



**HAL**  
open science

# Application de la géométrie différentielle des groupes de Lie à la dynamique non linéaire des milieux curvilignes

Ibrahim Alame

► **To cite this version:**

Ibrahim Alame. Application de la géométrie différentielle des groupes de Lie à la dynamique non linéaire des milieux curvilignes. Géométrie différentielle [math.DG]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992. Français. NNT: . pastel-00568707

**HAL Id: pastel-00568707**

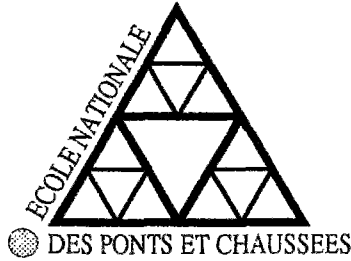
**<https://pastel.hal.science/pastel-00568707>**

Submitted on 23 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

30771



NS 17544(4)

X

# THESE DE DOCTORAT

---

Spécialité : Mathématiques et informatique

Présentée par **Ibrahim ALAME**

pour obtenir le titre de

**Docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées**

sur le sujet:

**APPLICATION DE LA GEOMETIE DIFFERENTIELLE  
DES GROUPES DE LIE A LA  
DYNAMIQUE NON LINEAIRE DES MILIEUX CURVILIGNES**

soutenue le **14 Décembre 1992** devant le jury composé de :

Président : M Charles MARLE  
Rapporteurs : MM Alain RIGOLOT  
Maurice LEMAIRE  
Examineurs : MM Bernard HALPHEN  
Dominique CHEVALLIER  
Pierre GERMAIN-LACOUR

EN.P.C.



DOC13430

08



**Application de la géométrie différentielle des  
groupes de Lie à la dynamique non linéaire des  
milieux curvilignes**

Ibrahim ALAME



# Table des matières

Remerciements	5
0 Introduction	9
<b>Partie I Outils mathématiques</b>	<b>13</b>
<b>1 Rappels mathématiques</b>	<b>15</b>
1.1 Géométrie affine euclidienne . . . . .	15
1.1.1 Espace affine; Applications affines . . . . .	15
1.1.2 Repère; orientation . . . . .	16
1.1.3 Isométries; déplacements . . . . .	17
1.2 Géométrie différentielle . . . . .	18
1.2.1 Définitions . . . . .	18
1.2.2 Applications de classe $C^k$ . . . . .	18
1.2.3 Espace tangent; Fibré . . . . .	18
1.2.4 Application linéaire tangente à un morphisme . . . . .	19
1.2.5 Dérivée de Lie; Crochet de Lie . . . . .	20
1.3 Géométrie Riemannienne . . . . .	21
1.3.1 Notions de base . . . . .	21
1.3.2 Connexions . . . . .	22
1.4 Groupes et algèbres de Lie . . . . .	25
1.4.1 Groupes de Lie . . . . .	25
1.4.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie . . . . .	26
1.4.3 Application exponentielle . . . . .	27
1.4.4 Action d'un groupe de Lie sur une variété différentiable . . . . .	32
<b>2 Le groupe des déplacements euclidiens <math>\mathbb{D}</math></b>	<b>33</b>
2.1 L'algèbre $Eq(S)$ des distributeurs . . . . .	33
2.1.1 Torseur et cotorseur . . . . .	36
2.1.2 Moment d'un distributeur . . . . .	37
2.2 Le groupe $\mathbb{D}$ . . . . .	40

2.2.1	L'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$ . . . . .	40
2.2.2	L'application exponentielle du groupe $\mathbb{D}$ . . . . .	43
<b>3</b>	<b>La formule de Campbell-Hausdorff</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Première simplification : composition d'un déplacement avec une translation	62
3.3	Cas général . . . . .	67
	 <b>Partie II Mécanique des solides et des milieux curvilignes</b>	 <b>71</b>
<b>4</b>	<b>Mécanique du solide rigide (approche hexadimensionnelle)</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	Cinématique du solide rigide . . . . .	74
4.3	Structure riemannienne de $\mathbb{S}$ . . . . .	78
4.4	Masse d'un solide . . . . .	81
4.5	Schématisation des efforts extérieurs . . . . .	81
4.6	Le principe fondamental de la dynamique . . . . .	84
4.7	La cinématique du solide en petites perturbations . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Mécanique des milieux curvilignes</b>	<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	89
5.2	Modélisation . . . . .	90
5.3	Conservation de la masse . . . . .	92
5.4	Les équations du mouvement . . . . .	93
5.5	Application . . . . .	97
5.5.1	Equilibre d'un arc de milieu curviligne dans l'espace . . . . .	98
5.5.2	Equilibre d'un arc plan de milieu curviligne chargé dans son plan . .	100
5.5.3	Equilibre d'un fil parfaitement flexible, sous l'action de son poids . .	101
5.6	Développement des équations lagrangiennes . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Loi de comportement non linéaire des milieux curvilignes</b>	<b>105</b>
6.1	Introduction . . . . .	105
6.2	Formulation thermodynamique . . . . .	105
6.2.1	Equation de l'énergie . . . . .	106
6.2.2	Inégalité fondamentale . . . . .	108
6.3	Hypothèse de l'élasticité . . . . .	109
6.4	La loi de comportement . . . . .	109
6.4.1	Définition . . . . .	109
6.4.2	Principe d'objectivité . . . . .	110
6.4.3	Obtention de la loi de comportement . . . . .	113
6.4.4	Loi de comportement non-linéaire . . . . .	116
6.5	Un modèle de loi de comportement linéaire . . . . .	118

<b>Partie III</b>	<b>Analyse numérique des milieux curvilignes</b>	<b>121</b>
<b>7</b>	<b>Résolution numérique des équations des câbles</b>	<b>123</b>
7.1	Introduction . . . . .	123
7.2	Discrétisation en temps: méthode de différences finies . . . . .	123
7.2.1	Le problème variationnel . . . . .	123
7.2.2	Approximation par différences finies . . . . .	125
7.2.3	Résolution du problème non-linéaire . . . . .	128
7.3	Discrétisation en espace: méthode d'éléments finis . . . . .	134
7.3.1	Discrétisation d'un milieu curviligne . . . . .	134
7.3.2	Approximation . . . . .	137
7.3.3	La méthode des éléments finis . . . . .	139
7.4	Mise en oeuvre informatique . . . . .	142
7.4.1	Calculs élémentaires . . . . .	142
7.5	Algorithme . . . . .	147
<b>8</b>	<b>L'usure des faisceaux des robots de soudage</b>	<b>149</b>
8.1	Position du problème . . . . .	149
8.1.1	Traitement du problème . . . . .	150
8.1.2	Etude statique . . . . .	152
8.1.3	Etude de quelques mouvements simples à l'extrémité libre A . . . . .	157
<b>9</b>	<b>Conclusions</b>	<b>169</b>
<b>A</b>	<b>Les Quaternions</b>	<b>171</b>
A.1	Définition . . . . .	171
A.2	Les quaternions vectoriels et $SO(3)$ . . . . .	172
A.3	Les nombres duaux . . . . .	173
A.4	La géométrie duale . . . . .	175
<b>B</b>	<b>Equations générales des câbles développées par MACSYMA</b>	<b>177</b>
B.1	Equation 1 . . . . .	177
B.2	Equation 2 . . . . .	178
B.3	Equation 3 . . . . .	179
B.4	Equation 4 . . . . .	180
B.5	Equation 5 . . . . .	181
B.6	Equation 6 . . . . .	182





# Remerciements

*Que Monsieur le professeur Dominique CHEVALLIER reçoive ici, mes sincères remerciements pour avoir accepté de m'encadrer et pour sa totale disponibilité.*

*Je suis très reconnaissant au Professeur Charles MARLE, qui me fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*Je désire témoigner de ma profonde et respectueuse gratitude à Monsieur le professeur Bernard HALPHEN, pour les précieux conseils qu'il m'a donnés et les encouragements constants qu'il m'a prodigués. Qu'il veuille bien accepter ici mes plus vifs remerciements.*

*Que Messieurs les professeurs Maurice LEMAIRE et Alain RIGOLOT, qui ont bien voulu rapporter cette thèse, trouvent ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance.*

*Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Monsieur Pierre GERMAIN LA-COUR, pour avoir accepté de faire partie de ce jury et pour toute l'attention qu'il m'a accordé.*

*Je me sens très redevable auprès de Messieurs Nicolas BOULEAU et Stéphane JAFFARD ancien et actuel Directeurs du Centre d'enseignement et de Recherche en Mathématiques Appliquées pour l'ambiance si propice à la recherche que j'ai pu y trouver et pour les trois très bonnes et si fructueuses années que j'ai passées dans leur centre.*

*Que Monsieur Hervé MATHIEU, Directeur de la recherche à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées soit associé à ces remerciements car je sais bien que sans sa bienveillante attention cette thèse n'aurait pas pu voir le jour.*



## Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude du comportement dynamique des milieux curvilignes, en grands déplacements. Ce qui introduit une source de non linéarité géométrique qui se manifeste dans le terme d'inertie ainsi que dans le terme de rigidité. Le milieu curviligne considéré est modélisé par une suite continue de sections rigides liées par des milieux élastiques de masse nulle. On n'introduit aucune hypothèse simplificatrice dans la description des efforts intérieurs. Dans le modèle proposé, nous pouvons introduire une loi de comportement élastique non linéaire ce qui rajoute une deuxième source de non linéarité.

On utilise ici comme outil fondamental le formalisme de la géométrie différentielle des groupes de Lie, ceci permet une écriture simple et condensée des équations de la dynamique et facilite leur traitement numérique. Les équations sont résolues par un algorithme numérique élaboré dans le même formalisme ce qui évite l'utilisation "lourde" des paramètres de coordonnées.

Enfin, les résultats obtenus sont appliqués à deux exemples concrets : le premier d'origine industrielle concerne le comportement du faisceau de câbles robotiques, le deuxième issu du Génie parasismique traite du comportement dynamique de grands bâtiments.

## Abstract

The aim of this work is the study of the dynamic behavior of cables, in the assumption of large displacements, which introduces a geometrical non linearity appearing in the inertial term and in the rigidity term. The cable is modelled by a succession of rigid sections linked to each other by an elastic medium without mass. No assumption is made for the sake of simplicity in the description of internal forces. In the proposed model, a non linear elastic behavior law may be introduced, that would involve a new non linear term.

Differential geometry of Lie groups allows us to obtain a simple and compact writing of dynamic equations and makes the numerical processing easier. The equations are solved by a numerical algorithm written in the same manner as the equations, and this avoids large computations and the requirements for high storage.

Finally, the proposed model is applied to two concrete examples ; the first, taken from industrial world treats the problem of the dynamics of robotic cables, the second, from

civil engineering, deals with vibrations of tall buildings.

# Chapitre 0

## Introduction

De nombreux solides utilisés dans la pratique des constructions (civiles, industrielles, navales aéronautiques, robotiques, etc.) ont une forme élancée. Il doit donc être possible, en adaptant un point de vue plus macroscopique que celui de la mécanique de milieux continus tridimensionnels, d'en faire l'étude mécanique en les décrivant de façon unidimensionnelle suivant une courbe directrice.

Les modèles proposés dans la littérature pour prendre en compte simultanément flexion, torsion et grands déplacements, dans une mise en équation générale de la dynamique des câbles, sont très souvent incomplets.

On trouve, en effet, principalement dans la littérature : soit des schématisations à nombre fini de degrés de liberté (*cf* [12]), soit des modélisations très simplifiées par l'utilisation de milieux continus curvilignes tels que les fils inextensibles sans raideur et par négligence d'une partie des phénomènes (flexion, torsion...) (*cf* [59, 29]). Beaucoup découplent artificiellement flexion et torsion, ou introduisent un angle de torsion et ne peuvent plus prendre en compte correctement les conditions aux limites (*cf* [6]), ou sortent du cadre hyperélastique et n'admettent ni potentiel élastique ni formulation variationnelle (*cf* [66]).

Or il est ici nécessaire de prendre en compte a priori tous ces phénomènes afin de mieux les représenter et de contrôler au mieux les simplifications et les approximations qu'une résolution numérique ne manquerait pas d'impliquer. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à mettre en oeuvre une écriture générale des équations **non linéaires** de la dynamique des milieux curvilignes.

La mécanique des milieux curvilignes paraît à première vue comme un sujet "démodé et épuisé", alors que cette branche de la mécanique est presque réduite à la théorie des poutres en petites déformations (RDM) et à la dynamique des fils sans raideur (corde vibrante) (*cf* [59]). En robotique, par exemple, le manque d'une étude sérieuse de la dynamique non linéaire des câbles pose de nombreux problèmes : les faisceaux des robots de soudage par point, pour lesquels il faut acheminer eau, air et électricité jusqu'à la pince, sont très sollicités et s'usent rapidement. Ce qui implique des remplacements anormalement fréquents et donc des coûts de maintenance élevés (*cf* [36]). Cette situation devient donc

préoccupante, compte tenu du nombre de robots utilisés.

Un câble est par définition un solide tridimensionnel élané. Une modélisation unidimensionnelle consiste à considérer la section transversale comme un solide rigide pouvant se déplacer avec 6 degrés de liberté et c'est la seule hypothèse que l'on fait ici. En conséquence, l'orthogonalité de la section transversale à la courbe directrice (hypothèse de Navier-Bernoulli) n'est pas exigée.

L'obtention par la méthode classique des équations de la dynamique des câbles est très difficile. Elle conduit à des systèmes d'équations très volumineux qui rempliraient plusieurs pages (cf [44]). Le choix des paramètres (angles d'Euler ou autres) est le point faible de cette méthode car elle fait appel à l'intuition et au savoir-faire. L'originalité de ce travail est donc une écriture condensée des équations de la dynamique ne fait apparaître que les opérations intrinsèques à l'aide d'un nouveau formalisme lié à la géométrie différentielle des groupes de Lie. Ce formalisme mathématique nouveau, très peu connu de mécaniciens<sup>1</sup> permet l'expression de la dynamique sans recourir aux décompositions en éléments de réduction et au calcul vectoriel tridimensionnel. Tout le calcul algébrique et différentiel nécessaire tient alors en quelques règles très simples qui englobent dans un calcul unique de niveau supérieur l'ensemble du calcul vectoriel tridimensionnel nécessaire. De plus, l'interconnexion entre le calcul différentiel et la structure algébrique apparaît de façon particulièrement nette (cf [17]).

Les notions "classiques" de la mécanique des corps rigides (position, vitesse, accélération, puissance, énergie et le principe fondamental) sont développées tout au long de la deuxième partie, au travers de la méthode de Lie. Voici donc un bref résumé de cette démarche :

- *position* : la transformation qui fait passer un solide d'une configuration de référence  $\mathbf{r}$  à sa configuration actuelle  $\mathbf{s}(t)$  est une application affine conservant les distances et l'orientation, donc c'est une isométrie directe ou "déplacement". L'ensemble des déplacements  $\mathbb{D}$  est un groupe pour la loi de composition des applications  $\circ$ .
- *Le mouvement* d'un solide peut être décrit par une application  $t \mapsto D(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{D}$ . Cette application est au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  puisque  $\mathbb{D}$  est un groupe de Lie, c'est à dire, un groupe muni d'une structure différentielle compatible avec la loi de composition interne  $\circ$ . Soit  $\mathfrak{d}$  son algèbre de Lie qui dans le cas d'un groupe quelconque de Lie est défini comme l'espace tangent au groupe en l'élément neutre muni du crochet de Lie. Dans le cas du groupe  $\mathbb{D}$ ,  $\mathfrak{d}$  s'identifie à l'espace vectoriel des champs équivariants muni du crochet de Lie :

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}](m) = \omega_x \wedge \mathbf{y}(m) - \omega_y \wedge \mathbf{x}(m) \quad (0.1)$$

<sup>1</sup>La première apparition d'une telle approche est trouvée chez les frères E et F. Cosserat entre 1905 et 1910 à la suite de calculs pénibles (cf [23]). V. Arnold (1966) utilisant les idées de G. Birkhoff (1955) a aussi étudié la dynamique sur un groupe puis tenté de généraliser cette méthode au cas des milieux continus mais sans grand succès (cf [10]).

- La vitesse d'une solide  $\mathbf{v} = \frac{dD}{dt}$  est un vecteur de  $T_D\mathbb{D}$ , espace tangent à  $\mathbb{D}$  en  $D$ . Les représentations eulérienne et lagrangienne de la vitesse  $\mathbf{v}^e$  et  $\mathbf{v}^c$  sont les translattées à gauche et à droite de  $\mathbf{v}$  par  $D$  :  $\mathbf{v}^c = D^{-1}\frac{dD}{dt}$  et  $\mathbf{v}^e = \frac{dD}{dt} \cdot D^{-1}$  ; ce sont les vitesses respectivement par rapport au corps et par rapport à l'espace de référence du solide.
- Traditionnellement pour représenter la puissance on utilise la notion de comoment de deux torseurs : torseur des moments des efforts extérieurs  $\mathcal{M}$  ( $\overrightarrow{\mathcal{M}(P)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(O)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$ ) et torseur des vitesses  $\mathbf{v}$  (ou plus précisément cotorseur) ( $\overrightarrow{\mathbf{v}(P)} = \overrightarrow{\mathbf{v}(O)} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}$ ). La puissance est donnée par le comoment ou le produit intérieur de  $\mathcal{M}$  et  $\mathbf{v}$

$$[\mathcal{M}|\mathbf{v}] = \vec{R} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}(O)} + \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}(O)} \quad (0.2)$$

L'application  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto [\mathbf{x}|\mathbf{y}]$  est une forme bilinéaire symétrique mais non définie positive, ce n'est donc pas un produit scalaire sur  $\mathfrak{d}$ . On définit sur  $\mathfrak{d}$  le produit scalaire  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_S \mathbf{x}(m) \cdot \mathbf{y}(m) d\mu(m)$  où  $\mu$  est une mesure positive. En pratique, les deux formes bilinéaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $[\cdot, \cdot]$  sont liées à la notion de puissance, et il n'y a entre les deux qu'une différence de point de vue :  $[\mathbf{x}^m|\mathbf{y}]$  est la puissance des efforts représentés par leur champ des moments des forces  $\mathbf{x}^m$ , alors que  $\langle \mathbf{x}^f, \mathbf{y} \rangle$  est la puissance des efforts représentés par leur champ des forces  $\mathbf{x}^f$ . Cependant la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a l'avantage d'être définie positive. On démontre l'existence d'un opérateur symétrique défini positif  $H$  tel que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = [H\mathbf{x}|\mathbf{y}]$ . En pratique,  $H$ , synthétise, la masse, le tenseur d'inertie et le centre d'inertie du solide.

- L'accélération d'un solide  $S$  est égale à la dérivée absolue ou la dérivée covariante du distributeur de vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport au temps :  $\gamma = \frac{\nabla \mathbf{v}}{dt}$  où  $\nabla$  est la connexion définie de manière unique à partir de l'expression de l'énergie cinétique  $T = \frac{1}{2}m \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}[\mathbf{v}|H\mathbf{v}]$ . On démontre que

$$\gamma = \frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + H^{-1}[\mathbf{v}^c, H\mathbf{v}^c] \quad (0.3)$$

- Le principe fondamental de la dynamique du solide s'écrit alors :  $\mathbf{f} = m\gamma$ , c'est à dire,  $\mathbf{f} = m\frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + mH^{-1}[\mathbf{v}^c, H\mathbf{v}^c]$  ou bien, si l'on veut ce principe en termes de moments

$$\mathcal{M} = H\frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + [\mathbf{v}^c, H\mathbf{v}^c] \quad (0.4)$$

le crochet de Lie  $[\mathbf{v}, H\mathbf{v}]$  décrit les moments des forces de Coriolis et les couples gyroscopiques.

L'avantage de cette nouvelle méthode est qu'elle n'exige pas un choix préalable des coordonnées qui interviennent durant tout le calcul, elle permet un véritable allègement des calculs manuels et facilite le traitement numérique des équations en vue de leur résolution sur l'ordinateur.

Cette thèse est subdivisée en trois parties :



1. La première partie porte sur les outils mathématiques nécessaires pour la méthode de Lie :

L'objet du chapitre 1 est de rappeler les définitions et de donner certaines propriétés des structures algébriques et géométriques que nous aurons l'occasion de rencontrer par la suite. La géométrie de l'espace euclidien ambiant dans lequel évolue tout système physique n'est utilisé qu'à travers la structure du groupe de déplacement qui fait l'objet du chapitre 2. La principale difficulté de la méthode de Lie est de pouvoir expliciter le déplacement résultant de la composition de deux déplacements, cette question sera étudiée dans le chapitre 3.

2. La seconde partie concerne la mécanique des milieux curvilignes :

Le premier chapitre de cette partie (chapitre 4) étudie une nouvelle approche hexadimensionnelle de la dynamique des solides indéformables tout en restant conforme, bien sûr, avec les trois lois de Newton. Cette approche évite de séparer les deux aspects ; rotation et translation et traite le solide comme s'il était un "point matériel". Ce chapitre traite aussi quelques problèmes d'équilibre non linéaires et linéarisés : équilibre d'un arc de milieux curvilignes dans l'espace, équilibre d'un arc chargé dans son plan, cas d'un fil parfaitement flexible. L'intérêt d'étudier ces problèmes est de montrer la faisabilité des équations générales. Le chapitre 5 est consacré à la dynamique des milieux curvilignes et à l'écriture des équations du mouvement. Le chapitre 6 étudie la loi de comportement linéaire et non linéaire des milieux curvilignes.

3. La troisième partie est consacrée à l'élaboration d'un algorithme numérique compatible avec la méthode de Lie qui traite les équations d'une manière intrinsèque et qui évite un développement préalable par rapport aux coordonnées. Le dernier chapitre de cette thèse traite un exemple numérique simple d'origine industrielle. On présente ensuite un nouveau modèle du comportement dynamique de bâtiment construit à l'aide de corps rigides et de poutres s'appuyant sur les techniques de la géométrie différentielle des groupes de Lie. Dans le modèle proposé, les planchers sont considérés rigides indéformables se déplaçant avec six degrés de liberté. Dans le cas des petits déplacements, on aboutit à des équations de la dynamique du nouveau modèle qui présentent plusieurs analogies avec celles discrétisées obtenues précédemment pour la dynamique des câbles.

**Partie I**

**Outils mathématiques**



# Chapitre 1

## Rappels mathématiques

*L'objet de ce chapitre est de rappeler les définitions et de donner certaines propriétés des structures algébriques et géométriques que nous aurons l'occasion de rencontrer par la suite.*

### 1.1 Géométrie affine euclidienne

L'espace intervenant en cinématique et en mécanique Newtonienne, possède une structure d'espace affine euclidien orienté. Les automorphismes de cette structure sont les "déplacements euclidiennes" ou simplement "déplacements", qui décrivent les mouvements d'un solide rigide et forment un groupe de Lie dont la structure, qui fera l'objet d'une étude détaillée dans la seconde section de ce chapitre, joue un rôle essentiel dans tout ce travail.

#### 1.1.1 Espace affine; Applications affines

En pratique, chacun d'entre nous détermine, à chaque instant, une bijection de son environnement physique (espace affine) avec l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ . En fait, théoriquement, il n'y a entre ces deux notions qu'une différence de point de vue. Tout espace affine s'identifie à un espace vectoriel lorsque l'on y fixe un point comme origine; et tout espace vectoriel est un espace affine lorsque l'on oublie le zéro. D'où l'introduction de la notion d'espace affine à partir de celle d'espace vectoriel:

**Définition 1 (Espace affine)** Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel. On dit qu'un ensemble  $\mathcal{E}$  est un espace affine de direction  $\mathbb{E}$ , si on a une application :  $(x, y) \longrightarrow \overrightarrow{xy}$  de  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  dans  $\mathbb{E}$  vérifiant les deux conditions suivantes:

- Pour tout  $x, y, z$  dans  $\mathcal{E}$  on a  $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$  (relation de Chasles)
- Pour tout  $x \in \mathcal{E}$ , l'application  $\theta_x : y \longrightarrow \overrightarrow{xy}$  est une bijection de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{E}$ .

### Notation

- Si  $\mathcal{E}$  est l'espace affine sur  $\mathbb{E}$ , on dit que  $\mathbb{E}$  est l'espace directeur de  $\mathcal{E}$ .
- Pour chaque  $\vec{a}$  dans  $\mathbb{E}$ , on note  $x + \vec{a}$  l'unique  $y$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{xy} = \vec{a}$

**Remarque 1** Un point de  $\mathcal{E}$  "plus" un vecteur de  $\mathbb{E}$  donne un point de  $\mathcal{E}$ . Mais on n'a pas le droit d'écrire  $x + y$  avec  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{E}$ .

**Définition 2** Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines d'espaces directeurs respectifs  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$ . Une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est dite affine si et seulement s'il existe  $f^l \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  vérifiant l'assertion:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2 \quad f(B) = f(A) + f^l(\overrightarrow{AB})$$

L'application linéaire  $f^l$  est unique: on l'appelle **partie linéaire** de  $f$

D'après cette définition une application affine est entièrement déterminée par sa valeur en un point quelconque et sa partie linéaire

Si  $f$  et  $g$  sont deux applications affines alors  $g \circ f$  est une application affine et  $(g \circ f)^l = g^l \circ f^l$ .

Si  $f$  est une bijection affine, il en est de même de  $f^{-1}$ ; on parle alors d'**isomorphisme affine**.

D'après ce qui précède, les bijections affines de  $\mathcal{E}$  dans lui même forment un sous-groupe du groupe des bijections de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{E}$ . Ce groupe est appelé groupe affine de  $\mathcal{E}$  et noté  $GA(\mathcal{E})$ .

### 1.1.2 Repère; orientation

Si  $\mathbb{E}$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ , une base de  $\mathbb{E}$  est une suite  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $n$  vecteurs indépendants de  $\mathbb{E}$ . Si  $\mathcal{E}$  est un espace affine de dimension  $n$ , un repère  $(\Omega; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $\mathcal{E}$  est défini par la donnée d'un point  $\Omega$  de  $\mathcal{E}$  et d'une base de l'espace vectoriel associé.

Ceci étant, pour toute base  $\alpha = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  de  $\mathbb{E}$  et tout système de vecteurs  $X = (\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n)$ , nous noterons  $\Delta_\alpha(X)$  le déterminant des  $n$  vecteurs  $X_1, \dots, X_n$  dans la base  $\alpha$ . Désignons par  $\beta = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  une autre base de  $\mathbb{E}$ , on a:  $\Delta_\alpha(X) = \Delta_\alpha(\beta) \times \Delta_\beta(X)$ .

Sur l'ensemble  $\mathcal{B}$  des bases de  $\mathbb{E}$ , la relation binaire  $\mathcal{R}$  définie par

$$\alpha \mathcal{R} \beta \iff \Delta_\alpha(\beta) \in \mathbb{R}_+^* \quad (\alpha \in \mathcal{B}, \beta \in \mathcal{B})$$

est une relation d'équivalence. Les classes de cette relation sont appelées classes d'orientation de  $\mathbb{E}$ .

**Proposition 1** Sur tout espace vectoriel de dimension finie, il y a exactement deux classes d'orientation.

Deux bases équivalentes sont dites de même orientation; sinon, elles sont dites d'orientations opposées.

Orienter un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ , c'est choisir l'une des deux classes d'orientation de  $\mathbb{E}$ , dont les éléments sont appelés **bases directes**. Les bases appartenant à l'autre classe d'orientation, sont alors dites indirectes ou rétrogrades.

Orienter un espace affine  $\mathcal{E}$  est, par définition, choisir une orientation sur l'espace vectoriel associé  $\mathbb{E}$ .

Les lois fondamentales de la mécanique classique font intervenir les distances. On munit pour cela  $\mathbb{E}$  d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, notée  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ , et appelée produit scalaire. La fonction  $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$  est une norme sur  $\mathbb{E}$  que nous noterons  $\|\mathbf{x}\|$ .  $\mathbb{E}$  est alors appelé espace vectoriel euclidien et son espace affine attaché  $\mathcal{E}$  est appelé espace affine euclidien. Comme tout espace affine euclidien,  $\mathcal{E}$  sera supposé muni de la distance  $d$  définie par:

$$\forall A, B \in \mathcal{E} \quad d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

### 1.1.3 Isométries; déplacements

Par définition, une isométrie de  $\mathcal{E}$  est une application  $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{E} \quad \|\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Si  $\phi$  est une bijection affine dont la partie linéaire appartient au groupe orthogonal  $O(\mathbb{E})$ , c'est évidemment une isométrie. Réciproquement, on démontre que toute isométrie de  $\mathcal{E}$  est une bijection affine dont la partie linéaire appartient à  $O(\mathbb{E})$ . Donc l'ensemble des isométries  $Is(\mathcal{E})$  forme un sous-groupe de  $GA(\mathcal{E})$ . De même, l'ensemble des bijections affines dont la partie linéaire appartient à  $SO(\mathbb{E})$  forme un sous-groupe de  $GA(\mathcal{E})$  inclus dans  $Is(\mathcal{E})$  que nous noterons  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ , ses éléments sont les isométries de déterminant  $+1$ : on les appelle isométries directes ou **déplacements**.

**Proposition 2** *Supposons  $\mathcal{E}$  orienté de manière que le repère  $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  soit direct. Pour toute bijection affine  $\phi$ , soit  $\mathcal{R}_\phi$  le repère  $(\phi(O); \phi^1(\vec{e}_1), \dots, \phi^1(\vec{e}_n))$ .*

*Alors l'application  $\phi \mapsto \mathcal{R}_\phi$  définit une bijection de  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  sur l'ensemble des repères orthonormaux directs de  $\mathcal{E}$ .*

Les déplacements sont donc les automorphismes de la structure d'espace affine euclidien orienté (espace physique) et ils décrivent aussi les mouvements des solides rigides et leurs propriétés.

## 1.2 Géométrie différentielle

### 1.2.1 Définitions

- Une **variété** topologique de dimension  $n$  est un espace topologique séparé  $M$  localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .
- Une **carte** de  $M$  est un couple  $(U, \varphi)$  constitué d'une partie  $U$  de  $M$  appelé domaine de la carte, et un homéomorphisme  $\varphi$  de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Les coordonnées  $x_i$  de  $\varphi(x)$  sont appelées **coordonnées locales** de  $x$  associées à la carte  $(U, \varphi)$ .
- un **atlas** de dimension  $n$  et de classe  $C^p$  sur  $M$  est un ensemble  $A$  de cartes  $(U_i, \varphi_i)$  de dimension  $n$  de  $M$  tel que:
  - Les domaines  $U_i$  recouvrent  $M$ .
  - Pour chaque couple  $(i, j) \in I^2$ ,  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  est un isomorphisme de classe  $C^p$  de  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  sur  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ .
- Une **variété différentiable** de classe  $C^p$  (resp  $C^\infty, C^\omega$ ) de dimension  $n$  est une variété de dimension  $n$  munie d'un atlas de classe  $C^p$  (resp  $C^\infty, C^\omega$ ).

### 1.2.2 Applications de classe $C^k$

Soit  $M$  et  $N$  deux variétés de classes respectives  $C^p, C^q$ , et  $f$  une application continue de  $M$  dans  $N$ .

- Soit  $k$  entier  $\leq \inf(p, q)$ , on dit que  $f$  est  **$k$  fois différentiable** en  $a \in M$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  contenant  $a$ , et une carte  $(V, \psi)$  de  $N$  contenant  $f(a)$ , telles que l'application  $\Phi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  ( définie sur l'ouvert  $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ ) admette une différentielle d'ordre  $k$  au point  $\varphi(a)$  (en effet on démontre qu'il en est de même pour tout autre couple de cartes  $(U_1, \varphi_1)$  de  $M$  et  $(V_1, \psi_1)$  de  $N$  telles que  $a \in U_1$  et  $f(a) \in V_1$  ce qui rend la définition intrinsèque)
- On dit que  $f$  est de **classe  $C^k$**  ou un  **$C^k$ -morphisme** s'il existe un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de  $M$  et un atlas  $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$  tels que pour tout couple  $(i, j) \in I \times J$ , l'application  $\Phi_{ji} = \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$  soit de classe  $C^k$  sur son domaine de définition. ( Il en est alors de même pour tout atlas de  $M$  et tout atlas de  $N$ ).

### 1.2.3 Espace tangent; Fibré

**Proposition 3** Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$  et de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ), soit  $m \in T_m$  l'ensemble des triplets de la forme  $(U, \phi, u)$  où  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $(U, \phi)$  est une carte telle que  $m \in U$ . On obtient une relation d'équivalence  $\mathcal{R}_m$  sur  $T_m$  en posant

$$(V, \psi, v) \mathcal{R}_m (U, \phi, u) \text{ si et seulement si } v = (\psi \circ \phi^{-1})'_{\phi(m)} \cdot u$$

Si  $\mathbf{v}$  est un vecteur tangent à  $M$  en  $m$  et si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  en  $m$ , il existe un unique vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que  $(U, \varphi, v)$  appartienne à la classe  $\mathbf{v}$ ; cet élément  $v$  est le représentant du vecteur  $\mathbf{v}$  dans la carte  $(U, \varphi)$ . Un vecteur tangent apparaît ainsi comme un objet représenté par son origine  $m = o(\mathbf{v})$  et dans chaque carte par un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 3** Avec les notations ci-dessus, les classes d'équivalence modulo  $\mathcal{R}_m$  sont appelées vecteurs tangents à  $M$  en  $m$ ; l'ensemble quotient  $\mathcal{T}_m/\mathcal{R}_m$  est appelé plan tangent à  $M$  en  $m$  noté  $T_m M$ .

Soit  $(x^1, \dots, x^n)$  les coordonnées locales de  $x$  dans une carte contenant  $m$ . On définit les applications linéaires  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_m$  par

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m (f) = \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}\right)_{\phi(m)}$$

On vérifie aisément que ces applications sont des vecteurs de  $T_m M$  et forment une base. On a donc la proposition:

**Proposition 4** Le plan tangent  $T_m M$  admet une structure canonique d'espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 4** L'espace tangent est  $TM = \cup_{m \in M} T_m M$ . Si  $T_m^* M$  est le dual de  $T_m M$ , l'espace cotangent est  $T^* M = \cup_{m \in M} T_m^* M$

**Théorème 1 (et définition)**  $TM$  peut être muni canoniquement, d'une structure de variété de classe  $C^{k-1}$ , de dimension  $2n$ . Cette variété est appelé le **fibré tangent** de  $M$ , et noté  $\tau(M)$ .

#### 1.2.4 Application linéaire tangente à un morphisme

**Proposition 5** Soit  $M, N$  deux variétés différentiables de dimensions respectives  $n, p$  et  $f : M \rightarrow N$  un morphisme. Le point  $m$  de  $M$  étant fixé, désignons par  $(U, h)$  et  $(V, k)$  des cartes de  $M, N$  telles que  $m \in U$  et  $f(m) \in V$ , et soit  $L$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  définie par  $L(u) = (k \circ f \circ h^{-1})'_{h(m)} \cdot u$ .

Alors l'élément  $\eta$  de  $T_{f(m)} N$ , représenté par  $L(u)$  dans la carte  $(V, k)$ , ne dépend que de l'élément  $\xi$  de  $T_m M$ , représenté par  $u$  dans la carte  $(U, h)$ , de plus l'application  $f^T(m) : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$ ,  $\xi \mapsto \eta$  ainsi définie est linéaire.

**Définition 5** L'application linéaire  $f^T(m)$  définie ci-dessus est dite **tangente** à  $f$  en  $m$ . On la note aussi  $f'(m)$  ou  $df(m)$ .



### 1.2.5 Dérivée de Lie; Crochet de Lie

La connaissance de l'opérateur dérivée de Lie  $L_X$  associé à un champ de vecteurs  $X$  permet de reconstituer  $X$  et ses courbes intégrales aussi, de façon intrinsèque, indépendamment d'un système de coordonnées donné à l'avance. Ce caractère intrinsèque de la dérivée de Lie fait jouer un rôle fondamental à la fois sur le plan théorique et sur le plan du calcul.

**Définition 6** *Un champ de vecteurs de classe  $C^k$  sur une variété  $V$  de classe  $C^p$  ( $p \geq k+1$ ) est une application  $X : V \rightarrow TV$  telle que pour tout  $m \in V$ ,  $X(m) \in T_mV$  (donc c'est une section du fibré tangent  $TV$ ). En effet,  $p \circ X = I_V$  où  $p : TV \rightarrow V$  désigne la projection ou l'application "pied"<sup>1</sup>).*

Dans une carte locale  $(U, \phi)$ , les coordonnées de  $X(m)$  seront appelées **composantes locales** de  $X(m)$ , et notées  $X_i(m)_{i=1, \dots, n}$ . Ce sont les composantes de  $X(m)$  dans la base  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_m$  de  $T_mV$ .

**Définition 7** *Soit  $C^\infty(V)$  l'algèbre des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $V$ , une dérivation de  $C^\infty(V)$  est une application linéaire  $D : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$  vérifiant pour tout  $f, g \in C^\infty(V)$  :*

$$D(fg) = gDf + fDg$$

#### Interprétation d'un champ de vecteurs comme opérateur différentiel

Soit  $\Gamma(V)$  l'espace vectoriel des champ de vecteurs de classe  $C^\infty$ . Si, pour tout  $X \in \Gamma(V)$  et tout  $m \in V$ , on associe à chaque  $f \in C^\infty(V)$  la fonction:

$$L_X f : m \mapsto f^T(m) \cdot X(m) = \langle X, f^T(m) \rangle$$

on obtiendra ainsi la dérivation (appelée dérivée de Lie selon le champ de vecteurs  $X$ ):

$$\begin{aligned} L_X : C^\infty(V) &\rightarrow C^\infty(V) \\ f &\mapsto L_X f \end{aligned}$$

définie, en coordonnées locales  $(x_i)$  par:  $L_X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Réciproquement, on démontre que pour chaque dérivation  $D$  de l'espace des dérivations de  $C^\infty(V)$ , il existe un unique champ de vecteurs  $X \in \Gamma(V)$  tel que  $L_X = D$ . D'où l'existence d'un champ de vecteurs unique  $Z$  tel que la dérivation<sup>2</sup>  $L_X L_Y - L_Y L_X$  soit égale à  $L_Z$  pour tout couple  $(X, Y) \in \Gamma(V) \times \Gamma(V)$ .

<sup>1</sup>ou bien application origine

<sup>2</sup>Il est immédiat de vérifier qu'elle en est une

### Crochet de champs de vecteurs et algèbre de Lie

Le champ de vecteurs que l'on vient de définir est appelé **crochet de Lie** des champs  $X, Y$  et noté  $[X, Y]$ .

Si  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  et  $(Y_i)_{i=1, \dots, n}$  désignent les composantes locales de  $X, Y$  dans une carte, les composantes locales de  $Z = [X, Y]$  dans cette même carte sont:

$$Z_i = \sum_{j=1}^n \left( X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)$$

L'application:

$$\begin{aligned} \Gamma(V) \times \Gamma(V) &\rightarrow \Gamma(V) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

est évidemment bilinéaire, antisymétrique, non associative et vérifie l'identité de Jacobi:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Gamma(V) \quad [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0 \quad (1.1)$$

Tout espace vectoriel muni d'une loi interne vérifiant ces conditions est appelé une **algèbre de Lie** (bien que la multiplication ne soit pas associative).

## 1.3 Géométrie Riemannienne

### 1.3.1 Notions de base

La géométrie riemannienne est l'étude des variétés sous l'aspect métrique. On définit la distance entre deux points sur une variété comme étant le plus court chemin pour aller d'un point à l'autre, mais en restant sur la variété, et non pas celle induite par la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ <sup>3</sup>

**Définition 8** Une variété riemannienne  $C^\infty$  est le couple  $(V, g)$  d'une variété différentiable  $V$  et d'une métrique Riemannienne  $g$  de classe  $C^\infty$ , c.à.d un champ de tenseurs deux fois covariant (une section de  $T^*V \times T^*V$ ), tel qu'en tout point  $m \in V$ ,  $g_m$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l'espace tangent en  $m$ ,  $T_m V$  :

$$g_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_m(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \text{ et } g_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \text{ si } \mathbf{x} \neq 0$$

Par exemple si  $V$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , pour chaque  $m \in V$ ,  $T_m V$  s'identifie à un sous-espace de  $V \times \mathbb{R}^n$ ; ce qui nous permet de prendre pour  $g_m$  le produit scalaire induit par celui de  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas général, on a le théorème

**Théorème 2** Sur une variété différentiable paracompacte  $C^\infty$ , il existe une métrique riemannienne  $g$ ,  $C^\infty$ .

<sup>3</sup>on rappelle que toute variété de dimension finie peut être plongée dans un espace du type  $\mathbb{R}^n$

**Définition 9** La longueur d'un chemin différentiable  $c : [t_0, t_1] \rightarrow V$  de classe  $C^1$  est;

$$\ell(c) = \left| \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(c) \frac{dc^i}{dt} \frac{dc^j}{dt}} dt \right| \quad (1.2)$$

**Théorème 3** Soit  $d(m, p) = \inf_i \sum_{i=1}^k \ell(c_i)$  pour tout les chemins  $C^1$  par morceaux d'extrémité  $m$  et  $p$ , où  $c_i$  est la suite finie des arcs différentiables composant le chemin. Alors  $d(m, p)$  définit une distance sur  $V$  et la topologie définie par cette distance est la topologie initiale.

### 1.3.2 Connexions

#### Position du problème

Si on se donne un champ de vecteurs  $x$ , on ne sait pas quel sens donner à la dérivée de ce champ  $x$  en un point dans une direction donnée ou le long d'un chemin  $\gamma$ , en effet, la formule de dérivation classique

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{?}{=} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(\gamma(t)) - x(\gamma(t_0))}{t - t_0} \quad (1.3)$$

tombe en défaut car il est à priori impossible de comparer deux vecteurs qui appartiennent à des espaces tangents distincts. Dans  $\mathbb{R}^n$  il existe une notion naturelle "déplacer une figure géométrique parallèlement à elle-même": Si  $V = \mathbb{R}^n \quad \forall m \in V \quad T_m V$  s'identifie à  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

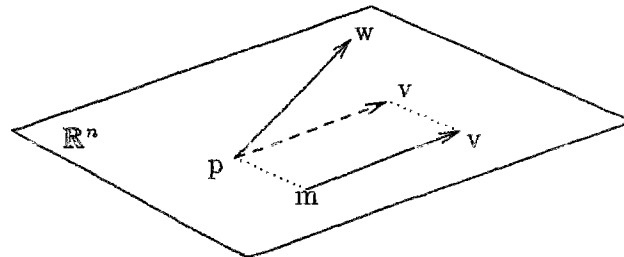


Figure 1.1: Transport parallèle dans  $\mathbb{R}^n$

Deux vecteurs liés  $v = (m, v) \in T_m V$  et  $w = (p, w) \in T_p V$  peuvent être comparés par équipotence c.à.d on transporte  $(m, v)$  parallèlement (à lui-même) en  $(p, v)$ .

Sur une variété il n'existe rien de semblable. Ce qui nous amène, tout naturellement, à définir un *transport parallèle* sur une variété quelconque:

### Transport parallèle

Soit  $\gamma : I \rightarrow V$  un arc tracé dans  $V$ , à tout couple  $(t_0, t) \in I^2$ , on associe une isométrie d'espaces vectoriels:

$$J_{t_0}^\gamma : T_{\gamma(t_0)}V \xrightarrow{\cong} T_{\gamma(t)}V \quad (1.4)$$

Les espaces tangents  $T_{\gamma(t_0)}V$  et  $T_{\gamma(t)}V$  étant évidemment munis des produits scalaires  $g_{\gamma(t_0)}$  et  $g_{\gamma(t)}$

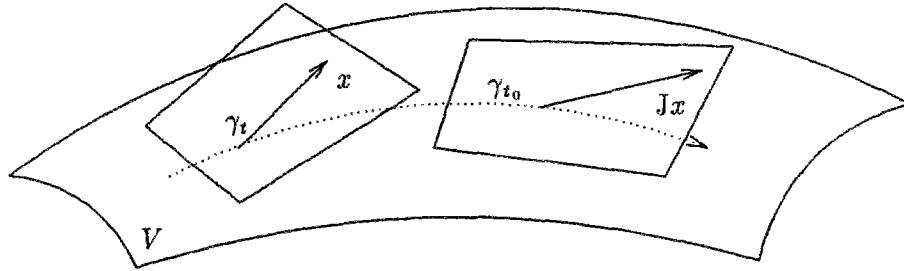


Figure 1.2: Transport parallèle dans  $V$

Nous dirons que  $J_{t_0}^\gamma$  est un transport parallèle le long de  $\gamma$  dans  $V$ , s'il vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) suivantes:

- Le transport parallèle peut être interprété comme un mouvement rigide du vecteur tangent entre les deux instants  $t_0$  et  $t$ . D'où la première condition:

(i) Il existe une application du type (1.4) vérifiant :

$$\begin{cases} J_{tt} = \mathbf{1} \\ J_{t't} = J_{t''t'} \circ J_{t't''} \\ J_{t''t'} = J_{t't''}^{-1} \end{cases} \quad (1.5)$$

- Revenons à l'expression 1.3 et remplaçons  $\mathbf{x}(\gamma(t))$  par sa représentation dans le même espace tangent que  $\mathbf{x}(\gamma(t_0))$ , on a alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{J_{t_0 t}^\gamma \mathbf{x}(\gamma(t)) - \mathbf{x}(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{t_0} [J_{t_0 t}^\gamma \mathbf{x}(\gamma(t))] \quad (1.6)$$

La deuxième condition consiste à donner un sens à 1.6. D'où l'hypothèse de dérivabilité. De plus cette dérivée doit garder sa caractère intrinsèque c.à.d son indépendance du choix du paramètre  $t$ ; nous supposons donc qu'elle ne dépend que du vecteur tangent à  $\gamma$ , et non de  $\gamma$  à proprement parler:

(ii) Pour tout champ de vecteurs différentiable  $x \in \Gamma(V)$ , et pour tout  $t_0 \in I$ , l'application  $t \rightarrow J_{t_0}^{\gamma} x(\gamma(t))$  de  $I$  dans  $T_{\gamma(t_0)}V$  est différentiable, et sa dérivée

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0} [J_{t_0}^{\gamma} x(\gamma(t))] \in T_{\gamma(t_0)}V \quad (1.7)$$

dépend seulement du vecteur tangent  $L = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{t_0}$  au point de paramètre  $t_0$ . On notera  $\nabla_L x$  cette dérivée et on l'appellera dérivée covariante du champ de vecteurs  $x$  par rapport à  $L$ . L'application  $\nabla : (x, y) \mapsto \nabla_x y$  est dite connexion de la variété  $V$ .

- La dérivée covariante définie précédemment est sensée d'être linéaire et le champ-dérivée covariante d'un champ différentiable est différentiable. D'où:

(iii) Pour tous champs de vecteurs différentiables  $x$  et  $y$ , l'application

$$\nabla_y x : a \mapsto \nabla_{y(a)} x$$

est un champ de vecteur différentiable. En outre, pour  $x$  fixé, l'application  $\nabla x : y \mapsto \nabla_y x$  est  $C^\infty(V)$ -linéaire.

On démontre que si  $J$  est un transport parallèle vérifiant les trois conditions précédentes alors:

$$\nabla_y (x_1 + x_2) = \nabla_y x_1 + \nabla_y x_2 \quad (1.8)$$

$$\nabla_x (fy) = L_x fy + f \nabla_x y \quad (1.9)$$

$$L_x g_m(y, z) = g_m(\nabla_x y, z) + g_m(y, \nabla_x z) \quad (1.10)$$

On résume (1.8, 1.9 et 1.10) en disant que la dérivation covariante est une loi de dérivation respectant la métrique riemannienne.

**Définition 10** La torsion de la connexion  $\nabla$  est l'application de  $\Gamma_1 \times \Gamma_1$  dans  $\Gamma_1$  définie par:

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \nabla_x y - \nabla_y x - [x, y] \quad (1.11)$$

On vérifie que la valeur de  $T(x, y)$  en  $m$  ne dépend que des valeurs en  $a$  de  $x$  et  $y$ .

**Définition 11** La courbure de la connexion  $\nabla$  est la 2-forme à valeurs dans  $\text{Hom}(\Gamma_1, \Gamma_2)$  définie par:

$$(x, y) \mapsto R(x, y) = \nabla_x \nabla_y - \nabla_y \nabla_x - \nabla_{[x, y]} \quad (1.12)$$

Pour la définition on suppose que les champs de vecteurs sont au moins de classe  $C^2$ , mais on montre que la valeur de  $R(x, y)z$  en  $m$  ne dépend que des valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$  en  $m$ .

**Définition 12 (Connexion riemannienne)** C'est la connexion sans torsion pour laquelle le tenseur métrique est à dérivée covariante nulle.

**Théorème 4** Il existe, pour une variété riemannienne  $(V, g)$  une connexion métrique et une seule qui soit à torsion nulle.

## 1.4 Groupes et algèbres de Lie

### 1.4.1 Groupes de Lie

**Définition 13** *Un groupe de Lie  $\mathbb{G}$  est une variété de classe  $C^\infty$  munie d'une structure de groupe telle que l'application "produit":*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{G} \times \mathbb{G} &\rightarrow \mathbb{G} \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

*soit de classe  $C^\infty$ .*

#### Notations

$$\begin{array}{ll} \text{Translation gauche: } \gamma_g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G} & \text{Translation droite: } \delta_g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G} \\ x \mapsto gx & x \mapsto xg \end{array}$$

$\delta_g$  et  $\gamma_g$  sont évidemment de classe  $C^\infty$ , et même des difféomorphismes.

On a

$$\gamma_g \circ \gamma_h = \gamma_{gh} \qquad \delta_g \circ \delta_h = \delta_{hg} \qquad (1.13)$$

et

$$\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}} = \gamma_{g^{-1}} \circ \gamma_h = I_{\mathbb{G}} \qquad \delta_g \circ \delta_{g^{-1}} = \delta_{g^{-1}} \circ \delta_h = I_{\mathbb{G}} \qquad (1.14)$$

donc pour tout  $g : \gamma_g^T$  et  $\delta_g^T$  sont des isomorphismes de  $T_e \mathbb{G}$  sur  $T_g \mathbb{G}$ .

**Proposition 1** *Si  $\mathbb{G}$  est un groupe de Lie, l'application involutive  $i : g \mapsto g^{-1}$  est de classe  $C^\infty$ .*

**Proposition 2** *Le produit direct de deux groupes de Lie est un groupe de Lie.*

**Proposition 3** *Tout sous groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie.*

#### Exemples de groupes de Lie:

- Le *groupe linéaire*  $GL(n, \mathbb{R})$  s'identifie, en tant que variété à la sous-variété ouverte de  $\mathbb{R}^{n^2}$  définie par  $\det X \neq 0$ . La multiplication des matrices étant une application de classe  $C^\infty$ ;  $GL(n, \mathbb{R})$  est bien un groupe de Lie de dimension  $n^2$ .

L'application :  $X \mapsto \det X$  de  $GL(n, \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^*$  est un homomorphisme de groupes de Lie submersif. Son noyau

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) / \det X = 1\} \qquad (1.15)$$

est un sous groupe de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$ , appelé le *groupe spécial linéaire*.

De même, pour l'application  $X \mapsto X^t X$  de  $GL(n, \mathbb{R})$  dans le sous espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$  formé des matrices symétriques, son noyau<sup>4</sup>

$$O(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) / X^t X = \mathbf{1}_n\} \quad (1.16)$$

est un sous-groupe de Lie de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$  appelé *groupe orthogonal réel*. Les éléments de  $O(n, \mathbb{R})$  de déterminant +1 forment un sous-groupe ouvert de  $O(n, \mathbb{R})$  (car défini par l'inégalité  $\det X > 0$ ). C'est donc, d'après la proposition (3), un sous-groupe de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$  appelé *groupe spécial orthogonal*  $SO(n, \mathbb{R})$  (groupe des rotations vectorielles de  $\mathbb{R}^n$ ).

- Le groupe des similitudes de  $\mathbb{R}^n$  (car isomorphe à  $\mathbb{R}^* \times O(n, \mathbb{R})$ ) ainsi que le groupe des matrices triangulaires supérieures de déterminant non nul.
- Le groupe affine (sous-groupe du groupe linéaire  $GL(n+1, \mathbb{R})$ ) et enfin le groupe des déplacements euclidiens (car isomorphe à  $\mathbb{R}^n \times SO(n, \mathbb{R})$ )

#### 1.4.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

**Définition 14** Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie, un champ de vecteurs  $X$  est dit invariant à gauche s'il vérifie:  $\gamma_g^T(x).X(x) = X(gx)$

Il est immédiat qu'un tel champ est défini par sa valeur en l'élément neutre  $e$ , soit  $X(e) \in T_e \mathbb{G}$ . La relation  $X(g) = \gamma_g^T(e).X(e)$  montre que ce champ est nécessairement de classe  $C^\infty$ . Réciproquement, si  $L \in T_e(\mathbb{G})$ , on peut lui associer le champ invariant à gauche  $X_L : g \mapsto \gamma_g^T(e)L$ . Donc l'application:  $X \mapsto X(e)$  de l'espace vectoriel des champs invariants à gauche sur  $\mathbb{G} : \Gamma(\mathbb{G})$  dans  $T_e \mathbb{G}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On montre que le crochet de Lie de deux éléments  $X, Y$  de  $\Gamma(\mathbb{G})$  est un élément  $[X, Y]$  de  $\Gamma(\mathbb{G})$ . L'espace  $\Gamma(\mathbb{G})$  a donc une structure d'algèbre de Lie, que l'on peut transporter sur  $T_e \mathbb{G}$  à l'aide de l'isomorphisme précédent. Par définition, c'est l'**algèbre de Lie de  $\mathbb{G}$**  notée  $\mathfrak{g}$ .

A chaque vecteur tangent  $\mathbf{v} \in T\mathbb{G}$  peuvent être associés deux éléments  $\mathbf{v}^e$  et  $\mathbf{v}^c$  de  $T_e \mathbb{G}$  définis par:

$$\mathbf{v}^e = \delta_{A^{-1}}^T \mathbf{v} \quad \mathbf{v}^c = \gamma_{A^{-1}}^T \mathbf{v}$$

inversement la donnée de  $\mathbf{v}^e$  ou de  $\mathbf{v}^c$  et de l'origine  $A \in \mathbb{G}$  détermine  $\mathbf{v}$ . Cela signifie que les vecteurs tangents à  $\mathbb{G}$  appartenant à divers espaces  $T_A \mathbb{G}$ , peuvent être représentés de deux façons par le couple  $(A, \mathbf{x})$  où  $A$  décrit  $\mathbb{G}$  et  $\mathbf{x}$  décrit l'espace  $T_e \mathbb{G} \simeq \mathfrak{g}$ . En cinématique - nous allons le voir au chapitre 3- l'isomorphisme  $T\mathbb{G} \simeq \mathbb{G} \times \mathfrak{g}$  qu'on vient de décrire permet de représenter la position et la vitesse d'un solide indéformable sous deux points de vue :  $\mathbf{v}^e$  représente le champ des vitesses euleriennes (par rapport à l'espace), et  $\mathbf{v}^c$  représente le champ des vitesses lagrangiennes (par rapport au corps).

<sup>4</sup>L'application en question n'est pas un homomorphisme, son noyau est, quand même, un sous-groupe

Exemples d'algèbres de Lie:

- L'algèbre de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$  s'obtient donc en munissant  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du crochet:

$$[A, B] = AB - BA \quad (1.17)$$

En effet, puisque  $GL(n, \mathbb{R})$  est une sous-variété ouverte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ , l'espace tangent à  $GL(n, \mathbb{R})$  s'identifie à  $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et les champs invariants à gauche sur  $GL(n, \mathbb{R})$  sont de la forme  $X_L : g \mapsto \gamma_g^T L = gL$ , où  $L$  est un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On vérifie alors que le crochet  $[X_L, X_M]$  de deux tels champs est le champ  $X_{[L, M]}$  avec  $[L, M] = LM - ML$ .

- L'algèbre de Lie de  $O(n, \mathbb{R})$  est isomorphe, à la sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formée des matrices antisymétriques.

