



HAL
open science

Rayonnement acoustique dans un écoulement cisaille : une méthode d'éléments finis pour la simulation du régime harmonique.

Eve-Marie Duclairoir

► **To cite this version:**

Eve-Marie Duclairoir. Rayonnement acoustique dans un écoulement cisaille : une méthode d'éléments finis pour la simulation du régime harmonique.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2007. Français. NNT : . pastel-00002409

HAL Id: pastel-00002409

<https://pastel.hal.science/pastel-00002409>

Submitted on 28 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat de l'École Polytechnique

Spécialité :

Mathématiques et Informatique

présentée par

Eve-Marie Duclairoir

pour obtenir le titre de Docteur de l'École Polytechnique

Sujet de la thèse :

***RAYONNEMENT ACOUSTIQUE
DANS UN ECOULEMENT CISAILLE :
Une méthode d'éléments finis
pour la simulation du régime harmonique***

Thèse soutenue le 13 mars 2007 devant le jury composé de :

M.	Christophe	Bailly	Rapporteur
M.	Mabrouk	Ben Tahar	Examinateur
Mme	Anne-Sophie	Bonnet-Ben Dhia	Directrice de thèse
M.	Jean-François	Mercier	Co-directeur de thèse
M.	Serge	Piperno	Rapporteur
Mme	Isabelle	Terrasse	Examinatrice

Thèse réalisée au sein du laboratoire POEMS (UMR
CNRS/ENSTA/INRIA 2706)



Remerciements

Dans les manuscrits de thèse, la page la plus personnelle est celle des remerciements car elle est la seule à faire transparaître des sentiments. S'adressant directement à nos coeurs, elle est par conséquent la plus appréciée et la plus lue (à ce qu'il paraît ...).

Je tiens tout d'abord à remercier les différents organismes ayant participé au financement de cette thèse : le CNRS et EADS ainsi que l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA de m'avoir accueillie et offert des conditions de travail des plus agréables au cours de ces trois années de thèse.

Je remercie également ma directrice de thèse Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia de m'avoir proposé ce sujet avec un aspect applicatif très motivant. Je lui suis reconnaissante d'avoir guidé mes travaux de ses remarques pertinentes. J'espère que le travail effectué au cours de cette thèse donnera suite à des développements ultérieurs. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Jean-François Mercier, mon co-directeur de thèse, pour l'aide et le temps qu'il m'a consacrés pour clarifier ou répondre à mes questions (pas toujours scientifiques d'ailleurs!!!) avec gentillesse.

J'exprime toute ma reconnaissance envers Christophe Bailly et Serge Piperno qui ont accepté la charge de rapporteurs de ce manuscrit. Je remercie vivement Isabelle Terrasse et Mabrouk Ben Tahar d'en être les examinateurs.

Je tiens à remercier aussi les membres de l'UMA de m'avoir offert une ambiance de travail conviviale. Je remercie plus particulièrement Guillaume Legendre pour les explications claires qu'il m'a fournies sur son travail de thèse, Colin Chambeyron pour ses réponses mélancoliques, Jean-Luc Commeau et tous les autres Cow Boys de l'informatique (Fabrice, Carlo, Ch'tico, Bassem) pour leur efficacité.

Je tiens aussi à citer (et pas pour une question de parité) mes collègues féminines Erell, Grace et Nadia avec lesquelles les discussions (toujours scientifiques évidemment!) ont été très prolifiques. Ne pouvant pas citer tous les doctorants et stagiaires ayant jalonné mon parcours, je les assure de mon amitié.

Je tiens aussi à ajouter un clin d'oeil aux Marseillais qui, depuis la fin de l'ESM2, se sont occupés de m'organiser un tour de France personnalisé (vive les salsifis!).

Enfin, même si cela est très classique, je tiens à remercier du fond du coeur ma famille (extensions comprises) pour leur soutien passé, actuel et à venir.

Table des matières

Introduction	7
1 Acoustique en écoulement	13
1.1 Position du problème	13
1.2 Modes du conduit	16
1.2.1 Étude du spectre des valeurs propres	17
1.2.2 Effets de l'écoulement sur les ondes acoustiques	22
1.3 État de l'art des méthodes numériques sur le régime harmonique	24
2 Étude du problème dissipatif	27
2.1 Le problème dissipatif	28
2.1.1 Formulation faible du problème dissipatif	28
2.1.2 Calcul de l'opérateur hydrodynamique	31
2.2 Analyse mathématique du problème dissipatif régularisé	36
2.2.1 Existence et unicité de la solution	36
2.2.2 Equivalence	38
2.3 Le problème dissipatif approché à faible Mach	41
2.3.1 Existence et unicité de la solution exacte	41
2.3.2 Convergence vers le cas sans écoulement	42
2.3.3 Construction du modèle approché	45
2.3.4 Pertinence du modèle approché	47
3 Étude du problème avec couches PML	51
3.1 Principe des couches absorbantes PML	52
3.1.1 Construction des couches PML	52
3.1.2 Modes et couches PML	52
3.1.3 Exemple simple : équation d'Helmholtz	55
3.2 Régularisation du problème avec couches PML de longueur infinie	57
3.3 Régularisation du problème avec couches PML de longueur finie	60
3.3.1 Formulation variationnelle	60
3.3.2 Caractère bien posé du problème	61
3.4 Mise-en-œuvre numérique	63
3.4.1 Implémentation	63
3.4.2 Paramètres des simulations	64
3.4.3 Validation	65

3.4.4	Résultats numériques	68
3.5	Modèle faible Mach avec couches PML	71
3.5.1	Étude du spectre des valeurs propres	72
3.5.2	Les formules pour un milieu avec PML	74
3.5.3	Résultats numériques	76
3.A	En complément : Détails des aspects numériques	79
3.A.1	Introduction	79
3.A.2	Presentation of the problem	80
3.A.3	Study of a regularized problem	83
3.A.4	Numerical applications	86
4	Vers des situations plus réalistes	91
4.1	Cas $3D$	91
4.1.1	Les équations en $3D$	91
4.1.2	Résultats numériques	96
4.2	Cas des parois traitées en $2D$	97
4.2.1	Les équations	97
4.2.2	Résultats numériques	100
	Conclusion	101
A	Calcul numérique des modes en écoulement cisailé	105
A.1	Principe de la méthode	105
A.2	Application au calcul de modes du modèle de Pridmore-Brown	106
A.3	Application au calcul de modes du modèle Mach Faible	108
A.3.1	Calcul des modes transverses	108
A.3.2	Calcul des modes non transverses	108
B	Calcul de la vorticité en présence de couches PML	111
B.1	Détermination de ψ_f^∞	111
B.1.1	Détermination d'une solution du problème homogène	111
B.1.2	Détermination de la fonction de Green causale de l'opérateur D_α^2	112
B.1.3	Calcul de ψ_f^∞	114
B.1.4	Caractère $L^2(\Omega)$ de ψ_f^∞	115
B.2	Détermination de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$	118
B.2.1	Détermination d'une solution du problème homogène	118
B.2.2	Détermination de la fonction de Green causale de l'opérateur D_α	118
B.2.3	Calcul de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$	119
B.2.4	Caractère $L^2(\Omega)$ de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$	120
C	Propriétés de continuité de l'opérateur hydrodynamique	123
C.1	Majoration de $\ A_\alpha^L \mathbf{u}\ _{L^2}$	123
C.2	Majoration de $\ \partial_x (A_\alpha^L \mathbf{u})\ _{L^2}$	125
C.3	Majoration de $\ \partial_y (A_\alpha^L \mathbf{u})\ _{L^2}$	126

D Proceeding du CANUM 2006	129
D.1 The physical problem posed in a waveguide	130
D.2 Regularized formulation	131
D.2.1 Without flow	131
D.2.2 With a flow	132
D.3 The treatment of the problem in an infinite duct	132
D.3.1 The dissipative problem	132
D.3.2 Perfectly Matched Layers	137
D.4 Implementation and numerical results	138
D.5 Conclusion	141
Bibliographie	143

Introduction

Ce document présente les travaux de recherche effectués sous la direction d'Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et de Jean-François Mercier dans le cadre de ma thèse. Cette étude cofinancée par le CNRS et EADS a été réalisée au sein du laboratoire POEMS. Elle traite de la résolution numérique par une méthode éléments finis de problèmes de rayonnement acoustique en présence d'écoulement en régime périodique établi.

Les industries du transport aussi bien automobile qu'aéronautique recherchent activement à réduire les nuisances sonores produites par leurs engins. En particulier en aéronautique, les contraintes imposées par les réglementations internationales aux alentours des aéroports sont de plus en plus strictes. Pour pouvoir réduire le bruit des moteurs d'avion, une compréhension précise des phénomènes aéroacoustiques, aussi bien la production de bruit par des écoulements turbulents que le rayonnement sonore en présence d'un écoulement est nécessaire.

La production de bruit est un phénomène non-linéaire complexe (lié à la turbulence) dont la simulation numérique est très délicate. Pour illustration des recherches menées dans ce domaine, nous pouvons notamment citer les travaux de Bailly *et al.* [BB06, BJ00] basé sur la résolution numérique directe des équations de Navier-Stokes. La méthode de simulation utilisée dans ce cas est la simulation des grandes échelles (LES : Large Eddy Simulation) qui combine un calcul direct de l'acoustique et des grands tourbillons et une modélisation pour les petits tourbillons.

La résolution numérique de la propagation du son dans un milieu en mouvement, bien que plus simple puisqu'il s'agit d'un phénomène linéaire, pose aujourd'hui encore de nombreuses difficultés. Le cas du régime périodique établi est plus particulièrement délicat car il nécessite la détermination de bonnes conditions de rayonnement sur la frontière du domaine de calcul. Il s'agit d'une question pertinente puisque sur les spectres de bruit créé par les moteurs, des pics d'intensité sont observables aux fréquences de rotation des pales : ces pics composent le bruit de raies. Au décollage si nous comparons les contributions des différents bruits (bruit du moteur, bruit convecté et bruit créé par la turbulence), le bruit de raies représente l'une des principales nuisances sonores.

Le modèle généralement adopté repose sur la linéarisation des équations d'Euler : il s'agit d'un système du premier ordre en temps et espace portant sur les perturbations de vitesse et de pression. Ce modèle a beaucoup été utilisé pour effectuer des simulations temporelles, par différences finies [BBJ02, TW93, Tam95] ou par méthodes de type Galerkin Discontinu [AS98, BLP06, PD04, DMPV05, CC05]. En régime périodique établi, seul le cas d'un écoulement et d'une source irrotationnels [Coy01, Dup06] a pu être résolu de façon satisfaisante. Dans ce cas les perturbations sont aussi potentielles et par conséquent le problème à traiter est un problème d'acoustique classique (scalaire). L'étude de la propagation acoustique en présence d'un écoulement non potentiel est plus délicate. Il a été développé

en régime harmonique pour le modèle de Galbrun une méthode de résolution numérique par formulation mixte [TGB03, Gab03]. Cette approche cependant ne permet pas de traiter correctement les conditions de rayonnement. Notre travail consiste entre autres à développer une méthode numérique permettant de les traiter. Il fait suite à une première thèse effectuée par Guillaume Legendre. L'étude qu'il a menée sur des écoulements particuliers, uniformes ou uniformes par morceaux a permis de développer une méthodologie pour résoudre le problème par éléments finis :

- Le modèle retenu porte sur la perturbation du déplacement lagrangien, dont les quantités Eulériennes usuelles (perturbation de vitesse, de pression et de masse volumique) peuvent se déduire par dérivation. Cette équation en déplacement, dite de Galbrun, est du second ordre en temps et espace et est mieux adaptée aux approches variationnelles que le système d'Euler linéarisé.
- En régime fréquentiel, la résolution directe de l'équation vectorielle de Galbrun par éléments finis est numériquement instable. Il a été montré, pour un écoulement parallèle uniforme ou uniforme par morceaux, qu'une régularisation de cette équation, analogue à celle qui est utilisée en électromagnétisme, permet de supprimer ces instabilités. Ce procédé fait intervenir une nouvelle quantité que nous nommons vorticité et qui correspond au rotationnel du champ de déplacement.
- En écoulement uniforme (et a fortiori en écoulement cisailé) les conditions de rayonnement ne sont généralement pas explicites. La solution proposée est l'introduction de couches PML. Cette technique consiste à entourer le domaine d'intérêt d'un milieu artificiel dans lequel les ondes sont atténuées et tel qu'aucune réflexion n'a lieu aux interfaces entre le milieu central et les couches PML.

L'objectif de cette thèse est d'étendre ces techniques à des écoulements porteurs subsoniques non-uniformes. Il apparaît alors deux difficultés principales liées à la vorticité : le couplage hydrodynamique-acoustique et les conditions de rayonnement. La première difficulté vient du couplage entre deux phénomènes de nature très différente qui sont la propagation d'ondes acoustiques et la convection de tourbillons par l'écoulement. La seconde difficulté provient du fait que la vorticité a un comportement différent à l'amont et à l'aval de la source. Elle nécessite des traitements différents à l'amont et à l'aval ce qui n'est pas possible avec une méthode variationnelle non régularisée. Nous montrons dans ce document que la régularisation permet justement de sélectionner la vorticité causale.

Bien qu'à terme nous souhaitons étudier des géométries quelconques, nous nous limitons dans un premier temps à une étude du problème en conduit droit, afin de nous concentrer sur la difficulté liée à l'écoulement cisailé. Le présent document explique notre démarche et se décompose en quatre chapitres.

L'objectif principal du **premier chapitre** est l'établissement du problème mathématique que nous étudions théoriquement et que nous résolvons numériquement dans la suite du mémoire. Ce chapitre, consacré aux aspects de modélisation, expose brièvement les deux modèles physiques usuels, les équations d'Euler et de Galbrun, ainsi que le lien entre les deux. Nous étudions ensuite des solutions particulières très utiles notamment pour exprimer les conditions de rayonnement que nous calculons numériquement : les modes du conduit. Nous profitons de cette étude et plus particulièrement de l'étude du spectre des valeurs propres (les constantes de propagation des modes) dans le plan complexe pour rappeler les caractéristiques des trois classes de modes et décrire quelques phénomènes physiques mis en jeu : phénomènes de convection et de guidage. Nous concluons en effectuant un bref état de l'art des méthodes numériques développées en harmonique.

Dans le **deuxième chapitre** nous considérons le problème dissipatif associé au modèle de Galbrun. Ce chapitre a une grande importance car il contient tous les outils théoriques nécessaires pour la résolution de l'équation de Galbrun même en milieu non dissipatif. Nous sommes confrontés aux mêmes problèmes que dans le cas d'un écoulement uniforme. Tout d'abord l'équation de Galbrun est non elliptique et nous ne connaissons pas d'éléments finis permettant de résoudre l'équation de Galbrun brute. Nous lui appliquons alors la méthode de régularisation, c'est-à-dire que nous rendons le problème elliptique en exploitant une relation donnant la vorticité (le rotationnel du déplacement). La seconde difficulté rencontrée réside dans l'exploitation des conditions de rayonnement à l'infini. Tout comme dans le cas uniforme, cette détermination est complexe car la vorticité, solution d'un équation de transport, ne se propage que dans le sens de l'écoulement. Ceci induit une dissymétrie amont/aval du comportement du champ de déplacement, ce qui complique la détermination des conditions de rayonnement. De plus dans le cas cisailé, la présence éventuelle d'instabilité vient compliquer le problème. Enfin le cas cisailé introduit une difficulté supplémentaire : la vorticité qui est liée au déplacement par une formule de convolution devient singulière lorsque l'écoulement est lent. Pour répondre à ces différentes difficultés, nous utilisons le principe d'absorption limite : il consiste à se placer en régime dissipatif (on ajoute une partie imaginaire à la fréquence) pour lequel les conditions de rayonnement sont remplacées par des conditions de décroissance à l'infini. Le régime dissipatif est confortable pour établir des résultats théoriques : il rend l'énergie acoustique finie ce qui permet d'utiliser des techniques "énergétiques" pour démontrer l'existence d'une solution. L'approche ainsi développée pose cependant problème lors de la mise-en-œuvre numérique : la vorticité est un terme non local (la valeur de la vorticité en un point dépend des valeurs prises par le déplacement en amont de ce point sur la ligne de courant) et a un comportement très oscillant pour les écoulements lents. Pour pallier à ce dernier phénomène, nous construisons une expression approchée de la vorticité. Nous appelons le modèle associé à cette vorticité "modèle Faible Mach". Nous concluons ce chapitre par une estimation d'erreur pour ce nouveau modèle en fonction du nombre de Mach.

Le but du **troisième chapitre** est le développement d'une méthode numérique calculant le champ rayonné par une source. Dans ce but, nous utilisons des couches PML, ce qui à nouveau permet de remplacer les conditions de rayonnement par des conditions de décroissance à l'infini. Nous suivons donc une démarche analogue à l'ajout de dissipation dans un milieu et étendons les résultats du chapitre 2 au cas avec couches PML. En pratique, pour les besoins de la discrétisation, nous tronquons les couches PML. Nous montrons alors que le problème obtenu peut être résolu par éléments finis et décrivons la mise-en-œuvre numérique du problème. Les points importants sont la construction de l'outil d'interpolation polynomiale calculant la vorticité puis la résolution itérative du système linéaire résultant. Nous proposons une validation du code obtenu puis nous exposons quelques résultats numériques. Enfin, puisque comme dans le cas dissipatif la vorticité conserve son comportement oscillant, nous construisons un modèle Mach Faible avec couches PML. Nous prouvons que ce nouveau modèle peut être discrétisé par éléments finis avant de produire des résultats numériques que nous comparons à ceux obtenus pour le modèle exact. A la suite de ce chapitre, nous joignons en complément un article écrit au cours de cette thèse et publié dans le Journal of Computational and Applied Mathematics. Cet article, bien que considérant le cas particulier d'un domaine borné, introduit les outils numériques utilisés pour la résolution du problème en domaine borné et en domaine infini : calcul de la vorticité et choix d'une résolution itérative du système complet.

Dans le **dernier chapitre**, nous développons des modèles proches d'applications plus

concrètes. La première application concerne le cas $3D$. Dans ce cas, la vorticité est une quantité vectorielle. Nous prouvons que ce problème est bien posé pour des guides à section polygonale puis nous élargissons ce résultat aux guides à section quelconque. Nous présentons ensuite quelques résultats numériques. La seconde application porte sur le cas de parois trait es. Une des solutions industrielles pour atténuer le bruit dans les conduits consiste à recouvrir les parois d'un isolant acoustique. Nous étendons le code au problème associé à la présence d'une portion de paroi avec impédance, même si nous ne réussissons pas à établir un cadre théorique complet.

Ce travail de thèse a donné lieu à **deux publications**. La première cit e plus haut traite en particulier des outils numériques mis en place pour la résolution du problème. La seconde publication fait suite à la conférence plénière assur e par Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia au Canum 2006. Cette publication représente une synthèse des trois premiers chapitres de ce document : elle offre une vue rapide des différentes méthodes utilis es. Elle est ins r e comme annexe à la fin de ce mémoire.

Acoustique en écoulement

Dans ce document, nous souhaitons calculer le champ rayonné par une source dans un écoulement cisailé par une méthode éléments finis. Le modèle généralement adopté repose sur la linéarisation des équations d'Euler : il s'agit d'un système du premier ordre portant sur les perturbations de vitesse et de pression. Souhaitant résoudre variationnellement le problème, nous avons préféré choisir un système d'ordre deux. Le modèle utilisé est le modèle de Galbrun qui est très similaire aux équations d'onde. Ce modèle porte sur la perturbation du déplacement lagrangien. Dans un premier temps nous explicitons nos hypothèses de travail puis nous établissons le problème étudié dans le reste du document. Nous nous intéressons ensuite à des solutions particulières du problème, les solutions à variables séparées du modèle sans source : les modes du conduit. Nous étudions plus particulièrement l'influence de l'écoulement sur le spectre des constantes de propagation dans le plan complexe. En absence d'écoulement, les modes obtenus sont dits acoustiques et sont à rotationnel nul. En présence d'un écoulement uniforme, nous obtenons le même spectre translaté horizontalement plus une valeur propre supplémentaire de multiplicité infinie correspondant à des modes dits hydrodynamiques car à rotationnel non nul. En présence d'un écoulement cisailé, il apparaît un continuum de modes hydrodynamiques. Nous concluons ce chapitre par un bref rappel de l'état de l'art.

1.1 Position du problème

Soit dans le plan $(O; \mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y)$ un conduit Ω infini à paroi rigide : $\Omega = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < h\}$ où (x, y) sont les coordonnées spatiales du plan. Le conduit Ω est rempli d'un fluide parfait compressible. Nous considérons que ce système est en évolution adiabatique *i.e.* qu'il n'existe aucun échange de chaleur avec l'extérieur ou entre molécules.

Nous notons ρ_0 et p_0 respectivement la masse volumique et la pression du système à l'équilibre.

1 Modèle de Galbrun

Le modèle de Galbrun [Gal31] porte sur la perturbation du déplacement lagrangien ξ . Cette approche est considérée comme mixte : l'inconnue est une quantité lagrangienne décrite au moyen des variables d'Euler que sont la position $(x; y)$ et le temps t . Plus précisément, la perturbation du déplacement lagrangien est définie de la façon suivante : une particule de fluide qui se situerait au point \mathbf{x}_0 à un instant t dans l'écoulement porteur se trouve en $\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}$ dans l'écoulement perturbé (cf. Fig 1.1).

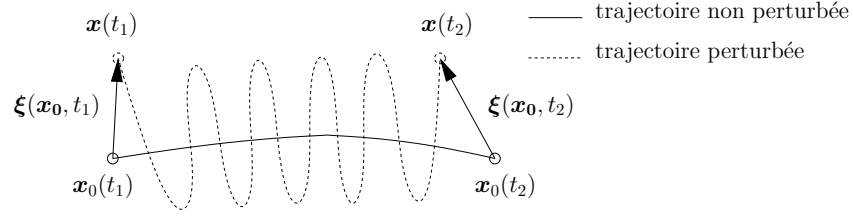


FIG. 1.1 – Perturbation du éplacement lagrangien pour une particule fluide à deux instants t_1 et t_2 .

Nous nous plaçons dans le cadre de l'acoustique, ce qui signifie que l'on suppose que ξ est suffisamment petit pour pouvoir linéariser les équations de conservation de la mécanique des fluides. Cette linéarisation aboutit (après un long processus décrit dans [Leg03]) à la relation dite de Galbrun [Poi85] :

$$\rho_0 D_t^2 \xi - \nabla(\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \xi) + (\operatorname{div} \xi) \nabla p_0 - {}^t \nabla \xi \cdot \nabla p_0 = F \quad (1.1)$$

où D_t est la dérivée convective telle que : $D_t = \partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$ où \mathbf{v}_0 est la vitesse de l'écoulement porteur et F représente le terme source.

Dans cette section, nous souhaitons préciser les hypothèses utilisées et déterminer leur influence sur l'équation (1.1) : comme l'indique le titre de ce document, nous considérons un écoulement cisailé en régime harmonique.

2 Hypothèse d'écoulement cisailé

Les écoulements étudiés \mathbf{v}_0 sont des écoulements stationnaires subsonique : $\partial_t \mathbf{v}_0 = 0$ et $|\mathbf{v}_0| < c_0$ où c_0 est la vitesse du son. Nous limitons notre étude à des écoulements plans : le profil des vitesses est porté par l'axe horizontal et ne dépend que de y : $\mathbf{v}_0 = U_0(y) \mathbf{e}_x$. La composante horizontale de ces écoulements devra de plus appartenir au moins à $C^2([0; h])$. Le cas de profils de vitesses non continus (constants par morceaux) a été traité dans le document de thèse de Guillaume Legendre.

Nous pouvons montrer que pour un écoulement plan p_0 et ρ_0 sont des quantités constantes. En effet l'écoulement porteur vérifie le système d'Euler et plus particulièrement la conservation de la quantité de mouvement : $\rho_0 D_t \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = 0$, ce qui conduit à $\nabla p_0 = 0$. Nous en déduisons que $\nabla \rho_0 = 0$ puisque $\nabla p_0 = c_0^2 \nabla \rho_0$ dans le cas d'un fluide homogène en évolution adiabatique. Par conséquent nous obtenons la forme simplifiée suivante de l'équation de Galbrun :

$$D_t^2 \xi - c_0^2 \nabla(\operatorname{div} \xi) = \bar{F} \text{ où } \bar{F} = \frac{F}{\rho_0}$$

3 Hypothèse de régime harmonique

Le régime harmonique est aussi appelé régime périodique établi. Il consiste à étudier après un temps long un système excité périodiquement par une source $\bar{F} = \bar{f}(x, y) \exp(-ikc_0 t)$ où k est le nombre d'onde. Le produit kc_0 représente la pulsation de l'excitation. Comme usuellement, nous cherchons une solution périodique de même période que l'excitation. Nous

recherchons donc une solution de la forme :

$$\boldsymbol{\xi}(x, y, t) = \Re(\mathbf{u}(x, y) \exp(-ikc_0t)). \quad (1.2)$$

La dépendance en temps étant explicite et l'équation linéaire, la seule inconnue restante du problème est le comportement spatial \mathbf{u} . En divisant l'équation de Galbrun par c_0^2 et en introduisant la notation suivante $\mathbf{f} = \frac{\bar{\mathbf{f}}}{c_0^2}$, le problème de Galbrun que nous étudierons dans toute la suite est :

$$D^2\mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (1.3)$$

où D est la nouvelle forme de l'opérateur convectif normalisé par $\frac{1}{c_0}$ tel que $D = -ik + M\partial_x$ où $M = \frac{U_0(y)}{c_0}$ est le profil de nombres de Mach.

4 Conditions aux limites

Il est connu que les conditions aux limites naturelles s'expriment en fonction du déplacement et non de la vitesse. Dans le cas de parois rigides, la condition est :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ où } \mathbf{n} \text{ est la normale sortante de } \Omega. \quad (1.4)$$

Dans le cas d'une interface entre deux fluides ou entre un fluide et un solide, la condition est $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0$ où $[\cdot]$ représente le saut. Contrairement au modèle d'Euler dont les inconnues sont la vitesse et la pression, le modèle de Galbrun qui porte sur le déplacement semble naturellement mieux adapté à la prise en compte des conditions aux bords. Pour fermer le problème, il ne reste plus qu'à déterminer les conditions de rayonnement à l'infini.

$$\left\{ \begin{array}{l} D^2\mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ + \text{Conditions de rayonnement à expliciter} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

En écoulement uniforme, ces conditions peuvent être explicitées à l'aide des modes du conduit. En présence d'un écoulement cisailé, ce n'est plus le cas notamment en raison de l'existence d'un continuum de modes convectés par l'écoulement. Nous décrirons ces modes plus précisément lors de l'étude modale.

Pour contourner cette difficulté, nous étudierons le problème soit en milieu dissipatif pour la partie théorique soit en présence de couches absorbantes pour l'implémentation. Ces deux techniques ont pour principe de rendre évanescents les ondes sortantes à l'infini, ce qui les caractérise concrètement.

5 Lien avec le modèle d'Euler

Sous les hypothèses de notre étude, les équations d'Euler linéarisées sur Ω (sans terme

source) s'écrivent :

$$\frac{1}{c_0} Dp + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho_0 (c_0 D\mathbf{v} + c_0 v_y M'(y) \mathbf{e}_x) + \nabla p = 0 \quad (1.7)$$

$$p = c_0^2 \rho \quad (1.8)$$

Dans le cas de parois rigides, la condition aux limites dans la représentation d'Euler est :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Il a été établi [Leg03] que si \mathbf{u} est solution de (1.5) et ξ déduit de (1.2), le vecteur (\mathbf{v}, p, ρ) donné par les formules suivantes est solution des équations (1.6) à (1.8) :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= D_t \xi - \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \xi \\ p &= -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \xi - \xi \cdot \nabla p_0 \\ \rho &= \rho_0 \operatorname{div} \xi - \xi \cdot \nabla \rho_0 \end{aligned}$$

En pratique, en écoulement cisailé et plus particulièrement pour le calcul des modes guidés, une équation scalaire est préférée au système d'Euler. Il s'agit de l'équation de Pridmore-Brown [PB58] :

$$\begin{cases} D(D^2 p - \Delta p) + 2M' \partial_x \partial_y p = 0 \text{ dans } \Omega \\ \partial_n p = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ + \text{Conditions de rayonnement à expliciter} \end{cases} \quad (1.9)$$

L'équation de volume est obtenue en appliquant la dérivée convective D à l'équation (1.6) et la divergence à l'équation (1.7). La condition aux limites est quant à elle obtenue à partir de la relation $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur les parois rigides et de l'équation (1.7) projetée sur \mathbf{e}_y .

Contrairement à l'équation vectorielle de Galbrun, cette équation a pour attrait d'être scalaire. Cependant elle a pour inconvénient d'être d'ordre 3. Par conséquent elle n'est pas appropriée à un traitement par éléments finis.

1.2 Modes du conduit

Nous nous intéressons dans cette section aux modes du guide. Nous cherchons les solutions du problème (1.5) sans source ($\mathbf{f} = 0$) de la forme :

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}(y) e^{i\beta x}$$

où β est la constante de propagation du mode ($\beta \in \mathbb{C}$) et \mathbf{u} est le mode transverse.

Si nous notons $p = -\operatorname{div} \mathbf{u}$ (la vraie pression étant $p = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u}$), p est de la forme

$$p(x, y) = \mathbf{p}(y) e^{i\beta x}$$

et vérifie le problème (1.9) qui s'écrit sous forme développée :

Pour $k \in \mathbb{R}^+$ donné, trouver $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\exists p \neq 0$ vérifiant

$$\begin{cases} (-k + M\beta) \mathbf{p}'' - 2M'\beta \mathbf{p}' + [M(1 - M^2)\beta^3 + (3M^2 - 1)\beta^2 - 3Mk^2\beta + ik^3] \mathbf{p} = 0 \text{ sur }]0, h[\\ \mathbf{p}'(0) = 0 \text{ et } \mathbf{p}'(h) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Il est plus facile de résoudre ce problème scalaire que le problème vectoriel vérifié par les modes de Galbrun. Il faut cependant s'assurer que nous avons obtenu tous les modes recherchés. Si \mathbf{u} est un mode de Galbrun alors $p = -\operatorname{div} \mathbf{u}$ est un mode de Pridmore-Brown sauf si $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Réciproquement si p est un mode de Pridmore-Brown, alors on retrouve un mode de Galbrun en utilisant la relation suivante $D^2\mathbf{u} = -\nabla p$ qui s'écrit sous forme développée :

$$(k - M\beta)^2 \mathbf{u} = \nabla p$$

sauf si $k - M\beta$ s'annule sur un ensemble de mesure non nulle.

On vérifie aisément que ces deux cas de figure (modes de Galbrun à divergence nulle ou annulation de $k - M\beta$ sur un ensemble de mesure non nulle) ne se présente que si l'écoulement est uniforme sur une partie de conduit.

En particulier

- si $\forall y, M'(y) \neq 0$, il y a équivalence entre les modes obtenus par les deux modèles.
- si l'écoulement est uniforme, il y a équivalence sauf pour $\beta = \frac{k}{M}$ qui est associé aux modes hydrodynamiques (à divergence nulle).

Une fois les modes calculés, nous énumérons quelques phénomènes physiques mis en évidence par leur comportement.

1.2.1 Étude du spectre des valeurs propres

1 Cas sans écoulement

Dans ce cas, il est connu [Bru98] que les valeurs propres β_n^\pm sont de multiplicité un et ont pour formule :

$$\beta_n^\pm = \pm \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{h^2}} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

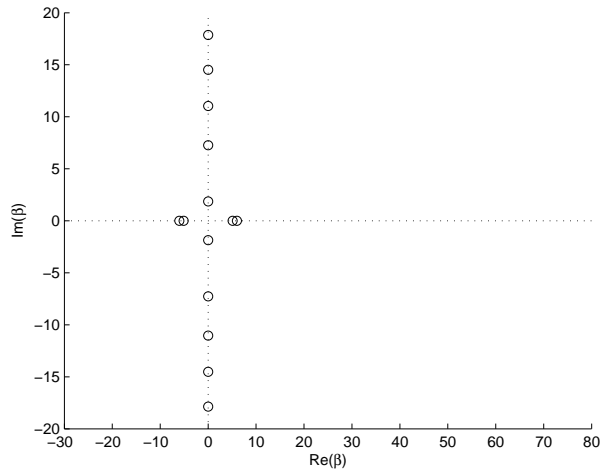
où la fonction racine carrée complexe est définie comme ci-suit :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{\frac{i \arg(z)}{2}} \text{ avec } 0 \leq \arg(z) < 2\pi.$$

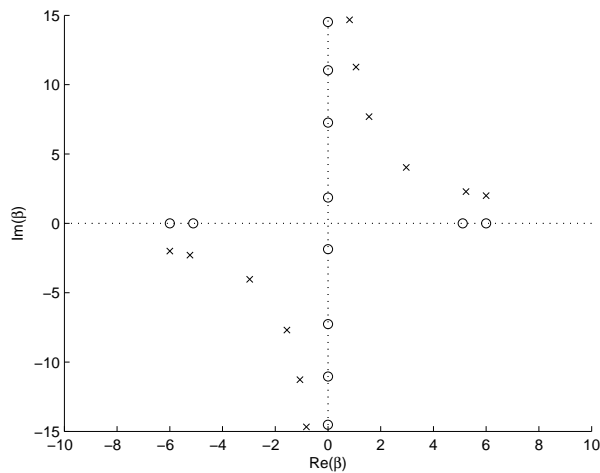
Parmi les solutions nous distinguons un nombre fini de modes propagatifs dont les valeurs propres sont réelles ($\beta_n \in \mathbb{R}$) et une infinité de modes dits évanescents ($\beta_n \in i\mathbb{R}$). L'ensemble de ces modes sont dits acoustiques car à rotationnel nul.

Graphiquement si nous représentons l'ensemble des valeurs propres de (1.10) dans le plan complexe, nous obtenons un graphique du type de celui représenté sur la Fig. 1.2.

Sur cette figure, nous identifions les modes propagatifs portés par l'axe des abscisses et les modes évanescents portés par l'axe des ordonnées. Plus finement, nous pouvons distinguer deux types de modes : les modes dits amont et aval. Les modes amont (resp. aval) se propagent vers l'amont (resp. vers l'aval) quand ils sont propagatifs ou décroissent spatialement vers l'amont (resp. vers l'aval) quand ils sont évanescents. Le critère déterminant

FIG. 1.2 – Valeurs propres obtenues pour $k = 6$ dans le cas sans écoulement.

leur comportement est le critère de Briggs [Bri64]. Celui-ci consiste à ajouter de la dissipation au milieu et à demander que tous les modes deviennent évanescents. Ainsi on se ramène à étudier la direction dans laquelle se déplace la valeur propre dans le plan complexe. Si la valeur propre se déplace vers le demi-plan supérieur, le mode est un mode aval car $e^{i\Re(\beta)x} e^{-\Im(\beta)x}$ n'est évanescence que vers l'aval. Si la valeur propre se déplace vers le demi-plan inférieur, il s'agit d'un mode amont. En pratique, pour ajouter de la dissipation au système, il suffit de substituer au nombre d'onde réel k un nombre d'onde complexe $k + i\varepsilon$ où $\varepsilon > 0$. Plus tard nous appliquerons la même transformation à l'équation de Galbrun : nous parlerons là encore de régime dissipatif. Sous les hypothèses de la Fig. 1.2, nous obtenons la Fig. 1.3.

FIG. 1.3 – Critère de Briggs dans le cas sans écoulement : les valeurs propres obtenues sans dissipation ($k = 6$) sont représentées par \circ et celles obtenues en présence de dissipation ($k = 6 + 2i$) par \times .

Sur cette figure, nous remarquons que dans le cas sans écoulement, les modes amont sont les modes β_n^- tels que $\Im(\beta) \leq 0$ et $\Re(\beta) \leq 0$. Les modes aval sont les modes β_n^+ tels que $\Im(\beta) \geq 0$ et $\Re(\beta) \geq 0$. Il est à noter que les modes évanescents amont sont exponentiellement amortis en $-\infty$ et les modes évanescents aval le sont en $+\infty$.

2 Cas des écoulements uniformes

Il a été établi [Leg03] que dans ce cas deux types de valeurs propres sont à distinguer : celles de multiplicité un associées aux modes acoustiques qui ont pour expression

$$\beta_n^\pm = \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{h^2}}}{1 - M^2} \quad (1.11)$$

et celle de multiplicité infinie associée aux modes hydrodynamiques qui vérifie :

$$k - M\beta = 0.$$

Pour un écoulement uniforme $M = 0.4$ et une fréquence $k = 6$ nous obtenons dans le plan complexe le spectre de valeurs propres représentées par \circ de la Fig. 1.4.

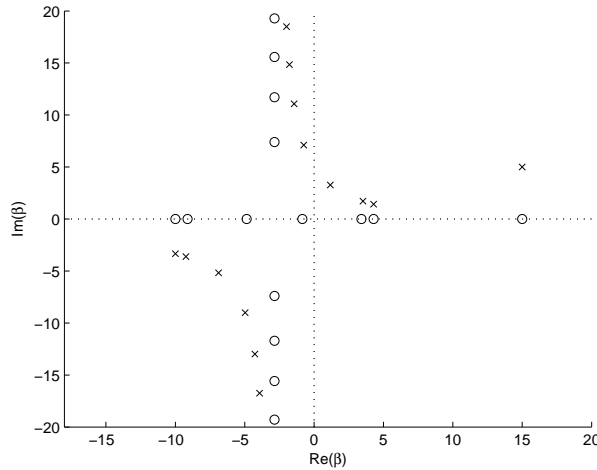


FIG. 1.4 – Cas uniforme $M = 0.4$ et $k = 6$: les valeurs propres obtenues sans dissipation ($k = 6$) sont représentées par \circ et celles obtenues en présence de dissipation ($k = 6 + 2i$) par \times .

Sur cette figure, nous identifions sur le spectre obtenu pour $k = 6$ (spectre \circ) la présence de la "croix" des modes acoustiques. Il est à noter que les branches des modes évanescents ne se superposent plus avec l'axe des ordonnées. D'après (1.11), $\Re(\beta_n^\pm) = -\frac{kM}{1-M^2}$. Il apparaît une dissymétrie dans le comportement des modes amont et aval. Si nous nous plaçons dans le référentiel du fluide ($\tilde{x} = x + Mt$), nous retrouvons la configuration du cas sans écoulement. C'est ce changement de repère qui décale la croix des modes acoustiques. D'après le critère de Briggs, nous remarquons sur la Fig. 1.4 qu'en ajoutant de la dissipation (spectre \times) les valeurs propres β_n^- correspondent aux modes amont qui remontent l'écoulement et les β_n^+ aux modes aval qui descendent l'écoulement.

Remarque 1 Le mode associé à la valeur propre $\beta = -0.85 (= \beta_2^+)$ est un mode amont inverse i.e. un mode aval bien qu'ayant une valeur propre négative. Physiquement ces modes ont une vitesse de phase (vitesse des fronts de l'onde) et de groupe (vitesse de l'enveloppe de l'onde ou encore vitesse de l'énergie) de signe opposé. Un mode amont est un mode pour lequel la vitesse de groupe est positive. Nous verrons lors de l'étude du problème avec couches PML que ces modes ont un comportement instable dans les couches PML.

Nous remarquons aussi en $\beta = \frac{k}{M} = 15$ la présence de la valeur propre de multiplicité infinie. Les modes liés à cette valeur propre sont les modes hydrodynamiques à rotationnel non nul et à divergence nulle. Parce que ces modes vérifient $k - M\beta = 0$, ils ont une vitesse de groupe v_g égale à la vitesse de l'écoulement porteur ($v_g = \frac{cdk}{d\beta} = cM = U_0$) : ces modes sont convectés par l'écoulement.

Remarque 2 Il est à noter que dans le cas d'écoulements très lents ($M \ll 1$), les modes hydrodynamiques deviennent singuliers (longueurs d'onde très courtes $\lambda = \frac{2\pi M}{k}$).

3 Cas des écoulement parallèles cisailés

Dans le cas d'écoulements cisailés, les solutions de (1.10) ne peuvent plus être déterminées analytiquement. Pour les calculer numériquement, nous utilisons une méthode proposée par [Fél02] reposant sur la méthode de collocation spectrale de Chebyshev [WR00]. Un bref rappel de la méthode numérique utilisée et de sa mise-en-œuvre dans le cas étudié se trouvent dans l'annexe A.

Considérons les résultats obtenus pour $k = 6$ dans le cas d'un écoulement cisailé $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(6y - 3)$.

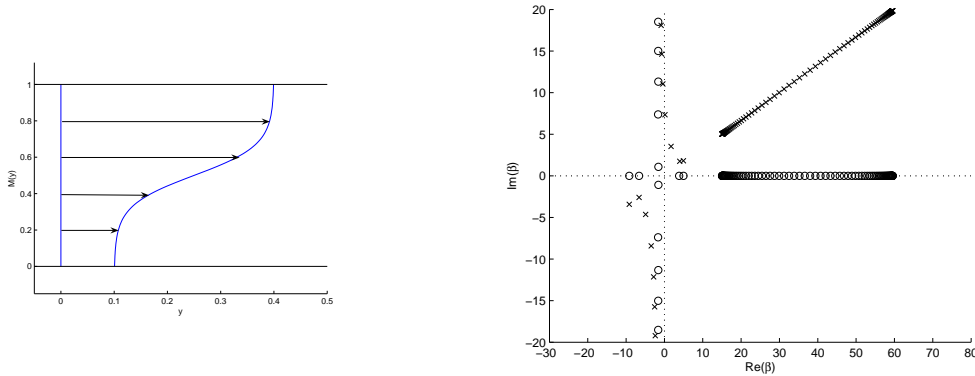


FIG. 1.5 – Cas de l'écoulement $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(6y - 3)$: valeurs propres \circ obtenues sans dissipation ($k = 6$) et \times en présence de dissipation $k = 6 + 2i$.

Sur le spectre \circ de la Fig. 1.5, nous pouvons distinguer le spectre discret correspondant aux modes acoustiques que nous avons définis précédemment. Nous conservons cette appellation même si le rotationnel de ces modes n'est plus nul. Le spectre continu correspond au continuum de modes hydrodynamiques. Il s'étend sur $\left[\frac{k}{M_{max}} ; \frac{k}{M_{min}} \right]$ où M_{min} et M_{max} sont les valeurs

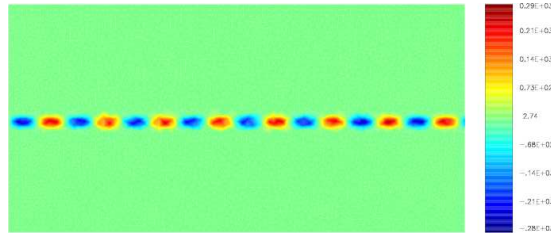


FIG. 1.6 – Amplitude d’un mode hydrodynamique ($\beta = 25.41$) obtenu pour $k = 6$ et $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(6y - 3)$

minimum et maximum de M . À β fixé, l’amplitude $p(y)$ de ces modes se localise autour du point y_c vérifiant $k - M(y_c)\beta = 0$ comme nous le montre la Fig. 1.6 représentant la composante horizontale du déplacement d’un mode hydrodynamique de valeur propre $\beta = 25.41$ pour lequel le maximum d’amplitude est localisé en $y_c = 0.48$.

Il est à noter qu’à condition qu’il existe un point d’inflexion sur le profil des nombres de Mach un couple de valeurs propres peut apparaître de part et d’autre du continuum comme nous pouvons le voir sur le spectre des valeurs propres obtenues pour $k = 6$ et $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(36y - 18)$ de la Fig. 1.7 .

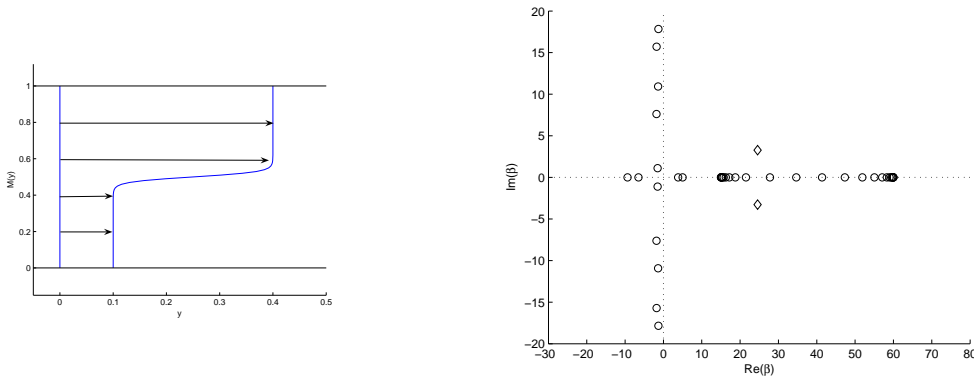


FIG. 1.7 – Cas de l’écoulement $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(36y - 18)$ et $k = 6$: les valeurs propres \circ sont associées à des modes stables et les \times à des instabilités.

L’expérience semble montrer que ce couple n’apparaît que lorsque la dérivée au niveau du point d’inflexion est assez forte. Parmi ce couple, nous pouvons distinguer une valeur propre associée à un mode instable : il s’agit de celle dont la partie imaginaire est négative. En effet d’après le critère de Briggs [Bri64], les deux modes sont des modes avals comme nous pouvons le voir graphiquement sur la Fig. 1.8. Par conséquent comme l’amplitude des modes à l’infini est en $e^{-\Im(\beta)x}$, le mode dont la partie imaginaire est négative croît spatialement.

Nous représentons de plus sur la Fig. 1.9 l’amplitude du déplacement horizontal de ce mode qui croît de manière exponentielle spatialement.

Dans nos travaux, nous nous sommes toujours placé en présence d’écoulement ne générant pas d’instabilité.

Remarque 3 Lors de l’application du critère de Briggs, il faut introduire beaucoup de dissipation pour que la valeur propre du mode instable traverse l’axe réel. En l’absence de

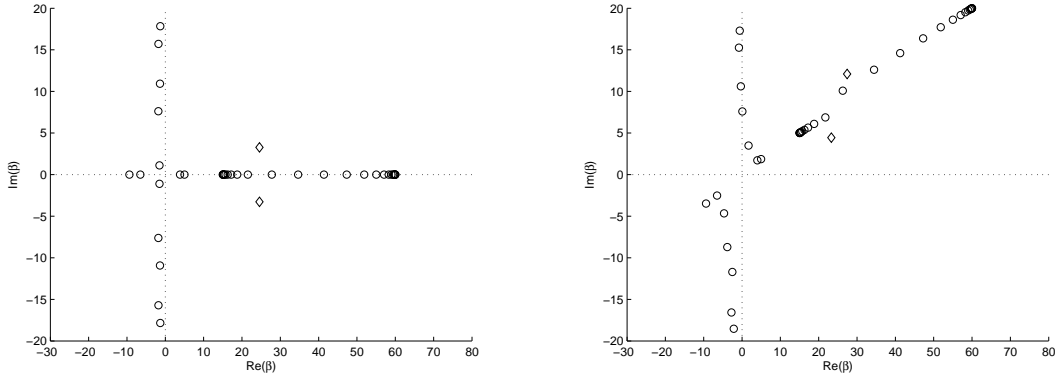


FIG. 1.8 – Cas de l'écoulement $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(36y - 18)$: valeurs propres obtenues sans dissipation ($k = 6$) à gauche et en présence de dissipation $k = 6 + 2i$ à droite.

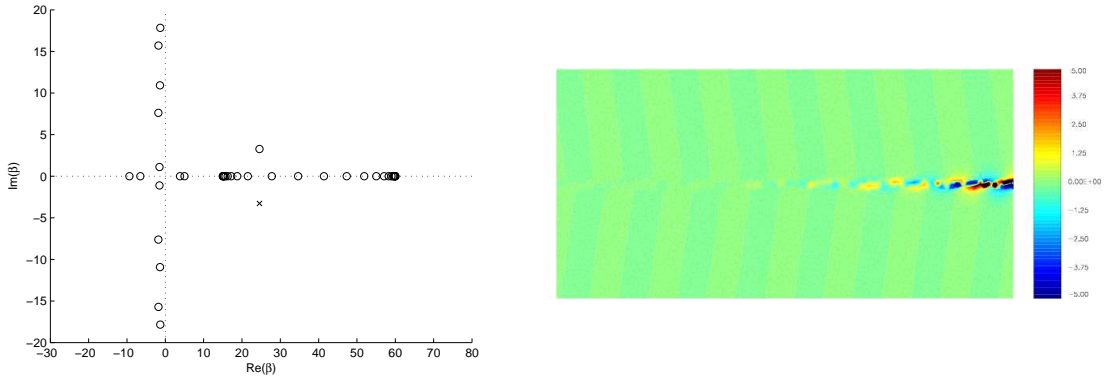


FIG. 1.9 – Cas de l'écoulement $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(36y - 18)$: à gauche valeurs propres obtenues pour $k = 6$ et à droite amplitude du déplacement horizontal du mode instable ($\beta = 24.55 - 3.27i$) représenté par \times sur le spectre.

mode instable, il suffit d'introduire très peu de dissipation pour pouvoir sélectionner les modes amont et aval. Nous retrouverons ce phénomène plus tard lorsque nous étudierons l'équation de Galbrun en régime dissipatif.

1.2.2 Effets de l'écoulement sur les ondes acoustiques

Nous nous intéressons dans cette section aux phénomènes physiques mis en évidence par les modes.

A Convection

Pour illustrer ce phénomène nous considérons deux modes du spectre représenté sur la Fig. 1.4 obtenu pour $M = 0.25$ et $k = 6$.

Selon la notation (1.11), les modes représentés sur la Fig. 1.10 sont les modes amont et aval obtenus pour $n = 0$: $\beta_0^- = -8$ et $\beta_0^+ = 4.8$. Par définition de la longueur d'onde comme $\lambda = \frac{2\pi}{|\beta|}$

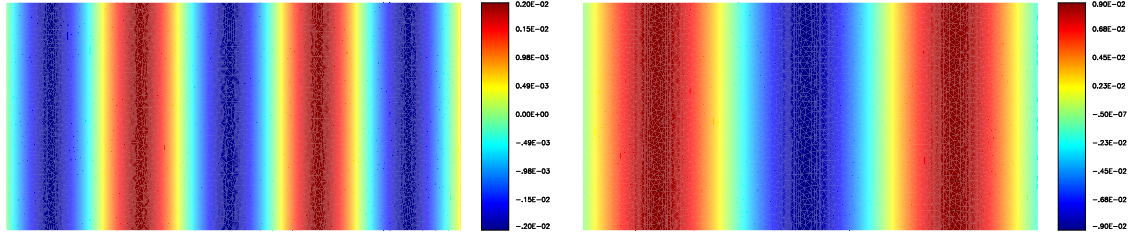


FIG. 1.10 – Isovaleurs des modes amont ($\beta = -8$) et aval ($\beta = 4.8$) obtenus pour $k = 6$ et $M(y) = 0.25$

où λ est la longueur d'onde, $|\lambda_0^-| < |\lambda_0^+|$. Effectivement sur la Fig. 1.10, nous constatons que la longueur d'onde de l'onde remontant l'écoulement λ_0^- est plus courte que celle de l'onde descendant λ_0^+ . Ce phénomène est apparenté à l'effet Doppler, et par abus de langage, nous assimilerons ces deux phénomènes. Pour faciliter la compréhension de ce phénomène, nous allons considérer le cas 1D : le mode plan. Dans ce cas, d'après (1.11), $\beta_0^\pm = \pm \frac{k}{1 \pm M}$. Par conséquent les vitesses de groupe de ces ondes sont $|v_g| = \left| \frac{c_0 \partial k}{\partial \beta} \right| = c_0 \pm U_0$. Lorsque l'onde descend l'écoulement, la vitesse effective de l'onde est la somme de la vitesse du son et de la vitesse de l'écoulement porteur. A contrario quand l'onde remonte l'écoulement la vitesse de l'écoulement est soustraite à la vitesse du son pour obtenir sa vitesse effective. L'onde est ralentie et par conséquent les fronts d'onde sont plus rapprochés.

On en conclut qu'en présence d'un écoulement, même si la fréquence n'est pas très élevée, les longueurs d'ondes peuvent être très courtes (notamment si M est proche de 1). Réussir à capturer ces longueurs d'ondes numériquement représente une réelle difficulté.

B Confinement

Cet effet est propre aux écoulements cisailés. Le phénomène de confinement est parfaitement connu en électromagnétisme et en élastodynamique. En électromagnétisme, il se traduit dans les fibres optiques par un confinement de l'onde dans les régions à faible célérité [Mar74]. En élastodynamique, il s'agit par exemple du phénomène des ondes de Love [BG85] *i.e.* un confinement dans le sous-sol des ondes élastiques dans les régions à faible vitesse (en surface). Pour la propagation acoustique en écoulement cisailé, il existe un phénomène analogue. Pour l'illustrer nous considérons les modes respectivement amont et aval de valeur propre $\beta = -9.17$ et $\beta = 4.96$ obtenus pour $k = 6$ et $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(6y - 3)$ dont le spectre complet est représenté sur la Fig. 1.5.

