



**HAL**  
open science

# Amorçage et propagation de fissures dans les milieux ductiles non locaux

Sylvia Feld-Payet

► **To cite this version:**

Sylvia Feld-Payet. Amorçage et propagation de fissures dans les milieux ductiles non locaux. Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2010. Français. NNT : 2010ENMP0035 . pastel-00583011

**HAL Id: pastel-00583011**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00583011>**

Submitted on 4 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n°432 :  
Sciences des Métiers de l'Ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École nationale supérieure des mines de Paris**

**Spécialité « Science et génie des matériaux »**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Sylvia FELD-PAYET**

le 04 novembre 2010

**Amorçage et propagation de fissures  
dans les milieux ductiles non locaux**

Directeur de thèse : **Jacques BESSON**

Co-encadrement de la thèse : **Frédéric FEYEL**

**Jury**

**M. Jacques BESSON**, Directeur de recherche CNRS, Mines ParisTech

**M. Frédéric FEYEL**, Professeur associé à l'École Polytechnique

**M. Eric LORENTZ**, Ingénieur de recherche, LaMSID, EDF R&D

**M. Nicolas MOËS**, Professeur, GeM, Ecole Centrale Nantes

**M. Ron PEERLINGS**, Associate Professor, Materials Technology Institute, TU Eindhoven Examinateur

**M. Vincent CHIARUTTINI**, Ingénieur de recherche, DMSM/CEMN, ONERA Châtillon Examinateur

**M. Michel CORET**, Maître de conférence, MSE, INSA Lyon

Directeur de thèse

Co-directeur de thèse

Rapporteur

Rapporteur

Président du jury

**MINES ParisTech**  
**Centre des Matériaux**  
B.P. 87, 91003 Evry, France

**T  
H  
È  
S  
E**



École doctorale n°432 :  
Sciences des Métiers de l'Ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École nationale supérieure des mines de Paris**

**Spécialité « Science et génie des matériaux »**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Sylvia FELD-PAYET**

le 04 novembre 2010

**Amorçage et propagation de fissures**

**dans les milieux ductiles non locaux**

Directeur de thèse : **Jacques BESSON**

Co-encadrement de la thèse : **Frédéric FEYEL**

**Jury**

**M. Jacques BESSON**, Directeur de recherche CNRS, Mines ParisTech

**M. Frédéric FEYEL**, Professeur associé à l'École Polytechnique

**M. Eric LORENTZ**, Ingénieur de recherche, LaMSID, EDF R&D

**M. Nicolas MOËS**, Professeur, GeM, Ecole Centrale Nantes

**M. Ron PEERLINGS**, Associate Professor, Materials Technology Institute, TU Eindhoven Examineur

**M. Vincent CHIARUTTINI**, Ingénieur de recherche, DMSM/CEMN, ONERA Châtillon Examineur

**M. Michel CORET**, Maître de conférence, MSE, INSA Lyon

Directeur de thèse

Co-directeur de thèse

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Président du jury

**ONERA Châtillon**

B.P. 72, 29 avenue de la Division Leclerc  
92322 Châtillon cedex, France

**MINES ParisTech**

**Centre des Matériaux**  
B.P. 87, 91003 Evry, France

**T  
H  
È  
S  
E**



Mes premiers remerciements vont aux membres du jury pour avoir participé activement à ma soutenance. Je remercie en particulier Messieurs Lorentz et Moës pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs.

Je tiens à remercier évidemment Jacques et Frédéric pour m'avoir fait confiance en me confiant ce sujet si riche. Je les remercie pour leur encadrement efficace et aussi pour leur soutien moral. Cela a été un vrai plaisir de travailler avec eux.

Je remercie Vincent pour son aide indispensable, en particulier lors de ma dernière année. J'en profite également pour étendre ces remerciements à tous les membres de l'équipe numérique à qui j'ai dû faire appel à un moment ou à un autre, et qui m'ont si gentilement aidée.

J'ai eu plaisir à cotoyer des gens formidables, aussi bien sur le plan intellectuel qu'humain, dans l'équipe CEMN. Une mention spéciale pour Guylaine qui a été un très bon professeur d'aquarelle.

Merci à mes collègues de la danse pour avoir permis à notre atelier de fonctionner jusqu'au bout.

Je remercie toutes les personnes pour leur présence ou leurs encouragements lors de ma soutenance.

Je tiens bien sûr à remercier ma famille qui m'a encouragée durant toutes ces années.

Enfin, je terminerai par remercier mon merveilleux mari, Nicolas, de m'avoir soutenue mais aussi supportée inconditionnellement.



# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Simulation de l'endommagement ductile</b>	<b>15</b>
1.1 Description du cas test . . . . .	15
1.1.1 Choix du modèle de comportement . . . . .	15
1.1.2 Choix de la structure . . . . .	17
1.2 Formulation classique . . . . .	18
1.2.1 Les équations . . . . .	18
1.2.2 Formulation faible . . . . .	19
1.3 Problème de localisation . . . . .	19
1.3.1 Description et illustration du problème . . . . .	19
1.3.2 Les limiteurs de localisation spatiaux . . . . .	21
1.3.3 Formulation à gradient implicite . . . . .	25
1.3.4 Adaptation de la loi . . . . .	26
1.3.5 Résultats intermédiaires . . . . .	27
1.4 Problème de verrouillage volumique . . . . .	28
1.4.1 Description et illustration du problème . . . . .	28
1.4.2 Solutions possibles . . . . .	30
1.4.3 Formulation mixte à trois champs . . . . .	33
1.4.4 Résultats intermédiaires . . . . .	35
1.5 Solution commune : une formulation mixte non locale . . . . .	36
1.5.1 Nouvelles équations . . . . .	36
1.5.2 Formulation faible . . . . .	37
1.5.3 Discrétisation spatiale . . . . .	37
1.5.4 Réactions élémentaires . . . . .	39
1.5.5 Résolution incrémentale . . . . .	40
1.5.6 Résultats . . . . .	43
1.6 Conclusion . . . . .	43
<b>2 Optimisation du compromis précision/coût</b>	<b>47</b>
2.1 Les méthodes d'adaptivité . . . . .	48
2.1.1 Les méthodes possibles . . . . .	48
2.1.2 Méthode retenue et outils nécessaires . . . . .	50
2.2 Estimateurs d'erreur d'approximation <i>a posteriori</i> . . . . .	50

2.2.1	Introduction . . . . .	50
2.2.2	Indicateurs d'erreur globale . . . . .	50
2.2.3	Estimateurs d'erreur locale . . . . .	56
2.2.4	Choix d'une méthode . . . . .	57
2.2.5	Estimateur basé sur la méthode ZZ2 . . . . .	58
2.2.6	Exemple d'application . . . . .	63
2.3	Critères de remaillage . . . . .	65
2.3.1	Critère global . . . . .	65
2.3.2	Critère local . . . . .	65
2.3.3	Choix d'un critère local . . . . .	72
2.4	Utilisation de la carte de taille par YAMS-GHS3D . . . . .	73
2.4.1	Calcul des valeurs aux nœuds . . . . .	73
2.4.2	Intersection des mesures . . . . .	73
2.4.3	Création d'un nouveau maillage . . . . .	73
2.4.4	Exemple d'application . . . . .	74
2.5	Transfert de champ . . . . .	75
2.5.1	Principe . . . . .	75
2.5.2	Transfert des données aux nœuds . . . . .	75
2.5.3	Transfert des données aux points de Gauss . . . . .	76
2.5.4	Choix d'un opérateur de transfert . . . . .	78
2.5.5	Exemple d'application pour le transfert . . . . .	79
2.5.6	Rééquilibrage . . . . .	81
2.6	Mise en œuvre de la procédure . . . . .	82
2.6.1	Evaluation de l'impact du transfert de champs . . . . .	82
2.6.2	Tests sur une éprouvette à deux encoches . . . . .	84
2.7	Conclusion . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Amorçage et propagation de fissures</b>	<b>91</b>
3.1	Amorçage et propagation dans la littérature . . . . .	91
3.1.1	Modélisation des discontinuités . . . . .	91
3.1.2	Critères pour la propagation . . . . .	93
3.2	Approche proposée . . . . .	94
3.2.1	Positionnement de cette étude . . . . .	94
3.2.2	Discretisation simplifiée du chemin de fissure . . . . .	95
3.2.3	Critère pour l'orientation . . . . .	97
3.2.4	Présentation de l'algorithme . . . . .	101
3.3	Amorçage : construction d'un front initial . . . . .	104
3.3.1	Principe . . . . .	104
3.3.2	Distinction des zones d'influence . . . . .	104
3.3.3	Détermination d'un point du front initial . . . . .	105
3.3.4	Recherche de plusieurs candidats . . . . .	107
3.3.5	Choix du front initial . . . . .	108
3.4	Construction de la géométrie de la fissure . . . . .	109
3.4.1	Mise à jour du front . . . . .	109
3.4.2	Mise en place des plans d'évaluation . . . . .	110
3.4.3	Tri des angles . . . . .	110
3.4.4	Sélection des directions . . . . .	111

3.4.5	Validation . . . . .	111
3.4.6	Moyenne aux nœuds . . . . .	113
3.5	Insertion . . . . .	113
3.5.1	Quand? . . . . .	113
3.5.2	Critère d'insertion . . . . .	113
3.5.3	Intersection de maillages . . . . .	113
3.5.4	Création d'une nouvelle carte de taille de maille . . . . .	114
3.5.5	Duplication des nœuds des lèvres . . . . .	114
3.5.6	Transfert des champs . . . . .	115
3.5.7	Détection de nouveaux front après remaillage . . . . .	115
3.6	Description du critère CSGEL . . . . .	116
3.6.1	Division du plan et moyennage des données . . . . .	116
3.6.2	Élimination des données non significatives . . . . .	117
3.6.3	Construction de points d'évaluation . . . . .	117
3.6.4	Choix des rayons d'évaluation . . . . .	118
3.6.5	Multiplication des plans . . . . .	119
3.6.6	Interpolation des données . . . . .	120
3.6.7	De l'importance du maillage auxiliaire . . . . .	120
3.7	Mise en œuvre . . . . .	122
3.7.1	Choix des paramètres . . . . .	122
3.7.2	En dimension deux . . . . .	123
3.7.3	En dimension trois . . . . .	128
3.8	Conclusion et perspectives . . . . .	135
<b>Conclusion</b>		<b>136</b>
<b>Annexes</b>		<b>140</b>
<b>A Intégration temporelle des équations du comportement</b>		<b>141</b>
A.1	Principe . . . . .	142
A.2	Loi élasto-plastique endommageable . . . . .	142
A.3	Loi élasto-visco-plastique endommageable . . . . .	143
<b>B Extensions possibles pour le maillage auxiliaire</b>		<b>147</b>
B.1	Construction d'un front courbe . . . . .	148
<b>Bibliographie</b>		<b>149</b>



# Notations

$\bullet$	vecteur
$\bullet$	tenseur d'ordre 2
$\overset{\sim}{\bullet}$	tenseur d'ordre 4
$:$	produit contracté de tenseurs
$\nabla$	opérateur gradient
$\nabla^{(s)}$	partie symétrique de l'opérateur gradient
$(\bullet)^T$	transposée
$Tr(\bullet)$	trace
$\underline{\mathbf{u}}$	vecteur déplacement
$\overset{\sim}{\varepsilon}$	tenseur des déformations linéarisées
$\overset{\sim}{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\mathbf{I}$	tenseur identité d'ordre 2
$\overset{\sim}{\mathbf{C}}$	tenseur (d'ordre 4) des rigidités élastiques
$\underline{\mathbf{b}}_v$	vecteur des forces volumiques
$\underline{\mathcal{T}}_b$	effort surfacique imposé
$\underline{\mathbf{u}}_b$	déplacement imposé
$\underline{\mathbf{n}}$	normale extérieure
$\Omega$	corps solide
$\partial_t \Omega$	frontière de $\Omega$ où les efforts sont imposés
$\partial_u \Omega$	frontière de $\Omega$ où les déplacements sont imposés
$\Gamma_{int}$	ensemble de toutes les interfaces séparant les sous-domaines de $\Omega$



# Introduction

## Contexte

La plupart des structures exposées à des chargements sévères ou répétés finissent par se dégrader. Lors de la phase de conception et de dimensionnement, l'un des enjeux consiste à permettre à ces structures de résister à toutes les sollicitations auxquelles elles sont soumises, tout en augmentant leur efficacité (réduction de poids, usage à chargement ou température supérieur,...). Mais il ne suffit pas de s'assurer que le domaine de travail nominal de ces structures reste en deçà du chargement maximal admissible, et donc de l'apparition de phénomènes d'endommagement prononcés. Il est également nécessaire de pouvoir se prononcer sur la tenue de la structure sous chargement accidentel voire catastrophique.

Il est possible de caractériser la rupture par l'importance des déformations irréversibles qui l'ont précédée et donc la quantité d'énergie absorbée. La rupture peut être qualifiée de ductile lorsqu'elle est associée à des déformations plastiques importantes ou fragile lorsqu'il n'y a que peu de déformations résiduelles. Par exemple, la plupart des métaux s'endommagent à température ambiante de manière ductile, alors que le verre a lui un comportement fragile. Dans le domaine de l'ingénierie, un comportement ductile est souvent préférable, car il permet à la structure de subir d'importantes déformations, correspondant à une quantité d'énergie absorbée importante, avant de céder. Il est ainsi possible d'anticiper la ruine complète de la structure. Il est également envisageable de modifier le comportement d'un matériau à l'origine fragile pour le rendre plus résistant, par exemple en renforçant un béton à l'aide de fibres.

Au niveau microscopique, la rupture ductile est due à la nucléation, la croissance et la coalescence de micro-cavités. Ces micro-vides peuvent être causés par une décohésion au niveau d'une interface ou par la rupture d'une inclusion. Leur croissance est favorisée par un état de contrainte sphérique positive. Lorsque les ligaments entre les cavités cèdent, les micro-fissures coalescent pour former une macro-fissure.

## Les approches pour la modélisation numérique de la rupture

La simulation numérique du processus de rupture constitue un outil intéressant pour prédire le comportement de la structure, en particulier dans les situations industrielles où il n'est pas envisageable de procéder par expérimentation à l'échelle réelle. C'est par exemple le cas pour la rupture ductile de pipelines, où les fissures peuvent se propager sur plusieurs centaines de mètres, ou de la déchirure ductile d'un fuselage d'avion. C'est un domaine de recherche très actif depuis 50 ans.

## Les approches globales

La propagation de fissures a d'abord été abordée par des approches dites *globales*. Ce premier type d'approche repose essentiellement sur le développement de la mécanique linéaire de la rupture, utilisant le taux d'énergie libérée par accroissement de la fissure  $G$ . C'est une approche qui peut convenir lorsque la taille de la zone plastique est très petite par rapport à la taille de la structure car, dans ce cas, le comportement global de la structure reste linéaire. Par contre, dans le cas où la zone plastique est relativement étendue, le comportement global devient non linéaire, et une modélisation par la mécanique non linéaire de la rupture, utilisant l'intégrale de Rice (voir [213]) par exemple, se révèle plus appropriée. L'approche globale est extrêmement utile et maintenant très répandue dans le cadre d'applications industrielles. Cependant, elle n'est pas entièrement satisfaisante car elle dépend fortement de la géométrie de l'éprouvette et ne s'appuie pas sur l'état de dégradation de la microstructure.

## Les approches locales

C'est ce qui a motivé le développement d'approches dites *locales*, fondées elles sur une description plus physique de la rupture (voir les travaux de Pineau [208], [209] et Berdin et al. [38]). Les phénomènes non linéaires qui peuvent se produire lors du processus de rupture ductile sont alors modélisés sur une surface (modèles de zones cohésives) ou dans un volume (mécanique de l'endommagement continu). Dans le cas de zones d'endommagement étendues, la mécanique de l'endommagement continu semble la méthode la plus appropriée. Des modèles micromécaniques ou des modèles phénoménologiques sont alors utilisés pour fournir une description continue de l'endommagement.

Les modèles micromécaniques reposent sur une analyse de la microstructure et proposent des équations semi-empiriques pour décrire les trois étapes principales de l'endommagement ductile, nucléation, croissance et coalescence des cavités (Mc Clintock [61], Rice et Tracey [214], Gurson [118], Tvergaard et Needleman [247]). Les modèles phénoménologiques reposent quant à eux sur des considérations macroscopiques. Dans le cas le plus simple, l'endommagement est représenté par une variable scalaire variant entre 0 et 1, permettant de mesurer la perte de rigidité du matériau au travers d'un volume élémentaire représentatif (le matériau étant sain pour un endommagement nul). Ils s'appuient sur les concepts introduits par Kachanov [134] puis Rabotnov [211]. Les références suivantes en donnent des représentations relativement exhaustives et générales d'après [39] : [128], [54], [176], [139], [153], [55], [152] et [230]. L'avantage de ce type de modèle est qu'il s'inscrit dans un cadre thermodynamique bien défini (voir [109]), du moins pour la nucléation. En revanche, seul le modèle de Rousselier ([217], [218]) et les modèles micromécaniques permettent de représenter la croissance de vides en prenant en compte le changement de volume relatif aux déformations plastiques.

L'identification et la détermination des paramètres micromécaniques utilisés par ces modèles nécessitent alors de coupler expérimentation et simulation numérique. Au niveau expérimental, le développement de la tomographie 3D par rayons X (voir les travaux de Maire et al. [161] et Morgeneyer et al. [173]) permet d'effectuer des mesures au niveau microstructural portant notamment sur la forme des micro-cavités, leur fraction volumique, ... Pour les modèles phénoménologiques, il est également intéressant de mesurer la variation du comportement mécanique, par exemple en termes de module d'élasticité apparent ([151]).

Cependant, ce type de description continue n'est valable que jusqu'à amorçage de la fissure. À ce moment, pour un modèle continu, la rupture se traduit par le fait que pour toute

déformation la contrainte doit être nulle. Cela signifie que des déformations importantes, associées à des déplacements continus, peuvent apparaître là où expérimentalement une fissure est observée avec des déplacements discontinus au niveau des lèvres. Cette modélisation n'est donc plus satisfaisante du point de vue cinématique.

### Transition endommagement-rupture

Les modèles continus et discontinus ne sont donc pas suffisants pour décrire entièrement les processus d'endommagement, d'initiation et de propagation de fissure. Les limites de ces deux approches peuvent être surmontées en les combinant. Autrement dit, le milieu doit d'abord être modélisé comme un milieu continu dans lequel l'endommagement est décrit à l'échelle macroscopique comme le résultat de la dégradation physique du matériau à l'échelle microscopique. Puis, dans un second temps, une discontinuité représentant une fissure issue de la coalescence des micro-vides doit être introduite.

Il n'existe à ce jour que peu de travaux effectués dans ce sens. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'avant de pouvoir associer les deux descriptions, il faut déjà être en mesure de surmonter les problèmes numériques associés à la modélisation de l'endommagement ductile avec la mécanique de l'endommagement continue. Ces problèmes sont désormais bien connus et un certain nombre de solutions ont déjà été proposées. Par exemple, de nouveaux modèles introduisant une longueur interne caractéristique ont été développés pour résoudre le problème de dépendance au maillage. Ce dernier résulte de l'utilisation de la méthode des éléments finis avec des modèles d'endommagement adoucissants classiques, c'est-à-dire respectant :

- le principe de l'état local, qui considère que le comportement en un point  $M$  ne dépend que des variables définies en ce point, et non pas du voisinage ;
- le principe de simplicité matérielle, qui suppose que seul intervient dans les équations de comportement le premier gradient de la transformation ;
- le principe d'objectivité, qui traduit l'indépendance de la loi de comportement vis-à-vis de l'observateur, et qui implique que le temps ne peut pas intervenir explicitement dans les relations de comportement.

Ce problème est illustré sur la figure 1, où la dépendance au maillage se traduit par l'obtention de réponses force-CMOD (Crack Mouth Opening Displacement) différentes suivant la taille de maille choisie pour la simulation numérique. Les nouveaux modèles à longueur interne développés pour résoudre ce problème ne respectent que le principe d'objectivité, et pas les deux premiers points.

Par ailleurs, en présence de fort taux de plasticité cumulée, la solution numérique présente des problèmes de verrouillage volumique. Toutes ces difficultés, qui sont détaillées par la suite, ne concernent encore que la phase de description de l'endommagement.

Après avoir résolu ces problèmes, se pose la question de la modélisation de la discontinuité. Récemment, des travaux proposant une approche continue-discontinue avec la méthode des éléments finis étendue (XFEM) ont été proposés par Wells et al. [252], Patzák et Jirásek [195], Simone et al. [229], Comi et al. [62] et Areias et al. [8], essentiellement pour des milieux quasi-fragiles. C'est une méthode très prometteuse dans le cadre des petites déformations. Cependant, pour de grandes déformations, elle doit être combinée à une procédure d'adaptivité de maillage afin d'éviter que les éléments ne deviennent trop aplatis. C'est ce qui a poussé Mediavilla [165] à préférer utiliser directement une méthode de remaillage.

Par ailleurs, quelle que soit la méthode choisie, il est nécessaire de choisir (ou de formuler) un critère robuste et performant pour orienter et faire propager la fissure.

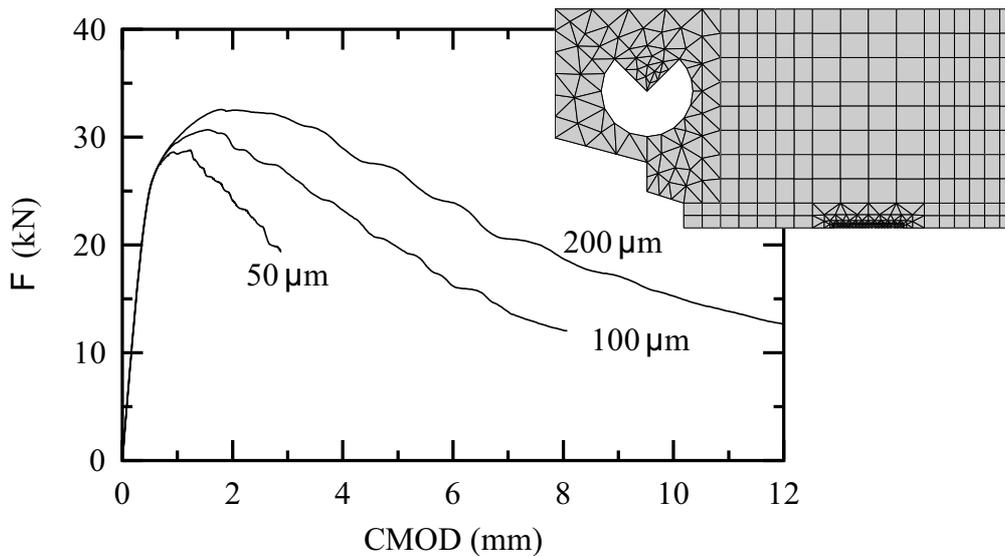


FIG. 1 – Simulations d’une éprouvette CT pour différentes tailles de maille : courbes Force-CMOD issues de [164]

Enfin il y a le problème très délicat de la conservation de l’énergie entre les états endommagés et fissurés.

Il reste donc de nombreuses pistes à explorer dans le domaine de la rupture ductile, tant au niveau du choix de la méthode (éléments finis, sans maillage,...), ou du type de loi (phénoménologique ou micromécanique), ou encore de la modélisation des discontinuités,...

## Cadre de l’étude

Cette étude s’inscrit dans la continuité de la thèse ONERA/École des Mines de Germain [108]. Cette thèse avait porté sur la modélisation de l’endommagement dans les composites et notamment sur le problème de la dépendance au maillage. La solution retenue était alors un modèle à gradient implicite proposé par Peerlings [199]. Le cas de la rupture ductile n’avait donc pas été abordé.

Par ailleurs, cette étude a été lancée parallèlement à la thèse EDF/École des Mines de Cuvilliez portant sur la conservation de l’énergie entre les états endommagés et les états fissurés grâce à l’insertion de zones cohésives. Cependant, la question de la détermination du lieu d’insertion de ces zones cohésives n’entre pas dans le cadre de cette thèse.

La modélisation de la rupture ductile, de l’endommagement à la propagation de fissures, en est donc à ces premiers stades à l’École des Mines de Paris, et en particulier au Centre Des Matériaux.

En revanche, c’est un sujet auquel s’intéresse depuis un plus longtemps l’Université de Technologie d’Eindhoven, aux Pays-Bas. Après les thèses de Brokken [47] et Mediavilla [165] sur la simulation de la rupture ductile en dimension deux en grandes déformations, la thèse de Javani vise actuellement à étendre la méthodologie à la dimension trois. Cette thèse a pu bénéficier de leur expérience, notamment au travers d’échanges lors de la dernière phase de développement.

## Objectifs

C'est dans ce contexte que s'inscrit cette étude. Elle vise à développer une méthodologie permettant de simuler l'endommagement de structures métalliques, suivi de l'amorçage et de la propagation de fissures. Elle fait le lien entre la thèse de Germain et celle de Cuvilliez. En effet, la méthodologie développée pour les matériaux endommageables ductiles doit permettre de déterminer le chemin de fissure.

Elle s'inscrit dans un projet à plus long terme visant à simuler l'amorçage et la propagation de fissures dans des structures industrielles de grande taille, reposant sur une description liée à la physique du processus de dégradation.

## Démarche

Cette méthodologie doit être implantée dans le code de calcul *Zset*, qui est un code éléments finis initialement conçu au Centre des Matériaux de l'École des Mines de Paris en 1981, et au développement duquel l'ONERA participe depuis 1995. La méthodologie est donc développée dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Cette thèse reprenant la suite de celle de Germain, pour laquelle un modèle phénoménologique de l'endommagement en petites déformations avait été choisi, le même type de modèle va être utilisé, mais cette fois en ajoutant la composante ductile.

La démarche globale pour chaque étape a consisté dans un premier temps à identifier et à évaluer les différentes solutions disponibles dans la littérature. Les principales solutions ont à chaque fois été présentées et comparées. Suivant l'efficacité, la robustesse et la faisabilité en matière d'implantation dans le code des différentes solutions trouvées, un choix a été effectué parmi les méthodes présentées ou, en l'absence de solution adaptée, une nouvelle stratégie a été proposée. La méthode retenue a enfin été mise en application sur un cas test suffisamment représentatif, choisi dès le départ, afin de valider les choix effectués. La démarche se résume alors à procéder étape par étape jusqu'à voir apparaître et se propager une fissure sur ce cas test en dimensions deux et trois.

La première étape consiste à pouvoir décrire correctement l'évolution de l'endommagement jusqu'à l'amorçage de la fissure, par un modèle continu. Or, l'utilisation de modèles de comportement ductiles endommageables classiques avec la méthode des éléments finis conduit à de nombreux problèmes, maintenant bien connus. Ainsi, la solution numérique obtenue avec un modèle classique, où la description du matériau adoucissant est locale, montre une dépendance pathologique à la finesse et à l'orientation du maillage. De plus l'important taux de plasticité atteint durant le calcul conduit à d'autres problèmes numériques comme le verrouillage volumique. Ces problèmes devaient dans un premier temps être résolus. Les différentes solutions proposées pour résoudre chacun de ces problèmes ont alors été décrites. Puis un nouvel élément construit spécifiquement pour résoudre ces problèmes de localisation et de verrouillage volumique liés à la simulation de l'endommagement ductile a été proposé (Chapitre 1, [94]).

L'étape suivante a consisté à améliorer la qualité du calcul. Pour cela, une procédure d'adaptivité de maillage a été mise en place afin de permettre d'atteindre le niveau de qualité désiré par l'utilisateur, tout en minimisant les coûts de calculs. Afin d'automatiser la procédure, un estimateur d'erreur a été sélectionné après étude des différentes options disponibles dans la littérature. La même démarche a été employée pour choisir un critère pour fixer la taille de maille et une méthode de transfert (Chapitre 2). La stratégie d'adaptivité a finalement

été mise en œuvre sur le cas test et les résultats ont été comparés à ceux obtenus pour des maillages uniformes.

Enfin, une fois toute la phase d'endommagement décrite avec précision, une stratégie d'amorçage et de propagation de fissure a été mise en place. Pour la modélisation de la discontinuité, la piste de l'insertion par remaillage a été immédiatement retenue, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord cette méthode offrait la possibilité de "déraffiner" le maillage dans les zones à faible énergie déjà traversées par une fissure, permettant ainsi d'envisager la simulation de structures de grande taille. De plus, un algorithme de découpe performant était déjà implanté dans le code de calcul *Zset* et une procédure d'adaptivité de maillage avait déjà été mise en place. Cette solution était donc la meilleure par rapport aux coûts de calculs engendrés et au temps imparti. Ce choix signifiait qu'il était nécessaire de construire une discrétisation éléments finis de la fissure. Pour cela, un nouveau critère reposant sur le gradient de l'endommagement lissé a été conçu dans le but de pouvoir orienter la géométrie de la fissure. Toute cette phase a pu bénéficier de discussions avec Marc Geers, Ron Peerlings et Hamid Javani de l'Université de Technologie d'Eindhoven qui envisageaient également d'utiliser une méthode par remaillage, mais avec des outils différents. Par la suite, l'extension de la méthode en dimension trois a révélé la nécessité de recourir à un maillage auxiliaire représentant la fissure. Une nouvelle stratégie combinant ce maillage auxiliaire de la fissure et un critère reposant sur le gradient de l'endommagement lissé a donc été testée et validée pour les petites déformations sur le cas test choisi en dimensions deux et trois (Chapitre 3).

# Chapitre 1

## Simulation de l'endommagement ductile

Pour pouvoir développer une méthode permettant de faire apparaître une fissure au sein d'une zone endommagée, il est tout d'abord nécessaire de décrire correctement l'évolution de l'endommagement jusqu'à l'amorçage de la fissure, par un modèle continu. Or, l'utilisation de modèles de comportement classiques (c'est-à-dire basés sur les principes de l'état local, de simplicité matérielle et d'objectivité) avec la méthode des éléments finis conduit à de nombreux problèmes maintenant bien connus. L'objet de ce chapitre est l'élaboration d'un nouvel élément construit spécifiquement pour résoudre ces problèmes de localisation et de verrouillage volumique liés à la simulation de l'endommagement ductile. Pour cela, chacun de ces phénomènes est mis en évidence sur un cas test simple. Puis, une formulation possible pour résoudre le problème considéré est sélectionnée et mise à l'épreuve. Enfin, une nouvelle formulation réunissant les caractéristiques principales de chacune des formulations retenues est proposée et ses performances sont testées.

### 1.1 Description du cas test

#### 1.1.1 Choix du modèle de comportement

L'objectif de cette thèse étant de développer des outils utilisables pour une structure quelconque avec une loi adaptée, moyennant éventuellement quelques modifications, il est nécessaire de se placer dans un cadre aussi général que possible. Un modèle de comportement simple mais représentatif est donc choisi pour pouvoir analyser et visualiser les principaux problèmes associés à l'endommagement ductile. Dans un premier temps, il semble judicieux de se restreindre au cas des petites déformations pour limiter la complexité du problème. Une loi élasto-plastique endommageable classique (cf [39]) inspirée de [85] a donc été choisie.

Dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, les déformations totales  $\xi$  peuvent être décomposées en une partie élastique  $\xi^e$  et une partie plastique  $\xi^p$  :

$$\xi = \xi^e + \xi^p \quad (1.1)$$

avec la loi d'élasticité de Hooke :

$$\sigma = \underset{\sim}{\mathbf{C}} : \xi^e \quad (1.2)$$

On suppose que l'état d'un volume élémentaire est complètement décrit par sa déformation totale, sa déformation plastique et par une variable d'écouissage notée  $k$ , qui est ici égale à la plasticité cumulée notée  $p$  :

$$k = p = \int_{\tau=0}^t \dot{p}(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\xi}^p : \dot{\xi}^p} \quad (1.3)$$

Pour les matériaux ductiles, tels que les métaux, les déformations inélastiques résultent généralement d'un glissement plastique le long de plans cristallographiques. Il est donc courant de considérer, qu'au début, l'écoulement est indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes (ou pression). Ainsi la fonction de charge  $F(\underline{\sigma}, k)$  ne fait appel qu'au second invariant déviatorique  $J2$  avec :

$$\sqrt{J2} = \sigma_e(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^{dev} : \underline{\sigma}^{dev} \quad (1.4)$$

Afin de refléter l'impact que les changements microstructuraux dus à l'écoulement plastique peuvent avoir au niveau de l'échelle macroscopique, un écouissage isotrope est intégré au modèle. Dans le cas élasto-plastique, la fonction de charge s'écrirait alors

$$F(\underline{\sigma}, k) = \sigma_e(\underline{\sigma}) - \sigma_y(k) = \sigma_e(\underline{\sigma}) - \sigma_y(p) \quad (1.5)$$

avec  $\sigma_y(k)$  la charge critique actuelle définie ici comme une fonction affine en fonction de la variable d'écouissage :

$$\sigma_y(k) = \sigma_{y0} + hk = \sigma_{y0} + hp \quad (1.6)$$

où  $\sigma_{y0}$  est la charge critique initiale et  $h > 0$  est le module d'écouissage. Dans le but de coupler endommagement et plasticité, un coefficient supplémentaire dépendant de l'endommagement est ajouté à la formulation de la fonction de charge :

$$F(\underline{\sigma}, k) = \sigma_e(\underline{\sigma}) - [1 - \omega_p(k)]\sigma_y(k) = \sigma_e(\underline{\sigma}) - [1 - \omega_p(k)]\sigma_y(p) \quad (1.7)$$

où  $\omega_p(k)$  désigne l'endommagement, qui est gouverné par la plasticité, avec :

$$\omega_p(k) = \begin{cases} \frac{k}{k^c} = \frac{p}{k^c} & \text{si } k \leq k^c \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.8)$$

Par ailleurs, la plupart des métaux ayant un comportement qui peut être bien décrit par un écoulement associé, on pose :

$$\dot{\xi}^p = \dot{\lambda} \underline{\mathbf{n}} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda} > 0 \quad (1.9)$$

où  $\underline{\mathbf{n}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}$  est la direction normale à la surface de charge et  $\lambda$  est le multiplicateur plastique.

Ainsi :

$$\dot{\lambda} = \dot{p} = \dot{k} \quad (1.10)$$

Dans le cas de mécanismes indépendants du temps, le multiplicateur  $\dot{\lambda}$  est déterminé par la condition de cohérence sur la plasticité qui s'écrit

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \dot{F} = 0 \quad (1.11)$$

comme décrit en annexe A. Dans le texte, le point au dessus d'un symbole désigne la dérivée partielle par rapport au temps ; cependant il est à noter que la théorie est indépendante de la vitesse. Le temps n'est ici qu'un paramètre formel qui contrôle le processus de chargement, et n'a pas nécessairement le sens d'un vrai paramètre physique.

### 1.1.2 Choix de la structure

Dans la mesure où l'écoulement plastique est isochore et où l'évolution de l'endommagement ne dépend que de la plasticité cumulée, ce modèle convient plutôt aux sollicitations en cisaillement. Pour des applications plus générales, il faudrait faire intervenir la partie sphérique des contraintes dans le mécanisme d'endommagement. Cependant, à ce stade, il n'est pas nécessaire de faire appel à un modèle plus complexe pour observer les problèmes liés à l'endommagement ductile. Il suffit de prendre un cas test adapté où les phénomènes de cisaillement sont dominants, avec peu de croissance de vides. La sollicitation en traction de l'éprouvette à deux encoches utilisée dans la thèse de Mediavilla [165] est donc retenue. Les dimensions et conditions limites sont représentées figure 1.1 : la structure est sollicitée en traction sur le bord supérieur et le bord gauche, tandis que le bord droit et le bord inférieur sont encastrés. Les caractéristiques matériaux reportées dans le Tableau 1.1 sont choisies pour rester dans le cadre des petites déformations. Le comportement est alors localement adoucissant comme le montre la figure 1.2.

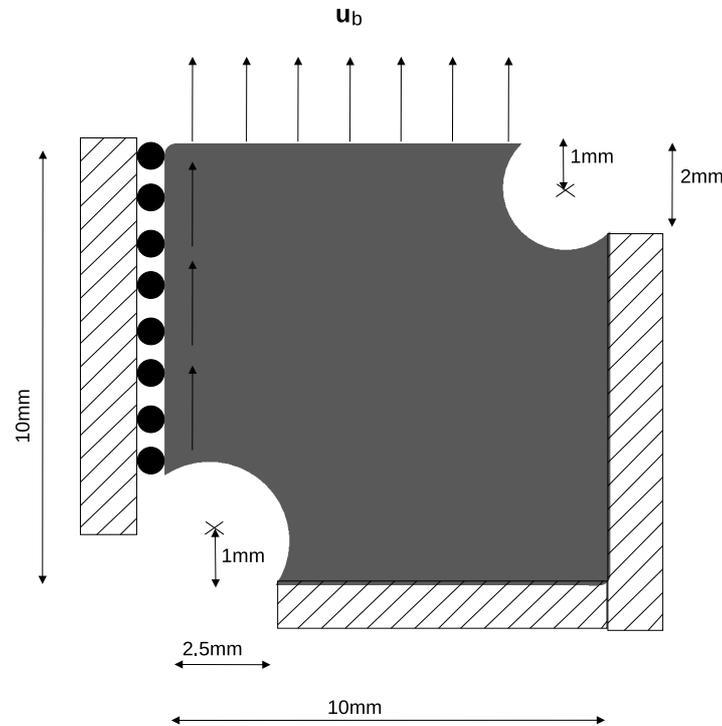


FIG. 1.1 – Géométrie de l'éprouvette

Charge critique initiale	$\sigma_{y0}$	443 MPa
Module d'écrouissage	$h$	300 MPa
Constante de la loi d'endommagement	$k^c$	0.1
Module de Young	$E$	183 GPa
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3

TAB. 1.1 – Propriétés matériau

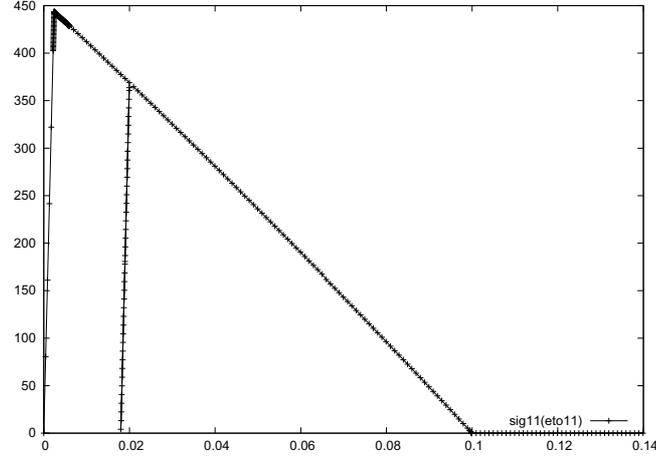


FIG. 1.2 – Évolution de la contrainte (MPa) en fonction de la déformation en un point de Gauss

## 1.2 Formulation classique

### 1.2.1 Les équations

Pour une formulation classique, les équations du comportement en petites déformations, en statique sont les suivantes :

- les équations d'équilibre intérieur

$$\nabla \underline{\sigma} + \underline{\mathbf{b}}_v = \underline{\mathbf{0}} \quad (1.12)$$

- les conditions aux limites

$$\text{sur } \partial_t \Omega \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\tau}_b, \quad \text{et sur } \partial_u \Omega \quad \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_b \quad \text{avec } \partial_t \Omega \cap \partial_u \Omega = \emptyset \quad (1.13)$$

- les conditions de continuité intérieure

$$\text{sur } \Gamma_{int} \quad [\underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}}] = \underline{\mathbf{0}} \quad (1.14)$$

- la propriété de symétrie du tenseur des contraintes

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T \quad (1.15)$$

- la relation de compatibilité entre déformations et déplacements

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\mathbf{u}} + (\nabla \underline{\mathbf{u}})^T) = \nabla^{(s)} \underline{\mathbf{u}} \quad (1.16)$$

- les équations du comportement, qui relient le tenseur des contraintes au tenseur des déformations et à des variables internes, notées  $\gamma$ ; cette relation, qui peut être non linéaire, peut s'écrire sous la forme générale :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon}, \gamma) \quad (1.17)$$

### 1.2.2 Formulation faible

Le processus de résolution en déplacements associé à la méthode des éléments finis consiste à chercher une approximation des déplacements exacts qui vérifie les conditions limites en déplacement (autrement dit, qui est cinématiquement admissible). Toutefois le champ des contraintes correspondant établi à partir de la relation de comportement n'est pas nécessairement statiquement admissible. Le problème revient donc à trouver le champ des déplacements permettant de satisfaire la forme faible de l'équilibre et des conditions limites en effort. Pour l'obtenir, le principe des travaux virtuels ou la méthode de Galerkin peuvent être utilisés indifféremment. Les deux approches conduisent à la même formulation faible des équations (1.12) à (1.17) (cf chapitre 2 de [257]) :

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\delta \underline{\mathbf{u}}) : \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{b}}_v d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}_b dS = 0, \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \text{ admissible} \quad (1.18)$$

Cette forme faible des équations est valable même si la relation contrainte-déformation est non linéaire (ou encore si elle est formulée entre le taux de contrainte et le taux de déformation).

## 1.3 Problème de localisation

### 1.3.1 Description et illustration du problème

#### Du point de vue numérique

Expérimentalement, lorsqu'une structure est sollicitée jusqu'à rupture, il est courant d'observer, avant rupture du matériau, la concentration des déformations dans une zone de faible épaisseur, dépendant du matériau, de la géométrie et de la sollicitation.

Or, la solution numérique obtenue par une analyse éléments finis avec un modèle classique, où la description du matériau adoucissant est locale, montre une dépendance pathologique à la finesse et à l'orientation du maillage (cf [207]).

Afin d'illustrer ce phénomène, le même calcul est effectué avec un modèle classique présenté ci-dessus sur trois maillages dont les tailles moyennes des éléments sont respectivement 0.1 mm, 0.2 mm et 0.3 mm. Les calculs ont été effectués avec le code *Zset* (cf [40]) en faisant l'hypothèse de déformations planes avec des triangles à 6 nœuds. Le schéma d'intégration spatial est basé de manière classique sur trois points de Gauss. Les résultats sont montrés aux points d'intégration sans aucune interpolation graphique. Les calculs présentant des difficultés de convergence à des moments différents (cf figure 1.5), les profils d'endommagement correspondants sont donc présentés figure 1.3 et figure 1.4 à des instants différents. Les résultats obtenus confirment bien que la zone endommagée tend à se localiser dans une bande dont la largeur varie avec la taille de l'élément. En conséquence, l'orientation et la taille de la zone endommagée sont sensibles au maillage. De plus, les courbes donnant l'évolution de la réaction en fonction de la norme du déplacement imposé  $\underline{\mathbf{u}}_b$ , figure 1.5, indiquent que l'énergie dissipée varie suivant la finesse du maillage. Les résultats obtenus ne sont donc pas pertinents d'un point de vue physique.

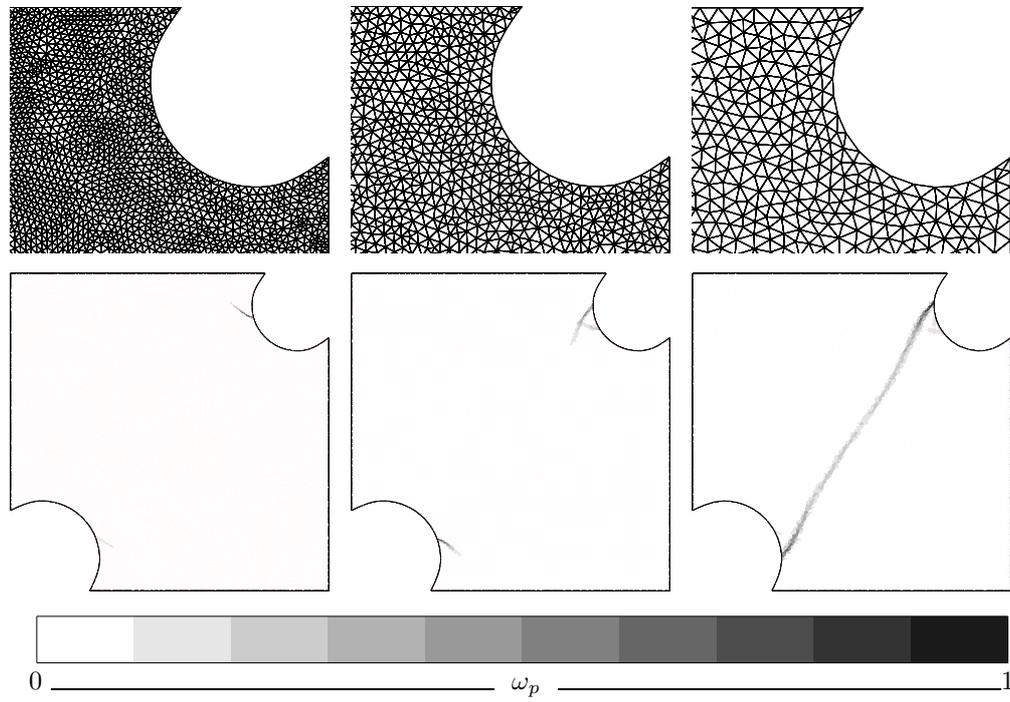


FIG. 1.3 – Profil d'endommagement pour trois maillages différents

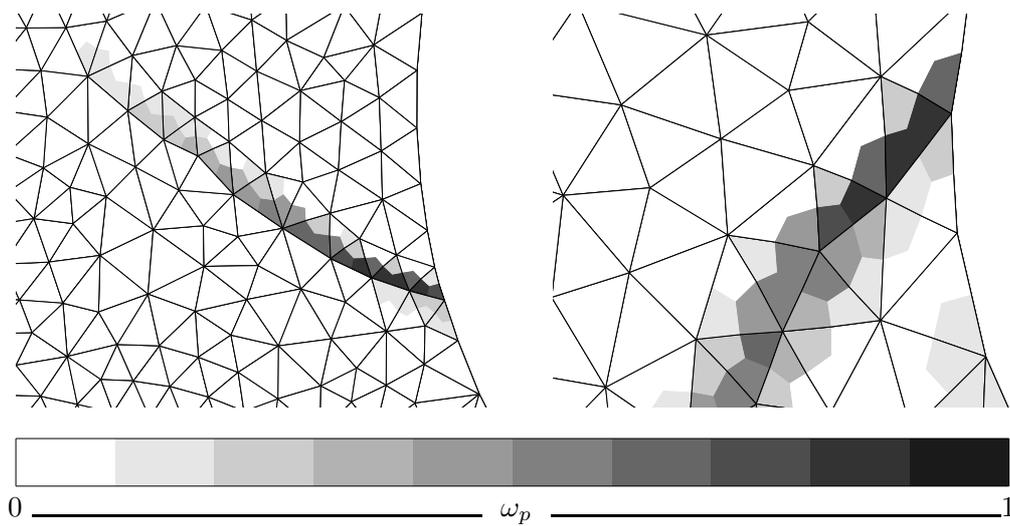


FIG. 1.4 – Zoom sur la localisation pathologique de l'endommagement pour le maillage de 0.1 mm à gauche et 0.3 mm à droite avec un même facteur de magnification

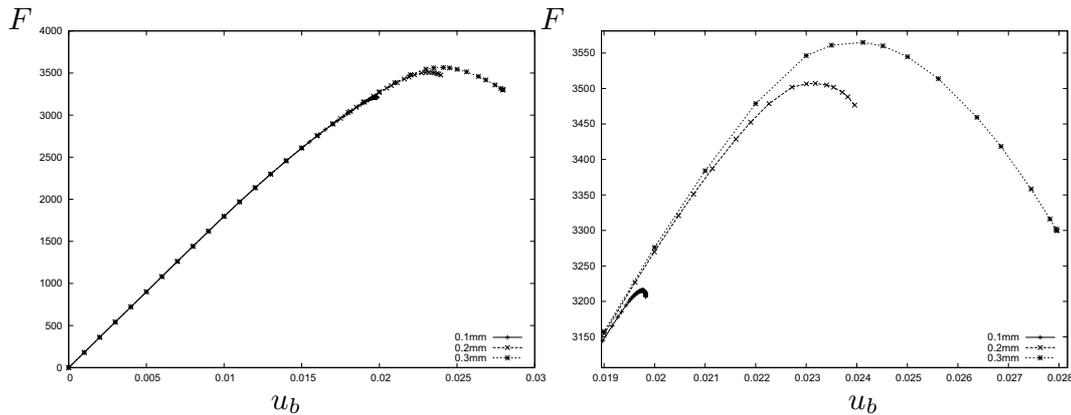


FIG. 1.5 – Évolution de l’effort résultant en fonction de la norme (mm) du déplacement imposé (à gauche) et zoom sur les sommets des courbes (à droite)

### D’un point de vue mathématique

Ce phénomène, maintenant bien connu, a en fait une origine mathématique puisqu’il résulte de la perte d’ellipticité des équations en statique. Le problème devient alors mal posé et l’unicité de la solution est perdue. En conséquence, les déformations tendent à se localiser dans la plus petite bande qui peut être capturée par le maillage. Il est donc impossible d’espérer converger vers une solution plus précise en raffinant le maillage, et de retrouver la largeur de bande ou l’énergie dissipée expérimentalement observées.

### Du point de vue de la modélisation

Le problème est qu’il manque une information dans le modèle. En effet, les modèles sont construits avec une certaine taille, souvent implicite, de Volume Élémentaire Représentatif (VER). En dessous d’une certaine échelle, les détails microstructuraux (comme les microfissures et les microcavités) sont pris en compte à travers une homogénéisation des propriétés matériau dans ce VER. Autrement dit, les champs mécaniques sont supposés homogènes à l’échelle du VER. Cette hypothèse n’est plus respectée lorsqu’une bande de localisation aussi fine que voulue peut se développer. Il faut, dans ce cas, introduire une notion de taille minimale.

#### 1.3.2 Les limiteurs de localisation spatiaux

Pour résoudre le problème de dépendance au maillage, les techniques qui ont été développées consistent alors à enrichir le milieu continu et à introduire cette information supplémentaire sur la structure interne du matériau. Il est ainsi possible d’imposer une largeur de bande réaliste (pour des référence vers des essais expérimentaux d’identification voir [131] pages 141-143) et indépendante du maillage ; c’est pourquoi ces techniques sont connues sous le nom de *limiteurs de localisation*. Un aperçu général de ces méthodes peut être trouvé dans de nombreux ouvrages, tels que [131], [68], [74] et leurs références. Seuls les limiteurs de localisation développés pour les problèmes en statique sont ici présentés. Ce sont des limiteurs spatiaux de localisation, par opposition aux limiteurs temporels de localisation utilisés en dynamique,

qui s'appuient eux sur le fait que les microdéfauts ont une vitesse de propagation finie (voir notamment les travaux d'Allix et Deü [7] sur le modèle à taux limité et la thèse de Court [68] pour plus de références sur le sujet).

### Milieux de Cosserat généralisés

La première formulation d'un milieu continu généralisé a été proposée par les frères Cosserat [66]. Elle consiste à considérer les particules matérielles comme des objets ayant non seulement des degrés de liberté en translation mais aussi en rotation. Ils sont décrits par la rotation d'un repère rigide constitué par trois vecteurs unitaires orthogonaux. Après que [116] ait réouvert la question d'un milieu continu orienté et souligné son lien avec la théorie des dislocations, l'idée des frères Cosserat a été reprise pour conduire à l'émergence des théories de Cosserat généralisées :

- *the couple-stress elasticity* avec les travaux de Mindlin & al. [169], Toupin [242], [243] et Koiter [138] ;
- *the theory of elasticity with microstructure* (cf Mindlin [167]) ;
- *the micropolar and micromorphic theories* avec les travaux de Eringen et Suhubi [92], [86], [87], [88] ;
- *the multipolar theory* avec les travaux de Green [112], [111].

Toutes ces théories caractérisent le mouvement d'un corps solide par des champs supplémentaires qui sont indépendants du champ des déplacements et fournissent des informations supplémentaires sur la cinématique à l'échelle inférieure.

Un enrichissement basé sur cette approche a été ensuite utilisé par Mülhaus, Vardoulakis, de Borst, Steinmann et Willam pour limiter la localisation dans les bandes de cisaillement, mais il ne permet pas de modéliser la rupture en mode-I (cf [175], [70] et [232]).

### Modèles utilisant les gradients des déformations

D'autres formulations de milieux continus enrichis gardent le champ des déplacements comme le seul champ cinématique indépendant et améliorent la résolution en incorporant les gradients des déformations (c'est-à-dire des dérivées spatiales d'ordre supérieur des déplacements) dans les équations constitutives. Ces théories ont été mises en avant grâce aux travaux d'Aero et Kuvshinskii [1], Grioli [115], Rajagopal [212], Truesdell et Toupin [244]. Ces travaux ne prenaient en compte que les composantes correspondant aux gradients des rotations, ce qui est équivalent à une théorie de Cosserat avec des rotations contraintes. Par la suite, la théorie du gradient a été étendue pour inclure les effets des gradients de dilatation (*stretch gradients* [242]), du gradient du second ordre (*second strain gradient* [168]) et des gradients de tout ordre [113]. Cette théorie a ensuite été utilisée en plasticité avec les travaux de Dillon & al. [80] et plus récemment avec ceux de Chambon & al. [56], Fleck & al. [95] et a conduit à l'émergence des théories dites *mechanism-based strain gradient plasticity* [104], [122] et [221].

Les gradients des déformations, qui sont considérés comme des variables d'état supplémentaires, sont les conjugués de contraintes d'ordre supérieur qui interviennent dans les équations d'équilibre. D'un point de vue thermodynamique, ces modèles requièrent la généralisation des expressions des travaux extérieurs et intérieurs.

Par ailleurs, la réponse de ces modèles en régime élastique diffère de celle des modèles classiques si les déformations ne sont pas uniformes.

### Modèles utilisant l'intégrale d'une variable interne

D'autres approches consistent à étendre le domaine d'influence d'une variable interne. La valeur de la variable sélectionnée ne dépend alors plus uniquement de la valeur des variables d'état au point matériel considéré. Elle dépend également de la valeur de la variable interne dans un rayon fixé autour de ce point, introduisant ainsi la notion de *longueur caractéristique*. La procédure consiste à utiliser une moyenne spatiale de cette variable. Alors que les autres limiteurs de localisation présentés ici peuvent être qualifiés de modèles non locaux au sens large, cette approche peut, elle, être qualifiée de non locale au sens strict, suivant la définition de non localité suggérée par Rogula [216].

L'utilisation du concept de moyenne non locale a été introduit dans les années 60 avec les travaux de Eringen [89], puis Kröner [140], Kunin [141] et Edelen & al. [82], [84], [83], [91]. Ces premières approches visaient une meilleure description des phénomènes qui ont lieu dans les cristaux à une échelle proche de celle des forces inter-atomiques. Le concept de moyenne non locale a ensuite été utilisé comme limiteur de localisation dans les années 80 par Bažant [32] et Pijaudier-Cabot [206] dans le cadre d'un comportement élastique endommageable. Il est en principe applicable avec n'importe quel type de modèle. Une synthèse des approches non locales pour la plasticité et l'endommagement a été proposée par Bažant et Jirásek [33], qui a été complétée par Jirásek et Rolshoven dans le cadre de la plasticité [132].

L'approche non locale de type intégrale consiste, schématiquement, à remplacer une certaine variable par son homologue non locale. La valeur de cette variable non locale en un point est définie comme la moyenne pondérée de la quantité d'intérêt locale sur un volume entourant le point considéré. Si  $f(\underline{\mathbf{x}})$  est un champ local donné dans un domaine  $\Omega$ , alors le champ non local associé est défini par :

$$f_{nl}(\underline{\mathbf{x}}) = \int_{\Omega} \alpha(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\xi}) f(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad (1.19)$$

où  $\alpha(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\xi})$  est une fonction poids non locale donnée (qui peut être une gaussienne par exemple).

Pendant cette approche soulève quelques difficultés. Ainsi la manière de définir une pondération convenable au voisinage d'une frontière ou d'une interface matérielle reste par exemple une question ouverte. De plus, comme l'a souligné Germain [108], cette approche présente certaines difficultés d'implantation dans un code éléments finis. En effet, il est nécessaire d'avoir des algorithmes spécifiques

1. pour construire la table de connectivité des points de Gauss où  $f(\underline{\mathbf{x}})$  est définie ;
2. pour calculer l'intégrale non locale (1.19) et ses gradients (cf [11]).

### Modèles utilisant le gradient d'une variable interne

Enfin, il est possible d'enrichir un modèle avec le gradient d'une variable interne (voire même avec le gradient de la force conjuguée à la variable interne). Ces modèles sont considérés comme le pendant différentiel des méthodes intégrales. Ils ne modifient que les équations du comportement sans modifier les relations cinématiques ou les équations d'équilibre classiques. Ils permettent de gérer efficacement les problèmes de localisation pathologique des déformations. Ces modèles peuvent être divisés en deux catégories : les modèles à gradient explicites et les modèles à gradient implicites.

*Les modèles à gradient explicites*

Les modèles à gradient explicites viennent enrichir les équations du problème directement par l'ajout de gradients de la variable locale ou des forces thermodynamiques. À la suite des travaux d'Aifantis sur la description de la dynamique des dislocations à une échelle microscopique [2], des modèles utilisant le gradient d'une variable interne ont été proposés notamment par Zbib, Aifantis, Mühlhaus, de Borst et Pamin (cf [255], [174], [71], [72], [192] et [73]).

La dépendance au gradient fait que la réponse en contrainte en un point matériel dépend du comportement au voisinage de ce point, mais ce voisinage peut être arbitrairement petit. C'est pourquoi ces modèles peuvent être qualifiés de non locaux au sens faible.

L'adaptation de la loi classique introduite dans la partie 1.1.1 est présentée dans [85]. Les auteurs soulignent les inconvénients associés à l'utilisation d'un modèle explicite, tels que l'ajout d'une condition aux limites définie à une interface élasto-plastique ou la difficulté liée à l'implantation numérique de cette méthode, due à la présence de dérivées partielles du second ordre. De plus, ces modèles ne permettent pas d'obtenir un état de contrainte nul à rupture (cf [53] et [85]).

*Les modèles à gradient implicites*

Les modèles à gradient implicites font également intervenir des gradients d'ordre supérieur, mais qui ne sont pas insérés directement dans les équations constitutives. Une variable non locale  $\kappa_{nl}$  est ajoutée au problème, qui est définie implicitement comme solution d'une équation différentielle de type Helmholtz faisant intervenir la variable locale notée  $\kappa$  :

$$\kappa_{nl} - c\nabla^2\kappa_{nl} = \kappa \quad \text{dans } \Omega \quad (1.20)$$

où  $c$  désigne le carré de la longueur interne introduite dans le modèle. Pour définir de manière unique la variable non locale, l'équation (1.20) doit être complétée par une condition aux limites supplémentaire. Afin de ne pas perturber les champs constants, la condition de Neumann suivante est retenue :

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\nabla}\kappa_{nl} = 0 \quad (1.21)$$

Ces modèles sont équivalents à ceux de type intégral si la fonction de poids choisie est la fonction de Green (cf [198] et [85]) et sont donc non locaux au sens strict, contrairement aux modèles à gradient explicites. Ils ont été tout d'abord développés dans le cadre de l'endommagement avec Peerlings, qui a proposé un modèle élastique fragile [199]. Puis Engelen, Geers et Baaijens [85] ont développé cette approche dans le cadre d'un modèle élasto-plastique endommageable en petites déformations. Les auteurs ont notamment montré que, dans le cas de la loi de comportement choisie dans la partie 1.1.1, un modèle à gradient implicite permet d'éviter un certain nombre de difficultés numériques associées à l'utilisation d'un modèle à gradient explicite.

**Remarque**

Forest propose dans [96] une approche, dite micromorphique, permettant de réconcilier plusieurs limiteurs de localisation spatiaux dans un cadre thermodynamique unifié. Elle est basée sur l'introduction d'une variable micromorphique  ${}^X\phi$ , associée à une variable d'état ou interne donnée  $\phi$  du modèle classique. Suivant le choix de cette variable, peuvent être par

exemple retrouvées la théorie de Cosserat et les théories micromorphiques de Eringen [90] et Mindlin [167], avec leur extension au cas de l'élasto-viscoplasticité en grandes déformations par Forest et Sievert [97] et [98]. Cette approche permet de retrouver notamment, sous certaines conditions, le modèle proposé par Engelen [85], Geers et Peerlings (cf [200], [201]), ou des modèles similaires à ceux proposés par Aifantis [3].

### Choix

Pour résoudre le problème de localisation observé dans la partie 1.1.1, le choix se limite dans un premier temps aux formulations utilisant le gradient de variable interne. En effet, ces dernières ont des performances suffisantes dans le cas présent et sont relativement moins complexes et coûteuses que les modèles de Cosserat généralisés ou les modèles utilisant les gradients des déformations. Les modèles utilisant l'intégrale d'une variable interne présentant des difficultés d'implantation (détaillées plus haut) que ne présentent pas les modèles à gradient, le choix se restreint donc aux modèles à gradient explicites ou implicites. À la suite de l'étude de [85], c'est la formulation à gradient implicite qui est retenue.