### 1.4.3 Application exponentielle

**Définition 15** *Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie  $\mathbb{G}$  est un homomorphisme de classe  $C^\infty$  du groupe additif  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $\mathbb{G}$ .*

Soit  $\rho : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{G}$  un groupe à un paramètre de  $\mathbb{G}$ :

$$\rho(t + u) = \rho(t)\rho(u) = \gamma_{\rho(t)}\rho(u) \quad (1.18)$$

on déduit, par dérivation par rapport à  $u$ :

$$\rho'(t) = \gamma_{\rho(t)}^T \cdot \rho'(0) \quad (1.19)$$

Le vecteur tangent  $\rho'(t)$  est donc la valeur au point  $\rho(t)$  du champ invariant à gauche engendré par l'élément  $\rho'(0)$  de  $T_e\mathbb{G}$ .

Réciproquement, on démontre que si  $X$  est un champ de vecteurs invariant à gauche sur  $\mathbb{G}$  tel que  $X(e) = \mathbf{x} \in T_e\mathbb{G}$ , alors la courbe intégrale solution de:

$$\begin{cases} \rho'(t) = X(\rho(t)) \\ \rho(0) = e \end{cases}$$

est un sous-groupe à un paramètre de  $\mathbb{G}$ . Grâce à cette bijection qu'on vient de décrire, le sous-groupe à un paramètre  $\rho$  tel que  $\rho'(0) = \mathbf{x} \in T_e\mathbb{G}$  sera dit engendré par  $\mathbf{x}$ .

**Définition 16** *Pour tout  $\mathbf{x} \in T_e\mathbb{G}$ , soit  $\rho_{\mathbf{x}}$  le sous-groupe à un paramètre engendré par  $\mathbf{x}$ . L'application:*

$$\begin{array}{ccc} T_e\mathbb{G} & \rightarrow & \mathbb{G} \\ \mathbf{x} & \mapsto & \rho_{\mathbf{x}}(1) \end{array}$$

*est appelée application exponentielle et notée  $\exp \mathbf{x}$ .*



### Propriétés de l'application exponentielle

1. D'après la définition, l'application exponentielle vérifie:

- $\forall t, u \in \mathbb{R}$  et pour tout  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$

$$\exp((t+u)\mathbf{x}) = \exp(t\mathbf{x}) \exp(u\mathbf{x})$$

- pour tout  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$  on a :

$$\exp(-\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{x})^{-1}$$

- on a aussi  $\exp(0) = e$

2. Comme on a  $\rho_{\mathbf{x}}(tu) = \rho_{u\mathbf{x}}(t)$  pour tout  $u, t \in \mathbb{R}$ , alors:

$$\rho_{\mathbf{x}}(t) = \rho_{t\mathbf{x}}(1) = \exp t\mathbf{x}$$

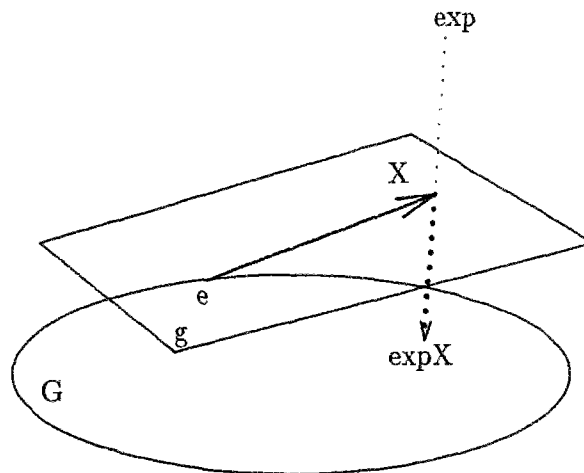


Figure 1.3: L'application exponentielle

3. Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ ; on a  $\frac{d}{dt}(\exp t\mathbf{x} \cdot \exp t\mathbf{y})_{t=0} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  et la formule utile pour la suite:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} (\exp s\mathbf{y} \cdot \exp t\mathbf{x} \cdot \exp^{-1} s\mathbf{y})_{t=s=0} = [\mathbf{y}, \mathbf{x}] \quad (1.20)$$

**Proposition 6** Soit  $t \mapsto \exp t\mathbf{x}$  et  $t \mapsto \exp t\mathbf{y}$  deux sous-groupes à un paramètre, pour que ces groupes commutent, il faut et il suffit que le crochet  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  soit nul.

**Coordonnées canoniques:**

Si  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,n}$  est une base de  $T_e\mathbb{G}$ , l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{G} \\ \mathbf{x} &\mapsto \exp \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

est de classe  $C^\infty$  et vérifie:  $f(0) = e$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \mathbf{e}_i$ . Donc  $f^T(0)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $T_e\mathbb{G}$ , et il existe un voisinage ouvert  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f|_U$  soit un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $U$  sur un voisinage  $\Omega$  de  $e$  dans  $\mathbb{G}$ . Le couple  $(\Omega, f|_U^{-1})$  est une carte de  $\mathbb{G}$  centrée en  $e$ , et les coordonnées locales définies au voisinage de  $e$  par cette carte sont dites *canoniques* ou *normales*. Par translation (gauche ou droite) on en déduit des coordonnées locales au voisinage de tout point de  $\mathbb{G}$ .

Si  $(x^1, \dots, x^n)$  sont les coordonnées canoniques de  $x$  et si  $x^k$  appartient à la même carte que  $x$ , alors les coordonnées canoniques de  $x^k$  sont  $(kx^1, \dots, kx^n)$ .

Notons que pour tout entier  $p$  ( $1 \leq p < n$ ) l'application:

$$\begin{aligned} f_p : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{G} \\ \mathbf{x} &\mapsto (\exp \sum_{i=1}^p x_i \mathbf{e}_i) \cdot (\exp \sum_{i=p+1}^n x_i \mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

définit aussi des coordonnées locales au voisinage de  $e$ , utiles pour certaines questions.

**Définition 17** Un homomorphisme d'algèbre de Lie est une application linéaire  $h$  d'une algèbre de Lie  $\mathcal{A}$  dans une algèbre de Lie  $\mathcal{B}$  qui vérifie pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$  et tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

$$[h(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})] = h([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \quad (1.21)$$

un automorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}$  est un homomorphisme bijectif de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$

Cela étant on a facilement:

**Proposition 7** Si  $h : \mathbb{G} \rightarrow H$  est un homomorphisme de classe  $C^\infty$  de groupes de Lie, alors  $h^T(e)$  est un homomorphisme de l'algèbre de Lie de  $\mathbb{G}$  ( $\simeq T_e\mathbb{G}$ ) dans l'algèbre de Lie de  $H$  ( $\simeq T_eH$ ); de plus pour tout  $\mathbf{x} \in T_e\mathbb{G}$  on a:

$$h(\exp \mathbf{x}) = \exp(h^T(e).\mathbf{x}) \quad (1.22)$$

### Représentation adjointe

Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie, et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie ( $\simeq T_e\mathbb{G}$ ). A chaque  $\sigma \in \mathbb{G}$  on associe l'automorphisme intérieur  $Int_\sigma : \mathfrak{g} \mapsto \sigma \mathfrak{g} \sigma^{-1}$  qui est un automorphisme de groupe de Lie. Donc d'après ce qui précède  $Int_\sigma^T(e)$  est un automorphisme de  $\mathfrak{g}$ . D'où la:

**Définition 18** La représentation adjointe de  $\mathbb{G}$  est l'homomorphisme de groupes:

$$\begin{aligned} Ad : \mathbb{G} &\rightarrow Aut(\mathfrak{g}) \\ \sigma &\mapsto Int_{\sigma}^T(e) \end{aligned}$$

### Propriétés

- D'après la proposition (7) on a:

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{g}) (\forall D \in \mathbb{G}) D \exp \mathbf{x} D^{-1} = \exp(Ad D.\mathbf{x})$$

- En remplaçant  $\mathbf{x}$  par  $t\mathbf{x}$ , on voit que le sous-groupe à un paramètre  $t \mapsto D \exp t\mathbf{x} D^{-1}$  de  $\mathbb{G}$  est engendré par  $Ad D.\mathbf{x}$  de  $\mathbb{G}$ . D'où:

$$\frac{d}{dt} (D \exp t\mathbf{x} D^{-1}) = Ad D.\mathbf{x}$$

- En posant  $D = \exp s\mathbf{x}$  et en utilisant la formule (1.20), on obtient:

$$\boxed{\frac{d}{ds} (Ad(\exp s\mathbf{x}).\mathbf{y})_{s=0} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]} \quad (1.23)$$

Le crochet de Lie  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  s'interprète comme un déplacement infinitésimale défini par  $\mathbf{x}$  appliqué à  $\mathbf{y}$ .

Puisque  $\mathfrak{g} (\simeq T_e\mathbb{G})$  est un espace vectoriel de dimension  $n = \dim\mathbb{G}$ ,  $Aut(\mathfrak{g})$  est un sous-groupe de  $GL(\mathfrak{g})$  et l'application  $Ad$  peut être considérée comme un homomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{G}$  dans le groupe de Lie  $GL(\mathfrak{g})$ . Sa différentielle en  $e$ , soit  $Ad^T(e)$ , est donc un homomorphisme de  $\mathbb{G}$  dans l'algèbre de Lie de  $GL(\mathfrak{g})$ . Or l'algèbre de Lie de  $GL(\mathfrak{g})$  s'identifie à l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$  des endomorphismes de  $\mathfrak{g} (\simeq T_e\mathbb{G})$  muni du crochet défini par  $[A, B] = AB - BA$ . Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ ,  $Ad^T(e).\mathbf{x}$  est donc un élément de  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$  que l'on note  $ad \mathbf{x}$ .

Par application, encore une fois, de la proposition (7), à l'homomorphisme  $Ad : \mathbb{G} \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  on obtient immédiatement la:

**Proposition 8** Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$  on a:

$$\boxed{Ad(\exp \mathbf{x}) = \exp(ad \mathbf{x})} \quad (1.24)$$

L'intérêt de cette proposition vient de ce que le second membre est une exponentielle d'endomorphisme:

$$\exp ad \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ad \mathbf{x})^n}{n!} \quad (1.25)$$

De plus, dans les équations de la dynamique le groupe  $\mathbb{D}$  n'intervient que par l'intermédiaire de sa représentation adjointe.

**Proposition 9** Pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$  on a:

$$ad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

En effet, en utilisant la formule (1.23) et en échangeant  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , on a:

$$ad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (Ad^T(e) \cdot \mathbf{x}) \mathbf{y} = \frac{d}{dt} (Ad(\exp t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y})_{t=0} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

**Dérivée de l'application exponentielle**

**Théorème 5** Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Lie, et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie, on a:

$$\exp^T \mathbf{x} = \gamma_{\exp \mathbf{x}}^T \cdot R(-\mathbf{x})$$

avec

$$R(-\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ad^k(-\mathbf{x})}{(k+1)!} \quad (1.26)$$

Cette formule de dérivation fournit aussitôt les points où  $\exp^T \mathbf{x}$  est bijective, ceci revient à exprimer que l'opérateur  $R(-\mathbf{x})$  est inversible, i.e. que ses valeurs propres sont non nulles. Mais comme

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(k+1)!} = \frac{1 - e^{-z}}{z} \quad (1.27)$$

est une série entière partout convergente, il est clair que, pour toute matrice  $u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , les valeurs propres de l'opérateur  $\phi(u)$  sont les nombres  $\phi(z)$ , où  $z$  décrit l'ensemble des valeurs propres de  $u$ . Comme les zéros de la fonction  $\phi$  sont les nombres  $2ki\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on en déduit que l'application  $\exp^T \mathbf{x}$  est bijective ssi  $ad \mathbf{x}$  n'a aucune valeur propre de la forme  $2ki\pi$  avec  $k \neq 0$ .

#### 1.4.4 Action d'un groupe de Lie sur une variété différentiable

**Définition 19** On dit que le groupe de Lie  $\mathbb{G}$  opère différentiablement à gauche sur une variété différentiable  $V$  (ou  $\mathbb{G}$  est un groupe de transformation de  $V$ ) si l'on s'est donné une application de classe  $C^\infty$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{G} \times V &\rightarrow V \\ (g, x) &\mapsto g \bullet x\end{aligned}$$

telle que pour tout  $x \in V$  on ait :

$$\begin{aligned}- & e \bullet x = x \\ - & g \bullet (h \bullet x)\end{aligned}$$

Pour chaque  $x \in V$  nous noterons  $\mu_x(g) = g \bullet x$ . L'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (t, x) &\mapsto \mu_x(\text{expt}L)\end{aligned}$$

définit un groupe à un paramètre de transformations de  $V$  engendré par le champ de vecteurs :

$$X_L(x) = \frac{\partial}{\partial t} [\mu_x(\text{expt}L)]_{t=0} = \mu_x^T(e) \cdot L$$

**Proposition 4** L'application  $L \mapsto X_L$  est un endomorphisme injectif d'algèbres de Lie de  $g^-$  dans l'algèbre de Lie  $\Gamma(V)$  des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $V$ . Où  $g^-$  désigne l'algèbre de Lie opposée de  $g$ .

Le signe moins provient de ce que le groupe opère à gauche sur la variété, inversant le sens de la multiplication du groupe.

## Chapitre 2

# Le groupe des déplacements euclidiens $\mathbb{D}$

*Ce chapitre a pour but d'exposer de manière la plus simple les notions élémentaires sur lesquelles repose la méthode de Lie pour la mécanique du solide rigide : nous aurons besoin d'utiliser les déplacements euclidiens pour repérer les corps rigides (groupe de Lie), ainsi que les champs équiprojectifs nécessaires pour la représentation des champs des vitesses et des efforts agissant sur un solide (algèbre de Lie).*

### 2.1 L'algèbre $Eq(S)$ des distributeurs

Un champ de vecteurs sur  $\mathcal{E}$  est une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow E$  qui associe à chaque point de  $\mathcal{E}$  un vecteur de  $E$ . Traditionnellement, ce champ est dit équiprojectif si les vecteurs  $f(M)$  et  $f(N)$  ont même projection orthogonale sur la droite  $MN$ :

$$\forall M, N \in \mathcal{S} \quad [f(M) - f(N)] \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \quad (2.1)$$

On démontre à partir de cette définition qu'un champ équiprojectif est une application affine à valeurs dans  $E$  dont la partie linéaire est un endomorphisme antisymétrique:

$$\forall M, N \in \mathcal{S} \quad f(M) = f(N) + f'(\overrightarrow{MN}) \quad (2.2)$$

Si  $\mathcal{E}$  est un espace affine euclidien de dimension 3, il existe un vecteur unique  $\overrightarrow{R}$  de  $E$  vérifiant  $\forall \overrightarrow{X} \in E \quad f'(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{X}$ . En mécanique du solide les champs équiprojectifs s'appliquent sur un domaine bien déterminé, indéformable, occupé par le solide. Nous pouvons donc poser la définition:

**Définition 20** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine tridimensionnel d'espace directeur  $E$ . On appelle distributeur de  $\mathcal{E}$  toute application affine  $\mathbf{x} : \text{Dom}(\mathbf{x}) \subset \mathcal{E} \rightarrow E$  définie sur une partie  $\text{Dom}(\mathbf{x})$  de  $\mathcal{E}$  à valeurs vectorielles dans  $E$  vérifiant:

$$\exists \omega_{\mathbf{x}} \in E \text{ tel que } \forall p \text{ et } m \in \text{Dom}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}(m) = \mathbf{x}(p) + \omega_{\mathbf{x}} \wedge \overrightarrow{pm} \quad (2.3)$$

$\text{Dom}(\mathbf{x})$  est le **domaine** de  $\mathbf{x}$ . Si  $\text{Dom}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}$   $\mathbf{x}$  est appelé alors champ équiprojectif sur  $\mathcal{E}$ .

Soit  $\mathcal{S}$  une partie de  $\mathcal{E}$  telle que  $\mathcal{E}$  soit une variété affine engendrée par  $\mathcal{S}$ , et  $\mathbf{x}$  un distributeur sur  $\mathcal{S}$ . Alors on démontre que  $\mathbf{x}$  est la restriction à  $\mathcal{S}$  d'un champ équiprojectif sur  $\mathcal{E}$ , défini de manière unique.

Il est important de bien préciser le domaine à chaque fois que l'on parle d'un distributeur car il n'est pas toujours possible de prolonger un distributeur sur l'espace affine  $\mathcal{E}$  tout entier. Par exemple, soit  $\mathbf{x}$  un champ équiprojectif sur  $\mathcal{E}$ , le champ  $m \mapsto \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \mathbf{x}(m))$  ne vérifie (2.3) que si son domaine est inclus dans un plan affine orthogonal à  $\vec{n}$ .

Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont deux distributeurs de même domaine sur  $\mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  on définit les distributeurs  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  et  $\lambda \mathbf{x}$  par:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})(m) = \mathbf{x}(m) + \mathbf{y}(m)$$

$$(\lambda \mathbf{x})(m) = \lambda \mathbf{x}(m)$$

d'où:

**Proposition 10** L'ensemble des distributeurs  $\mathbf{x}_i$  de même domaine  $\text{Dom}(\mathbf{x}_i) = S$  forme un espace vectoriel noté  $Eq(S)$ .

Un champ distributeur est entièrement défini par son domaine  $\text{Dom}(\mathbf{x})$  et deux vecteurs  $\omega_{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{x}(O)$ , (éléments de réductions en un point  $O \in \text{Dom}(\mathbf{x})$ ). La donnée du point  $O \in \text{Dom}(\mathbf{x})$  permet donc d'identifier un champ distributeur  $\mathbf{x}$  au couple de vecteurs  $(\omega_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(O))$ : l'espace vectoriel  $Eq(S)$  est donc de dimension 6.

Dans un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on écrit  $\omega_{\mathbf{x}} = g_1 \vec{i} + g_2 \vec{j} + g_3 \vec{k}$  et  $\mathbf{x}(O) = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$ . Les 6 nombres  $(g_1, g_2, g_3, c_1, c_2, c_3)$  sont les composantes de  $\mathbf{x} = (\omega_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(O))$  dans la base

$$\mathcal{B} = \left( (\vec{i}, 0), (\vec{j}, 0), (\vec{k}, 0), (0, \vec{i}), (0, \vec{j}), (0, \vec{k}) \right) \quad (2.4)$$

**Proposition 11** Le crochet de Lie des champs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y} \in Eq(S)$  est l'élément  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in Eq(S)$  donné par:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}](m) = \omega_{\mathbf{y}} \wedge \mathbf{x}(m) - \omega_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{y}(m) \quad (2.5)$$

L'espace vectoriel  $Eq(S)$  muni du produit  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  est donc une algèbre de Lie.

Démonstration

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $S \subset \mathcal{E}$ . Alors on a:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{x}}L_{\mathbf{y}}f(m) - L_{\mathbf{y}}L_{\mathbf{x}}f(m) &= L_{\mathbf{x}}(f^T \cdot \mathbf{y}(m)) - L_{\mathbf{y}}(f^T \cdot \mathbf{x}(m)) \\ &= (f^T \cdot (\omega_{\mathbf{y}} \wedge \cdot)) \cdot \mathbf{x}(m) - (f^T \cdot (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)) \cdot \mathbf{y}(m) \\ &= f^T \cdot [(\omega_{\mathbf{y}} \wedge \mathbf{x}(m)) - \omega_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{y}(m)] \end{aligned}$$

donc

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}](m) = \omega_{\mathbf{y}} \wedge \mathbf{x}(m) - \omega_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{y}(m)$$

et en faisant la différence  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}](m) - [\mathbf{x}, \mathbf{y}](p)$  on a:

$$\boxed{\omega_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} = -\omega_{\mathbf{x}} \wedge \omega_{\mathbf{y}}} \quad (2.6)$$

Le vecteur  $\omega_{\mathbf{x}}$  étant défini de façon unique à partir de  $\mathbf{x}$ . L'application  $\mathbf{x} \mapsto \omega_{\mathbf{x}}$  de  $Eq(S)$  dans  $E$  est, grâce à cette dernière relation, un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y} \in Eq(S)$ , l'expression

$$[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \omega_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}(m) + \omega_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}(m)$$

ne dépend pas du choix du point  $m$  dans  $Dom(\mathbf{x})$ . L'application  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto [\mathbf{x}|\mathbf{y}]$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace vectoriel  $Eq(S)$  mais non définie positive. Donc ce n'est pas un produit scalaire!

$\mathbf{x}$  étant un distributeur, la valeur  $\frac{1}{2}[\mathbf{x}|\mathbf{x}]$  est appelé invariant scalaire de  $\mathbf{x}$ .

Un distributeur élémentaire est un distributeur dont l'invariant scalaire est nul:

- On appelle **couple** tout distributeur de résultante nul (ou tout distributeur constant)
- On appelle **glisseur** tout distributeur  $\mathbf{x}$  pour lequel il existe un point  $m \in \mathcal{E}$  en lequel  $\mathbf{x}(m) = 0$

L'ensemble  $\Delta_{\mathbf{x}}$  des points de  $\mathcal{E}$  en lequel la valeur de  $\mathbf{x}$  est colinéaire à  $\omega_{\mathbf{x}}$  est une droite passant par le point

$$P = O + \frac{\omega_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{x}(O)}{\|\omega_{\mathbf{x}}\|^2}$$

et admettant  $\omega_{\mathbf{x}}$  pour vecteur directeur. En tout point  $P$  de  $\Delta_{\mathbf{x}}$  la valeur de  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x}(P) = \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{x}|\mathbf{x}]}{\|\omega_{\mathbf{x}}\|^2} \omega_{\mathbf{x}}$$

est l'invariant vectoriel de  $\mathbf{x}$ .  $\Delta_{\mathbf{x}}$  est appelé *axe central* de  $\mathbf{x}$ .

**Théorème 6** Soit  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux distributeurs de résultantes non nulles. L'axe central du crochet de Lie  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  est la perpendiculaire commune aux deux axes  $\Delta_{\mathbf{x}}$  et  $\Delta_{\mathbf{y}}$ .



**Théorème 7** Soit  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux distributeurs de résultantes non nulles. Le crochet de Lie  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  est nul si, et seulement si,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ont le même axe central

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0 \iff \Delta_{\mathbf{x}} = \Delta_{\mathbf{y}}$$

**Théorème 8 (Morley-Petersen)** Soit  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux distributeurs de résultantes non colinéaires et soit  $\mathbf{z}$  le distributeur somme ( $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ ) alors  $\Delta_{\mathbf{z}}$  et la perpendiculaire commune de  $\Delta_{\mathbf{x}}$  et  $\Delta_{\mathbf{y}}$  sont orthogonaux et concourants

pour la démonstration des théorèmes 6, 7 et 8 voir [43].

### 2.1.1 Torseur et cotorseur

Soit  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{E}$ . Alors l'application

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \frac{1}{\mu(S)} \int_S \mathbf{x}(m) \cdot \mathbf{y}(m) d\mu(m) \quad (2.7)$$

est bilinéaire symétrique définie positive sur  $Eq(S)$ , pourvu que  $S$  engendre affinement  $\mathcal{E}$  (ou même ne soit concentré sur aucune droite de  $\mathcal{E}$ , c'est ce que nous supposons désormais). donc c'est bien un produit scalaire sur  $Eq(S)$ .

**Définition 21** Le produit intérieur canonique sur  $Eq(S)$  est donné par:

$$[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \omega_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}(m) + \omega_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}(m)$$

Le produit scalaire canonique sur  $Eq(S)$  est donné par:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{\mu(S)} \int_S \mathbf{x}(m) \cdot \mathbf{y}(m) d\mu(m)$$

En pratique, les deux formes bilinéaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $[\cdot|\cdot]$  sont liés à la notion de puissance, et il n'y a entre les deux qu'une différence de point de vue :  $[\mathbf{x}^m|\mathbf{y}]$  est la puissance des efforts représentés par leur champ des moments des forces  $\mathbf{x}^m$ , alors que  $\langle \mathbf{x}^f, \mathbf{y} \rangle$  est la puissance des efforts représentés par leur champ des forces  $\mathbf{x}^f$ . Cependant la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a l'avantage d'être définie positive. La non dégénérescence des deux applications bilinéaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $[\cdot|\cdot]$  permet de poser la:

**Définition 22** On appelle respectivement torseur, (et l'on note  $\mathbf{tor}$ ), et cotorseur, (et l'on note  $\mathbf{cotor}$ ), relatif à une forme linéaire non dégénérée  $\tau$  sur  $Eq(S)$  les deux champs de  $Eq(S)$  vérifiant:

$$\tau(\mathbf{x}) = [\mathbf{tor}_{\tau}|\mathbf{x}] = \langle \mathbf{cotor}_{\tau}, \mathbf{x} \rangle$$

### 2.1.2 Moment d'un distributeur

On rappelle que le moment d'un vecteur  $\overrightarrow{AB} \in E$  par rapport à un point  $O \in \mathcal{E}$  est, par définition, le produit vectoriel de deux vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$ . Cette définition se généralise pour les distributeurs de la façon suivante:

**Définition 23** *Le moment d'un distributeur par rapport à un point est la moyenne, au sens de la mesure de Lebesgue sur son domaine  $S$ , des moments de ses valeurs en chaque point de  $S$ .*

#### L'opérateur de moment $H$

**Définition 24** *On appelle opérateur de moment, et l'on note  $H$ , l'application linéaire de  $\mathfrak{D}$  dans lui même qui à  $\mathbf{x}$  fait correspondre le champ:*

$$(H\mathbf{x})(p) = \frac{1}{\mu(S)} \int_S \overrightarrow{pm} \wedge \mathbf{x}(m) d\mu(m)$$

$H\mathbf{x}$  est bien un distributeur de domaine  $S$ . En effet

$$\begin{aligned} (H\mathbf{x})(q) - (H\mathbf{x})(p) &= \frac{1}{\mu(S)} \int_S (\overrightarrow{qm} - \overrightarrow{pm}) \wedge \mathbf{x}(m) d\mu(m) \\ &= \overrightarrow{qp} \wedge \frac{1}{\mu(S)} \int_S \mathbf{x}(m) d\mu(m) \\ &= \mathbf{x}(G) \wedge \overrightarrow{pq} \end{aligned}$$

On a donc  $\omega_{H\mathbf{x}} = \mathbf{x}(G)$  où  $G$  est le barycentre de  $S$ .

**Définition 25** *L'opérateur d'inertie relatif au point  $p$  d'un domaine  $S$  dans une position donnée est l'opérateur linéaire  $I_A \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$  défini par*

$$I_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu(S)} \int_S \overrightarrow{pm} \wedge (\mathbf{x} \wedge \overrightarrow{pm}) d\mu(m) \quad (2.8)$$

L'opérateur  $I_p$  est symétrique et positif, il est défini positif (et donc inversible) si le domaine  $S$  n'est concentré sur aucune droite passant par  $p$ , et enfin pour tout  $p$  il existe une base orthonormée directe de  $\mathbb{E}$  formée de vecteurs propres de  $I_p$ , et dite base principale d'inertie.

**Proposition 12** *Le produit intérieur, et le produit scalaire sur  $Eq(S)$  sont liés par*

$$\forall \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{y} \in \mathfrak{D} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = [H\mathbf{x}|\mathbf{y}].$$

Cette proposition évite l'utilisation de l'intégrale (2.7) pour calculer le produit scalaire de deux champs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .

Démonstration

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \frac{1}{\mu(s)} \int_s x(m) \cdot y(m) d\mu(m) \\
&= \frac{1}{\mu(s)} \int_s x(m) \cdot (y(G) + \omega_y \wedge \overrightarrow{Gm}) d\mu(m) \\
&= x(G) \cdot y(G) + \frac{1}{\mu(s)} \int_s (\overrightarrow{Gm} \wedge x(m)) \cdot \omega_y d\mu(m) \\
&= \omega_{Hx} \cdot y(G) + Hx(G) \cdot \omega_y = [Hx|y].
\end{aligned}$$

**Corollaire 1** On a

$$\boxed{tor_\tau = H \text{cotor}_\tau}$$

**Remarque 2** l'opérateur  $H$  est très utilisé en mécanique : par exemple si  $v$  est le cotorseur des vitesses alors  $Hv$  est le torseur cinétique; si  $\gamma$  est le cotorseur d'accélération alors  $H\gamma$  est le torseur dynamique, enfin si  $f$  est le champ des forces alors  $Hf$  est le champ des moments de ces mêmes forces.

De plus on a les propriétés suivantes.

### Propriétés de $H$

- $H$  est symétrique:

$$[H\mathbf{x}|\mathbf{y}] = [\mathbf{x}|H\mathbf{y}]$$

- $H$  est positif:

$$[H\mathbf{x}|\mathbf{x}] > 0$$

- $H$  est inversible.

- Les valeurs propres de  $H$  sont  $1, 1, 1, r_1^2, r_2^2$  et  $r_3^2$ , où  $(r_i)_{i=1,2,3}$  sont les trois rayons de giration du solide. Les vecteurs propres associés sont les 6 éléments de la base  $\mathcal{B}_G$  relative à un repère central d'inertie.

Les trois premières propriétés s'obtiennent directement grâce à la dernière proposition :  $[H\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ . Les valeurs propres sont définies comme les maxima de la forme quadratique  $[H\mathbf{x}|\mathbf{x}]$  pour les  $\mathbf{x}$  appartenant à la boule unité de  $\mathbb{R}^6$ , c'est à dire, si  $\lambda_i$  est une valeur propre et  $\mathbf{x}_i$  un vecteur propre associé, alors  $[H\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i] = \lambda_i \|\mathbf{x}_i\|_{\mathbb{R}^6}^2$ . Autrement dit les deux normes  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^6}$  et  $\|\cdot\|_{\circ}$  sont proportionnelles pour les vecteurs propres, les coefficients de proportionalité sont les valeurs propres associés.

**Expression de  $H$** 

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathfrak{d}$  relative à un repère orthonormé d'origine  $A \in \mathcal{E}$ .

On a

$$\omega_{H\mathbf{x}} = \mathbf{x}(G) = \mathbf{x}(A) + \omega_{\mathbf{x}} \wedge \overrightarrow{AG}$$

soit

$$\omega_{H\mathbf{x}} = \left( \overrightarrow{GA} \wedge . \quad \mathbf{1} \right) \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}(A) \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (H\mathbf{x})(A) &= \frac{1}{\mu(S)} \int_S \overrightarrow{Am} \wedge \mathbf{x}(m) d\mu(m) \\ &= \frac{1}{\mu(S)} \int_S \overrightarrow{Am} \wedge (\mathbf{x}(A) + \omega_{\mathbf{x}} \wedge \overrightarrow{Am}) d\mu(m) \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \mathbf{x}(A) + \frac{1}{\mu(S)} \int_S \overrightarrow{Am} \wedge (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \overrightarrow{Am}) d\mu(m) \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \mathbf{x}(A) + I_A(\omega_{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

soit

$$(H\mathbf{x})(A) = \left( I_A \quad \overrightarrow{GA} \wedge . \right) \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}(A) \end{pmatrix}$$

D'où

$$H_A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{GA} \wedge . & \mathbf{1} \\ I_A & -\overrightarrow{GA} \wedge . \end{pmatrix}$$

**Propriétés de  $E\mathfrak{q}(S)$** 

- Soit  $\mathfrak{T}$  le sous-espace vectoriel de  $E\mathfrak{q}(S)$  formé des champs constants. Alors  $\mathfrak{T}$  est un idéal commutatif de  $E\mathfrak{q}(S)$ :

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{T} \text{ et } \mathbf{y} \in \mathfrak{T} \quad \implies [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in \mathfrak{T} \quad (2.9)$$

- Soit  $\mathfrak{Z}_P$  le sous-espace vectoriel formé des champs dont les distributeurs associés s'annulent en un point  $P$  fixé quelconque dans  $\mathcal{E}$ . Alors  $\mathfrak{Z}_P$  est une sous-algèbre de Lie de  $E\mathfrak{q}(S)$ :

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{Z}_P \text{ et } \mathbf{y} \in \mathfrak{Z}_P \quad \implies [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in \mathfrak{Z}_P \quad (2.10)$$

$$\forall P \in S \subset \mathcal{E} \quad \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{Z}_P = E\mathfrak{q}(S) \quad (2.11)$$

- On a aussi la propriété de “produit mixte”:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ et } \mathbf{z} \in \text{Eq}(S) \quad [\mathbf{x}|[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = [\mathbf{y}|[\mathbf{z}, \mathbf{x}]] \quad (2.12)$$

- Et la formule de double crochet:  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ et } \mathbf{z} \in \text{Eq}(S)$

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] = (\omega_{\mathbf{x}} | \omega_{\mathbf{z}}) \mathbf{y} - (\omega_{\mathbf{x}} | \omega_{\mathbf{y}}) \mathbf{z} + [\mathbf{x} | \mathbf{z}] \Omega \mathbf{y} - [\mathbf{x} | \mathbf{y}] \Omega \mathbf{z} \quad (2.13)$$

où  $\Omega$  est l'application de  $\text{Eq}(S)$  dans  $\text{Eq}(S)$  qui à  $u$  fait correspondre le champ constant  $J = \omega_u$ , avec les propriétés :

$$\Omega^2 = 0, \quad [\Omega \mathbf{x}, \mathbf{y}] = [\mathbf{x}, \Omega \mathbf{y}] = \Omega [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \omega_x \wedge \omega_y \quad (2.14)$$

$$[\Omega \mathbf{x} | \mathbf{y}] = [\mathbf{x} | \Omega \mathbf{y}] = \omega_{\mathbf{x}} \cdot \omega_{\mathbf{y}} \quad (2.15)$$

## 2.2 Le groupe $\mathbb{D}$

**Définition 26** Soit  $\mathcal{E}$  l'espace affine euclidien tridimensionnel. Un déplacement euclidien est une transformation affine bijective de  $\mathcal{E}$  dont la partie linéaire est un élément du groupe spécial orthogonal  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Nous savons que le mouvement d'un solide rigide peut être décrit par un repère mobile, et que, d'après la proposition 2, l'ensemble des repères affines de  $\mathcal{E}$  est en bijection avec le groupe  $\mathbb{D}$ . Cette bijection va nous permettre de “confondre” la position et le déplacement. Ainsi la vitesse qui est la dérivée par rapport au temps de la position s'écrit:  $v = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{dD}{dt}$  où  $D$  est le déplacement correspondant à  $\mathbf{s}$ , la soustraction ainsi que la multiplication par un scalaire et le passage à la limite n'étant pas définis dans un groupe aussi “innocent” que  $\mathbb{D}$  la formule élémentaire de calcul de la dérivée  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{h}$  n'est plus valable. Pour surmonter cette difficulté apparente on fait appel à la géométrie différentielle des groupes, et on montre que  $\mathbb{D}$  est une variété différentiable. De plus c'est un groupe de Lie, et la théorie des groupes de Lie assure l'existence de  $\frac{dD}{dt}$  et montre que cet être mathématique, à un isomorphisme près, vit dans un espace vectoriel lié à  $\mathbb{D}$ , noté  $\mathfrak{d}$ , que l'on appelle algèbre de Lie de  $\mathbb{D}$ .

### 2.2.1 L'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$

**Théorème 9** L'ensemble  $\mathbb{D}$  des déplacements euclidiens muni de la loi de composition des applications est un groupe de Lie de dimension 6 dont l'algèbre de Lie est, à isomorphisme près, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs équiprojectifs sur  $\mathcal{E}$ . Le crochet de Lie, en tant que champ équiprojectif (ou torseur), est donné par ses éléments de réduction en  $m \in \mathcal{E}$ :

$$\omega_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} = \omega_{\mathbf{x}} \wedge \omega_{\mathbf{y}} \quad (2.16)$$

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}](m) = \omega_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{y}(m) - \omega_{\mathbf{y}} \wedge \mathbf{x}(m) \quad (2.17)$$

Démonstration Soit  $\mathcal{E}$  l'espace affine euclidien de dimension 3 attaché à  $\mathbb{E}$ , on désigne par :

$\mathcal{L}a(\mathcal{E})$  est l'ensemble des transformations affines  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$

$\mathcal{L}a(\mathcal{E}; \mathbb{E})$  est l'ensemble des applications affines  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$  (ou champs de vecteurs affines sur  $\mathcal{E}$ )

- Tout élément  $A \in \mathcal{L}a(\mathcal{E})$  a une partie linéaire  $A^l \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$  telle que

$$A(q) = A(p) + A^l(\overrightarrow{pq}) \quad (2.18)$$

- Tout champ affine  $X \in \mathcal{L}a(\mathcal{E}; \mathbb{E})$  a une partie linéaire  $X^l \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$  telle que

$$X(q) = X(p) + X^l(\overrightarrow{pq}) \quad (2.19)$$

Les propriétés qui conduisent à identifier l'algèbre de Lie de  $\mathbb{D}$  à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs équivariants sont les suivantes :

- $\mathcal{L}a(\mathcal{E})$  est un espace affine attaché à l'espace vectoriel  $\mathcal{L}a(\mathcal{E}; \mathbb{E})$ . Si  $A$  et  $B \in \mathcal{L}a(\mathcal{E})$  le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est le champ affine  $p \mapsto \overrightarrow{A(p)B(p)} \in \mathbb{E}$  dont la partie linéaire est  $B^l - A^l$ .
- $\mathbb{D}$  est une sous-variété de l'espace affine  $\mathcal{L}a(\mathcal{E})$

### Première conséquence

1. Tout vecteur tangent  $\mathbf{x}$  à  $\mathbb{D}$  en  $A$  est un vecteur tangent à  $\mathcal{L}a(\mathcal{E})$  en  $A$  et s'exprime par

$$\mathbf{x} = (A, X) \text{ où } A = o(\mathbf{x}) \text{ et } X \in \mathcal{L}a(\mathcal{E}; \mathbb{E}) \quad (2.20)$$

2. Pour que  $\mathbf{v} = (A, X)$  soit tangent à  $\mathbb{D}$  en  $A$  il faut et il suffit que

$$(a) \quad \exists W \text{ équivariant tel que } X = W \circ A \quad (2.21)$$

ou bien

$$(b) \quad \exists V \text{ équivariant tel que } X = A^l \circ V \quad (2.22)$$

- (1) découle de l'immersion :

$$T\mathbb{D} \subset T\mathcal{L}a(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{L}a(\mathcal{E}) \times \mathcal{L}a(\mathcal{E}; \mathbb{E}) \quad (2.23)$$

- (2) s'obtient en dérivant  $t \mapsto D(t)$  tel que

$$D(0) = A, \quad \left( \frac{d}{dt} D(t) \right)_{t=0} = X$$

compte tenu de

$$\|\overrightarrow{D(t)(p)D(t)(q)}\|^2 = \|\overrightarrow{pq}\|^2$$

On en déduit aisément les formules

- si  $\mathbf{v} = (A, X) \in T_A\mathbb{D}$  et  $B \in \mathbb{D}$

$$\gamma_B^T \mathbf{v} = (B \circ A, B^i \circ X) \quad (2.24)$$

$$\delta_B^T \mathbf{v} = (A \circ B, X \circ B) \quad (2.25)$$

$$Ad_B \cdot \mathbf{u} = (e, B^i \circ U \circ B^{-1}) \text{ si } \mathbf{u} = (e, U) \quad (2.26)$$

- 

$$T_e\mathbb{D} = \{(e, U) / U \in Eq(\mathcal{E})\} \text{ isomorphe à } Eq(\mathcal{E}) \quad (2.27)$$

Remarquons que le champ de vecteurs tangent à  $\mathbb{D}$  et invariant à gauche tel que  $X(e) = \mathbf{u} = (e, U)$   $U \in Eq(\mathcal{E})$  est défini par  $X(A) = \gamma_A^T \mathbf{u} = (A, A^i \circ U)$ . Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_e\mathbb{D}$   $\mathbf{u} = (e, U)$ ,  $\mathbf{v} = (e, V)$   $U, V \in Eq(\mathcal{E})$  alors  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (e, W) \in T_e\mathbb{D}$  est bien définie par la théorie des groupes de Lie (avec les champs de vecteurs tangents à  $\mathbb{D}$  et invariants à gauche): calculons maintenant  $W$  en fonction de  $U$  et  $V$ .

**Calcul de  $[X, Y]$  pour  $X, Y$  champs invariants à gauche**

Soit

$$X(A) = \gamma_A^T(\mathbf{u}) = (A, A^i \circ U)$$

$$Y(A) = \gamma_A^T(\mathbf{v}) = (A, A^i \circ V)$$

Par définition de la structure d'algèbre de Lie sur  $T_e\mathbb{D}$ :

$$[X, Y](e) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{R})^1$  et  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{L}a(\mathcal{E}); \mathbb{R})$  telle que  $f$  et  $g$  coïncide sur un voisinage de  $e$  dans  $\mathbb{D}$ . Pour  $A$  voisin de  $e$ :

$$L_X f(A) = g'(A)(A^i \circ U)$$

$$L_Y f(A) = g'(A)(A^i \circ V)$$

D'où

$$L_X L_Y f(A) = g''(A)(A^i \circ U)(A^i \circ V) + g'(A)(A^i \circ U^i \circ V)$$

---

<sup>1</sup>Toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{R})$  peut être traitée localement, en particulier pour les opérations de calcul différentiel, comme une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{L}a(\mathcal{E}); \mathbb{R})$ . (propriété de prolongement local d'une fonction définie sur une sous-variété)

Au second membre on effectue du calcul différentiel local dans un espace affine, d'où aussi

$$L_{[X,Y]}f(A) = g'(A) (A^i \circ \{U^i \circ V - V^i \circ U\})$$

Si le crochet est défini par  $[X,Y](e) = (e, W)$  alors  $L[X,Y] = g'(A^i \circ W)$  on a donc

$$g'(e) (U^i \circ V - V^i \circ U) = g'(e)(W)$$

et  $f$ , (et  $g$ ) étant quelconque:

$$W = U^i \circ V - V^i \circ U$$

c.à.d

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (e, U^i \circ V - V^i \circ U)$$

si  $\mathbf{u} = (e, U)$ ,  $\mathbf{v} = (e, V)$   $U^i \circ V - V^i \circ U$  est le champ

$$p \mapsto \omega_U \wedge V(p) - \omega_V \wedge U(p)$$

### Calcul pratique de $[X, Y]$

On représente les deux champs  $X$  et  $Y$  par leurs éléments de réduction en l'origine du repère  $O$  (ou n'importe quel point de l'espace affine engendré par leur domaine commun). Alors

$$\left[ \begin{pmatrix} \omega_x \\ X(O) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_y \\ Y(O) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \omega_x \wedge \omega_y \\ \omega_x \wedge Y(O) - \omega_y \wedge X(O) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

### 2.2.2 L'application exponentielle du groupe $\mathbb{D}$

L'application exponentielle d'un groupe  $G$  permet une représentation paramétrique locale de ce groupe au voisinage de son élément neutre  $e$ . Pour  $G = (\mathbb{R}^*, \times)$  cette application n'est autre que l'exponentielle réelle classique, on sait qu'elle injective et non surjective, par contre si  $G = (\mathbb{C}^*, \times)$  elle est surjective et non injective, enfin rappelons que cette dernière (l'exponentielle complexe) permet de représenter les rotations planes. Dans ce paragraphe on se propose d'étudier le cas  $G = (\mathbb{D}, \circ)$  utile pour la cinématique des solide indéformables ainsi que les milieux curvilignes.

#### Expression explicite de $\mathbf{x} \mapsto \exp \mathbf{x}$

**Théorème 10** Soit  $\mathbf{x} \in \mathfrak{d}$  et  $\lambda = \|\omega_{\mathbf{x}}\|$  l'angle de rotation du déplacement  $D = \exp \mathbf{x}$ . Alors l'application exponentielle  $D = \exp \mathbf{x}$  est donnée par :

$$\exp \mathbf{x}(m) = m + \rho(\omega_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{x}(m) \quad (2.29)$$



où

$$\rho(\omega_{\mathbf{x}}) = \mathbf{1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \lambda / 2}{\lambda / 2} \right)^2 (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) - \frac{\sin \lambda - \lambda}{\lambda^3} \omega_{\mathbf{x}} \wedge (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) \quad (2.30)$$

Démonstration

$\exp \mathbf{x}$  étant solution de l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi(t) = \mathbf{x}(\varphi(t)) = \gamma_{\varphi(t)}^T \cdot \mathbf{x} \\ \varphi(0) = e \end{cases} \quad (2.31)$$

On détermine d'abord la partie linéaire  $(\exp \mathbf{x})^l$  en écrivant (2.31) en deux points  $m$  et  $p$  puis par soustraction on a

$$\frac{d}{dt} (\exp \mathbf{x})^l(\overrightarrow{mp}) = (\exp \mathbf{x})^l \cdot \overrightarrow{\omega_{\mathbf{x}}} \wedge \overrightarrow{mp}$$

soit

$$\frac{d}{dt} (\exp \mathbf{x})^l = (\exp \mathbf{x})^l \cdot \overrightarrow{\omega_{\mathbf{x}}} \wedge \cdot$$

ce qui implique

$$(\exp \mathbf{x})^l = \exp(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot).$$

On a

$$\exp t\mathbf{x}(m) = m + \int_0^t \exp((t-s)\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) \mathbf{x}(m) ds \quad (2.32)$$

donc

$$\begin{aligned} \exp \mathbf{x}(m) &= m + \left( \int_0^1 \exp t(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) du \right) \mathbf{x}(m) \\ &= m + \left( \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^k}{k!} du \right) \mathbf{x}(m) \\ &= m + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^k}{(k+1)!} \right) \mathbf{x}(m) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Pour effectuer la sommation, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 1** Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $A$  la matrice antisymétrique telle que  $A\mathbf{x} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{x}$  alors on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$A^{2k+1} = (-1)^k (\|\mathbf{v}\|)^{2k} A \text{ et } A^{2k+2} = (-1)^k (\|\mathbf{v}\|)^{2k} A^2.$$

Suite de la démonstration du théorème On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_x \wedge \cdot)^k}{(k+1)!} = 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_x \wedge \cdot)^{2k+1}}{(2k+2)!}}_{I_1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_x \wedge \cdot)^{2k+2}}{(2k+3)!}}_{I_2}$$

Grâce au lemme, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda^{2k})}{(2k+2)!} \right) (\omega_x \wedge \cdot) = \frac{-1}{\lambda^2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(\lambda)^{2k}}{(2k)!} \right) (\omega_x \wedge \cdot) \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} (\cos \lambda - 1) (\omega_x \wedge \cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda^{2k})}{(2k+3)!} \right) (\omega_x \wedge \cdot)^2 = \frac{-1}{\lambda^3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(\lambda)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) (\omega_x \wedge \cdot)^2 \\ &= \frac{-1}{\lambda^3} (\sin \lambda - \lambda) (\omega_x \wedge \cdot)^2 \end{aligned}$$

Pour démontrer le lemme on utilise le double produit vectoriel

$$v \wedge (v \wedge x) = (v \cdot x)v - \|v\|^2 x$$

$$A^3 x = v \wedge [v \wedge (v \wedge x)] = (v \cdot x)v \wedge v - \|v\|^2 v \wedge x = -\|v\|^2 Ax$$

et ceci quelque soit  $x \in \mathbb{R}^3$  d'où

$$A^3 = -\|v\|^2 A \quad (2.34)$$

Puis on raisonne par récurrence sur  $k$ .

**Théorème 11** Si  $\lambda < 2\pi$  l'application linéaire dépendant de  $\omega_x$   $\rho(\omega_x)$  est inversible avec

$$\rho(\omega_x)^{-1} = \tau(\omega_x) = I + \frac{1}{2} \omega_x \wedge \cdot + \frac{1}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{\lambda/2}{\operatorname{tg} \lambda/2} \right) \omega_x \wedge (\omega_x \wedge \cdot) \quad (2.35)$$

Démonstration

Il suffit de vérifier que l'on a bien

$$\rho(\mathbf{u})\tau(\mathbf{u}) = 1_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$$

**Proposition 13** Les valeurs propres de l'endomorphisme  $\rho(\omega)$  sont :

$$1, \frac{\sin \lambda/2}{\lambda/2} e^{i\lambda/2} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \lambda/2}{\lambda/2} e^{-i\lambda/2}$$

Démonstration On a  $\rho(\omega) \cdot \omega = \omega$ ,  $\omega$  est alors vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1 = 1$ . D'autre part  $\rho(\omega)$  est une combinaison linéaire de trois matrices simples  $1_3$ ,  $\omega \wedge \cdot$  et  $(\omega \wedge \cdot)^2$  dont les traces sont respectivement :  $3, 0$  et  $-2\lambda^2$ , on a alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{trace } \rho(\omega) = 1 + 2 \frac{\sin \lambda}{\lambda}$$

soit

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 2 \frac{\sin \lambda}{\lambda} \quad (2.36)$$

Les valeurs propres de l'endomorphisme inverse  $\tau(\omega)$  sont évidemment :  $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}$  et  $\frac{1}{\lambda_3}$ , on a aussi  $\text{trace } \tau(\omega) = 1 + \frac{\lambda}{\tan \lambda/2}$  d'où

$$\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \frac{\lambda}{\tan \lambda/2} \quad (2.37)$$

D'où le résultat en résolvant le système (2.37) et (2.38).

Remarquons que  $\det \rho(\omega) = \frac{\sin \lambda/2}{\lambda/2}^2$  et que cet endomorphisme est singulier pour  $\lambda = 2k\pi$ .

### Etude de $\exp(\omega \wedge \cdot)$

Nous venons de voir que l'application linéaire  $\exp(\omega \wedge \cdot)$  est la partie linéaire du déplacement  $\exp \mathbf{x}$  où  $\omega$  est l'invariant vectoriel du champ  $\mathbf{x}$ . Nous allons démontrer que cette application est une rotation vectorielle autour de  $\omega$  d'angle  $\|\omega\|$ .

**Proposition 14** L'application  $\omega \mapsto \exp(\omega \wedge \cdot)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  s'explique en

$$\exp(\omega \wedge \cdot) = I + \frac{\sin \lambda}{\lambda} \omega \wedge \cdot + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \lambda/2}{\lambda/2} \right)^2 \omega \wedge (\omega \wedge \cdot) \quad (2.38)$$

La démonstration est analogue à celle du théorème (10).

Soit  $\vec{X}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\vec{V}$  la projection orthogonale de  $\vec{X}$  sur  $\omega$  et  $\vec{W}$  la composante de  $\vec{X}$  orthogonale à  $\omega$  on a

$$\exp(\omega \wedge \cdot) \vec{X} = \exp(\omega \wedge \cdot) \vec{V} + \exp(\omega \wedge \cdot) \vec{W}$$

grâce à cette dernière proposition  $\exp(\omega \wedge \cdot) \vec{V} = \vec{V}$  et

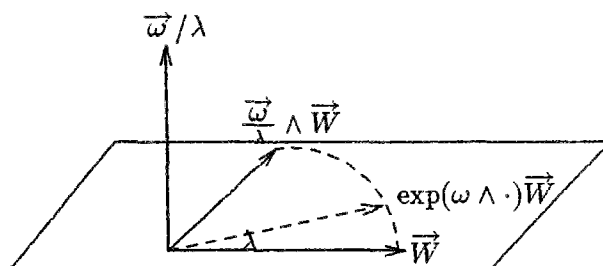


Figure 2.1: La rotation vectorielle

$$\begin{aligned}
 \exp(\omega \wedge \cdot) \vec{W} &= \vec{W} + \frac{\sin \lambda}{\lambda} \omega_x \wedge \vec{W} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \lambda / 2}{\lambda / 2} \right)^2 \omega_x \wedge (\omega_x \wedge \vec{W}) \\
 &= \vec{W} + \frac{\sin \lambda}{\lambda} \omega_x \wedge \vec{W} - (1 - \cos \lambda) \vec{W} \\
 &= \cos \lambda \vec{W} + \sin \lambda \frac{\omega_x}{\lambda} \wedge \vec{W}
 \end{aligned}$$

On peut aussi raisonner en physicien et retrouver le mme résultat de façon plus intuitive : on a  $V_{k+1} = V_k + \delta V_k$  où  $\delta V_k$  est un vecteur élémentaire orthogonal à la fois à  $V_k$  et à  $\omega$  de norme  $\simeq$  à l'arc  $V_k V_{k+1} = \|V_k\| \frac{\lambda}{n}$  d'où  $\delta V_k = \frac{\omega}{n} \wedge V_k$ . La relation entre deux vecteurs consécutifs s'écrit :

$$V_{k+1} = \left(1 + \frac{\omega}{n} \wedge \cdot\right) V_k$$

soit

$$V_n = \left(1 + \frac{\omega}{n} \wedge \cdot\right)^n V_1$$

finalement

$$\begin{aligned}
 V' = Rot_\omega V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\omega}{n} \wedge \cdot\right)^n V_1 \\
 &= \exp(\omega \wedge \cdot) V
 \end{aligned}$$

**Théorème 12** Soit  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  on a alors

$$\rho(-\mathbf{u})r(\mathbf{u}) = \exp(\mathbf{u} \wedge \cdot) \quad (2.39)$$

pourvu que  $\mathbf{u}$  soit de norme non multiple de  $2\pi$ .

Démonstration Ce résultat peut être vérifié directement à partir des expressions explicites de  $\rho(-\mathbf{u})$ ,  $\tau(\mathbf{u})$  et  $\exp(\mathbf{u} \wedge \cdot)$ .

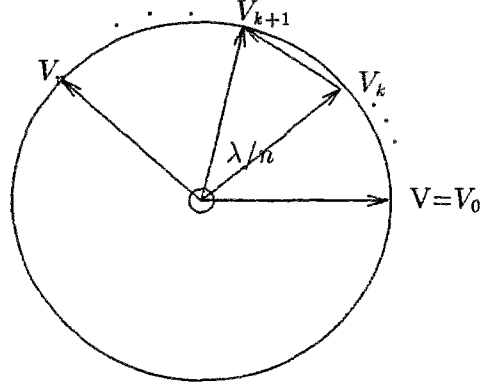


Figure 2.2: Raisonement physique

**Lemme 2** On a les deux identités suivantes :

$$\rho(\omega_{\mathbf{x}})(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) = \exp(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) - 1 \quad (2.40)$$

$$(1 - \exp \omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) = \lambda^2 \rho(\omega_{\mathbf{x}}) - \lambda^2 \mathbf{1} - \omega \wedge (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) \quad (2.41)$$

Démonstration On a

$$\rho(\omega_{\mathbf{x}})(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^k}{(k+1)!} \right) (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^{k+1}}{(k+1)!} \right)$$

d'où la première égalité. Pour l'autre on écrit :

$$\begin{aligned} (1 - \exp \omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot) &= - \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^{k+2}}{(k+1)!} \right) \\ &= - \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^{k+1}}{(k+1)!} \right) - (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^2 \\ &= \lambda^2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^k}{(k+1)!} \right) - (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^2 \\ &= \lambda^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^k}{(k+1)!} - 1 \right) - (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^2 \\ &= \lambda^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \lambda^2 \mathbf{1} - (\omega_{\mathbf{x}} \wedge (\omega_{\mathbf{x}} \wedge \cdot)) \end{aligned}$$

### Décomposition de l'application exponentielle

**Théorème 13** Soit  $\mathbf{x} \in \mathfrak{d}$  défini par ses deux composantes tridimensionnelles:  $\mathbf{x} = (\omega, u)$ , et soit  $D = \exp \mathbf{x}$  le déplacement associé à  $\mathbf{x}$ . On a alors la décomposition:

- Si  $[\mathbf{x}|\mathbf{x}] = 0$  avec  $\mathbf{x} \neq 0$ ,  $D$  est une translation ou rotation:
  - si  $\omega = 0$ ,  $D$  est une translation de vecteur  $u$ .
  - si  $u = 0$ ,  $D$  est une rotation de vecteur  $\omega$ .
  - si  $\|u\| \cdot \|\omega\| \neq 0$ ,  $D$  est une rotation d'axe parallèle à  $\omega$  passant par le point  $O + \frac{\omega \wedge u}{\|\omega\|^2}$ .
- Si  $[\mathbf{x}|\mathbf{x}] \neq 0$ ,  $D$  est une translation ou déplacement propre:
  - Si  $\lambda = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  alors  $D$  est une translation de vecteur

$$\frac{1}{2} \frac{[\mathbf{x}|\mathbf{x}]}{4k^2\pi^2} \vec{\omega} \quad (2.42)$$

- Si  $\lambda \neq 2k\pi$  alors  $D = \text{Rot}(\omega) \circ T_r(\rho(\omega).u)$ .

