



**HAL**  
open science

# Algèbre de Lie et cinématique des mécanismes en boucles fermées

Kuangrong Hao

► **To cite this version:**

Kuangrong Hao. Algèbre de Lie et cinématique des mécanismes en boucles fermées. Géométrie algébrique [math.AG]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995. Français. NNT: . pastel-00569136

**HAL Id: pastel-00569136**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00569136>**

Submitted on 24 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 19 792 (4)

THESE DE DOCTORAT

présentée à

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

spécialité

MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

---

ALGEBRE DE LIE ET CINEMATIQUE DES  
MECANISMES EN BOUCLES FERMEES

---

par

KUANGRONG HAO

Soutenu le 15 Septembre 1995, devant le Jury d'Examen composé de :

MME. PASCAL MADELEINE	PRÉSIDENT
MM. HERVÉ JACQUES-MARIE	RAPPORTEUR
VALLÉE CLAUDE	RAPPORTEUR
CHEVALLIER DOMINIQUE P.	DIRECTEUR DE THÈSE
RIGOLOT ALAIN	EXAMINATEUR
LERBET JEAN	EXAMINATEUR





*Ma plus profonde reconnaissance va tout d'abord à Monsieur le professeur Dominique CHEVALLIER qui a dirigé cette thèse. Il a su m'aider dans les problèmes mathématiques tout au long de cette thèse. Sa rigueur scientifique et son souci constant de perfection sont pour moi des exemples, bien que difficiles à suivre.*

*Je voudrais exprimer toute ma gratitude et mon respect à Madame Madeleine PASCAL, Professeur à l'Université d'Evry Val d'Essonne qui a accepté de présider ce jury.*

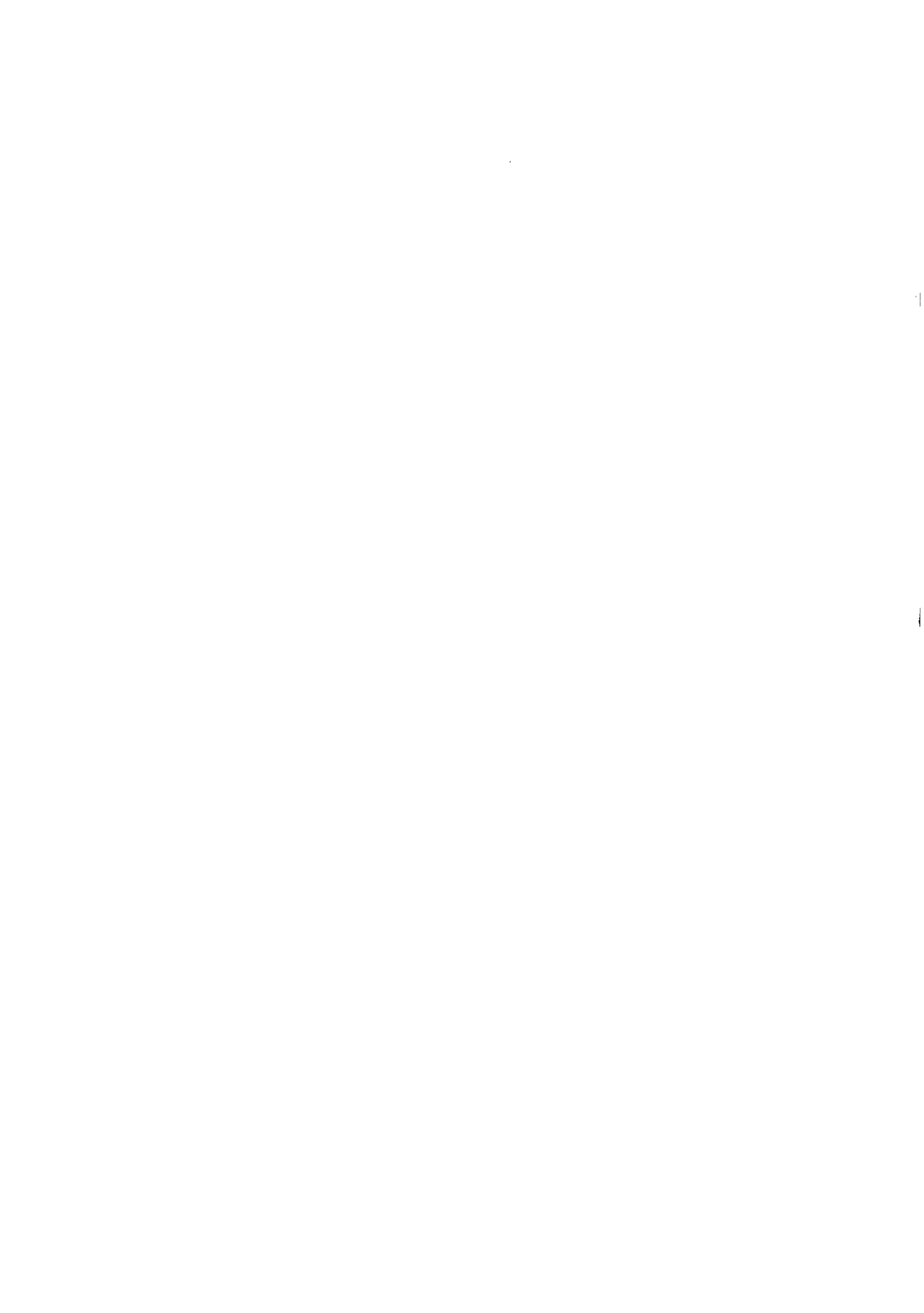
*Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur Jacques M. HERVÉ, Professeur à l'École Centrale Paris, et à Monsieur Claude VALLÉE, Professeur à l'Université de Poitiers, pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mes travaux, malgré leur grande charge de travail, et pour leurs remarques qui ont contribué à améliorer ce travail.*

*Je remercie vivement à Monsieur Alain RIGOLOT, Professeur des universités, qui m'a fait l'honneur d'examiner mes travaux et de participer au jury de cette thèse.*

*Je veux exprimer ici toute ma reconnaissance à Monsieur Jean LERBET pour son aide précieuse tout au long de cette thèse et sa participation dans le jury.*

*J'adresse mes sincères remerciements à la direction de l'École Nationale des Ponts et Chaussées qui m'a accueilli dans son laboratoire de Mathématiques appliquées durant ma thèse. Je n'oublie pas non plus tous les membres du CERMICS, Mesdames Véronique SERRE et Imane HAMADE pour leur gentillesse et leurs compétences multiples, ainsi que Christian MONNET et tous mes camarades du centre pour leur soutien amical et qui m'ont permis de passer un séjour agréable.*





# Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude du comportement cinématique des mécanismes bouclés de corps rigides. Le modèle mathématique d'un tel mécanisme est l'équation de fermeture  $f(q_1, \dots, q_m) = e$  où  $q_1, \dots, q_m$  sont des coordonnées articulaires et  $f$  est une fonction analytique à valeur dans un groupe de Lie. L'étude des propriétés cinématiques se ramène à celle de l'ensemble des configurations admissibles  $f^{-1}(e)$  qui est une sous-variété dans le cas régulier où  $f$  est une subimmersion. Par contre, l'étude est beaucoup plus difficile lorsque  $f$  possède des singularités.

On utilise comme outil fondamental le formalisme de la géométrie différentielle des groupes de Lie pour le group des déplacements et la structure de  $\Delta$  - module de son algèbre de Lie, ceci permet une écriture simple et condensée des équations de la cinématique et facilite leur traitement symbolique.

Nous avons montré que l'analyse au deuxième ordre de l'équation de fermeture est suffisante pour les mécanismes  $6R$  paradoxaux. Un algorithme d'évaluation du rang d'un ensemble de champs antisymétriques (équi-projectifs) est développé et est utilisé pour étudier les processus de génération des sous algèbres de Lie. Nous avons proposé également des méthodes de cinématique inverse pour des mécanismes spatiaux, ces méthodes permettent de résoudre l'équation de fermeture indépendamment d'un choix des coordonnées et d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes de résolution: notamment, la méthode simplifie considérablement la procédure de résolution pour les mécanismes  $6R$  spatiaux.

# Abstract

The aim of this work is the study of the kinematic behavior of the closed mechanisms composed of rigid bodies. The mathematical model of such a mechanism is the closure equation  $f(q_1, \dots, q_m) = e$  where  $q_1, \dots, q_m$  are the articulate coordinates and  $f$  is an analytic function valued in the Lie displacement group. The study of the kinematic property lies to the one of the set of admissible configurations  $f^{-1}(e)$  which is a submanifold in the regular case where  $f$  is a subimmersion however, the research is much more difficult when  $f$  has some singularities.

We use as a fundamental tool the formalism of the differential geometry of the Lie groups for the displacement group and the  $\Delta$  - modulo structure of its Lie algebra, that permits a simple and condensed writing of the kinematic equations and makes easier their symbolic treatment.

We have demonstrated that the analyze of the closure equation up to the second order is sufficient for the  $6R$  paradoxical mechanisms. An algorithm to estimate the rank of a set of skew-symmetric fields is developed and the generations of Lie sub algebra are studied using this algorithm. We have proposed also some methods for inverse kinematic for the spatial mechanisms permitting to solve the closure equation independently of the choice of coordinates and to obtain the necessary and sufficient conditions for the solutions. Especially, the method for the spatial  $6R$  mechanisms simplify considerably the procedure of resolution.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
0.1 Étude algébrique de l'équation de fermeture . . . . .	8
0.2 Calcul des champs antisymétriques avec les nombres duaux . . . . .	9
0.3 Solutions analytiques des mécanismes fermés . . . . .	10
<b>1 Concepts et outils mathématiques</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction . . . . .	15
1.2 Espace affine euclidien et déplacements . . . . .	16
1.2.1 Espace affine euclidien . . . . .	16
1.2.2 Déplacements dans l'espace affine euclidien . . . . .	17
1.2.3 Classification des déplacements . . . . .	18
1.3 L'algèbre des champs antisymétriques . . . . .	19
1.3.1 Définition des champs antisymétriques . . . . .	19
1.3.2 La représentation adjointe de $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ sur $\mathfrak{D}$ . . . . .	22
1.3.3 La forme de Klein et l'axe central . . . . .	23
1.3.4 Structure de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{D}$ . . . . .	23
1.4 Les nombres duaux et les champs antisymétriques . . . . .	24
1.4.1 Nombre dual . . . . .	24
1.4.2 Multiplication des champs antisymétriques par les nombres duaux . . . . .	25
1.4.3 La représentation adjointe de $\mathfrak{D}$ . . . . .	26
1.4.4 Exponentielles des champs antisymétriques . . . . .	27
1.4.5 Déplacement dans l'ensemble d'application linéaire . . . . .	27
1.4.6 Représentation des quaternions duaux et des applications adjointes . . . . .	30
<b>2 Modélisation des systèmes mécaniques - étude cinématique</b>	<b>33</b>
2.1 Notion de liaison . . . . .	33
2.1.1 Liaison entre deux corps, degré de liberté . . . . .	33
2.1.2 Représentation des déplacements avec sous groupe à un paramètre . . . . .	35
2.1.3 Classification des chaînes cinématiques et sous-groupes de Lie . . . . .	35
2.1.4 Notion de graphe d'un mécanisme . . . . .	36
2.2 Traitement des mécanismes bouclés . . . . .	37
2.2.1 Description du problème, équation de fermeture . . . . .	38
2.2.2 Différentiabilité de l'équation de fermeture . . . . .	40
2.2.3 Différentielle de l'équation de fermeture au premier ordre . . . . .	41
2.2.4 Étude locale de $f(q)$ . . . . .	44

2.2.5	Dérivée d'ordre 2 . . . . .	45
2.2.6	Configuration singulière . . . . .	48
2.2.7	Les mécanismes plans . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Condition de transversalité et mécanismes</b>	<b>55</b>
3.1	Sous variétés et l'espace tangent . . . . .	55
3.1.1	Définition de sous-variété . . . . .	55
3.1.2	Espace tangent à une sous-variété . . . . .	59
3.2	Théorèmes de transversalité . . . . .	59
3.3	Étude des mécanismes $6\mathbf{R}$ spatiaux . . . . .	63
3.3.1	$6\mathbf{R}$ espace de Wohlhart . . . . .	63
3.3.2	Application de condition de transversalité . . . . .	65
3.4	Exemples . . . . .	67
3.4.1	Les quatre-barres parallèles . . . . .	67
3.4.2	Un mécanisme de Bricard . . . . .	70
3.4.3	Un exemple de mécanisme de Bennett . . . . .	73
3.4.4	La salière de Papegay . . . . .	76
3.4.5	Mécanisme parallèle . . . . .	78
3.5	Conclusion . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Étude du rang d'ensemble de champs antisymétriques sur <math>\Delta</math></b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	84
4.1.1	Définition d'une base de $\mathfrak{D}$ sur $\Delta$ . . . . .	84
4.1.2	Changement de base sur $\Delta$ . . . . .	86
4.2	Problème du rang d'un ensemble de champs antisymétriques . . . . .	87
4.3	Le cas $r_{\Delta} = 3$ . . . . .	93
4.3.1	Condition de rang . . . . .	93
4.3.2	Sous-algèbre engendrée . . . . .	95
4.4	Le cas $r_{\Delta} = 2$ . . . . .	98
4.4.1	Condition de rang . . . . .	98
4.4.2	Sous-algèbre engendrée . . . . .	100
4.5	Le cas $r_{\Delta} = 1$ . . . . .	103
4.5.1	Condition de rang . . . . .	103
4.5.2	Sous-algèbre engendrée . . . . .	105
4.5.3	Le cas $r_{\Delta} = 0$ . . . . .	107
4.6	Equation de fermeture d'ordre supérieur à 2 . . . . .	109
4.7	Conclusion . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Problème de singularité</b>	<b>115</b>
5.1	Classification des singularités . . . . .	116
5.1.1	Singularités de type I . . . . .	116
5.1.2	Singularités de type II . . . . .	117
5.1.3	Singularités de type III . . . . .	117
5.2	Définition de la famille d'équations de fermeture . . . . .	117
5.2.1	Matrice jacobienne . . . . .	119
5.2.2	Analyse des vitesses . . . . .	122

5.2.3	Analyse des accélérations . . . . .	123
<b>6</b>	<b>Solution analytique des mécanismes bouclés – I</b>	<b>125</b>
6.1	Introduction . . . . .	125
6.2	Présentation des problèmes . . . . .	126
6.2.1	Déplacement d'un mécanisme fermé . . . . .	128
6.3	Mécanismes plans et hélicoïdaux . . . . .	130
6.3.1	Exemples des mécanismes plans et hélicoïdaux . . . . .	130
6.4	Déplacements hélicoïdaux . . . . .	141
6.5	Produit de deux déplacements hélicoïdaux . . . . .	144
6.6	Produit de trois déplacements hélicoïdaux spatiaux . . . . .	148
6.6.1	Condition pour qu'un déplacement hélicoïdale puisse être décomposé en produit de trois déplacements hélicoïdaux . . . . .	149
6.6.2	Résolution . . . . .	152
6.6.3	Analyse le cas singulier . . . . .	155
6.6.4	Angles de Briant . . . . .	161
6.6.5	Angles d'Euler duaux . . . . .	162
<b>7</b>	<b>Solution analytique des mécanismes bouclés – II</b>	<b>165</b>
7.1	Groupe invariant et produits scalaires . . . . .	165
7.2	Résolution des équations de fermeture . . . . .	166
7.2.1	Expression explicite de $q_1$ et $q_3$ . . . . .	167
7.2.2	Expression explicite de $q_2$ et $q_4$ . . . . .	169
7.2.3	Équivalence entre les solutions analytiques et les équations de fermeture . . . . .	170
7.3	Utilisation les paramètres de Denavit-Hartenberg . . . . .	171
7.3.1	Expression explicite des paramètres articulaires dépendants . . . . .	173
7.4	Analyse des mécanismes quatre barres spatiaux . . . . .	175
7.4.1	Mécanisme de Bennett . . . . .	176
7.4.2	Le mécanisme sphérique . . . . .	179
7.4.3	Analyse des configurations singulières . . . . .	182
7.5	Un mécanisme 6R spatial – un mécanisme de Bricard . . . . .	182
<b>8</b>	<b>Un algorithme de cinématique inverse des mécanismes 6R spatiaux</b>	<b>187</b>
8.1	Introduction . . . . .	187
8.2	Résolution de l'équation de fermeture . . . . .	187
8.2.1	Évaluation de l'opérateur intermédiaire $R$ . . . . .	188
8.2.2	Évaluation de $q_1, q_2$ , et $q_6$ . . . . .	190
8.2.3	Évaluation de $q_3, q_4$ et $q_5$ . . . . .	191
8.2.4	Équivalence de l'équation de fermeture et les solutions analytiques . . . . .	191
8.3	Utilisation des paramètres de Denavit-Hartenberg . . . . .	193
8.3.1	Évaluation de l'opérateur $R$ . . . . .	193
8.3.2	Évaluation de $q_1, q_2$ , et $q_6$ . . . . .	194
8.3.3	Évaluation de $q_3, q_4$ et $q_5$ . . . . .	195
	<b>Conclusion</b>	<b>197</b>

---

<b>A</b>	<b>Annexe du chapitre 4</b>	<b>203</b>
A.1	$r = r_{\Delta} = 3$ . . . . .	203
A.2	$r = r_{\Delta} = 2$ . . . . .	204
<b>B</b>	<b>Annexe du chapitre 6</b>	<b>207</b>
B.1	la matrice jacobienne de quatre barres . . . . .	207
B.2	la matrice jacobienne de cinq barres . . . . .	207
<b>C</b>	<b>Dérivée d'ordre 2 et la condition de transversalité</b>	<b>209</b>
C.1	Code de calcul MAPLE . . . . .	209
C.2	Description d'un système mécanique . . . . .	210
C.3	Dérivée d'ordre 2 de l'équation de fermeture . . . . .	213
C.4	Vérification de la condition de transversalité . . . . .	216
C.5	Les vecteurs du robot DELTA . . . . .	218
C.5.1	Un mécanisme parallèle . . . . .	218
<b>D</b>	<b>Programme de produit intérieur dual</b>	<b>225</b>
<b>E</b>	<b>Annexe du chapitre 7 – Calculs de mécanismes 4-barre spatiaux</b>	<b>227</b>

## Notations

Sympole	Signification
$\mathbb{R}$	Ensemble de nombres réels.
$\Delta$	Ensemble de nombres duaux.
$\mathbb{D}$	Groupe de déplacement qui est un groupe de lie,
$\mathfrak{D}$	Algèbre de Lie de $\mathbb{D}$ ,
$Ad$	Application adjointe de groupe $\mathbb{D}$ .
$ad$	Application adjointe d'algèbre $\mathfrak{D}$ .
$e$	Élément neutre du groupe de déplacement $\mathbb{D}$ .
$A, B$	Déplacements, éléments de $\mathbb{D}$ .
$X, Y, Z$	Éléments de $\mathfrak{D}$ .
$[, ]$	Crochet de Lie de $\mathfrak{D}$ .
$\{, \}$	Produit intérieur dual canonique de $\mathfrak{D}$ à valeur dans $\Delta$ .
$( )$	La forme de Killing.
$  $	La forme de Klein.
$L(\mathfrak{D})$	L'ensemble des applications adjointes.
$R$	Déplacement hélicoïdale, élément de $L(\mathfrak{D})$ .
$\mathbf{R}$	Partie rotoïde de $R$ , opérateur spéciale orthogonale.
$S$	Système de mécanisme de solides rigides,
$m$	Le système $S$ composé de $m$ corps solides rigides.
$C_k$	Le $k$ -ème corps dans le système $S$ ,
$\ell_k$	La $k$ -ème liaison du système $S$ ,
$q_k$	le paramètre de rotation de la $k$ -ème liaison,
$d_k$	le paramètre de translation de la $k$ -ème liaison,
$q$	le vecteur de paramètre de rotation dans le système $S$ ,
$d$	le vecteur de paramètre de translation dans le système $S$ ,
$f$	Fonction de fermeture des paramètres articulaires qui est dans $\mathbb{D}$ .
$F$	Fonction de fermeture sous forme des applications adjointes.
$M$	Ensemble des configurations cinématiquement admissibles.
$M^s$	Ensemble des configurations singulières. Sous ensemble de $M$ .
$\xi_k$	$k$ -ème générateur de déplacement qui est dans $\mathfrak{D}$ .
$\mu_k$	$k$ -ème vecteur associé au $i$ -ème générateur $\xi_k$ .
$\mu$	Ensemble des vecteurs du système mécanique $S$ .
$r$	Nombre d'élément linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\mu$ .
$\mathfrak{F}_q$	Espace engendré par les vecteurs $\mu$ .
$\mu_\alpha$	Une base de $\mu$ sur $\mathbb{R}$ .
$\mathfrak{S}_\alpha$	Sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{F}_q$ .
$s$	Dimension de $\mathfrak{S}_\alpha$ .
$\mathfrak{O}_q$	Supplémentaire de $\mathfrak{F}_q$ dans $\mathfrak{S}_\alpha$ .
$\mathbb{R}_q$	Le noyau de $f'(q)$ dans $\mathbb{R}^m$ .
$\mathbb{R}_s$	Le supplémentaire de $\mathbb{R}_q$ dans $\mathbb{R}^m$ .
$\alpha, \beta$	Ensemble des indices d'élément de $\mathfrak{F}_q$ .
$\{\mu_\alpha\}_\alpha$	Une base de $\mu$ .
$i, j$	Ensemble des indices d'éléments linéairement dépendants de $\mu$ par rapport à $\mu_\alpha$ .
$\nu$	Ensemble des indices de $\mathfrak{S}_\alpha/\mathfrak{F}_q$ .
$\{\mu_\alpha, \mu_\nu\}_{\alpha, \nu}$	Une base de $\mathfrak{O}_q$ .
$n$	Degré de liberté du système mécanique $S$ .
$C_1^\alpha$	Coordonnées de vecteur $\mu_i$ par rapport à la base $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ .
$J$	Matrice jacobienne de la fonction de fermeture $f(q)$ .
$q^\alpha, q$	$q^\alpha = \{q_1^\alpha, \dots, q_n^\alpha\}$ paramètres articulaires d'entrée.
$q^p, s$	$q^p = \{q_1^p, \dots, q_n^p\}$ paramètres articulaires de sortie.
$q^i, w$	$q^p = \{q_1^i, \dots, q_{m-2n}^i\}$ paramètres articulaires de sortie.



<b>A</b>	Matrice jacobienne de la fonction de fermeture $f$ par rapport aux $q^a$ .
<b>B</b>	Matrice jacobienne de la fonction de fermeture $f$ par rapport aux $q^p$ .
$Q', W$	Fonction de paramètre intermédiaire par rapport aux paramètres actionnaires qui est de dimension $m - 2n$ .
$Q, S$	Fonction de paramètres passifs par rapport aux paramètres actionnaires $q^a$ .
$M_I$	Ensemble des configurations singulières de type I.
$M_{II}$	Ensemble des configurations singulières de type II.
$M_{III}$	Ensemble des configurations singulières de type III.
$\{\xi, \eta, \zeta\}$	Une base de $\mathfrak{D}$ sur $\Delta$ .
$\mathcal{X}$	$\{X_1, \dots, X_m\}$ , ensemble de champs antisymétriques dont le nombre d'élément est $m$ .
$\epsilon$	Unité de nombre duaux.
$L_\Delta$	$\{X_\alpha\}_{\{\alpha=1, \dots, r_\Delta\}}$ , une liste libre maximale de $\mathcal{X}$ de dimension $r_\Delta$ .
$L_{\mathbb{R}}$	$\{X_\beta\}_{\{\beta=1, \dots, r\}}$ , ensemble de champs antisymétriques linéairement indépendants sur $\mathbb{F}$ qui forment une base de l'espace engendré par $\mathcal{X}$ de dimension $r$ .
$X_i$	Élément de $\mathcal{X}$ qui ne sont pas dans $L_{\mathbb{R}}$ ni de $L_\Delta$ .
$B_\Delta$	$\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ , Une base de $\mathfrak{D}$ sur $\Delta$ .
$\hat{z}_i^\alpha$	Coordonnées duales de $X_i$ par rapport à la base $B_\Delta$ .
$z_i^\alpha$	Les parties réelles de $\hat{z}_i^\alpha$ .
$z_i^{\alpha o}$	Les parties duales de $\hat{z}_i^\alpha$ .
$\hat{j}$	La matrice constituée par les coordonnées duales de $X_i$ par rapport à la base $B_\Delta$ , pour $i = r_\Delta + 1, \dots, m$ .
$j$	La matrice réelle de $\hat{j}$ .
$j^o$	La matrice duale de $j$ .
$\mathfrak{C}^i$	Ensemble engendré par $i$ -ordre crochet de Lie.
$\mathcal{L}_{anti}$	Ensemble des opérateurs antisymétriques.
$\mathcal{L}_{sym}$	Ensemble des opérateurs symétriques.

# Introduction

L'un des objectifs de recherche en mécanique est l'analyse mathématique du comportement des mécanismes articulés, d'expliquer ce comportement par des modélisations et afin de faire des prévisions ou de le reproduire par la commande. L'entrelacement entre différentes disciplines des sciences appliquées et la complexité croissante des systèmes font de l'étude mathématique des modèles, coordonnée avec l'informatique, un outil indispensable dans cette recherche. Cette complexité croissante des systèmes mécaniques, la variété des domaines d'application des systèmes articulés en mécanique et le progrès des outils informatiques exigent une adaptation permanente de la formalisation mathématique et la conception de nouveaux algorithmes de calcul du comportement de tels systèmes.

Dans cette thèse, on va étudier la cinématique des mécanismes de solides rigides en boucles fermées en utilisant la théorie des groupes. Le but principal est le développement des outils nécessaires à l'élaboration des algorithmes pour le calcul du modèle cinématique des mécanismes bouclés, la conception et la réalisation des outils informatiques basés sur le logiciel de calcul formel Maple. Un tel problème n'est pas encore totalement résolu et mérite d'être étudié.

La robotique est un domaine dans lequel la présence de mécanisme bouclé est très fréquente. La recherche contemporaine dans ce domaine concerne trois grandes catégories de problèmes de cinématique.

- Cinématique directe :  
tous les déplacements des couples cinématiques relatives sont donnés, les positions de chaque corps (y compris l'organe terminale) sont à déterminer. Ce type de problème peut être résolu facilement en utilisant des méthodes classiques
- Cinématique inverse :  
la position et l'orientation de l'organe terminale sont données, on doit trouver les déplacements relatifs des couples cinématiques. Le problème cinématique inverse est beaucoup plus difficile à résoudre à cause de la non linéarité et de la complexité des équations.
- Méthode différentielle  
Nous étudions les propriétés cinématiques en dérivant le modèle mathématique du mécanisme au voisinage d'une configuration donnée. Le défaut de cette méthode est qu'on ne peut pas faire une analyse globale de l'ensemble des configurations admissibles.

Pour réaliser la recherche dans ce domaine, les théories algébriques (théorie des vis), les nombres duaux et les quaternions duaux sont des outils mathématiques souvent utilisés par les chercheurs.

La partie mathématique de cette thèse poursuit des travaux de J.M. Hervé, A.Karger et D.Chevallier sur la modélisation des systèmes articulés à l'aide de la théorie des groupes et l'algèbre de Lie [Her78], [KN78] et [Che86].

Dans son article [Her78], J.M.Hervé a exposé la représentation formelle des liaisons dans les couples cinématiques par des sous groupes de déplacements. Dans cette article, le problème de la détermination systématique et rationnelle du degré de liberté des mécanismes est envisagé en associant à tout ensemble de positions susceptibles d'être prises par un corps rigide, un sous-ensemble non vide du groupe des déplacements. La structure algébrique de groupe de l'ensemble des déplacements permet ainsi de définir les liaisons mécaniques et d'en exprimer les propriétés principales.

Dans ses travaux [Che86] [Che91], D.Chevallier a exposé les aspects algébriques du groupe  $\mathbb{D}$  des déplacements et la structure de variété différentielle de l'espace  $\mathbb{S}$  des configurations d'un solide et les relations entre l'algèbre de Lie, les nombres duaux et les quaternions duaux, et la cinématique.

Nous prolongeons aussi les travaux sur la géométrie différentielle et la cinématique des mécanismes fermés de J.Lerbet [Ler87] et [Ler92].

Cette thèse contient trois aspects, le premier est l'étude algébrique de l'équation de fermeture; le deuxième aspect est l'étude de rang d'un ensemble de champs antisymétriques; le dernier est consacré à l'étude des solutions analytiques des mécanismes fermés.

## 0.1 Étude algébrique de l'équation de fermeture

Cette partie contient les chapitres 1, 2 et 3. Dans le premier chapitre, je présente des outils mathématiques qui sont nécessaires par la suite. Grâce à l'opérateur  $\Omega$ , inventé par D.Chevallier [Che91], j'introduis la formule d'Olinde-Rodrigues généralisée pour présenter un déplacement hélicoïdale  $R$ , qui sera utilisé très souvent dans les calculs.

Il existe une surjection entre un quaternion dual  $\mathbf{q}$  et un opérateur  $R$  associés au même déplacement. En définissant l'opérateur symétrique  $\mathbf{s}$  et l'opérateur antisymétrique  $\mathbf{a}$  associés à  $R$ , je trouve des relations entre le quaternion dual  $\mathbf{q}$  et l'opérateur  $R$ , grâce à ces relations, on peut évaluer l'axe, l'angle et la translation associés au déplacement représenté par  $R$ .

L'étude cinématique des mécanismes fermés nous conduit à étudier l'équation de fermeture  $f(q_1, \dots, q_m) = \epsilon$ , où  $q_1, \dots, q_m$  sont les coordonnées articulaires et  $f$  est une fonction analytique à valeur dans le groupe des déplacements. L'ensemble des configurations cinématiquement admissibles du mécanisme est la partie  $M = f^{-1}(\epsilon)$  et c'est une sous variété de  $\mathbb{P}^m$  dans le cas régulier où  $f$  est une subimmersion; ce cas est complètement étudié par les chercheurs. Notamment par J. Lerbet qui, dans sa thèse, a exposé une recherche des approximations de l'équation de fermeture sous l'hypothèse que  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{P}^m$ .

Par contre, l'étude est beaucoup plus difficile lorsque  $f$  possède des singularités, par exemple dans le cas de "la salière" (voir le chapitre 3 et 7) et de certains mécanismes quatre barres plans  $\dots$ . Pour de nombreux mécanismes, en certaines configurations,  $f$  n'est pas une subimmersion, la méthode classique de la géométrie différentielle n'est plus valable et l'on ne peut affirmer simplement que  $M$  est une sous variété. L'étude de l'équation de fermeture au premier ordre est alors insuffisante pour déterminer le comportement cinématique des mécanismes bouclés, ce qui nécessite l'étude de l'équation de fermeture aux ordres supérieurs. Une analyse plus fine utilisant

la théorie de transversalité est nécessaire.

Dans le chapitre 2, je fais d'abord un rappel bref sur la thèse de J.Lerbet. ensuite, je développe une forme simplifiée de l'approximation de second ordre lorsque les  $r$  premiers éléments du premier ordre forment une base de l'espace  $\mathfrak{F}_q$  engendré du premier ordre de l'équation de fermeture. J'analyse également les mécanismes plans, on montre que la forme de l'approximation au deuxième ordre étant dans  $\mathfrak{F}_q$  est suffisante pour que les mécanismes plans soient "réguliers", si l'on souhaite classifier les singularités, l'étude au second ordre devient insuffisante, la classification dépend semble-t-il du nombre de corps qui composent le mécanisme.

Le chapitre 3 est consacré à l'application de transversalité aux mécanismes. Je traite des exemples analysant l'équation de fermeture au premier et au second ordre, en examinant également si la condition de transversalité est ou non vérifiée. Comme on le montre, la condition que la dérivée seconde de  $f$  applique le noyau  $f'$  dans  $\mathfrak{F}_q$  est une condition nécessaire pour que  $M$  soit une sous variété de  $\mathbb{R}^m$ .

D'autre part, la condition de transversalité est suffisante pour que les classes de rang  $r$  de  $f$  soient des sous variétés de  $\mathbb{R}^m$ . J'utilise cette propriété pour étudier les mécanismes  $6R$  spatiaux possédant un degré de liberté. Je montre que dans ce cas particulier, la condition de transversalité est toujours vérifiée, et la classe de  $f$  est égale à l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles  $M$ , de plus, ce qui montre que  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^m$ .

## 0.2 Calcul des champs antisymétriques avec les nombres duaux

Le mathématicien William Kingdon Clifford (1845-1879) dans [Cli73] et [Cli78] a introduit une idée très originale dans la théorie des "motor" qui réside dans l'utilisation d'un certain opérateur nilpotent du second ordre qui permet d'exprimer symboliquement un "motor"  $(X, X_o)$  sous forme d'un vecteur spécial.

A la suite des travaux de W. K. Clifford, et en se basant sur les travaux de Ball et Zanchevskiy sur la théorie des vis et de Kotelnikov sur l'application des nombres duaux à la théorie des vecteurs. F.M Dimentberg a largement développé l'application du calcul dual sur les vis au traitement des problèmes de cinématique [Dim65]. Dans de récents travaux, plusieurs auteurs G.R. Veldkamp [Vel76], K. Sugimoto et J. Duffy [SD82], A.K. Pradeep, P.J. Yoder et R. Mukundan [PYM89], D. Chevallier [Che91], A. Hamlili [Ham93] ont proposé des présentations modernes des applications de tels nombres en cinématique.

Nous considérons d'abord le 4-barre plan articulé, il a 4 couple de rotations dont les axes sont parallèles. c'est dans ces conditions que le mécanisme fonctionne, si l'on change la direction de l'un des 4 axes, le mécanisme ne fonctionne plus. Cet exemple simple nous montre que la mobilité a changé quoique le nombre d'éléments et de couples cinématiques soit resté le même. Cela permet de saisir l'importance de la configuration des axes de déplacement dans le cas général d'une chaîne cinématique à couples de meme pièces.

L'étude de la configuration des axes de déplacement d'un mécanisme est équivalent à celle de rang d'un ensemble de champs antisymétriques qui sont en réalité les éléments du premier ordre de l'équation de fermeture.

Dans les méthodes existées, le rang d'un tel ensemble est évalué en calculant le déterminant de la matrice formée par cet ensemble. Ces méthodes classiques sont en général très sophistiquées, il faut intervenir tous les coordonnées de chaque élément.

On se propose d'étudier le rang d'un ensemble de champs antisymétriques. j'introduis ici un nouveau algorithme plus performant en utilisant la théorie de Lie et les nombres duaux. Le principe de l'algorithme est d'utiliser une première étape consistant à calculer un rang en dimension trois sur les nombres duaux, ce qui peut être résolu facilement.

Pour faire une analyse plus précise, je définis la notion d'une liste libre maximale d'un ensemble de champs antisymétrique  $\mathcal{X}$  sur  $\Delta$ , tous les cas particuliers sont classés suivant le nombre d'éléments  $r_\Delta$  d'une liste libre maximale et le rang  $r$  de  $\mathcal{X}$ .

Cet algorithme permet de déterminer le rang d'un ensemble et les rang des ensembles de crochet de Lie du  $i$ -ème ordre qui s'en déduisent. Ainsi on réussit à analyser les sous algèbre de Lie engendrées par ces ensembles, et l'on montre que le sous ensemble du 4-ème ordre engendre toujours une sous algèbre de Lie. Dans le cas où les "pas" des champs antisymétriques sont nuls, le sous ensemble du 3-ème ordre engendre toujours une sous algèbre de Lie

Dans la partie qui suit, on met en évidence des mécanismes correspondants aux cas particuliers rencontrés dans le chapitre 4.

### 0.3 Solutions analytiques des mécanismes fermés

La recherche de solutions analytiques pour les mécanismes, en particulier pour les mécanismes fermés, fait partie de la cinématique inverse et a retenu beaucoup d'attention de la part des chercheurs depuis des années.

Les premières méthodes générales de solution de la cinématique inverse remontent semble-t-il à 1964, et ont été proposées par J.J. Uicker, J.Denavit et R.S.Hartenberg [UDH64], qui ont décrit le problème par un système d'équations non linéaires surcontraint. Les solutions proposées font appel à des méthodes numériques partant d'une valeur initiale approchée.

La première solution complète, c'est-à-dire donnant toutes les configurations, pour les mécanismes spatiaux  $6R$  a été trouvée par L.W.Tsai et A.Morgan en 1985 [TM85]. Le problème a été formalisé par un système de huit équations du deuxième degré avec huit inconnus, leur expérience suggérait qu'il y a seulement 16 solutions pour un tel mécanisme.

La solution exacte et complète de la cinématique inverse des mécanismes  $7R$  fermés spatiaux a été donnée par H.Lee et C.G.Liang [LL88]. Ils ont développé un polynôme de 16-ème degré par rapport à la tangente du demi angle d'un paramètre articulaire.

D'autre part, A.T.Yang a proposé des méthodes basées sur les quaternions duaux [Yan63]. Plusieurs auteurs J. Duffy et H.Y.Habib-Olahi [DHO71a] [DHO71b] [DHO71c], B.Roth et M. Raghavan [RR90], R.Manseur [Man92] et M.Ghazvini [Gha93] ont proposé l'emploi de méthodes symboliques.

Pour résoudre ce problème, il est intéressant d'obtenir une équation algébrique concernant la position et l'orientation des actionneurs et un seul paramètre articulaire inconnu. On peut trouver toutes les solutions possibles de cette manière. Mais s'il est évident que les conditions sont nécessaires, la réciproque, c'est-à-dire le caractère suffisant de ces conditions n'est généralement pas étudiée de façon rigoureuse.

Dans cette partie, j'introduis une nouvelle approche utilisant le langage algébrique, ce qui nous permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes sous forme simple et indépendantes des coordonnées choisies, les conditions peuvent être exprimées sous formes explicites en cas de besoin

Le chapitre 5 est consacré au problème de singularité

On propose une méthode simplifiée, basée sur celle de C. Gosselin et J. Angeles [GA90], pour distinguer les différents types de singularités en divisant la matrice jacobienne en blocs, ce qui permet d'éliminer les points singuliers artificiels (ou points singuliers résultant du choix des coordonnées) qui sont parfois confondus avec les véritables points singuliers (qui sont des propriétés intrinsèques du mécanisme).

Dans leur article [GA90], C. Gosselin et J. Angeles ont proposé une méthode en divisant la matrice Jacobienne en deux blocs **A** et **B**. Pour cette raison, ils ont défini les variables d'entrée et les variables de sortie. La matrice **A** est la Jacobienne associée aux variables de sortie, et la matrice **B** est la Jacobienne associée aux variables d'entrée mais, lorsqu'il existe des variables intermédiaires, les éléments de **A** et **B** deviennent très volumineux qui ne conviennent pas très bien aux calculs symboliques, je propose donc ici de diviser la matrice Jacobienne en deux blocs **A'** et **B'**. La matrice **A'** est associée aux variables de sortie et la matrice **B'** est associée aux variables d'entrée et intermédiaires, je montre que les singularités de **A** et **B** sont équivalentes à celles de **A'** et **B'**. La nouvelle séparation **A'** et **B'** de la matrice Jacobienne et l'utilisation du langage algébrique nous permettent d'écrire la matrice jacobienne sous une forme compacte facilitant le calcul à la main ou avec un logiciel de calcul formel.

Finalement, je donne les vitesses et les accélérations de sortie et intermédiaires en fonction des vitesses et des accélérations d'entrée sous formes explicites.

Dans le chapitre 6, j'étudie les mécanismes plans avec des liaisons cylindriques et contenant une seule boucle. Les quatre barres et les cinq barres plans sont étudiés analytiquement, et on analyse globalement l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles  $M$  ainsi que les différents types de singularités qui sont classifiés grâce à la méthode proposée au chapitre 5.

On s'intéresse également à la solution de l'équation  $R_\theta R_\phi R_\psi = R$ , où  $R_\theta$ ,  $R_\phi$ ,  $R_\psi$ , sont des opérateurs hélicoïdaux d'axe donné et d'angle dual inconnu et  $R$  un opérateur hélicoïdal donné. A notre connaissance, ce problème n'a pas encore été étudié dans le cas général. De plus, on avait la fausse impression qu'il existe toujours des solutions si les trois axes de déplacement ne sont pas colinéaires. C'est donc un problème mérite d'être étudié de façon précise.

Premièrement, j'étudie la condition de résolubilité de cette équation et sa réciproque, cette condition est exprimée sous forme analytique et dépend seulement des positions relatives des axes de générateurs  $\xi_\theta$  et  $\xi_\phi$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$  de  $R_\theta$ ,  $R_\phi$  et  $R_\psi$ , c'est-à-dire, il faut que la forme de Killing  $(\xi_\theta \mid R\xi_\psi)$  ( $= \omega_{\xi_\theta} \wedge \omega_{R\xi_\psi}$ ) tombe dans une intervalle définie comme une fonction de  $(\xi_\theta \mid \xi_\phi)$  et  $(\xi_\phi \mid \xi_\psi)$

Deuxièmement, si l'équation est soluble, supposant  $R$  connu, on a exprimé  $\theta$ ,  $d_\theta$ ,  $\phi$ ,  $d_\phi$  et  $\psi$ ,  $d_\psi$  sous forme analytique.

Troisièmement, les configurations singulières sont étudiées, et on trouve qu'il existe une condition sous laquelle l'équation  $R_\theta R_\phi R_\psi = R$  ne possède pas de configurations singulières (véritable), cela veut dire géométriquement que les axes de  $\xi_\theta$  et  $\xi_\psi$  n'engendrent pas le même cône si l'on considère l'axe de  $\xi_\phi$  est l'axe central du cône.

Il est clair que la représentation de déplacement par les angles d'Euler et les angles de Brient, réels ou duaux, sont des cas particuliers de ce produit de trois déplacements hélicoïdaux.

Dans le chapitre 7, le problème analogue de la forme  $R_1 R_2 R_3 R_4 = R$  est étudié lorsque  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  et  $R$  sont des rotations pures, on a montré que les conditions trouvées analytiquement pour  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  et  $q_4$  sont nécessaires et suffisantes.

Le principe de la résolution de cette équation est d'utiliser les propriétés de la forme de Killing

et la propriété du groupe invariant pour éliminer un certain paramètres articulaires par exemple  $q_2$  et  $q_4$ , on peut obtenir un système de quatre équations linéaires par rapports aux  $\sin q_1$ ,  $\cos q_1$ ,  $\sin q_3$  et  $\cos q_3$ . les valeurs de  $q_1$  et  $q_3$  peuvent être évaluées si le système n'est pas singulier. Ensuite, on exprime  $q_2$  et  $q_4$  facilement en fonction de  $q_1$  et  $q_3$ .

Avec ces solutions, je peut conclure que les seuls mécanismes spatiaux 4 barres avec des couples rotoïdes sont les mécanismes de Bennett et les mécanismes sphériques, la démonstration est faite en intervenant les paramètres de Denavit-Hartenberg. Les solutions analytiques des mécanismes de Bennett est exprimées sous formes compactes, elles peuvent être exprimées de façon plus précise si l'on remplace les opérateurs hélicoïaux par leur expressions utilisant l'opérateur d'Olinde-Rodrigues généralisé.

Précisons qu'en 1968, Shusaku Ogiino [Ogi68] a donné une démonstration en supposant au départ que les paramètres de Denavit Hartenberg  $d_i$  sont nuls pour chaque couple, ce qui n'était pas une démonstration complète.

Dans le chapitre 8, j'étudie les mécanismes  $6R$  spatiaux qui est un problème intéressé par beaucoup de chercheurs.

Il existe pour traiter les problèmes de cinématique inverse des mécanismes  $6R$  spatiaux des méthodes basées sur les calculs matriciels qui sont généralement très sophistiqués. Pour évaluer tous les paramètres articulaires, il faut chercher les racines d'un polynôme du 16-ème degré par rapport à la tangente d'un demi angle. La procédure de résolution n'est pas toujours très clair. De plus, l'équivalence entre l'équation de fermeture et les solutions analytiques n'est pas toujours exprimée de façon rigoureuse.

Par rapport aux autres méthodes, je propose ici un algorithme plus performant qui nous permet de résoudre l'équation de fermeture indépendamment d'un choix de coordonnées et les solutions sont écrites sous forme intrinsèques. ce qui nous conduit à résoudre deux équations du 8-ème degré.

Soient  $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6 = T$  l'équation de fermeture,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  et  $R_6$  sont des rotations pures et  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ ,  $q_5$  et  $q_6$  sont les paramètres articulaires. Le déplacement  $T$  est considéré comme donné. Le principe de cet algorithme est de trouver les paramètres articulaires de ce produit de six rotations commençant par étudier les solutions d'une équation concernant le produit de la forme  $R_2^* R_1^* T R_6^* = R$  dont  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  sont des opérateurs hélicoïdaux,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_6$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_6$  sont des paramètres articulaires de rotation et de translation,  $R$  est considéré comme opérateur intermédiaire. La résolution de cette équation a été présentée dans le chapitre 6. s'il s'agit seulement des rotations. on peut imposer les paramètres de translation  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  égaux à zéro. on obtient donc trois équations scalaires supplémentaires qui nous permettent d'évaluer l'opérateur intermédiaire  $R$ . ainsi on peut trouver les valeurs de  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_6$ . D'autre part. on peut calculer  $q_3$ ,  $q_4$  et  $q_5$  par  $R_3 R_4 R_5 = R_2^* R_1^* T R_6^*$  supposant  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_6$  connus.

En effet, les mécanismes de  $4R$  et  $5R$  spatiaux sont des cas particuliers des mécanismes de  $6R$  spatiaux, avec l'algorithme proposé, on peut trouver également les solutions analytiques des mécanismes de  $4R$  et  $5R$  spatiaux.

Dans la dernière partie du chapitre 8, je réalise les calculs utilisant les paramètres de Denavit Hartenberg. puisque ces paramètres sont souvent des donnés, et à priori, les relations entre les axes de déplacement non successifs sont inconnues, il est donc parfois pratique d'introduire de

---

tels paramètres pour résoudre l'équation de fermeture.





# Chapitre 1

## Concepts et outils mathématiques

### 1.1 Introduction

L'évolution des outils mathématiques dans la modélisation de la mécanique des systèmes de solides rigides est un paramètre important dans la conception et l'élaboration de système mécanique. Plusieurs méthodes existent pour la modélisation de ces problèmes. Le calcul fait généralement appel à de nombreux changements de repère pour décrire les déplacements relatifs des différents éléments du système mécanique les uns par rapport aux autres. La construction de ces repères conduit à la définition de système de coordonnées pour la paramétrisation du groupe des déplacements et de l'espace des configurations.

Ce chapitre est consacré à la présentation des outils mathématiques qui permettent une telle description par la théorie des groupes et algèbres de Lie. Nous allons dans la suite associer une structure de module à l'algèbre de Lie des champs antisymétriques, qui permet de définir les systèmes de coordonnées nécessaires à la manipulation symbolique des êtres mathématiques intervenant dans la modélisation et d'introduire la notion de familles fondamentales de l'algèbre de Lie des champs antisymétriques  $\mathfrak{D}$  comme une alternative à la notion classique de repères de l'espace géométrique affine  $\mathcal{E}$ .

Dans le cadre de la géométrie euclidienne, la théorie des groupes peut être appliquée à l'ensemble des déplacements de corps rigides (ou déplacements euclidiens), cet ensemble forme un groupe de Lie  $\mathbb{D}$ . Dire que  $\mathbb{D}$  est un groupe de Lie signifie que cet ensemble est muni d'une structure de groupe, d'une structure de variété différentielle et que les opérations de composition et d'inversion des déplacements sont des opérations différentiables.

Pour un corps rigide, le passage d'une position à une autre est une transformation qui doit conserver les distances entre les points ( transformation rigide représenté mathématiquement par un déplacement euclidien ). Les transformations rigides s'obtiennent par composition des rotations et des translations.

Dans un système mécanique, la position relative d'un corps rigide par rapport à un autre est définie par une transformation de coordonnées entre les repères attachés à chaque corps.

Dans ce chapitre, la référence principale est [Che91] pour les relations entre les groupes de Lie et les nombres duaux: [Che93] contient un exposé des relations entre la géométrie élémentaire et la cinématique du point de vue des groupes de Lie.

## 1.2 Espace affine euclidien et déplacements

### 1.2.1 Espace affine euclidien

On note par  $\mathcal{E}$  l'espace de la géométrie euclidienne,  $\mathcal{E}$  est un espace affine sur l'espace vectoriel  $\mathbb{E}$ , ce qui peut être exprimé de deux manières différentes, l'une associe un vecteur de  $\mathbb{E}$  à chaque paire ordonnée de points dans  $\mathcal{E}$ , l'autre associe un opérateur, dite translation, à chaque vecteur dans  $\mathbb{E}$ .

À partir du premier point de vue, il existe une application  $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}: (a, b) \rightarrow \overrightarrow{ab}$  ayant les propriétés suivantes :

$$(axiome)_1 \quad \forall a, b, c \in \mathcal{E}, \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac},$$

$$(axiome)_2 \quad \forall o \in \mathcal{E}, \text{ la relation } p \rightarrow \overrightarrow{op} \text{ est bijective de } \mathcal{E} \text{ à } \mathbb{E}.$$

Le second axiome signifie que le choix d'une origine permet d'identifier  $\mathcal{E}$  et  $\mathbb{E}$ , de plus, ces deux axiomes impliquent :

$$\left( \overrightarrow{ab} = \mathbf{0} \iff a = b \right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$$

Un repère dans un espace affine est un couple  $(o, \mathcal{B}) = (o; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , où  $o$  est une origine dans  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{E}$ . Lorsqu'un repère est donné, à chaque point  $p \in \mathcal{E}$  peut-être associé des coordonnées  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , relative à ce repère définie par :

$$\overrightarrow{op} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z}$$

et la relation  $p \rightarrow (x, y, z)$  est une bijection de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

À partir du second axiome, il existe une application  $\mathcal{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , telle que  $p + \mathbf{u} = q$ , l'unique point dans  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{pq} = \mathbf{u}$ .

Pour  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  la transformation  $T(\mathbf{u}) : p \rightarrow p + \mathbf{u}$  est la translation définie par  $\mathbf{u}$ , la proposition suivante est vérifiée facilement :

- (i)  $p + \mathbf{0} = p$ , pour  $p \in \mathcal{E}$ .
- (ii)  $(p + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = p + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ , pour  $p \in \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ .
- (iii) pour  $o \in \mathcal{E}$ , l'application  $\mathbf{u} \rightarrow o + \mathbf{u}$  est une bijection de  $\mathbb{E}$  à  $\mathcal{E}$ .

Les deux premières propriétés signifient que le groupe commutatif  $(\mathbb{E}, +)$  opère sur  $\mathcal{E}$ . Dans la mécanique classique, l'espace physique est représenté par un espace affine euclidien orienté  $\mathcal{E}$ , et les automorphismes d'un tel espace sont les déplacements qui forment le groupe  $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ , qui, comme on l'a signalé, peut exprimer les propriétés des déplacements d'un corps rigide concret.

Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel euclidien à 3 dimensions sur  $\mathbb{R}$  et soit  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$  l'ensemble des opérateurs linéaires.  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$  possède une structure d'espace vectoriel et une structure d'algèbre sur  $\mathbb{R}$  et les éléments inversibles de  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$  forment un groupe  $GL(\mathbb{E})$  – le groupe linéaire de  $\mathbb{E}$ . Le produit

scalaire sur  $\mathbb{E}$  noté par un point permet de définir un opérateur  $\mathbf{A}^*$  (adjoint de  $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ ) par l'identité :

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{v})$$

On prouve que

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^* = \mathbf{B}^* \circ \mathbf{A}^*$$

Un opérateur  $\mathbf{A}$  est dit symétrique si  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ ; il est dit antisymétrique si  $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$ . On note  $\mathcal{L}_{anti}(\mathbb{E})$  et  $\mathcal{L}_{syme}(\mathbb{E})$  les sous espaces vectoriels formés des opérateurs antisymétriques et symétriques de  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$  respectivement.

On prouve que  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ , muni du commutateur des opérateurs, est une algèbre de Lie et que  $\mathcal{L}_a(\mathbb{E})$  est une sous-algèbre de Lie.

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} - \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$$

Un opérateur linéaire  $\mathbf{A} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  est orthogonal si  $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$ . Ces opérateurs forment un sous groupe  $O(\mathbb{E})$  de  $GL(\mathbb{E})$ . Tout les éléments  $\mathbf{A} \in O(\mathbb{E})$  vérifiant  $\det(\mathbf{A}) = 1$  forment un sous groupe  $SO(\mathbb{E})$ , appelé le sous groupe orthogonal spécial.

### 1.2.2 Déplacements dans l'espace affine euclidien

**Définition 1.1** Une transformation affine de  $\mathcal{E}$  est une application  $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  telle qu'il existe un opérateur  $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$  satisfaisant les deux propriétés équivalentes :

- 1)  $\overrightarrow{A(p)A(q)} = \mathbf{A}(\overrightarrow{pq})$  pour  $p, q \in \mathcal{E}$
- 2)  $A(p + \mathbf{u}) = A(p) + \mathbf{A}(\mathbf{u})$  pour  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$

$\mathbf{A}$  est la partie linéaire de  $A$ .

On note  $\mathcal{L}a(\mathcal{E})$  l'ensemble des transformations affines.

Une transformation affine est déterminée par l'image d'un point et la partie linéaire. Si  $A$  et  $B$  sont des transformations affines, alors  $A \circ B$  l'est aussi, de plus  $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$  est la partie linéaire de  $A \circ B$ .

**Proposition 1.1** Soit  $A$  une transformation affine de  $\mathcal{E}$ . on a :

- (a)  $A$  est bijective  $\iff \mathbf{A}$  est bijective.
- (b) La transformation inverse  $A^{-1}$  est affine, sa partie linéaire est  $\mathbf{A}^{-1}$ , et pour tout points  $o$  fixé de  $\mathcal{E}$ 

$$A^{-1}(p) = o + \mathbf{A}^{-1}(\overrightarrow{A(o)p}) \quad \text{pour } p \in \mathcal{E}.$$

Les transformations affines bijectives de  $\mathcal{E}$  forment le groupe affine de  $\mathcal{E}$  dont l'unité est la transformation identique, notée par  $e$ .

Un premier théorème fondamental de la géométrie affine caractérise les applications affines à l'aide de la notion de "barycentre"; un deuxième théorème caractérise les isométries d'un espace

affine euclidien.

**Théorème 1.1** Soit  $A$  une application de  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{E}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $A$  est une transformation affine de  $\mathcal{E}$ .
- (b) Pour toute famille  $(p_i)_{i \in I}$  de points de  $\mathcal{E}$  et toute famille de nombres réels  $(\mu_i)_{i \in I}$  tel que  $\sum_I \mu_i = 1$ , alors :  $A(\sum_{i \in I} \mu_i p_i) = \sum_{i \in I} \mu_i A(p_i)$

En d'autres termes, l'image du barycentre des points  $p_i$  est le barycentre des images avec les mêmes masses.

Ce théorème implique par exemple que le centre de masse d'un solide rigide est attaché au solide.

**Théorème 1.2** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien,  $d$  sa distance naturelle,  $A$  une application de  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{E}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $A$  est une isométrie et signifie que  $d(A(p), A(q)) = d(p, q)$ , avec  $p, q \in \mathcal{E}$ .
- (b)  $A$  est une transformation affine et  $\mathbf{A} \in O(\mathbb{E})$ .

Suite aux conditions précédentes, la condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  conserve l'orientation (i.e. transforme un repère directe en un autre) est que  $\mathbf{A} \in SO(\mathbb{E})$ .

**Définition 1.2**

(a) Un déplacement est une transformation affine  $A$  de  $\mathcal{E}$  telle que :

$$\mathbf{A} \in SO(\mathbb{E}) \quad \det(\mathbf{A}) = 1$$

(b) Une réflexion est une transformation affine  $A$  de  $\mathcal{E}$  telle que :

$$\mathbf{A} \in O(\mathbb{E}) \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{A}) = -1$$

(c) L'ensemble de tous les déplacements est un sous-groupe du groupe affine, on le note par  $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ , la loi interne est ainsi la composition d'une transformation et son unité est la transformation identique de  $\mathcal{E}$ .

Chaque isométrie est un déplacement ou est un composé d'un déplacement et d'une réflexion. Rappelons la différence entre un déplacement et une réflexion : la symétrie orthogonale par rapport à un plan préserve la distance mais inverse l'orientation, de plus il est impossible de transformer continuellement un déplacement en une réflexion dans le groupe d'isométrie.

### 1.2.3 Classification des déplacements

Les déplacements peuvent être classifiés suivant les propriétés de leurs parties linéaires et leurs points fixes. Il existe quatre types de déplacements de  $\mathcal{E}$  qui sont exprimés dans la définition suivante.

**Définition 1.3** Soit  $A$  une transformation affine de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{A}$  la partie linéaire de  $A$ ,  $\mathcal{F}_A$  l'ensemble de points restés fixés après avoir subi le déplacement  $A$ , alors :

- (i) Si  $\mathbf{A} = \mathbf{1}$  et  $\mathcal{F}_A = \mathcal{E}$ ,  $A$  est l'identité, on le note  $A = e$ .
- (ii) Si  $\mathbf{A} = \mathbf{1}$  et  $\mathcal{F}_A = \emptyset$ ,  $A$  est une translation, on le note  $A = T(d, \xi)$ .
- (iii) Si  $\mathbf{A} \neq \mathbf{1}$  et  $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$ ,  $A$  est une rotation, on le note  $A = R(\theta, \xi)$ .
- (iv) Si  $\mathbf{A} \neq \mathbf{1}$  et  $\mathcal{F}_A = \emptyset$ ,  $A$  est un déplacement hélicoïdal.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux déplacements  $A_1(\theta_1, d_1, \xi_1)$ ,  $A_2(\theta_2, d_2, \xi_2)$  commutent est que  $\mathcal{F}_{\mathbf{A}_1} = \mathcal{F}_{\mathbf{A}_2}$ , c'est-à-dire, les axes de  $A_1$  et  $A_2$  soient identiques.

Alors, un déplacement hélicoïdal peut-être caractérisé par :

$$A(\theta, d, \xi) = R(\theta, \xi)T(d, \xi) = T(d, \xi)R(\theta, \xi)$$

• L'ensemble des translations est un sous-groupe commutatif de  $\mathbb{D}(\mathcal{E})$  qui a les propriétés suivantes :  $\forall A \in \mathbb{D}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ , on a :

$$A \circ T(\mathbf{u}) \circ A^{-1} = T(\mathbf{A}(\mathbf{u}))$$

$$T(\mathbf{0}) = \epsilon$$

$$T(\mathbf{u}) \circ T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \iff \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

de plus :

$$A \circ T(\mathbf{u})(p) = A(p + \mathbf{u}) = A(p) + \mathbf{A}(\mathbf{u}) = T(\mathbf{A}(\mathbf{u}))(A(p)).$$

• L'ensemble des rotations est un sous-groupe non-commutatif de  $\mathbb{D}$  :

L'application  $\mathbb{D} \longrightarrow SO(\cdot)$ ,  $A \longrightarrow \mathbf{A}$  est un isomorphisme entre groupes.

Décrire par des paramètres réels les positions d'un solide rigide équivaut à décrire les déplacements qui transforment une position de référence fixée en les diverses autres positions du solide. Ces déplacements peuvent être déterminés par leur action sur un repère orthonormé lié au solide: si  $(O_0; \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  est la position de ce repère dans la configuration de référence et  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  sa position dans une configuration quelconque, il existe un déplacement  $A \in \mathbb{D}(\mathcal{E})$  unique qui transforme  $(O_0; \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  en  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

Cette méthode est classique en cinématique mais l'usage des groupes permet de supprimer le recours aux repères et d'alléger les raisonnements.

## 1.3 L'algèbre des champs antisymétriques

### 1.3.1 Définition des champs antisymétriques

Un champ antisymétrique sur l'espace affine  $\mathcal{E}$  est une application  $X : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{E}$  qui transforme un point  $p \in \mathcal{E}$  en un vecteur  $X(p) \in \mathbb{E}$  et qui vérifie :

$$X(p) \cdot \vec{pq} = X(q) \cdot \vec{pq} \quad \text{pour } p, q \in \mathcal{E}$$

Les champs antisymétriques expriment les déplacements infinitésimaux. L'ensemble des champs antisymétriques est une algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ , dont la structure algébrique joue un rôle important dans la cinématique et la dynamique.

On peut prouver que l'ensemble des champs antisymétriques est équivalent à l'algèbre de Lie du groupe  $\mathbb{D}$ , que l'on note aussi par  $\mathfrak{D}$ .

Les opérations de l'espace vectoriel  $\mathfrak{D}$  sont définies par

$$(X + Y)(p) = X(p) + Y(p), \quad (\lambda X)(p) = \lambda X(p) \quad \text{pour } X, Y \in \mathfrak{D}$$

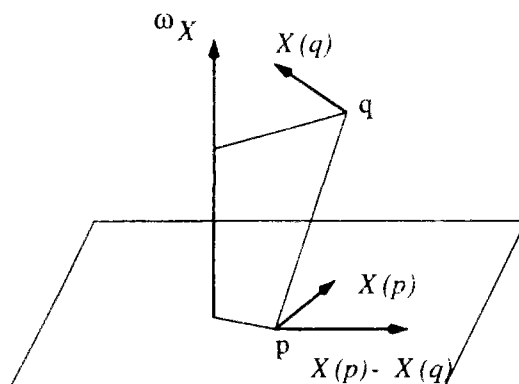


FIG. 1.1 - Un champ antisymétrique

**Théorème 1.3** Soit  $X \in \mathfrak{D}$  un champ de vecteur sur  $\mathcal{E}$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $X$  un champ antisymétrique;
- (b) il existe  $\omega_X \in \mathfrak{E}$  tel que  $\forall q \in \mathcal{E} : X(q) = X(p) + \omega_X \wedge \overrightarrow{pq}$ .

Le vecteur  $\omega_X$  est le vecteur invariant de  $X$ , l'application  $X \rightarrow \omega_X$  de  $\mathfrak{D}$  à  $\mathfrak{E}$  est linéaire :

$$\omega_{X+Y} = \omega_X + \omega_Y, \quad \omega_{\lambda X} = \lambda \omega_X$$

Ce théorème exprime l'identité de la notion de champ antisymétrique et la notion de champ de moments caractérisée par la propriété (b). Les champs antisymétriques s'introduisent naturellement en cinématique en tant que champs de vitesses des mouvements d'un corps rigide.

La démonstration s'appuie sur la proposition suivante :

**Proposition 1.2** Soient  $p, q$  et  $m$  des points non alignés dans  $\mathcal{E}$ , alors :

$$(X \text{ et } X(p) = Y(p), X(q) = Y(q), X(m) = Y(m)) \Rightarrow X = Y.$$

Cette propriété équivaut à :

$$(Z \in \mathfrak{D} \text{ et } Z(p) = Z(q) = Z(m) = 0) \Rightarrow Z = 0$$

**Démonstration :** Pour démontrer cette proposition sous la seconde forme, soit  $\mathcal{P}$  le plan de  $\mathcal{E}$  contenant  $p, q, m$  et  $F$  (sous espace vectoriel de dimension 2 de  $\mathfrak{E}$ ) la direction de  $\mathcal{P}$ . D'après la définition de champ antisymétrique, pour tout point  $o \in \mathcal{E}$ , on a :

$$(*) \quad Z(o) \cdot \overrightarrow{po} = Z(o) \cdot \overrightarrow{qo} = Z(o) \cdot \overrightarrow{mo} = 0.$$

Si  $o \notin \mathcal{P}$ , les vecteurs  $\overrightarrow{po}, \overrightarrow{qo}$  et  $\overrightarrow{mo}$  forment une base de  $\mathfrak{E}$  et  $(*)$  entraîne que  $Z(o) = 0$ . Si  $o \in \mathcal{P}$ , ces vecteurs engendrent  $F$  et  $(*)$  entraîne que  $Z(o)$  est orthogonal à  $F$ , mais alors, si l'on choisit  $n \notin \mathcal{P}$  tel que  $\overrightarrow{no}$  soit orthogonal à  $F$ ,  $Z(n) = 0$  d'après ce qui précède et  $Z(o) \cdot \overrightarrow{no} = Z(n)\overrightarrow{no} = 0$  d'après la notion de champ antisymétrique. Comme  $\overrightarrow{no} (\neq 0)$  et  $Z(o)$  sont dans la droite vectorielle de  $\mathfrak{E}$  orthogonal à  $F$ , nécessairement  $Z(o) = 0$ . ■

Le démonstration du théorème 1.3.

**Démonstration :** Il est immédiat que (b)  $\Rightarrow$  (a), montrons que (a)  $\Rightarrow$  (b). Soient  $X : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$  un champ antisymétrique et  $p \in \mathcal{E}$ , il suffit d'établir que  $\omega \in \mathbb{E}$  peut être choisi de façon que le champ  $Y : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$  défini par :

$$Y(o) = X(p) + \omega \wedge \overrightarrow{p\delta}, \quad o \in \mathcal{E}.$$

et qui est aussi un champ antisymétrique, coïncide avec  $X$ . D'après la proposition, il suffit d'établir que  $X$  et  $Y$  coïncident en trois points non alignés. Soient  $q$  et  $m$  tels que :  $\overrightarrow{pq} = \mathbf{u}$ ,  $\overrightarrow{pm} = \mathbf{v}$ . Alors :

$$(**) \quad \begin{cases} (X(q) - X(p)) \cdot \mathbf{u} = 0 \\ (X(m) - X(p)) \cdot \mathbf{v} = 0 \\ (X(q) - X(p)) \cdot \mathbf{v} = (X(p) - X(m)) \cdot \mathbf{u}, \end{cases}$$

la dernière égalité étant déduite de  $(X(q) - X(m)) \cdot \overrightarrow{qm} = 0$  compte tenu des premières. Supposons maintenant que  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{E}$  et cherchons le vecteur  $\omega$  sous la forme :

$$\omega = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

La condition  $X(p) = Y(p)$  est satisfaite par définition de  $Y$  et les conditions  $X(q) = Y(q)$  et  $X(m) = Y(m)$  s'expriment par :

$$(***) \quad \begin{cases} X(q) - X(p) = z\mathbf{v} - y\mathbf{w} \\ X(m) - X(p) = x\mathbf{w} - z\mathbf{u} \end{cases}$$

Le système  $(***)$  équivaut à 6 équations linéaires pour trois inconnus  $x, y, z$ , dont les conditions de compatibilité ne sont autres que les relations  $(**)$ , vérifiées par hypothèse, et dont la solution unique est :

$$x = (X(m) - X(p)) \cdot \mathbf{w}$$

$$y = (X(q) - X(p)) \cdot \mathbf{w}$$

$$z = (X(q) - X(p)) \cdot \mathbf{v} = -(X(m) - X(p)) \cdot \mathbf{u}.$$

L'implication (a)  $\Rightarrow$  (b) et l'unicité du vecteur  $\omega$  sont donc établies. L'unicité de  $\omega_X$  entraîne immédiatement la linéarité de  $X \rightarrow \omega_X$ .  $\blacksquare$

D'après (b), un champ antisymétrique est déterminé par  $\omega_X$  et sa valeur en un point. L'application suivante :

$$X \longrightarrow (\omega_X, X(p)) \quad \text{vecteur de Plücker}$$

est une bijection entre espaces vectoriels de  $\mathfrak{D}$  à  $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ . Pour un point  $p$  fixé dans  $\mathcal{E}$ , l'algèbre de Lie est engendrée par :

- (1) L'ensemble  $\mathcal{C}$  des champs constants : sous espace vectoriel de  $\mathfrak{D}$  tel que  $\omega_X = 0$ ,
- (2)  $\mathcal{Z}_p$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{D}$  formé des  $X$  tel que  $X(p) = 0$ .



On a :

$$\mathfrak{D} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{Z}_p$$

On va construire une base de  $\mathfrak{D}$ . Soit  $(o, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  un repère sur  $\mathcal{E}$ , on définit :  $\xi, \eta, \zeta$  les champs de vecteurs tel que :

$$\xi(p) = \mathbf{x} \wedge \vec{o\overline{p}}, \quad \eta(p) = \mathbf{y} \wedge \vec{o\overline{p}}, \quad \zeta(p) = \mathbf{z} \wedge \vec{o\overline{p}}. \quad \text{pour } p \in \mathcal{E}$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  les champs vectoriels constants tel que :

$$\mathbf{i}(p) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{j}(p) = \mathbf{y}, \quad \mathbf{k}(p) = \mathbf{z}. \quad \text{pour } p \in \mathcal{E}$$

Alors :  $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \xi, \eta, \zeta\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$ . Soit  $X \in \mathfrak{D}$ , on peut l'exprimer dans cette base :

$$X = \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k} + \lambda_4 \xi + \lambda_5 \eta + \lambda_6 \zeta$$

plus précisément, les coordonnées  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$  sont déterminés par :

$$\lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k} = X(o). \quad \lambda_4 \mathbf{i} + \lambda_5 \mathbf{j} + \lambda_6 \mathbf{k} = \omega_X$$

### 1.3.2 La représentation adjointe de $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ sur $\mathfrak{D}$

**Définition 1.4** Soit  $A \in \mathbb{D}(\mathcal{E})$  et  $X \in \mathfrak{D}$ , la représentation adjointe de  $\mathbb{D}(\mathcal{E})$  est définie par :

$$Ad A \cdot X = \mathbf{A} \circ X \circ A^{-1} \in \mathfrak{D}$$

qui est un champ antisymétrique et qui transforme  $X$  par  $A$ . On note aussi par  $A_*$  l'opérateur  $Ad A$ , c'est-à-dire le déplacement  $A$  opérant sur les champs antisymétriques.

D'après la proposition 1.1, pour  $o, p$  dans  $\mathcal{E}$ , on a :

$$A^{-1}(p) = A^{-1}(o) + \mathbf{A}^{-1}(\vec{o\overline{p}})$$

on applique  $X$  un champ antisymétrique à la formule précédente

$$X(A^{-1}(p)) = X(A^{-1}(o)) + \omega_X \wedge \mathbf{A}^{-1}(\vec{o\overline{p}})$$

Appliquons l'opérateur  $\mathbf{A} \in SO(\mathfrak{E})$  :

$$A_* X(p) = A_* X(A^{-1}(o)) + \mathbf{A}(\omega_X) \wedge \vec{o\overline{p}}$$

ce qui montre que  $\mathbf{A} \circ X \circ A^{-1} \in \mathfrak{D}$ , avec :

$$\omega_{A_* X} = \mathbf{A}(\omega_X)$$

Pour  $A \in \mathbb{D}(\mathcal{E})$ ,  $A_*$  est un opérateur linéaire dans  $\mathfrak{D}$  et il possède les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_* X &= X \\ (A_1 A_2)_* X &= A_{1*} (A_{2*} X). \quad A_1, A_2 \in \mathbb{D}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

### 1.3.3 La forme de Klein et l'axe central

**Définition 1.5** Soient  $X, Y$  sont dans  $\mathfrak{D}$ , le produit intérieur canonique, on l'appelle aussi la forme de Klein, est une forme symétrique bilinéaire non dégénérée définie par :

$$[X|Y] = \omega_X \cdot Y(p) + \omega_Y \cdot X(p) \quad \text{pour } p \in \mathcal{E}$$

ce qui est indépendant de choix de  $p$ .

De plus la forme de Klein vérifie la formule suivante :

$$[A \cdot X | A \cdot Y] = [X | Y] \quad (1.1)$$

**Définition 1.6** Soit  $X \in \mathfrak{D}$  tel que  $\omega_X \neq 0$ , alors :

(i) L'ensemble  $\Lambda_X = \{p \in \mathcal{E} \mid \omega_X \wedge X(p) = 0\}$  est une ligne droite. Elle est l'axe central de  $X$ .

(ii) Il existe un nombre réel  $f_X$  tel que  $X(p) = f_X \omega_X$  pour  $p \in \Lambda_X$  ( $X(p)$  est donc constant pour tout points de  $\Lambda_X$ ) :

$$f_X = \frac{\omega_X \cdot X(p)}{\omega_X^2} = \frac{[X|X]}{2\omega_X^2}$$

### 1.3.4 Structure de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{D}$

**Définition 1.7** Le crochet de Lie  $[X, Y] \in \mathfrak{D}$  de  $X, Y \in \mathfrak{D}$  est défini par :

$$[X, Y](p) = \omega_X \wedge Y(p) - \omega_Y \wedge X(p) \quad \text{pour } p \in \mathcal{E}.$$

Nous avons la formule suivante :

$$[A \cdot X, A \cdot Y] = A \cdot [X, Y] \quad (1.2)$$

On a remarqué aussi l'application  $X \rightarrow \omega_X$  est un homomorphisme sur l'algèbre de Lie à  $\mathbb{E}$  :

$$\omega_{[X, Y]} = \omega_X \wedge \omega_Y$$

Compte tenu la structure vectorielle sur  $\mathbb{E}$  et avec le crochet de Lie, alors  $\mathfrak{D}$  est une algèbre de Lie, c'est-à-dire que  $[X, Y]$  est une application bilinéaire, antisymétrique et l'identité de Jacobi est vérifiée :

$$[X, X] = 0 \quad (\text{ou bien } [X, Y] = -[Y, X])$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

**Définition 1.8** Nous appellerons famille fondamentale de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$  ; un triplet de champs antisymétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$  non nuls, tels qu'ils vérifient les trois conditions suivantes :

$$[\xi, \eta] = \zeta, \quad [\eta, \zeta] = \xi, \quad [\xi, \zeta] = \eta \quad (1.3)$$

Les familles fondamentales correspondent aux repères orthonormés directs de l'espace  $\mathcal{E}$ .

## 1.4 Les nombres duaux et les champs antisymétriques

### 1.4.1 Nombre dual

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques définitions nécessaires des éléments de base du calcul sur les nombres duaux.

**Définition 1.9** On appelle  $\Delta$  l'ensemble des nombres duaux. Les nombres duaux sont exprimés sous la forme suivante :

$$\hat{x} = x + \epsilon x^\circ \quad \text{avec} \quad x, x^\circ \in \mathbb{R}.$$

$x$  est la partie réelle,  $x^\circ$  est la partie duale. L'égalité et les opérations dans  $\Delta$  sont définies par :

*Égalité* :  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ , si et seulement si :  $x_1 = x_2$ ,  $x_1^\circ = x_2^\circ$ ,

*Addition* :  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = (x_1 + x_2) + \epsilon(x_1^\circ + x_2^\circ)$ ,

*Multiplication* :  $\hat{x}_1 \hat{x}_2 = x_1 x_2 + \epsilon(x_1^\circ x_2 + x_1 x_2^\circ)$ .

$\Delta$  pourrait aussi être défini comme l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni de lois d'addition et de multiplication convenables.

Ici  $\epsilon$  est l'unité dual, vérifiant  $\epsilon^2 = 0$ . Muni de ces opérations,  $\Delta$  est un anneau commutatif ayant des diviseurs de zéro, le quotient  $\frac{1}{\hat{x}}$  est possible si la partie réelle de  $\hat{x}$  est différent de zéro, et :

$$\frac{1}{\hat{x}} \hat{x}^{-1} = \frac{1}{x} - \epsilon \frac{x^\circ}{x^2} \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

On a aussi la proposition suivante :

**Proposition 1.3** Soit  $n$  un nombre entier naturel quelconque, pour les nombres duaux  $\hat{x}$  dont la partie réelle est différente de zéro, on a :

$$(\hat{x} + \epsilon x^\circ)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} \pm \left( x^{\frac{1}{n}} + \epsilon \frac{x^\circ}{n x^{\frac{n-1}{n}}} \right) & \text{si } n \text{ est paire et } x > 0, \\ x^{\frac{1}{n}} + \epsilon \frac{x^\circ}{n x^{\frac{n-1}{n}}} & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases} \quad (1.4)$$

**Démonstration** : Supposons :  $x \in \Delta$ ,  $y \in \Delta$  et  $\hat{x}^n = \hat{y}$ , alors :

$$\begin{aligned} (y + \epsilon y^\circ)^n &= y^n + \epsilon n y^{n-1} y^\circ \\ &= x + \epsilon x^\circ. \end{aligned}$$

Le résultat est immédiat. ■

**Définition 1.10 (Veldkamp)** Soit  $f(x)$  une fonction réelle dérivable, on veut la définir pour  $x \in \Delta$ , on pose :

$$f(\hat{x} + \epsilon x^\circ) = f(x) + \epsilon x^\circ f'(x)$$

D'après cette propriété, pour  $\hat{q} = q + \epsilon d \in \Delta$ , en particulier, on a :

$$\sin \hat{q} = \sin q + \epsilon d \cos q, \quad \cos \hat{q} = \cos q - \epsilon d \sin q$$

$$\tan \hat{q} = \tan q + \epsilon \frac{d}{\cos^2 q}, \quad \cot \hat{q} = \cot q - \epsilon \frac{d}{\sin^2 q}$$

### 1.4.2 Multiplication des champs antisymétriques par les nombres duaux

Soit  $\Omega : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$  l'application linéaire définie par :

$$\Omega(X) : p \rightarrow \omega_X \in \mathcal{C}$$

de plus  $\Omega$  vérifie la relation suivante :

$$\Omega^2 = 0$$

La multiplication d'un champ antisymétrique par le nombre dual  $\epsilon$  s'identifie à l'image du champ antisymétrique  $X$  par l'opérateur  $\Omega$ . Pour un nombre dual quelconque, on a :

$$(x + \epsilon x^\circ)X = x \cdot X + x^\circ \Omega X.$$

A partir des propriétés précédentes, on peut obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [X, \Omega(X)] &= 0 \\ [X, \Omega(Y)] &= [\Omega(X), Y] = \Omega([X, Y]) = \omega_X \wedge \omega_Y \\ [X|\Omega(Y)] &= [\Omega(X)|Y] = \omega_X \cdot \omega_Y \end{aligned}$$

**Définition 1.11** (i) La forme bilinéaire symétrique  $[\Omega(X)|Y] = (X|Y) = \omega_X \cdot \omega_Y$  est la forme de Killing(c'est une forme positive mais dégénérée).

(ii) Le produit intérieur dual canonique est la forme bilinéaire symétrique non dégénérée a valeur dans  $\Delta$  défini par :

$$\{X|Y\} = (X|Y) + [X|Y]\Omega = (X|Y) + \epsilon[X|Y]$$

Grâce à l'opérateur  $\Omega$ , on peut obtenir des relations[Chevallier] importantes entre le crochet de Lie, la forme de Klein et la forme de Killing et la représentation adjointe :

(1) Le double crochet

$$[X, [Y, Z]] = [X|Z]\Omega(Y) - [X|Y]\Omega(Z) + (X|Z)Y - (X|Y)Z \quad (1.5)$$

ou bien :

$$[X, [Y, Z]] = \{X|Z\}Y - \{X|Y\}Z \quad (1.6)$$

On montre que  $\{.\}$  est une forme  $\Delta$  - bilinéaire symétrique.

(2) Le produit mixte dual qui est la forme  $\Delta$  - trilinéaire définie par :

$$(X, Y, Z) \rightarrow \{X, |[Y, Z]\}$$

Cette application vérifie :

$$\{X, |[Y, Z]\} = \{Z|[X, Y]\} = \{Y|[Z, X]\} \quad (1.7)$$

(3)Le produit intérieur canonique des quatre champs

$$[[X, Y]|[Z, U]] = (X|Z)[Y|U] + (Y|U)[X|U] - (Y|Z)[X|U] - (X|U)[Y|Z] \quad (1.8)$$

ou bien :

$$[[X, Y]|[Z, U]] = \{X|Z\}\{Y|U\} - (Y|U)(X|U) - \{Y|Z\}\{X|U\} + (X|U)(Y|Z) \quad (1.9)$$

(4) Pour  $A \in \mathfrak{D}$ :

$$\{A_*X|A_*Y\} = \{X|Y\}, \quad [A_*X|A_*Y] = [X|Y], \quad (A_*X|A_*Y) = (X|Y)$$

On peut représenter la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathfrak{D}$  définie dans 1.3.1 sous la forme suivante:

$$\mathcal{B} = \{\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta, \xi, \eta, \zeta\}$$

### 1.4.3 La représentation adjointe de $\mathfrak{D}$

À partir de la définition générale de l'algèbre de Lie, nous allons définir un opérateur  $\text{ad } X \in \mathcal{L}(\mathfrak{D})$  pour  $X \in \mathfrak{D}$  par:

$$\text{ad } X \cdot Y = [X, Y] \quad (1.10)$$

on appelle  $\text{ad} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{D})$  la **représentation adjointe** de  $\mathfrak{D}$ .

L'identité de Jacobi peut être aussi traduite par:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

elle est équivalente à:

$$[X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] - [[X, Y], Z] = 0$$

où encore à:

$$\text{ad } X \circ \text{ad } Y \cdot Z - \text{ad } Y \circ \text{ad } X \cdot Z = \text{ad } [X, Y] \cdot Z = 0$$

$\text{ad } X$  est une dérivation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D} : X \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{D})$ , (c'est-à-dire un homomorphisme de  $\mathfrak{D}$  à  $\mathcal{L}(\mathfrak{D})$ ). On a donc :

$$\text{ad } [X, Y] = \text{ad } X \circ \text{ad } Y - \text{ad } Y \circ \text{ad } X. \quad (1.11)$$

Si l'on choisit une base  $\mathcal{B}$  dans  $\mathfrak{D}$  comme dans le paragraphe 1.3.1, si  $X$  est représenté par  $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^t$ , ce que l'on écrira  $X \simeq [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^t$  avec

$$\omega_X \simeq [x_4, x_5, x_6]^t, \quad X(p) \simeq [x_1, x_2, x_3]^t$$

alors, l'opérateur  $\text{ad } X$  est défini par:

$$\text{ad } X \simeq \begin{bmatrix} 0 & -x_6 & x_5 & 0 & -x_3 & x_2 \\ x_6 & 0 & -x_4 & x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_5 & x_4 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_6 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 & 0 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & x_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

**Définition 1.12** Soit  $R \in \mathcal{L}(\mathfrak{D})$ , le produit intérieur dual canonique permet de définir l'adjointe  $R^*$  de  $R$  par

(i)  $\{R^*(X) | Y\} = \{X | R(Y)\}$ , pour  $X, Y \in \mathfrak{D}$ ;

Les propriétés suivantes sont vérifiées:

(ii) Si  $R$  est une application adjointe, alors  $R \circ R^* = R^* \circ R = \mathbf{1}$ ;

(iii) Si  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  forme une base orthonormale du module  $\mathfrak{D}$ , alors les matrices de nombres duaux de  $R$  et  $R^*$  sont transposés l'une de l'autre:

$$\text{Matrice}(R^*) = {}^t(\text{matrice}(R))$$

Considérons (i), pour  $X$  fixé,  $\{X \mid R(Y)\}$  est une forme  $\Delta$ -linéaire, donc la forme  $\{\cdot \mid \cdot\}$  étant non dégénéré, il existe  $U \in \mathfrak{D}$  tel que :

$$\{U \mid Y\} = \{X \mid R(Y)\}$$

on a donc :  $U = R^*(Y)$ . L'opérateur  $R^*$  est alors  $\Delta$ -linéaire.

