



HAL
open science

Etude théorique et expérimentale d'un écoulement tournant dans une conduite.

Benjamin Leclaire

► **To cite this version:**

Benjamin Leclaire. Etude théorique et expérimentale d'un écoulement tournant dans une conduite.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Polytechnique X, 2006. Français. NNT : . pastel-00002408

HAL Id: pastel-00002408

<https://pastel.hal.science/pastel-00002408>

Submitted on 28 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

présentée par

Benjamin Leclaire

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Ecole Polytechnique

Spécialité : Mécanique

**Etude théorique et expérimentale d'un
écoulement tournant dans une conduite**

soutenue le 21 Décembre 2006

devant le jury composé de :

M. J-P. Bonnet *Rapporteur*
M. C. Cambon *Directeur de thèse*
M. J-M. Chomaz
M. J-N. Gence *Rapporteur*
M. E. Hopfinger
M. L. Jacquin
M. Z. Rusak

Résumé : Cette thèse est une contribution à l'étude de la dynamique des écoulements tournants de grand nombre de Reynolds. Elle vise à expliquer la déstabilisation, à nombre de swirl élevé, d'un écoulement en rotation solide se développant dans une conduite cylindrique de section constante puis contractante, et débouchant en un jet tournant. Dans la première partie, on caractérise la turbulence qui en résulte dans le plan de sortie du jet. Des mesures par anémométrie fil chaud, effectuées en faisant varier le taux de contraction final, confirment que l'origine de cette turbulence doit être principalement recherchée dans l'écoulement de conduite et non dans le jet. La deuxième partie aborde alors l'étude de cet écoulement sous un angle bibliographique et théorique. On montre d'abord que l'écoulement à l'amont de la contraction peut être fortement affecté par la présence de celle-ci lorsqu'il est sous-critique vis-à-vis des ondes inertielles (ou ondes de Kelvin) axisymétriques. A l'aide d'un modèle de fluide parfait axisymétrique, on étudie alors l'influence du taux de contraction ainsi que des conditions aux limites amont au régime transcritique. On montre qu'une recirculation de paroi doit se produire à l'intérieur de la contraction. Dans la troisième partie, on explore l'écoulement de conduite par PIV stéréoscopique. La comparaison de ces mesures avec une simulation numérique axisymétrique à nombre de Reynolds modéré met en évidence une dynamique sous-critique nouvelle. En présence d'une contraction finale, le franchissement de la transition critique s'effectue sans éclatement tourbillonnaire. On observe à la place des ondes inertielles axisymétriques stationnaires de grande amplitude. On montre finalement que des instabilités centrifuges de petite échelle ainsi qu'une instabilité globale axisymétrique peuvent participer à la création de turbulence.

Mots-clés : Ecoulements tournants, ondes inertielles, turbulence, instabilités centrifuges, éclatement tourbillonnaire, instabilité hydrodynamique, transition critique, bifurcations, PIV stéréoscopique.

Theoretical and experimental study of a rotating flow in a duct. This thesis is a contribution to the study of rotating flow dynamics at high Reynolds number. It aims at explaining the destabilization, for a sufficiently high swirl number, of a uniformly rotating flow developing in a cylindrical duct of constant cross-section followed by a contraction, and exhausting as a swirling jet. The first part of the thesis focuses on the corresponding turbulence that is observed in the jet exit plane. Hot-wire anemometry measurements, performed for different contraction ratios of the final duct portion, confirm that the origin of the turbulence has to be mainly sought in the duct flow and not in the jet. The second part thus investigates this flow through a bibliographic and theoretical study. It is first shown that the contraction may strongly affect the flow upstream of it when it is subcritical with respect to inertial (or Kelvin) axisymmetric waves. Using an inviscid axisymmetric model, we then study the influence on the flow of the contraction ratio and of the upstream boundary conditions in the transcritical regime. A wall recirculation is seen to occur inside the contraction near the critical swirl. In the third part the duct flow is investigated by stereoscopic PIV. Comparison of these measurements with a numerical simulation of axisymmetric flow at a moderate Reynolds number reveals a new kind of transition towards subcritical flow. The contraction is seen to suppress vortex breakdown in favor of large-amplitude standing axisymmetric inertial waves. Finally, small-scale centrifugal instabilities and a global axisymmetric instability are identified as possible sources of turbulence.

Keywords : rotating flows, inertial waves, turbulence, centrifugal instabilities, vortex breakdown, hydrodynamic instabilities, critical transition, bifurcations, stereoscopic PIV.

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Département d'Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale (DAFE) de l'ONERA, au centre de Meudon. Elle a été financée par la DGA et le CNRS les trois premières années, puis par l'ONERA la dernière année.

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à Laurent Jacquin, qui m'a permis de travailler sur ce sujet vaste et passionnant, et encadré avec une bonne humeur constante pendant ces quatre années. Sa passion contagieuse pour la mécanique des fluides, ses conseils judicieux et son sens de la pédagogie m'ont été d'une aide précieuse lors de cette thèse. Je lui suis également profondément reconnaissant pour tout le soutien qu'il m'a apporté, et pour sa confiance sans faille.

Je souhaite remercier Claude Cambon pour m'avoir fait l'honneur d'assurer la direction de cette thèse, ainsi que pour les grandes qualités humaines dont il sait faire preuve, et pour les intéressantes discussions scientifiques que nous avons eues ensemble. Ma gratitude va également à tous les membres du jury : Jean-Paul Bonnet et Jean-Noël Gence, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail, ainsi que Jean-Marc Chomaz, Emil Hopfinger et Zvi Rusak. Soyez tous remerciés pour l'intérêt que vous avez porté à mes recherches, et pour vos remarques constructives sur le manuscrit.

Lors de ces quatre années, j'ai eu la chance de collaborer avec de nombreuses personnes au DAFE. Cet travail leur doit beaucoup et je souhaite les en remercier ici, à commencer par Denis Sipp, pour ses conseils avisés en numérique et nos nombreuses discussions non linéaires, ainsi que Philippe Geffroy pour toute son aide lors des mesures, et pour son sens de l'humour indéfectible face à l'adversité expérimentale. Merci également à Jean-Charles Abart, Didier Soulevant, Robert Soares Morgadinho et Yves Le Sant pour leur implication dans cette difficile aventure de PIV Stéréo à travers un hublot cylindrique, ainsi qu'à Michel Erard pour avoir mis à disposition son matériel informatique pour en assurer le dépouillement. Enfin, merci à Guy Rancarani, Jean-Pierre Tobeli, François Lambert et à toutes les personnes de l'atelier pour leur soutien technique lors des campagnes expérimentales.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Laurette Tuckerman, pour ses précieux conseils de lecture sur l'analyse des bifurcations, ainsi qu'à Sabine Ortiz, pour m'avoir confié pendant quelques années ses groupes d'élèves en travaux dirigés à l'ENSTA. Ces enseignements, ainsi que ceux que j'ai pu donner à l'Ecole Polytechnique, m'ont beaucoup apporté humainement et scientifiquement.

Le bon déroulement de cette thèse doit également beaucoup à la bonne ambiance qui règne au DAFE. Merci à tous pour votre sympathie, vos coups de main et pour tous les instants de détente autour de la machine à café. Une mention spéciale pour ceux qui ont eu le courage de chausser leurs baskets contre vents et marées pour m'accompagner lors des footings de midi en forêt de Meudon...

Enfin, je souhaite bien sûr remercier tous les proches qui m'ont accompagné pendant ces quatre ans, et qui ont en quelque sorte vécu cette thèse avec moi. Leur soutien et leurs

encouragements, sans oublier tous les bons moments passés à leurs côtés, ont grandement contribué à la réussite de ce travail. A mes parents, à mon frère Julien et à Alexandra, ainsi qu'à tous mes amis, en un mot : merci.

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
Notations	ix
1 Introduction	1
1.1 Ecoulements tournants en mécanique des fluides	1
1.2 Origines de cette étude	2
1.3 Buts et organisation du manuscrit	3
I Génération d'un jet tournant à grand nombre de Reynolds	5
2 La soufflerie R4Ch	7
2.1 Description	7
2.2 Choix des paramètres de contrôle	9
2.3 Mode opératoire	10
2.3.1 Point de fonctionnement initial ($\Omega_0 = 0, S = 0$)	11
2.3.2 Essais en rotation ($\Omega_0 \neq 0, S \neq 0$)	12
3 Mesures de turbulence en sortie de jet	15
3.1 Introduction	15
3.2 Dispositif expérimental	16
3.2.1 Chaîne d'acquisition	16
3.2.2 Réglages géométriques	16
3.3 Profils de vitesses moyennes	17
3.3.1 Evolution en fonction de S	17
3.3.2 Grandeurs de sortie	19
3.4 Energie cinétique turbulente	20
3.4.1 Evolution des profils de turbulence en fonction de S	20
3.4.2 Fluctuations de vitesse, $r/R_1 = 0$ et $r/R_1 = 0.6$	21
3.4.3 Spectres	21
3.5 Discussion	27
II Etude bibliographique et théorique de l'écoulement de conduite	29
4 Phénomènes physiques dans les écoulements tournants confinés	31

4.1	Introduction	31
4.2	Dynamique locale	31
4.2.1	Instabilités de Kelvin-Helmholtz	33
4.2.2	Instabilités centrifuges	33
4.2.3	Ondes inertielles	34
4.3	Introduction à l'éclatement tourbillonnaire	35
4.3.1	Une définition	35
4.3.2	Paramètres de contrôle	37
4.3.3	Description d'un écoulement présentant un éclatement	38
4.3.4	Critères de diagnostic et interprétations	38
4.3.5	Eclatement et ondes stationnaires	39
4.4	Écoulements sous-critiques et géométrie aval	39
4.5	Discussion : choix d'une approche	41
5	Etude théorique du régime transcritique	45
5.1	Introduction	45
5.1.1	Modèle	45
5.1.2	Organisation du chapitre	46
5.2	Equations du mouvement	47
5.2.1	Problème instationnaire	47
5.2.2	Simplification dans le cas stationnaire	48
5.3	Problème local	50
5.3.1	Ondes de Kelvin axiymétriques sur un écoulement parallèle	50
5.3.2	Résonance au régime transcritique	54
5.3.3	Approximation quasi-cylindrique stationnaire	57
5.4	Description du problème global	59
5.4.1	Géométrie et conditions aux limites	61
5.4.2	Résolution numérique	63
5.5	Conduite de section constante : bifurcations et ondes stationnaires	64
5.6	Déploiement à $S_{c,1}$ sous l'effet de perturbations	67
5.6.1	Scénarios possibles	67
5.6.2	Apparition de l'éclatement axisymétrique dans un écoulement réaliste	67
5.6.3	Effet d'une faible contraction : le cas du q-vortex	69
5.6.4	Effet d'une contraction quelconque : cas de l'écoulement de rotation solide et advection uniforme	69
5.7	Résumé	76
6	Bilan provisoire	77
III Etude expérimentale et numérique de l'écoulement de conduite		79
7	Dispositif de PIV	81
7.1	Introduction	81
7.2	Principe de la PIV	81
7.2.1	PIV 2 composantes	81
7.2.2	PIV stéréoscopique	83
7.3	Montage expérimental	84

7.3.1	Fabrication d'un élément de conduite adapté	84
7.3.2	Optique d'émission et de réception	84
7.3.3	Ensemencement	85
7.4	Algorithmes et logiciels utilisés	87
7.4.1	Calibration : correction de la distortion des images	87
7.4.2	Calcul d'un champ de vecteurs	88
7.5	Analyse des résultats	90
7.5.1	Séquence de dépouillement	90
7.5.2	Validation	90
7.5.3	Calcul des débits	93
8	Résultats de la campagne de PIV stéréoscopique	95
8.1	Introduction	95
8.2	Ecoulement supercritique	97
8.2.1	Régime I : $0 < S < 1.6$	97
8.2.2	Régime II : $1.6 < S < 2$	100
8.3	Transition critique	101
8.4	Ecoulement sous-critique, $\chi_{CV} = 1, S > 2$	101
8.4.1	Eclatement tourbillonnaire	101
8.4.2	Ondes stationnaires	103
8.4.3	Instabilités hélicoïdales et axisymétriques	104
8.5	Ecoulement sous-critique, $\chi_{CV} > 1$	109
8.5.1	Ondes stationnaires	109
8.5.2	Régime peu turbulent au centre (III) : $2 < S < 3.1$	111
8.5.3	Régime fortement turbulent au centre (IV) : $3.1 < S < 3.4$	115
8.6	Comparaison avec les mesures fil chaud	116
8.7	Synthèse	120
9	Simulation numérique de l'écoulement à nombre de Reynolds modéré	123
9.1	Méthodes de résolution	123
9.1.1	Code utilisé	123
9.1.2	Formulation et maillage	124
9.1.3	Suivi de solutions stationnaires	126
9.1.4	Stabilité	126
9.2	Solutions stationnaires	127
9.2.1	Convergence en maillage	127
9.2.2	Evolution en fonction de S_0	127
9.3	Stabilité	133
9.3.1	Convergence en maillage	133
9.3.2	Choix des shifts	134
9.3.3	Evolution en fonction de S_0	134
10	Conclusion générale	139
10.1	Synthèse des principaux résultats	139
10.2	Perspectives	141

IV	Annexes	143
A	La mesure fil chaud deux composantes	145
A.1	Etalonnages	145
A.2	Incertitude sur la mesure d'une vitesse	146
A.2.1	Etalonnage	146
A.2.2	Correction en température	147
A.2.3	Calcul des vitesses efficaces	147
A.2.4	Calcul de v et w	147
A.3	Convergence statistique	148
A.4	Autres sources d'erreur	150
A.5	Conclusion	150
B	Méthode de continuation numérique	151
B.1	Formulation du problème	151
B.2	Méthodes prédicteur-correcteur	153
B.2.1	Méthode simple	153
B.2.2	Continuation "pseudoarclength"	154
B.2.3	Remarque : points de branchement	156
C	Dérivation de l'équation de Bragg-Hawthorne	159
C.1	Cas général	159
C.2	Condition amont de rotation solide et advection uniforme	160
D	Analyse asymptotique du régime transcritique	163
D.1	Conduite de section constante	163
D.1.1	Formalisme	163
D.1.2	Ordre 1	164
D.1.3	Ordre 2	166
D.1.4	Equation d'amplitude	167
D.2	Ecoulement d'advection uniforme et rotation solide soumis à une contraction, problème I	169
D.2.1	Ordres 0 et 1	170
D.2.2	Equation d'amplitude	171
	Bibliographie	174

Notations

e_r, e_θ, e_z	Vecteurs de base du repère cylindrique
r, θ, z	Coordonnées cylindriques
u, v, w	Composantes cylindriques du vecteur vitesse instantané
U, V, W	Composantes cylindriques du vecteur vitesse moyenne
u', v', w'	Composantes cylindriques des fluctuations moyennes de vitesse
ξ, η, ζ	Composantes cylindriques du vecteur vortacité
ψ	Fonction de courant axisymétrique
K	Circulation
χ	Vortacité azimutale réduite
ρ	Masse volumique du fluide
Ω	Vitesse angulaire de l'écoulement
Q	Débit volumique
W_0	Vitesse axiale de l'écoulement bouchon en sortie de nid (chapitre 2 et 3) / Vitesse axiale de l'écoulement modèle de fluide parfait (chapitres 5 et 9)
W_1	Vitesse axiale de l'écoulement bouchon en sortie de tuyère (chapitres 2 et 3)
\overline{W}	Vitesse moyenne de débit de l'écoulement dans la conduite de section constante
Ω_0	Vitesse angulaire du nid d'abeilles
Γ_0	Moment angulaire maximal du nid d'abeilles
S_0	Nombre de swirl (chapitres 5 et 9)
S_B	Swirl critique de Benjamin (chapitre 5)
$S_{c,1}$	Swirl critique de l'écoulement dans une conduite (chapitre 5)
S_{0R}	Swirl auquel une recirculation apparaît dans la tuyère convergente (chapitre 5)
S	Swirl de l'écoulement expérimental (chapitres 2, 3 et 8)
Re	Nombre de Reynolds
k	Energie cinétique turbulente moyenne (chapitre 8) / Nombre d'onde axial d'un mode normal (chapitres 4 et 5)
q	Taux de turbulence
q_r, q_θ, q_z	Taux de turbulence radiale, azimutale et axiale
R_{uu}	Coefficient de corrélation des fluctuations radiales
σ, ω, c_p, c_g	Taux d'amplification, pulsation, vitesses de phase et de groupe d'un mode normal
m	Nombre d'onde azimutal d'une perturbation linéaire
L	Longueur de la portion de conduite de section constante
L_{CV}	Longueur de la tuyère convergente
R_0	Rayon de la veine (amont des tuyères)
R_1	Rayon de sortie de la tuyère
χ_{CV}	Taux de contraction d'une tuyère

1 Introduction

1.1 Écoulements tournants en mécanique des fluides

L'étude des écoulements tournants est motivée par le grand nombre et la diversité des applications, naturelles ou industrielles, dans lesquelles on les rencontre. Ils se manifestent par exemple sous la forme de tornades dans le domaine géophysique, et interviennent en chimie dans des dispositifs de mélange ou de séparation de constituants par centrifugation. En aérodynamique externe, les tourbillons de portance des avions, nuisibles pour les avions suiveurs, constituent un exemple bien connu et qui fait l'objet de nombreuses recherches à l'heure actuelle. Ces écoulements sont également très répandus en aérodynamique interne, notamment au sein des turboréacteurs et des systèmes de combustion.

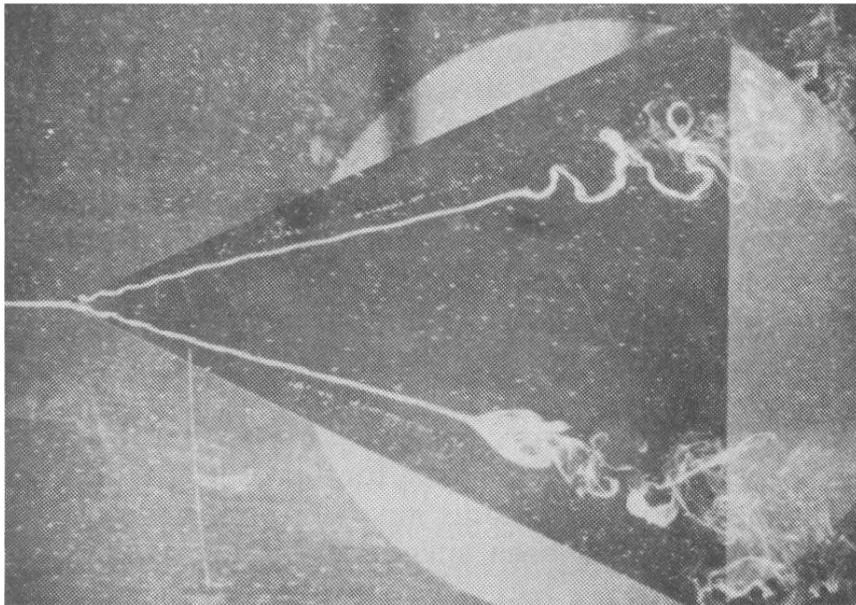


FIG. 1.1: Eclatements bulle et spiral au-dessus d'une aile delta. D'après Lambourne et Bryer [67].

Les phénomènes génériques dont les écoulements tournants sont le siège sont liés à la force centrifuge et à la force de Coriolis. L'action de la force centrifuge peut aboutir à des instabilités hydrodynamiques ; la force de Coriolis engendre quant à elle la propagation d'un régime d'ondes, appelées ondes d'inertie. Ces écoulements abritent par ailleurs des phénomènes fortement non linéaires dont l'éclatement tourbillonnaire est l'exemple le plus célèbre. L'éclatement tourbillonnaire désigne la brusque désorganisation d'un tourbillon aboutissant généralement à un écoulement turbulent. Dans les applications, on peut chercher à l'éviter lorsqu'il est associé à des perturbations de portance comme dans le cas d'une aile delta (figure 1.1), ou au contraire chercher à le provoquer, par

exemple pour augmenter le mélange entre combustible et comburant dans les dispositifs de brûleurs dits à "swirl" (figure 1.2). Un dernier exemple de la particularité de ces écoulements concerne la turbulence, dont les propriétés sont modifiées en présence d'une rotation d'ensemble.

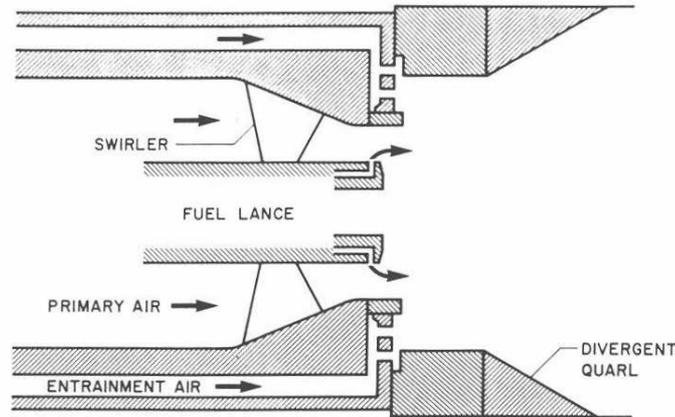


FIG. 1.2: Schéma de fonctionnement d'un brûleur à swirl. D'après Escudier [27].

Les écoulements tournants présentent donc une grande variété de phénomènes dont certains restent encore inexplicables. Ils constituent également des cas tests redoutables pour la simulation numérique, principalement en raison de leur grande sensibilité aux conditions aux limites (voir par exemple Snyder et Spall [114]) et de leurs propriétés turbulentes particulières, qui mettent en échec la plupart des modèles de fermeture turbulente classiques (voir par exemple Jakirlic *et al.* [59]).

1.2 Origines de cette étude

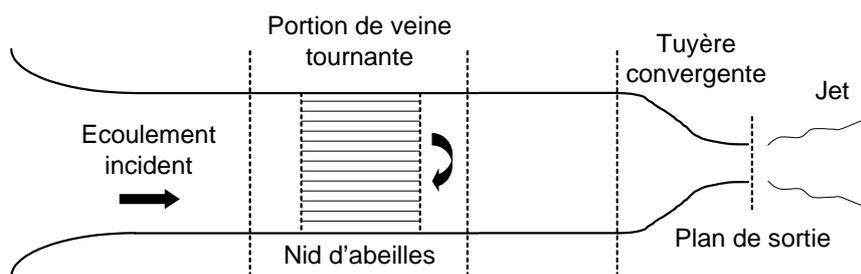


FIG. 1.3: Principe de génération du jet tournant à la soufflerie R4Ch.

Le Département d'Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale de l'ONERA a entrepris de réaliser, il y a quelques années, des expériences sur un jet tournant en vue de construire une base de données dédiée à la validation de LES et de DNS. Ces expériences sont développées dans la soufflerie R4Ch, conçue à l'origine pour étudier les propriétés de la turbulence homogène en rotation [56, 57]. Le schéma 1.3 en résume le fonctionnement, qui sera décrit plus en détail au paragraphe 2.1. Cette soufflerie s'appuie sur un dispositif de nid d'abeilles tournant, complété par une tuyère convergente finale. Les expériences de validation [93] ont montré l'apparition inexplicable de turbulence dans l'intégralité du

plan de sortie de ce jet, lorsque le taux de rotation de l'écoulement est suffisamment élevé. Celle-ci introduit une indétermination sur les propriétés de la condition initiale à partir de laquelle se développe le jet. Il a donc été décidé de se concentrer sur l'analyse de ce phénomène avant d'aller plus loin dans l'étude du jet tournant proprement dit. Cette thèse présente le résultat de ces investigations.

1.3 Buts et organisation du manuscrit

La question initiale ayant motivé ce travail est donc la suivante : où cette turbulence observée dans le plan de sortie de la conduite trouve-t-elle son origine ?

La première partie de ce mémoire s'intéresse à la caractérisation de l'écoulement dans le plan de sortie du jet. Après une description du fonctionnement de la soufflerie (chapitre 2), nous effectuons des mesures de turbulence pour des jets obtenus par différentes conditions de génération (chapitre 3). Les paramètres variables sont ici le taux de contraction de la tuyère convergente et le nombre de swirl caractéristique de l'écoulement issu du nid d'abeilles. Nous définissons ce nombre par

$$S = \frac{R_0 \Omega_0}{\overline{W}} \quad (1.1)$$

où R_0 est le rayon du nid d'abeilles, Ω_0 sa vitesse angulaire, et \overline{W} la vitesse moyenne de débit de l'écoulement (cette quantité est définie plus précisément au chapitre 2). Ces mesures permettront de justifier que l'origine de cette turbulence doit être recherchée à l'amont du plan de sortie des tuyères, probablement entre le plan de sortie du nid tournant et l'entrée de la tuyère. Ceci nous amène à poser une deuxième question : est-il possible de générer, à l'aide d'un dispositif comme celui de la soufflerie R4Ch, un écoulement tournant à grand nombre de Reynolds exempt de fluctuations turbulentes dans le coeur de l'écoulement débouchant ?

La suite du manuscrit est alors consacrée à l'étude de l'écoulement confiné qui initialise les jets. Celle-ci est menée sous un angle bibliographique et théorique dans une première partie. La revue du chapitre 4 montre que la gamme de nombre de swirl explorée soulève la question de l'apparition d'un éclatement tourbillonnaire à l'intérieur de la conduite. Elle suggère également que la tuyère convergente située en aval pourrait avoir une influence importante sur l'écoulement pour les valeurs de S les plus élevées. Cette interaction est liée à un changement de régime de l'écoulement caractérisé par le sens de propagation des ondes de Kelvin axisymétriques, qui sont une catégorie d'ondes d'inertie. Un écoulement possédant un nombre de swirl peu élevé est dit supercritique : les perturbations y sont propagées uniquement vers l'aval. Au-delà d'une valeur critique de ce paramètre, l'écoulement devient sous-critique : les perturbations peuvent alors également progresser vers l'amont. On sait à l'heure actuelle que l'éclatement tourbillonnaire survient dans des écoulements proches du régime critique.

Peu d'études traitent de l'influence des conditions aux limites aval sur un écoulement tournant sous-critique. Celles dont nous disposons abordent le problème de manière expérimentale et traitent de dispositifs complexes ciblés sur des applications. Un autre objectif de ce travail sera donc de mieux comprendre l'effet d'une tuyère convergente sur l'écoulement transcritique ou sous-critique en amont. Le chapitre 5 s'intéresse à la physique des ondes de Kelvin axisymétriques et explore l'influence de la tuyère convergente dans le régime transcritique, dans le cadre d'un écoulement modèle de fluide parfait axisymétrique stationnaire. Les solutions d'écoulement sont calculées à l'aide d'une méthode de continuation, utilisée ici en fonction du paramètre de swirl. Cette technique,

particulièrement adaptée à l'étude des phénomènes non linéaires, sera aussi employée au chapitre 9.

Dans la dernière partie du manuscrit on revient sur l'expérience. L'écoulement de conduite en amont des tuyères convergentes est exploré à l'aide de la PIV stéréoscopique. Le chapitre 7 décrit le dispositif et le protocole retenus. Les résultats de l'étude paramétrique en fonction du nombre de swirl S et du taux de contraction de la tuyère sont présentés au chapitre 8. Enfin, le chapitre 9 revient sur l'influence de la couche limite et du fort confinement radial caractéristique de notre expérience, sur les effets trouvés au chapitre 5. Il utilise la méthode de continuation pour simuler par éléments finis un écoulement axisymétrique visqueux, de nombre de Reynolds modéré et de structure similaire à l'écoulement expérimental.

Première partie

Génération d'un jet tournant à grand
nombre de Reynolds

2 La soufflerie R4Ch

2.1 Description

La soufflerie R4Ch utilisée lors des essais est schématisée sur la figure 2.1. Elle se compose d'un bâti (partie gauche du schéma) et d'éléments mobiles pouvant être disposés en aval de la veine.

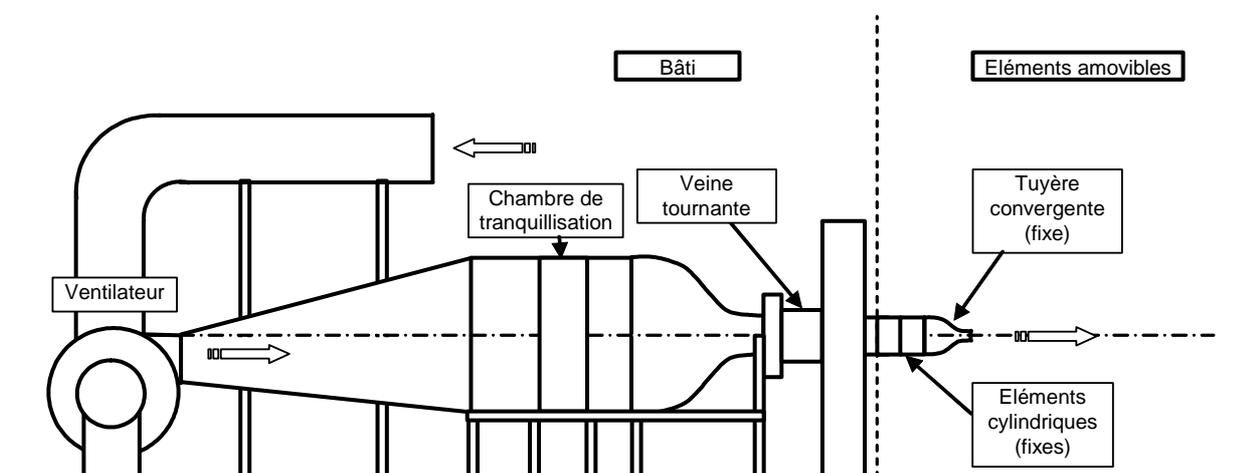


FIG. 2.1: Schéma de fonctionnement de la soufflerie R4Ch.

L'écoulement est engendré par un ventilateur qui prélève l'air directement dans le local de mesure à l'aide d'une conduite de retour. Il passe ensuite par une chambre de tranquillisation puis est accéléré par un premier convergent, qui débouche sur une conduite en Duralumin de rayon $R_0 = 150 \text{ mm}$. Cette conduite ainsi que les éléments disposés en aval du bâti sont schématisés sur la figure 2.3. Elle comporte une partie rotative de 500 mm de long, montée sur galets et reliée par courroie à un moteur à courant continu (AXEM série MC), puis une partie fixe constituée d'un tronçon de 225 mm . En aval, la veine est prolongée par un élément de conduite de section constante de 220 mm , puis par un élément de conduite transparent de 230 mm fabriqué spécialement pour les visualisations par PIV stéréoscopique (voir le chapitre 7). La portion de conduite de section constante comprise entre le plan aval du nid d'abeilles et le plan amont de la tuyère a donc pour longueur totale $L = 842 \text{ mm}$ (soit une longueur adimensionnée $L/R_0 \approx 5.61$). Enfin, le jet est généré à l'aide d'une tuyère convergente, de taux de contraction χ_{CV} . Ce paramètre est défini comme le rapport entre l'aire de sa section amont (de rayon R_0) et de sa section aval (de rayon R_1), soit :

$$\chi_{CV} = (R_0/R_1)^2 \quad (2.1)$$

Dans la suite, on notera respectivement avec un indice 0 et 1 les grandeurs caractéristiques de l'écoulement à l'amont et à l'aval de la tuyère convergente.

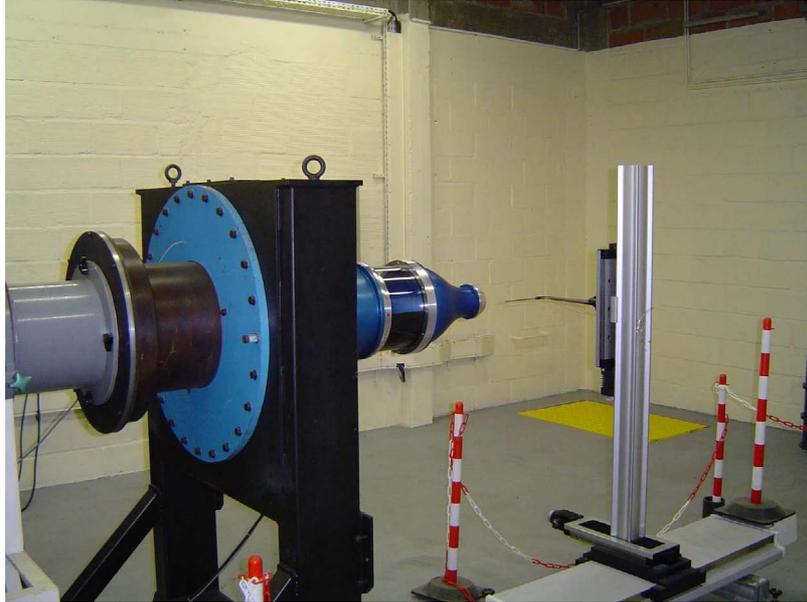


FIG. 2.2: Soufflerie R4Ch (partie aval)

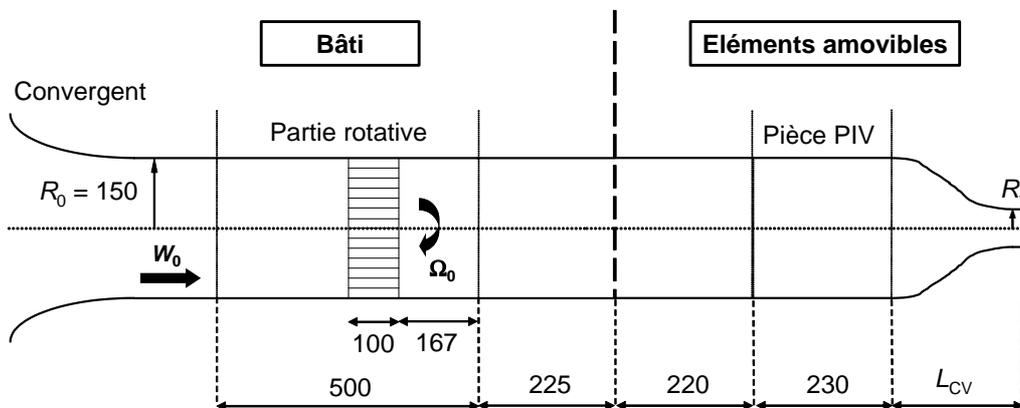


FIG. 2.3: Schéma descriptif de la veine tournante et des éléments disposés en aval. Les dimensions sont données en mm . Le rayon de sortie R_1 varie suivant la tuyère considérée (voir le tableau 2.1).

Le moteur commandant la veine tournante est régulé par un convertisseur bidirectionnel (Véritron série GAB). Il permet d'atteindre une vitesse de rotation du nid d'abeilles Ω_0 d'environ 800 tr.min^{-1} au maximum (environ 84 rad.s^{-1}). Le réglage de cette vitesse s'effectue par une mesure à l'aide d'un compteur de tours branché sur un fréquencemètre et l'incertitude associée est estimée à $\pm 0.5\%$. La veine tournante est équipée d'un nid d'abeilles de 100 mm d'épaisseur pour une maille de 1.5 mm , situé à 167 mm en amont de la partie fixe. A bas nombre de swirl, ce dispositif permet d'obtenir un écoulement de rotation solide et advection uniforme [56, 57]. La caractérisation de l'écoulement obtenu à nombre de swirl plus élevé sera l'un des objets de ce travail. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 8.

Pourquoi un convergent ? L'utilisation d'une tuyère convergente finale est héritée des expériences de jet non tournants. Elle permet la réduction de turbulence par un effet de contraction. Batchelor [6], à l'aide d'une approche lagrangienne, puis plus tard Lee [69] dans le cadre d'une analyse de distortion rapide, ont montré qu'une tuyère de taux χ_{CV} amplifie les fluctuations de vitesse de façon anisotrope, conformément aux relations

$$\frac{\overline{u_1''^2}}{\overline{u_1'^2}} \sim \chi_{CV}^{-2} \ln \chi_{CV} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{u_2''^2} + \overline{u_3''^2}}{\overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}} \sim \chi_{CV} \quad (2.2)$$

Dans ces résultats, u_1 désigne la composante longitudinale de la vitesse, u_2 et u_3 les composantes transversales; l'exposant ' désigne une vitesse à l'amont de la tuyère et '' à l'aval. La tuyère a tout de même pour effet global de réduire le **taux** de turbulence puisque la vitesse moyenne augmente de façon plus importante comme χ_{CV}^2 . Même si ces raisonnements linéaires ne tiennent pas compte des effets modérateurs de la turbulence, ils sont confirmés qualitativement par l'expérience.

Les longueurs L_{CV} et taux de contraction χ_{CV} des tuyères utilisées dans cette étude sont présentés dans le tableau 2.1. La valeur $\chi_{CV} = 1$ désigne une portion de conduite de section constante.

$R_1(mm)$	χ_{CV}	$L_{CV}(mm)$	L_{CV}/R_0
150	1	220	1.47
75	4	378	2.52
50	9	294	1.96
35	18.4	375	2.5

TAB. 2.1: Taux de contraction χ_{CV} et longueurs L_{CV} des tuyères finales

2.2 Choix des paramètres de contrôle

La dynamique des écoulements et jets tournants est pilotée principalement par le nombre de swirl. Ce paramètre quantifie l'importance du mouvement de rotation par rapport à l'advection. Un second paramètre de contrôle est le nombre de Reynolds, qui quantifie l'importance des effets visqueux par rapport aux effets convectifs.

On trouve dans l'abondante littérature sur les écoulements tournants de nombreuses définitions du nombre de swirl S . Dans les études de jet tournant, deux définitions sont souvent utilisées. La première s'appuie sur des valeurs locales de la vitesse de l'écoulement [12, 77]

$$S = \frac{V_{max}}{W(r=0)} \quad (2.3)$$

où V_{max} désigne le maximum de la vitesse azimutale sur un profil radial et $W(r=0)$ la vitesse axiale au centre de l'écoulement. Cette dernière est parfois remplacée par une vitesse moyenne de débit. La seconde est construite à partir de quantités intégrales [34, 40, 92] :

$$S = \frac{G_\theta}{RG_x} \quad (2.4)$$

où

$$G_\theta = 2\pi \int_0^\infty \rho V W r^2 dr \quad \text{et} \quad G_x = 2\pi \int_0^\infty [\rho W^2 + (p - p_a)] dr \quad (2.5)$$

sont les flux de quantité de mouvement azimutale et axiale et p_a désigne la pression ambiante. La définition (2.3) est adaptée pour la description des instabilités de couche de mélange à nombre de swirl élevé et l'apparition de l'éclatement tourbillonnaire dans des jets laminaires, tandis que (2.4) sert à caractériser les propriétés d'instabilité, de mélange et de géométrie (disparition du cône potentiel notamment) dans des jets tournants turbulents, à faible nombre de swirl. Dans le cadre d'écoulements confinés, c'est majoritairement une définition du type de (2.3) qui est employée (voir la revue du chapitre 4).

La motivation initiale de ce travail a été de comprendre un phénomène n'étant à notre connaissance pas décrit dans la littérature. Une phase préalable de "défrichage" a donc été nécessaire, et le choix du paramètre de swirl le plus adapté ne s'est donc imposé que plus tard après le début de notre travail. Les mesures de turbulence en sortie des tuyères (chapitre 3) ainsi que l'analyse de fluide parfait axisymétrique stationnaire (chapitre 5) ont d'abord imposé le choix d'un nombre de swirl caractérisant l'écoulement à l'**amont** des tuyères et non celui de leur plan de sortie. L'exploitation des résultats de la campagne de PIV stéréoscopique (chapitre 8) a finalement mené à la définition que nous utiliserons dans ce travail :

$$S = \frac{R_0 \Omega_0}{\overline{W}}, \quad (2.6)$$

Ω_0 désignant la vitesse angulaire du nid et $\overline{W} = Q/\pi R_0^2$ la vitesse moyenne de débit de l'écoulement dans la portion de conduite de section constante.

Le nombre de Reynolds utilisé dans cette étude est défini par

$$Re = \frac{2R_0 \overline{W}}{\nu} \quad (2.7)$$

Les forts taux de contraction des tuyères introduisent des gradients axiaux et donc une variation importante de ces nombres sans dimension entre leurs sections amont et aval. Si l'indice 1 est utilisé pour désigner le plan de sortie du dispositif (après convergence), en négligeant les effets visqueux, qui peuvent diminuer la valeur de la circulation maximale, et en supposant que la vitesse axiale est constante, notée W_1 , on trouve :

$$S_1 = \frac{\Gamma_0}{R_1 W_1}, \quad \text{soit} \quad S_1 = \frac{S}{\sqrt{\chi_{CV}}} \quad (2.8)$$

ainsi que

$$Re_1 = \frac{2R_1 W_1}{\nu} = \sqrt{\chi_{CV}} Re. \quad (2.9)$$

Le passage de l'écoulement par la tuyère convergente a donc qualitativement pour effet de réduire le nombre de swirl et celui d'augmenter le nombre de Reynolds.

2.3 Mode opératoire

Les mesures par anémométrie fil chaud et PIV stéréoscopique ont été effectuées en faisant varier deux paramètres : le nombre de swirl S de l'écoulement généré par le nid d'abeilles, et le taux de contraction χ_{CV} de la tuyère convergente (ou portion de conduite de section constante) finale. Le nombre de Reynolds Re a été maintenu approximativement constant au cours des essais (voir le paragraphe 2.3.2). Nous avons constaté que les faibles variations enregistrées pour les essais correspondant à $\chi_{CV} = 4, 9$ et 18.4 n'ont pas eu d'influence significative.

2.3.1 Point de fonctionnement initial ($\Omega_0 = 0, S = 0$)

Au début de chaque série de mesures, avant de mettre le nid en rotation, on ajuste la vitesse axiale W_1 de l'écoulement au centre du plan de sortie de la tuyère. Ceci est effectué à l'aide d'un capteur de pression différentiel de marque Statham (de gamme 0.15 ou 0.3 PSI suivant les tuyères, soit 1000 ou 2000 Pa), qui mesure la différence Δp entre la pression atmosphérique et la pression d'arrêt du jet. La vitesse W_1 de l'écoulement vaut donc :

$$W_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (2.10)$$

La masse volumique ρ de l'air est calculée grâce à une mesure de température par un thermocouple, aussi utilisé lors des essais fil chaud, et d'une mesure de pression atmosphérique par un baromètre à mercure.

Notre but est d'obtenir une vitesse W_0 pour le profil bouchon en sortie de nid de l'ordre de 3 m.s^{-1} , de façon à balayer une gamme de nombre de swirl suffisamment large. On cible donc respectivement $W_1 = 3 \text{ m.s}^{-1}$, 12 m.s^{-1} , 27 m.s^{-1} et 55.1 m.s^{-1} pour $\chi_{CV} = 1, 4, 9$ et 18.4 , conformément à la conservation de la masse.

Remarque Ces quatre points de fonctionnement correspondent à des régimes différents du ventilateur. Celui-ci opère en effet à débit approximativement constant mais à des différences de pression totale de plus en plus grandes. Lorsque celle-ci devient trop élevée par rapport au débit demandé, le ventilateur peut entrer en pompage : le débit subit alors des oscillations de basse fréquence (de l'ordre du Hertz). Nous avons constaté a posteriori la présence d'une très légère instabilité précurseur de pompage pour les essais effectués à $\chi_{CV} = 9$. Celle-ci n'élève que très peu le taux de turbulence local au centre du plan de sortie de la tuyère puisqu'il reste inférieur à 1 %, et n'a pas de conséquences aérodynamiques lorsque le nid est en rotation (voir la figure 3.6 du chapitre 3). Pour $\chi_{CV} = 18.4$, nous avons détecté des oscillations d'amplitude plus importante. Elles ont été entièrement supprimées en creusant des fentes latérales à la paroi de la soufflerie, directement en aval du ventilateur, afin d'augmenter le débit total fourni par celui-ci.

Le tableau 2.2 résume les incertitudes relatives $\delta W_1/W_1$ du réglage de la vitesse de sortie dans chacun des cas. Celles-ci tiennent également compte de l'incertitude du capteur utilisé. La valeur élevée pour $\chi_{CV} = 1$ provient de la faible différence de pression à mesurer. Le point de fonctionnement est le plus précis pour $\chi_{CV} = 18.4$, à la fois en raison du très faible taux de turbulence de l'écoulement et de la valeur importante de la différence de pression à mesurer.

χ_{CV}	$\delta W_1/W_1$
1	9.5 %
4	1 %
9	0.75 %
18.4	0.5 %

TAB. 2.2: Incertitude du réglage des différents points de fonctionnement. Ici $\Omega_0 = 0$ et donc $S = 0$.

2.3.2 Essais en rotation ($\Omega_0 \neq 0$, $S \neq 0$)

Protocole

Une fois effectué le réglage de W_1 , la vitesse de rotation du nid d'abeilles est augmentée par paliers et une mesure est effectuée pour chacun d'eux. Nous avons choisi les mêmes valeurs pour les quatre taux de contraction ($\chi_{CV} = 1, 4, 9$ et 18.4) : de 0 à 280 tr.min^{-1} par paliers de 40 tr.min^{-1} , puis de 300 à 600 tr.min^{-1} par paliers de 20 tr.min^{-1} . Certains essais supplémentaires ont été effectués dans quelques cas. On relève la pression atmosphérique ainsi que la température ambiante avant chaque essai. Nous avons noté qu'au cours d'un essai, la dérive en pression atmosphérique enregistrée a été négligeable, et que la fluctuation de température ambiante maximale a été de $+0.2 \text{ K}$ pour la PIV, $+0.1 \text{ K}$ pour le fil chaud.

Contraintes expérimentales

La mise en rotation progressive du nid d'abeilles s'accompagne d'une légère variation de la perte de charge du réseau, qui peut être localisée au niveau du nid et/ou dans l'écoulement en amont et en aval de celui-ci. La soufflerie R4Ch est équipée d'un tube de Pitot localisé en amont du nid d'abeilles, permettant de compenser en cours d'essai les fluctuations de vitesse débitante liées à cette perte de charge. Cette technique a été utilisée par Laurent Jacquin lors de ses mesures de turbulence en rotation [56], toutes caractérisées par un nombre de swirl $R_0\Omega_0/W_0 \leq 0.9$.

Il s'avère que cette méthode ne peut être mise en oeuvre lorsque cette valeur est dépassée, ce qui est le cas dans nos expériences. En effet, le champ de vitesse axiale en amont du nid est alors progressivement modifié par la forte rotation de celui-ci, si bien qu'un recalage de la vitesse débitante en cet endroit devient impossible. Nous avons donc dans un premier temps réalisé les mesures sans compenser la variation de perte de charge consécutive à la mise en rotation. L'examen des champs de vitesses obtenus en sortie des tuyères $\chi_{CV} = 4, 9$ et 18.4 n'indiquant pas de changement de débit critiques, ce protocole a ensuite été retenu pour toutes les mesures.

Calcul des nombres de swirl et de Reynolds

La vitesse moyenne de débit \overline{W} intervenant dans les définitions des nombres de swirl et de Reynolds (2.6) et (2.7) a été calculée *a posteriori* à partir des profils de vitesse moyenne déterminés par la PIV stéréoscopique. Elle est connue dans tous les cas à un peu moins de $\pm 2\%$ près (voir le chapitre 7). En tenant compte des incertitudes sur le réglage de Ω_0 , la mesure de la pression et de la température, on trouve que les nombres de swirl et de Reynolds sont donc déterminés à $\pm 2\%$ près.

La figure 2.4 représente les valeurs de \overline{W} trouvées pour les essais de PIV stéréoscopique décrits au chapitre 8. Elle appelle les commentaires suivants :

- Les essais effectués à $\chi_{CV} = 18.4$ sont caractérisés par la variation de débit la plus faible (variation de 1.5%).
- Les variations de débit pour $\chi_{CV} = 4$ et $\chi_{CV} = 9$ sont comparables (respectivement de l'ordre de 3.5% et 4%).
- La variation la plus forte est observée pour $\chi_{CV} = 1$ (environ 11%). Cette variation ne peut s'expliquer par l'incertitude liée au réglage du point de fonctionnement initial. Celui-ci n'a en effet été pris qu'à deux reprises (comme pour $\chi_{CV} = 18.4$), avant $\Omega_0 = 0$ et $\Omega_0 = 220 \text{ tr.min}^{-1}$. Nous pensons que la chute de débit à $\Omega_0 \geq$

280 tr.min^{-1} peut être en lien avec l'apparition d'un éclatement tourbillonnaire en sortie de jet puis dans la conduite : celui-ci est précisément détecté à partir de cette valeur de Ω_0 (voir le paragraphe 3.3.1).

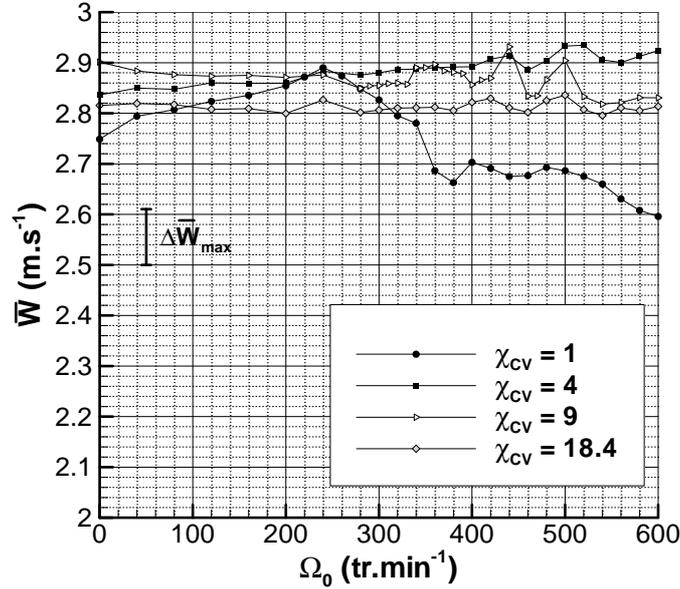


FIG. 2.4: Vitesse de débit \bar{W} en fonction de la vitesse angulaire Ω_0 du nid d'abeilles pour les différentes valeurs de χ_{CV} .

A titre de référence, le nombre de Reynolds moyen sur toutes les valeurs de χ_{CV} correspondant aux réglages initiaux de vitesse, *i.e.* pour $\Omega_0 = 0$, est de 55 600. Lors des essais en rotation, ce nombre varie :

- entre 55 100 et 58 100 pour les trois tuyères convergentes ($\chi_{CV} = 4, 9$ et 18.4)
- entre 50 500 et 56 700 pour la conduite de section constante ($\chi_{CV} = 1$).

Les mesures par fil chaud et PIV stéréoscopique ont été effectuées lors d'essais différents mais en suivant le même protocole. Afin de caractériser les valeurs de S et Re pour une série d'essais fil chaud effectuée à χ_{CV} donnée, pendant lesquels \bar{W} n'est pas mesurée, nous choisissons comme valeur de \bar{W} la valeur moyenne de cette grandeur sur toute la série de PIV correspondante. Il ne nous a pas paru nécessaire de choisir la valeur correspondant à chaque essai particulier comme cela a été fait pour les essais de PIV. En effet les variations de \bar{W} en fonction de Ω_0 sont de l'ordre de la précision du calcul de cette grandeur. Pour les essais fil chaud, nous trouvons alors une incertitude relative de détermination du nombre de swirl égale à $\pm 4\%$ au maximum.

3 Mesures de turbulence en sortie de jet

3.1 Introduction

L'apparition de turbulence d'origine inconnue dans le plan de sortie des jets tournants générés par la soufflerie R4Ch a d'abord été mise en évidence au cours du travail de thèse de L. Jacquin, ce régime fixant alors la limite paramétrique pour le fonctionnement de son dispositif. Cet aspect de l'écoulement a ensuite été exploré lors du stage de S. Pouillard [93], au cours duquel, conformément à l'hypothèse avancée par L. Jacquin, on a recherché l'origine du phénomène au niveau du nid d'abeilles tournant. L'hypothèse était celle d'un "blocage" des filets d'air dans les alvéoles périphériques du nid d'abeilles. On s'attendait à ce que celui-ci puisse être à l'origine d'un ralentissement, voire de recirculations à la périphérie de l'écoulement généré par le nid. Un stator permettant d'imprimer une rotation préalable à l'écoulement a alors été disposé dans la partie de conduite fixe en amont du nid d'abeilles. Une autre tentative de préconditionnement de l'écoulement a été effectuée, en plaçant en amont du nid d'abeilles un autre nid solidaire du premier et composé de mailles plus larges. Aucun de ces dispositifs n'ayant permis de réduire la turbulence observée, il a alors été conclu que le générateur de rotation ne pouvait pas être incriminé.

A notre connaissance, deux types de dispositifs de mise en rotation sont utilisés dans la plupart des travaux sur les jets tournants : il peut s'agir d'aubes inclinables [34, 40, 92] ou, comme dans notre cas, d'un nid d'abeilles tournant [12, 79]. Ces dispositifs se terminent souvent par une tuyère convergente permettant de réduire la turbulence. Ces études s'intéressent soit à la dynamique globale de jets de nombre de Reynolds modéré jusqu'à son éclatement [12, 79], soit aux instabilités de couche de mélange et aux propriétés dynamiques (taille du cône potentiel, taux d'évasement) de jets turbulents à grand nombre de Reynolds mais nombre de swirl modéré [34, 40, 92]. Aucune de ces études ne fait mention de la présence de turbulence développée dans l'intégralité du plan de sortie des jets pour les valeurs les plus élevées du taux de rotation. Signalons toutefois que notre étude se différencie de celles que nous venons de citer par la valeur élevée à la fois du nombre de Reynolds et du nombre de swirl.

L'objet de ce chapitre est de caractériser finement les conditions de sortie des jets tournants générés par la soufflerie R4Ch à l'aide de tuyères de taux de contraction différents. Il a également pour but de justifier les directions scientifiques suivies dans cette étude. Nous montrerons en particulier que la turbulence observée n'est pas liée à des instabilités provenant du jet, mais qu'elle provient bien de l'écoulement de conduite précédant le plan de sortie des tuyères. Le protocole des essais est décrit au paragraphe 2.3.2. Il anticipe les conclusions de ce chapitre dans la mesure où les essais sont effectués en

maintenant constantes les propriétés de l'écoulement au niveau du nid d'abeilles, donc à l'amont des tuyères convergentes.

3.2 Dispositif expérimental

3.2.1 Chaîne d'acquisition

Les mesures présentées ici sont réalisées à l'aide d'une sonde fil chaud à deux fils croisés (DANTEC 55P61) commandée électroniquement par un anémomètre DANTEC StreamLine opérant à température constante. Les signaux de sortie obtenus sont ensuite dirigés vers un boîtier de filtrage passe-bas puis vers une carte d'acquisition 12 bits reliée à un PC. Les paramètres d'acquisition utilisés lors des sondages et des spectres sont résumés dans le tableau 3.1. f_a et f_c désignent respectivement les fréquences d'acquisition et de filtrage, N_e et N_b le nombre d'échantillons et de blocs pris, et la résolution en fréquence df de chaque type de mesure est reportée à titre indicatif.

	f_a (Hz)	f_c (Hz)	N_e	N_b	df (Hz)
Sondage	80000	30000	320000	1	0.25
Spectre BF	2000	700	8192	100	0.24
Spectre HF	80000	30000	8192	100	9.77

TAB. 3.1: Paramètres d'acquisition utilisés lors des essais

3.2.2 Réglages géométriques

L'armature du montage est constituée de poutres rigides permettant la fixation de tables de déplacement par l'intermédiaire de cavaliers (voir la figure 2.2 du chapitre précédent). Dans un système de coordonnées cartésiennes défini sur la figure 3.1, les fils sont disposés dans le plan vertical Oyz , et la sonde possède les degrés de liberté suivants :

- translation automatisée dans les directions x , y et z
- rotation par table manuelle autour de l'axe Ox , repérée par la valeur de l'angle β .

La sonde permet de mesurer les composantes azimutale v et axiale w du vecteur vitesse ; dans ce qui suit on note U le module de la vitesse, α l'inclinaison par rapport à l'axe Oz , et i son inclinaison par rapport à la sonde.

Toutes les mesures présentées ci-après sont réalisées à $z = 2\text{ mm}$ du plan de sortie des tuyères. Les sondages s'effectuent le long du rayon horizontal Ox ; le réglage de la sonde est effectué à l'aide d'un cathétomètre. L'inclinaison importante du vecteur vitesse dans la zone proche de la paroi de la tuyère peut imposer de faire pivoter la sonde autour de son axe afin de respecter le cône de résolution de la sonde, à savoir $-30^\circ \leq i \leq 30^\circ$. Dans ce cas, le sondage est effectué en deux essais consécutifs, sans changer le point de fonctionnement de la soufflerie. Le premier s'effectue à $\beta = 0^\circ$ et concerne la zone centrale du rayon, le second s'effectue à $\beta \neq 0^\circ$ et concerne la zone de périphérie. Le déplacement compensatoire des tables permettant de ramener la sonde au point de mesure est étalonné avant les essais par visée au cathétomètre.

La procédure d'étalonnage et l'incertitude associée sont décrites dans l'annexe A. Le taux d'échantillons faux lié à un vecteur vitesse en-dehors de la gamme angulaire de la

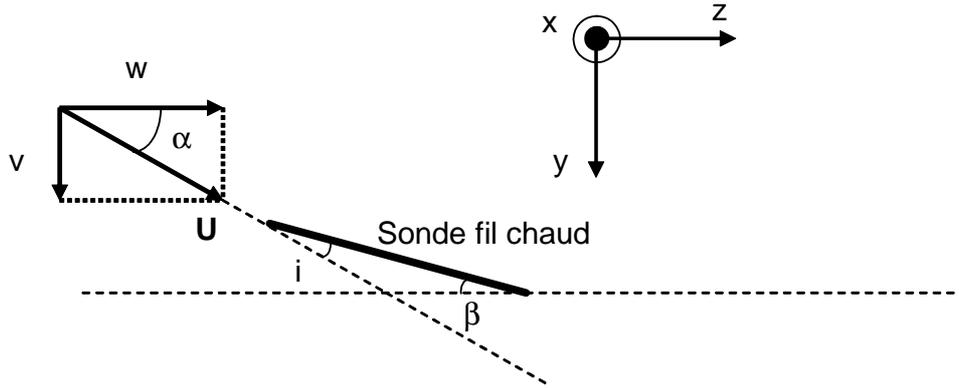


FIG. 3.1: Définition du système d'axes et des angles intervenant dans les mesures

sonde est nul ou très faible pour tous les essais, à l'exception du point $r/R_1 = 1$ pour lequel il peut atteindre des valeurs élevées (plus de 50 %) dans les cas $\chi_{CV} = 9$ et 18.4.

3.3 Profils de vitesses moyennes

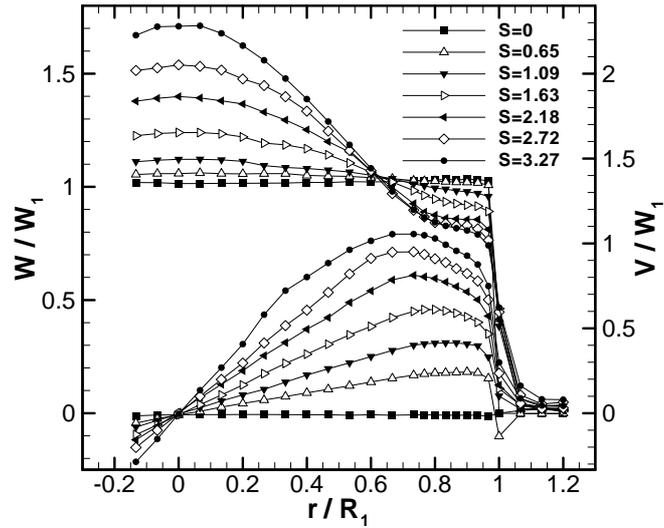
3.3.1 Evolution en fonction de S

Les vitesses moyennes obtenues en sortie des trois tuyères convergentes pour des valeurs croissantes de S sont représentées sur la figure 3.2. Elles sont adimensionnées par la vitesse W_1 réglée au début d'une série d'essais.

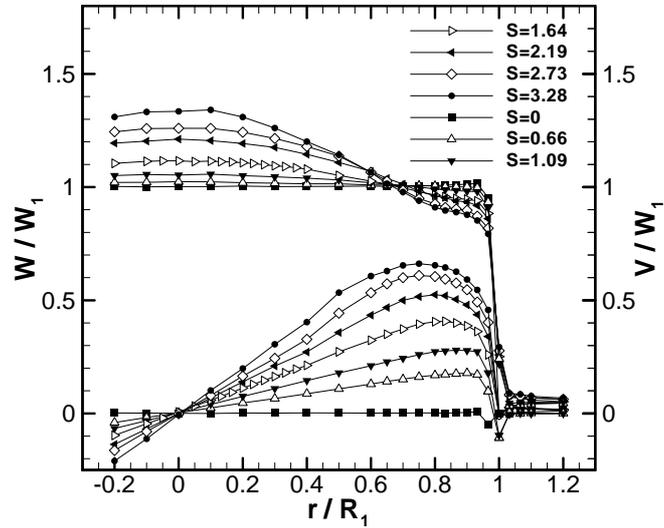
L'évolution de la vitesse axiale en fonction de S présente des tendances identiques pour les trois taux de contraction. On observe simultanément une accélération au centre et une décélération dans la périphérie (en-dehors de la couche limite). Cette création de vorticité azimutale positive est bien comprise. Elle a été étudiée par Batchelor [8] et elle est observée dans toutes les exp eriences qui mettent en jeu un écoulement rotatif contracté [12, 34, 40, 92]. Elle résulte d'un mécanisme non visqueux de gauchissement des lignes de vorticité lors du passage par la contraction (*cf.* paragraphe 5.3.3). On constate qu'  S identique, l'amplitude de la vorticité azimutale résultante est d'autant plus forte que le taux de contraction est faible, ce qui est cohérent avec cette théorie. Nous présenterons au paragraphe 5.3.3 une comparaison plus détaillée de ces profils avec ceux obtenus par l'analyse non visqueuse de Batchelor.

Les profils de vitesse azimutale sont caractérisés par une large zone centrale de rotation solide. A mesure que S augmente, celle-ci se rétrécit progressivement, le maximum de vitesse azimutale se déplaçant progressivement vers l'axe. Par ailleurs, à S identique, l'extension radiale de cette zone est d'autant plus importante que χ_{CV} est élevé. Ceci est cohérent avec l'influence du taux de contraction sur les nombres de Reynolds et de swirl local.

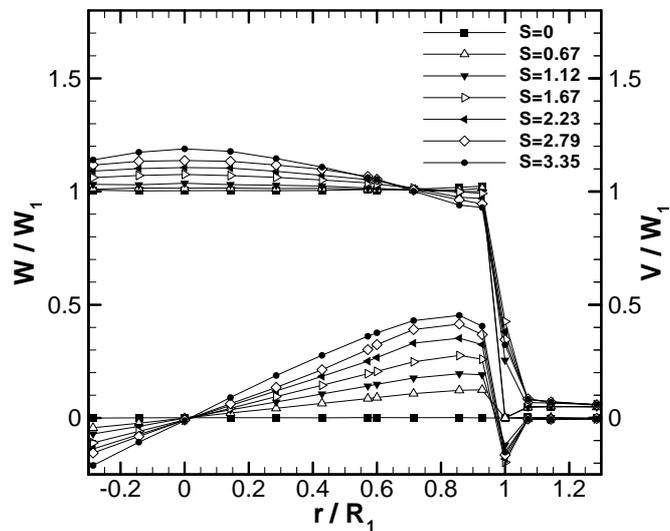
Remarque Dans le cas de la conduite de section constante $\chi_{CV} = 1$, l'occurrence de l'éclatement dans le plan de sortie est repérée par l'apparition d'un défaut de vitesse au centre de l'écoulement. Celui-ci apparaît pour $S = 1.54$ ($\Omega_0 = 280 \text{ tr.min}^{-1}$).



(a) $\chi_{CV} = 4$. Nota : sur cette figure, les échelles des axes sont différentes pour W/W_1 et V/W_1 .



(b) $\chi_{CV} = 9$



(c) $\chi_{CV} = 18.4$

FIG. 3.2: Composantes axiale W et azimutale V de la vitesse moyenne, adimensionnées par la vitesse de réglage initiale W_1 , pour différentes valeurs de S , $\chi_{CV} = 4$, 9 et 18.4.

3.3.2 Grandeurs de sortie

Les résultats ont été jusqu'ici présentés en fonction du nombre de swirl S caractérisant l'écoulement à l'**amont** des tuyères, dans la zone de visualisation PIV. A titre de comparaison, la figure 3.3 représente les valeurs du nombre de swirl **local** S_1 correspondant aux écoulements représentés sur la figure 3.2, défini par

$$S_1 = \frac{R_1 \Omega(r=0)}{W_1}. \quad (3.1)$$

$\Omega(r)$ désigne ici la vitesse angulaire en sortie de tuyère, que l'on calcule par régression linéaire sur la zone centrale de l'écoulement. L'incertitude absolue ΔS_{max} sur la détermination de S , discutée au paragraphe 2.3.2, y est indiquée.

Les valeurs trouvées pour S_1 à même S sont effectivement d'autant plus faibles que χ_{CV} est élevé. Les courbes semblent suivre la tendance d'"essoufflement" par rapport à une loi linéaire entre S_1 et S (ou Ω_0) notée par Billant *et al.*, qui avaient trouvé une loi de la forme $S_1 = a(1 - \exp(-b\Omega_0))$ dans leurs travaux de jet tournant (avec toutefois une définition légèrement différente du paramètre S_1 , basée sur la vitesse azimutale maximale et non la vitesse angulaire au centre). Pour $S \geq 3$, les valeurs ne suivent plus cette évolution mais sont plus importantes, en particulier pour $\chi_{CV} = 4$. A ces valeurs du swirl, l'écoulement devient turbulent au centre du plan de sortie (voir le paragraphe 3.4.1) et son coeur rotationnel semble se resserrer simultanément. A ce jour nous n'avons pas d'explication pour cette dernière observation.

Le nombre de Reynolds des écoulements de sortie Re_1 , défini quant à lui par

$$Re_1 = \frac{2R_1 W_1}{\nu}, \quad (3.2)$$

vaut respectivement 118 000, 177 000 et 252 900 pour $\chi_{CV} = 4, 9$ et 18.4.

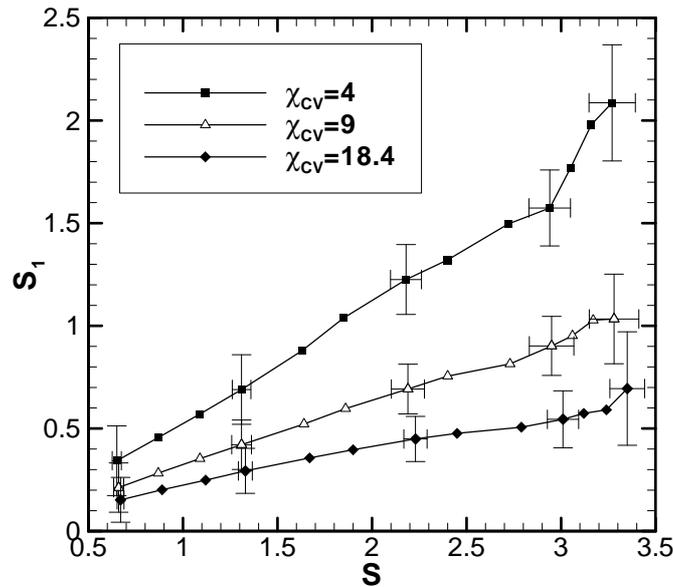


FIG. 3.3: Swirl de sortie S_1 en fonction du swirl amont S .

3.4 Energie cinétique turbulente

On s'intéresse à présent aux fluctuations moyennes de vitesse axiale w' et azimutale v' , ainsi qu'aux taux de turbulence axiale q_z et azimutale q_θ caractérisant les écoulements en sortie des tuyères. Ces taux sont définis de manière traditionnelle par

$$q_z = \frac{w'}{W_1}, \quad q_\theta = \frac{v'}{W_1} \quad (3.3)$$

3.4.1 Evolution des profils de turbulence en fonction de S

La figure 3.4 représente les profils de q_z et q_θ correspondant aux cas de la figure 3.2. On observe pour les trois taux de contraction un comportement similaire en fonction de S , avec des niveaux d'autant plus faibles que χ_{CV} est grand. Aux valeurs modérées de S , les taux de turbulence axial et azimutal augmentent dans la zone de couche limite. Ce point est en accord avec le décalage progressif du maximum de vitesse azimutale vers le centre du plan de sortie. Il traduit un élargissement de la zone d'instabilités centrifuges de type Görtler dans la région de paroi (voir le chapitre 4 pour plus de détails sur cette instabilité). On observe ensuite une augmentation de la turbulence dans la zone périphérique de l'écoulement, en-dehors de la couche limite, et la formation d'un maximum de q_θ pour $r/R_1 \approx 0.6 - 0.7$ (sur les courbes de la figure 3.4, ceci est visible pour $S \approx 2.2$). Lorsque S continue d'augmenter, l'écoulement devient également turbulent au centre et le maximum local de turbulence se décale progressivement vers le centre de l'écoulement. Pour les valeurs de S les plus élevées, on observe alors des taux de turbulence élevés dans le plan de sortie : q_z est approximativement uniforme dans tout le plan (en-dehors de la couche limite) et q_θ est caractérisé par deux maxima, l'un au centre et l'autre pour $r/R_1 \approx 0.5 - 0.6$.

A notre connaissance, cet envahissement de l'écoulement par la turbulence, sans lien avec l'éclatement tourbillonnaire qui n'est pas ici détecté dans les profils de vitesse moyenne, n'est pas documenté dans la littérature. Parmi les études de jets tournants à grand nombre de Reynolds, seule celle de Panda et McLaughlin [92] évoque une valeur anormalement élevée de l'énergie cinétique turbulente en sortie de tuyère. Dans cette référence, le taux de contraction vaut $\chi_{CV} = 22.6$ pour un nombre de Reynolds compris entre 22 000 et 57 000, mais cette observation se limite à la couche de mélange. Pour justifier ce phénomène, Panda et McLaughlin effectuent des mesures de vitesse par fil chaud dans la tuyère convergente finale [91], à la fois sur l'écoulement tournant (qui est généré par des aubes inclinables) et sur l'écoulement non tournant, lorsque les aubes sont retirées. Ils observent alors un décollement de couche limite dans l'écoulement non tournant, en entrée de tuyère convergente, lorsque le nombre de Reynolds du jet est inférieur à 60 000. La caractérisation de l'écoulement tournant est plus difficile et montre que celui-ci est très instationnaire dans la zone où un décollement est observé en écoulement non tournant. Panda attribue alors la turbulence élevée dans la couche de cisaillement du jet à la contamination de la couche limite de l'écoulement dans la tuyère par les tourbillons d'extrémité des vannes, ainsi qu'à un décollement de couche limite à cet endroit. Néanmoins toutes les configurations étudiées dans cette référence présentent un cône potentiel très peu turbulent.