#### Démonstration

$$\bullet [\mathbf{x}|\mathbf{x}] = \vec{u} \cdot \vec{\omega} = 0 \iff (\vec{\omega} = 0 \text{ ou } \vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{\omega} \perp \vec{u})$$

1. Si  $\omega = 0$ , alors  $\rho(\omega) = 1$  et  $\mathbf{x}(m)$  est un champ constant égal à  $u$ . Donc  $(\exp \mathbf{x})(m) = m + u$ , c'est une translation de vecteur  $u$ .
2. Si  $u = \mathbf{x}(0) = 0$  alors  $\mathbf{x}(m) = \omega \wedge \vec{om}$  et

$$\begin{aligned} (\exp \mathbf{x})(m) &= m + \rho(\omega_x)(\omega_x \wedge \vec{om}) \\ &= m + \rho(\omega_x)(\omega_x \wedge \cdot) \vec{om} \\ &= m + (\exp(\omega_x \wedge \cdot) - 1) \vec{om} \\ &= o - \vec{om} + \exp(\omega_x \wedge \cdot) \vec{om} \\ &= o + \exp(\omega_x \wedge \cdot) \vec{om} \end{aligned}$$

3. Si  $\|u\| \cdot \|\omega\| \neq 0$  alors

$$\begin{aligned}
 (\exp \mathbf{x})(m) &= m + \rho(\omega_x)\mathbf{x}(m) \\
 &= m + \rho(\omega_x)(u + \omega_x \wedge \overrightarrow{om}) \\
 &= m + \rho(\omega_x)u + \rho(\omega_x)(\omega_x \wedge \cdot)\overrightarrow{om} \\
 &= m + (1 - \exp(\omega_x \wedge \cdot))\frac{\omega \wedge u}{\lambda^2} + (\exp(\omega_x \wedge \cdot) - 1)\overrightarrow{om} \\
 &= o - \overrightarrow{om} + \frac{\omega \wedge u}{\lambda^2} + (\exp(\omega_x \wedge \cdot))(\overrightarrow{om} - \frac{\omega \wedge u}{\lambda^2}) \\
 &= p + \exp(\omega_x \wedge \cdot)\overrightarrow{pm}
 \end{aligned}$$

avec  $p = O + \frac{\omega \wedge u}{\lambda^2}$

•  $[\mathbf{x}|\mathbf{x}] \neq 0$

1. Si  $\|\omega\| = 2k\pi$  alors

$$\begin{aligned}
 \rho(\omega)\vec{u} &= \vec{u} + \frac{1}{\lambda^2}\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) \\
 &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{\lambda^2}\vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{x}|\mathbf{x}]}{\lambda^2}\omega_x
 \end{aligned}$$

$(\exp \mathbf{x})(m) = m + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{[\mathbf{x}|\mathbf{x}]}{\lambda^2}\omega_x}_{\text{vecteur indép. de } m}$  est donc une translation de vecteur  $\frac{[\mathbf{x}|\mathbf{x}]}{\lambda^2}\omega_x$ .

2.  $\|\omega\| \neq 2k\pi$  : on a d'abord

$$\begin{aligned}
 \exp \mathbf{x}(m) &= m + \rho(\omega_x)\mathbf{x}(m) \\
 &= m + \rho(\omega_x)(u + \omega_x \wedge \overrightarrow{om}) \\
 &= m + \rho(\omega_x)u + \rho(\omega_x)(\omega_x \wedge \cdot)\overrightarrow{om}
 \end{aligned}$$

et en remarquant que  $\vec{u} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{\lambda^2}\vec{\omega} - \frac{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{a})}{\lambda^2}$  on a

$$\begin{aligned}
 (\exp \mathbf{x})(m) &= m + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{\lambda^2}\vec{\omega} + (1 - \exp(\omega_x \wedge \cdot))\frac{\omega \wedge u}{\lambda^2} + (\exp(\omega_x \wedge \cdot) - 1)\overrightarrow{om} \\
 &= p + \exp(\omega_x \wedge \cdot)\overrightarrow{pm} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{\lambda^2}\vec{\omega}
 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

En conclusion le tableau suivant donne la dépendance entre le déplacement  $\exp \mathbf{x}$  et le torseur  $\mathbf{x}$  :

Champ $\mathbf{x}$	Application $\exp \mathbf{x}$
Couple	Translation
Glisseur	Rotation
Distributeur non élémentaire	Rotation + Translation

(2.43)

**Proposition 15** Pour tout  $D \in \mathbb{D}$ ,  $\exists \mathbf{x} \in \mathfrak{d}$  tel que  $D = \exp \mathbf{x}$ . Autrement dit, l'application exponentielle est surjective, mais elle n'est pas injective, et on a en particulier

$$\exp \mathbf{x} = \mathbf{1}_{\mathbb{D}} \iff \begin{cases} \|\omega_{\mathbf{x}}\| = 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}^* \\ [\mathbf{x}|\mathbf{x}] = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Cependant, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de l'origine dans  $\mathfrak{d}$ , tel que, si  $\mathbf{x}$  appartient à  $\mathcal{V}$ , l'égalité  $\exp \mathbf{x} = \mathbf{1}$  entraîne  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Démonstration

1. La surjectivité : un déplacement est déterminé par l'image d'un point ( $p$  par exemple) et un vecteur de rotation  $\vec{\Omega}$  de façon à avoir :  $D(m) = D(p) + \exp(\Omega \wedge \cdot) \cdot \vec{pm}$ . Soit  $O'$  l'image par  $D$  de l'origine, alors il existe un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathfrak{d}$  qui vérifie  $D = \exp \mathbf{x}$  où

$$\omega_{\mathbf{x}} = \vec{\Omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(O) = \tau(\Omega) \cdot \vec{OO}'.$$

2. La non injectivité : La démonstration de (2.44) est immédiate à partir de l'expression explicite de  $\exp \mathbf{x}$ , si on pose  $\mathbf{x}(O) = x$  on a :

$$\exp x = \mathbf{1}_{\mathbb{D}} \iff x + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \lambda / 2}{\lambda / 2} \right)^2 (\omega_x \wedge x) - \frac{\sin \lambda - \lambda}{\lambda^3} \omega_x \wedge (\omega_x \wedge x) = \mathbf{0}$$

$$\iff \left( \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right) x - \frac{1}{2} \frac{\sin \lambda - \lambda}{\lambda^3} [\mathbf{x}|\mathbf{x}] \omega_x + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \lambda / 2}{\lambda / 2} \right)^2 (\omega_x \wedge x) = \mathbf{0}$$



si  $\omega_x$  est colinéaire à  $x$  cette dernière relation se réduit à  $x = 0$  qui entraîne  $\mathbf{x} = 0$  ce qui est exclu, donc le triplet  $(x, \omega_x, \omega_x \wedge x)$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$  les coefficients de la dernière combinaison linéaire sont alors nuls ce qui implique  $\sin \lambda/2 = 0$  et  $[\mathbf{x}|\mathbf{x}] = 0$  d'où le résultat.

### Dérivée de l'application exponentielle

**Théorème 14** La dérivée de l'application exponentielle pour le groupe de déplacements euclidiens  $\mathbb{D}$  est de classe  $C^\infty$  sa dérivée au point  $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$  est l'application linéaire de  $\mathfrak{d}$  dans  $T_{\exp \mathbf{u}} \mathbb{D}$  donnée par :

$$\exp^T \mathbf{u} = \gamma_{\exp}^T \mathbf{u} \cdot R(-\mathbf{u}) \quad (2.45)$$

où  $R(\mathbf{u})$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{d}$  donné par :

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}) = & I + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \lambda/2}{\lambda/2} \right)^2 I + \frac{[\mathbf{u}|\mathbf{u}]}{2\lambda^2} \left\{ \frac{\sin \lambda}{\lambda} - \left( \frac{\sin \lambda/2}{\lambda/2} \right)^2 \right\} \Omega \right) ad \mathbf{u} \\ & + \frac{1}{\lambda^2} \left( \left( 1 - \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right) I + \frac{[\mathbf{u}|\mathbf{u}]}{2\lambda^2} \left\{ 3 \frac{\sin \lambda}{\lambda} + 2 \sin^2(\lambda/2) - 3 \right\} \Omega \right) ad^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ces formules sont très utiles en analyse numérique des milieux curvilignes. Pour les démontrer nous avons besoin de:

**Lemme 3** On a  $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{d}$

$$ad^5 \mathbf{x} = -2\lambda^2 ad^3 \mathbf{x} - \lambda^4 ad \mathbf{x} \quad (2.47)$$

où  $\lambda = \|\omega_{\mathbf{x}}\|$

Autrement dit, le polynôme minimal de l'endomorphisme  $ad \mathbf{x}$  est

$$P(X) = X(X^2 + \lambda^2)^2 \quad (2.48)$$

Donc  $\pm i\lambda$  sont valeurs propres et d'après le théorème (??) du chapitre 1, l'application exponentielle du groupe  $\mathbb{D}$  n'est régulière que si  $2k\pi \neq \pm i\lambda$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , c.à.d:

$$\lambda \neq 2k\pi \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.49)$$

**Démonstration** On utilise pour cela la formule de "double crochet" :

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]] = (\omega_{\mathbf{x}}|\omega_{\mathbf{z}})\mathbf{x} - \|\omega_{\mathbf{x}}\|^2 \mathbf{z} + [\mathbf{x}|\mathbf{z}]\Omega \mathbf{x} - [\mathbf{x}|\mathbf{x}]\Omega \mathbf{z}$$

on multiplie à gauche au sens du crochet, par  $\mathbf{x}$

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{x}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]]] = -\|\omega_{\mathbf{x}}\|^2[\mathbf{x}, \mathbf{z}] - [\mathbf{x}|\mathbf{x}][\mathbf{x}, \Omega\mathbf{z}]$$

il vient

$$ad^3\mathbf{x} = -\lambda^2 ad\mathbf{x} - [\mathbf{x}|\mathbf{x}]\Omega ad\mathbf{x} \quad (2.50)$$

et aussi

$$ad^3\mathbf{x} = -\lambda^2 ad^2\mathbf{x} - [\mathbf{x}|\mathbf{x}]\Omega ad^2\mathbf{x} \quad (2.51)$$

on multiplie (2.50) par  $ad^2\mathbf{x}$  on a

$$ad^5\mathbf{x} = -\lambda^2 ad^3\mathbf{x} - [\mathbf{x}|\mathbf{x}]\Omega ad^3\mathbf{x} \quad (2.52)$$

puis (2.51) par  $\Omega$

$$\Omega ad^3\mathbf{x} = -\lambda^2 \Omega ad\mathbf{x} \quad (2.53)$$

compte tenu de (2.53), l'équation (2.52) se simplifie en

$$ad^5\mathbf{x} = -\lambda^2 ad^3\mathbf{x} + \lambda^2 [\mathbf{x}|\mathbf{x}]\Omega ad\mathbf{x} \quad (2.54)$$

on additionne membre à membre cette dernière équation avec (2.51) après l'avoir multipliée par  $\lambda^2$  :

$$ad^5\mathbf{x} + \lambda^2 ad^3\mathbf{x} = -\lambda^2 ad^3\mathbf{x} - \lambda^4 ad\mathbf{x} \quad (2.55)$$

d'où

$$ad^5\mathbf{x} = -2\lambda^2 ad^3\mathbf{x} - \lambda^4 ad\mathbf{x} \quad (2.56)$$

**Lemme 4** On a  $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{g}$  et  $\forall k \geq 1$

$$ad^{2k-1}\mathbf{x} = (-1)^k(k-1)\lambda^{2k-4}ad^3\mathbf{x} + (-1)^k(k-2)\lambda^{2k-2}ad\mathbf{x} \quad (2.57)$$

$$ad^{2k}\mathbf{x} = (-1)^k(k-1)\lambda^{2k-4}ad^4\mathbf{x} + (-1)^k(k-2)\lambda^{2k-2}ad^2\mathbf{x} \quad (2.58)$$

Démonstration Par récurrence.

Démonstration du théorème: On a

$$R(u) = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ad^k(-u)}{(k+1)!} \right] = 1 + \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ad^{2k-1}(-u)}{(2k)!} \right]}_{I_1} + \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ad^{2k}(-u)}{(2k+1)!} \right]}_{I_2} \quad (2.59)$$

grâce à ce dernier lemme on a

$$I_1 = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k-1)\lambda^{2k-4}}{(2k)!}}_{I'_1} ad^3x + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k-2)\lambda^{2k-2}}{(2k)!}}_{I''_1} adx$$

Le calcul se ramène à des sommations de séries entières en  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} I'_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} - \frac{2}{\lambda^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{-\sin \lambda}{\lambda^3} - \frac{-2\cos \lambda - 1}{\lambda^4} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I''_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} - \frac{4}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{-\sin \lambda}{\lambda} - \frac{-4\cos \lambda - 1}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

On calcule de la même façon  $I_2$  :

$$I_2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(k-1)\lambda^{2k-4}}{(2k+1)!}}_{I'_2} ad^4x + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(k-2)\lambda^{2k-2}}{(2k+1)!}}_{I''_2} adx$$

puis on effectue les sommations de séries entières en  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} I'_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{(2k)!} - \frac{3}{\lambda^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^4} - \frac{3 \sin \lambda - \lambda}{\lambda^5} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I''_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{(2k)!} - \frac{5}{\lambda^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^3} - \frac{5 \sin \lambda - \lambda}{\lambda^5} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$R(-u) = 1 + I''_1 adu + I''_2 ad^2u + I'_1 ad^3u + I'_2 ad^4u$$

et en tenant compte de (2.51) et (2.52) :

$$R(-\mathbf{u}) = \mathbf{1} + \{(I_1^n - \lambda^2 I_1') - I_1'[\mathbf{u}|\mathbf{u}]\Omega\} ad\mathbf{u} + \{(I_2^n - \lambda^2 I_2') - I_2'[\mathbf{u}|\mathbf{u}]\Omega\} ad^2\mathbf{u}$$

d'où le résultat.

**Théorème 15** Si  $\lambda = \|\omega_{\mathbf{u}}\| \neq 2k\pi$ , l'opérateur-dérivée  $R(-\mathbf{u})$  est inversible d'inverse  $T(-\mathbf{u})$  tel que

$$T(\mathbf{u}) = I - \frac{1}{2} ad\mathbf{u} + \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda/2}{tg\lambda/2}\right) ad^2\mathbf{u} + \frac{[\mathbf{u}|\mathbf{u}]}{2\lambda^4} \left\{ \left(\frac{\lambda/2}{\sin\lambda/2}\right)^2 + \frac{\lambda/2}{tg\lambda/2} - 2 \right\} \Omega ad\mathbf{u} \quad (2.60)$$

Démonstration On cherche l'inverse  $T(\mathbf{u})$  de  $R(\mathbf{u})$  sous la forme  $\sum_{k=0}^4 \alpha_k ad^k\mathbf{u}$ , et par identification on trouve le résultat annoncé, en tenant compte de (2.51) et (2.52).

La série exponentielle  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{ad^k\mathbf{x}}{k!}$  peut être sommée de la même façon, d'où

**Théorème 16** On a

$$Ad \exp \mathbf{u} = I + \left[ \frac{\sin\lambda}{\lambda} I + \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{u}|\mathbf{u}]}{\lambda^2} \left( \cos\lambda - \frac{\sin\lambda}{\lambda} \right) \Omega \right] ad\mathbf{u} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sin\lambda/2}{\lambda/2} \right)^2 I + \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{u}|\mathbf{u}]}{\lambda^2} \left( \frac{\sin\lambda}{\lambda} - 2 \frac{1 - \cos\lambda}{\lambda^2} \right) \Omega \right] ad^2\mathbf{u} \quad (2.61)$$

**Exemple**

Si  $\mathbf{u} = (0, 0, \alpha; 0, 0, 0)^t$  alors

$$Ad \exp \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & & & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ & & & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

on a une matrice analogue pour  $\mathbf{u} = (\alpha, 0, 0; 0, 0, 0)^t$  et  $\mathbf{u} = (0, \alpha, 0; 0, 0, 0)^t$  tandis que pour  $\mathbf{u} = (0, 0, 0; a, b, c)^t$  on a

$$Adexpu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & -c & b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & -a & 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

### Application

L'application adjointe est, en fait, "la matrice de passage" d'une base à l'autre dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{d}$ . Soient  $\mathbf{r} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $\mathbf{r}' = (O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  deux repères de l'espace affine  $\epsilon$  et  $D \in \mathbb{D}$  le déplacement qui transforme  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}' = D \bullet \mathbf{r}$  c.à.d.  $O' = D(O)$  et  $\vec{e}'_i = D' \vec{e}_i$ . On désigne par

$$\mathcal{B} = ((\vec{e}_1, 0), (\vec{e}_2, 0), (\vec{e}_3, 0); (0, \vec{e}_1), (0, \vec{e}_2), (0, \vec{e}_3))$$

et

$$\mathcal{B}' = ((\vec{e}'_1, 0), (\vec{e}'_2, 0), (\vec{e}'_3, 0); (0, \vec{e}'_1), (0, \vec{e}'_2), (0, \vec{e}'_3))$$

les deux bases de  $\mathfrak{d}$  associées à  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  respectivement.

Notons  $X$  et  $X'$  les matrices colonnes  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_6 \end{pmatrix}$  où  $(x_i)_{i=1,6}$  et  $(x'_i)_{i=1,6}$  sont respectivement les composantes d'un champ equiprojectif  $x \in \mathfrak{d}$  dans  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  on a alors

$$X = AdD \cdot X'$$

Notons aussi  $H$  et  $H'$  les deux matrices représentant l'opérateur de moment dans  $\mathfrak{d}$ , on a alors

$$H' = AdD^{-1} H AdD$$

On peut obtenir la représentation matricielle de  $Adexpu$  d'une autre façon, plus directe : la définition  $AdD \cdot \mathbf{x} = D' \mathbf{x} D^{-1}$  s'écrit pour  $D = \exp \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} (Adexpu \cdot \mathbf{x})(m) &= \exp(\omega_u \wedge \cdot) \cdot \mathbf{x} \circ \exp(-\mathbf{u})(m) \\ &= \exp(\omega_u \wedge \cdot) \cdot \mathbf{x}(m + \rho(-\omega_u) \mathbf{u}(m)) \\ &= \exp(\omega_u \wedge \cdot) \cdot (\mathbf{x}(m) + \omega_x \wedge \{\rho(-\omega_u)(-\mathbf{u}(m))\}) \end{aligned}$$

on a donc

$$(Adexpu \cdot \mathbf{x})(m) = \exp(\omega_u \wedge \cdot) \mathbf{x}(m) + \exp(\omega_u \wedge \cdot) (\{\rho(-\omega_u) \mathbf{u}(m)\} \wedge \omega_x) \quad (2.64)$$

A partir de cette expression (2.64) on démontre la proposition suivante

**Proposition 16** *On a*

$$\begin{aligned}\Omega_{Ad \exp \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} &= \exp(\omega_{\mathbf{u}} \wedge \cdot) \omega_{\mathbf{x}} \\ (Ad \exp \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(0) &= \exp(\omega_{\mathbf{u}} \wedge \cdot) [\rho(-\omega_{\mathbf{u}}) \mathbf{u}(0) \wedge \cdot] \omega_{\mathbf{x}} + \exp(\omega_{\mathbf{u}} \wedge \cdot) \mathbf{x}(0)\end{aligned}$$

D'où la représentation matricielle

$$Ad \exp \mathbf{u} = \left( \begin{array}{c|c} \exp(\omega_{\mathbf{u}} \wedge \cdot) & 0 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ \exp(\omega_{\mathbf{u}} \wedge \cdot) [\rho(-\omega_{\mathbf{u}}) \mathbf{u}(0) \wedge \cdot] & \exp(\omega_{\mathbf{u}} \wedge \cdot) \end{array} \right) \quad (2.65)$$

**Corollaire 2** *La représentation adjointe  $Ad D : \mathfrak{d} \mapsto \mathfrak{d}$  est une "transformation orthogonale" relative au produit intérieur*

$$[Ad D \mathbf{x} | Ad D \mathbf{y}] = [\mathbf{x} | \mathbf{y}] \quad (2.66)$$

Démonstration simple vérification à l'aide de la représentation matricielle.

**Corollaire 3** *La représentation adjointe  $Ad : \mathbb{D} \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{d})$  est injective.*

Démonstration

Nous allons démontrer que

$$Ad D = 1_{\mathcal{L}(\mathfrak{d})} \implies D = 1_{\mathbb{D}}$$

où  $e$  désigne l'élément neutre du groupe  $\mathbb{D}$ . Soit  $D = \exp \mathbf{u}$ , d'après le théorème (16)  $Ad D = 1_{\mathcal{L}(\mathfrak{d})}$  est équivalent à :

$$\left[ \frac{\sin \lambda}{\lambda} I + \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{u} | \mathbf{u}]}{\lambda^2} \left( \cos \lambda - \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right) \Omega \right] ad \mathbf{u} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \lambda / 2}{\lambda / 2} \right)^2 I + \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{u} | \mathbf{u}]}{\lambda^2} \left( \frac{\sin \lambda}{\lambda} - 2 \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} \right) \Omega \right] ad^2 \mathbf{u} = 0$$

On a donc un polynôme en  $ad \mathbf{u}$  de degré inférieur au degré du polynôme minimal il est alors identiquement nul. Les coefficients sont nuls si et seulement si  $\lambda = 2k\pi$  et  $[\mathbf{u} | \mathbf{u}] = 0$  d'où le résultat grâce à (2.44).

**Proposition 17** *L'application adjointe de l'exponentielle,  $Ad \exp \mathbf{u}$ ; la dérivée de l'exponentielle,  $R(\mathbf{u})$ ; et son inverse,  $T(\mathbf{u})$ , sont liées par*

$$R(\mathbf{u})T(-\mathbf{u}) = Ad \exp \mathbf{u} \quad (2.67)$$

Démonstration

Soit  $\phi(z)$  la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

et soit  $\psi(z)$  la série inverse de  $\phi(z)$ , on a

$$\phi(z)\phi(-z) = \frac{e^z - 1}{z} \frac{-z}{e^{-z} - 1} = e^z$$

D'où le résultat puisque  $R(u) = \phi(adu)$  et  $T(u) = \psi(adu)$ .

**L'application exponentielle est parfois inévitable!**

Soit  $u$  et  $\omega$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et  $(O_k, i_k, j_k, k_k)_{k=1,n}$  une suite de  $n$  repères orthonormés tels que le passage de  $(O_k, i_k, j_k, k_k)$  à  $(O_{k+1}, i_{k+1}, j_{k+1}, k_{k+1})$  se fasse par la composition d'une rotation de vecteur  $\frac{\omega}{n}$  et une translation de vecteur  $\frac{u}{n}$  (pour  $n$  assez grand ces deux transformations commutent). Soit  $(V_k(O_k), \Omega_k)$  les éléments de réduction d'un torseur

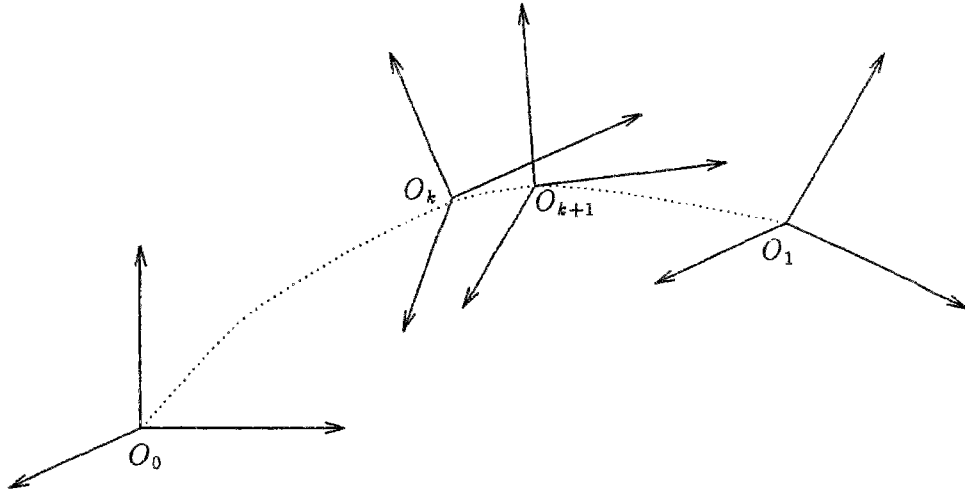


Figure 2.3: "Raisonnement physique"

dans le repère  $(R_k)$  et  $(V_{k+1}(O_{k+1}), \Omega_{k+1})$  les éléments de réduction de ce même torseur dans le repère  $(R_{k+1})$ .  $(i_{k+1}, j_{k+1}, k_{k+1})$  est l'image de  $(i_k, j_k, k_k)$  par la rotation de vecteur  $\frac{\omega}{n}$ ,  $\Omega_{k+1}$  est donc l'image de  $\Omega_k$  par la rotation inverse  $-\frac{\omega}{n}$ . Donc:

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k - \frac{\omega}{n} \wedge \Omega_k + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.68)$$

D'autre part on a

$$V_k(O_{k+1}) = V_k(O_k) + \Omega_k \wedge \frac{u}{n} \quad (2.69)$$

donc

$$\begin{aligned} V_{k+1}(O_{k+1}) &= \text{Rot}_{-\frac{\omega}{n}}(V_k(O_{k+1})) \\ &= V_k(O_{k+1}) - \frac{\omega}{n} \wedge V_k(O_{k+1}) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= V_k(O_k) + \Omega_k \wedge \frac{u}{n} - \frac{\omega}{n} \wedge (V_k(O_k) + \Omega_k \wedge \frac{u}{n}) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

soit

$$V_{k+1}(O_{k+1}) = V_k(O_k) + \Omega_k \wedge \frac{u}{n} - \frac{\omega}{n} \wedge V_k(O_k) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.70)$$

et en regroupant (2.68) et (2.70), on a :

$$\begin{pmatrix} \Omega_{k+1} \\ V_{k+1}(O_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_k \\ V_k(O_k) \end{pmatrix} - \frac{1}{n} \left[ \begin{pmatrix} \omega \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_k \\ V_k(O_k) \end{pmatrix} \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(1 - \frac{ad\chi}{n}\right)\mathbf{x}_k + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.71)$$

$$\implies \mathbf{x}_n = \left(1 - \frac{ad\chi}{n}\right)^n \mathbf{x}_0 + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.72)$$

D'où en faisant tendre  $n$  vers l'infini :

$$\boxed{\mathbf{x}_1 = \exp(-ad\chi).\mathbf{x}_0} \quad (2.73)$$

Donc sans faire appel à la théorie de groupes et algèbres de Lie, on a montré que les expressions d'un torseur dans deux bases différentes, sont liées par un endomorphisme qui n'est autre que l'exponentielle d'une matrice obtenue à partir d'un "vecteur-déplacement"  $\chi$ .





## Chapitre 3

# La formule de Campbell-Hausdorff

*Un déplacement définissant la position d'un solide rigide peut être déterminé, moyennant l'application exponentielle, par un torseur dont les six composantes sont liées aux six degrés de liberté de l'espace physique. Il est plus simple de manipuler des torseurs appartenant à un espace vectoriel que des déplacements, éléments d'un groupe. En adaptant ce point de vue, la seule difficulté est de pouvoir exprimer la composition de deux déplacements à l'aide de deux torseurs correspondants.*

### 3.1 Introduction

La formule de Campbell-Hausdorff donne l'expression de  $z$  en fonction de  $x$  et  $y$  dans

$$\exp x \cdot \exp y = \exp z \quad (3.1)$$

Cette formule a fait couler beaucoup d'encre. Campbell lui consacre deux mémoires, Poincaré étudie la détermination principale de  $z$ . Pascal, Baker reviennent, sur la question, seul Hausdorff donne l'expression précise de  $z$ . et enfin Dynkin obtient en 1947 les coefficients de la formule à l'aide d'une suite récurrente. Malgré tous ces études, la formule de Campbell-Hausdorff ne présente, en général, pour la théorie avancée des groupes de Lie, qu'une utilité d'ordre pédagogique très limitée : la formule est, en effet, une suite infinie de séries emboîtées. Ici, dans le cas particulier où  $G = \mathbb{D}$ , nous proposons une simplification qui permet une utilisation pratique et simple.

### 3.2 Première simplification : composition d'un déplacement avec une translation

Considérons un voisinage ouvert convexe  $\mathcal{U}$  de 0 dans  $\mathfrak{d}$  tel que  $\exp$  induise un isomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur un voisinage ouvert  $U$  de  $e$  dans  $\mathbb{D}$ , nous désignerons par  $\log$  l'isomorphisme réciproque de  $U$  sur  $\mathcal{U}$ , de sorte que l'on a

$$\log(\exp(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \text{ pour } \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \quad \exp(\log D) = D \text{ pour } D \in U \quad (3.2)$$

L'application  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \exp \mathbf{x} \exp \mathbf{y}$  étant continue,  $\exists$  un voisinage  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$  de 0 dans  $T_e \mathbb{D}$  tel que l'on ait  $\exp \mathbf{x} \exp \mathbf{y} \in U$  pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}'$

On posera<sup>1</sup>

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \log(\exp \mathbf{x} \exp \mathbf{y}) \quad (3.3)$$

pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}'$ .

**Théorème 17** Pour  $\mathbf{x} \in \mathfrak{d}$  et  $\mathbf{y} \in \mathfrak{t}$  vérifiant la condition  $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{d}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{d}} < \log 2$  on a:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + T(\mathbf{x}).\mathbf{y} \quad \text{et} \quad A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + T(-\mathbf{x}).\mathbf{y} \quad (3.4)$$

où  $T$  est une application de  $\mathfrak{d}$  dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{d})$  définie par l'expression (??).

La deuxième formule se déduit de la première en inversant l'égalité  $\exp \mathbf{x} \exp \mathbf{y} = \exp A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  puis en changeant  $\mathbf{x}$  en  $-\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  en  $-\mathbf{y}$ .

**Corollaire 4** Dans le cas particulier où  $\mathbf{x} \in \mathcal{Z}_0$ , la formule du théorème précédent permet de représenter le déplacement composé d'une rotation de vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et une translation de vecteur  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  étant donnés), par le seul vecteur  $\chi \in T_e \mathbb{D}$  donné par  $\chi = \mathbf{x} + T(\mathbf{x}).\mathbf{y}$ , de façon à avoir  $\exp \mathbf{x} \exp \mathbf{y} = \exp \chi$ . Réciproquement, tout déplacement  $D = \exp \chi$  peut se décomposer en un produit  $\exp \theta \exp \mathbf{u}$  où  $\exp \theta$  est la rotation de vecteur  $\theta = \chi_{\rho}$  et  $\exp \mathbf{u}$  est la translation de vecteur  $\mathbf{u} = R(\chi_{\rho}) \chi_{\tau}$

Démonstration du théorème:

Soit  $\psi(z)$  la série

$$\psi(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^k}{(k+1)} = \frac{z \log z}{z-1} \quad (3.5)$$

Cette série converge dans le disque  $|z-1| < 1$ , ce qui permet de définir  $\psi(u)$  pour tout opérateur linéaire  $u$  vérifiant la condition  $\|u-1\| < 1$ .

<sup>1</sup>Comme l'application  $\log$  est un isomorphisme de  $U$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  d'un espace vectoriel, le couple  $(U, \log)$  est une carte locale de la variété  $\mathbb{D}$  en  $e$ , et la fonction  $A(\cdot, \cdot)$  n'est autre que l'expression dans cette carte de la loi de composition de  $\mathbb{D}$ . Indiquons en passant qu'une carte telle que  $(U, \log)$  s'appelle fréquemment une *carte canonique* de  $\mathbb{D}$ .

### 3.2. Première simplification : composition d'un déplacement avec une translation 63

On vérifie facilement que si  $\mathbf{v}$  est tel que la condition  $\|\omega_{\mathbf{v}}\| < \frac{\pi}{3}$  est satisfaite on a

$$\|\exp(\text{ad } \mathbf{v}) - 1\| < 1$$

et alors

$$T(-\mathbf{v}) = \psi(\exp \text{ad } \mathbf{v}) \quad (3.6)$$

On pose

$$F(t) = \text{Log}(\exp \mathbf{x} \cdot \exp t\mathbf{y}) \quad (3.7)$$

$F$  est une fonction de  $[0, 1]$  dans  $\mathfrak{d}$ , elle est bien définie puisque  $\mathcal{U}'$  étant convexe et contenant  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , contiendra  $t\mathbf{y}$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

Ensuite, on dérive par rapport à  $t$  l'expression

$$\exp F(t) = \exp \mathbf{x} \cdot \exp t\mathbf{y} \quad (3.8)$$

$$\frac{d \exp F(t)}{dt} = \gamma_{\exp \mathbf{x}}^T \cdot \frac{d \exp t\mathbf{y}}{dt} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{\exp F(t)}^T R(-F(t)) \cdot F'(t) = \gamma_{\exp \mathbf{x}}^T \gamma_{\exp t\mathbf{y}}^T R(-t\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \quad (3.10)$$

et puisque  $\mathbf{y}$  est un vecteur propre de  $R(-t\mathbf{y})$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$R(-F(t)) \cdot F'(t) = \mathbf{y} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F'(t) &= T(-F(t))\mathbf{y} = \psi(\exp \text{ad } F(t))\mathbf{y} \\ &= \psi(\text{Ad } \exp F(t))\mathbf{y} \\ &= \psi(\text{Ad}(\exp \mathbf{x} \exp t\mathbf{y}))\mathbf{y} \\ &= \psi(e^{\text{ad } \mathbf{x}} e^{\text{ad } t\mathbf{y}})\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.12)$$

en utilisant  $F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t)dt$  on a:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \int_0^1 \psi(e^{\text{ad } \mathbf{x}} e^{\text{ad } t\mathbf{y}})\mathbf{y} dt \quad (3.13)$$

On peut donc déduire de cette dernière équation un développement en série qui permet de montrer que, la fonction  $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est analytique au voisinage de 0. On l'obtient en développant  $F'(t) = \psi(e^{\text{ad } \mathbf{x}} e^{\text{ad } t\mathbf{y}})\mathbf{y}$  en série entière par rapport à  $t$  et en intégrant terme

à terme.

$$\begin{aligned}
\psi(e^{adX} e^{adtY}) &= (e^{adX} e^{adtY}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (e^{adX} e^{adtY} - 1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{p_0+q_0 \geq 0} \frac{ad^{p_0} x ad^{q_0} t y}{p_0! q_0!} \sum_{p_1+q_1 > 0} \frac{ad^{p_1} x ad^{q_1} t y}{p_1! q_1!} \dots \\
&\quad \dots \sum_{p_k+q_k > 0} \frac{ad^{p_k} x ad^{q_k} t y}{p_k! q_k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{\substack{p_0+q_0 \geq 0 \\ p_i+q_i > 0}} \frac{ad^{p_0} x ad^{q_0} y \dots ad^{p_k} x ad^{q_k} y}{p_0! q_0! \dots p_k! q_k!} t^{q_1+\dots+q_k}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Donc

$$A(x, y) = x + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_0+q_0 \geq 0 \\ p_i+q_i > 0}} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{ad^{p_0} x ad^{q_0} y \dots ad^{p_k} x ad^{q_k} y}{(q_1+q_2+\dots+q_k+1) p_0! q_0! \dots p_k! q_k!} \cdot y \tag{3.15}$$

Les termes correspondant à  $q_i \neq 0$  pour  $i = 0, \dots, k$  sont tous nuls du fait que  $t$  est un idéal et que le crochet de Lie restreint à  $t$  est nul.

Donc la sommation se réduit à :

$$\begin{aligned}
A(x, y) &= x + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_0 \geq 0 \\ p_i > 0}} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{ad^{p_0} x ad^{p_1} x \dots ad^{p_k} x}{p_0! p_1! \dots p_k!} \cdot y \\
&= x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{p_0 \geq 0} \frac{ad^{p_0} x}{p_0!} \sum_{p_1 > 0} \frac{ad^{p_1} x}{p_1!} \dots \sum_{p_k > 0} \frac{ad^{p_k} x}{p_k!} \cdot y \\
&= x + e^{adX} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (e^{adX} - 1)^k \cdot y \\
&= x + \psi(e^{adX}) \cdot y = x + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-adX)^k}{(k+1)!} \right)^{-1} \cdot y = x + T(-x) \cdot y
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ces manipulations formelles, qui utilisent la formule d'associativité pour les séries multiples, sont justifiées pour peu que la série multiple obtenue soit absolument convergente. Mais le théorème d'associativité étant toujours valable pour les séries à terme positifs

(qu'elles soient convergentes ou non), on peut, pour vérifier la convergence de (3.15), remplacer les terme par leurs normes, puis effectuer des groupements de termes ingénieux et vérifier que la série à terme positifs obtenue est convergente. Mais c'est la série qui se déduit en supprimant les facteurs  $(-1)^k$  et en remplaçant  $adx$  et  $ady$  par leurs normes (la norme choisie sur  $\mathfrak{D}$  n'a évidemment qu'une importance secondaire pour effectuer ces estimations). autrement dit tout revient à vérifier que

$$\sum_k \frac{(e^{\|adx\|} e^{\|ady\|} - 1)^k}{m+1} < \infty \quad (3.17)$$

c'est à dire

$$e^{\|adx\| + \|ady\|} < 2 \text{ ou bien } \|adx\| + \|ady\| < \log 2 \quad (3.18)$$

En pratique les champs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont représentés par les vecteurs (en dimension 6)

$$(\omega, u)^t \text{ et } (0, v)$$

où  $\omega, u$  et  $v$  sont trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . On a alors  $T(-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (0, \tau(-\omega) \cdot v)$ . La formule (3.4) devient:

$$\exp \begin{pmatrix} \omega \\ u \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} \omega \\ u + \tau(-\omega) \cdot v \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

et cela évite de manipuler l'endomorphisme de  $\mathfrak{d} \simeq \mathbb{R}^6 T(\mathbf{x})$  et le remplace par l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3 \tau(\mathbf{x})$ .

### Deuxième démonstration

On utilise cette fois l'expression explicite de l'application exponentielle :

$$(\exp \mathbf{x})(m) = m + \rho(\omega_x) \cdot \mathbf{x}(m)$$

pour le champ constant  $\mathbf{y}$  on  $(\exp \mathbf{y})(m) = m + \mathbf{y}(m)$ , en composant les deux applications affines on a

$$(\exp \mathbf{x} \cdot \exp \mathbf{y})(m) = (\exp \mathbf{x})(m + \mathbf{y}(m)) = (\exp \mathbf{x})(m) + (\exp \mathbf{x})^l \cdot \mathbf{y}(m)$$

on sait que  $(\exp \mathbf{x})^l = \exp(\omega_x \wedge \cdot) = \rho(\omega_x) \cdot \tau(-\omega_x)$  donc

$$(\exp \mathbf{x} \cdot \exp \mathbf{y})(m) = m + \rho(\omega_x)(\mathbf{x}(m) + \tau(-\omega)\mathbf{y}(m)) \quad (3.20)$$

et puisque l'on pose  $\exp \mathbf{x} \cdot \exp \mathbf{y} = \exp \mathbf{z}$  on a :

$$(\exp \mathbf{x} \cdot \exp \mathbf{y})(m) = m + \rho(\omega_z) \cdot \mathbf{z}(m) \quad (3.21)$$

et finalement (3.20) et (3.21) entraînent que :

$$\mathbf{z}(m) = \mathbf{x}(m) + \tau(-\omega)\mathbf{y}(m) \text{ et } \omega_z = \omega_x$$

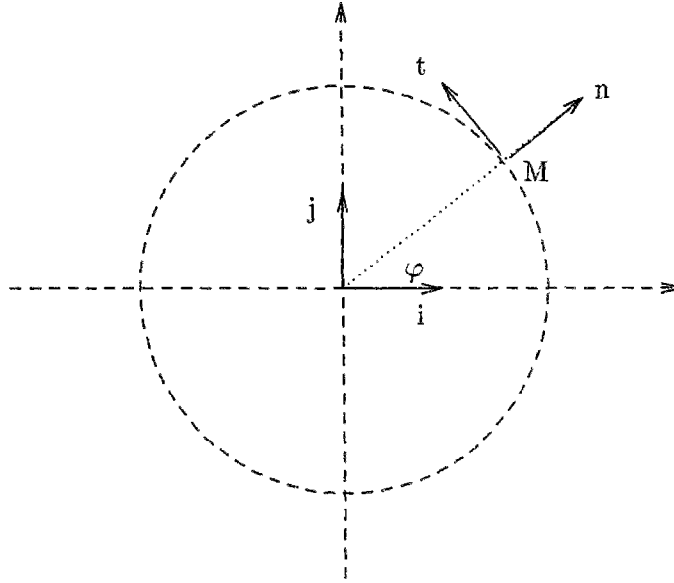


Figure 3.1:

**Exemple d'application**

Soit dans  $\mathcal{E}$  un mouvement ponctuel circulaire  $t \mapsto M(t)$ . On considère le repère de Frenet

$$\mathcal{R}(t) = (M(t); \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}) \text{ en } M(t)$$

Un solide  $s$  est lié au repère  $\mathcal{R}$ . On se propose de déterminer le vecteur-déplacement  $\chi(t)$  qui définit le mouvement de  $s$ :  $\mathcal{R}(t)$  est l'image de  $\mathcal{R}_0$  par une translation de vecteur  $\vec{i}$  puis une rotation d'angle  $\varphi$  autour du vecteur  $\vec{k}$ . Le déplacement associé à  $\mathcal{R}(t)$  est donc :

$$D(t) = \exp \Phi \circ \exp I \quad (3.22)$$

où  $\Phi = (0, 0, \varphi, 0, 0, 0)^t$  et  $I = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t$ . En appliquant la formule de Campbell-Hausdorff

$$D(t) = \exp \left( \varphi \vec{k} + T(-\varphi \vec{k}) \cdot \vec{i} \right) \quad (3.23)$$

on a

$$T(-\varphi) \cdot \vec{i} = \vec{i} + \varphi \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{2} + \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi/2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} \right) \varphi^2 (\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{i})) = \frac{\varphi/2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} \vec{i} + \frac{\varphi}{2} \vec{j} \quad (3.24)$$

D'où

$$\chi(t) = \left( 0, 0, \varphi, \frac{\varphi/2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)}, \varphi/2, 0 \right)^t \quad (3.25)$$

A titre de vérification, l'invariant scalaire de  $\chi(t)$  est nul ( $[\chi(t)|\chi(t)] = 0$ ), donc le déplacement résultant est une rotation propre d'axe parallèle à  $\vec{k}$  et passant par le point  $O + \frac{\omega \Lambda \mathbf{u}}{\|\omega\|^2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{\tan \varphi/2}, 0)$  (d'après le théorème (??) du chapitre 2). D'autre part le déplacement résultant transforme le segment  $[A'O]$  en le segment  $[OM]$  le centre de rotation est donc le point intersection de deux médiatrices, et on vérifie qu'il s'agit bien du point  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\tan \varphi/2}, 0)$ .

### 3.3 Cas général

Pour trouver une expression plus générale de  $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\forall \mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  dans  $\mathfrak{d}$ , nous avons besoin d'un résultat classique et analogue dans la sous algèbre  $\mathcal{Z}_0$  isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe  $SO_3(\mathbb{R})$ :

**Lemme 5** Soit  $\Theta_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{k}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\Theta_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \vec{k}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathcal{Z}_0$ . Alors  $\Theta = A(\Theta_1, \Theta_2)$  est donné par:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \lambda \vec{k} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} \cos \frac{\lambda}{2} = \cos \frac{\lambda_1}{2} \cos \frac{\lambda_2}{2} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 \sin \frac{\lambda_1}{2} \sin \frac{\lambda_2}{2} \\ \vec{k} = \frac{1}{\sin \lambda/2} \left( \sin \frac{\lambda_1}{2} \cos \frac{\lambda_2}{2} \vec{k}_1 + \cos \frac{\lambda_1}{2} \sin \frac{\lambda_2}{2} \vec{k}_2 + \sin \frac{\lambda_1}{2} \sin \frac{\lambda_2}{2} \vec{k}_1 \wedge \vec{k}_2 \right) \end{cases} \quad (3.26)$$

#### Démonstration:

On sait que  $\mathcal{Z}_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{d}$ . Comme l'expression générale de  $\Theta = A(\Theta_1, \Theta_2)$  ne fait intervenir que les crochets de Lie  $[\cdot, \cdot]$ ,  $A(\Theta_1, \Theta_2) \in \mathcal{Z}_0$ ,  $\Theta$  est donc de la forme donnée ci-dessus. Une rotation de vecteur  $\lambda \vec{k}$  (c'est à dire d'angle  $\lambda$  autour d'un axe passant par l'origine de vecteur unitaire  $\vec{k}$ ) est associée au quaternion vectoriel  $\mathbf{q} = (0, \frac{\lambda}{2} \vec{k})$  (voir annexe A). Or le produit de deux rotations d'axes concourant est donné par le produit de leurs quaternions exponentielles associés:

$$\exp \left( 0, \frac{\lambda}{2} \vec{k} \right) = \exp \left( 0, \frac{\lambda_1}{2} \vec{k}_1 \right) \cdot \exp \left( 0, \frac{\lambda_2}{2} \vec{k}_2 \right)$$

soit

$$\left( \cos \frac{\lambda}{2}, \sin \frac{\lambda}{2} \vec{k} \right) = \left( \cos \frac{\lambda_1}{2}, \sin \frac{\lambda_1}{2} \vec{k}_1 \right) \cdot \left( \cos \frac{\lambda_2}{2}, \sin \frac{\lambda_2}{2} \vec{k}_2 \right) \quad (3.27)$$

D'où le résultat en développant le second membre.

Finalement on a les résultats partiels suivants; si  $\Theta \in \mathcal{Z}_0$  et  $\mathbf{u} \in \mathfrak{t}$  alors

$$\exp \Theta \exp \mathbf{u} = \exp (\Theta + T(-\Theta) \cdot \mathbf{u}) \quad (3.28)$$

$$\exp \mathbf{u} \exp \Theta = \exp (\Theta + T(\Theta) \cdot \mathbf{u}) \quad (3.29)$$



Réciproquement

$$\begin{aligned}\exp \chi &= \exp \chi_\rho \cdot \exp R(-\chi_\rho)\chi_\tau \\ &= \exp R(\chi_\rho)\chi_\tau \cdot \exp \chi_\rho\end{aligned}\tag{3.30}$$

**Théorème 18**  $\forall \chi_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix}$  et  $\chi_2 = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{d}$  alors:

$$\exp \chi_1 \cdot \exp \chi_2 = \exp \chi \quad \text{avec} \quad \chi = \begin{pmatrix} \theta \\ \tau(\theta)\mathbf{u}_1 + \tau(-\theta)\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}\tag{3.31}$$

où

$$\theta = A(\theta_1, \theta_2), \quad \mathbf{u}_1 = \rho(\theta_1)\mathbf{x}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \rho(-\theta_2)\mathbf{x}_2\tag{3.32}$$

Démonstration:

On décompose  $\exp \chi_1$  en un produit d'une translation  $\exp R(-\Theta_1)\mathbf{x}_1$  et une rotation  $\exp \Theta_1$ , puis  $\exp \chi_2$  en un produit d'abord d'une rotation  $\exp \Theta_2$  et une translation  $\exp R(\Theta_2)\mathbf{x}_2$ , soit

$$\begin{aligned}\exp \chi_1 \cdot \exp \chi_2 &= \exp \mathbf{u}_1 \underbrace{\exp \Theta_1 \exp \Theta_2}_{\exp \Theta} \exp \mathbf{u}_2 \\ &= \underbrace{\exp \mathbf{u}_1}_{\exp \left( \begin{smallmatrix} \theta \\ \tau(\theta)\mathbf{u}_1 \end{smallmatrix} \right)} \exp \mathbf{u}_2 \\ &= \exp \begin{pmatrix} \theta \\ \tau(\theta)\mathbf{u}_1 \end{pmatrix} \exp \mathbf{u}_2\end{aligned}\tag{3.33}$$

On a  $\begin{pmatrix} \theta \\ \tau(\theta)\mathbf{u}_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{d}$  et  $\mathbf{u}_2 \in \mathfrak{t}$ : d'où le résultat en appliquant le théorème 17.

**Exemple : Décomposition de l'exponentielle en déplacements élémentaires**

**Théorème 19** On a

$$\exp \mathbf{x} = \exp \left( \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{x}|\mathbf{x}]}{\lambda^2} \Omega \mathbf{x} \right) \exp \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\omega \wedge \mathbf{u}}{\lambda^2} \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega \wedge \mathbf{u}}{\lambda^2} \end{pmatrix}\tag{3.34}$$

Démonstration

On applique deux fois la formule de Campbell-Hausdorff.

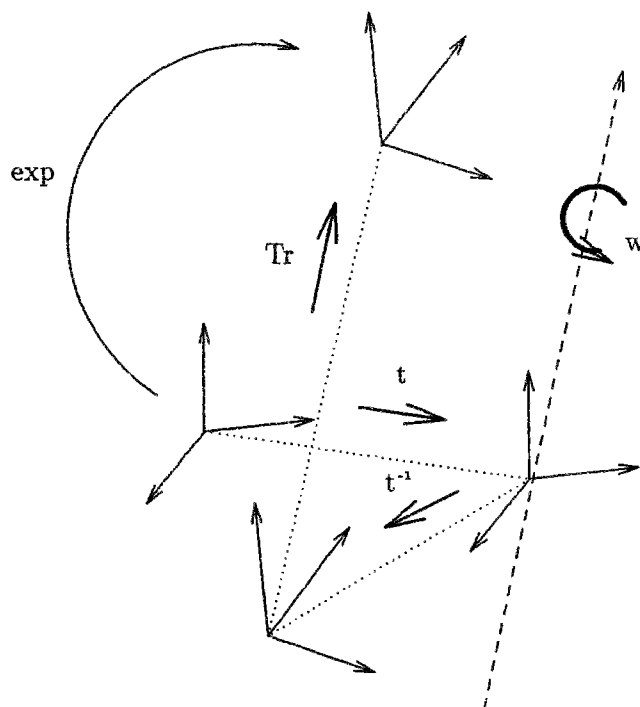


Figure 3.2:

- $(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1)$  ;  $\frac{\omega \wedge u}{\lambda^2}$  est le “vecteur-bras de levier” de  $x$  par rapport à  $O$ . C’est un vecteur normal à l’axe principal  $\Delta$ , d’origine  $O$  et d’extrémité  $P \in \Delta$ . La translation correspondante  $\tau$  transforme  $O$ , l’origine du repère  $\mathcal{R}$ , en  $P$  origine de  $\mathcal{R}_1$
- $(\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2)$  ;  $\omega$  est le vecteur de rotation du champ  $x$ , c’est un invariant de  $x$ . La rotation  $\rho$  correspondante fait tourner le repère autour de l’axe  $(O', \vec{\omega})$
- $(\mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_3)$  ;  $\tau^{-1}$  translate le repère  $\mathcal{R}_2$ , en  $\mathcal{R}_3$ , de façon que  $\tau^{-1}\rho\tau$  soit une rotation autour de l’axe  $\Delta$ .
- $(\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}')$  ;  $\frac{1}{2} \frac{[x|x]}{\lambda^2} \omega$  est le vecteur de translation de  $x$ , c’est un invariant vectoriel de  $x$ . La translation correspondante translate le repère  $\mathcal{R}_3$  parallèlement à l’axe principal, en  $\mathcal{R}'$ , image de  $\mathcal{R}$  par l’application  $\exp x$ .



## Partie II

# Mécanique des solides et des milieux curvilignes



## Chapitre 4

# Mécanique du solide rigide (approche hexadimensionnelle)

*L'hypothèse de rigidité de la section transversale d'un câble (cf. chapitre 5) fait appel à la mécanique du solide rigide. Il est difficile de faire preuve d'originalité dans un sujet aussi classique que la dynamique du solide, mais il se trouve qu'une écriture condensée des équations de la dynamique des systèmes complexes ne faisant apparaître que les opérations intrinsèques est désormais possible en utilisant un nouveau formalisme lié à la géométrie différentielle des groupes de Lie, méthode mise au point au CERMA et déjà appliquée dans divers domaines.*

### 4.1 Introduction

Il ne s'agit pas dans ce chapitre, comme le laisserait supposer le titre, de regrouper de façon formelle, les grandeurs cinématiques et dynamiques liées à la translation avec celles liées à la rotation pour former des matrices et des vecteurs en dimension 6. Ce type d'exposé a été réalisé depuis longtemps, mais ils n'introduit qu'une partie de la structure mathématique de  $\mathfrak{d}$  nécessaire à la manipulation des torseurs en tant que vecteurs en dimension 6 pour exprimer les relations d'équilibre entre les efforts, et le produit intérieur  $[\cdot, \cdot]$ , qui permet d'exprimer les puissances. Or l'on montre ici qu'une structure géométrique complète  $(\mathbb{R}^6; \langle \cdot, \cdot \rangle; [\cdot, \cdot])$  analogue à  $(\mathbb{R}^3; (\cdot, \cdot); \wedge \cdot)$  permet l'expression de la dynamique sans recourir aux décompositions en éléments de réduction et au calcul vectoriel tridimensionnel. Tout le calcul algébrique et différentiel nécessaire tient alors en quelques règles très simples qui englobent dans un calcul unique de niveau supérieur l'ensemble du calcul vectoriel tridimensionnel nécessaire. De plus, l'interconnexion entre le calcul différentiel et la structure algébrique apparaît de façon particulièrement nette.

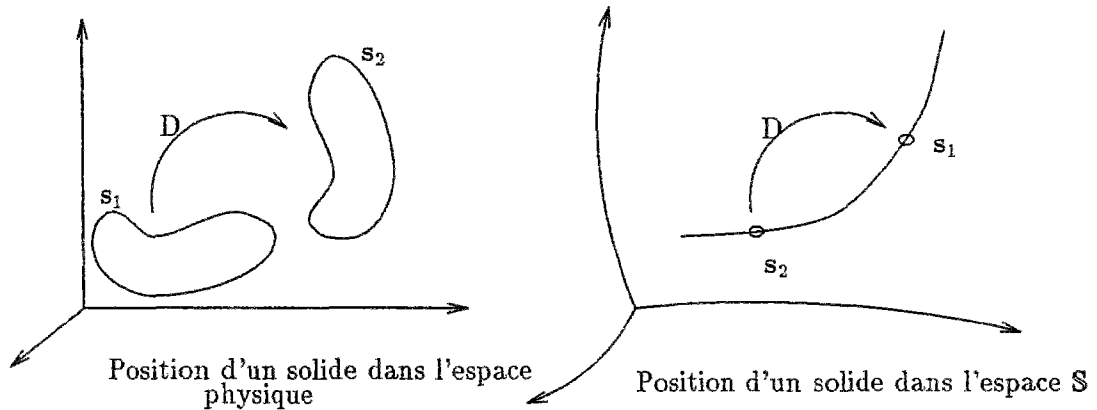


Figure 4.1:

## 4.2 Cinématique du solide rigide

### Modélisation géométrique

Comme nous le savons déjà un solide est un corps idéal pratiquement indéformable. Puisqu'il sert à faire des "règles", les différents points d'un solide sont par définition à des distances fixes les uns des autres. Cette hypothèse permet d'associer à chaque solide un repère mobile indéformable, considéré comme le squelette de l'espace affine<sup>1</sup> en mouvement. L'espace de configuration de solides, que l'on note  $\mathcal{S}$ , se présente donc comme isomorphe à l'ensemble des repères affines. Les automorphismes de cet ensemble sont les déplacements euclidiens, d'où la définition intrinsèque de  $\mathcal{S}$  à partir de  $\mathcal{D}$  :

**Définition 27** *L'espace de configurations d'un solide est un ensemble  $\mathcal{S}$  opéré à gauche par le groupe  $\mathcal{D}$  par une opération notée  $\bullet$  :  $\mathcal{D} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$  ayant les propriétés suivantes :*

$$(S_1) \quad \forall A \text{ et } B \in \mathcal{D}, \forall s \in \mathcal{S} : A \bullet (B \bullet s) = (A \cdot B) \bullet s,$$

$$(S_2) \quad \forall s \in \mathcal{S} : \epsilon \bullet s = s,$$

$$(S_3) \quad \forall r \in \mathcal{S} : A \longrightarrow A \bullet r \text{ est une bijection bicontinue de } \mathcal{D} \text{ sur } \mathcal{S}.$$

$A \bullet s$  représente la position que vient occuper le solide initialement en  $s$  lorsqu'on lui applique le déplacement  $A$ .  $S_3$  veut dire qu'une position de référence  $r$  d'un solide étant choisie, toute autre position  $s$  se déduit de  $r$  par un déplacement.

<sup>1</sup>L'espace affine engendré par le solide supposé ici de dimension 3, puisque le solide n'est concentré sur aucune droite.

### Référentiels

L'espace-temps, noté  $M$ , est l'ensemble des événements que l'on représente localement par des couples de la forme  $e = (t, \mathbf{s})$  où  $t$  et  $\mathbf{s}$  sont respectivement l'instant et l'endroit auxquels se produit l'événement  $e$ . L'espace topologique  $M$  se présente comme un fibré  $C^\infty$  trivial de fibre  $S$  sur  $\mathbb{R}$ :  $M = (\mathbb{R} \times S, \pi, \mathbb{R})$  où  $\pi$  est l'application continue surjective qui associe à chaque événement  $e$  sa date  $t$ .