#### 1.4.4 Exponentielles des champs antisymétriques

La fonction exponentielle joue un rôle fondamental dans la théorie des groupes classiques. Elle est définie pour tout groupe de Lie et généralise la fonction exponentielle habituelle ou encore la fonction exponentielle d'opérateur. En effet, la théorie générale des groupes et de l'algèbres de Lie permet de définir cette application à partir de la notion de sous-groupe à un paramètre. Dans le cas du groupe de déplacement  $\mathbb{D}$ , si  $e$  désigne l'élément neutre du groupe, pour tout champs antisymétriques  $X \in \mathfrak{D}$ , les solutions maximales  $t \rightarrow \Phi_X(t)$  des équations différentielles avec condition initiale :

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = X \circ \Phi(t), \quad \Phi(0) = e$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Phi(t) \circ X, \quad \Phi(0) = e$$

sont égales. Elles définissent le sous-groupe à un paramètre engendré par le champ antisymétrique  $X$ . On note  $\exp(tX) = \Phi_X(t)$ . Cette définition reste abstraite, il convient d'utiliser une représentation adéquate pour exprimer les calculs. Pour cette raison, on va définir l'exponentielle de champ antisymétrique à partir de l'exponentielle d'opérateur dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{D})$ . Signalons que, pour une telle définition, on admet un certain nombre de résultat qui se démontrent de façon générale dans la théorie des groupes et algèbres de Lie :

1.  $A_* = B_* \Leftrightarrow A = B$ , pour  $A, B$  dans le groupe  $\mathbb{D}$  (propriété particulier de  $\mathfrak{D}$ ).

$$2. (\exp(tX))_* = \exp(\text{ad}(tX)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\text{ad } X)^n}{n!}$$

#### 1.4.5 Déplacement dans l'ensemble d'application linéaire

**Proposition 1.4** (Formule d'Olinde-Rodrigues généralisée)

L'opérateur adjoint de  $\mathfrak{D}$  représentant le déplacement hélicoïdale dont l'axe  $a$  pour générateur normé  $U \in \mathfrak{Z}_a$ , d'angle  $\theta$ , et de translation  $d$  s'exprime par :

$$R(\theta, d, U) = (\exp(\theta U))_* (\exp(d\Omega U))_* = (1 + \sin \theta \text{ad } U + (1 - \cos \theta)(\text{ad } U)^2)(1 + d \text{ad } \Omega U) \quad (1.13)$$

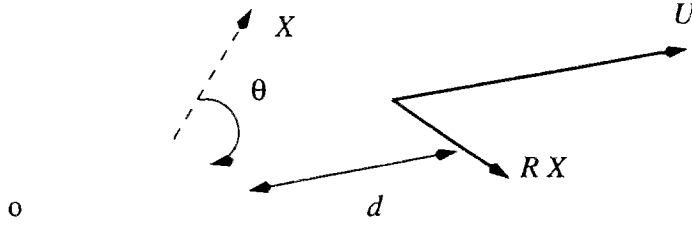
(a) S'il s'agit une translation alors, avec  $\theta = 0$  :

$$T(d, U) = (\exp(d\Omega U))_* = 1 + d \text{ad } (\Omega U) \quad (1.14)$$

(b) S'il s'agit une rotation pure alors, avec  $d = 0$  (Formule d'Olinde-Rodrigues [OR40]) :

$$R(\theta, U) = (\exp(\theta U))_* = 1 + \sin \theta \text{ad } U + (1 - \cos \theta)(\text{ad } U)^2 \quad (1.15)$$

$R$  appartient à  $L(\mathfrak{D})$ .

FIG. 1.2 - Déplacement engendré par  $U$ 

D'après la proposition précédente, si l'on applique un déplacement à un élément  $X$  de  $\mathfrak{D}$ , on a :

$$R(\theta, d, U)X = X + (\sin \theta + \Omega d \cos \theta)[U, X] + (1 - \cos \theta + \Omega d \sin \theta)[U, [U, X]]$$

Soient  $u, v, w$  les coordonnées de  $\omega_U$  dans la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , grâce à la formule d'Olinde-Rodrigues [Roo77], [Roo78], on peut exprimer un déplacement sous la forme matricielle

$$R(\theta, d, U) \simeq \begin{pmatrix} u^2 + (1 - u^2) \cos \theta & (1 - \cos \theta)uv - \sin \theta w & (1 - \cos \theta)uw + \sin \theta v & 0 & 0 & 0 \\ (1 - \cos \theta)uv + \sin \theta w & v^2 + (1 - v^2) \cos \theta & (1 - \cos \theta)vw - \sin \theta u & 0 & 0 & 0 \\ (1 - \cos \theta)uw - \sin \theta v & (1 - \cos \theta)vw + \sin \theta u & w^2 + (1 - w^2) \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (u^2 - 1) \sin \theta & uv \sin \theta + w \cos \theta & uw \sin \theta + v \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & uv \sin \theta + w \cos \theta & (u^2 - 1) \sin \theta & vw \sin \theta - u \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & uw \sin \theta - v \cos \theta & vw \sin \theta + u \cos \theta & (w^2 - 1) \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & u^2 + (1 - u^2) \cos \theta & (1 - \cos \theta)uv - \sin \theta w & (1 - \cos \theta)uw + \sin \theta v \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \cos \theta)uv + \sin \theta w & v^2 + (1 - v^2) \cos \theta & (1 - \cos \theta)vw - \sin \theta u \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \cos \theta)uw - \sin \theta v & (1 - \cos \theta)vw + \sin \theta u & w^2 + (1 - w^2) \cos \theta \end{pmatrix}$$

En particulier, nous considérerons les déplacements hélicoïdaux suivant les axes  $\xi, \eta$  et  $\zeta$  respectivement

$$R(\theta, d_\theta, \xi) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -\sin(\theta)d_\theta & \cos(\theta)d_\theta \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & -\cos(\theta)d_\theta & -\sin(\theta)d_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R(\phi, d_\phi, \eta) \simeq \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & -\sin(\phi)d_\phi & 0 & \cos(\phi)d_\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & -\cos(\phi)d_\phi & 0 & -\sin(\phi)d_\phi \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$R(\psi, d_\psi, \eta) \simeq \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 & -\sin(\psi)d_\psi & \cos(\psi)d_\psi & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & -\cos(\psi)d_\psi & -\sin(\psi)d_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Angles d'Euler duaux

La représentation des angles d'Euler duaux consiste à décomposer un déplacement en trois déplacements successifs de la façon suivante :

$$R(\psi, d_\psi, \zeta)R(\theta, d_\theta, \xi)R(\phi, d_\phi, \zeta) \simeq \begin{pmatrix} Re(\mathbf{O}) & Du(\mathbf{O}) \\ \mathbf{0} & Re(\mathbf{O}) \end{pmatrix}$$

$Re(\mathbf{O}) \in SO(3)$  est défini par

$$Re(\mathbf{O}) = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta) \\ -\sin(\psi)\cos(\phi) - \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$Du(\mathbf{O}) = \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ colonne} \begin{pmatrix} \cos(\psi)\sin(\phi)d_\phi + \sin(\psi)\cos(\phi)d_\phi\cos(\theta) - \sin(\psi)\sin(\theta)d_\theta\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\phi)d_\psi + \cos(\psi)d_\psi\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\cos(\psi)\cos(\phi)d_\phi + \sin(\psi)\sin(\phi)d_\phi\cos(\theta) + \sin(\psi)\sin(\theta)d_\theta\cos(\phi) + \sin(\psi)\sin(\theta)d_\psi - \cos(\psi)d_\psi\cos(\theta)\cos(\phi) \\ -\sin(\psi)\cos(\theta)d_\theta - \cos(\psi)d_\psi\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ 2^{\text{e}} \text{ colonne} \begin{pmatrix} -\sin(\psi)\sin(\phi)d_\phi + \cos(\psi)\cos(\phi)d_\phi\cos(\theta) - \cos(\psi)\sin(\theta)d_\theta\sin(\phi) + \cos(\psi)d_\psi\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi)d_\psi \\ \sin(\psi)\cos(\phi)d_\phi + \cos(\psi)\sin(\phi)d_\phi\cos(\theta) + \cos(\psi)\sin(\theta)d_\theta\cos(\phi) + \cos(\psi)d_\psi\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi)d_\psi \\ -\cos(\psi)\cos(\theta)d_\theta + \sin(\psi)d_\psi\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ 3^{\text{e}} \text{ colonne} \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\cos(\phi)d_\phi - \cos(\theta)d_\theta\sin(\phi) \\ -\sin(\theta)\sin(\phi)d_\phi + \cos(\theta)d_\theta\cos(\phi) \\ \sin(\theta)d_\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

### Angles de Bryant duaux

La représentation des angles de Bryant duaux consiste à décomposer un déplacement en trois déplacements successifs de la façon suivante :

$$R(\theta, d_\theta, \xi)R(\phi, d_\phi, \eta)R(\psi, d_\psi, \zeta) \simeq \begin{pmatrix} Re(\mathbf{O}) & Du(\mathbf{O}) \\ \mathbf{0} & Re(\mathbf{O}) \end{pmatrix}$$

avec

$$Re(\mathbf{O}) = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\phi) & \sin(\psi)\cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\psi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\psi)\sin(\phi) & \cos(\psi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\psi)\sin(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\psi)\sin(\theta) - \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) & -\cos(\psi)\sin(\theta) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$Du(\mathbf{O}) = \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ colonne} \begin{pmatrix} \sin(\psi)\cos(\phi)d_\psi - \cos(\psi)\sin(\phi)d_\phi \\ \cos(\theta)\cos(\psi)d_\psi - \sin(\theta)\sin(\psi)\sin(\phi)d_\psi - \sin(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi)d_\phi - \sin(\theta)d_\theta\sin(\psi) + \cos(\theta)d_\theta\cos(\psi)\sin(\phi) \\ -\cos(\psi)d_\psi\sin(\theta) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi)d_\psi - \cos(\psi)\cos(\phi)d_\phi\cos(\theta) - \sin(\psi)\cos(\theta)d_\theta - \cos(\psi)\sin(\theta)d_\theta\sin(\phi) \end{pmatrix} \\ 2^{\text{e}} \text{ colonne} \begin{pmatrix} -\cos(\psi)d_\psi\cos(\phi) - \sin(\psi)\sin(\phi)d_\phi \\ \cos(\theta)\sin(\psi)d_\psi + \sin(\theta)\cos(\psi)d_\psi\sin(\phi) - \sin(\theta)\sin(\psi)\cos(\phi)d_\phi + \sin(\theta)d_\theta\cos(\psi) + \cos(\theta)d_\theta\sin(\psi)\sin(\phi) \\ -\sin(\psi)d_\psi\sin(\theta) + \cos(\psi)d_\psi\cos(\theta)\sin(\phi) - \sin(\psi)\cos(\phi)d_\phi\cos(\theta) + \cos(\psi)\cos(\theta)d_\theta - \sin(\psi)\sin(\theta)d_\theta\sin(\phi) \end{pmatrix} \\ 3^{\text{e}} \text{ colonne} \begin{pmatrix} \cos(\phi)d_\phi \\ -\sin(\theta)\sin(\phi)d_\phi - \cos(\theta)d_\theta\cos(\phi) \\ -\cos(\theta)\sin(\phi)d_\phi + \sin(\theta)d_\theta\cos(\phi) \end{pmatrix} \end{cases}$$



### 1.4.6 Représentation des quaternions duaux et des applications adjointes

Une origine  $o$  de  $\mathcal{E}$  étant fixée, pour  $X \in \mathfrak{D}$  on définit :

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \omega_X + \epsilon X(o) \\ \text{Re}(X) &= \omega_X, \quad \text{Du}(X) = X(o) \end{aligned}$$

On peut exprimer un quaternion dual par [Che91]

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (z, X) \\ &= (\text{Re}(z) + \epsilon \text{Du}(z), \text{Re}(X) + \epsilon \text{Du}(X)) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{D}, z \in \Delta \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{cases} \text{Re}(\mathbf{q}) = (\text{Re}(z), \text{Re}(X)) \\ \text{Du}(\mathbf{q}) = (\text{Du}(z), \text{Du}(X)) \end{cases}$$

Soient  $\mathbf{q}_1 = (z_1, X_1)$  et  $\mathbf{q}_2 = (z_2, X_2)$  deux quaternions duaux, ils ont les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 &= (z_1 + z_2, X_1 + X_2) \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= (z_1 z_2 - \{X_1 | X_2\}, z_1 X_2 + z_2 X_1 + [X_1, X_2]) \end{aligned}$$

On note  $\bar{\mathbf{q}} = (z, -X)$  le quaternion conjugué de  $\mathbf{q}$ . L'ensemble  $\mathbf{Q}$  des quaternions duaux normés, c'est-à-dire, tel que  $|\mathbf{q}| = 1$  est un groupe pour la loi induite par la multiplication des quaternions duaux.

Si  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ , on a  $\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}} = (1, 0)$  (c'est-à-dire  $\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}}$ ), de plus les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \text{Re}(z)^2 + \text{Re}(X) \cdot \text{Re}(X) = 1 \\ \text{Re}(z) \cdot \text{Du}(z) + \text{Re}(X) \cdot \text{Du}(X) = 0 \end{cases}$$

On peut aussi écrire les relations précédentes avec la forme de Killing et la forme de Klein :

$$\begin{cases} \text{Re}(z)^2 + (X|X) = 1 \\ 2\text{Re}(z) \cdot \text{Du}(z) + [X|X] = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

On note  $L(\mathfrak{D})$  l'ensemble des applications adjointes, si  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ , il existe un élément  $R(\mathbf{q}) \in L(\mathfrak{D})$  représenté par

$$R(\mathbf{q})(\xi) = \mathbf{q}[\xi]\bar{\mathbf{q}} \quad \text{pour } \xi \in \mathfrak{D}. \quad (1.17)$$

Où  $[\cdot]$  désigne le quaternion dual pur  $(0, \xi)$  représentant  $\xi \in \mathfrak{D}$ , autrement dit, le déplacement  $R(\mathbf{q})$  exprimé en termes d'opérations sur les quaternions purs est l'opérateur  $[\xi] \rightarrow \mathbf{q}[\xi]\bar{\mathbf{q}}$ . Les propriétés fondamentales de cette représentation sont exprimées par

**Proposition 1.5** *La relation  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q} \rightarrow R(\mathbf{q}) \in L(\mathfrak{D})$  définie par la formule 1.17 est une surjection, de plus si  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ , on a :*

$$\begin{aligned} R(\mathbf{q})R(\mathbf{q}') &= R(\mathbf{q}\mathbf{q}') \\ R(1) &= \mathbf{1} \\ R(\mathbf{q})^{-1} &= R(\bar{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la relation est un homomorphisme de groupes.

Lorsque  $R = R(\theta, d, U)$  est le déplacement d'axe  $U$  et d'angle  $\theta$  et translation  $d$ , alors :

$$\mathbf{q} = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} U \right) \left( 1, \frac{d}{2} \epsilon U \right) = \left( \left( \cos \frac{\theta}{2} - \epsilon \frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right), \left( \sin \frac{\theta}{2} + \epsilon \frac{d}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) U \right)$$

S'il s'agit une rotation pure, on a  $\mathbf{q} = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} U)$ ; s'il s'agit une translation pure, on a  $\mathbf{q} = (1, \frac{d}{2} \epsilon U)$ .

Le même déplacement peut être représenté par le quaternion  $\mathbf{q}$  ou  $-\mathbf{q}$ .

En générale, on utilise les notations usuelles :

$$\begin{aligned} z &= \pm \left( \cos \frac{\theta}{2} - \epsilon \frac{d}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ X &= \sin \frac{\theta}{2} U + \epsilon \frac{d}{2} \cos \frac{\theta}{2} U \end{aligned} \quad (1.18)$$

Tout opérateurs linéaires dans  $L(\mathfrak{D})$  s'exprime de façon unique comme la somme d'un opérateur symétrique  $\mathbf{s}$  et d'un opérateur antisymétrique  $\mathbf{a}$ , c'est-à-dire,  $R = \mathbf{a} + \mathbf{s}$ , ils sont définis par les formules suivantes :

$$\mathbf{s} = Re(\mathbf{s}) + \epsilon Du(\mathbf{s}) \quad (1.19)$$

$$\mathbf{a} = Re(\mathbf{a}) + \epsilon Du(\mathbf{a}) \quad (1.20)$$

les parties réelles  $Re(\mathbf{a})$ ,  $Re(\mathbf{s})$  et les parties duales  $Du(\mathbf{a})$ ,  $Du(\mathbf{s})$  sont exprimées par :

$$\begin{cases} Re(\mathbf{s}) = \left( 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \text{ad}^2 \xi \right) \\ Du(\mathbf{s}) = d \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \text{ad}^2 \xi \\ Re(\mathbf{a}) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \text{ad} \xi \\ Du(\mathbf{a}) = 2 d \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \text{ad} \xi \end{cases} \quad (1.21)$$

ou bien :

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}(R + R^*) = \frac{1}{2}(Re(R) + Re(R)^*) + \frac{1}{2}\epsilon(Du(R) + Du(R)^*)$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(R - R^*) = \frac{1}{2}(Re(R) - Re(R)^*) + \frac{1}{2}\epsilon(Du(R) - Du(R)^*)$$

Puisque la trace d'un opérateur  $R \in L(\mathfrak{D})$  est définie par

$$Trace(R) = Trace(\mathbf{s}) = (4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) - \epsilon 4d \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.22)$$

En général, si l'opérateur  $R$  est donné, on ne peut pas connaître ses paramètres, c'est-à-dire, l'angle de rotation, la translation et l'axe de déplacement sans aucun calcul. Grâce aux relations précédentes, si l'opérateur  $R \in L(\mathfrak{D})$  est donné, les paramètres associés peuvent être déterminés par les relations de la proposition suivante.

**Proposition 1.6** *Soit  $\mathbf{q}$  un quaternion dual dont  $R \in L(\mathfrak{D})$  est l'opérateur associé (l'équation 1.17 est vérifiée), et si l'on pose  $\tau = trace(R)$ , alors on a*

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tau} \\ \text{ad} X = \frac{\mathbf{a}}{2z} \end{cases}$$

Si l'on écrit la partie duale et la partie réelle séparément :

$$\left\{ \begin{array}{l} Re(z) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + Re(\tau)} \\ Du(z) = \mp \frac{Du(\tau)}{\sqrt{1 + Re(\tau)}} \\ ad(Re(X)) = \frac{Re(\mathbf{a})}{\sqrt{1 + Re(\tau)}} \\ ad(Du(X)) = \frac{Du(\mathbf{a}) - 4Re(X)Du(z)}{4Re(z)} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

**Démonstration :** Les équations 1.18 signifient que  $z$  et  $X$  sont déterminés par leur partie réelle et leur partie duale, c'est-à-dire :

$$Re(z) = \pm \cos \frac{q}{2}, \quad Du(z) = \mp \frac{d}{2} \sin \frac{q}{2}$$

$$Re(X) = \sin \frac{q}{2} U, \quad Du(X) = \frac{d}{2} \cos \frac{q}{2} U,$$

alors, à partir de l'expression de trace  $\tau$ , on a tout de suite les deux premières formules dans la proposition.

Si l'on remplace les termes trigonométriques par  $z$  et  $X$  dans la troisième et la quatrième équations de 1.21, on a :

$$\begin{aligned} Re(\mathbf{a}) &= 2Re(z)ad(Re(X)) \\ Du(\mathbf{a}) &= 4Du(X)Re(z) + 4Du(z)Re(X) \end{aligned}$$

on peut obtenir la troisième et la quatrième formules dans la proposition.

---

## Chapitre 2

# Modélisation des systèmes mécaniques - étude cinématique

La cinématique est l'étude des mouvements des points et des corps.

Un ensemble de points tels que la distance entre deux points quelconques de l'ensemble ne varie jamais est un corps rigide. Un mécanisme est constitué en connectant des corps rigides avec des liaisons, les mouvements relatifs sont réalisés grâce à ces liaisons. Cette connection contraint les déplacements relatifs des différents corps d'un système au niveau de leurs positions et de leurs orientations, voire de leurs vitesses, ou de leurs accélérations.

Il est raisonnable, lorsque l'on étudie des systèmes de corps rigides, de supposer que leurs structures mécaniques ne varient pas continuellement.

Les interactions dépendent exclusivement de la structure mécanique interne du système, c'est-à-dire de la forme et de la matière des corps, ainsi que de la nature des dispositifs mécaniques qui réalisent les articulations.

D'une manière générale, il est intuitif de considérer que deux corps sont liés à un instant donné, s'il existe localement, au moins un déplacement du système qu'il composent qui n'est pas compatible avec la structure mécanique de ce système.

De plus la notion de liaison doit être indépendante de l'observateur du mouvement, de sa position et de son propre mouvement. C'est ce qui est exprimé par le premier axiome de la définition 2.2.

## 2.1 Notion de liaison

### 2.1.1 Liaison entre deux corps, degré de liberté

On considère un corps rigide, il est dit isolé s'il peut se mouvoir librement sans aucune contrainte, sinon, on dit qu'il est soumis à des liaisons. En mécanique, il existe plusieurs types de liaisons. Dans la littérature, on utilise une terminologie en relation avec les groupes pour décrire de telles liaisons.

En effet, le terme liaison a un sens purement mathématique mais il existe, en général plusieurs moyens de réaliser une liaison en mécanique. Dans cette partie, on va modéliser une liaison entre deux corps par une relation binaire.

Considérons deux corps  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$  connectant par une liaison. Dans la suite, on va adjoindre à ces deux corps deux familles fondamentales qui soient rigidement solidaires. Soient  $s_i, s_j$  ces deux familles, alors à tout moment, on peut déterminer le déplacement relatif de  $\mathcal{C}_j$  par rapport à  $\mathcal{C}_i$  par le déplacement  $A$  tel que :  $s_j = A \circ s_i$ , ce déplacement traduit la liaison  $\ell_{ij}$  entre les corps  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$  et l'on écrira :

$$s_i \ell_{ij} s_j \iff s_j = A(q) \circ s_i \quad (2.1)$$

**Définition 2.1** L'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles pour la liaison  $\ell_{ij}$  est défini par :

$$\mathfrak{m}(i, j) = \{A \in \mathbb{D} \mid s_j = A \circ s_i\} \quad (2.2)$$

Par ailleurs, la réciprocité du déplacement relatif entre les corps  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$  entraîne qu'à la liaison  $\ell_{ij}$  reliant le corps  $\mathcal{C}_j$  par la référence au corps  $\mathcal{C}_i$  est associée une liaison  $\bar{\ell}_{ij}$  reliant le corps  $\mathcal{C}_i$  par référence au corps  $\mathcal{C}_j$ , telle que :

$$s_j \bar{\ell}_{ij} s_i \iff s_i \ell_{ij} s_j \quad (2.3)$$

L'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles  $\bar{\mathfrak{m}}(i, j)$  associé à la liaison  $\bar{\ell}_{ij}$  est donné par la relation :

$$\bar{\mathfrak{m}}(i, j) = \mathfrak{m}^{-1}(i, j) \quad (2.4)$$

où  $\mathfrak{m}^{-1}(i, j)$  désigne l'ensemble des inverses des déplacements de l'ensemble  $\mathfrak{m}(i, j)$ .

Si  $\mathfrak{m}(i, j)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{D}$ , alors :

$$\bar{\mathfrak{m}}(i, j) = \mathfrak{m}(j, i) \quad (2.5)$$

**Définition 2.2** Une liaison holonome entre deux corps  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$  est une relation binaire  $\ell_{ij}$  qui vérifie les deux axiomes suivants :

(axiome<sub>1</sub>) Si  $s_i$  et  $s_j$  sont deux familles fondamentales rigidement solidaires respectivement des corps  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$ .

$$s_i \mathcal{L} s_j \iff A \circ s_i \mathcal{L} A \circ s_j \quad \text{pour } A \in \mathbb{D}.$$

(axiome<sub>2</sub>) L'ensemble  $\mathfrak{m}(i, j)$  des déplacements cinématiquement admissibles par le couple cinématique  $\ell_{ij}$  est une sous-variété différentielle de  $\mathbb{D}$ .

Un grand nombre de liaisons mécaniques matérialisent des sous-groupes de  $\mathbb{D}$ . Elles vérifient un axiome plus fort que le second axiome :

(axm<sub>3</sub>) L'ensemble  $\bar{\mathfrak{m}}(i, j)$  des déplacements cinématiquement admissibles par le couple cinématique  $\bar{\ell}_{ij}$  est un sous-groupe de Lie.

Concrètement la propriété  $s_i \ell_{ij} s_j$  signifie que les positions relatives des solides vérifient certaines conditions. Le premier axiome signifie que si l'on déplace "en bloc" les deux solides en partant d'une configuration admissible on obtient une configuration admissible. Autrement dit,

après avoir subis le même déplacement, la position relative entre les deux corps n'a pas changée.

**Définition 2.3** Un couple cinématique est la réalisation matérielle d'une liaison holonome entre deux corps.

- Un couple cinématique est dit inférieur s'il peut réaliser un sous-groupe du groupe des déplacements.
- Un couple cinématique est dit supérieur si le déplacement relatif peut être réalisé par des contacts ponctuels ou linéaires.

**Définition 2.4** Le nombre de degré de liberté d'un solide soumis à une liaison holonome est la dimension de la variété  $m(i, j)$  du deuxième axiome (c'est le nombre de paramètres indépendants nécessaires à la description des positions relatives des solides  $C_i, C_j$ , il s'agit des "paramètres articulaires" en robotique.)

### 2.1.2 Représentation des déplacements avec sous groupe à un paramètre

La notion de groupe à un paramètre joue un rôle essentiel dans la modélisation de liaison, puisque les déplacements admissibles d'une liaison géométrique peuvent être décomposés en un produit de sous-groupes à un paramètre. En effet, nous avons vu que dans une configuration donnée, on peut adjoindre un corps  $C$  une famille fondamentale (voire la définition 1.8 du chapitre précédent)  $s = (\xi, \eta, \zeta)$  à laquelle est associé un repère orthonormé. Ainsi, si une famille fondamentale  $s = (\xi, \eta, \zeta)$  est fixée et si une configuration de référence de  $C$  est choisie, alors il existe un unique isomorphisme de l'ensemble de toutes les familles fondamentales sur l'ensemble des configurations d'un corps rigide<sup>1</sup>, sur la configuration de  $C$ . Par la suite, le nombre de degré de liberté permis par une liaison peut être défini comme étant le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour engendrer la variété différentielle des déplacements cinématiquement admissibles pour cette liaison.

Un déplacement spatial peut être représenté par une translation et une rotation.

### 2.1.3 Classification des chaînes cinématiques et sous-groupes de Lie

On appelle couple cinématique une liaison entre deux corps successifs.

La théorie des groupes offre une méthode très simple pour la classification [Her78] des chaînes cinématiques.

Grâce à l'application exponentielle définie dans le contexte de la théorie des groupes de Lie et la notion de familles fondamentales, il est possible de caractériser explicitement ces déplacements pour permettre de faire un calcul symbolique directe dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$

---

1. La notion de configuration du corps rigide  $C$  est un élément de modélisation assez abstrait, généralement une configuration est donnée par rapport à une référence, éventuellement virtuelle. L'ensemble des configurations d'un corps rigide forme une variété différentielle (voire [Chevallier -86]).

Classification des chaînes cinématiques et des sous-groupes de $\mathbb{D}$			
chaînes cinématiques	Type	Caractérisation géométrique de la chaînes cinématiques	Déplacements C.A.
Encastrée	$O$ d.d.l. = 0	point fixé	$e$ Élément neutre du groupe $\mathbb{D}$
Prismatique	$P_\zeta$ d.d.l. = 1	Les déplacements C.A. réalisé par une telle liaison, s'obtiennent par des translations sur le bord du prisme de contact	$\exp(d\Omega\zeta)$ tel que $\zeta$ est un glisseur unitaire et l'axe $\Lambda_\zeta$ est le bord du prisme.
Rotoïde	$R_\zeta$ d.d.l. = 1	Le contact est établie sur une surface de révolution. Les déplacements C.A. par une telle liaison, s'obtiennent par une rotation autour de l'axe de la surface.	$\exp(\theta\zeta)$ tel que $\zeta$ est un glisseur unitaire et $\Lambda_\zeta$ est l'axe de rotation
Hélicoïdale	$H_\zeta$ d.d.l. = 1	Le contact est défini par une surface de la forme d'une vis. Cette surface est entièrement déterminée par la donné de l'axe du cylindrique inscrit et le $p$ défini par la vis.	$\exp(\theta(\zeta + p\Omega\zeta))$ tel que $\zeta$ est un glisseur unitaire et $\Lambda_\zeta$ est l'axe de la vis.
Cylindrique	$C_\zeta$ d.d.l. = 2	La surface de contact entre ces deux éléments est un cylindre de section circulaire. Les déplacements C.A. s'obtiennent par la composition d'une rotation dont l'axe est celui du cylindre et une translation le long du même l'axe	$\exp(\theta\zeta + d\Omega\zeta)$ tel que $\zeta$ est un glisseur unitaire et $\Lambda_\zeta$ est l'axe du cylindre.
Translation plane	$P_{\Pi\zeta}$ d.d.l. = 2	Les éléments d'une telle paire peuvent translater librement l'un par rapport à l'autre en restant dans un même plan	$\exp(\Omega(a\xi + b\eta))$ tel que $s = (\xi, \eta, \zeta)$ forme une famille fondamentale
Plane	$\Pi_\zeta$ d.d.l.= 3	Par rapport à la translation plane, les éléments de la paire peuvent subir des rotations autour d'une normale à ce plan.	$\exp(\Omega(a\xi + b\eta)) \exp(\psi\zeta)$ tel que $s = (\xi, \eta, \zeta)$ forme une famille fondamentale.
Translation spatiale	$P_{\xi\eta\zeta}$ d.d.l.=3	Cette liaison permet des translations indépendantes, des éléments de la paire l'un par rapport à l'autre, dans les trois directions de l'espace.	$\exp(\Omega(a\xi + b\eta + c\zeta))$ tel que $s = (\xi, \eta, \zeta)$ forme une famille fondamentale.
Sphérique	$S_O$ d.d.l. = 3	Le contact entre les éléments de la paire a lieu sur une sphère. La situation de chacun des éléments de la paire est donnée par rapport à celle de son partenaire par trois angles de rotations autour du centre $O$ de la sphère contact.	$\exp(\theta\xi + \varphi\eta + \psi\zeta)$ tel que $s = (\xi, \eta, \zeta)$ forme une famille fondamentale.
Y	$Y_\zeta$	Définie par des déplacements hélicoïdaux suivant une direction de l'espace et des translations indépendantes dans deux directions du plan perpendiculaire à cet axe.	$\exp(\Omega(a\xi + b\eta)) \exp(\psi(1 + \Omega p)\zeta)$ tel que $s = (\xi, \eta, \zeta)$ forme une famille fondamentale.
X	$X_\zeta$ d.d.l. = 4	Définie par des déplacements cylindriques suivant une direction de l'espace et des translations indépendantes dans deux directions du plan perpendiculaire à cet axe.	$\exp(\Omega(a\xi + b\eta)) \exp((\psi + \Omega c)\zeta)$ tel que $s = (\xi, \eta, \zeta)$ forme une famille fondamentale.
Libre	$F$ d.d.l. = 6	La liaison n'impose aucune contrainte	$\exp((\theta + \Omega a)\xi + (\phi + \Omega b)\eta) + (\psi + \Omega c)\zeta)$ tel que $s = (\xi, \eta, \zeta)$ forme une famille fondamentale.

### 2.1.4 Notion de graphe d'un mécanisme

On considère un système mécanique  $S$  constitué de  $m$  corps rigides  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , on suppose que l'on sait associer à chaque corps  $C_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ , un repère  $\mathcal{R}_i$  qui lui est solidaire. Il existe des couples cinématiques entre certains corps de ce système et on fait l'hypothèse que ces

couples sont holonomes.

On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble des couples du mécanisme,  $\ell_{ij}$  signifie le couple entre le corps  $\mathcal{C}_i$  et le corps  $\mathcal{C}_j$ .

Pour modéliser les déplacements de ce mécanisme, il suffit de connaître ses configurations cinématiquement admissibles et dans lesquelles peuvent se trouver les corps qui le composent. Dans le cas des mécanismes bouclés, ces configurations sont difficiles à déterminer. On se propose d'étudier le déplacement relatif au référentiel  $\mathcal{R}_1$  solidaire du corps  $\mathcal{C}_1$ ; ainsi le corps  $\mathcal{C}_1$  est considéré comme fixe et le système est composé de  $m - 1$  corps rigides en déplacement.

Pour étudier l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles d'un mécanisme, on est amené à représenter son architecture, c'est-à-dire la manière dont les corps sont reliés les uns aux autres.

A un système mécanique  $\mathcal{S}$  composé de  $m$  corps soumis à un ensemble de liaison  $\mathcal{L}$ , on associe le graphe simple  $\mathcal{G}(\mathcal{S}) = (\{1, 2, \dots\}, g(\mathcal{S}))$ , où  $g(\mathcal{S})$  est un ensemble de couples d'éléments de  $\{1, 2, \dots, m\}$ , tel que  $\{i, j\} \in g(\mathcal{S})$  si et seulement s'il existe une liaison entre les corps  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$ . Alors les correspondances suivantes s'établissent entre le graphe du système mécanique et son architecture :

- À chaque corps, on associe un sommet du graphe.
- À chaque couple, on associe une arête.
- S'il y a un couple entre deux corps alors les sommets correspondants sont voisins.
- Le graphe d'un mécanisme est connexe.

**Définition 2.5** *On dit qu'un système mécanique est fermé, si le graphe associé contient une boucle. Sinon c'est un mécanisme arborescent.*

Pour un mécanisme bouclé, on note  $\ell_i$  la liaison entre le corps  $\mathcal{C}_i$  et le corps  $\mathcal{C}_{i+1}$ ; particulièrement lorsque le mécanisme est une boucle  $\ell_{m+1}$  est identique à  $\ell_1$ .

Dans cette thèse, on s'intéresse particulièrement aux systèmes en boucles fermées. Quitte à diviser le système mécanique en plusieurs sous-systèmes et à les étudier séparément, on peut considérer que le système est complètement interconnecté, c'est-à-dire que son graphe est connexe.

## 2.2 Traitement des mécanismes bouclés

On se propose d'étudier le déplacement d'un mécanisme composé de  $m$  corps rigides vu par un observateur solidaire du corps  $\mathcal{C}_1$ .

Pour un système mécanique bouclé, on ne peut pas assurer que l'ensemble des configurations admissibles est une sous-variété, on se propose donc d'étudier l'existence du degré de liberté et



d'un paramétrage adéquat d'un mécanisme à structure bouclée.

Essentiellement, dans l'optique que l'on s'est fixée, les problèmes à résoudre sont de trois ordres et se formulent en ces termes :

- Considérant un mécanisme dont on connaît la nature des couples cinématiques, c'est-à-dire, les générateurs correspondants à chaque couple (voir tableau), est-ce qu'il possède un véritable degré de liberté? Si oui, comment déterminer ce degré de liberté?
- Considérant un mécanisme dont on connaît la nature des couples, et dont on sait qu'il possède un degré de liberté local, comment déterminer les relations entre les paramètres au premier ordre?
- Comme déterminer les configurations singulières? Est-il possible de classer les différents types de singularité dans les mécanismes?

Dans un premier temps, on va approfondir les aspects mathématiques aux notions de degré de liberté et de paramétrage pour déterminer quelles sont les hypothèses et les restrictions que l'on devra admettre pour mener à bien la modélisation des mécanismes considérés.

Dans ce qui suit de ce chapitre, la référence principale est [Ler87].

### 2.2.1 Description du problème, équation de fermeture

On considère un mécanisme  $\mathcal{S}$  constitué de  $m$  corps  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ , dont les couples sont holonomes régulières et dont la structure est bouclée.

On utilise pour paramétrer  $\mathbb{R}^m$  une carte  $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ , chaque  $q_i$  correspond à un couple  $\ell_i$ , on peut donc appeler  $q_i$  le paramètres articulaire associé au couple  $\ell_i$ .

A chaque couple  $\ell_i$  d'un mécanisme est associé un sous groupe de Lie de  $\mathbb{D}$  dont l'algèbre de Lie est une sous algèbre de Lie de  $\mathfrak{D}$ . En utilisant l'hypothèse de sous-groupe à un paramètre, ce sous-groupe de Lie est décrit par la donnée de carte sous la forme d'une application  $g_i$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{D}$ .

**Définition 2.6** La fonction du couple  $\ell_i$  est l'application  $A_i$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{D}$  telle que :

$$A_i = A_i(q_i) = \exp(q_i \xi_i)$$

où  $\xi_i$  est le générateur de déplacement.

**Définition 2.7** On appelle équation de fermeture d'un système mécanique bouclé l'équation définie par :

$$f(q) = e$$

où  $f$  est une application de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{D}$  :

$$f(q) = A_1(q_1) \circ A_2(q_2) \circ \dots \circ A_m(q_m)$$

Dans une configuration quelconque, la fermeture de mécanisme est caractérisée par  $D \circ f(q) = D$ , où  $D \in \mathbb{D}$  représente le déplacement du corps  $\mathcal{C}_1$  de référence.

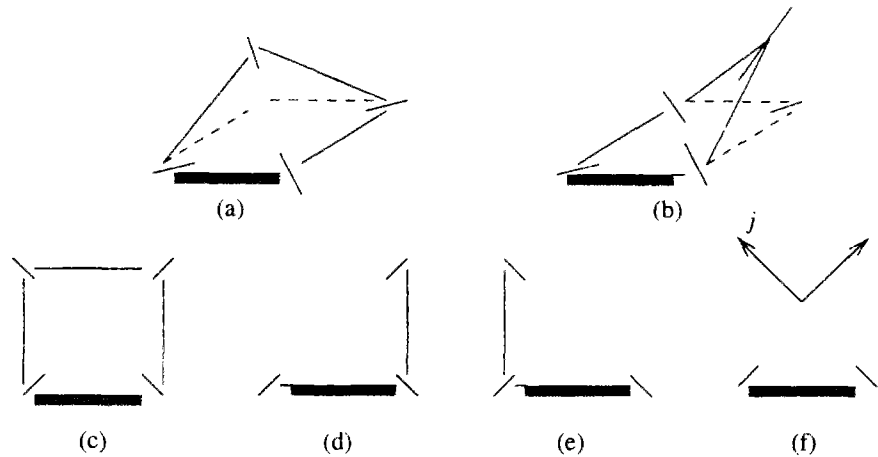


FIG. 2.1 - La salière

**Définition 2.8** L'ensemble des configurations cinématiquement admissibles d'un mécanisme bouclé est le sous ensemble  $f^{-1}(e)$  de  $\mathbb{R}^m$  :

$$M = f^{-1}(e) = \{q \in M' \mid f(q) = e\}$$

Un élément  $q$  de  $M$  sera appelé configuration admissible compatible avec les liaisons associés.

Si le mécanisme peut effectivement se fermer, l'ensemble  $M$  n'est pas vide. Il y a au moins la configuration de référence où l'équation de fermeture est vérifiée, on note cette configuration par  $q_0 = (q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0m})$  ( $q_0 \in M$ ). Si le mécanisme ne peut pas fonctionner  $M$  est réduit à un ou plusieurs points isolés de  $\mathbb{R}^m$ .

$M$  n'est pas une sous-variété en absence d'hypothèses supplémentaires. C'est-à-dire *a priori*, l'hypothèse que  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$  est fausse.

### Un exemple de mécanisme singulier

On considère un mécanisme décrit dans la thèse de Papegay composés de quatre barres reliées entre elles par quatre liaisons rotoïdes, on l'appelle salière. Ses barres sont de même longueurs et les axes sont orientés comme décrit sur le dessin 2.1 en haut représentés deux configurations régulières et en bas représentés le mécanisme en configurations singulières. Les configurations singulières correspondent topologiquement dessin 2.2 :

Il est clair qu'il existe des points singuliers au voisinage desquels  $M$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$ . En ces points, le degré de liberté n'a pas de sens. En général, il convient de les éviter au moment de la conception des mécanismes.

Il existe aussi d'autres types de singularité. Il est donc intéressant d'analyser les différents types de singularités qu'on a rencontré dans les mécanismes.

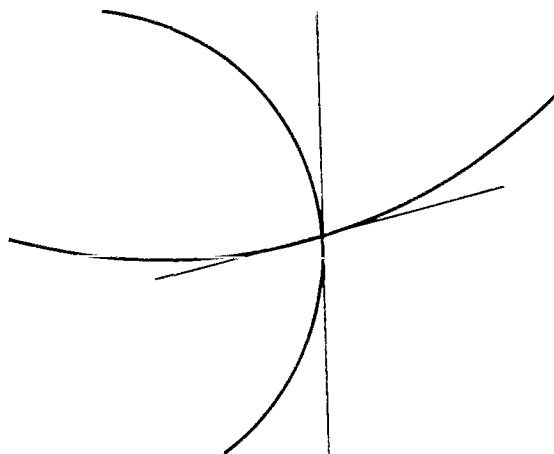


FIG. 2.2 - Les configurations singulières de la salière

### 2.2.2 Différentiabilité de l'équation de fermeture

En effet puisque  $\mathbb{D}$  est un groupe de Lie et que l'application exponentielle est  $C^\infty$ , alors l'application  $A_i$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{D}$  définie pour tous les couples est une application  $C^\infty$ , ainsi que  $f$ . Cela assure la différentiabilité de  $A_i$  et de  $f$ .

**Proposition 2.1** *L'application de fermeture est une application  $C^\infty$ .*

#### Remarque

Le déplacement d'un système mécanique de solide rigide dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^m$  est une application  $C^\infty$ , nous l'identifions comme une application  $f : N \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $N$  est une variété,  $\mathbb{D}$  est le groupe de Lie des déplacements rigides. Nous sommes concerné seulement par les structures de telles applications et les déplacements locaux :  $f : (N, q) \rightarrow (\mathbb{D}, A)$  un déplacement avec un point  $q \in N$ ,  $A \in \mathbb{D}$ .

Considérons deux déplacements locaux  $f_1 : (N_1, q_1) \rightarrow (\mathbb{D}, A_1)$  et  $f_2 : (N_2, q_2) \rightarrow (\mathbb{D}, A_2)$  sont dites I-équivalents. s'il existe un difféomorphisme local  $g$  et des applications rigides  $\sigma$  et  $\tau$  pour laquelle le diagramme suivant est commutatifs où  $h_{\sigma\tau}$  est une application de  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  définie par  $\phi \rightarrow \sigma\phi\tau$ .

$$\begin{array}{ccc} (N_1, q_1) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{D}, A_1) \\ g \uparrow & & \uparrow h_{\sigma, \tau} \\ (N_2, q_2) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{D}, A_2) \end{array}$$

Nous considérons un système mécanique  $\mathcal{S}$ ,  $N$  est l'espace de paramètres articulaires, On peut montrer que les déplacements locaux quelconques sont I-équivalents à la forme :

$$f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, e)$$

où  $m = \dim M$  et  $e$  est l'élément neutre du groupe  $\mathbb{D}$ . Deux telles applications  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont I-équivalents lorsqu'il existe un difféomorphisme local  $h$  et une application rigide  $\sigma$  pour laquelle, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{D}, e) \\ g \uparrow & & \uparrow h_\sigma \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{D}, e) \end{array}$$

Prenons la différentielle dans le diagramme précédent, nous obtenons un diagramme l'applications linéaires :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & T f_1 & \mathfrak{D} \\ T q \uparrow & & & \uparrow T h_\sigma \\ \mathbb{R}^m & \longrightarrow & T f_2 & \mathfrak{D} \end{array}$$

où l'espace tangent à  $\mathbb{R}^m$  à l'origine est lui même, et où  $\mathfrak{D}$  est l'algèbre de Lie de  $\mathbb{D}$ . L'application du côté droit du diagramme définit une application de  $\mathfrak{D}$  à son algèbre de Lie appelé application adjointe, elle est un opérateur linéaire de  $\mathfrak{D}$ , alors nous observons que pour des applications 1-équivalents  $f_1$  et  $f_2$ , les images de la différentielles  $T f_1$  et  $T f_2$  sont équivalents.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , l'espace vectoriel tangent en  $q \in U$  à  $U$  peut être considéré comme le sous-espace affine  $\{q\} \times \mathbb{R}^m$  de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , pointé par  $(q, 0)$ . Ainsi, l'ensemble de tous les vecteurs tangent à  $U$  n'est autre que  $U \times \mathbb{R}^m$ , sous-variété de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ .

Plus généralement, si  $M$  est une sous-variété  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^m$ , alors, l'espace vectoriel tangent en  $q \in M$  à  $M$  peut être considéré comme le sous-espace affine  $\{q\} \times T_q M \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ .

Puisque nous nous intéressons particulièrement aux mécanismes fermés, alors  $f$  est l'équation de fermeture qui est une application  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^m$  à  $\mathbb{D}$ , alors l'espace tangent à  $f(q)$  peut être considéré comme le sous-espace  $\{f(q)\} \times T_{f(q)}\mathbb{D}$  de  $\mathbb{D} \times \mathfrak{D}$  pointé par  $(f(q), 0)$ , ainsi l'ensemble de tous les vecteurs tangent à  $\mathbb{D}$  n'est autre que  $\mathbb{D} \times \mathfrak{D}$ .

### 2.2.3 Différentielle de l'équation de fermeture au premier ordre

On note  $\frac{df(q)}{dq}$  ou  $f'(q)$  la dérivée de  $f(q)$  par rapport à  $q$ , et  $\frac{\partial}{\partial q_i}$  la dérivée partielle par rapport à  $q_i$ . On va considérer la différentielle des équations de la cinématique :

**Proposition 2.2** *Si  $q \longrightarrow A(q)$  est une application différentiable de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{D}$ , alors :*

- il existe pour chaque valeur  $q$  un élément  $\xi(q) \in \mathfrak{D}$  (champ antisymétrique) tel que :

$$\frac{d}{dq} A(q)(p) = \xi(q) (A(q)(p)) \quad \text{pour } p \in \mathcal{E} \quad (2.6)$$

- Si  $\omega(q) \in \mathbb{E}$  est le vecteur invariant de  $\xi(q)$ , la dérivée de la partie linéaire de  $A(q)$  est :

$$\frac{d}{dq} \mathbf{A}(q)(\mathbf{v}) = \omega(q) \wedge \mathbf{A}(q)(\mathbf{v}) \quad \text{pour } \mathbf{v} \in \mathbb{E} \quad (2.7)$$

La proposition s'applique aux sous-groupes à un paramètre. Si  $A(q) = \exp(q\xi)$ , avec  $\xi$  fixé, alors :

$$\frac{d}{dq} A(q)(p) = \xi \circ \exp(q\xi)$$

**Corollaire 2.1** *Soient  $A(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{D}$  une application différentielle  $C^\infty$ , telle que  $A(q) = A_1(q_1) \circ A_2(q_2)$ , alors :*

$$A'(q) \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 \xi_1(q_1) + \mathbf{x}_2 A_1(q_1)_* \circ \xi_2(q_2)) \circ A(q) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.8)$$

avec :  $A_1(q_1)_* \circ \xi_2 = \mathbf{A}_1 \circ \xi_2 \circ A_1^{-1}$ .

**Démonstration :** Puisque :

$$A^T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{D} \times \mathfrak{D}$$

$$(q, x) \rightarrow (A(q), \mu(q) \cdot x)$$

alors :

$$\begin{aligned} A'(q) \cdot x &= \left( \frac{\partial}{\partial q_1} A(q), \frac{\partial}{\partial q_2} A(q) \right) \cdot x \\ &= x_1 \frac{\partial}{\partial q_1} A_1(q_1) \circ A_2(q_2) + x_2 \mathbf{A}_1(q_1) \circ \frac{\partial}{\partial q_2} A_2(q_2) \\ &= x_1 \xi_1(q_1) \circ A_1(q_1) \circ A_2(q_2) + x_2(q_2) \mathbf{A}_1(q_1) \circ \xi_2 \circ A_2(q_2) \\ &= x_1 \xi_1(q_1) \circ A(q) + x_2(q_2) \mathbf{A}_1 \circ \xi_2 \circ A_1^{-1} \circ A(q) \\ &= (x_1 \xi_1(q_1) + x_2 A_1(q_1)_* \circ \xi_2(q_2)) \circ A(q) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\mu(q) \cdot x = x_1 \xi_1(q_1) + x_2 A_1(q_1)_* \circ \xi_2(q_2)$$

qui est un élément de  $\mathfrak{D}$  mais,  $A'(q) \cdot x \in T_{A(q)}\mathbb{D}$ . ■

Les rotations autour d'un point fixé peuvent être représentées par une application de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{D}$  :

$$A(q) = \exp(q_1 \xi_1) \circ \exp(q_2 \xi_2) \circ \exp(q_3 \xi_3) \quad (2.9)$$

D'après la proposition précédente, sa dérivée s'écrit sous forme suivante :

$$A'(q) \cdot x = (x_1 \xi_1 + x_2 \exp(q_1 \xi_1)_* \xi_2 + x_3 \exp(q_1 \xi_1)_* \circ \exp(q_2 \xi_2)_* \xi_3) \circ A(q) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.10)$$

Il est composé de trois champs antisymétriques qui sont des fonctions des paramètres articulaires.

**Proposition 2.3** Soit  $q \rightarrow A(q)$  une application différentiable de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{D}$ , pour  $X \in \mathfrak{D}$  constant, on a :

$$\frac{d}{dq} A(q)_* X = \text{ad} \xi(q) \circ A(q)_* X \quad (2.11)$$

**Démonstration :** Supposons  $\gamma = A(q)_* \cdot X$ , alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dq} &= \frac{d\mathbf{A}(q)}{dq} \circ X \circ A^{-1}(q) + \mathbf{A}(q) \circ X \circ \frac{dA^{-1}(q)}{dq} \\ &= \omega_{\xi(q)} \wedge \mathbf{A}(q) \circ X \circ A^{-1}(q) - \mathbf{A}(q) \circ X \circ A^{-1}(q) \cdot \xi(q) \\ &= [\xi(q), A(q)_*(q)] \end{aligned}$$

D'après la proposition ci-dessus, on a :

$$\frac{d}{dq} A^{-1}(q)_* X = -A^{-1}(q)_* \circ (\text{ad} \xi \cdot X) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{D} \quad (2.12)$$

En effet,

$$\frac{d}{dq} (A(q)_* \circ A^{-1}(q)_*) \cdot X = 0$$

ce qui implique :

$$\frac{d}{dq} (A(q)_*) \circ A^{-1}(q)_* \cdot X + A(q)_* \frac{d}{dq} A^{-1}(q)_* \cdot X = 0$$

L'équation 2.12 est évidente.

Pour simplifier les notations, on note  $R_i$  par  $A_i(q)_*$ .

Nous allons considérer la dérivée de l'équation de fermeture.

**Proposition 2.4**  $f(q)$  est une fonction analytique à valeur dans  $\mathbb{D}$ , la dérivée  $f'(q) \cdot x$  est une application de  $\mathbb{R}^m$  dans  $T_{f(q)}\mathbb{D}$ , elle est définie par :

$$f'(q) = (\mu_1(q), \mu_2(q), \dots, \mu_m(q)) \circ f(q) \quad (2.13)$$

Sa valeur en  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $\mathbb{R}^m$  est donnée par :

$$f'(q) \cdot x = \sum_{k=1}^m x_k \mu_k(q) \circ f(q) \quad (2.14)$$

Les champs antisymétriques  $\mu_k(q)$  sont définis par :

$$\mu_k(q) = R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_k \xi_k \circ f(q) \quad (2.15)$$

**Démonstration :** Compte tenu de la proposition 2.3, on a :

$$\begin{aligned} f'(q) &= \frac{d}{dq} f(q) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial q_1} f(q), \dots, \frac{\partial}{\partial q_m} f(q) \right) \\ &= ( \xi_1, \dots, R_1 \circ \dots \circ R_1 \xi_1, \dots, R_1 \circ \dots \circ R_m \xi_m ) \circ f(q) \\ &= ( \mu_1(q), \mu_2(q), \dots, \mu_m(q) ) \circ f(q) \end{aligned}$$

■

On présente quelques notations utiles pour la suite :

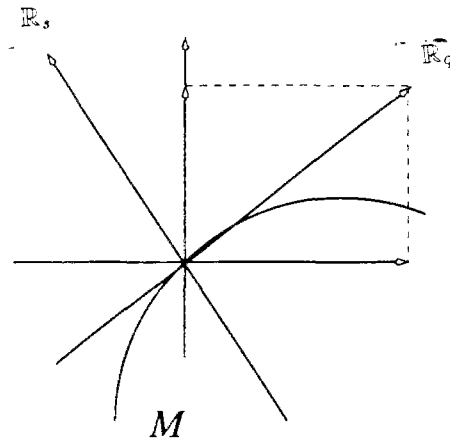
- $\mathfrak{S}_a$  sous algèbre de Lie de  $\mathfrak{D}$  engendré par  $(\mu_1(q), \dots, \mu_m(q))$ .
- $\mathfrak{F}_q$  sous espace vectoriel de  $\mathfrak{S}_a$  engendré par  $(\mu_1(q), \dots, \mu_m(q))$ , c'est-à-dire l'image de  $f'(q)$  dans  $\mathfrak{D}$ .
- $\mathfrak{G}_q$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{F}_q$  dans  $\mathfrak{S}_a$ .

L'étude du degré de liberté d'un mécanisme  $\mathcal{S}$  est équivalent à l'étude de la variation de rang de  $f'(q)$  une famille de vecteurs  $\mu_i$ , pour  $i = 1, \dots, m$ . Autrement dit, le degré de liberté dépend de la dimension du noyau de  $f'(q)$ . Si le mécanisme  $\mathcal{S}$  possède un degré de liberté, alors les vecteurs  $\mu_i(q)$  ne sont pas indépendants. On note alors par les indices  $\alpha$  les vecteurs indépendants  $\mu_\alpha(q)$  qui forment une base de  $\mathfrak{F}_q$ ; les autres, on les note par les indices  $i$ . Si le rang de  $f'(q)$  est égal à  $r$ , alors il y a  $r$  valeurs de  $\alpha$ , et  $m - r$  valeurs de  $i$ .

Si l'on exprime  $\mu_i(q)$  relativement à une base  $\mu_\alpha(q)$  de  $\mathfrak{F}_q$ , on obtient :

$$\mu_i(q) = \sum_{\alpha} C_i^\alpha(q) \mu_\alpha(q)$$

où les coefficients  $\{C_i^\alpha(q)\}$  sont des fonctions de  $q$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

FIG. 2.3 - Sous espace  $\mathbb{R}_q$  et le supplémentaire  $\mathbb{R}_s$ 

### 2.2.4 Étude locale de $f(q)$

On suppose que  $M$  est une sous variété de dimension  $m - r$  de  $\mathbb{R}^m$ , on se donne  $q_0$  sur  $M$  et l'on étudie  $M$  au voisinage de  $q_0$ .

Soit  $q_0$  dans  $M$ , il existe un voisinage  $V_0$  de  $q_0$  dans  $\mathbb{R}^m$  et une application  $g$  unique de  $\mathbb{R}_q$  dans  $\mathbb{R}_s$ , analytique telle que l'on ait :

$$q \in V_0 \cap M \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_q \text{ tel que } q = q_0 + x + g(x).$$

En effet, tout  $q$  voisin de  $q_0$  s'écrit alors :  $f(q_0 + x + y) = e$ . Soit  $\phi$  définie par :  $\phi(x, y) = f(q_0 + x + y)$ . Par hypothèse, l'application tangente en  $x = 0$  à  $y \rightarrow \phi(0, y)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_s$  sur le sous espace  $\mathfrak{F}_q$  de  $\mathcal{D}$ .

A l'approximation linéaire, la fonction de fermeture est exprimée par :

**Proposition 2.5** À l'approximation linéaire, la relation de fermeture s'écrit :

$$q_\alpha = q_{0\alpha} - \sum_i C_i^\alpha(q_0)(q_i - q_{i0}) + \mathfrak{N}^\alpha(q_i - q_{i0}). \quad (2.16)$$

la famille de fonctions  $\mathfrak{N}^\alpha(q_i - q_{i0})$  est du deuxième ordre.

(Pour la démonstration, voir la page 74 de la thèse de Lerbet [Ler87]).

Puisque le rang de  $f'(q)$  n'est pas maximal, alors le noyau  $\mathbb{R}_q$  de  $f'(q)$  n'est pas réduit à zéro, il est défini par la proposition suivante, ainsi qu'un supplémentaire dans  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposition 2.6 (i)** On a la caractérisation suivante du noyau  $\mathbb{R}_q$  de  $f'(q)$  :

$$\mathbb{R}_q = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_\alpha = - \sum_i C_i^\alpha(q) x_i\}$$

(ii) On peut choisir pour  $\mathbb{R}_s$  un supplémentaire de  $\mathbb{R}_q$  dans  $\mathbb{R}^m$  :

$$\mathbb{R}_s = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i = 0\}$$

**Démonstration :** (i) On prend le 1<sup>er</sup> ordre de la formule de Taylor, de plus  $\mu_\alpha$  est une base de  $\mathfrak{F}_q$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= f'(q) \cdot x \\ &= \sum_i x_i \mu_i(q) + \sum_\alpha x_\alpha \mu_\alpha(q) \\ &= \sum_\alpha \left( x_\alpha + \sum_i C_i^\alpha(q) x_i \right) \mu_\alpha(q) \end{aligned}$$

d'où (i).

(ii) Si  $\mathbb{R}_s$  est un supplémentaire de  $\mathbb{R}_q$  dans  $\mathbb{R}^m$ , alors on a :

$$\mathbb{R}_q \oplus \mathbb{R}_s = \mathbb{R}^m, \quad \mathbb{R}_s = \mathbb{R}_q / \mathbb{R}^m$$

■

$\mathbb{R}_q$  et  $\mathbb{R}_s$  sont des sous espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^m$ , on peut les caractériser par une base  $\mathcal{X}_q$  et  $\mathcal{X}_s$  respectivement. Par exemple :

(1) Une base de  $\mathbb{R}_q$  est composée de  $m - r$  éléments, c'est-à-dire,  $\mathcal{X}_q = \{\mathcal{X}_q^i\}$ ,  $i$  ayant  $m - r$  valeurs.

$$\mathcal{X}_{qk}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ -C_k^\alpha & \text{si } k \text{ prend les valeur de } \alpha. \end{cases} \quad (2.17)$$

(2) Une base de  $\mathbb{R}_s$  est composée de  $r$  éléments, c'est-à-dire,  $\mathcal{X}_s = \{\mathcal{X}_s^\alpha\}$ ,  $\alpha$  ayant  $r$  valeurs.

$$\mathcal{X}_{sk}^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \alpha, \\ 0 & \text{si } k \text{ prend les valeur de } i. \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.2.5 Dérivée d'ordre 2

Après avoir calculé  $f'(q)$ , on sait que  $f'(q)$  peut être représenté par une matrice  $6 \times m$ , ce qui permet d'étudier le problème de la variation de rang de  $f'(q)$ . Il s'agit d'un problème difficile si l'on fait aucune hypothèse sur  $M$ . Ce problème sera considéré dans le chapitre suivant.

La principale difficulté rencontrée dans l'élaboration des dérivées est due à la présence de  $f(q)$  dans l'expression de  $f'(q)$ .

On utilise l'hypothèse de sous groupe à un paramètre exposé à la section 2.2.1. les calculs sont développés et poussés jusqu'au bout dans le cas du second ordre.

Afin de faire des analyses plus profondes, il est important d'évaluer l'application linéaire  $\mu'(q)$  ou la dérivée seconde de  $f$ .

Nous utiliserons la structure particulière du groupe  $\mathbb{D}$  qui est un sous groupe du groupe affine  $\mathcal{L}_a(\mathcal{E})$ . On a de façon générale :

$$\begin{aligned} f^T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{D} \times \mathfrak{D} \\ (q, x) &\rightarrow (f(q), (\mu(q) \cdot x)) \end{aligned}$$

où  $x \in \mathbb{R}^m$  et  $\mu(q)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  à  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{D})$  définie par :

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{D}) \\ q &\rightarrow \mu(q) \cdot x = \sum_k x^k \mu_k(q) \end{aligned}$$



**Proposition 2.7** Pour tout  $q$  de  $\mathbb{R}^m$ , on a :

$$\frac{\partial \mu_k(q)}{\partial q_l} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq l \\ [\mu_l(q), \mu_k(q)] & \text{si } k > l \end{cases} \quad (2.19)$$

Il s'agit d'une application directe de la dérivation de l'application Ad d'un groupe de Lie.

De plus, si l'on dérive  $\mu_k(q)$  par rapport à tout  $q$ , on obtient la formule suivante :

$$\left( \frac{\partial \mu_k(q)}{\partial q_i} \right)_{1 \leq i \leq m} \cdot x = \left( \sum_{l < k} x_l [\mu_l(q), \mu_k(q)] \right) \quad (2.20)$$

**Proposition 2.8** Soit  $q \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mu'$  a la forme suivante :

$$\mu'(q)(x, y) = \sum_k \sum_{l < k} x^l y^k [\mu_l(q), \mu_k(q)]$$

**Proposition 2.9** On définit  $B_q$  l'application bilinéaire de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathfrak{D}$  par :

$$\boxed{B_q(x, y) = \mu'(q)(x, y) = \sum_k \sum_{l < k} x_l y_k [\mu_l(q), \mu_k(q)] \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}^m} \quad (2.21)$$

pour tout  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , et écrire la formule ci-dessus :

$$B_q(x, y) = x^i B_{qij} y^j \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_q, y \in \mathbb{R}^m$$

avec :

$$B_q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & [\mu_1(q), \mu_2(q)] & \cdots & [\mu_1(q), \mu_m(q)] \\ [\mu_1(q), \mu_2(q)] & 0 & \cdots & [\mu_2(q), \mu_m(q)] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\mu_1(q), \mu_m(q)] & [\mu_2(q), \mu_m(q)] & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

La proposition suivante précise la forme de  $f''(q)$ .

**Proposition 2.10** Soit  $q \in \mathbb{R}^m$ ,  $f''(q)$  a la forme suivante :

$$f''(q) \cdot (x, y) = (B_q(x, y) + (\mathbf{u}(q) \cdot x) \wedge (\mu(q) \cdot y)) \circ f(q) \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{u}(q)$  est la partie linéaire de  $\mu(q)$ .

Cette proposition est la base pour calculer les dérivées à tout ordre de  $f(q)$ .

**Démonstration :** Puisque

$$f'(q) \cdot x = (\mu(q) \cdot x) \circ f(q)$$

$f(q)$  est dans  $\mathfrak{D}$  et  $\mu(q) \cdot x$  dans  $\mathfrak{D}$ . De plus, on a :

$$\begin{aligned} f^{TT} : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) &\rightarrow (\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}) \times (\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}) \\ ((q, \delta q), (x, y)) &\rightarrow ((f(q), \mu(q) \cdot \delta q), (\mu(q) \cdot x, (\mathbf{u}(q) \cdot \delta q) \wedge (\mu(q) \cdot y) + \mu'(q)(\delta q, x))) \end{aligned}$$

De cela, on tire :

$$\begin{aligned} f''(q)(x, y) &= (\mathbf{u}(q) \cdot x) \wedge (\mu(q) \cdot y) \circ f(q) + \mu'(q)(x, y) \circ f(q) \\ &= (B_q(x, y) + (\mathbf{u}(q) \cdot x) \wedge (\mu(q) \cdot y)) \circ f(q) \end{aligned}$$

■

D'après la proposition 2.10, avec l'hypothèse de sous groupe à un paramètre  $f''(q)$  prend la forme suivante :

$$f''(q)(x, y) = \left( \sum_k \sum_{\ell < k} x^\ell y^k [\mu_\ell(q), \mu_k(q)] + \sum_k x^k \mathbf{u}_k(q) \wedge \sum_\ell y^\ell \mu_\ell(q) \right) \circ f(q)$$

où  $\mathbf{u}_k(q)$  est la partie linéaire de  $\mu_k(q)$ . Pour cette formule, on a les remarques suivantes :

- En général,  $f''(q)(x, y)$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}$  mais seulement à l'ensemble des champs de vecteurs affines de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{E}$ , puisque le deuxième terme  $\sum_k y^k \mathbf{u}_k(q) \wedge \sum_\ell y^\ell \mu_\ell(q)$  n'est pas symétrique.
- Si l'on considère sa restriction à  $\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_q$  elle prend la forme suivante :

$$\boxed{f''(q)(x, x) = \sum_k \sum_{\ell < k} x^\ell x^k [\mu_\ell(q), \mu_k(q)] \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}_q} \quad (2.23)$$

puisque :  $\sum_\ell x^\ell \mu_\ell(q) = 0$ .

Grâce à la notion de groupe de Lie, on peut obtenir 2.23 sous une forme simple et importante dans la suite.

Il est donc nécessaire que :

$$f''(q)(x, x) \in \mathfrak{F}_q \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}_q$$

D'après les calculs, il semble qu'il soit nécessaire de calculer toutes les dérivées mais, à notre connaissance et d'après les exemples qu'on a traités, le calcul de la dérivée d'ordre 2 est suffisant.

**Proposition 2.11** *Si les  $r$  premiers éléments de la suite  $\mu$  forment une base de  $\mathfrak{F}_q$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $B_q(x, x)$  peut être simplifiée sous la forme*

$$B_q(x, x) = \sum_\alpha \sum_{\beta < \alpha} x_\alpha x_\beta [\mu_\beta(q), \mu_\alpha(q)] + \sum_i \sum_{j < i} x_i x_j [\mu_j(q), \mu_i(q)] \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}_q \quad (2.24)$$

ou bien écrit sous la forme symétrique :

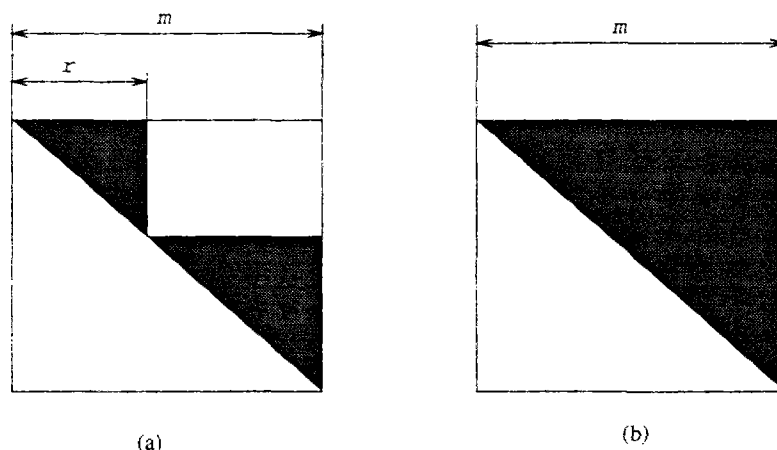
$$B_q(x, x) = x_\alpha^i \cdot \mathbf{B}_q^\alpha \cdot x_\alpha + x_i^i \cdot \mathbf{B}_q^i \cdot x_i \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}_q$$

avec :

$$x_\alpha^i = (x_1, \dots, x_r)^i, \quad x_i^i = (x_{r+1}, \dots, x_m)^i$$

$$\mathbf{B}_q^\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & [\mu_1(q), \mu_2(q)] & \dots & [\mu_1(q), \mu_r(q)] \\ [\mu_1(q), \mu_2(q)] & 0 & \dots & [\mu_2(q), \mu_r(q)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\mu_1(q), \mu_r(q)] & [\mu_2(q), \mu_r(q)] & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_q^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & [\mu_{r+1}(q), \mu_{r+2}(q)] & \dots & [\mu_{r+1}(q), \mu_m(q)] \\ [\mu_{r+1}(q), \mu_{r+2}(q)] & 0 & \dots & [\mu_{r+2}(q), \mu_m(q)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\mu_{r+1}(q), \mu_m(q)] & [\mu_{r+2}(q), \mu_m(q)] & \dots & 0 \end{pmatrix}$$



la figure (a) représente l'aire (partie couleur grise) de calcul après la simplification; (b) représente l'aire de calcul avant la simplification. Après avoir simplifié, on peut économiser  $\frac{r(m-r)}{m^2}\%$  de calcul.

FIG. 2.4 - Simplification de la formule dérivée d'ordre 2

**Démonstration :** Compte tenu l'équation 2.21, on a :

$$\begin{aligned}
 B_q(x, x) &= \sum_k \sum_{t < k} x_k x_t [\mu_t(q), \mu_k(q)] \\
 &= \sum_{\alpha < \beta} x_{\alpha} x_{\beta} [\mu_{\beta}(q), \mu_{\alpha}(q)] + \sum_j \sum_{\beta < j} x_j x_{\beta} [\mu_{\beta}(q), \mu_j(q)] + \sum_j \sum_{i < j} x_j x_i [\mu_i(q), \mu_j(q)] \\
 &= \sum_{\alpha < \beta} x_{\alpha} x_{\beta} [\mu_{\beta}(q), \mu_{\alpha}(q)] + \sum_j \sum_{\beta} x_j \left( - \sum_i C_i^{\beta} x_i \right) [\mu_{\beta}(q), \sum_{\alpha} C_j^{\alpha} \mu_{\alpha}(q)] \\
 &\quad + \sum_j \sum_{i < j} x_j x_i \left[ \sum_{\beta} C_i^{\beta} \mu_{\beta}(q), \sum_{\alpha} C_j^{\alpha} \mu_{\alpha}(q) \right] \\
 &= \sum_{\alpha < \beta} x_{\alpha} x_{\beta} [\mu_{\beta}(q), \mu_{\alpha}(q)] + \sum_i \sum_{j < i} x_i x_j [\mu_j(q), \mu_i(q)]
 \end{aligned}$$

Lorsque  $x \in \mathbb{R}_q$ , la formule précédente permet de diminuer le temps et la quantité de calcul, ce qui peut être montré par la figure 2.4 et le tableau ci-dessous, lorsque  $r$  est petit par rapport à  $m$ , la quantité de calcul est considérablement diminuée.

	avant simplification	après simplification	différence
nombre de crochets	$\frac{1}{2}m(1+m)$	$\frac{1}{2}(r^2 + (m-r)^2 + m)$	$r(m-r-1)$
nombre de produits	$6m(1+m)$	$6(r^2 + (m-r)^2 + m)$	$6r(m-r-1)$
nombre de somme	$\frac{1}{2}m(1+m) - 1$	$\frac{1}{2}(r^2 + (m-r)^2 + m) - 1$	$r(m-r-1)$

## 2.2.6 Configuration singulière

**Définition 2.9** Un point  $q$  d'une variété  $M$  est dit point singulier de l'application différentiable

$f : M \rightarrow \mathbb{D}$ , si le rang de la dérivé :

$$f'(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{S}_a$$

en  $q$  est inférieur à sa valeur maximale. Sinon, le point  $q$  est dit régulier.

### 2.2.7 Les mécanismes plans

L'analyse du comportement cinématique se réalise en trois étapes. La première étape est de générer les vecteurs associés à chaque couple, la deuxième étape est de calculer le degré de liberté et le noyau aux points non singuliers, la troisième étape est d'analyser les points singuliers.

Pour un mécanisme, à chaque couple  $\ell_i$  caractérisé par un axe passant par le point  $o_i$  est associé un repère orthonormé  $\mathcal{R}_i = (o_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$  de  $\mathcal{E}$ . À partir de ce repère, on définit une base  $\mathcal{B}_i = (\Omega\xi_i, \Omega\eta_i, \Omega\zeta_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  de  $\mathfrak{D}$  de la façon suivante :

- $\Omega\xi_i, \Omega\eta_i, \Omega\zeta_i$  sont des champs antisymétriques constants égales à  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i$ .
- $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  sont des champs antisymétriques définis par :

$$\xi_i(p) = \mathbf{x}_i \wedge \overrightarrow{o_i p}, \quad \eta_i(p) = \mathbf{y}_i \wedge \overrightarrow{o_i p}, \quad \zeta_i(p) = \mathbf{z}_i \wedge \overrightarrow{o_i p}, \quad \text{pour } p \in \mathcal{E}$$

On introduit alors les matrices de passages  $P_i$  de la base  $\mathcal{B}_i$  à  $\mathcal{B}_{i+1}$ , pour  $i = 1, \dots, m$ .

$$P_i = \begin{bmatrix} I_3 & \overrightarrow{o_i o_{i+1}} \wedge \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$I_3$  signifie la matrice carrée unité de dimension 3.  $\overrightarrow{o_i o_{i+1}} \wedge$  est un opérateur antisymétrique,  $\overrightarrow{o_i o_{i+1}} = (x_i, y_i, z_i)^t$  sont les coordonnées de point  $o_{i+1}$  par rapport au repère  $(o_i, i, j, k)$  dans la configuration de référence, on a :

$$\overrightarrow{o_i o_{i+1}} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{pmatrix}$$

Les applications adjointes  $A_i(q_i)_* = R_i$  sont définies par la formule d'Olinde-Rodrigues généralisée (voir la proposition 1.3) :

Le principe est de tout calculer dans la même base, on choisira ici la base  $\mathcal{B}_1$ .

On montre que les vecteurs  $\mu_i$  dans la base  $\mathcal{B}_1$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mu_i = \prod_{j=1}^i (R_j P_j) \xi_i$$

où  $\xi_i$  est le vecteur du générateur du déplacement suivant l'axe  $(o_i, \mathbf{z}_i)$  dans la base associée au repère  $(o_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ .

déplacement de la  $i^{\text{ème}}$  liaison au point  $o_i$ .

Nous allons conserver ces notations pour les exemples au chapitre suivant.

Lorsqu'il s'agit seulement des mécanismes plans avec des couples rotoïdes, les repères ortho-normés  $\mathcal{R}_i$  associés à chaque couple étant définis comme indiqué sur la figure 2.5, on a alors :  $\overrightarrow{o_i o_{i+1}} = (a_i, 0, 0)^t$  dans  $\mathcal{B}_i$ , ainsi les matrices de passages sont définies par :

$$P_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque les axes de déplacements sont parallèles alors,  $\xi_i$  a pour coordonnées dans la base  $\mathcal{B}_i$  :

$$\xi_i = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$$

la rotation  $R_i$  autour de  $\xi_i$  a pour matrice dans  $\mathcal{B}_i$  :

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos q_i & \sin q_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q_i & \sin q_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin q_i & \cos q_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Génération de vecteurs

Le comportement cinématique d'un mécanisme peut être schématisé par l'ensemble de vecteurs de déplacement  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  où  $\mu_k$  est associé au couple  $\ell_k$ . Pour un mécanisme 2.5 plan qui est constitué par des couples rotoïdes, les vecteurs sont définis par :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \xi \\ \mu_2 &= R_1 P_1 \xi \\ \mu_3 &= R_1 P_1 R_2 P_2 \xi \\ &\dots \\ \mu_m &= R_1 P_1 \dots P_{m-1} R_m P_m \xi \end{aligned} \tag{2.26}$$

### Degrés de liberté

L'étude des degrés de liberté nous ramène à l'étude de la variation du rang de l'ensemble de vecteurs  $\mu$ . On identifie cet ensemble à la matrice jacobienne :

$$J \simeq ( \mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_m )$$

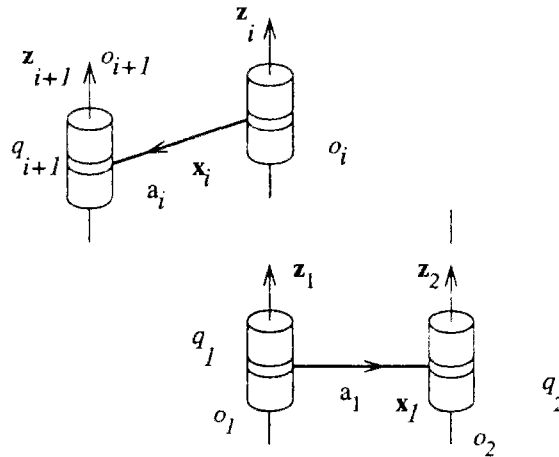


FIG. 2.5 - Mécanisme plan

D'après l'équation 2.26, on peut remplacer  $\mu_i$  par son expression contenant le paramètre articulaire  $q_i$ . Plus précisément :

$$J(q) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 \sin q_1 & \cdots & -\sum_{j=1}^i a_j \sin \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) & \cdots & -\sum_{j=1}^n a_j \sin \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) \\ 0 & a_1 \cos q_1 & \cdots & \sum_{j=1}^i a_j \cos \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) & \cdots & \sum_{j=1}^n a_j \cos \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $a_i$  sont les longueurs des barres.  $m$  est le nombre des couples.

On voit bien que  $J(q)$  est une matrice de rang 3 aux points non singuliers. Le sous-espace engendré  $\mathfrak{F}_q$  par l'ensemble de vecteurs  $\mu$  est alors une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{D}$  de dimension 3. D'après le résultat classique de géométrie différentielle,  $f(q)$  est une subimmersion, l'ensemble de configurations admissibles  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$  au voisinage d'une configuration régulière. Alors le degré de liberté d'un mécanisme plan peut être évalué par la relation  $n = m - r$ , ici,  $n$  est le nombre de degré de liberté,  $r$  est le rang de la matrice jacobienne qui est égal à 3 aux configurations régulières.

On considère  $\{\mu_\alpha\}_{\alpha=\{1,2,3\}}$  comme une base de l'espace  $\mathfrak{F}_q$  si  $\mu_1(q)$ ,  $\mu_2(q)$  et  $\mu_3(q)$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ , alors les autres vecteurs  $\mu_i(q)$ , pour  $i = 4, \dots, m$  peuvent être exprimés par :

$$\mu_i(q) = C_i^1(q)\mu_1(q) + C_i^2(q)\mu_2(q) + C_i^3(q)\mu_3(q)$$

où  $C_i^\alpha(q)$  sont les coordonnées réelles des vecteurs  $\mu_i(q)$  par rapport à la base  $\mu_\alpha$ . Si l'on note :

$$\mu_i(q) = (s_i, c_i, 0, 0, 0, 1)^t$$

avec :

$$s_i = - \sum_{j=1}^i \sin \left( \sum_{k=1}^j q_k \right), \quad c_i = - \sum_{j=1}^i \cos \left( \sum_{k=1}^j q_k \right)$$

Alors les coordonnées  $C_i^\alpha$  de  $\mu_i$  sont définies par les formules suivantes :

$$\begin{cases} C_i^1(q) = 1 - \frac{s_i \cos(q_1 + q_2) + c_i \sin(q_1 + q_2)}{a_1 \sin q_2} \\ C_i^2(q) = \frac{s_i (a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2)) + c_i (a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2))}{a_1 a_2 \sin(q_1)} \\ C_i^3(q) = - \frac{s_i \cos(q_1) + c_i \sin(q_1)}{a_1 a_2 \sin(q_1)} \end{cases} \quad (2.27)$$

En considérant l'équation :

$$f'(q) \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_k x_k \mu_k = 0$$

le noyau de  $f'(q)$  est défini par :

$$\mathbb{R}_q = \{x(q) \in \mathbb{R}^m \mid x_\alpha(q) = - \sum_i C_i^\alpha(q) x_i(q)\}$$

alors :

$$\begin{cases} x_1(q) = - \sum_i x_i + \frac{\cos(q_1 + q_2) \sum_i s_i + \sin(q_1 + q_2) \sum_i c_i}{a_1 \sin q_2} x_i \\ x_2(q) = - \frac{(a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2)) \sum_i s_i + (a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2)) \sum_i c_i}{a_1 a_2 \sin(q_1)} x_i \\ x_3(q) = - \frac{\cos(q_1) \sum_i s_i + \sin(q_1) \sum_i c_i}{a_1 a_2 \sin(q_1)} x_i \end{cases} \quad (2.28)$$

De plus :  $T_q M = \mathbb{R}_q$ .

### Analyse des points singuliers

Les points singuliers dépendent du rang de la matrice jacobienne, c'est-à-dire, lorsqu'il y a une chute de rang de la matrice jacobienne par rapport au rang maximal. le mécanisme est dans une configuration singulière. Puisque  $\text{rang}(J) = \text{rang}(J_3)$ , avec :

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 \sin q_1 & \cdots & -a_i \sum_{j=1}^i \sin \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) & \cdots & -a_i \sum_{j=1}^n \sin \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) \\ 0 & a_1 \cos q_1 & \cdots & a_i \sum_{j=1}^i \cos \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) & \cdots & a_i \sum_{j=1}^n \cos \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l'étude de rang de  $J_3$  est équivalent à l'étude de la matrice  $J_2$  :

$$J_2(q) = \begin{pmatrix} -a_1 \sin q_1 & \cdots & -a_i \sum_{j=1}^i \sin \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) & \cdots & -a_i \sum_{j=1}^n \sin \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) \\ a_1 \cos q_1 & \cdots & a_i \sum_{j=1}^i \cos \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) & \cdots & a_i \sum_{j=1}^n \cos \left( \sum_{k=1}^j q_k \right) \end{pmatrix}$$

on a alors :

$$\text{rang}(J(q)) < 3 \Leftrightarrow \text{rang}(J_3(q)) < 3 \Leftrightarrow \text{rang}(J_2(q)) < 2$$

Les déterminants de toutes les sous matrices de dimension  $2 \times 2$  de  $J_2$  sont définis par :

$$\det(J_2^{ij}(q)) = \sum_i \sum_j a_i a_j \sin(q_{i+1} + \dots + q_j) \quad \text{pour } m \geq j > i \geq 1$$

où  $i$  et  $j$  sont deux colonnes différents de la matrice  $J_2(q)$ . alors, on a :

$$\text{rang}(J(q)) < 3 \Leftrightarrow \det(J_2^{ij}(q)) = 0 \quad \text{pour } m \geq j > i \geq 1$$

Alors l'ensemble des configurations singulières  $M^s$  est défini par :

$$M^s = \{q \in M \mid \det(J_2^{ij}(q)) = 0 \text{ pour } m \geq j > i \geq 1\}$$

La condition pour que les mécanismes plans soient singuliers est exprimée par [TU92] :

$$\sum_i \sum_j a_i a_j \sin(q_{i+1} + \dots + q_j) = 0 \quad \text{pour } m \geq j > i \geq 1$$

Une analyse de l'équation précédente montre que ses solutions sont :  $q_k^s = 0$  ou  $\pm\pi$  pour  $k = 1, \dots, m$ , c'est-à-dire lorsque les barres s'aplatissent en une ligne. C'est une configuration singulière des mécanismes plans.

Si  $a_1$  est fixé, la nature de fermeture des mécanismes plans aux configurations singulières peut être exprimée par :

$$a_1 + a_2 \cos(q_2^s) + a_3 \cos(q_2^s + q_3^s) + \dots + a_m \cos(q_2^s + \dots + q_m^s) = 0$$

Ce qui est équivalent à l'équation suivante :

$$a_1 + a_2 \cos q_2^s + a_3 \cos q_2^s \cos q_3^s + \dots + a_m \cos q_2^s \dots \cos q_m^s = 0$$

on peut alors définir  $M^s$  par :

$$M^s = \{q \in \mathbb{R}^m \mid a_1 + \sum_{i=2}^m a_i \cos q_2^s \dots \cos q_i^s = 0\} \quad (2.29)$$

$M^s$  est défini comme un sous-ensemble de  $M$ .

Dans ces points singuliers,  $\text{rang}J(q) = 2$ . Le sous-espace  $\mathfrak{F}_q^s$  engendré par l'ensemble des vecteurs est de dimension 2. D'après l'équation 2.26, les vecteurs  $\mu_i^s$  ont la forme suivante :

$$\mu_1^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2^s = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_i^s = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 + \sum_{j=2}^i a_j \cos q_2^s \dots \cos q_j^s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } i \geq 3$$



On considère  $\mu_\alpha = \{\mu_1^s, \mu_2^s\}$  comme une base de  $\mathfrak{F}_q^s$ . On exprime  $\mu_i^s$  par la base  $\mu_\alpha^s$ , on a :

$$\mu_i^s = C_i^1 \mu_1^s + C_i^2 \mu_2^s \quad \text{pour } i \geq 3$$

avec :

$$C_i^1 = -\frac{\sum_{j=2}^i a_j \cos q_2^s \cdots \cos q_j^s}{a_1}, \quad C_i^2 = 1 + \frac{\sum_{j=2}^i a_j \cos q_2^s \cdots \cos q_j^s}{a_1}$$

Par suite, on obtient le noyau  $\mathbb{R}_q^s$  de  $f'$  aux points singuliers :

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sum_{j=3}^m C_j^1 x_j \\ x_2 &= -\sum_{j=3}^m C_j^2 x_j \end{aligned}$$

La sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_a$  engendrée par  $\mathfrak{F}_q^s$  est de dimension 3 et  $\{\mu_\alpha^s, [\mu_1^s, \mu_2^s]\}$  forment une base de  $\mathfrak{S}_a^s$ .

Nous considérons la dérivée seconde, avec  $x \in \mathbb{R}_q^s$  aux points singuliers, on a :

$$\begin{aligned} B_q(x, x) &= \sum_k \sum_{\ell < k} x_\ell x_k [\mu_\ell^s, \mu_k^s] \\ &= x_1 x_2 [\mu_1^s, \mu_2^s] + \sum_i \sum_{j < i} x_i x_j [\mu_j^s, \mu_i^s] \\ &= \left( x_1 x_2 + \sum_i \sum_{j < i} x_i x_j (C_j^1 C_i^2 - C_i^1 C_j^2) \right) [\mu_1^s, \mu_2^s] \\ &= \left( \sum_i C_i^1 C_i^2 x_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j < i} C_i^2 C_j^1 x_i x_j \right) [\mu_1^s, \mu_2^s] \end{aligned}$$

alors :  $B_q(x, x) \notin \mathfrak{F}_q^s$ . Pour que  $B_q(x, x)$  soit dans  $\mathfrak{F}_q^s$ , il faut et il suffit :  $B_q(x, x) = 0$ , c'est-à-dire :

$$\sum_i C_i^1 C_i^2 x_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j < i} C_i^2 C_j^1 x_i x_j = 0 \quad (2.30)$$

Cette équation est essentielle pour déterminer les singularités des mécanismes plans.