Citons également une expérience de jet tournant réalisée au LadHyx [12, 79] qui utilise également un système de nid d'abeilles tournant. L'écoulement généré correspond à des nombres de Reynolds modérés (de l'ordre de 1400 au maximum). Les auteurs mentionnent la présence d'instabilités asymétriques dans le jet pour les nombres de swirl

précédant l'apparition de l'éclatement, mais ne détectent pas de turbulence dans le plan de sortie, où les champs de vitesse sont mesurés par vélocimétrie laser doppler.

3.4.2 Fluctuations de vitesse, $r/R_1 = 0$ et $r/R_1 = 0.6$

La figure 3.5 résume l'évolution en fonction de S des écarts types de fluctuations v' et w' en $r/R_1 = 0$ et $r/R_1 = 0.6$, ainsi que la fluctuation azimutale normalisée par le rapport de rayon de chaque tuyère $v'/\sqrt{\chi_{CV}}$. Cette figure conforte le principe d'une forte similitude de l'évolution de l'énergie cinétique turbulente **en fonction de S** , quel que soit le taux de contraction.

Au centre du plan de sortie, les fluctuations axiale et azimutale augmentent brusquement aux environs de $S \approx 2.7$ (figures 3.5(a) et 3.5(b), à gauche). On remarque en particulier que pour $S \geq 3$, les niveaux de w' sont très proches pour les trois valeurs de χ_{CV} . En $r/R_1 = 0.6$, les fluctuations croissent à partir de $S \approx 1.5$ et de façon plus progressive. L'évolution de la fluctuation axiale reste peu dépendante du taux de contraction (figure 3.5(a), à droite), même si l'accord est moins bon qu'au centre pour $S \geq 3$. L'amplitude de la fluctuation azimutale est d'autant plus élevée que le taux de contraction est grand (figure 3.5(b), à droite). La figure 3.5(c) (droite) montre que ces différences peuvent être absorbées par une normalisation par $\sqrt{\chi_{CV}}$, ce qui serait compatible avec un effet de distortion rapide dû aux tuyères (*cf.* paragraphe 2.1).

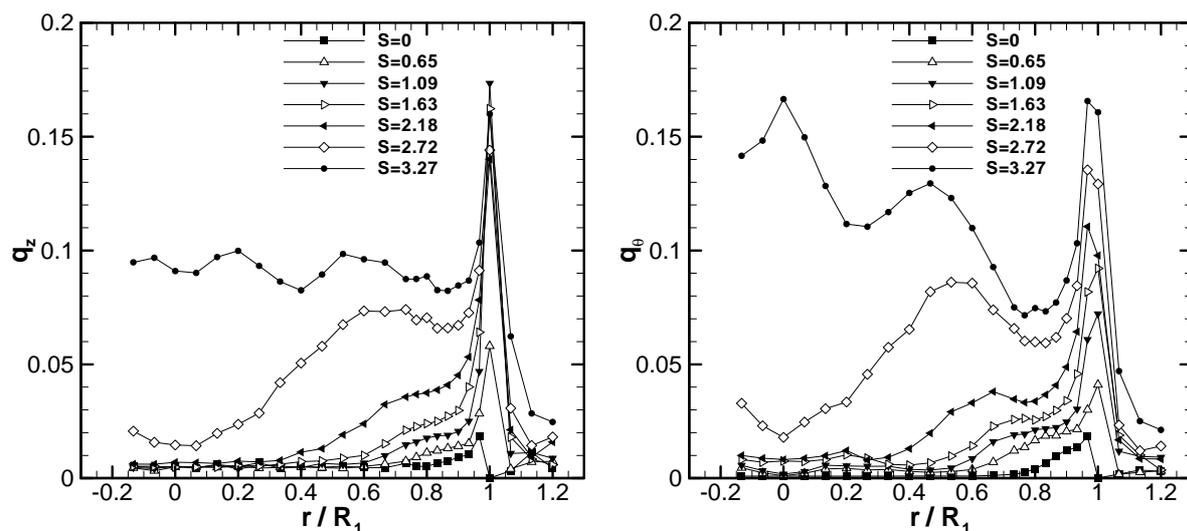
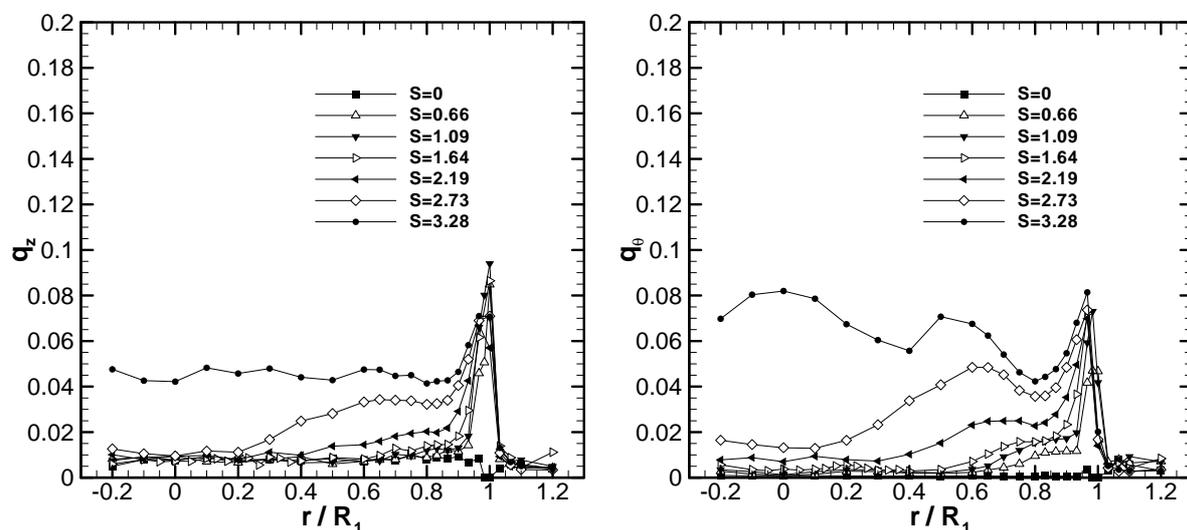
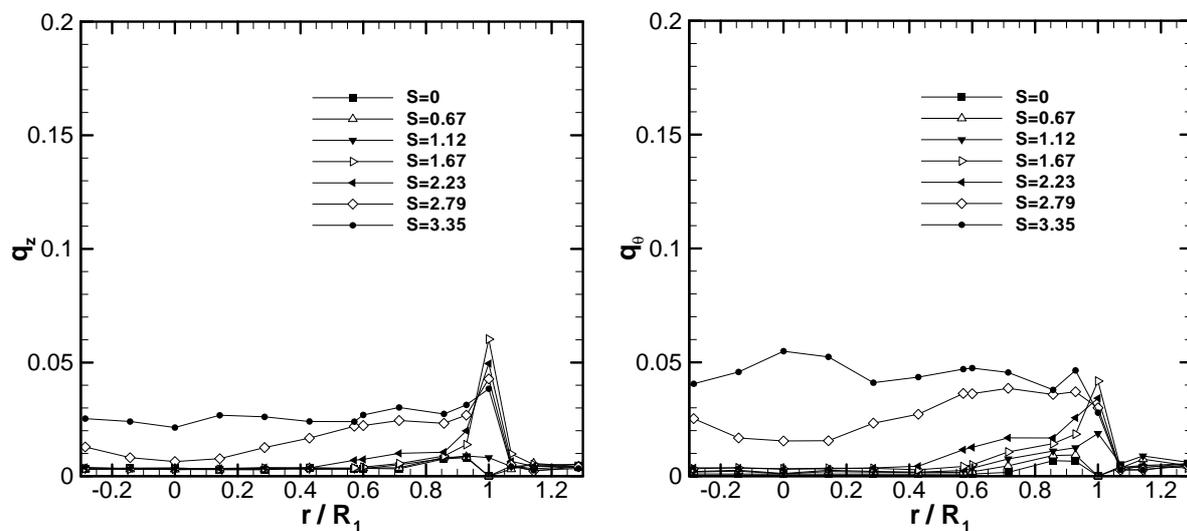
D'une façon générale, la croissance des fluctuations en fonction de S est ponctuée d'irrégularités similaires pour les trois valeurs de χ_{CV} .

Remarque Afin de déterminer si les légères instabilités du point de fonctionnement à $\chi_{CV} = 9$ ont un impact sur les taux de turbulence mesurés pour $\Omega_0 \neq 0$, nous avons réalisé 4 essais (respectivement à 0, 200, 400 et 600 *tr.min*⁻¹) en utilisant la soufflerie dans la même configuration que pour $\chi_{CV} = 18.4$, c'est-à-dire en ouvrant les fentes creusées directement en aval du ventilateur. La figure 3.6 compare les valeurs des fluctuations dans ce cas avec celles correspondant au fonctionnement nominal. Elle montre que l'ouverture des fentes a effectivement pour conséquence de diminuer les fluctuations axiales pour toutes les valeurs de rotation du nid où aucune augmentation de turbulence liée à la rotation n'est observée ($S = 0$ et 1.09, $r/R_1 = 0$ et 0.6, ainsi que $S = 2.19$, $r/R_1 = 0$). Dans les cas où cette turbulence apparaît, l'accord entre les deux configurations est excellent. Les fluctuations azimutales ne sont logiquement pas affectées par ces légères instabilités (figures 3.6(c) et 3.6(d)) de sorte que l'accord entre les deux configurations est également très bon à toutes les vitesses de rotation.

3.4.3 Spectres

Nous terminons cette caractérisation de l'écoulement par fil chaud par des spectres. Les figures 3.7 et 3.8 représentent les densités spectrales d'énergie de w' et v' dans le cas $\chi_{CV} = 4$, en $r/R_1 = 0$ et $r/R_1 = 0.6$ et pour différentes valeurs de S . Rappelons que ces spectres ont été réalisés à l'aide de deux échantillonnages différents (basses et hautes fréquences) qui sont superposés sur les figures.

Sur chacun de ces spectres, on observe des pics de basse fréquence, d'énergie plus importante pour v' que pour w' . Ils correspondent à la fréquence de rotation du nid d'abeilles et à ses harmoniques. Leur origine peut être liée à des défauts localisés de la structure alvéolaire du nid (certains sont observables à l'oeil nu). Elle peut aussi être imputée à un très léger décentrement de la veine tournante. Celle-ci est en effet soutenue et entraînée par trois galets qui réalisent également son alignement axial avec le reste de la soufflerie. L'amplitude de ce décentrement n'excède pas 1 *mm*.

(a) $\chi_{CV} = 4$ (b) $\chi_{CV} = 9$ (c) $\chi_{CV} = 18.4$ FIG. 3.4: Taux de turbulence axial q_z et azimutal q_θ , pour différentes valeurs de S .

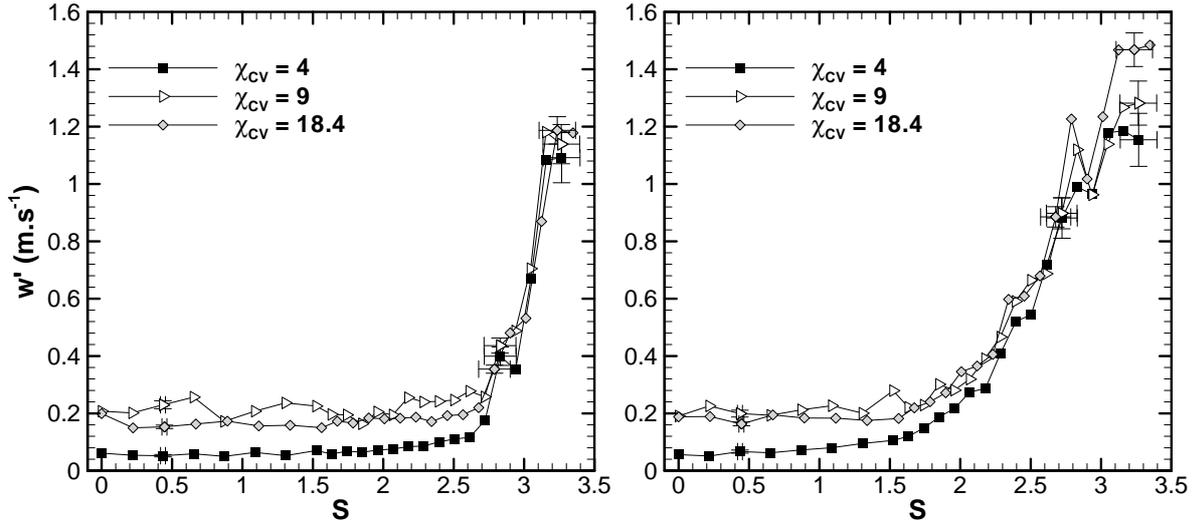
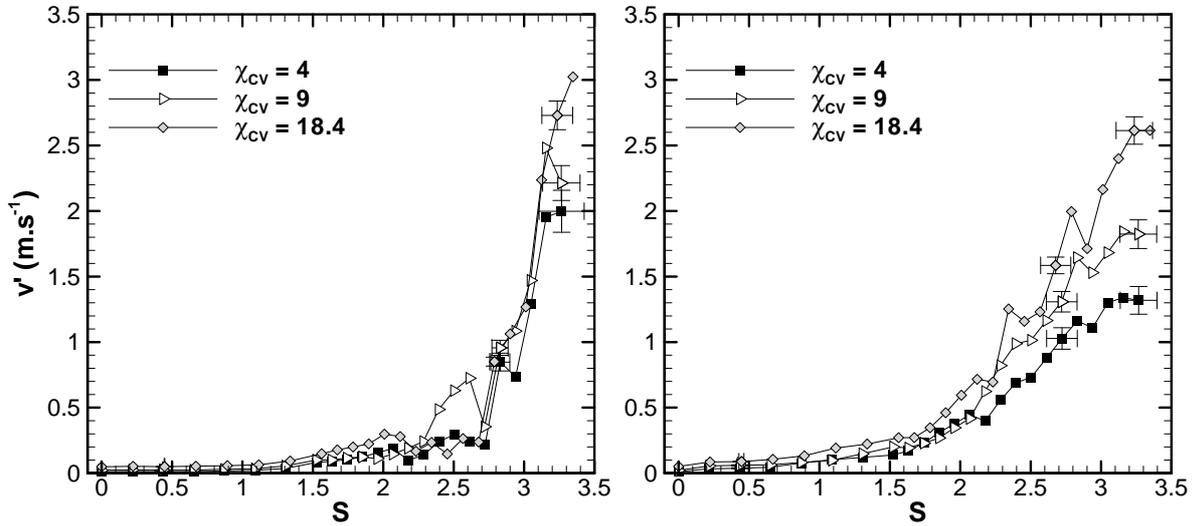
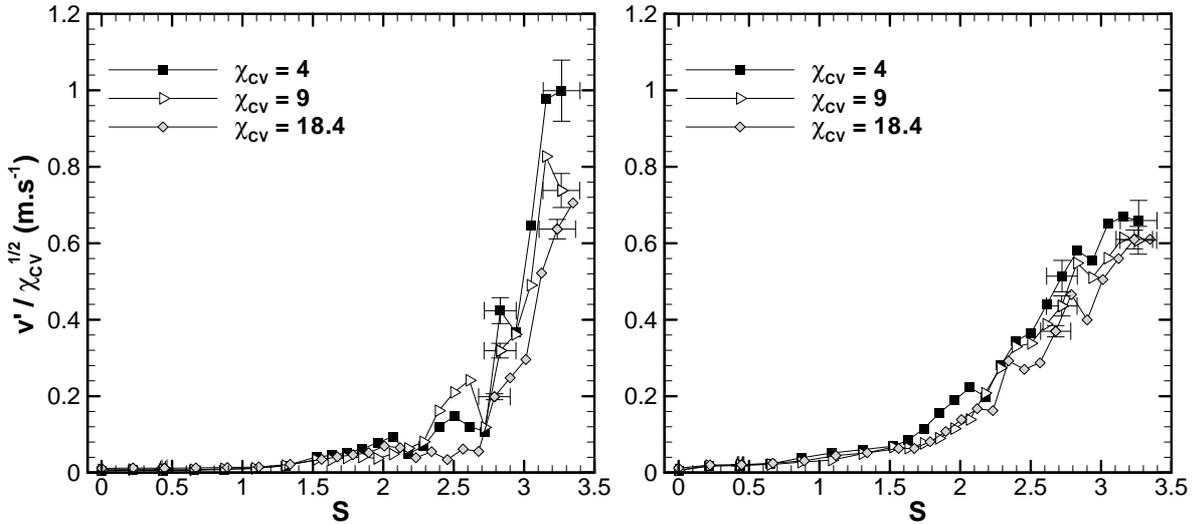
(a) w' , $r/R_1 = 0$ (gauche) et $r/R_1 = 0.6$ (droite)(b) v' , $r/R_1 = 0$ (gauche) et $r/R_1 = 0.6$ (droite)(c) $v' / \sqrt{\chi_{cv}}$, $r/R_1 = 0$ (gauche) et $r/R_1 = 0.6$ (droite)

FIG. 3.5: Comparaison des fluctuations de vitesse axiale et azimutale moyenne en $r/R_1 = 0$ et $r/R_1 = 0.6$ pour les différentes buses convergentes. A titre d'exemple, on a indiqué les incertitudes sur v' et w' (annexe A) et sur S (paragraphe 2.3.2) pour trois valeurs de S .

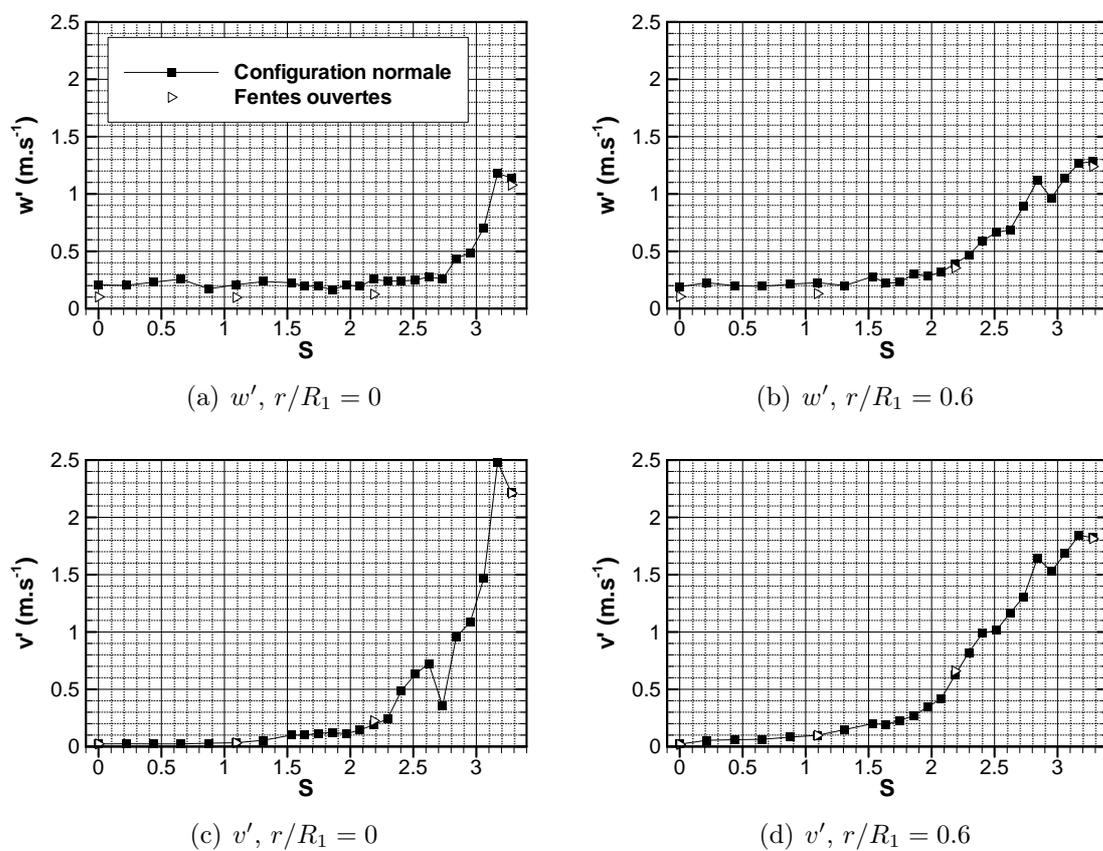
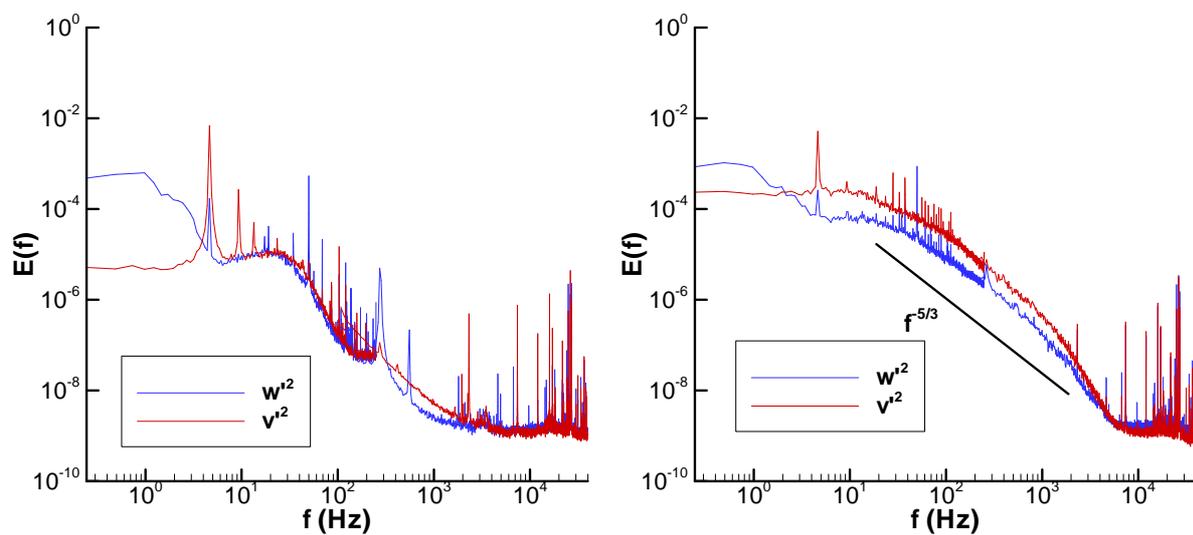
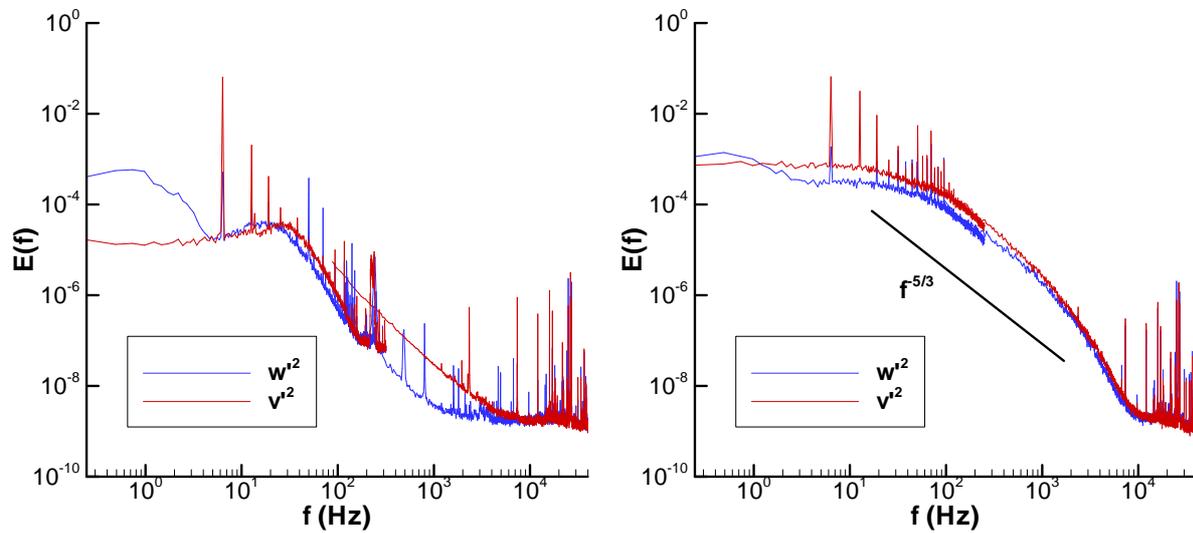
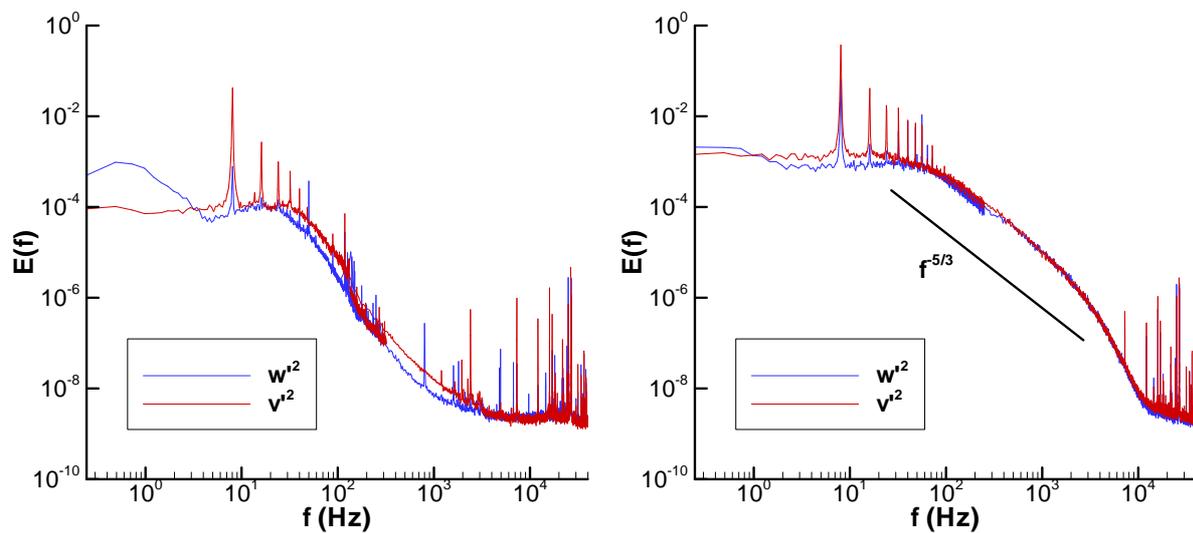
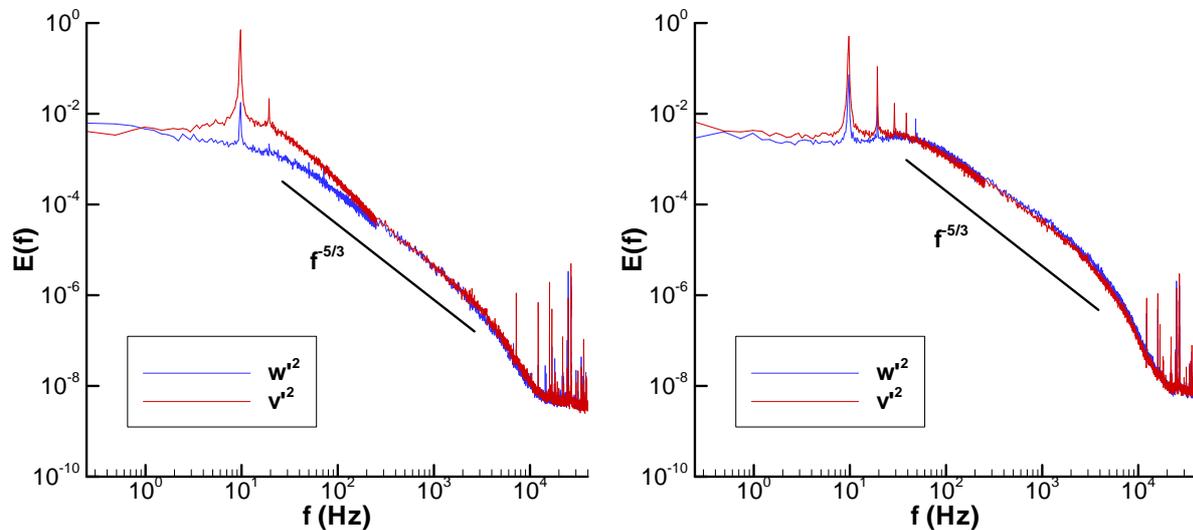


FIG. 3.6: Comparaison des fluctuations moyennes de vitesse en $r/R_1 = 0$ et $r/R_1 = 0.6$, $\chi_{CV} = 9$, configuration normale et fentes ouvertes.

(a) $S = 1.52$, $r/R_1 = 0$ (gauche) et $r/R_1 = 0.6$ (droite)(b) $S = 2.07$, $r/R_1 = 0$ (gauche) et $r/R_1 = 0.6$ (droite)FIG. 3.7: Spectres turbulents, $\chi_{CV} = 4$, $r/R_1 = 0$ et 0.6 , $S = 1.52$ et 2.07 .

(a) $S = 2.61$, $r/R_1 = 0$ (gauche) et $r/R_1 = 0.6$ (droite)(b) $S = 3.16$, $r/R_1 = 0$ (gauche) et $r/R_1 = 0.6$ (droite)FIG. 3.8: Spectres turbulents, $\chi_{CV} = 4$, $r/R_1 = 0$ et 0.6 , $S = 2.61$ et 3.16 .

En $r/R_1 = 0.6$, on constate que l'énergie du pic dû à la rotation augmente de façon monotone avec S , en accord avec l'évolution globale de l'énergie cinétique turbulente. Par ailleurs, la zone de cascade inertielle des spectres en cet endroit s'élargit progressivement avec S , jusqu'à atteindre environ 2 décades au maximum. Pour $S = 2.61$ et $S = 3.16$ la turbulence est donc réellement développée.

En $r/R_1 = 0$, la vitesse n'est réellement turbulente que pour $S = 3.16$. Pour cette valeur, les spectres turbulents sont également caractérisés par des pics de rotation du moteur très intenses et une zone inertielle étendue.

3.5 Discussion

Cette étude préalable a montré la présence de turbulence développée dans l'intégralité du plan de sortie de jets tournants générés à l'aide de tuyères de différents taux de contraction. Cette turbulence semble pilotée par le nombre de swirl S de l'écoulement de conduite généré par le nid d'abeilles. La croissance des fluctuations en fonction de ce paramètre est relativement progressive en $r/R_1 = 0.6$, plus brusque en $r/R_1 = 0$. Dans les deux cas, elle est caractérisée par quelques irrégularités qui se retrouvent qualitativement pour les trois taux de contraction.

Dans la zone de jet, plusieurs mécanismes peuvent être à l'origine de création de turbulence, et d'une propagation de celle-ci vers l'amont jusqu'au plan de sortie. On peut notamment penser à un éclatement, ou à une structure instable de grande échelle se manifestant à un nombre de swirl plus bas que celui de l'éclatement (voir par exemple Billant et al. [12] et Loiseleux et Chomaz [79]). Néanmoins, ces phénomènes sont essentiellement pilotés par le nombre de swirl local S_1 du jet, et non par S . Ils ne peuvent donc pas expliquer les comportements des figures 3.5. De même, l'idée d'une contamination de l'intégralité du plan de sortie par la turbulence générée dans les couches de mélange du jet nous semble peu convaincante. L'évolution de ces couches dépend de S_1 et Re_1 (voir par exemple Panda et McLaughlin [92]) et les courbes de la figure 3.4 semblent réfuter un mécanisme de diffusion de turbulence en provenance de la couche de cisaillement, dans la mesure où l'on voit apparaître des maxima locaux en $r/R_1 = 0$ et 0.6 .

Il semble donc acquis que l'essentiel de cette turbulence doit provenir de l'écoulement de conduite situé entre le nid d'abeilles et le plan amont des tuyères (ou dans la partie amont de celles-ci). C'est cette constatation qui a motivé le reste des travaux menés au cours de la thèse, qu'ils soient théoriques, numériques ou expérimentaux. Plusieurs mécanismes peuvent également être invoqués pour l'expliquer, mais il est difficile à ce stade de sélectionner préférentiellement l'un d'entre eux. Tout au plus peut-on comme précédemment exclure un effet de diffusion d'énergie cinétique turbulente en provenance des couches limites, en raison des deux maxima observés sur les profils dans la direction radiale. La croissance brusque des fluctuations en $r/R_1 = 0$, et la similitude des niveaux de w' quel que soit le taux de contraction évoquent plutôt l'implication d'une structure instationnaire à grande échelle axiale (puisque les tuyères sont sans effet sur ces fluctuations) et localisée préférentiellement au centre de l'écoulement tournant. Néanmoins le caractère développé de la turbulence suggère également que cette structure, si elle existe, est saturée en sortie, et que l'écoulement à l'amont des tuyères peut aussi être le siège de zones d'instabilités à petite échelle. Nous explorerons plus avant ces hypothèses dans les prochains chapitres.

Deuxième partie

Etude bibliographique et théorique de
l'écoulement de conduite

4 Phénomènes physiques dans les écoulements tournants confinés

4.1 Introduction

La figure 4.1 représente un exemple de profils de vitesse moyenne de l'écoulement de conduite obtenus par PIV stéréoscopique (voir les chapitres 7 et 8). Nous donnons ici une vue d'ensemble des phénomènes physiques qu'un tel écoulement peut abriter. Ceux-ci sont essentiellement liés au mouvement de rotation, au cisaillement et à la présence de la couche limite au contact de la zone rotationnelle. Dans la présentation, nous les séparons suivant leur nature locale ou globale : le paragraphe 4.2 s'intéresse ainsi aux différents types d'ondes et d'instabilités attendues, et les paragraphes 4.3 et 4.4 traitent de l'éclatement tourbillonnaire et de l'interaction d'écoulements sous-critiques avec des perturbations géométriques (voir le paragraphe 4.3.4 ou le chapitre 5 pour une définition du régime d'écoulement sous-critique).

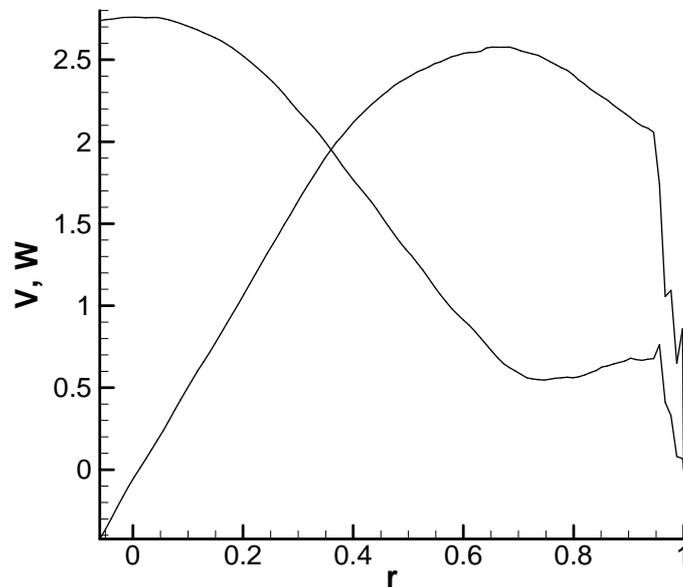


FIG. 4.1: Exemple de profils de vitesse azimutale V et axiale W obtenus par PIV stéréoscopique. Ici $S = 3.13$ et $\chi_{CV} = 18.4$. Voir les chapitres 7 et 8 pour plus de détails.

4.2 Dynamique locale

Ce paragraphe s'intéresse à la propagation d'ondes linéaires dans un écoulement stationnaire, axisymétrique et parallèle $(0, V(r), W(r), P(r))$. Ces ondes d'amplitude infini-

tésimale sont recherchées sous la forme de modes de Fourier, le champ de vitesse total s'écrivant alors sous la forme :

$$(u, v, w, p)(r, \theta, z, t) = (0, V, W, P) + \varepsilon \Re\{(u', v', w', p')e^{i(kz+m\theta-\omega t)}\} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll 1 \quad (4.1)$$

On a omis ici la dépendance en r des fonctions V, W, P, u', v', w', p' . Lorsque cette décomposition est reportée dans les équations du mouvement et les conditions aux limites, on obtient une relation de dispersion liant les nombres d'onde axial k et azimutal m et la pulsation ω . Dans le cadre d'une analyse de stabilité temporelle à laquelle cette revue se limite, k et m sont supposés réels et ω complexe. Un mode est donc atténué ssi $\omega_i < 0$, amplifié ssi $\omega_i > 0$, neutre ssi $\omega_i = 0$. Ce formalisme est similaire à celui utilisé au chapitre 5 pour l'étude des ondes de Kelvin axisymétriques (dans ce cas le jeu de variables diffère, et on se limite au chapitre 5 à $m = 0$). Remarquons que dans cette analyse locale l'écoulement stationnaire et les ondes qui s'y propagent s'étendent sur un domaine axial infini à l'amont et à l'aval. Les phénomènes étudiés peuvent être modifiés dans un cadre global qui prend en compte des effets de longueur axiale finie (ou globalement de brisure de l'invariance par translation).

Ainsi que le signalent Ash et Khorrami [4], l'utilisation d'un développement de Taylor centré sur l'axe cylindrique permet de déterminer les conditions aux limites que doivent vérifier les perturbations. Pour les modes axisymétriques $m = 0$, on trouve ainsi quand r tend vers 0 :

$$u'(r), v'(r) = O(r), \quad w'(r), p'(r) = O(1) \quad (4.2)$$

et pour les modes non axisymétriques ($m \neq 0$)

$$u'(r), v'(r) = O(r^{|m|-1}), \quad w'(r), p'(r) = O(r^{|m|}) \quad (4.3a)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|m|u' + miv'}{r^{|m|-1}} = 0 \quad (4.3b)$$

Ces relations peuvent être utiles pour déterminer la valeur du nombre d'onde azimutal des perturbations présentes dans un écoulement expérimental. Nous aurons recours à un argument de ce type au chapitre 8. Un mode est dit axisymétrique ou variqueux si $m = 0$, hélicoïdal si $m = \pm 1$, en double hélice si $m = \pm 2$.

Nous présentons ici les principaux critères de stabilité de la littérature concernant les écoulements tournants, en nous inspirant de la revue effectuée par F. Renac dans sa thèse [100]. Le lecteur intéressé par des développements plus poussés pourra également consulter la revue d'Ash et Khorrami [4]. Ces critères seront utilisés comme outil de diagnostic au chapitre 8, pour certains à titre qualitatif, lorsqu'ils concernent des écoulements moins complexes que le nôtre. Ces critères s'appliquent tous à un écoulement non visqueux et invariant par translation selon z . On constate en pratique qu'ils restent pertinents pour des écoulements dont les gradients axiaux sont négligeables devant les gradients radiaux, mais leur application aux écoulements plus fortement non parallèles est discutable. Une exception dans ce contexte est l'étude de criticité des ondes de Kelvin pour l'éclatement tourbillonnaire (voir le paragraphe 4.3.4 et le chapitre 5).

Par ailleurs, nous ne traiterons pas ici la question d'une interaction entre plusieurs de ces mécanismes d'instabilité. Ceci nécessiterait une analyse de stabilité complète qui dépasse le cadre de cette thèse. Le lecteur intéressé par la description de telles situations de couplage pourra par exemple consulter les articles de Loiseleux *et al.* [80] et Gallaire et Chomaz [37].

4.2.1 Instabilités de Kelvin-Helmholtz

Ces instabilités sont liées à la présence dans l'écoulement d'une zone de cisaillement, permettant la croissance de perturbations sous la forme d'une allée tourbillonnaire par l'effet destabilisant de la pression dynamique. Ce mécanisme est mis en évidence dans le cas d'une couche de mélange séparant deux zones d'écoulement potentiel, voir à cet effet Drazin et Reid [26]. Dans le cadre d'un écoulement plan, Rayleigh a montré qu'un critère nécessaire d'instabilité était la présence dans le profil de vitesse d'un point d'inflexion.

Dans le cas d'une géométrie d'écoulement axisymétrique sans vitesse azimutale, la condition nécessaire d'instabilité d'un mode de nombres d'onde (m, k) est due à Batchelor et Gill [9]. Elle s'écrit

$$\exists r \mid \left(\frac{rW_r}{m^2 + k^2r^2} \right)_r = 0. \quad (4.4)$$

Le cisaillement azimutal peut aussi donner lieu à des instabilités, différentes en nature de l'instabilité centrifuge traitée au paragraphe suivant. Dans un écoulement tournant avec vitesse axiale, pour que les perturbations bidimensionnelles ($k = 0$) soient instables, il faut que

$$\exists r \mid \left(\frac{(rV)_r}{r} \right)_r = 0 \quad (4.5)$$

Celle-ci n'est autre que la condition du point d'inflexion de Rayleigh appliquée à la vitesse azimutale.

4.2.2 Instabilités centrifuges

Critère de Rayleigh-Synge sur les écoulements sans vitesse axiale

Cette instabilité a été présentée pour la première fois par Rayleigh [99]. Elle tire son origine d'une stratification du moment angulaire; nous ne détaillerons pas ici ce mécanisme, dont la description peut être également trouvée dans l'ouvrage de Drazin et Reid [26]. La condition nécessaire [118] et suffisante [99] d'instabilité vis-à-vis de perturbations axisymétriques s'écrit ici

$$\exists r \mid (\Gamma^2)_r \leq 0 \quad (4.6)$$

Avec des conventions menant à une définition positive de Γ , ce critère est équivalent à la présence locale d'un maximum puis d'une décroissance de la circulation. Notons que la différence essentielle entre un écoulement de tourbillon et un écoulement de jet tournant provient précisément de leur comportement vis-à-vis de ces instabilités. La circulation d'un tourbillon reste habituellement constante lorsque $r \rightarrow \infty$ (en cas d'écoulement non confiné radialement), empêchant les instabilités centrifuges. Celles-ci sont en revanche toujours présentes dans un jet tournant, qui est généré par un écoulement de conduite possédant une couche limite imposant l'annulation de la circulation.

Remarque : les tourbillons de Görtler La couche limite de l'écoulement de conduite est turbulente et doit abriter de telles instabilités centrifuges. Dans la littérature, cette situation est traitée de façon générique en étudiant le comportement d'une couche limite turbulente sur une paroi concave. Les études montrent que lorsque le rapport entre l'épaisseur de la couche limite et le rayon de courbure de la paroi dépasse environ 0.01, l'énergie cinétique turbulente est amplifiée. Dans certains cas, des structures tourbillonnaires d'axe parallèle à la direction de l'écoulement, appelées tourbillons de Taylor-Görtler, peuvent apparaître [5, 53, 85].

Critères pour les écoulements tournants avec vitesse axiale

Retournons au cas plus général d'écoulements possédant une vitesse axiale en plus de la vitesse de rotation. Deux critères sont disponibles dans ce contexte pour la détection d'instabilités centrifuges. Pour les perturbations axisymétriques ($m = 0$), Howard et Gupta [54] ont dérivé une condition nécessaire d'instabilité :

$$\exists r \mid J(r) = \frac{(\Gamma^2)_r}{r^3 W_r^2} < \frac{1}{4}. \quad (4.7)$$

où $J(r)$ est appelé nombre de Richardson.

On doit également à Leibovich et Stewartson [75] un critère suffisant d'instabilité centrifuge de petite échelle. Leur étude prédit le taux de croissance ω_i des modes de nombre d'onde azimutal m élevé et de nombre d'onde axial $k = O(|m|)$. Elle reste néanmoins pertinente jusqu'à $|m| = 3$ environ. Ces perturbations sont associées à un ou deux seuils critiques concentrés autour d'une valeur particulière du rayon : cette propriété les fait appeler modes en anneau. La valeur maximale $\omega_{i\infty}$ prise par leur taux de croissance est atteinte dans la limite où $|m|$ tend vers l'infini et vérifie :

$$\omega_{i\infty}^2 = \frac{2V(rV_r - V)\left(\left(\frac{V}{r}\right)^2 - V_r^2 - W_r^2\right)}{(rV_r - V)^2 + r^2W_r^2} \quad (4.8)$$

En identifiant la vitesse angulaire Ω et la circulation Γ , le critère suffisant d'instabilité de Leibovich et Stewartson peut se formuler de façon équivalente : l'écoulement est instable si

$$V\Omega_r[\Gamma_r\Omega_r + W_r^2] < 0 \quad (4.9)$$

en un point de l'écoulement. Il a été par exemple utilisé par Jacquin et Pantano [58] pour démontrer la présence d'une zone "tampon" radiale stabilisatrice permettant d'expliquer les propriétés de persistances des tourbillons de sillage. Leibovich [72] signale que même s'il a été obtenu à l'origine pour le modèle de q-vortex non confiné, ce critère reste valable pour des profils de vitesse arbitraires et dans un cas confiné. Rappelons que le champ de vitesse du modèle de q-vortex est défini par

$$U(r) = 0, \quad V(r) = \frac{\omega}{r} \left(1 - e^{-br^2}\right), \quad W(r) = 1 + de^{-br^2}, \quad (4.10)$$

où ω désigne le nombre de swirl et le paramètre d introduit un défaut de vitesse ou une survitesse au centre. Le paramètre b en contrôle l'extension radiale, ainsi que celle du coeur rotationnel.

4.2.3 Ondes inertielles

Les écoulements dans un référentiel tournant sont le siège d'ondes dites inertielles. Celles-ci sont liées à l'action de rappel de la force de Coriolis dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation [120]. Dans un milieu d'extension spatiale infinie, elles sont décrites à l'aide d'un vecteur d'onde \mathbf{k} , de module et d'angle par rapport à l'axe de rotation notés respectivement k et θ . Leur relation de dispersion s'écrit alors (voir par exemple Greenspan [43]) :

$$\frac{\omega(\mathbf{k})}{k} = \frac{2\Omega \cos(\theta)}{k} \quad (4.11)$$

où Ω désigne la vitesse angulaire du repère. Ces ondes présentent donc un caractère dispersif anisotrope puisque leur vitesse de phase dépend non seulement du module du vecteur d'onde mais également de leur orientation.

Lorsque des frontières radiales sont imposées au coeur rotationnel de l'écoulement, par exemple dans le cas d'un tourbillon ou d'un écoulement de conduite, celui-ci joue le rôle d'un guide d'ondes. Les ondes inertielles portent alors le nom d'ondes de Kelvin et sont décrites par le formalisme de modes normaux (équation (4.1)). Saffman [109] a décrit leurs propriétés dans le cas d'un tourbillon de Rankine sans vitesse axiale. Il montre qu'à chaque nombre d'onde m correspond une infinité de modes, dont les pulsations dans le repère du laboratoire sont situées dans l'intervalle $]m\Omega - 2\Omega, m\Omega + 2\Omega[$. Ces ondes jouent un grand rôle dans la dynamique des tourbillons (voir par exemple la thèse de D. Fabre [32]), ainsi que dans la dynamique de l'éclatement tourbillonnaire. Dans ce dernier cas, ce sont les ondes axisymétriques qui interviennent au premier plan. Le chapitre 5 aborde cette question plus en détail.

Effets de la rotation sur la turbulence

Jacquin *et al.* [57] ont disposé une grille en aval du nid d'abeilles de la soufflerie R4Ch afin d'étudier les propriétés de la turbulence homogène en présence d'une rotation d'ensemble. Leurs conclusions montrent l'importance du rôle joué par les ondes inertielles dans la dynamique de la turbulence. Ils observent notamment que la rotation ralentit la décroissance de l'énergie cinétique turbulente, et affecte majoritairement la composante transversale des fluctuations, en augmentant fortement leur échelle intégrale associée.

4.3 Introduction à l'éclatement tourbillonnaire

Le phénomène d'éclatement tourbillonnaire a été découvert il y a environ 45 ans dans un contexte d'aérodynamique externe. La figure 1.1 de l'introduction en donne une illustration au-dessus d'une aile delta. Il a ensuite été mis en évidence dans des systèmes de combustion, où sa présence permet de stabiliser les flammes et d'augmenter les capacités de mélange de l'écoulement (voir la figure 4.6). Ce phénomène a depuis lors fait l'objet d'un nombre très important de travaux, que nous ne cherchons pas à résumer ici. Afin d'en résumer les principales caractéristiques, nous nous appuyerons sur les revues de Leibovich [72] et Lucca-Negro et O'Doherty [82], ainsi que sur celle effectuée par François Gallaire dans sa thèse [36]. Le lecteur intéressé par plus de détails pourra consulter également les articles d'Escudier [28], Détery [25] ou Althaus *et al.* [3].

4.3.1 Une définition

On trouve dans la littérature plusieurs types de dispositifs expérimentaux permettant l'étude de l'éclatement. Dans le cas d'écoulements de conduite, on peut faire appel à un système d'aubes de turbines (voir par exemple Sarpkaya [110], Garg et Leibovich [39], Novak et Sarpkaya [88] ou encore Mattner *et al.* [83]), ou d'injection tangentielle de fluide sur une portion de conduite (voir par exemple les travaux de l'équipe d'Escudier [29, 30], figure 4.8). Ceci aboutit généralement à un écoulement de tourbillon de coeur rotationnel étroit par rapport au rayon de la conduite. Les figures 4.2 et 4.3 présentent des éclatements obtenus dans le premier cas. L'éclatement a également été étudié dans un cadre non confiné, dans des configurations de jet tournant (études de Farokhi *et al.* [34], Panda et McLaughlin [92], Billant *et al.* [12], voir le chapitre 3).

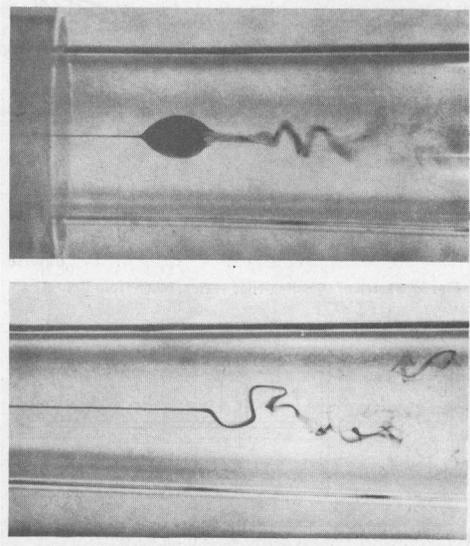


FIG. 4.2: Eclatements bulle et spiral dans un tube de géométrie divergente, $Re \approx 4000$ (basé sur le diamètre de la conduite au début de la divergence). D'après Faler et Leibovich [33].

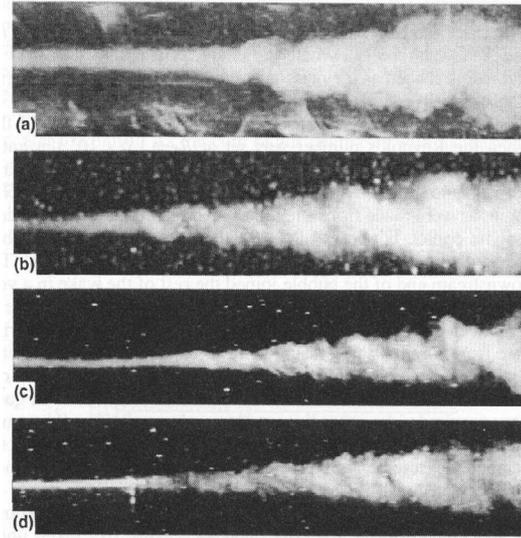


FIG. 4.3: Eclatement dans un écoulement turbulent, $Re = 230\,000$ (basé sur le diamètre du coeur rotationnel du tourbillon). D'après Novak et Sarpkaya [88].

Les définitions de l'éclatement varient suivant ces auteurs. D'après Leibovich [72], le terme désigne "ces perturbations menant au développement (dans un référentiel donné) d'un point de stagnation et d'une recirculation dans une région limitée [de l'écoulement]". Si cette apparition d'un point de stagnation sur l'axe et d'une recirculation a été notée par un grand nombre d'auteurs, elle n'est pas non plus systématique. Ainsi Mattner *et al.* [83] notent des recirculations transitoires mais non en moyenne, et Novak et Sarpkaya [88] expliquent qu'à très grand nombre de Reynolds, la recirculation disparaît. Ces derniers auteurs proposent alors de définir plus généralement l'éclatement comme "la transformation d'un tourbillon mince en des formes tri-dimensionnelles".

Géométrie

La géométrie des éclatements observés n'est pas non plus unique. La figure 4.4 résume les résultats de l'étude de Faler et Leibovich sur l'éclatement dans une conduite légèrement divergente. Elle représente la position axiale moyenne des perturbations (qu'il s'agisse réellement d'éclatements ou de perturbations apparentées) et leur type de géométrie, en fonction des nombres de Reynolds et de swirl. Elle montre qu'à grand nombre de Reynolds, les formes bulle et spirale (voir la figure 1.1 de l'introduction et la figure 4.2) prédominent.

Depuis ces travaux, d'autres géométries ont été observées. Billant *et al.* [12] ont mis en évidence une nouvelle géométrie de type cône axisymétrique d'angle d'ouverture élevé. Novak et Sarpkaya [88] ont quant à eux montré que l'éclatement à très grand nombre de Reynolds consistait en un ensemble de spirales tournant à des vitesses très élevées, devenant rapidement turbulentes et prenant la forme d'un cône (d'angle d'ouverture plus faible que celui de Billant *et al.*, voir la figure 4.3). Ces auteurs soulignent d'ailleurs qu'il existe très peu de données concernant directement sur l'éclatement turbulent : celui-ci est le plus souvent étudié dans des géométries de type chambre de combustion, dans le but d'améliorer les rendements (voir le paragraphe 4.4), ou sinon à des Reynolds d'écoulements initialement laminares.

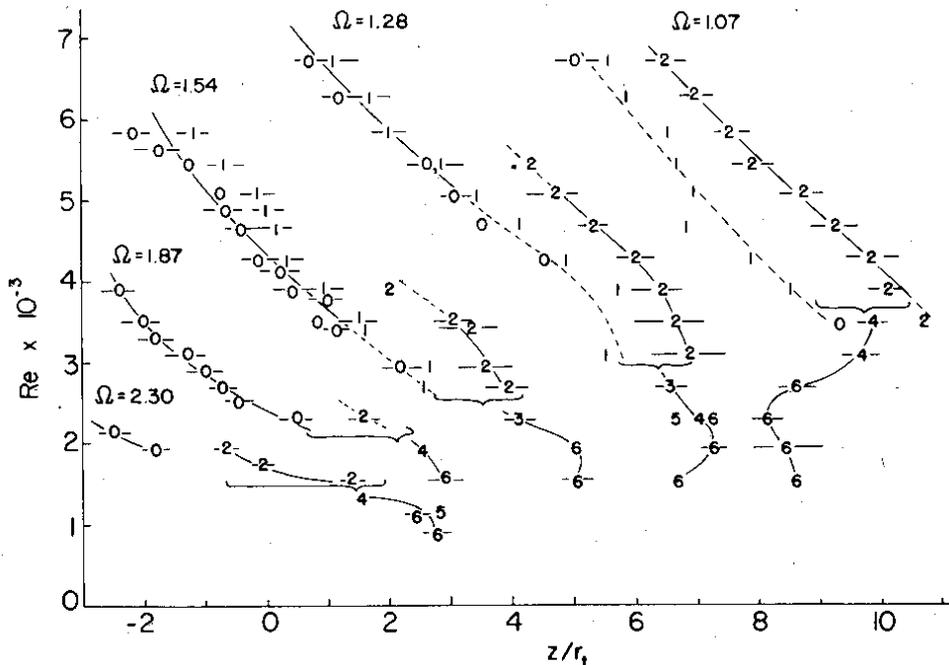


FIG. 4.4: Position axiale moyenne et géométrie de l'éclatement observée dans les expériences de Faler et Leibovich [33], en fonction des nombre de Reynolds Re et de swirl Ω . 0 et 1 sont des éclatements de type bulle, 2 de type spiral, 3 à 6 désignent des perturbations locales de grande amplitude qui disparaissent lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment élevé. La position $z/r_t = 0$ désigne le début de la portion de conduite divergente.

4.3.2 Paramètres de contrôle

De nombreux paramètres ont une influence sur l'éclatement : le nombre de swirl, le nombre de Reynolds, la géométrie et le gradient de pression imposés à l'écoulement, les effets thermiques et compressibles. Dans les cas qui nous intéressent, seuls interviennent effectivement les nombres de swirl, de Reynolds et les conditions aux limites imposées par la géométrie. On sait à l'heure actuelle que l'éclatement peut se produire lorsque la condition amont d'écoulement est proche de la criticité au sens des ondes de Kelvin axisymétriques, ce qui implique que le nombre de swirl atteigne une valeur seuil dépendant du profil de l'écoulement (voir le paragraphe 4.3.4 et plus particulièrement le chapitre 5). La valeur du nombre de Reynolds peut quant à elle sélectionner le scénario dynamique menant à l'apparition de l'éclatement. Beran et Culick [11] ont ainsi montré qu'à bas nombre de Reynolds, une bulle d'éclatement stationnaire apparaît dans l'écoulement lorsque le swirl augmente, sans perte de stabilité, tandis qu'il est issu d'un scénario impliquant deux bifurcations noeud-col à nombre de Reynolds plus élevé (voir en particulier la figure 5.15 du chapitre 5).

L'éclatement est par ailleurs reconnu comme étant un phénomène global. Il est très sensible à toutes les conditions aux limites imposées à l'écoulement, en particulier au profil de vitesse amont et aux conditions géométriques à l'aval. Celles-ci peuvent piloter la forme de la bulle de recirculation, ou mener à des phénoménologies plus complexes. L'influence particulière de l'aval sera étudiée plus en détail au paragraphe 4.4.

Lorsque le nombre de swirl augmente une fois que l'éclatement est apparu, celui-ci se déplace progressivement vers l'amont. L'évolution ultérieure en fonction de ce paramètre n'est pas très claire et dépend là aussi très fortement des géométries de conduite (voir le paragraphe 4.4). Certaines expériences suggèrent une transition vers des écoule-

ments présentant une recirculation centrale en forme de colonne, sur toute la longueur du tube [51], rappelant les colonnes de Taylor-Proudman observées dans des cuves en rotation (on pourra se référer à Greenspan [43] pour des exemples de visualisation).

4.3.3 Description d'un écoulement présentant un éclatement

Des études citées au paragraphe 4.3.1 se dégagent la description suivante des écoulements où l'éclatement tourbillonnaire est présent :

1. Entre l'amont et l'aval, le coeur tourbillonnaire s'élargit. L'amplitude de cet élargissement dépend de la géométrie de l'éclatement qui survient.
2. Le profil de vitesse axiale en aval de l'éclatement est analogue au profil obtenu dans le sillage d'un objet non profilé disposé sur l'axe de l'écoulement, et ce même dans le cas où le profil de vitesse axiale en amont est de type jet (ce qui est très souvent le cas dans les expériences impliquant des aubes radiales). L'annulation de la vitesse axiale sur l'axe et la présence de vitesse axiale négative sont très courantes, mais non systématiques.
3. A l'aval de l'éclatement, l'écoulement est instationnaire ou turbulent s'il était stationnaire en amont, et de turbulence plus intense s'il était déjà turbulent à l'amont.

Cette dernière constatation a fait l'objet d'études approfondies. Il en ressort que des instabilités forme d'hélice simple ($|m| = 1$), de basse fréquence, sont très souvent observées en aval de l'éclatement. Cassidy et Falvey [18] ont montré que la fréquence de précession du tourbillon hélicoïdal généré en aval de leurs éclatements était contrôlée uniquement par le nombre de swirl. Sur un dispositif analogue, Garg et Leibovich [39] ont trouvé des fréquences d'oscillations inférieures à $10 Hz$. En appliquant l'analyse de stabilité linéaire de Lessen *et al.* [76], ils ont constaté un bon accord entre cette fréquence et celle du mode $m = -1$ théorique le plus instable. Des études analytiques plus récentes montrent que l'apparition d'instabilités hélicoïdales est précisément liée à la présence d'un profil de vitesse de type sillage en rotation. Celles-ci se sont intéressées à la transition entre instabilités convectives et absolues de ces profils afin de tester l'hypothèse d'un mode global [22, 90]. Des éléments de confirmation numériques [104] et expérimentales [77] ont été également fournis dans ce sens.

4.3.4 Critères de diagnostic et interprétations

A l'heure actuelle, un scénario dynamique expliquant toutes les caractéristiques de l'éclatement n'a pas encore été trouvé. Néanmoins, certains phénomènes physiques jouant un rôle prépondérant dans son apparition ont pu être isolés.

Depuis les idées initiales de Squire [117] et Benjamin [10], une grande attention a été portée sur la dynamique des ondes de Kelvin axisymétriques. L'existence d'une transition critique pour un nombre de swirl donné, séparant des écoulements dits supercritiques (bas swirl, propagation des ondes uniquement de l'amont vers l'aval), d'écoulements sous-critiques (swirl élevé, propagation de l'aval vers l'amont également possible), et caractérisée par des phénomènes non linéaires au seuil critique, est détaillée au chapitre 5. Dans ce cadre d'analyse théorique, Squire et Benjamin ont modélisé l'éclatement comme un "saut", du même type que le ressaut hydraulique, entre une zone d'écoulement supercritique à l'amont et une zone d'écoulement sous-critique à l'aval. Plusieurs études expérimentales [121] ou numériques [21, 104] ont confirmé ce changement de comportement à la traversée de l'éclatement. Ces deux dernières précisent également que

la criticité locale de l'écoulement fournit un bon critère de localisation de l'éclatement tourbillonnaire, de sorte que celle-ci pourrait être utilisée comme diagnostic.

Les interprétations privilégiant le rôle des instabilités hélicoïdales ont été, semble-t-il, progressivement écartées. Les travaux actuels acceptent en grande majorité l'interprétation d'Escudier *et al.* [29] sur la "hiérarchie" entre le rôle joué par la criticité et celui de ces instabilités. Même si l'écoulement à l'aval des éclatements est fondamentalement asymétrique, ces auteurs expliquent en effet que l'amplitude de ces mouvements est moins élevée que l'amplitude d'une perturbation permettant d'annuler la vitesse axiale sur l'axe (qui ne peut être qu'axisymétrique, voir l'équation (4.2)). Les travaux théoriques et numériques cités à la fin du paragraphe précédent supportent également ce scénario voulant que l'instabilité naisse en conséquence de la présence dans l'écoulement d'un profil de vitesse de type sillage, créé par les ondes axisymétriques. Plusieurs modèles axisymétriques globaux, comme celui de l'équipe de Rusak présenté au chapitre 5, ont permis depuis lors d'affiner le rôle de ces ondes dans l'apparition de l'éclatement.

4.3.5 Eclatement et ondes stationnaires

Un écoulement sous-critique est également défini par sa capacité à supporter des ondes axisymétriques stationnaires (voir le paragraphe 5.3.1). Dans leurs simulations numériques Beran et Culick [11] observent effectivement des trains d'ondes en aval des éclatements. De façon analogue, de telles structures sont mises en évidence dans les simulations instationnaires de Hanazaki [50] (voir la figure 5.7 du chapitre 5). Néanmoins ces travaux reposent sur une hypothèse d'axisymétrie, et il semble que dans un cadre tri-dimensionnel plus réaliste, la dynamique en aval de l'éclatement soit plutôt dominée par les instabilités hélicoïdales. Seules quelques études expérimentales font en effet mention de ces ondes stationnaires. Mattner *et al.* [83] observent des oscillations axiales stationnaires dans la vitesse axiale au centre de leur écoulement, dont la longueur d'onde est comparable à celle donnée par la théorie. Mourtazin [84] détecte des ondes axisymétriques stationnaires de grande amplitude en aval d'un dispositif créant un écoulement tournant à l'aide d'un corps central suivi par un convergent. À mesure que le swirl augmente, ces ondes, à l'origine de recirculations à la paroi, apparaissent lorsque plusieurs écoulements stationnaires deviennent possibles et disparaissent pour laisser place à l'éclatement (voir la figure 5.15 du chapitre 5). Enfin, des trains d'ondes ont également été observés expérimentalement sur des tourbillons creux [63] ou encore en aval d'un obstacle placé sur l'axe cylindrique [96].

4.4 Écoulements sous-critiques et géométrie aval

Harvey [51] a le premier constaté que des mesures intrusives de type fil chaud ou Pitot dans la zone sous-critique perturbaient la position et la géométrie de l'éclatement. L'effet d'une contraction aval sur l'éclatement ou les écoulements sous-critiques a également été étudié à quelques reprises, dans la mesure où celle-ci est souvent présente dans les dispositifs expérimentaux. Nous en résumons ici les principales conclusions ; celles-ci sont d'ordre qualitatif, et les observations semblent dépendre de la géométrie des installations. À notre connaissance, il n'existe pas d'étude numérique "générale" concernant cette interaction (permettant par exemple de comprendre l'influence du taux de contraction, ou encore de la taille du coeur rotationnel de l'écoulement amont) et seules deux études [8, 107] abordent cette question sous un angle théorique. Nous présentons ces dernières

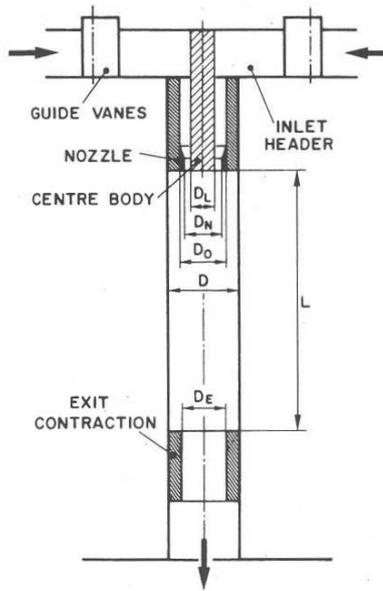


FIG. 4.5: Dispositif de chambre de combustion étudié par Escudier et Keller [31].

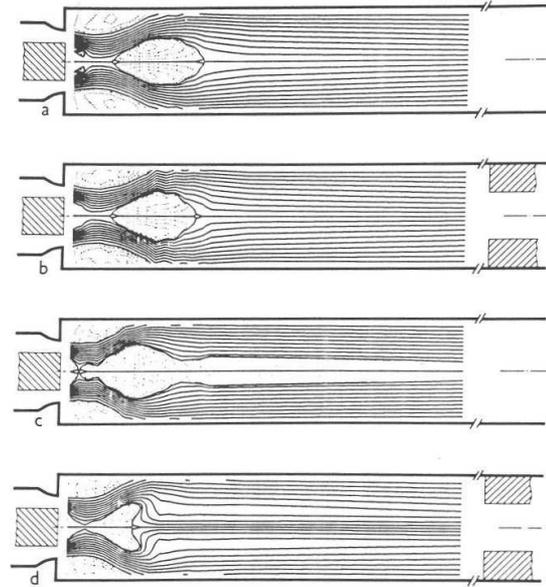


FIG. 4.6: Figures a et b : écoulement retournant dans un régime supercritique à l'aval, cas avec et sans contraction. Figures c et d : écoulement restant sous-critique à l'aval, cas avec et sans contraction.

dans le chapitre 5, puisqu'elles se situent dans le cadre d'un modèle de fluide parfait axisymétrique.

L'effet le plus immédiat d'une contraction en aval sur l'éclatement a été signalé par Sarpkaya [110]. Celui-ci a en effet noté que sa présence avait pour effet de le faire se déplacer vers l'amont, jusqu'au système de génération de la rotation. Dans la mesure où la position de l'éclatement peut également osciller axialement à basse fréquence, les dispositifs d'étude expérimentale ont alors très rapidement fait intervenir des tubes à géométrie faiblement divergente, munis ou non d'un léger étranglement localisé permettant d'en fixer la position. Par ailleurs, les études numériques sur l'éclatement ont adopté de telles géométries pour des raisons similaires. On pourra voir Hanazaki [50] pour une revue.

La figure 4.5 représente la configuration d'écoulement étudiée par Escudier et Keller [31], qui reproduit une géométrie de chambre de combustion. Ces auteurs ont montré que la géométrie de l'éclatement pouvait être modifiée par une contraction à l'aval uniquement dans le cas où l'écoulement était encore sous-critique à cet endroit. Lorsque celui-ci retourne à un régime supercritique par décroissance visqueuse du moment angulaire, cette géométrie est inchangée (figure 4.6). Selon Escudier et Keller, cette influence serait à même d'expliquer les différences dans les champs de vitesse obtenus à l'aval de l'éclatement par différents auteurs. Les expériences d'Altgeld *et al.* [2], menées sur un dispositif similaire, confirment ces observations. La diminution de section de sortie est cette fois obtenue par l'utilisation d'un baffle, utilisé pour supprimer les vitesses axiales négatives détectées dans le plan de sortie de la chambre lorsque celui-ci est absent.

Sur un dispositif similaire, Chao *et al.* [19] ont observé que la contraction avait pour effet d'augmenter la fréquence des oscillations en aval de l'éclatement. Ils ont également noté que la zone de recirculation de l'éclatement n'était plus centrée autour de l'axe, mais **annulaire**, de sorte que la vitesse axiale était positive sur l'axe. Plusieurs travaux de l'équipe de Lilley [1, 55, 101, 111, 127] font également mention d'écoulements de ce

type, mais leurs mesures n'ont qu'une portée qualitative car elles ont été effectuées par des méthodes intrusives. Il semble en effet que le lien entre les recirculations observées de longue date dans les brûleurs industriels et l'éclatement tourbillonnaire n'ait été fait qu'au courant des années 80.