**Définition 28** *Un référentiel cinématiquement admissible  $\rho$  est une trivialisation:*

$$\rho : M \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}$$

### Solide en mouvement

**Définition 29** *Le mouvement d'un solide est défini par l'application d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  dans l'espace de configuration  $\mathbb{S}$ :*

$$\mathbf{s} : I \rightarrow \mathbb{S}; t \mapsto \mathbf{s}(t)$$

Si on choisie une configuration de référence,  $\mathbf{r}$ , fixée dans  $\mathbb{S}$ , alors, en vertu de la définition (27):

$$\mathbf{s}(t) = D(t) \bullet \mathbf{r}$$

Le mouvement du solide est alors décrit par l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{D}$

$$t \mapsto D(t)$$

### Trajectoire d'un solide

Considérons un solide en mouvement par rapport à un référentiel. Le chemin (ou l'arc)  $t \mapsto \exp X(t) \cdot \mathbf{r}$  décrit par ce solide dans  $\mathbb{S}$  est appelé sa trajectoire dans le référentiel considéré.

### Vitesse d'un solide

La bijection  $(S_3)$  va nous permettre de transporter sur  $\mathbb{S}$  la structure différentielle de  $\mathbb{D}$ . En effet, soit  $\tau(\mathbb{D}) = (T\mathbb{D}, \mathbb{D}, \pi')$  le fibré vectoriel tangent à  $\mathbb{D}$ . La bijection réciproque  $h : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{D}$  qui à  $\mathbf{s}$  associe  $A \in \mathbb{D}$  tel que  $\mathbf{s} = A \bullet \mathbf{r}$  étant continue, il existe, à un isomorphisme près, un fibré localement trivial  $\tau(\mathbb{S}) = (T\mathbb{S}, \mathbb{S}, \pi)$  de fibre  $\mathfrak{d}$ , appelé fibré image réciproque par  $h$ , on noté  $\tau(\mathbb{S}) = h^*(\tau(\mathbb{D}))$ .

$\tau(\mathbb{S})$  est le fibré vectoriel tangent à  $\mathbb{S}$ , où  $\pi : T\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  désigne la projection ou l'application "pied" qui associe à chaque  $\mathbf{u} \in T\mathbb{S}$  son origine (ou point d'application)  $\pi(\mathbf{u})$ .

Le fibré  $\tau(\mathbb{S})$  admet deux trivialisations canoniques:

$$\begin{aligned} \mu^s : T\mathbb{S} &\rightarrow \mathbb{S} \times \mathfrak{d} \\ \mathbf{v} &\mapsto (\mathbf{s}, \mathbf{v}^s) \quad \text{tel que } \mathbf{v} = \mathbf{v}^s \bullet \mathbf{s} \end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned} \mu^c : TS &\rightarrow \mathbb{S} \times \mathfrak{d} \\ \mathbf{v} &\mapsto (\mathbf{s}, \mathbf{v}^c) \quad \text{tel que } \mathbf{v} = \gamma_A^T(\mathbf{v}^c \bullet \mathbf{r}) \quad \text{si } \pi(\mathbf{v}) = A \bullet \mathbf{r} \end{aligned}$$

$\mu^s$  et  $\mu^c$  signifient qu'un vecteur tangent à  $\mathbb{S}$  peut être obtenu soit en appliquant un déplacement infinitésimal  $\mathbf{v}^s$  à son origine  $\mathbf{s}$ ; soit en appliquant un déplacement infinitésimal  $\mathbf{v}^c$  à la position de référence  $\mathbf{r}$  puis au vecteur de  $T_{\mathbf{r}}\mathbb{S}$  ainsi obtenu, le déplacement  $A \in \mathbb{D}$  qui transforme  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{s}$ . Les éléments  $\mathbf{v}^s$  et  $\mathbf{v}^c$  sont donc les représentations respectivement eulérienne (par rapport à l'espace) et lagrangienne (par rapport au corps) de  $\mathbf{v}$ .

**Définition 30** La vitesse d'un solide en mouvement  $t \mapsto \mathbf{s}(t)$  est l'élément de  $T_{\mathbf{s}(t)}\mathbb{S}$ :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d(\mathbf{s}(t))}{dt}$$

**Proposition 18** Si le mouvement d'un solide dans un référentiel galiléen est donné par  $t \mapsto \mathbf{s}(t) = D(t) \bullet \mathbf{r}$  alors les composantes lagrangienne et eulérienne de la vitesse  $\mathbf{v}(t)$  à l'instant  $t$  sont donnés par:

$$\mathbf{v}^c(t) = \gamma_{D^{-1}(t)}^T \frac{d(D(t))}{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^s(t) = \delta_{D^{-1}(t)}^T \frac{d(D(t))}{dt}$$

**Théorème 20** Si  $D = \exp \mathbf{x}$  alors

$$\mathbf{v}^c = R(-\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^s = R(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

où  $R$  est une application de  $\mathfrak{d}$  dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{d})$  donnée par le théorème 14 du chapitre 2.

**Démonstration** On a  $\frac{dD}{dt} = \frac{d}{dt} \exp \mathbf{x} = \exp^T \mathbf{x} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \gamma_{\exp \mathbf{x}}^T \cdot R(-\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}$

$$\mathbf{v}^c = \gamma_{D^{-1}}^T \frac{dD}{dt} = \gamma_{\exp^{-1} \mathbf{x}}^T \gamma_{\exp \mathbf{x}}^T \cdot R(-\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = R(-\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

et pour  $\mathbf{v}^s$ :

$$\mathbf{v}^s = Ad \exp \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^c = R(\mathbf{x}) T(xg) R(-\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = R(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

### Raisonnement physique

Soit  $\mathbf{s}$  un solide dont le mouvement est déterminé par l'application  $t \mapsto \mathbf{s}(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{S}$ . En passant par la configuration de référence, le déplacement faisant passer de  $\mathbf{s}(t)$  à  $\mathbf{s}(t + dt)$  s'écrit :

$$\delta D(t) = D(t + dt) \circ D^{-1}(t)$$

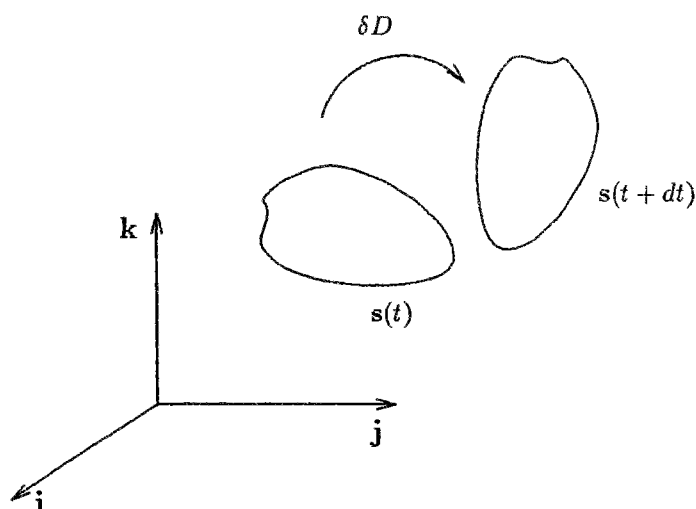


Figure 4.2:

En faisant un développement au premier ordre, on a

$$\delta D(t) = \exp\left(\chi(t) + \frac{d\chi}{dt} dt\right) \circ \exp(-\chi(t))$$

et en utilisant la formule de Campbell-Hausdorff relative à la décomposition d'un déplacement

$$\exp\left(\chi(t) + \frac{d\chi}{dt} dt\right) = \exp\left(R(-\chi(t)) \cdot \frac{d\chi}{dt} dt\right) \circ \exp \chi(t)$$

d'où

$$\delta D(t) = \exp\left(R(-\chi(t)) \cdot \frac{d\chi}{dt} dt\right)$$

ce qui implique

$$\delta D(t) \simeq R(-\chi(t)) \cdot \frac{d\chi}{dt} dt$$

et finalement

$$\frac{\delta D(t)}{dt} \simeq R(-\chi(t)) \cdot \frac{d\chi}{dt}$$

### Exemple d'application

On reprend l'exemple du chapitre 3 ; un solide  $s$  en mouvement de rotation définie par le vecteur  $\chi(t) = (0, 0, \varphi, \frac{\varphi/2}{\tan \varphi/2}, \varphi/2, 0, 0) \in \mathfrak{d}$ . On a en posant  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$$R(-\chi) \cdot \frac{d\chi}{dt} = \frac{d\chi}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2}\right)^2 \text{ad} \chi \cdot \frac{d\chi}{dt} + \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}\right) \text{ad}^2 \chi \cdot \frac{d\chi}{dt}$$

on calcule facilement

$$ad\chi \cdot \frac{d\chi}{dt} = [\chi, \frac{d\chi}{dt}] = (0, 0, 0; 0, -\left(\frac{\varphi/2}{\sin \varphi/2}\right)^2 \omega, 0)$$

$$ad^2\chi \cdot \frac{d\chi}{dt} = [\chi, [\chi, \frac{d\chi}{dt}]] = (0, 0, 0; -\varphi \left(\frac{\varphi/2}{\sin \varphi/2}\right)^2 \omega, 0, 0)$$

D'où

$$\mathbf{v}^c = R(-\chi) \cdot \frac{d\chi}{dt} = (0, 0, \omega; 0, \omega, 0) \text{ et } \mathbf{v}^e = R(\chi) \cdot \frac{d\chi}{dt} = (0, 0, \omega; 0, 0, 0)$$

### Accélération

La différentielle d'un champ  $\mathbf{v}$  en un point  $\mathbf{s}$  de  $\mathbb{S}$  est une application linéaire de  $T_{\mathbf{s}}\mathbb{S}$  dans  $T_{\mathbf{v}}T\mathbb{S}$ , notée  $\mathbf{v}^T$ , et c'est l'existence d'une connexion sur  $\mathbb{S}$  qui permet de lui associer un endomorphisme de  $T_{\mathbf{s}}\mathbb{S}$ , appelé différentielle *covariante*.

**Définition 31** *L'accélération d'un solide  $S$  est le cotorseur égal à la dérivée absolue ou la dérivée covariante du distributeur de vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport au temps:*

$$\Gamma = \frac{\nabla \mathbf{v}}{dt}$$

### 4.3 Structure riemannienne de $\mathbb{S}$

Une structure riemannienne sur  $\mathbb{S}$  est définie par la donnée d'une métrique riemannienne sur le fibré tangent  $\tau(\mathbb{S})$ .

On sait que tout groupe de Lie est paracompact et que sur une variété différentiable paracompacte  $C^\infty$ , il existe une métrique riemannienne  $C^\infty$  que l'on note  $g(\cdot, \cdot)$ .

#### Distance efficace

**Définition 32** *La distance efficace parcourue par un solide  $s$  dans  $\mathbb{S}$ , lors d'un déplacement élémentaire  $dD$ , est la moyenne quadratique des distances euclidiennes parcourues par les points de ce solide dans l'espace affine tridimensionnel  $\mathcal{E}$  lié à ce solide:*

$$dL^2 = \frac{1}{\mu(\mathbf{s})} \int_{\mathbf{s}} \|d\vec{D}^c(M)\|^2 d\mu(M)$$

La distance efficace parcourue par un solide s'interprète comme étant la distance parcourue par ce même solide, en mouvement de translation avec une quantité d'énergie égale à l'énergie cinétique totale du solide.

**Exemple**

Un disque homogène  $\mathcal{D}$  tourne autour de son axe de révolution à une vitesse angulaire constante  $\omega$  pendant un temps  $t = T$ . Son déplacement  $D = \exp t\omega\vec{k}$  donc  $dD^c = \omega\vec{k}dt$  donc  $d\vec{D}^c(M) = r\omega\vec{v}dt$  et

$$dL^2 = \frac{1}{\mu(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} r^2 \omega^2 dt^2 d\mu(M) = \frac{1}{2} R^2 \omega^2 dt^2$$

D'où

$$L = \frac{R\omega T}{\sqrt{2}}$$

Ou bien

$$L_{eff} = \frac{L_{max}}{\sqrt{2}}$$

Où  $L_{max}$  est la distance parcourue par le point le plus éloigné du centre.

**Proposition 19** *La distance efficace (ou géodésique), entre deux configurations d'un solide, est donnée par:*

$$L_{eff}(AB) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[H\mathbf{v}^c|\mathbf{v}^c]} dt$$

**Vitesse efficace**

**Définition 33** *On appelle vitesse efficace  $V_{eff}$  d'un solide la norme au sens du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans  $\mathfrak{d}$  du distributeur de vitesse  $\mathbf{v}$ :*

$$V_{eff} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

En pratique, on ne calcule pas directement  $\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$  mais grâce à la proposition (19), on utilise l'opérateur de géométrie  $H$  et donc

$$V_{eff} = \sqrt{[H\mathbf{v}^c|\mathbf{v}^c]}$$

**Connexion canonique associée à la distance efficace**

**Proposition 20** *Il existe une et une seule application, que l'on appelle connexion riemannienne:*

$$\begin{aligned} \nabla : T_{\mathfrak{S}}\mathbb{S} \times \Gamma(\mathbb{S}) &\rightarrow T_{\mathfrak{S}}\mathbb{S} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y} \end{aligned}$$

vérifiant:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y} - \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

$$L_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{z} \rangle$$

On vérifie, à partir de la définition, que la connexion  $D$  est unique, et est donnée par:

$$\begin{aligned} \langle 2\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = & L_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle + L_{\mathbf{y}} \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle - L_{\mathbf{z}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ & + \langle [\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z} \rangle + \langle [\mathbf{z}, \mathbf{x}], \mathbf{y} \rangle - \langle [\mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x} \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

**Théorème 21** La connexion de la variété riemannienne  $(\mathbb{S}, g)$ , relative à la métrique efficace  $g(\cdot, \cdot) = [H(\cdot)^c, (\cdot)^c]$ , est donnée par:

$\forall \mathbf{y}$  invariant à gauche:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \gamma_D^T \cdot \left\{ \frac{1}{2} ([\mathbf{x}^c, \mathbf{y}^c] + H^{-1}[\mathbf{x}^c, H\mathbf{y}^c] + H^{-1}[\mathbf{y}^c, H\mathbf{x}^c]) \right\}$$

Démonstration Les trois champs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  sont invariants à gauche, donc le produit scalaire de deux d'entre eux est constant le long de la courbe intégrale du troisième. Les trois premiers termes de la formule (4.1) sont donc nuls. Et en utilisant la propriété du produit mixte

$$\begin{aligned} \langle [\mathbf{z}, \mathbf{x}], \mathbf{y} \rangle &= [H\mathbf{y}^c][\mathbf{z}^c, \mathbf{x}^c] \\ &= [\mathbf{z}^c][\mathbf{x}^c, H\mathbf{y}^c] \\ &= \langle \mathcal{H}^{-1}[\mathbf{x}, \mathcal{H}\mathbf{y}], \mathbf{z} \rangle \end{aligned}$$

de même  $-\langle [\mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x} \rangle = \langle H^{-1}[\mathbf{y}, H\mathbf{x}], \mathbf{z} \rangle$ , où  $\mathcal{H} = (\gamma_D^T)H(\gamma_D^T)^{-1}$ . En utilisant de nouveau la formule (4.1), nous obtenons

$$2 \langle \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle [\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \mathcal{H}^{-1}[\mathbf{x}, \mathcal{H}\mathbf{y}] + \mathcal{H}^{-1}[\mathbf{y}, \mathcal{H}\mathbf{x}], \mathbf{z} \rangle$$

D'où le résultat.

**Proposition 21** On a

$$\gamma = \frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + H^{-1}[\mathbf{v}^c, H\mathbf{v}^c]$$

Soit  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,6}$  une base de l'espace tangent  $T_D\mathbb{D}$  formées de vecteurs invariant à gauche, on écrit :

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^6 \lambda_k \mathbf{e}_k$$

$$\frac{\nabla \mathbf{v}}{dt} = \sum_{k=1}^6 6 \left( \frac{\lambda_k}{dt} \mathbf{e}_k + \lambda_k \frac{\nabla \mathbf{e}_k}{dt} \right) = \gamma_D^T \left( \frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + H^{-1}[\mathbf{v}^c, H\mathbf{v}^c] \right).$$

## 4.4 Masse d'un solide

On définit l'inertie d'un solide comme étant la "faculté" qu'il a de s'opposer à toute modification de son mouvement, et on caractérise cette inertie par un scalaire  $m > 0$  appelé **masse inerte**. La mesure de la masse d'un solide par la balance (comparaison avec une masse étalon et ses sous-multiples) est essentiellement statique; on suppose en mécanique classique que la masse d'un solide ne dépend pas de sa vitesse. D'ailleurs la notion de solide (distance conservée) est incompatible avec la cinématique relativiste<sup>2</sup>.

**Définition 34** *L'énergie cinétique d'un solide de masse  $m$  et de vitesse efficace  $V_{eff}$  est:*

$$E_c = \frac{1}{2} m V_{eff}^2$$

## 4.5 Schématisation des efforts extérieurs

### Action physique; Force

Une action physique ou un système de forces exercées sur un corps solide  $S$  par son environnement extérieur  $\bar{S}$  est une mesure sur  $\mathcal{E}$  de support inclus dans  $S$  à valeur dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{d}$  muni du produit scalaire  $\langle ., . \rangle$  et du produit intérieur  $[. | .]$

Cette action physique  $\tau$  peut être représentée soit par un distributeur des moments (torseur  $\mathcal{M}_\tau$ ), soit par un distributeur des **forces effectives** (cotorseur  $\mathcal{F}_\tau$ ).  $\mathcal{M}_\tau$  et  $\mathcal{F}_\tau$  sont deux champs équiprojectifs représentant la même grandeur physique  $\tau$  et sont liés par:

$$\mathcal{M}_\tau = H \mathcal{F}_\tau$$

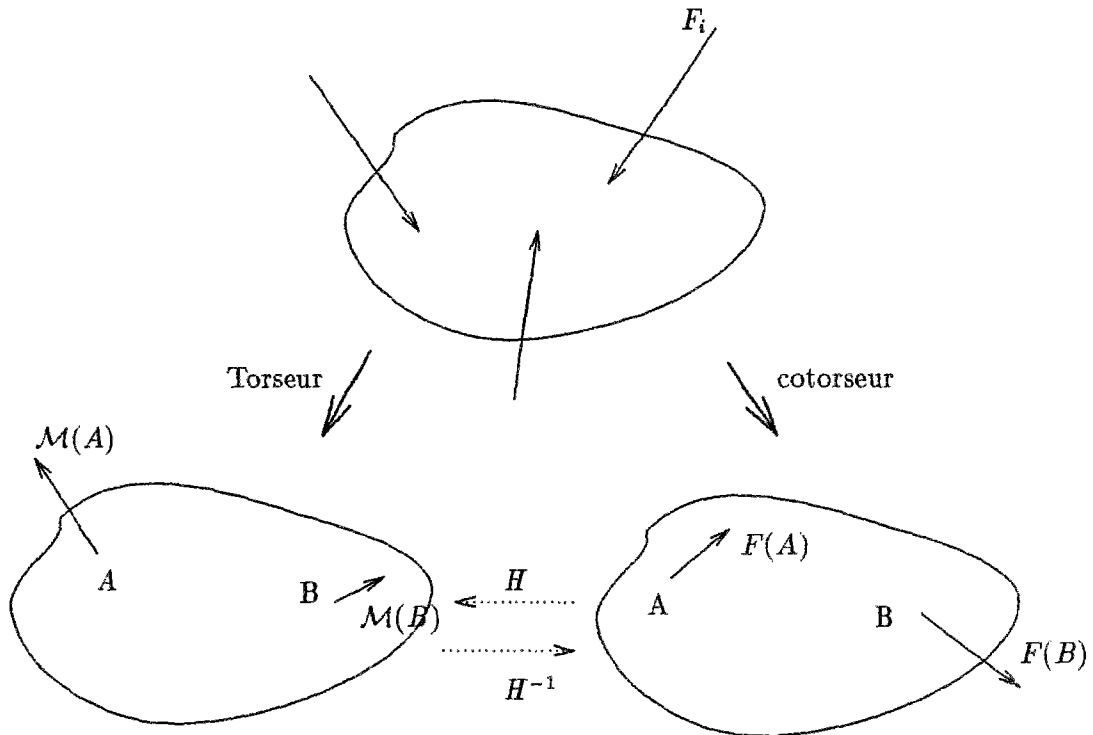
où  $H$  est l'opérateur de géométrie lié à  $S$ . La connaissance de  $F(M)$  n'est pas nécessaire à la détermination du mouvement d'un solide. On sait que pour un solide, il suffit de connaître la résultante générale  $R = \int_S F$  et le moment résultant  $M = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge F$  c'est à dire une distribution équivalente à  $F(M)$  au sens suivant :

**Définition 35** *Deux distributions de forces sont dites équivalentes si elles ont même moment résultant et même résultante générale.*

**Théorème 22** *Pour tout solide non concentré sur une droite, il existe un unique champ de forces équiprojectif équivalent à un système donné de forces (concentrées ou non).*

Un solide rigide est un milieu continu soumis à des liaisons internes parfaites indépendantes du temps, aucun effort intérieur autre que ceux dus à ces liaisons n'étant

<sup>2</sup>c'est pourquoi on n'a pas dans un cours de relativité de chapitre consacré à la mécanique du solide



$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \iff \mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum \vec{F}_i & \vec{\Omega} &= I^{-1} \mathcal{M}(G) \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(G)} &= \sum \overrightarrow{GM} \wedge \vec{F}_i & \overrightarrow{\mathcal{F}(G)} &= \vec{R} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Figure 4.3: Représentation des forces

à prendre en compte. Alors on a nécessairement dans tout mouvement réel (ou plus généralement dans tout mouvement virtuel compatible) :

$$\sigma : \epsilon = 0$$

les liaisons internes se traduisent par

$$\epsilon_{ij} = 0$$

et pour lesquels, par suite, le tenseur des contraintes est indéterminé. La définition que l'on a donné pour exprimer les efforts locaux n'est donc pas incompatible avec les contraintes, au contraire, l'exemple suivant montre que les deux notions peuvent se coïncider :

### Exemple

La théorie des milieux curvilignes est extrêmement précieuse pour calculer simplement les efforts globaux sur les sections des poutres et des arcs. Mais elle ne donne aucune indication sur la répartition locale des contraintes  $\sigma_{ij}$  dans la structure tridimensionnelle schématisée le milieu curviligne. Or l'ingénieur a besoin d'avoir au moins une approximation de cette répartition pour l'étude du dimensionnement des structures qui doit être effectué pour éviter les trop grandes contraintes locales qui pourraient conduire à la limite du domaine élastique ou même à la rupture. Soit  $\pi = (0, 0, N; \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{C})$  le torseur des efforts globaux sur une section ; les efforts locaux sont représentés par le

cotorseur :

$$\theta = H^{-1} \cdot \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^{-1} \\ S^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \\ \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1/I_x \\ \mathcal{M}_2/I_y \\ \mathcal{C}/I_z \\ 0 \\ 0 \\ N/S \end{pmatrix}$$

on a donc l'effort local en chaque point  $M$  :

$$\theta(M) = \theta(O) + \omega_\theta \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1/I_x \\ \mathcal{M}_2/I_y \\ \mathcal{C}/I_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{C}/I_z y \\ \mathcal{C}/I_z x \\ \mathcal{M}_1/I_x y - \mathcal{M}_2/I_y x \end{pmatrix}$$

Les efforts intérieurs sont liés aux contraintes par

$$\theta(M) = \sigma_{ij}(M)n_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$



on retrouve ainsi le même résultat trouvé par les techniques de la mécanique des milieux continus tridimensionnels appliquées à une barre cylindrique (à base circulaire) [29]:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = -C/I_z y$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = -C/I_z x$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = N/S + \mathcal{M}_1/I_x y - \mathcal{M}_2/I_y x$$

### Puissance virtuelle

**Définition 36** La puissance virtuelle, à un instant donné, d'action physique  $\tau$  sur un solide  $\mathbb{S}$ , représentée par un torseur  $\mathcal{T}_\tau$  ou un cotorseur  $\mathcal{F}_\tau$ , dans un champ de vitesses virtuelles de distributeur  $\mathbf{u}$  est:

$$\langle \mathcal{F}_\tau, \mathbf{u} \rangle \quad \text{ou} \quad [\mathcal{T}_\tau | \mathbf{u}]$$

## 4.6 Le principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique du solide est fondé sur un concept que l'on admet **a priori**, celui du distributeur des efforts exercés sur tout corps solide  $\Sigma$  par tout corps  $\Sigma'$  distinct de  $\Sigma$ . On admet qu'un tel distributeur est indépendant de tout observateur et qu'il possède la propriété d'additivité.

**Définition 37** Un espace-temps est galiléen si, et seulement si, pour tout corps solide et à chaque instant, le cotorseur des efforts extérieurs est égal au produit de la masse par la dérivée covariante du distributeur des vitesses par rapport à cet espace-temps

$$L'espace temps est galiléen \iff \mathcal{F} = m\Gamma$$

### Énoncé du principe fondamental

*Il existe au moins un espace-temps galiléen*

Le principe fondamental est donc un principe d'existence. De plus, on démontre facilement qu'il n'existe qu'un seul temps galiléen, mais qu'il y a une infinité d'espaces galiléens: les espaces en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un espace galiléen.

Espace tridimensionnel $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^3$	Espace hexadimensionnel $\mathcal{D} \simeq \mathbb{R}^6$
Produit vectoriel $\wedge$ Produit scalaire $(,)$	crochet de Lie $[,]$ Produit intérieur $[[,]]$
$D$ = rotation + translation	vecteur $\chi$
vecteur vitesse $V(O)$ + vecteur de rotation instantannée $\Omega$	vecteur $v$
Résultante des forces + Moment des forces	vecteur $T$
La masse $m$ + Le centre de gravité $G$ + Les moments d'inertie $I_{ij}$	matrice $M$
Les déformations // aux axes et rotation	vecteur $e$
La loi de comportement (élasticité linéaire)	matrice $\Lambda$
<b>Méthode classique:</b>  Choix des paramètres.  Expression de $v$ et $\gamma$ en fonction des coordonnées.  Application du principe fondamental de la dynamique et du principe de l'action et de la réaction.  Équations développées.	<b>Méthode de Lie:</b>  Application du principe fondamental de la dynamique et du principe de l'action et de la réaction.  Forme intrinsèque des équations.  Choix des paramètres.  Équations développées.

Comme le montre le tableau précédent, la géométrie de  $\mathfrak{D}$  évite de traiter les rotations et translations de façon séparée, contrairement à celle de  $E_3$ . D'où la possibilité d'obtenir des équations concises. De plus la méthode classique de la mécanique dans  $E_3$  exige un choix préalable des coordonnées (ou paramètres) qui interviennent durant tous les calculs, alors que la méthode de Lie permet un véritable allègement des calculs manuels et facilite la traduction des équations en vue de l'entrée dans l'ordinateur. Elle permet même de confier à l'ordinateur la majeure partie des calculs nécessaires à la formation explicite des équations de la dynamique, ce qui est un avantage considérable lorsque l'on traite des systèmes complexes.

### Exemple d'application: Les équations d'Euler

Soit  $\mathbf{r} \in \mathbb{S}$  la position de référence d'un solide  $S$  et  $\mathbf{s}(t) = D(t) \bullet \mathbf{r}$  sa position à l'instant  $t$  où  $D$  est un déplacement  $\in \mathbb{D}$ . Soit  $\mathcal{B} = (\xi, \eta, \zeta, i, j, k)$  une base de  $\mathfrak{D}$  relative à un repère orthonormé  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  lié à  $S$

Désignons par  $(u, v, w, p, q, r)$  les coordonnées de la vitesse  $\mathbf{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$

La matrice de l'opérateur de géométrie  $H$  est:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les équations d'Euler s'obtiennent en appliquant le principe fondamental de la dynamique (en termes de cotorseur):

$$\mathcal{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + mH^{-1}[\mathbf{v}, H\mathbf{v}]$$

ou bien en termes de torseur, en multipliant les deux membres par  $H$ :

$$\mathcal{T} = mH \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m[\mathbf{v}, H\mathbf{v}]$$

et en projetant cette relation sur les "axes" de l'algèbre  $\mathfrak{D}_S$ :

$$\begin{aligned} m(\dot{u} + qw - rv) &= F_x & I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr &= \mathcal{M}_x \\ m(\dot{v} + ru - pw) &= F_y & I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp &= \mathcal{M}_y \\ m(\dot{w} + pv - qu) &= F_z & I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq &= \mathcal{M}_z \end{aligned}$$

## 4.7 La cinématique du solide en petites perturbations

Pour décrire les configurations d'un solide rigide, on a fait appel au groupe des déplacements euclidiens  $\mathbb{D}$ , il est bien évident que la manipulation des éléments d'une variété non plate n'est pas très commode et pose quelque problème (choix des coordonnées, changement de cartes ...) néanmoins, pour les faibles déplacements ; éléments d'un petit voisinage de  $e$  ; on peut assimiler la partie voisine de l'élément neutre à une portion de l'espace tangent en ce point, c'est à dire son algèbre de Lie  $\mathfrak{d}$  qui n'est autre, à un isomorphisme près, que l'espace vectoriel des champs équiprojectifs. En mécanique on a l'habitude de représenter le champ des vitesses par un torseur; en petites perturbations la position d'un solide peut aussi être représentée par un torseur. Ce qui est un gain considérable pour les calculs aussi bien manuels qu'automatique.

**Théorème 23** *Le mouvement d'un solide en petites perturbations (H.P.P) peut être décrit par une application de  $\mathbb{R}$  dans l'espace des champs équiprojectifs  $E_q(\mathcal{E})$  :*

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (4.3)$$

En effet; on sait que toute matrice orthogonale est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique, ainsi :

$$D^l = \exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

En petites perturbations

$$D^l \simeq \mathbf{1}_3 + A + O(A^2)$$

On sait que pour toute matrice  $A$  antisymétrique 3-3 il existe un vecteur  $\vec{\omega}$  tel que

$$A \cdot \vec{m} \hat{p} = \vec{\omega} \wedge \vec{m} \hat{p}$$

Il vient

$$D^l \cdot \vec{m} \hat{p} \simeq \vec{m} \hat{p} + \vec{\omega} \wedge \vec{m} \hat{p}$$

Si on désigne par  $\mathbf{x}$  le champ  $\mathbf{x}(m) = \overrightarrow{mD(m)}$  alors la relation définissant le déplacement ( $D(m) = D(p) + D^l \cdot \vec{p} \hat{m}$ ) s'écrit :

$$\mathbf{x}(m) = \mathbf{x}(p) + \vec{\omega} \wedge \vec{m} \hat{p} \quad (4.4)$$

**Théorème 24** *Les hypothèses sont celles du théorème précédent. Alors le champ des vitesses est la dérivée, composante par composante, du champ de position  $\mathbf{x}$  :*

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (4.5)$$

Il peut sembler étonnant d'énoncer dans un théorème, que la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps, mais il ne faut pas oublier que cette dérivée est au sens des torseurs et que, dans le cas général, ce théorème n'est pas rigoureusement vrai.

La démonstration s'obtient en dérivant la relation (4.4) :

$$\frac{d\mathbf{x}(m)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(p)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{m}\vec{p} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{m}\vec{p}}{dt} \quad (4.6)$$

le dernier terme du second membre s'écrit

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{m}\vec{p}) = A^2 \vec{m}\vec{p} \simeq 0 \quad (4.7)$$

d'où le résultat.

## Chapitre 5

# Mécanique des milieux curvilignes

*Nous nous proposons, dans ce chapitre, de construire une théorie pouvant s'appliquer à des systèmes de solides tridimensionnels élancés et souples (tiges, barres, arcs, poutres, câbles) qui peuvent, en première approximation, être géométriquement assimilés à un arc de courbe.*

### 5.1 Introduction

Comme pour tout problème rencontré en physique, l'étude commence par une modélisation, c.à.d, la traduction du problème en langage mathématique. Cette modélisation conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles, que l'on doit résoudre numériquement pour déterminer les informations manquantes sur le comportement du système. En général, le problème est modélisé de façon que la résolution soit facilitée, et un nombre plus ou moins grand d'hypothèses est nécessaire selon la difficulté mathématique des équations. Moins on fait d'hypothèses, plus les résultats seront près de la réalité. Il est apparu, à la première lecture des travaux concernant ce sujet, qu'une mise en équation générale de la dynamique des câble n'existe pas. On trouve, en effet principalement dans la littérature soit des schématisations à nombre fini de degrés de liberté, soit des modélisations très simplifiées, par des milieux continus curvilignes tels des fils inextensibles sans raideur, et négligeant une partie des phénomènes (flexion, torsion, ...). Or il est ici nécessaire de prendre en compte a priori tous ces phénomènes afin de contrôler au mieux les simplifications et les approximations qu'une résolution numérique ne manquerait pas d'impliquer. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à mettre en œuvre une écriture générale des équations **non linéaires** de la dynamique d'un milieu curviligne. Le problème des câbles a été traité par de nombreux auteurs qui ont eu recours à de nombreuses hypothèses et ils obtiennent donc des résultats moins pertinents.

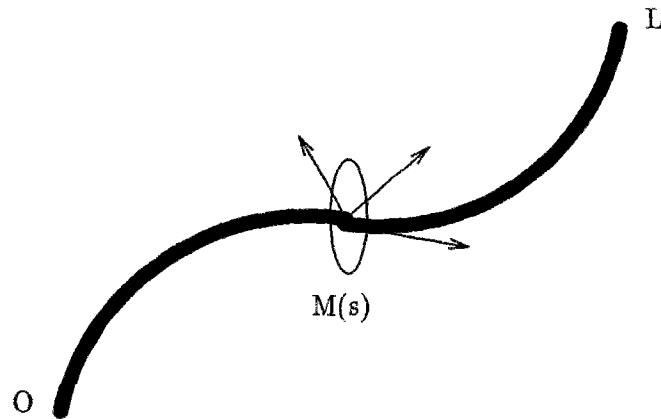


Figure 5.1: microstructure transversale

## 5.2 Modélisation

### Modélisation géométrique

Un câble est par définition un solide tridimensionnel élané. Une modélisation unidimensionnelle consiste à considérer la section transversale comme un solide rigide pouvant se déplacer avec 6 degrés de liberté, et c'est la **seule hypothèse** que l'on fait ici. Cela entraîne donc que les équations vont être relativement difficiles à résoudre. Chaque point de la courbe directrice est associé à une "microstructure" transversale considérée comme un solide rigide ayant 6 degrés de liberté. Le du câble est donc décrit par l'application

$$(\sigma, t) \longmapsto D_r(\sigma, t) \in \mathbb{D}$$

où  $\sigma$  est l'abscisse curviligne et  $t$  désigne le temps.

### Transport convectif d'un volume

Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux sections définies par les abscisses curvilignes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Lorsque l'on suit  $S_1$  et  $S_2$  dans leur mouvement, leurs positions sont respectivement

$$S_1^t = D(\sigma_1, t) \text{ et } S_2^t = D(\sigma_2, t)$$

Ces formules définissent un volume  $\mathcal{V}(t) = (S_1^t, S_2^t)$  que l'on suit dans le mouvement lorsque  $t$  varie. On dit alors que  $\mathcal{V}(t)$  est transporté **par convection**. Il s'agit ici, uniquement, d'un volume délimité par deux sections transversales.

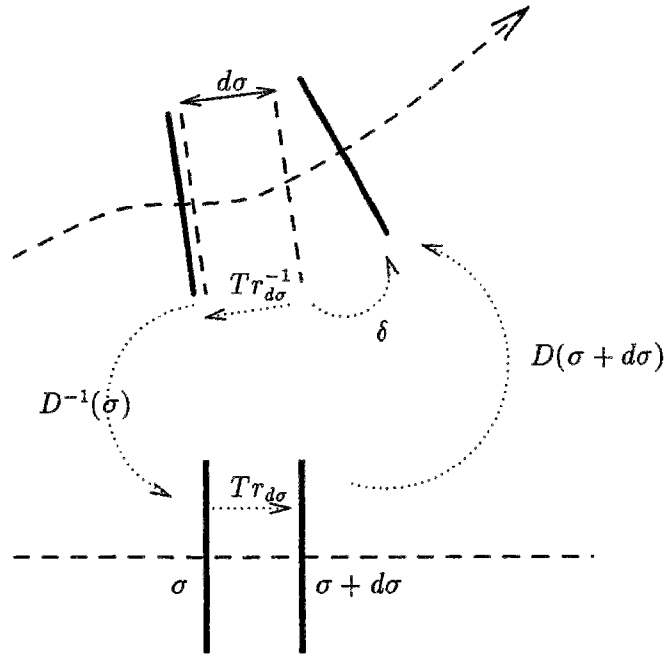


Figure 5.2: schématisation de la déformation

### Déformation

Pour définir les déformations d'une section transversale, on considère un instant  $t$  fixé, et on se propose de comparer les deux configurations  $\delta\mathcal{V}^0 = (S_\sigma^0, S_{\sigma+d\sigma}^0)$  et  $\delta\mathcal{V}^t = (S_\sigma^t, S_{\sigma+d\sigma}^t)$  d'un volume  $\delta\mathcal{V}$  transporté par convection de l'instant 0 à  $t$ .

On superpose les deux configurations dans un repère Lagrangien lié à  $S_\sigma^t$ . La dilatation de  $\delta\mathcal{V}$  est le volume élémentaire délimité par la représentation  $(S_{\sigma+d\sigma}^0)'$  de la section  $S_{\sigma+d\sigma}^0$  dans le repère lagrangien et la section  $S_{\sigma+d\sigma}^t$ . D'où la définition:

**Définition 38** Le déplacement  $\delta$  qui fait passer de la section  $(S_{\sigma+d\sigma}^0)'$  à la section  $S_{\sigma+d\sigma}^t$  est la *dilatation* entre les configurations  $S_\sigma^0$  et  $S_\sigma^t$ .

**Théorème 25** On a

$$\delta(t, \sigma) = \exp\left(R(-\chi) \frac{d\chi}{d\sigma} d\sigma\right)$$

### Démonstration

A  $t$  fixé, on écrit  $\delta(\sigma) = \exp(\chi(\sigma + D\sigma)) \circ \exp(d\sigma i) \circ \exp(-\chi(\sigma)) \circ \exp(-d\sigma i)$  et on applique la formule de C.H. deux fois.



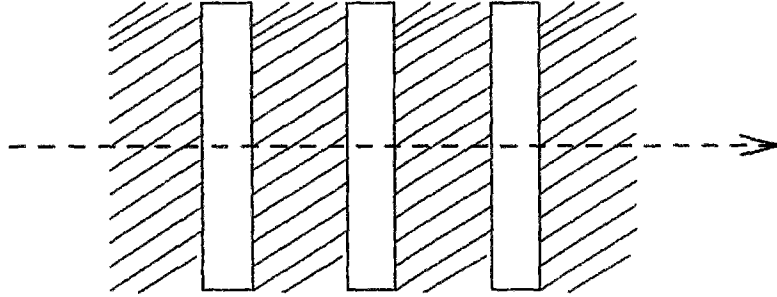


Figure 5.3: Un milieu curviligne est une suite de solides rigides séparés par un milieu élastique de masse nulle

Le torseur  $e^c d\sigma = R(-\chi) \frac{d\chi}{d\sigma} d\sigma$  est le vecteur-déplacement définissant la dilatation d'une portion de longueur  $d\sigma$ .  $e^c$  n'est autre que  $\gamma_{D-1}^T \frac{\partial D}{\partial \sigma}$  la composante lagrangienne de  $\frac{\partial D}{\partial \sigma}$ . D'où la définition.

**Définition 39** On appelle champ des **déformations** de Green-Lagrange de la section transversale entre les configurations  $S_0^o$  et  $S_t^t$  le champ défini par:

$$e^c = R(-\chi) \frac{d\chi}{d\sigma}$$

**Remarque 3** Nous avons utilisé le terme “déformations de la section transversale” alors que cette section est, par hypothèse, considérée comme un solide rigide indéformable, mais il s'agit, en réalité, du taux de champ de dilatation d'un volume élémentaire de largeur  $d\sigma$  construit sur une section transversale. La terminologie n'est pas très heureuse, mais elle est communément répandue et elle n'engendre pas de confusion!

### 5.3 Conservation de la masse

La conservation de la masse est un principe essentiel de la mécanique des milieux continus, et il en est de même pour un milieu curviligne:

**La masse de tout volume que l'on suit dans son mouvement reste constante quand le temps varie.**

Si l'on suppose que la masse est uniformément répartie à l'intérieur d'un câble, alors puisque le câble est un milieu déformable, la masse volumique en chaque point du câble varie en fonction de la déformation.

Donc l'hypothèse de rigidité de la section transversale tombe en défaut, car un solide doit garder sa masse constante. Mais on peut sauver notre “seule” hypothèse en admettant qu'un câble est une “suite alternée continue” de sections indéformables et de milieux élastiques de masse négligeable.

## 5.4 Les équations du mouvement

### La méthode des puissances virtuelles

Soit  $S$  un système en mouvement dans un référentiel  $R$ ,  $S^t$  la configuration de ce système à l'instant  $t$ .

**Définition 40 (mouvements virtuel)** *On dit que l'on définit dans le référentiel  $R$  un mouvement virtuel de  $S$  à l'instant  $t$  fixé lorsqu'on se donne un champ de vecteurs  $\mathbf{u}^*$  défini sur la configuration  $S^t$ . Le vecteur de ce champ en  $M$ , soit  $\mathbf{u}^*(M)$ , est appelé vitesse virtuelle dans  $R$  du point  $M$  de  $S$  à l'instant  $t$ .*

Nous aurons à considérer des espaces vectoriels de mouvements virtuel :

**Définition 41 (espace vectoriel des mouvements virtuels)** *Un espace de mouvements virtuels  $\mathbf{u}^*$ , est un espace vectoriel normé d'éléments  $\mathbf{u}^*$ .*

La linéarité se définit immédiatement :  $\lambda_1 \mathbf{u}_1^* + \lambda_2 \mathbf{u}_2^*$  est le champ  $\lambda_1 \mathbf{u}_1^*(M) + \lambda_2 \mathbf{u}_2^*(M)$ . La norme  $\|\mathbf{u}^*\|$  est à préciser dans chaque cas où cela est nécessaire.

**Définition 42** *Un mouvement virtuel (défini sur  $S$  à l'instant  $t$ ) est dit rigidifiant si le champ des vitesses  $\mathbf{u}^*$  est le champ des vitesses d'un distributeur.*

Nous allons choisir, conformément à la modélisation générale, des mouvements virtuels dans lesquels chaque section transversale, à chaque instant, a un mouvement rigidifiant. L'espace vectoriel  $\mathcal{V}^*$  des mouvements virtuels considérés ici, est donc l'ensemble des champs de distributeurs sur l'arc  $OL$ ;

$$\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}^* \iff \begin{cases} \mathbf{u}^* : OL \rightarrow \mathfrak{D} \\ s \mapsto \mathbf{u}^*(s) \end{cases}$$

### Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles est, comme le principe fondamental, un principe d'existence d'un référentiel galiléen:

Il existe au moins un référentiel  $\mathcal{R}$ , dit galiléen, tel qu'à tout instant, et pour tout système (ou sous-système  $\widehat{AB} \subseteq \widehat{OL}$ ):

- La puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance de tous les efforts s'exerçant sur le système, tant intérieurs qu'extérieurs

$$\forall u^* \text{ mouvement virtuel } \in \mathcal{V}^* \quad \mathcal{P}_e(u^*) + \mathcal{P}_i(u^*) = \mathcal{A}(u^*)$$

- La puissance virtuelle des efforts intérieurs, dans tout mouvement virtuel rigidifiant, est nulle

$$\forall u^* \text{ mouvement virtuel rigidifiant } \mathcal{V}^* \quad \mathcal{P}_i(u^*) = 0$$

### Puissance virtuelle des efforts extérieurs

**Définition 43** *A un instant  $t$  fixé, et pour un espace vectoriel  $\mathcal{V}^*$  de mouvements virtuels les efforts exercés sur  $S$  par le milieu extérieur sont représentés par une forme linéaire continue définie sur  $\mathcal{V}^*$  :*

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{L}(u^*)$$

*Le nombre réel  $\mathcal{P}^*$  est appelé puissance virtuelle de ces efforts dans le mouvement virtuel  $u^*$ .*

Ce mode de représentation "fonctionnelle" des efforts paraît à un premier examen plus abstrait et moins naturel que celui, plus classique, effectué au moyen de champ de forces. Et pourtant, il faut souligner qu'il ne fait que traduire une expérience bien courante : si on veut "se rendre compte" du poids d'une valise posée sur le plancher, on la soulève légèrement -ce qui représente un mouvement "virtuel" par opposition à son mouvement naturel qui est d'être posée sur le plancher- mouvement virtuel introduit ici pour évaluer son poids par le travail que l'on doit développer dans ce mouvement.

On suppose que les efforts extérieurs s'exerçant sur  $\widehat{AB}$  sont des:

- forces linéiques définies par la densité linéique  $\mathbf{f}(s)$ , champ des torseurs sur  $\widehat{AB}$

- forces concentrées en  $A$  et  $B$ , définies par les torseurs  $F(A)$  et  $F(B)$ , représentant l'action sur  $\widehat{AB}$  des parties complémentaires de  $\widehat{AB}$

Ainsi, la puissance virtuelle des efforts extérieurs, fonction linéaire du champ des distributeur de vitesses, est de la forme

$$\mathcal{P}_e(u^*) = \int_{\widehat{AB}} [f(s) | u^*] ds + [F(A) | u^*(A)] + [F(B) | u^*(B)]$$

### Puissance virtuelle des efforts intérieurs

On fait l'hypothèse que la forme linéaire continue, fonctionnelle de  $u^*$ , qui exprime la puissance virtuelle des efforts intérieurs, s'obtient par intégration sur  $\widehat{AB}$  d'une densité  $p_i(u^*)$ , fonction linéaire des valeurs locales de  $u^*(s)$  et de ses dérivées:

$$\mathcal{P}_i(u^*) = \int_{\widehat{AB}} p_i(u^*) ds$$

On postule donc l'existence d'une densité linéique  $p_i(u^*)$ , forme linéaire de  $u^*$  et  $\frac{\nabla u^*}{ds}$ , dérivée absolue par rapport à  $s$ :

$$p_i(u^*) = -[\alpha(s) | u^*] - \left[ \pi(s) \left| \frac{\nabla u^*}{ds} \right. \right]$$

où  $\alpha(s)$  et  $\pi(s)$  sont deux torseurs, fonctions de  $s$ .

La première application du principe des puissances virtuelles montre la nullité de  $\alpha(s)$ : en effet, pour le mouvement virtuel rigidifiant,  $u^*(s) = u^*$  (ne dépend plus de  $s$ ) et  $\frac{\nabla u^*}{ds} = 0$

$$0 = \mathcal{P}_i(u^*) = \int_{\widehat{AB}} [\alpha(s) | u^*] ds \quad \forall \widehat{AB}$$

donc  $[\alpha(s) | u^*] = 0$  p.p puis  $= 0$  (par continuité) et ceci  $\forall u^* \in \mathcal{V}^* \implies \alpha(s) \equiv 0$   
donc

$$p_i(u^*) = - \left[ \pi(s) \left| \frac{\nabla u^*}{ds} \right. \right]$$

Supposons que le torseur  $\pi$ , fonction de  $s$ , soit continûment dérivable sur  $\widehat{AB}$ . Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(u^*) &= \int_{\widehat{AB}} - \left[ \pi(s) \left| \frac{\nabla u^*}{ds} \right. \right] ds \\ &= \int_{\widehat{AB}} \left[ \frac{\nabla \pi}{ds} \left| u^* \right. \right] ds - [\pi | u^*] \Big|_A^B \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathcal{P}_i(u^*) = \int_{\widehat{AB}} \left[ \frac{\nabla \pi}{ds} | u^* \right] ds - [\pi(B) | u^*(B)] + [\pi(A) | u^*(A)]$$

Cette formule met en évidence que les efforts intérieurs au point courant  $M(s)$  sont représentés par le torseur  $\pi(s)$ .

### Puissance virtuelle des quantités d'accélération

Si on désigne par  $\gamma \in \mathfrak{D}$  l'accélération (de la section transversale), alors la puissance virtuelle des quantités d'accélération est, très naturellement, définie par

$$\mathcal{A}(u^*) = \int_{\widehat{AB}} \rho [\gamma | u^*] ds$$

Et par application du principe des puissances virtuelles, on doit avoir:

$$\int_{\widehat{AB}} \left[ \frac{\nabla \pi}{ds} + \mathbf{f} - \gamma | u^* \right] ds + [F(B) - \pi(B) | u^*] + [F(A) - \pi(A) | u^*] = 0$$

quel que soit le mouvement virtuel  $u^* \in \mathcal{V}^*$

Supposons d'abord que  $u^*(s)$  soit à support inclus strictement dans  $\widehat{AB}$ . Alors

$$\int_{\widehat{AB}} \left[ \frac{\nabla \pi}{ds} + \mathbf{f} - \gamma | u^* \right] ds = 0$$

En vertu de la continuité de l'élément d'intégration et de l'arbitraire de  $u^*$  dans  $\mathcal{V}^*$ , on a nécessairement

$$\frac{\nabla \pi}{ds} + \mathbf{f} = \gamma$$

Ce résultat acquis, en choisissant des  $u^*(s)$  nuls en dehors strictement d'un intervalle contenant  $B$  d'une part, et nuls en dehors strictement d'un intervalle contenant  $A$ , d'autre part, on voit que l'on doit avoir nécessairement:

$$\pi(A) = -F(A) \quad \pi(B) = F(B)$$

Finalement, les équations en descriptions eulériennes sont

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\nabla \pi^e}{\partial s} + \mathbf{f}^e &= \gamma \\ \pi^e(A) &= -F^e(A) \\ \pi^e(B) &= F^e(B) \end{aligned}} \quad (5.1)$$

### Obtention des équations en descriptions lagrangiennes

Nous avons jusqu'ici, dans ce chapitre, fait usage de la description eulérienne du mouvement. Ceci est fort naturel, car les énoncés fondamentaux de la mécanique s'exprime directement dans la configuration actuelle. Il est fort utile dans de nombreuses questions, d'utiliser une description lagrangienne. Les résultats doivent être écrits dans la configuration de référence par des grandeurs liées au corps que nous noterons  $(\cdot)^c$ . Comme nous allons le voir, toute la question est d'effectuer un changement de variables.

Pour calculer la dérivée absolue  $\frac{D}{\partial s}$ , on dérive par rapport à  $s$  la relation  $\pi^e = AdD \cdot \pi^c$

$$\begin{aligned} \frac{D\pi^e}{\partial s} &= Ad^T D \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial s}\right) \cdot \pi^c + AdD \cdot \frac{\partial \pi^c}{\partial s} \\ &= AdD \cdot ad\left(\frac{\partial D}{\partial s}\right)^c \cdot \pi^c + AdD \cdot \frac{\partial \pi^c}{\partial s} \\ &= AdD \cdot [\gamma_{D^{-1}}^T \frac{\partial D}{\partial s}, \pi^c] + AdD \cdot \frac{\partial \pi^c}{\partial s} \end{aligned}$$

on a alors

$$\left(\frac{D\pi^e}{\partial s}\right)^c = AdD^{-1} \frac{d\pi^e}{ds} = [e^c, \pi^c] + \frac{\partial \pi^c}{\partial s}$$

D'où les équations

$$\mathbf{f} = H \frac{\partial v}{\partial t} + [v, Hv] - [e, \pi] - \frac{\partial \pi}{\partial s}$$

$$F(A) = -\pi(A)$$

$$F(B) = \pi(B)$$

### Charges concentrées

On applique le principe fondamental de la dynamique à la section de discontinuité:

$$F(\sigma_k) + \pi(\sigma_k^+) - \pi(\sigma_k^-) = \gamma(\sigma_k)$$

D'où l'équation:

$$F(\sigma_k) = \dot{v}(\sigma_k, t) + H^{-1}[v(\sigma_k), H(\sigma_k)v(\sigma_k)] - (\pi(\sigma_k^+) - \pi(\sigma_k^-))$$

## 5.5 Application

### Choix du repère

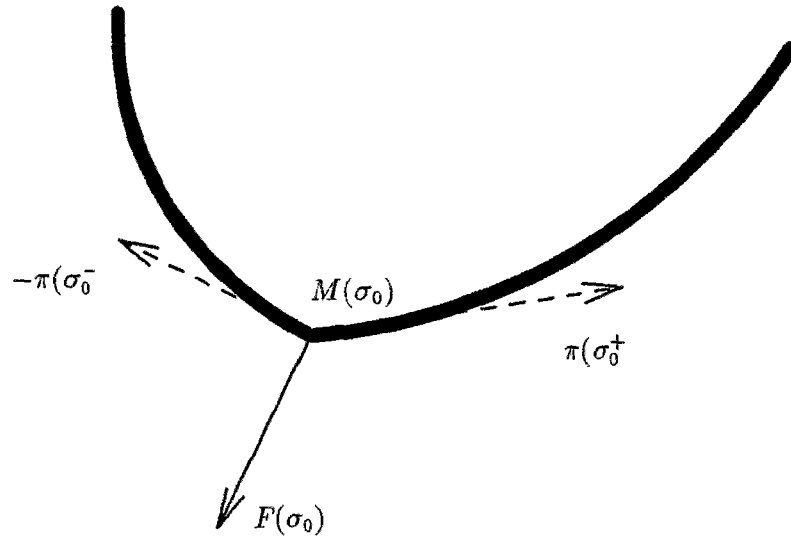


Figure 5.4:

On peut choisir, comme repère lié au solide d'abscisse  $\sigma$ , le repère de Serret-Frenet défini par le vecteur unitaire  $\vec{T}$ , tangent à la courbe directrice  $\gamma$ , et la normale principale  $\vec{N}$  définie, pour toute valeur  $\sigma \in [0, L]$  telle que la courbure ne soit pas nulle, par:  $\vec{N} = \rho(\sigma) \frac{d\vec{T}}{d\sigma}$  et le binormal:  $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ .

Le calcul différentiel dans le repère de Frenet est particulièrement commode grâce au théorème suivant:

**Théorème 26** Soit  $D_r : [0, L] \rightarrow \mathbb{D}$  le déplacement de passage du repère fixé  $r$  au repère de Frenet à l'abscisse  $\sigma$ .

On a alors:

$$\gamma_{D_r}^T \frac{\partial D_r}{\partial \sigma} = \left( \frac{-1}{\tau}, 0, \frac{1}{\rho}, 1, 0, 0 \right)^t$$

où  $\tau$  et  $\rho$  sont respectivement le rayon de torsion et le rayon de courbure de l'arc  $\gamma$  au point  $M$  d'abscisse  $\sigma$ .

### 5.5.1 Equilibre d'un arc de milieu curviligne dans l'espace

Soit  $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{Z}_0$  les champs tels que:

$$\omega_\xi = \vec{\tau}, \omega_\eta = \vec{\nu}, \omega_\zeta = \vec{\beta}$$

et  $i, j, k \in \mathfrak{t}$  les champs constants égaux respectivement à  $\vec{\tau}, \vec{\nu}$  et  $\vec{\beta}$  où  $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$  est le repère de Frenet en l'abscisse  $\sigma$ .

$$\mathcal{B} = (\xi, \eta, \zeta, i, j, k) \quad \text{est alors une base de } \mathfrak{d}$$

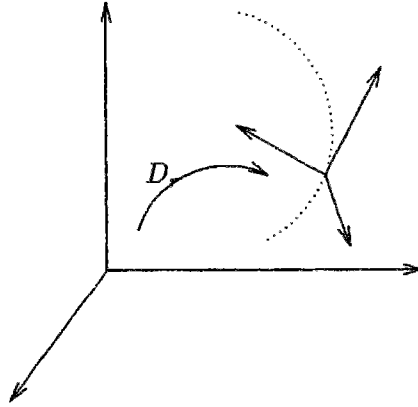


Figure 5.5:

L'équation d'équilibre est:

$$\frac{\partial \theta^c}{\partial \sigma} + [e^c, \theta^c] + T_e^c = 0$$

$\theta^c = (N, T_y, T_z; C, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z)$  est le champ des moments des sollicitations dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $T_e^c = (f_N, f_{T_y}, f_{T_z}; C, M_y, M_z)$  est le torseur des moments des efforts extérieurs.