### 1.3.3 Formulation à gradient implicite

#### Équations non locales supplémentaires

Suivant [199], un champ non local  $\kappa_{nl}$  est introduit. Il est défini implicitement à partir d'une variable locale  $\kappa$ . Il est important de souligner que le choix de la variable  $\kappa$  ne dépend que de la loi de comportement et est totalement indépendant de la formulation de l'élément (il est donc abordé au paragraphe 1.3.4). De manière générale, au niveau de la formulation de l'élément, les équations suivantes sont ajoutées aux équations constitutives (1.12) à (1.17) :

- l'équation reliant la variable non locale  $\kappa_{nl}$  à la variable locale  $\kappa$  :

$$\kappa_{nl} - c\nabla^2\kappa_{nl} = \kappa \quad (1.22)$$

- la condition aux limites sur la variable non locale :

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\nabla}\kappa_{nl} = 0 \quad (1.23)$$

Les équations du comportement sont alors réécrites pour associer aux variables  $(\xi, \kappa_{nl}, \gamma)$  les champs résultants  $(\underline{\sigma}, \kappa)$  :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\xi, \kappa_{nl}, \gamma) \quad (1.24)$$

$$\kappa = \kappa(\xi, \kappa_{nl}, \gamma) \quad (1.25)$$

#### Formulation faible

Les équations (1.12) à (1.17) sont d'abord réécrites sous la forme faible correspondant à l'équation (1.18). Puis, la forme faible de l'équation (1.22) est obtenue en introduisant la fonction test scalaire  $\delta\kappa_{nl}$  :

$$\int_{\Omega} (\kappa_{nl} - c\nabla^2\kappa_{nl}) \delta\kappa_{nl} d\Omega = \int_{\Omega} \kappa \delta\kappa_{nl} d\Omega \quad (1.26)$$

Après avoir intégré par parties cette équation et utilisé la condition aux limites (1.23), cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\int_{\Omega} (\kappa_{nl} - \kappa) \delta \kappa_{nl} d\Omega + c \int_{\Omega} \underline{\nabla} \kappa_{nl} \cdot \underline{\nabla} \delta \kappa_{nl} d\Omega = 0 \quad (1.27)$$

### 1.3.4 Adaptation de la loi

Dans le cas de la loi élasto-plastique de [85], les auteurs montrent qu'une variable adaptée pour une formulation à gradient implicite est la plasticité cumulée  $p$  :

$$\kappa = p = \int_{\tau=0}^t \dot{p}(\tau) d\tau \quad \text{and} \quad \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\xi}^p : \dot{\xi}^p} \quad (1.28)$$

où  $\dot{\xi}^p$  désigne le taux de déformation plastique.

La loi de comportement doit alors être légèrement modifiée pour inclure parmi ses variables d'entrée la variable non locale choisie. Engelen & al. proposent que l'endommagement  $\omega_p$  ne soit plus une fonction de la plasticité locale cumulée  $\kappa = p$  mais du maximum de la variable non locale  $\kappa_{nl}(t) = \max_{\tau \leq t} \kappa_{nl}(\tau)$  (le choix du maximum est guidé par la nécessité d'utiliser une variable croissante alors qu'il peut arriver que  $\kappa_{nl}(\tau)$  diminue pour certains points matériels) :

$$\omega_p(\kappa_{nl}) = \begin{cases} \frac{\kappa_{nl}}{k^c} = \frac{p_{nl}}{k^c} & \text{si } \kappa_{nl} \leq k^c \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.29)$$

La fonction de charge devient alors :

$$F(\underline{\sigma}, \kappa_{nl}, \kappa) = \sigma_e(\underline{\sigma}) - [1 - \omega_p(\kappa_{nl})] \sigma_y(\kappa) = \sigma_e(\underline{\sigma}) - [1 - \omega_p(p_{nl})] \sigma_y(p) \quad (1.30)$$

Les autres équations du comportement restent inchangées. L'évolution de la variable d'écroutissage est toujours donnée par :

$$\sigma_y(\kappa) = \sigma_{y0} + h\kappa = \sigma_{y0} + hp \quad (1.31)$$

L'écoulement associé est toujours décrit par :

$$\dot{\xi}^p = \dot{\lambda} \mathbf{n} \quad (1.32)$$

avec  $\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}$  la direction normale à la surface de charge correspondante et  $\dot{\lambda} = \dot{p} = \dot{\kappa}$ . Enfin la relation contrainte déformation élastique est toujours :

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathbf{C}} : \underline{\xi}^e \quad (1.33)$$

Les variables  $\lambda$  et  $\underline{\sigma}$  sont obtenues en intégrant les équations du comportement comme décrit en annexe A.

### 1.3.5 Résultats intermédiaires

Afin d'illustrer l'efficacité de la méthode, les mêmes calculs qu'au paragraphe 1.3.1 sont reproduits avec la méthode à gradient implicite. La constante  $c$  de l'équation non locale a été prise égale à  $0.08 \text{ mm}^2$  de sorte que la largeur de la bande de localisation soit au moins trois à cinq fois supérieure à la taille d'un élément. À la suite des travaux de Peerlings [198], des polynômes quadratiques ont été utilisés pour interpoler les déplacements et des polynômes linéaires ont été choisis pour  $\kappa_{nl}$ . Cette fois, les résultats sont tous montrés pour un déplacement imposé de  $0.072 \text{ mm}$  figure 1.6. Les résultats obtenus montrent que la zone endommagée tend à se localiser dans une bande dont la largeur est indépendante de la taille de l'élément. De plus, les courbes donnant l'évolution de la réaction en fonction de la norme du déplacement imposé  $\underline{u}_b$ , figure 1.7, montrent que les résultats semblent converger vers une solution plus précise lorsque la taille de maille est plus fine.

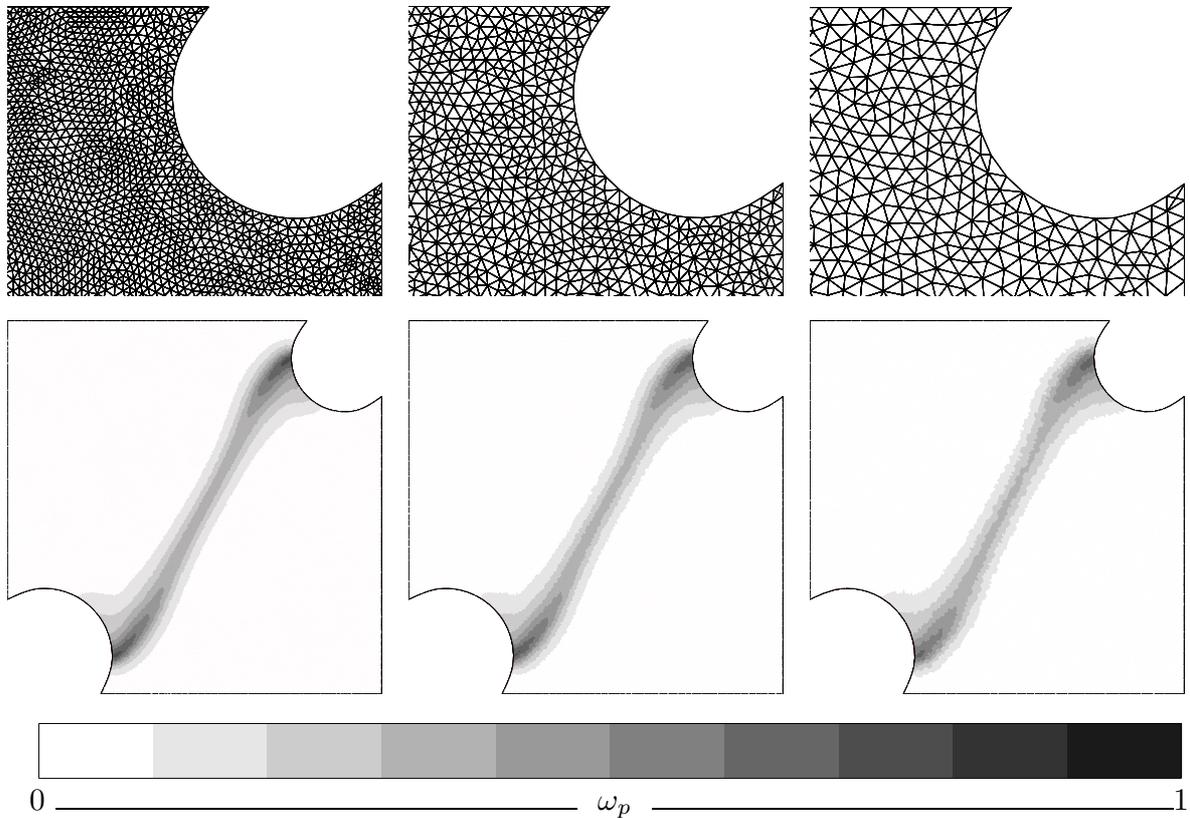


FIG. 1.6 – Profil d'endommagement pour trois maillages différents avec des éléments non locaux

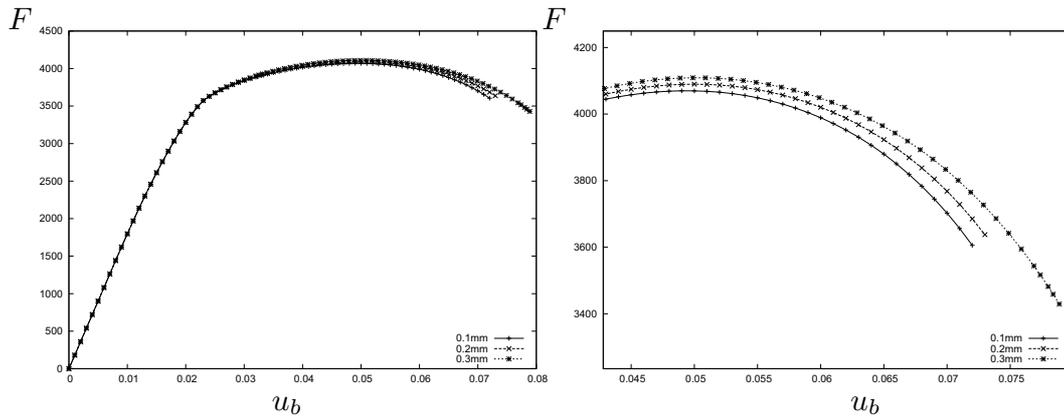


FIG. 1.7 – Évolution de l'effort résultant (N) en fonction de la norme (mm) du déplacement imposé (à gauche) et zoom sur les sommets des courbes (à droite) avec des éléments non locaux

## 1.4 Problème de verrouillage volumique

### 1.4.1 Description et illustration du problème

L'important taux de plasticité atteint durant le calcul conduit à d'autres problèmes numériques comme le verrouillage volumique. En effet, pour la simulation précédente, d'importantes oscillations peuvent être observées au même moment au niveau des champs de contrainte (cf exemple pour le champ  $\sigma_{22}$  sur la figure 1.8), qui indiquent la présence de verrouillage.

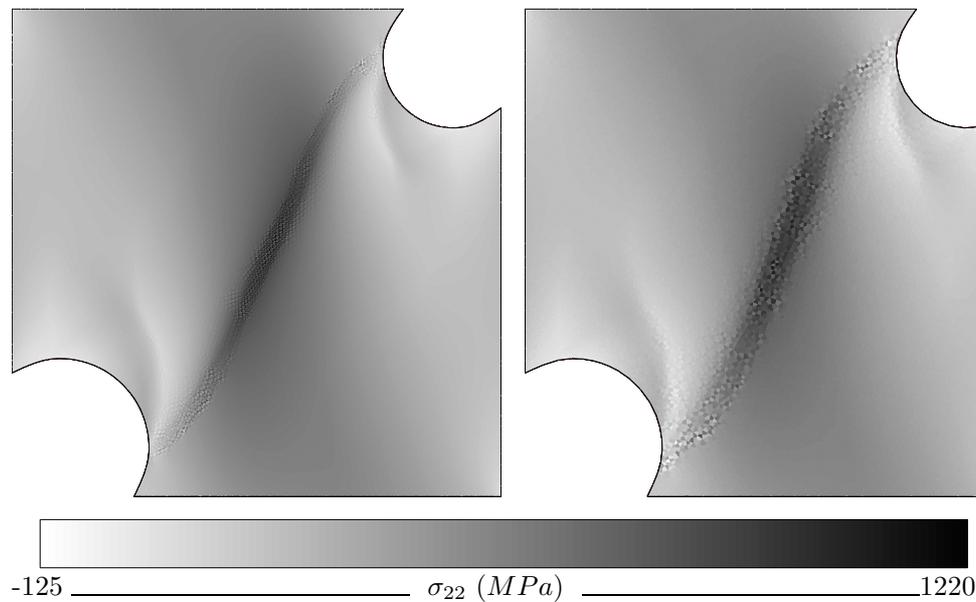


FIG. 1.8 – Champ  $\sigma_{22}$  pour le maillage le plus fin et le plus grossier avec des éléments non locaux

Ce phénomène est indépendant du fait que le modèle soit adoucissant, classique ou non. Il est possible de le vérifier en utilisant cette fois un modèle uniquement élasto-plastique (sans endommagement). Un comportement durcissant est obtenu en reprenant les équations de la partie 1.1.1 avec un endommagement nul (cf figure 1.9). Les résultats en contrainte (cf figure 1.10) montrent alors le même type d'oscillations.

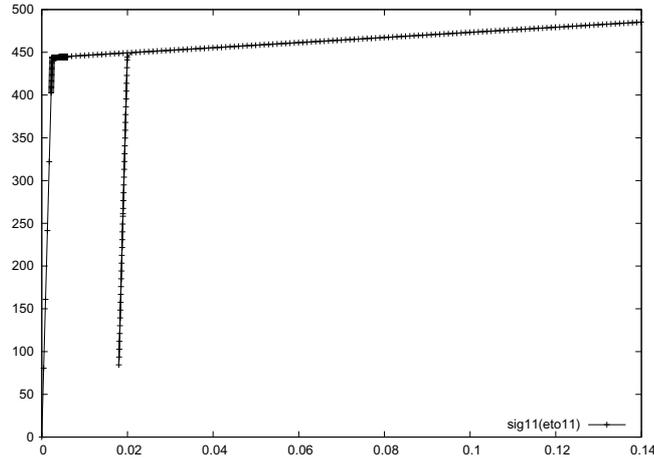


FIG. 1.9 – Évolution de la contrainte (MPa) en fonction de la déformation en un point de Gauss

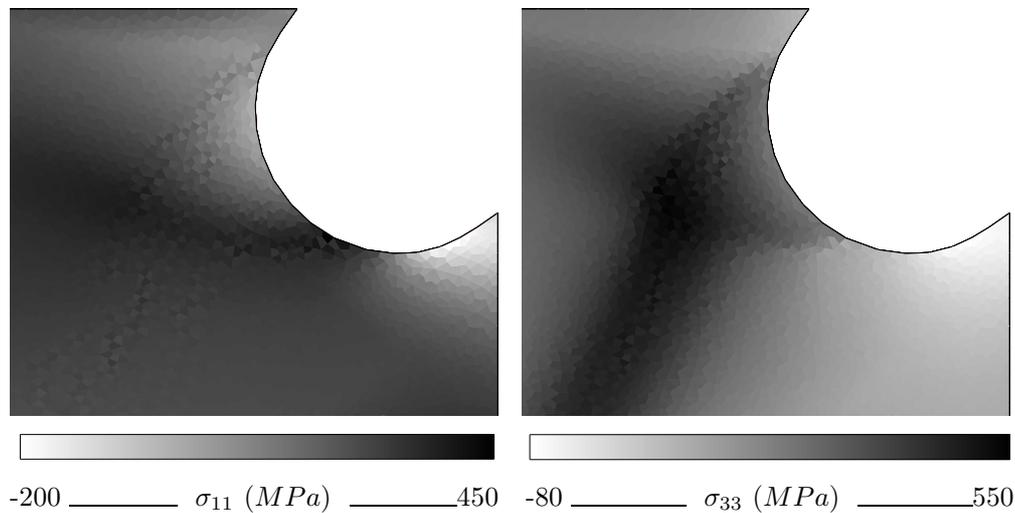


FIG. 1.10 – Champs  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{33}$  pour le maillage le plus grossier avec des éléments classiques.

Il est maintenant bien connu que les éléments dont les fonctions de forme sont d'ordre faible ont tendance à se verrouiller en présence de matériaux incompressibles. Ce phénomène est dû à l'incapacité des éléments classiques (c'est-à-dire basés uniquement sur une formulation en déplacements) à contraindre les déplacements à être cohérents avec un comportement quasi-incompressible ( $div(\dot{u}) \approx 0$ ). Le problème réside notamment dans la détermination de la partie sphérique des contraintes, ou pression, correspondant à  $\frac{1}{3}Tr(\boldsymbol{\sigma})$ , qui est lié à la partie sphérique des déformations, donnée par  $Tr(\boldsymbol{\varepsilon})$  (pour les matériaux isotropes). La raison mathé-

matique de cette difficulté a été discutée par Babuska [12], [13] et Brezzi [45] qui ont formulé un critère portant leurs noms. Cette condition est également connue sous le nom de condition inf-sup (voir notamment [245] et ses références pour des travaux plus récents sur ce sujet).

Bien que les matériaux incompressibles soient assez rares dans le cadre linéaire (caoutchouc, polymères, etc.), beaucoup de matériaux ont un comportement quasi-incompressible dans le régime non linéaire. Par exemple, en élasto-plasticité, l'incompressibilité découle de l'hypothèse d'écoulement plastique isochore ou écoulement de Von Mises. Pour les problèmes élasto-plastiques, l'effet considérable qu'a la contrainte d'incompressibilité sur la procédure de résolution globale a été d'abord abordée dans l'article de Nagtegaal, Parks et Rice [177] qui ont souligné l'impossibilité de calculer le chargement critique avec un matériau ayant un comportement élastique-parfaitement plastique. Le verrouillage numérique se traduit, pour presque tous les matériaux incompressibles, par une perte de précision dans la réponse calculée lorsque l'on impose l'incompressibilité (cf [236]). Les champs de contraintes obtenus sont incorrects, les déplacements sont largement sous-estimés et la rigidité est, elle, surestimée. En outre, d'importantes oscillations peuvent apparaître.

Pour éliminer ce verrouillage volumique, il est très important de bien choisir ses éléments pour pouvoir traiter correctement l'incompressibilité lors des analyses éléments finis. Deux approches ont été principalement retenues en non linéaire : les procédures d'intégration réduites et les éléments à plusieurs champs (cf [260] et ses références), qui sont présentés brièvement.

### 1.4.2 Solutions possibles

#### Les procédures d'intégration réduite et sélective

Les procédures d'intégration réduite consistent à sous-intégrer tous les termes de la formulation faible, alors que les procédures d'intégration sélective ne sous-intègrent que certains de ces termes. Ces méthodes présentent l'avantage de réduire le coût de calcul et permettent donc d'obtenir des éléments plus rapides par rapport à une intégration complète, ce qui est particulièrement intéressant pour les calculs à grande échelle.

Le succès de ces méthodes est dû au fait qu'ils apportent la singularité nécessaire à la partie contrainte de la matrice de rigidité, ce qui évite le verrouillage. Cependant les éléments avec sous-intégration sont sujets à des problèmes d'instabilité. Au niveau du champ de pression, ces instabilités peuvent se manifester sous la forme d'oscillations (motif d'échiquier). Mais il peut également y avoir des instabilités au niveau du champ des déformations, qui se traduisent par l'apparition de modes non souhaités (*hourglass*, *keystoning*, *kinematic modes*, *spurious zero energy modes*, *chickenwiring*,...). Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de recourir à des techniques de stabilisation de l'élément.

Par ailleurs, ces procédures de sous-intégration (cf [124]) sont restreintes aux quadrangles et aux hexaèdres, qui ne peuvent pas être générés automatiquement et de manière robuste par les mailleurs actuels. Ces techniques ne sont donc pas adaptées à l'utilisation de remaillage adaptatif, qui constitue une part importante de ce travail. Le recours à une formulation multi-champs est donc préféré.

### Les formulations mixtes à deux champs

#### *Formulation $u$ - $\sigma$*

Une première catégorie consiste à considérer comme variables indépendantes le champ de déplacements  $\underline{u}$  et le champ des contraintes supposées  $\bar{\sigma}$ . Ce dernier devrait alors vérifier au sens faible la relation de comportement :

$$\bar{\sigma} = \sigma(\underline{\varepsilon}, \gamma) \quad (1.34)$$

et toutes les équations (1.12) à (1.16) sont alors réécrites en remplaçant  $\sigma$  par  $\bar{\sigma}$ .

De nos jours, très peu d'éléments basés sur l'interpolation du champ complet des contraintes et des déplacements sont utilisés. Les seuls éléments qui présentent un intérêt sont tous deux des quadrangles, (le Q4/8 à 8 nœuds et 4 points de Gauss, équivalent à utiliser une intégration réduite à quatre points de Gauss, donc pas toujours robuste ; et le quadrangle de Pian-Sumihara [205]).

#### *Formulation $u$ - $P$*

La difficulté avec les comportement quasi-incompressible résidant dans la détermination de la partie sphérique des contraintes, la plupart des formulations à deux champs utilisent une forme plus simple en déplacements et pression supposée ( $u$ - $P$ ) pour résoudre les problèmes incompressibles. Elle est obtenue en imposant :

$$\bar{\sigma}^{dev} = (\sigma(\underline{\varepsilon}, \gamma))^{dev} \quad (1.35)$$

et en cherchant uniquement à déterminer un champ de pression supposée  $P = \frac{1}{3}Tr(\bar{\sigma})$ .

Zienkiewicz & al. [260] ont repris les travaux de Malkus et Hughes [163] et Zienkiewicz and Nakazawa [256] pour montrer que la formulation  $u$ - $P$  avec une pression supposée discontinue est équivalente aux procédures de sous-intégration. Ils souffrent donc des mêmes problèmes.

De manière générale, le problème principal avec cette formulation à deux champs est que le choix des interpolations à utiliser est très limité par les conditions de stabilité : une condition nécessaire de stabilité étant que le nombre de degrés de liberté associés aux déplacements  $n_u$  soit supérieur au nombre de degrés de liberté associé à la pression supposée  $n_p$  :  $n_u \geq n_p$ . Notamment, les triangles T3/C3 (déplacements continus linéaires, pression supposée continue linéaire), T6/3 (déplacements continus quadratiques, pression supposée discontinue linéaire) et T6/C3 (déplacements continus quadratiques, pression supposée continue linéaire) ne vérifient pas cette condition. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes permettant de stabiliser les éléments.

Les principales méthodes de stabilisation qui peuvent être envisagées consistent à :

- subdiviser le triangle (ou le quadrangle) en introduisant un nœud central traité comme une variable interne ou en introduisant au niveau de l'élément n'importe quelle fonction interne qui prend une valeur nulle sur le périmètre du triangle (par exemple une fonction bulle). En portant attention à la continuité du champ de pression supposée, on peut obtenir des éléments produisant des résultats satisfaisants comme l'élément MINI (triangle avec une interpolation  $\mathcal{C}_0$  avec une fonction bulle pour les déplacements et une interpolation  $\mathcal{C}_0$  pour le champ de pression supposée  $P$ , cf [9]). Les performances de ce type d'élément ont fait l'objet de nombreuses discussions (cf [101], [180], [69], [162], [99] et [240]).

- introduire des coefficients diagonaux non nuls en ajoutant un terme en Laplacien de la pression supposée à la formulation faible (*Laplacian pressure stabilization*). Cette solution, d'abord suggérée par Courant [67] comme un moyen d'améliorer la précision des résultats, a été utilisée en 1984 par Brezzi et Pitkäranta comme moyen de stabilisation [46].
- utiliser une méthode GLS (Galerkin Least Square) qui consiste à ajouter à la formulation faible un autre terme, calculé pour chaque élément, faisant intervenir un coefficient de poids qui peut dépendre de la taille de l'élément, de caractéristiques matériau, etc (cf travaux de Hughes & al. [126], [125] et [127]). Une méthode alternative pour atteindre des résultats similaires a été proposée par Oñate [186] avec l'introduction d'un *finite increment calculus*.
- utiliser une méthode proposée plus récemment par Dohrmann et Bochev [81] (*direct pressure stabilization*) qui consiste à ajouter aux équations faibles un terme en moindres carrés impliquant la différence entre la pression supposée et une projection directe de la pression sur un espace polynômial dont le degré est en accord avec celui des contraintes (par exemple sur l'ensemble des polynômes constants par éléments si les déplacements sont linéaires).

Il existe d'autres alternatives possibles (élément composite de Herrmann [119], procédure CBS (*characteristic-based split*) [259]) mais elles ne sont pas envisageables dans le cas présent, car trop intrusives dans le code.

### Les formulations mixtes à trois champs

#### *Formulation $u$ - $\sigma$ - $\varepsilon$*

Il existe une autre catégorie de formulations mixtes, basée sur le principe de Hu-Washizu, qui consiste à considérer que les inconnues du problème sont le champ des déplacements  $\underline{\mathbf{u}}$ , le champ des contraintes supposées  $\bar{\sigma}$  et le champ des déformations supposées  $\bar{\varepsilon}$ . Le champ des déformations supposées  $\bar{\varepsilon}$  doit alors être cohérent avec le champ des déplacements, de sorte que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\mathbf{u}} + (\nabla \underline{\mathbf{u}})^T) = \nabla^{(s)} \underline{\mathbf{u}} \quad (1.36)$$

et le champ des contraintes supposées  $\bar{\sigma}$  doit être cohérent avec le tenseur des contraintes obtenu par intégration des équations constitutives à partir de la donnée des déformations supposées et des variables d'état internes  $\gamma$  :

$$\bar{\sigma} = \sigma(\bar{\varepsilon}, \gamma) \quad (1.37)$$

Toutes les équations (1.12) à (1.15) sont alors réécrites en remplaçant  $\sigma$  par  $\bar{\sigma}$ .

Cette formulation est très peu utilisée sous cette forme. Par contre, un cas particulier de cette forme a été proposé pour des quadrangles par Simo and Rifai, avec l'introduction d'un enrichissement des déformations (*enhanced strain formulation*) [224], qui peut être considéré comme une méthode de stabilisation.

#### *Formulation $u$ - $P$ - $\theta$*

De même que pour la formulation à deux champs, une forme simplifiée existe, qui ne fait intervenir que la pression supposée  $P$  et la partie sphérique du champ des déformations sup-

posées  $\bar{\xi}$  noté  $\theta$ . Pour les problèmes quasi-incompressibles en élasticité isotrope, cette méthode est équivalente à la formulation à deux champs présentée précédemment. Cependant, dans le cas de matériaux plus généraux, anisotropes ou inélastiques, et en grandes déformations, la formulation à trois champs présente des avantages distincts qui sont discutés dans [258]. Dans l'optique d'une utilisation plus générale de la méthode retenue, les formulations à trois champs sont donc préférées aux formulations à deux champs pour ce travail.

Encore une fois, le choix du degré d'interpolation des différentes variables est contraint par des critères de stabilité. Suivant l'interpolation choisie, il peut être nécessaire de recourir à une forme de stabilisation.

Ainsi, l'utilisation d'une interpolation linéaire des déplacements et du champ de pression  $P$  associée à un champ discontinu de variation de volume  $\theta$  requiert l'enrichissement du champ des déplacements. Cette formulation produit des résultats satisfaisants avec des triangles à 3 nœuds (cf [260]) ou des tétraèdres à 4 nœuds (cf article de Taylor [241]).

Cependant, un autre choix d'interpolation utilisé dans le Code\_Aster [166] permet de ne pas avoir à recourir à un enrichissement : une interpolation quadratique pour les déplacements combinée à une interpolation linéaire avec les mêmes nœuds d'interpolation pour les champs de pression supposée et de variation de volume supposée. Cette fois tous les champs sont continus. Cette solution présente notamment l'avantage de ne pas devoir faire intervenir un mode ou un terme supplémentaire pour stabiliser l'élément. C'est donc la formulation qui est retenue.

#### *La méthode $\bar{B}$*

Mais l'utilisation la plus commune de la formulation à trois champs est encore la méthode  $\bar{B}$  (B-barre). Cette méthode consiste à exprimer à partir de la forme faible la pression supposée et la variation de volume supposée en fonction des déplacements. Cela est possible car les champs de pression  $P$  et de variation de volume  $\theta$  sont construits pour chaque élément individuellement et ne sont pas continus entre deux éléments. Ainsi une formulation particulière en déplacements est obtenue [124], [227].

### 1.4.3 Formulation mixte à trois champs

#### Les équations

Les formulations mixtes à trois champs en  $u$ - $P$ - $\theta$  sont obtenues à partir des formulations en  $u$ - $\sigma$ - $\varepsilon$ . Le champ des déformations supposées  $\bar{\xi}$  doit alors être cohérent avec le champ des déplacements, de sorte que :

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \nabla^{(s)} \mathbf{u} \quad (1.38)$$

et le champ des contraintes supposées  $\bar{\sigma}$  devrait alors vérifier :

- les équations d'équilibre intérieur

$$\nabla \bar{\sigma} + \mathbf{b}_v = \mathbf{0} \quad (1.39)$$

- les conditions aux limites

$$\text{sur } \partial_t \Omega \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_b \quad (1.40)$$

- les conditions de continuité intérieure

$$\text{sur } \Gamma_{int} \quad [\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad (1.41)$$

- la propriété de symétrie du tenseur des contraintes

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \quad (1.42)$$

- la cohérence avec le tenseur des contraintes obtenu par intégration des équations constitutives à partir de la donnée d'une déformation supposée et des variables d'état internes  $\gamma$ .

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \gamma) \quad (1.43)$$

### Formulation faible

La forme faible des équations (1.39) à (1.42) est :

$$\int_{\Omega} \nabla^{(s)}(\delta \mathbf{u}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_v d\Omega - \int_{\partial\Omega_\tau} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_b dS = 0 \quad (1.44)$$

La forme faible de l'équation (1.38) est :

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} : (\nabla^{(s)} \mathbf{u} - \bar{\boldsymbol{\xi}}) d\Omega = 0 \quad (1.45)$$

et la forme faible de la relation (1.43) est :

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\boldsymbol{\xi}} : (\boldsymbol{\sigma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \gamma) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega = 0 \quad (1.46)$$

Pour obtenir une formulation plus simple en  $u$ - $P$ - $\theta$ , les tenseurs de déformation supposée et de contrainte supposée sont séparés en une partie déviatorique et une partie sphérique, en posant :

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}^{dev} = \left( \nabla^{(s)} \mathbf{u} \right)^{dev} \quad (1.47)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \gamma)^{dev} \quad (1.48)$$

Ceci conduit à :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \gamma)^{dev} + P \mathbf{I} \quad (1.49)$$

$$\bar{\boldsymbol{\xi}} = \left( \nabla^{(s)} \mathbf{u} \right)^{dev} + \frac{1}{3} \theta \mathbf{I} \quad (1.50)$$

où les champs de pression supposée  $P$  et de changement de volume supposé  $\theta$  sont les nouvelles inconnues, au même titre que les déplacements  $\mathbf{u}$ . En conséquence, les notations  $\bar{P}$  et  $\bar{\theta}$  sont introduites et définies comme suit :

$$\bar{P} = \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \gamma)) \quad (1.51)$$

$$\bar{\theta} = Tr\left(\nabla^{(s)} \mathbf{u}\right) \quad (1.52)$$

En utilisant l'orthogonalité des parties sphériques et déviatoriques, la formulation faible des relations (1.38) à (1.43) peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^{(s)}(\delta \mathbf{u}) : \left( \boldsymbol{\sigma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \gamma)^{dev} + P \mathbf{I} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_v d\Omega - \int_{\partial\Omega_\tau} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_b dS &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta P (\bar{\theta} - \theta) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta \theta (\bar{P} - P) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

### 1.4.4 Résultats intermédiaires

Les calculs effectués pour un comportement durcissant avec des éléments classique du paragraphe 1.4.1 sont alors comparés avec ceux obtenus avec éléments mixtes  $p2p1p1$  (interpolation quadratique en déplacements et linéaire en pression supposée et variation de volume supposée). Le schéma d'intégration spatial est basé de manière classique sur trois points de Gauss dans le cas de triangles à 6 nœuds. Les champs de contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{33}$  sont comparés pour un déplacement imposé de 0.04 mm figure 1.11 et figure 1.12. Les résultats obtenus montrent que l'utilisation d'éléments mixtes permet de réduire considérablement les oscillations et donc d'améliorer les résultats.

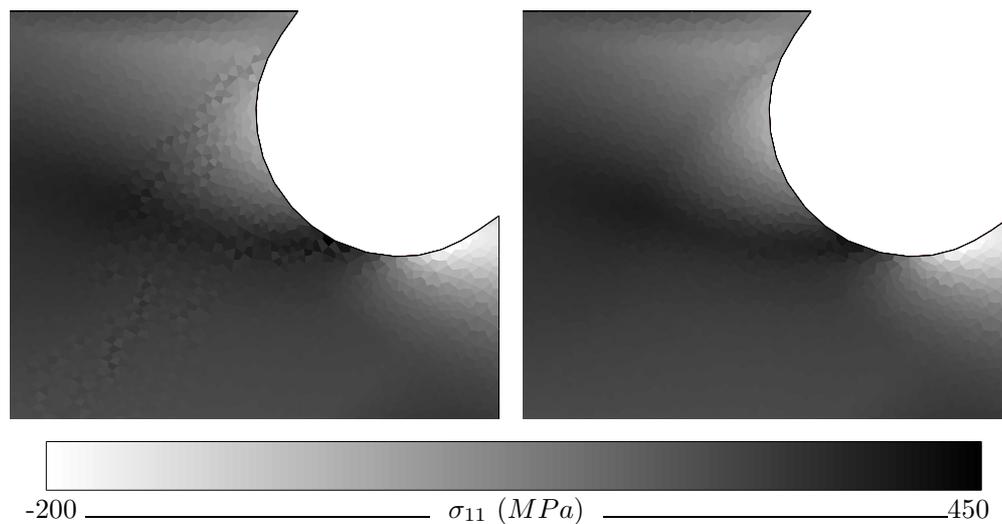


FIG. 1.11 – Champs  $\sigma_{11}$  pour le maillage le plus grossier avec des éléments classiques à gauche et des éléments mixtes  $p2p1p1$  à droite

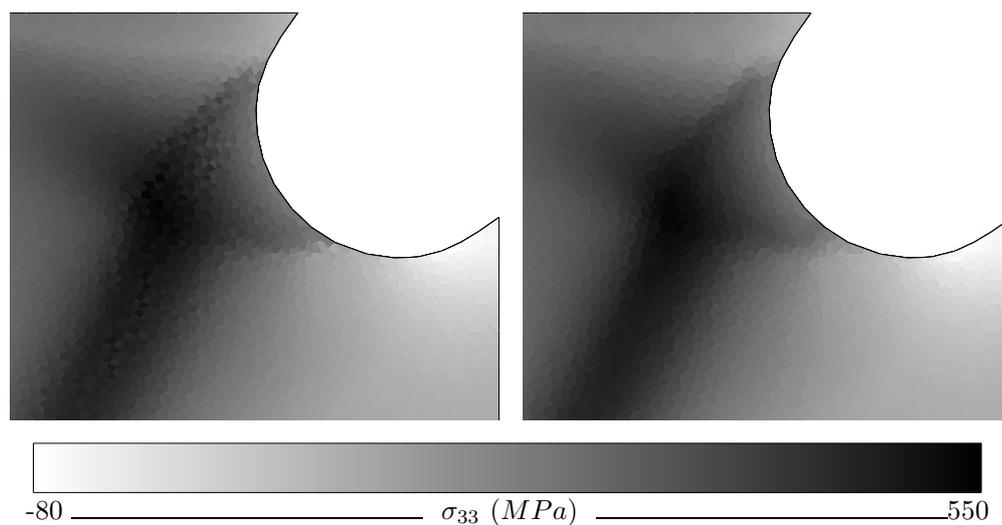


FIG. 1.12 – Champs  $\sigma_{33}$  pour le maillage le plus grossier avec des éléments classiques à gauche et des éléments mixtes  $p2p1p1$  à droite

## 1.5 Solution commune : une formulation mixte non locale

Cependant, les formulations non locales et les formulations multi-champs sont deux solutions différentes pour deux problèmes différents. Pour résoudre à la fois le problème de dépendance au maillage et le verrouillage volumique, il est alors nécessaire de construire une nouvelle formulation combinant une formulation non locale et une formulation mixte.

À notre connaissance, le premier article faisant mention de l'association d'une formulation multi-champs avec un modèle non local est celui de Grimaldi and al. [114]. Les auteurs ont adopté une procédure de régularisation de type intégrale associée à une formulation mixte à deux champs pour des problèmes en deux dimensions et en petites déformations qu'ils ont testée avec des quadrangles. En grandes déformations, Lorentz & al. [155] et Bargellini and al. [29] ont proposé une formulation non locale basée sur le gradient du gonflement avec une formulation à trois champs qu'ils ont testée en dimension deux. Son usage est cependant limité à des modèles contrôlés par la variation de volume. Plus récemment, Javani et al. [130], ont proposé une formulation mixte non locale à deux champs basée sur une régularisation non locale à gradient implicite et une formulation à deux champs enrichie pour des tétraèdres en grandes déformations.

La formulation suivante est similaire à celle de Lorentz & al. [155] et Bargellini and al. [29], mais tente de se placer dans un cadre plus général, en petites déformations. Elle peut être utilisée avec n'importe quel type d'éléments finis et n'importe quelle loi de comportement, du moment que cette dernière est adaptée à l'utilisation d'une formulation non locale à gradient implicite. Elle combine une formulation mixte à trois champs, qui peut être facilement modifiée pour prendre en compte une la formulation basée sur le changement de volume, et une régularisation non locale à gradient implicite introduisant une variable non locale supplémentaire, tout comme [130].

### 1.5.1 Nouvelles équations

Le problème à résoudre possède désormais quatre inconnues :

- les déplacements  $\mathbf{u}$  ;
- la variation de volume supposée  $\theta$ , qui est la partie sphérique du tenseur des déformations supposées  $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = \left( \nabla^{(s)} \mathbf{u} \right)^{dev} + \frac{1}{3} \theta \mathbf{I} \quad (1.54)$$

et qui doit être cohérente avec les déplacements :

$$\theta = Tr \left( \nabla^{(s)} \mathbf{u} \right) \quad (1.55)$$

- le champ de pression supposée  $P$ , qui est la partie sphérique du champ des contraintes supposées  $\bar{\sigma}$  :

$$P = \frac{1}{3} Tr \left( \bar{\sigma} \right) \quad (1.56)$$

et qui doit tel que  $\bar{\sigma}$  vérifie :  
les équations d'équilibre intérieur

$$\nabla \bar{\sigma} + \mathbf{b}_v = \mathbf{0} \quad (1.57)$$

les conditions aux limites

$$\text{sur } \partial_t \Omega \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{T}_b \quad (1.58)$$

les conditions de continuité intérieure

$$\text{sur } \Gamma_{int} \quad [\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad (1.59)$$

la propriété de symétrie du tenseur des contraintes

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \quad (1.60)$$

– une variable non locale  $\kappa_{nl}$  définie implicitement à partir de la variable locale  $\kappa$  :

$$\kappa_{nl} - c \nabla^2 \kappa_{nl} = \kappa \quad (1.61)$$

associée aux conditions limites :

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\nabla} \kappa_{nl} = 0 \quad (1.62)$$

Les équations du comportement sont alors écrites comme des relations donnant  $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa)$  en fonction des variables internes  $(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \kappa_{nl}, \gamma)$  :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{\varrho}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \kappa_{nl}, \gamma) \quad \text{d'où} \quad P = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\varrho}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \kappa_{nl}, \gamma)) = \bar{P} \\ \kappa &= \kappa(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \kappa_{nl}, \gamma) \end{aligned} \quad (1.63)$$

### 1.5.2 Formulation faible

Comme montré dans les paragraphes précédents, la forme faible des équations (1.54) à (1.60) est donnée par l'équation (1.53). La forme faible des équations (1.61) et (1.62) est donnée par l'équation (1.27). Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^{(s)}(\delta \mathbf{u}) : \left( \boldsymbol{\varrho}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \kappa_{nl}, \gamma)^{dev} + P \mathbf{I} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_v d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\tau}} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_b dS &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta P (\bar{\theta} - \theta) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta \theta (\bar{P} - P) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} (\kappa_{nl} - \kappa) \delta \kappa_{nl} d\Omega + c \int_{\Omega} \underline{\nabla} \kappa_{nl} \cdot \underline{\nabla} \delta \kappa_{nl} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

### 1.5.3 Discrétisation spatiale

Les solutions exactes  $(\mathbf{u}^{ex}, P^{ex}, \theta^{ex}, \kappa_{nl}^{ex})$  vérifiant les équations du problème au sens faible sont inaccessibles dans la majorité des cas. L'objectif est d'obtenir une bonne approximation de ces solutions sur un sous-espace de dimension finie. La méthode des éléments finis permet ainsi de trouver une solution approchée pour les quatre inconnues  $(\mathbf{u}^h, P^h, \theta^h, \kappa_{nl}^h)$ , en utilisant une base discrète combinée à un ensemble d'inconnues nodales. Ainsi le déplacement exact,  $\mathbf{u}^{ex}$ , en un point  $M$  appartenant à un élément  $\Omega_E$ , peut être approché par :

$$\mathbf{u}^h(M) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{k=1}^d u_{ki} \boldsymbol{\Phi}_{ki}(M) \quad (1.65)$$

où  $n_u$  est le nombre de nœuds de l'élément utilisé pour discrétiser les déplacements et  $d$  désigne la dimension de l'espace. Les inconnues nodales  $u_{ki}$  sont les déplacements du nœud  $i$  suivant

la direction correspondant à l'axe  $k$  et  $(\underline{\Phi}_{11}, \underline{\Phi}_{12}, \dots, \underline{\Phi}_{n_u d})$  désigne une base du sous-espace des champs des déplacements cinématiquement admissibles sur  $\Omega_E$  de dimension  $n_u \times d$ .

Étant donné que les seules quantités qui peuvent être manipulées sont les quantités approchées qui ont été calculées grâce à la méthode des éléments finis, et dans un souci de clarté, on omettra désormais l'exposant  $h$ .

En regroupant tous les déplacements aux nœuds dans le vecteur :

$$\hat{\underline{\mathbf{u}}}^T = [u_{11}, u_{12}, \dots, u_{n_u d}] \quad (1.66)$$

et les vecteurs de la base correspondante dans la matrice :

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_u = [\underline{\Phi}_{11}, \underline{\Phi}_{12}, \dots, \underline{\Phi}_{n_u d}] \quad (1.67)$$

le déplacement approché peut s'écrire sous forme d'un produit matrice-vecteur :

$$\underline{\mathbf{u}}(M) = \underline{\underline{\mathbf{N}}}_u(M) \cdot \hat{\underline{\mathbf{u}}} \quad (1.68)$$

Le tenseur des petites déformations associé est alors donné par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left( [(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_u \cdot \hat{\underline{\mathbf{u}}}) \cdot \mathbf{e}_i]_{,j} + [(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_u \cdot \hat{\underline{\mathbf{u}}}) \cdot \mathbf{e}_j]_{,i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{N}}_u^k}{\partial X_j} \cdot \mathbf{e}_i + \frac{\partial \underline{\mathbf{N}}_u^k}{\partial X_i} \cdot \mathbf{e}_j \right) \hat{u}_k \end{aligned} \quad (1.69)$$

où  $\underline{\mathbf{N}}_u^k$  est la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_u$  et  $\mathbf{e}_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur unitaire de la base orthogonale. D'où :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u \cdot \hat{\underline{\mathbf{u}}} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = B_{ij,k}^u \hat{u}_k \quad (1.70)$$

avec  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_u$  le tenseur d'ordre trois tel que :

$$B_{ij,k}^u = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{N}}_u^k}{\partial X_j} \cdot \mathbf{e}_i + \frac{\partial \underline{\mathbf{N}}_u^k}{\partial X_i} \cdot \mathbf{e}_j \right) \quad (1.71)$$

De la même manière, la valeur des inconnues  $P$  et  $\theta$  en un point  $M$  est approchée par :

$$P(M) = \sum_{k=1}^{n_p} N_{Pk}(M) \hat{P}_k = \underline{\underline{\mathbf{N}}}_P \cdot \hat{\underline{\mathbf{P}}} \quad (1.72)$$

$$\theta(M) = \sum_{k=1}^{n_\theta} N_{\theta k}(M) \hat{\theta}_k = \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta \cdot \hat{\underline{\boldsymbol{\theta}}} \quad (1.73)$$

où  $n_p$  et  $n_\theta$  sont les nombres de nœuds utilisés pour discrétiser respectivement la pression supposée et la variation de volume supposée.  $N_{Pk}$  and  $N_{\theta k}$  sont les fonctions de forme regroupées respectivement dans les vecteurs  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_P$  et  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta$ . Enfin  $\hat{\underline{\mathbf{P}}}$  et  $\hat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}$  sont les vecteurs regroupant respectivement les valeurs nodales de pression supposée et de variation de volume supposée.

Plusieurs combinaisons sont possibles concernant l'ordre des fonctions de base. Cependant ce choix est contraint par la condition de Babuska-Brezzi (cf [12], [13] et [45]). Suivant Bellet [35] et Michel-Ponnelle [166], un choix approprié pour les petites déformations consiste à utiliser une interpolation quadratique pour les déplacements (P2) et une interpolation linéaire avec les mêmes nœuds d'interpolation ( $n_P = n_\theta$ ) pour les champs de pression supposée et de

variation de volume supposée (P1). Ainsi, nul autre enrichissement (de type fonction bulle par exemple) n'est nécessaire.

Enfin, la variable non locale  $\kappa_{nl}$  est également discrétisée :

$$\kappa_{nl}(M) = \sum_{\alpha=1}^{n_\kappa} N_{\kappa\alpha}(M) \hat{\kappa}_{nl\alpha} = \underline{\mathbf{N}}_\kappa(M) \cdot \hat{\underline{\kappa}}_{nl} \quad (1.74)$$

où  $n_\kappa$  est le nombre de nœuds utilisés pour l'interpolation de  $\kappa_{nl}$ . La notation  $N_{\kappa\alpha}$  désigne les fonctions de forme utilisées pour interpoler  $\kappa_{nl}$ . Ces dernières sont regroupées dans le vecteur  $\underline{\mathbf{N}}_\kappa$ . Enfin  $\hat{\underline{\kappa}}_{nl}$  est le vecteur des valeurs nodales de  $\kappa_{nl}$ . Pour calculer le gradient de la variable non locale, l'équation suivante est utilisée :

$$\underline{\nabla} \kappa_{nl} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\kappa \cdot \hat{\underline{\kappa}}_{nl} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \kappa_{nl}}{\partial X_i} = B_{ij}^\kappa \hat{\kappa}_{nlj} \quad \text{avec} \quad B_{ij}^\kappa = \frac{\partial N_{\kappa j}}{\partial X_i} \quad (1.75)$$

Suivant les résultats de Peerlings [199], une interpolation quadratique des déplacements donne de bons résultats avec une interpolation linéaire pour la variable non locale  $\kappa_{nl}$  (et donc également pour la variable locale  $\kappa$ ).

#### 1.5.4 Réactions élémentaires

Une approximation éléments finis est alors construite pour l'ensemble d'équations (1.64), en utilisant la propriété de linéarité des intégrales (à savoir que l'intégrale sur l'ensemble est égal à la somme des intégrales sur les parties). Ainsi, par exemple, l'équation (1.64/1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sum_{\Omega_E} \left[ \int_{\Omega_E} (\underline{\underline{\mathbf{B}}}_u \cdot \delta \underline{\hat{\mathbf{u}}}) : \bar{\underline{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega_E} (\underline{\underline{\mathbf{N}}}_u \cdot \delta \underline{\hat{\mathbf{u}}}) \cdot \underline{\mathbf{b}}_v d\Omega - \int_{\partial_t \Omega \cap \Omega_E} (\underline{\underline{\mathbf{N}}}_u \cdot \delta \underline{\hat{\mathbf{u}}}) \cdot \underline{\tau}_b dS \right] = 0 \quad (1.76)$$

où  $\Omega_E$  désigne un élément de  $\Omega$ . En appliquant la même décomposition pour toutes les équations de (1.64) le système suivant est obtenu :

$$\sum_{\Omega_E} \left( \left[ \delta \underline{\hat{\mathbf{u}}}, \delta \underline{\hat{\mathbf{p}}}, \delta \underline{\hat{\theta}}, \delta \underline{\hat{\kappa}}_{nl} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \underline{\mathbf{R}}_u - \underline{\mathbf{f}} \\ \underline{\mathbf{R}}_p \\ \underline{\mathbf{R}}_\theta \\ \underline{\mathbf{R}}_\kappa \end{array} \right] \right) = \delta \underline{\mathbf{a}} \cdot (\underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{a}}) - \underline{\mathbf{F}}) = 0 \quad (1.77)$$

où  $\underline{\mathbf{a}}$  est le vecteur global contenant toutes les inconnues nodales. Les réactions élémentaires  $\underline{\mathbf{R}}_u$ ,  $\underline{\mathbf{R}}_p$ ,  $\underline{\mathbf{R}}_\theta$  et  $\underline{\mathbf{R}}_\kappa$  sont alors données par :

$$\underline{\mathbf{R}}_u = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u^T : \bar{\underline{\sigma}} d\Omega \quad (1.78)$$

$$\underline{\mathbf{R}}_p = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_p^T (\bar{\theta} - \theta) d\Omega \quad (1.79)$$

$$\underline{\mathbf{R}}_\theta = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta^T (\bar{P} - P) d\Omega \quad (1.80)$$

$$\underline{\mathbf{R}}_\kappa = \int_{\Omega_E} [(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa^T \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa + c \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\kappa^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\kappa) \cdot \hat{\underline{\kappa}}_{nl} - \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa^T \kappa] d\Omega \quad (1.81)$$

ce qui conduit, par assemblage des réactions élémentaires, au vecteur global des forces internes  $\underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{a}})$ . La contribution élémentaire du vecteur des forces externes est

$$\underline{\mathbf{f}} = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{N}}_u^T \cdot \underline{\mathbf{b}}_v d\Omega + \int_{\partial_t \Omega \cap \Omega_E} \underline{\underline{N}}_u^T \cdot \underline{\mathcal{T}}_b dS \quad (1.82)$$

ce qui conduit, après assemblage, au vecteur global des forces externes  $\underline{\mathbf{F}}$ . Les paramètres de  $\delta \underline{\mathbf{a}}$  étant arbitraires, résoudre le problème éléments finis revient à trouver les composantes de  $\underline{\mathbf{a}}$  vérifiant :

$$\underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{a}}) - \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (1.83)$$

### 1.5.5 Résolution incrémentale

Le problème général est formulé de manière classique sous forme incrémentale (cf chapitre 2 de [257]) :

$$\underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{a}}^{(n+1)}) - \underline{\mathbf{F}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{a}}^{(n)} + \Delta \underline{\mathbf{a}}^{(n)}) - \underline{\mathbf{F}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{0}} \quad (1.84)$$

où  $\underline{\mathbf{a}}^{(n)}$  désigne la solution convergée à l'incrément précédent ( $n$ ) et  $\Delta \underline{\mathbf{a}}^{(n)}$  est l'incrément total des degrés de liberté nodaux entre les incréments ( $n$ ) et ( $n+1$ ). Trouver la solution du système (1.84) nécessite de recourir à un processus de résolution itératif pour chaque incrément de chargement, puisque les relations sont non linéaires. Ainsi, pour trouver la solution convergée à l'incrément ( $n+1$ ), il est nécessaire de procéder par itérations. Entre les itérations  $i$  et  $i+1$ , ce système est linéarisé de sorte à permettre l'utilisation d'une procédure de résolution de Newton-Raphson :

$$\underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{a}}^{(n+1)}) - \underline{\mathbf{F}}^{(n+1)} \approx \underline{\mathbf{R}}^{(n,i)} + \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}^{(n,i)}}{\partial \Delta \underline{\mathbf{a}}} \cdot \delta \underline{\mathbf{a}}^{n,i \rightarrow i+1} - \underline{\mathbf{F}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{0}} \quad (1.85)$$

où  $\delta \underline{\mathbf{a}}^{n,i \rightarrow i+1}$  est la correction itérative de  $\Delta \underline{\mathbf{a}}^{(n)}$  entre l'itération  $i$  et l'itération  $i+1$ . En conséquence, la différence  $[\underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{a}}^{(n)} + \Delta \underline{\mathbf{a}}^{(n)}) - \underline{\mathbf{F}}^{(n+1)}]$  doit être évaluée pour chaque itération  $i$ , avec  $\Delta \underline{\mathbf{a}}^{(n)} = \underline{\mathbf{0}}$  pour  $i = 0$ . L'évaluation de ce vecteur nécessite le calcul du tenseur des contraintes  $\underline{\tilde{\sigma}}$  et de la quantité locale  $\kappa$ , qui est obtenu pour chaque point de Gauss de chaque élément en intégrant les équations du comportement (1.63) comme décrit Annexe A. S'il n'y a pas convergence, l'équation (1.85) indique que la correction itérative à apporter est la solution de :

$$\underline{\underline{K}}_g^{(n,i)} \cdot \delta \underline{\mathbf{a}}^{n,i \rightarrow i+1} = \underline{\mathbf{F}}^{(n+1)} - \underline{\mathbf{R}}^{(n,i)} \quad (1.86)$$

où  $\underline{\underline{K}}_g = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \underline{\mathbf{a}}}$  est la matrice de rigidité globale, obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires  $\underline{\underline{K}}_e$ . Ces matrices élémentaires peuvent être vues comme des matrices par blocs constituées par les dérivées partielles des réactions élémentaires ( $\underline{\mathbf{R}}_u, \underline{\mathbf{R}}_p, \underline{\mathbf{R}}_\theta, \underline{\mathbf{R}}_\kappa$ ) par rapport aux incréments des inconnues nodales ( $\Delta \underline{\hat{\mathbf{u}}}, \Delta \underline{\hat{\mathbf{p}}}, \Delta \underline{\hat{\theta}}, \Delta \underline{\hat{\kappa}}_{nl}$ ) :

– pour les dérivées partielles correspondant à la réaction élémentaire  $\underline{\mathbf{R}}_u$  :

$$\underline{\underline{K}}_{uu}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_u}{\partial \Delta \underline{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u^T : \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{\text{dev}} : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\xi}}} : \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{\text{dev}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u d\Omega \quad (1.87)$$

$$\underline{\underline{K}}_{up}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_u}{\partial \Delta \underline{\mathbf{p}}} = \int_{\Omega_E} \left( \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u^T : \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_p d\Omega \quad (1.88)$$

$$\underline{\underline{K}}_{u\theta}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_u}{\partial \Delta \underline{\theta}} = \int_{\Omega_E} \left( \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u^T : \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{\text{dev}} : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\xi}}} : \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta d\Omega \quad (1.89)$$

$$\underline{\underline{K}}_{u\kappa_{nl}}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_u}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} = \int_{\Omega_E} \left( \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u^T : \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{\text{dev}} : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} \right) \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa d\Omega \quad (1.90)$$

– pour les dérivées partielles correspondant à la réaction élémentaire  $\underline{\mathbf{R}}_p$  :

$$\underline{\underline{K}}_{pu}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_p}{\partial \Delta \underline{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_p^T \otimes \left( \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u \right) d\Omega = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_u}{\partial \Delta \underline{\mathbf{p}}}^T \quad (1.91)$$

$$\underline{\underline{K}}_{pp}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_p}{\partial \Delta \underline{\mathbf{p}}} = \underline{\underline{0}} \quad (1.92)$$

$$\underline{\underline{K}}_{p\theta}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_p}{\partial \Delta \underline{\theta}} = \int_{\Omega_E} -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_p^T \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta d\Omega \quad (1.93)$$

$$\underline{\underline{K}}_{p\kappa_{nl}}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_p}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} = \underline{\underline{0}} \quad (1.94)$$

– pour les dérivées partielles correspondant à la réaction élémentaire  $\underline{\mathbf{R}}_\theta$  :

$$\underline{\underline{K}}_{\theta u}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_\theta}{\partial \Delta \underline{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta^T \otimes \left( \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\xi}}} : \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{\text{dev}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u \right) d\Omega = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_u}{\partial \Delta \underline{\theta}}^T \quad (1.95)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\theta p}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_\theta}{\partial \Delta \underline{\mathbf{p}}} = \int_{\Omega_E} -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta^T \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_p d\Omega = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_p}{\partial \Delta \underline{\theta}}^T \quad (1.96)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\theta\theta}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_\theta}{\partial \Delta \underline{\theta}} = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta^T \otimes \left( \frac{1}{9} \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\xi}}} : \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta d\Omega \quad (1.97)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\theta\kappa_{nl}}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_\theta}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} = \int_{\Omega_E} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta^T \otimes \left( \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} \right) \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa d\Omega \quad (1.98)$$

– pour les dérivées partielles correspondant à la réaction élémentaire  $\underline{\mathbf{R}}_\kappa$  :

$$\underline{\underline{K}}_{\kappa_{nl}u}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_\kappa}{\partial \Delta \underline{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega_E} -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa^T \otimes \left( \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\xi}}} : \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{\text{dev}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u \right) d\Omega \quad (1.99)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\kappa_{nl}p}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_\kappa}{\partial \Delta \underline{\mathbf{p}}} = \underline{\underline{0}} \quad (1.100)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\kappa_{nl}\theta}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_\kappa}{\partial \Delta \underline{\theta}} = \int_{\Omega_E} -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\xi}}} : \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa^T \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\theta d\Omega \quad (1.101)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\kappa_{nl}\kappa_{nl}}^e = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_\kappa}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} = \int_{\Omega_E} \left[ \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa^T \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa + c \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\kappa^T \underline{\underline{\mathbf{B}}}_\kappa - \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa^T \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_\kappa \right] d\Omega \quad (1.102)$$

L'évaluation des matrices de rigidité élémentaires nécessite le calcul de la matrice tangente cohérente  $\underline{\underline{L}}_c$  qui peut se mettre sous forme de matrice par blocs :

$$\underline{\underline{L}}_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\xi}}} & \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} \\ \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\xi}}} & \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\kappa}}_{nl}} \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

et est obtenue lors de l'intégration des équations du comportement (cf Annexe A). L'incrément total des degrés de liberté aux nœuds est alors mis à jour :

$$\Delta \underline{\mathbf{a}}^{(n)} = \sum_i \delta \underline{\mathbf{a}}^{n, i \rightarrow i+1} \quad (1.104)$$

de sorte qu'à convergence :

$$\underline{\mathbf{a}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{a}}^{(n)} + \Delta \underline{\mathbf{a}}^{(n)} \quad (1.105)$$

Le diagramme résumant la procédure de résolution incrémentale est donnée figure 1.13.

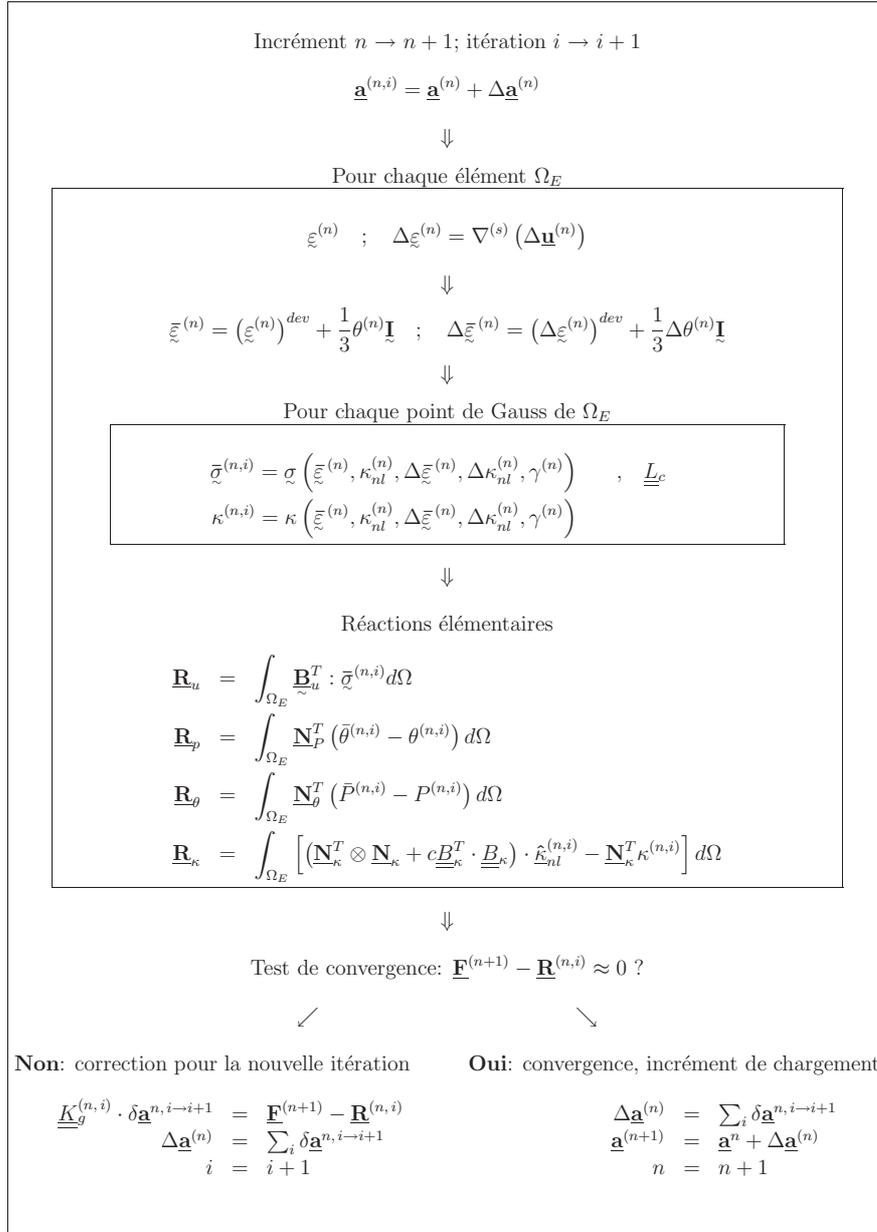


FIG. 1.13 – Procédure de résolution incrémentale

### 1.5.6 Résultats

Les résultats obtenus avec les éléments non locaux aux paragraphes 1.3.5 et 1.4.1 sont alors comparés avec ceux que fournissent les éléments mixtes non locaux  $p2p1p1p1$  (polynômes quadratiques pour interpoler les déplacements et polynômes linéaires pour les trois autres variables  $P$ ,  $\theta$  et  $\kappa_{nl}$ ). Le schéma d'intégration spatial est basé de manière classique sur trois points de Gauss dans le cas de triangles à 6 nœuds. Les résultats sont montrés aux points d'intégration sans aucune interpolation graphique, pour un déplacement imposé de  $\underline{\mathbf{u}}_b = 7.3 \times 10^{-2}$  mm.