## Chapitre 3

# Condition de transversalité et mécanismes

L'étude mathématique d'un mécanisme de solides rigides en boucles fermées se ramène à celle de "l'équation de fermeture" :  $f(q_1, \dots, q_m) = e$  où  $q_1, \dots, q_m$  sont les coordonnées articulaires et  $f$  est une fonction analytique à valeurs dans un groupe de Lie de déplacements. L'ensemble des configurations cinématiquement admissibles du mécanisme est la partie  $M = f^{-1}(e)$  qui est une sous-variété dans le cas régulier où  $f$  est une subimmersion, mais dont l'étude est beaucoup plus difficile lorsque  $f$  possède des singularités. On étudie ici des configurations singulières à l'aide de la géométrie des groupes de Lie et du logiciel calcul formel MAPLE.

### 3.1 Sous variétés et l'espace tangent

Les références principales de ce chapitre sont [Dem86] et [Ler92].

#### 3.1.1 Définition de sous-variété

Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $\dim(V) = n$ ,  $M$  une partie de  $V$  et  $q$  un point de  $M$ .

**Définition 3.1** On dit que des fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_m$ , de classe  $C^\infty$ , définies au voisinage de  $q$ , forment un système non-dégénéré d'équations locales de  $M$  en  $q$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- a) il existe un ouvert  $U$  de  $V$  contenant  $q$  dans lequel les  $\phi_i$  sont définies et tel que  $M \cap U$  soit l'ensemble des points  $x \in U$  avec  $\phi_1(x) = 0, \dots, \phi_m(x) = 0$ ;
- b) les formes linéaires  $d\phi_i(q)$  sont linéairement indépendantes.

Remarquons que si la condition b) est vraie au point  $q$ , elle est encore vraie au voisinage de  $q$ , on peut donc toujours supposer que l'on a choisi  $U$  de telle façon que l'on ait, outre a), la condition b') suivante plus forte que b) :

b') pour tout  $x \in U$ , les formes linéaires  $d\phi_i(x)$  sont linéairement indépendantes. On dit que les  $\phi_i$  forment un système non-dégénéré d'équations de  $V$  dans  $U$ .

La condition de non-dégénérence b) (ou b')) est essentielle. En effet, en l'absence d'une telle condition, l'ensemble des zéros communs d'une famille de fonctions de classe  $C^\infty$  peut être extrêmement pathologique. Nous verrons par ailleurs ci-dessous qu'il est essentiel que l'entier  $m$  soit uniquement déterminé, on l'appelle la codimension de  $M$  en  $q$  et on appelle dimension de  $M$  en  $q$  l'entier  $d = m - n$ , on les note respectivement  $\text{codim}_q M$  et  $\text{dim}_q M$ .

**Définition 3.2** On dit que  $M$  est une sous variété de  $V$  en  $q$  si elle possède un système non-dégénéré d'équations locales en  $q$ ; on dit que  $M$  est une sous variété de  $V$  s'il en est ainsi en chacun de ses points.

De façon équivalente, dire que  $M$  est une sous variété de  $V$  signifie qu'il existe une famille d'ouvert  $U$  de  $V$ , recouvrant  $M$ , telle que  $M$  possède dans chaque ouvert de la famille un système non-dégénéré d'équations.

Si  $M$  est de dimension  $d$  en  $q$ , elle est aussi de dimension  $d$  aux points voisins. Ainsi les conditions  $\text{dim}_q M = 0, 1, \dots$  définissent une partition de  $M$  en parties ouvertes. Si  $M$  est connexe, elle a donc même dimension en chacun de ses points. Nous dirons que  $M$  est purement de dimension  $d$  (et de codimension  $n - d$ ), s'il en est aussi en chacun de ses points. Plus généralement, nous posons :

$$\dim(M) = \sup_{q \in M} \dim_q M, \quad \text{codim}(M) = \inf_{q \in M} \text{codim}_q M$$

On a donc  $\dim(M) + \text{codim}(M) = \dim(V)$ . notons explicitement que les définitions précédentes impliquent que la partie vide est une sous variété, qui est purement de dimension  $d$  pour tout  $d$  (pour  $d = 0, \dots, n$ ).

De façon équivalente, dire que  $M$  est une sous-variété de  $V$  en  $q$  signifie qu'il existe un ouvert  $U$  de  $V$  contenant  $q$  et un difféomorphisme  $\theta$  de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$  tel que  $\theta(U \cap M) = \theta(U) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^d)$ , c'est-à-dire,  $\theta(U \cap M)$  soit un ouvert d'un sous-espace vectoriel de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^n$ .

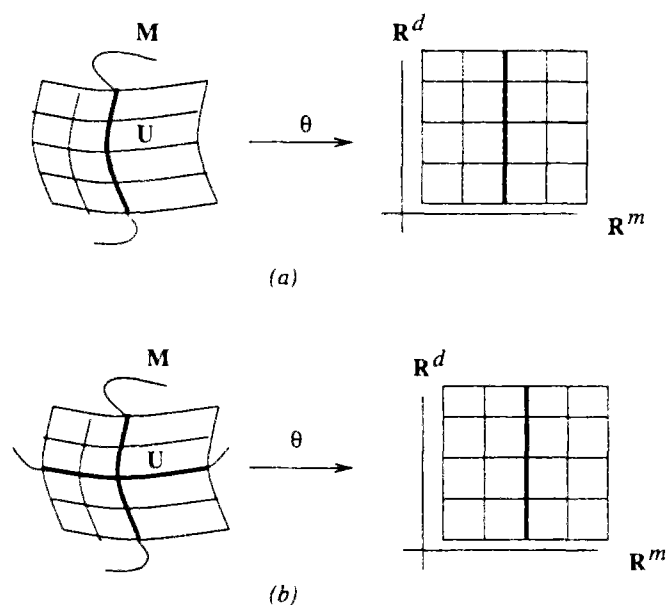
Soit  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$  l'espace vectoriel des applications linéaires de  $\mathbb{R}^m$  à sous algèbre  $\mathfrak{S}_a$  de Lie de  $\mathfrak{D}$ . Pour chaque  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ , le rang de  $u$  est l'entier  $\text{rang}(u)$  défini par

$$\text{rang}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \text{codim}(\ker(u))$$

On a  $\text{rang}(u) \leq \inf(m, \dim(\mathfrak{S}_a))$ , l'égalité  $\text{rang}(u) = m$  signifie que  $u$  est injective, l'égalité  $\text{rang}(u) = \dim(\mathfrak{S}_a)$  signifie que  $u$  est surjective.

On donne quelques exemples de sous-variété :

- Un sous-espace vectoriel (ou affine) de  $V$  est une sous variété.
- Graphes. Supposons  $V$  donné comme un produit de  $V' \times V''$  et soit  $f : V' \rightarrow V''$  une application de classe  $C^\infty$  de  $V'$  dans  $V''$ , alors le graphe de  $f$  est une sous-variété de  $V$  de dimension  $\dim(V')$ . En effet, on peut identifier  $V''$  à  $\mathbb{R}^m$  et  $f$  à une suite  $(\phi_1, \dots, \phi_m)$  de fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $V'$ , alors le graphe de  $f$  est l'ensemble des  $(x, y_1, \dots, y_m) \in V' \times \mathbb{R}^m$  annulant les fonctions  $(x, y_1, \dots, y_m) \rightarrow y_i - \phi_i(x)$ . Mais les différentielles  $dy_i - d\phi_i(x)$  de ces équations sont linéairement indépendantes en tous points.



Dans la figure (a),  $M$  est une sous-variété de  $V$ , puisque  $\theta$  est bien un difféomorphisme de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , de plus  $\theta(U \cap M)$  est un ouvert d'un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$ , la définition est alors bien vérifiée.

Dans la figure (b),  $M$  n'est pas en point  $q$  une sous-variété de  $V$ , puisque  $\theta$  est une surjection mais, n'est pas un difféomorphisme, la définition n'est pas vérifiée.

FIG. 3.1 - Définition d'une sous-variété

**Proposition 3.1** Soit  $r$  un entier avec  $0 \leq r \leq \inf(m, \dim(\mathfrak{S}_a))$ . Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ , l'ensemble  $E^r$  des  $u$  avec  $\text{rang}(u) = r$  est une sous-variété de codimension égale à  $(m-r)(\dim(\mathfrak{S}_a) - r)$ .

Pour tout points  $q \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$  est identifié à  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_q \oplus \mathbb{R}_s, \mathfrak{F}_q \oplus \mathfrak{G}_q)$ , de plus :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}_q \oplus \mathbb{R}_s, \mathfrak{F}_q \oplus \mathfrak{G}_q) = \mathcal{L}(\mathbb{R}_q, \mathfrak{F}_q) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_q, \mathfrak{G}_q) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_s, \mathfrak{F}_q) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{R}_s, \mathfrak{G}_q)$$

**Démonstration :** Considérons une application  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ , on peut l'identifier par quatre projections  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$ , telles que :

$$u = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix}$$

de plus, les quatre projections sont définies par :

$$\begin{cases} p_1 : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_s, \mathfrak{F}_q) \\ p_2 : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_s, \mathfrak{G}_q) \\ p_3 : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_q, \mathfrak{F}_q) \\ p_4 : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_q, \mathfrak{G}_q) \end{cases} \quad (3.1)$$

Si on suppose que  $p_1$  est une matrice carré  $r \times r$  inversible, alors on a :

$$\text{rang } u = r \iff p_4 = p_2 p_1^{-1} p_3$$

La formule peut être prouvée par la procédure suivante. Si on définit :

$$\nu = \begin{bmatrix} I_r & -p_1^{-1} p_3 \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

$\nu$  est une matrice carré  $m \times m$  inversible; on a donc :

$$\text{rang } u = \text{rang } \nu u = \text{rang} \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & -p_2 p_1^{-1} p_3 + p_4 \end{pmatrix}$$

D'où la formule.

Soit  $u_0 \in E^r$ . Dans des bases convenables de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathfrak{S}_a$ ,  $u_0$  s'écrit :

$$u_0 = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Par continuité du rang, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $u_0$  dans  $E^r$  tel que, pour tout  $u \in U$ , on ait  $\text{rang}(p_1) = r$ . Pour que  $u \in U$  soit le rang  $r$ , il faut et il suffit :

$$p_4 = p_2 p_1^{-1} p_3$$

En prenant pour  $U$  un voisinage produit, l'intersection  $E^r \cap U \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}_s, \mathfrak{S}_a) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}_q, \mathfrak{F}_q) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}_q, \mathfrak{G}_q)$  est le graphe de l'application  $(p_1, p_2, p_3) \mapsto p_2 p_1^{-1} p_3$  de classe  $C^\infty$ . Ainsi,  $E^r$  est une sous-variété  $C^\infty$  de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$  et sa codimension est :  $ms - (r^2 + (m-r)r + r(s-r)) = (m-r)(s-r)$

■

### 3.1.2 Espace tangent à une sous-variété

**Proposition 3.2** *L'espace tangent à  $M$  en  $q$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $\dim_q M$ . C'est aussi l'intersection des noyaux des formes linéaires  $d\phi(q)$ , où  $\phi$  parcourt l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$ , définies au voisinage de  $q$  et nulles sur  $M$ .*

#### Exemples

- Un sous-espace affine de  $V$  est son propre espace affine tangent en chaque point.
- L'espace tangent au graphe de  $f$  en un point  $(q, f(q))$  est le graphe de l'application linéaire  $f'(q) : V \rightarrow W$ .

**Proposition 3.3** *L'espace tangent au point  $u$  à la sous variété  $E^r$  de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$  est formé des applications linéaires  $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{S}_a$  telles que  $T_u E^r = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a) \mid p_4(v) = 0\}$ .*

**Démonstration :** Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$  tel que :

$$h \in U \cap E^r \iff P(h) = 0$$

L'application  $P : E^r \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_q, \mathfrak{S}_q)$  est différentiable, elle est définie par :

$$P(h) = p_4(h) - p_2(h)p_1^{-1}(h)p_3(h)$$

Pour  $v \in T_h E^r$ , on a :

$$P'(h).v = p_4(v) - (p_2(v)p_1^{-1}(h)p_3(h) + p_2(h)p_1^{-1}(h)p_1(v)p_1^{-1}(h) + p_2(h)p_1^{-1}(h)p_3(v))$$

Puisque :  $p_2(h) = p_3(h) = p_4(h) = 0$ , on a :

$$P'(h).v = p_4(v)$$

■

## 3.2 Théorèmes de transversalité

**Définition 3.3** *Soient  $V_1, V_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$ . On dit que les sous-espaces  $V_1$  et  $V_2$  sont transverses l'un à l'autre si les propriétés équivalentes sont vérifiées :*

- (i)  $V_1 + V_2 = V$ ;
- (ii)  $\text{codim}(V_1 \cap V_2) = \text{codim}(V_1) + \text{codim}(V_2)$ ;
- (iii)  $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V)$

Dans le cas où  $\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V)$ , deux sous-espaces de  $V$  sont transverses si et seulement s'ils sont supplémentaires.

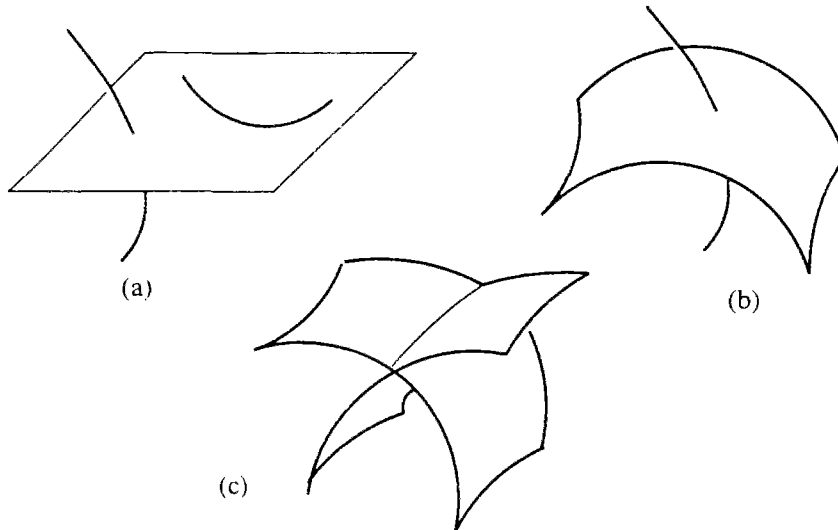


FIG. 3.2 - Exemples des espaces transverses

Plus généralement, on dira qu'une famille de  $m$  sous espaces  $V_1, \dots, V_m$  est transverse si on a :

$$\text{codim}(V_1 \cap \dots \cap V_m) = \text{codim}(V_1) + \dots + \text{codim}(V_m)$$

**Définition 3.4** Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous variétés de  $V$ . On dit que  $V_1$  et  $V_2$  sont transverses si, pour tout points  $q$  de  $V_1 \cap V_2$ , les sous-espaces  $T_q V_1$  et  $T_q V_2$  de  $\Omega$  sont transverses.

Soit  $f: W \rightarrow V$  une application différentiable. Soit  $V_1$  une sous variété de  $V$  :

1. Pour  $q \in W$ , on dit que  $f$  est transverse à  $V_1$  en  $q$  si, ou bien  $f(q)$  n'appartient pas à  $V_1$ , ou bien  $f(q)$  appartient à  $V_1$  et l'image de  $T_q f$  est transverse au sous-espace  $T_{f(q)} V_1$ .
2. On dit que  $f$  est transverse à  $V_1$  si elle l'est en chaque point de  $V_1$ . On dit que  $f$  est transverse à  $V_1$  sur une partie de  $V_1$  s'il en est ainsi en tout point de cette partie

### Exemples

Dans l'espace usuel de dimension 3.

- Deux courbes sont transverses signifie qu'elles ne se rencontrent pas (voire 3.2.(a)). Deux droites ne sont jamais transverses mais, elles sont transverses dans l'espace de dimension 2 lorsqu'elles ne coïncent pas.
- Une courbe et une surface sont transverses si en chaque point d'intersection la tangente à la courbe n'est pas continuée dans le plan tangent à la surface (voire 3.2.(b)).
- Deux surfaces sont transverses si en leurs points communs, leurs plans tangents sont distincts (voire 3.2.(c)).

Ici, l'on passe de généralité sur la transversalité à des questions concernant les mécanismes, on va introduire un critère de transversalité pour examiner si  $\mu'(q)$  et  $T_{\mu(q)} E^r$  sont transverses dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ . Ensuite, on va étudier la classe  $\sum^{m-r}(f)$ , si le critère est vérifié, on peut conclure que

$\Sigma^{m-r}(f)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$ . D'après le résultat géométrie différentiel, le critère de transversalité est une condition nécessaire et non suffisante pour que  $\Sigma^{m-r}(f)$  soit une sous variété de  $\mathbb{R}^m$ . Tout cela est lié avec l'étude local de l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles ainsi que le degré de liberté des mécanismes étudiés.

**Proposition 3.4** *Soit  $q$  un point de  $\mathbb{R}^m$  tel que  $\mu(q) \in E^r$ . On suppose que les sous espaces  $\mu'(q)\mathbb{R}^m$  et  $T_{\mu(q)}E^r$  sont transverse. Alors  $\Sigma^{m-r}(f) = \mu^{-1}(E^r)$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^m$  en  $q$  et on a :*

$$\begin{aligned} T_q(\mu^{-1}(E^r)) &= \mu'(q)^{-1}(T_{\mu(q)}E^r) \\ \text{codim}(\mu^{-1}(E^r)) &= \text{codim}_{\mu(q)}E^r \end{aligned}$$

La démonstration peut s'effectuer à partir de la définition d'une sous variété i.e. un système non-dégénéré d'équations locales de  $\mathbb{R}^m$  en  $q$  et celles de  $E^r$  en  $\mu(q)$ .

**Remarque** D'après la proposition précédente, si  $f'(q)$  est surjective, alors  $f^{-1}(f(q))$  est une sous variété en  $q$ , de codimension égale à  $\text{codim}(E^r)$  et d'espace tangent  $\ker(f'(q))$ . C'est bien la solution dans le cas régulier.

D'après la définition 3.5, considérons une application linéaire  $\mu : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ , avec  $\mu \in E^r$ , où  $E^r$  est une sous-variété de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ , pour que  $\mu$  soit transverse à la sous-variété, il faut :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a) = \mu'(q) \cdot \mathbb{R}^m + T_{\mu(q)}(E^r)$$

**Corollaire 3.1** *En considérant l'application linéaire  $(q, v) \mapsto \mu'x + v$  de  $\mathbb{R}^m \times T_{\mu(q)}E^r$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ , les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a) = \mu'(q)\mathbb{R}^m + T_{\mu(q)}E^r$ ,
- (ii)  $\text{codim}(\mu'(q)^{-1}(T_{\mu(q)}E^r)) = \text{codim}(T_q(\mu^{-1}(E^r)))$ ;
- (iii)  $\dim(\mu'(q)^{-1}(T_{\mu(q)}E^r)) = m - \dim(T_q(\mu^{-1}(E^r)))$ .

En utilisant le corollaire 3.1,  $\forall u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ , on a  $u = \mu'(q)x + v$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall v \in T_{\mu(q)}E^r$ , on a donc le critère suivant pour vérifier si les sous espaces  $\mu'(q)\mathbb{R}^m$  et  $T_{\mu(q)}E^r$  sont transverses.

**Proposition 3.5** *On définit la matrice  $\mathbf{A}$  de dimension  $(s-r)(m-r) \times m$  comme suit : pour  $\ell \in (1, \dots, m)$ ,*

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_\ell^{i\rho}) = \begin{cases} \sum_{\alpha < \ell < i} C_i^\alpha G_{i\alpha}^\rho & \text{si } \ell < i \\ -\sum_{\alpha > \ell} C_i^\alpha G_{i\alpha}^\rho & \text{si } \ell \geq i \end{cases}$$

$\mu$  est transverse à  $E^r$  si et seulement si :

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = (m-r)(s-r)$$



Puisque  $\mathfrak{S}_a$  est la sous-algèbre engendrée par l'espace  $\mathfrak{F}_q$ , si  $\mu_\alpha$  et  $\nu_\rho$  sont respectivement une base de  $\mathfrak{F}_q$  et  $\mathfrak{G}_q$ , alors  $\{\mu_\alpha, \nu_\rho\}$  est une base de  $\mathfrak{S}_a$ , comme tous les crochets  $[\mu_\ell(q), \mu_\alpha(q)]$  sont dans  $\mathfrak{S}_a$ , la relation suivante est évidente :

$$[\mu_\ell(q), \mu_\beta(q)] = \sum_{\alpha} F_{\ell\beta}^{\alpha} \mu_{\alpha} + \sum_{\rho} G_{\ell\beta}^{\rho} \nu_{\rho} \quad (3.2)$$

**Démonstration :** La démonstration peut s'effectuer avec l'idée suivante : Pour que la condition de transversalité soit vérifiée, il faut que le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  soit maximal, c'est-à-dire que la quatrième projection  $p_4$  soit de rang maximal. D'abord on va appliquer  $u = \mu'(q) \cdot x + v$  à un élément de la base  $\mathcal{X}_q^i$  (voir formule 2.17) de  $\mathbb{R}_q$ , pour  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{S}_a)$ ,  $v \in T_{\mu(q)}E^r$ .

On définit  $u, v, \text{Im}(\mu'(q) \cdot x)$  de la façon suivante :

$$u(\mathcal{X}_q^i) = \sum_{\alpha} u_i^{\alpha} \mu_{\alpha} + \sum_{\rho} u_i^{\rho} \nu_{\rho}$$

et  $v$  est définie par :

$$v(\mathcal{X}_q^i) = \sum_{\alpha} v_i^{\alpha} \mu_{\alpha}$$

En fonction de la proposition 2.9,  $\mu'(q) \cdot x$  est appliqué sur  $\mathcal{X}_q^i$  :

$$(\mu'(q) \cdot x) \cdot \mathcal{X}_q^i = \sum_{\alpha < \ell < i} x^{\ell} C_i^{\alpha} [\mu_{\ell}, \mu_{\alpha}] - \sum_{i < \ell < \alpha} [\mu_{\ell}, \mu_{\alpha}]$$

A partir de la formule suivante :

$$u = \mu'(q) \cdot x + v$$

En remplaçant les crochets par la formule 3.2, on a donc :

$$\begin{aligned} u_i^{\alpha} &= v_i^{\alpha} + \sum_{\beta < \ell < i} x^{\ell} C_i^{\beta} F_{\ell\beta}^{\alpha} - \sum_{i \leq \ell < \beta} x^{\ell} C_i^{\beta} F_{\ell\beta}^{\alpha} \\ u_i^{\rho} &= \sum_{\beta < \ell < i} x^{\ell} C_i^{\beta} G_{\ell\beta}^{\rho} - \sum_{i \leq \ell < \beta} x^{\ell} C_i^{\beta} G_{\ell\beta}^{\rho} \end{aligned}$$

En réalité la première équation est toujours vérifiée en définissant les  $u$  et  $v$  comme plus haut, alors on doit vérifier la deuxième équation et on la réécrit sous forme suivante :

$$u_i^{\rho} = \sum_{\ell=1}^m x^{\ell} A_{\ell}^{i\rho}$$

on obtient alors la matrice  $\mathbf{A}$  définie dans la proposition.

La condition de transversalité est que la matrice  $\mathbf{A}$  possède un rang maximal i.e.  $\text{rang}(\mathbf{A}) = (s-r)(m-r)$  ■

**Corollaire 3.2** Si les  $r$  premier éléments de  $\mu$  forment une base de  $\mathfrak{F}_q$ , alors, la matrice  $\mathbf{A}$  définie dans la proposition 3.5 peut être simplifiée par :

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha < \ell < i} C_i^{\alpha} G_{\ell\alpha}^{\rho} \quad \text{si } \ell < i$$

**Remarque**

On considère les trois cas particuliers :

- si  $\mathfrak{F}_q$  est une sous algèbre de Lie, la condition de transversalité est toujours vérifiée.
- si  $(m-r)(s-r) \geq m$ , la condition de transversalité n'est pas vérifiée.
- La sous-algèbre de Lie étant engendrée par les premiers crochets de Lie est une condition nécessaire pour que la condition de transversalité soit vérifiée. Supposant  $\mathfrak{S}_a$  est engendrée par les doubles crochets, d'après le critère, il existe au moins une ligne ne composée que des 0 dans la matrice  $\mathbf{A}$ , le rang de  $\mathbf{A}$  ne peut donc plus avoir le rang maximal, alors la condition de transversalité n'est pas vérifiée.

**Proposition 3.6** Si  $M \subseteq \sum^{m-r}(f)$ , c'est-à-dire que  $\text{rang}(f'(q)) = r$  pour  $q \in M$ , alors  $M$  est une sous variété de  $\sum^{m-r}(f)$  et de  $\mathbb{R}^m$ ,  $r$  est donné par  $r = \text{rang}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \dim(\mathfrak{F}_0)$ . De plus, on a :  $T_q M = \mathbb{R}_q \cap T_q \sum^{m-r}(f)$  et  $d = \dim(M) = \dim(\mathbb{R}_q \cap T_q \sum^{m-r}(f))$  pour tout  $q \in M$  et finalement :

$$T_q M = \{x \in \mathbb{R}_q \mid B_q(x, x) \in \mathfrak{F}_q\}$$

### 3.3 Étude des mécanismes 6R spatiaux

Dans cette partie, on va présenter des mécanismes 6R spatiaux fermés dans l'article de Wohlhart [Woh91]. Dans son article, il a montré : *la condition suffisante pour qu'un mécanisme 6R spatial soit régulier s'il existe une "transversale" pour toutes les configurations*. A notre connaissance, il n'existe toujours pas d'explication mathématique complète sur tels mécanismes. Ici on va appliquer la théorie de transversalité et l'algèbre de Lie aux mécanismes considérés. On a montré que la vérification de condition de transversalité et l'existence d'une telle "transversale" sont équivalentes pour les mécanismes 6R spatiaux [Hao95], on a prouvé également l'une de ces deux conditions est nécessaire et suffisante pour rassurer le fonctionnement d'un degré de liberté non singulier du mécanisme.

On organise cette partie de façon comme suit :

- D'abord, on va présenter la théorie de Wohlhart.
- Ensuite, on applique la théorie de transversalité et l'algèbre de Lie aux mécanismes de 6R spatiaux.

#### 3.3.1 6R espace de Wohlhart

Une chaîne cinématique constituée par 7 corps rigides liés entre eux par 7 couples rotoïdes est généralement mobile avec un degré de liberté par rapport au corps fixé. S'il y a une certaine conditions géométriques imposées sur la structure (i.e. les paramètres de Denavit-Hartenberg), une chaîne fermée avec seulement six corps ou cinq corps ou quatre corps liés entre eux par des couples rotoïdes peuvent être mobiles avec un degré de liberté. Puisqu'aucune étude systématique sur les systèmes 6R, 5R surcontraints n'a été entreprise jusqu'à présent, les mécanismes paradoxaux sont toujours restés inconnus actuellement.

Dans son article sur les cinq couples rotoïdes, J. E. Baker [Bak84] a donné une liste très intéressante de tous les six couples inventés sporadiquement par les inventeurs pendant le dernier siècle. En présumant cette liste complète nous avons une idée de ce qui a été réalisé et de ce qui peut être étiqueté comme nouveau dans ce domaine spécial de recherche.

### Mécanismes paradoxaux, mobilité infinitésimale

Si un système mécanique est mobile instantanément (infinitésimalement) avec un degré de liberté pour toutes ses configurations possibles, alors ce mécanisme peut avoir une mobilité de "tour complet" <sup>1</sup> de degré un. Donc l'étude du degré de liberté d'un mécanisme peut être effectuée en deux étapes : premièrement on va demander quelle est la condition de mobilité infinitésimal; deuxièmement on va demander si cette condition obéit à chaque configuration de ce mécanisme ou non.

Considérons le cas général d'un mécanisme  $7R$ , si l'on bloque un ou deux ou trois couples, nous obtenons un mécanisme de  $6R$  ou  $5R$  ou  $4R$  qui ne peuvent pas être mobiles. Nous allons supposer que le corps  $a_7$  est fixé dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Comme dans les dernières parties, on exprime ce mécanisme en utilisant l'ensemble des vecteurs  $\mu_k$  pour  $k = 1, \dots, 7$ , que  $\mu_k$  sont des fonctions de  $q$ , alors le noyau de  $f'(q)$  est calculé par

$$\sum_{k=1}^{k=7} x^k \mu_k(q) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^7 \quad (3.3)$$

En effet,  $x^k$  correspond à la vitesse infinitésimale de la  $k$ -ème couple. Si le système des équations 3.3 est linéairement indépendant, c'est-à-dire, si le rang de la matrice  $6 \times 7$   $(\mu_1, \dots, \mu_7)$  est six, supposons alors  $x_1$  comme entrée, les autres  $x_k$  pour  $k = 2, \dots, 7$  peuvent être calculés par 3.3. Pour  $x_7$ , on a :

$$x_7 = \frac{\det(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6)}{\det(\mu_7 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6)} \quad (3.4)$$

Ce résultat indique si le déplacement du corps  $a_7$  respective à  $a_1$  est complètement bloqué dans chaque configuration de ce mécanisme, l'identité

$$\det(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6) = 0 \quad (3.5)$$

maintient, de plus  $\det(\mu_7 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6) \neq 0$ . Avec  $x_7 = 0$ , l'équation 3.3 devient :

$$\sum_{i=1}^{i=6} x^i \mu_i = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^6$$

Soit l'identité 3.5 valable, alors le rang de la matrice  $6 \times 6$   $(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6)$  est plus petit que 6 pour toutes les configurations  $M$  cinématiquement admissibles du mécanisme. Alors, l'équation précédente a une solution non triviale. Si le rang  $(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6)$  est 5 pour tout entrée  $x_1$ , les restes peuvent être calculés par l'équation précédente. Amalgamant  $a_7$  avec  $a_6$ , nous obtiendrons un mécanisme  $6R$  surcontraint.

En utilisant le langage de géométrie [Hun67], la conclusion s'exprime aussi dans les termes suivants :

**Proposition 3.7** *Si les six axes d'un mécanisme  $7R$  sont transverses à une droite dans toutes les configurations possibles, alors la septième couple rotoïde sera complètement passif.*

<sup>1</sup>. Ce mot vient de l'anglais "full-cycle"

En effet, l'équation 3.5 nous permet d'obtenir :

$$\sum_{\ell=1}^{\ell=6} \lambda_{\ell} \mu_{i\ell} = 0$$

de plus  $\lambda_{\ell}$  ont des solutions différentes de zéro, on peut les écrire sous la forme suivante :

$$[\lambda \mid \mu_i] = 0$$

avec :  $\lambda = [\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5, \lambda^6]$ , on appelle  $\lambda$  la "transversale", cela signifie que  $\lambda$  rencontre tout  $\mu_i$  dans l'espace. L'axe de  $\lambda$  passe par le point :

$$a = \frac{\omega_{\lambda} \wedge \lambda(o)}{\omega_{\lambda} \cdot \omega_{\lambda}}$$

le "pas" est donné par :

$$\frac{[\lambda \mid \lambda]}{2(\omega_{\lambda} \cdot \omega_{\lambda})}$$

### 3.3.2 Application de condition de transversalité

Dans le chapitre précédent, on a présenté des théorèmes de transversalité. La condition de transversalité est suffisante pour que l'image réciproque  $\sum^{m-r}(f)$  de  $\mu'$  soit une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$ .

D'après les exemples traités, la condition de transversalité n'est pas nécessaire pour que  $M$  soit une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$  mais, elle est utile pour les mécanismes "paradoxaux", c'est-à-dire, les mécanismes ne fonctionnent que sur leurs points singuliers.

**Proposition 3.8** Lorsque  $\text{rang}(f') = m - 1$  et  $s = m$  pour  $m = 3, 4, 6$ , la condition de transversalité est toujours vérifiée, alors  $\sum^{m-r}(f) = \mu^{-1}(E^r)$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^m$ .

**Démonstration :** (1) Si  $f$  est une subimmersion,  $\{\mu_1, \dots, \mu_{m-1}\}$  est une sous algèbre de Lie, la proposition est évidente.

(2) Si  $\text{rang}(f') = m - 1$ , on a donc  $m - 1$  vecteurs  $(\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$  linéairement indépendants. On ne perd rien, si on suppose  $\alpha$  contient les valeurs  $\{1, 2, \dots, m - 1\}$ ,  $i$  contient les valeurs  $\{m\}$ , alors :

$$s = m \text{ et } \rho = \{1\}$$

D'après le critère de transversalité, on sait que le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  doit être égal à  $(m - r)(s - r) = 1$ , il existe au moins un crochet de Lie par exemple  $[\mu_1, \mu_2]$  qui n'appartient pas à  $\mathfrak{F}_q$ , on le prend comme une base de  $\mathfrak{G}_q$ , c'est-à-dire  $\nu_{\rho} = \{[\mu_1, \mu_2]\}$ . De plus les coefficients  $C_m^{\alpha}$  pour tout  $\alpha$  sont tous différents de zéro, on peut dire que le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  est égal à 1. avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & C_n^1 G_{21}^1 & \dots & \sum_{\beta=1}^{n-2} C_n^{\beta} G_{n-1, n-2}^1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les mécanismes en boucles fermées correspondants sont exprimés par le tableau ci-dessous<sup>2</sup>:

nombre de paramètre $m$	$\text{rang}(\mathfrak{F}_q)$	$\dim(\mathfrak{G}_a) = s$
3	2	3
4	3	4
6	5	6

■

Remarque : On considère le cas où  $\text{rang}(\mu(q_0)) = m$ , c'est-à-dire, le mécanisme ne peut pas bouger, alors il y a deux possibilités :

- (a)  $q_0$  est un point isolé de  $M$ , alors  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$ .  
 (b)  $\text{rang}(\mu(q_0)) = m-1$ , alors on a  $M = \sum^1(f)$  (si  $\sum^2(f) = \{\emptyset\}$ ). Si la condition de transversalité est vérifiée,  $\sum^1(f)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$  et ainsi que  $M$ .

Jusqu'à présent on n'a pas encore trouver des mécanismes spatiaux constituant avec moins de 6 corps qui vérifient la proposition 3.8. On étudie donc le cas où  $m = 6$ .

Pour qu'un mécanisme  $6R$  spatial fermé soit mobile, il faut et il suffit que le rang de la matrice  $J$  soit inférieur à 6, c'est-à-dire qu'il existe une "transversale"  $\lambda \in \mathfrak{D}$  tel que  $[\lambda \mid \mu_k] = 0$  pour  $k = 1, \dots, 6$ . On se propose d'étudier le cas où  $\text{rang}(J) = 5$  pour tout  $q \in M$ , le mécanisme possède alors un degré de liberté, autrement dit, l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles  $M$  est une sous variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^6$  pour tout  $q \in M$ .

**Proposition 3.9** *Pour que  $M$  soit une sous variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^6$  pour tout  $q \in M$ , il faut et il suffit que l'une des trois conditions suivantes soit satisfaite :*

- (i)  $\text{rang}(J) = 5$  pour tout  $q \in M$ .  
 (ii)  $M = \sum^1(f)$ .  
 (iii) il existe une "transversale"  $\lambda$ , tel que  $[\lambda \mid \mu_k] = 0$ , pour tout  $q \in M$ .

**Démonstration :** D'après la proposition 3.8.

si  $\text{rang}(J) = 5$ , la condition de transversalité est vérifiée,  $\sum^1(f)$  est alors une sous variété de  $\mathbb{R}^6$ . Pour montrer la proposition, il suffit de montrer les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)

Puisque  $M = \sum^1(f) \cup \sum^2(f) \cup \dots \cup \sum^6(f)$ , d'après (i) ou (ii), on a  $\sum^i(f) = \{\emptyset\}$  pour  $i \neq 1$ .

(i)  $\Rightarrow$  (iii)

Lorsque  $\text{rang}(J) = 5$ , on a :

$$\det(J) = \det(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) = 0$$

Il existe alors  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)' \in \mathbb{R}^6$  différent de zéro, tel que :

$$\lambda_1 \mu_{k1} + \lambda_2 \mu_{k2} + \lambda_3 \mu_{k3} + \lambda_4 \mu_{k4} + \lambda_5 \mu_{k5} + \lambda_6 \mu_{k6} = 0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, 6.$$

ce qui est équivalent à :

$$\omega_\lambda \cdot \mu_k(p) + \omega_{\mu_k} \cdot \lambda(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\lambda \mid \mu_k] = 0 \quad \text{pour } p \in \mathcal{E} \quad (3.6)$$

2. Puisqu'il n'existe pas de sous algèbre de Lie de dimension 5, il est impossible que  $m = 5$ .

on a  $\omega_\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^t \in \mathbb{E}$ . Alors si (i), on a (iii).

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Lorsque  $\text{rang}(\mu) < 5$ , il existe au moins deux “transversales”. Lorsque  $\text{rang}(\mu) = 6$ ,  $\det(J) \neq 0$ , pour que l'équation 3.6 soit vérifiée, il faut  $\lambda = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$ , alors il n'existe pas de “transversale”. Ce qui implique s'il existe une “transversale”,  $\text{rang}(\mu) = 5$ . ■

### 3.4 Exemples

<sup>3</sup> Dans cette partie [Hao93], on va traiter des exemples, ils sont respectivement : mécanisme plan à quatre barres, mécanisme de Bricard, mécanisme de Bennett comme cas particulier, la salière et un mécanisme parallèle.

On continue les notations de la section 2.2.7.

Les exemples sont traités en deux étapes :

- Premièrement, on analyse les configurations régulières et le degré de liberté.
- Deuxièmement, on étudie les configurations singulières, c'est-à-dire qu'on calcule l'ensemble des configurations singulières  $M^s$ , le noyau  $\mathbb{R}_q$  de  $f'(q^s)$ , la sous-algèbre engendrée  $\mathfrak{S}_a$  et on examine si la condition de transversalité est vérifiée ou non.

#### 3.4.1 Les quatre-barres parallèles

Les positions relatives dans la configuration de référence des quatre-barres sont choisies de la façon suivante :

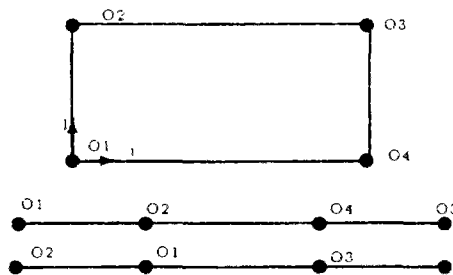


FIG 1 : LES QUATRE-BARRES

Premièrement, on va calculer les matrices de passage  $P_i$  de la base  $B_i$  à la base  $B_{i+1}$  par la formule ?? dont les opérateurs  $\overrightarrow{o_i o_{i+1}}$  sont définis par :

$$\overrightarrow{o_1 o_2} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{o_2 o_3} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{o_3 o_4} \wedge = -\overrightarrow{o_1 o_2} \wedge \quad \overrightarrow{o_4 o_1} \wedge = -\overrightarrow{o_2 o_3} \wedge$$

3. Les calculs sont réalisés par le logiciel de calcul formel Maple.

$$\text{Ad } A_i \simeq R_i(q_i) = R_i \begin{bmatrix} \cos q_i & \sin q_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q_i & \sin q_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin q_i & \cos q_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Degré de liberté

On peut identifier les la matrice jacobienne  $J$  par les vecteurs  $\mu(q)$  :

$$J(q) = [\mu_1(q), \mu_2(q), \mu_3(q), \mu_4(q)]$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_1(q) &= R_1 \cdot \xi_1 \\ \mu_2(q) &= R_1 P_1 \cdot R_2 \cdot \xi_2 \\ \mu_3(q) &= R_1 P_1 \cdot R_2 P_2 \cdot R_3 \cdot \xi_3 \\ \mu_4(q) &= R_1 P_1 \cdot R_2 P_2 \cdot R_3 P_3 \cdot R_4 \cdot \xi_4 \end{aligned}$$

On a les quatre générateurs de déplacement dans  $B_i$  :

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = [0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$$

Aux points réguliers  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ , on a :

$$\begin{aligned} \mu_1(q) &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2(q) \simeq \begin{pmatrix} -\sin q_1 a \\ \cos q_1 a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_3(q) \simeq \begin{pmatrix} -b \sin(q_1 + q_2) - \sin q_1 a \\ b \cos(q_1 + q_2) + \cos q_1 a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mu_4(q) &\simeq \begin{pmatrix} a \sin(q_1 + q_2 + q_3) - b \sin(q_1 + q_2) - a \sin q_1 \\ -a \cos(q_1 + q_2 + q_3) + b \cos(q_1 + q_2) + a \cos q_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\text{rang}(\mu(q)) = (\mu_1(q), \mu_2(q), \mu_3(q), \mu_4(q)) = 3$ . On choisira  $\mu_\alpha = \{\mu_1(q), \mu_2(q), \mu_3(q)\}$  comme une base de  $\mathfrak{F}_q$ , alors  $\mathfrak{F}_q$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{S}_a$  et de  $\mathfrak{D}$ , on a bien sur, le vecteur  $B_q(x, x) \in \mathfrak{F}_q$ , alors  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^m$ . De plus la condition de transversalité est vérifiée, alors  $\sum^1(f) = M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^4$  au voisinage d'un point régulier. Le mécanisme possède un degré d liberté.

### Analyse des configurations singulières

Ce mécanisme a deux configurations singulières possibles dont le rang de la matrice jacobienne est inférieur à 3, ces configurations singulières sont les suivantes :

$$M^s = \{q_1^s = [\pi, -\pi, \pi, -\pi], \quad q_2^s = [-\pi, \pi, -\pi, \pi]\}$$

Considérons la première configuration singulière, on remplace  $q$  par sa valeur singulière dans les expressions de  $\mu_i$ , on obtient les quatre vecteurs associés à la configuration  $q_1^s$  :

$$\mu_1^s \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2^s \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_3^s \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ a+b \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_4^s \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace engendré  $\mathfrak{F}_q$  par l'ensemble des vecteurs  $(\mu_1^s, \mu_2^s, \mu_3^s, \mu_4^s)$  est de dimension 2, on prend  $\mu_\alpha^s = \{\mu_1^s, \mu_2^s\}$  comme une base de  $\mathfrak{F}_q^s$ , alors, le noyau  $\mathbb{R}_q^s$  de  $f'$  est de dimension 2 défini par :

$$\mathbb{R}_q^s = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \text{ vérifient les deux équations suivantes}\}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{bx_3 - (a-b)x_4}{a} \\ x_2 = -\frac{(a+b)x_3 + bx_4}{a} \end{cases}$$

De plus,  $\mathfrak{F}_q^s$  n'est plus sous-algèbre de Lie. la sous-algèbre de Lie engendrée  $\mathfrak{S}_a^s$  est de dimension 3, on peut la exprimer par une base :  $\{\mu_1^s, \mu_2^s, [\mu_1^s, \mu_2^s]\}$ , dans laquelle, l'élément  $[\mu_1^s, \mu_2^s] \in \mathfrak{S}_q^s$ , où  $\mathfrak{S}_q$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{F}_q$  dans  $\mathfrak{S}_a^s$ . On peut définir une base de  $\mathfrak{S}_q^s$  par :

$$\nu_\rho = \{\nu_1^s\} = \{[\mu_1^s, \mu_2^s]\}$$

avec :

$$\nu_1 = [-a, 0, 0, 0, 0]$$

D'après le calcul du chapitre précédent, on peut calculer la dérivée d'ordre 2 par la formule 2.23,  $B_q(x, x)$  est exprimée dans la base  $\{\mu_\alpha, \nu_1\}$  de  $\mathfrak{S}_a^s$  :

$$B_q(x, x) = \left(0, 0, -\frac{b(x_4 + x_3)(x_4a - x_4b - bx_3 - x_3a)}{a}\right)$$

Pour que  $B_q(x, x) \in \mathfrak{F}_q$ , il faut et il suffit que la projection à la sous espace  $\mathfrak{S}_q^s$  soit nulle (voir figure 3.3), c'est-à-dire :

$$-\frac{b(x_4 + x_3)(x_4a - x_4b - bx_3 - x_3a)}{a} = 0$$

Après simplification :

$$(x_3 + x_4)((a-b)x_4 - (a+b)x_3) = 0$$

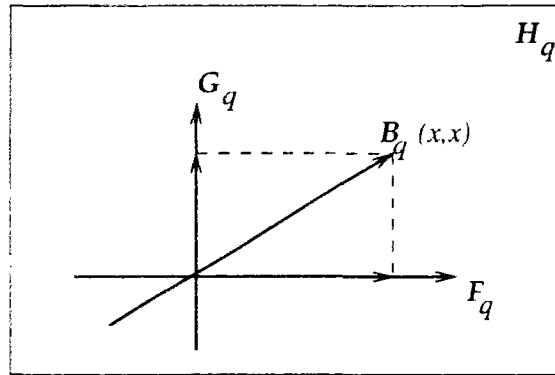
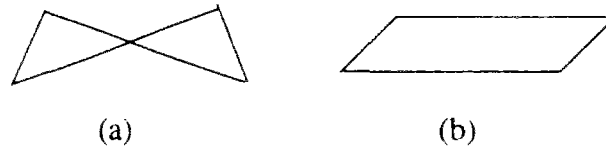
le mécanisme va bifurquer en deux branches :

$$(x_3 + x_4) = 0 \quad \text{ou} \quad (a-b)x_4 - (a+b)x_3 = 0$$

ces deux branches peuvent être représentés par la figure 3.4.

Le système est dégénéré,  $M$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$ . Par contre, la condition de transversalité est vérifiée, puisque  $\text{rang } \mathbf{A} = (m-r)(s-r) = 2$  qui est définie dans la proposition 3.5.



FIG. 3.3 -  $B_q(x, x)$  et la sous-algèbre  $\mathfrak{S}_a$ 

La figure (a) correspond  $(a - b)x_4 - (a + b)x_3 = 0$ . La figure (b) correspond  $(x_3 + x_4) = 0$ .

FIG. 3.4 - Bifurcation de quatre barres aux configurations singulières

### 3.4.2 Un mécanisme de Bricard

Ce mécanisme est formé par six couples rotoïdes dans l'espace dont les positions relatives dans la configuration de référence choisie forment un cube de côté unité de la façon indiquée sur la figure 3.5.

Les matrices de passages de la base  $B_i$  à la base  $B_{i+1}$  sont définies par l'équation ?? dont les opérateurs  $\overrightarrow{o_i o_{i+1}} \wedge$  sont définis par :

$$\overrightarrow{o_1 o_2} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{o_2 o_3} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{o_3 o_4} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

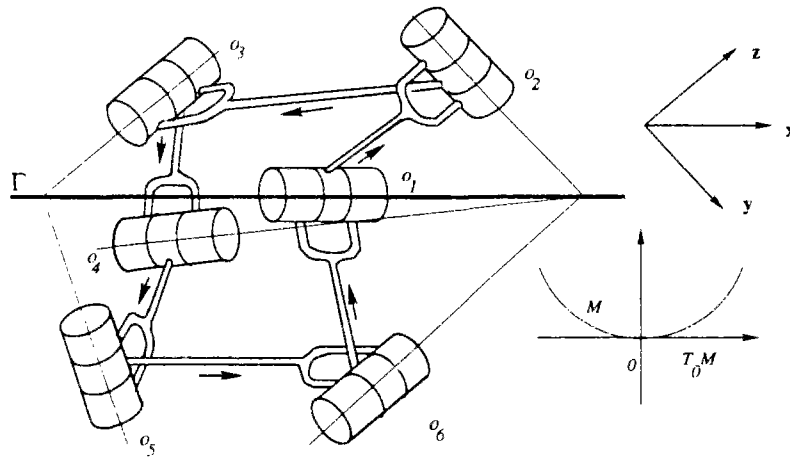
$$\overrightarrow{o_4 o_5} \wedge = -\overrightarrow{o_1 o_2} \wedge \quad \overrightarrow{o_5 o_6} \wedge = -\overrightarrow{o_2 o_3} \wedge \quad \overrightarrow{o_6 o_1} \wedge = -\overrightarrow{o_3 o_4} \wedge$$

Les six générateurs de déplacement s'écrivent comme les suivants

$$\xi_1 = \xi_4 \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \xi_5 \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \xi_6 \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R_i$ , dans la base  $B_i$ , sont définis respectivement par :

$$R_i \simeq \begin{pmatrix} R_i & 0 \\ 0 & R_i \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6$$



(a) est la configuration de référence. (b) signifie qu'à la configuration de référence,  $M$  est bien une sous-variété de dimension 1.

FIG. 3.5 - Un mécanisme de Bricard

où  $R_i$  sont définies par :

$$R_i \simeq \begin{pmatrix} \cos q_i & \sin q_i & 0 \\ -\sin q_i & \cos q_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \dots, 4$$

$$R_i \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_i & \sin q_i \\ 0 & -\sin q_i & \cos q_i \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 2, \dots, 5$$

$$R_i \simeq \begin{pmatrix} \cos q_i & 0 & \sin q_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_i & 0 & \cos q_i \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 3, \dots, 6$$

### Degré de liberté

Comme la premier exemple, on fait tous les calculs dans la base  $B_1$ , on peut obtenir l'ensemble de six vecteurs  $\mu$  par :

$$\begin{aligned} \mu_1(q) &= R_1 \xi_1 \\ \mu_2(q) &= R_1 P_1 R_2 \xi_2 \\ \mu_3(q) &= R_1 P_1 R_2 P_2 R_3 \xi_3 \\ \mu_4(q) &= R_1 P_1 R_2 P_2 R_3 P_3 R_4 \xi_4 \\ \mu_5(q) &= R_1 P_1 R_2 P_2 R_3 P_3 R_4 P_4 R_5 \xi_5 \\ \mu_6(q) &= R_1 P_1 R_2 P_2 R_3 P_3 R_4 P_4 R_5 P_5 R_6 \xi_6 \end{aligned}$$

de plus, la matrice jacobienne s'exprime par :

$$J(q) = (\mu_1(q), \mu_2(q), \mu_3(q), \mu_4(q), \mu_5(q), \mu_6(q))$$

Les six vecteurs sont les suivants :

$$\mu_1(q) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2(q) \simeq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos q_1 \\ -\sin q_1 \end{pmatrix}, \quad \mu_3(q) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ \cos q_1 - \cos q_1 \sin q_2 \\ \sin(q_1) \sin q_2 - \sin q_1 \\ -\sin q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 \\ \cos q_1 \cos q_2 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Mais avec  $q_1, q_2, \dots, q_6$  quelconques, on n'est pas dans une configuration réelle, l'ensemble des vecteurs  $\mu(q) = (\mu_1(q), \mu_2(q), \dots, \mu_6(q))$  possède le rang maximal qui est égal à 6, alors l'ensemble de configurations cinématiquement admissibles  $M$  est un point isolé et il est une sous variété de  $\mathbb{R}^6$ .

### Analyse des configurations singulières

Considérons les configurations singulières, c'est-à-dire, le rang de la matrice  $J(q)$  est inférieur à 6. On a  $\text{rang} \mu^s = 5$  au point singulier  $q^s = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ . Les six vecteurs sont définis par :

$$\mu_1^s \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2^s \simeq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_3^s \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_4^s \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_5^s \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_6^s \simeq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors le sous espace vectoriel engendré par l'ensemble de vecteur  $\mathfrak{F}_q^s$  est de dimension 5, on prend  $\mu_\alpha^s$  avec  $\alpha = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  comme une base. Alors le vecteur  $\mu_6$  est exprimé comme le suivant :

$$\mu_6^s = \mu_1^s + \mu_2^s + \mu_3^s - \mu_4^s - \mu_5^s$$

De plus, le noyau  $\mathbb{R}_q$  de  $f'$  est exprimé par :

$$\mathbb{R}_q = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid x \text{ vérifient les relations suivantes}\}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_6 \\ x_2 = -x_6 \\ x_3 = -x_6 \\ x_4 = x_6 \\ x_5 = x_6 \end{cases}$$

Grace à la formule 2.23, on peut obtenir la dérivée d'ordre 2  $B_q(x, x)$  :

$$B_q(x, x) = (0, 2x_6^2, 2x_6^2, 2x_6^2, -2x_6^2, 2x_6^2)^t$$

alors, on a  $B_q(x, x) \in \mathfrak{F}_q^s$ .

On peut exprimer  $B_q(x, x)$  dans la base  $\mu_\alpha$  :

$$[2x_6^2, 0, 2x_6^2, 0, -2x_6^2]$$

Puisque la sous-algèbre engendrée par  $\mu^s$  est de dimension  $s = 6$ , alors, le sous-espace  $\mathfrak{G}_q$  est de dimension 1 et il est peut être exprimé par une base :

$$\nu_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0]$$

On utilise la proposition 3.5 pour examiner si la condition de transversalité est vérifiée en calculant la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\text{rang} \mathbf{A} = \text{rang}[0, -1, 1, -1, 1, 0] = 1$$

Puisque  $\dim \mathfrak{S}_a = s = 6$  et  $(m-r)(s-r) = 1$ , la condition de transversalité est vérifiée,  $\sum^1(f)$  est alors une sous variété de  $\mathbb{R}^6$ , mais on ne peut pas dire que  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^6$  au voisinage de 0 sans aucune explication. En effet,  $\sum^i f = \{\emptyset\}$ , pour  $i > 2$ , ce qui implique

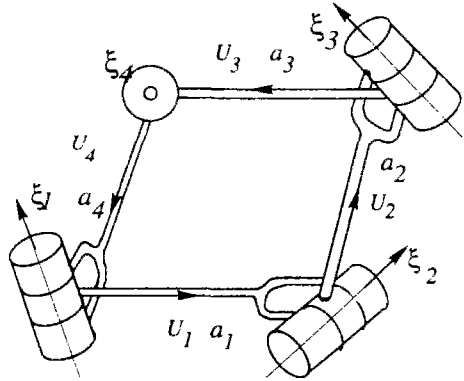


FIG. 3.6 - Structure de mécanisme de Bennett

$M = \sum^1(f) = \sum^1(f)$ , alors  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^6$  (voir la section suivante).

D'autre part, en l'année 70, Wittenburg [Wit77] a trouvé la solution analytique de ce mécanisme exprimée par la formule suivante :

$$\sin q_5 + \sin q_5 \sin q_6 + \sin q_6 = 0$$

ce qui montre aussi que  $M$  est une bonne sous-variété de  $\mathbb{R}^6$ , alors le système possède un degré de liberté.

### 3.4.3 Un exemple de mécanisme de Bennett

Le mécanisme de Bennett contient une famille de mécanismes dont les paramètres vérifient certaines conditions. Maintenant on va étudier l'un de ces mécanismes dont les paramètres sont présentés dans le tableau ci-dessous :

$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$	$\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$	$\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$	$\alpha_4 = \frac{\pi}{4}$
$a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Puisque les axes des couples ne sont pas orthogonaux, alors on va utiliser les paramètres de Denavit-Hartenberg définis dans la section 7.3 du chapitre 7.

Les générateurs des rotations  $\mathbf{R}_i$  par rapport à la base  $B$ , sont définis par :

$$\xi_i = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$$

alors on a :  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(q_i, \xi_i)$ .

de plus :

$$U_i = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t$$

Les matrices de passages  $P_i$  sont définies par :

$$P_i = R(\alpha_i, a_i, U_i) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 & -a_i \sin \alpha_i & a_i \cos \alpha_i & 0 \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 & -a_i \cos \alpha_i & -a_i \sin \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, les vecteurs  $\mu_i(q)$  peuvent être obtenus dans  $B_1$  par :

$$\begin{aligned} \mu_1(q) &= R_1 \xi_1 \\ \mu_2(q) &= R_1 P_1 R_2 \xi_2 \\ \mu_3(q) &= R_1 P_1 R_2 P_2 R_3 \xi_3 \\ \mu_4(q) &= R_1 P_1 R_2 P_2 R_3 P_3 R_4 \xi_4 \end{aligned}$$

### Degré de liberté

Dans le cas régulier, le mécanisme est caractérisé par les quatre vecteurs de déplacements :

$$\mu_1(q) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2(q) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \\ \sin q_1 \\ \cos q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_3(q) \simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a (\cos q_1 \sin q_2 - \sqrt{2} \sin q_1 \cos q_2 - \sin q_1) \\ -\frac{1}{2}a (\sin q_1 \sin q_2 + \sqrt{2} \cos q_2 \cos q_1 + \cos q_1) \\ -\frac{1}{2}a (\cos q_2 + \sqrt{2}) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos q_1 \sin q_2 + \sin q_1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sin q_1 \sin q_2 + \cos q_1) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos q_2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\mu_4(q)$  peut être représenté par :

$$\mu_4(q) \simeq \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} (\cos q_1 \cdot \sin q_2 \sqrt{2} + \sin q_1 \sqrt{2} - 2 \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 + \cos q_3 \cos q_1 \sin q_2 + \cos q_3 \sin q_1 \\ + \cos q_3 \sin q_1 \cos q_2 \sqrt{2}), \\ \frac{a}{2} (\sin q_1 \sin q_2 \sqrt{2} - \cos q_1 \sqrt{2} + 2 \sin q_3 \cos q_1 \sin q_2 + \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 - \cos q_1 \cos q_1 \\ - \cos q_3 \cos q_1 \cos q_2 \sqrt{2}) \\ \frac{a}{2} (\sqrt{2} \cos q_2 + \cos q_2 \cos q_3 + \sqrt{2} \cos q_3) \\ \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos q_3 \cos q_1 \sin q_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin q_1 \cos q_3 \\ - \sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos q_3 \sin q_1 \sin q_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos q_3 \cos q_1 \\ \sin q_2 \sin q_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos q_2 \cos q_3 \end{pmatrix}$$

Lorsque  $q_1, q_2, q_3$  et  $q_4$  sont quelconques

$$\text{rang}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4] = 4$$

on n'est pas dans une configuration réelle, alors, il ne possède pas de degré de liberté aux points réguliers.

### Analyse des configurations singulières

Lorsqu'on considère une configuration réelle de mécanisme de Bennett, le rang de la matrice jacobienne est inférieur à 4, on appelle configuration singulière d'après la définition 2.9, alors ce mécanisme ne fonctionne que sur l'ensemble des configurations singulières, c'est-à-dire :  $M = M^s$ . Nous allons étudier la configuration :  $q^s = [\pi, 0, \pi, 0]$ , on a :

$$\mu_1^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_3^s = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}a}{2} \\ -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2}a}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \mu_4^s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(\mu^s) = [\mu_1^s, \mu_2^s, \mu_3^s, \mu_4^s] = 3$$

Les vecteurs :  $\mu_1^s, \mu_2^s, \mu_3^s$  forment une base de  $\mathfrak{F}_q$ , alors le noyau de  $f'(q^s)$  est défini par :

$$\mathbb{R}_{q^s} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \text{ vérifie les conditions suivantes}\}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - \sqrt{2})x_4 \\ x_2 &= -x_4 \\ x_3 &= -(1 - \sqrt{2})x_4 \end{aligned}$$

Avec la même procédure que dans les exemples précédents, on obtient :

$$B_q(x, x) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

ce qui est toujours dans  $\mathfrak{F}_{q^s}$ .

La sous-algèbre  $\mathfrak{S}_a$  engendrée par  $\mathfrak{F}_q$  est de dimension  $s = 6$ . Il est évident qu'on peut caractériser le sous-espace  $\mathfrak{S}_q$  par une base :  $\nu_\rho = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ , avec :

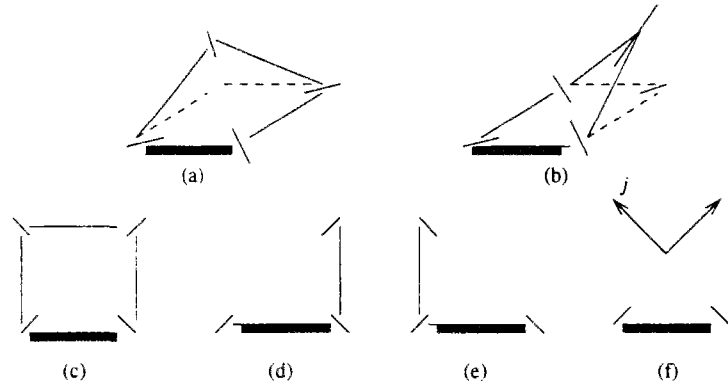
$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1 + \sqrt{2}}{2}a \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors  $\{\mu_1^s, \mu_2^s, \mu_3^s, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$  forment une base de la sous algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_a$ .

D'après la proposition 3.5, La condition de transversalité peut être examinée en calculant la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alors on a :  $\text{rang} \mathbf{A} = 1$ , ce qui est différent de  $(m - r)(s - 6) = 3$ . La condition de transversalité n'est pas satisfaite mais  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^4$ , puisqu'il est connu que le mécanisme de Bennett a un degré de liberté [Ogi68]. En effet, la condition de transversalité est une condition suffisante mais non nécessaire.



Les figures (a) et (b) représentent les configurations régulières de la salière. Les figures (c), (d), (e) et (f) représentent les quatre configurations singulières de la salière.

FIG. 3.7 - La salière

### 3.4.4 La salière de Papegay

C'est un exemple tiré de la thèse de Papegay. C'est un cas particulier de mécanisme sphérique, il est constitué par quatre tiges de même longueur reliées entre elles par des liaisons rotoïdes et les axes sont orientés comme décrit sur la figure 3.7

Puisque les quatre axes passent par le même point, de plus les axes sont orientés de façon parallèles au repère orthonormé, alors les matrices de passages sont des matrices unités de dimension 6, les vecteur  $\xi_i$  dans  $B_i$  sont définis par :

$$\xi_1 = \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \xi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les rotations sont définies par la formule d'Olinde-Rodrigues généralisée.

#### Degré de liberté

Les quatre vecteurs sont déterminés par :

$$\begin{aligned} \mu_1(q) &= \xi_1 \\ \mu_2(q) &= R_1 \xi_2 \\ \mu_3(q) &= R_1 R_2 \xi_3 \\ \mu_4(q) &= R_1 R_2 R_3 \xi_4 \end{aligned}$$

$R_i$  sont des rotations autour de  $\xi_i$ . Les vecteurs sont définis par :

$$\mu_1(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos q_1 \\ -\sin q_1 \end{pmatrix}, \quad \mu_3(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos q_2 \\ \sin q_1 \sin q_2 \\ \cos q_1 \cos q_2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_4(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin q_2 \sin q_3 \\ \cos q_1 \cos q_3 - \sin q_1 \cos q_2 \sin q_3 \\ -\sin q_1 \cos q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\text{rang}(\mu(q)) = 3$$

Alors le mécanisme est complètement déterminé par les quatre vecteurs aux configurations régulières, dans lesquelles  $\mathfrak{F}_q = \mathfrak{S}_a$  qui est une sous-algèbre de Lie, le mécanisme possède un degré de liberté.

Le noyau de  $\mathbb{R}_q$  est définis par :

$$\mathbb{R}_q = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = \frac{\sin q_3}{\sin q_2} x_4, -\cos q_3 x_4, x_3 = \frac{\cos q_2 \sin q_3}{\sin q_2} x_4\}$$

### Analyse des configurations singulières

A partir de ces vecteurs  $\mu(q)$ , on a déterminé l'ensemble des points singuliers  $M^s$  de la salière (voir la figure 3.7 :

$$M^s = \{q_1^s = (0, 0, 0, 0), q_2^s = (\pm\pi, 0, \pm\pi, 0), q_3^s = (0, \pm\pi, 0, \pm\pi), q_{4,5}^s = (\pm\pi, \pm\pi, \pm\pi, \pm\pi)\}$$

En ces points  $M^s$   $\text{rang}(\mu^s) = (\mu_1^s, \mu_2^s, \mu_3^s, \mu_4^s) = 2$ , la dérivée d'ordre 2  $B_q(x, x)$  n'est pas dans  $\mathbb{F}_q^s$ , de plus la condition de transversalité n'est pas vérifiée.

On peut conclure que  $M$  n'est pas une sous variété de  $\mathbb{R}^4$  en ces points  $M^s$ , on ne peut pas parler de degré de liberté.

On va étudier le point  $q_1^s = [0, 0, 0, 0]$ . Soit  $\mu_\alpha = \{\mu_1^s, \mu_2^s\}$  une base de  $\mathfrak{F}_q$ , avec :

$$\mu_1^s = \mu_3^s = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t, \quad \mu_2^s = \mu_4^s = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^t$$

La sous algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_a$  engendrée par  $\mathfrak{F}_q$  est de dimension 3, alors le supplémentaire  $\mathfrak{G}_q$  de  $\mathfrak{F}_q$  dans  $\mathfrak{S}_a$  est de dimension 1 caractérisé par une base :  $\nu_\rho = \{\nu_1\}$ , avec :

$$\nu_1 = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$$

Considérons la dérivée d'ordre 2  $B_q(x, x)$ , elle est exprimée dans la base de  $\{\mu_\alpha, \nu_\rho\}$  sous la forme suivante :

$$B_q(x, x) = 2 x_3 x_4 \nu_1$$

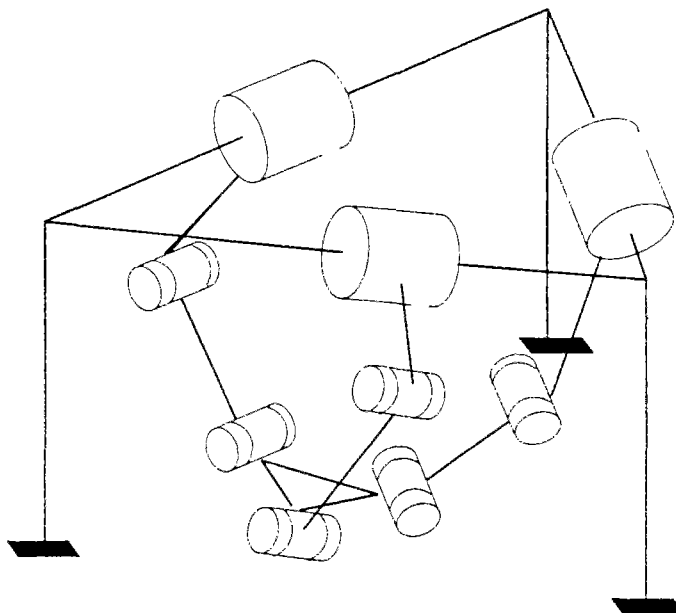
alors  $B_q(x, x) \in \mathfrak{G}_q$  mais,  $B_q(x, x) \notin \mathfrak{F}_q$ . Pour que  $B_q(x, x) \in \mathfrak{F}_q$ , il faut et suffit :  $x_3 = 0$ , ou  $x_4 = 0$ . C'est le même type de singularité que les mécanismes quatre-barres plans.

Pour examiner la condition de transversalité, la matrice  $\mathbf{A}$  se présente sous forme suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang} \mathbf{A} = 2$$



FIG. 3.8 - *Mécanisme parallèle*

ce qui est différent de  $(m - 2)(r - 2) = 2$ , alors la condition de transversalité n'est pas vérifiée. Puisque le mécanisme ne peut pas être réduit à un point, le rang minimal de l'ensemble des vecteurs  $\mu$  est de 2, alors :  $M = \Sigma^1(f) \cup \Sigma^2(f)$ , tel que  $\Sigma^2(f) = M^s = \{q \in M \mid \text{rang}(\mu(q)) = 2\}$ .

L'analyse d'autres points singuliers est analogue.

### 3.4.5 Mécanisme parallèle

C'est un robot avec trois branches dont chacun a un couple cylindrique et deux couples rotoïdes et dont la configuration initiale des positions de couple est décrite comme sur le dessin 3.8. Pour analyser les propriétés cinématiques du robot, il suffit de prendre une des trois boucles car les trois branches sont symétriques par rapport à l'axe central.

En effet, si l'on étudie une seule boucle, il s'agit  $m = 8$  paramètres articulaires, c'est-à-dire, on prends deux branches du mécanisme.

#### Degré de liberté

Dans les configurations régulières, le degré de liberté du mécanisme est déterminé par l'ensemble des vecteurs  $\mu(q) = \{\mu_1(q), \mu_2(q), \dots, \mu_8(q)\}$ . L'espace engendré  $\mathfrak{F}_q$  est de dimension 5. On prend  $\mu_\alpha(q) = \{\mu_1(q), \mu_2(q), \mu_3(q), \mu_4(q), \mu_5(q)\}$  comme base de  $\mathfrak{F}_q$ . Après avoir calculé, on sait qu'aux points réguliers :

$$\text{rang}(\mu(q)) = 5$$

Le noyau  $\mathbb{E}_q$  de  $f'(q)$  est de dimension 3,

$$\mathbb{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid f'(q) \cdot x = 0\}$$

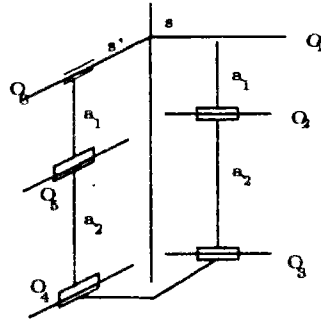
de plus  $T_q M = \mathbb{R}_q$ . Alors le degré de liberté de ce mécanisme est  $m - 5 = 3$ .

### Analyse des configurations singulières

On étudie le point singulier  $q^s = [0, 0, 0, \pi, 0, 0, 0, \pi]$ , puisque le rang( $\mu^s(q^s)$ ) = 4. On a :

$$\mu_1^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_3^s = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_4^s = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 + a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_5^s = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}s_1 \\ \frac{a_1 + a_2}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 + a_2) \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mu_6^s = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}s_1 \\ \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 + a_2 - a_3) \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_7^s = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_8^s = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}s_1 \\ \frac{a_1 + a_2 - a_3 - a_4}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 + a_2 - a_3 - a_4) \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



Les vecteurs  $\mu_1^s, \mu_2^s, \mu_3^s, \mu_5^s$  forment une base  $\mu_\alpha$  de  $\mathfrak{F}_q$ . La sous algèbre engendrée est de dimension 6, on caractérise le sous espace  $\mathfrak{G}_q^s$  par une base  $\nu_\rho = \{\nu_1, \nu_2\}$ , avec :

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} -a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a_1 + a_2}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}s_1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le noyau de  $f'(q^s)$  est défini par :

$$\mathbb{R}_q = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid x \text{ vérifient les conditions suivantes}\}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{-2a_2x_4 - a_3x_6 + \sqrt{3}x_7 - x_8a_4 - x_8a_3}{2a_1} \\
x_2 &= -\frac{\sqrt{3}a_3x_6}{2} - \frac{x_7}{2} - \frac{x_8\sqrt{3}a_4}{2} - \frac{x_8\sqrt{3}a_3}{2} \\
x_3 &= \frac{-2a_2x_4 - 2x_4a_1 - a_3x_6 + \sqrt{3}x_7 - x_8a_4 - x_8a_3}{2a_1} \\
x_5 &= -x_6 - x_8
\end{aligned}$$

On exprime  $B_q(x, x)$  dans la base  $\{\mu_\alpha, \nu_\rho\}$ , on obtient :

$$B_q(x, x) = B_5\nu_1$$

avec:

$$B_5 = \frac{\begin{bmatrix} -8a_3x_6x_8a_1 - 4a_3x_6^2a_1 - 4x_8^2a_4a_1 - 4x_8^2a_3a_1 - 4a_2x_4a_3x_6 + 4a_2x_4\sqrt{3}x_7 - 4a_2x_4x_8a_4 \\ -4a_2x_4x_8a_3 + 2a_3x_6\sqrt{3}x_7 - 2a_3x_6x_8a_4 + 2\sqrt{3}x_7x_8 + a_42\sqrt{3}x_7x_8a_3 - 2x_8^2a_4a_3 \\ -4a_2x_4^2a_1 - 2a_3^2x_6x_8 - 4a_2^2x_4^2 - a_3^2x_6^2 - 3x_7^2 - x_8^2a_4^2 - x_8^2a_3^2 \end{bmatrix}}{4 * a_1^2}$$

Alors, la dérivée d'ordre 2  $B_q(x, x)$  n'est pas dans  $\mathfrak{F}_q^s$ . Pour analyser le type de singularité, il faut impliquer  $B_q(x, x) \in \mathfrak{F}_q^s$ , c'est-à-dire  $B_5 = 0$ , ce qui est équivalent de dire que :

$$r x_1^2 + s x_4^2 - s' x_5^2 - r' x_7^2 = 0$$

$r, s, s', a',$  sont des coefficients connus. C'est un cône en 4 dimensions.  $M$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{P}^8$ , le mécanisme ne possède pas de degré de liberté dans cette configuration singulière. La condition de transversalité sera examinée par la matrice  $\mathbf{A}$ , d'après la proposition 3.5, on a :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{2a_1} & -\frac{\sqrt{3}}{2a_1} & \frac{a_3 + a_4}{2a_1} & 0 & \frac{a_3}{2a_1} & \frac{\sqrt{3}}{2a_1} & \frac{a_3 + a_4}{2a_1} \\ 0 & \frac{a_3}{a_1} & 0 & \frac{a_3 + a_4}{a_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{a_4}{a_1} \end{bmatrix}$$

alors,  $\mathbf{A}$  est de rang 2, ce qui est différent de  $(m-4)(s-4) = 8$  : la condition de transversalité n'est pas satisfaite.

### 3.5 Conclusion

Le travail précédent nous permet de conclure :

Dans ces exemples, on a rencontré deux types de singularités : les quatre-barres et la salière sont associés à 3.9.(a), et le point '0' du mécanisme parallèle d'Hervé est associé à 3.9.(b).

1. Si la condition de transversalité est vérifiée, le sous espace  $\sum^{m-r}(f)$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^m$ . (mécanisme de Bricard). Si  $\sum^{m-r}(f) = \{\emptyset\}$ , pour  $r' \neq r$ , le mécanisme possède un certain degré de liberté.
2. Si la dérivée d'ordre 2 (la forme bilinéaire)  $B_q(x, x)$  n'est pas dans  $\mathfrak{F}_q$ ,  $M$  n'est pas une sous-variété (la salière, les quatre barres parallèles), on ne donc peut pas parler de degré de liberté.

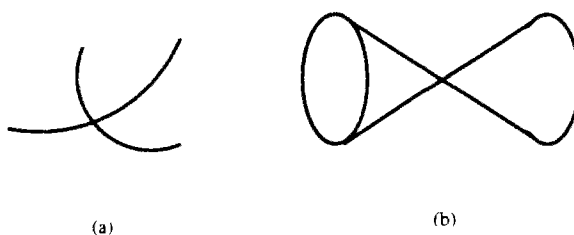


FIG. 3.9 - les types de singularités rencontrés

3. Les mécanismes pratiques ne sont pas aussi simples que les cas 1 et 2, il existe des configurations singulières pour un certain mécanismes dont la dérivée d'ordre 2  $B_q(x, x) \in \mathfrak{F}_q$  et la condition de transversalité ne sont pas satisfaites, pourtant le sous ensemble  $M$  est quand même une sous variété de  $\mathbb{R}^m$  (l'exemple de Bennett) mais, avec les théories précédentes, on ne peut pas expliquer. Donc la condition de transversalité est suffisante mais non nécessaire pour que  $\sum^{m-r}(f)$  soit une sous variété de  $\mathbb{R}^m$ .

Pour les mécanismes plans, la dérivée d'ordre 2  $B_q(x, x)$  étant dans  $\mathfrak{F}_q$  est une condition nécessaire et on a prouvé qu'elle est aussi suffisante pour que  $M$  soit une sous variété de  $\mathbb{R}^m$  au point  $q$ . Mais pour les mécanismes spatiaux par exemple le mécanisme de Bennett et de Bricard dans les configurations singulières,  $B_q(x, x)$  est dans  $\mathfrak{F}_q$ , mais on ne peut pas conclure directement que  $M$  est une sous-variété sans aucune analyse.



## Chapitre 4

# Étude du rang d'ensemble de champs antisymétriques sur $\Delta$

En effet, le problème des singularités des mécanismes dépend de la variation du rang de la matrice jacobienne, c'est-à-dire des relations de dépendances entre les générateurs (champs antisymétriques) des déplacements.

Le problème du rang d'un ensemble de champs antisymétriques est un problème difficile, la méthode classique fondée sur les déterminants n'est pas toujours très pratique surtout dans les cas singuliers.

Nous proposons un algorithme pour obtenir les conditions de rang d'un ensemble de champs antisymétriques  $\mathcal{X}$  constitué par  $m$  champs antisymétriques, le principe de l'algorithme est de transformer le problème du rang d'un ensemble de champs antisymétriques en un problème de rang en dimension 3 par rapport aux nombres duaux, ce dernier est très facile à résoudre par la méthode classique fondée sur les déterminants.

Par exemple, l'ensemble  $\mathcal{X}$  contient une liste libre maximale (voir la définition plus bas)  $\{X_1, X_2\}$  composée de 2 éléments.  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$  forment une base de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ . Les éléments  $X_k$  de  $\mathcal{X}$ , pour  $k > 2$ , peuvent être exprimés par une combinaison linéaire duale de cette base, c'est-à-dire :  $X_k = z_k^1 X_1 + z_k^2 X_2 + z_k^{12} [X_1, X_2]$ . Avec :

$$z_k^1 = z_k^1 + \epsilon z_k^{1\circ}, \quad z_k^2 = z_k^2 + \epsilon z_k^{2\circ}, \quad z_k^{12} = z_k^{12} + \epsilon z_k^{12\circ},$$

dont  $z_k^1$ ,  $z_k^2$  et  $z_k^{12}$  sont les parties réelles des coordonnées et dont  $z_k^{1\circ}$ ,  $z_k^{2\circ}$  et  $z_k^{12\circ}$  sont les parties duales des coordonnées. On peut donc évaluer le rang de l'ensemble  $\mathcal{X}$  par la formule suivante :

$$\text{rang } \mathcal{X} = 2 + \text{rang } \mathfrak{J}^{\circ}$$

où  $\mathfrak{J}^{\circ}$  est la matrice constituée par les parties duales des coordonnées  $z_i^{1\circ}$ ,  $z_i^{2\circ}$  et  $z_i^{12\circ}$  par rapport à la base  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$ . Cette formule est démontrée dans le théorème 4.2.

D'autre part, on a étudié également les sous espaces engendrés par l'ensemble  $\mathcal{X}$  en utilisant les crochets de Lie du  $i$ -ème ordre, on obtient que le sous espace engendré par les crochets de Lie du 4-ème ordre est toujours une sous algèbre de Lie.

## 4.1 Introduction

Si  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  de  $\mathfrak{D}$  engendre tous les éléments de  $\mathfrak{D}$ , et si de plus ils sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , alors  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  est appelé une base de  $\mathfrak{D}$  [Che95]. Nous dirons aussi que les éléments  $\xi, \eta, \zeta$  constituent ou forment une base de  $\mathfrak{D}$ . Le théorème qui suit nous donne un critère utile pour déterminer si un ensemble  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  de  $\mathfrak{D}$  est une base de  $\mathfrak{D}$ .

### 4.1.1 Définition d'une base de $\mathfrak{D}$ sur $\Delta$

#### Proposition 4.1

(i) Soit  $\xi \in \mathfrak{D}$ , pour que  $\{\xi\}$  soit linéairement indépendant sur  $\Delta$  il faut et il suffit que :  $\xi \notin \mathcal{C}$ .

(ii) Soient  $\xi$  et  $\eta \in \mathfrak{D}$ , pour que  $\{\xi, \eta\}$  soit linéairement indépendant sur  $\Delta$  il faut et il suffit que :  $[\xi, \eta] \notin \mathcal{C}$ .

(iii) Soient  $\xi, \eta$  et  $\zeta \in \mathfrak{D}$ , pour que  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  soit linéairement indépendant sur  $\Delta$  il faut et il suffit que :

$$(\xi|[\eta, \zeta]) \neq 0 \quad (4.1)$$

$\{\xi, \eta, \zeta\}$  est alors une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$  et les coordonnées duales de  $X \in \mathfrak{D}$  définies par :

$$X = z^1 \xi + z^2 \eta + z^3 \zeta \quad (4.2)$$

s'expriment par :

$$z^1 = \frac{\{X|[\eta, \zeta]\}}{\{\xi|[\eta, \zeta]\}} \quad z^2 = \frac{\{X|[\zeta, \xi]\}}{\{\xi|[\eta, \zeta]\}} \quad z^3 = \frac{\{X|[\xi, \eta]\}}{\{\xi|[\eta, \zeta]\}} \quad (4.3)$$

**Démonstration :** (i) Considérons :  $\lambda \xi = 0$ , avec  $\lambda = \lambda + \epsilon \lambda^\circ \in \Delta$ , si  $\xi$  est linéairement indépendant sur  $\Delta$ , supposons  $\xi \in \mathcal{C} \Rightarrow \epsilon \xi = 0$ , il faut donc  $\xi \notin \mathcal{C}$ .

Si  $\xi \notin \mathcal{C}$ ,  $\lambda \epsilon \xi = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ , d'autre part  $\lambda^\circ \epsilon \xi = 0 \Rightarrow \lambda^\circ = 0$ ,  $\xi$  est alors linéairement indépendant sur  $\Delta$ .

(ii) Considérons  $\lambda \xi + \mu \eta = 0$ ,  $\lambda = \lambda + \epsilon \lambda^\circ$ ,  $\mu = \mu + \epsilon \mu^\circ \in \Delta$ . Supposons que  $\{\xi, \eta\}$  est linéairement indépendant sur  $\Delta$ . Si  $[\xi, \eta] \in \mathcal{C}$ ,  $\omega_\xi \wedge \omega_\eta = 0$ ,  $\Omega \xi, \Omega \eta$  sont donc linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\lambda \Omega \xi + \mu \Omega \eta = 0$ , avec  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ . D'autre part, on a  $\epsilon \lambda^\circ \xi + \epsilon \mu^\circ \eta = 0$ , avec  $(\lambda^\circ, \mu^\circ) \neq (0, 0)$ . Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Supposons  $[\xi, \eta] \notin \mathcal{C}$ ,  $\omega_\xi \wedge \omega_\eta \neq 0$ ,  $\Omega \xi, \Omega \eta$  sont donc linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ , pour que  $\lambda \Omega \xi + \mu \Omega \eta = 0$ , il suffit que  $\lambda = \mu = 0$ . D'autre part, pour  $\lambda^\circ \epsilon \xi + \mu^\circ \epsilon \eta = 0$ , il suffit que  $\lambda^\circ = \mu^\circ = 0$ .  $\xi$  et  $\eta$  sont donc linéairement indépendants sur  $\Delta$ .

(iii)

(1)  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta \implies (\xi|[\eta, \zeta]) \neq 0$ .

Supposons que  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  soit une base sur  $\Delta$ , alors  $\xi, \eta, \zeta$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , d'après (ii),  $[\xi, \eta] \notin \mathcal{C}$ ,  $[\eta, \zeta] \notin \mathcal{C}$  et  $[\zeta, \xi] \notin \mathcal{C}$ .

Multiplications l'équation 4.2 par  $[\eta, \zeta]$  :

$$\{X|[\eta, \zeta]\} = z^1 \{\xi|[\eta, \zeta]\}$$

$$(X|[\eta, \zeta]) + \epsilon[X|[\eta, \zeta]] = z^1(\xi|[\eta, \zeta]) + \epsilon(z^1[\xi|[\eta, \zeta]] + z^{1\circ}(\xi|[\eta, \zeta]))$$

Comme  $[\eta, \zeta] \notin \mathcal{C}$ , il existe toujours des  $X \in \mathfrak{D}$  tel que :

$$(X|[\eta, \zeta]) \neq 0$$

il est donc nécessaire que :

$$(\xi|[\eta, \zeta]) \neq 0.$$

Le nombre dual  $\{\xi|[\eta, \zeta]\}$  est alors inversible. Les coordonnées  $\hat{z}^1$ ,  $\hat{z}^2$  et  $\hat{z}^3$  définies dans la proposition peuvent être obtenues en multipliant l'équation 4.2 par  $[\eta, \zeta]$ ,  $[\zeta, \xi]$  et  $[\xi, \eta]$  respectivement. Les parties réelles des coefficients sont définies par :

$$z^1 = \frac{(X|[\eta, \zeta])}{(\xi|[\eta, \zeta])} \quad z^2 = \frac{(X|[\zeta, \xi])}{(\xi|[\eta, \zeta])} \quad z^3 = \frac{(X|[\xi, \eta])}{(\xi|[\eta, \zeta])} \quad (4.4)$$

Les parties duales des coefficients sont définies par :

$$\begin{aligned} z^{1\circ} &= \frac{(\xi|[\eta, \zeta]) (X|[\eta, \zeta]) - (X|[\eta, \zeta]) (\xi|[\eta, \zeta])}{(\xi|[\eta, \zeta])^2} \\ z^{2\circ} &= \frac{(\xi|[\eta, \zeta]) (X|[\zeta, \xi]) - (X|[\zeta, \xi]) (\xi|[\eta, \zeta])}{(X|[\eta, \zeta])^2} \\ z^{3\circ} &= \frac{(\xi|[\eta, \zeta]) (X|[\xi, \eta]) - (X|[\xi, \eta]) (\xi|[\eta, \zeta])}{(\xi|[\eta, \zeta])^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

(2)  $(\xi|[\eta, \zeta]) \neq 0 \implies \{\xi, \eta, \zeta\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ .

