



**HAL**  
open science

**Du modèle matériau à la mécanique des systèmes :  
étude dynamique d'une liaison souple en silicone chargé  
de silice**

Florence Vincent

► **To cite this version:**

Florence Vincent. Du modèle matériau à la mécanique des systèmes : étude dynamique d'une liaison souple en silicone chargé de silice. Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011. Français. NNT : 2011ENMP0005 . pastel-00584332

**HAL Id: pastel-00584332**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00584332>**

Submitted on 8 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole doctorale n°432 : Science des Métiers de l'Ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H E S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'Ecole nationale supérieure des mines de Paris**

**Spécialité « Sciences & Génie des Matériaux »**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Florence VINCENT**

le 20 Janvier 2011

**Du modèle matériau à la mécanique des systèmes :**

**étude dynamique d'une liaison souple**

**en silicone chargé de silice**

Directeur de thèse : **David RYCKELYNCK**

Co-encadrement de la thèse : **Sabine CANTOURNET**

**Jury**

**Amine AMMAR**, Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech

**Mathias BRIEU**, Professeur des Universités, Ecole Centrale de Lille

**Sylvie CASTAGNET**, Chargée de recherche CNRS, ENSMA Poitiers

**François LEQUEUX**, Directeur de recherche CNRS, ESPCI

**David RYCKELYNCK**, Maître de recherche, Centre des Matériaux, MinesParisTech

**Sabine CANTOURNET**, Chargée de recherche, Centre des Matériaux, MinesParisTech

Rapporteur

Rapporteur

Examinatrice

Examineur

Directeur

Co-directrice



*à mes parents,  
à mes grands-parents,*



# REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier Amine AMMAR et Matthias BRIEU pour avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse. Merci pour vos rapports complets et enrichissants, pour vos questions pertinentes qui m'ont permis de prendre encore plus de recul sur mes travaux. Merci à François LEQUEUX et Sylvie CASTAGNET d'avoir accepté d'examiner mon travail et apporté des remarques pertinentes.

Je remercie évidemment Sabine CANTOURNET et David RYCKELYNCK, dans un premier temps pour m'avoir proposé un sujet de thèse aussi intéressant, pluridisciplinaire et concret, mais aussi pour m'avoir dirigé pendant ces trois années.

Sabine, merci pour m'avoir initié à l'étude des matériaux polymères, matériaux au comportement si complexe mais tellement captivant. Merci d'avoir renouvelé ta confiance en me proposant à l'issue de mon stage cette thèse et bien sûr merci pour m'avoir donné l'opportunité de partir au MIT.

David, merci pour ta disponibilité et pour m'avoir fait découvrir les méthodes de réduction d'ordre de modèles. J'ai sincèrement apprécié de travailler avec toi.

Je remercie également mes deux partenaires industriels PAULSTRA-VIBRACHOC et SNECMA avec qui j'ai entretenu une très bonne collaboration pendant ces trois années et avec qui il m'a été très agréable de travailler. Merci à Patrice LEVALLARD, Djamil NAMOUNE, Franck DUVERGENT, Karine LE-GORJU, Thomas VINCENT, Cyril DUPUIS, François BELLABAL d'avoir coencadré ces travaux et surtout merci pour ce sujet concret et passionnant.

Je tiens aussi à remercier l'équipe du laboratoire matériaux de Lisses, notamment Gilles PESCHEUR et Caroline MESLIN avec qui j'ai partagé, entre autres, quelques séances de moulage d'éprouvettes que j'ai particulièrement appréciées. Je tiens enfin à souligner et à remercier PAULSTRA-VIBRACHOC pour la fourniture très réactive de nombreuses éprouvettes.

Un immense merci à David PARKS d'avoir accepté la proposition de Sabine à savoir de participer à l'encadrement de mes travaux de thèse; tout d'abord pendant votre séjour au Centre de Matériaux puis ensuite en m'accueillant six mois au sein de votre département au MIT. Merci pour nos longues et nombreuses discussions sur le comportement des élastomères chargés autour de mes courbes d'essais. Merci pour votre application et votre disponibilité. Et puis merci à Judith et vous pour votre chaleureux et précieux accueil à Pembroke. MERCI pour tout!!

Un petit Clin d'œil enfin à Ray HARDIN, merci pour ton aide, ta gentillesse et ta bonne humeur, surtout ne change rien! Et merci aux doctorants du département "Mechanical Engineering", Mary, Matteo, Deepti, Gasper, Shawn et les autres pour votre accueil et votre aide.

Un grand merci à Yann AURIAC, merci pour ta disponibilité, ton aide précieuse, ta gentillesse; j'ai sincèrement apprécié de travailler avec toi pendant ces trois années. Merci pour ta collaboration, ton soutien, lors de mes longs moments de doute sur la réalisation des essais de DMA par exemple!!

Je tiens à remercier aussi Yves FAVRY et Julie HEURTEL qui m'ont aussi aidé à réaliser plusieurs essais expérimentaux, merci pour votre disponibilité et votre bonne humeur.

Merci aussi à l'ensemble de l'atelier pour la réalisation de mes mors et diverses pièces nécessaires à la réalisation de mes essais. Je pense notamment à Michel ROUSSELOT, René CLUZET, Christophe MEURIN, Jean-pierre ETOURNEAU, Georges CASSAS. Merci enfin à Franck BLUZAT pour m'avoir dépanné sans hésiter plus d'une fois.

Je tiens à remercier chaleureusement Jacques BESSON ; merci d'avoir à plusieurs reprises débloqué un de mes soucis sous Zebulon et permis d'avancer, merci pour votre efficacité et votre curiosité scientifique.

Je tiens également à remercier Laurent CORTE pour avoir toujours répondu présent pour discuter et réfléchir avec nous autour des résultats expérimentaux, merci pour tes bonnes idées et ta gentillesse.

Je souhaite également remercier Gregory SAINTE-LUCE et Olivier DELHOMME pour leur disponibilité, pour avoir répondu à mes multiples requêtes et soucis informatiques. Malgré des débuts inquiets et timides sous Linux, j'avoue avoir adhéré à l'utilisation de celui-ci !

Un immense merci à mes collègues du bureau B106, les anciens Cédric, Jean-Yves, Mélis avec qui j'ai beaucoup appris, les nouveaux Mathieu, Philippe puis Melchior qui se sont super bien intégrés et qui ont surtout supporté mes longs mois de rédaction et enfin Angélique et Clémence que je ne peux que remercier pour tous ces bons moments partagés. J'ai vraiment passé d'agréables et inoubliables moments scientifiques et amicaux dans ce bureau.

Un merci tout particulier à Djamel, toujours disponible, efficace et généreux, qui m'a débogué de nombreux problèmes et remonté le moral dans les moments difficiles. Un petit clin d'œil entre Bisounours !

Un grand merci Fabrice pour ta disponibilité, ta curiosité scientifique et ta répartie. J'ai beaucoup apprécié nos nombreuses discussions autour du développement du modèle matériau notamment, tu m'as beaucoup apporté, merci !

J'ai aussi une pensée chaleureuse pour d'autres anciens, Julien, Alexandre, Stéphanie, Florian, Matthieu, Tony, Nono avec qui j'ai fait mes premiers pas au Centre des Matériaux.

Enfin je n'oublierais pas de remercier Delphine, Yoann, Julie, Sophie, Fatima, Jossrand et Vincent avec qui j'ai aussi partagé d'agréables moments.

Il est difficile de n'oublier personne mais merci à l'ensemble du centre des matériaux, permanents notamment André PINEAU, Lucien LAIARINANDRASANA, Anne-Françoise GOURGUES avec qui il a toujours été possible d'échanger, doctorants, post-doctorants, master... Ce passage de plus de trois ans au centre restera comme un très bon souvenir pendant lequel j'ai pu rencontrer des personnes de grandes valeurs.

Dans ma liste de personnes à remercier, il manque encore Anne LAURENT, Maria BETBEDER, Steve DUVINAGE, Franck NGUYEN, Nicole FABREGUE merci pour votre gentillesse, votre bonne humeur, ne changez rien !

Merci à toute l'équipe administrative, je pense notamment à Liliane LOCICERO avec qui j'ai partagé d'agréables moments de gym, Konaly SAR, Véronique MATOS, Anne PIANT ... Merci à Odile ADAM pour m'avoir toujours gentiment trouvé les nombreuses publications que je cherchais désespérément ! Et puis merci Catherine pour ta gentillesse, ton bonjour matinal ...

Un grand merci aussi à ceux qui ont fait le déplacement pour venir me supporter le Jour J. Merci Francis ; merci Charlie de m'avoir fait cette belle surprise, cela m'a beaucoup touché, bon courage à toi pour la fin de thèse. Enfin, merci à la famille de Fabrice d'avoir été présente, cela me touche beaucoup.

Je ne peux conclure sans remercier chaleureusement mes parents et grands-parents sans qui je ne serais jamais arrivée jusqu'ici. Vous êtes à l'origine de mon engouement pour les sciences et m'avez toujours supporté, merci de tout cœur.

Enfin un grand merci à mon Fabrice pour m'avoir accompagné dans cette étape et pour m'avoir supporté pendant ces longs derniers mois de rédaction.

# Table des matières

CONTEXTE INDUSTRIEL ET SCIENTIFIQUE . . . . .	1
<b>I CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE</b>	
DU SILICONE CHARGÉ SILICE	<b>3</b>
I.1 Généralités sur les élastomères chargés . . . . .	4
I.1.1 Principales caractéristiques d'un Silicone chargé de Silice . . . . .	4
I.1.2 Mécanismes de déformation usuels . . . . .	8
I.1.3 Effet Mullins et adoucissement cyclique . . . . .	9
I.1.4 Etude du comportement dynamique . . . . .	16
I.1.5 Effet Payne . . . . .	18
I.2 Protocole expérimental . . . . .	25
I.2.1 Choix d'une représentation en déformation nominale et contrainte nominale . . . . .	25
I.2.2 Définition du chargement retenu . . . . .	25
I.2.3 Machines d'essais . . . . .	27
I.2.4 Définitions des essais . . . . .	30
I.2.5 Méthode de dépouillement des données d'essais . . . . .	33
I.2.6 Répétabilité - Reproductibilité . . . . .	39
I.3 Résultats expérimentaux . . . . .	43
I.3.1 Caractérisation en cisaillement . . . . .	43
I.3.2 Caractérisation en compression . . . . .	51
I.4 Conclusion partielle . . . . .	58
<b>II MODÈLE DE COMPORTEMENT</b>	<b>59</b>
II.1 Etat de l'art . . . . .	60
II.1.1 Formalisme des grandes déformations : définitions et notations . . . . .	60
II.1.2 Modèles non-dissipatifs . . . . .	64
II.1.3 Modèles dissipatifs . . . . .	82
II.1.4 Modélisation de l'effet Payne . . . . .	88
II.2 Modèle de Qi-Boyce . . . . .	95
II.2.1 Définition du modèle . . . . .	95
II.2.2 Simulation d'essais dynamiques avec le modèle de Qi-Boyce . . . . .	98
II.3 Le modèle DyMPPIEC . . . . .	100
II.3.1 Définition du modèle proposé . . . . .	100
II.3.2 Potentiel du modèle DyMPPIEC - étude paramétrique . . . . .	102
II.4 Identification des paramètres matériau associés aux essais de cisaillement . . . . .	108
II.4.1 Identification à fréquence fixée . . . . .	108
II.4.2 Prise en compte de l'effet de la fréquence . . . . .	114
II.4.3 Etude de sensibilité des paramètres . . . . .	117



II.4.4	Validation sur une pièce anti-vibratoire . . . . .	120
II.5	Ouverture vers d'autres modes de sollicitations . . . . .	124
II.5.1	Identification à fréquence fixée associée aux essais de compression . . . . .	124
II.5.2	Identification associée à un mode mixte de cisaillement et de compression . . . . .	131
II.6	Conclusion partielle . . . . .	136
<b>III</b>	<b>CRÉATION DU MODÈLE DE SUBSTITUTION DE LA LIAISON SOUPLE À L'AIDE D'UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION D'ORDRE DE MODÈLE (ROM)</b>	<b>137</b>
III.1	PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE . . . . .	138
III.2	MÉTHODES DE RÉDUCTION DE MODÈLES : ÉTAT DE L'ART . . . . .	139
III.2.1	Définition générale . . . . .	139
III.2.2	Méthodes de réduction <i>a posteriori</i> . . . . .	139
III.2.3	Méthodes de réduction <i>a priori</i> . . . . .	143
III.2.4	Méthodes de réduction des variables internes . . . . .	145
III.2.5	Méthodes ROM appliquées à la résolution de problèmes paramétriques . . . . .	147
III.3	RÉSOLUTION SIMULTANÉE DU PROBLÈME MULTIDIMENSIONNEL ASSOCIÉ À L'ÉTUDE DYNAMIQUE DE LA LIAISON SOUPLE . . . . .	151
III.3.1	Caractéristiques du problème multidimensionnel . . . . .	151
III.3.2	Modèle d'ordre réduit proposé . . . . .	151
III.3.3	Méthode de modélisation numérique . . . . .	159
III.3.4	Dépouillement des résultats . . . . .	161
III.4	Conclusion partielle . . . . .	168
	CONCLUSION GÉNÉRALE . . . . .	169
	ANNEXE . . . . .	170
<b>A</b>	<b>Résultats complémentaires</b> . . . . .	<b>171</b>
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	175

# Table des figures

I.1	Formule simplifiée du motif chimique constituant le silicone (Biron, 2007)	4
I.2	Mesure de la température de transition vitreuse par DMA . . . . .	5
I.3	Mesure de la température de transition vitreuse par DSC . . . . .	5
I.4	Amplification des déformations . . . . .	6
I.5	Image MEB du matériau de l'étude en électrons secondaires . . . . .	7
I.6	Rôle joué par l'arrangement des charges au sein de la matrice (Donnet and Vidal, 1986) . . . . .	7
I.7	Courbe contrainte-déformation typique d'un élastomère vulcanisé (Treloar, 1949) . . . . .	8
I.8	Charge jusqu'à 70% de déformation vraie (soit 100% de déformation nominale) à différentes vitesses de déformation imposée sur le silicone chargé de silice de l'étude . . . . .	9
I.9	Charge/décharge jusqu'à 150% de déformation nominale ( $\dot{\epsilon} = 10^{-2}/s$ ) effectuée sur le silicone chargé de silice de l'étude . . . . .	9
I.10	Charges et décharges successives en traction (Mullins, 1969) . . . . .	10
I.11	Courbes de charge/décharge en traction - effet d'histoire des déformations	10
I.12	Observation de l'anisotropie induite par l'effet Mullins (Diani et al., 2006a)	11
I.13	Essais cycliques de traction jusqu'à une déformation nominale maximale de 100% . . . . .	12
I.14	Essais cycliques de cisaillement successifs jusqu'à stabilisation ( $\pm 50, \pm 75$ puis $\pm 120\%$ ) . . . . .	12
I.15	Observation de l'effet Mullins sur élastomères chargés et non-chargés (Harwood and Payne, 1966) . . . . .	13
I.16	Schéma d'un adoucissement du comportement par rupture de chaîne entre charges (Diani et al., 2009) . . . . .	13
I.17	Schéma d'un adoucissement du comportement par désenchevêtrement (Diani et al., 2009) . . . . .	13
I.18	Recouvrement de l'effet Mullins dans le temps . . . . .	15
I.19	Recouvrement de l'effet Mullins dans le temps . . . . .	15
I.20	Boucle d'hystérésis . . . . .	16
I.21	Exemple d'une réponse à une sollicitation vibratoire de fréquence 15 Hz et de déformation statique non nulle . . . . .	17
I.22	Evolution du module dynamique ( $ E^* $ ) avec l'amplitude des déformations ( $\Delta\epsilon$ ) à fréquence fixée pour différents teneurs en noir de carbone (Payne, 1960) . . . . .	18
I.23	Effet Payne (NR avec CB) à 1 Hz et $T = 25^\circ C$ (Chazeau et al., 2000) . .	19
I.24	Evolution du pic de module de perte avec la chute du module élastique (Chazeau et al., 2000) . . . . .	19
I.25	Evolution de l'effet Payne avec la teneur en charges (Wang and Robertson, 2005) (avec $\gamma$ l'amplitude de déformation) . . . . .	20

I.26	Courbes normalisés ( $G'/G'_0$ ) obtenues à partir de la figure I.25 (Wang and Robertson, 2005) . . . . .	20
I.27	Evolution de l'effet Payne avec la fréquence (Wang and Robertson, 2005)	20
I.28	Observation de l'effet Payne sur une unique éprouvette en appliquant d'abord des amplitudes croissantes puis des amplitudes décroissantes . .	21
I.29	Observation du caractère réversible de l'effet Payne sur deux éprouvettes différentes ayant été préchargées jusqu'à 50% (découplage avec l'effet Mullins) . . . . .	21
I.30	Dimensions des charges de noir de carbone utilisées (Robertson et al., 2007)	22
I.31	Influence de la taille des charges sur l'effet Payne (Robertson and Roland, 2008) (avec $\gamma$ l'amplitude de déformation) . . . . .	22
I.32	Proportion d'élastomère lié aux charges ou bloqué par les charges en fonction de la dimension des charges (Robertson et al., 2007) . . . . .	23
I.33	Evolution du module élastique avec la déformation pour différents temps de mélangeage (Payne, 1966) . . . . .	23
I.34	Evolution du module élastique normé par $G'_0$ pour des élastomères chargés contenant des charges très bien dispersées (Montes et al., 2010) . . . . .	24
I.35	Evolution du module élastique normé par $G'_0$ pour des élastomères chargés contenant des charges regroupées sous forme d'agglomérats (Montes et al., 2010) . . . . .	24
I.36	Caractéristiques des chargements appliqués . . . . .	26
I.37	Boucles dynamiques obtenues sans préchargement ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (0%, 50%, -, 5Hz) . . . . .	27
I.38	Boucles dynamiques obtenues avec préchargement ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (100%, 50%, -, 5Hz) . . . . .	27
I.39	Electropuls . . . . .	28
I.40	Abaque fréquence-déplacement de l'électropuls . . . . .	28
I.41	Abaque fréquence-déplacement réalisable . . . . .	29
I.42	Viscoanalyseur VA 4000 . . . . .	29
I.43	Schéma de l'éprouvette de double-cisaillement . . . . .	30
I.44	Schéma de l'éprouvette de compression . . . . .	30
I.45	Cyclage $\pm 50\%$ de double-cisaillement . . . . .	32
I.46	Chute de la contrainte maximale (adoucissement cyclique) . . . . .	32
I.47	Consigne en déformation appliquée pour 3 sollicitations vibratoires de fréquence 5, 15 puis 40 hz . . . . .	33
I.48	Réponse en contrainte associée à la consigne en déformation précisée sur la figure I.47 . . . . .	33
I.49	Echantillonnage minimal d'un cycle d'hystérésis avec $N_e = 20$ et $\Delta t_{acq} = 1.25ms$ pour une sollicitation vibratoire en cisaillement du type ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 50%, 10%, 15Hz) . . . . .	35
I.50	Comparaison entre la boucle expérimentale et celle approximée pour le jeu de paramètres ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f_0$ ) = (75 %, 0 %, 10 %, 15 Hz) . . . . .	37
I.51	Comparaison entre la boucle expérimentale et celle approximée pour le jeu de paramètres ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f_0$ ) = (75 %, 25 %, 20 %, 15 Hz) . . . . .	37
I.52	Comparaison entre la boucle expérimentale et celle approximée ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f_0$ ) = (75 %, 50 %, 20 %, 15 Hz) . . . . .	37
I.53	Erreur sur la déformation . . . . .	38
I.54	Erreur sur la contrainte . . . . .	38
I.55	Approximation de la courbe expérimentale obtenue avec 1 harmonique supplémentaire . . . . .	39

I.56	Approximation de la courbe expérimentale obtenue avec 2 harmoniques supplémentaires . . . . .	39
I.57	Vérification de la reproductibilité de l'essai sur la première charge du préchargement sur 9 éprouvettes sollicitée en cisaillement . . . . .	40
I.58	Vérification de la non-dépendance des modules élastiques et de perte avec l'histoire des fréquences appliquées . . . . .	40
I.59	Essai multi paramètres avec $\epsilon_{max} = 75\%$ et $\epsilon_{moy} = 25\%$ puis différents niveaux de $f$ et $\Delta\epsilon$ . . . . .	40
I.60	Vérification de la reproductibilité de l'essai multi paramètre sur les boucles d'hystérésis stabilisées . . . . .	40
I.61	Ecart type des essais de vérification de la répétabilité . . . . .	41
I.62	Reproductibilité dans le plan contrainte-déformation . . . . .	42
I.63	Ecart type des essais de vérification entre machines d'essai . . . . .	43
I.64	Cycles stabilisés correspondant aux trois niveaux de préchargement . . . . .	44
I.65	Cycles stabilisés correspondant aux trois niveaux de préchargement . . . . .	44
I.66	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 0%, - , 5Hz) . . . . .	45
I.67	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 0%, - , 5Hz) . . . . .	45
I.68	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 25%, - , 5Hz) . . . . .	45
I.69	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 25%, - , 5Hz) . . . . .	45
I.70	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 50%, - , 5Hz) . . . . .	46
I.71	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 50%, - , 5Hz) . . . . .	46
I.72	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 0%, 1% , - ) . . . . .	46
I.73	Evolution de l'effet Payne avec la fréquence ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 0%, - , - ) . . . . .	47
I.74	Evolution de l'effet Payne avec la fréquence ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 0%, - , - ) . . . . .	48
I.75	Effet Payne et fréquence (Wang and Robertson, 2005) . . . . .	48
I.76	Evolution du module élastique avec la fréquence . . . . .	49
I.77	Evolution du module de perte avec la fréquence . . . . .	49
I.78	Evolution du module élastique avec la déformation maximale . . . . .	50
I.79	Evolution du module de perte avec la déformation maximale . . . . .	50
I.80	Evolution du module élastique avec la déformation statique . . . . .	50
I.81	Evolution du module de perte avec la déformation statique . . . . .	50
I.82	Préchargement des essais de compression . . . . .	52
I.83	Boucles dynamiques et cycle stabilisé (préchargement - 15 %) . . . . .	52
I.84	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (-15%, -5%, - , 5Hz) . . . . .	53
I.85	Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (-15%, -10%, - , 5Hz) . . . . .	53
I.86	effet de fréquence sur les boucles dynamiques . . . . .	54
I.87	Evolution du module élastique avec l'amplitude de déformation et la fréquence . . . . .	55
I.88	Evolution du module de perte avec l'amplitude de déformation et la fréquence . . . . .	55

I.89	Evolution du module élastique avec la fréquence . . . . .	56
I.90	Evolution du module de perte avec la fréquence . . . . .	56
I.91	Evolution du module élastique avec la déformation maximale . . . . .	56
I.92	Evolution du module de perte avec la déformation maximale . . . . .	56
I.93	Effet Payne et déformation statique . . . . .	57
I.94	Effet Payne et déformation statique . . . . .	57
I.95	Effet Payne et déformation statique . . . . .	57
I.96	Effet Payne et déformation statique . . . . .	57
II.1	Comparaison du modèle de Mooney-Rivlin avec les données expérimentales obtenues par Treloar (Arruda and Boyce, 2000). . . . .	67
II.2	Comparaison du modèle Gaussian et du modèle de Gent (pour $J_M = 100$ ; ce qui entraîne une limite d'extensibilité pour $\lambda = 10$ ) (Gent, 1996) . . . . .	67
II.3	Schématisation d'une chaîne macromoléculaire . . . . .	69
II.4	Schématisation des mouvements possibles des liaisons rotules de la chaîne (Treloar, 1949) . . . . .	69
II.5	Probabilité de configuration d'une chaîne (Treloar, 1949) . . . . .	70
II.6	Distribution des angles $\theta_i$ en fonction du rapport $\frac{r}{Nl}$ (Treloar, 1949) . . . . .	71
II.7	Modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce (Arruda and Boyce, 1993) . . . . .	73
II.8	Comparaison du modèle à huit chaînes avec les données expérimentales de Treloar (Arruda and Boyce, 1993) . . . . .	74
II.9	Comparaison entre le modèle à huit chaînes et le modèle de Gent (Arruda and Boyce, 2000) . . . . .	74
II.10	Simulation de la réponse anisotrope d'un caoutchouc naturel obtenu par calendrage (Diani et al., 2004) . . . . .	75
II.11	Comparaison des différents modèles (Bergström and Boyce, 1999) . . . . .	78
II.12	Modélisation de l'effet Mullins (Qi and Boyce, 2004) . . . . .	80
II.13	Evolution de $v_s$ avec la déformation appliquée (Qi and Boyce, 2004) . . . . .	80
II.14	Simulation de la réponse anisotrope induite par effet Mullins (Diani et al., 2006b) . . . . .	81
II.15	Essai de multirelaxation (compression) sur un Chloroprène chargé de noir de carbone (Bergström and Boyce, 1998) . . . . .	82
II.16	Essai de multi-relaxation en cisaillement (Bhuiyan et al., 2009) . . . . .	82
II.17	Schématisation 1D du modèle proposé (Bhuiyan et al., 2009) . . . . .	83
II.18	Boucle d'hystérésis résiduelle après essai de multi-relaxation (Cantournet et al., 2009) . . . . .	84
II.19	Adoucissement cyclique obtenu à partir de la modélisation (Cantournet et al., 2009) . . . . .	85
II.20	Schéma rhéologique 1D du modèle proposé (Bergström and Boyce, 1998) . . . . .	86
II.21	Comparaison modèle et expérience (Bergström and Boyce, 1998) . . . . .	87
II.22	Contrainte dans l'amortisseur (overstress) en fonction de la vitesse de déformation - modèle et expériences (Bhuiyan et al., 2009) . . . . .	88
II.23	Interaction chaînes et charges (Maier and Goritz, 1996) . . . . .	90
II.24	Interaction chaînes et charges (Maier and Goritz, 1996) . . . . .	91
II.25	Dépendance du paramètre $G'_{Sf}$ avec la teneur en charge (Maier and Goritz, 1996) . . . . .	92
II.26	Dépendance du paramètre $G'_f$ avec la teneur en charge (Maier and Goritz, 1996) . . . . .	92
II.27	Application du modèle de Kraus aux données expérimentales de Clément et ses collègues (Clement et al., 2005) . . . . .	92

II.28	Représentation schématique de deux charges voisines entourées chacune par une coque vitreuse d'épaisseur $e_g$ (Montes et al., 2010) . . . . .	93
II.29	Evolution du module de conservation avec l'amplitude de déformation et la fréquence obtenue avec ce modèle (Hofer and Lion, 2009) . . . . .	94
II.30	Evolution du module de perte avec l'amplitude de déformation et la fréquence obtenue avec ce modèle (Hofer and Lion, 2009) . . . . .	94
II.31	Schéma rhéologique 1D du modèle de Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005) . . . . .	95
II.32	Schéma de la décomposition multiplicative du gradient de transformation (Qi and Boyce, 2005) . . . . .	95
II.33	Comparaison modèle et expérience (Qi and Boyce, 2005) . . . . .	97
II.34	Simulation du préchargement et des 5 sollicitations vibratoires . . . . .	98
II.35	Zoom sur les 5 sollicitations vibratoires de la figure II.34 . . . . .	98
II.36	Evolution des modules élastique et de perte . . . . .	99
II.37	Prévision du chargement dynamique obtenu . . . . .	100
II.38	Simulation du préchargement et des 4 sollicitations vibratoires . . . . .	103
II.39	Zoom sur les 4 sollicitations vibratoires de la figure II.38 . . . . .	103
II.40	Evolution des modules élastique et de perte . . . . .	103
II.41	Simulation du chargement dynamique pour ces 3 cas de sollicitations vibratoires . . . . .	104
II.42	Zoom sur les boucles dynamiques de la figure II.41 . . . . .	104
II.43	Evolution des modules élastique et de perte . . . . .	105
II.44	Simulation de l'ensemble du chargement dynamique pour ces 5 cas de sollicitations vibratoires . . . . .	106
II.45	Zoom sur les boucles dynamiques de la figure II.44 . . . . .	106
II.46	Evolution des modules élastique et de perte associées . . . . .	106
II.47	Influence du rapport $\frac{D_k}{C_k}$ sur le préchargement . . . . .	107
II.48	Influence du rapport $\frac{D_k}{C_k}$ sur le chargement dynamique global . . . . .	107
II.49	Evolution du module élastique . . . . .	108
II.50	Evolution du module élastique . . . . .	108
II.51	Approximation de la courbe d'équilibre du matériau par un essai de multi-relaxation . . . . .	109
II.52	Comparaison des deux propositions d'approximation de la courbe d'équilibre du matériau . . . . .	109
II.53	Représentation des boucles stabilisées des préchargements et de leur courbe d'équilibre associée . . . . .	110
II.54	Comparaison entre les courbes d'équilibre expérimentales et les courbes simulées . . . . .	110
II.55	Comparaison entre les boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ )= (75%, 0%, -, 15Hz) . . . . .	111
II.56	Comparaison entre les modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ )= (75%, 0%, -, 15Hz) . . . . .	111
II.57	Comparaison entre les boucles stabilisées de préchargement expérimentales et simulées . . . . .	112
II.58	Comparaison entre les boucles dynamiques expérimentales et simulées pour différentes déformations statiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ )= (75%, -, 10%, 15Hz) . . . . .	112
II.59	Zoom sur les boucles dynamiques expérimentales et simulées de la figure II.58 ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ )= (75%, -, 10%, 15Hz) . . . . .	112

II.60	Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, -, 10%, 15Hz) . . . . .	113
II.61	Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( -, 50%, 10%, 15Hz) . . . . .	113
II.62	Zoom sur les boucles dynamiques de la figure II.61 . . . . .	113
II.63	Boucles dynamiques simulées sans préchargement au préalable ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( 0% , 50%, - , 15Hz) . . . . .	114
II.64	Boucles dynamiques simulées avec préchargement ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( 120% , 50%, - , 15Hz) . . . . .	114
II.65	Evolution du module élastique avec la fréquence prédite avec le modèle proposé . . . . .	115
II.66	Evolution du module de perte avec la fréquence prédite avec le modèle proposé . . . . .	115
II.67	Evolution du module élastique avec la fréquence observée par Rendek et Lion (Rendek and Lion, 2010) . . . . .	115
II.68	Evolution du module de perte avec la fréquence observée par Rendek et Lion (Rendek and Lion, 2010) . . . . .	115
II.69	Evolution du module élastique pour différentes valeurs du paramètre $E$ . . . . .	116
II.70	Evolution du module de perte pour différentes valeurs du paramètre $E$ . . . . .	116
II.71	Evolution des paramètres $E$ optimaux associés aux différentes fréquences considérées . . . . .	117
II.72	Evolution du module élastique obtenue avec les trois valeurs du paramètre $E$ synthétisée figure II.71 . . . . .	117
II.73	Evolution du module de perte obtenue avec les trois valeurs du paramètre $E$ synthétisée figure II.71 . . . . .	117
II.74	Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre $E$ de $\pm 5\%$ . . . . .	118
II.75	Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre $E$ de $\pm 5\%$ . . . . .	118
II.76	Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre $R_0$ de $\pm 5\%$ . . . . .	118
II.77	Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre $R_0$ de $\pm 5\%$ . . . . .	118
II.78	Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre $C_k$ de $\pm 5\%$ . . . . .	118
II.79	Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre $C_k$ de $\pm 5\%$ . . . . .	118
II.80	Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre $D_k$ de $\pm 5\%$ . . . . .	119
II.81	Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre $D_k$ de $\pm 5\%$ . . . . .	119
II.82	Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre $d_0$ de $\pm 5\%$ . . . . .	119
II.83	Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre $d_0$ de $\pm 5\%$ . . . . .	119
II.84	Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre $\sigma_0$ de $\pm 5\%$ . . . . .	119
II.85	Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre $\sigma_0$ de $\pm 5\%$ . . . . .	119

II.86	Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre $n$ de $\pm 5\%$ . . . . .	120
II.87	Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre $n$ de $\pm 5\%$ . . . . .	120
II.88	Pièce anti-vibratoire considérée . . . . .	121
II.89	Même pièce que sur la figure II.88 avec un maillage deux fois plus fin . . . . .	121
II.90	Comparaison des résultats de simulation obtenus avec les deux maillages des figures II.88 et II.89 . . . . .	121
II.91	Observation du champ de pression au sein de l'élastomère chargé . . . . .	122
II.92	Observation du champ de pression au sein de l'élastomère chargé . . . . .	122
II.93	Simulation du cycle de préchargement jusqu'à 50% sur pièce . . . . .	122
II.94	Simulation des boucles dynamiques sur la pièce réelle . . . . .	123
II.95	Zoom sur les boucles dynamiques de petites amplitudes de déformation de la figure II.94 . . . . .	123
II.96	Simulation de la rigidité . . . . .	123
II.97	Simulation de la rigidité . . . . .	123
II.98	Vérification de la validité de courbe d'équilibre construite en superposant les boucles dynamiques expérimentales . . . . .	124
II.99	Représentation des boucles stabilisées des deux préchargements et des courbes d'équilibre associées . . . . .	124
II.100	Comparaison entre les courbes d'équilibre approximées à partir des essais de préchargement et celle simulées . . . . .	125
II.101	Tentative d'utilisation du modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce pour représenter une des courbes d'équilibre en compression . . . . .	126
II.102	Comparaison du modèle d'Arruda-Boyce avec les données expérimentales obtenues par Treloar en traction uniaxiale et biaxiale (Arruda and Boyce, 2000) . . . . .	126
II.103	Comparaison du modèle de Gent-thomas avec les données expérimentales obtenues par Treloar en traction uniaxiale et biaxiale (Beda, 2007) . . . . .	126
II.104	Comparaison du modèle proposé par Beda avec les données expérimentales obtenues par Treloar en traction uniaxiale et biaxiale (Beda, 2007) . . . . .	127
II.105	Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( -7.5% , -2.5% , - , 15Hz ) . . . . .	129
II.106	Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( -7.5% , -2.5% , - , 15Hz ) . . . . .	129
II.107	Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( -7.5% , - , 1% , 15Hz ) . . . . .	129
II.108	Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( -7.5% , - , 1% , 15Hz ) . . . . .	129
II.109	Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( - , -5% , 1% , 15Hz ) . . . . .	130
II.110	Observation de la prédiction des boucles stabilisées associées aux deux niveaux de préchargement . . . . .	130
II.111	Comparaison entre les courbes d'équilibre de cisaillement approximées à partir des essais de préchargement et celle simulées . . . . .	132
II.112	Comparaison entre les courbes d'équilibre de compression approximées à partir des essais de préchargement et celle simulées . . . . .	132
II.113	Comparaison entre les boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( 50% , 0% , - , 15Hz ) . . . . .	133



II.114	Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (50%, 0%, -, 15Hz) . . . . .	133
II.115	Comparaison entre les boucles stabilisées de préchargement expérimentales et simulées . . . . .	134
II.116	Comparaison entre les boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, -, 10%, 15Hz) . . . . .	134
II.117	Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (-7.5%, -2.5%, -, 15Hz) . . . . .	135
II.118	Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (-7.5%, -2.5%, -, 15Hz) . . . . .	135
II.119	Comparaison entre les boucles stabilisées de préchargement expérimentales et simulées . . . . .	135
II.120	Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (-7.5%, -, 1%, 15Hz) . . . . .	136
III.1	SVD d'un ensemble de points (Bergmann and Cordier, 2006) . . . . .	141
III.2	Construction du domaine d'intégration réduit (RID) . . . . .	147
III.3	Domaine d'intégration réduit (RID) (Ryckelynck, 2009) . . . . .	147
III.4	Etude de sensibilité du modèle vis à vis de 5 paramètres matériaux (Sarbandi et al., 2010) . . . . .	150
III.5	Pièce test ( $\Omega_0$ ) . . . . .	152
III.6	Caractéristiques du chargement dynamique . . . . .	152
III.7	Maillage du problème multidimensionnel ( $\Omega'_0$ ) . . . . .	160
III.8	Caractéristiques du calcul préliminaire (Observation concernant un des 27 calculs) . . . . .	160
III.9	Observation des éléments contenus dans le RID ( $\Omega'_{0\pi}$ ) . . . . .	162
III.10	Comparaison de la réponse en force obtenue par FEM et avec la méthode APHR étendue . . . . .	163
III.11	Erreur relative sur la réponse en force entre le calcul FEM et la méthode proposée correspondant à la figure III.10 . . . . .	163
III.12	Comparaison entre les boucles dynamiques obtenues par FEM et avec la méthode APHR . . . . .	163
III.13	Composante suivant 1 du premier mode . . . . .	165
III.14	Composante suivant 2 du premier mode . . . . .	165
III.15	Composante suivant 1 du deuxième mode . . . . .	165
III.16	Composante suivant 2 du deuxième mode . . . . .	165
III.17	Composante suivant 1 du troisième mode . . . . .	166
III.18	Composante suivant 2 du troisième mode . . . . .	166
III.19	Composante suivant la direction 2 du mode 5 . . . . .	166
III.20	Composante suivant la direction 2 du mode 17 . . . . .	166
A.1	Simulation du préchargement jusqu'à 50% . . . . .	171
A.2	Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (50%, 0%, -, 15Hz) . . . . .	172
A.3	Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (50%, 0%, -, 15Hz) . . . . .	172
A.4	Simulation de l'évolution du module élastique pour différents niveaux de déformation maximale de préchargement ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (-, 0%, -, 15Hz) . . . . .	173

---

A.5	Simulation de l'évolution du module de perte pour différents niveaux de déformation maximale de préchargement ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = ( - , 0% , - , 15Hz) . . . . .	173
-----	--	-----



# Liste des tableaux

I.1	Matrice d'essais réalisée (la couleur bleue évoque les valeurs communes entre les deux machines et les astérisques des cas particuliers détaillés dans le texte) . . . . .	31
I.2	Nombre de cycles $n$ du prechargement . . . . .	32
I.3	Préchargement 75% . . . . .	42
I.4	Préchargement -15% . . . . .	42
II.1	Synthèse des paramètres matériau nécessaires . . . . .	97
II.2	Synthèse des paramètres matériau . . . . .	98
II.3	Jeu de paramètres matériau considéré . . . . .	98
II.4	Jeu de paramètres matériau considéré . . . . .	99
II.5	Synthèse des paramètres matériau du modèle proposé . . . . .	102
II.6	Synthèse des variables utilisées . . . . .	102
II.7	Jeu de paramètres matériau considéré . . . . .	103
II.8	Jeu de paramètres matériau considéré . . . . .	104
II.9	Synthèse des paramètres matériau à cette simulation . . . . .	105
II.10	Synthèse des paramètres matériau associés à cette étude paramétrique . . . . .	106
II.11	Synthèse des paramètres matériau optimum associés aux essais de cisaillement . . . . .	110
II.12	Synthèse des paramètres matériau associés à cette étude paramétrique . . . . .	111
II.13	Synthèse des paramètres matériau optimum associés aux essais de compression . . . . .	125
II.14	Synthèse des paramètres matériau associés à cette étude paramétrique . . . . .	128
II.15	Synthèse des paramètres matériau optimaux associés à l'ensemble des essais . . . . .	132
II.16	Synthèse des paramètres matériau associés à l'optimisation des paramètres associés à la dépendance en temps sur l'ensemble des essais . . . . .	133
III.1	Discrétisation des paramètres de chargement . . . . .	159
III.2	Comparaison des temps de calcul . . . . .	161
III.3	Erreur sur le calcul de $K'$ . . . . .	164
III.4	Comparaison des temps de calcul sur le calcul des 81 cas de vibration . . . . .	167



# CONTEXTE INDUSTRIEL ET SCIENTIFIQUE

## CONTEXTE INDUSTRIEL

Grâce à leur propriété d'amortissement, les élastomères chargés sont couramment utilisés dans l'industrie pour réaliser des pièces anti-vibratoires. Cependant, des phénomènes complexes et couplés, comme l'effet Mullins et l'effet Payne, rendent le comportement de ces matériaux non-linéaire. Peu de modèles permettent de prédire la réponse dynamique de ces pièces quelle que soit la sollicitation appliquée.

L'objectif principal de cette étude est de proposer un modèle de comportement mécanique du matériau intégrant la prise en compte de l'effet Payne afin de mieux prévoir la réponse dynamique de pièces anti-vibratoires en élastomère chargé et de permettre notamment une meilleure conception de ces pièces en fonction de leur utilisation (fréquence à atténuer, charge statique supportée ...). Cet effet, propre aux élastomères chargés soumis à des sollicitations dynamiques, se traduit, entre autres, par une dépendance non-linéaire de la rigidité qui diminue significativement lorsque l'amplitude de la sollicitation vibratoire augmente.

Ensuite, nous avons développé une chaîne de modèles allant du modèle de comportement au modèle de substitution intégrable dans un modèle dynamique de grand système, comme un avion par exemple. Pour cela, une méthode de réduction d'ordre de modèle a notamment été développée pour résoudre efficacement le problème paramétrique relatif à la construction du modèle de substitution.

Cette thèse a été menée en collaboration avec la SNECMA (Villaroche, 77) et PAULSTRA VIBRACHOC (Lisses, 91) dans le cadre du pôle de compétitivité Astech.

## INTÉRÊTS ET DÉMARCHES SCIENTIFIQUES

Le comportement du silicone chargé de silice, comme celui de tous les élastomères chargés, est très complexe ; il résulte du couplage de nombreux phénomènes physiques et présente de plus une forte dépendance à l'histoire des sollicitations qu'il a subies. Depuis plus de 50 ans, de nombreuses caractérisations expérimentales ont été menées et de nombreux modèles de comportement ont été formulés. Cependant, certains phénomènes physiques, pourtant incontournables tels que l'effet Mullins et l'effet Payne, restent encore aujourd'hui au coeur de nombreuses études visant à comprendre leurs origines microscopiques et/ou à mieux les modéliser. L'objectif principal de cette thèse est d'incorporer une modélisation de l'effet Payne à un modèle de comportement d'élastomère chargé de type hyperviscoplastique et tenant compte de l'effet Mullins tout en conservant la prédiction de ces derniers. Le modèle alors proposé permettra de mieux prévoir la réponse dynamique du silicone chargé de silice notamment en terme de rigidité et de dissipation.

Pour cela, une caractérisation expérimentale du silicone chargé de silice a été menée en réalisant notamment un ensemble d'essais vibratoires en cisaillement et en compression.

Puis, nous avons choisi de nous baser sur le modèle de Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005) pour y ajouter la prise en compte de l'effet Payne.

Ensuite, à partir du modèle de comportement matériau développé, nous avons considéré une chaîne de modèles permettant de définir un métamodèle qui se substituera au modèle éléments finis paramétrique d'une pièce anti-vibratoire en silicone chargé de silice sollicitée dynamiquement. En effet, contrairement au modèle de comportement matériau, le modèle de substitution a l'avantage d'être un modèle à peu de degrés de liberté qui peut s'intégrer, sans augmenter les coûts et ressources de calcul, dans un modèle de grand système.

Ainsi, après avoir identifié le modèle de comportement matériau sur les essais de caractérisation réalisés sur des éprouvettes de silicone chargé silice, nous avons utilisé celui-ci pour simuler la réponse d'une pièce anti-vibratoire en silicone chargé de silice sollicitée dynamiquement et réaliser un modèle éléments finis. Puis, nous avons considéré un ensemble de sollicitations vibratoires définies par quatre paramètres : la fréquence, l'amplitude de déformation, la déformation statique et la déformation maximale et défini un modèle éléments finis paramétrique.

C'est la résolution de ce problème paramétrique qui permet ensuite de construire des bases de données, ici relatives à la rigidité et à la dissipation, permettant de définir le modèle de substitution. Pour résoudre efficacement ce problème paramétrique, le deuxième objectif de cette étude est de développer un modèle d'ordre réduit de ce modèle paramétrique en utilisant une méthode de réduction d'ordre de modèle (ROM).

## ORGANISATION DU MANUSCRIT

Le premier chapitre de ce manuscrit décrit tout d'abord l'étude des phénomènes physiques propres aux élastomères chargés et donc du silicone chargé de silice ; puis, le détail de la caractérisation dynamique du matériau qui a été mise en place est présenté et discuté. Dans le deuxième chapitre, le modèle de comportement proposé, permettant de prédire la réponse dynamique du silicone chargé de silice, est présenté, identifié et critiqué. Ensuite, celui-ci est validé par la simulation de la réponse d'une pièce anti-vibratoire. Enfin, le dernier chapitre présente une méthodologie, basée sur l'utilisation d'une méthode de réduction d'ordre de modèles, permettant de générer efficacement deux bases de données numériques associées respectivement à la rigidité et la dissipation pour différents cas de sollicitations vibratoires appliquées.

---

## Chapitre -I-

# CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE DU SILICONE CHARGÉ SILICE

---

*C*e chapitre décrit dans un premier temps quelques généralités sur les élastomères chargés nécessaires à la compréhension des phénomènes mis en jeu et à l'élaboration d'un protocole expérimental pertinent. Ensuite, la définition des essais de caractérisation du comportement dynamique du silicone chargé de silice en cisaillement et compression est détaillée et une discussion sur les résultats d'essais obtenus est menée.

### Sommaire

---

<b>I.1</b>	<b>Généralités sur les élastomères chargés</b> . . . . .	<b>4</b>
I.1.1	Principales caractéristiques d'un Silicone chargé de Silice . . . . .	4
I.1.2	Mécanismes de déformation usuels . . . . .	8
I.1.3	Effet Mullins et adoucissement cyclique . . . . .	9
I.1.4	Etude du comportement dynamique . . . . .	16
I.1.5	Effet Payne . . . . .	18
<b>I.2</b>	<b>Protocole expérimental</b> . . . . .	<b>25</b>
I.2.1	Choix d'une représentation en déformation nominale et contrainte nominale . . . . .	25
I.2.2	Définition du chargement retenu . . . . .	25
I.2.3	Machines d'essais . . . . .	27
I.2.4	Définitions des essais . . . . .	30
I.2.5	Méthode de dépouillement des données d'essais . . . . .	33
I.2.6	Répétabilité - Reproductibilité . . . . .	39
<b>I.3</b>	<b>Résultats expérimentaux</b> . . . . .	<b>43</b>
I.3.1	Caractérisation en cisaillement . . . . .	43
I.3.2	Caractérisation en compression . . . . .	51
<b>I.4</b>	<b>Conclusion partielle</b> . . . . .	<b>58</b>

---



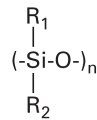
## I.1 Généralités sur les élastomères chargés

### I.1.1 Principales caractéristiques d'un Silicone chargé de Silice

#### a) Structure générale d'un élastomère : le silicone

Les élastomères appartiennent à la famille des polymères : ceux sont des matériaux composés d'un ensemble de longues molécules appelées "chaînes macromoléculaires" constituées d'une répétition de milliers de motifs chimiques (monomères) liés entre eux par des liaisons covalentes. L'organisation de ces chaînes est aléatoire et désordonnée ; c'est pourquoi la structure d'un élastomère est souvent comparée à un plat de spaghetti. L'exploitation industrielle des polymères synthétiques date du *XX<sup>ème</sup>* siècle. Cependant, leur comportement thermomécanique reste complexe et mal connu. Les élastomères se distinguent des autres matériaux de part leurs propriétés mécaniques particulières notamment en termes de déformabilité, de viscosité et par la nature entropique de leur élasticité.

Les silicones ou polysiloxanes sont des polymères de structure organométallique constituée d'un squelette d'atomes silicium/oxygène et de groupes latéraux organiques (voir figure I.1). La matière première nécessaire à la synthèse des silicones est le dioxyde de silicium  $\text{SiO}_2$  (ou silice) qui est présent à l'état naturel combiné à des silicates.



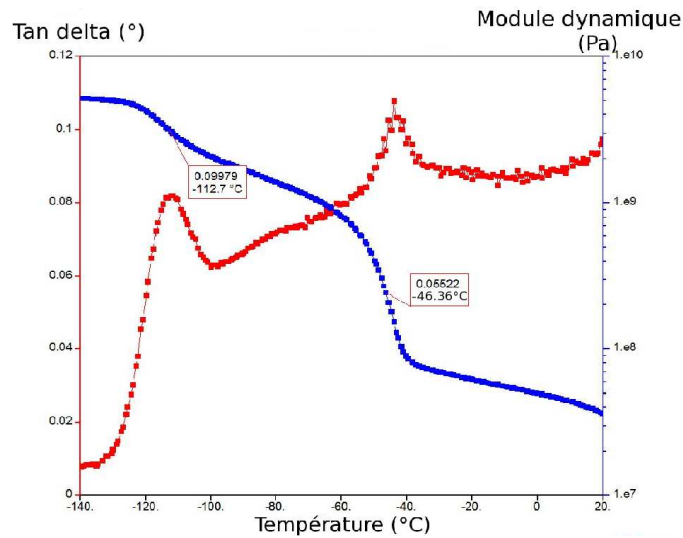
**Fig. I.1** – Formule simplifiée du motif chimique constituant le silicone (Biron, 2007)

Par rapport aux polymères à squelette organique, les enchaînements silicium/oxygène induisent des propriétés particulières telle qu'une bonne stabilité des propriétés caractéristiques sur une large plage de température pouvant aller de  $-80^\circ\text{C}$  à  $+250^\circ\text{C}$  (Biron, 2007). C'est entre autres pour cela que c'est cette famille d'élastomère qui a été retenue dans le cadre de ce projet compte-tenu des contraintes thermiques importantes intrinsèques à une utilisation dans un cadre aéronautique et notamment proche de l'environnement moteur.

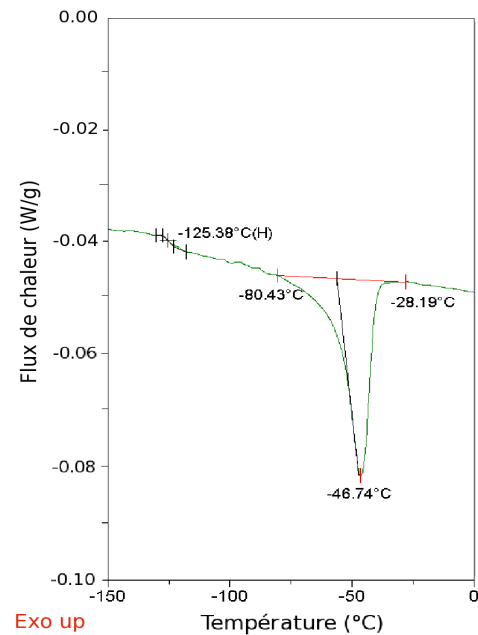
Les élastomères sont utilisés dans leur phase amorphe c'est-à-dire à une température supérieure à leur température de transition vitreuse (Tg), qui dans le cas des élastomères est inférieure à la température ambiante.

Pour déterminer la température de transition vitreuse du matériau de l'étude, nous avons réalisé des essais de DSC (Differential Scanning Calorimetry) et de DMA (Dynamic Mechanical Analysis). Dans les deux cas, le matériau est soumis à une rampe de température (ici nous avons imposé des températures allant de  $-150^\circ\text{C}$  à  $+20^\circ\text{C}$  à une vitesse de  $5^\circ\text{C}/\text{min}$ ). En DMA, le matériau est soumis à une sollicitation dynamique, en petite amplitude et à une fréquence donnée, et l'évolution de la rigidité et de la dissipation est mesurée en fonction de la température. En DSC, aucune sollicitation mécanique n'est imposée à l'échantillon, seule la sollicitation thermique est appliquée et les flux de chaleur sont mesurés en fonction de la température. Sur la figure I.2 sont représentées les courbes d'évolution du module dynamique et de l'amortissement en fonction de la température obtenues par DMA pour une fréquence de 5 Hz et une amplitude de déformation de 0.1%. Sur la figure I.3, l'évolution du flux de chaleur mesuré en fonction de la température, obtenue par DSC, est présentée.

Ces deux essais mettent en évidence un domaine de transition vitreuse situé dans des niveaux de température très faible ( $< -110^\circ\text{C}$ ).



**Fig. I.2** – Mesure de la température de transition vitreuse par DMA



**Fig. I.3** – Mesure de la température de transition vitreuse par DSC

De plus, dans les deux cas, un pic de fusion est observé autour de  $-46^{\circ}\text{C}$ . Il semble alors qu'une phase du matériau cristallise à froid puis lors de l'application du réchauffement une fusion de ces cristallites s'opère.

Ces essais permettent bien de confirmer que dans notre domaine d'étude, le matériau choisi est dans son état caoutchoutique et possède une structure amorphe.

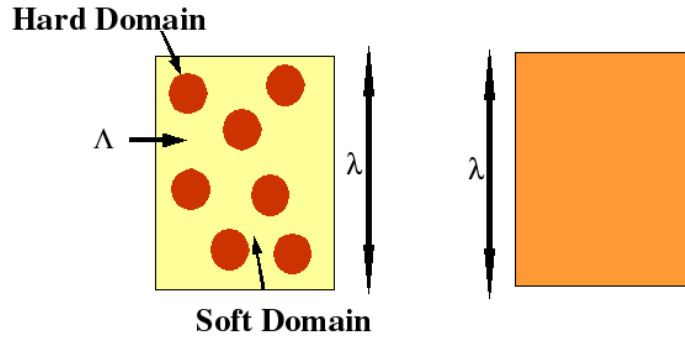
### b) Renforcement du comportement mécanique

Utilisés sans traitement, les polymères et donc les silicones ont des propriétés mécaniques assez faibles ; ainsi pour renforcer le matériau on le réticule et y ajoute des charges.

Une réaction de réticulation consiste à lier entre elles de manière permanente (par liaison covalente) les macromolécules qui constituent le polymère ; des ponts sont alors créés entre les chaînes ce qui réduit la mobilité de celles-ci et donc rigidifie le matériau. Dans le cas des silicones, la réaction s'effectue avec des peroxydes organiques. On notera que lorsque la réticulation est effectuée avec du soufre comme pour le caoutchouc naturel par exemple, on parle de vulcanisation.

De plus, des charges renforçantes sont ajoutées au matériau ; il existe différentes charges renforçantes. Les plus connues sont le noir de carbone et la silice. Dans le cadre de l'étude, le matériau considéré est un silicone chargé avec des particules renforçantes de silice . Ces charges sont de module plus de 1000 fois plus élevé que la matrice élastomère : 107 GPa pour la silice contre quelques MPa pour le silicone. La plupart du temps, on les suppose donc rigides par rapport à la matrice. Ainsi, dans les modèles les plus simples, on considère que l'élastomère chargé est composé de deux phases : une phase dite souple (ici le silicone) et une phase dite rigide (ici la silice). Ces deux phases sont non-compatibles c'est à dire qu'elles ne se mélangent pas. La présence de ces charges implique une augmentation de la rigidité du matériau mais aussi une amplification des déformations au sein de la matrice élastomère sous chargement en comparaison avec un matériau non chargé. Ainsi comme schématisé sur la

figure I.4, pour un même allongement appliqué  $\lambda$  (allongement macroscopique), l'allongement vue réellement au sein de la matrice  $\Lambda$  sera amplifié puisque les charges ne se déforment pas (rigides).



**Fig. I.4** – Amplification des déformations

Ce facteur d'amplification des déformations  $X$  reliant  $\Lambda$  et  $\lambda$  par l'équation :

$$\Lambda = 1 + X \cdot (\lambda - 1) \quad (\text{I.1})$$

a notamment été introduit par Mullins et Tobin (Mullins and Tobin, 1965). Il dépend logiquement de la teneur en charge du matériau, en effet, plus celle-ci est importante est plus  $X$  est grand ; la forme généralement utilisée est la suivante :

$$X = 1 + av_h + bv_h^2, \quad (\text{I.2})$$

avec  $v_h$  la fraction volumique de charge.

On peut par exemple choisir pour la fonction  $X$  l'expression de Smallwood avec  $a = 2.5$  et  $b = 0$  ou de Guth et Gold avec  $a = 2.5$  et  $b = 14.1$  (Mullins and Tobin, 1965).

### c) Mise en oeuvre

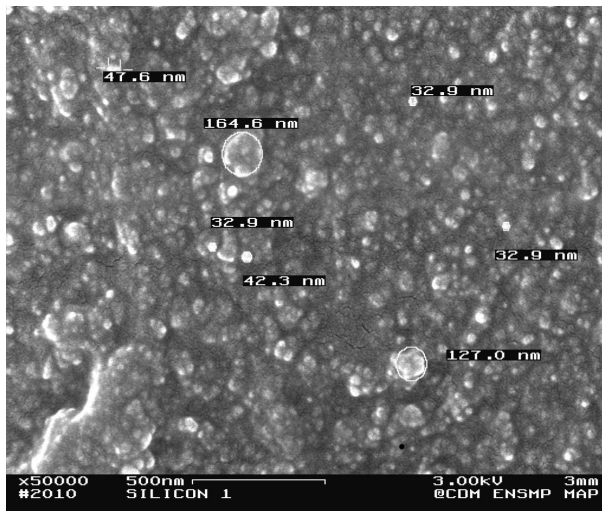
Les élastomères chargés sont le résultat du mélange de nombreux constituants : ceux de base (matrice et charges renforçantes) ainsi que différents additifs ; on parle alors de formule ou de grade. C'est pourquoi, pour un même type d'élastomère (même matrice et même charge), il existe de nombreux grades qui se différencient par leur teneur en charges mais aussi par leurs additifs. Ces constituants peuvent soit être rajoutés pour conférer au matériau de meilleures propriétés mécaniques (silice, noir de carbone, agent de vulcanisation...) soit pour permettre leur fabrication (compatibilisants, huile...).

Pour fabriquer un élastomère chargé, les étapes suivantes sont respectées.

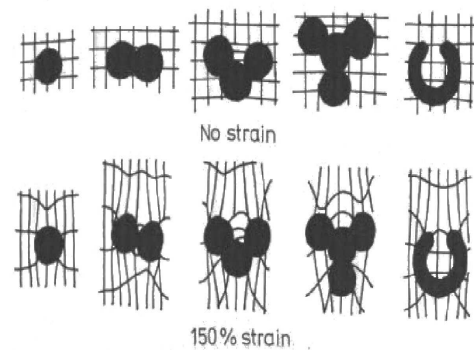
La première étape de la fabrication est le mélangeage : tous les constituants de la formule sont introduits dans un mélangeur interne (constitué de deux cylindres contrarotatifs) et malaxés. Ensuite, le mélange est mis en forme avant d'être réticulé ; plusieurs techniques de mise en forme peuvent être utilisées : le moulage par injection, l'extrusion ou encore le calandrage. Dans le cadre de cette étude, les éprouvettes sont moulées par injection. Cette méthode consiste à insérer le mélange dans un moule à une certaine température et de le comprimer à l'aide d'une presse pendant un temps donné. La température, la pression et le temps d'application ont une forte influence sur la qualité de la pièce obtenue (présence de bulles d'air par exemple) ; ces trois paramètres dépendent du grade utilisé et sont déterminés par des mesures rhéométriques.

Enfin, le matériau mis en forme est réticulé à chaud. Dans le cas des silicones, des peroxydes organiques sont utilisés comme agent de vulcanisation. La réticulation est réalisée à une température avoisinant les  $125^{\circ}\text{C}$  pendant quelques dizaines de minutes puis celle-ci est prolongée par une post-cuisson de plusieurs heures entre  $150$  et  $200^{\circ}\text{C}$ .

L'étude sera menée sur un grade de silicone chargé silice contenant environ 40% de silice. Une observation sous microscope électronique à balayage (MEB) a été effectuée afin d'observer les tailles, forme et répartition de ces charges au sein de la matrice (voir figure I.5).



**Fig. I.5** – Image MEB du matériau de l'étude en électrons secondaires



**Fig. I.6** – Rôle joué par l'arrangement des charges au sein de la matrice (Donnet and Vidal, 1986)

Ainsi, on constate que les charges de silice ont une forme assez circulaire et une taille d'environ  $30$  à  $40\text{nm}$ , elles se trouvent isolées ou sous forme d'agrégats de  $100$  à  $200\text{nm}$ . Comme nous l'avons noté au paragraphe précédent, la présence de ces charges entraîne une amplification des déformations au sein de la matrice. De plus, comme l'ont observé Donnet et Vidal (Donnet and Vidal, 1986), par exemple, l'arrangement de ces particules les unes par rapport aux autres sous forme d'agrégats ou d'agglomérats va modifier, pour une déformation appliquée donnée, la réponse de l'ensemble ; la figure I.6 illustre ce propos. Par exemple, lorsque les agrégats prennent une forme complexe "emprisonnant" en quelque sorte une partie de matrice, comme sur la 5<sup>ème</sup> représentation de la figure I.6, on observe que cette partie de matrice ne voit pas la déformation appliquée, elle ne se déforme pas et agit alors comme une phase dure. Cette configuration emprisonnant de la matrice, que l'on retrouve dans les articles sous le nom de "occluded rubber" en anglais, contribue à augmenter indirectement le renforcement du matériau.

Plusieurs auteurs ont mis en avant le rôle important joué par cette interface matrice-charge, en l'associant aux phénomènes de dissipation d'énergie par exemple (Kraus, 1984) ou en mettant en avant la présence de plasticité à l'interface (Montes et al., 2003).

C'est cet ensemble matrice souple et charges renforçantes qui confère aux élastomères chargés leur propriétés mécaniques particulières.

### I.1.2 Mécanismes de déformation usuels

La complexité de compréhension puis de modélisation des élastomères, qu'ils soient chargés ou non, réside en partie dans le fait que leur comportement résulte du couplage de nombreux phénomènes comme notamment : l'hyperélasticité, la plasticité et la viscosité.

#### a) Hyperélasticité

Du fait de leur structure en longues chaînes enchevêtrées et réticulées, les élastomères sont des matériaux fortement hyperélastiques c'est à dire qu'ils peuvent subir de grandes déformations. Au repos, le matériau possède une structure amorphe, désordonnée ; sous sollicitation, la réponse classique en contrainte-déformation d'un élastomère vulcanisé est représentée sur la figure I.7. Cette réponse en contrainte est non-linéaire et l'on peut distinguer trois phases distinctes :

- Phase 1 : En petites déformations (quelques %), la réponse est quasi-élastique, le module tangent dépend peu de la déformation appliquée.
- Phase 2 : On observe un adoucissement du module tangent, le matériau s'accommode à la sollicitation pour minimiser son énergie.
- Phase 3 : Augmentation brutale du module tangent, les chaînes commencent à atteindre leur extension maximale et s'orientent dans la direction de sollicitation.

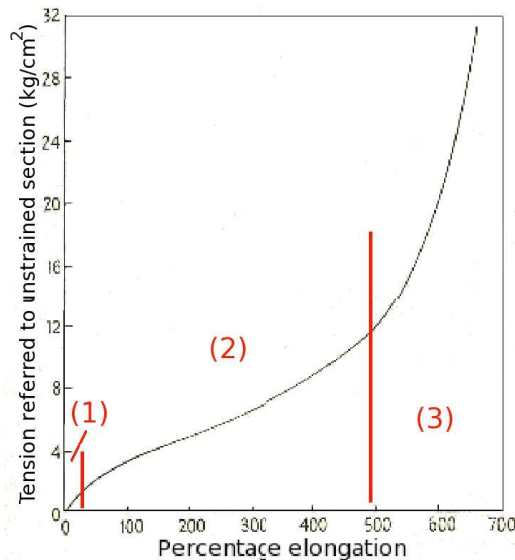
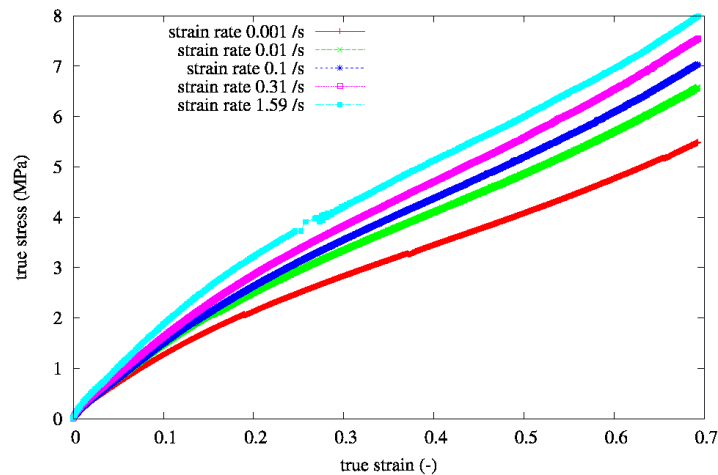


Fig. I.7 – Courbe contrainte-déformation typique d'un élastomère vulcanisé (Treloar, 1949)

#### b) Viscosité

Enfin, les élastomères sont fortement dépendant du temps et donc de la vitesse de sollicitation comme le montre la figure I.8 : ceci traduit la viscosité du matériau.