Dans un premier temps, le même problème est résolu pour trois maillages différents, correspondant respectivement à des tailles de maille de 0.1 mm, 0.2 mm et 0.3 mm. Le profil d'endommagement résultant pour les éléments mixtes non locaux est présenté figure 1.14. Un profil quasi-identique est obtenu avec des éléments non locaux. L'égalité de la largeur de la bande de localisation dans les trois cas indique bien que la formulation mixte non locale permet de régulariser le problème.

Puis deux simulations sont effectuées sur le second maillage dans le but de comparer les performances des éléments non locaux et des éléments  $p2p1p1p1$  du point de vue des contraintes. Les valeurs des composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{11}(\bar{\varepsilon}, \gamma)$ ,  $\sigma_{22}(\bar{\varepsilon}, \gamma)$  et  $\sigma_{12}(\bar{\varepsilon}, \gamma)$  sont présentées aux points de Gauss sur les figures 1.15, 1.16 et 1.17. Dans le cas des éléments mixtes non locaux, les composantes du tenseur  $\bar{\sigma}$  obtenues sont très proches de celles de  $\sigma$ .

Dans les deux cas, le problème a été régularisé de sorte qu'il n'y ait pas de localisation pathologique des déformations. Cependant, avec les éléments non locaux, les contraintes présentent des motifs de damier, caractéristiques du verrouillage volumique, alors que les éléments mixtes non locaux présentent des contraintes plus lisses. Les résultats obtenus en matière d'évaluation des contraintes et des déformations montrent d'ailleurs des valeurs moins dispersées et probablement plus précises avec les éléments mixtes non locaux. Toutefois, comme dans le cas des éléments mixtes, quelques oscillations persistent pour les champs  $\sigma_{12}$  et  $\bar{\varepsilon}_{33}$ . Mais elles ne posent pas problème dans le cadre des petites déformations, puisque la magnitude du champ  $\bar{\varepsilon}_{33}$  est insignifiante dans ce cas, et que  $\sigma_{12}$  ne contribue que pour une part mineure à l'énergie de la structure.

## 1.6 Conclusion

Une nouvelle formulation mixte non locale à quatre champs a été proposée pour la modélisation de l'endommagement ductile. Les résultats montrent que les éléments  $p2p1p1p1$  réduisent considérablement le verrouillage volumique tout en régularisant le problème. Cependant, l'introduction de trois nouvelles variables a entraîné une augmentation du coût des calculs.

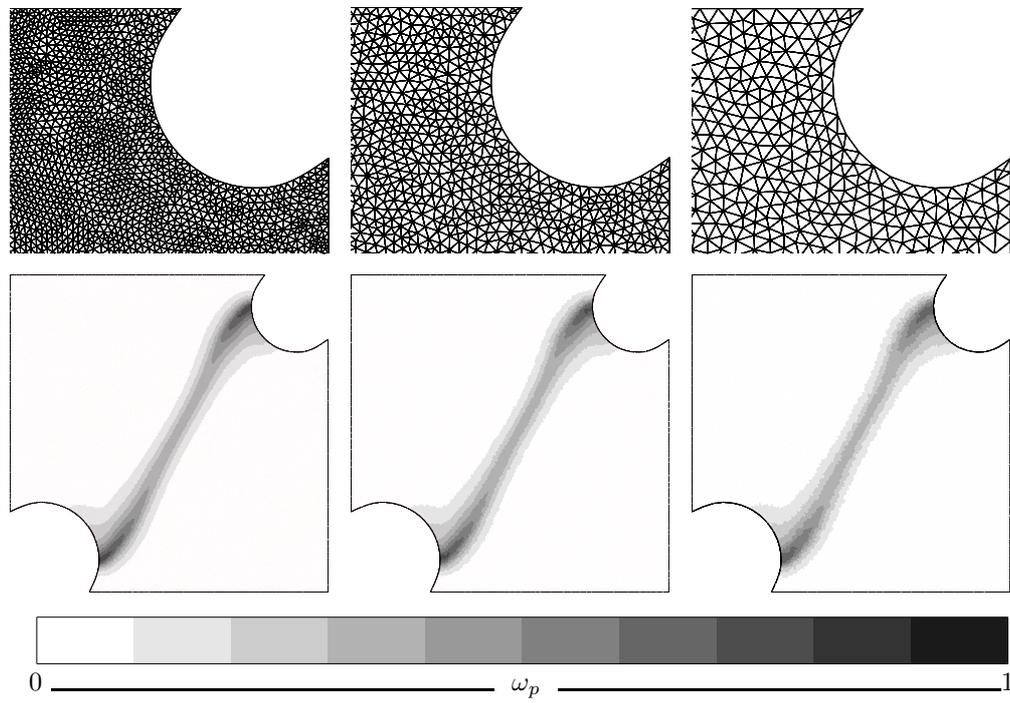


FIG. 1.14 – Endommagement  $w_p$  avec des éléments mixtes non locaux pour trois maillages différents

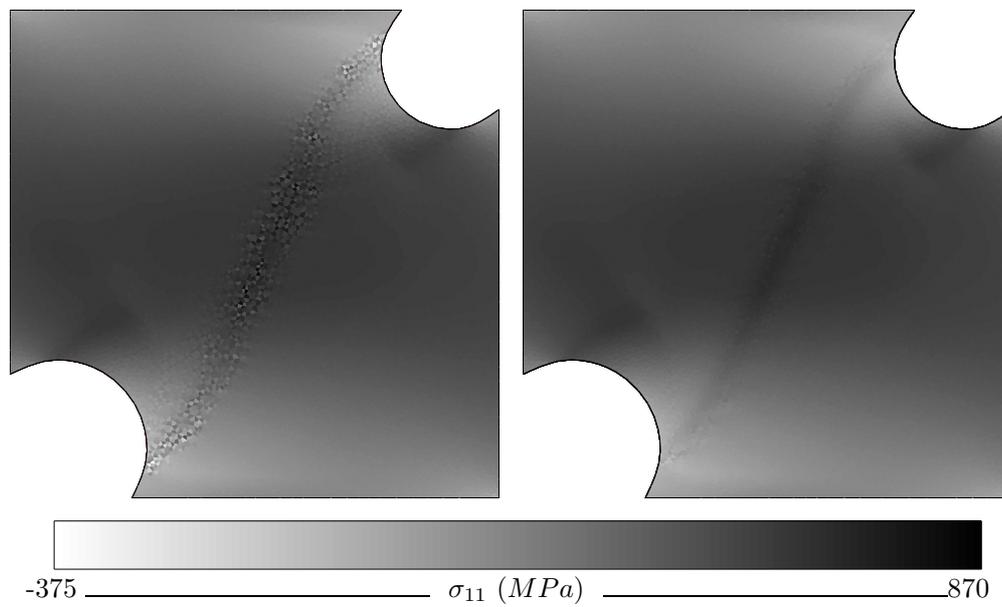
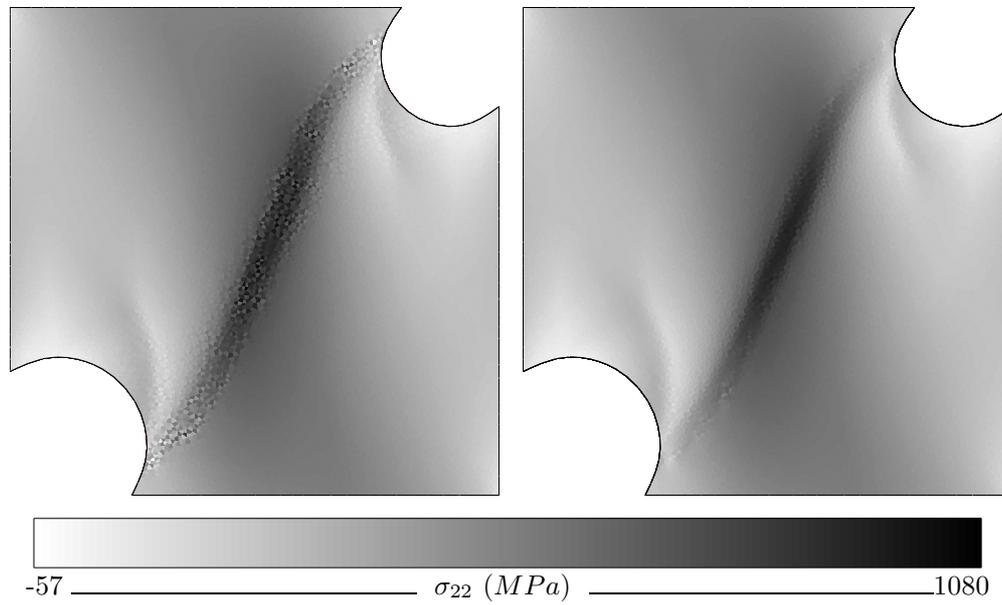
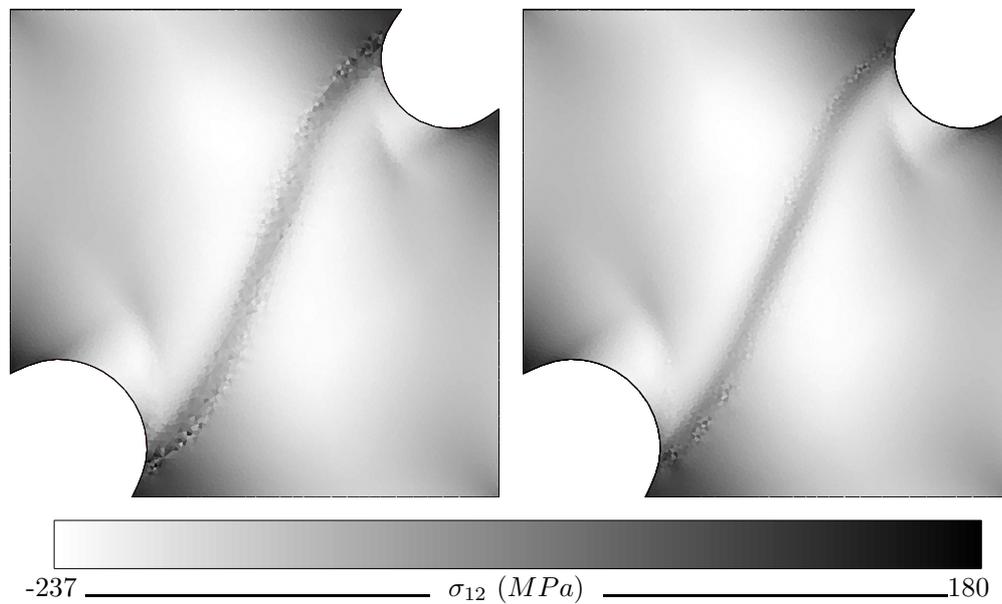


FIG. 1.15 –  $\sigma_{11}$  pour des éléments non locaux (gauche) et mixtes non locaux (droite)

FIG. 1.16 –  $\sigma_{22}$  pour des éléments non locaux (gauche) et mixtes non locaux (droite)FIG. 1.17 –  $\sigma_{12}$  pour des éléments non locaux (gauche) et mixtes non locaux (droite)



## Chapitre 2

# Optimisation du compromis précision/coût

Grâce au développement de nouveaux éléments mixtes non locaux, il est possible d'avoir une description satisfaisante de l'endommagement dans le sens où elle est indépendante de la taille de maille et ne présente pas d'oscillations numériques. Cependant, la qualité du calcul éléments finis dépend également du choix du maillage et du type d'interpolation utilisé. En effet, les estimateurs d'erreur *a priori* montrent que l'erreur de discrétisation diminue si la taille des éléments diminue ou si le degré d'interpolation augmente, pour des problèmes elliptiques symétriques définis positifs. Ainsi, pour assurer une bonne qualité de la solution, il est nécessaire d'utiliser un maillage suffisamment fin dans les zones d'intérêt, dont la position n'est pas connue dans le cas général.

Toutefois, il n'est pas envisageable de subdiviser sans discernement le maillage en vue d'obtenir une qualité considérée comme correcte. En effet, l'augmentation du nombre d'inconnues due à l'approche mixte non locale cause déjà une augmentation du coût de calcul notable par rapport à des éléments classiques. De plus, un raffinement général aboutirait en 3D à la saturation rapide des moyens de calcul actuels, même pour une résolution en linéaire avec des éléments classiques. De même, le degré d'interpolation ne peut pas, lui non plus, être augmenté facilement.

L'amélioration de la qualité d'un calcul par la modification des paramètres de discrétisation nécessite donc la mise en place de procédures efficaces qui permettent d'atteindre le niveau de qualité désiré par l'utilisateur, tout en minimisant au mieux les coûts de calcul. Intervient alors la notion de procédure d'adaptivité, qui est l'objet de ce chapitre. Schématiquement, ces procédures d'adaptivité consistent à :

1. effectuer un premier calcul sur un maillage (qui peut être relativement grossier) ;
2. évaluer les erreurs de discrétisation commises ;
3. utiliser ces résultats pour déterminer les paramètres qui permettent d'obtenir une précision donnée tout en minimisant les coûts de calcul ;
4. construire une nouvelle discrétisation ;
5. effectuer une nouvelle analyse éléments finis.

Après une brève description des méthodes d'adaptivité possibles et des principaux outils nécessaires, le choix de chacun d'entre eux est détaillé et un exemple d'application est proposé afin d'évaluer les performances de la méthode.

## 2.1 Les méthodes d'adaptivité

Le chapitre 5 du livre [146] par Ladevèze et Pelle offre une bonne présentation des méthodes d'adaptivité présentes dans la littérature. Cette partie reprend donc essentiellement les différentes possibilités présentées dans ce chapitre pour ensuite n'en retenir qu'une seule.

### 2.1.1 Les méthodes possibles

Actuellement, il existe trois méthodes principales d'adaptivité connues sous les noms de *r-version*, *h-version* et *p-version* (pour plus de détails voir les ouvrages [42] et [107]).

#### **r-version**

Cette méthode est apparue dans les années soixante-dix [51], [246]. Elle consiste à garder la topologie du maillage (nombre de nœuds et connectivité) ainsi que le type d'interpolation et à chercher à positionner les nœuds de façon à minimiser l'erreur entre la solution exacte et la solution éléments finis. Son application conduit à résoudre un problème d'optimisation sur la structure, comportant les coordonnées des nœuds comme variables d'optimisation. Il s'agit d'une méthode numériquement très coûteuse et d'une efficacité limitée.

Diverses variantes ont été proposées pour en diminuer le coût ; par exemple : positionnement des nœuds sur les courbes iso-densité de déformation [246], ou élaboration d'algorithmes itératifs adaptés [78], [137]. Néanmoins, ces méthodes sont peu utilisées en calcul de structures depuis l'apparition des maillages automatiques.

#### **h-version**

Cette méthode consiste à conserver le type d'interpolation, mais à modifier partiellement ou complètement le maillage (position et nombre des nœuds, connectivité...). En pratique, elle est utilisée sous deux formes différentes :

- la méthode locale de h-raffinement/déraffinement
- la méthode globale de h-remailage

#### *h-raffinement / déraffinement locaux*

Dans ce cas, la trame du maillage initial est conservée, mais les éléments peuvent être soit subdivisés, soit regroupés.

En se limitant à des raffinements locaux, cette méthode peut être facile à mettre en œuvre. Elle a été très utilisée en liaison avec les indicateurs d'erreur : voir par exemple [10], [27], [31], [79], [135], [187], [215].

Le problème avec un raffinement local est la création de nœuds "pendants" (cf figure 2.1) qui nécessitent un traitement spécial pour assurer la continuité du champ déplacement ou de modifier localement le maillage de sorte à rétablir des connexions correctes, compatibles avec la technique des éléments finis en déplacements.

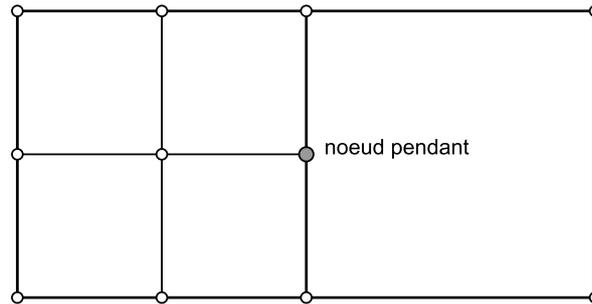


FIG. 2.1 – Nœud pendent

*h-remailage global*

Dans cette méthode, le maillage est entièrement recréé. Le maillage initial sert uniquement de support pour définir les tailles des éléments du nouveau maillage.

Le h-remailage global a été utilisé plus tardivement (cf [146] pour un court historique) car il nécessite l'utilisation de mailleurs automatiques capables de respecter correctement des consignes de tailles. Actuellement pour les problèmes 2D, il s'agit de la méthode d'adaptivité de maillages la plus utilisée car de nombreux mailleurs automatiques 2D robustes ont été développés [107]. En dimension 3, cette méthode présente plus de difficultés pour sa mise en œuvre. Mais il existe aujourd'hui des outils robustes permettant de respecter une carte de taille pour des maillages composés de tétraèdres.

**p-version**

La p-version est plus une méthode d'adaptivité du type d'interpolation qu'une méthode d'adaptivité du maillage au sens strict. En effet, cette méthode consiste à conserver le maillage initial et à augmenter dans certaines zones le degré de l'interpolation utilisée  $p$  ([28], [26], [194], [238], [239]). Cette méthode a des aspects très séduisants, notamment au niveau des coûts de réalisation du maillage puisqu'un seul maillage est nécessaire et comporte souvent peu d'éléments. En compensation, des fonctions d'interpolation de degré élevé sont utilisées au moins dans certaines zones, ce qui peut introduire là encore des nœuds pendants. Il faut en outre prendre garde à ne pas utiliser d'éléments trop aplatis si l'on veut pouvoir utiliser des valeurs élevées de  $p$ . Et en 3D, pour des pièces un peu complexes, cette méthode peut conduire à des maillages finalement plus fins que ce que l'on pouvait espérer a priori.

Actuellement, cette méthode est encore peu utilisée dans l'industrie car, à l'exception de quelques codes réalisés spécialement pour la p-version, par exemple [129], [237], les codes industriels possèdent rarement des éléments de degré supérieur à 2. Une autre difficulté encore relativement mal résolue est de prévoir le degré  $p$  à utiliser pour respecter une qualité donnée tout en minimisant les coûts de calcul.

**h-p-version**

Des études ont aussi été réalisées pour utiliser simultanément des changements de la taille des éléments et des changements des fonctions d'interpolation [14], [181], [184], [264]. Cette technique, appelée h-p-version, permet d'obtenir des taux de convergence très élevés. Mais comme pour la p-version, la prédiction des paramètres satisfaisants pour atteindre une qualité donnée n'est pas facile à réaliser.

### 2.1.2 Méthode retenue et outils nécessaires

Étant donné l'ampleur des progrès effectués dans le domaine du remaillage 3D et les difficultés associées aux méthodes dites *p-version*, la méthode de h-remailage global est retenue.

Dans ce cas, après un premier calcul, les erreurs de discrétisation commises sont évaluées à l'aide d'un estimateur d'erreur. Ce dernier doit permettre de déterminer le moment où il devient nécessaire de changer de maillage et de localiser les zones où le maillage doit être (dé)raffiné. Puis sur la base de ces informations, un critère de remaillage doit permettre de déterminer la carte de tailles du nouveau maillage à construire. Enfin, ces informations sont fournies à un générateur de maillage afin qu'il construise un maillage plus adapté.

Ces étapes sont les seules nécessaires pour les problèmes linéaires, avant de pouvoir effectuer une nouvelle analyse éléments finis pour vérifier que le maillage obtenu permet bien d'atteindre l'objectif de précision voulu. Cependant, il en est autrement pour les problèmes non linéaires pour lesquels la réponse de la structure dépend de l'histoire du chargement. Cette histoire est caractérisée par des variables internes et des variables d'état qui sont stockées soit aux points d'intégration, soit aux nœuds. Or, dans un premier temps, le nouveau maillage obtenu est purement géométrique et ne contient pas ces informations. Recommencer le calcul depuis le début n'étant pas une option envisageable, il est nécessaire de transférer ces données de l'ancien maillage au nouveau maillage, de sorte à pouvoir reprendre le calcul au même moment.

Au final, la méthode d'adaptation de maillage retenue nécessite les choix d'un estimateur d'erreur de discrétisation, d'un critère de remaillage et d'une procédure de transfert, qui sont détaillés dans les parties suivantes.

## 2.2 Estimateurs d'erreur d'approximation *a posteriori*

### 2.2.1 Introduction

Historiquement, les premiers estimateurs qui sont apparus étaient globaux, et pourraient plutôt être désignés comme des indicateurs d'erreur. Ils ne visent pas à fournir une erreur absolue vis-à-vis de la solution exacte, continue (qui n'est pas connue), mais à apprécier l'amélioration (ou la dégradation) de la qualité de la solution entre deux discrétisations différentes. Ils permettent une évaluation de l'erreur de troncature par élément et la construction d'une carte spatiale des erreurs, utilisable pour reconstruire une répartition de densité de maille optimisée. Depuis quelques années, des estimateurs d'erreur locaux ont été introduits qui permettent, eux, d'encadrer avec plus de précision l'erreur commise sur un domaine restreint ou sur une quantité d'intérêt locale.

### 2.2.2 Indicateurs d'erreur globale

Les estimateurs d'erreur globale s'appuient principalement sur des considérations heuristiques et ont un aspect plutôt qualitatif en donnant un ordre de grandeur de la mesure de l'erreur : ce sont des *indicateurs d'erreur*. Classiquement, dans le cadre des méthodes éléments finis en déplacements, le champ des déplacements joue un rôle privilégié et l'erreur est définie comme la différence entre le champ des déplacements exacts et le champ des déplacements éléments finis :

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u} \quad (2.1)$$

On peut évidemment en déduire une erreur sur les contraintes, par exemple dans le cadre de l'élasticité :

$$\underline{\sigma}^{ex} - \underline{\sigma} = \underset{\sim}{\mathbf{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{e}}) \quad (2.2)$$

Deux approches sont possibles.

### Approche directe

L'approche directe consiste à essayer d'obtenir directement, à partir de la solution approchée calculée (en agissant donc *a posteriori*), une estimation de l'erreur due à la discrétisation des équations, l'*erreur globale*, qui va porter sur l'intégralité de la structure étudiée.

Les premières méthodes développées étaient dédiées à des modèles décrits par des équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires. Elles s'appliquent donc à des problèmes physiques tels que ceux de thermique stationnaire ou d'élasticité linéaire. Les outils performants qu'elles ont fait apparaître sont maintenant largement reconnus et utilisés ; une revue de ces outils est donnée dans [248], [249], [4], [19], [231], [147], [146]. Le résumé présenté dans ce paragraphe s'appuie notamment sur l'ouvrage [146].

Parmi les très nombreuses propositions qui ont été, et sont encore, faites dans ce domaine, celles qui sont les plus utilisées peuvent être classées en trois catégories :

- les mesures d'erreur fondées sur le concept d'erreur en relation de comportement et sur les techniques adaptées de construction de champs admissibles, initiées par Ladevèze [142] ;
- les estimateurs d'erreur fondés sur les défauts d'équilibre de la solution éléments finis, avec notamment les travaux de Babuška et al. [16] ;
- les indicateurs d'erreur construits sur les défauts de régularité de la solution éléments finis, développés principalement par Zienkiewicz et Zhu [261].

Quelques remarques générales avant de décrire brièvement ces familles d'estimateurs d'erreur pour des problèmes en élasticité (pour une présentation plus détaillée voir [197]). Toutes ces méthodes ont été développées pour des problèmes où l'inconnue primale est uniquement le champ des déplacements  $\underline{\mathbf{u}}$ . Le principe général est alors le même : associer à la solution éléments finis  $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\sigma})$  un nouveau couple  $(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\sigma}^*)$  qui est censé être un meilleur représentant de la solution exacte. Les différents estimateurs se distinguent ensuite par les critères qui vont définir la construction de ce nouveau couple. L'erreur est alors estimée à partir de l'écart entre le meilleur représentant et la solution éléments finis.

Une première série d'estimateurs d'erreur est obtenue en imposant à  $(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\sigma}^*)$  de vérifier deux des trois équations du problème de référence (l'équation d'équilibre 1.12, les conditions limites en déplacement 1.13 et la relation de comportement 1.17). L'estimateur associé est alors une mesure du résidu de l'équation qui n'est *a priori* pas vérifiée. Les estimateurs d'erreur en relation de comportement entrent dans ce cadre : c'est la relation de comportement qui n'est *a priori* pas vérifiée. Il en est de même des estimateurs fondés sur les défauts d'équilibre de la solution éléments finis : la relation de comportement et les contraintes cinématiques (admissibilité cinématique) sont alors vérifiées exactement.

Une autre famille d'estimateurs peut être obtenue en imposant à  $(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\sigma}^*)$  de vérifier exactement une seule des équations du problème de référence. L'estimateur mesure alors la qualité de vérification des deux autres équations. La proposition de Debonnie et al. [76], [75] se situe dans ce cadre ; l'équation exactement vérifiée est l'équation d'équilibre et les résidus portent sur la relation de comportement et les équations de compatibilité.

La famille des estimateurs construits sur les défauts de régularité entre dans un cadre où aucune des équations du problème de référence n'est exactement vérifiée.

Toutes ces démarches fournissent à l'utilisateur une mesure, plus ou moins précise selon le type de méthodes, de l'erreur globale de discrétisation  $\underline{\mathbf{e}}$  et une mesure de la contribution  $\underline{\mathbf{e}}_E$  à l'erreur globale de chaque élément  $\Omega_E$  du maillage utilisé. Une mesure globale couramment utilisée est la norme énergétique, car elle a un sens physique fort ; elle est équivalente aux normes standards de Sobolev et peut facilement se restreindre pour donner des normes locales.

L'erreur de discrétisation peut également porter sur une autre variable que les déplacements, en particulier sur un tenseur d'ordre 2 ou sur une variable scalaire. La notation  $\underline{\mathbf{e}}$  est cependant gardée pour plus de simplicité en considérant qu'une notation de Voigt est implicitement utilisée pour le tenseur d'ordre 2 et que le scalaire peut être vu comme un vecteur de taille un.

### *Méthodes basées sur l'erreur de comportement*

La notion d'erreur en relation de comportement a été présentée pour la première fois par Ladevèze dans [142]. Les travaux relatifs à cette période ont été regroupés dans [143]. Ils concernaient alors les problèmes de thermique et d'élasticité linéaire en 2D. Ces méthodes ont depuis été étendues à l'élasticité incompressible par Ladevèze et al. [145] et aux cas 3D par Coorevits et al. [63].

Cette démarche repose sur un partitionnement des équations du problème à résoudre en deux groupes :

- les conditions d'admissibilité : équations de liaison, équation d'équilibre et conditions initiales ; ce groupe étant le plus fiable, ces équations doivent être vérifiées exactement ;
- et la relation de comportement, qui est la moins fiable des équations.

L'idée est de déterminer, à partir de la solution approchée du problème de référence calculée, une nouvelle solution  $\underline{\mathbf{u}}^*$  cinématiquement admissible (CA) et  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*$  statiquement admissible (SA). Cette nouvelle solution vérifie alors une certaine relation de comportement qui, en général, diffère de la relation de comportement du matériau (sauf si cette nouvelle solution est la solution exacte). Ainsi, la qualité de l'approximation peut être appréciée en comparant cette relation de comportement à celle du matériau. Pour quantifier cette erreur, des normes de type énergétique ou autre, qui ont des bases physiques fortes, sont utilisées.

Les mesures de l'erreur en relation de comportement globale et élémentaire associées au couple admissible  $(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\boldsymbol{\sigma}}^*)$  s'écrivent respectivement :

$$\| \underline{\mathbf{e}} \| = \| \underline{\boldsymbol{\sigma}}^* - \underline{\mathbf{C}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}^*) \|_{\underline{\mathbf{C}}^{-1}, \Omega} \quad \text{et} \quad \| \underline{\mathbf{e}}_E \| = \| \underline{\boldsymbol{\sigma}}^* - \underline{\mathbf{C}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}^*) \|_{\underline{\mathbf{C}}^{-1}, \Omega_E} \quad (2.3)$$

avec :

$$\| \bullet \|_{\underline{\mathbf{C}}^{-1}, \Omega} = \left[ \int_{\Omega} (\bullet : \underline{\mathbf{C}}^{-1} : \bullet) d\Omega \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad \| \bullet \|_{\underline{\mathbf{C}}^{-1}, \Omega_E} = \left[ \int_{\Omega_E} (\bullet : \underline{\mathbf{C}}^{-1} : \bullet) d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

À partir de cet estimateur d'erreur, on peut obtenir un encadrement de l'erreur vraie donc l'erreur en relation de comportement converge comme l'erreur vraie [57]. Mais son utilisation est relativement coûteuse.

*Méthodes basées sur les défauts de régularité*

Il s'agit d'une approche relativement simple, aussi bien dans son principe que dans sa mise en œuvre, de l'estimation d'erreur. Elle consiste à dire qu'une approximation plus régulière du gradient obtenue à partir du gradient de l'approximation éléments finis (qui présente des discontinuités au niveau des interfaces entre les éléments), constituerait une meilleure approximation du gradient réel. On peut les trouver sous le nom de méthodes de recouvrement de gradient, ou encore *méthodes fondées sur le lissage des contraintes*, puisqu'elles s'appliquent à n'importe quel gradient ou combinaison linéaire de gradients.

La procédure consiste à utiliser l'approximation éléments finis du gradient, par exemple le champ des contraintes  $\underline{\sigma}$ , pour construire une solution lissée  $\underline{\sigma}^*$ , dont les différentes composantes sont des fonctions polynômiales, globalement continues, de plus haut degré.

En général, on cherche à utiliser les fonctions de forme qui ont servi au calcul de  $\underline{\mathbf{u}}$  et qui permettent d'obtenir une approximation d'un degré supérieure. L'essentiel du travail consiste donc à chercher des valeurs aux nœuds pour l'approximation lissée en projetant le champ d'ordre inférieur défini aux points de Gauss, par différentes méthodes (cf l'article de Babuška et Rheinboldt [18] ou les travaux de Zienkiewicz et Zhu avec les méthodes ZZ1 [261] et ZZ2 [262],[263]). C'est pourquoi on trouve également ces méthodes sous le nom de *méthodes par projection de flux*.

Les méthodes de lissages sont universelles dans le sens où il n'est pas nécessaire de faire intervenir des résidus ou des équations différentielles partielles pour les appliquer.

Les mesures de l'erreur associée au champ des contraintes  $\underline{\sigma}$  globale et élémentaire s'écrivent respectivement :

$$\| \underline{\mathbf{e}} \| = \| \underline{\sigma}^* - \underline{\sigma} \|_{\tilde{\mathbf{C}}^{-1}, \Omega} \quad \text{et} \quad \| \underline{\mathbf{e}}_E \| = \| \underline{\sigma}^* - \underline{\sigma} \|_{\tilde{\mathbf{C}}^{-1}, \Omega_E} \quad (2.5)$$

Cette méthode fournit plus un indicateur d'erreur qu'une estimation avec borne garantie ; ce qui est suffisant pour bon nombre d'applications comme l'adaptation de maillage.

*Méthodes fondées sur les résidus d'équilibre*

Dans la méthode des éléments finis en déplacement, l'approximation principale porte sur les équations d'équilibre. Ce sont ces défauts d'équilibre qui sont appelés résidus. Pour chaque élément  $\Omega_E$  du maillage, on définit ainsi le résidu intérieur  $\underline{\mathbf{r}}_E$  par :

$$\underline{\mathbf{r}}_E = \nabla \underline{\sigma}|_E + \underline{\mathbf{b}}_v \quad , \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega_E \quad (2.6)$$

Les résidus  $\underline{\mathbf{r}}_E$  mesurent la non vérification de l'équation d'équilibre intérieur.

De même, sur chaque face  $\Gamma$  d'un élément, non incluse dans  $\partial_u \Omega$ , on définit le résidu  $\underline{\mathbf{t}}_\Gamma$  par :

$$\underline{\mathbf{t}}_\Gamma = \underline{\sigma}|_E \cdot \underline{\mathbf{n}}_E + \underline{\Phi}_E \quad (2.7)$$

avec :

- si  $\Gamma$  n'est pas une face de  $\partial_t \Omega$  :  $\underline{\Phi}_E = \underline{\sigma}|_{\tilde{E}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\tilde{E}}$ , où  $\Omega_{\tilde{E}}$  est l'élément adjacent à l'élément  $\Omega_E$  suivant la face  $\Gamma$  ;
- si  $\Gamma$  est une face de  $\partial_t \Omega$  :  $\underline{\Phi}_E = -\underline{\tau}_b$ .

Les résidus  $\underline{\mathbf{t}}_\Gamma$  mesurent la discontinuité du vecteur contrainte dans la direction  $\underline{\mathbf{n}}_E$  à l'interface entre deux éléments et la non vérification des conditions d'équilibre sur  $\partial_t \Omega$ .

Les estimateurs d'erreur *a posteriori* fondés sur les résidus sont tous construits en exploitant le fait que l'erreur en solution  $\mathbf{e} = \mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}$  est solution du problème d'élasticité dont les données en efforts (à l'intérieur et sur les interfaces du maillage utilisé) sont les résidus des équations d'équilibre :

$$\mathbf{e} \in \mathbf{U}_0 \quad \text{et} \quad \forall \delta \mathbf{U} \in \mathbf{U}_0, \quad \text{avec } \mathbf{U}_0 = \{\delta \mathbf{U} \text{ "régulier" et tel que : } \delta \mathbf{U}|_{\partial u \Omega} = \mathbf{0}\}$$

$$\int_{\Omega} \xi(\mathbf{e}) : \underset{\approx}{\mathbf{C}} : \xi(\delta \mathbf{U}) d\Omega = \sum_{\Omega_E} \int_{\Omega_E} \mathbf{r}_E \cdot \delta \mathbf{U} d\Omega - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma} \cdot \delta \mathbf{U} d\Gamma \quad (2.8)$$

Schématiquement, on peut distinguer :

- les estimateurs explicites qui utilisent directement l'équation précédente pour obtenir une estimation globale de certaines normes de l'erreur  $\mathbf{e}$  ;
- les estimateurs implicites qui utilisent des approximations de la solution de cette équation, obtenues en résolvant des problèmes locaux élément par élément ou par paquet d'éléments. Différentes versions ont été proposées notamment par Babuška et al. [17], [15], puis Demkowicz & al [77].

### Approche indirecte

Dans le contexte de la construction d'estimateurs d'erreur, l'étude directe de l'erreur d'approximation a fait l'objet de nombreux travaux. Mais il existe également des approches indirectes, moins étudiées, comme l'estimation de l'erreur d'interpolation  $\tilde{\mathbf{e}}$ , c'est-à-dire l'écart entre la solution exacte  $\mathbf{u}^{ex}$  et l'interpolé linéaire de  $\mathbf{u}^{ex}$  par élément du maillage  $\mathcal{M}$ , notée  $\mathbf{\Pi}_h(\mathbf{u})$  :

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{u}^{ex} - \mathbf{\Pi}_h(\mathbf{u}) \quad (2.9)$$

C'est une méthode qui permet notamment de s'abstraire du problème physique (de l'opérateur), et qui permet de contrôler l'erreur d'approximation. De plus, d'après le lemme de Céa, on sait que l'erreur d'approximation est donc majorée par l'erreur d'interpolation [59] :

$$\| \mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u} \| \leq \| \mathbf{u}^{ex} - \mathbf{\Pi}_h(\mathbf{u}) \| \quad (2.10)$$

où la norme employée n'est plus la norme énergétique mais la norme associée au produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^2$ . Or, les études faites sur l'erreur d'interpolation montrent (expérimentalement) que le lien entre l'erreur d'interpolation et l'erreur d'approximation est beaucoup plus fort que la majoration donnée par ce lemme. Par conséquent, l'erreur d'interpolation fournit un bon estimateur d'erreur [100]. Pour des exemples d'utilisation voir [103], [5] et [6].

### Qualités d'un estimateur

Pour comparer les différentes méthodes disponibles dans la littérature, on dispose de plusieurs critères :

- critères de qualité intrinsèque permettant de comparer l'erreur mesurée avec l'erreur "vraie" réellement commise ;
- critère de fiabilité : l'erreur estimée majore-t-elle l'erreur "vraie" ?
- sensibilité à des situations particulières de maillages : maillages grossiers, éléments aplatis, éléments distordus, etc. ;
- sensibilité à des comportement particuliers : anisotropie des matériaux, etc. ;

- critères économiques : simplicité de mise en œuvre, coût d'utilisation, etc. ;
- étendue du domaine d'application.

Les critères suivants sont les plus couramment utilisés.

#### *Fiabilité et efficacité*

Notons  $\|\underline{\mathbf{e}}^{ex}\|$  la mesure de l'erreur vraie globale, par opposition à la mesure estimée de l'erreur globale  $\|\underline{\mathbf{e}}\|$ .

Un estimateur est dit *fiable* si :

$$\|\underline{\mathbf{e}}^{ex}\| \leq C_{fia} \|\underline{\mathbf{e}}\| + h.o.t.fia \quad (2.11)$$

Un estimateur est dit *efficace* si :

$$\|\underline{\mathbf{e}}\| \leq C_{eff} \|\underline{\mathbf{e}}^{ex}\| + h.o.t.eff \quad (2.12)$$

Ici  $C_{fia}$  et  $C_{eff}$  sont des constantes multiplicatives, indépendantes de la taille de maille, et *h.o.t.* désigne les termes de plus haut degré. Du point de vue de la fiabilité, il est évidemment intéressant d'utiliser des estimateurs tels que  $C_{fia} = 1$ .

#### *Comportement asymptotique*

Un estimateur a un comportement asymptotique exact s'il est efficace et fiable, avec  $C_{fia} = C_{eff}^{-1}$ . L'erreur "vraie" et l'estimation d'erreur utilisée tendent alors vers zéro simultanément.

#### *Indice d'efficacité*

Le critère de comparaison le plus utilisé est l'indice d'efficacité, qui est défini par :

$$\gamma = \frac{\|\underline{\mathbf{e}}\|}{\|\underline{\mathbf{e}}^{ex}\|} \quad (2.13)$$

Une méthode d'estimation d'erreur est d'autant plus pertinente que l'indice d'efficacité global se rapproche de 1. Elle est de plus conservative si cet indice reste supérieur à 1 (ce qui est utile en dimensionnement). Pour évaluer  $\gamma$ , la méthode la plus sûre consiste à utiliser des problèmes pour lesquels la solution exacte est connue analytiquement. Une autre technique, largement répandue, consiste à prendre comme solution *exacte* une solution éléments finis obtenue sur un maillage très fin. Pour obtenir des résultats fiables, il est indispensable que ce maillage soit nettement plus fin que le maillage sur lequel l'erreur est estimée et il faut prendre quelques précautions pour transférer les champs d'un maillage à l'autre. Enfin, il est courant d'essayer d'analyser la précision des estimateurs d'erreur implantés dans les codes éléments finis en vérifiant l'indice d'efficacité sur quelques cas tests appelés *benchmarks* (voir par exemple le travail de McNeal et Harder [159]).

De manière analogue, on peut définir un indice local d'efficacité par élément (ou sur des paquets d'éléments).

### 2.2.3 Estimateurs d'erreur locale

Ce type d'estimateurs a été développé plus récemment. Il répond au besoin des ingénieurs concepteurs de bureau d'étude d'avoir des estimations de l'erreur locale. En effet, pour le dimensionnement, une information sur l'erreur globale reste insuffisante, dans la mesure où les critères dimensionnants font appels le plus souvent à des valeurs locales. On a donc besoin d'outils qui permettent de connaître avec précision l'erreur commise dans une région d'intérêt, i.e. de véritables *estimateurs* d'erreur locale, qui ont un aspect plus quantitatif et qui approximent la mesure de l'erreur en tendant vers la valeur exacte si la discrétisation éléments finis devient très fine. On peut notamment trouver une bonne bibliographie sur le sujet dans la thèse de Chamoin [57] sur laquelle la partie suivante s'appuie essentiellement.

#### Erreur de pollution

Des recherches menées par Nitsche, Schatz et Wahlbin (voir [179], [219], [220] et [251]) sur les estimations d'erreur *a priori* indiquent que sur une région  $\omega_0$ , l'erreur dans la norme  $L_2$  ou  $L_\infty$  peut être bornée par la somme de deux termes :

- l'un déterminé par les propriétés d'interpolation *locales* et la régularité de la solution près de  $\omega_0$ , que l'on appelle *erreur locale* : c'est la contribution par élément fournie par les indicateurs d'erreur mentionnés précédemment ;
- et l'autre, dite *erreur de pollution*, est déterminée par des facteurs d'origine plus lointaine comme la régularité de la solution en dehors de cette région, la régularité de la frontière, etc., que les indicateurs d'erreurs sont incapables de détecter d'après des travaux plus récents de Babuška et al. [21], [24].

Dans certains cas, il est important de maîtriser cette erreur de pollution.

- Dans une procédure de réanalyse locale, le raffinement peut ne pas donner la convergence d'erreur en  $h^q$  (avec  $q$  un coefficient positif dépendant de la régularité de la solution exacte) si le maillage grossier en dehors de la zone d'intérêt apporte une erreur de pollution importante.
- Dans [20], Babuška et al. montrent que si l'erreur de pollution n'est pas négligeable devant l'erreur locale, alors la précision des dérivées obtenues par lissage peut ne pas être meilleure que les dérivées obtenues directement à partir de la solution éléments finis.

Différents algorithmes permettant d'évaluer *a posteriori* l'erreur de pollution sont proposés dans les références [23], [183] et [123] notamment.

Si, pour des cas de réanalyse locale où l'on souhaite uniquement remailler la zone d'intérêt, il est nécessaire de prendre en compte l'erreur de pollution, c'est une précaution inutile dans d'autres circonstances. Ainsi, dans les références [21] et [20], les auteurs ont montré que l'effet de pollution est négligeable pour les maillages construits grâce à une technique d'adaptation globale basée sur la norme en énergie de l'erreur sur le domaine entier. Il faut donc adapter l'estimation d'erreur à ses besoins pour obtenir des coûts de calcul moindres.

#### Erreur sur une quantité d'intérêt

Pour le dimensionnement des structures, les ingénieurs concepteurs de bureau d'étude peuvent être également amenés à vouloir connaître l'erreur sur une quantité locale  $I$  intéressante comme la contrainte, le déplacement, etc. L'erreur peut alors être définie par :

$$\Delta I = I(\underline{\mathbf{u}}_{ex}) - I(\underline{\mathbf{u}})$$

Les approches locales correspondantes sont assez récentes. Elles permettent d'obtenir des bornes exactes de l'erreur locale sur la quantité d'intérêt dans un certain nombre de cas, grâce à une technique d'extraction associée à la résolution d'un problème adjoint [57], [149]. Cependant elles ne sont pas encore établies pour l'ensemble des modèles (notamment non-linéaires) auxquels l'ingénieur est confronté.

### 2.2.4 Choix d'une méthode

Les informations sur les erreurs de discrétisation fournies par l'estimateur doivent être utilisées pour une adaptation globale du maillage. Le cas de la réanalyse locale peut donc être écarté et l'effet de pollution négligé. Le choix se restreint donc aux différents indicateurs d'erreur globale, qui fournissent une marge d'erreur indicative, correspondant à la partie locale de l'erreur (par opposition à l'erreur de pollution).

Seuls les trois principaux types d'estimateurs d'erreur globale par approche directe sont d'abord retenus, car ce sont les estimateurs pour lesquels il y a un plus grand nombre d'études disponibles dans la littérature, en particulier pour des problèmes non linéaires. Pour les départager, il faut recourir aux diverses études comparatives qui ont pu être faites entre ces trois types d'indicateurs d'erreur. L'analyse comparative la plus exhaustive a été menée par Babuška et Strouboulis ([22], [25], [23], [233]). Il en ressort :

- que la qualité d'un estimateur dépend de la topologie du maillage, de la solution exacte, de l'aplatissement des éléments et de l'anisotropie ;
- que la convergence asymptotique des estimateurs n'arrive que pour certains types de maillages uniformes ;
- que les estimateurs par projection de flux sont meilleurs que les estimateurs basés sur les résidus pour les solutions étudiées dans [22].

Dans [148], les auteurs comparent la méthode de l'erreur en relation de comportement optimisée avec la méthode la plus performante parmi celles reposant sur les défauts de régularité de la solution éléments finis, la méthode dite ZZ2. Il est montré que bien que très performant au niveau global, ce dernier estimateur ne donne pas des indices d'efficacité locaux conservatifs et que la performance de ce dernier peut être mise en défaut sur des maillages très grossiers où la technique de lissage fonctionne mal. Quant à l'erreur en relation de comportement classique, elle est très sensible à l'aplatissement des éléments. L'estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement, avec construction optimisée du champ  $\varrho^*$ , conduit à un estimateur de bien meilleure qualité. Il est conservatif, en contrepartie d'un coût de calcul plus important (des techniques de construction par patch ont été développées pour réduire ce coût).

Enfin, dans [146], on trouve une comparaison pour un problème de thermique, issu de la référence [22]. Il en ressort que l'estimateur en relation de comportement se comporte très bien (avec un indice d'efficacité très proche de 1), pour ce type de problème, contrairement aux estimateurs construits sur les résidus d'équations d'équilibre.

D'autres travaux ont également été menés, par exemple par Beckers et al. [34] et par Oden et al. [182].

De l'ensemble de ces travaux, on peut conclure que pour fournir des résultats destinés à l'adaptation de maillage, l'estimateur ZZ2 est un bon compromis en raison de sa plus grande robustesse par rapport à un estimateur utilisant la méthode des résidus et de son faible coût de calcul par rapport à l'estimateur en relation de comportement. Bien sûr, les mesures associées ne sont que des indications d'erreur et ne permettent en aucun cas d'avoir une mesure exacte

d'erreur. Cependant, ces indications sont suffisantes pour le remaillage et une mesure exacte d'erreur serait de toute façon trop coûteuse pour pouvoir être intégrée à un processus d'adaptivité. De plus, dans le cas d'une formulation mixte non locale, les inconnues primales ne se limitent pas aux déplacements. Ceci rend difficile l'adaptation des estimateurs en relation de comportement et ceux reposant sur les résidus d'équilibre aux problèmes d'endommagement ductile avec régularisation. En revanche, comme expliqué par la suite, il est possible d'utiliser n'importe quel champ gradient pour la méthode de lissage. Ceci fait de l'estimation fondée sur les défauts de régularité le meilleur choix pour cette étude.

### 2.2.5 Estimateur basé sur la méthode ZZ2

#### Recouvrement par lissage local (ZZ2)

##### *Principe*

L'estimateur d'erreur reposant sur les défauts de régularité le plus performant pour les problèmes linéaires a été proposé par Zienkiewicz et Zhu en 1992 : il est connu sous le nom de *Superconvergent Patch Recovery* ([262], [263]). Il consiste à évaluer les valeurs aux nœuds grâce à une fonction polynômiale qui s'approche au plus près, au sens des moindres carrés, des valeurs du gradient en des points d'échantillonnage optimaux à proximité.

##### *Choix des points d'échantillonnage*

L'approximation éléments finis du gradient d'une fonction peut être localement très éloignée de la valeur exact du gradient, comme l'illustre la figure 2.2. Cependant, en certains points dans les éléments, les résultats sont quasiment exacts. Sur l'exemple de la figure 2.2, ces points sont proches du centre des éléments. En fait, ils correspondent aux points de Gauss-Legendre des éléments. En ces points, la convergence du gradient est d'un ordre supérieur, donc du même ordre que celui des déplacements. C'est pourquoi ils sont dits *superconvergents*.

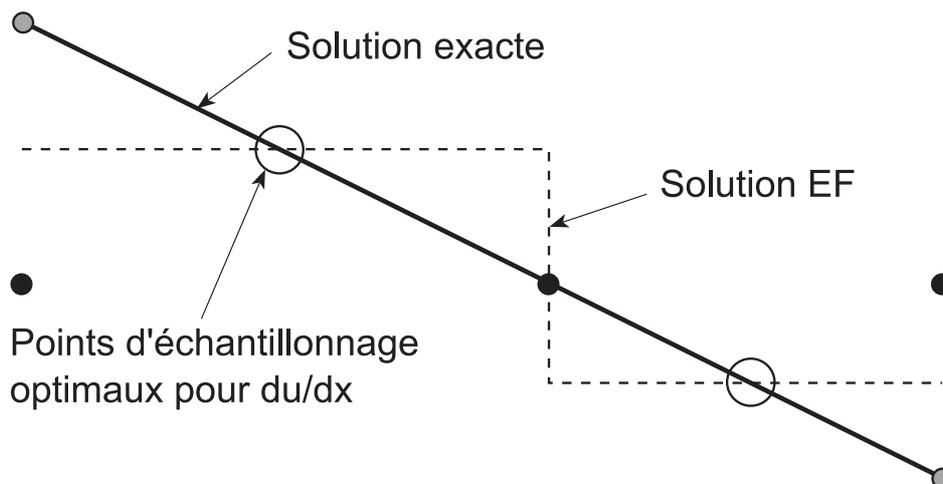


FIG. 2.2 – Choix des points d'échantillonnage optimaux : l'approximation du gradient d'une fonction quadratique est exacte au centre des éléments utilisant des fonctions d'interpolation linéaires pour les déplacements

L'utilisation des points de superconvergence comme points d'échantillonnage est motivée par le fait qu'ils offrent une plus grande précision et un ordre plus élevé de convergence que les autres [30], [170], [158], [253]. Cependant, les propriétés de superconvergence n'ont été prouvées que dans très peu de cas [253]. De manière générale, en l'absence de démonstration de propriétés de superconvergence, Zienkiewicz et Taylor ([257], chapitre 14) conseillent d'utiliser les points de Gauss-Legendre comme points d'échantillonnage (sauf pour des triangles quadratiques) : voir figure (2.3).

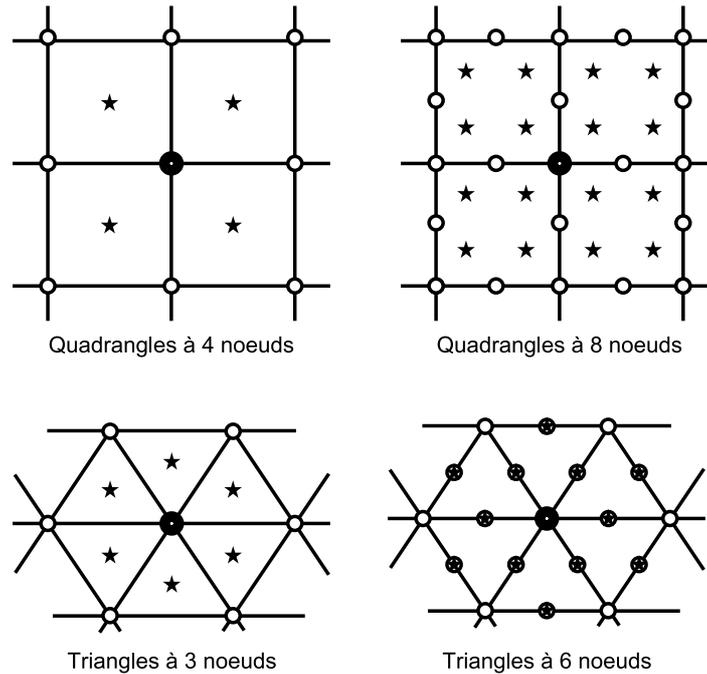


FIG. 2.3 – Points d'échantillonnage optimaux ( $\star$ ) pour des quadrangles et des triangles

### *Construction de l'approximation*

Cette fonction polynômiale est définie sur une zone d'influence, ou *patch*, autour de chaque nœud sommet interne (autrement dit, qui n'est pas sur la frontière). Le patch associé est constitué de tous les éléments qui ont ce nœud en commun, comme on peut le voir sur la figure (2.4).

Le champ gradient calculé qui est approximé peut être le champ des déformations ou le champ des contraintes. C'est sur ces deux champs que porte le plus souvent l'approximation, car il est ainsi possible de mesurer l'erreur grâce à une norme énergétique, qui a un fort sens physique. Le champ des contraintes est retenu ici pour illustrer la méthode. Pour obtenir la contrainte lissée  $\underline{\sigma}^*$ , il faut approximer, sur chaque patch, chaque composante  $\sigma_{ij}$  de la contrainte calculée, d'ordre  $p-1$ , par une fonction polynômiale  $\tilde{\sigma}_{ij}$  d'ordre  $p$ , ordre du champ de déplacement en l'occurrence. Les différentes composantes scalaires de la solution lissée sont alors construites comme le résultat du produit scalaire entre un vecteur contenant des termes polynômiaux appropriés  $\underline{\mathbf{P}}$ , et le vecteur  $\underline{\mathbf{a}}$  des coefficients correspondants qu'il faut déterminer :

$$\tilde{\sigma}_{ij}(M) = \underline{\mathbf{P}}(M) \cdot \underline{\mathbf{a}}_{ij} \quad (2.14)$$

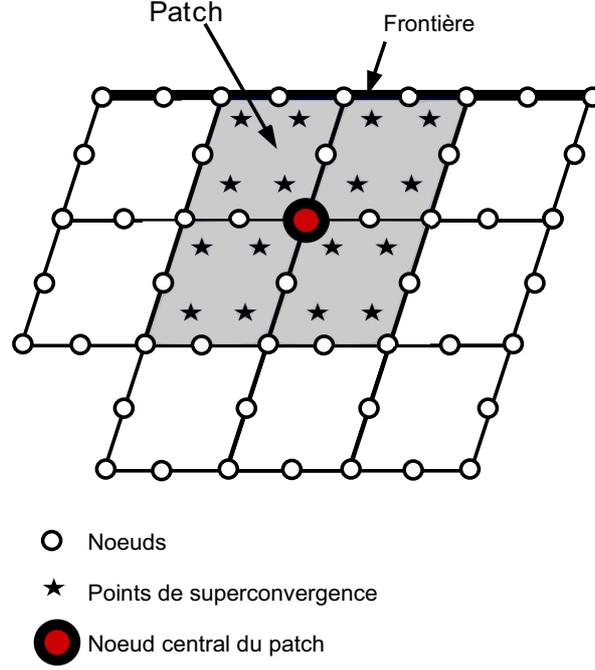


FIG. 2.4 – Patch

Pour déterminer les coefficients de  $\underline{\mathbf{a}}_{ij}$ , une méthode des moindres carrés avec des points d'échantillonnage optimaux est utilisée ; ceci est équivalent à minimiser la quantité :

$$F(\underline{\mathbf{a}}_{ij}) = \sum_{I=1}^m (\sigma_{ij}(\underline{\mathbf{x}}_I) - \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \cdot \underline{\mathbf{a}}_{ij})^2 \quad (2.15)$$

où  $m$  désigne le nombre de points d'échantillonnage optimaux dans le patch,  $\underline{\mathbf{x}}_I$  représente leurs coordonnées et  $\underline{\mathbf{x}}_I^R$  leurs coordonnées réduites définies par :

$$\underline{\mathbf{x}}_I^R = \frac{\underline{\mathbf{x}}_I - \underline{\mathbf{x}}_{nc}}{\max_{1 \leq J \leq m} (\|\underline{\mathbf{x}}_J - \underline{\mathbf{x}}_{nc}\|)} \quad (2.16)$$

où le vecteur  $\underline{\mathbf{x}}_{nc}$  correspond aux coordonnées du nœud central du patch. Il faut donc trouver  $\underline{\mathbf{a}}_{ij}$  tel que :

$$\sum_{I=1}^m \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \otimes \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \underline{\mathbf{a}}_{ij} = \sum_{I=1}^m \sigma_{ij}(\underline{\mathbf{x}}_I) \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \quad (2.17)$$

La solution de ce système peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{a}}_{ij} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{ij} \quad (2.18)$$

$$\text{où } \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \sum_{I=1}^m \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \otimes \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{b}}_{ij} = \sum_{I=1}^m \sigma_{ij}(\underline{\mathbf{x}}_I) \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \quad (2.19)$$

Une fois les paramètres de  $\underline{\mathbf{a}}_{ij}$  déterminés, la fonction polynômiale  $\tilde{\sigma}_{ij}$  est connue sur le patch, et en particulier au nœud central qui est l'origine du repère associé aux coordonnées réduites.

Il reste encore à déterminer les valeurs aux nœuds milieux et à ceux sur la frontière. Pour cela, il est recommandé d'utiliser les approximations polynômiales sur les patches liés aux nœuds sommets intérieurs pour déterminer la valeur au nœud considéré grâce à ses coordonnées réduites. Pour les nœuds appartenant à plusieurs patches, il faut prendre la moyenne des valeurs interpolées. Les valeurs nodales ainsi obtenues sont alors regroupées dans un vecteur global  $\tilde{\underline{\sigma}}_{ij}^*$ , ou dans un vecteur local, spécifique à chaque élément  $\tilde{\underline{\sigma}}_{ij|E}^*$ . Ainsi, la valeur de la composante  $ij$  de la contrainte approchée  $\sigma^*$  en un point  $M$  d'un élément  $\Omega_E$  peut être obtenue en écrivant :

$$\sigma_{ij}^*(M) = \underline{\mathbf{N}}^*(M) \cdot \tilde{\underline{\sigma}}_{ij|E}^* \quad (2.20)$$

où le vecteur  $\underline{\mathbf{N}}^*$  regroupe les fonctions de forme du même ordre que celles utilisées pour définir le champ des déplacements.

Cette procédure est illustrée pour la dimension une sur l'exemple de la figure (2.5) avec des éléments linéaires.

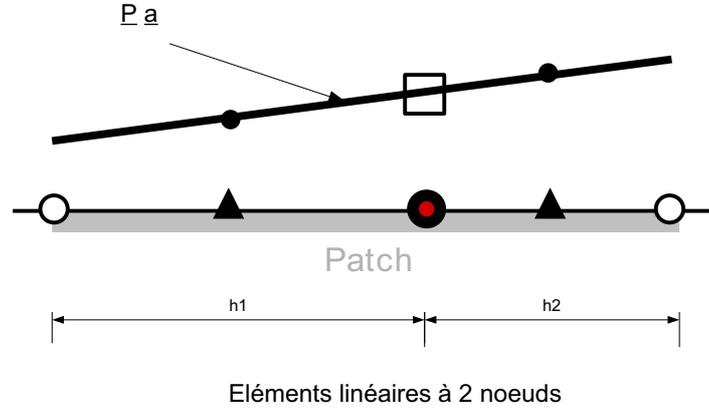


FIG. 2.5 – Exemple en dimension une sur des éléments linéaires

### Mesure de l'erreur

L'erreur est alors donnée par la norme énergétique de la différence entre le champ des contraintes calculé par la méthode des éléments finis et son approximation lissée :

$$\| \underline{\mathbf{e}} \| = \left[ \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) d\Omega \right]^{1/2} = \left[ \sum_{\Omega_E} \| \underline{\mathbf{e}}_E \| \right]^{1/2} \quad (2.21)$$

Dès que cette erreur dépasse un seuil fixé, le processus d'adaptation de maillage est déclenché. Cependant, l'utilisateur ne peut pas toujours avoir *a priori* d'idée sur l'ordre de grandeur que cette erreur peut atteindre, et donc sur la valeur du seuil à fixer. C'est pourquoi il est nécessaire de travailler avec une mesure relative de l'erreur, permettant ainsi une qualification de la qualité du calcul en termes de pourcentage d'erreur. L'erreur relative globale  $\eta$  est calculée de la manière suivante :

$$\eta = \frac{\| \underline{\mathbf{e}} \|}{E} \times 100 \quad (2.22)$$

où  $E$  désigne l'énergie de la structure associée à la contrainte lissée :

$$E = \| \underline{\sigma}^* \|_{\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1}, \Omega} = \left[ \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} : \underline{\sigma}^* d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.23)$$

### Performances

Comme tous les estimateurs par recouvrement, l'estimateur ZZ2 est fiable, dans le sens où il surestime l'erreur véritable (pour des tailles de maille  $h$  suffisamment petites). Avec la propriété supplémentaire de superconvergence, on obtient même un encadrement de l'erreur ou exactitude asymptotique.