Nous prenons la relation :

$$(*) \quad \hat{\lambda}\xi + \hat{\mu}\eta + \hat{\nu}\zeta = 0 \quad \text{pour } \hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu} \in \Delta$$

Multiplions l'équation précédente par  $[\eta, \zeta]$ , on obtient :

$$\hat{\lambda}\{\xi|[\eta, \zeta]\} = 0$$

$$\lambda(\xi|[\eta, \zeta]) + \epsilon(\lambda[\xi|[\eta, \zeta]] + \lambda^\circ(\xi|[\eta, \zeta])) = 0$$

puisque  $(\xi|[\eta, \zeta]) \neq 0$ , pour que l'équation précédente soit vérifiée, il faut et il suffit :

$$\lambda = \lambda^\circ = 0$$

De la même façon, si l'on multiplie (\*) par  $[\zeta, \xi]$  et  $[\xi, \eta]$  respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu &= \mu^\circ = 0 \\ \nu &= \nu^\circ = 0 \end{aligned}$$

Donc,  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  est linéairement indépendant sur  $\Delta$ , d'après (1). pour  $X \in \mathfrak{D}$ ,  $\{\xi, \eta, \zeta, X\}$  est linéairement dépendant sur  $\Delta$ , alors  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  forme une liste libre maximale de  $\mathfrak{D}$  par laquelle tout les éléments de  $\mathfrak{D}$  peuvent être engendrés, il est clair que  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , si  $(\xi|[\eta, \zeta]) \neq 0$ . ■

Alors un champs antisymétrique  $X$  de  $\mathfrak{D}$  est écrit comme une combinaison linéaire duale des éléments de la base, alors nous appelons  $(\hat{z}^1, \hat{z}^2, \hat{z}^3)$  les coordonnées de  $X$  par rapport à cette base, et nous appelons  $\hat{z}^\alpha$  la  $\alpha^{eme}$  coordonnée; de plus  $z = (z^1, z^2, z^3)$  est la partie réelle des coordonnées, et  $z^\circ = (z^{1\circ}, z^{2\circ}, z^{3\circ})$  est la partie duale des coordonnées.



### 4.1.2 Changement de base sur $\Delta$

Nous supposons que  $\xi', \eta', \zeta' \in \mathfrak{D}$ , alors on a :

$$\begin{cases} \xi' = z^{11}\xi + z^{12}\eta + z^{13}\zeta \\ \eta' = z^{21}\xi + z^{22}\eta + z^{23}\zeta \\ \zeta' = z^{31}\xi + z^{32}\eta + z^{33}\zeta \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \hat{\mathfrak{z}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

avec :

$$\hat{\mathfrak{z}} = \begin{pmatrix} z^{11} & z^{12} & z^{13} \\ z^{21} & z^{22} & z^{23} \\ z^{31} & z^{32} & z^{33} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$\hat{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} + \epsilon\mathfrak{z}^\circ$ ,  $\mathfrak{z}$  représente la matrice réelle constituée des parties réelles des coordonnées; et  $\mathfrak{z}^\circ$  représente la matrice duale constituée des parties duales des coordonnées :

$$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z^{11} & z^{12} & z^{13} \\ z^{21} & z^{22} & z^{23} \\ z^{31} & z^{32} & z^{33} \end{pmatrix} \quad \mathfrak{z}^\circ = \begin{pmatrix} z^{11\circ} & z^{12\circ} & z^{13\circ} \\ z^{21\circ} & z^{22\circ} & z^{23\circ} \\ z^{31\circ} & z^{32\circ} & z^{33\circ} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

**Proposition 4.2** Pour que  $\{\xi', \eta', \zeta'\}$  soit une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , il faut et il suffit que la matrice  $\mathfrak{z}$  soit inversible.

**Démonstration :** Pour que  $\{\xi', \eta', \zeta'\}$  soit une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , d'après la proposition 4.1.(iii), il faut et il suffit :

$$(\xi'|[\eta', \zeta']) \neq 0$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} (\xi'|[\eta', \zeta']) &= \{ (z^{11}\xi + z^{12}\eta + z^{13}\zeta) | [(z^{21}\xi + z^{22}\eta + z^{23}\zeta), (z^{31}\xi + z^{32}\eta + z^{33}\zeta)] \} \\ &= (z^{11}z^{22}z^{33} + z^{12}z^{23}z^{31} + z^{21}z^{32}z^{13} - z^{13}z^{22}z^{31} - z^{12}z^{21}z^{33} - z^{23}z^{32}z^{11}) \{ \xi | [\eta, \zeta] \} \end{aligned}$$

et il est clair que :

$$(\xi'|[\eta', \zeta']) = (\det \mathfrak{z})(\xi | [\eta, \zeta])$$

Puisque  $(\xi | [\eta, \zeta]) \neq 0$ ,  $\det \mathfrak{z} \neq 0$  est donc une condition nécessaire et suffisante pour que  $\{\xi', \eta', \zeta'\}$  soit une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ . ■

Soient  $B_\Delta = \{\xi, \eta, \zeta\}$ ,  $B'_\Delta = \{\xi', \eta', \zeta'\}$  deux bases de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , de plus  $B'_\Delta = \mathfrak{z}B_\Delta$ , alors :

$$B_\Delta = \hat{\mathfrak{z}}^{-1} B'_\Delta$$

On peut calculer  $\hat{\mathfrak{z}}^{-1}$  par la procédure suivante.

Puisque :

$$\hat{\mathfrak{z}}^{-1} \hat{\mathfrak{z}} = \mathbf{1}$$

on a

$$(\hat{\mathfrak{z}})^{-1} = \mathfrak{z}^{-1} - \epsilon(\mathfrak{z}^{-1}\mathfrak{z}^\circ\mathfrak{z}^{-1}) \quad (4.10)$$

Exemple

Dans la démonstration de la proposition 4.1, on exprime  $X \in \mathfrak{D}$  par la base  $B_\Delta = \{\xi, \eta, \zeta\}$ , alors :

$$X = (\hat{a}^1, \hat{a}^2, \hat{a}^3) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

On peut obtenir les coordonnées de  $X$  par rapport à la base  $B'_\Delta$  en remplaçant  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  par ses coordonnées dans  $B'_\Delta$ , on a :

$$X = (\hat{a}^1, \hat{a}^2, \hat{a}^3)(\hat{\mathfrak{J}})^{-1} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

## 4.2 Problème du rang d'un ensemble de champs antisymétriques

Le principe de calcul est le suivant : on prend un ensemble  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$  de champs antisymétriques qui est un sous-ensemble de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ , on peut donc trouver des sous-ensemble de  $\mathcal{X}$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  dont le nombre d'éléments  $r$  est égal au rang de  $\mathcal{X}$ . Une telle liste est alors une base de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{R}$ , on la note  $L_{\mathbb{R}} = \{X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_r}\}$ .  $\mathcal{X}$  contient une liste libre maximale dont le nombre d'éléments est  $r_\Delta$ , on la note  $L_\Delta = \{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{r_\Delta}}\}$ .

**Définition 4.1** On appelle *liste libre maximale*  $L_\Delta = \{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{r_\Delta}}\}$  d'un ensemble d'éléments de  $\mathfrak{D}$ , une liste  $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  telles que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

- (i)  $\{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{r_\Delta}}\}$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ ;
- (ii)  $\text{rang}(\Omega X_{\alpha_1}, \dots, \Omega X_{\alpha_{r_\Delta}}) = \text{rang}(\Omega X_1, \dots, \Omega X_m)$

On doit préciser que le terme "rang" sous entend toujours le nombre d'éléments linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 4.1** Soit  $\{X_1, \dots, X_r\}$  un ensemble de  $\mathfrak{D}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $\{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{r_\Delta}}\}$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ ;
- (b)  $\{\Omega X_{\alpha_1}, \dots, \Omega X_{\alpha_{r_\Delta}}\}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration :**

(a)  $\implies$  (b)

Il faut prouver que si (a), on a :

$$\hat{\ell}_1 X_1 + \dots + \hat{\ell}_r X_r = 0 \quad \text{pour } \hat{\ell}_\alpha \in \Delta$$

La partie duale nous donne :

$$\ell_1^\circ \Omega X_1 + \dots + \ell_r^\circ \Omega X_r = 0 \quad \text{pour } \ell_\alpha^\circ \in \mathbb{R}$$

D'après (a), on a  $\ell_1 = \dots = \ell_r = 0$ ,  $\ell_1^\circ = \dots = \ell_r^\circ = 0$ , il est clair que  $\{\Omega X_1, \dots, \Omega X_r\}$  est linéairement indépendant sur  $\mathbb{R}$ .

(b)  $\implies$  (a)

Si

$$(**) \quad (\ell_1 + \epsilon \ell_1^\circ) X_1 + \dots + (\ell_r + \epsilon \ell_r^\circ) X_r = 0$$

multiplions par  $\epsilon$ , on a :

$$\epsilon \ell_1 X_1 + \cdots + \epsilon \ell_r X_r = 0$$

D'après (b) :

$$\ell_1 = \cdots = \ell_r = 0$$

(\*\*) s'écrite :

$$\ell_1^\circ \Omega X_1 + \cdots + \ell_r^\circ \Omega X_r = 0$$

alors

$$\ell_1^\circ \cdots = \ell_r^\circ = 0$$

d'où (a). ■

**Proposition 4.3** Soient  $\{V_1, \dots, V_p\}$ , et  $\{X_1, \dots, X_q\}$  deux listes libres maximales de l'ensemble  $\mathcal{X}$  composés de  $p$  et  $q$  éléments respectivement, alors  $p = q$ .

Nous obtenons alors que toutes les listes libres maximales d'un ensemble de champs antisymétriques ont le même nombre d'éléments.

**Démonstration :** D'après la définition, on sait qu'une liste libre maximale  $\{V_1, \dots, V_p\}$  formée par des éléments linéairement indépendants sur  $\Delta$ , alors le rang d'une liste libre maximale est égal à son nombre d'éléments. D'après le théorème 4.1 et la définition 4.1 :

$$p = \text{rang}(\Omega V_1, \dots, \Omega V_p) = \text{rang}(\Omega X_1, \dots, \Omega X_q) = q$$
■

Pour simplifier les notations, d'après la définition 4.1, on peut supposer qu'une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$  est constituée des  $r_\Delta$  premiers éléments de  $\mathcal{X}$  :  $L_\Delta = \{X_1, \dots, X_{r_\Delta}\} = \{X_\alpha\}$ , avec  $\alpha = 1, \dots, r_\Delta$ . On peut aussi supposer que les  $r$  premiers éléments forment une base de l'espace engendré par  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $L_{\mathbb{R}} = \{X_1, \dots, X_r\} = \{X_\beta\}$ , pour  $\beta = 1, \dots, r$ . Il est clair que  $r_\Delta \leq r$ ; les éléments  $X_\gamma$  sont dans  $L_{\mathbb{R}}$ , mais ils ne sont pas dans  $L_\Delta$  avec  $\gamma = r_\Delta + 1, \dots, r$ . On note les autres éléments de  $\mathcal{X}$  par  $X_i$ , pour  $i = r + 1, \dots, m$ , c'est-à-dire, les champs antisymétriques qui sont dépendants sur  $\mathbb{R}$  et  $\Delta$  par rapport à  $L_{\mathbb{R}}$  et  $L_\Delta$ .

On peut donc toujours choisir les notations telles que :  $L_\Delta \subseteq L_{\mathbb{R}}$ .

Afin de réaliser les calculs, on fabrique une base  $B_\Delta$  de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$  à partir d'une liste libre maximale  $L_\Delta$  de  $\mathcal{X}$ .

Alors, la base  $B_\Delta$  est constituée des  $r_\Delta$  éléments de  $\mathcal{X}$  et des  $r_\Delta^-$  éléments qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{X}$ ,  $r_\Delta$  et  $r_\Delta^-$  vérifient la relation  $r_\Delta + r_\Delta^- = 3$ . En effet, tous les cas particuliers sont les suivants :

- $r_\Delta = 3$ .  $B_\Delta = L_\Delta = \{X_1, X_2, X_3\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ . De plus,  $X_1, X_2, X_3$  sont éléments de  $\mathcal{X}$ .
- $r_\Delta = 2$ , on prend  $B_\Delta = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$  comme une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , avec  $Y_1 = X_1$ ,  $Y_2 = X_2$ ,  $Y_3 \notin \mathcal{X}$ .

- $r_\Delta = 1$ , on prend  $B_\Delta = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$  comme une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , avec  $Y_1 = X_1, Y_2, Y_3 \notin \mathcal{X}$ .
- $r_\Delta = 0$ , on étudie  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour chaque cas particulier, on a donc :

$$Y_\alpha = X_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha = 1, \dots, r_\Delta$$

**Corollaire 4.1** *Soit  $B_\Delta = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$  une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , pour  $k > r_\Delta$ , on peut exprimer  $X_k$  par :  $X_k = z_k^1 Y_1 + z_k^2 Y_2 + z_k^3 Y_3$ , alors les parties réelles des coordonnées vérifient :*

(i)  $z_k^3 = 0$ , si  $r_\Delta = 2$ .

(ii)  $z_k^2 = z_k^3 = 0$ , si  $r_\Delta = 1$ .

**Démonstration :** Les démonstrations de (i) et (ii) sont analogues, en simplifiant, on ne montre que (i).

Si  $r_\Delta = 2$ ,  $X_1, X_2$  forment une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ . Supposons  $z_k^3 \neq 0$ , on a

$$\Omega X_k = z_k^1 \Omega X_1 + z_k^2 \Omega X_2 + z_k^3 \Omega Y_3 \quad \text{pour} \quad k > r_\Delta$$

alors :

$$\begin{aligned} \text{rang}(\Omega X_1, \Omega X_2, \Omega X_k) &= \text{rang}(\Omega X_1, \Omega X_2, z_k^1 \Omega X_1 + z_k^2 \Omega X_2 + z_k^3 \Omega Y_3) \\ &= \text{rang}(\Omega X_1, \Omega X_2, z_k^3 \Omega Y_3) \\ &> \text{rang}(\Omega X_1, \Omega X_2) = 2 \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que  $\{X_1, X_2\}$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ . Il faut et il suffit :

$$z_k^3 = 0$$

■

Ensuite, on exprime les éléments  $X_k$  de l'ensemble  $\mathcal{X}$  par cette base  $B_\Delta$  sur  $\Delta$  :

$$\begin{cases} X_{r_\Delta+1} = z_{r_\Delta+1}^1 Y_1 + z_{r_\Delta+1}^2 Y_2 + z_{r_\Delta+1}^3 Y_3 \\ \dots \\ X_k = z_k^1 Y_1 + z_k^2 Y_2 + z_k^3 Y_3 \\ \dots \\ X_m = z_m^1 Y_1 + z_m^2 Y_2 + z_m^3 Y_3 \end{cases}$$

pour simplifier, on exprime l'équation précédente par :

$$\mathcal{X} = \mathfrak{J} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$\mathfrak{J}$  est la matrice de dimension  $3 \times (m - r_\Delta)$  constituée des parties duales des coordonnées de  $X_k$  dans la base  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$  :

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} z_{r_\Delta+1}^1 & z_{r_\Delta+1}^2 & z_{r_\Delta+1}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_k^1 & z_k^2 & z_k^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_m^1 & z_m^2 & z_m^3 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Puisqu'elle est composée d'une matrice réelle  $\mathfrak{z}$  et d'une matrice duale  $\mathfrak{z}^o$  définies par :

$$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z_{r_\Delta+1}^1 & z_{r_\Delta+1}^2 & z_{r_\Delta+1}^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_k^1 & z_k^2 & z_k^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_m^1 & z_m^2 & z_m^3 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{z}^o = \begin{pmatrix} z_{r_\Delta+1}^{1o} & z_{r_\Delta+1}^{2o} & z_{r_\Delta+1}^{3o} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_k^{1o} & z_k^{2o} & z_k^{3o} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_m^{1o} & z_m^{2o} & z_m^{3o} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Nous proposons un théorème important pour évaluer le rang d'un ensemble de champs antisymétriques, il joue un rôle essentiel pour les analyses suivantes.

**Théorème 4.2** *Soit  $\mathcal{X}$  est un ensemble de champs antisymétriques dont la dimension d'une liste libre maximale est  $r_\Delta$ , alors le rang de  $\mathcal{X}$  est évalué par :*

$$\text{rang } \mathcal{X} = r_\Delta + \text{rang } \mathfrak{z}^o$$

où  $\mathfrak{z}^o$  est la matrice constituée des parties duales des coordonnées dans la base  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ .

En effet,  $r_\Delta$  ne peut avoir que quatre valeurs possibles 0, 1, 2 et 3, la démonstration de ce théorème est analogue lorsqu'on change la valeur de  $r_\Delta$ . Si l'on fait une démonstration générale, on va tomber dans des notations compliquées, pour les deux raisons, la démonstration sera faite avec  $r_\Delta = 2$ .

**Démonstration :** (1)  $\text{rang } \mathfrak{z}^o = r - 2 \implies \text{rang } \mathcal{X} = r$

La démonstration est en deux étapes, premièrement on montre que  $X_1, \dots, X_r$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ , puis on montre que  $X_1, \dots, X_r, X_i$  sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$ , pour  $i > r$ .

(a) Considérons la relation :

$$(rlt) \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \dots + \lambda_r X_r = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

Puisque :

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = [X_1, X_2].$$

On remplace  $X_k$ , pour  $k > 3$ , par leur combinaison linéaire par rapport à  $B_\Delta = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ , la relation (rlt) devient :

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \sum_{\gamma=3}^r \lambda_\gamma (z_\gamma^1 Y_1 + z_\gamma^2 Y_2 + z_\gamma^3 Y_3) = 0$$

Si l'on sépare la partie réelle et la partie duale en remarquant  $z_\gamma^3 = 0$  (voir le corollaire 4.1), on obtient :

$$\sum_{\alpha=1,2} \left( \lambda_\alpha + \sum_{\gamma=3}^r \lambda_\gamma z_\gamma^\alpha \right) Y_\alpha + \epsilon \sum_{\gamma=3}^r \lambda_\gamma (z_\gamma^{1o} Y_1 + z_\gamma^{2o} Y_2 + z_\gamma^{3o} Y_3) = 0$$

Puisque  $\text{rang } \mathfrak{z}^o = r - 2$ , nous supposons que  $(z_3^{1o}, z_3^{2o}, z_3^{3o})^t, \dots, (z_r^{1o}, z_r^{2o}, z_r^{3o})^t$ , les parties duales des coordonnées de  $X_\gamma$  par rapport à la base  $B_\Delta$ , sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ , pour

que la relation  $(rll)$  soit vérifiée, il faut et il suffit :  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ , alors  $X_1, \dots, X_r$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$(*) \quad \text{rang } \mathcal{X} \geq r$$

(b) Considérons :

$$\begin{aligned} X_i &= z_i^1 Y_1 + z_i^2 Y_2 + z_i^3 Y_3 \\ &= z_i^1 Y_1 + z_i^2 Y_2 + z_i^3 Y_3 + \epsilon(z_i^{1^o} Y_1 + z_i^{2^o} Y_2 + z_i^{3^o} Y_3) \quad \text{pour } i > r \end{aligned}$$

Puisque  $\text{rang } \mathfrak{z}^o = r-2$ ,  $(z_i^{1^o}, z_i^{2^o}, z_i^{3^o})^t$  et  $(z_3^{1^o}, z_3^{2^o}, z_3^{3^o})^t, \dots, (z_r^{1^o}, z_r^{2^o}, z_r^{3^o})^t$  sont alors linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$ , on a donc :

$$(z_i^{1^o}, z_i^{2^o}, z_i^{3^o})^t = \sum_{\gamma=3}^r C_i^\gamma (z_{r_\gamma}^{1^o}, z_{r_\gamma}^{2^o}, z_{r_\gamma}^{3^o})^t \quad \text{pour } C_i^\gamma \in \mathbb{R}$$

appliquons l'équation précédente à l'expression de  $X_i$ , alors :

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{\alpha} z_i^\alpha Y_\alpha + \epsilon \sum_{\gamma=3}^r C_i^\gamma (z_\gamma^{1^o} Y_1 + z_\gamma^{2^o} Y_2 + z_\gamma^{3^o} Y_3) \\ &= \sum_{\alpha} \left( z_i^\alpha - \sum_{\gamma=3}^r C_i^\gamma z_\gamma^\alpha \right) Y_\alpha + \sum_{\gamma=3}^r C_i^\gamma \left( \sum_{\alpha} z_\gamma^\alpha Y_\alpha + \epsilon \sum_{\alpha} z_\gamma^{\alpha^o} Y_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left( z_i^\alpha - \sum_{\gamma=3}^r C_i^\gamma z_\gamma^\alpha \right) Y_\alpha + \sum_{\gamma=3}^r C_i^\gamma X_\gamma \\ &= \sum_{\beta=1}^r C_i^\beta X_\beta \end{aligned}$$

$X_i$  est une combinaison linéaire à coefficients réels de  $\{X_1, \dots, X_r\}$ ,  $\{X_1, \dots, X_r, X_i\}$  est alors linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$ , on a  $\text{rang } \mathcal{X} \leq r$ , compte tenu de la relation  $(*)$ , alors :

$$\text{rang } \mathcal{X} = r$$

$$(2) \text{ rang } \mathcal{X} = r \implies \text{rang } \mathfrak{z}^o = r-2$$

Considérons la relation :

$$(rll_2) \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_r X_r + \lambda_i X_i = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si  $\text{rang } \mathfrak{z}^o > r-2$ , on peut toujours supposer que :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} z_{r_\Delta}^{1^o} & z_{r_\Delta}^{2^o} & z_{r_\Delta}^{3^o} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_r^{1^o} & z_r^{2^o} & z_r^{3^o} \\ z_i^{1^o} & z_i^{2^o} & z_i^{3^o} \end{pmatrix} = r-1$$

Pour que  $(rll_2)$  soit satisfaite, il faut :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \lambda_i = 0$$

on a donc :  $\text{rang } \mathcal{X} > r$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse  $\text{rang } \mathcal{X} = r$ . Il faut donc :  $\text{rang } \mathfrak{z}^o \leq r-2$ .

Supposons  $\text{rang } \mathfrak{z}^0 < r - 2$ , c'est-à-dire :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} z_{r\Delta}^{1^0} & z_{r\Delta}^{2^0} & z_{r\Delta}^{3^0} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_r^{1^0} & z_r^{2^0} & z_r^{3^0} \end{pmatrix} < r - 2$$

on applique :

$$(z_r^{1^0}, z_r^{2^0}, z_r^{3^0}) = \sum_{\gamma'=3}^{r-1} C_r^{\gamma'} (z_{\gamma'}^{1^0}, z_{\gamma'}^{2^0}, z_{\gamma'}^{3^0})$$

à  $(rIt)$ , on a :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \dots + \lambda_r X_r \\ &= \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha} + \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} z_{\gamma}^{\alpha}) Y_{\alpha} + \epsilon \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} (z_{\gamma}^{1^0} Y_1 + z_{\gamma}^{2^0} Y_2 + z_{\gamma}^{3^0} Y_3) \\ &= \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha} + \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} z_{\gamma}^{\alpha}) Y_{\alpha} + \epsilon \sum_{\gamma'=r_{\Delta}+1}^{r-1} (\lambda_{\gamma'} + C_r^{\gamma'} \lambda_r) (z_{\gamma'}^{1^0} Y_1 + z_{\gamma'}^{2^0} Y_2 + z_{\gamma'}^{3^0} Y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui implique qu'il existe toujours des  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$ , satisfaisant la relation  $(rIt)$ , il est clair :  $X_1, \dots, X_r$  sont linéairement dépendants,  $\text{rang } \mathcal{X} < r$ . On a donc  $\text{rang } \mathfrak{z}^0 \geq r - 2$ .

Compte tenu des deux cas considérés,  $\text{rang } \mathfrak{z}^0 = r - 2 \Leftrightarrow \text{rang } \mathcal{X} = r$ .  $\blacksquare$

Puisque  $L_{\mathbb{R}}$  est une base de l'espace engendré par  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{R}$ , alors pour  $i > r$ , on a

$$X_i = C_i^1 X_1 + \dots + C_i^r X_r \quad \text{pour } C_i^{\beta} \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

D'autre part,  $B_{\Delta} = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$  est une base de l'espace engendré par  $\mathcal{X}$  sur  $\Delta$

$$X_i = z_k^1 Y_1 + z_k^2 Y_2 + z_k^3 Y_3 \quad \text{pour } k > r_{\Delta}. \quad (4.16)$$

De plus, pour  $\gamma = r_{\Delta} + 1, \dots, r$ , on peut remplacer  $X_{\gamma}$  par :

$$X_{\gamma} = z_{\gamma}^1 Y_1 + z_{\gamma}^2 Y_2 + z_{\gamma}^3 Y_3$$

En considérant l'égalité des deux équations 4.15 et 4.16, on a :

$$\begin{aligned} C_i^1 X_1 + \dots + C_i^r X_r &= C_i^1 X_1 + \dots + C_i^{r_{\Delta}} X_{r_{\Delta}} + \epsilon \sum_{\gamma=r_{\Delta}+1}^r C_i^{\gamma} (z_{\gamma}^{1^0} Y_1 + z_{\gamma}^{2^0} Y_2 + z_{\gamma}^{3^0} Y_3) \\ &= z_i^1 Y_1 + z_i^2 Y_2 + z_i^3 Y_3 \end{aligned}$$

Nous analysons les parties duales des coordonnées de l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{cases} z_i^{1^0} = \sum_{\gamma} C_i^{\gamma} z_{\gamma}^{1^0} \\ \dots \\ z_i^{r_{\Delta}^0} = \sum_{\gamma} C_i^{\gamma} z_{\gamma}^{r_{\Delta}^0} \end{cases}$$

D'après le théorème précédent, les conditions pour que le rang de l'ensemble  $\mathcal{X}$  soit  $r$  est qu'il existe des solutions pour  $C_i^{\gamma}$  dans les équations qu'on vient d'écrire, cela peut être traduit par la relation suivante :

$$\text{rang } \mathfrak{z}^0 = \text{rang} \begin{pmatrix} z_{r_{\Delta}+1}^{1^0} & z_{r_{\Delta}+1}^{2^0} & z_{r_{\Delta}+1}^{3^0} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_r^{1^0} & z_r^{2^0} & z_r^{3^0} \end{pmatrix}$$

On distingue les différents cas particuliers suivants :

- $r_\Delta = 3$ , une liste libre maximale  $L_\Delta = \{X_1, X_2, X_3\}$  forme une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , les autres éléments  $X_k$ , pour  $k > 3$ , sont alors une combinaison linéaire duale de  $L_\Delta$ .
- $r_\Delta < 3$ , une liste libre maximale  $L_\Delta = \{X_1, X_2, X_3\}$  ne forme pas une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , dans ce cas, on doit distinguer deux différents cas suivants : (i) Les  $X_k$  sont tous une combinaison linéaire duale de  $L_\Delta$ . (ii) Les  $X_k$  ne sont pas tous une combinaison linéaire duale de  $L_\Delta$ .

Ensuite, on étudie également les sous-ensembles engendrés par l'ensemble  $\mathcal{X}$  en utilisant le crochet de Lie. Pour étudier les sous-ensembles engendrés par l'ensemble  $\mathcal{X}$ , il sera suffisant d'appliquer le crochet de Lie entre les éléments linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  i.e. les éléments de  $L_\mathbb{R}$ , puisque les autres éléments de  $\mathcal{X}$  n'engendrent rien de plus.

On note  $\mathfrak{C}^i$ , les sous-ensembles engendrés par les crochets du  $i$ -ème ordre, on les appelle les sous-ensembles du  $i$ -ème ordre.

Finalement, on obtient l'ordre maximal des crochets permettant d'engendrer une sous algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_a$  à partir de  $\mathcal{X}$ . Plus précisément, les sous-algèbres  $\mathfrak{S}_a$  engendrées sont :

$\mathfrak{S}_a$ engendrée par $\mathcal{X} = \mathfrak{C}^0$	0-ordre, ou
$\mathfrak{S}_a$ engendrée par $\mathfrak{C}^1$	1-ordre, ou
$\mathfrak{S}_a$ engendrée par $\mathfrak{C}^2$	2-ordre, ou
$\mathfrak{S}_a$ engendrée par $\mathfrak{C}^3$	3-ordre, ou
$\mathfrak{S}_a$ engendrée par $\mathfrak{C}^4$	4-ordre.

C'est-à-dire qu'en général, pour un sous ensemble quelconque de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ , l'espace engendré par l'ensemble  $\mathfrak{C}^4$  est toujours une sous-algèbre de Lie.

Il existe beaucoup de cas particuliers décrits par la figure 4.1.

On va présenter les différents cas du tableau ci-dessous :

rang	$r = r_\Delta$	$r = r_\Delta + 1$	$r = r_\Delta + 2$	$r = r_\Delta + 3$
$r_\Delta = 3$	3	4	5	6
$r_\Delta = 2$	2	3	4	5
$r_\Delta = 1$	1	2	3	4
$r_\Delta = 0$	0	1	2	3

### 4.3 Le cas $r_\Delta = 3$

Lorsque  $r_\Delta = 3$ , on a  $L_\Delta = \{X_1, X_2, X_3\}$ , de plus  $L_\Delta = B_\Delta$  est une base de  $\mathfrak{D}$  module sur  $\Delta$ .

#### 4.3.1 Condition de rang

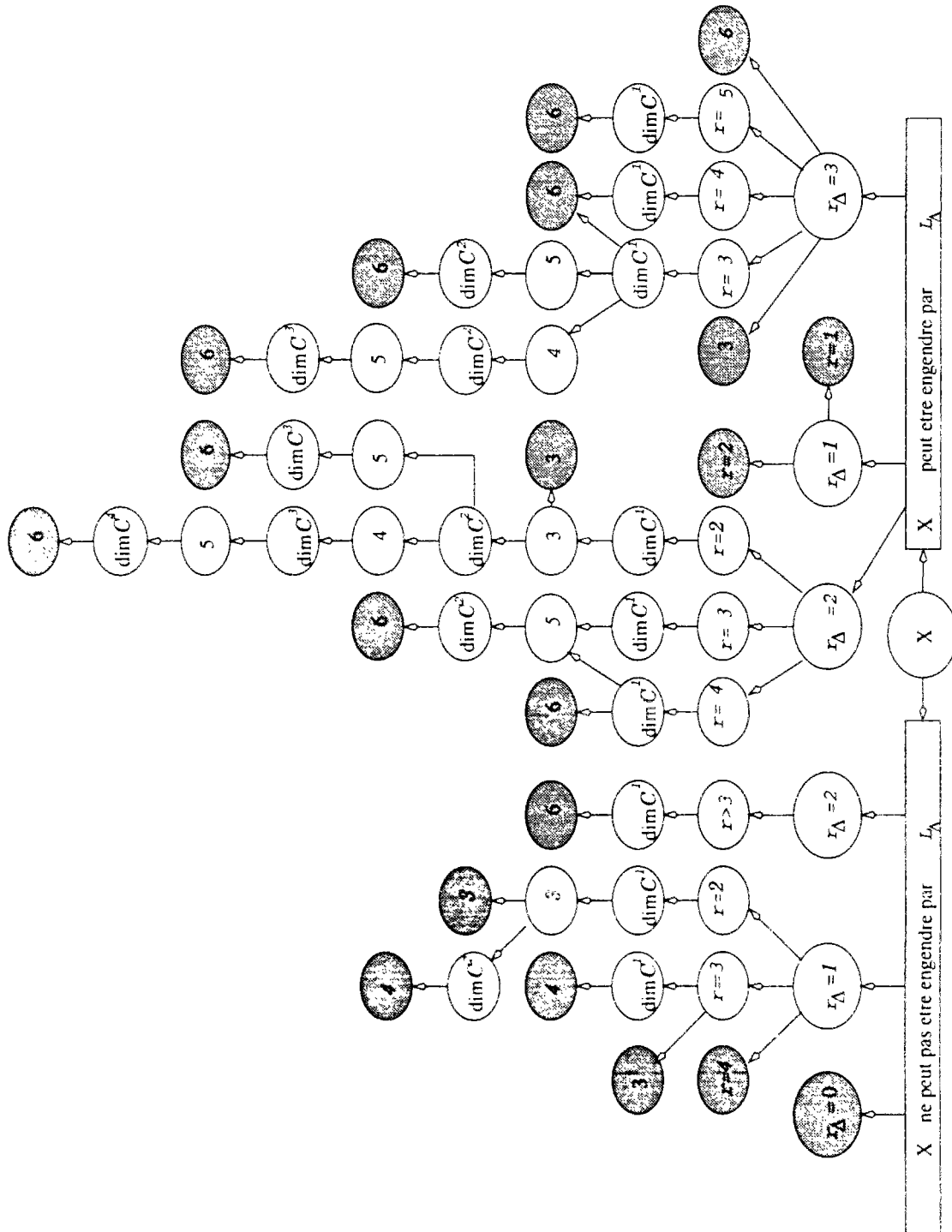
La matrice des parties duales des coordonnées de  $X_k$  par rapport à la base  $B_\Delta$ , pour  $k = 4, \dots, m$ , est définie par :

$$3_1^0 = \begin{pmatrix} z_4^{1^0} & z_4^{2^0} & z_4^{3^0} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_m^{1^0} & z_m^{2^0} & z_m^{3^0} \end{pmatrix}$$

#### Proposition 4.4

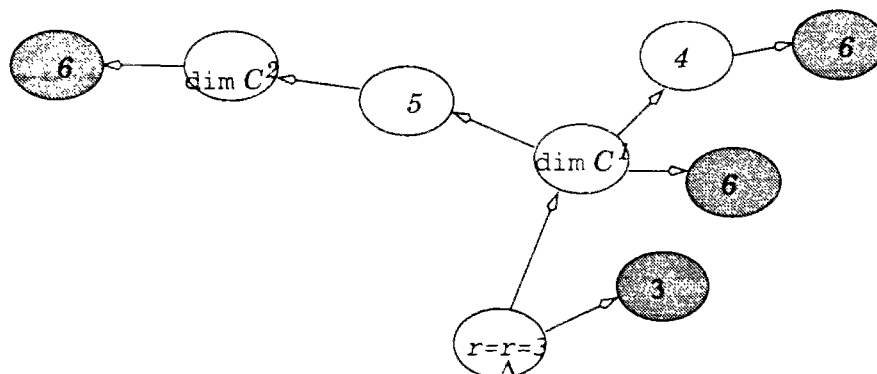
- (i) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang}\mathcal{X} = 3$  est exprimée par :  $\text{rang}3_1^0 = 0$ .  
(ii) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang}\mathcal{X} = 4$  est exprimée par :  $\text{rang}3_1^0 = 1$ .





Les ellipses grises représentent les sous-algèbre engendrées,  $r$  est le rang de l'ensemble  $\mathcal{X}$ ,  $r_{\Delta}$  est la dimension d'une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ ,  $\dim C^i$  représente la dimension d'un sous ensemble engendré par le crochet de Lie du  $i$ -ème ordre. L'ordre maximal pour engendrer une sous-algèbre est 4.

FIG. 4.1 - Les sous-algèbres de Lie engendrées

FIG. 4.2 - sous-algèbre de Lie engendrées lorsque  $r_\Delta = 3$ 

(iii) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 5$  est exprimée par :  $\text{rang } \mathfrak{z}_1^{\circ} = 2$ .

(iv) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 6$  est exprimée par :  $\text{rang } \mathfrak{z}_1^{\circ} = 3$ .

La démonstration est évidente, si l'on utilise le théorème 4.2.

Si  $L_{\mathbb{R}} = \{X_1, \dots, X_r\}$  est une base de l'espace engendré par  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\text{rang } \mathfrak{z}^{\circ} = \text{rang} \begin{pmatrix} z_4^{1^{\circ}} & z_4^{2^{\circ}} & z_4^{3^{\circ}} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_r^{1^{\circ}} & z_r^{2^{\circ}} & z_r^{3^{\circ}} \end{pmatrix}$$

### 4.3.2 Sous-algèbre engendrée

#### 4.3.2.1 Le cas $r = r_\Delta = 3$

Dans ce paragraphe,  $L_{\mathbb{R}} = L_\Delta$ , on considère d'abord, le sous-ensemble engendré du premier ordre par  $\mathcal{X}$ , on a :  $\mathfrak{C}^1 = \{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$ . Puisque  $\{X_1, X_2, X_3\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  module sur  $\Delta$ , on peut donc exprimer les crochets de Lie par :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = z_{12}^1 X_1 + z_{12}^2 X_2 + z_{12}^3 X_3 \\ [X_1, X_3] = z_{13}^1 X_1 + z_{13}^2 X_2 + z_{13}^3 X_3 \\ [X_2, X_3] = z_{23}^1 X_1 + z_{23}^2 X_2 + z_{23}^3 X_3 \end{cases} \quad (4.17)$$

on obtient la matrice  $N_1$  constituée par les parties duales des coordonnées par rapport à la base  $B_\Delta$  :

$$N_1 = \begin{pmatrix} z_{12}^{1^{\circ}} & z_{12}^{2^{\circ}} & z_{12}^{3^{\circ}} \\ z_{13}^{1^{\circ}} & z_{13}^{2^{\circ}} & z_{13}^{3^{\circ}} \\ z_{23}^{1^{\circ}} & z_{23}^{2^{\circ}} & z_{23}^{3^{\circ}} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

**Proposition 4.5** Soient  $X_1, X_2$  et  $X_3 \in \mathfrak{D}$  linéairement indépendants sur  $\Delta$ , alors :

- (a)  $\text{rang } N_1 = 0 \Leftrightarrow \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 3$ .  $\mathcal{X}$  engendre une sous-algèbre de Lie.
- (b)  $\text{rang } N_1 = 1 \Leftrightarrow \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 4$ .
- (c)  $\text{rang } N_1 = 2 \Leftrightarrow \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 5$ .  $\mathfrak{C}^2$  engendre l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ .
- (d)  $\text{rang } N_1 = 3 \Leftrightarrow \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 6$ .  $\mathfrak{C}^1$  engendre l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ .

D'après le théorème 4.2, (a), (c) et (d) sont immédiats.

Toutes les sous-algèbres de Lie engendrées dans ce cas particulier sont indiquées sur la figure 4.2.

On va étudier le cas (b). L'ensemble  $\mathfrak{C}^2$  est défini par :

$$\mathfrak{C}^2 = \{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_2, X_3], [X_3, X_1], [X_1, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_2]], [X_3, [X_1, X_2]], [X_1, [X_2, X_3]], [X_2, [X_2, X_3]], [X_3, [X_2, X_3]], [X_1, [X_3, X_1]], [X_2, [X_3, X_1]], [X_3, [X_3, X_1]]\}$$

on peut exprimer les crochets de Lie par rapport à la base  $\{X_1, X_2, X_3\}$  en utilisant la formule de double crochets de Lie. Les parties duales des coordonnées constituent une matrice de  $3 \times 12$  :

$$M_1 = \begin{pmatrix} z_1^{1 \circ 2} & z_1^{2 \circ 2} & z_1^{3 \circ 2} \\ z_2^{1 \circ 3} & z_2^{2 \circ 3} & z_2^{3 \circ 3} \\ z_3^{1 \circ 3} & z_3^{2 \circ 3} & z_3^{3 \circ 3} \\ [X_1 | X_2] & -[X_1 | X_1] & 0 \\ [X_2 | X_2] & -[X_1 | X_2] & 0 \\ [X_2 | X_3] & -[X_1 | X_3] & 0 \\ [X_1 | X_3] & 0 & -[X_1 | X_1] \\ [X_1 | X_3] & 0 & -[X_1 | X_2] \\ [X_2 | X_3] & 0 & -[X_1 | X_2] \\ 0 & [X_2 | X_3] & -[X_2 | X_3] \\ 0 & [X_3 | X_3] & -[X_1 | X_3] \\ 0 & [X_3 | X_3] & -[X_2 | X_3] \end{pmatrix}$$

**Corollaire 4.2** (i) Si  $\text{rang} N_1 = 1$ ,  $\text{rang} M_1 = 2$ , alors  $\mathfrak{C}^3$  engendre l'algèbre  $\mathfrak{D}$ .

(ii) Si  $\text{rang} N_1 = 1$ ,  $\text{rang} M_1 = 3$ , alors  $\mathfrak{C}^2$  engendre l'algèbre  $\mathfrak{D}$ .

#### 4.3.2.2 Le cas $r_\Delta = 3$ , $r = 4$

Pour étudier les sous-algèbres engendrées, il est nécessaire de présenter la proposition suivante.

**Proposition 4.6**  $\{X_1, X_2, X_3\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta \iff \{[X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ .

**Démonstration :**  $\{X_1, X_2, X_3\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , si et seulement si :

$$(X_1 | [X_2, X_3]) \neq 0 \quad (4.19)$$

Considérons :

$$\begin{aligned} & \{[X_1, X_2] | [[X_2, X_3], [X_1, X_3]]\} \\ &= \{[X_1, X_2] | \{[X_2, X_3] | X_3\} X_1 - \{[X_2, X_3] | X_1\} X_3\} \\ &= -\{[X_2, X_3] | X_1\} \{[X_1, X_2] | X_3\} \\ &= -\{X_1 | [X_2, X_3]\}^2 \end{aligned}$$

donc  $([X_1, X_2] | [X_1, X_3], [X_2, X_3]) \neq 0$  est équivalent à l'équation 4.19. ■

Considérons le sous-ensemble du premier ordre :

$$\mathfrak{C}^1 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3], [X_1, X_4], [X_2, X_4], [X_3, X_4]\}$$

puisque  $\{[X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , on peut exprimer les autres éléments de  $\mathfrak{C}^1$  par cette base :

$$\begin{aligned} X_1 &= \hat{z}_1^{12} [X_1, X_2] + \hat{z}_1^{13} [X_1, X_3] + \hat{z}_1^{23} [X_2, X_3] \\ X_2 &= \hat{z}_2^{12} [X_1, X_2] + \hat{z}_2^{13} [X_1, X_3] + \hat{z}_2^{23} [X_2, X_3] \\ X_3 &= \hat{z}_3^{12} [X_1, X_2] + \hat{z}_3^{13} [X_1, X_3] + \hat{z}_3^{23} [X_2, X_3] \\ X_4 &= \hat{z}_4^{12} [X_1, X_2] + \hat{z}_4^{13} [X_1, X_3] + \hat{z}_4^{23} [X_2, X_3] \\ [X_1, X_4] &= \hat{z}_4^2 [X_1, X_2] + \hat{z}_4^3 [X_1, X_3] \\ [X_2, X_4] &= -\hat{z}_4^1 [X_1, X_2] + \hat{z}_4^3 [X_2, X_3] \\ [X_3, X_4] &= -\hat{z}_4^1 [X_1, X_3] - \hat{z}_4^2 [X_2, X_3] \end{aligned}$$

on obtient la matrice des parties duales des coordonnées comme suit :

$$N_2 = \begin{pmatrix} z_1^{12o} & z_1^{13o} & z_1^{23o} \\ z_2^{12o} & z_2^{13o} & z_2^{23o} \\ z_3^{12o} & z_3^{13o} & z_3^{23o} \\ z_4^{12o} & z_4^{13o} & z_4^{23o} \\ z_4^{2o} & z_4^{3o} & 0 \\ -z_4^{1o} & 0 & z_4^{3o} \\ 0 & -z_4^{1o} & -z_4^{2o} \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.7** *Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de champs antisymétriques de rang 4 dont  $\{X_1, X_2, X_3\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ . Alors :  $\text{rang } N_2 = 3$ ,  $\mathfrak{C}^1$  engendre l'algèbre  $\mathfrak{D}$ .*

**Démonstration :** Puisque  $\mathcal{X}$  est de rang 4, il existe toujours  $(z_4^{1o}, z_4^{2o}, z_4^{3o}) \neq (0, 0, 0)$ , on va montrer  $\text{rang } \mathfrak{C}^1 = 6$ , ce qui est équivalent de dire  $\text{rang } N_2 = 3$ .

Nous remarquons que les coordonnées de  $X_4$  par rapport à la base  $\{[X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$  dépendent des coordonnées de  $X_4$  par rapport à la base  $\{X_1, X_2, X_3\}$ , de plus, on a :

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_4^{12} \\ \hat{z}_4^{13} \\ \hat{z}_4^{23} \end{pmatrix} = (z_4^1, z_4^2, z_4^3) \cdot \begin{pmatrix} \hat{z}_1^{12} & \hat{z}_1^{13} & \hat{z}_1^{23} \\ \hat{z}_2^{12} & \hat{z}_2^{13} & \hat{z}_2^{23} \\ \hat{z}_3^{12} & \hat{z}_3^{13} & \hat{z}_3^{23} \end{pmatrix}$$

alors, on obtient les parties duales des coordonnées  $z_4^{12o}, z_4^{13o}, z_4^{23o}$  écrites comme ce qui suit :

$$\begin{pmatrix} z_4^{12o} \\ z_4^{13o} \\ z_4^{23o} \end{pmatrix} = (z_4^1, z_4^2, z_4^3) \cdot \begin{pmatrix} z_1^{12o} & z_1^{13o} & z_1^{23o} \\ z_2^{12o} & z_2^{13o} & z_2^{23o} \\ z_3^{12o} & z_3^{13o} & z_3^{23o} \end{pmatrix} + (z_4^{1o}, z_4^{2o}, z_4^{3o}) \cdot \begin{pmatrix} z_1^{12} & z_1^{13} & z_1^{23} \\ z_2^{12} & z_2^{13} & z_2^{23} \\ z_3^{12} & z_3^{13} & z_3^{23} \end{pmatrix}$$

alors le premier terme de droite dans l'équation précédente est une combinaison linéaire réelle des trois premiers lignes de la matrice  $N_2$  et il est clair que :

$$\text{rang } N_2 = \text{rang} \begin{pmatrix} z_1^{12o} & z_1^{13o} & z_1^{23o} \\ z_2^{12o} & z_2^{13o} & z_2^{23o} \\ z_3^{12o} & z_3^{13o} & z_3^{23o} \\ z_1^{12} z_4^{1o} + z_4^{2o} z_2^{12} + z_4^{3o} z_3^{12} & z_1^{13} z_4^{1o} + z_4^{2o} z_2^{13} + z_4^{3o} z_3^{13} & z_1^{23} z_4^{1o} + z_4^{2o} z_2^{23} + z_4^{3o} z_3^{23} \\ z_4^{2o} & z_4^{3o} & 0 \\ -z_4^{1o} & 0 & z_4^{3o} \\ 0 & -z_4^{1o} & -z_4^{2o} \end{pmatrix}$$

Si l'on étudie les déterminants extraits de  $N_2$ , on a :

$$D_{456} = z_4^{3o} U \quad D_{457} = -z_4^{2o} U \quad D_{467} = z_4^{1o} U$$

avec :

$$U = (z_4^{1o}, z_4^{2o}, z_4^{3o}) \cdot \begin{pmatrix} z_1^{12} & -z_1^{13} & z_1^{23} \\ z_2^{12} & -z_2^{13} & z_2^{23} \\ z_3^{12} & -z_3^{13} & z_3^{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_4^{3o} \\ z_4^{2o} \\ z_4^{1o} \end{pmatrix}$$

$U$  est donc une forme quadratique par rapport aux  $(z_4^{1o}, z_4^{2o}, z_4^{3o})$ , de plus :

$$\det \begin{pmatrix} z_1^{12} & -z_1^{13} & z_1^{23} \\ z_2^{12} & -z_2^{13} & z_2^{23} \\ z_3^{12} & -z_3^{13} & z_3^{23} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} z_1^{12} & z_1^{13} & z_1^{23} \\ z_2^{12} & z_2^{13} & z_2^{23} \\ z_3^{12} & z_3^{13} & z_3^{23} \end{pmatrix} \neq 0$$

D'après le théorème de forme quadratique définie positive, on a  $U \neq 0$ , et donc  $\text{rang} N_2 = 3$ .

■

### 4.3.2.3 Le cas $r_\Delta = 3$ , $r = 5$

On a :  $L_{\mathbb{R}} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ . Comme il n'existe pas de sous-algèbre de Lie de dimension 5, alors au moins un crochet  $[X_i, X_j]$  n'appartient pas à  $\mathcal{X}$ . Par exemple :

$$\mathcal{C}^1 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, [X_1, X_2], [X_1, X_3], X_2, X_3, [X_1, X_4], [X_2, X_4]\}$$

**Proposition 4.8**  $\mathcal{C}^1$  engendre l'algèbre  $\mathcal{D}$ .

## 4.4 Le cas $r_\Delta = 2$

### 4.4.1 Condition de rang

Dans ce cas, on a  $L_\Delta = \{X_1, X_2\}$ . Pour que  $X_1, X_2$  soient linéairement indépendants sur  $\Delta$ , il faut que les axes de  $X_1, X_2$  ne soient pas parallèles, i.e.  $\omega_{X_1} \wedge \omega_{X_2} \neq 0$ . Pour que  $\{X_1, X_2, X_i\}$ , avec  $i = 3, \dots, m$ , soit linéairement dépendant sur  $\Delta$ , il faut que les axes de tous les éléments de  $\mathcal{X}$  soient parallèles à un plan. Cela est exprimé mathématiquement par la proposition suivante :

**Proposition 4.9** Pour que  $\{X_1, X_2\}$  soit une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ , les deux conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes.

- (a)  $([X_1, X_2] | [X_1, X_2]) \neq 0$
- (b)  $([X_1, X_2] | X_i) = 0$

**Démonstration :**

(1)  $\{X_1, X_2\}$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X} \implies$  (a) et (b)

Supposons  $\{X_1, X_2\}$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ , alors :

$$\text{rang}(\Omega X_1, \Omega X_2) = \text{rang}(\Omega X_1, \Omega X_2, \dots, \Omega X_m)$$

$X_1, X_2$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , on a donc le crochet  $[X_1, X_2]$  n'appartient pas à  $\mathcal{C}$  et :

$$\Omega[X_1, X_2] = [\Omega X_1, X_2] \neq 0.$$

Ceci nous donne (a).

or les éléments  $\Omega X_1, \Omega X_2, \Omega X_i$ , pour  $i \geq 3$ , sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{E}$ , ce qui entraîne (b).

(2) (a), (b)  $\implies \{X_1, X_2\}$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$

Si (a), on a :

$$[\Omega X_1, X_2] \neq 0$$

alors  $X_1, X_2$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ .

Si (b),  $\Omega X_1, \Omega X_2, \Omega X_i$  sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$ , d'après le théorème 4.1, on a :

$$\text{rang}(\Omega X_1, \Omega X_2) = \text{rang}(\Omega X_1, \Omega X_2, \dots, \Omega X_m)$$

alors  $\{X_1, X_2\}$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ . ■

Pour engendrer tous les éléments de  $\mathcal{X}$ , il est nécessaire de choisir une base sur  $\Delta$ , par exemple  $B_\Delta = \{X_1, X_2, [X_1, X_2]\} = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ , avec  $Y_1 = X_1, Y_2 = X_2, Y_3 = [X_1, X_2]$ .

Considérons un champ antisymétrique  $X_i$ , pour  $i = 3, \dots, m$ , alors on peut exprimer  $X_i$  par :

$$X_i = \hat{z}_i^1 Y_1 + \hat{z}_i^2 Y_2 + \hat{z}_i^3 Y_3 \quad \text{pour} \quad \hat{z}_i^\alpha \in \Delta \quad (4.20)$$

les parties réelles des coordonnées sont définies par :

$$\hat{z}_i^1 = \frac{\{X_i | [Y_2, Y_3]\}}{\{[Y_1, Y_2] | Y_3\}} \quad \hat{z}_i^2 = \frac{\{X_i | [Y_1, Y_3]\}}{\{[Y_1, Y_2] | Y_3\}} \quad \hat{z}_i^3 = \frac{\{X_i | [Y_1, Y_2]\}}{\{[Y_1, Y_2] | Y_3\}} \quad (4.21)$$

les parties duales des coordonnées sont définies par :

$$z_i^1 = \frac{(X_i | [Y_2, Y_3])}{([Y_1, Y_2] | Y_3)} \quad z_i^2 = \frac{(X_i | [Y_1, Y_3])}{([Y_1, Y_2] | Y_3)} \quad z_i^3 = 0$$

les coordonnées duales sont définies par :

$$\begin{cases} z_{i0}^1 = \frac{([Y_1, Y_2] | Y_3) \{X_i | [Y_2, Y_3]\} - (X_i | [Y_2, Y_3]) ([Y_1, Y_2] | Y_3)}{([Y_1, Y_2] | Y_3)^2} \\ z_{i0}^2 = \frac{([Y_1, Y_2] | Y_3) \{X_i | [Y_1, Y_3]\} - (X_i | [Y_1, Y_3]) ([Y_1, Y_2] | Y_3)}{([Y_1, Y_2] | Y_3)^2} \\ z_{i0}^3 = \frac{([Y_1, Y_2] | Y_3) \{X_i | [Y_1, Y_2]\} - (X_i | [Y_1, Y_2]) ([Y_1, Y_2] | Y_3)}{([Y_1, Y_2] | Y_3)^2} \end{cases}$$

Alors les  $X_k$ , pour  $k = 3, \dots, m$ , peuvent être exprimés dans  $B_\Delta$ , la matrice des parties duales des coordonnées de  $X_k$  dans  $B_\Delta$  est la suivante :

$$\mathfrak{z}_2^o = \begin{pmatrix} z_3^{1o} & z_3^{2o} & z_3^{3o} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_m^{1o} & z_m^{2o} & z_m^{3o} \end{pmatrix}$$

### Proposition 4.10

- (i) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 2$  s'exprime par :  $\text{rang } \mathfrak{z}_2^o = 0$ .
- (ii) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 3$  s'exprime par :  $\text{rang } \mathfrak{z}_2^o = 1$ .
- (iii) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 4$  s'exprime par :  $\text{rang } \mathfrak{z}_2^o = 2$ .
- (iv) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 5$  s'exprime par :  $\text{rang } \mathfrak{z}_2^o = 3$ .

La démonstration est directe en fonction du théorème 4.2.

### 4.4.2 Sous-algèbre engendrée

On distingue deux cas différents : (i) Les éléments  $X_k$ , pour  $k > 2$ , sont tous une combinaison linéaire de la liste libre maximale  $L_\Delta$ . Dans ce cas, les nombres  $z_k^{3^o}$  sont tous égaux à zéro, il s'agit des cas  $r = r_\Delta = 2$ ,  $r = r_\Delta + 1 = 3$ ,  $r = r_\Delta + 2 = 4$ ,  $r = r_\Delta + 3 = 5$ .

(ii) Les éléments  $X_k$ , pour  $k > 2$ , ne sont pas tous une combinaison linéaire de la liste libre maximale  $L_\Delta$ . Dans ce cas, les nombres  $z_k^{3^o}$  ne sont pas tous égaux à zéro pour  $k \geq 3$ , c'est-à-dire que  $X_k$  est une combinaison duale de  $X_1, X_2, [X_1, X_2]$ , il s'agit des cas  $r = r_\Delta + 1 = 3$  et  $r = r_\Delta + 2 = 4$ .

#### 4.4.2.1 Les $X_k$ , sont tous une combinaison linéaire de $L_\Delta$

##### (a) Le cas $r = r_\Delta = 2$

Les  $X_k$  peuvent être engendrés par  $L_\Delta$ ,  $z_k^{3^o} = 0$ .

On prend  $L_{\mathbb{E}} = L_\Delta$ , si l'on considère  $\mathfrak{C}^1$  :

$$\mathfrak{C}^1 = \{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$$

il est de dimension 3 (car  $\{[X_1, X_2] | [X_1, X_2]\} \neq 0$ ). En effet,  $\mathfrak{C}^1$  forme une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ .

On a aussi :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^2 &= \{X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_2]]\} \\ \mathfrak{C}^3 &= \{X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_2]], \\ &\quad [X_1, [X_2, [X_1, X_2]]], [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]], [X_2, [X_2, [X_1, X_2]]]\} \end{aligned}$$

Puisque  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , si l'on utilise la formule du double crochet de Lie :

$$\begin{cases} [X_1, [X_1, X_2]] &= \{X_1 | X_2\} X_1 - \{X_2 | X_1\} X_2 \\ [X_2, [X_1, X_2]] &= \{X_2 | X_2\} X_1 - \{X_1 | X_2\} X_2 \\ [X_1, [X_2, [X_1, X_2]]] &= \{X_1 | X_2\} [X_1, X_2] \\ [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]] &= -\{X_1 | X_1\} [X_1, X_2] \\ [X_2, [X_2, [X_1, X_2]]] &= -\{X_2 | X_2\} [X_1, X_2] \end{cases} \quad (4.22)$$

On peut obtenir la matrice des parties duales des coefficients :

$$N_3 = \begin{pmatrix} [X_1 | X_2] & [X_1 | X_1] & 0 \\ [X_2 | X_2] & [X_1 | X_2] & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} N_3 & & \\ 0 & 0 & [X_2 | X_2] \\ 0 & 0 & -[X_1 | X_1] \\ 0 & 0 & -[X_2 | X_2] \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.11** Soient  $X_1, X_2$  une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ . alors :

- (a)  $\text{rang } N_3 = 0 \iff \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 3$ .  $\mathfrak{C}^1$  engendre la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_a$ .
- (b)  $\text{rang } N_3 = 1 \iff \text{rang } \mathfrak{C}^2 = 4$ .
- (c)  $\text{rang } N_3 = 2 \iff \text{rang } \mathfrak{C}^2 = 5$ .

La démonstration est immédiate d'après le théorème 4.2.

#### Corollaire 4.3

- (i) Si  $\text{rang } N_3 = 1$ ,  $\text{rang } M_3 = 2 \iff \mathfrak{S}_a = \mathfrak{C}^4$  engendre la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_a$ .
- (ii) Si  $\text{rang } N_3 = 2$ ,  $\text{rang } M_3 = 3 \iff \mathfrak{S}_a = \mathfrak{C}^3$  engendre la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_a$ .

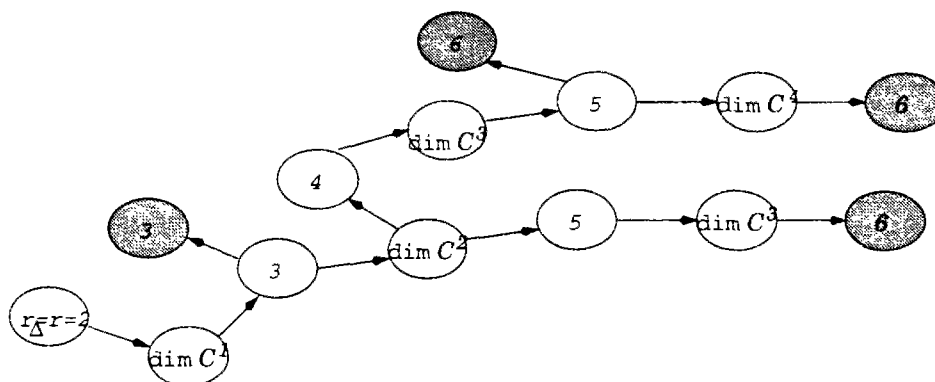


FIG. 4.3 - Sous-algèbre de Lie engendrées lorsque  $r_\Delta = 2$  et les  $X_k$  sont combinaison duale de  $L_\Delta$

#### Démonstration :

Lorsque  $\text{rang } N_3 = 1$ , il est impossible que  $\text{rang } M_3 = 1$ , dans ce cas particulier, il n'existe pas de sous-algèbre de Lie de dimension 4.

(i) lorsque  $\text{rang } N_3 = 1$ ,  $\text{rang } M_3 = 2$ ,  $\text{rang } \mathcal{X} = 5$ , on a donc  $\mathcal{C}^4 \not\subseteq \mathcal{C}^3$ , alors  $\text{rang } \mathcal{C}^4 = 6$  et  $\mathcal{S}_a$  est la sous algèbre de Lie engendrée par  $\mathcal{C}^4$ .

(ii) Si  $\text{rang } N_3 = 2$ ,  $\text{rang } M_3 = 3$ , on a  $\text{rang } \mathcal{C}^3 = 6$ . ■

#### (b) Le cas $r_\Delta = 2$ , $r = 3$

Les  $X_k$  peuvent être engendrés par  $L_\Delta$ , avec les coefficients  $z_k^{3^0} = 0$ .

Supposons  $L_{\mathbb{R}} = \{X_1, X_2, X_3\}$ . De plus  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ . Considérons le sous-ensemble engendré par  $\mathcal{X}$  :

$$\mathcal{C}^1 = \{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$$

On exprime  $X_3$ ,  $[X_1, X_3]$  et  $[X_2, X_3]$  dans  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$ , alors :

$$\begin{aligned} X_3 &= z_3^1 X_1 + z_3^2 X_2 \\ [X_1, X_3] &= z_3^2 [X_1, X_2] \\ [X_2, X_3] &= -z_3^1 [X_1, X_2] \end{aligned}$$

on obtient la matrice  $N_4$  constituée par les parties duales des coefficients définis par les équations précédentes :

$$N_4 = \begin{pmatrix} z_3^{1^0} & z_3^{2^0} & 0 \\ 0 & 0 & z_3^{2^0} \\ 0 & 0 & -z_3^{1^0} \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.12** Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de champs antisymétriques de rang 3 dont  $L_\Delta = \{X_1, X_2\}$  est une liste libre maximale, de plus  $L_\Delta$  et  $X_k$ , pour  $k = 1, \dots, m$ , sont linéairement dépendants sur  $\Delta$ , alors :  $\mathcal{C}^2$  engendre  $\mathfrak{D}$ .

**Démonstration :** D'après la proposition ??,  $z_3^{1^0}$  et  $z_3^{2^0}$  ne sont pas tous zéro, alors le rang de



la matrice  $N_4$  est toujours 2.

D'après le théorème 4.2, on a  $\text{rang } \mathfrak{C}^1 = 5$ ,  $\mathfrak{C}^1$  n'est donc pas stable par crochet de Lie, ce qui implique  $\text{rang } \mathfrak{C}^2 = 6$ . ■

(c) Le cas  $r_\Delta = 2$ ,  $r = 4$

$X_k$  peuvent être engendrés par  $L_\Delta$ .  $z_k^{3^\circ} = 0$ .

Supposons  $L_\mathbb{K} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ . Considérons les sous-ensembles  $\mathfrak{C}^1$ , on a :

$$\mathfrak{C}^1 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3], [X_1, X_4], [X_2, X_4], [X_3, X_4]\}$$

On exprime  $X_3, X_4, [X_1, X_3], [X_2, X_3], [X_1, X_4], [X_2, X_4], [X_3, X_4]$  par  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$ , on peut obtenir les coefficients duaux dont les parties duales forment une matrice  $N_5$  exprimée par :

$$N_5 = \begin{pmatrix} z_3^{1^\circ} & z_3^{2^\circ} & 0 \\ z_4^{1^\circ} & z_4^{2^\circ} & 0 \\ 0 & 0 & z_3^{-1^\circ} \\ 0 & 0 & z_3^{-2^\circ} \\ 0 & 0 & z_4^{-1^\circ} \\ 0 & 0 & z_4^{-2^\circ} \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.13** *Si un ensemble de champs antisymétriques  $\mathcal{X}$  est de rang 4, de plus  $\{X_1, X_2\}$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ , alors  $\mathfrak{C}^1$  peut engendrer l'algèbre entière.*

**Démonstration :** Puisque  $N_4$  est de rang 2, il est clair que  $\text{rang } N_5 = 3$ . d'après la proposition 4.5 :  $\text{rang } \mathfrak{C}^1 = 6$ . ■

#### 4.4.2.2 Les $X_k$ ne sont pas une combinaison linéaire duale de $L_\Delta$

(a) Le cas  $r_\Delta = 2$ ,  $r = 3$

Les  $X_k$  ne peuvent pas être engendrés par  $L_\Delta$ .  $z_k^{3^\circ} \neq 0$ .

Nous considérons le sous-ensemble :

$$\mathfrak{C}^1 = \{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$$

$X_3, [X_1, X_3]$  et  $[X_2, X_3]$  sont des combinaisons linéaires de  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$  :

$$\begin{aligned} X_3 &= z_3^1 X_1 + z_3^2 X_2 + \epsilon z_3^{3^\circ} [X_1, X_2] \\ [X_1, X_3] &= \epsilon z_3^{3^\circ} \{X_1 | X_2\} X_1 - \epsilon z_3^{3^\circ} \{X_1 | X_1\} X_2 + z_3^2 [X_1, X_2] \\ [X_2, X_3] &= \epsilon z_3^{3^\circ} \{X_2 | X_2\} X_1 - \epsilon z_3^{3^\circ} \{X_1 | X_2\} X_2 - z_3^1 [X_1, X_2] \end{aligned}$$

La matrice des parties duales des coefficients duaux est définie par :

$$N_6 = \begin{pmatrix} z_3^{1^\circ} & z_3^{2^\circ} & z_3^{12^\circ} \\ z_3^{3^\circ} (X_1 | X_2) & -z_3^{3^\circ} (X_1 | X_1) & z_3^{2^\circ} \\ z_3^{3^\circ} (X_2 | X_2) & -z_3^{3^\circ} (X_1 | X_2) & -z_3^{1^\circ} \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.14** *Soit  $\{X_1, X_2\}$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ , de plus  $\{X_1, X_2\}$  et  $X_3$  sont linéairement indépendants, alors l'ensemble  $\mathfrak{C}^1$  engendre l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ .*

**Démonstration :** On montre que la matrice  $N_6$  possède un rang maximal, cela est équivalent à la proposition d'après le théorème 4.2.

puisque :

$$N_6^{13} = \begin{pmatrix} z_3^{3^o}(X_1|X_2) & -z_3^{3^o}(X_1|X_1) \\ z_3^{3^o}(X_2|X_2) & -z_3^{3^o}(X_1|X_2) \end{pmatrix}$$

est toujours inversible.

Supposons que  $\det(N_6) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} z_3^{1^o} &= az_3^{3^o}(X_1|X_2) + bz_3^{3^o}(X_2|X_2) \\ z_3^{2^o} &= -az_3^{3^o}(X_1|X_1) - bz_3^{3^o}(X_2|X_2) \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \\ z_3^{2^o} &= az_3^{2^o} - bz_3^{1^o} \end{aligned}$$

Si l'on remplace  $z_3^{1^o}$ ,  $z_3^{2^o}$  par les deux premières relations dans  $z_3^{2^o} = az_3^{2^o} - bz_3^{1^o}$ , on obtient :

$$(aX_1 + bX_2 | aX_1 + bX_2) = -1$$

La partie gauche a une valeur minimale 0 et il n'existe pas de  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$  qui vérifient les équations précédentes. Il est donc impossible que  $N_6$  soit singulière. ■

(b)  $r_\Delta = 2$ ,  $r = 4$  et  $r = 5$

Les éléments  $X_k$  ne peuvent pas être engendrés par  $L_\Delta$ ,  $z_k^{3^o} \neq 0$ .

Prenons  $L_{\mathbb{R}} = \{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ , d'après la proposition 4.14, on a le corollaire suivant :

**Corollaire 4.4** *Soit  $\{X_1, X_2\}$  une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ , de plus  $\{X_1, X_2\}$  et  $\{X_\gamma\}$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , alors l'ensemble du premier ordre  $\mathcal{C}^1$  peut engendrer l'algèbre de Lie  $\mathcal{D}$ .*

## 4.5 Le cas $r_\Delta = 1$

### 4.5.1 Condition de rang

Supposons  $\{X_1\} = L_\Delta$ .

**Proposition 4.15** *Pour que  $X_1$  soit une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées.*

- (a)  $(X_1|X_1) \neq 0$
- (b)  $[\Omega X_1, X_k] = 0$  pour  $k > 1$

**Démonstration :**

(1)  $X_1$  est une liste libre maximale  $\implies$  (a), (b)

Supposons  $X_1$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ , alors  $X_1 \notin \mathcal{C}$ , on obtient (a).

D'après la définition d'une liste libre maximale, on a :

$$\text{rang } \Omega X_1 = \text{rang } (\Omega X_1, \dots, \Omega X_m)$$

alors  $\Omega X_1$  et  $\Omega X_k$ , pour  $k \geq 2$ , sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$ , d'où (b).

(2) (a), (b)  $\implies X_1$  est une liste libre maximale

Si (a), alors  $X_1$  est linéairement indépendant sur  $\Delta$ .

Si (b), alors  $X_1$  et  $X_k$  sont linéairement dépendants sur  $\Delta$ , il est clair que :

$$\text{rang } \Omega X_1 = \text{rang } (\Omega X_1, \dots, \Omega X_m)$$

d'où  $X_1$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ . ■

Lorsque les  $X_k$  peuvent être engendrés par  $L_\Delta$  pour  $k > 2, \dots, m$ , On peut exprimer  $X_k$  par :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ \dots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2^1 \\ \dots \\ z_m^1 \end{pmatrix} X_1 = \mathfrak{z}_3 X_1$$

avec :

$$z_k^1 = \frac{\{X_1 | X_k\}}{\{X_1 | X_1\}} \quad (4.23)$$

La partie duale  $\mathfrak{z}_3^o$  de  $\mathfrak{z}_3$  est définie par :

$$\mathfrak{z}_3^o = \begin{pmatrix} z_{2^o}^1 \\ \dots \\ z_{m^o}^1 \end{pmatrix}$$

$$z_k^{1^o} = \left( \frac{(X_1 | X_k) [X_1 | X_1]}{(X_1 | X_1)^2} + \frac{[X_1 | X_k]}{(X_1 | X_1)} \right)$$

**Proposition 4.16**

(i) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 1$  s'exprime par  $\text{rang } \mathfrak{z}_3^o = 0$ .

(ii) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 2$  s'exprime par  $\text{rang } \mathfrak{z}_3^o = 1$ .

On suppose  $L_{\mathbb{R}} = \{X_1, \dots, X_r\}$ . Lorsque  $L_\Delta = \{X_1\}$  ne peuvent pas engendrer tout les éléments de  $\mathcal{X}$ , alors il est nécessaire de construire une base  $B_\Delta$  pour analyser les relations d'indépendances entre les éléments de  $\mathcal{X}$ .

On va définir  $B_\Delta = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$  une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$  :

$$X_2 = z_2^1 X_1 + \epsilon (z_2^{2^o} Y_2 + z_2^{3^o} Y_3)$$

telles que les relations suivantes soient vérifiées :

$$z_2^{2^o} = 1, \quad Y_1 = X_1, \quad Y_3 = [Y_1, Y_2]$$

de plus :  $Y_2, Y_3 \in \mathcal{Z}_a$ , tel que  $Y_2(a) = Y_3(a) = 0$ , pour  $a \in \mathcal{E}$ .

alors  $X_k$  peut être représenté par :

$$X_k = z_k^1 X_1 + \epsilon (z_k^{2^o} Y_2 + z_k^{3^o} Y_3)$$

avec :

$$z_k^2 = z_k^3 = 0$$

Les coefficients sont définis par :

$$z_k^1 = \frac{\{X_k | [Y_2, Y_3]\}}{\{Y_1 | [Y_2, Y_3]\}} \quad z_k^{2^o} = -\frac{[X_k | [Y_1, Y_3]]}{(Y_1 | [Y_2, Y_3])} \quad z_k^{3^o} = \frac{[X_k | [Y_1, Y_2]]}{(Y_1 | [Y_2, Y_3])} \quad (4.24)$$

particulièrement lorsque  $k = 2$ , on a :

$$z_2^1 = \frac{\{X_2 | [Y_2, Y_3]\}}{\{Y_1 | [Y_2, Y_3]\}} \quad z_2^{2^o} = 1 \quad z_2^{3^o} = \frac{[X_2 | [Y_1, Y_2]]}{(Y_1 | [Y_2, Y_3])} \quad (4.25)$$

La matrice des parties duales des coefficients précédents est définie par :

$$z_4^o = \begin{pmatrix} z_2^{1^o} & 1 & z_2^{3^o} \\ & \dots & \\ z_m^{1^o} & z_m^{2^o} & z_m^{3^o} \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.17**

- (i) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 2$  s'exprime par :  $\text{rang } z_4^o = 1$ ;
- (ii) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 3$  s'exprime par :  $\text{rang } z_4^o = 2$ ;
- (iii) La condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{rang } \mathcal{X} = 4$  s'exprime par :  $\text{rang } z_4^o = 3$ .

### 4.5.2 Sous-algèbre engendrée

On distingue les deux cas différents: (i) Les éléments  $X_k$ , pour  $k > 1$ , sont tous une combinaison linéaire duale de  $L_\Delta = \{X_1\}$ , c'est-à-dire,  $z_k^{2^o} = z_k^{3^o} = 0$ . Il s'agit des cas  $r = r_\Delta = 1$ ,  $r = r_\Delta + 1 = 2$ .

(ii) Les éléments  $X_k$ , pour  $k > 1$ , ne sont pas tous une combinaison linéaire duale de  $L_\Delta = \{X_1\}$ , c'est-à-dire qu'il existe des  $z_k^{2^o}$  et  $z_k^{3^o}$  différents de zéro. Il s'agit des cas  $r = r_\Delta + 1 = 2$  et  $r = r_\Delta + 2 = 3$ .

#### 4.5.2.1 $X_k$ sont tous combinaison linéaire de $L_\Delta$

Lorsque  $L_\Delta = \{X_1\}$  peut engendrer tous les éléments de  $\mathcal{X}$ , cela ne contient que les cas où  $r = r_\Delta = 1$ ,  $r = r_\Delta = 2$ , on a la proposition suivante.

**Proposition 4.18**  $\mathcal{C}^0 = \mathcal{X}$  engendre une sous algèbre  $\mathfrak{S}_a$  de dimension  $r = \text{rang } \mathcal{X}$ .

#### 4.5.2.2 $X_k$ ne sont pas tous combinaison linéaire de $L_\Delta$

(a)  $r_\Delta = 1$  et  $r = 2$

Considérons :

$$\mathcal{C}^1 = \{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$$

puisque  $\Omega X_1$  et  $\Omega X_2$  sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$ , alors  $[X_1, X_2] \in \mathcal{C}$ , si l'on exprime  $[X_1, X_2]$  par  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$  (voir paragraphe précédente), il ne reste que les parties duales :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= \epsilon (z_{12}^1 Y_1 + z_{12}^{2^o} Y_2 + z_{12}^{3^o} Y_3) \\ X_2 &= z_2^1 Y_1 + \epsilon z_2^{2^o} Y_2 + \epsilon z_2^{3^o} Y_3 \end{aligned}$$

On définit la matrice  $N_7$  comme suit :

$$N_7 = \begin{pmatrix} z_2^{1^o} & 1 & z_2^{3^o} \\ z_{12}^{1^o} & z_{12}^{2^o} & z_{12}^{3^o} \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.19** Si  $\{X_i\}$  est une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ ,  $X_1$  et  $X_2$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , alors l'ensemble  $\mathcal{C}^1$  est de rang 3.

**Démonstration :** on a :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= \epsilon[Y_1, Y_2] + \epsilon z_2^{3\circ}[Y_1, Y_3] \\ &= \epsilon(z_2^{3\circ}(Y_1|Y_2)Y_1 - z_2^{3\circ}(Y_1|Y_1)Y_2 + Y_3) \end{aligned}$$

alors :

$$N_7 = \begin{pmatrix} z_2^{1\circ} & 1 & z_2^{3\circ} \\ z_2^{3\circ}(Y_1|Y_2) & -z_2^{3\circ}(Y_1|Y_1) & 1 \end{pmatrix}$$

il est évident que :

$$\text{rang } N_7 = 2$$

La démonstration est achevée. ■

Si l'on analyse l'ensemble  $\mathfrak{C}^2 = \{X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_2]]\}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} [X_1, [X_1, X_2]] &= \{X_1|X_2\}X_1 - \{X_1|X_1\}X_2 \\ [X_2, [X_1, X_2]] &= \{X_2|X_2\}X_1 - \{X_1|X_2\}X_2 \end{aligned}$$

la matrice composée des parties duales des coefficients est définie par :

$$M_7 = \begin{pmatrix} z_2^{1\circ} & 1 & z_2^{3\circ} \\ z_2^{3\circ}(Y_1|Y_2) & -z_2^{3\circ}(Y_1|Y_1) & 1 \\ [X_1|X_2] - [X_1|X_1]z_2^{1\circ} - (X_1|X_2)z_2^{1\circ} & -(X_1|X_1) & -z_2^{3\circ}(X_1|X_1) \\ [X_2|X_2] - [X_1|X_2]z_2^{1\circ} - (X_2|X_2)z_2^{1\circ} & -(X_1|X_2) & -z_2^{3\circ}(X_1|X_2) \end{pmatrix}$$

#### Corollaire 4.5

Si  $\text{rang } N_7 = \text{rang } M_7 = 2$ , alors  $\mathfrak{C}^1$  engendre une sous algèbre de Lie de dimension 3.

Si  $\text{rang } N_7 = 2$  et  $\text{rang } M_7 = 3$ , alors  $\mathfrak{C}^2$  engendre une sous-algèbre de Lie de dimension 4.

(b)  $r_\Delta = 1$ ,  $r = 3$

Dans ce cas particulier, les  $X_k$  ne peuvent pas tous être engendrés par  $L_\Delta$

On prend  $L_{\mathbb{R}} = \{X_1, X_2, X_3\}$ , et on va continuer d'utiliser la base  $B = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ .

on a :

$$\begin{aligned} X_2 &= z_2^1 Y_1 + \epsilon Y_2 + \epsilon z_2^{3\circ} Y_3 \\ X_3 &= z_3^1 Y_1 + \epsilon z_3^{2\circ} Y_2 + \epsilon z_3^{3\circ} Y_3 \end{aligned}$$

puisque le rang de  $\mathcal{X}$  est trois, d'après le théorème 4.2, on a  $\text{rang } \mathfrak{J}_4^0 = 2$ .

Considérons l'ensemble  $\mathfrak{C}^3 = \{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$ .

On exprime  $X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]$  dans la base  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ , on a :

$$\begin{aligned} [X_1, X_3] &= [X_1, z_3^1 Y_1 + \epsilon z_3^{2\circ} Y_2 + \epsilon z_3^{3\circ} Y_3] \\ &= \epsilon(z_3^{3\circ}(Y_1|Y_2)Y_1 - z_3^{3\circ}(Y_1|Y_1)Y_2 + z_3^{2\circ}Y_3) \\ [X_2, X_3] &= [z_2^1 Y_1 + \epsilon Y_2 + \epsilon z_2^{3\circ} Y_3, z_3^1 Y_1 + \epsilon z_3^{2\circ} Y_2 + \epsilon z_3^{3\circ} Y_3] \\ &= \epsilon((Y_1|Y_2)(z_3^1 z_3^{3\circ} - z_3^1 z_3^{2\circ})Y_1 + (Y_1|Y_1)(-z_3^1 z_3^{3\circ} + z_3^1 z_3^{2\circ})Y_2 + z_2^1 z_3^{3\circ} Y_3) \end{aligned}$$

alors on peut définir la matrice  $N_8$  par :

$$N_8 = \begin{pmatrix} z_2^{1\circ} & 1 & z_2^{3\circ} \\ z_3^{1\circ} & z_3^{2\circ} & z_3^{3\circ} \\ z_2^{3\circ}(Y_1|Y_2) & -z_2^{3\circ}(Y_1|Y_1) & 1 \\ z_3^{3\circ}(Y_1|Y_2) & -z_3^{3\circ}(Y_1|Y_1) & z_3^{2\circ} \\ (Y_1|Y_2)(z_3^1 z_3^{3\circ} - z_3^1 z_3^{2\circ}) & (Y_1|Y_1)(-z_3^1 z_3^{3\circ} + z_3^1 z_3^{2\circ}) & z_2^1 z_3^{3\circ} \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.20**

(i) Si  $\text{rang } N_8 = 2$ , alors  $\mathcal{X}$  engendrent une sous-algèbre de Lie de dimension 3.

(ii) Si  $\text{rang } N_8 = 3$ , alors  $\mathfrak{C}^1$  engendrent une sous-algèbre de Lie de dimension 4.

(c)  $r_\Delta = 1$  et  $r = 4$

les  $X_k$  ne peuvent pas être engendrés par  $L_\Delta$ .

On considère que  $L_{\mathbb{R}} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ . Lorsque  $r_\Delta = 1$ ,  $\mathcal{X}$  engendrent une sous-algèbre de Lie de dimension 4.

**4.5.3 Le cas  $r_\Delta = 0$** 

Lorsque  $r_\Delta = 0$ , c'est-à-dire,  $L_\Delta = \{\emptyset\}$ ,  $X_i \in \mathcal{C}$ , pour tout  $i = \{1, \dots, m\}$ .  $X_i$  ne sont peut-être linéairement indépendants que sur  $\mathbb{R}$ , parce qu'ils sont toujours linéairement dépendants sur  $\Delta$ , on calcule le rang d'un tel ensemble de champs antisymétriques en utilisant les méthodes classiques.

De plus, dans ce cadre l'ensemble de  $\mathcal{X}$  est toujours une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{D}$  en raison de la stabilité au crochet de Lie.

On résume les résultats correspondants aux différents cas par les deux tableaux ci-dessous.

D'après les analyses précédentes, on a vu que les sous-algèbres de Lie peuvent être engendrées par  $\mathfrak{C}^0$ ,  $\mathfrak{C}^1$ ,  $\mathfrak{C}^2$ ,  $\mathfrak{C}^3$ ,  $\mathfrak{C}^4$ .

**Proposition 4.21** *Pour un ensemble de champs antisymétriques, le sous-espace du 4-ième ordre engendrent toujours une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{D}$ .*

$X_k$ peuvent être engendrés par $L_\Delta$					
Rang $B_\Delta$	Rang $B_{\mathbb{R}}$	Type $T_{r,\Delta}^r$	ensemble $\{X\}$	sous-ensemble $\mathfrak{e}^1$	sous-algèbre engendrée $\mathfrak{S}_a$
1	1	$T_1^1$	$\{X_1\}$	$\{X_1\}$	$\{X_1\}$
	2	$T_1^2$	$\{X_1, X_2\}$	$\{X_1, X_2\}$	$\{X_1, X_2\}$
2		$T_2^2$	$\{X_1, X_2\}$	$\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$	$\mathfrak{e}^1$
					$\mathfrak{e}^3$
					$\mathfrak{e}^4$
	3	$T_2^3$	$\{X_1, X_2, X_3\}$	$\{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3]\}$	$\mathfrak{e}^2$
	4	$T_2^4$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4, [X_1, X_2], [X_1, X_3]\}$	$\mathfrak{e}^1$
3					$\mathfrak{e}^2$
	3	$T_3^3$	$\{X_1, X_2, X_3\}$	$\{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$	$\mathfrak{e}^0$
					$\mathfrak{e}^1$
					$\mathfrak{e}^2$
	4	$T_3^4$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4, [X_1, X_4], [X_2, X_4]\}$	$\mathfrak{e}^1$
	5	$T_3^5$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, [X_i, X_j]\}$	$\mathfrak{e}^1$
	6	$T_3^6$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$	$\mathfrak{e}^0$	$\mathfrak{e}^0$

TAB. 4.1 - Sous algèbre engendrée par un ensemble de champs antisymétriques - I

$X_k$ ne peuvent pas être engendrés par $L_\Delta$					
Rang $B_\Delta$	Rang $B_{\mathbb{R}}$	Type $T_v^r$	Ensemble $\{X\}$	sous-ensemble $\mathfrak{e}^1$	sous-algèbre engendrée $\mathfrak{S}_a$
0	$r \leq 3$	$T_0^r$	$\{X_1, \dots, X_r\}$	$\mathfrak{e}^0$	$\mathfrak{e}^r$
1	2	$T_1^2$	$\{X_1, X_2\}$	$\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$	$\mathfrak{e}^1$
					$\mathfrak{e}^2$
	3	$T_1^3$	$\{X_1, X_2, X_3\}$	$\{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2]\}$	$\mathfrak{e}^1$
					$\mathfrak{e}^0$
	4	$T_1^4$	$\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$	$\mathfrak{e}^0$	$\mathfrak{e}^0$
2	$r = 3, 4, 5$	$T_2^r$	$\{X_1, \dots, X_r\}$	$\{X, [X_i, X_j], i \neq j\}$	$\mathfrak{e}^1$

TAB. 4.2 - Sous algèbre engendré par un ensemble de champs antisymétriques - II

Comme indiqué dans le tableau ci-dessous [Che93], il existe une bijection entre les sous algèbres de Lie de  $\mathfrak{D}$  et les sous groupes de Lie de  $\mathbb{D}$ .