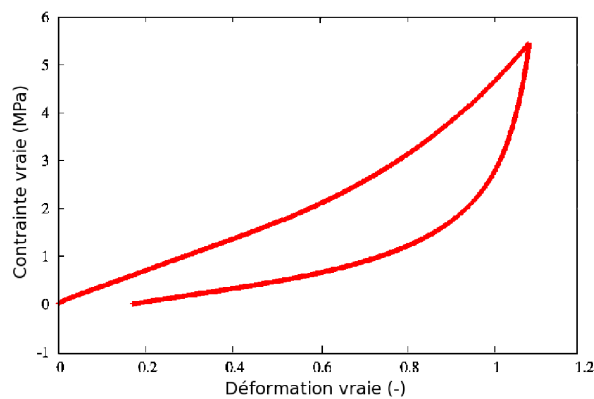
On observe ainsi, que plus la vitesse de sollicitation est importante plus le matériau a tendance à se rigidifier. En effet, contrairement à une sollicitation lente, une sollicitation rapide ne laisse pas le temps aux conformations de s'ajuster, aux enchevêtrements ou aux chaînes pendantes de glisser et des verrouillages de celles-ci entraînent alors une réponse plus rigide.



**Fig. I.8** – Charge jusqu’à 70% de déformation vraie (soit 100% de déformation nominale) à différentes vitesses de déformation imposée sur le silicone chargé de silice de l’étude

### c) Plasticité

Si l’on sollicite le matériau en traction en charge puis en décharge jusqu’à force nulle (voir figure I.9), on note la présence d’une déformation résiduelle nommée : déformation rémanente. Une partie de celle-ci peut être recouverte par le matériau s’il l’on attend suffisamment (matériau au repos) due à la viscosité ; l’autre partie représente les déformations irréversibles du matériau suite à ce chargement et dénote le caractère “plastique” du matériau.



**Fig. I.9** – Charge/décharge jusqu’à 150% de déformation nominale ( $\dot{\epsilon} = 10^{-2}/s$ ) effectuée sur le silicone chargé de silice de l’étude

Ainsi, le matériau considéré est hyperviscoplastique mais la complexité ne s’arrête pas là car les élastomères sont aussi fortement dépendant à l’histoire des déformations subies.

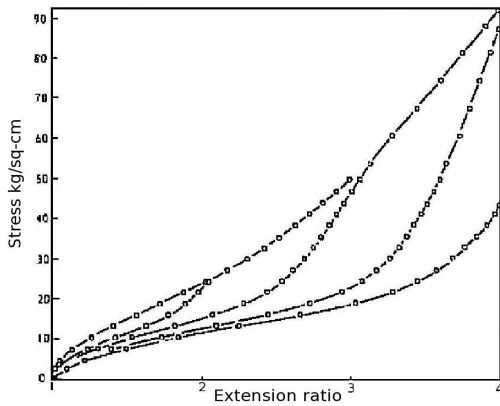
### I.1.3 Effet Mullins et adoucissement cyclique

Ces deux phénomènes sont à relier à la forte dépendance des élastomères (chargés ou non) à l’histoire des déformations.

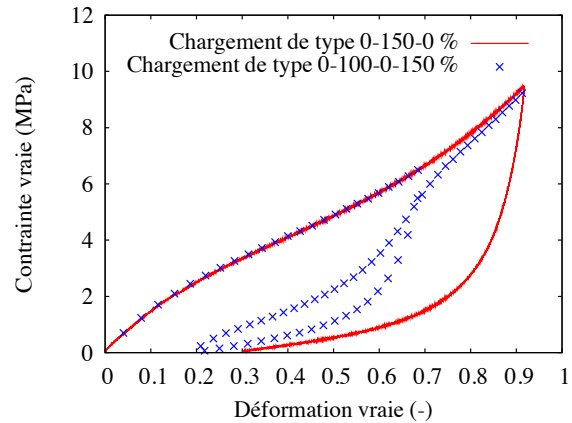
a) **Effet Mullins**

L'effet Mullins est un phénomène incontournable dans l'étude du comportement d'élastomères.

La figure I.10 représente plusieurs charges et décharges successives en traction jusqu'à des niveaux de déformation de plus en plus importants sur un caoutchouc naturel chargé de noir de carbone.



**Fig. I.10** – Charges et décharges successives en traction (Mullins, 1969)



**Fig. I.11** – Courbes de charge/décharge en traction - effet d'histoire des déformations

On constate, dans un premier temps, qu'après une charge jusqu'à un niveau de déformation donné, le matériau s'est adouci : les niveaux de contrainte lors de la décharge et de la charge suivante sont plus faibles. De plus, on peut remarquer que cet adoucissement est d'autant plus important que le niveau de déformation appliqué à la charge est important. Ensuite, à la charge suivante, on constate que l'adoucissement des contraintes n'est visible qu'en dessous du niveau de déformation maximale précédent ; au delà la courbe de contrainte / déformation n'est pas affectée par le précédent chargement.

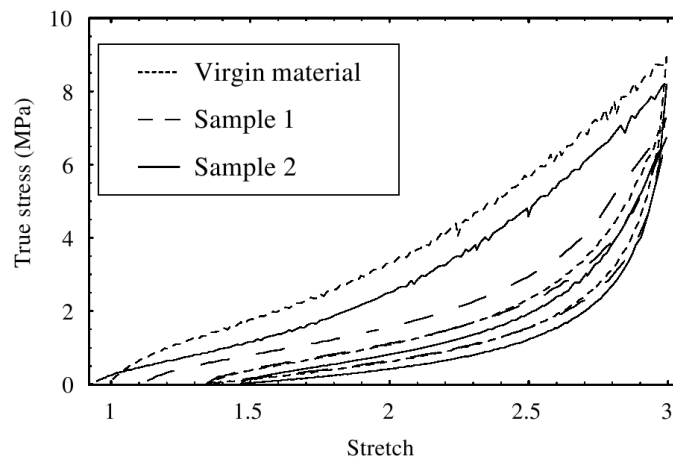
Les mêmes constatations peuvent être observées sur le matériau de l'étude figure I.11 à ceci près que la première décharge et la seconde charge ne suivent pas le même chemin. Sur cette figure, deux essais de charge/décharge en traction sont représentés, l'un comprenant une charge jusqu'à 150% suivie d'une décharge et l'autre comprenant une charge jusqu'à 100%, une décharge puis une charge jusqu'à 150%.

On relèvera de plus, que proche du niveau de déformation maximale vue par l'éprouvette (ici 100%), une zone de transition avec une augmentation brutale de la contrainte est observée.

Les élastomères chargés présentent donc une forte dépendance à l'histoire des déformations qui se traduit après une précédente extension par un adoucissement de la contrainte d'autant plus important que la déformation maximale précédemment vue par le matériau est grande. Cependant lorsque la déformation appliquée de nouveau vient à dépasser ce précédent niveau de déformation maximale le matériau retrouve alors le comportement d'un matériau vierge n'ayant jamais été sollicité.

Les observations ci-dessus concernent des sollicitations effectuées suivant un seul axe. Cependant, comme l'ont mis en avant Diani et ses collègues (Diani et al., 2006a), l'effet Mullins induit une anisotropie au sein du matériau. Pour observer cela, ils ont préalablement effectué deux charges / décharges en traction jusqu'à 200% suivant une direction (notée 1) sur deux grandes éprouvettes ; puis ils ont découpé à l'intérieur de chacune des deux

grandes éprouvettes une éprouvette plus petite, l'une dans la direction 1 (éprouvette 1) et l'autre (éprouvette 2) dans une direction transverse (notée 2). Ensuite, chacune de ses deux petites éprouvettes a été sollicitée par deux charges / décharges en traction jusqu'à 200% dans la direction 1 pour l'éprouvette 1 et dans la direction 2 pour l'éprouvette 2. La figure I.12 représente ses charges / décharges concernant les grosses éprouvettes initiales (matériau vierge) et les plus petites (éprouvettes 1 et 2).



**Fig. I.12** – Observation de l'anisotropie induite par l'effet Mullins (Diani et al., 2006a)

L'éprouvette 1 avait déjà été sollicitée suivant la direction 1 ; on observe ici que la première courbe de charge associée à cette éprouvette est similaire à la courbe de seconde charge du matériau vierge puis la deuxième charge le comportement rejoint celui de la deuxième charge. En effet, cette éprouvette ayant déjà subi l'effet Mullins dans cette direction présente logiquement la même réponse que celle observée sur le matériau vierge (la différence à la première charge de l'éprouvette 1 avec le matériau vierge est due au recouvrement de la déformation lors de la découpe de l'éprouvette).

Concernant l'éprouvette 2 sollicitée dans la direction 2, on constate que la première courbe de charge a une forme plutôt similaire à celle de la première charge du matériau vierge puis il faut attendre la seconde charge pour retrouver une évolution s'apparentant à la deuxième charge du matériau vierge. On observe ainsi, l'adoucissement des contraintes dans la direction 2 intrinsèquement relié à celui généré dans la direction 1 par l'effet Mullins, le matériau étant incompressible. Cependant malgré cet adoucissement des contraintes, l'effet Mullins n'est pas "saturé" dans la direction 2 : ce n'est qu'après l'application d'une charge /décharge dans cette direction que le matériau s'adoucit par effet Mullins.

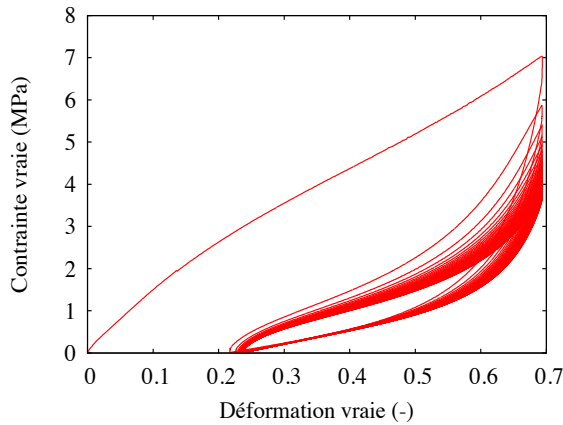
## b) Adoucissement cyclique

Comme nous venons de le souligner, après avoir été chargé une première fois, la contrainte au sein du matériau est adoucie. Dans cette continuité, si l'on sollicite de manière cyclique le matériau jusqu'au même niveau de déformation maximale, on peut observer un adoucissement de la contrainte au fur et à mesure des cycles connu sous le nom d'adoucissement cyclique. Sur la figure I.13, le silicone chargé de silice de l'étude est soumis à un essai cyclique de traction borné par une déformation nominale maximale de 100% et un retour à force nulle.

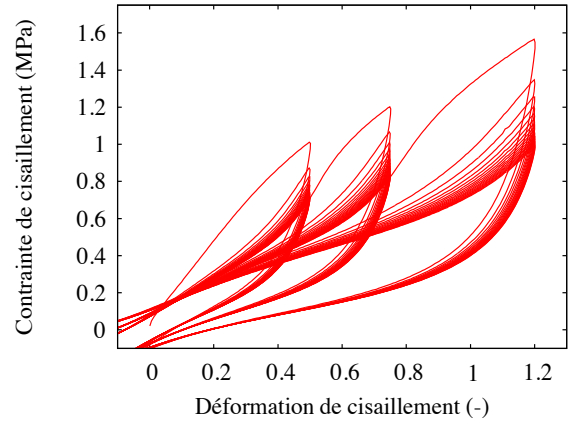
On constate que cet adoucissement est très marqué lors des premiers cycles puis une accommodation du matériau s'opère (le comportement converge vers un état stable) au bout d'un certain nombre de cycles.

Ainsi, suivant le nombre de cycles de déformation que le matériau a subi, celui-ci ne présente





**Fig. I.13** – Essais cycliques de traction jusqu'à une déformation nominale maximale de 100%



**Fig. I.14** – Essais cycliques de cisaillement successifs jusqu'à stabilisation ( $\pm 50$ ,  $\pm 75$  puis  $\pm 120\%$ )

pas le même niveau de contrainte.

Ainsi, afin d'étudier un matériau au comportement stable, il est courant de précharger les éprouvettes (c'est à dire de réaliser un essai préliminaire par exemple un essai cyclique de bornes maximale et minimale choisies) avant de leur appliquer le chargement particulier que l'on souhaite (Amin et al., 2006), (Wang and Robertson, 2005), (Chazeau et al., 2000), (Bhuiyan et al., 2009).

Cependant, si l'on vient solliciter ensuite le matériau à un niveau de déformation supérieur à la déformation maximale vue par le matériau (généralement la valeur maximale de l'essai cyclique), compte-tenu de l'effet Mullins, le matériau va retrouver un comportement non-stabilisé.

Sur la figure I.14, une même éprouvette de cisaillement est sollicitée successivement jusqu'à stabilisation pour des niveaux de déformation maximale de 50, 75 puis 120%.

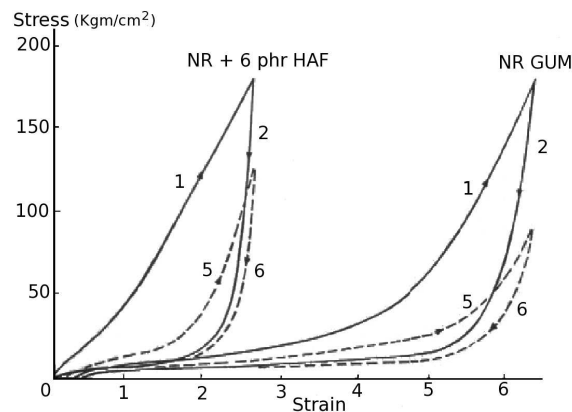
On constate dans un premier temps que malgré une stabilisation du matériau à une déformation maximale donnée celui-ci n'est plus stabilisé si l'on vient dépasser le niveau de déformation maximale du précédent préchargement. De plus, on peut noter que plus la déformation maximale du préchargement est grande et plus le cycle stabilisé obtenu est adouci.

Enfin, si l'on considère l'observation faite par Diani et ses collègues (Diani et al., 2006a) concernant l'anisotropie induite par l'effet Mullins, il en ressort que si l'on souhaite solliciter un matériau stable suivant plusieurs directions, il sera nécessaire d'effectuer des chargements cycliques suivant toutes ces directions.

L'effet Mullins et l'adoucissement cyclique sont deux phénomènes assez reliés que l'on a tendance à regrouper sous la même dénomination d'effet Mullins ; c'est ce que je ferai dans la suite de cette thèse.

Il est ensuite intéressant de relever que l'effet Mullins est observé quel que soit le type de sollicitation (dans le cadre de ce projet, nous avons pu l'observer en traction, compression et cisaillement), que l'élastomère soit chargé ou non. Toutefois, comme on peut l'observer sur la figure I.15, en comparaison avec les élastomères non-chargés, l'effet Mullins apparaît pour des niveaux de déformation beaucoup plus faibles dans le cas d'élastomères chargés. Il s'agit

sur cette figure d'un caoutchouc naturel renforcé ou non par du noir de carbone.



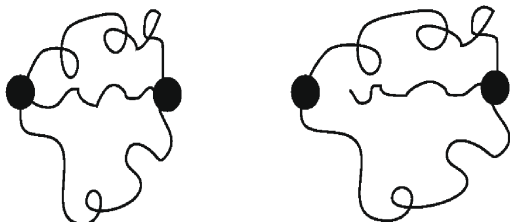
**Fig. I.15** – Observation de l'effet Mullins sur élastomères chargés et non-chargés (Harwood and Payne, 1966)

Cette apparition pour des niveaux de déformation plus faibles s'explique logiquement par le phénomène d'amplification des déformations dans la matrice engendrée par la présence des charges au sein du matériau (voir paragraphe I.1.1 b)).

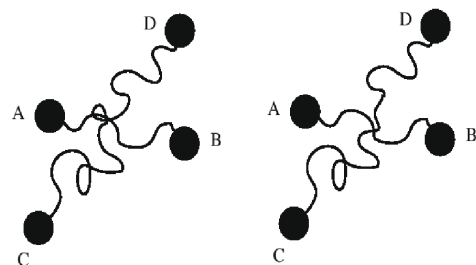
### c) Origine microscopique

Même 60 ans après sa mise en évidence, les chercheurs ne se sont toujours pas accordés sur l'origine microscopique de l'effet Mullins. De nombreuses explications ont été proposées allant de la rupture de chaînes à l'interface matrice-charge, au glissement de molécules, à la rupture d'agglomérats de charge ou au désenchevêtrement de chaînes. Une synthèse des études menées sur l'effet Mullins peut être trouvée dans l'article de Diani (Diani et al., 2009). Ainsi, appuyée par des mesures de perte de conductivité électrique après étirement au préalable du matériau, la chute de contrainte observée a d'abord été qualitativement attribuée à la rupture d'aggrégats de charges (Mullins, 1969).

Bueche (Bueche, 1961), lui, attribue cet adoucissement de contrainte à la rupture de chaînes attachées entre deux charges. La figure I.16 illustre cette proposition, lorsque le matériau est étiré les chaînes les plus courtes reliant deux charges sont fortement contraintes, atteignent leur limite d'extensibilité et se rompent à la surface d'une des particules entraînant une chute de contrainte au sein du matériau.



**Fig. I.16** – Schéma d'un adoucissement du comportement par rupture de chaîne entre charges (Diani et al., 2009)



**Fig. I.17** – Schéma d'un adoucissement du comportement par désenchevêtrement (Diani et al., 2009)

Dans les deux cas, ces explications ont un caractère irréversible et se réfèrent aux charges

ou à l'interaction charge-matrice. Cependant, comme nous venons de le souligner, l'effet Mullins est aussi observé dans les élastomères non-chargés, même si son effet est beaucoup moins prononcé et n'est visible que pour de grands niveaux de déformation.

Ainsi, une autre explication non reliée à la présence de charge évoqué par Hamed et Hatfield (Hamed and Hatfield, 1989) associe la chute de contrainte à un désenchevêtrement de chaînes, et donc d'une partie rigidifiant le matériau, engendré par l'étirement des chaînes comme illustré sur la figure I.17.

De plus, cette explication reste en accord avec le caractère recouvrable de l'effet Mullins car une fois relâchée, afin de retrouver une configuration plus stable, de nouveaux enchevêtrements peuvent se former par agitation thermique.

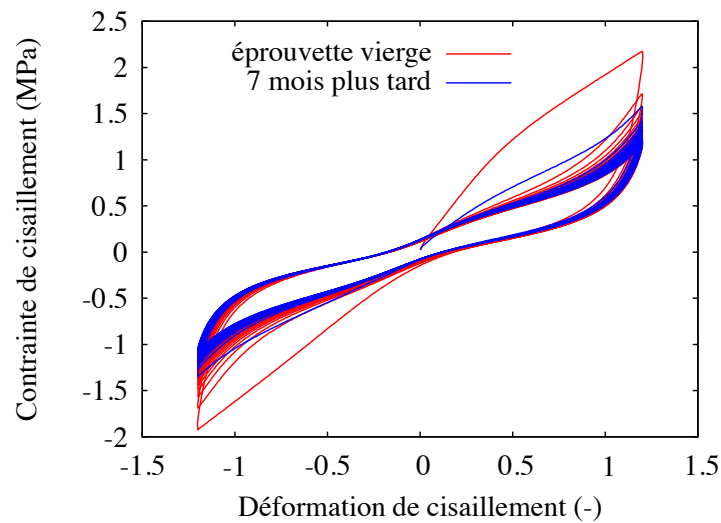
En effet, Mullins (Mullins, 1947) a souligné le caractère réversible de l'effet Mullins sous certaines conditions de temps et de température. Ainsi, après avoir sollicité en traction une éprouvette puis l'avoir stockée au repos à température ambiante pendant 100 h, il observe une faible recouvrance de l'effet ; en revanche, stockée 2 jours à 100°C, il note un recouvrement quasi-total.

C'est pourquoi, l'effet Mullins ne peut pas être expliqué, en tout cas pas totalement, par des phénomènes liés à des mécanismes d'endommagement mais est probablement lié à l'association de phénomènes irréversibles et réversibles.

Une étude annexe a été menée durant ce projet sur le recouvrement de l'effet Mullins sur des durées allant jusqu'à 12 mois.

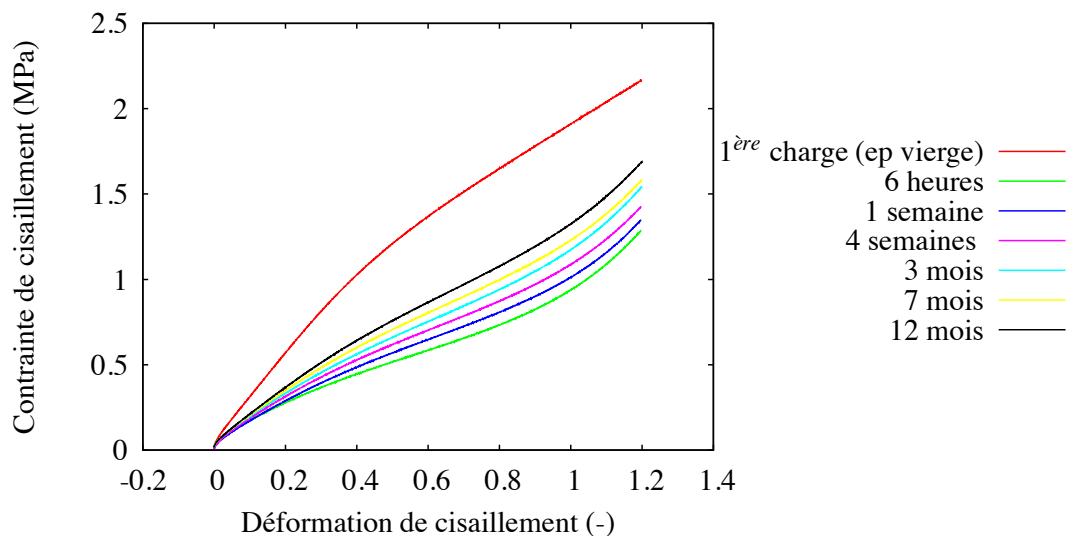
Les éprouvettes utilisées sont préalablement cyclées en cisaillement à  $\pm 120\%$  jusqu'à stabilisation du comportement puis stockées au repos à température ambiante (quelques stockages en température ont aussi été menés) pendant plusieurs mois et ensuite celles-ci sont resoumises au même chargement cyclique. La figure I.18 représente deux essais cycliques correspondant respectivement à l'éprouvette vierge (courbe rouge) et la même éprouvette mais 7 mois après avoir été stockée à force nulle à température ambiante (courbe bleue).

On constate ici que l'éprouvette a recouvert une partie de l'effet Mullins et n'est plus stabilisée 7 mois après : il faut un certain nombre de cycles pour qu'elle converge à nouveau vers ce même état stabilisé.



**Fig. I.18** – Recouvrement de l'effet Mullins dans le temps

Sur la figure I.19 sont représentées la 1<sup>ère</sup> charge d'un essai cyclique effectué sur une éprouvette vierge (rouge) ainsi que les 1<sup>ères</sup> charges issues d'un deuxième cyclage effectué sur une éprouvette ayant déjà été cyclée une première fois puis stockée au repos pendant des durées allant de 6h à 1 an. On pourra noter qu'une éprouvette différente a été utilisée pour chaque durée de stockage.



**Fig. I.19** – Recouvrement de l'effet Mullins dans le temps

On observe ainsi qu'au fur et à mesure que le temps de stockage est augmenté, la réponse en contrainte de la 1<sup>ère</sup> charge issue du deuxième cyclage est de plus en plus élevée. Il semble donc que, moyennant un certain temps au repos, le matériau soit capable de se réorganiser pour retrouver une configuration plus stable et reformer des liaisons rigidifiantes telles que des enchevêtrements par exemple.

### I.1.4 Etude du comportement dynamique

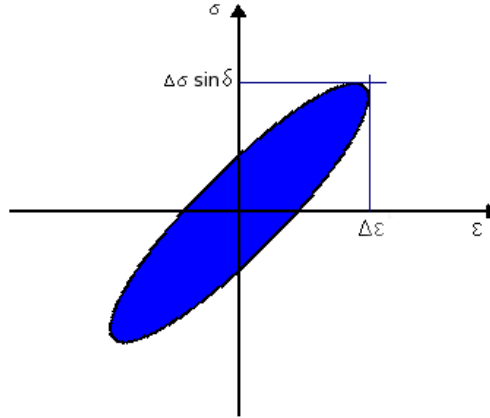
L'étude dynamique d'un matériau consiste à appliquer à un échantillon une déformation sinusoïdale (voir équation I.3) et de mesurer la réponse en contrainte de cet échantillon. On notera que dans le cadre de cette étude, nous négligeons les phénomènes d'inertie, le comportement du matériau seul est étudié. Ainsi, nous avons supposé que la pulsation d'excitation  $\omega$  était suffisamment faible pour que la transformation mécanique de l'élastomère soit quasi-statique à chaque instant.

$$\varepsilon(t) = \Delta\varepsilon \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (\text{I.3})$$

Comme nous venons de le voir, les élastomères appartiennent à la famille des matériaux viscoélastiques. La particularité de ces matériaux est que la réponse en contrainte est déphasée par rapport à la déformation ; de plus si la viscosité est linéaire la réponse en sortie sera sinusoïdale de même fréquence :

$$\sigma(t) = \Delta\sigma \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) \quad (\text{I.4})$$

avec  $\delta$  le déphasage entre la contrainte et la déformation qui est compris entre 0 et  $\pi/2$ . A titre de comparaison, dans le cas d'un solide élastique, le déphasage est nul, les deux sinusoïdes sont en phases et dans le cas d'un fluide visqueux, le déphasage vaut  $\pi/2$ , les deux sinusoïdes sont en opposition de phases. Les matériaux visqueux sont alors capable de dissiper l'énergie mécanique fournie en chaleur ; ce qui est symbolisé sur la courbe contrainte/déformation par la présence d'une boucle d'hystérésis.



**Fig. I.20** – Boucle d'hystérésis

On utilise couramment la définition d'un module complexe  $E^*$  tel que  $\sigma = E^* \cdot \varepsilon$  pour caractériser l'amortissement d'un matériau visqueux. La partie réelle ( $E'$ ) de ce module complexe ou module de conservation (module élastique) caractérise l'énergie stockée de manière réversible dans le matériau (partie élastique) et la partie imaginaire ( $E''$ ) ou module de perte caractérise l'énergie dissipée (partie visqueuse).

$$\sigma(t) = \Delta\varepsilon \cdot \left[ \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\omega.t) + \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\omega.t) \right] = (E' + iE'') \cdot \varepsilon(t) \quad (\text{I.5})$$

Par définition, on a donc  $E' = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \cdot \cos(\delta)$  et  $E'' = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \cdot \sin(\delta)$ . On définit aussi l'amortissement :  $\tan(\delta) = E''/E'$  et le module dynamique :  $|E^*| = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$ .

Cependant, il faut bien retenir que cette définition est linéaire et revient donc à approcher la boucle d'hystérésis par une ellipse. Ainsi dans le cas d'une viscosité linéaire, la boucle étant elliptique, on accède facilement aux coefficients  $E'$  et  $E''$  en utilisant les caractéristiques géométriques de la boucle et/ou son aire c'est-à-dire l'énergie dissipée qui s'écrit sous la forme :

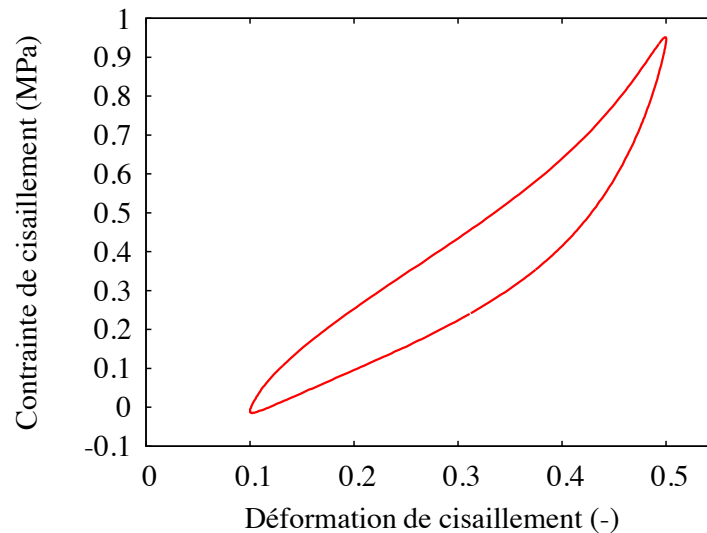
$$\text{Aire} = \int_0^T \sigma \cdot d\varepsilon = \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon \cdot \pi \cdot \sin(\delta) = (\Delta\varepsilon)^2 \cdot E'' \cdot \pi \quad (\text{I.6})$$

Cette expression met en avant le lien direct existant entre le module de perte et l'aire de la boucle d'hystérésis. Le module élastique lui est étroitement lié avec la pente de la boucle d'hystérésis.

On remarquera de plus, que la notation  $|E^*|$  est réservée aux essais de traction et de compression ; dans le cas d'essais de cisaillement, la même méthode est utilisée et on parle de module de cisaillement complexe  $|G^*|$ .

Ainsi, il est courant, notamment dans l'industrie, de caractériser la réponse du matériau (et donc sa rigidité et sa dissipation) à une sollicitation vibratoire donnée par ses modules élastique et de perte. Cependant, il faut bien garder en tête que cette définition correspond à un modèle de comportement linéaire.

Dans le cas étudié ici, le silicone chargé de silice a un comportement viscoélastique non-linéaire, sa réponse en contrainte est non-linéaire ce qui se traduit dans le plan contrainte/déformation par des boucles d'hystérésis de forme plus ou moins éloignée, suivant les cas, d'une ellipse. La figure I.21 illustre ce propos, elle représente la réponse à un chargement dynamique de cisaillement caractérisé par une fréquence de  $15\text{Hz}$ , une déformation statique de  $30\%$  et une amplitude de déformation de  $20\%$ .



**Fig. I.21** – Exemple d'une réponse à une sollicitation vibratoire de fréquence  $15\text{Hz}$  et de déformation statique non nulle

Le choix de l'utilisation des coefficients  $E'$  et  $E''$  pour caractériser la réponse dynamique non-linéaire du matériau ainsi que ses limites sera discuté plus en détails dans les paragraphes définition du chargement (I.2.2) et post-processing (I.2.5).

### I.1.5 Effet Payne

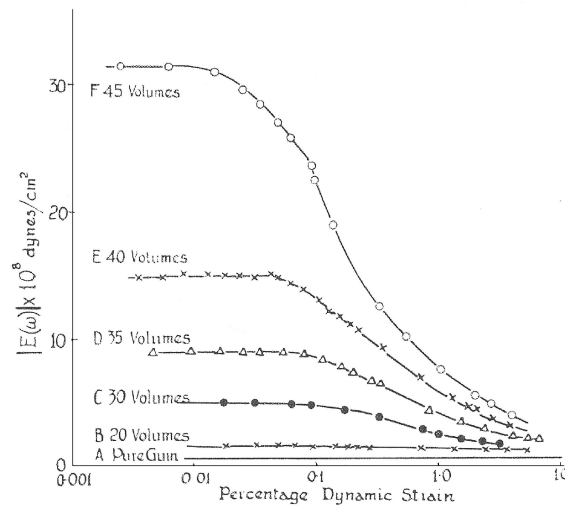
Enfin, compte-tenu de l'étude dynamique que nous avons souhaitée mener, un autre phénomène, propre aux élastomères chargés sollicités dynamiquement, doit nécessairement être pris en compte : l'effet Payne. Celui-ci est lié à la dépendance non-linéaire de ces matériaux avec l'amplitude de déformation de la sollicitation vibratoire appliquée.

De plus, malgré l'utilisation croissante des élastomères chargés pour des utilisations de type anti-vibratoires, ce phénomène est encore mal expliqué et peu mis en équation.

#### a) Définition et principales caractéristiques

En sollicitant par des déformations sinusoïdales ses matériaux, Payne (Payne, 1960) a mis en évidence la dépendance non-linéaire du module dynamique des élastomères chargés avec l'amplitude des déformations appliquées même pour de faibles valeurs d'amplitude de déformation.

La figure I.22 illustre l'évolution du module dynamique avec l'amplitude de déformation obtenue par Payne sur des caoutchoucs naturels plus ou moins chargés en noir de carbone.



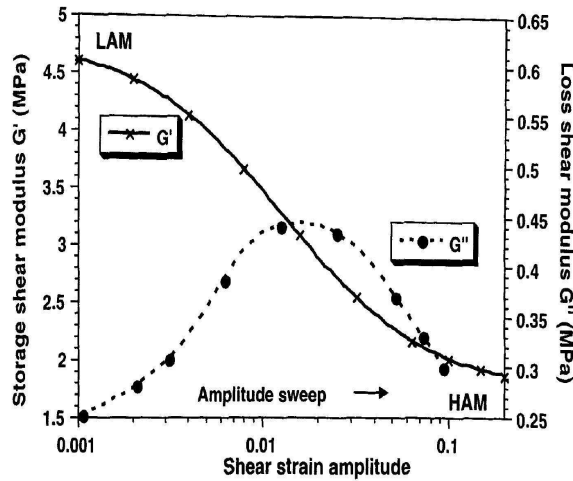
**Fig. I.22** – Evolution du module dynamique ( $|E^*|$ ) avec l'amplitude des déformations ( $\Delta\epsilon$ ) à fréquence fixée pour différents teneurs en noir de carbone (Payne, 1960)

Ces courbes mettent en évidence la dépendance non-linéaire du module dynamique des élastomères chargés avec l'amplitude de déformation. En effet, lorsque l'amplitude de déformation appliquée dépasse une certaine valeur critique (qui semble dépendre de la teneur en charges), le module dynamique chute de manière assez brutale. Ainsi, le module dynamique passe de sa valeur maximale ( $|E^*|_0$ ) aux très faibles amplitudes de déformation vers sa valeur minimale ( $|E^*|_\infty$ ) aux grandes amplitudes de déformation. Ce comportement non-linéaire est observé même pour des amplitudes de déformations inférieures à 0.1 %. Cette dépendance non-linéaire des élastomères chargés s'oppose au comportement viscoélastique linéaire que Payne a pu observer pour les élastomères non-chargés sur une plage de déformation allant jusqu'à 40 % et que l'on retrouve en partie sur la figure I.22 sur la courbe A.

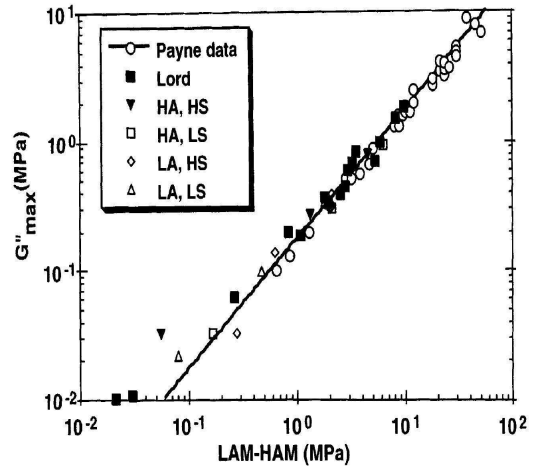
Sternstein et ses collègues (Chazeau et al., 2000) ont étudié l'effet Payne et ses caractéristiques sur différents élastomères tels que le caoutchouc naturel chargé de noir de carbone et le silicone chargé de silice en cisaillement.

Ils retrouvent les observations faites par Payne qui se traduisent en terme d'évolution du

module élastique ( $G'$ ) par une chute de celui-ci avec l'amplitude de déformation (semblable à celle du module dynamique) et pour le module de perte ( $G''$ ) par évolution non-linéaire avec passage par un maximum de dissipation (voir figure I.23).



**Fig. I.23** – Effet Payne (NR avec CB) à 1 Hz et  $T = 25^\circ\text{C}$  (Chazeau et al., 2000)



**Fig. I.24** – Evolution du pic de module de perte avec la chute du module élastique (Chazeau et al., 2000)

Ils ont de plus mis en avant le lien direct affine existant entre la chute de module élastique, c'est à dire la différence entre la valeur aux faibles niveaux de déformation noté LAM ici (Low amplitude modulus) et celle aux grandes valeurs d'amplitude de déformation noté HAM ici (High amplitude modulus) (voir figure I.23), et la valeur maximale du pic de dissipation ( $G''_{max}$ ). La figure I.24 illustre cette relation affine et cela pour de nombreux matériaux différents (dans la légende, Payne se rapporte aux données de l'article de Payne, Lord aux silicones et les autres lettres aux caoutchoucs naturels pour différents taux de dispersion de charges au sein de la matrice). Ainsi, plus la chute du module élastique est grande plus la valeur du maximum de dissipation sera élevée.

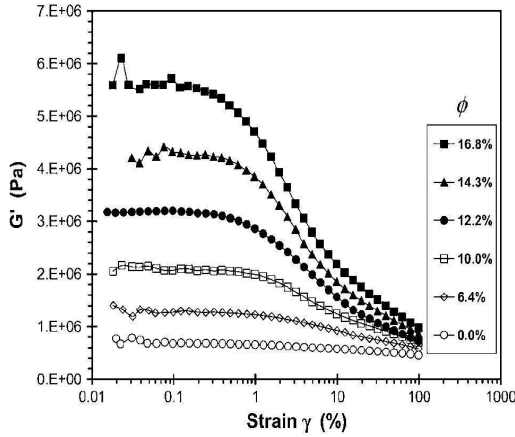
Cette propriété avait déjà été étudiée par d'autres auteurs comme Kraus (Kraus, 1984) et Payne (Payne, 1974). La pente de cette droite serait comprise entre 0.1 et 0.2 selon le mélangeage des matériaux et le type de charge (noir de carbone ou silice par exemple).

Ensuite, sur si l'on revient à la figure I.22, on peut observer les courbes d'évolution des modules dynamiques avec l'amplitude de déformation pour différentes teneur en charges. Ainsi, plus la teneur en charges est importante et plus la chute est importante et débute précocément en terme d'amplitude de déformation. On retrouve ici les aspects développés au paragraphe I.1.1 b). Plus le matériau est chargé et plus sa rigidité est augmentée. Cependant, on constate que cet augmentation est surtout marquée pour les faibles niveaux d'amplitude de déformation ; aux grandes amplitudes en revanche une différence moins importante est observée.

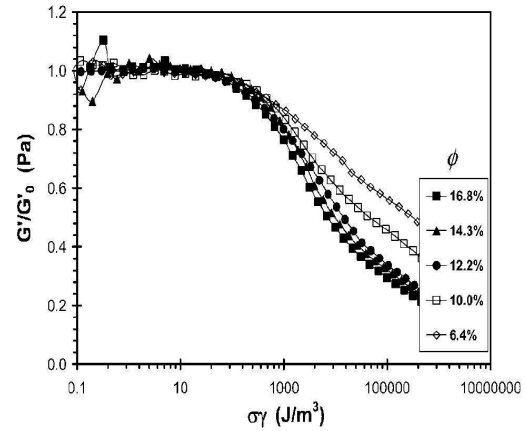
Wang et Robertson (Wang and Robertson, 2005), dans leur étude de l'effet Payne sur un polybutadiène plus ou moins chargé en noir de carbone ont démontré la dépendance linéaire de l'effet Payne avec la teneur en charges en montrant l'existence d'une courbe maîtresse (courbe normalisée) (voir figure I.26). Pour obtenir celle-ci, ils proposent de normaliser chaque courbe d'évolution du module élastique (respectivement du module de perte) par sa valeur aux faibles niveaux de déformation noté ici  $G'_0$  (respectivement par la valeur maximale du pic



de module de perte noté ici  $G''_{max}$ ); comme il est fait pour passer de la figure I.25 à I.26.



**Fig. I.25** – Evolution de l’effet Payne avec la teneur en charges (Wang and Robertson, 2005) (avec  $\gamma$  l’amplitude de déformation)

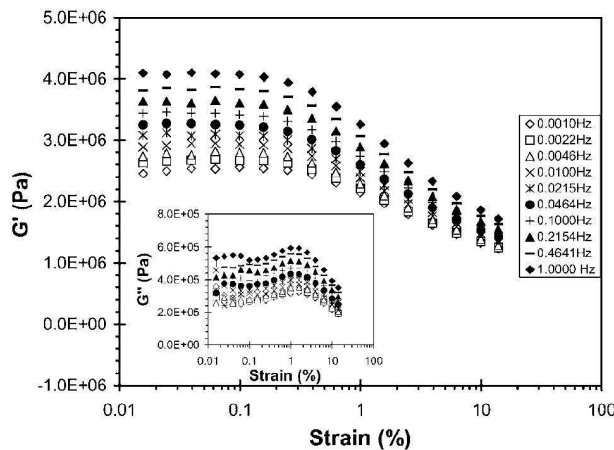


**Fig. I.26** – Courbes normalisés ( $G'/G'_0$ ) obtenues à partir de la figure I.25 (Wang and Robertson, 2005)

Ainsi, connaissant les courbes d’évolution complètes des modules élastique et de perte d’un matériau de teneur en charges  $\Phi_1$ , il est alors possible de déduire les courbes d’évolution du matériau avec une teneur en charges différente ( $\Phi_2$ ) en connaissant seulement pour  $G'$  sa valeur aux faibles amplitudes de déformation et pour  $G''$  sa valeur maximale en utilisant les relations de proportionnalité suivantes :

$$G'_{\Phi_2}(\gamma) = \frac{G'_{\Phi_2 0}}{G'_{\Phi_1 0}} \cdot G'_{\Phi_1}(\gamma) \quad \text{et} \quad G''_{\Phi_2}(\gamma) = \frac{G''_{\Phi_2 max}}{G''_{\Phi_1 max}} \cdot G''_{\Phi_1}(\gamma) \quad (\text{I.7})$$

Une dépendance similaire des modules élastique et de perte avec l’amplitude des déformations est obtenue en étudiant différentes fréquences comme le suggère la figure I.27.



**Fig. I.27** – Evolution de l’effet Payne avec la fréquence (Wang and Robertson, 2005)

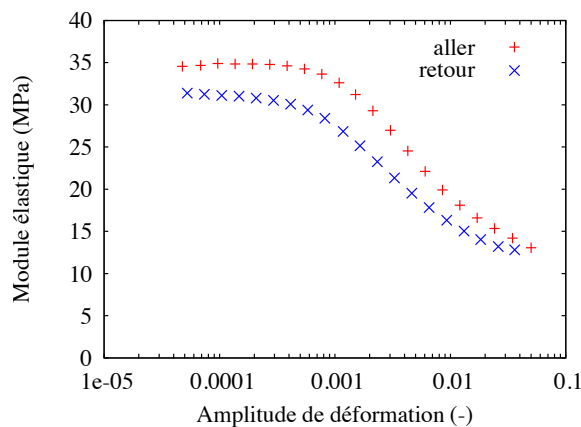
Ainsi, les modules sont d’autant plus élevés que la fréquence est grande; on observe ici l’effet Payne et le caractère visqueux du matériau. Les courbes sont décalées vers des valeurs de module plus importantes plus la fréquence augmente. Cependant, l’augmentation semble

être plus importante aux faibles niveaux d'amplitude qu'aux grands.

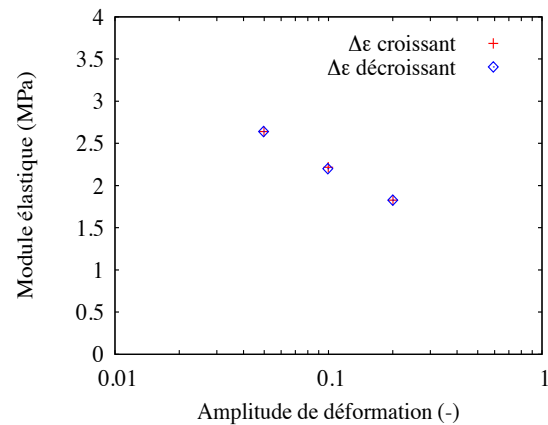
De plus, de la même manière que précédemment des courbes maîtresses peuvent être tracées (voir (Wang and Robertson, 2005)).

Cette notion de courbe maîtresse rappelle le principe d'équivalence temps-température en viscoélasticité linéaire de Williams, Landel et Ferry (méthode WLF) ce qui a poussé Wang et Robertson à faire le parallèle avec cette méthode et à introduire une température effective  $T_{eff}$  égale à  $\sigma\gamma$  température au delà de laquelle le matériau 'bloqué' passe d'un état de solide élastique à celui de fluide visqueux.

Enfin, Payne (Payne, 1960) a de plus remarqué que l'effet Payne est globalement recouvrable lorsque l'on applique un faible niveau d'amplitude de déformation après avoir imposé un grand niveau d'amplitude de déformation. Ainsi, lorsque l'on augmente l'amplitude de déformation de la sollicitation vibratoire le module dynamique diminue puis lorsque l'on rediminue l'amplitude de déformation le module dynamique réaugmente à nouveau. La figure I.28 illustre ce propos ; une éprouvette plot vierge est, dans un premier temps, sollicitée dynamiquement en compression avec des amplitudes de déformation croissantes allant de 0.005 à 5% (aller) puis par des amplitudes de déformation décroissantes allant de 5 à 0.005% (retour).



**Fig. I.28** – Observation de l'effet Payne sur une unique éprouvette en appliquant d'abord des amplitudes croissantes puis des amplitudes décroissantes



**Fig. I.29** – Observation du caractère réversible de l'effet Payne sur deux éprouvettes différentes ayant été préchargées jusqu'à 50% (découplage avec l'effet Mullins)

On observe alors que lorsque l'on vient diminuer l'amplitude des déformations, le module élastique réaugmente d'autant plus que cette amplitude redevient faible. Cependant, on note un décalage entre la courbe "aller" et la courbe "retour". Ce décalage est en fait dû à l'effet Mullins : on observe ici l'effet Payne couplé à l'effet Mullins. En effet, sur la courbe de "retour", la déformation maximale ( $\epsilon_{max}$ ) vue par l'éprouvette est de 5% alors que sur la courbe d'"aller" la déformation maximale vue par l'éprouvette est plus faible ; égale à l'amplitude appliquée en chaque point (puisque l'éprouvette est vierge au départ).

Sur la figure I.29, le même type de chargement est étudié sur des deux éprouvettes de double-cisaillement, l'une subissant trois amplitudes de déformation croissantes de 5, 10 et 20% et l'autre subissant ces trois mêmes amplitudes mais de manière décroissante. Cependant, ces deux éprouvettes ont été préalablement préchargées jusqu'à une déformation de 50% pour découpler l'effet observé de l'effet Mullins.

On observe alors que les modules élastiques calculés sont identiques que l'on applique les

différents niveaux d'amplitudes de déformation de manière croissante ou décroissante. Dans cette expérience, l'effet Payne seul est appréhendé et on y observe le caractère réversible de celui-ci. Il ne s'agit donc pas d'une forme d'endommagement.

### b) Origine microscopique

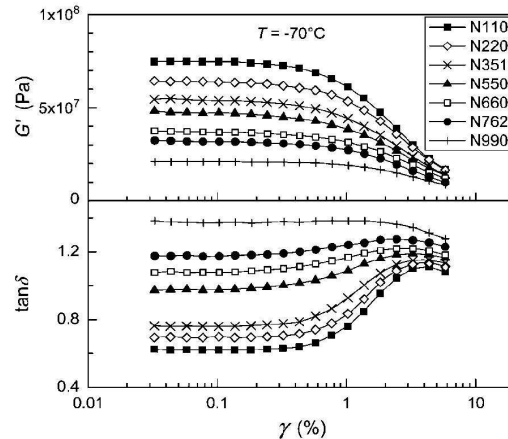
L'origine microscopique de l'effet Payne fait encore débats et plusieurs théories s'opposent. Dans un premier temps, comme l'évoque Payne et certains chercheurs comme Kraus (Kraus, 1984) ce phénomène serait relié aux charges et notamment à leur désagglomération et agglomération sous sollicitation vibratoire. Dans un second temps, le phénomène est plutôt attribué à l'interaction matrice-charges et au détachement de chaînes reliées à une charge sous l'effet de la sollicitation comme l'évoque Maier et Goritz (Maier and Goritz, 1996). Enfin, Montes et ses collègues (Montes et al., 2003), évoquent la présence d'une enveloppe vitreuse entourant chaque charge à l'intérieur de laquelle un gradient de transition vitreuse est observé.

Dans un premier temps, comme nous l'avons souligné en début de sous-partie, on peut déjà affirmer que l'effet est engendré par la présence de charges car le phénomène n'apparaît pas pour une gomme pure.

Comme l'on fait Robertson et ses collègues (Robertson et al., 2007) sur un polybutadiène chargé de noir de carbone, il est intéressant de regarder l'influence de la taille des charges à teneur en charge fixée (ici 0.18 en fraction volumique) sur l'effet Payne. La figure I.30 recense les différentes tailles de charges utilisées avec  $d$  le diamètre d'une particule et  $D$  le diamètre des agrégats. La figure I.31 représente les courbes de Payne correspondantes à ces charges.

Carbon black type	$d$ (nm) <sup>a</sup>	$D$ (nm) <sup>a</sup>
N110	17±7	54±26
N220	21±9	65±30
N339	26±11	75±34
N351	31±14	89±47
N550	53±28	139±71
N660	63±36	145±74
N762	110±53	188±102

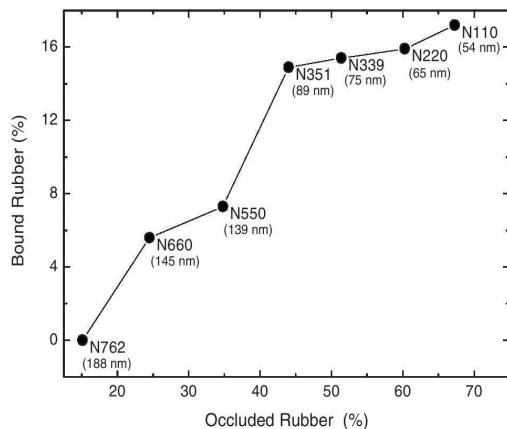
**Fig. I.30** – Dimensions des charges de noir de carbone utilisées (Robertson et al., 2007)



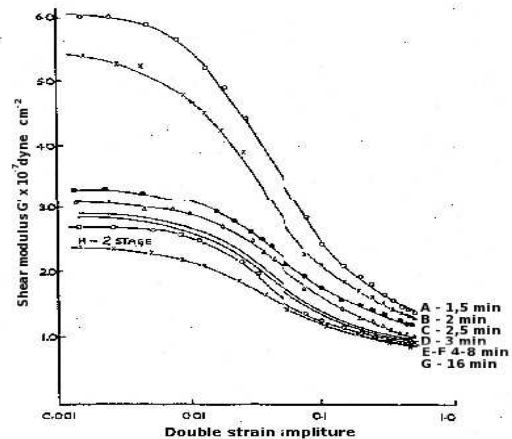
**Fig. I.31** – Influence de la taille des charges sur l'effet Payne (Robertson and Roland, 2008) (avec  $\gamma$  l'amplitude de déformation)

On constate que plus la taille de charge est faible plus la non-linéarité du module élastique et de l'amortissement ( $\tan\delta$ ) avec l'amplitude de déformation est significative. De plus, on observe une augmentation du module élastique lorsque la taille de charge diminue et ceci de manière beaucoup plus marquée aux faibles niveaux de déformation. La figure I.32 permet d'expliquer en partie cette constatation. Elle représente le pourcentage de liaison matrice-charge en fonction du pourcentage de matrice emprisonnée par des charges (voir définition au paragraphe I.1.1 c)).

On remarque alors que plus la taille de charge est petite, plus l'interface matrice-charges est étendue et plus une proportion importante de matrice se trouve emprisonnée par les



**Fig. I.32** – Proportion d'élastomère lié aux charges ou bloqué par les charges en fonction de la dimension des charges (Robertson et al., 2007)



**Fig. I.33** – Evolution du module élastique avec la déformation pour différents temps de mélangeage (Payne, 1966)

charges. En d'autres termes, pour une teneur en charge donnée, c'est-à-dire pour un volume de charges fixé, plus la charge est petite et plus les agrégats formés seront susceptibles d'avoir une forme qui va venir emprisonner de la matrice. De ce fait, comme nous l'avons souligné précédemment, ces parties de matrice emprisonnées vont avoir tendance à rigidifier davantage le matériau puisqu'elles ne verront pas la déformation appliquée et réagiront comme des parties dures ; tout du moins tant que la sollicitation appliquée n'entraîne pas de modification de l'agglomérat ou de désagglomération.

Enfin, pour une taille de charge donnée, on peut aussi s'intéresser à l'influence de la dispersion des charges au sein du matériau (Payne, 1966)(Montes et al., 2003).

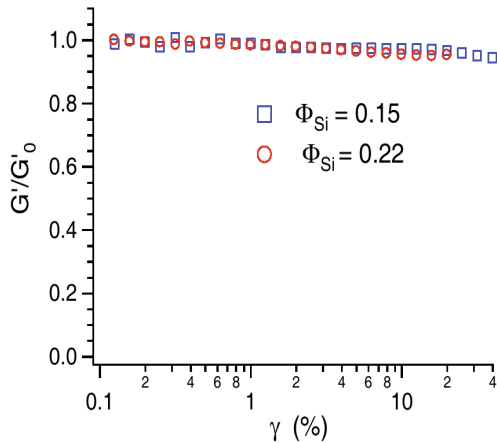
Pour limiter la présence d'agrégats de charges et donc mieux disperser les charges, il est possible d'augmenter le temps de mélangeage lors de la fabrication du matériau. Payne a étudié l'influence de ces temps de mélangeage sur les courbes d'évolution du module élastique. La figure I.33 représente les différentes courbes d'évolution du module élastique obtenues pour plusieurs temps de mélangeage allant de 1.5 min à 16 min.

On constate alors que plus le temps de mélangeage est long, c'est-à-dire plus les charges sont bien dispersées, plus la chute du module élastique est diminuée. Cela revient en fait à réduire le renforcement du matériau en supprimant celui induit par la présence d'agglomérats.

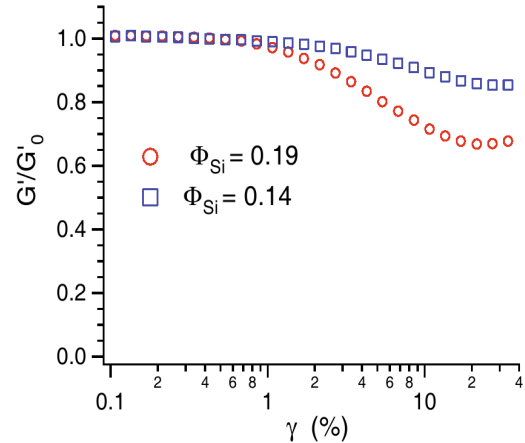
Montes et ses collègues parviennent à la même constatation. Dans (Montes et al., 2010), ils étudient deux élastomères chargés se différenciant uniquement par l'arrangement des particules au sein de la matrice, c'est-à-dire la dispersion de celles-ci. Sur la figure I.34 est représentée l'évolution du module élastique rapporté à sa valeur aux faibles niveaux d'amplitude de déformation ( $\frac{G'}{G'_0}$ ) avec l'amplitude de déformation  $\gamma$  dans le cas d'élastomères chargés en silice (deux concentrations sont étudiées) très bien dispersés. La figure I.35, quant à elle, concerne les élastomères chargés équivalents mais contenant des agrégats de silice.

On observe alors que dans le cas d'élastomères chargés très bien dispersés, le module élastique est indépendant de l'amplitude de déformation. En revanche, les élastomères chargés contenant des agrégats de charges présentent de l'effet Payne.

Ces essais mettent clairement en évidence, le rôle joué par l'arrangement des particules au sein de la matrice avec la présence de l'effet Payne. Le modèle proposé par Montes et ses



**Fig. I.34** – Evolution du module élastique normé par  $G'_0$  pour des élastomères chargés contenant des charges très bien dispersées (Montes et al., 2010)



**Fig. I.35** – Evolution du module élastique normé par  $G'_0$  pour des élastomères chargés contenant des charges regroupées sous forme d'agglomérats (Montes et al., 2010)

collègues sera détaillé dans le Chapitre II section II.1.4.

Au regard de ces résultats, il semble que pour les faibles niveaux d'amplitude de déformation l'effet Payne soit piloté par des effets de structure liés aux charges (taille de charge et répartition de celles-ci) et pour les grands niveaux d'amplitude de déformation qu'il soit plus associé au réseau macromoléculaire et donc à la matrice. En effet, en observant les courbes d'évolution des module élastiques avec l'amplitude de déformation des figures I.22 et I.25, on observe que pour les grands niveaux d'amplitude de déformation ces courbes tendent à converger vers un comportement proche de celui d'un matériau non-chargé.

Ainsi, la non-linéarité du comportement dynamique associée à l'effet Payne est intrinsèquement liée au renforcement des élastomères par des charges. La chute de rigidité du matériau avec l'amplitude de déformation étant supérieure à un facteur 2 voire 3 ou 4 selon les conditions, c'est pourquoi il est important d'être en mesure de prendre en compte l'effet Payne dans un modèle de comportement matériau.

Les élastomères chargés présentent donc un comportement complexe couplant de nombreux mécanismes de déformation et notamment une forte dépendance à la déformation appliquée.

On notera que dans le cadre de cette étude, nous avons choisi de ne pas prendre en compte l'effet de la température et nous nous sommes concentrés sur la prédiction du comportement en compte de l'effet Payne à température fixée, à l'ambiante. Plusieurs auteurs ont mis en avant la dépendance de l'effet Payne avec la température comme Lion (Lion, 1998) ou Montes et ses collègues (Montes et al., 2003) par exemple. Ils montrent que plus la température augmente et moins l'effet Payne observé est important. Ceci est cohérent avec l'équivalence temps-température.

Ensuite, afin d'être en mesure de prévoir par un modèle de comportement la réponse du matériau sous sollicitation vibratoire, il est nécessaire de bien définir un protocole expérimental et notamment dans le cadre de cette étude de mettre en avant l'effet Payne.

Le paragraphe suivant définit les caractéristiques des essais réalisés ainsi que la méthode de dépouillement qui a été mise en place pour calculer les modules élastique et de perte associés à chaque essai.

## I.2 Protocole expérimental

Un des objectifs de ce projet est de caractériser en cisaillement et en compression la réponse en contrainte puis la rigidité et la dissipation du matériau sous sollicitations de type vibratoires.

### I.2.1 Choix d'une représentation en déformation nominale et contrainte nominale

Nous avons fait le choix de piloter tous les essais dynamiques menés en déformation nominale et non en déformation vraie.

Ce choix a notamment été effectué compte-tenu de l'impossibilité de piloter en vitesse de déformation vraie sur une des machines d'essais : la DMA (en tout cas pas avec les logiciels dont nous disposons au Centre des Matériaux).

De plus, les modules élastiques et modules de perte, calculés pour caractériser la réponse dynamique (voir paragraphe I.1.4), sont généralement implicitement associés au couple déformation nominale / contrainte nominale. C'est le cas dans l'industrie mais aussi dans les logiciels de calcul fournis sur les machines d'essais.

Il est intéressant de noter qu'une représentation en déformation vraie / contrainte vraie aurait engendré l'obtention de modules élastiques et modules de perte "vrais".

Ainsi, dans toute la suite du manuscrit une représentation des réponses en déformation nominale et contrainte nominale sera utilisée.

On remarquera toutefois que l'implémentation numérique, quant à elle, est évidemment effectuée dans le cadre des grandes transformations.

### I.2.2 Définition du chargement retenu

Dans un premier temps, une sollicitation vibratoire est généralement définie par sa fréquence ( $f$ ) et son amplitude; et comme nous travaillerons en déformation imposée il s'agit donc d'une amplitude de déformation ( $\Delta\epsilon$ ). Nous savons que la dépendance du matériau par rapport à ces deux paramètres est à étudier de part respectivement le caractère visqueux et la sensibilité à l'effet Payne manifesté par le matériau.

De plus, les pièces utilisées dans ce type d'application sont la plupart du temps soumises à une déformation constante ( $\epsilon_{moy}$ ) supplémentaire due notamment au maintien et à la mise en position. Le matériau étant sensible à la déformation, il est nécessaire d'observer la dépendance de la réponse du matériau à la déformation statique imposée ( $\epsilon_{moy}$ ) et donc de considérer aussi ce 3<sup>ème</sup> paramètre.

Enfin, comme nous l'avons vu au paragraphe I.1.3, compte-tenu de la sensibilité du matériau à l'effet Mullins, il est important de considérer un matériau stabilisé mais aussi de bien maîtriser l'histoire des déformations vue par le matériau et donc notamment la déformation maximale ( $\epsilon_{max}$ ) vue par celui-ci. Ainsi, nous étudierons la dépendance du matériau avec ce 4<sup>ème</sup> et dernier paramètre.

C'est pourquoi, les chargements de cisaillement et de compression étudiés seront définis par 4 paramètres :  $f$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $\epsilon_{moy}$  et  $\epsilon_{max}$ . La figure I.36 schématise ce propos.

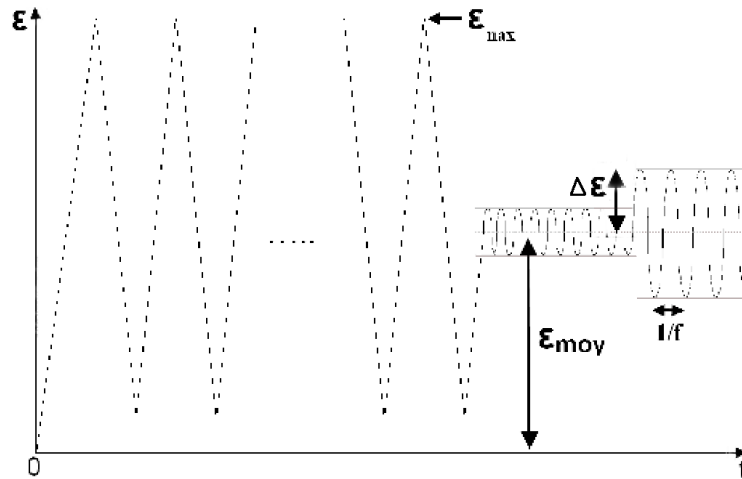


Fig. I.36 – Caractéristiques des chargements appliqués

Ainsi, avant chaque essai dynamique à proprement dit, chaque éprouvette sera préchargée par un essai cyclique composé de  $n$  cycles et bornée par respectivement  $\pm \epsilon_{max}$  pour les essais de cisaillement et  $0, -\epsilon_{max}$  pour les essais de compression. En effet, en pratique, la mise en traction de ces pièces industrielles n'est pas souhaitée car c'est un cas de chargement très défavorable par rapport à la durée de vie du matériau ; ainsi, la plupart du temps, une pré-déformation statique de compression est appliquée pour éviter cela. C'est pourquoi dans le cas de la compression nous n'avons pas précyclé en traction. De plus, les sollicitations dynamiques seront maintenues pendant  $m$  périodes. Les valeurs de ces nombres de cycles  $n$  et  $m$  seront précisées par la suite. Dans tous les cas, le but est de s'assurer que le matériau soit stable et qu'il ait eu le temps de s'accommoder au chargement appliqué.