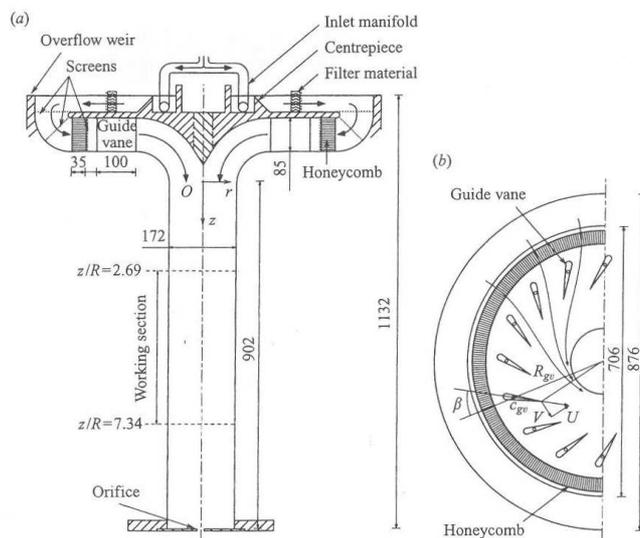
Mattner *et al.* [83] effectuent une revue des travaux ayant mis en évidence expérimentalement des écoulements sous-critiques à grand nombre de swirl caractérisés par une vitesse axiale positive au centre et une zone de recirculation annulaire en périphérie. Depuis Nuttal [89], qui utilise le même dispositif d'aubes radiales que Mattner *et al.*, ces écoulements sont qualifiés d'"écoulements de type III". Le type I désigne un écoulement tournant sans recirculation ni gradients axiaux à bas nombre de swirl, et le type II un écoulement présentant un éclatement, à nombre de swirl intermédiaire. De tels profils de vitesse ont également été observés par Binnie [13] (injection tangentielle de fluide dans une portion de conduite tournante), Nissan et Bresan [87] et Guo et Dhir [46] (injection tangentielle de fluide à l'amont). En raison de la diversité des dispositifs étudiés, une comparaison entre ces études s'avère délicate. Néanmoins toutes mentionnent l'existence d'un écoulement de type III à très grand nombre de swirl. A titre de résumé, la figure 4.7 présente le dispositif utilisé par Mattner *et al.* ainsi que les profils de type III obtenus à très grand nombre de swirl tout le long de la zone de mesure par LDV (ces expériences sont effectuées à $Re \approx 4900$). Il est à noter que dans cette étude, ce n'est pas une tuyère qui est disposée à l'aval mais un diaphragme de taux de contraction équivalant égal à 97%! Mattner *et al.* suggèrent, sans pouvoir le démontrer en raison des contraintes de leur dispositif, que l'apparition de ce profil doit coïncider avec le fait que l'écoulement reste sous-critique jusqu'au plan de sortie, comme dans l'expérience d'Escudier et Keller [31].

Enfin, l'étude d'Escudier *et al.* [30], qui s'appuie sur un dispositif d'injection tangentielle de fluide tout le long de la veine d'essais (voir la figure 4.8(a)), a également montré la forte influence du taux de contraction de la tuyère disposée en aval. La figure 4.8(b) montre l'évolution du profil de vitesse axiale à l'amont, à nombre de swirl identique, lorsque le rayon de cette tuyère est progressivement diminué. On note que l'éclatement disparaît progressivement au profit de profils de type jet avec défauts de vitesse au centre, qui peuvent atteindre des niveaux très intenses sur l'axe. S'appuyant sur des visualisations à l'aide de colorants, Escudier *et al.* soulignent que dans les cas extrêmes, la vitesse n'est pas maximale sur l'axe comme leurs sondages LDV le suggèrent, mais qu'un défaut de vitesse persiste comme dans le cas des taux de contraction plus modérés. Plus récemment, Derksen [23] a simulé cette configuration expérimentale à l'aide d'une simulation des grandes échelles. Ses résultats sont en bon accord avec ceux de la figure 4.8(b) mais ne montrent pas de défaut de vitesse au centre pour les jets les plus intenses.

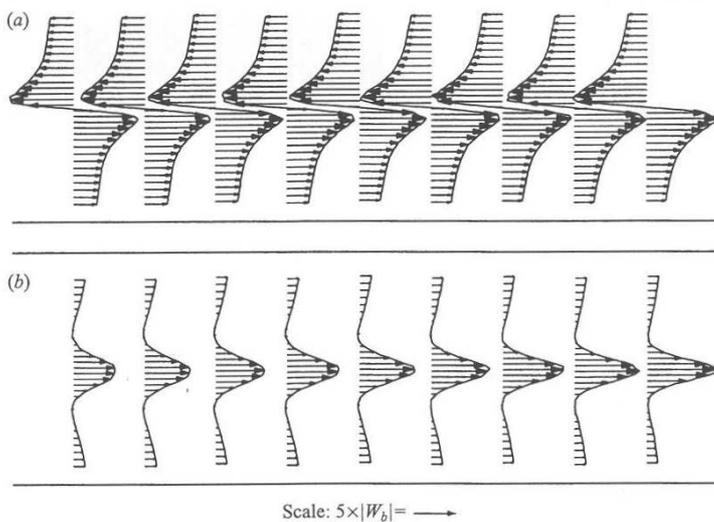
4.5 Discussion : choix d'une approche

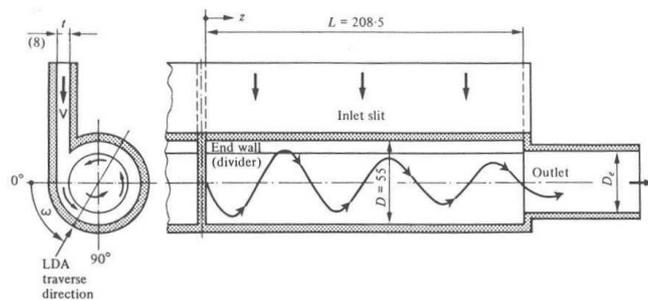
Les paragraphes précédents montrent la richesse et la diversité des phénomènes physiques susceptibles d'interagir dans un écoulement tournant confiné. A l'évidence, il n'est pas possible de les prendre tous en compte dans un modèle, à moins d'effectuer une simulation numérique directe qui n'est pas l'objet de cette étude.

Leur transposition directe à notre écoulement n'est pas non plus envisageable. Par rapport aux études citées ci-dessus concernant l'éclatement dans les tubes, l'écoulement de la soufflerie R4Ch présente la particularité d'un **confinement très fort** puisque le coeur rotationnel constitue l'essentiel de l'écoulement, en-dehors de la couche limite. Or

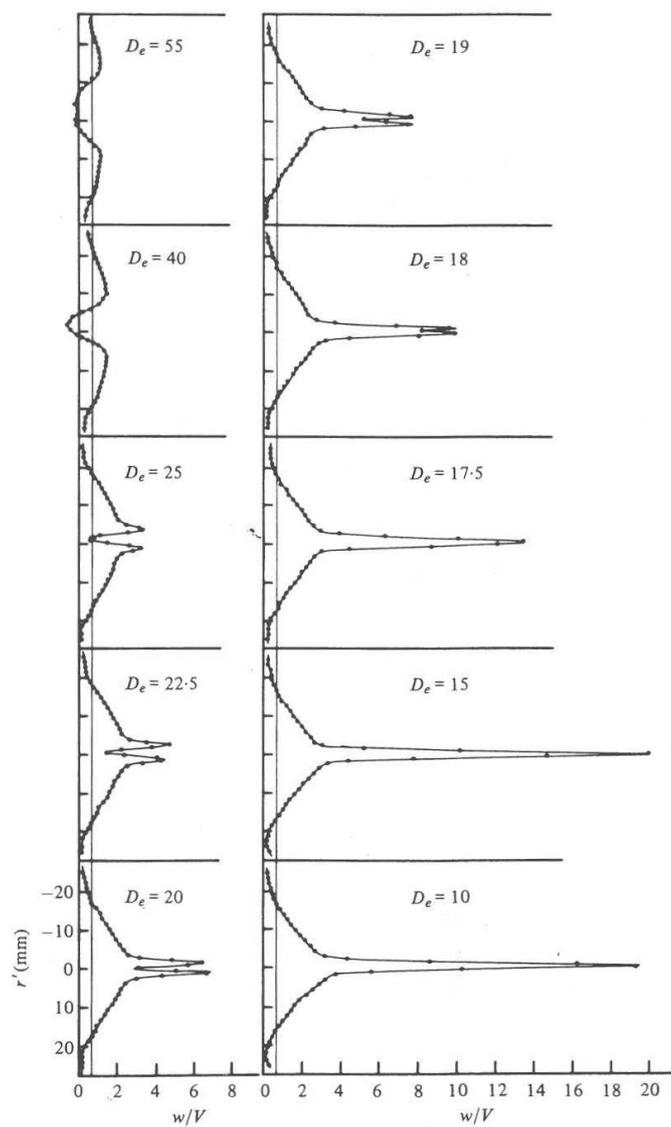


(a) Dispositif d'aubes radiales et zone de visualisation

(b) Evolution axiale de l'écoulement de type III. Vitesse azimutale (haut) et axiale (bas). Le nombre de swirl de l'écoulement est estimé par les auteurs à $S = 21.5$.FIG. 4.7: L'expérience de Mattner *et al.* [83]



(a) Dispositif d'injection tangentielle et contraction.



(b) Profil de vitesse axiale obtenu à l'amont pour des nombres de swirl identiques et des taux de contraction aval croissants.

FIG. 4.8: L'expérience d'Escudier *et al.* [30].

la très grande majorité des travaux existants cherche précisément à isoler le phénomène d'éclatement du plus grand nombre d'influences extérieures possibles, y compris du confinement radial. De fait, les études disponibles dans la littérature utilisant un dispositif de nid d'abeilles tournant ne s'intéressent pas à un éventuel éclatement dans la conduite, mais plus à l'évolution de la turbulence à nombre de swirl modéré [57, 102], ou encore à l'étude des jets générés en aval [12, 77]. Dans les expériences de cuve à fond tournant (voir par exemple Spohn *et al.* [116] et leurs références), l'éclatement tourbillonnaire est fortement confiné, mais la comparaison entre notre expérience et ces écoulements fermés nous semble également peu pertinente.

Même si les instabilités asymétriques sont réellement présentes dans les écoulements tournants à grand nombre de swirl, il semble que l'éclatement et les effets globaux liés à la géométrie et aux ondes de Kelvin axisymétriques puissent expliquer une grande partie de leur dynamique. En particulier, seule la connaissance de ces effets peut permettre de caractériser l'écoulement "à l'ordre le plus bas" (voir l'argumentaire d'Escudier *et al.* [29]), ce qui est un préalable pour toute analyse de stabilité locale. Signalons à titre d'anticipation que la valeur critique théorique prévue par un modèle d'écoulement d'advection uniforme et rotation solide est largement dépassée dans notre expérience. L'étude du chapitre 5 montre ainsi qu'un écoulement modèle d'advection uniforme et de rotation solide devient sous-critique pour un nombre de swirl $S_{0c} \approx 1.92$ (celui-ci étant défini comme le rapport entre la vitesse azimutale maximale et la vitesse axiale). Il nous semble donc raisonnable de s'attendre à des effets de la géométrie aval sur l'écoulement sortant du nid d'abeilles, et de porter notre attention en priorité sur les aspects axisymétriques et non linéaires de la dynamique.

5 Etude théorique du régime transcritique

5.1 Introduction

5.1.1 Modèle

Nous nous intéressons ici à un modèle d'écoulement qui a été fréquemment utilisé dans le cadre d'études sur l'éclatement tourbillonnaire, et qui a permis d'en dégager un grand nombre de caractéristiques (on pourra citer, à titre d'exemple, les études de Leibovich et Kribus [73], Buntine et Saffman [16], ou encore celles des équipes de Rusak [105–108, 122–125] et R. Grimshaw [24, 44, 45]). Les hypothèses de fluide parfait et d'axisymétrie rendent le problème relativement simple, et permettent de se concentrer sur la dynamique des ondes de Kelvin axisymétriques et sur leur transition critique, à l'origine de phénomènes non linéaires importants.

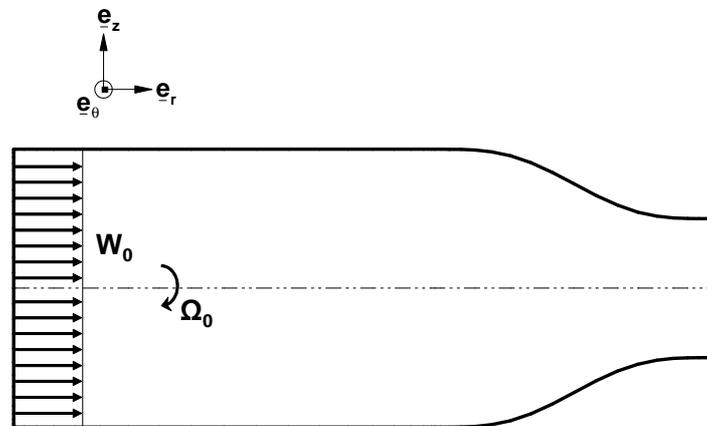


FIG. 5.1: Configuration d'écoulement étudiée

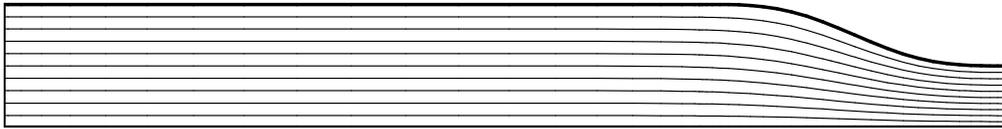
Après avoir rappelé les principaux résultats que ce modèle a permis de dégager par le passé, nous l'appliquerons au cas de notre écoulement. Ceci nous permettra de caractériser la contribution des perturbations axisymétriques de grande amplitude qui peuvent se développer dans notre dispositif. Nous ramènerons donc notre écoulement à un mouvement d'advection uniforme de vitesse W_0 , et de rotation solide Ω_0 , se développant depuis le nid d'abeilles jusqu'au plan de sortie de la tuyère convergente. Il sera caractérisé par le nombre de swirl

$$S_0 = \frac{R_0 \Omega_0}{W_0} \quad (5.1)$$

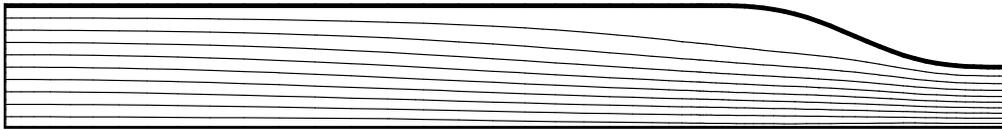
Nous ne tenons pas compte ici de la couche limite, qui est remplacée par une condition de glissement conformément à l'hypothèse de fluide parfait. Son influence sera étudiée plus particulièrement dans la partie suivante. La figure 5.1 résume les hypothèses que nous venons d'introduire.

Notons que dans la grande majorité des applications, il existe une région près de l'axe de rotation où la condition de vitesse amont d'advection uniforme et rotation solide (W_0, Ω_0) est recevable. Néanmoins, nous verrons que ce modèle aboutit à un comportement singulier qui n'est pas retrouvé pour d'autres modèles d'écoulements confinés, comme le q-vortex (voir les équations (4.10) du chapitre 4). C'est pourquoi nous porterons une attention particulière à cette propriété dans cette analyse.

5.1.2 Organisation du chapitre



(a) $S_0 = 1$



(b) $S_0 = 1.914$

FIG. 5.2: Lignes de courant obtenues pour deux valeurs de S_0 . Les niveaux de ces lignes sont définis par $\psi_i = (0.01i)^2/2, i = 0 \dots 10$

La figure 5.2 présente les lignes de courant obtenues pour deux valeurs de S_0 à l'aide des calculs effectués au paragraphe 5.6. La figure 5.3 montre l'évolution longitudinale de la vitesse axiale à la frontière du tube de courant pour divers nombres de swirl. Ces figures montrent qu'il existe une valeur de S_0 pour laquelle la vitesse axiale s'annule à la paroi de la tuyère convergente. Notre objectif principal dans ce chapitre sera de montrer que ce point d'arrêt résulte de l'interaction **résonante** entre la contraction et une onde de Kelvin axisymétrique stationnaire transcritique de l'écoulement tournant.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Après avoir développé les équations du modèle au paragraphe 5.2, nous nous intéresserons aux ondes de Kelvin axisymétriques qui se propagent sur un écoulement parallèle. L'occurrence de leur transition critique pilotée par le nombre de swirl S_0 sera mise en évidence au paragraphe 5.3. A l'aide d'une approximation quasi-cylindrique, nous pourrions ensuite interpréter qualitativement l'allure des profils de vitesse mesurés expérimentalement. Afin de modéliser le régime transcritique pour lequel cette approximation devient caduque, nous poursuivrons notre analyse en nous plaçant dans un cadre stationnaire global qui prend en compte la longueur finie de la conduite et les conditions aux limites axiales qui en découlent. Pour l'analyse de ce nouveau problème on s'appuiera sur le modèle théorique d'éclatement

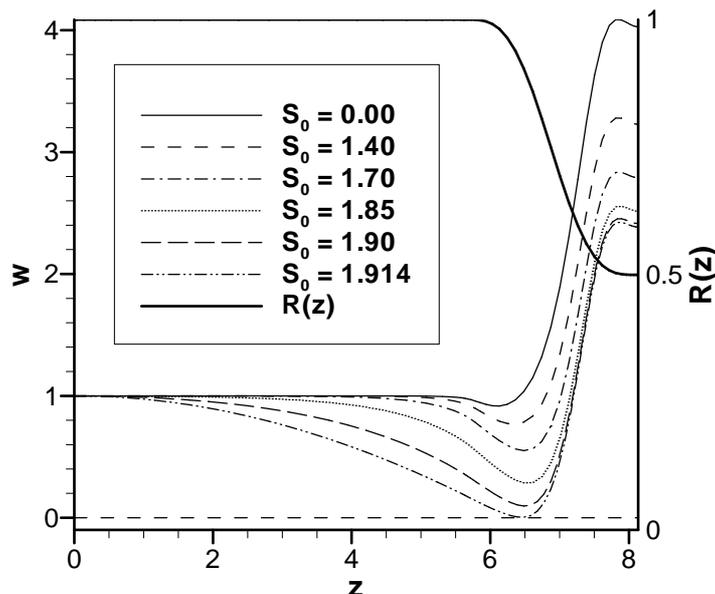


FIG. 5.3: Vitesse axiale w obtenue à la paroi du domaine pour des valeurs croissantes de S_0 .

tourbillonnaire axisymétrique de Wang et Rusak [124] qui s'applique à une conduite de section constante, ainsi que l'analyse connexe de Rusak et Meder [107] relative à une tuyère convergente de faible taux de contraction. Nous expliquerons comment cette analyse se transpose au cas de l'écoulement d'advection uniforme et rotation solide, pour lequel le formalisme de Rusak et Meder n'est plus applicable, et nous envisagerons aussi le cas de conditions aux limites axiales plus adaptées à notre écoulement que celles de Wang et Rusak. Une analyse de suivi de solutions stationnaires, suivant la technique détaillée dans l'annexe B, nous permettra alors d'établir le lien entre la criticité de l'écoulement généré à la frontière amont et la recirculation obtenue à l'intérieur de la tuyère de taux de contraction fini.

5.2 Equations du mouvement

5.2.1 Problème instationnaire

Nous considérons donc un écoulement axisymétrique de fluide parfait incompressible. Dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , les composantes respectives du vecteur vitesse (u, v, w) ne dépendent que de r, z et du temps t . Dans tout ce qui suit les longueurs sont adimensionnées par le rayon R_0 de la conduite de section constante, et les vitesses par la vitesse d'advection à l'amont W_0 . Les hypothèses d'incompressibilité et d'axisymétrie permettent d'introduire la fonction de courant ψ , telle que

$$u = -\frac{\psi_z}{r} \quad \text{et} \quad w = \frac{\psi_r}{r} \quad (5.2)$$

On introduit également la circulation K , la vorticité azimutale η et la vorticité azimutale réduite χ , définies par

$$K = rv \quad (5.3a)$$

$$\eta = u_z - w_r \quad (5.3b)$$

$$\chi = \eta/r \quad (5.3c)$$

Dans le cadre le plus général où la dépendance en temps est autorisée, on montre (voir par exemple Szeri et Holmes [119]) que les équations d'Euler s'expriment sous la forme des trois équations suivantes, aussi appelées équations de Squire-Long instationnaires :

$$\frac{DK}{Dt} = K_t - \frac{\psi_z K_r}{r} + \frac{\psi_r K_z}{r} = 0 \quad (5.4a)$$

$$\frac{D\chi}{Dt} = \chi_t - \frac{\psi_z \chi_r}{r} + \frac{\psi_r \chi_z}{r} = \frac{(K^2)_z}{r^4} \quad (5.4b)$$

$$\chi = -\frac{1}{r^2} \left(\psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right) \quad (5.4c)$$

D/Dt désigne l'opérateur de dérivation particulaire. L'équation (5.4a) exprime la conservation de la circulation le long d'une ligne de courant (théorème de Kelvin). Lorsqu'on considère la vorticité azimutale η et non plus la vorticité réduite χ , l'équation (5.4b) devient :

$$\frac{D\eta}{Dt} = \eta_t - \frac{\psi_z \eta_r}{r} + \frac{\psi_r \eta_z}{r} = \frac{(K^2)_z}{r^3} - \frac{\psi_z \eta}{r^2} \quad (5.5)$$

On identifie dans le membre de droite de cette équation un terme de gauchissement d  à la vorticité axiale (premier terme) et un terme d'étirement (second terme).

Ces équations peuvent mener à des problèmes différents suivant le type de conditions aux limites et les éventuelles hypothèses simplificatrices qu'on leur associe. L'analyse **locale** du paragraphe 5.3 repose ainsi sur une hypothèse d'écoulement invariant par translation suivant z , auquel cas seules des conditions aux limites radiales sont imposées. Le problème **global**  tudi  aux paragraphes 5.4 et suivants s'intéresse au cas d'un écoulement dans un domaine d'étendues axiale et radiale limitées, ce qui nécessite de prescrire des conditions aux limites sur toutes les frontières de ce domaine.

5.2.2 Simplification dans le cas stationnaire

Il est possible de montrer que les solutions stationnaires du système (5.4) sont décrites de façon équivalente par l'équation unique

$$-r^2 \chi = -r\eta = \left(\psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right) = r^2 H'(\psi) - K K'(\psi), \quad (5.6)$$

la grandeur H désignant l'énergie mécanique $p/\rho + (u^2 + v^2 + w^2)/2$, constante sur une ligne de courant (théorème de Bernoulli). Cette équation est désignée le plus souvent sous le nom d'équation de Squire-Long ou de Bragg-Hawthorne. Sa dérivation d'après Batchelor [8] est reproduite dans l'annexe C. Dans la pratique, elle ne peut être employée que si l'on peut déterminer analytiquement l'expression de $H'(\psi)$ et $K(\psi)$, ce qui n'est possible que dans le cas de certaines conditions d'écoulement amont.

Limite de validité du modèle

Dans ce cadre stationnaire et non visqueux, l'énergie mécanique H et la circulation K sont conservées le long des lignes de courant. Les solutions de l'équation (5.6) modélisent alors les solutions limites vers lesquelles évolue un écoulement réel laminaire de nombre de Reynolds tendant vers l'infini lorsqu'on lui impose les mêmes conditions de génération. Si toutes les lignes de courant de l'état stationnaire ainsi trouvé proviennent d'une (ou plusieurs) frontière(s) du domaine sur laquelle la valeur de la vitesse est imposée (le plus souvent il s'agit de la frontière amont), alors cet écoulement peut représenter une solution

réaliste, car H et K sont déterminées de façon univoque en tout point de l'écoulement. En revanche, lorsqu'un écoulement stationnaire comporte des lignes de courant fermées ou des lignes de courant uniquement connectées à une frontière sur laquelle la vitesse n'est pas imposée, l'indétermination de H et K sur ces lignes doit être levée à l'aide d'un modèle adapté et physiquement réaliste.

Prandtl [94] et Batchelor [7] ont les premiers développé des critères de détermination des valeurs de H et K . Batchelor a montré que $K(\psi)$ et $H'(\psi)$ doivent être des constantes indépendantes de ψ sur les lignes de courant fermées, ce qui laisse encore des degrés de liberté pour leur détermination. Des développements ultérieurs sur ce sujet sont présentés dans les articles de Leibovich et Kribus [73], Wang et Rusak [124], ou encore dans la revue réalisée par François Gallaire [36]. On trouve en particulier qu'un choix de modèle de continuation, c'est-à-dire le choix des fonctions $K(\psi)$ et $H'(\psi)$ sur les lignes de courant fermées, peut changer la nature de la solution obtenue. De plus, pour utiliser ces modèles au sein d'une recherche d'écoulement stationnaire, il faut que la ligne de courant séparant la zone de recirculation du reste de l'écoulement soit traitée comme une surface libre, ce qui rend le problème plus ardu (voir par exemple [71]). Dans la suite de cette étude, nous nous contenterons donc de présenter des résultats stationnaires jusqu'au seuil d'apparition d'un point d'arrêt.

Particularité de l'écoulement d'advection uniforme et rotation solide

Comme le montre le raisonnement détaillé dans l'annexe C, dans un écoulement sans recirculation les fonctions $K(\psi)$ et $H'(\psi)$ sont entièrement déterminées par la condition amont si les fonctions ψ , K et η (ou χ) sont imposées à ce niveau par des conditions de Dirichlet. En pratique, cela revient à imposer w , v ainsi que la vorticité azimutale $u_z - w_r$. Si, de plus, cet écoulement amont est cylindrique, cette dernière condition équivaut à $u_z = 0$ puisque w_r est connu. Pour l'écoulement d'advection uniforme de vitesse W_0 et de rotation solide de vitesse angulaire Ω_0 l'équation (5.6) devient alors

$$-r\eta = \left(\psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right) = 4S_0^2 \left(\frac{r^2}{2} - \psi \right). \quad (5.7)$$

Par contre, cette équation ne peut plus être utilisée pour décrire l'écoulement si la condition de Dirichlet sur la vorticité azimutale est remplacée par une autre condition, par exemple une condition de vitesse radiale nulle. Il faut alors utiliser les équations de Squire-Long stationnaires, c'est-à-dire le système d'équations (5.4) avec $\partial/\partial t = 0$.

On note la linéarité de l'équation (5.7) alors qu'aucune hypothèse de linéarisation n'a été introduite. Cela confère à l'écoulement d'advection uniforme et de rotation solide des propriétés très particulières. Comme le montrent Grimshaw et Yi [45], cette linéarité est spécifique au problème stationnaire puisqu'elle disparaît dès lors que l'on revient à un cadre instationnaire. D'un point de vue analytique (voir le paragraphe D.1), elle mène à une dégénérescence du problème lorsqu'elle est associée à des conditions aux limites elles aussi linéaires, comme dans le cas d'une conduite de section constante. En revanche, il est important de signaler qu'elle peut être utilisée pour caractériser des phénomènes non linéaires lorsque les conditions aux limites sont elle-mêmes non linéaires, comme par exemple quand la conduite présente un rayon variable.

D'un point de vue physique, nous verrons que la conséquence principale de cette dégénérescence est que la réponse de cet écoulement à des perturbations de faible amplitude, par exemple des perturbations géométriques du tube de courant, peut être dans certains cas d'ordre unité alors qu'elle reste de faible amplitude (bien que d'un ordre de grandeur

supérieur à celui des perturbations) pour d'autres profils d'écoulements. Cette constatation également due à Grimshaw et Yi (et relevée depuis dans d'autres études, comme celles de Hanazaki [50], Rossi [103] ou encore Derzho et Grimshaw [24]) sera expliquée plus en détail au paragraphe 5.3.2.

5.3 Problème local

On considère en premier lieu un écoulement parallèle ou cylindrique, c'est-à-dire invariant par translation et sans gradient dans la direction axiale. A l'exclusion du paragraphe 5.3.2, les analyses menées ici peuvent donc décrire de façon satisfaisante la dynamique d'écoulements dont l'échelle de variation axiale est grande devant l'échelle de variation radiale.

5.3.1 Ondes de Kelvin axisymétriques sur un écoulement parallèle

Nous considérons un écoulement parallèle stable aux perturbations axisymétriques ($m = 0$), et nous limitons ici à l'étude des ondes de Kelvin axisymétriques qui s'y propagent. Le lecteur intéressé par la dynamique de la famille complète des ondes de Kelvin (y compris asymétriques) pourra par exemple consulter l'ouvrage de Saffman [109].

Relation de dispersion

On suppose que l'écoulement résulte de la superposition d'un écoulement stationnaire cylindrique $(\psi_0(r), K_0(r), \chi_0(r))$ et de perturbations axisymétriques $(\psi'(r, z, t), K'(r, z, t), \chi'(r, z, t))$ d'amplitude négligeable devant l'écoulement stationnaire. Celles-ci sont recherchées sous la forme de modes normaux $(\psi'(r, z, t), K'(r, z, t), \chi'(r, z, t)) = \text{Re}\{(\hat{\psi}(r), \hat{K}(r), \hat{\chi}(r))e^{i(kz - \omega t)}\}$ faisant intervenir une pulsation ω et un nombre d'onde axial k .

Après linéarisation des équations (5.4) et simplification, on obtient l'équation suivante pour $\hat{\psi}$ (voir par exemple Benjamin [10]) :

$$r \left(\frac{\hat{\psi}_r}{r} \right)_r - \left(k^2 + \frac{r\chi_{0r}}{\psi_{0r}/r - c_p} - \frac{2K_0K_{0r}}{r^3(\psi_{0r}/r - c_p)^2} \right) \hat{\psi} = 0 \quad (5.8)$$

où l'on a noté $c_p = \omega/k$ la vitesse de phase de l'onde.

Les perturbations devant s'annuler en $r = 0$ et $r = R$, les conditions aux limites associées sont

$$\psi'(0, z, t) = 0 \quad (5.9a)$$

$$\psi'(R, z, t) = 0. \quad (5.9b)$$

Le problème (5.8)-(5.9) n'a de solution que pour des couples particuliers (k, ω) vérifiant une relation de dispersion. Pour l'écoulement de base (W_0, Ω_0) , celle-ci peut être déterminée analytiquement. La suite de ce paragraphe particularise l'analyse à ce cas, même si les phénomènes qui vont être mis en évidence ont une portée générale comme le signale Benjamin [10]. Le choix de cet écoulement est cohérent avec les hypothèses du début de paragraphe. On sait en effet depuis Rayleigh [98] que l'écoulement de rotation solide pure (sans vitesse axiale) est stable aux perturbations axisymétriques. Les analyses ultérieures

(voir par exemple Ash et Khorrami [4]) ont montré que l'écoulement de rotation solide et advection uniforme est quant à lui stable pour tout type de perturbations.

En conservant l'adimensionnement introduit au paragraphe 5.2.2, on obtient pour cet écoulement l'expression suivante du champ de base :

$$\psi_0(r) = \frac{r^2}{2}, \quad K_0(r) = S_0 r, \quad \chi_0(r) = 0. \quad (5.10)$$

Les ondes de Kelvin se propageant dans cet écoulement sont donc décrites par l'équation

$$r \left(\frac{\widehat{\psi}_r}{r} \right)_r - \left(k^2 - \frac{4S_0^2 k^2}{(\omega - k)^2} \right) \widehat{\psi} = 0. \quad (5.11)$$

et l'application des conditions aux limites (5.9) mène à la relation de dispersion :

$$(\omega - k)^2 (j_{1,n}^2 + k^2) - 4S_0^2 k^2 = 0 \quad (5.12)$$

Cette relation peut se déduire directement de celle dérivée par Kelvin en 1880 [64] pour l'écoulement de rotation solide seul, en introduisant la vitesse d'advection uniforme sous la forme d'un shift Doppler. La notation $j_{1,n}$ désigne ici les racines non nulles de la fonction de Bessel d'ordre 1, notée J_1 , qui constitue une suite strictement croissante. Les fonctions propres correspondantes sont données par

$$\widehat{\psi}(r) = r J_1(j_{1,n} r). \quad (5.13)$$

Les lignes de courant ainsi que les profils de vitesses d'un exemple d'écoulement perturbé à un instant donné sont représentés sur la figure 5.4. Au cours d'une oscillation spatiale, l'écoulement est successivement accéléré puis décéléré au niveau de l'axe (respectivement décéléré puis accéléré à la paroi), ce qui correspond respectivement à un excédent puis un défaut de circulation. Dans le cas axisymétrique, les ondes de Kelvin peuvent être ainsi vues comme des perturbations de circulation et vorticités azimuthales (ici au travers de gradients de w dans la direction radiale), ce que montre également la mise en équations (5.4).

Analyse temporelle

On se place d'abord dans un cadre temporel, en supposant k réel et en cherchant des pulsations ω complexes. D'après (5.12), les ondes trouvées se répartissent sur différentes branches correspondant chacune à une racine $j_{1,n}$ de J_1 , et que l'on numérottera par n . En introduisant la vitesse de phase $c_{p,n} = \omega_n/k$, (5.12) se réécrit

$$\frac{4S_0^2}{(1 - c_{p,n})^2} - k^2 = j_{1,n}^2 \quad (5.14)$$

ce qui mène à

$$c_{p,n} = 1 \pm \frac{2S_0}{\sqrt{k^2 + j_{1,n}^2}} \quad (5.15)$$

La vitesse de groupe $c_{g,n}$ de cette onde vaut quant à elle

$$c_{g,n} = \partial\omega_n/\partial k = 1 \pm \frac{2S_0 j_{1,n}^2}{(k^2 + j_{1,n}^2)^{3/2}} \quad (5.16)$$

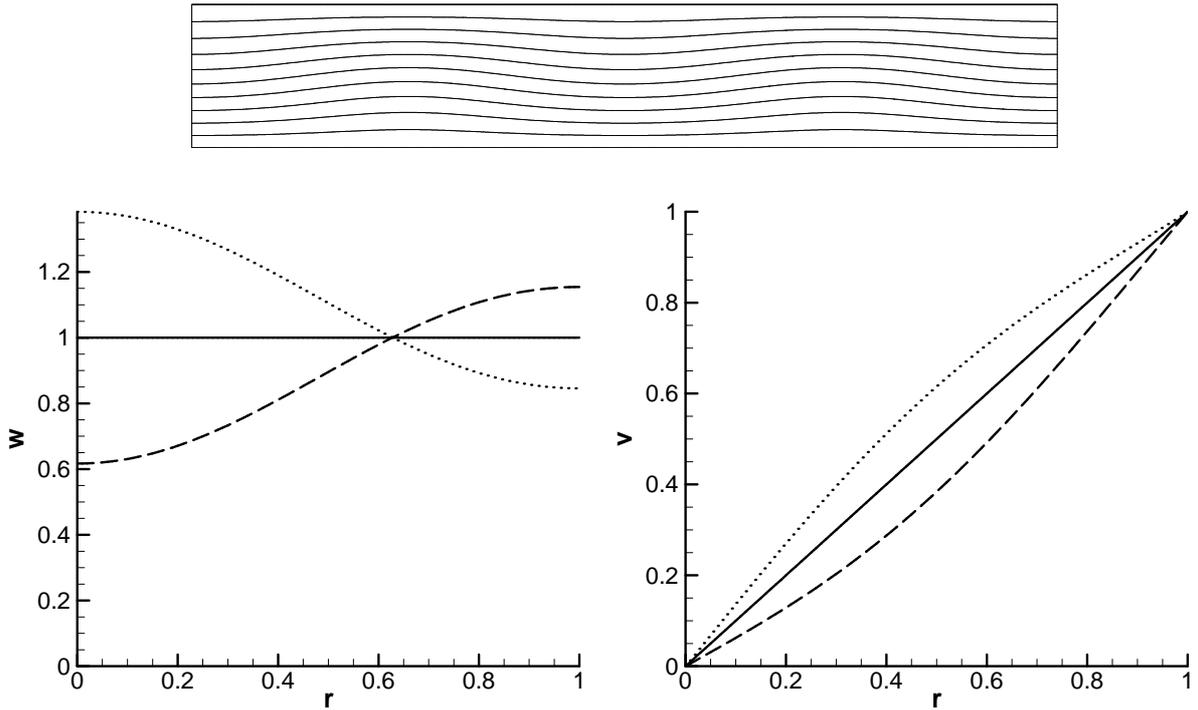


FIG. 5.4: Écoulement de rotation solide et advection constante de nombre de swirl $S_0 = 1$ perturbé par une onde de Kelvin d'amplitude 0.1, à un instant fixé. Fonction de courant totale (en haut) et profil radial des vitesses w et v . Traits pleins : cas non perturbé, pointillés : amplitude maximale, tirets : amplitude minimale.

Les ondes trouvées sont donc dispersives (puisque c_p dépend de k) et neutres (puisque c_p est réel). Elles transportent l'énergie des perturbations sans les atténuer ni les amplifier. Le sens de propagation de cette énergie est déterminé par le signe de la vitesse de groupe. L'équation (5.16) montre que pour la branche correspondant à $n = 1$, celle-ci est positive pour les faibles valeurs de S_0 , et devient nulle dans la limite des grandes longueurs d'ondes pour la valeur $S_0 = S_B = j_{1,1}/2 \approx 1.91585$. L'indice B , pour "swirl de Benjamin" est une notation usuelle dans la littérature et fait référence à l'étude de Benjamin sur l'éclatement tourbillonnaire [10]. Cette valeur est très proche de celle correspondant à l'apparition de la recirculation dans la configuration expérimentale (figure 5.3). Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 5.6.4.

Suivant la valeur du nombre de swirl S_0 , trois régimes de propagation d'ondes peuvent donc être distingués. Ils sont illustrés sur la figure 5.5.

- Lorsque $S_0 < S_B$, le régime est dit *supercritique*. Toutes les ondes ont une vitesse de phase et de groupe positive, donc se propagent vers l'aval.
- Le régime *critique*, pour lequel $S_0 = S_B$, correspond à l'apparition d'une vitesse de groupe nulle dans la limite des très grandes longueurs d'ondes sur la branche $n = 1$.
- Lorsque $S_0 > S_B$, l'écoulement est *sous-critique*. Comme le montre la figure 5.5(c), les ondes les plus longues de la branche $n = 1$ ont une vitesse de phase et de groupe négative, ce qui autorise une propagation des perturbations de l'aval vers l'amont, et donc une "remontée d'informations". Par ailleurs sur cette branche, il existe une onde stationnaire (*i.e.* telle que $\omega = 0$) de nombre d'onde $k_0 = (4S_0^2 - j_{1,1}^2)^{1/2}$ non nul, repéré sur la figure 5.5(c).

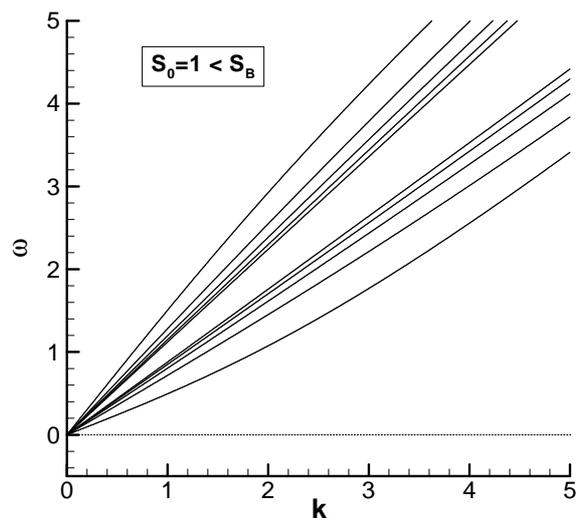
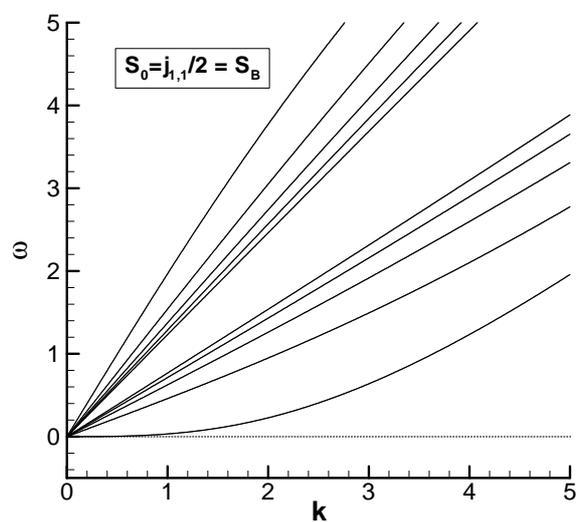
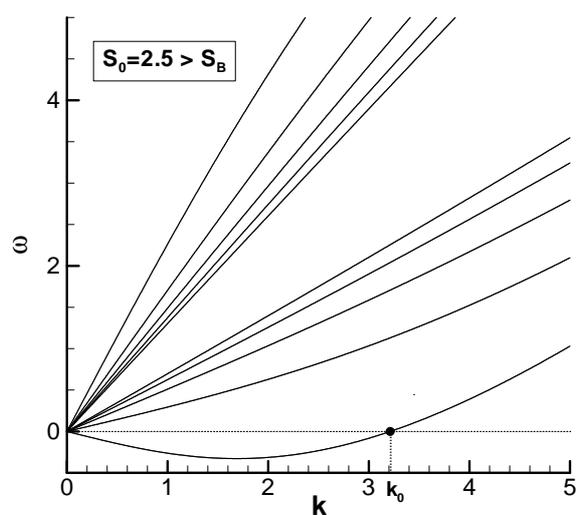
(a) Régime supercritique, $S_0 = 1$.(b) Régime critique, $S_0 = S_B \approx 1.916$.(c) Régime sous-critique, $S_0 = 2.5$.

FIG. 5.5: Ondes de Kelvin axisymétriques ($n = 1$ à 5) dans un écoulement de rotation solide et d'advection uniforme. Les courbes représentent la pulsation ω en fonction du nombre d'onde k , pour différentes valeurs du nombre de swirl S_0 .

Analyse spatiale stationnaire

La notion de criticité qui vient d'être définie a été introduite à l'origine par Squire [117] dans un cadre stationnaire, en fixant ω égal à zéro dans l'équation (5.8) et en cherchant le nombre d'onde k complexe permettant de trouver une solution à cette équation respectant les conditions aux limites (5.9). Dans ce cadre, un écoulement sous-critique est défini par sa capacité à être le siège d'ondes stationnaires infinitésimales. Comme le signalent Leibovich [72] ou encore Gallaire et Chomaz [38], cette définition et la définition temporelle sont ici équivalentes puisque l'existence d'une onde stationnaire coïncide avec celle d'ondes à vitesse de groupe négative. L'intérêt de recourir à l'analyse spatiale est qu'elle donne une interprétation de k dans le cas supercritique : dans le cas de l'écoulement de rotation solide et advection uniforme, le nombre d'onde associé à $\omega = 0$ lorsque $S_0 < S_B$ est obtenu sous la forme d'une paire de complexes conjugués imaginaires purs $k^\pm = \pm i\gamma$ avec $\gamma = (4S_0^2 - j_{1,1}^2)^{1/2}$. Les deux perturbations qui se superposent à l'écoulement moyen sont donc évanescentes dans la direction amont et aval, et pénètrent sur une longueur de l'ordre de $1/\gamma$. Lorsque S_0 augmente en tendant vers le régime critique, cette longueur tend vers l'infini, à l'amont comme à l'aval.

Remarque Comme le note Rossi [103], pour l'écoulement de base (W_0, Ω_0) l'hypothèse d'ondes de faible amplitude n'est pas nécessaire puisque celles-ci sont des solutions **exactes** des équations d'Euler non linéarisées. Ce résultat provient une fois encore de la linéarité de l'équation (5.7) décrivant l'écoulement stationnaire, qui implique qu'un tube de courant d'extension infinie et invariant selon z peut supporter des perturbations stationnaires d'amplitude arbitraire. Par invariance galiléenne, cette équation peut décrire une onde de vitesse de phase $c_p = \omega/k$ si l'on se place dans un repère en translation uniforme de vitesse c_p , sans qu'aucune hypothèse d'amplitude infinitésimale ait été faite, et on retrouve alors l'équation (5.11).

5.3.2 Résonance au régime transcritique

L'analyse précédente caractérise la propagation des perturbations par les ondes de Kelvin axisymétriques, mais elle n'inclut pas la prise en compte d'un élément "source" susceptible d'exciter ces ondes. Le cas d'une perturbation de géométrie a notamment été étudié théoriquement par Leibovich et Randall [74], puis avec des hypothèses plus générales par l'équipe de Grimshaw, à la fois pour un écoulement tournant quelconque [44] et pour l'écoulement de rotation solide et advection uniforme [45]. Nous présentons ici ces derniers travaux, qui ont également fait l'objet de vérifications numériques menées par Hanazaki [48–50]. Ils permettent de comprendre les phénomènes particuliers liés au régime transcritique, lorsque le nombre de swirl est proche de la valeur S_B .

La figure 5.6 représente les configurations d'écoulements étudiées par Grimshaw [44] et Grimshaw et Yi [45]. Ces deux études considèrent un écoulement de base cylindrique, d'extension infinie, et diffèrent par le profil de vitesse considéré. Dans les deux cas, l'analyse s'intéresse à la réponse instationnaire de l'écoulement lorsqu'une perturbation géométrique localisée, de variation lente en z et de faible amplitude, est introduite à un instant initial, le long de l'axe de la conduite ou bien via une déformation (contractante ou dilatante) de sa paroi. Elle concerne des ondes longues, d'échelle de longueur axiale du même ordre que celle de la perturbation géométrique, c'est-à-dire très grande devant le rayon de la conduite ou du tube de courant.

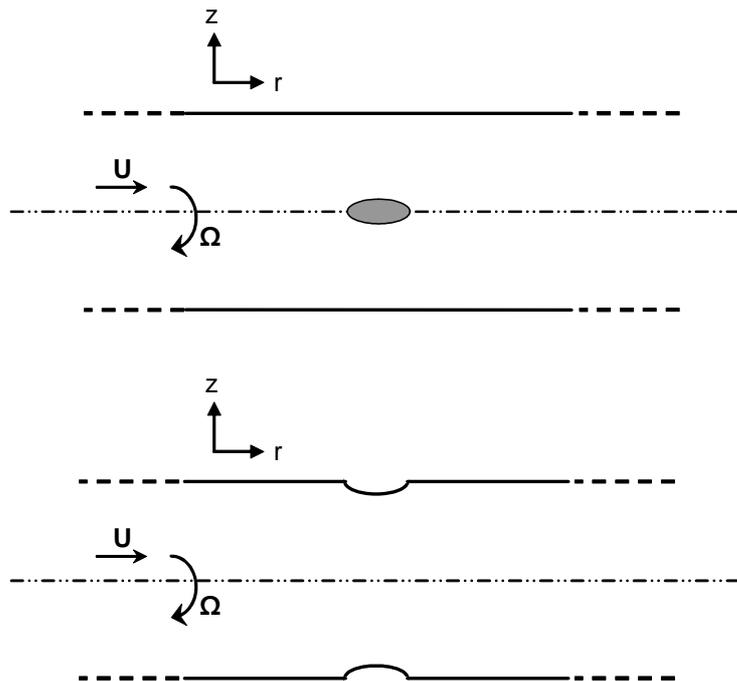


FIG. 5.6: Configurations d'écoulements étudiées par Grimshaw [44] et Grimshaw et Yi [45]. Dans les deux cas la perturbation de géométrie est localisée et de variation axiale lente.

Pour une perturbation à la paroi d'amplitude α^2 (avec $\alpha \ll 1$), Grimshaw et Grimshaw et Yi dégagent la phénoménologie suivante :

- Lorsque l'écoulement de base est loin de la transition critique, la perturbation de fonction de courant obtenue est du même ordre que la perturbation géométrique, donc $O(\alpha^2)$. Elle se décompose en une réponse stationnaire localisée au niveau de la déformation de la conduite, et en deux ondes longues identiques, l'une se propageant vers l'amont et l'autre vers l'aval.
- Au régime transcritique (S_0 proche de S_B), ce développement n'est plus valable car un phénomène de **résonance** se produit : la déformation du tube de courant excite cette fois une onde longue de vitesse de groupe proche de zéro, de sorte que les perturbations s'accumulent localement et s'amplifient non linéairement. Les échelles du phénomène diffèrent suivant le type d'écoulement de base. Pour un écoulement quelconque possédant des gradients de vitesse axiale ou angulaire dans la direction radiale, on obtient une onde solitaire d'amplitude α décrite par une équation de type Korteweg-de Vries forcée [44]. Pour l'écoulement (W_0, Ω_0) , la réponse est d'ordre **unité**, donc fortement non linéaire. Elle est décrite par une équation intégral-différentielle non linéaire de structure assez complexe. Dans certains cas, des vitesses axiales négatives peuvent être obtenues, le plus souvent sur l'axe [45]. Hanazaki [50] a comparé numériquement les solutions de cette équation aux solutions des équations de Navier-Stokes à nombre de Reynolds élevé. Un exemple de résultat obtenu pour une contraction localisée de faible amplitude est représenté sur la figure 5.7.

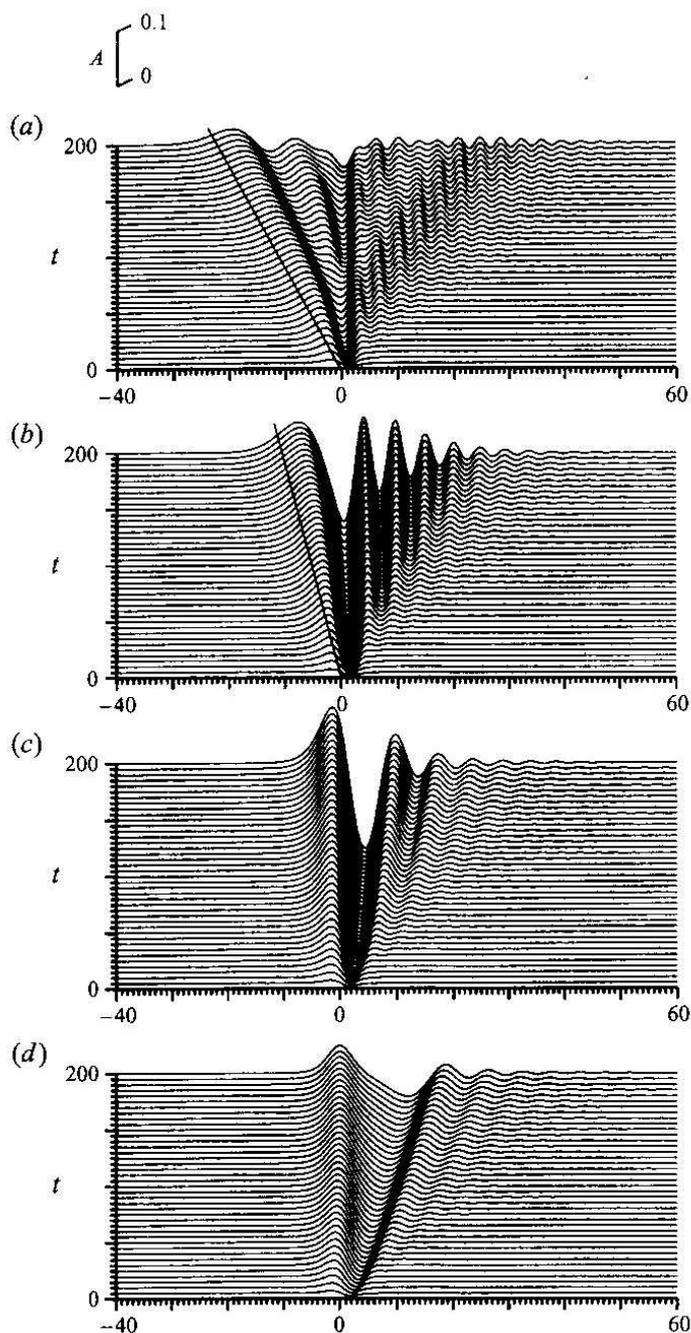


FIG. 5.7: Evolution au cours du temps de l'amplitude A de la perturbation induite par une contraction localisée, centrée en $z = 0$, d'amplitude adimensionnée égale à 0.005, pour différents nombres de Froude $F = S_B/S_0$ transcritiques. De bas en haut, $F = 0.9$, $F = 0.95$ (régime sous-critique), $F = 1$ (régime critique) et $F = 1.05$ (régime supercritique). D'après Hanazaki [50].

5.3.3 Approximation quasi-cylindrique stationnaire

On s'intéresse à présent aux solutions de l'équation de Bragg-Hawthorne (5.6) dans un cadre d'approximation quasi-cylindrique. Cette approximation revient à supposer qu'en dépit de conditions aux limites variables en z , l'écoulement reste localement parallèle, *i.e.* le gradient de pression radial est uniquement équilibré par la force centrifuge. Elle est pertinente sauf lorsque l'écoulement local est transcritique.

Champs de vitesse

Pour la condition amont (W_0, Ω_0) , cette approximation réduit l'équation (5.7) et ses conditions aux limites à :

$$\left. \begin{aligned} \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} &= 4S_0^2 \left(\frac{r^2}{2} - \psi \right) \\ \psi(0, z) &= 0 \\ \psi(R(z), z) &= 1/2. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Ces équations ont été dérivées par Batchelor [8] et caractérisent l'écoulement obtenu en aval d'une tuyère convergente ou divergente dans ce cas de condition amont. En simplifiant la notation du rayon local en R au lieu de $R(z)$, Batchelor obtient la solution

$$\psi(r) = \frac{r^2}{2} + \frac{1 - R^2}{2} \frac{r}{R} \frac{J_1(2S_0 r)}{J_1(2S_0 R)}, \quad (5.18)$$

qui correspond aux champs de vitesse suivants :

$$v = S_0 \left[r + \frac{1 - R^2}{R} \frac{J_1(2S_0 r)}{J_1(2S_0 R)} \right] \quad (5.19a)$$

$$w = 1 + S_0 \frac{1 - R^2}{R} \frac{J_0(2S_0 r)}{J_1(2S_0 R)} \quad (5.19b)$$

La figure 5.8 représente un exemple de profils de vitesse axiale pour $R = 0.5$ et différentes valeurs de S_0 . Lorsque $S_0 = 0$, la conservation de la masse impose un profil de vitesse axiale uniforme à la valeur $w = 1/R^2 = 4$. Lorsque S_0 augmente, on constate l'apparition d'une survitesse au centre accompagnée d'une décélération à la paroi : l'écoulement possède une vorticité azimutale positive (ici uniquement par le terme w_r puisque $u_z = 0$ dans un cadre parallèle). Celle-ci résulte d'un mécanisme non linéaire de gauchissement de la vorticité axiale d  à la tuyère convergente. Comme l'explique Batchelor, à l'amont de la tuyère les lignes de vorticité sont des droites parallèles à l'axe, et tournent autour de l'axe avec l'écoulement en vertu du théorème d'Helmholtz. Lorsque l'une de ces lignes entre dans la tuyère, elle est défléchie vers l'axe en raison de la convergence, et à cet endroit en raison de la conservation du moment angulaire la vitesse azimutale augmente. De ce fait la ligne de vorticité s'enroule progressivement autour de l'axe sous la forme d'une spirale (voir la figure 5.9), indiquant le passage d'un état de vorticité azimutale nulle à un état de vorticité azimutale positive.

Comparaison avec les mesures du chapitre 3

La comparaison entre les profils donnés par les équations (5.19a) et (5.19b) et ceux obtenus par mesure fil chaud au chapitre 3 peut permettre de quantifier l'importance des effets visqueux et turbulents dans la portion d'écoulement située entre le nid d'abeilles et

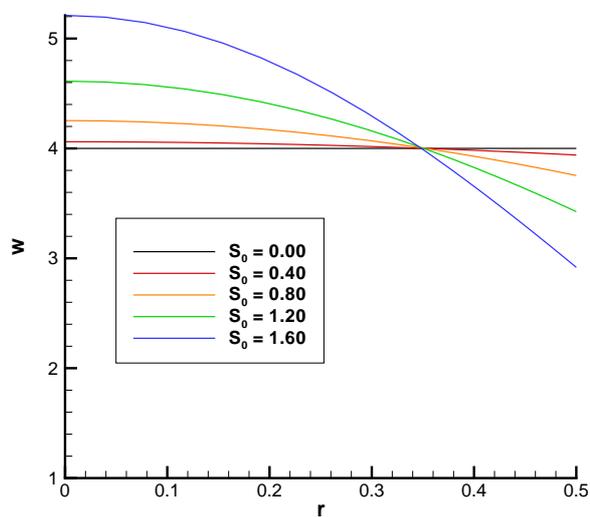


FIG. 5.8: Vitesse axiale en sortie d'une tuyère convergente de rayon $R = 0.5$ pour différentes valeurs de S_0 (équation 5.19b).

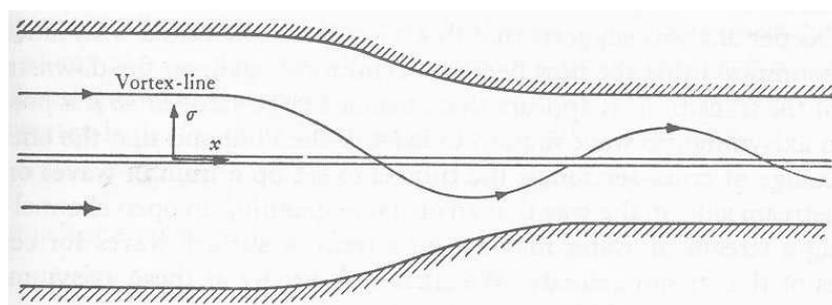


FIG. 5.9: Enroulement d'une ligne de vorticité en spirale au passage d'une contraction. D'après Batchelor [8].

le plan de sortie des tuyères, ou encore de détecter dans quelle mesure l'écoulement généré par le nid conserve effectivement une large zone centrale de vitesse axiale uniforme pour tous les nombres de swirl. Elle s'avère en pratique délicate à mettre en oeuvre puisque l'analyse de Batchelor s'applique à un tube de courant inviscide et sans couche limite, ce qui rend le choix de la valeur du nombre de swirl théorique S_0 hasardeux. A titre qualitatif, on superpose sur la figure 5.10 les profils expérimentaux ainsi que les profils prévus par l'analyse de Batchelor en supposant que l'écoulement sortant du nid consiste en une advection uniforme de vitesse $W_0 = 3 \text{ m.s}^{-1}$ et une rotation solide de vitesse angulaire Ω_0 égale à celle du nid d'abeilles. Si la parabolisation des profils de vitesse axiale par gauchissement est d'amplitude proche dans les deux cas, l'accord entre les profils de vitesse azimutale est moins bon, le modèle théorique prédisant une vitesse angulaire plus élevée. Nous retiendrons donc que ce modèle fournit de bons renseignements qualitatifs mais qu'il n'a de portée réellement quantitative que pour les valeurs de S les plus basses.

Divergence de l'approximation

Batchelor explique que pour un rayon local de conduite ou de tube de courant R donné, la vitesse axiale à la paroi prédite par l'équation (5.19b) peut s'annuler pour une valeur du nombre de swirl devant nécessairement vérifier $S_0 > j_{0,1}/2R$ où $j_{0,1}$ désigne le premier zéro de la fonction J_0 . Cela invalide alors le modèle. Il ajoute que les amplitudes de w et v/r deviennent indéfiniment grandes lorsque S_0 tend vers $j_{1,1}/2R$, ce qui implique que dans la limite d'un rayon très proche de 1 ces amplitudes divergent lorsque S_0 tend vers S_B . Ce phénomène non physique doit être relié au fait que l'écoulement en aval de la tuyère est alors localement critique, et donc capable de générer des ondes stationnaires à cet endroit, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'écoulement parallèle. Si Batchelor se place dans le plan de sortie d'une tuyère afin de garantir l'hypothèse cylindrique, on peut supposer dans notre cas que cette divergence des équations aura lieu à l'entrée de la tuyère convergente dès lors que l'écoulement sera critique, et non dans son plan de sortie. Le point d'arrêt mis en évidence sur la figure 5.3 confirme cette intuition. Une description rigoureuse de ce phénomène basée sur une approche globale sera faite dans le prochain paragraphe.

D'autres auteurs ont étudié les solutions de l'approximation quasi-parallèle stationnaire des équations d'Euler pour d'autres profils de vitesse amont ou d'autres géométries (voir par exemple Buntine et Saffman [16]) ou des équations de Navier-Stokes [47]. On pourra se référer à la thèse de François Gallaire [36] pour une revue plus détaillée. Ces études ont toutes relevé la divergence de cette approximation pour une valeur du swirl de l'écoulement proche de S_B . Grimshaw [44] démontre un lien entre ce phénomène et la criticité pour tout champ de vitesse : plus précisément, il explique que la divergence de l'approximation quasi-cylindrique dans la limite d'une perturbation de géométrie infinitésimale est **équivalente** à la criticité (ou résonance) des ondes de Kelvin axisymétriques.

5.4 Description du problème global

La nature même des phénomènes se produisant aux régimes critique et transcritique (apparition de gradients axiaux non dictés *a priori* par la géométrie, absents au régime supercritique) rend nécessaire la prise en compte de conditions aux limites axiales, *i.e.* l'étude du problème global. Le formalisme instationnaire de Grimshaw et Yi ne pouvant s'accomoder facilement de l'ajout de telles conditions, nous choisissons ici l'approche stationnaire de l'équipe de Rusak (voir en particulier Wang et Rusak [124]).

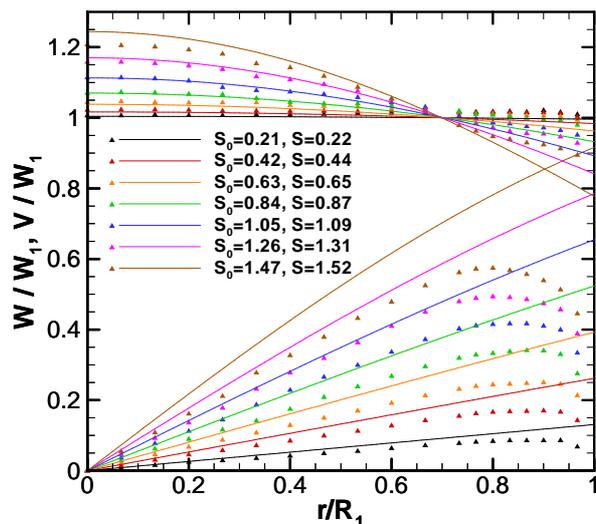
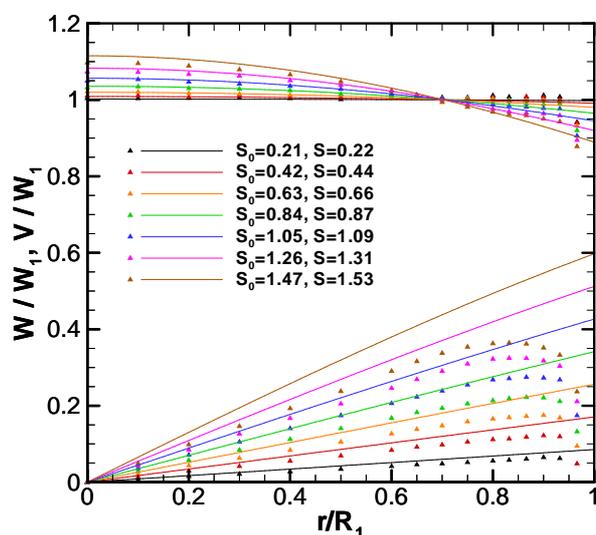
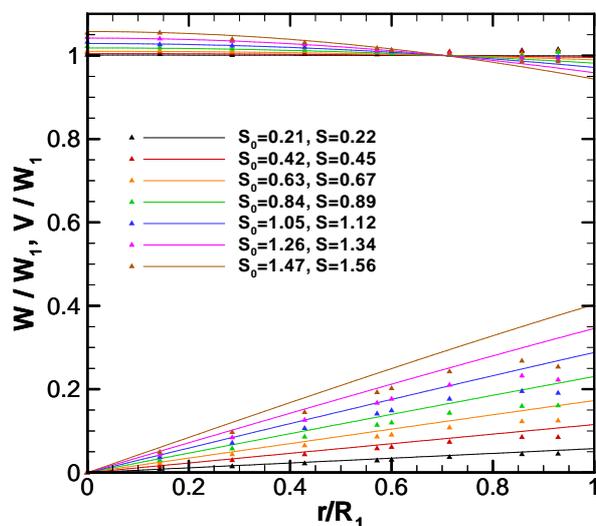
(a) $\chi_{CV} = 4$ (b) $\chi_{CV} = 9$ (c) $\chi_{CV} = 18.4$

FIG. 5.10: Comparaison des profils de vitesse expérimentaux (voir le paragraphe 3.3.1) et des profils analytiques décrits par les lois (5.19a) et (5.19b).

5.4.1 Géométrie et conditions aux limites

Les équations du mouvement sont maintenant résolues dans le domaine représenté sur la figure 5.11. La loi définissant le rayon de la tuyère convergente est donnée par

$$R(z) = R_1 + (1 - R_1)\xi^4[-20\xi^3 + 70\xi^2 - 84\xi + 35], \quad \xi = 1 - \frac{z - L_1}{L_{CV}}, \quad L_1 \leq z \leq L_1 + L_{CV} \quad (5.20)$$

Cette loi a été choisie pour ses propriétés de régularité (elle est de classe C^3); elle mène à une géométrie très semblable à celles décrites par d'autres lois moins régulières faisant intervenir des fonctions trigonométriques, comme par exemple celle de Rusak et Meder [107].

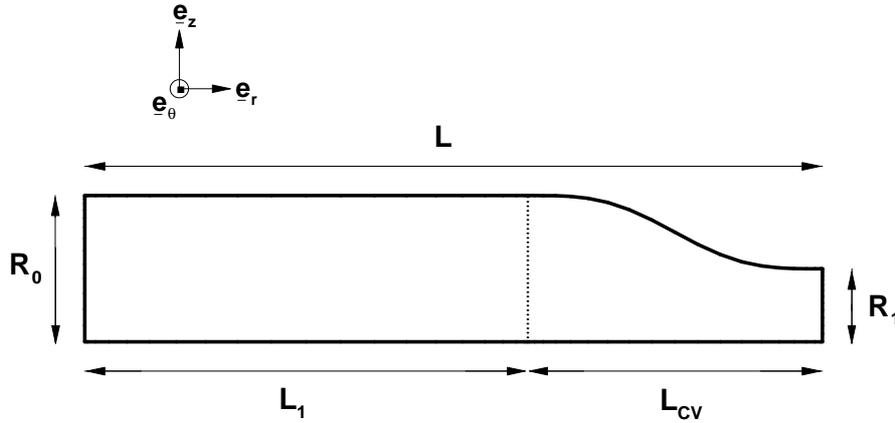


FIG. 5.11: Domaine de calcul

Rappelons que les équations à résoudre sont les équations de Squire-Long stationnaires :

$$-\psi_z K_r + \psi_r K_z = 0 \quad (5.21a)$$

$$-\psi_z \chi_r + \psi_r \chi_z = \frac{(K^2)_z}{r^3} \quad (5.21b)$$

$$\chi = -\frac{1}{r^2} \left(\psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right), \quad (5.21c)$$

ou, lorsque cela est possible, l'équation de Bragg-Hawthorne (5.6). Celles-ci sont complétées par les conditions aux limites communes suivantes :

$$\psi(0, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq L \quad (5.22a)$$

$$\psi(R(z), z) = q, \quad 0 \leq z \leq L \quad (5.22b)$$

$$\psi(r, 0) = \psi_0(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (5.22c)$$

$$K(r, 0) = K_0(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (5.22d)$$

$$\psi_z(r, L) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad (5.22e)$$

où $q = \psi_0(1)$ est le débit volumique de l'écoulement, ainsi que par une dernière condition axiale menant à deux problèmes différents :

$$\psi_{zz}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{problème I} \quad (5.23a)$$

$$\psi_z(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{problème II} \quad (5.23b)$$

Ainsi que l'expliquent Wang et Rusak [124] ou encore Gallaire et Chomaz [38], le système (5.21) est effectivement bien posé dès lors que 4 conditions axiales et 2 conditions radiales sont imposées. En raisonnant de façon équivalente sur l'équation de Bragg-Hawthorne (5.6) qui est elliptique, cela revient à imposer 4 conditions à la limite pour ψ (une sur chaque frontière du domaine), et 2 conditions axiales à l'amont, permettant de fixer $H'(\psi)$ et $K(\psi)$.

Les conditions (5.22a) et (5.22b) sont inchangées par rapport au problème local. Les équations (5.22c) et (5.22d) permettent de spécifier la vitesse axiale et azimutale à l'amont. Dans tous les calculs de ce paragraphe, nous imposerons donc

$$\psi(r, 0) = \psi_0(r) = \frac{r^2}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (5.24a)$$

$$K(r, 0) = K_0(r) = S_0 r^2 = 2S_0 \psi, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (5.24b)$$

Lorsque nous décrirons les études de l'équipe de Rusak, nous retournerons par contre au formalisme général des équations (5.22c) et (5.22d). L'équation (5.22e) stipule que l'écoulement doit être parallèle en sortie (*i.e.* sa vitesse radiale doit y être nulle). Elle s'avère très peu contraignante dès lors que le taux de contraction de la tuyère considérée est élevé, puisque l'écoulement reste alors localement supercritique en sortie pour toute la gamme de S_0 que nous explorons. On peut en revanche s'interroger sur sa pertinence dans le cas d'un faible taux de contraction, s'il s'agit de modéliser le plan de sortie d'un jet. Signalons néanmoins que cette condition a été très couramment utilisée dans les études sur l'éclatement tourbillonnaire [11, 81, 124]), dans le cas d'une conduite de section constante.

Précisons enfin les notations relatives au choix de la dernière condition axiale :

- Le **problème I** est obtenu en imposant la condition (5.23a), qui équivaut à fixer à l'amont la vorticité azimutale par la formule

$$\chi(r, 0) = \chi_0(r) = -\frac{1}{r} \left(\frac{\psi_{0r}}{r} \right)_r \quad (5.25)$$

Il s'agit de la condition utilisée par l'équipe de Rusak, employée afin de permettre à l'écoulement à l'amont de posséder une vitesse radiale non nulle. Wang et Rusak expliquent notamment que cette condition leur semble bien appropriée pour décrire un écoulement évoluant plus loin à l'aval vers un éclatement tourbillonnaire. Nous l'utiliserons également dans le cas de notre écoulement amont de rotation solide et advection uniforme afin de le comparer au cas général. Il est à noter que dans ce cas (voir le paragraphe 5.2.2), le système d'équations (5.21) se simplifie en l'équation linéaire unique (5.7).

- Le **problème II** est obtenu en imposant cette fois la nullité de la vitesse radiale à l'amont (équation (5.23b)). Dans ce cas, la vorticité azimutale η est quelconque à l'amont ; en conséquence, $H'(\psi)$ n'est plus déterminée *a priori* mais est une solution du problème. Dans le cas de l'écoulement d'advection uniforme et rotation solide, le système non linéaire complet (5.21) doit être résolu. Cette condition nous semble la plus réaliste pour modéliser le nid d'abeilles, constitué d'alvéoles de faible diamètre (1.5 mm), peu compatibles avec l'existence d'une vitesse radiale non nulle.

5.4.2 Résolution numérique

Discrétisation spatiale

Pour résoudre les équations du mouvement, nous effectuons d'abord le changement de coordonnées suivant :

$$x = z, \quad \rho = r/R(z). \quad (5.26)$$

Ceci permet de transformer le domaine en un rectangle. On utilise ensuite une méthode pseudo-spectrale faisant intervenir des polynômes de Tchebychev dans la direction radiale et la direction axiale, sous la forme d'une base en produit tensoriel (voir les ouvrages de Canuto *et al.* [17] ou Boyd [14] pour plus de détails). Plus précisément, une fonction inconnue f est représentée par sa projection \hat{f} sur cette base définie par

$$\hat{f}(\rho, x) = \sum_{i=0}^{Nz-1} \sum_{j=0}^{Nr-1} a_{ij} T_i(\phi_1(\rho)) T_j(\phi_2(x)) \quad (5.27)$$

où Nr et Nz désignent respectivement le nombre de polynômes (donc de points de collocation) utilisés dans les direction radiale et axiale, T_i le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Chebyshev, et ϕ_1 (resp. ϕ_2) est une fonction de mapping établissant une transformation linéaire entre $[0, 1]$ (resp. $[0, L]$) et $[-1, 1]$.