Bijection entre les sous groupes de Lie et les sous algèbres de Lie			
Dimension	$r_{\Delta}$	Les sous groupes	les sous algèbres
0	0	Élément neutre $e$	$\{0\}$
1	0	Translation suivant l'axe fixé $\exp(d\Omega\zeta)$	$\{\Omega\zeta\}$ .
	1	Rotation suivant l'axe fixé $\exp(\theta\zeta)$	$\{\zeta\}$ .
		Déplacement hélicoïdale $\exp(\theta(\zeta + p\Omega\zeta))$	$\{\zeta + p\Omega\zeta\}$ .
2	0	Translation plane $\exp(\Omega(a\zeta + b\eta))$	$\{\Omega\zeta, \Omega\eta\}$ .
	1	Déplacement cylindrique $\exp(\theta\zeta + d\Omega\zeta)$	$\{\Omega\zeta, \zeta\}$ .
3	0	Translation spatiale $\exp(\Omega(a\xi + b\eta + c\zeta))$	$\{\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta\}$ .
	1	Déplacement plan $\exp(\Omega(a\xi + b\eta)) \exp(\theta\zeta)$	$\{\Omega\xi, \Omega\eta, \zeta\}$ .
		Déplacement $\exp(\Omega(a\xi + b\eta)) \exp(\psi(\zeta + p\Omega\zeta))$	$\{\Omega\xi, \Omega\eta, \zeta + p\Omega\zeta\}$ .
	3	Rotation autour d'un point $\exp(\theta\xi + \phi\eta + \psi\zeta)$	$\{\xi, \eta, \zeta\}$ .
4	1	Déplacement $\exp(\Omega(a\xi + b\eta)) \exp(\psi(\zeta + c\Omega\zeta))$	$\{\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta, \zeta\}$ .
5		il n'existe pas	il n'existe pas
6	3	Déplacement libre $\exp(\Omega(a\xi + b\eta + c\zeta)) \exp(\theta\xi + \phi\eta + \psi\zeta)$	$\{\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta, \xi, \eta, \zeta\}$ .

## 4.6 Equation de fermeture d'ordre supérieur à 2

Dans la section précédente, on a présenté un algorithme pour évaluer le rang d'un ensemble de champs antisymétriques, il est aussi pratique quand on étudie l'équation de fermeture de l'ordre supérieur à 2, puisque les restrictions  $B_n(x^{(n)})$  des dérivées d'ordre  $n$  à  $(\mathbb{R}_q)^n$  sont dans





En effet, tout est analytique ici, les variétés comme les applications. Ainsi, les applications  $\mu_k$  sont analytiques et il en est donc de même de l'application  $\mu$ . Ainsi, on peut vérifier la dérivée d'ordre  $n$  de  $\mu$  en  $q_0$  est une application  $n$ -linéaire de  $(\mathbb{R}^m)^{(n)}$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{D})$  donnée par la formule suivante :

$$\mu_k^{(n)}(q_0) \cdot (x)^n = \sum_{j=1}^r \sum_{k_1 < \dots < k_j < k} \sum_{m_1 < \dots < m_j = n} \frac{n!}{m_1! \dots m_j!} (x_{k_1})^{m_1} \dots (x_{k_j})^{m_j} \text{ad}^{m_1} \mu_{k_1}(q_0), \dots \text{ad}^{m_j} \mu_{k_j}(q_0) \cdot \mu_k(q_0)$$

pour  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $k = 1 \dots, m$ .

La condition nécessaire et suffisante  $C_n$  représente finalement une condition sur le rang de certains vecteurs combinaisons linéaires particulières des  $\mu_k(q_0)$  et de leurs crochets de Lie.

En effet, chaque élément  $B_n(x^{(n)})$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$B_n(x^{(n)}) = F_n(x^{(n)}) + G_n(x^{(n)}) \quad \text{pour } F_n(x^{(n)}) \in \mathfrak{F}_q, G_n(x^{(n)}) \in \mathfrak{G}_q.$$

de plus,  $G_n(x^{(n)}) = g_n \nu_\rho$ , les conditions  $C_n$  s'écrivent  $g_n = 0$ .

D'autre part, si  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , et qui est choisie de façon comme dans les sections précédentes, c'est-à-dire que  $B_\Delta$  dépend d'une liste libre maximale de l'ensemble  $\mathcal{N}$ . Alors :

$$B_n(x^{(n)}) = \hat{a}_n^1 Y_1 + \hat{a}_n^2 Y_2 + \hat{a}_n^3 Y_3$$

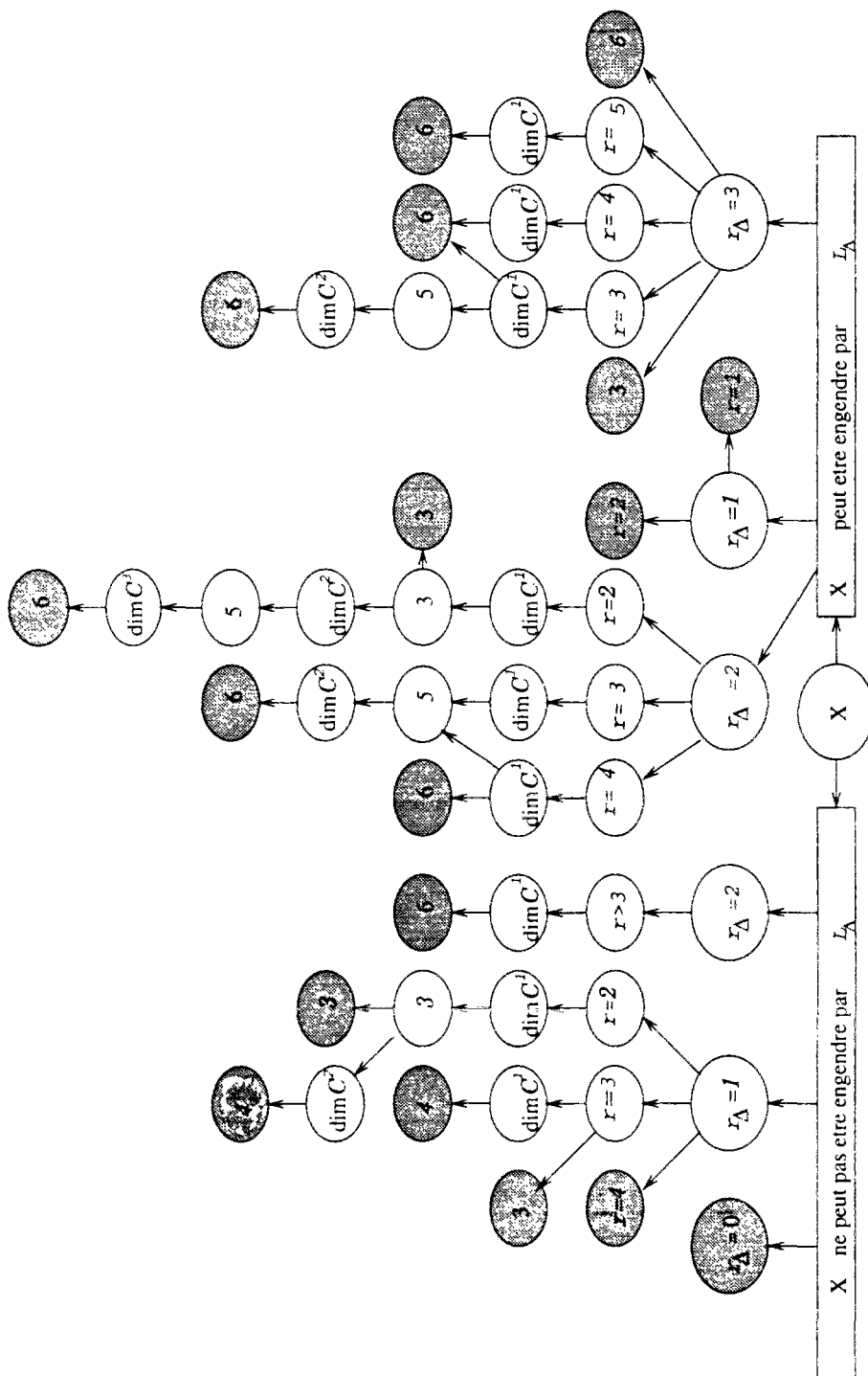
Les conditions deviennent :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \mathfrak{J}^o & & \\ a_2^{1o} & a_2^{2o} & a_2^{3o} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^{1o} & a_n^{2o} & a_n^{3o} \end{pmatrix} = r - r_\Delta \quad (4.28)$$

où  $\mathfrak{J}^o$  est la matrice constituée des parties duales des coordonnées des éléments en premiers ordre (élément de la matrice jacobienne) par rapport à la base  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ .

A priori, il parait naturel que les dérivées en tout ordre sont nécessaires mais, il existe un ordre fini pour un mécanisme concret (voir les exemples).

## 4.7 Conclusion



Les ellipses grises représentent les sous-algèbres engendrées,  $r$  est le rang de l'ensemble  $X$ ,  $r_\Delta$  est la dimension d'une liste libre maximale de  $X$ ,  $\dim C^i$  représente la dimension d'un sous ensemble engendré par le crochet de Lie du  $i$ -ème ordre. L'ordre maximal pour engendrer une sous-algèbre est 3 dans ce cas particulier  $\{X, [X, X]\} = 0$ .

FIG. 4.4 - Les sous-algèbres de Lie engendrées

$r = r_{\Delta} = 3$  et  $r = r_{\Delta} = 2$ , et  $r = r_{\Delta} = 2$ , les autres éléments outre que  $X_1, X_2$  sont tous une combinaison linéaire de  $L_{\Delta}$ . Les démonstrations se trouvent dans l'annexe A.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons proposé d'utiliser ce critère aux dérivées d'ordres supérieurs à un de l'équation de fermeture, ce qui nous permet d'obtenir les conditions pour que les mécanismes possèdent un degré de liberté mais, il s'agit peut être des calculs très compliqués et volumineux, nous n'avons donc pas pu les réaliser.

Dans le chapitre qui suit, nous allons présenter des mécanismes qui correspondent les tableaux de la page 108, c'est-à-dire que les mécanismes du type  $T_{r_{\Delta}}^r$ ,  $r$  est le rang de la matrice jacobienne, et  $r_{\Delta}$  est le nombre d'une liste libre maximale des éléments de la matrice jacobienne.



## Chapitre 5

# Problème de singularité

La conception des mécanismes possédant des propriétés cinématiques optimales a attiré l'attention des chercheurs depuis plusieurs années. En effet, il a été montré [SC82] que certaines propriétés de la matrice jacobienne du système, affectent directement la précision des mécanismes. Il est important d'éviter les configurations indésirables pour lesquelles :

(i) Soit le degré de liberté n'existe plus instantanément et le système est dégénéré et devient incontrôlable.

(ii) Soit la rigidité naturelle du système mécanique subit une grande dégradation.

(iii) Soit les forces articulaires peuvent devenir très importantes, ce qui présente un grand risque de détérioration du système [SG94].

Ceci explique, en grande partie, l'importance de la détermination des configurations singulières d'un mécanisme et pourquoi il faut les éviter lorsque c'est possible. Il est donc souhaitable de pouvoir les identifier dès la conception afin d'en minimiser l'impact.

Depuis des années, certains chercheurs ont travaillé sur les singularités des chaînes cinématiques fermées. Gausselin et Angeles ont montré que les singularités des chaînes cinématiquement fermées peuvent être divisées en trois groupes principaux. Leur méthode est basée sur la détermination des racines du déterminant de deux matrices jacobiennes. En effet, lorsque le nombre de degré de liberté d'un mécanisme devient assez grand, par exemple 5 ou 6, l'expression du déterminant de la matrice jacobienne devient très complexe. Pour cette raison certains chercheurs ont proposé des méthodes basées sur la théorie des vis [RMD92a], [RMD92b] et [DG93] sans nécessairement obtenir des expressions analytiques permettant d'exprimer les singularités.

Ainsi, dans tous les travaux réalisés jusqu'à présent, aucune expression analytique décrivant l'ensemble des singularités et obtenue à partir du déterminant n'a été vraiment exploitée.

L'objectif de cette partie est de représenter, dans l'espace euclidien ou parmi l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles, les ensembles de singularités des mécanismes cinématiquement fermés. Ces ensembles présentent un grand intérêt pour la conception des robots. La méthode utilisée ici consiste à annuler le déterminant de la matrice jacobienne du mécanisme en question en analysant sa forme par blocs de façon à simplifier le problème. On utilisera la méthode proposée dans le chapitre suivant en choisissant les paramètres indépendants (les entrées, dont le nombre est égal au degré de liberté) et les paramètres dépendants (les sorties).

## 5.1 Classification des singularités

Soit  $q$  le vecteur des coordonnées articulaires correspondant aux liaisons actionnées du mécanisme – composé des paramètres indépendants. Soit  $s$  le vecteur des liaisons articulaires aux liaisons passives – composé des paramètres dépendants.  $n = m - r$  est le nombre de degré de liberté :

$$s = [s_1, \dots, s_n]$$

$$q = [q_1, \dots, q_m]$$

Les éléments de  $s$  et de  $q$  peuvent être des angles dans le cas des articulations rotoïdes ou des longueurs dans le cas des articulations prismatiques.

Les vecteurs  $q$  et  $s$  sont aussi appelés vecteurs d'entrées et sorties respectivement. Ces entrées et ces sorties sont reliées par un système d'équations de contraintes qui peut être exprimé sous la forme suivante :

$$F(s, q) = 0 \quad (5.1)$$

La partie gauche de l'équation 5.1 est une fonction différentiable,  $0$  est le vecteur nul de dimension  $n$ , la dérivée par rapport au temps de 5.1 peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{A}\dot{s} + \mathbf{B}\dot{q} = 0 \quad (5.2)$$

où :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial F}{\partial s}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial F}{\partial q}$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$  qui dépendent de la configuration et sont alors appelées matrices jacobienues.

A partir de l'équation 5.2, Gosselin et Angeles ont dressés une classification des singularités des chaînes cinématiques fermées et ont mis en évidence 3 types de singularités dont l'interprétation physique est différente. Rappelons les brièvement : ces différents types de singularités se produisent respectivement lorsque

- (i) Seule la matrice  $\mathbf{B}$  est singulière,
- (ii) Seule la matrice  $\mathbf{A}$  est singulière,
- (iii) Les équations de positionnement (ou d'orientation) dégènèrent, c'est-à-dire que les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont toutes deux singulières.

Les configurations singulières sont liées à la notion de sous-variété, le cas où le mécanisme est dégénéré correspond mathématiquement au cas où l'ensemble des configurations cinématiquement admissible n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$  au voisinage de la configuration considérée.

### 5.1.1 Singularités de type I

Les Singularités de de type I se produisent lorsque :

$$\det(\mathbf{B}) = 0$$

Les configurations correspondantes à ce type I de singularité sont des configurations pour lesquelles le mécanisme est à une limite de son espace de travail ou une limite interne de son espace de travail qu'il divise deux zones où le nombre de solutions au problème géométrique inverse est différent. En d'autres termes, ce type de singularité se produit lorsque deux branches du problème

géométrique inverse se rencontrent. C'est-à-dire qu'en supposant les vitesses de sortie  $\dot{s}$  connue, on ne peut pas obtenir les vitesses d'entrées  $\dot{q}$ .

D'après les équations 5.1 et 5.2, et puisque le noyau de  $\mathbf{B}$  n'est pas réduit à zéro, il est possible de trouver des vecteurs non nuls  $\dot{q}$  qui produiront des vecteurs vitesses  $\dot{s}$  nuls. Certaines vitesses ne peuvent pas être imposées à certains corps associés. Ces derniers perdent alors 1 ou plusieurs degrés de liberté. D'après le principe de la dualité cinématique-statique[16], en présence de ces configurations singulières, les corps en question peuvent résister à une force et à un couple de grandeurs arbitraire dans une direction donnée.

### 5.1.2 Singularités de type II

Les singularités de type II se produisent lorsque la matrice  $\mathbf{A}$  devient singulière :

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (5.3)$$

Contrairement aux singularités de type I, les singularités de type II se produisent pour des configurations situées à l'intérieur de l'espace du travail et correspondent à l'ensemble des configurations où deux branches du problème géométrique directe se rencontrent. C'est-à-dire qu'en supposant les vitesses d'entrées  $\dot{q}$  connue, on ne peut pas obtenir les vitesses de sortie  $\dot{s}$ . Pour cette raison, ce type de singularité ne peut se produire que dans le cas des mécanismes fermés pour lesquels le problème géométrique directe admet une solution unique. D'après les équations 5.2 et 5.3 et puisque le noyau de la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas vide, on peut trouver des vecteurs vitesses non nuls  $\dot{q}$  qui correspondent à des vitesses nulles des actionneurs. Le mécanisme est alors dans une configuration où certains corps peuvent subir un mouvement infinitésimal même si les actionneurs sont bloqués. Il se produit dans ce cas, un gain d'un ou de plusieurs degrés de liberté et le système perd sa rigidité. Il devient alors incapable de supporter une force ou un couple dans une direction donnée.

### 5.1.3 Singularités de type III

Ce type de singularité est d'une nature légèrement différente des deux premiers puisqu'il requiert certaines relations spéciales entre les paramètres architecturaux. En d'autres termes, seulement certaines architectures spéciales donneront lieu à ce type de singularité qui est aussi appelé singularité architecturales.

En présence des configurations présentant cette singularité, il est possible au corps mobile de subir un mouvement fini lorsque les actionneurs sont bloqués ou encore de ne pas produire de mouvement du corps mobile pour un mouvement fini des actionneurs. Dans les deux cas, le mécanisme est pratiquement inutilisable car il ne peut pas travailler dans une partie importante de son espace de travail ou dans tout son espace de travail. Ce type de singularité peut être évité au moment de la conception.

En effet, en dehors des entrées et des sorties, il existe encore des variables intermédiaires  $w$  qui est de dimension  $l = m - 2n$

## 5.2 Définition de la famille d'équations de fermeture

En fonction de la méthode exposée au chapitre précédent, les équations de contraintes cinématiques s'écrivent sous forme analytique, il sera donc raisonnable d'exprimer les paramètres dépendants



(ou les sorties) et les paramètres intermédiaires par les paramètres indépendants (ou les entrées) de la façon suivante :

$$\begin{cases} W_1(q, w_1) = 0, \\ W_2(q, w_1, w_2) = 0, \\ \dots \\ W_l(q, w_1, \dots, w_l) = 0, \\ S_1(q, w, s_1) = 0, \\ S_2(q, w, s_1, s_2) = 0, \\ \dots \\ S_n(q, w, s_1, \dots, s_n) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

La répartition des paramètres du système en paramètres indépendants, paramètres intermédiaires et paramètres de sorties n'est pas unique, cela dépend des variables entrées choisies. A priori, on a  $C_m^n = \frac{m!}{n!r!}$  façons possibles de présenter les  $n$  dernières équations, mais elles ne sont peut-être pas toutes de bonnes représentations.

Pour simplifier les notations, nous confondons  $W_j(q, w_1, \dots, w_j) = 0$  et  $W_j = 0$ , pour  $j = 1, \dots, l$ ;  $S_k(q, w, s_1, \dots, s_k) = 0$  et  $S_k = 0$ , pour  $k = 1, \dots, n$ . De plus, on note  $W$  la famille de fonctions composées des fonctions  $(W_1, \dots, W_l)$  et  $S$  la famille de fonctions composées des fonctions  $(S_1, \dots, S_n)$ . Alors, les équations précédentes sont exprimées par :

$$W = 0, \quad S = 0 \quad (5.5)$$

Ces deux familles d'équations ont la forme triangulaire par rapport aux paramètres intermédiaires et aux paramètres dépendants respectivement, c'est-à-dire que les deux équations  $W_{i+1} = 0$  ou  $S_{i+1} = 0$  ne contient qu'un paramètre intermédiaire ou un paramètre indépendant de plus par rapport à l'équation  $W_i = 0$  ou  $S_i = 0$  respectivement.

Les équations de fermeture explicite sont exprimée dans la définition ci-dessous.

**Proposition 5.1** Soient les applications  $W : \mathbb{R}^{n+l} \rightarrow \mathbb{R}^l$  et  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on dit que l'application  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'équation de fermeture explicite, de plus  $F = S \circ W$  :

On peut définir l'ensemble de configurations cinématiquement admissibles  $M \in \mathbb{R}^m$  sous forme :

$$M = \{q \in \mathbb{R}^m \mid w = 0, S = 0\}$$

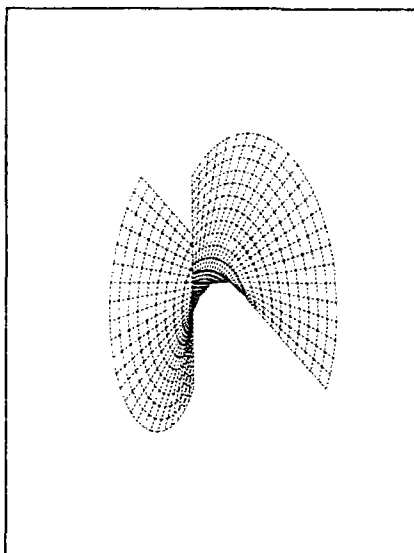
On peut également définir l'ensemble de configurations actionnaires cinématiquement admissible  $M^a$  par :

$$M^a = \{q \in \mathbb{R}^n \mid W = 0, S = 0\}$$

Il peut exister des points singuliers artificiels ou points singuliers du système de coordonnées choisies; ces points singuliers disparaissent quand on fait des changements de coordonnées et correspondent aux singularités de type I ou type II.

#### Exemple

Pour mieux connaître la classification de types des singularités, on considère la surface cylindroïde :  $z(x^2 + y^2) - 2mxy = 0$ , elle est différentiable en tout ses points, elle est une bonne sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . Si l'on veut la présenter explicitement avec :  $z = \frac{2mxy}{x^2 + y^2}$ , on obtient donc  $x = y = 0$  sont des points singuliers de cette surface, ce qui est en contradiction que cette surface est une sous variété de  $\mathbb{R}^3$ .

FIG. 5.1 - *Cylindroïde*

On applique la méthode de classification de singularité à  $z(x^2 + y^2) - 2mxy = 0$ .

Si l'on prend  $x, y$  comme entrées,  $y$  et  $z$  comme sorties, on a :

$$\begin{cases} y = y \\ z = \frac{2mxy}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

on obtient la forme linéaire comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^2 + y^2)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2my(x^2 - y^2) & 2mx(x^2 - y^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

alors  $\det(\mathbf{B}) = 0 \Rightarrow y = 0$  et  $y = \pm x$  sont des points singuliers de type I;

$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow x = y = 0$  sont des points singuliers de type II;

il n'existe pas de points singuliers de type III.

**Définition 5.1** *On dit qu'un mécanisme est régulier s'il est régulier en toutes les configurations, c'est-à-dire que l'ensemble de points singuliers ne contient pas ceux de type III.*

Autrement dit, la définition précédente est équivalente à :

**Proposition 5.2** *S'il existe toujours au moins une présentation sans singularité pour chaque configuration, alors le mécanisme est régulier.*

### 5.2.1 Matrice jacobienne

Puisque la façon de choisir les paramètres indépendants n'est pas unique, les représentations des équations de fermeture ne sont pas uniques. A priori, il peut exister des fausses singularités, c'est-à-dire, des singularités artificielles du type I. La méthode de classification permet de distinguer ces singularités artificielles (qui peuvent être évitées en choisissant les paramètres

indépendants adéquats) et les singularités du comportement intrinsèque du mécanisme (qui ne dépendent que de sa structure).

Mais pour les mécanisme bouclés, il n'est pas toujours facile de calculer les matrices jacobiennes par rapport aux paramètres indépendants et paramètres dépendants (c'est-à-dire, les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  dans 5.2) et ainsi de classifier les différents types de singularités rencontrées. En raison de la présence des paramètres intermédiaires, qu'il faut d'éliminer dans les équations 5.4, le calcul et l'expression de la matrice  $\mathbf{B}$  deviennent très complexes.

Dans ce paragraphe, on va proposer un algorithme dans le but de simplifier l'analyse des configurations singulières du mécanisme étudié, ce qui nous ramène à étudier les matrices jacobiennes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de l'équation de fermeture associée 5.1. En effet, on peut réécrire la forme différenciée des équations de contraintes 5.1 par :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W}{\partial w} \dot{w} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial S}{\partial s} \dot{s} = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Les équations précédentes s'écrivent plus précisément sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W_1}{\partial w} \dot{w}_1 = 0 \\ \frac{\partial W_2}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W_2}{\partial w_1} \dot{w}_1 + \frac{\partial W_2}{\partial w_2} \dot{w}_2 = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial W_l}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W_l}{\partial w} \dot{w} = 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S_1}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial S_1}{\partial s_1} \dot{s}_1 = 0 \\ \frac{\partial S_2}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S_2}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial S_2}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \dots + \frac{\partial S_2}{\partial s_2} \dot{s}_2 = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S_l}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S_l}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial S_l}{\partial s} \dot{s} = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathbf{B}' \cdot \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} \cdot \dot{s} = 0 \quad (5.8)$$

avec

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial q} & \frac{\partial W}{\partial w} \\ \frac{\partial S}{\partial q} & \frac{\partial S}{\partial w} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \frac{\partial S}{\partial s}$$

$\mathbf{B}'$  est une matrice de dimension  $(n+l) \times (n+l)$  qui est composée de quatre sous matrices dont  $\frac{\partial W}{\partial q}$  est une matrice de dimension  $l \times n$ ,  $\frac{\partial W}{\partial w}$  est une matrice triangulaire de dimension  $l \times l$ ,  $\frac{\partial S}{\partial q}$  est une matrice carrée de dimension  $n$ ,  $\frac{\partial S}{\partial w}$  est de dimension  $n \times l$ .

$\mathbf{A}'$  est une matrice de dimension  $n \times n$ .

On peut écrire les matrices  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{A}'$  sous forme plus précise, c'est-à-dire :

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial q_1^a} & \dots & \frac{\partial W_1}{\partial q_n} & \frac{\partial W_1}{\partial q_1^i} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \frac{\partial W_l}{\partial q_1^a} & \dots & \frac{\partial W_l}{\partial q_n} & \frac{\partial W_l}{\partial q_1^i} & \dots & \frac{\partial W_l}{\partial w_{l-1}} & \frac{\partial W_l}{\partial q_1^i} \\ \frac{\partial S_1}{\partial q_1^a} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial q_n} & \frac{\partial S_1}{\partial w_1} & \dots & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial w_l} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \frac{\partial S_n}{\partial q_1^a} & \dots & \frac{\partial S_n}{\partial q_n} & \frac{\partial S_n}{\partial q_1^i} & \dots & \dots & \frac{\partial S_n}{\partial w_l} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial s_1} & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & 0 \\ & & & \\ \frac{\partial S_n}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial S_n}{\partial s_n} & \frac{\partial S_n}{\partial s_n} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les matrices jacobienes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , il faut éliminer les dérivées des paramètres intermédiaires par rapport aux paramètres indépendants. Il suffit d'utiliser la formule de la dérivée des fonctions implicites en supposant  $\frac{\partial W}{\partial w}$  inversible :

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial q_k} = - \left( \frac{\partial W_1}{\partial w_1} \right)^{-1} \frac{\partial W_1}{\partial q_k} & \text{pour } k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial W_j}{\partial q_k} = - \left( \frac{\partial W_j}{\partial w_j} \right)^{-1} \left( \frac{\partial W_j}{\partial q_k} + \sum_{j' < j} \frac{\partial W_j}{\partial w_{j'}} \frac{\partial W_{j'}}{\partial q_k} \right) & \text{pour } j = 2, \dots, l \end{cases} \quad (5.9)$$

Alors, on peut calculer la matrice  $\mathbf{B}$  en déterminant les dérivées des équations  $S_k = 0$  par rapport aux paramètres indépendants  $q = (q_1, \dots, q_n)$  :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial S}{\partial q} + \frac{\partial S}{\partial w} \frac{\partial W}{\partial q} \quad \text{pour } k, k' = 1, \dots, n. \quad (5.10)$$

On remplace  $\frac{\partial W}{\partial q}$  par son expression, on a :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial S}{\partial q} - \frac{\partial S}{\partial w} \left( \frac{\partial W}{\partial w} \right)^{-1} \frac{\partial W}{\partial q} \quad (5.11)$$

Plus précisément :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial q_1} + \sum_j \frac{\partial S_1}{\partial w_j} \frac{\partial W_j}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial q_n} + \sum_j \frac{\partial S_1}{\partial w_j} \frac{\partial W_j}{\partial q_n} \\ & & \\ & & \\ \frac{\partial S_n}{\partial q_1} + \sum_j \frac{\partial S_n}{\partial w_j} \frac{\partial W_j}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial S_n}{\partial q_n} + \sum_j \frac{\partial S_n}{\partial w_j} \frac{\partial W_j}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

D'autre part, on obtient la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  par rapport aux paramètres dépendants  $s$  :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

**Proposition 5.3** *L'analyse des points singuliers associés aux matrices jacobienes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est équivalente à celle des  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$ .*

**Démonstration :** Puisque  $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ , il suffit de montrer que l'inversibilité de la matrice  $\mathbf{B}$  est équivalente à celle de  $\mathbf{B}'$ .

D'autre part, la matrice  $\mathbf{B}'$  est composée de quatre sous matrices dont  $\frac{\partial W}{\partial w}$  est supposée inversible, considérons la matrice  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^{-1} & -\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^{-1} \frac{\partial W}{\partial q} \end{pmatrix}$$

Puisque  $\mathbf{H}$  est une matrice inversible, alors :

$$\mathbf{B}' \text{ est inversible} \iff \mathbf{B}'\mathbf{H} \text{ est inversible}$$

$\mathbf{B}'\mathbf{H}$  est exprimée par :

$$\mathbf{B}'\mathbf{H} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial S}{\partial w} \left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^{-1} & \frac{\partial S}{\partial q} - \frac{\partial S}{\partial w} \left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^{-1} \frac{\partial W}{\partial q} \end{pmatrix}$$

de plus on a :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial S}{\partial q} - \frac{\partial S}{\partial w} \left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^{-1} \frac{\partial W}{\partial q}$$

alors

$$\mathbf{B}'\mathbf{H} \text{ est inversible} \iff \mathbf{B} \text{ est inversible}$$

finalement :

$$\mathbf{B} \text{ est inversible} \iff \mathbf{B}' \text{ est inversible}$$

■

Pour analyser les points singuliers, il est donc équivalent d'étudier la matrice  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$ .

**Corollaire 5.1** *Si  $\frac{\partial W}{\partial w}$  est inversible, les deux systèmes linéaires 5.2 et 5.6 sont équivalents.*

### 5.2.2 Analyse des vitesses

En utilisant la méthode analytique, on peut exprimer les paramètres dépendants par les paramètres indépendants. Les vitesses des paramètres dépendants  $\dot{s}$  en fonction des paramètres indépendants  $q$  et leurs vitesses  $\dot{q}$  ( en général, ils sont donnés, par exemple, comme les vitesses imposées par des actionneurs) peuvent être obtenus en dérivant directement les équations 5.1. si l'on utilise la formule de dérivation des fonctions implicites, on obtient :

$$\dot{s} = - \left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S}{\partial w} \dot{w}\right), \quad (5.12)$$

ce qu'on peut aussi exprimer sous forme :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = - \left( \frac{\partial S_1}{\partial s_1} \right)^{-1} \left( \frac{\partial S_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S_1}{\partial w} \dot{w} \right) \\ \dot{s}_k = - \left( \frac{\partial S_k}{\partial s_k} \right)^{-1} \left( \frac{\partial S_k}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S_k}{\partial w} \dot{w} + \sum_{k' < k} \frac{\partial S_k}{\partial s_{k'}} \dot{s}_{k'} \right) \end{cases} \quad \text{avec } k = 1, \dots, n. \quad (5.13)$$

où les  $\dot{w}$  sont définies par :

$$\dot{w} = - \left( \frac{\partial W}{\partial w} \right)^{-1} \frac{\partial W}{\partial q} \dot{q}, \quad (5.14)$$

ce qu'on peut aussi exprimer sous forme :

$$\begin{cases} \dot{W}_1 = - \left( \frac{\partial W_1}{\partial w_1} \right)^{-1} \frac{\partial W_1}{\partial q} \dot{q} \\ \dot{W}_j = - \left( \frac{\partial W_j}{\partial w_j} \right)^{-1} \left( \frac{\partial W_j}{\partial q} \dot{q} + \sum_{j' < j} \frac{\partial W_j}{\partial w_{j'}} \dot{w}_{j'} \right) \end{cases} \quad \text{avec } k = 1, \dots, n. \quad (5.15)$$

Si l'on remplace  $\dot{w}$  par son expression précédente, on obtient le vecteur des vitesses  $\dot{q}$  des paramètres dépendants en fonction du vecteur des vitesses  $\dot{s}$  des paramètres indépendants :

$$\dot{s} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \dot{q} \quad (5.16)$$

D'après l'équation précédente, lorsque le mécanisme se trouve dans une configuration singulière de type II (c'est-à-dire,  $\det(\mathbf{A}) = 0$ ), des vitesses  $\dot{q}$  nulles ne correspondent peut-être pas à des vitesses  $\dot{s}$  nulles. Lorsque le mécanisme se trouve dans une configuration singulière de type I (c'est-à-dire,  $\det(\mathbf{B}) = 0$ ), des vitesses  $\dot{q}$  non nulles correspondent peut-être à des vitesses  $\dot{s}$  nulles. Lorsque le mécanisme se trouve dans une configuration singulière de type III (c'est-à-dire,  $\det(\mathbf{A}) = 0$  et  $\det(\mathbf{B}) = 0$ ), le mécanisme devient incontrôlable, l'équation  $\mathbf{A}\dot{s} + \mathbf{B}\dot{q} = 0$  est dégénérée.

### 5.2.3 Analyse des accélérations

En dérivant les équations 5.8, on peut obtenir directement le vecteur des accélérations des paramètres dépendants en fonction des vecteurs des vitesses  $\dot{q}$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{s}$  et des vecteurs des accélérations des paramètres indépendants  $\ddot{q}$  :

$$\begin{aligned} \ddot{s} = & - \left( \frac{\partial S}{\partial s} \right)^{-1} \left( 2 \frac{\partial^2 S}{\partial s \partial q} \dot{q} \cdot \dot{s} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial s \partial w} \dot{w} \cdot \dot{s} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial w \partial q} \dot{q} \cdot \dot{w} \right) \\ & - \left( \frac{\partial S}{\partial s} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial^2 q} \dot{q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial^2 S}{\partial^2 w} \dot{w} \cdot \dot{w} + \frac{\partial^2 S}{\partial^2 s} \dot{s} \cdot \dot{s} + \frac{\partial S}{\partial q} \ddot{q} + \frac{\partial S}{\partial w} \ddot{w} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

De plus, les accélérations des paramètres intermédiaires sont déterminées par :

$$\ddot{w} = - \left( \frac{\partial W}{\partial w} \right)^{-1} \left( 2 \frac{\partial^2 S^i}{\partial w \partial q} \dot{q} \cdot \dot{w} + \frac{\partial^2 S^i}{\partial^2 q} \dot{q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial^2 S^i}{\partial^2 w} \dot{w} \cdot \dot{w} + \frac{\partial S^i}{\partial q} \ddot{q} \right) \quad (5.18)$$



## Chapitre 6

# Solution analytique des mécanismes bouclés – I

L'analyse des singularités des systèmes de solides rigides en boucles fermés est un problème très difficile. Les études des chapitres précédents ont utilisé la théorie des vis et les méthodes différentielles, avec lesquelles le problème n'est pas complètement résolu. Il est donc utile de faire une recherche de solutions analytiques (cinématique inverse) afin d'aboutir à des résultats complets.

Dans le chapitre 4, nous avons proposé une méthode d'évaluation du rang d'un ensemble de champs antisymétriques, nous allons présenter des mécanismes concrets qui correspondent aux cas des tableaux 4.1 et 4.2.

### 6.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons présenter des méthodes analytiques permettant de résoudre des équations de fermeture des mécanismes. L'objectif est de générer à partir d'une équation de fermeture exprimée dans le groupe des déplacements un système d'équations scalaires équivalent. Dans la littérature sur la cinématique des solutions analytiques sont fréquemment présentées mais, à notre connaissance le problème d'équivalence stricte mathématique entre l'équation de fermeture et le système des équations scalaires reste souvent de côté, ce qui peut donner lieu à l'apparition de solutions étrangères.

L'obtention des équations scalaires indépendantes à partir de l'équation de fermeture utilise les formes bilinéaires de Klein et de Killing, le produit intérieur dual et le crochet de Lie définis dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$  (voir définition 1.11).

Les méthodes qu'on va proposer sont appliquées aux mécanismes constitués de sous mécanismes plans (ayant des axes parallèles). On distingue différents cas :

- Le premier cas concerne les mécanismes hélicoïdaux, tous les axes sont parallèles.
- Le deuxième cas concerne les mécanismes constitués par deux sous-mécanismes ou branches; cette structure est souvent utilisée dans les robots parallèles.
- Dans le troisième cas, on a traité les mécanismes à trois branches, structure très souvent utilisée en robotique dont le comportement dynamique offre des avantages. Ce point est également lié à l'analyse des singularités des trois rotations ou trois déplacements problème



bien connu dans les cas particuliers des angles d'Euler et de Bryant, et on donne une solution générale. On montre notamment qu'il existe une condition sur les positions relatives des trois axes qui assurent l'absence de singularité, et l'on exprime l'angle est équivalent à trois angles considérés.

Les trois premiers cas sont présentés dans ce chapitre, le dernier cas est présenté au chapitre qui suit. À la fin de ces deux chapitres, on présente des exemples d'application :

- Séparation des paramètres articulaires en paramètres articulaires indépendants (les entrées), paramètres articulaires dépendants (les sorties) et paramètres articulaires intermédiaires.
- Génération des équations scalaires indépendantes et expression des paramètres dépendants en fonction des paramètres indépendants.
- Recherche des configurations singulières et analyse de singularités.

## 6.2 Présentation des problèmes

Dans l'étude des mécanismes à structure bouclée, la détermination de la variété des configurations admissibles n'est pas a priori directement envisageable, en effet l'ensemble des configurations admissibles n'est pas toujours une sous variété de  $\mathbb{R}^m$ .

Considérons un mécanisme dont on connaît simplement la nature des liaisons, et dont on connaît au moins le degré de liberté  $r$  aux points réguliers, les problèmes à résoudre peuvent être formulés en ces termes :

- Découpage de l'équation de fermeture en deux parties : la partie contenant les rotations et la partie contenant les translations;
- Représentation des paramètres de sorties en fonction des paramètres d'entrées;
- Classification des singularités avec la nouvelle forme de matrice jacobienne.

On considère qu'un mécanisme  $\mathcal{S}$  est constitué par  $m$  corps  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$  reliés entre eux par des liaisons holonomes régulières  $\ell_i$ , pour  $i = 1, \dots, m$  et dont la structure est bouclée. A chaque liaison  $\ell_i$  est associée un sous groupe de Lie de  $\mathbb{D}$  dont l'algèbre de Lie est une sous-algèbre de  $\mathcal{D}$ . Pour permettre une analyse plus complète, on suppose a priori que chaque liaison  $\ell_i$  est une liaison cylindrique avec un paramètre de rotation et un paramètre de translation suivant le même axe. On choisit les repères  $(O_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ , d'orientation directe, liés à chacun des corps du mécanisme.  $(o_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$  est liée au premier corps qui est le corps de référence (en général fixé). La fonction de fermeture (chapitre 2) reste toujours valable.

On continue utiliser les même notations que dans les chapitres précédents :

- $M$  est l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles de  $\mathcal{S}$ .
- $\alpha \in I_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ , et  $q_\alpha$  décrit la famille des paramètres articulaires dépendants.
- $j \in I_2 = (j_1, \dots, j_{n-r})$ , et  $q_j$  décrit la famille des paramètres articulaires indépendants.
- $\exp(q_i \xi_i) \circ \exp(\epsilon d_i \xi_i) = \exp((q_i + \epsilon d_i) \xi_i)$  est le déplacement d'une liaison  $\ell_i$ , dont  $\xi_i$  est le générateur de déplacements.

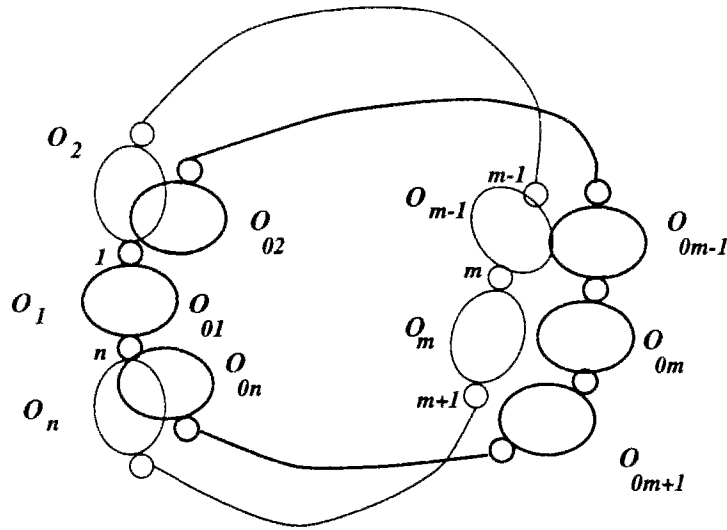


FIG. 6.1 - déplacement d'une boucle

$\cdot L(\mathfrak{D})$  est l'ensemble des applications adjointes ( $\{Ad A = A_\star \mid A \in \mathfrak{D}\}$ ).

L'équation de fermeture d'un système bouclé peut aussi se traduire en terme de représentations adjointes :

**Proposition 6.1** *L'ensemble des configurations cinématiquement admissibles  $M$  peut être représenté par :  $\{q \in \mathbb{R}^m \mid F(q) = 1\}$  où  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow L(\mathfrak{D})$  est défini par :*

$$F(q) = A_{1\star} \circ A_{2\star} \circ \cdots \circ A_{m\star} \quad (6.1)$$

**Démonstration :** En effet, deux déplacements sont égaux si et seulement si leur adjointe sont égaux. D'autre part, si  $f(q) = A_1(q) \circ A_2(q) \circ \cdots \circ A_m(q)$ , alors  $F(q) = A_{1\star}(q) \circ A_{2\star}(q) \circ \cdots \circ A_{m\star}(q)$ .

■

Puisque notre but est de faire le découpage des paramètres indépendants et les paramètres dépendants, il est donc utile de présenter la proposition suivante.

**Proposition 6.2** *Soient  $X \in \mathfrak{D}$ ,  $R \in L(\mathfrak{D})$ , alors :*

$$R \circ ad X \circ R^\star = ad(R \circ X) \quad (6.2)$$

où  $R^\star$  est transposée de  $R$ .

**Démonstration :** On applique la partie gauche de cette équation à  $Y \in \mathfrak{D}$ , en utilisant la définition 1.12 :

$$R \circ ad(X) \circ R^\star \cdot Y = R \circ [X, R^\star \cdot Y] = [R \cdot X, Y] = ad(R \cdot X) \cdot Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}$$

■

Si l'on applique la proposition précédente à une translation  $T(d\Omega\xi) = \mathbf{1} + \epsilon d\text{ad}(\Omega\xi)$ , alors on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 6.1** *Soient  $\xi \in \mathfrak{D}$ ,  $R \in L(\mathfrak{D})$ , alors :*

$$R \circ T(d\Omega\xi) \circ R^* = T(Rd\Omega\xi)$$

### 6.2.1 Déplacement d'un mécanisme fermé

On considère le mécanisme fermé indiqué sur la figure 6.1, son déplacement peut être exprimé dans le langage de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ . Dans la configuration de référence 6.1 (la boucle dessinée avec des lignes grasses). Les vecteurs  $\overrightarrow{o_{10}o_{20}}$ ,  $\overrightarrow{o_{20}o_{30}}$ ,  $\dots$ ,  $\overrightarrow{o_{m-10}o_{m0}}$  sont dans  $\mathbb{E}$  peuvent être considérés comme des translations suivant les axes orientés par les vecteurs unitaires  $\frac{\overrightarrow{o_{10}o_{20}}}{\|\overrightarrow{o_{10}o_{20}}\|}$ ,  $\frac{\overrightarrow{o_{20}o_{30}}}{\|\overrightarrow{o_{20}o_{30}}\|}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\overrightarrow{o_{m-10}o_{m0}}}{\|\overrightarrow{o_{m-10}o_{m0}}\|}$  dont les longueurs invariables sont  $\|\overrightarrow{o_{10}o_{20}}\|$ ,  $\dots$ ,  $\|\overrightarrow{o_{m-10}o_{m0}}\|$  respectivement. On posera :

$$a_i = \|\overrightarrow{o_{i0}o_{i+10}}\| = \|\overrightarrow{o_i o_{i+1}}\| \quad \text{pour } i = 1, \dots, m$$

$a_i$  est la distance constante entre les couples  $\ell_i$  et  $\ell_{i+1}$ . On note les vecteurs unitaires par :

$$u_{i0} = \frac{\overrightarrow{o_{i0}o_{i+10}}}{a_i}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, m$$

on les considère comme des axes suivant lesquels qu'il n'y a qu'une rotation constante égale à l'angle entre deux générateurs  $\xi_i$  et  $\xi_{i+1}$  et une translation constante  $a_i$ , qui ne dépendent que de la structure du mécanisme. Cette représentation est celle de Denavit-Hartenberg. Nous allons la relier à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ .

On définit  $U_{i0}$ , avec  $i = 1, \dots, m$ , on a :

$$U_{i0} \in \mathfrak{D} \quad \text{tel que} \quad U_{i0}(p) = u_{i0} \wedge \overrightarrow{o_{i0}p} \quad \text{pour } p \in \mathcal{E}.$$

alors  $U_{i0} \in \mathcal{Z}_{10}$ , c'est-à-dire  $U_{i0}(o_{i0}) = 0$ .

Après avoir subi un déplacement 6.1 (la boucle avec des lignes non grasses), si  $\overrightarrow{o_i o_{i+1}} = u_i$ , de plus, on a :

$$U_i \in \mathfrak{D} \quad \text{tel que} \quad U_i(p) = u_i \wedge \overrightarrow{o_i p} \quad \text{pour } p \in \mathcal{E}.$$

alors  $U_i \in \mathcal{Z}_o$ , c'est-à-dire  $U_i(o_i) = 0$ .

Si  $R_i$  représente le déplacement suivant le générateur  $\xi_i$  autorisé par le couple  $\ell_i$ , par rapport à la base  $B_i$ , alors le déplacement  $R_i$  par rapport à la base  $B_{i-1}$  est exprimé par la relation suivante :

$$T_{i-1}(a_{i-1}\Omega U_{i-1}) * R_i T_{i-1}^{-1}(a_{i-1}\Omega U_{i-1})$$

C'est -à -dire que  $T_{i-1}$  est considérée comme la matrice de passage de la base  $B_i$  à la base  $B_{i-1}$ .

On a alors :

$$\begin{cases} U_1 = R_1 \cdot U_{10} \\ U_2 = R_1 T_1 R_2 \cdot U_{20} \\ \dots \\ U_m = R_1 T_1 R_2 T_2 \dots R_m U_{m0} \end{cases} \quad (6.3)$$

De plus :

$$\begin{cases} \xi_1 = R_1 T_1 \xi_{10} \\ \xi_2 = R_1 T_1 R_2 \xi_{20} \\ \dots \quad \dots \\ \xi_m = R_1 T_1 R_2 T_2 \dots R_m \xi_{m0} \end{cases} \quad (6.4)$$

L'équation de fermeture 6.1 est équivalente à l'équation suivante :

$$R_1 R_2 \dots R_m = \mathbf{1} \quad (6.5)$$

Pour faire le découpage entre les rotations et les translations, on écrit  $R_i$  sous la forme suivante :

$$R_i = \mathbf{R}_i(q_i, \xi_m) T_i(\epsilon(d_i \xi_i + a_i U_i)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (6.6)$$

Cela signifie que  $R_i$  est composé d'une rotation pure  $\mathbf{R}_i = \exp(q_i, \xi_i)_*$  et deux translations  $T(\epsilon d_i \xi_i)$ ,  $T(\epsilon a_i U_i)$ , puisque le sous-groupe des translations est commutatif, on a le droit d'écrire les deux translations sous la forme :  $T_i(\Omega(d_i \xi_i + a_i U_i)) = T_i(\Omega \mathcal{U}_i)$ .

Pour analyser le déplacement d'un mécanisme, la proposition suivante est nécessaire.

**Proposition 6.3** *L'équation de fermeture d'un mécanisme fermé est équivalente aux équations suivantes :*

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \dots \mathbf{R}_m = \mathbf{1} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 (\dots (\mathbf{R}_m \mathcal{U}_m + \mathcal{U}_{m-1}) + \dots) + \mathcal{U}_1) = \mathbf{0} \quad \text{avec } \mathcal{U}_i \in \mathcal{Z}_o, \quad (6.8)$$

où  $\mathcal{U}_i = d_i \xi_i + a_i U_i$ .

**Démonstration :** D'après l'équation de fermeture, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \mathbf{R}_1 T_1(\Omega \mathcal{U}_1) \mathbf{R}_2 T_2(\Omega \mathcal{U}_2) \dots \mathbf{R}_m T_m(\Omega \mathcal{U}_m) \\ &= \mathbf{R}_1 (\mathbf{1} + \text{ad}(\Omega \mathcal{U}_1)) \dots \mathbf{R}_m (\mathbf{1} + \text{ad}(\Omega \mathcal{U}_m)) \end{aligned}$$

alors :

$$\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m + (\mathbf{R}_1 \text{ad}(\Omega \mathcal{U}_1) \mathbf{R}_2 \dots \mathbf{R}_m + \dots + \mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m \text{ad}(\Omega \mathcal{U}_m)) = \mathbf{1}$$

or, on a :

$$\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m = \mathbf{1} \quad (6.9)$$

la partie duale nous donne :

$$\Omega (\mathbf{R}_1 \text{ad}(\Omega \mathcal{U}_1) \mathbf{R}_1^* + \dots + \mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m (\text{ad} \Omega \mathcal{U}_m) (\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m)^*) = 0$$

D'après la proposition 6.2, on obtient :

$$\epsilon \text{ad} (\mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2 + \dots + \mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m \mathcal{U}_m) = 0$$

Puisque  $\mathbf{R}_i$  ne contient que la partie rotoïde, on obtient la proposition. ■

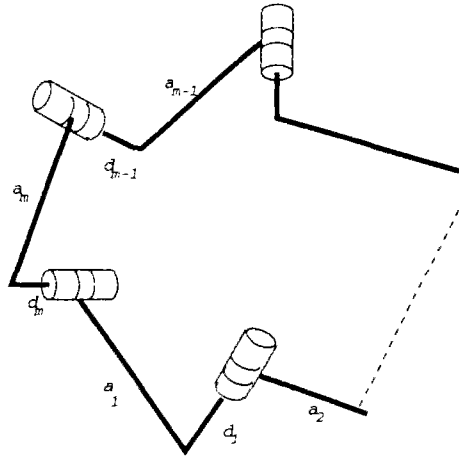


FIG. 6.2 - La fermeture d'une boucle

### 6.3 Mécanismes plans et hélicoïdaux

Dans cette partie, on va étudier les solutions analytiques des mécanismes hélicoïdaux. Les mécanismes plans sont constitués des axes parallèles et des couples rotoïdes, les mécanismes hélicoïdaux sont ceux qui contiennent des couples cylindriques. Les mécanismes plans sont donc des cas particuliers des mécanismes hélicoïdaux.

On continue à utiliser les notations du chapitre 2.

Considérons un mécanisme hélicoïdale, reprenons son équation de fermeture :

$$\mathbf{R}_1 \circ \cdots \circ \mathbf{R}_m = \mathbf{1} \quad (6.10)$$

qui est équivalente aux équations suivantes en utilisant la proposition 6.3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_m &= \mathbf{1} \\ \mathbf{R}_1(\mathcal{U}_1 + \mathbf{R}_2(\mathcal{U}_2 + \cdots + \mathbf{R}_m \mathcal{U}_m) \cdots) &= \mathbf{0} \quad \text{avec } \mathcal{U}_i = a_i U + d_i \xi. \end{aligned}$$

A chaque couple  $\ell_i$  est associé un repère orthonormé, à partir de ce repère, on peut construire une base  $B_i$  de  $\mathcal{D}$ . De plus, on définit  $U_i = U = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t$ ,  $\xi_i = \xi = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$  par rapport à la base  $B_i$ .

$\mathbf{R}_i$  est alors une rotation autour de  $\xi$  par rapport à la base  $B_i$ , dont le paramètre articulaire est  $q_i$ , et ainsi  $\mathbf{R}_i \xi = \xi$ . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_m &= \exp(q_1 + \cdots + q_m, \xi) \star = \mathbf{1} \\ (d_1 + \cdots + d_m) \xi + \mathbf{R}_1(a_1 U + \mathbf{R}_2(a_2 U + \cdots + \mathbf{R}_m a_m U) \cdots) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{cases} q_1 + \cdots + q_m = 0 \\ d_1 + \cdots + d_m = 0 \\ \mathbf{R}_1(a_1 U + \mathbf{R}_2(a_2 U + \cdots + \mathbf{R}_m a_m U) \cdots) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.11)$$

#### 6.3.1 Exemples des mécanismes plans et hélicoïdaux

##### 6.3.1.1 Mécanismes constitués de deux corps rigides

Dans ce cadre, on considère lorsque  $m = 2$ , l'équation de fermeture 6.10 devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{1} \\ \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 + \mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2 &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

D'après les équations 6.11, on a :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 0 \\ d_1 + d_2 = 0 \\ \mathbf{R}_1(q_1 \xi) a_1 U + a_2 U = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.12)$$

A partir de ces équations, on peut classer les mécanismes fermés à deux corps rigides en mécanisme prismatique, mécanisme rotoïde, mécanisme hélicoïdale et mécanisme cylindrique et il n'en existe pas d'autre si les mécanismes sont formés par des couples prismatiques, rotoïdes, hélicoïdales ou cylindriques.

Pour qu'un mécanisme bouclé composé de deux solides rigides ait un degré de liberté, il faut que l'équation 6.12 soit vérifiée, sinon l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles  $M$  est formé de points isolés, c'est-à-dire que  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $d_1 = d_2 = 0$ .

Il existe alors quatre types de mécanisme.

#### 1) Mécanisme prismatique

Lorsque  $q_1 = q_2 = 0$ , on obtient un mécanisme 6.3.(c) plan prismatique constitué par deux couples prismatiques dont les axes se trouvent sur la même droite, de plus  $d_2 = -d_1$ . Ses générateurs de déplacement sont les suivants :

$$\xi_1 = \xi_2 = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^t$$

C'est alors un mécanisme de type  $T_0^1$  (voir les tableaux 4.1 et 4.2), "0" signifie que  $\xi_1$  et  $\xi_2$  ne sont pas libres sur  $\Delta$ , "1" signifie que  $\text{rang}(\xi_1, \xi_2) = 1$ , le mécanisme possède un degré de liberté.

Si l'on change un couple prismatique par un couple cylindrique, le mécanisme autorise le même déplacement. C'est un mécanisme de type  $T_1^2$ .

#### 2) Mécanisme rotoïde

Lorsque  $d_1 = d_2 = 0$ , on obtient un mécanisme 6.3.(d) constitué par deux couples rotoïdes qui possède un degré de liberté, de plus  $q_1 = 2k\pi - q_2$ .

Alors ses générateurs de déplacement s'expriment par :

$$\xi_1 = \xi_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$$

C'est alors un mécanisme de type  $T_1^1$ , "1" signifie que  $\xi_1$  ou  $\xi_2$  est libre sur  $\Delta$ , mais ils sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{R}$  et  $\Delta$ ; "1" signifie aussi que  $\text{rang}(\xi_1, \xi_2) = 1$ , le mécanisme possède un degré de liberté.

Si l'on change un couple rotoïde par un couple cylindrique, le mécanisme autorise le même déplacement. C'est un mécanisme de type  $T_1^2$ .

#### 3) Mécanisme hélicoïdale

Dans la figure 6.3.(a), on montre un mécanisme avec des couples hélicoïdaux dont les axes se trouvent sur la même droite. Il autorise un degré de liberté :  $q_1 = -q_2$ ,  $d_2 = d_1 = pq_2$ ,  $p$  est le pas du couple hélicoïdale. avec :

$$\xi_1 = \xi_2 = (0, 0, pq_1, 0, 0, 1)^t$$

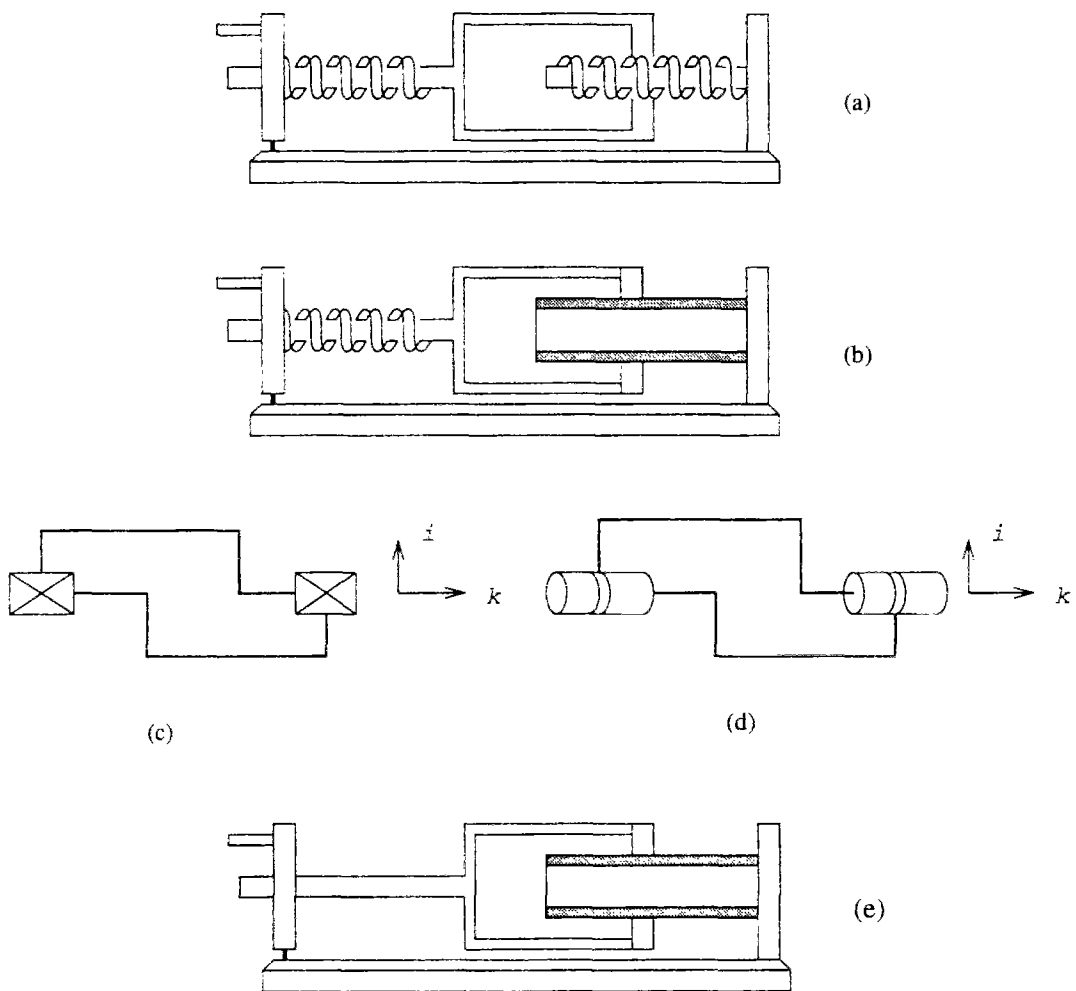


FIG. 6.3 - Mécanismes à 2-barres

C'est un mécanisme de type  $T_1^1$ .

Si l'on change un couple hélicoïdale par un couple cylindrique, le mécanisme 6.3.(b) autorise le même déplacement. C'est un mécanisme de type  $T_1^2$ .

#### 4) Mécanisme cylindrique

Dans la figure 6.3.(e), on montre un mécanisme constitué des deux couples cylindriques possédant deux degrés de liberté :  $q_1 = 2k\pi - q_2$ ,  $d_2 = d_1$ . avec :

$$\xi_1 = \xi_2 = (0, 0, d_1, 0, 0, 1)^t$$

il est de type  $T_1^1$ .

### 6.3.1.2 Mécanisme plan à quatre barres

C'est un mécanisme bien connu qui est composé de quatre barres solides rigides et quatre couples rotoïdes et qui possède un degré de liberté. Il est beaucoup étudié par des chercheurs, on s'intéresse ici plutôt au point de vu des configurations singulières. On utilise la méthode de classification des singularités présentée au chapitre 5.

#### 1) Les Solutions

On suppose que  $q^a = q_1$  est le paramètre articulaire d'entrée, et que  $q^p = q_4$  est le paramètre articulaire de sortie,  $q_1^i = q_3$ ,  $q_2^i = q_2$  sont des paramètres intermédiaires.

D'après les équations 6.11, on a immédiatement :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0 \\ d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0 \\ \mathbf{R}_1(a_1U + \mathbf{R}_2(a_2U + \mathbf{R}_3a_3U)) = -a_4U \end{cases} \quad (6.13)$$

Prenons le produit intérieur de la dernière équation<sup>1</sup>, on a :

$$Q_1^i = -a_1a_4(U | \mathbf{R}_1U) + a_2a_3(U_2 | \mathbf{R}_3U_3) - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_4^2 - a_2^2 - a_3^2) = 0 \quad (6.14)$$

Alors  $q_3$  est une fonction de  $q_1$ , il peut être exprimé analytiquement par

$$\begin{cases} \cos q_3 = \frac{a_1a_4(U | \mathbf{R}_1U) + (a_4^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)}{2a_2a_3} \\ \sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3} \end{cases} \quad (6.15)$$

Multipliée par  $\mathbf{R}_1^*$ , la dernière équation de 6.13 peut être écrite par :

$$a_1U + \mathbf{R}_2(a_2U + \mathbf{R}_3a_3U) = \mathbf{R}_1^*(-a_4U)$$

On peut exprimer l'équation précédente par :

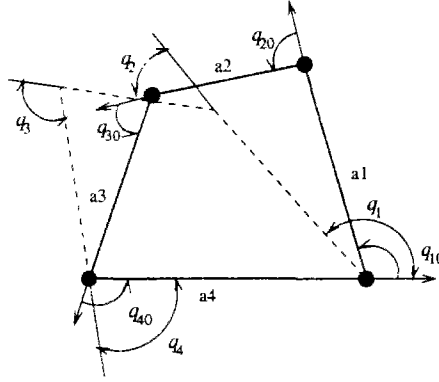
$$\mathbf{R}_2X = \mathbf{R}_1^*Y$$

Alors  $q_2$  est une fonction de  $q_1$  et  $q_3$  qui est exprimée par

$$\begin{cases} \sin q_2 = \frac{(\mathbf{R}_1^*Y | [\xi, X])}{(X | X)} \\ \cos q_2 = - \frac{(\mathbf{R}_1^*Y | X)}{(X | X)} \end{cases} \quad \text{avec } X = a_2U + \mathbf{R}_3a_3U, Y = -a_4U - \mathbf{R}_1a_1U.$$

1. Pour plus de détail, voir l'équation 7.9 à la page 168.





Après un déplacement ( $q_1 - q_{10}, q_2 - q_{20}, q_3 - q_{30}, q_4 - q_{40}$ ) par rapport à la configuration de référence (lignes continues), le mécanisme se trouve dans une nouvelle configuration (lignes pointillées) ( $q_1, q_2, q_3, q_4$ ).

FIG. 6.4 - Les quatre barres plans

De plus, on a l'équation :

$$Q_2^i = ((a_1 + \mathbf{R}_2(a_2 + \mathbf{R}_3 a_3) = \mathbf{R}_1^*(-a_4))U \mid U) = 0$$

Pour évaluer  $q_4$ , on transforme la troisième équation de 6.13 sous forme :

$$a_3 \mathbf{R}_4^* U = -a_1 \mathbf{R}_1 U - a_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 U - a_4 U$$

on obtient :

$$\begin{cases} \sin q_4 = -\frac{1}{a_3} ((a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 + a_4)U \mid [\xi, U]) \\ \cos q_4 = -\frac{1}{a_3} ((a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 + a_4)U \mid U) \end{cases}$$

De plus, on a l'équation :

$$Q^P = ((a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 + a_3 \mathbf{R}_4^* + a_4)U \mid U) = 0$$

On a ainsi obtenu toutes les équations de contrainte comme suit

$$\begin{aligned} Q_1^i(q_1, q_3) &= 0; \\ Q_2^i(q_1, q_2, q_3) &= 0; \\ Q^P(q_1, q_2, q_3, q_4) &= 0. \end{aligned}$$

### Analyse des Cas Singuliers

Dans le cas général, les mécanismes à quatre barres ne possèdent pas forcément de singularité, l'existence ou non des singularités est conditionné par les longueurs des barres.

La matrice jacobienne est définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_2} & 0 \\ \frac{\partial Q^P}{\partial q_1} & \frac{\partial Q^P}{\partial q_3} & \frac{\partial Q^P}{\partial q_2} & \frac{\partial Q^P}{\partial q_4} \end{pmatrix}$$

Alors les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont définies par :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial Q^p}{\partial q_4}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_3} & 0 \\ \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_2} \\ \frac{\partial Q^p}{\partial q_1} & \frac{\partial Q^p}{\partial q_3} & \frac{\partial Q^p}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = -(\mathbf{R}_4 U \mid [\xi, \mathbf{a}_3 U]) = -\sin q_4$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_1} \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_3} \frac{\partial Q^p}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_1} \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_3} \frac{\partial Q^p}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_3} \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_2} \frac{\partial Q^p}{\partial q_1} \\ &= a_1 a_2 a_3 \sin(q_3) \sin(q_2) (\sin(q_1) a_1 + \sin(q_1 + q_2) a_2) \end{aligned}$$

Les calculs de déterminant se trouvent dans l'annexe B. On peut alors classer les différents types des singularités comme suit :

$$M_I = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \det(\mathbf{B}) = 0\}$$

$\Leftrightarrow$

$$M_I = \left\{ q \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} \sin q_3 = 0 \text{ ou} \\ \sin q_2 = 0 \text{ ou} \\ \sin(q_1) a_1 + \sin(q_1 + q_2) a_2 = 0 \end{array} \right\}$$

En effet, d'après la fermeture de quatre barres, on a  $\sin(q_1 + q_2) a_2 + a_1 \sin(q_1) - a_3 \sin q_4 = 0$ .  $\sin(q_1 + q_2) a_2 + a_1 \sin(q_1) = 0$  signifie que :  $\sin q_4 = 0$ . Finalement :

$$M_I = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \sin q_3 = 0 \text{ ou } \sin(q_2) = 0 \text{ ou } \sin(q_4) = 0\}$$

$$M_{\mathbf{I}} = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \det(\mathbf{A}) = 0\} \Leftrightarrow M_{\mathbf{I}} = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \sin q_4 = 0\}$$

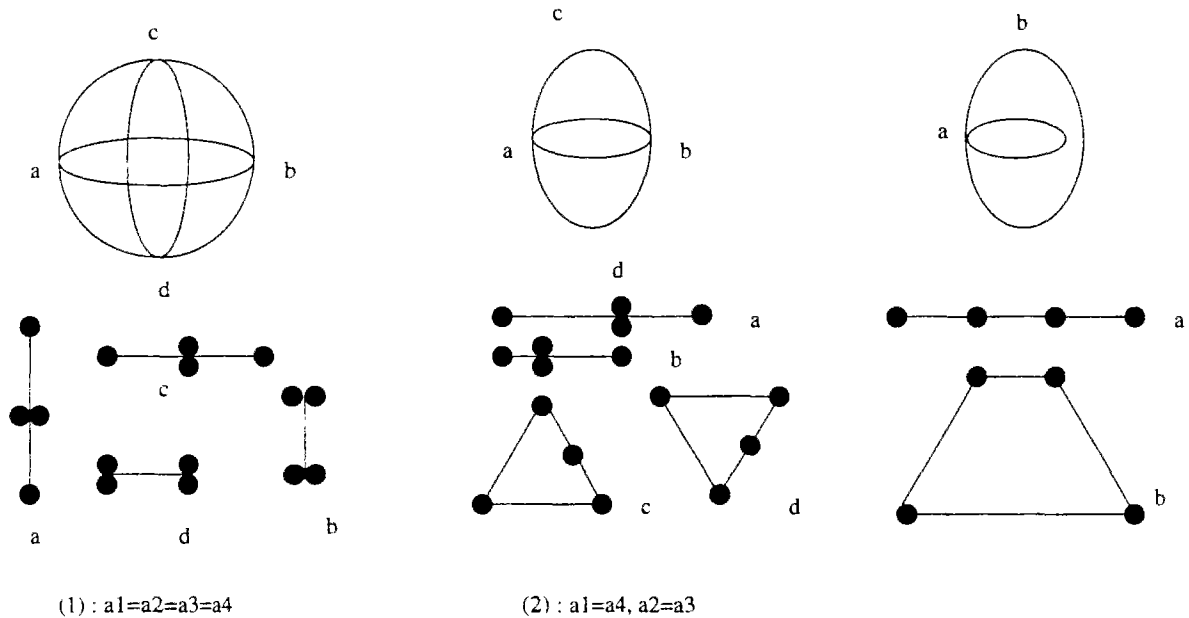
Il est évident

$$M_{\mathbf{II}} = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \det(\mathbf{A}) = 0, \det(\mathbf{B}) = 0\}$$

$\Leftrightarrow$

$$M_{\mathbf{II}} = \left\{ q \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} \sin q_3 = 0 \\ \sin q_4 = 0 \end{array} \right\} \text{ ou } \sin q_4 = 0 \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \sin(q_2) = 0 \\ \sin q_4 = 0 \end{array} \right\} \right\}$$

$M_I$  correspond ici à la limite de l'espace de travail. Lorsque  $\sin q_2 = 0$  ou  $\sin q_3 = 0$  ou  $\sin q_4 = 0$ , les quatre barres forment un triangle et le système est bloqué dans une direction donnée. Dans ces configurations singulières, certains corps peuvent résister à une force ou un couple de grandeurs arbitraire dans cette direction.



$$\begin{aligned}
 (1) \quad M_I = M_I &= \{(q_1 = 0, q_4 = \pi), (q_1 = 0, q_4 = 0), (q_1 = \pi, q_4 = 0), (q_1 = \pi, q_4 = \pi)\}. \\
 (2) \quad M_I &= \{(q_1 = 0, q_4 = \pi), (q_1 = 0, q_4 = 0)\}, M_I = \{M_I, (q_1 = q_1^s, q_2 = \pi), (q_1 = -q_1^s, q_2 = \pi)\}. \\
 (3) \quad M_I &= \{(q_1 = 0, q_4 = 0)\}, M_I = \{M_I, (q_1 = q_1^s, q_2 = \pi), (q_1 = q_1^s, q_3 = \pi)\}.
 \end{aligned}$$

lorsque le mécanisme se trouve dans des configurations de  $M_I$ ,  $M$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^4$ , le mécanisme ne possède aucun degré de liberté.

FIG. 6.5 - Les positions singulières des quatre barres

Puisque pour un paramètre d'entrée  $q_1$ , il existe toujours deux valeurs possibles pour  $q_4$ , les points singuliers  $M_I$  correspondent aux deux zones de l'espace du travail se rencontrent, on peut trouver des  $\dot{q}^p$  non nulles qui correspondent à des vitesses  $\dot{q}^a$  nulles des actionneurs. Il devient incapable de supporter une force ou un couple de grandeur dans son corps associé.

La singularité  $M_I$  est constituée de deux cas, le premier cas  $\sin q_4 = 0$  signifie que le mécanisme est bloqué. Le deuxième cas signifie que les quatre barres se trouvent alignées, le mécanisme est complètement dégénéré.

Suivant la classification de Grashof [Gra83], on distingue les quatre barres en trois espèces :

a) quatre barres Grashof :

la plus longue barre + la plus courte barre < la somme des deux autres

b) quatre barres non-Grashof :

la plus longue barre + la plus courte barre > la somme des deux autres

c) Les quatre barres peuvent être alignées, c'est-à-dire si :

la plus longue barre + (ou -) la plus courte barre = la somme des deux autres

1. Dans ces deux cas a) et b), on sait qu'il y a au moins deux paramètres articulaires passant par  $\pi$ , la singularité de type I peut être produite,  $M_I = \{\emptyset\}$ . L'ensemble des configurations cinématiquement admissibles est une sous-variété de  $\mathbb{R}^4$ .

2. Dans le cas c), les trois types de singularités peuvent apparaître. Les configurations singulières de type III ne se présentent que si les quatre barres sont alignées. Tous les cas possibles sont présentés dans la figure 6.5 :

- Dans le cas (1)  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ .  $M_I = M_{II}$ , les trois types des singularités sont équivalents. Il existe quatre configurations singulières, on peut les exprimer analytiquement par les formules suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 = \begin{cases} q_1 \\ q_1 = \pi \end{cases} \quad \text{ou} \begin{cases} q_1 \\ -q_1 = \text{arbitraire} \end{cases} \\ q_2 = \begin{cases} \pi - q_1 \\ \text{arbitraire} \end{cases} \quad \text{ou} \begin{cases} \pi - q_1 \\ \pi \end{cases} \\ q_4 = \begin{cases} \pi - q_1 \\ -q_2 = \text{arbitraire} \end{cases} \quad \text{ou} \begin{cases} \pi - q_1 \\ \pi \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.16)$$

- Dans le cas (2)  $a_1 = a_3 \neq a_4 = a_2$ , il existe quatre configurations singulières de type I dont deux configurations singulières de type III et dont une configuration de type II. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 = \begin{cases} q_1 \\ -q_1 \end{cases} \\ q_2 = \begin{cases} \pi - q_1 \\ \arccos \left( \frac{-2 a_1 a_2 - (a_1^2 + a_2^2) \cos q_1}{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos q_1} \right) \end{cases} \\ q_4 = \begin{cases} q_2 \\ -q_2 \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.17)$$

- Dans le cas (3),  $a_1 \cos q_1^s + a_2 \cos q_2^s + a_3 \cos q_3^s + a_4 \cos q_4^s = 0$ , ( $q_i^s$  représente configurations singulières). Il existe trois configurations singulières de type III dont une est de type III.

Après avoir analysé ces configurations singulières, nous savons que des singularités de type I existent dans tous les cas, elles peuvent être éliminées en choisissant les paramètres articulaires d'entrée adéquats. On représente toutes les configurations singulières sur la figure 6.5.

### 6.3.1.3 Mécanisme plan à cinq barres

Nous étudions maintenant les mécanismes à cinq barres avec cinq couples rotoïdes et on s'intéresse encore au point de vu des configurations singulières. On utilise la méthode de classification des singularité présentée au chapitre 5.

#### Les solutions

On suppose que  $q_1^a = q_1$  et  $q_5^a = q_5$  sont les paramètres articulaires d'entrée, et que  $q_1^p = q_2$   $q_2^p = q_4$  sont les paramètres de sortie,  $q_1^i = q_3$  est le paramètre intermédiaire.

D'après les équations 6.11, on a immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 2k\pi \\ d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0 \\ \mathbf{R}_1(a_1 U + \mathbf{R}_2(a_2 U + \mathbf{R}_3 a_3 U)) = -a_4 \mathbf{R}_5^* U - a_5 U \end{array} \right. \quad (6.18)$$

Le produit scalaire de la dernière équation nous donne<sup>2</sup> :

$$Q_1^i = a_2 a_3 (U | \mathbf{R}_3 U) - a_1 a_4 (\mathbf{R}_5^* U | \mathbf{R}_1 U) - a_1 a_5 (U | \mathbf{R}_1 U) - a_4 a_5 (U | \mathbf{R}_5^* U) - \frac{1}{2} (a_1^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_3^2) = 0$$

Alors  $q_3$  est une fonction de  $q_1$  et  $q_5$ , elle peut être exprimée analytiquement par

$$\cos q_3 = \frac{a_1 a_4 (\mathbf{R}_5^* U | \mathbf{R}_1 U) + a_1 a_5 (U | \mathbf{R}_1 U) + a_4 a_5 (U | \mathbf{R}_5^* U) + (a_1^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_3^2)}{2 a_3 a_2} \quad (6.19)$$

Multipliée par  $\mathbf{R}_1^*$ , la dernière équation de 6.18 peut être écrite par :

$$a_1 U + \mathbf{R}_2 (a_2 U + \mathbf{R}_3 a_3 U) = -\mathbf{R}_1^* (\mathbf{R}_5^* a_4 U + a_5 U)$$

On peut exprimer l'équation précédente par :

$$\mathbf{R}_2 X = \mathbf{R}_1^* Y$$

$q_2$  est alors une fonction de  $q_1$ ,  $q_5$  et  $q_3$  qui est exprimée par

$$\begin{cases} \sin q_2 = \frac{(\mathbf{R}_1^* Y | [\xi, X])}{(X | X)} \\ \cos q_2 = -\frac{(\mathbf{R}_1^* Y | X)}{(X | X)} \end{cases} \quad \text{avec } X = (a_2 + a_3 \mathbf{R}_3)U, \quad Y = -(a_4 \mathbf{R}_5 + a_1 \mathbf{R}_1 + a_5)U. \quad (6.20)$$

On a l'équation :

$$Q_1^p = ((\mathbf{R}_2^* a_1 + a_2 + \mathbf{R}_3 a_3 + \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* (\mathbf{R}_5^* a_4 + a_5))U | U) = 0$$

D'après la relation :

$$\mathbf{R}_4^* a_3 U = -\mathbf{R}_5 \mathbf{R}_1 (a_1 U + \mathbf{R}_2 a_2 U) - a_4 U - \mathbf{R}_5 a_5 U$$

on obtient les solutions de  $q_4$  :

$$\begin{cases} \sin q_4 = \frac{1}{a_3} (-\mathbf{R}_5 \mathbf{R}_1 (a_1 U + \mathbf{R}_2 a_2 U) - a_4 U - \mathbf{R}_5 a_5 U | [\xi, U]) \\ \cos q_4 = \frac{1}{a_3} (-\mathbf{R}_5 \mathbf{R}_1 (a_1 U + \mathbf{R}_2 a_2 U) - a_4 U - \mathbf{R}_5 a_5 U | U) \end{cases} \quad (6.21)$$

Alors  $q_4$  est une fonction de  $q_1$ ,  $q_3$  et  $q_5$ . On a l'équation :

$$Q_2^p = ((\mathbf{R}_4^* a_3 + \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_1 (a_1 + \mathbf{R}_2 a_2) - a_4 - \mathbf{R}_5 a_5)U | U) = 0$$

### Analyse des configurations singulières

Finalement, les trois équations cinématiques exprimées par :

$$\begin{aligned} Q_1^i(q_1, q_5, q_3) &= 0 \\ Q_1^p(q_1, q_5, q_3, q_2) &= 0 \\ Q_2^p(q_1, q_5, q_3, q_2, q_4) &= 0 \end{aligned}$$

2. Pour plus de détail, voir l'équation 7.9 dans la page 168

La matrice jacobienne est définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_5} & \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_5} & \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_2} & 0 \\ \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_5} & \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_4} \end{pmatrix}$$

les matrices **A** et **B** sont les suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_2} & 0 \\ \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_5} & \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_3} \\ \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_5} & \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_3} \\ \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_5} & \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

alors :

$$\det(\mathbf{A}) = -a_3 \sin q_4 (a_1 \sin q_2 + a_5 \sin(q_1 + q_2) + a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_5))$$

$$\det(\mathbf{B}) = a_5 a_3 \sin(q_3) (\sin(q_1) a_1 + \sin(q_1 + q_2) a_2) (a_1 \sin(q_1 + q_5) + a_2 \sin(q_1 + q_2 + q_5) + a_5 \sin(q_5))$$

La fermeture de mécanisme permet d'obtenir<sup>3</sup>

$$a_1 \sin q_2 + a_5 \sin(q_1 + q_2) + a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_5) = a_3 \sin q_3$$

$$a_1 \sin(q_1 + q_5) + a_2 \sin(q_1 + q_2 + q_5) + a_5 \sin(q_5) = a_3 \sin q_4$$

alors :

$$M_I = \{q \in \mathbb{R}^5 \mid \det(\mathbf{B}) = 0\} \Leftrightarrow M_I = \left\{ q \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{l} \sin q_3 = 0 \text{ ou} \\ \sin q_4 = 0 \text{ ou} \\ a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2) = 0 \end{array} \right\}$$

$$M_{\mathbf{I}} = \{q \in \mathbb{R}^5 \mid \det(\mathbf{A}) = 0\} \Leftrightarrow M_{\mathbf{I}} = \{q \in \mathbb{R}^5 \mid \sin q_3 = 0 \text{ ou } \sin q_4 = 0\}$$

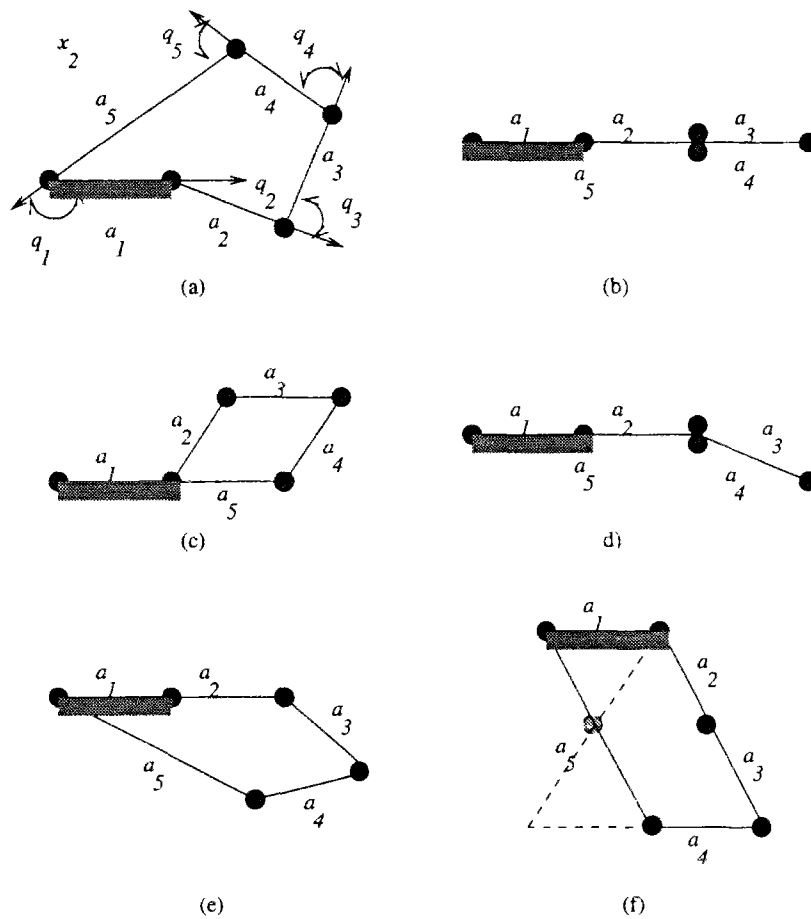
$$M_{\mathbf{II}} = \{q \in \mathbb{R}^5 \mid \det(\mathbf{A}) = 0, \det(\mathbf{B}) = 0\}$$

3. Pour un mécanisme fermé de cinq barres, on a :

$$a_1 \sin q_2 + a_5 \sin(q_1 + q_2) + a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_5) = -a_4 \sin(q_3 + q_4) - a_5 \sin(q_3 + q_4 + q_5) - a_1 \sin(q_1 + q_3 + q_4 + q_5)$$

De plus :

$$-a_4 \sin(q_3 + q_4) - a_5 \sin(q_3 + q_4 + q_5) - a_1 \sin(q_1 + q_3 + q_4 + q_5) = a_3 \sin q_3$$



La configuration (a) représente une configuration régulière de ce mécanisme à cinq barres. (b) est la configuration étudiée, à partir de cette configuration, le mécanisme peut se réduire comme quatre barres, c'est-à-dire les configurations (c), (d) (e) et (f) dont la configuration (f) se bifurque, et il peut fonctionner comme cinq barres réguliers (a).

FIG. 6.6 - Les cinq-barres plans

Compte tenu de la fermeture du mécanisme, on obtient finalement :

$$M_{\mathbf{I}} = \left\{ q \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{array}{l} \sin q_3 = 0 \\ \sin q_4 = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \sin q_3 = 0 \text{ ou } \sin q_4 = 0 \right\}$$

Dans les configurations singulières de type III, il existe deux possibilités liées à la structure du mécanisme, c'est-à-dire, soit le mécanisme s'aplatit en une droite ("change point") 6.6.b. Soit le mécanisme bloqué dans une direction par rapport à un certain paramètre actionnaire 6.6.(c), le mécanisme se trouve dans une configuration singulière dont les barres successives sont alignées. Par exemple, si  $\sin q_3 = 0$ , on solidarise les barres  $a_3$  et  $a_4$  et le mécanisme est équivalent à un mécanisme à quatre barres  $a_1, a_2, a_3 \pm a_4$  et  $a_5$ .

