, t) &= t \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 t) - (t - t_0) \cdot \gamma(1 - \alpha, \omega_0 (t - t_0)) \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} [\gamma(2 - \alpha, \omega_0 (t - t_0)) - \gamma(2 - \alpha, \omega_0 t)] \end{aligned} \quad (6.61)$$

Ces deux dernières relations permettent d'exprimer la contrainte du "nouveau" modèle fractionnaire (cf. chapitre 5 § 5.2.2) en différenciant les deux parties du temps t : $0 < t < t_0$ et $t > t_0$.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] N.H. Abel. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. *oeuvres complètes*, 1 :11–18, 1823.
- [2] M. Alcoutlabi. Modélisation du comportement viscoélastique des polymères amorphes solides par la méthode de dérivation et d'intégration fractionnaires. *Phd thesis, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, France*, 1999.
- [3] P. Argoul. Identification des structures vibrantes. *Phd thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France*, 1990.
- [4] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, pages 133–155, 1955.
- [5] T. Beda and Y. Chevalier. Sur le comportement statique et dynamique des élastomères en grandes déformations, static and dynamic behavior of rubber materials with large deformations. *Mécanique Industrielle et Matériaux*, 50 :228–231, 1997.
- [6] M.A. Biot. Linear thermodynamics and the mechanics of solids. *In Proc. 3rd US Natl. Congress in Applied Mechanics ASME*, pages 1–18, 158.
- [7] S. Cantournet and R. Desmorat. Modélisation thermodynamique du frottement interne et de l'hystérésis d'un élastomère. *In Proc. du XVI Congrès Français de Mécanique, Nice*, 2003.
- [8] M. Carrega. *Matériaux polymères*. Dunod, Juin 2000.
- [9] Y. Chevalier, T. Beda, and H. Bechir. Non linear viscoelasticity modeling and test. *In Proc. of the 9th national congress on theoretical and applied mechanics*, 1 :422–429, 2001.
- [10] R.M. Christensen. *Theory of viscoelasticity - An Introduction, Second edition*. Academic Press, 1982.
- [11] P. Cosson. Contribution à la modélisation du comportement mécanique des solides viscoélastiques par des opérateurs différentiels d'ordre non entier. *PhD thesis, Université de Nantes*, 1995.
- [12] J-L. Dion. Modélisation et identification du comportement dynamique de liaisons hydro-élastiques. *PhD thesis, Ecole Centrale de Paris*, 1995.

-
- [13] L. Garibaldi and H.N. Onah. *Viscoelastic material damping technology*. Becchis Osiride, Torino, Italy, 1996.
- [14] A.N. Gent and P.B. Lindley. The compression of bonded rubber blocks. 173 :111–117, 1959.
- [15] A.N. Gent and E.A. Meinecke. Compression, bending, and shear of bonded rubber blocks. 10 :48–53, 1970.
- [16] J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8 :101–186, 1892.
- [17] R. Hattori and K.J. Takei. Soc. rubb. ind. japan. 23 :194, 1950.
- [18] N. Heymans and J.C. Bauwens. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behaviour. *Rheological Acta*, 30 :210–219, 1994.
- [19] A. Huynh, P. Argoul, N. Point, and J.L. Dion. Modèles rhéologiques utilisant les dérivées fractionnaires pour les matériaux viscoélastiques linéaires. application à l'identification du comportement d'élastomères. *13ème Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, Lyon*, 2002.
- [20] Leibniz. La naissance du calcul différentiel. *26 articles des Acta Eruditorum, Paris*, 1989.
- [21] A. Lion. On the thermodynamics of fractional damping elements. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 9 :83–86, 1997.
- [22] Liouville. Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques. *Journal de l'école Polytechnique*, 13 :71–162, 1832.
- [23] N. Makris. Causal hysteretic element. *Journal of Engineering Mechanics*, 123 :1209–1214, 1995.
- [24] J. Mandel. *Cours de mécanique des milieux continus*. Tome II, Gauthiers-Villars, Paris, France, 1966.
- [25] P.G. Nutting. A new generalized law of deformation. *Journal of the Franklin Institute*, 191 :679–685, 1921.
- [26] K. B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus*. Academic Press, New York, London, UK, 1974.
- [27] A. Oustaloup. *La dérivation non entière, théorie, synthèse et applications*. HERMES, London, UK, 1999.
- [28] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, New York, London, UK, 1999.
- [29] J. Rault. *Les polymères solides*. CEPADUES - EDITIONS, France, Septembre 2002.

- [30] E. Reyes-Melo, J. Martinez-Vega, C. Guerrero-Salazar, and U. Ortiz-Méndez. Modélisation de la viscoélasticité des polymères à l'état solide. application du calcul fractionnaire. *Revue des composites et des matériaux avancés*, 12 :337–359, 2002.
- [31] B. Ross. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. *Lecture notes in Mathematics*, 457 :1–36, 1975.
- [32] B. Rubin. *Fractional integrals and potentials*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 82. Longman, 1996.
- [33] P. Saad. Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc. *Phd thesis, Ecole Centrale de Lyon, France*, 2003.
- [34] J. Salençon. *Viscoélasticité, cours de calculs des structures anélastiques*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.
- [35] H. Schiessel and A. Blumen. Fractal aspects in polymer science. *Fractals*, 3 :483–490, 1995.
- [36] Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [37] F. Sidoroff. Cours de comportement des matériaux. *Cours de D.E.A, Ecole Centrale de Lyon, France*, 1984.
- [38] J.C Simo. On a fully three dimensional finite strain viscoelastic damage model. formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60 :153–173, 1987.
- [39] Snowdon. *Vibration isolation : use and characterization*. NBS Handbook 128. Library of congress catalog card number 79-6000062, 1979.
- [40] M. Soula. Etude du comportement mécanique des matériaux viscoélastiques par les dérivées fractionnaires. *PhD thesis, C.N.A.M*, 1996.
- [41] M. Soula and Y. Chevalier. La dérivée fractionnaire en rhéologie des polymères - application aux comportements élastiques et viscoélastiques linéaires et non linéaires des élastomères. *Proc. ESAIM : Fractional Differential Systems - URL : <http://www.edpsciences.org/articlesproc/Vol.5/index.htm>*, 5 :193–204, 1998.
- [42] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, T. Beda, and C. Esteoule. Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 205 :167–184, 1997.
- [43] A.A Soulimani. Une méthode énergétique de modélisation de la viscoélasticité non linéaire en grandes déformations. *Phd thesis, E.N.P.C, Paris, France*, 1993.
- [44] R.V. Southwell. *An Introduction to the Theory of Elasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1941.

-
- [45] P.J. Torvik and R.L. Bagley. Fractional derivatives in the description of damping materials and phenomena. *Air Force Institute of Technology, Ohio*, pages 125–135, 1955.
- [46] N.-P. Vinh Tuong. Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique. *Extrait du mémorial de l'Artillerie Française, 3e Fasc*, 1967.
- [47] T. Vinh, M. Soula, and Y. Chevalier. Etude dynamique des polymères et élastomères par les dérivées fractionnaires. *Mécanique industrielle et matériaux*, 49, No. 2 :101–103, 1996.