L'estimateur ZZ2 fonctionne remarquablement bien au niveau global et est relativement robuste [22], [25]. Le point négatif est que la solution de recouvrement est souvent de médiocre qualité près des frontières.

Quoi qu'il en soit, les estimateurs par projection de flux sont très populaires et ont été implantés dans de nombreux codes commerciaux éléments finis à cause de leur simplicité d'implantation et de leur efficacité en pratique. Ces estimateurs peuvent être calculés en utilisant uniquement le cadre existant de n'importe quel code éléments finis classique.

### Adaptation aux problèmes non linéaires

Pour les problèmes non linéaires, cet estimateur d'erreur peut être adapté. Boroomand et Zienkiewicz ont notamment proposé dans [41] une nouvelle mesure de l'erreur pour les problèmes d'élasto-plasticité en statique, qui peut être qualifiée d'incrémentale :

$$\| \underline{\mathbf{e}} \| = \left[ \int_{\Omega} |(\underline{\boldsymbol{\sigma}}^* - \underline{\boldsymbol{\sigma}}) : (\Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}})| d\Omega \right]^{1/2} = \left[ \sum_{\Omega_E} \| \underline{\mathbf{e}}_E \| \right]^{1/2} \quad (2.24)$$

et

$$\eta = \frac{\| \underline{\mathbf{e}} \|}{E} \times 100 \quad \text{avec} \quad E = \left[ \int_{\Omega} |\underline{\boldsymbol{\sigma}}^* : \Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^*| d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.25)$$

C'est en effet une norme incrémentale de l'énergie qui est ici utilisée, car si l'erreur est contrôlée jusqu'à l'incrément  $n$ , alors la procédure se réduit à contrôler l'erreur qui intervient dans l'incrément suivant. Si l'erreur incrémentale dépasse le seuil autorisé  $\varepsilon_0$ , alors un nouveau maillage doit être créé.

Cette dernière mesure de l'erreur est plus efficace pour les problèmes de plasticité que peut l'être la première version. De plus, les auteurs précisent que la méthodologie employée dans l'article est également applicable dans le cadre des grandes déformations ou en dynamique. Cependant, l'utilisation de cet indicateur d'erreur en grandes déformations nécessiterait d'employer d'autres mesures des contraintes et des déformations.

### Adaptation pour un champ scalaire

Une alternative intéressante consiste à lisser non plus toutes les composantes d'un ou plusieurs tenseurs, mais plutôt à se baser sur un unique champ scalaire. Les principaux avantages de cet autre choix sont la réduction du coût de calcul, et le fait que la variable sur laquelle porte l'erreur puisse être identique dans le cadre des grandes ou des petites déformations.

Le champ scalaire sur lequel porte l'approximation doit évidemment être choisi en fonction de l'intérêt qu'il représente (endommagement ou plasticité cumulée par exemple) et doit être d'un degré inférieur au champ des déplacements (de sorte qu'il soit possible d'espérer obtenir une meilleure approximation de ce champ par lissage).

Perić et al. ont proposé dans [204] un estimateur s'appuyant sur la dissipation plastique pour capturer la localisation des déformations plastiques dans le cadre des petites déformations. Andrade Pires et al. ont, eux, défini dans [210] un indicateur d'erreur reposant sur le taux de travail associé à l'endommagement  $\omega_D = (-Y)\dot{D}$ , où  $-Y$  désigne le taux d'énergie dissipée par endommagement  $D$ .

Dans le cas présent, on choisit de baser la mesure de l'erreur incrémentale sur le champ scalaire d'endommagement  $w_p$ . L'erreur s'écrit alors :

$$\|\underline{\mathbf{e}}\| = \left[ \int_{\Omega} |(w_p^* - w_p) \times (\Delta w_p^* - \Delta w_p)| d\Omega \right]^{1/2} = \left[ \sum_{\Omega_E} \|\underline{\mathbf{e}}_E\| \right]^{1/2} \quad (2.26)$$

et

$$\eta = \frac{\|\underline{\mathbf{e}}\|}{E} \times 100 \quad \text{avec} \quad E = \left| \int_{\Omega} w_p^* \times \Delta w_p^* d\Omega \right|^{1/2} \quad (2.27)$$

On peut également définir une erreur relative par élément :

$$\eta_E = \frac{\|\underline{\mathbf{e}}_E\|}{E} \times 100 \quad (2.28)$$

### 2.2.6 Exemple d'application

Les capacités de l'estimateur d'erreur incrémental basé sur l'endommagement sont ici testées sur les calculs présentés dans la partie 1.5.6 du Chapitre 1, avec les maillages de taille moyenne 0.3 mm et 0.1 mm. La figure 2.6 permet de constater que l'erreur apparaît bien là où les gradient d'endommagement sont les plus importants. Les valeurs atteintes par l'erreur locale confirment bien que plus le maillage est grossier (et donc moins apte à capturer les forts gradients), plus l'erreur locale est importante. Il en est donc forcément de même pour l'erreur globale qui vaut approximativement 0.0261 pour le maillage le plus grossier et 0.0066 pour le maillage le plus fin. Le remaillage sera donc déclenché plus tôt pour un maillage grossier.

L'erreur plus importante sur le maillage grossier provient d'un écart plus important entre l'endommagement lissé  $\omega_p^*$  et l'endommagement calculé  $\omega_p$  que sur le maillage plus fin, comme l'illustre la figure 2.7. Sur cette courbe, les valeurs de l'endommagement présentées sont des valeurs nodales simplement reliées entre elles. Pour cet exemple, le maillage de 0.1 mm peut être considéré comme suffisamment fin pour donner une solution de référence, proche de la solution exacte. La comparaison de l'allure des courbes pour les différents maillages montre alors clairement que la solution lissée sur le maillage le plus grossier n'est pas la solution exacte. Cependant, c'est une solution plus régulière que la solution calculée et l'écart qui s'en suit indique qu'il est nécessaire de remailler dans cette zone correspondant à l'encoche inférieure gauche. Ce n'est que lorsque le maillage est suffisamment fin que la solution lissée est proche de la solution exacte.

Notons par ailleurs que la valeur de l'erreur globale peut être relativement importante pour les quelques pas de temps suivant l'apparition de l'endommagement dans la structure, car les incréments de l'endommagement peuvent alors être plus importants. En l'absence de remaillage, cette erreur peut diminuer naturellement pendant les quelques pas de temps suivants en raison de la diminution des incréments d'endommagement.

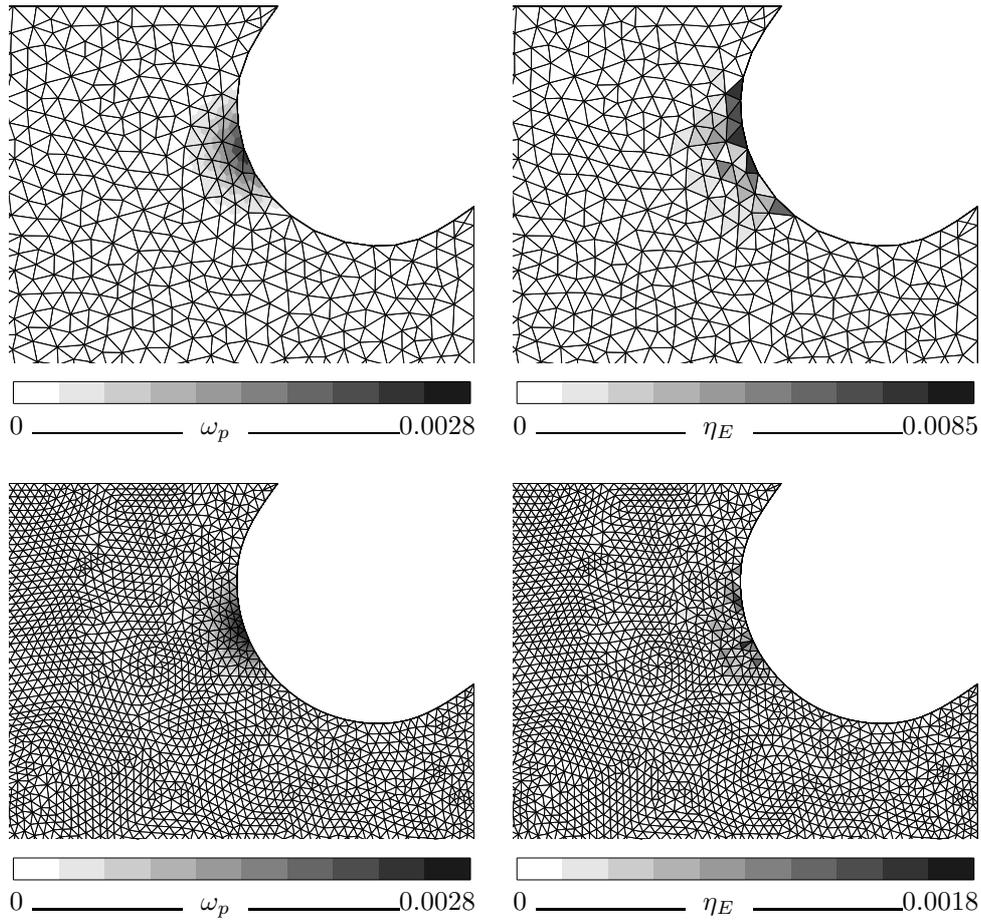


FIG. 2.6 – Exemple d’application pour des maillages de 0.3 mm (en haut) et 0.1 mm (en bas) à  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| = 0.01$  mm

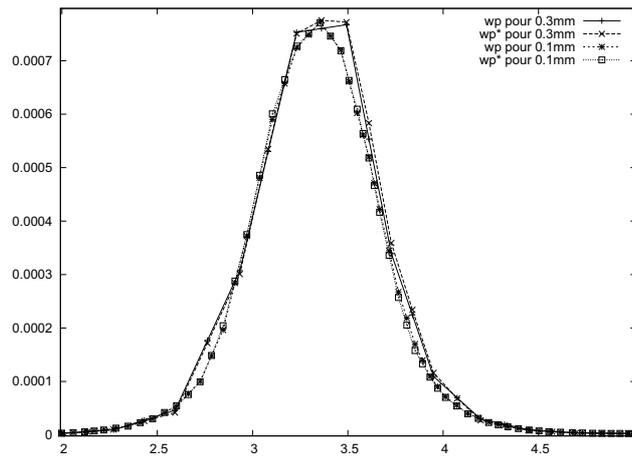


FIG. 2.7 – Évolution des champs  $\omega_p$  et  $\omega_p^*$  en fonction de l’abscisse curviligne au niveau de l’encoche inférieure gauche pour des maillages de 0.3 mm et 0.1 mm pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| = 0.01$  mm

## 2.3 Critères de remailage

À la fin de chaque pas de temps, on utilise les résultats de l'analyse éléments finis pour procéder à l'évaluation des erreurs de discrétisation. Cette évaluation fournit une erreur relative globale  $\eta$  pour toute la structure et une erreur relative élémentaire  $\eta_E$ . Ces informations sont utilisées pour déterminer s'il est nécessaire de remailler la structure et quelles sont les caractéristiques du maillage optimal correspondant à cet instant.

Pour cela, il faut d'abord définir clairement ce qu'est un maillage optimal. Malheureusement, il n'existe pas de consensus à ce sujet. Cependant, dans [188] et [146], les auteurs s'accordent à dire qu'un maillage optimal doit vérifier deux critères, l'un portant sur l'erreur globale et l'autre portant sur la distribution des éléments dans le maillage raffiné.

### 2.3.1 Critère global

Le premier critère, que l'on pourrait qualifier de global, ne prête pas à controverse : l'erreur globale sur le nouveau maillage doit être inférieure ou égale à la précision demandée par l'utilisateur  $\varepsilon_0$ . Le critère global est donc satisfait si :

$$\eta \leq \varepsilon_0 \quad (2.29)$$

Si le critère d'erreur global n'est pas satisfait à la fin d'un pas de temps, autrement dit si  $\eta > \varepsilon_0$ , cela indique qu'un raffinement du maillage est nécessaire.

Un paramètre d'erreur global  $\xi_g$  peut alors être défini :

$$\xi_g = \frac{\eta}{\varepsilon_0} \quad (2.30)$$

### 2.3.2 Critère local

Plusieurs propositions ont été faites en matière de critère local, parfois appelé critère d'optimalité du maillage. Dans [188], Oñate et Castro présentent et comparent deux critères locaux basés sur la répartition uniforme de l'erreur et sur la répartition uniforme de l'erreur spécifique. Cependant, ces critères ne conduisent pas toujours à minimiser les coûts de calcul. C'est pourquoi, plus récemment, un critère reposant sur la minimisation du nombre d'éléments sur le nouveau maillage a été introduit dans [202] et [144]. Ces critères sont comparés par Diez et Huerta dans [79] à un dernier critère s'appuyant sur la répartition uniforme de la précision locale. Le principe de ces différents critères est ici présenté dans le cadre où :

1. le problème est supposé linéaire ;
2. la solution exacte est supposée suffisamment régulière pour que le taux de convergence de l'erreur ne dépende que du type d'éléments finis utilisés.

Les modifications du taux de convergence engendrés par la considération d'un cas plus général sont ensuite abordées.

### Répartition uniforme de l'erreur

Un critère d'optimalité assez répandu se base sur la répartition uniforme de l'erreur globale, ou plus exactement, du carré de l'erreur globale. À partir de ce même critère, il existe dans la littérature plusieurs manières différentes de calculer les tailles de maille à imposer au

nouveau maillage.

*Version présentée par Oñate et Castro dans [188]*

Une interprétation possible de la version présentée dans [188] est que l'on cherche dans un premier temps à faire respecter le critère local sur le maillage courant, avant de vouloir imposer le respect du critère global. L'erreur dans chaque élément devrait être, pour respecter le critère local :

$$(\eta_E)^2 = \frac{\eta^2}{N} \quad (2.31)$$

où  $N$  désigne le nombre d'éléments dans le maillage courant. Un paramètre d'erreur local peut alors être défini :

$$\xi_E = \frac{\eta_E \sqrt{N}}{\eta} \quad (2.32)$$

L'idée est ensuite de calculer pour chaque élément  $\Omega_E$  du maillage de départ  $\mathcal{M}$ , un coefficient de modification de taille :

$$r_E = \frac{h_E^*}{h_E} \quad (2.33)$$

où  $h_E$  est la taille actuelle de l'élément  $\Omega_E$  et  $h_E^*$  la taille (inconnue) qu'il faut prescrire pour les éléments du nouveau maillage  $\mathcal{M}^*$  dans la zone de l'élément  $\Omega_E$  afin d'assurer l'optimalité. Le calcul des coefficients  $r_E$  s'appuie sur le taux de convergence de l'erreur par élément et de l'erreur globale, qui sont respectivement :

$$\eta_E \approx O(h_E^q) \text{mes}(\Omega_E)^{1/2} \approx O(h_E^{q+d/2}) \quad (2.34)$$

$$\eta \approx O(h^q) \quad (2.35)$$

où  $\text{mes}(\Omega_E)$  représente ici le volume ou l'aire de l'élément  $\Omega_E$ ,  $h$  désigne la taille moyenne des éléments pour le maillage,  $d$  est la dimension de l'espace considéré et  $q$  dépend du type d'éléments utilisé mais aussi de la régularité de la solution exacte du problème traité. Pour les estimateurs d'erreur considérés ici, ce taux de convergence est égal à l'ordre de convergence de la solution éléments finis. Si la solution exacte est suffisamment régulière,  $q$  ne dépend que du type d'éléments finis utilisés, et peut alors prendre d'après [60] les valeurs suivantes pour les problèmes linéaires :

–  $q = 1$  pour les triangles à 3 nœuds et les tétraèdres à 4 nœuds ;

–  $q = 2$  pour les triangles à 6 nœuds et les tétraèdres à 10 nœuds.

Le rapport des tailles est donc lié au rapport des contributions des erreurs relatives élémentaires et globales par :

$$\frac{\eta_E^*}{\eta_E} = \left[ \frac{h_E^*}{h_E} \right]^{q+d/2} = r_E^{q+d/2} \quad (2.36)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{\eta} = \left[ \frac{h^*}{h} \right]^q = r_E^q \quad (2.37)$$

Le coefficient  $r_E$  vaut donc :

$$r_E = \frac{1}{\xi_E^{2/(2q+d)} \xi_g^{1/q}} = \frac{\eta^{(2/(2q+d)-1/q)} \varepsilon_0^{1/q}}{(\eta_E \sqrt{N})^{2/(2q+d)}} \quad (2.38)$$

Une expression plus simple a été couramment utilisée, qui consiste à choisir  $r_E$  égal à :

$$r_E = \frac{1}{(c\xi_E\xi_g)^{1/q'}} \quad (2.39)$$

où  $c$  est un facteur de relaxation et le nouvel exposant  $q'$  est pris égal à  $q$ , sauf dans les éléments adjacents aux singularités (auquel cas il est adapté à la singularité). Cependant, les valeurs les plus couramment utilisées restent  $c = 1$  et  $q' = q$ . C'est par exemple le choix qui a été fait dans [41], avec l'estimateur d'erreur ZZ2 incrémental. Cette formulation simplifiée ne donne malheureusement pas de résultats très satisfaisants, puisqu'elle conduit à raffiner et déraffiner les mêmes zones au cours du processus de remaillage. Ce problème disparaît si l'expression basée sur les véritables taux de convergence (2.38) est utilisée, comme montré dans [188]. Le critère permet alors de converger vers un maillage optimal vérifiant les conditions globale et locale.

*Version présentée par Ladevèze et Pelle dans [146]*

Dans la version présentée dans [146], l'erreur à prescrire s'écrit directement sur le nouveau maillage :

$$(\eta_{E^*}^*)^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{N^*} \quad (2.40)$$

où  $\eta_{E^*}^*$  représente l'erreur dans le nouvel élément  $\Omega_E^*$  et  $N^*$  désigne le nombre d'éléments dans le nouveau maillage. Pour pouvoir être exploitable, ce critère doit faire intervenir des quantités mesurables sur le maillage courant. Il est donc nécessaire d'exprimer d'abord l'erreur sur le nouveau maillage en fonction de l'erreur dans le maillage précédent, en écrivant tout d'abord la contribution à l'erreur d'un élément  $\Omega_E^*$  en fonction de l'erreur sur le nouveau maillage, mais évaluée sur la zone correspondant à l'ancien élément  $\Omega_E$  :

$$(\eta_{E^*}^*)^2 = r_E^d (\eta_E^*)^2 \quad (2.41)$$

Or le rapport des contributions à l'erreur est lié par :

$$\frac{\eta_E^*}{\eta_E} = r_E^q \quad (2.42)$$

L'erreur  $\eta_{E^*}^*$  peut donc se mettre sous la forme recherchée :

$$(\eta_{E^*}^*)^2 = r_E^{2q+d} \eta_E^2 \quad (2.43)$$

Le coefficient de modification de taille peut donc s'écrire :

$$r_E = \left[ \frac{\varepsilon_0}{\eta_E} \right]^{2/(2q+d)} \frac{1}{(N^*)^{1/(2q+d)}} \quad (2.44)$$

Notons que cette expression est équivalente à (2.38) si l'on considère que l'erreur sur le maillage courant est égale à  $\varepsilon_0$  et que l'on cherche à vérifier le critère local sur le nouveau maillage. Bien sûr, le nombre d'éléments sur le nouveau maillage est *a priori* inconnu. Il doit donc être approché par :

$$N^* = \sum_{\Omega_E} \frac{1}{r_E^d} \quad (2.45)$$

Il est donc possible de calculer  $N^*$  :

$$N^* = \frac{\left[ \sum_{\Omega_E} \eta_E^{2d/(2q+d)} \right]^{(2q+d)/2q}}{\varepsilon_0^{d/q}} \quad (2.46)$$

et finalement d'exprimer  $r_E$  :

$$r_E = \frac{\varepsilon_0^{1/q}}{\eta_E^{2/(2q+d)} \left[ \sum_{\Omega_E} \eta_E^{2d/(2q+d)} \right]^{1/2q}} \quad (2.47)$$

en fonction des erreurs relatives par élément et de la précision souhaitée pour ce critère.

### Répartition uniforme de l'erreur spécifique

Une alternative possible est de considérer que le maillage est optimal si le carré de l'erreur par unité de volume (ou d'aire) est uniforme. De la même manière que pour le critère précédent, il serait sans doute possible d'interpréter de différentes manières ce critère local et de prescrire l'uniformité de l'erreur d'abord sur le maillage courant ou directement sur le maillage final. Cependant, seule la première version est présente dans la littérature à notre connaissance ([188], [48] et [189]) :

$$\frac{\eta_E^2}{mes(\Omega_E)} = \frac{\eta^2}{mes(\Omega)} \quad (2.48)$$

où  $mes(\Omega_E)$  et  $mes(\Omega)$  désignent ici les volumes (ou les aires) de l'élément  $\Omega_E$  et de la structure globale  $\Omega$  respectivement. L'erreur prescrite est donc :

$$\eta_E = \eta \left( \frac{mes(\Omega_E)}{mes(\Omega)} \right)^{1/2} \quad (2.49)$$

Un paramètre d'erreur local peut être défini :

$$\xi_E = \frac{\eta_E}{\eta} \left( \frac{mes(\Omega)}{mes(\Omega_E)} \right)^{1/2} \quad (2.50)$$

Le calcul du coefficient de modification de taille est alors plus simple que pour la première version du critère basé sur la répartition uniforme de l'erreur. En effet, la manière dont l'erreur spécifique est définie permet d'éliminer la dépendance au volume (ou à l'aire) de l'élément présente dans (2.34). En conséquence, le nouveau taux de convergence de l'erreur spécifique est

$$\frac{\eta_E}{mes(\Omega_E)^{1/2}} \approx O(h_E^q) \quad (2.51)$$

Le nouveau coefficient de modification de taille peut donc se mettre sous la forme simple :

$$r_E = \frac{1}{(\xi_E \xi_g)^{1/q}} = \left( \frac{\varepsilon_0}{\eta_E} \frac{mes(\Omega_E)}{mes(\Omega)} \right)^{1/q} \quad (2.52)$$

Les exemples présentés dans [188] montrent que cette stratégie permet bien d'obtenir un maillage satisfaisant dans le sens où l'erreur globale se rapproche bien de l'erreur souhaitée

et le maillage est raffiné là où les gradients des contraintes sont les plus élevés (ce qui est en accord avec le type d'estimateur d'erreur choisi, en l'occurrence ZZ2). Par contre, ce critère a tendance à conduire à des maillages concentrant plus de petits éléments dans les zones à forts gradients que la première version du critère basé sur la répartition uniforme de l'erreur. Les maillages possèdent donc plus d'éléments pour le critère reposant sur la répartition uniforme de l'erreur spécifique ; ce qui engendre des coûts de calcul supérieurs.

### Critère basé sur la minimisation du nombre d'éléments

Dans [202] et [144], Pelle, Ladevèze et Coffignal proposent un critère conduisant naturellement à minimiser les coûts de calcul puisqu'il définit comme optimal un maillage qui vérifie le critère global et qui minimise le nombre d'éléments  $N^*$ . La même définition de l'optimalité d'un maillage est également proposé par Li et Bettés dans [154]. Le problème se ramène alors selon [146] et [154] à :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_{\Omega_E} \frac{1}{r_E^d} \quad \text{avec} \quad \eta^* = \sum_{\Omega_E} (r_E^q \eta_E)^2 = \varepsilon_0^2 \quad (2.53)$$

En introduisant un multiplicateur de Lagrange, noté  $A$ , ce problème revient à rendre stationnaire le Lagrangien :

$$L(\{r_E\}_{\Omega_E \in \mathcal{M}}; A) = \sum_{\Omega_E} \frac{1}{r_E^d} + A \left( \sum_{\Omega_E} r_E^{2q} \eta_E^2 - \varepsilon_0^2 \right) \quad (2.54)$$

Les conditions d'optimalité donnent :

$$-\frac{d}{r_E^{d+1}} + A (2q \eta_E^2) r_E^{2q-1} = 0 \quad \forall \Omega_E \in \mathcal{M} \quad (2.55)$$

D'où :

$$r_E = \left[ \frac{d}{2Aq\eta_E^2} \right]^{1/(2q+d)} \quad (2.56)$$

En reportant dans la condition globale de (2.53), on trouve :

$$\left[ \frac{d}{2Aq} \right]^{2q/(2q+d)} = \frac{\varepsilon_0^2}{\sum_{\Omega_E} \eta_E^{2d/(2q+d)}} \quad (2.57)$$

Finalement, le coefficient de modification de taille de maille est déterminé en reportant (2.57) dans (2.56) :

$$r_E = \frac{\varepsilon_0^{1/q}}{\eta_E^{2/(2q+d)} \left[ \sum_{\Omega_E} \eta_E^{2d/(2q+d)} \right]^{1/2q}} \quad (2.58)$$

On remarque que ce coefficient est strictement identique à celui obtenu grâce à la seconde version du critère reposant sur l'uniformité de l'erreur (2.47). En effet, sous l'hypothèse que la solution exacte est suffisamment régulière, les deux critères sont équivalents. Ces deux solutions sont donc également intéressantes puisqu'elles permettent toutes deux de diminuer les coûts de calcul, comme voulu.

### Critère basé sur la répartition uniforme de la précision locale

Un dernier critère proposé par Diez et Huerta dans [79] vise à prescrire l'erreur relative locale, qui peut être définie comme le rapport entre l'erreur dans l'élément  $\Omega_E$  et l'énergie  $E_E$  de cet élément  $\frac{\|\mathbf{e}_E\|}{E_E}$ . Cependant, cette erreur relative ne peut pas être utilisée pour mesurer la précision d'une approximation de zéro. C'est pourquoi le critère numérique fait intervenir une composante liée à une erreur absolue  $E_A$ . L'erreur élémentaire à prescrire sur le nouveau maillage est alors :

$$\|\mathbf{e}_E^*\|^2 = \eta_L^2 E_E^2 + E_A^2 \quad (2.59)$$

La valeur de l'erreur absolue  $E_A$  peut être choisie arbitrairement. Dans [79],  $E_A$  est définie de sorte à relier de manière simple les paramètres  $\eta_L$  et  $E_A$  à la précision globale exigée  $\varepsilon_0$ . Le paramètre  $E_A$  est ainsi défini comme l'erreur absolue locale que l'on aurait dans chaque élément si l'erreur relative globale est  $\eta_A$  et que la densité d'erreur est uniforme sur tout le domaine :

$$E_A = \eta_A \frac{E}{mes(\Omega)^{1/2}} mes(\Omega_{E^*})^{1/2} \quad (2.60)$$

De la sorte, en sommant le carré des contribution de chaque nouvel élément, l'erreur globale mesurée est directement liée à l'énergie totale de la structure :

$$\|\mathbf{e}^*\|^2 = (\eta_L^2 + \eta_A^2) E \quad (2.61)$$

Une relation simple entre  $\varepsilon_0$ ,  $\eta_L$  et  $\eta_A$  est alors obtenue :

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\eta_L^2 + \eta_A^2} \quad (2.62)$$

Il serait possible de se servir uniquement du critère donné par l'équation (2.59), sans faire appel au critère global, et considérer que le maillage est optimal si toutes les erreurs relatives locales sont inférieures au membre de droite. Cependant, ce critère est très restrictif et conduit à des maillages avec un très grand nombre d'éléments. C'est pourquoi le critère global est toujours utilisé, combiné à une version modifiée du critère local (2.59) :

$$\frac{\|\mathbf{e}_E^*\|^2}{mes(\Omega_{E^*})} = \eta_L^2 \frac{E_E^2}{mes(\Omega_E)} + \eta_A^2 \frac{E^2}{mes(\Omega)} \quad (2.63)$$

Le coefficient de modification de taille de maille vaut alors :

$$r_E = \left[ \frac{mes(\Omega_E)^{1/2}}{\|\mathbf{e}_E\|} \sqrt{\eta_L^2 \frac{E_E^2}{mes(\Omega_E)} + \eta_A^2 \frac{E^2}{mes(\Omega)}} \right]^{1/q} \quad (2.64)$$

Cette stratégie de remaillage vise à obtenir un nouveau maillage avec une précision locale de  $\eta_L$  et une erreur absolue locale  $E_A$  associée à une erreur relative globale  $\eta_A$ . En fait, l'erreur absolue  $E_A$  n'intervient que si la norme locale  $E_E$  est très petite. L'important est de bien savoir choisir l'importance relative des paramètres  $\eta_L$  et  $\eta_A$ , sachant que les expériences numériques présentées dans [79] montrent que l'erreur relative locale prescrite doit représenter une plus grande part ( $\eta_L \approx 0.98\varepsilon_0$  et  $\eta_A \approx 0.02\varepsilon_0$ ).

### Modifications possibles de l'ordre de convergence

Les calculs des coefficients  $r_E$  précédents reposent tous sur le fait que le taux de convergence de l'erreur pour un problème linéaire est en  $h^q$  où  $q$  ne dépend que du type d'éléments utilisés si la solution est suffisamment régulière. Cependant, si la structure présente des singularités, des zones à très forte concentration de contraintes ou si le problème est non linéaire, l'ordre de convergence de la solution éléments finis est modifié. L'ordre de convergence de l'estimateur d'erreur est donc modifié en conséquence.

#### *En présence de singularités et de zones à forts gradients*

En présence de singularités ou de zones à forts gradients, le taux de convergence de l'erreur globale n'est pas directement lié au degré d'interpolation utilisée. Une méthode complètement automatique pour traiter ce type de cas a été élaborée par Coorevits et al. dans [64], [65]. Elle repose sur l'utilisation de taux de convergence non pas uniformes, mais par éléments, tels que :

$$\eta_E = O(h^{q_E}) \quad (2.65)$$

Une façon simple de définir ces coefficients locaux consiste à prendre :

- $q_E = \alpha$  si l'élément  $\Omega_E$  est connecté à une singularité d'ordre  $\alpha$ ,
- $q_E = q$  pour tous les autres éléments.

La prise en compte de ces coefficients de convergence locaux conduit évidemment à des coefficients de modifications de taille différents de ceux présentés précédemment. Par exemple, minimiser le nombre d'éléments reviendrait alors à :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_{\Omega_E} \frac{1}{r_E^d} \quad \text{avec} \quad \eta^* = \sum_{\Omega_E} (r_E^{q_E} \eta_E)^2 = \varepsilon_0^2 \quad (2.66)$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$r_E = \left[ \frac{d}{2Aq_E \eta_E^2} \right]^{1/(2q_E+d)} \quad (2.67)$$

où  $A$  est la solution de l'équation non linéaire :

$$\sum_{\Omega_E} \left[ \left( \frac{d}{2Aq_E \eta_E^2} \right)^{1/(2q_E+d)} \eta_E^{2d/(2q_E+d)} \right] = \varepsilon_0^2 \quad (2.68)$$

Ce sont alors les produits  $q_E^{1/2} \eta_E^*$  qui sont uniformes sur le nouveau maillage, et non plus l'erreur. En présence de singularités, le critère reposant sur la minimisation du nombre d'éléments et la seconde version de celui basé sur la répartition uniforme de l'erreur ne sont donc plus équivalents.

Cependant, l'utilisation de coefficients de convergence locaux engendre un coût de calcul supplémentaire non négligeable : minimiser le nombre d'éléments nécessite notamment de résoudre l'équation (2.68) par la méthode de Newton. De plus, prendre en compte les singularités exige de déterminer préalablement la position de la singularité, par exemple en se basant sur une quantité présentant un pic au voisinage d'une singularité :

$$\bar{\eta}_E = \left[ \frac{\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega_E)} \right]^{1/2} \eta_E \quad (2.69)$$

Puis l'ordre de la singularité doit être évalué en identifiant la valeur de la densité d'énergie de la solution éléments finis avec la valeur théorique au voisinage de la singularité (cf [146] pour un bon résumé de la méthode). Toutes ces opérations sont trop coûteuses pour pouvoir être répétées plusieurs fois au cours d'un calcul non linéaire. D'autant plus qu'il serait inutile de prendre en compte les taux de convergence locaux, sans prendre en compte les modifications engendrées par le fait que le calcul est non linéaire.

*Pour les problèmes non linéaires*

Pour les problèmes non linéaires, l'ordre de convergence de l'estimateur d'erreur est également modifié par rapport aux problèmes linéaires. En particulier, pour l'estimateur d'erreur ZZ2 incrémental, les auteurs de [41], précisent que si l'ordre de convergence est  $q$  pour les problèmes linéaires, pour les problèmes non linéaires il devient :

$$\| \underline{\mathbf{e}} \| = O(h^{q/2}) + O(h^q) \quad (2.70)$$

Ceci modifie également le calcul des  $r_E$ . En pratique, ce changement est ignoré.

### 2.3.3 Choix d'un critère local

Notre objectif est d'obtenir un nouveau maillage qui offre un bon compromis entre précision et coûts de calcul. Prendre en compte les modifications d'ordre de convergence engendrées par la présence de singularités ou de zones à forts gradients nuirait au second objectif. Par ailleurs, le générateur de maillage choisi gère déjà la présence de singularités géométriques dans la structure et adapte la taille de maille localement en conséquence. De plus, il est inutile d'espérer atteindre exactement la précision souhaitée lorsque l'évaluation de cette précision n'est elle-même pas exacte. L'estimateur d'erreur choisi est en effet un indicateur d'erreur, et il ne fournit qu'une idée de l'erreur sur le maillage. Donc même en prenant en compte les taux exacts de convergence, et en supposant que le générateur de maillage respecte exactement la consigne donnée (ce qui n'est jamais exactement le cas, en particulier en dimension trois), il n'est absolument pas certain d'obtenir la précision voulue sur le nouveau maillage. Les coefficients obtenus en première approximation avec des coefficients uniformes sont suffisants.

L'article de Diez et Huerta [79] offre une bonne comparaison des différents critères présentés. Le critère s'appuyant sur la répartition uniforme de l'erreur tel qu'utilisé par Zienkiewicz donne les moins bons résultats puisqu'il s'agit de la version simplifiée du critère. Le critère fondé sur la répartition uniforme de l'erreur spécifique tend à produire les maillages avec le plus d'éléments. Par contre, le critère minimisant le nombre d'éléments et celui basé sur la répartition uniforme de la précision locale offrent des résultats satisfaisants. Mais le premier a l'avantage de toujours fournir des maillages avec moins d'éléments et une bonne précision sans avoir à modifier un paramètre supplémentaire, qui est le rapport  $\eta_L/\varepsilon_0$ . Le critère retenu sera donc celui qui minimise les coûts de calculs en conduisant à une répartition uniforme de l'erreur pour des problèmes linéaires suffisamment réguliers :

$$r_E = \frac{\varepsilon_0^{1/q}}{\eta_E^{2/(2q+d)} \left[ \sum_{\Omega_E} \eta_E^{2d/(2q+d)} \right]^{1/2q}} \quad (2.71)$$

*Remarques*

Cette manière de calculer les coefficients de modification de taille pour les éléments a cependant quelques limites dans la pratique. En effet, si l'erreur est trop faible localement, cela entraîne la divergence du coefficient de modification et donc de la nouvelle taille de maille. C'est pourquoi il est nécessaire de limiter la taille de maille maximale autorisée par la taille de maille maximale sur le maillage de départ ou par une valeur fixée par l'utilisateur. Les mêmes dispositions sont prises pour éviter que la taille de maille ne devienne exagérément petite et ainsi limiter les coûts de calcul. Toutes ces mesures viennent également influencer sur l'erreur globale du nouveau maillage.

## 2.4 Utilisation de la carte de taille par YAMS-GHS3D

Il est temps maintenant de fournir ces informations au générateur de maillage choisi, YAMS-GHS3D, un outil de remaillage développé par l'INRIA (cf [102]) afin d'obtenir le maillage désiré.

### 2.4.1 Calcul des valeurs aux nœuds

Déterminer un maillage optimal revient donc à déterminer une carte de coefficients de modification de taille  $r_E$  calculés pour chaque élément du maillage initial  $\mathcal{M}$ . Pour pouvoir être exploitée par YAMS-GHS3D, cette carte de taille de maille doit être fournie aux nœuds du maillage. Ces valeurs nodales sont obtenues en effectuant, pour chaque nœud  $i$ , la moyenne sur les  $n_{E,i}$  éléments  $\Omega_{E,i}$  qui ont ce nœud en commun :

$$r_i = \frac{1}{n_{E,i}} \sum_{k=1}^{n_{E,i}} r_E \quad (2.72)$$

Un fichier portant une extension spécifique est alors généré.

### 2.4.2 Intersection des mesures

Il est clair qu'il serait tout à fait possible de combiner les résultats de plusieurs estimateurs d'erreur différents (par exemple ZZ2 incrémental pour les champs scalaires et un estimateur d'erreur s'appuyant sur la forme des éléments), qui vont chacun fournir des cartes de taille de maille différentes. Pour cela, il suffirait, après édition des différentes cartes de taille, de procéder à leur intersection : comparer pour chaque nœud les coefficients  $r_i$  et ne garder, à chaque fois, que la modification la plus restrictive, c'est-à-dire le coefficient le plus faible. Il serait alors possible d'obtenir une nouvelle carte de taille de maille qui permettrait de s'assurer de la qualité du calcul suivant plusieurs critères.

### 2.4.3 Création d'un nouveau maillage

Au moment où le remaillage est déclenché, c'est-à-dire à la fin du pas de temps pour lequel l'erreur relative globale dépasse la précision globale prescrite, l'algorithme de remaillage suit trois étapes (voir [102]). Tout d'abord, le maillage initial va être analysé et ses propriétés intrinsèques vont être calculées en se basant sur la discrétisation actuelle. Le programme va

alors calculer sa propre carte de taille de maille. Puis, YAMS-GHS3D va vérifier s'il existe un fichier contenant des spécifications de taille pour le nouveau maillage. Le cas échéant, la métrique spécifiée par l'utilisateur sera combinée avec la métrique calculée par le programme pour décrire au mieux la géométrie de la structure. Autrement dit, dans les régions où la structure présente des singularités géométriques, la taille prescrite par l'utilisateur ne sera prise en compte que si elle est plus petite que celle calculée par YAMS-GHS3S. Des opérations topologiques et géométriques sont alors effectuées afin de produire un maillage pour lequel la taille et la qualité des éléments sont contrôlées. Enfin, lors d'une dernière étape d'optimisation locale, la qualité des éléments est améliorée.

#### 2.4.4 Exemple d'application

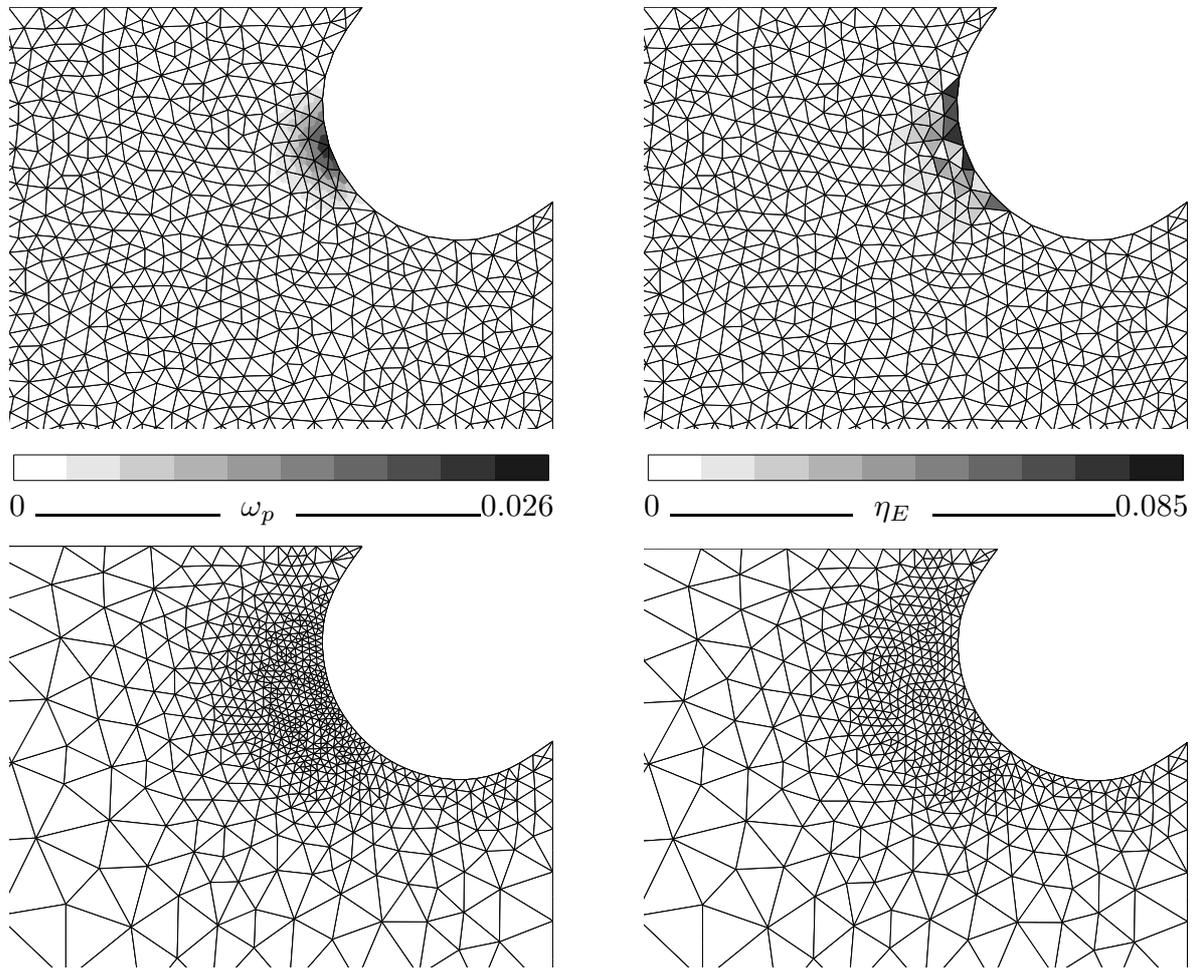


FIG. 2.8 – Exemple d'application pour un maillages de taille de maille initiale 0.3 mm, avec : en haut l'endommagement à gauche et l'erreur réduite à droite  $\|\underline{u}_b\| = 0.01$  mm, et en bas les nouveaux maillages : sans limite de taille minimum à gauche et en limitant la taille minimum à 0.1 mm à droite

Poursuivons avec l'exemple 2.2.6. La précision souhaitée est fixée à  $\varepsilon_0 = 0.5\%$ . Comme les ordres de convergence utilisés sont ceux correspondant aux solutions de problèmes linéaires

suffisamment réguliers, une petite marge est nécessaire entre la précision souhaitée sur le nouveau maillage et la valeur de l'erreur globale à partir de laquelle le remaillage est déclenché. Cette précaution évite de remailler et donc de transférer les champs trop souvent, ce qui est coûteux. Afin de pouvoir comparer par la suite les cas 2D et 3D où l'on impose une taille de maille minimale pour limiter les coûts de calcul, une valeur limite unique de 1.5% est choisie pour déclencher le remaillage. Les maillages résultants sont présentés figure 2.8. Les nouveaux maillages proposés (sans et avec taille de maille minimum) sont plus fins dans les zones où l'endommagement (et donc l'erreur) sont concentrés. Mais on remarque également que les éléments ont une taille plus importante dans les zones où l'endommagement est nul. Ceci permet de réduire les coûts de calculs puisque le maillage initial a 9459 nœuds et 4650 éléments alors que le maillage sans taille limite a 4666 nœuds et 2261 éléments et le maillage avec taille minimum imposée a 3809 nœuds et 1842 éléments. Imposer une taille de maille minimum est ici intéressant puisque les coûts de calcul sont réduits alors que l'erreur globale est toujours correcte : l'erreur globale mesurée est égale à 0.44% alors qu'elle vaut 0.31% sur le nouveau maillage non limité avec plus d'éléments. Afin de contrôler les coûts de calcul, les nouveaux maillages seront désormais construits en imposant une taille minimale.

## 2.5 Transfert de champ

### 2.5.1 Principe

Une approche réellement adaptative requiert le transfert des valeurs des degrés de liberté (déplacements, variable non locale,...), stockées aux nœuds, et des variables internes (endommagement, plasticité cumulée,...), stockées aux points d'intégration, pour pouvoir continuer l'analyse à partir de l'état actuel, au lieu de recommencer le calcul du début. Le transfert de ces variables reste cependant délicat car l'opérateur de transfert devrait, en théorie, respecter les contraintes suivantes [203] :

- les relations entre les champs transférés devraient être toujours respectées : le tenseur des déformations devrait être égal à la partie symétrique du gradient des déplacements,... ;
- les champs transférés devraient toujours satisfaire l'équilibre (adéquation des contraintes transférées et des forces extérieures) ;
- l'opérateur devrait minimiser la diffusion numérique : il ne faut pas que la bande d'endommagement devienne plus large,... ;
- les conditions aux limites devraient toujours être vérifiées.

En réalité, il est impossible de satisfaire en même temps toutes ces contraintes. C'est essentiellement la minimisation de la diffusion numérique qui va guider le choix de l'opérateur de transfert. Les problèmes de respect de relations avec les variables ne seront réglés que dans un second temps, lors d'une étape de rééquilibrage.

### 2.5.2 Transfert des données aux nœuds

Le transfert des données stockées aux nœuds se fait généralement par interpolation des valeurs stockées aux nœuds de l'ancien maillage  $\mathcal{M}$ . Il suffit de repérer à quel élément de l'ancien maillage  $\mathcal{M}$  chaque nœud du nouveau maillage  $\mathcal{M}^*$  appartiendrait et d'utiliser les fonctions de forme associées à cet élément pour obtenir la valeur recherchée au nouveau nœud.

On notera cependant que Espinosa et al. procèdent de manière légèrement différente dans [93]. Leur technique de transfert repose sur l'utilisation d'un maillage auxiliaire composé de

triangles à trois nœuds reliant les nœuds de l'ancien maillage composé lui-même de triangles à 6 nœuds. Ce sont les fonctions de forme associées à ce maillage auxiliaire qui sont utilisées pour interpoler les valeurs au nœuds du nouveau maillage. L'utilisation de ce type de méthode reste tout de même anecdotique.

### 2.5.3 Transfert des données aux points de Gauss

Pour le transfert des données aux points d'intégration, plusieurs techniques sont disponibles.

#### Transfert en passant par les nœuds de l'ancien et du nouveau maillage

La procédure utilisée par Lee et Bathe [150], Perić et al. [203] et Mediavilla [165] peut se décomposer en trois étapes.

1. Les valeurs aux points de Gauss sont extrapolées aux nœuds par simple projection utilisant les fonctions de forme des éléments. Les valeurs nodales trouvées sont alors moyennées de sorte à obtenir un champ continu. Mediavilla reconnaît que cette étape est à l'origine d'une diffusion non négligeable et précise que des techniques plus élaborées ont été proposées pour limiter ce phénomène : recourir à une approximation utilisant une minimisation par moindres carrés (voir les travaux de Hinton et Cambell [120]) ou utilisant une procédure itérative suivant les travaux de Loubignac [156]. Une version similaire utilisant une méthode inspirée de la procédure de recouvrement par patch dite SPR (*Superconvergent Patch Recovery*, voir [262] et [263]) est proposée par Khoei et Gharehbaghi dans [136] pour des problèmes 3D.
2. Les composantes nodales sont ensuite transférées des anciens nœuds aux nouveaux nœuds en repérant la position de ces derniers dans l'ancien maillage et en utilisant une interpolation directe.
3. Enfin, les valeurs aux nouveaux points de Gauss sont déterminées par simple interpolation sur chaque élément, en utilisant les fonctions de forme du nouveau maillage.

Le problème de cette méthode réside dans la diffusion numérique qu'elle engendre : elle est plus prononcée qu'avec une méthode utilisant un transfert direct de points de Gauss à points de Gauss [203].

#### Transfert direct de point de Gauss à point de Gauss

##### *Valeurs constantes*

Un opérateur de transfert très simple peut être construit en prenant des valeurs constantes sur les domaines associés aux points de quadrature de l'ancien maillage. Cette construction est locale. Il est également possible d'associer à un nouveau point de Gauss la valeur au point de Gauss le plus proche sur l'ancien maillage.

##### *Interpolation directe*

Dans [191], Ortiz et Quigley ont recours à des fonctions de forme valant 1 aux points d'intégration. La méthode s'appuie sur une interpolation des valeurs lorsque les nouveaux points de Gauss sont à l'intérieur du groupe d'anciens points de Gauss, et sur une extrapolation

des valeurs lorsque qu'ils sont à l'extérieur (tout en restant dans l'ancien élément). Cependant, la discontinuité des champs le long des frontières entre éléments pose quelques problèmes, notamment lors de l'extrapolation. L'article [41] précise que pour résoudre ce problème, un type de remaillage particulier est utilisé pour lequel l'ancien élément est divisé en plusieurs éléments, de sorte que les nouveaux points de Gauss se situent toujours à l'intérieur de l'ancien groupe de l'ancien élément. Cette méthodologie de transfert n'est pas adaptée pour un nouveau maillage quelconque.

Un principe similaire est utilisé par Espinosa, Zavattieri et Emore dans [93], mais cette fois en utilisant une méthode d'interpolation uniquement. Dans cet article, les auteurs présentent un opérateur de transfert utilisant un maillage composé de triangles à 6 nœuds et à intégration complète. Les valeurs stockées aux nœuds qui doivent être transférées sont interpolées grâce à des fonctions de forme d'un maillage auxiliaire. Ce maillage est composé de triangles à trois nœuds reliant les points de Gauss. Il suffit alors de repérer à quel élément auxiliaire chaque point de Gauss du nouveau maillage appartient, pour ensuite procéder par simple interpolation.

### Transfert de point de Gauss à point de Gauss avec lissage

#### *Projection $L^2$ aux nœuds de l'ancien maillage*

Le technique employée par Camacho et Ortiz [50] veut se rapprocher du transfert de points de Gauss à points de Gauss. Elle s'appuie sur les travaux de Ortiz et Quigley, mais tente de rendre la méthodologie plus générale en lissant les données avant le transfert de sorte à éviter les problèmes de [191]. Ce lissage est obtenu en projetant les valeurs stockées à trois points de Gauss aux nœuds de l'ancien maillage au moyen d'une projection  $L^2$ . Ce champ lissé est alors directement évalué aux points de Gauss du nouveau maillage.

Dans [41], Boroomand et Zienkiewicz soulignent cependant que cette méthode présente un inconvénient. Dans la mesure où, lors de la projection  $L^2$ , l'intégration est faite sur tout le domaine, l'information provenant d'une petite zone peut s'étendre sur une zone relativement plus large.

#### *Moyenne pondérées de valeurs obtenues par moindres carrés par patch*

Boroomand et Zienkiewicz proposent dans [41] une technique de transfert reposant sur des contributions par patches, afin de minimiser les problèmes de diffusion. Afin d'illustrer le principe de cette méthode, considérons que l'on cherche à déterminer la valeur aux points de Gauss du nouveau maillage d'une composante du champ des contraintes notée  $\tilde{\sigma}$ . Tout d'abord, il est nécessaire de déterminer à quel élément de l'ancien maillage le nouveau point de Gauss appartiendrait. À chaque nœud de cet élément peut être associé un patch (défini par tous les éléments ayant ce nœud en commun, qu'il s'agisse d'un nœud milieu ou d'un coin). Sur chacun de ces patches, une approximation  $\sigma^*$  du champ des contraintes est construite à partir des valeurs aux points de Gauss par moindres carrés. Interviennent alors des fonctions de pondération  $\tilde{\omega}$  dont le domaine de définition est l'aire associée à chaque point de Gauss :

$$\Pi = \sum \tilde{\omega} (\sigma^* - \sigma^{pG})^2 \quad \sigma^* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} \quad (2.73)$$

Une fois ces approximations  $\sigma^*$  calculées sur chaque patch, la valeur recherchée au nouveau point de Gauss  $\tilde{\sigma}$  est obtenue en calculant la moyenne pondérée des valeurs des contraintes

lissées associées aux nœuds :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sum_{j=1}^N \omega_j \sigma_j^*}{\sum_{j=1}^N \omega_j} \quad (2.74)$$

où  $N$  désigne le nombre de nœuds de l'ancien élément et  $\omega_j$  est la fonction poids associée au nœud  $j$  (elle peut être différente des fonctions poids  $\tilde{\omega}$  utilisés dans l'équation (2.73).

### Moindres carrés (mobiles)

Villon et al. proposent dans [250] de transférer les champs aux points de Gauss en se basant sur des techniques d'approximation diffuse. Celles-ci permettent de définir un champ mécanique de continuité globale d'ordre quelconque qui approche fidèlement les champs mécaniques discrets. Cette méthode est mise en œuvre par Brancherie et al. dans [44]. Elle consiste à décomposer localement, autour du point de Gauss du nouveau maillage  $\underline{\mathbf{x}}$ , le champ scalaire à transférer  $s^{new}$  (ou chaque composante scalaire d'un tenseur par exemple) sur une base polynomiale centrée au point  $\underline{\mathbf{x}}$  :

$$s^{new} = \underline{\mathbf{P}}^T \underline{\mathbf{a}} \quad (2.75)$$

La composante  $\underline{\mathbf{a}}$  est alors obtenue en minimisant la quantité  $J_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\mathbf{a}})$  définie par :

$$J_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in V(\underline{\mathbf{x}})} W(\underline{\mathbf{x}}_i, \underline{\mathbf{x}}) \|\underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_i - \underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{a}} - s^{old}(\underline{\mathbf{x}}_i)\|^2 \quad (2.76)$$

où  $V(\underline{\mathbf{x}})$  désigne un voisinage du point  $\underline{\mathbf{x}}$  où est réalisé l'approximation. Les notations  $s^{old}$  et  $s^{new}$  désignent respectivement les champs sur l'ancien et le nouveau maillage. Les  $\underline{\mathbf{x}}_i$  correspondent aux points de Gauss de l'ancien maillage où  $s^{old}$  est connu. Enfin la fonction  $W(\underline{\mathbf{x}}_i, \underline{\mathbf{x}})$  correspond à une fonction poids. Il s'agit d'une cloche maximale en  $\underline{\mathbf{x}}$ , de support  $V(\underline{\mathbf{x}})$  et qui représente la contribution du point  $\underline{\mathbf{x}}_i$  pour l'approximation en  $\underline{\mathbf{x}}$ . La solution de ce problème d'optimisation s'écrit :

$$\underline{\mathbf{a}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} \quad (2.77)$$

$$\text{avec } \underline{\underline{A}} = \sum_{i \in V(\underline{\mathbf{x}})} W(\underline{\mathbf{x}}_i, \underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}_i - \underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_i - \underline{\mathbf{x}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{B}} = \sum_{i \in V(\underline{\mathbf{x}})} W(\underline{\mathbf{x}}_i, \underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_i - \underline{\mathbf{x}}) s^{old}(\underline{\mathbf{x}}_i) \quad (2.78)$$

Puis la valeur de ce champ lissé est projetée directement au nouveau point de Gauss.

En choisissant des fonctions poids uniformes valant 1, cette technique revient à procéder à un lissage par moindres carrés. Ces méthodes sont très performantes.

### 2.5.4 Choix d'un opérateur de transfert

Parmi les méthodes de transfert recourant à une interpolation directe des anciens points de Gauss aux nouveaux, seules les méthodes transférant des valeurs constantes sont envisageables. Les autres ne sont pas assez générales.

Une étude comparative menée par Patzák et Jirásek dans [196] montre que le transfert des valeurs stockées aux points de Gauss utilisant les nœuds conduit à une diffusion numérique. Ce phénomène de diffusion doit être évité car il peut causer l'élargissement de la bande où se concentrent les déformations. En revanche, les méthodes de transfert directes s'appuyant sur l'utilisation de la valeur du point de Gauss le plus proche ou sur un lissage par moindres carrés

ne présentent pas cet inconvénient. Transférer directement la valeur du point de Gauss le plus proche permet d'obtenir moins d'oscillations après transfert que la méthode utilisant le lissage par moindres carrés, et ce à moindre coût. Cependant, lorsque ces oscillations disparaissent après retour à l'équilibre, cette dernière méthode permet de reproduire de manière plus satisfaisante le profil d'endommagement, notamment lorsque la taille de maille varie beaucoup au cours du processus de remaillage.

Le transfert direct utilisant le lissage par moindres carrés est beaucoup plus simple à implanter et également moins coûteux que la méthode de transfert proposée par Boroomand et Zienkiewicz. En choisissant de ne considérer qu'un minimum d'anciens points de Gauss pour construire la fonction lissée dans le voisinage du nouveau point de Gauss (par exemple 13 en 2D pour des triangles 6 nœuds et 30 en 3D pour des tétraèdres à 10 nœuds), il est possible d'obtenir de meilleurs résultats, en matière de diffusion, qu'avec un lissage par projection  $L^2$ . De plus cette méthode est aussi facile à implanter en 2D qu'en 3D. C'est donc la méthode du transfert direct utilisant le lissage par moindres carrés qui est retenue. Deux variantes sont implantées :

- une version utilisant un simple lissage par moindres carrés ;
- et une version utilisant un lissage par moindres carrés mobiles avec la fonction poids  $W$  telle que :

$$\begin{aligned} W(\bar{s}) &= \frac{2}{3} - 4\bar{s}^2 + 4\bar{s}^3 \quad \text{si } \bar{s} \leq 0.5 \\ W(\bar{s}) &= \frac{4}{3} - 4\bar{s} + 4\bar{s}^2 - \frac{4}{3}\bar{s}^3 \quad \text{sinon} \end{aligned} \quad (2.79)$$

où  $\bar{s} = \frac{\|\underline{x}_j - \underline{x}\|}{\max_i(\|\underline{x}_i - \underline{x}\|)}$ .

### 2.5.5 Exemple d'application pour le transfert

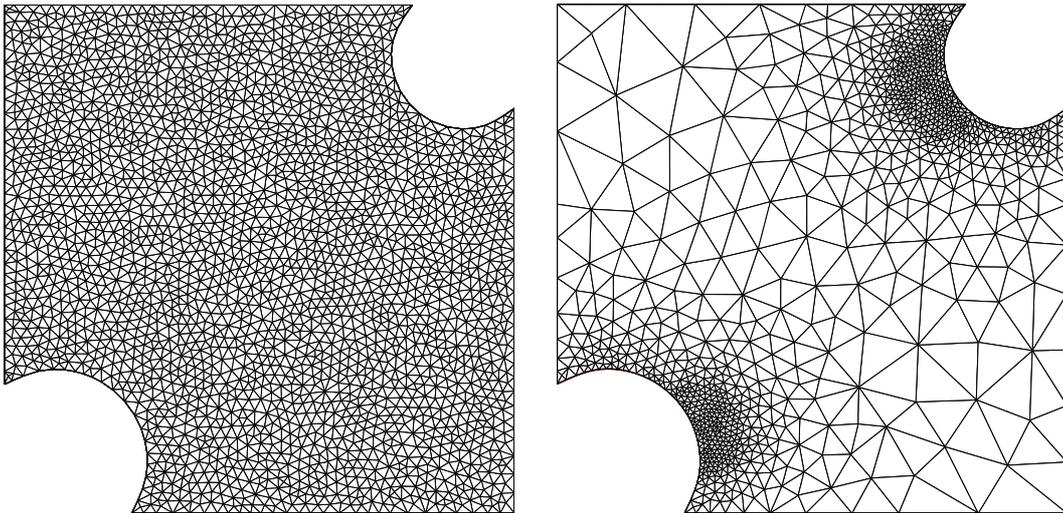


FIG. 2.9 – Maillage initial à gauche et maillage adapté à droite

Poursuivons avec l'exemple 2.2.6. Les champs de l'ancien maillage sont transférés sur le nouveau maillage (tous deux présentés figure 2.9) par projection directe après lissage par

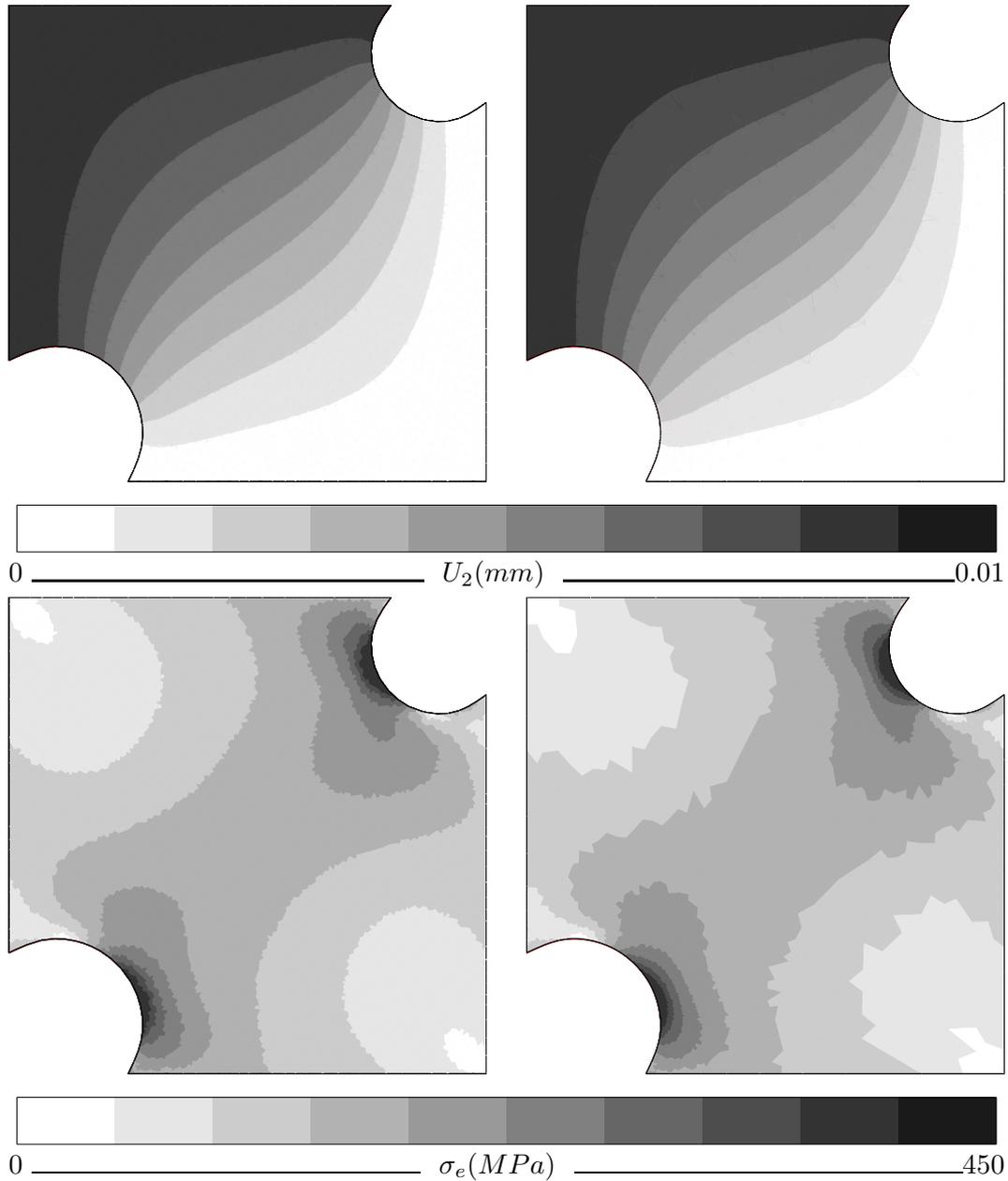


FIG. 2.10 – En haut : isovaleurs du champ  $U_2$  avant remaillage à gauche et après transfert à droite. En bas : isovaleurs des contraintes de von Mises  $\sigma_e$  avant remaillage à gauche et après transfert à droite

moindres carrés mobiles (le lissage par moindres carrés donne des résultats quasi-identiques). Par comparaison entre le champ  $U_2$  calculé sur le maillage initial et le champ  $U_2$  transféré sur le nouveau maillage, on peut conclure que la technique classique de l'interpolation directe donne de bons résultats pour les données stockées aux nœuds. Pour les données stockées aux points de Gauss, l'exemple sur la contrainte de von Mises figure 2.10 montre que l'opérateur de transfert retenu donne de très bons résultats dans la zone maillée finement près des encoches.