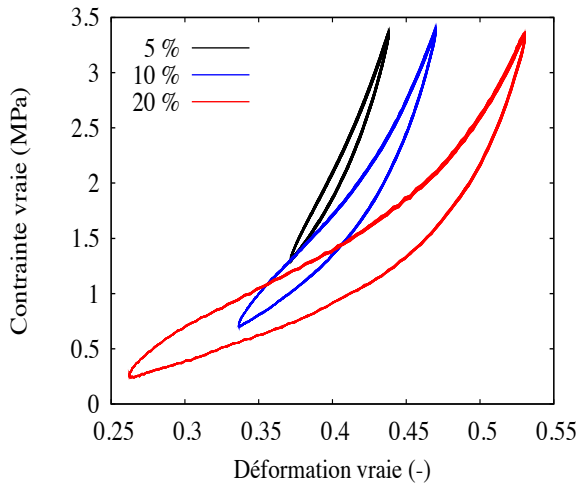
Les préchargements sont effectués à une vitesse de déformation de  $0.2s^{-1}$ . On notera que nous avons veillé à effectuer les essais dynamiques suivant le préchargement dans des délais courts restants inférieurs à l'heure.

En accord avec le cahier des charges, nous nous sommes focalisés sur un domaine d'étude s'étendant en fréquence de  $5$  à  $400Hz$ , en amplitude de déformation de  $0.1$  à  $20\%$ , en déformation statique de  $0$  à  $100\%$  et en déformation maximale jusqu'à  $150\%$ .

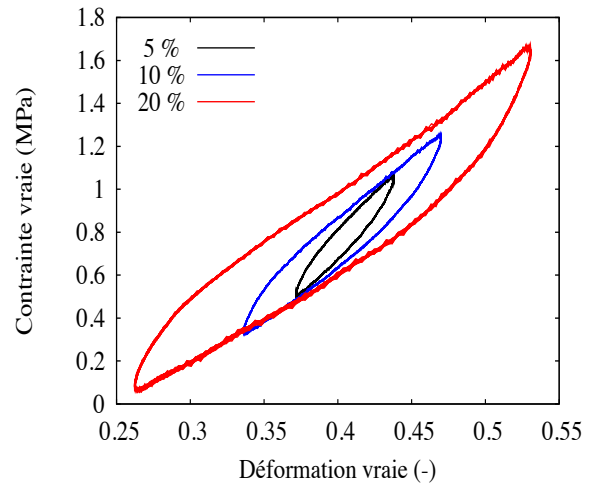
#### *Avantage du chargement retenu*

Le préchargement des éprouvettes a l'avantage de stabiliser le comportement du matériau et de découpler l'effet Mullins de la réponse dynamique observée. Sur les figures I.37 et I.38 les boucles stabilisées ( $m^{ième}$  cycle du chargement dynamique) correspondant à une sollicitation vibratoire en traction (essais tests en traction pure sur lanières) de fréquence  $5Hz$ , de déformation statique  $50\%$  et d'amplitudes de déformation de  $5, 10$  et  $20\%$  respectivement sans préchargement au préalable ( $\epsilon_{max} = 0$ ) et avec préchargement jusqu'à  $100\%$  sont présentées.

Une différence majeure est observée tout d'abord en terme de forme : les boucles d'hystérésis sans préchargement sont très non-linéaires et de forme incurvée alors qu'avec préchargement celles-ci sont quasiment de forme elliptique. Ainsi, en découplant l'effet Mullins de l'essai vibratoire, les boucles dynamiques obtenues ont une forme beaucoup plus simple et courante qui s'apparente à un comportement viscoplastique contrairement au cas sans préchargement. De plus, on constate que sans préchargement, la contrainte moyenne des boucles dynamiques dépend de l'amplitude de déformation appliquée. Plus l'amplitude de déformation est grande



**Fig. I.37** – Boucles dynamiques obtenues sans préchargement  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (0\%, 50\%, -, 5Hz)$



**Fig. I.38** – Boucles dynamiques obtenues avec préchargement  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (100\%, 50\%, -, 5Hz)$

plus la contrainte moyenne chute. En revanche, dans le cas où les éprouvettes sont préchargées, on observe des hystérésis imbriquées avec une contrainte moyenne quasiment indépendante du niveau d'amplitude de déformation appliquée. En fait, ce n'est autre que l'effet Mullins qui est à l'origine de cette différence. En effet sur la figure I.37, les valeurs de déformations maximales vue par l'éprouvette sont distinctes, pour la courbe noire  $\epsilon_{max} = 55\%$ , la bleue  $\epsilon_{max} = 60\%$  et la rouge  $\epsilon_{max} = 70\%$ . Et comme il avait déjà été remarqué au paragraphe I.1.3, plus  $\epsilon_{max}$  est grand et plus la contrainte au sein du matériau s'adoucit.

Ainsi, la définition des essais choisie a le double avantage de rendre le comportement indépendant de la déformation statique (associé à  $\epsilon_{max}$ ) et de rendre les boucles dynamiques quasi-elliptiques. L'utilisation des modules élastique et de perte, pour caractériser le comportement dynamique du matériau, issus de la théorie de viscosité linéaire est alors suffisante.

Le chargement retenu permet donc de découpler le comportement de l'effet Mullins et notamment l'effet Payne de l'effet Mullins. Cependant, il faut bien garder en tête que le comportement est dépendant de la déformation maximale et qu'au delà de  $\epsilon_{max}$  le comportement redeviendra non-stabilisé. La caractérisation de l'effet Mullins se fera par la prise en compte du paramètre  $\epsilon_{max}$ . Ce large spectre à la fois en fréquence et en amplitude nous a conduit à utiliser parallèlement deux machines d'essais.

### I.2.3 Machines d'essais

L'ensemble des essais a été réalisé au Centre des matériaux et pour l'instant, le centre ne dispose pas de machine d'essais capable d'appliquer de grands niveaux d'amplitude de déplacement (supérieur à 1 mm) à une fréquence élevée (supérieure à 50Hz). C'est pourquoi, compte-tenu du large spectre à la fois en fréquence et en amplitude que nous souhaitons étudier, nous avons utilisé de manière complémentaire deux machines d'essais du Centre des Matériaux :

- la première, une Electropuls, permet d'appliquer de grands niveaux d'amplitude de déplacement pour des fréquences faibles à modérées,
- la seconde, un viscoanalyseur, permet de réaliser des essais à fréquences élevées mais avec de faibles niveaux de déplacement.

Ce paragraphe a pour but de synthétiser les caractéristiques de ces deux machines d'essais.



## a) Electropuls

L'électropuls E1000 d'INSTRON (voir figure I.39) est commandée électrodynamiquement et permet de mettre en oeuvre des essais aussi bien statiques que dynamiques sur une grande longueur utile en déplacement.

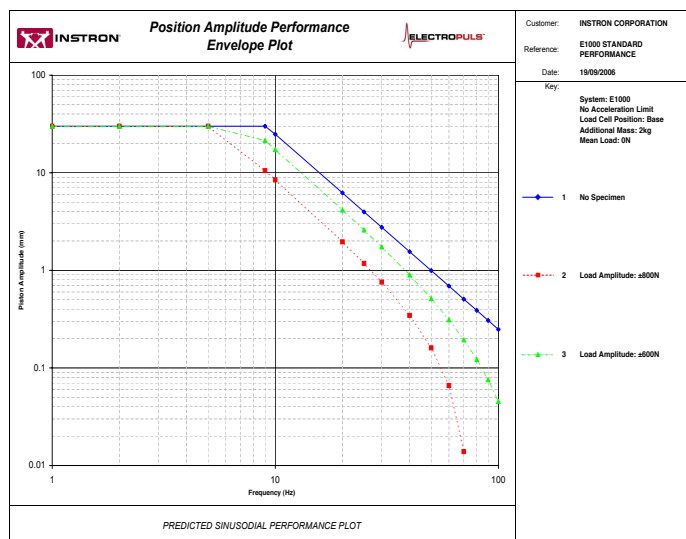
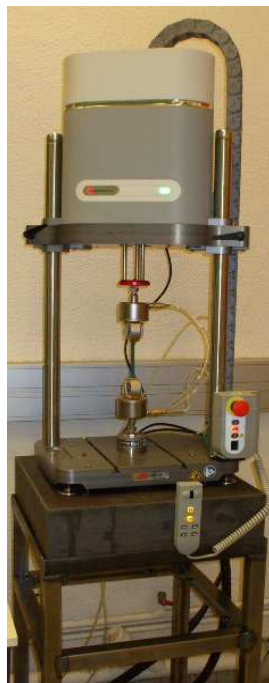


Fig. I.40 – Abaque fréquence-déplacement de l'électropuls

Fig. I.39 – Electropuls

Ses caractéristiques principales de fonctionnement sont les suivantes :

- Amplitude (crête-crête) maximale de déplacement :  $\Delta L = 60mm$
- Domaine de fréquence :  $\Delta f = 0.01 - 100Hz$
- Charge maximale statique :  $\Delta F = +/- 1000N$
- Charge maximale dynamique :  $\Delta F = +/- 710N$

Toutefois, le domaine fréquence-déplacement réel est délimité par l'abaque de la figure I.40 ; par exemple, à 30 Hz on ne peut pas imposer une amplitude de déplacement supérieure à 1 mm.

La cellule de charge utilisée est une Dynacell spécifique aux essais dynamiques de 2000N. La machine dispose de deux capteurs de déplacement : un LVDT et un codeur optique ; ce dernier permettant d'avoir une plus grande précision de mesure.

Compte-tenu des caractéristiques de fonctionnement de la machine, la taille des éprouvettes doit être adaptée pour permettre la déformation souhaitée (par rapport à l'amplitude de déplacement disponible) tout en restant à une charge inférieure à la charge maximale de la machine.

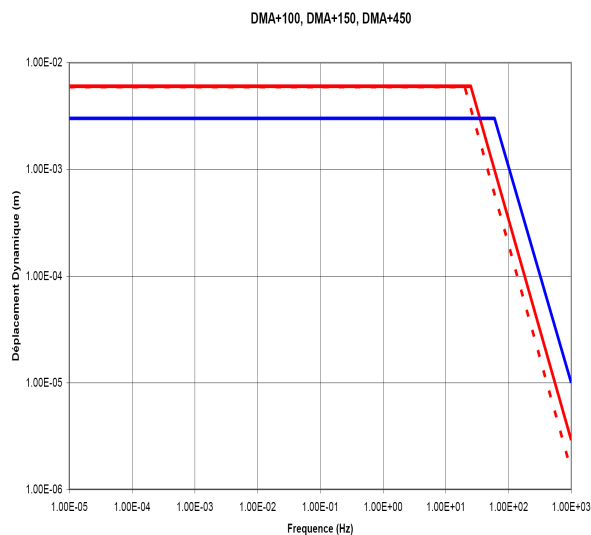
Pour garantir un suivi correct et rapide de la consigne dynamique souhaitée, la machine dispose d'une fonction de mesure de la rigidité de l'ensemble du montage qui, mesurée avant chaque essai sur un nouveau matériau ou sur une nouvelle géométrie, permet d'ajuster automatiquement certains paramètres d'asservissement.

### b) Viscoanalyseur / Dynamic Mechanical Thermal Analysis (DMTA)

Le Viscoanalyseur utilisé est un VA 4000 de chez 01dB-METRAVIB (voir figure I.42), il permet d'obtenir les caractéristiques dynamiques des matériaux en petites déformations : c'est un banc de mesure de raideur complexe. Le déplacement est réalisé par un pot vibrant (excitateur électrodynamique) : une bobine est mise en mouvement dans un champ magnétique par l'envoi d'un courant continu ou alternatif à ses bornes. Un film d'air très fin (quelques  $\mu m$ ) présent entre la bobine et l'axe lui confère une grande raideur permettant d'obtenir un déplacement linéaire. Ses caractéristiques principales de fonctionnement sont les suivantes :

- Domaine de fréquence :  $\Delta f = 10^{-5} - 1000 Hz$
- Amplitude (crête-crête) maximale de déplacement :  $\Delta L = 6 mm$
- Charge maximale statique :  $\Delta F = +/ - 150 N$
- Charge maximale dynamique :  $\Delta F = +/ - 70 N$
- Température :  $\Delta T = -150^{\circ}C - +450^{\circ}C$

De même, pour connaître le domaine réel fréquence-déplacement d'utilisation, il faut se référer à l'abaque de la figure I.41.



**Fig. I.42** – Viscoanalyseur VA 4000

**Fig. I.41** – Abaque fréquence-déplacement réalisable

Le déplacement imposé est mesuré par un capteur capacitif puis par un accéléromètre piezoélectrique en haute fréquence. La force dynamique transmise est mesurée par un capteur piezoelectrique en céramique.

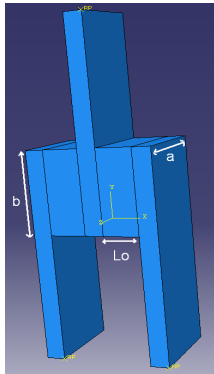
Etant un banc de mesure de raideur complexe, le viscoanalyseur donne directement accès aux valeurs de modules élastique et de perte. Cependant, nous avons tenu à récupérer les signaux de force et déplacement afin de réaliser notre propre post-traitement des données et vérifier les valeurs machines (C'est pourquoi par la suite deux résultats d'essai seront différenciés pour la DMTA : les données machines et les données calculées). En effet, cet instrument est différent d'une machine d'essais, il offre moins de souplesse notamment car il n'est pas prévu pour observer et récupérer les signaux de réponse en force et déplacement de l'éprouvette. De plus, il est difficile de maîtriser l'histoire du chargement vue par l'éprouvette. De nouveaux logiciels sont toutefois en développement. Cependant, actuellement, nous ne disposons pas d'autres technologies permettant d'aller en haute fréquence que celle du pot vibrant.

### I.2.4 Définitions des essais

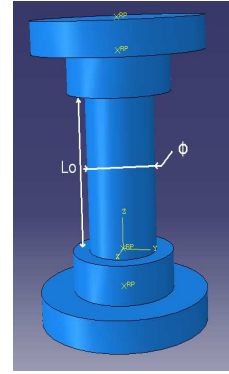
Tous les essais dynamiques réalisés sont pilotés en déplacement (consigne) par les machines ; le temps  $t$ , le déplacement  $d$  (appliqué) et la force  $f$  sont enregistrés.

#### a) Définition des éprouvettes

Dans le cadre du projet, le matériau a été caractérisé dynamiquement en cisaillement et en compression. Les éprouvettes utilisées pour ces essais sont schématisées sur les figures I.43 et I.44. On notera que pour des raisons de confidentialité, les dimensions de ces éprouvettes ne sont volontairement pas explicitées.



**Fig. I.43** – Schéma de l'éprouvette de double-cisaillement



**Fig. I.44** – Schéma de l'éprouvette de compression

Par définition, les déformations et contraintes nominales correspondantes sont calculées de la manière suivante :

$$\varepsilon = \frac{d}{l_0}, \text{ et } \sigma = \frac{f}{2.a.b} \quad (\text{I.8})$$

pour le cisaillement et

$$\varepsilon = \frac{d}{l_0}, \text{ et } \sigma = \frac{f}{\pi \cdot \frac{\Phi^2}{4}} \quad (\text{I.9})$$

pour la compression.

#### b) Matrice d'essais

La figure I.1 synthétise la matrice d'essais couvrant le domaine d'étude en fréquence et en déformation qui a été établie.

Ainsi, 6 niveaux de fréquences ont été retenus, les plus faibles sont couverts par l'Electropuls, les plus hautes par le viscoanalyseur. Une fréquence commune de 15 Hz a été choisie afin de vérifier la cohérence des résultats entre machines.

Jusqu'à 6 niveaux d'amplitude de déformation sont effectués par fréquence à 15 Hz notamment. Pour les plus hautes fréquences : 200 et 400 Hz seules respectivement les deux plus faibles et la plus faible amplitude de déformation ont pu être atteintes (annotation (\*)). Les amplitudes de déformation de 5 puis 1% ont respectivement été retenues en tant qu'essai commun entre les deux machines pour les éprouvettes de cisaillement puis de compression.

Machine d'essai	Type d'éprouvette	$f(Hz)$	$\Delta\epsilon(\%)$	$\epsilon_{max}(\%)$	$\epsilon_{moy}(\%)$
Electropuls	Double-cisaillement	5, 15, 40	5, 10, 20	120	80
					50
					0
				75	50
					25
					0
				50	30
					15 <sup>(**)</sup>
					0
	Compression		1, 2	-15	-10
					-5
					-2.5 <sup>(**)</sup>
-7.5		-5			
		-2.5 <sup>(**)</sup>			
		-1.25 <sup>(**)</sup>			
DMA	Double-cisaillement	15, 100, 200 <sup>(*)</sup> , 400 <sup>(*)</sup>	0.5, 1, 5	120	0
				75	25
				0	
				50	15
				0	
				0	
	Compression		0.1, 0.5, 1	-15	-2.5
				-7.5	-2.5
				-1.25 <sup>(**)</sup>	

**Tab. I.1** – Matrice d'essais réalisée (la couleur bleue évoque les valeurs communes entre les deux machines et les astérisques des cas particuliers détaillés dans le texte)

Ensuite, 3 puis 2 niveaux de déformation maximales respectivement pour les essais de double-cisaillement et les essais de compression ont été choisis afin de caractériser l'effet Mullins. On notera que tous les préchargements ont été effectués sur l'electropuls, la charge utile disponible sur le viscoanalyseur étant trop faible.

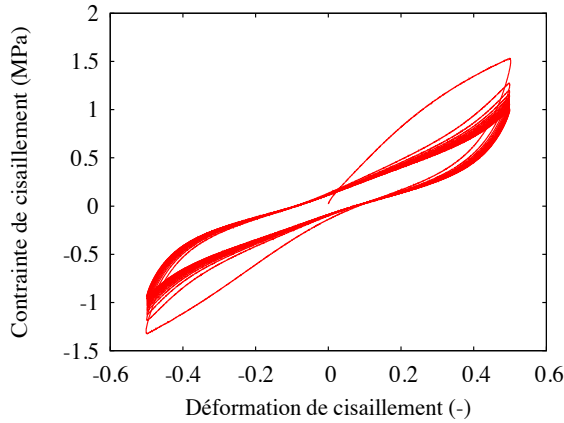
Plusieurs niveaux de déformation statique ont été retenus cependant la charge utile disponible sur le viscoanalyseur étant trop faible, ce paramètre a globalement été étudié par l'intermédiaire de l'Electropuls.

On remarquera que pour chaque jeu de paramètres, quelques critères en déformation sont respectés. Premièrement, on a toujours  $(\epsilon_{moy} + \Delta\epsilon) \leq \epsilon_{max}$  et deuxièmement  $\Delta\epsilon < \epsilon_{moy}$ ; d'où les cas particulier <sup>(\*\*)</sup> où les amplitudes de déformation maximales n'ont pas été retenues; par exemple pour le cas  $\epsilon_{max} = 50\%$ ,  $\epsilon_{moy} = 15\%$ , seules les amplitudes de 5 et 10% ont été réalisées.

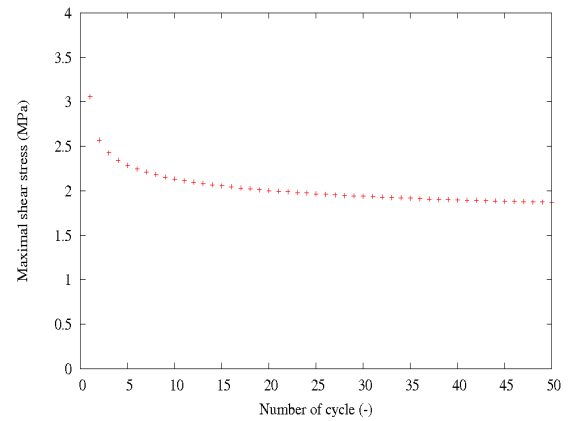
Enfin, dans le cas particulier des essais de compression, afin d'être en mesure d'effectuer un préchargement de l'éprouvette sur l'electropuls puis d'effectuer l'essai dynamique sur le viscoanalyseur, nous avons collé l'éprouvette plot à deux têtes métalliques qui nous permettent de fixer celle-ci aux machines d'essai et surtout nous permettent de transporter l'éprouvette sans avoir à la décoller des mors.

c) **Détermination des nombres de cycles  $n$  et  $m$**

Comme nous l'avons déjà évoqué au paragraphe I.1.3 a) et comme le suggère la figure I.45, les silicones chargés de silice soumis à un essai cyclique présentent un adoucissement cyclique (la contrainte au sein du matériau diminue au fur et à mesure des cycles) puis convergent vers un état stabilisé. L'observation de la chute de la contrainte maximale pour chaque cycle en fonction du numéro de cycle (voir figure I.46) permet de déterminer le nombre minimum de cycles  $n$  nécessaire à cette stabilisation.



**Fig. I.45** – Cyclage  $\pm 50\%$  de double-cisaillement



**Fig. I.46** – Chute de la contrainte maximale (adoucissement cyclique)

On observe bien la convergence de la contrainte maximale de chaque cycle vers une contrainte maximale d'équilibre. Pour déterminer le nombre minimum de cycles nécessaires au préchargement, nous avons décidé de retenir le premier cycle tel que la différence de contrainte maximale entre deux cycles successifs soit inférieure à 0.5% ; dans le cas de la figure I.46 par exemple, il s'agit du 18<sup>ème</sup> cycle. Le tableau I.2 recense le nombre minimum de cycles nécessaires à la stabilisation des matériaux pour chaque valeur de déformation maximale, sollicitation et matériau.

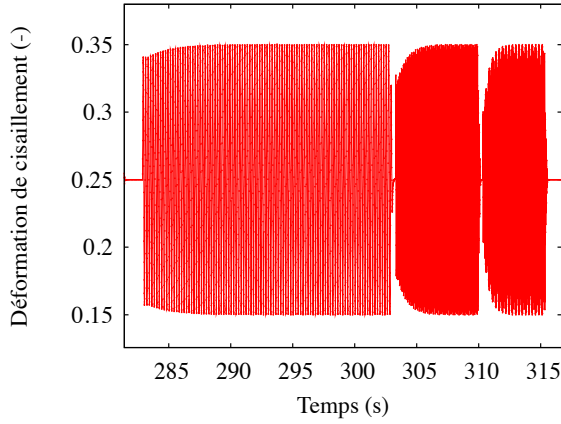
Type d'éprouvette	$\epsilon_{max}(\%)$	$n$ (Mat HDF)	$n$ (Mat LDF)
Double-cisaillement	150	-	18
	120	27	-
	75	23	16
	50	18	10
Compression	-15	21	16
	-7.5	13	12

**Tab. I.2** – Nombre de cycles  $n$  du préchargement

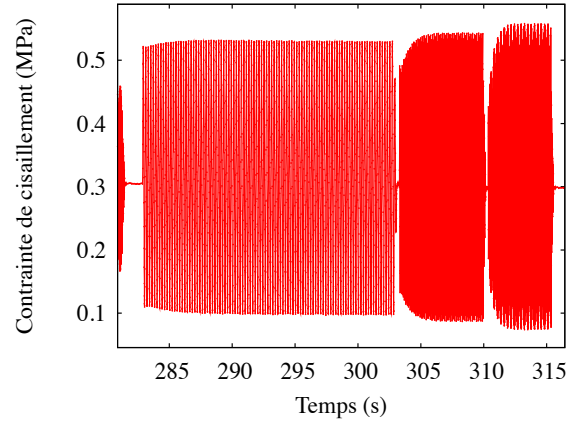
On constate que plus la déformation maximale appliquée est grande plus le nombre de cycles nécessaires à la stabilisation est grand. De plus, le nombre de cycles nécessaires à la stabilisation semble dépendre de la densité en charges du matériau : plus le matériau est chargé plus le temps de stabilisation est important.

Le préchargement appliqué permet de stabiliser le matériau et donc de diminuer l'adoucissement de contrainte lors de l'application de l'essai dynamique à proprement dit ; toutefois il est nécessaire d'appliquer un nombre de cycles  $m$  minimum dans un premier temps pour que

la machine atteint exactement le niveau d'amplitude demandée (les paramètres machines sont réglés de manière à diminuer le plus possible ce temps d'application) et dans un second temps pour s'assurer que le matériau se soit accommodé à la sollicitation. Sur les figures I.47 et I.48, on peut observer les temps d'application machine nécessaire pour chaque fréquence respectivement sur la consigne en déformation et la réponse en contrainte pour des sollicitations vibratoires en cisaillement, après préchargement jusqu'à 75%, de déformation statique de 25%, d'amplitude de déformation de 10% et des fréquences successivement appliquées de 5, 15 et 40 Hz.



**Fig. I.47** – Consigne en déformation appliquée pour 3 sollicitations vibratoires de fréquence 5, 15 puis 40 Hz



**Fig. I.48** – Réponse en contrainte associée à la consigne en déformation précisée sur la figure I.47

On observe sur ces figures des temps d'application de la consigne en déformation de plus en plus longs lorsque la fréquence augmente. Ainsi, compte-tenu de ces observations, et pour assurer un nombre suffisant de cycles stabilisés pour le dépouillement des essais (voir paragraphe suivant), nous avons retenu  $m = 100$  cycles dynamiques pour les fréquences 5 et 15Hz et  $m = 200$  cycles dynamiques pour 40Hz, le temps d'application machine de la consigne étant beaucoup plus pénalisant pour 40Hz. Il est à noter que dans le cas des essais DMTA, le logiciel dont nous disposons pour l'instant ne nous permet pas de contrôler ce paramètre  $m$ ; ainsi, pour les fréquences 100, 200 et 400Hz,  $m$  n'est pas contrôlé.

### I.2.5 Méthode de dépouillement des données d'essais

Il s'agit d'extraire les cycles stabilisés correspondants à chaque jeu de paramètres d'essai ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) puis de calculer les modules élastique ( $E'$ ) et de perte ( $E''$ ) associés. Comme présenté dans le paragraphe I.1.4, par définition, pour une déformation sinusoïdale imposée de la forme :

$$\epsilon_{consigne}(t) = \epsilon_{moy} + \Delta\epsilon \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad (I.10)$$

la réponse en contrainte associée pour un matériau viscoélastique linéaire est de type :

$$\sigma_{consigne}(t) = \sigma_{moy} + \Delta\sigma \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \delta) \quad (I.11)$$

$$= \sigma_{moy} + \Delta\epsilon \cdot (E' \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + E'' \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)) \quad (I.12)$$

Avec  $\delta$ , l'angle de déphasage entre la réponse en contrainte et la déformation imposée.

Cependant, le matériau étudié étant non-linéaire, la réponse en contrainte n'est pas parfaitement sinusoïdale de fréquence  $f$  mais est composée d'une somme de fréquences (fréquences harmoniques) ; la contrainte s'écrit alors de la manière suivante :

$$\sigma_{exp}(t) = \sigma_{moy} + \Delta\varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(2.k.\pi.f.t) + b_k \cdot \sin(2.k.\pi.f.t)] \quad (I.13)$$

De plus, pour des raisons expérimentales, le chargement réellement vu par l'éprouvette ( $\varepsilon_{exp}$ ) n'est jamais totalement parfait (fréquences parasites) et s'écrit aussi sous la forme :

$$\varepsilon_{exp}(t) = \varepsilon_{moy} + \Delta\varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [c_k \cdot \cos(2.k.\pi.f.t) + d_k \cdot \sin(2.k.\pi.f.t)] \quad (I.14)$$

Ainsi, pour extraire les modules  $E'$  et  $E''$  à partir de ces données expérimentales, nous avons décomposé successivement  $\varepsilon_{exp}(t)$  et  $\sigma_{exp}(t)$  en série de Fourier et extrait les amplitudes associées au fondamental (ie  $k = 1$  correspondant à la fréquence souhaitée que l'on notera  $f_0$ ) ; cette technique a notamment été utilisée par Lion (Lion, 1999) dans son étude du comportement dynamique d'élastomères chargés. En effet, on a :

$$b_1 = E'(\varepsilon_{moy}, \Delta\varepsilon, \omega) \quad \text{et} \quad a_1 = E''(\varepsilon_{moy}, \Delta\varepsilon, \omega) \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f. \quad (I.15)$$

**a) Echantillonnage - Traitement des signaux de déformation et contrainte par transformée de Fourier Discrète :**

Les données expérimentales (temps, déplacement, force ...) traitées sont nécessairement récupérées sous forme discrète c'est-à-dire échantillonnées. L'échantillonnage consiste à transformer un signal analogique (continu) en signal numérique (discret), en capturant des valeurs à intervalle de temps régulier. Afin de restituer correctement ces données, il est clair qu'il faut choisir une fréquence d'échantillonnage (acquisition des données) suffisamment grande. D'après le théorème de Shannon, toutes les fréquences du signal inférieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage sont correctement restituées. En d'autres termes, il faut au moins trois points pour définir un signal d'une période donnée.

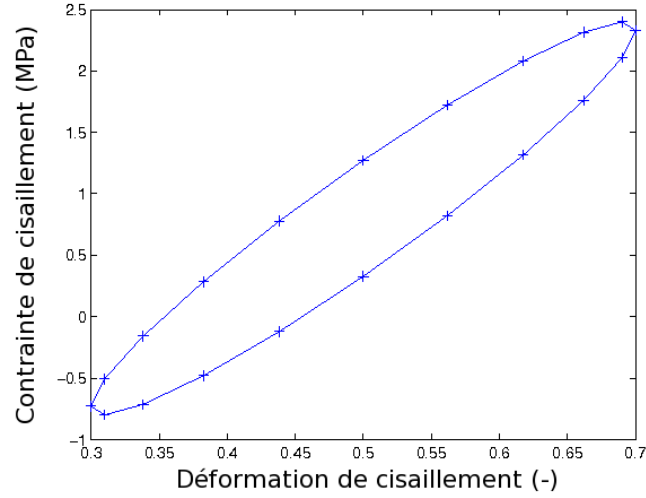
Par la suite, la fréquence d'échantillonnage (fréquence d'acquisition des données) sera notée  $f_{acq}$  et le pas de temps correspondant  $\Delta t_{acq}$ .

Pour une fréquence d'acquisition choisie  $f_{acq}$  et une fréquence fondamentale du chargement imposé  $f_0$  est défini le nombre d'échantillons  $N_e = \frac{f_{acq}}{f_0} = \frac{1}{f_0 \cdot \Delta t_{acq}}$  par période définissant le signal ; en d'autres termes, une période de signal est caractérisée par  $N_e$  points de mesure espacés par un pas de temps  $\Delta t_{acq}$ .

Dans notre cas, il est nécessaire de bien définir les contours d'une boucle d'hystérésis et notamment ses extrémités ; on note sur la figure I.49 qu'un minimum de 20 points par période semble être correct pour définir un cycle d'hystérésis. Ainsi, tous les essais réalisés ont été mis en place avec un nombre d'échantillons par période supérieur à 20 ; excepté dans le cas le plus critique de la fréquence fondamentale de 400 Hz (car la taille du fichier de donnée devient trop importante et l'on atteint la limite de la carte d'acquisition) où  $N_e$  sera égale à 20 c'est à dire une fréquence d'acquisition de 8000 Hz.

Ensuite, la transformée de Fourier permet d'associer à une fonction intégrable son spectre en fréquence. Et dans le cadre du traitement de signaux numériques (c'est-à-dire échantillonnés), on utilise la transformée de Fourier discrète qui est l'équivalent discret de la transformée de Fourier. Sa définition mathématique pour un signal  $s$  de  $N$  échantillons est la suivante :

$$S(k) = \sum_{n=1}^N s(n) \cdot \exp(-j2.\pi.(k-1).\frac{(n-1)}{N}) \quad , \quad \text{avec} \quad k \in [1, N] \quad (I.16)$$



**Fig. I.49** – Echantillonnage minimal d’un cycle d’hystérésis avec  $N_e = 20$  et  $\Delta t_{acq} = 1.25\text{ ms}$  pour une sollicitation vibratoire en cisaillement du type  $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, 50\%, 10\%, 15\text{Hz})$

La transformée inverse, qui permet de reconstituer un signal grâce à son spectre en fréquence s’exprime de la manière suivante :

$$s_{inv}(n) = \sum_{k=1}^N S(k) \cdot \exp(-j2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot \frac{(n-1)}{N}) , \text{ avec } n \in [1, N] \quad (\text{I.17})$$

Le principe de la transformée de Fourier discrète est de construire, à partir d’une fenêtre de signal donnée (définie sur un temps  $t_{fen\hat{e}tre}$  et comportant au total  $N_{fen\hat{e}tre}$  échantillons caractérisant ce signal), le signal “infini” composé par la répétition périodique de cette fenêtre pour ensuite en calculer son spectre en fréquence.

Le spectre en fréquence calculé par cette méthode est discrétisé. L’intervalle des fréquences du spectre d’échantillonnage est découpé avec un pas en fréquence  $f_e$ . Ce pas en fréquence définit les fréquences pour lesquelles la transformée de Fourier est calculée. Il vaut :

$$f_e = \frac{f_{acq}}{N_{fen\hat{e}tre}} \quad (\text{I.18})$$

Ainsi, dans le cas d’un signal périodique si l’on choisit une taille de fenêtre d’une période  $t_{fen\hat{e}tre} = \frac{1}{f_0}$ ,  $N_{fen\hat{e}tre}$  sera égal à  $N_e$  et  $f_e$  sera égale à  $f_0$  c’est-à-dire que le calcul sera effectué tous les  $k \cdot f_0$  (avec  $k$  entier). La précision en fréquence ne sera alors pas bonne. En revanche, si l’on choisit une taille de fenêtre de  $m$  périodes  $t_{fen\hat{e}tre} = \frac{m}{f_0}$ ,  $N_{fen\hat{e}tre}$  sera égal à  $m \cdot N_e$  et  $f_e$  sera égale à  $\frac{f_0}{m}$  : les points de calcul en fréquence seront plus resserrés.

Dans un soucis de précision en fréquence suffisante, la fréquence d’échantillonnage du spectre sera prise telle que  $T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{T_{acq}}{N_{fen\hat{e}tre}} < 0,05 \cdot T_0$  c’est-à-dire avec  $m > 20$  : une taille de fenêtre d’au moins 20 périodes.

Les signaux de déformation et contrainte sont donc extraits sur un temps  $t = (m \cdot \frac{1}{f_0}) - \frac{1}{f_{acq}}$



et décomposés en série de Fourier de la manière suivante :

$$Y_{\epsilon_{exp}}(k) = \sum_{n=1}^{N_{fen\hat{e}tre}} \epsilon_{exp}(n) \cdot \exp\left(-j2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot \frac{(n-1)}{N_{fen\hat{e}tre}}\right), \text{ avec } k \in [1, N_{fen\hat{e}tre}] \quad (\text{I.19})$$

$$Y_{\sigma_{exp}}(k) = \sum_{n=1}^{N_{fen\hat{e}tre}} \sigma_{exp}(n) \cdot \exp\left(-j2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot \frac{(n-1)}{N_{fen\hat{e}tre}}\right), \text{ avec } k \in [1, N_{fen\hat{e}tre}] \quad (\text{I.20})$$

avec  $N_{fen\hat{e}tre} = m \cdot N_e$ .

La fréquence d'échantillonnage s'écrit alors de la manière suivante :

$$f_k = \frac{k \cdot f_{acq}}{N_{fen\hat{e}tre}}, \text{ avec } k \in [0, N_{fen\hat{e}tre} - 1] \quad (\text{I.21})$$

Et il s'agit ensuite d'extraire les amplitudes complexes  $Y_{\epsilon_{exp}}(k_0)$  et  $Y_{\sigma_{exp}}(k_0)$  correspondant au fondamental  $f_0$  (indice noté  $k_0$ ) puis

$$E' = Re\left(\frac{Y_{\sigma_{exp}}(k_0)}{Y_{\epsilon_{exp}}(k_0)}\right), \text{ et } E'' = Im\left(\frac{Y_{\sigma_{exp}}(k_0)}{Y_{\epsilon_{exp}}(k_0)}\right) \quad (\text{I.22})$$

### b) Domaine de validité de l'approximation linéaire sur le matériau d'étude

Comme il avait été souligné dans le paragraphe 1.1.4, les modules élastique et de perte sont intrinsèquement associés à une théorie de viscoélasticité linéaire et définissent une boucle d'hystérésis de forme elliptique. Cependant, ces coefficients sont couramment utilisés dans la littérature (Payne, 1960), (Lion, 1998), (Dutta and Tripathy, 1992) mais aussi dans le cadre industriel pour caractériser la rigidité et la dissipation de matériaux sous sollicitations vibratoires.

Ce paragraphe a pour but de montrer la validité de cette approximation linéaire dans le cas étudié mais aussi de présenter ses limites.

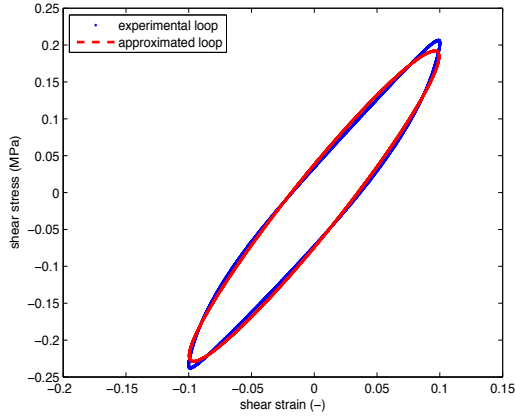
En choisissant d'approcher par une ellipse le cycle dynamique stabilisé obtenu après pré-chargement du matériau à plus grande déformation, nous supposons que le chargement vue par l'éprouvette ( $\epsilon_{exp}(t)$ ) peut être estimé par un signal théorique ( $\epsilon_{approché}$ ) donné par la transformée de Fourier inverse de  $Y_{\epsilon_{approché}}$  égal à  $Y_{\epsilon_{exp}}$  tronqué à sa composante constante ( $k=0$ ) et sa composante fondamentale :

$$Y_{\epsilon_{approché}}(k) = \begin{cases} Y_{\epsilon_{exp}}(k) & \text{pour } k = 0 \text{ et } k = k_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

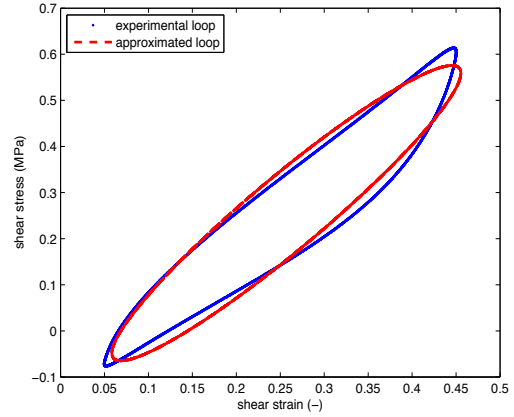
De même pour sa réponse en contrainte ( $\sigma_{exp}(t)$ )

Après avoir appliqué la transformée de Fourier inverse pour reconstruire les signaux filtrés ( $\epsilon_{approché}(t)$  et  $\sigma_{approché}(t)$ ), en utilisant la formule de la transformée inverse rappelée dans l'équation 1.24 (expression à adapter pour  $\sigma_{approché}(t)$ ), nous pouvons les comparer aux signaux expérimentaux de départ comme le montrent les figures 1.50, 1.51 et 1.52 pour différents jeux de paramètres.

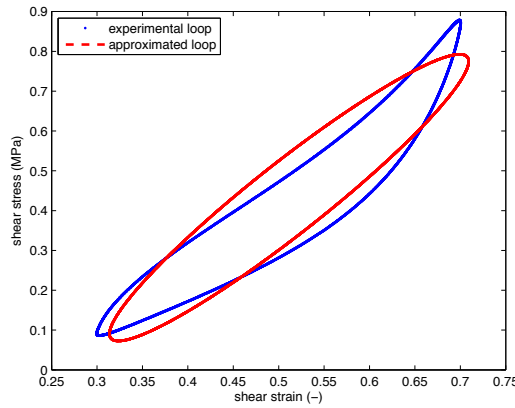
$$\epsilon_{approché}\left(\left(n-1\right)\frac{1}{f_{acq}}\right) = \frac{1}{N_{fen\hat{e}tre}} \sum_{k=1}^{N_{fen\hat{e}tre}} Y_{\epsilon_{approché}}(k) \exp\left(-j2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot \frac{(n-1)}{N_{fen\hat{e}tre}}\right) \quad (\text{I.24})$$



**Fig. I.50** – Comparaison entre la boucle expérimentale et celle approximée pour le jeu de paramètres  $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f_0)=(75 \%, 0 \%, 10 \%, 15 \text{ Hz})$



**Fig. I.51** – Comparaison entre la boucle expérimentale et celle approximée pour le jeu de paramètres  $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f_0)=(75 \%, 25 \%, 20 \%, 15 \text{ Hz})$



**Fig. I.52** – Comparaison entre la boucle expérimentale et celle approximée  $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f_0)=(75 \%, 50 \%, 20 \%, 15 \text{ Hz})$

On observe que, due à la non-linéarité du matériau, les boucles d'hystérésis ne sont pas totalement elliptiques.

Nous avons calculé l'erreur relative sur l'amplitude de déformation et l'amplitude de contrainte pour valider la justesse de l'approximation. Pour cela, et pour des raisons de représentativité de l'erreur, nous avons choisi d'utiliser pour la déformation, une norme infinie rapportée à l'amplitude de déformation ( $\Delta\epsilon$ ) comme l'illustre l'expression ci-dessous (de même pour les contraintes).

$$\epsilon_{erreur} = \frac{\max(\text{abs}(\epsilon_{exp} - \epsilon_{approché})) \cdot N_{fenêtre}}{|Y_{\epsilon_{approché}}(k_0)|} \quad (\text{I.25})$$

$$\sigma_{erreur} = \frac{\max(\text{abs}(\sigma_{exp} - \sigma_{approché})) \cdot N_{fenêtre}}{|Y_{\sigma_{approché}}(k_0)|} \quad (\text{I.26})$$

Ainsi, dans les cas des figures I.50 et I.51, les courbes sont assez proches et les erreurs sur la déformation et la contrainte valent respectivement 4.4 % et 8.1 % dans le cas de la figure I.50 et 7.1 % et 14 % dans le cas de la figure I.51. Pour la figure I.52 en revanche, les erreurs sur la déformation et la contrainte valent dans ce cas respectivement 13 % et 25 % et l'approximation devient plus grossière. Les figures I.54 et I.53 synthétisent les erreurs relatives en contrainte et déformation sur toute la matrice d'essais.

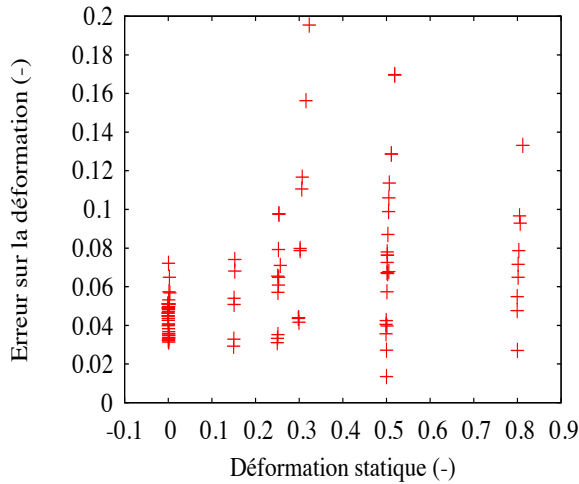


Fig. I.53 – Erreur sur la déformation

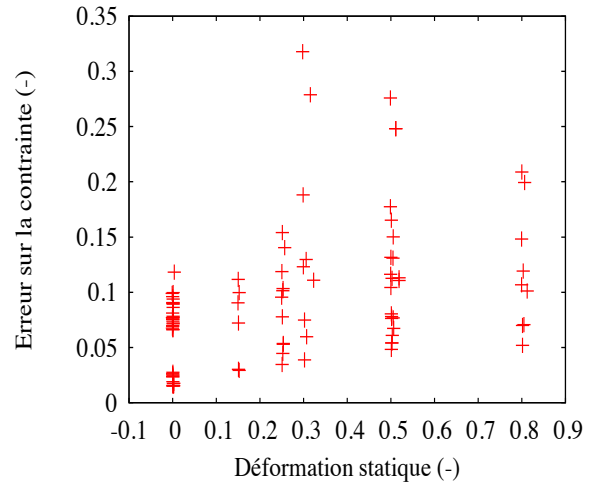


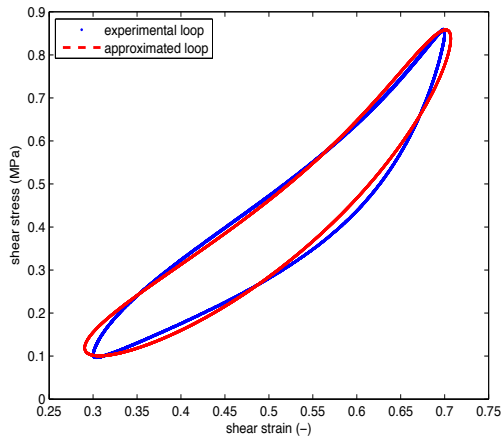
Fig. I.54 – Erreur sur la contrainte

On constate alors que pour la plupart des essais, l'erreur relative sur la déformation est inférieure à 10% et pour la contrainte à 15%. Les essais qui présentent le maximum d'erreur correspondent principalement au fort niveau de déformation statique ( $\epsilon_{moy}$ ) : 30, 50 et 80%. Ainsi, au regard des résultats sur les calculs d'erreur et de ce que l'on peut observer sur les graphiques comparant la boucle expérimentale et la boucle approximée, il semble fondé d'affirmer que l'approximation de la boucle d'hystérésis à une ellipse est correcte lorsque les erreurs relatives infinies sur l'amplitude de déformation et l'amplitude de contrainte sont respectivement environ inférieures à 12 et 15 % ; ce qui correspond environ à  $\epsilon_{moy} + \Delta\epsilon < \frac{2 \cdot \epsilon_{max}}{3}$ .

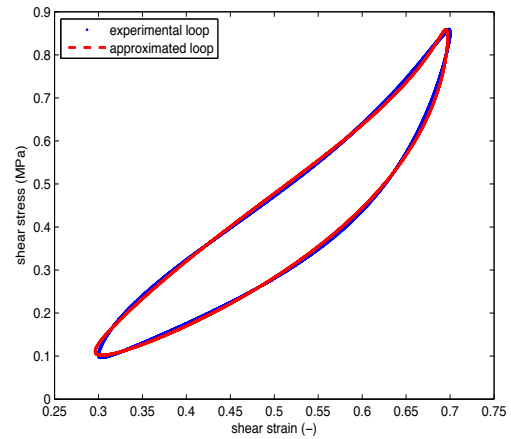
Nous avons pu constater, et il en sera discuté plus longuement dans le paragraphe 3 suivant, que la validité de la méthode est en partie due à la définition du chargement retenu et notamment le préchargement. Sans préchargement, les boucles d'hystérésis ont des formes très incurvées, comme celle de la figure I.52. L'effet Mullins contribue donc à cette forme non-linéaire. Et dans notre cas, lorsque les déformations se rapprochent de  $\epsilon_{max}$ , le découplage de l'effet Mullins n'est plus parfait, on se trouve dans la zone de fort gradient (cf paragraphe 1-2-3) et la forme des boucles redevient fortement non-linéaire.

Il est intéressant de remarquer que, dans le cas des essais où les boucles dynamiques sont les plus non-linéaires, si on intègre le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>ème</sup> harmoniques à la reconstruction du signal approximé par transformée de Fourier, on parvient à capter la quasi totalité de la non-linéarité. Les figures I.55 et I.56 représentent dans le cas identique à la figure I.52 l'approximation de la courbe expérimentale obtenue avec respectivement 1 harmonique et 2 harmoniques supplémentaires

Ainsi, on peut en déduire que si l'on souhaitait intégrer à notre modélisation le caractère non-linéaire des boucles dynamiques (ce que nous n'avons pas choisi de faire compte-tenu de la forme quasi-elliptique de la plupart des boucles dynamiques), il serait certainement judicieux de considérer aussi les deux premiers harmoniques de la décomposition de Fourier discrète et



**Fig. I.55** – Approximation de la courbe expérimentale obtenue avec 1 harmonique supplémentaire



**Fig. I.56** – Approximation de la courbe expérimentale obtenue avec 2 harmoniques supplémentaires

de pourquoi pas définir des “modules non-linéaires ” associés à ces deux harmoniques.

On notera enfin que lors du post-traitement, les valeurs de la déformation statique  $\epsilon_{stat} = \frac{Y_{\epsilon}(1)}{N}$ , de l’amplitude de déformation  $\Delta\epsilon = 0.5 \cdot (\epsilon_{max} - \epsilon_{min})$  et de la fréquence  $f_0$  sont extraites afin de travailler avec les valeurs réellement appliquées au matériau.

## I.2.6 Répétabilité - Reproductibilité

Afin de valider la justesse des essais menés, nous avons vérifié leur répétabilité (essais dans les mêmes conditions, sur la même machine) et la reproductibilité c’est à dire entre les deux machines d’essai.

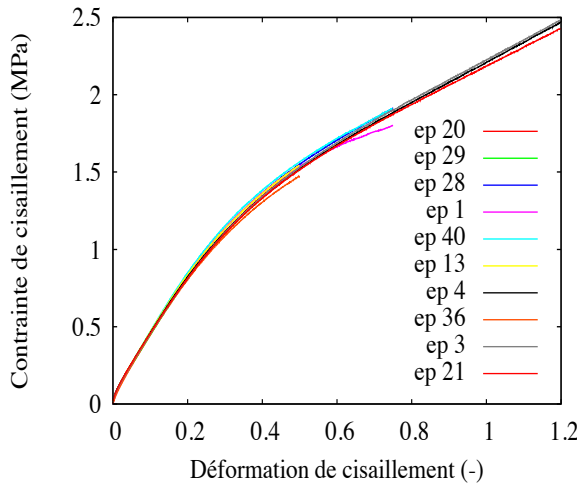
### a) Répétabilité entre les essais

Tout d’abord, on peut vérifier la répétabilité de l’essai en s’assurant de la superposition des courbes de première charge des préchargements. La figure I.57 contient 9 premières charges de cisaillement.

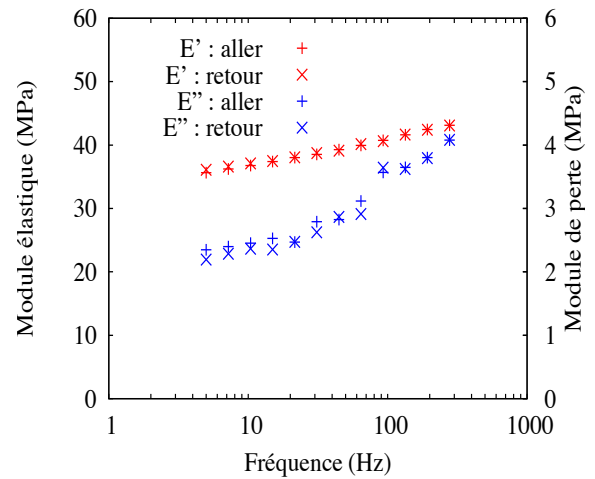
On note alors une bonne superposition de ces 9 courbes.

Ensuite, compte-tenu du nombre de paramètres (4 paramètres :  $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$  et  $f$ ) et de la matrice d’essais, nous avons choisi de tester plusieurs jeux de paramètres sur la même éprouvette.

Comme nous l’avons vu au paragraphe I.1.3, le matériau est très sensible à l’histoire des déformations et surtout au niveau maximum de déformation vu par le matériau. Ensuite, il est intéressant de savoir si le matériau est sensible à l’histoire des fréquences appliquées ou non. Sur la figure I.58, une unique éprouvette plot a été sollicitée dynamiquement en compression sans préchargement au préalable avec une déformation statique de  $-0.5\%$ , une amplitude de déformation de  $0.25\%$  et dans un premier temps des niveaux de fréquences successifs croissants allant de 5 à 400 Hz (nommé “aller”) puis en diminuant ensuite successivement la fréquence de 400 à 5 Hz (nommé “retour”).

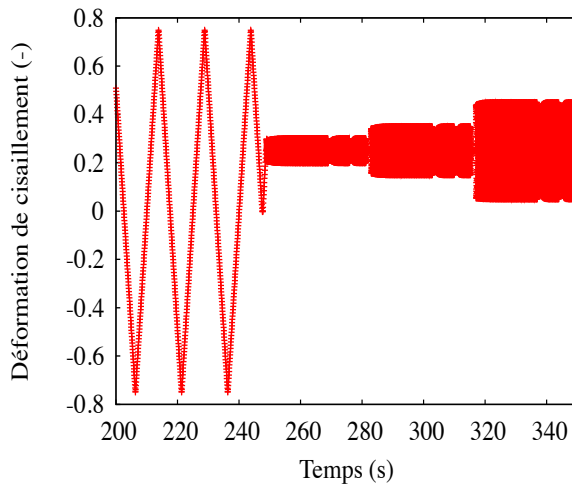


**Fig. I.57** – Vérification de la reproductibilité de l’essai sur la première charge du préchargement sur 9 éprouvettes sollicitée en cisaillement

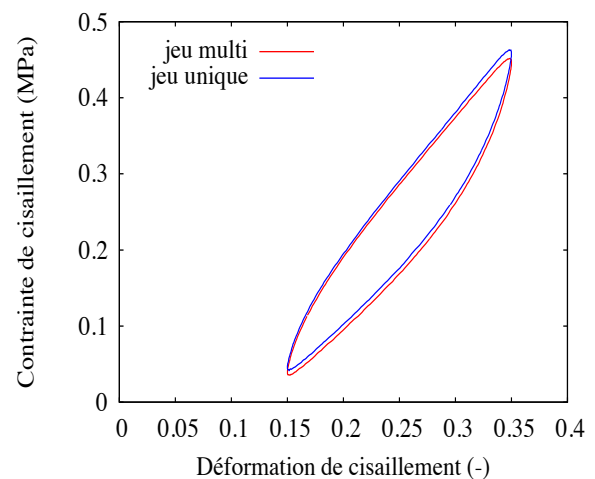


**Fig. I.58** – Vérification de la non-dépendance des modules élastiques et de perte avec l’histoire des fréquences appliquées

On constate alors que le matériau n’est pas sensible à l’histoire des fréquences qu’il a subi. Si l’on compare les valeurs des modules obtenues pour une fréquence donnée, de 20 Hz par exemple, que l’éprouvette ait subi des fréquences de plus de 100 Hz auparavant ou pas n’influence pas la valeur des modules associée à cette fréquence. Ainsi, sachant que le matériau n’est pas sensible à l’histoire des fréquences mais l’est avec la déformation, nous avons mis en place des essais, que nous nommerons “multi-paramètres”, comme celui décrit sur la figure I.59.



**Fig. I.59** – Essai multi paramètres avec  $\epsilon_{max} = 75\%$  et  $\epsilon_{moy} = 25\%$  puis différents niveaux de  $f$  et  $\Delta\epsilon$



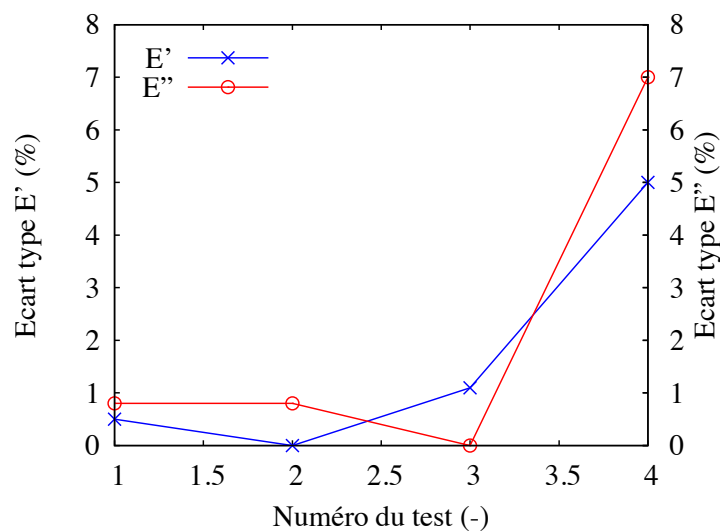
**Fig. I.60** – Vérification de la reproductibilité de l’essai multi paramètre sur les boucles d’hystérésis stabilisées

Ainsi, pour un niveau de déformation maximale ( $\epsilon_{max}$ ), ici 75%, et un niveau de déformation statique ( $\epsilon_{moy}$ ), ici 25%, plusieurs fréquences et amplitudes de déformation sont testées. La plus petite valeur d’amplitude de déformation est d’abord appliquée, ici 5%, puis les fréquences sont imposées successivement et de manière croissante, ici 5, 15 puis 40 Hz. Ensuite l’amplitude de déformation suivante est appliquée, ici 10%, pour les différentes valeurs de

fréquences et ainsi de suite jusqu'à la dernière valeur d'amplitude de déformation souhaitée, ici 20%.

La reproductibilité de ce type d'essai multi-paramètres a été vérifiée en les comparant avec des essais uniques. Sur la figure I.60 est comparé un essai dynamique obtenu avec un essai multi-paramètres avec  $\epsilon_{max} = 75\%$  et  $\epsilon_{moy} = 25\%$  (cf figure I.59) où le cycle dynamique stabilisé correspondant à  $\Delta\epsilon = 10\%$  et  $f = 15Hz$  a été extrait et un essai unique pour lequel le seul jeu de paramètres défini par  $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, 25\%, 10\%, 15Hz)$  a été testé. On observe alors une bonne superposition des deux boucles dynamiques ce qui tend à valider à la fois les essais multiparamètres et la répétabilité des essais.

En tout, 4 essais à jeu de paramètres unique ont été réalisés. La figure I.61 représente les écarts types sur les calculs des modules élastique et de perte pour ces essais.



**Fig. I.61** – Ecart type des essais de vérification de la répétabilité

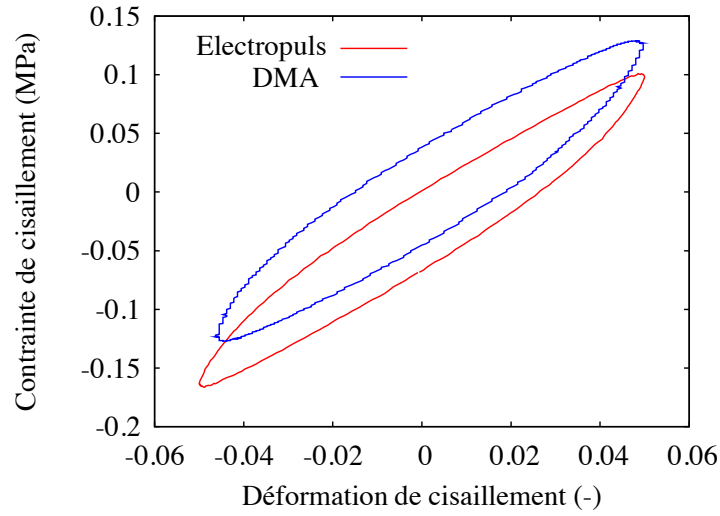
Les écarts types sont globalement inférieurs ou égaux à 5% sur les essais de répétabilité.

### b) Reproductibilité entre les machines d'essais

Comme il a été souligné lors de la définition de la matrice d'essais au paragraphe I.1.4 b), ceux-ci ont été réalisés à l'aide de deux machines d'essais et des tests communs ont été définis. On peut ainsi vérifier la reproductibilité des essais mis en place.

La figure I.62 représente les courbes d'hystérésis obtenue dans le cas particulier de l'essai de cisaillement caractérisé par le jeu de paramètres :  $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, 0\%, 5\%, 15Hz)$  avec les deux machines d'essai.

On observe un décalage sur la contrainte statique entre les deux essais et une erreur de suivi de l'amplitude de déformation sur le viscoanalyseur. Le décalage en statique s'explique par le fait que les deux éprouvettes ont été préchargées sur l'Electropuls (la DMA ne dispose pas de la force suffisante pour pouvoir appliquer le préchargement souhaité) puis l'éprouvette "Electropuls" a été sollicitée directement après la dernière décharge du préchargement donc à partir d'une force non-nulle (sur la boucle de préchargement, le zéro déformation ne correspond pas à une force nulle) et alors que l'éprouvette "DMA" a donc été laissée libre avant d'être fixée sur le viscoanalyseur pour réaliser l'essai dynamique sur la DMA.



**Fig. I.62** – Reproductibilité dans le plan contrainte-déformation

La figure I.3 synthétise les valeurs des modules élastiques et de perte des deux machines d'essai correspondant à cet essai. On notera que pour le viscoanalyseur, deux jeux de valeurs apparaissent : les valeurs sorties par la machine et celles obtenues en utilisant la méthode de dépouillement décrite dans le paragraphe I.2.5. En effet, compte-tenu des logiciels DMA dont nous disposons pour l'instant, nous obtenons directement à la fin de l'essai les valeurs des modules correspondant mais les courbes de déformation appliquée et de réponse en contrainte sont difficilement accessibles. Nous avons toutefois réussi à extraire ces signaux et à leur appliquer le même dépouillement que celui effectué sur les essais réalisés sur l'Electropuls.

	$G'$ (MPa)	$G''$ (MPa)
<i>Electropuls</i>	2.5	0.70
<i>DMA(machine)</i>	2.6	0.71
<i>DMA(recalcul)</i>	2.5	0.81

**Tab. I.3** – Préchargement 75%

Malgré le décalage en contrainte statique, on obtient une assez bonne cohérence sur les calculs des modules.

La figure I.4 résume les valeurs des modules élastiques et de perte des deux machines d'essai dans le cas particulier de l'essai de compression caractérisé par le jeu de paramètres :  $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (-15\%, -2.5\%, 1\%, 15Hz)$ .

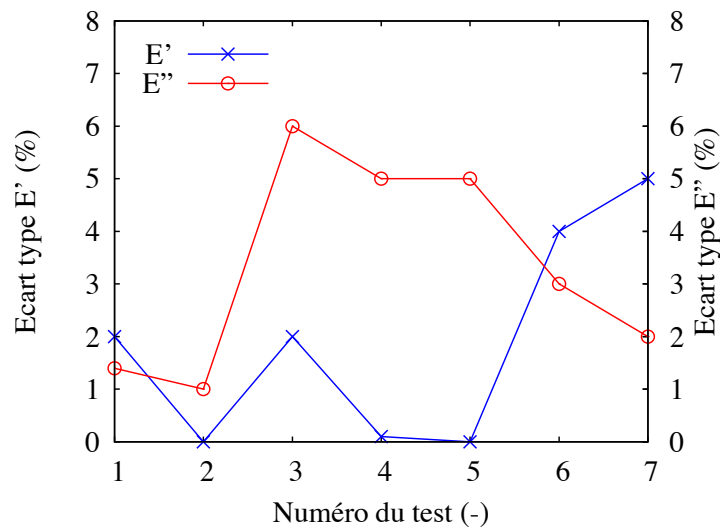
	$E'$ (MPa)	$E''$ (MPa)
<i>Electropuls</i>	15.8	3.7
<i>DMA(machine)</i>	15.4	4.1
<i>DMA(recalcul)</i>	15.4	5.0

**Tab. I.4** – Préchargement -15%

Ainsi, 7 essais communs aux deux machines ont été réalisés et on constate globalement que les valeurs de module élastique sont légèrement plus proches entre les deux machines si l'on considère pour la DMA les données recalculées et à l'inverse concernant le module de

perte si l'on utilise les données DMA de la machine. Ceci laisse à penser qu'en essayant de récupérer les signaux de déplacement et de force nous n'avons pas réussi à tenir compte d'un déphasage effectué par la machine.