En effet, les configurations singulières dépendent également du choix des paramètres d'entrée, autrement dit, on peut obtenir toutes les configurations singulières possibles en changeant les paramètres d'entrée.

Nous considérons le mécanisme à cinq barres dont les longueurs sont  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ ,

$q_5 = 2$ . On étudie au voisinage  $V$  de la configuration singulière  $q^*$  dans la figure 6.6.b (à la page 140, le mécanisme est complètement aplati, plus précisément, au voisinage de ce point, l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles  $M$  est l'union de six variétés :

(1) Les configurations régulières

C'est-à-dire,  $\sin q_i \neq 0$  pour  $q = (q_1, \dots, q_5) \in V$ , les relations entre les paramètres sont définies par des solutions analytiques 6.19, 6.20 et 6.21 (voir la figure 6.6.a).

(2) Les configurations singulières  $\sin q_1 = 0$

Lorsqu'on prend  $q_3, q_4$  comme les paramètres d'entrée, on obtient les configurations singulières  $\sin q_1 = 0$ , le mécanisme fonctionne comme celui à quatre barres indiqué dans la figure 6.6.c.

(3) Les configurations singulières  $\sin q_2 = 0$

Lorsqu'on prend  $q_3, q_4$  comme les paramètres d'entrée, on obtient les configurations singulières  $\sin q_2 = 0$ , le mécanisme fonctionne comme celui à quatre barres indiqué dans la figure 6.6.e.

(4) Les configurations singulières  $\sin q_3 = 0$

Lorsqu'on prend  $q_1, q_5$  comme les paramètres d'entrée, on obtient les configurations singulières  $\sin q_3 = 0$ , le mécanisme fonctionne comme celui à quatre barres indiqué dans la figure 6.6.f. De plus, pour une valeur  $q_1$ , il existe deux configurations possibles, ce qui correspond aux cas où deux zones de l'espace du travail se rencontrent.

(5) Les configurations singulières  $\sin q_4 = 0$

Lorsqu'on prend  $q_1, q_5$  comme les paramètres d'entrées, on obtient les configurations singulières  $\sin q_4 = 0$ , le mécanisme fonctionne comme une chaîne ouvert à deux barres.

## 6.4 Déplacements hélicoïdaux

$R_I$  et  $R_{\mathbf{I}}$  sont des applications adjointes de  $L(\mathfrak{D})$ . L'équation  $R_I = R_{\mathbf{I}}$  correspond aux mécanismes bouclés composés de deux sous mécanismes (ou branches). Nous considérons le cas où les branches sont des mécanismes plans.

**Proposition 6.4** Soient  $\xi_I, \xi_{\mathbf{I}}$  linéairement indépendants sur  $\Delta$ ,  $\mathbf{R}_I(q_I, \xi_I), \mathbf{R}_{\mathbf{I}}(q_{\mathbf{I}}, \xi_{\mathbf{I}}) \in L(\mathfrak{D})$  des rotations pures suivant les axes de  $\xi_I$  et  $\xi_{\mathbf{I}}$ . Pour que :

$$\mathbf{R}_I = \mathbf{R}_{\mathbf{I}}$$

il faut et il suffit :

$$q_I = 2k_1\pi, \quad q_{\mathbf{I}} = 2k_2\pi,$$

La démonstration est simple.

Considérons maintenant un mécanisme de deux branches dont chaque branche est un mécanisme plan, les générateurs de déplacement  $\xi_I$  et  $\xi_{\mathbf{I}}$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$  (leurs axes ne sont pas parallèles). Les indices  $I$  et  $\mathbf{I}$  correspondent à la première et à la deuxième branche du mécanisme. Soient  $m_I$  et  $m_{\mathbf{I}}$  les degrés de liberté de chaque branche, on a :  $m = m_I + m_{\mathbf{I}}$ .

On peut écrire l'équation de fermeture d'un tel mécanisme par :

$$\mathbf{R}_I \mathbf{T}_I(\Omega U_I) \mathbf{R}_{\mathbf{I}} \mathbf{T}_{\mathbf{I}}(\Omega U_{\mathbf{I}}) = \mathbf{1} \quad (6.22)$$



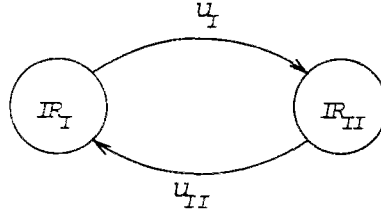


FIG. 6.7 - Structure d'un mécanisme en deux branches

où  $R_I$  et  $R_{II}$  représentent des déplacements de la première et de la deuxième branche.  $T_I(\Omega U_I)$  et  $T_{II}(\Omega U_{II})$  sont des translations constantes de la première branche à la deuxième et ainsi la réciproque respectivement (voir la figure 6.7).

On prend toujours les mêmes notations que dans la section précédente, c'est-à-dire que pour chaque sous mécanisme plan on a :

$$\xi_i = \xi = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^t, \quad U_i = U = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t, \quad \text{pour } i = 1 \dots m.$$

qui sont définis par rapport à la base  $B_i$  associée au couple  $\ell_i$ . Et

$$U_i = d_i \xi + a_i U = (0, 0, 0, a_i, 0, d_i)^t, \quad \text{pour } i = 1 \dots m.$$

qui sont aussi définis par rapport à la base  $B_i$ . On a :

$$\begin{aligned} R_I &= \mathbf{R}(q_1, \xi_I) T(\Omega \mathcal{U}_1) \cdots \mathbf{R}(q_{m_I}, \xi_I) T(\Omega \mathcal{U}_{m_I}) \\ &= \mathbf{R}_1(1 + \text{ad } \Omega \mathcal{U}_1) \cdots \mathbf{R}_{m_I}(1 + \text{ad } \Omega \mathcal{U}_{m_I}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{II} &= \mathbf{R}(q_{m_I+1}, \xi_{II}) T(\Omega \mathcal{U}_{m_I+1}) \cdots \mathbf{R}(q_m, \xi_{II}) T(\Omega \mathcal{U}_m) \\ &= \mathbf{R}_{m_I+1}(1 + \text{ad } \Omega \mathcal{U}_{m_I+1}) \cdots \mathbf{R}_m(1 + \text{ad } \Omega \mathcal{U}_m) \end{aligned}$$

D'après la proposition 6.4, on a les solutions de l'équation 6.22 comme les suivantes :

$$\sum_{i \in I} q_i = 0, \quad \sum_{i \in II} q_i = 0. \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_1(\mathcal{U}_1 + \mathbf{R}_2(\mathcal{U}_2 + \cdots + \mathbf{R}_{m_I} \mathcal{U}_{m_I}) \cdots) \\ &+ \mathbf{R}_I \mathbf{R}_{(m_I+1)}(\mathcal{U}_{(m_I+1)} + \mathbf{R}_{(m_I+2)}(\mathcal{U}_{(m_I+2)} + \cdots + \mathbf{R}_m \mathcal{U}_m) \cdots) = 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

avec :  $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_{m_I}$ .

### Solution du robot DELTA

La structure de DELTA est présentée sur la figure 3.8 à la page 78, il est composé de trois branches symétriques, pour étudier le comportement cinématique, on va étudier chaque boucle constituée de deux branches, chaque branche contient deux couples cylindriques et quatre couples rotoïdes. On peut définir  $R_I$  et  $R_{II}$  par :

$$R_I = \mathbf{R}_1(q_1, \xi_I)(1 + \epsilon \text{ad } \mathcal{U}_1) \mathbf{R}_2(q_2, \xi_I)(1 + \epsilon \text{ad } \mathcal{U}_2) \mathbf{R}_3(q_3, \xi_I)(1 + \epsilon \text{ad } \mathcal{U}_3)$$

$$R_{II} = \mathbf{R}_4(q_4, \xi_{II})(1 + \epsilon \text{ad } \mathcal{U}_4) \mathbf{R}_5(q_5, \xi_{II})(1 + \epsilon \text{ad } \mathcal{U}_5) \mathbf{R}_6(q_6, \xi_{II})(1 + \epsilon \text{ad } \mathcal{U}_6)$$

Les paramètres sont définis par :

$$\begin{aligned} U_1 &= d_1 \xi_I + a_1 U_1 \\ U_2 &= a_2 U_2 \\ U_3 &= d_3 \xi_I \\ U_4 &= d_4 \xi_I + a_4 U_4 \\ U_5 &= a_5 U_5 \\ U_6 &= d_6 \xi_I \end{aligned}$$

avec :

$$\epsilon \xi_I = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^t, \quad \epsilon \xi_{II} = [0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0]^t$$

À la configuration "0", c'est-à-dire, lorsque  $q_i = 0$ , on a

$$\epsilon U_1 = \epsilon U_2 = \epsilon U_3 = [-1, 0, 0, 0, 0, 0]^t, \quad \epsilon U_4 = \epsilon U_5 = \epsilon U_6 = [1, 0, 0, 0, 0, 0]^t$$

on obtient alors la solution analytique pour le robot DELTA :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 2k\pi \\ q_4 + q_5 + q_6 = 2k\pi \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_4 \cos q_4 + a_5 \cos(q_4 + q_5) = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(d_4 + d_6) - a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}a_4 \sin q_4 - \frac{1}{2}a_5 \sin(q_4 + q_5) = 0 \\ d_1 + d_3 + \frac{1}{2}(d_4 + d_6) + \frac{\sqrt{3}}{2}a_4 \sin q_4 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_5 \sin(q_4 + q_5) = 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

L'ensemble des générateurs des déplacements, qui est de rang 5, possède une liste libre maximale de dimension 2, c'est un mécanisme de type  $T_2^5$  et le sous-espace engendré par les crochets de Lie du premier ordre est l'algèbre entière.

### Analyse des points singuliers

On prend  $q_1^a = q_1$ ,  $q_2^a = d_1$  et  $q_3^a = q_6$  comme paramètres articulaires d'entrée, et  $q_1^p = q_3$ ,  $q_2^p = q_4$ ,  $q_3^p = d_6$  comme des paramètres de sortie. Les équations de contraintes entre ces paramètres sont alors exprimées par

$$\begin{cases} Q_1 = a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_3) + a_4 \cos q_4 + a_5 \cos(q_6) = 0 \\ Q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(d_4 + d_6) - a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_3) - \frac{1}{2}a_4 \sin q_4 + \frac{1}{2}a_5 \sin(q_6) = 0 \\ Q_3 = d_1 + d_3 + \frac{1}{2}(d_4 + d_6) + \frac{\sqrt{3}}{2}a_4 \sin q_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_5 \sin(q_3) = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

Les matrices jacobiennes sont définies par

$$\mathbf{B} = \frac{\partial Q}{\partial q^a} = \begin{pmatrix} -a_1 \sin q_1 & 0 & -a_5 \sin q_6 \\ -a_1 \cos q_1 & 0 & \frac{1}{2}a_5 \cos q_6 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos q_6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial Q}{\partial q^p} = \begin{pmatrix} -a_2 \sin q_3 & -a_4 \sin q_4 & 0 \\ a_2 \cos q_3 & -\frac{1}{2} \cos q_4 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a_4 \cos q_4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des points singuliers de type I est défini par

$$M_I = \{q \in \mathbb{R}^8 \mid \det(\mathbf{B}) = 0\} = \{q \in \mathbb{R}^8 \mid \sin q_1 = 0, \sin q_6 = 0\}$$

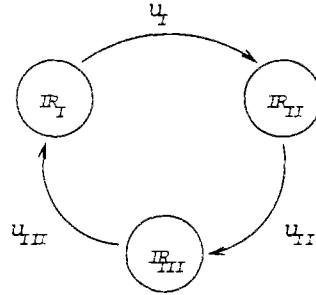


FIG. 6.8 - Structure d'un mécanisme en trois branches

L'ensemble des points singuliers de type II est défini par

$$M_{\mathbf{I}} = \{q \in \mathbb{R}^8 \mid \det(\mathbf{A}) = 0\} = \{q \in \mathbb{R}^8 \mid \sin q_3 = 0, \sin q_4 = 0\}$$

D'après les solutions analytiques 6.25 que nous avons obtenues, alors  $M_{\mathbf{I}} = M_I$ , ainsi  $M_{\mathbf{II}} = M_I$ . Aux configurations singulières, c'est-à-dire, lorsque tous les corps de robot se trouvent dans un plan ou les deux branches deviennent verticales. À la première configuration, le système est bloqué dans la direction verticale, le robot devient incapable de supporter une force de tension, au contraire, l'actionneur du robot peut résister à une pression et à un couple de grandeur arbitraire dans la même direction. La deuxième configuration correspond au point commun des deux zones de l'espace de travail, on peut trouver des  $\dot{q}^p$  non nulles qui correspondent à des vitesses  $\dot{q}^a$  nulles, le robot devient incapable de supporter une force de pression, par contre, il peut résister à une force de tension.

## 6.5 Produit de deux déplacements hélicoïdaux

Nous nous considérons l'équation  $R_I R_{\mathbf{I}} = R$ , cette équation correspond aux mécanismes fermés composés de trois sous mécanismes plans (ou trois branches),  $R_I$ ,  $R_{\mathbf{I}}$  et  $R$  représentent respectivement le déplacement de chaque sous mécanisme. Les générateurs de déplacement  $\xi_I$  et  $\xi_{\mathbf{I}}$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ . On va d'abord présenter trois formules utiles par la suite.

**Proposition 6.5**  $\forall X, Y \in \mathfrak{D}$ , pour  $n = 1 \dots$ , on a les relations suivantes :

- (i)  $\text{ad}^{2n-1} X \circ \text{ad}^{2n} Y + \text{ad}^{2n} Y \circ \text{ad}^{2n-1} X = -\{X|X\}^{n-1} \{Y|Y\}^{n-1} (\{Y|Y\} \text{ad} X + \{X|Y\} \text{ad} Y)$  ;
- (ii)  $\text{ad}^{2n} X \circ \text{ad}^{2n} Y - \text{ad}^{2n} Y \circ \text{ad}^{2n} X = \{X|Y\} \{X|X\}^{n-1} \{Y|Y\}^{n-1} \text{ad}[X, Y]$  ;
- (iii)  $\text{ad}^{2n+1} X \circ \text{ad}^{2n+1} Y - \text{ad}^{2n+1} Y \circ \text{ad}^{2n+1} X = \{X|X\}^n \{Y|Y\}^n \text{ad}[X, Y]$ .

**Démonstration :**

(i) Nous appliquons la première relation à  $Z \in \mathfrak{D}$ , avec  $n = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} & (\text{ad} X \circ \text{ad}^2 Y + \text{ad}^2 Y \circ \text{ad} X) \cdot Z \\ &= \text{ad} X \cdot [Y, [Y, Z]] + \text{ad} Y [Y, [X, Z]] \\ &= \text{ad} X \cdot (\{Y|Z\} Y - \{Y|Y\} Z) + \text{ad} Y (\{Y|Z\} X - \{X|Y\} Z) \\ &= -\{Y|Y\} [X, Z] - \{X|Y\} [Y, Z] \\ &= -(\{Y|Y\} \text{ad} X - \{X|Y\} \text{ad} Y) \cdot Z \end{aligned}$$

En utilisant :  $\text{ad}^3 X = -\{X|X\}\text{ad} X$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \text{ad}^{2n+1} X \circ \text{ad}^{2(n+1)} Y + \text{ad}^{2(n+1)} Y \circ \text{ad}^{2n+1} X \\ &= \{X|X\}\{Y|Y\} (\text{ad}^{2(n-1)+1} X \cdot \text{ad}^{2n} Y + \text{ad}^{2n} Y \text{ad}^{2(n-1)+1} X) \\ &= \{X|X\}^{n-1} \{Y|Y\}^{n-1} (\text{ad} X \cdot [Y, [Y, Z]] + \text{ad} Y [Y, [X, Z]]) \\ &= -\{X|X\}^n \{Y|Y\}^n (\{Y|Y\}\text{ad} X + \{X|Y\}\text{ad} Y) \end{aligned}$$

(ii) Lorsque  $n = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} & (\text{ad}^2 X \circ \text{ad}^2 Y - \text{ad}^2 Y \circ \text{ad}^2 X) \cdot Z \\ &= \text{ad}^2 X \cdot [Y, [Y, Z]] - \text{ad}^2 Y \cdot [X, [X, Z]] \\ &= \text{ad}^2 X \cdot (\{Y|Z\}Y - \{Y|Y\}Z) - \text{ad}^2 Y \cdot (\{X|Z\}X - \{X|X\}Z) \\ &= \{Y|Z\}[X, [X, Y]] - \{Y|Y\}[X, [X, Z]] - \{X|Z\}[Y, [Y, X]] + \{X|X\}[Y, [Y, Z]] \\ &= \{Y|Z\}\{X|Y\}X - \{X|Z\}(Y|X)Y = \{X|Y\}(\{Y|Z\}X - \{X|Z\}Y) \\ &= \{X|Y\}\text{ad}[X, Y] \cdot Z \end{aligned}$$

Puisque :  $\text{ad}^3 X = -\{X|X\}\text{ad} X$ , on a :

$$\begin{aligned} & \text{ad}^{2n} X \circ \text{ad}^{2n} Y - \text{ad}^{2n} Y \circ \text{ad}^{2n} X \\ &= \{X|X\}\{Y|Y\} (\text{ad}^{2(n-1)} X \circ \text{ad}^{2(n-1)} Y - \text{ad}^{2(n-1)} Y \circ \text{ad}^{2(n-1)} X) \\ &= \{X|X\}^{n-1} \{Y|Y\}^{n-1} (\text{ad}^2 X \circ \text{ad}^2 Y - \text{ad}^2 Y \circ \text{ad}^2 X) \\ &= \{X|Y\}\{X|X\}^{n-1} \{Y|Y\}^{n-1} \text{ad}[X, Y] \end{aligned}$$

D'où la deuxième équation.

(iii) Lorsque  $n = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} & \text{ad}^3 X \circ \text{ad}^3 Y - \text{ad}^3 Y \circ \text{ad}^3 X \\ &= \{X|X\}\{Y|Y\} (\text{ad} X \circ \text{ad} Y - \text{ad} Y \circ \text{ad} X) \\ &= \{X|X\}\{Y|Y\}\text{ad}[X, Y] \end{aligned}$$

avec la formule du double crochet, on peut obtenir la troisième équation facilement. ■

Soient  $R_1, R_2 \in L(\mathfrak{D})$  deux déplacements, supposons que  $R_1 R_2 = R$ , dont la partie symétrique  $s$  et la partie antisymétrique  $a$  sont exprimées par (voir la définition 1.12 à la page 26) :

$$s = \frac{1}{2}(R_1 R_2 + R_2^* R_1^*), \quad a = \frac{1}{2}(R_1 R_2 - R_2^* R_1^*)$$

puisque un opérateur  $R \in L(\mathfrak{D})$  peut être représenté par

$$R = \mathbf{1} + 2z\text{ad} X + 2\text{ad}^2 X \quad \text{avec } z \in \Delta, X \in \mathfrak{D}$$

on appelle  $z$  et  $X$  les paramètres du quaternion dual associé à l'opérateur  $R^4$ .

On obtient les expressions facilement en utilisant l'équation 1.21 dans le premier chapitre :

$$s = \mathbf{1} + 2\text{ad}^2(z_1 X_2 + z_2 X_1 + [X_1, X_2]) \quad (6.27)$$

$$a = 2\text{ad}(z_1 z_2 - \{X_1|X_2\})(z_1 X_2 + z_2 X_1 + [X_1, X_2]) \quad (6.28)$$

où  $z_1, X_1$  et  $z_2$  et  $X_2$  sont des paramètres des quaternions duaux associés aux opérateurs  $R_1$  et  $R_2$  respectivement. Puisque l'opérateur  $R = R_1 R_2$  représente aussi un déplacement, les paramètres  $z$  et  $X$  associé vérifient les relations :

$$a = 2z\text{ad} X, \quad s = \mathbf{1} + 2\text{ad}^2 X$$

4. Au chapitre un, on a présenté la relation entre les quaternions duaux et un opérateur de  $L(\mathfrak{D})$ .

en comparant les deux équations précédentes avec les équations 6.27, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= z_1 z_2 - \{X_1 | X_2\} \\ \text{ad } X &= \text{ad} (z_1 X_2 + z_2 X_1 + [X_1, X_2]) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Avec la partie symétrique et la partie antisymétrique, on peut évaluer directement l'angle, la translation et l'axe du déplacement résultant  $R$  à partir des opérateurs  $R_1$  et  $R_2$ .

Si l'on veut faire une démonstration directe sans utiliser l'équation 1.21 du chapitre 1, le calcul est volumineux<sup>5</sup>.

On présente un théorème [Che93], et on va le démontrer sans utiliser les quaternions duaux.

**Théorème 6.1** *Soient  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{Z}_a$  tels que les axes soient linéairement indépendants.  $R_1$  et  $R_2$  des déplacements suivant les axes  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . Un déplacement  $R$  peut être décomposé en  $R_1$  et  $R_2$ , si et seulement si :*

$$\begin{aligned} (1) \quad & c_1^2 c_2^2 - c_3^2 (1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2) = 0 \\ (2) \quad & c_1 c_2 (c_1 c_2^o + c_2 c_1^o) + c_3^2 (c_1 c_1^o + c_2 c_2^o + c_3 c_3^o) = 0 \\ \text{avec : } X &= (c_1 + \epsilon c_1^o) X_1 + (c_2 + \epsilon c_2^o) X_2 + (c_3 + \epsilon c_3^o) [X_1, X_2]. \end{aligned}$$

**Démonstration :** Supposons que les paramètres des quaternions duaux associés aux opérateurs

5. Ces formule peut être montrer par les calculs suivants :  
écrivons les déplacements avec les demis angles :

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 + 2 \hat{z}_1 y_1 \text{ad } \xi_1 + 2 (y_1 \text{ad } \xi_1)^2 \\ R_2 &= 1 + 2 \hat{z}_2 y_2 \text{ad } \xi_2 + 2 (y_2 \text{ad } \xi_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^r &= \frac{1}{2} (R_1^r \circ R_2^r + R_2^{r*} \circ R_1^{r*}) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + 2 \hat{z}_1 y_1 \text{ad } \xi_1 + 2 \hat{z}_1^2 \text{ad}^2 \xi_1) \circ (1 + 2 \hat{z}_2 y_2 \text{ad } \xi_2 + 2 \hat{z}_2^2 \text{ad}^2 \xi_2) \\ &\quad + (1 - 2 \hat{z}_1 y_1 \text{ad } \xi_1 + 2 \hat{z}_1^2 \text{ad}^2 \xi_1) \circ (1 - 2 \hat{z}_2 y_2 \text{ad } \xi_2 + 2 \hat{z}_2^2 \text{ad}^2 \xi_2)) \\ &= \frac{1}{2} (2 \cdot 1 + 4 \hat{y}_2^2 \text{ad}^2 \xi_2 + 4 \hat{z}_1 y_1 \hat{z}_2 y_2 (\text{ad } \xi_1 \circ \text{ad } \xi_2 + \text{ad } \xi_2 \circ \text{ad } \xi_1) \\ &\quad + 4 \hat{y}_1^2 \text{ad}^2 \xi_1 + 4 \hat{z}_1 y_1 \hat{y}_2^2 (\text{ad } \xi_1 \circ \text{ad}^2 \xi_2 - \text{ad}^2 \xi_2 \circ \text{ad } \xi_1) \\ &\quad + 4 \hat{y}_1^2 \hat{z}_2 y_2 (\text{ad}^2 \xi_1 \circ \text{ad } \xi_2 - \text{ad } \xi_2 \circ \text{ad}^2 \xi_1) + 4 \hat{y}_1^2 \hat{y}_2^2 (\text{ad}^2 \xi_1 \circ \text{ad}^2 \xi_2 + \text{ad}^2 \xi_2 \circ \text{ad}^2 \xi_1)) \\ &= \frac{1}{2} (2 \cdot 1 + 4 \hat{z}_1^2 \hat{y}_2^2 \text{ad}^2 \xi_2 + 4 \hat{z}_1 y_1 \hat{z}_2 y_2 (\text{ad } \xi_1 \circ \text{ad } \xi_2 + \text{ad } \xi_2 \circ \text{ad } \xi_1) \\ &\quad + 4 \hat{y}_1^2 \hat{z}_2 y_2 (\text{ad}^2 \xi_1 \circ \text{ad } \xi_2 - \text{ad } \xi_2 \circ \text{ad}^2 \xi_1) + 4 \hat{z}_1 y_1 \hat{y}_2^2 (\text{ad } \xi_1 \circ \text{ad}^2 \xi_2 - \text{ad}^2 \xi_2 \circ \text{ad } \xi_1) \\ &\quad + 4 \hat{y}_1^2 \hat{z}_2^2 \text{ad}^2 \xi_1 + 4 \hat{y}_1^2 \hat{y}_2^2 (\text{ad}^2 \xi_1 \circ \text{ad}^2 \xi_2 + \text{ad}^2 \xi_2 \circ \text{ad}^2 \xi_1) + \text{ad}^2 \xi_1 + \text{ad}^2 \xi_2) \end{aligned}$$

en remarquant :

$$\text{ad}^2 \xi_1 \circ \text{ad}^2 \xi_2 + \text{ad}^2 \xi_2 \circ \text{ad}^2 \xi_1 + \text{ad}^2 \xi_1 + \text{ad}^2 \xi_2 = \text{ad}^2 [\xi_1, \xi_2]$$

on a :

$$\begin{aligned} s &= 1 + 4 \text{ad}^2 (\hat{z}_1 \hat{y}_2 \xi_2 + \hat{z}_2 \hat{y}_1 \xi_1 + \hat{y}_1 \hat{y}_1 [\xi_1, \xi_2]) \\ &= 1 + 2 \text{ad}^2 X \end{aligned}$$

Pour la partie antisymétrique :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (R_1 \circ R_2 - R_2^* \circ R_1^*) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + 2 \hat{z}_1 y_1 \text{ad } \xi_1 + 2 \hat{z}_1^2 \text{ad}^2 \xi_1) \circ (1 + 2 \hat{z}_2 y_2 \text{ad } \xi_2 + 2 \hat{z}_2^2 \text{ad}^2 \xi_2) \\ &\quad - (1 - 2 \hat{z}_1 y_1 \text{ad } \xi_1 + 2 \hat{z}_1^2 \text{ad}^2 \xi_1) \circ (1 - 2 \hat{z}_2 y_2 \text{ad } \xi_2 + 2 \hat{z}_2^2 \text{ad}^2 \xi_2)) \\ &= \frac{1}{2} (4 \hat{z}_1 y_1 \text{ad } \xi_1 + 4 \hat{z}_1 y_1 \hat{z}_2 y_2 (\text{ad } \xi_1 \circ \text{ad } \xi_2 - \text{ad } \xi_2 \circ \text{ad } \xi_1) \\ &\quad + 4 \hat{z}_2 y_2 \text{ad } \xi_2 + 4 \hat{y}_1 \hat{z}_1 \hat{y}_2^2 (\text{ad } \xi_1 \circ \text{ad}^2 \xi_2 - \text{ad}^2 \xi_2 \circ \text{ad } \xi_1) \\ &\quad + 4 \hat{z}_2 y_2 \hat{y}_1^2 (\text{ad}^2 \xi_1 \circ \text{ad } \xi_2 + \text{ad } \xi_2 \circ \text{ad}^2 \xi_1) + 4 \hat{y}_1^2 \hat{y}_2^2 (\text{ad}^2 \xi_1 \circ \text{ad}^2 \xi_2 - \text{ad}^2 \xi_2 \circ \text{ad}^2 \xi_1)) \end{aligned}$$

En utilisant la proposition précédente, on a :

$$a = (\hat{z}_1 \hat{z}_2 - \hat{y}_1 \hat{y}_2 \{\xi_1 | \xi_2\}) \cdot (\hat{z}_1 \hat{y}_2 \xi_1 + \hat{y}_1 \hat{z}_2 \xi_2 + \hat{y}_1 \hat{y}_2 \{\xi_1, \xi_2\})$$

$R_i$ , pour  $i = 1, 2$ , soient  $z_i, X_i$ , on a  $z_i \in \Delta, X_i \in \mathfrak{D}$ .

Nous remarquons d'abord que, pour  $X, Y \in \mathfrak{D}$ , on a :

$$\text{ad } X = \text{ad } Y \iff X = Y$$

$$\text{ad}^2 X = \text{ad}^2 Y \iff X = \pm Y$$

1)  $R_1 R_2 = R \implies$  (1) et (2)

D'après la proposition 1.6, si  $R_1 R_2 = R$ , alors la partie symétrique nous donne :

$$\begin{aligned} \text{ad}^2 X &= \frac{1}{4} (R_1 R_2 + R_2^* R_1^* - 2 \cdot 1) \\ &= \text{ad}^2 (z_1 X_2 + z_2 X_1 + [X_1, X_2]) \\ &\iff \\ X &= \pm (z_1 X_2 + z_2 X_1 + [X_1, X_2]) \end{aligned}$$

La partie antisymétrique nous donne :

$$\begin{aligned} 4z \text{ad } X &= R_1 R_2 - R_2^* R_1^* \\ &= (z_1 z_2 - \{X_1 | X_2\}) \cdot (z_1 X_2 + z_2 X_1 + [X_1, X_2]) \\ &= (z_1 z_2 - \{X_1 | X_2\}) \cdot \text{ad } X_3 \\ &\iff \\ z &= z_1 z_2 - \{X_1 | X_2\} \end{aligned}$$

Utilisons la relation  $z^2 + X_3^2 = 1$ , alors les conditions (1) et (2) sont nécessaires.

2) (1) et (2)  $\implies R_1 R_2 = R$

Supposons  $z = s_1 + \epsilon s_1^o + (s_2 + \epsilon s_2^o) \{X_1 | X_2\}$ , avec  $s_i^o, s_i \in R$ . Considérons la relation :

$$\begin{aligned} z^2 + X^2 &= (s_1 + \epsilon s_1^o + (s_2 + \epsilon s_2^o) \{X_1 | X_2\})^2 + ((c_1 + \epsilon c_1^o) X_1 + (c_2 + \epsilon c_2^o) X_2 \\ &\quad + (c_3 + \epsilon c_3^o) [X_1, X_2])^2 \\ &= s_1^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 2(s_1 s_2 + c_1 c_2) \{X_1 | X_2\} + (s_2^2 - c_3^2) \{X_1 | X_2\}^2 \\ &\quad + \epsilon (2(s_1 s_1^o + c_1 c_1^o + c_2 c_2^o + c_3 c_3^o) + 2(s_1 s_2^o + s_2 s_1^o + c_1 c_2^o + c_2 c_1^o) \{X_1 | X_2\} \\ &\quad + 2(s_2 s_2^o - c_3 c_3^o) \{X_1 | X_2\}^2 \end{aligned}$$

Si les conditions (1) et (2) sont vérifiées, alors  $z^2 + X^2 = 1$  De plus

$$s_1^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \tag{6.30}$$

$$s_1 s_2 + c_1 c_2 = 0 \tag{6.31}$$

$$s_2^2 - c_3^2 = 0 \tag{6.32}$$

$$s_1 s_1^o + c_1 c_1^o + c_2 c_2^o + c_3 c_3^o = 0 \tag{6.33}$$

$$s_1 s_2^o + s_2 s_1^o + c_1 c_2^o + c_2 c_1^o = 0 \tag{6.34}$$

$$s_2 s_2^o - c_3 c_3^o = 0 \tag{6.35}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} s_2 &= c_3 \\ s_1 &= -\frac{c_1 c_2}{c_3} \\ s_2^o &= \frac{c_3 c_3^o}{c_3} \\ s_1^o &= -\frac{1}{c_3^2} (c_1 c_2^o c_3 + c_2 c_1^o c_3 - c_1 c_2 c_3^o) \end{aligned}$$

$R_1 R_2 = R$  est bien vérifiée.

■

Aucun mécanisme bouclé de solide rigide ne peut être construit à partir du théorème précédent. En effet :

**Proposition 6.6** Soient  $\mathbf{R}_1(q_1, \xi_1)$ ,  $\mathbf{R}_2(q_2, \xi_2)$  et  $\mathbf{R}_3(q_3, \xi_3) \in L(\mathfrak{D})$  des rotations pures, telles que  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\xi_3 \in \mathcal{Z}_a$  soient des générateurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ , pour que :  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 = \mathbf{1}$ , il faut et il suffit :

$$q_1 = 2k_1\pi, \quad q_2 = 2k_2\pi, \quad q_3 = 2k_3\pi$$

**Démonstration :** Si  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3 = \mathbf{1}$ , alors :

$$\{\xi_1 | \mathbf{R}_2 \xi_3\} = \{\xi_1 | \xi_3\}$$

puisque  $\xi_1, \xi_2$  et  $\xi_3$  sont linéairement indépendants, alors il est évident que :

$$q_2 = 2k_2\pi$$

Il reste  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_3 = \mathbf{1}$ , d'après la proposition 6.22, il faut :

$$q_1 = 2k_1\pi, \quad q_3 = 2k_3\pi$$

■

Lorsque  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ , on peut construire des mécanismes mobiles. C'est un cas singulier de théorème 6.1.

## 6.6 Produit de trois déplacements hélicoïdaux spatiaux

Dans cette partie, on étudie les singularités d'un produit de trois déplacements hélicoïdaux spatiaux dont les générateurs  $\xi_\theta$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$  sont donnés dans  $\mathcal{Z}$  et tels que  $\xi_\theta$  et  $\xi_\phi$  d'une part  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$  d'autre part n'aient pas leur axes parallèles.

De plus, pour schématiser les positions relatives entre les générateurs  $\xi_\theta$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$ , on va définir des angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et des distances  $d_\alpha$ ,  $d_\beta$ ,  $d_\gamma$  entre  $\xi_\theta$  et  $\xi_\phi$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$ ,  $\xi_\psi$  et  $\xi_\theta$  respectivement. De plus, ces paramètres sont liés par :

$$\{\xi_\theta | \xi_\phi\} = (\xi_\theta | \xi_\phi) + \epsilon [\xi_\theta | \xi_\phi] = \cos \alpha - \epsilon d_\alpha \sin \alpha$$

$$\{\xi_\phi | \xi_\psi\} = (\xi_\phi | \xi_\psi) + \epsilon [\xi_\phi | \xi_\psi] = \cos \beta - \epsilon d_\beta \sin \beta$$

$$\{\xi_\psi | \xi_\theta\} = (\xi_\psi | \xi_\theta) + \epsilon [\xi_\psi | \xi_\theta] = \cos \gamma - \epsilon d_\gamma \sin \gamma$$

On va montrer qu'un déplacement de solide rigide peut-être décomposé en un tel produit et que la solution peut être exprimée sous forme analytique.

On définit les déplacements  $\mathbf{R}_\theta = \mathbf{R}(\theta, d_\theta, \xi_\theta)$ ,  $\mathbf{R}_\phi = \mathbf{R}(\phi, d_\phi, \xi_\phi)$ ,  $\mathbf{R}_\psi = \mathbf{R}(\psi, d_\psi, \xi_\psi) \in L(\mathfrak{D})$ , où  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$  sont des angles de rotation respectives autour des axes  $\wedge_{\xi_\theta}$ ,  $\wedge_{\xi_\phi}$  et  $\wedge_{\xi_\psi}$ , et où  $d_\theta$ ,  $d_\phi$  et  $d_\psi$  des translations suivants les mêmes directions. Le déplacement

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\psi \tag{6.36}$$

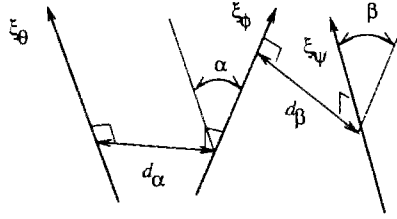


FIG. 6.9 - La position relative entre trois générateurs

est étudié comme une fonction de  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $d_\theta$ ,  $d_\phi$  et  $d_\psi$ .

**Proposition 6.7** Soient  $X, Y$  et  $Z \in \mathfrak{D}$ , tels que  $X$  et  $Y$  soient linéairement indépendants sur  $\Delta$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \{[X, Y] | Z\}^2 = & \{X | X\}\{Y | Y\}\{Z | Z\} - \{X | Y\}^2\{Z | Z\} - \{Z | X\}^2\{Y | Y\} \\ & - \{Z | Y\}^2\{X | X\} + 2\{X | Y\}\{Y | Z\}\{Z | X\} \end{aligned}$$

Lorsque  $X, Y$  et  $Z$  sont de "pas" zéro, la formule précédente est simplifiée par :

$$\{[X, Y] | Z\}^2 = 1 - \{X | Y\}^2 - \{Y | Z\}^2 - \{Z | X\}^2 + 2\{X | Y\}\{Y | Z\}\{Z | X\}$$

**Démonstration :** Puisque  $X$  et  $Y$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , alors  $\{X, Y, [X, Y]\}$  forme une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , on a alors :

$$Z = a^1 X + a^2 Y + a^3 [X, Y] \quad \text{pour } a^1, a^2, a^3 \in \Delta.$$

de plus, les coordonnées duales  $a^1, a^2, a^3$  peuvent être calculées par la proposition 4.1, prenons le produit intérieur duale en remplaçant  $a^1, a^2, a^3$  par leur expression, on a le résultat. ■

### 6.6.1 Condition pour qu'un déplacement hélicoïdale puisse être décomposé en produit de trois déplacements hélicoïdaux

Il est connu qu'un déplacement hélicoïdale peut être décomposé en produit de rotation par des angles d'Euler ou de Bryant, nous étudions ici les conditions dans lesquelles un déplacement hélicoïdale peut être décomposé en un produit de trois déplacements hélicoïdaux d'axe donné.

**Théorème 6.2** Soient  $\xi_\theta, \xi_\phi$  et  $\xi_\psi$  dans  $\mathfrak{D}$  tels que  $\xi_\theta$  et  $\xi_\phi$  d'une part  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$  d'autre part n'aient pas leurs axes parallèles, alors un déplacement hélicoïdale peut être décomposé en un produit de trois déplacements en suivant tels générateurs  $\xi_\theta, \xi_\phi$  et  $\xi_\psi$ , si et seulement si

$$(\xi_\theta | R\xi_\psi) \in [\min(-\cos(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta)), \max(-\cos(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta))] \quad (6.37)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des angles entre  $\xi_\theta$  et  $\xi_\phi$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$  respectivement.

**Démonstration :** Considérons l'équation  $R = R_\theta R_\phi R_\psi$ , la condition nécessaire et suffisante



pour qu'un déplacement hélicoïdale puisse être décomposé en un produit de trois déplacements hélicoïdaux est qu'il existe des solutions  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$  de l'équation  $R = R_\theta R_\phi R_\psi$ .

On va d'abord étudier la condition pour qu'on puisse déterminer  $\phi$ . Prenons le produit intérieur dual avec  $\xi_\theta$  et  $\xi_\psi$ , puisque  $R_\theta$  et  $R_\psi$  laissent respectivement invariants  $\xi_\theta$  et  $\xi_\psi$ , on obtient une équation contenant seulement les inconnus  $\phi$  et  $d_\phi$  :

$$\{\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi\} = \{\xi_\theta | R \xi_\psi\} \quad (6.38)$$

Pour que l'équation 6.38 soit résoluble, il faut et il suffit que la partie réelle (voir la proposition 6.2) i.e. l'équation écrite sous forme de Klein soit soluble.

$$(\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi) = (\xi_\theta | R \xi_\psi) \quad (6.39)$$

Cette équation peut être interprétée géométriquement par la figure 6.10.(a). Si l'on remplace  $R_\phi$  par  $1 + 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \text{ad} \xi_\phi + 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \text{ad}^2 \xi_\phi$ , on obtient une équation du second degré par rapport à  $\tan \frac{\phi}{2}$  :

$$(2Re(a) - Re(c)) \tan^2 \frac{\phi}{2} + 2Re(b) \tan \frac{\phi}{2} + Re(c) = 0 \quad (6.40)$$

où

$$\begin{cases} a = \{\xi_\theta | [\xi_\phi, [\xi_\phi, \xi_\psi]]\} \\ b = \{\xi_\theta | [\xi_\phi, \xi_\psi]\} \\ c = \{\xi_\theta | (\xi_\psi - R \xi_\psi)\} \end{cases} \quad (6.41)$$

sont des nombres duaux. Pour faciliter les calculs, on exprime leur partie réelle  $Re(a)$ ,  $Re(b)$  et  $Re(c)$  par les angles entre les axes de générateurs.

$$\begin{cases} Re(a) = \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma \\ Re(b^2) = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ Re(c) = \cos \gamma - (\xi_\theta | R \xi_\psi) \end{cases}$$

Pour que 6.40 soit résoluble, il faut et il suffit que son discriminant  $D$  soit non négatif, c'est-à-dire :

$$D = Re(b^2) - (2Re(a) - Re(c))Re(c) \geq 0$$

Après avoir simplifié, la relation précédente est une inégalité du deuxième degré par rapport à  $(\xi_\theta | R \xi_\psi)$  :

$$- (\xi_\theta | R \xi_\psi)^2 + 2 \cos \alpha \cos \beta (\xi_\theta | R \xi_\psi) + 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \geq 0. \quad (6.42)$$

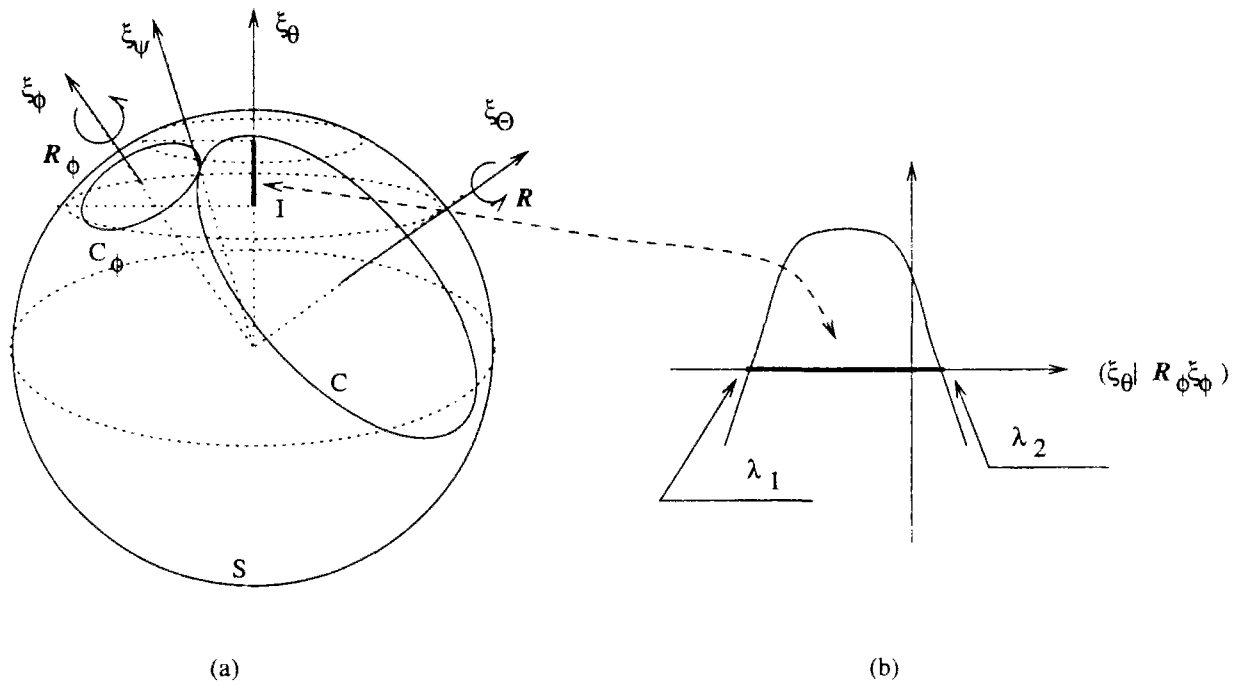
La partie gauche de l'inégalité est un polynôme de degré 2 par rapport à  $(\xi_\theta | R \xi_\psi)$ . Cette inégalité est interprétée sur la figure 6.10.(b), alors il est clair que si  $(\xi_\theta | R \xi_\psi)$  tombe dans l'intervalle  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , avec :

$$\lambda_1 = \min(-\cos(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta)), \quad \lambda_2 = \max(-\cos(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta))$$

il existe toujours des  $\phi$  qui vérifient l'équation 6.40.

Maintenant, on considère les conditions d'existence des solutions pour  $\theta$  et  $\psi$ . L'équation  $R = R_\theta R_\phi R_\psi$  peut être transformée sous les deux formes suivantes :

$$R_\theta^* R = R_\phi R_\psi, \quad R_\psi R^* = R_\phi^* R_\theta^*$$



Lorsque les trois générateurs passent par le même point  $o$  et que  $R_\theta$ ,  $R_\phi$  et  $R_\psi$  sont des rotations pures, alors l'équation  $(\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi) = (\xi_\theta | R_\psi \xi_\psi)$  est représentée par la figure (a) à l'aide du sphère unité. Elle montre qu'après avoir subi la rotation  $R_\theta$  ou la rotation  $R_\psi$ ,  $\xi_\psi$  a la même projection sur  $\xi_\theta$ , si  $R$  est fixé, il n'existe des valeurs de  $\phi$  vérifiant l'équation précédente que lorsque  $(\xi_\theta | R_\psi \xi_\psi)$  tombe dans l'intervalle  $I = [\lambda_1, \lambda_2]$ .

FIG. 6.10 - Condition d'existence de  $\phi$

On peut obtenir les équations qui ne contiennent seulement  $\theta$  et  $\psi$  respectivement en utilisant la forme de Killing :

$$(R_\theta \xi_\phi | R\xi_\psi) = (\xi_\phi | \xi_\psi), \quad (R_\psi^* \xi_\phi | R^* \xi_\theta) = (\xi_\phi | \xi_\theta) \quad (6.43)$$

En effet, les deux équations précédentes peuvent être transformées en polynôme du deuxième degré par rapport à  $\tan \frac{\theta}{2}$  et  $\tan \frac{\psi}{2}$  respectivement :

$$\begin{cases} (2Re(a') - Re(c')) \tan^2 \frac{\theta}{2} + 2Re(b') \tan \frac{\theta}{2} + Re(c') = 0 \\ (2Re(a'') - Re(c'')) \tan^2 \frac{\psi}{2} + 2Re(b'') \tan \frac{\psi}{2} + Re(c'') = 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

où les paramètres sont définis par :

$$\begin{cases} a' = \{ \xi_\phi | [\xi_\theta, [\xi_\psi, R\xi_\psi]] \} \\ Re(a') = \cos \alpha (\xi_\theta | R\xi_\psi) - (\xi_\phi | R\xi_\psi) \\ b' = \{ \xi_\theta | [\xi_\phi, R\xi_\psi] \} \\ Re(b'^2) = 1 - (\xi_\theta | R\xi_\psi)^2 - \cos^2 \alpha - (\xi_\phi | R\xi_\psi)^2 + 2 \cos \alpha (\xi_\theta | R\xi_\psi) (\xi_\phi | R\xi_\psi) \\ c' = \{ \xi_\phi | (R\xi_\psi - \xi_\psi) \} \\ Re(c') = (\xi_\phi | R\xi_\psi) - \cos \beta \end{cases} \quad (6.45)$$

$$\begin{cases} a'' = \{ R^* \xi_\theta | [\xi_\psi, [\xi_\psi, \xi_\phi]] \} \\ Re(a'') = \cos \beta (\xi_\theta | R\xi_\psi) - (\xi_\theta | R\xi_\phi) \\ b'' = \{ R^* \xi_\theta | [\xi_\phi, \xi_\psi] \} \\ Re(b''^2) = 1 - (\xi_\theta | R\xi_\psi)^2 - \cos^2 \beta - (\xi_\theta | R\xi_\phi)^2 + 2 \cos \beta (\xi_\theta | R\xi_\psi) (\xi_\theta | R\xi_\phi) \\ c'' = \{ \xi_\theta | (R\xi_\phi - \xi_\phi) \} \\ Re(c'') = (\xi_\theta | R\xi_\phi) - \cos \alpha \end{cases} \quad (6.46)$$

Pour que les équations 6.44 aient des solutions, il faut et il suffit que leur discriminant soit non négatif. De plus, elles ont le même discriminant que l'équation en  $\tan \frac{\theta}{2}$  qui est défini par 6.42. Il est alors clair que si  $(\xi_\theta | R\xi_\psi) \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , il existe toujours des solutions pour  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$ . ■

On a remarqué que la condition de résolubilité ne dépend pas de la position relative entre le générateur  $\xi_\theta$  du premier déplacement  $R_\theta$  et le générateur  $\xi_\psi$  du troisième déplacement  $R_\psi$ , seules les positions relatives entre  $\xi_\theta$  et  $\xi_\phi$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$ , plus précisément, les angles  $\alpha$  et  $\beta$  décident la condition de résolubilité.

## 6.6.2 Résolution

(1) En supposant trois déplacements  $R_\theta$ ,  $R_\phi$ ,  $R_\psi$  connus dont les paramètres de quaternions duaux associés sont respectivement :

$$\begin{aligned} z_\theta &= \cos \frac{\theta}{2} - \epsilon \frac{d_\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & X_\theta &= (\sin \frac{\theta}{2} + \epsilon \frac{d_\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}) \xi_\theta \\ z_\phi &= \cos \frac{\phi}{2} - \epsilon \frac{d_\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} & X_\phi &= (\sin \frac{\phi}{2} + \epsilon \frac{d_\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}) \xi_\phi \\ z_\psi &= \cos \frac{\psi}{2} - \epsilon \frac{d_\psi}{2} \sin \frac{\psi}{2} & X_\psi &= (\sin \frac{\psi}{2} + \epsilon \frac{d_\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}) \xi_\psi \end{aligned}$$

Alors on peut évaluer le déplacement  $R = R_\theta R_\phi R_\psi$  par ses paramètres de quaternion dual associé  $z = \cos \frac{\Theta}{2}$  et  $X = \sin \frac{\Theta}{2} \chi$ . En utilisant la proposition 1.6,  $z$  et  $X$  sont calculés par la procédure suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \frac{1}{2} (R_\theta R_\phi R_\psi + R_\psi^* R_\phi^* R_\theta^*) \\ &= \mathbf{1} + 2 \operatorname{ad}^2 \left( \begin{array}{l} z_\psi z_\phi X_\theta + z_\theta z_\psi X_\phi + (z_\theta z_\phi - \{X_\theta | X_\phi\}) X_\psi + z_\psi [X_\theta, X_\phi] \\ + z_\theta [X_\phi, X_\psi] + z_\psi [X_\theta, X_\psi] + [[X_\theta, X_\phi], X_\psi] \end{array} \right) \\ &= \mathbf{1} + 2 \operatorname{ad}^2 X \end{aligned}$$

alors

$$X = \pm \left( \begin{array}{l} z_\psi z_\phi X_\theta + z_\theta z_\psi X_\phi + (z_\theta z_\phi - \{X_\theta | X_\phi\}) X_\psi + z_\psi [X_\theta, X_\phi] \\ + z_\theta [X_\phi, X_\psi] + z_\psi [X_\theta, X_\psi] + [[X_\theta, X_\phi], X_\psi] \end{array} \right) \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{2} (R_\theta R_\phi R_\psi - R_\psi^* R_\phi^* R_\theta^*) \\ &= 2 ((z_\theta z_\phi - \{X_\theta | X_\phi\}) z_\psi - \{(z_\theta X_\phi + z_\phi X_\theta + [X_\theta, X_\phi]) | X_\psi\}) \\ &\quad \operatorname{ad} \left( \begin{array}{l} z_\psi z_\phi X_\theta + z_\theta z_\psi X_\phi + (z_\theta z_\phi - \{X_\theta | X_\phi\}) X_\psi + z_\psi [X_\theta, X_\phi] \\ + z_\theta [X_\phi, X_\psi] + z_\psi [X_\theta, X_\psi] + [[X_\theta, X_\phi], X_\psi] \end{array} \right) \\ &= 2z \operatorname{ad} X \end{aligned}$$

alors

$$z = \pm ((z_\theta z_\phi - \{X_\theta | X_\phi\}) z_\psi - \{(z_\theta X_\phi + z_\phi X_\theta + [X_\theta, X_\phi]) | X_\psi\}) \quad (6.48)$$

(2) On considère maintenant s'il y a un déplacement hélicoïdale  $R$ , de plus la condition du théorème 6.2 est vérifiée, alors il peut être décomposé par trois déplacements hélicoïdaux suivant trois axes non colinéaires.

**Proposition 6.8** *Soient  $\xi$  et  $\eta \in \mathfrak{D}$  linéairement indépendants sur  $\Delta$ , pour que deux déplacements hélicoïdaux  $R_1$  et  $R_2$  soient égaux, il faut et il suffit :*

$$R_1 \xi = R_2 \xi, \quad R_1 \eta = R_2 \eta. \quad (6.49)$$

**Démonstration :** Lorsque  $R_1 = R_2$ , l'équation 6.49 est évidente, nous ne montrons que la réciproque.

D'après 6.49, on a :

$$R_1[\xi, \eta] = R_2[\xi, \eta]$$

comme  $\{\xi, \eta, [\xi, \eta]\}$  forment une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , d'après la proposition 4.1, pour  $X \in \mathfrak{D}$ , on a :  $X = z^1 \xi + z^2 \eta + z^3 [\xi, \eta]$ , où  $z^i \in \Delta$ . Alors :

$$R_1 X = R_2 X \quad \Leftrightarrow \quad R_1 = R_2 \quad \text{pour } X \in \mathfrak{D}$$

■

Puisque  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , en fonction de la proposition 6.8, on a :

$$R_\theta R_\phi R_\psi = R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R^* R_\theta R_\phi \xi_\psi = \xi_\psi, \\ R^* R_\theta R_\phi \xi_\phi = R_\psi^* \xi_\phi. \end{cases} \quad (6.50)$$

Supposons  $R, \xi_\theta, \xi_\phi, \xi_\psi$  connus, alors on va calculer  $\theta, \phi, \psi$  et  $d_\theta, d_\phi$  et  $d_\psi$  en utilisant les équations 6.50.

### Évaluation de $\phi, d_\phi, \theta$ et $d_\theta$

Remplacée  $R_\theta = 1 + \sin(\theta + \epsilon d_\theta) \text{ad } \xi_\theta + (1 - \cos(\theta + \epsilon d_\theta)) \text{ad } {}^2\xi_\theta$ , l'équation  $R_\theta R_\phi \xi_\psi = R \xi_\psi$  s'exprime par :

$$R_\phi \xi_\psi + \sin(\theta + \epsilon d_\theta) [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi] + (1 - \cos(\theta + \epsilon d_\theta)) [\xi_\theta, [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]] = R \xi_\psi$$

qui est équivalente à :

$$\{\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi\} - \{\xi_\theta | R \xi_\psi\} = 0 \quad (6.51)$$

$$\{\sin(\theta + \epsilon d_\theta) [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi] | [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]\} - \{[\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi] | R \xi_\psi\} = 0 \quad (6.52)$$

$$\{(1 - \cos(\theta + \epsilon d_\theta)) [\xi_\theta, [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]] | [\xi_\theta, [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]]\} - \{[\xi_\theta, [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]] | (R - R_\phi) \xi_\psi\} = 0 \quad (6.53)$$

D'après l'équation 6.51, on utilise la forme de Killing et la forme de Klein, on obtient :

$$\begin{cases} (2\text{Re}(a) - \text{Re}(c)) \tan^2 \frac{\phi}{2} + 2\text{Re}(b) \tan \frac{\phi}{2} - \text{Re}(c) = 0 \\ d_\phi (\text{Re}(b) \cos \phi + \text{Re}(a) \sin \phi) = Du(c - a) + Du(a) \cos \phi - Du(b) \sin \phi \end{cases}$$

où les coefficients  $a, b$  et  $c$  sont définis par l'équation 6.41.

On a finalement :

$$\begin{cases} \tan \frac{\phi}{2} = \frac{-\text{Re}(b) \pm D^{\frac{1}{2}}}{(2\text{Re}(a) - \text{Re}(c))} \\ d_\phi = \frac{Du(c - a) + Du(a) \cos \phi - Du(b) \sin \phi}{(\text{Re}(b) \cos \phi + \text{Re}(a) \sin \phi)} \end{cases} \quad (6.54)$$

D'après les équations 6.52 et 6.53, la forme de Killing et la forme de Klein nous permettent d'obtenir :

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{\text{Re}(Z)} (R \xi_\psi | [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]) \\ \cos \theta = \frac{1}{\text{Re}(Z)} ((R \xi_\psi | R_\phi \xi_\psi) - (\xi_\theta | R \xi_\psi)^2) \\ d_\theta = \frac{1}{\cos \theta \text{Re}(Z)} ([R \xi_\psi | [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]] - \sin \theta Du(Z)) \end{cases} \quad (6.55)$$

où  $Z = \{[\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi] | [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]\}$  et  $\text{Re}(Z) = 1 - (\xi_\theta | R \xi_\psi)^2$ ,  $Du(Z) = [[\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi] | [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]]$ .

### Évaluation de $\psi$ et $d_\psi$

D'après l'équation 6.50

$$R^* R_\theta \xi_\phi = R^* \xi_\phi$$

Elle est équivalente à :

$$\{\xi_\psi | \xi_\phi\} - \{R \xi_\psi | R_\theta \xi_\phi\} = 0 \quad (6.56)$$

$$\{\sin(\psi + \epsilon d_\psi) [\xi_\psi, \xi_\phi] | [\xi_\psi, \xi_\phi]\} + \{[\xi_\psi, \xi_\phi] | R^* R_\theta \xi_\phi\} = 0 \quad (6.57)$$

$$\{1 - \cos(\psi + \epsilon d_\psi) [\xi_\psi, [\xi_\psi, \xi_\phi]] | [\xi_\psi, [\xi_\psi, \xi_\phi]]\} - \{[\xi_\psi, [\xi_\psi, \xi_\phi]] | R^* R_\theta \xi_\phi - \xi_\phi\} = 0 \quad (6.58)$$

il est évident que 6.56 est vérifiée par  $R\xi_\psi = R_\theta R_\phi \xi_\psi$ . Nous utilisons la forme de Killing et la forme de Klein, on a :

$$\begin{cases} \sin \psi &= -\frac{1}{\sin^2 \beta} (R^* R_\theta \xi_\phi | [\xi_\psi, \xi_\phi]) \\ \cos \psi &= \frac{1}{\sin^2 \beta} ((R^* R_\theta \xi_\phi | \xi_\phi) - \cos^2 \beta) \\ d_\psi &= \frac{1}{\cos \psi \sin^2 \beta} ([R^* R_\theta \xi_\phi | [\xi_\psi, \xi_\phi]] + 2d_\beta \sin \beta \cos \beta \sin \psi) \end{cases} \quad (6.59)$$

Les solutions 6.54, 6.55 et 6.59 sont alors nécessaires et suffisantes par rapport à l'équation  $R = R_\theta R_\phi R_\psi$ .

### 6.6.3 Analyse le cas singulier

Le produit  $R = R_\theta R_\phi R_\psi$  correspond physiquement un mécanisme de quatre corps fermé liés par des couples cylindriques, on peut donc écrire la matrice jacobienne par :

$$J = (R_\theta \xi_\theta, \Omega R_\theta \xi_\theta, R_\theta R_\phi \xi_\phi, \Omega R_\theta R_\phi \xi_\phi, R_\theta R_\phi R_\psi \xi_\psi, \Omega R_\theta R_\phi R_\psi \xi_\psi, \chi, \Omega \chi)$$

On a remarqué que le rang de  $J$  ne dépend que  $R_\phi$  et  $R_\theta$  puisque :

$$\text{rang}(J) = \text{rang}(\xi_\theta, \Omega \xi_\theta, \xi_\phi, \Omega \xi_\phi, R_\phi \xi_\psi, \Omega R_\phi \xi_\psi, R_\theta^* \chi, \Omega R_\theta^* \chi)$$

On dit que les trois angles se trouvent dans une configuration singulière si le rang de la matrice  $J$  est inférieur au rang maximal.

On va faire une analyse de configuration singulière utilisant la méthode proposée dans le chapitre 5 qui est basée sur les solutions analytiques.

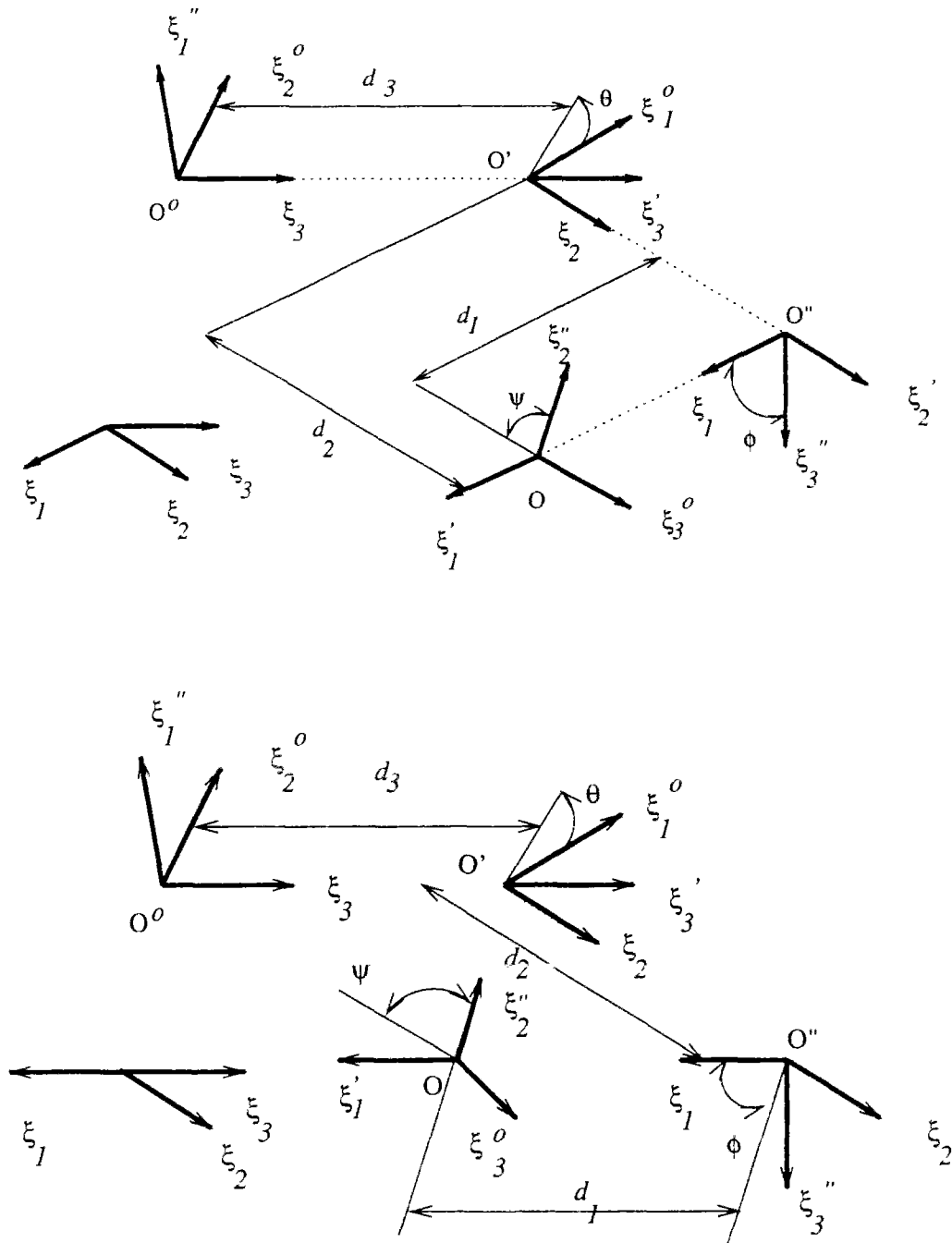
D'après la démonstration du théorème 6.2, si l'on suppose que  $\Theta$ ,  $d_\Theta$  comme paramètres d'entrée et que  $\theta$  et  $d_\theta$  comme paramètres de sortie,  $\psi$ ,  $d_\psi$  et  $\phi$ ,  $d_\phi$  comme des paramètres intermédiaires. Afin de simplifier les calculs, on peut déterminer les points singuliers par les équations 6.39 et 6.43.

On peut considérer 6.39, 6.43 comme des fonctions et les réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} Q_\phi = (\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi) - (\xi_\theta | R \xi_\psi) \\ Q_{d_\phi} = d_\phi \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + d_\Theta \frac{\partial Q_\phi}{\partial \Theta} = 0 \\ Q_\psi = (R_\psi^* \xi_\phi | R^* \xi_\theta) - (\xi_\phi | \xi_\theta) = 0 \\ Q_{d_\psi} = d_\psi \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} + d_\Theta \frac{\partial Q_\psi}{\partial \Theta} = 0 \\ Q_\theta = (R_\theta \xi_\phi | R \xi_\psi) - (\xi_\phi | \xi_\psi) = 0 \\ Q_{d_\theta} = d_\theta \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + d_\Theta \frac{\partial Q_\theta}{\partial \Theta} = 0 \end{cases} \quad (6.60)$$

Puisque  $Q_\phi$ ,  $Q_\psi$  et  $Q_\theta$  ne dépend pas de paramètre de translation, on a :

$$\frac{\partial Q_\theta}{\partial d_i} = \frac{\partial Q_\phi}{\partial d_i} = \frac{\partial Q_\psi}{\partial d_i} = 0 \quad \text{pour} \quad d_i = d_\theta, d_\phi, d_\psi, d_\Theta$$



La figure en haut est schématisée trois déplacements dans la position régulière. La figure en bas est un schéma de trois déplacements qui se trouvent dans la position singulière.

FIG. 6.11 - Schématisation des trois déplacements

De plus :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta} = \frac{\partial Q_{d_i}}{\partial d_\theta} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \phi} = \frac{\partial Q_{d_i}}{\partial d_\phi} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \psi} = \frac{\partial Q_{d_i}}{\partial d_\psi}$$

où  $Q_i = Q_\theta, Q_\psi, Q_\phi$ , et  $d_i = d_\theta, d_\psi, d_\phi$ .

$$\frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial Q_\theta}{\partial \psi} = \frac{\partial Q_\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial Q_\phi}{\partial \psi} = \frac{\partial Q_\psi}{\partial \theta} = \frac{\partial Q_\psi}{\partial \phi} = 0$$

Alors, la matrice jacobienne engendrée par les équations 6.60 est exprimée par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \Theta} & 0 & \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_\Theta \frac{\partial^2 Q_\phi}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial Q_\phi}{\partial \Theta} & d_\phi \frac{\partial^2 Q_\phi}{\partial \phi^2} & \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_\psi}{\partial \Theta} & 0 & \frac{\partial Q_\psi}{\partial \phi} & 0 & \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} & 0 & 0 & 0 \\ d_\Theta \frac{\partial^2 Q_\psi}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial Q_\psi}{\partial \Theta} & d_\phi \frac{\partial^2 Q_\psi}{\partial \phi^2} & 0 & d_\psi \frac{\partial^2 Q_\psi}{\partial \psi^2} & \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \Theta} & 0 & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} & 0 \\ d_\Theta \frac{\partial^2 Q_\theta}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \Theta} & 0 & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} & 0 & 0 & d_\theta \frac{\partial^2 Q_\theta}{\partial \theta^2} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Alors, on peut classifier les différents types de singularité en définissant les matrices **A** et **B**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} & 0 \\ d_\theta \frac{\partial^2 Q_\theta}{\partial \theta^2} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

La matrice **B** est définie par :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\phi & 0 & \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\phi & 0 & 0 & 0 \\ d_\Theta \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} Q_\phi & \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\phi & d_\phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Q_\phi & \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\phi & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\psi & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \psi} Q_\psi & 0 \\ d_\Theta \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} Q_\psi & \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\psi & 0 & \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\psi & d_\psi \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} Q_\psi & \frac{\partial}{\partial \psi} Q_\psi \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_\Theta \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} Q_\theta & \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\theta & 0 & \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B}) = \left( \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\theta \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\phi \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial \psi} Q_\psi \right)^2$$

Puisque  $\det(\mathbf{A})$  et  $\det(\mathbf{B})$  ne dépendent pas de paramètre de translation, alors on a la proposition suivante

**Proposition 6.9** *L'étude des configurations singulières du produit de trois déplacements hélicoïdaux est équivalente à celle du produit de trois rotations pures.*



**Démonstration :** Supposons que les trois déplacements hélicoïdaux se réduisent en trois rotations pures, alors les solutions analytiques s'expriment sous forme suivante :

$$Q_\phi = Q_\phi(\phi, \Theta), \quad Q_\theta = Q_\theta(\theta, \Theta), \quad Q_\psi = Q_\psi(\psi, \Theta)$$

alors la matrice  $\mathbf{A}$  réduit en une matrice scalaire  $\mathbf{A}'$  :

$$\mathbf{A}' = \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta}$$

alors la matrice  $\mathbf{B}$  réduit sous forme  $\mathbf{B}'$  :

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\phi & \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\phi & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\psi & 0 & \frac{\partial}{\partial \psi} Q_\psi \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} Q_\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B}') = \frac{\partial Q_\theta}{\partial \Theta} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi}$$

il est évident que :

$$\mathbf{A} \text{ est singulier} \iff \mathbf{A}' \text{ est singulier}$$

$$\mathbf{B} \text{ est singulier} \iff \mathbf{B}' \text{ est singulier}$$

■

Pour faire des analyses plus profondes, on utilise la proposition 2.11 dans le chapitre 2, on obtient :

$$\frac{d\mathbf{R}(q, \xi)}{dq} \cdot X = [\xi, \mathbf{R}(q, \xi) \cdot X], \quad \frac{d\mathbf{R}^{-1}(q, \xi)}{dq} \cdot \bar{X} = -[\xi, \mathbf{R}^{-1}(q, \xi) \cdot \bar{X}] \quad \text{pour } X \in \mathcal{D} \quad (6.61)$$

**Proposition 6.10** Les trois équations suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad (ii) \quad \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (iii) \quad \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} = 0$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} = 0 & \iff \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\xi_\theta | \mathbf{R}_\phi \xi_\psi) \\ & = \left( \xi_\theta | \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{R}_\phi \xi_\psi \right) \\ & = (\xi_\theta | [\xi_\phi, \mathbf{R}_\phi \xi_\psi]) = 0 \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = 0 & \iff \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{R}_\theta \xi_\phi | \mathbf{R} \xi_\psi) \\ & = ([\xi_\theta, \mathbf{R}_\theta \xi_\phi] | \mathbf{R} \xi_\psi) \\ & = (\xi_\theta | [\xi_\phi, \mathbf{R}_\theta \xi_\psi]) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} = 0 \iff \begin{aligned} \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} &= \frac{\partial}{\partial \psi} (R_\psi^* \xi_\phi | R^* \xi_\theta) \\ &= ([\xi_\psi, R_\psi^* \xi_\phi] | R^* \xi_\theta) \\ &= (\xi_\theta | [\xi_\phi, R_\phi \xi_\psi]) = 0 \end{aligned}$$

■

Ce qui signifie qu'après avoir subi un déplacement  $R_\phi$ ,  $\xi_\theta$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$  sont parallèles à un plan. Considérons la relation  $\frac{\partial Q_\theta}{\partial \Theta} = 0$ , après la même procédure de calcul, on montre qu'elle est équivalente à

$$(R_\theta \xi_\phi | [\xi_\Theta, \xi_\theta]) = 0$$

Ce qui signifie qu'après avoir subi un déplacement  $R_\theta$ ,  $\xi_\theta$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\Theta$  sont parallèles à un plan.

Alors, on peut définir les sous ensembles des configurations singulières par :

(1)  $M_I$

$$M_I = \{\phi, \theta, \psi \mid \det(\mathbf{B}) = 0\} \Leftrightarrow M_I = \{\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R} \mid \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} = 0 \text{ ou } \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} = 0 \text{ ou } \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = 0\}$$

ce qui est équivalent à :

$$M_I = \{\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R} \mid (\xi_\theta | [\xi_\phi, R_\phi \xi_\psi]) = 0\}$$

(2)  $M_{\mathbf{I}}$

$$M_{\mathbf{I}} = \{\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R} \mid \det(\mathbf{A}) = 0\} \Leftrightarrow M_{\mathbf{I}} = \{\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R} \mid \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} = 0 \text{ ou } \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} = 0 \text{ ou } \frac{\partial Q_\theta}{\partial \Theta} = 0\}$$

ce qui est équivalent à :

$$M_{\mathbf{I}} = \{\theta, \phi, \psi \mid (\xi_\theta | [\xi_\phi, R_\phi \xi_\psi]) = 0 \text{ ou } (R_\theta \xi_\phi | [\xi_\Theta, \xi_\theta]) = 0\}$$

(3)  $M_{\mathbf{II}}$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{II}} &= \{\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R} \mid \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0\} \\ M_{\mathbf{II}} &= M_I \cap M_{\mathbf{I}} = \{\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R} \mid \frac{\partial Q_\psi}{\partial \psi} = 0 \text{ ou } \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} = 0\} \end{aligned}$$

Finalement :

$$M_{\mathbf{II}} = \left\{ \phi, \theta, \psi \mid (\xi_\theta | [\xi_\phi, R_\phi \xi_\psi]) = 0 \text{ ou } \begin{cases} (\xi_\theta | [\xi_\phi, R_\phi \xi_\psi]) = 0 \text{ et} \\ (R_\theta \xi_\phi | [\xi_\Theta, \xi_\theta]) = 0 \end{cases} \right\}$$

D'après les solutions analytiques, si  $R$  est donné, même si les trois axes de générateur sont dans un plan (c'est -à-dire,  $(\xi_\theta | [\xi_\phi, R_\phi \xi_\psi]) = 0$  ou  $(R_\theta \xi_\phi | [\xi_\Theta, \xi_\theta]) = 0$ ), un déplacement peut être décomposé en suivant ces trois générateurs, de plus les angles de rotation et les longueurs de translation peuvent être déterminées par les équations 6.54, 6.55 et 6.59.

Le produit de trois déplacements hélicoïdaux est complètement dégénéré, lorsque  $(\xi_\theta | [\xi_\phi, R_\phi \xi_\psi]) = 0$  et  $(R_\theta \xi_\phi | [\xi_\Theta, \xi_\theta]) = 0$ . C'est-à-dire, pour  $\Theta$  et  $\phi$  différents de zéro, pour que  $R_\theta R_\phi R_\psi = R$ , il faut que les axes de générateur se trouvent parallèles. Cela peut être exprimé également par  $R_\phi \xi_\psi = \xi_\theta$ , alors  $R_\theta R_\phi R_\psi = R$  se réduit à  $R_\theta(\theta + \psi, d_\theta + d_\psi, \xi_\theta) = R$ , nous avons donc la proposition suivante.

**Proposition 6.11** Si  $(\xi_\theta | [\xi_\phi, R_\phi \xi_\psi]) = 0$ , alors le produit  $R_\theta R_\phi R_\psi = R$  est dégénéré.

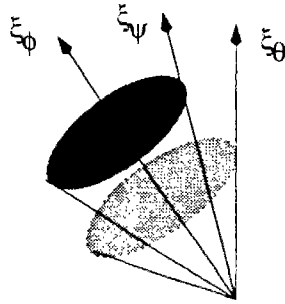


FIG. 6.12 - La condition d'existence de singularité du produit de 3 déplacements

Après avoir subi un déplacement  $R_\phi(\phi, d_\phi, \xi_\phi)$ ,  $\xi_\theta$  et  $\xi_\psi$  sont parallèles.

Maintenant, à partir de la proposition précédente, on va trouver la condition géométrique de  $\xi_\theta$ ,  $\xi_\phi$  et  $\xi_\psi$ , pour laquelle le produit  $R_\theta R_\phi R_\psi = R$  est dégénéré.

L'équation  $[\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi] = 0$  est équivalente à la relation suivante :

$$\xi_\psi + \sin \phi [\xi_\phi, \xi_\psi] + (1 - \cos \phi) [\xi_\phi, [\xi_\phi, \xi_\psi]] = \pm \xi_\theta$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut que :

$$(\xi_\psi | \xi_\phi) = \pm (\xi_\theta | \xi_\phi)$$

c'est-à-dire :

$$\cos \alpha = \pm \cos \beta$$

Cette condition d'existence de singularité signifie géométriquement que les axes de  $\xi_\theta$  et de  $\xi_\psi$  engendrent le même cône ??.

**Proposition 6.12** Soient  $\xi_\theta, \xi_\phi, \xi_\psi \in \mathfrak{D}$  trois générateurs, de plus  $(\xi_\theta | \xi_\phi) \neq \pm (\xi_\phi | \xi_\psi)$ , alors il n'existe pas de points singuliers de type III dans l'ensemble des configurations admissibles .

En ces points singuliers, les axes de  $\xi_\theta$  et  $\xi_\psi$  sont parallèles , c'est-à-dire que le produit devient :

$$R(\theta + \psi, \xi_\theta) = R(\Theta, \chi)$$

Si les axes de  $\xi_\theta$  et  $\chi$  ne sont pas parallèles, alors :

$$\theta + \psi = \Theta = 2k\pi$$

$\theta$  et  $\psi$  sont incontrôlables.

Si les axes de  $\xi_\theta$  et  $\chi$  sont parallèles, alors :

$$\theta + \psi - \Theta = 2k\pi$$

$\theta$ ,  $\psi$  et  $\Theta$  sont incontrôlables.

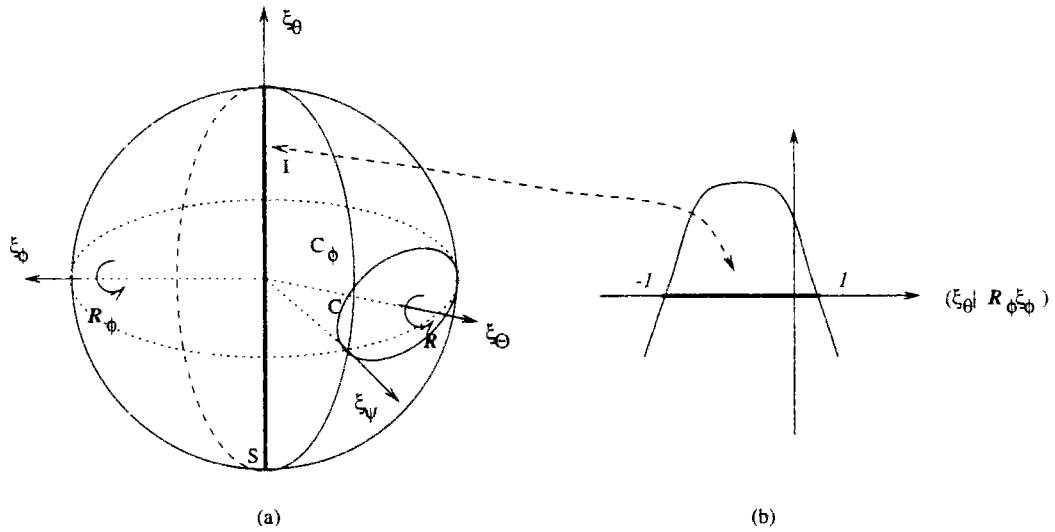


FIG. 6.13 - Les angles de Briant

#### 6.6.4 Angles de Briant

Nous considérons des cas particuliers d'un produit de trois déplacements hélicoïdaux. Soient  $\xi_\theta, \xi_\phi, \xi_\psi \in \mathcal{D}$  tels que  $\{\xi_\theta | \xi_\phi\} = \epsilon d_\alpha$ ,  $\{\xi_\phi | \xi_\psi\} = \epsilon d_\beta$ ,  $\{\xi_\theta | \xi_\psi\} = \epsilon d_\gamma$ , la relation

$$R_\theta(\theta, d_\theta, \xi) R_\phi(\phi, d_\phi, \eta) R_\psi(\psi, d_\psi, \zeta) = R(\Theta, d_\Theta, \chi)$$

s'appelle les angles de Briant duaux.

Si l'on suppose  $R_\theta(\theta, d_\theta, \xi)$ ,  $R_\phi(\phi, d_\phi, \eta)$ ,  $R_\psi(\psi, d_\psi, \zeta)$  donnés, on peut trouver l'angle de rotation  $\Theta$ , la translation  $d_\Theta$  et l'axe de déplacement  $\xi_\Theta$  en utilisant l'équation 6.47 et 6.48 :

$$z = \pm (z_\theta z_\phi z_\psi - \{[X_\theta, X_\phi] | X_\psi\})$$

plus précisément :

$$\begin{cases} Re(z) = \pm (Re(z_\theta) Re(z_\phi) Re(z_\psi) - ([X_\theta, X_\phi] | X_\psi)) \\ d_\Theta = \pm \frac{1}{Re(z)} (Du(z_\theta z_\phi z_\psi) - [[X_\theta, X_\phi] | X_\psi]) \end{cases}$$

$$X = \pm \begin{pmatrix} z_\psi z_\phi X_\theta + z_\theta z_\psi X_\phi + z_\theta z_\phi X_\psi + z_\psi [X_\theta, X_\phi] \\ + z_\theta [X_\phi, X_\psi] + z_\psi [X_\theta, X_\psi] \end{pmatrix}$$

On va calculer  $\theta, \phi, \psi$  et  $d_\theta, d_\phi, d_\psi$  en supposant  $R$  connu. D'après 6.41, on a :

$$\begin{cases} Re(a) = 0 \\ Du(a) = -d_\alpha \sin \alpha \cos \beta - d_\beta \cos \alpha \sin \beta + d_\gamma \sin \gamma \\ \\ Re(b) = 1 \\ Du(b) = 0 \\ \\ Re(c) = -(\xi_\theta | R\xi_\psi) \\ Du(c) = -d_\gamma - [\xi_\theta | R\xi_\psi] \end{cases}$$

Les paramètres  $\phi$ ,  $d_\phi$ ,  $\theta$ ,  $d_\theta$ ,  $\psi$  et  $d_\psi$  sont déterminés par :

$$\begin{cases} \tan \frac{\phi}{2} = \frac{(-1 \pm \sqrt{1 + Re(c)^2})}{-Re(c)} \\ d_\phi = \frac{[\xi_\theta | R\xi_\psi] + d_\gamma \cos \phi}{\cos \phi} \end{cases} \quad (6.62)$$

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{(R\xi_\psi | \xi_\phi)}{\cos^2 \phi} \\ \cos \theta = \frac{(R\xi_\psi | \xi_\psi)}{\cos^2 \phi} \\ d_\theta = \frac{[R\xi_\psi | [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]] - 2 \sin \theta (\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi) [\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi]}{\cos \theta \cos^2 \phi} \end{cases} \quad (6.63)$$

$$\begin{cases} \sin \psi = (R^* R_\theta \xi_\phi | \xi_\theta) \\ \cos \psi = 1 + (R^* R_\theta \xi_\phi | \xi_\phi) \\ d_\psi = \frac{[R^* \xi_\theta | [\xi_\psi, R_\phi^* \xi_\theta]]}{\cos \psi} \end{cases} \quad (6.64)$$

### Analyse des points singuliers

Lorsque  $c = 0$  et  $\cos \phi = 0$ , les angles de Briant se trouvent dans une configuration singulière dégénérée (type III), on a :

$$\phi = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

alors :

$$R = R(\theta + \psi, \xi_\theta)$$

Si  $\xi_\theta$  et  $\chi$  ne sont pas parallèles, alors :

$$\theta + \psi = \Theta = k\pi \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Si  $\xi_\theta$  et  $\chi$  sont parallèles, alors :

$$\theta + \psi - \Theta = k\pi \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

### 6.6.5 Angles d'Euler duaux

Nous considérons un autre cas particulier, lorsque  $\xi_\theta, \xi_\phi, \xi_\psi \in \mathcal{D}$  tels que  $\{\xi_\theta | \xi_\phi\} = \epsilon d_\alpha$ ,  $\{\xi_\psi | \xi_\phi\} = \epsilon d_\beta$ ,  $\{\xi_\theta | \xi_\psi\} = -1$ , la relation

$$R_\theta(\theta, d_\theta, \zeta) R_\phi(\phi, d_\phi, \eta) R_\psi(\psi, d_\psi, \zeta) = R(\Theta, d_\Theta, \chi)$$

s'appelle les angles d'Euler duaux [Gio91].