Il est évident que lorsque le maillage est fortement déraffiné, les isovaleurs sont moins bien définies. Ce phénomène est d'ailleurs accentué ici par le fait que le changement de taille de maille est important dans les coins. Mais la différence au niveau des isovaleurs est quasiment imperceptible si les champs sont transférés sur le même maillage. Plus la modification de taille de maille est importante, plus le transfert des champs au points de Gauss va être affecté. Toutefois ce critère visuel ne peut être que qualitatif et non pas quantitatif. En effet, les modifications des isovaleurs observées ne sont pas significatives car le déraffinement a eu lieu dans des zones non endommagées, à faible énergie, et où le comportement du matériau est encore élastique. C'est pourquoi on peut s'attendre à une amélioration de la précision malgré le déraffinement. Ce qui est important, c'est de transférer au mieux les variables dans les zones où le comportement est fortement non linéaire. Le critère qui va réellement permettre d'apprécier la qualité du transfert est la comparaison de l'évolution de la force résultante en fonction du déplacement imposé entre des calculs avec et sans transfert sur un même maillage. Pour cela, il faut prendre les dispositions nécessaires afin d'être en mesure de reprendre le calcul après transfert.

### 2.5.6 Rééquilibrage

Les champs ayant été transférés de manières différentes aux nœuds et aux points de Gauss, et ce indépendamment des relations non linéaires qui relient les variables entre elles, les champs sur le nouveau maillage sont hors équilibre. Pour remédier à ce problème, les données transférées servent de première approximation à partir desquelles on tente de retrouver des champs cohérents et vérifiant l'équilibre après quelques itérations. La reprise du calcul est d'autant plus facile que les champs associés au nouveau maillage (après transfert) vérifient toutes les équations du problème. La première précaution à prendre est alors évidemment de choisir un opérateur de transfert minimisant la diffusion numérique. Les autres options qui sont ensuite disponibles sont présentées ici.

#### Division de l'incrément suivant

La mesure la plus simple consiste à se servir directement des champs transférés sur le nouveau maillage comme base pour les itérations menant à l'équilibre au pas de temps suivant qui est divisé en deux ou plusieurs étapes. Boroomand et Zienkiewicz proposent ainsi dans [41] de s'appuyer sur la division du prochain pas de temps pour faciliter le retour à l'équilibre. En d'autres termes, les efforts appliqués sont imposés graduellement. Ainsi, le nouvel incrément  $(n+1)$ , correspondant à un incrément du vecteur global des forces externes  $\Delta \underline{\mathbf{F}}^{(n)} = \underline{\mathbf{F}}^{(n+1)} - \underline{\mathbf{F}}^{(n)}$ , est divisé alors en deux parties :  $\alpha \Delta \underline{\mathbf{F}}^{(n)}$  et  $(1 - \alpha) \Delta \underline{\mathbf{F}}^{(n)}$  (avec  $0 \leq \alpha < 1$ ). Si  $\alpha$  est suffisamment proche de 0 ( $\alpha \approx 0$ ), la procédure revient à rééquilibrer les variables au début du nouveau pas de temps (après transfert des données). Le pas de temps peut être également subdivisé, dans une certaine limite, jusqu'à ce que le nouvel ensemble de variables soit de nouveau cohérent et vérifie l'équilibre.

#### Transfert d'un petit nombre de variables et calcul des autres

Certains auteurs, comme Camacho et Ortiz [50] ou Mediavilla [165], proposent d'aller plus loin et d'essayer d'approcher un peu plus les champs transférés de l'état d'équilibre. Le principe est d'utiliser certaines relations locales qui lient les variables entre elles pour n'en transférer qu'un petit nombre puis calculer les autres.

Brancherie et al. proposent dans [44] de transférer certains champs sous contrainte de sorte à vérifier au mieux les conditions d'admissibilité statique et cinématique.

Toutes ces méthodes nécessitent de faire un choix des variables à transférer en premier lieu et des relations à utiliser, ce qui tend à rendre ces mesures peu générales. D'autre part, même en prenant de telles précautions, les champs transférés et calculés peuvent ne toujours pas vérifier exactement la relation de comportement ou les conditions limites.

### Rétablissement d'un équilibre à la fin de l'incrément courant

Afin que les champs sur le nouveau maillage vérifient les équations discrètes d'équilibre, Mediavilla propose dans [165] d'introduire une étape supplémentaire destinée à rétablir un équilibre pour les conditions aux limites de l'incrément courant ( $n$ ). Durant ces itérations, les déformations sont supposées élastiques de sorte à faciliter la convergence de la solution. Les arguments apportés en faveur de ce choix sont que le taux de convergence de cette étape est quadratique et qu'il est inutile de recourir à des itérations élasto-plastiques alors que l'état du matériau n'est pas censé évoluer durant cette étape.

Mediavilla justifie l'introduction de cette étape supplémentaire avant de passer à l'incrément suivant, en évoquant des problèmes de stabilité numérique. Cependant, ces derniers pourraient bien être dus au choix de l'opérateur de transfert causant beaucoup de diffusion.

### Choix d'une méthode de rééquilibrage

Lors de la mise en place d'une procédure d'adaptation de maillage, il est nécessaire de choisir une méthode robuste et applicable dans le plus grand nombre de cas possible. Toutes les mesures consistant à transférer certains champs puis à calculer les autres champs en utilisant des équations du problème ne sont donc pas envisageables car elles ne sont pas assez générales. A ce stade, il est plus judicieux d'avoir sélectionné un bon opérateur de transfert et de procéder simplement par division du pas de temps pour l'incrément suivant. C'est une méthode simple qui a été mise en œuvre par exemple par Boroomand et Zienkiewicz dans [41]. L'opérateur de transfert de champ qu'ils utilisent étant proche de celui sélectionné, les résultats devraient donc être de qualité équivalente.

Deux options sont déjà disponibles dans le code *Zset*. Elles permettent :

- de diviser automatiquement le pas de temps en cas de divergence ;
- d'effectuer un pas de temps supplémentaire après remaillage, d'une durée tellement petite (1e-9) que les conditions de chargement sont quasiment identiques.

À la fin de ces pas de temps supplémentaires, lorsque le calcul a convergé, les champs sur le nouveau maillage sont cohérents et se retrouvent à l'équilibre. L'analyse peut donc reprendre son cours sur le maillage adapté.

## 2.6 Mise en œuvre de la procédure

### 2.6.1 Évaluation de l'impact du transfert de champs

#### Loi élasto-plastique endommageable

Tout d'abord, l'impact du transfert de champs sur le calcul est évalué. Pour cela, le calcul présenté au Chapitre 1, paragraphe 1.5.6, sur un maillage de taille moyenne 0.3 mm est ici repris en transférant les champs à une fréquence correspondant à  $\Delta u = 0.05$  mm sur ce même

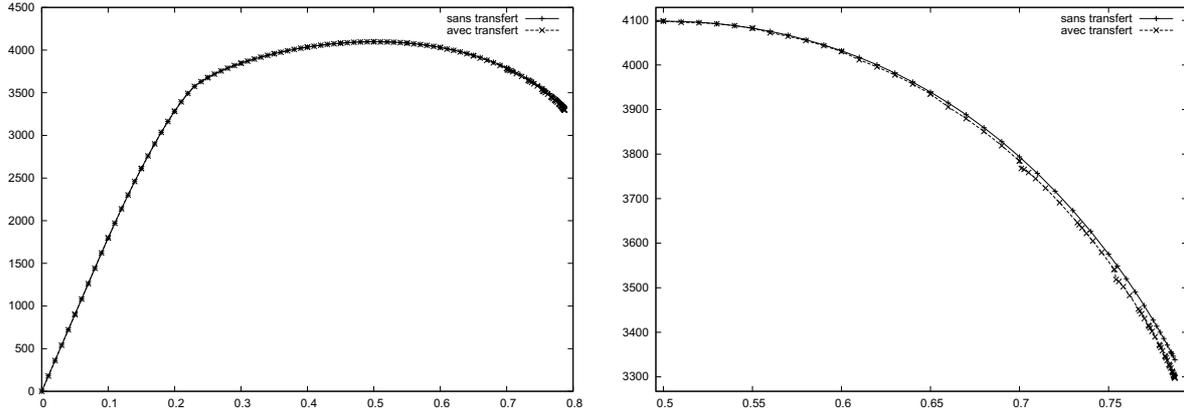


FIG. 2.11 – Évolution de la force résultante sur  $\partial_u \Omega$  (N) en fonction de dix fois la norme du déplacement imposé (mm) pour un calcul élasto-plastique endommageable classique et un calcul élasto-plastique endommageable avec transfert tous les  $\Delta u = 0.05$  mm à gauche, et zoom sur la partie post-pic à droite

maillage. Les résultats sont comparés à ceux obtenus précédemment en termes d'évolution de l'effort résultant en fonction du déplacement imposé figure 2.11. La comparaison des courbes obtenues par un calcul classique et un calcul avec transfert met en évidence une bonne performance globale de l'opérateur de transfert choisi puisque les courbes obtenues sont proches. Cependant, elle montre également les limites de la stratégie puisque les courbes tendent à s'éloigner lorsque l'endommagement maximal se rapproche de 1. Par ailleurs, lorsque la plasticité cumulée atteint des valeurs importantes (pour  $\|\underline{u}_b\| \geq 0.07$  mm), le retour à l'équilibre nécessite plus de divisions du pas de temps.

### Loi élasto-visco-plastique endommageable

La méthode de transfert choisie serait suffisante si l'objectif était de mener des calculs jusqu'à amorçage de fissure. Cependant, ces instabilités numériques risquent de poser problème si le calcul est poursuivi au-delà. Dans le but de ne pas multiplier les difficultés à ce stade de développement, et de faciliter la convergence de la solution lors du rééquilibrage, de la viscosité est introduite dans la loi de comportement élasto-plastique endommageable utilisée. Ainsi, il n'est pas nécessaire que les champs des contraintes qui étaient sur la surface de charge reviennent immédiatement après remaillage sur cette surface de charge : en présence de viscosité, ils sont autorisés à être en dehors de cette surface, et ils y seront ramenés au cours des itérations suivantes. La généralisation du modèle de Norton en adoptant le critère de von Mises conduit alors à un multiplicateur plastique  $\lambda$  dont l'évolution n'est plus déterminée par la condition de cohérence (1.11), mais par :

$$\dot{\lambda} = \left[ \frac{\sigma_e(\mathcal{E}) - (1 - \omega_p(p_{nl})) \sigma_y(p)}{K} \right]^n \quad (2.80)$$

où  $K$  et  $n$  sont deux coefficients matériau liés à la description de la viscosité. Pour plus de détails sur l'implantation numérique de la loi élasto-visco-plastique endommageable, voir Annexe A.

Les mêmes calculs sont alors effectués sur le même maillage avec une loi élasto-visco-plastique endommageable. Les paramètres matériaux sont quasi-identiques au cas élasto-plastique endommageable, excepté pour la constante de la loi d'endommagement  $k^c$  qui a été légèrement diminuée afin que les effets visqueux n'augmentent pas trop l'ampleur des déformations totales et que l'hypothèse des petites déformations soit le plus possible respectée. Les valeurs des différents paramètres sont données dans le Tableau 2.1. Les résultats avec et

Charge critique initiale	$\sigma_{y0}$	443 MPa
Module d'érouissage	$h$	300 MPa
Constante de la loi d'endommagement	$k^c$	0.08
Module de Young	$E$	183 GPa
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3
Paramètre visqueux 1	$n$	5
Paramètre visqueux 2	$K$	10 MPa.s <sup>1/n</sup>

TAB. 2.1 – Propriétés matériau

sans transfert sont comparés en termes d'évolution de l'effort résultant en fonction du déplacement imposé figure 2.12. La proximité des courbes les rend difficiles à distinguer, ce qui montre bien que l'introduction de viscosité a permis de minimiser l'impact négatif du transfert en termes de diffusion. D'autre part, le retour à l'équilibre a été manifestement facilité puisqu'il n'est plus nécessaire de recourir à autant de division du pas de temps qu'en l'absence de viscosité, ce qui réduit les coûts de calcul.

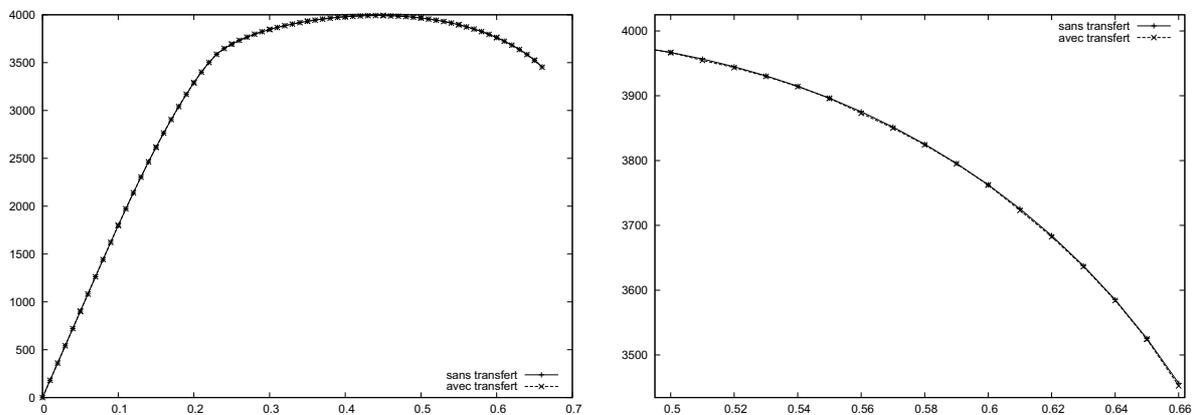


FIG. 2.12 – Évolution de la force résultante sur  $\partial_u \Omega$  (N) en fonction de dix fois la norme du déplacement imposé (mm) pour un calcul élasto-visco-plastique endommageable classique et un calcul élasto-visco-plastique endommageable avec transfert tous les  $\Delta u = 0.05$  mm à gauche, et zoom sur la partie post-pic à droite

## 2.6.2 Tests sur une éprouvette à deux encoches

### Mise en données

La stratégie de remaillage complète est ensuite mise en œuvre sur un exemple 2D et sur un exemple 3D avec la loi élasto-visco-plastique endommageable. La différence par rapport

au paragraphe 2.6.1 réside dans l'utilisation de l'estimateur d'erreur ZZ2 incrémental basé sur l'endommagement pour déterminer le moment où il faut remailler et pour construire le nouveau maillage grâce au critère (2.71). La précision demandée est  $\varepsilon_0 = 0.5\%$  afin d'obtenir un maillage suffisamment fin dans la bande où se concentrent les déformations par rapport à la longueur caractéristique choisie. Le seuil à partir duquel le remaillage est déclenché est fixé à 1.5% afin de ne pas remailler trop fréquemment. La taille minimum que peuvent atteindre les éléments est prise égale à 0.1 mm pour limiter le coût des calculs.

### En dimension deux

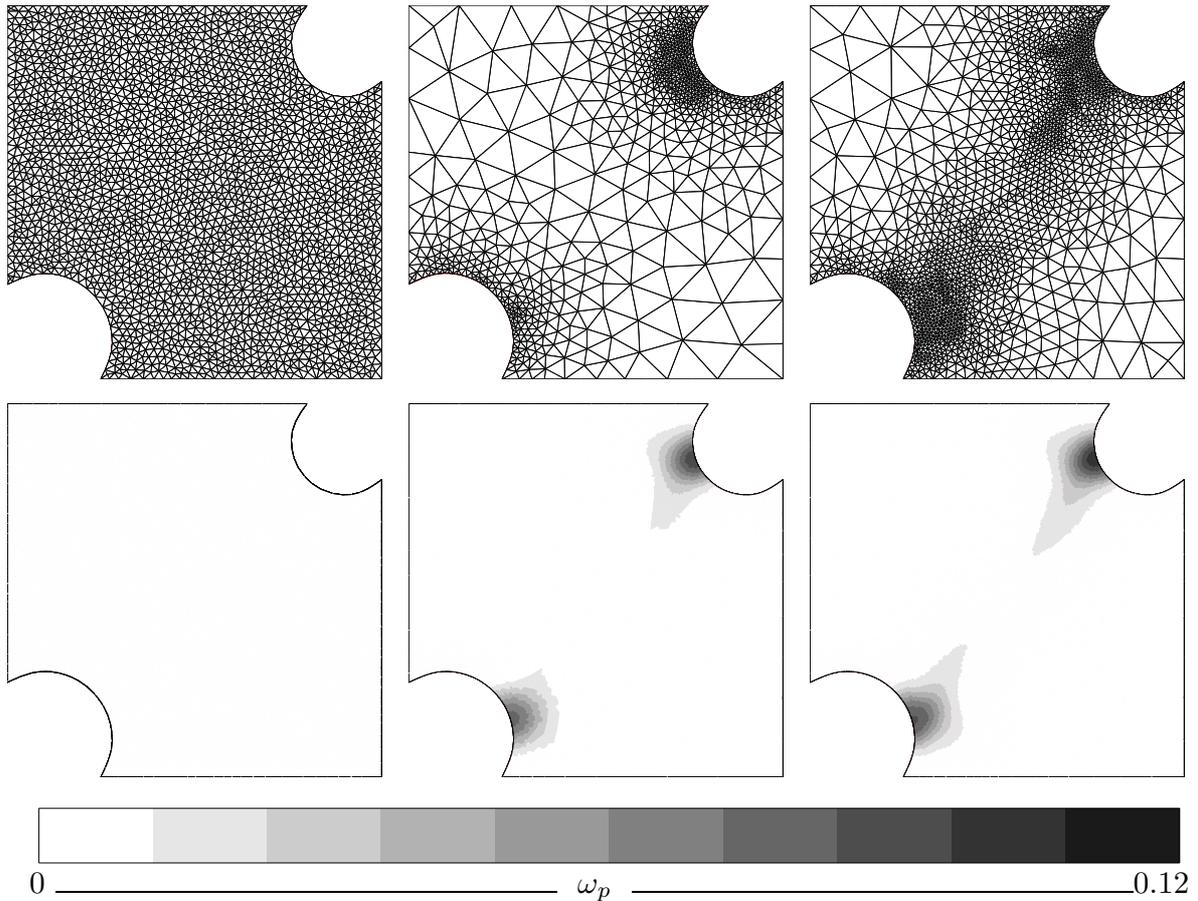


FIG. 2.13 – Les différents maillages obtenus (en haut) et la répartition de l'endommagement correspondante (en bas) pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| = 0.009$  mm (maillage initial juste avant remaillage),  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| = 0.024$  mm (premier maillage adapté juste avant remaillage) et  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| = 0.025$  mm (second maillage adapté juste après remaillage)

En dimension deux, la structure est remaillée deux fois : les maillages obtenus sont présentés figure 2.13. Les maillages sont raffinés dans les zones où les éléments sont trop grossiers pour bien décrire l'évolution de l'endommagement, mais ils sont aussi déraffiné dans les zones où l'endommagement est quasi-nul, comme le montre la comparaison avec la répartition de l'endommagement figure 2.13. Après ces deux remaillages, l'erreur globale reste inférieure au seuil limite. Il n'y a alors plus de remaillage jusqu'à ce que l'endommagement atteigne la

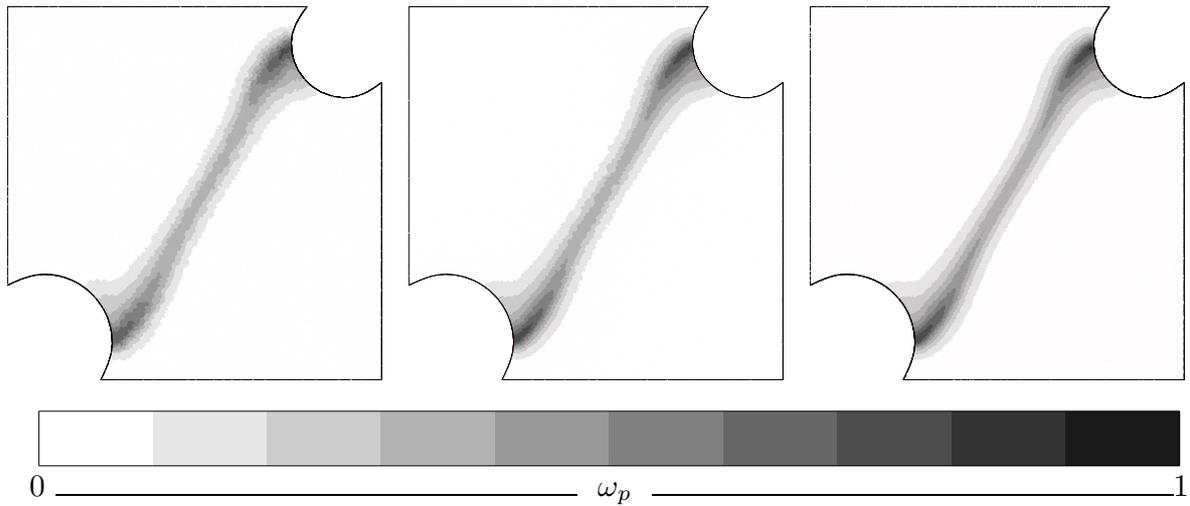


FIG. 2.14 – Répartition de l'endommagement à  $\|\mathbf{u}_b\| = 0.063$  mm pour le maillage uniforme de taille moyenne 0.3 mm, le maillage adapté et le maillage uniforme de taille moyenne 0.1 mm

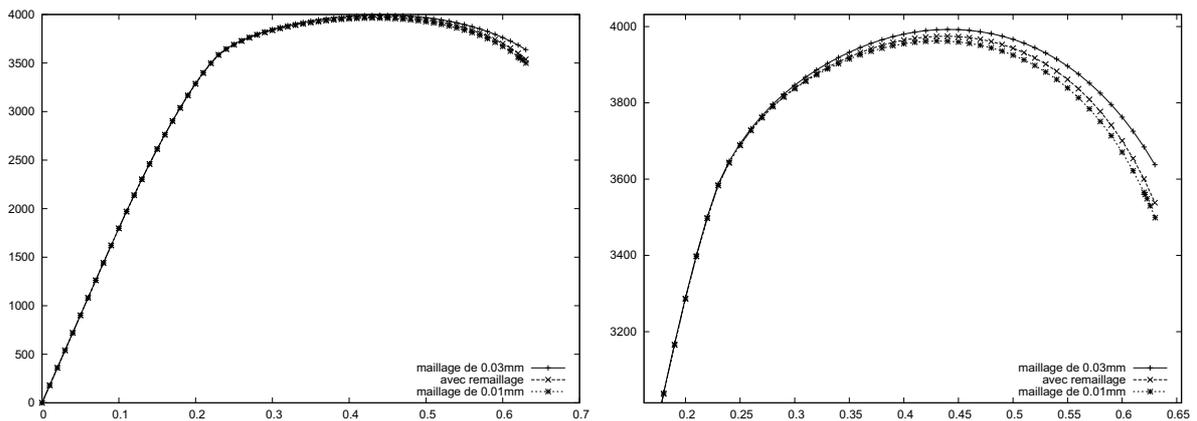


FIG. 2.15 – Évolution de la force résultante sur  $\partial_u\Omega$  (N) en fonction de dix fois la norme du déplacement imposé (mm) à gauche, et zoom sur le sommet de la courbe à droite pour le maillage uniforme de taille moyenne 0.3 mm, le maillage adapté et le maillage uniforme de taille moyenne 0.1 mm

valeur maximale, car la bande où se concentrent les déformations est déjà suffisamment bien discrétisée.

Comme le montre la figure 2.14, les résultats obtenus avec le maillage adapté en termes de répartition d'endommagement sont très proches de ceux obtenus avec le maillage de taille moyenne 0.3 mm au centre de la structure et plus proches de ceux obtenus avec le maillage de taille moyenne 0.1 mm près des encoches, là où l'endommagement est proche de 1.

En termes d'évolution de la force résultante sur  $\partial_u\Omega$  en fonction du déplacement imposé les résultats avec le maillage adapté sont même plus proches de ceux obtenus avec le maillage le plus fin (voir figure 2.15). Pourtant les coûts de calculs eux, ne sont pas du tout équivalents. Si l'on se réfère au Tableau 2.2 résumant le nombre de nœuds et d'éléments pour chacun de ces trois maillages, on constate que les coûts de calculs sont nettement moindres pour le maillage

adapté, ce qui était bien l'objectif visé.

	Maillage à 0.3	Maillage adapté	Maillage à 0.1
Nœuds	9 459	7 259	48 134
Éléments	4 650	3 558	23 867

TAB. 2.2 – Propriétés des maillages

Ces remaillages se produisent pour des valeurs d'endommagement très faibles ( $\omega_p \leq 0.12$ ), ce qui facilite le retour à l'équilibre puisque les erreurs commises lors du transfert des champs sont faibles et peuvent être rapidement corrigées. L'évolution de la courbe force-déplacement pour le maillage adapté figure 2.15 ne présente en effet pas de saut important lors des remaillages (à  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| = 0.09$  mm et  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| = 0.24$  mm).

### En dimension trois

Cette stratégie d'adaptation est aussi bien utilisable en dimension deux qu'en dimension trois. Pour le prouver, un calcul identique est mené en dimension trois. Les déplacements hors plan sont bloqués afin de reproduire au mieux le calcul précédent en dimension 2.

En dimension trois, la structure est remaillée trois fois. La nécessité de remailler une fois de plus qu'en dimension deux peut s'expliquer par le fait qu'il est plus difficile de respecter une taille de maille imposée dans un volume que sur une surface. Cependant, malgré le nombre de remaillages différent, les maillages obtenus sont équivalents dans le sens où la bande où se concentrent les déformations est maillée finement alors que le maillage dans les zones où l'endommagement est nul est assez grossier, comme le montre la figure 2.16.

Encore une fois, les remaillages ont lieu pour des valeurs d'endommagement faibles ( $\omega_p \leq 0.24$ ) puis le maillage n'évolue plus jusqu'à ce que l'endommagement atteigne sa valeur maximale (voir figure 2.18) car la discrétisation permet d'avoir une erreur globale inférieure au seuil limite. Ceci permet de limiter l'impact négatif du transfert de champ de l'ancien au nouveau maillage. Seul le dernier transfert, plus proche du pic, engendre un léger saut au niveau de la force résultante sur  $\partial_u \Omega$  en fonction du déplacement imposé visible sur la figure 2.18.

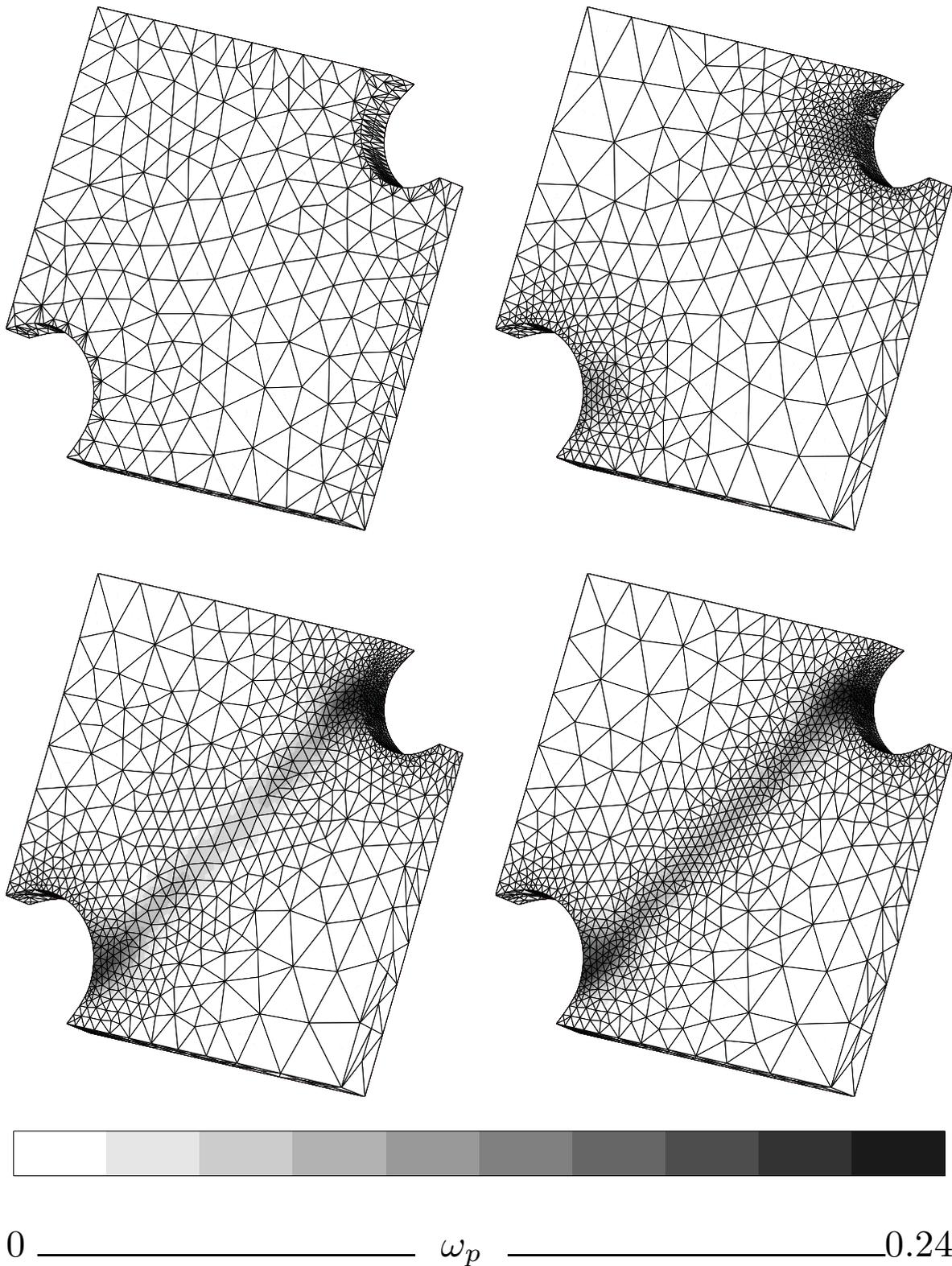


FIG. 2.16 – Répartition de l'endommagement sur les différents maillages pour  $\|\underline{u}_b\| = 0.01$  mm (en haut à gauche juste avant remaillage),  $\|\underline{u}_b\| = 0.024$  mm (en haut à droite juste avant remaillage),  $\|\underline{u}_b\| = 0.033$  mm (en bas à gauche juste avant remaillage) et  $\|\underline{u}_b\| = 0.034$  mm (en bas à droite juste après remaillage)

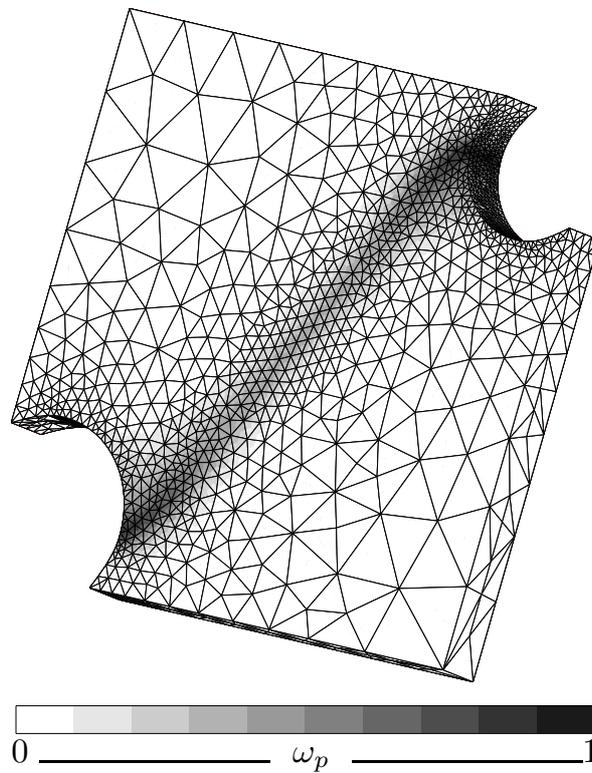


FIG. 2.17 – Répartition de l'endommagement lorsque la valeur maximale est atteinte pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.066$  mm

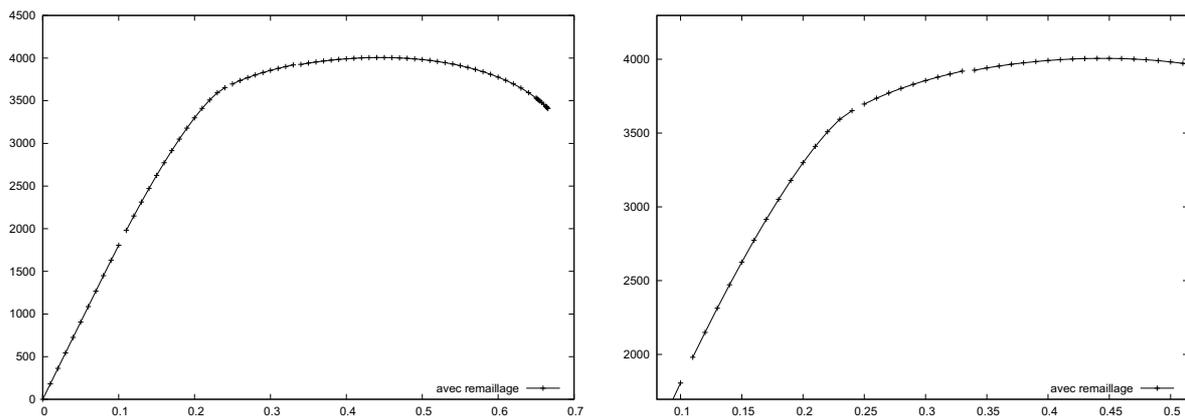


FIG. 2.18 – Évolution de la force résultante sur  $\partial_u\Omega$  (N) en fonction de dix fois la norme du déplacement imposé (mm) à gauche, et zoom sur les instants correspondant aux remaillages à droite

## 2.7 Conclusion

La stratégie de remaillage choisie donne des résultats très satisfaisants dans le sens où elle permet d'obtenir la précision souhaitée tout en minimisant les coûts de calcul. En effet, l'estimateur d'erreur incrémental reposant sur le lissage de l'endommagement permet de bien repérer la bande de concentration des déformations. Associé à un critère de calcul de taille de maille minimisant le nombre d'éléments pour les problèmes linéaires suffisamment réguliers, il conduit à une discrétisation fine de la zone d'intérêt. L'évolution de l'endommagement est ainsi capturée avec une précision fixée par l'utilisateur. Simultanément, le reste de la structure, où le comportement est élastique, est maillé de façon grossière, minimisant ainsi les coûts de calcul. Ces derniers sont d'ailleurs beaucoup plus intéressants que si un maillage fin uniforme avait été utilisé, pour une précision comparable. Par ailleurs, les remaillages sont peu nombreux et se produisent pour des valeurs d'endommagement très faibles. L'impact négatif que peut avoir le transfert de champ en termes de coût de calcul est ainsi minimisé. Enfin, grâce à l'utilisation d'un transfert de point de Gauss à point de Gauss utilisant un lissage par moindres carrés, les champs sont suffisamment peu éloignés de l'état d'équilibre pour que le calcul puisse reprendre uniquement en divisant le pas de temps suivant.

Cette stratégie assure ainsi une bonne prédiction de la phase de microfissuration, jusqu'à amorçage de fissure. C'est une condition nécessaire à une prédiction pertinente de la rupture. Cependant, les limites du modèle continu sont maintenant atteintes et il devient nécessaire de passer à une description discontinue pour insérer une fissure. Un modèle continu ne permet pas d'obtenir une description réaliste de la fissure du point de vue de la physique. En effet, la séparation des lèvres de la fissure se traduit alors par une augmentation des déformations. Cette augmentation entraîne alors l'augmentation de la plasticité et donc de l'endommagement dans les zones voisines à cause de la composante non locale introduite dans le modèle. Il s'ensuit une croissance déraisonnable de la largeur de la zone complètement endommagée ( $\omega_p = 1$ ) comme le montre la figure 2.19.

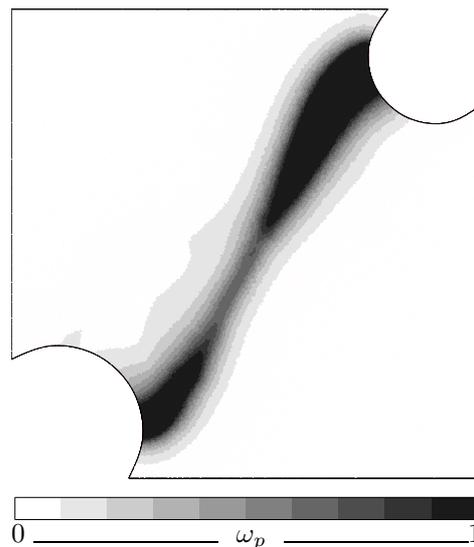


FIG. 2.19 – Répartition de l'endommagement sur un maillage adapté 2D pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.077 \text{ mm}$

## Chapitre 3

# Amorçage et propagation de fissures

L'utilisation d'un modèle continu jusqu'à amorçage de fissure a permis de bien décrire la perte de résistance associée à la dégradation du matériau. Les limites du modèles sont maintenant atteintes. Afin de prédire l'apparition et la propagation d'une macro-fissure discrète, il devient nécessaire de modéliser explicitement la géométrie de la fissure.

Différentes méthodes sont disponibles dans la littérature sur ce sujet. Cependant le choix qui a été fait dès le départ pour cette étude a été d'explorer la piste de l'insertion de discontinuité par remaillage. En effet, au delà de cette thèse, un des objectifs finaux de ce projet est de pouvoir simuler l'apparition et la propagation de fissures dans des matériaux complexes et sur des distances relativement importantes. Il est alors primordial de pouvoir utiliser un modèle aussi simple que possible et permettant de diminuer les coûts de calcul en déraffinant les zones non critiques déjà traversées par une fissure. Les approches présentes dans la littérature sont toutefois brièvement citées au début de ce chapitre.

Quelle que soit la méthode retenue, il est nécessaire de choisir un critère indiquant la direction dans laquelle le front de fissure va se propager. Après une description des principaux critères existants pour les milieux régularisés ductiles, un nouveau critère reposant sur le gradient du champ d'endommagement est proposé.

L'objectif de ce chapitre est de décrire comment l'utilisation de ce critère, combiné à une discrétisation simplifiée du chemin de fissure, permet de modéliser l'amorçage et la propagation de fissures grâce à une méthode de remaillage. La conservation de l'énergie entre les états endommagés et fissurés reste une question ouverte qui ne sera pas traitée dans le cadre de cette étude.

Les performances de la stratégie proposée sont finalement évaluées sur un exemple en dimensions deux et trois.

### 3.1 Amorçage et propagation dans la littérature

#### 3.1.1 Modélisation des discontinuités

Dans une démarche de simulation de propagation de fissures, la première décision à prendre porte sur la modélisation des discontinuités. De nombreuses approches ont été proposées pour la simulation de propagation de fissures en dimension deux. La technique la plus simple est l'érosion [160], qui consiste à enlever du maillage les éléments ayant atteint un niveau d'endommagement critique. La relative simplicité de cette méthode s'accompagne cependant de deux inconvénients majeurs qui sont la dépendance du chemin de fissure au maillage et la non

conservation de la matière. Un second type d'approche consiste à restreindre la propagation de fissures le long des frontières entre éléments (voir notamment les travaux de Needleman [178], Xu et Needleman [254] et Camacho et Ortiz [49]) en introduisant des zones cohésives. Cette technique est actuellement la plus répandue. La faiblesse de cette modélisation réside également dans la dépendance du chemin de fissure au maillage. Les autres solutions possibles exigent un effort d'implantation plus conséquent. Il est ainsi possible de recourir à des stratégies basées sur un enrichissement des éléments avec les modèles dit *smearred crack models* (voir l'article d'Oliver [185]) et *embedded crack models* (voir les travaux de Jirásek et Zimmermann [133] et ceux de Simo et al. [223]). Le problème avec ces éléments est que les déformations dans les différentes parties des éléments "fissurés" restent partiellement couplées. Enfin les solutions les plus prometteuses sont celles utilisant la méthode dite XFEM (*eXtended Finite Element Method*) avec les travaux de Belytschko et al. [36] et Moës et al. [171] basée sur l'enrichissement des fonctions d'interpolation pour permettre des sauts en déplacement, et les différentes techniques de remaillage. En dimension deux, des stratégies utilisant la méthode XFEM ont été employées pour la propagation de fissures dans des milieux élastiques endommageables régularisés par Patzák et Jirásek [195], Simone et al. [229] et Comi et al. [62]. Les applications concernent principalement les milieux quasi-fragiles. Wells et al. [252] ont montré que la technique XFEM peut également être utilisée pour un milieu viscoplastique avec le modèle de Perzyna. Récemment, Simatos [222] a couplé une formulation locale pour la rupture ductile avec un modèle de zone cohésive dans le cadre de la XFEM. Pour des modèles élasto-plastiques endommageables régularisés par une méthode à gradient implicites, des résultats probants ont été obtenus par Mediavilla [165] en utilisant une technique de remaillage global.

Modéliser la propagation de fissures en dimension trois s'avère être cependant une tâche plus complexe qu'en dimension deux. Un bon résumé des principaux travaux effectués dans ce domaine a été récemment proposé par Gürses et Miehe dans [117], qui est ici repris et complété par la citation de quelques travaux récents. La technique de l'érosion peut être facilement adaptée au cas tridimensionnel et a été utilisée par exemple par Bouchard dans [43]. Les techniques avec *embedded elements* ont été étendues au cas tridimensionnel par Ortiz et Pandolfi [190] pour la modélisation de la rupture cohésive en dynamique : des éléments d'interface triangulaires ont alors été insérés dans un maillage constitué de tétraèdres. Par la suite, Pandolfi et Ortiz [193] ont étendu cette approche en incorporant de manière adaptative les éléments d'interface. Pour la méthode XFEM, sa première application à la propagation de fissure en dimension trois a été proposée par Sukumar et al. [235]. Les travaux présentés étaient alors restreints au cas de fissures planes en mode I et portaient sur le calcul des facteurs d'intensité des contraintes dans le cadre de la mécanique de la rupture en élasticité linéaire. La méthodologie a par la suite été étendue par Sukumar et al. [234] pour la simulation de propagation de fissures planes en dimension trois. Moës, Gravouil et Belytschko ont associé dans [172] et [110] des fonctions *level set* à la méthode XFEM afin de modéliser la propagation de fissures non planes en dimension trois. Gasser et Holzapfel ont utilisé dans [105] la méthode de la partition de l'unité combinée à des théories de rupture cohésive pour la simulation de propagation de fissure dans du béton. Puis ils ont proposé dans [106] un algorithme en deux étapes basé sur un schéma de prédiction-corrrection non local pour suivre les fissures en dimension trois. Par ailleurs, Areias et Belytschko [8] ont combiné en 2005 la méthode XFEM avec un modèle d'endommagement continu régularisé et des lois cohésives pour l'initiation et la propagation de fissures dans des milieux fragiles et quasi-fragiles. Enfin, Simatos a appliqué en dimension trois sa stratégie pour la propagation de fissures dans des milieux ductiles pour un problème en mode I [222]. Les techniques de remaillage n'ont quant à elles été utilisées

en dimension trois pour décrire la propagation de fissures que dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (voir notamment les travaux de Carter et al. [52] et Chiaruttini et al. [58]). Apparemment, aucune stratégie adaptative robuste n'aurait encore été proposée en dimension trois pour les cas de rupture ductile avec endommagement.

Quelle que soit la méthode envisagée, il est nécessaire de disposer d'un critère efficace pour indiquer la direction de propagation du front.

### 3.1.2 Critères pour la propagation

Dans un milieu régularisé, la direction d'une discontinuité ne peut pas se déduire analytiquement d'une analyse de bifurcation. Elle est régie par l'interaction de la fissure avec le milieu endommagé qui l'entoure. Pour les milieux quasi-fragiles, Patzák et Jirásek [195] et Areias et Belytschko [8] ont utilisé un tenseur lié au tenseur des déformations pour déterminer l'orientation de la fissure. Cette dernière est liée à la direction dans laquelle les déformations sont maximales. D'autres critères reposent, eux, sur un calcul de moyenne pondérée faisant intervenir l'une des variables du modèle continu en relation avec la dégradation du matériau et la position des points en avant du front de fissure (voir par exemple Simo et al. [229]). Pour des comportements ductiles endommageables, c'est ce type de critère qui est principalement utilisé (voir notamment le critère de Wells et al. [252] et celui de Mediavilla [165]).

#### Critère de Wells et al.

Wells et al. proposent dans [252] de calculer le vecteur indiquant la direction de propagation de la fissure pour un modèle viscoplastique de Perzyna de la manière suivante :

$$\underline{\mathbf{d}} = \sum_{i \in S} \sigma_i^{eff} V_i w_i \frac{\underline{\mathbf{d}}_i}{\|\underline{\mathbf{d}}_i\|} \quad (3.1)$$

où  $\sigma_i^{eff}$  est la contrainte effective au point d'intégration  $i$  :

$$\sigma_i^{eff} = \sqrt{3/2} \|\underline{\mathcal{D}}^{dev}\| \quad (3.2)$$

$S$  désigne l'ensemble des points d'intégration  $i$  en avant du front de fissure,  $V_i$  et  $w_i$  sont respectivement le volume et le poids associés au point d'intégration  $i$  et  $\underline{\mathbf{d}}_i$  désigne le vecteur indiquant la direction du point d'intégration  $i$ . Les poids  $w_i$  sont tels que :

$$w_i = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} \exp\left(-\frac{\|\underline{\mathbf{d}}_i\|^2}{2r^2}\right) \quad (3.3)$$

où le rayon d'interaction  $r$  est deux à trois fois supérieur à la taille des éléments dans la zone d'intérêt.

Simone et al. ont adapté ce critère au cas d'un milieu quasi-fragile régularisé par une méthode à gradient implicite dans [229], en remplaçant la contrainte effective par la déformation équivalente non locale.

### Critère de Mediavilla

Mediavilla [165] a également traité le cas d'un problème régularisé par une méthode à gradient implicite. Il propose dans ce cas de déterminer la direction  $\theta_i$  correspondant à l'endommagement maximal en un certain nombre de points sur différents rayons situés à distance  $d_i$  en avant du front de fissure. La direction de propagation de la fissure est alors définie comme la médiane des angles maximaux  $\theta_i$ .

## 3.2 Approche proposée

### 3.2.1 Positionnement de cette étude

Dès le départ, le choix qui a été fait pour cette étude a été d'explorer la piste du remaillage. En effet, au delà de cette thèse, un des objectifs finaux est d'être en mesure de simuler la propagation de fissures sur de grandes distances et pour des matériaux complexes. Or, afin d'éviter des coûts de calcul prohibitifs, les simulations à grande échelle nécessitent un déraffinement des zones à faible énergie déjà traversées par la fissure. Et bien que la méthode XFEM soit très prometteuse, elle est associée à un maillage fixe dont les tailles de maille doivent être relativement petites le long du chemin de fissure. Par ailleurs, cette méthode nécessite l'ajout de degrés de liberté supplémentaires associés aux éléments. Or, comme le Chapitre 1 l'a montré, il est déjà nécessaire de recourir à des formulations d'éléments complexes et coûteuses en présence d'endommagement ductile afin d'éviter les problèmes de dépendance au maillage et de verrouillage volumique. Agir en post-traitement présente alors un avantage non négligeable pour les problèmes non linéaires de ce type. Avec l'amélioration des performances des mailleurs, l'insertion de discontinuités par remaillage devient donc une piste sérieuse.

Quelle que soit la méthode envisagée, il est de toute façon nécessaire de disposer d'un critère efficace pour déterminer la direction de propagation du front sur une distance fixée  $L_{max}$ . Les critères qui ont été proposés pour des comportements ductiles endommageables s'appuient sur un calcul de moyenne pondérée (voir 3.1.2). Ils ne permettent pas de traiter les cas de branchement, par exemple dans le cas d'un test de *cup cone failure*. Il faut donc un autre critère qui permette plus de robustesse dans la gestion de cas complexes, et ce à moindre coût.

L'approche proposée s'appuie sur la combinaison de deux concepts :

- la discrétisation simplifiée du chemin de fissure ;
- l'utilisation d'un critère reposant sur le changement de signe du gradient de l'endommagement lissé (CSGEL) pour déterminer l'orientation de la fissure.

Le principe général de ces deux idées est ici présenté, suivi d'une description de l'algorithme utilisant ces outils pour déterminer si une fissure doit être insérée dans le maillage de la structure. Les détails concernant l'implantation de la stratégie sont ensuite donnés dans les parties précédant la mise en œuvre de la stratégie.

### 3.2.2 Discrétisation simplifiée du chemin de fissure

#### Principe

Afin de tirer le meilleur parti des outils déjà disponibles dans le code *Zset*, l'algorithme de découpe développé par Chiaruttini et al. [58] est utilisé pour insérer la fissure dans le maillage. Cet outil permet d'introduire dans un maillage volumique une nouvelle frontière matérialisée par un maillage surfacique. Mais modéliser la surface de fissuration n'est pas un concept nouveau. Un point fort de la stratégie proposée est le fait qu'elle repose sur la construction d'un maillage auxiliaire incompatible pour modéliser le chemin de fissure (voir figure 3.1). Du point de vue de l'ingénieur, il est intéressant de pouvoir visualiser l'objet fissure. Du point de vue numérique, l'avantage majeur de construire un maillage auxiliaire de la fissure est de ne pas être tributaire de la discrétisation du maillage volumique.

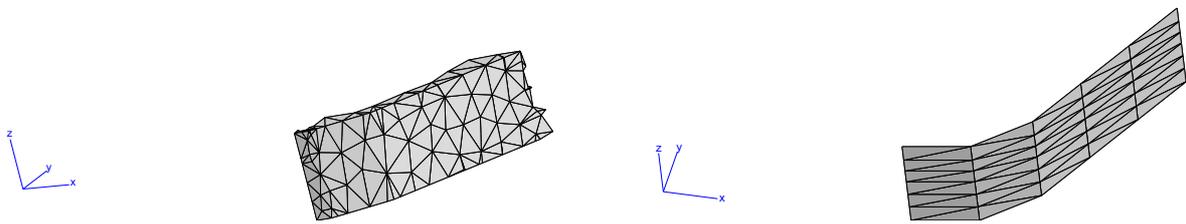


FIG. 3.1 – Maillage d'une lèvres de la fissure dans la structure (à gauche) et maillage surfacique auxiliaire correspondant (à droite)

#### Construction

Le maillage auxiliaire est toujours construit sur la base d'un front, appelé *ancien front*. Cet ancien front peut être une ligne droite ou courbe, ou une ligne fermée. Il est divisé en segments auxquels sont associés des panneaux rectangulaires. Ces panneaux ont tous une longueur de  $L_{max}$  qui est la taille maximale de l'élément autorisée par l'utilisateur pour décrire le chemin de fissure. L'idée est alors de positionner ces panneaux au plus près du prochain incrément du chemin de fissure sur la distance considérée. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un bon critère permettant de déterminer l'angle de rotation de chacun de ces panneaux autour du segment associé (voir figure 3.2).

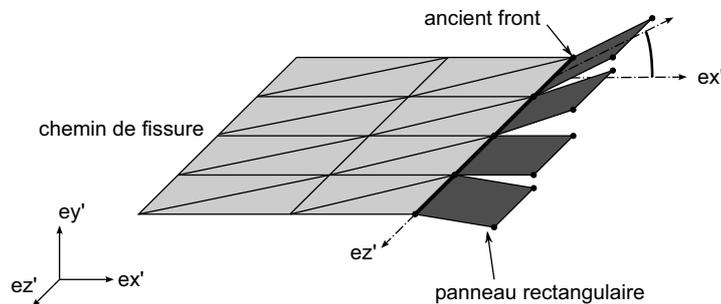


FIG. 3.2 – Positionnement des panneaux rectangulaires associés à l'ancien front

Une fois la direction de chacun des panneaux déterminée, on effectue en chaque nœud de l'ancien front la moyenne des directions des segments voisins (voir figure 3.3). Dans cette

direction, un nouveau nœud va être défini correspondant à un incrément de fissure sur la distance maximale  $L_{max}$ .

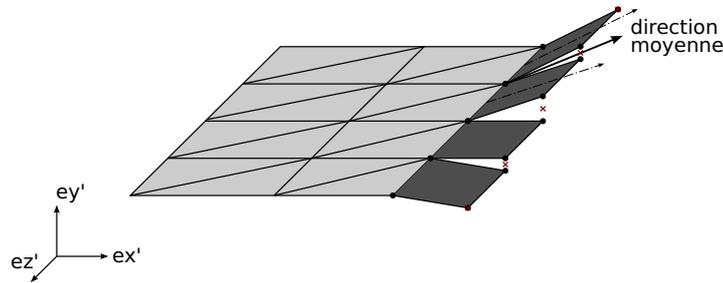


FIG. 3.3 – Moyenne des directions en chaque ancien nœud et positionnement de nouveaux nœuds.

Ces nœuds sont les nœuds du *nouveau front*. Pour construire l'incrément de fissure correspondant, il suffit de relier les nœuds de l'ancien front et du nouveau front avec un maillage composé de triangles (voir figure 3.4).

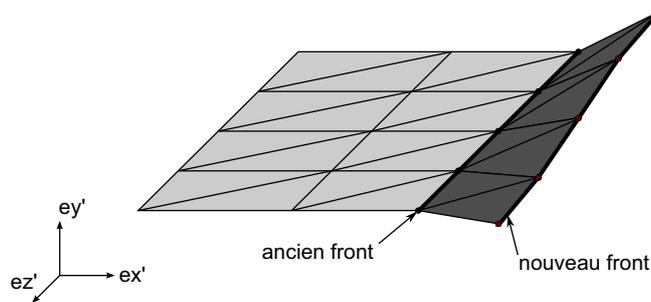


FIG. 3.4 – Maillage auxiliaire

On obtient ainsi une géométrie discrétisée du chemin de fissure. Après insertion, les recherches d'incrément de fissure reprennent à partir du dernier front.

En première approximation, pour le cas plan traité dans cette étude, c'est un maillage auxiliaire à front droit qui est introduit dans le maillage de la structure étudiée. Il serait possible d'obtenir une description plus précise du front dans le cas général : voir Annexe B.

La discrétisation du chemin de fissure est indépendante de celle de la structure (et en particulier du maillage des lèvres de la fissure *dans la structure*). Cette caractéristique est un point clé de la stratégie choisie. Elle permet notamment de travailler à partir d'un front de fissure dont le nombre et l'orientation des segments sont indépendants du nombre de nœuds et de l'orientation des éléments associés au front dans la structure remaillée. Ainsi il est possible de n'utiliser que très peu de nœuds pour des cas de propagation dans un plan, ce qui représente un gain notable en termes de coûts de calcul. Mais il est également possible de discrétiser le front du maillage auxiliaire avec un nombre de nœuds adapté à la courbure du chemin de fissure (en particulier pour des cas de propagation en mode III).

Une fois construit, ce maillage auxiliaire n'est plus modifié. Cette mesure, associée à la

discrétisation indépendante du maillage auxiliaire, permet de rendre plus robuste l'utilisation du critère d'orientation retenu, comme il sera montré plus loin. Le choix de ce critère est important, car le maillage auxiliaire sera une approximation d'autant meilleure du chemin de fissure que le critère retenu sera performant.

### 3.2.3 Critère pour l'orientation

#### Principe

Suivant le modèle continu d'endommagement retenu, la bande de concentration de l'endommagement correspond à une zone de faible résistance due à la présence de micro-cavités. À terme, les dommages diffus se réunissent pour former une macro-fissure, correspondant à une perte totale de résistance du matériau, donc à un endommagement égal à 1. Retrouver le chemin de fissure revient alors à retrouver le lieu d'endommagement maximal. L'outil privilégié pour repérer le maximum d'une fonction continue étant l'utilisation de son gradient, un critère reposant sur le gradient du champ d'endommagement est ici proposé. Son principe peut être illustré sur un cas poutre unidimensionnel tel que présenté figure 3.5. Dans ce cas simple, le lieu d'endommagement maximal peut être repéré comme le lieu pour lequel le gradient de l'endommagement change de signe, passant d'un gradient positif à un gradient négatif.

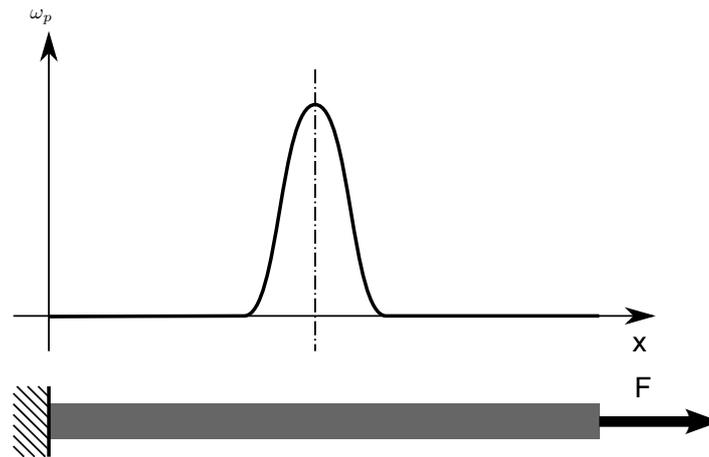


FIG. 3.5 – Représentation schématique de la concentration de l'endommagement sur une poutre

On cherche à généraliser ce principe en dimensions deux et trois. La difficulté de cette extension réside dans le fait que le gradient de l'endommagement est alors un vecteur et non plus un scalaire. Afin de pouvoir étudier un changement de signe, il est nécessaire d'effectuer une projection du vecteur gradient d'endommagement (plus précisément d'une représentation suffisamment régulière de l'endommagement) dans une direction qui permette d'observer le même type de profil d'endommagement que la figure 3.5.

En dimension deux, ce type de profil peut être observé en traçant l'évolution de l'endommagement sur un cercle dont le centre est :

- en phase d'amorçage, un point correspondant à un endommagement maximal (voir figure 3.6) ;

– en phase de propagation, le dernier front (voir figure 3.8).  
 Le lieu d'endommagement maximal peut alors être repéré par l'angle pour lequel le produit scalaire entre le gradient de l'endommagement et le vecteur orthoradial correspondant passe du positif au négatif (voir figure 3.7). Suivant une pratique courante dans la littérature, en phase de propagation, la fenêtre d'observation est réduite à la zone en avant du front de fissure (voir figure 3.8).