Le graphique de la figure I.63 regroupe les écarts à la moyenne calculés sur les modules élastique et de perte obtenus pour ces 7 essais en considérant uniquement les données recalculées DMA pour  $E'(MPa)$  et uniquement les données machine DMA pour  $E''(MPa)$ .



**Fig. I.63** – Ecart type des essais de vérification entre machines d'essai

Au regard de cette figure, on constate que pour ces essais de vérification de la cohérence des résultats entre les deux machines d'essai, l'écart type se situe globalement autour de 5% pour les deux modules.

Ainsi, les essais mis en oeuvre sont bien répétables et reproductibles avec des écarts types inférieurs ou de l'ordre de 5%.

On notera qu'il sera donc inutile lors de l'identification des paramètres matériaux de prétendre à une erreur moindre.

## I.3 Résultats expérimentaux

Dans cette partie, une synthèse des résultats d'essais (courbes contrainte / déformation et courbes d'évolution des modules élastique et de perte) est présentée.

Les essais de double-cisaillement seront abordés dans un premier temps puis ceux de compression.

### I.3.1 Caractérisation en cisaillement

Comme défini précédemment, les essais réalisés se décomposent en une partie quasi-statique : le préchargement qui est constitué de  $n$  cycles (voir la définition des essais au paragraphe I.2.4 c)) jusqu'à  $\epsilon_{max}$  ce qui permet de se défaire de l'effet Mullins et de stabiliser le matériau et en une partie dynamique concernant l'étude dynamique proprement dite. Les paragraphes ci-dessous révèlent la synthèse des résultats concernant les cycles de préchargement puis de la partie dynamique.



a) Préchargements

D'après la matrice d'essais, trois niveaux de déformation maximale  $\epsilon_{max} = 50, 75$  et  $120\%$  ont été retenus. De plus, chaque préchargement est mené jusqu'à stabilisation du matériau. Sur les figures I.64 et I.65 le cycle stabilisé (n-ième cycle) de chaque niveau de préchargement est représenté ; sur la figure I.64 l'ensemble du préchargement à  $120\%$  a été superposé pour mieux situer le déroulement de l'essai.

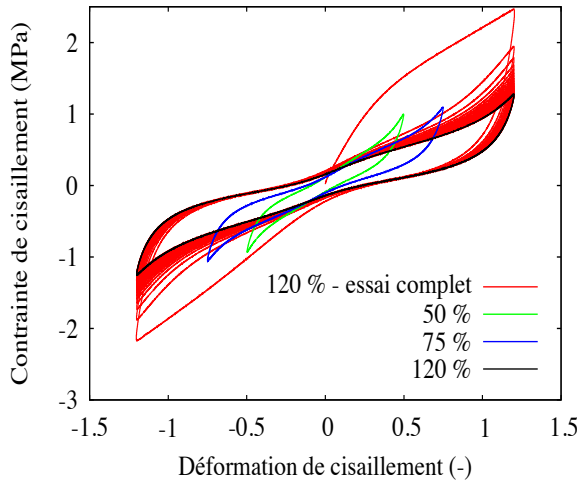


Fig. I.64 – Cycles stabilisés correspondant aux trois niveaux de préchargement

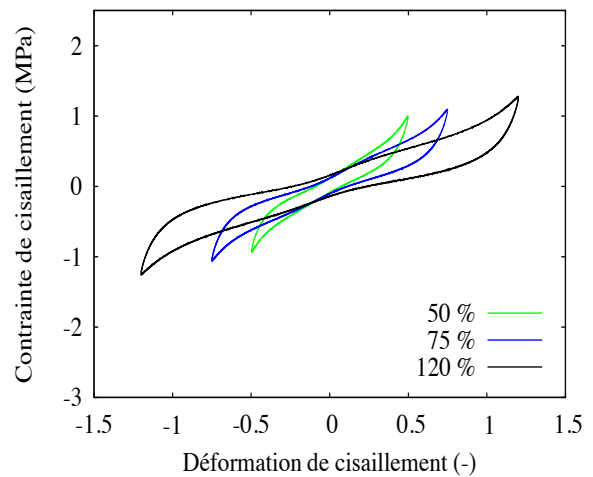


Fig. I.65 – Cycles stabilisés correspondant aux trois niveaux de préchargement

Au regard de ces courbes, on constate que plus  $\epsilon_{max}$  est grand plus la pente moyenne des cycles s'abaisse. Ainsi, plus le matériau est stabilisé à grande déformation plus il va s'adoucir en s'accommodant à cette sollicitation. Comme nous l'avons déjà souligné, ceci est dû à l'effet Mullins. On peut relier ce phénomène au fait que, entre autres, à  $120\%$  plus de chaînes ont atteint leur limite d'extensibilité et se sont rompues.

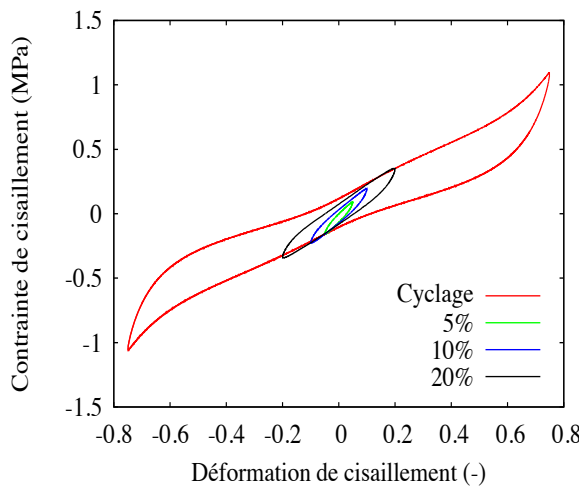
Une fois la stabilisation effectuée à une valeur de  $\epsilon_{max}$  donnée, l'essai dynamique est réalisé et comme il sera vu par la suite, les boucles dynamiques vont globalement être situées dans le domaine de contrainte-déformation délimité par le préchargement correspondant.

b) Dépendance à la déformation des boucles dynamiques

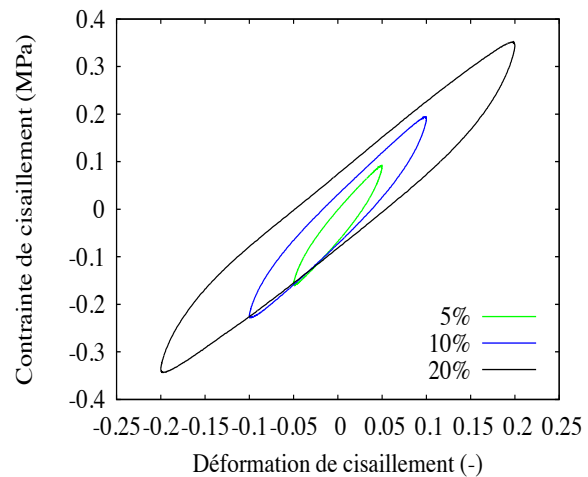
Une fois le préchargement effectué, une boucle dynamique se caractérise par son niveau de déformation statique  $\epsilon_{moy}$ , son amplitude de déformation  $\Delta\epsilon$  et sa fréquence  $f$ . Dans un premier temps à observer la dépendance à la déformation de ces boucles d'hystérésis à fréquence fixée est observée.

Pour cela, le cas d'éprouvettes ayant subies un préchargement de  $75\%$ , puis une déformation statique nulle, une fréquence de  $5Hz$  et des amplitudes de déformation de  $5, 10$  et  $20\%$  est considéré. Les boucles dynamiques obtenues ainsi que le cycle stabilisé issu du préchargement à  $75\%$  (figure I.66 uniquement) sont représentés sur les figures I.66 et I.67.

On observe que ces boucles dynamiques sont de forme assez elliptique et sont imbriquées les unes dans les autres : la valeur de contrainte moyenne est globalement indépendante de l'amplitude dynamique. De plus, leur pente moyenne chute lorsque l'amplitude de déformation croît ce qui n'est autre que la représentation dans le plan contrainte-déformation de l'effet Payne découplé de l'effet Mullins.

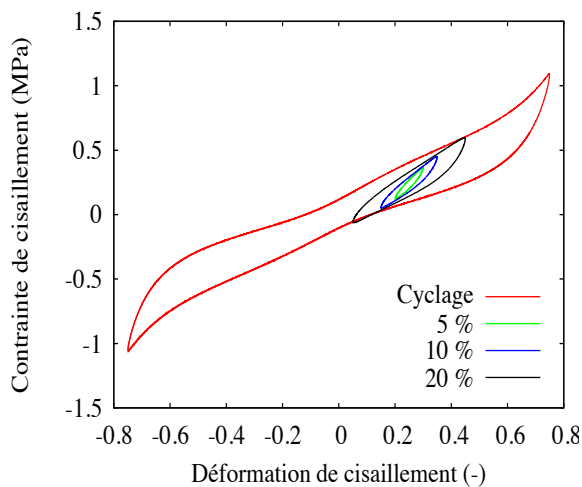


**Fig. I.66** – Boucles dynamiques  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, 0\%, -, 5Hz)$

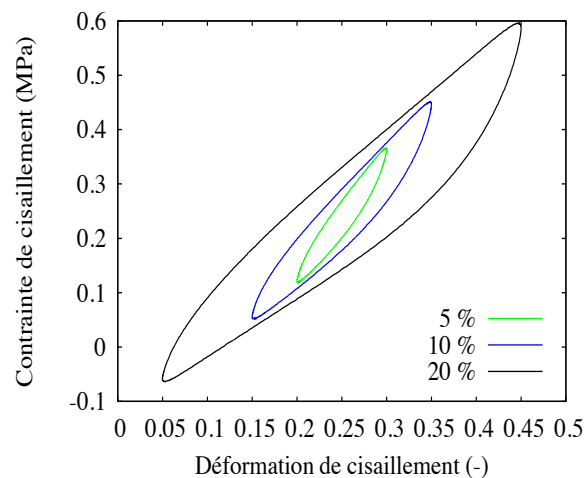


**Fig. I.67** – Boucles dynamiques  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, 0\%, -, 5Hz)$

Afin d'observer l'influence de la déformation statique sur les boucles dynamiques, un cas similaire au cas précédent mais pour une déformation statique de 25% (les autres paramètres restant inchangés) est considéré (voir figures I.68 et I.69).



**Fig. I.68** – Boucles dynamiques  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, 25\%, -, 5Hz)$

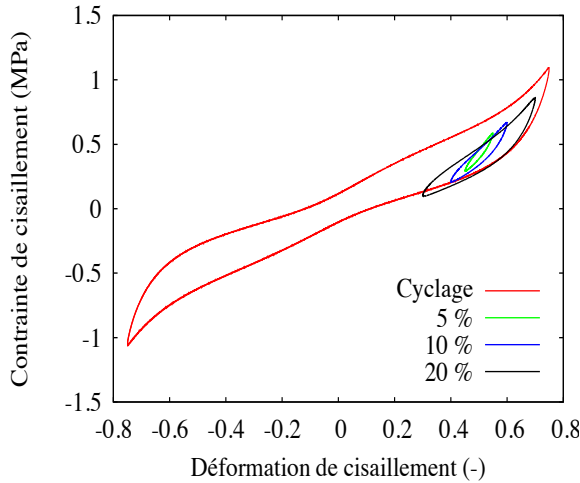


**Fig. I.69** – Boucles dynamiques  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, 25\%, -, 5Hz)$

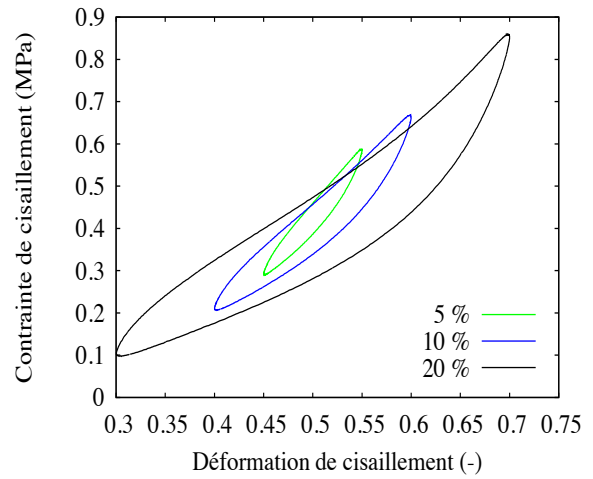
Les mêmes constatations peuvent être faites à ceci près que la forme des boucles dynamiques est beaucoup moins elliptique.

Enfin, le cas correspondant à la déformation statique la plus importante (50% dans ce cas de figure) toujours en gardant figés les autres paramètres est présenté sur les figures I.70 et I.71.

Cette fois-ci un net changement est observé : les boucles ne sont plus imbriquées les unes dans les autres, leur forme devient très non-linéaire et on constate que la contrainte moyenne n'est plus indépendante de l'amplitude de déformation mais chute avec celle-ci. On note, de plus, que les déformations maximales des boucles dynamiques ( $\epsilon_{moy} + \Delta\epsilon$ ) sont proches de la déformation maximale vue par le matériau c'est-à-dire  $\epsilon_{max}$ . Ce changement de comportement est étroitement lié à l'effet Mullins ; ce dernier a été écarté par la réalisation du préchargement



**Fig. I.70** – Boucles dynamiques  
( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 50%, -, 5Hz)

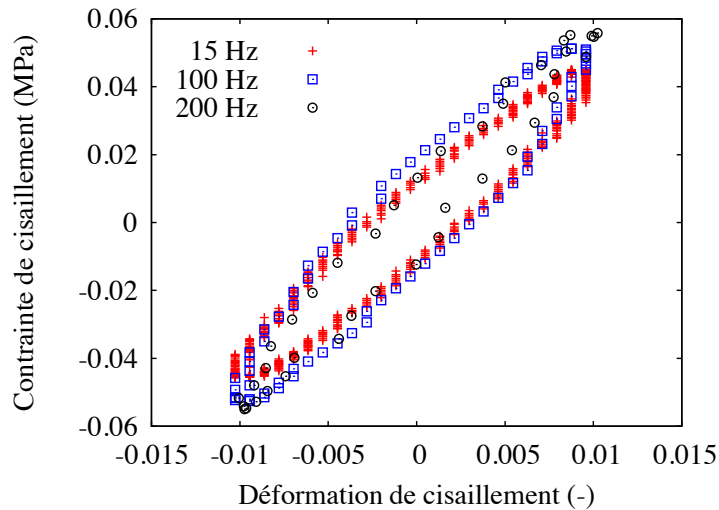


**Fig. I.71** – Boucles dynamiques  
( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 50%, -, 5Hz)

mais, comme il a déjà été évoqué au paragraphe I.1.3, proche de la valeur de déformation maximale il se produit un accroissement brutal de la contrainte, une période de transition entre l'état stabilisé précédent et le retour vers le comportement d'un matériau vierge.

### c) Dépendance à la fréquence des boucles dynamiques

Pour observer l'effet de la fréquence sur les boucles dynamiques, les essais concernant un préchargement à 75% suivi d'une déformation statique nulle, une amplitude de déformation de 1% et des fréquences de 15, 100 et 200Hz sont considérés. Les boucles dynamiques correspondantes sont représentées sur la figure I.72.



**Fig. I.72** – Boucles dynamiques ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 0%, 1% , - )

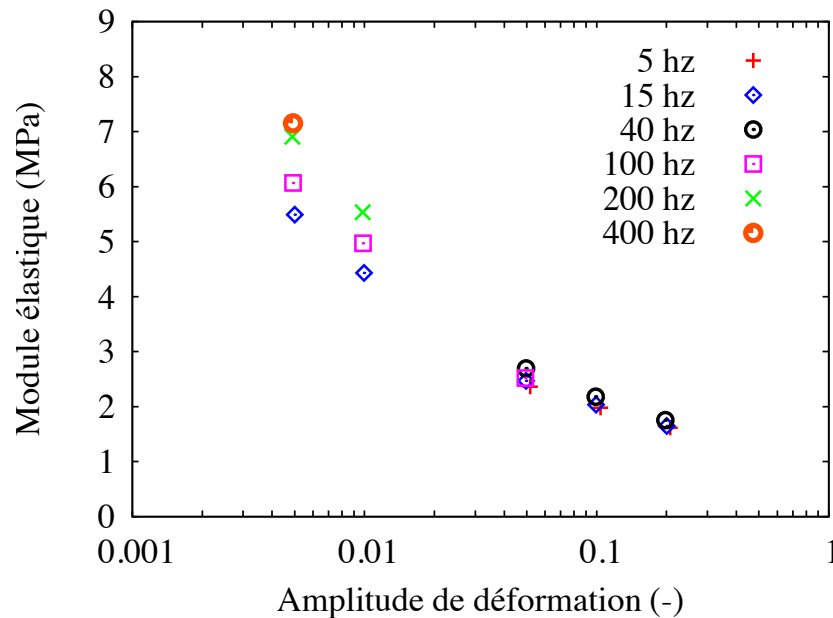
Cette figure met en avant l'augmentation de la pente moyenne des boucles et donc de la rigidité du matériau avec la fréquence. Cet effet est à relier au caractère visqueux des élastomères. On notera toutefois que sur ce domaine de fréquence, l'augmentation n'est pas très marquée.

Après avoir observé les caractéristiques des boucles dynamiques des essais de double-cisaillement, les caractéristiques des courbes d'évolution des modules élastique et de perte associées à ces boucles (modules obtenus après post-traitement) sont présentées dans les paragraphes suivants.

#### d) Evolution des modules élastique et de perte avec l'amplitude de déformation et la fréquence

Afin d'obtenir les tendances d'évolution des modules élastique ( $G'$ ) et de perte ( $G''$ ), examinons le cas particulier des essais ayant subis un préchargement de 75%, une déformation statique nulle, des amplitudes de déformation de 0.5, 1, 5, 10 et 20% et des fréquences de 5, 15, 40, 100, 200 et 400Hz.

La figure I.73 dépeint l'évolution du module élastique avec l'amplitude de déformation et la fréquence.



**Fig. I.73** – Evolution de l'effet Payne avec la fréquence ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (75%, 0%, -, -, -)

Cette figure met en évidence l'effet Payne pour différentes valeurs de fréquence. On observe la chute du module élastique avec l'amplitude de la déformation et l'augmentation de celui-ci avec la fréquence. On note de plus qu'aux grandes amplitudes de déformation, là où la chute de module se stabilise, la dépendance en fréquence est faible.

La figure I.74 représente, elle, dans les mêmes conditions l'évolution du module de perte.

Le module de perte passe par un maximum autour de 1% d'amplitude de déformation et l'amplitude de ce pic est d'autant plus importante que la fréquence est grande.

Les tendances obtenues coïncident avec les observations issues de la littérature comme par exemple celle de Wang et Robertson (Wang and Robertson, 2005) concernant l'évolution des modules élastique et de perte avec l'amplitude de déformation pour différentes fréquences pour un polybutadiène plus ou moins chargé en noir de carbone. La figure I.75 illustre leurs résultats.

On relèvera de plus pour le module élastique que le palier aux faibles amplitudes de déformation est d'autant plus élevé que la fréquence est élevée et pour le module de perte que

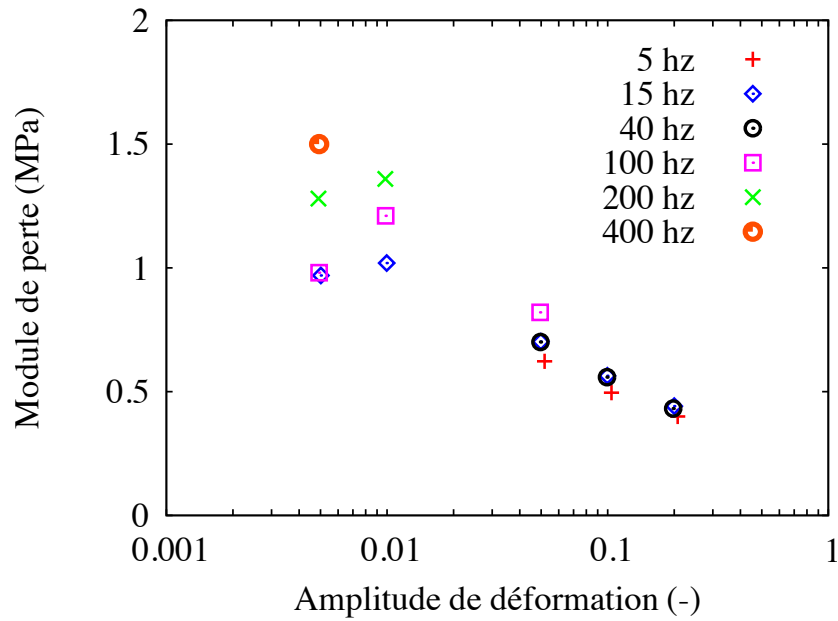


Fig. I.74 – Evolution de l’effet Payne avec la fréquence ( $\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f$ ) = (75%, 0%, - , - )

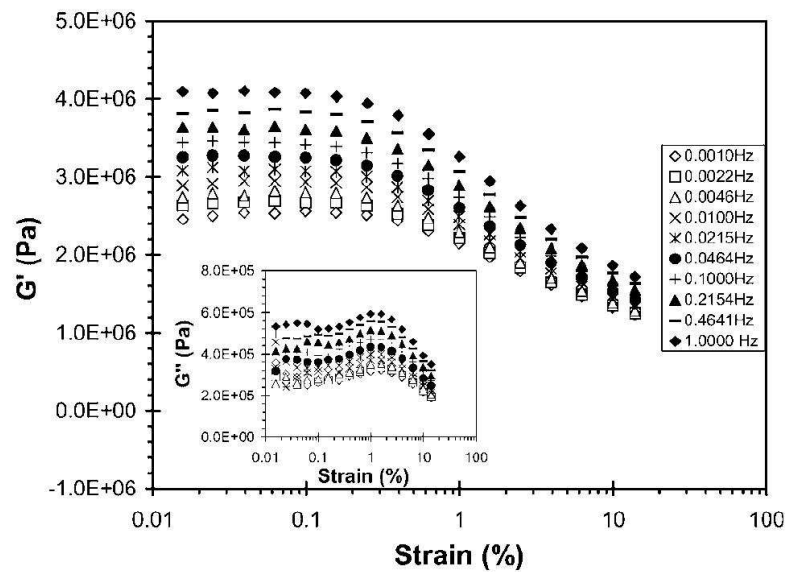
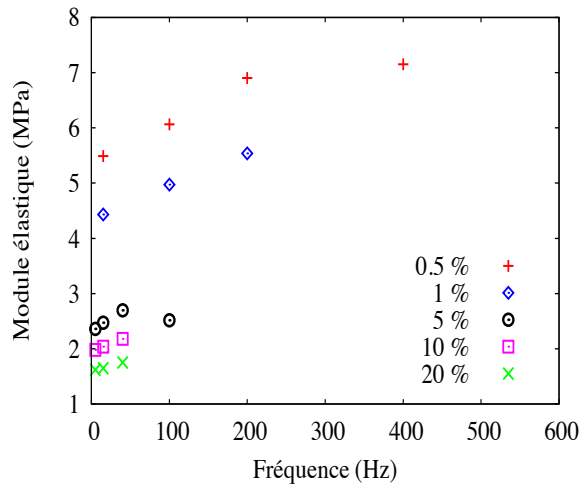


Fig. I.75 – Effet Payne et fréquence (Wang and Robertson, 2005)

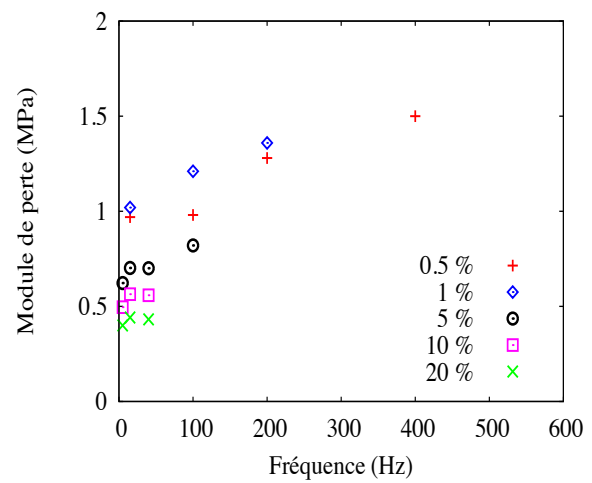
la position de son maximum reste fixe quelle que soit la fréquence, seule l’amplitude de ce pic augmente avec la fréquence; tendance qui était prévisible au vue de nos courbes d’évolution.

Ces mêmes observations peuvent être illustrées en choisissant de mettre la fréquence en abscisse comme sur les figures I.76 et I.77.

Ce choix de traçage révèle l’augmentation quasi linéaire du module élastique avec la fréquence. Quant au module de perte, la tendance est plus difficile à déterminer même si une tendance générale d’augmentation de celui-ci avec la fréquence semble ressortir.



**Fig. I.76** – Evolution du module élastique avec la fréquence

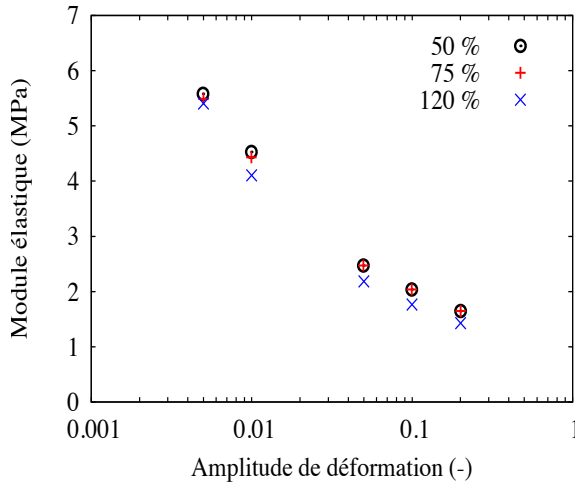


**Fig. I.77** – Evolution du module de perte avec la fréquence

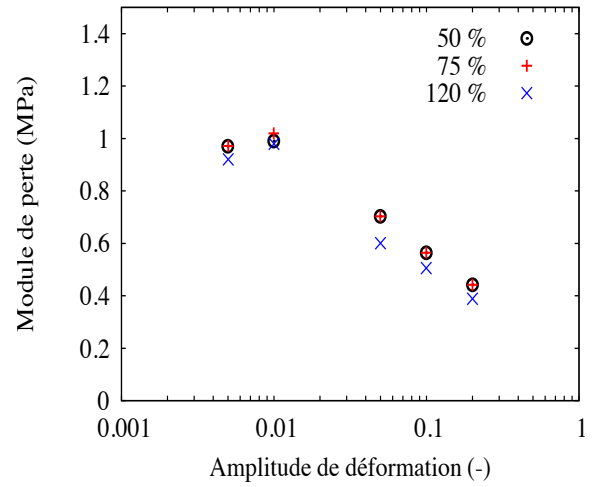
Ainsi, le matériau étant visqueux, l'augmentation de la fréquence entraîne alors une augmentation de rigidité et donc de la courbe d'évolution du module élastique avec l'amplitude de déformation (effet Payne). De plus, si l'on considère le modèle de Montes et ses collègues (Montes et al., 2003), qui sera détaillé au Chapitre II section II.1.4, dans lequel la présence d'une coque vitreuse entourant chaque particule est mise en avant. Il en ressort que lorsque la fréquence augmente, la température de transition vitreuse augmentant, l'épaisseur de la coque vitreuse augmente, augmentant ainsi la rigidité du matériau. Ce qui pourrait expliquer notamment aux faibles niveaux d'amplitude de déformation, là où les effets de structure dominant, la plus forte augmentation de module élastique observée avec la fréquence.

#### e) Evolution des modules élastique et de perte avec le préchargement ( $\epsilon_{max}$ )

L'influence du préchargement sur les courbes d'évolution des modules élastique et de perte est étudiée dans ce paragraphe; pour cela, le cas d'une déformation statique nulle, d'une fréquence de 15Hz, d'amplitudes de déformation de 0.5, 1, 5, 10 et 20% et pour les trois cas différents de préchargements (50, 75 et 120%) est considéré. Les figures I.78 et I.79 illustrent l'évolution des modules élastique et de perte associés à ce cas.



**Fig. I.78** – Evolution du module élastique avec la déformation maximale

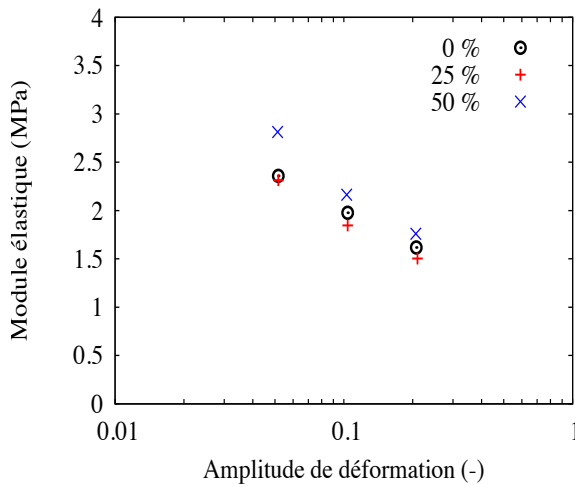


**Fig. I.79** – Evolution du module de perte avec la déformation maximale

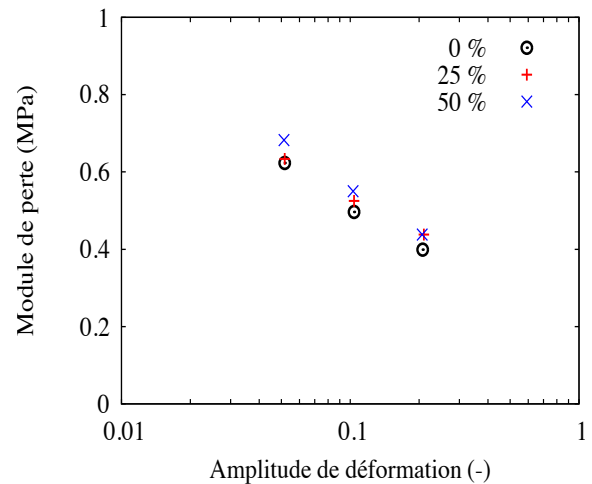
Une assez faible dépendance au préchargement sur l'évolution des modules est observée. On constate toutefois que plus  $\epsilon_{max}$  est grand, plus les modules élastique et de perte sont faibles : ce qui n'est autre que la traduction de l'effet Mullins. On notera que la différence sur les boucles d'hystérésis se fait alors principalement sur la valeur de la contrainte statique.

**f) Evolution des modules élastique et de perte avec la déformation statique ( $\epsilon_{moy}$ )**

Pour observer l'influence de la déformation statique sur les courbes d'évolution des modules élastique et de perte, le cas d'un préchargement jusqu'à 75%, une fréquence de 5Hz, d'amplitudes de déformation de 5, 10 et 20% et de déformations statiques de 0, 25 et 50% est étudié. Les figures I.80 et I.81 représentent l'évolution des modules pour ces cas particuliers.



**Fig. I.80** – Evolution du module élastique avec la déformation statique



**Fig. I.81** – Evolution du module de perte avec la déformation statique

Le module élastique est assez proche pour les deux valeurs de déformations statiques les plus faibles ; un écart plus important est observé entre ces deux premières et la valeur la plus importante (50%). Ceci rejoint les observations faites précédemment lors de la validation de l'approximation linéaire (paragraphe I.2.5 b)) sur le fait que lorsque les valeurs de

déformations de l'essai dynamique (c'est-à-dire  $\epsilon_{moy} + \Delta\epsilon$ ) se rapprochent de  $\epsilon_{max}$  ; la boucle dynamique a alors une forme très non-linéaire et donc la pente moyenne de celle-ci augmente brutalement.

Les mêmes observations peuvent être faites sur le module de perte et l'on constate de plus que celui-ci a tendance à augmenter avec la déformation statique.

Ainsi, pour toutes les boucles d'hystérésis suffisamment éloignées de  $\epsilon_{max}$ , l'effet Payne et quasi identique quel que soit le statique imposé ; en revanche pour les cas proches de  $\epsilon_{max}$ , les modules élastique et de perte sont augmentés par rapport aux cas précédents.

Les essais réalisés dans ce paragraphe ont montré, qu'une fois l'effet Mullins découplé de l'essai dynamique à proprement dit, les modules élastique et de perte dépendent peu du niveau de déformation maximale  $\epsilon_{max}$ , seule la contrainte moyenne des boucles dynamiques est modifiée s'adoucissant d'autant plus que  $\epsilon_{max}$  est grand.

Puis ceci reste vrai tant que les déformations maximales  $\epsilon_{moy} + \Delta\epsilon$  définissant la sollicitation vibratoire restent éloignées du niveau de déformation maximale  $\epsilon_{max}$  vue par l'éprouvette lors du préchargement. Lorsque  $\epsilon_{moy} + \Delta\epsilon$  approche  $\epsilon_{max}$ , une augmentation de rigidité brutale se produit (effet Mullins), les boucles dynamiques prennent une forme très non-linéaire et les modules élastique et de perte se voient augmentés.

Enfin, nous avons pu observer le couplage effet visqueux / effet Payne en observant l'effet de l'augmentation de la fréquence sur les courbes d'évolution des modules élastique et de perte avec la fréquence. L'augmentation de la fréquence a tendance à accentuer l'effet Payne en augmentant l'amplitude de la chute de module élastique ainsi que celle du pic de dissipation. En effet, si l'on considère, en plus de l'effet visqueux du matériau, le modèle de Montes et ses collègues (Montes et al., 2003), qui sera détaillé au Chapitre II section II.1.4, plus la fréquence augmente et plus l'épaisseur de la coque vitreuse entourant chaque particule augmente, ce qui pourrait expliquer l'augmentation de rigidité du matériau.

### I.3.2 Caractérisation en compression

Après les essais de caractérisation en double-cisaillement, le matériau a aussi été caractérisé en compression. Globalement, les tendances et phénomènes observés sont identiques, seuls les niveaux de contraintes et de modules diffèrent.

Le type de chargement appliqué est identique à celui mis en oeuvre précédemment. De même, les essais réalisés se décomposent en une partie quasi-statique : le préchargement constitué de  $n$  cycles jusqu'à  $\epsilon_{max}$  qui permet de se défaire de l'effet Mullins et de stabiliser le matériau (pour une déformation maximale donnée) et en une partie dynamique concernant l'étude dynamique à proprement dite.

Les paragraphes ci-dessous révèlent la synthèse des résultats concernant les différents préchargements puis la partie dynamique.

#### a) Préchargements

Conformément à la matrice d'essais, deux valeurs de préchargement ont été retenues :  $\epsilon_{max} = -7.5\%$  et  $-15\%$ . La figure I.82 illustre ces deux préchargements.

On observe que plus  $\epsilon_{max}$  est grand (en valeur absolue), plus la pente moyenne du cycle stabilisé est faible ce qui n'est autre qu'une conséquence de l'effet Mullins. De plus, on note une augmentation de la déformation rémanente.



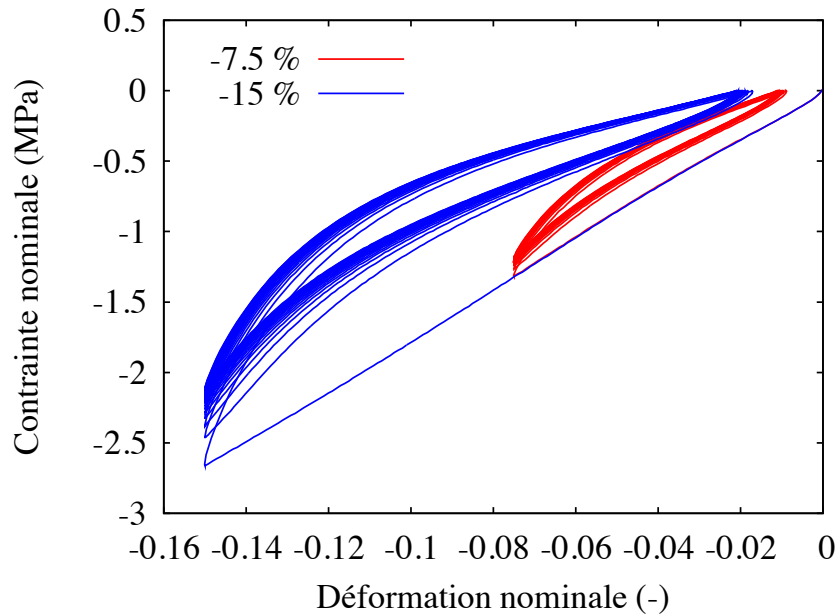


Fig. I.82 – Préchargement des essais de compression

#### b) Dépendance à la déformation des boucles dynamiques

Une fois le préchargement effectué, le matériau étant stabilisé pour ce niveau de déformation maximale l'essai dynamique à proprement dit est réalisé.

Afin d'examiner les résultats obtenus, prenons le cas particulier du préchargement à  $-15\%$ , d'une fréquence de  $5\text{Hz}$ , de déformation statique de  $-2.5$ ,  $-5$  et  $-10\%$  et d'amplitude de déformation de 1 et 2%. La figure I.83 regroupe le tracé de ces boucles dynamiques ainsi que le cycle stabilisé à  $-15\%$  correspondant.

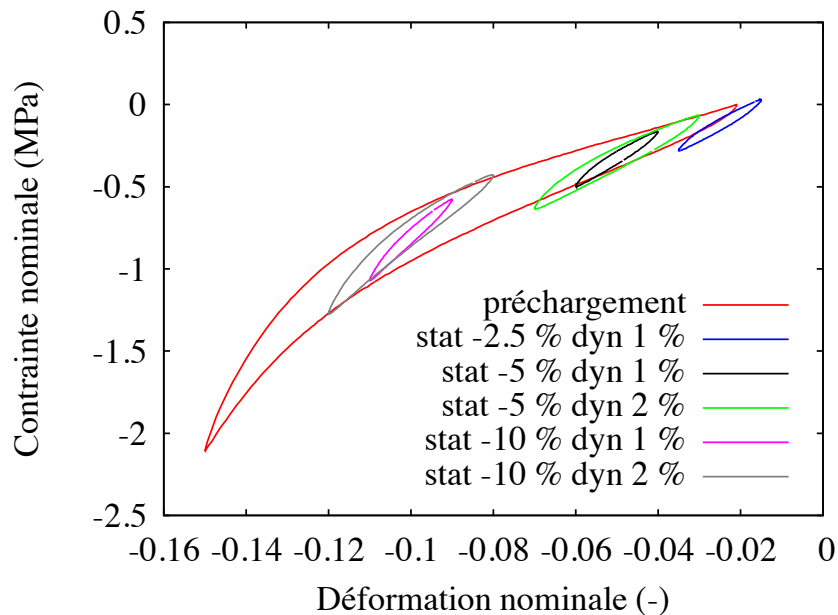
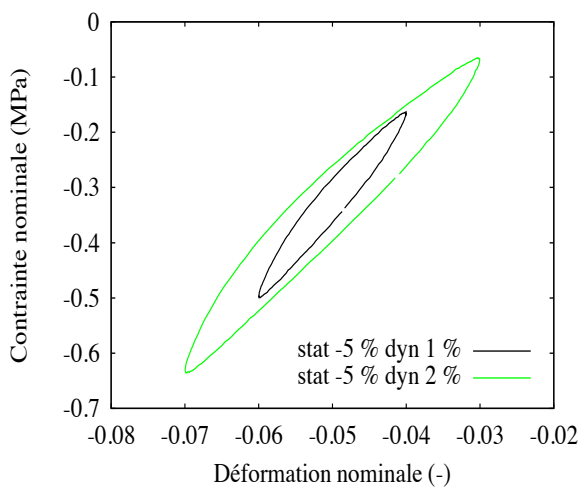


Fig. I.83 – Boucles dynamiques et cycle stabilisé (préchargement - 15 %)

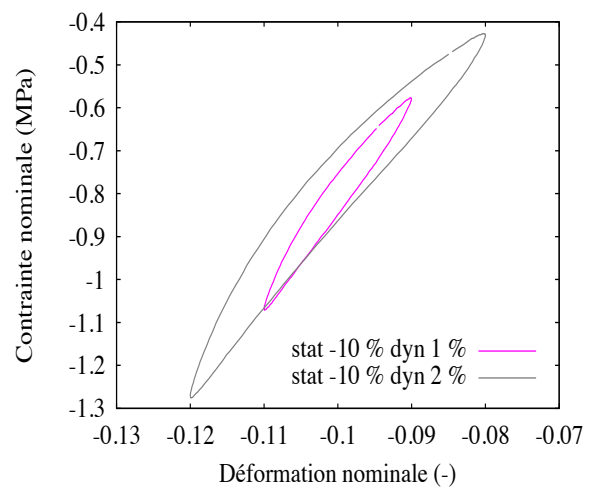
On peut noter dans un premier temps que le cycle stabilisé constitue globalement une enveloppe pour les boucles dynamiques. De plus, on constate que, comme il a été mis en avant

dans le dépouillement des essais de double-cisaillement, pour des niveaux de déformation ( $\epsilon_{moy} + \Delta\epsilon$ ) faibles devant  $\epsilon_{max}$ , les boucles d'hystérésis sont globalement elliptiques et leur niveau de contrainte moyenne est indépendant de l'amplitude de déformation appliquée. En revanche, pour des niveaux de déformation proches de  $\epsilon_{max}$  les boucles ont une forme très non-linéaire se rapprochant de celle de leur cycle stabilisé et leur contrainte moyenne chute avec l'amplitude de déformation appliquée.

Les figures I.84 et I.85 sont deux zooms de la figure I.83 pour mieux illustrer ce propos respectivement pour des déformations faibles et des déformations proches de  $\epsilon_{max}$ . Sur la figure I.84, dans le cas d'une déformation statique de  $-5\%$  et d'amplitude de 1 et 2%, les boucles sont imbriquées et de forme elliptique. Et sur la figure I.85 pour le cas de la déformation statique de  $-10\%$  en revanche, une non-linéarité dans la forme des boucles apparaît et la contrainte moyenne dépend de l'amplitude de déformation appliquée.



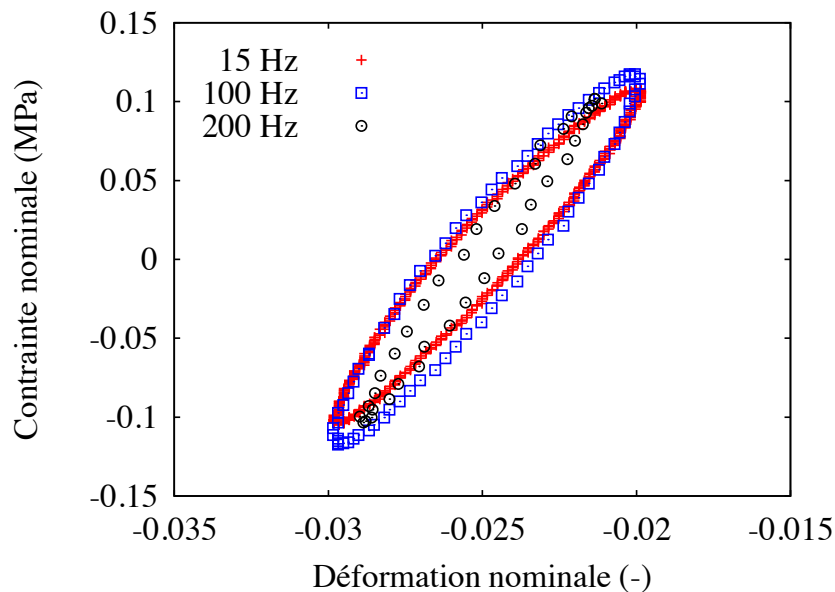
**Fig. I.84** – Boucles dynamiques  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (-15\%, -5\%, -, 5Hz)$



**Fig. I.85** – Boucles dynamiques  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (-15\%, -10\%, -, 5Hz)$

### c) Dépendance à la fréquence des boucles dynamiques

L'effet de fréquence sur les boucles dynamiques est étudié dans ce paragraphe; pour cela le cas d'un essai de préchargement jusqu'à  $-15\%$ , de déformation statique de  $-2.5\%$ , d'amplitude de déformation de  $0.5\%$  et de fréquences de 15, 100 et 200Hz est considéré. Les résultats illustrés par la figure I.86 mettent en évidence à nouveau l'augmentation de la pente moyenne (et donc de la rigidité) des boucles dynamiques avec la fréquence et donc aussi le caractère visqueux du matériau.



**Fig. I.86** – effet de fréquence sur les boucles dynamiques

On note un suivi de consigne moins précis pour l'essai à 200 Hz.

Après avoir observé les caractéristiques des boucles dynamiques de compression, l'évolution des modules élastique et de perte correspondant à ces boucles dynamiques est analysée.

**d) Evolution des modules élastique et de perte avec l'amplitude de déformation et la fréquence**

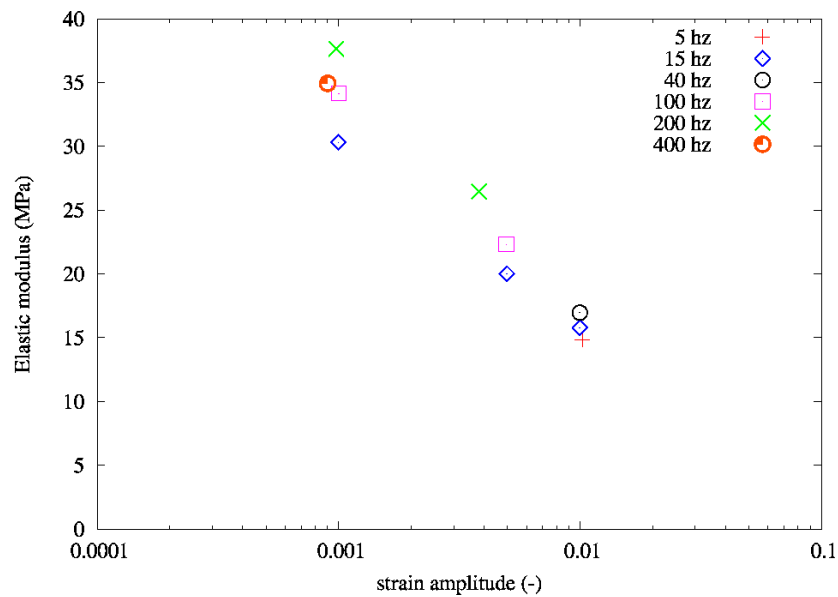
Afin d'obtenir les tendances d'évolution des modules élastique ( $E'$ ) et de perte ( $E''$ ), examinons le cas particulier des essais ayant subis un préchargement de  $-15\%$ , une déformation statique de  $-2.5\%$ , des amplitudes de déformation de 0.1, 0.5 et 1% et des fréquences de 5, 15, 40, 100, 200 et 400 Hz.

La figure I.87 dépeint l'évolution du module élastique avec l'amplitude de déformation et la fréquence pour ce cas particulier.

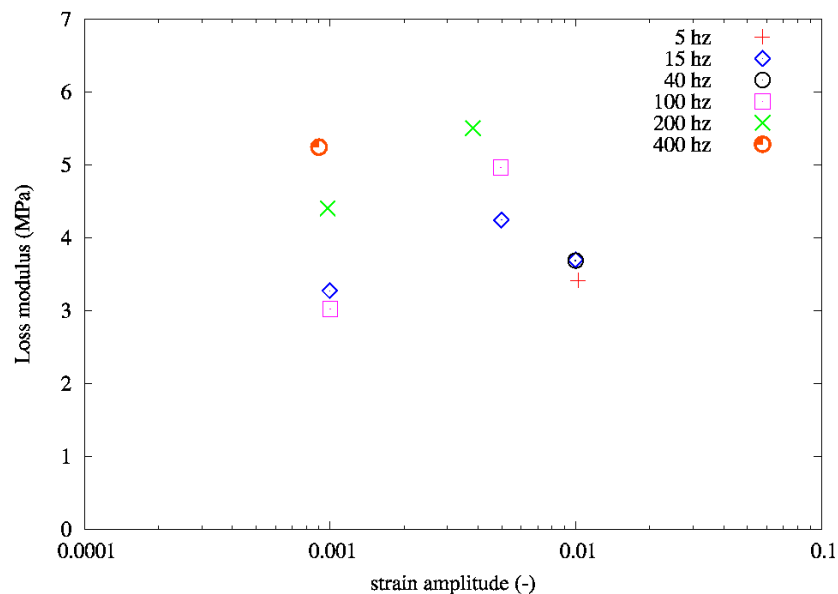
Cette figure met en évidence l'effet Payne pour différentes valeurs de fréquence. Tout comme dans le cas des essais de double-cisaillement, on observe la chute du module élastique avec l'amplitude de la déformation et l'augmentation de celui-ci avec la fréquence. On note de plus qu'aux grandes amplitudes de déformation, là où la chute de module se stabilise, la dépendance en fréquence est faible.

La figure I.88 dépeint pour le même cas de figure l'évolution du module de perte. Une progression avec passage par un maximum de dissipation est constatée avec un maximum d'autant plus important que la fréquence appliquée est grande. De plus la position de ce maximum est fixe avec la fréquence.

Enfin, l'évolution des modules élastique et de perte avec la fréquence peut être mise en avant par un traçage différent du même graphique que précédemment avec cette fois-ci la fréquence en abscisse (voir figure I.89 et I.90). Une variation globalement linéaire de ceux-ci avec la fréquence est alors remarquée.



**Fig. I.87** – Evolution du module élastique avec l'amplitude de déformation et la fréquence



**Fig. I.88** – Evolution du module de perte avec l'amplitude de déformation et la fréquence

### e) Evolution des modules élastique et de perte avec le préchargement ( $\epsilon_{max}$ )

L'effet du préchargement sur l'évolution des modules élastique et de perte est étudié en considérant le cas d'une fréquence de  $15\text{Hz}$ , d'une déformation statique de  $-2.5\%$ , d'amplitude de déformation de  $0.1$ ,  $0.5$  et  $1\%$  et des préchargements jusqu'à  $-7.5$  et  $-15\%$ . La figure [I.91](#) concerne la dépendance au préchargement du module élastique ; la figure [I.92](#) celle du module de perte.

Comme dans le cas des essais de double-cisaillement, on note que plus  $\epsilon_{max}$  est grand plus les deux modules chutent ce qui n'est autre que la traduction de l'effet Mullins. On retiendra de plus que les différentes courbes de Payne sont translatées suivant la verticale en fonction du niveau de préchargement.

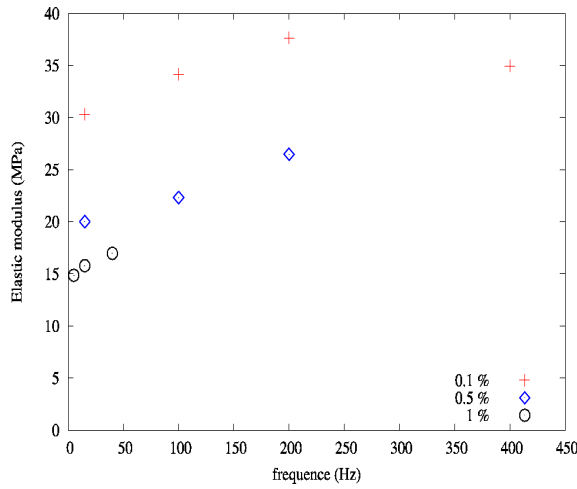


Fig. I.89 – Evolution du module élastique avec la fréquence

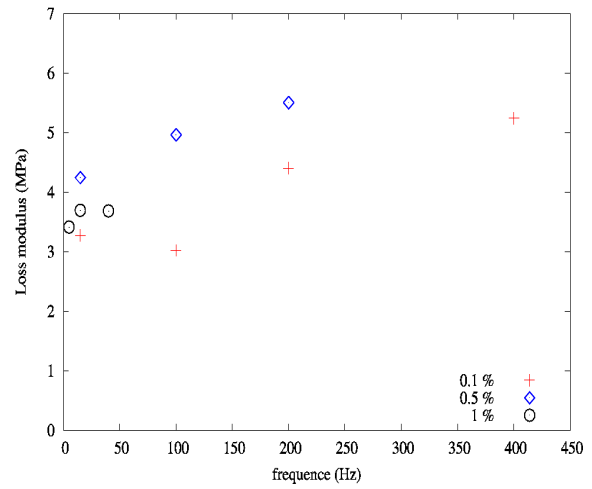


Fig. I.90 – Evolution du module de perte avec la fréquence

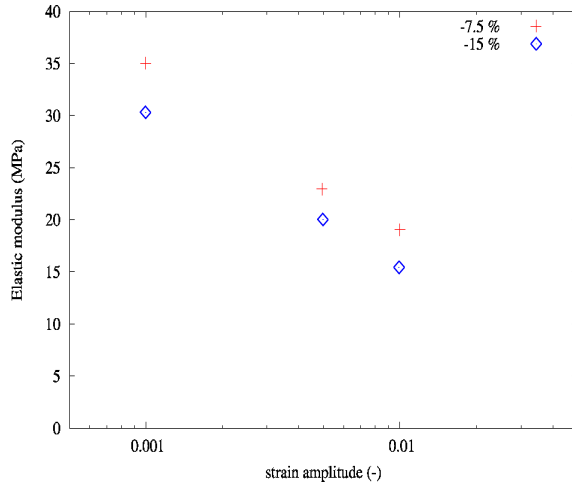


Fig. I.91 – Evolution du module élastique avec la déformation maximale

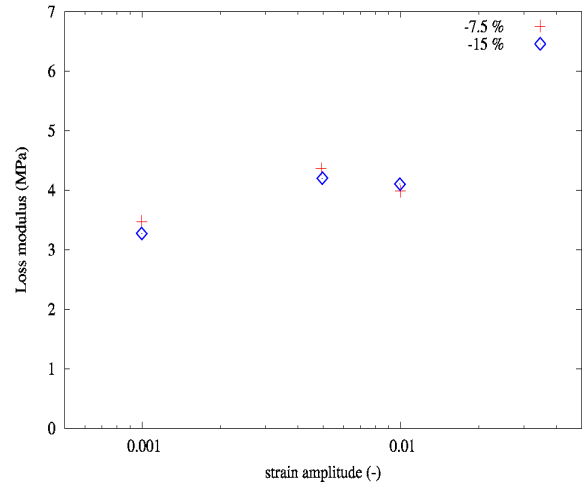


Fig. I.92 – Evolution du module de perte avec la déformation maximale

f) Evolution des modules élastique et de perte avec la déformation statique ( $\epsilon_{moy}$ )

L'influence de la déformation statique sur l'évolution des courbes de modules élastique et de perte est observé en prenant dans un premier temps le cas du préchargement jusqu'à  $-7.5\%$ , de la fréquence  $15Hz$ , des amplitudes de déformation de 0.1, 0.5 et 1% et des déformations statiques de  $-1.25$  et  $-2.5\%$ . Les figures I.93 et I.94 représentent les courbes d'évolution des modules pour ce cas particulier.

Ces figures mettent en évidence l'indépendance des deux modules à la déformation statique pour des niveaux de statique assez éloignés de  $\epsilon_{max}$ . Dans un second temps, le cas du préchargement jusqu'à  $-15\%$ , de la fréquence  $15Hz$ , des amplitudes de déformation de 0.1, 0.5, 1 et 2% et des déformations statiques de  $-2.5$ ,  $-5$  et  $-10\%$  est considéré. Les figures I.95 et I.96 représentent les courbes d'évolution des modules pour ce second cas particulier.

Dans ce second cas, on note clairement une dépendance au statique des deux modules dans le cas où le niveau de déformation est proche de  $\epsilon_{max}$  là où la forme de la boucle d'hystérésis

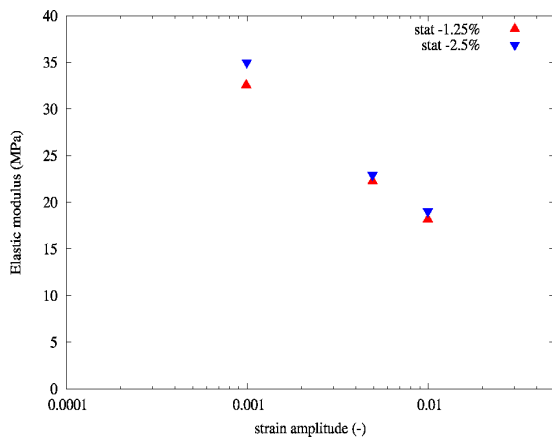


Fig. I.93 – Effet Payne et déformation statique

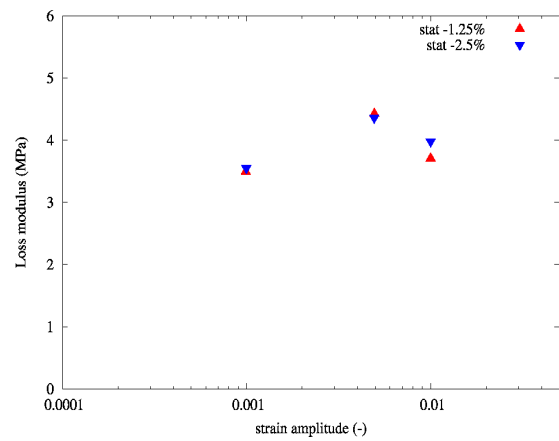


Fig. I.94 – Effet Payne et déformation statique

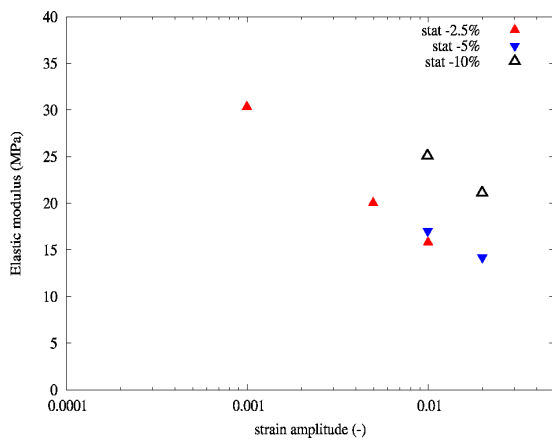


Fig. I.95 – Effet Payne et déformation statique

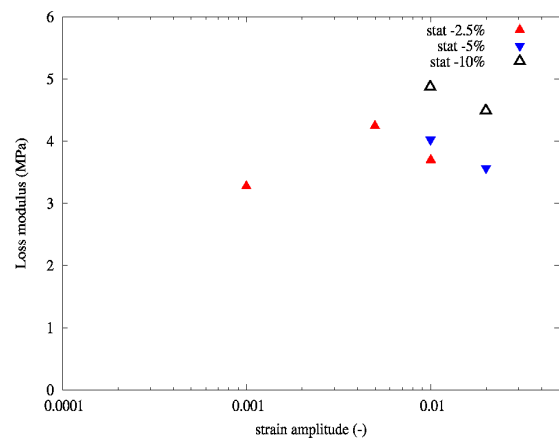


Fig. I.96 – Effet Payne et déformation statique

devient non-linéaire et la pente moyenne de celle-ci et donc le module élastique augmente rapidement.

Ainsi, pour toutes les boucles d'hystérésis suffisamment éloignées de  $\epsilon_{max}$ , l'effet Payne est quasi identique quel que soit le statique imposé ; en revanche pour les cas proche de  $\epsilon_{max}$ , les modules élastique et de perte sont augmentés par rapport aux cas précédents.

## I.4 Conclusion partielle

Le silicone chargé de silice a donc un comportement complexe couplant des mécanismes de déformations tels que l'hyperélasticité, la viscosité ainsi qu'une forte dépendance à l'histoire des déformations précédemment subies ou encore effet Mullins. De plus, sous sollicitations dynamiques ce matériau présente une dépendance non linéaire à l'amplitude des déformations appliquées, communément appelée effet Payne.

Afin de caractériser sous sollicitations dynamiques le silicone chargé de silice, nous avons mis en place un type de chargement particulier défini par 4 paramètres : la déformation maximale ( $\epsilon_{max}$ ), la déformation statique ( $\epsilon_{moy}$ ), l'amplitude de déformation ( $\Delta\epsilon$ ) et la fréquence ( $f$ ) et composé de deux phases : la phase de préchargement jusqu'à une déformation maximale donnée ( $\epsilon_{max}$ ) et la phase dynamique à proprement dite. L'avantage de ce chargement est de pouvoir découpler l'effet Mullins de l'effet Payne mais aussi d'obtenir des boucles dynamiques de forme beaucoup plus linéaire et dont la contrainte moyenne est alors fixée pour une déformation statique donnée. Une matrice d'essais a ensuite été définie en cisaillement et en compression permettant d'observer l'influence de ces 4 paramètres sur la réponse du matériau.

Enfin, pour chaque essai les valeurs des modules élastique et de perte correspondantes ont été calculées et leur évolution a été étudiée. Nous avons pu constater la forte dépendance non-linéaire de ces modules avec l'amplitude de déformation (effet Payne). De plus, plus la fréquence augmente et plus la valeur de ces modules augmentent (à part pour les grands niveaux d'amplitude de déformation). La dépendance avec le préchargement est assez faible toutefois plus la déformation maximale du préchargement est grande plus les modules chutent. La dépendance avec la déformation statique est aussi faible en tout cas tant que l'on reste dans des niveaux de déformations inférieurs à la déformation maximale du préchargement.

Dans le cadre de ce projet, ce sont ces courbes d'évolutions des modules élastique et de perte que nous cherchons à prévoir par un modèle de comportement. Ainsi, ces dernières serviront de base de données expérimentales pour identifier les paramètres matériau du modèle développé.

---

## Chapitre -II-

# MODÈLE DE COMPORTEMENT

---

*C*e chapitre reprend dans un premier temps les modèles de comportement déjà développés pour simuler le comportement d'élastomères chargés. Ensuite, en se basant sur le modèle hyperviscoplasticité développé par Qi et Boyce, nous proposons un modèle de comportement permettant de prévoir la réponse dynamique d'un silicone chargé de silice en tenant compte notamment de l'effet Payne. Enfin, les paramètres matériau sont identifiés à partir de l'ensemble des essais dynamiques réalisés.

### Sommaire

---

<b>II.1</b>	<b>Etat de l'art</b> . . . . .	<b>60</b>
II.1.1	Formalisme des grandes déformations : définitions et notations . . .	60
II.1.2	Modèles non-dissipatifs . . . . .	64
II.1.3	Modèles dissipatifs . . . . .	82
II.1.4	Modélisation de l'effet Payne . . . . .	88
<b>II.2</b>	<b>Modèle de Qi-Boyce</b> . . . . .	<b>95</b>
II.2.1	Définition du modèle . . . . .	95
II.2.2	Simulation d'essais dynamiques avec le modèle de Qi-Boyce . . . . .	98
<b>II.3</b>	<b>Le modèle DyMPPIEC</b> . . . . .	<b>100</b>
II.3.1	Définition du modèle proposé . . . . .	100
II.3.2	Potentiel du modèle DyMPPIEC - étude paramétrique . . . . .	102
<b>II.4</b>	<b>Identification des paramètres matériau associés aux essais de cisaillement</b> . . . . .	<b>108</b>
II.4.1	Identification à fréquence fixée . . . . .	108
II.4.2	Prise en compte de l'effet de la fréquence . . . . .	114
II.4.3	Etude de sensibilité des paramètres . . . . .	117
II.4.4	Validation sur une pièce anti-vibratoire . . . . .	120
<b>II.5</b>	<b>Ouverture vers d'autres modes de sollicitations</b> . . . . .	<b>124</b>
II.5.1	Identification à fréquence fixée associée aux essais de compression . . . . .	124
II.5.2	Identification associée à un mode mixte de cisaillement et de compression . . . . .	131
<b>II.6</b>	<b>Conclusion partielle</b> . . . . .	<b>136</b>

---



L'objectif de ce chapitre est de construire un modèle de comportement du matériau permettant de prévoir la réponse de celui-ci à une sollicitation vibratoire. Outre la prise en compte des mécanismes de déformation propres aux élastomères chargés développés dans le chapitre précédent, la finalité principale est de modéliser l'effet Payne.