Supposons  $R_\theta$ ,  $R_\phi$  et  $R_\psi$  connus, alors on peut évaluer  $R$  par son angle de rotation  $\Theta$ , sa translation et son axe en utilisant l'équation 6.47 et 6.48 :

$$z = \pm (z_\theta z_\phi z_\psi - \{z_\phi, X_\theta | X_\psi\})$$

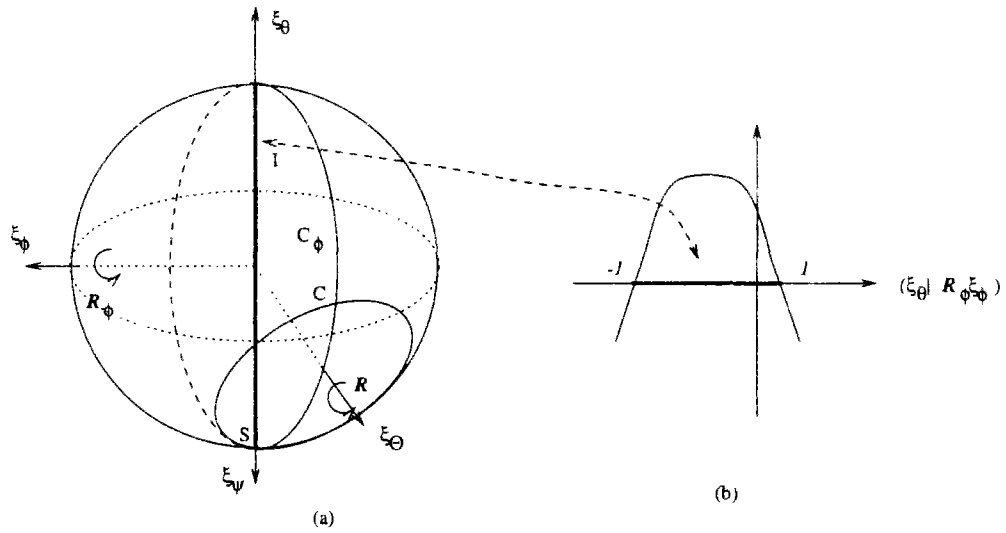


FIG. 6.14 - les angles d'Euler

L'angle et la translation sont évalués par la partie réelle et la partie duale de  $z$  respectivement.

$$\begin{cases} Re(z) = \pm (Re(z_\theta z_\phi z_\psi) - (z_\phi X_\theta | X_\psi)) \\ Du(z) = \pm (Du(z_\theta z_\phi z_\psi) - [z_\phi X_\theta | X_\psi]) \end{cases}$$

L'axe est évalué par

$$X = \pm \begin{pmatrix} z_\psi z_\phi X_\theta + z_\theta z_\psi X_\phi + z_\theta z_\phi X_\psi + z_\psi [X_\theta, X_\phi] \\ + z_\theta [X_\phi, X_\psi] + \{X_\theta | X_\psi\} X_\phi \end{pmatrix}$$

On va calculer  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  et  $d_\theta$ ,  $d_\phi$ ,  $d_\psi$  en supposant  $R$  connu. Les coefficients suivants sont obtenus par les équations 6.41 :

$$\begin{cases} Re(a) = 1 \\ Du(a) = 0 \\ b = 0 \\ Re(c) = -1 - (\xi_\theta | R\xi_\psi) \\ Du(c) = -[\xi_\theta | R\xi_\psi] \end{cases}$$

Les paramètres  $\phi$ ,  $d_\phi$ ,  $\theta$ ,  $d_\theta$ ,  $\psi$ ,  $d_\psi$  peuvent être évalués par les équations :

$$\begin{cases} \tan \frac{\phi}{2} = \frac{\pm \sqrt{Re(c)(Re(c) - 2)}}{2 - Re(c)} \\ d_\phi = \frac{[\xi_\theta | R\xi_\psi]}{\sin \phi} \end{cases} \quad (6.65)$$

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{(R\xi_\psi | \xi_\phi)}{\sin^2 \phi} \\ \cos \theta = \frac{(R\xi_\psi | \xi_\psi)}{\sin^2 \phi} \\ d_\theta = \frac{[R\xi_\psi | [\xi_\theta, R_\phi \xi_\psi]] - 2 \sin \theta (\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi) [\xi_\theta | R_\phi \xi_\psi]}{\cos \theta \sin^2 \phi} \end{cases} \quad (6.66)$$

$$\begin{cases} \sin \psi = \frac{(R^* \xi_\psi | \xi_\phi)}{\sin^2 \phi} \\ \cos \psi = -\frac{(R^* \xi_\psi | \xi_\theta)}{\sin^2 \phi} \\ d_\psi = \frac{[R^* \xi_\theta | [\xi_\psi, R_\phi^* \xi_\theta]] + 2 \sin \psi (\xi_\psi | R_\phi^* \xi_\theta) [\xi_\psi | R_\phi^* \xi_\theta]}{\cos \psi \sin^2 \phi} \end{cases} \quad (6.67)$$

### Analyse des points singuliers

Lorsque  $c = -1$  et  $\sin \phi = 0$ , les angles d'Euler se trouvent dans une configuration singulière de type III :

$$\phi = k\pi \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

alors :

$$R = R(\theta + \psi, \xi_\theta)$$

Si  $\xi_\theta$  et  $\chi$  ne sont pas parallèles, alors :

$$\theta + \psi = \Theta = k\pi \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

Si  $\xi_\theta$  et  $\chi$  sont parallèles, alors :

$$\theta + \psi - \Theta = k\pi \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

## Chapitre 7

# Solution analytique des mécanismes bouclés – II

Cette partie est consacrée aux mécanismes composés de quatre sous-mécanismes constitués par des couples rotoïdes. Avec la méthode qu'on va proposer, les mécanismes quatre barres spatiaux peuvent être complètement résolus et les mécanismes cinq barres et six barres fermés peuvent être traités analytiquement. De plus, les solutions analytiques sont indépendantes du choix des coordonnées; elles dépendent seulement des propriétés intrinsèques des mécanismes.

Cette méthode est une variante des autres méthodes proposées dans le chapitre précédent dans laquelle on remplace les déplacements hélicoïdaux par les rotations, ce qui permet également de résoudre les équations de fermeture des mécanismes composés d'un, de deux ou de trois sous-mécanismes plans.

### 7.1 Groupe invariant et produits scalaires

A partir de l'équation de fermeture, on sait qu'il y existe six équations scalaires indépendantes. Afin d'obtenir ces équations scalaires, les produits scalaires (la forme de Killing, la forme de Klein) et leurs propriétés sont les outils essentiels qui permettent d'éliminer certains paramètres articulaires.

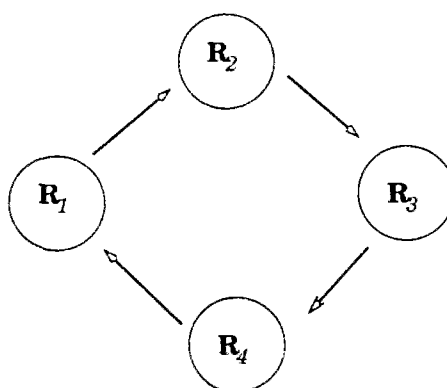


FIG. 7.1 - Structure d'une boucle



**Définition 7.1** Soit  $\mathbf{R}$  un opérateur orthogonale,  $\xi_l, \xi_r \in \mathcal{D}$ . On a :

$$P_1 : (\mathbf{R}\xi_l | \mathbf{R}\xi_r) = (\xi_l | \xi_r) \text{ - La forme de Killing.}$$

$$P_2 : [\mathbf{R}\xi_l | \mathbf{R}\xi_r] = [\xi_l | \xi_r] \text{ - La forme de Klein.}$$

Ces propriétés qu'on vient de définir peuvent être appliquées aux deux éléments  $\xi_l, \xi_r$  de  $\mathcal{D}$ .

On définit le sous-groupe des déplacements  $G^\xi$  qui est formé des déplacements d'axe  $\Lambda_\xi$  associé à  $\xi \in \mathcal{D}$ . On a la propriété suivante :

$$G^\xi = \{R \in G^\xi | R \cdot \xi = \xi\}$$

**Proposition 7.1** Soit  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  une base de  $\mathcal{D}$  sur  $\Delta$ , pour que deux éléments  $X, Y \in \mathcal{D}$  soient égaux, il faut et il suffit :

$$\{X | \xi\} = \{Y | \xi\}, \quad \{X | \eta\} = \{Y | \eta\}, \quad \{X | \zeta\} = \{Y | \zeta\}.$$

**Démonstration :** Puisque  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  est une base de  $\mathcal{D}$  sur  $\Delta$ , tout  $\mu$  appartenant à  $\mathcal{D}$  est une combinaison linéaire à coefficients dans  $\Delta$  de  $\xi, \eta$  et  $\zeta$ . Le produit dual est  $\Delta$  linéaire, on a donc :

$$\{X | \mu\} = \{Y | \mu\} \quad \text{pour tout } \mu \in \mathcal{D}.$$

ce qui implique que :  $X = Y$ . ■

Considérons les cas particuliers :

(i) si  $X, Y \in \mathcal{Z}_o$ , pour que  $X = Y$ , il faut et il suffit :

$$(X | \xi) = (Y | \xi), \quad (X | \eta) = (Y | \eta), \quad (X | \zeta) = (Y | \zeta).$$

(ii) si  $X, Y \in \mathcal{C}$ , pour que  $X = Y$ , il faut et il suffit :

$$[X | \xi] = [Y | \xi], \quad [X | \eta] = [Y | \eta], \quad [X | \zeta] = [Y | \zeta].$$

## 7.2 Résolution des équations de fermeture

Pour résoudre le problème, il suffit de résoudre l'équation de fermeture des rotations et l'équation de fermeture des translations définies dans la proposition 6.3. Puisqu'on divise le mécanisme en quatre sous mécanismes, il est donc intéressant de réécrire les équations de fermeture sous la forme suivante :

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 = \mathbf{R} \tag{7.1}$$

avec  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_m^* \cdots \mathbf{R}_5^*$ .

$$\mathbf{R}_1(\mathcal{U}_1 + \mathbf{R}_2(\mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3)) = \mathcal{U} \tag{7.2}$$

avec  $\mathcal{U} = -\mathbf{R}(\mathcal{U}_4 + \mathbf{R}_5(\mathcal{U}_5 + \cdots + \mathbf{R}_m\mathcal{U}_m))$ .

### 7.2.1 Expression explicite de $q_1$ et $q_3$

D'abord nous allons commencer par les paramètres articulaires  $q_1$  et  $q_3$ . On va utiliser la forme de Killing, cela nous permet d'obtenir quatre équations scalaires indépendantes qui sont linéaires par rapport à  $\sin q_1$ ,  $\cos q_1$ ,  $\sin q_3$  et  $\cos q_3$ .

#### Première équation scalaire

D'après la première équation de la proposition 6.3 :

$$\mathbf{R}_1^* \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{R}_4^* = \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_3 \quad (7.3)$$

On applique l'équation précédente à  $\xi_4$ , d'après la propriété  $P_4$ , on peut éliminer  $q_4$  par :

$$\mathbf{R}_1^* \circ \mathbf{R} \cdot \xi_4 = \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_3 \cdot \xi_4$$

Utilisant la forme de Killing avec  $\xi_l = \xi_2$ ,  $\xi_r =$  l'équation précédente, on obtient :

$$\boxed{(\mathbf{R}_1 \xi_2 | \mathbf{R} \cdot \xi_4) - (\xi_2 | \mathbf{R}_3 \xi_4) = 0} \quad (7.4)$$

L'équation précédente ne contient que les paramètres  $\sin q_1$ ,  $\cos q_1$ ,  $\sin q_3$  et  $\cos q_3$ .

#### Deuxième équation scalaire

Multipliée par  $\mathbf{R}_1^*$ , l'équation 6.8 est exprimée par :

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3 + \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2 - \mathbf{R}_1^* \mathcal{U} = -\mathcal{U}_1 \quad (7.5)$$

Comme dans la définition 7.1, utilisant la forme de Killing, on obtient :

$$(\xi_2 | \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3) - (\mathbf{R}_1 \xi_2 | \mathcal{U} - \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1) = -(\xi_2 | \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2)$$

Utilisons la propriété  $P_1$ , on a :

$$\boxed{(\xi_2 | \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3) - (\mathbf{R}_1 \xi_2 | \mathcal{U}) = -(\xi_2 | \mathcal{U}_1) - (\xi_2 | \mathcal{U}_2)} \quad (7.6)$$

l'équation qui ne contient que  $\sin q_1$ ,  $\cos q_1$ ,  $\sin q_3$ ,  $\cos q_3$ .

#### Troisième équation scalaire

A partir de l'équation 6.7, on obtient :

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \xi_4 = \mathbf{R}_1^* \mathbf{R} \xi_4 \quad (7.7)$$

Utilisons la propriété  $P_1$  et la forme de Killing, on peut obtenir une autre équation scalaire :

$$(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \xi_4 | \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3) + (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \xi_4 | \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2) = (\mathbf{R}_1^* \mathbf{R} \xi_4 | \mathbf{R}_1^* \mathcal{U} - \mathcal{U}_1)$$

Après simplification :

$$\boxed{(\mathbf{R}_3 \xi_4 | \mathcal{U}_2) + (\mathbf{R} \xi_4 | \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1) = (\mathbf{R} \xi_4 | \mathcal{U}) - (\xi_4 | \mathcal{U}_3)} \quad (7.8)$$

cette équation qui ne contient que  $\sin q_1$ ,  $\cos q_1$ ,  $\sin q_3$  et  $\cos q_3$ .

### Quatrième équation scalaire

Prenons la forme de Killing, nous avons :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{U}|\mathcal{U}) &= (\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3 + \mathbf{R}_2\mathcal{U}_2) + \mathbf{R}_1\mathcal{U}_1 | \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3 + \mathbf{R}_2\mathcal{U}_2) + \mathbf{R}_1\mathcal{U}_1) \\
 &= (\mathcal{U}_1|\mathcal{U}_1) + (\mathcal{U}_2|\mathcal{U}_2) + (\mathcal{U}_3|\mathcal{U}_3) + 2(\mathcal{U}_2|\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3) + 2(\mathcal{U}_1|(\mathbf{R}_2\mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3)) \\
 &= (\mathcal{U}_1|\mathcal{U}_1) + (\mathcal{U}_2|\mathcal{U}_2) + (\mathcal{U}_3|\mathcal{U}_3) + 2(\mathcal{U}_2|\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3) + 2(\mathbf{R}_1\mathcal{U}_1|\mathcal{U} - \mathcal{U}_1) \\
 &= (\mathcal{U}_2|\mathcal{U}_2) + (\mathcal{U}_3|\mathcal{U}_3) - (\mathcal{U}_1|\mathcal{U}_1) + 2(\mathcal{U}_2|\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3) + 2(\mathbf{R}_1\mathcal{U}_1|\mathcal{U})
 \end{aligned}$$

Après simplification :

$$\boxed{(\mathcal{U}|\mathbf{R}_1\mathcal{U}_1) + (\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3|\mathcal{U}_2) = \frac{1}{2}((\mathcal{U}|\mathcal{U}) + (\mathcal{U}_1|\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_2|\mathcal{U}_2) - (\mathcal{U}_3|\mathcal{U}_3))} \quad (7.9)$$

Finalement, on a obtenu les quatre équations 7.4, 7.6, 7.8, 7.9 qui ne contiennent que les paramètres articulaires  $q_1$  et  $q_3$ , en plus qui sont linéaires par rapport aux  $\cos q_1$ ,  $\sin q_1$ ,  $\cos q_3$ ,  $\sin q_3$ . On appelle ces quatre équations scalaires *le système des équations linéaires*.

$$(SL_r) \quad \begin{cases} (\mathbf{R}_1\xi_2|\mathbf{R}\cdot\xi_4) - (\xi_2|\mathbf{R}_3\xi_4) = 0 \\ (\xi_2|\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3) - (\mathbf{R}_1\xi_2|\mathcal{U}) = -(\xi_2|\mathcal{U}_1) - (\xi_2|\mathcal{U}_2) \\ (\mathbf{R}_3\xi_4|\mathcal{U}_2) + (\mathbf{R}\xi_4|\mathbf{R}_1\mathcal{U}_1) = (\mathbf{R}\xi_4|\mathcal{U}) - (\xi_4|\mathcal{U}_3) \\ (\mathcal{U}|\mathbf{R}_1\mathcal{U}_1) + (\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3|\mathcal{U}_2) = \frac{1}{2}((\mathcal{U}|\mathcal{U}) + (\mathcal{U}_1|\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_2|\mathcal{U}_2) - (\mathcal{U}_3|\mathcal{U}_3)) \end{cases}$$

Exprimant les opérateurs inconnus  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_3$  par la formule d'Olinde-Rodrigues, on a :

$$O_1 \begin{pmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \\ \sin q_3 \\ \cos q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

$$O_1 = \begin{pmatrix} (\xi_2 | [\xi_1, \mathbf{R}\xi_4]) & (\xi_2 | [\xi_1, [\xi_1, \mathbf{R}\xi_4]]) & (\xi_2 | [\xi_3, \xi_4]) & (\xi_2 | [\xi_3, [\xi_3, \xi_4]]) \\ (\mathcal{U} | [\xi_2, \xi_1]) & (\mathcal{U} | [\xi_1, [\xi_1, \xi_2]]) & a_3(\xi_2 | [\xi_3, \mathcal{U}_3]) & a_3(\xi_2 | \mathcal{U}_3) \\ a_1(\mathbf{R}\xi_4 | [\xi_1, \mathcal{U}_1]) & a_1(\mathbf{R}\xi_4 | \mathcal{U}_1) & (\mathcal{U}_2 | [\xi_3, \xi_4]) & -(\mathcal{U}_2 | [\xi_3, [\xi_3, \xi_4]]) \\ a_1(\mathcal{U} | [\xi_1, \mathcal{U}_1]) & a_1(\mathcal{U} | \mathcal{U}_1) & a_3(\mathcal{U}_2 | [\xi_3, \mathcal{U}_3]) & a_3(\mathcal{U}_2 | \mathcal{U}_3) \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Les coefficients  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  et  $r_4$  sont définis par :

$$\begin{cases} r_1 = -(\xi_2 | \xi_3)(\xi_3 | \xi_4) - (\xi_1 | \xi_2)(\xi_1 | \mathbf{R}\xi_4) \\ r_2 = (\xi_1 | \xi_2)(\xi_1 | \mathcal{U}) - d_1(\xi_1 | \xi_2) - d_2 - d_3(\xi_2 | \xi_3) \\ r_3 = (\mathbf{R}\xi_4 | \mathcal{U}) - d_1(\mathbf{R}\xi_4 | \xi_1) - d_2(\xi_2 | \xi_3)(\xi_3 | \xi_4) - a_2(\xi_3 | \xi_4)(\xi_3 | \mathcal{U}_2) \\ \quad - a_3(\xi_4 | \mathcal{U}_3) - d_3(\xi_4 | \xi_3) \\ r_4 = -d_1(\xi_1 | \mathcal{U}) - d_2d_3(\xi_2 | \xi_3) + \frac{1}{2}((\mathcal{U}|\mathcal{U}) + a_1^2 + d_1^2 - a_2^2 - d_2^2 - a_3^2 - d_3^2) \end{cases} \quad (7.12)$$

Si  $O_1$  est inversible,  $q_1$  et  $q_3$  sont déterminés par :

$$\begin{pmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \\ \sin q_3 \\ \cos q_3 \end{pmatrix} = O_1^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

### 7.2.2 Expression explicite de $q_2$ et $q_4$

On peut trouver  $q_2$  en fonction de  $q_1$  et  $q_3$ , d'après l'équation 7.5. On a :

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_3\mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_2) = \mathbf{R}_1^*\mathcal{U} - \mathcal{U}_1$$

Exprimons  $\mathbf{R}_2$  par la formule d'Olinde-Rodrigues, on a :

$$\sin q_2[\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3] + (1 - \cos q_2)[\xi_2, [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]] = \mathbf{R}_1^*\mathcal{U} - \mathcal{U}_1 - (\mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3)$$

Multiplions  $[\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]$  et  $[\xi_2, [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]]$ , si  $(\mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3 | \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3) - (\xi_2 | \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3)^2 \neq 0$ , on obtient respectivement  $\sin q_2$  et  $\cos q_2$  :

$$\begin{cases} \sin q_2 = \frac{(\mathbf{R}_1^*\mathcal{U} - \mathcal{U}_1 | [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3])}{([\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3] | [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3])} \\ \cos q_2 = -\frac{(\mathbf{R}_1^*\mathcal{U} - \mathcal{U}_1 | [\xi_2, [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]])}{([\xi_2, [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]] | [\xi_2, [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]])} \end{cases} \quad (7.13)$$

Puisque :

$$([\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3] | [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]) = ([\xi_2, [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]] | [\xi_2, [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]])$$

et

$$([\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3] | [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]) = (\mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3 | \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3) - (\xi_2 | \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3)^2.$$

alors,

**Remarque 1** Lorsque  $(\mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3 | \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3) - (\xi_2 | \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3)^2 \neq 0$ ,  $\xi_2$ ,  $[\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]$  et  $[\xi_2, [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3]]$  forment une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ . D'après la proposition 7.1, l'équation 7.5 est équivalente à 7.6 et 7.13.

Si  $(\mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3 | \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3) - (\xi_2 | \mathcal{U}_2 + \mathbf{R}_3\mathcal{U}_3)^2 = 0$ , on peut trouver  $q_2$  par l'équation suivante :

$$\mathbf{R}_1^*\mathbf{R}_3\xi_4 = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_3\xi_4 \quad (7.14)$$

$\sin q_2$  et  $\cos q_2$  sont exprimés par :

$$\begin{cases} \sin q_2 = \frac{(\mathbf{R}_1^*\mathbf{R}_3\xi_4 | [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4])}{([\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4] | [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4])} \\ \cos q_2 = -\frac{(\mathbf{R}_1^*\mathbf{R}_3\xi_4 | [\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4]])}{([\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4]] | [\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4]])} \end{cases} \quad (7.15)$$

de plus :

$$([\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4] | [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4]) = ([\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4]] | [\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4]]) = 1 - (\xi_2 | \mathbf{R}_3\xi_4)^2$$

**Remarque 2** Lorsque  $1 - (\xi_2 | \mathbf{R}_3\xi_4)^2 \neq 0$ ,  $\xi_2$ ,  $[\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4]$ ,  $[\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3\xi_4]]$  forment une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ . les équations 7.15 et 7.4 sont alors équivalentes à l'équation 7.14.

On va calculer  $q_4$ , d'après l'équation 6.8 et 6.7. On obtient :

$$\mathbf{R}_4^* \mathcal{U}_3 = \mathbf{R}^*(\mathcal{U} - \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2)$$

alors

$$\begin{cases} \sin q_4 = \frac{(\mathbf{R}^*(\mathcal{U} - \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2) \mid [\mathcal{U}_3, \xi_4])}{(\mathcal{U}_3 \mid \mathcal{U}_3) - (\mathcal{U}_3 \mid \xi_4)^2} \\ \cos q_4 = -\frac{(\mathbf{R}^*(\mathcal{U} - \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2) \mid [\xi_4, [\xi_4, \mathcal{U}_3]])}{(\mathcal{U}_3 \mid \mathcal{U}_3) - (\mathcal{U}_3 \mid \xi_4)^2} \end{cases} \quad (7.16)$$

**Remarque 3** Lorsque  $(\mathcal{U}_3 \mid \mathcal{U}_3) - (\mathcal{U}_3 \mid \xi_4)^2 \neq 0$ ,  $\xi_4$ ,  $[\xi_4, \mathcal{U}_3]$ ,  $[\xi_4, [\xi_4, \mathcal{U}_3]]$  forment une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , les équations 7.16 et 7.8 sont alors équivalentes à l'équation 7.2.

Si  $(\mathcal{U}_3 \mid \mathcal{U}_3) - (\mathcal{U}_3 \mid \xi_4)^2 = 0$ ,  $q_4$  peut être évalué par :

$$\mathbf{R}_1^* \mathbf{R} \mathbf{R}_4^* \xi_1 = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \xi_1 \quad (7.17)$$

avec :

$$\begin{cases} \sin q_4 = \frac{(\mathbf{R}^* \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \xi_1 \mid [\xi_1, \xi_4])}{1 - (\xi_1 \mid \xi_4)^2} \\ \cos q_4 = -\frac{(\mathbf{R}^* \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \xi_1 \mid [\xi_4, [\xi_4, \xi_1]])}{1 - (\xi_1 \mid \xi_4)^2} \end{cases} \quad (7.18)$$

**Remarque 4** Lorsque  $1 - (\xi_1 \mid \xi_4)^2 \neq 0$ ,  $\xi_4$ ,  $[\xi_4, \xi_1]$ ,  $[\xi_4, [\xi_4, \xi_1]]$  forment une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , les équations 7.18 et 7.4 sont équivalentes à l'équation 7.17.

Alors,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  et  $q_4$  peuvent être calculés à l'aide des équations linéaires par rapport à  $\sin q_i$  et  $\cos q_i$ .

### 7.2.3 Équivalence entre les solutions analytiques et les équations de fermeture

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que les solutions analytiques sont nécessaires pour que les équations de fermeture soient vérifiées. Maintenant, on va montrer que ces conditions sont suffisantes, c'est-à-dire que si les paramètres articulaires  $q_i$  vérifient ces conditions, alors ils vérifient également les équations de fermeture 7.1 et 7.2.

(1) Démonstration de l'équation de fermeture des translations 7.2

En effet, les remarques 1 et 3 montrent que si les équations 7.6, 7.13, 7.16 et 7.8 sont vérifiées, l'équation 7.2 est satisfaite.

(2) Démonstration de l'équation de fermeture des rotations 7.1

On veut prouver que si les équations scalaires ( $SL_r$ ), 7.14, 7.17 sont vérifiées, alors l'équation 7.1 est vérifiée.

(a) Premièrement, on suppose qu'on va calculer  $q_i$  par les équations  $(SL_r)$ , 7.13 et 7.16. En effet 7.4 est équivalent à :

$$(\xi_2 | \mathcal{R}_1 \xi_4) = (\xi_2 | \mathcal{R}_2 \xi_4) \quad (7.19)$$

avec :

$$\mathcal{R}_1 = \mathbf{R}_1^* \mathbf{R} \mathbf{R}_4^* \quad \mathcal{R}_2 = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$$

L'équation 7.8 est équivalente à :

$$(\mathcal{U}_2 | \mathcal{R}_1 \xi_4) = (\mathcal{U}_2 | \mathcal{R}_2 \xi_4) \quad (7.20)$$

Lorsqu'on a calculé  $q_4$ , on a utilisé :  $\mathbf{R}_4^* \mathcal{U}_3 = \mathbf{R}^* (\mathcal{U} - \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2)$ , ce qui est équivalent à :

$$\mathbf{R}_1^* \mathbf{R} \mathbf{R}_4^* \mathcal{U}_3 = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 (\mathbf{R}_3^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathcal{U} - \mathbf{R}_3^* \mathbf{R}_2^* \mathcal{U}_1 - \mathbf{R}_3^* \mathcal{U}_2)$$

puisque :

$$\mathcal{U}_3 = \mathbf{R}_3^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathcal{U} - \mathbf{R}_3^* \mathbf{R}_2^* \mathcal{U}_1 - \mathbf{R}_3^* \mathcal{U}_2$$

on a :

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{U}_3 = \mathcal{R}_2 \mathcal{U}_3$$

et il est évident que :

$$(\xi_4 | \mathcal{R}_1 \mathcal{U}_3) = (\xi_4 | \mathcal{R}_2 \mathcal{U}_3) \quad (7.21)$$

De plus  $\mathcal{U}_3$ ,  $\xi_2$  et  $\mathcal{U}_2$  forment une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , compte tenu des équations 7.19, 7.20, 7.21 et de la proposition 7.1, on a :

$$\mathcal{R}_1 \xi_4 = \mathcal{R}_2 \xi_4$$

Puisque  $\mathcal{U}_3$  et  $\xi_4$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , d'après la proposition 6.8, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1 \mathcal{U}_3 = \mathcal{R}_2 \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{R}_1 \xi_4 = \mathcal{R}_2 \xi_4 \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}$$

(b) Si l'on calcule  $q_i$  par les équations  $(SL_r)$ , 7.15 et 7.18, on a immédiatement :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1 \xi_4 = \mathcal{R}_2 \xi_4 \\ \mathcal{R}_1 \xi_1 = \mathcal{R}_2 \xi_1 \end{cases}$$

d'après la proposition 6.8, on a :

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}$$

Les solutions analytiques trouvées sont donc bien équivalentes aux équations de fermeture.

### 7.3 Utilisation les paramètres de Denavit-Hartenberg

Afin d'exprimer les paramètres articulaires de sortie par des paramètres articulaires d'entrée du système, on va utiliser les paramètres de Denavit-Hartenberg, qui sont l'un des plus simples outils pour schématiser les mécanismes spatiaux. Les paramètres de DH ne dépendent pas du choix des coordonnées, ils sont totalement déterminés par la structure du mécanisme. La structure du mécanisme est décrite par les paramètres :  $q_i, d_i, a_i, \alpha_i$ , où  $i = 1, \dots, m$ .  $m$  est le nombre de couples. Si la  $i$ -ème couple est rotoïde, alors  $a_i, d_i$  et  $\alpha_i$  sont constants, et  $q_i$  est variable. Si la  $i$ -ème couple est prismatique, alors  $a_i, q_i$  et  $\alpha_i$  sont constants, et  $d_i$  est variable.

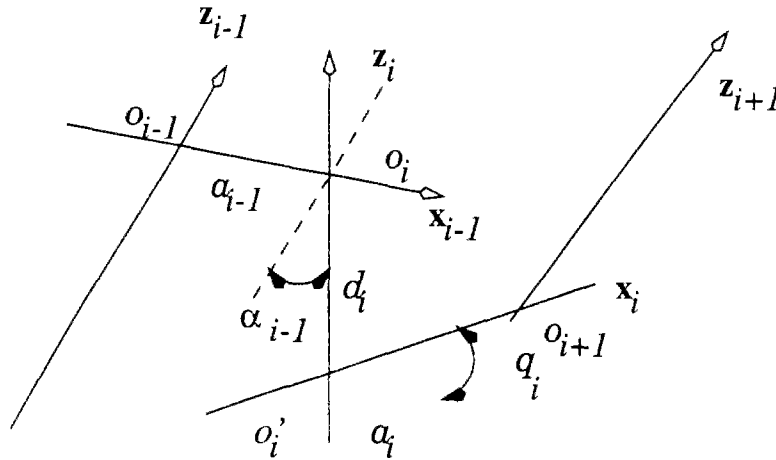


FIG. 7.2 - description des paramètres de Denavit-Hartenberg

### Définition des paramètres de DH

Un repère  $(o_i, x_i, y_i, z_i)$  est attaché à chaque couple du mécanisme (voir figure 7.2), tel que les axes  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  vérifient les conditions (les paramètres DH) suivantes.

1.  $z_i$  est l'axe du couple  $\ell_i$ , c'est-à-dire, le couple entre le corps  $C_i$  et corps  $C_{i+1}$ .
2. L'axe  $x_i$  est dirigé selon la perpendiculaire à  $z_{i-1}$  et  $z_i$ , sa direction est celle de  $\overrightarrow{z_{i-1}z_i}$ .
3.  $a_i$  est la distance entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$ , elle est toujours positive.
4.  $d_i$  est la coordonnée de l'intersection des axes  $x_{i-1}$  et l'axe  $z_i$  par rapport au repère  $(o_i, x_i, y_i, z_i)$ , elle peut être positive ou négative, sa valeur absolue est la distance entre les axes  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .
5.  $\alpha_i$  est l'angle entre  $z_i$  et  $z_{i+1}$  mesuré suivant la direction positive de  $x_{i+1}$ .
6.  $q_i$  est l'angle entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  mesuré suivant la direction positive de  $z_i$ .

### Définition de $R_i, U_i$

A chaque couple  $\ell_i$  est associé une base  $B_i$  de  $\mathfrak{D}$  sur  $\mathbb{R}$ , on peut réécrire le système des équations linéaires ( $SL_r$ ) avec les paramètres de DH.

Le générateur de déplacement par rapport à la base  $B_i$  est définie par :

$$\xi_i = \xi = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$$

Le directeur unitaire  $U_i$  (appartenant à  $\mathfrak{D}$ ) de la perpendiculaire commune aux axes  $z_i$  et  $z_{i+1}$  par rapport à la base  $B_i$  est définie par :

$$U_i = U = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t$$

alors :

$$u_i = a_i U + d_i \xi$$

Soit  $\mathbf{R}_i$  la rotation autour de  $\xi_i$ , elle est exprimée dans la base  $B_i$  par :

$$\mathbf{R}_i(q_i, \xi) = \begin{pmatrix} \cos q_i & \sin q_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q_i & \sin q_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin q_i & \cos q_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si l'on note :

$$\sigma_i = \sin \alpha_i, \quad \tau_i = \cos \alpha_i$$

Soit  $P_i$  la matrice de passage de la base  $B_i$  à la base  $B_{i+1}$  qui représente une rotation autour de  $U_i$  :

$$\mathbf{P}_i(\alpha_i, U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_i & \sigma_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_i & \tau_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_i & \sigma_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_i & \tau_i \end{pmatrix}$$

Si l'on calcule tout dans la base  $B_1$ .  $\xi_i$  et  $U_i$  sont exprimés par :

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi = \xi \\ \xi_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi \\ \dots \\ \xi_m = \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{R}_{m-1} \mathbf{P}_{m-1} \xi \end{cases} \quad (7.22)$$

$$\begin{cases} U_1 = U \\ U_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 U \\ \dots \\ U_m = \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{R}_{m-1} U_{m-1} \end{cases} \quad (7.23)$$

Si  $(q_{10}, \dots, q_{m0})$  est la configuration de référence (dont les rotations sont respectivement  $\mathbf{R}_{10}, \dots, \mathbf{R}_{m0}$ ) (voir la figure 6.4), après le changement de coordonnées, les opérateurs  $\mathbf{R}_i$  dans la base  $B_i$  sont exprimés par :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(q_1, \xi) \\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{10} \mathbf{P}_1 \mathbf{R}(q_2, \xi) \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_{10}^* \\ \dots \\ \mathbf{R}_m = \mathbf{R}_{10} \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{R}_{m-10} \mathbf{P}_{m-1} \mathbf{R}(q_m, \xi) \mathbf{P}_{m-1}^* \mathbf{R}_{m-10}^* \dots \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_{10}^* \end{cases} \quad (7.24)$$

### 7.3.1 Expression explicite des paramètres articulaires dépendants

#### Expression explicite des paramètres $q_1$ et $q_3$

En utilisant les paramètres de Denavit-Hartenberg, on remplace  $\xi_i$ ,  $U_i$  et  $\mathbf{R}_i$  par les équations 7.22, 7.23 et 7.24 respectivement, les équations de fermeture 7.1 et 7.2 s'expriment par :

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 = \mathbf{R} \quad (7.25)$$

avec  $\mathbf{R} = \mathbf{P}_m^* \mathbf{R}_m^* \dots \mathbf{P}_5^* \mathbf{R}_5^*$ .

$$\mathbf{R}_1(\mathcal{U}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2(\mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3)) = \mathcal{U} \quad (7.26)$$

avec  $\mathcal{U} = -\mathbf{R}(\mathcal{U}_4 + \mathbf{P}_4 \mathbf{R}_5(\mathcal{U}_5 + \dots + \mathbf{P}_{m-1} \mathbf{R}_m \mathcal{U}_m))$ .



Afin de simplifier les écritures, on utilise les notations ci-dessous :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{b} & \mathbf{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} & \mathbf{b} & \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{b}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u}_2 & \mathbf{b}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u}_3 & \mathbf{b}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{t}_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{t}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{t}_3 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

$$\mathcal{U} = (0, 0, 0, \mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y, \mathcal{U}_z)^t \quad (7.28)$$

Le système des équations linéaires ( $SL_r$ ) s'écrit comme suit :

$$(SL_r - DH) \begin{cases} (\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi | \mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi) - (\xi | \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \xi) = 0 \\ (\xi | \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3) - (\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi | \mathcal{U}) = -(\mathbf{P}_1 \xi | \mathcal{U}_1) - (\xi | \mathcal{U}_2) \\ (\mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \xi | \mathbf{P}_2^* \mathcal{U}_2) + (\mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi | \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1) = (\mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi | \mathcal{U}) - (\mathbf{P}_3 \xi | \mathcal{U}_3) \\ (\mathcal{U} | \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1) + (\mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3 | \mathcal{U}_2) = \frac{1}{2} ((\mathcal{U} | \mathcal{U}) + (\mathcal{U}_1 | \mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_2 | \mathcal{U}_2) - (\mathcal{U}_3 | \mathcal{U}_3)) \end{cases}$$

Après le calcul, le système des équations linéaires s'écrit sous la forme suivante :

$$O_1 \begin{pmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \\ \sin q_3 \\ \cos q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

où  $O_1$  est une matrice constante de  $4 \times 4$  et  $r$  est un vecteur de dimension 4 dont leurs éléments sont définis par :

$$O_1 = \begin{pmatrix} (\mathbf{P}_1 \xi | [\xi, \mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi]) & (\mathbf{P}_1 \xi | [\xi, [\xi, \mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi]]) & (\xi | \mathbf{P}_2 [\xi, \mathbf{P}_3 \xi]) & (\xi | \mathbf{P}_2 [\xi, [\xi, \mathbf{P}_3 \xi]]) \\ (\mathcal{U} | [\mathbf{P}_1 \xi, \xi]) & (\mathcal{U} | [\xi, [\xi, \mathbf{P}_1 \xi]]) & a_3 (\xi | \mathbf{P}_2 [\xi, \mathcal{U}]) & a_3 (\xi | \mathbf{P}_2 \mathcal{U}_3) \\ a_1 (\mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi | [\xi, \mathcal{U}]) & a_1 (\mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi | \mathcal{U}_1) & (\mathcal{U}_2 | \mathbf{P}_2 [\xi, \mathbf{P}_3 \xi]) & -(\mathcal{U}_2 | \mathbf{P}_2 [\xi, [\xi, \mathbf{P}_3 \xi]]) \\ a_1 (\mathcal{U} | [\xi, \mathcal{U}_1]) & a_1 (\mathcal{U} | \mathcal{U}_1) & a_3 (\mathcal{U}_2 | \mathbf{P}_2 [\xi, \mathcal{U}_3]) & a_3 (\mathcal{U}_2 | \mathcal{U}_3) \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$\begin{cases} r_1 = -(\xi_2 | \mathbf{P}_2 \xi)(\xi | \mathbf{P}_3 \xi) - (\xi | \mathbf{P}_1 \xi)(\xi | \mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi) \\ r_2 = (\xi | \mathbf{P}_1 \xi)(\xi | \mathcal{U}) - d_1 (\xi | \mathbf{P}_1 \xi) - d_2 - d_3 (\xi | \mathbf{P}_2 \xi) \\ r_3 = (\mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi | \mathcal{U}) - d_1 (\mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi | \xi) - d_2 (\xi | \mathbf{P}_2 \xi)(\xi | \mathbf{P}_3 \xi) - a_2 (\xi | \mathbf{P}_3 \xi)(\mathbf{P}_2 \xi | \mathcal{U}_2) \\ \quad - a_3 (\mathbf{P}_3 \xi | \mathcal{U}_3) - d_3 (\mathbf{P}_3 \xi | \xi) \\ r_4 = -d_1 (\xi | \mathcal{U}) - d_2 d_3 (\xi | \mathbf{P}_2 \xi) + \frac{1}{2} ((\mathcal{U} | \mathcal{U}) + a_1^2 + d_1^2 - a_2^2 - d_2^2 - a_3^2 - d_3^2) \end{cases} \quad (7.31)$$

Si la matrice  $O_1$  est inversible, l'équation précédente nous permet d'évaluer les paramètres  $q_1$  et  $q_3$ .

$$\begin{pmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \\ \sin q_3 \\ \cos q_3 \end{pmatrix} = O_1^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

Si on exprime  $q_3$  par  $q_1$  en considérant que  $q_1$  est le paramètre indépendant. Le système possède au moins un degré de liberté égale à 1.

**Expression explicite de  $q_2$  et  $q_4$** 

En supposant  $q_1, q_3$  connus, on calcule  $q_2$  par 7.13 :

$$\begin{cases} \sin q_2 = \frac{(\mathbf{R}_1^* \mathcal{U} - \mathcal{U}_1 \mid \mathbf{P}_1[\xi, \mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3])}{([\xi, \mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3] \mid [\xi, \mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3])} \\ \cos q_2 = -\frac{(\mathbf{R}_1^* \mathcal{U} - \mathcal{U}_1 \mid \mathbf{P}_1[\xi, [\xi, \mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3]])}{([\xi, [\xi, \mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3]] \mid [\xi, [\xi, \mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3]])} \end{cases} \quad (7.33)$$

Puisque :  $([\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3] \mid [\xi_2, \mathcal{U}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3]) = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 \cos q_3$ , lorsque ce terme est égal à zéro, on ne peut plus évaluer  $q_2$  par ces deux équations. Ce qui n'est possible que dans le cas où  $a_2 = a_3$  et  $q_3 = \pm\pi$ . On doit calculer  $q_2$  par l'équation 7.15 :

$$\begin{cases} \sin q_2 = \frac{(\mathbf{R}_1^* \mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi \mid \mathbf{P}_1[\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \xi])}{([\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \xi] \mid [\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \xi])} \\ \cos q_2 = -\frac{(\mathbf{R}_1^* \mathbf{R} \mathbf{P}_4^* \xi \mid \mathbf{P}_1[\xi, [\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \xi]])}{([\xi, [\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \xi]] \mid [\xi, [\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \xi]])} \end{cases} \quad (7.34)$$

On calcule  $q_4$  en utilisant l'équation suivante :

$$\begin{cases} \sin q_4 = \frac{(\mathbf{P}_4 \mathbf{R}^* (\mathcal{U} - \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2) \mid [\mathcal{U}_3, \mathbf{P}_3^* \xi])}{(\mathcal{U}_3 \mid \mathcal{U}_3) - (\mathcal{U}_3 \mid \mathbf{P}_3^* \xi)^2} \\ \cos q_4 = -\frac{(\mathbf{P}_4 \mathbf{R}^* (\mathcal{U} - \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathcal{U}_2) \mid [\xi, [\xi, \mathbf{P}_3^* \mathcal{U}_3]])}{(\mathcal{U}_3 \mid \mathcal{U}_3) - (\mathcal{U}_3 \mid \mathbf{P}_3^* \xi)^2} \end{cases} \quad (7.35)$$

Si  $a_3^2 + d_3^2 * \sigma_3^2 = 0$ ,  $q_4$  peut être évalué par :

$$\mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{P}_4^* \mathbf{R}_4^* \mathcal{U} = \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathcal{U} \quad (7.36)$$

$$\begin{cases} \sin q_4 = (\mathbf{P}_4 \mathbf{R}^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U} \mid [\xi, \mathcal{U}]) \\ \cos q_4 = -(\mathbf{P}_4 \mathbf{R}^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathcal{U} \mid \mathcal{U}) \end{cases} \quad (7.37)$$

**7.4 Analyse des mécanismes quatre barres spatiaux**

Dans cette partie, l'objectif est d'appliquer la méthode proposée aux mécanismes quatre barres spatiaux. On peut faire une analyse globale de l'ensemble de configurations cinématiquement admissibles  $M$  analytiquement.

L'équation de fermeture est exprimée par :

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 = \mathbf{R} \quad (7.38)$$

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 (\mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3 + \mathbf{P}_2^* \mathcal{U}_2) + \mathbf{P}_1^* \mathcal{U}_1) = \mathcal{U} \quad (7.39)$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} -a_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 7.4.1 Mécanisme de Bennett

Le mécanisme de Bennett est un mécanisme particulier ayant quatre couples rotoïdes dans l'espace. Les quatre générateurs ne sont pas parallèles ni concurrents.

**Proposition 7.2** *Le Bennett est le seul mécanisme ayant quatre couples rotoïdes qui a un véritable degré de liberté, à part les quatre-barre plans et celui de sphères.*

**Remarque** C'est une conclusion bien connue mais, à notre connaissance, il n'existe pas encore une explication complète. S. Ogiino [Ogi68] a donné une démonstration en 1968 en supposant les paramètres  $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$ . En effet, pour un mécanisme spatial quelconque, les  $d_i$  ne sont pas nuls sans autre hypothèse. Cette démonstration ne peut donc pas être considérée comme une démonstration générale.

**Démonstration :** A priori, on considère le cas général, c'est-à-dire qu'on prend les paramètres quelconques :  $q_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $a_i$ ,  $d_i$ . On va d'abord utiliser le système des équations linéaires sans prendre aucune hypothèse. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1\sigma_4 & 0 & \sigma_2\sigma_3 \\ a_4\sigma_1 & -\sigma_1d_4\sigma_4 & a_3\sigma_2 & 0 \\ a_1\sigma_4 & 0 & a_2\sigma_3 & -d_2\sigma_2\sigma_3 \\ -a_1d_4\sigma_4 & -a_1a_4 & d_2a_3\sigma_2 & a_2a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \\ \sin q_3 \\ \cos q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

Avec

$$\begin{cases} r_1 = -\tau_1\tau_4 + \tau_2\tau_3 \\ r_2 = -\sigma_2^2d_2 - \tau_2^2d_2 - d_1\tau_1 - \tau_2d_3\sigma_3^2 - \tau_2d_3\tau_3^2 - \tau_1d_4\tau_4 \\ r_3 = -d_4\sigma_4^2 - d_4\tau_4^2 - d_3\tau_3 - \tau_2d_2\tau_3 - d_1\tau_4\sigma_1^2 - d_1\tau_4\tau_1^2 \\ r_4 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_4^2 - a_2^2 - a_3^2) \end{cases}$$

$r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  et  $r_4$  sont constants. L'équation précédente permet d'exprimer  $q_1$  en fonction de  $q_3$ .

$$(*)1 \quad \begin{cases} \sin q_1 = \frac{-a_2 \sin(q_3)\sigma_3 + d_2\sigma_2 \cos(q_3)\sigma_3 + r_3}{a_1\sigma_4} \\ \cos q_1 = \frac{\left( -d_4a_2 \sin(q_3)\sigma_3 + d_4d_2\sigma_2 \cos(q_3)\sigma_3 + d_4r_3 \right) - d_2\sigma_2 \sin(q_3)a_3 - a_2 \cos(q_3)a_3 + r_4}{a_1a_4} \end{cases}$$

$$(*)2 \quad \begin{cases} \sin q_1 = \frac{d_4\sigma_2 \cos(q_3)\sigma_3 - d_4r_1 - \sigma_2 \sin(q_3)a_3 + r_2}{\sigma_1a_4} \\ \cos q_1 = \frac{\sigma_2 \cos(q_3)\sigma_3 - r_1}{\sigma_1\sigma_4} \end{cases}$$

Si l'on suppose  $\sin q_3 \neq 0$ . Pour que le mécanisme ait un degré de liberté, il faut que les équations (\*1) et (\*2) soient équivalentes, on obtient donc les relations suivantes :

$$(*)3 \quad (*)1 \sin q_1 = (*)2 \sin q_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_2\sigma_4a_1a_3 - a_2\sigma_3a_4\sigma_1 = 0 \\ d_2a_4\sigma_1 = d_4a_1\sigma_4 \\ \sigma_1a_4r_3 = a_1\sigma_4(r_2 - d_4r_1) \end{cases}$$

$$(*)4 \quad (*)1 \cos q_1 = (*)2 \cos q_1 \Leftrightarrow \begin{cases} d_4a_2\sigma_3 + d_2a_3\sigma_2 = 0 \\ \sigma_2\sigma_3a_1a_4 - a_2a_3\sigma_1\sigma_4 = -d_2d_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \\ \sigma_1\sigma_4(d_4r_3 + r_4) - a_1a_4r_1 = 0 \end{cases}$$

On suppose  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \in ]0, \pi[$ . Puisque  $a_i$  et  $\sigma_i$  sont différents de 0 [Bak84] (sinon les quatre barres spatial devient un quatre barre sphérique et un quatre barre plan), d'après (\*3) et (\*4), on a :

$$(c_1) \quad \boxed{d_2 = d_4 = 0, \quad a_1 \sigma_2 = a_2 \sigma_1, \quad a_3 \sigma_4 = a_4 \sigma_3.}$$

Puisque :  $\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1 = 1$  :

$$\frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\sigma_1^2 \sigma_4^2} = \frac{\sigma_2^2 a_3^2}{a_1^2 \sigma_4^2} = 1 \quad \frac{a_2^2 \sigma_3^2}{a_1^2 \sigma_4^2} = \frac{a_2^2 a_3^2}{a_1^2 a_4^2} = 1$$

$$r_1 = 0, r_2 = 0 \quad r_3 = 0, r_4 = 0$$

Compte tenu la condition  $c_1$  :

$$(c_2) \quad \boxed{a_1 \sigma_4 = a_2 \sigma_3, \quad a_3 \sigma_2 = a_4 \sigma_1 \\ \sigma_1 \sigma_4 = \sigma_2 \sigma_3, \quad a_1 a_4 = a_2 a_3.}$$

or  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$ , on a :

$$(*)8) \quad \tau_1 \tau_4 = \tau_2 \tau_3, \quad a_1 + a_4 = a_2 + a_3$$

On obtient également :

$$q_1 = -q_3 \quad (7.41)$$

Pour obtenir les autres relations, on utilisera les équations suivantes :

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 = \mathbf{1} \\ \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 (\mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 (\mathbf{R}_4 \mathbf{U}_4 + \mathbf{P}_3^* \mathbf{U}_3) + \mathbf{P}_2^* \mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_1$$

D'après le même calcul, on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \sigma_1 & 0 & \sigma_3 \sigma_4 \\ \sigma_2 a_1 & -\sigma_2 d_1 \sigma_1 & \sigma_3 a_4 & 0 \\ a_2 \sigma_1 & 0 & a_3 \sigma_4 & -d_3 \sigma_3 \sigma_4 \\ -a_2 d_1 \sigma_1 & -a_2 a_1 & d_3 a_4 \sigma_3 & a_3 a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin q_2 \\ \cos q_2 \\ \sin q_4 \\ \cos q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

Avec

$$\begin{cases} r'_1 = -\tau_1 \tau_2 + \tau_3 \tau_4 \\ r'_2 = -\sigma_3^2 d_3 - \tau_3^2 d_3 - d_2 \tau_2 - \tau_3 d_4 \sigma_4^2 - \tau_3 d_4 \tau_4^2 - \tau_2 d_1 \tau_1 \\ r'_3 = -d_1 \sigma_1^2 - d_1 \tau_1^2 - d_4 \tau_4 - \tau_3 d_3 \tau_4 - d_2 \tau_1 \sigma_2^2 - d_2 \tau_1 \tau_2^2 \\ r'_4 = \frac{1}{2}(a_2^2 + a_1^2 - a_3^2 - a_4^2) \end{cases}$$

$r'_1, r'_2, r'_3$  et  $r'_4$  sont constants. On obtient  $\sin q_2, \cos q_2$  en fonction de  $\sin q_4, \cos q_4$  :

$$(*)1') \quad \begin{cases} \sin q_2 = \frac{-a_3 \sin(q_4) \sigma_4 + d_3 \sigma_3 \cos(q_4) \sigma_4 + r_4}{a_2 \sigma_1} \\ \cos q_2 = -\frac{\left( -d_1 a_3 \sin(q_4) \sigma_4 + d_1 d_3 \sigma_3 \cos(q_4) \sigma_4 + d_1 r_4 \right) - d_3 \sigma_3 \sin(q_4) a_4 - a_3 \cos(q_4) a_4 + r_1}{a_2 a_1} \end{cases}$$

$$(*)2') \quad \begin{cases} \sin q_2 = \frac{d_1 \sigma_3 \cos(q_4) \sigma_4 - d_1 r_2 - \sigma_3 \sin(q_4) a_4 + r_3}{\sigma_2 a_1} \\ \cos q_2 = \frac{\sigma_3 \cos(q_4) \sigma_4 - r_2}{\sigma_2 \sigma_1} \end{cases}$$

Si l'on suppose  $\sin q_4 \neq 0$ . Pour que le mécanisme ait un degré de liberté, il faut que les équations (\*1') et (\*2') soient équivalentes, on obtient donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 (*3') \quad (*1') \sin q_2 = (*2') \sin q_4 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_3 \sigma_1 a_2 a_4 - a_3 \sigma_4 a_1 \sigma_2 = 0 \\ d_3 a_1 \sigma_2 = d_1 a_2 \sigma_1 \\ \sigma_2 a_1 r'_3 = a_2 \sigma_1 (r'_2 - d_1 r'_1) \end{cases} \\
 (*4') \quad (*1') \cos q_2 = (*2') \cos q_4 &\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 a_3 \sigma_4 + d_3 a_4 \sigma_3 = 0 \\ \sigma_3 \sigma_4 a_2 a_1 - a_3 a_4 \sigma_2 \sigma_1 = -d_3 d_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \\ \sigma_2 \sigma_1 (d_1 r'_3 + r'_4) - a_2 a_1 r'_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$(*c_4) \quad \boxed{d_1 = d_3 = 0, \quad a_2 \sigma_3 = a_3 \sigma_2, \quad a_4 \sigma_1 = a_1 \sigma_4.}$$

$$a_1 a_2 = a_3 a_4, \quad r'_1 = r'_2 = r'_3 = r'_4 = 0.$$

alors :

$$(*9) \quad \tau_1 \tau_2 = \tau_3 \tau_4, \quad a_1 + a_2 = a_3 + a_4.$$

On compare (\*8) et (\*9), on a :

$$(*c_5) \quad \boxed{a_1 = a_3, \quad a_2 = a_4.}$$

$$(*10) \quad \tau_1 = \pm \tau_3 \quad \tau_2 = \pm \tau_4$$

on a :

$$q_4 = -q_2 \quad (7.43)$$

A partir de  $c_1, c_3, c_4$ , on a :

$$\sigma_1 = \sigma_3, \quad \sigma_2 = \sigma_4$$

D'autre part, l'équation

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 (\mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3 + \mathbf{P}_2^* \mathcal{U}_2) + \mathbf{P}_1^* \mathcal{U}_1) = -\mathcal{U}_4$$

nous permet d'évaluer  $q_2$  en fonction de  $q_1$  et  $q_3$ . Utilisant 7.33 et  $q_1 = -q_3$  (ainsi  $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1^*$ ), on a :

$$\begin{cases} \sin q_2 = \frac{(\sigma_2^2 \tau_1 - \sigma_1^2 \tau_2) \sin q_1 + \sigma_1 \sigma_2 \sin q_1 \cos q_1 (\tau_1 - \tau_2)}{\tau_2^2 \sigma_1^2 \sin^2 q_1 + (a_2 + \sigma_1 \cos q_1)^2} \\ \cos q_2 = -\frac{\sigma_1 \sigma_2 (1 + \tau_1 \tau_2) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cos q_1 - \sigma_1 \sigma_2 \cos^2 q_1 (1 - \tau_1 \tau_2)}{\tau_2^2 \sigma_1^2 \sin^2 q_1 + (\sigma_2 + \sigma_1 \cos q_1)^2} \end{cases} \quad (7.44)$$

D'après l'équation :

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 (\mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3 + \mathbf{P}_2^* \mathcal{U}_2) + \mathbf{P}_1^* \mathcal{U}_1) = -\mathcal{U}_4$$

compte-tenu  $\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 = \mathbf{1}$ , on a :

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 (\mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 (\mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \mathbf{R}_1 \mathcal{U}_1 + \mathbf{P}_3^* \mathcal{U}_3) + \mathbf{P}_2^* \mathcal{U}_2) + \mathcal{U}_4 = 0$$

ainsi que

$$\mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 (\mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 (\mathbf{R}_1 \mathbf{U}_1 + \mathbf{P}_4^* \mathbf{U}_4) + \mathbf{P}_3^* \mathbf{U}_3) = -\mathbf{U}_2$$

Utilisant  $q_2 = -q_4$ , on a :

$$\begin{cases} -\mathbf{R}_2 (\mathbf{U}_3 + \mathbf{P}_3^* \mathbf{R}_1 \mathbf{U}_2) = \mathbf{P}_4^* \mathbf{R}_1 \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_4 \\ \sin q_2 = \frac{(a_2^2 \tau_3 - a_1^2 \tau_4) \sin q_1 + a_1 a_2 \sin q_1 \cos q_1 (\tau_3 - \tau_4)}{\tau_4^2 a_1^2 \sin^2 q_1 + (a_2 + a_3 \cos q_1)^2} \\ \cos q_2 = -\frac{a_1 a_2 (1 + \tau_3 \tau_4) + (a_1^2 + a_2^2) \cos q_1 - a_1 a_2 \cos^2 q_1 (1 - \tau_3 \tau_4)}{\tau_4^2 a_1^2 \sin^2 q_1 + (a_2 + a_3 \cos q_1)^2} \end{cases} \quad (7.45)$$

On a :

$$\tau_1 = \tau_3, \tau_2 = \tau_4$$

Finalement :

$$(c_7) \quad \boxed{\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = \alpha_4.}$$

(c<sub>1</sub>), ..., (c<sub>7</sub>) sont exactement les conditions de mécanismes de Bennett. ■

Les solutions générales sont :

$$\begin{cases} q_3 = -q_1 \\ \sin q_2 = -\frac{(\mathbf{P}_1^* (\mathbf{U}_1 + \mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_4) \mid [\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_2])}{([\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_2] \mid [\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_2])} \\ \cos q_2 = 1 - \frac{(\mathbf{P}_1^* (\mathbf{U}_1 + \mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_4) \mid [\xi, [\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_2]])}{([\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_2] \mid [\xi, \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_1^* \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_2])} \\ q_4 = -q_2 \end{cases} \quad (7.46)$$

Puisqu'il existe toujours des transitions continues entre les  $q_i$ , alors l'ensemble de points singuliers est vide :

$$q^s = \{\emptyset\}$$

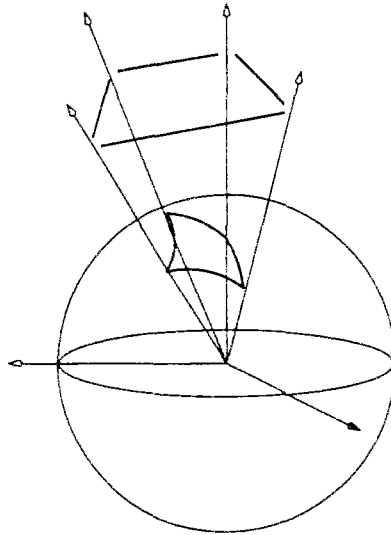
D'après les solutions précédentes, on a la proposition suivante :

**Proposition 7.3** *Le mécanisme de Bennett est un mécanisme régulier, son lieu singulier est vide.*

## 7.4.2 Le mécanisme sphérique

Dans le mécanisme de Bennett, nous avons supposé que les  $a_i$  sont différents de 0, c'est-à-dire que les axes successifs ne sont pas dans le même plan. Si l'on prend d'abord  $a_1 = 0$ , d'après les équations 7.40 et 7.42, pour que le système ait des degrés de liberté, il faut :  $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ , les axes successifs étant alors concourants.

**Proposition 7.4** *Soit  $\xi_i \in \mathcal{D}$  pour  $i = 1, \dots, 4$ , on a  $\xi_i, \xi_{i+1}$  sont concourants. De plus le rang de  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$  est égale à 3, alors  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  passent par le même point.*

FIG. 7.3 - *mécanisme sphérique*

**Démonstration :** D'après les conditions connues  $a_i = 0$ , on a :

$$[\xi_i \mid \xi_{i+1}] = 0$$

puisque  $\text{rang}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 3$ , on a :

$$\xi_4 = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$$

Considérons

$$[\xi_2 \mid \xi_4] = [\xi_2 \mid (c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3)] = 0$$

de même, on a :

$$[\xi_1 \mid \xi_3] = 0$$

Lorsque  $\xi_i$  ne sont pas parallèles, les axes de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  passent par le même point. ■

**Corollaire 7.1** *Soit  $S$  un mécanisme quatre barres fermé qui possède un degré de liberté dont les axes successifs sont concourants, c'est alors un mécanisme sphérique.*

D'après la définition [Hun67]<sup>1</sup> des mécanismes sphériques, la démonstration est immédiate.

Dans ce cas particulier, les  $p_i$  sont des vecteurs zéro.

alors nous avons les solutions suivantes d'après le système des équations linéaires 7.29 :

1. voire [Hun67], p. 281

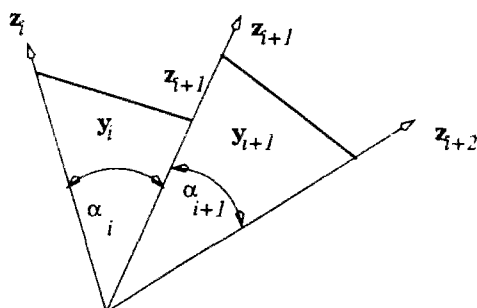


FIG. 7.4 - structure d'un mécanisme sphérique

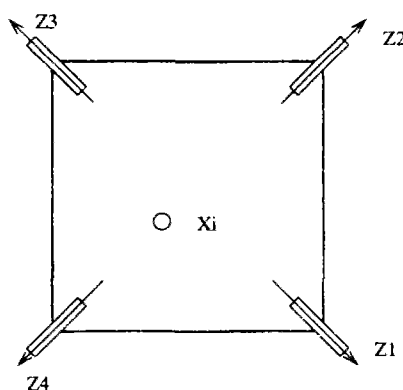


FIG. 7.5 - La salière

### Solutions des mécanismes sphériques

Nous prenons  $q_3$  comme paramètre d'entrée, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos q_3 = \frac{\sigma_1 \sigma_4}{\sigma_2 \sigma_3} \cos q_1 \\ \sin q_2 = \frac{(\mathbf{R}_1^* \xi_4 \mid [\xi_2, \mathbf{R}_3 \xi_4])}{([\xi_2, \mathbf{R}_3 \xi_4] \mid [\xi_2, \mathbf{R}_3 \xi_4])} \\ \cos q_2 = 1 - \frac{(\mathbf{R}_1^* \xi_4 \mid [\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3 \xi_4]])}{([\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3 \xi_4]] \mid [\xi_2, [\xi_2, \mathbf{R}_3 \xi_4]])} \\ \cos q_4 = \frac{1}{\sigma_1^2} (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \xi_1 \mid [\xi_1, \xi_4]) \\ \sin q_4 = 1 - \frac{1}{\sigma_1^2} (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \xi_1 \mid [\xi_4, [\xi_4, \xi_1]]) \end{array} \right. \quad (7.47)$$

### Un exemple de mécanisme sphérique -- La salière

D'après la figure 7.5, ce mécanisme [Pap92] est constitué par quatre couples rotoïdes, les paramètres sont définis par :  $d_i = 1, a_i = 0, \alpha_i = \frac{\pi}{2}$ , alors  $\tau_i = 0, \sigma_i = 1$ . Ce mécanisme peut donc être exprimé par les équations de fermeture 7.38.



### Les solutions

On va d'abord utiliser 7.30. on a :

$$\begin{cases} \sin q_3 = -\sin q_1 = \begin{cases} 0 \\ \text{arbitraire} \end{cases} \\ \cos q_3 = \cos q_1 = \begin{cases} \pm 1 \\ \text{arbitraire} \end{cases} \end{cases} \quad (7.48)$$

On peut également écrire l'équation de fermeture par :

$$\mathbf{R}_4 \circ \mathbf{R}_3 \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 = \mathbf{1}$$

En utilisant l'équation 7.29, avec :  $r_i = 0$ , on a :

$$\begin{cases} \sin q_2 = -\sin q_4 = \begin{cases} \text{arbitraire} \\ 0 \end{cases} \\ \cos q_2 = \cos q_4 = \begin{cases} \text{arbitraire} \\ \pm 1 \end{cases} \end{cases} \quad (7.49)$$

En comparant les deux équations 7.48 et 7.49, on obtient donc les solutions explicites :

$$\begin{cases} q_3 = \begin{cases} q_1 = 0 \\ \pm q_1 = \text{arbitraire} \end{cases} \\ q_4 = \begin{cases} \pm q_2 = \text{arbitraire} \\ q_2 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (7.50)$$

#### 7.4.3 Analyse des configurations singulières

D'après les équations précédentes, on sait que les configurations singulières sont :

$$q^s = \{[0, 0, 0, 0], [0, \pi, 0, \pi], [\pi, 0, \pi, 0], [\pi, \pi, \pi, \pi]\}$$

Dans ces configurations, la salière devient incontrôlable.

### 7.5 Un mécanisme 6R spatial – un mécanisme de Bricard

Cette méthode analytique n'est pas seulement pour des mécanismes constitués par quatre sous mécanismes plans, elle est aussi pratique pour traiter des mécanismes plus compliqués. On va montrer dans ce paragraphe un mécanisme de Bricard, il est aussi traité par Wittenburg [Wit77].

Le mécanisme est présenté dans la figure 7.7. Les axes des déplacements successifs sont orthogonaux. Les paramètres de Denavit-Hartenberg sont définis par :

$$a_i = 1, d_i = 0, \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \alpha_5 = -\frac{\pi}{2}.$$

Afin d'utiliser la méthode qu'on a proposée dans la section précédente, on écrit l'équation de fermeture sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{P}_5 \mathbf{R}_6 \mathbf{P}_6 = \mathbf{R} \\ \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 (\mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 (\mathbf{R}_5 \mathcal{U}_5 + \mathbf{P}_4^* \mathcal{U}_4) + \mathbf{P}_3^* \mathcal{U}_3) = \mathcal{U} \end{cases} \quad (7.51)$$

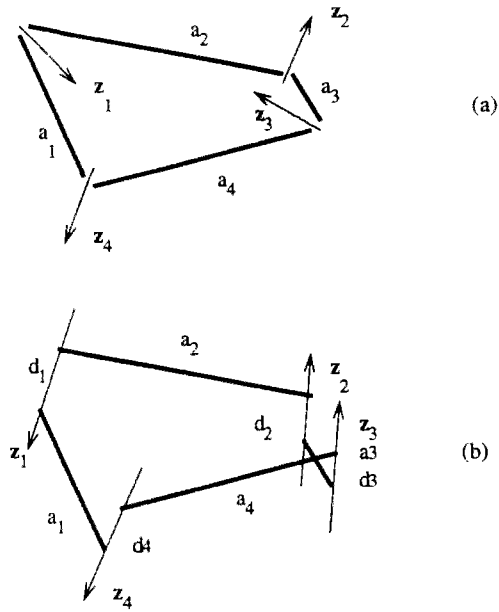


FIG. 7.6 - Le mécanisme de Bennett et un mécanisme quatre barres spatial

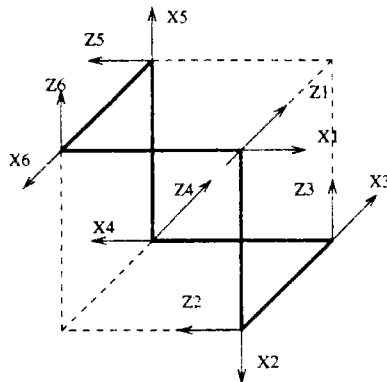


FIG. 7.7 - Un mécanisme de Bricard

avec :

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_2^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* = [\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}]$$

Les trois vecteurs :  $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$  sont définis par :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \\ -\sin(q_2) \cos(q_1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\cos(q_2) \sin(q_1) \\ \cos(q_1) \\ \sin(q_2) \sin(q_1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sin(q_2) \\ 0 \\ \cos(q_2) \end{pmatrix}$$

on a :  $\mathcal{U} = -\mathbf{P}_2^* \mathcal{U}_2 - \mathbf{P}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{P}_1^* \mathcal{U}_1 - \mathbf{P}_2^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathcal{U}_6$  :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_x \\ \mathcal{U}_y \\ \mathcal{U}_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 + \cos(q_2) + \cos(q_2) \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \\ -\sin(q_2) - \sin(q_2) \cos(q_1) \end{pmatrix}$$

le système des équations linéaires (Sc) nous permet d'obtenir :

$$O_1 = \begin{pmatrix} -\cos(q_1) & -\sin(q_1) \cos(q_2) & -1 & 0 \\ -\sin(q_1) \cos(q_2) & \cos(q_1) & 0 & -1 \\ -1 - \cos(q_2) - \cos(q_1) \cos(q_2) & -\sin(q_1) & -1 & 0 \\ \sin(q_1) & -1 - \cos(q_2) - \cos(q_1) \cos(q_2) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$O_1 \begin{pmatrix} \sin(q_3) \\ \cos(q_3) \\ \sin(q_5) \\ \cos(q_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

où  $r_1 = \sin(q_1)(1 - \cos(q_2))$ ,  $r_2 = r_3 = 0$ ,  $r_4 = (1 + \cos(q_1))(1 + \cos(q_2))$ .

On a les solutions suivantes :

$$\sin(q_3) = \frac{\sin q_1 (1 + \cos q_2)}{\cos q_2^2 - \cos q_1 + 1 + \cos q_1 \cos q_2^2}$$

$$\cos q_3 = -\frac{\cos q_2 (\cos q_2 + 1 + \cos q_1 + \cos q_1 \cos q_2)}{\cos q_2^2 - \cos q_1 + 1 + \cos q_1 \cos q_2^2}$$

$$\sin q_5 = -\frac{\sin q_1 (1 + \cos q_2)}{\cos q_2^2 - \cos q_1 + 1 + \cos q_1 \cos q_2^2}$$

$$\cos q_5 = -\frac{\cos q_2 (\cos q_2 + 1 + \cos q_1 + \cos q_1 \cos q_2)}{\cos q_2^2 - \cos q_1 + 1 + \cos q_1 (\cos q_2)^2}$$

on a donc  $q_3 = -q_5$ .

On utilise l'équation 7.13, on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin(q_5) \\ -\sin(q_5) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(q_4) \\ \cos(q_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_3) \cos(q_2) \sin(q_1) + \sin(q_3) \cos(q_1) \\ \sin(q_2) \sin(q_1) \end{pmatrix}$$

alors :

$$\cos(q_4) = \frac{\cos(q_3) \cos(q_2) \sin(q_1) + \sin(q_3) \cos(q_1)}{\sin(q_5)}$$

$$\sin(q_4) = -\frac{\sin(q_2) \sin(q_1)}{\sin(q_5)} \quad (7.53)$$

Pour obtenir  $q_6$ , on va utiliser l'équation ci-dessous :

$$\mathbf{P}_6^* \mathbf{R}_6^* \mathbf{P}_5^* \mathbf{R}_5^* \mathbf{P}_4^* \mathbf{R}_4^* \xi_4 = \mathbf{R}^* \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \xi_4$$

Après simplification :

$$O_3 \cdot \begin{pmatrix} \sin(q_6) \\ \cos(q_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{pmatrix} \sin(q_5) & 0 \\ 0 & \sin(q_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(q_6) \\ \cos(q_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(q_3) \sin(q_2) \\ \sin(q_3) \cos(q_2) \cos(q_1) + \cos(q_3) \sin(q_1) \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{aligned} \cos(q_6) &= \frac{\sin(q_3) \cos(q_2) \cos(q_1) + \cos(q_3) \sin(q_1)}{\sin(q_5)} \\ \sin(q_6) &= \frac{\sin(q_3) \sin(q_2)}{\sin(q_5)} \end{aligned} \quad (7.54)$$

De même, si l'on écrit l'équation de fermeture sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 = \mathbf{R} \\ \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{P}_2 (\mathbf{R}_3 \mathcal{U}_3 + \mathbf{P}_2^* \mathcal{U}_2) + \mathbf{P}_1^* \mathcal{U}_1) = \mathcal{U} \end{cases} \quad (7.55)$$

avec :  $\mathbf{R} = \mathbf{P}_6^* \mathbf{R}_6^* \mathbf{P}_5^* \mathbf{R}_5^*$ ,  $\mathcal{U} = -\mathbf{R}_6^* \mathcal{U}_6 - \mathbf{P}_6^* \mathbf{R}_6^* (\mathbf{R}_5^* \mathcal{U}_5 - \mathbf{P}_5^* \mathbf{R}_5^* \mathcal{U}_4)$

Plus précisément :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= [\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}] \\ \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \cos(q_6) \cos(q_5) \\ -\sin(q_6) \cos(q_5) \\ \sin(q_5) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sin(q_6) \\ \cos(q_6) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\cos(q_6) \sin(q_5) \\ \sin(q_6) \sin(q_5) \\ \cos(q_5) \end{pmatrix} \\ \mathcal{U} &= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_x \\ \mathcal{U}_y \\ \mathcal{U}_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 + \cos(q_6) + \cos(q_6) \cos(q_5) \\ \sin(q_5) \\ \sin(q_6) + \sin(q_6) \cos(q_5) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après le calcul analogue, on obtient :  $q_3 = q_1$ . En utilisant 7.53, 7.54, on a  $q_4 = -q_6$ . Puisque :

$$\sin^2 q_3 + \cos^2 q_3 = 1$$

On a :

$$\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_1 \cos q_2 = 0$$

Il faut remarquer que la configuration de référence est  $[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , si on prend  $q_1 = q_1 + \frac{\pi}{2}$ ,  $q_2 = q_2 - \frac{\pi}{2}$ , c'est exactement le même résultat que celui de Wittenburg [Wit77].

On a : l'ensemble des points singuliers :

$$q^s = \{\emptyset\}$$

$$M = \{q \in \mathbb{R}^6 \mid q_3 = q_1, q_5 = -q_1, q_4 = -q_2, q_6 = -q_2, \cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_1 \cos q_2 = 0\}$$

$M$  est bien une bonne sous-variété de  $\mathbb{R}^6$ . Le lieu singulier de ce mécanisme est vide.



## Chapitre 8

# Un algorithme de cinématique inverse des mécanismes 6R spatiaux

### 8.1 Introduction

Il existe pour traiter les problèmes de cinématique inverse des mécanismes 6R spatiaux des méthodes basées sur la recherche des racines d'un polynôme du 16-ème degré par rapport à la tangente d'un demi angle. De plus, l'équivalence entre l'équation de fermeture et les solutions analytiques n'est pas toujours exprimée de façon rigoureuse.

L'algorithme qu'on va proposer permet de résoudre l'équation de fermeture indépendamment d'un choix des coordonnées et les solutions sont écrites sous forme intrinsèque, ce qui nous conduit à résoudre deux équations du 8-ème degré.

Soient  $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3\mathbf{R}_4\mathbf{R}_5\mathbf{R}_6 = \mathbf{T}$  l'équation de fermeture,  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$ ,  $\mathbf{R}_4$ ,  $\mathbf{R}_5$  et  $\mathbf{R}_6$  sont des rotations pures et  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ ,  $q_5$  et  $q_6$  sont les paramètres articulaires. Le déplacement  $\mathbf{T}$  est considéré comme donné. Le principe de cet algorithme est de trouver les paramètres articulaires de ce produit de six rotations en commençant par étudier les solutions d'une équation concernant trois rotations et de la forme  $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}$ . La résolution de cette équation a été présentée dans la section 6.6.

### 8.2 Résolution de l'équation de fermeture

Nous allons considérer d'abord l'équation de fermeture d'un produit de six déplacements hélicoïdaux :

$$R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6 = T \quad (8.1)$$

où  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  et  $R_6$  sont des déplacements hélicoïdaux, les générateurs associés sont respectivement  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\xi_4$ ,  $\xi_5$  et  $\xi_6$  et les paramètres de rotation et translation sont respectivement  $q_1$ ,  $d_1$ ,  $q_2$ ,  $d_2$ ,  $q_3$ ,  $d_3$ ,  $q_4$ ,  $d_4$ ,  $q_5$ ,  $d_5$  et  $q_6$ ,  $d_6$

L'équation précédente peut être exprimée aussi par :

$$R_3 R_4 R_5 = R_2^* R_1^* T R_6^*$$

Si l'on définit un opérateur intermédiaire  $R$ , l'équation de fermeture peut être présentée en deux parties :

$$\begin{cases} R_2^* R_1^* T R_6^* = R \\ R_3 R_4 R_5 = R \end{cases} \quad (8.2)$$

### 8.2.1 Évaluation de l'opérateur intermédiaire $R$

La restriction de l'équation 8.1 des déplacements hélicoïdaux aux rotations pures implique que  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 0$ ,  $d_3 = 0$ ,  $d_4 = 0$ ,  $d_5 = 0$  et  $d_6 = 0$ . On calcule les paramètres articulaires commençant par évaluer  $\{\xi_2 \mid R\xi_6\}$ ,  $\{\xi_1 \mid R\xi_6\}$  et  $\{\xi_2 \mid RT^*\xi_1\}$

D'après  $R_2^* R_1^* T R_6^* = R$ , on a :

$$\{\xi_2 \mid R_1^* T \xi_6\} = \{\xi_2 \mid R\xi_6\}$$

on considère que  $d_1 = 0$ , l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} Re(2r_1 - t_1) \tan^2 \frac{q_1}{2} + 2Re(s_1) \tan \frac{q_1}{2} + Re(t_1) &= 0 \\ Du(2r_1 - t_1) \tan^2 \frac{q_1}{2} + 2Du(s_1) \tan \frac{q_1}{2} + Du(t_1) &= 0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Les coefficients  $r_1$ ,  $s_1$  et  $t_1$  sont définis par 8.18.

Supposons  $Re(2r_1 - t_1) \neq 0$ , d'après le théorème de résultant, pour que deux équations précédentes possèdent au moins une racine commune par rapport à  $\tan \frac{q_1}{2}$ , il faut et il suffit que le résultant  $\mathcal{R}$  des deux polynômes vérifie l'équation suivante :

$$\mathcal{R} = \begin{vmatrix} Re(2r_1 - t_1) & 2Re(s_1) & Re(t_1) & 0 \\ 0 & Re(2r_1 - t_1) & 2Re(s_1) & Re(t_1) \\ Du(2r_1 - t_1) & 2Du(s_1) & Du(t_1) & 0 \\ 0 & Du(2r_1 - t_1) & 2Du(s_1) & Du(t_1) \end{vmatrix} = 0$$

Puisque  $r_1$ ,  $s_1$  et  $t_1$  sont des nombres duaux, l'équation précédente s'écrit aussi par :

$$\mathcal{R} = Du^2(\bar{r}_1 t_1) + Du^2(\bar{s}_1 t_1) + Du(\bar{s}_1 t_1) Du(\bar{r}_1 t_1) = 0 \quad (8.4)$$

le symbole  $\bar{\cdot}$  est le conjugué d'un nombre dual. Après avoir simplifié, l'équation précédente est un polynôme du deuxième degré à coefficients dans  $\mathbb{R}$  qui s'exprime par :

$$A_1 r_{26}^2 + A_2 d_{26}^2 + A_3 r_{26} d_{26} + A_4 r_{26} + A_5 d_{26} + A_6 = 0 \quad (8.5)$$

où  $r_{26} = (\xi_2 \mid R\xi_6)$ ,  $d_{26} = [\xi_2 \mid R\xi_6]$ .

D'autre part, on peut écrire l'équation 8.3 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} Re(s_1) \sin q_1 - Re(r_1) \cos q_1 + Re(r_1 + t_1) &= 0 \\ Du(s_1) \sin q_1 - Du(r_1) \cos q_1 + Du(r_1 + t_1) &= 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

La relation  $\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1 = 1$  nous donne l'équation suivante :

$$(Du(s_1 \bar{t}_1) + Du(\bar{r}_1 s_1))^2 + Du^2(r_1 \bar{t}_1) - Du^2(\bar{r}_1 s_1) = 0 \quad (8.7)$$

L'équation précédente est aussi un polynôme du second degré par rapport aux  $r_{26}$  et  $d_{26}$  à coefficients réels.

$$B_1 r_{26}^2 + B_2 d_{26}^2 + B_3 r_{26} d_{26} + B_4 r_{26} + B_5 d_{26} + B_6 = 0 \quad (8.8)$$

Les valeurs des paramètres  $r_{26}$  et  $d_{26}$  peuvent être obtenues facilement par la résolution des deux équations 8.5 et 8.8.

D'après la première équation de 8.1, on peut la réécrire sous la forme suivantes :

$$R_1^* T R_6^* = R_2 R$$

et

$$\{\xi_1 \mid T\xi_6\} = \{\xi_1 \mid R_2 R\xi_6\}$$

On obtient les deux polynômes du deuxième degré par rapport à  $\tan \frac{q_2}{2}$  :

$$Re(2r_2 - t_2) \tan^2 \frac{q_2}{2} + 2Re(s_2) \tan \frac{q_2}{2} + Re(t_2) = 0 \quad (8.9)$$

$$Du(2r_2 - t_2) \tan^2 \frac{q_2}{2} + 2Du(s_2) \tan \frac{q_2}{2} + Du(t_2) = 0$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} Re(s_2) \sin q_2 - Re(r_2) \cos q_2 + Re(r_2 + t_2) &= 0 \\ Du(s_2) \sin q_2 - Du(r_2) \cos q_2 + Du(r_2 + t_2) &= 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} r_2 &= \{\xi_1 \mid [\xi_2, [\xi_2, R\xi_6]]\} \\ s_2 &= \{\xi_1 \mid [\xi_2, R\xi_6]\} \\ t_2 &= \{\xi_1 \mid R\xi_6\} - \{\xi_1 \mid T\xi_6\} \end{aligned}$$

Pour la même raison, les conditions d'existence des valeurs de  $q_2$ , qui vérifient les équations 8.9 et 8.10, impliquent que soient satisfaites les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} r_{16}^4 + C_1 r_{16}^3 d_{16} + C_2 r_{16}^3 + C_3 r_{16}^2 d_{16}^2 + C_4 r_{16}^2 d_{16} + C_5 r_{16}^2 \\ + C_6 r_{16} d_{16}^2 + C_7 r_{16} d_{16} + C_8 r_{16} + C_9 d_{16} + C_{10} = 0 \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$D_1 r_{16}^2 + D_2 d_{16}^2 + D_3 r_{16} d_{16} + D_4 r_{16} + D_5 d_{16} + D_6 = 0 \quad (8.12)$$

$r_{16} = (\xi_1 \mid R\xi_6)$  et  $d_{16} = [\xi_1 \mid R\xi_6]$ . La résolution des équations précédentes nous conduit à résoudre une équation du 8-ème degré par rapport à  $r_{16}$ .

$$r_{16}^8 + E_1 r_{16}^7 + E_2 r_{16}^6 + E_3 r_{16}^5 + E_4 r_{16}^4 + E_5 r_{16}^3 + E_6 r_{16}^2 + E_7 r_{16} + E_8 = 0 \quad (8.13)$$

$C_i$ ,  $D_i$  et  $E_i$  sont des coefficients réels.

La première équation de 8.2 peut être représentée sous la forme suivante :

$$R_2^* R_1^* = R R_6 T^*$$

et on a :

$$\{\xi_2 \mid \xi_1\} = \{\xi_2 \mid R R_6 T^* \xi_1\}$$

Pour la même raison, les conditions d'existence des valeurs de  $q_6$ , qui vérifient l'équation précédente, impliquent que soient satisfaites les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} r_{12}^4 + C'_1 r_{12}^3 d_{12} + C'_2 r_{12}^3 + C'_3 r_{12}^2 d_{12}^2 + C'_4 r_{12}^2 d_{12} + C'_5 r_{12}^2 \\ + C'_6 r_{12} d_{12}^2 + C'_7 r_{12} d_{12} + C'_8 r_{12} + C'_9 d_{12} + C'_{10} = 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$D'_1 r_{12}^2 + D'_2 d_{12}^2 + D'_3 r_{12} d_{12} + D'_4 r_{12} + D'_5 d_{12} + D'_6 = 0 \quad (8.15)$$



$r_{12} = (\xi_1 | TR^* \xi_2)$  et  $d_{12} = [\xi_1 | TR^* \xi_2]$ . La résolution des équations précédentes nous conduit à résoudre une équation du 8-ème degré par rapport à  $r_{12}$ .

$$r_{12}^8 + E'_1 r_{12}^7 + E'_2 r_{12}^6 + E'_3 r_{12}^5 + E'_4 r_{12}^4 + E'_5 r_{12}^3 + E'_6 r_{12}^2 + E'_7 r_{12} + E'_8 = 0 \quad (8.16)$$

$C'_i$ ,  $D'_i$  et  $E'_i$  sont des coefficients réels.

Après les résolutions des équations 8.5 et 8.8, 8.13, 8.16, on peut obtenir les valeurs de  $r_{26}$ ,  $r_{16}$  et  $r_{12}$ .