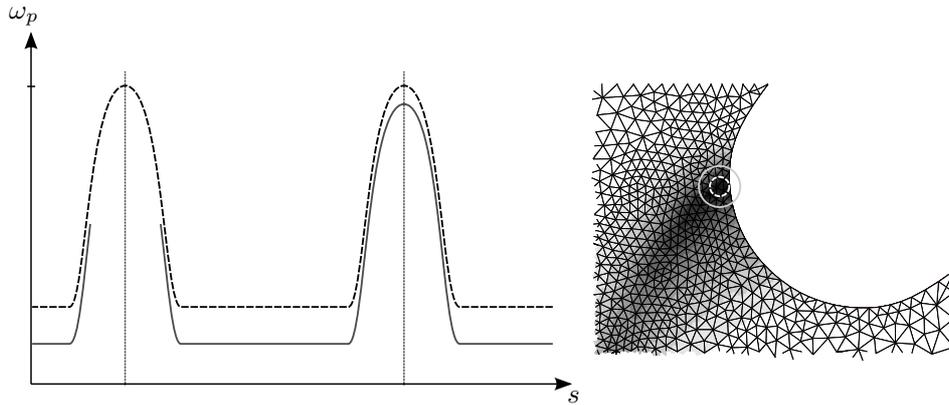


FIG. 3.6 – Représentation schématique de la concentration de l'endommagement sur une partie d'une éprouvette à double encoche



FIG. 3.7 – Représentation de quelques vecteurs gradients de l'endommagement lissé et d'un vecteur orthoradial

En dimension trois, le front de la fissure n'est plus un point, mais il peut être modélisé par une succession continue de segments. Le même principe peut alors être appliqué en effectuant la recherche de changement de signe dans des plans orthogonaux à ces segments comme illustré figure 3.9.

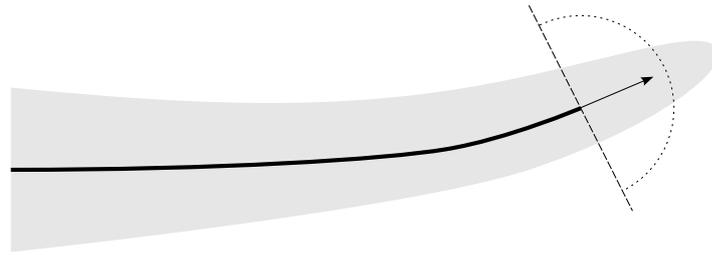


FIG. 3.8 – Représentation schématique de la fenêtre d'étude en phase de propagation : seuls les points en avant de la fissure sont considérés

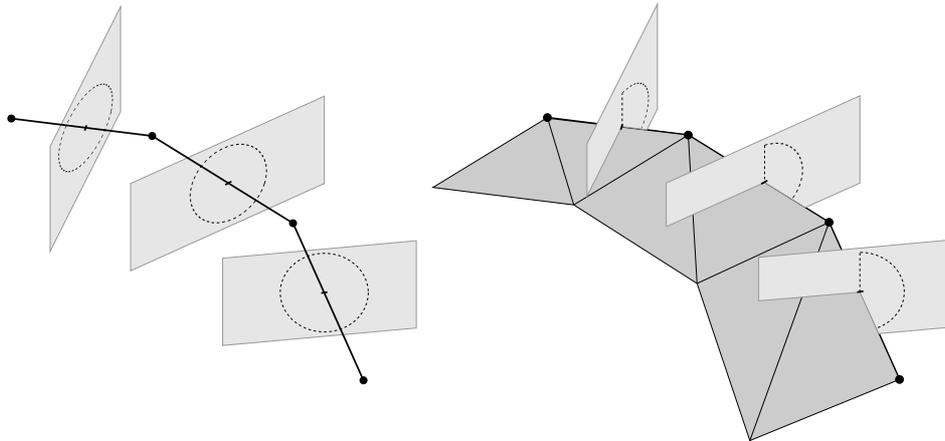


FIG. 3.9 – Représentation schématique des plans de recherche associés aux segments d'un front initial (à gauche) et d'un front d'une fissure déjà insérée (à droite)

L'intérêt essentiel de ce critère est qu'il permet de repérer simultanément les maxima dans plusieurs directions autour du point considéré. Cette caractéristique le rend plus performant que les critères basés sur des moyennes sur toute la zone d'observation dans deux types de situations en particulier :

- en phase d'amorçage pour déterminer l'orientation du premier incrément de fissure ;
- et en cas de branchement de la fissure.

### Lissage du champ d'endommagement

L'efficacité de ce critère repose essentiellement sur le fait que le champ d'endommagement soit suffisamment régulier. Un manque de régularité pourrait entraîner la sélection de plusieurs maxima locaux à la place d'un maximum global. C'est pourquoi le gradient du champ d'endommagement utilisé pour déterminer la direction n'est pas le gradient du champ calculé par éléments finis  $\omega_p$ , qui ne serait que constant par élément pour un champ de déplacements quadratique, mais le gradient d'un champ lissé plus régulier  $\omega_p^*$ . Dans le cadre de cette étude, un tel champ est déjà disponible : il s'agit de celui calculé dans la partie 2.2.5 par lissage local de type ZZ2. L'obtention du champ de gradient correspondant est alors peu coûteuse et passe par la dérivation des fonctions polynômiales utilisées pour le calcul du champ d'endommagement lissé.

Illustrons ce calcul pour un problème de dimension trois avec une interpolation quadratique des déplacements. Dans ce cas, l'interpolation utilisée pour le champ d'endommagement lissé  $\omega_p^*$  est également quadratique, alors que le champ d'endommagement calculé  $\omega_p$  est, lui, du même ordre que le gradient des déplacements, autrement dit linéaire. Lors de l'étape d'estimation d'erreur décrite dans la partie 2.2.5, une approximation globale du champ d'endommagement a été construite grâce au calcul de valeurs nodales, obtenues par approximation locale par la méthode des moindres carrés du champ d'endommagement sur des patches. Sur chaque patch d'éléments autour d'un nœud central, le champ  $\omega_p$  a en effet été approximé par une fonction polynômiale, ici :

$$\tilde{\omega}_p = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x^2 + a_8y^2 + a_9z^2 \quad (3.4)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\tilde{\omega}_p(M) = \underline{\mathbf{P}}(M) \cdot \underline{\mathbf{a}} \quad (3.5)$$

où  $\underline{\mathbf{P}}(M)$  est le vecteur contenant les termes polynomiaux appropriés et  $\underline{\mathbf{a}}$  est le vecteur des coefficients correspondants. Pour déterminer ces coefficients, une méthode des moindres carrés où les points d'échantillonnage sont les points d'échantillonnage optimaux a été utilisée, ce qui s'est ramené à la minimisation de la quantité :

$$F(\underline{\mathbf{a}}) = \sum_{I=1}^m (\omega_p(\underline{\mathbf{x}}_I) - \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \cdot \underline{\mathbf{a}})^2 \quad (3.6)$$

où  $m$  désigne le nombre de points de superconvergence dans le patch,  $\underline{\mathbf{x}}_I$  représente leurs coordonnées et  $\underline{\mathbf{x}}_I^R$  leurs coordonnées réduites définies par rapport au nœud central du patch de coordonnées  $\underline{\mathbf{x}}_{nc}$  par :

$$\underline{\mathbf{x}}_I^R = \frac{\underline{\mathbf{x}}_I - \underline{\mathbf{x}}_{nc}}{\max_{1 \leq J \leq m} (\|\underline{\mathbf{x}}_J - \underline{\mathbf{x}}_{nc}\|)} \quad (3.7)$$

Les coefficients de  $\underline{\mathbf{a}}$  ont donc été calculés dans la partie 2.2.5 en résolvant le système :

$$\sum_{I=1}^m \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \otimes \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \underline{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^m \omega_p(\underline{\mathbf{x}}_I) \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \quad (3.8)$$

soit :

$$\underline{\mathbf{a}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}} \quad (3.9)$$

$$\text{où } \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \sum_{i=1}^m \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \otimes \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^m \omega_p(\underline{\mathbf{x}}_I) \underline{\mathbf{P}}^T(\underline{\mathbf{x}}_I^R) \quad (3.10)$$

L'approximation globale du champ d'endommagement  $\omega_p^*$  utilisant des fonctions d'interpolation quadratiques a alors été construite en évaluant ces approximations aux nœuds et en prenant la moyenne pour les nœuds milieux ou sur la frontière appartenant à plusieurs patches. Les valeurs nodales obtenues ont été stockées dans un vecteur global  $\underline{\tilde{\omega}}_p^*$  ou dans un vecteur local  $\underline{\tilde{\omega}}_{p|E}^*$  spécifique à chaque élément. Ainsi, la valeur du champ d'endommagement lissé  $\omega_p^*$  en un point  $M$  d'un élément  $\Omega_E$  s'obtient par simple produit scalaire en utilisant les mêmes fonctions de forme  $\underline{\mathbf{N}}^*$  que pour les déplacements :

$$\omega_p^*(M) = \underline{\mathbf{N}}^*(M) \cdot \underline{\tilde{\omega}}_{p|E}^* \quad (3.11)$$

Ces outils étant déjà implantés, il est possible d'obtenir, pour un coût de calcul supplémentaire minimal, une bonne approximation du gradient du champ d'endommagement. En effet, les coefficients  $\mathbf{a}$  étant déjà calculés, la fonction polynômiale  $\tilde{\omega}_p$  est parfaitement définie sur le patch considéré. Il suffit alors de dériver cette fonction polynômiale du second degré pour obtenir une approximation locale  $\underline{\nabla}\tilde{\omega}_p$ , linéaire sur le patch, du champ gradient de l'endommagement  $\underline{\nabla}\omega_p$ , qui est lui constant par élément :

$$\underline{\nabla}\tilde{\omega}_p = \begin{bmatrix} a_1 + a_4y + a_5z + 2a_7x \\ a_2 + a_4x + a_6z + 2a_8y \\ a_3 + a_5x + a_6y + 2a_9z \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{\nabla}\tilde{\omega}_p(M) = \nabla\mathbf{P}(M) \cdot \mathbf{a} \quad (3.12)$$

Pour construire une approximation globale linéaire par élément du gradient de l'endommagement, deux options sont alors envisageables.

- Soit on dérive les fonctions de forme et on utilise la valeur du champ d'endommagement lissé aux nœuds. La valeur du gradient d'endommagement en un point  $M$  d'un élément  $\Omega_E$  pourrait alors être approchée par :

$$\underline{\nabla}\omega_p^* = \nabla\mathbf{N}^*(M) \cdot (\tilde{\omega}_{p|E}^*) \quad (3.13)$$

- Soit on évalue la dérivée de l'approximation du gradient  $\underline{\nabla}\tilde{\omega}_p$  en chaque nœud sommet. On déduit la valeur du champ gradient aux nœuds milieux par interpolation linéaire des valeurs aux nœuds extrémités du segment. Puis on stocke ces valeurs nodales dans un vecteur global  $\underline{\nabla}\tilde{\omega}_p^*$  ou dans un vecteur local  $\underline{\nabla}\tilde{\omega}_{p|E}^*$  spécifique à chaque élément. Enfin on utilise directement les fonctions de forme quadratiques  $\mathbf{N}^*$  (bien que l'approximation soit linéaire par élément) pour évaluer le gradient de l'endommagement lissé :

$$\underline{\nabla}\omega_p^* = \mathbf{N}^*(M) \cdot (\underline{\nabla}\tilde{\omega}_{p|E}^*) \quad (3.14)$$

C'est la seconde option qui est retenue car elle fait intervenir une dérivation locale de l'approximation du gradient de l'endommagement en chaque nœud sommet, et non pas une dérivation globale sur toute la structure. Elle devrait donc fournir une meilleure approximation des champs gradient.

Il est à noter que, de la même manière que pour le champ d'endommagement lissé, cette approximation du champ de gradient d'endommagement peut être de moins bonne qualité près d'une frontière extérieure.

L'implantation de ce critère est détaillée dans la partie 3.6.

### 3.2.4 Présentation de l'algorithme

Du point de vue numérique, l'objectif est d'être en mesure de savoir, à la fin de chaque incrément, s'il est nécessaire de remailler pour introduire une ou plusieurs fissures et d'avoir la géométrie des fissures concernées. L'algorithme figure 3.10 permet de répondre à cette question et est détaillé ci-après.

*A priori*, les remaillages sont peu fréquents et la réponse à cette question est donc initialisée à "non, il est inutile de remailler" : Flag=0.

À partir de là, pour savoir s'il faut remailler, il est nécessaire de répondre à ces trois questions :

- Combien de fronts de fissure y a-t-il dans la structure ?

Si des fissures ont été trouvées ou sont susceptibles d'apparaître, pour chacune d'entre elles, il faut savoir :

- Quelle est son orientation ?
- Doit-elle être insérée ?

La première étape consiste donc à faire la liste des fronts de fissure déjà existants dans la structure et à repérer les zones où de nouvelles fissures pourraient s'amorcer (étape 1, partie 3.3.2) : existe-t-il une zone d'endommagement important suffisamment loin de toute fissure existante ? Si la réponse est non, alors la liste des fronts de fissure existants est complète. Si la réponse est oui, alors à chacune des nouvelles zones d'amorçage repérées est associé un front. Ce front n'est encore pas déterminé, mais le considérer déjà en tant que tel permet de l'ajouter à la liste des fronts et de manipuler des objets de même nature. On a ainsi apporté une réponse à la première question.

La seconde étape consiste à définir ces fronts qui viennent d'être repérés (étape 2). En dimension deux, cette étape consiste simplement à trouver un point correspondant à un endommagement maximal (voir partie 3.3.3). Mais en dimension trois (parties 3.3.3 à 3.3.5), c'est une ligne qui doit être déterminée grâce au critère CSGEL (voir partie 3.3.4). Une fois ces fronts parfaitement définis, ils prennent le nom de *fronts initiaux* et sont stockés en attendant de servir pour construire la géométrie d'une nouvelle fissure. Si les conditions ne sont pas réunies pour permettre de parfaitement définir ce nouveau front, alors seul un point permettant de repérer la zone d'amorçage est stocké et la détermination du front initial reprend à la fin de l'incrément suivant.

On a donc une liste de fronts (correspondant à des fissures existantes ou à des fronts initiaux) et on cherche à déterminer à l'aide du critère CSGEL l'orientation des incréments de fissure correspondants (étape 3, partie 3.4). Or, une des caractéristiques du critère CSGEL est qu'il permet de repérer des directions correspondant à des maxima d'endommagement pour des valeurs inférieures à l'endommagement maximal, 1. En conséquence, la géométrie du nouvel incrément de fissure est déterminée bien avant d'être insérée. Une fois son orientation validée par un critère présenté partie 3.4.5, cette géométrie doit être stockée (partie 3.4.6). Au début de cette étape, deux cas de figure peuvent donc se présenter.

1. le front considéré n'a pas de géométrie stockée ; dans ce cas :
  - s'il s'agit d'un front ouvert entièrement inclus dans la structure, il faut vérifier s'il ne s'est pas étendu depuis sa détermination à l'étape 2 et le mettre à jour ;
  - il faut construire un incrément de fissure à soumettre au critère de validation.
2. le front considéré a déjà une géométrie stockée ; dans ce cas, il est inutile de passer de nouveau par cette étape.

Lorsque le front considéré a une géométrie stockée, alors il faut tester si, à la fin de cet incrément, toutes les conditions sont réunies pour qu'elle soit insérée (partie 3.5.2). Si un des fronts de la liste correspond à une géométrie prête à être insérée, alors la réponse à la question "est-il nécessaire de remailler ?" devient "oui" : Flag=1. Le processus d'insertion par remaillage est alors enclenché, suivi d'un transfert de champ afin de pouvoir reprendre le calcul au prochain pas de temps (étape 4, parties 3.5.3 à 3.5.6).

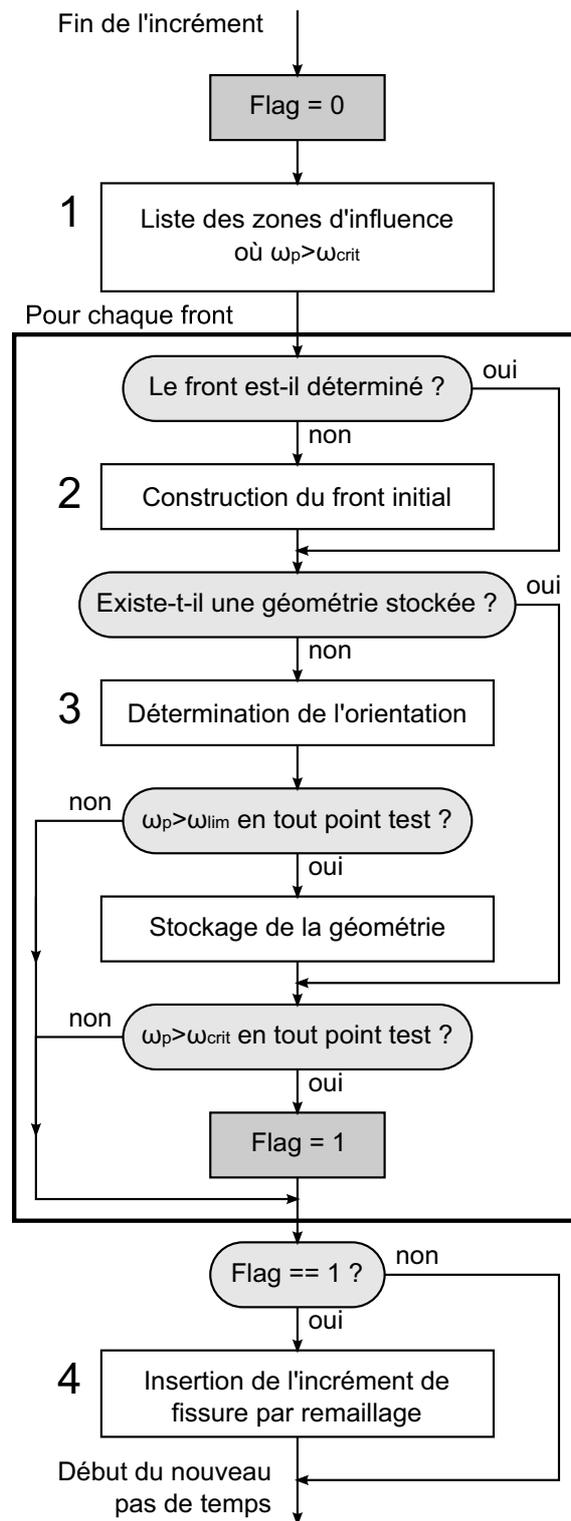


FIG. 3.10 – Algorithme

### 3.3 Amorçage : construction d'un front initial

On se place dans le cas où une nouvelle fissure peut s'amorcer dans la structure, éventuellement en présence d'autres fissures déjà existantes.

#### 3.3.1 Principe

Pour cette étude, la simulation de l'amorçage de fissure repose essentiellement sur une hypothèse : la fissure modélisée amorce sur une surface plane de taille réduite.

Ceci signifie que l'on va tenter, dans un premier temps, d'approximer la zone endommagée de manière critique par une portion de plan. Cette zone est représentée par un maillage auxiliaire construit en orientant des panneaux rectangulaires dans une même direction autour d'un front initial grâce à un critère s'appuyant sur le changement de signe du gradient de l'endommagement lissé, dit critère CSGEL (voir figure 3.11). La construction de ce front initial est décrite dans la suite. L'idée consiste à :

1. repérer les zones dans lesquelles de nouvelles fissures peuvent apparaître ;
2. déterminer un point appartenant au front initial ;
3. rechercher plusieurs fronts initiaux possibles ;
4. choisir un front initial  $\Gamma_i$  parmi ceux trouvés.

Pour les problèmes en dimension deux, la recherche du front de fissure s'arrête naturellement à la détermination du point fortement endommagé appartenant au front initial et d'un segment appartenant au plan (soit les deux premiers points uniquement).

#### 3.3.2 Distinction des zones d'influence

Quelle que soit la dimension, la première étape du processus consiste à rechercher s'il existe une ou plusieurs zones, situées suffisamment loin des fissures existantes (le cas échéant), où une nouvelle fissure pourrait apparaître. À la fin de chaque incrément, une *zone d'influence* est définie pour chaque fissure existante. Il suffit pour cela de commencer par sélectionner tous les éléments reliés au front de fissure et d'y associer leurs voisins dont au moins un des nœuds présente un endommagement supérieur à une valeur  $\omega_{min}$  fixée.

Une fois les zones d'influence des fissures existantes définies, il faut vérifier si l'endommagement a atteint une valeur critique  $\omega_{crit}$ , proche de un, en un point n'appartenant pas aux zones d'influences existantes. Si tel est le cas, une nouvelle zone d'influence, dite zone d'amorçage, lui est à son tour associée. La recherche de nouvelles zones reprend alors, en excluant également les nouvelles zones d'amorçage. De cette manière, plusieurs fissures peuvent s'amorcer simultanément et indépendamment dans l'ensemble de la structure, puisque la recherche de fronts initiaux s'effectue de manière indépendante dans chaque zone d'amorçage. Ces zones sont représentées sur la figure 3.12.

Il est à noter que cette étape nécessite le choix d'un paramètre  $\omega_{min}$ , dont la valeur doit permettre de distinguer les différentes zones d'amorçage. Elle peut être influencée par la largeur de la bande de concentration des déformations et la proximité des fissures, mais une valeur située autour de 70% de l'endommagement maximal semble convenir pour les cas qui ont été étudiés.

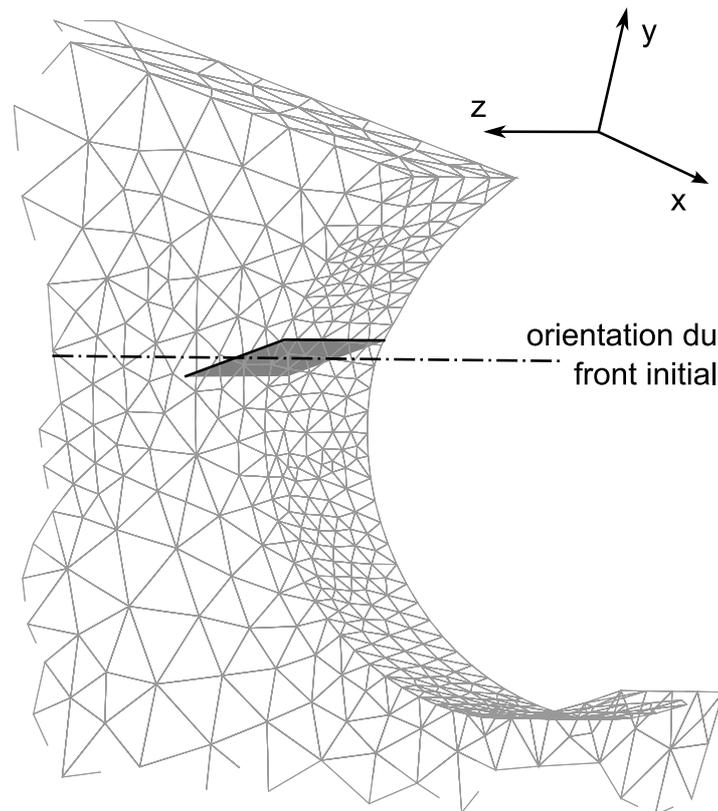


FIG. 3.11 – Représentation du plan d’insertion et de l’orientation du front initial correspondant

### 3.3.3 Détermination d’un point du front initial

L’étape suivante consiste à essayer de trouver un point du front initial dans chaque zone d’amorçage, afin de pouvoir effectuer la recherche d’orientation du front dans un plan autour de ce point.

Si un point appartient au front initial, cela signifie qu’il a atteint un endommagement proche de 1. On cherche donc un point où l’endommagement est maximal. Or, les valeurs de l’endommagement sont calculées d’abord aux points de Gauss puis interpolées aux nœuds. Donc, même si un nœud atteint la valeur d’endommagement maximale, il n’est pas certain que ce nœud appartienne au front initial.

Afin de se rapprocher le plus possible du front, il est possible de calculer le barycentre des points endommagés en utilisant une pondération liée à l’endommagement et au volume associés à ce point. La première difficulté vient alors du fait que l’endommagement est plus étendu dans la direction de propagation de la future fissure. Autrement dit, si une fissure doit s’amorcer à proximité d’une frontière et se propager à l’intérieur de la structure, il va être difficile de trouver une pondération qui assure que le barycentre calculé ne se retrouve pas décalé vers l’intérieur de la structure.

Afin d’éviter ce décalage, il est possible de ne prendre en compte que des points endommagés dans un très petit intervalle autour de la valeur d’endommagement maximale atteinte dans la zone d’amorçage. Ceci revient à se restreindre à un faible volume autour des points d’endommagement maximal. La difficulté réside dans la définition de la largeur de cet intervalle,

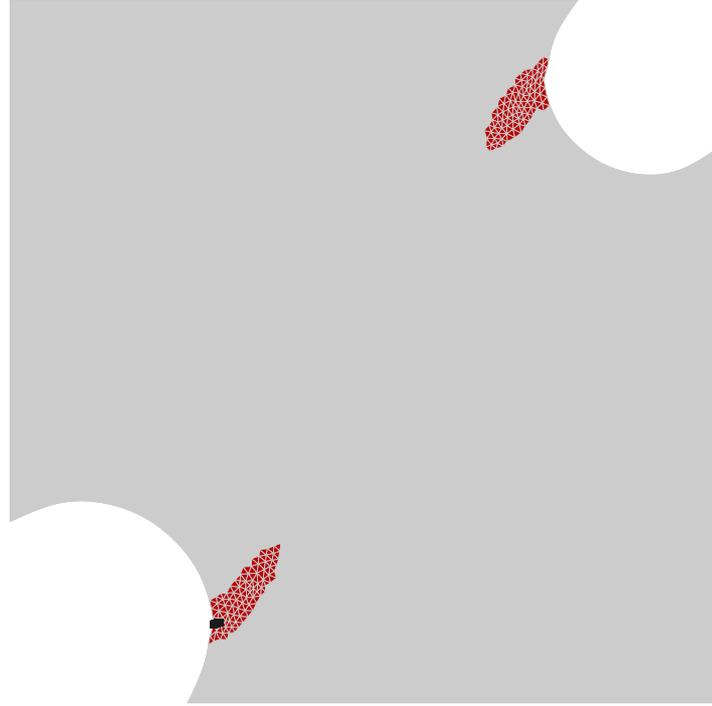


FIG. 3.12 – Représentation des différentes zones d’influence : autour d’une fissure déjà amorcée à gauche et d’au moins un point ayant atteint l’endommagement critique  $\omega_{crit}$  à droite

ou de manière équivalente, du volume à prendre en compte. Il faut que la zone endommagée correspondante soit suffisamment petite pour rester proche du front, mais suffisamment étendue pour être représentative. En particulier, en dimension trois, il faut pouvoir y définir un axe désignant l’orientation privilégiée d’un front initial.

Le choix adopté pour cette étude est de calculer le barycentre lorsque le rapport entre la taille de la zone  $\Omega_{crit}$  (où l’endommagement a dépassé la valeur critique  $\omega_{crit}$ ) et la taille de la zone d’amorçage  $\Omega_{min}$  (déterminée par  $\omega_{min}$ ) a atteint un seuil donné  $\eta_{crit}$  :

$$\frac{mes(\Omega_{crit})}{mes(\Omega_{min})} = \eta_{crit} \quad (3.15)$$

Seuls les points dans  $\Omega_{crit}$  sont pris en compte. Tous ces points correspondant à un endommagement très proche de 1, seul le volume associé à chacun des nœuds intervient dans le calcul du barycentre :

$$\underline{\mathbf{x}}_I = \frac{\sum_k V(k) \underline{\mathbf{x}}_k}{\sum_k V(k)} \quad (3.16)$$

où  $\underline{\mathbf{x}}_k$  désigne la position du nœud dont l’endommagement a dépassé la valeur critique  $\omega_{crit}$  et  $V(k)$  le volume associé.

Le choix du seuil  $\eta_{crit}$  est pour le moment fixé de manière arbitraire de sorte à obtenir des résultats optimaux. La recherche d’un meilleur critère pour déterminer le moment où le barycentre doit être calculé est sans doute la première piste possible pour rendre la stratégie plus robuste.

### 3.3.4 Recherche de plusieurs candidats

#### Les trois plans de recherche principaux

On a ainsi déterminé la position d'un point  $I$  par lequel le front initial, et *a fortiori* le plan d'amorçage, doivent passer. L'étape suivante consiste alors à repérer l'orientation du plan d'amorçage dans l'espace.

Pour cela, on peut chercher à déterminer l'orientation de l'intersection du plan d'amorçage avec un plan passant par  $I$ . Il faut encore choisir un plan dans lequel effectuer une recherche de maxima à l'aide du critère CSGEL, ce qui n'est pas trivial.

1. Cas très particulier : si le plan choisi coïncide avec le plan d'amorçage et que l'endommagement autour du barycentre  $I$  a dépassé la valeur critique sur toute la zone de recherche, il est possible de ne trouver aucune direction privilégiée.
2. Si le barycentre  $I$  n'est pas optimal et que l'on utilise un seul plan de recherche, on risque de trouver une mauvaise approximation du front initial (voir figure 3.13).

En revanche si l'on fait appel à un ou deux plans perpendiculaires supplémentaires, il est possible de trouver une meilleure approximation du front. En effet, l'intersection de deux plans est toujours une droite, indépendamment de la position du point  $I$ . En choisissant d'effectuer une recherche de maxima dans trois plans orthogonaux, on est sûr qu'au moins deux des plans ne seront pas confondus avec la surface d'amorçage et l'un d'eux devrait indiquer une direction privilégiée (s'il en existe une).

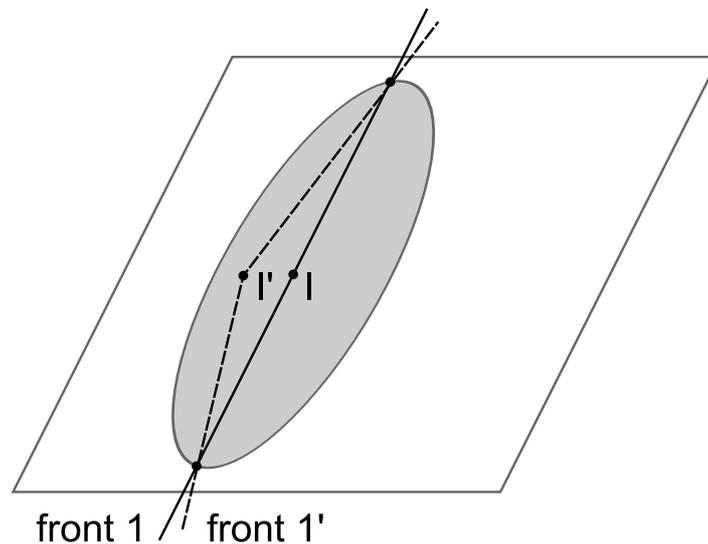


FIG. 3.13 – Exemple de fronts associés à des barycentres dont la position est correcte ( $I$ ), ou plus approximative ( $I'$ ) par rapport à l'endommagement critique (en gris) dans le plan d'amorçage

Le critère CSGEL est alors utilisé dans les plans  $(Ixy)$ ,  $(Ixz)$  et  $(Iyz)$  afin de déterminer les directions privilégiées de l'endommagement (voir figure 3.14).

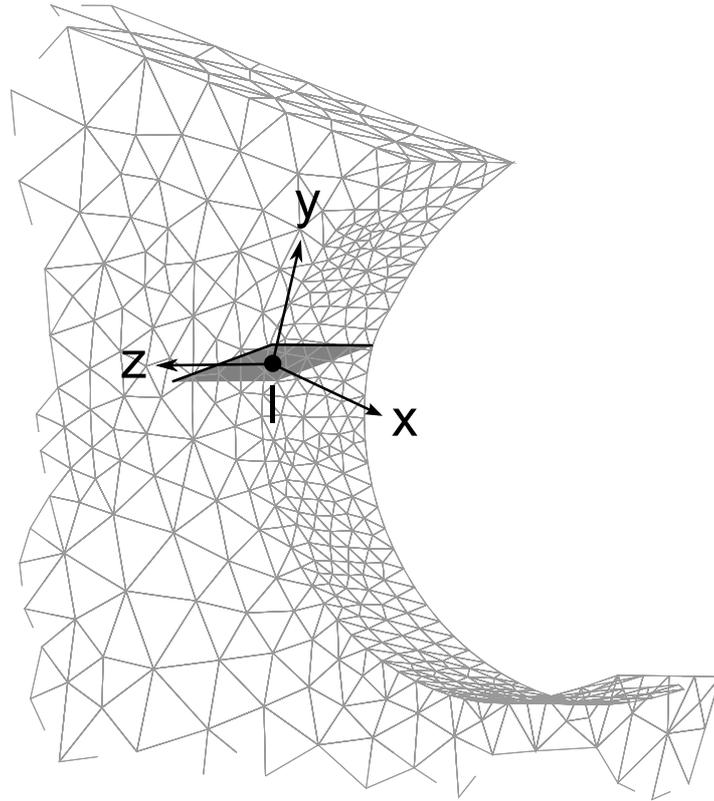


FIG. 3.14 – Repère associé au centre d'intérêt  $I$  servant à positionner les trois plans de recherches principaux

### Multiplication des plans de recherche

Si le barycentre se situe trop près d'une frontière ou si l'endommagement critique s'étend sur une zone importante autour du centre d'intérêt, la quantité d'informations significatives peut s'en trouver fortement réduite. Afin de surmonter cette difficulté, la recherche d'intersections s'effectue sur plusieurs plans parallèles. Ces plans doivent être proches des plans de recherche principaux,  $(Ixy)$ ,  $(Ixz)$  ou  $(Iyz)$ , de sorte à uniquement augmenter la quantité d'informations disponible sans en changer le contenu. Les plans parallèles sont donc positionnés de part et d'autre de chaque plan de recherche principal, à une distance inférieure à celle qui sépare le barycentre  $I$  du nœud le plus proche. Le produit scalaire entre le gradient de l'endommagement lissé et un vecteur orthoradial est alors évalué en chacun des points d'évaluation construits sur ces plans. Les résultats sont ensuite moyennés pour tous les plans parallèles afin de trouver les fronts candidats correspondant aux intersections entre le plan d'amorçage et les trois plans  $(Ixy)$ ,  $(Ixz)$  ou  $(Iyz)$ .

### 3.3.5 Choix du front initial

Le critère CSGEL permet alors de trouver jusqu'à trois fronts. Parfois, deux de ces front peuvent être confondus comme c'est le cas pour l'éprouvette à double encoche considérée dans cette étude (voir figure 3.15). Tous ces fronts appartiennent au plan d'amorçage, donc tous sont capables de générer ce plan. Cependant, le choix qui est fait dans cette étude consiste à

sélectionner le meilleur front suivant deux critères :

1. la préférence est donnée aux front droits ou aux lignes brisées se rapprochant le plus près possible de fronts droits, afin de pouvoir générer plus facilement la surface d'amorçage avec les panneaux rectangulaires ;
2. une direction est d'autant meilleure qu'elle correspond à un endommagement critique étendu.

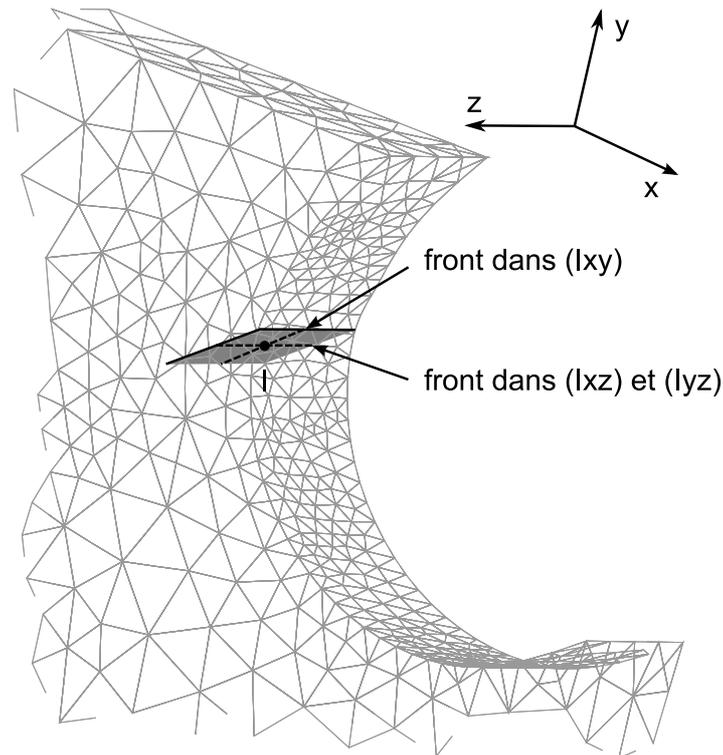


FIG. 3.15 – Détection de deux fronts initiaux possibles : un front dans le plan (Ixy) et deux fronts confondus dans (Ixz) et (Iyz), tous capables de générer le plan d'amorçage (en gris)

Le front retenu est ensuite divisé en segments de part et d'autre du barycentre  $I$ .

### 3.4 Construction de la géométrie de la fissure

Qu'il s'agisse d'un front déjà inséré ou d'un front initial (amorçage), on suppose dans cette partie que l'on dispose d'un front divisé en segments et on s'attache ici à décrire plus précisément la construction d'un incrément de fissure à partir de ce front.

#### 3.4.1 Mise à jour du front

Dans les cas où le front est ouvert et contenu dans une structure tridimensionnelle, il est nécessaire de vérifier que, si l'endommagement s'est propagé dans la direction du front, la longueur de ce dernier est bien mise à jour. Pour le moment, on procède par simple extension des segments aux extrémités uniquement (voir figure 3.16).

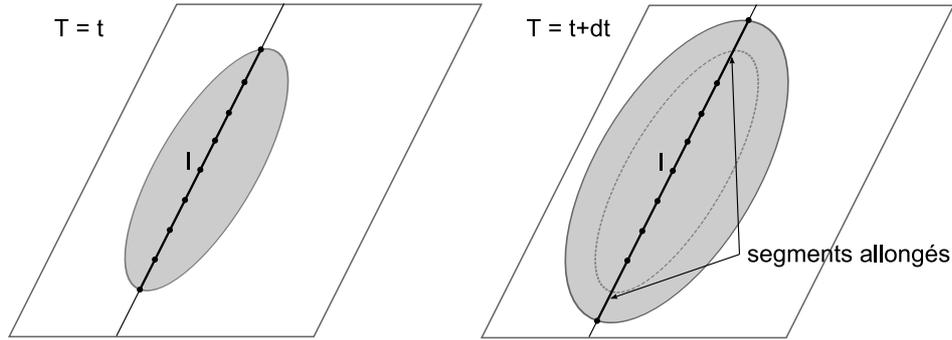


FIG. 3.16 – Extension des segments aux extrémités du front en cas de croissance de la zone  $\Omega_{crit}$  (en gris) au cours du temps

En phase de propagation pour des fronts fermés, il serait également envisageable de diviser un segment en deux lorsque sa longueur dépasse le double de sa longueur initiale. Cette précaution permettrait de traiter les cas où le front s'étend en conservant la même précision.

### 3.4.2 Mise en place des plans d'évaluation

Une fois le front et ses segments bien définis, on cherche à déterminer l'orientation de chacun de panneaux rectangulaires associés grâce au critère CSGEL. Pour cela, il faut associer à chaque segment un repère  $(Ix'y'z')$  pour parfaitement définir l'angle de propagation par rapport à une référence, qui est l'axe  $(Ix')$ .

#### Dimension deux

En dimension deux, on se place :

- en phase d'amorçage dans le plan  $(Ix'y'z')=(Ixyz)$  où le vecteur  $\underline{e}'_z$  désigne l'axe hors plan ;
- en phase de propagation, dans le repère où  $(Ix')$  correspond à la direction du dernier incrément de fissure.

#### Dimension trois

En dimension trois, un repère  $(Ix'y'z')$  est associé à chaque segment, avec  $(Iz')$  orienté suivant l'axe du segment. Puis, la direction  $(Ix')$  correspondant à un angle de  $0^\circ$  est donnée par un vecteur  $\underline{e}'_x$  orthogonal à  $\underline{e}'_z$  et :

- en phase d'amorçage, appartenant au plan de recherche du front sélectionné :  $(Ixy)$ ,  $(Ixz)$  ou  $(Iyz)$  ;
- en phase de propagation, colinéaire avec le dernier incrément de fissure du segment.

Le vecteur  $\underline{e}'_y$  est calculé par produit vectoriel des vecteurs précédents.

### 3.4.3 Tri des angles

Le critère CSGEL est alors utilisé pour déterminer les directions correspondant à des maxima d'endommagement pour chaque segment.

En dimension trois, on peut obtenir dans les phases non stabilisées :

- plusieurs angles pour un segment, tous les segments ne possédant pas nécessairement le même nombre d'angles ;
- des angles indiquant la même direction pour deux segments, mais dont les valeurs correspondantes sont "éloignées" (par exemple  $0^\circ$  et  $350^\circ$ ).

C'est pourquoi il est nécessaire de procéder à un tri des angles afin de regrouper ceux indiquant la même direction et être sûr de tester toutes les directions possibles pour tous les segments. Les angles sont donc regroupés par intervalles de largeur fixée (par exemple  $10^\circ$ ), de sorte à se retrouver avec un nombre de directions envisageables identique pour tous les segments.

Pour des cas de propagation de fissure en mode I ou II, cette recherche globale est efficace puisque les panneaux correspondant aux différents segments sont colinéaires. Mais pour une extension à un cas de propagation en mode III, il faudrait prendre en compte le fait que ces panneaux n'ont pas tous la même orientation et procéder au tri en comparant les angles pour des segments consécutifs (de sorte que les directions de référence soient proches).

#### 3.4.4 Sélection des directions

Les possibilités offertes par le critère CSGEL font que la stratégie proposée devrait permettre à terme de traiter un très grand nombre de cas. Cependant, dans cette phase de développement, seuls certains cas ont été traités, et la stratégie a donc été adaptée afin de rendre le traitement de ces derniers plus robuste. Ainsi, deux mesures ont été prises, pour les exemples présentés.

Tout d'abord, une seule direction globale est sélectionnée car la technique d'intersection de maillage utilisée pour l'insertion de la fissure ne permet pas encore de traiter les cas de branchement pour la propagation. Par ailleurs, en phase d'amorçage, si la zone endommagée est très large et le front initial trop près du bord pour avoir une quantité suffisante d'informations pertinentes, il est possible de trouver plusieurs angles correspondant à une intersection avec la frontière. Une seule direction globale est également retenue pour la phase d'amorçage. Mais si l'on souhaite traiter des cas où il peut y avoir branchement (et que la technique d'intersection de maillage utilisée le permet), il faut conserver toutes les directions globales sélectionnées.

D'autre part, le dernier cas présenté à la fin de ce chapitre est le traitement en dimension trois d'un problème plan, préalablement traité en dimension deux. En conséquence, l'approche proposée doit fournir des directions homogènes dans l'épaisseur. Autrement dit, la même direction doit être trouvée indépendamment pour tous les segments. Et c'est bien ce que le critère indique lorsque les résultats sont stabilisés. Ceci signifie que l'on doit avoir un critère suffisamment performant pour ne pas valider la direction sélectionnée avant que les résultats ne soient stabilisés. Cependant, cette validation doit avoir lieu suffisamment tôt pour que l'endommagement critique n'ait pas eu le temps de s'étendre aux points d'évaluation.

#### 3.4.5 Validation

Il est donc primordial d'avoir un bon critère permettant de valider le choix de l'angle sélectionné par le critère CSGEL. Pour chaque segment, on considère que si un point, situé à une distance supérieure à  $L_{max}$  dans la direction étudiée, a atteint une valeur supérieure à  $\omega_{lim} = 0.9$ , alors il est probable que la fissure progresse bien dans cette direction.

La difficulté réside alors dans le choix de la distance maximale  $L_{max}$ . Cette taille est à choisir en fonction de la largeur de bande de concentration de l'endommagement. En effet, plus la distance maximale  $L_{max}$  est supérieure à la largeur de bande, moins il y a de risques que le critère sélectionné pour la détermination de la direction n'indique une direction erronée. Cependant, une taille trop importante ne permettrait pas de capturer de manière satisfaisante les changements de direction du chemin de fissure les plus marqués. Il faut donc trouver un compromis entre l'assurance d'avoir choisi la bonne direction et une bonne approximation du chemin de fissure. C'est pourquoi la longueur  $L_{max}$  est définie en fonction de la taille de maille dans la zone. Dans la bande de concentration, les éléments ont une taille de maille suffisamment petite pour bien capturer les gradients d'endommagement (voir thèse de Germain [108]). Cela signifie que la taille de ces éléments est au moins trois fois inférieure à la largeur de la bande de concentration. C'est pourquoi prendre environ trois fois la taille d'un élément dans cette zone peut être une bonne approximation de la longueur minimale de l'incrément de fissure à insérer (voir figure 3.17). La taille de maille dans la bande de concentration étant en général égale à la taille de maille minimum, on peut également choisir d'entrer cette taille de maille minimum comme paramètre, utilisé à la fois pour le remaillage et pour le calcul de  $L_{max}$ . Ceci permet de réduire les coûts de calcul en évitant d'avoir à évaluer la taille de maille à proximité du front de fissure.

Cependant, il y a des cas où il est impossible de s'appuyer sur une longueur pour pouvoir valider la direction sélectionnée. Cela se produit notamment lorsque le front est à une distance inférieure à  $L_{max}$  du bord. Dans ce cas particulier, la priorité est donnée aux directions pour lesquelles le nouveau front se trouve en dehors de la structure à une distance  $L_{max}$  dans la direction indiquée. Cette mesure est nécessaire car, si le front est proche de la frontière, cela signifie que l'endommagement dans cette direction va très vite saturer et qu'il n'y aura bientôt plus d'informations disponibles pour plusieurs tranches consécutives dans cette zone. Donc, si une telle direction est sélectionnée et que l'endommagement près de la frontière est suffisamment élevé, elle est validée.

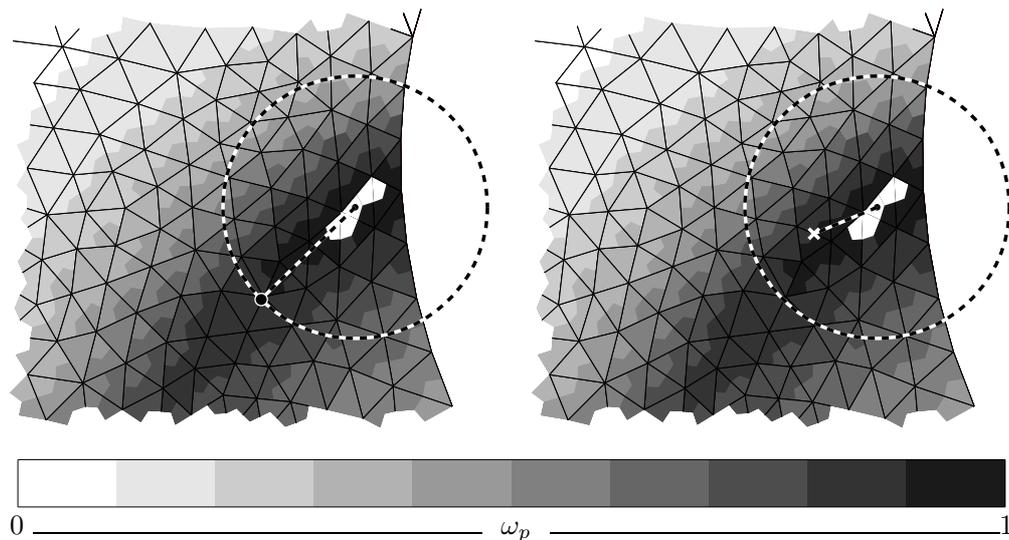


FIG. 3.17 – Direction validée par le critère à gauche et non validée par le critère à droite avec zone saturée en blanc

Si une direction est validée localement au niveau de chaque segment, alors elle est validée pour tout le front et la recherche de directions s'arrête pour ce front. En l'absence de validation de direction, la recherche reprend au pas de temps suivant.

### 3.4.6 Moyenne aux nœuds

Les directions validées sont alors moyennées aux nœuds de l'ancien front séparant les segments (voir figure 3.3). Le fait de calculer la moyenne des directions permet de gérer efficacement les cas où les directions se croiseraient.

En première approximation, un nouveau front est construit en reliant les nouveaux nœuds situés à une distance  $L_{max}$  des anciens nœuds dans la direction indiquée (voir figure 3.4). La géométrie est alors stockée en attendant d'être insérée lorsque le moment sera venu.

## 3.5 Insertion

Une fois la géométrie stockée, il faut déterminer le meilleur moment pour l'insérer dans la structure, et le cas échéant procéder à l'intersection des maillages et au transfert des champs.

### 3.5.1 Quand ?

La question de la conservation de l'énergie entre les états endommagés et fissurés est une question délicate, particulièrement en dimension deux et trois. Afin d'éviter de rajouter une difficulté supplémentaire, les fissures ne sont introduites que lorsque la zone associée a subi une perte de résistance totale. D'après le modèle d'endommagement continu choisi, un tel état correspond à un endommagement égal à 1. Il faut donc s'assurer que l'incrément de fissure n'est inséré que lorsque l'endommagement dans la zone est suffisamment proche de 1.

### 3.5.2 Critère d'insertion

Du point de vue de l'implantation, des points test sont positionnés au plus proche des nouveaux nœuds dans la structure afin d'y évaluer l'endommagement. Lorsque tous les points test présentent un endommagement supérieur à l'endommagement critique  $\omega_{crit}$ , la procédure d'insertion est déclenchée.

Il est important d'utiliser l'endommagement calculé  $\omega_p$  et non pas l'endommagement lissé lors des évaluations. En effet, l'endommagement lissé est de moins bonne qualité près des frontières, ce qui peut entraîner des difficultés lorsque l'on cherche à insérer un incrément de fissure près des bords. De plus, cet endommagement lissé ne représente pas une mesure physique et, en particulier, il peut décroître légèrement au cours du temps. Or, il est important de pouvoir insérer les incréments de fissure dès que possible afin d'éviter un élargissement excessif de la bande où se concentrent les déformations comme observé au Chapitre 2.

### 3.5.3 Intersection de maillages

L'algorithme de découpe développé et implanté par Chiaruttini [58] est alors utilisé pour insérer le maillage surfacique auxiliaire de la fissure dans le maillage volumique de la structure.

L'algorithme de découpe doit générer un maillage de peau de la structure avec une nouvelle frontière correspondant à la géométrie de la fissure (voir figure 3.18). Pour obtenir cette

triangulation, l'algorithme effectue une boucle sur les éléments du volume traversés par la surface de découpe afin de générer des polygones constituant la nouvelle frontière. Ces polygones sont issus de l'intersection des arêtes de l'élément de volume avec la surface (voir figure 3.19). Pour que les polygones représentent au mieux la surface de la fissure, il est alors nécessaire que les rayons de courbure de la surface soient relativement grands par rapport à la taille caractéristique des éléments. Cette hypothèse est bien vérifiée puisque c'est dans cet esprit qu'a été construit le maillage auxiliaire.

Pour les problèmes en dimension deux, la géométrie de la structure est extrudée. Le maillage auxiliaire à insérer est construit sous forme de panneaux orthogonaux au plan dont deux des côtés sont colinéaires à la direction sélectionnée dans le plan. Après intersection et construction du maillage de peau, seule une face de la structure fissurée est retenue, de sorte à revenir à un maillage surfacique plan.

Dans tous les cas, le maillage obtenu ne peut pas convenir pour un calcul éléments finis. L'algorithme d'adaptation de maillage YAMS-GHS3D est alors utilisé pour construire un maillage volumique.

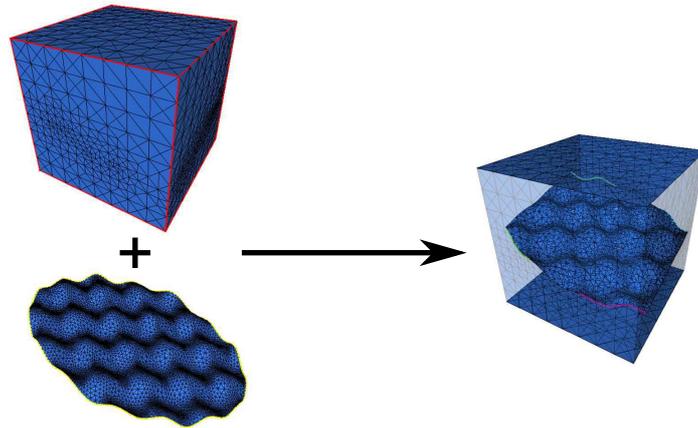


FIG. 3.18 – Représentation schématique du principe de l'algorithme de découpe : insérer un maillage surfacique dans un maillage volumique (image issue de [58])

### 3.5.4 Création d'un nouvelle carte de taille de maille

Afin de conserver un maillage suffisamment fin en avant du front de fissure, les informations fournies par l'estimateur d'erreur vont être utilisées pour construire la discrétisation du nouveau maillage fissuré. Par ailleurs, le maillage est raffiné au niveau de chaque nouvel incrément de fissure : au niveau de chaque ancien front et de chaque nouveau front (s'il est déjà déterminé). Il serait envisageable par la suite de déraffiner le maillage en arrière des fronts de fissure : c'est lors de la création du fichier de consigne de tailles de maille qu'il faudrait apporter des modifications.

### 3.5.5 Duplication des nœuds des lèvres

À l'issue de cette adaptation volumique et surfacique, un nouveau maillage conforme est obtenu. Les nœuds appartenant à la nouvelle frontière représentant la fissure sont alors dupli-

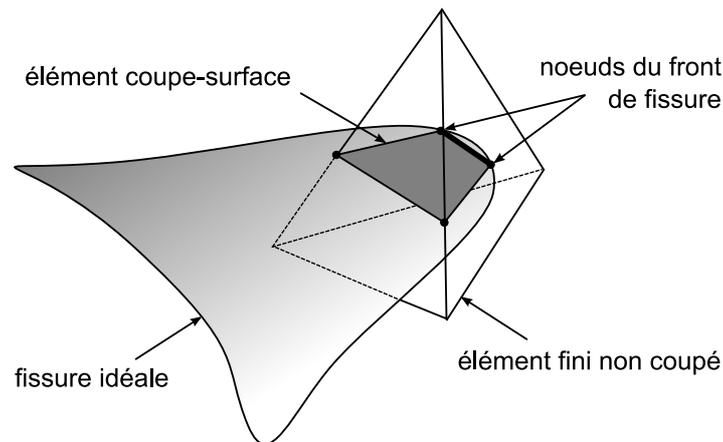


FIG. 3.19 – Représentation schématique de la construction d'un polygone par intersection de la surface de la fissure avec un élément volumique (image inspirée de [58])

qués pour permettre une représentation des lèvres (seuls les noeuds du front, repérés en tant que tels, ne sont pas dupliqués).

### 3.5.6 Transfert des champs

Une fois le nouveau maillage fissuré créé, il est nécessaire de transférer les champs de l'ancien au nouveau maillage. La stratégie décrite dans la partie 2.5.4 est alors employée. Cependant la présence de fissures dans le nouveau maillage introduit une difficulté supplémentaire. En effet, les noeuds de part et d'autre des lèvres de la fissure ont les mêmes coordonnées deux à deux. Il est alors impossible de n'utiliser que les coordonnées des noeuds pour retrouver à quel élément de l'ancien maillage le nouveau noeud appartient. Lorsqu'il y a eu amorçage de fissure et qu'un incrément a été introduit dans un milieu où les champs sont continus, cela ne pose aucun problème. Mais lorsqu'un incrément est introduit en phase de propagation, les champs de part et d'autre des lèvres de fissure deviennent discontinus. Les données aux noeuds appartenant aux lèvres sont donc transférées séparément. Afin de trouver à quel côté de la fissure chacun de ces noeuds appartient sur l'ancien maillage, on se fie aux éléments voisins sur le nouveau maillage.

### 3.5.7 Détection de nouveaux front après remaillage

Après remaillage, tous les fronts insérés dans la matière sont susceptibles de servir d'anciens fronts pour la recherche d'un nouvel incrément de fissure.

### 3.6 Description du critère CSGEL

Le critère reposant sur le changement de signe du gradient de l'endommagement lissé (CSGEL) est utilisé aussi bien dans les phases d'amorçage (voir 3.3.4) que de propagation de la fissure (voir 3.4.2). Dans les deux cas, la détermination de l'orientation de la fissure s'appuie sur une recherche de maxima dans un plan passant par un point d'intérêt I, appartenant au front de fissure. La sélection de directions dans le plan est ici détaillée, le plan et le point d'intérêt I correspondant à ceux définis dans chacune des parties concernées.

#### 3.6.1 Division du plan et moyennage des données

Le champ du gradient de l'endommagement lissé étant disponible en chaque nœud du maillage, il serait possible d'évaluer en chaque nœud le produit scalaire entre le gradient de l'endommagement lissé et le vecteur orthoradial correspondant et d'y associer un angle (voir figure 3.7). L'étude du changement de signe ne permettrait alors pas de retenir un seul angle dès que le chemin de fissure ne serait pas rectiligne. En effet, suivant la distance à laquelle le produit scalaire serait évalué, un angle différent serait sélectionné ; et ce dans un intervalle d'autant plus large que la courbure du chemin de fissure est importante. Or, on cherche à évaluer une orientation moyenne valable sur une distance donnée, afin de pouvoir discrétiser la géométrie de la fissure.

Le plan est donc divisé en  $i_{part}$  portions de même taille (évoquées figure 3.20). Ainsi, les nœuds sont regroupés par tranche et les valeurs (pour les différents angles compris dans cette portion et les différents rayons) sont moyennées. Le nombre de tranches qu'il est possible de choisir dépend de la distance maximale  $L_{max}$  autorisée, de la courbure du chemin de fissure et de la discrétisation du champ lissé. La précision de la solution est alors limitée à  $(360/i_{part})$  degrés. Il serait ensuite envisageable, une fois la zone critique détectée et si la discrétisation et la géométrie du problème le permettent, de tenter une recherche locale plus fine. Mais cette extension n'est pas considérée dans le cadre de cette étude, où l'objectif est de montrer la validité du critère. Ainsi le plan est divisé en 36 tranches et l'angle indiquant la direction du prochain incrément de fissure est donné à  $10^\circ$  près.

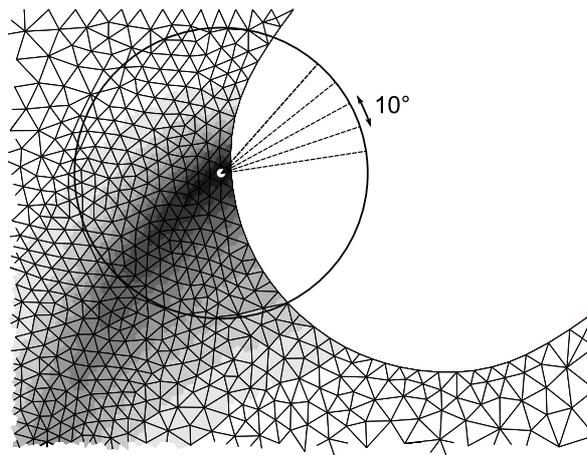


FIG. 3.20 – Division du plan en 36 tranches couvrant  $10^\circ$  chacune

### 3.6.2 Élimination des données non significatives

Les points apportant les contributions les plus significatives sont ceux qui correspondent à un endommagement lissé suffisamment élevé pour que la direction du chemin de fissure soit stabilisée et qui, dans le même temps, présentent des gradients d'endommagement suffisamment importants. Pour les autres points, certaines précautions s'imposent afin de s'assurer que ces moyennes par tranche donnent des résultats exploitables. Ainsi, les points ayant déjà atteint un endommagement critique  $\omega_{crit}$  correspondent à un plateau où la norme du gradient de l'endommagement est de l'ordre de l'erreur numérique. Afin d'éviter d'étudier les changements de signes pour des tranches couvrant une pareille zone (représentée schématiquement en blanc figure 3.21), la contribution des points trop endommagés (c'est-à-dire pour lesquels  $\omega_p \geq \omega_{crit}$ ) ne doit pas être prise en compte.

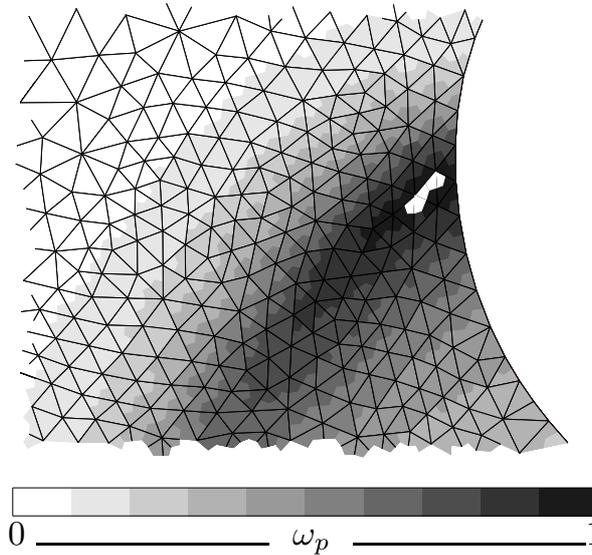


FIG. 3.21 – Élimination des points de la zone saturée (en blanc) correspondant à un plateau d'endommagement

### 3.6.3 Construction de points d'évaluation

Après élimination, il faut encore que les moyennes reposent sur un nombre suffisant de points d'échantillonnage par tranche pour être représentatives. Or, en évaluant le produit scalaire aux nœuds du maillage, le nombre et la position des points sont dépendants de la discrétisation. Pour avoir un résultat aussi précis que possible, il est donc nécessaire d'avoir un maillage suffisamment fin au voisinage du front de fissure. C'est une disposition aisée à prendre en dimension deux grâce à la stratégie de remaillage proposée dans le Chapitre 2, mais qui peut se révéler très coûteuse en dimension trois. Afin d'éviter la dépendance au maillage et une augmentation trop importante des coûts de calcul en dimension trois, le produit scalaire est évalué en des points répartis sur différents rayons dans chaque tranche de la fenêtre d'observation (voir figure 3.22). Leur position est donc indépendante du maillage de la structure. C'est en ces points que seront évalués l'endommagement et le gradient de l'endommagement lissé, par interpolation à partir des valeurs aux nœuds, à la fin de chaque incrément.