Grâce au théorème 26 qui donne l'expression du champ  $e^c = \delta_{D-1}^T \frac{\partial D}{\partial \sigma}$ , l'équation matricielle d'équilibre est:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial s} \\ \frac{\partial T_y}{\partial s} \\ \frac{\partial T_z}{\partial s} \\ \frac{\partial C}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial s} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & N \\ 0 & T_y \\ \frac{1}{r} & T_z \\ 1 & C \\ 0 & \mathcal{M}_y \\ 0 & \mathcal{M}_z \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} f_N \\ f_{T_y} \\ f_{T_z} \\ C \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = 0$$

D'où le système:

$$\begin{aligned} \frac{dN(s)}{ds} - \frac{1}{\rho(s)} T_y(s) + f_N(s) &= 0 \\ \frac{dT_y(s)}{ds} + \frac{1}{\rho(s)} N(s) + \frac{1}{r} T_z(s) + f_{T_y}(s) &= 0 \\ \frac{dT_z(s)}{ds} - \frac{1}{r(s)} T_y(s) + f_{T_z}(s) &= 0 \\ \frac{dC(s)}{ds} - \frac{1}{\rho(s)} \mathcal{M}_y(s) + C(s) &= 0 \\ \frac{d\mathcal{M}_y(s)}{ds} + \frac{1}{\rho(s)} C(s) + \frac{1}{r(s)} \mathcal{M}_z(s) - T_z(s) + M_y(s) &= 0 \\ \frac{d\mathcal{M}_z(s)}{ds} - \frac{1}{r(s)} \mathcal{M}_y(s) + T_y(s) + M_z(s) &= 0 \end{aligned}$$



### 5.5.2 Equilibre d'un arc plan de milieu curviligne chargé dans son plan

L'arc est chargé dans son plan donc:

$$T_e^c = (f_t, f_n, 0, 0, 0, m)$$

$\theta^c$  est nécessairement de la forme

$$\theta^c = (N, V, 0, 0, 0, M)^t$$

L'équation matricielle d'équilibre dans la base  $\mathcal{B}$  est alors:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial s} \\ \frac{\partial V}{\partial s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & V \\ \frac{1}{\rho} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} f_T \\ f_N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

D'où le résultat classique:

$$\begin{aligned} \frac{dN(s)}{ds} - \frac{V(s)}{\rho(s)} + f_t(s) &= 0 \\ \frac{dV(s)}{ds} + \frac{N(s)}{\rho(s)} + f_n(s) &= 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} + V(s) + m(s) &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où l'arc étudié est une poutre droite ( $1/\rho = 0$ ), on a en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} + f_x(x) &= 0 \\ \frac{dV}{dx} + f_y(x) &= 0 \\ \frac{dM}{dx} + V(x) + m(x) &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où  $f_y(x) = f(x)$  et  $f_x(x) = m(x) = 0$ , les 2 dernières équations peuvent être regroupées en

$$\frac{d^2 M}{dx^2}(x) = f(x)$$

### 5.5.3 Equilibre d'un fil parfaitement flexible, sous l'action de son poids

Le fil est parfaitement flexible : donc les efforts intérieurs peuvent être modélisés par un vecteur normal à la section transversale :

$$\theta^c = \theta \xi$$

La seule force agissant sur le câble est son poids  $p$  de densité linéique  $p$  supposée constante:

$$T_e^c = -p \sin \alpha \xi - p \cos \alpha \eta$$

D'où l'équation matricielle d'équilibre:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p \sin \alpha \\ -p \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\theta}{ds} - p \sin \alpha = 0 \\ \frac{1}{\rho} \theta - p \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous ramène à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d\theta}{\theta} = \operatorname{tg} \alpha \, d\alpha$$

$$\Rightarrow 0 = d\theta \cos \alpha + \theta d(\cos \alpha) = d(\theta \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \theta \cos \alpha = \text{cte} = pl$$

où  $l$  est une constante arbitraire ayant la dimension d'une longueur  $l \geq 0$ , si l'arc est orienté dans le sens des  $x$  croissants, pour que  $\theta(s) \geq 0$ .

Donc

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{pl \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} = p \sin \alpha \Rightarrow \rho(s) = \frac{l}{\cos^2 \alpha}$$

On sait que  $\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$  et  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1+y'^2}$ ; d'où l'équation différentielle

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{l}$$

si  $x$  prend la valeur  $x_0$  pour  $y' = 0$ , on a  $\operatorname{Argsh} y' = \frac{x-x_0}{l}$  ou bien  $y' = \operatorname{sh} \left( \frac{x-x_0}{l} \right)$ . La configuration d'équilibre est donc une chaînette:

$$\frac{y-y_0}{l} = \operatorname{ch} \left( \frac{x-x_0}{l} \right)$$

Démonstration du théorème 26 On a dans la base  $\mathcal{B}_0$ :

$$D_r(s) = \exp \alpha(s)\zeta \cdot \exp u(s).$$

où  $u(s) = xi_0 + yj_0$ . Alors:

$$\frac{dD_r}{ds} = \gamma_{\exp \alpha(s)\zeta_0}^T \frac{d \exp u(s)}{ds} + \delta_{\exp u(s)}^T \frac{d \exp \alpha(s)\zeta_0}{ds}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{dD}{ds}\right)^c &= \gamma_{D^{-1}}^T \frac{dD}{ds} = \gamma_{\exp^{-1} \alpha(s)\zeta_0}^T \gamma_{\exp^{-1} u(s)}^T \gamma_{\exp \alpha(s)\zeta_0}^T \frac{d \exp u(s)}{ds} \\ &\quad + \gamma_{\exp^{-1} \alpha(s)\zeta_0}^T \gamma_{\exp^{-1} u(s)}^T \delta_{\exp u(s)}^T \frac{d \exp \alpha(s)\zeta_0}{ds} \\ &= Ad(\exp^{-1} \alpha(s)\zeta_0) \left[ R(u(s)) \frac{du(s)}{ds} \right] + \left[ R(\alpha(s)\zeta_0) \frac{d\alpha(s)\zeta_0}{ds} \right] \\ &= Ad(\exp \alpha(s)\zeta_0) [\cos \alpha i_0 + \sin \alpha j_0] + \frac{1}{\rho} \zeta_0 \end{aligned}$$

L'endomorphisme  $ad(\alpha\zeta)$  est défini par  $ad(\alpha\zeta).x = [(\alpha\zeta) | x]$ , d'où la représentation matricielle de  $ad \alpha\zeta$  dans la base  $\mathcal{B}$ :

$$ad(\alpha\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & & \\ \alpha & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & & & \alpha & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose  $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  alors  $i^2 = -1$

$$\text{et } \exp \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = e^{\alpha i} = \cos \alpha 1 + \sin \alpha i = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Ad \exp \alpha \zeta &= \exp ad \alpha \zeta \\ &= \exp \begin{pmatrix} M & & & & \\ & 0 & & & \\ & & M & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ où } M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp M & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \exp M & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & & & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & & & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc  $\left(\frac{\partial D}{\partial s}\right)^c =$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & & & \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ & & & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\rho \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 5.6 Développement des équations lagrangiennes

Si l'on souhaite exprimer cette équation intrinsèque sous la forme d'un système différentiel ordinaire, on peut alors choisir un système de coordonnées  $(q_1, \dots, q_6) = (x, y, z, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$  (notons que ce choix peut être effectué au vu de l'équation déjà formée). On doit alors effectuer deux catégories d'opérations:

- D'une part exprimer la vitesse  $v^c$  en fonction de  $x, y, z, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\psi_1}{dt}, \frac{d\psi_2}{dt}, \frac{d\psi_3}{dt}$ , et les déformations  $e^c$  en fonction de  $x, y, z, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{d\psi_1}{ds}, \frac{d\psi_2}{ds}, \frac{d\psi_3}{ds}$ , de même l'accélération  $\frac{dv}{dt}$  en fonction de  $x, y, z, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\psi_1}{dt}, \frac{d\psi_2}{dt}, \frac{d\psi_3}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^2\psi_1}{dt^2}, \frac{d^2\psi_2}{dt^2}, \frac{d^2\psi_3}{dt^2}$ . Cette phase fait essentiellement appel au calcul différentiel dans  $S$  ou  $G$  et peut être condensée au maximum.
- D'autre part substituer aux  $v^c$ ,  $e^c$  et  $\frac{dv^c}{dt}$  leurs expressions en fonction de  $x, y, z, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{d\psi_1}{dt}, \frac{d\psi_2}{dt}, \frac{d\psi_3}{dt}, \frac{d\psi_1}{ds}, \frac{d\psi_2}{ds}, \frac{d\psi_3}{ds}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^2\psi_1}{dt^2}, \frac{d^2\psi_2}{dt^2}, \frac{d^2\psi_3}{dt^2}$  dans l'équation intrinsèque: cette phase ne comporte que des calculs algébriques - et non différentiels - mais ce sont les calculs susceptibles d'être les plus volumineux et de devenir impraticables à la main. Il est possible de faire développer tous ces calculs automatiquement par l'ordinateur à qui revient, si besoin est, la tâche de générer les termes des équations de mouvement:

$$\rho\tau_1 = -\cos\psi_1\cos\psi_2\rho\frac{d^2x}{dt^2} - \sin\psi_1\cos\psi_2\rho\frac{d^2y}{dt^2} - \sin\psi_2\rho\frac{d^2z}{dt^2} \\ + (\theta_2\cos\psi_3 - \theta_3\sin\psi_3)\cos\psi_2\frac{d\psi_1}{ds} - (\theta_2\sin\psi_3 + \theta_3\cos\psi_3)\frac{d\psi_2}{ds} - \frac{d\theta_1}{ds}$$

$$\rho\tau_2 = \cos\psi_1\sin\psi_3(\sin\psi_2 - 1)\rho\frac{d^2x}{dt^2} + \cos\psi_3(\sin\psi_1\cos\psi_2 + \cos\psi_1)\rho\frac{d^2y}{dt^2} + \sin\psi_3 \\ \cos\psi_2\rho\frac{d^2z}{dt^2} + \theta_1\cos\psi_2\cos\psi_3\frac{d\psi_1}{ds} + \theta_1\sin\psi_3\frac{d\psi_2}{ds} - \theta_3\frac{d\psi_3}{ds} + \theta_3\sin\psi_2\frac{d\psi_1}{ds} + \frac{d\theta_2}{ds}$$

$$\rho\tau_3 = (\sin\psi_1\sin\psi_3 + \cos\psi_1\sin\psi_2\cos\psi_3)\rho\frac{d^2x}{dt^2} + (\sin\psi_1\sin\psi_2\cos\psi_3 - \cos\psi_1 \\ \sin\psi_3)\rho\frac{d^2y}{dt^2} + \cos\psi_2\cos\psi_3\rho\frac{d^2z}{dt^2} - \theta_1\cos\psi_2\sin\psi_3\frac{d\psi_1}{ds} - \theta_1\cos\psi_3\frac{d\psi_2}{ds} \\ + \theta_2\frac{d\psi_3}{ds} - \theta_2\sin\psi_2\frac{d\psi_1}{ds} + \frac{d\theta_3}{ds}$$

$$\rho\tau_4 = [\sin\psi_3(\theta_3\cos\psi_1\sin\psi_2 - \theta_2\sin\psi_1) - \cos\psi_3(\theta_2\cos\psi_1\sin\psi_2 + \theta_3\sin\psi_1)]\frac{dx}{dt} \\ + [\sin\psi_3(\theta_3\sin\psi_1\sin\psi_2 + \theta_2\cos\psi_1) + \sin\psi_2\cos\psi_3(\theta_3\cos\psi_1 - \theta_2\sin\psi_1)]\frac{dy}{dt} \\ + [\theta_3\cos\psi_2\sin\psi_3 - \theta_2\cos\psi_2\cos\psi_3]\frac{dz}{dt} - I_{11}\sin\psi_2\rho\frac{d^2\psi_1}{dt^2} \\ + (I_{33} - I_{22})\cos^2\psi_2\cos\psi_3\sin\psi_3\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2 + (I_{33} - I_{22})\cos^2\psi_2\cos\psi_3\sin\psi_3\rho\left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)^2 \\ + I_{11}\rho\frac{d^2\psi_3}{dt^2} + (I_{33} - I_{22})(\cos\psi_2\sin^2\psi_3 - \cos\psi_2\cos^2\psi_3) \\ - I_{11}\cos\psi_2\frac{d\psi_1}{dt}\frac{d\psi_2}{dt} + \cos\psi_2(\theta_6\sin\psi_3 - \theta_5\cos\psi_3)\frac{d\psi_1}{ds} + (\theta_5\sin\psi_3 + \theta_6\cos\psi_3)\frac{d\psi_2}{ds} \\ + (\theta_3\sin\psi_3 - \theta_2\cos\psi_3)\cos\psi_1\sin\psi_2 - (\theta_2\sin\psi_3 + \theta_3\cos\psi_3)\sin\psi_1 + \frac{d\theta_4}{ds}$$

$$\rho\tau_5 = [\theta_1\sin\psi_1\sin\psi_3 + \theta_1\cos\psi_1\sin\psi_2\cos\psi_3 - \theta_3\cos\psi_1\cos\psi_2]\frac{dx}{ds} \\ [-\theta_1\cos\psi_1\sin\psi_3 + \theta_1\sin\psi_1\sin\psi_2\cos\psi_3 - \theta_3\sin\psi_1\cos\psi_2]\frac{dy}{ds} \\ + (\theta_1\cos\psi_2\cos\psi_3 + \theta_3\sin\psi_2)\frac{dz}{ds} \\ + \rho I_{22}\left[\cos\psi_3\sin\psi_3\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \cos\psi_3\frac{d^2\psi_2}{dt^2}\right] + \rho(I_{11} - I_{22} - I_{33})\sin\psi_1\sin\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}\frac{d\psi_2}{dt} + \\ \rho(I_{11} + I_{22} - I_{33})\cos\psi_2\cos\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}\frac{d\psi_3}{dt} + \rho(I_{11} - I_{22} - I_{33})\sin\psi_3\sin\psi_3\frac{d\psi_2}{dt}\frac{d\psi_3}{dt} + \\ \rho(I_{33} - I_{11})\cos\psi_2\sin\psi_2\cos\psi_3\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2 + (\theta_6\sin\psi_2 + \theta_4\cos\psi_2\cos\psi_3)\frac{d\psi_1}{ds} - \theta_4\sin\psi_3\frac{d\psi_2}{ds} - \theta_5\frac{d\psi_3}{ds} \\ + \theta_1\cos\psi_1\sin\psi_2\cos\psi_3 + \theta_1\sin\psi_1\sin\psi_3 - \theta_3\cos\psi_1\cos\psi_2 + \frac{d\theta_5}{ds}$$

$$\rho\tau_6 = [-\theta_1\cos\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3 + \theta_1\sin\psi_1\cos\psi_3\cos\psi_3 + \theta_2\cos\psi_1\cos\psi_2]\frac{dx}{ds} \\ [-\theta_1\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3 - \theta_1\cos\psi_1\cos\psi_3 - \theta_2\sin\psi_1\cos\psi_2]\frac{dy}{ds} \\ - (\theta_1\cos\psi_2\sin\psi_3 + \theta_2\sin\psi_2)\frac{dz}{ds} \\ + \rho I_{33}\left[\cos\psi_2\cos\psi_3\frac{d^2\psi_1}{dt^2} - \sin\psi_3\frac{d^2\psi_2}{dt^2}\right] + \rho(I_{11} - I_{22} - I_{33})\sin\psi_2\cos\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}\frac{d\psi_2}{dt} + \\ \rho(I_{22} - I_{11} - I_{33})\cos\psi_2\sin\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}\frac{d\psi_3}{dt} + \rho(I_{22} - I_{11} - I_{33})\cos\psi_3\frac{d\psi_2}{dt}\frac{d\psi_3}{dt} + \\ \rho(I_{11} - I_{22})\cos\psi_2\sin\psi_2\sin\psi_3\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2 - (\theta_5\sin\psi_2 + \theta_4\cos\psi_2\sin\psi_3)\frac{d\psi_1}{ds} - \theta_4\cos\psi_3\frac{d\psi_2}{ds} + \theta_5\frac{d\psi_3}{ds} \\ - \theta_1\cos\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3 + \theta_1\sin\psi_1\cos\psi_3 + \theta_2\cos\psi_1\cos\psi_2 + \frac{d\theta_6}{ds}$$

## Chapitre 6

# Loi de comportement non linéaire des milieux curvilignes

*La loi de comportement des milieux curvilignes a été souvent construite à partir de celle, supposée connue, du milieu tridimensionnel constituant le solide élastique. Dans ce chapitre, nous allons procéder directement et construire une loi de comportement bien propre aux milieux curvilignes.*

### 6.1 Introduction

La résolution des problèmes de dynamique des câbles, nécessite de faire appel à la loi de comportement du milieu curviligne, exprimée dans le même formalisme unidimensionnel que l'on a utilisé pour écrire les équations de la dynamique. En effet, les principes et les définitions, présentés jusqu'à présent, s'appliquent à tous les câbles et tous les mouvements. Par contre, c'est la théorie des lois de comportement qui va exprimer la **diversité** des corps naturels, diversité qui résulte des différences entre les matériaux qui les composent.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier uniquement la loi de comportement des milieux curvilignes **élastiques**. Cette loi consiste à formuler la relation existant entre l'histoire de la sollicitation subie par la section transversale et l'évolution locale de ce milieu dans les mouvements réels.

### 6.2 Formulation thermodynamique

Nous aurons à utiliser dans cette étude des propriétés et des énoncés de thermodynamique, où les systèmes (et sous-systèmes) envisagés sont en mouvement, suivis dans leur mouvement, chaque section du système curviligne considéré ayant ses propres propriétés thermodynamiques.

### 6.2.1 Equation de l'énergie

Rappelons d'abord l'énoncé classique du premier principe pour des systèmes homogènes en équilibre thermodynamique.

#### Premier principe

A tout système (ou sous-système) d'un milieu curviligne on associe une quantité d'énergie  $E$ , appelée **énergie interne**, et définie à une constante additive près, telle que sa variation élémentaire  $dE$ , lors d'une transformation entre deux états infiniment voisins, soit donnée par:

$$dE + dK = \delta W + \delta Q \quad (6.1)$$

où

- $dK$  est la variation élémentaire de l'énergie cinétique du système.
- $\delta W$  est le travail reçu par le système et développé par les efforts extérieurs s'exerçant sur le système.
- $\delta Q$  est le taux de quantité de chaleur reçue par le système et fournie par l'extérieur.

Il y a des multiples transformations permettant de passer d'un état initial donné à un état final donné : pour tous ces transformations, les deux membres de (6.1) ont même valeur, mais  $W$  et  $Q$  prennent des valeurs qui dépendent de la transformation considérée. Soit  $\tau$  la densité linéaire des efforts extérieurs alors:

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{v}) = \int_0^L [\tau|\mathbf{v}]d\sigma$$

l'expression de l'énergie cinétique est:

$$K = \int_0^L \frac{1}{2}\rho[H\mathbf{v}|\mathbf{v}]d\sigma$$

La quantité de chaleur reçue pendant l'unité de temps par la portion, ou le sous-arc  $\widehat{AB}$  de  $\widehat{OL}$ , s'écrit comme une intégrale de longueur d'une densité linéique  $r(s)$ , qui correspond au taux de chaleur fournie aux éléments de  $AB$  par l'extérieur de  $AB$ , plus un terme de conduction aux extrémités  $A$  et  $B$ , dont la contribution se traduit par une fonction  $q$  de chaleur sortant au point  $M$ :

$$\dot{Q} = \int_0^L r d\sigma + q(A) - q(B)$$

On introduit la densité linéique d'énergie interne  $e$  appelée aussi énergie spécifique:

$$E = \int_A^B \rho e d\sigma$$

donc

$$\dot{E} = \int_O^L \rho \dot{e} d\sigma$$

où  $\rho$  est la masse linéique du câble.

**Conservation de l'énergie :** A chaque instant, la dérivée particulière de l'énergie d'un système est la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système et du taux de chaleur reçue par le système.

La loi de la conservation de l'énergie qui se formule sous la forme  $\dot{e} = \mathcal{P}_e + \dot{Q}$  peut donc s'écrire plus explicitement compte tenu des définitions posées :

$$\forall AB \subset OL$$

$$\forall \widehat{AB} \subset \widehat{OL}$$

$$\frac{d}{dt} \int_A^B \left( e + \frac{1}{2} [H \mathbf{v} | \mathbf{v}] \right) d\sigma = \int_A^B ([\tau | \mathbf{u}] + r) d\sigma + q(A) - q(B)$$

On applique le théorème de l'énergie cinétique;

$$\forall \widehat{AB} \subset \widehat{OL}$$

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{P}_e(\mathbf{u}) + \mathcal{P}_i(\mathbf{u})$$

D'où

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \mathcal{P}_i(\mathbf{u})$$

qui s'interprète immédiatement : la dérivée de l'énergie interne du sous-système  $AB \subset OL$  est la somme du taux de chaleur reçu et du taux d'énergie

En remplaçant  $\mathcal{P}_i(\mathbf{u})$  par:

$$\int_A^B [\pi | \dot{\mathbf{e}}] d\sigma$$

on obtient pour tout  $\widehat{AB} \subset \widehat{OL}$ :

$$\int_A^B \dot{e} d\sigma = \int_A^B ([\pi | \dot{\mathbf{e}}] + r) d\sigma + \int_A^B \frac{\partial q}{\partial \sigma} d\sigma$$

D'où l'équation de l'énergie:

$$\boxed{\frac{de}{dt} = [\pi | \dot{\mathbf{e}}] + r - \frac{\partial q}{\partial \sigma}}$$



### 6.2.2 Inégalité fondamentale

L'inégalité fondamentale de la physique des milieux curvilignes, et plus généralement des milieux continus, est celle qui traduit le second principe de la thermodynamique. Celui-ci permet de distinguer les évolutions physiquement possibles de celles qui ne le sont pas. Sa formulation permet classiquement d'introduire les notions de température absolue et d'entropie.

#### Deuxième principe

Il existe un repérage universel de température  $T \geq 0$ , appelé température absolue et une fonction de l'état thermodynamique du système, additive, appelée entropie et notée  $S$ , telle qu'à chaque instant et  $\forall AB$  sous-arc de  $OL$  on ait:

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_A^B \frac{r}{T} d\sigma + \frac{q(A)}{T} - \frac{q(B)}{T}$$

Soit  $s$  l'entropie linéique

$$S = \int_A^B s d\sigma$$

d'où

$$\rho \dot{s} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{h}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0$$

En remplaçant  $r$  par son expression tirée de l'équation de conservation de l'énergie:

$$[\pi|\dot{e}] + (T\dot{s} - \dot{e}) - \frac{q}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \sigma} \geq 0$$

et en introduisant la fonction thermodynamique appelée énergie libre:

$$\psi = e - Ts$$

on obtient ainsi l'inégalité de **Clausius-Duhem** pour les milieux curvilignes:

$$[\pi|\dot{e}] - (\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{q}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \sigma} \geq 0$$

Le premier membre de cette inégalité est appelé la dissipation volumique intrinsèque. L'inégalité fondamentale s'énonce alors:

#### La dissipation volumique intrinsèque est non négative

L'inégalité fondamentale ou second principe donne en physique des milieux continus une condition nécessaire pour qu'un processus d'évolution vérifiant toute les lois de conservation soit physiquement possible. On dit encore thermodynamiquement admissible. Souvent cette condition est aussi suffisante [*Germ*].

### 6.3 Hypothèse de l'élasticité

Les fonctions thermodynamiques  $e$  et  $s$  (énergie interne et entropie linéique) et le tenseur des contraintes  $\pi$  sont des fonctions univoques des seules variables  $T$  et  $\mathbf{e}$ .

En conséquence de cette hypothèse, seul le dernier terme de l'inégalité fondamentale dépend de  $\frac{\partial T}{\partial \sigma}$ . L'inégalité demeure donc vérifiée, quelle que soit la valeur prise par  $\frac{\partial T}{\partial \sigma}$ , en particulier 0:

$$[\pi | \dot{\mathbf{e}}] - (\dot{\psi} + s\dot{T}) \geq 0$$

Le différentiel de  $\psi(T, \mathbf{e})$  s'explique en:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial T} dT + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}} | d\mathbf{e} \right]$$

où par dualité,  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}}$  est un tenseur de  $\mathfrak{D}$ .

Il vient alors à partir de cette dernière inégalité:

$$\left[ \pi - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}} | \dot{\mathbf{e}} \right] - \rho \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0$$

Cette inégalité doit être vraie pour  $dT$  quelconque, et si le matériau ne possède pas de liaison interne c.à.d si ses déformations ne sont soumises à aucune restriction (telle que l'incompressibilité par exemple), on en déduit:

- En prenant  $\dot{\mathbf{e}} = 0$  et  $\dot{T}$  arbitraire:

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}(T, \mathbf{e})$$

- En faisant  $\dot{T} = 0$  et  $\dot{\mathbf{e}}$  arbitraire

$$\pi = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}}$$

Ces formules impliquent que l'inégalité fondamentale est en fait une égalité, et donc:

**La dissipation volumique intrinsèque est nulle**

### 6.4 La loi de comportement

#### 6.4.1 Définition

L'étude de la stabilité thermodynamique conduit à imposer certaines conditions sur la fonction  $\psi(\mathbf{e})$ . En particulier, ces conditions sont satisfaites si  $\psi(\mathbf{e})$  est une fonction convexe fermée semi-continue inférieure.

**Définition 44** La loi de comportement d'un milieu curviligne est définie par une fonction  $\psi(e)$  convexe fermée sci non négative, nulle pour  $e = 0$ . De façon précise:

$$\pi = \rho \frac{\partial \psi}{\partial e}$$

Autrement dit,  $\pi$  est le gradient, au sens du produit scalaire de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{d}$ , de la fonction  $\psi(e)$ .

### 6.4.2 Principe d'objectivité

#### Groupe de parités

Soit deux configurations distinctes  $r_1$  et  $r_2$  d'une même section transversale  $S$ . Si la réponse de cette section est exactement la même pour une déformation donnée, relativement à  $r_1$  et  $r_2$ , nous dirons qu'il y a parité ou isomorphisme matériel entre les deux configurations en  $S$ ; autrement dit, aucune expérience ne peut distinguer  $r_1$  et  $r_2$ . Les applications qui font passer d'une configuration à une autre configuration isomorphe à la première, forment naturellement un groupe qui sera appelé **groupe de parités** ou **groupe d'isotropie**<sup>1</sup> qui dépend évidemment du matériau et de l'une des configurations  $r$  -n'importe laquelle- que les membres du groupe mettent en correspondance. Un autre choix de  $r$  conduira en général à un autre groupe d'applications, mais il est évident aussi, que si  $r_1$  et  $r_2$  sont en parités, alors ils ont le même groupe de parité qu'on note indifféremment  $G_{r_1}$  ou  $G_{r_2}$ .

Deux configurations distinctes quelconques de  $S$  sont deux parties de l'espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  de dimension 3; donc le groupe de parités  $G_r$ , relatif à une configuration  $r$  et assurant la correspondance entre ces deux parties affinement équivalentes de  $\mathcal{E}$ , est nécessairement un sous-groupe du groupe affine  $GA(\mathcal{E})$ .

L'idée que nous venons de présenter de façon intuitive, peut être exprimée mathématiquement par la

**Définition 45 (Cauchy, Noll)** Un matériau est isotrope s'il existe une configuration de référence  $r$  telle que l'on ait

$$Is(\mathcal{E}) \subset G_r$$

où  $Is(\mathcal{E})$  est le groupe des isométries affines de  $\mathcal{E}$ .

<sup>1</sup>Note de Clifford TRUESDELL dans son livre *Mécanique rationnelle des milieux continus*: Le terme "groupe d'isotropie", que NOLL a utilisé en introduisant ces groupes, prête ici à confusion, car il indique une notion de rotation, alors que les éléments du groupe des parités ne sont pas nécessairement des rotations. L'expression "groupe de symétries", bien que plus proche du langage répandu chez les physiciens, prêterait également à confusion, car elle vient d'une notion de distance, qui n'a rien à voir avec la réponse matérielle. Le terme "parité" doit suggérer sa signification originelle d' "égalité devant la loi", la "loi" étant ici la loi de comportement du matériau.

Cela veut dire qu'un matériau est isotrope si l'on peut l'amener dans une configuration à partir de laquelle aucune rotation ni translation ne puisse être détectée par l'expérience, ni même la symétrie centrale par rapport à l'origine  $-1$  qui ne correspond à aucune véritable déformation physique, mais exprime seulement l'invariance des propriétés matérielles dans des symétries de la configuration de référence.

**Définition 46** *Le groupe de parités en une section transversale considéré comme un solide rigide est l'ensemble des applications affines bijectives vérifiant la condition:*

$$G_{\mathbf{r}}(\text{Ad } D.e) = \text{Ad } D.G_{\mathbf{r}}(e)$$

où  $G_{\mathbf{r}}$  est l'opérateur-loi de comportement donné par

$$G_{\mathbf{r}}(e) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{e}}$$

pour une configuration  $\mathbf{r}$  fixée.

La section transversale étant considérée comme un solide rigide, le groupe de parité est alors un sous-groupe du groupe des isométries affines et ne dépend que de la géométrie de la section et d'une configuration  $\mathbf{r}$ .

Puisque  $-1$  appartient à  $G_{\mathbf{r}}$  et  $G_{\mathbf{r}}$  est un groupe, on a alors l'équivalence:

$$-D \in G_{\mathbf{r}} \iff D \in G_{\mathbf{r}}$$

$G_{\mathbf{r}}$  peut donc s'interpréter comme le produit direct du groupe "trivial" réduit aux éléments  $-1$  et  $+1$ , par un groupe  $G_{\mathbf{r}}^+$  sous-groupe du groupe des déplacements  $\mathbb{D}$ .

On suppose que cette section est circulaire et homogène (matériau transversalement isotrope) et on choisit comme configuration  $\mathbf{r}$  celle définie par la base  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , constituée de deux vecteurs  $\vec{j}, \vec{k}$  situés dans le plan de symétrie orthogonal à l'axe de révolution, et d'un vecteur selon cet axe. On écrit dans cette base l'invariance par changement d'orientation des vecteurs de base et par rotation de la base autour de l'axe de symétrie.

Soit  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  deux configurations matériellement isomorphes et  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  deux vecteurs "liés" respectivement à  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , alors il existe une isométrie  $D$  appartient à  $G_{\mathbf{r}_1}$  (ou  $G_{\mathbf{r}_2}$ ) telle que  $\mathbf{r}' = D.\mathbf{r}$  donc

$$\mathbf{x} = \text{Ad } D\mathbf{x}'$$

Pour tout  $D \in G_{\mathbf{r}}$ , il existe  $D^+ \in \mathbb{D}$  tel que  $D = \varepsilon D^+$  où  $\varepsilon = \pm 1_{\mathbb{D}}$  donc  $\text{Ad } D = \text{Ad } \varepsilon D^+ = \text{Ad } \varepsilon . \text{Ad } D^+ = \pm \text{Ad } D^+$ , d'où:

$$\mathbf{x} = \pm \text{Ad } D^+ \mathbf{x}'$$

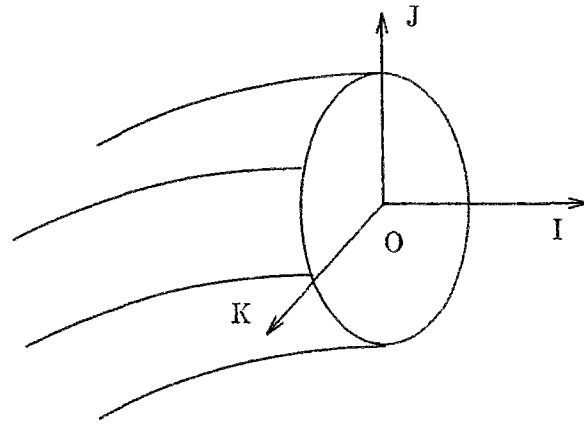


Figure 6.1:

Compte tenu de la symétrie de la section  $S$ ,  $G_{\mathbf{r}}^+$  est le sous groupe de rotation affine autour de l'axe  $(O, \vec{\mathbf{i}})$  et donc:

$$Ad D^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Il résulte que si on pose  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}(0) \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{x}'} \\ \mathbf{x}'(0) \end{pmatrix}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  alors

$$\omega_{\mathbf{x}}^1 = \pm \omega_{\mathbf{x}'}^1, \quad \mathbf{x}(0)^1 = \pm \mathbf{x}'(0)^1, \quad \omega_{\mathbf{x}} = \pm A \omega_{\mathbf{x}'}, \quad \mathbf{x}(0) = \pm A \mathbf{x}'(0)$$

où  $A$  est la matrice orthogonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

donc

$$|\omega_{\mathbf{x}}^1| = |\omega_{\mathbf{x}'}^1|, \quad |\mathbf{x}(0)^1| = |\mathbf{x}'(0)^1|, \quad \|\omega_{\mathbf{x}}\| = \|\omega_{\mathbf{x}'}\|, \quad \|\mathbf{x}(0)\| = \|\mathbf{x}'(0)\|$$

et

$$[\mathbf{x}|\mathbf{x}] = 2(\omega_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}(0)) = 2(\pm A \omega_{\mathbf{x}'} | \pm A \mathbf{x}'(0)) = 2(\omega_{\mathbf{x}'}|\mathbf{x}'(0)) = [\mathbf{x}'|\mathbf{x}']$$

Les invariants d'un vecteur  $\mathbf{x}$  élément de l'algèbre de lie  $\mathfrak{g}$  pour les configurations isomorphes à  $r$  sont:

$$\begin{array}{l} I_1 = [\mathbf{x}|\mathbf{x}] \quad I_2 = \|\omega_{\mathbf{x}}\|^2 \quad I_3 = \|\mathbf{x}(0)\|^2 \\ I_4 = (\omega_{\mathbf{x}}^1)^2 \quad I_5 = (\mathbf{x}(0)^1)^2 \end{array}$$

*Remarque*  $[\mathbf{x}|\mathbf{x}]$  et  $\|\omega_{\mathbf{x}}\|$  sont invariants quelque soit la configuration de référence choisie.

### 6.4.3 Obtention de la loi de comportement

Nous avons vu que la loi de comportement est la même dans toute configuration  $r'$  isomorphe à la configuration  $r$  définie par la base  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  donc  $\psi$  s'exprime nécessairement comme une fonction des invariants  $(I_i)_{i=1,5}$  du vecteur  $\mathbf{e}^c$ .  $\psi$  s'écrit donc:

$$\psi(\mathbf{e}^c) = \psi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$$

On a sans difficulté:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{e}^c} = 2 \begin{pmatrix} \omega \\ u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{e}^c} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{e}^c} = 2 \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{e}^c} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{e}^c} = 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

d'où

$$\theta^c = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \\ 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_4} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \end{pmatrix} \mathbf{e}^c$$

Cette dernière matrice dépend, bien évidemment, de  $\mathbf{e}^c$ , donc cette expression de la loi de comportement obtenue ainsi, n'est pas linéaire; Cependant pour  $\mathbf{e}$  assez petit (H.P.P), on peut confondre  $\frac{\partial \psi}{\partial I_i}(\mathbf{e}^c)$  avec  $\frac{\partial \psi}{\partial I_i}(0)$ , la relation est ainsi donc linéarisée:

$$\theta^c = \mathcal{F} \mathbf{e}^c$$

où  $\mathcal{F}$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & & c & & \\ & \alpha & & d & \\ & & \alpha & & d \\ a & & & \alpha & \\ & b & & & \alpha \\ & & b & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha = 2\frac{\partial\psi}{\partial I_1}(0)$ ,  $a = 2\frac{\partial\psi}{\partial I_2}(0) + 2\frac{\partial\psi}{\partial I_4}(0)$ ,  $b = 2\frac{\partial\psi}{\partial I_2}(0)$ ,  $c = 2\frac{\partial\psi}{\partial I_3}(0) + 2\frac{\partial\psi}{\partial I_5}(0)$  et  $d = 2\frac{\partial\psi}{\partial I_1}(0)$

### Stabilité thermodynamique

Nous admettrons qu'une condition nécessaire de stabilité isotherme du matériau thermoélastique linéaire, imposée par les inégalités dérivant de l'inégalité fondamentale, est que le potentiel thermodynamique  $\psi$  soit une fonction convexe de  $\mathbf{e}^c$ .

On vérifie que dans le cas d'une loi de comportement linéarisée, on a à une constante additive près:

$$\psi(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}[\mathcal{F}\mathbf{e}|\mathbf{e}]$$

Donc la forme quadratique  $[\mathcal{F}\mathbf{e}|\mathbf{e}]$  doit être définie positive.

On a explicitement:

$$\frac{1}{2}[\mathcal{F}\mathbf{e}|\mathbf{e}] = a\mathbf{e}_1^2 + 2\alpha\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4 + c\mathbf{e}_4^2 + b\mathbf{e}_2^2 + 2\alpha\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5 + d\mathbf{e}_5^2 + b\mathbf{e}_3^2 + 2\alpha\mathbf{e}_3\mathbf{e}_6 + d\mathbf{e}_6^2$$

On en déduit les conditions nécessaires de stabilité, qui imposent donc des limitations

aux valeurs des coefficients d'élasticité<sup>2</sup>:

$$\begin{array}{ll} a > 0 & ac - \alpha^2 > 0 \\ b > 0 & bd - \alpha^2 > 0 \end{array}$$

### Interprétation des coefficients

La loi de comportement s'écrit

$$\begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ C \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & c & & & \\ & \alpha & & d & & \\ & & \alpha & & d & \\ a & & & \alpha & & \\ & b & & & \alpha & \\ & & b & & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\omega_x}{ds} \\ \frac{d\omega_y}{ds} \\ \frac{d\omega_z}{ds} \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

- On voit d'après cette écriture que le coefficient  $\alpha$  lie le moment du torseur  $\theta^c$  à la valeur en à l'origine de  $\mathbf{e}^c$  et inversement. Donc  $\alpha$  peut s'interpréter comme étant le coefficient de couplage flexion/traction.
- $C = a \frac{d\omega_x}{ds} + \alpha \epsilon_1$   $a$  est donc la résistance à la torsion
- $\left. \begin{array}{l} \mathcal{M}_y = b \frac{d\omega_y}{ds} + \alpha \epsilon_1 \\ \mathcal{M}_z = b \frac{d\omega_z}{ds} + \alpha \epsilon_1 \end{array} \right\}$   $b$  est la résistance à la flexion
- $N = c \epsilon_1 + \alpha \frac{d\omega_x}{ds}$   $c$  est la résistance à la traction-compression.

<sup>2</sup>L'équivalence de ces conditions pour un milieu continu, relativement aux coefficients de Lamé est:

$$\begin{array}{l} 3\lambda + 2\mu > 0 \\ \mu > 0 \end{array}$$

Si l'on utilise le module de Young et le coefficient de Poisson les conditions sont équivalentes à:

$$\begin{array}{l} E > 0 \\ -1 < \nu < \frac{1}{2} \end{array}$$



$$\bullet \left. \begin{array}{l} T_y = d\epsilon_2 + \alpha \frac{d\omega_x}{ds} \\ T_z = d\epsilon_3 + \alpha \frac{d\omega_x}{ds} \end{array} \right\} d \text{ est la résistance aux cisaillements}$$

Les coefficients  $a, b, c$  et  $d$  sont, en principe, à déterminer expérimentalement; mais en comparant ces coefficients à ceux obtenus à partir de la loi de comportement tridimensionnelle déjà expérimentés on obtient:

$$a = GJ \quad b = EI \quad c = ES \quad d = ES_t \quad \alpha = 0$$

#### 6.4.4 Loi de comportement non-linéaire

On fait un développement limité à l'ordre deux des coefficients de la matrice de correspondance entre  $\theta^c$  et  $e^c$  par rapport aux 5 invariants  $(I_\alpha)_{\alpha=1,5}$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial I_\alpha} \simeq \frac{\partial \psi}{\partial I_\alpha}(0) + \sum_{i=1}^5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_\alpha} I_i$$

le second terme du deuxième membre est une forme quadratique, donc il existe  $A_\alpha \in \mathcal{L}(dg)$  telle que:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_\alpha} I_i = [A_\alpha e^c | e^c]$$

avec

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_\alpha} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_3 \partial I_\alpha} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_5 \partial I_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_\alpha} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_3 \partial I_\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_\alpha} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_3 \partial I_\alpha} \\ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2 \partial I_\alpha} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_4 \partial I_\alpha} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2 \partial I_\alpha} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2 \partial I_\alpha} & 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_\alpha} \end{pmatrix}$$

D'où l'expression non linéaire de la loi de comportement:

$$\theta^c = \mathcal{F}e^c + \mathcal{A}(e^{c^2})e^c$$

avec

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}^{c2}) = \begin{pmatrix} [A_1 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 & 0 & [(A_3 + A_5) \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 & 0 \\ 0 & [A_1 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 & 0 & [A_3 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 \\ 0 & 0 & [A_1 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 & 0 & [A_3 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] \\ [(A_2 + A_4) \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 & 0 & [A_1 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 & 0 \\ 0 & [A_2 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 & 0 & [A_1 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 \\ 0 & 0 & [A_2 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] & 0 & 0 & [A_1 \mathbf{e}^c | \mathbf{e}^c] \end{pmatrix}$$

### Stabilité thermodynamique

Pour ce type de loi de comportement non linéaire on vérifie que le potentiel thermodynamique est, à une constante additive près, donné par:

$$\psi(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}[\mathcal{F}\mathbf{e}|\mathbf{e}] + \frac{1}{4}[\mathcal{A}(\mathbf{e}^2)\mathbf{e}|\mathbf{e}]$$

Donc la forme biquadratique  $\frac{1}{4}[\mathcal{A}(\mathbf{e}^2)\mathbf{e}|\mathbf{e}]$  doit être définie positive. D'où les conditions de stabilité .....

### Interprétation physique des coefficients

L'application  $\mathbf{e} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{e}^2)$  de  $\mathbf{d}$  dans  $\mathcal{L}(\mathbf{d})$  dépend manifestement de 5 matrices 6-6, et chacune de ces matrices dépend également de 5 coefficients distincts. Donc  $\mathcal{A}(\mathbf{e}^2)$  dépend en tout de 25 coefficients à priori; Mais ces coefficients sont, en toute rigueur, les dérivées partielles secondes de la fonction  $\psi(\mathbf{e}^c)$ . En supposant  $\psi$  deux fois différentiable ( $\psi''_{ij} = \psi''_{ji}$ ) on a donc  $C_5^1$  (dérivées  $\psi''_{ii}$ ) +  $C_5^2$  (dérivées  $\psi''_{ij}$ ) = 15 coefficients d'élasticité.

Les quatre expériences de base que l'on peut effectuer sur une portion d'un câble, sont ceux relatives aux sollicitations de:

- traction-compression ( $N \neq 0$  et  $T = C = M = 0$ )
- torsion ( $C \neq 0$  et  $N = T = M = 0$ )
- flexion pure ( $M \neq 0$  et  $T = N = C = 0$ )
- flexion simple ( $T \neq 0$ ,  $M \neq 0$  et  $N = C = 0$ )

Il est bien évident que l'on ne peut pas appliquer le principe de superposition pour étudier l'effet d'une sollicitation combinée de deux ou plusieurs sollicitations simples citées précédemment. Le nombre d'expériences indépendantes est donc:

$C_4^1$  (sollicitations simples) +  $C_4^2$  (sollicitations combinées 2 à 2) +  $C_4^3$  (sollicitations combinées 3 - 3) +  $C_4^4$  (les quatre à la fois) =  $2^4 - 1 = 15$  expériences indépendantes.

Donc les 15 coefficients d'élasticité non linéaire peuvent, très bien être déterminés expérimentalement.

**Correspondance binivoque entre  $\theta^c$  et  $e^c$** 

La relation  $\theta = \mathcal{F}e + \mathcal{A}(e^2)e$  ne permet pas de calculer directement  $e$  en fonction de  $\theta$ . Pourtant la stricte convexité de  $\psi$  entraîne que la correspondance, à  $T$  fixée, entre  $\theta^c$  et  $e^c$  est binivoque.

Soit  $\psi^*$  la transformé de **Legendre Fenchel** de la fonction  $\psi$ :

$$\psi^* = [\theta|e] - \psi$$

<sup>3</sup>

Il vient alors par dérivation par rapport au temps

$$\frac{d\psi^*}{dt} = [\theta|\dot{e}] + [\dot{\theta}|e] - \dot{\psi}$$

d'où

$$\psi^* = s\dot{T} + [e|\dot{\theta}]$$

En supposant maintenant que les variables  $T$  et  $\theta$  sont indépendantes et que  $\psi^*$  ne dépend que de  $T$  et  $\theta$  (hypothèses d'élasticité), on trouve une autre formulation de la loi de comportement (formulation conjuguée):

$$e^c = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta^c}$$

d'où par analogie

$$e^c = \mathcal{F}^*\theta^c + \mathcal{A}^*(\theta^{c2})\theta^c$$

et

$$\psi^*(\theta) = \frac{1}{2}[\mathcal{F}^*\theta|\theta] + \frac{1}{4}[\mathcal{A}^*(\theta^2)\theta|\theta]$$

**6.5 Un modèle de loi de comportement linéaire**

**Définition 47 (Projection d'un torseur)** La projection d'un distributeur  $\mathbf{x}$  sur une section plane  $\mathcal{S}$  (ou un plan) de normale  $\vec{n}$  est le champ equiprojectif

$$\mathbf{x}_t : m \mapsto -\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \mathbf{x}(m)) \text{ de domaine } \mathcal{S} \quad (6.2)$$

On définit aussi la projection sur la normale  $\vec{n}$  :

$$\mathbf{x}_n : m \mapsto (\vec{n} \cdot \mathbf{x}(m))\vec{n} \text{ de domaine } \mathcal{S} \quad (6.3)$$

<sup>3</sup>On a ici l'égalité plutôt que le sup car  $e$  et  $\theta$  sont liés par la loi de comportement

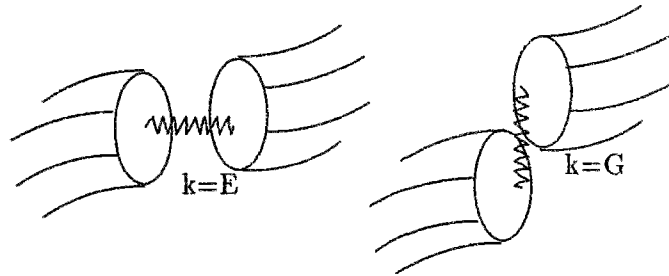


Figure 6.2: Loi de comportement simplifiée

cette définition est tout à fait naturelle puisque la valeur en un point donné de la projection d'un tenseur est la projection usuelle de sa valeur en ce point.

Soit  $b = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{n})$  une base orthonormée directe liée à la section  $S$  et soit  $\mathcal{B}$  la base de  $\mathfrak{D}$  relative à  $b$ , alors les deux endomorphismes de  $\mathfrak{D}$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_t \text{ et } \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_n$$

peuvent être représentés dans  $\mathcal{B}$  par les deux matrices respectivement :

$$P_t = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Le cotenseur des contraintes  $\pi$  est le champ équivariant défini par  $\pi = M^{-1}\theta$ , où  $\theta$  est le tenseur des contraintes défini précédemment.  $\pi(m)$  schématise la force exercée sur une section transversale par la section voisine en le point  $m$  de cette section.

Dans le cas d'un matériau homogène caractérisé par son module d'Young  $E$  et son module transversal  $G$ . On postule le modèle de loi de comportement linéaire suivant :

1. La force normale  $\pi_n$  est proportionnelle à la déformation normale  $\mathbf{e}_n$ , avec, comme coefficient de proportionnalité, le module de Young  $E$
2. La force tangentielle  $\pi_t$  est proportionnelle à la déformation tangentielle  $\mathbf{e}_t$ , avec, comme coefficient de proportionnalité, le module de cisaillement  $G$

la loi de comportement s'écrit :

$$\pi_n = E\mathbf{e}_n \text{ et } \pi_t = G\mathbf{e}_t \quad (6.5)$$

où  $\pi_n$  et  $\pi_t$  (respectivement  $\mathbf{e}_n$  et  $\mathbf{e}_t$ ) sont les deux torseurs projections normale et tangentielle de  $\pi$  (respectivement  $\mathbf{e}$ ) à la section transversale.

On a  $\pi = \pi_t + \pi_n = G\mathbf{e}_t + E\mathbf{e}_n = (GP_t + EP_n)\mathbf{e}$ . Soit matriciellement :

$$\pi = \begin{pmatrix} G & & & & & \\ & E & & & & \\ & & E & & & \\ & & & E & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \end{pmatrix} \mathbf{e} \quad (6.6)$$

On retrouve la loi classique en terme de torseur en multipliant les deux membres de (6.6) par la matrice de moment  $M$  :

$$\begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ C \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & ES & & & \\ & O & & GS & & \\ GJ & & & & GS & \\ & EI_y & & & & \\ & & EI_z & & O & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dw_x}{ds} \\ \frac{dw_y}{ds} \\ \frac{dw_z}{ds} \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

où  $J$ ,  $I_y$  et  $I_z$  désignent les inerties de torsion et de flexion transversales,  $N$ ,  $T_y$  et  $T_z$  les efforts normaux et tranchants et  $\mathcal{M}_y$ ,  $\mathcal{M}_z$  et  $C$  les moments fléchissants et de torsion.

## Partie III

# Analyse numérique des milieux curvilignes



## Chapitre 7

# Résolution numérique des équations des câbles

*Une équation ne constitue ni le départ ni l'aboutissement d'un problème de physique. L'essentiel de la physique est dans la mise en équation correcte et dans l'interprétation des résultats qui nécessitent bien souvent une résolution numérique .*

### 7.1 Introduction

Les équations générales de la dynamique des câbles ont été obtenues, comme nous l'avons vu, par un formalisme lié à la structure du groupe de lie, et plus généralement à des structures de la géométrie différentielle contemporaine. Cette méthode est tout à fait compatible (nous allons le constater) avec le traitement par ordinateur, bien qu'elle soit fondée sur des notions mathématiques assez abstraites.

Ces équations sont quasiment impossibles à développer à la main quel que soit le système de coordonnées choisi (ce que nous montre le langage de calcul formel `macsyma`). Il est également très difficile de les traiter numériquement sous cette forme développée, d'où la nécessité d'élaborer un algorithme numérique compatible avec les notions mathématiques citées plus haut, et qui traite directement l'équation intrinsèque.

On admettra, dans ce chapitre, que le problème variationnel associé admet au moins une solution que l'on cherchera à approcher.

### 7.2 Discrétisation en temps: méthode de différences finies

#### 7.2.1 Le problème variationnel

Considérons le problème suivant : un câble homogène de section constante de longueur  $l$ , placé entre deux extrémités, l'une étant à l'origine  $O$  et l'autre au point d'abscisse  $l$ .



Le câble est soumis, sans restreindre la généralité, à son propre poids  $T_{ext}^e(s, t) = \rho \mathbf{g}$  où  $\mathbf{g}$  est un glisseur défini par  $\mathbf{g}(m) = \vec{g} \wedge \overrightarrow{\partial m}$ ,  $\vec{g}$  désigne l'intensité de pesanteur. On suppose connue la configuration du câble à l'instant initial  $t = 0$ , ainsi que la distribution des vitesses initiales le long du câble. Autrement dit, on connaît les fonctions  $D(s, 0) = D_0(s)$ ,  $\mathbf{v}(s, 0) = \mathbf{v}_0(s)$  pour  $0 \leq s \leq 1$ . Enfin, on doit avoir

$$D(0, t) = \mathbf{1}_{\mathbb{D}} \quad \forall t \in [0, T] \quad (7.1)$$

$$D(l, t) = \exp \alpha(t) \quad \alpha(t) \in \mathfrak{d} \quad (7.2)$$

puisque l'on suppose que l'extrémité  $O$  du câble est fixe, et que l'extrémité libre  $A$  est animé d'un mouvement donné par le vecteur-déplacement  $\alpha(t)$ .

On se limite, dans ce chapitre, au cas classique de l'élasticité linéaire : on prendra donc la loi de comportement  $\boldsymbol{\theta} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{e}$  où  $\mathcal{F}$  est la matrice de la loi de comportement (fonction de  $\sigma$  si le câble n'est pas homogène). On est donc amené à trouver une fonction  $\chi(s, t)$  définie pour  $0 \leq s \leq 1$  et  $t \geq 0$  qui soit solution de :

$$\left( H \frac{\partial \mathbf{v}^c}{\partial t} + [\mathbf{v}^c, H \mathbf{v}^c] \right) - \left( \mathcal{F} \frac{\partial \mathbf{e}^c}{\partial \sigma} + [\mathbf{e}^c, \mathcal{F} \mathbf{e}^c] \right) = \mathcal{T}^c \quad (7.3)$$

où

- $D(\sigma, t)$  est l'application de  $[0, l] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{D}$  décrivant le mouvement du câble à partir de sa position d'équilibre supposée connue.
- $\mathbf{v}(\sigma, t) = R(-\chi(\sigma, t)) \frac{\partial \chi(\sigma, t)}{\partial t}$ , représente la vitesse lagrangienne de la section  $S(\sigma, t)$ ,  $\chi(\sigma, t)$  est le vecteur-déplacement, fonction de  $[0, l] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathfrak{d}$  lié au déplacement par  $D = \exp \chi$ .
- $\mathbf{e}^c(\sigma, t) = R(-\chi(\sigma, t)) \frac{\partial \chi(\sigma, t)}{\partial \sigma}$  mesure la déformation lagrangienne de la section  $S(\sigma, t)$ .
- $H$  est l'opérateur de moment dépendant de la géométrie transversale du câble.

La formulation variationnelle s'obtient en multipliant "intérieurement" les deux membres par  $\eta(s)$ , fonction test à valeurs vectorielles dans  $\mathfrak{d}$ , puis on intègre le long du câble, soit :

$$\int_0^L \left[ \left( H \frac{\partial \mathbf{v}^c}{\partial t} + [\mathbf{v}^c, H \mathbf{v}^c] \right) - \left( \mathcal{F} \frac{\partial \mathbf{e}^c}{\partial \sigma} + [\mathbf{e}^c, \mathcal{F} \mathbf{e}^c] \right) \middle| \eta^c \right] ds = \int_0^L [T^c | \eta^c] ds \quad (7.4)$$

En intégrant par parties le terme en  $\partial \mathbf{e}^c / \partial s$  du premier membre l'équation s'écrit compte tenu des conditions aux limites :

$$\int_0^L \left[ \left( H \frac{\partial \mathbf{v}^c}{\partial t} + [\mathbf{v}^c, H \mathbf{v}^c] - [\mathbf{e}^c, \mathcal{F} \mathbf{e}^c] \right) \middle| \eta^c \right] ds + \int_0^L \left[ \mathcal{F} \mathbf{e}^c \middle| \frac{\partial \eta^c}{\partial s} \right] ds = \int_0^L [T^c | \eta^c] ds \quad (7.5)$$

La dernière égalité s'obtient par une intégration par partie et compte tenu des conditions aux limites.