Le maillage est obtenu en utilisant une distribution de points de Gauss-Lobatto dans chaque direction. Ceci permet d'une part de prendre comme inconnues les valeurs des fonctions au point de maillage (et non les coefficients de la décomposition spectrale (5.27)) et d'autre part d'imposer directement les conditions aux limites aux frontières. La figure 5.12 représente un exemple de maillage utilisé pour les calculs. Celui-ci est en fait

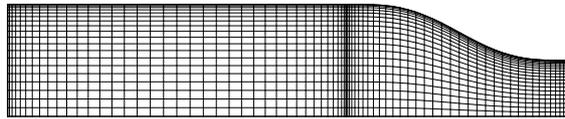


FIG. 5.12: Exemple de maillage utilisé lors des calculs. Ici $Nz_1 = 41, Nz_2 = 41, Nr = 21$.

séparé en deux domaines correspondant respectivement à la portion de conduite de section constante et à la tuyère convergente. Le raccord entre ces deux domaines est assuré en imposant la continuité des fonctions et de leur dérivée première dans la direction axiale. L'utilisation de deux domaines permet de gagner en précision puisqu'à nombre de points total dans la direction axiale fixé, les matrices de dérivation (une par domaine) correspondent à un nombre de points plus faible, ce qui les rend mieux conditionnées (voir à ce propos Boyd [14]). Pour la distribution de points dans la direction radiale, nous utilisons la répartition décrite et employée par Fabre [32] qui exploite les propriétés de parité des fonctions inconnues.

Validation et convergence

Le problème I fait intervenir une équation linéaire qui est résolue directement à l'aide de la méthode spectrale, par un algorithme de factorisation LU puis substitution implémenté dans une routine LAPACK en Fortran. Cette partie du code a été validée par comparaison des profils de vitesse obtenus en sortie avec ceux prédits par les expressions

analytiques donnée par Batchelor (5.19a) et (5.19b). La résolution du système non linéaire obtenu dans le problème II s'effectue par l'approche de continuation décrite dans l'annexe B, en utilisant le nombre de swirl S_0 comme paramètre de suivi de branches. La guess-value initiale est construite en choisissant pour chaque valeur de z le champ de vitesse obtenu par l'approximation quasi-parallèle (5.19). Pour valider le code implémentant cette méthode, nous avons simulé un écoulement loin du swirl critique S_B , pour lequel aucune perturbation de vorticité azimutale n'apparaît à l'extrémité amont, et vérifié que le résultat trouvé était bien identique à celui donné par le problème I.

D'une façon générale, on s'intéresse à la valeur de S_{0R} pour laquelle apparaît un point d'arrêt dans l'écoulement, et pour laquelle le modèle de fluide parfait stationnaire n'est plus valable. Lorsque cette limite est trouvée pour un maillage donné, on effectue alors plusieurs essais avec des maillages comportant des nombres de points différents selon r et z afin de s'assurer de la convergence.

5.5 Conduite de section constante : bifurcations et ondes stationnaires

Nous nous plaçons d'abord dans le cas le plus simple d'une conduite de section constante, $\mathbf{R}(\mathbf{z}) = \mathbf{1}$. Dans un cadre local (paragraphe 5.3.1), le régime d'écoulement sous-critique est caractérisé par l'existence d'ondes de Kelvin axisymétriques stationnaires d'amplitude infinitésimale (d'amplitude unité pour l'écoulement (W_0, Ω_0)) et de nombre d'onde k_0 croissant avec S_0 . Lorsque des frontières axiales sont prises en compte, la longueur finie sélectionne des nombres d'ondes discrets de sorte que ces ondes stationnaires apparaissent, pour des valeurs de S_0 elles aussi discrètes, sous la forme de **bifurcations** par rapport à la solution d'écoulement "colonne" $(\psi(r, z) = \psi_0(r), K(r, z) = K_0(r))$. Celle-ci reste solution stationnaire du problème (même si elle n'est pas forcément stable pour tout S_0), et perd son unicité lorsqu'une solution d'onde apparaît.

De façon formelle, la mise en évidence de ces bifurcations s'effectue en cherchant une solution de l'équation de Bragg-Hawthorne (5.6) sous la forme $(\psi(r, z) = \psi_0(r) + \varepsilon\psi_1(r, z), K(r, z) = K_0(r) + \varepsilon K_1(r, z))$, avec $\varepsilon \ll 1$. Par linéarisation de cette équation on obtient alors

$$\frac{\psi_{1zz}}{r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\psi_{1r}}{r} \right)_r - \left(H''(\psi_0) - S_0^2 \frac{\tilde{I}''(\psi_0)}{r^2} \right) \psi_1 = 0, \quad (5.28)$$

où \tilde{I} est défini par $S_0^2 \tilde{I} = K^2/2$. Les conditions aux limites associées à ce problème de perturbation s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(0, z) = \psi_1(1, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq L, \\ \psi_1(r, 0) = K_1(r, 0) = \psi_{1z}(r, L) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \\ \psi_{1zz}(r, 0) = 0 \quad (\text{problème I}) \quad \text{ou} \quad \psi_{1z} = 0 \quad (\text{problème II}), \quad 0 \leq r \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Problème I : travaux de Wang et Rusak

Comme le signalent Wang et Rusak dans leur étude sur l'éclatement tourbillonnaire axisymétrique [124], les fonctions ψ_1 solutions du problème I (5.28)-(5.29) doivent être cherchées sous la forme

$$\psi_1(r, z) = \phi(r) \sin \left(\frac{\pi m z}{2L} \right), \quad m \in \mathbb{N}^* \quad (5.30)$$

avec $\phi(0) = \phi(1) = 0$. De ce fait, les bifurcations sont obtenues pour des valeurs $S_{c,m}$ telles que

$$S_{c,m}^2 = S_B^2 + O\left(\frac{m^2}{L^2}\right) \quad (5.31)$$

qui sont donc strictement croissantes en fonction de m .

Dans le cas d'un écoulement amont quelconque, Wang et Rusak se sont intéressés à la première bifurcation à partir de la solution colonne, obtenue pour $m = 1$. Ils ont montré que celle-ci est transcritique, c'est-à-dire que la branche de solution colonne perd sa stabilité à $S_{c,1}$ et est traversée par une branche de solutions dites "solitaires". Pour $S_0 < S_{c,1}$, ces solutions sont instables et correspondent à des écoulements accélérés de l'amont vers l'aval à la paroi et décélérés au centre. Pour $S_0 > S_{c,1}$ elles sont stables et correspondent à des écoulements décélérés de l'amont vers l'aval à la paroi et accélérés au centre [122–124]. La terminologie de "solitaire" est empruntée à l'étude de Leibovich et Kribus [73], qui ont mis en évidence des structures d'onde solitaire autour de S_B lorsque L tend vers l'infini. De fait, toutes les valeurs $S_{c,m}$ tendent alors à se rapprocher de S_B . Par référence à l'analyse de Benjamin [10], Wang et Rusak ont désigné la valeur $S_{c,1}$ "critical swirl in a pipe" dans la mesure où le décalage introduit par rapport à S_B provient de la longueur finie de la conduite. Gallaire et Chomaz [38] ont expliqué récemment à l'aide d'une analyse spatiale que la cette déstabilisation de la solution colonne à $S_{c,1}$ est due à la capacité de l'écoulement à propager les perturbations à la fois vers l'aval et l'amont à la criticité, et aux propriétés surréfléchissantes des conditions aux limites responsables d'une injection d'énergie dans l'écoulement.

L'article de Wang et Rusak sur l'éclatement a un but plus général puisqu'il explore l'ensemble des solutions stationnaires du problème, qui correspond à l'ensemble des extrema d'une fonctionnelle d'énergie de structure assez complexe. En plus de la bifurcation transcritique à $S_{c,1}$, il montre que la branche de solutions solitaires pour $S_0 < S_{c,1}$ donne naissance à une autre branche de solutions via une bifurcation noeud-col se produisant pour $S_0 = S_e < S_{c,1}$. Ces solutions sont dites éclatées car elles possèdent une zone de recirculation sur l'axe de la conduite. L'analyse généralise donc l'étude de Keller *et al.* [62] qui avait mis en évidence l'existence d'une solution éclatée pour la valeur unique $S_0 = S_e$. Comme ces solutions éclatées constituent le minimum global de la fonctionnelle dès lors que S_0 est supérieur à une valeur très légèrement plus grande que S_e , Wang et Rusak interprètent l'apparition de l'éclatement tourbillonnaire axisymétrique dans une conduite de longueur finie par la déstabilisation à $S_{c,1}$ de la solution colonne (via la bifurcation transcritique), puis par l'évolution de l'écoulement vers le minimum global qui est l'écoulement éclaté. Rusak, Wang et Whiting [108] ont confirmé ce scénario en simulant les équations d'Euler axisymétriques instationnaires avec des conditions aux limites identiques, à l'aide d'un schéma numérique dissipatif. Le diagramme complet de bifurcations ainsi obtenu est représenté sur la figure 5.13.

Lorsque l'écoulement amont est de type rotation solide et advection uniforme, la recherche de branchement peut s'effectuer en cherchant une solution de la forme

$$\psi(r, z) = r^2/2 + \psi_1(r, z) \quad (5.32a)$$

$$K(r, z) = S_0 r^2 + K_1(r, z), \quad (5.32b)$$

le formalisme linéaire de petite perturbation devenant inutile du fait de la linéarité du problème (équation (5.7)). L'équation à l'ordre 1 devient alors

$$\psi_{1,zz} + \psi_{1,rr} - \frac{\psi_{1,r}}{r} + 4S_0^2 \psi_1 = 0, \quad (5.33)$$

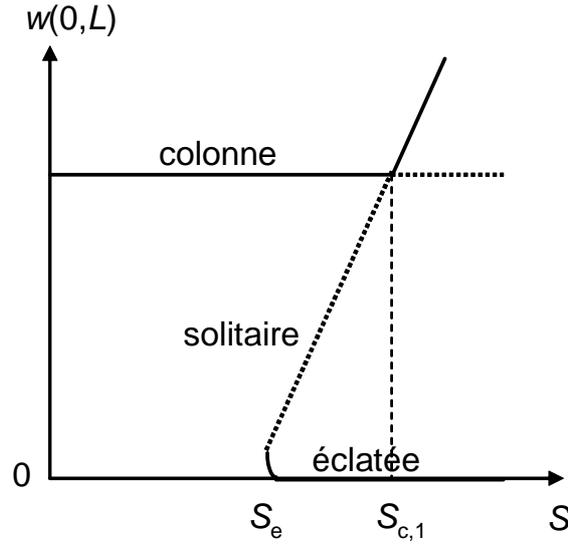


FIG. 5.13: Solutions stationnaires d'écoulement tournant axisymétrique de fluide parfait incompressible dans une conduite de section constante, repérées par leur vitesse axiale $w(0, L)$ au centre du plan de sortie. Les branches de solutions stables sont représentées en traits pleins, les branches instables en pointillés. D'après Wang et Rusak [124].

et en utilisant la décomposition (5.30) de Wang et Rusak on trouve l'équation sur ϕ

$$\phi_{rr} - \frac{\phi_r}{r} + \left(4S_0^2 - \frac{m^2\pi^2}{4L^2}\right)\phi = 0. \quad (5.34)$$

Les bifurcations successives à partir de la solution colonne sont donc ici obtenues pour les valeurs $S_{c,m}$ telles que

$$S_{c,m}^2 = S_B^2 + \frac{m^2\pi^2}{16L^2}. \quad (5.35)$$

Il faut signaler que toutes ces bifurcations sont dégénérées. En effet, ici non seulement l'équation du problème est linéaire, mais aussi les conditions aux limites, ce qui n'est plus le cas dès qu'on considère une conduite de rayon variable, même avec des variations de faible amplitude. En conséquence, la solution colonne reste unique, sauf ponctuellement lorsque $S_0 = S_{c,m}$. En pratique, les solutions bifurquées apparaissent sous forme de branches verticales sur un diagramme analogue à celui de la figure 5.13 où le nombre de swirl est pris comme abscisse, et pour une conduite de longueur $L = 1$, la première d'entre elles correspond à la valeur $S_{c,1} \approx 2.071$. Cette dégénérescence montre que la branche éclatée ne peut apparaître que pour $S_0 = S_e = S_{c,1}$, ce qui simplifie le problème de façon drastique.

Problème II

La perturbation à superposer à l'écoulement colonne respectant $\psi_{1z}(r, 0) = 0$ à l'amont doit être recherchée cette fois sous la forme

$$\psi_1(r, z) = \phi(r) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi m z}{L}\right)\right), \quad m \in \mathbb{N}^* \quad (5.36)$$

Pour l'écoulement (W_0, Ω_0) , l'équation (5.28) perd dans ce cas son unicité pour les valeurs $S_{c,m}$ définies par

$$S_{c,m}^2 = S_B^2 + \frac{m^2 \pi^2}{4L^2} \quad (5.37)$$

Comme le problème est cette fois réellement non linéaire (nous en donnerons plus d'éléments de preuve au paragraphe 5.6.4 et dans l'annexe D), ces bifurcations ne sont plus dégénérées. Pour une conduite de longueur $L = 1$, la première d'entre elles intervient pour une valeur plus élevée du nombre de swirl que pour le problème I (on trouve $S_{c,1} \approx 2.477$).

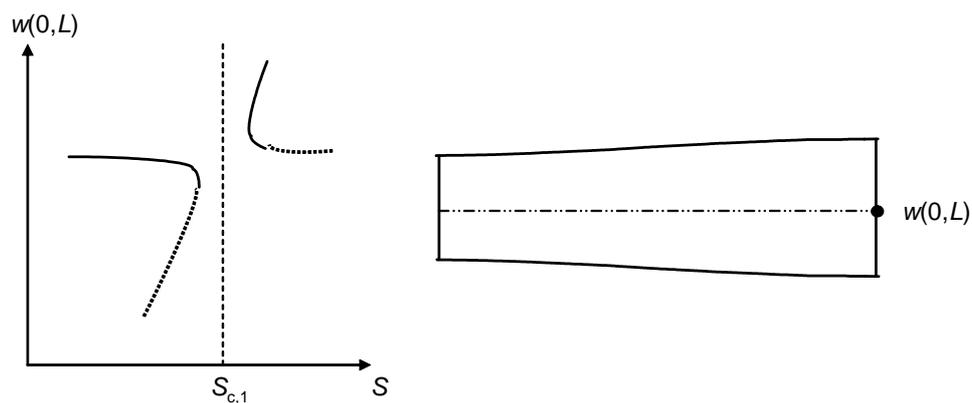
5.6 Déploiement à $S_{c,1}$ sous l'effet de perturbations

5.6.1 Scénarios possibles

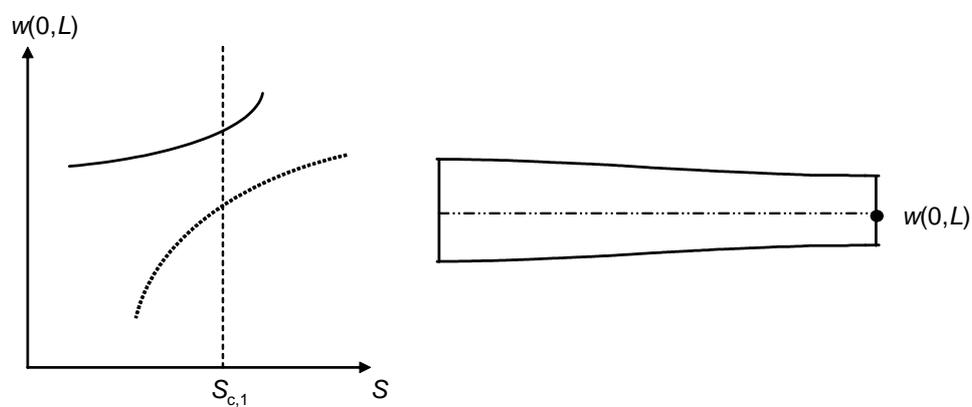
Rusak et son équipe ont complété leur étude sur les bifurcations à partir de l'écoulement colonne dans une conduite de longueur finie par une série d'analyses faiblement non linéaires, s'intéressant à des perturbations de géométrie (tuyère faiblement divergente [105] ou convergente [107]), des perturbations de vorticité azimutale en entrée [106], ou encore la prise en compte d'une faible viscosité [125]. Ces travaux ont montré que la bifurcation transcritique obtenue pour $S_0 = S_{c,1}$ est structurellement instable, c'est-à-dire qu'elle disparaît au profit d'autres portraits dynamiques lorsque n'importe laquelle de ces petites perturbations est prise en compte. Au voisinage de la criticité, l'écoulement colonne ne peut plus être obtenu en raison de l'interaction résonante de l'onde de Kelvin axisymétrique concernée avec la perturbation introduite, de façon analogue à ce que montre Grimshaw [44] dans le cadre d'ondes longues (voir le paragraphe 5.3.2). Dès lors, toute analyse de perturbation linéaire, pour laquelle la réponse de l'écoulement est du même ordre que celui de la perturbation, devient invalide, et une analyse faiblement non linéaire doit être menée. Les solutions stationnaires se répartissent alors soit sur deux branches possédant chacune un point tournant et laissant un intervalle de swirl sur lequel seule la branche éclatée existe (faible divergence, viscosité et perturbation amont de vorticité azimutale, figure 5.14(a)), soit sur deux branches continues distinctes (faible convergence et perturbation amont de vorticité azimutale, figure 5.14(b)).

5.6.2 Apparition de l'éclatement axisymétrique dans un écoulement réaliste

La prise en compte d'effets visqueux (mais sans couche limite) dans une géométrie de tuyau de section constante mène donc au diagramme de solutions de la figure 5.15, obtenu par Beran et Culick [11] et Lopez [81] pour un écoulement amont de type q-vortex, toujours dans un cadre axisymétrique. La définition de cet écoulement est donnée au paragraphe 4.2.2. Notons que ces auteurs ont considéré une géométrie de conduite comportant un léger étranglement initial afin d'isoler les conditions amont de toute perturbation. Les solutions stationnaires se répartissent ici sur une branche unique, mais comportant deux points tournants, aux alentours de S_e et de $S_{c,1}$. Plus le nombre de Reynolds est grand, plus les nombres de swirls correspondant à ces points tournants se rapprochent de S_e et $S_{c,1}$, pour tendre vers le diagramme 5.13 ainsi que l'ont expliqué Wang et Rusak [124].



(a) Cas d'une tuyère faiblement divergente



(b) Cas d'une tuyère faiblement convergente

FIG. 5.14: Déploiement de la bifurcation transcritique en $S_0 = S_{c,1}$ en présence de perturbations de géométrie, d'après Rusak *et al.* [105] et Rusak et Meder [107]. La solution éclatée n'est pas représentée sur ces figures.

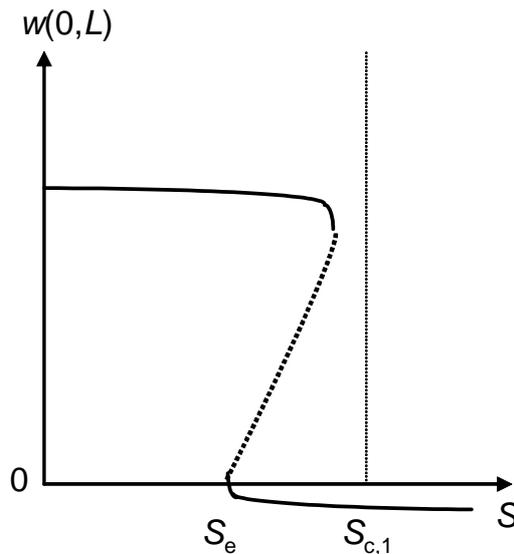


FIG. 5.15: Solutions stationnaires d'écoulement tournant confiné réaliste dans un tuyau droit possédant un étranglement à l'amont. D'après les études numériques de Beran et Culick [11] et Lopez [81]. La bifurcation noeud-col issue de la bifurcation transcritique à $S_0 > S_{c,1}$ n'est pas représentée ici.

5.6.3 Effet d'une faible contraction : le cas du q-vortex

Revenons au cas de la tuyère faiblement convergente. Dans leur étude, Rusak et Meder [107] considèrent la loi de rayon

$$R(z) = 1 - \lambda(1 - \cos(\pi z/L)) \quad \lambda \ll 1 \quad (5.38)$$

Cette loi de paroi correspond à une géométrie de tuyère proche de celle que nous avons considérée (voir l'équation (5.20)). A l'aide d'une analyse faiblement non linéaire s'appliquant à une condition limite amont générale, ils aboutissent à la solution

$$\psi(r, z) = \psi_0(r) + \varepsilon(\Delta S_0, \lambda)\phi(r) \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \quad (5.39)$$

où ΔS_0 désigne l'écart du nombre de swirl par rapport à $S_{c,1}$, ϕ la fonction propre radiale de l'onde résonante et le rayon aval de la tuyère est égal à $1 - 2\lambda$. En accord avec le diagramme de bifurcation 5.14(b), l'écoulement obtenu possède une vitesse axiale croissante de l'amont vers l'aval au centre, et décroissante de l'amont vers l'aval à la paroi. En sortie de tuyère, le champ de vitesse axiale est donc caractérisé par une accélération au centre et une décélération à la paroi. En étendant le développement asymptotique en-dehors de son cadre de validité, une recirculation **à la paroi** peut être obtenue dans ce plan, comme illustré sur la figure (5.16) dans le cas d'un écoulement amont de type q-vortex.

5.6.4 Effet d'une contraction quelconque : cas de l'écoulement de rotation solide et advection uniforme

Problème I

Même si l'analyse de Rusak et Meder est effectuée dans le cadre d'un écoulement amont non spécifié $(\psi_0(r), K_0(r), \chi_0(r))$, elle devient invalide dans le cas particulier de

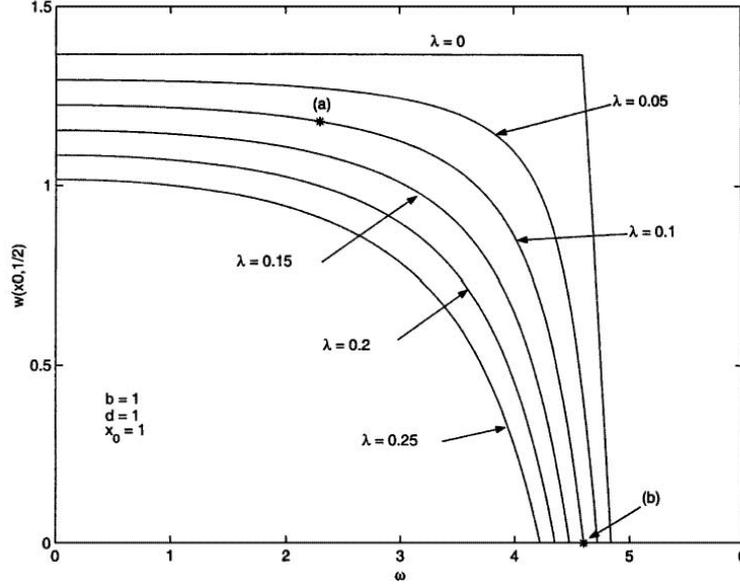


FIG. 5.16: Vitesse axiale obtenue à la paroi en sortie de tuyère pour différents taux de contraction, dans le cas d'un profil amont de type q-vortex, en fonction du swirl (noté ici ω). La tuyère a pour longueur $L_{CV} = 1$ (notée ici x_0). D'après Rusak et Meder [107].

l'écoulement (W_0, Ω_0) . Dans ce cas en effet, l'interaction résonante de la contraction avec une onde de Kelvin stationnaire résulte en une réponse d'amplitude unité qui ne peut donc pas être modélisée par un calcul faiblement non linéaire. Le développement asymptotique fortement non linéaire adapté (mais qui utilise les mêmes techniques qu'un développement faiblement non linéaire) est présenté dans l'annexe D.

A l'instar de Rusak et Meder, nous trouvons qu'une faible contraction a pour effet de provoquer un point d'arrêt à la paroi dans le plan de sortie de la conduite. Le nombre de swirl S_{0R} pour lequel cette recirculation apparaît est lié au rayon de sortie R_1 de la tuyère convergente par la relation (cf. (5.35) et (D.70)) :

$$S_{0R} = S_{c,1} - \alpha(1 - R_1) = \sqrt{S_B^2 + \frac{\pi^2}{16L^2}} - \alpha(1 - R_1) \quad (5.40)$$

où α est une constante strictement positive qui dépend de la loi de rayon de la conduite. On constate donc que dans la limite où R_1 tend vers 1, S_{0R} tend vers $S_{c,1}$, ce qui est cohérent avec la dégénérescence mise en évidence dans le paragraphe précédent. De plus, à longueur totale de conduite L fixée, S_{0R} décroît avec $1 - R_1$, de sorte que plus la tuyère converge, plus les valeurs de S_0 correspondant à la recirculation s'écartent par valeurs inférieures du swirl critique de conduite $S_{c,1}$.

On cherche à présent numériquement la valeur de S_{0R} pour une conduite constituée uniquement d'une tuyère convergente de longueur $L_{CV} = 1$, identique à celle choisie par Rusak et Meder (rappelons que notre loi de paroi diffère légèrement mais que ceci ne prête pas à conséquence). Les résultats sont présentés sur les figures 5.17(a) et 5.17(b). On retrouve tout d'abord le comportement asymptotique prédit par (5.40) puisque lorsque R_1 décroît à partir de 1, S_{0R} suit une évolution linéaire décroissante à partir de la valeur $S_{c,1} \approx 2.0706$. Lorsque $1 - R_1$ n'est plus infinitésimal, c'est-à-dire pour des valeurs supérieures ou égales à 0.1 environ, S_{0R} devient une fonction croissante de $1 - R_1$ et peut être supérieur à $S_{c,1}$. Par ailleurs, le minimum de vitesse axiale à la paroi n'est obtenu en sortie que pour des valeurs de plus en plus proches de S_{0R} . En effet pour une valeur de

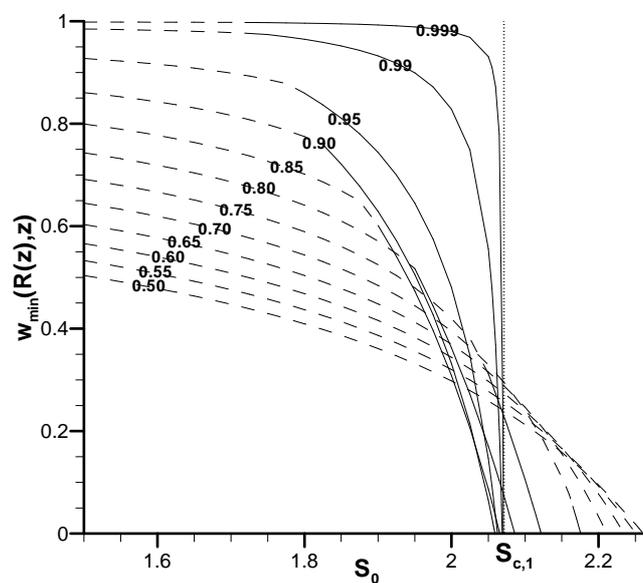
R_1 fixée, le nombre de swirl local de l'écoulement diminue de l'amont vers l'aval en raison de la contraction, donc lorsque R_1 diminue, le régime tend à s'écarter progressivement de la criticité en sortie de tuyère, puis dans toute la partie aval de la tuyère. Dès lors, l'approximation quasi-parallèle définie au paragraphe 5.3.3 redevient valable dans cette zone. A partir de $R_1 = 0.65$, la recirculation à S_{0R} n'est alors plus obtenue en sortie, mais à l'intérieur de la tuyère. Ce décalage progressif du minimum est illustré sur la figure 5.18.

Problème II

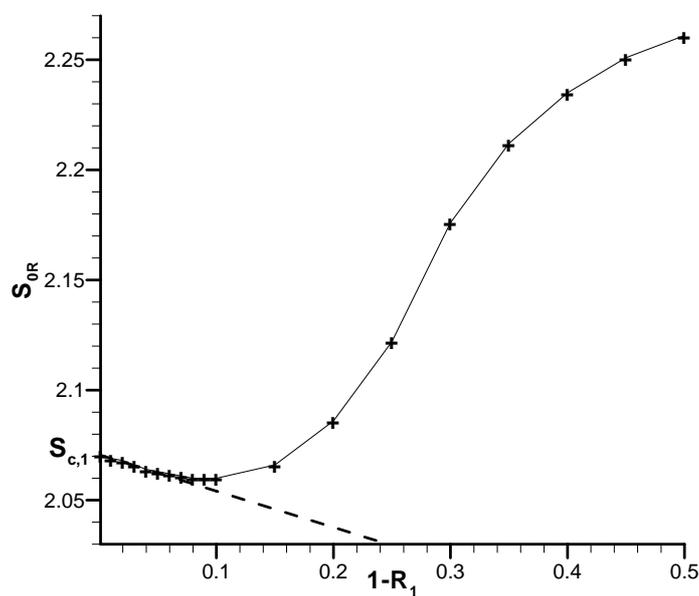
La figure 5.19 est l'analogie de la figure 5.17(a) lorsqu'on résout le système non linéaire (5.21) en imposant la condition (5.23b). Si l'on excepte les valeurs de R_1 les plus proches de 1 (*i.e.* pour $R_1 \leq 0.9$), on observe que le comportement obtenu est très proche du cas précédent. Lorsque S_0 tend vers $S_{c,1}$ par valeurs inférieures, l'écoulement accélère progressivement au centre de l'amont vers l'aval, et décélère progressivement à la paroi simultanément. Pour toutes les valeurs de R_1 , une recirculation à la paroi est obtenue pour des valeurs suffisamment élevées de S_0 , qui intervient dans le plan de sortie pour les valeurs de R_1 les plus proches de 1, et à l'intérieur de la tuyère lorsque le taux de contraction augmente.

Les courbes obtenues pour les valeurs les plus proches de 1 (ici de 0.95 à 0.999) confirment que lorsque l'on impose la condition de vitesse radiale nulle (5.23b) au lieu de celle de vorticité azimutale nulle (5.23a) à l'amont, l'équation du mouvement devient non linéaire comme attendu, puisque la bifurcation obtenue pour $S_{c,1} \approx 2.477$ n'est plus dégénérée. En effet, pour ces valeurs de R_1 , la branche de solutions colonne subit une bifurcation noeud-col lorsque S_0 s'approche de $S_{c,1}$ par valeurs inférieures. Il s'agit ici également du déploiement d'une bifurcation transcritique, comme le montre l'analyse du paragraphe D.1 de l'annexe D. Ceci suggère que les solutions trouvées après bifurcation, c'est-à-dire celles qui mènent à l'existence d'un point d'arrêt sur la paroi, sont ici linéairement instables. Ce déploiement ne correspond pas à l'un des cas traités par l'équipe de Rusak, puisque l'écoulement obtenu après la bifurcation noeud-col est dans notre cas celui qui possède une accélération au centre et une décélération à la paroi dans le plan de sortie. Dans les analyses de Rusak aboutissant au déploiement de la figure 5.14(a), l'écoulement obtenu après cette bifurcation est au contraire celui qui possède une accélération à la paroi et une décélération au centre, et qui par prolongement vers des valeurs de swirl plus faibles tend vers un écoulement éclaté. Néanmoins comme le montre l'annexe D.1, ce point limite est lié à la longueur finie de la conduite ; dès lors que celle-ci est suffisamment importante, le diagramme de solutions se rapproche de celui observé au paragraphe précédent.

La figure 5.20 compare les profils de vorticité azimutale obtenus pour une même tuyère de rayon $R_1 = 0.9$, juste avant recirculation, respectivement avec les conditions aux limites (5.23a) et (5.23b). Dans les deux cas, la contraction des lignes de courant aboutit à la création d'une zone de vorticité azimutale positive suivant le mécanisme décrit au paragraphe 5.3.3. Lorsqu'on spécifie à l'entrée une condition de vitesse radiale nulle, on observe de plus la formation d'une zone de vorticité azimutale négative proche de la frontière amont. Une forte vitesse radiale négative est en effet nécessaire dans ce cas au sein de l'écoulement afin de passer d'un état amont à vitesse axiale uniforme à un état aval accéléré au centre et décéléré à la paroi. En l'absence de vitesse radiale à l'amont, ceci ne peut que se faire par le terme u_z (ici négatif, donc) qui intervient dans la vorticité azimutale η .



(a) Vitesse axiale minimale à la paroi en fonction de S_0 pour différentes valeurs de R_1 . La courbe est en traits pleins lorsque ce minimum est atteint dans le plan de sortie $z = L_{CV}$, en pointillés si $0 < z < L_{CV}$. La valeur de R_1 est indiquée sur chaque courbe.



(b) Valeur du nombre de swirl de recirculation S_{0R} en fonction de R_1 . La courbe reliant les symboles correspond aux résultats numériques, la courbe en tirets à la formule asymptotique (5.40).

FIG. 5.17: Décélération et recirculation à la paroi de la tuyère. Problème I.

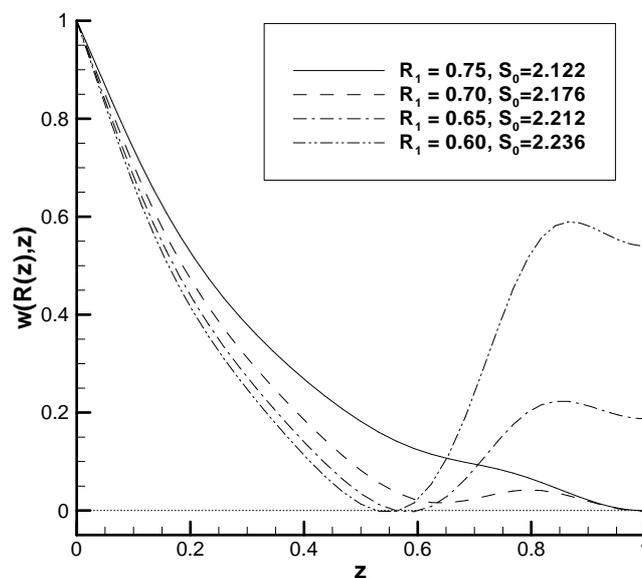


FIG. 5.18: Position du minimum de vitesse axiale à la paroi de la tuyère lorsque R_1 diminue. Problème I.

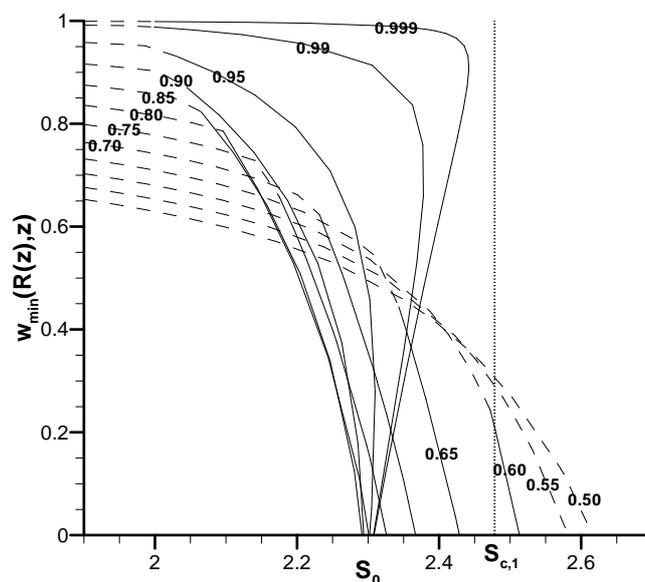


FIG. 5.19: Vitesse axiale minimale à la paroi de la tuyère en fonction de S_0 et pour différentes valeurs du rayon de sortie R_1 . La courbe est en traits pleins lorsque ce minimum est atteint dans le plan de sortie $z = L_{CV}$, en pointillés si $0 < z < L_{CV}$. Les valeurs de R_1 sont indiquées sur chaque courbe. Problème II.

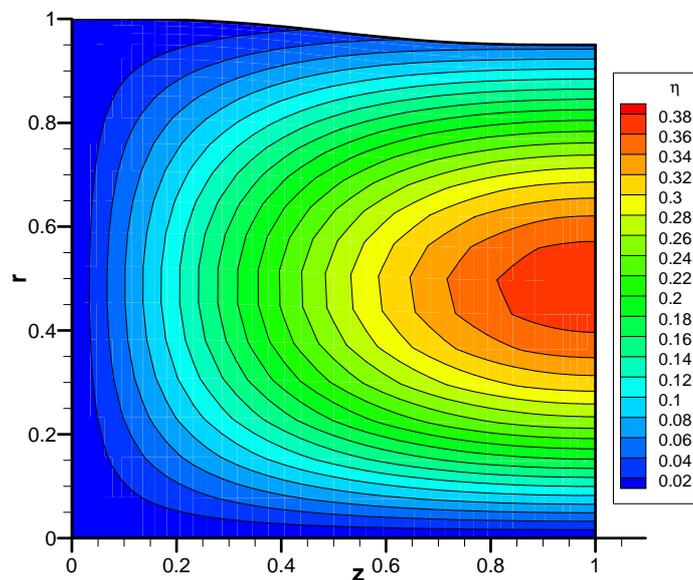
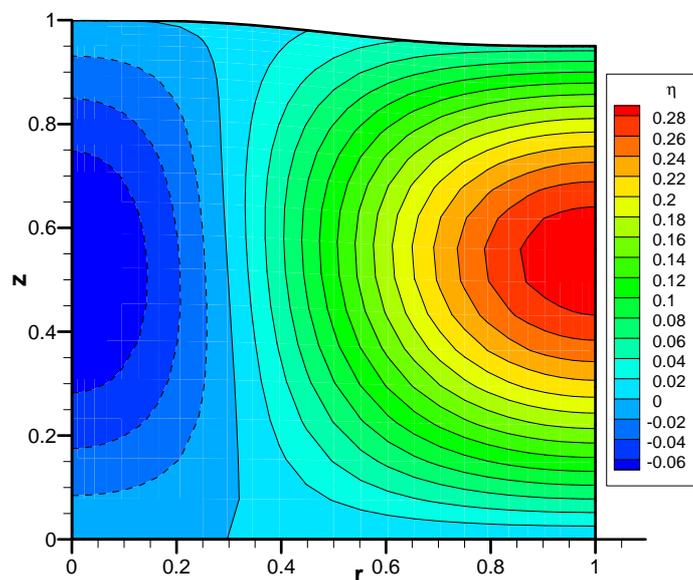
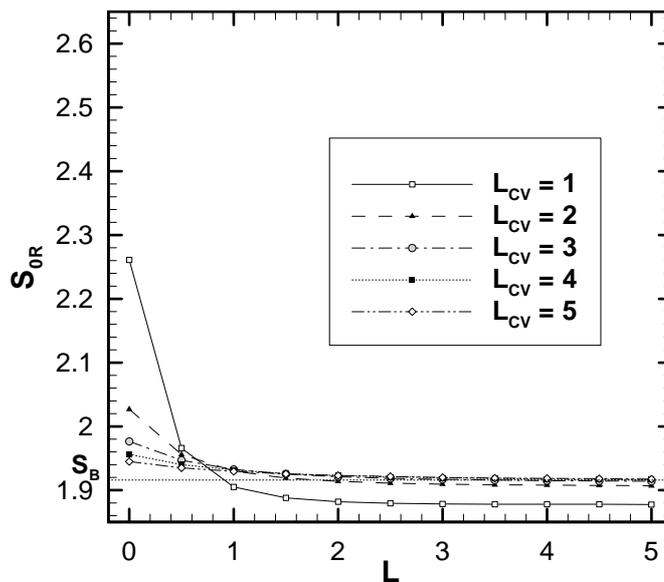
(a) Problème I, $S_0 = 2.059$.(b) Problème II, $S_0 = 2.286$.

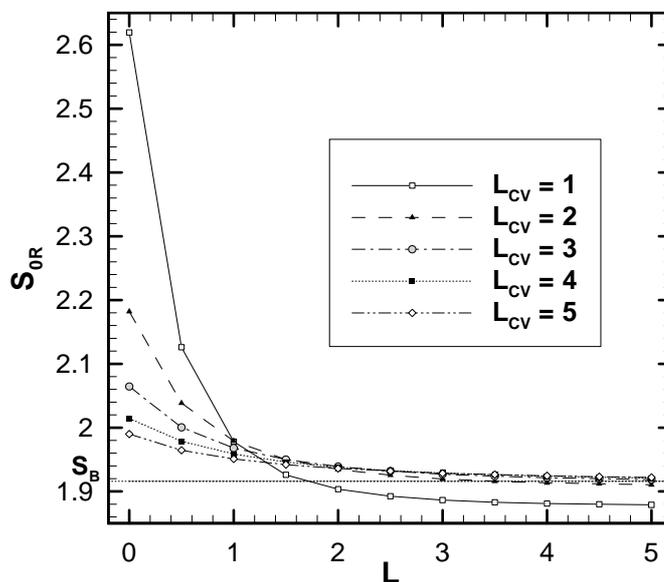
FIG. 5.20: Champs de vorticité azimutale des écoulements proches de la recirculation pour une tuyère de rayon de sortie $R_1 = 0.9$.

Influence de L

Nous revenons à présent à un cas non asymptotique, faisant intervenir une tuyère de taux de contraction fini précédée par une portion de conduite de section constante de longueur L . Nous particularisons à titre d'exemple le cas d'une tuyère de rayon de sortie $R_1 = 0.5$; dès lors que ce rayon n'est pas trop proche de 1, sa valeur n'a plus d'incidence sur le comportement observé. Les figures 5.21(a) et 5.21(b) illustrent l'influence de L , pour les problèmes I et II.



(a) Problème I



(b) Problème II

FIG. 5.21: Valeur de swirl S_{0R} obtenues pour une tuyère de rayon de sortie $R_1 = 0.5$, pour différentes valeurs de L et L_{CV} .

Dans les deux cas, la valeur trouvée pour S_{0R} tend vers S_B lorsque L augmente, à partir du moment où la tuyère est suffisamment longue pour que les effets non parallèles liés à sa géométrie soient négligeables (c'est-à-dire pour $L_{CV} \geq 2$ ou 3). Le comportement

est donc très proche de celui observé dans la limite d'une contraction infinitésimale, pour laquelle les valeurs du swirl critique $S_{c,1}$ dans les deux cas sont telles que $S_{c,1}^2 = S_B^2 + O(L^{-2})$. De fait, les deux problèmes deviennent équivalents car plus L est grand, plus la vitesse radiale u décroît sur des étendues axiales grandes, ce qui réduit l'amplitude de la perturbation de vorticité azimuthale en entrée si celle-ci n'est pas fixée à 0.

L	L_{CV}	χ_{CV}	S_{0R}
5.613	2.52	4	1.915
5.613	1.96	9	1.895
5.613	2.5	18.4	1.902

TAB. 5.1: Valeur de S_{0R} pour les trois géométries expérimentales.

Enfin, le tableau 5.1 résume les valeurs trouvées pour S_{0R} avec les trois tuyères convergentes de notre expérience. Ces valeurs sont proches en raison de la longueur importante de la portion de conduite de section constante précédant le convergent.

5.7 Résumé

Le modèle de fluide parfait axisymétrique analysé dans ce chapitre nous a permis de comprendre la parabolisation des profils de vitesse axiale en sortie de tuyère comme le résultat d'un gauchissement de la vorticité axiale en vorticité azimuthale par la contraction. Il a également mis en évidence les principales caractéristiques des ondes de Kelvin axisymétriques, et montré que pour un écoulement constitué d'un mouvement de rotation solide et advection uniforme, leur transition critique se situe à $S_{0,c} \approx 1.92$. A l'aide d'une approche globale stationnaire, nous avons montré qu'au régime transcritique, une tuyère convergente avait pour effet d'exciter de façon résonante l'onde de Kelvin proche de la criticité, menant dans la plupart des cas à une recirculation à la paroi de la tuyère. Celle-ci est localisée dans le plan de sortie si la tuyère a un faible taux de contraction, et en entrée de la tuyère si ce taux est suffisamment élevé.

Néanmoins, plusieurs questions restent sans réponse : nos calculs permettent de comprendre le régime supercritique, jusqu'à la transition environ, mais ne permettent pas d'explorer ce modèle au régime sous-critique. A ce stade, nous ne savons donc pas si le point d'arrêt prévu persiste pour les nombres de swirl supérieurs, ou encore si une compétition avec l'éclatement tourbillonnaire s'installe.

6 Bilan provisoire

Avant d'aborder l'étude expérimentale et numérique de l'écoulement de la soufflerie R4Ch qui est l'objet des prochains chapitres, nous proposons un résumé des principaux résultats obtenus jusqu'ici.

D'après les mesures fil chaud du chapitre 3, la turbulence détectée dans le plan de sortie croît progressivement à la périphérie de l'écoulement (à partir de $S \approx 1.5 - 2$ en $r/R_1 = 0.6$). Pour $S \approx 2.7$, elle se développe brusquement au centre de la veine. Dans ce dernier cas, la similitude des niveaux de fluctuations axiales obtenus dans le plan de sortie des tuyères évoque la possibilité d'une instabilité globale peu sensible à l'influence des convergents. Par ailleurs, pour les valeurs de S les plus importantes, la turbulence est développée dans tout le plan de sortie, ce qui suggère également l'implication d'instabilités à petite échelle.

La revue du chapitre 4 a permis de décrire les principaux phénomènes d'instabilités et de turbulence susceptibles de se produire dans l'écoulement de conduite généré par le nid tournant. Elle a montré en particulier que dans le cas d'une géométrie sans contraction à l'aval, l'éclatement se produit au régime transcritique et consiste en une transition entre un écoulement supercritique à l'amont, et un écoulement sous-critique turbulent (et en particulier caractérisé par des instabilités hélicoïdales) à l'aval. Cette synthèse a également montré qu'au régime sous-critique, la tuyère convergente en aval pouvait avoir un effet important sur l'écoulement, au point de modifier la structure de la bulle d'éclatement si celle-ci est présente, voire de la faire disparaître.

A l'aide du modèle de fluide parfait axisymétrique stationnaire du chapitre 5, nous venons de voir que la transition critique d'un écoulement modèle d'advection uniforme et de rotation solide se situe au nombre de swirl $S_{oc} = 1.92$. Cette transition est donc dépassée au cours de certains des essais effectués dans notre soufflerie. Le modèle a également démontré l'importance des phénomènes non linéaires au régime transcritique, phénomènes qui mènent à une recirculation non visqueuse à l'intérieur de la tuyère convergente. Dans un cadre plus réaliste, on peut donc penser que l'écoulement expérimental doit être le siège d'un décollement de couche limite lorsque l'écoulement s'approche de ce régime. La prise en compte de la couche limite et de la viscosité devient donc cruciale à ce stade. Elle permettra également d'envisager l'existence de lignes de courant fermées, en levant l'indétermination sur l'énergie mécanique et la circulation introduite par l'hypothèse de fluide parfait.

Par ailleurs, si un décollement a effectivement lieu suite au mécanisme d'interaction avec la tuyère, la question de savoir s'il persiste pour des nombres de swirl plus élevés reste entière. Se pose aussi toujours le problème de l'apparition ou non d'un éclatement tourbillonnaire en sortie de nid d'abeilles. Dans leur étude théorique, Rusak et Meder [107] prédisent une compétition entre les deux phénomènes, la prédominance de l'un ou de l'autre dépendant à la fois du taux de contraction de la tuyère et du nombre de swirl. Si nous ne pouvons pas conclure sur ce point ici, nous pouvons souligner l'ab-

sence de turbulence au centre du plan de sortie lorsque l'écoulement généré par le nid est transcritique. En effet, la criticité de l'écoulement théorique d'advection uniforme et rotation solide intervient à $S_0 = 1.92$, tandis que la turbulence au centre du plan de sortie des tuyères apparaît à $S \approx 2.7$.

Troisième partie

Etude expérimentale et numérique de
l'écoulement de conduite

7 Dispositif de PIV

7.1 Introduction

Les études des chapitres précédents ont montré la nécessité d'explorer l'écoulement de conduite de la soufflerie. Ils ont également permis de dégager le "cahier des charges" suivant pour le choix de la technique à retenir :

- La mesure doit être non invasive pour ne pas perturber l'écoulement.
- Elle doit permettre de caractériser les gradients dans la direction axiale, afin de tester entre autres l'occurrence d'un décollement de couche limite, ou d'un éclatement tourbillonnaire. De ce fait, elle doit restituer les composantes axiale, azimutale et radiale de la vitesse.
- Elle doit autant que possible permettre de caractériser des phénomènes instationnaires et turbulents.

La PIV stéréoscopique, qui résout un champ de vitesse tridimensionnel sur un domaine rectangulaire, nous a donc paru la plus adaptée au vu de ces impératifs. Dans un écoulement confiné comme le nôtre, sa mise en oeuvre requiert la fabrication d'un élément de conduite spécial permettant le passage d'une nappe laser et la visualisation de celle-ci par deux caméras à travers des parois transparentes. En raison de contraintes à la fois optiques (inhomogénéité très forte de la distortion des images) et matérielles (usinage délicat en raison de la courbure à imposer), nous avons très rapidement abandonné l'idée de mesurer le champ de vitesse à l'intérieur d'une tuyère convergente, et porté notre choix sur l'écoulement dans la portion de conduite de section constante qui la précède.

Ce chapitre présente tout d'abord le principe de la PIV stéréoscopique ainsi que le dispositif retenu pour effectuer les visualisations. Les méthodes de calibration et algorithmes utilisés y sont ensuite expliqués, puis une étude sommaire d'incertitude est menée afin de caractériser la précision des mesures obtenues et de dégager des critères pertinents d'analyse de l'écoulement.

7.2 Principe de la PIV

Ce paragraphe s'inspire des ouvrages de Raffel *et al.* [97] ainsi que l'article de synthèse de Prasad [95], qui pourront être consultés pour une présentation plus poussée.

7.2.1 PIV 2 composantes

Tout comme l'anémométrie laser doppler, la vélocimétrie par image de particules (Particle Image Velocimetry en anglais) suppose l'ensemencement de l'écoulement dont on veut connaître le champ de vitesse par des particules de fumée de taille suffisamment faible pour être advectées passivement. A l'aide d'un plan de lumière ou nappe laser de faible épaisseur, on éclaire pendant une durée très courte la zone de l'écoulement à

mesurer, à deux instants séparés d'un intervalle de temps dt très court. Lors de chaque illumination, la lumière diffusée par les particules est enregistrée par une caméra à capteur CCD (figure 7.1). L'information obtenue correspond alors aux intensités lumineuses respectives I et I' reçues par chaque pixel du capteur CCD aux instants t et $t + dt$.

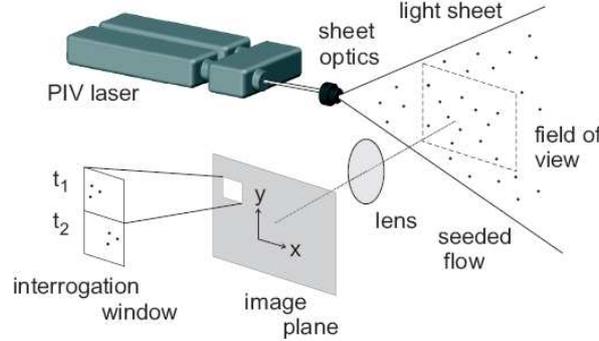


FIG. 7.1: Principe général de la PIV. Image extraite du mode d'emploi du logiciel DaVis FlowMaster 7.1.

Afin de reconstituer le déplacement des particules entre les deux instants, on subdivise chaque image en un grand nombre de fenêtres d'interrogation de taille fixée, puis on calcule la fonction de corrélation croisée $R_{II}(\Delta x, \Delta y)$ des intensités lumineuses d'une même fenêtre d'interrogation aux instants t et $t + dt$, suivant la formule :

$$R_{II}(\Delta x, \Delta y) = \sum_{i=-K}^K \sum_{j=-L}^L I(i, j) I'(i + \Delta x, j + \Delta y). \quad (7.1)$$

Ceci correspond ici à une fenêtre d'interrogation de $(2K + 1) \times (2L + 1)$ pixels. Le déplacement $(\Delta x, \Delta y)$ des particules correspond alors au maximum de R_{II} pour tous les déplacements possibles, et les deux composantes du vecteur vitesse sont obtenues par $(v_x, v_y) = (\Delta x/dt, \Delta y/dt)$.

En toute rigueur, l'application de la définition (7.1) mène à une connaissance du déplacement avec une incertitude de ± 0.5 pixel. Il est néanmoins possible d'améliorer cette précision si l'on suppose, ce qui est bien vérifié en pratique, que la diffraction d'une particule mène à une répartition gaussienne de l'intensité lumineuse sur le CCD. Par interpolation, on peut alors déterminer le déplacement au $1/10^e$ de pixel près, parfois plus, mais ceci suppose que la taille des particules soit de l'ordre de 2×2 pixels. En effet, des particules plus petites mènent à un biais de "peak-locking", c'est-à-dire que les déplacements ont tendance à être plus concentrés vers les valeurs entières de pixels. Pour plus de renseignements sur cet effet, on pourra se reporter notamment à l'ouvrage de Raffel *et al.* [97].

En pratique, la formule (7.1) n'est pas très souvent utilisée pour des raisons de temps de calcul. On utilise plutôt la transformée de Fourier \widehat{R}_{II} de R_{II} , qui vérifie :

$$\widehat{R}_{II} = \widehat{I} \widehat{I}'^* \quad (7.2)$$

\widehat{I} et \widehat{I}' désignant les transformées de Fourier respectives de I et I' , et $*$ le complexe conjugué. L'utilisation d'algorithmes de transformée de Fourier rapide suppose de rendre les signaux périodiques. Si l'on veut éviter le phénomène de repliement spectral (aliasing), il faut donc ajuster le temps inter-image dt de sorte que le déplacement recherché soit inférieur à la moitié de la taille de la fenêtre. De plus, étant donné qu'une certaine quantité

de particules sort de la fenêtre d'interrogation entre les deux illuminations, les valeurs de la corrélation auront tendance à être biaisées vers les faibles déplacements. Les algorithmes de PIV récents comme celui de DaVis corrigent cette erreur automatiquement (voir le paragraphe 7.4.2).

7.2.2 PIV stéréoscopique

La PIV stéréoscopique ou PIV 3 composantes (3C) permet de mesurer en plus des deux composantes de la vitesse contenues dans le plans de la nappe laser, la composante normale à ce plan. La stratégie utilisée est calquée sur la reconstitution du relief par la vision oculaire, puisqu'on utilise cette fois deux caméras qui "regardent" la zone de la nappe laser à mesurer suivant deux incidences différentes et écartées en règle générale d'environ 90° (angle α sur la figure 7.2).

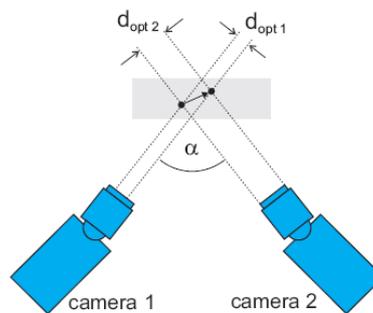


FIG. 7.2: Reconstitution de la troisième composante de vitesse par PIV stéréoscopique. Image extraite du mode d'emploi du logiciel DaVis FlowMaster 7.1.

Dans cette situation, le plan image de chacune des caméras n'est pas parallèle au plan objet, ce qui introduit des variations de profondeur de champ au sein des images. Afin de pallier ce problème, on utilise la condition de Scheimpflug qui consiste à incliner le plan image de chaque caméra par rapport au plan de la lentille, de sorte que le plan objet, le plan de la lentille et le plan image soient concourants (figure 7.3). En pratique, ceci nécessite l'ajout d'un adaptateur spécial sur les caméras traditionnelles utilisées pour la PIV bidimensionnelle.

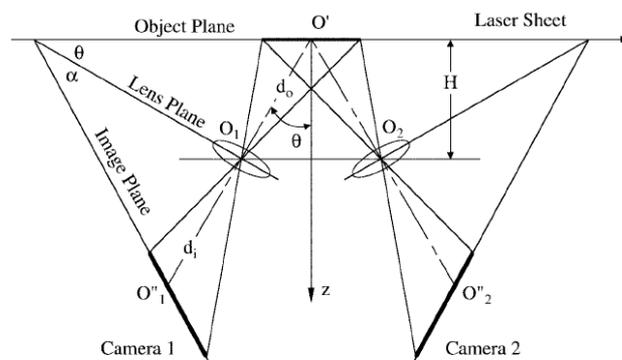


FIG. 7.3: Dispositif de PIV stéréoscopique utilisant la condition de Scheimpflug. D'après Prasad [95].

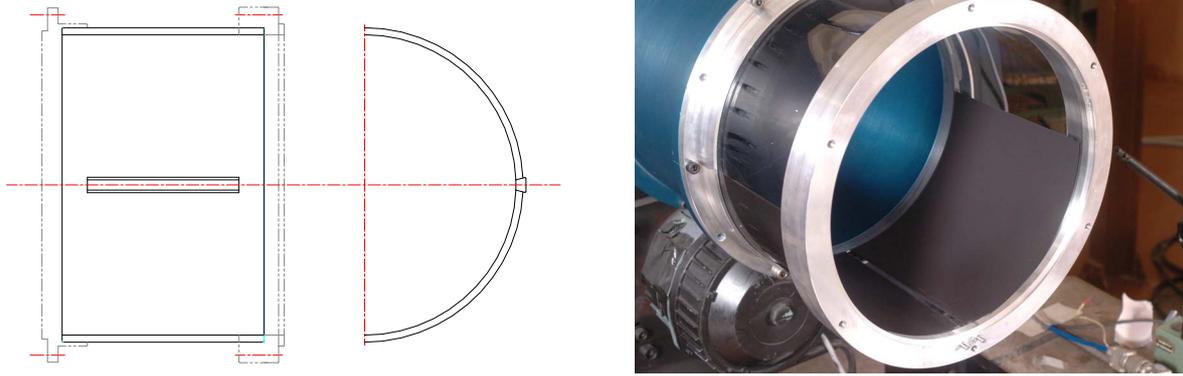


FIG. 7.4: Element de conduite transparent. Sur la figure de droite, on distingue la réglette en bas entre deux zones de peinture noire mate.

7.3 Montage expérimental

7.3.1 Fabrication d'un élément de conduite adapté

Afin de visualiser l'écoulement en amont des tuyères convergentes, un élément de conduite cylindrique spécial a été fabriqué (voir la figure 7.4). Il s'agit d'un hublot en plexiglas de 5 mm d'épaisseur, usiné à partir d'un bloc unique, épaulé par deux brides en duralumin qui assurent le raccord avec les éléments de conduite amont et aval. Il inclut une réglette en verre de qualité optique qui permet le passage de la nappe laser dans un plan contenant l'axe de symétrie de la veine. Afin de conserver une bonne répartition d'énergie dans la nappe, nous avons préféré opter pour une réglette plane plutôt qu'incurvée ; celle-ci forme sur la face interne de la pièce un rectangle de 150 mm sur 10 mm . A l'aide de mesures fil chaud effectuées en sortie des tuyères convergentes lorsque cet élément est en place, et lorsqu'il est remplacé par une portion de conduite rigoureusement cylindrique de même longueur, nous avons vérifié que cette rupture minimale de courbure ne perturbe pas l'évolution de turbulence observée, et ne modifie donc pas l'écoulement.

Lors des essais, nous avons constaté que le passage de la nappe laser à travers cette pièce occasionnait un certain nombre de réflexions parasites visibles sur les images de chaque caméra et très nuisibles pour la corrélation. Ce problème a été résolu en déposant une fine couche de peinture noire mate en divers endroits de la pièce. Nous avons également vérifié que son application ne modifiait pas les résultats.

7.3.2 Optique d'émission et de réception

Le montage complet est photographié sur la figure 7.5. On utilise un laser Nd :YAG à deux cavités générant chacune une impulsion de 6 ns de longueur d'onde 1064 nm , qu'un doubleur de fréquence transforme ensuite en rayonnement visible à 532 nm (vert). Les optiques d'émission chargés de transformer le faisceau laser en nappe sont situés sous le montage (figure 7.6), et la pièce transparente est disposée réglette vers le bas comme sur la figure 7.4. La nappe laser, d'épaisseur 1 mm environ, est générée dans un plan vertical contenant l'axe de symétrie de la veine, qu'elle parcourt du bas vers le haut. Sa verticalité est réglée à l'aide d'un miroir et son positionnement latéral à l'aide d'un pied à coulisse.

Les caméras, toutes deux équipées d'un capteur CCD de 1280×1024 pixels codant l'intensité lumineuse sur 12 bits et d'un adaptateur Scheimpflug, sont disposées en hauteur afin de visualiser les particules en diffusion avant et donc de maximiser le rapport

signal sur bruit. Elles fonctionnent avec des objectifs de focale $f = 105\text{ mm}$ et une ouverture de diaphragme $f\# = 11$.



FIG. 7.5: Dispositif de PIV stéréoscopique installé dans la soufflerie R4Ch.

La géométrie des CCD ainsi que la visée en perspective imposent un champ visualisable de forme rectangulaire et non carrée. Afin de conserver un bon compromis entre résolution spatiale et étendue du champ de vecteurs, et afin de caractériser la dynamique axisymétrique de l'écoulement, nous avons choisi une zone utile de visualisation d'environ $H \times L = 180 \times 100\text{ mm}^2$ dont le côté le plus large est disposé suivant la hauteur et s'étend depuis la paroi jusqu'à environ 20 mm au-dessus de l'axe de la veine. Ces grandes dimensions expliquent la distance importante séparant les caméras (placées à environ 2 m du sol) de la nappe laser. Initialement notre intention était de caler axialement la zone de visualisation de façon à ce qu'elle soit la plus proche possible de la section d'entrée de la tuyère convergente. Nous avons cependant été contraints de la décaler vers l'amont en raison d'un défaut dans l'usinage du plexiglas à cet endroit, qui rendait la corrélation très mauvaise. La localisation de cette zone par rapport au plan de sortie du nid d'abeille et au plan d'entrée des tuyères est schématisée sur la figure 7.7. Les dimensions exactes et le positionnement du champ de vecteurs finalement retenu (*i.e.* physiquement pertinent) seront déterminés au paragraphe 7.5.2.

7.3.3 Ensemencement

Nous avons utilisé un brouillard de particules submicroniques d'huile DEHS (di-éthyl-hexyl-sebacate). Celui-ci est généré par un générateur TOPAS, qui injecte les particules dans un coude du circuit à retour de la soufflerie, localisé à environ 10 m en amont de la veine d'essais. Ce dispositif permet d'obtenir très rapidement un ensemencement homogène et suffisamment dense dans la zone de visualisation, mais diffuse également le brouillard dans tout le local puisque la soufflerie y débite directement. Ceci a nécessité



FIG. 7.6: Optiques d'émission.

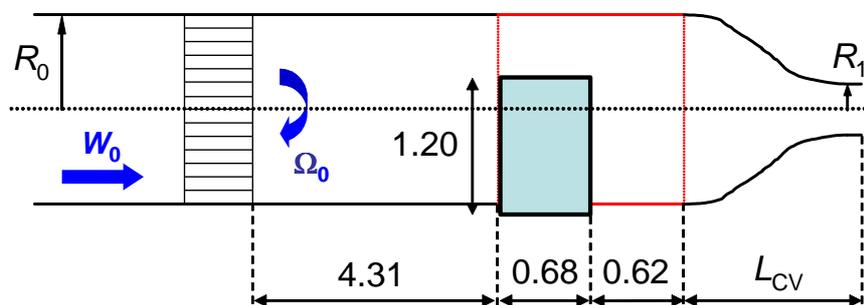


FIG. 7.7: Localisation de la zone de visualisation.

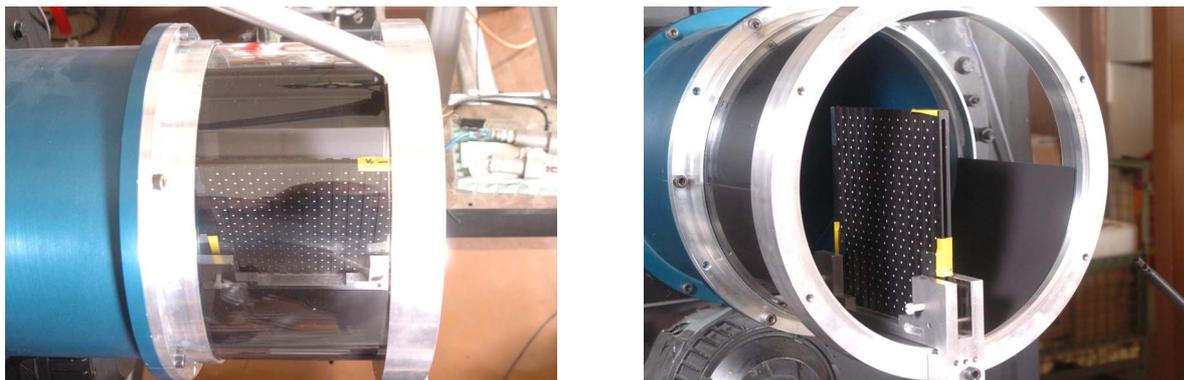


FIG. 7.8: Plaque de calibration utilisée. L'emplacement de la nappe laser coïncide avec le milieu de la plaque.

l'installation d'un dispositif d'extraction de l'air que l'on active entre les essais lorsqu'on doit entrer dans le local pour y effectuer des réglages.

7.4 Algorithmes et logiciels utilisés

La calibration, l'acquisition des images ainsi que le dépouillement ont été effectués à l'aide du logiciel DaVis FlowMaster 7.1 de LaVision, dont on décrit ici les principaux modes de fonctionnement.

7.4.1 Calibration : correction de la distortion des images

Dans notre expérience, les images brutes enregistrées par chaque caméra sont distordues en raison de la visée en perspective, de la présence entre la nappe laser et les caméras du hublot en plexiglas, ainsi que des adaptateurs Scheimpflug. Pour redresser ces images, on utilise une plaque de calibration conçue spécialement par LaVision (figure 7.8) pour la configuration stéréoscopique. Chacune de ses faces est rainurée de sorte que les marqueurs (ici des disques blancs de 2 mm de diamètre, disposés sur un quadrillage et espacés entre eux de 15 mm) se répartissent sur deux niveaux de profondeur.

DaVis utilise l'approche de calibration décrite par Soloff *et al.* [115]. Celle-ci consiste à déterminer pour chaque caméra et chaque plan de la plaque (soit quatre plans parallèles à la nappe laser, celle-ci passant à mi-épaisseur de la plaque), une loi polynômiale du troisième ordre permettant de redresser le plus précisément possible l'image obtenue par la caméra, ou "image brute". Cette opération s'effectue grâce à un algorithme de recherche des marqueurs dans les images déformées, ce qui permet d'obtenir pour chaque image un grand nombre de points d'emplacements connus (sur nos images, de l'ordre de 70). Le meilleur polynôme possible est alors obtenu par une méthode des moindres carrés, et l'écart-type de l'erreur sur la position des marqueurs est calculé afin d'estimer la précision de cette calibration. Pour la calibration que nous avons utilisée, les valeurs se répartissent entre 0.2 et 0.3 pixel, ce qui est considéré comme une très bonne calibration par les développeurs de DaVis.

Remarque Le calcul de cet écart-type constitue une première information sur la qualité de la calibration, qui doit être rejetée en cas de valeurs trop grandes. Néanmoins, il est insuffisant puisqu'il se limite à une information globale sur l'ensemble des marqueurs.

Si un grand nombre de marqueurs est détecté, une déviation importante mais localisée peut passer inaperçue. Nous avons été confrontés à ce problème avec la version 7.0 de DaVis, que nous utilisions au début de cette campagne. Il s'agissait alors de la version commercialisée la plus récente. Nous obtenions une erreur systématique localisée liée à une détection de faux marqueurs à l'une des frontières du champ de vitesse. Suite à une discussion avec les ingénieurs de LaVision, nous avons donc décidé de travailler avec la version 7.1 du logiciel, alors en cours de développement, ce qui nous a permis d'obtenir une calibration nettement plus satisfaisante. Celle-ci est caractérisée par un écart-type de 0.2 à 0.3 pixel suivant les caméras comme nous l'avons signalé plus haut ; la déviation maximale a été estimée à l'aide de logiciels de traitement d'images du DAFE et est de l'ordre de 0.6 pixel.

7.4.2 Calcul d'un champ de vecteurs

En PIV deux composantes, on utilise traditionnellement un algorithme adaptatif ("adaptive multipass") afin de minimiser les erreurs de peak-locking et de biais vers les faibles déplacements liés à la perte de particules sortant des fenêtres d'interrogation entre les deux illuminations laser. Cette technique consiste à effectuer plusieurs fois la corrélation sur une même paire d'images, en commençant par une taille de fenêtre assez grande, puis en diminuant progressivement cette taille aux passages suivants. Lors de ceux-ci, on utilise la valeur du vecteur trouvé au passage précédent pour décaler les fenêtres d'interrogation sur chacune des deux images de sorte que le déplacement à trouver soit le plus faible possible (moins de 1 pixel), ce qui améliore nettement la précision.

En PIV stéréoscopique se pose de plus la question du redressement des images, qui peut intervenir avant ou après la corrélation. Wieneke [126] résume les différents choix possibles avec leurs avantages et inconvénients respectifs, et décrit la méthode implémentée dans DaVis 7.1, dont on reproduit le schéma de fonctionnement sur la figure 7.9. Chaque paire d'images est d'abord redressée en vue d'un premier passage de corrélation avec une "grande" taille de fenêtre. Les champs tridimensionnels (2D3C) sont ensuite reconstruits à partir des champs bidimensionnels (2D2C) obtenus par chaque caméra. Ceci permet de rejeter une partie des vecteurs faux grâce à un critère de reconstruction 3C, que l'on explique plus loin. Après application d'un filtre médian (voir Raffel *et al.* [97] pour plus de précisions) et d'une interpolation des trous laissés par les vecteurs faux, les champs trouvés sont alors reconvertis en 2 champs de vecteurs 2C correspondant à chaque caméra. Cette information est ensuite utilisée pour améliorer le redressement d'images qui précède le passage de corrélation suivant, qui utilise des tailles de fenêtres plus petits comme dans le cas de la PIV 2C.