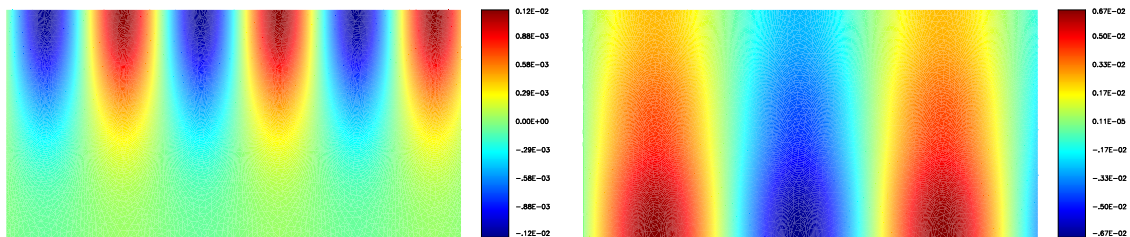


FIG. 1.11 – Amplitude d'un mode amont ($\beta = -9.17$) et aval ($\beta = 4.96$) obtenus pour $k = 6$ et $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(6y - 3)$

Nous constatons sur la Fig. 1.11 qu'il existe une dissymétrie entre l'amont et l'aval. Cet effet est propre à l'acoustique en écoulement et ne peut être observé en électromagnétisme ou en élastodynamique. Il est à noter que le mode aval se concentre dans la région où la vitesse de l'écoulement porteur est la plus basse ($c_0 + U_0$ faible). A contrario le mode amont remontant l'écoulement se confine dans la région à fort nombre de Mach ($c_0 - U_0$ faible).

1.3 État de l'art des méthodes numériques sur le régime harmonique

La majorité des travaux dans la littérature traitant d'aéroacoustique porte sur le régime transitoire. La résolution numérique en régime harmonique, qui nécessite l'utilisation de conditions de rayonnement sur les bords du domaine de calcul performantes, a peu été traitée et soulève toujours des difficultés, à plus forte raison sur des domaines quelconques.

Nous nous concentrons sur les méthodes éléments finis, ces méthodes présentant l'intérêt de traiter des géométries complexes. Les difficultés sont multiples : choisir les bons éléments, éviter les instabilités numériques, écrire les bonnes conditions transparentes sur les bords du domaine de calcul. À notre connaissance, la seule façon actuellement de traiter de manière satisfaisante ce problème est de considérer un écoulement et une source potentiels. Sous ces hypothèses, les perturbations sont elles aussi potentielles et on se ramène à un problème scalaire. De plus lorsque l'écoulement est uniforme loin de la source, les conditions de rayonnement peuvent être construites explicitement. Il reste alors à coupler ces conditions à un traitement par éléments finis de la région où l'écoulement porteur est non uniforme. Il existe en particulier deux méthodes pour construire les conditions de rayonnement : par décomposition modale sur les harmoniques cylindriques comme dans le code industriel ACTRAN [Coy01] ou par une formulation intégrale du champ lointain comme dans la thèse de Duprey [Dup06].

Pour des écoulements non potentiels, il est difficile de concilier la construction d'une méthode numérique stable et le traitement des conditions de rayonnement qui ne sont généralement plus explicites. La dissymétrie de comportement du fluide entre l'amont et l'aval, décrite dans le paragraphe précédent et due à la présence d'un continuum de modes hydrodynamiques dans le spectre des valeurs propres, rend difficile l'écriture de conditions transparentes, comme par exemple un opérateur de type Dirichlet to Neumann (DtN).

Les premières tentatives d'Elias et Peyret (ONERA) [PE01] de résolution directe de l'équation de Galbrun par éléments finis sur des maillages structurés fins révélaient déjà la présence d'instabilités numériques. Une solution apportée alors par l'équipe de Ben Tahar au sein du laboratoire Robertval de l'UTC consiste à écrire une formulation mixte à partir de l'équation de Galbrun. Cette alternative permet d'établir partiellement un cadre théorique. Dans le cadre de sa thèse, Treyssède [TGB03] propose une formulation mixte en déplacement et pression qu'il discrétise au moyen d'éléments $P1$ bulle- $P1$ ou $Q2$ bulle- $Q1$. En absence d'écoulement, la condition inf-sup assure la convergence de la méthode. Cependant en présence d'un écoulement, ce résultat ne peut pas être étendu. Gabard [Gab03, GAT05] a étudié les propriétés de stabilité et de dispersion de ce schéma. Il en conclut qu'il existe un manque de stabilité pour la résolution par les éléments $P1$ bulle- $P1$ dans les zones de nombre de Mach élevé et que la stabilité est inconditionnelle pour les éléments $Q1$ bulle- $Q1$. Ces méthodes ne permettent cependant pas de traiter des problèmes de rayonnements. Gabard a approfondi l'étude des conditions sortantes pour l'équation de Galbrun et a identifié les difficultés pour établir de telles conditions.

En revanche Legendre [Leg03] a montré que l'utilisation conjointe d'une méthode de régularisation et de couches PML permet de traiter de façon satisfaisante à la fois le rayonnement acoustique et la convection des tourbillons. En se limitant à des écoulements uniformes ou uniformes par morceaux, il a établi grâce à une méthode de régularisation un cadre théorique complet. Notre travail consiste à étendre ces résultats à un écoulement cisailé.

Désirant à terme traiter tout type de géométries, nous avons adopté une méthode éléments finis. Cependant d'autres approches existent comme celle de Morris [RM06] qui a développé une méthode de type Galerkin Discontinu utilisant des couches absorbantes. L'inconvénient de cette méthode est son coût numérique important.

Il existe aussi pour les problèmes en conduit à section variable une alternative semi-numérique. Il s'agit des méthodes dites multimodales. Ainsi Pagneux *et al.* [Fél02, FP02] cherchent une décomposition de la vitesse et de la pression sur les modes propres du guide (modes acoustiques et modes hydrodynamiques). Dans le cas d'un écoulement uniforme, cette méthode fonctionne et sa généralisation au cas d'un écoulement cisailé donne aussi des résultats prometteurs.

Étude du problème dissipatif

Nous avons présenté au chapitre précédent le problème que nous souhaitons étudier théoriquement et résoudre numériquement : il s'agit du rayonnement d'une source placée dans un conduit bidimensionnel infini, contenant un fluide en écoulement cisailé. Comme nous l'avons mentionné, l'une des difficultés réside dans l'écriture et l'exploitation des conditions de rayonnement. En présence d'un écoulement uniforme, si nous considérons un problème d'acoustique pure (perturbations potentielles) modélisé par l'équation d'Helmholtz, il a été établi [BDLP02] que toute solution se décompose sur la base des modes. Dans le cas général, ce n'est plus si simple. La présence des modes hydrodynamiques empêche de traiter l'amont et l'aval de façon symétrique. La question de la complétude des modes en écoulement cisailé reste d'ailleurs une question ouverte [Nil98].

Afin de nous affranchir dans un premier temps de la difficulté de la sélection de l'onde sortante, nous considérons dans ce chapitre le problème dissipatif, obtenu en substituant au nombre d'onde réel k le nombre d'onde complexe $k_\varepsilon = k + i\varepsilon$ où ε est un réel positif. L'introduction d'absorption permet alors de chercher la solution du problème dans $L^2(\Omega)^2$, ce qui joue le rôle de conditions de rayonnement. Nous verrons dans le premier paragraphe qu'il est nécessaire d'appliquer un traitement particulier à ce problème pour nous permettre de travailler dans un cadre théorique connu, pour avoir un problème bien posé. Cette technique a été développée en électromagnétisme [Wer63] puis a été appliquée au modèle de Galbrun [BLL01, Leg03] et est appelée "régularisation". Ce procédé fait intervenir une nouvelle quantité ψ^ε -la vorticité- qui correspond au rotationnel du champ de déplacement. Classiquement dans le modèle d'Euler, la vorticité correspond au rotationnel du champ de vitesse. Ici il sera commode d'appeler vorticité le rotationnel du déplacement qui joue un rôle important dans notre approche. Comme on le verra dans la suite, la principale difficulté (tant du point de vue théorique que numérique) réside dans l'évaluation de cette quantité.

Dans un premier temps, nous établissons une expression de ψ^ε faisant intervenir une convolution le long des lignes de courant grâce à laquelle nous construisons le problème régularisé associé. Le deuxième paragraphe consiste en l'étude mathématique de ce problème que nous appellerons exact. En présence d'un écoulement de faible Mach, une formule approch e plus simple de la vorticité peut être établie. En nous basant sur cette approximation, nous proposons dans le dernier paragraphe un nouveau modèle et nous donnons une estimation, en fonction du nombre de Mach, de l'erreur produite par cette approximation.

2.1 Le problème dissipatif

Soit Ω un conduit à parois rigides tel que $\Omega = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < h\}$. Nous rappelons que le caractère dissipatif du milieu se traduit par le paramètre ε intervenant dans l'expression du nombre d'onde k_ε :

$$k_\varepsilon = k + i\varepsilon \text{ avec } \varepsilon > 0.$$

Nous considérons maintenant le problème dissipatif suivant de paramètre ε :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}^\varepsilon \text{ tel que } \begin{cases} D_\varepsilon^2 \mathbf{u}^\varepsilon - \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \text{ avec } D_\varepsilon = -ik_\varepsilon + M(y)\partial_x \quad (2.1)$$

où nous supposons que la source \mathbf{f} appartient à $H_{\operatorname{rot}} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 / \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$ et que $M(y)$ est une fonction assez régulière ($C^2([0; h])$) telle que

$$\max_{0 \leq y \leq h} |M(y)| < 1.$$

Le bien fondé de ces hypothèses sera établi au cours du chapitre.

L'espace auquel \mathbf{u}^ε appartient est un point délicat et sera précisé dans la suite.

2.1.1 Formulation faible du problème dissipatif

Afin de déterminer l'espace fonctionnel auquel \mathbf{u}^ε doit appartenir, commençons par écrire la formulation variationnelle associée à ce problème. Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ une fonction appartenant à l'ensemble des fonctions tests ($C_c^\infty(\bar{\Omega})^2$ (aussi noté $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^2$)). Les parois du conduit étant rigides, nous supposons que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Multiplions la première équation de (2.1) par $\bar{\mathbf{v}}$. Nous obtenons après intégration par parties sur Ω :

$$\int_{\Omega} (-k_\varepsilon^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ik_\varepsilon M \partial_x \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \partial_x \mathbf{u} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}}$$

Les termes de bords qui apparaissent lors de l'intégration par parties sont nuls. En effet

$$\int_{\Omega} M^2 \partial_x^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} = - \int_{\Omega} M^2 \partial_x \mathbf{u} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{v}} + \int_{\partial\Omega} \partial_x \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) \text{ avec } \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x = 0$$

puisque les bords du conduit sont horizontaux ($\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_y$). De même

$$- \int_{\Omega} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} - \int_{\partial\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \text{ avec } \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

En conclusion, pour établir le cadre fonctionnel, nous cherchons un espace V_Ω tel que :

1. $\{\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^2 ; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ soit dense dans V_Ω .
2. Trouver $\mathbf{u}^\varepsilon \in V_\Omega$ tel que

$$\forall \mathbf{v} \in V_\Omega, \quad a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad (2.2)$$

avec la forme sesquilinéaire

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (-k_\varepsilon^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ik_\varepsilon M \partial_x \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \partial_x \mathbf{u} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})$$

et la forme anti-linéaire $\ell(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}}$, soit bien posé.

A En absence d'écoulement ($M = 0$) :

En absence d'écoulement, la forme sesquilinéaire se simplifie :

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (-k_\varepsilon^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}).$$

Il est naturel dans ce cas de choisir comme espace fonctionnel

$$H_{\operatorname{div}}^0 = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 / \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

muni de la norme $\|\mathbf{u}\|_{H_{\operatorname{div}}^0} = \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2}^2}$. Il a été démontré que le problème (2.2) est bien posé sur H_{div}^0 . Parce que la démarche en présence d'un écoulement est similaire, nous allons rappeler le point délicat de ce résultat : la coercivité sur H_{div}^0 de a_ε .

La forme a_ε est coercive sur H_{div}^0 si $\forall \mathbf{u} \in H_{\operatorname{div}}^0, |a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq C_\varepsilon \|\mathbf{u}\|_{H_{\operatorname{div}}^0}^2$ avec C_ε une constante positive.

Au lieu d'étudier directement la quantité $|a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})|$, nous cherchons dans un premier temps à minorer $\Im\left(-\frac{1}{k_\varepsilon} a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})\right)$.

Remarque 4 *Le fait d'étudier la partie imaginaire fait disparaître le terme non symétrique car par intégration par parties nous obtenons que $\forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2, \int_{\Omega} \partial_x \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} = -\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{u}}$. En remarquant que $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{u}} = \overline{\int_{\Omega} \partial_x \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}}$, nous concluons que $\int_{\Omega} \partial_x \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}$ est un imaginaire pur.*

Comme

$$\Im\left(-\frac{1}{k_\varepsilon} a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})\right) = \int_{\Omega} \left(\Im\left(-\frac{1}{k_\varepsilon}\right) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + \Im(k_\varepsilon) |\mathbf{u}|^2 \right) = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + \varepsilon |\mathbf{u}|^2 \right),$$

remarquons que le caractère strictement positif des coefficients devant $|\mathbf{u}|^2$ et $|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2$ rend naturel le choix de H_{div}^0 comme espace de travail. Nous obtenons la minoration suivante de la partie imaginaire de $-\frac{1}{k_\varepsilon} a_\varepsilon$:

$$\Im\left(-\frac{1}{k_\varepsilon} a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})\right) \geq \min\left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2}; \varepsilon\right) \|\mathbf{u}\|_{H_{\operatorname{div}}^0}^2$$

Nous en déduisons que :

$$|a_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u})| \geq |k_\varepsilon| \Im\left(-\frac{a_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u})}{k_\varepsilon}\right) \geq \min\left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|}; \varepsilon |k_\varepsilon|\right) \|\mathbf{u}\|_{H_{\operatorname{div}}^0}^2$$

B En présence d'un écoulement $M(y)$:

Dans ce cas, la situation est plus délicate. La partie imaginaire de $-\frac{1}{k_\varepsilon} a_\varepsilon$ est alors :

$$\Im\left(-\frac{1}{k_\varepsilon} a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})\right) = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2} (|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 - M^2 |\partial_x \mathbf{u}|^2) + \varepsilon |\mathbf{u}|^2 \right)$$

Contrairement au cas sans écoulement, $\mathfrak{S}\left(-\frac{1}{k_\varepsilon}a_\varepsilon\right)$ n'est pas de signe fixe car le coefficient devant $|\partial_x u_y|^2$ est négatif. Par exemple si nous considérons un champ de déplacement à divergence nulle,

$$\mathfrak{S}\left(-\frac{1}{k_\varepsilon}a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})\right) = \int_\Omega \left(-\frac{M^2\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2}|\partial_x \mathbf{u}|^2 + \varepsilon|\mathbf{u}|^2\right)$$

Le coefficient devant la dérivée de \mathbf{u} est négatif et il est facile de vérifier qu'il existe des \mathbf{u} tels que $\mathfrak{S}\left(-\frac{1}{k_\varepsilon}a_\varepsilon\right)$ est négative. Nous ne pouvons donc pas définir d'énergie qui fournirait une norme puis un cadre variationnel naturel au problème. Une solution consiste alors à écrire une formulation équivalente régularisée du problème.

C La régularisation :

Soit

$$V_\Omega = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2 / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (2.3)$$

espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^2}$ que nous noterons aussi $\|\cdot\|_{V_\Omega}$. La régularisation consiste à acquérir de la coercivité en ajoutant à $a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ le terme $s \int_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}$ où s est une constante positive dite de régularisation. Pour comprendre la pertinence de cet ajout, étudions la coercivité de $a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + s \int_\Omega |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2$. Par une démarche analogue à précédemment, nous cherchons à minorer

$$\mathfrak{S}\left(-\frac{1}{k_\varepsilon}\left(a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + s \int_\Omega |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2\right)\right) = \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2}\left(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + s|\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 - M^2|\partial_x \mathbf{u}|^2\right) + \varepsilon|\mathbf{u}|^2\right)$$

La clé de la minoration réside dans l'utilisation du résultat établi par Costabel [Cos91] :

$$\forall \mathbf{u} \in V_\Omega, \quad \int_\Omega (|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2) = \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2. \quad (2.4)$$

Remarque 5 Puisque le terme $\nabla \mathbf{u}$ est un tenseur, $|\nabla \mathbf{u}|^2$ est un produit tensoriel doublement contracté dont l'expression développée est $|\nabla \mathbf{u}|^2 = |\partial_x u_x|^2 + |\partial_x u_y|^2 + |\partial_y u_x|^2 + |\partial_y u_y|^2$.

Cette relation provient de la formule vectorielle $\Delta \mathbf{u} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ et du choix des conditions limites $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur les bords.

Remarque 6 Nous rappelons que l'opérateur rotationnel appliqué à un champ vectoriel $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ a pour expression $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \partial_x u_y - \partial_y u_x$. Si le champ est scalaire, la définition de l'opérateur est alors $\operatorname{rot} = (\partial_y, -\partial_x)$.

Par application de la relation de Costabel, une minoration possible est alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\left(-\frac{1}{k_\varepsilon}\left(a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + s \int_\Omega |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2\right)\right) &\geq \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2} \min(1 - M^2; s - M^2) |\nabla \mathbf{u}|^2 + \varepsilon|\mathbf{u}|^2\right) \\ &\geq \varepsilon \min\left(\frac{1}{|k_\varepsilon|^2}(1 - s_0); \frac{1}{|k_\varepsilon|^2}(s - s_0); 1\right) \|\mathbf{u}\|_{V_\Omega}^2 \end{aligned}$$

où $s_0 = \max_y(M^2)$.

Comme l'écoulement porteur est subsonique ($s_0 < 1$), on a la coercivité sur V_Ω dès que $s > s_0$.

Notre objectif est d'écrire un problème équivalent au problème initial (2.1). Pour cela, il faut s'assurer que l'ajout du terme régularisant est formel. En effet la solution du problème (2.1) n'est pas forcément à rotationnel nul. Nous considérons donc le problème variationnel régularisé suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}^\varepsilon \in V_\Omega \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_\Omega \quad a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + s \int_\Omega (\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon - \psi^\varepsilon) \text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \ell(\mathbf{v}) \quad (2.5)$$

où V_Ω est défini par (2.3) et $\psi^\varepsilon = \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon$. L'objet du paragraphe suivant est de compléter ce problème par une nouvelle relation entre \mathbf{u}^ε et ψ^ε .

Il est alors clair que toute solution du problème initial est solution de (2.5). La réciproque sera établie plus loin.

2.1.2 Calcul de l'opérateur hydrodynamique

A Détermination de l'équation hydrodynamique

Le but de cette partie est d'établir une relation liant \mathbf{u} et ψ^ε (différente de la relation $\psi^\varepsilon = \text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon$) qui pourra être injectée dans la formulation faible du problème régularisé (2.5). Cette relation sera appelée équation hydrodynamique. Nous obtiendrons alors un problème donc la seule inconnue sera le déplacement.

Pour déterminer l'équation hydrodynamique, nous appliquons formellement l'opérateur rot à l'équation (2.1) : $\text{rot}(D_\varepsilon^2 \mathbf{u}) = \text{rot } \mathbf{f}$. Il est à noter que contrairement au cas d'un écoulement uniforme, la dérivée convective n'est pas un opérateur à coefficients constants, elle ne commute donc pas avec l'opérateur rotationnel. Nous avons en effet :

$$\text{rot}(D_\varepsilon^2 \mathbf{u}) = D_\varepsilon^2(\text{rot } \mathbf{u}) - 2M'D_\varepsilon(\partial_x u_x) \quad (2.6)$$

Le caractère cisailé de l'écoulement fait apparaître un nouveau terme dépendant de la dérivée du nombre de Mach (M'). Nous obtenons ainsi une relation vérifiée par ψ^ε

$$D_\varepsilon^2 \psi^\varepsilon = 2M'D_\varepsilon(\partial_x u_x^\varepsilon) + \text{rot } \mathbf{f}. \quad (2.7)$$

Cette équation indique comment les tourbillons ($\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon$) sont transportés par l'écoulement (opérateur de convection D_ε). D'après l'hypothèse initiale sur \mathbf{f} ($\mathbf{f} \in H_{\text{rot}}$), nous avons $\text{rot } \mathbf{f} \in L^2(\Omega)$. De même, $\mathbf{u}^\varepsilon \in V_\Omega$ implique que $\psi^\varepsilon \in L^2(\Omega)$.

En développant (2.7), nous voyons finalement que ψ^ε est solution du problème suivant :

$$\text{Trouver } \psi^\varepsilon \in L^2(\Omega) / (-k_\varepsilon^2 - 2ik_\varepsilon M(y)\partial_x + M(y)^2 \partial_x^2) \psi^\varepsilon = g_\varepsilon \quad (2.8)$$

avec $g_\varepsilon = 2M'D_\varepsilon(\partial_x u_x^\varepsilon) + \text{rot } \mathbf{f}$ et $\mathbf{u}^\varepsilon \in V_\Omega$.

B Résolution de l'équation hydrodynamique

Pour résoudre (2.8), nous allons utiliser le principe de superposition. La solution ψ^ε sera calculée comme la somme de la solution $\psi_f^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ du problème :

$$(-k_\varepsilon^2 - 2ik_\varepsilon M(y)\partial_x + M(y)^2\partial_x^2)\psi_f^\varepsilon = \text{rot } \mathbf{f} \quad (2.9)$$

et de la solution $\psi_u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ du problème :

$$(-k_\varepsilon^2 - 2ik_\varepsilon M(y)\partial_x + M(y)^2\partial_x^2)\psi_u^\varepsilon = 2M'D_\varepsilon(\partial_x u_x^\varepsilon) \quad (2.10)$$

À y fixé les équations (2.9) et (2.10) sont des équations différentielles du second ordre à coefficients constants en x et de paramètre y .

PROPOSITION 1 *Pour tout nombre de Mach $M(y)$ ne s'annulant qu'en des valeurs isolées de y et pour tout $\mathbf{f} \in H_{\text{rot}}$, l'équation (2.9) admet une unique solution ψ_f^ε dans $L^2(\Omega)$ telle que*

$$\psi_f^\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{M(y)^2} \int_{-\infty}^x (x-s) e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \text{rot } \mathbf{f}(s, y) ds & \text{si } y \in Y^+ \\ \frac{-1}{M(y)^2} \int_x^{+\infty} (x-s) e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \text{rot } \mathbf{f}(s, y) ds & \text{si } y \in Y^- \end{cases}$$

où

$$Y^+ = \{y \in [0; h] / M(y) > 0\} \text{ et } Y^- = \{y \in [0; h] / M(y) < 0\}. \quad (2.11)$$

DÉMONSTRATION.

L'équation (2.9) étant linéaire, toute solution est la somme d'une solution de l'équation homogène ($\text{rot } \mathbf{f} = 0$) de la forme $(a(y) + b(y)x)e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}}$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution particulière a été obtenue par convolution d'une fonction de Green avec le second membre $\text{rot } \mathbf{f}$. La fonction de Green choisie est la fonction appartenant à $L^2(\Omega)$ et solution de $(-k_\varepsilon^2 - 2ik_\varepsilon M(y)\partial_x + M(y)^2\partial_x^2)G_\varepsilon = \delta$.

En pratique déterminer cette fonction de Green revient à calculer la fonction de paramètre y de la forme

$$G_\varepsilon(x; y) = \begin{cases} (a_1(y) + b_1(y)x)e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}} & \text{si } x < 0 \\ (a_2(y) + b_2(y)x)e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

appartenant à $L^2(\Omega)$ et vérifiant les conditions de saut en $x = 0$:

$$[G_\varepsilon(0; y)] = 0 \text{ et } [\partial_x G_\varepsilon(0; y)] = \frac{1}{M(y)^2}.$$

Si nous supposons que $y \in Y^+$ (resp. si $y \in Y^-$), pour éviter une croissance exponentielle de G_ε en $-\infty$ (resp. en $+\infty$), il faut que $a_1 \equiv b_1 \equiv 0$ (resp. $a_2 \equiv b_2 \equiv 0$). Par exploitation des conditions de saut, nous obtenons que :

$$G_\varepsilon(x; y) = \frac{x}{M(y)^2} e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}} H(x) \quad \left(\text{resp. } G_\varepsilon(x; y) = -\frac{x}{M(y)^2} e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}} H(-x) \right).$$

Il s'agit de la fonction de Green causale de l'opérateur D_ε^2 .

Par conséquent, toute solution de (2.9) est de la forme :

$$G_\varepsilon \overset{x}{*} \text{rot } \mathbf{f} + (a(y) + b(y)x) e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}}.$$

Commençons par prouver que le terme de convolution appartient à $L^2(\Omega)$. Pour cela nous utilisons le résultat suivant :

LEMME 1 *Pour toutes fonctions $v \in L^1(\mathbb{R})$ et $w \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$v * w \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \|v * w\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^1} \|w\|_{L^2}.$$

Appliquons ce résultat à notre cas. Comme $\mathbf{f} \in H_{rot}$, $\text{rot } \mathbf{f}(\cdot, y) \in L^2(\mathbb{R})$ presque pour tout y . Il est aisément démontrable que $G_\varepsilon(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R})$ pour presque tout y $\left(\int_{\mathbb{R}} |G_\varepsilon(x, y)| dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \right)$. On peut alors appliquer la propriété précédente et obtenir que $\int_{\mathbb{R}} \left| G_\varepsilon \overset{x}{*} \text{rot } \mathbf{f} \right|^2 dx \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \int_{\mathbb{R}} |\text{rot } \mathbf{f}|^2 dx$. Par intégration selon y , nous obtenons que $\left\| G_\varepsilon \overset{x}{*} \text{rot } \mathbf{f} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \|\text{rot } \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$.

Il reste à déterminer les fonctions a et b telles que ψ_f^ε appartienne $L^2(\Omega)$. Or quand x tend vers $-\infty$ (resp. vers ∞), la solution du problème homogène diverge sauf si $a \equiv b \equiv 0$. Ainsi le problème (2.9) a une unique solution dans $L^2(\Omega)$, donnée par $\psi_f^\varepsilon = G_\varepsilon \overset{x}{*} \text{rot } \mathbf{f}$. □

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.

Soient les fonctions $v \in L^1(\mathbb{R})$ et $w \in L^2(\mathbb{R})$. Soit la fonction définie par $g(x) = (v * w)(x) = \int_{\mathbb{R}} v(x - z) w(z) dz$.

$$\begin{aligned} |g(x)|^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |v(x - z)|^{\frac{1}{2}} |v(x - z)|^{\frac{1}{2}} |w(z)| dz \right)^2 \\ &\leq \|v\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |v(x - z)| |w(z)|^2 dz \text{ par l'inégalité de Cauchy Schwartz.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \|v * w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \leq \|v\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^2} (|v(x - z)| |w(z)|^2) dz dx \\ &\leq \|v\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |v(x - z)| dx \right) |w(z)|^2 dz \text{ par Fubini} \\ &\leq \|v\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

□

Remarque 7 *Nous pouvons remarquer que si l'écoulement est uniforme ($M' \equiv 0$), ψ^ε vérifie $D_\varepsilon^2 \psi^\varepsilon = \text{rot } \mathbf{f}$. D'après la formule du théorème 1, ψ^ε est nul à l'amont de la source. Ce résultat est cohérent avec la physique : les tourbillons sont créés par la source et convectés par l'écoulement.*

Puisque la solution du problème (2.9) a été calculée, nous allons maintenant nous intéresser à la résolution du problème (2.10).

PROPOSITION 2 *Pour tout nombre de Mach $M(y)$ ne s'annulant qu'en des valeurs isolées de y et pour tout $\mathbf{u} \in V_\Omega$, l'équation (2.10) admet une unique solution $\psi_u^\varepsilon = A_\varepsilon u_x^\varepsilon$ dans $L^2(\Omega)$ où l'opérateur A_ε est défini par :*

$$A_\varepsilon \mathbf{u}(x, y) = \begin{cases} \frac{2M'(y)}{M(y)} \int_{-\infty}^x e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_x u_x(s, y) ds & \text{si } y \in Y^+ \\ -\frac{2M'(y)}{M(y)} \int_x^{+\infty} e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_x u_x(s, y) ds & \text{si } y \in Y^- \end{cases}$$

De plus cet opérateur est continu de V_Ω dans $L^2(\Omega)$ avec $\|A_\varepsilon \mathbf{u}\|_{L^2} \leq \frac{2\sqrt{\max(M'^2)}}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{V_\Omega}$

DÉMONSTRATION.

Pour résoudre (2.10), nous ne pouvons pas utiliser la proposition 1 puisque le second membre n'appartient pas à $L^2(\Omega)$. Nous pouvons par contre simplifier l'expression de l'équation (2.10) dans $\mathcal{S}'(\Omega)$ ($\psi_u^\varepsilon \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{S}'(\Omega)$). Comme la dérivée de la fonction nombre de Mach M' ne dépend pas de x , nous pouvons écrire (2.10) sous la forme :

$$D_\varepsilon(D_\varepsilon \psi_u^\varepsilon - 2M' \partial_x u_x^\varepsilon) = 0.$$

On en déduit que :

$$D_\varepsilon \psi_u^\varepsilon - 2M' \partial_x u_x^\varepsilon = (-ik_\varepsilon + M \partial_x) \psi_u^\varepsilon - 2M' \partial_x u_x^\varepsilon = a(y) e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}}.$$

ψ_u^ε et $\partial_x u_x^\varepsilon$ sont des distributions tempérées en tant que fonctions de $L^2(\Omega)$. $M(y) \partial_x \psi_u^\varepsilon$ l'est aussi comme dérivée d'une distribution tempérée ψ_u^ε multipliée par une fonction bornée. Le terme de gauche est une distribution tempérée tandis que le terme de droite lui n'appartient pas à $\mathcal{S}'(\Omega)$ car il croît exponentiellement à l'infini. Il ne peut y avoir égalité des termes que si $a \equiv 0$ (la démonstration rigoureuse de $a = 0$ au sens des distributions peut être réalisée en utilisant des fonctions tests glissantes du type $\varphi_n = e^{-(x+n)^2}$)

Ainsi résoudre le problème (2.10) revient à résoudre :

$$\text{Trouver } \psi_u^\varepsilon \in L^2(\Omega) / D_\varepsilon \psi_u^\varepsilon = 2M' \partial_x u_x^\varepsilon.$$

À y fixé, il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant en x .

Une solution particulière de l'équation est obtenue par convolution d'une fonction de Green avec le second membre. La fonction de Green choisie est la fonction appartenant à $L^2(\Omega)$ et solution de $(-ik_\varepsilon + M(y) \partial_x) G_\varepsilon = \delta$.

Nous cherchons la fonction de paramètre y de la forme $G_\varepsilon(x; y) =$

$$\begin{cases} a_1(y) x e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}} & \text{si } x < 0 \\ a_2(y) x e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ appartenant à } L^2(\Omega) \text{ et vérifiant :}$$

$$[G_\varepsilon(0; y)] = \frac{1}{M(y)}.$$

Si $y \in Y^+$ (resp. si $y \in Y^-$) pour éviter que G_ε diverge en $-\infty$ (resp. en $+\infty$), $a_1 \equiv 0$ (resp. $a_2 \equiv 0$). Par la condition de saut, nous obtenons que :

$$G_\varepsilon(x; y) = G_\varepsilon(x; y) = \frac{1}{M(y)} e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}} H(s) \quad \left(\text{resp. } G_\varepsilon(x; y) = -\frac{1}{M(y)} e^{\frac{ik_\varepsilon s}{M(y)}} H(-s) \right).$$

Il s'agit de la fonction de Green causale de l'opérateur D_ε .

Nous en déduisons que la solution de (2.8) est de la forme :

$$2M'(y) G_\varepsilon \ast \partial_x u_x^\varepsilon + a(y) e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}}.$$

Comme le terme de convolution appartient à $L^2(\Omega)$ par la proposition 1 car $\mathbf{u} \in V_\Omega$ et $G_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ $\left(\int_{\mathbb{R}} |G_\varepsilon(x, y)| dx = \frac{1}{\varepsilon} \right)$, pour que ψ_u^ε appartienne à $L^2(\Omega)$, il faut et il suffit que $a \equiv 0$.

En conclusion le problème (2.10) a une unique solution dans $L^2(\Omega)$: $\psi_u^\varepsilon = 2M' G_\varepsilon \ast \partial_x u_x^\varepsilon$. De plus, par le lemme 1, nous pouvons établir à y fixé la majoration suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_u^\varepsilon|^2 dx \leq 4M'^2 \|G_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_x^\varepsilon|^2 dx \leq \frac{4|M'|^2}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_x^\varepsilon|^2 dx.$$

Puis par intégration selon y , nous obtenons

$$\|\psi_u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\sqrt{\max |M'^2|}}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{V_\Omega}.$$

□

Remarque 8 Il est clair que la formule énoncée dans la proposition (2.10) n'est pas définie lorsque M s'annule.

- D'un point de vue théorique,
 - si M s'annule ponctuellement, il s'agit en fait d'un faux problème puisqu'il est suffisant de connaître la formule de la vorticité presque partout pour calculer $\int_\Omega \psi^\varepsilon \operatorname{rot} \mathbf{u}^\varepsilon$,
 - si M s'annule sur un intervalle tel que celui représenté sur la Fig. 2.1, nous savons que la vorticité liée au déplacement $A_\varepsilon \mathbf{u}$ est nulle sur cet intervalle puisque $M' = 0$.

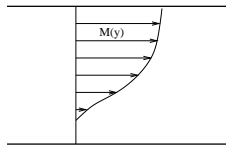


FIG. 2.1 – Exemple d'un profil de vitesses s'annulant sur un intervalle.

- D'un point de vue numérique en revanche, l'évaluation de l'intégrale est très difficile pas seulement aux points où le profil s'annule mais aussi lorsque M prend des valeurs très petites car elle devient très oscillante. Nous établirons dans la suite de ce document une valeur limite à appliquer dans le cas d'écoulements lents.

En conclusion, les propositions 1 et 2 définissent la formule exacte de ψ^ε pour des profils de vitesse s'annulant en un nombre fini de points ce qui est suffisant à la construction du cadre théorique de notre étude.

2.2 Analyse mathématique du problème dissipatif régularisé

Nous allons à présent montrer que résoudre l'équation de Galbrun, régularisée avec la vortacité

$$\psi^\varepsilon = A_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon + \psi_f^\varepsilon$$

où A_ε est l'opérateur défini par la proposition 2 et ψ_f^ε par la proposition 1, constitue un problème bien posé.

En injectant ces expressions dans la formulation faible (2.5), nous obtenons :

$$\forall \mathbf{v} \in V_\Omega, \quad a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + s \int_\Omega (\operatorname{rot} \mathbf{u}^\varepsilon - A_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} = \ell(\mathbf{v}) + s \int_\Omega \psi_f^\varepsilon \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \quad (2.12)$$

où $a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (-k_\varepsilon^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ik_\varepsilon M \partial_x \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \partial_x \mathbf{u} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})$ et $\ell(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}}$. Le but de cette partie est de montrer que ce problème est bien posé puisqu'il est équivalent au problème fort initial (2.1).

2.2.1 Existence et unicité de la solution

Nous allons démontrer que :

THÉORÈME 1 *Le problème (2.12) relève du théorème de Lax-Milgram si ε est assez grand et $s \geq \max_y(M^2)$. Il admet donc une unique solution.*

DÉMONSTRATION.

Si nous notons $\ell_\varepsilon^s(\mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) + s \int_\Omega \psi_f^\varepsilon \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}$. Il est clair par l'inégalité de Cauchy-Schwartz que la forme ℓ_ε^s est continue sur V_Ω . Par l'inégalité du théorème 2, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\left| \int_\Omega A_\varepsilon \mathbf{u} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \right| \leq \frac{2}{\varepsilon} \sqrt{\max(M^2)} \|\mathbf{u}\|_{V_\Omega} \|\mathbf{v}\|_{V_\Omega}.$$

Si nous notons $a_\varepsilon^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + s \int_\Omega (\operatorname{rot} \mathbf{u} - A_\varepsilon \mathbf{u}) \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}$, nous déduisons facilement de l'inégalité précédente la continuité de a_ε^s sur $V_\Omega \times V_\Omega$.

Le point délicat de la preuve est l'étude de la coercivité de la forme bilinéaire. Par analogie avec le cas non régularisé, nous étudierons la partie imaginaire de la forme sesquilinéaire multipliée par $\frac{1}{k_\varepsilon}$. D'après notre étude préliminaire, nous savons que

$$\Im \left(-\frac{1}{k_\varepsilon} \left(a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + s \int_\Omega |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 \right) \right) \geq \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2} \left((1 - s_0) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + (s - s_0) |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 \right) + \varepsilon |\mathbf{u}|^2 \right)$$

où $s_0 = \max(M^2)$.

Il ne reste plus qu'à minorer le terme $\Im \left(\int_\Omega \frac{s}{k_\varepsilon} A_\varepsilon \mathbf{u} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} \right)$. Pour cela nous utilisons l'inégalité établie dans le théorème 2 : $\|A_\varepsilon \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\sqrt{s_1}}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{V_\Omega}$ où $s_1 = \max(M^2)$.

Ainsi par l'inégalité de Young, nous obtenons la minoration suivante : $\forall \eta > 0$,

$$\begin{aligned} \Im \left(\int_{\Omega} \frac{s}{k_{\varepsilon}} A_{\varepsilon} \mathbf{u} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}} \right) &\geq -\frac{s}{2|k_{\varepsilon}|} \left(\eta \int_{\Omega} |A_{\varepsilon} \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}}|^2 \right) \\ &\geq -\frac{2s s_1 \eta}{\varepsilon^2 |k_{\varepsilon}|} \|\mathbf{u}\|_{V_{\Omega}}^2 - \frac{s}{2|k_{\varepsilon}| \eta} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}}|^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons en utilisant de nouveau l'inégalité de Costabel (2.4) que :

$$\begin{aligned} |a_{\varepsilon}^s(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\geq \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon(1-s_0)}{|k_{\varepsilon}|} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + \left(\frac{\varepsilon(s-s_0)}{|k_{\varepsilon}|} - \frac{s}{2\eta} \right) |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + \varepsilon |k_{\varepsilon}| |\mathbf{u}|^2 \right) - \frac{2s s_1 \eta}{\varepsilon^2} \|\mathbf{u}\|_{V_{\Omega}}^2 \\ &\geq \left(\sigma_{\eta}(\varepsilon) - \frac{2s s_1 \eta}{\varepsilon^2} \right) \|\mathbf{u}\|_{V_{\Omega}}^2 \quad \text{où } \sigma_{\eta}(\varepsilon) = \min \left(\frac{\varepsilon(1-s_0)}{|k_{\varepsilon}|}, \frac{\varepsilon(s-s_0)}{|k_{\varepsilon}|} - \frac{s}{2\eta}, \varepsilon |k_{\varepsilon}| \right) \end{aligned}$$

La coercivité sur V_{Ω} de la forme a_{ε}^s est établie si

$$\sigma_{\eta}(\varepsilon) > \frac{2s s_1 \eta}{\varepsilon^2}. \quad (2.13)$$

En première approximation, nous remarquons que si le paramètre ε tend vers zéro, cette condition n'est jamais vérifiée car

$$\sigma_{\eta} \underset{0}{\sim} \min \left(\frac{\varepsilon(1-s_0)}{k}, \frac{\varepsilon(s-s_0)}{k} - \frac{s}{2\eta}; k\varepsilon \right) = -\frac{s}{2\eta}.$$

En revanche le comportement de σ_{η} dans les milieux très dissipatifs est :

$$\sigma_{\eta} \underset{\infty}{\sim} \sigma_{\eta} - \frac{2s s_1 \eta}{\varepsilon^2} \underset{\infty}{\sim} \min \left(1-s_0; s-s_0 - \frac{s}{2\eta}; \varepsilon^2 \right) = \sigma_{\infty}.$$

Si on choisit η assez grand tel que $s \left(1 - \frac{1}{2\eta} \right) > s_0$, on a $\sigma_{\infty} > 0$. Autrement dit, la condition (2.13) est bien vérifiée pour ε assez grand et $s > s_0$. La coercivité de la forme a_{ε}^s sur V_{Ω} est alors assurée. □

Remarque 9 *Ce résultat est cohérent avec la physique. En effet, en présence d'écoulement cisailé, des instabilités peuvent apparaître. Deux types d'instabilités sont à distinguer : les instabilités absolues et les instabilités convectives. Les premières sont incompatibles avec l'hypothèse de régime périodique établi. Les secondes se traduisent par un comportement exponentiellement croissant de \mathbf{u} à l'infini (cf. [Nil98]). Or l'ajout de dissipation ($\varepsilon \neq 0$) a pour fonction de rendre toutes les ondes évanescentes (y compris les ondes instables). Il est connu que dans le cas uniforme, aucune instabilité n'est générée. Le champ acoustique reste borné et donc peu de dissipation est nécessaire : le problème dissipatif associé est bien posé quelle que soit la quantité de dissipation mise en jeu. En écoulement cisailé, la présence éventuelle d'onde à croissance exponentielle nécessite un apport plus important de dissipation pour rendre l'onde évanescence, ce qui est en accord avec la condition "ε suffisamment grand" du théorème 1.*

2.2.2 Equivalence

Nous cherchons maintenant à montrer que la solution du problème faible régularisé (2.12) est aussi la solution du problème fort initial (2.1).

Le point délicat de la démonstration réside dans le fait que la relation $\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon = A_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon + \psi_f^\varepsilon$ liant la vorticité $\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon$ au déplacement \mathbf{u}^ε a été établie pour la solution \mathbf{u}^ε du problème fort (2.1). La difficulté va être de démontrer que cette égalité reste valable pour la solution du problème faible r egularis e.

A La solution de (2.12) vérifie $\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon = \psi^\varepsilon$ sur Ω .

Nous désirons démontrer dans cette section le théorème suivant :

THÉORÈME 2 *La solution \mathbf{u}^ε du problème (2.12) vérifie $\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon = A_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon + \psi_f^\varepsilon$ dans $L^2(\Omega)$*

Au préalable fixons quelques notations. Nous noterons $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ tel que $(\varphi, \psi)_{L^2} = \int_\Omega \varphi \bar{\psi}$. Par abus de notation, nous noterons de la même façon le produit scalaire de $L^2(\Omega)^2$. Exposons maintenant les différentes étapes de la démonstration.

Soit $\mathbf{u}^\varepsilon \in V_\Omega$ la solution du problème (2.12). Nous choisissons une fonction test $\mathbf{v} = \mathbf{rot } \varphi$ où $\varphi \in W = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pour que $\mathbf{v} \in V_\Omega$ (car ainsi $v_y = -\partial_x \varphi = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$). Nous montrons successivement que : $\forall \mathbf{u} \in V_\Omega, \forall \varphi \in W$ et $\forall \mathbf{f} \in H_{\text{rot}}$

1. $a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{rot } \varphi) = \left(\text{rot } \mathbf{u} - A_\varepsilon \mathbf{u}, (D_\varepsilon^*)^2 \varphi \right)_{L^2}$ où $D_\varepsilon^* = -i\bar{k}_\varepsilon + M\partial_x$
2. $(\mathbf{f}, \mathbf{rot } \varphi)_{L^2} = \left(\psi_f^\varepsilon, (D_\varepsilon^*)^2 \varphi \right)_{L^2}$

Si nous admettons temporairement ces résultats et remarquons que $\text{rot } \mathbf{rot } \varphi = -\Delta\varphi$, nous obtenons aisément la relation d'orthogonalité suivante :

$$\left(\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon - A_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon - \psi_f^\varepsilon, H^* \varphi \right)_{L^2} = 0 \quad \forall \varphi \in W$$

où $H^* = (D_\varepsilon^*)^2 - s\Delta$. Enfin nous montrons que $H^* \varphi$ parcourt tout $L^2(\Omega)$ lorsque φ parcourt W ce qui implique que $\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon = A_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon + \psi_f^\varepsilon$ dans $L^2(\Omega)$. Nous allons maintenant développer les trois étapes techniques que nous venons de mentionner :

PROPOSITION 3 $\forall \mathbf{u} \in V_\Omega$ et $\forall \varphi \in W$, $a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{rot } \varphi) = \left(\text{rot } \mathbf{u} - A_\varepsilon \mathbf{u}, (D_\varepsilon^*)^2 \varphi \right)_{L^2}$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.

Nous commençons par établir l'identité pour des fonctions \mathbf{u} assez régulières.

Soient $\mathbf{u} \in H^3(\Omega)^2 \cap V_\Omega$. Pour rappel, la forme a_ε est définie à partir de $a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (D_\varepsilon^2 \mathbf{u} - \nabla \text{div } \mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2}$. Pour $\mathbf{v} = \mathbf{rot } \varphi$ où $\varphi \in W$, nous obtenons par conséquent la relation suivante :

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{rot } \varphi) = (D_\varepsilon^2 \mathbf{u}, \mathbf{rot } \varphi)_{L^2}$$

et comme $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, une intégration par parties conduit à :

$$(D_\varepsilon^2 \mathbf{u}, \mathbf{rot } \varphi)_{L^2} = \left(\text{rot } (D_\varepsilon^2 \mathbf{u}), \varphi \right)_{L^2}$$

Puisque $\text{rot} (D_\varepsilon^2 \mathbf{u}) = D_\varepsilon^2 (\text{rot} \mathbf{u}) - 2M'D_\varepsilon (\partial_x u_x)$ (cf. 2.6) et que par construction $D_\varepsilon^2 A_\varepsilon \mathbf{u} = 2M'D_\varepsilon (\partial_x u_x)$ (cf. théorème 2), nous en déduisons l'égalité suivante :

$$(\text{rot} (D_\varepsilon^2 \mathbf{u}), \varphi)_{L^2} = (D_\varepsilon^2 (\text{rot} \mathbf{u} - A_\varepsilon \mathbf{u}), \varphi)_{L^2}$$

Si nous posons temporairement $\psi = \text{rot} \mathbf{u} - A_\varepsilon \mathbf{u}$, nous obtenons par deux intégrations par parties que :

$$(D_\varepsilon^2 \psi, \varphi)_{L^2} = (\psi, (D_\varepsilon^*)^2 \varphi)_{L^2} + \int_{\partial\Omega} (2ik_\varepsilon M \psi \bar{\varphi} + M^2 \partial_x \psi \bar{\varphi} - M^2 \psi \partial_x \bar{\varphi}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x). \quad (2.14)$$

Le terme de bord est nul puisque $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x = 0$.

$$(D_\varepsilon^2 (\text{rot} \mathbf{u} - A_\varepsilon \mathbf{u}), \varphi)_{L^2} = ((\text{rot} \mathbf{u} - A_\varepsilon \mathbf{u}), (D_\varepsilon^*)^2 \varphi)_{L^2}.$$

Par densité de $H^3(\Omega)^2 \cap V_\Omega$ dans V_Ω , ce résultat reste valable pour toute fonction \mathbf{u} appartenant à V_Ω . □

PROPOSITION 4 $\forall \mathbf{f} \in H_{\text{rot}}$ et $\forall \varphi \in W$, $(\mathbf{f}, \text{rot} \varphi)_{L^2} = (\psi_f^\varepsilon, (D_\varepsilon^*)^2 \varphi)$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.

Soient $\mathbf{f} \in H_{\text{rot}}$ et $\varphi \in W$. Par intégrations par parties sur le terme source, nous obtenons :

$$(\mathbf{f}, \text{rot} \varphi)_{L^2} = (\text{rot} \mathbf{f}, \varphi)_{L^2} + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{f} \wedge \mathbf{n}) \varphi \text{ avec } \int_{\partial\Omega} (\mathbf{f} \wedge \mathbf{n}) \varphi = 0 \text{ puisque } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Or par construction, comme $D_\varepsilon^2 \psi_f^\varepsilon = \text{rot} \mathbf{f}$, nous obtenons $(\mathbf{f}, \text{rot} \varphi)_{L^2} = (D_\varepsilon^2 \psi_f^\varepsilon, \varphi)_{L^2}$. Enfin, par la formule (2.14) appliquée à $\psi = \psi_f^\varepsilon$, nous obtenons le résultat voulu. □

THÉORÈME 3 *L'opérateur H^* de W dans $L^2(\Omega)$ est surjectif.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.

Nous voulons démontrer que

$$\forall g \in L^2(\Omega), \exists \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) / H^* \varphi = g \quad (2.15)$$

Commençons d'abord par résoudre ce problème de manière faible. Le problème variationnel associé est :

$$\text{Trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega) / \forall \chi \in H_0^1(\Omega), \quad h(\varphi, \chi) = \ell(\chi)$$

avec $h(\varphi, \chi) = \int_\Omega \left(-\bar{k}_\varepsilon^2 \varphi \bar{\chi} - 2i\bar{k}_\varepsilon M \partial_x \varphi \bar{\chi} - M^2 \partial_x \varphi \partial_x \bar{\chi} + s \nabla \varphi \nabla \bar{\chi} \right)$ et $\ell(\chi) = \int_\Omega g \bar{\chi}$.

L'existence et l'unicité d'une solution faible est assurée par le théorème de Lax-Milgram. La continuité de la forme anti-linéaire ℓ ainsi que de la forme sesquilinéaire h sont aisément

démonstrables. Le caractère coercif de h sur $H_0^1(\Omega)$ est assuré par la minoration suivante de $\frac{1}{k_\varepsilon}h(\varphi, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \Im \left(\frac{1}{k_\varepsilon}h(\varphi, \varphi) \right) &\geq \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2} \left(s |\nabla \varphi|^2 - M^2 |\partial_x \varphi|^2 \right) + \varepsilon |\varphi|^2 \\ &\geq \min \left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2} (s - s_0), \varepsilon \right) \|\varphi\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

où $s_0 = \max_y (M^2)$. Si $s > s_0$, $\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2}(1 - s_0)$ et ε sont deux constantes positives. On en conclut que

$$\exists ! \varphi \in H_0^1(\Omega) / \forall \chi \in H_0^1(\Omega), h(\varphi, \chi) = \ell(\chi)$$

Montrons maintenant que cette solution est aussi solution du problème fort (2.15). Il est clair que

$$H^* \varphi = \mathbf{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $-\overline{k_\varepsilon}^2 \varphi - 2i\overline{k_\varepsilon} M \partial_x \varphi \in L^2(\Omega)$. Par hypothèse f appartient lui aussi à $L^2(\Omega)$. Par conséquent $(M^2 \partial_x^2 - s\Delta)\varphi \in L^2(\Omega)$ i.e.

$$\varphi \in \Upsilon = \{ \varphi \in H_0^1(\Omega) / (M^2 \partial_x^2 - s\Delta)\varphi \in L^2(\Omega) \}.$$

Or comme Ω est un domaine régulier, $\Upsilon = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ [Bré83]. Nous pouvons en conclure la surjectivité (et même la bijectivité) de l'opérateur H^* . L'image de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ par l'opérateur H^* est exactement $L^2(\Omega)$. □

Remarque 10 Il est à noter qu'en présence d'un domaine à coins rentrants (en présence d'une plaque plane dans le conduit comme dans les travaux de [BDLP02] par exemple), la formulation régularisée reste mathématiquement bien posée. En revanche, elle n'est plus équivalente au problème initial car Υ n'est plus égal à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Cela signifie que la solution du problème régularisé n'est pas associée à la "bonne" vorticité.

B La solution du problème (2.12) est solution du problème (2.1).

Nous souhaitons dans cette partie prouver le résultat suivant :

THÉORÈME 4 La solution du problème faible régularisé (2.12) est solution du problème fort initial (2.1).

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathbf{u}^\varepsilon \in V_\Omega$ la solution de (2.12). La condition aux bords $\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Σ est v rifi e puisque $\mathbf{u}^\varepsilon \in V_\Omega$.

Soit $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ une fonction test. Puisque $\text{rot } \mathbf{u}^\varepsilon = A_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon + \psi_f^\varepsilon$ sur Ω (théorème 2), \mathbf{u}^ε vérifie $a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\eta}) = \ell_\varepsilon(\boldsymbol{\eta})$.

La fonction $\boldsymbol{\eta}$ étant à support compact, les formes a_ε et ℓ_ε peuvent être écrites au moyen des crochets de dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)^2$ et son dual $\mathcal{D}'(\Omega)^2$ que nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle -k_\varepsilon^2 \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} \rangle + \langle 2ik_\varepsilon M \partial_x \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} \rangle - \langle M^2 \partial_x \mathbf{u}, \partial_x \boldsymbol{\eta} \rangle + \langle \text{div } \mathbf{u}, \text{div } \boldsymbol{\eta} \rangle.$$

Par définition de la dérivation au sens des distributions, nous obtenons :

$$\langle (-k_\varepsilon^2 + 2ik_\varepsilon M \partial_x + M^2 \partial_x^2 - \nabla \operatorname{div}) \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle.$$

c'est-à-dire $(-k_\varepsilon^2 + 2ik_\varepsilon M \partial_x + M^2 \partial_x^2 - \nabla \operatorname{div}) \mathbf{u} = \mathbf{f}$ dans \mathcal{D}'^2 .

□

Remarque 11 *Usuellement, une fois la solution du problème dissipatif trouvée, on cherche à démontrer que la suite des solutions des problèmes dissipatifs de paramètre ε converge dans $H_{loc}^1(\Omega)^2$ quand ε tend vers zéro. La limite obtenue est appelée solution sortante. Legendre [Leg03] a montré que \mathbf{u}^ε converge dans $H_{loc}^1(\Omega)^2$ en présence d'un écoulement uniforme ($M' = 0$). En revanche en présence d'un écoulement cisailé, comme nous ne savons montrer que le problème est bien posé que pour ε suffisamment grand, on ne parvient pas à définir la solution sortante à partir du problème dissipatif.*

Nous avons montré qu'en régularisant le problème dissipatif, on construit un problème bien posé. Comme nous l'avons déjà mentionné, la formule ainsi obtenue nécessite l'évaluation numérique d'une intégrale très oscillante dès que le nombre de Mach tend vers zéro. L'objectif de la prochaine section est le développement d'un modèle approché adapté à une résolution numérique pour les écoulement à faible Mach.