## II.1 Etat de l'art

### II.1.1 Formalisme des grandes déformations : définitions et notations

#### a) Cinématique de la déformation

Soit  $\mathbf{X}$  le vecteur position d'un point matériel du corps  $B$  à l'état initial et soit  $\mathbf{x}$  le vecteur position de ce même point matériel à l'état déformé (corps  $B_t$ ) au temps  $t$ . La déformation du corps  $B_t$  pour tout temps  $t$  est donné par la transformation  $\chi$  :

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t). \quad (\text{II.1})$$

Par cette transformation le vecteur  $\mathbf{X}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, 0). \quad (\text{II.2})$$

La transformation  $\chi$  est une fonction bijective par définition.

Le vecteur  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \quad (\text{II.3})$$

représente le déplacement pour tout temps  $t$  du point matériel de position  $\mathbf{X}$  en  $t = 0$ .

Ensuite, on définit le tenseur gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  par la formule suivante :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad}_{\mathbf{x}} \chi(\mathbf{X}, t). \quad (\text{II.4})$$

Le déterminant de  $\mathbf{F}$ , noté  $J$ , est relatif au changement de volume engendré par la transformation. Il est strictement positif compte-tenu de l'axiome de non-interpénétrabilité entre molécules.

En utilisant la définition de  $\mathbf{F}$ , il vient que :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad (\text{II.5})$$

où  $d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{x}$  représentent respectivement un segment infinitésimal de matériau en  $\mathbf{X}$  et son image par la transformée en  $\mathbf{x}$ .

La vitesse d'un point matériel est  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{x}}$ , et si l'on s'intéresse à un incrément de vitesse, il est courant de le faire dans le repère mobile et c'est pourquoi, on définit le tenseur gradient de vitesse  $\mathbf{L}$  par l'expression suivante :

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (\text{II.6})$$

ou encore en fonction de  $\mathbf{F}$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}; \quad (\text{II.7})$$

puisque

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \text{ et } \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (\text{II.8})$$

D'après le théorème de décomposition polaire, le tenseur  $\mathbf{F}$  étant inversible, il peut se décomposer de manière unique à l'aide des tenseurs de dilatation symétriques définis positifs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , et d'un tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U}. \quad (\text{II.9})$$

Le tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  est orthogonal et vérifie donc les équations suivantes :

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{1} \text{ et } \det \mathbf{R} = 1. \quad (\text{II.10})$$

Les tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  diffèrent par rotations près,

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T, \quad (\text{II.11})$$

et

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (\text{II.12})$$

Cette méthode permet de décomposer la transformation avec une étape intermédiaire, étape pendant laquelle le matériau à uniquement subit une rotation (par  $\mathbf{R}$ ) ou uniquement une déformation pure (par  $\mathbf{U}$ ).

On définit ensuite le tenseur de dilatation de Cauchy-Green gauche de la manière suivante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2; \quad (\text{II.13})$$

puis le tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2. \quad (\text{II.14})$$

Il est important de noter que contrairement à  $\mathbf{F}$  qui n'est pas toujours symétrique, les tenseurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont symétriques par définition.

Enfin, le tenseur de déformation de Green Lagrange est défini par l'expression suivante :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}). \quad (\text{II.15})$$

Le tenseur gradient de vitesse  $\mathbf{L}$  se décompose de manière unique en une partie symétrique  $\mathbf{D}$  relative au taux de déformation et en une partie antisymétrique  $\mathbf{W}$  relative au taux de rotation :

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}. \quad (\text{II.16})$$

Il est aussi courant de réécrire le tenseur  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  en utilisant la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  ce qui aboutit aux expressions suivantes :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^{-1} \quad (\text{II.17})$$

et

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}^{-1}. \quad (\text{II.18})$$

où les tenseurs de type  $\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$ , avec  $\mathbf{S}$  tenseur quelconque, sont des tenseurs de gradient de vitesse et les tenseurs gradient de vitesse multipliés à gauche par un tenseur  $\mathbf{A}$  et à droite par un tenseur  $\mathbf{A}^{-1}$  sont des tenseurs gradient de vitesse dans une configuration intermédiaire que ces produits ramènent dans la configuration actuelle.

**Rappels mathématiques :**

Soit un tenseur  $\mathbf{M}$  symétrique, il existe une base orthogonale de vecteur propres  $\mathbf{e}_i$  et ses valeurs propres associées  $\lambda_i^2$  telle que :

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{\text{III}} \lambda_i^2 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i. \quad (\text{II.19})$$

Ainsi, les tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  étant relatifs aux dilatations pures, leurs valeurs propres donnent directement accès aux valeurs des dilatations principales dans chacune des directions. De plus, par construction les valeurs propres de  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont identiques et noté  $\lambda_i$ .

Il vient alors que les valeurs propres des tenseurs de dilatation de Cauchy-Green  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  (ayant aussi par construction les mêmes valeurs propres) donnent directement accès au carré des valeurs des dilatations principales dans chacune des directions.

De plus, on définit les invariants du tenseur  $\mathbf{M}$  (données indépendantes du référentiel choisi) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{trace}(\mathbf{M}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} [(\text{trace} \mathbf{M})^2 - \text{trace}(\mathbf{M}^2)] \\ I_3 &= \det \mathbf{M} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

avec  $I_1, I_2$  and  $I_3$  invariants de  $\mathbf{M}$  que l'on peut écrire en fonction des valeurs propres  $\lambda_i^2$  sous la forme :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

**b) Mesure des contraintes :**

Soit le vecteur densité surfacique de forces  $\mathbf{t}$  appliqué sur le corps  $B_t$  sur une surface élémentaire  $dA$  ; le vecteur force appliquée sur cette aire s'exprime alors de la manière suivante :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}_0 dA_0 = \mathbf{t} dA \quad (\text{II.22})$$

où  $\mathbf{t}_0$  est le vecteur densité surfacique de forces s'exerçant sur la surface élémentaire  $dA_0$  et  $\mathbf{t}$  le vecteur densité surfacique de forces s'exerçant sur la surface élémentaire  $dA$  ; avec  $dA$  surface image de  $dA_0$  par la transformation  $\chi$ .

La contrainte en un point matériel de la configuration actuelle est la contrainte vraie et elle fait référence au tenseur des contraintes de Cauchy  $\mathbf{T}$  qui s'exprime en fonction du vecteur densité surfacique de forces  $\mathbf{t}$  par la relation suivante :

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}, \quad (\text{II.23})$$

avec  $\mathbf{n}$  vecteur normal à  $dA$  ; d'où la relation :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T}\mathbf{n}dA. \quad (\text{II.24})$$

Si l'on s'intéresse à la contrainte en un point matériel dans configuration de référence, il s'agit de la contrainte nominale (ou contrainte de l'ingénieur), le tenseur correspondant est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{T}_0$  (parfois noté  $\mathbf{\Pi}$ ) et l'on a la relation :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T}_0 \mathbf{n}_0 dA_0, \quad (\text{II.25})$$

avec  $\mathbf{n}_0$  vecteur normal à  $dA_0$ .

Il est à noter que la détermination de la transformée d'une surface élémentaire n'est pas triviale, il faut faire appel à la relation de Nanson qui s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{n}dA = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_0dA_0. \quad (\text{II.26})$$

Ce qui nous permet d'établir la relation entre les deux tenseurs des contraintes définis précédemment :

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}; \quad (\text{II.27})$$

puisque

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T}_0\mathbf{n}_0dA_0 = \mathbf{T}\mathbf{n}dA = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_0dA_0. \quad (\text{II.28})$$

Il est intéressant de noter que le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}_0$  n'est pas nécessairement symétrique contrairement au tenseur  $\mathbf{T}$ .

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  est symétrique et est défini par l'expression suivante :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_0 = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}. \quad (\text{II.29})$$

On pourra noter que  $\mathbf{S}$  est un tenseur de mesure des contraintes dans la configuration de référence.

### c) Travail et puissance :

Si l'on se restreint à un problème quasi-statique en l'absence de forces à distance, la puissance des efforts extérieurs s'écrit alors :

$$\mathcal{P} = \dot{\mathcal{W}} = \int_A \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA, \quad (\text{II.30})$$

où  $\dot{\mathcal{W}}$  est la dérivée du travail des forces extérieures,  $\mathbf{t}$  le vecteur densité surfacique de forces exprimé dans le référentiel actuel,  $\mathbf{v}$  le vecteur vitesse et  $A$  une surface du corps  $B_t$ .

Dans un premier temps, simplifions le problème en se ramenant au cas d'une déformation homogène d'un cube élémentaire de longueur  $dX_1$ ,  $dX_2$  et  $dX_3$  (configuration initiale), de volume  $dV_0$  soumis à des forces  $df_1$ ,  $df_2$  et  $df_3$ , normales à chacune des faces et dont le cube dans la configuration actuelle est défini par les longueurs  $dx_1$ ,  $dx_2$  et  $dx_3$ , de volume  $dV$ .

Dans ce cas, la dérivée du travail des forces extérieures s'écrit :

$$\dot{\mathcal{W}} = df_1 \cdot d\dot{x}_1 + df_2 \cdot d\dot{x}_2 + df_3 \cdot d\dot{x}_3. \quad (\text{II.31})$$

Si l'on écrit ensuite, cette puissance par unité de volume de la configuration actuelle, on obtient l'expression :

$$\frac{\dot{\mathcal{W}}}{dV} = \frac{df_1}{dx_2 dx_3} \cdot \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_1 dx_3} \cdot \frac{d\dot{x}_2}{dx_2} + \frac{df_3}{dx_1 dx_2} \cdot \frac{d\dot{x}_3}{dx_3} = T_1 \cdot L_1 + T_2 \cdot L_2 + T_3 \cdot L_3, \quad (\text{II.32})$$

où les  $T_i$  sont les valeurs principales du tenseur des contraintes Cauchy et les  $L_i$  les valeurs principales du tenseur gradient de vitesse.

On en déduit ainsi que les tenseurs  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{L}$  sont conjugués en terme de puissance et la puissance des efforts intérieurs peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}_{int} = \int_{dV} \mathbf{T} : \mathbf{L} dV. \quad (\text{II.33})$$

De la même manière, cette puissance peut être écrite par unité de volume de la configuration initiale cette fois-ci, on obtient l'expression :

$$\frac{\dot{\mathcal{W}}}{dV_0} = \frac{df_1}{dX_2 dX_3} \cdot \frac{d\dot{x}_1}{dX_1} + \frac{df_2}{dX_1 dX_3} \cdot \frac{d\dot{x}_2}{dX_2} + \frac{df_3}{dX_1 dX_2} \cdot \frac{d\dot{x}_3}{dX_3} = T_{01} \cdot \dot{F}_1 + T_{02} \cdot \dot{F}_2 + T_{03} \cdot \dot{F}_3, \quad (\text{II.34})$$

où les  $T_{0i}$  sont les valeurs principales du premier tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff et les  $\dot{F}_i$  les valeurs principales de la dérivée du tenseur gradient de la transformation (attention ici si  $T_0$  n'est pas symétrique, il faut être beaucoup plus prudent).

On en déduit ainsi que les tenseurs  $\mathbf{T}_0$  et  $\dot{\mathbf{F}}$  sont conjugués en terme de puissance et la puissance des efforts intérieurs peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}_{int} = \int_{dV_0} \mathbf{T}_0 : \dot{\mathbf{F}} dV_0. \quad (\text{II.35})$$

En manipulant les formules mathématiques, on peut écrire la puissance des efforts intérieurs sous la forme :

$$\mathcal{P}_{int} = \int_{dV_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV_0. \quad (\text{II.36})$$

ce qui permet de conclure que les tenseurs  $\mathbf{S}$  et  $\dot{\mathbf{E}}$  sont conjugués en terme de puissance.

### II.1.2 Modèles non-dissipatifs

Il a été constaté que les élastomères chargés après relaxation convergent vers un état dit stationnaire ou encore d'équilibre ; ceci est souvent interprété comme indiquant l'existence d'une densité d'énergie de déformation hyperélastique caractérisant le matériau pour une vitesse de déformation infiniment lente. Ainsi, dans ce paragraphe, une partie des lois hyperélastiques développées pour caractériser cet état du matériau sera synthétisée en comparant leur efficacité. Enfin, des phénomènes supplémentaires tels que la teneur en charges et l'effet Mullins seront pris en compte ; ces phénomènes viennent modifier cet état d'équilibre en fonction de la déformation appliquée et de l'histoire des déformations précédemment subies.

#### a) Préliminaires - Lien avec la mécanique des milieux continus

Les lois constitutives hyperélastiques sont la plupart du temps écrites en terme de densité d'énergie de déformation  $\mathcal{U}$ . La densité d'énergie de déformation est une grandeur scalaire objective et de ce fait est une énergie indépendante de la rotation  $\mathbf{R}$ . Elle est donc souvent écrite en fonction du tenseur de dilatation  $\mathbf{U}$ , du tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit  $\mathbf{C}$ , du tenseur de déformation de Green Lagrange  $\mathbf{E}$ , des invariants de  $\mathbf{C}$  :  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  ou encore en fonction des dilatations principales  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  (toutes ces quantités étant indépendantes de  $\mathbf{R}$ ).

Comme évoqué dans le paragraphe précédent, les tenseurs  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{E}$  sont conjugués en terme de travail, une fois la densité d'énergie de déformation exprimée en terme du tenseur  $\mathbf{E}$ , on calcule les composantes du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  par la relation suivante :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{E}}; \quad (\text{II.37})$$

ou encore, en utilisant la relation  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$ , on obtient les composantes du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  via la densité d'énergie de déformation exprimée en terme du tenseur  $\mathbf{C}$  :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{C}}. \quad (\text{II.38})$$

Si l'on utilise la relation  $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$ , on exprime cette fois-ci les composantes du tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  via la densité d'énergie de déformation exprimée en terme du tenseur  $\mathbf{C}$  :

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (\text{II.39})$$

Considérons le cas particulier où  $\mathbf{R} = \mathbf{1}$  c'est à dire  $\mathbf{F} = \mathbf{U}$ , si l'on se place dans la base principale de  $\mathbf{U}$  avec pour valeurs propres les  $\lambda_i$ , l'expression précédente s'écrit en fonction des  $\lambda_i$  sous la forme :

$$T_i = 2J^{-1} \lambda_i^2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial C_i} = 2J^{-1} \lambda_i^2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial C_i} = J^{-1} \lambda_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda_i}. \quad (\text{pas de somme sur } i) \quad (\text{II.40})$$

Enfin, on peut aussi raisonner en terme d'invariants et cette fois-ci obtenir les composantes du tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  via la densité d'énergie de déformation exprimée en terme des invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$  ( $\mathcal{U} = \mathcal{U}(I_1, I_2, I_3)$ ) :

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_2} \right) \mathbf{B} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 \right] + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial J}. \quad (\text{II.41})$$

expression obtenue à partir de la relation précédente en introduisant les invariants :

$$T_i = J^{-1} \lambda_i \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \lambda_i} \right] = 2J^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_2} \right) \lambda_i^2 - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_2} \lambda_i^4 + I_3 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_3} \right]. \quad (\text{II.42})$$

Dans le cas particulier de déformations incompressibles,  $J$  vaut 1 ce qui entraîne l'existence d'une pression indéterminée  $p^*$  qui doit être déterminée par les équations d'équilibre. L'équation précédente se réduit dans ce cas de la manière suivante :

$$\mathbf{T} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_2} \right) \mathbf{B} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 \right] - p^* \mathbf{1}. \quad (\text{II.43})$$

## b) Modèles hyperélastiques utilisant différentes formulations de la densité d'énergie de déformation en fonction des invariants

Dans le cas d'un matériau isotropique hyperélastique, il est possible d'exprimer la densité d'énergie de déformation en fonction des invariants ( $I_i$ ) et de paramètres matériaux ( $p_i$ ).

$$\mathcal{U} = \hat{\mathcal{U}}(I_1, I_2, I_3; p_i). \quad (\text{II.44})$$

Dans la plupart des cas, les élastomères sont considérés comme incompressibles ; ainsi on a  $I_3 = 1$  et donc cet invariant n'intervient pas dans l'expression de la densité d'énergie de déformation. Cependant ceci entraîne la condition nullité de  $\mathcal{U}$  en l'absence de déformation. Ainsi, la forme générale de donnée par Rivlin est la suivante :

$$\mathcal{U}_{\mathcal{R}} = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad \text{avec } C_{00} = 0. \quad (\text{II.45})$$

La plupart des modèles très connus sont des cas particuliers du modèle de Rivlin. Le premier est le Néo-Hookéen qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\mathcal{U}_{\mathcal{N}(\mathcal{H})} = C_{10} (I_1 - 3). \quad (\text{II.46})$$

Ce modèle ne considère que la contribution du premier invariant et ne fait appel qu'à un seul paramètre matériau.

D'après l'équation II.43, l'expression des contraintes de Cauchy correspondant au modèle Néo-Hookéen est la suivante :

$$\mathbf{T}_{\mathcal{NH}} = 2C_{10}\mathbf{B} - p^* \mathbf{1}. \quad (\text{II.47})$$

Ou encore dans le cas d'une traction uniaxiale où une déformation  $\varepsilon$  est appliquée suivant  $\mathbf{e}_1$  :

$$T_{1_{\mathcal{NH}}} = 2C_{10} \left( (1 + \varepsilon)^2 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \right). \quad (\text{II.48})$$

Le paramètre matériau  $C_{10}$  est lié au module aux faibles déformations et vaut :  $\frac{E}{6}$ , avec  $E$  le module d'Young.

Le modèle de Mooney-Rivlin (Mooney, 1940) considère lui la contribution des deux premiers invariants et nécessite l'utilisation de deux paramètres matériaux ; son expression est la suivante :

$$\mathcal{U}_{\mathcal{MR}} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3), \quad (\text{II.49})$$

aboutissant aux contraintes de Cauchy suivantes :

$$\mathbf{T}_{\mathcal{MR}} = 2C_{10}\mathbf{B} + 2C_{01}(I_1\mathbf{B} - \mathbf{B}^2) - p^* \mathbf{1}, \quad (\text{II.50})$$

et dans le cas particulier d'une traction uniaxiale où une déformation  $\varepsilon$  est appliquée suivant  $\mathbf{e}_1$ , on a :

$$T_{1_{\mathcal{MR}}} = 2 \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{(1 + \varepsilon)} \right) \left( (1 + \varepsilon)^2 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \right). \quad (\text{II.51})$$

Sur la figure II.1 sont comparées les données expérimentales pour différents cas de sollicitations obtenues par Treloar (Treloar, 1949) avec le modèle de Mooney-Rivlin.

On constate que le modèle de Mooney-Rivlin représente très bien le comportement aux petites déformations et cela pour les différentes sollicitations appliquées, cependant il est incapable de prédire l'augmentation de rigidité observée pour les grands niveaux de déformation.

Le modèle de Gent (Gent, 1996) est lui aussi un modèle nécessitant deux paramètres matériaux, il s'écrit de la manière suivante :

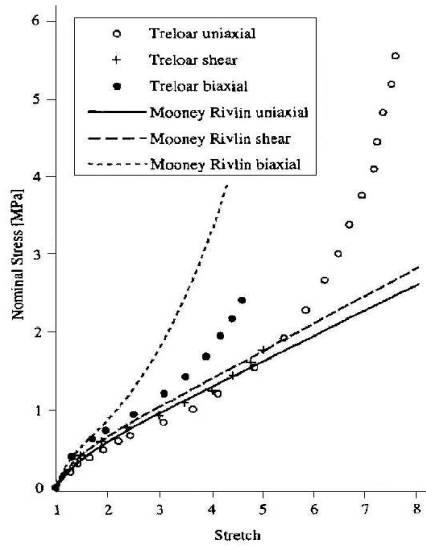
$$\mathcal{U}_G = -\frac{E}{6} J_M \ln \left[ 1 - \frac{J_1}{J_M} \right] \quad (\text{II.52})$$

où  $J_1 = (I_1 - 3)$  et  $J_M$  la valeur maximale de  $J_1$ , valeur pour laquelle le matériau atteint sa limite d'extensibilité.

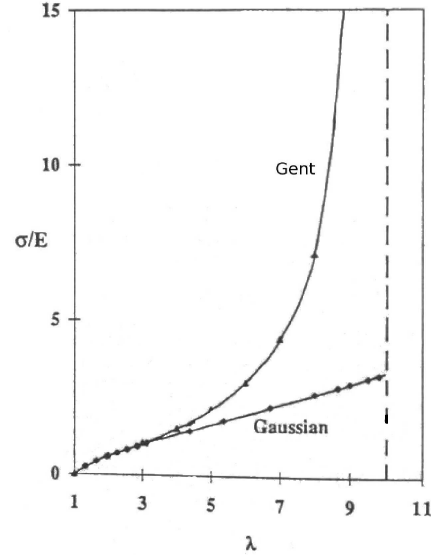
Si l'on développe cette expression, on obtient l'expression équivalente :

$$\mathcal{U}_G = \frac{E}{6} \left[ (I_1 - 3) + \frac{1}{2J_M} (I_1 - 3)^2 + \frac{1}{3J_M^2} (I_1 - 3)^3 + \dots + \frac{1}{(n+1)J_M^n} (I_1 - 3)^{n+1} \right] \quad (\text{II.53})$$

mettant en évidence le fait que ce modèle est une combinaison de terme de différents ordres de l'invariant  $I_1$ . Ce modèle à l'avantage d'utiliser différents ordres de  $I_1$  tout en utilisant que



**Fig. II.1** – Comparaison du modèle de Mooney-Rivlin avec les données expérimentales obtenues par Treloar (Arruda and Boyce, 2000).



**Fig. II.2** – Comparaison du modèle Gaussien et du modèle de Gent (pour  $J_M = 100$ ; ce qui entraîne une limite d'extensibilité pour  $\lambda = 10$ ) (Gent, 1996)

deux paramètres matériaux.

Les contraintes de Cauchy correspondantes sont les suivantes :

$$\mathbf{T}_G = \frac{E}{6} \frac{1}{\left(1 - \frac{J_1}{J_M}\right)} \mathbf{B} - p^* \mathbf{1} \quad (\text{II.54})$$

et dans le cas particulier d'une traction uniaxiale où une déformation  $\varepsilon$  est appliquée suivant  $\mathbf{e}_1$ , on a :

$$T_{1G} = \frac{E}{3} \frac{\left((1 + \varepsilon)^2 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)}\right)}{\left(1 - \frac{J_1}{J_M}\right)} = \frac{T_{1\mathcal{NH}}}{\left(1 - \frac{J_1}{J_M}\right)} \quad (\text{II.55})$$

La figure II.2 compare le modèle de Gent avec le modèle Gaussien, modèle qui sera abordé par la suite et qui n'est autre qu'un modèle équivalent du modèle Néo-Hookéen.

Pour de faibles niveaux de déformation, on constate que le modèle de Gent est identique au modèle Néo-Hookéen et on note de plus que ce modèle a l'avantage d'être aussi capable de représenter le comportement des élastomères aux grandes déformations c'est à dire une augmentation brutale de la rigidité comme il a été présenté au chapitre I section I.1.2b).

Ainsi de nombreuses combinaisons des deux premiers invariants sont possibles toutefois un bon modèle est un modèle avec peu de paramètres matériau auxquels une signification physique peut être attribuée et que l'on peut déterminer avec un nombre d'essais limité.



### c) Modèles hyperélastiques utilisant différentes formulations de la densité d'énergie de déformation en fonction des dilatations principales

Ces modèles sont aussi relatifs aux matériaux ayant un comportement isotropique hyperélastique, et cette fois-ci, la densité d'énergie de déformation est exprimée en fonction des dilatations principales ( $\lambda_i$ ) et de paramètres matériaux ( $p_i$ ).

$$\mathcal{U} = \hat{\mathcal{U}}(\lambda_i; p_i). \quad (\text{II.56})$$

La forme générale de ce type de modèle est la suivante :

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^3 u(\lambda_i), \quad (\text{II.57})$$

où la fonction  $u$  à la même forme quel que soit la direction principale concernée.

On peut remarquer qu'il est possible d'écrire le modèle Néo Hookéen sous cette forme en posant :  $u(\lambda_i) = C_{10}(\lambda_i^2 - 1)$ .

Le modèle d'Ogden (Ogden, 1972), se présente sous la forme suivante :

$$\mathcal{U}_O = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3), \quad (\text{II.58})$$

pour lequel  $\alpha_n$  et  $\mu_n$  sont des paramètres matériaux à identifier. Il est à noter que les valeurs de ces paramètres peuvent être des nombres rationnels.

Les contraintes de Cauchy correspondantes s'écrivent sous la forme :

$$T_{i_o} = \sum_n \mu_n \lambda_i^{\alpha_n} - p^*. \quad (\text{II.59})$$

Le nombre de termes  $n$  peut être ajusté en fonction des cas mais il a été observé de très bon résultats même pour les grandes valeurs de déformation à partir de  $n = 3$  ce qui entraîne un minimum de paramètres nécessaires de 6.

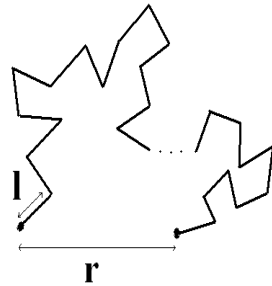
### d) Modèles hyperélastiques statistiques

Dans ce type de modèle, on s'attache à considérer l'élastomère comme constitué d'un réseau de chaînes macromoléculaires. Il est important de retenir que l'élasticité de ce type de matériau (à température constante) relève dans sa quasi globalité de la variation d'entropie causée par l'extension de ces longues chaînes. C'est dans cette optique, des outils statistiques sont utilisés pour déterminer de la manière la plus précise possible les configurations les plus probables du réseau macromoléculaire avec la déformation imposée (Treloar, 1949).

#### *Modèle statistique Gaussien*

Dans le cadre de l'étude statistique, une longue chaîne du réseau macromoléculaire est définie par (voir figure II.3) :

- ses deux extrémités (qui dans le cas réel sont des points de réticulation),
- sa longueur entre deux extrémités  $r$ ,
- son nombre de liens rigides  $N$ , c'est à dire des liaisons Carbone-Carbone ou motif représentatif (pouvant comprendre plusieurs chaînes carbonées avec des groupes latéraux) que l'on suppose schématiquement relié entre eux par des liaisons rotules. La longueur de ces liens rigides est constante et est notée  $l$ ,



**Fig. II.3** – Schématisation d'une chaîne macromoléculaire



**Fig. II.4** – Schématisation des mouvements possibles des liaisons rotules de la chaîne (Treloar, 1949)

- sa longueur totale  $L$  (étirement maximum entre deux points de réticulation), on a donc  $L = Nl$ .

Le vecteur longueur  $\mathbf{r}$  entre les deux extrémités de la chaîne s'écrit :  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}$  avec  $r$  norme du vecteur et  $\mathbf{e}$  un vecteur unitaire orienté par  $\mathbf{r}$ .

Les extrémités n'ont pas de degré de liberté (contraint par la liaison avec une autre chaîne) mais le mouvement des liaisons rotules lui est libre (voir figure II.4) : la chaîne peut donc prendre une multitude de configurations. L'état entropique le plus probable, celui qui maximise l'entropie, est le cas où  $r = 0$  ; en effet, c'est dans ce cas que le nombre de configurations possibles est le plus important. De ce fait, dans les autres cas, c'est-à-dire  $r \neq 0$ , il faut exercer une force sur les chaînes et les chaînes exercent une force inverse pour revenir à leur configuration la plus stable.

L'expression de cette force dans le cas d'une chaîne seule s'exprime alors de la manière suivante :

$$f_{chain} = -\theta \frac{\partial \Delta s}{\partial r} \quad (\text{II.60})$$

avec  $\theta$  la température absolue,  $\Delta s$  la variation de l'entropie en terme de configurations possibles et  $r$  la distance entre les deux extrémités.

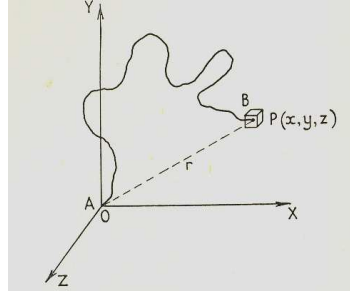
Même sous sollicitation, la chaîne va chercher à se mettre dans la configuration qui maximise son entropie.

L'entropie de la chaîne, quel que soit l'allongement appliqué, peut être déterminée par la probabilité qu'une chaîne ayant une de ces extrémités en  $A(0,0,0)$  (espace euclidien) ait son autre extrémité en  $B(x,y,z)$  dans le petit volume  $d\tau = dx dy dz$ . La figure II.6 illustre ce propos.

Le modèle Gaussien affirme que, dans le cas où la distance  $r$  reste très inférieure à la longueur totale de la chaîne  $L$ , la densité de probabilité s'écrit de la manière suivante :

$$p(r) = \left( \frac{3}{2\pi Nl^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{3r^2}{2Nl^2} \right) \quad (\text{II.61})$$

On notera que dans ce modèle, il y a équiprobabilité dans toutes les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  ( $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ), chaque lien rigide peut évoluer indépendamment des autres liens ; ceci est possible grâce à l'hypothèse  $r \ll Nl$ . Le domaine de validité de cette solution statistique est approximativement :  $r < \frac{Nl}{3}$ .



**Fig. II.5** – Probabilité de configuration d'une chaîne (Treloar, 1949)

Ensuite, d'après le résultat de Boltzmann (Treloar, 1949), la variation d'entropie de la chaîne statistique est proportionnelle au logarithme du nombre de configurations possibles, soit :

$$\Delta s = k \ln [p(r) dx dy dz] \quad (\text{II.62})$$

avec  $k$  constante de Boltzmann.

Puis, en utilisant le résultat de l'équation (II.61) on parvient à l'expression suivante (en supprimant les constantes) :

$$\Delta s = -k \left( \frac{3}{2Nl^2} \right) r^2 \quad (\text{II.63})$$

Ainsi, la force exercée par une chaîne macromoléculaire lorsque l'on cherche à l'allonger s'écrit de la manière suivante :

$$f_{chain} = -\theta \frac{\partial \Delta s}{\partial r} = \frac{3k\theta}{l} \left( \frac{r}{Nl} \right) \quad (\text{II.64})$$

On pourra noter la dépendance linéaire de la force avec la distance  $r$  imposée.

Considérons maintenant un réseau de chaînes soumis à une déformation macroscopique dont les dilatations principales dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont respectivement  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ , et supposons que le réseau de chaînes se déforme de manière affine avec la déformation imposée. De plus, les chaînes macromoléculaires étant liées entre elles par des liaisons chimiques, au repos, la distance  $r = r_0$  est non-nulle. Ainsi, ces suppositions entraînent que pour chaque chaîne, à l'équilibre, une des extrémités est en  $(0,0,0)$  et l'autre en  $(x_0, y_0, z_0)$  et lorsque la sollicitation est appliquée la position de cette dernière extrémité devient  $(\lambda_1 x_0, \lambda_2 y_0, \lambda_3 z_0)$ . Et l'expression de la variation d'entropie du réseau de chaînes s'exprime par la relation suivante :

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = -k \left( \frac{3}{2Nl^2} \right) \left[ (\lambda_1^2 - 1) \sum_{i=1}^n x_{0i}^2 + (\lambda_2^2 - 1) \sum_{i=1}^n y_{0i}^2 + (\lambda_3^2 - 1) \sum_{i=1}^n z_{0i}^2 \right] \quad (\text{II.65})$$

où  $n$  est le nombre de chaînes par unité de volume initial.

Et comme évoqué précédemment l'hypothèse d'isotropie étant choisie, chaque somme (dans chacune des trois directions) est égale à  $\sum_{i=1}^n \frac{r_{0i}^2}{3}$  et  $\sum_{i=1}^n r_{0i}^2 = n(\bar{r}_0^2)$  où  $\bar{r}_0$  est la moyenne quadratique de  $r_0$  dont la valeur est  $\sqrt{N}l$  ; d'où l'expression finale de la variation d'entropie du réseau de chaîne :

$$\Delta S = -\frac{nk}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3). \quad (\text{II.66})$$

On constate que la variation d'entropie du réseau de chaîne ne dépend plus de  $l$  ni de  $r$  mais seulement du nombre de chaînes par unité de volume initial ; cependant la condition  $r < \frac{Nl}{3}$  reste implicitement nécessaire.

Ce qui permet d'aboutir à l'écriture de la densité d'énergie de déformation qui pour les élastomères est globalement reliée, à température constante, à la variation de l'entropie :

$$\mathcal{U} = -\theta\Delta S = \frac{nk\theta}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad (\text{II.67})$$

où  $\mu = nk\theta$  est le module de cisaillement du matériau.

On note que le modèle Gaussien est en fait un modèle de type Néo Hookéen. Ce modèle permet d'approximer le comportement pour de faibles niveaux de déformations : il ne peut pas représenter le comportement aux grandes déformations.

#### *Modèle statistique Non-Gaussien*

Les chaînes macromoléculaires sont de nouveau considérées comme schématisées sur la figure II.3. Dans le cas Gaussien, on se plaçait dans le cas où  $r \ll Nl$  c'est à dire que l'extension imposée à la chaîne était faible (en effet, dans le cas  $r = Nl$ , la chaîne est complètement étirée) ; ainsi chaque lien rigide pouvait se tourner librement, indépendamment des autres. Ici, on ne considère pas cette restriction d'allongement, on introduit des angles  $\theta_i$  définissant l'angle du lien rigide par rapport à l'horizontal permettant d'écrire la distance  $r$  de la manière suivante :

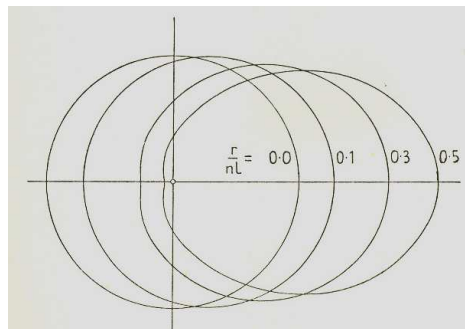
$$r = l \sum_{i=1}^N \cos \theta_i. \quad (\text{II.68})$$

On s'intéresse ensuite à la distribution des angles  $\theta_i$  la plus probable (configuration du réseau macromoléculaire) en fonction du rapport  $\frac{r}{Nl}$ . Cette densité de probabilité a la forme suivante :

$$\ln p(r) = c - N \left( \frac{r}{Nl} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right), \quad (\text{II.69})$$

où  $c$  est une constante et  $\beta$  est donné par  $\mathcal{L}(\beta)$ , la fonction de Langevin étant définie par  $\frac{r}{Nl} = \coth(\beta) - \frac{1}{\beta} = \mathcal{L}(\beta)$  avec  $\beta = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{r}{Nl}\right)$ .

La figure II.6 donne la forme de cette distribution en fonction du rapport  $\frac{r}{Nl}$ .



**Fig. II.6** – Distribution des angles  $\theta_i$  en fonction du rapport  $\frac{r}{Nl}$  (Treloar, 1949)

On constate que lorsque  $r \ll Nl$  la distribution la plus probable est circulaire, aucune direction n'est privilégiée, les segments peuvent tourner librement ; en revanche lorsque  $r$  approche  $Nl$  la distribution est de plus en plus orientée par la direction de sollicitation et les mouvements possibles des segments dépendent fortement de ceux de leurs voisins.

D'où l'expression de la variation d'entropie d'une chaîne (Treloar, 1949) :

$$\Delta s = -kN \left( \frac{r}{Nl} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right). \quad (\text{II.70})$$

Il est intéressant de noter que la fonction de Langevin peut être approximée par le développement suivant (Treloar, 1949) :

$$\mathcal{L}^{-1}(x) = 3x + \frac{9}{5}x^3 + \frac{297}{175}x^5 + \frac{1539}{875}x^7 + \dots \quad (\text{II.71})$$

ou encore en utilisant l'approximation de Padé sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}^{-1}(x) \simeq x \frac{(3-x^2)}{(1-x^2)} + O(x^6). \quad (\text{II.72})$$

Ainsi lorsque  $x = \frac{r}{Nl}$  est proche de zéro, la fonction inverse de Langevin tend vers la droite  $y = 3x$  et quand  $x$  tend vers 1 ( $r$  proche de  $Nl$ ) elle augmente asymptotiquement.

Ceci nous permet alors d'écrire à partir de la variation d'entropie d'une chaîne l'expression de la force à exercer pour étendre la chaîne :

$$f_{\text{chaîne}}(r) \simeq \frac{k\theta}{l} \cdot \frac{r}{Nl} \cdot \frac{(3 - (\frac{r}{Nl})^2)}{(1 - (\frac{r}{Nl})^2)} \quad (\text{II.73})$$

Plusieurs modèles ont été construits sur la base de la théorie statistique non-Gaussienne en l'appliquant à un réseau de chaînes contenu dans un volume élémentaire ; ainsi les modèles à 3, 4 puis 8 chaînes ont été développés.

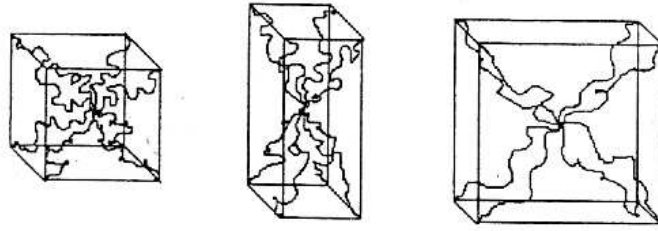
Le plus utilisé est le modèle à huit chaînes d'Arruda et Boyce (Arruda and Boyce, 1993) qui est un modèle 3D caractérisant un réseau macromoléculaire aléatoirement orienté.

#### *Modèle à huit chaînes (Arruda and Boyce, 1993)*

Le volume élémentaire du réseau considéré est constitué de huit chaînes localisées le long des diagonales du cube : une des extrémités est le centre du cube et l'autre une extrémité du cube comme illustré sur la figure II.7.

Une déformation macroscopique dont les dilatations principales dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont respectivement  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  est appliquée puis le cube est choisi aligné avec les directions principales de cette sollicitation, il se déforme ainsi selon les directions principales. Grâce à la symétrie de la structure choisie, le point de jonction intérieur reste au centre du cube lorsque l'on applique une déformation, de plus, les chaînes sont réparties de manière isotropique, elles ne s'alignent pas avec la direction de la sollicitation et peuvent pivoter pour s'accommoder à la déformation appliquée. L'extension n'est plus affine dans ce cas et l'on considère un allongement moyen isochorique pour chaque chaîne appelé  $\lambda_{\text{chain}}$  qui vérifie l'équation suivante :

$$\lambda_{\text{chain}} = \sqrt{\left( \frac{1}{3}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \right)} = \sqrt{\left( \frac{I_1}{3} \right)}. \quad (\text{II.74})$$



**Fig. II.7** – Modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce (Arruda and Boyce, 1993)

Ainsi, on a  $\lambda_{chain} = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{\sqrt{Nl}}$ , d'où  $\frac{r}{Nl} = \frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{N}}$  et la variation d'entropie d'une chaîne de ce réseau qui s'écrit alors de la manière suivante :

$$\Delta s = -kN \left( \frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{N}} \beta_{chain} + \ln \frac{\beta_{chain}}{\sinh(\beta_{chain})} \right) \text{ avec } \beta_{chain} = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{N}} \right). \quad (\text{II.75})$$

Et donc pour  $n$  chaînes par unité de volume ( $\frac{n}{8}$  cellules unités par volume), la densité d'énergie de déformation correspondante a la forme suivante :

$$\mathcal{U}_{AB} = nk\theta N \left( \frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{N}} \beta_{chain} + \ln \frac{\beta_{chain}}{\sinh(\beta_{chain})} \right). \quad (\text{II.76})$$

Les contraintes de Cauchy correspondantes ont alors la forme suivante :

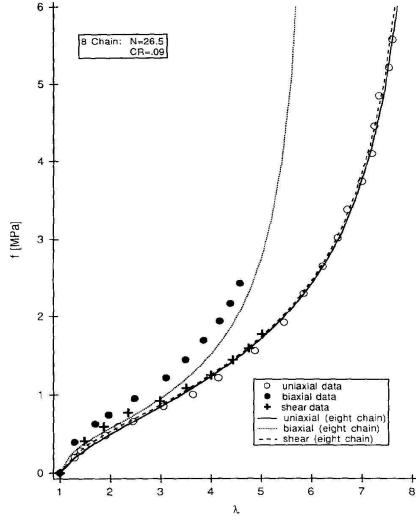
$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{nk\theta}{3} \frac{\sqrt{N}}{\lambda_{chain}} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda_{chain}}{\sqrt{N}} \right) \mathbf{B} - p^* \mathbf{1}. \quad (\text{II.77})$$

La figure II.8 illustre les résultats numériques obtenus en appliquant ce modèle pour différents cas de sollicitations : traction uniaxiale, biaxiale et en cisaillement. On pourra remarquer que le cas particulier d'une traction equi-biaxiale (suivant les directions 1 et 2 par exemple) est équivalent à un essai de compression (suivant la direction 3).

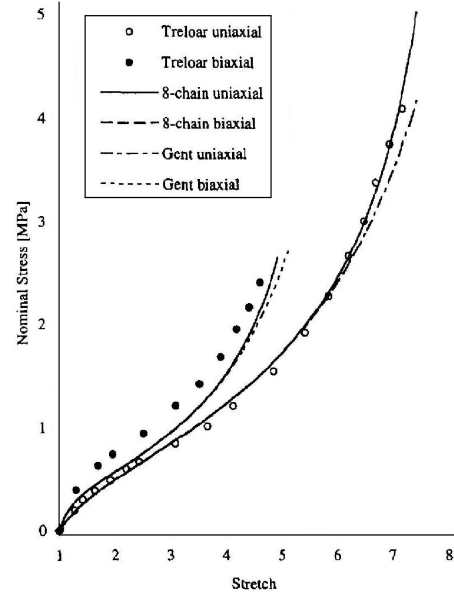
On constate que le modèle à huit chaînes est capable de représenter correctement le comportement du matériau sur toute la gamme de déformation appliquée et pour différentes sollicitations avec seulement deux paramètres matériau  $\mu = nk\theta$  et  $N$ . On notera que le paramètre  $\mu$  se rapporte à la pente à l'origine et  $N$  à l'augmentation brutale de rigidité aux grandes déformations (en effet la fonction Langevin tend vers l'infini en  $\lambda_{chain} = \sqrt{N}$ ). Le cas de la traction biaxiale et donc aussi celui de la compression restent les moins bien représentés mais la tendance globale est toutefois respectée.

Enfin, on peut comparer le modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce avec le modèle de Gent évoqué précédemment (voir figure II.9) ; on constate que ces modèles sont très proches, ils ne comptent que deux paramètres matériau et reposent sur la prise en compte de termes d'ordre supérieur de l'invariant  $I_1$ .

Ces modèles parviennent à prévoir le comportement sur toute la gamme de déformation appliquée sans utiliser le deuxième invariant ( $I_2$ ). Cependant, comme le souligne Diani et Rey (Lambert-Diani and Rey, 1999) dans leur article, c'est notamment la non prise en compte du deuxième invariant qui explique en partie l'erreur de représentation dans le cas de sollicitations biaxiales. D'autres modèles comme celui de Flory-Erman (Flory and Erman, 1982) ou celui de Gent-Thomas (Gent and Thomas, 1958) améliorent les prédictions des modèles d'Arruda-Boyce ou de Gent en ajoutant une contribution dépendante du deuxième invariant.



**Fig. II.8** – Comparaison du modèle à huit chaînes avec les données expérimentales de Treloar (Arruda and Boyce, 1993)



**Fig. II.9** – Comparaison entre le modèle à huit chaînes et le modèle de Gent (Arruda and Boyce, 2000)

### e) Anisotropie

Les modèles présentés dans les paragraphes précédents permettent de simuler le comportement de matériaux isotropiques hyperélastiques mais ne permettent pas de tenir compte de phénomènes d'anisotropie.

Diani et ses collègues (Diani et al., 2004), propose un modèle applicable à la fois pour les matériaux isotropes et anisotropes. Ce modèle s'appuie sur les directions matérielles et non sur les directions principales comme cela est le cas pour les modèles précédents.

Soit un ensemble de  $n$  directions matérielles  $\mathbf{u}^i$  (décomposées dans une base de l'espace  $R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  sous la forme  $\mathbf{u}^i(u_1^i, u_2^i, u_3^i)$ ), la densité d'énergie de déformation associée à ce modèle s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{U}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot w_d \left( \frac{v^i}{\|\mathbf{u}^i\|^2} \right), \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{u}^i\| = \left( u_1^{i2} + u_2^{i2} + u_3^{i2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II.78})$$

avec  $\omega_i$  représentant un poids dans la direction  $\mathbf{u}^i$  et  $w_d$  une densité d'énergie de déformation élémentaire telle que celles énumérées dans les paragraphes précédents. Le scalaire  $v^i$  représente l'allongement dans la direction  $\mathbf{u}^i$  et s'exprime sous la forme :

$$v^{i2} = (\mathbf{F}\mathbf{u}^i)^T \cdot (\mathbf{F}\mathbf{u}^i) = C_{kl} u_k^i u_l^i. \quad (\text{II.79})$$

Pour définir ces directions matérielles des polyèdres réguliers sont considérés comme par exemple le tétraèdre, le cube, l'octaèdre ... L'ensemble des directions matérielles  $n$  considérées correspond à la jonction entre le centre du polyèdre et ses sommets. On retrouve ainsi, dans le cas particulier du cube, les huit chaînes définies par Arruda et Boyce (Arruda and Boyce, 1993) présentées au paragraphe précédent.

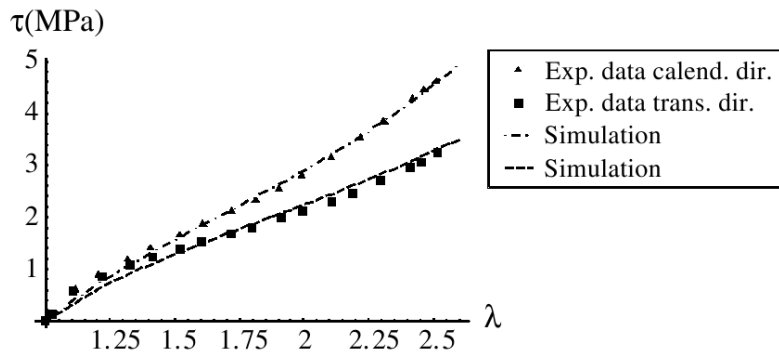
Ensuite, pour des matériaux isotropes, les poids  $\omega_i$  sont pris identiques ; en revanche, en affectant des poids  $\omega_i$  différents selon les directions matérielles il est possible de tenir compte

de phénomènes d'anisotropie.

Par exemple, le modèle de Diani et ses collègues appliqué à la densité d'énergie définie par Arruda-Boyce (Arruda and Boyce, 1993) et repris dans l'équation (II.76) s'écrit alors sous la forme :

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot nk\theta N \left( \frac{v^i}{\sqrt{N}} \beta^i + \ln \frac{\beta^i}{\sinh(\beta^i)} \right) \quad \text{avec} \quad \beta^i = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{v^i}{\sqrt{N}} \right). \quad (\text{II.80})$$

Dans l'article (Diani et al., 2004), Diani et ses collègues parviennent, en utilisant un modèle construit à partir de l'assemblage des 8 directions d'un cube et des 6 directions d'un octaèdre, à simuler un phénomène d'anisotropie dû à un procédé de fabrication. La figure II.10 représente le comportement anisotrope d'un caoutchouc naturel obtenu par calendrage qui présente des réponses différentes suivant que la direction de traction soit celle du calendrage ou sa direction transverse ; les simulations obtenues à l'aide du modèle sont superposées à ces courbes expérimentales.



**Fig. II.10** – Simulation de la réponse anisotrope d'un caoutchouc naturel obtenu par calendrage (Diani et al., 2004)

On constate que le modèle proposé parvient bien à tenir compte de l'anisotropie du matériau.

#### f) Compressibilité

La plupart du temps, les élastomères sont considérés comme incompressibles, cependant, en réalité, ils sont quasi-compressible et dans certains cas, il est nécessaire de tenir compte de leur compressibilité. Lorsque l'on considère le matériau comme étant incompressible, on suppose son module de compressibilité ( $\kappa$ ) très supérieur au module de cisaillement ( $G$ ). En revanche, dans ce cas compressible, ces deux quantités deviennent du même ordre et la condition  $J = 1$  est remplacée par :

$$J = \det \mathbf{F} = \sqrt{\det \mathbf{B}} = \sqrt{I_3}. \quad (\text{II.81})$$

Comme synthétisé dans l'article de Arruda et Boyce (Arruda and Boyce, 2000), une des méthodes utilisée consiste à décomposer la densité d'énergie de déformation en une partie déviatorique  $\mathcal{U}_D$  (indépendante de la pression hydrostatique) et une partie hydrostatique  $\mathcal{U}_H$ . Pour ce faire, il s'agit de construire la partie isochorique du gradient de la transformation  $\bar{\mathbf{F}}$  de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}; \quad (\text{II.82})$$



on obtient bien ainsi  $\det \bar{\mathbf{F}} = \left(J^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \det \mathbf{F} = J^{-1}J = 1$ .

La même transformation est à apporter aux tenseurs des dilatations  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  ainsi qu'aux invariants  $I_i$  et aux dilatations principales  $\lambda_i$  permettant d'écrire la densité d'énergie de déformation sous la forme :

$$\mathcal{U}_{comp} = \hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{D}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + \hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(J), \quad (\text{II.83})$$

avec  $\bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}}I_1$  et  $\bar{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}}I_2$  puisque  $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{F}}^T = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{F}\mathbf{F}^T = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{B}$ .

Ensuite dans ce cas, l'équation (II.41) permettant d'obtenir les contraintes de Cauchy devient :

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{I}_2} \right) \bar{\mathbf{B}}' - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \bar{I}_2} (\bar{\mathbf{B}}')^2 \right] + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial J} \mathbf{1}, \quad (\text{II.84})$$

où  $\bar{\mathbf{B}}'$  est la partie déviatorique de  $\bar{\mathbf{B}}$  définie par  $\bar{\mathbf{B}}' = \bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{3}\text{trace}(\bar{\mathbf{B}})\mathbf{1}$

Tous les modèles décrits précédemment peuvent ensuite être écrits en tenant compte de la compressibilité.

Pour obtenir un comportement proche de l'incompressibilité, on doit faire tendre le terme de pénalisation vers zéro lorsque la déformation est nulle. De façon plus détaillée, Doll (Doll and Schweizerhof, 2000) a montré que la fonction  $\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(J)$  doit avoir les propriétés suivantes :

- $\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(J=1) = 0$  et  $\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(J \neq 1) > 0$ , ainsi l'énergie de déformation est nulle si la déformation est nulle et l'énergie de déformation est positive
- $\frac{\partial \hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}}{\partial J} \Big|_{J=1} = 0$
- $\frac{\partial^2 \hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}}{\partial J^2} \Big|_{J \rightarrow 1} = \kappa$
- $\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(J \rightarrow 0) \rightarrow +\infty$  et  $\frac{\partial \hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}}{\partial J} \Big|_{J \rightarrow 0} = -\infty$
- $\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(J \rightarrow +\infty) \rightarrow +\infty$  et  $\frac{\partial \hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}}{\partial J} \Big|_{J \rightarrow +\infty} = +\infty$
- $\frac{\partial^2 \hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}}{\partial J^2} \geq 0$  condition de convexité

La forme la plus simple utilisée est de prendre  $\hat{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}$  comme une fonction de  $(J-1)^n$ .

Par exemple, dans le cas particulier du modèle Néo Hookéen, une forme simple consiste à écrire la densité d'énergie de déformation associée au Néo Hookéen compressible sous la forme :

$$\mathcal{U}_{\mathcal{N}\mathcal{H}_{comp}} = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{\kappa}{2}(J-1)^2, \quad (\text{II.85})$$

où  $\kappa$  est le module de compressibilité.

Les contraintes de Cauchy correspondantes s'expriment alors de la manière suivante :

$$\mathbf{T}_{\mathcal{N}\mathcal{H}_{comp}} = \frac{2C_{10}}{J} \bar{\mathbf{B}}' + \kappa(J-1)\mathbf{1}. \quad (\text{II.86})$$

Il existe d'autres expressions dans la littérature (Ogden, 1972) plus complexes.

*Remarques :*

- La partie déviatorique  $\mathcal{U}_D$  de la densité d'énergie de déformation reflète les changements de configurations entropiques (voir modèles statistiques) alors que la partie hydrostatique  $\mathcal{U}_H$  tient compte des variations d'énergie interne.
- Dans le cadre de la théorie incompressible, la valeur des dilatations principales  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  était connue (en utilisant la relation  $\det \mathbf{F} = 1$ ) mais ici  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont les inconnues du problème : il faut résoudre l'équation aux dérivées partielles.

### g) Modélisation des effets liés à la présence de charges au sein de l'élastomère

Comme il a été souligné au Chapitre I section I.1.1b), la présence de particules renforçantes permet d'augmenter la rigidité du matériau mais entraîne aussi une amplification des déformations au sein la matrice. De nombreuses études ont été menées (Mullins and Tobin, 1957), (Bueche, 1961), (Bergström, 1999) visant à permettre de tenir compte de l'ajout de ces charges au sein du matériau, de leur proportion, de leur répartition et forme. Un bon résumé de ces études peut être trouvé dans la thèse de Jean (Jean, 2009) où une modélisation multi-échelle tenant compte de la microstructure d'élastomères chargés a été menée.

Dans un premier temps, ces particules étant beaucoup plus rigides que l'élastomère, on émet la plupart du temps l'hypothèse que ces charges ne se déforment pas sous l'effet de la sollicitation appliquée. Puis, une des premières méthodes envisagées est de considérer l'élastomère chargé comme un matériau composite (élastomère + charges) et consiste à estimer la valeur de son module d'Young  $\langle E \rangle$  (module initial aux faibles déformations) en fonction du module d'Young de la matrice élastomère  $E_m$  et de la teneur en charge  $v_h$ .

Parmi les nombreuses relations existantes, celle de Guth Gold (Guth, 1945) donne l'amplification du module d'Young de la matrice avec la teneur en charge suivante :

$$\langle E \rangle_{GG} = E_m(1 + 2.5v_h + 14.1v_h^2); \quad (\text{II.87})$$

le terme du premier ordre est relatif à l'approximation d'Einstein d'une bille dans un plasma ; il est à noter qu'en utilisant le coefficient 2.5 on considère que les charges ont une forme sphérique. De plus, dans le cadre de ce modèle, on considère la rigidité des charges comme étant infinie et la matrice incompressible. Enfin, le terme du second ordre en  $v_h$  permet de tenir compte du fait que les particules sont réparties au sein de la matrice sous forme d'agglomérats (comme nous avons pu l'observer au chapitre I section I.1.1c)) et non isolées ; il représente les phénomènes d'interactions entre les particules.

De la même manière Ponte Castañeda (Ponte Castaneda, 1989) ou Govindjee et Simo (Govindjee and Simo, 1991) par exemple ont cherché à estimer  $\langle E \rangle$  en fonction de la teneur en charge. Mais ces modèles permettent d'obtenir une approximation des pentes à l'origine et ne sont donc applicables que dans le cas de petites déformations.

Ensuite, vient le concept de facteur d'amplification  $X$  de la déformation introduit par Mullins et Tobin (Mullins and Tobin, 1965) que nous avons évoqué au Chapitre I section I.1.1b) permettant de modéliser le comportement en grandes déformations. Pour rappel, son expression est la suivante :

$$\Lambda = 1 + X.(\lambda - 1), \quad (\text{II.88})$$

où  $\lambda$  est la déformation appliquée (macroscopique) et  $\Lambda$  la déformation amplifiée (échelle microscopique).

Ainsi, dans les expressions de densité d'énergie de déformation résumées dans les paragraphes précédemment, si l'on souhaite tenir compte de la présence de charges, il suffit de

considérer  $\Lambda$  à la place de  $\lambda$  et de n'attribuer l'énergie de déformation qu'à la matrice puisque les particules sont considérées comme rigides. Ceci donne par exemple dans le cas d'un modèle Gaussien en traction uniaxiale les contraintes de Cauchy dans la direction de sollicitation sous la forme suivante :

$$T = \mu(\Lambda^2 - \frac{1}{\Lambda}). \quad (\text{II.89})$$

La plupart des approches sont appliquées de cette manière en 1D.

Dans l'approche de Bergström et Boyce (Bergström and Boyce, 1999) (puis (Qi and Boyce, 2005)) l'amplification est appliquée dans toutes les 3 directions en amplifiant directement l'invariant des déformations  $I_1$ . Ainsi l'invariant amplifié  $\langle I_1 \rangle_m$  vérifie l'expression suivante :

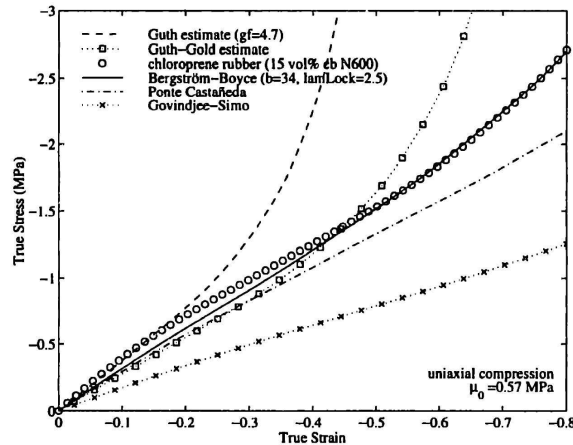
$$\langle I_1 \rangle_m = X(\langle I_1 \rangle - 3) + 3; \quad (\text{II.90})$$

permettant ainsi d'exprimer les densités d'énergie de déformation dépendante uniquement du premier invariant de la façon suivante :

$$\langle \mathcal{U} \rangle = (1 - \nu_h) \langle \mathcal{U} \rangle_m, \quad (\text{II.91})$$

où  $\langle \mathcal{U} \rangle_m = \mathcal{U}(\langle I_1 \rangle_m)$  et où l'énergie de déformation n'est seulement attribuée à la proportion de matrice donc à  $1 - \nu_h$ .

La figure II.11 compare les résultats expérimentaux obtenus par Bergström et Boyce pour un Chloroprène chargé à 15 % de noir de carbone pour les différentes approximations évoquées précédemment.



**Fig. II.11** – Comparaison des différents modèles (Bergström and Boyce, 1999)

Quatre de ces modèles sont capables de prévoir le module aux faibles déformations. Ensuite, les modèles de Guth-Gold, Ponte Castañeda et Bergström et Boyce simulent assez bien la tendance jusqu'aux moyennes déformations. En revanche, seul le modèle de Bergström et Boyce semble bien représenter le comportement du matériau en fonction de sa teneur en charge sur toute la plage de déformation appliquée. De plus, on constate que les autres modèles sont de moins en moins représentatif lorsque la teneur en charges devient plus importante.

## h) Modélisation de l'effet Mullins

Comme nous l'avons évoqué au Chapitre I section I.1.3a), les élastomères sont fortement dépendants de l'histoire des déformations appliquées et présentent un effet Mullins prononcé. Plusieurs modèles ont été développés afin de pouvoir prévoir le comportement du matériau en tenant compte de l'histoire des déformations vue par celui-ci. Nous en présenterons quelques uns dans ce paragraphe. Pour cela, ces modèles dépendent notamment du niveau d'allongement maximal ( $\lambda_{max}$ ) vu par le matériau.

Nous avons vu que l'effet Mullins était souvent associé à une forme d'endommagement ; c'est dans cette optique que Simo (Simo, 1987) a mis en place un modèle, tenant compte de l'effet Mullins, en rajoutant un facteur d'endommagement scalaire, dépendant de l'allongement maximal subi par le matériau depuis sa toute première sollicitation, aux lois hyperélastiques précédemment décrites. L'expression de ce modèle est la suivante :

$$W = (1 - D(\lambda_{max}))\bar{W}_0 \quad (\text{II.92})$$

Ensuite, Qi et Boyce (Qi and Boyce, 2004) modélisent l'adoucissement de la contrainte au sein du matériau dû à l'effet Mullins par un adoucissement de la partie indépendante du temps avec la déformation appliquée en reprenant le concept proposé par Mullins et Tobin (Mullins and Tobin, 1957) où le matériau est décomposé en deux parties : une partie souple (de proportion  $v_s$ ) et une partie dure (de proportion  $v_h$ ). Le principe est le suivant : sous l'effet de la sollicitation appliquée, la partie dure se voit endommagée ce qui entraîne une diminution de sa proportion au profit de la partie souple et donc à un adoucissement de la contrainte.

Dans le cas des élastomères chargés, la partie dure contiendrait évidemment les charges mais pas seulement, toutes les parties rigidifiantes telles que points de réticulations ou enchevêtrements peuvent être associées à la partie dure. De plus, les parties de matrice " enfermées ", comme représentées figure I.6, peuvent être considérées comme composante de la phase dure ; en effet protégée par l'agglomérat, la matrice enfermée ne verra pas de déformation tant que l'agglomérat ne sera pas endommagé et agira donc comme une partie dure. Ainsi, Qi et Boyce, dans leur étude d'un Polyuréthane (TPU : non chargé mais présentant des segments durs dans une matrice souple), définissent une loi donnant l'évolution de la partie souple avec la déformation de la manière suivante :

$$v_s = v_{ss} - (v_{ss} - v_{s0}) \cdot \exp\left(-A \cdot \frac{\Lambda_{chain} - 1}{\sqrt{N} - \Lambda_{chain}}\right), \quad (\text{II.93})$$

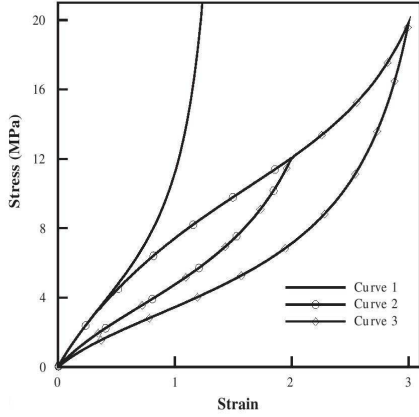
où  $\Lambda_{chain} = \sqrt{\frac{\langle I_1 \rangle_m}{3}}$ ,  $v_{s0}$  est la proportion de phase molle à l'instant initial et  $v_{ss}$  la proportion maximale en phase molle qui peut être atteinte ; sachant que même après avoir subi de grandes déformations, il persiste une proportion de phase dure.

Cet assouplissement est donc irréversible et le paramètre  $\Lambda_{chain}^{max}$  caractérise l'histoire du matériau à chaque instant. En effet, il est considéré que la proportion en phase molle reste fixe si l'on décharge le matériau et cette quantité ne réévoluera plus tant que la valeur de déformation maximale précédemment atteinte ne sera pas dépassée.

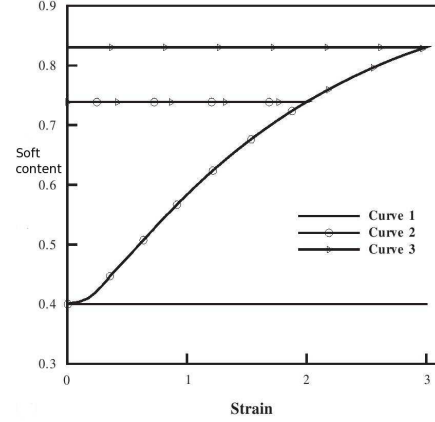
$$\dot{v}_s = A(v_{ss} - v_s) \frac{\sqrt{N} - 1}{\sqrt{N} - \Lambda_{chain}^{max}} \dot{\Lambda}_{chain}^{max}, \quad (\text{II.94})$$

$$\text{avec } \dot{\Lambda}_{chain}^{max} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda_{chain} < \Lambda_{chain}^{max} \\ \dot{\Lambda}_{chain} & \text{si } \Lambda_{chain} \geq \Lambda_{chain}^{max} \end{cases} \quad (\text{II.95})$$

Les courbes des figures II.12 et II.13 illustrent cette modélisation.