Reconstruction des champs 3C Le calcul d'un vecteur s'effectue à partir d'une paire d'images par caméra, les images de chaque paire correspondant aux temps t et $t + dt$. La corrélation croisée sur chaque paire d'images mène donc à deux champs de vecteurs 2D2C, soit deux couples (Vx_1, Vy_1) et (Vx_2, Vy_2) . On se place ici par simplicité dans un repère cartésien lié au plan de la nappe laser ; l'axe z désigne la composante de profondeur, perpendiculaire à la nappe. Le calcul des composantes (Vx, Vy, Vz) du vecteur tridimensionnel est donc surdéterminé puisqu'on obtient un système linéaire de 4 équations à 3 inconnues. Celui-ci est résolu par application d'une méthode de moindres carrés, à l'aide du système d'équations normales associé. Le logiciel calcule ensuite les deux couples (Vx'_1, Vy'_1) et (Vx'_2, Vy'_2) correspondant au vecteur 3C trouvé. L'erreur de

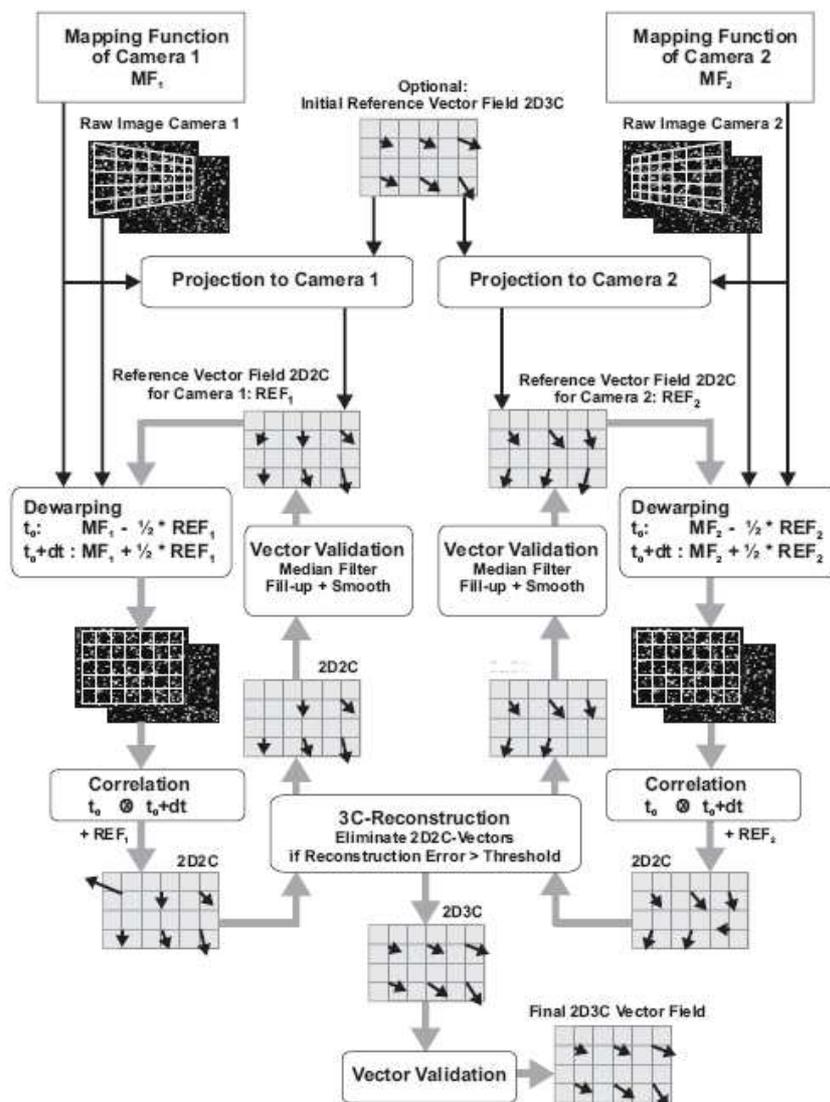


FIG. 7.9: Algorithme de calcul de vecteurs 3C utilisé par DaVis 7.1. D'après Wieneke [126].

reconstruction stéréo est alors définie comme l'écart entre ces vecteurs et les vecteurs mesurés initialement. D'après Wieneke, avec une bonne calibration et de faibles erreurs sur les champs 2C, il est alors possible d'en déduire un critère de rejet de vecteurs faux particulièrement efficace puisque pour des vecteurs non spurieux, cette erreur doit être elle aussi très faible.

7.5 Analyse des résultats

L'estimation de l'incertitude de la mesure par PIV stéréoscopique a fait l'objet d'un certain nombre d'études récentes, s'intéressant à des modes de calibration et de reconstruction des vecteurs différents [20, 35, 68, 128]. Il est cependant difficile de transposer directement ces analyses à nos résultats car nous utilisons un logiciel en mode "boîte noire" et notre dispositif introduit des erreurs qui lui sont spécifiques. On détaillera donc ici les sources d'erreur que nous avons pu identifier, et on proposera comme estimation de l'incertitude associée une comparaison avec des mesures de vitesse effectuées par fil chaud.

7.5.1 Séquence de dépouillement

Chaque double paire d'images est traitée à l'aide de l'algorithme d'"adaptive multi-pass" décrit au paragraphe 7.4.2. Un premier passage est effectué en fenêtres de 64×64 pixels, suivi par deux passages en fenêtres de 32×32 pixels. Un post-traitement est ensuite appliqué au champ de vecteurs obtenu. Il consiste en un filtre utilisant le critère Q, qui élimine les vecteurs correspondant à des pics de corrélation insuffisamment fiables, puis en un filtre médian et en une interpolation des vecteurs rejetés au terme du filtrage (voir Raffel *et al.* [97] pour plus de précisions). Pour chaque essai, nous acquérons 800 double paires d'images, ce qui correspond à 4.2 Go environ, soit la capacité de stockage d'un DVD. Nous avons vérifié que ce nombre d'images était suffisant pour assurer une bonne convergence des champs moyens. Nous avons également choisi le post-traitement de sorte qu'il permette d'éviter certaines irrégularités non physiques sur les RMS, tout en atténuant le moins possible les valeurs trouvées dans les zones effectivement turbulentes (voir la comparaison avec des mesures fil chaud au paragraphe 7.5.2).

A titre indicatif, le dépouillement d'un essai avec ces paramètres dure environ 5h30 sur les machines que nous avons utilisées, et le volume total de données enregistrées pendant la campagne est d'environ 800 Go.

7.5.2 Validation

Erreurs résiduelles

Malgré l'amélioration apportée par l'utilisation de la version 7.1 de DaVis, nous avons constaté que la calibration aboutissait tout de même à quelques erreurs systématiques au niveau du champ de vitesses. Celles-ci peuvent être liées aux erreurs introduites par le redressement des images, ou encore au fait que la nappe laser ne coïncide pas exactement avec le centre de la plaque de calibration. Cette source d'erreur, qui conduit à une interpolation en profondeur des lois de calibration moins précise, est par exemple décrite par Coudert et Schon [20]. Des travaux récents [126] ont montré qu'il était possible de la compenser en appliquant un algorithme dit d'auto-calibration. Celui-ci requiert l'utilisation d'une loi physique pour le redressement des images : on modélise alors tout le

système optique utilisé pour la formation des images PIV (calibration de type "pinhole"). L'utilisation de cette loi n'a pas donné de résultats satisfaisants dans notre cas en raison de la distortion des images induite par le hublot de visualisation, ce qui a rendu impossible tout processus d'auto-calibration.

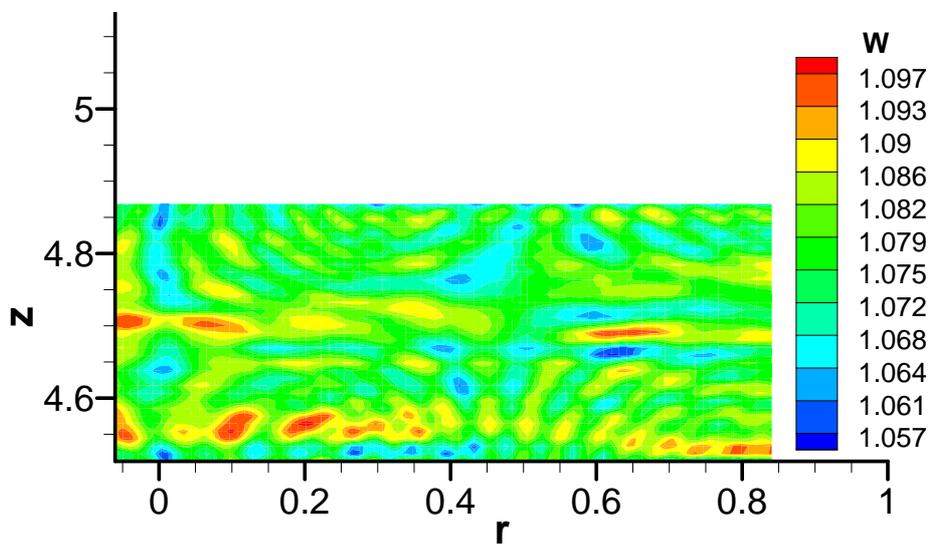
Afin d'identifier la portion de l'image la moins affectée par ces erreurs, nous avons examiné les cartographies moyennes correspondant aux nombres de swirl les plus bas et identifié des zones de gradients non physiques. Nous avons également effectué des tests utilisant le critère de reconstruction évoqué plus haut et constaté un bon accord entre les résultats et nos observations physiques. Ceci nous a conduit à finalement retenir la zone comprise dans le domaine compris axialement entre $z = 4.51$ et $z = 4.87$, et radialement entre $r = -0.06$ et $r = 0.95$. Les coordonnées sont adimensionnées par R_0 et l'origine axiale correspond au plan de sortie du nid (voir la figure 7.7). Avec la taille de fenêtre finale utilisée, les vecteurs sont espacés de 1.57 mm dans les deux directions.

Nous présentons sur la figure 7.10(a) le champ de vitesse axiale dans la zone conservée, en-dehors de la zone de couche limite, c'est-à-dire ici jusqu'à $r = 0.84$, pour l'essai $\chi_{CV} = 1$, $S = 0.22$. Celle-ci est adimensionnée par la vitesse de débit \bar{W} . Les essais fil chaud effectués à titre de comparaison montrent que l'étendue axiale de cette zone est trop faible pour que l'épaississement progressif de la couche limite mène à des gradients significatifs. On doit donc obtenir ici une vitesse axiale quasi-uniforme. La figure 7.10(a) met cependant en évidence la présence d'oscillations, que l'on a retrouvé sur tous les champs moyens obtenus lors de cette campagne. Celles-ci conduisent à une fluctuation maximale de W de 5.5% sur toute l'image (soit 0.15 m.s^{-1}). Ces oscillations ne sont pas directement détectables sur les cartographies instantanées. On les distingue également sur la figure 7.10(b), qui présente cette fois des profils de vitesse axiale dans plusieurs tranches radiales.

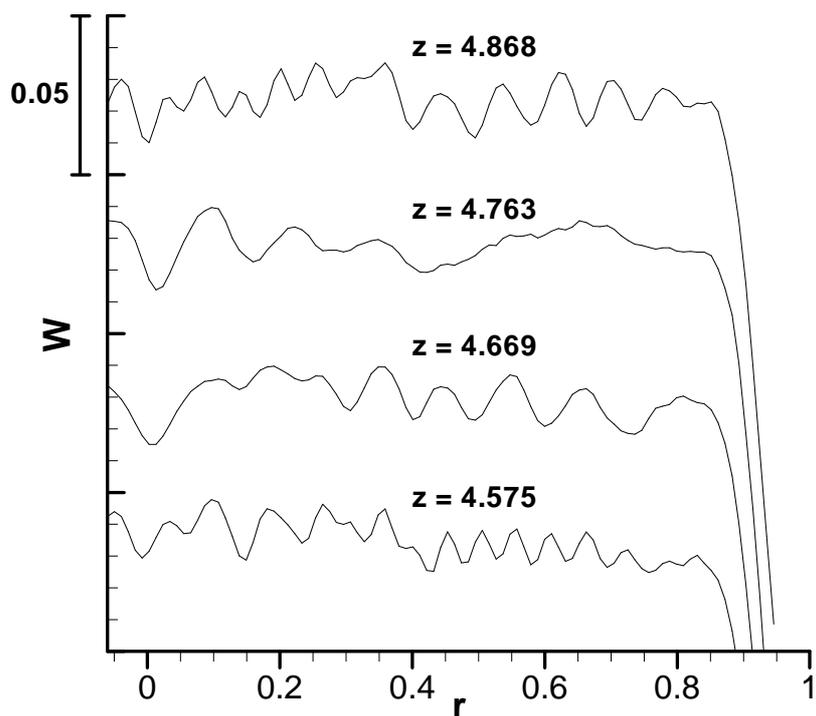
Il s'avère que ces oscillations s'organisent sous forme d'une structure similaire sur toutes les cartographies moyennes obtenues. Seule leur amplitude peut varier d'un essai à l'autre. Malgré de nombreux tests, conseillés pour certains d'entre eux par les ingénieurs de LaVision, nous n'avons pas réussi à identifier leur origine. Parmi les pistes envisageables, on peut penser à des imperfections du hublot en plexiglas ; néanmoins, quelques essais effectués en configuration de jet, sans ce hublot, ont montré un motif similaire. L'examen des histogrammes de corrélation de nos champs révèle également la présence d'un léger peak-locking. Afin de minimiser le risque d'endommager la surface de la partie haute du plexiglas par laquelle la nappe laser ressort, nous avons en effet décidé de limiter l'énergie du laser. Ceci nous a conduit à travailler à une ouverture de diaphragme relativement élevée afin de conserver tout de même un bon rapport signal sur bruit, menant finalement à une taille de particules inférieure à l'optimum de 2×2 pixels. Néanmoins, il nous paraît peu probable qu'un phénomène comme le peak-locking puisse aboutir à des oscillations aussi reproductibles alors que les champs de vitesse axiale varient d'un essai à l'autre. Finalement, une hypothèse pourrait être que ce phénomène provienne d'une organisation de l'ensemencement par la structure alvéolaire du nid d'abeilles. On constate en effet que la taille de mailles est proche de l'épaisseur de la nappe laser.

L'amplitude maximale des fluctuations observées sur la figure 7.10 représente environ 0.3 pixels en tenant compte du temps inter-images dt utilisé. Lors de la mise en rotation du nid d'abeilles par paliers, ce temps a été d'abord estimé en fonction de deux contraintes :

- Résoudre la dynamique maximale sur 6 pixels environ afin d'éviter l'aliasing



(a) Champ de vitesses, sans la couche limite.



(b) Profils suivant plusieurs rayons, avec la couche limite.

FIG. 7.10: Fluctuations résiduelles non physiques observées dans le champ de vitesse axiale moyenne, $\chi_{CV} = 1$, $S = 0.22$.

- Minimiser le nombre de paires perdues (particules sortant de la nappe entre les deux illuminations).

En pratique nous avons réalisé des corrélations sur des cartographies instantanées avant de lancer l'acquisition de certains essais afin d'ajuster la valeur de dt .

Aux faibles rotations, c'est la première contrainte qui dicte cette valeur. A mesure que la vitesse du nid augmente, ce temps doit être diminué afin de conserver une bonne corrélation dans la couche limite où la vitesse azimutale (normale à la nappe) est la plus importante. Les variations spurieuses du champ de vitesse, qui restent de l'ordre de 0.3 pixel au maximum, seront donc plus visibles sur les profils à haute rotation du taux de contraction $\chi_{CV} = 1$. En effet la vitesse axiale au centre y est peu élevée, donc résolue sur peu de pixels puisque le temps inter-images est adaptée à la vitesse de rotation maximale en périphérie.

Incertitude des champs moyens et des RMS

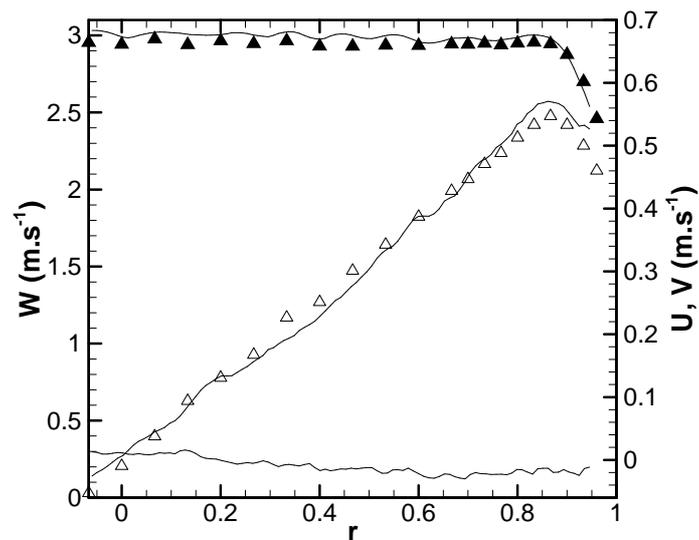
A titre de résumé, la figure 7.11 compare les vitesses moyennes et fluctuantes obtenues par PIV 3 composantes et par mesure fil chaud en $z = 4.67$ pour $\chi_{CV} = 1$.

La figure 7.11(a) montre que l'accord au niveau des vitesses moyennes est très bon. La PIV capte effectivement le haut de la couche limite, de même que le maximum de vitesse azimutale. Au centre, cette vitesse est conforme à un profil de rotation solide, avec quelques déviations rappelant les oscillations que l'on observe sur le profil de vitesse axiale. Par ailleurs, la vitesse radiale est proche de zéro conformément à ce qui était attendu : elle varie de -0.042 m.s^{-1} à 0.018 m.s^{-1} .

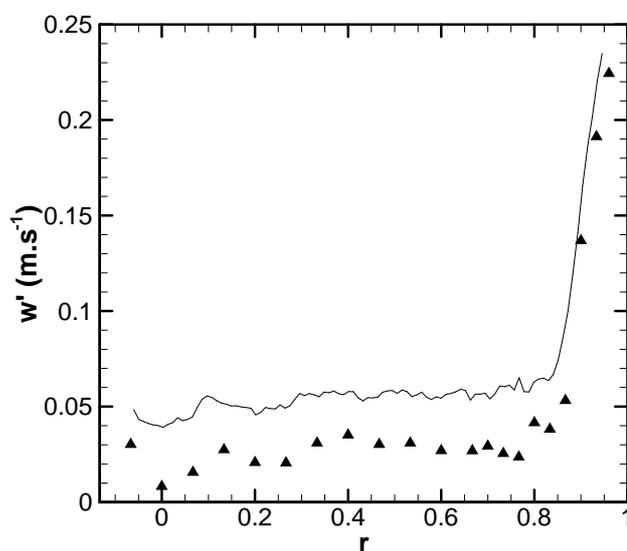
Au centre de l'écoulement, la PIV fournit des valeurs de fluctuations plus élevées que le fil chaud, en raison du plus grand nombre de vecteurs faux et de la taille plus faible des échantillons utilisés pour les opérations statistiques. En-dehors de la couche limite ces niveaux sont relativement uniformes. Les figures 7.11(b) et 7.11(c) montrent par ailleurs que la PIV détecte l'augmentation de turbulence qui se produit dans le haut de la couche limite. En un rayon donné, les niveaux trouvés sont toutefois légèrement supérieurs à ceux donnés par le fil chaud. Ces résultats montrent donc que la PIV ne peut être utilisée ici que pour une analyse qualitative du champ fluctuant.

7.5.3 Calcul des débits

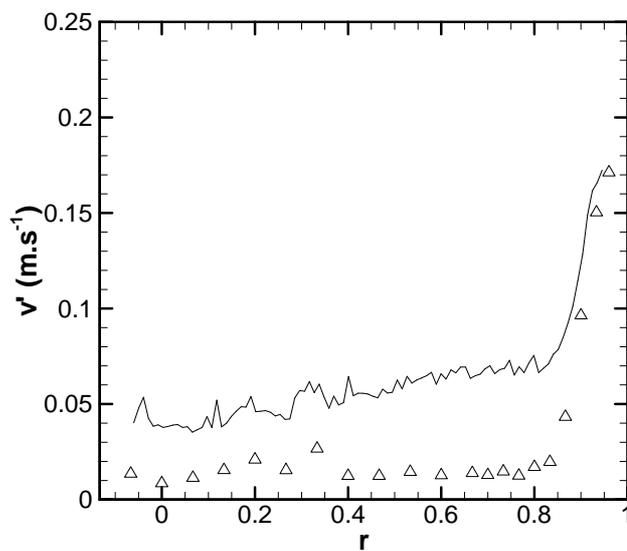
Afin d'estimer la vitesse de débit \overline{W} , la partie basse de la couche limite est modélisée par interpolation linéaire à partir du dernier point retenu dans les champs. Pour chaque tranche radiale conservée, on calcule ensuite \overline{W} par intégration puis on effectue la moyenne sur toutes ces tranches (35 en tout). Cela permet de minimiser les divers biais dus au processus de dépouillement. On trouve finalement que l'écart maximal sur tous les essais entre la tranche donnant la valeur maximale et celle donnant la valeur minimale vaut $\Delta\overline{W}_{max} = 0.11 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui donne une incertitude relative sur la détermination de \overline{W} d'un peu moins de $\pm 2\%$.



(a) Vitesses moyennes



(b) Fluctuation axiale moyenne



(c) Fluctuation azimuthale moyenne

FIG. 7.11: Comparaison des vitesses moyennes et fluctuantes, mesures PIV 3C (traits pleins) et fil chaud (symboles), $\chi_{CV} = 1$, $S = 0.22$.

8 Résultats de la campagne de PIV stéréoscopique

8.1 Introduction

De la même façon qu'au chapitre 3, on caractérise les écoulements en fonction de leur nombre de swirl et des valeurs du taux de contraction χ_{CV} . Les écoulements obtenus avec une tuyère convergente en aval seront également comparés au cas $\chi_{CV} = 1$ (conduite de section constante).

Dans tout ce qui suit, le rayon est adimensionné par le rayon de la conduite R_0 , et les vitesses moyennes par la vitesse de débit \bar{W} . Cette quantité nous servira également à adimensionner les taux de turbulence. On définit donc :

$$q_r = \frac{u'}{\bar{W}}, \quad q_\theta = \frac{v'}{\bar{W}}, \quad q_z = \frac{w'}{\bar{W}} \quad (8.1a)$$

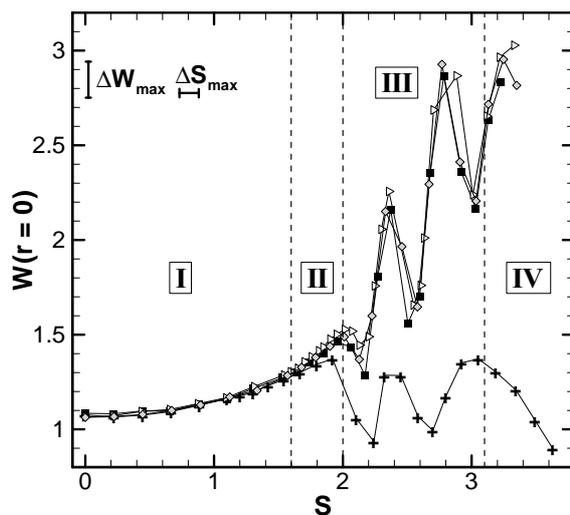
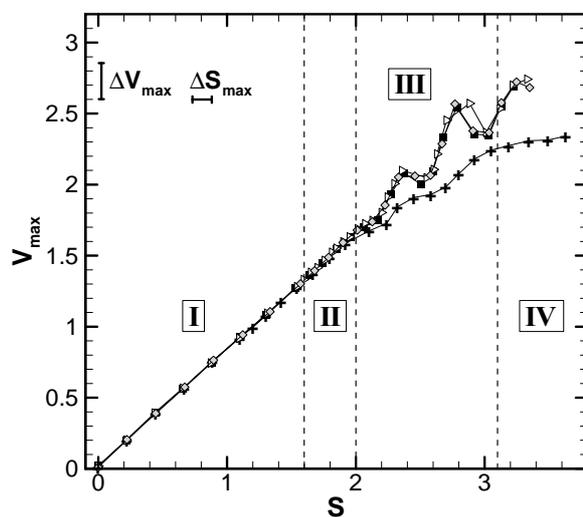
$$q = \sqrt{\frac{\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle}{2\bar{W}^2}} = \frac{\sqrt{k}}{\bar{W}} \quad (8.1b)$$

où k désigne ici l'énergie cinétique turbulente moyenne.

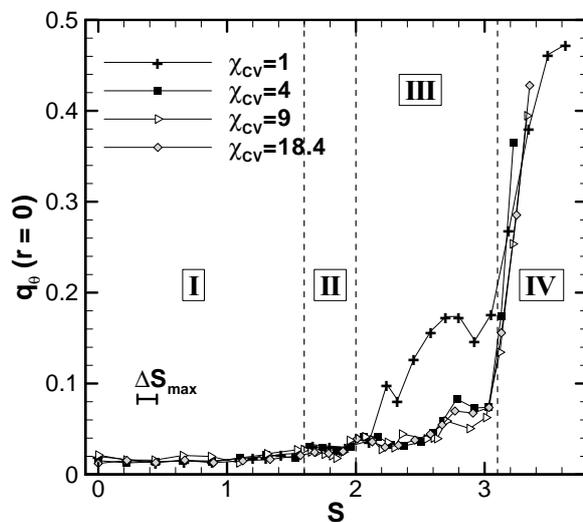
La figure 8.1 illustre l'évolution en fonction de S de quantités mesurées en $z = 4.70$, pour tous les taux de contraction. On y représente la vitesse axiale moyenne sur l'axe, la valeur maximale prise par la vitesse azimutale moyenne le long du rayon, et le taux de turbulence azimutale sur l'axe. On remarque qu'en présence d'une tuyère convergente, l'écoulement devient indépendant des valeurs de χ_{CV} . Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons donc uniquement aux écoulements obtenus dans les cas $\chi_{CV} = 1$ et 18.4. Cette dernière valeur est choisie en raison de la très bonne stabilité de \bar{W} au cours de la mise en rotation du nid (voir le chapitre 2).

En anticipant sur certaines observations à venir, cette comparaison entre conduite de section constante et tuyère convergente permet alors de distinguer quatre régimes différents :

- I. $0 < S < 1.6$: les écoulements avec et sans convergent sont indépendants de la valeur de χ_{CV} .
- II. $1.6 < S < 2$: des différences sont observées entre $\chi_{CV} = 1$ et $\chi_{CV} > 1$, mais l'écoulement reste localement supercritique.
- III. $2 < S < 3.1$: l'écoulement est localement sous-critique, et le taux de turbulence reste faible au centre pour $\chi_{CV} > 1$.
- IV. $3.1 < S < 3.4$: l'écoulement devient également fortement turbulent au centre pour $\chi_{CV} > 1$.

(a) Vitesse axiale moyenne en $r = 0$ 

(b) Maximum de la vitesse azimutale moyenne le long du rayon

(c) Taux de turbulence azimutal en $r = 0$ FIG. 8.1: Définition des quatre régimes d'écoulement. Toutes les grandeurs sont relevées en $z = 4.70$.

Dans le cas $\chi_{CV} = 1$, la distinction entre régimes III et IV n'est pas pertinente puisqu'aucune rupture de comportement significative n'est observée autour de $S \approx 3.1$.

La figure 8.2 montre deux exemples de profils de vitesse axiale et azimutale moyenne en $z = 4.70$, ainsi que les courbes obtenues par fit aux moindres carrés à l'aide des fonctions suivantes :

$$W = (1 + \alpha_0 J_0(\alpha_1 r) + \alpha_2 J_2(\alpha_3 r)) (1 - e^{-\alpha_4(1-r)}) \quad (8.2a)$$

$$V = \left[\beta_0 \ln \left(\frac{\cosh(\beta_1(r - \beta_2))}{\cosh(-\beta_1\beta_2)} \right) + \beta_3 r \right] (1 - e^{-\beta_4(1-r)}) \quad (8.2b)$$

ou

$$V = (\beta_0 J_1(\beta_1 r) + \beta_2 J_3(\beta_3 r) + \beta_4 J_5(\beta_5 r)) (1 - e^{-\beta_6(1-r)}) \quad (8.2c)$$

J_i désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre i . Dans ces fonctions, le dernier facteur du membre de droite représente la couche limite. Il faut en effet tenir compte de cette contribution pour déterminer de manière précise le seuil entre les régimes super ou sous-critique de l'écoulement. Ce dernier point a été testé à l'aide de la méthode introduite par Benjamin [10], qui permet de s'affranchir de la résolution d'un système aux valeurs propres. Les lois (8.2a) et (8.2c) s'inspirent des lois analytiques trouvées pour les ondes de Kelvin dans le cas d'un écoulement amont d'advection uniforme et rotation solide (équation (5.13), chapitre 5). Nous avons introduit des fonctions de Bessel d'ordre supérieur pour plus de précision. La loi (8.2c) a été utilisée en particulier pour l'écoulement $\chi_{CV} = 1$, $S = 2.10$ de la figure 8.2. La loi (8.2b) a été construite en observant que pour la plupart des valeurs de S à $\chi_{CV} > 1$, les profils de vitesse azimutale sont constitués de deux zones approximativement linéaires, situées de part et d'autre du maximum de vitesse, puis de la zone de couche limite. Cette loi est en fait la primitive d'une fonction tangente hyperbolique avec un décalage en hauteur, en origine et en rapidité de variation.

Ces fonctions nous serviront à déterminer la valeur de S à partir de laquelle les écoulements trouvés deviennent localement sous-critiques, ainsi qu'à tester les critères de stabilité locale introduits au chapitre 4. Sur tous les graphiques représentant des profils de vitesse dans la direction radiale, ce seront par contre les résultats expérimentaux et non ces fonctions qui seront présentés, à la cote $z = 4.70$. Nous avons choisi cette dernière valeur car elle correspond à une zone de l'image où les oscillations parasites sont minimales.

8.2 Écoulement supercritique

8.2.1 Régime I : $0 < S < 1.6$

Pour les valeurs de S les plus basses, on constate que les écoulements obtenus pour $\chi_{CV} = 1$ et $\chi_{CV} > 1$ ne présentent pas de différence. Ils sont caractérisés par une déformation progressive du profil de vitesse axiale moyenne, qui tend à devenir parabolique avec une survitesse au centre et un défaut de vitesse périphérique. Cette évolution est illustrée sur la figure 8.3, qui montre les profils de vitesse aux valeurs $S = 0$ et $S \approx 1.55$. Signalons par ailleurs que pour tous les nombres de swirl du régime I, l'écoulement reste cylindrique : nous n'observons pas de gradients axiaux en $r = 0$.

Cette parabolisation progressive peut être liée au système de rotation, ou à la dynamique de l'écoulement lui-même. Elle est résumée sur la figure 8.4 dans le cas $\chi_{CV} = 18.4$.

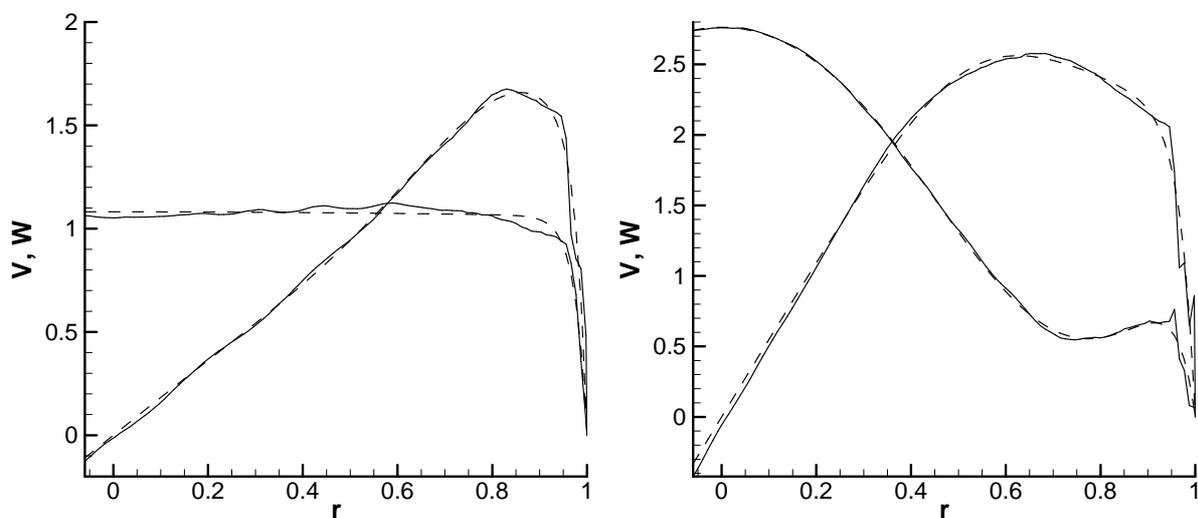


FIG. 8.2: Comparaison entre profils expérimentaux (traits pleins) et lois analytiques (tirets), $\chi_{cv} = 1$, $S = 2.10$ (gauche), $\chi_{cv} = 18.4$, $S = 3.13$ (droite).

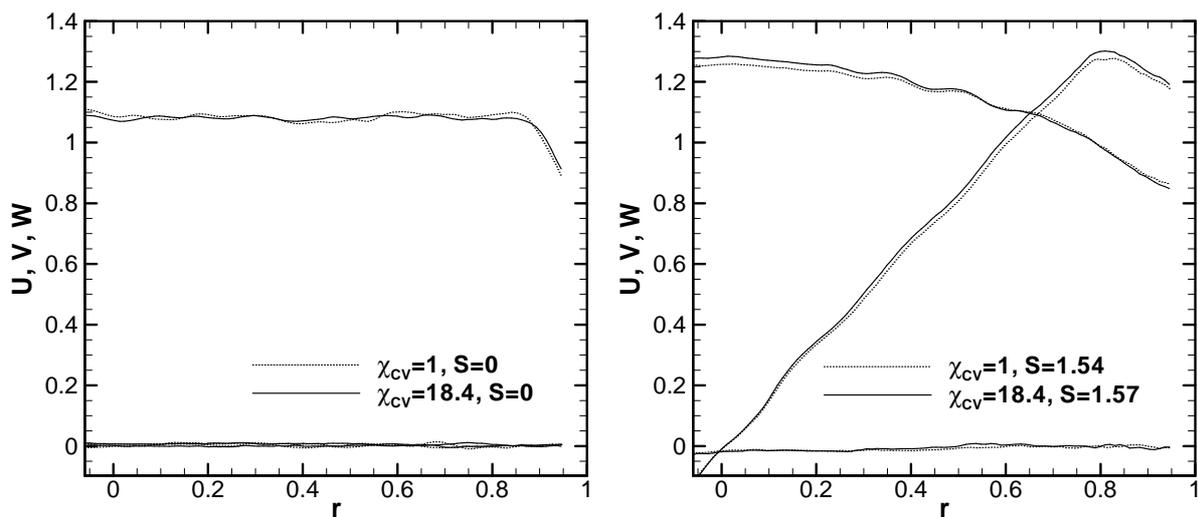


FIG. 8.3: Regime I : profils de vitesse moyenne obtenus pour $S = 0$ (figure de gauche) et $S \approx 1.55$ (figure de droite), en $z = 4.70$.

Un mécanisme possible lié à la physique de l'écoulement peut être le gauchissement des lignes de vorticit   d      l'  paississement progressif de la couche limite de l'  coulement entre le plan de sortie du nid d'abeilles et la zone de visualisation PIV. La couche limite jouerait alors le r  le d'une faible contraction sur le tube de courant en rotation solide, induisant une cr  ation de vorticit   azimutale positive menant    un profil de vitesse axiale parabolique (voir le paragraphe 5.3.3 du chapitre 5 pour plus d'explications sur ce m  canisme).

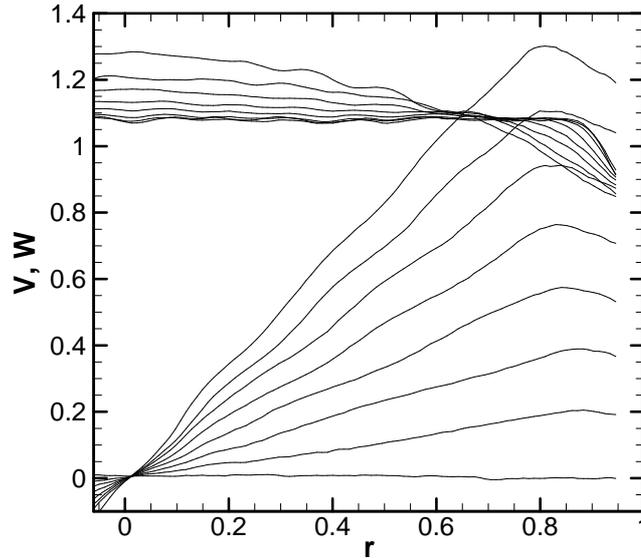


FIG. 8.4: Profils de vitesse axiale et azimutale moyenne en $z = 4.70$, $S = 0$    1.57 , $\chi_{CV} = 18.4$.

Afin de d  terminer si cette derni  re hypoth  se est r  aliste, nous allons supposer qu'en sortie de nid d'abeilles, le profil de vitesse axiale reste du type advection uniforme en-dehors de la couche limite quel que soit S , et que l'  paisseur de celle-ci en cet endroit ne varie pas non plus avec S . On peut alors appliquer le mod  le de Batchelor du paragraphe 5.3.3 au tube de courant en rotation solide, dont nous approcherons ici le nombre de swirl par S afin de conserver un mod  le simple. Rappelons que l'  coulement en aval d'une contraction (ou d'une dilatation) du tube de courant, la fonction de courant axisym  trique ψ devient :

$$\psi = \frac{r^2}{2} + ArJ_1(2Sr) \quad (8.3)$$

la constante A   tant d  termin  e par la conservation de la masse. On trouve alors pour la vitesse angulaire Ω et pour la vitesse axiale W :

$$\Omega = S \left(1 + \frac{2A}{r} J_1(2Sr) \right) \quad (8.4a)$$

$$W = 1 + 2ASJ_0(2Sr) \quad (8.4b)$$

Par un d  veloppement de Taylor en $r = 0$, on obtient alors :

$$W(r = 0) = \frac{\Omega(r = 0)}{S} = 1 + 2AS \quad (8.5)$$

Si l'hypoth  se que nous venons de faire est juste, alors notre   coulement doit v  rifier cette relation. Il est important de remarquer ici que cette   galit   est aussi valable pour d  crire

les ondes de Kelvin axisymétriques stationnaires qui se superposent à un écoulement de rotation solide et advection uniforme dans une conduite de section constante (voir le paragraphe 5.3.1 du chapitre 5). Cette constatation nous sera très utile dans l'étude du régime sous-critique.

La figure 8.5 représente les deux quantités de l'équation (8.5). Signalons que dans le raisonnement ci-dessus, Ω désignait la vitesse angulaire adimensionnée (par \bar{W}/R_0), de sorte que le rapport Ω/S devient égal, en variables dimensionnelles, à Ω/Ω_0 . Nous observons que l'augmentation de $W(r=0)$ dépend approximativement de S^2 , tandis que $\Omega(r=0)/\Omega_0$ augmente de façon beaucoup moins prononcée, si l'on excepte le premier point de fonctionnement en rotation, caractérisé par une valeur plus faible que tous les autres. Ce modèle simple ne semble donc expliquer que très partiellement la parabolisation du profil de vitesse axial, dans la mesure où les deux quantités augmentent avec S mais dans des proportions différentes. Il n'est donc pas possible à ce stade de tirer des conclusions plus précises sur l'origine de ce phénomène. Peut-être faut-il chercher la différence entre $W(r=0)$ et $\Omega(r=0)/\Omega_0$ dans la dissipation turbulente dans la couche limite, à l'origine d'une décroissance axiale du moment angulaire de l'écoulement, ou encore dans la particularité du système de mise en rotation. Dans ce dernier cas, on peut par exemple penser que par un effet de perte de charge variable suivant le rayon, l'écoulement axial arrivant au niveau du nid d'abeilles serait préférentiellement ralenti à la périphérie, induisant une accélération centrale par conservation de la masse.

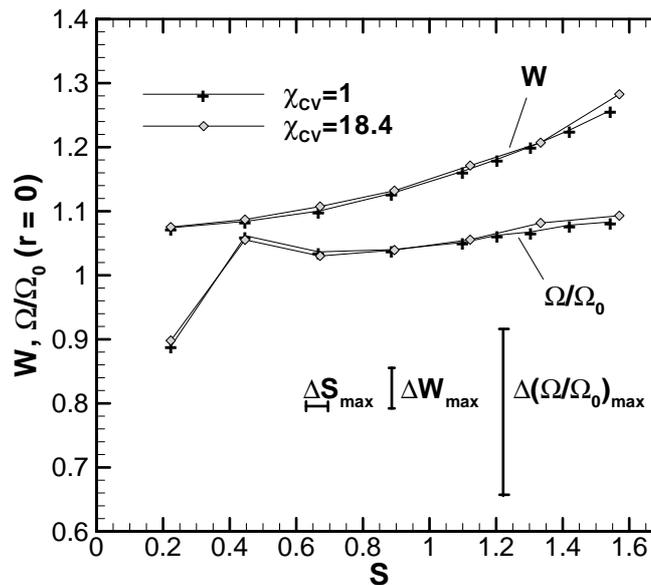


FIG. 8.5: Vitesse axiale et vitesse angulaire en $r=0$ en fonction de S , régime I, $\chi_{CV} = 1$ et 18.4.

8.2.2 Régime II : $1.6 < S < 2$

Lorsque S est supérieur à 1.6, on observe un écart progressif entre les valeurs maximales de $W(r=0)$ pour $\chi_{CV} = 1$ et $\chi_{CV} > 1$. La parabolisation du profil augmente plus dans le second cas que dans le premier. De plus, on observe l'apparition de gradients axiaux : la vitesse axiale au centre décroît de l'amont vers l'aval pour $\chi_{CV} = 1$ alors qu'elle croît pour $\chi_{CV} > 1$. Cette accélération dans le cas de la tuyère convergente est liée à la proximité de la transition critique. Nous avons en effet vu au chapitre 5 que

lorsque S_0 augmente vers la limite critique, la décélération de vitesse axiale à la paroi à l'entrée du convergent (et donc l'accélération de celle-ci au centre), se "propage" progressivement vers l'amont (voir en particulier la figure 5.3). Par ailleurs, lors des sondages de vitesse par fil chaud en sortie de jet, nous avons constaté en pratique qu'un éclatement pouvait être mis en évidence précisément à partir de $S \approx 1.6$. Nous pensons donc que la décélération observée dans le cas $\chi_{CV} = 1$ est liée à l'apparition de cet éclatement dans le jet. La figure 8.6 résume ces observations, en comparant les écoulements obtenus à $S \approx 1.55$ et $S \approx 1.91$.

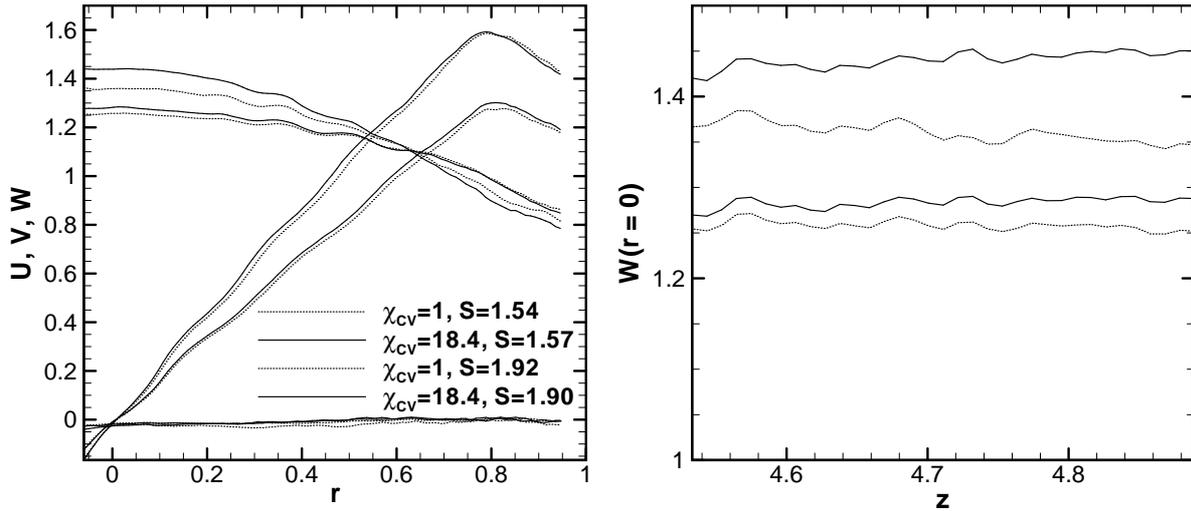


FIG. 8.6: Ecoulements obtenus à $S \approx 1.55$ et $S \approx 1.91$, $\chi_{CV} = 1$ et 18.4. Profils de vitesse en $z = 4.70$ (figure de gauche), vitesse axiale en $r = 0$ (figure de droite).

8.3 Transition critique

Les premiers écoulements identifiés comme sous-critiques sont obtenus pour $S = 2.10$ ($\chi_{CV} = 1$) et pour $S = 2.01$ ($\chi_{CV} = 18.4$). Les figures 8.7 et 8.8 représentent la transition du dernier écoulement supercritique mesuré vers cet écoulement sous-critique dans les deux cas.

Dans le cas $\chi_{CV} = 1$, le passage au régime sous-critique est marqué par la transformation du profil de vitesse axiale, sur lequel un défaut de vitesse apparaît au centre. Pour $\chi_{CV} = 18.4$ au contraire, la survitesse sur l'axe augmente. Cette décroissance de la vitesse axiale sur l'axe pour $\chi_{CV} = 1$ s'accompagne logiquement d'un élargissement (ici relativement faible) du coeur tourbillonnaire, de sorte que la vitesse angulaire au centre diminue. L'écoulement reste par ailleurs caractérisé par un gradient axial de vitesse axiale négatif en $r = 0$ pour $\chi_{CV} = 1$ et positif pour $\chi_{CV} = 18.4$.

8.4 Ecoulement sous-critique, $\chi_{CV} = 1$, $S > 2$

8.4.1 Eclatement tourbillonnaire

La figure 8.9 représente les profils de vitesse moyenne obtenus à $S = 2.24$. Elle montre que le défaut de vitesse au centre de l'écoulement est encore plus marqué que pour

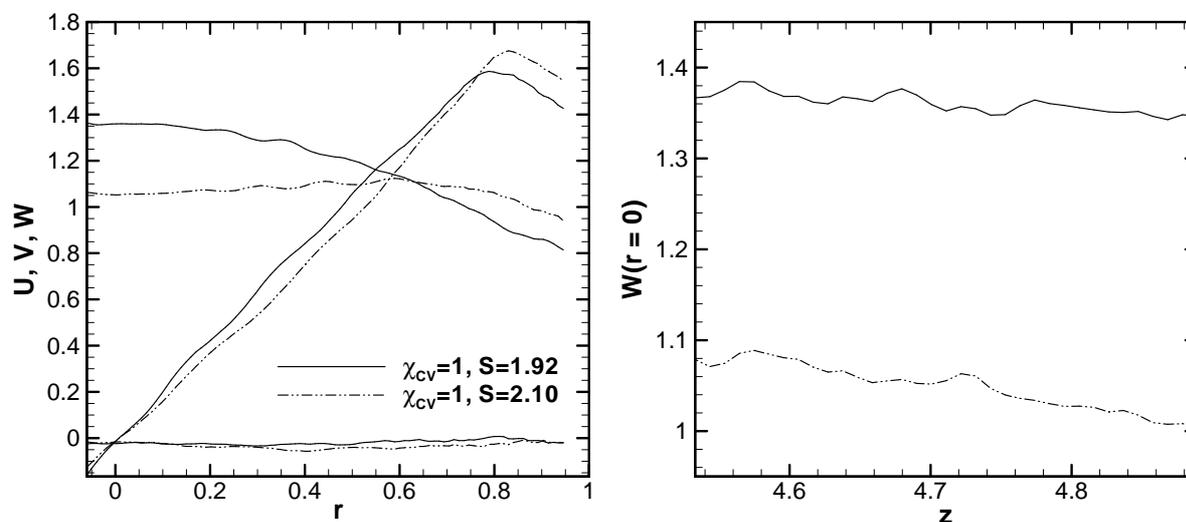


FIG. 8.7: Dernier écoulement supercritique ($S = 1.92$) et premier écoulement sous-critique ($S = 2.10$), $\chi_{cv} = 1$. Profils de vitesse en $z = 4.70$ (figure de gauche), vitesse axiale en $r = 0$ (figure de droite).

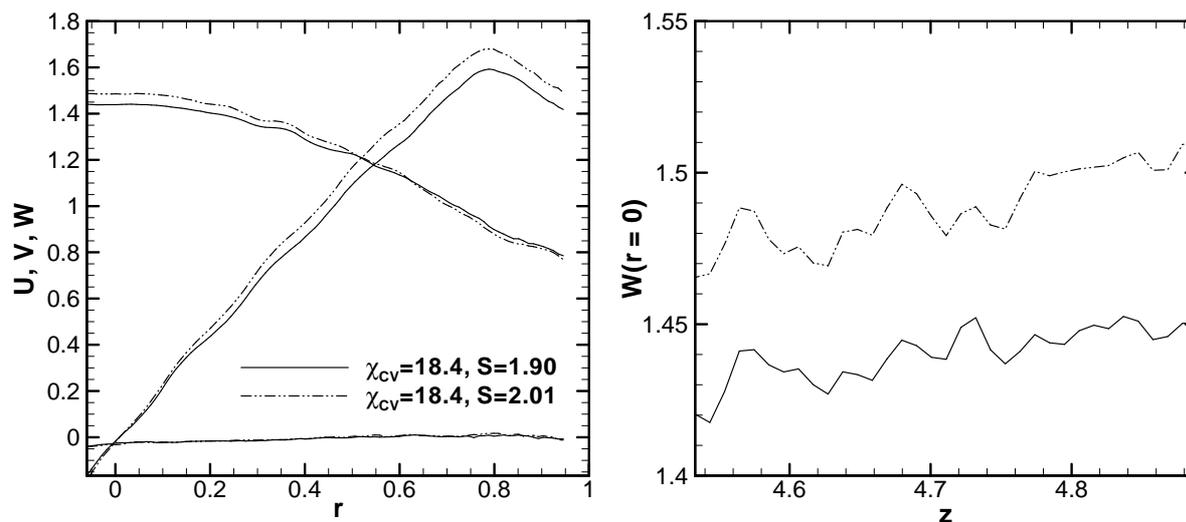


FIG. 8.8: Dernier écoulement supercritique ($S = 1.90$) et premier écoulement sous-critique ($S = 2.01$), $\chi_{cv} = 18.4$. Profils de vitesse en $z = 4.70$ (figure de gauche), vitesse axiale en $r = 0$ (figure de droite).

$S = 2.10$. La figure 8.1(c) montre de plus qu'à cette valeur de S , une instabilité hélicoïdale ($|m| = 1$) est détectée dans l'écoulement, puisque le taux de turbulence azimuthale en $r = 0$ croît brusquement à partir de cette valeur (voir l'équation (4.3a) du chapitre 4).

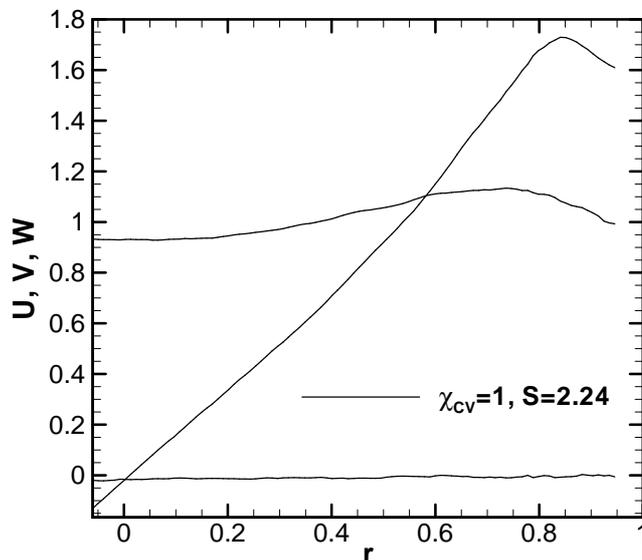


FIG. 8.9: Profils de vitesse moyenne en $z = 4.70$, $S = 2.24$ ($\chi_{CV} = 1$).

Ces trois propriétés (déficit de vitesse au centre, écoulement localement sous-critique, présence d'une instabilité hélicoïdale) correspondent à celles que vérifient les écoulements en aval de régions d'éclatement tourbillonnaire, comme le montre la revue que nous avons effectuée au chapitre 4. Il est donc très probable qu'à $S = 2.24$, notre écoulement présente une région d'éclatement située entre le nid d'abeilles et la zone sondée. Si tel est le cas, il est également probable que cet éclatement soit très proche du plan de sortie du nid d'abeilles en raison de la géométrie de la conduite. La valeur relativement importante de $W(r = 0)$ en dépit du déficit de vitesse peut sembler étonnante, mais signalons que dans certaines expériences des éclatements sans recirculation ont été mis en évidence (voir par exemple Novak et Sarpkaya [88]), ce qui est peut-être le cas ici.

8.4.2 Ondes stationnaires

L'instabilité hélicoïdale qui apparaît pour $S = 2.24$ se maintient pour tous les nombres de swirl supérieurs, comme le montre la figure 8.1(c). Nous en proposerons une caractérisation détaillée plus loin. Intéressons-nous pour le moment à l'évolution de $W(r = 0)$ et $\Omega(r = 0)/\Omega_0$ en fonction de S en $z = 4.70$, qui est représentée sur la figure 8.10. Celle-ci montre également le profil axial de $W(r = 0)$ pour ces valeurs de S , numérotées de 1 à 12 pour faciliter la lecture des courbes. Lorsque S continue d'augmenter à partir de 2.24, $W(r = 0)$ n'évolue pas de façon monotone. On observe ainsi la présence de deux maxima locaux ($S = 2.32$ et $S = 3.19$), également présents dans l'évolution de $\Omega(r = 0)/\Omega_0$. Cette quantité obéit au même comportement mais avec des variations d'amplitude moindre. Les valeurs prises par $W(r = 0)$ pour les écoulements localement sous-critiques, à $S > 2$, sont par ailleurs toujours inférieures à la valeur trouvée pour le dernier écoulement localement supercritique ($S = 1.90$). Ainsi que nous l'avons mentionné plus haut, un écoulement stationnaire, cylindrique, consistant en un mouvement

de rotation solide et advection uniforme et abritant des ondes de Kelvin axisymétriques doit vérifier la relation (8.5) qui stipule l'égalité de $W(r=0)$ et $\Omega(r=0)/\Omega_0$. Même si ce modèle semble grossier pour modéliser notre écoulement, nous trouvons un bon accord entre les évolutions de $W(r=0)$ et $\Omega(r=0)/\Omega_0$ à défaut d'une égalité rigoureuse. Ceci confirme le rôle fondamental joué par les ondes de Kelvin axisymétriques dans cet écoulement, ainsi que la pertinence des analyses linéaires pour décrire dans ce cas particulier des régimes non linéaires (voir la discussion du paragraphe 5.2.2).

Un autre élément en faveur de la présence d'ondes stationnaires dans l'écoulement est l'accord trouvé entre l'amplitude de $W(r=0)$ et les gradients axiaux correspondants. On constate globalement que les valeurs minimales ou maximales correspondent à des gradients axiaux faibles (points 1, 2, 5 et 8) tandis que les valeurs intermédiaires correspondent à des gradients positifs ou négatifs (points 3, 4, 6, 7, 9 à 12). Le signe de ces gradients suivant l'évolution de $W(r=0)$ nous semble cohérent avec une physique d'ondes stationnaires, dont la longueur d'onde λ diminue progressivement à mesure que S augmente. Rappelons que pour l'écoulement d'advection uniforme et rotation solide, celle-ci vaut $\lambda = 2\pi/(4S_0^2 - j_{1,1}^2)^{1/2}$ (voir le paragraphe 5.3.1). Nous pensons ainsi que l'évolution de la figure 8.10 peut être liée au resserrement progressif de ces ondes à S croissant, dont on voit alors "défiler" les maxima et minima spatiaux successifs en visualisant l'écoulement à z fixé. Notons que Mattner *et al.* [83] ont mis en évidence des ondes stationnaires en aval de bulles d'éclatement dans leurs mesures LDV en conduite confinée (voir le chapitre 4).

8.4.3 Instabilités hélicoïdales et axisymétriques

La figure 8.11(a) représente le taux de turbulence q_θ en $r=0$ en fonction de S , et montre que celui-ci suit une croissance quasi-monotone au-delà de $S \geq 2.24$. Les deux minima locaux observés en $S = 2.32$ et $S = 3.19$, s'ils peuvent être considérés comme physiquement pertinents, semblent être corrélés aux maxima locaux de vitesse axiale au centre. Réciproquement, les maxima locaux de q_θ semblent donc corrélés au défaut de vitesse axiale moyenne plus ou moins important au centre.

Cette croissance de q_θ au centre de l'écoulement signifie que la perturbation trouvée est hélicoïdale ($|m|=1$), puisque seuls ces modes possèdent une fluctuation de vitesse radiale et azimutale non nulle au centre de l'écoulement (voir l'équation (4.3a) du chapitre 4). La figure 8.11(b) représente, toujours en $z = 4.70$, le profil du coefficient de corrélation des fluctuations radiales entre le centre et un point donné de l'écoulement, $R_{uu}(0, r)$, défini de façon traditionnelle par

$$R_{uu}(0, r) = \frac{\langle u'(0)u'(r) \rangle}{\langle u'^2(0) \rangle^{1/2} \langle u'^2(r) \rangle^{1/2}}. \quad (8.6)$$

L'évolution de ces profils montre effectivement que cette perturbation correspond à un déplacement d'ensemble du coeur tourbillonnaire, sur une portion radiale qui s'élargit à mesure que S augmente. Pour $S = 3.34$, le "battement" concerne quasiment l'écoulement tout entier. A titre d'illustration, nous représentons sur les figures 8.12 et 8.13 des profils instantanés correspondant aux maxima atteints dans cet écoulement.

Notons enfin que pour les valeurs les plus élevées de S , ici $S \geq 3.49$, on observe également une croissance du taux de turbulence axiale au centre, suggérant la présence d'une instabilité axisymétrique (voir l'équation (4.2)). Celle-ci conduit à des recirculations transitoires dans l'écoulement, observées uniquement pour $S = 3.63$. Nous en représentons un exemple sur la figure 8.14.

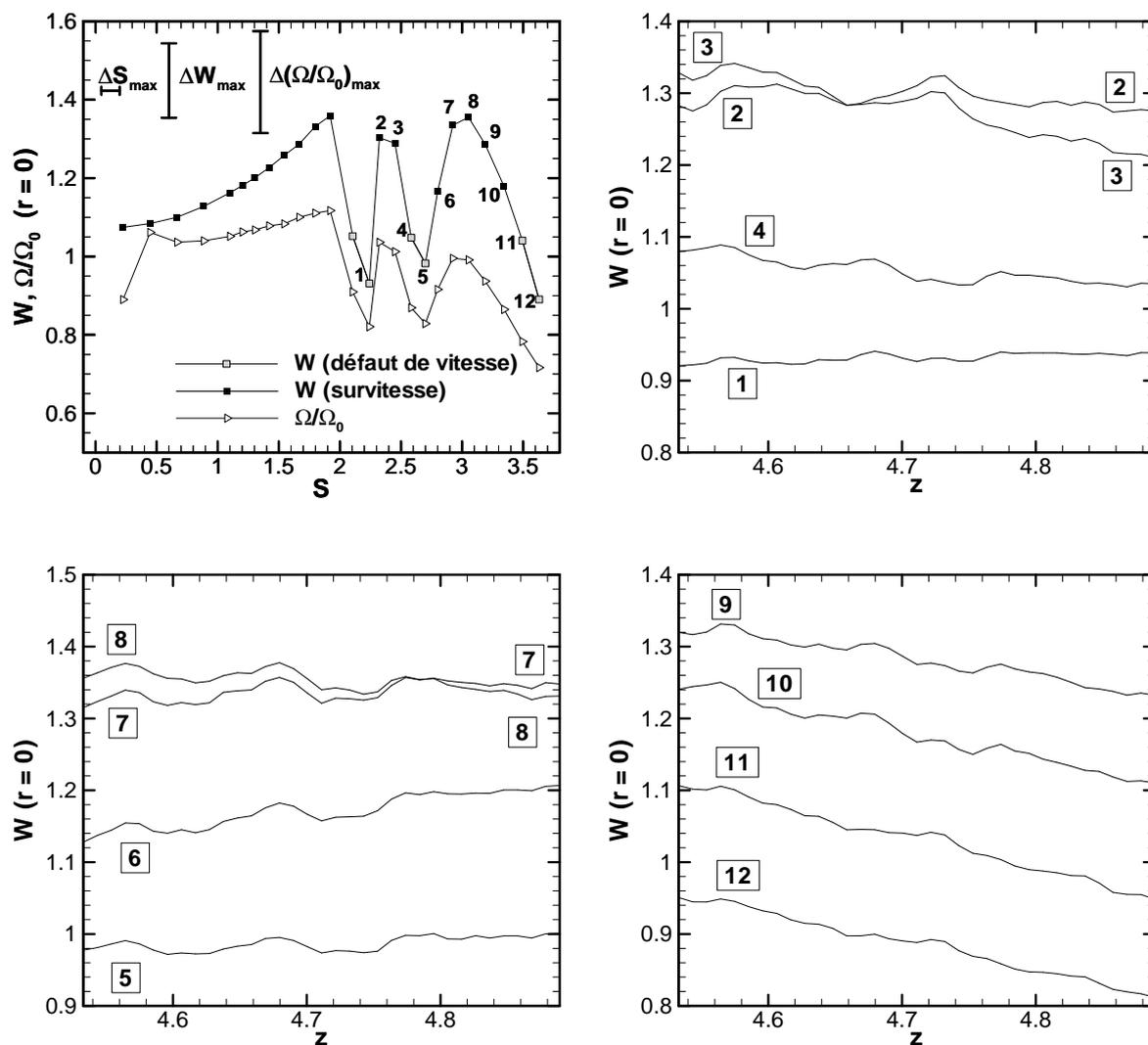
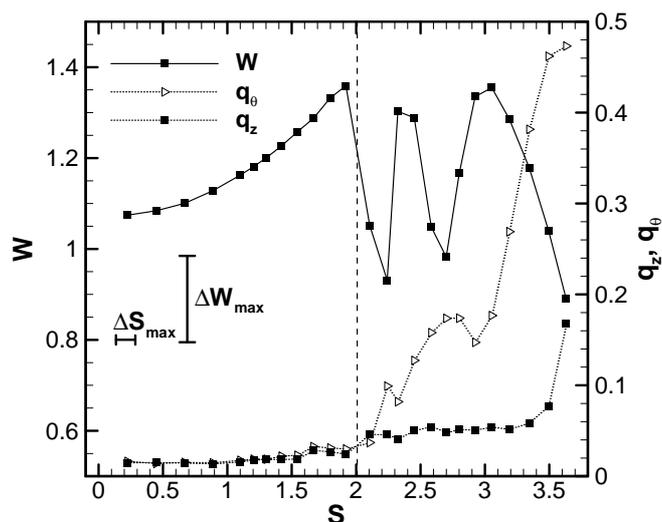
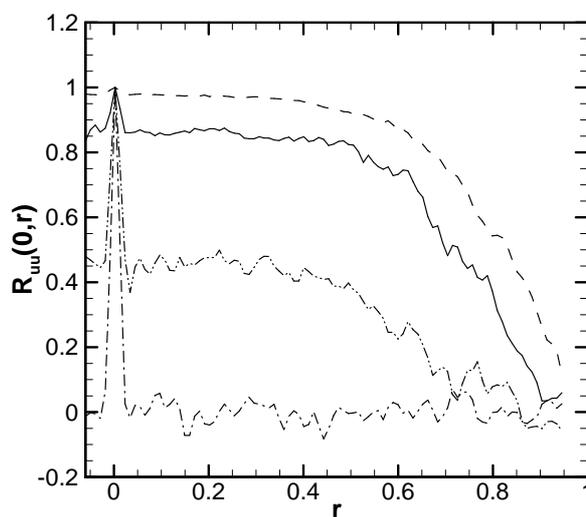


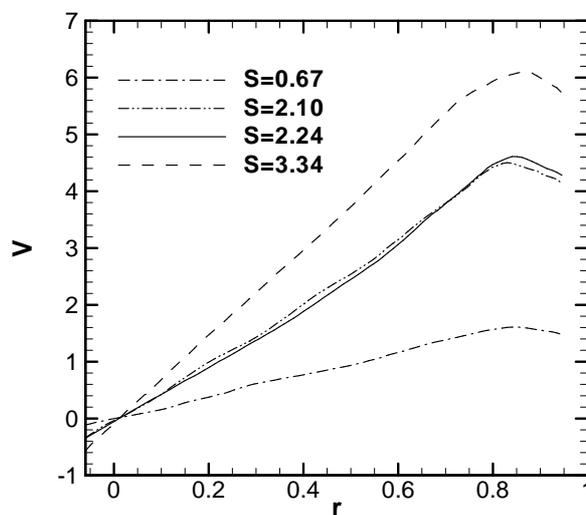
FIG. 8.10: Evolution de $W(r=0)$ et $\Omega(r=0)/\Omega_0$ en fonction de S (en haut à gauche), puis profil axial de $W(r=0)$ pour les points numérotés de 1 à 12 ($\chi_{CV} = 1$).



(a) Evolution des taux de turbulence et de la vitesse axiale moyenne en $r = 0$ en fonction de S

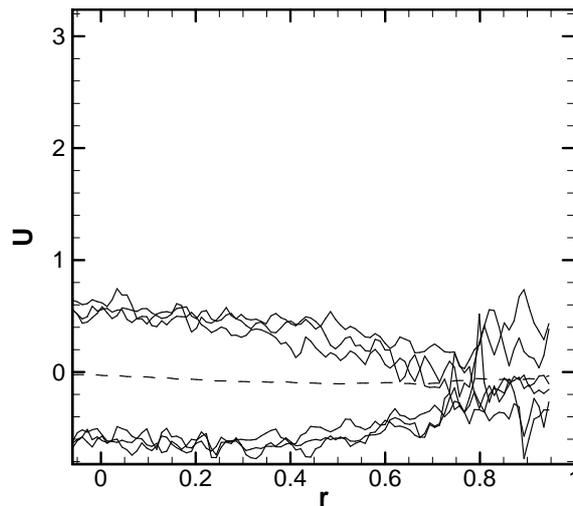


(b) Coefficient de corrélation des fluctuations radiales au centre $R_{uu}(0, r)$ pour $S = 0.67, 2.10, 2.24$ et 3.34

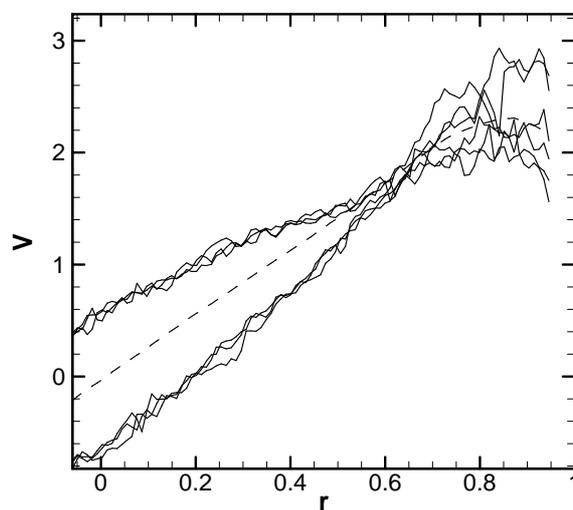


(c) Profils de vitesse azimutale moyenne correspondants

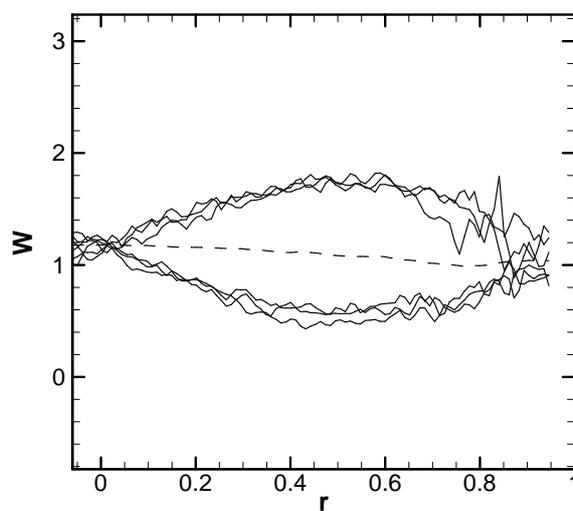
FIG. 8.11: Instabilité héliçoïdale dans le régime sous-critique, $\chi_{CV} = 1$.



(a) Vitesse radiale



(b) Vitesse azimutale



(c) Vitesse axiale

FIG. 8.12: Profils de vitesse instantanée réalisant les maxima de l'instabilité héliçoïdale, $\chi_{CV} = 1$, $S = 3.34$, $z = 4.70$. La vitesse moyenne correspondante est représentée en tirets.