2.3 Le problème dissipatif approché à faible Mach

Dans cette section, nous considérons une famille d'écoulement du type $M(y) = \mathbb{M} m(y)$ où \mathbb{M} est une constante telle que $0 \leq \mathbb{M} < 1$ et $m(y)$ est une fonction appartenant à $C^2([0; h])$ telle que $\max_{0 \leq y \leq h} |m(y)| < 1$. Nous supposons de plus que les paramètres ε et s sont fixés et nous notons désormais $\mathbf{u}_\mathbb{M}$ et $A_\mathbb{M}$ (et non plus \mathbf{u}^ε et A_ε) respectivement la solution de (2.12) et l'opérateur hydrodynamique défini dans la proposition 2. Pour simplifier la présentation,

nous ne traitons que le cas d'une source irrotationnelle ($\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$).

Nous cherchons dans cette section une approximation $\tilde{\mathbf{u}}_\mathbb{M}$ de la solution $\mathbf{u}_\mathbb{M}$ à faible Mach ($\mathbb{M} \rightarrow 0$) telle que le calcul de $\tilde{\mathbf{u}}_\mathbb{M}$ ne nécessite pas l'évaluation d'une intégrale oscillante. Nous pourrions choisir $\tilde{\mathbf{u}}_\mathbb{M} = \mathbf{u}_0$ où \mathbf{u}_0 est la solution pour $M = 0$. Nous allons prouver que l'erreur alors commise est de l'ordre de \mathbb{M} . Nous montrerons qu'une meilleure approximation est obtenue en négligeant la convection lors de la résolution de l'équation hydrodynamique. Nous prouverons que l'erreur est alors de l'ordre de \mathbb{M}^2 .

2.3.1 Existence et unicité de la solution exacte

Commençons par montrer que pour \mathbb{M} assez petit, le problème (2.12) est bien posé (nous avons précédemment montré, qu'à \mathbb{M} fixé, ce problème est bien posé pour ε assez grand).

THÉORÈME 5 *Pour \mathbb{M} assez petit, le problème (2.12) est bien posé et admet une unique solution.*

DÉMONSTRATION.

D'après la démonstration du théorème 1, le problème (2.12) est bien posé s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\sigma_M = \min \left(\frac{\varepsilon(1 - M^2 \mathbf{s}_0)}{|k_\varepsilon|}; \frac{\varepsilon(s - M^2 \mathbf{s}_0)}{|k_\varepsilon|} - \frac{s}{2\eta}; \varepsilon |k_\varepsilon| \right) - M^2 \frac{2s \mathbf{s}_1 \eta}{\varepsilon^2} > 0$$

où $\mathbf{s}_0 = \max_y (m(y)^2)$ et $\mathbf{s}_1 = \max_y (m'(y)^2)$.

Or pour M suffisamment petit,

$$\sigma_M \underset{0}{\sim} \min \left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|}; \frac{\varepsilon s}{|k_\varepsilon|} - \frac{s}{2\eta}; \varepsilon |k_\varepsilon| \right).$$

Ainsi si on choisit $\eta > \frac{|k_\varepsilon|}{2\varepsilon}$, le problème est bien posé pour M suffisamment petit. □

2.3.2 Convergence vers le cas sans écoulement

Nous allons tout d'abord montrer que $\mathbf{u}_M \xrightarrow{M \rightarrow 0} \mathbf{u}_0$ où \mathbf{u}_0 est la solution du problème sans écoulement. Notons que ce résultat n'est pas aussi évident qu'il n'y paraît, à cause des termes en $\frac{1}{M}$ dans l'expression de la vorticité.

A Le modèle sans écoulement

Lorsque $M = 0$, on note \mathbf{u}_0 la solution (2.12). Dans ce cas précis, la vorticité ψ^ε est nulle ($M' = 0 = \text{rot } \mathbf{f}$), le problème régularisé variationnel est :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_0 \in V_\Omega \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_\Omega \quad a_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad (2.16)$$

où $a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \text{div } \mathbf{u} \text{ div } \bar{\mathbf{v}} + s \text{rot } \mathbf{u} \text{rot } \bar{\mathbf{v}} - k_\varepsilon^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ et $\ell(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}}$.

LEMME 2 *Le problème (2.16) relève du théorème de Lax-Milgram et admet donc une unique solution.*

DÉMONSTRATION.

Le problème (2.16) est un cas particulier du problème (2.12) dont on a démontré le caractère bien posé par le théorème 1. On en déduit que le problème (2.16) relève du théorème de Lax-Milgram sans aucune condition sur s puisque $s_0 = 0$. □

COROLLAIRE 1 *La solution \mathbf{u}_0 du problème (2.16) appartient à $H^2(\Omega)^2$.*

Ce résultat sera nécessaire pour établir l'estimation de l'écart entre \mathbf{u}_M et $\tilde{\mathbf{u}}_M$.

DÉMONSTRATION.

Soit $\boldsymbol{\eta}$ une fonction test. Comme $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \subset V_\Omega$, $\boldsymbol{\eta}$ vérifie $a_0(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}) = \ell(\boldsymbol{\eta})$. Puisque

la fonction $\boldsymbol{\eta}$ est à support compact et puisque $\text{rot } \mathbf{u}_0 = 0$, $\boldsymbol{\eta}$ vérifie : $\langle -k_\varepsilon^2 \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta} \rangle + \langle \text{div } \mathbf{u}_0, \text{div } \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle$. Par dérivation au sens des distributions, nous obtenons l'égalité suivante :

$$-k_\varepsilon^2 \mathbf{u}_0 - \nabla \text{div } \mathbf{u}_0 = \mathbf{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)^2$$

Comme $-k_\varepsilon^2 \mathbf{u}_0$ et \mathbf{f} appartiennent à $L^2(\Omega)^2$, nous en déduisons que $\nabla \text{div } \mathbf{u}_0$ appartient à $L^2(\Omega)^2$. Comme $\text{rot } \mathbf{u}_0 = 0$, nous avons même $\Delta \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^2$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} u_{0x} &\in \{ \varphi \in H^1(\Omega) / \Delta \varphi \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_y \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} \\ \text{et } u_{0y} &\in \{ \varphi \in H_0^1(\Omega) / \Delta \varphi \in L^2(\Omega) \}. \end{aligned}$$

Or on sait qu'en domaine régulier [Bré83],

$$\begin{aligned} \{ \varphi \in H^1(\Omega) / \Delta \varphi \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_y \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} &= H^2(\Omega) \\ \text{et } \{ \varphi \in H_0^1(\Omega) / \Delta \varphi \in L^2(\Omega) \} &= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

□

B Qualité de l'approximation sans écoulement

Nous désirons dans cette sous-section montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 6 Soient \mathbf{u}_0 et \mathbf{u}_M les solutions respectives de (2.16) et (2.12). Il existe une constante $C \in \mathbb{R}^{+*}$, indépendante de M , telle que

$$\|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega} \leq CM.$$

DÉMONSTRATION.

Rappelons au préalable la relation suivante :

$$a_M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_\Omega (M^2(y) \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} + 2ik_\varepsilon M(y) \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}}) \quad (2.17)$$

La solution \mathbf{u}_M du modèle régularisé exact vérifie

$$\forall \mathbf{v} \in V_\Omega, \quad a_M(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}) - s \int_\Omega A_M \mathbf{u}_M \text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \ell(\mathbf{v}) \quad (2.18)$$

où A_M est l'opérateur défini par le théorème 2 et vérifie $\|A_M \mathbf{u}\|_{L^2} \leq \frac{2M \sqrt{\max(m^2)}}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_{V_\Omega}$.

Calculons maintenant l'erreur commise par cette approximation. Pour estimer la quantité $\|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega}$, nous allons encadrer $|a_0(\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0)|$. La minoration sera obtenue grâce au caractère coercif de a_0 . Par l'étude du caractère bien posé du problème sans écoulement menée en **A**, nous savons que :

$$|a_0(\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0)| \geq C_0^c \|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega}^2 \quad (2.19)$$

où $C_0^c = \min\left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|}; \frac{s\varepsilon}{|k_\varepsilon|}; \varepsilon |k_\varepsilon|\right)$. Pour la majoration de $|a_0(\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0)|$, nous commençons par majorer la quantité $|a_0(\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0, \mathbf{v})| = |a_0(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}) - a_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{v})|$ pour tout \mathbf{v} de V_Ω .

Puisque par la relation (2.17) $a_0(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}) = a_M(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}) + \int_{\Omega} (M^2(y)\partial_x \mathbf{u}_M \partial_x \bar{\mathbf{v}} + 2ik_{\varepsilon} M(y)\partial_x \mathbf{u}_M \bar{\mathbf{v}})$ et que $a_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v})$ (2.16) et $a_M(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v})$ (2.18), nous obtenons

$$a_0(\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (M^2(y)\partial_x \mathbf{u}_M \partial_x \bar{\mathbf{v}} + 2ik_{\varepsilon} M(y)\partial_x \mathbf{u}_M \bar{\mathbf{v}} + sA_M \mathbf{u}_M \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons la majoration suivante :

$$|a_0(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_M, \mathbf{v})| \leq M \left(M \max_y(m^2) + 2|k_{\varepsilon}| \max_y(|m|) \right) \|\mathbf{u}_M\|_{V_{\Omega}} \|\mathbf{v}\|_{V_{\Omega}} + s \|A_M \mathbf{u}_M\|_{L^2} \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{L^2}$$

De plus si l'on utilise la majoration de la proposition 2 ainsi que $M < 1$, nous obtenons :

$$|a_0(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_M, \mathbf{v})| \leq M C_0 \|\mathbf{u}_M\|_{V_{\Omega}} \|\mathbf{v}\|_{V_{\Omega}} \quad \text{où } C_0 = \left(\max(m^2) + 2|k_{\varepsilon}| \max(|m|) + \frac{2s\sqrt{\max(m^2)}}{\varepsilon} \right). \quad (2.20)$$

En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_M$ et en utilisant la minoration (2.19) et la majoration (2.20), nous établissons la relation suivante :

$$C_0^c \|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_{\Omega}} \leq M C_0 \|\mathbf{u}_M\|_{V_{\Omega}}.$$

Puisque C_0^c est non nul si $\varepsilon \neq 0$, $\|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_{\Omega}} \leq \frac{M C_0}{C_0^c} \|\mathbf{u}_M\|_{V_{\Omega}}$. Pour conclure, nous utilisons la propriété suivante démontrée plus loin :

LEMME 3 *La solution \mathbf{u}_M du problème (2.18) est bornée dans V_{Ω} .*

Par cette propriété, nous justifions que \mathbf{u}_M converge vers \mathbf{u}_0 dans $H^1(\Omega)$ pour M petit avec une vitesse de convergence au moins en M ($\frac{C_0}{C_0^c}$ est indépendant de M).

□

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.

Pour démontrer ce lemme, nous allons majorer et minorer $|a_M(\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_M)|$. La constante de minoration sera obtenue grâce au caractère coercif de a_M . Après étude, nous obtenons la minoration suivante :

$$\mathfrak{S} \left(\frac{-1}{k_{\varepsilon}} a_M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right) \geq \min \left(\frac{\varepsilon(1 - M^2 \mathbf{s}_0)}{|k_{\varepsilon}|^2}; \frac{\varepsilon(s - M^2 \mathbf{s}_0)}{|k_{\varepsilon}|^2} \right) \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2$$

où $\mathbf{s}_0 = \max_y(m(y)^2)$. On en conclut que :

$$|a_M(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq |k_{\varepsilon}| \mathfrak{S} \left(\frac{-1}{k_{\varepsilon}} a_M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right) \geq C_M^c \|\mathbf{u}\|_{V_{\Omega}}^2$$

avec $C_M^c = \min \left(\frac{\varepsilon(1 - M^2 \mathbf{s}_0)}{|k_{\varepsilon}|}; \frac{\varepsilon(s - M^2 \mathbf{s}_0)}{|k_{\varepsilon}|}; \varepsilon |k_{\varepsilon}| \right)$.

Maintenant que la minoration de $a_M(\mathbf{u}_M; \mathbf{u}_M)$ est établie, nous allons étudier la majoration de ce terme. Puisque \mathbf{u}_M vérifie $a_M(\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_M) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \bar{\mathbf{u}}_M + s \int_{\Omega} A_M \mathbf{u}_M \operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}}_M$,

$$\begin{aligned} |a_M(\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_M)| &\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2} \|\mathbf{u}_M\|_{V_{\Omega}} + \|A_M \mathbf{u}_M\|_{L^2} \|\mathbf{u}_M\|_{V_{\Omega}} \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2} \|\mathbf{u}_M\|_{V_{\Omega}} + \frac{2M\sqrt{\max(m^2)}}{\varepsilon} \|\mathbf{u}_M\|_{V_{\Omega}}^2 \end{aligned}$$

De l'encadrement de $|a_M(\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_M)|$ obtenu, nous pouvons déduire la relation suivante :

$$\left(\sqrt{C_M^c} - \frac{2M \sqrt{\max(m'^2)}}{\varepsilon} \right) \|\mathbf{u}_M\|_{V_\Omega} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2}$$

Pour M faible,

$$\sqrt{C_M^c} - \frac{2M \sqrt{\max(m'^2)}}{\varepsilon} \underset{0}{\sim} \sqrt{C_M^c} \underset{0}{\sim} \min \left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|}; \frac{\varepsilon s}{|k_\varepsilon|}; \varepsilon |k_\varepsilon| \right) = C_0^c$$

Puisque $C_0^c < +\infty$, \mathbf{u}_M est borné dans V_Ω pour M suffisamment petit. □

2.3.3 Construction du modèle approché

A Calcul approché de la vorticité

Dans cette partie nous proposons une formule approchée pour remplacer $A_M \mathbf{u}_M$ quand M est petit. Lorsque M tend vers zéro, la solution $A_M \mathbf{u}$ du problème (2.7) défini dans la proposition 2 peut être réduite en l'approximation faible Mach $\tilde{A}_M \mathbf{u}$ suivante :

$$\tilde{A}_M \mathbf{u} = \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \partial_x u_x(x, y). \quad (2.21)$$

Pour établir cette formule, nous supposons que la composante u_x appartient à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ pour pouvoir être dérivée autant que nécessaire.

Après intégration par parties de la formule de $A_\varepsilon \mathbf{u}$ obtenue par la proposition 2, nous obtenons : si $y \in Y^+$,

$$\begin{aligned} A_M \mathbf{u}(x, y) &= \frac{2M'(y)}{M(y)} \left[\frac{iM}{k_\varepsilon} e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_x u_x(s, y) \right]_x - \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_s (\partial_s u_x(s, y)) ds \\ &= \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \partial_x u_x(x, y) - \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_s (\partial_s u_x(s, y)) ds \end{aligned}$$

et si $y \in Y^-$,

$$A_M \mathbf{u}(x, y) = \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \partial_x u_x(x, y) + \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \int_x^{+\infty} e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_s^2 u_x(s, y) ds$$

De ces formules valables sur $Y^+ \cup Y^-$, nous déduisons l'approximation suivante de $A_M \mathbf{u}$:

$$\tilde{A}_M \mathbf{u} = \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \partial_x u_x(x, y).$$

Cette approximation consiste à conserver le premier terme du développement en supposant que le terme intégral est négligeable face à ce premier terme. Ne connaissant pas la régularité de $\partial_x^2 u_x$, nous ne pouvons montrer a priori que le reste intégral tend vers zéro quand M devient faible. Nous justifierons cependant la pertinence de cette approximation lors de l'estimation d'erreur.

Remarque 12 Ces résultats peuvent être retrouvés en remplaçant $D_\varepsilon = -ik_\varepsilon + M\partial_x$ par $-ik_\varepsilon$ pour M petit ce qui revient à négliger la convection lors de la résolution de l'équation hydrodynamique.

Puisque les valeurs approchées de la vorticité (2.21) ont été établies, nous allons les réinjecter dans la formulation faible r gularis e (2.5). Dans le cas d'une source irrotationnelle, le problème régularisé approché est :

$$\text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_M \in V_\Omega \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_\Omega \quad a_M(\tilde{\mathbf{u}}_M, \mathbf{v}) - s \int_\Omega \tilde{A}_M \tilde{\mathbf{u}}_M \text{ rot } \bar{\mathbf{v}} = \ell(\mathbf{v}) \quad (2.22)$$

Avant de montrer la pertinence de ce problème, nous montrons que celui-ci est bien posé grâce au théorème de Lax-Milgram.

Remarque 13 Dans le cas d'une source rotationnelle, nous pourrions adopter la même démarche pour étudier le terme de la vorticité dépendant de la source \mathbf{f} et définie dans la proposition 1. Nous noterons désormais cette quantité ψ_f^M (et non plus ψ_f^ε).

Après avoir remarqué que la primitive de $(x - s)e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}}$ est $-\left(\frac{M(y)^2}{k_\varepsilon^2} - \frac{iM(y)}{k_\varepsilon}(x-s)\right)e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}}$, nous obtenons la formule suivante sur l'ensemble Y^+ défini par (2.11) :

$$\psi_f^M(x, y) = \frac{-1}{k_\varepsilon^2} \text{rot } \mathbf{f}(x, y) + \frac{2iM}{k_\varepsilon^3} \partial_x \text{rot } \mathbf{f}(x, y) - \int_{-\infty}^x \left(\frac{2iM}{k_\varepsilon^3} + \frac{(x-s)}{k_\varepsilon^2} \right) e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_s^2(\text{rot } \mathbf{f}(s, y)) ds.$$

De même nous obtenons sur Y^- la formule suivante :

$$\psi_f^M(x, y) = \frac{-1}{k_\varepsilon^2} \text{rot } \mathbf{f}(x, y) + \frac{2iM}{k_\varepsilon^3} \partial_x \text{rot } \mathbf{f}(x, y) + \int_x^{+\infty} \left(\frac{2iM}{k_\varepsilon^3} + \frac{(x-s)}{k_\varepsilon^2} \right) e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_s^2(\text{rot } \mathbf{f}(s, y)) ds$$

Nous construisons alors l'approximation $\tilde{\psi}_f^M$ suivante :

$$\tilde{\psi}_f^M(x, y) = \frac{-1}{k_\varepsilon^2} \text{rot } \mathbf{f}(x, y)$$

B Existence et unicité de la solution

Montrons le caractère bien posé du problème (2.22) :

THÉORÈME 7 Pour M assez petit, le problème (2.22) relève du théorème de Lax-Milgram et admet une unique solution.

DÉMONSTRATION.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution de (5) est identique à celle du théorème 1. La seule différence réside dans la minoration de $\mathfrak{S}\left(-\frac{1}{k_\varepsilon}\tilde{A}_M\tilde{\mathbf{u}}_M\right)$. Dans ce but, nous allons utiliser la majoration suivante :

$$\left\| \tilde{A}_M \mathbf{u} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{|k_\varepsilon|} \sqrt{s_1} \|\partial_x u_x\|_{L^2} \quad \text{où } s_1 = \max_y(M'^2) \quad (2.23)$$

Si nous notons $\tilde{a}_M^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - s \int_{\Omega} \tilde{A}_M \mathbf{u} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}$, nous déduisons par une démarche similaire à celle utilisée dans la démonstration du théorème 5 que \tilde{a}_M^s est coercive s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\tilde{\sigma}_M = \min \left(\frac{\varepsilon(1 - M^2 \mathbf{s}_0)}{|k_\varepsilon|}; \frac{\varepsilon(s - M^2 \mathbf{s}_0)}{|k_\varepsilon|} - \frac{s}{2\eta}; \varepsilon |k_\varepsilon| \right) - M^2 \frac{2s \mathbf{s}_1 \eta}{|k_\varepsilon|^2} > 0$$

où $\mathbf{s}_0 = \max_y (m(y)^2)$ et $\mathbf{s}_1 = \max_y (m'(y)^2)$.

Ainsi comme pour le théorème 5 on retrouve que si on choisit $\eta > \frac{|k_\varepsilon|}{2\varepsilon}$, le problème est bien posé pour M suffisamment petit. □

2.3.4 Pertinence du modèle approché

Nous désirons montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 8 *Soient \mathbf{u}_M et $\tilde{\mathbf{u}}_M$ les solutions respectives de (2.12) et (2.22). Il existe une constante $C \in \mathbb{R}^{+*}$, indépendante de M , telle que*

$$\|\mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M\|_{V_\Omega} \leq C M^2.$$

Pour établir ce résultat, nous utilisons l'argument suivant :

LEMME 4 *Soient $\tilde{\mathbf{u}}_M$ la solution du problème approché (2.22) et \mathbf{u}_0 la solution du problème sans écoulement (2.16). Il existe une constante $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{+*}$, indépendante de M , telle que*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega} \leq M \tilde{C} \|\tilde{\mathbf{u}}_M\|_{V_\Omega}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.

La démarche est identique à celle utilisée pour établir la majoration du terme $\|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega}$. La seule différence est que l'opérateur hydrodynamique concerné est \tilde{A}_M et non plus A_M . En utilisant la majoration (2.23), nous obtenons que

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega} \leq M \tilde{C} \|\tilde{\mathbf{u}}_M\|_{V_\Omega}$$

où \tilde{C} est une constante indépendante de M telle que $\tilde{C} = \tilde{C}_0 / C_0^c$ avec

$$\tilde{C}_0 = \left(\max(m^2) + 2 |k_\varepsilon| \max |m| + \frac{2s \sqrt{\max(m'^2)}}{|k_\varepsilon|} \right).$$

La démonstration prouvant le caractère borné de $\tilde{\mathbf{u}}_M$ est la même que celle du lemme 3 où l'opérateur A_M a été remplacé par l'opérateur \tilde{A}_M . □

Démontrons maintenant le théorème 8.

DÉMONSTRATION.

Soient \mathbf{u}_M la solution du modèle régularisé exact et $\tilde{\mathbf{u}}_M$ la solution du modèle régularisé approché qui vérifie

$$\forall \mathbf{v} \in V_\Omega, \quad a_M(\tilde{\mathbf{u}}_M, \mathbf{v}) - s \int_\Omega \tilde{A}_M \tilde{\mathbf{u}}_M \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} = \ell(\mathbf{v}) \quad \text{où } \tilde{A}_M \mathbf{u} = \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \partial_x u_x.$$

Pour estimer $\|\mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M\|_{H^1}$, nous encadrons $|a_M(\mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M, \mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M)|$. La minoration sera assurée par le caractère coercif de a_M . Pour la majoration, nous commençons par majorer pour tout \mathbf{v} , $a_M(\mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M, \mathbf{v}) = \int_\Omega (A_M \mathbf{u}_M - \tilde{A}_M \tilde{\mathbf{u}}_M) \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}$. Pour faciliter la majoration, nous décomposons ce terme

$$\begin{aligned} a_M(\mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \left[(A_M - \tilde{A}_M) \mathbf{u}_0 + A_M (\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0) - \tilde{A}_M (\tilde{\mathbf{u}}_M - \mathbf{u}_0) \right] \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \\ &\leq \left(\left\| (A_M - \tilde{A}_M) \mathbf{u}_0 \right\|_{L^2} + \|A_M (\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0)\|_{L^2} + \left\| \tilde{A}_M (\tilde{\mathbf{u}}_M - \mathbf{u}_0) \right\|_{L^2} \right) \|\mathbf{v}\|_{V_\Omega} \end{aligned}$$

Cette majoration peut être améliorée en utilisant les majorations établies par la proposition 2 et l'inégalité (2.23).

$$\|A_M (\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0)\|_{L^2} + \left\| \tilde{A}_M (\tilde{\mathbf{u}}_M - \mathbf{u}_0) \right\|_{L^2} \leq 2M \sqrt{\max_y(m'^2)} \left(\frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega} + \frac{1}{|k_\varepsilon|} \|\tilde{\mathbf{u}}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega} \right)$$

Lors de l'étude du modèle sans écoulement, nous avons établi que $\|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega} \leq MC \|\mathbf{u}_M\|_{V_\Omega}$ où C est une constante indépendante de M . De même par le lemme 4,

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_M - \mathbf{u}_0\|_{V_\Omega} < M\tilde{C} \|\tilde{\mathbf{u}}_M\|_{V_\Omega}$$

où \tilde{C} est indépendant de M .

Nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\|A_M (\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0)\|_{L^2} + \left\| \tilde{A}_M (\tilde{\mathbf{u}}_M - \mathbf{u}_0) \right\|_{L^2} \leq C_T^\circ M^2$$

où $C_T^\circ = 2\sqrt{\max_y(m'^2)} \left(\frac{C}{\varepsilon} \|\mathbf{u}_M\|_{V_\Omega} + \frac{\tilde{C}}{|k_\varepsilon|} \|\tilde{\mathbf{u}}_M\|_{V_\Omega} \right)$ borné pour M petit.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer une majoration du terme $\left\| (A_M - \tilde{A}_M) \mathbf{u}_0 \right\|_{L^2}$. Puisque d'après le corollaire 1 $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^2$, nous pouvons utiliser les calculs menés pour la détermination de \tilde{A}_M , ce qui implique

$$(A_M - \tilde{A}_M) \mathbf{u}_0(x, y) = \begin{cases} -\frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \int_x^x e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_s^2 u_{0x}(s, y) ds & \text{si } y \in Y^+ \\ \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \int_x^{+\infty} e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_s^2 u_{0x}(s, y) ds & \text{si } y \in Y^- \end{cases}$$

ou encore sous forme de convolution :

$$(A_M - \tilde{A}_M) \mathbf{u}_0(x, y) = \operatorname{signe}(M) \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} G * \partial_x^2 u_{0x} \quad \text{où } G(x, y) = e^{\frac{ik_\varepsilon x}{M(y)}} H(x).$$

À y fixé, comme $\int_{\mathbb{R}} |G(x, y)| dx = \frac{M}{\varepsilon}$, nous pouvons appliquer le lemme 1 et établir

$$\int_{\mathbb{R}} \left| (A_M - \tilde{A}_M) \mathbf{u}_0(x, y) \right|^2 dx \leq \frac{4M^4 m'^2 m^2}{\varepsilon^2 |k_\varepsilon|^2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^2 u_{0x}(x, y)|^2 dx$$

Ainsi après intégration selon y , nous obtenons :

$$\left\| \left(A_M - \tilde{A}_M \right) \mathbf{u}(x, y) \right\|_{L^2} \leq C_T^\bullet M^2 \quad \text{où } C_T^\bullet = \frac{2\sqrt{\max(m'^2) \max(m^2)}}{\varepsilon |k_\varepsilon|} \left\| \partial_x^2 u_{0x} \right\|_{L^2}.$$

Nous en déduisons une majoration globale de $a_M(\mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M, \mathbf{v})$ pour tout \mathbf{v} :

$$a_M(\mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M, \mathbf{v}) \leq (C_T^\circ + C_T^\bullet) M^2 \|\mathbf{v}\|_{V_\Omega}$$

où $C_T^\circ + C_T^\bullet$ est indépendant de M . Grâce à la constante de coercivité C_M^c de a_M et en posant $\mathbf{v} = \mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M$, nous pouvons conclure par la relation suivante :

$$\|\mathbf{u}_M - \tilde{\mathbf{u}}_M\|_{V_\Omega} \leq \frac{1}{C_M^c} (C_T^\circ + C_T^\bullet) M^2.$$

Comme $C_M^c \underset{M \rightarrow 0}{\sim} \min\left(\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|}; \frac{s\varepsilon}{|k_\varepsilon|}; \varepsilon |k_\varepsilon|\right)$, nous sommes assuré du caractère borné de $\frac{1}{C_M^c}$. □

En conclusion, $\tilde{\mathbf{u}}_M$ approche mieux \mathbf{u}_M que \mathbf{u}_0 puisque l'écart converge au moins en M^2 .

Remarque 14 *Pouvait on prévoir ce résultat a priori ? Rappelons que nous avons approché le terme $A_M \mathbf{u}(x, y)$ par $\tilde{A}_M \mathbf{u}(x, y) = \frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \partial_x u_x(x, y)$. Si nous avions pu montrer que l'écart entre ces deux termes était d'ordre M^2 alors nous aurions pu prévoir le résultat du théorème 8. Or il est facile de montrer que sur Y^+ :*

$$\left(A_M - \tilde{A}_M \right) \mathbf{u}(x, y) = \frac{2M'(y)M(y)}{k_\varepsilon^2} \partial_x^2 u_x(x, y) - \frac{2iM'(y)M(y)}{k_\varepsilon^2} \int_{-\infty}^x e^{\frac{ik_\varepsilon(x-s)}{M(y)}} \partial_s^3 u_x(s, y) ds.$$

Dans le cas $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, nous avons pu prouvé que cet écart est en M^2 car \mathbf{u}_0 est très régulier et ne varie pas rapidement spatialement (aucun mode hydrodynamique). Dans le cas général, ce n'est plus vrai. Par exemple, prenons une solution \mathbf{u} se comportant en $e^{\frac{ik}{M}x}$ (i.e. un mode hydrodynamique) alors le terme de droite est formellement équivalent à $\frac{M'}{M}$ et pas à M^2 !

Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'établir un cadre théorique pour le problème traité ainsi qu'un modèle approché pertinent. Les chapitres suivants traitent l'aspect numérique du problème et notamment le traitement numérique des conditions de rayonnement. Pour la mise-en-œuvre, nous avons privilégié la technique des PML. Comme cette technique a un effet très similaire à l'ajout de dissipation, nous pouvons utiliser des techniques très proches de celles développées dans ce chapitre.

Étude du problème avec couches PML

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'en régime dissipatif, on pouvait établir une formulation régularisée de l'équation de Galbrun ; ainsi nous avons pu montrer le caractère bien posé du problème régularisé si nous introduisons assez de dissipation.

Notre but est à présent de calculer à proximité de la source une approximation de la solution \mathbf{u} de l'équation de Galbrun non dissipative. La technique ici utilisée est l'introduction de couches absorbantes de part et d'autre de la source. Le type de couches absorbantes que nous utilisons a été introduit par Bérenger en 1994 ([Bér94] et [Bér96]) sous le nom de couches PML. Le caractère absorbant des couches PML représenté par le paramètre α est très similaire à l'action de la dissipation. Une résolution numérique du problème dissipatif est possible mais conduirait au calcul d'une solution approchée \mathbf{u}^ε de l'équation de Galbrun, notamment très près de la source. Au contraire si nous utilisons un problème avec couches PML, dans le domaine d'intérêt, la solution obtenue est la solution du problème initial (1.5) : en effet aucune absorption n'y est appliquée ($\alpha = 1$) et les couches sont parfaitement adaptées (aucune réflexion parasite n'est produite à l'interface entre le domaine d'intérêt et les couches).

Nous rappellerons brièvement le principe de cette méthode dans le début du chapitre.

Dans le deuxième paragraphe nous écrivons le problème avec des couches PML de longueur infinie. Il est à noter que dans ce cas, nous procédons comme pour le problème dissipatif, c'est-à-dire que le déplacement \mathbf{u}_∞^α et la vorticité $\psi_\infty^\alpha = \text{rot}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha$ sont cherchés tendant vers zéro à l'infini. Pour régulariser l'équation avec couches PML, nous calculons à nouveau la vorticité par convolution.

Puisque notre objectif est l'implémentation d'un code sur un domaine borné, le troisième paragraphe traite du problème en couches PML de longueur finie. Nous exposons les approximations faites aux bords du domaine. Nous montrons ensuite que le problème obtenu relève de l'alternative de Fredholm. Pour que celle-ci soit v  rifi  e nous exploiterons une propriété inédite de l'opérateur hydrodynamique : son caractère compact.

Nous décrivons ensuite la mise-en-œuvre numérique avant de valider le code obtenu et de présenter quelques résultats numériques. Nous présenterons les points importants de la mise en œuvre : l'implémentation de la formule de la vorticité puis la mise-en-place d'un algorithme itératif pour éviter d'inverser la matrice obtenue lors de la discrétisation de la vorticité qui est moins creuse qu'un terme éléments finis classique.

Nous terminons ce chapitre par la construction d'un modèle faible Mach avec couches PML pour les écoulements lents. Nous prouvons que ce nouveau modèle relève de l'alternative de Fredholm avant de produire des résultats numériques que nous comparons à ceux obtenus par

le modèle "exact".

3.1 Principe des couches absorbantes PML

3.1.1 Construction des couches PML

Le principe des couches absorbantes consiste à prolonger le domaine de calcul par un domaine fictif dans lequel les ondes sont atténuées. En 1996, Bérenger propose un nouveau modèle de couches : les Perfectly Matched Layers (PML). Dans celles-ci, le milieu fictif est à la fois absorbant et parfaitement adapté : aucune réflexion ne se produit aux interfaces entre les couches et le milieu physique.

Le premier champ d'application des couches PML a été la résolution des équations de Maxwell en régime transitoire [Bér94]. Depuis cette technique a été appliquée à beaucoup d'autres problèmes tels que l'électromagnétisme, l'acoustique ou l'élastodynamique, la plupart en régime transitoire [DJ03, TAC98, Hu96] et quelques uns en régime harmonique [BBL, BBL04, RM06]. En régime harmonique et dans un guide, la correction apportée par la présence des couches PML consiste simplement à substituer dans les équations l'opérateur ∂_x par l'opérateur $\check{\alpha}\partial_x$ où $\check{\alpha}$ est une fonction dépendant de x : $\partial_x \rightarrow \check{\alpha}(x)\partial_x$. Pour notre étude, la fonction utilisée est :

$$\check{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans le domaine physique} \\ \alpha & \text{dans les couches PML} \end{cases}$$

De plus afin que les couches soient absorbantes, il faut que

$$\Re(\alpha) > 0 \text{ et } \Im(\alpha) < 0. \quad (3.1)$$

Nous justifierons ce choix ultérieurement.

L'introduction de couches PML peut être aussi vue comme un changement de variable complexe dans les couches PML du type $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \rightarrow \alpha x \end{array} \right.$ (bien sûr ceci n'a de sens que si la solution admet un prolongement analytique dans le plan complexe).

3.1.2 Modes et couches PML

Dans le chapitre précédent, nous avons souligné que l'ajout de dissipation au milieu rendait les modes évanescents. Nous souhaitons dans cette section étudier l'influence de l'absorption sur les valeurs propres. Pour rappel les modes sont les solutions à variables séparées du problème considéré sans terme source. Classiquement, ils sont donnés sous la forme :

$$p_n(x, y) = \varphi_n(y)e^{i\beta_n x}$$

où β_n est la valeur propre associée au mode φ_n .

Si nous considérons maintenant un milieu où l'opérateur ∂_x a été remplacé par $\alpha\partial_x$ (donc $x \rightarrow \frac{x}{\alpha}$), les modes obtenus sont alors :

$$p_n^\alpha(x, y) = \varphi_n(y)e^{i\beta_n^\alpha x} \text{ avec } \beta_n^\alpha = \frac{\beta_n}{\alpha}.$$

La valeur propre associée au vecteur p_n^α est $\frac{\beta_n}{\alpha}$. Ajouter de l'absorption ($\alpha \neq 1$) revient donc à effectuer dans le plan complexe des valeurs propres une rotation autour de l'origine d'angle

$\arg(\beta_n^\alpha) - \arg(\beta_n) = -\arg(\alpha) > 0$ et une homothétie de rapport $\frac{1}{|\alpha|}$ comme nous l'illustrons la Fig. 3.1.

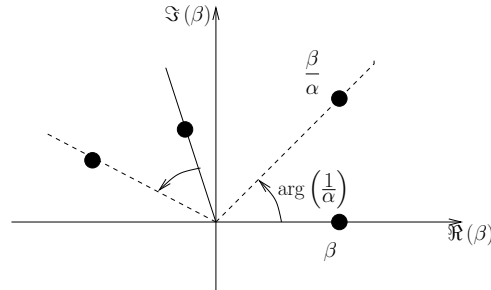


FIG. 3.1 – Influence de l'absorption sur le spectre des valeurs propres.

A Cas sans écoulement

Considérons à présent le cas particulier du spectre de la Fig. 3.2. Ce graphique représente le

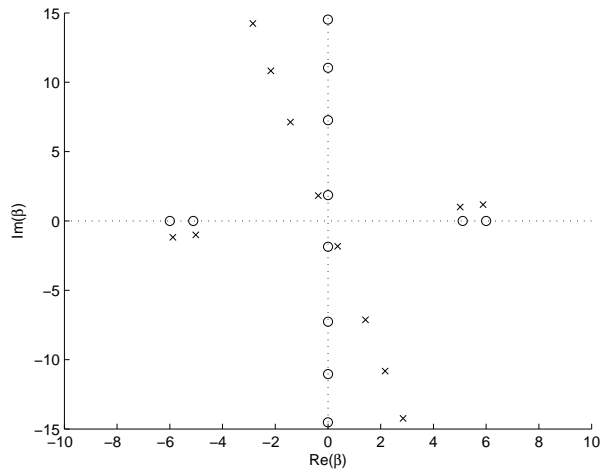


FIG. 3.2 – Cas sans écoulement et $k = 6$: spectres (○) obtenu sans absorption ($\alpha = 1$) et (×) obtenu avec absorption ($\alpha = \frac{1-0.2i}{\sqrt{1.04}}$).

spectre des valeurs propres des modes acoustiques obtenues avant et après ajout d'absorption dans le cas sans écoulement et pour une fréquence $k = 6$. Nous vérifions sur le spectre de la Fig. 3.2 que grâce à la condition (3.1), l'ajout d'absorption rend bien évanescents tous les modes du problème quelle que soit leur nature (propagatifs ou évanescents) et leur sens de propagation ($\Im(\beta_n^\alpha) > 0$ pour les modes aval, $\Im(\beta_n^\alpha) < 0$ pour les modes amont).

B En présence d'un écoulement cisailé

En présence d'un écoulement, la situation est plus complexe. Pour un écoulement uniforme, le mode hydrodynamique existe à présent et la "croix" du spectre des modes acoustiques (cf. Fig. 1.4) est translatée horizontalement de zéro à $-\frac{kM}{1-M^2}$. En présence de couches PML, le mode hydrodynamique devient évanescent à l'aval. Cependant il peut exister des modes acoustiques aval dont la valeur propre a une partie réelle négative comme sur la Fig. 3.3 : il s'agit des modes amont inverse. Physiquement ces modes ont une vitesse de phase (vitesse des

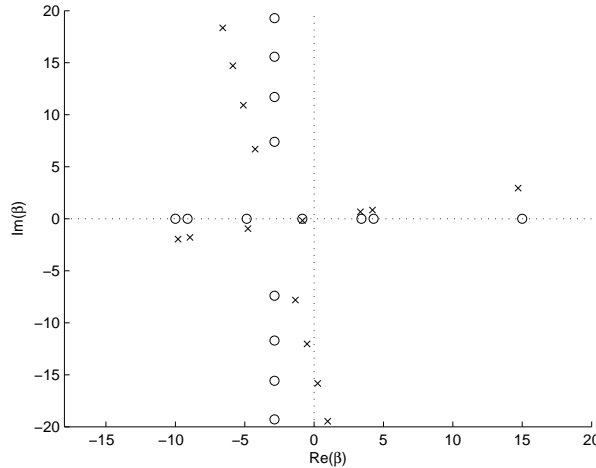


FIG. 3.3 – Cas d'un écoulement uniforme $M = 0.4$ et $k = 6$: spectres (○) obtenu sans absorption ($\alpha = 1$) et (×) obtenu avec absorption ($\alpha = \frac{1-0.2i}{\sqrt{1.04}}$).

fronts de l'onde) et de groupe (vitesse de l'enveloppe de l'onde) de signes opposés. En présence de couches PML, les modes amont inverse se retrouve dans la zone $\Re(\beta) < 0$: ils ont donc un comportement exponentiellement croissant dans la couche PML aval. Cependant Bécache et al. [BBL04] ont montré que cela n'affectait en rien l'efficacité des couches PML : alors que la solution explose dans les couches PML, la solution calculée à proximité de la source reste bornée. Il est possible d'éviter cette explosion en présence d'un écoulement uniforme en translatant la "croix" des valeurs propres pour la recentrer en zéro. La rotation remet alors les modes amont inverse dans le bon demi-plan.

En écoulement cisailé, des difficultés supplémentaires apparaissent. Même si en présence de couches PML le comportement du continuum des modes hydrodynamiques devient évanescent à l'aval, la présence de modes instables et de modes amont inverse peut poser problème. Dans le cas d'un mode instable, il faut fournir davantage d'absorption (pour le faire suffisamment "tourner") pour le rendre évanescent à l'aval. Pour les modes amont inverse, on peut se demander s'il existe une translation horizontale du spectre des valeurs propres nous assurant que ces modes sont dans le bon demi-plan après rotation. La question n'est pas évidente car les modes acoustiques évanescents ne se répartissent plus sur une croix droite mais sur une croix un peu déformée comme sur la Fig. 3.4. Il peut être imaginé que le processus de translation que l'on effectue pour un écoulement uniforme soit adaptable au cas cisailé. Il peut être aussi imaginé que même en présence d'un mode croissant dans la PML aval, les couches PML restent efficaces comme dans le cas uniforme. Hu expose dans [Hu96] les résultats obtenus dans ce cas en transitoire et propose un modèle de couches PML stables pour la mécanique des fluides. Pour notre étude, nous n'étudierons que des fréquences pour lesquelles les écoulements ne

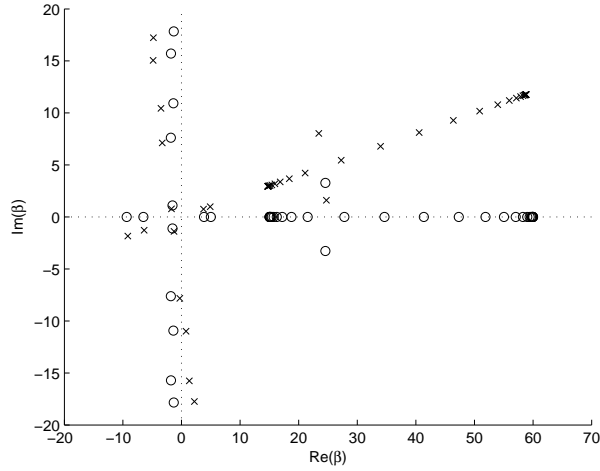


FIG. 3.4 – Cas de l'écoulement $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(36y - 18)$ et $k = 6$: spectres (○) obtenu sans absorption ($\alpha = 1$) et (×) obtenu avec absorption ($\alpha = \frac{1-0.2i}{\sqrt{1.04}}$).

générent aucun mode amont inverse. Par conséquent le modèle classique des couches PML de Bérenger nous suffira.

3.1.3 Exemple simple : équation d'Helmholtz

Afin de présenter simplement l'analyse mathématique du rayonnement acoustique en présence de PML qui est un problème vectoriel, nous commençons par nous intéresser à un modèle scalaire plus simple : le modèle en pression de Helmholtz avec condition de Neumann aux bords. Nous nous plaçons sous les mêmes hypothèses que précédemment : conduit rigide infini avec une source $f \in L^2(\Omega)$ et régime harmonique. Les équations du problème sont :

$$\text{Trouver } p \text{ tel que } \begin{cases} \Delta p + k^2 p = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_y p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous bornons le domaine d'intérêt par des couches de longueur finie L . Soit le domaine Ω^L : $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_{\pm}^L$ où Ω_b (domaine d'intérêt) est un domaine borné $\Omega_b = \{(x, y) \in \Omega / x_m < x < x_p\}$ dans lequel nous supposons inclus le support de la source f et Ω_{\pm} sont deux couches PML comme représenté sur la Fig. 3.5. Nous notons Σ_{\pm}^L les frontières extérieures de Ω^L . Nous

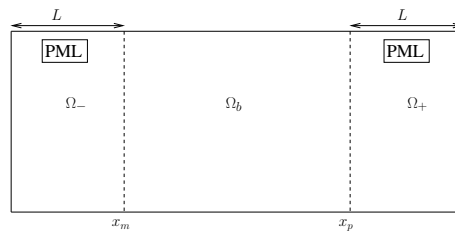


FIG. 3.5 – Représentation du domaine $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_{\pm}$

choisissons d'appliquer une condition de Dirichlet homogène sur ces bords puisque la solution

décroît dans les couches PML. Le problème avec couches PML de longueur finie ainsi obtenu est :

$$\text{Trouver } p^\alpha \in H^1(\Omega^L) \text{ tel que } \begin{cases} \Delta_\alpha p^\alpha + k^2 p^\alpha = f \text{ dans } \Omega \text{ où } \Delta_\alpha = \check{\alpha} \partial_x (\check{\alpha} \partial_x) + \partial_y^2 \\ \partial_y p^\alpha = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Sigma_\pm^L \\ p^\alpha = 0 \text{ sur } \Sigma_\pm^L \end{cases} .$$

L'écriture de ce problème au sens des distributions suppose les conditions de saut suivantes aux interfaces domaine d'intérêt-couches PML :

$$[p^\alpha] = 0 \text{ et } [\check{\alpha} \partial_x p^\alpha] = 0.$$

Déterminons la formulation faible de ce problème. Soit η une fonction test appartenant à l'ensemble $\Theta^L = \{q \in H^1(\Omega^L) / q = 0 \text{ sur } \Sigma_\pm^L\}$. Multiplions l'équation par $\bar{\eta}$, puis intégrons sur Ω :

$$\int_{\Omega^L} (\check{\alpha} \partial_x (\check{\alpha} \partial_x p^\alpha) + \partial_y^2 p^\alpha + k^2 p^\alpha) \bar{\eta} = \int_{\Omega^L} f \bar{\eta}$$

Classiquement s'ensuivent les intégrations par parties. Ici cela n'est pas possible globalement sur Ω^L puisque la fonction $\check{\alpha}$ est discontinue. De plus même si $\check{\alpha}$ était une fonction régulière la formule obtenue ferait intervenir des dérivées de $\check{\alpha}$ et ne serait plus conservative. Pour y remédier divisons l'équation par $\check{\alpha}$. Une fois cette division par $\check{\alpha}$ effectuée, nous pouvons intégrer par parties et obtenir le problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } p^\alpha \in \Theta^L \text{ tel que } \forall \eta \in \Theta^L \quad - \int_{\Omega^L} \check{\alpha} \partial_x p^\alpha \partial_x \bar{\eta} - \int_{\Omega^L} \frac{1}{\check{\alpha}} \partial_y p^\alpha \partial_y \bar{\eta} + \int_{\Omega^L} \frac{k^2}{\check{\alpha}} p^\alpha \bar{\eta} = \int_{\Omega^L} \frac{1}{\check{\alpha}} f \bar{\eta}$$

Grâce à la condition de Neumann sur les bords horizontaux, le terme de bords de l'intégration du terme en ∂_y^2 est nul. Et grâce à celle de Dirichlet sur les bords verticaux, le terme de bords de l'intégration du terme en ∂_x^2 est nul. Il a été prouvé [BBL04] que ce problème est bien posé sauf au pire pour une suite de fréquences $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}$. Contrairement au cas dissipatif, notons que comme $\Im \left(\int_{\Omega^L} \frac{1}{\check{\alpha}} \left(k^2 |p^\alpha|^2 - |\partial_y p^\alpha|^2 \right) \right)$ n'a pas de signe fixe, nous ne pouvons pas utiliser le théorème de Lax-Milgram (manque de coercivité). En revanche le terme $\int_{\Omega^L} \frac{1}{\check{\alpha}} (p^\alpha \bar{\eta})$ est compact en domaine borné.

Remarque 15 *Ce résultat de compacité n'existe plus pour des couches PML de longueur infinie.*

Par conséquent ce problème relève de l'alternative de Fredholm. Il a été obtenu l'estimation d'erreur suivante pour ce problème :

$$\|p^\alpha - p\|_{H^1} \leq C e^{-\theta \frac{L}{|\alpha|}} \|p\|_{H^1}$$

où p est la solution exacte du problème, C une constante dépendant de M et k , et θ est une constante positive dépendant de M , k et $\arg(\alpha)$. Plus les couches PML sont longues ou le module du paramètre α petit (beaucoup d'absorption), plus l'erreur commise est petite (rappelons que l'erreur est due au fait qu'on impose $p = 0$ au bout des couches PML (y compris dans les couches PML)).

Après ce bref rappel sur les couches PML, appliquons maintenant cette technique à notre modèle.

3.2 Régularisation du problème avec couches PML de longueur infinie

Nous commençons par construire le problème avec des couches PML infinies car il présente de nombreuses analogies avec le problème dissipatif.

Comme dans le paragraphe précédent, nous gardons la notation $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_{\pm}$ où Ω_{\pm} sont à présent deux couches PML de longueur infinie comme représenté sur la Fig. 3.6.

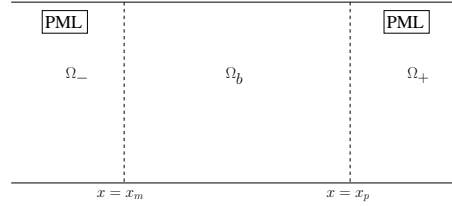


FIG. 3.6 – Représentation du domaine $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_{\pm}$

Soit $V_{\Omega} = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2 / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0\}$. Nous supposons que le support de la source \mathbf{f} est inclus dans Ω_b . Nous notons $\mathbf{u}_{\infty}^{\alpha}$ la solution du problème suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \in V_{\Omega} \text{ tel que } \begin{cases} D_{\alpha}^2 \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} \text{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

avec les définitions suivantes pour les "opérateurs PML" :

$$\nabla_{\alpha} = (\check{\alpha} \partial_x, \partial_y) \quad \text{div}_{\alpha} = \nabla_{\alpha} \cdot \quad \text{rot}_{\alpha} = \nabla_{\alpha} \wedge \quad D_{\alpha} = -ik + M(y) \check{\alpha} \partial_x.$$

Pour gagner de la coercivité nous allons régulariser l'équation. Pour faciliter la lecture, nous considérons en présence de couches PML le cas $s = 1$. Le problème obtenu est :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \in V_{\Omega} \text{ tel que } \begin{cases} D_{\alpha}^2 \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} \text{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} + \text{rot}_{\alpha} (\text{rot}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \psi_{\infty}^{\alpha}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{rot}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \psi_{\infty}^{\alpha} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

où $\psi_{\infty}^{\alpha} = \text{rot}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha}$ vérifie l'équation suivante :

$$D_{\alpha}^2 \psi_{\infty}^{\alpha} = 2M' D_{\alpha} (\check{\alpha} \partial_x (\mathbf{u}_{\infty}^{\alpha})_x) + \text{rot}_{\alpha} \mathbf{f}.$$

La condition aux bords $\text{rot}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \psi_{\infty}^{\alpha} = 0$ nous servira plus tard à établir la formulation variationnelle. La relation entre ψ_{∞}^{α} et $\mathbf{u}_{\infty}^{\alpha}$ est obtenue comme dans l'étude du cas dissipatif en appliquant le rotationnel PML à la première équation de (3.2).

Sous forme développée, le problème portant sur la vorticité est :

$$\text{Trouver } \psi_{\infty}^{\alpha} \in L^2(\Omega) / -k^2 \psi_{\infty}^{\alpha} - 2ikM(y) \partial_x \psi_{\infty}^{\alpha} + M(y)^2 \check{\alpha} \partial_x (\check{\alpha} \partial_x \psi_{\infty}^{\alpha}) = g_{\alpha} \quad (3.4)$$

avec $g_{\alpha} = 2M' D_{\alpha} (\check{\alpha} \partial_x (\mathbf{u}_{\infty}^{\alpha})_x) + \text{rot}_{\alpha} \mathbf{f}$ et $\mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \in V_{\Omega}$. Par le principe de superposition la solution de l'équation en ψ_{∞}^{α} est

$$\psi_{\infty}^{\alpha} = A_{\alpha}^{\infty} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} + \psi_f^{\infty}$$

où $A_{\alpha}^{\infty} \mathbf{u}$ est la solution du problème : Trouver $A_{\alpha}^{\infty} \mathbf{u} \in L^2(\Omega) / D_{\alpha}^2 (A_{\alpha}^{\infty} \mathbf{u}) = 2M' D_{\alpha} (\check{\alpha} \partial_x u_x)$

et ψ_f^∞ est solution du problème : Trouver $\psi_f^\infty \in L^2(\Omega)$ / $D_\alpha^2 \psi_f^\infty = \text{rot}_\alpha \mathbf{f}$. Contrairement au cas dissipatif, le terme ψ_f^∞ n'est pas obtenu directement par une convolution mais par un processus analogue :

$$\psi_f^\infty(x, y) = \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x, z; y) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz$$

où $G_\alpha(x, \cdot; y) \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\forall(x, z) \in \mathbb{R}^2, D_\alpha^2 G_\alpha(x, z; y) = \delta(x - z)$. Tout comme dans le cas avec dissipation, il ne peut pas être défini de formules pour les points où le nombre de Mach s'annule. Les conséquences sont les mêmes que dans le cas dissipatif. D'un point de vue théorique, cela ne pose pas de problème. D'un point de vue numérique, une formule approchée sera établie pour les points où le nombre de Mach s'annule. Pour simplifier la présentation, nous ne présenterons dans la suite de ce document que les formules obtenues sur Y^+ (cf. formule (2.11)) (l'étude sur Y^- est symétrique). L'expression de ψ_f^∞ sur Y^+ est la suivante : $\psi_f^\infty(x, y) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x < x_m \\ \int_{-\infty}^x \frac{(x-z)}{\alpha^2 M^2} e^{\frac{ik}{\alpha M(y)}(x-z)} \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ \\ \text{si } x_m < x < x_p \\ \int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{\alpha M^2} \left(x - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right) \exp \left(\frac{ik}{M} \left(x - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right) \right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ + \int_{x_m}^x \frac{1}{M^2} (x - z) \exp \left(\frac{ik}{M} (x - z) \right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ \\ \text{si } x_p < x \\ \int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{\alpha M^2} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right) \exp \left(\frac{ik}{M} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right) \right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ + \int_{x_m}^{x_p} \frac{1}{M^2} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - z \right) \exp \left(\frac{ik}{M} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - z \right) \right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ + \int_{x_p}^x \frac{1}{\alpha^2 M^2} (x - z) \exp \left(\frac{ik}{M} \left(\frac{x - z}{\alpha} \right) \right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Le terme $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$ est calculé par un procédé analogue :

$$A_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) = 2M' \alpha \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x, z; y) \partial_x u_x(z, y) dz$$

où $G_\alpha(x, \cdot; y) \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\forall(x, z) \in \mathbb{R}^2, D_\alpha G_\alpha(x, z; y) = \delta(x - z)$. La formule ainsi obtenue

est :

$$A_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{si } x < x_m}{\int_{-\infty}^x \frac{2M'}{\check{\alpha}M}} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}(x-z)\right) \partial_z u_x(z, y) dz \\ \\ \frac{\text{si } x_m < x < x_p}{\int_{-\infty}^{x_m} \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}\left(x-x_m+\frac{x_m-z}{\alpha}\right)\right) \partial_z u_x(z, y) dz} \\ \quad + \int_{x_m}^x \frac{2M'}{M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}(x-z)\right) \partial_z u_x(z, y) dz \\ \\ \frac{\text{si } x_p < x}{\int_{-\infty}^{x_m} \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha}+x_p-x_m+\frac{x_m-z}{\alpha}\right)\right) \partial_z u_x(z, y) dz} \\ \quad + \int_{x_m}^{x_p} \frac{2M'}{M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha}+x_p-z\right)\right) \partial_z u_x(z, y) dz \\ \quad + \int_{x_p}^x \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}\left(\frac{x-z}{\alpha}\right)\right) \partial_z u_x(z, y) dz \end{cases} \quad (3.6)$$

Le détail des calculs est fourni dans l'annexe B.