Les vecteurs  $\mathbf{a}^c, \mathbf{v}^c, \mathbf{e}^c, \dots (\in \mathfrak{d})$  dépendent uniquement de la fonction de  $[0, l] \times \mathbb{R}$  dans le groupe  $\mathbb{D} : (s, t) \mapsto D(s, t) = \exp \chi(s, t)$ . L'inconnue du problème est donc la seule fonction de  $[0, l] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathfrak{d} : (s, t) \mapsto \chi(s, t)$ . D'où le problème variationnel :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \chi(s, t) \in V_{s,t} \text{ solution de :} \\ \phi(\chi, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in V_s \end{array} \right.$$

où

- $V_{s,t}$  est l'espace des fonctions de  $[0, L] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathfrak{d}$
- $V_s$  est l'espace des fonctions de  $[0, L]$  dans  $\mathfrak{d}$
- La fonctionnelle  $\phi : V_{s,t} \times V_s \rightarrow \mathbb{R}$  a pour expression :

$$\phi(\chi, \eta) = \int_0^L \left( \left[ H \frac{\partial \mathbf{v}^c}{\partial t} + [\mathbf{v}^c, H \mathbf{v}^c] - [\mathbf{e}^c, \mathcal{F} \mathbf{e}^c] - T^c \right] \eta^c + \left[ \mathcal{F} \mathbf{e}^c \left| \frac{\partial \eta^c}{\partial s} \right. \right] \right) ds \quad (7.6)$$

### 7.2.2 Approximation par différences finies

La fonctionnelle  $\phi(\cdot, \cdot)$  n'est pas bilinéaire : c'est la raison pour laquelle on admettra l'existence d'une solution. Pour résoudre numériquement ce problème variationnel, on subdivise l'intervalle  $[0, T] \ni t$ , par des points  $(t_n)_{n=0, N}$ , en général équidistants :  $t_n = n \Delta t$  où  $\Delta t = \frac{T}{N}$  avec  $N \geq 1$  et  $n = 0, \dots, N$ . Puis on cherche à approcher:  $D(s, t_n), \mathbf{v}(s, t_n), \mathbf{a}(s, t_n), \dots$  par  $D_n(s), \mathbf{v}_n(s), \mathbf{a}_n(s), \dots$

On choisit une méthode itérative à un pas c.à.d on calcule  $\chi_{n+1}$  à partir de  $\chi_n$ . Pour déterminer le schéma d'une telle méthode, nous avons besoin du lemme :

**Lemme 6** On a  $\forall \beta \in [0, \frac{1}{2}]$ :

$$AdD(t+h) = AdD(t) \exp(h \operatorname{ad} \mathbf{v}(t) + h^2 \{(1/2 - \beta) \operatorname{ad} \mathbf{a}(t) + \dots \dots \beta \operatorname{ad} \mathbf{a}(t+h)\}) + O(h^3)$$

où  $\exp$  est l'application exponentielle de l'algèbre  $\mathcal{L}(\mathfrak{d}) (\simeq$  à une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_6(\mathbb{R}))$ .

**Remarque 4** Les grandeurs vectorielles  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{a}$  sont en description lagrangienne ( $\mathbf{v} = \mathbf{v}^c$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^c$ ) alors que pour les grandeurs euleuriennes, on a:

$$AdD(t+h) = \exp(h \operatorname{ad} \mathbf{v}^e(t) + h^2 \{(1/2 - \beta) \operatorname{ad} \mathbf{a}^e(t) + \dots \dots \beta \operatorname{ad} \mathbf{a}^e(t+h)\}) AdD(t) + O(h^3)$$

Démonstration: On pose:

$$\tilde{D}(h) = AdD(t) \exp(h \operatorname{ad} \mathbf{v}(t) + h^2 \{(1/2 - \beta) \operatorname{ada}(t) + \beta \operatorname{ad} \mathbf{a}(t+h)\}) \quad (7.7)$$

On a le développement de Taylor:

$$AdD(t+h) = AdD(t) + h \frac{d}{dt} AdD(t) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} AdD(t) + O(h^3)$$

Il suffit donc de montrer que  $AdD(t+h)$  et  $\tilde{D}(h)$  ont le même développement de Taylor jusqu'à l'ordre 3, soit :

$$\tilde{D}(0) = AdD(t) \quad (7.8)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial h} \tilde{D}(h) \right]_{h=0} = \frac{d}{dt} AdD(t) \quad (7.9)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial h^2} \tilde{D}(h) \right]_{h=0} = \frac{d^2}{dt^2} AdD(t) \quad (7.10)$$

1. La première égalité est évidente: il suffit de faire  $t = 0$  dans (7.7).

2. On a :

$$\frac{d}{dt} AdD(t) = Ad^T D(t) \frac{dD(t)}{dt} = AdD \operatorname{ad} \left( \frac{dD(t)}{dt} \right) = AdD \operatorname{ad} \mathbf{v}(t)$$

d'autre part:

$$\frac{\partial}{\partial h} \tilde{D}(h) = AdD(t) (\operatorname{ad} \mathbf{v}(t) + 2h(\dots)) \exp(h(\dots))$$

d'où la deuxième égalité, en faisant  $h = 0$ .

3. on procède de la même façon qu'en 2.

Ce dernier lemme nous conduit, naturellement, en négligeant le terme en  $h^3$  et en remplaçant  $D(t_n)$  par  $D_n$  et  $\chi(t_n)$  par  $\chi_n$ , etc..., à définir le problème discret associé au problème aux limites considéré, de la façon suivante :

En vertu de l'injectivité de la représentation adjointe  $Ad$  (voir corollaire 3 du chapitre 2) :

$$D_{n+1} = D_n \exp(h \mathbf{v}_n + h^2 \{(1/2 - \beta) \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{a}_{n+1}\}) \quad (7.11)$$

Si on définit  $u_n$ , le champ de déplacement de la configuration du câble de l'instant  $t_n$  à celle de l'instant  $t_{n+1}$  par:

$$D_{n+1} = D_n \exp u_n \quad (7.12)$$

on aura le schéma :

$$(*) \begin{cases} \exp \chi_{n+1} & = & \exp \chi_n \exp u_n \\ u_n & = & h\mathbf{v}_n + h^2 [(1/2 - \beta)\mathbf{a}_n + \beta\mathbf{a}_{n+1}] \\ \mathbf{v}_{n+1} & = & \mathbf{v}_n + h [(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}] \end{cases}$$

(la dernière égalité peut être obtenue à partir de la formule de Taylor également)

À l'instant  $t_{n+1}$ , on associe le problème discrétisé:

$$(\mathcal{P}_{n+1}) : \begin{cases} \text{Trouver } \chi_{n+1} \in V_s \text{ solution de:} \\ \phi(\chi_{n+1}, \eta) = 0 & \forall \eta \in V_s \end{cases}$$

$\chi_n$  étant connu, on fait le changement d'inconnue, guidé par le schéma (\*),

$$\exp \chi_{n+1} = \exp \chi_n \exp u_n$$

le problème est alors:

$$(\mathcal{P}_n) : \begin{cases} \text{Trouver } u_n \in V_s \text{ solution de:} \\ \Phi(u_n, \eta) = 0 & \forall \eta \in V_s \end{cases}$$

### 7.2.3 Résolution du problème non-linéaire

On résoud ce problème non linéaire par la méthode de Newton-Raphson<sup>1</sup> qui consiste à construire une suite convergente vers la solution  $u_n$ :

$$u_n^{(0)} = u_{n-1}$$

$$u_n^{(i+1)} = u_n^{(i)} + \delta u_n^{(i)}$$

où  $\delta u_n^{(i)}$  est le vecteur solution de l'équation linéarisée :

$$\Phi'(u_n^{(i)}, \eta) \cdot \delta u_n^{(i)} = -\Phi(u_n^{(i)}, \eta) \quad (7.13)$$

**Proposition 22** Soit  $(D_{n+1}^{(i)})_{i \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{D}$  définie à partir de la suite  $(u_n^{(i)})_{i \geq 0}$  par  $D_{n+1}^{(i)} = D_n \exp u_n^{(i)}$ . Si on désigne par  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$  le vecteur "déplacement" de la configuration de l'étape  $(i)$  à celle de l'étape  $(i+1)$  (de la méthode de Newton) c.à.d.  $D_{n+1}^{(i+1)} = D_{n+1}^{(i)} \exp \Delta u_{n+1}^{(i)}$ , on aura:

$$\delta u_n^{(i)} = T(-u_n^{(i)}) \Delta u_{n+1}^{(i)} \quad (7.14)$$

Démonstration:

On définit la fonction  $\varepsilon \mapsto u_n^{(i)}(\varepsilon)$  par:

$$\exp u_n^{(i)}(\varepsilon) = \exp u_n^{(i)} \exp \varepsilon \Delta u_{n+1}^{(i)} \quad (7.15)$$

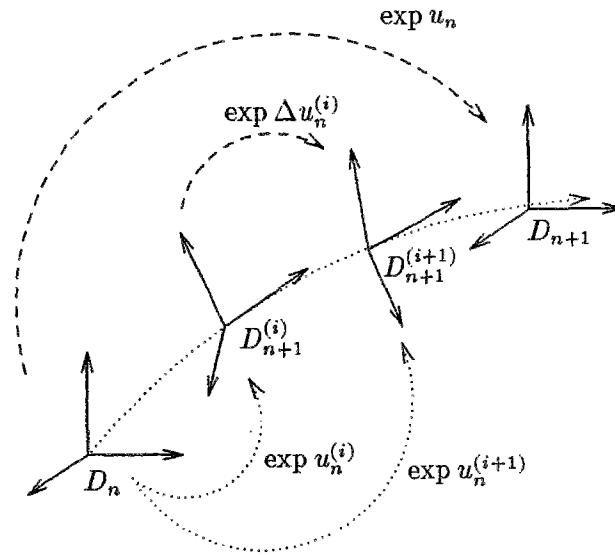
<sup>1</sup>La méthode de Newton: on se donne une application  $f : \Omega \subset E \rightarrow F$  où  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels normés. On suppose que  $f$  admet, au moins, un zéro,  $a \in \Omega$ , et on cherche une suite d'approximation d'un tel élément  $a$ , en s'inspirant du cas particulier bien connu:  $E = F = \mathbb{R}$ ;

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitraire et chaque point } x_{k+1} \text{ étant l'intersection} \\ \text{de l'axe avec la tangente en } x_k : & x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

Ce cas particulier suggère la construction suivante:

$$x_0 \in \Omega \text{ arbitraire et } x_{k+1} = x_k - \{f'(x_k)\}^{-1} f(x_k) \quad \text{pour } k \geq 0$$

Ce qui suppose que tous les points  $x_k$  restent dans  $\Omega$ , que l'application  $f$  soit dérivable dans  $\Omega$ , et que enfin la dérivée  $f'(x)$  soit une bijection de  $E$  dans  $F$  en tout point  $x \in \Omega$ . La principale difficulté réside dans le "bon" choix d'un vecteur initial  $x_0$ , qui doit être suffisamment proche d'un zéro de  $f$ , alors qu'en principe on ignore où se trouvent les zéros!



Le chemin  $\varepsilon \mapsto \exp u_n^{(i)}(\varepsilon)$  est un géodésique passant par les “points”  $\exp u_n^{(i)}$  et  $\exp u_n^{(i+1)}$  obtenus en faisant, respectivement  $\varepsilon = 0$  et  $\varepsilon = 1$  dans (7.15).

Faisons un développement de Taylor de la fonction  $u_n^{(i),\varepsilon}$  :

$$u_n^{(i)}(\varepsilon) = u_n^{(i)} + \varepsilon \left[ \frac{\partial u_n^{(i)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 u_n^{(i)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right]_{\varepsilon=0} + \dots \quad (7.16)$$

Pour calculer les coefficients de (7.16), nous allons dériver par rapport à  $\varepsilon$  l’expression (7.15):

$$\exp^T u_n^{(i)}(\varepsilon) \cdot \left[ \frac{\partial u_n^{(i)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] = \gamma_{\exp u_n^{(i)}}^T \cdot \exp^T \varepsilon \Delta u_{n+1}^{(i)} \cdot \Delta u_{n+1}^{(i)}$$

en tenant compte de  $\gamma_{\exp u_n^{(i)}(\varepsilon)}^T = \gamma_{\exp u_n^{(i)}}^T \cdot \gamma_{\exp \varepsilon \Delta u_{n+1}^{(i)}}^T$  :

$$R(-u_n^{(i)}(\varepsilon)) \cdot \frac{\partial u_n^{(i)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = R(-\varepsilon \Delta u_{n+1}^{(i)}) \cdot \Delta u_{n+1}^{(i)} \simeq \Delta u_{n+1}^{(i)}$$

Soit

$$\frac{\partial u_n^{(i)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \simeq T(-u_n^{(i)}(\varepsilon)) \cdot \Delta u_{n+1}^{(i)} \quad (7.17)$$

où “ $\simeq$ ” signifie que l’égalité en question a lieu à  $\|\Delta u_{n+1}^{(i)}\|^2$  près. Le premier coefficient de (7.16) s’obtient en faisant  $\varepsilon = 0$  dans (7.17). D’autre part si on dérive (7.17) on aura

$$\frac{\partial^2 u_n^{(i)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \simeq -T'(-u_n^{(i)}(\varepsilon)) \cdot \frac{\partial u_n^{(i)}}{\partial \varepsilon} \cdot \Delta u_{n+1}^{(i)}$$

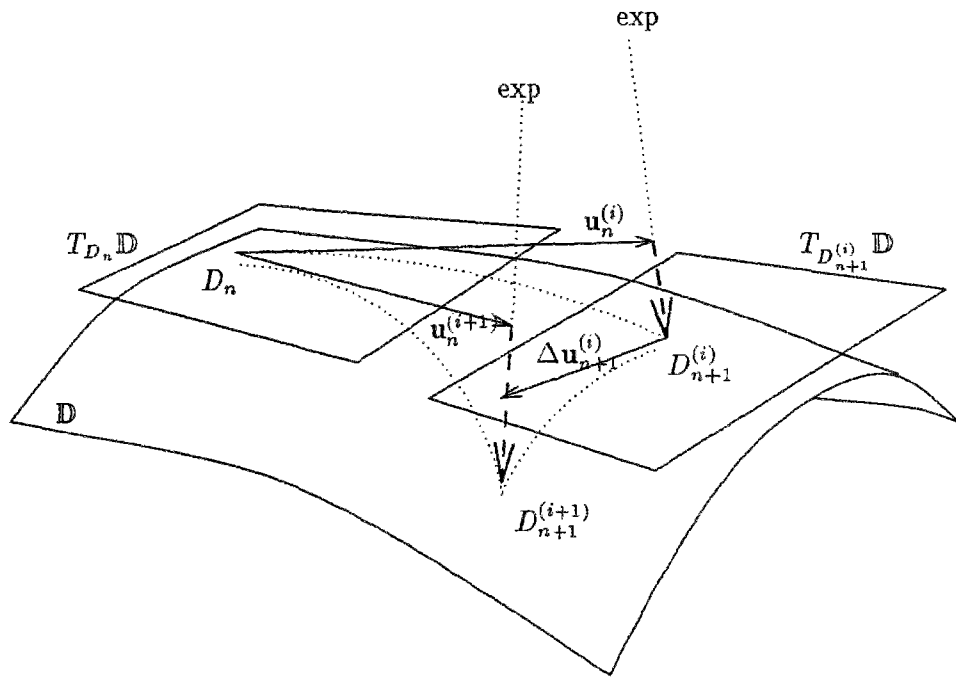


Figure 7.1: **Interprétation géométrique** :  $u_n^{(i)}$  et  $u_n^{(i+1)}$  sont deux vecteurs de  $T_{D_n} \mathbb{D}$  qui assurent le passage, moyennant l'application exponentielle, de  $D_n$  à  $D_{n+1}^{(i)}$  et  $D_{n+1}^{(i+1)}$  respectivement.  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$  est un vecteur de l'espace tangent  $T_{D_{n+1}^{(i)}} \mathbb{D}$  faisant passer de  $D_{n+1}^{(i)}$  à  $D_{n+1}^{(i+1)}$ . Le théorème précédent exprime la relation entre la différence "linéaire"  $\delta u_{n+1}^{(i+1)} = u_{n+1}^{(i+1)} - u_{n+1}^{(i)}$  et la différence "au sens des vecteurs- déplacements"  $\Delta u_{n+1}^{(i)} = A(u_{n+1}^{(i+1)}, -u_{n+1}^{(i)})$  où  $A(\cdot, \cdot)$  est l'application de la formule de Campbell-Hausdorff,  $u_{n+1}^{(i+1)}$ ,  $u_{n+1}^{(i)}$  et  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$  sont les composantes lagrangiennes de  $u_{n+1}^{(i+1)}$ ,  $u_{n+1}^{(i)}$  et  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$ .

et en faisant  $\varepsilon = 0$  dans cette dernière égalité on obtient la nullité du deuxième coefficient. De la même façon, on trouve :  $\left[ \frac{\partial^n u_n^{(i)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^n} \right]_{\varepsilon=0} = 0$  pour  $n \geq 0$ , en dérivant l'égalité (7.17) jusqu'à l'ordre  $n$  puis en annulant  $\varepsilon$ . On utilisera pour cela

$$\frac{d}{d\varepsilon} ad^k u = \sum_{l=0}^{k-1} ad^{k-l-1} u \cdot ad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot ad^l u$$

Finalement (7.16) s'écrit

$$u_n^{(i)}(\varepsilon) = u_n^{(i)} + \varepsilon T(-u_n^{(i)}) \cdot \Delta u_{n+1}^{(i)} \quad (7.18)$$

D'où le résultat en faisant, enfin,  $\varepsilon = 1$  dans (7.18).  $\square$

**Remarque 5** On peut démontrer la proposition 22 d'une autre façon en utilisant la formule de C.H. En effet, le sous-algèbre de Lie engendrée par  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$  est un idéal à  $\|\Delta u_{n+1}^{(i)}\|^2$  près. D'autre part  $u_n^{(i)}$ , pour tout  $i$  est un vecteur à faible angle de rotation puisqu'il définit le déplacement de la configuration de l'étape  $n$  à l'étape  $n+1$  et que la section courante du câble "n'a pas le temps de faire une grande rotation entre ces deux instants, donc  $\|\omega_{u_n^{(i)}}\| < 0$  est largement vérifiée. Les hypothèses du théorème 17 du chapitre 3 étant vérifiées (au deuxième ordre près en  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$ ) alors:

$$\exp u_n^{(i+1)} = \exp u_n^{(i)} \exp \Delta u_{n+1}^{(i)} \implies u_n^{(i+1)} = H(u_n^{(i)}, \Delta u_{n+1}^{(i)}) = u_n^{(i)} + T(-u_n^{(i)}) \Delta u_{n+1}^{(i)}$$

d'où le résultat.

On rappelle que l'inconnue dans cette méthode est  $u_n^{(i)}$ , d'où la possibilité de calculer les différentes grandeurs qui interviennent dans l'équation linéarisée en fonction de  $u_n^{(i)}$ :

**Lemme 7** on a:

$$\begin{aligned} \delta Ad D_{n+1}^{(i)} &= Ad D_{n+1}^{(i)} \cdot ad \Delta u_{n+1}^{(i)} \\ \delta Ad^{-1} D_{n+1}^{(i)} &= -ad \Delta u_{n+1}^{(i)} \cdot Ad^{-1} D_{n+1}^{(i)} \\ \delta v_{n+1}^{(i)} &= \frac{\gamma}{h\beta} T(-u_n^{(i)}) \Delta u_{n+1}^{(i)} \\ \delta a_{n+1}^{(i)} &= \frac{1}{h^2\beta} T(-u_n^{(i)}) \Delta u_{n+1}^{(i)} \\ \delta e_{n+1}^{(i)} &= [e_{n+1}^{(i)}, \Delta u_{n+1}^{(i)}] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Delta u_{n+1}^{(i)}) \end{aligned}$$

Démonstration:



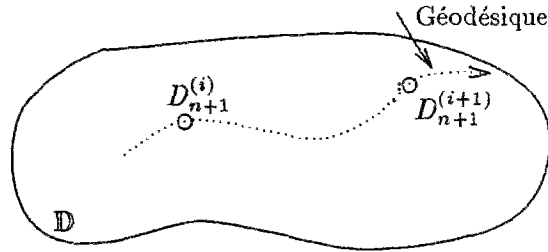


Figure 7.2:

1. on définit la fonction-perturbation:  $\varepsilon \mapsto D_{n+1}^{(i)}(\varepsilon)$  par

$$D_{n+1}^{(i)}(\varepsilon) = D_{n+1} \exp \varepsilon \Delta u_{n+1}^{(i)} \quad (7.19)$$

de façon à avoir :

$$\begin{aligned} D_{n+1}^{(i)}(0) &= D_{n+1}^{(i)} \\ D_{n+1}^{(i)}(1) &= D_{n+1}^{(i+1)} \end{aligned}$$

Autrement dit  $\varepsilon \mapsto D_{n+1}^{(i)}(\varepsilon)$  est un géodésique passant par  $D_{n+1}^{(i)}$  et  $D_{n+1}^{(i+1)}$ .

On applique la représentation adjointe  $Ad$  aux deux membres de (7.19):

$$Ad D_{n+1}^{(i)}(\varepsilon) = Ad D_{n+1}^{(i)} \exp \varepsilon ad \Delta u_{n+1}^{(i)}$$

puis on développe  $\exp \varepsilon ad \Delta u_{n+1}^{(i)}$  à l'ordre 2 en  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} Ad D_{n+1}^{(i)}(\varepsilon) &= Ad D_{n+1}^{(i)} \left\{ \mathbf{1} + \varepsilon ad \Delta u_{n+1}^{(i)} + O(\|\Delta u_{n+1}^{(i)}\|^2) \right\} \\ &= Ad D_{n+1}^{(i)} + \varepsilon Ad D_{n+1}^{(i)} \cdot ad \Delta u_{n+1}^{(i)} + O(\|\Delta u_{n+1}^{(i)}\|^2) \end{aligned}$$

D'où la première égalité en faisant  $\varepsilon = 1$ .

2. la deuxième égalité s'obtient à partir de la première, en dérivant l'égalité  $Ad D \cdot Ad^{-1} D = \mathbf{1}_{\mathcal{L}(\mathfrak{d})}$  :

$$\delta Ad D \cdot Ad^{-1} D + Ad D \cdot \delta Ad^{-1} D = 0$$

$$\delta Ad^{-1} D = -Ad^{-1} D \cdot \delta Ad D \cdot Ad^{-1} D$$

puis on obtient rapidement le résultat en remplaçant  $\delta Ad D$  par son expression.

3. à l'étape  $n + 1$  et à l'itération  $i$  de la méthode de Newton, le schéma (\*) dévient:

$$(*)^{(i)} \begin{cases} \exp \chi_{n+1}^{(i)} & = & \exp \chi_n \exp u_n^{(i)} \\ u_n^{(i)} & = & h \mathbf{v}_n + h^2 \left[ (1/2 - \beta) \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \right] \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(i)} & = & \mathbf{v}_n + h \left[ (1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \right] \end{cases}$$

Remarquons que l'indice supérieur  $(i)$  a été rajouté uniquement pour les variables calculés à l'étape  $n + 1$  Grâce à ce schéma, on a

$$\delta u_n^{(i)} = u_n^{(i+1)} - u_n^{(i)} = h^2 \beta (\mathbf{a}_n^{(i+1)} - \mathbf{a}_n^{(i)}) = h^2 \beta \delta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$$

de même

$$\delta \mathbf{v}_n^{(i)} = h \gamma \delta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$$

d'où la possibilité d'exprimer  $\delta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$  et  $\delta \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}$  en fonction de  $\delta u_n^{(i)}$  ou  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} &= \frac{1}{h^2 \beta} \delta u_n^{(i)} = \frac{1}{h^2 \beta} T(-u_n^{(i)}) \Delta u_{n+1}^{(i)} \\ \delta \mathbf{v}_{n+1}^{(i)} &= \frac{\gamma}{h \beta} \delta u_n^{(i)} = \frac{\gamma}{h \beta} T(-u_n^{(i)}) \Delta u_{n+1}^{(i)} \end{aligned}$$

4. Pour exprimer  $\delta \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}$  en fonction de  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$ , on dérive par rapport à  $\sigma$  l'expression  $D_{n+1}^{(i+1)} = D_{n+1}^{(i)} \exp \Delta u_{n+1}^{(i)}$  :

$$\frac{\partial D_{n+1}^{(i+1)}}{\partial \sigma} = \delta_{\exp \Delta u_{n+1}^{(i)}}^T \cdot \frac{\partial D_{n+1}^{(i)}}{\partial \sigma} + \gamma_{D_{n+1}^{(i)}}^T \exp^T \Delta u_{n+1}^{(i)} \cdot \frac{\partial (\Delta u_{n+1}^{(i)})}{\partial \sigma}$$

Ce qui implique, en multipliant à gauche les deux membre par  $\gamma_{D_{n+1}^{(i+1)}}^T = \gamma_{\Delta u_{n+1}^{(i)}}^T \cdot \gamma \exp^{-1T}$  :

$$\mathbf{e}_{n+1}^{(i+1)} = \underbrace{A d^{-1} \exp(\Delta u_{n+1}^{(i)}) \cdot \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}}_{\simeq \mathbf{e}_{n+1}^{(i)} - [\Delta u_{n+1}^{(i)}, \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}]} + \underbrace{R(-\Delta u_{n+1}^{(i)}) \cdot \frac{\partial (\Delta u_{n+1}^{(i)})}{\partial \sigma}}_{\simeq \frac{\partial (\Delta u_{n+1}^{(i)})}{\partial \sigma}}$$

pour  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$  assez petit. D'où  $\delta \mathbf{e}_{n+1}^{(i)} \simeq -[\Delta u_{n+1}^{(i)}, \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}] + \frac{\partial (\Delta u_{n+1}^{(i)})}{\partial \sigma}$   $\square$ .

La fonctionnelle  $\Phi(\cdot, \cdot)$  se dérive aisément puisqu'elle est composée d'applications linéaires ou bilinéaires, et grâce à la proposition 22 et en utilisant le lemme 7, l'équation linéaire s'exprimera assez facilement en fonction de  $\Delta u_{n+1}^{(i)}$ :

### Equation linéarisée

A chaque itération de la méthode de Newton-Raphson le problème est : trouver le vecteur  $\delta u_n^{(i)}(s)$  solution de l'équation linéarisée (7.13), ou bien (ce qui revient au même, puisque  $\Delta u_{n+1}^{(i)}(s)$  et  $\delta u_n^{(i)}(s)$  sont liés par (7.14)) :

trouver  $\Delta u_{n+1}^{(i)}(s) \in V_s$  solution de:

$$\mathcal{A}(\Delta u_{n+1}^{(i)}, \eta) = \mathcal{L}(\eta) \quad \forall \eta \in V$$

où  $\mathcal{A}(\Delta u_{n+1}^{(i)}, \eta) =$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[ \frac{1}{h^2 \beta} H T_n^{(i)} \Delta u_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{h \beta} [T_n^{(i)} \Delta u_{n+1}^{(i)}, H \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}] + \frac{\gamma}{h \beta} [\mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, H T_n^{(i)} \Delta u_{n+1}^{(i)}] - \delta T_{n+1}^{(i)} \Big| \eta \right] ds + \\ & \int_0^L \left[ [ [\Delta u_{n+1}^{(i)}, \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}], \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}] + [\mathbf{e}_{n+1}^{(i)}, \mathcal{F} [\Delta u_{n+1}^{(i)}, \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}]] - \left[ \frac{\partial \Delta u_{n+1}^{(i)}}{\partial s}, \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1}^{(i)} \right] - \left[ \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}, \mathcal{F} \frac{\partial \Delta u_{n+1}^{(i)}}{\partial s} \right] \Big| \eta \right] ds \\ & + \int_0^L \left[ \left[ -\mathcal{F} [(\Delta u_{n+1}^{(i)})^c, \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}] + \mathcal{F} \frac{\partial \Delta u_{n+1}^{(i)}}{\partial \sigma} \right] \Big| \frac{\partial \eta^e(s)}{\partial \sigma} \right] ds \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}(\eta) = - \int_0^L \left\{ [H(\mathbf{a}_{n+1}^{(i)}) + [\mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, H(\mathbf{v}_{n+1}^{(i)})] - [\mathbf{e}_{n+1}^{(i)}, \mathcal{F} \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}] - T_{n+1}^e \Big| \eta^e] + \left[ \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1}^{(i)} \Big| \frac{\partial \eta(s)}{\partial \sigma} \right] \right\} ds$$

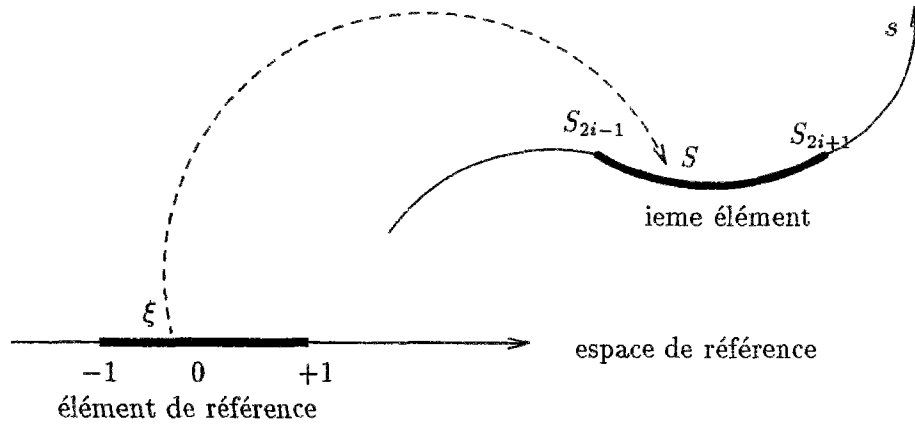
## 7.3 Discrétisation en espace: méthode d'éléments finis

### 7.3.1 Discrétisation d'un milieu curviligne

Nous choisissons un ensemble de  $n$  points appelés nœuds géométriques sur le domaine curviligne  $OL$ , puis nous remplaçons  $\widehat{OL}$  par un ensemble d'éléments  $K_l$  formé d'un nombre réduit de nœuds consécutifs, chaque élément devant être défini analytiquement, de manière unique, en fonction des abscisses curvilignes,  $S_i = \widehat{On}_i$ , des nœuds géométriques qui appartiennent à cet élément. La partition du domaine  $V$  en éléments  $K_l$  doit respecter les deux règles suivantes : l'intersection de deux éléments non disjoints est réduite à un point, et la réunion de tous les éléments  $V^e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné  $V$ .

Un élément de référence  $K^r$  est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel  $K_l$  par une transformation géométrique  $\tau^l$  qui

dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des abscisses curvilignes des nœuds géométriques qui le définissent. Il y a donc une transformation  $\tau^l$  différente

Figure 7.3: La transformation  $\tau^l$ 

pour chaque élément réel:

$$\tau^l : \xi \longmapsto s^l = s^l(\xi, S_i, S_{i+1}, \dots)$$

où  $\{S_i, S_{i+1}, \dots\}$  sont les noeuds géométrique du  $i^{\text{ème}}$  élément. Parmi toutes les transformations géométriques vérifiant les conditions précédentes, choisissons celles qui sont linéaires par rapport aux points  $S_i$ :

$$s(\xi) = N_1(\xi)S_i + N_2(\xi)S_{i+1} + N_3(\xi)S_{i+2} + \dots$$

On numérote les éléments séquentiellement de 1 à  $N_{el}$ , puis on définit chaque élément par les numéros de ses noeuds. Si on choisit un élément de type Lagrange à trois noeuds, on aura pour l'élément  $l$  la correspondance:

numérotation locale	1	2	3
numérotation globale	$2l - 1$	$2l$	$2l + 1$

La transformation qui transforme l'élément de référence  $\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1\}$  en l'élément  $l$  défini par  $\{S_{2l-1}, S_{2l}, S_{2l+1}\}$  est donnée par:

$$s(\xi) = N_1(\xi)S_{2l-1} + N_2(\xi)S_{2l} + N_3(\xi)S_{2l+1}$$

du fait que  $s(-1) = S_{2l-1}$ ,  $s(0) = S_{2l}$  et  $s(1) = S_{2l+1}$  les  $N_i$  doivent vérifier pour  $i, j = 1, 2, 3$ :

$$N_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

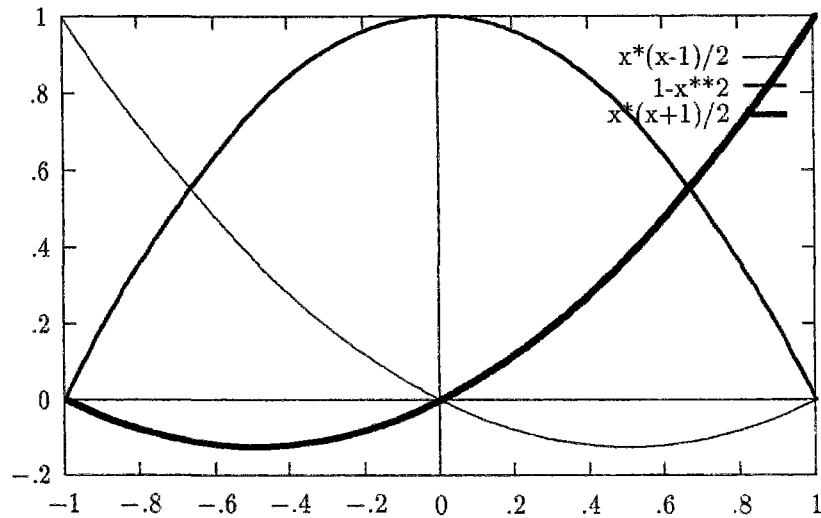


Figure 7.4: Les fonctions élémentaires.

Les polynômes de degrés minimaux qui vérifient ces conditions sont:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

D'où la transformation:

$$s(\xi) = \left[ \frac{S_{2l-1} + S_{2l+1}}{2} - S_{2l} \right] \xi^2 + S_{2l} + \frac{S_{2l+1} - S_{2l-1}}{2} \xi$$

Le plus simple est de prendre  $S_{2l} = \frac{S_{2l-1} + S_{2l+1}}{2}$ , la transformation  $\tau$  sera affine par morceaux (ou par éléments) et on aura donc:

$$s(\xi) = S_{2l} + \xi h_l$$

où  $h_l = S_{2l+1} - S_{2l} = S_{2l} - S_{2l-1} = \frac{1}{2} \text{mes}(K_l)$

### 7.3.2 Approximation

#### Choix d'une fonction approchée

On approche une fonction exacte  $U_{ex}$  par  $U(s)$  (fonction approchée) de manière que  $e(s) = U(s) - U_{ex}(s)$  soit assez petit. Pour construire  $U(s)$ , nous lui imposons de coïncider avec  $U_{ex}(s)$ , sur chaque élément, en les trois points  $S_{2l-1}, S_{2l}, \dots, S_{2l+1}$ , ce qui revient à annuler  $e(s)$  en ces points. Si on pose  $u_i = U_{ex}(S_i)$ , un choix possible de  $U(s)$  est:

$$U(s) = \sum N_i(s)u_i$$

Remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence :

$$U(\xi) = \sum_{V^r} N_i(\xi)u_i$$

Les fonctions  $N_i(\xi)$  sont de classe  $C^2$ , il en est de même pour la fonction approchée  $U(\xi)$  sur chaque élément. Mais entre éléments elle n'est que de classe  $C^0$ .<sup>2</sup>

#### Évaluation de l'erreur

Pour évaluer l'erreur  $e(\xi)$ , on développe en série de Taylor la fonction  $U_{ex}(\xi_i)$  au voisinage du point  $\xi$  jusqu'à l'ordre  $n$ , où  $n$  est le nombre de points d'interpolation. Comme  $U_{ex}(\xi_i) = u_i$ , la fonction approchée  $U(\xi) = \sum N_i u_i$  s'écrit:

$$U(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k!} N_i(\xi_i - \xi)^k \left( \frac{\partial^k U_{ex}}{\partial \xi^k} \right)_{\xi} + \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n N_i(\xi_i - \xi)^n R_i$$

où:

$$R_i = \left( \frac{\partial^n U_{ex}}{\partial \xi^n} \right)_{\xi_i \in [\xi_i, \xi]} = h_i^n \left( \frac{\partial^n U_{ex}}{\partial x^n} \right)_{x(\xi_i^*)}$$

Remarquons que  $\sum_{i=1}^n N_i(\xi_i - \xi)^k = 0$  si  $k \neq 0$  et  $= 1$  si  $k = 0$

L'expression de l'erreur devient:

$$e(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n N_i(\xi_i - \xi)^n \left( \frac{\partial^n U_{ex}}{\partial \xi^n} \right)_{x(\xi_i^*)} . h^n$$

D'où la majoration d'erreur<sup>3</sup>:

$$\|e\|_{\infty} \leq C \left\| \frac{\partial^n U_{ex}}{\partial \xi^n} \right\|_{\infty} . h^n$$

<sup>2</sup>Si nous désirons que  $U(s)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  soient continues sur une frontière commune à deux éléments, il faut que  $U(s)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  dépendent de manière unique des seules variables nodales (c'est-à-dire les  $u_i$ ) associées aux nœuds de cette frontière.

<sup>3</sup>On démontre aussi que:

$$\|e\|_s^2 = \int_{K_l} \left| \frac{\partial^s e(x)}{\partial x^s} \right|^2 dx \leq (2h)^{2(n-s)} \cdot \left\| \frac{\partial^n U_{ex}}{\partial \xi^n} \right\|_{\infty}^2$$

### Intégration numérique

La méthode de Gauss est une méthode d'intégration numérique très utilisée consistant à remplacer l'intégrale d'une fonction par une combinaison linéaire de ses valeurs en des points " d'intégration"  $\xi_i$ .

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r \omega_i f(\xi_i)$$

Les  $r$  coefficients de pondération (ou poids)  $\omega_i$  et les  $r$  abscisses  $\xi_i$  sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre  $m \leq 2r - 1$ .

En général, la fonction  $f$  n'est pas polynomiale, cette méthode est donc approximative; elle est d'autant plus précise que le nombre de points d'intégration est élevé. Mais plutôt que d'utiliser une méthode à nombre de points d'intégration important, on peut découper le domaine d'intégration en plusieurs sous-domaines; on utilise ensuite une méthode simple dans chaque sous-domaine. L'erreur d'intégration de cette méthode est de la forme:

$$e = \frac{2^{2r+1}(r!)^4}{(2r+1)[(2r)!]^3} \frac{d^{2r} f}{d\xi^{2r}} \quad (7.20)$$

Cependant, si on fixe a priori les abscisses  $\xi_i$  des points d'intégration, il reste  $r$  coefficients  $\omega_i$  à déterminer de manière à ce que la méthode intègre exactement un polynôme de degré  $r - 1$ . On choisit  $\xi_i$  régulièrement espacés et symétriques par rapport à  $\xi = 0$  (méthode de Newton-Cotes):

$$\xi_i = 2 \frac{i-1}{r-1} - 1 \quad (7.21)$$

Les poids  $\omega_i$  sont donc les intégrales des fonctions d'interpolation:

$$\omega_i = \int_{-1}^1 N_i(\xi) d\xi \quad (7.22)$$

Les poids correspondant à deux points symétriques par rapport à  $\xi = 0$  sont égaux. L'erreur d'intégration est de la forme:

$$e = \begin{cases} C_r \left( \frac{2}{r-1} \right)^{r+2} \frac{d^{r+1} f}{d\xi^{r+1}} & \text{si } r \text{ est impair} \\ C_r \left( \frac{2}{r-1} \right)^{r+1} \frac{d^r f}{d\xi^r} & \text{si } r \text{ est pair} \end{cases} \quad (7.23)$$

Il est donc préférable d'utiliser un nombre de points impair.

Pour un nombre de points d'intégration donné, la méthode de Gauss est plus précise que celle de Newton-Cotes, mais cette dernière permet parfois de faire coïncider les points d'intégration et les nœuds d'interpolation. L'intégration de termes contenant les  $N_i$  est

alors simplifiée puisque  $N_i$  s'annule en tous les points d'intégration autres que  $\xi_i$ .  
Si on choisit  $r = 3$  on aura:

$$\omega_1 = \omega_3 = \frac{1}{3} \text{ et } \omega_2 = \frac{4}{3}$$

$$\int_{K_l} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(S_{2l-1}) + 4f(S_{2l}) + f(S_{2l+1})]$$

L'erreur d'intégration devient:

$$e = C_2 \frac{d^4 f}{dx^4} . h^4$$

### 7.3.3 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation par éléments finis de la fonction  $\Delta u_{n+1}^{(i)}(s)$  pour discrétiser les formes intégrales  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  et  $\mathcal{L}(\cdot)$ , puis à résoudre le système d'équations ainsi obtenu.

Pour construire une approximation  $\Delta u_{n+1,h}^{(i)}$  de  $\Delta u_{n+1}^{(i)}(s)$  nous allons choisir un sous-espace de  $V_s$  constitué de fonctions-vecteurs continues, et quadratiques par élément, soit:

$$V_h = \{\nu(s)\eta \in V; \nu/K_l \in P_2, 1 \leq l \leq n_{el} \text{ et } \eta \in \mathbb{R}^6\}$$

où  $P_2$  désigne l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à deux. Il est évident que la dimension de  $V_h$  est  $6(2n_{el} + 1)$  et que la suite des fonctions  $\varphi_i \eta \in V_h$  définies par:

$$\varphi_i(S_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i \leq 2n_{el} + 1 \quad \text{et} \quad \eta \in \mathbb{R}^6$$

constitue une base de  $V_h$ .

Le groupe  $\mathbb{D}_s$  des applications de  $[0, L]$  dans  $\mathbb{D}$  peut être "approché" par<sup>4</sup>

$$\mathbb{D}^h = \left\{ \exp \left( \sum_I N_I(s)\eta \right) / 1 \leq I \leq P \text{ et } \eta \in \mathbb{R}^6 \right\} \quad (7.24)$$

c.à.d si on pose  $D(s) = \exp \chi(s)$ , on aura:  $D(s) \simeq \exp \left[ \sum_{I=1}^P N_I \chi_I \right]$ . La méthode d'approximation variationnelle associée conduit à chercher la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{\Delta u_{n+1,h}^{(i)}(s)} = \sum_{I=1}^{2N_{el}+1} N_I(s) \overrightarrow{\Delta u_{n+1,I}^{(i)}}$$

<sup>4</sup>le groupe  $\mathbb{D}$  est approché par l'ensemble  $\mathbb{D}^h$  qui n'est pas un sous-groupe, car il n'est pas stable. En effet,  $\exp \left( \sum N_I \eta_I \right) \cdot \exp \left( \sum N_J \eta_J \right) = \exp z(s)$ , où  $z(s)$  est, d'après la formule de C.H, une série infinie des produits infinis des  $N_I$  donc il n'est certainement pas polynômial en  $s$ , mais par contre  $z(s)$  est un élément de  $V_s$  et il peut être approché par  $z^*(s) = \sum N_K \eta_K$ . On démontre facilement que l'égalité

$$\exp z(s) \simeq \exp z^*(s)$$

a lieu à l'ordre 3 en  $h_s = \frac{1}{2} \text{mes}(K^t)$  ( $h_s$  est le pas de discrétisation en espace), c.à.d que  $\mathbb{D}^h$  est un sous-groupe à  $h_s^3$  près.



où  $\Delta u_{I,n+1}^{(i)} = \Delta u_{n+1}^{(i)}(S_I) \in \mathfrak{D}$ . On a donc  $\forall I = 1, 2, \dots, P$ :  $\mathcal{A}(\Delta u_{n+1}^{(i)}, \eta) =$

$$\begin{aligned} & \sum_{J=1}^P \int_0^L \left( N_I(s) N_J(s) \left\{ \left[ \frac{1}{h^2 \beta} H T_n^{(i)} X_J + \frac{\gamma}{h \beta} [T_n^{(i)} X_J, H \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}] + \frac{\gamma}{h \beta} [\mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, H T_n^{(i)} X_J] - \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots - \delta T_{n+1}^{(i)} + [X_J, \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}], \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}] + [\mathbf{e}_{n+1}^{(i)}, \mathcal{F} [X_J, \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}]] \mid \eta \right\} \right. \\ & \quad \left. - N_I(s) \frac{\partial N_J(s)}{\partial s} \left[ [X_J, \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}] + [\mathbf{e}_{n+1}^{(i)}, \mathcal{F} X_J] \mid \eta \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial N_I(s)}{\partial s} N_J(s) \left[ \mathcal{F} [X_J, \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}] \mid \eta \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial N_I(s)}{\partial s} \frac{\partial N_J(s)}{\partial s} [\mathcal{F} X_J \mid \eta] \right) ds \\ \mathcal{L}(\eta) &= - \sum_{J=1}^P \left( \int_0^L N_I(s) \left\{ [H(\mathbf{a}_{n+1}^{(i)}) + [\mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, H(\mathbf{v}_{n+1}^{(i)})]] - [\mathbf{e}_{n+1}^{(i)}, \mathcal{F} \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}] - T_{n+1}^e \mid \eta^e \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial N_I(s)}{\partial s} [\mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1}^{(i)} \mid \eta] \right) ds \end{aligned}$$

L'expression obtenue est de la forme

$$\left[ \sum_{J=1}^P A_{IJ,n+1}^{(i)} X \mid \eta \right] = [B_{I,n+1}^{(i)} \mid \eta] \quad \text{pour tout } I = 1, 2, \dots, P.$$

et ceci pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^6$ , le produit intérieur  $[ \cdot \mid \cdot ]$  étant non dégénéré, on a

$$\sum_{J=1}^P A_{IJ,n+1}^{(i)} \Delta_{J,n+1}^{(i)} = B_{I,n+1}^{(i)} \quad \text{pour tout } I = 1, 2, \dots, P.$$

où  $A_{IJ,n+1}^{(i)}$  est une matrice 6-6 et  $B_{I,n+1}^{(i)}$  est un vecteur de dimension 6, d'où le système linéaire 6P-6P

$$A_{n+1}^{(i)} \Delta u_{n+1}^{(i)} = B_{n+1}^{(i)}$$

avec  $(A_{n+1}^{(i)})_{IJ} = A_{IJ,n+1}^{(i)}$  et  $(B_{n+1}^{(i)})_I = B_{I,n+1}^{(i)}$  ainsi que  $(\Delta u_{n+1}^{(i)})_J = \Delta_{J,n+1}^{(i)}$ .

Remplaçons les intégrales sur  $\widehat{OL}$  par une somme d'intégrales sur les éléments  $K_i$ :

$\int_{\widehat{OL}} = \sum_{k=1}^{N_{el}} \int_{K_i}$ . Comme les  $N_i$  sont nuls en tout point extérieur à  $K_i$ , et comme les  $\overrightarrow{\Delta u_{n+1,I}^{(i)}}$  ne font intervenir que les variables nodales, chaque terme de  $\int_{K_i}$  se calcule alors à partir des seules variables liées à l'élément  $K_i$ . Ce qui est équivalent à chercher, pour chaque élément  $K_i$ :

$$\overrightarrow{\Delta u_{n+1,h}^{(i)}}(s) = \sum_{I=1}^3 N_I(s) \overrightarrow{\Delta u_{n+1,I}^{(i)}}$$

En rapportant cette approximation dans la formulation variationnelle précédente:

$$\left[ \sum_{I=1}^3 \alpha_{I,J}^{(i)} \overrightarrow{\Delta u_{n+1,I}^{(i)}} \mid \vec{\eta} \right] = \left[ \lambda_I^{(i)} \mid \vec{\eta} \right] \quad \forall \vec{\eta} \in \mathbb{R}^6$$

d'où le système local (ou partiel) de trois équations à trois vecteurs-inconnus:

$$\sum_{I=1}^3 \alpha_{I,J}^{(i)} \overrightarrow{\Delta u_{n+1,I}^{(i)}} = \lambda_I^{(i)}$$

Les matrices élémentaires sont donc d'ordre 3-3 dont les coefficients  $(\alpha_{IJ}^{(i)})$  sont des matrices 6-6:

$$\begin{aligned} \alpha_{IJ}^{(i)} = & -\rho \int_0^L N_I(s) N_J(s) \left\{ ad(Ad^{-1} D_{n+1}^{(i)} \mathbf{g}) + \frac{\gamma}{h\beta} (ad H(\mathbf{v}_{n+1}^{(i)}) - ad \mathbf{v}_{n+1}^{(i)} \cdot H - \frac{1}{\gamma\beta} H) \cdot T(-u_{n+1}^{(i)}) \right\} ds \\ & + E \int_0^L \left\{ \frac{\partial N_I(s)}{\partial s} N_I(ad(\mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1}^{(i)})) - (ad \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}) \cdot \mathcal{F} - \frac{\partial N_I(s)}{\partial s} \frac{\partial N_J(s)}{\partial s} \cdot \mathcal{F} \right\} ds \end{aligned}$$

et  $\vec{\lambda}^I =$

$$-\int_0^L N_I(s) \left( \rho \{ H \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + [\mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, H \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}] \} - E \left\{ [e_{n+1}^{(i)}, \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}] + \mathcal{F} \frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{(i)}}{\partial s} \right\} - \rho Ad^{-1} D_{n+1}^{(i)} \mathbf{g} \right) ds$$

En utilisant la méthode d'intégration numérique citée précédemment et grâce au bon choix des points d'intégrations  $\xi_i$  coïncidant avec les points nodaux  $S_i$  et qui ont pour effet de réduire les termes à calculer, les coefficients matriciels tout intégrés sont donc :

$$\begin{aligned} \alpha_{II}^{(i)} = & \omega_I \left\{ ad \left( Ad^{-1} D_{n+1}^{(i)} \mathbf{g} \right) + \frac{\gamma}{h\beta} \left( ad H(\mathbf{v}_{n+1}^{(i)}) - ad \mathbf{v}_{n+1}^{(i)} \cdot H - \frac{1}{\gamma\beta} H \right) \cdot T(-u_{n+1}^{(i)}) \right\} \\ & + \omega_I \left\{ \frac{\partial N_I(S_I)}{\partial s} (ad(\mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,I}^{(i)}) - (ad \mathbf{e}_{n+1,I}^{(i)}) \cdot \mathcal{F}) + (ad(\mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,I}^{(i)})) ad \mathbf{e}_{n+1,I}^{(i)} - (ad \mathbf{e}_{n+1,I}^{(i)}) \cdot \mathcal{F} ad \mathbf{e}_{n+1,I}^{(i)} \right\} \\ & + \left\{ \omega_1 \left( \frac{\partial N_I(S_1)}{\partial s} \right)^2 + \omega_2 \left( \frac{\partial N_I(S_2)}{\partial s} \right)^2 + \omega_3 \left( \frac{\partial N_I(S_3)}{\partial s} \right)^2 \right\} \mathcal{F} \end{aligned}$$

(7.25)

et pour  $I \neq J$ ;

$$\begin{aligned} \alpha_{IJ}^{(i)} = & \omega_I \frac{\partial N_I(S_I)}{\partial s} \left( ad(\mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,J}^{(i)}) - (ad \mathbf{e}_{n+1,J}^{(i)}) \cdot \mathcal{F} \right) + \omega_J \frac{\partial N_I(S_J)}{\partial s} \mathcal{F} ad(\mathbf{e}_{n+1,I}^{(i)}) \\ & + \left\{ \omega_1 \frac{\partial N_I(S_1)}{\partial s} \frac{\partial N_J(S_1)}{\partial s} + \omega_2 \frac{\partial N_I(S_2)}{\partial s} \frac{\partial N_J(S_2)}{\partial s} + \omega_3 \frac{\partial N_I(S_3)}{\partial s} \frac{\partial N_J(S_3)}{\partial s} \right\} \cdot \mathcal{F} \end{aligned}$$

(7.26)



soit

$$\begin{aligned}
 x_1 &= u_2 v_3 - u_3 v_2 \\
 x_2 &= u_3 v_1 - u_1 v_3 \\
 x_3 &= u_1 v_2 - u_2 v_1 \\
 x_4 &= u_2 v_6 - u_3 v_5 + u_5 v_3 - u_6 v_2 \\
 x_5 &= u_3 v_4 - u_1 v_6 + u_6 v_1 - u_4 v_3 \\
 x_6 &= u_1 v_5 - u_2 v_4 + u_4 v_2 - u_5 v_1
 \end{aligned}$$

Cela nécessite 30 opérations élémentaires.

### Représentation matricielle de $ad u$

L'application adjointe  $ad u$  est définie par  $ad u.x = [u, x]$  d'où la représentation matricielle:

$$ad u = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_6 & u_5 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_6 & 0 & -u_4 & u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_5 & u_4 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, on aura besoin dans la suite de:

$$ad^2 u =$$

$$\begin{pmatrix} u_1^2 - \lambda^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 u_2 & u_2^2 - \lambda^2 & u_2 u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2(u_1 u_4 - uu) & u_1 u_5 + u_2 u_4 & u_1 u_6 + u_3 u_4 & u_1^2 - \lambda^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_5 + u_2 u_4 & 2(u_2 u_5 - uu) & u_2 u_6 + u_3 u_5 & u_1 u_2 & u_2^2 - \lambda^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_6 + u_3 u_4 & u_2 u_6 + u_3 u_5 & 2(u_3 u_6 - uu) & u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

### Calcul de $Ad \exp u$ et de $T(u)$

Les coefficients de la matrice élémentaire sont calculés à partir des applications  $Ad \exp u$ ,  $T(u)$  et  $R(u)$  qui sont des séries entières en  $ad u$ , donc elles peuvent être représentées par des matrices de la forme:

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$$

où  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées d'ordre 3.