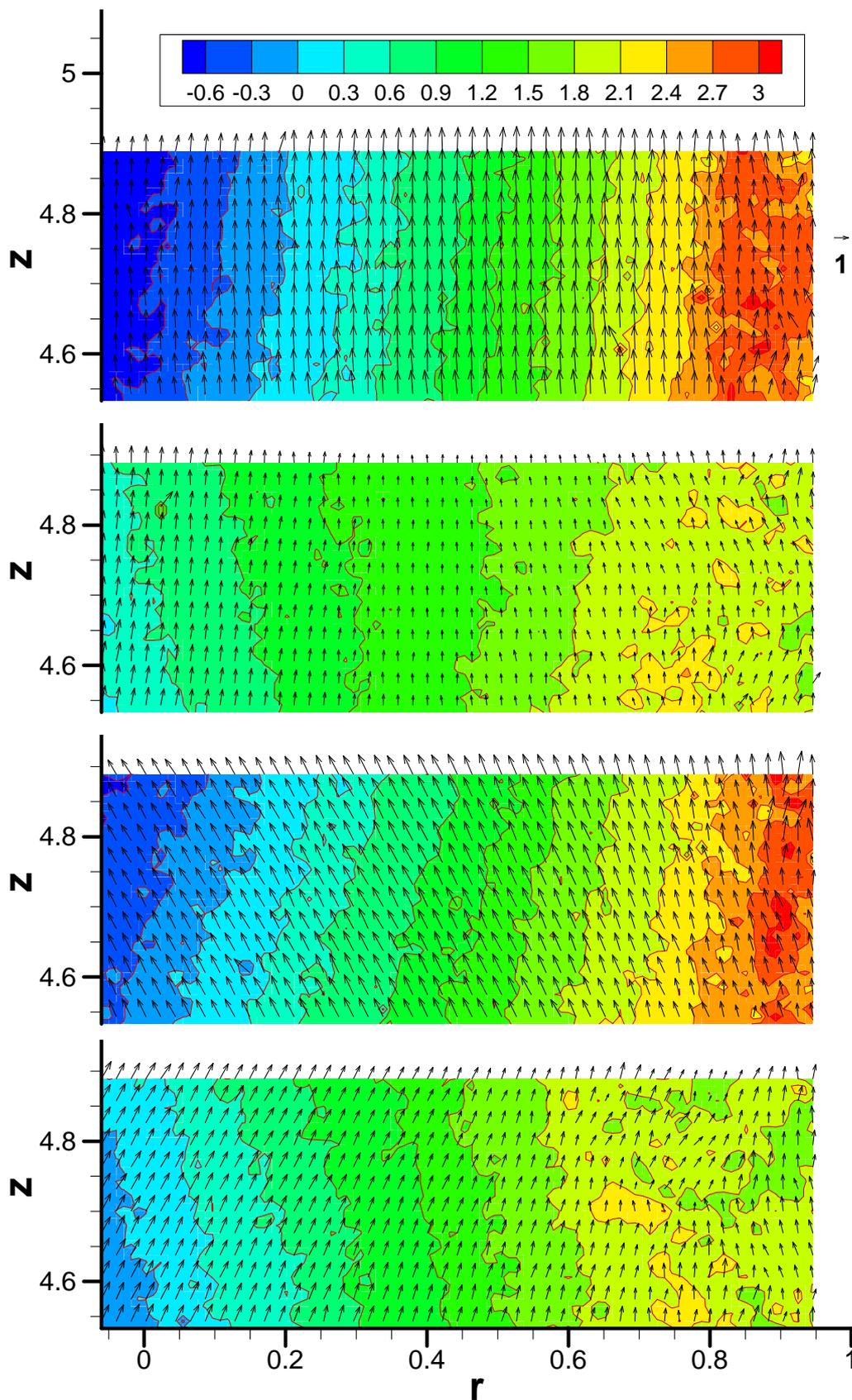


FIG. 8.13: Cartographies de vitesse instantanée réalisant les maxima de l'instabilité hélicoïdale, $\chi_{CV} = 1$, $S = 3.34$. La vitesse azimutale est représentée en couleur.

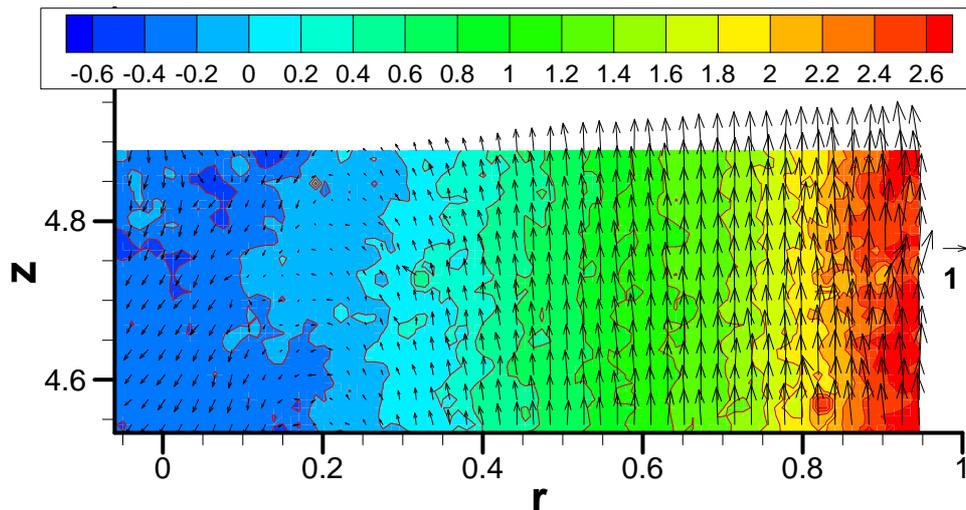


FIG. 8.14: Cartographie de vitesse instantanée avec recirculation axiale, $\chi_{CV} = 1$, $S = 3.63$.

Remarque Les résultats que nous venons de décrire appellent certains commentaires. Rappelons d'abord que le passage au régime sous-critique s'accompagne ici d'une augmentation de la perte de charge menant à une variation de débit de l'ordre de 10%. Le nombre de Reynolds de l'écoulement diminue donc du même ordre (voir la figure 2.4 du chapitre 2). De plus, l'amplitude des fluctuations turbulentes devient très importante pour les valeurs les plus élevées de S , ce qui rend l'utilisation des vitesses moyennes moins pertinent. Afin de caractériser plus finement le régime sous-critique dans ce cas, il serait donc nécessaire à l'avenir d'imposer un contrôle du débit sur la soufflerie, ainsi que de réaliser les acquisitions d'images PIV de façon conditionnelle, pour pouvoir calculer des moyennes de phase.

8.5 Écoulement sous-critique, $\chi_{CV} > 1$

8.5.1 Ondes stationnaires

La figure 8.15 est l'analogie de la figure 8.10 pour le cas $\chi_{CV} = 18.4$. Elle montre tout d'abord qu'au contraire du cas non contracté, aucun profil présentant de défaut de vitesse au centre n'est observé lorsqu'une tuyère convergente est disposée à l'aval. De plus, $W(r = 0)$ atteint cette fois des valeurs très élevées (jusqu'à $3\bar{W}$ environ), et fait apparaître trois maxima successifs ($S = 2.23, 2.77$ et 3.25). Il est à noter que contrairement au cas $\chi_{CV} = 1$, ces minima et maxima d'ondes successifs ne se situent plus à des niveaux comparables mais sont croissants en fonction de S . Nous donnerons une interprétation à ce point dans le chapitre suivant, au paragraphe 9.2.2. L'accord entre l'amplitude relative de $W(r = 0)$ par rapport aux minima et maxima atteints lors de l'évolution à S croissant et les gradients axiaux de $W(r = 0)$ est meilleur que dans le cas $\chi_{CV} = 1$, ceux-ci étant ici de plus grande amplitude. De plus, pour $2 < S < 3.1$ (régime III, qui sera caractérisé au paragraphe suivant), l'écoulement reste faiblement turbulent au centre : on pourra se référer par exemple à la figure 8.1(c). On constate toutefois une légère augmentation des taux de turbulence au centre pour $S \approx 2.6 - 2.7$, mais qui n'est pas comparable à celle qui se produit pour $S \approx 3.1$. On peut donc raisonnablement faire l'hypothèse que dans le cas $\chi_{CV} > 1$, le passage à un régime

sous-critique se fait **sans éclatement**. Il semble plutôt qu'une transition continue vers un régime d'ondes stationnaires faiblement turbulent se mette en place. Signalons de plus qu'**aucun décollement de couche limite** n'a été observé dans la zone de PIV.

Afin d'illustrer, pour certaines valeurs de S , l'importance du resserrement du coeur tourbillonnaire et de la création de vorticité azimutale positive qui s'ensuit, nous présentons sur la figure 8.16 les profils de vitesse moyenne obtenus en $z = 4.70$ pour $S = 2.58$ et $S = 2.77$. Alors que l'augmentation de S reste modérée, le maximum de vitesse azimutale se déplace de $r = 0.8$   $r = 0.6$ environ, et la vitesse axiale au centre évolue de 1.66 à 2.95 environ.

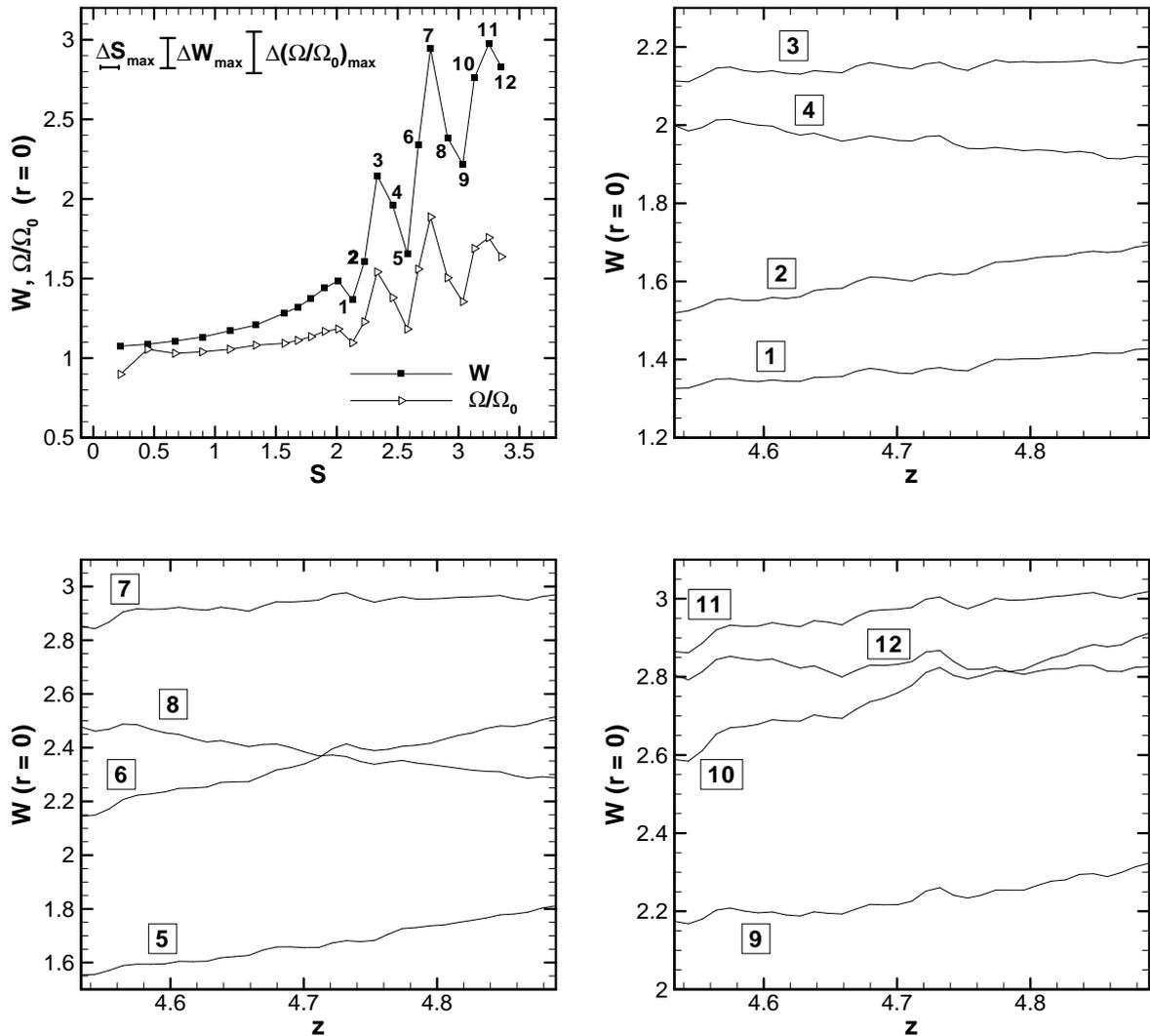


FIG. 8.15: Evolution de $W(r = 0)$ et $\Omega(r = 0)/\Omega_0$ en fonction de S (en haut à gauche), puis profil axial de $W(r = 0)$ pour les points numérotés de 1 à 12 ($\chi_{CV} = 18.4$).

Afin de tester l'hypothèse d'une transition vers le régime sous-critique menant à un régime d'ondes stationnaires sans éclatement, nous avons tenté de reproduire la courbe donnant $W(r = 0)$ en fonction de S pour $S > 2$. Pour ce faire nous avons considéré un modèle d'écoulement de rotation solide et advection uniforme abritant une onde stationnaire d'amplitude constante, et examiné l'évolution de la vitesse axiale à une distance égale à 4.70 de l'extrémité amont de l'écoulement. Pour $2 < S < 3.4$, ce modèle met

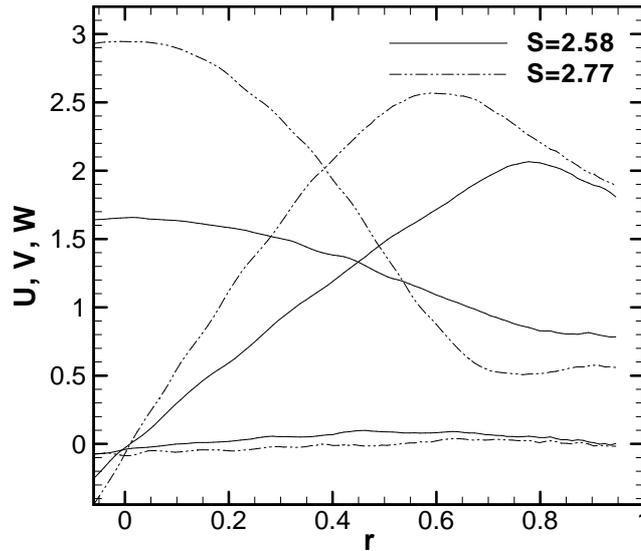


FIG. 8.16: Profils de vitesse moyenne obtenus en $z = 4.70$ pour $S = 2.58$ et 2.77 ($\chi_{CV} = 18.4$).

en évidence la présence de 5 maxima locaux au lieu des 3 observés expérimentalement. Comme on pouvait s'y attendre, un tel modèle grossier, local et non visqueux, ne permet pas de décrire avec précision nos régimes d'écoulement. Le chapitre 9 propose une simulation numérique plus complète à bas nombre de Reynolds, qui permettra de confirmer plus rigoureusement cette hypothèse.

8.5.2 Régime peu turbulent au centre (III) : $2 < S < 3.1$

La figure 8.17 montre que le régime III est caractérisé par un faible taux de turbulence au centre de l'écoulement : à la différence du cas $\chi_{CV} = 1$, nous n'observons pas ici d'instabilités hélicoïdales. En revanche, on note une augmentation progressive du taux de turbulence total q dans la région périphérique de l'écoulement. Les figures 8.18(a) et 8.18(b) montrent l'apparition progressive d'un maximum de turbulence localisé entre $r = 0.5$ et 0.6 lorsque le nombre de swirl augmente. Comme dans le cas de l'instabilité hélicoïdale étudiée au paragraphe précédent, cette évolution de q en fonction de S semble liée à l'amplitude locale de l'onde stationnaire. Signalons que les oscillations visibles sur les profils dans la zone centrale de l'écoulement sont très probablement non physiques et liées à la PIV, dans la mesure où elles sont d'allure similaire à celles observées sur le champ moyen (voir le paragraphe 7.5.2).

Afin de mieux comprendre l'origine de cette turbulence dans la zone de périphérie de l'écoulement, nous avons d'abord représenté pour les profils moyens des écoulements du régime III la quantité $(rV)_r/r$, et le nombre de Richardson local $J(r)$. Ainsi que nous l'avons vu au chapitre 4, ces grandeurs permettent de définir respectivement une condition nécessaire d'instabilité de cisaillement azimutal pour les perturbations bidimensionnelles ($(rV)_r/r$ s'annule en un point au moins de l'écoulement) et une condition nécessaire d'instabilité centrifuge axisymétrique (critère de Richardson : $J(r) < 1/4$ en un point au moins de l'écoulement). Nous trouvons que les écoulements du régime III ne peuvent présenter d'instabilité de cisaillement azimutal, ce qui était attendu puisque les profils de vitesse azimutale moyenne ne présentent pas de point d'inflexion, et que le critère de Richardson est vérifié pour $r \geq 0.85$ pour tous les régimes d'écoulement. Néan-

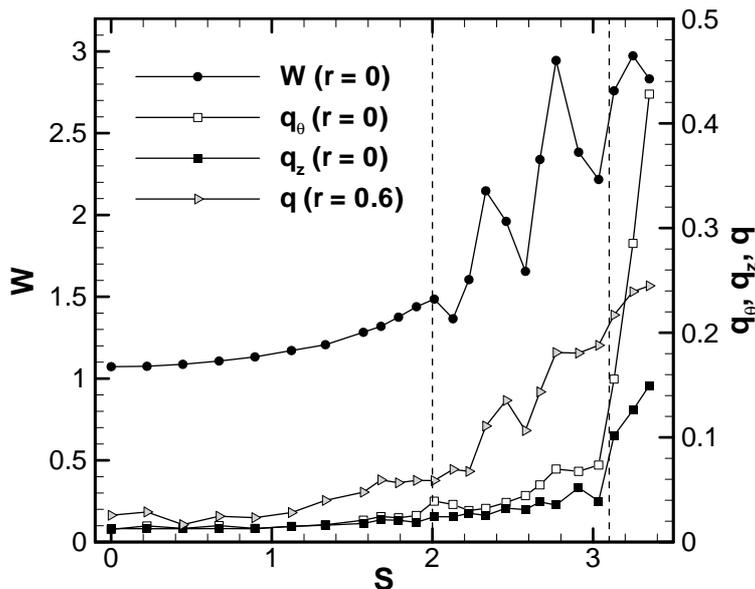
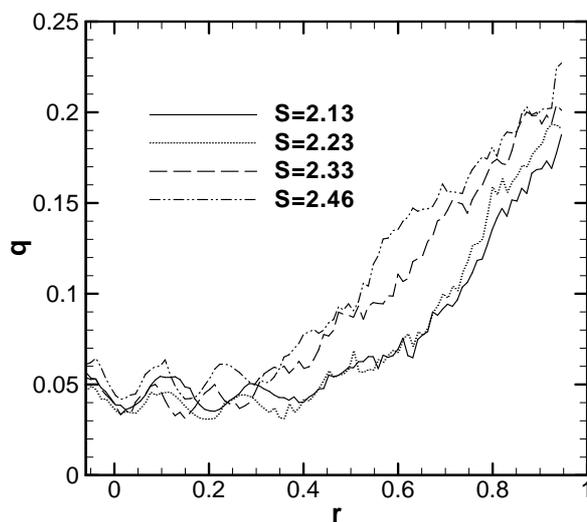
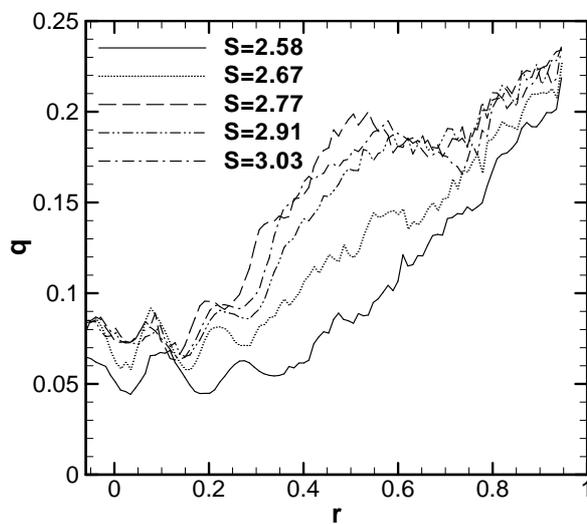


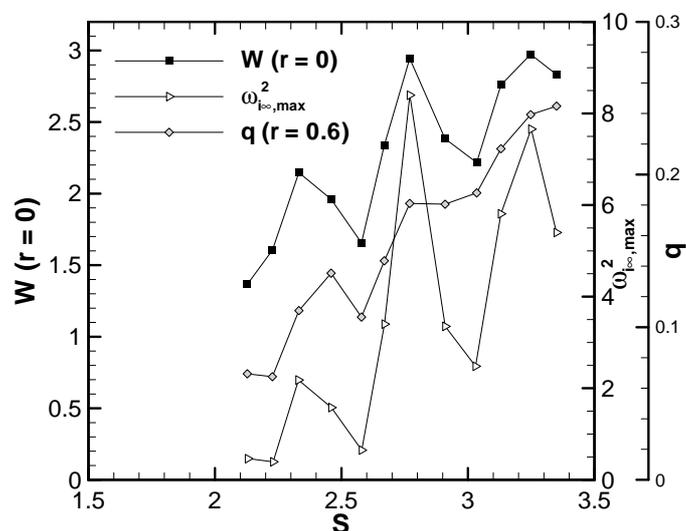
FIG. 8.17: Vitesse axiale moyenne, taux de turbulence azimutale et axiale en $r = 0$, taux de turbulence en $r = 0.6$ en fonction de S ($\chi_{CV} = 18.4$).

moins, aucune instabilité axisymétrique n'est a priori présente dans l'écoulement pour ce régime puisque le taux de turbulence axial en $r = 0$ n'augmente que très faiblement en fonction de S .

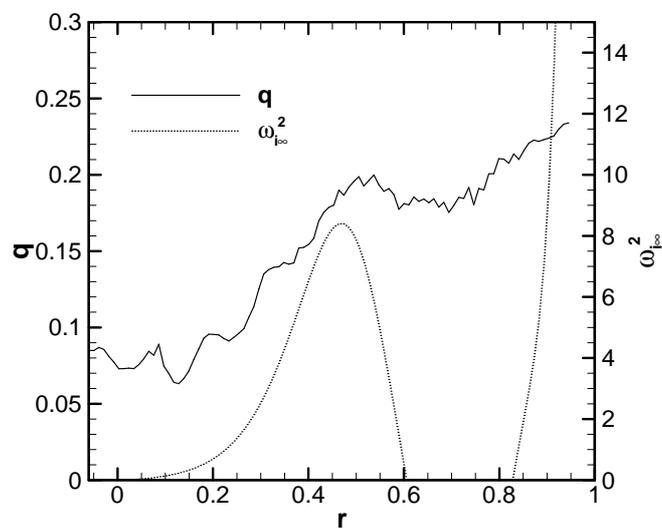
Notons à titre indicatif que les écoulements du régime III présentent un point d'inflexion sur le profil de vitesse axiale et vérifient la condition nécessaire de cisaillement de Batchelor et Gill (4.4) pour toutes les valeurs de k/m . L'implication d'instabilités de cisaillement axial dans la production de turbulence n'est donc pas à exclure, même si ce critère nécessaire s'appliquant à des écoulements sans vitesse de rotation ne peut ici avoir qu'une valeur qualitative. Une étude complète de stabilité locale pourrait répondre plus précisément à cette question.

L'implication d'instabilités centrifuges de petite échelle est en revanche plus claire à démontrer. La figure 8.19(a) représente la valeur maximale le long du rayon, en $z = 4.70$, du taux d'amplification de Leibovich et Stewartson $\omega_{i\infty}^2$ défini par l'équation (4.8), pour des valeurs croissantes de S . Rappelons que selon l'analyse de Leibovich et Stewartson, des instabilités centrifuges de petites échelles apparaissent aux endroits de l'écoulement où $\omega_{i\infty}^2 > 0$. Nous trouvons que ces instabilités sont effectivement présentes dans la périphérie de l'écoulement, et la figure 8.19(a) montre que l'évolution du maximum de $\omega_{i\infty}^2$ selon le rayon est pilotée par l'amplitude locale de l'onde stationnaire, qui introduit des gradients dans la direction radiale plus ou moins importants. L'évolution de q en $r = 0.6$ en fonction de S ne suit cependant pas ce comportement de façon aussi nette. Nous pensons que la turbulence observée dans la zone de PIV au régime III, si elle peut être effectivement liée à des instabilités de petite échelle, n'est pas forcément d'origine uniquement locale. Dans la mesure où d'autres maxima d'onde doivent être présents en amont de cette zone, la valeur de q observée serait donc plus le résultat d'un cumul de ces instabilités, de sorte qu'un critère sur les profils locaux serait insuffisant pour caractériser cette valeur. Néanmoins, dans le cas d'un écoulement avec de forts gradients de vitesse dans la direction radiale (ici $S = 2.77$), nous observons une bonne correspondance entre le profil radial de $\omega_{i\infty}^2$ et celui de q (figure 8.19(b)), confirmant que ces gradients participent effectivement au phénomène.

(a) $S = 2.13, 2.23, 2.33$ et 2.46 (b) $S = 2.58, 2.67, 2.77, 2.91$ et 3.03 FIG. 8.18: Profils de taux de turbulence, régime III ($z = 4.70, \chi_{CV} = 18.4$).



(a) Evolution en fonction de S du maximum radial de $\omega_{i\infty}^2$, de $q(r=0.6)$ et de $W(r=0)$



(b) Comparaison de profils de $\omega_{i\infty}^2$ et $q(r=0.6)$ pour $S = 2.77$

FIG. 8.19: Calcul du taux d'amplification asymptotique $\omega_{i\infty}^2$ de Leibovich et Stewartson [75] pour les écoulements du régime III ($z = 4.70$, $\chi_{CV} = 18.4$).

8.5.3 Régime fortement turbulent au centre (IV) : $3.1 < S < 3.4$

Lorsque $S > 3.1$, l'écoulement devient également turbulent au centre, comme le rappelle la figure 8.17. Celle-ci montre en effet une augmentation simultanée de q_z et q_θ , qui suggère l'apparition de perturbations axisymétriques et hélicoïdales. Néanmoins l'augmentation de q_θ reste la plus significative, et atteint les mêmes valeurs que dans le cas $\chi_{CV} = 1$. La figure 8.20 représente les profils de q_r , q_θ et q_z obtenus pour les trois valeurs $S = 3.13$, 3.25 et 3.35, ainsi que le profil des tensions de Reynolds adimensionnées $q_{r\theta}$, définies par

$$q_{r\theta} = \frac{\langle u'(r)v'(r) \rangle^{1/2}}{\bar{W}}. \quad (8.7)$$

La valeur importante de $q_{r\theta}$ en $r = 0$ pour $S = 3.35$ confirme que l'instabilité observée n'est pas purement hélicoïdale et que la croissance de q_z ne peut pas être un avatar de la PIV. En effet dans le cas d'un mode purement hélicoïdal ($|m| = 1$), les fluctuations radiale et azimutale sont en quadrature de phase en $r = 0$, ce qui implique la nullité de $q_{r\theta}$.

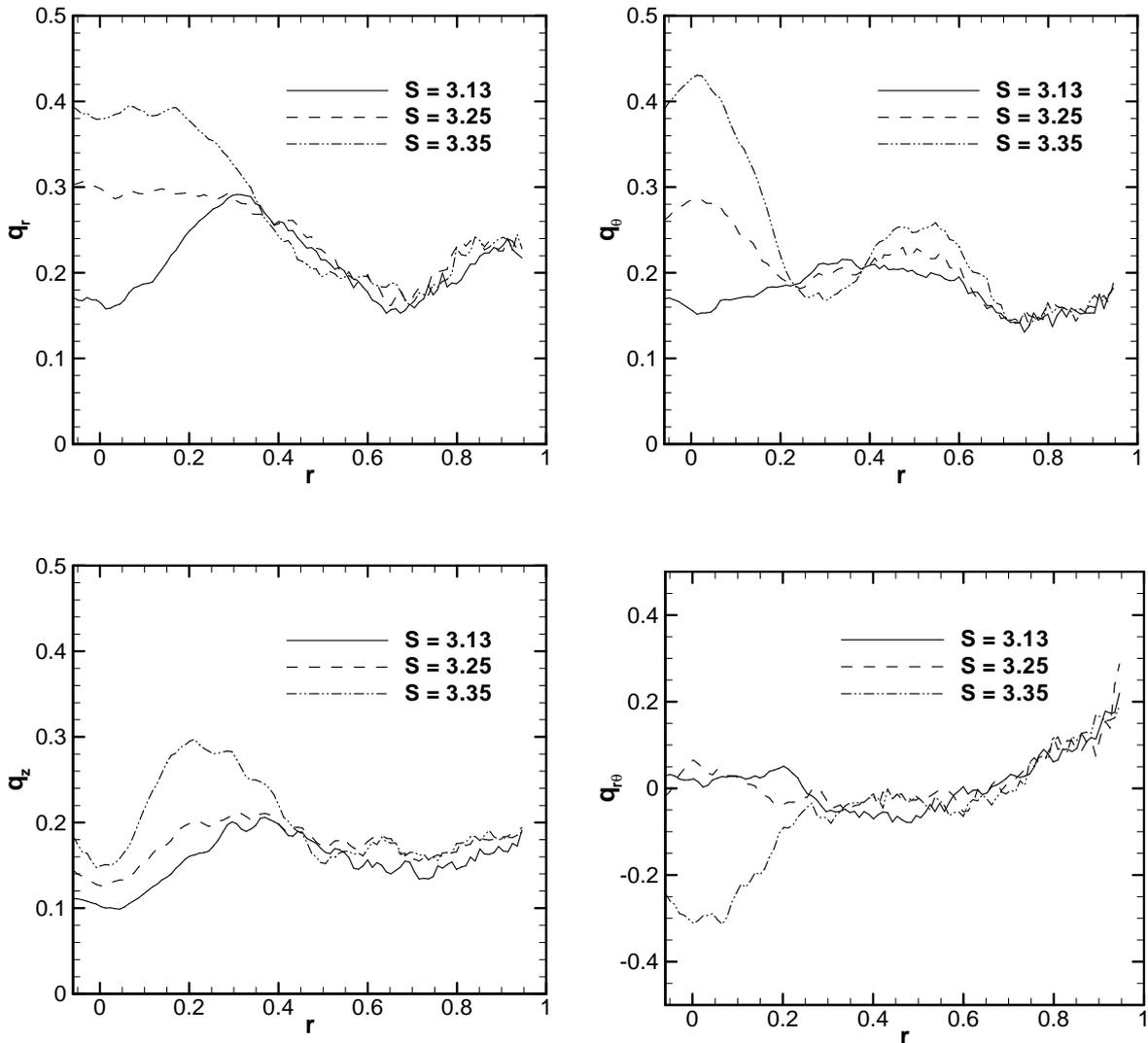


FIG. 8.20: Profils de q_r , q_θ , q_z et $q_{r\theta}$, $S = 3.13$, 3.25 et 3.35 ($\chi_{CV} = 18.4$).

La figure 8.21 compare les profils de $R_{uu}(0, r)$ obtenus pour les écoulements de ce régime. Elle montre l'élargissement progressif de l'échelle intégrale lorsque S augmente. En particulier pour $S = 3.35$, $R_{uu}(0, r)$ conserve des valeurs élevées jusque $r = 0.5$ environ. Néanmoins, le mouvement fluctuant reste beaucoup moins cohérent que dans le cas $\chi_{CV} = 1$, comme en témoigne la comparaison avec la figure 8.11(b).

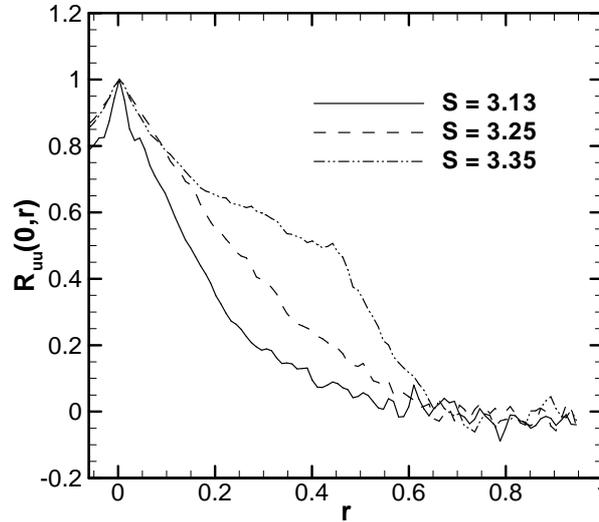


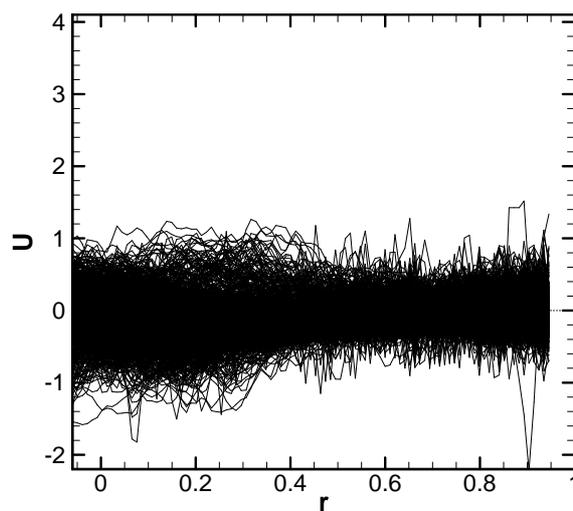
FIG. 8.21: Coefficient de corrélation $R_{uu}(0, r)$, $S = 3.13, 3.25$ et 3.35 ($\chi_{CV} = 18.4$).

Nous présentons enfin sur la figure 8.22 la superposition des profils de vitesse instantanée obtenues en $z = 4.70$ à $S = 3.35$, afin d'illustrer l'amplitude des fluctuations les plus turbulentes. Il est intéressant de constater que dans la zone périphérique de l'écoulement ($r > 0.6$), la vitesse axiale atteint des valeurs très faibles. A certains instants, des valeurs négatives de W sont même atteintes. L'examen des cartographies correspondantes montre qu'il s'agit de recirculations locales de faible extension spatiale, qui apparaissent comme des bouffées turbulentes de petite échelle. La figure 8.23 en montre des exemples sur quatre cartographies instantanées, ciblées sur la zone de périphérie du champ de vitesse.

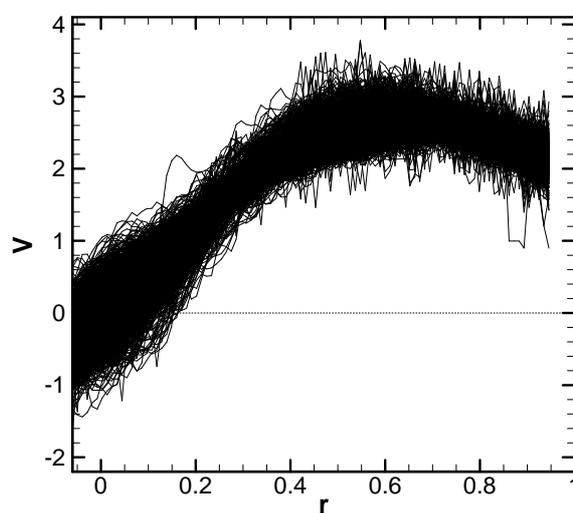
8.6 Comparaison avec les mesures fil chaud

La figure 8.24 compare l'évolution en fonction de S des fluctuations moyennes de vitesse axiale w' et azimutale v' obtenues par PIV en $z = 4.70$ pour $\chi_{CV} = 18.4$, et par fil chaud dans le plan de sortie de cette tuyère. Comme au chapitre 3, ces grandeurs sont représentées en deux valeurs du rayon adimensionné par le rayon local de la conduite, $r/R(z) = 0$ et 0.6 .

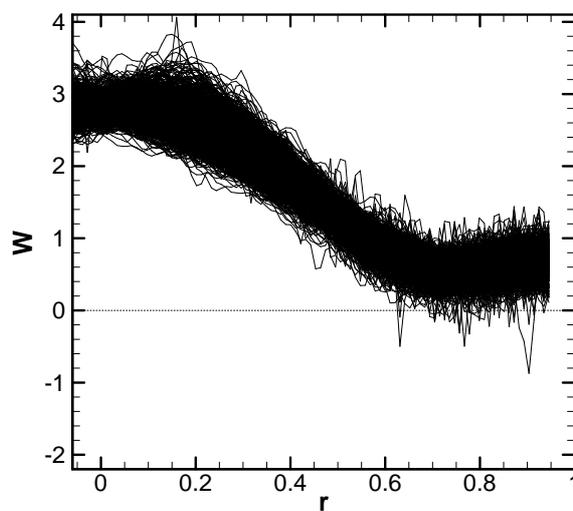
On constate tout d'abord que les niveaux des fluctuations sont plus élevés dans le plan de sortie que dans la zone PIV (nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les axes verticaux utilisés pour le fil chaud et la PIV sur la figure 8.24 sont différents). Cependant, on observe un bon accord entre les comportements de w' et v' dans la conduite et en sortie. Au centre du plan de sortie de l'écoulement, la croissance des fluctuations semble plus intense que dans la zone PIV dès $S \approx 2.7$, mais elle subit un palier pour $S \approx 3 - 3.1$ qui est la valeur du nombre de swirl séparant les régimes III et IV. Cet élément pourrait



(a) Vitesse radiale



(b) Vitesse azimutale



(c) Vitesse axiale

FIG. 8.22: Enveloppe des profils de vitesse instantanée obtenus en $z = 4.70$, $S = 3.35$ ($\chi_{CV} = 18.4$).

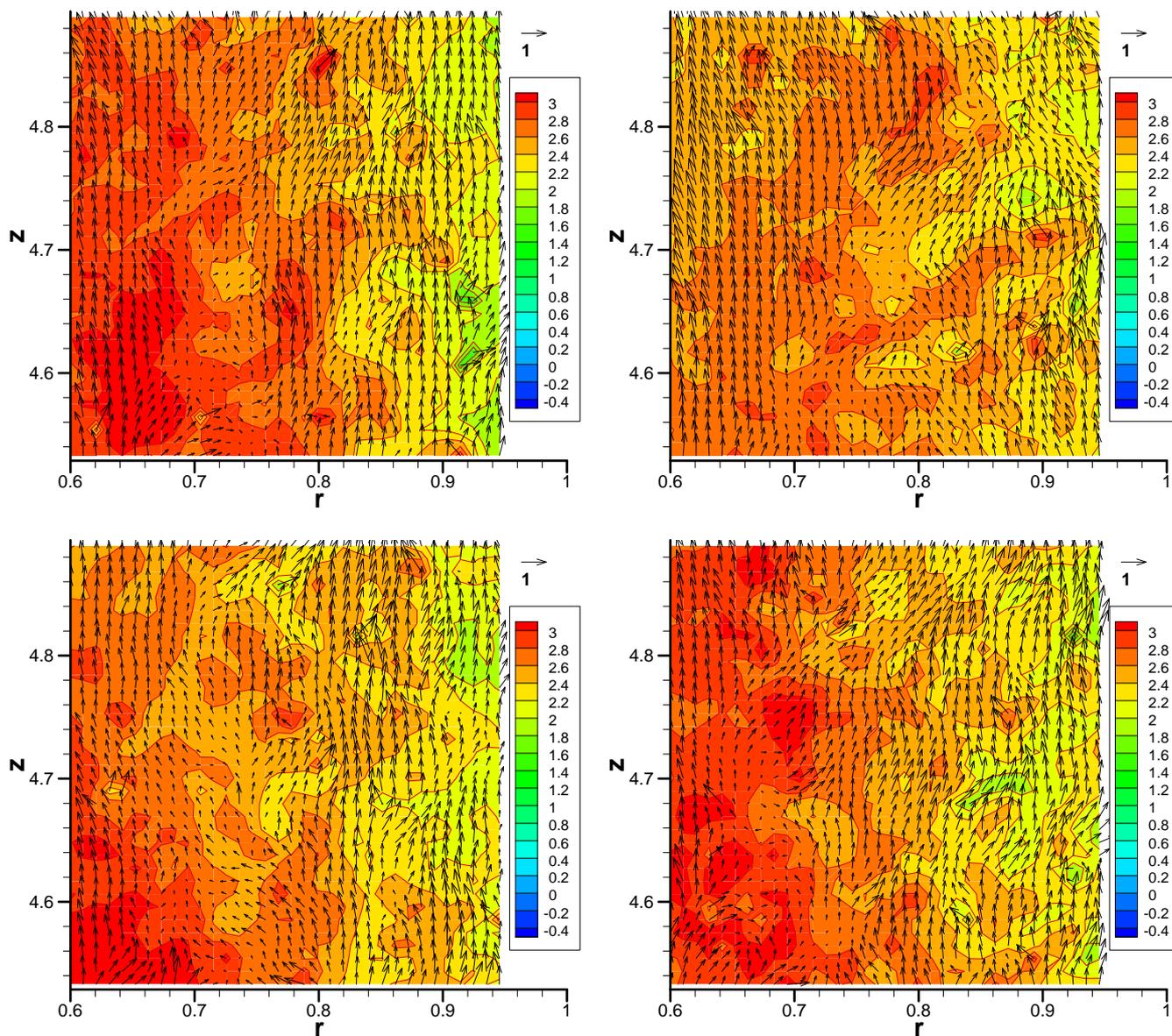


FIG. 8.23: Cartographies de vitesse instantanée présentant des recirculations localisées, $S = 3.35$, zone périphérique de l'écoulement ($\chi_{CV} = 18.4$).

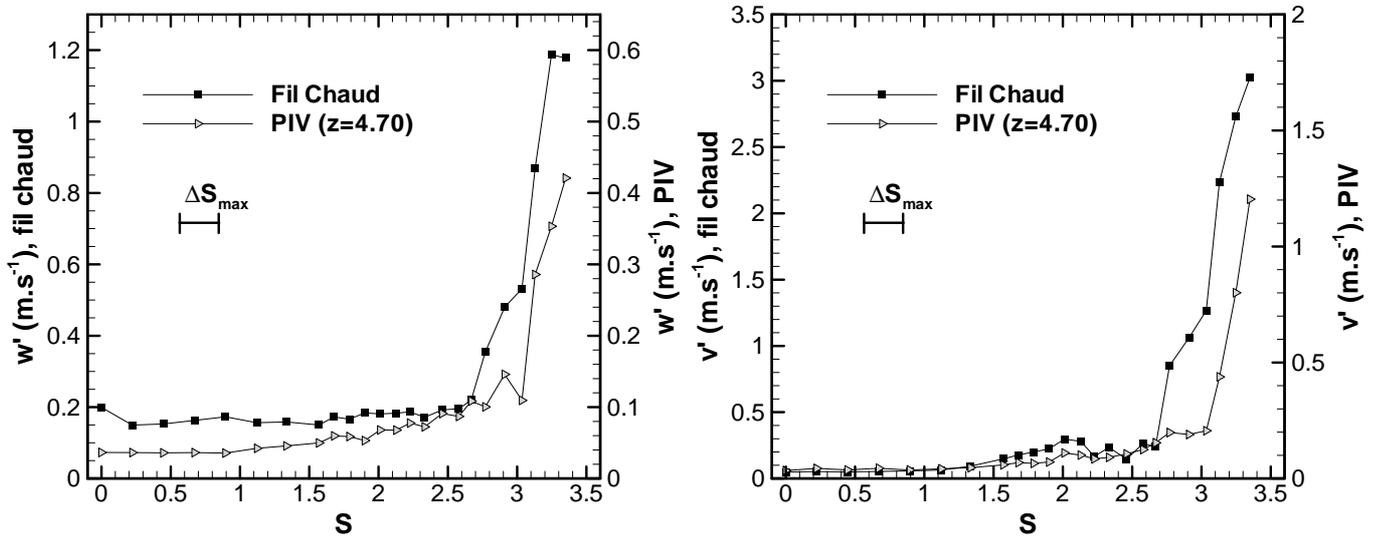
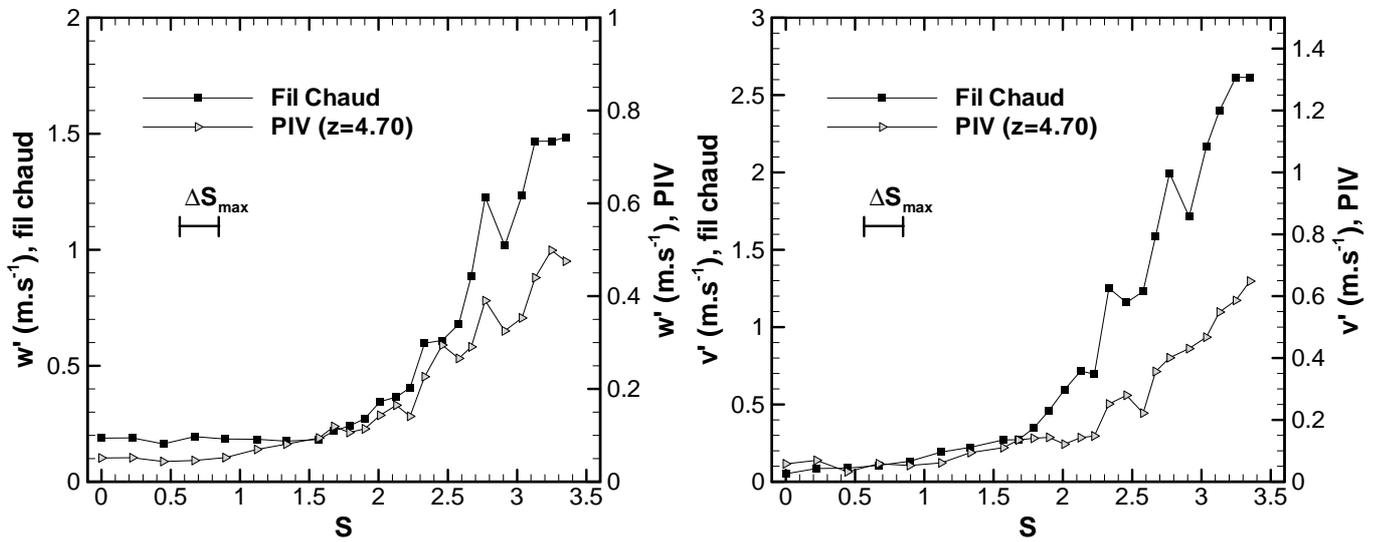
(a) $r/R(z) = 0$ (b) $r/R(z) = 0.6$

FIG. 8.24: Evolution en fonction de S de w' et v' , $\chi_{CV} = 18.4$, $z = 4.70$ (PIV) et plan de sortie de tuyère (fil chaud). *Nota* : les axes utilisés pour le fil chaud et la PIV sont différents.

être compatible avec l'implication d'un phénomène d'échelle globale à cette valeur du nombre de swirl.

A la périphérie de l'écoulement (figure 8.24(b)), la croissance en fonction de S débute lorsque le régime transcritique est atteint. Pour des valeurs de S supérieures, elle suit des irrégularités comparables dans la zone PIV et en sortie de tuyère. Ce dernier point est ici aussi particulièrement visible sur la composante axiale w' . Ceci suggère que les tuyères auraient pour effet global d'amplifier ces perturbations créées dans les zones d'instabilité à petite échelle de la portion de conduite de section constante (*cf.* figure 8.19).

D'autres interprétations sont néanmoins envisageables, et il nous semble délicat de privilégier l'une d'entre elles à l'heure actuelle. D'autres données et d'autres outils d'analyse seraient nécessaires pour tester ces hypothèses et pour éclaircir les liens entre les caractéristiques turbulentes de l'écoulement de conduite et celles de l'écoulement du plan de sortie.

8.7 Synthèse

Cette campagne de visualisation par PIV stéréoscopique nous a donc permis de comparer les écoulements obtenus à nombre de swirl croissant, pour $\chi_{CV} = 1$ ainsi que pour les trois tuyères convergentes utilisées lors des mesures fil chaud du chapitre 3. Les résultats confirment la complexité et la richesse en phénomènes de cet écoulement.

- Nous avons tout d'abord observé que dans la zone étudiée, les écoulements ne dépendent pas des taux de contraction utilisés ici dès lors que la tuyère en aval est effectivement convergente. Ce résultat est surprenant en regard de l'étude d'Escudier *et al.* [29] (voir le chapitre 4), qui montre que dans le cas d'un dispositif à injection tangentielle, la valeur du taux de contraction de la tuyère en aval influence le profil de vitesse axiale à l'extrémité amont de l'écoulement. A l'heure actuelle, nous pensons que cette différence peut provenir de la particularité de notre écoulement, qui consiste non pas en un coeur tourbillonnaire entouré d'une zone irrotationnelle s'étendant jusqu'à la paroi de la conduite, mais en un coeur tourbillonnaire **très confiné** s'étendant jusqu'à une région de couche limite.
- Dans les deux cas $\chi_{CV} = 1$ et $\chi_{CV} > 1$, l'écoulement devient localement sous-critique pour $S > 2$ environ. Pour des valeurs de S inférieures à 1.6 (régime I), l'écoulement est cylindrique, identique dans les deux cas, et on observe que le profil de vitesse axial devient progressivement parabolique, avec une survitesse au centre et un défaut de vitesse en périphérie. L'origine de cette vorticité azimutale positive n'est pas certaine. Elle ne peut être expliquée totalement par un scénario non visqueux considérant l'épaississement progressif de la couche limite comme une contraction de taux de plus en plus grand, et peut également provenir de la particularité du système de mise en rotation de l'écoulement.
- Lorsque $1.6 < S < 2$ (régime II), des différences sont observées entre $\chi_{CV} = 1$ et $\chi_{CV} > 1$, du fait de l'apparition d'un éclatement tourbillonnaire dans le plan de sortie du jet dans le cas non contracté et de l'influence de la tuyère au régime transcritique pour $\chi_{CV} > 1$. La parabolisation du profil de vitesse axiale se poursuit, mais de façon moins intense dans le cas non contracté. Parallèlement, des gradients axiaux de vitesse axiale apparaissent. Ils sont positifs pour $\chi_{CV} > 1$ et négatifs pour

$\chi_{CV} = 1$, ce dernier point étant cohérent avec la présence d'un éclatement en aval.

- Lorsque l'écoulement devient sous-critique, on observe un profil de vitesse moyenne présentant un défaut de vitesse au centre pour $\chi_{CV} = 1$ dès $S = 2.10$. Lorsque $S \geq 2.24$, une instabilité hélicoïdale apparaît également dans l'écoulement. A mesure que S augmente, celle-ci s'amplifie et contamine progressivement la section entière de l'écoulement. Même si des recirculations axiales ne sont observées que de façon transitoire et uniquement pour la valeur de S la plus élevée ($S = 3.63$), ces observations sont compatibles avec la présence d'un éclatement tourbillonnaire en amont de la zone de visualisation. Par ailleurs, à mesure que S augmente, les profils de vitesse moyenne correspondants, observés en une cote z fixe, montrent l'alternance d'écoulements caractérisés par des défauts de vitesse et des survitesses sur l'axe. Ceci indique la présence d'ondes stationnaires axisymétriques de grande amplitude, de longueur d'onde de plus en plus faible à mesure que S augmente.
- Pour $2 < S < 3.1$ (régime III), les écoulements obtenus lorsque $\chi_{CV} > 1$ présentent également des ondes stationnaires axisymétriques de grande amplitude, menant uniquement à des survitesses sur l'axe. Celles-ci peuvent de plus prendre des valeurs très importantes. A l'inverse du cas non contracté, la zone centrale des écoulements reste faiblement turbulente et ne présente pas d'instabilité hélicoïdale. A mesure que S augmente, on constate l'augmentation progressive du taux de turbulence dans la zone périphérique de l'écoulement, avec l'apparition d'un maximum situé entre $r = 0.5$ et $r = 0.6$. L'application du critère de Leibovich et Stewartson [75] sur les écoulements moyens en $z = 4.70$ montre que ceux-ci doivent abriter des instabilités centrifuges en anneau de petite échelle précisément dans cette zone. Le taux d'amplification de ces instabilités est contrôlé par les gradients de vitesse locaux de l'écoulement dans la direction radiale, c'est-à-dire ici l'amplitude locale de l'onde axisymétrique stationnaire. Cependant le lien avec l'évolution en fonction de S de l'énergie cinétique turbulente obtenue par la PIV reste pour l'instant délicat à effectuer.
- Les écoulements de plus haut nombre de swirl ($3.1 < S < 3.4$, régime IV), sont caractérisés par une forte croissance du taux de turbulence azimutale et axiale au centre de l'écoulement, indiquant la présence de perturbations hélicoïdales et axisymétriques. L'écoulement devient alors turbulent sur toute sa section. Dans le plan de sortie des tuyères, cette turbulence croît de façon significative dès $S > 2.7$ (alors qu'en PIV, seule une légère croissance est observée à cette valeur) mais semble subir un palier précisément pour $S > 3.1$. Ceci supporterait l'hypothèse d'un phénomène à caractère global à cette dernière valeur du nombre de swirl. A $S = 3.35$, l'examen des cartographies instantanées montre l'apparition de bouffées turbulentes de petite échelle dans la périphérie de l'écoulement, pouvant mener à des vitesses axiales négatives. L'exploitation faite à ce jour sur nos mesures ne permet pas d'avancer d'autres hypothèses quant à l'origine de cette turbulence. Une interprétation plus poussée, à l'aide d'outils de diagnostic de type POD, pourrait par exemple permettre d'identifier les structures impliquées dans ce phénomène et de mieux comprendre cette dynamique à très grand nombre de swirl.

Une première information nouvelle donnée par cette campagne nous semble donc être l'absence d'éclatement tourbillonnaire dans la zone de visualisation dans le cas $\chi_{CV} > 1$.

Lors du passage au régime sous-critique, alors que des ondes axisymétriques des deux signes sont présentes dans le cas d'une conduite de section constante, seules des ondes de vortacité azimuthale positive sont sélectionnées par la contraction. Ainsi tous les profils de vitesse présentent des survitesses au centre, qui peuvent être de grande amplitude. D'autre part, nous notons dans nos mesures l'absence d'influence du taux de contraction de la tuyère sur l'écoulement. A ce titre, il pourrait être intéressant de tester des taux de contraction plus faibles que notre valeur minimale de 4, afin de voir si ce comportement se maintient.

9 Simulation numérique de l'écoulement à nombre de Reynolds modéré

Le chapitre 5 a montré le rôle particulier joué par la contraction dans le régime trans-critique, à l'origine d'une recirculation non visqueuse à la paroi de la tuyère. Dans la zone de l'écoulement visualisée, les mesures PIV ne mettent en évidence aucun décollement de couche limite, ce qui serait pourtant la conséquence logique de cette recirculation. Ces mesures suggèrent plutôt que la transition critique s'effectue de façon régulière, sans création de turbulence. La couche limite apparaît donc être un ingrédient fondamental dans le problème physique que nous essayons d'analyser.

Nous explorons ici cette question en simulant numériquement un écoulement proche des conditions expérimentales à différents nombres de swirl à l'aide des équations de Navier-Stokes axisymétriques et d'une condition d'adhérence à la paroi. Notre but n'est pas de reproduire les conditions exactes de l'expérience (couche limite turbulente, grand nombre de Reynolds). Ceci nécessiterait de réaliser une DNS qui est pour nous hors de portée, ou d'utiliser une approche de type RANS incluant un modèle de turbulence sinon, que l'on sait difficilement capable de restituer précisément les effets de rotation. Dans la mesure où les effets de plus grande amplitude mis en jeu dans l'écoulement sont d'origine non visqueuse, nous nous limiterons à un faible nombre de Reynolds afin de privilégier une analyse paramétrique de l'influence du nombre de swirl. Cette même contrainte nous amène également à ne considérer qu'un taux de contraction, $\chi_{CV} = 4$, ce qui n'est pas restrictif d'après les conclusions du chapitre précédent.

9.1 Méthodes de résolution

9.1.1 Code utilisé

Les calculs ont été réalisés à l'aide du solveur par éléments finis FreeFem++, développé par le Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Paris VI et disponible sur Internet. Celui-ci permet en particulier de générer automatiquement des maillages non structurés par l'algorithme de Delaunay-Voronoi. Il résout des systèmes d'équations aux dérivées partielles écrites en formulation variationnelle et intègre de nombreux algorithmes de résolution utilisés pour notre étude, notamment des méthodes itératives et directes de résolution de systèmes linéaires et la méthode d'Arnoldi pour les problèmes aux valeurs propres. Ce code fait appel à une syntaxe spécifique proche du langage C++. Pour plus d'informations nous renvoyons le lecteur au site de FreeFem++ [52] d'où le logiciel et son mode d'emploi peuvent être téléchargés.

9.1.2 Formulation et maillage

Nous considérons comme au chapitre 5 l'écoulement compris entre le plan de sortie du nid d'abeilles et le plan de sortie de la tuyère convergente $\chi_{CV} = 4$. À l'entrée, un écoulement d'advection uniforme de vitesse W_0 et de rotation solide de vitesse angulaire Ω_0 est imposé avec une condition de vitesse radiale nulle, sans couche limite. Celle-ci se développe donc progressivement sous l'effet de la condition d'adhérence à la paroi. Cette condition amont étant identique à celle qui définit le problème II du chapitre 5, nous utilisons le même nombre de swirl

$$S_0 = \frac{R_0 \Omega_0}{W_0}. \quad (9.1)$$

Le nombre de Reynolds considéré est quant à lui défini par :

$$Re = \frac{R_0 W_0}{\nu} = 500. \quad (9.2)$$

Notons que celui-ci est bâti sur le rayon de la conduite et non sur le diamètre comme le nombre de Reynolds expérimental introduit au chapitre 2.

Les longueurs étant adimensionnées par R_0 et les vitesses par W_0 comme au chapitre 5, nous résolvons les équations de Navier-Stokes axisymétriques incompressibles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (9.3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{Re} \Delta v \quad (9.3b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta w \quad (9.3c)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (9.3d)$$

p désigne ici la pression divisée par la masse volumique, et l'opérateur laplacien axisymétrique Δ a été maintenu sous forme compacte pour plus de concision. Nous utilisons l'approche classique de Taylor-Hood qui consiste à rechercher les composantes de vitesse dans un espace d'éléments P_2 et la pression dans un espace d'éléments P_1 .

La figure 9.1.2 représente un exemple de maillage utilisé lors des calculs. Il s'agit du maillage le plus relâché de l'étude de convergence présentée au paragraphe 9.2.1. Il se compose de deux blocs séparés sur la figure par un trait en pointillés. Le premier bloc correspond au domaine d'écoulement de la soufflerie, depuis le plan de sortie du nid d'abeilles à l'amont jusqu'au plan de sortie de la tuyère à l'aval. Le second bloc est obtenu en prolongeant la conduite à partir de ce plan sur une longueur L_1 , à diamètre constant. Sur ce dernier domaine, on impose une viscosité croissante définie par

$$\nu(z) = \begin{cases} \nu & \text{si } L + L_{CV} \leq z \leq L + L_{CV} + \frac{L_1}{2}, \\ \nu + \frac{\nu_1 - \nu}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z - (L + L_{CV} + \frac{L_1}{2})}{L_1} \right) \right] \right] & \text{si } L + L_{CV} + \frac{L_1}{2} \leq z \leq L + L_{CV} + L_1 \end{cases} \quad (9.4)$$

avec $\nu_1 = 2W_0/R_1$. Cet artifice numérique permet d'amener progressivement l'écoulement en sortie de maillage à un nombre de Reynolds proche de 1, afin d'annuler la vitesse azimutale par viscosité et de pouvoir appliquer en sortie la condition à la limite compatible

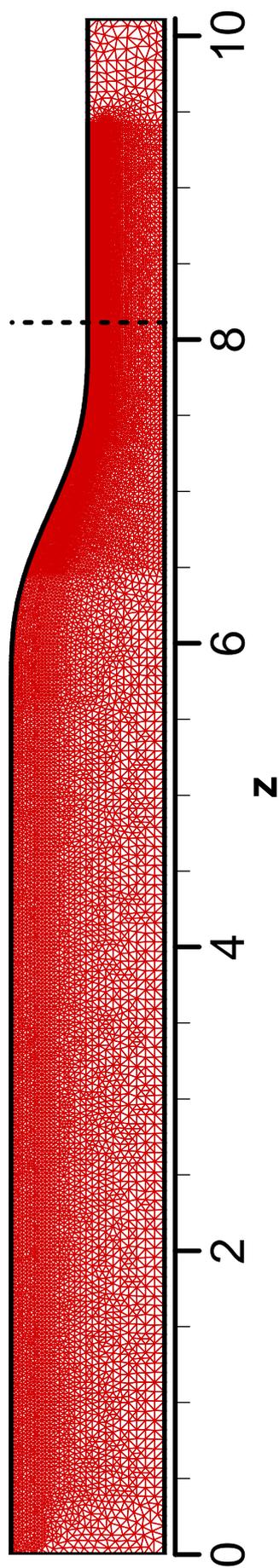


FIG. 9.1: Exemple de maillage utilisé pour les calculs (ici $j = 16$). La ligne pointillée matérialise le plan de sortie de la tuyère convergente.

avec la physique de l'écoulement et la formulation variationnelle. Il reste sans effet sur la portion "utile" de l'écoulement tant que cette zone n'est pas trop proche du plan de sortie de la tuyère, et que l'écoulement en cet endroit est localement supercritique, ce qui sera le cas dans tout ce chapitre.

Pour construire les maillages, nous raisonnons en pratique sur le nombre de points par unité de longueur adimensionnée. Pour un maillage donné, le nombre de points j par unité de longueur sur l'axe dans la portion de conduite de section constante sert de référence. Il est multipliée par 2.5 à la paroi afin de résoudre correctement la couche limite, et par un facteur tenant compte de l'augmentation du nombre de Reynolds à l'intérieur de la tuyère convergente. A l'extrémité aval du domaine à viscosité croissante, la densité de points est relâchée puisque le nombre de Reynolds y est proche de 1.

Les conditions aux limites imposées sur les frontières du maillage complet sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Entrée : } u &= 0, & v &= S_0 r, & w &= 1 \\
 \text{Axe : } u &= 0, & v &= 0 \\
 \text{Paroi : } u &= 0, & v &= 0, & w &= 0 \\
 \text{Sortie : } p + \frac{1}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Cette dernière condition de libre sortie est classique dans le cadre d'écoulements ouverts, on pourra par exemple voir Natarajan *et al.* [86].

9.1.3 Suivi de solutions stationnaires

Nous utilisons la technique de suivi de solutions stationnaires détaillée dans l'annexe B afin de réaliser une étude paramétrique de l'écoulement en fonction de S_0 . Contrairement à l'étude théorique du chapitre 5, il n'est pas possible ici de construire de façon simple une "guess-value" analytique pour un écoulement à faible nombre de swirl $S_{0,init}$. Celle-ci est donc obtenue par une simulation numérique directe instationnaire des équations (9.3), que l'on effectue à l'aide d'un algorithme de Lagrange-Galerkin d'ordre 1 implémenté au sein d'une méthode de pénalisation. En pratique, il s'avère qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer cette simulation jusqu'à la stationnarité lorsque le nombre de swirl $S_{0,init}$ est supercritique. Il suffit en fait d'un faible nombre d'itérations (de l'ordre de 10) pour produire une guess-value permettant de faire converger les itérations de Newton. La solution obtenue alors est effectivement identique à la solution convergée de l'algorithme instationnaire, ce qui illustre une fois de plus l'efficacité de cette technique.

Lorsqu'une première solution est trouvée, les suivantes sont déterminées par l'approche de type prédicteur-correcteur décrite dans l'annexe B. Afin d'optimiser le temps de calcul, on utilise à bas nombre de swirl une méthode simple (c'est-à-dire en utilisant la solution au nombre de swirl précédent comme prédicteur), le recours au prédicteur tangent étant activé si nécessaire. Si ceci se produit, le pas d'abscisse curviligne est alors contrôlé de façon à rendre le calcul automatique, de sorte que l'incrément en nombre de swirl varie au cours du calcul de la branche.

9.1.4 Stabilité

La pose du problème de stabilité d'une solution stationnaire aboutit à un problème aux valeurs propres généralisé que l'on résout à l'aide d'une encapsulation de la librairie

ARPACK++ dans le logiciel FreeFem++. Cette librairie repose sur une méthode itérative d'Arnoldi traditionnelle, nécessitant la donnée d'une valeur initiale ("shift") autour de laquelle un nombre donné de valeurs propres et vecteurs propres sont recherchés. Afin d'avoir une idée précise du spectre correspondant à un écoulement donné, il peut donc être nécessaire de faire plusieurs calculs successifs avec des valeurs de shift différentes. Pour plus d'informations sur cette méthode, on pourra se référer au mode d'emploi de Lehoucq *et al.* [70].

9.2 Solutions stationnaires

9.2.1 Convergence en maillage

La convergence en maillage des solutions stationnaires peut être testée très rapidement. En effet dès lors qu'une solution est obtenue pour un nombre de swirl donné sur un maillage grossier, il suffit de l'interpoler sur un maillage plus fin, cette opération étant gérée de façon automatique par FreeFem++. On la fait ensuite converger sur ce nouveau maillage à l'aide des itérations de Newton.

Dans le cas présent nous avons augmenté progressivement le nombre de points j par unité de longueur sur l'axe dans la portion de conduite de section constante, le "taux de raffinement" à la paroi et dans le convergent par rapport à cette valeur étant maintenu constant. Nous avons ensuite représenté les quantités

$$\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[w(z=0)_{i,j} - w(z=0)_{i,j-1} \right]^2 \quad (9.6a)$$

$$\beta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) (z, R(z))_{i,j} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) (z, R(z))_{i,j-1} \right]^2 \quad (9.6b)$$

pour j variant de 17 à 30. Ici $N = 500$ est le nombre de points échantillonnés régulièrement sur l'intervalle $z \in [0, 8.133]$ s'étendant de l'amont jusqu'au plan de sortie de la tuyère, et $\partial w / \partial n(z, R(z))$ représente la composante axiale adimensionnée du frottement à la paroi. La figure 9.2 résume les résultats obtenus pour la solution trouvée à $S = 3.391$. Elle montre que pour $j \geq 26$, la composante axiale du frottement à la paroi et la vitesse axiale au centre de la conduite sont suffisamment convergées. Les solutions stationnaires calculées dans ce paragraphe utiliseront donc un maillage défini par une densité de points sur l'axe $j = 26$.

9.2.2 Evolution en fonction de S_0

Nous présentons ici les solutions stationnaires obtenues pour des nombres de swirl S_0 compris entre 0.00 et 3.40. Rappelons que la théorie axisymétrique non visqueuse prévoit, dans le cas du tuyau de section constante, des bifurcations successives rapprochées dès lors que l'écoulement devient sous-critique (voir l'équation (5.37)). Afin de ne pas utiliser un incrément en nombre de swirl trop élevé, qui pourrait provoquer un "saut" d'une branche sur une autre, ce dernier a été limité à 0.02 dès lors que $S_0 \geq 1.50$. Nous avons ainsi obtenu une branche unique de solutions, sans point tournant. Ceci confirme que le passage par la transition critique s'opère effectivement d'une façon différente du cas "canonique" menant à l'éclatement tourbillonnaire, où la branche de solutions est caractérisée par deux points tournants (voir la figure 5.15). Signalons par ailleurs que les

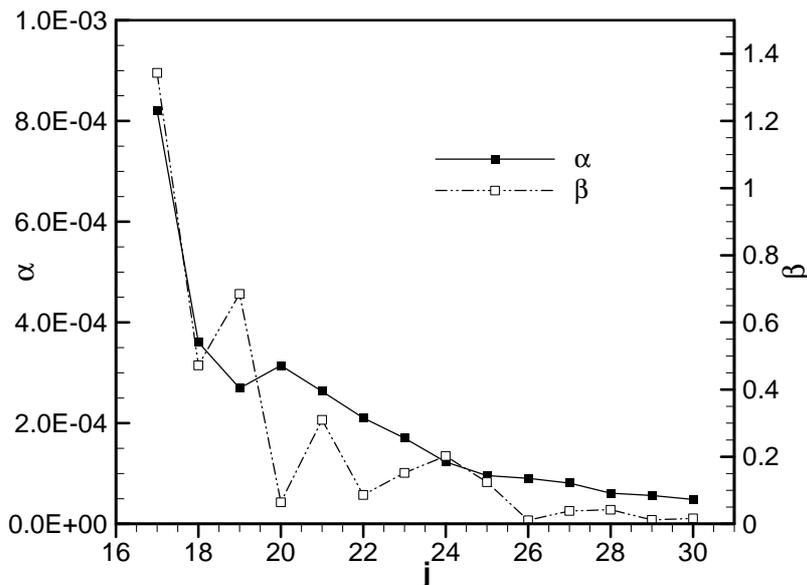


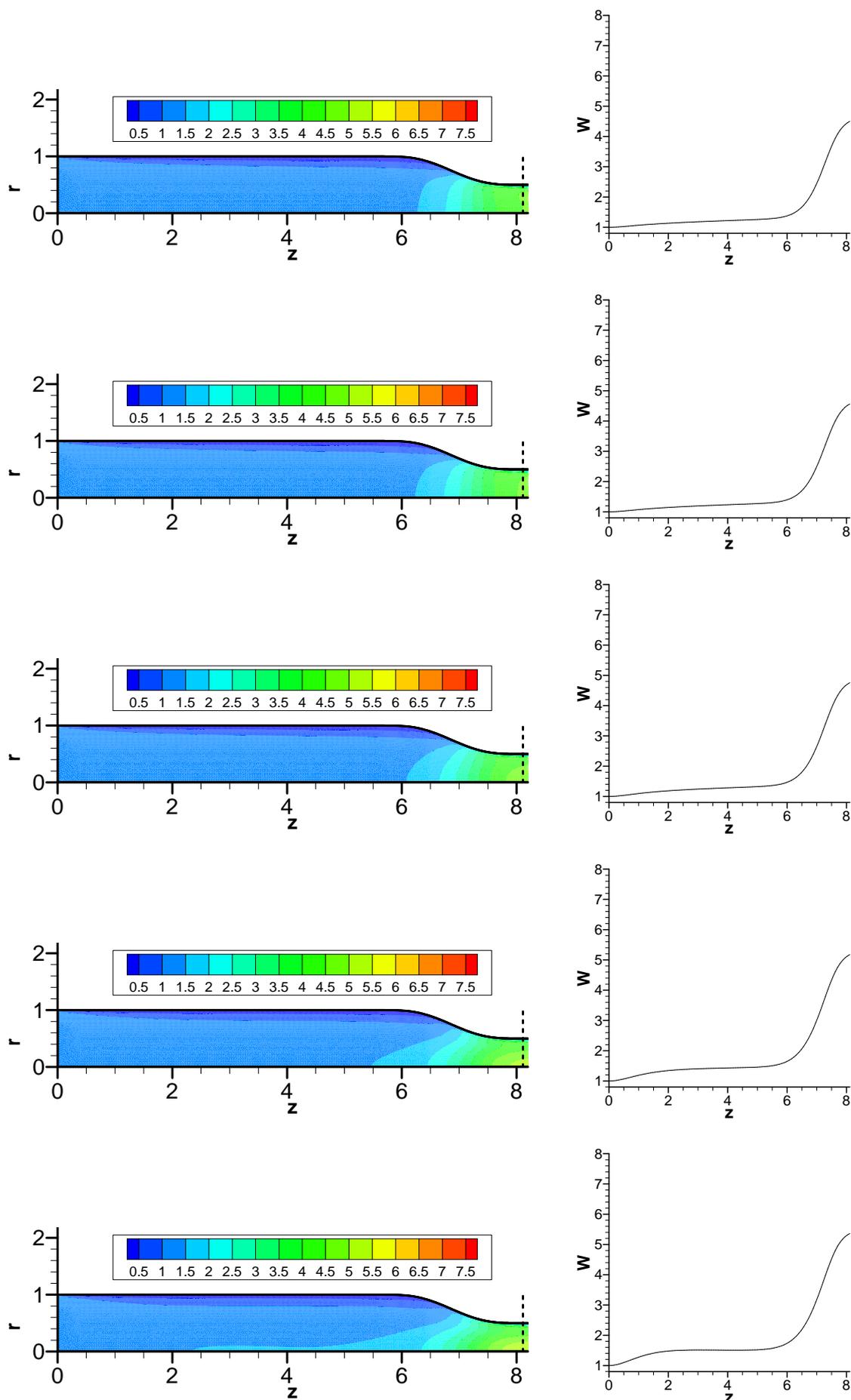
FIG. 9.2: Convergence en maillage de la solution stationnaire trouvée pour $S_0 = 3.391$. α et β sont définis par les équations (9.6a) et (9.6b) et j désigne le nombre de points par unité de longueur sur l'axe du maillage dans la portion de conduite de section constante.

résultats de l'étude de stabilité du paragraphe 9.3 sont en accord avec cette absence de point tournant.