Finalement le problème régularisé écrit sous forme forte est

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_\infty^\alpha \text{ tel que } \begin{cases} D_\alpha^2 \mathbf{u}_\infty^\alpha - \nabla_\alpha \text{div}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha + \text{rot}_\alpha (\text{rot}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha - A_\alpha^\infty \mathbf{u}_\infty^\alpha) = \mathbf{f} + \text{rot}_\alpha \psi_f^\infty & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_\infty^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{rot}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha - \psi_\infty^\alpha = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

Nous allons maintenant écrire ce problème sous forme faible. Soit \mathbf{v} une fonction test. Pour obtenir la forme conservative, nous divisons par $\check{\alpha}$ l'équation (cf étude de l'équation de Helmholtz (3.1.3)) :

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\check{\alpha}} D_\alpha^2 \mathbf{u}_\infty^\alpha - \frac{1}{\check{\alpha}} \nabla_\alpha \text{div}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha + \frac{1}{\check{\alpha}} \text{rot}_\alpha (\text{rot}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha - A_\alpha^\infty \mathbf{u}_\infty^\alpha) \right) \bar{\mathbf{v}} = \int_\Omega \left(\frac{1}{\check{\alpha}} \mathbf{f} \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\check{\alpha}} \text{rot}_\alpha \psi_f^\infty \bar{\mathbf{v}} \right) \quad (3.8)$$

Par intégrations par parties, nous obtenons le problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_\infty^\alpha \in V_\Omega \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_\Omega, \quad a_\alpha^\infty(\mathbf{u}_\infty^\alpha, \mathbf{v}) = \ell_\alpha^\infty(\mathbf{v}) \quad (3.9)$$

où $a_\alpha^\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \left(\frac{-k^2}{\check{\alpha}} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2\mathbf{i}kM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} \right) + \int_\Omega \frac{1}{\check{\alpha}} \text{div}_\alpha \mathbf{u} \text{div}_\alpha \bar{\mathbf{v}} + \int_\Omega \frac{1}{\check{\alpha}} (\text{rot}_\alpha \mathbf{u} - A_\alpha^\infty \mathbf{u}) \text{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}$ et $\ell_\alpha^\infty(\mathbf{v}) = \int_\Omega \frac{1}{\check{\alpha}} (\mathbf{f} \bar{\mathbf{v}} + \psi_f^\infty \text{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}})$. Nous ne pouvons pas montrer que ce problème est bien posé (aussi bien par Lax-Milgram que par l'alternative de Fredholm) parce que nous sommes en domaine infini. Par contre, comme nous l'avons montré pour l'équation d'Helmholtz, nous pourrions montrer que ce problème devient posé lorsque l'on tronque les PML.

Cette formulation est obtenue facilement grâce aux formules d'intégrations en couches PML suivantes (valables que si $\check{\alpha}$ est constante par morceaux, ce qui est notre cas) : $\forall (\varphi, \mathbf{v}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)^2$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla_\alpha \varphi \cdot \bar{\mathbf{v}} &= - \int_\Omega \varphi \text{div}_\alpha \bar{\mathbf{v}} + \int_{\partial\Omega} \varphi (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_\alpha) \text{ où } \mathbf{n}_\alpha = \check{\alpha} \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_y \\ \int_\Omega \text{rot}_\alpha \varphi \cdot \bar{\mathbf{v}} &= \int_\Omega \varphi \text{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}} - \int_{\partial\Omega} \varphi (\bar{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{n}_\alpha) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ainsi si nous intégrons maintenant les différents termes, nous obtenons :

$$- \int_{\Omega} (\nabla_{\alpha} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha}) \bar{\mathbf{v}} = \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_{\alpha}) \text{ avec } \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha}) (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_{\alpha}) = 0$$

puisque $\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Par l'intégration du terme en $\operatorname{rot}_{\alpha}$ nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot}_{\alpha} (\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \psi_{\infty}^{\alpha}) \bar{\mathbf{v}} = \int_{\Omega} (\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \psi_{\infty}^{\alpha}) \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} - \int_{\partial\Omega} (\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \psi_{\infty}^{\alpha}) (\bar{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{n}_{\alpha}).$$

Le terme de bord est nul puisque $\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \psi_{\infty}^{\alpha} = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour terminer si nous nous intéressons à l'intégration du dernier terme où intervient la dérivée convective, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha} D_{\alpha}^2 \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \bar{\mathbf{v}} &= \int_{\Omega} \left(\frac{-k^2}{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{v}} + M^2 \partial_x (\check{\alpha} \partial_x \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{-k^2}{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{v}} \right) + \int_{\partial\Omega} M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) \end{aligned}$$

avec $\int_{\partial\Omega} M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) = 0$ puisque les bords sont horizontaux ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$).

Puisque l'objectif est l'implémentation sur un domaine borné, nous effectuons une troncature des couches.

3.3 Régularisation du problème avec couches PML de longueur finie

3.3.1 Formulation variationnelle

Nous nous intéressons dans cette partie au problème avec couches PML de longueur finie L . Le domaine de calcul obtenu après troncature des couches PML est noté Ω^L (cf. Fig. 3.5). Nous désirons maintenant résoudre la première équation de (3.7) dans Ω^L avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \psi$ sur les bords horizontaux. La troncature des couches PML nous oblige à imposer des conditions limites sur les bords Σ_{\pm}^L et à modifier la formule de la vorticité. Parmi plusieurs possibilités, l'ajustement effectué consiste à chercher la solution de la formulation variationnelle (3.9) non plus dans V_{Ω} mais dans V_{Ω^L} :

$$V_{\Omega^L} = \{ \mathbf{u} \in V_{\Omega} \mid \mathbf{u} \equiv 0 \text{ sur } \Omega \setminus \Omega^L \}$$

Le choix de V_{Ω^L} revient à imposer

- comme conditions sur les bords Σ_{\pm}^L $u_x = u_y = 0$,
-   modifier dans les formules de la vorticité (3.5) et (3.6) les bornes d'intégration, en particulier $x = -\infty$ en $x_m - L$.

Nous noterons A_{α}^L la restriction de A_{α}^{∞}   V_{Ω^L} .

Remarque 16 *Pour les conditions de bords, nous aurions pu choisir les mêmes conditions que celles appliqu es sur les bords horizontaux $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \psi$ mais il apparait alors des termes de bords supplémentaires dans la formulation variationnelle difficiles à évaluer.*

Remarque 17 *La vorticité s lectionn e par ce problème correspond à la vorticité causale. En effet celle-ci a été construite à partir d'une fonction de Green causale et est nulle $\forall x < x_m - L$.*

Après troncature des couches la formulation implémentée obtenue est :

$$V_{\Omega^L} = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega^L)^2 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega^L \text{ et } \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Sigma_{\pm}^L \}$$

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_{\mathbf{L}}^{\alpha} \in V_{\Omega^L} \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega^L}, \quad a_{\alpha}^L(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}^{\alpha}, \mathbf{v}) = \ell_{\alpha}^L(\mathbf{v}) \quad (3.11)$$

$$\text{où } a_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \left(\frac{-k^2}{\alpha} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} \right) + \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u} - A_{\alpha}^L \mathbf{u}) \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} \text{ et } \ell_{\alpha}^L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{f} \bar{\mathbf{v}} + \psi_f^L \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}).$$

Montrons maintenant que le problème (3.11) est bien posé, c'est-à-dire qu'une discrétisation de ce problème par éléments finis converge.

3.3.2 Caractère bien posé du problème

Avant d'établir le caractère bien posé de problème (3.11), nous rappelons que pour que les couches PML soient absorbantes, α doit satisfaire les conditions (3.1) dans les couches absorbantes. Une fois cette hypothèse vérifiée, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 9 *Le problème variationnel (3.11) relève de l'alternative de Fredholm.*

DÉMONSTRATION.

$$\text{Soient } b_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} (\mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega^L} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega^L} \operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} \text{ et } c_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \left(-\frac{\check{\alpha} + k^2}{\alpha} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} \right) - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega^L} A_{\alpha}^L \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} \text{ telles que}$$

$$a_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Commençons par remarquer qu'en vertu de la continuité de A_{α}^L de V_{Ω^L} vers $L^2(\Omega^L)$ que nous démontrons dans l'annexe C, il est aisé de démontrer que b_{α}^L et c_{α}^L sont des formes continues sur $V_{\Omega^L} \times V_{\Omega^L}$. Il en est de même pour ℓ_{α}^L sur V_{Ω^L} puisque $\psi_f^L \in L^2(\Omega^L)$.

La démarche suivie consiste alors à prouver que la forme bilinéaire b_{α}^L est une forme coercive sur V_{Ω^L} et que la forme c_{α}^L est une perturbation compacte sur V_{Ω^L} .

1 - Preuve du caractère coercif de b_{α}^L

Nous démontrons la coercivité de la forme b_{α}^L en minorant la quantité $\Re(b_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{u}))$. Pour minorer cette quantité, nous avons besoin du résultat suivant [Leg03] :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (V_{\Omega^L})^2 \quad \int_{\Omega^L} \frac{1}{\check{\alpha}} (\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega^L} \frac{1}{\check{\alpha}} \nabla_{\alpha} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}$$

Il s'agit du résultat de Costabel [Cos91] généralisé aux opérateurs PML. D'après ce résultat, nous obtenons :

$$b_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega^L} \left(|\mathbf{u}|^2 - \check{\alpha} M^2 |\partial_x \mathbf{u}|^2 + \check{\alpha} |\partial_x \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\check{\alpha}} |\partial_y \mathbf{u}|^2 \right).$$

Nous en déduisons la relation :

$$\Re(b_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})) = \int_{\Omega^L} \left(|\mathbf{u}|^2 + \Re(\check{\alpha}) (1 - M^2) |\partial_x \mathbf{u}|^2 + \frac{\Re(\check{\alpha})}{|\check{\alpha}|^2} |\partial_y \mathbf{u}|^2 \right).$$

Nous en déduisons la minoration suivante :

$$|b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \Re(b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \geq \min\left(\Re(\alpha)(1 - s_0); \frac{\Re(\alpha)}{|\alpha|^2}\right) \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \quad (3.12)$$

Puisque l'écoulement est subsonique ($s_0 < 1$), la coercivité est assurée.

2 - Preuve du caractère compact de c_α^L

Considérons maintenant la forme bilinéaire c_α^L . Par le théorème de représentation de Riesz, nous définissons les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} K_1 : V_{\Omega^L} &\longrightarrow V_{\Omega^L} & \text{tel que } \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega^L}, (K_1 \mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1} &= \left(-\frac{k^2 + \check{\alpha}}{\check{\alpha}} \mathbf{u} - 2ikM\partial_x \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)_{L^2} \\ \mathbf{u} &\longrightarrow K_1 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\text{et } K_2 : V_{\Omega^L} \longrightarrow V_{\Omega^L} \quad \text{tel que } \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega^L}, (K_2 \mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1} = (A_\alpha^L \mathbf{u}, \text{rot}_\alpha \mathbf{v})_{L^2}$$

$$\mathbf{u} \longrightarrow K_2 \mathbf{u}$$

Pour prouver la compacité de l'opérateur K_2 , nous utilisons l'argument suivant que nous démontrons dans l'annexe C :

LEMME 5 *L'opérateur A_α^L est continu de V_{Ω^L} dans $H^1(\Omega^L)$*

Montrons maintenant que les opérateurs K_1 et K_2 sont des opérateurs compacts.

Compacité de l'opérateur K_1

L'opérateur K_1 est compact si pour tout suite bornée $(\mathbf{u}_n)_n$ de V_Ω , il existe une sous-suite de $(K_1 \mathbf{u}_n)_n$ qui converge dans V_Ω . Soit $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite bornée dans V_{Ω^L} . En prenant $\mathbf{v} = K_1 \mathbf{u}$ dans (3.13), nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|K_1 \mathbf{u}\|_{H^1}^2 &= \left| \left(-\frac{k^2 + \check{\alpha}}{\check{\alpha}} \mathbf{u} - 2ikM\partial_x \mathbf{u}, K_1 \mathbf{u} \right)_{L^2} \right| \\ &\leq \left\| -\frac{k^2 + \check{\alpha}}{\check{\alpha}} \mathbf{u} - 2ikM\partial_x \mathbf{u} \right\|_{L^2} \|K_1 \mathbf{u}\|_{L^2} \\ &\leq C_{K_1} \|\mathbf{u}\|_{H^1} \|K_1 \mathbf{u}\|_{L^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

où $C_{K_1} = \left| \frac{k^2 + \check{\alpha}}{\check{\alpha}} \right| + 2k\sqrt{s_0}$ et $s_0 = \max(M^2)$. Puisque $\|K_1 \mathbf{u}\|_{L^2} \leq \|K_1 \mathbf{u}\|_{H^1}$, nous en déduisons la continuité de l'opérateur de V_{Ω^L} dans V_{Ω^L} et par conséquent la suite $(K_1 \mathbf{u}_n)_n$ est bornée dans V_{Ω^L} . En vertu de l'injection compacte de V_{Ω^L} dans $L^2(\Omega^L)^2$ [Bré83], nous en extrayons une sous-suite toujours notée $(K_1 \mathbf{u}_n)_n$ qui converge dans $L^2(\Omega^L)^2$.

Par l'inégalité (3.14), nous obtenons $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$\|K_1 \mathbf{u}_m - K_1 \mathbf{u}_n\|_{H^1}^2 \leq C_{K_1} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_n\|_{H^1} \|K_1 \mathbf{u}_m - K_1 \mathbf{u}_n\|_{L^2}.$$

Cette inégalité prouve que la suite $(K_1 \mathbf{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy dans V_Ω puisque $(\mathbf{u}_n)_n$ est une suite bornée et $(K_1 \mathbf{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega^L)^2$. Par conséquent K_1 est un opérateur compact de V_{Ω^L} dans V_{Ω^L} .

Compacité de l'opérateur K_2

Soit $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite bornée dans V_{Ω^L} . Puisque l'opérateur A_α^L est continu de V_{Ω^L} dans $H^1(\Omega^L)$ par le lemme 5, la suite $(A_\alpha^L \mathbf{u}_n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega^L)$. Par l'injection compacte de $H^1(\Omega^L)$ dans $L^2(\Omega^L)$ [Bré83], nous en extrayons une sous-suite toujours notée $(A_\alpha^L \mathbf{u}_n)_n$ qui converge dans $L^2(\Omega^L)$. Nous en déduisons que $(A_\alpha^L \mathbf{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega^L)$.

En choisissant $\mathbf{v} = K_2 \mathbf{u}$ dans la définition de l'opérateur K_2 puis en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\|K_2 \mathbf{u}\|_{H^1} \leq \|A_\alpha^L \mathbf{u}\|_{L^2}.$$

Nous déduisons de cette inégalité que $(K_2 \mathbf{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy dans V_{Ω^L} . Par conséquent K_2 est un opérateur compact. □

3.4 Mise-en-œuvre numérique

3.4.1 Implémentation

Le problème avec couches PML (3.11) est discrétisé par éléments finis de Lagrange [DL84]. Le théorème 9 assure la convergence de la méthode. La principale difficulté rencontrée réside dans le calcul de la vorticité qui nécessite l'évaluation d'une formule de convolution le long des lignes de courant. L'écoulement étant horizontal, il s'agit d'une intégrale linéique selon x . Interpoler sur un maillage éléments finis quelconque une telle intégrale serait délicat puisqu'il s'agit de calculer une intégrale portant sur une ligne qui n'existe pas au préalable. Pour faciliter ce travail, nous avons utilisé des maillages structurés et des éléments finis $Q2$. L'outil d'interpolation intégral utilisé est présenté dans l'article [BDLM] fourni dans l'annexe 3.A. Cet article traite le cas du problème posé dans une portion de conduit, le déplacement et la vorticité étant supposés connus sur les bords.

Un autre aspect numérique important est la résolution du système linéaire associé au problème. Nous n'exposons ici que les idées principales utilis es. Pour le lecteur intéressé, une description plus précise est fournie dans l'article [BDLM]. Supposons que le problème linéaire obtenu par la discrétisation du problème (3.11) s'écrit

$$\mathbb{A} \mathbf{U} = \mathbb{L}$$

où \mathbb{A} est la matrice associ e à la forme sesquilinéaire a_α^L , \mathbb{L} est le vecteur second membre associ e à la forme ℓ_α^L et \mathbf{U} représente le vecteur inconnu. La matrice \mathbb{A} est partiellement pleine car l'opérateur hydrodynamique couple tous les degrés de libertés qui sont sur une même ligne contrairement à un terme éléments finis classique. Pour éviter d'inverser une telle matrice, nous avons choisi d'utiliser un algorithme itératif. Dans ce but nous décomposons la matrice \mathbb{A} en deux termes \mathbb{B} et \mathbb{C} tels que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} - \mathbb{C}$$

avec \mathbb{B} la matrice regroupant tous les termes éléments finis classiques et \mathbb{C} comprenant le terme hydrodynamique. La forme itérative choisie consiste à translater le terme hydrodynamique dans le terme source :

$$\mathbb{B} \mathbf{U}^{n+1} = \mathbb{L} + \mathbb{C} \mathbf{U}^n.$$

La matrice \mathbb{B} est creuse et peu coûteuse à inverser puisqu'il s'agit d'une matrice éléments finis classique. Usuellement, si une solution exacte est connue, le critère d'arrêt de la boucle est basé sur l'erreur absolue commise entre la solution numérique et la solution exacte : elle est au dessous d'un certain seuil. Ici les seules solutions connues sont les modes du guides ($\mathbf{f} = 0$) qui ne sont pas des solutions des problèmes de rayonnements ($\mathbf{f} \neq 0$). C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser un critère d'arrêt basé sur le résidu du problème non régularisé. Si nous notons \mathbb{G} et \mathbb{F} , les matrices du système de Galbrun non régularisé, nous obtenons que

$$\mathbb{G}\mathbf{U} = \mathbb{F}.$$

Puisque la solution obtenue numériquement doit vérifier le problème de Galbrun non régularisé, nous définissons le résidu par $\mathbf{R} = \mathbb{F} - \mathbb{G}\mathbf{U}$. Le critère d'arrêt utilisé est :

$$\|\mathbf{R}^{n+1}\|_{L^2} \leq 0.0005 \|\mathbf{R}^0\|_{L^2}$$

où $\mathbf{R}^0 = \mathbb{F}$ et $\mathbf{R}^n = \mathbb{F} - \mathbb{G}\mathbf{U}^n$. Ce critère est contraignant à respecter dès que le terme \mathbf{R}^0 est très petit car la suite \mathbf{R}^n décroît très lentement.

En conclusion, l'algorithme implémenté est :

1. Construction des matrices \mathbb{B} et \mathbb{C} et du vecteur \mathbb{L}
2. Initialisation $\mathbf{U} = \mathbf{0}$
3. Construction du terme second membre $\mathbb{S} : \mathbb{S} = \mathbb{L} + \mathbb{C}\mathbf{U}$
4. BOUCLE : Tant que résidu est trop "grand" faire
 - Résolution du système linéaire en déplacement : $\mathbb{B}\mathbf{U} = \mathbb{S}$
 - Réactualisation du second membre : $\mathbb{S} = \mathbb{L} + \mathbb{C}\mathbf{U}$
 - Réactualisation du résidu
- FIN BOUCLE tant que

Une analyse sommaire de convergence est effectuée dans [BDLM]. Nous y montrons que la méthode itérative converge d'autant plus vite que le gradient de l'écoulement est faible.

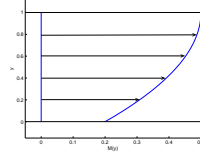
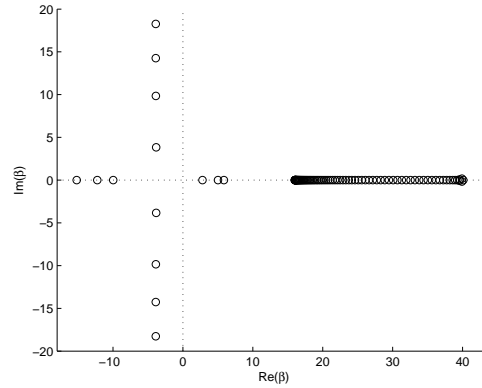
3.4.2 Paramètres des simulations

Toutes les simulations sont obtenues grâce au code d'éléments finis Mélima développé par Daniel Martin [Mar] avec des éléments finis $Q2$.

Pour les simulations numériques de ce chapitre, nous considérons l'écoulement suivant $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$ représenté sur la Fig. 3.7 et une fréquence $k = 8$. Nous avons choisi cet écoulement car les plages de valeurs balayées par la fonction et de sa dérivée sont relativement larges : $M \in [0.2; 0.5]$ et $M' \in [0; 0.6]$. Les caractéristiques des couches PML sont les suivantes :

$$\alpha = 0.65 - 0.65i$$

Le spectre des valeurs propres associé est représenté sur la Fig. 3.8. Nous distinguons sur le graphique la présence de trois modes propagatifs amont notés 0_U (mode $n = 0$ "upstream", $\beta = -15.19$), I_U (mode $n = 1$ "upstream", $\beta = -12.24$) et II_U (mode $n = 2$ "upstream", $\beta = -9.96$) et trois modes aval notés 0_D (mode $n = 0$ "downstream", $\beta = 5.86$), I_D (mode $n = 1$ "downstream", $\beta = 5.02$) et II_D (mode $n = 2$ "downstream", $\beta = 2.79$). Nous nous sommes placés dans un cas sans instabilité (profil sans point d'inflexion) et à une fréquence où il

FIG. 3.7 – Profil utilisé pour les simulations : $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$.FIG. 3.8 – Valeurs propres du modèle de Pridmore-Brown obtenues pour $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$ et $k = 8$.

n'existe pas de mode amont inverse. Nous cherchons à calculer le champ acoustique rayonné par une source sur le domaine Ω^L représenté sur la Fig. 3.5. Nous testons deux sources ayant pour support un disque D_r de rayon $r = 0.1$. Nous notons $(x_s; y_s)$ les coordonnées du centre de la source, la première f_1 est irrotationnelle et a pour expression :

$$f_1(x, y) = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} e^{i\theta} \mathbf{1}_{D_r} \text{ où } \tan \theta = \frac{y - y_s}{x - x_s}$$

et la seconde f_2 est rotationnelle et a pour expression :

$$f_2 = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} (\theta - 2\pi) e^{i\theta} \mathbf{1}_{D_r}$$

3.4.3 Validation

Dans l'article [BDLM], nous nous sommes attachés à valider dans le cas d'un domaine borné l'outil d'interpolation intégral utilisé pour implémenter la vorticité et la méthode itérative mise en place.

Dans cette section, nous nous attachons à valider l'action des PML. Notre première idée était la validation du code grâce à une solution analytique. Les seules solutions connues sont les modes qui sont solutions du problème sans source. Dans le cas d'une portion de conduit [BDLM], nous supposons le déplacement et la vorticité connus sur les bords du domaine ce qui nous permettait de traiter le cas des modes. En présence de couches PML, nous ne savons plus le faire car le comportement exponentiellement croissant des modes aval (respectivement amont) dans la couche PML amont (resp. aval) ne permet pas d'évaluer la vorticité par la formule de convolution. Nous avons décidé d'étudier qualitativement le rôle des PML. Nous

avons vérifié que la solution ne change pas lorsqu'on modifie légèrement soit la position ou la longueur des couches PML soit le raffinement.

A Validation du caractère transparent des couches PML

Pour ces simulations, nous avons construit trois maillages ($pas_x = pas_y = 0.05$) composés de domaines d'intérêts de longueur L_b différentes. Quelque soit le maillage, les caractéristiques des couches PML encadrant le domaine d'intérêt sont identiques : $L = 0.5$ et $\alpha = 0.65 - 0.65i$. Il est à noter que le pas choisi ($pas_x = pas_y = 0.05$) est suffisant puisque la plus petite longueur d'onde acoustique est $\frac{2\pi}{\beta_{\max}} = \frac{2\pi}{5.86} = 1.07$ (cf. Fig. 3.8) et qu'il y a donc plus de dix points par longueur d'onde. Nous désirons tester ici l'influence de la position des frontières artificielles (frontières couche PML/domaine d'intérêt d'abscisses $x = x_m$ et $x = x_p$) sur le résultat. Nous nommons les maillages $\overline{\mathbb{M}}_{20}$ ($L_b = 2.5$), $\overline{\mathbb{M}}_{25}$ ($L_b = 2$) et $\overline{\mathbb{M}}_{33}$ ($L_b = 1.5$). L'indice du maillage est donné par le pourcentage que représente la longueur des couches PML par rapport à celle du domaine d'intérêt : $100 \frac{L_b}{L}$. Nous avons choisi de considérer le rayonnement de la source f_1 placée au milieu du domaine de calcul pour pouvoir comparer le comportement du déplacement à proximité de celle-ci. Nous calculons le déplacement horizontal rayonné par la source en utilisant les différents maillages mais avec le même nombre d'itérations. Partant du champ initial $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ partout, nous observons qu'au bout de trente itérations la méthode itérative a convergé quel que soit le maillage. La solution est alors représentée en Fig. 3.9. A proximité de la source, nous obtenons bien que la solution est indépendante de la position de la frontière artificielle, ce qui nous assure du bon fonctionnement des couches PML.

B Influence de la longueur des couches PML

Pour ces simulations, nous avons construit trois maillages structurés ($pas_x = pas_y = 0.05$) avec un domaine d'intérêt identique ($x_m = 0$ et $x_p = 2$) mais des longueurs L de couches PML différentes. Le premier maillage noté \mathbb{M}_{25} a des couches PML quatre fois moins longues que le domaine d'intérêt ($L = 0.5$). Le deuxième \mathbb{M}_{10} ($L = 0.2$), le troisième \mathbb{M}_5 ($L = 0.1$) correspondent respectivement à des couches dix fois et vingt fois moins longues que le domaine d'intérêt. L'indice du maillage est donné par le pourcentage que représente la longueur des couches PML par rapport à celle du domaine d'intérêt : $100 \frac{L_b}{L}$. Nous calculons le déplacement horizontal rayonné par la source f_1 en utilisant les différents maillages mais avec le même nombre d'itérations. Partant du champ initial $\mathbf{u} = \mathbf{e}_x$ partout, nous observons qu'au bout de trente itérations la méthode itérative a convergé quel que soit le maillage. La solution est alors représentée en Fig. 3.10.

Visuellement la solution obtenue dans le domaine d'intérêt semble la même pour les deux premières couches. La dernière est quant à elle différente. Si les couches sont trop courtes, elles ne peuvent agir efficacement et la solution obtenue est fautive. Plus précisément si nous nous intéressons à la solution obtenue sur le domaine d'intérêt des maillages \mathbb{M}_{25} et \mathbb{M}_{10} (Fig. 3.11), nous voyons que la solution est légèrement différente sur \mathbb{M}_{10} (tourbillons plus intenses près de la couche PML aval), ce qui signifie que les couches de longueur $L \leq 0.2$ sont trop courtes.

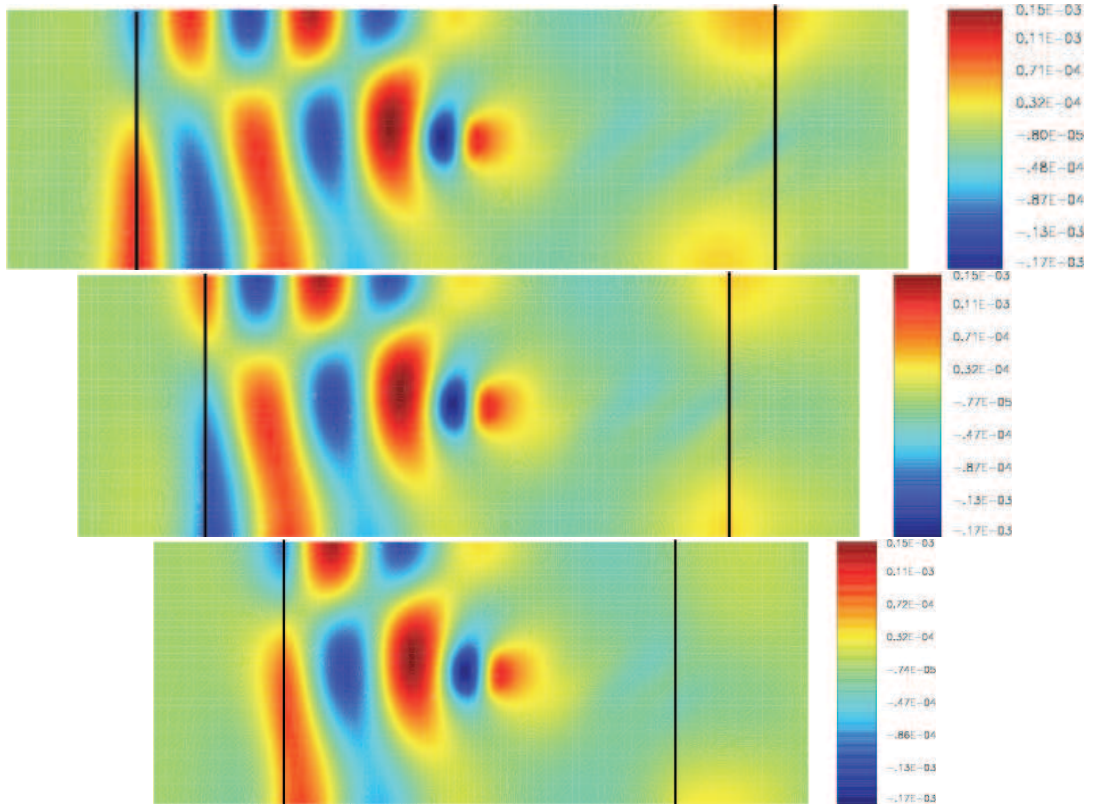


FIG. 3.9 – Composante horizontale du déplacement u_x obtenue respectivement (de haut en bas) sur les maillages \bar{M}_{20} ($L_b = 2.5$), \bar{M}_{25} ($L_b = 2$) et \bar{M}_{33} ($L_b = 1.5$).

C Influence du pas du maillage

Pour tester l'influence du raffinement du maillage sur la solution, nous étudions un domaine de dimensions $x_m = 0$, $x_p = 2$ et $L = 0.5$ que nous discrétisons différemment selon les maillages. Par hypothèse, nous supposons les pas selon les deux directions égaux. Nous considérons comme maillage de référence, le maillage M^1 dont le pas est égal à 0.1. Pour noter les autres maillages, nous utilisons comme indice le rapport entre le pas de discrétisation du maillage étudié et celui de M^1 . Nous obtenons ainsi deux autres maillages $M^{\frac{1}{2}}$ et $M^{\frac{1}{4}}$ de pas 0.05 et 0.025. Le nombre d'éléments des maillages est multiplié par quatre à chaque raffinement : 300 éléments pour M^1 , 1200 pour $M^{\frac{1}{2}}$ et 4800 pour $M^{\frac{1}{4}}$. La composante horizontale du déplacement obtenue sur chacun de ces maillages est représentée sur la Fig. 3.12. Les solutions obtenues après 30 itérations sur les maillages ($M^{\frac{1}{4}}$ et $M^{\frac{1}{2}}$) sont similaires. Seule la solution obtenue sur le maillage le moins raffiné M^1 diffère des autres ce à quoi on pouvait s'attendre. Analysons maintenant les phénomènes physiques apparaissant dans les résultats.

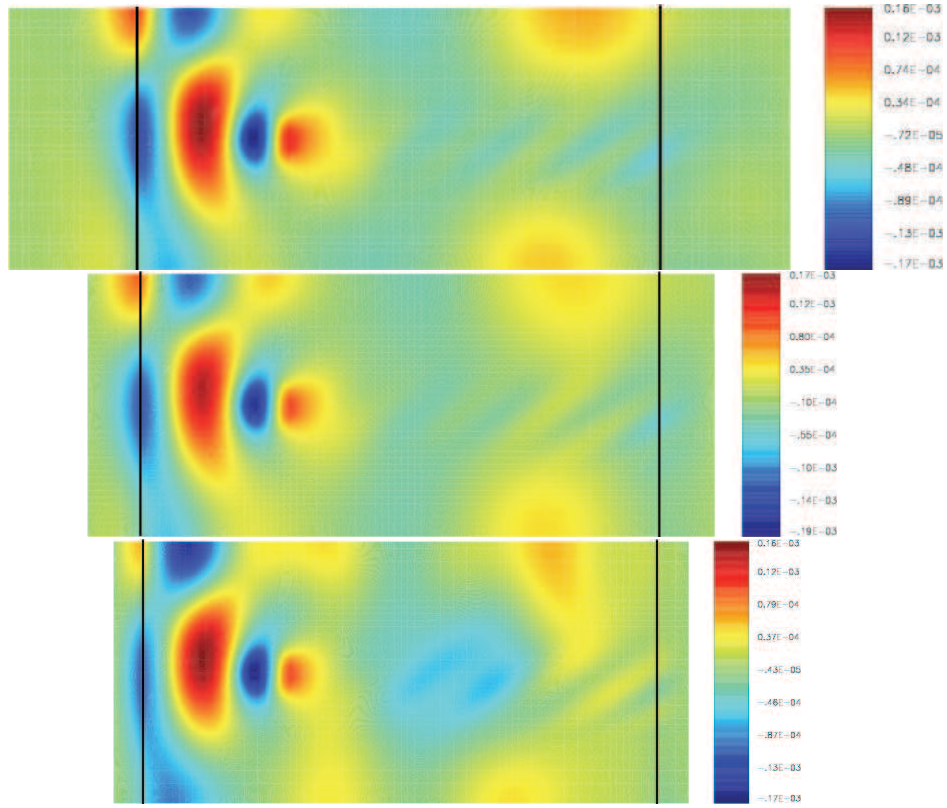


FIG. 3.10 – Composante horizontale du déplacement u_x obtenue respectivement (de haut en bas) sur les maillages M_{25} ($L = 0.5$), M_{10} ($L = 0.2$) et M_5 ($L = 0.1$).

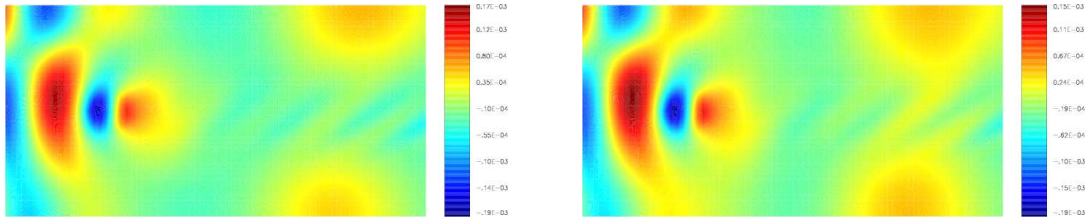


FIG. 3.11 – Composante horizontale du déplacement u_x obtenue sur le domaine d'intérêt respectivement (de gauche à droite et de haut en bas) des maillages M_{25} et M_{10} .

3.4.4 Résultats numériques

A Cas de la source irrotationnelle f_1

Dans un premier temps, nous avons placé la source à droite pour visualiser clairement le champ remontant l'écoulement comme sur la Fig.3.13.

Ce champ a une petite longueur d'onde. Plus précisément, parmi les trois modes propagatifs du guide (Fig. 3.14) qui le composent, ce champ est essentiellement constitué du mode II_U représenté sur la Fig. 3.14 en haut.

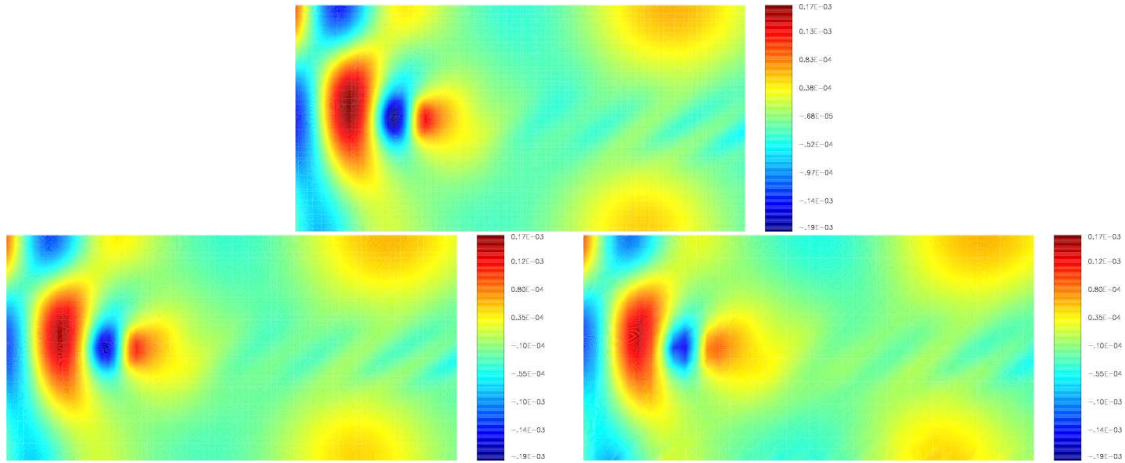


FIG. 3.12 – Composante horizontale du déplacement u_x obtenue respectivement (de gauche à droite et de haut en bas) sur les maillages $M^{\frac{1}{4}}$ (4800 éléments), $M^{\frac{1}{2}}$ (1200 éléments) et M^1 (300 éléments).

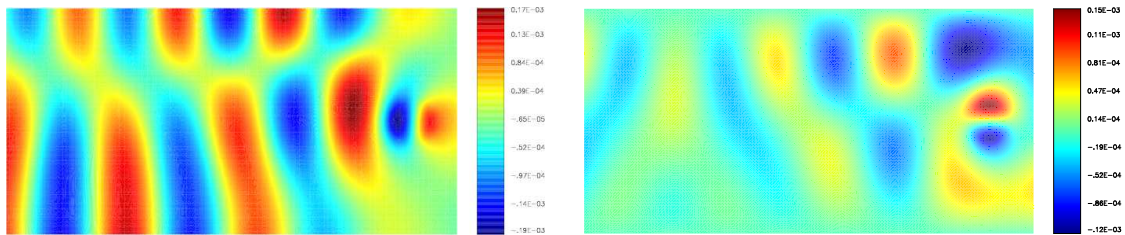


FIG. 3.13 – Composante horizontale (à gauche) et verticale (à droite) obtenues pour la source irrotationnelle f_1 centrée en $(1.8; 0.5)$.

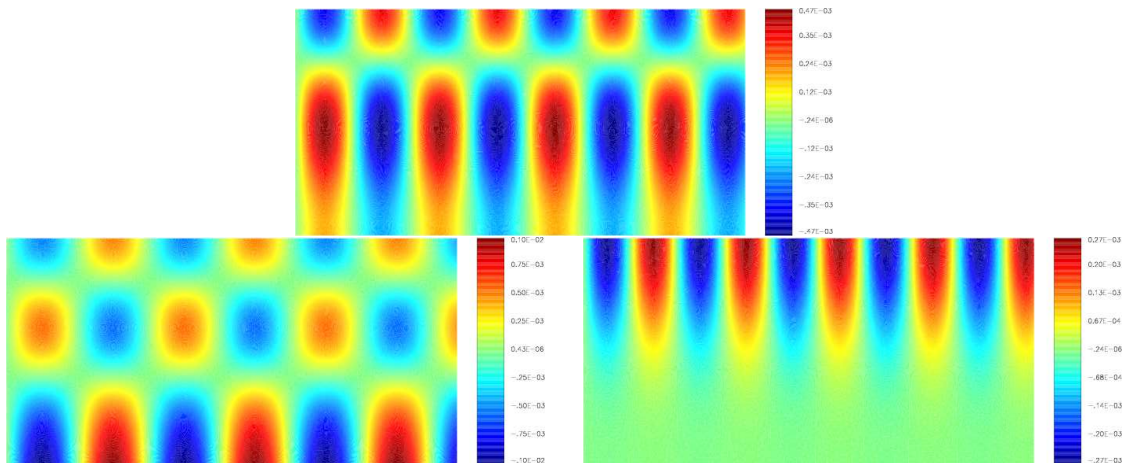


FIG. 3.14 – Composantes horizontales obtenues pour les modes 0_D (en bas à gauche), I_D (en haut) et II_D (en bas à droite) obtenus pour $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$ et $k = 8$.

Dans un second temps pour voir le champ aval, on place la source à gauche.

Nous reconnaissons sur la Fig. 3.15 des structures acoustiques à grande longueur d'onde (en particulier pour u_y). En revanche il est difficile de trouver si elles correspondent à un

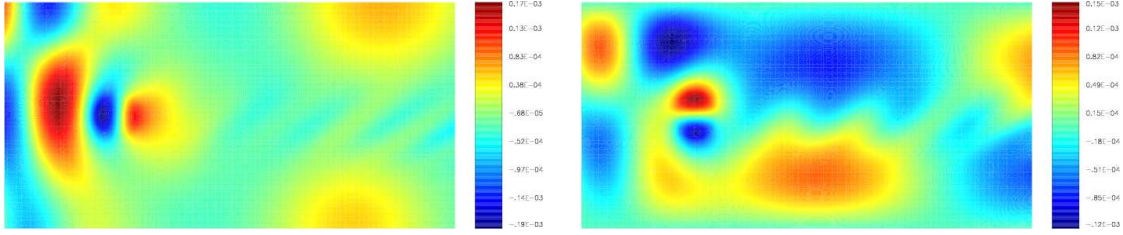


FIG. 3.15 – Composante horizontale (à gauche) et verticale (à droite) du déplacement obtenues pour la source irrotationnelle f_1 centrée en $(0.5; 0.5)$.

mode particulier du guide. Nous remarquons de plus des stries obliques qui correspondent aux modes hydrodynamiques : à y fixé, ces structures se déplacent à la vitesse locale $M(y)$, d'où l'aspect oblique. Pour mieux voir l'aspect hydrodynamique du champ rayonné, nous représentons la vorticité $\psi = \text{rot } \mathbf{u}$ sur la Fig. 3.16.

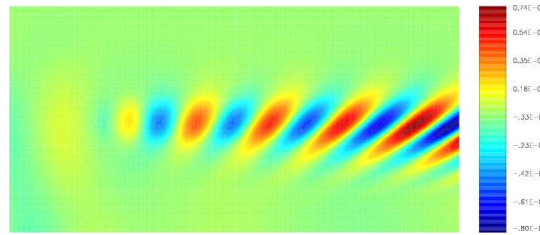


FIG. 3.16 – Vorticité obtenue pour la source irrotationnelle f_1 centrée en $(0.5; 0.5)$.

En effet comme l'acoustique est une quantité essentiellement irrotationnelle, nous verrons ainsi mieux les quantités hydrodynamiques. Nous obtenons des structures obliques convectées par l'écoulement. À $y = 0.5$, puisque $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{k}{M}$, nous retrouvons graphiquement (Fig. 3.16) la longueur d'onde théorique $\lambda = \frac{2\pi M(0.5)}{k} = 0.33$.

Enfin nous remarquons qu'à l'aval, "l'acoustique" (c'est-à-dire le champ total moins les stries) est peu intense. Ceci signifie que l'hydrodynamique masque l'acoustique. Cet effet ne s'observe pas en amont de la source car la vorticité y est très faible (cf. Fig. 3.16). Ce phénomène est particulièrement visible lors du processus itératif. Si nous partons de la fonction nulle, nous remarquons sur les premières itérations du calcul (Fig. 3.17) que l'acoustique se met en place rapidement puis peu à peu s'efface au profit des structures hydrodynamiques qui apparaissent.

B Cas de la source rotationnelle f_2

Si maintenant nous considérons la source rotationnelle f_2 , nous obtenons le déplacement de la Fig. 3.18. Clairement l'hydrodynamique prédomine dans ce cas sur l'acoustique. La vorticité (Fig. 3.19 en haut) est maintenant constituée de deux composantes : la vorticité liée à la source ψ_f^L (Fig. 3.19 à gauche) et la vorticité générée par l'acoustique $A_\alpha^L \mathbf{u}_L^\alpha$ (Fig. 3.19 à droite). Si nous distinguons dans la vorticité ces différentes contributions (Fig. 3.19), nous voyons que ψ_f^L est nettement prépondérant.

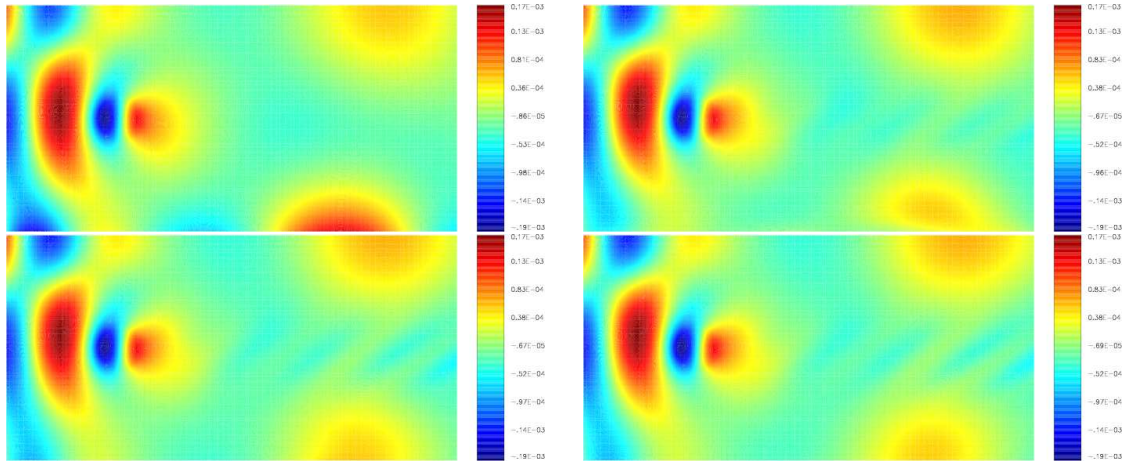


FIG. 3.17 – Composante horizontale du déplacement obtenue lors des quatre premières itérations pour la source irrotationnelle f_1 centrée en $(0.5; 0.5)$.

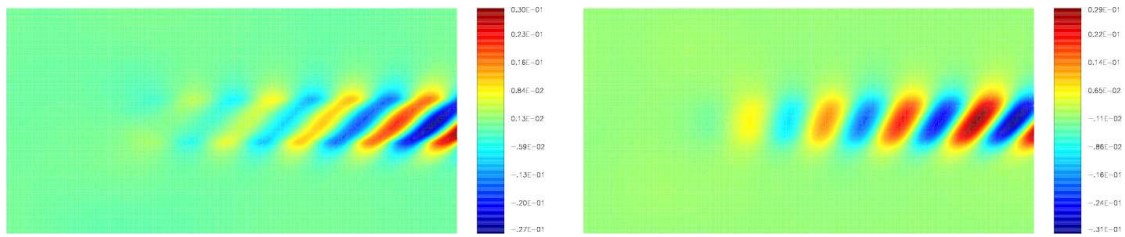


FIG. 3.18 – Composante horizontale (en haut à gauche), composante verticale (en haut à droite) du déplacement calculés pour la source rotationnelle f_2 centrée en $(0.5; 0.5)$.

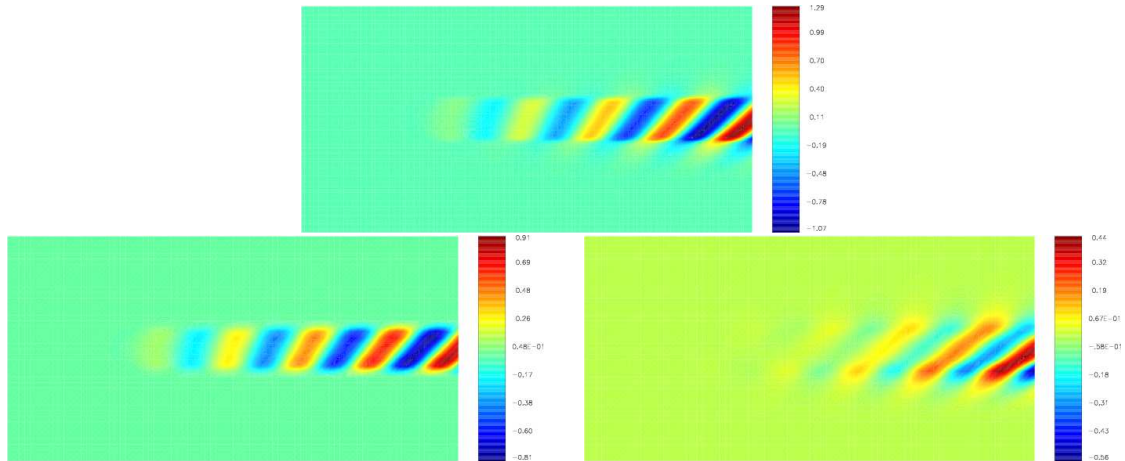


FIG. 3.19 – Cas de la source rotationnelle : vorticité totale (en haut) obtenue en sommant la vorticité liée à la source $\tilde{\psi}_f^L$ et celle liée au déplacement $A_\alpha^L u_\infty^\alpha$.

3.5 Modèle faible Mach avec couches PML

Lors de l'étude du problème dissipatif nous avons établi pour les écoulements lents un nouveau modèle pour les sources irrotationnelles. Celui-ci consistait à approcher la vorticité

ψ^ε par la quantité suivante :

$$\frac{2iM'(y)}{k_\varepsilon} \partial_x u_x(x, y)$$

L'équation hydrodynamique dans un milieu avec couches PML étant $D_\alpha^2 \psi_\infty^\alpha = 2M'D_\alpha(\check{\alpha} \partial_x (\mathbf{u}_\infty^\alpha)_x) + \text{rot}_\alpha \mathbf{f}$, l'approximation obtenue de la vorticité ψ_L^α est pour une source irrotationnelle :

$$\tilde{\psi}_L^\alpha = \tilde{A}_\alpha^L \mathbf{u} \quad \text{où} \quad \tilde{A}_\alpha^L \mathbf{u} = \frac{2iM'}{k} \check{\alpha} \partial_x u_x$$

Avant d'étudier le problème avec couches PML, nous regardons ce que deviennent les modes dans le domaine d'intérêt ($\check{\alpha} = 1$) lorsqu'on régularise avec la vorticité approch  e.

Remarque 18 *Ce calcul ne peut être effectué pour le modèle de Galbrun régularisé avec la formule exacte de la vorticité. Le caractère non local de l'opérateur A_α^∞ empêche tout calcul de modes.*

3.5.1   tude du spectre des valeurs propres

On considère le conduit infini Ω et on cherche les solutions de la forme

$$\mathbf{u}(x, y) = \bar{\mathbf{u}}(y) e^{i\beta x}$$

de

$$\begin{cases} D^2 \mathbf{u} - \nabla \text{div } \mathbf{u} + \text{rot} \left(\text{rot } \mathbf{u} - \frac{2iM'}{k} \partial_x u_x \right) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{rot } \mathbf{u} = \frac{2iM'(y)}{k} \partial_x u_x & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Autrement dit, à k fixé, le problème est : Trouver $\beta \in \mathbb{C} / \exists (\bar{u}_x; \bar{u}_y) \neq (0; 0)$ solution de

$$\begin{cases} \bar{D}^2 \bar{u}_x - \bar{\Delta} \bar{u}_x + \frac{2\beta}{k} (M'' \bar{u}_x + M' \bar{u}'_x) = 0 & \text{sur }]0; h[\\ \bar{D}^2 \bar{u}_y - \bar{\Delta} \bar{u}_y - \frac{2i\beta^2 M'}{k} \bar{u}_x = 0 & \text{sur }]0; h[\\ \bar{u}_y = 0 & \text{en } y = 0 \text{ et } y = h \\ \bar{u}'_x = \frac{2M'\beta}{k} \bar{u}_x & \text{en } y = 0 \text{ et } y = h \end{cases} \quad (3.15)$$

où $\bar{D} = -i(k - M\beta)$ et $\bar{\Delta} = -\beta^2 + d^2/dy^2$.