## 8.2.2 Évaluation de $q_1$ , $q_2$ , et $q_6$

Grâce à la méthode proposée dans la section 6.6, on peut exprimer les paramètres articulaires  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_6$  en fonction de  $r_{26}$ ,  $r_{16}$  et  $r_{12}$  par les équations 8.17, 8.19 et 8.20.

$$\tan \frac{q_1}{2} = \frac{-Re(s_1) \pm \sqrt{Re(s_1)^2 - (2Re(r_1) - Re(t_1))Re(t_1)}}{(2Re(r_1) - Re(t_1))} \quad (8.17)$$

Les coefficients duaux sont définis par :

$$\begin{cases} r_1 = \{\xi_2 | [\xi_1, [\xi_1, T\xi_6]]\} \\ s_1 = \{\xi_2 | [\xi_1, T\xi_6]\} \\ t_1 = \{\xi_2 | T\xi_6 - R\xi_6\} = \{\xi_2 | T\xi_6\} - r_{26} - \epsilon d_{26} \end{cases} \quad (8.18)$$

$$\begin{cases} \sin q_2 = -\frac{1}{Re(Y)} (R\xi_6 | [\xi_2, R_1^* T\xi_6]) \\ \cos q_2 = \frac{1}{Re(Y)} ((R\xi_6 | R_1^* T\xi_6) - (\xi_2 | R^* T\xi_6)^2) \end{cases} \quad (8.19)$$

où  $Y = \{[\xi_2, R_1^* \xi_6] | [\xi_2, R_1^* \xi_6]\}$  et  $Re(Y) = 1 - (\xi_2 | R^* T\xi_6)^2$ ,  $Du(Y) = -2(\xi_2 | R^* T\xi_6)[\xi_2 | R^* T\xi_6]$ .

En effet,  $(R\xi_6 | [\xi_2, R_1^* T\xi_6])$  et  $(R\xi_6 | R_1^* T\xi_6)$  sont des fonctions de  $r_{26}$ ,  $r_{16}$  et  $r_{12}$ .

Puisqu'on peut exprimer  $R_1^* T\xi_6$  par une base  $\{\xi_1, \xi_2, [\xi_1, \xi_2]\}$ , on a donc :

$$\begin{aligned} (R\xi_6 | R_1^* T\xi_6) &= z_1(R\xi_6 | \xi_1) + z_2(R\xi_6 | \xi_2) + z_3(R\xi_6 | [\xi_1, \xi_2]) \\ &= z_1 r_{16} + z_2 r_{26} + z_3 \sqrt{1 - r_{16}^2 - r_{26}^2 - (\xi_1 | \xi_2)^2 + 2r_{16} r_{26} (\xi_1 | \xi_2)} \end{aligned}$$

où  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sont les parties réelles des coordonnées duales de  $R_1^* T\xi_6$  par rapport à la base  $\{\xi_1, \xi_2, [\xi_1, \xi_2]\}$ .

D'autre part :

$$(R\xi_6 | [\xi_2, R_1^* T\xi_6]) = \sqrt{1 - r_{26}^2 - (R\xi_6 | R_1^* T\xi_6)^2 - (\xi_2 | R_1^* T\xi_6)^2 + 2r_{26} (R\xi_6 | R_1^* T\xi_6) (\xi_2 | R_1^* T\xi_6)}$$

On exprime  $q_6$  par :

$$\begin{cases} \sin q_6 = -\frac{1}{Re(X)} ([\xi_6, T^* R_1 \xi_2] | R^* \xi_2) \\ \cos q_6 = \frac{1}{Re(X)} ((T^* R_1 \xi_2 | R^* \xi_2) - (T\xi_6 | R_1 \xi_2)^2) \end{cases} \quad (8.20)$$

avec :  $X = 1 - \{T\xi_6 \mid \mathbf{R}_1\xi_2\}^2$ . En effet,  $(\{\xi_6, T^*\mathbf{R}_1\xi_2\} \mid R^*\xi_2)$  et  $(T^*\mathbf{R}_1\xi_2 \mid R^*\xi_2)$  sont des fonctions de  $r_{12}$ ,  $r_{16}$  et  $r_{26}$ .

On doit calculer  $(T^*\mathbf{R}_1\xi_2 \mid R^*\xi_2)$ . On exprime  $T^*\mathbf{R}_1\xi_2$  par une combinaison linéaire de  $\{T^*\xi_1, \xi_6, [T^*\xi_1, \xi_6]\}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (T^*\mathbf{R}_1\xi_2 \mid R^*\xi_2) &= y_1(R^*\xi_2 \mid T^*\xi_1) + y_2(R^*\xi_2 \mid \xi_6) + y_3(R^*\xi_2 \mid [T^*\xi_1, \xi_6]) \\ &= y_1r_{12} + y_2r_{26} + y_3\sqrt{1 - r_{12}^2 - r_{26}^2 - (\xi_1 \mid T\xi_6)^2 + 2r_{12}r_{26}(\xi_1 \mid T\xi_6)} \end{aligned}$$

où  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$  sont les parties réelles des coordonnées duales de  $\xi_2$  par rapport à la base  $\{T^*\xi_1, \xi_6, [T^*\xi_1, \xi_6]\}$ .

Si  $T^*\xi_1$ ,  $\xi_6$  sont linéairement dépendants sur  $\Delta$ , le produit  $\mathbf{R}_2^*\mathbf{R}_1^*T\mathbf{R}_6^* = R$  est singulier, c'est-à-dire que :  $\mathbf{R}(q_6 \pm q_1, \xi_6) = R^*\mathbf{R}_2^*$ .

### 8.2.3 Évaluation de $q_3$ , $q_4$ et $q_5$

Le paragraphe précédent nous donne des solutions pour  $q_1$ ,  $q_2$ , et  $q_6$ . Les paramètres  $q_3$ ,  $q_4$  et  $q_5$  peuvent être exprimés en fonction de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_6$  et  $T$ .

Puisque :

$$\mathbf{R}_3\mathbf{R}_4\mathbf{R}_5 = \mathbf{R}_2^*\mathbf{R}_1^*T\mathbf{R}_6^*$$

où  $\mathbf{R}_3$ ,  $\mathbf{R}_4$ ,  $\mathbf{R}_5$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_6$  sont des rotations pures. On peut exprimer  $q_3$ ,  $q_4$  et  $q_5$  en utilisant la même méthode que dans le paragraphe précédent. Supposons  $Re(2u_1 - w_1) \neq 0$ , on a :

$$\tan \frac{q_4}{2} = \frac{-Re(v_1) \pm \sqrt{Re^2(u_1) - Re(2u_1 - w_1)Re(w_1)}}{(2Re(u_1) - Re(w_1))} \quad (8.21)$$

avec :

$$\begin{cases} u_1 = \{\xi_3 \mid [\xi_4, [\xi_4, \xi_5]]\} \\ v_1 = \{\xi_3 \mid [\xi_4, \xi_5]\} \\ w_1 = \{\xi_3 \mid \xi_5 - \mathbf{R}_2^*\mathbf{R}_1^*T\mathbf{R}_6^*\xi_5\} \end{cases} \quad (8.22)$$

$$\begin{cases} \sin q_3 = \frac{1}{Re(Y')} (\mathbf{R}_2^*\mathbf{R}_1^*T\mathbf{R}_6^*\xi_5 \mid [\xi_3, \mathbf{R}_4\xi_5]) \\ \cos q_3 = \frac{1}{Re(Y')} ((\mathbf{R}_2^*\mathbf{R}_1^*T\mathbf{R}_6^*\xi_5 \mid \mathbf{R}_4\xi_5) - (\xi_3 \mid \mathbf{R}_2^*\mathbf{R}_1^*T\mathbf{R}_6^*\xi_5)^2) \end{cases} \quad (8.23)$$

où  $Y' = \{[\xi_3, \mathbf{R}_4\xi_5] \mid [\xi_3, \mathbf{R}_4\xi_5]\}$  et  $Re(Y') = 1 - (\xi_3 \mid \mathbf{R}_2^*\mathbf{R}_1^*T\mathbf{R}_6^*\xi_5)^2$ ,  $Du(Y') = [[\xi_3, \mathbf{R}_4\xi_5] \mid [\xi_3, \mathbf{R}_4\xi_5]]$ .

$$\begin{cases} \sin q_5 = -\frac{1}{Re(X')} (\mathbf{R}_6T^*\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3\xi_4 \mid [\xi_5, \xi_4]) \\ \cos q_5 = \frac{1}{Re(X')} ((\mathbf{R}_6T^*\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3\xi_4 \mid \xi_4) - ()) \end{cases} \quad (8.24)$$

où  $X' = \{[\xi_5, \mathbf{R}_6T^*\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\xi_3] \mid [\xi_5, \mathbf{R}_6T^*\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\xi_3]\}$  et  $Re(Y') = 1 - (\xi_5 \mid \mathbf{R}_6T^*\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\xi_3)^2$ .

### 8.2.4 Équivalence de l'équation de fermeture et les solutions analytiques

Compte-tenu de l'équation de fermeture, il est évident que :

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3\mathbf{R}_4\mathbf{R}_5\mathbf{R}_6 = T \Leftrightarrow \mathbf{R}_3\mathbf{R}_4\mathbf{R}_5 = \mathbf{R}_2^*\mathbf{R}_1^*T\mathbf{R}_6^*$$

ce qui sont équivalent à :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* = R \\ \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 = \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* \end{cases}$$

L'équivalence entre les solutions 8.17, 8.19 et 8.20 et  $\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* = R$ , ainsi que l'équivalence entre les solutions 8.21, 8.45 et 8.46 et  $\mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 = \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^*$  sont déjà montrées dans la section 6.6.

Pour que les solutions analytiques soient équivalentes à l'équation de fermeture, il suffit donc de montrer :

$$a) : \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* = R \quad \Leftrightarrow \quad b) : \begin{cases} \{\xi_2 \mid \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6\} = \{\xi_2 \mid R \xi_6\} \\ \{\xi_1 \mid \mathbf{T} \xi_6\} = \{\xi_1 \mid R_2 R \xi_6\} \\ \{\xi_2 \mid \xi_1\} = \{\xi_2 \mid R R_6 \mathbf{T}^* \xi_1\} \end{cases}$$

(i) a)  $\Rightarrow$  b)

La démonstration se trouve dans la section 6.6.

(ii) b)  $\Rightarrow$  a)

En effet,  $\mathbf{R}_2^* \xi_1$  et  $\xi_2$  sont linéairement indépendants sur  $\Delta$ , il est évident que  $\{\mathbf{R}_2^* \xi_1, \xi_2, [\mathbf{R}_2^* \xi_1, \xi_2]\}$  forme une base de  $\mathcal{D}$  sur  $\Delta$ . Alors :

$$X = x_1 \mathbf{R}_2^* \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 [\mathbf{R}_2^* \xi_1, \xi_2] \quad \text{pour } X \in \mathcal{D}.$$

$x_1, x_2$  et  $x_3$  sont des coordonnées duales de  $X$  dans  $\{\mathbf{R}_2^* \xi_1, \xi_2, [\mathbf{R}_2^* \xi_1, \xi_2]\}$ .

Considérons :

$$\{R \xi_6 \mid X\} = x_1 \{R \xi_6 \mid \mathbf{R}_2^* \xi_1\} + x_2 \{R \xi_6 \mid \xi_2\} + x_3 \{R \xi_6 \mid [\mathbf{R}_2^* \xi_1, \xi_2]\} \quad \text{pour } X \in \mathcal{D}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6 \mid X\} &= x_1 \{\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6 \mid \mathbf{R}_2^* \xi_1\} + x_2 \{\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6 \mid \xi_2\} + x_3 \{\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6 \mid [\mathbf{R}_2^* \xi_1, \xi_2]\} \\ &= x_1 \{\mathbf{T} \xi_6 \mid \xi_1\} + x_2 \{\mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6 \mid \xi_2\} + x_3 \{\mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6 \mid [\xi_1, \xi_2]\} \end{aligned}$$

D'après b), utilisons la proposition 6.7, on a :

$$\{\mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6 \mid [\xi_1, \xi_2]\} = \{R \xi_6 \mid [\mathbf{R}_2^* \xi_1, \xi_2]\}$$

il est claire que :

$$\{\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \xi_6 \mid X\} = \{R \xi_6 \mid X\} \quad \text{pour } X \in \mathcal{D}.$$

on a :

$$\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* \xi_6 = R \xi_6.$$

Après une démonstration analogue, on peut montrer que :

$$\xi_2 = \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* R^* \xi_2$$

on a :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* \xi_6 = R \xi_6 \\ \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* [\xi_6, R^* \xi_2] = R[\xi_6, R^* \xi_2] \\ \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* [\xi_6, [\xi_6, R^* \xi_2]] = R[\xi_6, [\xi_6, R^* \xi_2]] \end{cases}$$

Puisque  $\{\xi_6, [\xi_6, R^* \xi_2], [\xi_6, [\xi_6, R^* \xi_2]]\}$  forme une base de  $\mathcal{D}$  sur  $\Delta$ , on a donc :

$$\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{T} \mathbf{R}_6^* = R.$$

### 8.3 Utilisation des paramètres de Denavit-Hartenberg

Pour traiter un mécanisme concret, les paramètres de Denavit-Hartenberg sont parfois pratiques. Dans cette partie, nous reprenons les notations de la section 7.3, l'équation de fermeture est écrite comme suit :

$$R_1 P_1 R_2 P_2 R_3 P_3 R_4 P_4 R_5 P_5 R_6 P_6 = T \quad (8.25)$$

$R_i$  est un déplacement hélicoïdale suivant  $\xi = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^t$  dont la rotation est  $q_i$  et la translation est  $d_i$ .  $P_i$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_i$  à  $\mathcal{B}_{i+1}$ . Comme dans la section précédente, on va définir l'opérateur intermédiaire  $R$ .

$$R_2^* P_1^* R_1^* T P_6^* R_6^* = R \quad (8.26)$$

$$P_2 R_3 P_3 R_4 P_4 R_5 P_5 = R \quad (8.27)$$

#### 8.3.1 Évaluation de l'opérateur $R$

Pour évaluer  $q_1$ , on va utiliser la relation suivante :

$$\{\xi \mid P_1^* R_1^* T P_6^* \xi\} = \{\xi \mid R\xi\}$$

Lorsque  $d_1 = 0$ , l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{cases} Re(2r'_1 - t'_1) \tan^2 \frac{q_1}{2} + 2Re(s'_1) \tan \frac{q_1}{2} + Re(t'_1) = 0 \\ Du(2r'_1 - t'_1) \tan^2 \frac{q_1}{2} + 2Du(s'_1) \tan \frac{q_1}{2} + Du(t'_1) = 0 \end{cases} \quad (8.28)$$

avec :

$$\begin{cases} r'_1 = \{TP_6^* \xi \mid [\xi, [P_1 \xi]]\} \\ s'_1 = \{TP_6^* \xi \mid [\xi, P_1 \xi]\} \\ t'_1 = \{TP_6^* \xi \mid \xi\} - \{\xi \mid R\xi\} \end{cases} \quad (8.29)$$

D'après les équations 8.4 et 8.7, les conditions d'existence des valeurs de  $q_1$  dans l'équation 8.28 se traduisent en deux équations par rapport à  $\{\xi \mid R\xi\}$ .

$$(A_1 r_{26}^2 + A_2 d_{26}^2 + A_3 r_{26} d_{26} + A_4 r_{26} + A_5 d_{26} + A_6)_{DH} = 0 \quad (8.30)$$

$$(B_1 r_{26}^2 + B_2 d_{26}^2 + B_3 r_{26} d_{26} + B_4 r_{26} + B_5 d_{26} + B_6)_{DH} = 0 \quad (8.31)$$

On a :  $(r_{26})_{DH} = \{\xi \mid R\xi\}$ ,  $(d_{26})_{DH} = [\xi \mid R\xi]$ .

L'équation 8.26 est équivalente à :

$$P_1^* R_1^* T P_6^* R_6^* = R_2 R$$

et

$$\{\xi \mid T P_6^* \xi\} = \{P_1^* \xi \mid R_2 R \xi\}$$

Pour la même raison, les conditions d'existence des valeurs de  $q_2$ , qui vérifient l'équation précédente, impliquent que soient satisfaites les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (r_{16}^4 + C_1 r_{16}^3 d_{16} + C_2 r_{16}^3 + C_3 r_{16}^2 d_{16}^2 + C_4 r_{16}^2 d_{16} + C_5 r_{16}^2 \\ + C_6 r_{16} d_{16}^2 + C_7 r_{16} d_{16} + C_8 r_{16} + C_9 d_{16} + C_{10})_{DH} = 0 \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$(D_1 r_{16}^2 + D_2 d_{16}^2 + D_3 r_{16} d_{16} + D_4 r_{16} + D_5 d_{16} + D_6)_{DH} = 0 \quad (8.33)$$

$(r_{16})_{DH} = (\mathbf{P}_1^* \xi \mid R\xi)$  et  $(d_{16})_{DH} = [\mathbf{P}_1^* \xi \mid R\xi]$ . La résolution des équations précédentes nous conduit à résoudre une équation du 8-ème degré par rapport à  $r_{16}$ .

$$(r_{16}^8 + E_1 r_{16}^7 + E_2 r_{16}^6 + E_3 r_{16}^5 + E_4 r_{16}^4 + E_5 r_{16}^3 + E_6 r_{16}^2 + E_7 r_{16} + E_8)_{DH} = 0 \quad (8.34)$$

$C_i$ ,  $D_i$  et  $E_i$  sont des coefficients réels.

L'équation 8.26 peut être représentée sous la forme suivante :

$$R_2^* \mathbf{P}_1^* R_1^* = R R_6 \mathbf{P}_6 T^*$$

et on a :

$$\{\xi \mid \mathbf{P}_1^* \xi\} = \{\xi \mid R R_6 \mathbf{P}_6 T^* \xi\}$$

Pour la même raison, les conditions d'existence des valeurs de  $q_6$ , qui vérifient l'équation précédente, impliquent que soient satisfaites les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (r_{12}^4 + C'_1 r_{12}^3 d_{12} + C'_2 r_{12}^3 + C'_3 r_{12}^2 d_{12}^2 + C'_4 r_{12}^2 d_{12} + C'_5 r_{12}^2 \\ + C'_6 r_{12} d_{12}^2 + C'_7 r_{12} d_{12} + C'_8 r_{12} + C'_9 d_{12} + C'_{10})_{DH} = 0 \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$(D'_1 r_{12}^2 + D'_2 d_{12}^2 + D'_3 r_{12} d_{12} + D'_4 r_{12} + D'_5 d_{12} + D'_6)_{DH} = 0 \quad (8.36)$$

$(r_{12})_{DH} = (\xi \mid R \mathbf{P}_6 T^* \xi)$  et  $(d_{12})_{DH} = [\xi \mid R \mathbf{P}_6 T^* \xi]$ . La résolution des équations précédentes nous conduit à résoudre une équation du 8-ème degré par rapport à  $r_{12}$ .

$$(r_{12}^8 + E'_1 r_{12}^7 + E'_2 r_{12}^6 + E'_3 r_{12}^5 + E'_4 r_{12}^4 + E'_5 r_{12}^3 + E'_6 r_{12}^2 + E'_7 r_{12} + E'_8)_{DH} = 0 \quad (8.37)$$

$C'_i$ ,  $D'_i$  et  $E'_i$  sont des coefficients réels.

Après les résolutions des équations 8.30 et 8.31, 8.34 et 8.37, on peut obtenir les valeurs de  $(r_{26})_{DH}$ ,  $(r_{16})_{DH}$  et  $(r_{12})_{DH}$ .

### 8.3.2 Évaluation de $q_1$ , $q_2$ , et $q_6$

Si l'on considère qu'un mécanisme est constitué par des liaisons rotoïdes, l'équation de fermeture 8.26 devient :

$$\mathbf{R}_2^* \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* T \mathbf{P}_6^* \mathbf{R}_6^* = R \quad (8.38)$$

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{P}_5 = R \quad (8.39)$$

on peut exprimer les paramètres articulaires  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  par les équations suivantes.

$$\tan \frac{q_1}{2} = \frac{-Re(s'_1) \pm \sqrt{Re(s'_1)^2 - (2Re(r'_1) - Re(t'_1)) Re(t'_1)}}{(2Re(r'_1) - Re(t'_1))} \quad (8.40)$$

Les coefficients duaux  $r'_1$ ,  $s'_1$  et  $t'_1$  sont définis par 8.29.

$$\begin{cases} \sin q_2 = -\frac{1}{Re(Y)} (R\xi \mid [\xi, \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* T \mathbf{P}_6^* \xi]) \\ \cos q_2 = \frac{1}{Re(Y)} ((R\xi \mid \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* T \mathbf{P}_6^* \xi) - (\xi \mid \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* T \mathbf{P}_6^* \xi)^2) \end{cases} \quad (8.41)$$

où  $Y = \{[\xi, \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi] \mid [\xi, \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi]\}$ .

En effet,  $(R\xi \mid [\xi, \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi])$  et  $(R\xi \mid \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi)$  sont des fonctions de  $r_{26}$ ,  $r_{16}$  et  $r_{12}$ .

Puisqu'on peut exprimer  $\mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi$  dans une base  $\{\xi, \mathbf{P}_1 \xi, [\xi, \mathbf{P}_1 \xi]\}$ , on a donc :

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_1 R\xi \mid \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi) &= z_1 (\mathbf{P}_1 R\xi \mid \xi) + z_2 (R\xi \mid \xi) + z_3 (\mathbf{P}_1 R\xi \mid [\xi, \mathbf{P}_1 \xi]) \\ &= z_1 r_{16} + z_2 r_{26} + z_3 \sqrt{1 - r_{16}^2 - r_{26}^2 - (\xi \mid \mathbf{P}_1 \xi)^2 + 2r_{16} r_{26} (\xi \mid \mathbf{P}_1 \xi)} \end{aligned}$$

où  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sont les parties réelles des coordonnées duales de  $\mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi$  par rapport à la base  $\{\xi, \mathbf{P}_1 \xi, [\xi, \mathbf{P}_1 \xi]\}$ .

D'autre part :

$$(R\xi \mid [\xi, \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi]) = \sqrt{\frac{1 - r_{26}^2 - (\mathbf{P}_1 R\xi \mid \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi)^2 - (\xi \mid \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi)^2}{+2r_{26}(\mathbf{P}_1 R\xi \mid \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi)(\xi \mid \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \xi)}}$$

On exprime  $q_6$  par :

$$\begin{cases} \sin q_6 &= -\frac{1}{Re(X)} ([\xi, \mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi] \mid R^* \xi) \\ \cos q_6 &= \frac{1}{Re(X)} ((\mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi \mid R^* \xi) - (\xi \mid \mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi)^2) \end{cases} \quad (8.42)$$

avec :  $X = \{[\xi, \mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi] \mid [\xi, \mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi]\}$ .

En effet,  $([\xi, \mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi] \mid R^* \xi)$  et  $(\mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi \mid R^* \xi)$  sont des fonctions de  $r_{12}$ ,  $r_{16}$  et  $r_{26}$ .

Si l'on exprime  $\mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi$  par une combinaison linéaire de  $\{\xi, \mathbf{P}_6 T^* \xi, [\xi, \mathbf{P}_6 T^* \xi]\}$ , on a :

$$(\mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi \mid R^* \xi) = y'_1 (\xi \mid R\xi) + y'_2 (\xi \mid R\mathbf{P}_6 T^* \xi) + y'_3 (\xi \mid R[\xi, \mathbf{P}_6 T^* \xi])$$

où  $y'_1$ ,  $y'_2$  et  $y'_3$  sont les parties réelles des coordonnées de  $\mathbf{P}_6 T^* \mathbf{P}_1 \xi$  par rapport à  $\{\xi, \mathbf{P}_6 T^* \xi, [\xi, \mathbf{P}_6 T^* \xi]\}$ .

### 8.3.3 Évaluation de $q_3$ , $q_4$ et $q_5$

Le paragraphe précédent nous donne des solutions pour  $q_1$ ,  $q_2$ , et  $q_6$ . Les paramètres  $q_3$ ,  $q_4$  et  $q_5$  peuvent être exprimés en fonction de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  et  $T$ .

Puisque :

$$\mathbf{R}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \mathbf{R}_5 = \mathbf{P}_2^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \mathbf{R}_6^* \mathbf{P}_5^*$$

où  $\mathbf{R}_3$ ,  $\mathbf{R}_4$ ,  $\mathbf{R}_5$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_6$  sont des rotations pures. On peut exprimer  $q_3$ ,  $q_4$  et  $q_5$  en utilisant la même méthode que dans le paragraphe précédent. On a :

$$\tan \frac{q_4}{2} = \frac{-Re(v'_1) \pm \sqrt{Re^2(u'_1) - Re(2u'_1 - w'_1)Re(w'_1)}}{(2Re(u'_1) - Re(w'_1))} \quad (8.43)$$

avec :

$$\begin{aligned} u'_1 &= \{\mathbf{P}_3^* \xi \mid [\xi, [\xi, \mathbf{P}_4 \xi]]\} \\ v'_1 &= \{\mathbf{P}_3^* \xi \mid [\xi, \mathbf{P}_4 \xi]\} \\ w'_1 &= \{\mathbf{P}_3^* \xi \mid \mathbf{P}_4 \xi\} - \{\xi \mid \mathbf{P}_2^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* \mathbf{TP}_6^* \mathbf{R}_6^* \mathbf{P}_5^* \xi\} \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$\begin{cases} \sin q_3 &= \frac{1}{Re(Y')} (\mathbf{P}_2^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* T \mathbf{P}_6^* \mathbf{R}_6^* \mathbf{P}_5^* \xi | [\xi, \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \xi]) \\ \cos q_3 &= \frac{1}{Re(Y')} ((\mathbf{P}_2^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* T \mathbf{P}_6^* \mathbf{R}_6^* \mathbf{P}_5^* \xi | \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \xi) - (\xi | \mathbf{P}_2^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{P}_1^* \mathbf{R}_1^* T \mathbf{P}_6^* \mathbf{R}_6^* \mathbf{P}_5^* \xi)^2) \end{cases} \quad (8.45)$$

où  $Y' = \{[\xi, \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \xi] | [\xi, \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \xi]\}$  et  $Re(Y') = 1 - (\xi | \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \xi)^2$ ,  $Du(Y') = \{[\xi, \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \xi] | [\xi, \mathbf{P}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{P}_4 \xi]\}$ .

$$\begin{cases} \sin q_5 &= -\frac{1}{Re(X')} (\mathbf{P}_5 \mathbf{R}_6 \mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi | [\xi, \mathbf{P}_4^* \mathbf{R}_4^* \mathbf{P}_3^* \xi]) \\ \cos q_5 &= \frac{1}{Re(X')} ((\mathbf{P}_5 \mathbf{R}_6 \mathbf{P}_6 T^* \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 \xi | \xi) - (\mathbf{P}_4^* \mathbf{R}_4^* \mathbf{P}_3^* \xi | \xi)^2) \end{cases} \quad (8.46)$$

où  $X' = \{[\xi, \mathbf{P}_4^* \mathbf{R}_4^* \mathbf{P}_3^* \xi] | [\xi, \mathbf{P}_4^* \mathbf{R}_4^* \mathbf{P}_3^* \xi]\}$  et  $Re(X') = 1 - (\xi | \mathbf{P}_4^* \mathbf{R}_4^* \mathbf{P}_3^* \xi)^2$ .

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié les problèmes cinématiques des mécanismes sous trois aspects : étude des configurations singulières aux ordres 1 et 2, étude du rang formel d'un ensemble de champs antisymétrique, solutions analytiques pour des mécanismes (problème cinématiques inverses).

De nombreux problèmes ouverts ne sont pas encore résolus et feront l'objet de recherches futures.

Dans la première partie, nous avons montré que les conditions de mobilité portant sur les dérivées d'ordre 2 sont suffisantes pour que les mécanismes plans possèdent un véritable degré de liberté, ce qui signifie plus précisément que lorsque la dérivée d'ordre 2 est dans  $\mathfrak{F}_q$ , les mécanismes plans se trouvent dans une configuration régulière, et que, sinon, le rang de la matrice jacobienne est égale à 2 et le mécanisme plan est dans une configuration singulière et est devenu incontrôlable.

Nous avons fait une analyse des singularités pour les mécanismes à quatre-barres plans. Par contre, l'étude de la dérivée d'ordre 2 n'est plus suffisante pour classer les différents types de singularités des mécanismes plans constitués de plus de quatre barres.

L'étude à l'ordre 2 de l'équation de fermeture par les méthodes précédentes ne peut convenir à tous les mécanismes. Pour des mécanismes plus complexes, une étude plus précise reposant sur la condition de transversalité est nécessaire. Nous avons alors appliqué cette condition de transversalité aux mécanismes  $6R$  paradoxaux et montré que l'existence d'une "transversale" unique qui coupe (ou est parallèle à) tous les axes de déplacements est une condition nécessaire et suffisante pour le fonctionnement régulier de ce type de mécanisme. Il serait intéressant de trouver tous les mécanismes  $6R$  paradoxaux qui satisfont cette condition, ce que nous n'avons pas pu développer.

Il existe d'autres types de mécanismes paradoxaux, les mécanismes de Bennett, qui ne peuvent être expliqués complètement en utilisant la théorie de géométrie différentielle. Ce genre de mécanismes reste toujours mystérieux et demande la recherche des solutions analytiques.

Les problèmes précédents, notamment les applications en robotique, font ressortir l'importance des méthodes de calcul du rang de système de champs antisymétriques, c'est-à-dire du rang d'un ensemble d'éléments de l'algèbre de Lie du groupe des déplacements. Lorsqu'on le traite en faisant intervenir toutes les coordonnées de chaque élément, ce problème est en général très compliqué.

Dans cette thèse, nous avons utilisé les propriétés de  $\Delta$ -module et de la structure de l'algèbre de Lie qui permettent de simplifier la procédure de calcul et de calculer le rang d'un ensemble de champs antisymétriques, en dimension 6, par des évaluations de rangs en dimension 3. La génération des sous-algèbres de Lie est étudiée de façon dans les différents cas particuliers. Ces cas correspondent à des mécanismes concrets. La génération des sous-groupes de Lie pourrait être étudiée à la suite.



La recherche de solutions analytiques pour des mécanismes, en particulier pour des mécanismes fermés, fait partie de la cinématique inverse et a retenu beaucoup d'attention de la part des chercheurs depuis les années 60. Les méthodes existantes sont compliquées et la procédure de résolution n'est pas très claire. Par exemple, dans le cas du mécanisme  $6R$ , dans ces méthodes, il faut résoudre un système d'équations linéaires de dimension 16 et une équation de 16-ième degré, les problèmes de singularités de ce système d'équations linéaires sont parfois inévitables.

Dans les derniers chapitres de cette thèse, nous avons proposé des algorithmes sans coordonnées et plus performants pour rechercher les solutions analytiques des mécanismes, notamment l'algorithme des mécanismes  $6R$  spatiaux, pour lequel, nous avons montré que pour résoudre le problème inverse, il suffit de trouver les racines des deux polynômes du 8-ième degré et d'un polynôme du 4-ième degré, les autres équations sont écrites sous formes explicites. Nous pourrions traiter les mécanismes  $4R$ ,  $5R$  spatiaux en tant que cas particuliers, les degrés des polynômes seront abaissés.

Ainsi, grâce à la théorie de Lie et la structure de  $\Delta$ -module, nous avons pu réaliser des calculs simples et sans coordonnées, ce qui permet d'éclaircir les propriétés intrinsèques du mécanisme et de résoudre le même problème en utilisant moins de calculs.

# Bibliographie

- [Ang82] J. Angeles. *Spatial kinematics chains*. Spring Verlag, Berlin, 1982.
- [Bak84] J.E. Baker. On 5-revolute linkages of extrema in linkage analysis, using screw system algebra. *Mech. Mach. Theory*, 13, pp. 333-343, 1984.
- [Che86] D. P. Chevallier. Groupes de lie et mécanique des système de corp rigides. *Mac-Graw-Hill*, 1986.
- [Che91] D.P. Chevallier. Lie algebras, modules, dual quaternions and algebraic methods in kinematics. *Mech. Mach. Theory*, 26(6), pp. 613-627, 1991.
- [Che93] D.P. Chevallier. Lie groups and mechanics of rigid bodies. *Preliminary Lecture Notes*, 1993.
- [Che95] D.P. Chevallier. Coordinate free criteria for testing the linear dependence of the sets of screws. In Sophia Antipolis, editor. *Computational kinematics*. à paraître : Kluwer Academic Publisher, septembre, 1995.
- [Cli73] W.K. Clifford. Preliminary sketch of biquaternions. *Jour. of Math. Pure and Applied*, 4, 1873.
- [Cli78] W.K. Clifford. Applications of grassmann's extensive algebra. *Jour. of Math. Pure and Applied*, 1 pp. 350-358, 1878.
- [Dem86] M. Demazure. *Géomètre catastrophes et bifurcations*. département de mathématiques, école polytechniques, 1986.
- [DG93] P. S. Donelan and C. G. Gibson. On the hierarchy of screw systems. *Acta Applicandae Mathematicae*, 32, pp. 267-296, 1993.
- [DHO71a] J. Duffy and H.Y. Habib-Olahi. A displacement analysis of spatial five - link 3r - 2c mechanisms; part 1 : On the closures of the rrcrc mechanism. *J. of Mechanisms*, 6(3), pp. 289-301), 1971.
- [DHO71b] J. Duffy and H.Y. Habib-Olahi. A displacement analysis of spatial five - link 3r - 2c mechanisms; part 2 : Analysis of the rrcrc mechanism. *J. of Mechanisms*, 6(4), pp. 463-473), 1971.
- [DHO71c] J. Duffy and H.Y. Habib-Olahi. A displacement analysis of spatial five - link 3r - 2c mechanisms; part 3 : Analysis of the rrcrc mechanism. *J. of Mechanisms*, 7(1), pp. 71-84), 1971.

- [Dim65] F.M. Dimentberg. *The screw calculus and its applications in mechanics*(English translation, Foreign technology Division). "Nauka", 1965.
- [Diz76] B. Dizioglu. Theory and practice of spatial mechanisms with special positions of axes. *Mech. and Mach Theory*, pp.139-153, 1976.
- [GA90] C. Gosselin and J. Angeles. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE. Transactions on robotics and Automation*, 6(3), pp.281-290, 1990.
- [Gha93] M. Ghazvini. Reducing the inverse kinematics of manipulators to the solution of a generalized eigenproblem. In J. Angeles, G. Hommel, and P. Kovács, editors, *Computational kinematics*, number 28 in Solid mechanics and its applications, pages 15-26. Kluwer Academic Publisher, 1993.
- [Gio91] M. Giordano. Analyse géométrique des mécanismes à l'aide d'angles d'euler duaux. *Mech. and Mach Theory*, 13, pp.403-414, 1991.
- [Gra83] F. Grashof. *Theoretische Mashinenlehre*. Leipzig, 1883.
- [Ham93] A. Hamlili. *Contribution à la modélisation dynamique des systèmes articulaires*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993.
- [Hao93] K. Hao. Condition de transversalité et application aux mécanismes. In *Actes du 11ème congrès français de mécanique*, volume 5, pages 353-356, Lille, 1993. AUM.
- [Hao95] K. Hao. Etude des mécanismes 6r spatiaux avec la condition de transversalité. In *Actes du 13ème congrès français de mécanique*, volume A apparaître, Strasbourg, 1995. AUM.
- [Her78] J.M. Hervé. Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements. *Mech. and Mach Theory*, 13, pp.437-450, 1978.
- [Her82] J.M. Hervé. Intrinsic formulation of problems of geometry and kinematics of mechanisms. *Mech. and Mach Theory*, 17, pp.315-317, 1982.
- [Her91] J.M. Hervé. Structural synthesis of "parallel" robots generating partial translation. *Fifth international conference on advanced robotics*, 1, pp.803-813(91TH0376-4), 1991.
- [Her94] J.M. Hervé. The mathematical group structure of the set of displacement. *Mech. and Mach Theory*, pp.73-81, 1994.
- [Hun67] K.H. Hunt. Screw axes and mobility in spatial mechanisms via the linear complex. *J. Mechanismes*, 2,3, 1967.
- [Kar88] A. Karger. Geometry of the motion of robot manipulator. *Manuscripta mathematica*, 62, pp. 115-126, 1988.
- [Kar89] A. Karger. Curvature properties of 6-parametric robot manipulators. *Manuscripta mathematica*, 65, pp. 311-328, 1989.
- [KN78] A. Karger and J. Novák. *Space kinematic and Lie groups*. Gordon and Breach science publisher, 1978.

- [Ler87] J. Lerbet. *Mécanique des système de solides rigides comportant des boucle fermées*. PhD thesis, Université de Paris 6, 1987.
- [Ler92] J. Lerbet. Kinematic of mechanisms to the second order. *preprint du CERMA*, 1992.
- [LL88] H. Lee and C. Liang. Displacement analysis of the general spatial 7-link 7r mechanism. *ASME J. of Mech. and Mach Theory*, 23(3), pp.219-226, 1988.
- [Man92] R. Manseur. Fast inverse kinematics of five-revolute-axis robot manipulators. *Mech. Mach. Theory*, 1992.
- [Mer90] J.P. Merlet. *Les robots parallèles*. Robotique. Hermes, France, 1990.
- [MW84] M.Hiller and C. Woernle. An unified representation of spatial displacements. *Mech. and Mach. Théory*, 19, pp.477-486, 1984.
- [Ogi68] S. Ogi. On the bennett mechanism. *Bulletin of JSME*, 1968.
- [OR40] M. Olinde-Rodrigues. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5, 1840.
- [Pap92] Y. Papegay. *Outils formels pour la modélisation en mécanique*. PhD thesis, Université de Sophia-Autipolie, Nice, 1992.
- [PYM89] A. K. Pradeep, P.J. Yoder, and R. Mukundan. On the use of dual-matrix exponentials in kinematics. *The international Journal of Robotics Research*, 8(5), 1989.
- [RMD92a] J.M. Rico Martinez and J. Duffy. Classification of screw systems - i. one and two - systems. *Mech. Mach. of Theory*, 24(7), pp. 459-470, 1992.
- [RMD92b] J.M. Rico Martinez and J. Duffy. Classification of screw systems - ii. one and two - systems. *Mech. Mach. of Theory*, 24(7), pp. 471-490, 1992.
- [Roo77] J. Rooney. A survey of representations of spatial rotation about a fixed point. *Environment and Planning B*, 1977.
- [Roo78] J. Rooney. A comparison of representations of general spatial screw displacement. *Environment and Planning B*, 1978.
- [RR90] M. Raghaven and B. Roth. Inverse kinematics of the general 6r manipulators and related linkages. *Mechanism synthesis and analysis: ASME Design Technical Conferences -21st Biennial Mechanisms Conference*, 16-19, pp. 59-65, 1990.
- [SC82] J. K. Salisbury and J. J. Craig. Res. *J. Robot.*, 1(1), pp. 4-17, 1982.
- [SD82] K. Sugimoto and J. Duffy. Application of linear algebra to screw systems. *Mech. and Mach. Theory*, 17(1), pp. 73-83, 1982.
- [SG94] J. Serf and C.M. Gosselin. Etude et représentation des lieux de singularité des manipulateurs parallèles sphériques à trois degrés de liberté avec actionneurs prismatiques. *Mech. Mach. Theory*, 29(4), 1994.

- [TM85] L.W. Tsai and A. Morgan. Solving the kinematics of the most general six and five degree of freedom manipulator by continuation methods. *ASME J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 107, pp.189-200, 1985.
- [TU92] Krzysztof Tchoń and Piotr Urban. Classification of kinematic singularities in planar robot manipulators. *System and Letters*, 1992.
- [UDH64] J.J. Uicker, J. Denavit, and R.S. Hartenberg. An alternative method for the displacement analysis of spatial mechanisms. *ASME J. of Applied Mechanics*, 33, pp.309-314, 1964.
- [Vel76] G.R. Veldkamp. On the use of dual numbers, vectors, and matrices in instantaneous, special kinematics. *Mech. and Mach. Theory*, 11, pp. 141-156, 1976.
- [Wit77] J. Wittenburg. *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. B. G. Teubner Stuttgart, 1977.
- [Woh91] M. Wohlhart. A new 6 r space. *Mech. and Mach. Theory*, 11, pp. 141-156, 1991.
- [Woh93a] M. Wohlhart. Displacement analysis of the general spherical stewart platform. *Mech. and Mach. Theory*, 29, pp.581-589(4), 1993.
- [Woh93b] M. Wohlhart. The two types of the orthogonal bricard linkage. *Mech. and Mach. Theory*, 28, pp.809-817(6), 1993.
- [Yan63] A.T. Yang. *Application of quaternion algebra and dual numbers to the analysis of spatial mechanisms*. PhD thesis, Columbia University, 1963.

## Annexe A

# Annexe du chapitre 4

On va étudier les sous algèbres de Lie engendrées dans le cas particulier  $[X_i | X_i] = 0$ , puisqu'il s'agit seulement deux cas  $r = r_\Delta = 2, 3$ , de plus les éléments outre que  $L_\Delta$  sont tous une combinaison linéaire de  $L_\Delta$ .

### A.1 $r = r_\Delta = 3$

Dans ce paragraphe,  $L_{\mathbb{E}} = L_\Delta$ , on considère d'abord, le sous-ensemble engendré du premier ordre par  $\mathcal{X}$ , on a :  $\mathfrak{C}^1 = \{ X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3] \}$ . Puisque  $\{ X_1, X_2, X_3 \}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  module sur  $\Delta$ , on peut donc exprimer les crochets de Lie par :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] &= \hat{z}_{12}^1 X_1 + \hat{z}_{12}^2 X_2 + \hat{z}_{12}^3 X_3 \\ [X_1, X_3] &= \hat{z}_{13}^1 X_1 + \hat{z}_{13}^2 X_2 + \hat{z}_{13}^3 X_3 \\ [X_2, X_3] &= \hat{z}_{23}^1 X_1 + \hat{z}_{23}^2 X_2 + \hat{z}_{23}^3 X_3 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

alors, on obtient la matrice  $N_1$  constituée par les partes duales des coordonnées par rapport à la base  $L_\Delta$  :

$$N_1 = \begin{pmatrix} z_{12}^{1\circ} & z_{12}^{2\circ} & z_{12}^{3\circ} \\ z_{13}^{1\circ} & z_{13}^{2\circ} & z_{13}^{3\circ} \\ z_{23}^{1\circ} & z_{23}^{2\circ} & z_{23}^{3\circ} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$\begin{aligned} z_{12}^{1\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_1, X_2] | [X_2, X_3])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_1, X_2 | [X_2, X_3]]) \\ z_{12}^{2\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_1, X_2] | [X_1, X_3])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_1, X_2 | [X_1, X_3]]) \\ z_{12}^{3\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_1, X_2] | [X_1, X_2])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_1, X_2 | [X_1, X_2]]) \\ z_{13}^{1\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_1, X_3] | [X_2, X_3])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_1, X_3 | [X_2, X_3]]) \\ z_{13}^{2\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_1, X_3] | [X_1, X_3])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_1, X_3 | [X_1, X_3]]) \\ z_{13}^{3\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_1, X_3] | [X_1, X_2])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_1, X_3 | [X_1, X_2]]) \\ z_{23}^{1\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_2, X_3] | [X_2, X_3])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_2, X_3 | [X_2, X_3]]) \\ z_{23}^{2\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_2, X_3] | [X_1, X_3])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_2, X_3 | [X_1, X_3]]) \\ z_{23}^{3\circ} &= \frac{1}{D} (-([X_2, X_3] | [X_1, X_2])[X_1 | [X_2, X_3]] + (X_1 | [X_2, X_3])[X_2, X_3 | [X_1, X_2]]) \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.2, on a la proposition suivante.

**Proposition A.1** Soient  $X_1, X_2$  et  $X_3 \in \mathfrak{D}$  linéairement indépendants sur  $\Delta$ , alors :

- (a)  $\text{rang } N_1 = 0 \Leftrightarrow \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 3$ .  $\mathfrak{X}$  engendre une sous-algèbre de Lie.
- (b)  $\text{rang } N_1 = 1 \Leftrightarrow \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 4$ .
- (c)  $\text{rang } N_1 = 2 \Leftrightarrow \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 5$ .  $\mathfrak{C}^2$  engendre l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ .
- (d)  $\text{rang } N_1 = 3 \Leftrightarrow \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 6$ .  $\mathfrak{C}^1$  engendre l'algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ .

Dans le cas (b) de la proposition 4.5, l'ensemble  $\mathfrak{C}^2$  est défini par :

$$\mathfrak{C}^2 = \{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3], [X_1, [X_1, X_2]], [X_1, [X_1, X_3]], [X_1, [X_2, X_3]], [X_2, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_3]], [X_2, [X_2, X_3]], [X_3, [X_1, X_2]], [X_3, [X_1, X_3]], [X_3, [X_2, X_3]]\}$$

alors, on peut exprimer les crochets de Lie par la base  $\{X_1, X_2, X_3\}$  en utilisant la formule de double crochets de Lie en remarquant  $[X_k | X_k] = 0$ , les parties duales des coordonnées par rapport à cette base constituent une matrice de dimension  $3 \times 12$  :

$$M_1 = \begin{pmatrix} z_{12}^{1o} & z_{12}^{2o} & z_{12}^{3o} \\ z_{23}^{1o} & z_{23}^{2o} & z_{23}^{3o} \\ z_{13}^{1o} & z_{13}^{2o} & z_{13}^{3o} \\ [X_1|X_2] & 0 & 0 \\ 0 & -[X_1|X_2] & 0 \\ [X_2|X_3] & -[X_1|X_3] & 0 \\ [X_1|X_3] & 0 & 0 \\ [X_1|X_3] & 0 & -[X_1|X_2] \\ [X_2|X_3] & 0 & -[X_1|X_2] \\ 0 & [X_2|X_3] & 0 \\ 0 & 0 & -[X_1|X_3] \\ 0 & 0 & -[X_2|X_3] \end{pmatrix}$$

**Corollaire A.1** Si  $\text{rang } N_1 = 1$ ,  $\text{rang } M_1 = 3$ , alors  $\mathfrak{C}^2$  engendre la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{D}$ .

**Démonstration :** D'après le théorème 4.2, il suffit de montrer lorsque  $\text{rang } N_1 \geq 1$ , on a toujours  $\text{rang } M_1 = 3$ . Puisque si  $\text{rang } N_1 \geq 1$ , il existe au moins un  $[X_i | X_j] \neq 0$ , pour  $ij = 1, 2, 3$  et  $i \neq j$ . D'où le corollaire. ■

## A.2 $r = r_\Delta = 2$

Les  $X_k$  peuvent être engendrés par  $L_\Delta$ ,  $z_k^{3o} = 0$ .

On prend  $L_{\mathbb{R}} = L_\Delta$ , si l'on considère  $\mathfrak{C}^1$  :

$$\mathfrak{C}^1 = \{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$$

il est de dimension 3 (car  $([X_1, X_2])[X_1, X_2] \neq 0$ ). En effet,  $\mathfrak{C}^1$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ .

On a aussi :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^2 &= \{X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_2]]\} \\ \mathfrak{C}^3 &= \{X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]], [X_2, [X_1, X_2]], \\ &\quad [X_1, [X_2, [X_1, X_2]]], [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]], [X_2, [X_2, [X_1, X_2]]]\} \end{aligned}$$

Puisque  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$  est une base de  $\mathfrak{D}$  sur  $\Delta$ , si l'on utilise la formule du double crochet de Lie :

$$\begin{cases} [X_1, [X_1, X_2]] & = \{X_1|X_2\}X_1 - \{X_1|X_1\}X_2 \\ [X_2, [X_1, X_2]] & = \{X_2|X_2\}X_1 - \{X_1|X_2\}X_2 \\ [X_1, [X_2, [X_1, X_2]]] & = \{X_1|X_2\}[X_1, X_2] \\ [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]] & = -\{X_1|X_1\}[X_1, X_2] \\ [X_2, [X_2, [X_1, X_2]]] & = -\{X_2|X_2\}[X_1, X_2] \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

On peut obtenir la matrice des parties duales des coefficients :

$$N_3 = \begin{pmatrix} [X_1|X_2] & 0 & 0 \\ 0 & [X_1|X_2] & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} & N_3 & \\ 0 & 0 & [X_1|X_2] \end{pmatrix}$$

**Proposition A.2** Soient  $X_1, X_2$  une liste libre maximale de  $\mathcal{X}$ , alors :

- (a)  $\text{rang } N_3 = 0 \iff \text{rang } \mathfrak{C}^1 = 3$ ,  $\mathfrak{C}^1$  engendre la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_a$ .
- (b)  $\text{rang } N_3 = 2 \iff \text{rang } \mathfrak{C}^2 = 5$ .  $\mathfrak{C}^2$  engendre l'algèbre  $\mathfrak{D}$ .





## Annexe B

# Annexe du chapitre 6

### B.1 la matrice jacobienne de quatre barres

Puisque les trois équations sont définies par :

$$\begin{cases} Q_1^i = -a_1 a_4 (U | \mathbf{R}_1 U) + a_2 a_3 (U_2 | \mathbf{R}_3 U_3) - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_4^2 - a_2^2 - a_3^2) = 0 \\ Q_2^i = ((a_1 \mathbf{R}_2^* + (a_2 + \mathbf{R}_3 a_3) + a_4 \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^*) U | U) = 0 \\ Q^p = ((a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 + a_3 \mathbf{R}_4^* + a_4) U | U) = 0 \end{cases}$$

Les éléments de la matrice jacobienne :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_1} = -a_1 a_4 (U | [\xi, \mathbf{R}_1 U]) = -a_1 a_4 \sin q_1 \\ \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_3} = a_2 a_3 (U | [\xi, \mathbf{R}_3 U]) = a_2 a_3 \sin q_3 \\ \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_1} = -a_4 (\mathbf{R}_2 U | [\xi, \mathbf{R}_1^* U]) = a_4 \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_3} = a_3 (U | [\xi, \mathbf{R}_3 U]) = a_3 \sin q_3 \\ \frac{\partial Q_2^i}{\partial q_2} = -(\mathbf{R}_2 U | [\xi, a_1 U + a_2 \mathbf{R}_1^* U]) = a_1 \sin q_2 + a_4 \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial Q^p}{\partial q_1} = (U | [\xi, a_1 \mathbf{R}_1 U + a_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 U]) = a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial Q^p}{\partial q_2} = (\mathbf{R}_1^* U | [\xi, a_2 \mathbf{R}_2 U]) = a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial Q^p}{\partial q_3} = 0 \\ \frac{\partial Q^p}{\partial q_4} = -(U | [\xi, \mathbf{R}_4^* a_3 U]) = a_3 \sin q_4 \end{cases}$$

### B.2 la matrice jacobienne de cinq barres

Puisque les trois équations sont définies par :

$$\begin{cases} Q_1^i = a_2 a_3 (U | \mathbf{R}_3 U) - a_1 a_4 (\mathbf{R}_5^* U | \mathbf{R}_1 U) - a_1 a_5 (U | \mathbf{R}_1 U) - a_4 a_5 (U | \mathbf{R}_5^* U) \\ \quad - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_3^2) = 0 \\ Q_2^p = ((\mathbf{R}_5^* a_1 + a_2 + \mathbf{R}_3 a_3 + \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1^* (\mathbf{R}_5^* a_4 + a_5)) U | U) = 0 \\ Q_3^p = ((\mathbf{R}_4^* a_3 + \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_1 (a_1 + \mathbf{R}_2 a_2) + a_4 + \mathbf{R}_5 a_5) U | U) = 0 \end{cases}$$

Les éléments de la matrice jacobienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_1} = -a_1 a_4 (U \mid [\xi, \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_1 U]) - a_1 a_5 (U \mid \mathbf{R}_1 W) \\ \quad = -a_1 a_4 \sin(q_1 + q_5) - a_1 a_5 \sin q_1 \\ \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_5} = -a_1 a_4 (\mathbf{R}_5 \mathbf{R}_1 U \mid [\xi, U]) - a_4 a_5 (\mathbf{R}_5 U \mid [\xi, U]) \\ \quad = -a_1 a_4 \sin(q_1 + q_5) - a_4 a_5 \sin q_5 \\ \frac{\partial Q_1^i}{\partial q_3} = a_2 a_3 (U \mid [\xi, \mathbf{R}_3 U]) \\ \quad = a_2 a_3 \sin q_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_1} = -a_4 (\mathbf{R}_2 U \mid [\xi, \mathbf{R}_1^* \mathbf{R}_5^* U]) - (\mathbf{R}_2 U \mid [\xi, \mathbf{R}_1^* a_5 U]) \\ \quad = a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_5) + a_5 \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_5} = -a_4 (\mathbf{R}_2 U \mid [\xi, \mathbf{R}_1^* \mathbf{R}_5^* U]) \\ \quad = a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_5) \\ \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_3} = a_3 (U \mid [\xi, \mathbf{R}_3 U]) \\ \quad = a_3 \sin q_3 \\ \frac{\partial Q_1^p}{\partial q_2} = -a_1 (\mathbf{R}_2 U \mid [\xi, U]) - (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 U \mid [\xi, \mathbf{R}_5^* a_4 U + a_5 U]) \\ \quad = a_1 \sin q_2 + a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_5) + a_5 \sin(q_1 + q_2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_2^f}{\partial q_1} = (\mathbf{R}_5^* U \mid [\xi, a_1 \mathbf{R}_1 U + a_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 U]) \\ \quad = a_1 \sin(q_1 + q_5) + a_2 \sin(q_1 + q_2 + q_5) \\ \frac{\partial Q_2^f}{\partial q_5} = (\mathbf{R}_5^* U \mid [\xi, a_1 \mathbf{R}_1 U + a_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 U + a_5 \mathbf{R}_5]) \\ \quad = a_1 \sin(q_1 + q_5) + a_2 \sin(q_1 + q_2 + q_5) + a_5 \sin q_5 \\ \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_3} = 0 \\ \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_2} = (\mathbf{R}_1^* \mathbf{R}_5^* U \mid [\xi, a_2 \mathbf{R}_2 U]) \\ \quad = a_2 \sin(q_1 + q_2 + q_5) \\ \frac{\partial Q_2^p}{\partial q_4} = -(U \mid [\xi, \mathbf{R}_4^* a_3 U]) \\ \quad = a_3 \sin q_4 \end{array} \right.$$







```

####
####
> matradjoitprim:=proc(n,CONS,matridtifrot)
> local i,j,k,A,Mp1,Mp2,phi1,phi2,phi3;
####
> for i from 1 to n do
####
> AdA[i]:=array(1..6,1..6,[]);
> A[i]:= array(1..6,1..6,[]);
> for j from 1 to 6 do
####
>   if matridtif[i,j]<>0 then
####
>     if j<=3 then
> A[i]:=array(1..6,1..6,[[1,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,-q[i]],[0,0,1,0,q[i],0],
>   [0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,1]]);
>
> phi1:=matridtifrot[i,1];phi2:=matridtifrot[i,2];phi3:=matridtifrot[i,3];
>
>     elif j>=4 then
> phi1:=matridtifrot[i,4];phi2:=matridtifrot[i,5];phi3:=matridtifrot[i,6];
>
> A[i]:=array(1..6,1..6,[[1,0,0,0,0,0],[0,cos(q[i]),sin(q[i]),0,0,0],
>   [0,-sin(q[i]),cos(q[i]),0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,cos(q[i]),
>   sin(q[i])],[0,0,0,0,-sin(q[i]),cos(q[i])]]);
>   fi;
####
>   fi;
####
> if phi2<>0 then
> Mp1:=array(1..6,1..6,[[sin(phi2),-cos(phi2),0,0,0,0],[cos(phi2),sin(phi2),
>   0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,sin(phi2),-cos(phi2),0],[0,0,0,cos(phi2),
>   sin(phi2),0],[0,0,0,0,0,1]]);
> Mp2:=array(1..6,1..6,[[cos(phi1)/sin(phi2),-cos(phi3)/sin(phi2),0,0,0,0],
>   [cos(phi3)/sin(phi2),cos(phi1)/sin(phi2),0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],
>   [0,0,0,cos(phi1)/sin(phi2),-cos(phi3)/sin(phi2),0],[0,0,0,
>   cos(phi3)/sin(phi2),cos(phi1)/sin(phi2),0],[0,0,0,0,0,1]]);
>
> AdA[i]:=multiply(Mp1,multiply(Mp2,multiply(A[i],multiply(transpose(Mp2),
>   transpose(Mp1)))));
> elif phi2=0 then
> Mp1:=array(1..6,1..6,[[sin(phi2),-cos(phi2),0,0,0,0],[cos(phi2),
>   sin(phi2), 0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,sin(phi2),-cos(phi2),0],
>   [0,0,0,cos(phi2),sin(phi2),0],[0,0,0,0,0,1]]);

```





```

> hxyvec:=proc(n,rotaxe,CONS,matridtif,matridtifrot)
>
> local i,j,k,B,l;
####
> calconfiguration(n,CONS);
####
> if rotaxe=0 then
> matradjoit(n,CONS,matridtif);
> else matradjoitprim(n,CONS,matridtifrot) fi;
####
> mutipvec(n,CONS,matridtif);
####
> read 'pbrank.m';
####
> Btoutvec:=vector(6,[0,0,0,0,0,0]);
> Bf:= vector(6,[0,0,0,0,0,0]);
> B[1]:=vector(6,[1,0,0,0,0,0]);
> B[2]:=vector(6,[0,1,0,0,0,0]);
> B[3]:=vector(6,[0,0,1,0,0,0]);
> B[4]:=vector(6,[0,0,0,1,0,0]);
> B[5]:=vector(6,[0,0,0,0,1,0]);
> B[6]:=vector(6,[0,0,0,0,0,1]);
####
> rf[0]:=0; ii:=0;jj:=0;x:=vector(n,[]);
####
> for i from 1 to n do
> Btoutvec:=concat(Btoutvec,v[i]);
> rnrat(Btoutvec,'r','d');
> rf[i]:=r;
> if rf[i]>rf[i-1] then
>
>         Bf:= concat(Bf,v[i]);ii:=ii+1;valpha[ii]:=v[i];
>         alpha[ii]:=i;
> else jj:=jj+1;vbetha[jj]:=v[i];betha[jj]:=i;
> fi;
> od;
####
> Bf:=delcols(Bf,1..1);
> lprint(Bf);print(Bf);
> lprint(rang(Bf));print(r);
> Btoutvec:=delcols(Btoutvec,1..1);
> Btotal:=Bf;
####
> for i from 1 to 6 do
> if rf[n] < 6 then
> Btotal:=concat(Btotal,B[i]);

```

```
> rnrat(Btotal,'r','d');
> if r > rf[n] then
> rf[n] := r;
> else Btotal:= delcols( Btotal,r+1..r+1);
> fi;
> fi;
> od;
####
> lprint(Btotal);print(Btotal);
####
> paracons:=vector(6,[0,0,0,0,0,0]);
####
> if jj>0 then
> paracons:=linsolve(Bf,paracons);
####
> for i from 1 to jj do
> co[i]:=linsolve(Bf,vbeta[i]);
> paracons:=concat(paracons,co[i]);
> od;
####
> paracons:=delcols(paracons,1..1);
> lprint(paracons);print(paracons);
> x:=vector(n,[]);
####
> for i from 1 to ii do
> x[alpha[i]]:=0;
> for j from 1 to jj do
> x[alpha[i]]:=x[alpha[i]]-paracons[i,j]*x[betha[j]];
> od;
> lprint('x[' ,alpha[i] ,']');print(x[alpha[i]]);
> od;
####
> fi;
####
> hxy:=vector(6,[0,0,0,0,0,0]);
> hxx:=vector(6,[0,0,0,0,0,0]);
> y:=vector(n,[]);
####
> for i from 1 to n do
> x[i];
> od;
####
> for k from 1 to n do
> for l from 1 to k do
> if k > l then
```



```
> for b from 1 to jj do
>   if l<beta[b] then
>     if alpha[a]<1 then
>       Ma[beta[b],1]:=Ma[beta[b],1]+paracons[a,b]*c[l,alpha[a]][ro];
>     else
>       fi
>   elif l>=beta[b] then
>     if alpha[a]>1 then
>       Ma[beta[b],1]:= Ma[beta[b],1]-paracons[a,b]*c[l,alpha[a]][ro]();
>     else
>       fi;
>   fi;
> od;
> od;
> od;
#####
> for l from 1 to n do
>   for b from 1 to jj do
>     lprint(Ma,ro);print(Ma[beta[b],1]);
>   od;
> od;
#####
> od;
> end:
```

## C.5 Les vecteurs du robot DELTA

### C.5.1 Un mécanisme parallèle

v[1]

$$[ 0, 0, 0, 0, 0, 1 ]$$

v[2]

$$[ 0, 0, 1, 0, 0, 0 ]$$

v[3]

$$[ -\sin(q_1) r_1, \cos(q_1) r_1, 0, 0, 0, 1 ]$$

v[4]

$$\begin{aligned} & [ -s \cos(q_1) \sin(q_3) - s \sin(q_1) \cos(q_3) - \sin(q_1) r_1, \\ & \quad s \cos(q_1) \cos(q_3) - s \sin(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_1) r_1, 0, 0, 0, 1 ] \end{aligned}$$

v[5]

$$\begin{aligned} & [ t \cos(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - t \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) \\ & \quad - t \sin(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) - t \sin(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3) \\ & \quad + \sin(q_4) \sin(q_1) q_2 \cos(q_3) + \sin(q_4) \cos(q_1) q_2 \sin(q_3) \\ & \quad + \cos(q_4) \sin(q_1) q_2 \sin(q_3) - \cos(q_4) \cos(q_1) q_2 \cos(q_3), \\ & \quad t \cos(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3) + t \cos(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) \\ & \quad + t \sin(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - t \sin(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) \\ & \quad - \cos(q_4) \sin(q_1) q_2 \cos(q_3) - \cos(q_4) \cos(q_1) q_2 \sin(q_3) \\ & \quad + \sin(q_4) \sin(q_1) q_2 \sin(q_3) - \sin(q_4) \cos(q_1) q_2 \cos(q_3), \\ & \quad - s \cos(q_4) + r_1 \sin(q_3) \sin(q_4) - r_1 \cos(q_3) \cos(q_4), \\ & \quad - \sin(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) + \sin(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) - \cos(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) \\ & \quad - \cos(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3), \\ & \quad \cos(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) - \sin(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) \\ & \quad - \sin(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3), \end{aligned} \quad 0$$

]

v[6]

[

$$\begin{aligned}
& - \sin(q_5) \, ss \, \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, \cos(q_3) + \sin(q_5) \, ss \, \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, \sin(q_3) \\
& \quad + \sin(q_5) \, ss \, \sin(q_4) \, \cos(q_1) \, \sin(q_3) + \sin(q_5) \, ss \, \sin(q_4) \, \sin(q_1) \, \cos(q_3) \\
& \quad + t \, \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, \cos(q_3) - t \, \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, \sin(q_3) \\
& \quad - t \, \sin(q_4) \, \cos(q_1) \, \sin(q_3) - t \, \sin(q_4) \, \sin(q_1) \, \cos(q_3) \\
& \quad + \sin(q_4) \, \sin(q_1) \, q_2 \, \cos(q_3) + \sin(q_4) \, \cos(q_1) \, q_2 \, \sin(q_3) \\
& \quad + \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, q_2 \, \sin(q_3) - \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, q_2 \, \cos(q_3), \\
& - \sin(q_5) \, ss \, \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, \cos(q_3) - \sin(q_5) \, ss \, \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, \sin(q_3) \\
& \quad - \sin(q_5) \, ss \, \sin(q_4) \, \cos(q_1) \, \cos(q_3) + \sin(q_5) \, ss \, \sin(q_4) \, \sin(q_1) \, \sin(q_3) \\
& \quad + t \, \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, \cos(q_3) + t \, \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, \sin(q_3) \\
& \quad + t \, \sin(q_4) \, \cos(q_1) \, \cos(q_3) - t \, \sin(q_4) \, \sin(q_1) \, \sin(q_3) \\
& \quad - \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, q_2 \, \cos(q_3) - \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, q_2 \, \sin(q_3) \\
& \quad + \sin(q_4) \, \sin(q_1) \, q_2 \, \sin(q_3) - \sin(q_4) \, \cos(q_1) \, q_2 \, \cos(q_3), \\
& \cos(q_5) \, ss - s \, \cos(q_4) + r_1 \, \sin(q_3) \, \sin(q_4) - r_1 \, \cos(q_3) \, \cos(q_4), \\
& - \sin(q_4) \, \cos(q_1) \, \cos(q_3) + \sin(q_4) \, \sin(q_1) \, \sin(q_3) - \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, \sin(q_3) \\
& \quad - \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, \cos(q_3), \\
& \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, \cos(q_3) - \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, \sin(q_3) - \sin(q_4) \, \cos(q_1) \, \sin(q_3) \\
& \quad - \sin(q_4) \, \sin(q_1) \, \cos(q_3), \tag{0}
\end{aligned}$$

v[7]

[

$$\begin{aligned}
& - rr \, \cos(q_5) \, \sin(q_6) \, \cos(q_4) \, \cos(q_1) \, \cos(q_3) \\
& \quad + rr \, \cos(q_5) \, \sin(q_6) \, \cos(q_4) \, \sin(q_1) \, \sin(q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + rr \cos(q5) \sin(q6) \sin(q4) \cos(q1) \sin(q3) \\
& + rr \cos(q5) \sin(q6) \sin(q4) \sin(q1) \cos(q3) \\
& - rr \sin(q5) \cos(q6) \cos(q4) \cos(q1) \cos(q3) \\
& + rr \sin(q5) \cos(q6) \cos(q4) \sin(q1) \sin(q3) \\
& + rr \sin(q5) \cos(q6) \sin(q4) \cos(q1) \sin(q3) \\
& + rr \sin(q5) \cos(q6) \sin(q4) \sin(q1) \cos(q3) \\
& - \sin(q5) ss \cos(q4) \cos(q1) \cos(q3) + \sin(q5) ss \cos(q4) \sin(q1) \sin(q3) \\
& + \sin(q5) ss \sin(q4) \cos(q1) \sin(q3) + \sin(q5) ss \sin(q4) \sin(q1) \cos(q3) \\
& + t \cos(q4) \cos(q1) \cos(q3) - t \cos(q4) \sin(q1) \sin(q3) \\
& - t \sin(q4) \cos(q1) \sin(q3) - t \sin(q4) \sin(q1) \cos(q3) \\
& + \sin(q4) \sin(q1) q2 \cos(q3) + \sin(q4) \cos(q1) q2 \sin(q3) \\
& + \cos(q4) \sin(q1) q2 \sin(q3) - \cos(q4) \cos(q1) q2 \cos(q3), \\
& - rr \cos(q5) \sin(q6) \cos(q4) \sin(q1) \cos(q3) \\
& - rr \cos(q5) \sin(q6) \cos(q4) \cos(q1) \sin(q3) \\
& - rr \cos(q5) \sin(q6) \sin(q4) \cos(q1) \cos(q3) \\
& + rr \cos(q5) \sin(q6) \sin(q4) \sin(q1) \sin(q3) \\
& - rr \sin(q5) \cos(q6) \cos(q4) \sin(q1) \cos(q3) \\
& - rr \sin(q5) \cos(q6) \cos(q4) \cos(q1) \sin(q3) \\
& - rr \sin(q5) \cos(q6) \sin(q4) \cos(q1) \cos(q3) \\
& + rr \sin(q5) \cos(q6) \sin(q4) \sin(q1) \sin(q3) \\
& - \sin(q5) ss \cos(q4) \sin(q1) \cos(q3) - \sin(q5) ss \cos(q4) \cos(q1) \sin(q3) \\
& - \sin(q5) ss \sin(q4) \cos(q1) \cos(q3) + \sin(q5) ss \sin(q4) \sin(q1) \sin(q3) \\
& + t \cos(q4) \sin(q1) \cos(q3) + t \cos(q4) \cos(q1) \sin(q3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t \sin(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - t \sin(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) \\
& - \cos(q_4) \sin(q_1) q_2 \cos(q_3) - \cos(q_4) \cos(q_1) q_2 \sin(q_3) \\
& + \sin(q_4) \sin(q_1) q_2 \sin(q_3) - \sin(q_4) \cos(q_1) q_2 \cos(q_3), \\
& - rr \sin(q_5) \sin(q_6) + rr \cos(q_5) \cos(q_6) + \cos(q_5) ss - s \cos(q_4) \\
& + r_1 \sin(q_3) \sin(q_4) - r_1 \cos(q_3) \cos(q_4), \\
& - \sin(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) + \sin(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) - \cos(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) \\
& - \cos(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3), \\
& \cos(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) - \sin(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) \\
& - \sin(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3), \quad 0 ]
\end{aligned}$$

v[8]

$$\begin{aligned}
& [ - \sin(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) + \sin(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) - \cos(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) \\
& - \cos(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3), \\
& \cos(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) - \sin(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) \\
& - \sin(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3), \\
& 0, 0, 0, 0 ]
\end{aligned}$$

rang(Bf)

5

Btotal

$$\begin{aligned}
& [0, 0, - \sin(q_1) r_1, - s \cos(q_1) \sin(q_3) - s \sin(q_1) \cos(q_3) - \sin(q_1) r_1, \\
& t \cos(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - t \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) \\
& - t \sin(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) - t \sin(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3) \\
& + \sin(q_4) \sin(q_1) q_2 \cos(q_3) + \sin(q_4) \cos(q_1) q_2 \sin(q_3) \\
& + \cos(q_4) \sin(q_1) q_2 \sin(q_3) - \cos(q_4) \cos(q_1) q_2 \cos(q_3), 0]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& [0, 0, \cos(q_1) r_1, s \cos(q_1) \cos(q_3) - s \sin(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_1) r_1, \\
& t \cos(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3) + t \cos(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) \\
& + t \sin(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - t \sin(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) \\
& - \cos(q_4) \sin(q_1) q_2 \cos(q_3) - \cos(q_4) \cos(q_1) q_2 \sin(q_3) \\
& + \sin(q_4) \sin(q_1) q_2 \sin(q_3) - \sin(q_4) \cos(q_1) q_2 \cos(q_3), 0]
\end{aligned}$$

$$[0, 1, 0, 0, -s \cos(q_4) + r_1 \sin(q_3) \sin(q_4) - r_1 \cos(q_3) \cos(q_4), 0]$$

$$\begin{aligned}
& [0, 0, 0, 0, -\sin(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) + \sin(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) \\
& - \cos(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) - \cos(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3), 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 0, 0, 0, \cos(q_4) \cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_3) \\
& - \sin(q_4) \cos(q_1) \sin(q_3) - \sin(q_4) \sin(q_1) \cos(q_3), 0]
\end{aligned}$$

$$[1, 0, 1, 1, 0, 0]$$

$$x[1]$$

$$\frac{\sin(q_5) ss \cos(q_4) (\cos(q_3)^2 + \sin(q_3)^2) x[6]^2}{r_1 \sin(q_3)} - \cos(q_4) (\cos(q_3) \sin(q_5) ss$$

$$+ \sin(q_3)^2 \sin(q_5) ss + \cos(q_3)^2 rr \sin(q_5) \cos(q_6)$$

$$+ \cos(q_3)^2 rr \cos(q_5) \sin(q_6) + \sin(q_3)^2 rr \cos(q_5) \sin(q_6)$$

$$+ \sin(q_3)^2 rr \sin(q_5) \cos(q_6) x[7] / (r_1 \sin(q_3))$$

$$\frac{(\cos(q_3)^2 + \sin(q_3)^2) \sin(q_4) x[8]^2}{r_1 \sin(q_3)}$$

$$x[2]$$

$$- \cos(q_5) ss x[6]$$

$$\begin{aligned}
& - (-rr \sin(q_5) \sin(q_6) + rr \cos(q_5) \cos(q_6) + \cos(q_5) ss) x[7] \\
x[3] & \\
& - \sin(q_5) ss (-s \cos(q_3) \cos(q_4) - r1 \cos(q_3) \cos(q_4) + r1 \sin(q_3) \sin(q_4) \\
& \quad - s \sin(q_3) \cos(q_4)) x[6] / (r1 s \sin(q_3)) - ( \\
& \quad - s \cos(q_3) \sin(q_5) ss \cos(q_4) - \sin(q_3) s \sin(q_5) ss \cos(q_4) \\
& \quad + r1 \sin(q_5) ss \sin(q_4) \sin(q_3) - r1 \sin(q_5) ss \cos(q_4) \cos(q_3) \\
& \quad - s \cos(q_3) rr \sin(q_5) \cos(q_6) \cos(q_4) \\
& \quad + r1 rr \cos(q_5) \sin(q_6) \sin(q_4) \sin(q_3) \\
& \quad - s \cos(q_3) rr \cos(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4) \\
& \quad - \sin(q_3) s rr \cos(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4) \\
& \quad - r1 rr \cos(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4) \cos(q_3) \\
& \quad + r1 rr \sin(q_5) \cos(q_6) \sin(q_4) \sin(q_3) \\
& \quad - r1 rr \sin(q_5) \cos(q_6) \cos(q_4) \cos(q_3) \\
& \quad - \sin(q_3) s rr \sin(q_5) \cos(q_6) \cos(q_4)) x[7] / (r1 \sin(q_3) s) + ( \\
& \quad \sin(q_4) s \cos(q_3) + \sin(q_4) r1 \cos(q_3) + \sin(q_4) s \sin(q_3) \\
& \quad + r1 \sin(q_3) \cos(q_4)) x[8] / (r1 \sin(q_3) s) \\
x[4] & \\
& (-\cos(q_4) \cos(q_3) + \sin(q_4) \sin(q_3)) \sin(q_5) ss x[6] \\
& \text{-----} + ( \\
& \quad s \sin(q_3) \\
& \quad rr \cos(q_5) \sin(q_6) \sin(q_4) \sin(q_3) - rr \sin(q_5) \cos(q_6) \cos(q_4) \cos(q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + rr \sin(q5) \cos(q6) \sin(q4) \sin(q3) - rr \cos(q5) \sin(q6) \cos(q4) \cos(q3) \\
& - \sin(q5) ss \cos(q4) \cos(q3) + \sin(q5) ss \sin(q4) \sin(q3)) x[7] / \\
& (\sin(q3) s) - \frac{(\sin(q4) \cos(q3) + \sin(q3) \cos(q4)) x[8]}{\sin(q3) s} \\
x[5] & - x[6] - x[7]
\end{aligned}$$

## Annexe D

# Programme de produit intérieur dual

```

with(linalg):

Warning: new definition for  norm
Warning: new definition for  trace

#calculer (conjuque({X| [Y,Z]}) * {U| [Y,Z]})
produitmixte:=proc(X,Y,Z,U)
theta:=array(1..3,1..3); d:=array(1..3,1..3);

####

dsin:=proc(X,Y)  sin(theta[X,Y])+ epsilon*d[X,Y] *cos(theta[X,Y] ) end;

####

conjdsin:=proc(X,Y)  sin(theta[X,Y]) -  epsilon*d[X,Y] *cos(theta[X,Y] ) end;

####

dcos:=proc(X,Y)  cos(theta[X,Y])- epsilon*d[X,Y] *sin(theta[X,Y] ) end;

####

conjdcos:=proc(X,Y)  cos(theta[X,Y]) + epsilon*d[X,Y] *sin(theta[X,Y] ) end;

####

prdmixt:=(dsin(Y,Z))**2*conjdcos(X,U) - conjdcos(X,Y)*(dcos(Y,U)
-dcos(Z,U)*dcos(Y,Z)) -conjdcos(X,Z)*(dcos(Z,U)-dcos(Y,Z)*dcos(Y,U));

####

prdmixtsimplify := simplify(prdmixt);

```

####

prdmixtsimplifyreel:=(coeff(prdmixtsimplify, epsilon, 0));

####

coeff(prdmixtsimplify, epsilon, 1);

####

\$(prdmixtsimplifyreel + epsilon\*prdmixtsimplifydual);

####

####

end;

## Annexe E

# Annexe du chapitre 7 – Calculs de mécanismes 4-barre spatiaux

```
with(linalg):

Warning: new definition for  norm
Warning: new definition for  trace

forminitiaux:=proc(n)

## n , nombre de parametre articulaire.

##definition des rotations R[i]

for i from 1 to n do

R[i]:=matrix(3,3,[]);

RR[i]:=matrix(3,3,[[cos(q[i]) , -sin(q[i]),0],[sin(q[i]), cos(q[i]),0],[0,0,1]]);

P[i]:=matrix(3,3,[[1,0,0],[0,tau[i], -sigma[i]],[0,sigma[i], tau[i]]]);

R[i]:=multiply(RR[i],P[i]);

lprint(R[i]); print(R[i]);

od;

for i from 1 to n do

xi[i] :=vector(3,[0,0,1]); p[i] := vector(3, [a[i],0,d[i]]);

lprint(p[i]); print(p[i]);

od;

end:

##Generations des equations lineaires
```

```

equilineaire:=proc(n)
for i from 1 to n do
R[i]:=matrix(3,3,[]);
RR[i]:=matrix(3,3,[[cos(q[i]) , -sin(q[i]),0],[sin(q[i]), cos(q[i]),0],[0,0,1]]);
P[i]:=matrix(3,3,[[1,0,0],[0,tau[i], -sigma[i]],[0,sigma[i], tau[i]]]);
R[i]:=multiply(RR[i],P[i]);
lprint(R[i]); print(R[i]);
od;
for i from 1 to n do
xi[i] :=vector(3,[0,0,1]); p[i] := vector(3, [a[i],0,0]);
p[i]:=add(d[i]*multiply(transpose(P[i]), xi[i]), p[i]);
lprint(p[i]); print(p[i]);
od;
M:=matrix(3,3,[[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]); pp:=vector(3,[0,0,0]);
if n > 4 then
for i from 5 to n do
M:=multiply(transpose(R[i]),M);
pp := add(pp ,multiply(M,p[i] ));
od;
else ; M:=matrix(3,3,[[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]); pp:=-p[4];
fi;
lprint(M); print(M);
## 1er equation lineaire
LL[1]:=simplify(dotprod(multiply(R[1],xi[2]),multiply(M,multiply(transpose
(P[4]),xi[4]))) - dotprod(xi[2], multiply(P[2],multiply(R[3],xi[4]))));
L[1]:=coeff(expand(LL[1]),epsilon,0); LL[1]:= coeff(expand(LL[1]),epsilon,1);
## 2eme equation lineaire

```

```

LL[2]:=simplify(dotprod(multiply(transpose(P[2]),xi[2]),multiply(R[3],p[3]))
~ dotprod(multiply(R[1],xi[2]), multiply(M,pp)));

L[2]:=coeff(expand(LL[2]),epsilon,0); LL[2]:=coeff(expand(LL[2]),epsilon,1);

## 3eme equation lineaire

LL[3] := simplify(dotprod(p[2], multiply(R[3],xi[4])) +dotprod(multiply(
R[1],p[1]), multiply(M,multiply(transpose(P[4]) ,xi[4]))));

L[3]:=coeff(expand(LL[3]),epsilon,0); LL[3]:= coeff(expand(LL[3]),epsilon,1);

### 4eme equation lineaire

LL[4] :=simplify( dotprod(multiply((R[1]),p[1]), multiply(M,pp)) + dotprod
(p[2], multiply(R[3],p[3])));

L[4]:=coeff(expand(LL[4]),epsilon,0); LL[4]:= coeff(expand(LL[4]),epsilon,1);

####les parties droites des equations r

r:=vector(4, []); UU:=vector(4, []); rr:=vector(4, []);

r[1]:=-simplify(coeff(coeff(coeff(coeff(expand(L[1]),sin(q[1]),0),cos(q[1])
,0),sin(q[3]),0),cos(q[3]),0));

rr[1]:=-simplify( coeff(coeff(coeff(coeff(expand(LL[1]),sin(q[1]),0),
cos(q[1]),0),sin(q[3]),0),cos(q[3]),0));

####

r[2] := coeff((expand(-dotprod(xi[2],multiply(P[2],p[2]))-dotprod(xi[2],
p[1])),epsilon,0)-simplify( coeff(coeff(coeff(coeff(expand(L[2]),
sin(q[1]),0),cos(q[1]),0),sin(q[3]),0),cos(q[3]),0));

rr[2] :=coeff((expand(-dotprod(xi[2],p[2])-dotprod(xi[2],p[1])),epsilon,1)
~simplify(coeff(coeff(coeff(coeff(expand(LL[2]),sin(q[1]),0),cos(q[1]),0),
sin(q[3]),0),cos(q[3]),0));

####

r[3] := coeff((expand(dotprod(pp,multiply(M,multiply(transpose(P[4]),xi[4]))
~dotprod(p[3],xi[4])),epsilon,0) ~simplify( coeff(coeff(coeff(coeff(
expand(L[3]),sin(q[1]),0),cos(q[1]),0),sin(q[3]),0),cos(q[3]),0));

rr[3]:= coeff((expand(dotprod(pp, multiply(M,xi[4]))-dotprod(p[3],xi[4])),
epsilon,1) ~simplify(coeff(coeff(coeff(coeff(expand(LL[3]),sin(q[1]),0),
cos(q[1]),0),sin(q[3]),0),cos(q[3]),0));

####

```



```

r[4]:=coeff((expand(1/2*(dotprod(pp,pp) +dotprod(p[1],p[1])-dotprod(p[2],
p[2])- dotprod(p[3],p[3]))),epsilon,0)-simplify(coeff(coeff(coeff(coeff
(expand(L[4]),sin(q[1]),0),cos(q[1]),0),sin(q[3]),0),cos(q[3]),0)));

rr[4]:=coeff((expand(1/2*(dotprod(pp,pp) +dotprod(p[1],p[1])-dotprod(p[2],
p[2])- dotprod(p[3],p[3]))),epsilon,1)-simplify(coeff(coeff(coeff(coeff
(expand(LL[4]),sin(q[1]),0),cos(q[1]),0),sin(q[3]),0),cos(q[3]),0)));

## construction de la matrice des coefficients par rapport aux sin(q[1])
## et cos(q[1]),
sin(q[3]), cos(q[3])

ML:=matrix(4,4,[]);MLL:=matrix(4,4,[]);

ML[1,1]:=simplify( coeff(expand(L[1]),sin(q[1]),1));
MLL[1,1]:=simplify( coeff(expand(LL[1]),sin(q[1]),1));
ML[1,2]:=simplify( coeff(expand(L[1]),cos(q[1]),1));
MLL[1,2]:=simplify( coeff(expand(LL[1]),cos(q[1]),1));
ML[1,3]:=simplify( coeff(expand(L[1]),sin(q[3]),1));
MLL[1,3]:=simplify( coeff(expand(LL[1]),sin(q[3]),1));
ML[1,4]:=simplify( coeff(expand(L[1]),cos(q[3]),1));
MLL[1,4]:=simplify( coeff(expand(LL[1]),cos(q[3]),1));
ML[2,1]:=simplify( coeff(expand(L[2]),sin(q[1]),1));
MLL[2,1]:=simplify( coeff(expand(LL[2]),sin(q[1]),1));
ML[2,2]:=simplify( coeff(expand(L[2]),cos(q[1]),1));
MLL[2,2]:=simplify( coeff(expand(LL[2]),cos(q[1]),1));
ML[2,3]:=simplify( coeff(expand(L[2]),sin(q[3]),1));
MLL[2,3]:=simplify( coeff(expand(LL[2]),sin(q[3]),1));
ML[2,4]:=simplify( coeff(expand(L[2]),cos(q[3]),1));
MLL[2,4]:=simplify( coeff(expand(LL[2]),cos(q[3]),1));
ML[3,1]:=simplify( coeff(expand(L[3]),sin(q[1]),1));
MLL[3,1]:=simplify( coeff(expand(LL[3]),sin(q[1]),1));
ML[3,2]:=simplify( coeff(expand(L[3]),cos(q[1]),1));
MLL[3,2]:=simplify( coeff(expand(LL[3]),cos(q[1]),1));

```

```
ML[3,3]:=simplify( coeff(expand(L[3]),sin(q[3]),1));
MLL[3,3]:=simplify( coeff(expand(LL[3]),sin(q[3]),1));
ML[3,4]:=simplify( coeff(expand(L[3]),cos(q[3]),1));
MLL[3,4]:=simplify( coeff(expand(LL[3]),cos(q[3]),1));
ML[4,1]:=simplify( coeff(expand(L[4]),sin(q[1]),1));
MLL[4,1]:=simplify( coeff(expand(LL[4]),sin(q[1]),1));
ML[4,2]:=simplify( coeff(expand(L[4]),cos(q[1]),1));
MLL[4,2]:=simplify( coeff(expand(LL[4]),cos(q[1]),1));
ML[4,3]:=simplify( coeff(expand(L[4]),sin(q[3]),1));
MLL[4,3]:=simplify( coeff(expand(LL[4]),sin(q[3]),1));
ML[4,4]:=simplify( coeff(expand(L[4]),cos(q[3]),1));
MLL[4,4]:=simplify( coeff(expand(LL[4]),cos(q[3]),1));

lprint(ML); print(ML);

lprint(r);print(r);

lprint(MLL); print(MLL);

lprint(rr);print(rr);

###

U:=linsolve(ML,r);

lprint(sin(q[1])); print(factor(simplify(U[1])));

lprint(cos(q[1])); print(factor(simplify(U[2])));

lprint(sin(q[3])); print(factor(simplify(U[3])));

lprint(cos(q[3])); print(factor(simplify(U[4])));

end:
```