Si on pose

$$a = \frac{\sin \lambda}{\lambda}, \quad b = \frac{(a - \cos \lambda)}{\lambda^2}, \quad c = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \lambda / 2}{\lambda / 2} \right)^2 \quad \text{et} \quad d = \frac{(a - 2c)}{\lambda^2}$$

et

$uu = \frac{[u,u]}{2} = u_1u_4 + u_2u_5 + u_3u_6$ ,  $buu = b.uu$  et  $duu = d.uu$   
on aura donc:

$$Ad \exp u = I + [aI + buu\Omega] ad u + [cI - duu\Omega] ad^2 u \quad (7.28)$$

soit explicitement:

$$\begin{aligned} Ad \exp u(1, 1) &= 1 + c(u_1^2 - \lambda^2) \\ Ad \exp u(1, 2) &= -au_3 + cu_1u_2 \\ Ad \exp u(1, 3) &= -au_2 + cu_1u_3 \\ Ad \exp u(2, 1) &= au_3 + cu_1u_2 \\ Ad \exp u(2, 2) &= 1 + c(u_2^2 - \lambda^2) \\ Ad \exp u(2, 3) &= -au_1 + cu_2u_3 \\ Ad \exp u(3, 1) &= -au_2 + cu_1u_3 \\ Ad \exp u(3, 2) &= au_1 + cu_2u_3 \\ Ad \exp u(3, 3) &= 1 + c(u_3^2 - \lambda^2) \\ Ad \exp u(4, 1) &= 2c(u_1u_4 - uu) - duu(u_1^2 - \lambda^2) \\ Ad \exp u(4, 2) &= -au_6 + c(u_1u_5 + u_2u_4) - buu.u_3 - duu.u_1u_2 \\ Ad \exp u(4, 3) &= -au_5 + c(u_1u_6 + u_3u_4) - buu.u_2 - duu.u_1u_3 \\ Ad \exp u(5, 1) &= au_6 + c(u_1u_5 + u_2u_4) + buu.u_3 - duu.u_1u_2 \\ Ad \exp u(5, 2) &= 2c(u_2u_4 - uu) - duu(u_2^2 - \lambda^2) \\ Ad \exp u(5, 3) &= -au_4 + c(u_2u_6 + u_3u_5) - buu.u_1 - duu.u_2u_3 \\ Ad \exp u(6, 1) &= -au_5 + c(u_1u_6 + u_3u_4) - buu.u_2 - duu.u_1u_3 \\ Ad \exp u(6, 2) &= au_4 + c(u_2u_6 + u_3u_5) + buu.u_1 - duu.u_2u_3 \\ Ad \exp u(6, 3) &= 2c(u_3u_6 - uu) - duu(u_3^2 - \lambda^2) \end{aligned}$$

Pour  $\lambda$  assez petit, on évite de calculer directement les expressions de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $d$ , à cause des erreurs-machine. On les remplace alors par leurs développements limités au voisinage de 0:

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{\lambda^2}{6} & b &= \frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{30} \\ c &= \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{24} & d &= \frac{-1}{12} + \frac{\lambda^2}{180} \end{aligned}$$

L'application  $T(\mathbf{u})$  a la même forme que (7.28) avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} & b &= 0 \\ c &= \begin{cases} \frac{1}{12} + \frac{\lambda^2}{720} & \text{si } \lambda \text{ est assez petit} \\ \left(1 - \frac{\lambda/2}{\text{tg } \lambda/2}\right) / \lambda^2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$d = \begin{cases} \frac{1}{360} + \frac{\lambda^2}{7560} & \text{si } \lambda \text{ est assez petit} \\ \frac{1}{\lambda^4} \left[ \left( \frac{\lambda/2}{\sin \lambda/2} \right)^2 + \frac{\lambda/2}{\operatorname{tg} \lambda/2} - 2 \right] & \text{sinon} \end{cases}$$

### Produit matriciel "dual"

Il est inutile de stocker les éléments nuls de  $\mathbb{M}$ , et de répéter deux fois les coefficients de  $A$ : on range  $\mathbb{M}$  donc dans un tableau de dimension 6-3 au lieu de 6-6, mathématiquement cela se justifie par le fait que l'algèbre des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$  est isomorphe à l'algèbre formée de couples  $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$  avec comme loi produit:

$$(A_1, B_1) \cdot (A_2, B_2) = (A_1 A_2, A_1 B_2 + B_1 A_2)$$

en effet;

$$\begin{aligned} (A_1, B_1) \cdot (A_2, B_2) &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0 \\ A_1 B_2 + B_1 A_2 & A_1 A_2 \end{pmatrix} \\ &= (A_1 A_2, A_1 B_2 + B_1 A_2) \end{aligned}$$

### La matrice élémentaire

La matrice élémentaire pour chaque élément  $\ell$  est  $(\alpha_{IJ}^{(\ell)})_{I,J=1,2,3}$  avec :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(i)} &= \frac{h_s}{3} \left( \left\{ \frac{1}{h^2 \beta} H - \frac{\gamma}{h \beta} (ad H v_{n+1,1}^{(i)} - adv_{n+1,1}^{(i)} \cdot H) \right\} \cdot T(-u_{n,1}^{(i)}) \right. \\ &\quad \left. + ad (Ad \exp(-\chi_{n+1}^{(i)})) \cdot g - \frac{3}{2h_s} (ad \mathcal{F} e_{n+1,1}^{(i)} - ade_{n+1,1}^{(i)} \circ \mathcal{F}) \right. \\ &\quad \left. + (ad \mathcal{F} e_{n+1,1}^{(i)} ade_{n+1,1}^{(i)} - ade_{n+1,1}^{(i)} \circ \mathcal{F} ade_{n+1,1}^{(i)}) + \frac{7}{6h_s^2} \mathcal{F} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{22}^{(i)} &= \frac{\rho h_s}{3} \left\{ \frac{1}{h^2 \beta} H - \frac{\gamma}{h \beta} \left( adH \mathbf{v}_{n+1,2}^{(i)} - adv_{n+1,2}^{(i)} \cdot H \right) \right\} \cdot T(-u_{n,2}^{(i)}) \\
&\quad + \frac{8E}{3h_s} \mathcal{F} + ad \left( Ad \exp(-\chi_{n+1}^{(i)}) \cdot \mathbf{g} \right) \\
\alpha_{33}^{(i)} &= \frac{\rho h_s}{3} \left\{ \frac{1}{h^2 \beta} H - \frac{\gamma}{h \beta} \left( adH \mathbf{v}_{n+1,3}^{(i)} - adv_{n+1,3}^{(i)} \cdot H \right) \right\} \cdot T(-u_{n,3}^{(i)}) \\
&\quad - \frac{E}{2} \left[ ad \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,3}^{(i)} - ade_{n+1,3}^{(i)} \circ \mathcal{F} - \frac{7}{3h_s} \mathcal{F} \right] + ad \left( Ad \exp(-\chi_{n+1}^{(i)}) \cdot \mathbf{g} \right) \\
\alpha_{12}^{(i)} &= \frac{2E}{3} \left[ ad \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,1}^{(i)} - ade_{n+1,1}^{(i)} \circ \mathcal{F} - \frac{2}{h_s} \mathcal{F} \right] \\
\alpha_{13}^{(i)} &= -\frac{E}{6} \left[ ad \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,1}^{(i)} - ade_{n+1,1}^{(i)} \circ \mathcal{F} - \frac{1}{h_s} \mathcal{F} \right] \\
\alpha_{21}^{(i)} &= -\frac{2E}{3} \left[ ad \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,2}^{(i)} - ade_{n+1,2}^{(i)} \circ \mathcal{F} + \frac{2}{h_s} \mathcal{F} \right] \\
\alpha_{23}^{(i)} &= \frac{2E}{3} \left[ ad \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,2}^{(i)} - ade_{n+1,2}^{(i)} \circ \mathcal{F} - \frac{2}{h_s} \mathcal{F} \right] \\
\alpha_{31}^{(i)} &= \frac{E}{6} \left[ ad \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,3}^{(i)} - ade_{n+1,3}^{(i)} \circ \mathcal{F} + \frac{1}{h_s} \mathcal{F} \right] \\
\alpha_{32}^{(i)} &= -\frac{2E}{3} \left[ ad \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,3}^{(i)} - ade_{n+1,3}^{(i)} \circ \mathcal{F} + \frac{2}{h_s} \mathcal{F} \right]
\end{aligned}$$

### Le second membre élémentaire

Le second membre élémentaire de l'équation linéarisée est, pour chaque élément  $\ell$  :

$$\begin{aligned}
B_{n+1,1}^{(i)(\ell)} &= -\frac{h_s}{3} \rho \left( H \mathbf{a}_{n+1,1}^{(i)} + [\mathbf{v}_{n+1,1}^{(i)}, H \mathbf{v}_{n+1,1}^{(i)}] \right) \\
&\quad + \frac{h_s}{3} E \left( [\mathbf{e}_{n+1,1}^{(i)}, \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,1}^{(i)}] + \mathcal{F} \left( \frac{-3\mathbf{e}_{n+1,1}^{(i)} + 4\mathbf{e}_{n+1,2}^{(i)} + 3\mathbf{e}_{n+1,3}^{(i)}}{2h_s} \right) \right) \\
B_{n+1,2}^{(i)(\ell)} &= -\frac{4h_s}{3} \rho \left( H \mathbf{a}_{n+1,2}^{(i)} + [\mathbf{v}_{n+1,2}^{(i)}, H \mathbf{v}_{n+1,2}^{(i)}] \right) \\
&\quad + \frac{4h_s}{3} E \left( [\mathbf{e}_{n+1,2}^{(i)}, \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,2}^{(i)}] + \mathcal{F} \left( \frac{-\mathbf{e}_{n+1,1}^{(i)} + \mathbf{e}_{n+1,3}^{(i)}}{2h_s} \right) \right) \\
B_{n+1,3}^{(i)(\ell)} &= -\frac{h_s}{3} \rho \left( H \mathbf{a}_{n+1,3}^{(i)} + [\mathbf{v}_{n+1,3}^{(i)}, H \mathbf{v}_{n+1,3}^{(i)}] \right) \\
&\quad + \frac{h_s}{3} E \left( [\mathbf{e}_{n+1,3}^{(i)}, \mathcal{F} \mathbf{e}_{n+1,3}^{(i)}] + \mathcal{F} \left( \frac{\mathbf{e}_{n+1,1}^{(i)} - 4\mathbf{e}_{n+1,2}^{(i)} + 3\mathbf{e}_{n+1,3}^{(i)}}{2h_s} \right) \right)
\end{aligned}$$

## 7.5 Algorithmme

Les programmes d'analyse numérique se compliquent assez rapidement, car ils doivent exécuter des opérations très diverses: organisation des données, calcul de fonctions spéciales, résolution de systèmes, tracés, ... Comme tout programme basé sur la méthode des éléments finis, celui-ci inclut les étapes suivantes :

1. Lecture, vérification et organisation des données décrivant la discrétisation (nœuds et éléments), les paramètres physiques, les efforts extérieurs et conditions aux limites.
2. Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
3. Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
4. Impression des résultats, graphique, ...

- L'étape  $t = 0$

On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , le câble est au repos:

$$v_0(s) = a_0(s) = e_0(s) = 0$$

La configuration à  $t = 0$  étant celle de l'équilibre, on a

$$\text{l'identité } = D(s, 0) = \exp \chi(s, 0) \text{ alors } \chi_0(s) = 0$$

- De l'étape  $t_n$  à  $t_{n+1}$

– Initialisation de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}$  et  $\chi$  :

On choisit  $a_{n+1}^{(0)}$  de façon que  $u_n^{(0)}$  soit nul:

$$a_{n+1}^{(0)} = -\frac{h}{\beta} v_n + \frac{h^2}{\beta} \left( \frac{1}{2} - \beta \right) a_n$$

$$v_{n+1}^{(0)} = v_n + h \left[ (1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1}^{(0)} \right]$$

$$u_{n+1}^{(0)} = u_n$$

$$e_{n+1}^{(0)} = e_n$$

$$\chi_{n+1}^{(0)} = \chi_n$$



– **Résolution par la méthode de Newton:**

Pour chaque élément  $l$  on extrait les trois vecteurs 6-6  $X_{l-1}$ ,  $X_l$  et  $X_{l+1}$  du vecteur global  $X$  de dimension  $12N + 6$ ;  $X$  ici genère  $a, v, u, e$  et  $\chi$ .

A partir de ces vecteurs on calcule la matrice élémentaire  $A$  avec

$$A_{IJ} =$$

puis on range  $A_{IJ}$  dans la matrice d'assemblage  $\mathcal{A}$ . De même à partir de ces mêmes vecteurs on calcule le second membre.

On résoud le système linéaire  $\mathcal{A}x = \mathcal{B}$  où  $x$  est un vecteur de dimension  $12N + 6$

On extrait pour chaque nœud les 6 coefficients correspondant à  $x_I$ ; de même pour  $u_I, \chi_{I_1}$  (étape  $n$ ) et  $\chi_{I_0}$  (étape  $n - 1$ )

On calcule  $T(u_I)$  puis  $\delta u_I = T(u_I).x_I$

De même  $T(\chi_{I_1})$  puis  $\delta \chi_{I_1} = T(\chi_{I_1}).u_I$

et  $T(\chi_{I_0})$  puis  $\delta \chi_{I_0} = T(\chi_{I_0}).u_I$

On range  $\delta \chi_{I_1}$  et  $\delta \chi_{I_0}$  dans deux vecteurs de dimension  $12N + 6$ :  $\delta \chi_I$  et  $\delta \chi_{I_0}$ , puis on calcule

$$\delta \chi_I = \frac{3}{2} \delta \chi_{I_1} - \frac{1}{2} \delta \chi_{I_0}$$

Enfin on calcule

$$\delta e = \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_1}{ds} \\ \vdots \\ \frac{x_{I+1} - x_{I-1}}{2 ds} \\ \vdots \\ \frac{x_{2N+1} - x_{2N}}{ds} \end{pmatrix}$$

– **Incrémentation:**

$$u_{n+1}^{(i+1)} = u_{n+1}^{(i)} + \delta u_{n+1}^{(i)}$$

$$\chi_{n+1}^{(i+1)} = \chi_{n+1}^{(i)} + \delta \chi_{n+1}^{(i)}$$

$$a_{n+1}^{(i+1)} = a_{n+1}^{(i)} + \frac{1}{\beta h^2} \delta u_{n+1}^{(i)}$$

$$v_{n+1}^{(i+1)} = v_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{\beta h} \delta u_{n+1}^{(i)}$$

$$e_{n+1}^{(i+1)} = e_{n+1}^{(i)} + \delta e_{n+1}^{(i)}$$

$$E = E + \|\delta u_{n+1}^{(i)}\|$$

et on recommence tant que  $E > \varepsilon$ , et cela pour  $nt = 0, 1, 2, \dots$

## Chapitre 8

# L'usure des faisceaux des robots de soudage

*Ce chapitre est consacré à l'étude de deux problèmes pratiques, le premier est d'origine industrielle ; nous proposons des solutions basées sur les résultats théoriques et numériques obtenus dans cette thèse puis nous traitons quelques exemples simples de dynamique du câble pour montrer la faisabilité d'une telle étude. Le deuxième est un problème d'actualité concernant la dynamique non linéaire des bâtiments soumis à des séismes ; on présente un nouveau modèle du comportement dynamique de bâtiment construit à l'aide de corps rigides et des poutres et nous montrons surtout l'analogie au niveau des équations entre la dynamique des câbles et la dynamique des bâtiments.*

### 8.1 Position du problème

L'usure des faisceaux des robots de soudage par point, pour lesquels il faut acheminer eau, air et électricité jusqu'à la pince, pose de nombreux problèmes, notamment sur les chaînes de montage de l'AX. En effet, sur certains robots, le faisceau est très sollicité et s'use rapidement, ce qui implique des changements anormalement fréquents, et donc des coûts de maintenance élevés. Cette situation devient donc préoccupante, compte tenu du nombre de robots utilisés. Les facteurs d'usure des faisceaux sont :

- **La torsion/flexion du faisceau**, au niveau de la pince essentiellement.
- **Les frottements "internes" à l'installation :**
  - frottements des tuyaux et des câbles entre eux dans la gaine qui les maintient liés les uns aux autres.

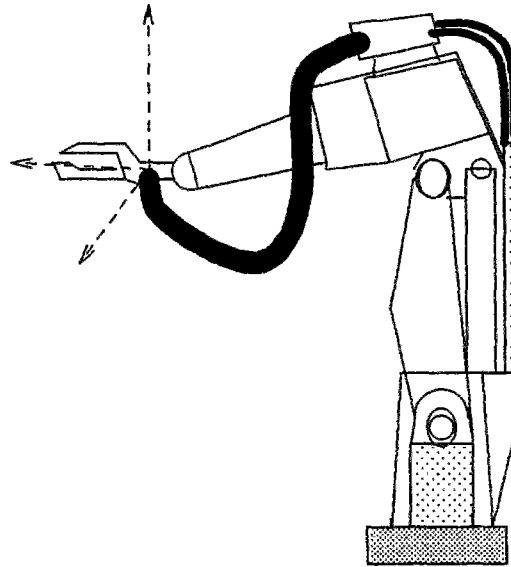


Figure 8.1: robot-PSA

– frottements entre le faisceau et le bras du robot.

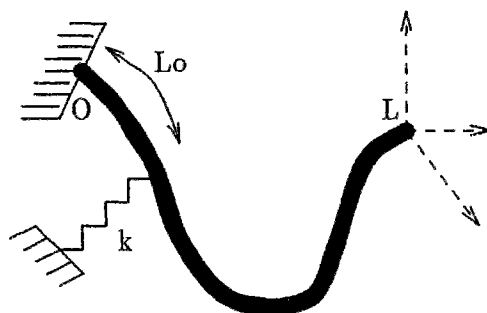
- **Les frottements ou collisions “externes”**: frottements avec l’environnement particulièrement abrasif comme les caisses, serrages, ...

### 8.1.1 Traitement du problème

Il est en effet possible, à la suite d’une telle étude, d’envisager des développements permettant de déterminer des critères de choix d’une (ou plusieurs) caractéristique du faisceau (sa longueur, sa section ou ses propriétés physiques...). Cette détermination pourra se faire par essais numériques en cherchant à minimiser les facteurs d’usure en fonction des caractéristiques.

Nous proposons d’abord de schématiser le faisceau par un seul câble ( dont les caractéristiques globales seraient à déterminer en fonction des constituants), le câble étant encastré en son extrémité  $O$  et pouvant se déplacer en l’autre extrémité  $A$  ( $A$  est la section-solide d’abscisse curviligne  $s = L$ ).

Avec les 6 degrés de liberté, le faisceau étant au repos à l’instant  $t = 0$ , les conditions aux limites et les conditions initiales se résument à la donnée de deux vecteurs en  $A$  et  $O$ , et ces deux vecteurs sont donnés une fois pour toute selon le type de fonctionnement du robot. Il reste donc à notre disposition le choix des propriétés physiques pour contrôler le



mouvement du faisceau. Donc

$$x = f_1(\phi)$$

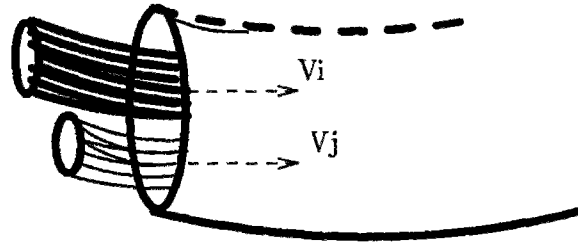
$$\mathcal{M} = f_2(\phi)$$

$$v = f_3(\phi)$$

où  $\phi$  est la variable qui génère les propriétés physiques ( $\phi = l$  ou  $s$  ou  $E$  ou ...)

- Les effets de la flexion/torsion peuvent être contrôlés par la condition  $|\mathcal{M}| \leq \mathcal{M}_0$  où  $\mathcal{M}_0$  est la limite d'élasticité du matériau, et soit  $S_1$  l'ensemble des  $\phi$  correspondants.
- Les déplacements le long du câble peuvent être de même calculés et contrôlés.
- Le point précédent pourrait être étendu à la recherche des collisions entre le câble et le bras de robot ou l'environnement, dans la mesure où l'on dispose des descriptions efficaces de l'environnement du câble, puis on cherche l'ensemble  $S_2$  des  $\phi$  correspondant au minimum de collisions.
- En ce qui concerne la mécanique interne du faisceau de câble, on pourrait envisager la recherche d'une schématisation, plus ou moins fine du faisceau, permettant un calcul des vitesses relatives des divers câbles. Si on désigne par  $v_i$  la vitesse d'un point courant du câble  $i$  considéré à un instant donné  $t$ , la vitesse relative de deux câbles  $v_r = v_i - v_j$  est, en général, non nulle: elle est donc à l'origine des frottements intérieurs. Pour réduire ces frottements on impose à  $v_r$  de rester aussi petit que possible:  $|v_i - v_j| \leq \varepsilon$  où  $v_i = f_3^{(i)}(\phi)$  et  $v_j = f_3^{(j)}(\phi)$ , puis on cherche l'ensemble  $S_3$  des  $\phi$  satisfaisant à cette condition.

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$  est l'ensemble des  $\phi$  admissibles, cet ensemble peut très bien être vide: dans ce cas, on change le critère de choix, on prend par exemple  $\phi =$  la masse volumique ou le module de Young au lieu de la longueur  $l$ , et on recommence l'étude. Ou bien on maintient  $\phi = l$  et on fixe un point du câble à une longueur  $l_0$  de l'encastrement qui sera déterminée par l'algorithme.



### 8.1.2 Etude statique

#### Comparaisons avec la Résistance Des Matériaux

Le câble fixé en ses deux extrémités peut être considéré comme une poutre doublement encastree. La première idée qui vient à l'esprit est de bien vérifier les résultats de la R.D.M.

Soit  $OA$  une poutre rectiligne dans une position horizontale encastree en  $O$  et  $A$ . d'après la théorie générale de la RDM on a :

- Efforts de liaison (résistances et moments aux extrémités)

$$R_O = R_A = \frac{1}{2}pL \quad \mathcal{M}_O = -\mathcal{M}_A = \frac{1}{12}pL^2$$

- Efforts intérieurs (efforts tranchants et moments fléchissants)

$$T = p(x - L/2) \quad \mathcal{M} = -\frac{1}{12}pL^2\left(1 - 6\frac{x}{L} + 6\frac{x^2}{L^2}\right)$$

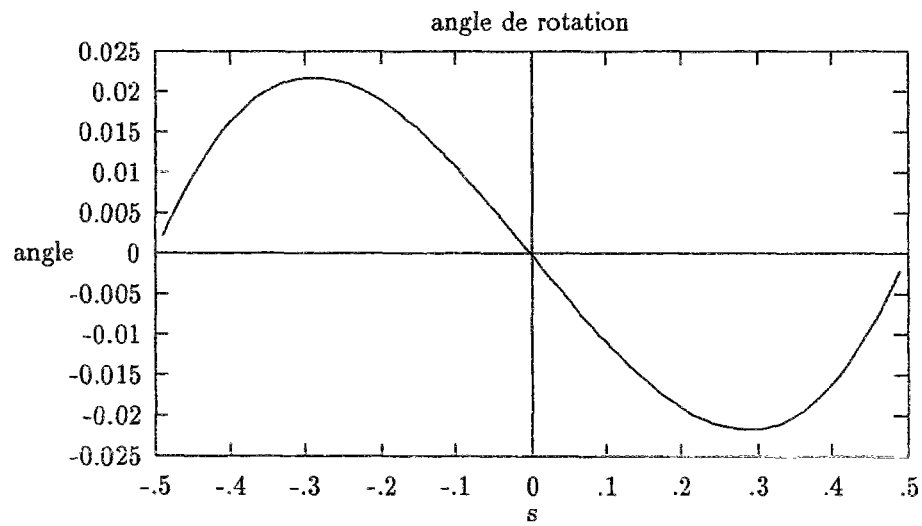
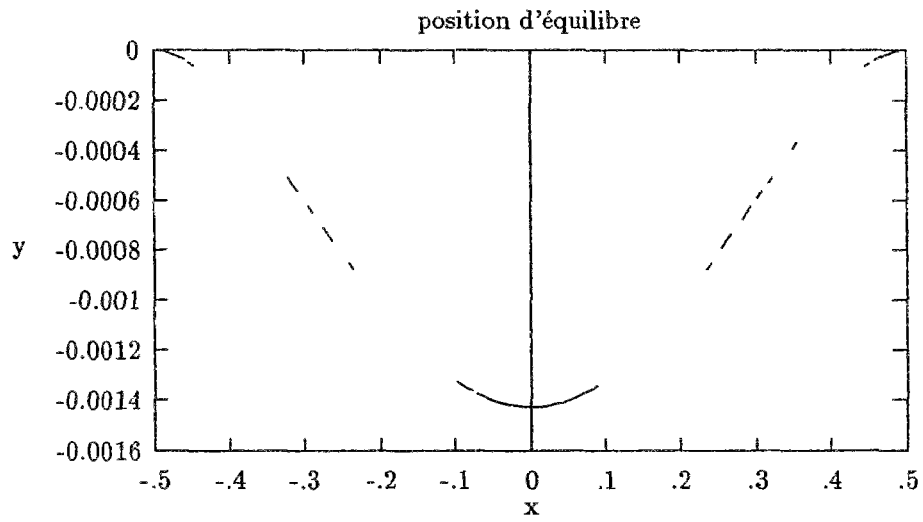
- Position (rotation et translation (ou déplacement) de la section transversale)

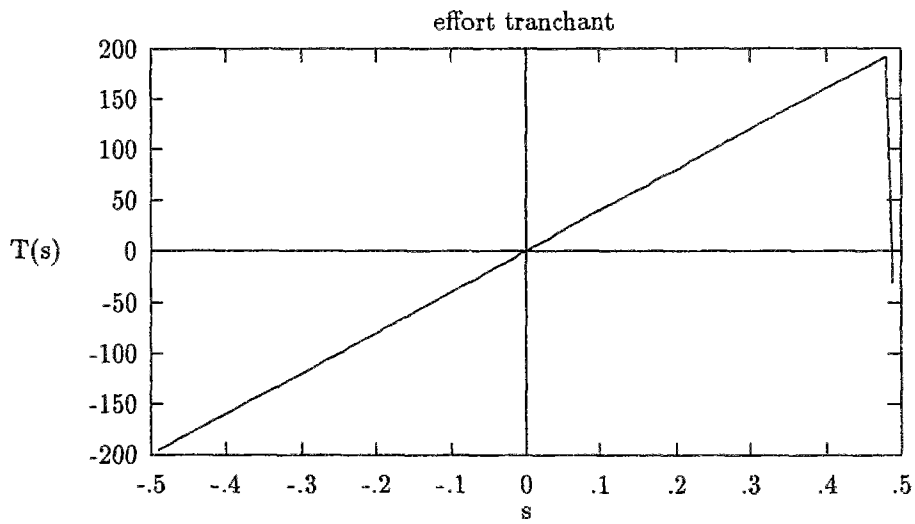
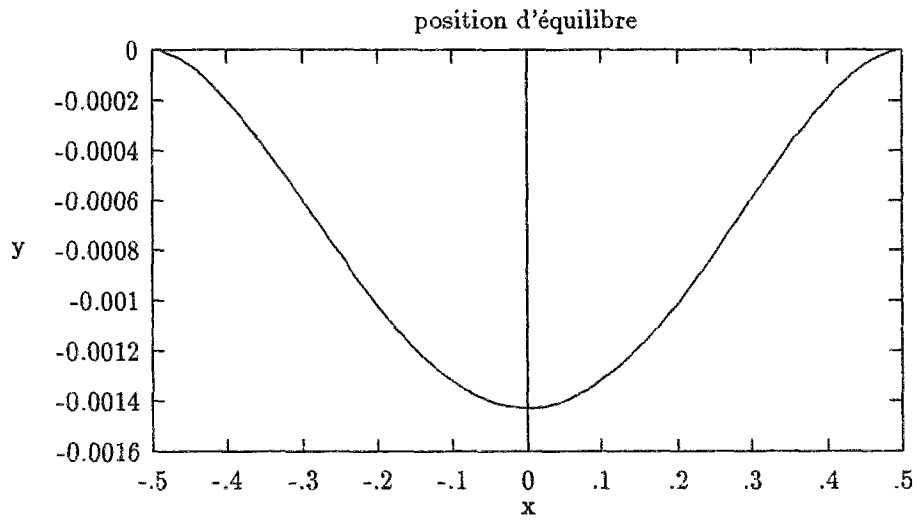
$$\omega = -\frac{pL^3}{12EI} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \quad v = -\frac{pL^4}{24EI} \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

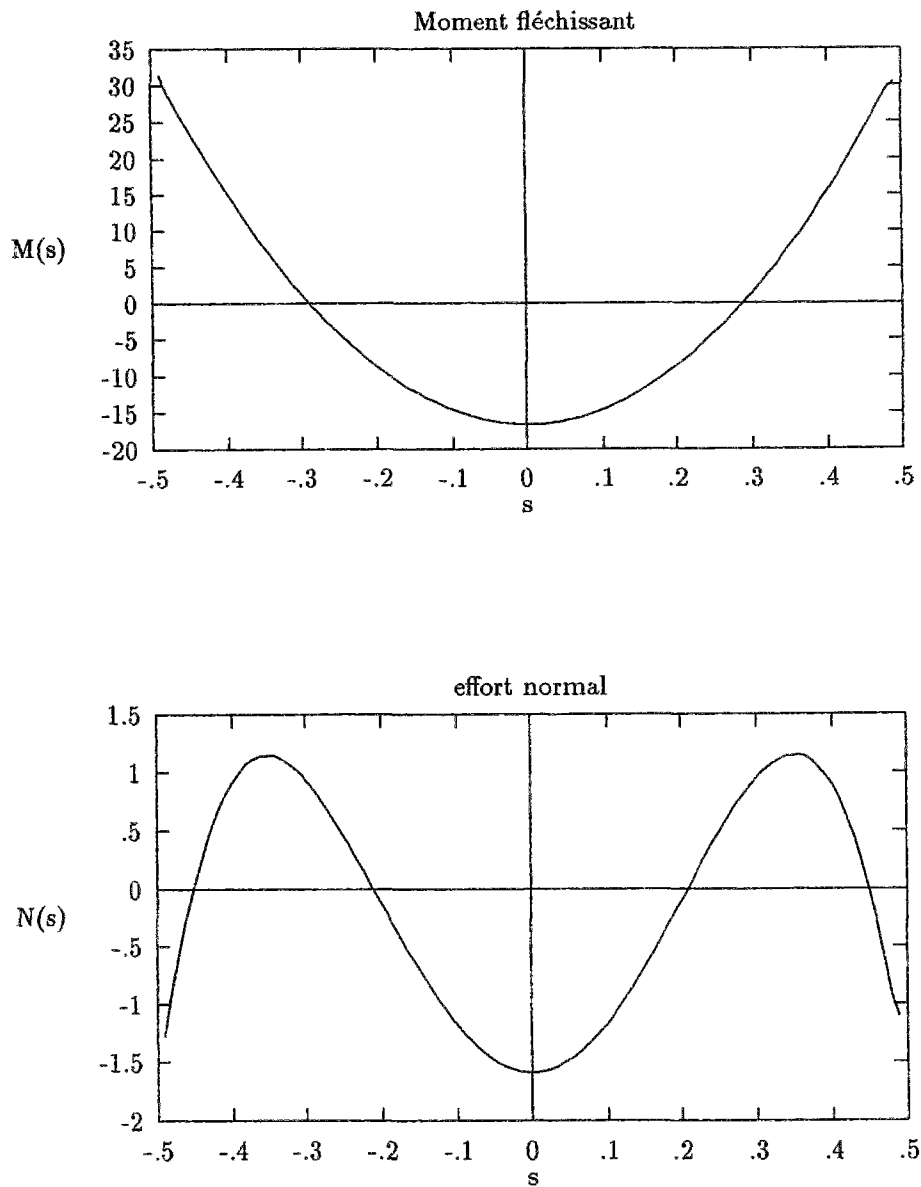
On fait tourner le programme avec les données suivantes :

- le module de Young pour le caoutchouc  $E = 300MPa$
- la masse volumique  $\rho = 5000kg/m^3$
- la longueur  $L = 1m$
- la section  $S = \pi R^2$  avec  $R = 5cm$ .

On obtient les courbes suivantes qui approchent avec une très bonne approximation les courbes théoriques.







Il est à noter que les efforts normaux dans la théorie de la RDM (qui n'est autre qu'une approximation linéaire de la MMC) sont considérés nuls alors qu'ici (nos équations comportent un terme non linéaire) ces efforts sont fonctions sinusoïdales de l'abscisse curviligne mais avec une amplitude assez faible ( $1.2N$ ) par rapport aux autres efforts ( $\simeq 200N$ ); on peut donc très bien les négliger.

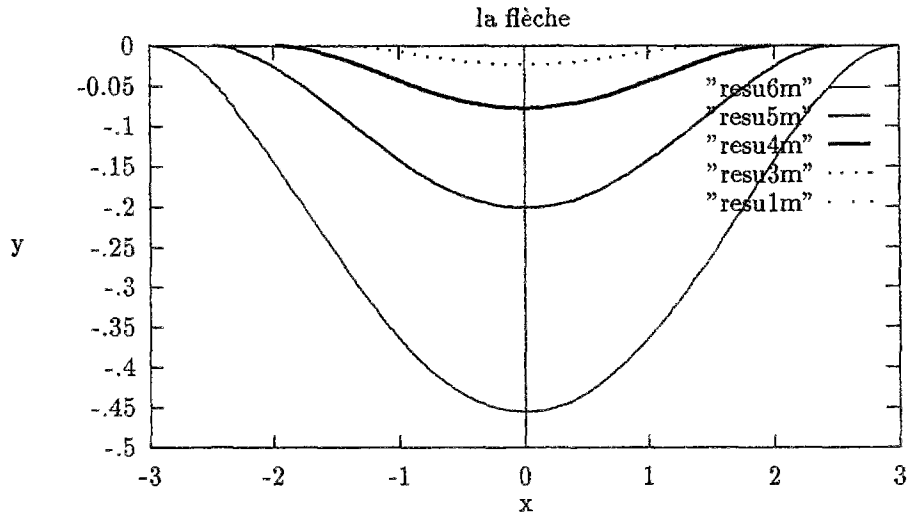


### Vérification de la flèche

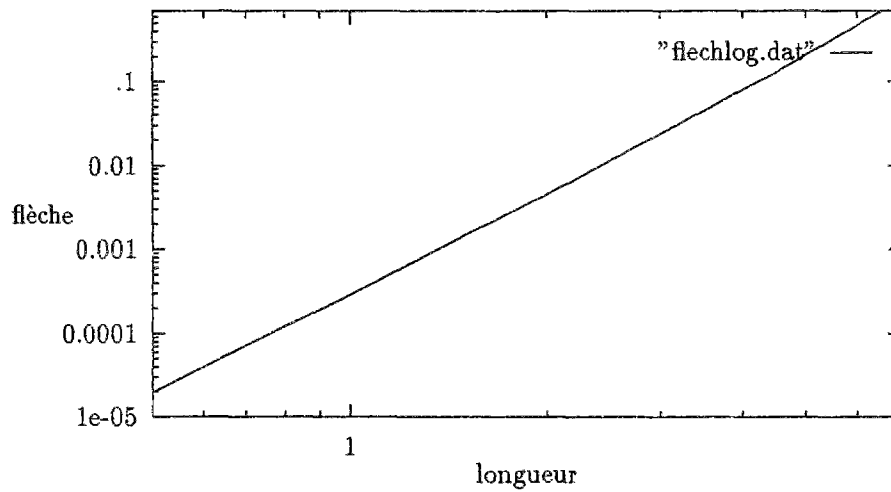
La flèche est donnée par

$$f = \frac{P}{384 EI} L^4$$

On fait plusieurs essais numériques pour plusieurs valeurs de la longueur  $L$



puis on trace la courbe  $-\ln f$  en fonction de  $-\ln L$ . On obtient la droite suivante



On vérifie bien que la pente est sensiblement égale à 4 et la valeur à l'origine 8,677 est bien égale à  $\ln\left(\frac{P}{384EI}\right)$ .

### 8.1.3 Etude de quelques mouvements simples à l'extrémité libre A

Les données sont les suivantes :

- l'extrémité  $O$  est encastree ( $\chi(0, t) = 0$ )
- l'extrémité  $A$  est animée d'un mouvement défini par  $\chi(L, t) = \alpha(t)$  où  $\alpha$  est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathfrak{D}$
- la position initiale sans contraintes ( $\mathcal{F} = 0$ ) et sans déformations ( $\mathbf{e} = 0$ ) est définie par un segment de droite horizontale  $[OA]$
- Le module de Young  $E = 300MPa$ . Le coefficient de poisson  $\nu = 0,3$ . La masse volumique  $\rho = 5000kg/m^3$
- La longueur  $L = 1m$ . La section  $S = \pi R^2$  avec  $R = 5cm$ .
- les données techniques de la méthode numérique sont :

$$\beta = \frac{1}{4} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \Delta h_s = 0,1cm \quad \delta h_t = 0.1s \quad \epsilon = 10^{-4}$$

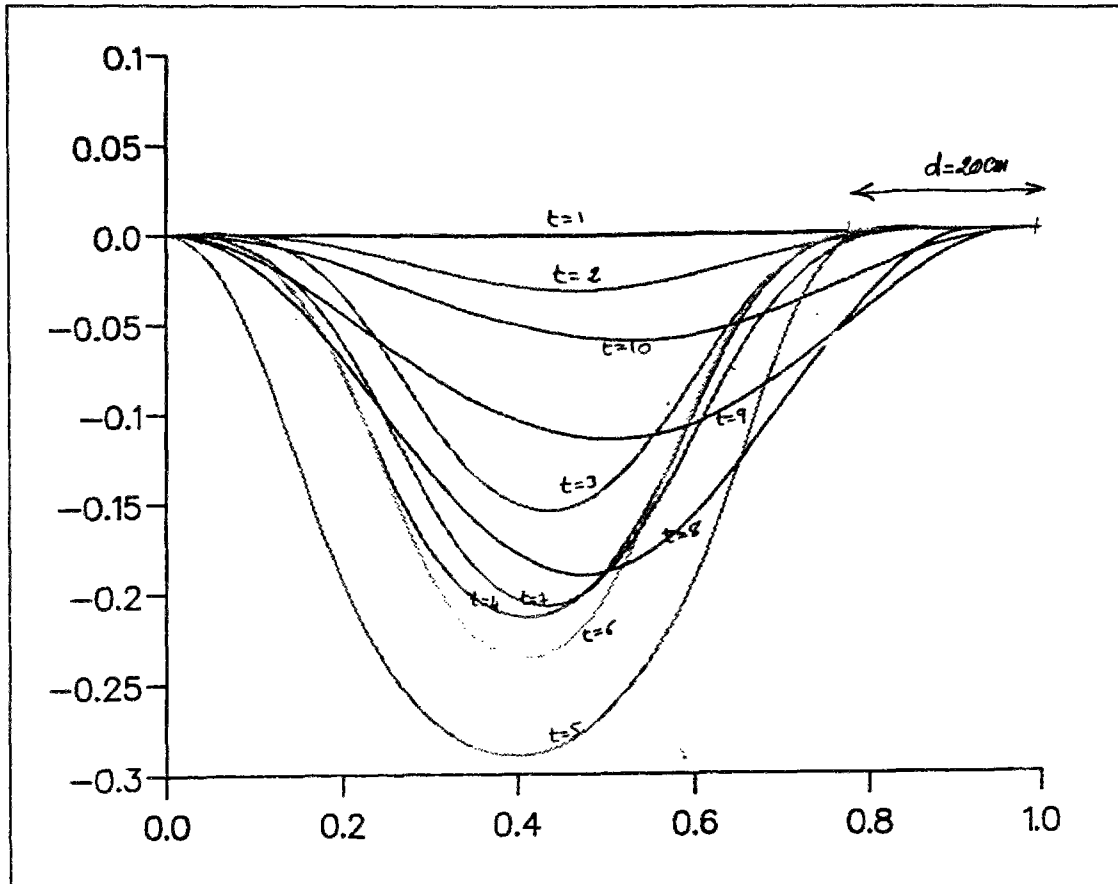


Figure 8.2: Mouvement de translation uniforme horizontal : On fait animer l'extrémité libre A d'un mouvement rectiligne uniforme vers l'autre extrémité. Les configurations sont données à des intervalles de temps régulièrement séparés. On remarque que les positions ne sont pas symétriques par rapport à la médiatrice des extrémités. Cette dissymétrie est, bien sûr, due à l'inertie du câble en dynamique.

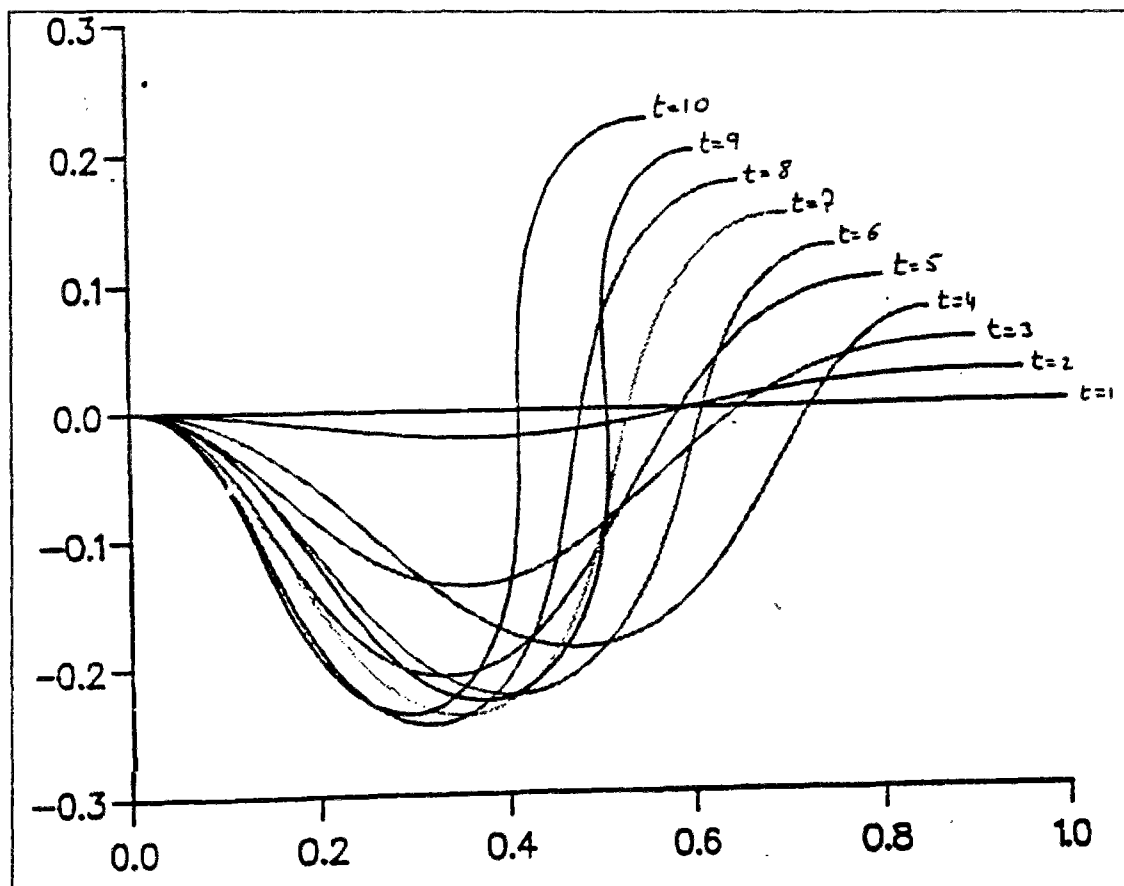


Figure 8.4: **Mouvement de translation oblique** On remarque que les configurations se coupent de façon "arbitraire", l'extrémité A avance constamment alors que les sections intermédiaires avancent ou reculent et tournent à gauche ou à droite selon la position.

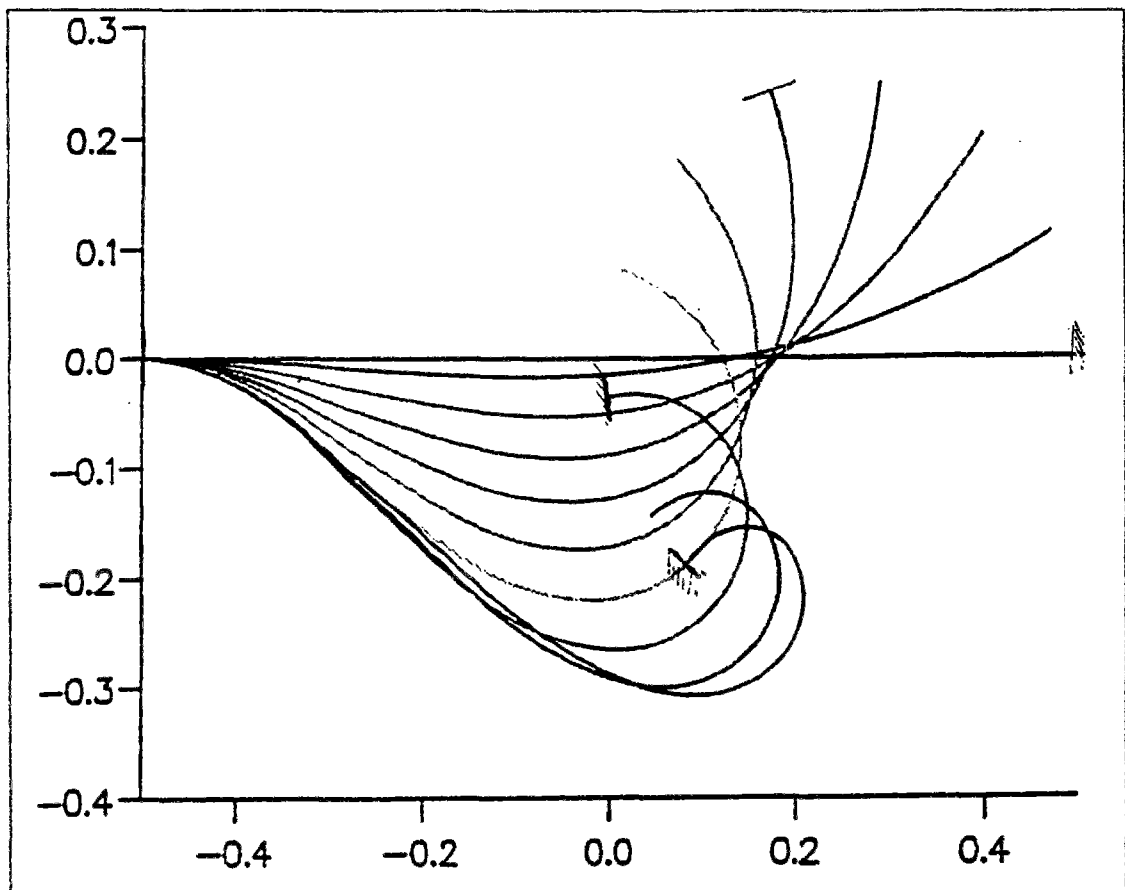


Figure 8.5: L'extrémité est en **mouvement de rotation** uniforme tout en restant encastree, on voit le début d'une formation d'une boucle, ce qui provoque parfois des erreurs numériques si l'angle de rotation d'une section intermédiaire devient quasiment égal à  $2k\pi$

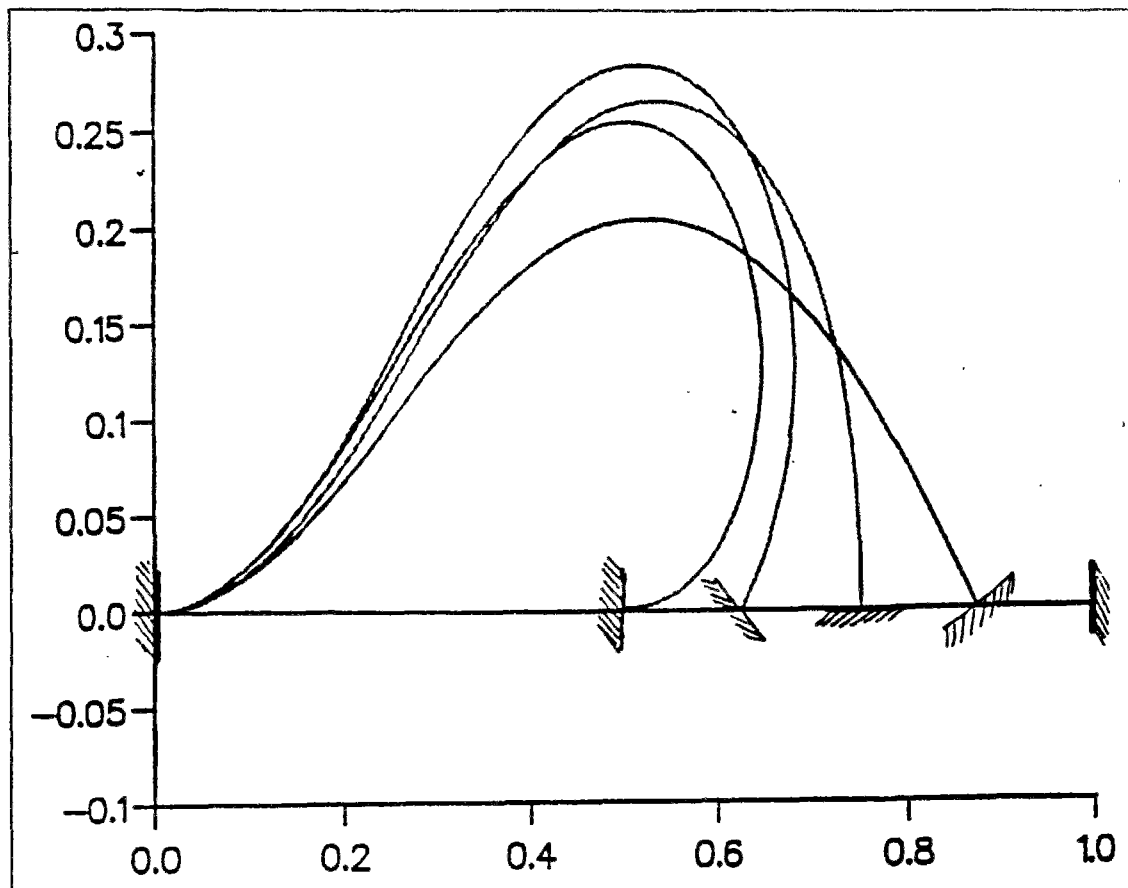


Figure 8.6: **Mouvement de translation et rotation combinées** L'extrémité A est animé d'un mouvement de rotation uniforme dans le sens retrograde autour de son axe horizontal parallèle à  $Oy$  composée d'une translation uniforme dans le sens des  $x$  négatifs (vers l'autre extrémité)

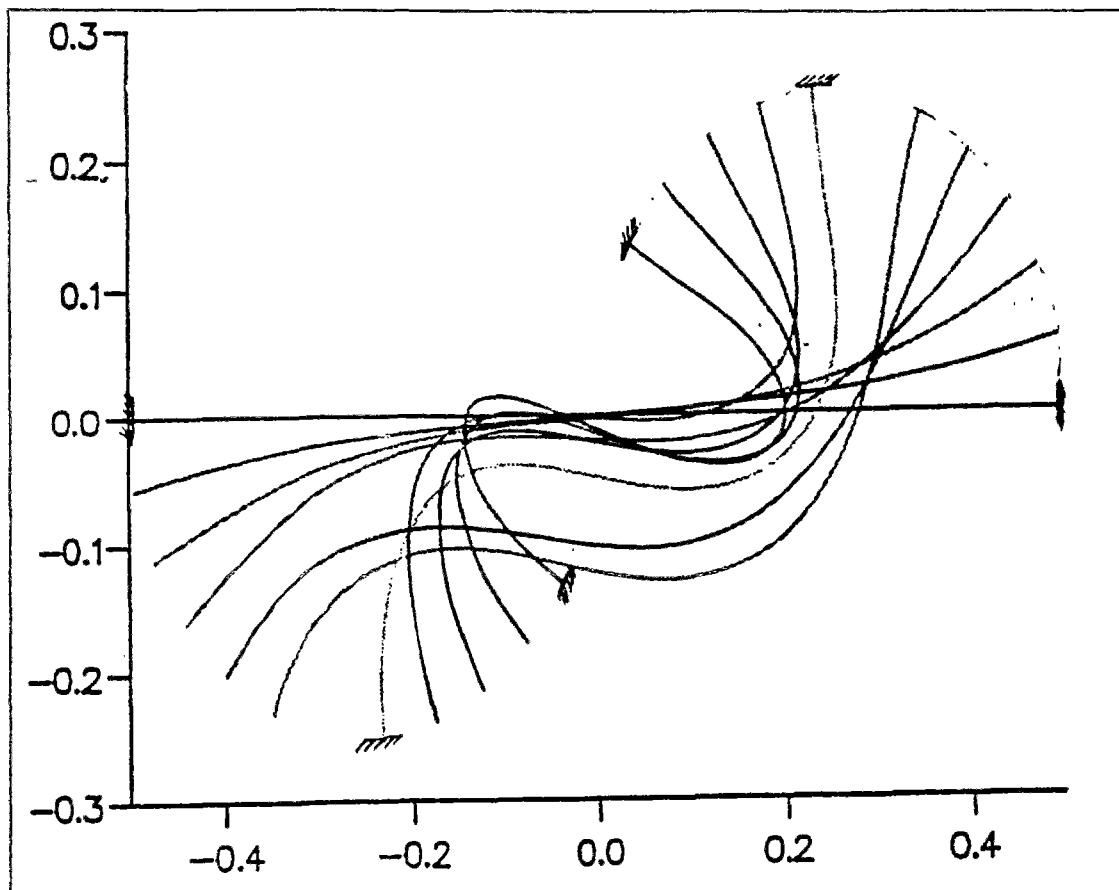


Figure 8.7: Les deux extrémités en mouvement : O tourne autour du point  $(\frac{\ell}{4}, 0)$  avec une vitesse angulaire  $\omega = \pi$  rd/s, l'autre extrémité tourne autour du point  $(\frac{3\ell}{4}, 0)$  dans le même sens direct avec la même vitesse.

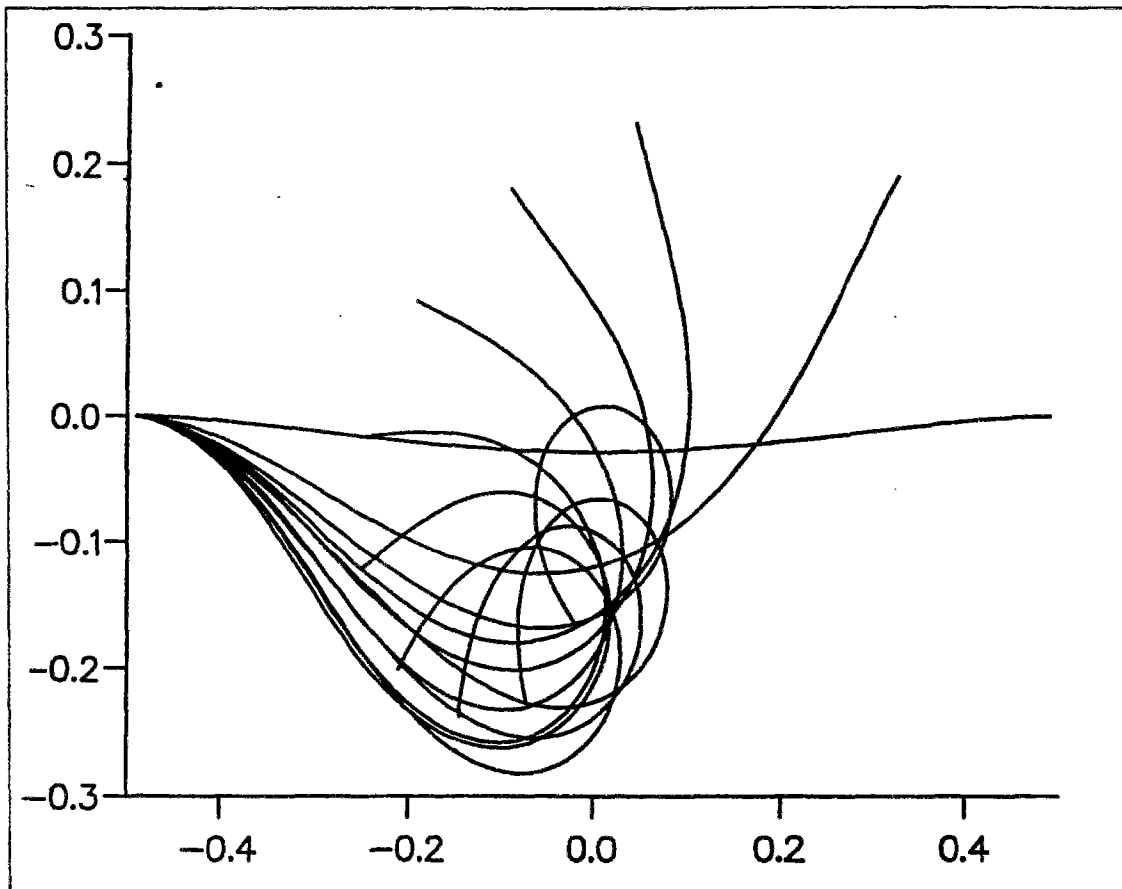


Figure 8.8: Pour représenter les contraintes en dynamique, on a choisi le cas suivant : au repos le câble est horizontal encastré en  $O$ , l'extrémité  $A$  se déplace sur un cycloïde. Ici on a donné les configurations pour  $t = 0, 1, 2, \dots, 10$



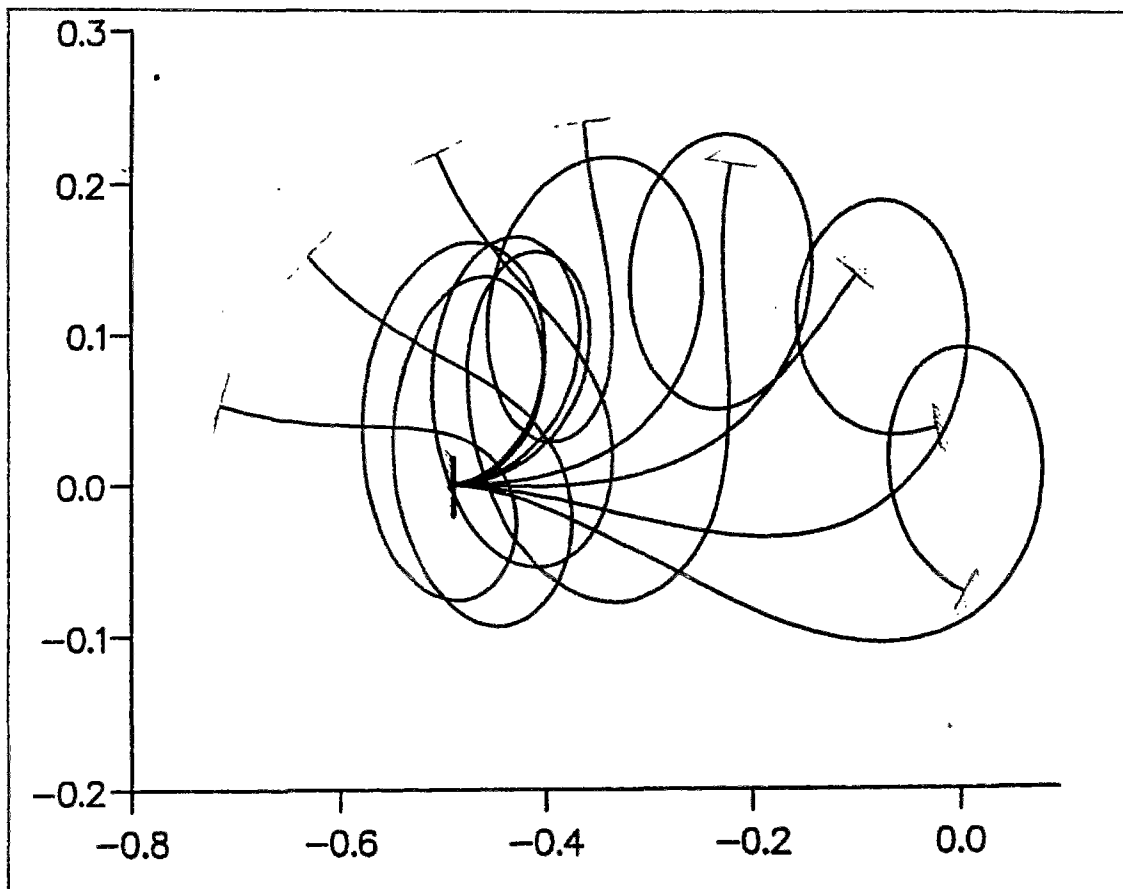


Figure 8.9: La suite du mouvement pour  $t = 11, 12, \dots, 18$  entre les deux instant  $t = 11$  et  $t = 12$  la boucle "glisse" vers l'extrémité encastré  $O$  pour préparer la formation de la deuxième boucle.