On remarque que contrairement au système en u_y , le système en u_x est découplé de u_y .

Par conséquent, on distingue parmi les modes ceux pour lesquels $\bar{u}_x \equiv 0$ (modes transverses) de ceux pour lesquels $\bar{u}_x \neq 0$ (modes non transverses). Chacune de ces familles de modes peut être d  termin  e en résolvant un problème aux valeurs propres scalaire. En effet, calculer les modes transverses revient à résoudre le problème suivant :

Trouver $\beta \in \mathbb{C} / \exists \bar{u}_y \neq 0$ solution de

$$\begin{cases} (\beta^2 - (k - M\beta)^2) \bar{u}_y - \bar{u}''_y = 0 & \text{sur }]0; h[\\ \bar{u}_y = 0 & \text{en } y = 0 \text{ et } y = h. \end{cases} \quad (3.16)$$

Calculer les modes non transverses revient à résoudre le problème suivant :

Trouver $\beta \in \mathbb{C} / \exists \bar{u}_x \neq 0$ solution de

$$\begin{cases} (\beta^2 - (k - M\beta)^2) \bar{u}_x - \bar{u}''_x + \frac{2\beta}{k} (M'' \bar{u}_x + M' \bar{u}'_x) = 0 & \text{sur }]0; h[\\ \bar{u}'_x = \frac{2M'\beta}{k} \bar{u}_x & \text{en } y = 0 \text{ et } y = h, \end{cases} \quad (3.17)$$

puis à chercher la composante transverse \bar{u}_y solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \bar{D}^2 \bar{u}_y - \bar{\Delta} \bar{u}_y = \frac{2i\beta^2 M'}{k} \bar{u}_x & \text{sur }]0; h[\\ \bar{u}_y = 0 & \text{en } y = 0 \text{ et } y = h \end{cases}$$

Ce dernier problème n'a une solution que si la constante de propagation β n'est pas une valeur propre des modes transverses. Nous supposons donc que les spectres des modes transverses et non transverses sont différents, ce qui est à confirmer mais qui semble vrai numériquement pour des écoulements à gradient non faible.

Nous avons choisi de résoudre ces problèmes par la méthode de collocation de Chebyshev. Le détail des calculs est fourni dans l'annexe A.

Considérons le cas pour $k = 8$ de l'écoulement de nombre de Mach $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$ représenté sur la Fig. 3.20. Nous désirons au moyen de cet écoulement, comparer les

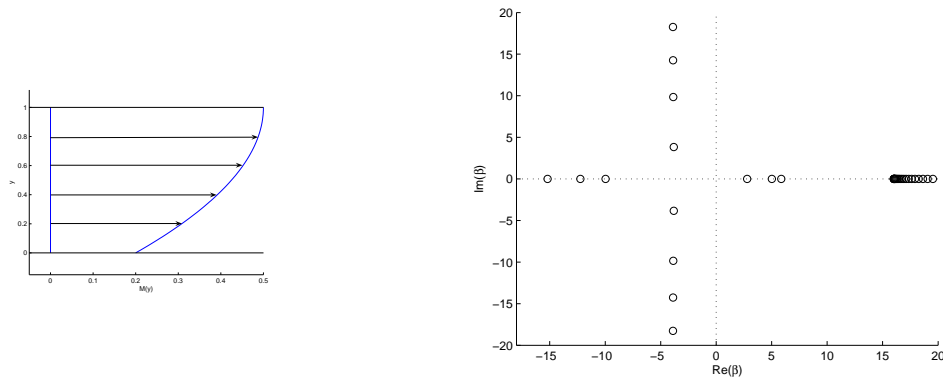


FIG. 3.20 – Profil $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$ et valeurs propres obtenues pour cet écoulement et $k = 8$ par le modèle de Pridmore-Brown

spectres obtenus dans le cas du modèle de Pridmore-Brown (Fig. 3.20) que nous considérons comme exact et dans le cas du modèle d'approximation faible Mach (Fig. 3.21). Nous

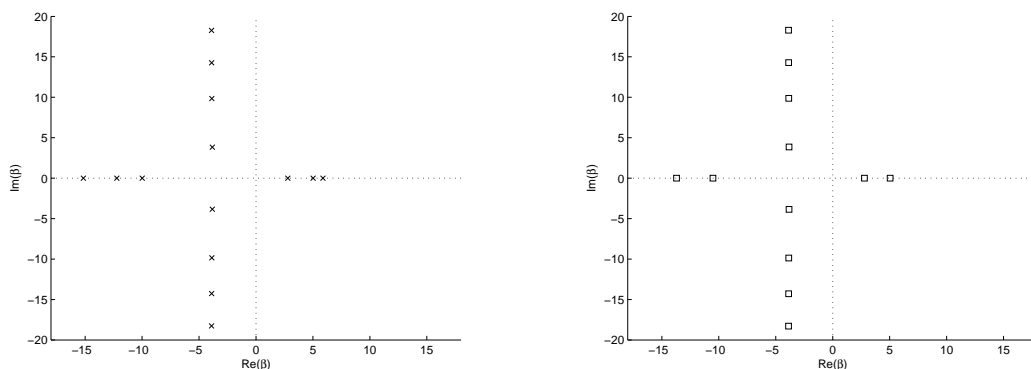


FIG. 3.21 – Valeurs propres des modes non transverses (à gauche) et transverses (à droite) obtenues pour $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$ et $k = 8$ par le modèle faible Mach.

constatons sur la Fig. 3.21 que sur le spectre obtenu par l'approximation faible Mach le

continuum des modes hydrodynamiques a disparu : nous avons distingué les valeurs propres des modes non transverses *i.e.* composante horizontale non nulle (Fig. 3.21 à gauche) solution de (3.17) de celles des modes transverses vérifiant (3.16) et représentées sur la Fig. 3.21 à droite. Nous nous apercevons sur la Fig. 3.22 que les valeurs propres des modes non transverses du modèle faible Mach coïncident avec les valeurs propres des modes "acoustiques" du modèle de Pridmore-Brown. L'approximation faite par le modèle faible Mach semble

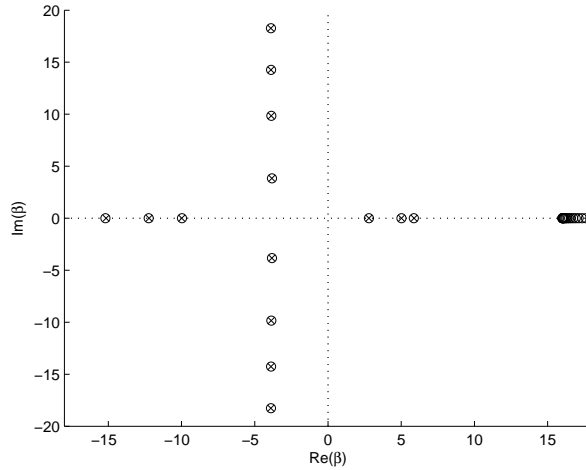


FIG. 3.22 – Superposition des valeurs propres obtenues par le modèle de Pridmore-Brown et des valeurs propres non transverses obtenues par le modèle faible Mach.

conserver l'acoustique et n'agir que sur l'hydrodynamique en redistribuant dans le plan complexe les valeurs propres des modes hydrodynamiques.

3.5.2 Les formules pour un milieu avec PML

A Détermination du problème approché

Le problème approché est :

$$\boxed{\text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}}^{\alpha} \in V_{\Omega^L} \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega^L}, \quad \tilde{a}_{\alpha}^L(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}}^{\alpha}, \mathbf{v}) = \tilde{\ell}_{\alpha}^L(\mathbf{v})} \quad (3.18)$$

où $\tilde{a}_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \left(\frac{-k^2}{\alpha} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \alpha \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} \right) + \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u} - \tilde{A}_{\alpha}^L \mathbf{u} \right) \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}$ et $\tilde{\ell}_{\alpha}^L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \mathbf{f} \bar{\mathbf{v}}$

Remarque 19 *D'un point de vue théorique, l'opérateur hydrodynamique approché \tilde{A}_{α}^L étant un opérateur d'ordre 1, nous ne pouvons plus prouver la compacité du terme où intervient \tilde{A}_{α}^L comme nous l'avons fait pour le modèle exact. Pour prouver le caractère bien posé du problème (3.18), nous intégrerons ce terme à la partie coercive.*

Numériquement cet opérateur étant local, nous ne sommes plus contraints de travailler sur des maillages structurés. De plus le terme où intervient la vorticité étant maintenant un

terme classique éléments finis, la matrice obtenue est creuse : le problème peut être résolu de manière directe.

B Caractère bien posé du problème

Nous souhaitons démontrer dans cette section le caractère bien posé du problème approché en supposant que α satisfait les conditions (3.1) dans les couches absorbantes :

THÉORÈME 10 *Le problème variationnel (3.18) relève de l'alternative de Fredholm si M' est faible.*

DÉMONSTRATION.

Pour le modèle "exact" avec couches PML (théorème 9), nous avons démontré que la formulation variationnelle contenait la somme d'une partie coercive et d'une perturbation compacte. La continuité de l'opérateur A_α^L de V_{Ω^L} dans $H^1(\Omega^L)$ était indispensable pour prouver la compacité.

Dans le modèle faible Mach, l'opérateur \tilde{A}_α^L n'est pas un opérateur d'ordre 0 mais d'ordre 1 : \tilde{A}_α^L n'est continu que de V_{Ω^L} dans $L^2(\Omega^L)$. Nous ne pouvons donc pas prouver la compacité du terme où intervient \tilde{A}_α^L . Pour pallier cette difficulté, nous décomposons la forme \tilde{a}_α^L différemment du cas "exact" en intégrant le terme contenant la vorticité à la partie coercive. Soient donc

$$\begin{aligned} \tilde{b}_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^L} (\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\check{\alpha}} \int_{\Omega^L} \operatorname{div}_x \mathbf{u} \operatorname{div}_x \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\check{\alpha}} \int_{\Omega^L} (\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} - \tilde{A}_\alpha^L \mathbf{u}) \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}} \text{ et} \\ \tilde{c}_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^L} \left(-\frac{\check{\alpha} + k^2}{\check{\alpha}} \mathbf{u}\bar{\mathbf{v}} - \frac{2ikM}{k} \partial_x \mathbf{u}\bar{\mathbf{v}} \right) \text{ telles que} \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{b}_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{c}_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Nous remarquons que : $\tilde{b}_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\check{\alpha}} \int_{\Omega^L} \tilde{A}_\alpha^L \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}} = b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Omega^L} 2iM' \check{\alpha} \partial_x u_x \frac{\operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}}{\check{\alpha}}$. Pour prouver la coercivité de \tilde{b}_α^L , nous allons minorer la partie réelle. Lors de la démonstration du théorème 10, nous avons établi que

$$\Re(b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})) = \int_{\Omega^L} \left(|\mathbf{u}|^2 + \Re(\check{\alpha})(1 - M^2) |\partial_x \mathbf{u}|^2 + \frac{\Re(\check{\alpha})}{|\check{\alpha}|^2} |\partial_y \mathbf{u}|^2 \right)$$

Nous minorons    présent la quantité $\Re\left(\int_{\Omega^L} \frac{-1}{\check{\alpha}} \tilde{A}_\alpha^L \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{u}}\right) = \Re\left(-\int_{\Omega^L} \frac{2iM'}{k} \partial_x u_x \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{u}}\right)$.

En utilisant la relation suivante $\forall z \Re(z) \geq -|z|$ et l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Re\left(\int_{\Omega^L} \frac{1}{\check{\alpha}} \tilde{A}_\alpha^L \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{u}}\right) &\geq -\frac{\max(|M'|)}{k} \left(\int_{\Omega^L} |\partial_x u_x|^2 + \int_{\Omega^L} |\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u}|^2 \right) \\ &\geq -\frac{\max(|M'|)}{k} \int_{\Omega^L} \left((1 + 2|\check{\alpha}|^2) |\partial_x \mathbf{u}|^2 + 2|\partial_y \mathbf{u}|^2 \right) \end{aligned}$$

car $\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} = \check{\alpha} \partial_x u_y - \partial_y u_x$.

Nous concluons que

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{b}_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})) &\geq \int_{\Omega^L} \left(|\mathbf{u}|^2 + \Re(\check{\alpha})(1 - s_0) |\partial_x \mathbf{u}|^2 + \frac{\Re(\check{\alpha})}{|\check{\alpha}|^2} |\partial_y \mathbf{u}|^2 \right) - \int_{\Omega^L} \frac{\max(|M'|)}{k} \left((1 + 2|\check{\alpha}|^2) |\partial_x \mathbf{u}|^2 + 2|\partial_y \mathbf{u}|^2 \right) \\ &\geq \left(\sigma_\alpha - \frac{\max(|M'|)}{k} \max(1 + 2|\check{\alpha}|^2; 2) \right) \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

où $\sigma_\alpha = \min\left(1 - s_0; \frac{\Re(\alpha)(1-s_0)}{|\alpha|^2}; \frac{\Re(\alpha)}{|\alpha|^2}\right)$. Pour que la coercivité soit assurée, il suffit que

$$\sigma_\alpha > \max(|M'|) \frac{\max\left(1 + 2|\tilde{\alpha}|^2; 2\right)}{k}$$

ce qui est vérifié pour des nombres de Mach à faible variation. Ayant prouvé la coercivité de la forme \tilde{b}_α^L , il ne reste plus qu'à prouver la compacité de la forme \tilde{c}_α^L . Or cette propriété a été démontrée dans la démonstration du théorème 9.

Le problème (3.11) vérifie donc les hypothèses requises pour l'application de l'alternative de Fredholm. □

3.5.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous souhaitons montrer que pour des sources irrotationnelles, l'approximation faible Mach est une approximation qui reste pertinente pour des écoulements relativement rapides.

Nous avons montré dans le cas du problème dissipatif que la solution en présence d'un écoulement lent est mieux approchée par la solution du modèle faible Mach (erreur en M^2) que par la solution obtenue en négligeant l'écoulement (erreur en M). Nous montrons numériquement que ce résultat reste vrai sans dissipation mais en présence de couches PML, et surtout qu'il reste valide pour des valeurs intermédiaires de M . Nous ne pouvons pas tester M très petit car numériquement nous ne pouvons pas évaluer l'intégrale oscillante.

Dans ce but, considérons pour $k = 8$ une famille de profils semi-paraboliques de paramètre M :

$$M(y) = M \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + \frac{1}{3} \right).$$

construits tels que $M_{\min} = \frac{5M}{6}$ et $M_{\max} = \frac{2M}{3}$. Nous représentons, sur la Fig. 3.23, en fonction du paramètre M les erreurs commises en négligeant l'écoulement (la solution obtenue est alors \mathbf{u}_0), en régularisant avec une vorticité nulle ($\mathbf{u}_{M,0}$) ou en régularisant avec la vorticité faible Mach (nous noterons $\mathbf{u}_{M,\psi}$ dans cette section la solution du problème faible Mach). Pour une meilleure lisibilité, nous représentons ces trois courbes dans un plan échelle logarithmique. Pour information,

M	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
log(M)	-1.2040	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231	-0.1054	0

Sur la Fig. 3.23, nous observons pour l'erreur $\|\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0\|_{L^2}$ un comportement linéaire de coefficient directeur inférieur à 1. Ce coefficient directeur bas pourrait être d   à une approximation de \mathbf{u}_M (et donc de la vorticité) sur un maillage trop l  che. Malheureusement pour des raisons de place de mémoire, nous n'avons pu faire une simulation sur un maillage plus fin. Nous voyons aussi que pour $M \geq 0.3$, \mathbf{u}_M est très mal approché par \mathbf{u}_0 .

Si nous considérons maintenant la courbe d'erreur du modèle faible Mach, au dessous de -0.9 ($M = 0.4$), M est trop petit, la formule de convolution est mal interpol  e et la méthode itérative ne converge pas. Pour $0.4 \leq M \leq 0.7$, l'erreur reste relativement faible et le coefficient directeur des droites composant cette courbe augmente et avoisine 2, la valeur théorique du

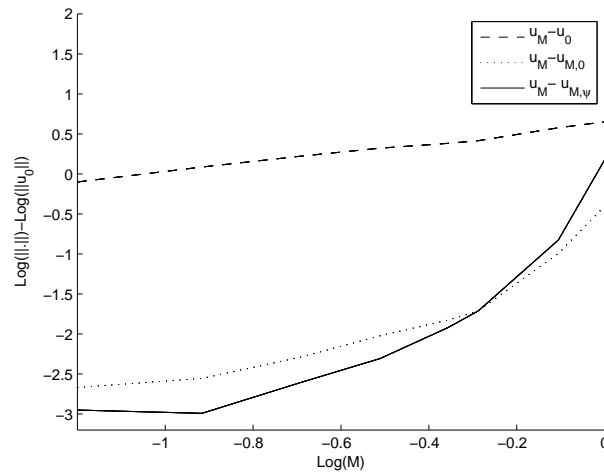


FIG. 3.23 – Courbes de $\log \left(\left\| \frac{\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_0}{\mathbf{u}_0} \right\|_{L^2} \right)$, $\log \left(\left\| \frac{\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_{M,0}}{\mathbf{u}_0} \right\|_{L^2} \right)$ et $\log \left(\left\| \frac{\mathbf{u}_M - \mathbf{u}_{M,\psi}}{\mathbf{u}_0} \right\|_{L^2} \right)$ en fonction de $\log(M)$.

cas dissipatif (cf. théorème 8). En revanche au dessus de $-0.5 (M = 0.7)$, $\mathbf{u}_{M,\psi}$ approxime mal \mathbf{u}_M , ce qui est normal puisqu'il s'agit d'un modèle faible Mach. Cependant si on régularise avec $\psi = 0$, nous obtenons une meilleure approximation. Nous avons choisi de régulariser avec $\psi = 0$ car numériquement ψ est toujours trouvé petit car la source est irrotationnelle et les gradients des écoulements sont pris faible. En conclusion pour $M \leq 0.7$, le modèle faible Mach est pertinent.

Si nous reprenons maintenant le cas étudié pour le modèle exact et comparons les résultats obtenus par les deux modèles, le déplacement horizontal obtenu par le modèle exact (Fig. 3.24 en haut), par le modèle sans écoulement (Fig. 3.24 en bas à gauche) et par le modèle faible Mach (Fig. 3.24 en bas à droite), nous retrouvons ce résultat. En effet, la meilleure

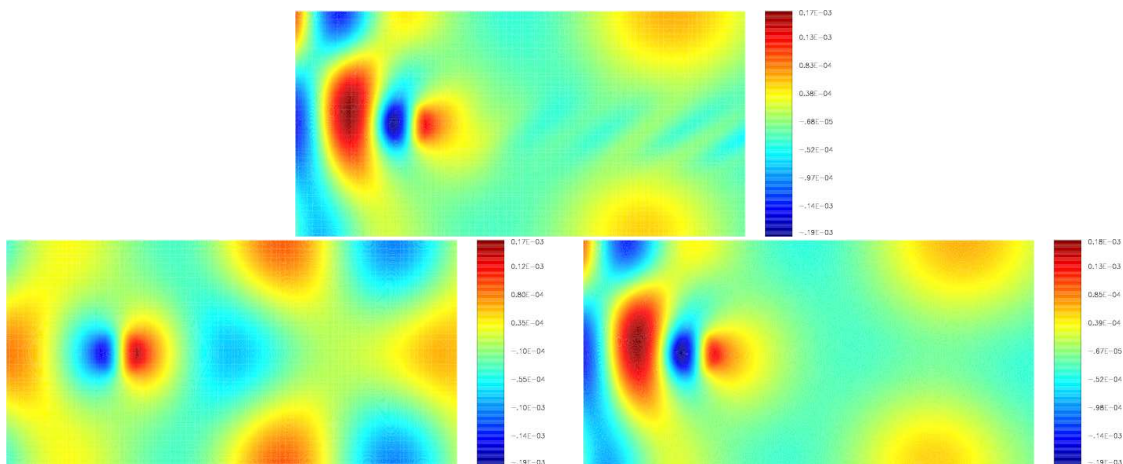


FIG. 3.24 – Cas source irrotationnelle : déplacement horizontal obtenu par le modèle exact (en haut), le modèle sans écoulement (en bas à gauche) et le modèle faible Mach (en bas à droite).

approximation est obtenue par le modèle faible Mach : la solution obtenue en négligeant complètement l'écoulement est d'ailleurs assez éloignée des deux autres solutions. Il est à noter que l'écoulement ici étudié est un écoulement relativement rapide ($\frac{1}{h} \int_0^h M = 0.4$).

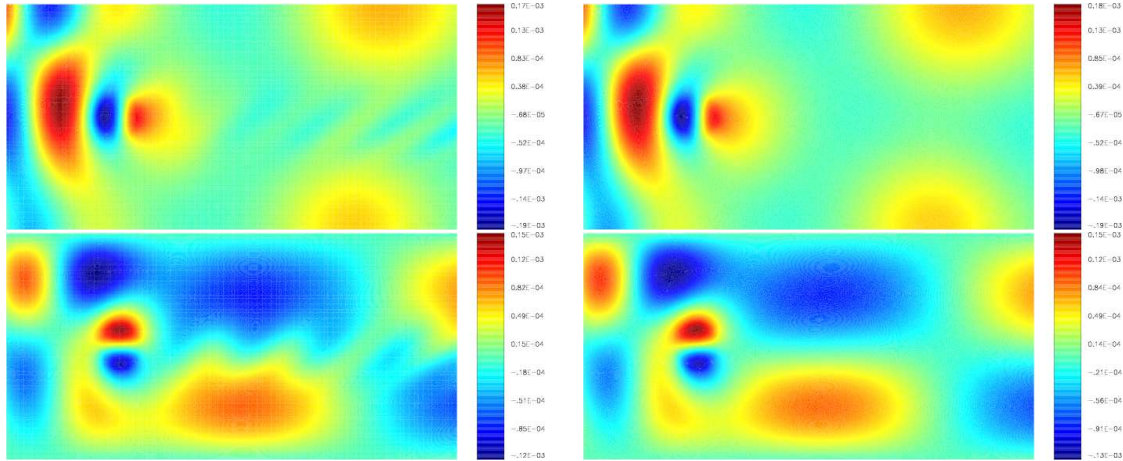


FIG. 3.25 – Comparaison des déplacements horizontaux (en haut) et verticaux (en bas) obtenus pour les modèles exact (à gauche) et approché (à droite).

En complément, nous constatons sur la Fig. 3.25 que le modèle faible Mach supprime les tourbillons en préservant le champ acoustique. La disparition des stries est cohérente avec la redistribution dans le plan complexe des valeurs propres des modes hydrodynamiques (cf. Fig. 3.21). Enfin la source étant irrotationnelle, sans doute que les seuls modes excités sont les modes acoustiques (à faible rotationnel). Ceci expliquerait pourquoi le modèle faible Mach fournit une bonne approximation : c'est parce qu'il ne semble modifier que les modes hydrodynamiques (à fort rotationnel). Regardons maintenant la vorticité et la pression. Sur

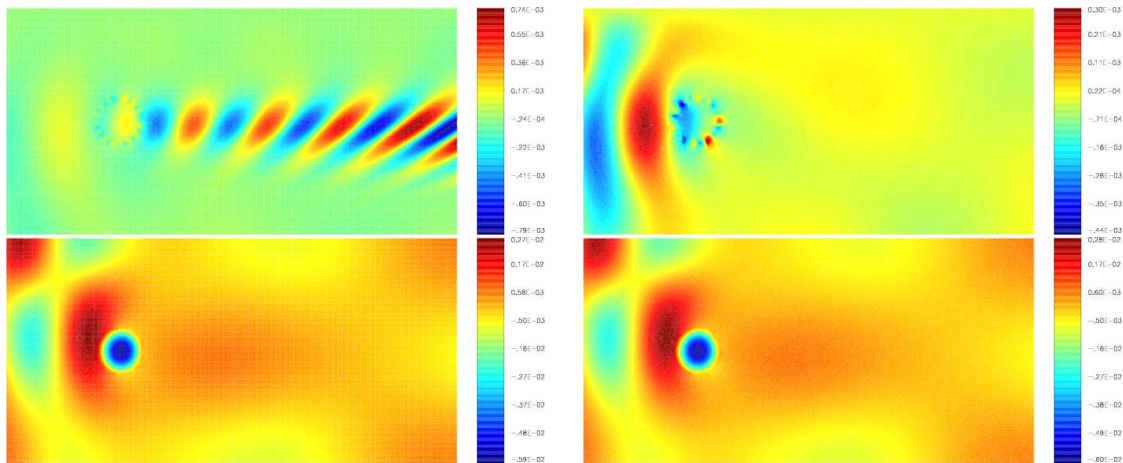


FIG. 3.26 – Vorticité (en haut) et pression (en bas) calcul es pour les modèles exact (  gauche) et approché (  droite).

la Fig. 3.26, nous voyons que les pressions ($p = -\operatorname{div} \mathbf{u}$) obtenues par les deux modèles sont exactement les mêmes : l'acoustique est donc conserv e par le modèle approché.

3.A En complément : Détails des aspects numériques

Cette annexe rédigée en anglais est issue d'un article écrit avec Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Guillaume Legendre et Jean-François Mercier. Cet article intitulé "*Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow*" a été accepté pour publication dans le Journal of Computational and Applied Mathematics. Il porte sur le rayonnement acoustique en présence d'un écoulement en milieu borné. Après avoir présenté le problème, nous montrons la nécessité de régulariser celui-ci avec la vorticité adéquate pour s'assurer de la convergence de la méthode éléments finis utilisée. Avant de présenter quelques résultats numériques, nous détaillons les différentes étapes de l'implémentation : outil d'interpolation intégral utilisé pour implémenter la vorticité et méthode itérative mise en place.

Abstract

This work deals with the numerical simulation, by means of a finite element method, of the time-harmonic propagation of acoustic waves in a moving fluid, using the Galbrun equation instead of the classical linearized Euler equations. This work extends a previous study in the case of a uniform flow to the case of a shear flow. The additional difficulty comes from the interaction between the propagation of acoustic waves and the convection of vortices by the fluid. We have developed a numerical method based on the regularization of the equation which takes these two phenomena into account. Since it leads to a partially full matrix, we use an iterative algorithm to solve the linear system.

Keywords : aeroacoustics, shear flow, Fredholm formulation, FEM

3.A.1 Introduction

Understanding of the propagation of sound in a moving fluid is of particular importance in several industries. A large part of the efforts made in that domain is devoted to the computation of the noise generated and radiated by engines. In this work, we are interested in the simulation of acoustic propagation in the presence of a shear flow, using the so-called Galbrun equation [Gal31].

This peculiar model assumes small perturbations of an isentropic flow of a perfect fluid and is based on a Lagrangian-Eulerian description of the perturbations, in the sense that Lagrangian perturbations of the quantities are expressed in terms of Eulerian variables with respect to the mean flow. It consists of a linear partial differential equation of second order in time and space on the Lagrangian displacement perturbation, which is amenable to variational methods. However, the numerical solution of Galbrun's equation by standard (i.e., nodal) finite element methods is subject to difficulties quite similar to those observed for Maxwell's equations in electromagnetism.

In [BLL01], we proposed a regularized formulation of the time-harmonic Galbrun's equation in presence of a uniform mean flow that allowed the use of nodal finite elements for the discretization of the problem. The application of this method to the case of a shear mean flow is investigated here. Following [BLL01] we consider an artificial problem set in a bounded domain. To deal with more realistic situations, the regularization technique could be coupled with perfectly matched layers (PML) as done in [BBL].

The outline is the following. The problem and the framework used to solve it are presented in subsection 3.A.2. Section 3.A.3 is devoted to the mathematical study of a weak formulation

of this problem. Finally, subsection 3.A.4 is concerned with numerical applications.

3.A.2 Presentation of the problem

Physical setting

We consider an infinite two-dimensional rigid duct of height ℓ , set in the x_1x_2 plane and filled with a compressible fluid. We are interested in the linear propagation of waves in the presence of a subsonic shear mean flow of velocity $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = v(x_2) \mathbf{e}_1$, \mathbf{e}_1 being the unit vector in the x_1 direction, and assuming a time-harmonic dependence of the form $\exp(-i\omega t)$, $\omega > 0$ being the pulsation. In terms of the perturbation of the Lagrangian displacement \mathbf{u} , this problem is modeled by the following equation and boundary condition : *find a displacement \mathbf{u} satisfying*

$$\mathbf{D}^2\mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ in } \mathbb{R} \times [0, \ell], \quad (3.19)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ for } x_2 = 0 \text{ and } x_2 = \ell, \quad (3.20)$$

and an adequate radiation condition at infinity, \mathbf{n} being the unit outward normal to the duct walls. Equation (3.19) is the Galbrun equation, in which the letter D stands for the material derivative in the mean flow with time-harmonic dependence, that is $\mathbf{D}\mathbf{u} = -ik\mathbf{u} + M\partial_{x_1}\mathbf{u}$, with $k = \omega/c_0$ the acoustic wave number and $M = v/c_0$ the Mach number, c_0 being the sound velocity. The right hand side term \mathbf{f} represents an acoustic source placed in the duct. Note that we restrict ourselves to a subsonic shear flow whose Mach number profile $M(x_2)$ is a nonvanishing $C^1([0, \ell])$ function. The previous study dealt with the uniform flow case which corresponds to a constant profile (i.e., $M' \equiv 0$). Considering a less regular or vanishing profile would bring up difficulties which are beyond the scope of this paper.

As solving the problem in an unbounded domain necessitates, as previously mentioned, the determination of a radiation condition (see [BBL] in the uniform flow case) and since this article focuses on the finite element method used to compute a solution to Galbrun's equation, we consider from now on an artificial problem set in a bounded portion of the duct of length L . In what follows, Ω denotes the domain $[0, L] \times [0, \ell]$.

Boundary conditions have now to be prescribed on the vertical boundaries $\Sigma_- = \{0\} \times [0, \ell]$ and $\Sigma_+ = \{L\} \times [0, \ell]$. By analogy with the no flow case, we impose the value of $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Notice that, by linearity of equation (3.19), we can choose this boundary condition to be a homogeneous one, and we now have

$$\mathbf{D}^2\mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (3.22)$$

instead of previous equations (3.19) and (3.20). However, this last problem is not well-posed. We will indeed see in subsection 3.A.2 that, due to the presence of flow, a supplementary boundary condition is required on the vertical boundaries Σ_- and Σ_+ .

Variational framework

When considering the discretization of Galbrun's equation (3.21) by a finite element method, one is confronted with the choice of a variational formulation of the problem, which will, in turn, lead to the use of suitable finite element spaces. As for the second-order form of Maxwell's equations appearing in computational electromagnetism, two main strategies can

be considered, both of which are presented on a model problem of acoustic propagation in a fluid at rest. In the following, it is assumed that the reader is familiar with such spaces as $L^2(\Omega)$, $H(\text{curl}; \Omega)$, $H(\text{div}; \Omega)$ and $H^1(\Omega)$, and their respective subspaces $H_0(\text{div}; \Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$.

The no mean flow case

When the fluid is initially at rest, problem (3.21)-(3.22) becomes : *find \mathbf{u} such that*

$$-k^2 \mathbf{u} - \nabla (\text{div } \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (3.24)$$

This type of problem arises in several acoustic fluid-structure interaction problems of interest (see [HOV78] for instance.) For the sake of simplicity, we furthermore assume that the vector field \mathbf{f} is such that $\text{curl } \mathbf{f} = 0$ in Ω , which amounts to saying that the source only generates acoustic (i.e., irrotational) perturbations. Note that, as the wave number k is non zero, the displacement field \mathbf{u} satisfies the following constraint

$$\text{curl } \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega, \quad (3.25)$$

which is simply a consequence of equation (3.23).

Since equation (3.23) does not exhibit ellipticity properties, proper care has to be taken when writing a weak formulation of problem (3.23)-(3.24) and two different approaches can be followed.

First, dropping constraint (3.25), which may be difficult to impose on the numerical approximation, leads to a straightforward variational formulation in the Hilbert space $U = H_0(\text{div}; \Omega)$: *find \mathbf{u} in U such that*

$$\int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u} \text{ div } \bar{\mathbf{v}} - k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in U. \quad (3.26)$$

However, attempts to solve this problem by Lagrange finite element methods (each field component being represented on nodal basis functions) have proved to be ill-suited, the computed solutions being affected by the occurrence of “non-physical” modes, related to the fact that the space U isn’t compactly imbedded in $L^2(\Omega)^2$. Nevertheless, the above curl-free constraint can be enforced by means of a Lagrange multiplier. This leads to the following mixed formulation of problem (3.23)-(3.24) : *find (\mathbf{u}, p) in $U \times H_0^1(\Omega)$ such that*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u} \text{ div } \bar{\mathbf{v}} - k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{curl } p \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} &= (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in U, \\ \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl } \bar{q} \, d\mathbf{x} &= 0, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.27)$$

the unknown p being the aforementioned multiplier. Convergence of approximations of problem (3.27) requires the use of so-called mixed finite elements (Raviart-Thomas elements for instance), which respect some necessary features such as the inf-sup condition and discrete compactness property [Kik87]. Additionally, one sees that a solution to (3.26) is a solution to (3.27) with $p = 0$. As a consequence, if an adequate discretization is used, the approximated multiplier can be regarded as a “hidden” variable and thus dropped.

Another possibility consists in modifying the weak problem (3.26) in order to make it account directly for the constraint (3.25). In our case, this is done by adding a

$(\text{curl} \cdot, \text{curl} \cdot)_{L^2(\Omega)}$ product to the formulation, which yields the more general *regularized* or *augmented*, with respect to (3.26), variational problem : *find* $\mathbf{u} \in V$ *such that*

$$\int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{u} \text{div} \bar{\mathbf{v}} + s \text{curl} \mathbf{u} \text{curl} \bar{\mathbf{v}} - k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.28)$$

where V is the Hilbert space $V = H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{curl}; \Omega)$, equipped with the graph norm, and s is a given positive real number. The space V being compactly imbedded into $L^2(\Omega)^2$ and the new sesquilinear form having coercivity properties on it, one can classically make use of the Riesz-Fredholm theory to prove existence and uniqueness of a solution to problem (3.28). What is more, when the domain Ω is convex or the boundary $\partial\Omega$ is smooth, observe that we have $V = W$, where the space

$$W = H_0(\text{div}; \Omega) \cap H^1(\Omega)^2$$

is equipped with the $H^1(\Omega)^2$ norm. From the point of view of the numerical approximation, the fact that V is a subspace of $H^1(\Omega)^2$ in this case allows a suitable and convenient discretization of the problem by Lagrange finite elements.

The shear flow case

The presence of a flow complicates considerably the above analysis, as the convective terms appearing in the equation raise difficulties on several levels.

First, taking the curl of equation (3.21) leads to an ordinary linear differential equation on $\text{curl} \mathbf{u}$ instead of the explicit constraint (3.25). The main consequence of this change is that, even if the source \mathbf{f} is irrotational, the displacement field \mathbf{u} is not curl-free, a notable exception being if the mean flow is uniform [BLL01]. Also related is the fact that mixed finite elements adapted to this configuration are to be found yet in the literature. We nevertheless show in the next subsection that the regularization technique can be nontrivially extended to successfully solve the problem.

Second, the functional framework is not completely clear. For the convective terms to have a sense in $L^2(\Omega)^2$, the variational problem needs to be set *a priori* in a space smaller than V . We deliberately choose to work in the subspace W of $H^1(\Omega)^2$, which will suitably fit our needs for the regularization process.

Then, any solution to (3.21)-(3.22) satisfies the following weak formulation of the problem : *find* \mathbf{u} *in* W *such that, for any* \mathbf{v} *in* W ,

$$\int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{u} \text{div} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \partial_{x_1} \mathbf{u} \cdot \partial_{x_1} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_{x_1} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} + \langle M^2 \partial_{x_1} \mathbf{u} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1), \mathbf{v} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^2}.$$

Notice that a supplementary boundary condition is needed in order to properly deal with the surface term in the left-hand side. Among several possible choices, we select the assumption that $\text{curl} \mathbf{u}$ is known on the boundary $\partial\Omega$. We consequently add the boundary conditions

$$\text{curl} \mathbf{u} = \psi_{\pm} \text{ on } \Sigma_{\pm}, \quad (3.29)$$

where ψ_+ (resp. ψ_-) belongs to $L^2(\Sigma_+)$ (resp. $L^2(\Sigma_-)$), to the set of equations (3.21)-(3.22) and close the problem to solve. We will see in subsection 3.A.3 that this last condition will prove useful in obtaining an explicit constraint for the scalar field $\text{curl} \mathbf{u}$.

Last, it is also obvious that the above sesquilinear form has no coerciveness properties on $H^1(\Omega)^2$, so that an augmented (or regularized) form of the variational problem is clearly required. This is the purpose of the next subsection.

3.A.3 Study of a regularized problem

In the next subsection, we derive from Galbrun's equation an explicit constraint for $\text{curl } \mathbf{u}$ analogous to identity (3.25) and preliminary results are given. We then write a weak regularized problem, whose well-posedness and equivalence with the original problem are proved in subsections 3.A.3 and 3.A.3 respectively.

Derivation of a constraint for $\text{curl } \mathbf{u}$

Assume that the source \mathbf{f} belongs to $H(\text{curl}; \Omega)$ and formally apply the curl operator to Galbrun's equation (3.21). The Mach number M being a function of the x_2 variable, we obtain

$$D^2(\text{curl } \mathbf{u}) = 2M' D(\partial_{x_1} u_1) + \text{curl } \mathbf{f} \text{ on } \Omega. \quad (3.30)$$

For any fixed value of x_2 in $[0, \ell]$, the above equation is simply an ordinary, linear, constant coefficient differential equation with respect to the x_1 variable. Denoting $\psi = \text{curl } \mathbf{u}$ and considering the following problem

$$\begin{aligned} -k^2 \psi - 2ikM \partial_{x_1} \psi + M^2 \partial_{x_1}^2 \psi &= g \text{ in } \Omega, \\ \psi &= \psi_0 \text{ on } \Sigma_{\pm}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

where g and ψ_0 are given data, the solution to (3.30) can be computed easily if we conveniently choose the following decomposition

$$\psi = \mathcal{A}\mathbf{u} + \psi_{\mathbf{f}}, \quad (3.32)$$

where the field $\psi_{\mathbf{f}}$ denotes the solution to problem (3.31) with $g = \text{curl } \mathbf{f}$ and $\psi_0 = \psi_{\pm}$ on Σ_{\pm} , and $\mathcal{A}\mathbf{u}$ is the solution to (3.31) with $g = 2M' D(\partial_{x_1} u_1)$ and vanishing on the boundaries Σ_{\pm} . Note that identity (3.32) replaces the simple constraint (3.25) in the presence of a shear flow is present. The explicit determination of the field $\psi_{\mathbf{f}}$ is tackled in Appendix 3.A.4 and we now state two results on the field $\mathcal{A}\mathbf{u}$ that will be needed for the subsequent study of the regularized problem.

Lemma 1 *For all \mathbf{u} in W and (x_1, x_2) in Ω , we have*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u}(x_1, x_2) &= \frac{2ikM'(x_2)}{M^2(x_2)} \frac{L - x_1}{L} \int_0^{x_1} u_1(z, x_2) e^{i\frac{k(x_1-z)}{M(x_2)}} dz \\ &\quad - \frac{2ikM'(x_2)}{M^2(x_2)} \frac{x_1}{L} \int_{x_1}^L u_1(z, x_2) e^{i\frac{k(x_1-z)}{M(x_2)}} dz \\ &\quad + \frac{2M'(x_2)}{M(x_2)} u_1(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

The proof of this lemma is given in Appendix 3.A.4.

Lemma 2 *The operator \mathcal{A} is continuous from W to $H^1(\Omega)$.*

Proof. We need to prove the existence of a positive constant C such that

$$\|\mathcal{A}\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}, \quad \forall \mathbf{u} \in W.$$

Owing to the regularity of the Mach number profile, one can easily see that the term $[2M'(x_2)/M(x_2)]u_1(x_1, x_2)$ in expression (3.33) is continuous from W to $H^1(\Omega)$. The remaining terms being of the generic form

$$\zeta(x_1, x_2) = \beta(x_2) \int_0^L \gamma(x_1) u_1(z, x_2) e^{ik(x_1-z)/M(x_2)} dz,$$

where $\beta(x_2) = M'(x_2)/M^2(x_2)$ and γ denotes a polynomial function, the use of the Cauchy-Schwarz inequality allows to show the existence of a strictly positive constant C' such that

$$\|\zeta\|_{H^1(\Omega)} \leq C' \|u_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C' \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}, \quad \forall \mathbf{u} \in W.$$

□

Well-posedness of the regularized problem

A regularized variational formulation of the problem is given by : *find* $\mathbf{u} \in W$ *such that*

$$a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in W, \quad (3.34)$$

where $a_s(\cdot, \cdot)$ denotes the sesquilinear form defined on $W \times W$ by

$$\begin{aligned} a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} + s \operatorname{curl} \mathbf{u} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \partial_{x_1} \mathbf{u} \cdot \partial_{x_1} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} (k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + 2ikM \partial_{x_1} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + s \mathcal{A} \mathbf{u} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

with s a given strictly positive constant, and $l(\cdot)$ is an antilinear form on W given by

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + s \psi_{\mathbf{f}} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_{\pm}} M^2 \psi_{\pm} v_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) d\sigma. \quad (3.36)$$

We have the

Theorem 1 *Variational problem (3.34) can be written as a Fredholm equation if $s \geq s_0$, where $s_0 = \max_{x_2 \in [0, \ell]} M^2(x_2)$.*

Proof. We prove that the sesquilinear form $a_s(\cdot, \cdot)$ defines, by means of the Riesz representation theorem, an operator on W which is the sum of an automorphism and a compact operator. To this end, consider the operators B and C defined on W by

$$(B\mathbf{u}, \mathbf{v})_W = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} + s \operatorname{curl} \mathbf{u} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \partial_{x_1} \mathbf{u} \cdot \partial_{x_1} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x},$$

$$\text{and } (C\mathbf{u}, \mathbf{v})_W = \int_{\Omega} (-(k^2 + 1) \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_{x_1} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - s \mathcal{A} \mathbf{u} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x},$$

where $(\cdot, \cdot)_W$ denotes the natural scalar product in W . Due to the remarkable identity (see [Cos91])

$$\int_{\Omega} (|\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 + |\operatorname{curl} \mathbf{v}|^2) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in W,$$

there exists a strictly positive constant α such that

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u})_W &= \int_{\Omega} \left(|\mathbf{u}|^2 + (1 - s_0) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + (s - s_0) |\operatorname{curl} \mathbf{u}|^2 + s_0 |\nabla \mathbf{u}|^2 - M^2 |\partial_{x_1} \mathbf{u}|^2 \right) d\mathbf{x} \\ &\geq \alpha \|\mathbf{u}\|_W^2, \end{aligned}$$

if $s > s_0$, since $M^2(x_2) \leq s_0 < 1$ for all $x_2 \in [0, \ell]$.

Additionally, the operator C is compact on W . Indeed, introducing the operator \mathcal{K} from W to W , such that

$$(\mathcal{K}\mathbf{u}, \mathbf{v})_W = (\mathcal{A}\mathbf{u}, \operatorname{curl} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in W, \quad \forall \mathbf{v} \in W,$$

we just need to prove that \mathcal{K} is compact, the two other terms defining C being obviously compact. Taking $\mathbf{v} = \mathcal{K}\mathbf{u}$ and using the Cauchy-Schwarz inequality, we get

$$\|\mathcal{K}\mathbf{u}\|_W \leq \|\mathcal{A}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in W.$$

We then conclude by virtue of the compact embedding of $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ and the continuity of the operator \mathcal{A} from W to $H^1(\Omega)$. \square

Owing to the Fredholm alternative, showing uniqueness of a solution to problem (3.34) gives its existence for any right-hand side F , and conversely.

Equivalence between the original and regularized problems

We end this study by proving that regularized variational problem (3.34) implies the original strong problem (3.21)-(3.22)-(3.29). Since it is quite obvious that any solution \mathbf{u} to (3.34) is also a solution to : *find \mathbf{u} such that*

$$\begin{cases} \mathbf{D}^2 \mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + s \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{u} - \mathcal{A}\mathbf{u} - \psi_{\mathbf{f}}) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \operatorname{curl} \mathbf{u} = \mathcal{A}\mathbf{u} + \psi_{\mathbf{f}} & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.37)$$

we simply have to prove that $\operatorname{curl} \mathbf{u} = \mathcal{A}\mathbf{u} + \psi_{\mathbf{f}}$ in Ω . Following [BLL01], we take test functions in the form $\mathbf{v} = \operatorname{curl} \varphi$, with φ a function of $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, and obtain that $\operatorname{curl} \mathbf{u} - \mathcal{A}\mathbf{u} - \psi_{\mathbf{f}}$ is orthogonal to the range of the operator $H_{k,M,s}$, defined by

$$H_{k,M,s} = M^2 \partial_{x_1}^2 - 2ikM \partial_{x_1} - k^2 I - s \Delta,$$

and with domain $D(H_{k,M,s}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Since $H_{k,M,s}$ is a selfadjoint operator with domain dense in $L^2(\Omega)$, $\operatorname{curl} \mathbf{u} - \mathcal{A}\mathbf{u} - \psi_{\mathbf{f}}$ belongs to the kernel of this operator. Using compactness arguments, we then prove that, for fixed wave number k and profile M , there exists s^* such that for all $s > s^*$ the kernel of $H_{k,M,s}$ is $\{0\}$ (for a uniform flow, the value of s^* can be determined analytically [BLL01].) Note that this result is valid only if Ω is convex or if $\partial\Omega$ is smooth. Indeed, due to singularities, the operator $H_{k,M,s}$ is not selfadjoint and its kernel is never reduced to $\{0\}$ (see [Gri85] for instance.) In particular, our approach cannot be extended to the case in which a thin plate is placed in the flow.

3.A.4 Numerical applications

The technical difficulty

A direct consequence of Theorem 1 is that a Lagrange finite element approximation of problem (3.34) will converge. However, the main challenge lies in the implementation of the quantity $\psi = \mathcal{A}\mathbf{u} + \psi_{\mathbf{f}}$.

On the one hand, the field $\psi_{\mathbf{f}}$ is computed *a priori* and without difficulty from the data, using the explicit expression (3.40). On the other hand, the field $\mathcal{A}\mathbf{u}$ has to be split in two local and nonlocal contributions,

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \mathcal{A}_{Loc}\mathbf{u} + \mathcal{A}_{NLoc}\mathbf{u},$$

with $\mathcal{A}_{Loc}\mathbf{u}(x_1, x_2) = \frac{2M'(x_2)}{M(x_2)}u_1(x_1, x_2)$, the difficulty being the computation of the nonlocal part $\mathcal{A}_{NLoc}\mathbf{u}$ with a finite element code. Indeed, we need to evaluate integrals over streamlines of the flow which are not necessarily lines of the finite element mesh. Even when working with a structured mesh, the implementation of this term remains difficult and costly, as each integral couples degrees of freedom which do not belong to the same (or even adjacent) finite element(s).

Implementation

Let \mathcal{Q}_h be a quadrangulation of domain Ω such that $\bar{\Omega} = \cup_{Q \in \mathcal{Q}_h} Q$, h being the discretization step. We denote by \mathcal{V}_h^p the finite-dimensional space of continuous functions which are polynomials of degree p over \mathcal{Q}_h , i.e.,

$$\mathcal{V}_h^p = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_Q \in P_p, \forall Q \in \mathcal{Q}_h \right\},$$

its dimension being N_h^p . This space is obviously $H^1(\Omega)$ conforming, and we introduce $V_h^p = (\mathcal{V}_h^p)^2$. We denote the basis functions of \mathcal{V}_h^p by $(l^j)_{j=1, \dots, N_h^p}$ and by $(\mathbf{w}_\alpha^j)_{\alpha=1, 2}^{j=1, \dots, N_h^p}$ the ones of V_h^p , defined by $\mathbf{w}_\alpha^j = l^j \mathbf{e}_\alpha$. An approximate solution \mathbf{u}_h to problem (3.34) in V_h^p is then written as

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha, j} u_{h\alpha}(\mathbf{x}^j) \mathbf{w}_\alpha^j(\mathbf{x}),$$

and the associated matricial problem is $\mathbb{A}\mathbf{U} = \mathbb{L}$, where $(\mathbb{A}_{\alpha, \gamma})^{i, j} = a_s(\mathbf{w}_\alpha^j, \mathbf{w}_\gamma^i)$, $(\mathbb{L}_\gamma)^i = l(\mathbf{w}_\gamma^i)$,

a_s and l being defined in (3.35) and (3.36) respectively, and $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} [(\mathbf{u}_{h1})^i]_{i \in I_h^p} \\ [(\mathbf{u}_{h2})^i]_{i \in I_h^p} \end{bmatrix}$, with

$$I_h^p = \{1, 2, \dots, N_h^p\}.$$

As previously stated, from a computational point of view, the difficulty lies in the numerical evaluation of coefficients

$$(\mathbb{C}_{\alpha, \gamma})^{i, j} = s \int_{\Omega} \mathcal{A}_{NLoc} \mathbf{w}_\alpha^j(\mathbf{x}) \operatorname{curl} \mathbf{w}_\gamma^i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

By interpolating $\mathcal{A}_{NLoc} \mathbf{w}_\alpha^j$, we have $(\mathbb{C}_{\alpha, \gamma})^{i, j} \simeq s \sum_m \mathcal{A}_{NLoc} \mathbf{w}_\alpha^j(\mathbf{x}^m) \int_{\Omega} l^m(\mathbf{x}) \operatorname{curl} \mathbf{w}_\gamma^i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$.

Moreover, setting

$$\begin{aligned}
(\mathbb{I}_\alpha)^{m,j} &= \mathcal{A}_{NLoc} \mathbf{w}_\alpha^j(\mathbf{x}^m), \\
&= \frac{2ikM'(x_2^m)}{M^2(x_2^m)L} \left[(L - x_1^m) \int_0^{x_1^m} \delta_{1\alpha} l^j(z, x_2^m) e^{\frac{ik(x_1^m - z)}{M(x_2^m)}} dz, \right. \\
&\quad \left. - x_1^m \int_{x_1^m}^L \delta_{1\alpha} l^j(z, x_2^m) e^{\frac{ik(x_1^m - z)}{M(x_2^m)}} dz \right],
\end{aligned}$$

we can compute exactly the matrix \mathbb{I} : it simply consists of evaluating integrals of the form $\int z^q e^{-\frac{ikz}{M(x_2)}} dz$, with $q = 0, \dots, p$. This matrix is partially full since all degrees of freedom having the same x_2 -coordinate are linked, and, as a consequence, the matrix $\mathbb{C} = \mathbb{P} \times \mathbb{I}$, with $(\mathbb{P}_\alpha)^{i,j} = \int_\Omega l^j(\mathbf{x}) \text{curl } \mathbf{w}_\alpha^i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, is also partially full.

Solution of the linear system

The matrix \mathbb{C} being partially full, an iterative method is used for the solution of the linear system $\mathbb{A}\mathbf{U} = \mathbb{L}$ in order to avoid the inversion of the matrix $\mathbb{A} = \mathbb{B} + \mathbb{C}$. We use the following iterative scheme

$$\mathbb{B}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbb{C}\mathbf{U}^n + \mathbb{L}.$$

For a uniform flow (i.e., when $M' \equiv 0$), the nonlocal term vanishes and the solution is obtained after a single iteration. In the shear flow case, we conjecture that the scheme converges when $\max_{x_2 \in [0, \ell]} (M'/M^2)$ is small, if k does not belong to the set of the frequencies where \mathbb{B} cannot be inverted. Indeed, we have $\|\mathbb{B}^{-1}\| \leq C_{k,M,s} < +\infty$, with $C_{k,M,s}$ a constant, and we can prove that $\|\mathbb{C}\| \leq 4ksL \max_{x_2 \in [0, \ell]} (M'/M^2)$, hence $\|\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C}\| \leq \|\mathbb{B}^{-1}\| \|\mathbb{C}\| \leq 4ksL C_{k,M,s} \max_{x_2 \in [0, \ell]} (M'/M^2)$. This allows to understand why, in practice, when M varies slowly enough, $\|\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C}\| \leq 1$ and the iterative method works.

Numerical results

We validate the method with simulations of the propagation of guided modes, which are solutions of the form $\mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{w}(x_2) e^{i\beta x_1}$, β being a complex number, to the homogeneous version of equation (3.19). Values of the axial wave number β and of the vector function \mathbf{w} are obtained semianalytically by computing solutions of the Pridmore-Brown equation by a Chebyshev method, as done in [Fél02], for the parabolic profile of a subsonic Mach number shown in Figure 3.27, with $k = 6$ and $\ell = 1$.

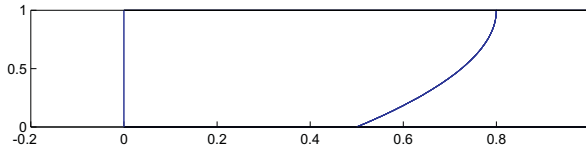
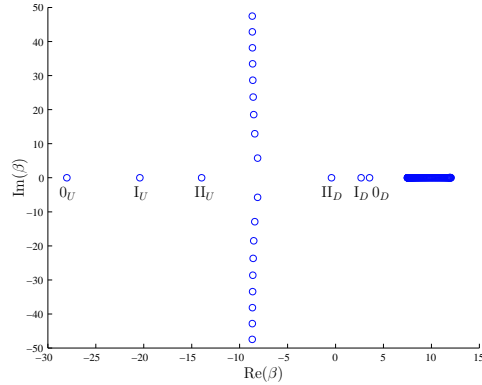


FIG. 3.27 – Profile of the Mach number $M(x_2) = -0.3x_2^2 + 0.6x_2 + 0.5$, $x_2 \in [0, 1]$.