Il est à noter que pour $S_0 = 3.40$, nous n'observons aucun gradient axial parasite lié à la présence en aval de la zone de viscosité croissante. Seul le gradient lié à l'épaississement de la couche limite dû à la fin de la contraction est observé. L'écoulement en sortie de tuyère peut donc être considéré comme supercritique pour toutes les valeurs de S_0 calculées ici.

Les figures 9.3 à 9.6 représentent le champ de vitesse axiale et la vitesse axiale au centre de la conduite pour des valeurs de S_0 comprises entre 0 et 3.40. Pour $S_0 \geq 1.60$ (régime transcritique), le plateau de vitesse axiale au centre commence à croître en niveau et à décroître en étendue axiale. A $S_0 = 2.00$ et 2.10, une structure proche d'une onde solitaire stationnaire apparaît. Elle se manifeste par l'apparition d'un maximum local de vitesse axiale au centre en $z \approx 1.80$ et d'un minimum local dans la portion de conduite de section constante. Lorsque S_0 continue de croître, un régime d'ondes stationnaires apparaît dans la portion de conduite de section constante, la longueur d'onde diminuant progressivement.

On observe également que l'amplitude moyenne de ces ondes croît avec z , le taux de croissance étant d'autant plus fort que S_0 est élevé. Ceci résulte de la présence de la tuyère convergente. Ces ondes s'étendent en effet depuis l'extrémité amont jusqu'à l'intérieur de la tuyère (rappelons que celle-ci débute en $z = 5.613$). Cette dernière joue le rôle de condition à la limite aval en imposant un gradient axial fort et un retour progressif au régime supercritique par diminution du nombre de swirl local. Ce retour s'effectue en une cote z qui se déplace vers l'aval lorsque S_0 croît. Plaçons-nous alors en un endroit de l'intérieur de la tuyère où l'écoulement reste supercritique pour tout S_0 . Les effets non visqueux de création de vorticité azimutale par gauchissement vus au chapitre 5 sont croissants avec S_0 : ceci est particulièrement visible ici où l'on remarque que la vitesse W au centre du plan de sortie de la tuyère augmente sans discontinuer. Qualitativement, on comprend donc que les ondes stationnaires doivent se raccorder d'un côté à une condition

FIG. 9.3: Champ de vitesse axiale et vitesse axiale au centre, $S_0 = 0.00, 0.50, 1.00, 1.60$ et 1.80 .

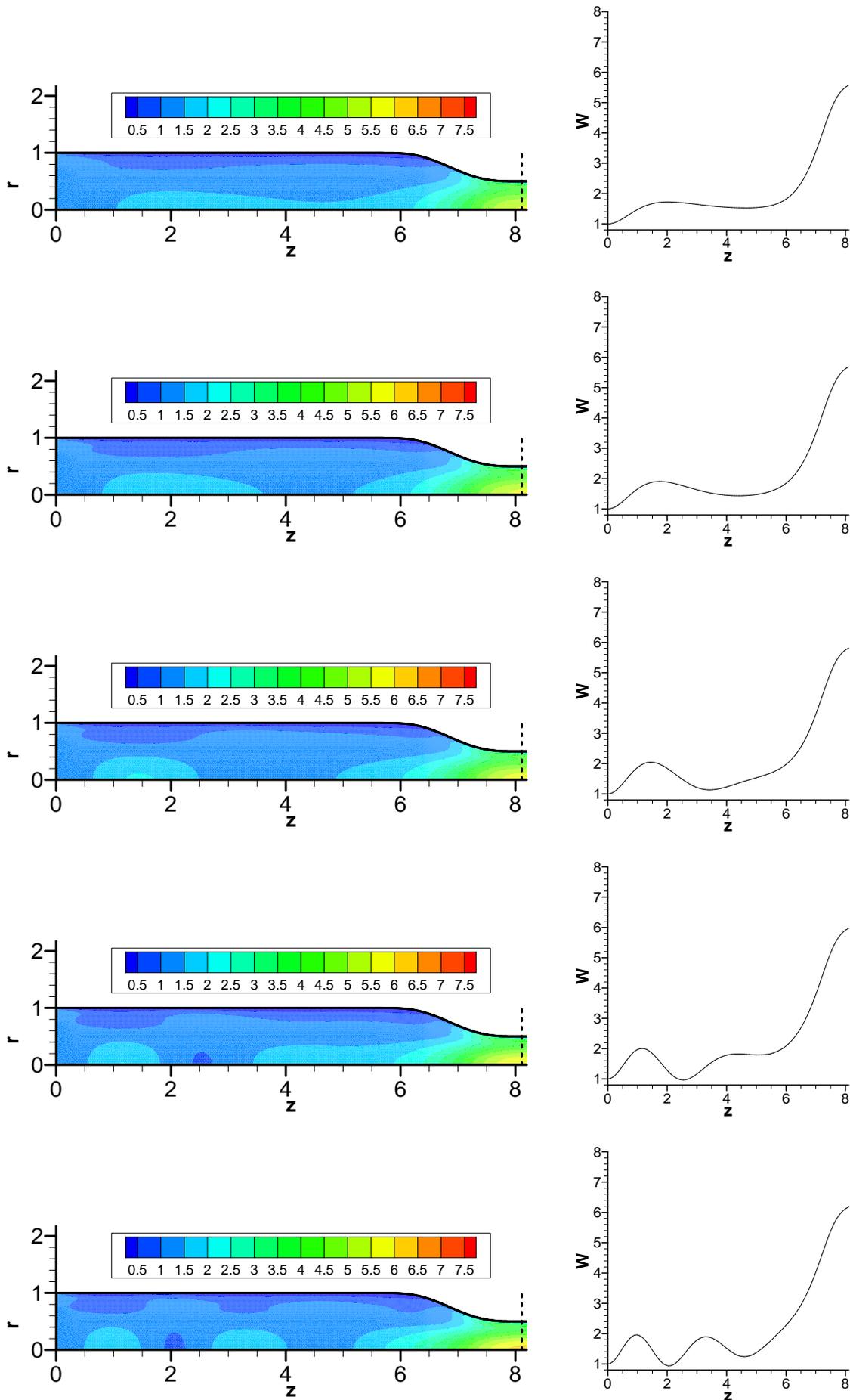
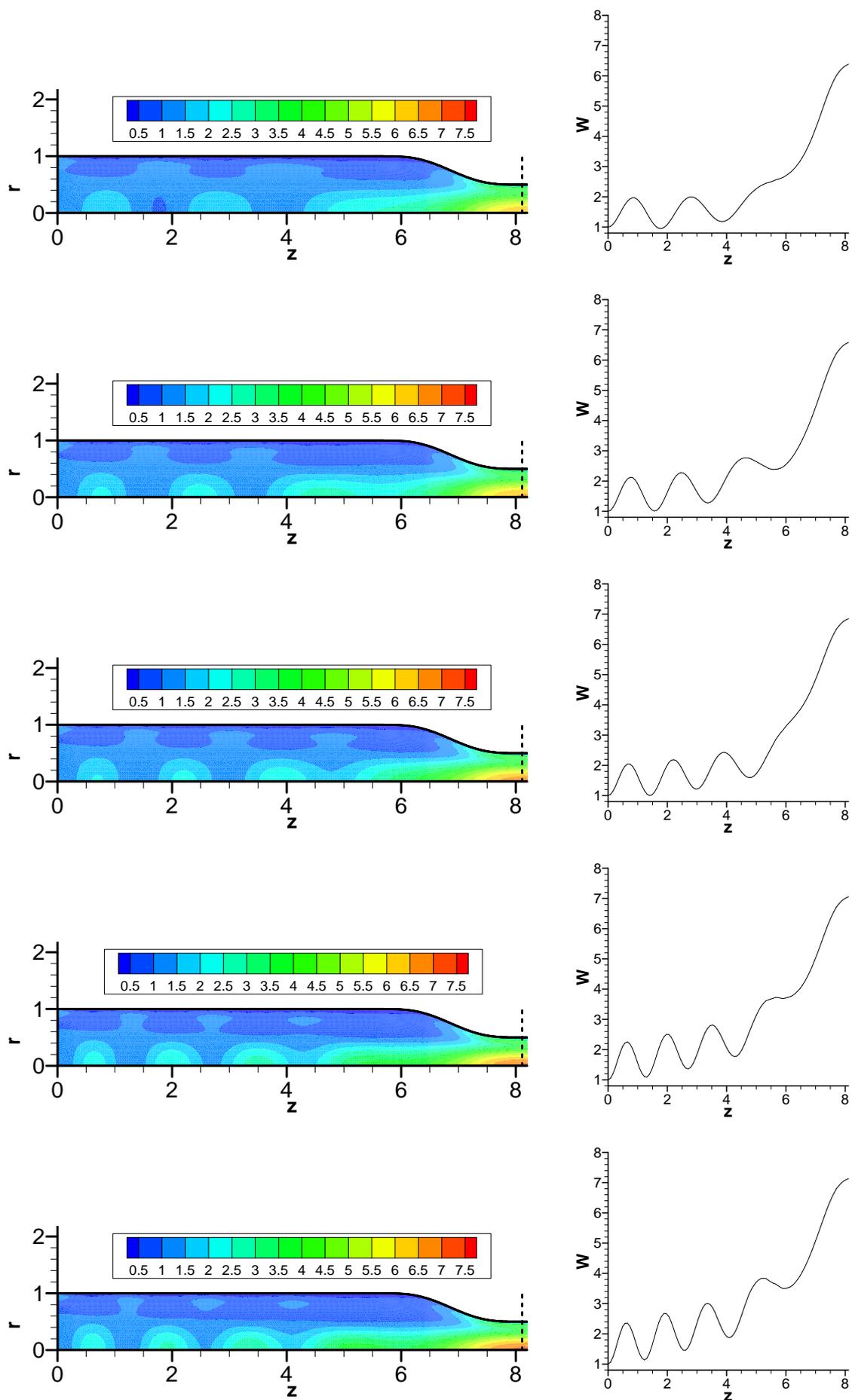


FIG. 9.4: $S_0 = 2.00, 2.10, 2.20, 2.32$ et 2.46 .

FIG. 9.5: $S_0 = 2.60, 2.74, 2.85, 3.02$ et 3.08 .

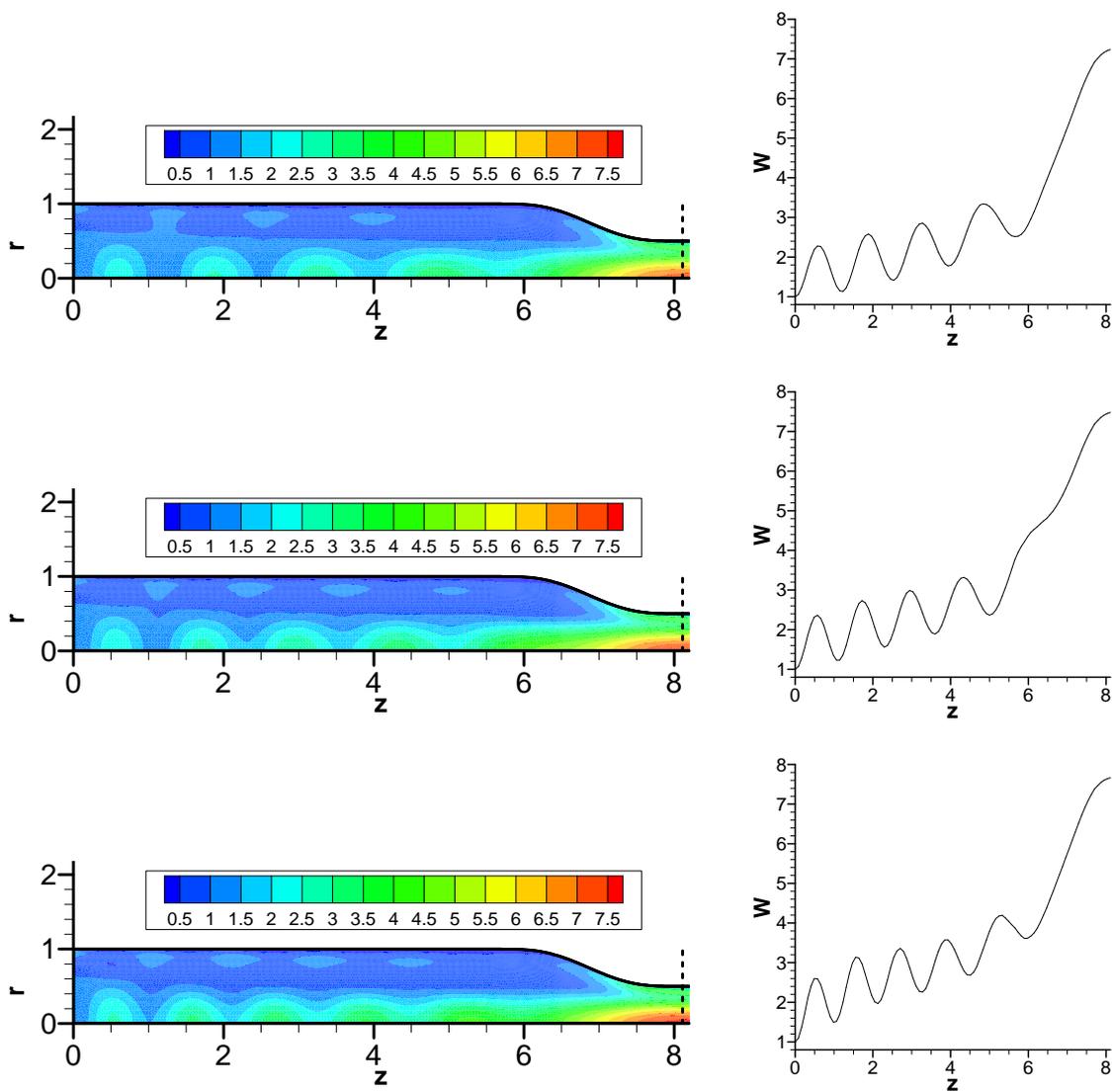


FIG. 9.6: $S_0 = 3.12, 3.26$ et 3.40 .

d'entrée fixe (la vitesse axiale étant imposée à l'amont), et de l'autre à une condition de vitesse axiale **croissante avec** S_0 . Ceci explique pourquoi ces ondes s'établissent autour d'une amplitude moyenne qui croît avec z , et pourquoi cette croissance est d'autant plus forte que S_0 est élevé.

Nous voyons donc que les calculs présentés ici confirment les observations et les hypothèses faites lors des mesures PIV. En particulier, le passage de la transition critique s'effectue de façon continue, sans événement "catastrophique" : il n'y a ni décollement de couche limite, ni éclatement. Même si les nombres de Reynolds bâtis sur le rayon diffèrent de deux ordres de grandeurs (500 dans un cas, entre 27 550 et 29 045 dans l'autre!), nous proposons une comparaison plus quantitative entre calcul et expérience sur la figure 9.7. Celle-ci représente l'évolution en fonction de S_0 et S de la vitesse axiale W au centre, à la cote $z = 4.70$, obtenue pour les valeurs $\chi_{CV} = 4$ et $\chi_{CV} = 18.4$. Elle montre un très bon accord entre les deux approches. En particulier, dans les deux cas une augmentation progressive de l'amplitude maximale des ondes stationnaires en fonction de S est mise en évidence. Les différences observées se situent dans le niveau de ces extrema, et dans la décroissance de la longueur d'onde en fonction du nombre de swirl, plus rapide dans le calcul que dans l'expérience.

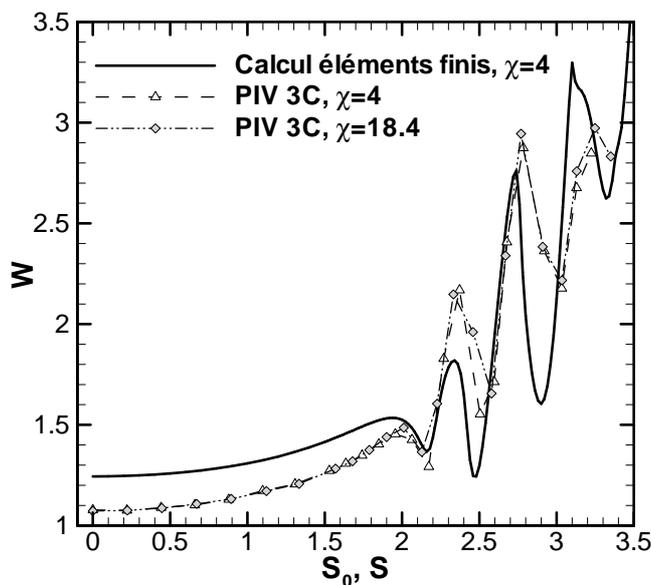


FIG. 9.7: Evolution de W en $r = 0$ et $z = 4.70$ en fonction de S_0 (calcul FreeFem++, $\chi_{CV} = 4$) et de S (mesures PIV, $\chi_{CV} = 4$ et 18.4).

9.3 Stabilité

9.3.1 Convergence en maillage

Comme le temps de calcul nécessaire pour résoudre le problème de stabilité est, à maillage identique, plus long que celui consistant à trouver une solution stationnaire, nous avons testé la convergence en maillage de la solution du problème de stabilité en interpolant le champ de base sur un maillage plus relâché. La figure 9.8 montre l'évolution des parties réelle et imaginaire de la valeur propre σ la plus instable trouvée pour la solution de nombre de swirl $S_0 = 3.104$. Rappelons que la perturbation superposée au champ stationnaire $(u(r, z), v(r, z), w(r, z), p(r, z))$ est recherchée sous la forme

$\Re\{(u'(r, z), v'(r, z), w'(r, z), p'(r, z))e^{\sigma t}\}$ de sorte que $\Re(\sigma)$ représente son taux d'amplification et $\Im(\sigma)$ sa pulsation. Les quantités représentées sur la figure 9.8 sont cette fois

$$\alpha = \frac{\Re(\sigma)_j - \Re(\sigma)_{j-1}}{\Re(\sigma)_j} \quad (9.7a)$$

$$\beta = \frac{\Im(\sigma)_j - \Im(\sigma)_{j-1}}{\Im(\sigma)_j}, \quad (9.7b)$$

j désignant comme précédemment le nombre de points par unité de longueur sur l'axe du maillage.

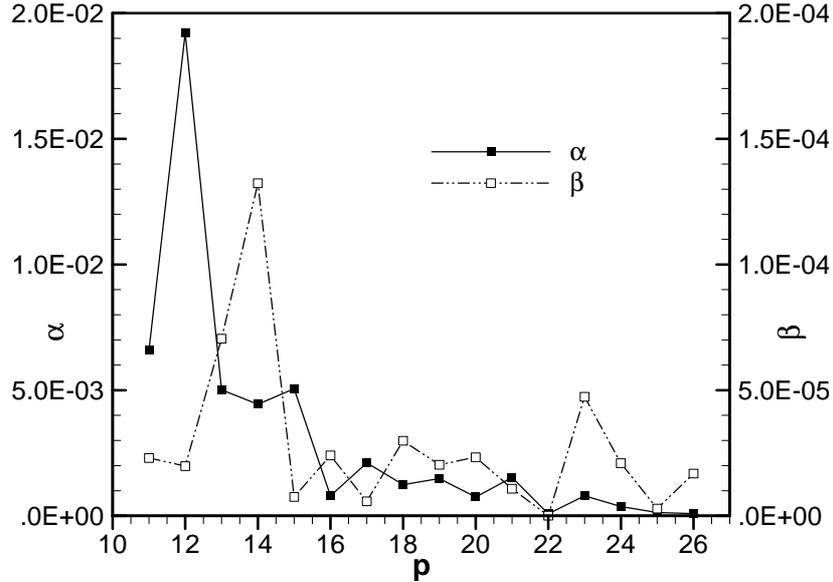


FIG. 9.8: Variation relative des parties réelle (α) et imaginaire (β) de la valeur propre la plus amplifiée correspondant à la solution stationnaire à $S_0 = 3.104$, en fonction du nombre de points de maillage par unité de longueur sur l'axe j .

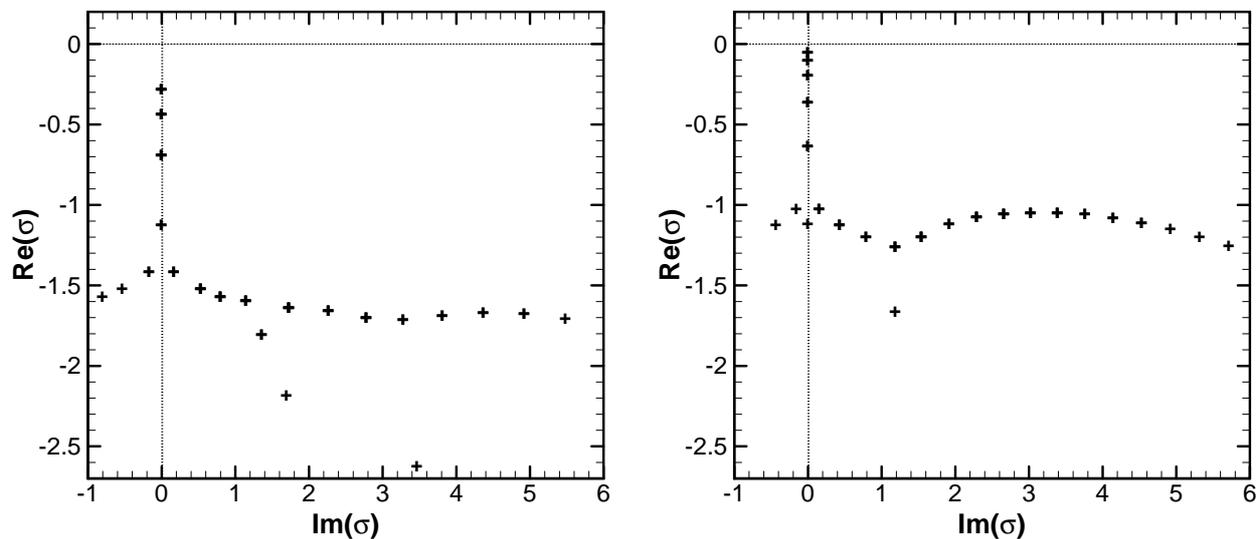
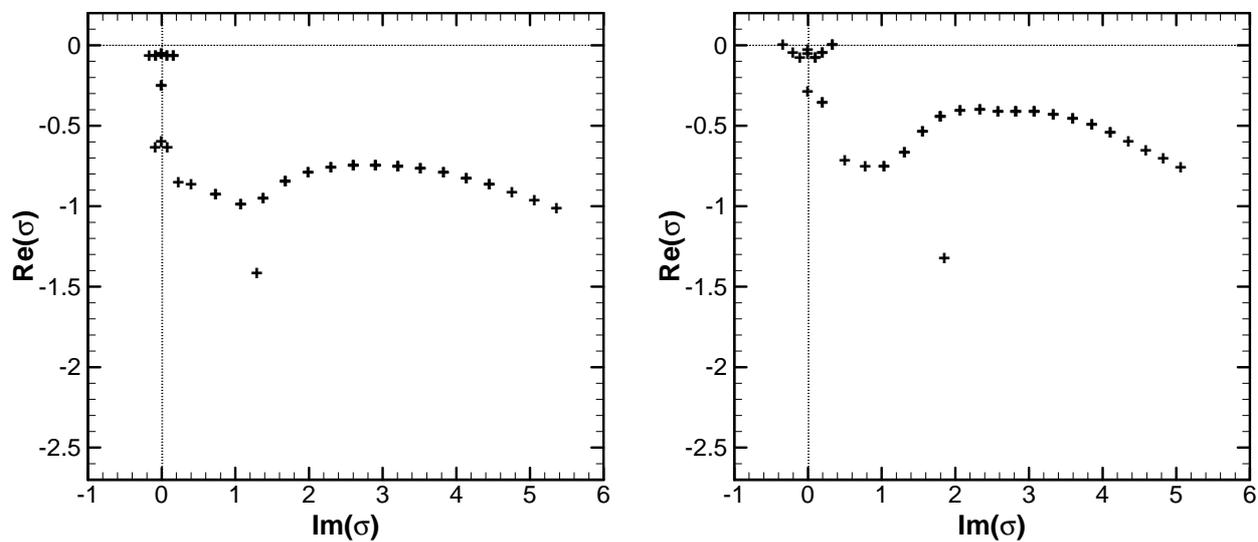
Quelle que soit la valeur de j , la partie imaginaire de σ varie peu ; la convergence de la partie réelle montre quant à elle qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à $j = 26$. Nos calculs seront ici effectués avec $j = 18$.

9.3.2 Choix des shifts

La figure 9.9 présente les portions de spectres obtenus pour $S_0 = 1.60, 2.10, 2.60$ et 3.10 en rassemblant les valeurs propres trouvées avec les shifts $\lambda = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5)$. On observe en pratique que cet intervalle de $(0, 1)$ entre chaque shift est suffisant pour obtenir toutes les valeurs propres recherchées près de l'axe réel dans cette zone puisque certaines d'entre elles sont trouvées plusieurs fois. De plus, l'allure générale des spectres montre qu'aucune transition ne semble se produire lorsque $\Im(\sigma) \geq 1$ dans l'intervalle de nombres de swirl considéré ici. Pour étudier la stabilité des solutions stationnaires du paragraphe 9.2.2, nous nous limiterons donc aux shifts $\lambda = (0, 0)$ et $(0, 1)$.

9.3.3 Evolution en fonction de S_0

La figure 9.10 représente les parties réelle et imaginaire de la valeur propre la moins stable σ_{max} en fonction de S_0 . Elle montre tout d'abord que les modes les plus instables ne

(a) $S_0 = 1.60$ (gauche) et 2.10 (droite)(b) $S_0 = 2.60$ (gauche) et 3.10 (droite)FIG. 9.9: Portions de spectres trouvées en rassemblant les shifts $\lambda = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5)$ pour différentes solutions stationnaires.

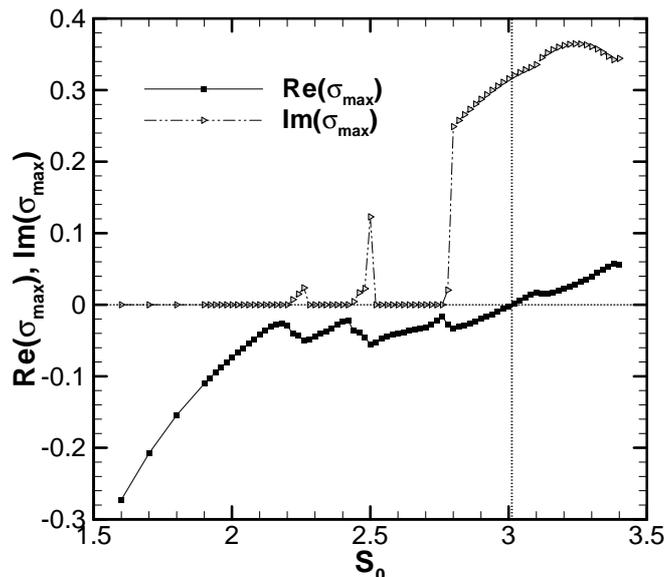


FIG. 9.10: Parties réelle et imaginaire de la valeur propre la plus instable σ_{max} en fonction de S_0 .

sont pas toujours issus de la même branche lorsque S_0 augmente puisque pour certaines zones on a $\Im(\sigma_{max}) = 0$ (modes statiques) tandis que pour d'autres $\Im(\sigma_{max}) \neq 0$ (modes oscillants).

On constate par ailleurs l'occurrence d'une bifurcation de Hopf pour $S_{0H} = 3.02$ puisqu'une paire de modes propres oscillants y devient instable ($\Re(\sigma_{max}) > 0$). La partie imaginaire du mode subissant la bifurcation à S_{0H} est égale à 0.3205, ce qui, après multiplication par les grandeurs physiques adéquates, correspond à une fréquence de 1.02 Hz. A titre indicatif, la figure 9.11 présente le champ de vitesse stationnaire à S_{0H} et la figure 9.12 la structure de ce mode instable. Nous laissons de côté la détermination du type de cette bifurcation (super ou sous-critique, c'est-à-dire avec ou sans cycle limite pour $S_0 > 3.02$), qui pourra faire l'objet d'études ultérieures.

Dans la mesure où les écoulements stationnaires calculés ici semblent proches de l'écoulement expérimental, il est tentant de comparer la valeur de S_{0H} avec les valeurs de S contrôlant l'apparition de turbulence dans les campagnes expérimentales. On constate que S_{0H} est ainsi très proche de la valeur à partir de laquelle les taux de turbulence axial et azimutal augmentent de façon la plus significative au centre de la zone de visualisation PIV, marquant le passage au régime IV (voir la figure 8.17 du chapitre 8). En particulier, la croissance au centre du taux de turbulence axiale est tout à fait compatible avec la présence d'une instabilité **axisymétrique** comme celle mise en valeur par le calcul.

Il est à noter que si la bifurcation est supercritique, un mode global de fréquence $f \approx 1.02$ Hz (cycle limite) devrait normalement apparaître dans l'écoulement. Dans la mesure où l'échantillonnage se produit à 4 Hz et de façon non conditionnelle, nous ne pouvons vérifier cette information à l'aide de la PIV. Ceci est par contre possible à l'aide des mesures fil chaud, et les spectres effectués ne montrent pas de pic basse fréquence autre que celui correspondant à la rotation du nid d'abeilles, même si la valeur de cette fréquence correspond à l'extrémité basse des spectres (voir la figure 3.8 du chapitre 3, pour $S = 3.16$). Ceci semblerait montrer que si l'augmentation de turbulence à $S \approx 3.1$ est effectivement liée à la bifurcation de Hopf que nous venons de détecter, alors celle-ci est probablement sous-critique. Néanmoins, l'expérience montre également que plusieurs

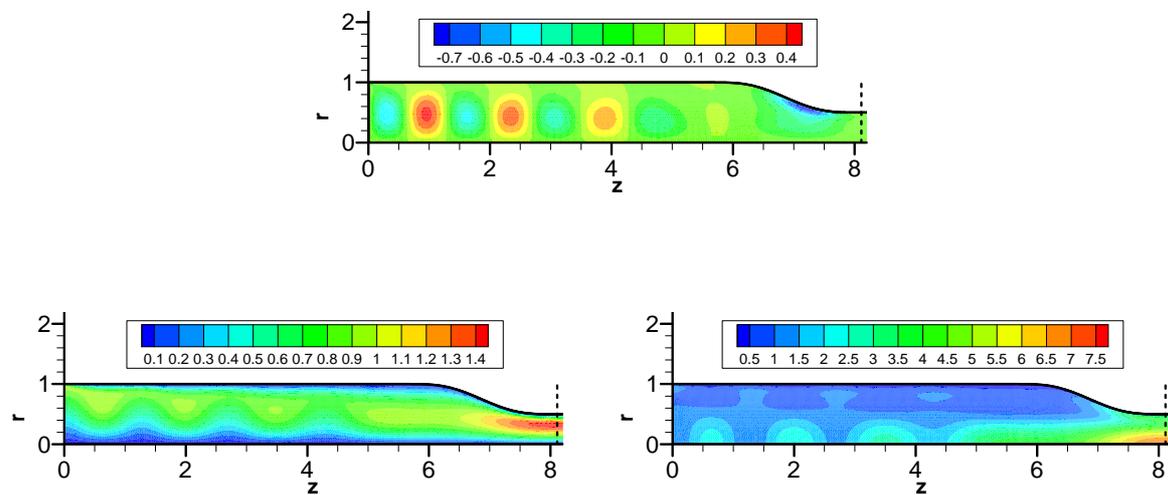


FIG. 9.11: Vitesse radiale (haut), azimutale (bas, à gauche) et axiale (bas, à droite) de la solution stationnaire à $S_{0H} = 3.02$.

phénomènes physiques distincts doivent être impliqués, dans la mesure où les fluctuations axiales et azimutales augmentent de façon conjointe au centre pour $S \approx 3.1$.

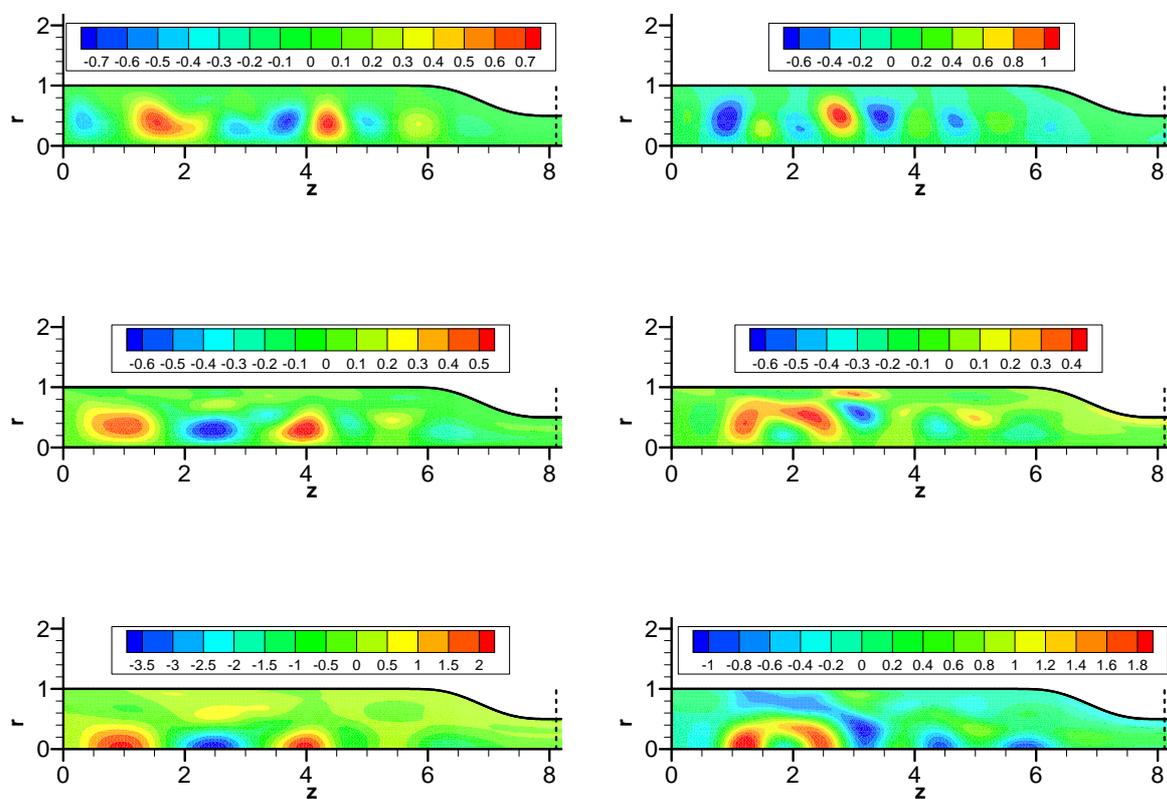


FIG. 9.12: Structure spatiale du mode devenant instable à $S_{0H} = 3.02$. De haut en bas : vitesse radiale, azimutale et axiale. La partie réelle est représentée à gauche, la partie imaginaire à droite.

10 Conclusion générale

10.1 Synthèse des principaux résultats

L'objectif premier de cette thèse était d'expliquer l'apparition de turbulence dans le plan de sortie d'un jet tournant généré à l'aide d'un système de nid d'abeilles tournant suivi d'une tuyère convergente, lorsque le taux de rotation de l'écoulement devient important.

Au cours de cette étude, il s'est avéré que la physique d'un tel écoulement pouvait mettre en jeu de nombreux effets d'origines différentes. En particulier, des écoulements en rotation du même type que le nôtre, même lorsqu'ils restent stationnaires (à faible nombre de Reynolds par exemple), peuvent exhiber des perturbations stationnaires de grande amplitude, sans forçage extérieur, à mesure que le nombre de swirl augmente. Nos travaux se sont donc autant attachés à décrire l'écoulement moyen que le champ fluctuant, et c'est en séparant ces deux aspects que nous avons choisi de résumer ici les principaux éléments de réponse apportés.

Champ moyen

En premier lieu, les mesures de turbulence par fil chaud du chapitre 3 ont permis de formuler une hypothèse qui a sous-tendu le reste de nos travaux : l'apparition de cette turbulence est très majoritairement contrôlée par le nombre de swirl S de l'écoulement directement généré par le nid d'abeilles, et est donc indépendante du nombre de swirl local dans le plan de sortie des différentes tuyères convergentes. En plus de légitimer l'étude de l'écoulement de conduite compris entre le nid d'abeilles et le plan de sortie du jet, cette conclusion a permis de comprendre que les phénomènes recherchés devaient se produire dans la portion de conduite de section constante, ou dans la portion la plus amont des tuyères convergentes.

Une synthèse bibliographique des travaux existants sur les écoulements tournants confinés (chapitre 4) ainsi qu'une étude théorique d'un modèle de fluide parfait axisymétrique (chapitre 5) ont permis de comprendre qu'un phénomène physique important était la transition critique des ondes de Kelvin axisymétriques, pouvant ou non mener à un éclatement tourbillonnaire. En tout état de cause, la synthèse du chapitre 4 a montré qu'il était nécessaire de réaliser des études plus poussées sur l'influence de la géométrie aval sur un écoulement tournant, notamment dans un cadre comme le nôtre où les effets de confinement sont dominants.

Le modèle de fluide parfait axisymétrique du chapitre 5 a alors permis de caractériser la dynamique de ces ondes et de mettre en évidence théoriquement leur transition critique. Il a également montré la particularité de l'écoulement de rotation solide et advection uniforme, ainsi que la possibilité d'une recirculation pariétale **à l'intérieur** de la tuyère convergente en régime transcritique. Ce modèle de fluide parfait a également

permis de comprendre que cette recirculation résultait d'une excitation non linéaire de l'onde subissant la transition par la géométrie convergente.

Les mesures par PIV stéréoscopique du chapitre 8 ont suscité plusieurs conclusions importantes. Tout d'abord, nous n'avons pas observé de décollement dans la zone visualisée pour aucune des valeurs du nombre de swirl explorées, ce que sous-tendait pourtant le modèle de fluide parfait. Ensuite, au contraire des études expérimentales de la littérature, nous n'avons pas observé d'influence de la valeur du taux de contraction de la tuyère située en aval (en tous cas pour $\chi_{CV} \geq 4$ comme dans nos expériences). Nous avons par contre montré que celle-ci avait pour effet de faire disparaître l'éclatement tourbillonnaire, qui est observé lorsque $\chi_{CV} = 1$, au profit d'une transition régulière d'un régime supercritique sans gradients axiaux, vers un régime sous-critique présentant des **ondes axisymétriques stationnaires** de grande amplitude. Dans notre écoulement, la transition se produit pour $S \approx 2$, et le régime d'ondes stationnaires reste peu turbulent jusqu'à $S \approx 3.1$, tandis que dans le cas non contracté $\chi_{CV} = 1$ le régime sous-critique présente des instationnarités hélicoïdales dès que la transition est franchie.

Le chapitre 9, simulant un écoulement axisymétrique avec condition d'adhérence de nombre de Reynolds modéré, a confirmé que la couche limite joue un effet régularisant sur les phénomènes non linéaires du régime transcritique étudiés au chapitre 5. En effet dans ce cas également, aucun décollement de couche limite ni aucune recirculation n'ont été trouvés lors des calculs. Par ailleurs, un bon accord a été obtenu entre ces simulations et les expériences de PIV stéréoscopique, montrant finalement que d'une part la prise en compte de la couche limite est fondamentale dans ce problème, mais que d'autre part, une description poussée des effets visqueux n'est pas non plus nécessaire pour en capturer la physique.

Turbulence

A la périphérie de l'écoulement, les mesures fil chaud et PIV ont montré une augmentation progressive des taux de turbulence à partir du régime transcritique ($S \geq 1.5$), avec quelques irrégularités observées sur les trois taux de contraction. L'examen des champs moyens de PIV a permis de comprendre que les ondes axisymétriques stationnaires présentes dans la conduite de section constante possédaient des zones d'instabilités centrifuges généralisées à petite échelle. La comparaison entre les mesures fil chaud et PIV a alors suggéré que la contraction aurait pour effet global d'amplifier ces perturbations créées dans la portion de conduite de section constante. Une telle phénoménologie serait compatible avec le caractère développé de la turbulence en sortie.

Alors que des instabilités hélicoïdales de forte amplitude ont été détectées dès $S \approx 2.2$ lorsque $\chi_{CV} = 1$, le centre de l'écoulement reste faiblement turbulent jusque $S \approx 2.7$ dès lors que $\chi_{CV} \geq 4$. A cette valeur du nombre de swirl, les taux de turbulence axial et azimutal augmentent brusquement au centre du plan de sortie des tuyères, de sorte que l'intégralité de ce plan devient turbulente. Dans la zone PIV, cette augmentation est également détectée, mais de façon beaucoup moins nette. Cette croissance subit ensuite une rupture de pente à $S \geq 3.1$, cette fois dans les deux zones de l'écoulement. Les mesures PIV montrent que l'instabilité hélicoïdale alors observée est d'extension radiale plus faible que dans le cas $\chi_{CV} = 1$. Par ailleurs, elles révèlent également la présence de recirculations de petite échelle à la périphérie de l'écoulement pour les valeurs les plus élevées de S . L'analyse de stabilité menée au chapitre 9 sur un écoulement proche des conditions expérimentales, à nombre de Reynolds modéré, a montré l'occurrence d'une bifurcation de Hopf à $S_{0H} = 3.02$, menant à une instabilité globale de l'écoulement. Les

solutions stationnaires de ce calcul à nombre de Reynolds modéré approchant de façon satisfaisante l'écoulement expérimental pour $\chi_{CV} \geq 4$, cette instabilité pourrait donc expliquer la croissance des fluctuations axiales au centre observée pour $S \approx 3.1$. Le caractère développé de cette turbulence en sortie de tuyère pourrait alors être expliqué par la saturation de cette instabilité, forcée d'alimenter un mécanisme de cascade inertielle afin de dissiper l'énergie, ou encore par un mélange des structures turbulentes créées par les zones instables centrifuges en périphérie.

10.2 Perspectives

Cette étude a donc permis de comprendre comment se manifestait le passage de la transition critique dans notre cas particulier de condition d'écoulement à l'amont et de géométrie aval. Elle s'est également attachée à décrire précisément l'apparition de la turbulence, et a peut-être isolé deux des mécanismes pouvant l'expliquer.

Néanmoins ces conclusions restent partielles. Le rôle des instabilités centrifuges pourrait par exemple être examiné plus précisément dans le cadre d'une analyse de stabilité à petite échelle utilisant une approche de suivi de trajectoires comme celle décrite par Lifschitz et Hameiri [78] (on pourra se reporter aux travaux de Sipp *et al.* [112, 113] pour des exemples d'utilisation). Au début de notre travail, nous avons appliqué cette méthode aux écoulements non visqueux du chapitre 5 et trouvé une croissance brusque des perturbations à l'approche de la transition critique, liée aux instabilités centrifuges à l'intérieur des tuyères. Nous avons choisi de ne pas en présenter les résultats ici. En effet ces écoulements, s'ils permettent de comprendre l'influence de la convergence sur les ondes de Kelvin au régime transcritique, ne sont pas les plus pertinents pour modéliser l'écoulement expérimental. A présent que des simulations plus précises sont disponibles, nous pensons que cette méthode peut leur être appliquée avec profit. Elle pourrait notamment permettre d'établir des liens plus précis entre l'évolution turbulente observée dans la zone PIV et en sortie des tuyères.

La confirmation de la présence d'une instabilité globale à $S \approx 3 - 3.1$ dans l'écoulement expérimental nous semble également être une question nécessitant de plus amples développements. A ce titre, on pourra chercher des compléments d'informations du côté des simulations numériques, en déterminant notamment la nature super ou sous-critique de la bifurcation de Hopf du mode axisymétrique, ou encore la sensibilité au nombre de Reynolds de la valeur du swirl de transition. De même, l'augmentation simultanée des taux de turbulence axiale **et** azimutale suggère de compléter nos travaux par une analyse de stabilité aux perturbations non axisymétriques, ou encore par une simulation numérique directe instationnaire de l'écoulement (même à bas nombre de Reynolds) permettant de voir l'évolution en temps de cette instabilité. En parallèle, nous pensons que des renseignements plus fins sur la caractérisation de la turbulence peuvent être également apportés par une analyse de type POD appliquée aux champs instationnaires que nous avons obtenus par PIV.

Enfin, l'une des particularités de ce travail a été d'étudier la physique d'un écoulement tournant à grand nombre de swirl dans le cas d'un **très fort confinement**. Ce sujet n'a à notre connaissance été traité dans la littérature que dans quelques géométries spécifiques, dictées par des applications. Les outils théoriques et numériques que nous avons pu développer ici (calcul de solutions stationnaires par suivi de branches, en particulier dans le cas visqueux à l'aide du logiciel FreeFem++) sont adaptés pour traiter d'autres types

d'écoulements de base, y compris celui du q -vortex plus répandu dans la littérature. Une étude menée dans ce sens pourrait donc, selon nous, permettre d'explorer théoriquement l'influence paramétrique du confinement sur l'éclatement tourbillonnaire (un sujet encore peu compris!) et sur les écoulements tournants à grand nombre de swirl en général.

Quatrième partie

Annexes

A La mesure fil chaud deux composantes

A.1 Etalonnages

Nous décrivons ici les protocoles d'étalonnage en température, vitesse et angle nécessaires au fonctionnement de la sonde à fils croisés [15]. L'analyse d'incertitude associée est détaillée au paragraphe suivant.

- L'étalonnage en température s'effectue à vitesse constante sur un banc spécialement prévu à cet effet, et aboutit à une correction linéaire sur la tension de chaque fil.
- L'étalonnage en vitesse est réalisé dans le plan de sortie des tuyères convergentes, la sonde étant placée à $\beta = 0^\circ$ (voir la figure 3.1 du chapitre 3). La procédure consiste à acquérir 11 points de vitesse différentes dans la gamme à mesurer, à la fois à l'aide de la sonde et du capteur de pression utilisé pour faire le point de fonctionnement de la soufflerie. A l'issue de cette opération, la vitesse de l'écoulement est liée à la tension de chaque fil par un polynôme de degré 3. La figure A.1 présente un exemple d'étalonnage en vitesse, effectué en sortie de la tuyère de taux de contraction $\chi_{CV} = 9$, sur une gamme de vitesse allant de 0 à 45 m.s^{-1} .

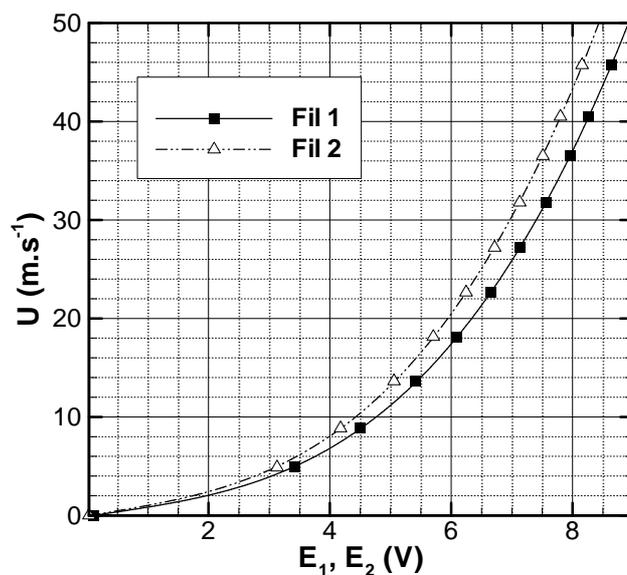


FIG. A.1: Etalonnage en vitesse en sortie de la tuyère $\chi_{CV} = 9$.

- L'étalonnage angulaire s'effectue également dans le plan de sortie des tuyères, à l'aide du capteur de pression. On fonctionne à vitesse de jet constante et on mesure les tensions aux bornes des deux fils pour des inclinaisons de sonde régulièrement

espacées dans l'intervalle $[-30^\circ, +30^\circ]$. Pour chaque angle i , on calcule les vitesses efficaces $U_{e,1}$ et $U_{e,2}$ (*i.e.* les vitesses indiquées par le polynôme d'étalonnage en vitesse), afin de former les deux fonctions angulaires ε et η , définies par

$$\varepsilon(i) = \frac{U_{e,1}^2(i) - U_{e,2}^2(i)}{U_{e,1}^2(i) + U_{e,2}^2(i)} \quad (\text{A.1a})$$

$$\eta(i) = \frac{U_{e,1}^2(i) + U_{e,2}^2(i)}{2U^2} \quad (\text{A.1b})$$

où l'on a noté U le module du vecteur vitesse au point de mesure. La figure A.2 représente un exemple des courbes obtenues pour ε et η lors d'un étalonnage angulaire à $W_1 \approx 27 \text{ m.s}^{-1}$. La valeur choisie pour W_1 dépend de chaque tuyère et correspond à la vitesse réglée au départ pour le premier essai sans rotation. Si le

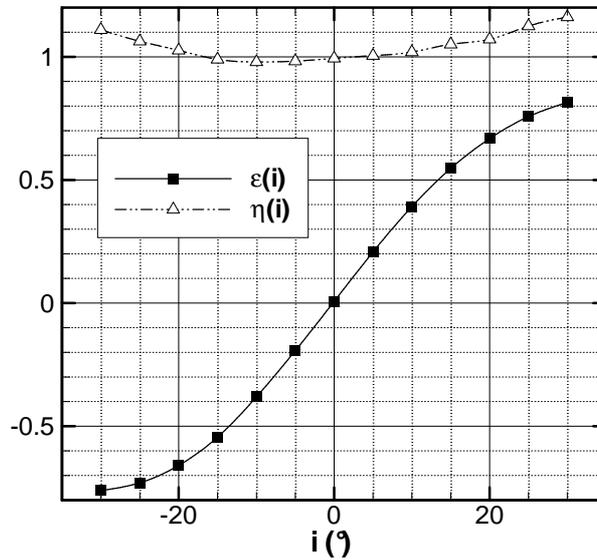


FIG. A.2: Evolution de ε et η en fonction de l'incidence de la sonde - Etalonnage à $W_1 \approx 27 \text{ m.s}^{-1}$.

paramètre ε trouvé correspond à un angle qui n'est pas dans la gamme d'étalonnage, le point est rejeté comme faux. Lorsque tous les points ont été dépouillés, le logiciel donne alors le pourcentage de points rejetés.

A.2 Incertitude sur la mesure d'une vitesse

A.2.1 Etalonnage

Lors de la détermination des composantes (v, w) du vecteur vitesse, les tensions acquises par l'anémomètre subissent les traitements suivants :

1. Correction en température de chaque tension
2. Calcul des vitesses efficaces $U_{e,1}$ et $U_{e,2}$
3. Calcul de ε , d'où détermination de l'inclinaison i entre la sonde et le vecteur vitesse, par interpolation
4. Interpolation de $\eta(i)$, d'où détermination de U
5. Calcul de v et w en tenant compte de β , par projection (voir la figure 3.1).

A.2.2 Correction en température

La correction en température consiste à calculer la tension E_{i,T_e} que verrait chaque fil si la température de l'écoulement T était identique à la température de référence T_e indiquée à l'étalonnage. Chaque fil est ici caractérisé par un coefficient γ_i tel que

$$E_{i,T_e} = E_i - \gamma_i \delta T \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\delta T = T - T_e = (T - T_a) + (T_a - T_e), \quad (\text{A.3})$$

T_a désignant la température ambiante. La quantité $T - T_a$ est mesurée à l'aide d'un capteur thermocouple de type K, précis à 0.2% près, et la température ambiante est relevée à l'aide d'une sonde de température placée au niveau du point froid du thermocouple. En tenant compte de l'incertitude de cette sonde et de la possible dérive de T_a lors d'un essai (toujours inférieure à 0.1 K), on obtient l'estimation de l'écart type sur la mesure de δT , $\sigma_{\delta T} = 0.2 K$. On a ensuite $\sigma_{E_{i,T_e}} = \gamma_i \sigma_{\delta T}$.

A.2.3 Calcul des vitesses efficaces

Pour chaque fil, cette vitesse est déterminée par la loi d'étalonnage en vitesse $U_{e,i} = f_i(E_{i,T_e})$, qui est un polynôme de degré 3. On a donc :

$$\sigma_{U_{e,i}}^2 = \left(\frac{df_i}{dE} \right)^2 \sigma_{E_{i,T_e}}^2 + \sigma_{U_{etal}}^2 \quad (\text{A.4})$$

où $\sigma_{U_{etal}}$ désigne l'écart type entre la courbe d'étalonnage en vitesse et les vitesses mesurées à l'aide du capteur de pression.

A.2.4 Calcul de v et w

On suppose ici que la sonde peut être inclinée d'un angle $\beta \neq 0^\circ$. On rappelle que l'angle entre le vecteur vitesse et la sonde est alors $i = \alpha + \beta$, où α est l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe Oz .

Pour un point de mesure donné, ε est calculé en fonction des vitesses efficaces $U_{e,1}$ et $U_{e,2}$ suivant la formule (A.1a). On obtient donc à l'aide d'une différentiation :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \left(\frac{4U_{e,1}U_{e,2}}{(U_{e,1}^2 + U_{e,2}^2)^2} \right)^2 (U_{e,2}^2 \sigma_{U_{e,1}}^2 + U_{e,1}^2 \sigma_{U_{e,2}}^2) \quad (\text{A.5})$$

L'incertitude correspondante sur β est donc obtenue par la relation

$$\sigma_\beta^2 = \left(\frac{di}{d\varepsilon}(\varepsilon) \right)^2 \sigma_\varepsilon^2 \quad (\text{A.6})$$

où la quantité $di/d\varepsilon$ est calculée à partir de l'inverse de la courbe $i(\varepsilon)$ obtenue par l'étalonnage. La détermination de l'angle est donc la moins précise pour les valeurs élevées de $|\varepsilon|$, lorsque l'incidence relative de la sonde par rapport au vecteur vitesse est élevée (voir la figure A.2).

L'incertitude sur U s'obtient en inversant (A.1b) :

$$\sigma_U^2 = \frac{1}{2\eta(U_{e,1}^2 + U_{e,2}^2)} (U_{e,1}^2 \sigma_{U_{e,1}}^2 + U_{e,2}^2 \sigma_{U_{e,2}}^2) + \left(\frac{U_{e,1}^2 + U_{e,2}^2}{8\eta^3} \right) \sigma_\eta^2 \quad (\text{A.7})$$

où σ_η est estimée grâce à la dérivée de la courbe d'étalonnage angulaire $\eta(i)$. L'angle réel du vecteur vitesse avec l'axe Oz étant reconstitué par $\alpha = i - \beta$, on a :

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 + \sigma_i^2 \quad (\text{A.8})$$

Etant donné la précision de la table de réglage angulaire, on estime que $\sigma_i \approx 0.17^\circ$ (soit 10 minutes d'angle).

L'incertitude pour chaque composante s'obtient finalement par projection, suivant :

$$\sigma_w^2 = \cos^2(\alpha) \sigma_U^2 + U^2 \sin^2(\alpha) \sigma_\alpha^2 \quad (\text{A.9a})$$

$$\sigma_w^2 = \sin^2(\alpha) \sigma_U^2 + U^2 \cos^2(\alpha) \sigma_\alpha^2 \quad (\text{A.9b})$$

Application numérique On effectue ici le calcul de σ_v et σ_w en fonction de l'angle i entre le vecteur vitesse et la sonde. On prend à titre d'exemple les étalonnages angulaires effectués pour chaque valeur de χ_{CV} . Les résultats obtenus sont représentés sur la figure A.3.

Dans tous les cas, on constate donc que la vitesse est mesurée à $\pm 0.5\%$ près à l'incidence $i = 0^\circ$ (à l'exception de la composante azimutale pour $\chi_{CV} = 1$, où l'incertitude est légèrement plus élevée), et à $\pm 1\%$ sur l'ensemble des valeurs de i .

A.3 Convergence statistique

Les grandeurs représentées dans le chapitre 3 sont des moyennes et écarts-types calculés à partir d'un échantillonnage du signal. Celui-ci est effectué à une fréquence suffisamment élevée pour reproduire le signal continu, en accord avec le critère de Shannon-Nyquist pour éviter tout repliement, et sur une durée ΔT permettant de résoudre les composantes les plus basses fréquences. Considérant une composante de vitesse moyenne U (de fluctuation associée u'), l'estimation de l'incertitude liée à la valeur finie du temps d'échantillonnage ΔT fait intervenir τ , temps intégral de l'écoulement :

$$\tau = \frac{\int_0^\infty u'(t)u'(t+t')dt'}{\langle u'^2 \rangle}, \quad (\text{A.10})$$

Si l'échantillonnage est tel que $\Delta T \gg \tau$, alors l'incertitude statistique sur U est donnée par l'approximation

$$\sigma_{U,stat}^2 \approx 2 \langle u'^2 \rangle \frac{\tau}{\Delta T} \quad (\text{A.11})$$

Si la répartition de vitesse peut de plus être supposée gaussienne (ce qui est le cas en pratique), on obtient également l'incertitude absolue sur la variance :

$$\frac{\sigma_{\langle u'^2 \rangle,stat}^2}{\langle u'^2 \rangle} \approx 2 \frac{\tau}{\Delta T}. \quad (\text{A.12})$$

Pour les sondages de vitesse du chapitre 3, le temps d'acquisition est de $\Delta T = 4\text{ s}$ (voir le tableau 3.1). Le temps intégral τ peut être calculé à l'aide de la densité spectrale

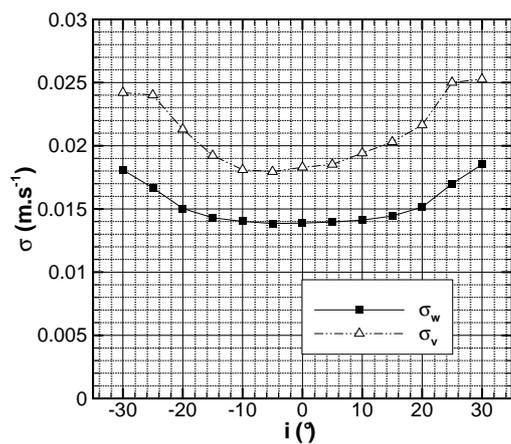
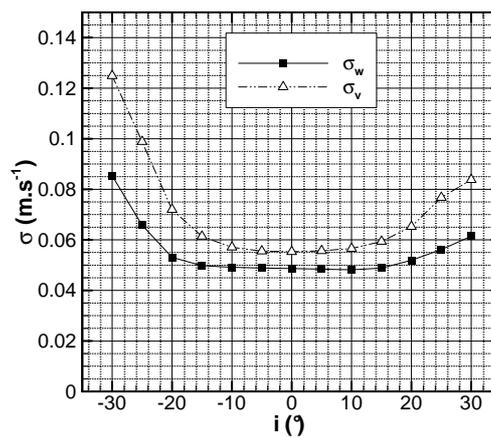
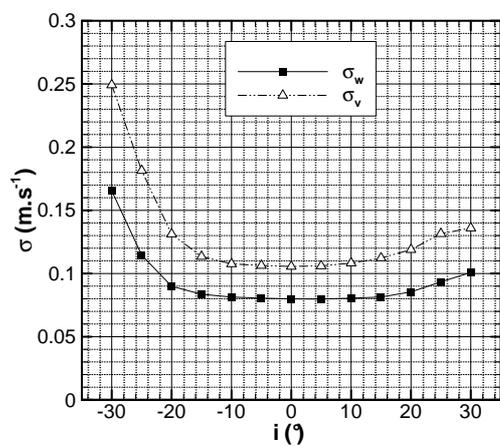
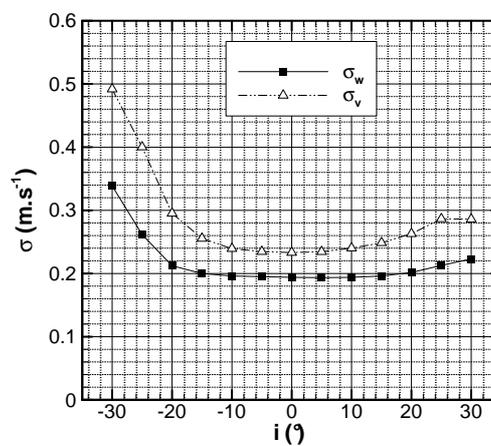
(a) $\chi_{CV} = 1, U_{ang} = 3 \text{ m.s}^{-1}$ (b) $\chi_{CV} = 4, U_{ang} = 12 \text{ m.s}^{-1}$ (c) $\chi_{CV} = 9, U_{ang} = 27 \text{ m.s}^{-1}$ (d) $\chi_{CV} = 18.4, U_{ang} = 55.1 \text{ m.s}^{-1}$

FIG. A.3: Incertitude absolue sur les composantes du vecteur vitesse mesurées au fil chaud pour les étalonnages angulaires correspondant à chaque tuyère. Pour chaque étalonnage, on précise la valeur U_{ang} de la vitesse axiale du jet.

d'énergie et de la valeur de $\langle u'^2 \rangle$ considérée. Néanmoins un tel traitement ne peut être fait de façon systématique. Pour trouver une borne supérieure de cette grandeur, on suppose que les échelles des structures turbulentes en sortie des tuyères ne peuvent être de dimension plus grande que le diamètre de sortie de la tuyère. On estime ensuite τ à l'aide d'une hypothèse de Taylor.

Ce raisonnement mène à des incertitudes relatives sur la fluctuation moyenne de vitesse $\sigma_{u'}/u'$ égales respectivement à 3%, 2% et 1% pour $\chi_{CV} = 4, 9$ et 18.4. Par ailleurs on obtient une incertitude relative liée à la statistique négligeable sur le calcul de la moyenne \bar{U} .

A.4 Autres sources d'erreur

L'incertitude du placement de la sonde en hauteur dans l'écoulement tournant peut engendrer une erreur systématique sur w et v ; en pratique nous trouvons que celle-ci est négligeable par rapport aux autres sources d'erreur. D'après l'étude de Kawall *et al.* [60], les sources d'erreur restantes sont les fluctuations de vitesse radiale, ou encore l'écartement fini (1 mm) entre les deux fils. Dans le premier cas, Kawall *et al.* indiquent que l'effet de cette fluctuation est négligeable tant que le taux de turbulence local reste inférieur à 15 %. Ceci est vérifié pour tous nos essais, à l'exception des zones de couche limite. L'écartement fini des fils peut être une source d'erreur si les gradients de vitesse sont localement importants, ou encore si l'échelle de Kolmogorov est grande devant cet écartement. En pratique, hors de la zone de couche limite les gradients de vitesse moyenne mènent à une variation relative de l'ordre $\pm 0.5\%$ dans les situations les plus défavorables, et on trouve que l'échelle de Kolmogorov minimale approximative est de l'ordre de l'écartement des fils, soit 1 mm.

A.5 Conclusion

D'après Kline et McClintock [65], l'incertitude de mesure complète est la racine carrée de la somme des incertitudes élémentaires au carré. Si l'on excepte les sources d'erreur répertoriées au paragraphe précédent (difficilement quantifiables de façon systématique mais globalement de faible amplitude), on peut donc conclure de cette étude que :

- L'incertitude relative sur la mesure de la vitesse moyenne est de $\pm 1\%$ ($\pm 0.5\%$ lorsque l'angle relatif entre la sonde et le vecteur vitesse est inférieur à 15° en valeur absolue).
- L'incertitude relative sur la mesure de la fluctuation moyenne de vitesse est respectivement de $\pm 8\%$, $\pm 6\%$ et $\pm 4\%$ pour $\chi_{CV} = 4, 9$ et 18.4 (intervalle de confiance à 95%).

B Méthode de continuation numérique

Nous présentons ici l'outil utilisé aux chapitres 5 et 9 pour calculer des solutions d'écoulements stationnaires et dans certains cas, leur stabilité. Il s'agit d'une technique particulièrement adaptée à l'étude des phénomènes **non linéaires**, puisqu'elle consiste à calculer les solutions de systèmes d'équations non linéaires de proche en proche lorsqu'un paramètre de contrôle varie (il s'agira ici du nombre de swirl). En pratique, celle-ci a déjà été appliquée à l'étude d'écoulements tournants confinés, par exemple par Leibovich et Kribus [73] et Beran et Culick [11].

Nous poserons d'abord le problème qu'il s'agit de résoudre, puis nous décrirons la méthode mise en oeuvre dans les codes. Cette description s'inspire de passages des ouvrages de Kuznetsov [66] et plus particulièrement Govaerts [42], que nous recommandons au lecteur intéressé par plus de détails ; il y trouvera un panorama bien plus complet de l'étude des systèmes dynamiques que les quelques repères présentés ici.

B.1 Formulation du problème

Nous cherchons à déterminer les solutions stationnaires d'écoulements décrits par des équations aux dérivées partielles non linéaires (équations d'Euler axisymétriques au chapitre 5, équations de Navier-Stokes axisymétriques au chapitre 9), associées à un ensemble de conditions aux limites adéquates. Formellement, le problème instationnaire générique correspondant peut être écrit sous la forme

$$\partial_t X + F(X; S_0) = 0 \tag{B.1}$$

où X désigne la solution recherchée, et $F(X; S_0)$ désigne un opérateur portant sur X , dépendant d'un paramètre S_0 , et comportant des termes non linéaires. En prenant l'exemple du chapitre 5, si X s'identifie avec le triplet de fonctions (ψ, K, η) et si S_0 désigne le nombre de swirl de l'écoulement imposé à l'amont du domaine fluide (en fonction duquel nous réalisons notre étude paramétrique), alors le problème (B.1) correspond aux équations de Squire-Long instationnaires muni de ses conditions aux limites. Par la suite, nous emploierons cette notation symbolique de façon indifférente pour désigner le problème général ou sa projection sur une base de fonctions spectrales ou d'éléments finis, la solution X étant cette fois un élément de \mathbb{R}^N , avec N le nombre de points de maillage multiplié par le nombre de fonctions inconnues.

Dans la pratique, on souhaite connaître le nombre d'écoulements stationnaires possibles et leurs propriétés respectives en fonction des valeurs de S_0 . En premier lieu on résout donc le problème

$$F(X; S_0) = 0. \tag{B.2}$$

Une fois que ceci est réalisé, l'ensemble des solutions peut être résumé sur un diagramme de bifurcations, qui fait figurer en abscisse le paramètre de contrôle et en ordonnée une grandeur caractéristique permettant de différencier les solutions obtenues, par exemple la valeur d'une composante de vitesse en un point de l'écoulement, ou encore l'extremum sur tout le domaine d'une des fonctions inconnues. Sur ces diagrammes, les solutions se répartissent alors suivant différentes branches séparées par des bifurcations, comme le montre la figure B.1 tirée de l'ouvrage de Govaerts. Sur cette figure, les points A et B

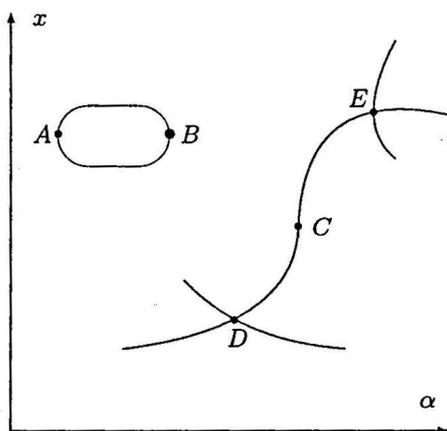


FIG. B.1: Exemple de diagramme de bifurcation, d'après Govaerts [42]. Le paramètre de continuation et l'inconnue sont respectivement notés α and x .

sont appelés de façon équivalente points limites, points tournants ou points de bifurcation noeud-col. Dans les systèmes présentant des propriétés de symétrie ou d'invariance, on rencontre plus fréquemment des points de branchement tels que les points D (bifurcation transcritique) et E (bifurcation fourche).

Si l'on veut pouvoir caractériser le scénario dynamique du système, il faut également déterminer les propriétés de stabilité des différentes solutions obtenues. Dans un formalisme linéaire, cela s'effectue en superposant à la solution particulière X_0 considérée des perturbations X' d'amplitude infinitésimale, c'est-à-dire telles que $\|X'\| \ll \|X_0\|$ (les modes normaux introduits au paragraphe 4.2 en sont un exemple). Par développement de Taylor du problème (B.1) écrit pour $X = X_0 + X'$, on obtient à l'ordre le plus bas

$$\partial_t X' + F'_{X_0} X' = 0 \quad (\text{B.3})$$

où l'on a noté F'_{X_0} le gradient (ou jacobien) de l'opérateur F autour de la solution X_0 , qui est un opérateur linéaire. On écrit ensuite les perturbations cherchées sous la forme $X' = \text{Re}\{\hat{X}e^{\omega t}\}$ (la pulsation ω pouvant être complexe), ce qui mène au problème aux valeurs propres

$$F'_{X_0} \hat{X} + \omega \hat{X} = 0 \quad (\text{B.4})$$

L'équilibre X_0 est alors stable (resp. neutre) si toutes les valeurs propres ω trouvées sont de partie réelle strictement négative (resp. négative ou nulle) et instable si l'une d'entre elles au moins possède une partie réelle strictement positive. Dans ce dernier cas, la perturbation correspondante croît exponentiellement tant qu'elle reste de faible amplitude, et doit être décrite par une analyse non linéaire lorsque ce n'est plus le cas.

B.2 Méthodes prédicteur-correcteur

B.2.1 Méthode simple

La résolution directe de systèmes d'équations non linéaires tels que (B.2) n'est pas envisageable de manière générale. Une première possibilité pour obtenir une solution stationnaire consiste à résoudre le problème instationnaire (B.1) et à le laisser converger vers une solution stationnaire. Ceci aboutit souvent à des calculs relativement longs, mais dans le cas où plusieurs solutions stationnaires stables existent pour une même valeur du paramètre S_0 , cela mène à la solution la plus stable correspondant à la condition initiale spécifiée.