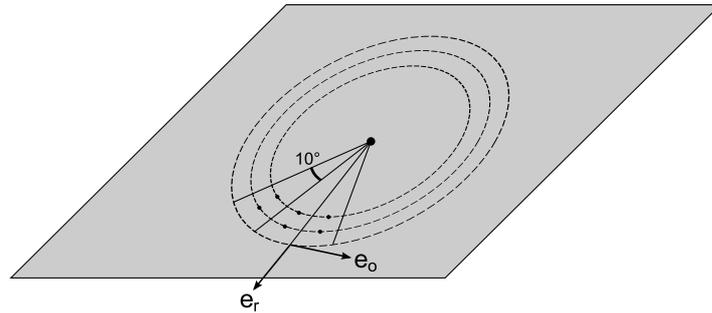


FIG. 3.22 – Positionnement des points d'évaluation dans le plan considéré

### 3.6.4 Choix des rayons d'évaluation

Le nombre et le positionnement des rayons d'évaluation doivent être choisis en fonction de la courbure du chemin de fissure, mais également de la pertinence des données disponibles.

Dans la mesure du possible, il faut éviter de choisir des rayons d'évaluation trop proches du centre d'intérêt car les points d'évaluation risquent de correspondre à des endommagements dépassant le seuil  $\omega_{crit}$  au-delà duquel les résultats ne sont plus considérés comme significatifs. De la même manière, il serait inutile de choisir des points d'évaluation trop éloignés du centre, car l'endommagement associé serait alors trop faible pour assurer que les directions trouvées soient stabilisées.

Pour trouver une distance cohérente avec la courbure du chemin de fissure, *a priori* inconnue, il faut se baser sur la taille de maille. En effet, cette dernière doit avoir été fixée de sorte à minimiser l'erreur sur l'endommagement dans la zone. L'évaluation des produits scalaires autour d'une distance moyenne valant quelques fois la taille de maille dans la zone devrait donner un résultat suffisamment représentatif. Toutefois, il peut être nécessaire de considérer des rayons de taille inférieure lorsque le centre d'intérêt se trouve proche du bord (voir figure 3.23).

Le choix du nombre de rayons, quant à lui, dépend du nombre d'éléments dans la zone d'évaluation et devrait être cohérent avec le degré d'interpolation choisi pour décrire l'endommagement dans l'élément. Ainsi, une interpolation linéaire du gradient de l'endommagement lissé doit être associée à un plus grand nombre de points d'évaluation pour un seul élément qu'une interpolation à champ constant par élément, car l'information que cette dernière fournit est moins riche.

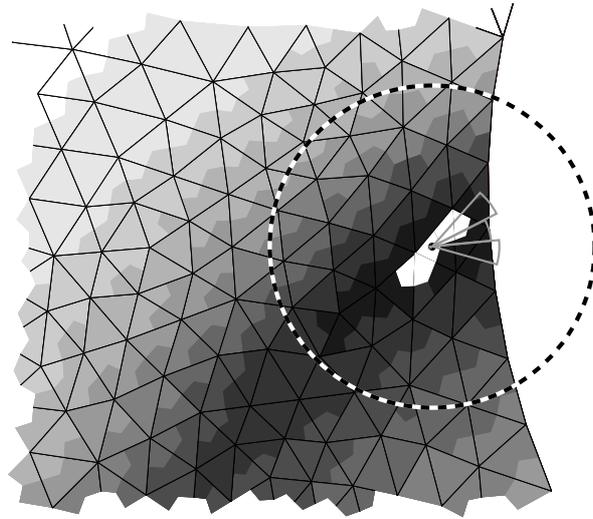


FIG. 3.23 – Rayon moyen pour l'évaluation en pointillés et adaptation pour les cas où la distance à la frontière est inférieure en gris

### 3.6.5 Multiplication des plans

En dimension trois, l'évaluation sur un seul plan associé à chaque segment n'est pas suffisamment représentative : un segment peut correspondre à plusieurs éléments. L'évaluation doit donc s'effectuer sur plusieurs plans parallèles, comme illustré figure 3.24. Le nombre de plans devrait être fixé en accord avec le degré d'interpolation choisi pour décrire l'endommagement dans l'élément, mais aussi avec le rapport entre longueur du segment et la taille des éléments dans la zone.

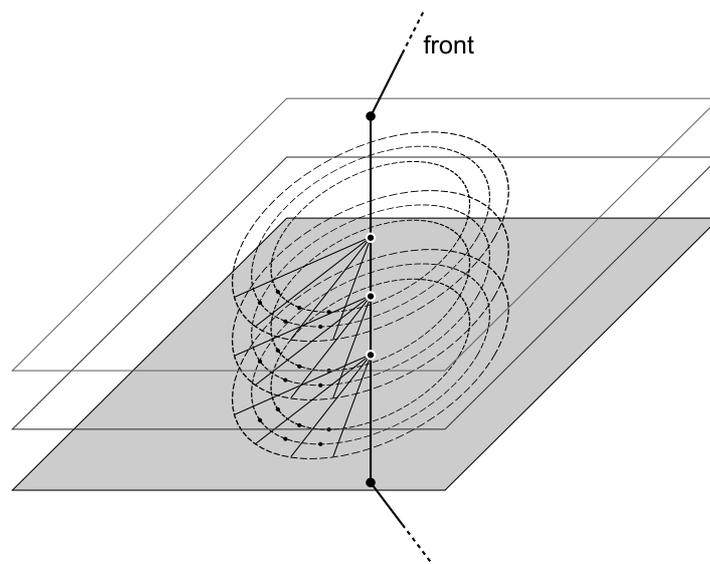


FIG. 3.24 – Positionnement des points d'évaluation dans les plans considérés

### 3.6.6 Interpolation des données

Il se peut que, malgré toutes les précautions prises, on ne puisse disposer d'informations pour une ou plusieurs tranches, du fait de la géométrie de la structure par exemple. Les données récupérées en termes de produit scalaire sont alors interpolées linéairement pour les tranches manquantes. C'est une première approximation qui peut être satisfaisante dans la limite où les tranches pour lesquelles les valeurs doivent être interpolées restent peu nombreuses et suffisamment éloignées les unes des autres.

Il serait même envisageable de préférer une interpolation au calcul de moyenne pour les tranches où les contributions des points ne sont pas significatives, dû à leur trop faible nombre, afin d'éviter les erreurs (en particulier pour la dimension trois). Cependant cela nécessiterait de pouvoir définir un nombre minimal de points pour que la contribution soit significative.

### 3.6.7 De l'importance du maillage auxiliaire

Finalement, la plus importante des mesures à prendre est de toujours s'assurer que le plan de recherche est pertinent. C'est toujours le cas en dimension deux et en phase d'amorçage en dimension trois. En revanche, lorsque le premier incrément de fissure a été inséré en dimension trois, le front dans le maillage volumique n'est qu'une approximation du front du maillage auxiliaire (voir figure 3.25). Du point de vue du calcul de structure, ceci ne présente aucun problème puisque l'on s'est assuré, avant d'introduire l'incrément de fissure, que la zone concernée avait perdu toute résistance. Par contre, du point de vue du critère, cela pose un réel problème. En effet, le front du maillage volumique dépend du nombre et de la position des nœuds ainsi que de l'orientation des éléments qui y sont attachés. En particulier, les nouveaux segments du front ne sont pas tous orientés en respectant la géométrie de la fissure insérée (voir figure 3.26). C'est pourquoi il est important de ne pas utiliser la géométrie du front sur le maillage fissuré mais bien celle du maillage auxiliaire. Autrement, les plans de recherche risquent de ne pas être cohérents avec la répartition de l'endommagement. Le critère ne pourra alors fournir aucune direction valable dans ces plans.

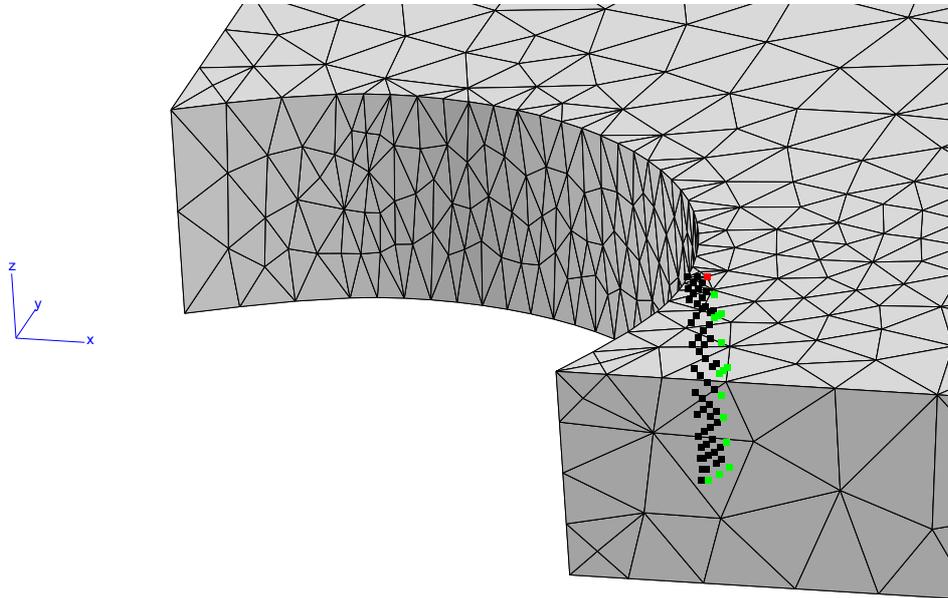


FIG. 3.25 – nœuds de la fissure insérée en points noirs avec mise en valeur des nœuds du nouveau front

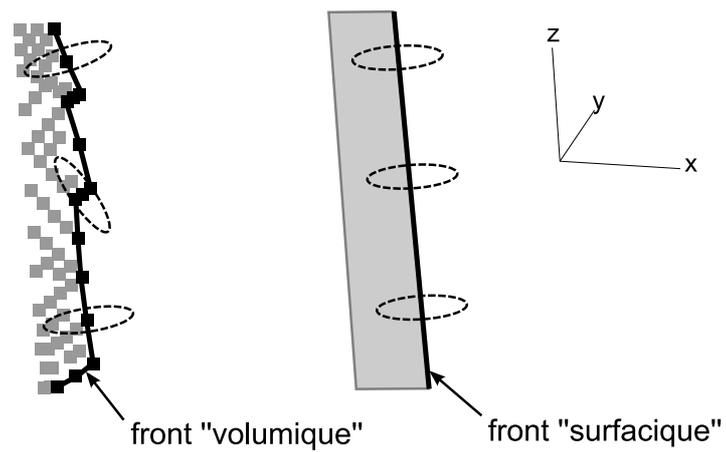


FIG. 3.26 – Comparaison du front dans le maillage volumique (à gauche) et du front du maillage auxiliaire (à droite)

## 3.7 Mise en œuvre

### 3.7.1 Choix des paramètres

Lors de la description de la stratégie, de nombreux paramètres sont intervenus. Plus de simulations seraient nécessaires pour fixer précisément leur valeur. Cependant le choix de leur ordre de grandeur est ici explicite.

L'endommagement critique  $\omega_{crit}$  est fixé à 0.995. Cette valeur a été choisie suffisamment proche de 1 pour que la fissure soit insérée dans une zone ayant perdu quasiment toute sa résistance. Son choix doit permettre d'éliminer les contributions non significatives des points trop endommagés lors de l'évaluation du produit scalaire entre le gradient de l'endommagement lissé et le vecteur orthoradial.

L'endommagement limite  $\omega_{lim}$  utilisé pour la validation de la direction est fixé à 0.90. Une valeur trop faible risquerait d'entraîner une validation trop précoce. Pour plus de sécurité, cette valeur peut être augmentée, mais elle doit rester suffisamment éloignée de la valeur critique pour que les points d'évaluation ne soient pas situés dans une zone saturée.

L'endommagement minimum  $\omega_{min}$  utilisé pour construire les zones d'influence est pris égal à 0.70. Une valeur inférieure risquerait d'empêcher la distinction des zones d'amorçages trop proches les unes des autres. Cette valeur peut être adaptée suivant les cas. Elle dispose d'une plus grande marge que les précédentes car son rôle est moins important.

La longueur maximale des panneaux  $L_{max}$  est fixée à 3.5 fois la taille minimale des éléments. En effet, la taille des éléments au centre de la bande de concentration des déformations doit être proche de la taille minimale autorisée lors du remaillage. La largeur de la bande de localisation devant être au moins trois fois supérieure à la taille des éléments qu'elle contient, ce choix permet d'éviter de valider une mauvaise direction. Cette longueur pourrait être encore augmentée, mais le maillage auxiliaire risquerait de moins bien représenter les chemins de fissure très courbés.

Le nombre de rayons et leurs positions sont différents en phase d'amorçage et de propagation. En phase d'amorçage, on cherche à évaluer les produits scalaires sur une distance égale à deux fois la taille maximale  $L_{max}$ . Le plus petit rayon est alors déterminé comme la distance séparant le barycentre  $I$  du nœud le plus proche dans la zone. C'est un calcul envisageable à ce stade car les zones d'amorçage sont peu étendues. Les points d'évaluation sont alors répartis sur 20 rayons entre ces deux distances. C'est une phase où la zone d'étude est très large car la répartition de l'endommagement peut être très différente suivant les plans. En phase de propagation, en revanche, la recherche est plus ciblée. Dans la mesure où il y a moins de plans à tester, on peut se permettre de calculer un rayon moyen adapté à chaque direction. Si le front se situe proche d'une frontière, le rayon est adapté pour prendre en compte le maximum d'informations possibles. Si on dispose de plus de marge, alors le rayon moyen est choisi comme étant le maximum de la distance maximale  $L_{max}$  et de la distance à laquelle l'endommagement devient inférieur à l'endommagement limite ( $\omega_{lim} = 0.90$ ) dans la direction considérée. Le but de cette manœuvre est d'être en mesure d'évaluer les produits scalaires le plus loin possible du front, donc de la zone saturée. Cela permet d'une part de capturer une tendance, et d'autre part de ne pas risquer que les points d'évaluations construits ne se retrouvent trop vite dans une zone saturée. Il est évident que plus le rayon moyen est petit, moins on dispose de marge pour déterminer le rayon minimal. Au contraire, plus le rayon moyen est éloigné (dans une certaine mesure), plus les points sont intéressants car plus éloignés du plateau d'endommagement égal à 1, et plus on a de marge. Afin de prendre en compte ces variations de marge

en fonction du rayon, le rayon minimum est pris égal à 0.8 fois le rayon moyen et le rayon maximal égal à 1.2 fois le rayon moyen. Entre ces deux distances, les points d'évaluation sont répartis sur 10 rayons.

### 3.7.2 En dimension deux

La stratégie d'amorçage et de propagation de fissure décrite est alors employée pour le calcul en dimension deux décrit dans la partie 2.6.2. La mise en données est exactement identique. Le maillage est d'abord remaillé afin de capturer aussi précisément que possible le lieu et le moment d'amorçage. C'est alors qu'intervient la stratégie proposée. Les paramètres utilisés pour l'insertion d'une discontinuité sont ceux décrits dans le paragraphe précédent.

La stratégie proposée permet l'apparition et la propagation de deux fissures (voir figure 3.28). L'insertion de discontinuité permet, comme le montre la répartition de l'endommagement, d'éviter un étalement de la zone endommagée au delà de la taille relative à la longueur caractéristique.

La géométrie finale insérée correspondante est représentée figure 3.31. On y voit clairement les différents incréments de fissures insérés avec leurs panneaux.

Il est à noter que le front initial se situe à l'intérieur de la structure (voir figure 3.27). En effet, comme l'ont montré Simone et al. [228], l'utilisation d'un modèle non local entraîne une modification du lieu d'amorçage de la fissure. Ceci peut être considéré comme un inconvénient majeur dans le cas général, mais dans le cadre de cette étude, cette propriété permet de souligner la capacité de la stratégie à gérer les cas où la fissure apparaît à l'intérieur de la structure et non pas sur sa frontière.

Dans ce cas, la recherche de directions globales à partir du front initial conduit à trouver deux directions pour chacun des fronts : l'une vers l'extérieur de la structure et l'autre vers l'intérieur. La nécessité de privilégier la direction orientée vers l'extérieur est alors justifiée d'un point de vue numérique par l'importance des valeurs d'endommagement dans la zone. Insérer l'incrément orienté vers l'intérieur de la structure risquerait de retarder l'insertion de l'incrément orienté vers l'extérieur. La zone permettant d'en déterminer la direction risquerait alors de devenir saturée et les données associées inexploitable. Mais ce choix est également justifié du point de vue de la physique, dans ce cas précis, puisque la fissure aurait bien dû s'amorcer sur la frontière de la structure.

Sur la figure 3.28, on peut noter que la fissure en bas à gauche progresse plus rapidement que son homologue. Bien que les rayons des encoches soient différents, une comparaison avec une étude expérimentale serait nécessaire pour pouvoir interpréter ce résultat. On peut cependant noter que l'orientation relative des deux fissures est bien cohérente.

Par ailleurs, on note que le chemin de fissure est relativement régulier car les points d'évaluation ont été construits autour d'une zone endommagée à 90%. Ce choix convient bien ici puisque la majorité du parcours correspond à une faible courbure. En choisissant un endommagement limite de 0.95, il y aurait pu avoir des changements de directions plus marqués.

En outre, on note sur la courbe montrant l'évolution de la force en fonction du déplacement imposé, figure 3.29, la présence de sauts après remaillage dans la phase de propagation. Cela était tout à fait prévisible, puisque les fissures sont insérées lorsque l'endommagement est seulement *proche* de 1. Ces sauts correspondent à une différence d'énergie entre les états avant et après insertion de l'incrément de fissure. La présence de viscosité permet cependant un retour à l'équilibre après remaillage. À terme, la fissure traverse bien une zone à énergie nulle comme le montre la figure 3.30.

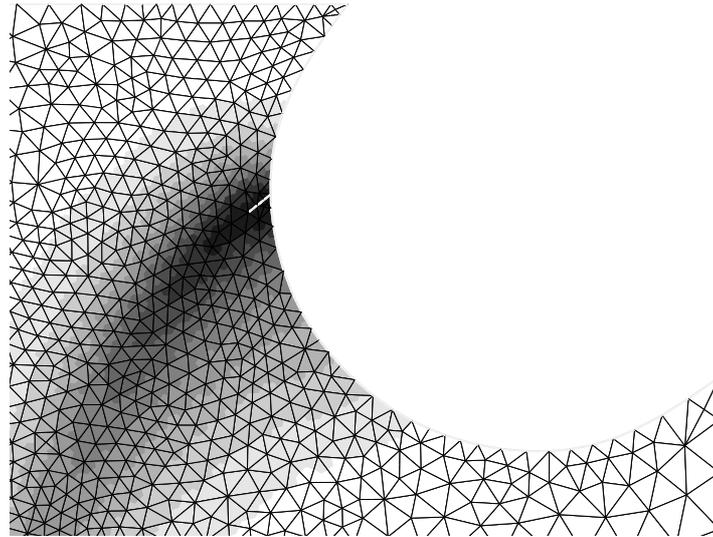


FIG. 3.27 – Premier incrément de fissure pour la zone endommagée considérée : le front initial est à l'intérieur de la structure

Enfin, notons que le chemin de fissure s'insère non seulement dans la zone endommagée, mais passe également au plus près de la bande de concentration de la plasticité cumulée locale  $p$ , comme le montre la figure 3.32. Les déplacements étant multipliés par quatre sur cette figure, on constate facilement que chaque insertion d'incrément de fissure a engendré une concentration de la plasticité en pointe de fissure. Cette concentration est un artefact numérique dû à la taille maximale fixe des incréments de fissure.

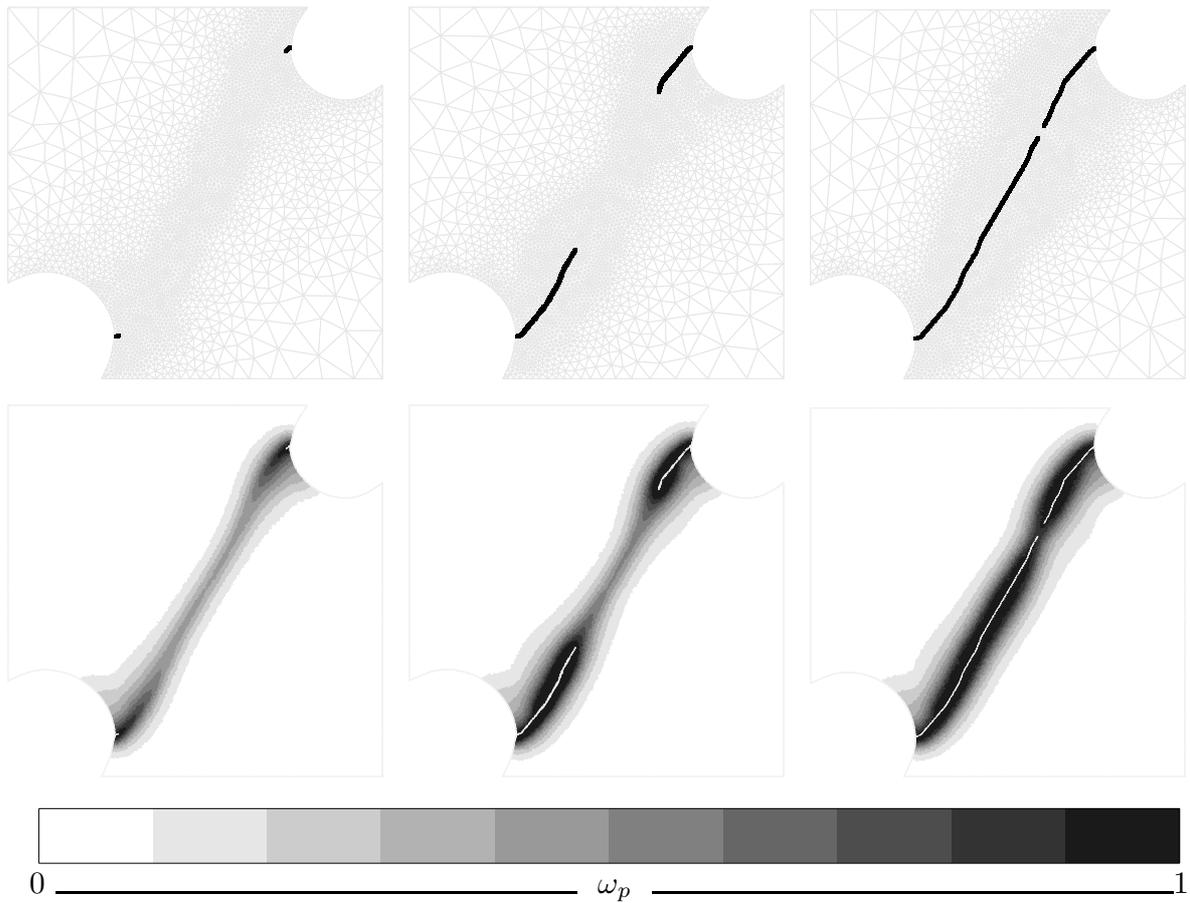


FIG. 3.28 – Évolution du maillage avec mise en valeur de la fissure (en haut) et répartition de l'endommagement correspondante (en bas) pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.06623$  mm,  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.07336$  mm et  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.07338$  mm

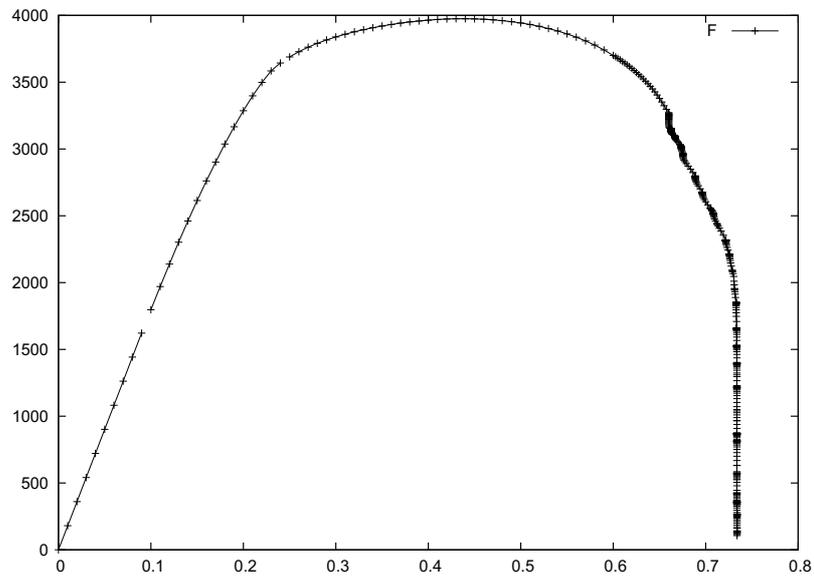


FIG. 3.29 – Évolution de l'effort résultant (N) en fonction de 10 fois le déplacement imposé (mm)

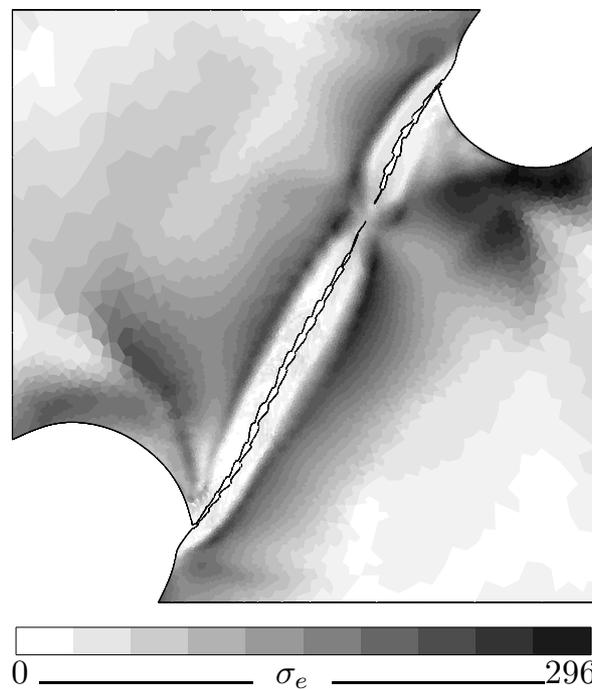


FIG. 3.30 – Répartition de la contrainte de von Mises pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.07338$  mm avec un facteur de magnification de 4

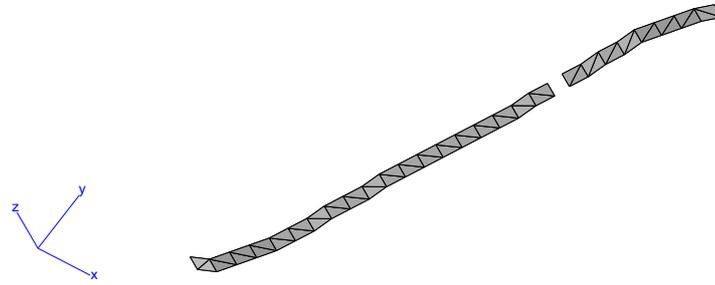
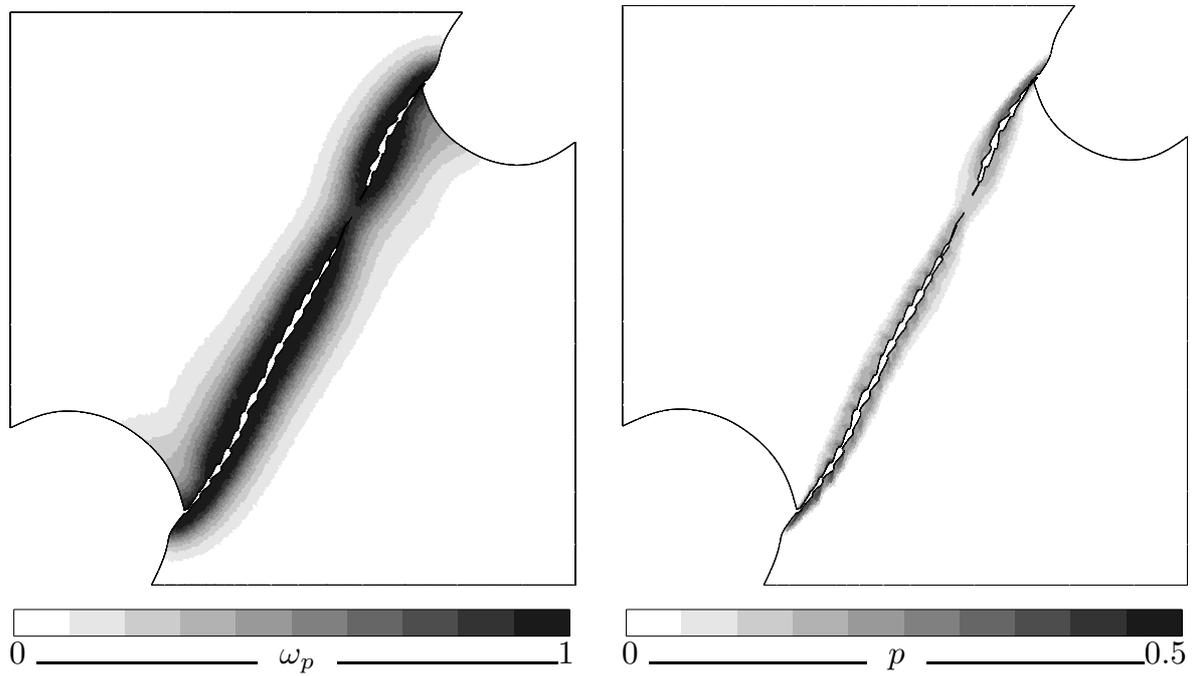


FIG. 3.31 – Maillages auxiliaires des fissures insérées

FIG. 3.32 – Répartition de l'endommagement (à gauche) et de la plasticité cumulée locale (à droite) pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.07338$  mm, avec un facteur de magnification de 4

### 3.7.3 En dimension trois

Afin de pouvoir tester rapidement, dans cette phase de développement, l'utilisation de cette stratégie sur un problème tridimensionnel, le paramètre visqueux  $K$  a été modifié. Il a été ainsi fixé à 40 afin de permettre un retour à l'équilibre plus rapide après remaillage. Pour les mêmes raisons, la taille de maille minimum a été augmentée jusqu'à 0.2, limitant ainsi le nombre d'éléments total. Les autres paramètres restent identiques au cas bidimensionnel.

Le principe est le même que pour le calcul précédent. Le maillage est d'abord adapté grâce aux informations fournies par l'estimateur d'erreur afin de capturer au mieux l'instant où les fissures doivent s'amorcer.

Les résultats sont similaires à ceux obtenus en dimension deux, en termes d'orientation du chemin de fissure (voir figure 3.33) ou de répartition limitée de l'endommagement (voir figure 3.34). Cependant, l'implantation de la stratégie ayant bénéficié de moins de temps, les calculs sont pour le moment moins robuste en dimension trois : le calcul a donc divergé avant que les fissures ne puissent autant progresser qu'en dimension deux.

La géométrie finale insérée correspondante est représentée figure 3.35. On y voit clairement les différents incréments de fissure insérés avec leurs panneaux.

Par ailleurs, sur la courbe 3.36 montrant l'évolution de la force résultante en fonction du déplacement imposé, on constate que les sauts sont plus importants que pour le cas en dimension deux. Cela s'explique notamment par le fait que la longueur  $L_{max}$  imposée est deux fois plus importante en dimension trois. Les incréments de fissure insérés étant plus longs, la différence d'énergie entre les états avant et après insertion est donc à chaque fois plus importante.

En outre, figure 3.38, on constate comme en dimension deux que le chemin de fissure passe au plus près de la bande de concentration de la plasticité cumulée locale.

Enfin, en comparant les figures 3.37 et 3.39, on note que les zones fortement endommagées dans lesquelles se situent les fissures correspondent bien à des zones de très faible énergie.

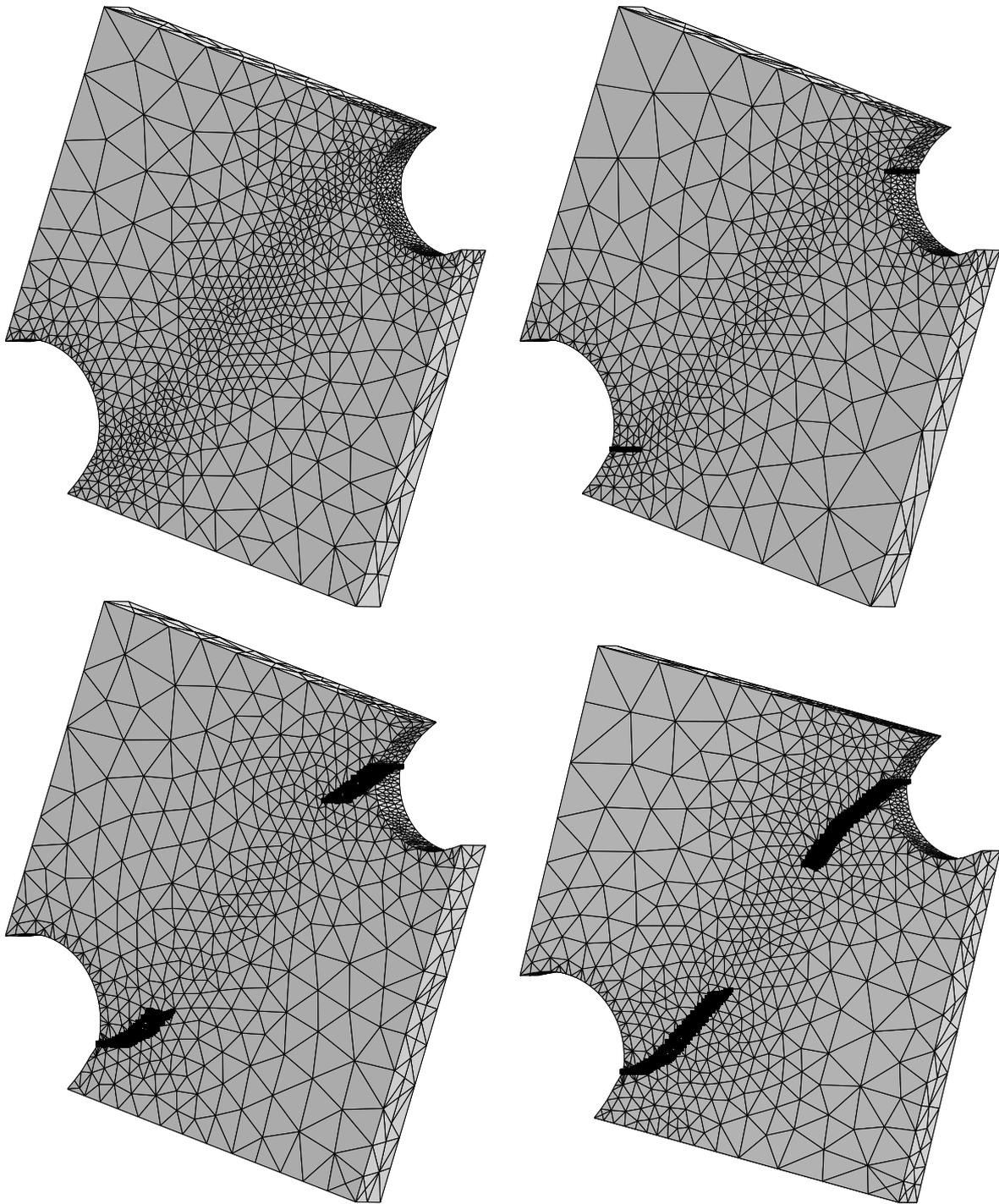


FIG. 3.33 – Évolution du maillage avec mise en valeur de la fissure pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.075$  mm,  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.078$  mm,  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.09413$  mm et  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.1001$  mm

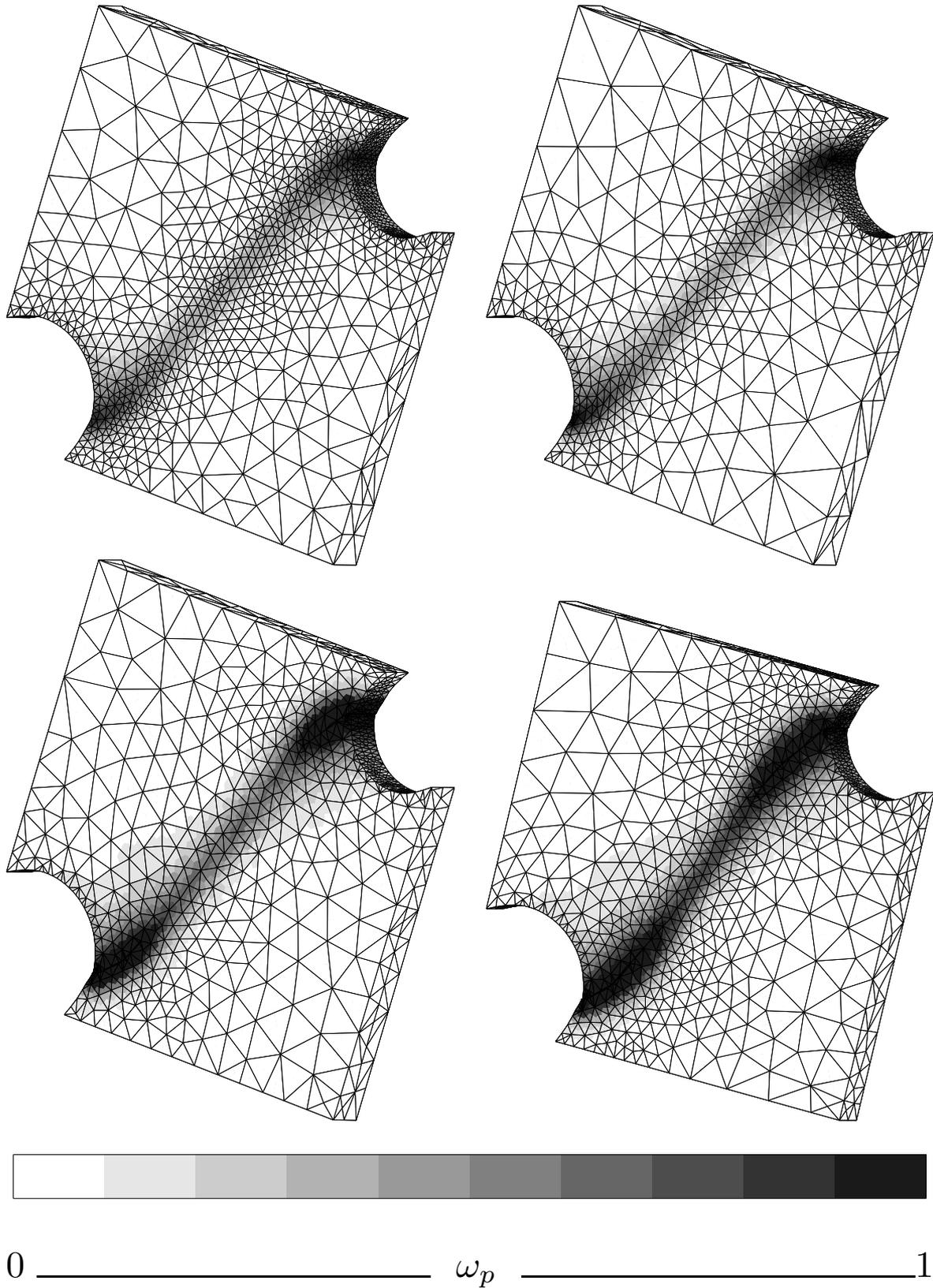


FIG. 3.34 – Répartition de l'endommagement pour  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.075$  mm,  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.078$  mm,  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.09413$  mm et  $\|\underline{\mathbf{u}}_b\| \approx 0.1001$  mm

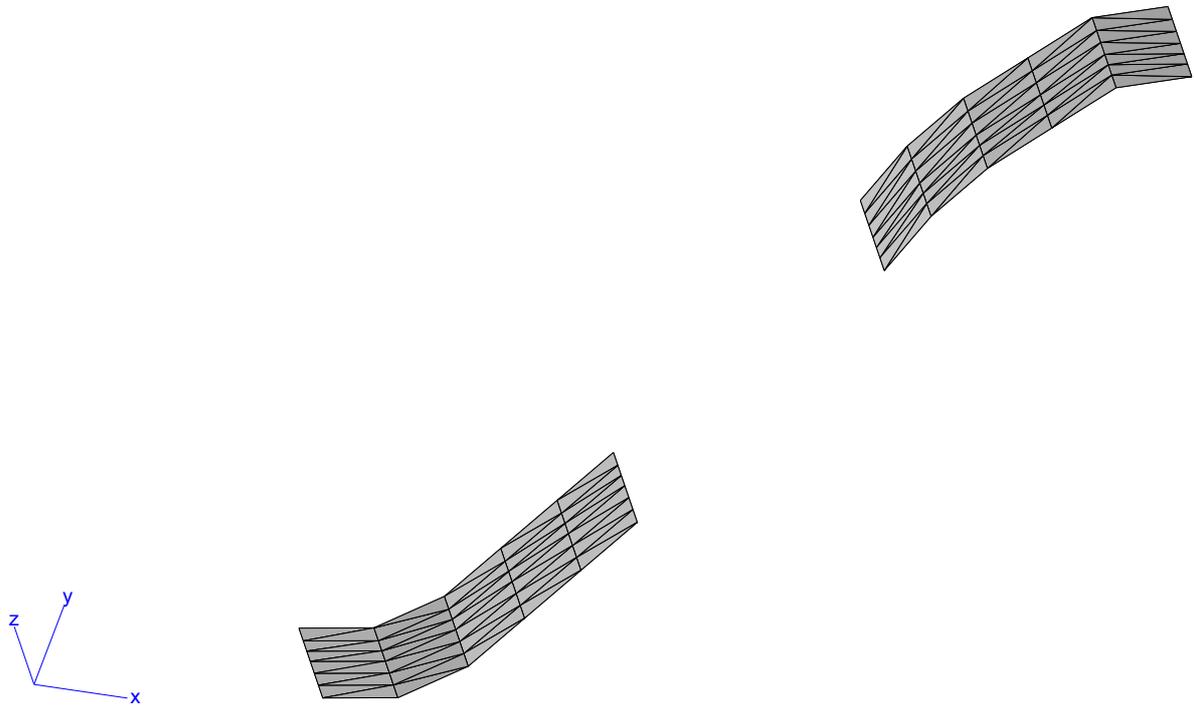


FIG. 3.35 – Maillages auxiliaires des fissures insérées

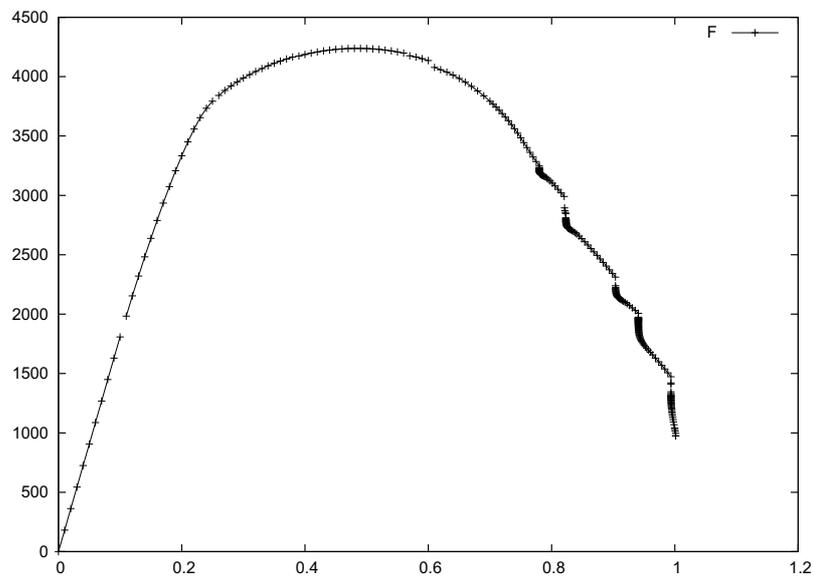


FIG. 3.36 – Évolution de l'effort résultant (N) en fonction de 10 fois le déplacement imposé (mm)

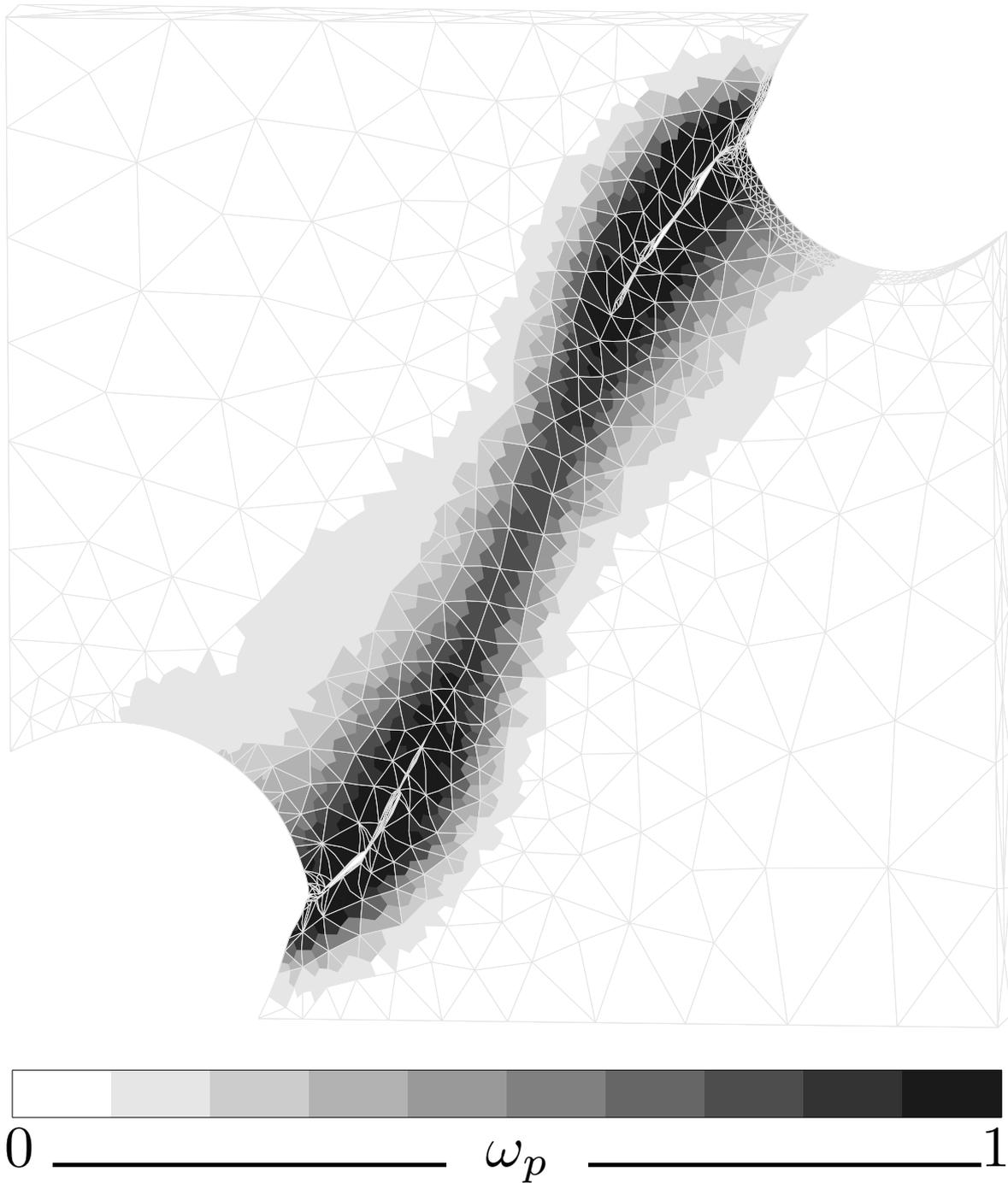


FIG. 3.37 – Répartition de l'endommagement pour  $\|\underline{u}_b\| \approx 0.1001$  mm, avec un facteur de magnification de 2

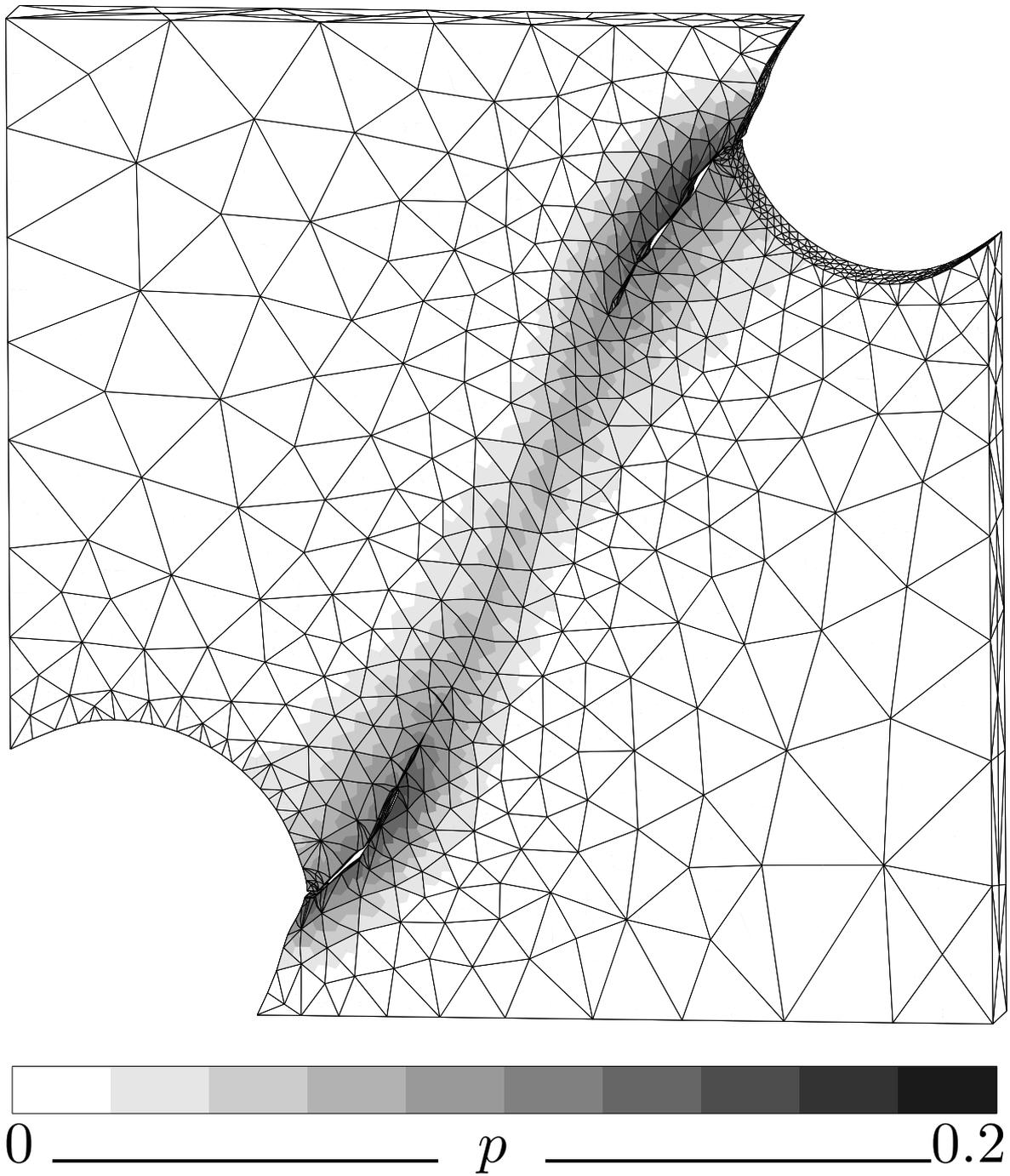


FIG. 3.38 – Répartition de la plasticité cumulée locale pour  $\|\underline{u}_b\| \approx 0.1001$  mm, avec un facteur de magnification de 2

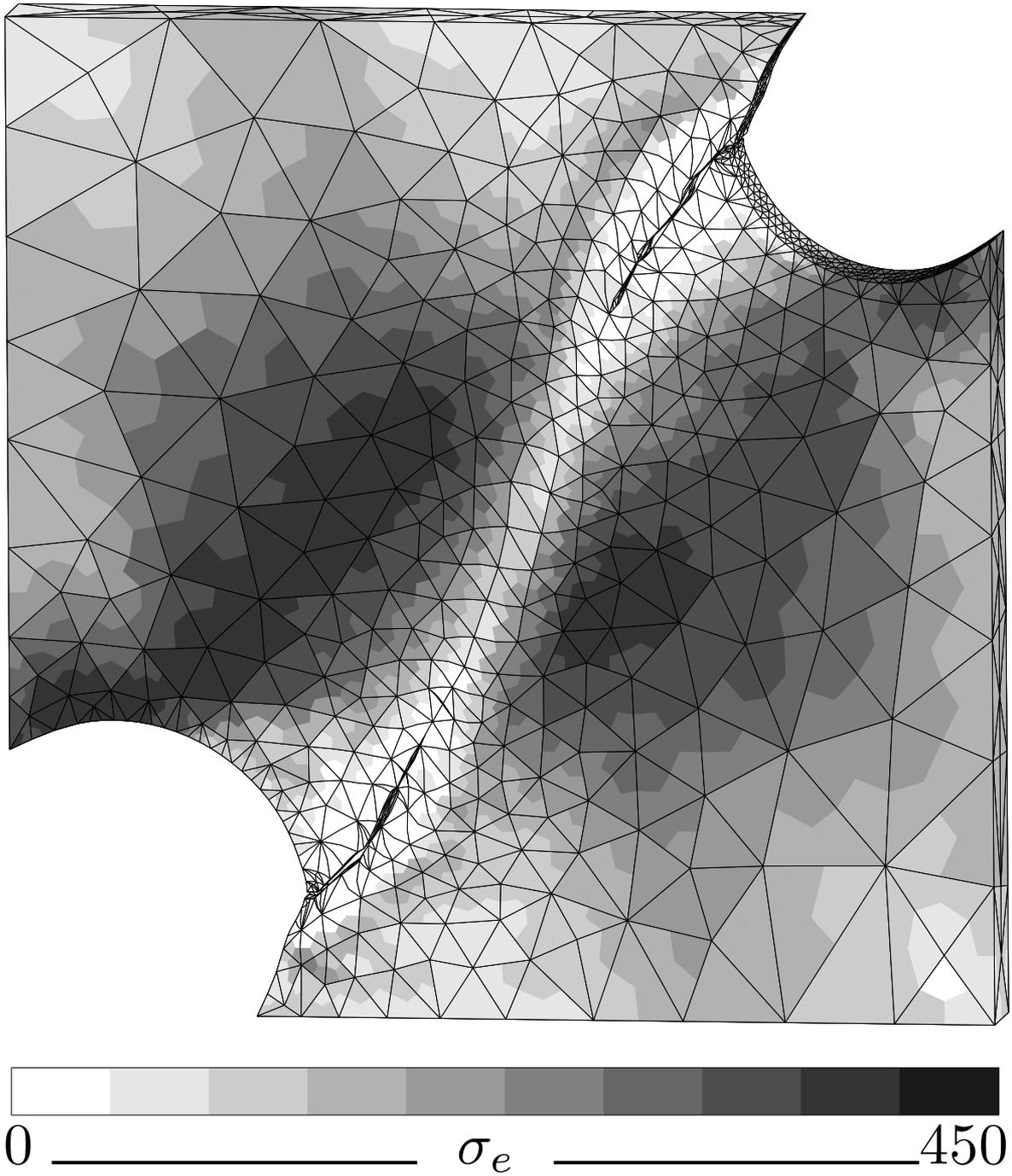


FIG. 3.39 – Répartition de la contrainte de von Mises pour  $\|\underline{u}_b\| \approx 0.1001$  mm, avec un facteur de magnification de 2

### 3.8 Conclusion et perspectives

Une stratégie basée sur la construction d'un maillage auxiliaire de la fissure grâce à un critère reposant sur le gradient de l'endommagement a été proposée. Cette méthode présente deux avantages majeurs. Tout d'abord, la recherche du chemin de fissure est basée uniquement sur la donnée d'un champ scalaire, soit un minimum d'informations à traiter. D'autre part, le recours à un maillage auxiliaire permet de s'affranchir du maillage de la fissure dans la structure, assurant ainsi une plus grande robustesse lors de l'utilisation du critère de recherche de direction, et une minimisation des coûts de calcul.

Cette stratégie s'est révélée performante pour simuler à la fois l'amorçage et la propagation de fissures planes en dimension deux et trois. L'insertion d'une discontinuité a ainsi permis de limiter la largeur de la zone endommagée par rapport à l'utilisation d'un modèle continu.

Cependant, cette stratégie n'a pu être encore mise en œuvre que sur un nombre limité de cas, alors que la méthode a été conçue pour traiter des situations encore plus complexes. Ainsi, seules les propagations de fissures planes ont pu être simulées, mais la méthode devrait permettre de traiter également la propagation de fissures en mode III, si les directions des segments ne sont pas contraintes à être colinéaires. Il est alors nécessaire de s'assurer en premier lieu que le critère validant les directions est suffisamment performant. Il est également possible d'envisager des cas où la fissure apparaîtrait complètement à l'intérieur de la structure ; la méthodologie reste la même. La prise en compte des branchements devrait également être possible dès que l'algorithme de découpe sera en mesure de gérer ce cas.

Du point de vue numérique, un certain nombre de difficultés liées à la présence d'une zone saturée pourraient être évitées en utilisant, pour la recherche de changement de signe, une variable non bornée, lorsque cela est possible. Par exemple, dans le cas considéré, l'endommagement est proportionnel à la plasticité cumulée non locale qui, elle, n'est pas bornée : il serait donc envisageable de s'appuyer sur cette variable pour déterminer l'orientation de la fissure.

Enfin il serait possible d'obtenir des résultats plus réalistes en insérant un maillage surfacique plus précis au niveau du front, utilisant les isovaleurs de l'endommagement. Mais la première piste de recherche reste la définition du barycentre pour la recherche du front initial en dimension trois.



# Conclusion

Cette étude a porté sur la simulation de la transition endommagement-rupture dans les matériaux métalliques avec la méthode des éléments finis. Une méthodologie permettant de simuler l'évolution de l'endommagement puis l'amorçage et la propagation de fissures au sein d'un matériau au comportement ductile endommageable a été proposée. Elle repose sur la combinaison de trois outils développés au cours de cette étude.

Tout d'abord, une nouvelle formulation mixte non locale à quatre champs a été conçue dans le cadre des petites perturbations afin de surmonter les problèmes de dépendance au maillage et de verrouillage volumique. Pour cela, une formulation à gradient implicite a été combinée à une formulation mixte à trois champs. En choisissant une interpolation quadratique des déplacements et une interpolation linéaire de la dilatation, de la pression et de la variable non locale, le nouvel élément correspondant (p2p1p1p1) apporte une solution aux problèmes associés à la modélisation de matériaux au comportement ductile endommageable. Il est ainsi possible de simuler toute la phase d'endommagement jusqu'à amorçage de la première fissure avec un modèle continu régularisé par une formulation à gradient implicite en petites déformations.

Puis, une procédure d'adaptivité de maillage reposant sur l'utilisation d'un estimateur d'erreur de type ZZ2 a été mise en place afin d'optimiser la qualité des résultats tout en minimisant les coûts de calcul durant la phase d'endommagement. Pour cela, un estimateur d'erreur utilisant le lissage du champ d'endommagement et de son incrément a été proposé. Les informations fournies ont été combinées à un critère de remaillage pour fournir des consignes de taille de maille au générateur de maillage YAMS-GHS3D développé par l'INRIA. Puis une technique de lissage par moindres carrés a été retenue pour permettre le transfert des données directement des anciens points de Gauss aux nouveaux points de Gauss, alors qu'une simple interpolation nodale a été utilisée pour le transfert des champs nodaux. Cette manière de procéder limite le phénomène de diffusion. Associée à l'ajout de viscosité dans le modèle, elle a permis de reprendre les calculs sur le nouveau maillage plus adapté après quelques divisions du pas de temps. L'adaptation automatique du maillage assure une bonne discrétisation de la bande de localisation, tout en limitant les coûts de calculs. La zone et le moment d'amorçage peuvent alors être déterminés avec autant de précision que le modèle, la taille de maille minimum et le pas de temps choisis le permettent.