The obtained values of β are plotted in Figure 3.28. Axial wave numbers such that $\text{Re}(\beta) \in [k/M_{\max}, k/M_{\min}] = [7.5, 12]$ and $\text{Im}(\beta) = 0$ are associated with the so-called *hydrodynamic* modes. The remaining values are associated with the *acoustic* modes. Among these modes,


 FIG. 3.28 – Values of β in complex plane.

we can again distinguish the *propagative* ones, which have a strictly real axial wave number, and the *evanescent* ones.

In the simulations, we consider two different combinations of modes in a two unit long piece of duct. The first combination, labelled A, combines two upstream modes (I_U and II_U in Figure 3.28), while the second, labelled B, combines two downstream modes (0_D and II_D in Figure 3.28). These combinations are imposed via a non-homogeneous boundary condition on the vertical boundaries for the normal displacement $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ and $\text{curl } \mathbf{u}$. The iterative method is initialized with a null displacement field. All the simulations were done with the finite element library MÉLINA [Mar].

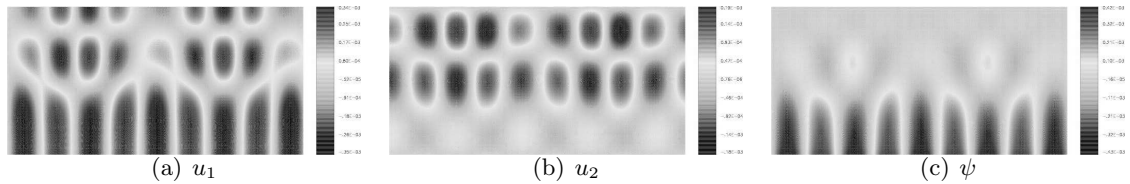


FIG. 3.29 – Isovalues of the real part of the components of the computed displacement field and vorticity (combination A).

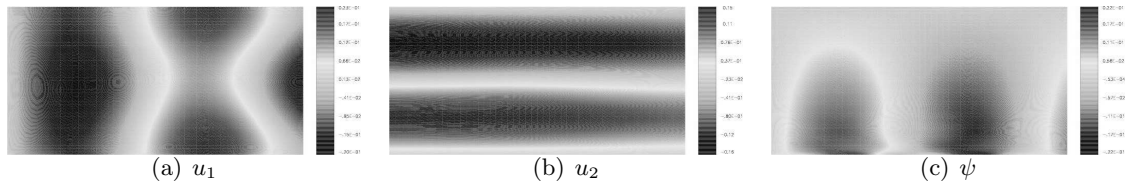


FIG. 3.30 – Isovalues of the real part of the components of the computed displacement field and vorticity (combination B).

The computed displacement field and associated curl field are shown in Figures 3.29 and 3.30. The convective effect of the flow is clearly seen : the wavelengths of the upstream waves are shorter than those of the downstream ones. We also observe that the curl field ψ is localized where the shear of the flow is important (the function $|M'(x_2)|$ being maximum in $x_2 = 0$.) This is in accordance with expression (3.33).

Figure 3.31 plots the relative error in $L^2(\Omega)^2$ (resp. $L^2(\Omega)$) norm between the computed and reference solutions (the reference solution being obtained by the solution of Pridmore-Brown's equation) for the displacement field (resp. ψ) versus the number of iterations. We notice that seven iterations have been necessary to reach the stop condition, that the final error on the displacement is under one percent and that the error on \mathbf{u} is decreasing faster than the one on ψ .

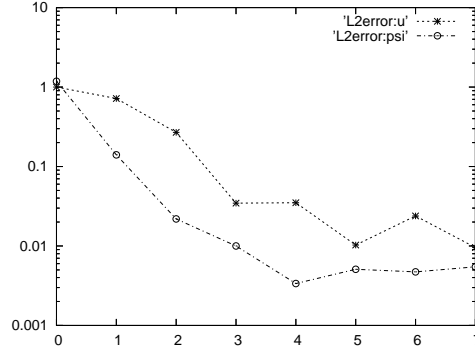


FIG. 3.31 – Behavior of the logarithm of the relative L^2 error in \mathbf{u} and ψ .

Appendix : Solution of differential equation (3.30)

i. The Green function

In order to solve problem (3.31), we introduce its associated Green function G_{x_2} ($x_2 \in [0, \ell]$ being here a fixed parameter), which satisfies, for all z in $[0, L]$,

$$(M(x_2)^2 \partial_{x_1}^2 - 2ikM(x_2) \partial_{x_1} - k^2) G_{x_2}(x_1, z) = \delta(x_1 - z), \quad \forall x_1 \in [0, L], \quad (3.38)$$

where $\delta(x_1 - z)$ is the Dirac delta function at point z , along with the homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$G_{x_2}(0, z) = G_{x_2}(L, z) = 0, \quad \forall z \in [0, L]. \quad (3.39)$$

The solution to problem (3.38)-(3.39) is the following :

$$G_{x_2}(x_1, z) = \begin{cases} -\frac{x_1(L-z)}{M^2(x_2)L} e^{i\frac{k(x_1-z)}{M(x_2)}} & \text{if } x_1 \leq z, \\ -\frac{z(L-x_1)}{M^2(x_2)L} e^{i\frac{k(x_1-z)}{M(x_2)}} & \text{if } x_1 > z. \end{cases}$$

ii. The field $\psi_{\mathbf{f}}$

Theorem 2 The solution to problem (3.31) with $g = \text{curl } \mathbf{f}$ and $\varphi_0 = \psi_{\pm}$ on Σ_{\pm} , denoted $\psi_{\mathbf{f}}$, is given by

$$\psi_{\mathbf{f}}(x_1, x_2) = \int_0^L G_{x_2}(x_1, z) \text{curl } \mathbf{f}(z, x_2) dz + (a(x_2) + b(x_2)x_1) e^{i\frac{kx_1}{M(x_2)}}, \quad (3.40)$$

where $a(x_2) = \psi_-(x_2)$ and $b(x_1) = \frac{\psi_+(x_2)e^{-i\frac{kL}{M(x_2)}} - \psi_-(x_2)}{L}$.

Moreover, it belongs to $L^2(\Omega)$ and we have

$$\|\psi_{\mathbf{f}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\operatorname{curl} \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_-\|_{L^2([0,\ell])}^2 + \|\psi_+\|_{L^2([0,\ell])}^2 \right),$$

where C is a strictly positive constant.

Proof. Obtaining expression (3.40) is straightforward. Concerning the inequality, we use the upper bound L for the quantities $|x_1|$, $|z|$, $|L - x_1|$ and $|L - z|$ and deduce easily that $|G_{x_2}(x_1, z)| \leq L/M^2(x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$ and $\forall z \in [0, L]$. Therefore, for all (x_1, x_2) in Ω , we have

$$|\psi_{\mathbf{f}}(x_1, x_2)| \leq \frac{L}{M^2(x_2)} \int_0^L |\operatorname{curl} \mathbf{f}(z, x_2)| dz + |\psi_-(x_2)| + |\psi_+(x_2)|.$$

The estimation is then easily deduced from a Cauchy-Schwarz inequality. \square

iii. The field $\mathcal{A}u$

Recall that the field $\mathcal{A}u$ is the solution to problem (3.31) with $g = 2M' D(\partial_{x_1} u_1)$ and vanishing on Σ_{\pm} . Using the Green function, we get

$$\mathcal{A}u(x_1, x_2) = 2M'(x_2) \int_0^L G_{x_2}(x_1, z) D(\partial_z u_1)(z, x_2) dz, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (3.41)$$

Still, a more useful expression is given in Lemma 1, which is proved below.

Proof. (of Lemma 1) Integrating by parts in identity (3.41), we get

$$\mathcal{A}u(x_1, x_2) = -2M'(x_2) \int_0^L \bar{D}G_{x_2}(x_1, z) \partial_z u_1(z, x_2) dz, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega,$$

where $\bar{D} = [ik + M(x_2)\partial_z]$, the boundary terms vanish due to (3.39). Since we have

$$\bar{D}G_{x_2}(x_1, z) = \begin{cases} \frac{x_1}{M(x_2)L} e^{i\frac{k(x_1-z)}{M(x_2)}} & \text{if } x_1 \leq z, \\ -\frac{(L-x_1)}{M(x_2)L} e^{i\frac{k(x_1-z)}{M(x_2)}} & \text{if } x_1 > z, \end{cases}$$

we finally obtain

$$\mathcal{A}u(x_1, x_2) = \frac{2M'(x_2)}{M(x_2)L} \left[(L-x_1) \int_0^{x_1} \partial_z u_1(z, x_2) e^{i\frac{k(x_1-z)}{M(x_2)}} dz - x_1 \int_{x_1}^L \partial_z u_1(z, x_2) e^{i\frac{k(x_1-z)}{M(x_2)}} dz \right].$$

Expression (3.33) then stems from a last integration by parts and the fact that $u_1(z, x_2) = 0$ for $z = 0$ and $z = L$, $\forall x_2 \in [0, \ell]$. \square

Vers des situations plus réalistes

Dans les précédents chapitres, nous nous sommes attachés à traiter les problèmes dissipatif ou avec couches PML de manière précise : nous avons établi le caractère bien posé de ceux-ci, nous avons développé une méthode numérique à base d'éléments finis pour résoudre le problème avec couches PML et enfin nous avons présenté des résultats numériques. Dans ce chapitre nous souhaitons développer des applications plus complexes mais pour lesquelles l'étude numérique ou théorique n'a pas pu être achevée au cours de cette thèse. Chaque développement représente une section de ce chapitre. Dans chacune d'elle, nous expliquons les différences avec la configuration initiale. Nous établissons le problème à résoudre. Puis nous nous attardons sur les difficultés rencontrées, qu'elles soient numériques ou théoriques.

La première extension du code concerne le cas $3D$. La différence essentielle avec le cas $2D$ réside dans le fait que la vorticité devient une quantité vectorielle. Chacune des composantes est solution d'une équation différentielle ordinaire de même type que celle v rifi e en $2D$. Nous prouvons le caractère bien posé de ce problème. Les simulations numériques $3D$ nécessitant beaucoup de place mémoire, nous avons été rapidement limités par la taille des maillages. Les résultats numériques sont par conséquent peu nombreux et concerne uniquement des écoulements à faible Mach.

Le second développement du code concerne les conduits dont les parois sont recouvertes d'un isolant acoustique : il s'agit d'un problème avec impédance. Le changement de conditions aux bords ne nous permet plus de conclure sur le caractère bien posé du problème : nous ne sommes pas assurés de la convergence de l'approximation obtenue. Nous présentons cependant des résultats numériques que nous discutons.

4.1 Cas $3D$

Soit dans l'espace $3D$ ($O; \mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z$) un guide cylindrique Ω d'axe \mathbf{e}_x de section transverse S et à paroi rigide. Nous nous plaçons sous les mêmes hypothèses que le cas $2D$: gaz parfait, évolution adiabatique, régime harmonique, *etc...* Les écoulements étudiés sont de la forme $\mathbf{v}_0 = U_0(y, z)\mathbf{e}_x$. Ces écoulements devront de plus appartenir au moins à $C^2(S)$. Pour ce type d'écoulement la pression p_0 et la masse volumique ρ_0 à l'équilibre sont des quantités constantes car $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = 0$ (cf. 1.1).

4.1.1 Les équations en $3D$

A Comparaison des cas $2D$ et $3D$

où $\mathbb{A}_\alpha^\infty \mathbf{u} = 2M' G_\alpha^\bullet \ast (\check{\alpha} \partial_x u_x)$ et $\psi_f^\infty = G_\alpha^\circ \ast \text{rot}_\alpha \mathbf{f}$ avec G_α^\bullet et G_α° les fonctions de Green causales de l'opérateur D_α et de l'opérateur D_α^2 (calculées dans l'annexe B).

Nous en déduisons dans le cas 3D ($(u_x^\alpha, u_y^\alpha, u_z^\alpha)$ désigne la transposée du vecteur déplacement \mathbf{u}_∞^α) la formule suivante de la vorticité :

$$\begin{cases} \psi_x^\alpha = -2\partial_y M G_\alpha^\bullet \ast (\check{\alpha} \partial_x u_z^\alpha) + 2\partial_z M G_\alpha^\bullet \ast (\check{\alpha} \partial_x u_y^\alpha) + G_\alpha^\circ \ast (\text{rot}_\alpha \mathbf{f})_x \\ \psi_y^\alpha = -2\partial_z M G_\alpha^\bullet \ast (\check{\alpha} \partial_x u_x^\alpha) + G_\alpha^\circ \ast (\text{rot}_\alpha \mathbf{f})_y \\ \psi_z^\alpha = 2\partial_y M G_\alpha^\bullet \ast (\check{\alpha} \partial_x u_x^\alpha) + G_\alpha^\circ \ast (\text{rot}_\alpha \mathbf{f})_z \end{cases}$$

Il est clair que les outils que nous avons développé en 2D pour évaluer les formules de convolution sont adaptables au cas 3D. Cependant cette adaptation conduirait à une méthode numérique lourde. Nous avons préféré restreindre notre étude à des écoulements à faible Mach. Par analogie au cas 2D traité en 3.5, nous obtenons pour une source irrotationnelle une approximation de la vorticité en substituant à l'opérateur dérivée convective l'opérateur $-\mathbf{i}k$ dans l'équation hydrodynamique (4.2) :

$$\tilde{\psi}_\infty^\alpha = \tilde{\mathbb{A}}_\alpha^\infty \mathbf{u}_\infty^\alpha \quad \text{où } \tilde{\mathbb{A}}_\alpha^\infty \mathbf{u} = -\frac{2\mathbf{i}\nabla_\alpha M}{k} \wedge \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u}$$

Plus précisément, sous forme d velopp e nous obtenons l'expression suivante de l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}_\alpha^\infty$:

$$\tilde{\mathbb{A}}_\alpha^\infty \mathbf{u} = -\frac{2\mathbf{i}\nabla_\alpha M}{k} \wedge \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} = \begin{cases} -\frac{2\mathbf{i}\partial_y M}{k} \check{\alpha} \partial_x u_z + \frac{2\mathbf{i}\partial_z M}{k} \check{\alpha} \partial_x u_y \\ -\frac{2\mathbf{i}\partial_z M}{k} \check{\alpha} \partial_x u_x \\ \frac{2\mathbf{i}\partial_y M}{k} \check{\alpha} \partial_x u_x \end{cases}$$

B Détermination du problème variationnel 3D

Le problème fort "exact" régularisé est :

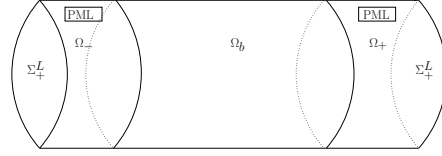
$$\text{Trouver } \mathbf{u}_\infty^\alpha \text{ tel que } \begin{cases} D_\alpha^2 \mathbf{u}_\infty^\alpha - \nabla_\alpha \text{div}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha + \text{rot}_\alpha (\text{rot}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha - \mathbb{A}_\alpha^\infty \mathbf{u}_\infty^\alpha) = \mathbf{f} + \text{rot}_\alpha \psi_f^\infty & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_\infty^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{rot}_\alpha \mathbf{u}_\infty^\alpha - \psi_\infty^\alpha = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En procédant de façon analogue au cas 2D, nous trouvons que la formulation variationnelle associ e est :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_\infty^\alpha \in V_\Omega \text{ tel que } a_\alpha^\infty(\mathbf{u}_\infty^\alpha, \mathbf{v}) = \ell_\alpha^\infty(\mathbf{v})$$

$$\text{où } a_\alpha^\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \left(\frac{-k^2}{\check{\alpha}} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2\mathbf{i}kM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} \right) + \int_\Omega \frac{1}{\check{\alpha}} \text{div}_\alpha \mathbf{u} \text{div}_\alpha \bar{\mathbf{v}} + \int_\Omega \frac{1}{\check{\alpha}} (\text{rot}_\alpha \mathbf{u} - \mathbb{A}_\alpha^\infty \mathbf{u}) \text{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}} \text{ et } \ell_\alpha^\infty(\mathbf{v}) = \int_\Omega \frac{1}{\check{\alpha}} (\mathbf{f} \bar{\mathbf{v}} + \psi_f^\infty \text{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}).$$

Puis nous tronquons les couches PML. Nous notons Ω^L le domaine tronqué représenté sur le schéma 4.2 et Σ_\pm^L les frontières extérieures de celui-ci. Nous procédons comme lors de

FIG. 4.2 – Représentation du domaine 3D $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_{\pm}$

l'étude menée en 3.3, nous effectuons le même ajustement sur l'espace variationnel :

$$V_{\Omega^L} = \{ \mathbf{u} \in V_{\Omega} \mid \mathbf{u} \equiv 0 \text{ sur } \Omega \setminus \Omega^L \}$$

et notons \mathbb{A}_{α}^L et $\widetilde{\mathbb{A}}_{\alpha}^L$ la restriction de $\mathbb{A}_{\alpha}^{\infty}$ et $\widetilde{\mathbb{A}}_{\alpha}^{\infty}$ à V_{Ω^L} .

En conclusion, la formulation implémentée est :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_{\mathbf{L}}^{\alpha} \in V_{\Omega^L} \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega^L} \ a_{\alpha}^L(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}^{\alpha}, \mathbf{v}) = \ell_{\alpha}^L(\mathbf{v}). \quad (4.3)$$

$$\text{où } a_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \left(\frac{-k^2}{\alpha} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} \right) + \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha} (\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u} - \mathbb{A}_{\alpha}^L \mathbf{u}) \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} \text{ et } \ell_{\alpha}^L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{f} \bar{\mathbf{v}} + \psi_{\mathbf{f}}^{\infty} \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}).$$

Si nous considérons en présence d'une source irrotationnelle des écoulements à faible Mach, la formulation à implémenter est :

$$\text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}}^{\alpha} \in V_{\Omega^L} \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega^L} \ \tilde{a}_{\alpha}^L(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}}^{\alpha}, \mathbf{v}) = \tilde{\ell}_{\alpha}^L(\mathbf{v}). \quad (4.4)$$

$$\text{où } \tilde{a}_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \left(\frac{-k^2}{\alpha} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} \right) + \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha} (\operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u} - \widetilde{\mathbb{A}}_{\alpha}^L \mathbf{u}) \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} \text{ et } \tilde{\ell}_{\alpha}^L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \frac{1}{\alpha} \mathbf{f} \bar{\mathbf{v}}.$$

C Caractère bien posé du problème 3D

En supposant que résultat suivant α satisfait les conditions (3.1) dans les couches absorbantes, nous souhaitons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 11 *Le problème variationnel (4.3) relève de l'alternative de Fredholm.*

Pour débiter nous commençons par établir ce résultat dans le cas d'un domaine 3D à section polygonale avant de généraliser.

1 - Cas d'une section transverse polygonale.

Soient $b_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} (\mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega^L} \operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega^L} \operatorname{rot}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}$ et $c_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} \left(-\frac{\check{\alpha} + k^2}{\alpha} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} \right) - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega^L} \mathbb{A}_{\alpha}^L \mathbf{u} \operatorname{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}$ telles que

$$a_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c_{\alpha}^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

La démonstration du théorème est en tout point identique à celle du théorème 9 (problème "exact" 2D avec couches PML) : la forme bilinéaire b_α^L est égale à celle du théorème. Deux points sont pourtant à préciser.

1. La première remarque concerne l'hypothèse de domaine convexe. Dans la démonstration du théorème 9 (cas 2D avec couches PML) nous utilisons la relation (3.12) pour prouver le caractère coercif de la forme b_α^L sur V_{Ω^L} . En 3D, cette relation (3.12) reste valable si le domaine est un polyèdre [Cos91, CD02].
2. La seconde concerne l'opérateur \mathbb{A}_α^∞ . Dans les démonstrations du théorème 9, nous divisons la démonstration en deux temps : la preuve de la coercivité de b_α^L puis celle de la compacité de c_α^L . L'argument décisif de cette seconde est le caractère continu de A_α^L de V_{Ω^L} dans $H^1(\Omega^L)$. Dans le cas 3D, un résultat similaire nous permet de conclure sur la compacité de la forme c_α^L . Il s'agit du lemme 6 :

LEMME 6 *L'opérateur \mathbb{A}_α^L est continu de V_{Ω^L} dans $H^1(\Omega^L)^3$.*

Pour établir ce résultat, il suffit de procéder de manière analogue à la démonstration de la continuité de l'opérateur A_α^L effectuée dans l'annexe C. Nous laissons cette démonstration au lecteur intéressé. Il en résulte que le problème (4.4) relève de l'alternative de Fredholm.

2 - Cas d'une section transverse régulière (bord $C^1(\partial S)$).

Soit un guide à section quelconque comme par exemple un domaine à révolution axiale. La relation (3.12) que nous avons appliquée pour démontrer le caractère coercif de la forme b_α^L sur V_{Ω^L} n'est plus valable. Nous allons par conséquent utiliser un résultat plus général que nous admettons reposant sur les travaux de Costabel [Cos91] :

THÉORÈME 12 $\forall 0 < \eta < 1 \exists C_\eta > 0 / \forall \mathbf{u} \in \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 / \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$

$$\Re \left(\int_{\Omega^L} \frac{1}{\tilde{\alpha}} (\mathbf{rot}_\alpha \mathbf{u} \mathbf{rot}_\alpha \bar{\mathbf{u}} + \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{div}_\alpha \bar{\mathbf{u}}) \right) + C_\eta \int_{\Omega^L} |\mathbf{u}|^2 \geq (1-\eta) \Re \left(\int_{\Omega^L} \left(\frac{1}{\tilde{\alpha}} \nabla_\alpha \mathbf{u} \nabla_\alpha \bar{\mathbf{u}} + |\mathbf{u}|^2 \right) \right)$$

Pour prouver que le problème (4.3) relève de l'alternative de Fredholm nous décomposons a_α^L comme ci-dessous :

$$a_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

avec $b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} (C_\eta \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \tilde{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{div}_\alpha \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \mathbf{rot}_\alpha \mathbf{u} \mathbf{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}})$ et

$$c_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^L} ((1 - C_\eta) \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}}) - \frac{s}{\tilde{\alpha}} \int_{\Omega^L} \tilde{\mathbb{A}}_\alpha^L \mathbf{u} \mathbf{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}.$$

Par une démarche analogue à ce qui précède, nous démontrons la coercivité de la forme b_α^L et la compacité de c_α^L sur le domaine variationnel.

Preuve du caractère coercif de b_α^L

Nous démontrons la coercivité de la forme b_α^L en minorant la quantité

$$\Re (b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})) = \int_{\Omega^L} \left(C_\eta |\mathbf{u}|^2 - \Re(\tilde{\alpha}) M^2 |\partial_x \mathbf{u}|^2 \right) + \Re \left(\int_{\Omega^L} \frac{1}{\tilde{\alpha}} (\operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{div}_\alpha \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{rot}_\alpha \mathbf{u} \mathbf{rot}_\alpha \bar{\mathbf{u}}) \right)$$

En utilisant le théorème 12 et en choisissant η une constante proche de zéro, nous obtenons la minoration suivante :

$$\Re(b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \leq (1 - \eta) \Re \left(\int_{\Omega^L} \left(|\mathbf{u}|^2 + \check{\alpha} |\partial_x \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\check{\alpha}} |\partial_y \mathbf{u}|^2 - \check{\alpha} M^2 |\partial_x \mathbf{u}|^2 \right) \right).$$

Nous en déduisons que :

$$|b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \Re(b_\alpha^L(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \geq (1 - \eta) \min \left(1 - s_0; \Re(\alpha) (1 - s_0); \frac{\Re(\alpha)}{|\alpha|^2} \right) \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 \quad (4.5)$$

Puisque $s_0 = \max(M^2) < 1$, la coercivité est assurée.

Preuve du caractère compact de c_α^L

Considérons maintenant la forme bilinéaire c_α^L . Par le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir les opérateurs suivants :

$$\widehat{K}_1 : \begin{array}{l} V_{\Omega^L} \longrightarrow V_{\Omega^L} \\ \mathbf{u} \longrightarrow \widehat{K}_1 \mathbf{u} \end{array} \quad \text{tel que } \left(\widehat{K}_1 \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)_{H^1} = ((1 - C_\eta) \mathbf{u} - 2ikM \partial_x \mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2}$$

$$\text{et } \widehat{K}_2 : \begin{array}{l} V_{\Omega^L} \longrightarrow V_{\Omega^L} \\ \mathbf{u} \longrightarrow \widehat{K}_2 \mathbf{u} \end{array} \quad \text{tel que } \left(\widehat{K}_2 \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)_{H^1} = (\mathbb{A}_\alpha^L \mathbf{u}, \mathbf{rot}_\alpha \mathbf{v})_{L^2}$$

Lors de la démonstration menée pour la section polygonale, le caractère compact de l'opérateur \widehat{K}_2 a été établi. Pour l'opérateur \widehat{K}_1 , par rapport à l'opérateur intervenant dans le cas polyédrique seul le coefficient devant $\int |\mathbf{u}|^2$ est modifié. Nous en déduisons par conséquent la compacité de l'opérateur \widehat{K}_1 .

En conclusion, quels que soient les domaines étudiés le problème "exact" 3D est bien posé.

Remarque 20 Pour les écoulements à faible Mach, comme dans le cas 2D, le terme où intervient $\widetilde{\mathbb{A}}_\alpha^L$ n'est pas compact, et il suffit d'adapter la démonstration du problème Mach faible 2D en intégrant ce terme à la partie coercive.

4.1.2 Résultats numériques

Pour les simulations numériques le domaine considéré est un cylindre d'axe \mathbf{e}_x . Par le théorème 11, nous sommes assuré de la convergence de l'approximation éléments finis. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous avons préféré limiter notre étude au cas des écoulements lents grâce à l'approximation faible Mach. Les simulations numériques 3D nécessitant beaucoup de mémoire, nous avons été rapidement limités par la taille des maillages. Nous avons cependant calculé à la fréquence $k = 8$ le champ rayonné en présence d'un écoulement parabolique radial de formule :

$$M(y, z) = -1.2 \sqrt{y^2 + z^2} + 0.5 \text{ avec } (y; z) \in [-0.5; 0.5]^2$$

par une source irrotationnelle ayant pour support une boule B_r centrée au milieu du domaine $((x_s; y_s; z_s) = (0.75; 0; 0)$ où $(x_s; y_s; z_s)$ sont les coordonnées du centre de la source) et de rayon $r = 0.1$ et de formule :

$$f(x, y) = 4 \times \mathbf{1}_{B_r} \mathbf{e}_x.$$

Le maillage utilisé correspond à un domaine cylindrique de section radiale de rayon 0.5 et d'axe e_x . Les longueurs du domaine d'intérêt et des couches PML sont 1.5 et 0.25, le paramètre α vaut $0.65 - 0.65i$. Le maillage est composé de 26472 tétraèdres. Nous utilisons pour la simulation des éléments finis $P1$ (la simulation avec des éléments $P2$ requiert trop de mémoire). Nous représentons sur la Fig.4.3 les isosurfaces du déplacement horizontal. Bien

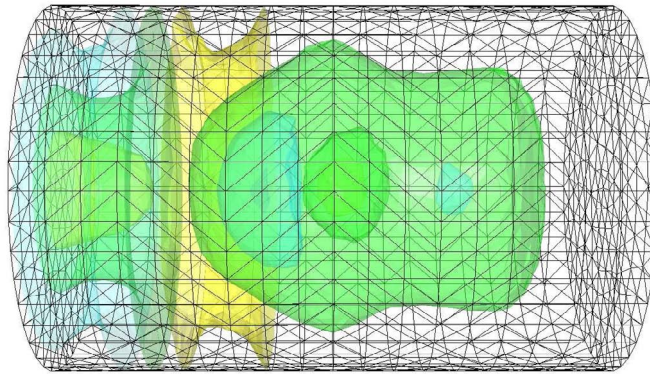


FIG. 4.3 – Isosurfaces du déplacement horizontal obtenues pour une source irrotationnelle placée au centre du domaine.

sûr comme l'écoulement est à symétrie axiale, la solution l'est aussi. Nous notons aussi comme dans le cas $2D$ la présence de l'effet Doppler : les longueurs d'ondes sont plus courtes à l'aval de la source. Ce phénomène est encore plus visible sur la coupe longitudinale réalisée sur la Fig. 4.4. Aucune structure hydrodynamique n'apparaît puisque nous travaillons en modèle faible Mach.

4.2 Cas des parois traitées en 2D

Dans les précédents chapitres, nous avons toujours considéré des conduits à paroi rigide. Pour atténuer le bruit émis par les moteurs, les motoristes recouvrent les parois des nacelles d'un isolant acoustique. Nous nous sommes intéressés à ce type de configuration en considérant des parois avec une condition d'impédance.

4.2.1 Les équations

A Comparaison avec le modèle classique

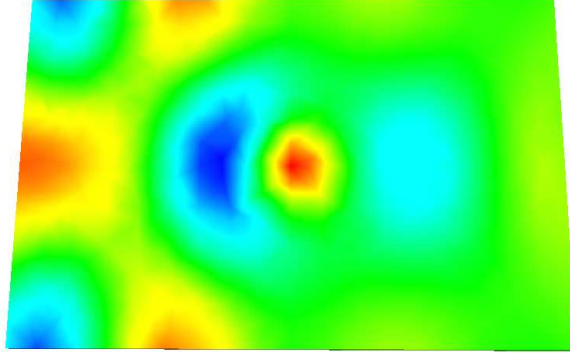


FIG. 4.4 – Coupe longitudinale du déplacement horizontal obtenu pour une source irrotationnelle placée au centre du domaine.

La paroi $\partial\Omega$ du conduit est à présent supposée rigide sauf sur une zone Γ constituée d'un matériau défini par son admittance Y ($Y \in \mathbb{C}$) et son impédance $Z = \frac{1}{Y}$ tel que

$$\partial_t (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) = Yp \text{ sur } \Gamma$$

où $\boldsymbol{\xi}$ et p sont les perturbations de déplacement et de pression.

En régime harmonique, puisque $\boldsymbol{\xi}(x, y) = \mathbf{u}(x, y) e^{-ikc_0 t}$ et $p(x, y) = -\operatorname{div} \mathbf{u} e^{-ikc_0 t}$, cette condition devient :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = Zik (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \text{ sur } \Gamma.$$

Dans le cas de parois rigides, la condition au bord est : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Il s'agit d'une condition essentielle : la propriété est inscrite dans l'espace vectoriel *i.e.* elle s'applique aussi bien à la solution qu'aux fonctions test. Dans le cas de parois traitées, la condition aux bords est naturelle : elle ne s'applique qu'à la solution. Par conséquent, nous ne travaillerons plus dans l'espace $V_\Omega = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2 / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0\}$ mais dans l'espace

$$V_\Omega^\sharp = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2 / \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma\}.$$

B Position du problème

Soit la décomposition suivante du domaine Ω : $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_{\pm}$ où Ω_b un domaine borné et Ω_{\pm} deux couches PML de longueur infinie. Nous supposons que la zone de paroi traitée Γ est localisée sur la paroi du domaine Ω_b comme représenté sur la Fig. 4.5.

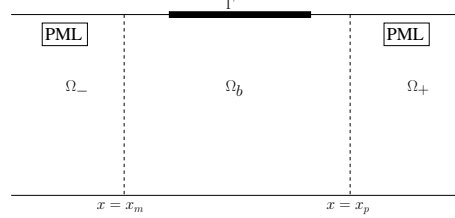


FIG. 4.5 – Représentation du domaine $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_{\pm}$ traité acoustiquement sur la zone Γ .

Le problème de Galbrun en dimension deux avec couches PML de longueur infinie et de paramètre α ($\Re(\alpha) > 0$ et $\Im(\alpha) < 0$) est :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } \begin{cases} D_{\alpha}^2 \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} \text{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \text{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} = \text{Zik}(\mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \mathbf{n}) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.6)$$

où $D_{\alpha} = -ik + M(y) \check{\alpha} \partial_x$. Pour régulariser ce problème, plusieurs choix sont possibles : une régularisation avec la vorticité exacte ou une régularisation avec la vorticité obtenue par l'approximation faible Mach. Pour des raisons de facilité d'implémentation, nous avons choisi la seconde option. Le problème obtenu pour une source irrotationnelle est :

$$\text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } \begin{cases} D_{\alpha}^2 \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} \text{div}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} + \mathbf{rot}_{\alpha} \left(\mathbf{rot}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} - \widetilde{A_{\alpha}^{\infty}} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \right) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \mathbf{rot}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} - \widetilde{A_{\alpha}^{\infty}} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{div}_{\alpha} \mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} = \text{Zik}(\mathbf{u}_{\infty}^{\alpha} \cdot \mathbf{n}) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Nous allons maintenant écrire ce problème sous forme faible. C'est ici qu'intervient la condition naturelle. Nous multiplions l'équation par une fonction test $\bar{\mathbf{v}}$ et nous divisons par $\check{\alpha}$:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\check{\alpha}} D_{\alpha}^2 \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} - \frac{1}{\check{\alpha}} \nabla_{\alpha} \text{div}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} + \frac{1}{\check{\alpha}} \mathbf{rot}_{\alpha} \left(\mathbf{rot}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} - \widetilde{A_{\alpha}^{\infty}} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \right) \right) \bar{\mathbf{v}} = \int_{\Omega} \frac{1}{\check{\alpha}} \mathbf{f} \bar{\mathbf{v}}$$

En raison de la paroi traitée, nous obtenons $-\int_{\Omega} \nabla_{\alpha} \text{div}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \bar{\mathbf{v}} = \int_{\Omega} \text{div}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \text{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Gamma} \frac{\text{Zik}}{\check{\alpha}} (\tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \cdot \mathbf{n})(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})$. Il est à noter que cette intégrale a un sens : puisque $\tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \in V_{\Omega}^{\sharp}$, la trace de $\tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha}$ appartient à $L^2(\Omega)^2$. Pour les autres termes à intégrer, nous obtenons les mêmes formules que dans le cas classique.

Par conséquent la formulation variationnelle associée est :

$$\text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \in V_{\Omega}^{\sharp} \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega}^{\sharp} \quad \tilde{a}_{\alpha}^{\infty}(\tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha}, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma} \frac{\text{Zik}}{\check{\alpha}} (\tilde{\mathbf{u}}_{\infty}^{\alpha} \cdot \mathbf{n})(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) = \tilde{\ell}_{\alpha}^{\infty}(\mathbf{v})$$

$$\text{où } \tilde{a}_{\alpha}^{\infty}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(\frac{-k^2}{\check{\alpha}} \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2ikM \partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \check{\alpha} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}} \right) + \int_{\Omega} \frac{1}{\check{\alpha}} \text{div}_{\alpha} \mathbf{u} \text{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega} \frac{1}{\check{\alpha}} \left(\mathbf{rot}_{\alpha} \mathbf{u} - \widetilde{A_{\alpha}^{\infty}} \mathbf{u} \right) \mathbf{rot}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} \text{ et } \tilde{\ell}_{\alpha}^{\infty}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \frac{1}{\check{\alpha}} \mathbf{f} \bar{\mathbf{v}}.$$

Puis nous tronquons les couches PML. Nous notons Ω^L le domaine tronqué et Σ_{\pm}^L les frontières extérieures de celui-ci. Comme dans la section 3.3, nous effectuons pour l'espace variationnel l'ajustement suivant :

$$V_{\Omega^L}^\# = \left\{ \mathbf{u} \in V_{\Omega}^\# \mid \mathbf{u} \equiv 0 \text{ sur } \Omega \setminus \Omega^L \right\}.$$

En conclusion, la formulation implémentée est :

$$\text{Trouver } \tilde{\mathbf{u}}_L^\alpha \in V_{\Omega^L}^\# \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega^L}^\# \tilde{a}_\alpha^\infty(\tilde{\mathbf{u}}_L^\alpha, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma} \frac{Zik}{\check{\alpha}} (\tilde{\mathbf{u}}_L^\alpha \cdot \mathbf{n})(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) = \tilde{\ell}_\alpha^\infty(\mathbf{v}). \quad (4.7)$$

C Caractère bien posé

L'étape suivante consiste à vérifier que le problème (4.7) est bien posé. Dans ce but nous souhaiterions reprendre la même démarche que pour les théorèmes 9 (problème "exact" 2D avec couches PML) et 10 (problème Mach faible 2D avec couches PML) en l'adaptant au cas des parois traitées. Or dans la démonstration du théorème 9 nous utilisons la relation (3.12) qui n'est plus valable dans le cas d'un traitement aux parois puisque nous n'avons plus $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur l'intégralité du bord. Par conséquent, nous ne savons pas montrer que le problème (4.7) relève de l'alternative de Fredholm. On ne peut pas s'inspirer de ce qui est fait en électromagnétisme avec conditions d'impédance [CHL98]. En effet dans le cas sans écoulement, cela conduirait à travailler dans un espace strictement plus grand que V_{Ω} . Or en présence d'un écoulement, nous avons besoin du cadre $H^1(\Omega)^2$ pour donner un sens au terme de convection $-\int_{\Omega^L} M^2 \partial_x \mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{v}}$ et le contrôler.

4.2.2 Résultats numériques

Même si nous n'avons pu démontrer la convergence de la méthode éléments finis, nous l'avons tout de même implémentée. Tous les résultats présentés dans cette section sont obtenus avec un matériau d'impédance $Z = 0.5 - 0.5i$ (forte absorption) et des couches PML de paramètre $\alpha = 0.5 - 0.5i$. Pour nos simulations, nous considérons un écoulement $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$ dont le profil est représenté sur la Fig. 4.6, une fréquence $k = 8$, et une source irrotationnelle (source f_1 définie en 3.4.2) placée à l'aval du domaine.

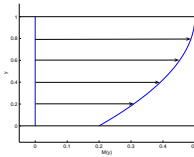


FIG. 4.6 – Profil $M(y) = -0.3y^2 + 0.6y + 0.2$

Dans un premier temps, nous appliquons ce traitement sur toute la paroi supérieure du conduit. Le déplacement horizontal obtenu avec ce modèle avec impédance est représenté sur la partie gauche de la Fig. 4.7. Pour s'assurer du caractère absorbant, nous comparons cette solution avec celle obtenue (Fig. 4.7 à droite) en présence d'une paroi rigide ($|Z| = \infty$). Nous observons sur la solution du modèle avec impédance (Fig. 4.7 à gauche) que les couleurs sont plus ternes à proximité de la paroi supérieure que celles de la solution du modèle sans impédance (Fig. 4.7 à droite) ce qui traduit bien une absorption.

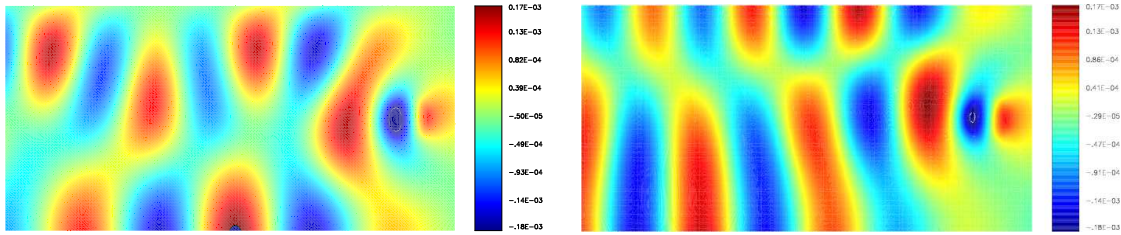


FIG. 4.7 – Déplacements horizontaux obtenus avec (à gauche) et sans impédance (à droite).

Si nous réduisons maintenant le traitement au tiers central de la paroi supérieure, nous obtenons le déplacement horizontal présenté sur la Fig. 4.8. Nous observons là aussi

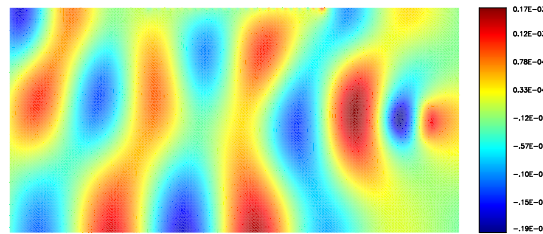


FIG. 4.8 – Déplacement horizontal obtenu en présence d'une paroi traitée ($Z = 0.5 - 0.5i$) sur le tiers central de la paroi supérieure.

l'absorption par la paroi traitée (couleur plus terne). Il apparaît cependant des oscillations sur la paroi traitée. Leur longueur d'onde n'est pas conservée par changement de maillage, ce qui nous fait penser à une instabilité numérique. Théoriquement ces instabilités peuvent être expliquées par le fait que le traitement n'est pas appliqué sur toute la paroi mais sur une portion. La rupture d'impédance se comporte comme un coin rentrant. Pour décrire de façon satisfaisante le déplacement au niveau de la jonction paroi rigide-paroi traitée, il est peut-être nécessaire de compléter V_{Ω} avec des fonctions singulières.

Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire au rayonnement acoustique d'une source périodique en temps placée dans un conduit infini, contenant un fluide en écoulement cisailé. Nous avons choisi de modéliser ce phénomène à l'aide des équations de Galbrun, dont l'inconnue \mathbf{u} est la perturbation de déplacement. Notre objectif était de développer une méthode à base d'éléments finis, susceptible d'être étendue à des géométries et des écoulements plus complexes.

Il est connu que l'équation de Galbrun harmonique souffre d'un défaut d'ellipticité, qui se traduit par un mauvais comportement de son approximation par éléments finis. De plus, la dissymétrie due à l'écoulement (qui se traduit en particulier par la présence d'un continuum de modes hydrodynamiques) rend difficile l'écriture de conditions transparentes variationnelles sur les frontières artificielles du domaine de calcul.

Dans le cas où l'écoulement est uniforme, Legendre a proposé (dans sa thèse) une solution à ces difficultés, qui repose sur l'écriture d'une formulation dite "régularisée" des équations de Galbrun et sur l'utilisation de couches PML. Nous avons montré dans cette thèse comment étendre cette méthode à un écoulement non uniforme. La difficulté majeure vient du fait que le terme de régularisation fait intervenir la vorticité $\psi = \text{rot } \mathbf{u}$ qui peut être calcul e a priori (avant \mathbf{u}) si l'écoulement est uniforme, ce qui n'est plus possible en général.

Nous avons tout d'abord établi et étudié la formulation r gularis e dans le cadre dissipatif ($k \notin \mathbb{R}$). Nous avons en particulier montré que la vorticité ψ peut alors être calcul e à l'aide d'une convolution (le long des lignes de courant) entre la perturbation de déplacement \mathbf{u} et le noyau de l'opérateur de convection. Nous avons également montré que si l'écoulement est lent, cette formule de convolution (qui devient une intégrale très oscillante) peut être approch e par une formule différentielle beaucoup plus simple reliant ψ à \mathbf{u} .

Des idées similaires ont ensuite été utilis es pour résoudre le problème non dissipatif, à l'aide de couches PML. Une formulation "exacte" (  l'erreur près due à la troncature des couches PML) a été écrite et mise en œuvre : elle repose à nouveau sur l' criteure d'une formule de convolution reliant \mathbf{u} et ψ .

Cette formule n'est exploitable numériquement que pour des écoulements qui ne s'annulent pas. De plus son caractère non local produit un remplissage important de la matrice, ce qui nous a conduits à développer un solveur itératif spécifique pour la résolution du système complet.

Nous avons également écrit et mis en œuvre une formulation approch e dite "formulation faible Mach" pour les écoulements "lents", la formule de convolution étant remplac e par la formule différentielle  voqu e plus haut. Cette fois, le caractère creux de la matrice éléments finis est conservé, et le système peut donc être résolu par une méthode directe.

Les formulations exacte et "faible Mach" relèvent de l'alternative de Fredholm, ce qui nous

assure la convergence de l'approximation éléments finis (le taux de convergence est identique à celui du cas coercif).

Les deux approches ont été validées par des tests numériques en $2D$. Ceci nous a en particulier permis de montrer que la formulation "faible Mach" reste valide pour des écoulements relativement rapides ($M \simeq 0.4$). Nous avons finalement mis en œuvre la méthode "faible Mach" dans un guide $3D$ à parois rigides et dans un guide $2D$ à parois traitées.

Citons maintenant quelques perspectives qu'il serait intéressant d'aborder, à la suite de ce travail :

1. Sur le plan théorique, une question essentielle n'a pas été résolue. Il s'agit de montrer l'existence d'une solution sortante (en un sens à préciser) au problème non dissipatif. La conjecture que nous faisons est la suivante :
Si l'écoulement est stable, il existe une solution \mathbf{u} au problème physique initial tel que :
 - (a) le problème dissipatif est bien posé $\forall \varepsilon > 0$ et la solution \mathbf{u}_ε du problème dissipatif régularisé converge vers \mathbf{u} dans $H_{loc}^1(\Omega)^2$ quand ε tend vers zéro.
 - (b) si $\frac{L}{|\alpha|}$ est assez grand, le problème régularisé avec couches PML (3.11) est bien posé . De plus la solution \mathbf{u}_L^α de celui-ci converge vers \mathbf{u} dans $H_{loc}^1(\Omega_b)^2$ lorsque $\frac{L}{|\alpha|} \rightarrow +\infty$.
2. Sur le plan numérique, la principale perspective concerne la généralisation de notre méthode à un écoulement non parallèle. Ceci se traduit par la présence de nouveaux termes dans l'équation de Galbrun (p_0 n'est plus constante) et complique considérablement l'écriture de l'équation hydrodynamique. Si son traitement rigoureux semble aujourd'hui irréalisable, l'écriture et la résolution d'un modèle faible Mach semblent possible, et pourraient permettre le développement d'un outil numérique performant en acoustique fréquentielle. Ceci fait l'objet d'une collaboration avec le CERFACS.

Calcul numérique des modes en écoulement cisailé

Il a été établi dans le document que les modes de pression du guide de Pridmore-Brown vérifient l'équation (1.10) en (\mathbf{p}, β) :

$$\begin{cases} (-k + M\beta) \mathbf{p}'' - 2M'\beta \mathbf{p}' + [M(1 - M^2)\beta^3 + (3M^2 - 1)\beta^2 - 3Mk^2\beta + ik^3] \mathbf{p} = 0 & \text{pour } y \in [0, h] \\ \mathbf{p}' = 0 & \text{en } y = 0 \text{ et } y = h \end{cases}$$

Pour les modes de Galbrun, il a été établi que les modes transverses ($u_x \equiv 0$) vérifient :

$$\begin{cases} (\beta^2 - (k - M\beta)^2) \bar{u}_y - \bar{u}_y'' = 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{u}_y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

tandis que les modes non transverses vérifient :

$$\begin{cases} (\beta^2 - (k - M\beta)^2) \bar{u}_x - \bar{u}_x'' + \frac{2\beta}{k} (M''\bar{u}_x + M'\bar{u}_x') = 0 & \text{pour } y \in [0, h] \\ \bar{u}_x' = \frac{2M'\beta}{k} \bar{u}_x & \text{en } y = 0 \text{ et } y = 1 \end{cases}.$$

En écoulement cisailé, les solutions ne peuvent plus être déterminées analytiquement. Cette annexe décrit la résolution numérique de ce problème. Auparavant nous effectuerons un bref rappel sur la méthode utilisée : la méthode de collocation spectrale de Chebyshev.

A.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode consiste à interpoler toute fonction u aux points de Chebyshev $(y_i)_{i=0}^N$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange u_N de degré $\geq N$ défini par :

$$u_N(y) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(y) u(y_k) \quad \text{où } \forall k \in \{1, \dots, N\} \quad \varphi_k(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Les polynômes $(\varphi)_{i=0..N}$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\geq N$. Les points de Chebyshev sont les points du segment $[-1; 1]$ vérifiant $y_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}$. Les points sont la projection sur $[-1; 1]$ des points équirépartis sur le demi cercle unité supérieur comme représenté sur la Fig. A.1. Si nous dérivons u_N , nous obtenons le

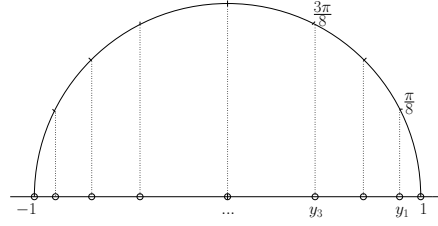


FIG. A.1 – Relation entre cercle trigonométrique et répartition des points de Chebyshev pour $N = 8$.

polynôme de degré $\geq N - 1$

$$u'_N(y) = \sum_{k=0}^N \varphi'_k(y) u(y_k)$$

Soit v la décomposition de u'_N sur la base $(\varphi)_{i=0..N}$:

$$\forall y \in [-1; 1], \quad v(y) = \sum_{k=0}^N v(y_k) \varphi_k(y) = u'_N(y).$$

L'égalité précédente écrite aux points de Cheyshev conduit à

$$\mathbf{v} = D_1 \mathbf{u} \text{ où } \mathbf{u}_k = u(y_k) \text{ et } \mathbf{v}_k = v(y_k).$$

La matrice D_1 est appelée matrice de dérivation de Chebyshev et \mathbf{v}_k est l'approximation de u' aux points de Chebyshev.

De même nous pouvons définir la matrice de dérivée seconde D_2 telle que :

$$\mathbf{w} = D_2 \mathbf{u}$$

où \mathbf{w} est l'approximation de u'' aux points de Chebyshev.

La première ligne et la dernière ligne de D_1 et D_2 subissent un traitement particulier pour intégrer les conditions limites du problème. Cette méthode offre la meilleure minimisation de l'erreur due à l'interpolation. En effet, les polynômes engendrés par discrétisation en des points équirépartis (interpolation de Lagrange) ont un comportement inadapté près des bornes (effet de bord).

En pratique, nous utilisons des procédures matlab développées par Trefethen [Tre00] pour construire les matrices de différentiation de Chebyshev.

A.2 Application au calcul de modes du modèle de Pridmore-Brown

Le problème (1.10) est posé sur l'intervalle $[0; 1]$ et non $[-1; 1]$. Pour conserver tous les résultats précédents, nous effectuons le changement de variable suivant $y = -2Y + 1$. Soit \mathbf{p} l'approximation de \mathbf{p} aux points de Chebyshev. Soient \mathbf{q} et \mathbf{r} les approximations de \mathbf{p}' et \mathbf{p}'' telles que

$$\mathbf{q} = \tilde{D}_1 \mathbf{p} \text{ et } \mathbf{r} = \tilde{D}_2 \mathbf{p} \text{ avec } \tilde{D}_1 = -2 D_1 \text{ et } \tilde{D}_2 = 4 D_2.$$

A.2. APPLICATION AU CALCUL DE MODES DU MODÈLE DE PRIDMORE-BROWN

Dans le cas de conditions de Neumann, Trefethen a développé des procédures Matlab construisant les matrices \tilde{D}_1 et \tilde{D}_2 tout en tenant compte des conditions limites.

Le problème à étudier est par conséquent :

$$\beta^3 M (1 - M^2) \mathbf{p} + \beta^2 k(3M^2 - 1)\mathbf{p} + \beta(-3Mk^2\mathbf{p} - 2M'\mathbf{q} - M\mathbf{r}) + k(k^2\mathbf{p} + \mathbf{r}) = 0$$

Soit I la matrice identité. Soient M la matrice diagonale dont les coefficients sont $\forall i \quad M_{ii} = M(y_i)$ et M' la matrice diagonale dont les coefficients sont $\forall i \quad M'_{ii} = M'(y_i)$. Le problème matriciel associé est

$$\beta^3 A\mathbf{p} + \beta^2 B\mathbf{p} + \beta C\mathbf{p} + E\mathbf{p} = 0$$

où $A = M(I - M^2)$, $B = k(3M^2 - I)$, $C = -3Mk^2 - 2M'\tilde{D}_1 - M\tilde{D}_2$ et $E = k(k^2I + \tilde{D}_2)$.

Si nous considérons maintenant la transposée du vecteur $(\mathbf{p} \quad \beta\mathbf{p} \quad \beta^2\mathbf{p})$ comme vecteur inconnue, le problème obtenu est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ E & C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \beta\mathbf{p} \\ \beta^2\mathbf{p} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \beta\mathbf{p} \\ \beta^2\mathbf{p} \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres généralisé classique. Pour résoudre ce problème, nous avons choisi d'utiliser la commande eig de Matlab.

Remarque 21 Des modes non physiques créés par la méthode numérique peuvent apparaître : ils sont appelés modes parasites. Pour discriminer les modes parasites, plusieurs méthodes peuvent être utilisées. La première méthode consiste à comparer les résultats obtenus par la méthode de collocation mais par deux représentations différentes. Par exemple soit un écoulement cisailé $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(6y - 3)$ et $k = 6$.