**Fig. II.12** – Modélisation de l'effet Mullins (Qi and Boyce, 2004)



**Fig. II.13** – Evolution de  $v_s$  avec la déformation appliquée (Qi and Boyce, 2004)

La courbe noire pleine symbolise le modèle à huit chaînes sans adoucissement. La courbe 2 représente une première charge jusqu'à 200% adoucie avec de l'effet Mullins : la proportion en phase souple passe de 0.4 à 0.73. Ensuite une décharge jusqu'à déformation nulle est appliquée et par construction la teneur en phase molle n'évolue pas. Enfin en suivant la courbe 3, une seconde charge est appliquée cette fois-ci jusqu'à 300% de déformation. Dans un premier temps, la déformation maximale précédemment atteinte (200%) n'étant pas dépassée, la teneur en phase molle n'évolue pas ; en revanche dès que la déformation appliquée atteint ces 200% le comportement s'adoucit à nouveau et la proportion en phase molle passe de 0.73 à 0.82...

Enfin, Diani et ses collègues (Diani et al., 2006b), proposent un modèle d'endommagement anisotrope de l'effet Mullins afin de pouvoir rendre compte de l'anisotropie induite par effet Mullins que nous avons évoqué au Chapitre I section I.1.3. Ce modèle est basé sur le modèle d'hyperélasticité anisotrope proposé par Diani et ses collègues (Diani et al., 2004) appliqué au modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce (Arruda and Boyce, 1993) que nous avons décrit au paragraphe II.1.2 e). Pour modéliser l'anisotropie de l'effet Mullins, ils proposent de faire évoluer les paramètres du modèle à huit chaînes,  $\mu = nk\theta$  et  $N$ , avec le niveau d'allongement maximal vu par le matériau pour modéliser l'adoucissement induit par effet Mullins mais surtout, ils proposent de le faire indépendamment dans chacune des directions matérielles pour tenir compte des phénomènes d'anisotropie. Le modèle proposé s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot n_i k \theta N \left( \frac{\lambda^i}{\sqrt{N}} \beta^i + \ln \frac{\beta^i}{\sinh(\beta^i)} \right) \quad \text{avec} \quad \beta^i = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda^i}{\sqrt{N}} \right). \quad (\text{II.96})$$

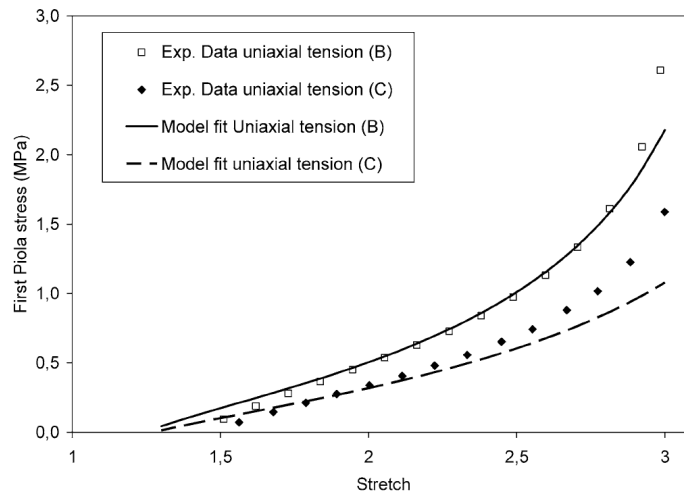
où les paramètres  $n_i$  et  $N_i$  représentent respectivement la densité de chaînes et la longueur moyenne des chaînes dans la direction  $\mathbf{u}^i$ .

Ainsi, pour chaque direction matérielle, les modifications du paramètre  $N_i$  dépendent de l'allongement maximum appliqué dans cette direction. L'évolution suivante du paramètre  $N_i$  est proposée :

$$N_i(\lambda^i) = \left( \alpha(\lambda^i - 1)^2 + 1 \right) N^0, \quad (\text{II.97})$$

avec  $\alpha$  le paramètre d'endommagement et  $N^0$  la longueur moyenne des chaînes du matériau vierge.

Ce modèle nécessite alors l'identification des paramètres matériau suivants :  $n^0$ ,  $N^0$ ,  $\alpha$  et  $\omega_i$ . Avec celui-ci, ils parviennent à simuler le comportement d'équilibre de deux éprouvettes ayant été sollicitées précédemment en traction jusqu'à 200% suivant une direction puis sollicitées l'une à nouveau dans cette direction (éprouvette B) et l'autre dans une direction transverse (éprouvette C). La figure II.14 illustre les résultats de cette simulation en comparaison avec les essais.



**Fig. II.14** – Simulation de la réponse anisotrope induite par effet Mullins (Diani et al., 2006b)

Une bonne représentation des réponses anisotropes est observée ; ils parviennent notamment à tenir compte de la déformation remanente à force nulle (on notera que dans le cadre de ce modèle, il s'agit ici de la déformation irréversible puisque le modèle n'intègre pas de phénomènes visqueux).

En fait, pour tenir compte de l'anisotropie, Diani et ses collègues ajoutent à la densité d'énergie de déformation une énergie anisotrope ce qui revient à précontraindre le matériau.

On notera que dans l'ensemble de ce paragraphe, on ne modélise pas de phénomène de dissipation, la seconde charge et première décharge suivent la même courbe (phénomène réversible).

Ainsi, toutes les lois présentées dans cette section permettent de modéliser le comportement indépendant du temps et non-dissipatif des matériaux de type élastomérique. Le choix de l'une de ces lois se fait en fonction du matériau étudié et de l'application souhaitée ; inutile d'augmenter le nombre de paramètres matériau si cela n'est pas nécessaire.

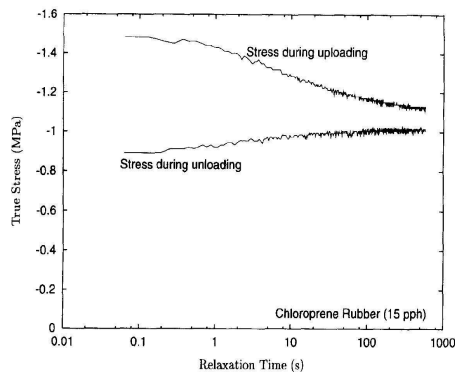
Ainsi, pour une étude rapide en petites déformations sans effet dynamique avec peu de paramètres, le modèle Gaussien (ou Néo-Hookéen) peut s'avérer largement suffisant. Pour une étude sur un large domaine de déformation (petites et grandes déformations) avec peu de paramètres, les modèles d'Arruda-Boyce et Gent sont très satisfaisants. Ensuite, dans le cas d'élastomères chargés, il peut être intéressant de complexifier ces lois hyperélastiques en tenant compte de la présence de charges et/ou de l'effet Mullins.

### II.1.3 Modèles dissipatifs

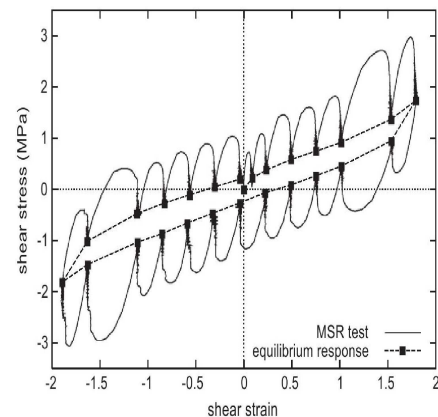
Dans les modèles présentés précédemment on ne distingue pas charge et décharge ; on considère les phénomènes comme étant réversibles et donc non-dissipatifs. Cependant, expérimentalement la quasi totalité des élastomères présentent un caractère dissipatif qui se traduit dans le plan contrainte / déformation par la présence d'une boucle d'hystérésis dont l'aire représente l'énergie dissipée durant ce cycle. La présence de ces boucles d'hystérésis peut être reliée à la fois à un phénomène de plasticité ou de viscosité. Dans ce paragraphe, des modèles utilisant de la plasticité et/ou de la viscosité pour modéliser le caractère dissipatif de ces matériaux seront évoqués.

#### a) Hystérésis associées à des temps caractéristiques infiniment long / Plasticité indépendante du temps

Tous les modèles évoqués précédemment permettent de caractériser la courbe d'équilibre du matériau. Pour observer cet état d'équilibre, on réalise généralement des essais de multi-relaxation et l'on suppose qu'au bout d'un certain temps, les relaxations de charge et de décharge pour une même déformation donnée vont se rejoindre. La figure II.15 illustre ce propos ; on peut y observer la convergence des contraintes et les temps de relaxation nécessaires.



**Fig. II.15** – Essai de multirelaxation (compression) sur un Chloroprène chargé de noir de carbone (Bergström and Boyce, 1998)

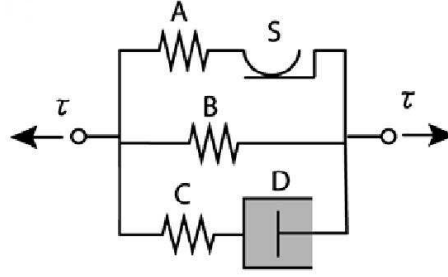


**Fig. II.16** – Essai de multi-relaxation en cisaillement (Bhuiyan et al., 2009)

Cependant, on note que ce temps hypothétique devrait, s'il existe, être très long et il est alors possible de considérer que le comportement obtenu pour des vitesses de déformations très faibles (donc proche de l'équilibre) forme une boucle d'hystérésis et non une courbe comme on le suppose en utilisant uniquement une loi hyperélastique.

Bhuiyan et Okui dans leur étude concernant des applications anti-sismiques (Bhuiyan et al., 2009) ont notamment choisie cette hypothèse et la figure II.16 illustre cette hystérésis qui vient représenter le comportement quasi-indépendant du temps du matériau. De plus, les temps caractéristiques mis en jeu étant très grand, la solution retenue pour la modélisation est de passer par la théorie de la plasticité. Le schéma 1D du modèle proposé est présenté sur la figure II.17.

Les deux branches supérieures modélisent l'état d'équilibre du matériau (nous ne considérons pas pour l'instant la troisième branche) : le ressort non-linéaire B permet de décrire l'hyperélasticité comme les courbes d'équilibre des modèles précédents et la branche supérieure décrit un comportement superposé élastoplastique. Le ressort A est linéaire et est



**Fig. II.17** – Schématisation 1D du modèle proposé (Bhuiyan et al., 2009)

défini par l'équation  $\tau_{ep} = C\gamma_A$ , avec  $\gamma_A$  déformation (cisaillement) dans le ressort A. Le glisseur S est actif lorsque la contrainte dans celui-ci devient supérieure à une valeur critique  $\tau_{cr}$  :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_s \neq 0 & \text{pour } |\tau_{ep}| = \tau_{cr} \\ \dot{\gamma}_s = 0 & \text{pour } |\tau_{ep}| < \tau_{cr} \end{cases} \quad (\text{II.98})$$

La valeur de  $\tau_{cr}$  est donnée par la demie largeur de la boucle d'hystérésis. Les deux branches indépendantes du temps permettent donc de simuler la boucle d'hystérésis aux faibles vitesses de déformation en pointillés sur la figure II.16. Ce modèle représente donc une façon de prendre en compte l'existence d'une hystérésis pour les temps infiniment long.

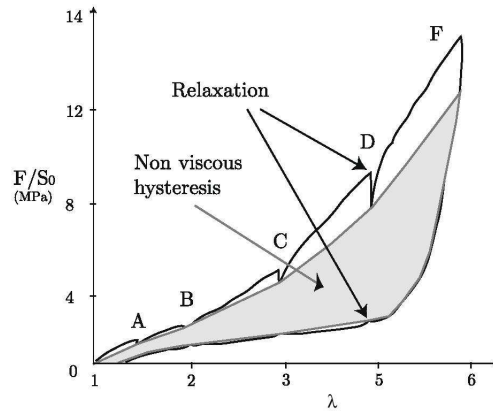
### b) Modélisation de l'adoucissement cyclique / Plasticité indépendante du temps

Comme nous l'avons vu au Chapitre I section I.1.3 a), les élastomères chargés soumis à un chargement cyclique voient leur contrainte s'adoucir au fur et à mesure des cycles jusqu'à atteindre un état stabilisé. Cantournet et Desmorat (Cantournet and Desmorat, 2003) ont choisi dans leur article de modéliser ce phénomène par du frottement interne. Le potentiel thermodynamique utilisé est le suivant :

$$\rho_0 \Psi = W_1(\mathbf{E}) + W_2(\mathbf{E} - \mathbf{E}^\pi) + \frac{1}{2} C_x \alpha : \alpha, \quad (\text{II.99})$$

où  $\rho_0$  la densité du matériau non-déformé,  $W_1$  est une densité d'énergie de déformation hyperélastique (mooney-rivlin est choisi ici),  $W_2$  est aussi une densité d'énergie de déformation hyperélastique mais appliquée à  $\mathbf{E} - \mathbf{E}^\pi$  avec  $\mathbf{E}^\pi$  représentant les déformations inélastiques,  $C_x$  est une constante matériau et  $\alpha$  est une variable interne relative aux frottements. Ainsi, la quantité  $W_1$  définit une courbe hyperélastique donc sans dissipation qu'il faut comparer aux courbes de comportement indépendant du temps décrites dans le paragraphe II.1.2. Ensuite, la quantité  $W_2$  définit ce que les auteurs ont choisi d'appeler une hystérésis non-visqueuse obtenue après des essais de multi-relaxation de la même manière que dans le paragraphe précédent (voir figure II.18). Cette quantité représente donc l'hystérésis obtenue pour des temps infiniment longs et donc supposée indépendante du temps. La dernière quantité est relative aux frottements induits par la sollicitation cyclique induisant une chute de contrainte au fur et à mesure des cycles.





**Fig. II.18** – Boucle d’hystérésis résiduelle après essai de multi-relaxation (Cantournet et al., 2009)

Les lois d’états associées sont les suivantes :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}}, \quad (\text{II.100})$$

$$\mathbf{S}_2 = -\frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}^\pi} = \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}}, \quad (\text{II.101})$$

$$\mathbf{X} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = C_x \alpha; \quad (\text{II.102})$$

avec pour  $W_1$  proposé le potentiel de mooney rivlin et pour  $W_2$ , l’expression suivante est retenue :

$$W_2 = 4C_{20}(\text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^\pi))^2 = C_{20}(I_1 - 2\text{tr}(\mathbf{E}^\pi) - 3)^2. \quad (\text{II.103})$$

Concernant l’évolution du frottement interne, la fonction seuil  $f$  est définie de la manière suivante :

$$f = \|\mathbf{S}_2 - \mathbf{X}\| - \sigma_s, \quad (\text{II.104})$$

où  $\sigma_s$  représente le seuil de déclenchement des phénomènes de friction.

De plus, le modèle proposé est un modèle non-associé : le potentiel de dissipation  $F$  s’exprime alors par l’expression :

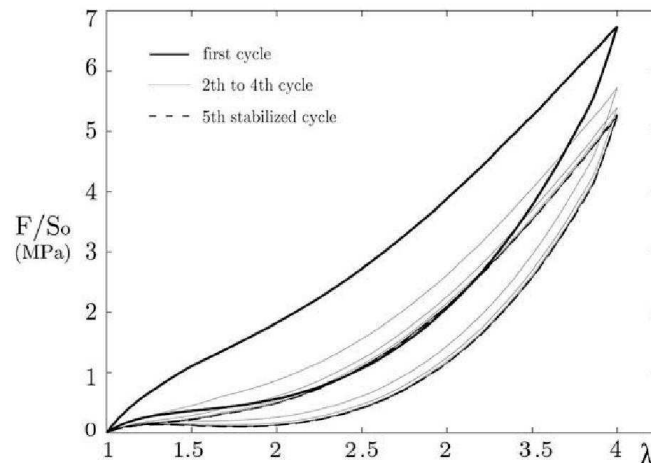
$$F = f + \frac{\gamma}{C_x} \mathbf{X} : \mathbf{X}, \quad (\text{II.105})$$

où  $\gamma$  est un paramètre matériau permettant de définir la non-linéarité du phénomène de frottement.

En ce qui concerne l'identification des paramètres matériau, il faut définir les paramètres caractérisant :

- le premier cycle ( $C_{20}$  (paramètre hyperélastique lié à  $W_2$ ) et  $\sigma_s$ ) et donc l'état de départ
- puis définir le cycle stabilisé ( $C_x$  et  $\gamma$ ) pour exprimer l'état vers lequel le matériau va converger.

La figure II.19 illustre le résultat d'une simulation obtenue avec ce modèle.



**Fig. II.19** – Adoucissement cyclique obtenu à partir de la modélisation (Cantournet et al., 2009)

Le modèle proposé permet bien de représenter la chute de la contrainte maximale au fur et à mesure des cycles ainsi que la convergence vers un cycle stabilisé. Cependant on peut noter une évolution trop importante de la courbe de décharge entre le premier cycle et le cycle stabilisé ; en effet, expérimentalement, on observe une courbe de décharge très peu dépendante du nombre de cycles.

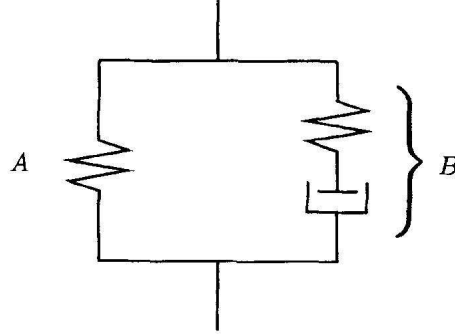
### c) Hystérésis associées à des temps caractéristiques assez court / Viscosité

Tous les modèles présentés dans ce paragraphe visent à tenir compte de la dissipation au sein du matériau et viennent ajouter une contribution visqueuse au comportement hyperélastique indépendant du temps. Ces modèles peuvent être schématisés sous la forme décrite sur la figure II.20.

Nous aborderons dans ce paragraphe différentes options choisies pour modéliser le comportement vis à vis du temps du matériau (branche B).

Tout d'abord, Bergström et Boyce (Bergström and Boyce, 1998) dans leur étude se sont attachés sur la modélisation du phénomène de relaxation des contraintes.

Comme évoqué précédemment, la mise en parallèle des deux branches permet de découpler les phénomènes par rapport au temps ; la partie indépendante du temps (branche A) utilise le modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce et la branche de droite, dépendante du temps se décompose en une partie élastique (représentée aussi par le modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce) et une partie inélastique.



**Fig. II.20** – Schéma rhéologique 1D du modèle proposé (Bergström and Boyce, 1998)

Ainsi, dans la branche B on a  $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_B^e \mathbf{F}_B^p$  et le gradient de vitesse  $\mathbf{L}_B = \dot{\mathbf{F}}_B \mathbf{F}_B^{-1}$  se décompose alors sous la forme :

$$\mathbf{L}_B = (\mathbf{F}_B^e \dot{\mathbf{F}}_B^p) (\mathbf{F}_B^e \mathbf{F}_B^p)^{-1} = \mathbf{F}_B^e \mathbf{F}_B^p (\mathbf{F}_B^p)^{-1} (\mathbf{F}_B^e)^{-1} + \mathbf{F}_B^e \dot{\mathbf{F}}_B^p (\mathbf{F}_B^p)^{-1} (\mathbf{F}_B^e)^{-1} \quad (\text{II.106})$$

$$= \mathbf{L}_B^e + \mathbf{F}_B^e \mathbf{L}_B^p (\mathbf{F}_B^e)^{-1} = \mathbf{L}_B^e + \tilde{\mathbf{L}}_B^p \quad (\text{II.107})$$

On pose ensuite  $\tilde{\mathbf{L}}_B^p = \tilde{\mathbf{D}}_B^p + \tilde{\mathbf{W}}_B^p$  et l'on suppose  $\tilde{\mathbf{W}}_B^p = \mathbf{0}$ .

De plus on a  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B$  avec  $\mathbf{T}_A$  et  $\mathbf{T}_B$  les contraintes de Cauchy dans chaque branche issues du modèle d'Arruda Boyce et on définit la dépendance au temps par l'équation :

$$\tilde{\mathbf{D}}_B^p = \dot{\gamma}_B \mathbf{N}_B \quad (\text{II.108})$$

Avec  $\dot{\gamma}_B$  définissant la vitesse de relaxation et  $\mathbf{N}_B$  définissant la direction de ce gradient de vitesse. On a :

$$\mathbf{N}_B = \frac{1}{\sqrt{2}\tau_B} \mathbf{T}_B' \quad (\text{II.109})$$

avec  $\mathbf{T}_B'$  la partie déviatorique de  $\mathbf{T}_B$  et  $\tau_B$  la contrainte équivalente effective de cisaillement qui s'exprime sous la forme  $\tau_B = \sqrt{0.5 \text{tr}(\mathbf{T}_B' \mathbf{T}_B')}$ .

Pour exprimer la vitesse de relaxation, Bergström et Boyce s'appuient sur le fait que lorsque la déformation est appliquée puis maintenue, les chaînes vont se relaxer par agitation thermique pour aller vers une configuration plus favorable de manière à augmenter leur entropie.

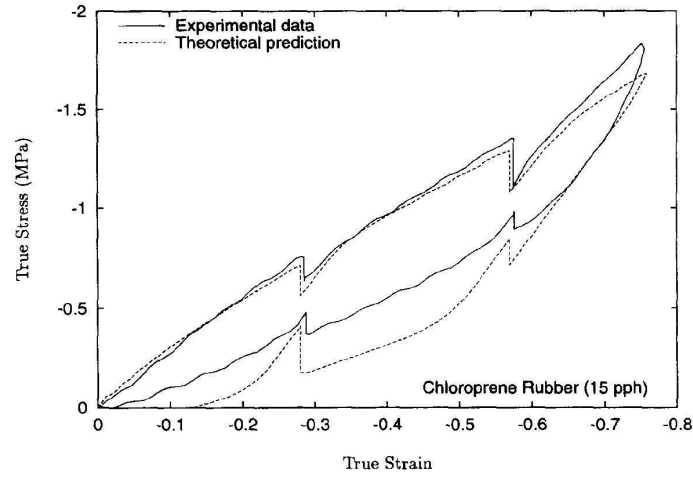
Ils parviennent à l'expression :

$$\dot{\gamma}_B = C_1 (\lambda_{chain}^{Bp} - 1) C_2 \left( \frac{\tau_B}{\hat{\tau}_B} \right)^m \quad (\text{II.110})$$

avec  $\frac{C_1}{\hat{\tau}_B^m}$ ,  $C_2$  et  $m$  trois constantes

L'évolution de la vitesse de relaxation dépend alors à la fois de la déformation appliquée et de la contrainte engendrée.

La figure II.21 montre le résultat de ce modèle appliqué à un essai de multi-relaxation en compression sur un Chloroprène chargé de noir de carbone.



**Fig. II.21** – Comparaison modèle et expérience (Bergström and Boyce, 1998)

De suite, Bhuiyan et Okui, s'intéressent aux sollicitations en cisaillement de type dynamique (chargement sinusoïdal, statique nul) pour une application anti-sismique (Bhuiyan et al., 2009). Leur modèle a déjà été évoqué précédemment au paragraphe a) et le schéma rhéologique correspondant est celui de la figure II.17. Les deux branches supérieures correspondent au comportement indépendant du temps ; le ressort B modélise l'hyperélasticité et le couplage ressort A (linéaire) et patin S permet de tenir compte d'une hystérésis correspondant à des temps infiniment lents. La branche la plus basse vient donc ajouter une contribution dépendante du temps ; le ressort C est linéaire, il faut maintenant définir la dépendance de la contrainte dans cette branche ( $\tau_{OE}$  (overstress)) avec la vitesse de déformation.

Bhuiyan et Okui mettent aussi en oeuvre des essais de caractérisation de type multi-relaxation et ils s'attachent à tenir compte de la dissymétrie de relaxation entre de la charge et la décharge, notamment vis à vis de l'amplitude de déformation appliquée. Il constate ainsi que la relaxation de la décharge est indépendante du niveau de déformation appliqué alors que la relaxation de la charge en dépend : plus le niveau déformation appliquée est grand plus la chute de contrainte est importante.

Dans un premier temps, ils distinguent la charge de la décharge par le signe de  $\dot{\gamma}_d$  :

$$\dot{\gamma}_d > 0 \text{ pour la charge} \quad (\text{II.111})$$

$$\dot{\gamma}_d < 0 \text{ pour la décharge} \quad (\text{II.112})$$

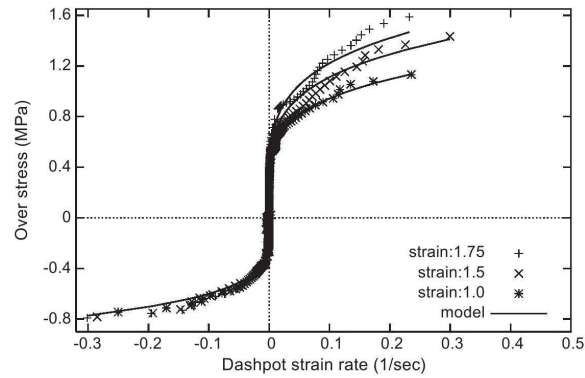
puis ils définissent ensuite deux lois d'évolution distinctes :

$$\tau_{OE} = A_L \exp(q|\gamma|) \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}_d) \left| \frac{\dot{\gamma}_d}{\dot{\gamma}_0} \right| \text{ pour la charge} \quad (\text{II.113})$$

$$\tau_{OE} = A_U \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}_d) \left| \frac{\dot{\gamma}_d}{\dot{\gamma}_0} \right| \text{ pour la décharge} \quad (\text{II.114})$$

où  $\dot{\gamma}_0$  est une vitesse de déformation de référence et  $A_L$ ,  $A_U$ ,  $q$  et  $n$  des constantes.

Cette définition leur permet d'obtenir les résultats de la figure II.22 pour différents niveaux d'amplitude de déformation appliqués.



**Fig. II.22** – Contrainte dans l’amortisseur (overstress) en fonction de la vitesse de déformation - modèle et expériences (Bhuiyan et al., 2009)

La distinction charge-décharge est des plus intéressantes, nous l’avons aussi observé sur notre matériau. On peut noter que Bergström l’avait déjà évoqué plus tôt (Bergström, 1999) mais la distinction était faite par rapport aux temps caractéristiques mis en jeu et non par rapport à la dépendance à la déformation. En effet, la chute de contrainte sur la courbe de décharge est très faible : le comportement est proche d’un état d’équilibre ; la relaxation de contrainte pour la charge est elle plus importante que celle de décharge. Il considère donc le temps caractéristique correspondant à la décharge beaucoup plus long que celui de la charge. Pour effectuer la distinction charge-décharge, Bergstrom s’appuie sur le signe du produit  $\mathbf{T}_B' \bullet \tilde{\mathbf{D}}_{BP}$  :

$$\mathbf{T}_B' \bullet \tilde{\mathbf{D}}_{BP} > 0 \text{ pour la charge} \quad (\text{II.115})$$

$$\mathbf{T}_B' \bullet \tilde{\mathbf{D}}_{BP} < 0 \text{ pour la décharge} \quad (\text{II.116})$$

Ensuite, si l’on reprend l’équation II.110, il modifie  $C_1$  en fonction de la charge ou décharge et choisit ici  $C_1^{\text{décharge}} = 100.C_1^{\text{charge}}$ .

Les modèles présentés dans cette section permettent de modéliser la dépendance au temps, à la vitesse de déformation et donc le caractère dissipatif du matériau. La mise en oeuvre de ces lois dépendra du comportement du matériau concerné et du domaine d’étude.

#### II.1.4 Modélisation de l’effet Payne

Comme nous l’avons souligné dans le Chapitre I section I.1.5, les élastomères chargés soumis à une sollicitation vibratoire présente de l’effet Payne. Modéliser cette forte dépendance du module dynamique avec l’amplitude de déformation est l’un des objectifs principaux du projet.

Dans la littérature, beaucoup d’observations, de concepts sont proposés mais peu de modèles ont été développés à ce jour. Dans ce paragraphe, les modèles recensés sont détaillés.

Dans un premier temps, comme l’évoquait Payne, certains chercheurs comme Kraus (Kraus, 1984) relie ce phénomène aux charges et notamment à leur désagglomération et agglomération sous sollicitation vibratoire. Dans un second temps, Maier et ses collègues

(Maier and Goritz, 1996) attribué plutôt le phénomène à l'interaction matrice-charges et au détachement de chaînes reliées à une charge sous l'effet de la sollicitation. Enfin, Montes et ses collègues (Montes et al., 2003), évoquent la présence d'une enveloppe vitreuse entourant chaque charge à l'intérieure de laquelle un gradient de transition vitreuse est observé.

Le modèle développé par Kraus (Kraus, 1984) est fondé sur la première théorie, il suppose qu'un élastomère chargé soumis à une sollicitation sinusoïdale de fréquence fixe  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$  voit les contacts entre ses charges continuellement se rompre et se reformer. Il considère de suite que lorsque l'amplitude de déformation est augmentée, de plus en plus de contacts se rompent ; il définit alors le taux de cassage ( $R_b$ ) comme étant proportionnel à la puissance de l'amplitude de déformation mais aussi au nombre de contacts persistants  $N$  :

$$R_b = k_b \varepsilon_0^m N \quad (\text{II.117})$$

De la même manière, il considère le taux de reformation ( $R_m$ ) proportionnel à  $\varepsilon_0^{-m}$  et aux nombres de contacts rompus ( $N - N_0$ ), avec  $N_0$  le nombre de contacts présent au départ lorsqu'aucune déformation n'est appliquée.

$$R_m = k_m \varepsilon_0^{-m} (N_0 - N) \quad (\text{II.118})$$

De suite, à l'équilibre, ces deux taux sont égaux donnant ainsi accès à  $N$  :

$$N = \frac{N_0}{1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c}\right)^{2m}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_c = \left(\frac{k_m}{k_b}\right)^{\frac{1}{2m}} \quad (\text{II.119})$$

Puis, la chute du module élastique est considérée comme proportionnelle aux contacts persistants d'où  $E' - E'_\infty = kN$  et de plus pour les amplitudes très faibles on a  $E' - E'_\infty = E'_0 - E'_\infty = kN_0$  d'où l'expression du module élastique sous la forme suivante :

$$\frac{E' - E'_\infty}{E'_0 - E'_\infty} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c}\right)^{2m}} \quad (\text{II.120})$$

On notera au passage que l'amplitude  $\varepsilon_c$  est l'amplitude pour laquelle  $E' - E'_\infty$  a diminué de moitié.

En ce qui concerne le module de perte, il considère que chaque mécanisme de cassage ou de reformation va être source de dissipation d'énergie, c'est pourquoi il pose  $E'' - E''_\infty$  proportionnel à  $R_b$  (ou  $R_m$  cela revient au même)

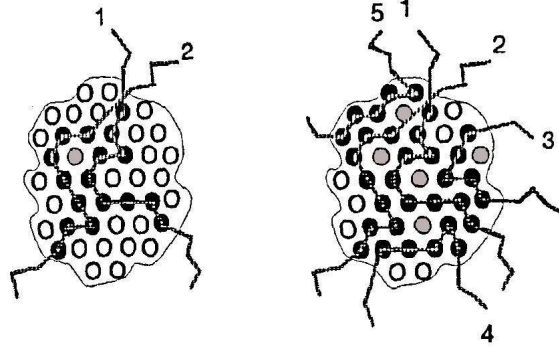
$$E'' - E''_\infty = ck_b \varepsilon_0^m N \quad \text{puis} \quad \frac{E'' - E''_\infty}{E''_{\max} - E''_\infty} = \frac{2\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c}\right)^m}{1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c}\right)^{2m}} \quad (\text{II.121})$$

puisque  $E''$  est maximum en  $\varepsilon_0 = \varepsilon_c$ .

Kraus dans son article fitte les données expérimentales obtenues par Payne sur un élastomère butyl de teneur en noir de carbone de 23 % en utilisant le modèle présenté et parvient à plutôt bien respecter les tendances d'évolution.

Ensuite, Maier et Goritz (Maier and Goritz, 1996) ont mis en place un modèle fondé, eux, sur l'interaction entre la matrice et les charges et sur l'existence de liaisons plus ou moins fortes des chaînes sur la surface des particules. Ils mettent en avant le fait qu'une liaison est d'autant plus stable que la chaîne est fixée à plusieurs endroits de la surface de la particule. Le schéma de la figure II.23 représente une charge ainsi que les différents points d'attache (cercles)

sur sa surface ; on peut y observer que lorsque la première chaîne va s'attacher à la charge beaucoup de place lui est disponible. En revanche, lorsque plusieurs chaînes sont attachées à la particule, elles ne laissent plus beaucoup de points d'attache disponibles (cercles blancs) aux autres chaînes et des sites propices à de faible liaison entre chaîne et charge se créent (cercles gris) : seul un point d'attache est disponible. Pour Maier et Goritz, les points d'attaches gris représentent des emplacements de liaisons instables qui vont se détacher préférentiellement lors de l'application d'une amplitude de déformation croissante et causer la chute du module élastique.



**Fig. II.23** – Interaction chaînes et charges (Maier and Goritz, 1996)

Pour modéliser cela, ils divisent la densité de chaînes du réseau ( $N$ ) en trois catégories : la densité de chaînes représentant les liaisons chimiques ( $N_C$ ), celles représentant les liaisons stables (plusieurs points d'attache  $N_{St}$ ) et celles représentant les liaisons instables ( $N_I$ ) ; ce qui permet d'exprimer ainsi le module élastique de la manière suivante :

$$G' = Nk\theta = (N_C + N_{St} + N_I(\gamma))k\theta \quad (\text{II.122})$$

avec  $k$  constante de Boltzmann,  $\gamma$  l'amplitude de déformation et  $\theta$  la température. Seules les liaisons instables vont alors dépendre de l'amplitude de déformation appliquée. De plus, ils relient l'attachement des chaînes à la charge au phénomène d'adsorption et celui du détachement à la désorption. Si l'on nomme  $\Theta$  et  $\Theta_1$  respectivement les proportions de sites libres et occupés à la surface de la particule et  $\Phi_a$  et  $\Phi_d$  respectivement les taux d'adsorption et de désorption, on a à l'équilibre la relation suivante :

$$\Theta\Phi_a = \Theta_1\Phi_d \quad \text{avec} \quad \Theta + \Theta_1 = 1 \quad (\text{II.123})$$

De suite, ils considèrent le taux d'adsorption constant et postule le taux de désorption proportionnel à l'amplitude de déformation appliquée :  $\Phi_d = \Phi\gamma$ . En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient :

$$\Theta_1 = \frac{\Phi_a}{\Phi_a + \Phi\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{\Phi\gamma}{\Phi_a}} = \frac{1}{1 + c\gamma} \quad \text{avec} \quad c = \frac{\Phi}{\Phi_a} \quad (\text{II.124})$$

Ce qui permet d'écrire la densité de chaînes représentant les liaisons instables de la manière suivante :

$$N_I(\gamma) = \Phi_1 N_{I_0} = \frac{N_{I_0}}{1 + c\gamma} \quad (\text{II.125})$$

avec  $N_{I_0}$  le nombre d'interaction isolée par unité de volume.

Le module élastique devient alors :

$$G'(\gamma) = Nk\theta = (N_C + N_{St} + \frac{N_{I_0}}{1 + c\gamma})k\theta = G'_{St} + \frac{G'_I}{1 + c\gamma} \quad (\text{II.126})$$

Concernant le module de perte, Maier et Goritz considèrent de la même manière que seules les liaisons instables sont responsables de l'augmentation de l'énergie de dissipation. Ainsi, le module de perte est supposé proportionnel au nombre de liens instables ; de plus la possibilité de glisser à la surface de la charge dépend aussi de la surface libre autour de la chaîne.

$$G''(\gamma) = G''_{St} + G''_1 \Theta_1(\gamma) \Theta(\gamma) = G''_{St} + G''_1 \frac{c\gamma}{(1+c\gamma)^2} \quad (\text{II.127})$$

Sur la figure II.24, le modèle a été utilisé pour fitter les données expérimentales obtenues par Patel sur un SBR pour différentes teneurs en noir de carbone.

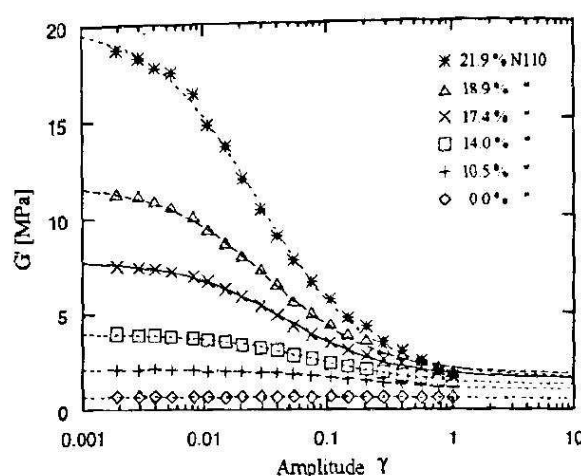


Fig. II.24 – Interaction chaînes et charges (Maier and Goritz, 1996)

On constate que la représentation par le modèle est plutôt bonne. Le module de perte est aussi bien représenté (voir article).

On peut s'intéresser ensuite à l'évolution des jeux de paramètres obtenus pour les différentes teneurs en charges. Les figures II.25 et II.26 représentent respectivement l'évolution des paramètres  $G'_{St}$  et  $G'_I$  avec la teneur en charge.

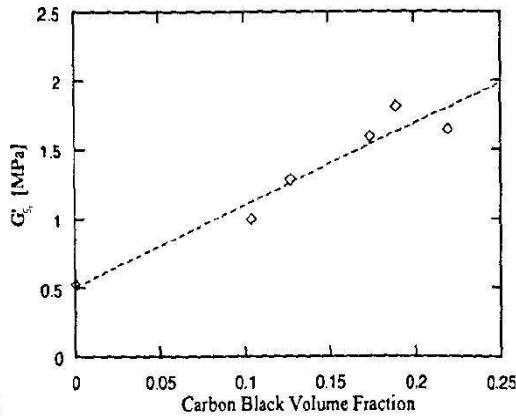
On note alors que le paramètre  $G'_{St}$  dépend linéairement de la teneur en charge avec une faible amplitude alors que le paramètre  $G'_I$  évolue de manière quadratique et les valeurs prises sont très éloignées.

Clément et ses collègues (Clement et al., 2005) étudient l'effet Payne sur le polydiméthylsiloxane chargé de silice et appliquent les modèles précédents à ce matériau. On notera que les deux derniers modèles n'avaient été appliqués en premier lieu qu'au noir de carbone. Ils observent une bonne approximation des deux modèles pour  $G'$  mais mettent en avant l'incapacité de ces modèles à représenter la dissymétrie de la courbe de  $G''$  avec l'amplitude de déformation.

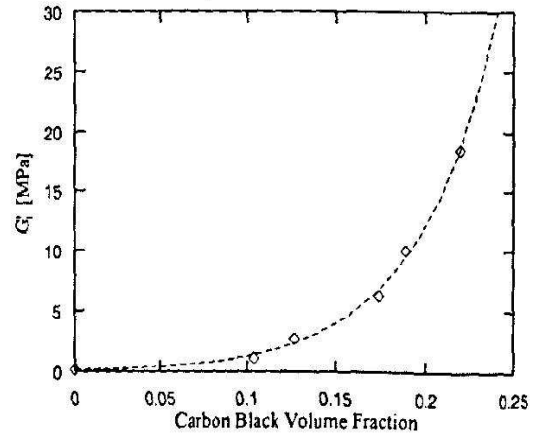
La même observation a été faite sur nos courbes expérimentales.

De plus, ils notent des lacunes concernant les interprétations physiques de chacun de ces modèles. Concernant le modèle de Kraus, fondé sur désagglomération et réagglomération des charges, ceci ne peut pas être la seule explication compte-tenu du fait que l'effet Payne est présent même pour des teneurs en charges inférieures au seuil de percolation de celles-ci. Dans le cas du modèle de Maier et Goritz, une dépendance non-linéaire des paramètres  $c$ ,  $G'_I$  avec

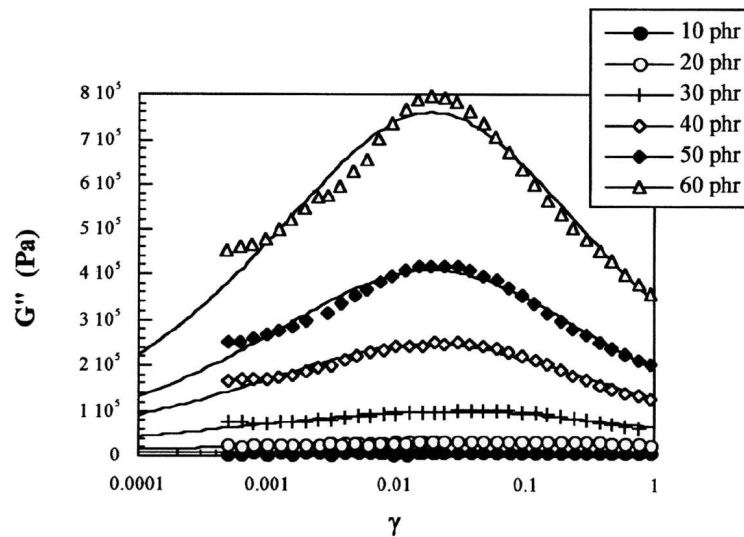




**Fig. II.25** – Dépendance du paramètre  $G'_{St}$  avec la teneur en charge (Maier and Goritz, 1996)



**Fig. II.26** – Dépendance du paramètre  $G'_I$  avec la teneur en charge (Maier and Goritz, 1996)



**Fig. II.27** – Application du modèle de Kraus aux données expérimentales de Clément et ses collègues (Clement et al., 2005)

la teneur en charge est observée alors que les concepts physiques du modèles n'évoquent pas du tout cette dépendance.

Cependant, ces deux modèles sont des modèles 1D et de plus si l'on s'intéresse à un niveau de fréquence ou de teneur en charges différent il faut recalculer tous les paramètres.

Ensuite, Montes et ses collègues (Montes et al., 2003) évoquent la présence d'une coque vitreuse autour de chaque particule délimitant une zone à l'intérieure de laquelle existe un gradient de température de transition vitreuse ( $T_g$ ). Ce gradient est similaire à celui observé dans les films polymères et s'écrit de la manière suivante :

$$T_g^\omega(z) = T_g^\omega \left( 1 + \left( \frac{\delta}{z} \right)^v \right) \quad (\text{II.128})$$

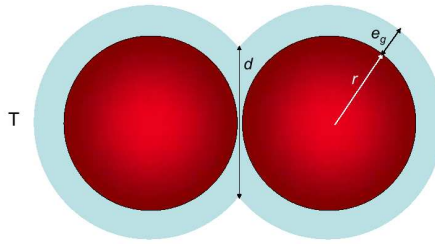
avec  $z$  la distance par rapport à la surface de la particule,  $T_g^\omega$  la température de transition

vitreuse ( en K) obtenue à une fréquence  $\frac{\omega}{2\pi}$ ,  $\nu$  un coefficient proche de 1 et  $\delta$  une longueur, souvent proche de  $1nm$  qui peut dépendre de l'interface entre la matrice et la charge. Ainsi, loin de la particule  $T_g^\omega(z) = T_g^\omega$  puis en se rapprochant de la particule, la température de transition vitreuse est augmentée et le comportement de la matrice devient alors vitreux. L'épaisseur de cette coque vitreuse  $e_g$  est ensuite définie par l'expression suivante :

$$e_g(T, \omega) = \delta \frac{T_g^\omega}{T - T_g^\omega}. \quad (\text{II.129})$$

Ainsi, l'épaisseur de cette coque dépend de la fréquence (puisque la  $T_g$  dépend de la fréquence) et de la température d'étude ( $T$  en K). Lorsque la température d'étude se trouve bien au delà de la  $T_g$ , l'épaisseur de la coque vitreuse est faible. Lorsque la fréquence augmente, la  $T_g$  augmentant, l'épaisseur de la coque vitreuse devient plus importante.

De plus, comme il a été évoqué au Chapitre I section I.1.5, la disposition des particules au sein de la matrice joue un rôle important ; plus la dispersion des charges est mauvaise, présence d'agglomérats, plus la chute du module élastique est importante. Lorsque deux charges sont voisines, chacune entourée par une coque vitreuse d'épaisseur  $e_g$ , Montes et ses collègues évoquent la présence d'un pont vitreux de diamètre  $d$  qui se crée entre celles-ci (voir figure II.28) ; la présence de ces ponts augmente alors la rigidité du matériau.



**Fig. II.28** – Représentation schématique de deux charges voisines entourées chacune par une coque vitreuse d'épaisseur  $e_g$  (Montes et al., 2010)

C'est pourquoi, Montes et ses collègues suggèrent que la valeur du module élastique est piloter par deux paramètres : l'épaisseur de la coque vitreuse et la répartition des charges au sein de la matrice.

Enfin, ils évoquent le fait que, lorsqu'une sollicitation dynamique est appliquée au matériau et que l'amplitude de déformation augmente, toutes les chaînes de la matrice voyant une amplification des déformations (engendrée par la présence de charges), les chaînes vitreuses ont tendance à plastifier diminuant ainsi la contrainte au sein du matériau et donc la rigidité. Ainsi, la présence de ses parties vitreuses (coques et ponts) seraient responsable de l'effet Payne.

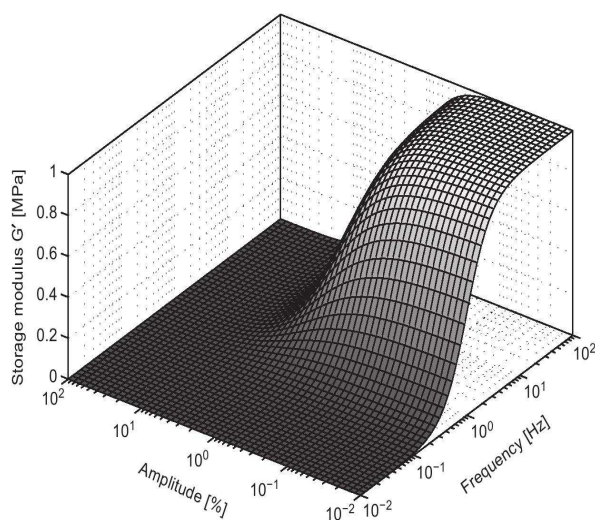
Enfin, de nombreux travaux ont été menés par Lion et ses collègues sur l'effet Payne afin d'être en mesure de prédire sa dépendance avec l'amplitude de déformation et la fréquence ((Lion et al., 2003),(Hofer and Lion, 2009)) puis plus récemment en essayant d'intégrer la dépendance à la déformation statique appliquée (Rendek and Lion, 2010). Ils s'intéressent de plus à l'aspect transitoire c'est-à-dire à la période pendant laquelle, lors de l'application de la sollicitation vibratoire, les modules vont évoluer jusqu'à se stabiliser.

Ainsi, ils ont noté que lorsque l'amplitude de déformation est augmentée, les modules de conservation et de perte évoluent quasi instantanément (quelques minutes) vers leur valeur

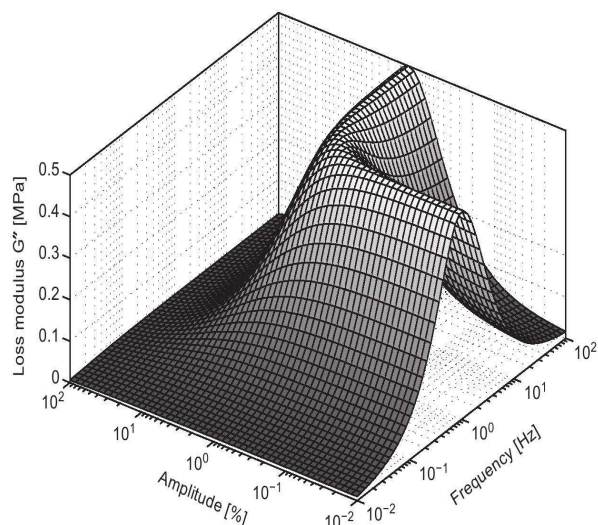
stabilisée en revanche lorsque celle-ci est diminuée, il faut environ 1h pour que l'évolution des modules se stabilise.

Lion et ses collègues ont mis en place une approche 3D thermodynamique intégrant les aspects temporels afin de tenir compte de l'histoire des déformations. Plusieurs modèles éléments finis viscoélastiques non-linéaires ont été développés intégrant notamment le modèle de Kraus. Ils sont constitué par la mise en parallèle de nombreuses branches de Maxwell et d'une branche indépendante du temps.

Les figures II.29 et II.30 représentent les résultats obtenus avec le modèle développé dans (Hofer and Lion, 2009) sur la prévision des modules élastique et de perte en fonction de l'amplitude de déformation et de la fréquence :



**Fig. II.29** – Evolution du module de conservation avec l'amplitude de déformation et la fréquence obtenue avec ce modèle (Hofer and Lion, 2009)



**Fig. II.30** – Evolution du module de perte avec l'amplitude de déformation et la fréquence obtenue avec ce modèle (Hofer and Lion, 2009)

Les tendances sont respectées et le comportement est connu pour toutes les fréquences et amplitudes de déformation.

Cependant, les modèles proposés nécessitent un grand nombre de paramètres et de variables internes auxquels peu d'explications physiques sont associées. Le modèle développé dans (Hofer and Lion, 2009) nécessite par exemple l'identification de 43 paramètres matériau et 14 variables internes ; celui intégrant la dépendance à la déformation statique (Rendek and Lion, 2010) utilise plus de 50 paramètres matériaux et 12 variables internes.

Ainsi de nombreuses études sont actuellement menées pour tenter de comprendre l'origine physique de l'effet Payne et le modéliser.

## II.2 Modèle de Qi-Boyce

Dans ce paragraphe, nous nous attacherons à décrire le modèle développé par Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005), modèle sur lequel nous nous sommes basés pour créer le modèle de comportement du silicone chargé de silice sous sollicitation vibratoire. Les mécanismes de déformation pris en compte par le modèle seront soulignés et les insuffisances par rapport aux caractéristiques du modèle de comportement que nous souhaitons développer seront relevées.

### II.2.1 Définition du modèle

Dans leur article, Qi et Boyce ont développé ce modèle pour prédire le comportement d'élastomères thermoplastiques polyuréthanes (TPU), c'est-à-dire d'un copolymère composé d'une partie amorphe (chaînes flexibles) et d'une partie dure (chaînes non-flexibles).

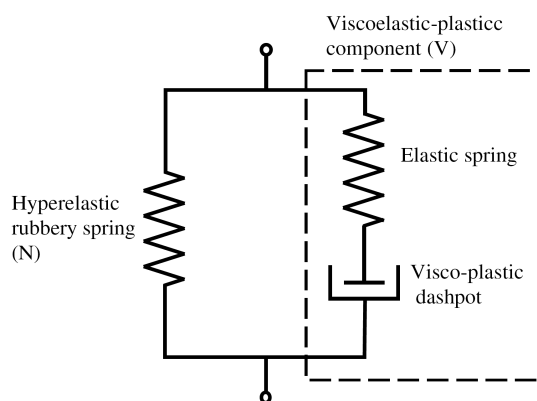
Ce modèle rend compte de différents phénomènes :

- l'hyperélasticité,
- l'effet Mullins,
- l'amplification des déformations due à la présence de parties rigides,
- la compressibilité,
- la dépendance en temps, et donc la viscosité.

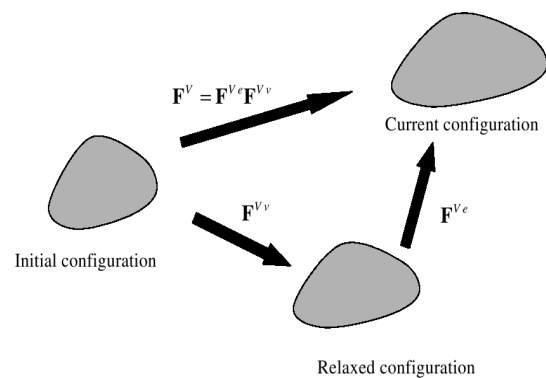
Le modèle constitutif de Qi-Boyce peut être représenté par le schéma rhéologique de la figure II.31, c'est-à-dire par deux branches en parallèle découpant les phénomènes vis-à-vis de leur dépendance en temps.

La branche de gauche (N) représente la partie indépendante du temps du matériau (état d'équilibre) ; elle contient notamment la modélisation de l'hyperélasticité, de l'effet Mullins et de l'amplification des déformations.

La branche de droite (V) représente la partie dépendante du temps du matériau et permet notamment de modéliser l'aspect visqueux et donc le caractère dissipatif du matériau.



**Fig. II.31** – Schéma rhéologique 1D du modèle de Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005)



**Fig. II.32** – Schéma de la décomposition multiplicative du gradient de transformation (Qi and Boyce, 2005)

Ainsi, par construction, la déformation est la même dans les deux branches :  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^N = \mathbf{F}^V$  et la réponse en contrainte du matériau ( $\mathbf{T}$ ) est la somme de deux contributions, une indépendante du temps ( $\mathbf{T}^N$ ) et une dépendante du temps ( $\mathbf{T}^V$ ).

La première contribution ( $\mathbf{T}^N$ ) couple le modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce, l'utilisation du facteur d'amplification  $X$ , la prise en compte de la compressibilité et la modélisation de l'effet Mullins proposé par Qi et Boyce, points respectivement abordés dans les paragraphes II.1.2 d), II.1.2 g), II.1.2 f) et II.1.2 h). D'où l'expression de  $\mathbf{T}^N$  sous la forme :

$$\mathbf{T}^N = \frac{\mathbf{v}_s X \mu_r}{3J} \frac{\sqrt{N}}{\Lambda_{chain}} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\Lambda_{chain}}{\sqrt{N}} \right) \cdot \bar{\mathbf{B}}' \quad (\text{II.130})$$

avec  $X = 1 + 3.5(1 - \mathbf{v}_s) + 18(1 - \mathbf{v}_s)^2$ ,  $\Lambda_{chain} = \sqrt{\frac{\langle I_1 \rangle_m}{3}}$  et  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{ss} - (\mathbf{v}_{ss} - \mathbf{v}_{s_0}) \cdot \exp \left( -A \cdot \frac{\Lambda_{chain} - 1}{\sqrt{N} - \Lambda_{chain}} \right)$ .

Soit une partie caractérisant le comportement stabilisé (équilibre) avec 5 paramètres :  $\mu_r$ ,  $N$ ,  $\mathbf{v}_{s_0}$ ,  $\mathbf{v}_{ss}$  et  $A$ .

La seconde contribution ( $\mathbf{T}^V$ ) est élastoviscoplastique, elle est issue de la mise en série d'un ressort linéaire et d'un amortisseur viscoplastique. Le tenseur gradient de déformation dans cette branche se décompose de manière multiplicative par  $\mathbf{F}^V = \mathbf{F}^{Ve} \cdot \mathbf{F}^{Vv}$  et le tenseur des contraintes de Cauchy  $\mathbf{T}^V$  est donné par l'expression

$$\mathbf{T}^V = \frac{\mathbf{v}_h}{\det \mathbf{F}^{Ve}} \cdot \mathbf{L}^{Ve} : [\ln \mathbf{V}^{Ve}], \quad (\text{II.131})$$

avec  $\mathbf{V}^{Ve}$  issu de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}^{Ve}$  ( $\mathbf{F}^{Ve} = \mathbf{V}^{Ve} \cdot \mathbf{R}^{Ve}$ ),  $\mathbf{v}_h = 1 - \mathbf{v}_s$  et  $\mathbf{L}^{Ve}$  le tenseur d'ordre 4 associé aux constantes caractérisant le comportement élastique :  $E$  et  $\mathbf{v}$ .

Ensuite, le tenseur des taux des déformations visco-plastiques  $\mathbf{D}^{Vv}$  est défini par :

$$\mathbf{D}^{Vv} = \mathbf{L}^{Vv} = \frac{\dot{\gamma}^v}{\sqrt{2} \cdot \bar{\tau}_v} \bar{\mathbf{T}}^{Vv} \quad (\text{II.132})$$

où  $\bar{\tau}_v$  est la contrainte équivalente de cisaillement :  $\bar{\tau}_v = \left[ \frac{1}{2} \bar{\mathbf{T}}^{Vv} \bullet \bar{\mathbf{T}}^{Vv} \right]^{\frac{1}{2}}$  où  $\bar{\mathbf{T}}^{Vv}$  est la partie déviatorique de  $\mathbf{T}^V$  exprimée dans la configuration relaxée (cf II.32) et  $\dot{\gamma}^v$  la vitesse de déformation viscoplastique .

On notera que  $\mathbf{W}^{Vv}$  est supposé nul.

Dans leur article, Qi et Boyce ont choisi d'exprimer la vitesse de déformation viscoplastique sous la forme :

$$\dot{\gamma}^v = \dot{\gamma}_0 \exp \left[ -\frac{\Delta G}{k\theta} \left( 1 - \frac{\bar{\tau}_v}{s} \right) \right] \quad (\text{II.133})$$

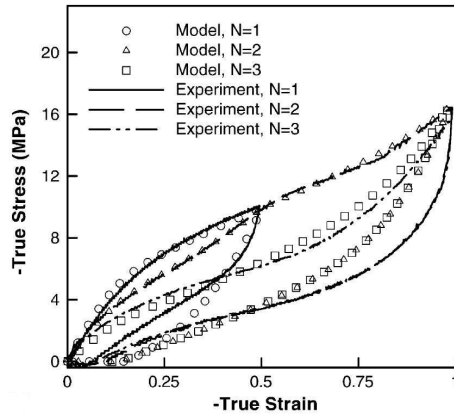
avec  $\dot{\gamma}_0$  constante,  $\Delta G$  l'énergie d'activation à contrainte nulle,  $k$  la constante de Boltzmann,  $\theta$  la température absolue et  $s = \frac{\mathbf{v}_h}{\mathbf{v}_{h_0}} s_0$  une contrainte athermale dépendante de la teneur en charges ( $\mathbf{v}_{h_0}$  étant la teneur initiale en charges et  $s_0$  constante).

Ainsi, dans cette branche caractérisant la dépendance en temps du matériau, 5 paramètres sont nécessaires :  $E$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\dot{\gamma}_0$ ,  $\Delta G$  et  $s_0$ .

Le modèle mis en place par Qi et Boyce requiert donc 10 paramètres matériau ; ceux-ci sont synthétisés dans le tableau II.1. Avec ce modèle, ils parviennent à modéliser des essais de type charge-décharge en compression en prenant en compte principalement de l'effet Mullins et du caractère dissipatif du polyuréthane comme l'illustre la figure II.33.

Branche (N)					Branche (V)				
Hyperélasticité (Arruda-Boyce)		Effet Mullins			Elasticité linéaire		Visco- plasticité		
$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$E$	$\nu$	$\dot{\gamma}_0$	$\Delta G$	$s_0$

**Tab. II.1** – Synthèse des paramètres matériau nécessaires



**Fig. II.33** – Comparaison modèle et expérience (Qi and Boyce, 2005)

Ainsi, ce modèle permet de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes que nous souhaitons modéliser. De plus, il a déjà été implémenté dans Zebulon et utilisé au centre.

*Modèle de Qi-Boyce tel qu'il est implémenté au centre*

Nous disposons du modèle de Qi-Boyce dans le code de calcul éléments finis de Zebulon, les équations constitutives employés sont les mêmes à ceci près que la vitesse de déformation viscoplastique  $\dot{\gamma}_0$  est exprimé de la manière suivante :

$$\dot{\gamma}_0 = d_0 \cdot \left[ \exp \left( \frac{\tau_{eq}}{\sigma_0 \cdot v_h} \right)^n - 1 \right] \quad (\text{II.134})$$

avec  $\tau_{eq} = \left( \frac{3}{2} \mathbf{T}^{v'} : \mathbf{T}^{v'} \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{T}^{v'}$  étant la partie déviatorique de  $T^v$ .

De plus, concernant la prise en compte de la quasi-incompressibilité du matériau, la fonction  $\hat{u}_{\mathcal{H}}(J)$  définie par :

$$\hat{u}_{\mathcal{H}}(J) = \frac{\kappa}{2} \cdot \left( \frac{(J^2 - 1)}{2} - \log(J) \right) \quad (\text{II.135})$$

a été choisie.

Ainsi, l'ensemble des paramètres matériau utilisé dans notre implémentation du modèle de Qi-Boyce est celui décrit par le tableau II.2.

Le modèle de Qi-Boyce tel qu'il est implémenté contient donc 11 paramètres matériau. Cependant, nous ne ferons pas évoluer le coefficient de poisson  $\nu$ , que nous fixerons égal à 0.48, ainsi que le module de compressibilité  $\kappa$  qui est laissé fixe à une valeur de 3000.

Nous avons donc choisi de nous baser dans un premier temps sur ce modèle qui inclut déjà, entre autres, l'hyperélasticité et l'effet Mullins. Cependant, celui-ci n'a pas été testé

Branche (N)					Branche (V)					
Hyperélasticité (Arruda-Boyce)		Effet Mullins			Compres- -sibilité	Elasticité linéaire		Visco- plasticité		
$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$\kappa$	$E$	$\nu$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$

**Tab. II.2** – Synthèse des paramètres matériau

sur des essais dynamiques ; nous avons donc évalué le potentiel de ce modèle à prévoir le comportement dynamique et surtout l'effet Payne.

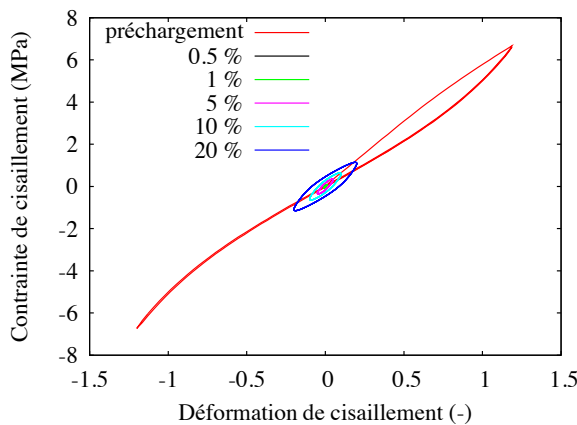
## II.2.2 Simulation d'essais dynamiques avec le modèle de Qi-Boyce

Plusieurs jeux de paramètres matériau sont testés pour observer la capacité du modèle de Qi-Boyce à simuler des essais dynamiques. Le chargement simulé correspond à celui décrit dans le Chapitre I section 1.2.2 et se décompose donc en deux parties : le préchargement puis l'essai dynamique à proprement dit. Le comportement est simulé sur un volume élémentaire représentatif (VER) formé par un élément 3D linéaire réduit : *C3d8r*.

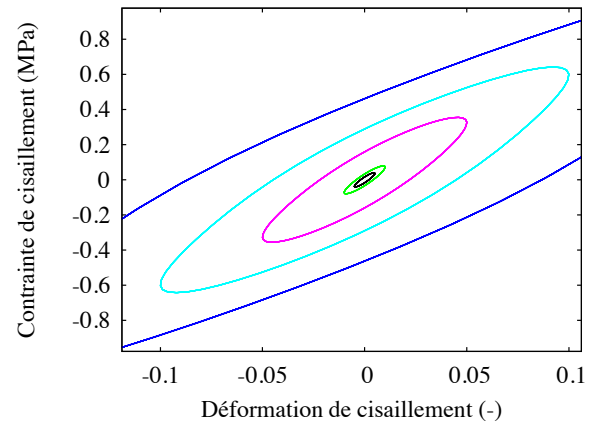
Les figures II.34 et II.35 représentent les simulations des réponses en contrainte/déformation associées à un préchargement en cisaillement de 120% et à cinq sollicitations vibratoires de fréquence 5Hz, de déformation statique nulle et d'amplitudes de déformation de 0.5, 1, 5, 10 et 20% pour le jeu de paramètre synthétisé dans le tableau II.3.