Enfin une stratégie de modélisation de la fissure a été élaborée afin de permettre l'amorçage et la propagation de fissures pour des problèmes en dimensions deux et trois. Pour cela, le chemin de fissure a été représenté par un maillage auxiliaire dont le front est le plus régulier possible. Un critère reposant sur le gradient de l'endommagement lissé a alors été formulé pour déterminer l'orientation de cette discrétisation dans les phases d'amorçage et de propagation. Un algorithme de découpe déjà implanté dans *Zset* a ensuite été utilisé pour insérer la géométrie de la fissure dans le maillage. Puis le générateur de maillage YAMS-GHS3D a

été sollicité pour construire un maillage adapté au calcul éléments finis. Les techniques de transfert de champs retenues ont alors été utilisées, moyennant quelques adaptations, pour être en mesure de reprendre le calcul sur le nouveau maillage fissuré. Cette stratégie a permis de faire apparaître et propager plusieurs fissures sur une éprouvette à doubles encoches en dimension deux et trois, empêchant ainsi l'élargissement excessif de la bande de localisation de l'endommagement. Les objectifs fixés pour cette étude ont ainsi été atteints.

Cette étude ne constitue cependant qu'une étape dans le processus de développement d'outils numériques aptes à modéliser la rupture ductile. Son objectif était limité à la validation d'une méthodologie permettant de simuler l'évolution de l'endommagement puis l'amorçage et la propagation de fissures. Cependant, les outils développés disposent d'une marge d'amélioration pour l'adaptation à des cas plus réalistes, ou leur construction peut servir d'exemple pour concevoir de nouveaux outils. C'est notamment ce qui avait motivé le choix d'une formulation mixte à trois champs plutôt qu'une formulation à deux champs. La prochaine étape consiste alors à adapter la méthodologie à des cas plus complexes.

Ainsi, la rupture de matériaux ductiles s'accompagne souvent de grandes déformations. Une formulation mixte non locale similaire doit alors être conçue. Il serait alors possible d'envisager la même démarche que celle proposée dans cette étude : trouver une formulation mixte et une formulation non locale adaptées aux grandes déformations, puis les combiner. Le choix des formulations de départ est cependant plus complexe. En effet, la formulation de l'élément mixte va dépendre du type de loi utilisé, et la plupart des formulations disponibles avec trois champs sont dédiés aux lois hyper-élastiques (voir par exemple [37], [227], [226] ou encore [241]). De plus l'adaptation de la formulation non locale ne se fait pas non plus sans difficultés, puisque dans l'équation servant à définir la variable non locale intervient un gradient. Il se pose alors la question de savoir si cette dérivation doit être faite par rapport aux coordonnées de la configuration initiale, ou de la configuration déformée comme l'a fait Mediavilla [165]. Quant à la construction du maillage auxiliaire, il ne devrait pas nécessiter de modifications majeures. Ainsi, dans le cas où la structure est remaillée dans sa configuration déformée, il suffit de construire le maillage auxiliaire en se basant sur les coordonnées de la structure déformée. Le maillage auxiliaire résultant global n'est plus alors une représentation de la fissure dans une configuration initiale ou même déformée. Sinon il faudrait remailler la structure dans sa configuration initiale, et l'on perdrait ainsi le bénéfice d'avoir automatiquement la génération d'éléments de forme correcte. Il serait alors nécessaire de s'assurer, lors du remaillage, que les éléments ne soient pas trop aplatis en configuration déformée. Pour cela, il faudrait procéder à l'intersection des tailles de maille déterminées par le critère actuel à partir des informations fournies par l'estimateur d'erreur et de celles déterminées par un critère reposant sur la qualité des éléments.

D'autre part, il faudrait appliquer la méthodologie à un comportement plus réaliste intégrant les effets de triaxialité des contraintes. En effet, l'influence de la triaxialité sur la ductilité des métaux a été largement prouvée expérimentalement (voir [121] et [157]).

Par ailleurs, il serait envisageable d'utiliser des modèles basés sur la description de la structure au niveau microscopique (par exemple de type Gurson [247], [118]) avec les outils de remaillage et d'insertion de discontinuités proposés. En effet, ces outils ne nécessitent qu'un champ scalaire mesurant la dégradation du matériau ; il ne s'agit donc pas nécessairement du champ d'endommagement. De plus, des propositions pour éviter la dépendance au maillage et le verrouillage volumique pour ce type de modèle ont déjà été faites dans le cadre des grandes déformations [155].

Enfin il serait possible d'adapter la stratégie de modélisation de fissures pour des cas de propagation en mode III ou des cas de bifurcations.



## Annexe A

# Intégration temporelle des équations du comportement

## A.1 Principe

Au cours de la procédure de résolution incrémentale, on suppose que la valeur des variables d'état est connue à l'instant  $t$ , correspondant à l'incrément de chargement  $(n)$ . Le pas de temps correspondant à l'incrément total des degrés de liberté  $\Delta \mathbf{a}^{(n)}$  est  $\Delta t$ . Pour plus de clarté, l'exposant  $(n)$  sera omis par la suite. L'intégration temporelle des équations du comportement consiste à trouver la valeur des variables d'état à la fin du pas de temps pour un incrément des déformations  $(\Delta \underline{\varepsilon})$  et de la variable non locale  $(\Delta \kappa_{nl})$  donné. Notons que la méthode d'intégration présentée dans cette annexe est valable aussi bien pour une formulation non locale que mixte non locale. Ainsi,  $\underline{\varepsilon}$  peut aussi bien se référer à la partie symétrique du gradient des déplacements (pour une formulation non locale) qu'au gradient supposé défini par l'équation (1.54) (pour une formulation mixte non locale). Dans cette annexe, une notation de Voigt adaptée au calcul éléments finis est implicitement utilisée pour les tenseurs d'ordre deux et quatre qui sont respectivement exprimés sous forme de vecteurs et de matrices.

## A.2 Loi élasto-plastique endommageable

Dans le cas du modèle simple utilisé dans cette étude, les variables d'état sont  $\underline{\varepsilon}_e$  et  $\kappa$ . Si le test élastique révèle que l'on n'a pas atteint la condition de plasticité (autrement dit  $\Delta \underline{\varepsilon}_e = \Delta \underline{\varepsilon}$  et  $\Delta \kappa = 0$ ), la résolution est immédiate. Dans le cas contraire, le système à résoudre est, dans le cas de la loi proposée par [85] :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e &= \Delta \underline{\varepsilon}_e + \Delta \kappa \mathbf{n} - \Delta \underline{\varepsilon} \\ R_p &= \sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl})) \sigma_y(\kappa) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où toutes les notations ont été introduites dans le chapitre 1. Un schéma implicite est alors utilisé de sorte que toutes les variables soient calculées à la fin de l'incrément (autrement dit  $\kappa = \kappa_t + \Delta \kappa$  où  $\kappa_t$  est la valeur connue au début de l'incrément). L'ensemble d'équations non linéaire (A.1) est alors résolu grâce à une méthode de Newton-Raphson qui nécessite le calcul du Jacobien du système  $\underline{\underline{J}}$ . Il peut s'écrire sous forme de matrice par bloc :

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_e}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_e} & \frac{\partial R_e}{\partial \Delta \kappa} \\ \frac{\partial R_p}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_e} & \frac{\partial R_p}{\partial \Delta \kappa} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_e}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_e} = \mathbf{1} + \Delta \kappa \mathbf{N} : \mathbf{C} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_e}{\partial \Delta \kappa} = \mathbf{n} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_e} = \mathbf{n} : \mathbf{C} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial \Delta \kappa} = -(1 - \omega_p(\kappa_{nl})) \sigma'_y \quad (\text{A.6})$$

où  $\mathbf{N} = \partial \mathbf{n} / \partial \underline{\varepsilon}$  et  $\sigma'_y = \partial \sigma_y / \partial \kappa$ . Notons que  $\kappa_{nl}$  (comme  $\Delta \underline{\varepsilon}$ ) reste constant durant les itérations.

Afin de pouvoir calculer la matrice tangente cohérente  $\underline{\underline{L}}_c$  (voir l'article de Simo et Taylor [225]), il est nécessaire d'évaluer la variation des variables d'état  $\underline{\mathbf{v}} = (\underline{\varepsilon}_e, \kappa)$  introduite par la variation des variables dont la valeur est prescrite  $(\underline{\varepsilon}, \kappa_{nl})$ . La variation de  $\underline{\mathbf{v}}$  est telle que le vecteur résidu ( $\underline{\mathbf{R}} = (\underline{\mathbf{R}}_e, R_p)$ ) reste égal à zéro :

$$\delta \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \underline{\mathbf{v}}} \cdot \delta \underline{\mathbf{v}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \cdot \delta \Delta \underline{\varepsilon} + \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \kappa_{nl}} \delta \Delta \kappa_{nl} \quad (\text{A.7})$$

$\partial \underline{\mathbf{R}} / \partial \Delta \underline{\mathbf{v}}$  correspond à la matrice Jacobienne  $\underline{\underline{J}}$  et

$$\delta \underline{\mathbf{v}} = -\underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \cdot \delta \Delta \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \kappa_{nl}} \delta \Delta \kappa_{nl} \quad (\text{A.8})$$

Dans le cas présent :

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -1 \\ \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \kappa_{nl}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \omega^* \sigma_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

avec  $\omega^* = \partial \omega / \partial \kappa_{nl}$  si  $\Delta \kappa_{nl} > 0$  et 0 sinon. L'inverse de la matrice Jacobienne peut se mettre sous la forme de matrice par bloc :

$$\underline{\underline{J}}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{ee} & \underline{\underline{K}}_{e\kappa} \\ \underline{\underline{K}}_{\kappa e} & \underline{\underline{K}}_{\kappa\kappa} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

De sorte que :

$$\delta \Delta \underline{\varepsilon}_e = \underline{\underline{K}}_{ee} \cdot \delta \Delta \underline{\varepsilon} - \omega^* \sigma_y \underline{\underline{K}}_{e\kappa} \delta \Delta \kappa_{nl} \quad (\text{A.11})$$

$$\delta \Delta \kappa = \underline{\underline{K}}_{\kappa e} \cdot \delta \Delta \underline{\varepsilon} - \omega^* \sigma_y \underline{\underline{K}}_{\kappa\kappa} \delta \Delta \kappa_{nl} \quad (\text{A.12})$$

En considérant que  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_e$ , la matrice cohérente  $\underline{\underline{L}}_c$  est finalement donnée par :

$$\underline{\underline{L}}_c = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{K}}_{ee} & -\omega^* \sigma_y \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{K}}_{e\kappa} \\ \underline{\underline{K}}_{\kappa e} & -\omega^* \sigma_y \underline{\underline{K}}_{\kappa\kappa} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Notons que  $\underline{\underline{L}}_c$  n'est pas symétrique, donc le problème global doit être résolu en utilisant un solveur non symétrique.

### A.3 Loi élasto-visco-plastique endommageable

Les variables d'état sont  $\underline{\varepsilon}_e$  et  $\kappa$ . Si le test élastique révèle que l'on n'a pas atteint la condition de plasticité (autrement dit  $\Delta \underline{\varepsilon}_e = \Delta \underline{\varepsilon}$  et  $\Delta \kappa = 0$ ), la résolution est immédiate. Dans le cas contraire, le système à résoudre est, pour la loi considérée :

$$\underline{\mathbf{R}}_e = \Delta \underline{\varepsilon}_e + \Delta \kappa \underline{\mathbf{n}} - \Delta \underline{\varepsilon} \quad (\text{A.14})$$

$$R_p = \Delta \kappa - \Delta t \left[ \frac{\sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl})) \sigma_y(\kappa)}{K} \right]^n \quad (\text{A.15})$$

où toutes les notations ont été introduites dans les Chapitres 1 et 2. Notons que, dans ce paragraphe,  $n$  désigne bien un paramètre matériau. Un schéma implicite est alors utilisé de sorte que toutes les variables soient calculées à la fin de l'incrément (autrement dit  $\kappa = \kappa_t + \Delta \kappa$

où  $\kappa_t$  est la valeur connue au début de l'incrément). L'ensemble d'équations non linéaires (A.14) est alors résolu grâce à une méthode de Newton-Raphson qui nécessite le calcul du Jacobien du système  $\underline{J}$ . Il peut s'écrire sous forme de matrice par bloc :

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_e}{\partial \Delta \xi_e} & \frac{\partial R_e}{\partial \Delta \kappa} \\ \frac{\partial R_p}{\partial \Delta \xi_e} & \frac{\partial R_p}{\partial \Delta \kappa} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

avec :

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_e}{\partial \Delta \xi_e} = \underline{\mathbf{1}} + \Delta \kappa \underline{\mathbf{N}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{R}}_e}{\partial \Delta \kappa} = \underline{\mathbf{n}} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial \Delta \xi_e} = -n \Delta t \frac{[\sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl}))\sigma_y(\kappa)]^{n-1}}{K^n} \underline{\mathbf{n}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial \Delta \kappa} = 1 + n \Delta t (1 - \omega_p(\kappa_{nl})) \frac{n [\sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl}))\sigma_y(\kappa)]^{n-1}}{K^n} \sigma'_y \quad (\text{A.20})$$

De même que précédemment,  $\kappa_{nl}$  (comme  $\Delta \xi$ ) reste constant durant les itérations.

Afin de pouvoir calculer la matrice tangente cohérente  $\underline{L}_c$ , il est nécessaire d'évaluer la variation des variables d'état  $\underline{\mathbf{v}} = (\xi_e, \kappa)$  introduite par la variation des variables dont la valeur est prescrite  $(\xi, \kappa_{nl})$ . La variation de  $\underline{\mathbf{v}}$  est telle que le vecteur résidu ( $\underline{\mathbf{R}} = (\underline{\mathbf{R}}_e, R_p)$ ) reste égale à zéro :

$$\delta \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \underline{\mathbf{v}}} \cdot \delta \underline{\mathbf{v}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \xi} \cdot \delta \Delta \xi + \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \kappa_{nl}} \delta \Delta \kappa_{nl} \quad (\text{A.21})$$

$\partial \underline{\mathbf{R}} / \partial \Delta \underline{\mathbf{v}}$  correspond à la matrice Jacobienne  $\underline{J}$  et

$$\delta \underline{\mathbf{v}} = -\underline{J}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \xi} \cdot \delta \Delta \xi - \underline{J}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \kappa_{nl}} \delta \Delta \kappa_{nl} \quad (\text{A.22})$$

Dans le cas de la loi élasto-visco-plastique :

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \xi} = \begin{pmatrix} -1 \\ \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{R}}}{\partial \Delta \kappa_{nl}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ -\frac{n}{K} \Delta t \omega^* \sigma_y(\kappa) \left[ \frac{\sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl}))\sigma_y(\kappa)}{K} \right]^{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

avec  $\omega^* = \partial \omega / \partial \kappa_{nl}$  si  $\Delta \kappa_{nl} > 0$  et 0 sinon. L'inverse de la matrice Jacobienne peut se mettre sous la forme de matrice par bloc :

$$\underline{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{K}_{ee} & \underline{K}_{e\kappa} \\ \underline{K}_{\kappa e} & \underline{K}_{\kappa\kappa} \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

De sorte que :

$$\delta \Delta \xi_e = \underline{K}_{ee} \cdot \delta \Delta \xi + \frac{n}{K} \Delta t \omega^* \sigma_y(\kappa) \left[ \frac{\sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl}))\sigma_y(\kappa)}{K} \right]^{n-1} \underline{K}_{e\kappa} \delta \Delta \kappa_{nl} \quad (\text{A.25})$$

$$\delta \Delta \kappa = \underline{K}_{\kappa e} \cdot \delta \Delta \xi + \frac{n}{K} \Delta t \omega^* \sigma_y(\kappa) \left[ \frac{\sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl}))\sigma_y(\kappa)}{K} \right]^{n-1} \underline{K}_{\kappa\kappa} \delta \Delta \kappa_{nl} \quad (\text{A.26})$$

En considérant que  $\underline{\sigma} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_e$ , la matrice cohérente  $\underline{\underline{L}}_c$  est finalement donnée par :

$$\underline{\underline{L}}_c = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\tilde{\tilde{}}} \cdot \underline{\underline{K}}_{ee} & \frac{n}{K} \Delta t \omega^* \sigma_y(\kappa) \left[ \frac{\sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl})) \sigma_y(\kappa)}{K} \right]^{n-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\tilde{\tilde{}}} \cdot \underline{\underline{K}}_{e\kappa} \\ \underline{\underline{K}}_{\kappa e} & \frac{n}{K} \Delta t \omega^* \sigma_y(\kappa) \left[ \frac{\sigma_e - (1 - \omega_p(\kappa_{nl})) \sigma_y(\kappa)}{K} \right]^{n-1} \underline{\underline{K}}_{\kappa\kappa} \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Notons que  $\underline{\underline{L}}_c$  n'est pas symétrique, donc le problème global doit être résolu en utilisant un solveur non symétrique.



## Annexe B

# Extensions possibles pour le maillage auxiliaire

## B.1 Construction d'un front courbe

Le choix qui a été fait pour cette étude est d'utiliser cette première approximation simplifiée de la géométrie de la fissure pour l'insérer directement dans le maillage non fissuré de la structure et reprendre le calcul sur le maillage fissuré correspondant. Une critique qui peut être faite à l'égard de cette géométrie est qu'un front de fissure droit ne peut être qu'une première approximation dans le cas général. Les exemples qui sont traités dans cette étude sont des problèmes plans servant à montrer la validité de la méthodologie et pour lesquels cette hypothèse est justifiée. Cependant, dans le cas général, il est envisageable de construire un front plus adapté en évaluant l'endommagement en des points définis de la surface correspondant à l'incrément de fissure. Il est alors possible de créer une seconde géométrie en construisant des éléments triangulaires entre les nœuds de l'ancien front et les points où l'endommagement va devenir inférieur à un seuil critique et d'insérer cette géométrie plus avancée dans le maillage de la structure (voir figure B.1). Cependant, il est toujours nécessaire de garder la géométrie simplifiée qui va servir de base :

- pour rechercher l'orientation des panneaux qui y sont associés ;
- pour évaluer l'endommagement afin de construire un front plus réaliste.

La géométrie plus avancée doit toujours être contenue dans le premier maillage auxiliaire dont les segments construits ne doivent plus être modifiés.

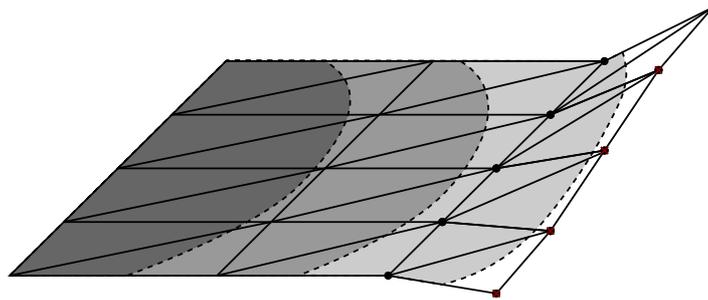


FIG. B.1 – Maillage auxiliaire servant de base à la construction d'un chemin de fissure plus complexe.

# Bibliographie

- [1] E.L. Aero and E.V. Kuvshinskii, *Fundamental equations of the theory of elastic materials with rotationally interacting particles*, Fizika Tverdogo Tela **2** (1960), 1399–1409.
- [2] E.C. Aifantis, *On the microstructural origin of certain inelastic models*, Transactions of ASME. J. Mat. Engng. Techn. **106** (1984), 326–330.
- [3] ———, *The physics of plastic deformation*, International Journal of Plasticity **3** (1987), 211–247.
- [4] M. Ainsworth and J.T. Oden, *A posteriori error estimation in finite element analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **142** (1997), 1–88.
- [5] F. Alauzet and P.J. Frey, *Estimateur d’erreur géométrique et métriques anisotropes pour l’adaptation de maillages. partie i : aspects théoriques*, Tech. Report 4759, INRIA, mars 2003.
- [6] ———, *Estimateur d’erreur géométrique et métriques anisotropes pour l’adaptation de maillages. partie ii : applications*, Tech. Report 4759, INRIA, mars 2003.
- [7] O. Allix and J.F. Deü, *Delay damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading*, Engineering transactions **45** (1997), 29–46.
- [8] P. Areias and T. Belytschko, *Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **63** (2005), 760–788.
- [9] D.N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin, *A stable finite element for the stokes equations*, Calcolo **21** (1984), 337–344.
- [10] D. Aubry and B. Tie, *A posteriori error analysis and h adaptive refinement for the f.e.m. in non linear structural computations*, European conference on new advances in computational structural mechanics (Giens, France) (Ladeveze and Zienkiewicz, eds.), 1991, pp. 1–8.
- [11] H. Baaser and T. Tvergaard, *A new algorithm approach treating nonlocal effects at finite rate-independent deformation using the rousselier damage model*, Comput. Methods Applied Mech. Engrg. **192** (2003), 107–124.
- [12] I. Babuška, *Error bounds for finite element methods*, Num. Math. **16** (1971), 322–333.
- [13] ———, *The finite element method with lagrange multipliers*, Num. Math. **20** (1973), 179–192.
- [14] ———, *Feedback, adaptivity and a-posteriori estimates in finite elements : aims, theory and experience*, Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations (Gago, Oliveira, and Zienkiewicz, eds.), J. Wiley, 1986, pp. 3–23.

- [15] I. Babuška and A. Miller, *A feedback finite element method with a posteriori error estimation, part 1 : The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator*, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering **61** (1987), 1–40.
- [16] I. Babuška and W.C. Rheinboldt, *Error estimates for adaptative finite element computation*, SIAM J. Num. Anal. **15** (1978), 736–754.
- [17] ———, *A posteriori error estimates for the finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **12** (1978), 1597.
- [18] ———, *A posteriori error analysis of finite element solutions for one dimensional problems*, SIAM J. Num. Anal. **18** (1981), 565–589.
- [19] I. Babuška and T. Strouboulis, *The finite element method and its reliability*, Oxford university press, 2001.
- [20] I. Babuška, T. Strouboulis, S.K. Gangaraj, and C.S. Upadhyay, *Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. **140** (1997), 1–37.
- [21] I. Babuška, T. Strouboulis, A. Mathur, and C.S. Upadhyay, *Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of a posteriori error estimators*, Finite Elements Anal. Design **17** (1994), 273–321.
- [22] I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, and S.K. Gangaraj, *A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems : error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **114** (1994), 307–378.
- [23] ———, *A posteriori estimation and adaptative control of the pollution error in the h-version of the finite element method*, Int. J. Num. Meth. Eng. **40** (1995), 2521–2577.
- [24] I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj, and K. Copps, *A posteriori estimation and adaptive control of the pollution-error in the h-version of the finite element method*, August 1994, Tech. Note BN-1175 and CMC Report No. 94-06.
- [25] ———, *Validation of a posteriori error estimators by numerical approach*, Int. J. Num. Meth. Eng. **37** (1994), 1073–1123.
- [26] I. Babuška and M. Suri, *The p and h version of the finite element method : an overview*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **82** (1990), 5–26.
- [27] I. Babuška and B.A. Szabo, *On the rate of convergence of the finite element method*, Int. J. for Num. Meth. in Eng. **18** (1982), 323–341.
- [28] I. Babuška, B.A. Szabo, and I.N. Katz, *The p-version of the finite element method*, SIAM J. Num. Anal. **18** (1981), 515–545.
- [29] R. Bargellini, J. Besson, E. Lorentz, and S. Michel-Ponnelle, *A non-local finite element based on volumetric strain gradient : Application to ductile fracture*, Computational Materials Science **45** (2009), 762–767.
- [30] J. Barlow, *Optimal stress location in finite element method*, Int. J. Num. Meth. Eng. **10** (1976), 243–251.
- [31] A.M. Baudron and P. Trompette, *Un critère de jugement simple pour un maillage éléments finis*, J. de Mécanique théorique et appliquée **5** (1986), 731–746.

- [32] Z.P. Bažant, T. Belytschko, and T.-P. Chang, *Continuum model for strain softening*, J. Engrg. Mech. **110** (1984), 1666–1692.
- [33] Z.P. Bažant and M. Jirásek, *Nonlocal integral formulations of plasticity and damage : survey of progress*, Journal of Engineering and Mechanics ASCE **128** (2002), 1119–1149.
- [34] P. Beckers and H.G. Zhong, *Influence of element distortions on reliability of some a posteriori error estimators*, European conference on new advances in computational structural mechanics (Giens, France) (Ladevèze and Zienkiewicz, eds.), 1991, pp. 9–16.
- [35] M. Bellet, *Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation : Application to metal powder hot compaction*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **175** (1999), 19–40.
- [36] T. Belytschko and T. Black, *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **45** (1999), 601–620.
- [37] T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran, *Nonlinear finite elements for continua and structures*, ch. 8, John Wiley & Sons, 2001.
- [38] C. Berdin, J. Besson, S. Bugat, R. Desmorat, F. Feyel, S. Forest, E. Lorentz, E. Maire, T. Pardoen, A. Pineau, and B. Tanguy, *Local approach to fracture*, Presses de l'École des Mines, (Paris).
- [39] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, and S. Forest, *Mécanique non linéaire des matériaux*, Hermes Sciences, 2001.
- [40] J. Besson and R. Foerch, *Large scale object-oriented finite element code design*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **142** (1997), 165–187.
- [41] B. Boroomand and O.C. Zienkiewicz, *Recovery procedures in error estimation and adaptivity. part ii : Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **176** (1999), 127–146.
- [42] H. Borouchaki and P.L. George, *Triangulation et maillage de delaunay*, Hermès, Paris, France, 1997.
- [43] P.O. Bouchard, *Towards an integrated approach between forming processes and structural analysis*, 2005,  
[http://www-cemef.cma.fr/fr/presentation/pagesperso/pob/research\\_activities\\_POB.doc](http://www-cemef.cma.fr/fr/presentation/pagesperso/pob/research_activities_POB.doc)
- [44] D. Brancherie, P. Villon, A. Ibrahimbegović, A. Rassineux, and P. Breitkopf, *Transfert de champs par approximation diffuse avec conservation de l'énergie*, REMN (Giens), 2005, pp. 107–118.
- [45] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers*, Rev. Française d'Automatique Inform. Rech. Opér., Sér. Rouge Anal. Numér. **8-R2** (1974), 129–151.
- [46] F. Brezzi and J. Pitkäranta, *On the stabilization of finite element approximations of the stokes problem*, Efficient Solution of Elliptic Problems, Notes on Numerical Fluid Mechanics (W. Hackbusch, ed.), vol. 10, Vieweg, Wiesbaden, 1984.
- [47] D. Brokken, *Numerical modelling of ductile fracture and blanking*, Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1999.

- [48] G. Bugeda and J. Oliver, *Automatic adaptives remeshing for structural shape optimization*, European Conf. on New Advances in Computat. Struct. Mech. (Giens, France), 1991.
- [49] G.T. Camacho and M. Ortiz, *Computational modelling of impact damage in brittle materials*, International Journal of Solids and Structures **33** (1996), 2899–2938.
- [50] ———, *Adaptive lagrangian modelling of ballistic penetration of metallic targets*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **142** (1997), 269–301.
- [51] W.E. Carrol and R.M. Barker, *A theorem for optimum finite element idealizations*, Int. J. of Solids Struct. **9** (1973), 883–895.
- [52] B.J. Carter, P.A. Wawrzynek, and A.R. Ingraffea, *Automated 3-d crack growth simulation*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **47** (2000), 229–253.
- [53] C.Comi and U. Perego, *A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **39** (1996), 3731–3755.
- [54] J.-L. Chaboche, *Continuous damage mechanics : a tool to describe phenomena before crack initiation*, Nucl. Engng. and Design **64** (1981), 233–247.
- [55] ———, *Continuum damage mechanics. parts i and ii.*, J. of Applied Mechanics **55** (1988), 59–72.
- [56] R. Chambon, D. Caillerie, and N. El Hassan, *One-dimensional localisation studied with a second grade model*, European Journal of Mechanics/A : Solids **17** (1998), 637–656.
- [57] L. Chamoin, *Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de visco-élasticité linéaire résolus par la méthode des éléments finis*, Ph.D. thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 2007.
- [58] V. Chiaruttini, F. Feyel, and J.L. Chaboche, *A robust meshing algorithm for complex 3d crack growth simulation*, IV European Conference on Computational Mechanics (Paris, France), 2010.
- [59] P.G. Ciarlet, *Basic error estimates for elliptic problems*, Handbook of numerical analysis (P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds.), vol. 2, North-Holland, 1991.
- [60] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, 1978.
- [61] F.A. Mc Clintock, *A criterion for ductile fracture by the growth of holes*, J. Applied Mech. **35** (1968), 363–371.
- [62] C. Comi, S. Mariani, and U. Perego, *An extended fe strategy for transition from continuum damage to mode i cohesive crack propagation*, Int. J. For Numerical Analytical Methods In Geomechanics **31** (2007), 213–238.
- [63] P. Coorevits, J.P. Dumeau, and J.P. Pelle, *Error estimator and adaptivity for three-dimensional finite element analysis*, Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics (Ladevèze and Oden, eds.), Elsevier, 1997, pp. 443–458.
- [64] P. Coorevits, P. Ladevèze, J.P. Pelle, and P. Rougeot, *Some new applications of a method for the control and optimization of the finite element computations*, New advances in computational structural mechanics (Ladeveze and Zienkiewicz, eds.), Elsevier, 1992, pp. 205–217.
- [65] P. Coorevits, J.P. Pelle, and P. Rougeot, *Sur l'adaptivité des maillages à base de quadrilatères*, Revue Européenne des Eléments Finis **3** (1994), 379–409.

- [66] E. Cosserat and F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Herrman et Fils, Paris, France, 1909.
- [67] R. Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 1–61.
- [68] G. Court, *Prévision objective de la rupture ductile en grandes déformations sous sollicitation dynamique : Modèle d'épuisement plastique à taux limités*, Ph.D. thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 2006.
- [69] M. Crouzeix and P.A. Raviart, *Conforming and non-conforming finite element methods for solving stationary stokes equations*, RAIRO **7-R3** (1973), 33–76.
- [70] R. de Borst, *Simulation of strain localization : A reappraisal of the cosserat continuum*, Engineering Computations **8** (1991), 313–332.
- [71] R. de Borst and H.B. Mühlhaus, *Continuum models for discontinuous media*, Fracture processes in Concrete, Rock and Ceramics (London) (J.G.M. van Mier, J.G. Rots, and A. Bakker, eds.), vol. 2, E&FN Spon, 1991, pp. 601–618.
- [72] ———, *Gradient-dependent plasticity : Formulation and algorithmic aspects*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **39** (1992), 521–539.
- [73] R. de Borst and J. Pamin, *Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **39** (1996), 2477–2505.
- [74] R. de Borst, L.J. Sluys, H.-B. Mühlhaus, and J. Pamin, *Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation*, Engineering Computations **10** (1993), 99–121.
- [75] J. Debongnie and P. Beckers, *On a general decomposition of the error of an approximate stress field in elasticity*, Int workshop on Trefftz methods (Sintra, Portugal), 1999.
- [76] J. Debongnie, H. Zhong, and P. Beckers, *Dual analysis with general boundary conditions*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **122** (1995), 183–192.
- [77] L. Demkowicz, J.T. Oden, and T. Strouboulis, *Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part 1 : Variational principles and a posteriori error estimates*, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering **46** (1984), 217.
- [78] A.R. Diaz, N. Kikuchi, and J.R. Taylor, *A method of grid optimization for finite element methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. (1983), 29–45.
- [79] P. Diez and A. Huerta, *A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **176** (1999), 215–229.
- [80] O.W. Dillon and J. Kratochvil, *A strain gradient theory of plasticity*, International Journal of Solids and Structures **6** (1970), 1513–1533.
- [81] C.R. Dohrmann and P.B. Bochev, *A stabilized finite element method for the stokes problem based on polynomial pressure projections*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **46** (2004), 183–201.
- [82] D.G.B. Edelen, *Protoelastic bodies with large deformation*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **34** (1969), 283–300.
- [83] D.G.B. Edelen, A.E. Green, and N. Laws, *Nonlocal continuum mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **43** (1971), 36–44.

- [84] D.G.B. Edelen and N. Laws, *On the thermodynamics of systems with nonlocality*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **43** (1971), 24–35.
- [85] R.A.B. Engelen, M.G.D. Geers, and F.P.T. Baaijens, *Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour*, International Journal of Plasticity **19** (2003), 403–433.
- [86] A.C. Eringen, *Simple microfluids*, International Journal of Engineering Science **2** (1964), 205–217.
- [87] ———, *Linear theory of micropolar elasticity*, Journal of Mathematics and Mechanics **15** (1966), 909–924.
- [88] ———, *Mechanics of micromorphic materials*, Proc. 11th International Congress of Applied Mechanics, Springer, 1966, Berlin, Heidelberg, pp. 131–138.
- [89] ———, *A unified theory of thermomechanical materials*, International Journal of Engineering Science **4** (1966), 179–202.
- [90] ———, *Microcontinuum field theories*, Springer, New York, 1999.
- [91] A.C. Eringen and D.G.B. Edelen, *On nonlocal elasticity*, International Journal of Engineering Science **10** (1972), 233–248.
- [92] A.C. Eringen and E.S. Suhubi, *Nonlinear theory of simple microelastic solids*, International Journal of Engineering Science **2** (1964), 189–203, 398–404.
- [93] H.D. Espinosa, P.D. Zavattieri, and G.L. Emore, *Adaptive fem computation of geometric and material nonlinearities with application to brittle fracture*, Mechanics of Materials **29** (1998), 275–305.
- [94] S. Feld-Payet, J. Besson, and F. Feyel, *Finite element analysis of damage in ductile structures using a non local model combined with a three-field formulation*, International Journal of Damage Mechanics (2010), accepted.
- [95] N.A. Fleck, G.M. Muller, M.F. Ashby, and J.W. Hutchinson, *Strain gradient plasticity : theory and experiment*, Acta Metallurgica et Materialia **42** (1994), 475–487.
- [96] S. Forest, *Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage*, Journal of Engineering Mechanics **135** (2009), 117–131.
- [97] S. Forest and R. Sievert, *Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua*, Acta Mech. **160** (2003), 71–111.
- [98] ———, *Nonlinear microstrain theories*, Int. J. Solids Structures **43** (2006), 7224–7245.
- [99] M. Fortin, *Old and new finite elements for incompressible flow*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **1** (1981), 347–364.
- [100] ———, *Estimation a posteriori et adaptation de maillages*, Revue Européenne des Éléments Finis **9** (2000), no. 4.
- [101] M. Fortin and N. Fortin, *Newer and newer elements for incompressible flow*, Finite Elements in Fluids (R.H. Gallagher, G.F. Carey, J.T. Oden, and O.C. Zienkiewicz, eds.), vol. 6, John Wiley & Sons, 1985, pp. 171–188.
- [102] J.P. Frey, *Yams, a fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure*, Tech. Report 0252, INRIA, November 2001.
- [103] J.P. Frey and P.L. George, *Maillages : applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, France, 1999.

- [104] H. Gao, Y. Huang, W.D. Nix, and J.W. Hutchinson, *Mechanism-based strain gradient plasticity-i. theory*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **47** (1999), 1239–1263.
- [105] T.C. Gasser and G.A. Holzapfel, *Modeling 3d crack propagation in unreinforced concrete using pufem*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **194** (2005), 2859–2896.
- [106] ———, *Modeling 3d crack propagation in unreinforced concrete. a two-step algorithm for tracking 3d crack paths*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **195** (2006), 5198–5219.
- [107] P.L. George, *Génération automatique de maillages : applications aux méthodes d'éléments finis*, Masson, Paris, France, 1991, Coll. Recherches en Mathématiques Appliquées.
- [108] N. Germain, *Modélisation non locale de l'endommagement dans les structures composites*, Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006.
- [109] P. Germain, Q.S. Nguyen, and P. Suquet, *Continuum thermodynamics*, J. of Applied Mechanics **5** (1983), 1010–1020.
- [110] A. Gravouil, N. Moës, and T. Belytschko, *Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level set - part ii : level set update*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **53** (2002), 2569–2586.
- [111] A.E. Green, *Micro-materials and multipolar continuum mechanics*, International Journal of Engineering and Science **3** (1965), 533–537.
- [112] A.E. Green and R.S. Rivlin, *Multipolar continuum mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **17** (1964), 113–147.
- [113] ———, *Simple force and stress multipole*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **16** (1964), 325–353.
- [114] R. Grimaldi, D. Addessi, and V. Ciampi, *Localization and regularization behavior of mixed finite element for 2d structural problems with damaging material*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **197** (2007), 255–264.
- [115] G. Grioli, *Elasticità asimmetrica*, Annali di matematica pura ed applicata **50** (1960), 389–417.
- [116] W. Günther, *Zur statik und kinematik des cosseratschen kontinuum*, Abhandlungen des Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft **10** (1958), 195–213.
- [117] E. Gürses and C. Miehe, *A computational framework of three-dimensional configurational-force-driven brittle crack propagation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **198** (2009), 1413–1428.
- [118] A.L. Gurson, *Continuum theory of ductile rupture by void growth : part i - yield criterion and flow rules for porous ductile media*, J. Engrg. Mater. Technol. **99** (1977), 2–15.
- [119] L.R. Herrmann, *Finite element bending analysis of plates*, Proc. 1st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics (Wright-Patterson Air Force Base, Ohio), 1965, AFFDL-TR-60-80, pp. 577–602.
- [120] E. Hinton and J.S. Campbell, *Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method*, Int.J. Num. Meth. Eng. **8** (1974), 461–480.
- [121] O.S. Hopperstad, T. Borvik, M. Langseth, K. Labibes, and C. Albertini, *On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. part i. experiments.*, European Journal of Mechanics - A/Solids **22** (2003), 1–13.

- [122] Y. Huang, H. Gao, W.D. Nix, and J.W. Hutchinson, *Mechanism-based strain gradient plasticity-ii. analysis*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **48** (2000), 99–128.
- [123] A. Huerta and P. Diez, *Error estimation including pollution assesement for nonlinear finite element analysis*, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering **181** (2000), 21–41.
- [124] T.J.R. Hughes, *Generalization of selective integration procedures to anisotropic and non linear media*, Int. J. Numer. Meth. Engng **15** (1980), 1413–1418.
- [125] T.J.R. Hughes and L.P. Franca, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Vii. the stokes problem with various well-posed boundary conditions : symmetric formulation that converge for all velocity/pressure spaces*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **65** (1987), 85–96.
- [126] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Balestra, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V. circumventing the babuška-brezzi condition : a stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **59** (1986), 85–99.
- [127] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and G.M. Hulbert, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **73** (1989), 173–189.
- [128] J. Hult, *Continuum damage mechanics. capabilities, limitations and promises*, Mechanisms of deformation and fracture (Pergamon, ed.), Oxford, 1979, pp. 233–347.
- [129] ISMES, Bergamo, Italy, *Fiesta, user manual*, 1986.
- [130] H.R. Javani, R.H.J. Peerlings, and M.G.D. Geers, *Three dimensional modelling of non-local ductile damage : element technology*, International Journal of Material Forming **2** (2009), 923–926.
- [131] M. Jirásek, *Modeling of localized inelastic deformation, lecture notes*, Short course given by Milan Jirásek at the Czech Technical University in Prague, 22-26 September 2008.
- [132] M. Jirásek and S. Rolshoven, *Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials*, International Journal of Engineering Science **41** (2003), 1553–1602.
- [133] M. Jirásek and T. Zimmermann, *Embedded crack model. part ii : Combination with smeared cracks*, Int. J. Numer. Methods Engng. **50** (2001), 1291–1305.
- [134] L.M. Kachanov, *Time of the rupture process under creep conditions*, Isv. Akad. Nouk. SSR. Otd Tekh. Nauk. **8** (1958), 26–31.
- [135] D.W. Kelly, J. Gago, O.C. Zienkiewicz, and I. Babuška, *A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method ; part i : error analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng. **19** (1983), 1953–1619.
- [136] A.R. Khoei and S.A. Gharehbaghi, *Three-dimensional data transfer operators in large plasticity deformations using modified-spr technique*, Applied Mathematical Modelling **33** (2009), 3269–3285.
- [137] N. Kikuchi, *Adaptive grid-design methods for finite element analysis*, Comput. Methocs Appl. Mech. Eng. (1986), 129–160.
- [138] W.T. Koiter, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Ser. B **67** (1964), 17–44.

- [139] D. Krajcinovic, *Continuum damage mechanics*, Applied Mechanics Reviews **37** (1984), 1–6.
- [140] E. Kröner, *Elasticity theory of materials with long range cohesive forces*, International Journal of Solids and Structures **3** (1967), 731–742.
- [141] I.A. Kunin, *The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations*, Mechanics of Generalized Continua (E. Kröner, ed.), Springer-Verlag, 1968, Heidelberg, pp. 321–329.
- [142] P. Ladevèze, *Comparaison de modèles de milieux continus*, 1975, thèse d'état, Université P. et M. Curie, Paris (France).
- [143] ———, *A damage computational approach for composites : basic aspects and micro-mechanics relations*, Comput. Mech. **17** (1995), 142–150.
- [144] P. Ladevèze, G. Coffignal, and J.P. Pelle, *Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis*, Accuracy estimates and adaptive refinements in Finite Element computations (Babuska, Gago, Oliveira, and Zienkiewicz, eds.), J. Wiley, 1986, pp. 181–203.
- [145] P. Ladevèze, P. Marin, J.P. Pelle, and J.L. Castine, *Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **94** (1992), 303–314.
- [146] P. Ladevèze and J.-P. Pelle, *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermès Science Publications, Paris, France, 2001.
- [147] P. Ladevèze and J.P. Pelle, *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*, Springer NY, 2004.
- [148] P. Ladevèze and P. Rougeot, *New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis*, Comput. Methods Appl. Mec. Eng. **150** (1997), 239–249.
- [149] P. Ladevèze, P. Rougeot, P. Blanchard, and J.P. Moreau, *Local error estimators for finite element linear analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **176** (1999), 231–246.
- [150] N.S. Lee and K.J. Bathe, *Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis*, Finite Elem. Anal. Design. **16** (1994), 99–139.
- [151] J. Lemaitre, *A continuum damage mechanics model for ductile fracture*, J. of Engng. Mat. Technol. **107** (1985), 83–89.
- [152] ———, *A course on damage mechanics*, Springer Verlag, 1996.
- [153] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985.
- [154] L.Y. Li and P. Bettles, *Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations*, Communications in Numerical Methods in Engineering **11** (1995), 911–915.
- [155] E. Lorentz, J. Besson, and V. Cano, *Numerical simulation of ductile fracture with the rousselier constitutive law*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **197** (2008), 1965–1982.
- [156] G. Loubignac, G. Cantin, and G. Touzot, *Continuous stress fields in finite element analysis*, AIAA Journal **15** (1977), 1645–1647.
- [157] A.C. Mackenzie, J.W. Hancock, and D.K. Brown, *On the influence of state of stress on ductile failure initiation in high strength steels*, Engineering Fracture Mechanics **9** (1977), 167–188.

- [158] R.J. Mackinnon and G.F. Carey, *Superconvergent derivatives : A Taylor series analysis*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **28** (1989), 489–509.
- [159] R.H. MacNeal and R.L. Harder, *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*, J. Finite Elem. Anal. Des. **1** (1985), 3–20.
- [160] J.M. Mahishi and D.F. Adams, *Micromechanical predictions of crack initiation, propagation, and crack growth resistance in boron/aluminium composites*, Journal of Composite Materials **16** (1982), 457–469.
- [161] E. Maire, J.Y. Buffière, L. Salvo, J.J. Blandin, W. Ludwig, and J.M. Letang, *On the application of x-ray microtomography in the field of materials science*, Advan. Eng. Mater. **3** (2001), 539–546.
- [162] D.S. Malkus, *Eigenproblems associated with the discrete lbb condition for incompressible finite elements*, Int. J. Eng. Sci. **19** (1981), 1299–1370.
- [163] D.S. Malkus and T.J.R. Hughes, *Mixed finite element methods in reduced and selective integration techniques : A unification of concepts*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. **15** (1978), 63–81.
- [164] MEALOR, *Mealor*, Presses de l'École des Mines de Paris, 2004.
- [165] J. Mediavilla, *Continuous and discontinuous modelling of ductile fracture*, Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2005.
- [166] S. Michel-Ponnelle, *Éléments finis traitant la quasi-incompressibilité*, 2009, Documentation Code\_Aster R3.06.08 on [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org).
- [167] R.D. Mindlin, *Micro-structure in linear elasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **16** (1964), 51–78.
- [168] ———, *Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity*, International Journal of Solids and Structures **1** (1965), 417–438.
- [169] R.D. Mindlin and H.F. Tiersten, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **11** (1962), 415–448.
- [170] T. Moan, *Orthogonal polynomials and “best” numerical integration formulas on a triangle*, Z. Angew. Math. Mech. **54** (1974), 501–508.
- [171] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, *A finite element method for crack growth without remeshing*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **46** (1999), 131–150.
- [172] N. Moës, A. Gravouil, and T. Belytschko, *Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level set - part i : mechanical model*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **53** (2002), 2549–2568.
- [173] T.F. Morgenevler, M.J. Starink, and I. Sinclair, *Evolution of voids during ductile crack propagation in an aluminium alloy sheet toughness test studied by synchrotron radiation computed tomography*, Acta Mater. **56** (2008), 1671–1679.
- [174] H.-B. Mühlhaus and E.C. Aifantis, *A variational principle for gradient plasticity*, International Journal of Solids and Structures **28** (1991), 845–858.
- [175] H.-B. Mühlhaus and I. Vardoulakis, *The thickness of shear band in granula materials*, Géotechnique **37** (1987), 271–283.
- [176] S. Murakami, *Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory*, J. of Engng. Mat. Technol. **105** (1983), 99.

- [177] J.C. Nagtegaal, D.M. Parks, and J.R. Rice, *On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. **4** (1974), 153–177.
- [178] A. Needleman, *A continuum model for void nucleation by inclusion debonding*, J. Appl. Mech. **54** (1987), 525–531.
- [179] J.A. Nitsche and A.H. Schatz, *Interior estimates for ritz-galerkin methods*, Math. Comp. **28** (1974), 937–958.
- [180] J.T. Oden, *R.i.p. methods for stokesian flow*, Finite Elements in Fluids (R.H. Gallagher, D.N. Norrie, J.T. Oden, and O.C. Zienkiewicz, eds.), vol. 4, John Wiley & Sons, 1982, pp. 305–318.
- [181] J.T. Oden and L. Demkowicz, *H-p adaptive finie element methods in computational fluid dynamics*, Meth. in Applied Mech. Eng. **89** (1991), 11–40.
- [182] J.T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz, and T.A. Westermann, *Toward a universal h-p adaptative finite element strategy - part 2. a posteriori error estimation*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. (1989), 113–180.
- [183] J.T. Oden and Y. Feng, *Local and pollution error estimation for finite element approximations of elliptic boundary value problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics **74** (1996), 245–293.
- [184] J.T. Oden and S. Prudhomme, *A posteriori error estimation of h-p approximations of the stokes equations*, Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics (Ladeveze and Oden, eds.), Elsevier, 1998, pp. 43–64.
- [185] J. Oliver, *A consistent characteristic length for smeared cracking models*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **28** (1989), 461–474.
- [186] E. Onate, *Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **151** (1998), 233–265.
- [187] E. Onate and G. Bugeda, *A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis*, Engineering Computations **10** (1993), 307–321.
- [188] E. Onate and J. Castro, *Adaptive mesh refinement techniques for structural problems*, Finite elements in the 1990's (E. Onate, Periaux J., and Samuelsson A., eds.), Springer-Verlag/CIMNE, Barcelona, 1991.
- [189] E. Onate, J. Castro, and R. Kreiner, *Error estimations and mesh adaptivity techniques for plate and shell problems*, 3rd International Conference on Quality Assurance and Standards in Finite Element Methods (Stratford-upon-Avon, England), 1991.
- [190] M. Ortiz and A. Pandolfi, *Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack propagation analysis*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **44** (1999), 1267–1282.
- [191] M. Ortiz and J.J. Quigley, *Adaptive mesh refinement in strain localization problems*, Com. Meth. Appl. Mech. Eng. **90** (1991), 781–804.
- [192] J. Pamin, *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*, Ph.D. thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1994.
- [193] A. Pandolfi and M. Ortiz, *An efficient adaptive procedure for three-dimensional fragmentation simulations*, Engrg. Comput. **18** (2002), 148–159.

- [194] M. Papadrakakis, G. Babilis, and P. Braouzi, *Efficiency of refinement procedures for the p-version of the adaptive finite element method*, Engineering computations **14** (1997), 98–118.
- [195] B. Patzák and M. Jirásek, *Process zone resolution by extended finite elements*, Engineering Fracture Mechanics **70** (2003), 957–977.
- [196] ———, *Adaptive resolution of localized damage in quasi-brittle materials*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE **130** (2004), 720–732.
- [197] S. Payet, *Estimateur d'erreur en mécanique des structures*, Tech. Report RT 2/13757 DSNA/DMSM, ONERA, janvier 2009, ARF PRECOTION - RGF.
- [198] R.H.J. Peerlings, *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*, Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1999.
- [199] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, and J.H.P. de Vree, *Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **39** (1996), 3391–3403.
- [200] R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, R. de Borst, and W.A.M. Brekelmans, *A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua*, Int. J. Solids Struct. **38** (2001), 7723–7746.
- [201] R.H.J. Peerlings, T.J. Massart, and M.G.D. Geers, *A thermodynamically motivated implicit gradient damage framework and its application to brick masonry cracking*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **193** (2004), 3403–3417.
- [202] J.P. Pelle, *Fiabilité et optimisation des calculs de fréquences propres par éléments finis*, 1985, thèse d'état, Université P. et M. Curie, Paris (France).
- [203] D. Perić, Ch. Hochard, M. Dutko, and D.R.J. Owen, *Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity*, Com. Meth. Appl. Mech. Eng. **137** (1996), 331–344.
- [204] D. Perić, J. Yu, and D.R.J. Owen, *On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids : application to the numerical simulation of localization in classical and cosserat continua*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **37** (1994), 1351–1379.
- [205] T.H.H. Pian and K. Sumihara, *Rational approach for assumed stress finite elements*, Int. J. Numer. Meth. Eng. **20** (1985), 1685–1695.
- [206] G. Pijaudier-Cabot and Z.P. Bažant, *Nonlocal damage theory*, J. Engrg. Mech. **113** (1987), 1512–1533.
- [207] G. Pijaudier-Cabot, Z.P. Bažant, and M. Tabbara, *Comparison of various models for strain softening*, Eng. Computation **5** (1988), 141–150.
- [208] A. Pineau, *Review of fracture micromechanics and a local approach to predicting crack resistance in low strength steels*, Proc. ICF5 Conference (Cannes, France), 1980, Vol. 2.
- [209] ———, *Development of the local approach to fracture over the past 25 years : theory and applications*, Int. J. Frac. **138** (2006), 139–166.
- [210] F.M. Andrade Pires, E.A. de Souza Neto, and D.R.J. Owen, *On the finite element prediction of damage growth and fracture initiation in finitely deforming ductile materials*, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering **193** (2004), 5223–5256.

- [211] Y.N. Rabotnov, *Creep problems in structural members*, North Holland, 1969.
- [212] E.S. Rajagopal, *The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity*, *Annalen des Physik* **6** (1960), 192–201.
- [213] J.R. Rice, *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notched and cracks*, *J. Applied Mech.* **35** (1968), 379.
- [214] J.R. Rice and D.M. Tracey, *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*, *J. Mech. Phys. Solids* **17** (1969), 201–217.
- [215] M.C. Rivara, *Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques*, *Int. J. Num. Meth. Eng.* **20** (1984), 745–756.
- [216] D. Rogula, *Introduction to nonlocal theory of material media*, *Nonlocal Theory of Material Media* (Wien and New York) (D. Rogula, ed.), Springer Verlag, 1982, number 268 in CISM Courses and Lectures, pp. 125–222.
- [217] G. Rousselier, *Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture*, *Nucl. Engng. and Design* **105** (1987), 97–111.
- [218] ———, *Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture*, *J. Mech. Phys. Solids* **49** (2001), 1727–1746.
- [219] A.H. Schatz and L.B. Wahlbin, *Interior maximum norm estimates for finite element methods*, *Math. Comp.* **31** (1977), 414–442.
- [220] ———, *Maximum norm estimates in the finite element methods on plane polygonal domains. part 1*, *Math. Comp.* **32** (1978), 73–109.
- [221] M.X. Shi, Y. Huang, and K.C. Hwang, *Plastic flow localization in mechanism-based strain gradient plasticity*, *International Journal of Mechanical Sciences* **42** (2000), 2115–2131.
- [222] A. Simatos, *Méthode xfem pour la modélisation de grandes propagations de fissure en déchirure ductile : transition d'un milieu continu vers une fissure via un modèle de zone cohésive pour le modèle de rousselier*, Ph.D. thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010.
- [223] J.C. Simo, J. Oliver, and F. Armero, *An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids*, *Computational Mechanics* **12** (1993), 277–296.
- [224] J.C. Simo and M.S. Rifai, *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **29** (1990), 1595–1638.
- [225] J.C. Simo and R.L. Taylor, *Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **48** (1985), 101–118.
- [226] ———, *Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **85** (1991), 273–310.
- [227] J.C. Simo, R.L. Taylor, and K.S. Pister, *Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation plasticity*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **51** (1985), 177–208.
- [228] A. Simone, H. Askes, and L.J. Sluys, *Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media*, *International Journal of Solids and Structures* **41** (2004), 351–363.

- [229] A. Simone, G.N. Wells, and L.J. Sluys, *From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **192** (2003), 4581–4607.
- [230] J. Skrzypek and A. Ganczarski, *Modeling of material damage and failure of structures*, Springer Verlag, 1998.
- [231] E. Stein, *Error controlled adaptive finite element in solid mechanics*, J. Wiley, 2003.
- [232] P. Steinmann and K. Willam, *Localization within the framework of micropolar elastoplasticity*, Advances in Continuum Mechanics (O. Brüller, V. Mannl, and J. Najjar, eds.), Springer Verlag, 1992, pp. 296–313.
- [233] T. Strouboulis and K.A. Haque, *Recent experiences with error estimation and adaptativity. part i : review of error estimators for scalar elliptic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **97** (1992), 339–436.
- [234] N. Sukumar, D.L. Chopp, and B. Moran, *Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation*, Engrg. Fract. Mech. **70** (2003), 29–48.
- [235] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko, *Extended finite element method for three-dimensional fatigue crack modelling*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **48** (2000), 1549–1570.
- [236] T. Sussman and K.J. Bathe, *A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis*, Comput. Struct. **26** (1987), 357–409.
- [237] B.A. Szabo, *Probe, theoretical manual*, Noetic Technologies, St. Louis, Missouri, 1975.
- [238] ———, *Estimation and control of error based on p convergence*, Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations (Gago, Oliveira, and Zienkiewicz, eds.), J. Wiley, 1986, pp. 61–78.
- [239] ———, *The p and h-p versions of the finite element method in solid mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **82** (1990), 185–1958.
- [240] C. Taylor and P. Hood, *A numerical solution for the navier-stokes equations using the finite element technique*, Comp. Fluids **1** (1973), 73–100.
- [241] R.L. Taylor, *A mixed-enhanced formulation for tetrahedral finite elements*, Int. J. Numer. Meth. Engrg **47** (2000), 205–227.
- [242] R.A. Toupin, *Elastic materials with couple-stresses*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **11** (1962), 385–414.
- [243] ———, *Theories of elasticity with couple-stress*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **17** (1964), 85–112.
- [244] C. Truesdell and R.A. Toupin, *Classical field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, vol. III/1, Springer, Berlin, 1960.
- [245] G. Tsamasphyros and S. Markolefas, *An estimate of the babuška-brezzi inf-sup discrete stability constant for general linear petrov-galerkin element formulations (an estimate of the babuška-brezzi stability constant)*, Applied Mathematics and Computation **144** (2003), 107–116.
- [246] D.J. Turcke and G.M. Neice, *Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization study*, Computers and Structures **4** (1974), 499–519.

- [247] V. Tvergaard and A. Needleman, *Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar*, Acta Metall. **32** (1984), 157–169.
- [248] R. Verfürth, *A review of a posteriori error estimation and adaptative mesh-refinement techniques*, Wiley-Teubner Verlag, 1996.
- [249] ———, *A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **176** (1999), 419–440.
- [250] P. Villon, H. Borouchaki, and K. Saanouni, *Transfert de champs plastiquement admissibles*, C.R. Mecanique **330** (2002), 313–318.
- [251] L.B. Wahlbin, *On the sharpness of certain local estimates for  $h_1^0$  projections into finite element spaces : influence of a reentrant corner*, Math. Comp. **42** (1984), 1–8.
- [252] G.N. Wells and L.J. Sluys, *A new method for modelling cohesive cracks using finite elements*, International Journal for Numerical Method in Engineering **50** (2002), 2667–2682.
- [253] M.F. Wheeler and J.R. Whiteman, *Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise linear finite-element approximations*, Numer. Methods Partial Diff. Eqns **3** (1987), 357–374.
- [254] X.P. Xu and A. Needleman, *Void nucleation by inclusion debonding in crystal matrix*, Modelling Simul. Mater. Sci. Engrg. **1** (1993), 111–132.
- [255] H.M. Zbib and E.C. Aifantis, *On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation*, Res Mechanica **23** (1988), 261–605.
- [256] O.C Zienkiewicz and S. Nakazawa, *On variational formulations and its modification for numerical solution*, Comput. Struct. **19** (1984), 303–313.
- [257] O.C Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The finite element method*, 5th ed., vol. 2 : Solid Mechanics, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [258] ———, *The finite element method for solid and structural mechanics*, 6th ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
- [259] O.C Zienkiewicz, R.L. Taylor, and P. Nithiarasu, *The finite element method for fluid dynamics*, 6th ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
- [260] O.C Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu, *The finite element method*, 6th ed., vol. 1 : Its basis and fundamentals, ch. 10 to 12, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
- [261] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, *A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng. **24** (1987), 337–357.
- [262] ———, *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique*, Int. J. Num. Meth. Eng. **33** (1992), 1331–1364.
- [263] ———, *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2 : error estimates and adaptativity*, Int. J. Num. Meth. Eng. **33** (1992), 1365–1382.
- [264] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, and N.G. Gong, *Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method*, Int. J. Num. Meth. Eng. **28** (1989), 879–891.





## Amorçage et propagation de fissures dans les milieux ductiles non locaux

**Résumé :** Cette étude s'inscrit dans le domaine de la conception et du dimensionnement de structures industrielles. Elle consiste à proposer une méthodologie permettant de simuler l'endommagement ductile de structures métalliques, suivi de l'amorçage et de la propagation de fissures. La démarche s'organise en trois temps.

La première étape consiste à pouvoir décrire correctement l'évolution de l'endommagement jusqu'à l'amorçage de la fissure, par un modèle continu. Or, l'utilisation de modèles de comportement ductiles endommageables classiques avec la méthode des éléments finis conduit à de nombreux problèmes, tels que la dépendance pathologique à la finesse et à l'orientation du maillage ou le verrouillage volumique. Une nouvelle formulation mixte non locale à quatre champs est proposée dans le cadre des petites perturbations afin de surmonter ces problèmes.

L'étape suivante vise à améliorer la qualité du calcul. Pour cela, une procédure d'adaptivité de maillage reposant sur un indicateur d'erreur est mise en place afin de permettre d'atteindre le niveau de qualité désiré par l'utilisateur, tout en minimisant les coûts de calculs. Associée au lissage des champs aux anciens points de Gauss avant projection directe aux nouveaux points de Gauss et à l'ajout de viscosité dans le modèle, elle permet de reprendre les calculs sur le nouveau maillage plus adapté après quelques divisions du pas de temps.

Enfin, une fois toute la phase d'endommagement décrite avec précision, la dernière partie est consacrée au développement d'une stratégie d'amorçage et de propagation de fissure utilisant l'adaptation de maillage. Pour cela, le chemin de fissure est représenté par un maillage auxiliaire dont le front est le plus régulier possible. Pour déterminer l'orientation de cette discrétisation, un critère reposant sur le gradient de l'endommagement lissé est formulé. Cette stratégie est mise en œuvre sur un cas test académique en dimensions deux et trois.

Par la suite, il serait intéressant de pouvoir appliquer cette méthodologie avec des modèles plus réalistes faisant intervenir le taux de triaxialité, et ce en grandes déformations.

**Mots clés :** Endommagement ductile, formulation mixte non locale, adaptation de maillage automatique, insertion de fissure.

## Crack initiation and propagation in nonlocal ductile media

**Abstract:** Within the framework of industrial structures design, a novel methodology is presented which allows to model ductile damage evolution followed by crack initiation and propagation. This study is divided into three parts.

First, damage evolution should be properly described with a continuous model up to the onset of fracture. However, solving finite element problems involving elasto-plasticity coupled with damage softening faces two major difficulties: mesh dependence and volumetric locking. In this work, a four-field mixed nonlocal formulation is proposed in order to solve simultaneously both problems within the small strain framework.

Then, accuracy is improved and computational costs are minimized thanks to a mesh adaptivity procedure based on an error indicator. The strategy combines a direct transfer of the smoothed fields at the old Gauss points to the new ones with a viscous model, so that computation can continue on the adapted mesh after reducing the time step.

Finally, once the first stage of damage evolution is described accurately, a new strategy using remeshing techniques is proposed for crack initiation and propagation. The crack path is represented by an auxiliary mesh with a regular crack tip. The discontinuity is oriented according to a criterion depending on the gradient of the smoothed damage field. A numerical application is presented on a double notched specimen both in 2D and in 3D.

Future work should focus on applying this methodology to more realistic models involving stress triaxiality within the finite strain framework.

**Keywords:** Ductile damage, mixed nonlocal formulation, automatic mesh adaptivity, crack initiation and propagation.