Sur les spectres obtenus à partir de l'équation de Galbrun (Fig. A.2 droite), nous distinguons des modes supplémentaires par rapport aux modes obtenus par l'équation de Pridmore-Brown (Fig. A.2 gauche) : il s'agit de modes parasites. Une deuxième méthode de discrimination

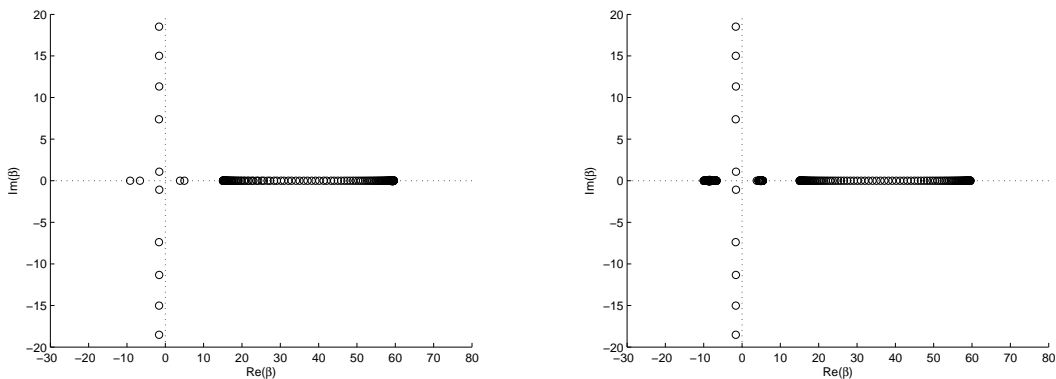


FIG. A.2 – Spectre des valeurs propres obtenues à gauche par la représentation de Pridmore-Brown et à droite par celle de Galbrun pour $M(y) = 0.25 + 0.15 \tanh(6y - 3)$ et $k = 6$.

consiste à regarder les fonctions propres associées et à vérifier que les conditions aux limites

sont respectées. Une autre méthode proposée par [Bra04] consiste à modifier le nombre de points de discrétisation. En effet en général la position dans le plan complexe des valeurs propres associées aux modes parasites dépend du nombre de points de discrétisation choisie. Les modes artificiels sont facilement repérés : ils changent donc de position selon la valeur du nombre de points de discrétisation. Une dernière méthode utilisée dans [Fél02] consiste à comparer les résultats avec une autre méthode numérique plus lourde (Runge Kutta).

A.3 Application au calcul de modes du modèle Mach Faible

A.3.1 Calcul des modes transverses

Soient \bar{u}_y l'approximation de \bar{u}_y aux points de Chebyshev et \tilde{D}_1 et \tilde{D}_2 les matrices de Chebyshev pour des conditions aux bords de type Dirichlet (elles tiennent de plus compte du même changement de variable que celui effectué dans le calcul des modes de Pridmore-Brown) telles que $\tilde{D}_1\bar{u}_y$ et $\tilde{D}_2\bar{u}_x$ soient les approximations de \bar{u}'_y et \bar{u}''_y .

Le problème à étudier sur $]0, 1[$ est par conséquent :

$$\beta^2 (1 - M^2) \bar{u}_y + 2kM\beta \bar{u}_y - (\tilde{D}_2 + k^2) \bar{u}_y = 0$$

Avec les mêmes notations que précédemment, le problème matriciel associé est :

$$\beta^2 A_y \bar{u}_y + \beta B_y \bar{u}_y + C_y \bar{u}_y = 0$$

où $A_y = (I - M^2)$, $B_y = 2kM$ et $C_y = -(k^2 I + \tilde{D}_2)$. Si nous considérons maintenant la transposée du vecteur $(\bar{u}_y \quad \beta \bar{u}_y)$ comme vecteur inconnue, le problème obtenu est :

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ C_y & B_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_y \\ \beta \bar{u}_y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -A_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_y \\ \beta \bar{u}_y \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Puis nous résolvons ce problème par la commande eig.

A.3.2 Calcul des modes non transverses

Soient \bar{u}_x l'approximation de \bar{u}_x aux points de Chebyshev et \tilde{D}_1 et \tilde{D}_2 les matrices de Chebyshev sans aucun traitement aux bords cette fois-ci (avec changement de variable effectué) telles que $\tilde{D}_1\bar{u}_x$ et $\tilde{D}_2\bar{u}_x$ soient les approximations de \bar{u}'_x et \bar{u}''_x .

Le problème à étudier sur $]0, 1[$ est par conséquent :

$$\beta^2 (1 - M^2) \bar{u}_x + \beta \left(2kM + \frac{2}{k} (M'' + M' \tilde{D}_1) \right) \bar{u}_x - (\tilde{D}_2 + k^2) \bar{u}_x = 0$$

Le problème matriciel associé est :

$$\beta^2 A_x \bar{u}_x + \beta B_x \bar{u}_x + C_x \bar{u}_x = 0$$

où $A_x = (I - M^2)$ (la notation A_x ne veut pas dire que la matrice dépend de x mais que l'on s'intéresse au problème portant sur u_x), $B_x = 2kM + \frac{2}{k} (M'' + M' \tilde{D}_1)$ et $C_x = -(k^2 I + \tilde{D}_2)$.

Si nous considérons maintenant la transposée du vecteur $(\bar{\mathbf{u}}_x \quad \beta\bar{\mathbf{u}}_x)$ comme vecteur inconnue, le problème obtenu est :

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ C_x & B_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_x \\ \beta\bar{\mathbf{u}}_x \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -A_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_x \\ \beta\bar{\mathbf{u}}_x \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Traitons maintenant les bords. Supposons que $\beta\frac{2M'}{k}\bar{\mathbf{u}}_x = \tilde{D}_1\bar{\mathbf{u}}_x$ sur $]0; h[$. Le problème matriciel approché est :

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ \tilde{D}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_x \\ \beta\bar{\mathbf{u}}_x \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{2M'}{k}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_x \\ \beta\bar{\mathbf{u}}_x \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Dans le modèle faible Mach, cette relation n'est valable que pour $y = 0$ et $y = 1$, *i.e.* pour la première et la dernière composante du vecteur $\bar{\mathbf{u}}_x$. Par conséquent, les matrices finales sont les matrices du problème (A.2) où la première et la dernière ligne de tous les blocs sont remplacées par celles des matrices du problème (A.3).

Comme précédemment, nous résolvons ce problème par la commande eig.

Calcul de la vorticité en présence de couches PML

Soit le problème

$$\text{Trouver } \psi_\infty^\alpha \in L^2(\Omega) / -k^2\psi_\infty^\alpha - 2ikM(y)\partial_x\psi_\infty^\alpha + M(y)^2\check{\alpha}\partial_x(\check{\alpha}\partial_x\psi_\infty^\alpha) = g_\alpha \quad (\text{B.1})$$

avec $g_\alpha = 2M'D_\alpha(\check{\alpha}\partial_x u_x) + \text{rot}_\alpha \mathbf{f}$ et $\mathbf{u} \in V_\Omega$.

L'objectif de cette annexe est la résolution sur le domaine Ω (Fig. 3.6) du problème (3.4) pour des nombres de Mach strictement positifs. Par le principe de superposition la solution ψ_∞^α est la somme de la solution $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$ du problème :

$$\text{Trouver } A_\alpha^\infty \mathbf{u} \in L^2(\Omega) / D_\alpha^2(A_\alpha^\infty \mathbf{u}) = 2M'D_\alpha(\check{\alpha}\partial_x u_x) \quad (\text{B.2})$$

et de la solution ψ_f^∞ de :

$$\text{Trouver } \psi_f^\infty \mathbf{u} \in L^2(\Omega) / D_\alpha^2\psi_f^\infty = \text{rot}_\alpha \mathbf{f}. \quad (\text{B.3})$$

B.1 Détermination de ψ_f^∞

La solution du problème (B.2) est la somme d'une des solutions ψ^\bullet du problème homogène ($\text{rot } \mathbf{f} = 0$) et d'une solution particulière ψ° . La solution particulière est obtenue par convolution de la fonction de Green de l'opérateur D_α^2 appartenant à $L^2(\Omega)$ par le second membre $\text{rot}_\alpha \mathbf{f}$. La première étape consiste à déterminer l'expression des solutions du problème homogène puis nous calculons ensuite la fonction de Green G_α appartenant à $L^2(\Omega)$ avant de calculer ψ_f^∞ .

B.1.1 Détermination d'une solution du problème homogène

Soit ψ cette fonction. Pour faciliter les développements du calcul, nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\psi^\bullet(x, y) = \tilde{\psi}^\bullet(x, y) \sigma_\alpha(x, y) \text{ où } \sigma_\alpha(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{ikx}{\alpha M}} & \text{si } x < x_m \\ e^{\frac{ik}{M}(x-x_m+\frac{x_m}{\alpha})} & \text{si } x_m < x < x_p \\ e^{\frac{ik}{M}(\frac{x-x_p}{\alpha}+x_p-x_m+\frac{x_m}{\alpha})} & \text{si } x_p < x \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Par le changement de variable (B.4), le problème homogène devient

$$M^2\check{\alpha}\partial_x(\check{\alpha}\partial_x \tilde{\psi}^\bullet(x, y)) = 0$$

La solution de ce problème est de la forme :

$$\tilde{\psi}^\bullet(x, y) = \begin{cases} a_1(y)x + b_1(y) & \text{si } x < x_m \\ a_2(y)x + b_2(y) & \text{si } x_m < x < x_p \\ a_3(y)x + b_3(y) & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

Par la continuité du flux $\tilde{\alpha}\partial_x\tilde{\psi}^\bullet$ en $x = x_m$ et $x = x_p$, nous obtenons la relation suivante :

$$a_2 = \alpha a_1 = \alpha a_3$$

Par la continuité de $\tilde{\psi}^\bullet$ en $x = x_m$ et $x = x_p$, nous déterminons b_2 et b_3 en fonction de a_1 et de b_1 :

$$\begin{cases} b_2 &= a_1(1 - \alpha)x_m + b_1 \\ b_3 &= (a_2 - a_3)x_p + b_2 \\ &= a_1(\alpha - 1)(x_p - x_m) + b_1 \end{cases}$$

Une solution du problème homogène est :

$$\psi^\bullet(x, y) = \begin{cases} (a(y)x + b(y)) e^{\frac{ikx}{\alpha M}} & \text{si } x < x_m \\ (a(y)(\alpha(x - x_m) + x_m) + b(y)) e^{\frac{ik}{M}(x - x_m + \frac{x_m}{\alpha})} & \text{si } x_m < x < x_p \\ (a(y)(x - x_p + \alpha(x_p - x_m) - x_m) + b(y)) e^{\frac{ik}{M}(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m}{\alpha})} & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

B.1.2 Détermination de la fonction de Green causale de l'opérateur D_α^2

Nous recherchons la fonction G_α de paramètre y telle que

$$\begin{cases} G_\alpha(x, z; y) = 0 & \text{si } x - z < 0 \\ D_\alpha^2 G_\alpha(x, z; y) = \delta(x - z) \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, nous travaillons domaine par domaine. Nous notons les fonctions G_α^I , G_α^{II} et G_α^{III} telles que $G_\alpha^I(x, z; y) = G_\alpha(x, z; y)\mathbb{1}_{z < x_m}$, $G_\alpha^{II}(x, z; y) = G_\alpha(x, z; y)\mathbb{1}_{x_m < z < x_p}$ et $G_\alpha^{III}(x, z; y) = G_\alpha(x, z; y)\mathbb{1}_{x_p < z}$. Par le changement de variable (B.4), le problème devient

$$\text{Trouver } \tilde{G}_\alpha \text{ telle que } \begin{cases} \tilde{G}_\alpha(x, z; y) = 0 & \text{si } x - z < 0 \\ M^2 \tilde{\alpha} \partial_x (\tilde{\alpha} \partial_x \tilde{G}_\alpha(x, z; y)) = \frac{\delta(x - z)}{\sigma_\alpha(x, y)} \end{cases}$$

En pratique nous recherchons la fonction \tilde{G}_α telle que

$$\begin{cases} \tilde{G}_\alpha(x, z; y) = 0 & \text{si } x - z < 0 \\ \left[\tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = 0 \\ \left[\partial_x \tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = \frac{1}{\alpha^2 M^2 \sigma_\alpha(z, y)} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

A Détermination de G_α^I

La solution du problème (B.5) est de la forme :

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ a_1(y)x + b_1(y) & \text{si } z < x < x_m \\ a_2(y)x + b_2(y) & \text{si } x_m < x < x_p \\ a_3(y)x + b_3(y) & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

où a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 et b_3 sont des fonctions à déterminer. Par continuité de \tilde{G}_α et $\partial_x \tilde{G}_\alpha$ en $x = x_m$ et $x = x_p$, nous obtenons que :

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ a(y) \left(\frac{x-x_m}{\alpha} + x_m \right) + b(y) & \text{si } z < x < x_m \\ a(y)x + b(y) & \text{si } x_m < x < x_p \\ a(y) \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p \right) + b(y) & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

Nous déterminons les fonctions a et b par les conditions de saut en : $\left[\tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = 0$ et $\left[\partial_x \tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = \frac{1}{\alpha^2 M^2} e^{-\frac{ikz}{\alpha M}}$. Ainsi

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{x-z}{\alpha^2 M^2} e^{-\frac{ikz}{\alpha M}} & \text{si } z < x < x_m \\ \frac{1}{\alpha M^2} \left(x - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha} \right) e^{-\frac{ikz}{\alpha M}} & \text{si } x_m < x < x_p \\ \frac{1}{\alpha M^2} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha} \right) e^{-\frac{ikz}{\alpha M}} & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

En conclusion si $z \in]-\infty, x_m]$,

$$G_\alpha^I(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{x-z}{\alpha^2 M^2} e^{-\frac{ik}{\alpha M}(x-z)} & \text{si } z < x < x_m \\ \frac{1}{\alpha M^2} \left(x - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha} \right) e^{-\frac{ik}{\alpha M} \left(x - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha} \right)} & \text{si } x_m < x < x_p \\ \frac{1}{\alpha M^2} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha} \right) e^{-\frac{ikz}{\alpha M} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha} \right)} & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

B Détermination de G_α^{II}

La solution du problème (B.5) est de la forme :

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ a_1(y)x + b_1(y) & \text{si } x_m < z < x < x_p \\ a_2(y)x + b_2(y) & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont des fonctions à déterminer. Par continuité de \tilde{G}_α et $\partial_x \tilde{G}_\alpha$ en $x = x_p$, nous obtenons que :

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ a(y)x + b(y) & \text{si } x_m < z < x < x_p \\ a(y) \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p \right) + b(y) & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

Par les conditions de saut : $\left[\tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = 0$ et $\left[\partial_x \tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = \frac{1}{\alpha^2 M^2} e^{-\frac{ik}{\alpha M} \left(z - x_m + \frac{x_m}{\alpha} \right)}$,

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{1}{\alpha M^2} (x - z) e^{-\frac{ik}{\alpha M} \left(z - x_m + \frac{x_m}{\alpha} \right)} & \text{si } z < x < x_p \\ \frac{1}{M^2} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z \right) e^{-\frac{ik}{\alpha M} \left(z - x_m + \frac{x_m}{\alpha} \right)} & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

En conclusion si $z \in [x_m, x_p]$,

$$G_\alpha^{II}(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{1}{M^2} (x - z) e^{-\frac{ik}{\alpha M}(x-z)} & \text{si } z < x < x_p \\ \frac{1}{M^2} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z \right) e^{-\frac{ik}{\alpha M} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z \right)} & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

C Détermination de G_α^{III}

La solution du problème (B.5) est de la forme :

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ a(y)x + b(y) & \text{si } x_p < z < x \end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des fonctions à déterminer.}$$

Par les conditions de saut : $\left[\tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = 0$ et $\left[\partial_x \tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = \frac{1}{\alpha^2 M^2} e^{-\frac{ik}{\alpha M}(z-x_p+x_p-x_m+\frac{x_m}{\alpha})}$,

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{1}{\alpha^2 M^2} (x - z) e^{-\frac{ik}{\alpha M} \left(\frac{z-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m}{\alpha} \right)} & \text{si } x_p < z < x \end{cases}$$

En conclusion si $z \in [x_p, +\infty[$,

$$G_\alpha^{III}(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{(x-z)}{\alpha^2 M^2} e^{-\frac{ik}{\alpha M}(x-z)} & \text{si } z < x < x_p \end{cases}$$

B.1.3 Calcul de ψ_f^∞

La solution du problème (B.5) est :

$$\psi_f^\infty(x, y) = \psi^\bullet(x, y) + \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x, z; y) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y)$$

où $\int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x, z; y) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) = \int_{-\infty}^{x_m} G_\alpha^I(x, z; y) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) + \int_{x_m}^{x_p} G_\alpha^{II}(x, z; y) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) + \int_{x_p}^{+\infty} G_\alpha^{III}(x, z; y) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y)$

A Détermination de ψ_f^∞ si $x \in]-\infty; x_m]$

$$\begin{aligned} \psi_f^\infty(x, y) &= (a(y)x + b(y)) e^{\frac{ikx}{\alpha M}} + \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x, z; y) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \\ &= (a(y)x + b(y)) e^{\frac{ikx}{\alpha M}} + \int_{-\infty}^x \frac{(x-z)}{\alpha^2 M^2} e^{\frac{ik}{\alpha M}(y)(x-z)} \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \end{aligned}$$

B Détermination de ψ_f^∞ si $x \in [x_m; x_p]$

$$\begin{aligned}
\psi_f^\infty(x, y) &= (a(y)(\alpha(x - x_m) + x_m) + b(y)) e^{\frac{ik}{M}(x - x_m + \frac{x_m}{\alpha})} + \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x, z; y) \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f} \\
&= \int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{\alpha M^2} \left(x - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right) e^{\frac{ik}{M}(x - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha})} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \\
&\quad + \int_{x_m}^x \frac{1}{M^2} (x - z) e^{\frac{ik}{M}(x - z)} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \\
&\quad + (a(y)(\alpha(x - x_m) + x_m) + b(y)) e^{\frac{ik}{M}(x - x_m + \frac{x_m}{\alpha})}
\end{aligned}$$

C Détermination de ψ_f^∞ si $x \in [x_p; +\infty[$

$$\begin{aligned}
\psi_f^\infty(x, y) &= (a(y)(x - x_p + \alpha(x_p - x_m) - x_m) + b(y)) e^{\frac{ik}{M}(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m}{\alpha})} + \int_{-\infty}^{x_m} G_\alpha(x, z; y) \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \\
&= \int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{\alpha M^2} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right) e^{\frac{ik}{M}(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha})} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \\
&\quad + \int_{x_p}^{x_m} \frac{1}{M^2} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - z \right) e^{\frac{ik}{M}(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - z)} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \\
&\quad + \int_{x_p}^x \frac{1}{\alpha^2 M^2} (x - z) e^{\frac{ik}{M}(\frac{x - z}{\alpha})} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \\
&\quad + (a(y)(x - x_p + \alpha(x_p - x_m) - x_m) + b(y)) e^{\frac{ik}{M}(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m}{\alpha})}
\end{aligned}$$

B.1.4 Caractère $L^2(\Omega)$ de ψ_f^∞

Nous désirons montrer dans cette section que la norme $\|\psi_f^\infty\|_{L^2}$ est bornée. Dans ce but, nous allons décomposer le calcul de la norme sur chacun des domaines et prouver que chacun des termes est borné.

$$\int_{\Omega} |\psi_f^\infty|^2 = \int_0^h \int_{-\infty}^{x_m} |\psi_f^\infty|^2 + \int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |\psi_f^\infty|^2 + \int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |\psi_f^\infty|^2$$

A Majoration de $\int_0^h \int_{-\infty}^{x_m} |\psi_f^\infty|^2$

Si $x \in]-\infty; x_m]$, $\psi_f^\infty(x, y) = (a(y)x + b(y)) e^{\frac{ikx}{\alpha M}} + \int_{-\infty}^x \frac{(x - z)}{\alpha^2 M^2} e^{\frac{ik}{\alpha M}(y)(x - z)} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y)$.

Commençons par démontrer le caractère $L^2(\Omega)$ du terme intégral ψ° . Ce terme peut être écrit à y fixé sous forme de convolution :

$$\psi^\circ(x, y) = G^\# \ast^x \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f} \text{ où } G^\#(x, y) = \frac{x}{\alpha^2 M^2(y)} e^{\frac{ikx}{\alpha M}(y)} \mathbb{1}_{x>0}$$

Par application de la proposition 1, nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x_m} |\psi^\circ|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} |\psi^\circ|^2 \leq \|G^\#\|_{L^1}^2 \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \\
&\leq \frac{|\alpha|^2}{k^2 \Im(\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2
\end{aligned}$$

Nous en déduisons le caractère borné de la norme puisque

$$\int_0^h \int_{-\infty}^{x_m} |\psi^\circ| \leq \frac{|\alpha|^2}{k^2 \Im(\alpha)^2} \|\text{rot}_\alpha \mathbf{f}\|_{L^2}^2 < \infty$$

Il reste à déterminer les fonction a et b telles que $\psi_f^\infty \in L^2(\Omega)$. Or quand x tend vers $-\infty$, la solution du problème homogène diverge sauf si $a \equiv b \equiv 0$. La solution homogène est alors déterminée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi^\bullet \equiv 0.$$

B Majoration de $\int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |\psi_f^\infty|^2$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et par l'inégalité suivante $\forall(a, b) |a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\psi_f^\infty|^2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{x_m} \frac{2}{|\alpha|^2 M^4} \left| x - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right|^2 \left| e^{\frac{ik}{M}(x-x_m)} + \frac{x_m - z}{\alpha} \right|^2 \right) \int_{-\infty}^{x_m} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \\ &\quad + \left(\int_{x_m}^x \frac{2}{M^4} (x - z)^2 \left| e^{\frac{ik}{M}(x-x_m + \frac{x_m - z}{\alpha})} \right|^2 \right) \int_{x_m}^x |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \end{aligned}$$

Plus précisément, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\psi_f^\infty|^2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{x_m} \frac{4}{|\alpha|^2 M^4} \left(|x - x_m|^2 + \left| \frac{x_m - z}{\alpha} \right|^2 \right) e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{M|\alpha|^2}(x_m - z)} \right) \int_{-\infty}^{x_m} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \\ &\quad + \frac{2}{3M^4} (x - x_m)^3 \int_{x_m}^x |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \end{aligned}$$

Par changement de variable, la majoration devient :

$$\begin{aligned} |\psi_f^\infty|^2 &\leq \left(\int_0^{+\infty} \frac{4}{|\alpha|^2 M^4} \left(|x - x_m|^2 + \frac{X^2}{|\alpha|^2} \right) e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{M|\alpha|^2} X} \right) \int_{-\infty}^{x_m} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \\ &\quad + \frac{2}{3M^4} (x_p - x_m)^3 \int_{x_m}^x |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \\ &\leq c_1(y) \int_{-\infty}^x |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \end{aligned}$$

où $c_1(y) = \frac{1}{k M^3 \Im(\alpha)} \left(2 + \frac{M^2 |\alpha|^4}{k^2 \Im(\alpha)^2} \right) + \frac{2}{3 M^4} (x_p - x_m)^3$. Puisque M est une fonction bornée (continue sur un segment), nous déduisons que c_1 est bornée et atteint ses bornes sur ce même intervalle. En conclusion, par intégrations selon x et y , nous obtenons :

$$\int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |\psi_f^\infty|^2 \leq (x_p - x_m) \max_y (c_1(y)) \int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 < +\infty$$

C Majoration de $\int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |\psi_f^\infty|^2$

Pour borner ce terme, nous le décomposons sous la forme suivante :

$$\psi_f^\infty(x, y) = \widetilde{\psi}_f^\infty(x, y) + \widehat{\psi}_f^\infty(x, y)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \widetilde{\psi}_f^\infty(x, y) &= \int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{\alpha M^2} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right) e^{\frac{ik}{M} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha} \right)} \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \\ &\quad + \int_{x_m}^{x_p} \frac{1}{M^2} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - z \right) e^{\frac{ik}{M} \left(\frac{x - x_p}{\alpha} + x_p - z \right)} \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) \end{aligned}$$

et $\widehat{\psi}_f^\infty(x, y) = + \int_{x_p}^x \frac{1}{\alpha^2 M^2} (x - z) e^{\frac{ik}{M} \left(\frac{x - z}{\alpha} \right)} \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y)$. Nous effectuerons une majoration directe du terme $\widehat{\psi}_f^\infty$. Commençons donc par la majoration directe de $\widetilde{\psi}_f^\infty$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{\psi}_f^\infty \right|^2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{x_m} \frac{2}{|\alpha|^2 M^4} \left(|x - x_m|^2 + \left| \frac{x - x_p + x_m - z}{\alpha} \right|^2 \right) e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{M|\alpha|^2} (x_p + x_m - z)} \right) \int_{-\infty}^{x_m} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \\ &\quad + \left(\int_{x_m}^{x_p} \frac{1}{M^4} \left(\left| \frac{x - x_p}{\alpha} \right|^2 + |x_p - z|^2 \right) \right) e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{M|\alpha|^2} x_p} \int_{x_m}^x |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \end{aligned}$$

Après simplifications, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\left| \widetilde{\psi}_f^\infty \right|^2 \leq c_2(x, y) \int_{-\infty}^x |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \text{ où } c_2(y) = .$$

Par conséquent, en intégrant selon x et y , nous obtenons :

$$\int_0^h \int_x^{+\infty} \left| \widetilde{\psi}_f^\infty \right|^2 \leq \max_y \left(\int_{x_p}^{+\infty} c_2(x, y) dx \right) \int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 < +\infty.$$

Comme $\int_{x_p}^{+\infty} c_2(x, y) < \infty$, nous en déduisons que ce terme est borné.

Considérons maintenant le terme $\widehat{\psi}_f^\infty$. Remarquons au préalable que $\widehat{\psi}_f^\infty$ est une convolution :

$$\widehat{\psi}_f^\infty(x, y) = G^\# * (\text{rot}_\alpha \mathbf{f} \mathbb{1}_{[x_p, +\infty[}) \text{ où } G^\#(x, y) = \frac{x}{\alpha^2 M^2(y)} e^{\frac{ikx}{\alpha M(y)}} \mathbb{1}_{x>0}$$

Par la proposition 1, nous obtenons une première majoration

$$\begin{aligned} \int_{x_p}^{+\infty} \left| \widehat{\psi}_f^\infty \right|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \leq \|G^\#\|_{L^1}^2 \int_{\mathbb{R}} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 \\ &\leq \frac{|\alpha|^2}{k^2 \Im(\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 . \end{aligned}$$

Puisque M' est une fonction bornée ($M \in C^2(\Omega)$), nous en déduisons le caractère borné de la norme puisque

$$\int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} \left| \widehat{\psi}_f^\infty \right|^2 \leq \frac{|\alpha|^2}{k^2 \Im(\alpha)^2} \|\text{rot}_\alpha \mathbf{f}\|_{L^2}^2 < \infty$$

Ayant montré que chacun des termes est borné, nous pouvons conclure sur l'appartenance de ψ_f^∞ à $L^2(\Omega)$.

B.2 Détermination de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$

La solution du problème (B.3) est obtenue par la somme d'une solution du problème homogène ψ^\bullet et d'une solution particulière résultant de la convolution de la fonction de Green de l'opérateur D_ε (appartenant à $L^2(\Omega)$) par le terme $2M'\partial_x u_x$.

B.2.1 Détermination d'une solution du problème homogène

Soit ψ cette fonction.

Par le changement de variable (B.4), le problème homogène devient $M\tilde{\alpha}\partial_x \tilde{\psi}^\bullet(x, y) = 0$ où ψ est une fonction continue en x_m et x_p .

La solution de ce problème est de la forme :

$$\tilde{\psi}^\bullet(x, y) = a(y)$$

Une solution du problème homogène est :

$$\psi^\bullet(x, y) = \begin{cases} a(y) e^{\frac{ikx}{\alpha M}} & \text{si } x < x_m \\ a(y) e^{\frac{ik}{M}(x-x_m+\frac{x_m}{\alpha})} & \text{si } x_m < x < x_p \\ a(y) e^{\frac{ik}{M}(\frac{x-x_p}{\alpha}+x_p-x_m+\frac{x_m}{\alpha})} & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

B.2.2 Détermination de la fonction de Green causale de l'opérateur D_α

Comme précédemment, nous effectuons le changement de variable (B.4) :

$$G_\alpha(x, z; y) = \tilde{G}_\alpha(x, z; y) \sigma_\alpha(x, y).$$

Le problème obtenu est :

$$\text{Trouver } \tilde{G}_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \begin{cases} \tilde{G}_\alpha(x, z; y) = 0 & \text{si } x - z < 0 \\ \left[\partial_x \tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = \frac{1}{\alpha M \sigma_\alpha(z, y)} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Pour calculer cette fonction, nous utilisons la même démarche que pour le calcul de la fonction de Green de l'opérateur D_α^2 . Nous noterons les fonctions G_α^I , G_α^{II} et G_α^{III} telles que $G_\alpha^I(x, z; y) = G_\alpha(x, z; y)\mathbb{1}_{z < x_m}$, $G_\alpha^{II}(x, z; y) = G_\alpha(x, z; y)\mathbb{1}_{x_m < z < x_p}$ et $G_\alpha^{III}(x, z; y) = G_\alpha(x, z; y)\mathbb{1}_{x_p < z}$.

A Détermination de G_α^I

La solution du problème (B.6) est de la forme :

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ a_1(y) & \text{si } z < x < x_m \\ a_2(y) & \text{si } x_m < x < x_p \\ a_3(y) & \text{si } x_p < x \end{cases} \quad \text{où } a_1, a_2 \text{ et } a_3 \text{ sont des fonctions à déterminer.}$$

Par continuité de \tilde{G}_α en $x = x_m$ et $x = x_p$, $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

Le saut $\left[\tilde{G}_\alpha(x, z; y) \right]_{x=z} = \frac{1}{\alpha M} e^{-\frac{ikz}{\alpha M}}$ détermine la fonction inconnue $a(y)$. Ainsi nous obtenons :

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{1}{\alpha M} e^{-\frac{ikz}{\alpha M}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous en concluons que :

$$G_\alpha^I(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{1}{\alpha M} e^{\frac{ik}{\alpha M}(x-z)} & \text{si } z < x < x_m \\ \frac{1}{\alpha M^2} e^{\frac{ik}{\alpha M}(x-x_m + \frac{x_m-z}{\alpha})} & \text{si } x_m < x < x_p \\ \frac{1}{\alpha M} e^{\frac{ik}{\alpha M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha}\right)} & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

B Détermination de G_α^{II}

La solution du problème (B.6) est de la forme :

$$\tilde{G}_\alpha(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ a(y) & \text{si } x_m < z < x < x_p \end{cases}$$

Par la condition de saut en $x = z$: $a(y) = \frac{1}{M(y)} e^{-\frac{ik}{M(y)}(z-x_m + \frac{x_m}{\alpha})}$,

$$G_\alpha^{II}(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{1}{\alpha M} e^{\frac{ik}{\alpha M}(x-z)} & \text{si } z < x < x_p \\ \frac{1}{M} e^{-\frac{ik}{M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z\right)} & \text{si } x_p < x \end{cases}$$

C Détermination de G_α^{III}

Par la même démarche, nous obtenons

$$G_\alpha^{III}(x, z; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < z \\ \frac{1}{\alpha M} e^{\frac{ik}{\alpha M}(x-z)} & \text{si } z < x < x_p \end{cases}$$

B.2.3 Calcul de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$

Après calculs, la solution $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$ de (B.2) est :

$$A_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) = \psi^\bullet(x, y) + 2M'(y) \left(\int_{-\infty}^{x_m} G_\alpha^I(x, z; y) \partial_x u_x(z, y) + \int_{x_m}^{x_p} G_\alpha^{II}(x, z; y) \partial_x u_x(z, y) + \int_{x_p}^{+\infty} G_\alpha^{III}(x, z; y) \partial_x u_x(z, y) \right)$$

A Détermination de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$ si $x \in]-\infty; x_m]$

$$A_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) = a(y) e^{\frac{ikx}{\alpha M}} + \int_{-\infty}^x \frac{2M'}{\alpha M} e^{\frac{ik}{\alpha M(y)}(x-z)} \partial_z u_x(z, y)$$

B Détermination de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$ si $x \in [x_m; x_p]$

$$\begin{aligned} A_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) &= a(y) e^{\frac{ik}{M}(x-x_m+\frac{x_m}{\alpha})} \\ &+ \int_{-\infty}^{x_m} \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{ik}{M}\left(x-x_m+\frac{x_m-z}{\alpha}\right)\right) \partial_z u_x(z, y) \\ &+ \int_{x_m}^x \frac{2M'}{M} \exp\left(\frac{ik}{M}(x-z)\right) \partial_z u_x(z, y) \end{aligned}$$

C Détermination de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$ si $x \in [x_p; +\infty[$

$$\begin{aligned} A_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) &= a(y) e^{\frac{ik}{M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha}+x_p-x_m+\frac{x_m}{\alpha}\right)} \\ &+ \int_{-\infty}^{x_m} \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{ik}{M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha}+x_p-x_m+\frac{x_m-z}{\alpha}\right)\right) \partial_z u_x(z, y) \\ &+ \int_{x_p}^x \frac{2M'}{M} \exp\left(\frac{ik}{M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha}+x_p-z\right)\right) \partial_z u_x(z, y) \\ &+ \int_{x_p}^x \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{ik}{M}\left(\frac{x-z}{\alpha}\right)\right) \partial_z u_x(z, y) \end{aligned}$$

B.2.4 Caractère $L^2(\Omega)$ de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$

L'objectif de cette section est d'obtenir une majoration de

$$\|A_\alpha^\infty \mathbf{u}\|_{L^2}^2 = \int_0^h \int_{-\infty}^{x_m} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 + \int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 + \int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2$$

Dans ce but, nous allons majorer chacun de ces termes.

A Majoration de $\int_0^h \int_{-\infty}^{x_m} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2$

Si $x \in]-\infty; x_m]$, $\psi_f^\circ(x, y) = a(y) e^{\frac{ikx}{\alpha M}} + \int_{-\infty}^x \frac{2M'}{\alpha M} e^{\frac{ik}{\alpha M(y)}(x-z)} \partial_z u_x(z, y)$. Commençons par démontrer le caractère $L^2(\Omega)$ du terme intégral ψ° . Puisque

$$\psi^\circ = G^\# * (\text{rot}_\alpha \mathbf{f} \mathbf{1}_{x < x_m}) \quad \text{où} \quad G^\#(x, y) = \frac{1}{\alpha M} e^{\frac{ikx}{\alpha M(y)}} \mathbf{1}_{x > 0},$$

nous pouvons appliquer la proposition 1. Il s'ensuit qu'à y fixé :

$$\int_{-\infty}^{x_m} |\psi^\circ(x, y)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |\psi^\circ(x, y)|^2 \leq 4M'^2 \left\| G^\# \right\|_{L^1}^2 \int_{-\infty}^{x_m} |\partial_z u_z|^2 \leq \frac{4M'^2}{k \Im(\alpha)} \int_{-\infty}^{x_m} |\partial_z u_z|^2.$$

Puis en intégrant selon y ,

$$\int_0^h \int_{-\infty}^{x_m} |\psi^\circ(x, y)| \leq \max_y \left(\frac{4M'^2 |\alpha|}{k \Im(\alpha)} \right) \int_0^h \int_{-\infty}^{x_m} |\partial_x u_x|^2 < \infty$$

car M' est une fonction bornée sur $[0, h]$.

Il reste à déterminer la fonction a telle que $A_\alpha^\infty \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$. Or quand x tend vers $-\infty$, la solution du problème homogène diverge sauf si $a \equiv 0$. La solution homogène est alors déterminée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi^\bullet \equiv 0.$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \text{Majoration de } \int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 &\leq \frac{8M'^2}{M^2} \left[\left(\int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{|\alpha|^2} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{M|\alpha|^2}(x_m-z)} \right) \int_{-\infty}^{x_m} |\partial_z u_z|^2 + \int_{x_m}^{x_p} 1 \int_{x_m}^x |\partial_z u_z|^2 \right] \\ &\leq \frac{8M'^2}{M^2} \left[\frac{-M}{2k\Im(\alpha)} \int_{-\infty}^{x_m} |\partial_z u_z|^2 + (x_p - x_m) \int_{x_m}^x |\partial_z u_z|^2 \right]. \end{aligned}$$

En conclusion puisque $|A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 \leq c_2(y) \int_{-\infty}^x |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2$ où $c_2(y) = \frac{4M'^2}{kM^2 |\Im(\alpha)|} + \frac{8M'^2(x_p - x_m)}{M^2}$,

$$\int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 \leq (x_p - x_m) \max_y (c_2(y)) \int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |\partial_x u_x|^2 < +\infty$$

puisque c_2 est bornée sur $[0, h]$ comme $M \in C^2([0, h])$ et ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{C}} \quad \text{Majoration de } \int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2$$

Pour borner ce terme, nous allons le décomposer :

$$A_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) = \widetilde{A}_\alpha^\infty \mathbf{u} + \widehat{A}_\alpha^\infty \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \widetilde{A}_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) &= \int_{-\infty}^{x_m} \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha}\right)\right) \partial_z u_x(z, y) \\ &\quad + \int_{x_m}^{x_p} \frac{2M'}{M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z\right)\right) \partial_z u_x(z, y) \\ \text{et } \widehat{A}_\alpha^\infty \mathbf{u}(x, y) &= \int_{x_p}^x \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M} \left(\frac{x-z}{\alpha}\right)\right) \partial_z u_x(z, y). \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons une majoration directe du terme $\widetilde{A}_\alpha^\infty \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} |\widetilde{A}_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 &\leq \frac{8M'^2}{M^2} \left[\left(\int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{|\alpha|^2} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{M|\alpha|^2}(x-x_p+x_m-z)} \right) \int_{-\infty}^{x_m} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_m}^{x_p} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{M|\alpha|^2}(x-x_p)} \int_{x_m}^{x_p} |A_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 \right] \end{aligned}$$

Après calculs, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|\widetilde{A}_\alpha^\infty \mathbf{u}|^2 \leq c_3(x, y) \int_{-\infty}^{x_p} |\partial_x u_x|^2 \quad \text{où } c_3(x, y) = \frac{4M'^2}{M} \left(\frac{1}{k|\Im(\alpha)|} + \frac{2(x-x_p)}{M} \right) e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{M|\alpha|^2}(x-x_p)}.$$

Puis nous obtenons après intégrations selon x et y :

$$\int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |\widetilde{A_\alpha^\infty \mathbf{u}}|^2 \leq \max_y \left(\int_{x_p}^{+\infty} c_3(x, y) dx \right) \int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |\partial_x u_x|^2 < +\infty$$

car $\int_{x_p}^{+\infty} c_3(x, y) < \infty$.

Considérons maintenant le terme $\widehat{A_\alpha^\infty \mathbf{u}}$. La majoration du terme $\widehat{A_\alpha^\infty \mathbf{u}}$ est obtenue grâce à la propriété 1 puisque ce terme est une convolution :

$$\widehat{A_\alpha^\infty \mathbf{u}}(x, y) = 2M' G^\# * (\partial_x u_x \mathbf{1}_{[x_p, +\infty[}) \quad \text{où } G^\#(x, y) = \frac{1}{\alpha M(y)} e^{\frac{ikx}{\alpha M(y)}} \mathbf{1}_{x>0}$$

Par la proposition 1, nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \int_{x_p}^{+\infty} |\widehat{A_\alpha^\infty \mathbf{u}}|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{A_\alpha^\infty \mathbf{u}}|^2 \leq 4M'^2 \|G^\#\|_{L^1}^2 \int_{-\infty}^{x_m} |\partial_x u_x|^2 \\ &\leq \frac{M'^2 |\alpha|^2}{k^2 \Im(\alpha)^2} \int_{x_p}^{+\infty} |\partial_x u_x|^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le caractère borné de la norme puisque

$$\int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |\widehat{A_\alpha^\infty \mathbf{u}}| \leq \max_y \left(\frac{M'^2 |\alpha|^2}{k^2 \Im(\alpha)^2} \right) \int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |\text{rot}_\alpha \mathbf{f}|^2 < \infty$$

Ayant montré que chacun des termes est borné, nous pouvons conclure sur l'appartenance de $A_\alpha^\infty \mathbf{u}$ à $L^2(\Omega)$.

Propriétés de continuité de l'opérateur hydrodynamique

Nous démontrons dans cette annexe la continuité de l'opérateur A_α^L de V_{Ω^L} dans $H^1(\Omega^L)$ où A_α^L est l'opérateur défini dans le chapitre 2.

Pour la démonstration, nous travaillons sur Y^+ (ensemble défini par (2.11)). La démonstration se déroule en plusieurs étapes : la majoration de $\|A_\alpha^L \mathbf{u}\|_{L^2}$, celle de $\|\partial_x (A_\alpha^L \mathbf{u})\|_{L^2}$ puis celle de $\|\partial_y (A_\alpha^L \mathbf{u})\|_{L^2}$. Avant de commencer, nous rappelons que

$$\int_a^b \left| e^{\frac{ik}{\alpha M} x} \right|^2 = \int_a^b e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} x} = \frac{|\alpha|^2 M}{2k |\Im(\alpha)|} \left[-e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} X} \right]_a^b$$

C.1 Majoration de $\|A_\alpha^L \mathbf{u}\|_{L^2}$

Pour commencer, nous désirons montrer que la norme $\|A_\alpha^L \mathbf{u}\|_{L^2}$ est bornée. Dans ce but, nous allons décomposer le calcul de la norme sur chacun des domaines et prouver que chacun des termes est borné :

$$\|A_\alpha^L \mathbf{u}\|_{L^2}^2 = \int_0^h \int_{x_m-L}^{x_m} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 + \int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 + \int_0^h \int_{x_p}^{x_p+L} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2$$

1 - Majoration de $\int_0^h \int_{x_m-L}^{x_m} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons une première majoration

$$\begin{aligned} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 &\leq \int_{x_m-L}^x \frac{4M'^2}{|\alpha|^2 M^2} \left| e^{\frac{ik}{\alpha M}(x-z)} \right|^2 dz \int_{x_m-L}^x |\partial_z u_z|^2 \\ &\leq \frac{2M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} \left[-e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} X} \right]_0^{x-x_m+L} \int_{x_m-L}^x |\partial_z u_z|^2 \\ &\leq c_1(x, y) \int_{x_m-L}^x |\partial_z u_z|^2 \end{aligned}$$

où $c_1(x, y) = \frac{2M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M}(x-x_m+L)} \right) > 0 \quad \forall x \geq x_m - L$ puisque $\Im(\alpha) < 0$. Par conséquent

$$\int_0^h \int_{x_m-L}^{x_m} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 \geq \max_y \left(\int_{x_m-L}^{x_m} c_1 \right) \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2$$

où $\int_{x_m-L}^{x_m} c_1 = \frac{|\alpha|^2 M'^2}{k^2 |\Im(\alpha)|^2} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} L}\right) + \frac{2M'^2 L}{kM |\Im(\alpha)|} > 0$. Puisque $c_1(\cdot, y)$ est bornée sur $[0, h]$, elle atteint son maximum et $\max_y \left(\int_{x_m-L}^{x_m} c_1\right)$ est une constante strictement positive.

2 - Majoration de $\int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2$

En remarquant que $\forall(a, b) |a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 &\leq \frac{8M'^2}{|\alpha|^2 M^2} \int_{x_m-L}^{x_m} \left| e^{\frac{ik}{M}(x-x_m+\frac{x_m-z}{\alpha})} \right|^2 dz \int_{x_m-L}^{x_m} |\partial_z u_z|^2 \\ &\quad + \frac{8M'^2}{M^2} \int_{x_m}^x \left| e^{\frac{ik}{M}(x-z)} \right|^2 dz \int_{x_m}^x |\partial_z u_z|^2 \\ &\leq \frac{4M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} \left[-e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} X} \right]_0^L \int_{x_m-L}^{x_m} |\partial_z u_z|^2 \\ &\quad + \frac{8M'^2(x-x_m)}{M^2} \int_{x_m}^x |\partial_z u_z|^2 \end{aligned}$$

Puisque $\forall x > x_m, \frac{4M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} \left[-e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} X} \right]_0^L > 0$ et $\frac{8M'^2(x-x_m)}{M^2} > 0$, nous déduisons l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 \leq c_2(x, y) \int_{x_m-L}^x |\partial_z u_z|^2$$

où $c_2(x, y) = \frac{4M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} L}\right) + \frac{8M'^2(x-x_m)}{M^2} > 0$. Comme $\int_{x_m}^{x_p} c_2 = \frac{4M'^2(x_p-x_m)}{kM |\Im(\alpha)|} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} L}\right) + \frac{4M'^2(x_p-x_m)^2}{M^2} > 0 \forall x > x_m$,

$$\int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 \geq \max_y \left(\int_{x_m}^{x_p} c_2\right) \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

La fonction $c_2(\cdot, y)$ étant une fonction positive bornée sur $[0, h]$, elle atteint son maximum et $\max_y \left(\int_{x_m-L}^{x_m} c_2\right)$ est une constante strictement positive.

3 - Majoration de $\int_0^h \int_{x_p}^{+\infty} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2$

Comme précédemment par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et par l'inégalité suivante :

$$\forall(a, b, c) |a + b + c|^2 \leq 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 &\leq \frac{12M'^2}{|\alpha|^2 M^2} \int_{x_m-L}^{x_m} \left| e^{\frac{ik}{M} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha} \right)} \right|^2 dz \int_{x_m-L}^{x_m} |\partial_z u_z|^2 \\
&\quad + \frac{12M'^2}{M^2} \int_{x_m}^{x_p} \left| e^{\frac{ik}{M} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z \right)} \right|^2 dz \int_{x_m}^{x_p} |\partial_z u_z|^2 \\
&\quad + \frac{12M'^2}{|\alpha|^2 M^2} \int_{x_p}^x \left| e^{\frac{ik}{M} \left(\frac{x-z}{\alpha} \right)} \right|^2 dz \int_{x_p}^x |\partial_z u_z|^2 \\
&\leq \frac{6M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} L} \right) \int_{x_m-L}^{x_m} |\partial_z u_z|^2 \\
&\quad + \frac{12M'^2 (x_p - x_m)}{M^2} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} \int_{x_m}^{x_p} |\partial_z u_z|^2 \\
&\quad + \frac{6M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} \right) \int_{x_p}^x |\partial_z u_z|^2
\end{aligned}$$

Comme $\frac{6M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} L} \right) > 0$, $\frac{12M'^2 (x_p - x_m)}{M^2} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} > 0$ et $\frac{12M'^2 (x_p - x_m)}{M^2} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} \right) > 0 \quad \forall x > x_p$, nous notons

$$\begin{aligned}
c_3(x, y) &= \frac{6M'^2}{kM |\Im(\alpha)|} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} L} \right) + \frac{12M'^2 (x_p - x_m)}{M^2} e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} \\
&\quad + \frac{12M'^2 (x_p - x_m)}{M^2} \left(1 - e^{\frac{2k\Im(\alpha)}{|\alpha|^2 M} (x-x_p)} \right).
\end{aligned}$$

La fonction $c_3(\cdot, y)$ étant une fonction positive bornée sur $[0, h]$, elle atteint son maximum qui est strictement positif. Par conséquent

$$\int_0^h \int_{x_m}^{x_p} |A_\alpha^L \mathbf{u}|^2 \geq \max_y \left(\int_{x_m}^{x_p} c_3 \right) \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

Nous avons prouvé que A_α^L est continue dans $L^2(\Omega^L)$, intéressons nous maintenant aux dérivées.

C.2 Majoration de $\|\partial_x (A_\alpha^L \mathbf{u})\|_{L^2}$

Pour faciliter notre étude remarquons que :

$$\partial_x (A_\alpha^L \mathbf{u}) = \frac{ik}{M\check{\alpha}} A_\alpha^L \mathbf{u} + \frac{2M'}{\check{\alpha}M} \partial_x u_x$$

Ayant montré le caractère continu de l'opérateur A_α^L de V_{Ω^L} dans $L^2(\Omega^L)$, nous en déduisons celui de $\frac{ik}{M\check{\alpha}} A_\alpha^L$ puisque $|\frac{ik}{M\check{\alpha}}|$ est borné sur Ω^L . Le caractère continu du terme $\frac{2M'}{\check{\alpha}M} \partial_x u_x$ de V_{Ω^L} dans $L^2(\Omega^L)$ est assuré par la majoration suivante :

$$\left\| \frac{2M'}{\check{\alpha}M} \partial_x u_x \right\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega^L} \left| \frac{2M'}{M\check{\alpha}} \right|^2 |\partial_x u_x|^2 \leq \max_y \left(\frac{4M'^2}{M^2 |\check{\alpha}|} \right) \|\mathbf{u}\|_{H^1}$$

C.3 Majoration de $\|\partial_y (A_\alpha^L \mathbf{u})\|_{L^2}$

Pour des raisons de régularité de la solution, nous effectuons une intégration par parties :

$$A_\alpha^L \mathbf{u}(x, y) = \begin{cases} \text{si } x < x_m & \frac{\mathbf{i}k}{M\alpha} \int_{x_m-L}^x \frac{2M'}{\alpha M} e^{\frac{\mathbf{i}k}{\alpha M(y)}(x-z)} u_x(z, y) dz + \frac{2M'}{\alpha M} u_x(x, y) \\ \text{si } x_m < x < x_p & \frac{\mathbf{i}k}{M\alpha} \int_{x_m-L}^{x_m} \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}\left(x-x_m+\frac{x_m-z}{\alpha}\right)\right) u_x(z, y) dz \\ & + \frac{\mathbf{i}k}{M} \int_{x_m}^x \frac{2M'}{M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}(x-z)\right) u_x(z, y) dz \\ & + \frac{2M'}{M} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}(x-x_m)\right) u_x(x_m, y) + \frac{2M'}{M} u_x(x, y) \\ \text{si } x_p < x < x_p + L & \frac{\mathbf{i}k}{M\alpha} \int_{x_m-L}^{x_m} \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m-z}{\alpha}\right)\right) u_x(z, y) dz \\ & + \frac{\mathbf{i}k}{M} \int_{x_m}^{x_p} \frac{2M'}{M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}\left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z\right)\right) u_x(z, y) dz \\ & + \frac{\mathbf{i}k}{M\alpha} \int_{x_p}^x \frac{2M'}{\alpha M} \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}\left(\frac{x-z}{\alpha}\right)\right) u_x(z, y) dz \\ & + \frac{2M'}{M} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k}{M}(x-x_m)\right) u_x(x_m, y) \\ & - \frac{2M'}{M} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) e^{\frac{\mathbf{i}k}{\alpha M(y)}(x-x_p)} u_x(x_p, y) + \frac{2M'}{\alpha M} u_x(x, y) \end{cases}$$

Au lieu d'étudier chacun des éléments composant cette expression, nous allons définir deux classes de termes. Soient $(a, b) \in \{x_m - L, x_m, x_p\} \times \{x_m, x_p, x_p + L\}$. Soient $g(x)$ et $\tilde{g}(x, z)$ deux fonctions affines. Soit c une fonction telle que $c(y) = \hat{c} \frac{M'}{M}$ où $\hat{c} \in \mathbb{C}$. Soient les deux classes de termes suivantes :

1. $J(x, y) = c(y) e^{\frac{g(x)}{M(y)}} u_z(x_0, y)$ où $x_0 \in \{x_m, x_p, x\}$
2. $I(x, y) = c(y) \int_a^b e^{\frac{\tilde{g}(x, z)}{M(y)}} u_z(z, y)$

Étudions maintenant chacune des dérivées selon y de ces ensembles.

1 - Ensemble 1 : dérivées selon y de J

$$\partial_y (J(x, y)) = \left(c'(y) - c(y) \frac{M'(y)}{M(y)^2} g(x) \right) e^{\frac{g(x)}{M(y)}} u_z(x_0, y) + c(y) e^{\frac{g(x)}{M(y)}} \partial_y u_z(x_0, y)$$

Une première majoration de $|\partial_y J|^2$ est :

$$|\partial_y J|^2 \leq 3 \left| c' e^{\frac{g}{M}} \right|^2 |u_z|^2 + 3 \left| c e^{\frac{g}{M}} \right|^2 |\partial_y u_z|^2 + 3 \left| c' \frac{M'}{M^2} g e^{\frac{g}{M}} \right|^2 |\partial_z u_z|^2$$

À y fixé, g étant affine, $\left|c' e^{\frac{g}{M}}\right|^2$ et $\left|c' \frac{M'}{M^2} g e^{\frac{g}{M}}\right|^2$ sont continues sur $[a, b]$ et par conséquent bornées sur cet intervalle. On en déduit la majoration suivante :

$$\|\partial_y J\|_{L^2}^2 \leq \max_{x,y} (c_4(x, y)) \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2$$

$$\text{où } c_4(x, y) = 3 \left(\left|c' e^{\frac{g}{M}}\right|^2 + \left|c e^{\frac{g}{M}}\right|^2 + \left|c' \frac{M'}{M^2} g e^{\frac{g}{M}}\right|^2 \right)$$

2 - Ensemble 2 : dérivées selon y de I

$$\partial_y (I(x, y)) = c'(y) \int_a^b e^{\frac{\tilde{g}(x,z)}{M(y)}} u_z(z, y) - c(y) \frac{M'(y)}{M(y)^2} \int_a^b \tilde{g}(x, z) e^{\frac{\tilde{g}(x,z)}{M(y)}} u_z(z, y) + c(y) \int_a^b e^{\frac{\tilde{g}(x,z)}{M(y)}} \partial_y u_z(z, y)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous effectuons une première majoration

$$|\partial_y I|^2 \leq 3 |c'|^2 \int_a^b \left|e^{\frac{\tilde{g}}{M}}\right|^2 dx \int_a^b |u_z|^2 + 3 |c|^2 \int_a^b \left|e^{\frac{\tilde{g}}{M}}\right|^2 \int_a^b |\partial_y u_z|^2 + 3 \left|c' \frac{M'}{M^2}\right|^2 \int_a^b \left|g e^{\frac{\tilde{g}}{M}}\right|^2 \int_a^b |\partial_z u_z|^2$$

Puisque les deux premiers termes ressemblent beaucoup aux termes traités lors de la majoration de $\|A_\alpha^L \mathbf{u}\|_{L^2}$, nous en déduisons la majoration. Le dernier terme est plus compliqué. Le calcul de $\int_a^b \left|g e^{\frac{\tilde{g}}{M}}\right|^2$ va donner un terme de la forme $(\underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c}) e^{\frac{\tilde{g}}{M}}$. Par le même type d'argument que ceux utilisés dans la majoration de $\|J\|_{L^2}$, nous obtenons le résultat voulu.