Nous nous intéressons entre autres à des équations non dissipatives (*cf.* chapitre 5), dont la simulation instationnaire peut être hasardeuse puisqu'elle nécessite l'introduction de dissipation dans le schéma numérique. Nous avons donc préféré opter pour une technique de suivi de branches, encore appelée méthode de continuation. Comme son nom l'indique, cette méthode consiste à déterminer des solutions stationnaires en suivant une branche parcourue par incréments successifs du paramètre S_0 en utilisant une méthode de type prédicteur-correcteur. Le principe de cette méthode est schématisé sur la figure (B.2), ici dans sa variante la plus simple. La détermination d'une solution se

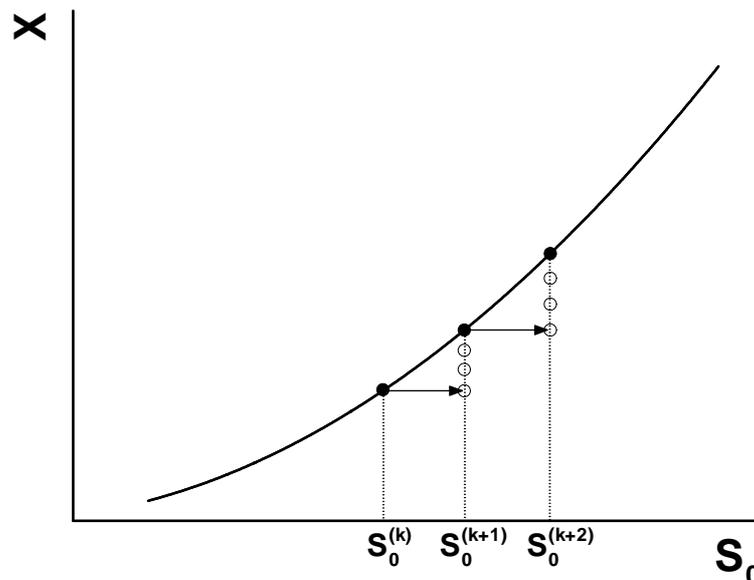


FIG. B.2: La méthode de continuation simple

fait à partir d'un champ X_g appelé *guess-value*, qui n'est pas solution mais que l'on sait proche d'une solution X_0 . L'étape de "correction" consiste ensuite à faire converger X_g vers X_0 par itérations successives. L'une des méthodes les plus efficaces et les plus employées est la méthode de Newton, décrite à la fin de ce paragraphe.

Pour construire une branche à partir de points discrets, il faut répéter cette opération autant de fois que nécessaire. L'étape de "prédiction" consiste, à partir d'une solution $X_{0,i}$ obtenue pour une valeur du nombre de swirl $S_{0,i}$, à construire une *guess-value* approchant le mieux possible la solution recherchée pour une valeur $S_{0,i} = S_{0,i+1} + \Delta S_0$ légèrement supérieure (ou inférieure). Si l'incrément ΔS_0 imposé est suffisamment petit et si la solution recherchée est loin d'un point tournant ou d'un point de branchement, on peut

simplement utiliser comme prédicteur la solution $X_{0,i}$ correspondant à $S_{0,i}$. C'est cette alternative qui est représentée sur la figure (B.2).

Itérations de Newton

Le paramètre S_0 ne figure pas dans les notations ici, la méthode de Newton étant indépendante du suivi de branches, même si elle peut être adaptée dans certains cas comme celui présenté au paragraphe suivant.

Notons $X^{(0)} = X_g$ une guess-value X_g de la solution X_0 recherchée. Celle-ci représente la valeur du prédicteur à l'itération 0. L'exposant, qui désigne ici le numéro de l'itération au sein du processus de correction vers une solution donnée, ne doit pas être confondu avec l'indice, qui désigne le numéro de la solution sur la branche étudiée.

Le principe des itérations de Newton est de trouver une suite d'incrément successifs δX^k permettant de faire converger la guess-value vers X_0 . A la $k^{\text{ème}}$ itération, l'incrément est déterminé en utilisant le développement de Taylor

$$F(X^{(k)} + \delta X^{(k)}) = F(X^{(k)}) + F'_{X^{(k)}} \delta X^{(k)} + \dots \quad (\text{B.5})$$

Comme $X^{(k)}$ n'est pas solution du problème (B.2), alors $F(X^{(k)}; S_0) \neq 0$ et l'incrément est alors trouvé en résolvant le système linéaire

$$F(X^{(k)}) + F'_{X^{(k)}} \delta X^{(k)} = 0 \quad \iff \quad F'_{X^{(k)}} \delta X^{(k)} = -F(X^{(k)}) \quad (\text{B.6})$$

L'opération est ensuite répétée par récurrence, le prédicteur de la $k + 1^{\text{ème}}$ itération étant défini par $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \delta X^{(k)}$, et les itérations stoppées lorsque la valeur du résidu $\|F(X^{(n)})\|$ est proche de la précision machine. Si la guess-value initiale X_g est suffisamment proche de la solution et que X_0 n'est pas un point tournant ou un point de branchement (*i.e.* l'opérateur jacobien F'_{X_0} n'a pas de valeur propre nulle) alors les itérations de Newton convergent de façon quadratique, c'est-à-dire qu'il existe une constante κ telle que

$$\|\delta X^{(k+1)}\| \leq \kappa \|\delta X^{(k)}\|^2. \quad (\text{B.7})$$

La preuve de cette convergence, qui est un résultat classique, est par exemple donnée dans [41]. En pratique, elle est atteinte pour un nombre d'itérations N de l'ordre de 3 ou 4, ce qui justifie pourquoi il est possible d'obtenir par cette méthode des solutions stationnaires en un temps beaucoup plus court que par un calcul instationnaire. La difficulté réside ici dans le fait d'obtenir une "bonne" guess-value X_g . Dans le cadre d'un suivi de branches, on comprend que ceci ne pose problème que pour la toute première valeur à calculer, puisqu'il est ensuite possible d'adapter l'incrément de paramètre ΔS_0 ou de recourir à des méthodes spécialisées pour s'assurer de la convergence des itérations de Newton.

B.2.2 Continuation "pseudoarclength"

Au voisinage de points tournants, il n'est plus possible d'utiliser le paramètre S_0 pour suivre une branche, puisque celle-ci n'existe plus au-delà d'une certaine valeur du paramètre. Pour pallier ce problème, Keller [61] a donc imaginé une technique appelée "pseudoarclength method", qui adapte à la fois les étapes de prédiction et de correction à cette topologie particulière (voir la figure B.3). L'idée principale est ici de considérer la branche que l'on suit non plus comme une courbe de la forme $X = g(S_0)$, mais comme une courbe paramétrée sur laquelle on définit une abscisse curviligne s (arclength en anglais).

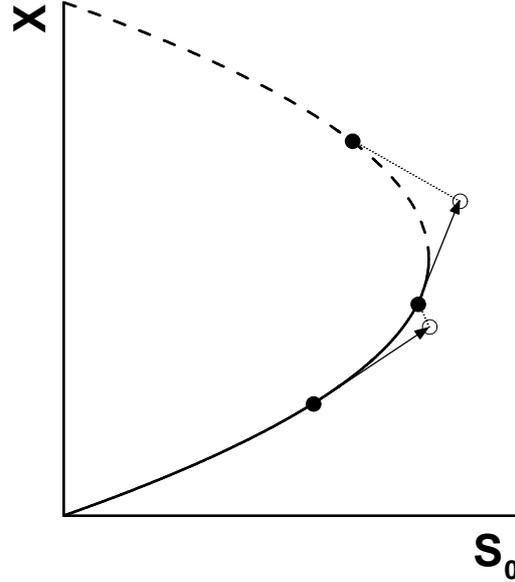


FIG. B.3: La méthode de continuation "pseudoarclength", appliquée à la détection d'un point tournant

Prédicteur Dans l'espace à $N + 1$ dimensions engendré par l'espace des états du système X et les valeurs du paramètre S_0 , les coordonnées $(T_{X,i}, T_{S_0,i})$ du vecteur tangent à une branche de solution au point $(X_{0,i}, S_{0,i})$ sont obtenues par

$$F'_{X_{0,i}} \cdot T_{X,i} + F'_{S_{0,i}} \cdot T_{S_0,i} = 0 \quad (\text{B.8})$$

autrement dit, ce vecteur appartient au noyau de l'opérateur gradient à $(N + 1)$ dimensions $F' = (F'_{X_{0,i}}, F'_{S_{0,i}})$. Dans la méthode de Keller, le prédicteur pour la valeur $S_{0,i+1}$ du paramètre est construit à l'aide de ce vecteur tangent à partir de la $i^{\text{ème}}$ solution sur la branche, puisqu'il est choisi sous la forme

$$\begin{cases} X^{(0)} &= X_{0,i} + \Delta s T_{X,i} \\ S_0 &= S_{0,i} + \Delta s T_{S_0,i} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

où Δs est l'incrément d'abscisse curviligne (et non plus de paramètre) que l'on impose. C'est dans la mesure où celui-ci est fixé dans la direction du vecteur tangent plutôt que directement sur la courbe (qu'on ne connaît pas a priori) que l'on parle de continuation "pseudoarclength".

Correcteur Dans la situation d'un point tournant représentée sur la figure (B.3), il n'est plus possible de faire les corrections dans la direction verticale (c'est-à-dire à paramètre constant). Les itérations de Newton sont donc modifiées de façon à corriger dans la direction orthogonale au vecteur tangent, en cherchant un incrément $(\delta X^{(k)}, \delta S_0^{(k)})$ portant à la fois sur X et sur S_0 . Celui-ci doit alors vérifier

$$F'_{X^{(k)}} \delta X^{(k)} + F'_{S_0} \delta S_0^{(k)} = -F(X^{(k)}; S_0) \quad (\text{B.10})$$

qui est l'équivalent de l'itération classique (B.6), mais obtenu cette fois par un développement de Taylor dans les directions X et S_0 , et la condition d'orthogonalité par rapport au vecteur tangent

$$T_{X,i} \delta X^{(k)} + T_{S_0,i} \delta S_0^{(k)} = 0. \quad (\text{B.11})$$

On obtient donc bien avec ces deux conditions un système de $N + 1$ équations à $N + 1$ inconnues.

En résumé, les différentes étapes pour calculer une branche de solutions avec cette méthode sont les suivantes :

Démarrage

1. Construction d'une première guess-value X_g estimant la solution $X_{0,0}$ correspondant au paramètre $S_{0,0}$.
2. Itérations de Newton "simples" (équation (B.6)) pour faire converger X_g vers $X_{0,0}$.
3. Calcul du vecteur tangent à la courbe au point $X_{0,0}$, en résolvant le système (B.8). Ce système comporte N équations à $N + 1$ inconnues, il est donc complété par la condition $T_{S_0,i} = 1$: on suppose que la première solution qu'on a trouvée n'est pas un point limite et on cherche donc les solutions suivantes dans la direction des S_0 croissants.
4. Choix de l'incrément de pseudo-abszisse curviligne Δs et construction du prédicteur à la valeur de S_0 suivante.

Recherche de la solution à la valeur $S_{0,i+1}$

1. Résolution du système d'itérations de Newton modifiées (B.10) (B.11).
2. Calcul du vecteur tangent à la solution obtenue. On complète cette fois le système par l'équation

$$T_{X,i+1} \cdot T_{X,i} + T_{S_0,i+1} \cdot T_{S_0,i} = 1 \quad (\text{B.12})$$

c'est-à-dire qu'on choisit la direction du vecteur tangent à la $i + 1^e$ solution sur la branche de façon à ce qu'il soit dans le même demi-plan que le vecteur tangent à la i^e solution.

3. Choix de l'incrément de pseudo-abszisse curviligne Δs et construction du prédicteur à la valeur de S_0 suivante.

Lors des calculs, il se peut que l'incrément Δs soit trop élevé et que le prédicteur soit trop loin de la solution recherchée, surtout au voisinage d'un point tournant. Afin d'obtenir un calcul automatique d'une branche entière sans interruption liée à ce problème, on a choisi d'implémenter l'un des contrôles de la valeur de Δs conseillés par Govaerts, basé sur le nombre N d'itérations de Newton modifiées nécessaires pour arriver à la convergence. Concrètement, si $N < 4$ on multiplie Δs par 1.3, si $4 \leq N \leq 7$ on laisse Δs inchangé, et si $N > 7$ on considère que l'itération a échoué : on revient alors à la solution précédente, on divise Δs par 2 et on recalcule le prédicteur. Cette stratégie est très efficace et dans la pratique, avec les maillages utilisés, nous a permis de calculer un grand nombre de solutions de façon automatique en quelques heures.

B.2.3 Remarque : points de branchement

La méthode qui vient d'être présentée n'est plus adaptée lorsque deux branches de solutions se croisent, puisqu'à ce moment il n'y a plus un seul mais plusieurs vecteurs tangents. Pour traiter ce cas particulier, il existe des méthodes directes qui consistent à calculer les directions de toutes les nouvelles branches et ensuite à traiter chacune d'entre elles individuellement. De façon plus simple, il est également possible de calculer cette structure de branchement en perturbant le système étudié, et en amenant son portrait de solutions à changer. Les perturbations peuvent par exemple permettre de transformer une bifurcation transcritique en deux bifurcations noeud-col laissant un intervalle du

paramètre sans solution, ou en deux branches continues et séparées ; on pourra voir les figures 5.14(a) et 5.14(b) du chapitre 5 à titre d'exemple. Nous n'avons cependant pas eu à les implémenter dans cette étude.

C Dérivation de l'équation de Bragg-Hawthorne

C.1 Cas général

Cette partie reprend l'essentiel de la démonstration donnée par Batchelor [8]. Les hypothèses sont identiques à celles du chapitre 5. On note (u, v, w) les composantes du vecteur vitesse dans le repère cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$. ψ est la fonction de courant axisymétrique définie par

$$w = \frac{\psi_r}{r} \quad \text{et} \quad u = -\frac{\psi_z}{r}. \quad (\text{C.1})$$

Comme l'écoulement est stationnaire, la circulation K est constante sur une ligne de courant d'après le théorème de Kelvin, *i.e.* :

$$ru_\theta = K(\psi) \quad (\text{C.2})$$

Dans le repère choisi, les composantes (ξ, η, ζ) du vecteur vorticité ont pour expression :

$$\xi = -v_z, \quad \eta = u_z - w_r, \quad \zeta = \frac{(rv)_r}{r} \quad (\text{C.3})$$

ce qui donne, en fonction de ψ et K :

$$\xi = -\frac{K_z}{r}, \quad \eta = -\frac{1}{r} \left(\psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right), \quad \zeta = \frac{K_r}{r} \quad (\text{C.4})$$

En utilisant la définition (C.1) de la fonction de courant, on peut alors montrer que dans un plan longitudinal, les vecteurs vitesse et vorticité sont colinéaires, puisqu'on a

$$\xi = K'(\psi)u, \quad \zeta = K'(\psi)w \quad (\text{C.5})$$

L'écoulement étant stationnaire et les efforts visqueux nuls, l'équation de quantité de mouvement se réduit à

$$\underline{\omega} \wedge \underline{u} = -\underline{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \quad (\text{C.6})$$

L'intégration de cette équation le long d'une ligne de courant permet alors d'obtenir la relation de Bernoulli,

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = H(\psi) \quad (\text{C.7})$$

où l'on a noté $H = p/\rho + (u^2 + v^2 + w^2)/2$ l'énergie mécanique d'une ligne de courant. La projection de (C.6) sur \underline{e}_z donne ensuite :

$$u\eta - v\xi = H_z = \psi_z H'(\psi) = -ruH'(\psi) \quad (\text{C.8})$$

En remplaçant v en fonction de K et ξ en fonction de u grâce à (C.5) dans cette expression, on trouve finalement l'équation recherchée :

$$-r^2\chi = -r\eta = \left(\psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r}\right) = r^2H'(\psi) - KK'(\psi) \quad (\text{C.9})$$

Ici $\chi = \eta/r$ désigne la vorticité azimutale réduite souvent utilisée dans la littérature (voir le chapitre 5).

En pratique, l'utilisation de cette équation nécessite donc de connaître la répartition de la circulation K et de l'énergie mécanique H sur les lignes de courant, ce qui n'est envisageable de façon simple que dans un écoulement sans recirculation (*i.e.* lorsque $w > 0$ dans tout l'écoulement, voir la discussion du paragraphe 5.2.2). Pour un profil de vitesse quelconque, il n'est en général pas possible de trouver analytiquement la dépendance de H et K par rapport à ψ . Mais comme le signale Batchelor, le cas où l'écoulement générateur à l'infini amont consiste en un mouvement de rotation solide et advection uniforme permet cette détermination, ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

C.2 Condition amont de rotation solide et advection uniforme

On suppose ici l'existence à l'infini amont d'une zone où l'écoulement se développe dans une conduite de rayon constant R_0 , et possède un mouvement d'advection uniforme de vitesse W_0 et de rotation solide de vitesse angulaire Ω_0 (voir la figure 5.1 du chapitre 5). Afin de déterminer $H(\psi)$, Batchelor suppose de plus que l'écoulement est parallèle, c'est-à-dire sans gradients dans la direction axiale et donc sans vitesse radiale. Cette hypothèse n'est en fait pas nécessaire, comme nous allons le voir il suffit de considérer que l'écoulement possède une vorticité azimutale η fixée (ici nulle)   l'extrémité amont prise égale à l'origine $z = 0$. En introduisant le nombre de swirl

$$S_0 = \frac{R_0\Omega_0}{W_0} \quad (\text{C.10})$$

et en adimensionnant respectivement les vitesses par W_0 et les longueurs par R_0 , on obtient le champ de vitesse :

$$u = 0, \quad v = S_0r, \quad w = 1. \quad (\text{C.11})$$

D'après la définition de la fonction de courant axisymétrique, on a donc dans cette région :

$$\psi = \frac{r^2}{2} \quad (\text{C.12})$$

en choisissant $\psi(0) = 0$. La détermination de K en fonction de ψ est donc ici très simple, puisque $K = rv = S_0r^2$, d'où

$$K(\psi) = 2S_0\psi. \quad (\text{C.13})$$

Pour déterminer la fonction H , on écrit ici la composante radiale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en $z = 0$, la composante axiale étant trivialement nulle et la composante azimutale se réduisant ici à la conservation de la circulation K le long d'une ligne de courant. Les champs de vitesse axiale et azimutale étant connus en $z = 0$, la condition de Dirichlet sur η revient à imposer $u_z = 0$, donc

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_r - \frac{v^2}{r} = -p_r, \quad i.e. \quad p + \frac{u^2}{2} = S_0^2\frac{r^2}{2} = S_0^2\psi \quad (\text{C.14})$$

en posant $p(0) = 0$. On en déduit l'énergie mécanique :

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + p = \frac{1}{2} + 2S_0^2\psi \quad (\text{C.15})$$

et donc finalement pour cette condition particulière d'écoulement amont, l'équation (C.9) devient :

$$-r\eta = \left(\psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} \right) = 4S_0^2 \left(\frac{r^2}{2} - \psi \right) \quad (\text{C.16})$$

Dans la pratique, il est commode de changer d'inconnue au profit de $\psi'(r, z)$, qui représente la "perturbation" de l'écoulement par rapport à son état à l'amont, et est définie par

$$\psi'(r, z) = \psi(r, z) - \frac{r^2}{2}. \quad (\text{C.17})$$

On obtient alors l'équation :

$$\left(\psi'_{zz} + \psi'_{rr} - \frac{\psi'_r}{r} \right) = 4S_0^2\psi' \quad (\text{C.18})$$

Remarque Le raisonnement qui vient d'être effectué montre donc qu'en l'absence de recirculations dans l'écoulement, la connaissance de ψ , K et η en une section $z = z_0$ permet de déterminer complètement les fonctions $H'(\psi)$ et $K(\psi)$, qui sont donc fixées par le champ de vitesse en cet endroit (qui peut être quelconque, ce résultat n'est pas limité à l'écoulement d'advection uniforme et de rotation solide). Il est possible d'arriver à cette conclusion en raisonnant de façon équivalente directement sur l'équation (C.9), toujours en une section donnée $z = z_0$. On raisonne ici en $z = 0$. Etant donné que $w > 0$, on peut inverser $\psi(r)$ et considérer r comme une fonction de ψ . Les fonctions K et η étant imposées en fonction de r , elles le sont donc aussi en fonction de ψ . Comme l'équation (C.9) doit également être vérifiée, $H'(\psi)$ est donc également imposé. On voit donc que l'expression de $H(\psi)$ est la même lorsque l'écoulement à l'amont est rigoureusement cylindrique (par exemple pour de faibles valeurs de S_0 , loin de la criticité) et lorsqu'il possède une vitesse radiale non nulle en raison de perturbations dues à la géométrie en aval et qui remontent l'écoulement, ce qui peut survenir dans le régime transcritique.

D Analyse asymptotique du régime transcritique

Nous effectuons dans ce chapitre les analyses asymptotiques justifiant ou complétant les résultats obtenus par le code du chapitre 5. Le paragraphe D.1 calcule tout d'abord le coefficient directeur de la branche prenant naissance à partir de la solution colonne à la bifurcation transcritique, au nombre de swirl $S_{c,1}$. Ce calcul est effectué dans un cadre de condition d'écoulement amont générale, pour les problèmes I et II (c'est-à-dire en considérant les deux cas pour la dernière condition à la limite axiale (5.23)), et dans une géométrie de tuyau droit. Il montre également la dégénérescence obtenue lorsque l'écoulement amont est du type advection uniforme et rotation solide.

L'objet du paragraphe D.2 est d'introduire le formalisme nécessaire à la description de cet écoulement, cette fois lorsqu'une tuyère convergente est présente et uniquement dans le cas du problème I.

D.1 Conduite de section constante

Nous développons ici une analyse faiblement non linéaire sur un écoulement amont quelconque dans une conduite de section constante et de longueur L . Les calculs sont effectués dans le cadre du problème II, c'est-à-dire avec une condition amont de vitesse radiale nulle. Seuls quelques changements sont nécessaires pour décrire le cas général du problème I (vorticité azimutale nulle), déjà exploré par Wang et Rusak [123]; nous les introduirons à titre de remarques.

D.1.1 Formalisme

Le seul paramètre perturbé est ici le nombre de swirl, supposé proche de la criticité :

$$S_0 = S_{c,1} + \Delta S \quad \text{avec} \quad |\Delta S| \ll 1 \quad (\text{D.1})$$

A la suite de Wang et Rusak, nous effectuons le changement de variables

$$K = S_0 \tilde{K} \quad (\text{D.2})$$

Les fonctions caractérisant l'écoulement s'écrivent donc sous la forme

$$\psi(r, z) = \psi_0(r) + \Delta S \psi_1(r, z) + \Delta S^2 \psi_2(r, z) + \dots \quad (\text{D.3a})$$

$$\tilde{K}(r, z) = \kappa_0(r) + \Delta S \kappa_1(r, z) + \Delta S^2 \kappa_2(r, z) + \dots \quad (\text{D.3b})$$

$$\begin{aligned} K(r, z) &= K_0(r) + \Delta S K_1(r, z) + \Delta S^2 K_2(r, z) + \dots \\ &= (S_{c,1} + \Delta S)(\kappa_0(r) + \Delta S \kappa_1(r, z) + \Delta S^2 \kappa_2(r, z) + \dots), \end{aligned} \quad (\text{D.3c})$$

d'où il ressort que

$$K_0(r) = S_{c,1}\kappa_0(r) \quad (\text{D.4a})$$

$$K_1(r, z) = \kappa_0(r) + S_{c,1}\kappa_1(r, z) \quad (\text{D.4b})$$

$$K_2(r, z) = \kappa_1(r) + S_{c,1}\kappa_2(r, z) \quad (\text{D.4c})$$

Les équations à linéariser sont ici les équations de Squire-Long stationnaires, introduites au chapitre 5 :

$$-\psi_z \tilde{K}_r + \psi_r \tilde{K}_z = 0 \quad (\text{D.5a})$$

$$-\psi_z \chi_r + \psi_r \chi_z = \frac{(K^2)_z}{r^3} = S_0^2 \frac{(\tilde{K}^2)_z}{r^3} \quad (\text{D.5b})$$

$$-r^2 \chi = \psi_{zz} + \psi_{rr} - \frac{\psi_r}{r} = D^2 \psi \quad (\text{D.5c})$$

L'écoulement de base étant parallèle, ces équations sont trivialement vérifiées à l'ordre 0.

D.1.2 Ordre 1

Equation sur K

A l'ordre 1, (D.5a) s'écrit :

$$\psi_{0r} K_{1z} - K_{0r} \psi_{1z} = 0, \quad \text{soit} \quad K_{1z} = \frac{K_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_{1z}, \quad (\text{D.6})$$

où l'on a supposé l'absence de recirculation, *i.e.* $\psi_{0r} > 0$ dans tout l'écoulement. On en déduit donc :

$$\kappa_{1z} = \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_{1z}, \quad (\text{D.7})$$

et par intégration en z :

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_1 + A(r). \quad (\text{D.8})$$

En $z = 0$ la circulation est imposée et vaut $S_0 \kappa_0$, donc $\kappa_1(r, 0) = 0$, ce qui implique alors $A(r) = 0$, d'où

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_1 \quad (\text{D.9})$$

ce qui mène à l'expression de K_1 :

$$K_1 = \kappa_0 + S_{c,1}\kappa_1 = \kappa_0 + S_{c,1} \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_1. \quad (\text{D.10})$$

Equation sur χ

D'après (D.5b), on a :

$$\psi_{0r} \chi_{1z} - \chi_{0r} \psi_{1z} = \frac{2K_0 K_{1z}}{r^3}, \quad (\text{D.11})$$

Par remplacement de K_1 grâce à l'équation (D.10), on obtient alors :

$$-\frac{\psi_{0r}}{r^2} D^2 \psi_{1z} - \left(\chi_{0r} + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_0 \kappa_{0r}}{r^3 \psi_{0r}} \right) \psi_{1z} = 0, \quad (\text{D.12})$$

puis par multiplication par r^2 et division par ψ_{0r} , qui n'est jamais nul par hypothèse :

$$D^2\psi_{1z} + \left(\frac{r^2\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r} \frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} \right) \psi_{1z} = 0, \quad (\text{D.13})$$

qui est l'équation de l'onde critique ψ_1 . La solution respectant les conditions aux limites particulières du problème II s'écrit

$$\psi_{1z}(r, z) = \alpha \frac{\pi}{L} \phi(r) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right), \quad (\text{D.14})$$

ce qui donne par intégration en z et utilisation des conditions aux limites :

$$\psi_1(r, z) = \alpha \phi(r) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \right), \quad (\text{D.15})$$

avec $\phi(r)$ solution de l'équation

$$r \left(\frac{\phi_r}{r} \right)_r + \left(\frac{r^2\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r} \frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} - \frac{\pi^2}{L^2} \right) \phi = 0. \quad (\text{D.16})$$

Par intégration de (D.13) suivant z , il vient :

$$D^2\psi_1 + \left(\frac{r^2\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r} \frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} \right) \psi_1 = B(r) \quad (\text{D.17})$$

Pour déterminer B , il suffit d'évaluer cette équation en $z = 0$, où l'on sait que ψ_1 doit être nulle :

$$B(r) = \psi_{1zz}(z = 0) = \alpha \frac{\pi^2}{L^2} \phi(r), \quad (\text{D.18})$$

et donc on peut écrire que

$$\chi_1 = \left(\frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3} \frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} \right) \psi_1 - \frac{B(r)}{r^2}. \quad (\text{D.19})$$

Remarque Dans le cadre du problème I, ψ_1 doit respecter la condition $\psi_{1zz}(z = 0) = 0$. L'intégration de (D.13) mène donc à $B(r) = 0$, et ψ_1 doit être recherchée sous la forme

$$\psi_1(r, z) = \alpha \phi(r) \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \quad (\text{D.20})$$

avec $\phi(r)$ solution de l'équation

$$r \left(\frac{\phi_r}{r} \right)_r + \left(\frac{r^2\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r} \frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} - \frac{\pi^2}{4L^2} \right) \phi = 0. \quad (\text{D.21})$$

L'expression trouvée pour χ_1 est alors

$$\chi_1 = \left(\frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3} \frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} \right) \psi_1. \quad (\text{D.22})$$

D.1.3 Ordre 2

Equation sur K

D'après (D.5a), on a :

$$\psi_{0r}K_{2z} + \psi_{1r}K_{1z} - K_{0r}\psi_{2z} - K_{1r}\psi_{1z} = 0, \quad (\text{D.23})$$

soit

$$\psi_{0r}K_{2z} = K_{0r}\psi_{2z} + K_{1r}\psi_{1z} - \psi_{1r}K_{1z}. \quad (\text{D.24})$$

Or d'après le paragraphe précédent on sait que

$$K_1 = \kappa_0 + S_{c,1} \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_1, \quad (\text{D.25})$$

donc

$$\begin{aligned} K_{1r}\psi_{1z} - \psi_{1r}K_{1z} &= \kappa_{0r}\psi_{1z} + S_{c,1} \left(\left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \right)_r \psi_1 + \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_{1r} \right) \psi_{1z} - S_{c,1} \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_{1r}\psi_{1z} \\ &= \kappa_{0r}\psi_{1z} + S_{c,1} \left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \right)_r \psi_1 \psi_{1z}, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

et donc on obtient finalement :

$$K_{2z} = S_{c,1} \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_{2z} + \frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \psi_{1z} + S_{c,1} \left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \right)_r \frac{\psi_1 \psi_{1z}}{\psi_{0r}}. \quad (\text{D.27})$$

Equation sur χ

D'après (D.5b), il vient

$$\psi_{0r}\chi_{2z} + \psi_{1r}\chi_{1z} - \chi_{0r}\psi_{2z} - \psi_{1z}\chi_{1r} = \frac{2K_0K_{2z}}{r^3} + \frac{2K_1K_{1z}}{r^3}. \quad (\text{D.28})$$

Par remplacement des grandeurs d'ordre 1, on trouve donc

$$\begin{aligned} \psi_{0r}\chi_{2z} - \left(\chi_{0r} + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_0 \kappa_{0r}}{r^3 \psi_{0r}} \right) \psi_{2z} &= \psi_{1z}\chi_{1r} - \psi_{1r}\chi_{1z} + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_0}{r^3 \psi_{0r}} \left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \right)_r \psi_1 \psi_{1z} \\ &\quad + 2 \frac{S_{c,1} \kappa_0 \kappa_{0r}}{r^3 \psi_{0r}} \psi_{1z} + \frac{2K_1K_{1z}}{r^3}. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

On exprime à présent tous les termes du membre de droite en fonction de ψ_1 . En notant à titre de simplification

$$\square = \frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_0 \kappa_{0r}}{r^3 \psi_{0r}^2}, \quad (\text{D.30})$$

nous obtenons :

$$\psi_{1z}\chi_{1r} - \psi_{1r}\chi_{1z} = \psi_{1z} \left(\square_r \psi_1 + \square \psi_{1r} - \left(\frac{B(r)}{r^2} \right)_r \right) - \square \psi_{1r}\psi_{1z} \quad (\text{D.31})$$

$$= \square_r \psi_1 \psi_{1z} - \left(\frac{B(r)}{r^2} \right)_r \psi_{1z}. \quad (\text{D.32})$$

Or on a par ailleurs

$$\frac{2K_1K_{1z}}{r^3} = \frac{2S_{c,1}\kappa_{0r}}{r^3\psi_{0r}}\left(\kappa_0 + S_{c,1}\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}}\psi_1\right)\psi_{1z} = 2S_{c,1}\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{r^3\psi_{0r}}\psi_{1z} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3}\left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}}\right)^2\psi_1\psi_{1z}, \quad (\text{D.33})$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi_{0r}\chi_{2z} - \left(\chi_{0r} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3}\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}}\right)\psi_{2z} &= \left(\frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3}\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2}\right)_r\psi_1\psi_{1z} - \left(\frac{B(r)}{r^2}\right)_r\psi_{1z} \\ &+ 4\frac{S_{c,1}}{r^3}\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}}\psi_{1z} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3}\frac{\kappa_0}{\psi_{0r}}\left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}}\right)_r\psi_1\psi_{1z} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3}\left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}}\right)^2\psi_1\psi_{1z}. \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

En remplaçant χ_{2z} , on obtient finalement l'équation à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} D^2\psi_{2z} + \left(\frac{r^2\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r}\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2}\right)\psi_{2z} &= \frac{r^2}{\psi_{0r}}\left(\frac{B(r)}{r^2}\right)_r\psi_{1z} \\ &- \left(\frac{r^2}{\psi_{0r}}\left(\frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3}\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2}\right)_r + 2\frac{S_{c,1}^2}{r}\frac{\kappa_0}{\psi_{0r}^2}\left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}}\right)_r + 2\frac{S_{c,1}^2}{r}\frac{\kappa_{0r}^2}{\psi_{0r}^3}\right)\psi_1\psi_{1z} \\ &- 4\frac{S_{c,1}}{r}\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2}\psi_{1z}. \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

L'équation correspondante du problème I s'en déduit directement en prenant $B(r) = 0$.

D.1.4 Equation d'amplitude

Comme toutes les conditions aux limites sont ici homogènes, la condition de compatibilité est simplifiée. Celle-ci est obtenue par multiplication de (D.35) par ψ_{1z}/r puis par intégration sur tout le domaine. En remplaçant ψ_{1z} et B par leurs expressions respectives, on obtient alors

$$\begin{aligned} \alpha^3\frac{\pi^4}{L^4}\int_0^1\int_0^L\frac{r}{\psi_{0r}}\left(\frac{\phi(r)}{r^2}\right)_r\phi^2(r)\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right)drdz \\ - \alpha^3\frac{\pi^2}{L^2}\int_0^1\int_0^L\left(\frac{r^2}{\psi_{0r}}\left(\frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2\frac{S_{c,1}^2}{r^3}\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2}\right)_r + 2\frac{S_{c,1}^2}{r}\frac{\kappa_0}{\psi_{0r}^2}\left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}}\right)_r + 2\frac{S_{c,1}^2}{r}\frac{\kappa_{0r}^2}{\psi_{0r}^3}\right) \\ \times \frac{\phi^3(r)}{r}\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\right)drdz \\ - 4S_{c,1}\alpha^2\frac{\pi^2}{L^2}\int_0^1\int_0^L\frac{\kappa_0\kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2}\frac{\phi^2(r)}{r^2}\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right)drdz = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Afin d'alléger les calculs on note ensuite

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_0^1 \int_0^L \frac{r}{\psi_{0r}} \left(\frac{\phi(r)}{r^2} \right)_r \phi^2(r) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{L} \right) dr dz \\ &= \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{r}{\psi_{0r}} \left(\frac{\phi(r)}{r^2} \right)_r \phi^2(r) dr \end{aligned} \quad (\text{D.37a})$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \int_0^1 \int_0^L \left(\frac{r^2}{\psi_{0r}} \left(\frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_0 \kappa_{0r}}{r^3 \psi_{0r}^2} \right)_r + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_0}{r \psi_{0r}^2} \left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \right)_r + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_{0r}^2}{r \psi_{0r}^3} \right) \\ &\quad \times \frac{\phi^3(r)}{r} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{L} \right) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi z}{L} \right) \right) dr dz \\ &= \frac{L}{2} \int_0^1 \left(\frac{r^2}{\psi_{0r}} \left(\frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_0 \kappa_{0r}}{r^3 \psi_{0r}^2} \right)_r \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_0}{r \psi_{0r}^2} \left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \right)_r + 2 \frac{S_{c,1}^2 \kappa_{0r}^2}{r \psi_{0r}^3} \right) \frac{\phi^3(r)}{r} dr \end{aligned} \quad (\text{D.37b})$$

$$N_3 = \int_0^1 \int_0^L \frac{\kappa_0 \kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} \frac{\phi^2(r)}{r^2} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{L} \right) dr dz = \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{\kappa_0 \kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} \frac{\phi^2(r)}{r^2} dr, \quad (\text{D.37c})$$

et par division par $\alpha^2 \pi^2 / L^2$ on obtient finalement

$$\alpha \left(\frac{\pi^2}{L^2} N_1 - N_2 \right) = 4S_{c,1} N_3, \quad (\text{D.38})$$

d'où

$$\boxed{\alpha = \frac{4S_{c,1} N_3}{\frac{\pi^2}{L^2} N_1 - N_2}}. \quad (\text{D.39})$$

Remarque Dans le cas du problème I, on a cette fois (en utilisant la notation ' pour distinguer les deux problèmes) :

$$\alpha' = -\frac{4S'_{c,1} N'_3}{N'_2}, \quad (\text{D.40})$$

avec

$$\begin{aligned} N'_2 &= \frac{2L}{3\pi} \int_0^1 \left(\frac{r^2}{\psi_{0r}} \left(\frac{\chi_{0r}}{\psi_{0r}} + 2 \frac{S'^2_{c,1} \kappa_0 \kappa_{0r}}{r^3 \psi_{0r}^2} \right)_r \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{S'^2_{c,1} \kappa_0}{r \psi_{0r}^2} \left(\frac{\kappa_{0r}}{\psi_{0r}} \right)_r + 2 \frac{S'^2_{c,1} \kappa_{0r}^2}{r \psi_{0r}^3} \right) \frac{\phi'^3(r)}{r} dr \end{aligned} \quad (\text{D.41a})$$

$$(\text{D.41b})$$

$$N'_3 = \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{\kappa_0 \kappa_{0r}}{\psi_{0r}^2} \frac{\phi'^2(r)}{r^2} dr. \quad (\text{D.41c})$$

On voit donc qu'en plus de décaler l'apparition de la bifurcation ($S'^2_{c,1} = S_B^2 + \pi^2/4L^2$ pour le problème II, $S^2_{c,1} = S_B^2 + \pi^2/16L^2$ pour le problème I, dans le cas de l'écoulement d'advection uniforme et rotation solide), la prise en compte de la condition sur la vitesse radiale à l'amont au lieu de la vorticité azimutale apporte une correction d'ordre $O(L^{-2})$ sur l'amplitude de l'onde résonante dans la solution bifurquée. En pratique dès lors que la longueur de conduite L est suffisamment grande, on peut donc s'attendre à ce que cette condition n'ait que peu de répercussions au premier ordre.

Coefficient directeur de la branche bifurquée

Nous pouvons à présent calculer le coefficient directeur théorique c de la branche bifurquée à $S_{c,1}$ de la figure 5.19. Celui-ci vaut $\partial(w(1, L))/\partial(\Delta S)$. Or on a à l'ordre 1 :

$$w = \frac{\psi_r}{r} = \frac{\psi_{0r}}{r} + \Delta S \frac{\psi_{1r}}{r} = \frac{\psi_{0r}}{r} + \Delta S \alpha \frac{\phi_r}{r} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi z}{L} \right) \right), \quad (\text{D.42})$$

donc

$$w(1, L) = \frac{\psi_{0r}}{r}(1) + 2\Delta S \alpha \frac{\phi_r}{r}(1), \quad (\text{D.43})$$

d'où finalement

$$\boxed{c = 2\alpha \frac{\phi_r}{r}(1)}. \quad (\text{D.44})$$

Application à l'écoulement de base de rotation solide et advection uniforme

Cet écoulement est défini par

$$\psi_0 = r^2/2 \quad \psi_{0r} = r \quad \kappa_0 = r^2 \quad \kappa_{0r} = 2r \quad \chi_0 = \chi_{0r} = 0, \quad (\text{D.45})$$

ce qui mène à

$$\phi(r) = r J_1(j_{1,1}r). \quad (\text{D.46})$$

On obtient donc

$$N_1 = \frac{L}{2} \int \left(\frac{\phi(r)}{r^2} \right)_r \phi^2(r) \approx -0.0547407L \quad (\text{D.47a})$$

$$N_2 = 0 \quad (\text{D.47b})$$

$$N_3 = \frac{L}{2} \int \frac{2\phi^2(r)}{r} \approx 0.0811076L. \quad (\text{D.47c})$$

On trouve finalement $c \approx 4.591862$, ce qui est cohérent avec le résultat numérique de la figure 5.19 du chapitre 5.

Remarque Ce résultat met effectivement en évidence la dégénérescence pour cet écoulement dans le cas du problème I (due à la linéarité du problème complet), puisqu'alors α' et donc le coefficient directeur de la branche sont infinis! La prise en compte de la condition sur la vitesse radiale au lieu de la vorticité azimuthale lève par contre cette dégénérescence par le terme N_1 , comme nous l'avons observé au chapitre 5.

D.2 Écoulement d'advection uniforme et rotation solide soumis à une contraction, problème I

Comme l'a montré l'analyse du chapitre 5, la présence d'une faible contraction dans le cas de l'écoulement d'advection uniforme et rotation solide réintroduit également une non-linéarité dans le problème I. Nous cherchons ici à déterminer le nombre de swirl S_{0R} pour lequel se produit la recirculation dans ce cas, pour une conduite de géométrie similaire à celle représentée sur la figure 5.11 avec une tuyère de taux de contraction très faible. Cette analyse s'inspire de celle de Grimshaw et Yi [45] pour le rapport entre les paramètres asymptotiques (amplitude du taux de contraction, écart du swirl par rapport au swirl critique et perturbation de la fonction de courant) et de celle de Rusak et Meder [107] pour le traitement des conditions aux limites axiales.

D.2.1 Ordres 0 et 1

On note

$$R(z) = 1 - \varepsilon h(z) \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll 1 \quad (\text{D.48})$$

le rayon de la tuyère convergente. Par la suite on utilisera également $R_1 = 1 - \varepsilon h(L)$ le rayon de sortie de cette tuyère.

En notant $\psi(r, z) = r^2/2 + \psi'(r, z)$ la fonction de courant axisymétrique de l'écoulement, l'équation à résoudre s'obtient par substitution dans (5.7) et s'écrit

$$\psi'_{zz} + r \left(\frac{\psi'_r}{r} \right)_r + 4S_0^2 \psi' = 0. \quad (\text{D.49})$$

Les conditions aux limites sur ψ s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} \psi(r, 0) &= r^2/2, & 0 \leq r \leq 1 \\ \psi_z(r, L) &= 0, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \psi(0, z) &= 0, & \psi(R(z), z) = 1/2, & 0 \leq z \leq L \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.50})$$

On a ici omis les conditions de Dirichlet sur K et η , qui ont servi à déterminer les fonctions H' et K et deviennent donc redondantes. On en déduit les conditions aux limites sur ψ' :

$$\left. \begin{aligned} \psi'(r, 0) &= 0, & 0 \leq r \leq 1 \\ \psi'_z(r, L) &= 0, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \psi'(0, z) &= 0, & \psi'(R(z), z) = \frac{1 - R^2(z)}{2} = \varepsilon h(z) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 h^2(z), & 0 \leq z \leq L \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.51})$$

On voit donc apparaître la non linéarité du problème au niveau de la condition radiale à la paroi, qui impose une accélération de l'écoulement. A la suite de Grimshaw et Yi, on cherche ψ' sous la forme

$$\psi'(r, z) = \phi^0(r, z) + \varepsilon \phi^1(r, z) + O(\varepsilon^2), \quad (\text{D.52})$$

c'est-à-dire que la perturbation d'ordre le plus bas ("ordre 1") est d'amplitude **unité** puisque l'équation du mouvement est linéaire, et que l'ordre de grandeur suivant est égal à l'ordre de grandeur de l'amplitude de la variation en rayon, ε .

Dans leur analyse, Grimshaw et Yi s'intéressent à des ondes longues se développant dans une conduite d'extension amont et aval infinie (voir la figure 5.6). Ceci les conduit à introduire une variable axiale lente $Z = \varepsilon^{1/2} z$, et l'absence de frontières axiales implique que la criticité est atteinte pour $S_0 = S_B = j_{1,1}/2$. Nous nous intéressons ici au cas d'une conduite de longueur d'ordre unité; en suivant Rusak et Meder, on introduit donc le swirl critique correspondant $S_{c,1}$ (dont l'expression est donnée par l'équation (5.35)), que l'on décompose en

$$S_0 = S_{c,1}(1 - \varepsilon \Delta), \quad (\text{D.53})$$

suivant le dimensionnement de Grimshaw et Yi. Cette écriture fait donc correspondre le régime supercritique à $\Delta > 0$ et le régime sous-critique à $\Delta < 0$.

En se limitant à l'ordre ε , l'équation du mouvement s'écrit donc

$$\phi^0_{zz} + r \left(\frac{\phi^0_r}{r} \right)_r + 4S_{c,1}^2 \phi^0 + \varepsilon \left(\phi^1_{zz} + \left(\frac{\phi^1_r}{r} \right)_r + 4S_{c,1}^2 \phi^1 - 8\Delta S_{c,1}^2 \phi^0 \right) = 0. \quad (\text{D.54})$$

Seule la condition à la limite à la paroi, inhomogène, mène à une écriture non triviale. En y injectant la décomposition (D.52) et en utilisant un développement de Taylor sur ϕ^0 et ϕ^1 , on obtient :

$$\phi^0(1 - \varepsilon h(z)) + \varepsilon \phi^1(1 - \varepsilon h(z)) = \phi^0(1) + \varepsilon(\phi^1(1) - h(z)\phi_r^0(1)) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{D.55})$$

$$= \varepsilon h(z) + O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq z \leq L \quad (\text{D.56})$$

On en déduit les problèmes à résoudre à l'ordre unité

$$\left. \begin{aligned} \phi_{zz}^0 + r \left(\frac{\phi_r^0}{r} \right)_r + 4S_{c,1}^2 \phi^0 &= 0 \\ \phi^0(r, 0) &= 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \\ \phi_z^0(r, L) &= 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \\ \phi^0(0, z) &= 0, \quad \phi^0(1, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq L \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.57})$$

et à l'ordre ε

$$\left. \begin{aligned} \phi_{zz}^1 + r \left(\frac{\phi_r^1}{r} \right)_r + 4S_{c,1}^2 \phi^1 &= 8\Delta S_{c,1}^2 \phi^0 \\ \phi^1(r, 0) &= 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \\ \phi_z^1(r, L) &= 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \\ \phi^1(0, z) &= 0, \quad \phi^1(1, z) = h(z)(1 + \phi_r^0(1)), \quad 0 \leq z \leq L \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.58})$$

Le problème (D.57) est identique à celui posé au paragraphe D.1 pour la recherche de solutions bifurquant à partir de l'écoulement colonne (voir l'équation (5.33)). Sa solution est donc donnée par

$$\phi^0 = A \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) r J_1(j_{1,1}r), \quad (\text{D.59})$$

où A est une constante encore indéterminée.

D.2.2 Equation d'amplitude

L'équation sur ϕ^1 est inhomogène, et de membre de gauche identique à celui de l'équation sur ϕ^0 . Le problème à l'ordre ε n'a donc de solution que sous une condition de compatibilité (théorème de Fredholm) que l'on obtient ici en multipliant l'équation sur ϕ^1 par ϕ^0/r et en intégrant sur tout le domaine (de 0 à 1 en r et de 0 à L en z). En développant les intégrales du membre de gauche et en utilisant le théorème de Fubini, ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^L \frac{\phi^0 \phi_{zz}^1}{r} dz dr + \int_0^L \int_0^1 \phi^0 \left(\frac{\phi_r^1}{r} \right)_r dr dz + 4S_{c,1}^2 \int_0^L \int_0^1 \frac{\phi^0 \phi_r^1}{r} dr dz \\ = 8\Delta S_{c,1}^2 \int_0^L \int_0^1 \frac{(\phi^0)^2}{r} dr dz. \end{aligned} \quad (\text{D.60})$$

Par intégrations par partie en z et en utilisant les conditions aux limites des problèmes à l'ordre 1 et ε , on obtient pour la première intégrale :

$$\int_0^1 \int_0^L \frac{\phi^0 \phi_{zz}^1}{r} dz dr = \int_0^1 \int_0^L \frac{\phi_{zz}^0 \phi^1}{r} dz dr. \quad (\text{D.61})$$

De même, pour la deuxième on trouve (en intégrant par parties cette fois en r)

$$\int_0^L \int_0^1 \phi^0 \left(\frac{\phi_r^1}{r} \right)_r dr dz = \int_0^L \int_0^1 \left(\frac{\phi_r^0}{r} \right)_r \phi^1 dr dz - \int_0^L \frac{\phi_r^0}{r} (1, z) \phi^1(1, z) dz. \quad (\text{D.62})$$

ϕ^0 étant solution de l'équation du problème (D.57), on en déduit que la condition de compatibilité s'écrit

$$\int_0^L \frac{\phi_r^0}{r} (1, z) \phi^1(1, z) dz + 8\Delta S_{c,1}^2 \int_0^L \int_0^1 \frac{(\phi^0)^2}{r} dr dz = 0, \quad (\text{D.63})$$

d'où en remplaçant ϕ^0 et $\phi^1(1, z)$:

$$\begin{aligned} \int_0^L h(z) \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) j_{1,1} J_0(j_{1,1}) \left(1 + A \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) j_{1,1} J_0(j_{1,1}) \right) dz \\ + 8A\Delta S_{c,1}^2 \int_0^L \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) r J_1^2(j_{1,1}r) dr dz = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

où l'on a exclu la solution triviale $A \neq 0$ pour ϕ^0 en simplifiant par A . Par souci de lisibilité on introduit à présent les notations

$$N_1 = \int_0^L \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) r J_1^2(j_{1,1}r) dr dz \quad (\text{D.65a})$$

$$N_2 = \int_0^L h(z) \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz \quad (\text{D.65b})$$

$$N_3 = \int_0^L h(z) \sin^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz \quad (\text{D.65c})$$

$$b = j_{1,1} J_0(j_{1,1}). \quad (\text{D.65d})$$

En pratique N_1 et N_2 sont strictement positives (car dans le cas d'une tuyère convergente $h(z) \geq 0$), ce qui permet de calculer A :

$$A = -\frac{N_3 b}{8\Delta S_{c,1}^2 N_1 + b^2 N_2} \quad (\text{D.66})$$

La vitesse axiale de l'écoulement a pour expression à l'ordre 1

$$w(r, z) = \frac{\psi_r}{r} = 1 + A j_{1,1} \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) J_0(j_{1,1}r). \quad (\text{D.67})$$

b étant négatif, A est positif, et comme $j_{1,1}$ est strictement supérieur au premier zéro $j_{0,1}$ de J_0 , la vitesse axiale sera donc minimale pour $(r, z) = (1, L)$, c'est-à-dire dans le plan de sortie de la tuyère et à la paroi de celle-ci. La valeur limite de A correspondant à une recirculation est alors

$$A = -\frac{1}{j_{1,1} J_0(j_{1,1})} = -\frac{1}{b} \approx 0.64798, \quad (\text{D.68})$$

et le nombre de swirl S_{0R} correspondant vérifie

$$S_{0R} = S_{c,1}(1 - \varepsilon\Delta) = S_{c,1} - \varepsilon \frac{b^2(N_3 - N_2)}{8S_{c,1}N_1} \quad (\text{D.69})$$

En choisissant une fonction h telle que $h(L) = 1$, on voit par (D.48) que l'on a $\varepsilon = 1 - R_1$, ce qui mène finalement à

$$\boxed{S_{0R} = S_{c,1}(1 - \varepsilon\Delta) = S_{c,1} - (1 - R_1)\frac{b^2(N_3 - N_2)}{8S_{c,1}N_1}}. \quad (\text{D.70})$$

On constate donc que dans la limite où R_1 tend vers 1, le swirl de recirculation S_{0R} tend vers le swirl critique correspondant à la longueur totale de la conduite, $S_{c,1}$. De plus $N_1 > 0$ et dans le cas d'un convergent, $N_3 > N_2$, donc S_{0R} est une fonction décroissante de $1 - R_1$.

Bibliographie

- [1] M. T. Abujelala and D. G. Lilley. Swirl, confinement and nozzle effects on confined turbulent flow. In *AIAA, SAE, and ASME Joint Propulsion Conference, 20th, Cincinnati, OH, June 11-13, 1984*.
- [2] H. Altgeld, W. P. Jones, and J. Wilhelmi. Velocity measurements in a confined swirl driven recirculating flow. *Exp. in Fluids*, 1 :73–78, 1983.
- [3] W. Althaus, Ch. Brücker, and M. Weimer. Breakdown of slender vortices. In S. I. Green, editor, *Fluid vortices - fluid mechanics and its applications*, pages 373–426. Kluwer Academic Press, 1995.
- [4] R. L. Ash and M. R. Khorrami. Vortex stability. In S. I. Green, editor, *Fluid vortices - fluid mechanics and its applications*, pages 317–372. Kluwer Academic Press, 1995.
- [5] R. S. Barlow and J. P. Johnston. Structure of a turbulent boundary layer on a concave surface. *J. Fluid Mech.*, 191 :137–176, 1988.
- [6] G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, 1953.
- [7] G. K. Batchelor. On steady laminar flow with closed streamlines at large reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1 :177–190, 1956.
- [8] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [9] G. K. Batchelor and A. E. Gill. Analysis of the stability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.*, 14 :593–629, 1962.
- [10] T. B. Benjamin. Theory of the vortex breakdown phenomenon. *J. Fluid Mech.*, 14 :593–629, 1962.
- [11] P. S. Beran and F. E. C. Culick. The role of non-uniqueness in the development of vortex breakdown in tubes. *J. Fluid Mech.*, 242 :491–527, 1992.
- [12] P. Billant, J-M. Chomaz, and P. Huerre. Experimental study of vortex breakdown in swirling jets. *J. Fluid Mech.*, 376 :183–219, 1998.
- [13] A. M. Binnie. Experiments on the slow swirling flow of a viscous liquid through a tube. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 10 :276–290, 1957.
- [14] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover, 2001.

- [15] H. H. Bruun. *Hot-wire Anemometry, Principles and Signal Analysis*. Oxford Science Publications, 1995.
- [16] J. D. Buntine and P. G. Saffman. Inviscid swirling flows and vortex breakdown. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 449 :139–153, 1995.
- [17] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer, 1988.
- [18] J. J. Cassidy and H. T. Falvey. Observations of unsteady flow arising after vortex breakdown. *J. Fluid Mech.*, 41 :727–736, 1970.
- [19] Y. C. Chao, J. H. Leu, and Y. F. Hung. Downstream boundary effects on the spectral characteristics of a swirling flowfield. *Exp. in Fluids*, 10 :341–348, 1991.
- [20] S. Coudert and J-P. Schon. Back-projection algorithm with misalignment corrections for 2D3C stereoscopic PIV. *Meas. Sci. Technol.*, 12 :1371–1381, 2001.
- [21] D. L. Darmofal, A. W. Cary, and K. G. Powell. Wave propagation characteristics of vortical flows in varying-area pipes. In *AIAA Fluid Dynamics Conference 26th, San Diego, CA, June 19-22, 1995*.
- [22] I. Delbende, J-M. Chomaz, and P. Huerre. Absolute/convective instabilities in the batchelor vortex : a numerical study of the impulse response. *J. Fluid Mech.*, 355 :229–254, 1998.
- [23] J. Derksen. Confined and agitated swirling flows with applications in chemical engineering. *Flow, Turbulence and Combustion*, 69 :3–33, 2002.
- [24] O. Derzho and R. H. J. Grimshaw. Solitary waves with recirculation zones in axisymmetric rotating flows. *J. Fluid Mech.*, 464 :217–250, 2002.
- [25] J. Détery. Aspects of vortex breakdown. *Prog. Aerospace Sci.*, 30 :1–59, 1994.
- [26] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [27] M. P. Escudier. Confined vortices in flow machinery. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19 :27–52, 1987.
- [28] M. P. Escudier. Vortex breakdown : observations and explanations. *Prog. Aerospace Sci.*, 25 :189–229, 1988.
- [29] M. P. Escudier, J. Bornstein, and T. Maxworthy. The dynamics of confined vortices. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 382 :335–360, 1982.
- [30] M. P. Escudier, J. Bornstein, and N. Zehnder. Observations and LDA measurements of confined turbulent vortex flow. *J. Fluid Mech.*, 98 :49–63, 1980.
- [31] M. P. Escudier and J. J. Keller. Recirculation in swirling flow : a manifestation of vortex breakdown. *AIAA J.*, 23(1) :111–116, 1985.
- [32] D. Fabre. *Instabilités et instationnarités dans les tourbillons : Application aux sillages d'avions*. PhD thesis, Université Paris VI, 2002.

-
- [33] J. H. Faler and S. Leibovich. Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown. *Phys. Fluids*, 20(9) :1385–1400, 1977.
- [34] S. Farokhi and R. Taghavi. Effect of initial swirl distribution on the evolution of a turbulent jet. *AIAA J.*, 27(6) :700–706, 1988.
- [35] R. Fei and W. Merzkirch. Investigations of the measurement accuracy of stereo particle image velocimetry. *Exp. in Fluids*, 37 :559–565, 2004.
- [36] F. Gallaire. *Instabilités dans les jets tournants et contrôle de l'éclatement tourbillonnaire*. PhD thesis, Ecole polytechnique, 2002.
- [37] F. Gallaire and J-M. Chomaz. Instability mechanisms in swirling flows. *Phys. Fluids*, 15(9) :2622–2639, 2003.
- [38] F. Gallaire and J-M. Chomaz. The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown. *Phys. Fluids*, 16(2) :274–286, 2004.
- [39] A. K. Garg and S. Leibovich. Spectral characteristics of vortex breakdown flow-fields. *Phys. Fluids*, 22(11) :2053–2064, 1979.
- [40] R. T. Gilchrist and W. Naughton. Experimental study of incompressible jets with different initial swirl distributions : mean results. *AIAA J.*, 43(4) :741–751, 2005.
- [41] V. Girault and P-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations : Theory and Algorithms*. Springer, 1986.
- [42] W. Govaerts. *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*. SIAM, 2000.
- [43] H. P. Greenspan. *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press, 1968.
- [44] R. Grimshaw. Resonant flow of a rotating fluid past an obstacle : the general case. *Stud. Appl. Math.*, 83 :249–269, 1990.
- [45] R. Grimshaw and Z. Yi. Resonant generation of finite-amplitude waves by the uniform flow of a uniformly rotating fluid past an obstacle. *Mathematika*, 40 : 30–50, 1993.
- [46] Z. Guo and V. K. Dhir. Flow reversal in injection induced swirl flow. *Single and Multiphase Convective Heat Transfer*, 145 :23–30, 1990.
- [47] M. G. Hall. Vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 4 :195–218, 1972.
- [48] H. Hanazaki. Upstream-advancing nonlinear waves in an axisymmetric resonant flow of rotating fluid past an obstacle. *Phys. Fluids A*, 3(12) :3117–3120, 1991.
- [49] H. Hanazaki. Upstream-advancing nonlinear waves excited in an axisymmetric transcritical flow of rotating fluid. *Phys. Fluids A*, 5(3) :568–577, 1993.
- [50] H. Hanazaki. On the wave excitation and the formation of recirculation eddies in an axisymmetric flow of uniformly rotating fluids. *J. Fluid Mech.*, 322 :165–200, 1996.

- [51] J. K. Harvey. Some observations of the vortex breakdown phenomenon. *J. Fluid Mech.*, 14 :589–592, 1962.
- [52] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka. *FreeFem++ Manual, Version 2.8-1*. 2006. URL <http://www.freefem.org/ff++>.
- [53] P. H. Hoffmann, K. C. Muck, and P. Bradshaw. The effect of concave surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 161 :371–403, 1985.
- [54] L. N. Howard and A. S. Gupta. On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. *J. Fluid Mech.*, 14 :463–476, 1962.
- [55] T. W. Jackson and D. G. Lilley. Single-wire swirl flow turbulence measurements. In *AIAA, SAE, and ASME, Joint Propulsion Conference, 19th, Seattle, WA, June 27-29*, 1983.
- [56] L. Jacquin. *Etude théorique et expérimentale de la turbulence homogène en rotation*. PhD thesis, Thèse de doctorat d'état de l'université Claude Bernard (Lyon I), 1987.
- [57] L. Jacquin, O. Leuchter, C. Cambon, and J. Mathieu. Homogeneous turbulence in the presence of rotation. *J. Fluid Mech.*, 220 :1–52, 1990.
- [58] L. Jacquin and C. Pantano. On the persistence of trailing vortices. *J. Fluid Mech.*, 471 :159–168, 2002.
- [59] S. Jakirlic, K. Hanjalic, and C. Tropea. Modeling rotating and swirling turbulent flows : a perpetual challenge. *AIAA J.*, 40(10) :1984–1996, 2002.
- [60] J. G. Kawall, M. Shokr, and J. F. Keffer. A digital technique for the simultaneous measurement of streamwise and lateral velocities in turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 133 :83–112, 1983.
- [61] H. B. Keller. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In *Applications of Bifurcation Theory*, pages 359–384. Academic Press, 1977.
- [62] J. J. Keller, W. Egli, and J. Exley. Force- and loss-free transitions between flow states. *J. Applied Math. and Phys. (ZAMP)*, 36 :854–889, 1985.
- [63] J. J. Keller and M. P. Escudier. Theory and observations of waves on hollow-core vortices. *J. Fluid Mech.*, 99 :495–511, 1980.
- [64] Lord Kelvin. Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, 10 :155–168, 1880.
- [65] S. J. Kline and F. A. McClintock. Describing uncertainties in single-sample measurements. *Mech. Engng*, 75 :3–8, 1953.
- [66] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 2004.
- [67] N. C. Lambourne and D. W. Bryer. The bursting of leading edge vortices ; some observations and discussion of the phenomenon. R&M 3282, Aeronautical Research Council, 1961.
- [68] A. Lecerf, B. Renou, D. Allano, A. Boukhalfa, and M. Trinité. Stereoscopic PIV : validation and application to an isotropic turbulent flow. *Exp. in Fluids*, 26 : 107–115, 1999.

- [69] M. J. Lee. Distortion of homogeneous turbulence by axisymmetric strain and dilatation. *J. Fluid Mech.*, 32 :529–548, 1968.
- [70] R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen, and C. Yang. *ARPACK Users' Guide : Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. SIAM, 1998. URL <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>.
- [71] S. Leibovich. Axially-symmetric eddies embedded in a rotational stream. *J. Fluid Mech.*, 32 :529–548, 1968.
- [72] S. Leibovich. Vortex stability and breakdown : survey and extension. *AIAA J.*, 22 (9) :1192–1206, 1984.
- [73] S. Leibovich and A. Kribus. Large-amplitude wavetrains and solitary waves in vortices. *J. Fluid Mech.*, 216 :459–504, 1990.
- [74] S. Leibovich and J. D. Randall. Amplification and decay of long nonlinear waves. *J. Fluid Mech.*, 53 :481–493, 1973.
- [75] S. Leibovich and K. Stewartson. A sufficient condition for the instability of columnar vortices. *J. Fluid Mech.*, 126 :335–356, 1983.
- [76] M. Lessen, P. J. Singh, and F. Paillet. The stability of a trailing line vortex. part i. inviscid theory. *J. Fluid Mech.*, 63 :753–763, 1974.
- [77] H. Liang and T. Maxworthy. An experimental investigation of swirling jets. *J. Fluid Mech.*, 525 :115–159, 2005.
- [78] A. Lifschitz and E. Hameiri. Local stability conditions in fluid dynamics. *Phys. Fluids A*, 3 :2644–2651, 1991.
- [79] T. Loiseleux and J-M. Chomaz. Breaking of rotational symmetry in a swirling jet experiment. *Phys. Fluids*, 15(2) :511–523, 2003.
- [80] T. Loiseleux, J-M. Chomaz, and P. Huerre. The effect of swirl on jets and wakes : linear instability of the rankine vortex with axial flow. *Phys. Fluids*, 10(5) :1120–1134, 1998.
- [81] J. M. Lopez. On the bifurcation structure of axisymmetric vortex breakdown in a constricted pipe. *Phys. Fluids*, 6(11) :3683–3693, 1994.
- [82] O. Lucca-Negro and T. O'Doherty. Vortex breakdown : a review. *Progress in energy and combustion science*, 27(4) :431–481, 2001.
- [83] T. W. Mattner, P. N. Joubert, and M. S. Chong. Vortical flow. part 1. flow through a constant-diameter pipe. *J. Fluid Mech.*, 463 :259–291, 2002.
- [84] D. Mourtazin. Investigation of vortex breakdown of swirling flow in a tube by the PIV method. Master's thesis, Technion - Israël Institute of Technology, Haïfa, 1998.
- [85] K. C. Muck, P. H. Hoffmann, and P. Bradshaw. The effect of convex surface curvature on turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 161 :347–369, 1985.

- [86] R. Natarajan and A. Acrivos. The instability of the steady flow past spheres and disks. *J. Fluid Mech.*, 254 :323–344, 1993.
- [87] A. H. Nissan and V. P. Bresan. Swirling flow in cylinders. *A.I.Ch.E. J.*, 7(4) : 543–547, 1961.
- [88] F. Novak and T. Sarpkaya. Turbulent vortex breakdown at high Reynolds numbers. *AIAA J.*, 38 :825–834, 2000.
- [89] J. B. Nuttal. Axial flow in a vortex. *Nature*, 172 :582–583, 1953.
- [90] C. Olendraru, A. Sellier, M. Rossi, and P. Huerre. Inviscid instability of the batchelor vortex : absolute-convective transition and spatial branches. *Phys. Fluids*, 11 :1805–1820, 1999.
- [91] J. Panda. *Experiments on the instabilities in swirling and non-swirling free jets*. PhD thesis, Pennsylvania State University, 1990.
- [92] J. Panda and D. K. McLaughlin. Experiments on the instabilities of a swirling jet. *Phys. Fluids*, 6(1) :263–276, 1994.
- [93] S. Pouillard, L. Jacquin, and P. Geffroy. Etude expérimentale d’un jet tournant : qualification de la veine (première partie). Rapport technique, ONERA/DAFE, 1999.
- [94] L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In *3rd Intl Congr. Mathematicians (Heidelberg)*, pages 484–491. Teubner, Leipzig, 1904.
- [95] A. K. Prasad. Stereoscopic particle image velocimetry. *Exp. in Fluids*, 29 :103–116, 2000.
- [96] W. G. Pritchard. The motion generated by a body moving along the axis of a uniformly rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 39 :443–464, 1969.
- [97] G. K. Raffel, C. E. Willert, and J. Kompenhans. *Particle Image Velocimetry*. Springer, 1998.
- [98] Lord Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 11 :57–70, 1880.
- [99] Lord Rayleigh. On the dynamics of revolving fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 93 : 148–154, 1916.
- [100] F. Renac. *Contrôle expérimental de l’écoulement tourbillonnaire sur une aile delta*. PhD thesis, Université Paris VI, 2004.
- [101] D. L. Rhode, D. G. Lilley, and D. K. McLaughlin. Mean flowfields in axisymmetric combustor geometries with swirl. *AIAA J.*, 29 :103–116, 2000.
- [102] G. Rocklage-Marliani, M. Schmidts, and V. I. Vasanta Ram. Three-dimensional laser-doppler velocimeter measurements in swirling turbulent pipe flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 70 :43–67, 2003.
- [103] M. Rossi. Of vortices and vortical layers : an overview. In *Lecture Notes in Physics*, volume 555. Springer, 2000.

- [104] M. R. Ruith, P. Chen, E. Meiburg, and T. Maxworthy. Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes : direct numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, 486 :331–378, 2003.
- [105] Z. Rusak, K. P. Judd, and S. Wang. The effect of small pipe divergence on near critical swirling flows. *Phys. Fluids*, 9(8) :2273–2285, 1997.
- [106] Z. Rusak, K. P. Judd, and S. Wang. The interaction of near-critical swirling flows in a pipe with inlet azimuthal vorticity perturbations. *Phys. Fluids*, 10(7) :1672–1684, 1998.
- [107] Z. Rusak and C. C. Meder. Near-critical swirling flow in a slightly contracting pipe. *AIAA J.*, 42(11) :2284–2293, 2004.
- [108] Z. Rusak, S. Wang, and C. H. Whiting. The evolution of a perturbed vortex in a pipe to axisymmetric vortex breakdown. *J. Fluid Mech.*, 366 :211–237, 1998.
- [109] P. G. Saffman. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, 1992.
- [110] T. Sarpkaya. On stationary and travelling vortex breakdowns. *J. Fluid Mech.*, 45 :545–559, 1971.
- [111] G. L. Scharrer and D. G. Lilley. Five-hole pitot probe measurements of swirl, confinement and nozzle effects on confined turbulent flow. In *AIAA Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, and Lasers Conference, 17th, Snowmass, CO, June 25-27*, 1984.
- [112] D. Sipp and L. Jacquin. Elliptic instability in two-dimensional flattened Taylor-Green vortices. *Phys. Fluids*, 10(4) :839–849, 1998.
- [113] D. Sipp, E. Lauga, and L. Jacquin. Vortices in rotating systems : centrifugal, elliptic and hyperbolic type instabilities. *Phys. Fluids*, 11(12) :3716–3728, 1999.
- [114] D. O. Snyder and R. E. Spall. Numerical simulation of bubble-type vortex breakdown within a tube-and-vane apparatus. *Phys. Fluids*, 12(3) :603–608, 2000.
- [115] S. M. Soloff, R. J. Adrian, and Z-C. Liu. Distortion compensation for generalized stereoscopic particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.*, 8 :1441–1454, 1997.
- [116] A. Spohn, M. Mory, and E. J. Hopfinger. Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disc. *J. Fluid Mech.*, 370 :73–99, 1998.
- [117] H. B. Squire. Analysis of the vortex breakdown phenomenon, part i. *Imperial College, Aero. Dept. Rep.*, 102, 1960.
- [118] J. L. Synge. The stability of heterogeneous liquids. *Trans. R. Soc. Can.*, 27 :1–18, 1933.
- [119] A. Szeri and P. Holmes. Nonlinear stability of axisymmetric swirling flows. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 326 :327–354, 1988.
- [120] D. J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 1988.
- [121] C. Tsai and S. E. Widnall. Examination of group-velocity criterion for breakdown of vortex flow in a divergent duct. *Phys. Fluids*, 23(5) :864–870, 1980.

-
- [122] S. Wang and Z. Rusak. On the stability of an axisymmetric rotating flow in a pipe. *Phys. Fluids*, 8(4) :1007–1016, 1996.
- [123] S. Wang and Z. Rusak. On the stability of non-columnar swirling flows. *Phys. Fluids*, 8(4) :1017–1023, 1996.
- [124] S. Wang and Z. Rusak. The dynamics of a swirling flow in a pipe and transition to axisymmetric vortex breakdown. *J. Fluid Mech.*, 340 :177–223, 1997.
- [125] S. Wang and Z. Rusak. The effect of slight viscosity on a near-critical swirling flow in a pipe. *Phys. Fluids*, 9(7) :1914–1927, 1997.
- [126] B. Wieneke. Stereo-PIV using self-calibration on particle images. *Exp. in Fluids*, 39(2) :267–280, 2005.
- [127] H. K. Yoon and D. G. Lilley. Five-hole pitot probe time-mean velocity measurements in confined swirling flows. In *AIAA, Aerospace Sciences Meeting, 21st, Reno, NV, Jan 10-13*, 1983.
- [128] W. Zang and A. K. Prasad. Performance evaluation of a scheinpflug stereocamera for particle image velocimetry. *Applied Optics*, 36(33) :8738–8744, 1997.