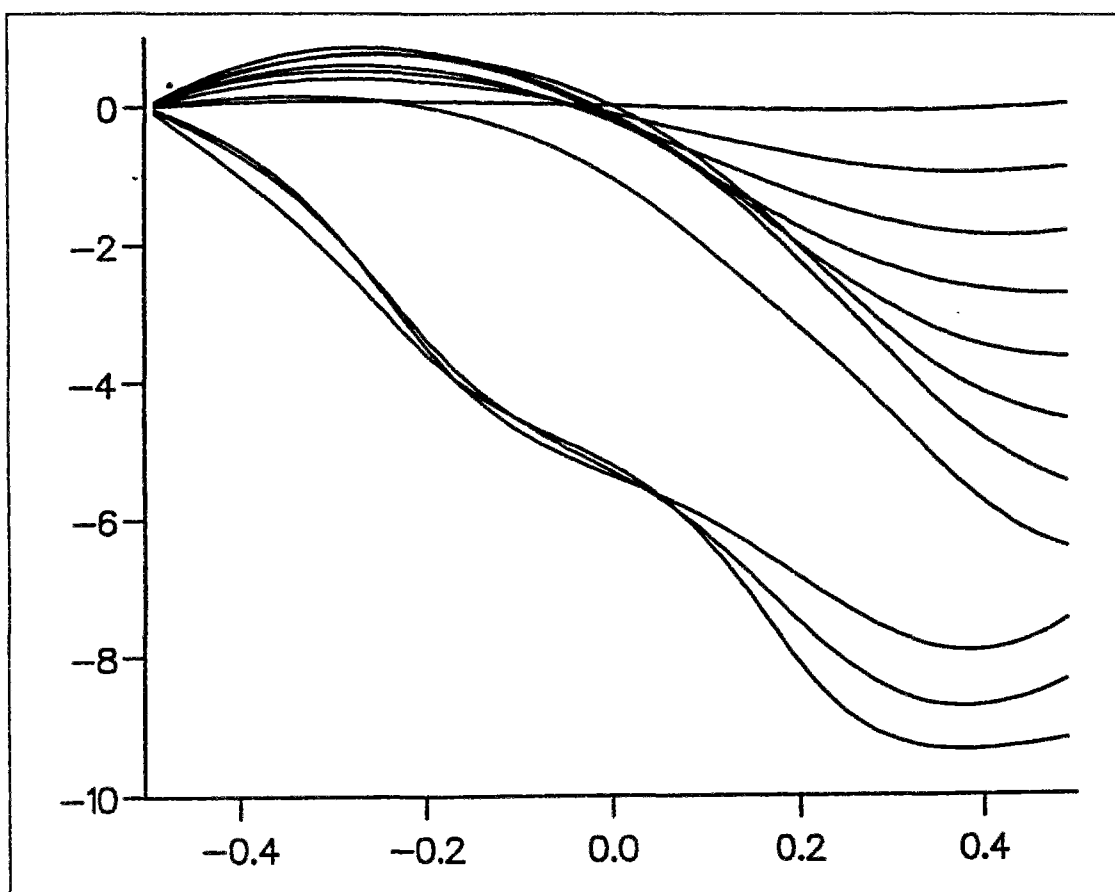


Figure 8.10: L'angle de rotation de la section transversale. On distingue ici deux familles de courbes (les courbes ne sont pas toutes représentées), quand le câble est entièrement au-dessus de l'horizontal la courbe de  $\theta$  correspondant est entièrement dans la partie inférieure du plan.

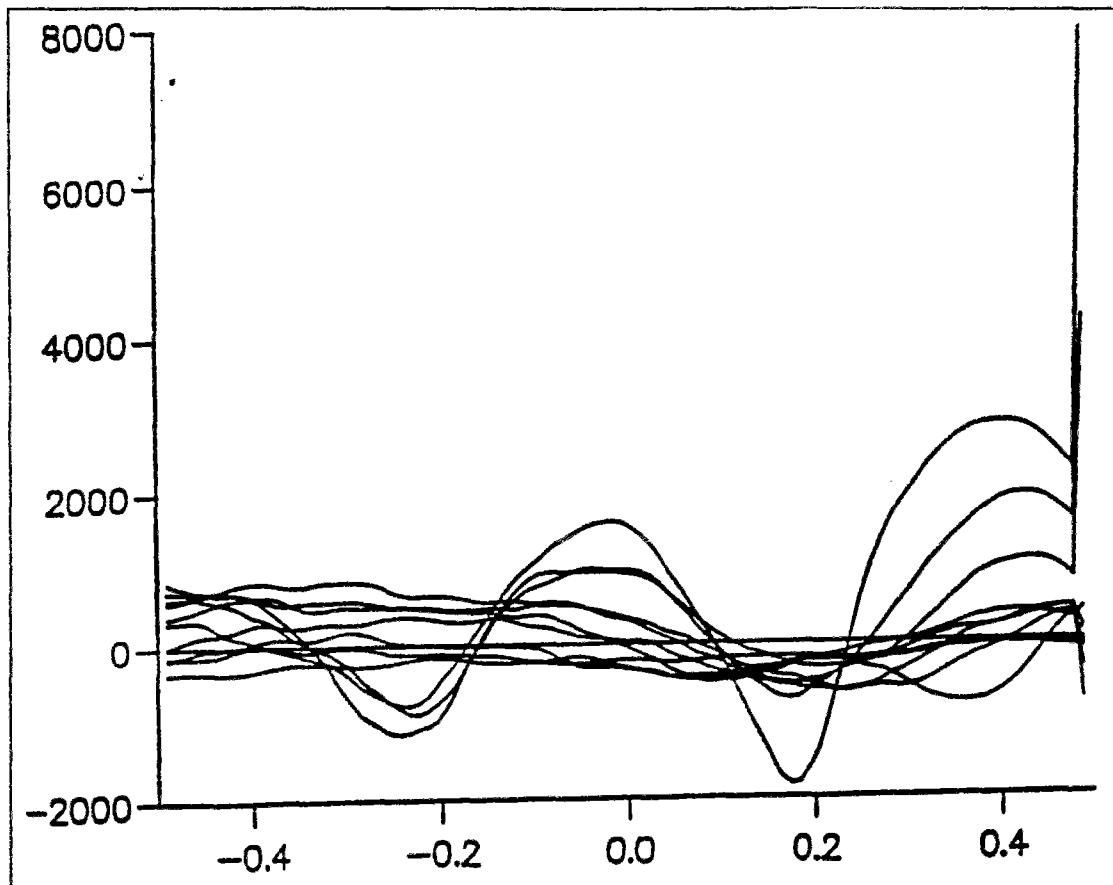


Figure 8.11: **Les efforts normaux** On distingue là aussi deux familles de courbes: avant la formation de la boucle les contraintes sont, en valeur absolue, inférieure à 1000 N, puis elles oscillent fortement et présentent une importante discontinuité en A

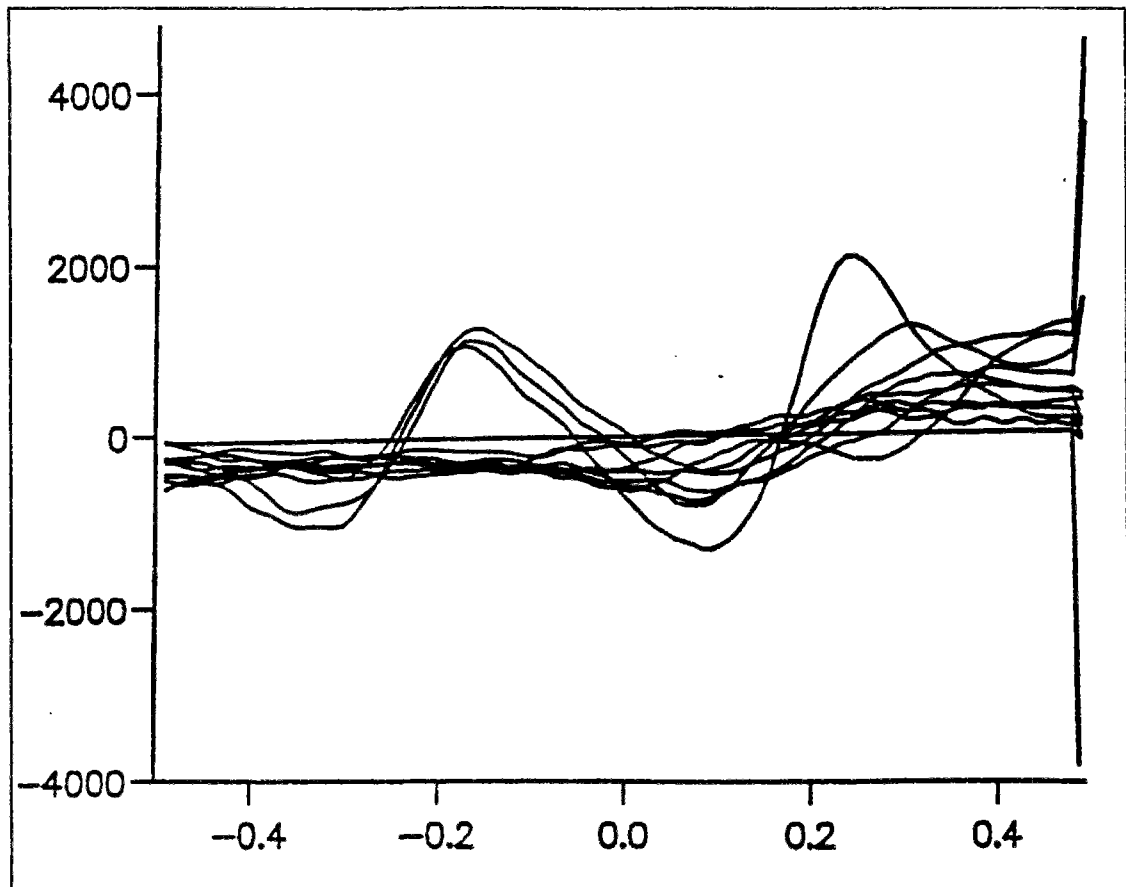


Figure 8.12: Les efforts tranchants  $T(s)$  s'annule entre  $s = 0.0$  et  $s = 0.25$  pour la première famille de courbes et en trois "endroits" distinctes pour la deuxième famille.

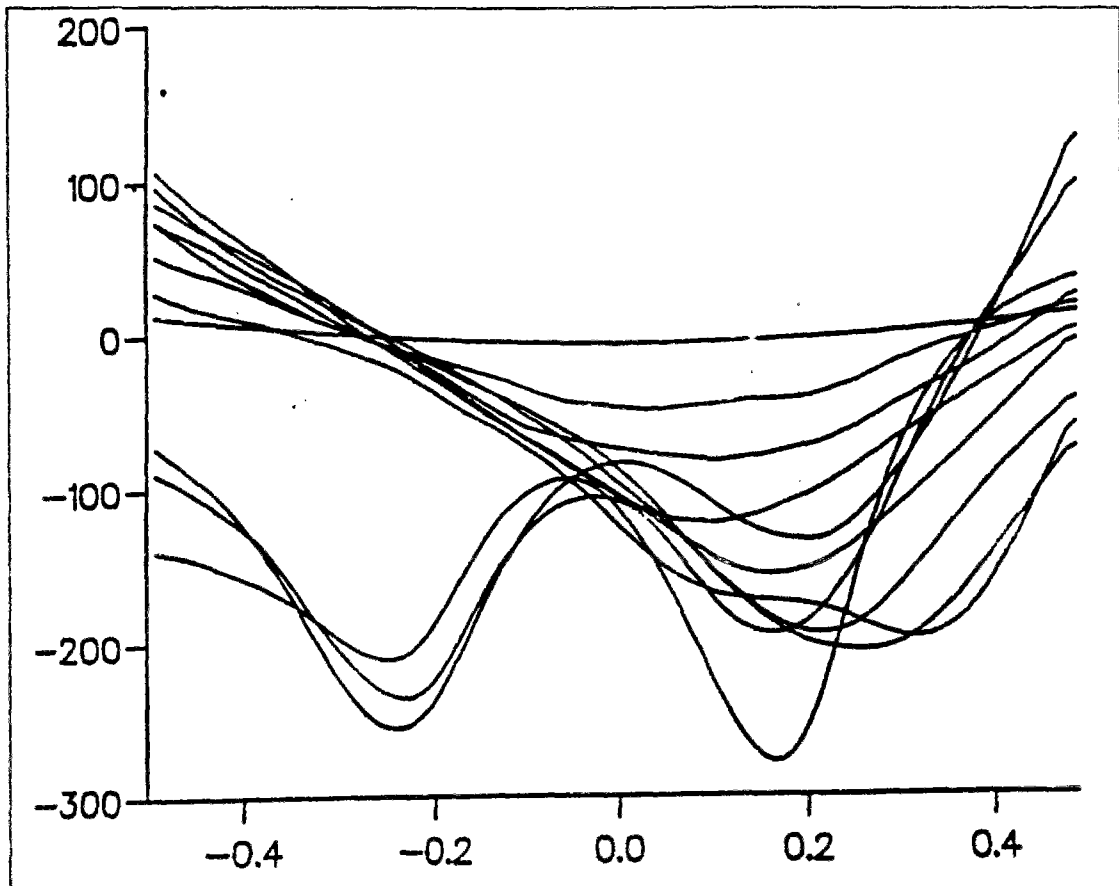


Figure 8.13: Les moments fléchissants  $M(s)$  est extrémale entre  $s = 0.0$  et  $s = 0.25$  pour la première famille de courbes et en trois "endroits" distinctes (les mêmes que pour les efforts tranchants) pour la deuxième famille, il semblerait que la formule en petites déplacements  $\frac{dM}{ds} = -T(s)$  est encors valable!

## Chapitre 9

# Conclusions

L'étude de la dynamique non linéaire des câbles nous a conduit à utiliser la géométrie différentielle des groupes de Lie. Les déplacements euclidiens décrivant le mouvement du solide rigide sont exprimés à l'aide de l'application exponentielle qui a pour arguments les torseurs :  $déplacement = e^{torseur}$ . Cette exponentielle ne se calcule pas par la série habituelle. Nous avons donné une expression pratique de cette application ainsi que l'expression de sa dérivée nécessaire au calcul de la vitesse. La composition de deux déplacements fait appel à la formule de Campbell-Hausdorff qui n'a jamais fait l'objet d'un traitement numérique à cause de son expression très lourde et difficilement développable, nous avons pu *le rendre pratique et manipulable*. Nous obtenons l'*expression exacte* en un nombre fini de termes. Il est à noter que les ordinateurs les plus puissants de nos jours arrivent à peine à exhiber jusqu'au septième terme la formule telle qu'elle est donnée dans la littérature.

La modélisation complète du comportement dynamique des câbles a conduit à une *nouvelle formulation hexadimensionnelle* de la mécanique des milieux curvilignes. La distinction de la géométrie initiale et de la géométrie actuelle, au-delà de l'hypothèse des petites perturbations, fait apparaître des termes supplémentaires s'exprimant de façon *très simple* à l'aide du crochet de Lie de l'algèbre des champs équivariants ou la connexion riemannienne du groupe des déplacements.

La prise en compte des grandes déformations nous a amené à *établir une expression non linéaire* de la loi de comportement. La partie linéaire de cette loi coïncide avec celle obtenue à partir de la loi de comportement des milieux continus tridimensionnels, de plus elle fait apparaître un coefficient, éventuellement nul, traduisant la rotation du câble autour de la courbe directrice sous l'action d'une traction ou compression (cas d'un torrent). L'expression mathématique de la loi de comportement non linéaire dépend de *15 coefficients* non nécessairement indépendants (ils sont liés aussi à la géométrie de la section) qui peuvent être déterminés par des essais de sollicitations combinées.

Nous avons consacré une bonne partie de cette thèse à la mise en place d'une méthode de résolution numérique malgré les difficultés posées par l'approximation d'une application

à valeurs dans un groupe.

Il est à noter aussi que l'idée originale d'utiliser la géométrie différentielle des groupes de Lie pour étudier la dynamique des solides rigides est dû à V. ARNOLD [9, 10]. Cette méthode a été utilisée au CERMA par D. Chevallier, son application informatique se limite au développement des équations intrinsèques en fonction des coordonnées à l'aide de logiciels de calcul formel. Cette thèse *offre une nouvelle méthode d'analyse numérique* en vue de résolution complète des équations. Nous avons abouti à un logiciel performant<sup>1</sup> qui permet de simuler des mouvements variés de câbles, en donnant à chaque instant et pour chaque point du câble, la position, la vitesse, l'accélération ainsi que les contraintes.

Il est aussi intéressant de noter qu'un bâtiment de grande hauteur peut être modélisé par des corps rigides et des poutres, et que la méthode précédente s'applique et aboutit à des équations très proches de celles discrétisées obtenues précédemment pour la dynamique des câbles.

Enfin un prolongement à ce travail serait l'étude du point de vue purement numérique de l'algorithme proposé (conditionnement, précision, optimisation, etc.). Il serait intéressant de pouvoir établir une loi de comportement anélastique prenant en compte la vitesse cinématique et la vitesse de déformation de chaque section, et d'étudier le problème à la rupture.

---

<sup>1</sup>Logiciel CABLIE écrit en Fortran  $\simeq$  3000 lignes installé sur station SUN

## Annexe A

# Les Quaternions

$\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^4$  sont les seuls espaces vectoriels du type  $\mathbb{R}^n$  tels qu'on puisse les munir d'une multiplication associative et bilinéaire qui fasse de chacun d'eux un corps; corps des réels, corps des complexes et corps des quaternions. Une des applications des quaternions est la représentation de  $SO(3)$  qui joue un rôle essentiel en cinématique des solides rigides.

### A.1 Définition

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^2$ , muni de la multiplication:

$$\forall (z, z'), (u, u') \in \mathbb{C}^2 \quad (z, z')(u, u') = (zu - z'\bar{u}', zu' + z'\bar{u})$$

est un corps (non commutatif) isomorphe au sous corps de l'anneau  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , formé des matrices du type  $\begin{pmatrix} z & -z' \\ \bar{z}' & \bar{z} \end{pmatrix}$ . Ce corps sera appelé, corps des quaternions, et noté  $\mathbb{H}$ .

#### Notation

On désigne par  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  les quaternions respectifs  $(1, 0)$ ,  $(i, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(0, i)$ . Ces quatre éléments sont linéairement indépendants. Pour tout  $q = (t + i\alpha, \beta + i\gamma) \in \mathbb{H}$ , on peut écrire  $q = t\mathbf{1} + \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ . Donc  $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  forment une base dite canonique de  $\mathbb{H}$  et vérifient de plus les relations:  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ ,  $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$ .

Soit  $\mathbb{E}_3$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{H}$  engendré par  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$ . Chaque  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$  s'écrit alors de façon unique  $\mathbf{q} = (s, \vec{\mathbf{v}})$  avec  $s \in \mathbb{R}$  et  $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{E}_3$  (on écrit parfois  $\mathbf{q} = s + \vec{\mathbf{v}}$ ).

On pose  $s = \mathcal{R}(\mathbf{q})$  (partie réelle ou scalaire de  $\mathbf{q}$ ) et  $\vec{\mathbf{v}} = \mathcal{V}(\mathbf{q})$  (partie vectorielle de  $\mathbf{q}$ )



### Propriétés

- On muni  $\mathbb{E}_3$  du produit scalaire euclidien et du produit vectoriel habituel. Pour  $\mathbf{q} = (s, \mathbf{v})$  et  $\mathbf{q}' = (s', \mathbf{v}')$  on a:

$$\mathbf{q}\mathbf{q}' = (ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')$$

- $\bar{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}$ ;  $\overline{\mathbf{q} + \mathbf{q}'} = \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}'}$ ;  $\overline{\mathbf{q}\mathbf{q}'} = \bar{\mathbf{q}'}\bar{\mathbf{q}}$

- On pose  $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}$ , on a alors:

$$N(\mathbf{q}) = N(\bar{\mathbf{q}}) = t^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad N(\mathbf{q}\mathbf{q}') = N(\mathbf{q})N(\mathbf{q}')$$

$$N(\lambda\mathbf{q}) = \lambda^2 N(\mathbf{q}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si  $\mathbf{q} \neq 0$  on a  $N(\mathbf{q})^{-1} = N(\mathbf{q}^{-1})$  et  $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{N(\mathbf{q})}$ .

## A.2 Les quaternions vectoriels et $SO(3)$

$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$  est un groupe de Lie pour la multiplication. Son algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  est l'espace vectoriel  $\mathbb{H}$  muni du crochet  $[\mathbf{q}, \mathbf{q}'] = \mathbf{q}\mathbf{q}' - \mathbf{q}'\mathbf{q}$ .

L'application exponentielle de  $\mathbb{H}^*$  est :

$$\exp \mathbf{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{q}^n / n! \quad (\text{A.1})$$

on vérifie que si  $\mathbf{q} = (0, \omega \bar{\mathbf{u}})$  alors  $\exp \mathbf{q} = (\cos \omega, \bar{\mathbf{u}} \sin \omega)$ .

**Théorème 27** La restriction de  $Ad \exp \mathbf{q}$  à  $\mathbb{E}$  pour tout  $\mathbf{q} = (0, \omega \mathbf{u}) \in \mathfrak{h}$  est une rotation vectorielle d'angle  $\omega/2$  autour de  $\bar{\mathbf{u}}$ .

### Application

La rotation la plus générale d'un espace vectoriel euclidien tridimensionnel est décrite par le produit de trois rotations. La première,  $\rho_\phi$  d'axe  $Oz$ , fait tourner le plan  $xOy$  d'un angle  $\phi$ . La seconde, d'axe  $Ox_1$ , fait tourner  $y_1Oz$  d'un angle  $\theta$ . La troisième, d'axe  $Oz_2$ , fait tourner le plan  $x_2Oy_2$  d'un angle  $\omega$ . La rotation résultante est:

$$\rho = Ad \exp \frac{\omega}{2} \bar{\mathbf{k}} \cdot Ad \exp \frac{\theta}{2} \bar{\mathbf{i}} \cdot Ad \exp \frac{\phi}{2} \bar{\mathbf{j}} = Ad \left( \exp \frac{\omega}{2} \bar{\mathbf{k}} \cdot \exp \frac{\theta}{2} \bar{\mathbf{i}} \cdot \exp \frac{\phi}{2} \bar{\mathbf{j}} \right) \quad (\text{A.2})$$

on a

$$\left( \cos \frac{\lambda}{2}, \bar{\mathbf{u}} \sin \frac{\lambda}{2} \right) = \left( \cos \frac{\omega}{2}, \bar{\mathbf{k}} \sin \frac{\omega}{2} \right) \cdot \left( \cos \frac{\theta}{2}, \bar{\mathbf{i}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \cdot \left( \cos \frac{\phi}{2}, \bar{\mathbf{k}} \sin \frac{\phi}{2} \right)$$

où

$$\cos \frac{\lambda}{2} = \cos \frac{\omega + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \frac{\lambda}{2} = \cos \frac{\omega + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\text{et } \vec{u} = \cos \frac{\omega - \phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \vec{i} + \sin \frac{\omega - \phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \vec{j} + \sin \frac{\omega + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \vec{k}$$

la rotation résultante est donc d'angle  $\lambda$  autour du vecteur  $\vec{u}$ .

### A.3 Les nombres duaux

La matrice représentant l'application adjointe d'un déplacement  $D = \exp \chi$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

où  $a$  est une matrice de  $SO_3(\mathbb{R})$  représentant la partie rotation et  $b$  une matrice appartenant à  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  en général et est liée à la partie translation (et indirectement à la partie rotation aussi). L'algèbre des matrices de la forme (A.3) est isomorphe à l'algèbre formée des couples  $(a, b) \in SO_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  munie de la loi :  $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', ab' + ba')$ . Cette remarque nous suggère d'introduire les nombres duaux dans l'étude du groupe  $\mathbb{D}$ . Ceci étant nous allons rappeler brièvement la construction et les propriétés essentielles de l'anneau  $\Delta$  des nombres duaux.

On obtient sur  $\mathbb{R}^2$  une structure d'anneau commutatif unifère, en définissant l'addition et la multiplication par les formules suivantes :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad (\text{A.4})$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', ab' + ba') \quad (\text{A.5})$$

L'anneau  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  ainsi obtenu se note  $\Delta$  et s'appelle anneau des nombres duaux. L'élément nul de  $\Delta$  est  $(0, 0)$  et l'élément unité  $1 = (1, 0)$ . L'application  $j : \mathbb{R} \mapsto \Delta$  telle que  $j(x) = (x, 0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , est un isomorphisme du corps  $\mathbb{R}$  sur un "sous-corp" de  $\Delta$ . Habituellement, on identifie  $\mathbb{R}$  au sous-corp  $j(\mathbb{R})$  à l'aide de  $j$ , de sorte que le nombre dual  $(x, 0)$  soit simplement noté  $x$ .

L'élément  $(0, 1)$  de  $\Delta$  est noté  $\varepsilon$ , on a  $\varepsilon^2 = 0$ . Par définition, le nombre dual  $\delta = (x, y)$  est égale à  $x + \varepsilon y$ , et cette écriture est unique. On pose

$$x = \Re(\delta) \quad (\text{partie réelle de } \delta)$$

$$y = \Im(\delta) \quad (\text{partie duale de } \delta)$$

On définit l'automorphisme involutif de  $\Delta : \delta \mapsto \bar{\delta}$  qui associe à chaque nombre dual  $\delta = x + \varepsilon y$  son conjugué  $\bar{\delta} = x - \varepsilon y$ . Le module de  $\delta$  est  $|\delta| = \sqrt{\delta \bar{\delta}} = |x|$ . Si  $\Re(\delta) \neq 0$ ,  $\delta$  est inversible d'inverse  $\delta^{-1} = \bar{\delta}/|\delta|^2$ , et peut se mettre sous la forme dite trigonométrique  $\delta = x e^{\varepsilon y/x}$ .

### La trigonométrie duale

La formule de Moivre sur  $\Delta$  s'écrit :

$$(x + \varepsilon y)^n = x^n + \varepsilon(n x^{n-1} y)$$

grâce à cette formule on a

$$\exp \delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \varepsilon y = (1 + \varepsilon y) \exp x \quad (A.6)$$

$$\cos \delta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\delta^{2n}}{(2n)!} = \cos x - \varepsilon y \sin x \quad (A.7)$$

$$\sin \delta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\delta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x + \varepsilon y \cos x \quad (A.8)$$

Remarquons que le deuxième terme du second membre, dans les formules précédentes, est à  $\varepsilon y$  près la dérivée du premier terme. Ce résultat peut être généraliser dans le théorème suivant :

**Théorème 28** *Soit  $f$  une fonction numérique développable en série entière au voisinage de l'origine. Alors cette fonction est prolongeable sur  $\Delta$  et on a pour tout  $\delta = x + \varepsilon y \in \Delta$  :*

$$f(\delta) = f(x) + \varepsilon y f'(x) \quad (A.9)$$

Grâce à ce théorème, on peut définir les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques réciproques ...

Par exemple

$$\arcsin \delta = \arcsin x + \varepsilon \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \quad (A.10)$$

$$\operatorname{argsh} \delta = \operatorname{argsh} x + \varepsilon \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \quad (A.11)$$

$$\arctan \delta = \arctan x + \varepsilon \frac{y}{1+x^2} \quad (A.12)$$

$$\operatorname{argth} \delta = \operatorname{argth} x + \varepsilon \frac{y}{1-x^2} \quad (A.13)$$

etc ...

## A.4 La géométrie duale

$\Delta^3$  possède une structure naturelle de  $\Delta$ -module que l'on note  $\tilde{\mathbb{E}}$ . Un vecteur  $\vec{\delta}$  de  $\tilde{\mathbb{E}}$  s'écrit d'une manière unique sous la forme  $\vec{\delta} = \vec{\delta}_1 + \varepsilon \vec{\delta}_2$ ,  $\vec{\delta}_1$  et  $\vec{\delta}_2 \in \mathbb{R}^3$ . A l'aide de cette isomorphisme ( $\mathbb{R}^6 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ), on pourra désormais représenter un champ équiprojectif sur  $\mathcal{E}$ , dans l'espace  $\tilde{\mathbb{E}}$ , en associant à chaque champ  $p \mapsto \mathbf{x}(p)$  le champ :

$$\vec{\mathbf{x}}_p = \vec{\omega}_x + \varepsilon \overrightarrow{\mathbf{x}(p)} \quad (\text{A.14})$$

Le champ équiprojectif dual  $p \mapsto \vec{\mathbf{x}}_p$  a le même domaine que  $\mathbf{x}$ , de plus c'est une application affine à valeurs "vectorielles-duales" dans  $\tilde{\mathbb{E}}$  :

$$\vec{\mathbf{x}}_p = \vec{\mathbf{x}}_m + (\varepsilon \overrightarrow{\mathfrak{R}(\mathbf{x})}) \wedge \overrightarrow{mp} \quad (\text{A.15})$$

où  $\cdot \wedge \cdot$  est le produit vectoriel dans  $\tilde{\mathbb{E}}$  défini de la même façon que dans  $\mathbb{R}^3$ . On définit aussi le produit scalaire dual de la même façon que dans  $\mathbb{R}^3$ , alors on a :

**Proposition 23** *Si  $\mathbf{x}_p$  et  $\mathbf{y}_p$  sont deux champs équiprojectifs duals associés aux champs équiprojectifs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , alors :*

$$\vec{\mathbf{x}}_p \cdot \vec{\mathbf{y}}_p = \vec{\omega}_x \cdot \vec{\omega}_y + \varepsilon [\mathbf{x} | \mathbf{y}] \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{\mathbf{x}}_p \wedge \vec{\mathbf{y}}_p = \overrightarrow{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_p} \quad (\text{A.17})$$

Notons que le module dual d'un vecteur  $\vec{\mathbf{x}}_p$  est

$$\|\vec{\mathbf{x}}_p\|_{\tilde{\mathbb{E}}} = \sqrt{\vec{\mathbf{x}}_p \cdot \vec{\mathbf{x}}_p} = \|\omega_x\| + \varepsilon \frac{[\mathbf{x} | \mathbf{x}]}{2\|\omega_x\|} \quad (\text{A.18})$$

La partie réelle  $\mathfrak{R}(\|\vec{\mathbf{x}}_p\|_{\tilde{\mathbb{E}}})$  est l'angle de rotation du déplacement défini par le champ  $\mathbf{x}$ , et  $\mathfrak{D}(\|\vec{\mathbf{x}}_p\|_{\tilde{\mathbb{E}}})$  n'est autre que l'amplitude de translation de  $\exp \mathbf{x}$  dans la direction de l'axe principal.

**Définition 48**  $\tilde{\mathbb{E}}$  désigne le  $\Delta$ -module orienté de dimension 3. Une première forme de définition des quaternions duals consiste à munir le  $\Delta$ -module  $\mathbb{H}_\Delta = \Delta \times \tilde{\mathbb{E}}$  d'une multiplication définie par :

$$\mathbf{q}\mathbf{q}' = (ss' - \vec{\mathbf{x}}_p \cdot \vec{\mathbf{y}}_p, s\vec{\mathbf{y}}_p + s'\vec{\mathbf{x}}_p + \vec{\mathbf{x}}_p \wedge \vec{\mathbf{y}}_p) \text{ si } \mathbf{q} = (s, \vec{\mathbf{x}}_p) \text{ et } \mathbf{q}' = (s', \vec{\mathbf{y}}_p) \quad (\text{A.19})$$

Cette définition est analogue à celle des quaternions réels, donc tout théorème sur  $\mathbb{H}$  en tant que module est un théorème sur  $\mathbb{H}_\Delta$ . D'où le théorème fondamental des quaternions duals :

**Théorème 29** *La restriction de  $Ad \exp q/2$  à  $\tilde{\mathbb{E}}$  pour tout  $q = (0, \vec{u}) \in \mathfrak{h}_\Delta$  est une "rotation duale" vectorielle d'angle dual  $\|\vec{u}\|_{\tilde{\mathbb{E}}}$  autour de  $\vec{u}$ , où  $\mathfrak{h}_\Delta = Lie(\mathbb{H}_\Delta)$  et  $\|\vec{u}\|_{\tilde{\mathbb{E}}} = \lambda + \varepsilon\mu$  avec  $\lambda =$  l'angle réel de rotation et  $\mu =$  l'amplitude de translation dans la direction de l'axe principal.*

**Remarque 6** *Le polynôme minimal de l'application  $ad \vec{u}$  en géométrie duale est de degré 3, il se réduit à  $P(X) = X(X^2 + \lambda^2)$ , dans ce cas les applications usuelle  $Ad \exp$ ,  $R(\cdot)$ , et  $T(\cdot)$  peuvent avoir des simples expressions bien consises et être utilisées formellement, mais sans aucune utilité numérique. Car il faudrait à chaque utilisation séparer la partie réelle et la partie duale.*

## Annexe B

# Equations générales des câbles développées par MACSYMA

### B.1 Equation 1

$$\begin{aligned}
 \text{ixt1 ro} &= - (2 \sin(\psi_{i2}) \text{ ro} \frac{d^2 z}{dt^2} + (\sin(\psi_{i2} - \psi_{i1}) - \sin(\psi_{i2} + \psi_{i1})) \text{ ro} \\
 &\frac{d^2 y}{dt^2} + (- \cos(\psi_{i2} + \psi_{i1}) - \cos(\psi_{i2} - \psi_{i1})) \text{ ro} \frac{d^2 x}{dt^2} \\
 &- \int_0^1 \frac{d\psi_{i1}}{ds} \sin(\psi_{i3} + \psi_{i2}) + \int_0^1 \frac{d\psi_{i1}}{ds} \cos(\psi_{i3} + \psi_{i2}) \\
 &- \int_0^1 \frac{d\psi_{i1}}{ds} \sin(\psi_{i3} - \psi_{i2}) + \int_0^1 \frac{d\psi_{i1}}{ds} \cos(\psi_{i3} - \psi_{i2}) \\
 &- 2 \int_0^1 \frac{d\psi_{i2}}{ds} \sin(\psi_{i3}) - 2 \int_0^1 \frac{d\psi_{i2}}{ds} \cos(\psi_{i3}) - 2 \frac{d\text{int1}}{ds})/2
 \end{aligned}$$

## B.2 Equation 2

$$\begin{aligned}
ix(2) \text{ ro} &= ((2 \sin(\psi_{i3} + \psi_{i2}) + 2 \sin(\psi_{i3} - \psi_{i2})) \text{ ro} \frac{d^2 z}{dt^2} \\
&+ (-\sin(\psi_{i3} + \psi_{i2} + \psi_{i1}) + \sin(\psi_{i3} + \psi_{i2} - \psi_{i1})) \\
&+ \sin(\psi_{i3} - \psi_{i2} + \psi_{i1}) - \sin(\psi_{i3} - \psi_{i2} - \psi_{i1}) + 2 \cos(\psi_{i3} + \psi_{i1}) \\
&+ 2 \cos(\psi_{i3} - \psi_{i1})) \text{ ro} \frac{d^2 y}{dt^2} + (-\cos(\psi_{i3} + \psi_{i2} + \psi_{i1}) \\
&- \cos(\psi_{i3} + \psi_{i2} - \psi_{i1}) + \cos(\psi_{i3} - \psi_{i2} + \psi_{i1}) + \cos(\psi_{i3} - \psi_{i2} - \psi_{i1})) \\
&- 2 \sin(\psi_{i3} + \psi_{i1}) + 2 \sin(\psi_{i3} - \psi_{i1})) \text{ ro} \frac{d^2 x}{dt^2} \\
&+ 2 \int \frac{d\psi_{i1}}{ds} \cos(\psi_{i3} + \psi_{i2}) + 2 \int \frac{d\psi_{i1}}{ds} \cos(\psi_{i3} - \psi_{i2}) - 4 \int \frac{d\psi_{i3}}{ds} \\
&- 4 \int \frac{d\psi_{i2}}{ds} \sin(\psi_{i3}) + 4 \int \frac{d\psi_{i1}}{ds} \sin(\psi_{i2}) + 4 \frac{dint2}{ds} \Big/ 4
\end{aligned}$$

B.3 Equation 3

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^2 r^2 &= ((2 \cos(\psi_{13} + \psi_{12}) + 2 \cos(\psi_{13} - \psi_{12})) r^2 \frac{d^2 z}{dt^2} \\
 &+ (-\cos(\psi_{13} + \psi_{12} + \psi_{11}) + \cos(\psi_{13} + \psi_{12} - \psi_{11})) \\
 &+ \cos(\psi_{13} - \psi_{12} + \psi_{11}) - \cos(\psi_{13} - \psi_{12} - \psi_{11}) - 2 \sin(\psi_{13} + \psi_{11}) \\
 &\quad \frac{d^2 y}{dt^2} \\
 &- 2 \sin(\psi_{13} - \psi_{11}) r^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (\sin(\psi_{13} + \psi_{12} + \psi_{11}) \\
 &+ \sin(\psi_{13} + \psi_{12} - \psi_{11}) - \sin(\psi_{13} - \psi_{12} + \psi_{11}) - \sin(\psi_{13} - \psi_{12} - \psi_{11})) \\
 &\quad \frac{d^2 x}{dt^2} \\
 &- 2 \cos(\psi_{13} + \psi_{11}) + 2 \cos(\psi_{13} - \psi_{11}) r^2 \frac{d^2 x}{dt^2} \\
 &- 2 \int \frac{d\psi_{11}}{ds} \sin(\psi_{13} + \psi_{12}) - 2 \int \frac{d\psi_{11}}{ds} \sin(\psi_{13} - \psi_{12}) + 4 \int \frac{d\psi_{13}}{ds} \\
 &- 4 \int \frac{d\psi_{12}}{ds} \cos(\psi_{13}) - 4 \int \frac{d\psi_{11}}{ds} \sin(\psi_{12}) + 4 \frac{d^2 z}{ds} \Big/ 4
 \end{aligned}$$



## B.4 Equation 4

$$\begin{aligned}
\text{xt4 ro} &= (\text{int3} \cos(\psi_2) \sin(\psi_3) - \text{int2} \cos(\psi_2) \cos(\psi_3)) \frac{dt}{ds} \\
&+ ((\text{int3} \sin(\psi_1) \sin(\psi_2) + \text{int2} \cos(\psi_1)) \sin(\psi_3)) \\
&+ (\text{int3} \cos(\psi_1) - \text{int2} \sin(\psi_1) \sin(\psi_2)) \cos(\psi_3) \frac{dy}{ds} \\
&+ ((\text{int3} \cos(\psi_1) \sin(\psi_2) - \text{int2} \sin(\psi_1)) \sin(\psi_3)) \\
&+ (-\text{int2} \cos(\psi_1) \sin(\psi_2) - \text{int3} \sin(\psi_1)) \cos(\psi_3) \frac{dx}{ds} \\
&+ \text{ii1} \left( \frac{d^2 \psi_3}{dt^2} - \frac{d\psi_1}{dt} \cos(\psi_2) \frac{d\psi_2}{dt} - \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} \sin(\psi_2) \right) r_0 \\
&+ ((i22 - i33) \frac{d\psi_1}{dt} \cos(\psi_2) \frac{d\psi_2}{dt} \sin^2(\psi_3)) \\
&+ ((i22 - i33) \left( \frac{d\psi_2}{dt} \right)^2 + (i33 - i22) \left( \frac{d\psi_1}{dt} \right)^2 \cos(\psi_2) \cos(\psi_3) \sin(\psi_3)) r_0 \\
&+ (i33 - i22) \frac{d\psi_1}{dt} \cos(\psi_2) \frac{d\psi_2}{dt} \cos(\psi_3) r_0 \\
&+ (\text{int5} \frac{d\psi_2}{ds} + \text{int3} \cos(\psi_1) \sin(\psi_2) + \text{int6} \frac{d\psi_1}{ds} \cos(\psi_2)) \\
&- (\text{int2} \sin(\psi_1)) \sin(\psi_3) + (\text{int6} \frac{d\psi_2}{ds} - \text{int2} \cos(\psi_1) \sin(\psi_2)) \\
&- (\text{int5} \frac{d\psi_1}{ds} \cos(\psi_2) - \text{int3} \sin(\psi_1)) \cos(\psi_3) + \frac{d\text{int4}}{ds}
\end{aligned}$$

### B.5 Equation 5

$$\begin{aligned}
 \text{int5} \text{ no} &= (\text{int1} \cos(\psi_2) \cos(\psi_3) + \text{int3} \sin(\psi_2)) \frac{d\psi_2}{ds} \\
 &+ (-\text{int1} \cos(\psi_1) \sin(\psi_3) + \text{int1} \sin(\psi_1) \sin(\psi_2) \cos(\psi_3) \\
 &- \text{int3} \sin(\psi_1) \cos(\psi_2)) \frac{d\psi_1}{ds} + \text{int1} \sin(\psi_1) \sin(\psi_3) \\
 &+ \text{int1} \cos(\psi_1) \sin(\psi_2) \cos(\psi_3) - \text{int3} \cos(\psi_1) \cos(\psi_2)) \frac{d\psi_3}{ds} \\
 &+ ((\text{i33} - \text{i11}) \frac{d\psi_2}{dt} \sin(\psi_3) + (\text{i11} - \text{i33}) \frac{d\psi_1}{dt} \cos(\psi_2) \cos(\psi_3)) \frac{d\psi_3}{dt} \\
 &+ (\text{i11} - \text{i33}) \frac{d\psi_1}{dt} \sin(\psi_2) \frac{d\psi_2}{dt} \sin(\psi_3) \\
 &+ (\text{i33} - \text{i11}) \frac{d\psi_1^2}{dt} \cos(\psi_2) \sin(\psi_2) \cos(\psi_3) \text{ no} \\
 &+ \text{i22} (-\frac{d\psi_2}{dt} \sin(\psi_3) \frac{d\psi_3}{dt} + \frac{d\psi_1}{dt} \cos(\psi_2) \cos(\psi_3) \frac{d\psi_3}{dt} \\
 &- \frac{d\psi_1}{dt} \sin(\psi_2) \frac{d\psi_2}{dt} \sin(\psi_3) + \frac{d^2\psi_1}{dt^2} \cos(\psi_2) \sin(\psi_3) \\
 &+ \frac{d^2\psi_2}{dt^2} \cos(\psi_3) \text{ no} - \text{int6} \frac{d\psi_3}{ds} + (\text{int1} \sin(\psi_1) - \text{int4} \frac{d\psi_2}{ds}) \sin(\psi_3) \\
 &+ (\text{int1} \cos(\psi_1) \sin(\psi_2) + \text{int4} \frac{d\psi_1}{ds} \cos(\psi_2)) \cos(\psi_3) \\
 &+ \text{int6} \frac{d\psi_1}{ds} \sin(\psi_2) - \text{int3} \cos(\psi_1) \cos(\psi_2) + \frac{d\text{int5}}{ds}
 \end{aligned}$$

B.6 Equation 6

$$\begin{aligned}
 \text{ext6 } r_0 &= (- \text{int1 } \cos(\psi_2) \sin(\psi_3) - \text{int2 } \sin(\psi_2)) \frac{dz}{ds} \\
 &+ (- \text{int1 } \sin(\psi_1) \sin(\psi_2) \sin(\psi_3) - \text{int1 } \cos(\psi_1) \cos(\psi_3)) \\
 &+ \text{int2 } \sin(\psi_1) \cos(\psi_2) \frac{dy}{ds} + (- \text{int1 } \cos(\psi_1) \sin(\psi_2) \sin(\psi_3)) \\
 &+ \text{int1 } \sin(\psi_1) \cos(\psi_3) + \text{int2 } \cos(\psi_1) \cos(\psi_2) \frac{dx}{ds} \\
 &+ ((i22 - j11) \frac{d\psi_1}{dt} \cos(\psi_2) \sin(\psi_3) + (i22 - j11) \frac{d\psi_2}{dt} \cos(\psi_3)) \frac{dp}{dt} \\
 &+ (i11 - j22) \frac{d\psi_1}{dt} \cos(\psi_2) \sin(\psi_2) \sin(\psi_3) \\
 &+ (i11 - j22) \frac{d\psi_1}{dt} \sin(\psi_2) \frac{d\psi_2}{dt} \cos(\psi_3)) r_0 \\
 &+ i33 (- \frac{d\psi_1}{dt} \cos(\psi_2) \sin(\psi_3) \frac{d\psi_3}{dt} - \frac{d\psi_2}{dt} \cos(\psi_3) \frac{d\psi_3}{dt} \\
 &- \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} \sin(\psi_3) - \frac{d\psi_1}{dt} \sin(\psi_2) \frac{d\psi_2}{dt} \cos(\psi_3)) \\
 &+ \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} \cos(\psi_2) \cos(\psi_3)) r_0 + \text{int5 } \frac{d\psi_3}{ds} \\
 &- \text{int1 } \cos(\psi_1) \sin(\psi_2) - \text{int4 } \frac{d\psi_1}{ds} \cos(\psi_2) \sin(\psi_3) \\
 &+ (\text{int1 } \sin(\psi_1) - \text{int4 } \frac{d\psi_2}{ds} \cos(\psi_3) - \text{int5 } \frac{d\psi_1}{ds} \sin(\psi_2) \\
 &+ \text{int2 } \cos(\psi_1) \cos(\psi_2) + \frac{d\text{int6}}{ds}
 \end{aligned}$$

time= 27942 msec

# Bibliographie

- [1] **J.F. Adams**, *Lectures on Lie Groups*, Midway Reprint, The University of Chicago Press, 1969.
- [2] **K. Ahmadi Kashani & A.J. Bell** *The analysis of cables subject to uniformly distributed loads*. Eng. Struc. 1988, Vol.10, July.
- [3] **K. Ahmadi Kashani**, *Vibration of Hanging cable*. Comp. Struc. Vol.31, No 5, pp 699-715, 1989.
- [4] **I. Alame & P. Argoul**, *Un nouveau modèle du comportement dynamique des bâtiments*, Actes du congrès StruCoMe, pp 689-701, Paris, 1992.
- [5] **I. Alame & P. Argoul**, *Le mouvement de torsion dans les bâtiments soumis à des séismes*, Rapports de recherche 1 et 2, Laboratoire des Matériaux et des Structures de Génie Civil, UMR 113 - CNRS-LCPC, 1992.
- [6] **J.C. Alexander & S.S. Antman**, *The Ambiguous Twist of Love*, Quaterly of Applied Math., vol. 2, pp. 83-92, 1982.
- [7] **S.S. Antman**, *The theory of rods*, in : Handbuch der Physik, vol. VIa/2, Springer, Berlin, 1972.
- [8] **S.S. Antman & C.S. Kenney**, *Large buckled states of nonlinear elastic rods under torsion, thrust and gravity*, Arch. Rat. Mech. Anal. 76(4), pp. 289-337, 1981.
- [9] **V.I. Arnold**, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, 1978.
- [10] **V.I. Arnold**, *Sur la Géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier, 16 319-361, 1966.
- [11] **V.I. Arnold**, *Caractère hamiltonien des équations d'Euler dans la dynamique des corps rigides et de fluides parfaits*, Uspechy Mat-Nauk, t. 24, No 6, pp. 225-226, 1969.
- [12] **J.F. Bourgat, P. Le Tallec & S. Mani**, *Modélisation et calcul des grands déplacements de tuyaux élastiques en flexion-torsion*. Journal de mécanique théorique et appliquée, Vol.7, No.4, 1988, p 379-408.

- [13] J.F. Bourgat & J.M. Dumay & R. Glowinski, *Large Displacement Calculation of Flexible Pipelines by Finite Element and Nonlinear Programming Methods*, S.I.A.M. J. Sci. Stat. Comput., vol. 1, No 1, pp. 34-81, 1980.
- [14] M. Bausset, *Mécanique des systèmes de solides*, Masson, Paris, 1990.
- [15] D. Chevallier, *Groupes de Lie et mécanique des systèmes de corps rigides*, Mathematische Modellierung ein Arbeitsbuch Für Seminare, Mac-Graw Hill, pp. 231-269, 4 Oct. 1986.
- [16] D. Chevallier, *Lie algebras, modules, dual quaternions and algebraic methods in kinematics*, Mech. and Mach. Theory, (1991).
- [17] D. Chevallier & J.M. Helmer, *La formation des équations de la dynamique* Annales des Ponts et Chaussées 1<sup>er</sup> trim 1984.
- [18] D. Chevallier, *Groupes de Lie et mécanique des systèmes de corps rigides* Séminaire "MODELISATION MATHEMATIQUE" 1-4 Octobre 1984-KASSEL.
- [19] D. Chevallier, *Géométrie des groupes de Lie et Théorie Newtonienne de l'Inertie*. C.R.A.S. Paris T 292, 539-542, 1981.
- [20] D. Chevallier, *Généralisation de l'espace-temps Néoclassique de Noll et Structure des Théories Mécaniques Newtoniennes*. C.R.A.S. Paris T 292, 503-506, 1981.
- [21] P.G. Ciarlet & G. Geymonat, *Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible*, C.R. Acad. Sci. Paris, série A, pp. 295-426, 1982.
- [22] R.W. Clough & J. Penzien, (1975). *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, pp. 239-241 and 557-562.
- [23] E. & F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris, 1909.
- [24] G.A. Costello, *Theory of Wire Rope*, Mechanical Engineering Series, Springer-Verlag, 1990.
- [25] G.A. Costello & J.W. Phillips, *A more theory for twisted wire cables*, Journal of the Engineering Mecanics Division, ASCE, 100 (No. EM5, Proc. Paper 10856), 1096-1099, 1974.
- [26] G. Darbre, *In-plane free vibration of supported/free parabolic cables*. Eng. Struc. 1989, vol. 18, pp 435-443, 1989.
- [27] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse. Tomes 3 et 4* Gautier-Villars 1974.
- [28] Mme Ferrand, *Géométrie différentielle* Université Paris VI 1982-1983.
- [29] P. Germain, *Mécanique I et II* X école polytechnique ellipses 1986.

- [30] **R. Glowinski**, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [31] **Roger Godement**, *Introduction à la théorie des groupes de Lie* Publications mathématiques de l'université Paris VII 1982.
- [32] **P.C.M. Gortemaker**, *Galloping conductors and evaluation of the effectiveness of in-open dampers* Keme Scientific and Technical Reports 2 (4), 1984, pp.27-39.
- [33] **W. T. van Horssen**, *Asymptotics for a system of nonlinearly coupled wave equations with application to the galloping oscillations of overhead transmission lines*. Quarterly of applied mathematics, vol. XLVII, No 2, pp 197-219, 1989.
- [34] **S.C-S. Huang** (1983). Measurements and Interpretation of full scale building responses, *Ph.D - University of California -, Los Angeles*.
- [35] **J. Irvine & Caughey**, *The linear theory of free vibration of a suspended cable* 1974
- [36] **D. Josipovici**, *Rapport de stage P.S.A* 1989.
- [37] **C.L. Kan & A.K. Chopra**, *Elastic earthquake analysis of torsionally coupled multistorey buildings*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, University of California, Berkeley, California, Vol. 5, 395-412, 1977.
- [38] **T.R. Kane & D.A. Levison**, *DYNAMICS: Theory and applications*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, McGraw-Hill, 1985.
- [39] **D. Karamehetty**, *Some geometrical characteristics of wires in wire ropes and cables*, Wire Journal, Nov. pp. 98-104, 1980.
- [40] **S. Kobayashi & K. Nomizu**, *Foundations of differential geometry*, Interscience Pub, N 15 Vol 1 and 2.
- [41] **M. Langlois**, *Contribution à l'étude du mouvement du corps rigide à n dimensions autour d'un point fixe*, C.I.M.E., I. ciclo, Stereodynamics, ed. Cremoncse, Roma, 1972.
- [42] **M. Laredo**, *Grands bâtiments - contreventements - dynamique des structures - calcul automatique*. Editions Eyrolles, 1977.
- [43] **J. Lelong-Ferrand & J.M. Arnaudès**, *Cours de mathématiques tome 3 : Géométrie et cinématique*, Dunod Université, Bordas Paris, 1978.
- [44] **J. Lerbet**, *Rapport intermédiaire sur le Galop* CERMA 1988.
- [45] **J. Lerbet**, *Dynamique des milieux curvilignes* CERMA 1989.

- [46] M. Lutchansky, *Axial stresses in armor wires of bent submarine cables*, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, pp. 688-691, Aug. 1969. CERMA 1989.
- [47] L. Meirovitch, (1975). Elements of vibration analysis, *Mc Graw-Hill*.
- [48] J.E Marsden & T. JR. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, PRENTICE-HALL, INC., New Jersey, 1983.
- [49] J-C Pichon, *Groupes de lie. Représentations linéaires et applications* Hermann 1973.
- [50] H. Poincaré, *Sur une nouvelle forme des équations de la mécanique*, C.R. Acad. Sc, Paris, t. 132, No 7, 1<sup>er</sup> semestre, pp. 369-371, 1901.
- [51] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 1902.
- [52] M. Raof & R.E. Hobbs, *The bending of spiral strand and armored cables close to terminations*, Proceedings of 3rd Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, ASME, New York, 1984, Vol. 2, pp. 198-205. Also to appear in ASME, Jnl of Energy Resources Technology, 1984.
- [53] Rega, Vertroni, Bendettini, *Parametric analysis of large amplitude free vibrations of a suspended cable* 1983.
- [54] A.S Richardson, J.R. Martucelli, W.S. Price, *Research study on galloping of electric power transmission lines, Wind effects on building and structures* proc. of the conference held at the National Physical Laboratory, Teddington, England, 26-28 Jun 1963, London, HMSO, 1965, Vol.2, pp.611-586.
- [55] A. Rigolot, *Sur une théorie asymptotique des poutres*, J. Méca, vol 11, pp 673-703, 1972.
- [56] A. Rigolot, *Sur une théorie asymptotique des poutres droites*, Thèse de Doctorat ès Sciences mathématiques, Université Paris 6, 1976.
- [57] A. Rigolot, *Déplacements finis et petites déformations des poutres droites*, J. Méca, vol 11, pp 673-703, 1977.
- [58] A. Rosen, R.G. Loewy, M.B. Mathew, *Nonlinear Dynamics of Slender Rods* AIAA Journal, Vol.25, No.4, pp 611-619 April 1987
- [59] J. Salençon, *Mécanique des milieux continus IIX* école polytechnique ellipses 1988.
- [60] J. Sejnoha, J. Bittnavora, V. Blazek, M. Kalouskova (1990). Mathematical models for a dynamic analysis of tall buildings, Staveb. Cas., 38, c. 2, VEDA, Bratislava
- [61] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, W.A. Benjamain, 1965.

- 
- [62] M. Sibony & J.-C Mardon, *Approximations et équations différentielles*, Hermann 1984.
- [63] J.C Simo & Vu-Quoc, *On the dynamics in space of rods undergoing large motions-A geometrically exact approach* Computer methods in applied mechanics and engineering 66 (1988) 125-161.
- [64] B.S. Smith et M. Cruvellier (1991). General planar model for analyzing high-rise structures, *Journal of Structural Engineering*, Vol 117, N°11 , 3228-3238.
- [65] Syed Amjad ALI, *Dynamic response of sagged cables* Computers and Structures Vol.23, No.1,pp51-57,1986
- [66] I. Tadjbakhsh, *The variational theory of the Extensible Elastica*, Int. J. Eng. Sci., 4, pp. 433-450, 1966.
- [67] C. Truesdell, *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus* Masson 1974.
- [68] J.P. Touret, *Modélisation des bâtiment dissymétriques*, Colloque National AFPS "Génie parasismique et aspects vibratoires dans le génie civil", Saint-Rémy-Les-Chevreuse(France), 18-20 avril 1989.
- [69] V.S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Prentice-Hall, 1974.
- [70] S.A. Velinsky, *Analysis of wire ropes with complex cross sections*, Ph.D. thesis, Departement of Theoretical and Applied Mecanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1987.
- [71] S.A. Velinsky & J.D. Schmidt, *A simplified treatise on the effect of wear in cables*, Journal of Offshore Mecanics and Arctic Engineering, Trans. ASME, 110(1), 32-37, 1988.
-