Proceeding du CANUM 2006

Cette annexe rédigée en anglais est issue d'un article écrit avec Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Jean-François Mercier. Cet article intitulé "*Acoustic propagation in a flow : numerical simulation of the time-harmonic regime*" a été soumis pour publication au journal en ligne ESAIM Proc. Il porte sur le rayonnement acoustique en présence d'un écoulement en milieu infini et fait suite à la conférence plénière assurée par Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia au Canum 2006 sous le titre "*Propagation du son dans un écoulement : simulation numérique du régime périodique établi*"

Abstract

We consider the time-harmonic acoustic radiation of a source in a moving fluid. The problem is set in a two-dimensional infinite duct and the mean flow is a subsonic parallel shear flow, with a regular profile. We deal with an equation (due to Galbrun) whose unknown is the displacement perturbation. We show how to solve the problem with a finite element method by writing a "regularized" or "augmented" formulation and using Perfectly Matched Layers to select the outgoing solution. Due to the presence of a non-local term coming from the regularization, an iterative process of resolution is preferred, which converges faster for weaker shear. Some mathematical results are established in the dissipative case. Numerical illustrations are finally presented.

Keywords : aeroacoustics, Galbrun, finite elements, shear flow, regularization, PML

Introduction

The influence of a flow on the acoustic propagation still raises several open questions although it is involved in many practical applications : in particular a more efficient numerical simulation of acoustic propagation would be a useful tool to improve noise reducing in planes or cars industry.

Our aim is to compute by a finite element method the acoustic field radiated by a source, in a fluid in flow, in time-harmonic regime ($e^{-i\omega t}$) and in an unbounded domain. The unknown is a small perturbation of a given flow, which naturally leads to consider linearized equations. Contrary to the classical case of acoustic in a fluid at rest, the obtained problem is vectorial, since the presence of a mean flow generally couples acoustics and hydrodynamics.

Only in the case of a potential flow, acoustic perturbations are modeled by a scalar generalized Helmholtz equation : in particular, if the flow is uniform far from the source, the problem can be solved in a classical way, by coupling finite elements with integral [Dup06] or

modal [Coy01] representation of the far-field.

For a non-potential flow, most of the works mentioned in literature deal with Euler's linearized equations, using finite different methods [DJ03, BBJ02, BJ00, HNP02, Hu01, TAC98] or discontinuous Galerkin methods [BLP06, DMPV05] : it is a first order system involving the velocity and pressure perturbations, which have been widely used to perform temporal simulations using finite difference methods or discontinuous Galerkin methods.

Our choice is different and it seems to us more adapted to solve the problem with finite elements in periodic regime. The equation we consider is due to Galbrun [Gal31]. It is a second order system involving the displacement perturbation.

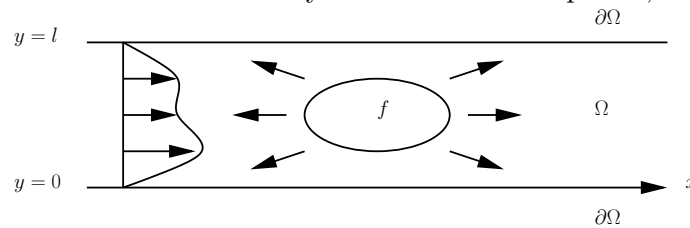
Although the Galbrun equation is very similar to classical wave equations, the direct use of a finite element method to solve it leads to very bad results. Also the treatment of unbounded domains has not been satisfactorily taken into account up to now, the difficulty being to handle simultaneously acoustic and hydrodynamic phenomena. In particular, convection of vortices requires different treatments upstream and downstream, which is not tractable with a variational approach.

Introducing the pressure as a new unknown, a mixed finite element scheme has been developed [GAT05?], which has been checked to be stable in several applications. However this mixed approach does not help to deal satisfactorily with the convection of vortices.

We propose here a different approach, based on the so-called *regularization* of Galbrun equation. Both difficulties mentioned above are then solved : the stability of a classical nodal finite element scheme is ensured and the hydrodynamic phenomenon is taken explicitly into account, allowing to introduce in the PMLs (Perfectly Matched Layers) the specific upstream-downstream behavior of the solution.

D.1 The physical problem posed in a waveguide

A two-dimensional problem set in an infinite duct $\Omega = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < l\}$ whose boundaries are rigid is considered. This duct is filled with a compressible fluid in parallel and subsonic flow : the flow is characterized by the Mach number profile, $-1 < M(y) < 1$.



In time-harmonic regime, the displacement perturbation is supposed to read

$$\Re(\mathbf{u}(x)e^{-i\omega t}), \quad \omega > 0$$

and we look for solving a problem of the following form (where f is a source supposed to be compactly supported in the duct) :

$$\begin{aligned} D^2\mathbf{u} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{D.1}$$

where we have introduced D the convective derivative operator defined by $D = -ik + M \partial/\partial x$ ($k = \omega/c$ is the wave number, c the sound speed).

The problem must be closed with radiation conditions at infinity, expressing the fact that the outgoing solution is sought. These conditions can be expressed thanks to the duct modes, but their numerical treatment is delicate, in particular because of the existence of a hydrodynamic modes continuum, modes convected by the flow. The combined use of a regularized formulation and of PMLs will allow us to avoid this difficulty.

The uniform flow case helps to better understand the phenomena modeled by Galbrun's equation. Indeed, if M is constant, it is easy to check that the acoustic pressure $p = -\operatorname{div} \mathbf{u}$ and the vorticity $\psi = \operatorname{curl} \mathbf{u}$ both satisfy two uncoupled problems : p is solution of the convected wave equation

$$D^2 p - \Delta p = -\operatorname{div} \mathbf{f},$$

and ψ is solution of the equation

$$D^2 \psi = \operatorname{curl} \mathbf{f},$$

that modelizes the convection of vortices by the flow. In the non-uniform flow case, these two phenomena are coupled.

Finally, our aim is to calculate the outgoing solution of (D.1) using finite elements and PMLs.

D.2 Regularized formulation

Let us suppose for the moment that we try to approach by finite elements the solution of Galbrun's equation in a bounded set (a part Ω_b of the duct Ω).

D.2.1 Without flow

In the absence of flow ($M = 0$), it is known that Galbrun's equation

$$-\nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - k^2 \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

can not be discretized thanks to Lagrange finite elements. This is due to a lack of compacity (of the injection from H_{div} onto L^2), difficulty entirely similar to the one widely studied in the framework of harmonic Maxwell equations. The solutions to this problem developed in the literature consist in using Raviart-Thomas elements, H_{div} -conforming, or in writing an equivalent regularized formulation of the problem. This is achieved by noting, after having taken the curl of Galbrun's equation, that the curl of the solution can be calculated a priori :

$$\operatorname{curl} \mathbf{u} = -\frac{1}{k^2} \operatorname{curl} \mathbf{f}.$$

We deduce that \mathbf{u} is solution of the following equation, where $\psi_f = -\operatorname{curl} \mathbf{f}/k^2$ is a data :

$$-\nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{u} - \psi_f) - k^2 \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

which can be written :

$$-\Delta \mathbf{u} - k^2 \mathbf{u} = \operatorname{curl} \psi_f + \mathbf{f}.$$

Then this equation can be discretized thanks to classical Lagrange finite elements. If the domain has no reentrant corner, the solution of the latter problem is the good solution of (D.1) (the one satisfying $\operatorname{curl} \mathbf{u} = \psi_f$).

D.2.2 With a flow

With a flow, the situation is more delicate. The writing of a variational formulation of Galbrun's equation makes appear the following bilinear form, whose principal part does not have a fixed sign :

$$\int_{\Omega_b} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} - M(y)^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} - 2ikM(y) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \bar{\mathbf{v}} - k^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}.$$

There is no natural functional framework to formulate the problem, and moreover, no adapted finite elements (similar to the Raviart-Thomas ones for the no-flow case). On the other side, we will be able to extend the regularization method, but in a way more delicate to perform [BLL01, BDLM]. This time the idea is to consider $\psi = \operatorname{curl} \mathbf{u}$ as a new unknown. Taking the curl of Galbrun's equation, we get the following relation between ψ and \mathbf{u} (where M' stands for the derivative of the Mach number with respect to y) :

$$D^2 \psi - 2M'D \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \operatorname{curl} \mathbf{f} \quad (\Omega).$$

Note that this is a simple ordinary differential equation in x (where y is just a parameter). In the sequel we will show that it is then possible to calculate ψ versus \mathbf{u} and to get a regularized problem for \mathbf{u} associated to good mathematical properties.

D.3 The treatment of the problem in an infinite duct

D.3.1 The dissipative problem

First to simplify we will consider the dissipative problem where the wave number is extended to the complex plan :

$$k_\epsilon = k + i\epsilon \quad \epsilon > 0,$$

and we suppose that :

$$M(y) > 0 \quad \forall y \in [0, l].$$

Thanks to the dissipation, we are then authorized to look for a solution with finite energy (which stands for the radiation condition). Let us consider the following problem : Find $\mathbf{u}_\epsilon \in H^1(\Omega)^2$ and $\psi_\epsilon \in L^2(\Omega)$ such that

$$\begin{aligned} D_\epsilon^2 \mathbf{u}_\epsilon - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}_\epsilon) + s \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{u}_\epsilon - \psi_\epsilon) &= \mathbf{f} \quad (\Omega) \\ D_\epsilon^2 \psi_\epsilon - 2M'D_\epsilon \left(\frac{\partial u_{\epsilon,x}}{\partial x} \right) &= \operatorname{curl} \mathbf{f} \quad (\Omega) \\ \mathbf{u}_\epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{curl} \mathbf{u}_\epsilon - \psi_\epsilon &= 0 \quad (\partial\Omega) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

where

$$D_\epsilon = -ik_\epsilon + M(y) \frac{\partial}{\partial x},$$

and $s > 0$ is the regularization parameter which will be fixed later.

Theorem D.3.1 *The second equation of (D.2) admits a unique solution in $L^2(\Omega)$:*

$$\psi_\epsilon = \mathbf{A}_\epsilon u_{\epsilon,x} + \psi_{f,\epsilon}, \quad (\text{D.3})$$

where

$$\psi_{f,\epsilon} = G_\epsilon \overset{x}{*} \text{curl } \mathbf{f},$$

and

$$\mathbf{A}_\epsilon u_{\epsilon,x} = \tilde{G}_\epsilon \overset{x}{*} 2M' \frac{\partial u_{\epsilon,x}}{\partial x}, \quad (\text{D.4})$$

with

$$G_\epsilon(x, y) = H(x) \frac{x}{M^2(y)} \exp\left(\frac{ik_\epsilon x}{M(y)}\right), \quad (\text{D.5})$$

(H designs the Heaviside function), $\tilde{G}_\epsilon = DG_\epsilon = MG_\epsilon/x$ and \mathbf{A}_ϵ is continuous from $H^1(\Omega)$ onto $L^2(\Omega)$.

Proof. The uniqueness in $L^2(\Omega)$ is straightforward since the solutions of the homogeneous equation $D^2\psi_\epsilon = 0$, which are of the form

$$[a(y) + x b(y)] \exp\left(\frac{ik_\epsilon x}{M(y)}\right),$$

cannot belong to $L^2(\Omega)$, except if $a = 0 = b$. Then one can check that $G_\epsilon \in L^2(\Omega)$ and satisfies for every $y \in [0, l]$:

$$D^2\tilde{G}_\epsilon = \delta, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(let us emphasize that the only $L^2(\Omega)$ Green function is the ‘‘causal’’ one, vanishing upstream). The expression of ψ_ϵ is finally obtained by convolution of $2M'D_\epsilon(\partial u_{\epsilon,x}/\partial x) + \text{curl } \mathbf{f}$ with G_ϵ , which gives (D.4) after integration by parts.

To prove that $\psi_\epsilon \in L^2(\Omega)$, recall that if $h \in L^2(\mathbb{R})$ and $g \in L^1(\mathbb{R})$, then $h * g \in L^2(\mathbb{R})$ and :

$$\|h * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|h\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Since $\|\tilde{G}_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1/\epsilon$ we get finally :

$$\|\mathbf{A}_\epsilon u_{\epsilon,x}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\sqrt{S}}{\epsilon} \|u_{\epsilon,x}\|_{H^1(\Omega)}, \quad (\text{D.6})$$

where

$$S = \max_{y \in [0, h]} [M'^2].$$

□

Remark D.3.2

1. Notice that \mathbf{A}_ϵ has the following equivalent expression :

$$(\mathbf{A}_\epsilon u_{\epsilon,x})(x, y) = \frac{2M'(y)}{M(y)} \left[u_{\epsilon,x}(x, y) + \frac{ik_\epsilon}{M(y)} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{ik_\epsilon(x-z)}{M(y)}\right) u_{\epsilon,x}(z, y) dz \right],$$

which means that it is a zeroth order operator (continuous from $L^2(\Omega)$ onto $L^2(\Omega)$).

2. In fact, the restriction $M(y) > 0$ can be relaxed, at least for the theoretical point of view. Indeed, for a general profile, we just have to set :

$$\begin{cases} G_\epsilon(x, y) = H(x) \frac{x}{M^2(y)} \exp\left(\frac{ik_\epsilon x}{M(y)}\right) & \text{if } M(y) > 0, \\ G_\epsilon(x, y) = -H(-x) \frac{x}{M^2(y)} \exp\left(\frac{ik_\epsilon x}{M(y)}\right) & \text{if } M(y) < 0, \\ G_\epsilon(x, y) = 0 & \text{if } M(y) = 0. \end{cases}$$

Notice in particular that contrary to formula (D.5), estimate (D.6) is not singular for vanishing Mach numbers.

However, for a practical point of view, the treatment of low Mach values is more delicate, since it requires the evaluation of highly oscillating integrals. An alternative will be suggested in the conclusion.

By injecting the expression of ψ_ϵ in the first equation of (D.2), the following problem of unknown \mathbf{u}_ϵ is finally obtained : find $\mathbf{u}_\epsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2$ solution of

$$\begin{cases} \mathbf{D}_\epsilon^2 \mathbf{u}_\epsilon - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}_\epsilon) + s \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{A}_\epsilon u_{\epsilon,x}) = \mathbf{f} + \operatorname{curl} \psi_{f,\epsilon} & (\Omega) \\ \mathbf{u}_\epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{curl} \mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{A}_\epsilon u_{\epsilon,x} = \psi_{f,\epsilon} & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

This problem has good mathematical properties : for instance, the Lax-Milgram theorem applies if ϵ is large enough. To prove this, let us first derive the variational formulation of the problem :

$$\begin{cases} \text{Find } \mathbf{u}_\epsilon \in V \text{ such that } \forall \mathbf{v} \in V \\ a(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) = \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + s \psi_{f,\epsilon} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{v}}), \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

where $V = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2; \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ and $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ with

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \left(\operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} + s \operatorname{curl} \mathbf{u} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{v}} - M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} - 2ik_\epsilon M \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \bar{\mathbf{v}} - k_\epsilon^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right), \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -s \int_\Omega \mathbf{A}_\epsilon u_x \operatorname{curl} \bar{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Theorem D.3.3 *The variational problem (D.8) is well-posed for $s > \max_{y \in [0, h]} M^2(y)$ and ϵ large enough.*

Remark D.3.4 *For a uniform flow, the well-posedness stands for every $\epsilon > 0$. But for a general flow, it is not surprising that well-posedness requires sufficient absorption, to prevent exponential growing due to a possible hydrodynamic instability.*

Proof. We just need to prove that the bilinear form $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ is coercive. First we note that

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| = \left| \frac{k_\epsilon}{k_\epsilon} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right| \geq |k_\epsilon| \Im m \left(-\frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{k_\epsilon} \right).$$

Concerning the bilinear form $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, integrating by parts gives for all $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2$

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \bar{\mathbf{u}} = - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} = - \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \bar{\mathbf{u}},$$

hence $\int_{\Omega} \partial_x \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} \in i\mathbb{R}$. Thus we get that

$$\Im m \left(-\frac{b(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{k_{\epsilon}} \right) = \epsilon \int_{\Omega} \left[|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{|k_{\epsilon}|^2} \left(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + s |\operatorname{curl} \mathbf{u}|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right|^2 \right) \right].$$

Thanks to Costabel's identity

$$\int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + |\operatorname{curl} \mathbf{u}|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2,$$

valid since $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ on $\partial\Omega$ and introducing $s_0 = \max_{y \in [0, h]} [M^2(y)] < 1$ we get

$$\Im m \left(-\frac{b(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{k_{\epsilon}} \right) \geq \epsilon \int_{\Omega} \left\{ |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{|k_{\epsilon}|^2} \left[(1 - s_0) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + (s - s_0) |\operatorname{curl} \mathbf{u}|^2 \right] \right\}.$$

Concerning the bilinear form $c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ we get for any $\eta > 0$:

$$\left| \frac{c(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{k_{\epsilon}} \right| \leq \frac{s}{2|k_{\epsilon}|} \int_{\Omega} \eta |\mathbf{A}_{\epsilon} u_x|^2 + \frac{1}{\eta} |\operatorname{curl} \mathbf{u}|^2,$$

which implies, using the continuity of \mathbf{A}_{ϵ} (inequality (D.6))

$$\Im m \left(-\frac{c(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{k_{\epsilon}} \right) \geq -\frac{s}{2|k_{\epsilon}|} \left(\frac{4S\eta}{\epsilon^2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} |\operatorname{curl} \mathbf{u}|^2 \right).$$

Combining the previous results we get

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \int_{\Omega} \left[\epsilon |k_{\epsilon}| |\mathbf{u}|^2 + \frac{\epsilon(1 - s_0)}{|k_{\epsilon}|} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + \left(\frac{\epsilon(s - s_0)}{|k_{\epsilon}|} - \frac{s}{2\eta} \right) |\operatorname{curl} \mathbf{u}|^2 - \frac{2sS\eta}{\epsilon^2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)^2}^2 \right].$$

If we introduce the function

$$g(\epsilon) = \min \left[\epsilon |k_{\epsilon}|, \frac{\epsilon(1 - s_0)}{|k_{\epsilon}|}, \frac{\epsilon(s - s_0)}{|k_{\epsilon}|} - \frac{s}{2\eta} \right],$$

then $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ is coercive if $g(\epsilon) > 2sS\eta/\epsilon^2$. Since

$$g_{\epsilon \rightarrow \infty} \sim \min \left[\epsilon^2, 1 - s_0, s \left(1 - \frac{1}{2\eta} \right) - s_0 \right],$$

we deduce that if $s[1 - (1/2\eta)] > s_0$ then g is positive for ϵ large enough and $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ is coercive on $V \times V$. \square

By construction every solution of (D.7) belonging to V is a solution of (D.8). The converse statement results from the following theorem :

Theorem D.3.5 *The solution \mathbf{u}_{ϵ} of problem (D.8) is such that $\operatorname{curl} \mathbf{u}_{\epsilon} = \psi_{\epsilon}$.*

Proof.

Taking as test functions $\mathbf{v} = \mathbf{curl} \varphi$ with $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (such that $\mathbf{curl} \varphi$ belongs to V , in particular $v_y = -\partial_x \varphi = 0$ on $\partial\Omega$) leads after some integrations by parts and the use of the boundary conditions of problem (D.7) to the following orthogonality relation, where (\cdot, \cdot) denotes the usual scalar product in $L^2(\Omega)$:

$$(\operatorname{curl} \mathbf{u}_{\epsilon} - \psi_{\epsilon}, H_{k_{\epsilon}, M, s} \varphi).$$

Here $H_{k_{\epsilon}, M, s}$ denotes the operator $(D_{\epsilon}^*)^2 - s\Delta$ where $D_{\epsilon}^* = -i\bar{k}_{\epsilon} + M(y) \partial/\partial x$.

This result is easily obtained after having proved that

1. $\forall \psi \in L^2(\Omega)$ such that $D_\epsilon^2 \psi \in L^2(\Omega)$ and $\forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$(D_\epsilon^2 \psi, \varphi) = (\psi, (D_\epsilon^*)^2 \varphi).$$

2. $\forall \mathbf{u} \in V$ and $\forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{curl} \varphi) = (\mathbf{curl} \mathbf{u} - \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}, (D_\epsilon^*)^2 \varphi) - (\mathbf{curl} \mathbf{u}, s \Delta \varphi).$$

3. $\forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{curl} \varphi)_{L^2(\Omega)^2} = (\psi_{f,\epsilon}, (D_\epsilon^*)^2 \varphi).$$

Point (1) is simply an integration by parts. Point (3) is easily obtained by using point (1) after the integration by parts : $(\mathbf{f}, \mathbf{curl} \varphi)_{L^2(\Omega)^2} = (\mathbf{curl} \mathbf{f}, \varphi)$, valid because $\varphi = 0$ on $\partial\Omega$.

Point (2) is deduced following a similar way. $\forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega) \cap V$ and $\mathbf{v} \in V$, an integration by parts leads to :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (D_\epsilon^2 \mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^2} + s (\mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v}).$$

Then if we take $\mathbf{u} \in H^3(\Omega) \cap V$ and $\mathbf{v} = \mathbf{curl} \varphi$, we can integrate $(D_\epsilon^2 \mathbf{u}, \mathbf{curl} \varphi)_{L^2(\Omega)^2}$ by parts to get

$$(D_\epsilon^2 \mathbf{u}, \mathbf{curl} \varphi)_{L^2(\Omega)^2} = (\mathbf{curl} D_\epsilon^2 \mathbf{u}, \varphi).$$

Then we have to notice that $\mathbf{curl} (D_\epsilon^2 \mathbf{u}) = D_\epsilon^2 (\mathbf{curl} \mathbf{u} - \mathbf{A} \mathbf{u})$ because $\mathbf{curl} (D_\epsilon^2 \mathbf{u}) = D_\epsilon^2 (\mathbf{curl} \mathbf{u}) - 2M'D_\epsilon (\partial_x u_x)$ and $D_\epsilon^2 (\mathbf{A} \mathbf{u}) = 2M'D_\epsilon (\partial_x u_x)$. Finally it is easy to conclude thanks to point (1) and to extend this result for $\mathbf{u} \in V$ thanks to the density of $H^3(\Omega) \cap V$ in V .

To conclude that $\mathbf{curl} \mathbf{u}_\epsilon = \psi_\epsilon$ in $L^2(\Omega)$, it suffices to show that $H_{k_\epsilon, M, s}$ is surjective from $\mathcal{D}(H_{k_\epsilon, M, s}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ to $L^2(\Omega)$. Since Ω is regular (no reentrant corners), this will be achieved by using Lax-Milgram theorem after having proved the coercivity of the sesquilinear form $(H_{k_\epsilon, M, s} \varphi, \psi)$. For all φ in $H_0^1(\Omega)$, we have

$$(H_{k_\epsilon, M, s} \varphi, \varphi) = \int_\Omega \left(s |\nabla \varphi|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 - 2i \overline{k_\epsilon} M \overline{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \overline{k_\epsilon}^2 |\varphi|^2 \right),$$

which implies

$$\Im m \left(\frac{(H_{k_\epsilon, M, s} \varphi, \varphi)}{\overline{k_\epsilon}} \right) = \epsilon \int_\Omega \left[|\varphi|^2 + \frac{1}{|k_\epsilon|^2} \left(s |\nabla \varphi|^2 - M^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 \right) \right].$$

Thus $(H_{k_\epsilon, M, s} \varphi, \psi)$ is coercive as soon as $s > 1$. \square

Remark D.3.6 *The treatment of domains with reentrant corners is an open question since, contrary to the electromagnetic case, the H^1 framework seems to be required by the presence of a mean flow (term $-M^2 \partial_x \mathbf{u} \partial_x \overline{\mathbf{v}}$ in the variational formulation).*

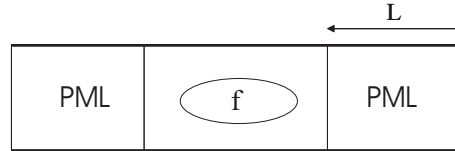
Corollary D.3.7 *Problem (D.7) has a unique solution in V which is solution of problem (D.8).*

Proof. We choose $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \subset V$ in the variational formulation (D.8). Using integration by parts and the previous theorem, we obtain that the unique solution \mathbf{u}_ϵ of (D.8) verifies the first equation of (D.7) in the distributional sense. The boundary condition is also satisfied since $\mathbf{u}_\epsilon \in V$. \square

D.3.2 Perfectly Matched Layers

To develop a finite element method to compute an approximation of the outgoing solution of the initial problem (D.1) (problem without dissipation), Perfectly Matched layers (PML) are introduced. We face two difficulties : as in the dissipative case, the operator in Galbrun's equation is not coercive, making the finite element method unstable. Moreover the problem is set in an unbounded domain. The use of PMLs allows us to follow a similar approach as in the dissipative case. The outgoing solution is naturally selected by working in finite energy spaces. Also the coerciveness will be restored by applying a regularization technique. For practical implementation, the layers are finally truncated.

The model in the layers PML is obtained starting from the exact model by introducing the following substitution in all the equations : $\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x}$ where α is a complex parameter satisfying $\text{Re}(\alpha) > 0$ et $\text{Im}(\alpha) < 0$ (then the solution decreases in the layers). Like previously in the dissipative case, ψ can be expressed as a function of \mathbf{u} and inserted in regularized Galbrun's equation. Layers of length L are introduced on both sides of the source support. Then we solve in the domain Ω_L described below (the physical domain around the source is defined as $]x_m, x_p[\times]0, l[$)



the following problem (where the index α means that the substitution has been introduced in the layers PML, equations are written in the sense of the distributions and we have chosen $s = 1$ for the sake of simplicity) :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\alpha}^2 \mathbf{u} - \nabla_{\alpha}(\text{div}_{\alpha} \mathbf{u}) + \text{curl}_{\alpha}(\text{curl}_{\alpha} \mathbf{u} - \psi) = \mathbf{f} \quad (\Omega_L) \\ \psi = \mathbf{A}_{\alpha} u_x + \psi_{f,\alpha} \quad (\Omega_L) \\ \text{on } \partial\Omega_L : \begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ and } \text{curl}_{\alpha} \mathbf{u} - \psi = 0 \text{ on } y = 0 \text{ and } l, \\ u_x = 0 = u_y \text{ on } x = x_m - L \text{ and } x_p + L, \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{D.9})$$

where \mathbf{A}_{α} denotes once again a zeroth order operator ($\mathbf{A}_{\alpha} u_x$ and $\psi_{f,\alpha}$ are defined in Appendix D.5).

This allows to show that the problem of unknown $\mathbf{u} \in H^1(\Omega_L)^2$ is of Fredholm type.

Remark D.3.8

1. The regularization is necessary not only for the finite element method but also for the PML method : the use of PMLs without regularization leads to a vorticity $\text{curl}_{\alpha} \mathbf{u}$ not necessarily equal to $\mathbf{A}_{\alpha} u_x + \psi_{f,\alpha}$, which is the good solution (more precisely the causal one [BBL]).
2. Here we have chosen to impose on the artificial boundaries at the vertical end of the PMLs : $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Other choices would be possible like to impose the same boundary conditions as on the horizontal boundaries : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ and $\text{curl}_{\alpha} \mathbf{u} - \psi = 0$ on $\partial\Omega_L$. But it would produce an additional source term on the artificial boundaries, which is complicated to deal with numerically and above all which is negligible in practice.

The variational formulation of problem (D.9) is

$$\begin{cases} \text{Find } \mathbf{u} \in V_L \text{ such that } \forall \mathbf{v} \in V_L \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \psi_{f,\alpha} \operatorname{curl}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}), \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

where $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ with

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \left[\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\alpha} (\operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{div}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{curl}_{\alpha} \mathbf{u} \operatorname{curl}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}) - \alpha M^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \right], \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} \left(2ikM \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{k^2}{\alpha} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} u_x \operatorname{curl}_{\alpha} \bar{\mathbf{v}} \right), \end{aligned}$$

and where $V_L = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_L)^2; \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega_L\}$

Theorem D.3.9 *The variational problem (D.10) is of Fredholm type.*

Proof.

We prove that the sesquilinear form $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ defines, via the Riesz representation theorem, an operator which is the sum of an isomorphism and a compact operator on V . The form $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ is coercive on V . Indeed, for all $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, we have

$$\int_{\Omega_L} |\operatorname{div}_{\alpha} \mathbf{u}|^2 + |\operatorname{curl}_{\alpha} \mathbf{u}|^2 = \int_{\Omega_L} |\nabla_{\alpha} \mathbf{u}|^2 = \int_{\Omega_L} \alpha^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right|^2,$$

which leads to

$$\begin{aligned} \Re(b(\mathbf{u}, \mathbf{u})) &\geq \int_{\Omega_L} \left[|\mathbf{u}|^2 + \Re(\alpha) (1 - s_0) \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right|^2 + \Re\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right|^2 \right], \\ &\geq C_{\alpha} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^2}^2, \end{aligned}$$

with $C_{\alpha} = \min[1, \Re(\alpha) (1 - s_0), \Re(1/\alpha)]$.

On the other hand the form $c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ defines a compact operator on V due to the compactness of the embedding of $\mathbf{H}^1(\Omega_L)$ onto $\mathbf{L}^2(\Omega_L)$. The key point is the continuity of \mathbf{A}_{α} from $\mathbf{L}^2(\Omega_L)$ onto $\mathbf{L}^2(\Omega_L)$. This continuity results from a formula analogous to (D.3) in the PML case. \square

Finally, if the flow is uniform, we know how to show [BBL, BBL04] that the solution of the problem with PML converges when the layers width L tends to infinity toward the outgoing solution of the radiation problem (D.1), this later solution being characterized thanks to a limiting absorption technique.

Remark D.3.10 *Note that in the presence of the so-called upstream modes, the solution grows in the downstream layer but this does not disturb either the convergence of the solution with PML nor the quality of the calculated solution in the bounded domain Ω_b [BBL04].*

D.4 Implementation and numerical results

The problem with PML is discretized thanks to Lagrange finite elements. In order to evaluate simply (by interpolation) the convolution formula in x , we use a structured mesh and

quadrilateral-based Q2 elements. The discretization convergence is insured since the problem is of Fredholm type.

Concerning the resolution of the linear system, it is not worth eliminating the unknown ψ because the convolution operator \mathbf{A}_α , which links all the freedom degrees located on the same streamline ($y=\text{constant}$), leads to a matrix less sparse than a classical finite element matrix [BDLM]. The unknown ψ is kept and we use the following iterative algorithm initialized with $\psi^0 = 0$:

$$D_\alpha^2 \mathbf{u}^{n+1} - \nabla_\alpha (\text{div}_\alpha \mathbf{u}^{n+1}) + \text{curl}_\alpha (\text{curl}_\alpha \mathbf{u}^{n+1} - \psi^n) = \mathbf{f} \quad (\Omega_L)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \text{curl}_\alpha \mathbf{u}^{n+1} - \psi^n = 0 \quad (\partial\Omega_L)$$

$$\psi^{n+1} = \mathbf{A}_\alpha u_x^{n+1} + \psi_f \quad (\Omega_L)$$

We check that this algorithm converges faster if the flow gradient is weaker which is not surprising since \mathbf{A}_α vanishes for a uniform flow.

The numerical method has been implemented thanks to the code MELINA [Mar].

The following results concern the case of an irrotational source \mathbf{f} in a duct of height $l = 1$. The support of \mathbf{f} is a small disk of center (0.5,0.5) and radius 0.1 and its analytical expression is :

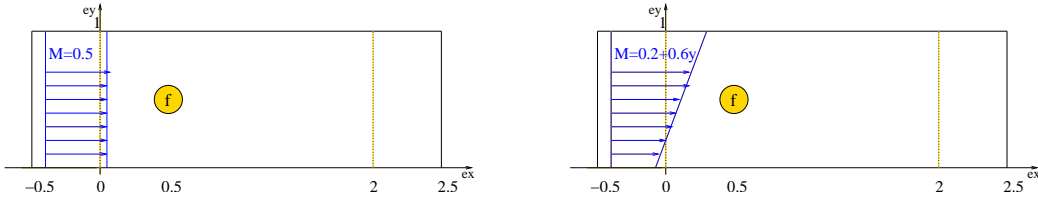
$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

We compare the scattered field obtained for two different flow profiles, a uniform one with $M = 0.5$ and a linear one given by :

$$M(y) = 0.2 + 0.6y.$$

The Mach of the uniform flow corresponds to the mean value of the linear profile.

The computational domain is represented below, with the flow profiles and the location of the source.



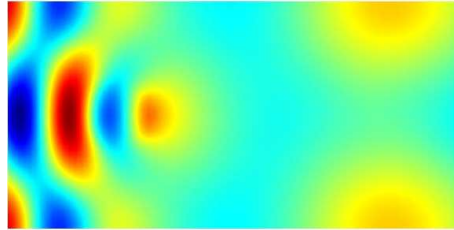
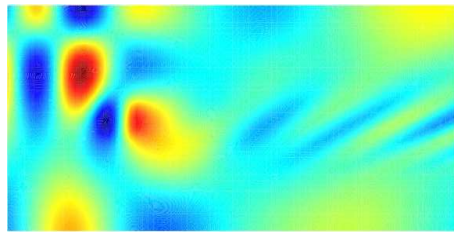
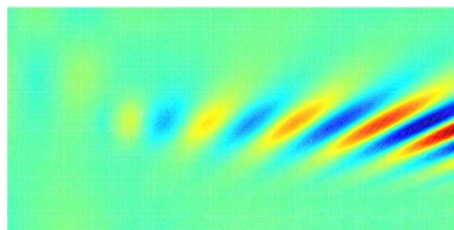
The results are obtained with 3321 degrees of freedom and $\alpha = 0.5 - 0.5i$.

The wavenumber k is equal to 8. At this frequency and for the uniform flow, there are 3 propagative acoustic modes in the duct.

The isovalues of the horizontal component of the displacement are represented below.

For the uniform flow, the convective effect of the flow clearly appears : the radiated acoustic field has a wavelength much larger downstream than upstream. It is essentially the third propagative mode (corresponding to a dependence with respect to y of the form $\cos(2\pi y)$) which is produced.

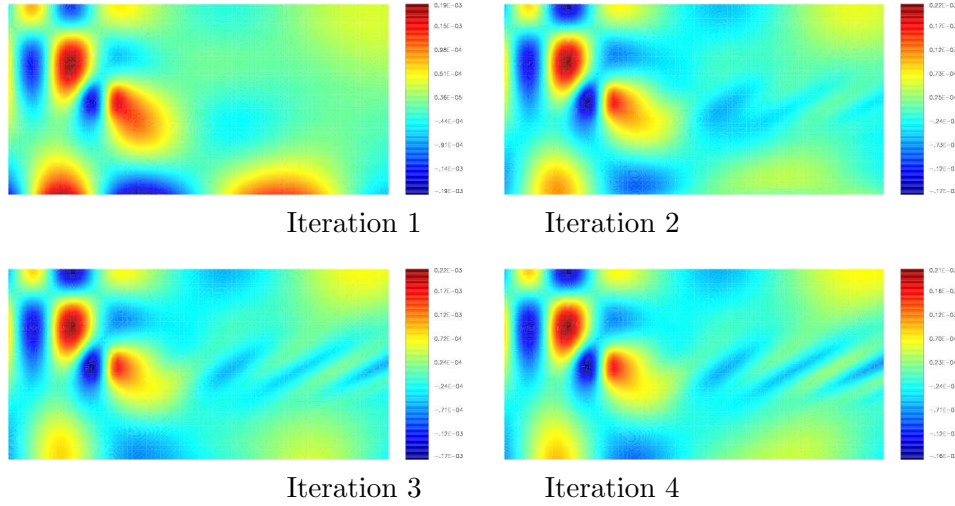
For the linear flow, we recognize a waveguide effect which takes the form of a concentration of the upstream acoustic field in the upper part of the duct. Downstream the source, the acoustic is hidden by the vortices, which appears as inclined lines. The source being irrotational ($\psi_f = 0$), it is the non-uniformity of the flow which explains the presence of vortices.

Real part of u_x , uniform flowReal part of u_x , linear flow

Vorticity for the linear flow

These inclined lines appear more clearly on the isovalues of ψ which are plotted below :

Finally, it is interesting to observe the evolution of the solution computed during the iterative process. We give below the isovalues of the horizontal component of the displacement for the 4 first iterations. It appears that the vortices progressively take the place of the acoustic field downstream of the source.



D.5 Conclusion

We have developed a numerical method allowing to calculate the field radiated by a source of perturbations in a shear flow. From a theoretical point of view, the uniform flow case has been completely studied. For a shear flow, using a dissipative process, the outgoing solution radiated by a compactly supported source has been characterized. We then proposed a variational formulation with perfectly matched absorbing layers for approximating the outgoing solution. Note that although the outgoing solution (without dissipation) is clearly defined in the uniform flow case (limiting amplitude process), we are unable to define it in the case of an arbitrary parallel flow, following the same process. However we think that for a stable flow profile the limiting amplitude process still holds.

From a numerical point of view, we developed a method based on an iterative scheme in order not to inverse non-sparse finite element matrices and we showed that we can calculate the coupling between acoustic and hydrodynamic phenomena.

The weakness of our method, in order to extend it to more practical situations (3D geometries), is the calculation of ψ thanks to the convolution formula along the streamlines. Moreover, this formula degenerates when the Mach number vanishes, which happens often in practice (close from the boundaries for instance).

Currently we develop an approximated model valid for flows whose Mach number is low. This model is obtained by calculating an equivalent of the oscillating integral $\mathbf{A}_\alpha u_x$ when M tend toward 0. Then we show that we can replace the integral formula

$$\psi = \mathbf{A}_\alpha u_x,$$

by the following differential formula

$$\psi = \frac{2iM'}{k} \alpha \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

whose discretization is much simpler. This model seems to be very promising for the extension to the 3D case.

Appendix A. Definitions of $\mathbf{A}_\alpha u_x$ and of $\psi_{f,\alpha}$

For a physical domain defined as $]x_m, x_p[\times]0, l[$ surrounded by infinite PMLs we get that the vorticity reads $\psi = \mathbf{A}_\alpha u_x + \psi_{f,\alpha}$ where :

$$\psi_{f,\alpha}(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{if } x < x_m, \\ \int_{-\infty}^x \frac{(x-z)}{\alpha^2 M(y)^2} \exp\left(i \frac{k}{\alpha M(y)}(x-z)\right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ \\ \text{if } x_m < x < x_p, \\ \int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{\alpha M(y)^2} \left(x - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha}\right) \exp\left(i \frac{k}{M(y)} \left(x - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha}\right)\right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ + \int_{x_m}^x \frac{(x-z)}{M(y)^2} \exp\left(i \frac{k}{M(y)}(x-z)\right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ \\ \text{if } x_p < x, \\ \int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{\alpha M(y)^2} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha}\right) \exp\left(i \frac{k}{M(y)} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha}\right)\right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ + \int_{x_m}^{x_p} \frac{1}{M(y)^2} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z\right) \exp\left(i \frac{k}{M(y)} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z\right)\right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \\ + \int_{x_p}^x \frac{(x-z)}{\alpha^2 M(y)^2} \exp\left(i \frac{k}{M(y)} \left(\frac{x-z}{\alpha}\right)\right) \text{rot}_\alpha \mathbf{f}(z, y) dz \end{array} \right.$$

$$\mathbf{A}_\alpha u_x(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{if } x < x_m, \\ \int_{-\infty}^x \frac{2M'(y)}{\alpha M(y)} \exp\left(i \frac{k}{\alpha M(y)}(x-z)\right) \partial_x u_x(z, y) dz \\ \\ \text{if } x_m < x < x_p, \\ \int_{-\infty}^{x_m} \frac{2M'(y)}{\alpha M(y)} \exp\left(i \frac{k}{M(y)} \left(x - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha}\right)\right) \partial_x u_x(z, y) dz \\ + \int_{x_m}^x \frac{2M'(y)}{\alpha M(y)} \exp\left(i \frac{k}{M(y)}(x-z)\right) \partial_x u_x(z, y) dz \\ \\ \text{if } x_p < x, \\ \int_{-\infty}^{x_m} \frac{2M'(y)}{\alpha M(y)} \exp\left(i \frac{k}{M(y)} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - x_m + \frac{x_m - z}{\alpha}\right)\right) \partial_x u_x(z, y) dz \\ + \int_{x_m}^{x_p} \frac{2M'(y)}{M(y)} \exp\left(i \frac{k}{M(y)} \left(\frac{x-x_p}{\alpha} + x_p - z\right)\right) \partial_x u_x(z, y) dz \\ + \int_{x_p}^x \frac{2M'(y)}{\alpha M(y)} \exp\left(i \frac{k}{M(y)} \left(\frac{x-z}{\alpha}\right)\right) \partial_x u_x(z, y) dz \end{array} \right.$$

Thanks to these formulas it is straightforward to prove that $\psi \in L^2(\mathbb{R} \times]0, l[)$.

Bibliographie

- [AE79] R. J. Astley and W. Eversman. A finite element formulation of the eigenvalue problem in lined ducts with flow. J. Sound Vib., 65(1) :61–74, 1979.
- [AS98] H. L. Atkins and C.-W. Shu. Quadrature-free implementation of discontinuous Galerkin method for hyperbolic equations. AIAA J., 36(5) :775–782, 1998.
- [BB06] C. Bogey and C. Bailly. Investigation of downstream and sideline subsonic jet noise using large eddy simulation. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 20 :23–40, 2006.
- [BBJ02] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé. Computation of flow noise using source terms in linearized Euler’s equations. AIAA J., 40(2) :235–243, 2002.
- [BBL] E. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow. SIAM J. Numer. Anal. to appear.
- [BBL04] E. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation. SIAM J. Numer. Anal., 42(1) :409–433, 2004.
- [BD99] M. Ben Tahar and J. P. Dias. Propagation et rayonnement acoustique en présence d’un écoulement non uniforme par une méthode de couplage FEM/BEM. Rev. Européenne Élé. Finis, 8(5-6) :497–524, 1999.
- [BDLM] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, E.-M. Duclairoir, G. Legendre, and J.-F. Mercier. Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow. J. Comput. and Appl. Math. to appear.
- [BDLP02] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Dahi, E. Lunéville, and V. Pagneux. Acoustic diffraction by a plate in a uniform flow. Math. Models Methods Appl. Sci., 12(5) :625–647, 2002.
- [Bér94] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. J. Comput. Phys., 114(2) :185–200, 1994.
- [Bér96] J.-P. Bérenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. J. Comput. Phys., 127(2) :363–379, 1996.

- [BG85] L. Brekhovskikh and V. Goncharov. *Mechanics of continua and wave dynamics*. Berlin and New York, Springer-Verlag (Springer Series on Wave), 1985.
- [BHL99] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Hazard, and S. Lohrengel. A singular field method for the solution of Maxwell's equations in polyhedral domains. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(6) :2028–2044, 1999.
- [BJ00] C. Bailly and D. Juvé. Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations. *AIAA J.*, 38(1) :22–29, 2000.
- [BLL01] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, G. Legendre, and E. Lunéville. Analyse mathématique de l'équation de galbrun en écoulement uniforme. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib Méc.*, 329(8) :601–606, 2001.
- [BLP06] M. Bernacki, S. Lanteri, and S. Piperno. Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, non-diffusive, discontinuous Galerkin methods. *J. Comput. Acoust.*, 14(1) :57–82, 2006.
- [Bra04] J.P. Brazier. Comparaison des modes propres des équations de Galbrun et d'Euler linéarisées dans un conduit plan. *ONERA : Tiré a Part*, (204) :1–8, 2004.
- [Bré83] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris, France, 1983.
- [Bri64] R. J. Briggs. *Electron-stream interaction with plasmas*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1964.
- [Bru98] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, France, 1998.
- [CC05] N. Castel and G. Cohen. A discontinuous galerkin method with qr spectral elements for aeroacoustics. 7th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (WAVES'05), 2005.
- [CD98] M. Costabel and M. Dauge. Un résultat de densité pour les équations de Maxwell régularisées dans un domaine lipschitzien. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(9) :849–854, 1998.
- [CD02] M. Costabel and M. Dauge. Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains. *Numer. Math.*, 93(2) :239–277, 2002.
- [CHL98] P. Ciarlet Jr, C. Hazard, and S. Lohrengel. Les équations de Maxwell dans un polyèdre : un résultat de densité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, 326(11) :1305–1310, 1998.
- [Cia78] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 4 of *Studies in mathematics and its applications*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands, 1978.
- [Cos91] M. Costabel. A coercive bilinear form for Maxwell's equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 157(2) :527–541, 1991.

- [Coy01] J. P. Coyette. Manuel théorique ACTRAN. Free Field Technologies, Louvain-la-Neuve, Belgique, 2001.
- [DJ03] J. Diaz and P. Joly. Stabilized perfectly matched layer for advective acoustics. Mathematical and numerical aspects of wave propagation ŪWAVES, pages 115–119, 2003.
- [DL84] R. Dautray and J. L. Lions. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, tome 1. Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique. Masson, Paris, France, 1984.
- [DMPV05] P. Delorme, P. Mazet, C. Peyret, and Y. Ventribout. Computational aeroacoustics applications based on a discontinuous Galerkin method. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib Méc., 333 :676–682, 2005.
- [Dup06] S. Duprey. Etude mathématique et numérique de la propagation acoustique d'un turboréacteur. PhD thesis, Université Henry Poincaré-Nancy 1, 2006.
- [EB72] W. Eversman and R. J. Beckemeyer. Transmission of sound in ducts with thin shear layers—convergence to the uniform flow case. J. Acoust. Soc. Amer., 52(1) :216–220, 1972.
- [Eli00] G. Elias. Exact equations of acoustic wave propagation in inhomogeneous media. ONERA, TP no. 2000-213, 2000.
- [Eve71] W. Eversman. Effect of boundary layer on the transmission and attenuation of sound in an acoustically treated circular duct. J. Acoust. Soc. Amer., 49 :1372–1380, 1971.
- [Fél02] S. Félix. Propagation acoustique dans les guides d'ondes courbes et problème avec source dans un écoulement cisailé. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, France, 2002.
- [FP02] S. Félix and V. Pagneux. Multimodal analysis of acoustic propagation in three-dimensional bends. Wave Motion, 36(1) :157–168, 2002.
- [FTB03] G. Gabard F. Treysse and M. Ben Tahar. A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an eulerian-lagrangian description. J. Acoust. Soc. Amer., 113 :705–716, 2003.
- [Gab03] G. Gabard. Méthodes numériques et modèles de source aéroacoustiques basés sur l'équation de Galbrun. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- [Gal31] H. Galbrun. Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence. Gauthier-Villars, Paris, France, 1931.
- [GAT05] G. Gabard, R. J. Astley, and M.B. Tahar. Stability and accuracy of finite element methods for flow acoustics. II : Two-dimensional effects. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 63(7) :974–987, 2005.

- [GR86] V. Girault and P.-A. Raviart. Finite element methods for Navier-Stokes equations, theory and algorithms, volume 5 of Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1986.
- [Gri85] P. Grisvard. Elliptic problems in nonsmooth domains, volume 24 of Monographs and studies in mathematics. Pitman, London, Great Britain, 1985.
- [HNP02] T. Hagstrom, I. Nazarov, and N. Peake. Absorbing layers and radiation conditions for jet flow simulations . 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, June 2002.
- [HOV78] M. A. Hamdi, Y. Ousset, and G. Verchery. A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 13 :139–150, 1978.
- [Hu96] F. Q. Hu. On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer. J. Comput. Phys., 129(1) :201–219, 1996.
- [Hu01] F. Q. Hu. A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables. J. Comput. Acoust., 173 :455–480, 2001.
- [Kik87] F. Kikuchi. Mixed and penalty formulations for finite element analysis of an eigenvalue problem in electromagnetism. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 64 :509–521, 1987.
- [Leg03] G. Legendre. Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun. PhD thesis, Université Paris VI, 2003.
- [Mar] D. Martin. On line documentation of MÉLINA. <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/www/homepage.html>.
- [Mar74] D. Marcuse. Theory of dielectric optical waveguides. New York, Academic Press, Inc., 1974. 267 p., 1974.
- [NB80a] B. Nilsson and O. Brander. The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining I. Modes in an infinite duct. IMA J. Appl. Math., 26 :269–298, 1980.
- [NB80b] B. Nilsson and O. Brander. The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining II. Bifurcated ducts. IMA J. Appl. Math., 26 :381–410, 1980.
- [NB81a] B. Nilsson and O. Brander. The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining III. Step discontinuities. IMA J. Appl. Math., 27 :105–131, 1981.
- [NB81b] B. Nilsson and O. Brander. The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining IV. Several interacting discontinuities. IMA J. Appl. Math., 27 :263–289, 1981.
- [Nil98] B. Nilsson. Scattering of stable and unstable waves in a flow duct. Quart. J. Mech. Appl. Math., 51(4) :599–632, 1998.

- [PB58] D. C. Pridmore-Brown. Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct. *J. Fluid Mech.*, 4 :393–406, 1958.
- [PD04] C. Peyret and P. Delorme. Simulation of linear aeracoustic propagation in lined ducts with discontinuous Galerkin method. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 115 :2588, 2004.
- [PE01] C. Peyret and G. Élias. Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 110(2) :661–668, 2001.
- [Poi85] B. Poirée. Petites perturbations d’un écoulement tournant. *Acustica*, 59 :85–94, 1985.
- [RM06] P. P. Rao and P. J. Morris. Use of finite Element Methods in Frequency Domain Aeroacoustics. *AIAA J.*, 44(7) :1643–1652, July 2006.
- [RT77] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. A mixed finite element method for second order elliptic problems. In I. Galligani and E. Magenes, editors, *Mathematical aspects of finite element methods*, Roma, 1975, pages 292–315. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1977.
- [SP80] E. Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer, 1980.
- [TAC98] C. K. W. Tam, L. Auriault, and F. Cambuli. Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains. *J. Comput. Phys.*, 144(1) :213–234, 1998.
- [Tam95] C. K. W. Tam. Computational aeroacoustics : issues and methods. *AIAA J.*, 33(10) :1788–1796, 1995.
- [Tam98] C. K. W. Tam. Advances in numerical boundary conditions for computational aeroacoustics. *J. Comput. Acoust.*, 6(4) :377–402, 1998.
- [TD96] C. K. W. Tam and Z. Dong. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *J. Comput. Acoust.*, 4(2) :175–201, 1996.
- [TGB03] F. Treysède, G. Gabard, and M. Ben Tahar. A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian-Lagrangian description. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 113(2) :705–716, 2003.
- [Tre00] L.N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, 2000.
- [TW93] C. K. W. Tam and J. C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.*, 107(2) :262–281, 1993.
- [Wer63] P. Werner. On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic wave fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 7 :348–396, 1963.
- [WR00] J. A. C. Weideman and S. C. Reddy. A matlab differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 26(4) :465–519, december 2000.

RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DANS UN ECOULEMENT CISAILLE :
Une méthode d'éléments finis pour la simulation du régime harmonique

Résumé : Les travaux de cette thèse concernent le rayonnement acoustique d'une source périodique en temps placée dans un conduit infini, contenant un fluide en écoulement parallèle cisailé. Le phénomène est modélisé à l'aide de l'équation de Galbrun, dont l'inconnue \mathbf{u} est la perturbation de déplacement. L'objectif de cette étude est de développer une méthode éléments finis, susceptible d'être étendue à des géométries et des écoulements plus complexes.

Cette thèse fait suite à celle de Guillaume Legendre qui a établi, dans le cas d'un écoulement uniforme, une formulation dite régularisée de l'équation de Galbrun afin de corriger un défaut d'ellipticité. Le but de ce manuscrit est d'étendre cette méthode à un écoulement non uniforme. La difficulté supplémentaire vient du fait que la vorticité $\psi = \text{rot } \mathbf{u}$ (qui intervient dans le terme de régularisation) ne peut plus être calculée a priori car le cisaillement induit un couplage entre acoustique et hydrodynamique.

En régime dissipatif, nous avons explicité ψ en fonction de \mathbf{u} à l'aide d'une convolution (le long des lignes de courant). Si l'écoulement est lent, cette formule de convolution (qui devient une intégrale très oscillante) peut être approchée par une formule différentielle beaucoup plus simple dont l'utilisation conduit à un modèle "faible Mach". Des idées similaires ont ensuite été utilisées pour résoudre le problème non dissipatif, à l'aide de couches PML. Les deux approches (exacte et "faible Mach") ont été validées par des tests numériques en $2D$ et en $3D$.

ACOUSTIC RADIATION IN A MOVING SHEAR FLUID :
A Finite Element Method for the Frequency Domain Simulation.

Abstract : In this work, the time-harmonic acoustic radiation of a source in an infinite duct, filled with a parallel shear flow, is considered. The phenomenon is modelled by the Galbrun equation whose unknown is the displacement perturbation \mathbf{u} . The aim of this study is to compute a finite element method which could be extended to more complex geometries and flows.

A previous PhD work achieved by Guillaume Legendre dealt with this problem in the case of a uniform flow, by writing a "regularized" formulation of the Galbrun equation in order to overcome a lack of ellipticity. This work aims to extend this method to non uniform flows. The additional difficulty comes from the fact that the vorticity $\psi = \text{rot } \mathbf{u}$ (which is involved in regularization) can not be calculated a priori anymore because the shear effect produces an interaction between acoustics and hydrodynamics.

In a dissipative regime, we get the relation between ψ and \mathbf{u} thanks to a convolution (along the streamlines). For the slow flows, this relation (which corresponds to a very oscillating integral) can be approximated by a simpler differential term. The use of the approximation leads to a new model called "low Mach". A similar approach is applied in order to solve the non dissipative problem by the means of PML (Perfectly Matched Layers). The two approaches (exact and "low Mach") have been validated by $2D$ and $3D$ numerical simulations.