$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$E$	$\nu$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
1.4	6	1.4	0.4	0.8	21	0.48	0.75	1.54	1

**Tab. II.3** – Jeu de paramètres matériau considéré



**Fig. II.34** – Simulation du préchargement et des 5 sollicitations vibratoires

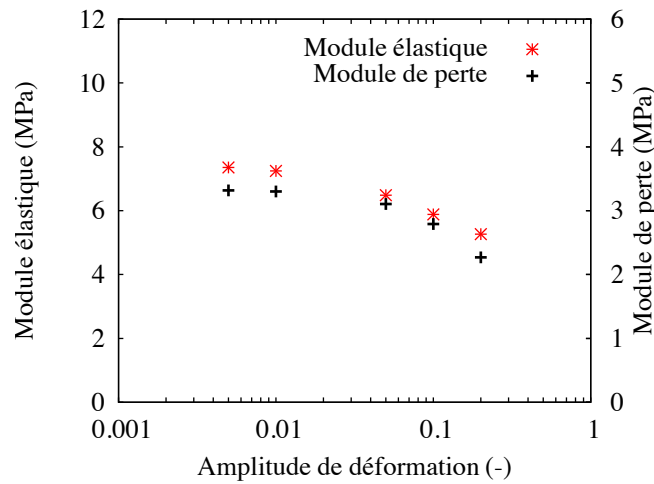


**Fig. II.35** – Zoom sur les 5 sollicitations vibratoires de la figure II.34

On constate qu'avec ce jeu de paramètres, la boucle stabilisée simulée n'est pas dissipative mais on arrive à obtenir des boucles dynamiques dissipatives. Celles-ci sont de forme quasiment elliptique et sont concentriques mais assez homothétiques c'est-à-dire que la pente et l'aire de celles-ci ne semblent pas dépendre de l'amplitude de déformation imposée et donc traduire l'effet Payne souhaité.

Pour confirmer cela, l'évolution des modules élastique et de perte correspondant a été calculée ;

la figure II.36 synthétise ces deux évolutions pour les 5 sollicitations vibratoires concernées.



**Fig. II.36** – Evolution des modules élastique et de perte

On observe alors une diminution du module élastique avec l'amplitude de déformation ; toutefois cette diminution reste faible par rapport aux chutes d'un facteur proche de 3 observées expérimentalement. De plus on note ici une évolution du module de perte similaire à celle du module élastique ce qui n'est pas le cas expérimentalement. Ce jeu de paramètres ne permet pas de prévoir la présence d'un pic de dissipation associé à la chute du module élastique.

Un autre jeu de paramètres permettant de simuler une boucle de préchargement dissipative a ensuite été recherché pour essayer de reproduire les observations expérimentales. La figure II.37 représente la simulation d'une sollicitation en cisaillement avec un préchargement de 120% puis une déformation statique nulle, une fréquence de 5 Hz et une amplitude de déformation de 10% obtenue avec le jeu de paramètres matériau contenus dans le tableau II.4.

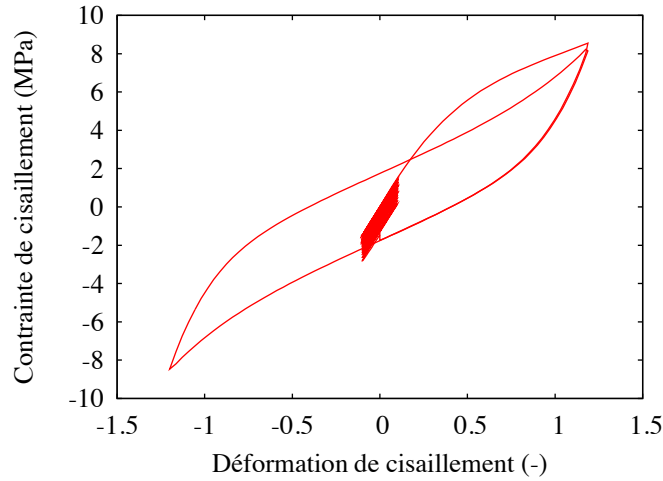
$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$E$	$\nu$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
1.4	6	1.4	0.4	0.8	31	0.48	0.075	15.37	1

**Tab. II.4** – Jeu de paramètres matériau considéré

Ce jeu de paramètres matériau permet bien de représenter l'allure des boucles de préchargement obtenues expérimentalement cependant la boucle dynamique associée n'est, quant à elle, pas dissipative.

On constate donc, dans un premier temps, que le modèle de Qi-Boyce ne permet pas de simuler des boucles dissipatives à la fois pour le préchargement et pour la partie dynamique à proprement dite. En effet, par construction, le modèle n'ayant qu'une seule branche viscoplastique, il ne peut pas représenter les effets visqueux associés à des temps caractéristiques très différents comme le sont celui très lent de la partie préchargement et celui rapide de la partie dynamique. Ensuite, pour un jeu de paramètres permettant la dissipation des boucles dynamiques, l'évolution des modules élastique et de perte prévue ne correspond pas à celle souhaitée. Dans le plan contrainte déformation, les boucles simulées sont beaucoup trop homothétiques.





**Fig. II.37** – Prévion du chargement dynamique obtenu

## II.3 Le modèle DyMPPIEC

Dans le cadre de ce projet, nous proposons le modèle DyMPPIEC : un modèle “Dynamique intégrant l’effet Mullins et l’effet Payne par ajout de Plasticité avec Ecrouissage Cinématique non-linéaire”. Ce modèle est une extension du modèle de Qi-Boyce dans le but de pouvoir prédire le comportement dynamique du silicone chargé de silice et surtout l’effet Payne.

### II.3.1 Définition du modèle proposé

Le modèle proposé repose sur la même définition de départ que le modèle de Qi-Boyce : la mise en parallèle de deux branches, une hyperélastique ( $N$ ) et l’autre viscoplastique ( $V$ ) comme schématisé sur la figure II.31.

Aucune modification n’est apportée à la branche hyperélastique. De plus, comme il a été décrit au paragraphe II.2.1, la déformation est la même dans les deux branches :  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^N = \mathbf{F}^V$  et la réponse en contrainte du matériau ( $\mathbf{T}$ ) est la somme de deux contributions, une indépendante du temps ( $\mathbf{T}^N$ ) et une dépendante du temps ( $\mathbf{T}^V$ ).

Le tenseur gradient de déformation dans la branche viscoplastique se décompose de manière multiplicative par  $\mathbf{F}^V = \mathbf{F}^{Ve} \cdot \mathbf{F}^{Vv}$  et le tenseur gradient de déformation  $\mathbf{F}^{Ve}$  se décompose lui-même (décomposition polaire) sous la forme :  $\mathbf{F}^{Ve} = \mathbf{V}^{Ve} \cdot \mathbf{R}^{Ve}$ .

Ensuite, la vitesse de déformation plastique  $\mathbf{L}^{Vv} = \dot{\mathbf{F}}^{Vv} \cdot \mathbf{F}^{Vv^{-1}}$  est choisie telle que :

$$\mathbf{L}^{Vv} = \mathbf{D}^{Vv} = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (\text{II.136})$$

avec  $\mathbf{N}$  la direction d’écoulement plastique définit par :

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{T}^{Vv'}}{\tau_{eq}} \quad (\text{II.137})$$

$\mathbf{T}^{Vv'}$  étant la partie déviatorique de  $\mathbf{T}^V$  et  $\tau_{eq} = \left( \frac{3}{2} \mathbf{T}^{Vv'} : \mathbf{T}^{Vv'} \right)^{\frac{1}{2}}$  ;

et  $\dot{\gamma}$  la vitesse de déformation équivalente prise sous la forme :

$$\dot{\gamma} = \mathcal{H}(f) = d_0 \cdot \left[ \exp \left( \frac{f}{\sigma_0 \cdot \nu_h} \right)^n - 1 \right] \quad (\text{II.138})$$

avec  $f$  la fonction critère d’écoulement qui sera détaillée dans les paragraphes suivants.

### a) Introduction d'un seuil de plasticité $R_0$

Dans un premier temps, nous avons choisi d'introduire un seuil de plasticité  $R_0$ . En effet, dans le modèle de Qi-Boyce, il n'y avait pas de seuil de plasticité, ce qui équivaut à  $R_0 = 0$ , c'est-à-dire qu'il n'y avait pas de phase où le comportement était purement hyper-élastique. La fonction critère d'écoulement  $f$  était alors égale à  $\tau_{eq}$ . De part l'introduction de ce seuil de plasticité, la fonction critère d'écoulement devient :

$$f = \tau_{eq} - R_0 \quad (\text{II.139})$$

Contrairement à un comportement purement plastique pour lequel la fonction critère d'écoulement est prise nulle, pour un comportement viscoplastique, on exprime le fait que le point de fonctionnement final se trouve sur l'équipotentielle viscoplastique en choisissant une fonction continue pour déterminer la vitesse (voir équation II.138) :

$$\dot{\gamma} = \mathcal{H}(f) \quad (\text{II.140})$$

Ainsi en remplaçant dans l'équation II.138, la vitesse de déformation équivalente est définie par :

$$\dot{\gamma} = d_0 \cdot \left[ \exp \left( \frac{\tau_{eq} - R_0}{\sigma_0 \cdot \nu_h} \right)^n - 1 \right] \quad (\text{II.141})$$

### b) Introduction d'un écrouissage cinématique non-linéaire

Nous avons ensuite choisi d'ajouter de l'écrouissage cinématique non-linéaire. L'introduction d'écrouissage cinématique modifie la fonction critère d'écoulement qui s'écrit alors :

$$f = \left( \frac{3}{2} (\mathbf{T}^{\mathbf{V}'} - \mathbf{X}) : (\mathbf{T}^{\mathbf{V}'} - \mathbf{X}) \right)^{\frac{1}{2}} - R_0, \quad (\text{II.142})$$

où une variable d'écrouissage tensorielle  $\mathbf{X}$  est introduite.

Ainsi en remplaçant dans l'équation II.138, la vitesse de déformation équivalente est finalement définie par :

$$\dot{\gamma} = d_0 \cdot \left[ \exp \left( \frac{\left( \frac{3}{2} (\mathbf{T}^{\mathbf{V}'} - \mathbf{X}) : (\mathbf{T}^{\mathbf{V}'} - \mathbf{X}) \right)^{\frac{1}{2}} - R_0}{\sigma_0 \cdot \nu_h} \right)^n - 1 \right] \quad (\text{II.143})$$

De plus, pour ajouter de la non-linéarité, un potentiel de dissipation  $\Phi_p$  est défini par :

$$\Phi_p = f + \frac{D_k}{2C_k} \cdot \left( \frac{3}{2} (\mathbf{X} : \mathbf{X}) \right), \quad (\text{II.144})$$

où  $C_k$  et  $D_k$  sont deux constantes.

Ainsi une variable interne  $\alpha$ , homogène à une déformation, associée à  $\mathbf{X}$  est introduite, et vérifie la relation :

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_p}{\partial \mathbf{X}} = \left( \mathbf{N} - \frac{3D_k}{2C_k} \mathbf{X} \right) \dot{\lambda}, \quad (\dot{\lambda} = \dot{\gamma}); \quad (\text{II.145})$$

A partir de cette dernière relation et en utilisant la loi d'état  $\mathbf{X} = \frac{2}{3} C_k \alpha$ , on obtient la loi d'évolution de la variable interne  $\alpha$  suivante :

$$\dot{\alpha} = \mathbf{D}^{\mathbf{V}'} - D_k \dot{\gamma} \alpha. \quad (\text{II.146})$$

### c) Récapitulatif des paramètres et des variables utilisés

Le modèle proposé nécessite donc la connaissance de 14 paramètres matériau. Une synthèse de ceux-ci est présentée figure II.5.

Branche (N)					Branche (V)								
Hyperélasticité (Arruda-Boyce)		Effet Mullins		Compres- -sibilité	Elasticité linéaire		Visco-plasticité						
$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$\kappa$	$E$	$\nu$	$R_0$	$C_k$	$D_k$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$

**Tab. II.5** – Synthèse des paramètres matériau du modèle proposé

On pourra noter que dans notre étude, le coefficient de Poisson  $\nu$  sera fixé à 0.48 ainsi que le module de compressibilité  $\kappa$  fixé à 3000. Nous considérons donc un ensemble de 12 paramètres à identifier.

Enfin, le tableau II.6 résume les différentes variables utilisées.

Variables d'états		Variables associées
Observables	Internes	
<b>F</b>	<b>F<sup>e</sup></b>	<b>T<sub>0</sub></b>
	<b>F<sup>v</sup></b>	<b>T<sub>0</sub></b>
	<b>α</b>	<b>T<sub>0</sub></b>
		<b>X</b>

**Tab. II.6** – Synthèse des variables utilisées

Il faut de plus rajouter la variable d'état  $v_s$  introduite par Qi et Boyce (Qi and Boyce, 2004). Ainsi, le modèle DyMPPIEC nécessite l'utilisation de 4 variables internes.

### II.3.2 Potentiel du modèle DyMPPIEC - étude paramétrique

Dans ce paragraphe, l'aptitude du modèle DyMPPIEC à prédire l'effet Payne est présentée ainsi que le rôle de chacun des paramètres dans cette modélisation.

#### a) Exploitation du seuil de plasticité $R_0$ (pas d'érouissage cinématique non-linéaire)

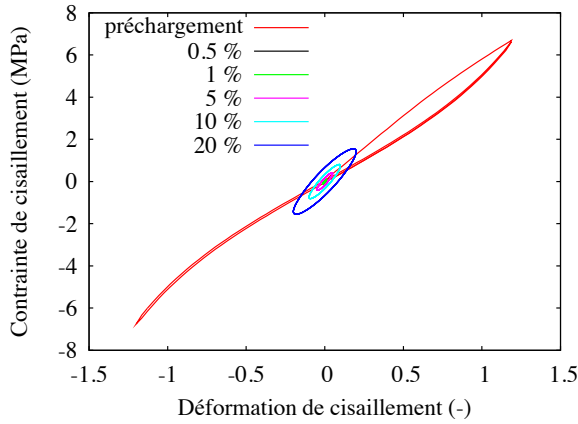
Comme nous l'avons relevé dans le paragraphe II.2.1, le modèle proposé par Qi et Boyce dans (Qi and Boyce, 2005) ne possède pas de phase où le comportement est purement hyperélastique ; il n'y a pas de le seuil de plasticité  $R_0$ . Dans ce paragraphe, l'utilisation d'un seuil de plasticité non nul est considéré pour essayer d'améliorer les simulations des chargements dynamiques obtenus avec ce modèle.

Sur les figures II.38 et II.39 sont représentées les simulations des réponses en contrainte/déformation associées à un préchargement en cisaillement de 120% et à quatre sollicitations vibratoires de fréquence  $5Hz$ , de déformation statique nulle et d'amplitudes de déformation de 1, 5, 10 et 20% pour le jeu de paramètres synthétisé dans le tableau II.7.

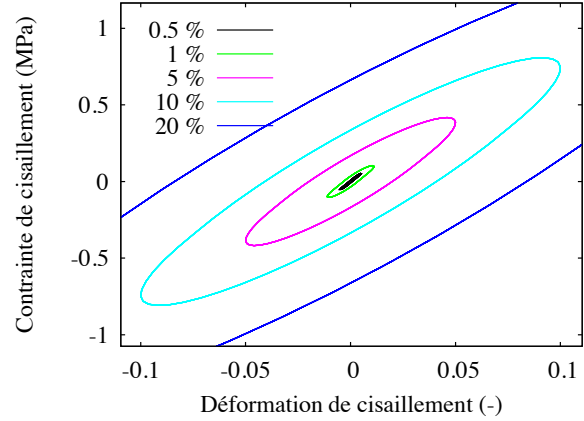
Dans le plan contrainte / déformation, les mêmes constatations que pour la simulation réalisée avec le jeu de paramètres contenu dans le tableau II.3 sont observées excepté pour la boucle dynamique de plus faible amplitude de déformation. Une différence importante est

$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$E$	$R_0$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
1.4	6	1.4	0.4	0.8	21	$3.4 \cdot 10^{-2}$	0.75	15.37	1

**Tab. II.7** – Jeu de paramètres matériau considéré

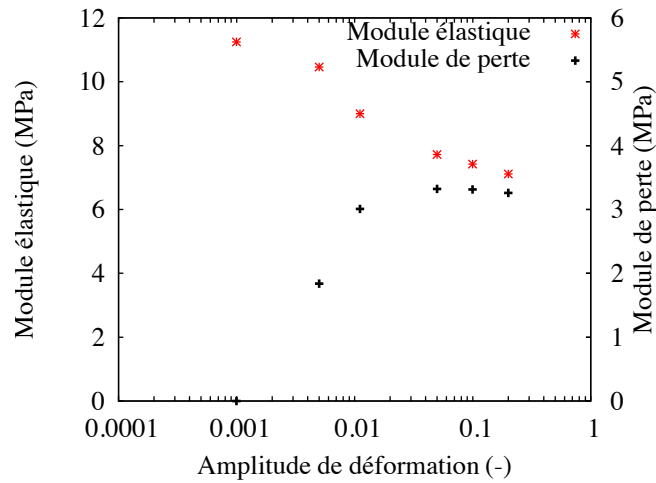


**Fig. II.38** – Simulation du préchargement et des 4 sollicitations vibratoires



**Fig. II.39** – Zoom sur les 4 sollicitations vibratoires de la figure II.38

cependant plus facilement visible en s'intéressant aux courbes d'évolution des modules élastique et de perte représentées sur la figure II.40. On notera qu'une amplitude de déformation de 0.1% a de plus été insérée sur cette figure pour mieux interpréter la différence observée.



**Fig. II.40** – Evolution des modules élastique et de perte

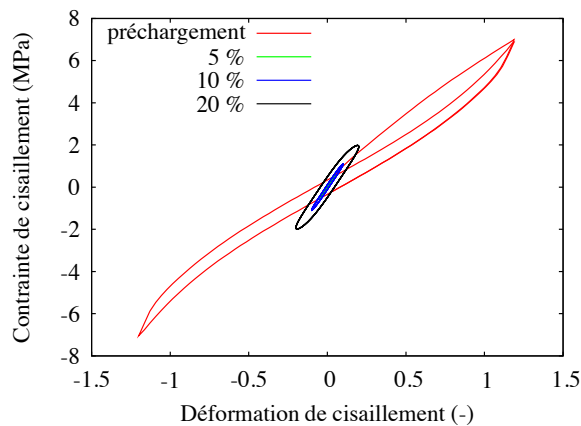
On observe alors une modification importante sur la courbe d'évolution du module de perte qui augmente avec l'amplitude de déformation. De plus, la boucle dynamique d'amplitude 0.1% est non-dissipative. En effet,  $R_0$  étant le seuil de plasticité, lorsque la contrainte est inférieure à ce seuil, le comportement est purement hyperélastique et donc non dissipatif. Le rôle de ce paramètre  $R_0$  sera discuté plus longuement dans le paragraphe II.3.2.

Ensuite, une jeu de paramètres permettant la dissipation de la boucle de préchargement tout en conservant une dissipation des boucles dynamiques non-nulles a été recherché. Les figures II.41 et II.42 représentent les simulations des réponses en contrainte/déformation

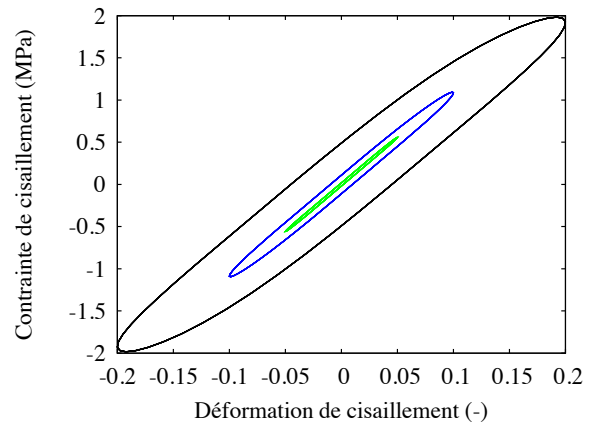
associées à un préchargement en cisaillement de 120% et à trois sollicitations vibratoires de fréquence  $5\text{Hz}$ , de déformation statique nulle et d'amplitudes de déformation de 5, 10 et 20% pour le jeu de paramètres synthétisé dans le tableau II.8.

$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$E$	$R_0$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
1.4	6	1.4	0.4	0.8	21	$3.4 \cdot 10^{-1}$	$17.85 \cdot 10^{-2}$	2.37	1

**Tab. II.8** – Jeu de paramètres matériau considéré



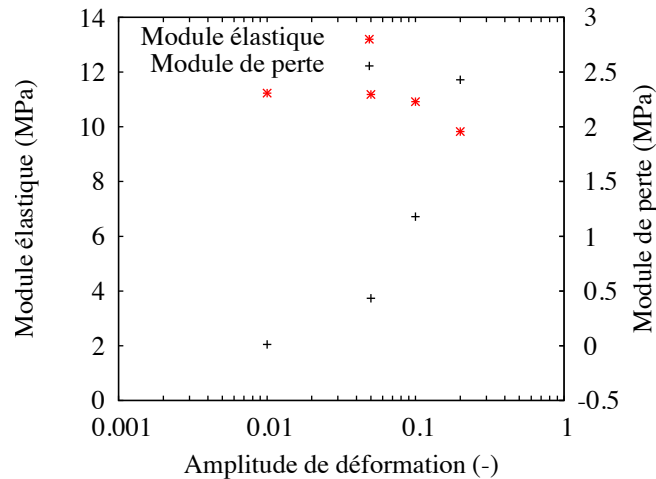
**Fig. II.41** – Simulation du chargement dynamique pour ces 3 cas de sollicitations vibratoires



**Fig. II.42** – Zoom sur les boucles dynamiques de la figure II.41

On observe ici une boucle de préchargement et des boucles dynamiques dissipatives. Cependant, très rapidement, dès que l'amplitude de déformation est diminuée, les boucles dynamiques prennent une forme trop étirée par rapport à ce que l'on obtient expérimentalement. De plus, nous n'avons pas réussi à obtenir une boucle de préchargement plus ouverte que celle-ci tout en conservant une dissipation des boucles dynamiques non nulle. Ceci ne concorde pas avec les observations expérimentales où un encadrement des boucles dynamiques par la boucle de préchargement a été remarqué.

De suite, l'évolution des modules élastique et de perte associée à ces 3 sollicitations vibratoires a été calculé et synthétisée sur la figure II.43 (le résultat concernant une amplitude de déformation de 1% a été rajouté sur cette courbe).



**Fig. II.43** – Evolution des modules élastique et de perte

De même que pour le jeu de paramètres précédent, on observe une légère chute du module élastique et une augmentation du module de perte avec l'amplitude de déformation.

Le modèle de Qi-Boyce avec un seuil de plasticité nul ou non ne nous permet donc pas de simuler des boucles dynamiques dissipatives inclus dans la boucle de préchargement. Comme nous l'avons remarqué précédemment celui-ci ne peut pas, par construction, prévoir correctement les effets visqueux associés à deux temps caractéristiques très différents. De plus, l'effet Payne ne peut apparemment pas être prédit par ce modèle surtout en ce qui concerne notamment l'évolution non-linéaire avec passage par un maximum de la dissipation.

#### b) Utilisation du modèle DyMPPIEC dans son ensemble

Dans ce paragraphe, l'aptitude de modèle proposé c'est-à-dire avec un seuil de plasticité et de l'érouissage cinématique non-linéaire est testé.

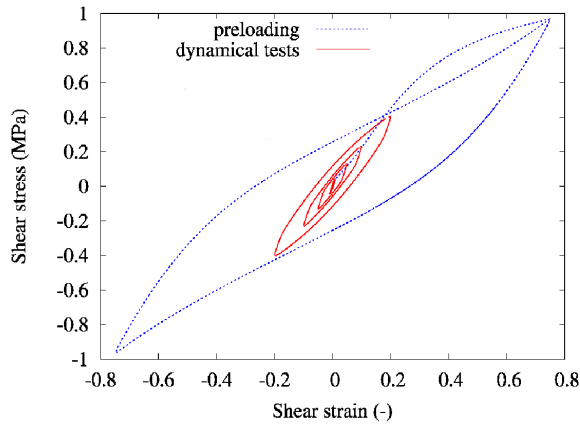
Les figures II.44 et II.45 représentent les simulations des réponses en contrainte/déformation associées à un préchargement en cisaillement de 75% et à cinq sollicitations vibratoires de fréquence 15Hz, de déformation statique nulle et d'amplitude de déformation de 0.5, 1, 5, 10 et 20% pour le jeu de paramètre synthétisé dans le tableau II.9.

$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$E$	$R_0$	$C_k$	$D_k$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
0.285	4.36	4.35	0.1	0.9	12.78	$3.58 \cdot 10^{-4}$	5.18	11.46	1291.1	1.07	5.33

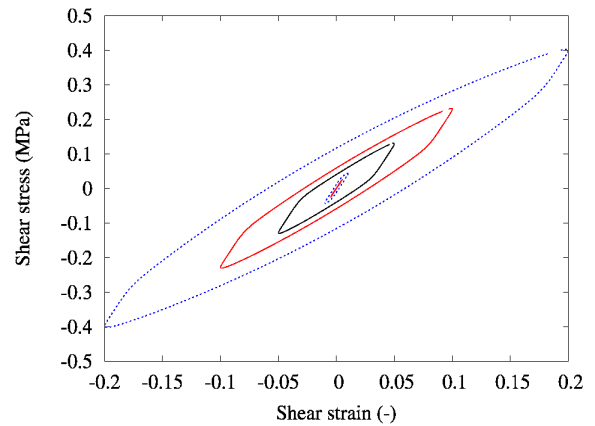
**Tab. II.9** – Synthèse des paramètres matériau à cette simulation

On peut constater que ce modèle permet à la fois de simuler une boucle de préchargement dissipative et des boucles dynamiques dissipatives. On note de plus que la boucle de préchargement enveloppe les boucles dynamiques comme observé expérimentalement. Ensuite, pour mieux observer la pertinence de la prédiction de l'effet Payne, les modules élastique et de perte associés à ces 5 cinq sollicitations vibratoires ainsi que pour quelques autres amplitudes de déformation plus faibles allant de 0.005 à 0.1% ont été calculés ; la figure II.46 reprend ces calculs.

Ainsi, concernant le module élastique, on observe bien un palier pour les amplitudes de

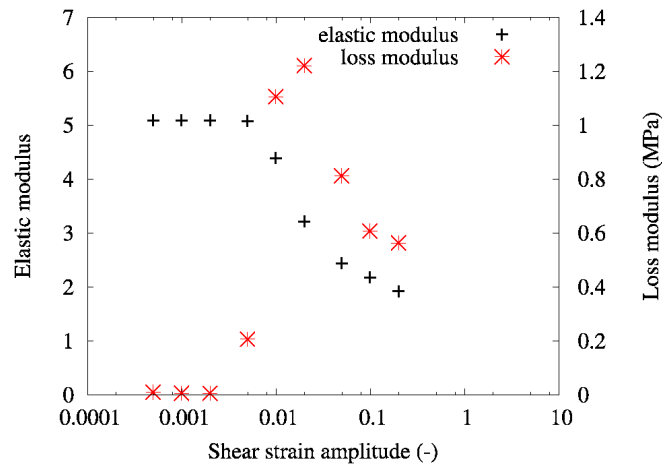


**Fig. II.44** – Simulation de l'ensemble du chargement dynamique pour ces 5 cas de sollicitations vibratoires



**Fig. II.45** – Zoom sur les boucles dynamiques de la figure II.44

déformation les plus faibles puis une chute de celui-ci d'un facteur supérieur à 2. Le module de perte, quant à lui, passe bien par un maximum ; cependant pour les faibles niveaux d'amplitude de déformation la dissipation est nulle. Ceci ne correspond pas avec nos observations expérimentales ainsi que celles de Wang et Robertson (Wang and Robertson, 2005) (voir Chapitre I section I.3.1) où une dissipation non nulle est relevée même pour les très faibles niveaux d'amplitude de déformation.



**Fig. II.46** – Evolution des modules élastique et de perte associées

Afin de comprendre comment l'effet Payne est pris en compte par le modèle proposé et quels paramètres en sont responsables, une étude paramétrique à partir du jeu de paramètres synthétisé dans le tableau II.10 a été menée.

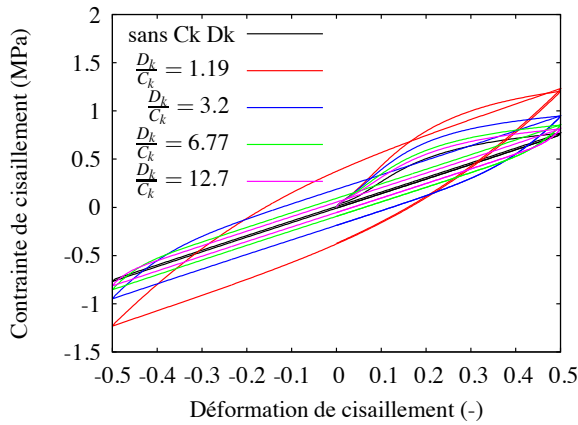
$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$	$E$	$R_0$	$C_k$	$D_k$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
0.63	12.9	34.3	0.1	0.9	20.2	$4.9 \cdot 10^{-4}$	8.42	57	2850	0.99	3.55

**Tab. II.10** – Synthèse des paramètres matériau associés à cette étude paramétrique

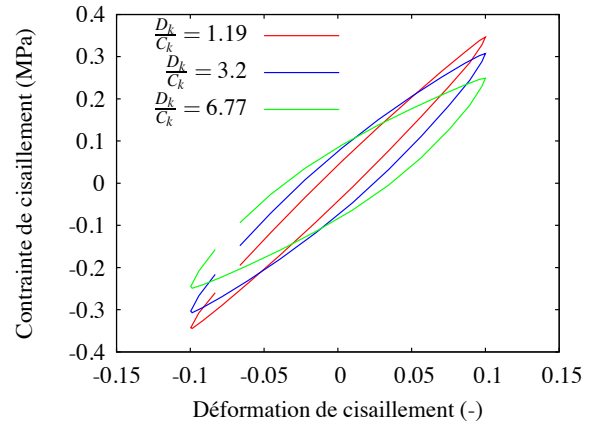
### c) Etude paramétrique

#### Rôle des paramètres $C_k$ et $D_k$

Dans un premier temps, l'influence des paramètres  $C_k$  et  $D_k$  sur la réponse du chargement dynamique du matériau a été investiguée pour observer la modification apportée par l'ajout de l'écrouissage cinématique. La figure II.47 illustre l'influence du rapport  $\frac{D_k}{C_k}$  sur la simulation du préchargement en cisaillement de 50%.



**Fig. II.47** – Influence du rapport  $\frac{D_k}{C_k}$  sur le préchargement



**Fig. II.48** – Influence du rapport  $\frac{D_k}{C_k}$  sur le chargement dynamique global

On observe ainsi que plus le rapport  $\frac{D_k}{C_k}$  est diminué plus la boucle de préchargement est dissipative. On note de plus, au regard de la figure II.48, que ces paramètres influencent aussi la pente et la dissipation de la boucle dynamique.

Ainsi, comme l'on fait Bhuiyan et Okui (Bhuiyan et al., 2009) et comme nous l'avons évoqué au paragraphe II.1.3 a), la plasticité peut être utilisée pour simuler des boucles dissipatives associées à des temps caractéristiques infiniment longs et donc en quasi-statique.

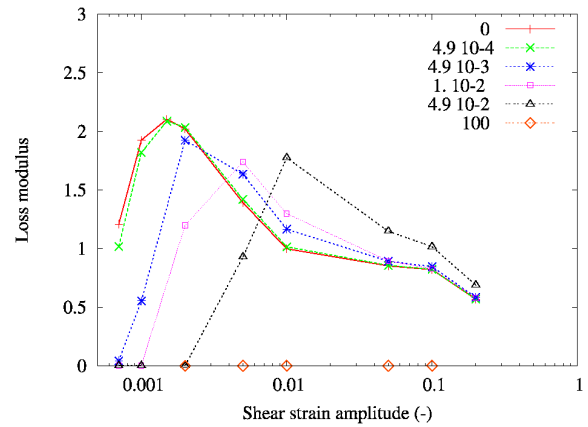
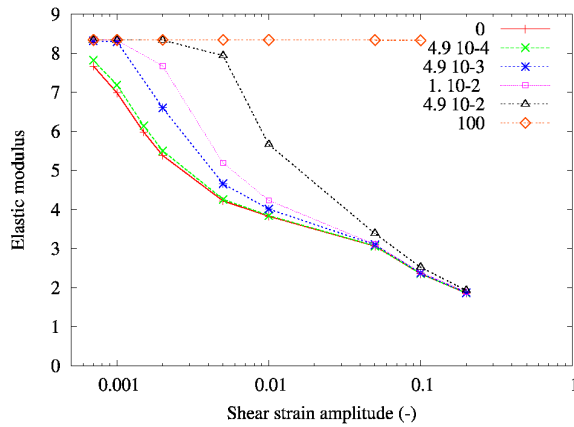
#### Rôle du paramètre $R_0$

Dans ce paragraphe, le rôle du seuil de plasticité  $R_0$  est étudié. Sur les figures II.49 et II.50 sont respectivement représentées les évolutions des modules élastique et de perte associées à un chargement dynamique de précyclage 50%, de déformation statique nulle, de fréquence 15 Hz pour différentes valeurs d'amplitude de déformation (allant de 0.0007 à 20%) et de paramètre  $R_0$  (dont les valeurs sont précisées dans la légende).

Par construction, lorsque la contrainte est inférieure à  $R_0$  le comportement est élastique c'est à dire non dissipatif et lorsque la contrainte dépasse ce seuil le comportement devient viscoplastique. Ainsi, on observe sur la figure II.49 que le paramètre  $R_0$  joue ici le rôle de seuil de chute de module élastique c'est à dire que lorsque le comportement est purement élastique ( $R_0 = 100$ ) le module élastique est indépendant de l'amplitude de déformation et est maximum et le module de perte est alors nul. Ensuite, pour une valeur de  $R_0$  quelconque, en deça de celui-ci, on observe un palier pour le module élastique pour les faibles niveaux de déformation et au delà, ce module chute rapidement avec  $\Delta\varepsilon$ .

C'est donc le passage d'un comportement élastique vers un comportement viscoplastique qui nous permet, ici, de simuler l'effet Payne. Ainsi, le paramètre  $R_0$  influence la position du déclenchement de la chute du module élastique. De plus, il est intéressant de constater que l'on retrouve le lien observé expérimentalement entre module élastique et module de perte (évoqué au chapitre I) à savoir :





**Fig. II.49** – Evolution du module élastique    **Fig. II.50** – Evolution du module élastique

- une position du pic de dissipation en relation avec la position du point d'inflexion de la chute de module élastique
- et une amplitude de ce pic proportionnelle à l'amplitude de la chute de module élastique (valeur maximale aux faibles valeurs d'amplitude de déformation moins la valeur minimale aux grandes amplitudes de déformation).

en effet ici, seul le seuil de chute est modifié l'amplitude de la chute est identique, c'est pourquoi l'amplitude du pic de module de perte doit rester constante et se décaler vers les plus grandes amplitudes quand  $R_0$  augmente.

Les caractéristiques principales de l'effet Payne semble donc pouvoir être prise en compte par le modèle proposé. De plus, l'ajout de l'écroutissage cinématique non-linéaire permet de simuler la dissipation de la boucle de préchargement.

Il s'agit maintenant d'essayer de reproduire les résultats expérimentaux obtenus avec un jeu de paramètres matériau associé à ce modèle.

## II.4 Identification des paramètres matériau associés aux essais de cisaillement

L'objectif de ce projet est de fournir un jeu de paramètres matériau permettant, dans un premier temps, de simuler la réponse dynamique du silicone chargé de silice en cisaillement sur le domaine d'étude défini au Chapitre I section 1.2.2.

### II.4.1 Identification à fréquence fixée

Dans un premier temps, l'identification des paramètres matériau est effectuée à fréquence fixée, à 15 Hz, fréquence pour laquelle la base de données est la plus riche.

Pour identifier les paramètres matériau optimaux simulant un ensemble d'essais donnés, nous utilisons l'optimiseur de Zébulon. Le type d'optimisation utilisé est nelder mead. Ensuite, pour identifier les 12 paramètres matériau associés au modèle proposé, nous proposons une optimisation en deux temps :

- avec en premier lieu, l'identification du comportement indépendant du temps c'est-à-dire uniquement les 5 paramètres de la branche de gauche,

- ensuite, ceux-ci sont laissés fixes et les 7 paramètres correspondants au comportement dépendant du temps sont identifiés à leur tour.

**a) Identification du comportement d'équilibre sans plasticité**

Il s'agit dans un premier temps de simuler le comportement dit statique du matériau c'est à dire un comportement purement hyperélastique mais dépendant de l'histoire des déformations et donc de  $\epsilon_{max}$ .

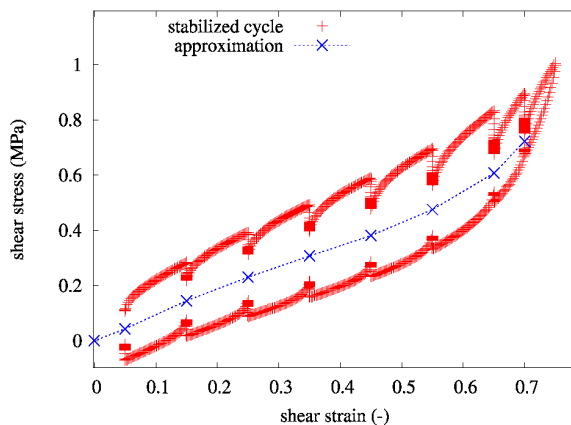
Pour cela, les courbes expérimentales des différents préchargements sont utilisées. Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, la branche de gauche de notre modèle permet de simuler un comportement non-dissipatif c'est à dire une courbe. Il faut donc, à partir de nos trois boucles de préchargement expérimentales, déterminer les trois courbes d'équilibre associées.

Plusieurs choix se présentent alors :

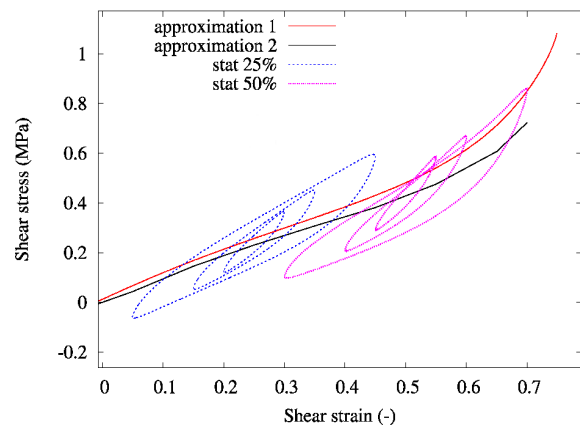
- Approximation 1 : on peut tout simplement prendre la ligne moyenne de chaque boucle de dissipation.
- Approximation 2 : des essais de multi-relaxation peuvent être mis en oeuvre pour approcher plus précisément l'équilibre path du matériau.
- Approximation 3 : la contrainte moyenne des boucles dynamiques expérimentales peut être utilisée pour construire cette courbe d'équilibre.

En effet, concernant l'approximation 2, comme nous l'avons déjà évoqué au paragraphe II.1.3 c), les élastomères chargés ont un état d'équilibre plutôt plus proche de la courbe de décharge que de la courbe de charge ; lors d'essais cycliques, par exemple, on observe que la courbe de décharge subit très peu d'adoucissement cyclique contrairement à la courbe de charge qui s'adoucit fortement au fur et à mesure des cycles. Ainsi, la viscosité n'est pas de même nature à la charge et à la décharge.

Sur la figure II.51 est représentée la courbe expérimentale de multi-relaxation du cycle stabilisé pour un préchargement de 75% et l'équilibre path, suivant l'approximation 2, qui en découle en effectuant la moyenne après relaxation.



**Fig. II.51** – Approximation de la courbe d'équilibre du matériau par un essai de multi-relaxation



**Fig. II.52** – Comparaison des deux propositions d'approximation de la courbe d'équilibre du matériau

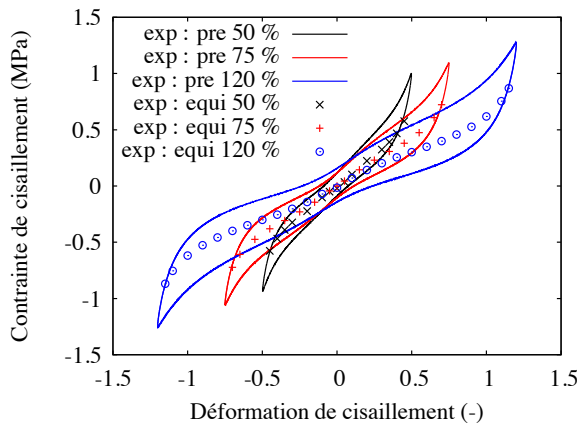
Enfin, par construction du modèle de comportement, ces trois courbes hyperélastiques définissent, pour  $\epsilon_{max}$  donné, la position du centre des boucles dynamiques qui seront générées par la suite c'est-à-dire la contrainte moyenne pour une déformation statique donnée. En d'autres termes, les boucles dynamiques simulées vont converger vers ces états d'équilibre. Il est donc important de bien les définir pour assurer une bonne prédiction de la contrainte

moyenne.

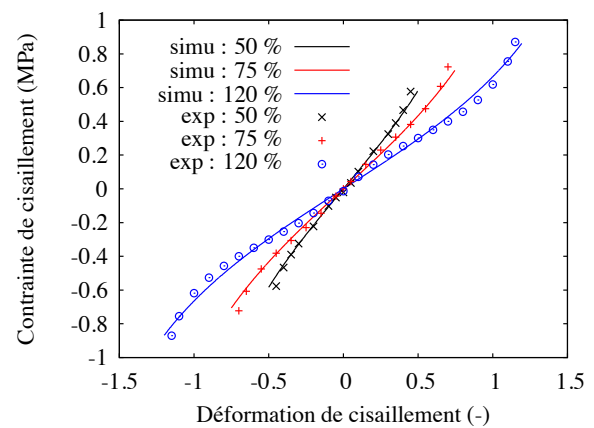
Sur la figure II.52 sont représentées les boucles dynamiques associées à des sollicitations dynamiques de déformation maximale 75%, de fréquence 15 Hz, d'amplitude de déformation de 5, 10 et 20% et de déformation statique de 25 et 50%. De plus, les deux approximations, obtenues à partir de la boucle stabilisée du préchargement jusqu'à 75%, correspondant respectivement à une simple courbe moyenne de cette boucle (approximation 1) et à une moyenne à partir de l'essai de multi-relaxation réalisé et illustré par la figure II.51 (approximation 2) sont superposées à ces boucles.

Conformément au fait que la viscosité du matériau est dissymétrique, nous retrouvons bien que l'approximation utilisant les essais de multi-relaxation, c'est-à-dire un peu en dessous de la courbe moyenne, représente mieux les contraintes moyennes des boucles dynamiques. C'est pourquoi nous avons réalisé l'identification des paramètres de la branche de gauche à partir des 3 courbes hyperélastiques obtenues à partir des essais de multi-relaxation. Les 3 boucles stabilisées associées au trois niveaux de préchargement étudiés ainsi que leurs 3 courbes d'équilibre approximées sont représentées sur la figure II.53.

Sur la figure II.54, la simulation optimale de ces 3 courbes d'équilibre expérimentales est présentée. Le jeu de paramètres matériau correspondant est synthétisé dans le tableau II.11.



**Fig. II.53** – Représentation des boucles stabilisées des préchargements et de leur courbe d'équilibre associée



**Fig. II.54** – Comparaison entre les courbes d'équilibre expérimentales et les courbes simulées

$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$
0.285	4.36	4.35	0.1	0.9

**Tab. II.11** – Synthèse des paramètres matériau optimum associés aux essais de cisaillement

On note ici une assez bonne prédiction des courbes d'équilibre associées aux trois niveaux de préchargement. En fait, les paramètres  $\mu$  et  $N$  définissent une courbe hyperélastique et les trois paramètres représentant l'effet Mullins permettent de faire évoluer cette courbe hyperélastique avec le niveau de déformation maximale appliquée.

**b) Identification du comportement dynamique et dissipatif**

Les 5 paramètres de la branche de gauche sont ensuite laissés fixes, égaux aux valeurs optimales déterminées précédemment, et l'on cherche ici à identifier les paramètres associés au caractère dissipatif du matériau.

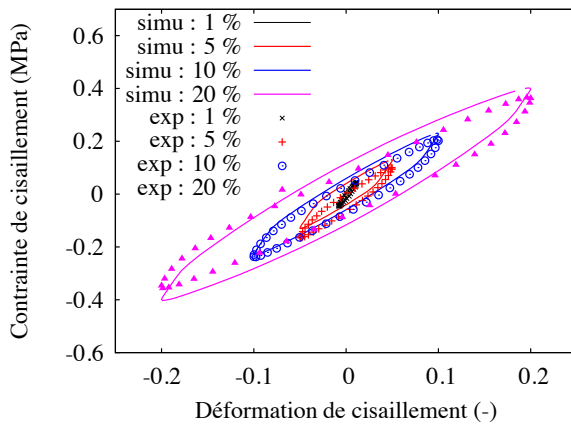
Pour les identifier, nous avons décidé de travailler uniquement sur les courbes d'évolution des modules élastique et de perte. Ainsi, à chaque simulation d'un essai dynamique, les modules élastique et de perte associés à la boucle dynamique simulée sont calculés puis comparés aux modules élastique et de perte expérimentaux.

Les paramètres optimaux ainsi déterminés sont synthétisés dans le tableau II.12; dans la suite de ce paragraphe, les courbes simulées sont obtenues à partir de ces paramètres.

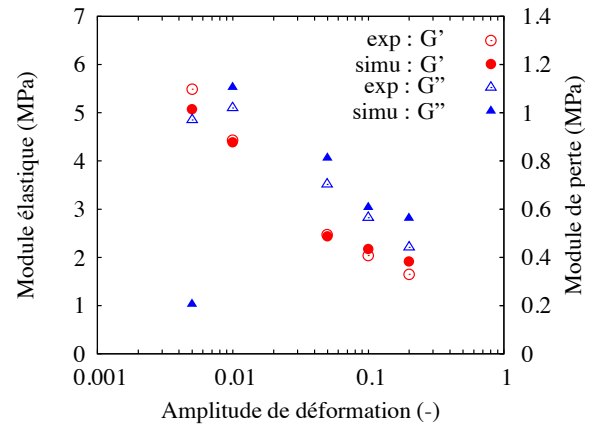
$E$	$R_0$	$C_k$	$D_k$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
12.8	$3.6 \cdot 10^{-4}$	5.2	11.5	1291	1.1	5.33

**Tab. II.12** – Synthèse des paramètres matériau associés à cette étude paramétrique

Sur les figures II.55 et II.56 sont comparées, pour des sollicitations dynamiques correspondant à un préchargement jusqu'à 75%, une déformation statique nulle, une fréquence de 15 Hz et des amplitudes de déformations allant de 0.5 à 20%, respectivement les boucles dynamiques expérimentales et simulées et les modules élastique et de perte expérimentaux et simulés.



**Fig. II.55** – Comparaison entre les boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (75%, 0%, -, 15Hz)

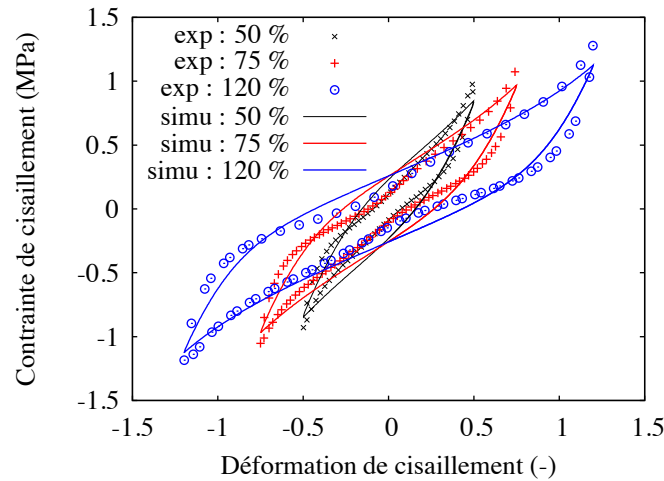


**Fig. II.56** – Comparaison entre les modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (75%, 0%, -, 15Hz)

On observe que l'évolution des modules élastique et de perte, et donc de l'effet Payne, est plutôt bien approchée exceptée pour le module de perte associé à l'amplitude de déformation de 0.5%. De même, dans le plan contrainte/déformation, l'ensemble des boucles dynamiques est plutôt bien représenté.

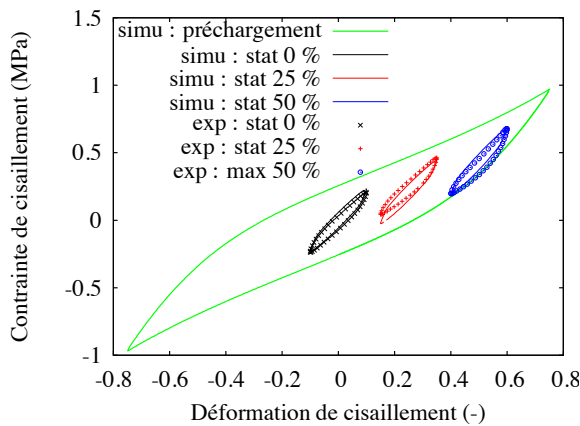
Ensuite, on peut observer sur la figure II.57 les prédictions obtenues sur les boucles stabilisées de préchargement associées aux trois valeurs de déformations maximales.

On constate que, sans avoir été optimisé aux temps courts, le modèle permet pourtant un assez bonne prédiction des cycles stabilisés de préchargement en tenant compte notamment de l'adoucissement de ces derniers avec la déformation maximale et donc de l'effet Mullins.

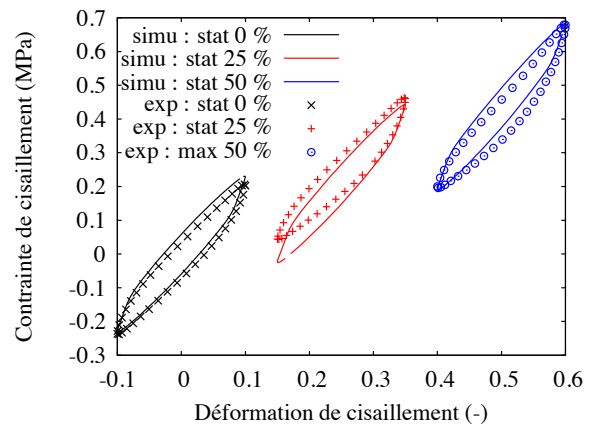


**Fig. II.57** – Comparaison entre les boucles stabilisées de préchargement expérimentales et simulées

Après avoir observé la prédiction de l'effet Payne et de l'effet Mullins, la dépendance à la déformation statique obtenue est représentée sur les figures II.58 et II.59. Ces figures concernent des sollicitations dynamiques correspondant à un préchargement jusqu'à 75%, une fréquence de 15 Hz, une amplitude de déformation de 10%, et des déformations statiques de 0, 25 et 50%. Sur la figure II.58, le cycle stabilisé du préchargement à 75% est superposé à ces boucles dynamiques et sur la figure II.59, un zoom sur la figure précédente a été effectué.



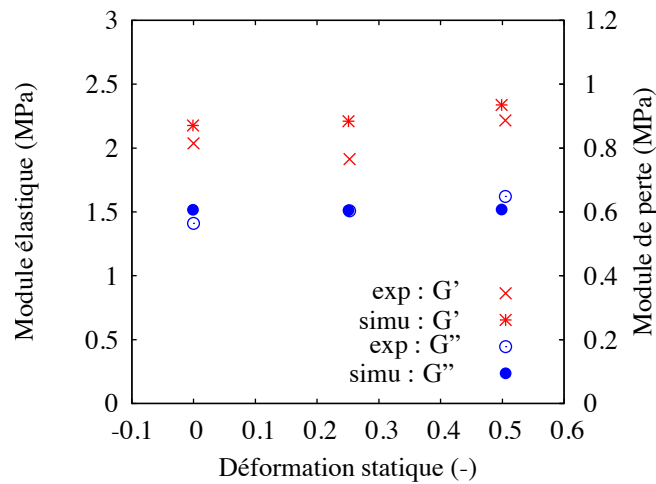
**Fig. II.58** – Comparaison entre les boucles dynamiques expérimentales et simulées pour différentes déformations statiques  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, -, 10\%, 15Hz)$



**Fig. II.59** – Zoom sur les boucles dynamiques expérimentales et simulées de la figure II.58  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (75\%, -, 10\%, 15Hz)$

On observe ici que le modèle proposé est bien capable de simuler la réponse dynamique pour des niveaux de déformation non nuls. L'évolution des modules élastique et de perte correspondant aux figures II.58 et II.59 est représentée sur la figure II.60.

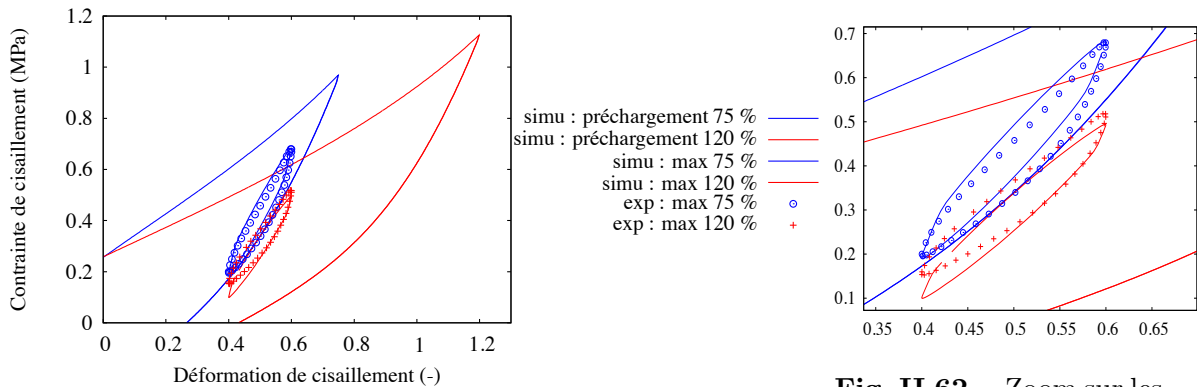
Expérimentalement, les évolutions des modules élastique et de perte avec la déformation statique sont assez faibles. On observe que dans le modèle proposé, par construction, le module de perte est indépendant de la déformation statique appliquée; la prédiction y est ici des plus correcte. Le module élastique, quant à lui, est la somme d'une composante associée à la sollicitation vibratoire (constante comme pour le module de perte) et d'une seconde reliée à la pente de la courbe hyperélastique de la courbe d'équilibre à ce niveau de déformation



**Fig. II.60** – Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (75%, - ,10%, 15Hz)

statique.

Ensuite, il est intéressant d’observer la prédiction du modèle proposé concernant des sollicitations dynamiques de déformation statique non nulle mais ayant une histoire de déformation différente. La figure II.61 compare les boucles dynamiques expérimentales et simulées pour deux sollicitations dynamiques de déformation statique 50%, d’amplitude de déformation de 10%, de fréquence 15 Hz et des déformations maximales de 75 et 120%.



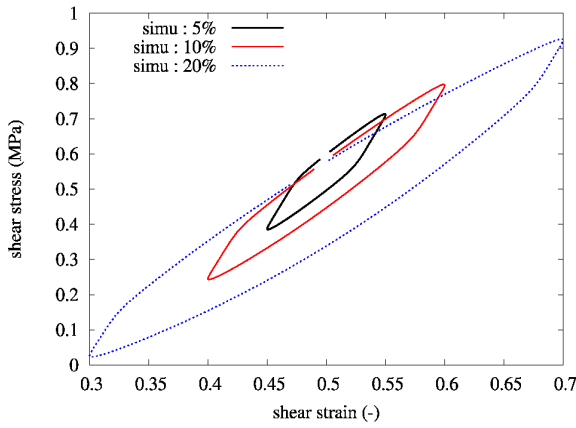
**Fig. II.61** – Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = ( - , 50%, 10%, 15Hz)

**Fig. II.62** – Zoom sur les boucles dynamiques de la figure II.61

Ces prévisions montrent bien l’aptitude du modèle DyMPPIEC à simuler à la fois l’effet Payne et l’effet Mullins pour des sollicitations vibratoires de déformation statique non nulle. D’autres graphiques concernant la prédiction des essais de cisaillement sont contenus dans l’Annexe 1.

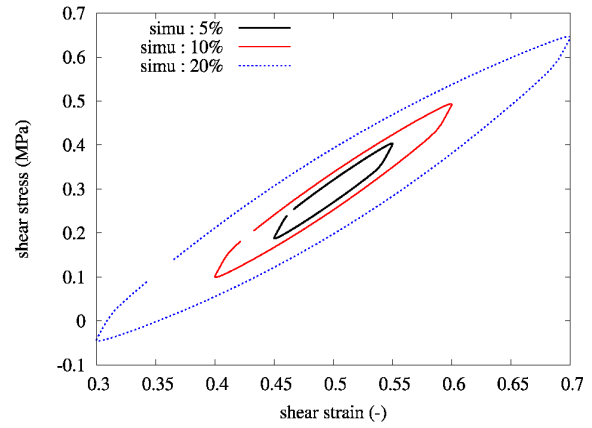
Enfin, pour aller plus loin et faire le lien avec l’observation faite au Chapitre I section I.2.2 concernant l’avantage du type de chargement choisi (avec préchargement initial) par rapport à l’effet Mullins, il peut être intéressant d’observer la prédiction du modèle concernant des essais dynamiques sans préchargement au préalable (c’est-à-dire avec  $\epsilon_{max} = 0$ ). Les figures II.63 et II.64 représentent les boucles dynamiques associées à des sollicitations de déformation statique de 50%, de fréquence 15 Hz, d’amplitudes de déformation de 5, 10 et 20% et respectivement

de déformation maximale de 0 et 120%.



**Fig. II.63** – Boucles dynamiques simulées sans préchargement au préalable

$(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (0\%, 50\%, -, 15Hz)$



**Fig. II.64** – Boucles dynamiques simulées avec préchargement

$(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (120\%, 50\%, -, 15Hz)$

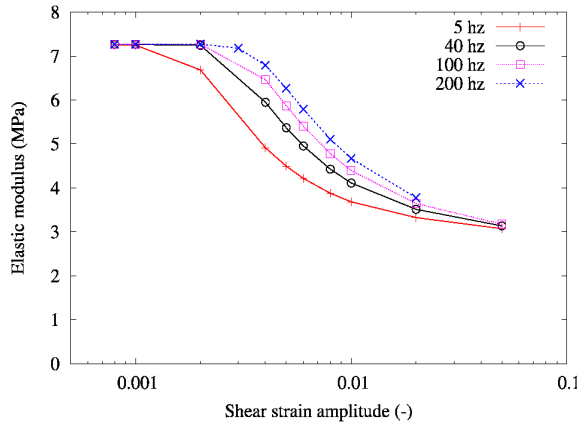
Au regard de ces courbes, on retrouve bien le fait que, sans préchargement au préalable, la contrainte moyenne des boucles dynamiques est dépendante de l'amplitude de déformation appliquée : celle-ci chute lorsque l'amplitude de déformation augmente. En revanche la forte non-linéarité des boucles dynamiques observée dans ce cas n'est pas prise en compte par le modèle proposé. De plus, il est nécessaire de garder en tête que nous n'avons identifié les paramètres matériau que pour trois niveaux de déformations maximales 50, 75 et 120% engendrant donc un domaine de déformation maximale considéré compris entre 50 et 120% ; ainsi en deçà et au dessus de ce domaine le comportement n'a pas été identifié. Cependant, nous pouvons observer que l'influence du préchargement est plutôt bien reproduite par le modèle proposé.

Ainsi, en conservant un modèle à seulement deux branches, nous parvenons à prévoir le comportement statique et dynamique du matériau. La prévision des courbes d'évolution des modules élastique et de perte et donc de l'effet Payne a été intégré tout en tenant compte de l'effet Mullins. De plus, le modèle est capable de prédire la réponse dynamique à une sollicitation vibratoire de déformation statique non nulle.

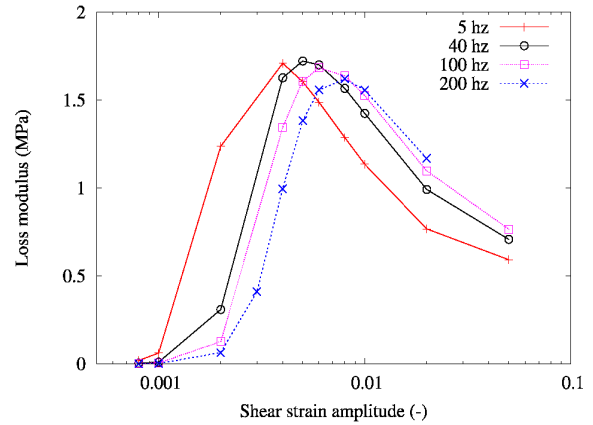
## II.4.2 Prise en compte de l'effet de la fréquence

Dans le paragraphe précédent, l'identification des paramètres a été effectuée à 15 Hz. Il est maintenant important d'observer la prédiction en fréquence engendrée par le modèle proposé. Les figures II.65 et II.66 représentent, dans le cas des paramètres matériau optimaux identifiés dans le paragraphe précédent, respectivement l'évolution des modules élastique et de perte simulée avec la fréquence.

Sur la figure II.65, on observe bien, pour une amplitude de déformation moyenne, une augmentation du module élastique avec la fréquence. Cependant, toutes les courbes d'évolution de module élastique convergent aux faibles niveaux de déformation vers une même valeur de module élastique quelle que soit la fréquence. Or, comme nous avons pu le constater expérimentalement dans le Chapitre I section I.3.1 d), et comme l'ont observé Rendek et Lion (Rendek and Lion, 2010) (voir figure II.67), lorsque la fréquence de sollicitation augmente, toute la courbe d'évolution du module élastique est décalée vers le haut, y compris le palier



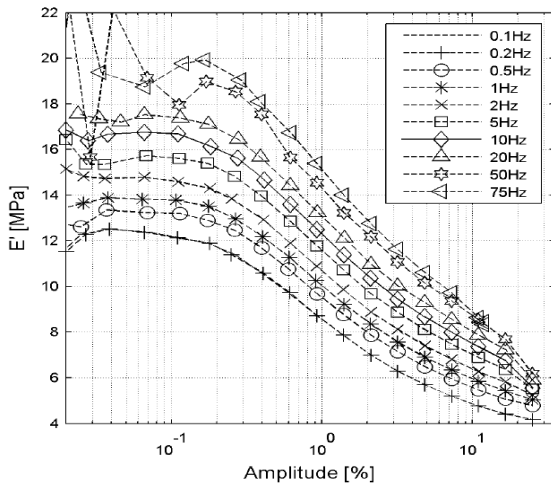
**Fig. II.65** – Evolution du module élastique avec la fréquence prédite avec le modèle proposé



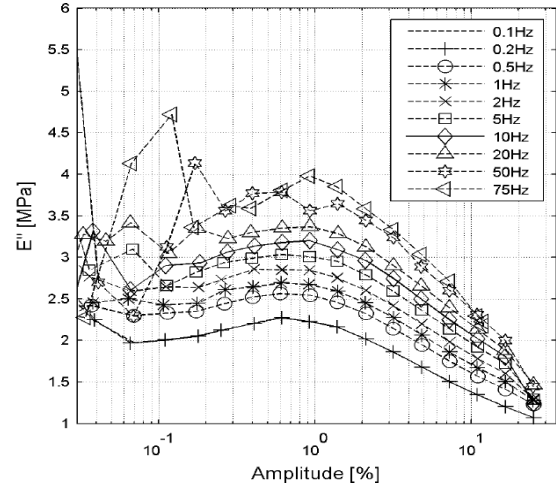
**Fig. II.66** – Evolution du module de perte avec la fréquence prédite avec le modèle proposé

aux faibles niveaux d'amplitude de déformation.

Sur la figure II.66, on observe un pic de dissipation simulé dont l'amplitude reste constante avec la fréquence mais dont la position se décale vers les amplitudes de déformation croissantes lorsque la fréquence augmente. Or, comme nous avons pu le constater expérimentalement dans le Chapitre I section I.3.1 d), et comme l'ont observé Rendek et Lion (Rendek and Lion, 2010) (voir figure II.68), la position du pic de dissipation est identique quelle que soit la fréquence appliquée mais son amplitude croît avec la fréquence.



**Fig. II.67** – Evolution du module élastique avec la fréquence observée par Rendek et Lion (Rendek and Lion, 2010)



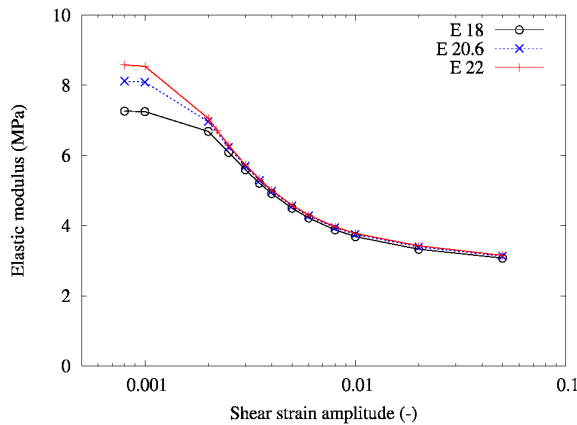
**Fig. II.68** – Evolution du module de perte avec la fréquence observée par Rendek et Lion (Rendek and Lion, 2010)

Ainsi, tel quel, avec un unique jeu de paramètres, le modèle proposé ne permet donc pas simuler l'effet Payne couplé à l'effet de fréquence. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe II.3.2, par construction, pour des niveaux de contrainte inférieurs au paramètre  $R_0$ , et donc aux faibles niveaux de déformation, le comportement simulé est élastique linéaire de module relié aux valeurs des modules des deux branches :  $\mu$  et  $E$ . Cette valeur aux faibles amplitudes de déformation est égale à la somme de la pente de la courbe hyperélastique

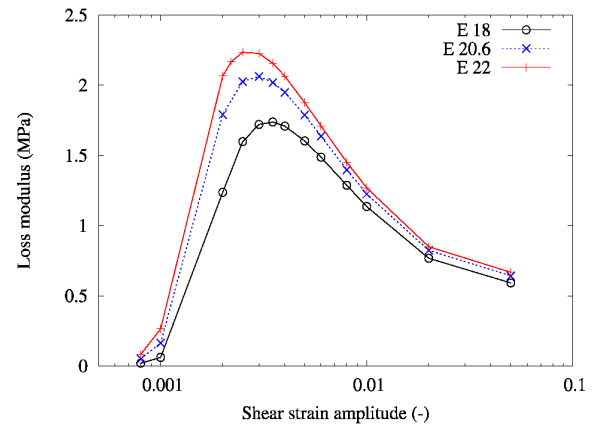


définie par la branche indépendante du temps correspondant à  $\epsilon_{max}$  et au point  $\epsilon_{moy}$  et du module de la branche dépendante du temps  $E$  pour le cas de la compression (et  $E/3$  pour le cisaillement). Ainsi, par construction cette valeur est fixée quelle que soit la fréquence.

Après avoir effectué une étude paramétrique, il semble que pour simuler l'effet Payne et l'effet de fréquence, une des possibilités soit de modifier la valeur du paramètre  $E$  avec la fréquence. Les figures II.69 et II.70 représentent les courbes d'évolution respectivement de modules élastique et de perte pour différentes valeurs du paramètre  $E$  (les autres paramètres étant laissés fixes, égaux aux valeurs optimales déterminées au paragraphe précédent).



**Fig. II.69** – Evolution du module élastique pour différentes valeurs du paramètre  $E$

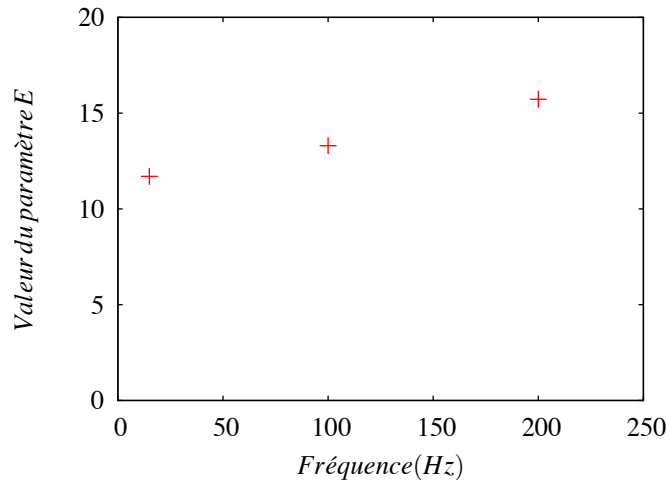


**Fig. II.70** – Evolution du module de perte pour différentes valeurs du paramètre  $E$

On observe alors des évolutions à la fois du module élastique et du module de perte beaucoup plus cohérentes avec les observations expérimentales. Le palier aux faibles amplitudes de déformation augmente lorsque la fréquence augmente et le pic de dissipation voit son amplitude augmenter avec la fréquence tout en restant environ à la même position.

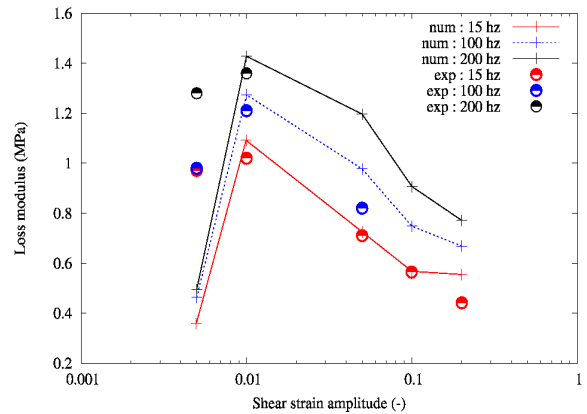
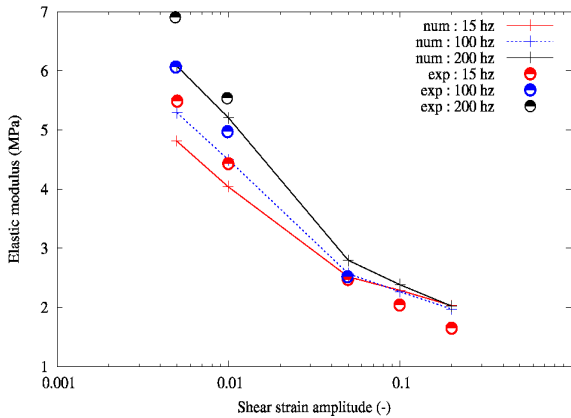
Ainsi, pour améliorer le modèle proposé, nous proposons de modifier uniquement le paramètre  $E$ ; plus la fréquence de la sollicitation est grande et plus le paramètre  $E$  doit être augmenté. L'identification du paramètre  $E$  associée aux fréquences de 100 et 200 Hz a alors été faite à partir des paramètres matériau optimaux déterminés au paragraphe précédent pour une fréquence de 15 Hz. Pour cela, nous avons effectué pour chacune des fréquences une optimisation sur les résultats d'essais concernant la fréquence à optimiser (100 puis 200 Hz dans l'autre cas) en laissant fixes tous les paramètres excepté le paramètre  $E$ .

La figure II.71 regroupe les différentes valeurs optimales du paramètre  $E$  obtenues pour les fréquences de 15, 100 et 200 Hz.



**Fig. II.71** – Evolution des paramètres E optimaux associés aux différentes fréquences considérées

On constate que sur le domaine de fréquence considérée, l'évolution du paramètre E nécessaire pour simuler l'effet Payne avec la fréquence semble être affine. Les figures II.72 et II.73 représentent les évolutions respectives des modules élastique et de perte pour les trois valeurs de paramètre E. On note alors que la tendance globale d'évolution



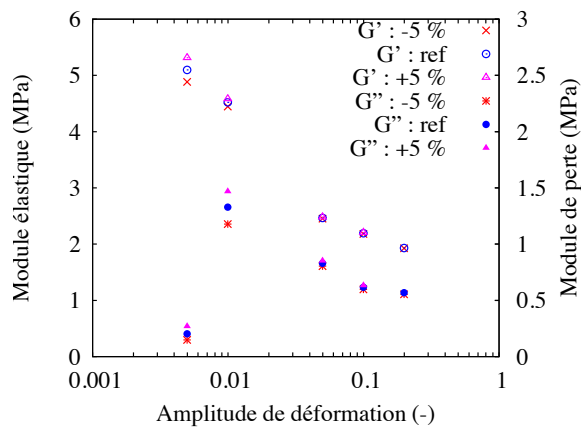
**Fig. II.72** – Evolution du module élastique obtenue avec les trois valeurs du paramètre E synthétisée figure II.71

**Fig. II.73** – Evolution du module de perte obtenue avec les trois valeurs du paramètre E synthétisée figure II.71

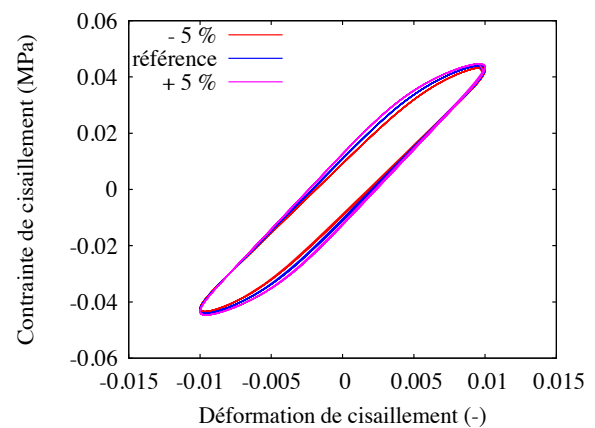
des deux modules avec la fréquence est prise en compte, notamment l'amplitude du pic de dissipation avec la fréquence.

### II.4.3 Etude de sensibilité des paramètres

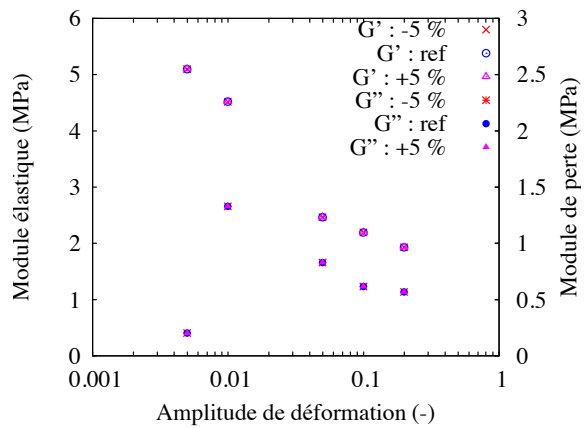
Afin d'observer la sensibilité vis-à-vis des 7 paramètres définissant le comportement dynamique et dissipatif, nous avons, à partir des paramètres optimum synthétisés dans le tableau II.12, fait évoluer chacun de ces paramètres de  $\pm 5\%$ . Les figures II.74 à II.87 représentent les modifications engendrées par l'évolution de  $\pm 5\%$  de chacun des paramètres sur les courbes d'évolution des modules élastique et de perte ainsi que sur la boucle dynamique d'amplitude 1%, dans le cas de la simulation d'essais vibratoires caractérisés par un préchargement jusqu'à 75%, une déformation statique nulle, une fréquence de 15 Hz et des amplitudes de déformation allant de 0.5 à 20%.



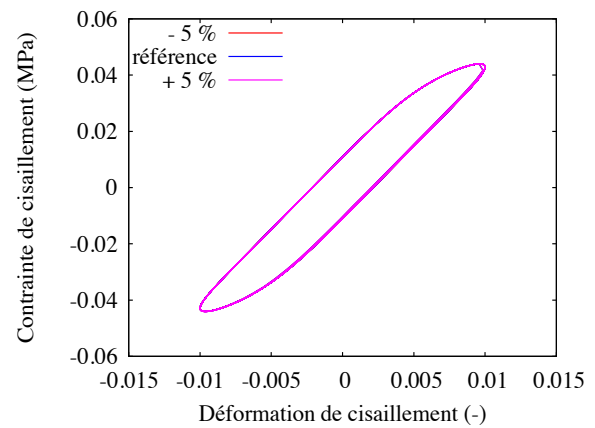
**Fig. II.74** – Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre  $E$  de  $\pm 5\%$



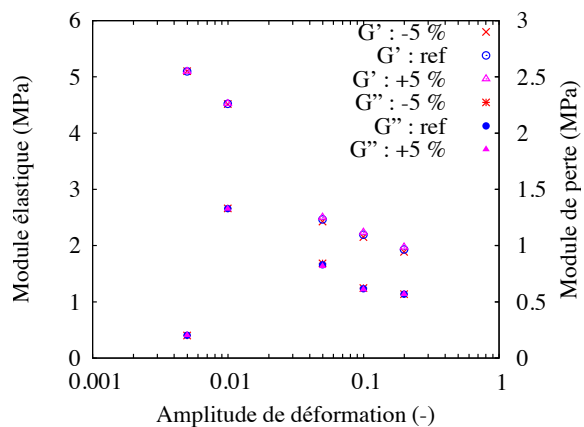
**Fig. II.75** – Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre  $E$  de  $\pm 5\%$



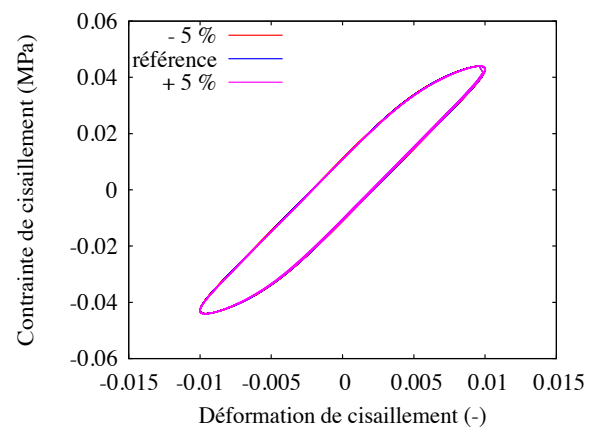
**Fig. II.76** – Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre  $R_0$  de  $\pm 5\%$



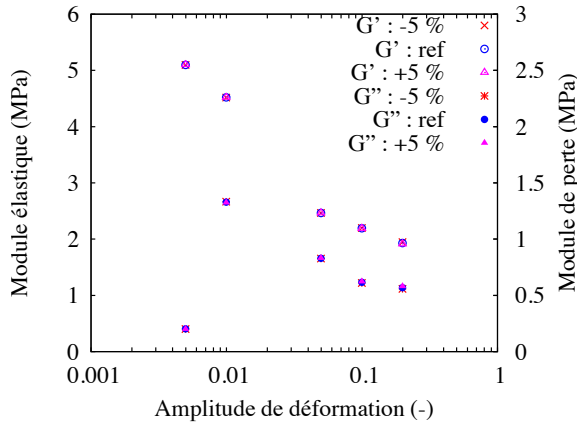
**Fig. II.77** – Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre  $R_0$  de  $\pm 5\%$



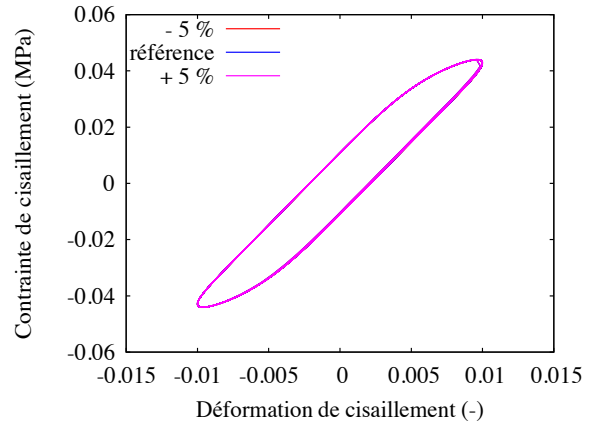
**Fig. II.78** – Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre  $C_k$  de  $\pm 5\%$



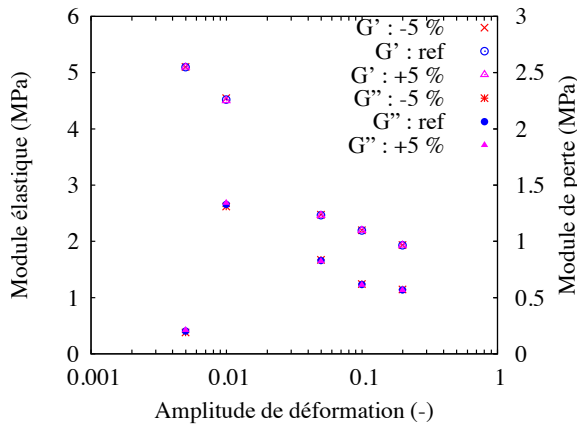
**Fig. II.79** – Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre  $C_k$  de  $\pm 5\%$



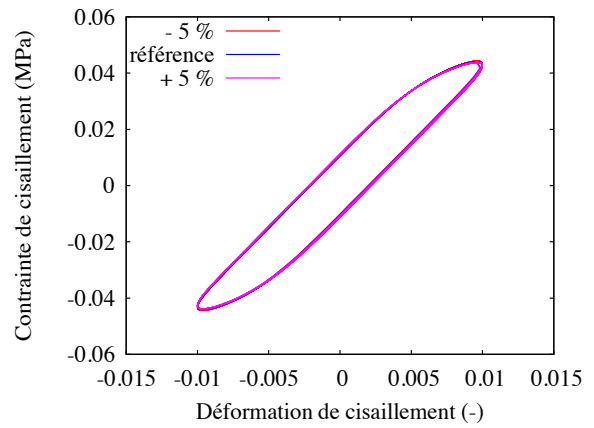
**Fig. II.80** – Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre  $D_k$  de  $\pm 5\%$



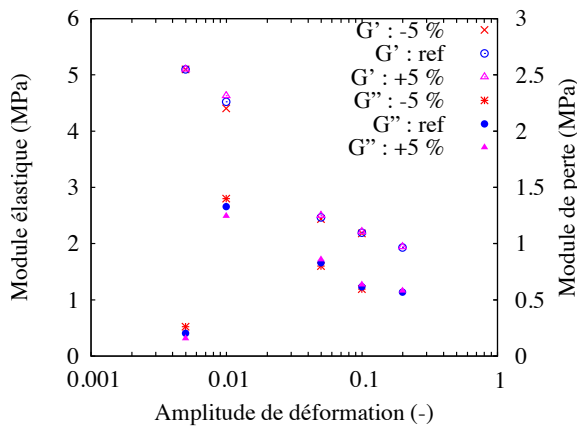
**Fig. II.81** – Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre  $D_k$  de  $\pm 5\%$



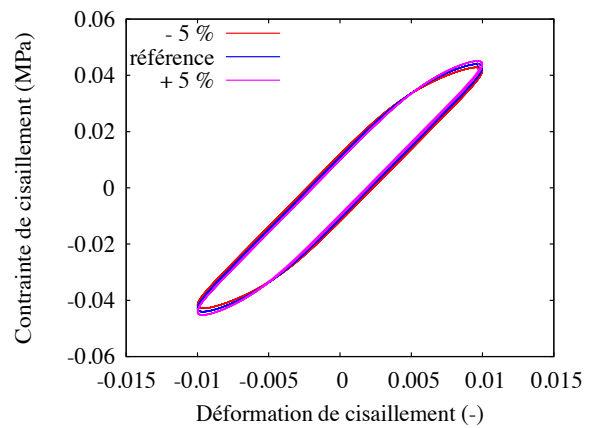
**Fig. II.82** – Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre  $d_0$  de  $\pm 5\%$



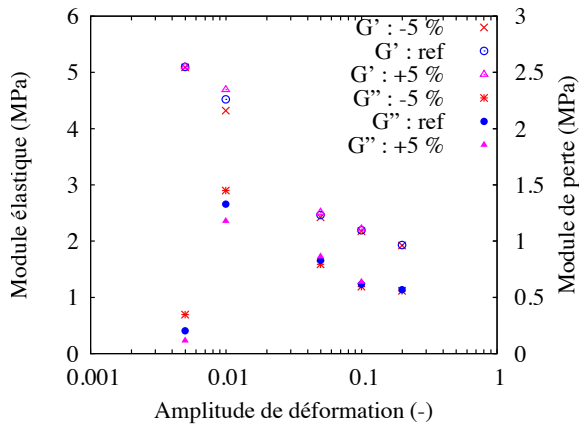
**Fig. II.83** – Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre  $d_0$  de  $\pm 5\%$



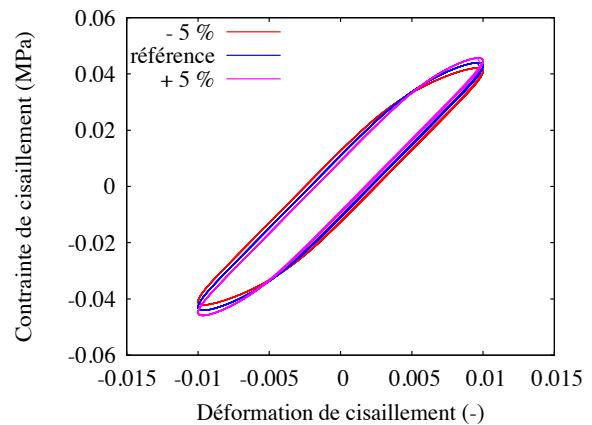
**Fig. II.84** – Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre  $\sigma_0$  de  $\pm 5\%$



**Fig. II.85** – Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre  $\sigma_0$  de  $\pm 5\%$



**Fig. II.86** – Evolution des modules élastique et de perte engendrée par l'évolution du paramètre  $n$  de  $\pm 5\%$



**Fig. II.87** – Evolution de la boucle dynamique simulée associée à l'évolution du paramètre  $n$  de  $\pm 5\%$

Globalement, la variation de  $\pm 5\%$  de ces 7 paramètres n'entraîne pas beaucoup de modifications sur les courbes d'évolution des modules élastique et de perte et sur les boucles dynamiques. Seule la variation des paramètres  $E$ ,  $\sigma_0$  et  $n$  entraîne une faible modification notamment sur la courbe de module de perte aux faibles niveaux d'amplitude de déformation.

#### II.4.4 Validation sur une pièce anti-vibratoire

Le modèle de comportement, présenté dans ce chapitre, a été développé à partir d'essais de caractérisation sur éprouvettes et identifié sur un volume élémentaire représentatif, c'est-à-dire sur un matériau homogène. L'objectif est maintenant de valider le modèle développé sur une pièce anti-vibratoire choisie par PAULSTRA VIBRACHOC.

Pour cela, des essais de cisaillement sur pièce ont été réalisés à Lisses (91).

Les paramètres matériau utilisés dans ce paragraphe pour la validation sont les paramètres optimaux déterminés au paragraphe II.4.1 et synthétisés dans le tableau II.12.

Par soucis de confidentialité, aucune dimension ne sera précisée et sur l'ensemble des figures de ce paragraphe nous avons volontairement laissé aucune précision sur l'ordre de grandeur des axes de force et déplacement.

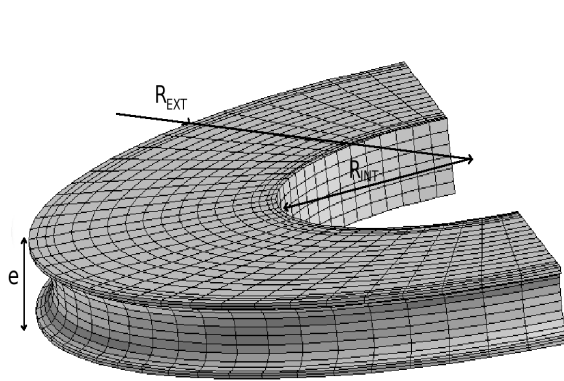
La pièce anti-vibratoire considérée est une pièce cylindrique percée constituée de plusieurs couches de silicone chargé de silice séparées entre elles par des parties métalliques. La figure II.88 représente le maillage d'une demie-couche élémentaire en silicone chargé de silice de celle-ci.

Dans un premier temps, afin de vérifier la non-dépendance des résultats de simulations avec la taille de maillage, deux tailles de mailles ont été considérées (figures II.88 et II.89) et simulées.

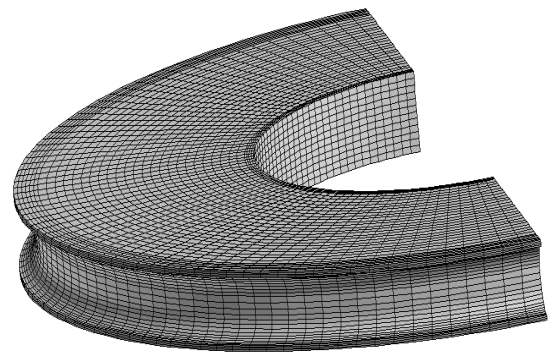
La figure II.90 représente les résultats de simulation d'une même sollicitation vibratoire (définie, comme nous avons l'habitude de le faire maintenant, par un jeu de paramètres du type  $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f)$ ) obtenus à partir des deux maillages des figures II.88 et II.89.

On constate alors que les résultats de simulation sont bien indépendants de la taille de maille du maillage. Dans la suite de ce paragraphe, les résultats de simulation ont été obtenus à partir du maillage de la figure II.88.

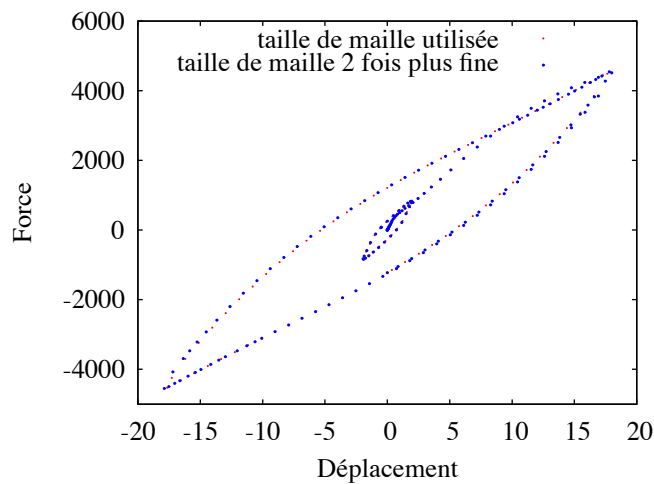
Puis la simulation a été effectuée en utilisant des éléments c3d8 avec l'option l'intégration sélective.



**Fig. II.88** – Pièce anti-vibratoire considérée



**Fig. II.89** – Même pièce que sur la figure II.88 avec un maillage deux fois plus fin

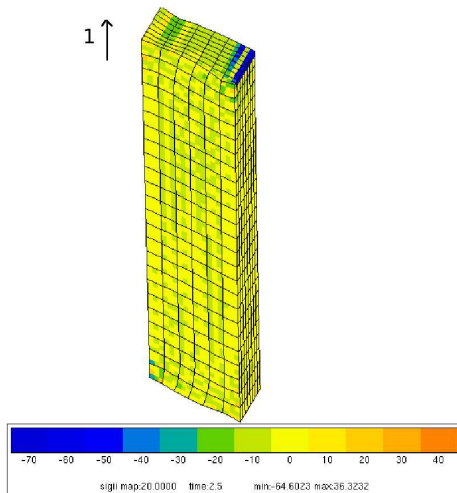


**Fig. II.90** – Comparaison des résultats de simulation obtenus avec les deux maillages des figures II.88 et II.89

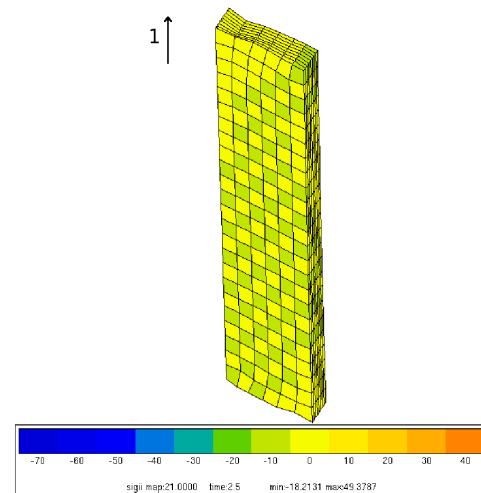
En effet, compte-tenu de la valeur élevée du paramètre de compressibilité  $\kappa$  devant les autres paramètres, l'utilisation d'éléments standards entraîne des problèmes de surestimation de pression (observable en traçant  $trace(\mathbf{T})$ ) et donc de surestimation de la contrainte. Sur la figure II.91, dans le cas d'une éprouvette massive de double-cisaillement sollicitée en cisaillement à 50% de déformation suivant la direction 1 et maillée avec des éléments standards *c3d20*, le champ de pression au sein de l'élastomère chargé est représenté.

On constate qu'au sein d'un même élément la pression n'est pas constante et parfois même des pressions positives et négatives coexistent dans le même élément (élément en haut à droite par exemple).

Les éléments utilisés dans le cadre de l'intégration sélective sont des éléments dits "mixtes" sur lesquels sont appliqués en plus du déplacement une condition de pression uniforme au sein de l'élément. La figure II.92 représente le champ de pression obtenu dans les mêmes conditions que sur la figure II.91 avec cette fois-ci des éléments *c3d8* avec intégration sélective. Des niveaux de pression plus faibles sont observés (ici l'échelle a été choisie identique pour effectuer la comparaison mais la pression est dans ce cas comprise entre  $-4$  et  $7$  MPa) et l'effet de "damier" de pression au sein d'un même élément a été supprimé.



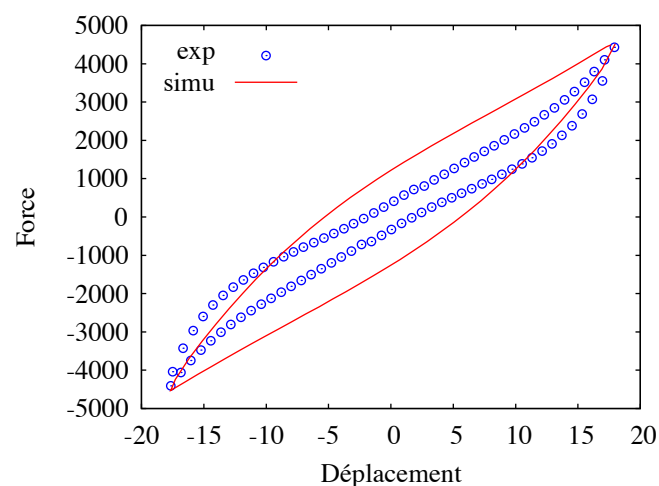
**Fig. II.91** – Observation du champ de pression au sein de l'élastomère chargé



**Fig. II.92** – Observation du champ de pression au sein de l'élastomère chargé

Ensuite, il est important de noter que lorsque l'on s'intéresse à une structure, on ne travaille plus en contrainte/déformation mais en force/déplacement compte-tenu du fait que les champs de déformations et de contraintes au sein de la pièce ne sont pas uniformes. De suite, on ne raisonne plus en module élastique et module de perte mais avec la rigidité en phase (partie élastique) notée  $K'$  et la rigidité en quadrature de phase (partie visqueuse) notée  $K''$ . Pour déterminer  $K'$  et  $K''$ , le même protocole que celui détaillé au Chapitre I section I.2.5 est utilisé excepté que ce ne sont plus la déformation et la contrainte qui sont décomposées par transformée de Fourier discrète mais le déplacement et la force.

La figure II.93 compare la simulation et l'expérience concernant le préchargement jusqu'à 45% de la pièce en cisaillement.

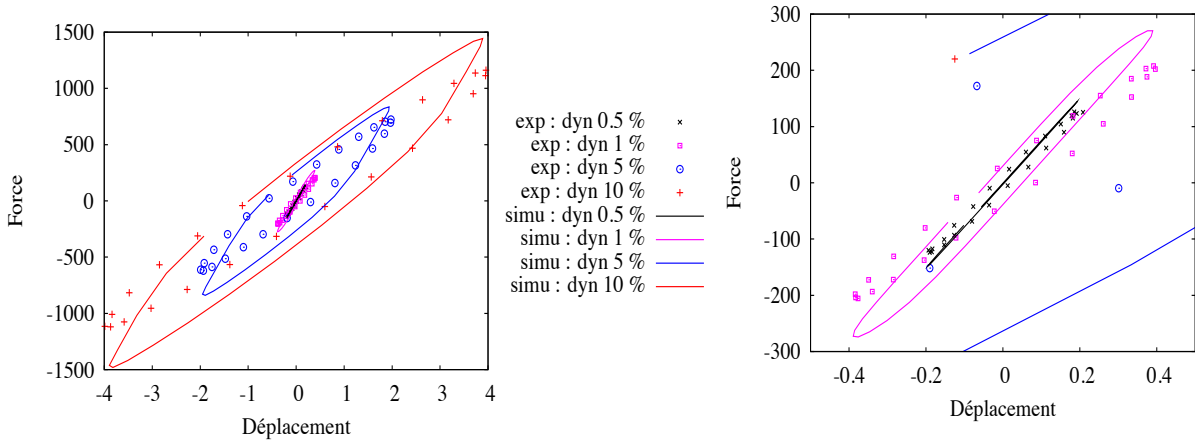


**Fig. II.93** – Simulation du cycle de préchargement jusqu'à 50% sur pièce

Si l'on compare cette simulation sur pièce avec la prédiction du cycle stabilisé associée au préchargement jusqu'à 50% obtenue sur le VER (représentée sur la figure A.1 de l'Annexe), on peut constater qu'une prédiction similaire est obtenue.

Ensuite, la figure II.94 représente les boucles dynamiques expérimentales et simulées associées

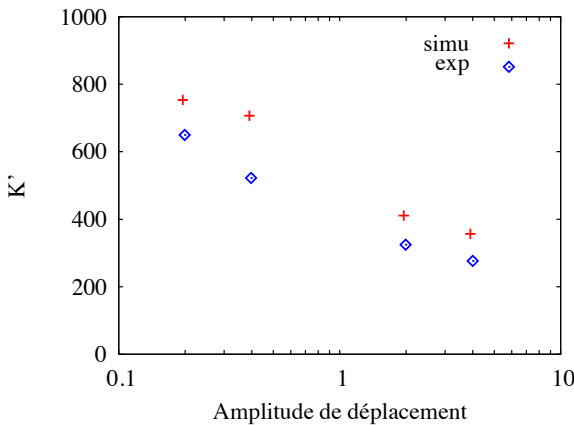
à une sollicitation vibratoire de préchargement jusqu'à 45%, de déformation statique nulle, de fréquence 5 Hz et d'amplitude de déformation de 1, 5 et 10%.



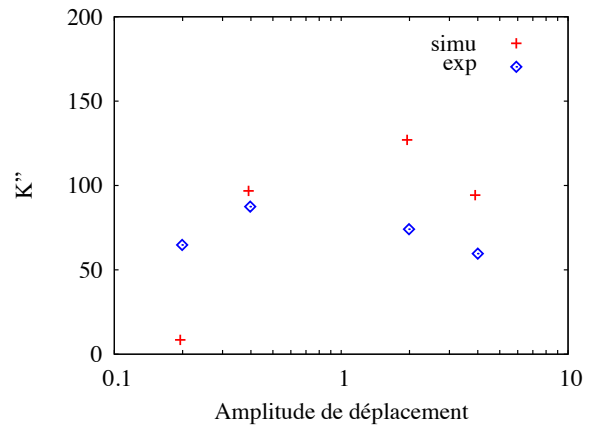
**Fig. II.94** – Simulation des boucles dynamiques sur la pièce réelle

**Fig. II.95** – Zoom sur les boucles dynamiques de petites amplitudes de déformation de la figure II.94

Les figures II.96 et II.97 représentent l'évolution des rigidités  $K'$  et  $K''$  expérimentales et simulées associées aux boucles dynamiques de la figure II.94.



**Fig. II.96** – Simulation de la rigidité



**Fig. II.97** – Simulation de la rigidité

Ces courbes peuvent être comparées aux simulations obtenues sur un VER sous un chargement similaire (voir Annexe figures A.2 et A.3). On note de la même façon des résultats cohérents avec ceux obtenus sur VER validant ainsi le passage d'une simulation sur éprouvette à une simulation sur structure.

Ainsi l'identification des paramètres matériau du modèle DyMPPIEC à partir d'essais réalisés sur éprouvettes, suffit pour pouvoir prédire, avec une qualité similaire à celle obtenue sur éprouvette, la réponse dynamique d'une structure.



## II.5 Ouverture vers d'autres modes de sollicitations

Après avoir appliqué et identifié le modèle DyMPPIEC à des essais de cisaillement uniquement, il est intéressant de tester la capacité de ce modèle à simuler d'autres modes de sollicitations.

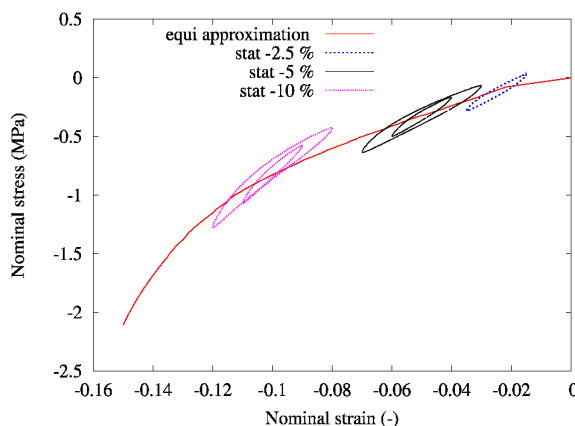
Comme nous l'avons vu au Chapitre I, le silicone chargé de silice étudié a aussi été caractérisé dynamiquement en compression. Ainsi, dans cette section, nous nous attacherons, dans un premier temps, à observer l'aptitude du modèle à simuler les essais de compression puis nous tenterons de déterminer un jeu de paramètres matériau permettant de simuler l'ensemble des essais.

### II.5.1 Identification à fréquence fixée associée aux essais de compression

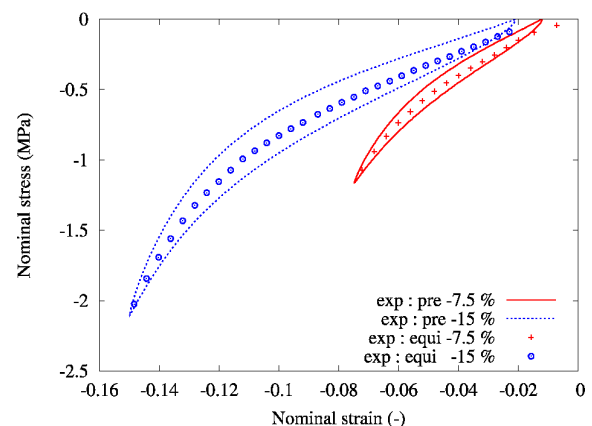
La même procédure que celle employée au paragraphe II.4.1 pour identifier les paramètres matériaux associé aux essais de cisaillement est utilisée ici.

#### a) Identification du comportement d'équilibre sans plasticité

Dans un premier temps, les 5 paramètres permettant de simuler le comportement indépendant du temps sont identifiés. Pour cela, les deux courbes d'équilibre associées aux deux préchargements de compression réalisés doivent être déterminées. Dans le cas des essais de compression seule, la boucle stabilisée présente une déformation rémanente; cependant les courbes hyperélastiques doivent passer par zéro. Ainsi, pour déterminer ces deux courbes hyperélastiques nous avons utilisé conjointement la courbe moyenne de ces courbes et les contraintes moyennes des boucles dynamiques expérimentales. Sur la figure II.98, sont représentées les boucles dynamiques associées aux sollicitations dynamiques de déformation maximale  $-15\%$ , de fréquence  $15$  Hz, d'amplitudes de déformation de  $1$  et  $2\%$  et de déformations statiques de  $-2.5$ ,  $-5$  et  $-10\%$ . De plus, la courbe d'équilibre déterminée y est superposée.



**Fig. II.98** – Vérification de la validité de courbe d'équilibre construite en superposant les boucles dynamiques expérimentales

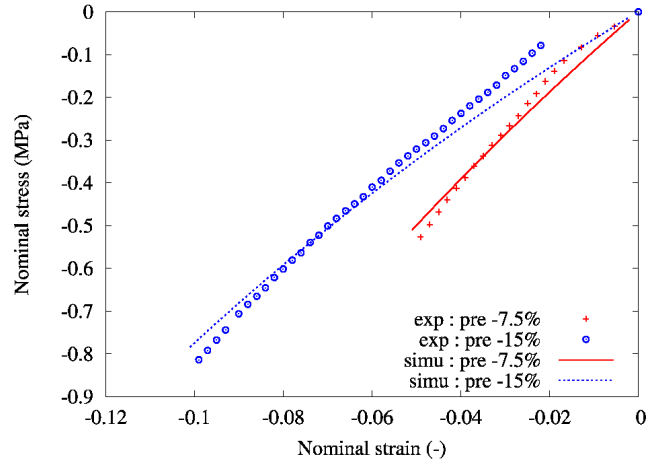


**Fig. II.99** – Représentation des boucles stabilisées des deux préchargements et des courbes d'équilibre associées

On constate que cette courbe d'équilibre semble pouvoir bien représenter l'état d'équilibre du matériau et donc la contrainte moyenne des boucles dynamiques qui seront simulées. Sur la figure II.99, les deux boucles stabilisées expérimentales sont représentées avec les courbes d'équilibre qui leur sont associées.

Ceux sont donc ces deux courbes d'équilibre que nous cherchons à simuler. La figure II.100

représente la simulation optimum de ces courbes obtenue avec le jeu de paramètres synthétisé dans le tableau II.13.



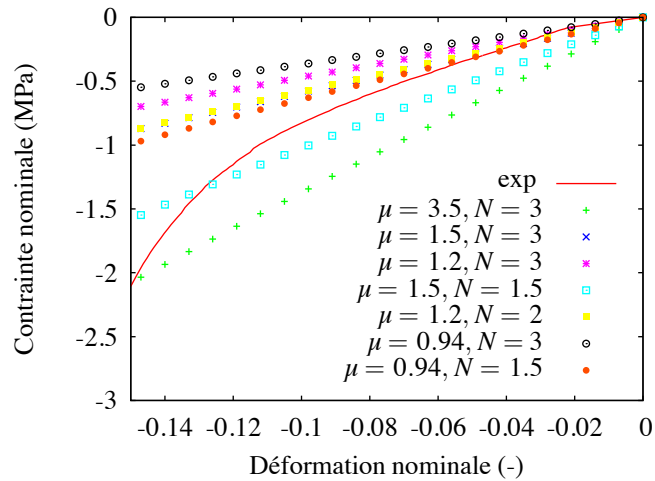
**Fig. II.100** – Comparaison entre les courbes d'équilibre approximées à partir des essais de préchargement et celle simulées

$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$
19.7	0.8	95.0	0.12	0.948

**Tab. II.13** – Synthèse des paramètres matériau optimum associés aux essais de compression

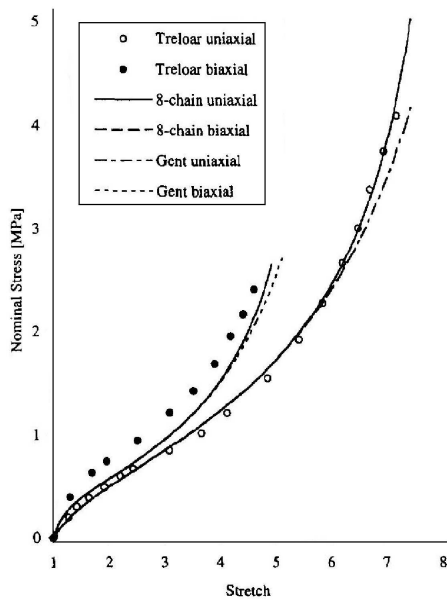
On observe sur la figure II.100 que la simulation obtenue est assez approximative pour les faibles niveaux de déformation et est assez bonne par la suite. On pourra remarquer que nous avons choisi de tronquer les courbes d'équilibre respectivement à  $-5$  et  $-10\%$  pour espérer mieux fitter ces courbes. En effet, ces courbes d'équilibre présentent une forte non-linéarité alors que les niveaux de déformation restent assez faibles :  $-7.5$  et  $-15\%$ . Nous n'avons pas réussi, même en ne considérant qu'une seule courbe hyperélastique à simuler ces augmentations fortes de la contrainte à proximité des valeurs maximales de déformations avec le modèle d'Arruda-Boyce. Comme l'illustre la figure II.101, où plusieurs jeux de paramètres ( $\mu$ ,  $N$ ) sont testés pour représenter la courbe d'équilibre en compression associée à  $\epsilon_{max} = -15\%$ , sur le domaine de déformation concerné les prédictions sont linéaires.

Pour améliorer la prévision de ces courbes d'équilibre en compression, une solution pourrait être de compléter le modèle d'Arruda-Boyce en y ajoutant une fonction dépendante du deuxième invariant ( $I_2$ ). En effet, si l'on observe la figure II.102, rappelant le potentiel du modèle d'Arruda-Boyce, déjà discuté au paragraphe II.1.2 d), pour différentes sollicitations et sur toute la gamme de déformation (petites et grandes déformations)(Arruda and Boyce, 2000), on peut y observer une bonne tendance globale sur l'ensemble de la gamme des déformations dans le cas d'une sollicitation uniaxiale mais la prédiction est beaucoup moins bonne dans le cas de la sollicitation biaxiale. Or comme nous l'avons déjà souligné dans ce même paragraphe, une sollicitation equi-biaxiale dans les directions 1 et 2 (directions orthogonales) est équivalente à une compression suivant la direction 3. De plus, le modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce ne tient pas compte du second invariant ( $I_2$ ) mais seulement des termes d'ordres supérieurs du premier invariant et comme l'on souligné Diani et ses collègues (Lambert-Diani and Rey, 1999) ceci serait en partie dû à la non prise en compte de  $I_2$ .

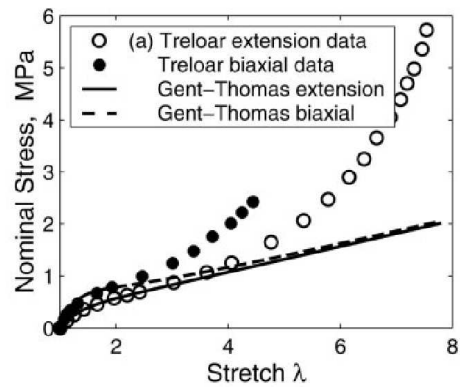


**Fig. II.101** – Tentative d'utilisation du modèle à huit chaînes d'Arruda-Boyce pour représenter une des courbes d'équilibre en compression

Ainsi, pour améliorer leur prévision quelle que soit la sollicitation et le niveau de déformation, plusieurs auteurs (Arruda and Boyce, 2000), (Beda, 2007) proposent de sommer les densités d'énergie de déformation associées à deux modèles différents, l'un ayant une bonne prédiction aux petites déformations et l'autre aux grandes déformations. Dans leur article Arruda et Boyce (Arruda and Boyce, 2000) proposent l'association du modèle de Flory-Ermann à celui d'Arruda-Boyce.



**Fig. II.102** – Comparaison du modèle d'Arruda-Boyce avec les données expérimentales obtenues par Treloar en traction uniaxiale et biaxiale (Arruda and Boyce, 2000)



**Fig. II.103** – Comparaison du modèle de Gent-thomas avec les données expérimentales obtenues par Treloar en traction uniaxiale et biaxiale (Beda, 2007)

Beda (Beda, 2007), quant à lui, propose l'ajout du modèle de Gent-Thomas à un modèle de type Rivlin à 3 coefficients; la densité d'énergie de déformation proposée s'écrit alors sous

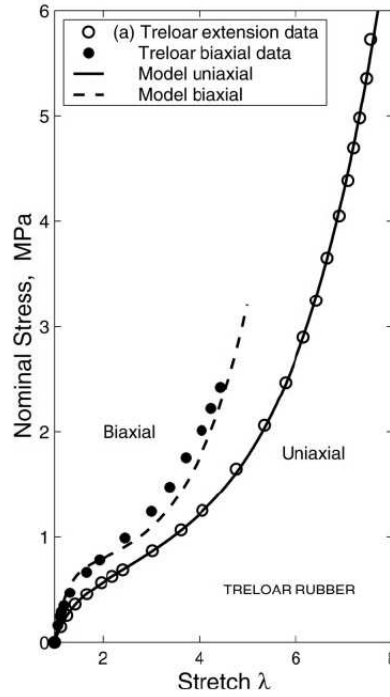
la forme :

$$\mathcal{U} = C_{10} \cdot (I_1 - 3) + \frac{1}{2} C_{20} \cdot (I_1 - 3)^2 + \frac{1}{3} C_{30} \cdot (I_1 - 3)^3 + K \cdot \ln \frac{I_2}{3}. \quad (\text{II.147})$$

sachant que la densité d'énergie de déformation concernant le modèle de Gent-Thomas est de la forme :  $\mathcal{U}_{GT} = K_1 \cdot (I_1 - 3) + K_2 \cdot \ln \frac{I_2}{3}$ .

La figure II.103 représente les prédictions obtenues avec un modèle de type Gent-Thomas sur les données expérimentales de Treloar. On peut y observer une très bonne prédiction pour les deux types de sollicitation mais uniquement sur le domaine des petites voire moyennes déformations. On notera de plus que le modèle de Flory-Erman donne des résultats équivalents (Beda, 2007).

La figure II.104, quant à elle, représente les prédictions obtenues concernant l'association des deux modèles proposé par Beda.



**Fig. II.104** – Comparaison du modèle proposé par Beda avec les données expérimentales obtenues par Treloar en traction uniaxiale et biaxiale (Beda, 2007)

En comparaison avec le modèle d'Arruda-Boyce, on constate que le modèle proposé par Beda entraîne une forte amélioration des prédictions dans le cas de la sollicitation biaxiale et sur le domaine des petites déformations.

La différence principale apportée par cette association de modèles est la présence du deuxième invariant  $I_2$ .

C'est dans cette optique que nous avons souhaité associer à la densité d'énergie de déformation d'Arruda-Boyce, gouvernant l'hyperélasticité de la branche indépendante du temps, la densité d'énergie de déformation de Gent-Thomas telle que :

$$\mathcal{U}_{\text{amélioré}} = nk\theta N \left( \frac{\lambda_{\text{chain}}}{\sqrt{N}} \beta_{\text{chain}} + \ln \frac{\beta_{\text{chain}}}{\sinh(\beta_{\text{chain}})} \right) + K_{GT} \cdot \ln \frac{I_2}{3}. \quad (\text{II.148})$$

Cependant, pour effectuer la modification dans la branche indépendante du temps du modèle que nous proposons, il faut de plus étendre la prise en compte de l'effet Mullins (voir section II.1.2 h)) et du facteur d'amplification des déformations  $X$  (voir paragraphe II.1.2 g)) qui dans l'article de Qi et Boyce (Qi and Boyce, 2004) ne sont appliqués qu'aux lois hyperélastiques s'exprimant uniquement en fonction du premier invariant  $I_1$ . Dans l'article de Qi et Boyce, l'amplification des déformations est appliquée au premier invariant de la manière suivante :

$$\langle I_1 \rangle_m = X(\langle I_1 \rangle - 3) + 3. \quad (\text{II.149})$$

On peut alors assez facilement associer, par exemple, ce premier invariant amplifié  $\langle I_1 \rangle_m$  au tenseur des déformations amplifié  $\langle \mathbf{C} \rangle_m$  défini par :

$$\langle \mathbf{C} \rangle_m = X(\langle \mathbf{C} \rangle - 3) + 3, \quad (\text{II.150})$$

vérifiant  $\text{tr}(\langle \mathbf{C} \rangle_m) = \langle I_1 \rangle_m$ .

L'expression du deuxième invariant amplifié associé à ce tenseur des déformations amplifié est alors :

$$\langle I_2 \rangle_m = \frac{1}{2} \cdot \left[ X^2 \cdot (2I_2 - 4I_1 + 6) + X \cdot (4I_1 - 12) + 6 \right], \quad (\text{II.151})$$

où  $\langle I_2 \rangle_m$  dépend à la fois de  $I_1$  et de  $I_2$ .

Ainsi, on ne peut pas trivialement étendre l'amplification des déformations à  $I_2$  en posant  $\langle I_2 \rangle_m = X(\langle I_2 \rangle - 3) + 3$  car les deux invariants amplifiés ainsi définis ne correspondent à aucun tenseur des déformations amplifié.

C'est pourquoi nous n'avons pas pu mettre en place cette correction de la partie hyperélastique en introduisant le deuxième invariant dans l'expression de la densité d'énergie de déformation.

Ainsi, pour obtenir la meilleure approximation possible des courbes d'équilibre expérimentales en compression, nous avons choisi de les tronquer au niveau des déformations statiques maximales que nous avons étudié (c'est-à-dire  $-5$  et  $-10\%$ ).

## b) Identification du comportement dynamique et dissipatif

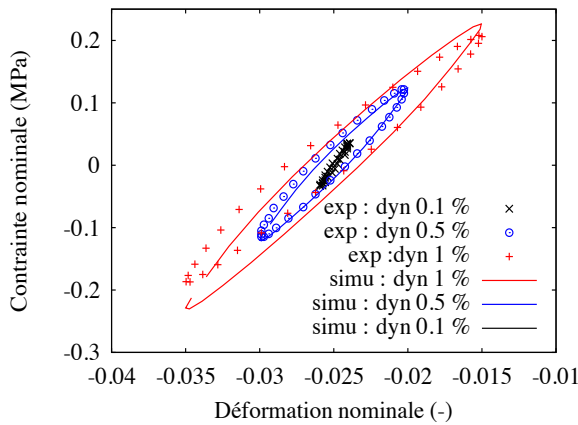
Les 5 paramètres déterminés précédemment sont ensuite laissés fixes, égaux aux valeurs optimales déterminées précédemment, puis l'on cherche ici à identifier les paramètres associés au caractère dissipatif du matériau.

Comme dans le paragraphe précédent, nous avons réalisé l'optimisation uniquement sur les modules élastique et de perte. Les 7 paramètres optimaux obtenus après optimisation sont synthétisés dans le tableau II.14. Les courbes simulées présentées dans la suite de ce paragraphe correspondent à ce jeu de paramètres.

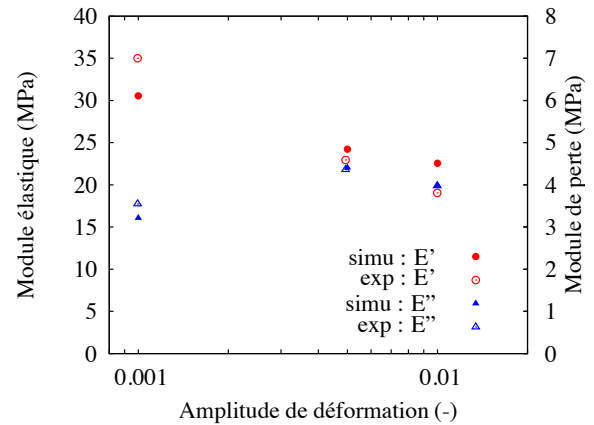
$E$	$R_0$	$C_k$	$D_k$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
20.2	$9.74 \cdot 10^{-4}$	19.9	103.5	3000	3.34	2.62

**Tab. II.14** – Synthèse des paramètres matériau associés à cette étude paramétrique

Pour des sollicitations dynamiques de compression correspondant à un préchargement jusqu'à  $-7.5\%$ , une déformation statique de  $-2.5\%$ , une fréquence de 15 Hz et des amplitudes de déformations allant de 0.1 à 1%, les figures II.105 et II.106 représentent respectivement



**Fig. II.105** – Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = ( -7.5% , -2.5% , - , 15Hz)



**Fig. II.106** – Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = ( -7.5% , -2.5% , - , 15Hz)

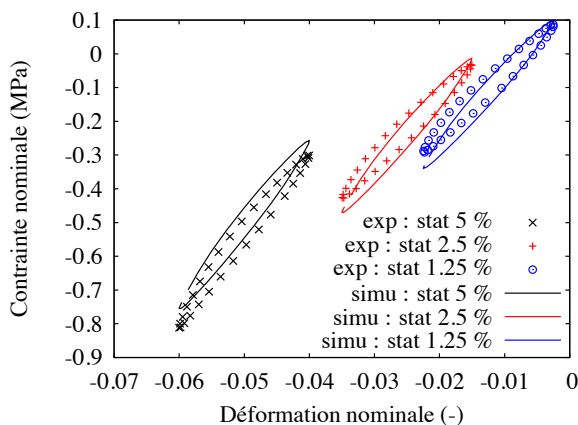
les boucles dynamiques expérimentales et simulées et les modules élastiques et de perte expérimentaux et simulés.

On peut noter une assez bonne prédiction des évolutions des modules élastique et de perte associés à ces sollicitations ainsi que des boucles dynamiques.

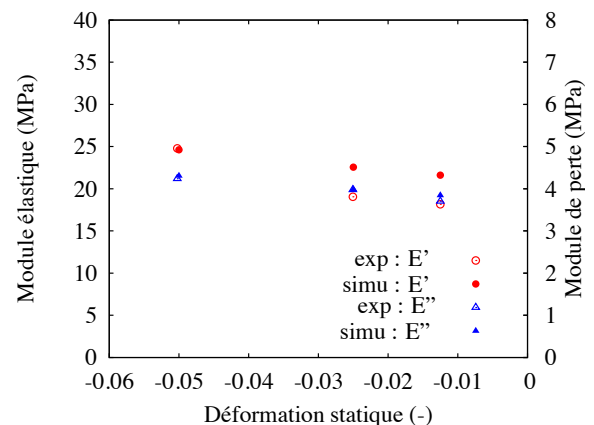
Ainsi, les tendances d'évolution de l'effet Payne en compression peuvent aussi être représentées par notre modèle.

L'ensemble des paramètres matériau étant déterminé, observons la prédiction obtenue pour différents cas de chargement dynamique en compression.

Ainsi pour des sollicitations correspondant à un préchargement jusqu'à -7.5%, une amplitude de déformation de 1%, une fréquence de 15 Hz et différents niveaux de déformations statiques de -1.25, -2.5 et -5%, les figures II.107 et II.108 comparent respectivement les boucles dynamiques expérimentales et simulées et les modules élastiques et de perte expérimentaux et simulés obtenus.



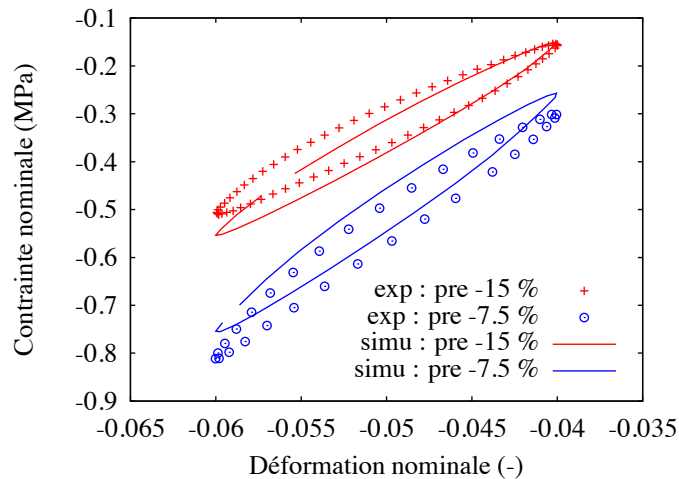
**Fig. II.107** – Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = ( -7.5% , - , 1% , 15Hz)



**Fig. II.108** – Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = ( -7.5% , - , 1% , 15Hz)

On constate alors une assez bonne prédiction des boucles dynamiques pour différents niveaux de déformation statique appliqués. Une très bonne prévision du module de perte est observé.

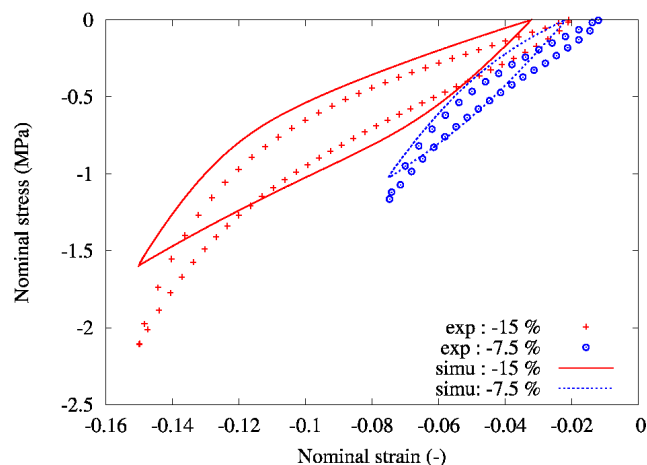
Ensuite, il est intéressant d'observer les prédictions du modèle associées à un niveau de déformation statique non nul mais pour des niveaux de déformation maximales différents. La figure II.109 représente les boucles dynamiques expérimentales et simulées associées à des sollicitations dynamiques correspondant à une amplitude de déformation de 1%, une fréquence de 15 Hz, une déformation statique de  $-5\%$ , et des déformations maximales de  $-7.5\%$  et  $-15\%$ .



**Fig. II.109** – Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (-, -5\%, 1\%, 15Hz)$

Une assez bonne prévision des boucles dynamiques associées est constaté ce qui met en avant l'aptitude du modèle DyMPPIEC à simuler à la fois l'effet Payne et l'effet Mullins.

Enfin, sur la figure II.110, la simulation des boucles stabilisées des deux préchargements de compression est représentée.



**Fig. II.110** – Observation de la prédiction des boucles stabilisées associées aux deux niveaux de préchargement

Les paramètres matériau n'ont pas été optimisé aux temps courts pourtant le modèle développé parvient bien à simuler des boucles stabilisées dissipatives. Cependant, dans le cas de la compression, la prédiction obtenue est assez moyenne et notamment moins bonne que

sur les essais de cisaillement.

L'approximation faite lors de l'optimisation des courbes d'équilibre en tronquant les parties très non-linéaires, semble expliquer, tout du moins en partie, la prédiction approximative des boucles stabilisées de cyclage.

Dans ce paragraphe, nous avons pu constater que le modèle DyMPPIEC simule plutôt bien le comportement dynamique en compression du silicone chargé de silice. Ainsi, le modèle permet de prévoir l'effet Payne tout en tenant compte de l'effet Mullins mais aussi de simuler des sollicitations vibratoires de déformation statique non nulles.

Le modèle pourrait-être perfectionné en améliorant la prévision du comportement d'équilibre sans plasticité en utilisant un modèle hyperélastique permettant une meilleure prévision du comportement, probablement en tenant compte du deuxième invariant.

## II.5.2 Identification associée à un mode mixte de cisaillement et de compression

En fait, l'objectif principal à atteindre idéalement est d'être capable, avec un unique jeu de paramètres matériau, de simuler l'ensemble des essais. Ceci permettrait notamment de pouvoir prédire la réponse à un chargement mixte.

Ainsi, les mêmes méthodes d'identification des paramètres sont employées mais pour chacune des optimisations, l'ensemble des essais de cisaillement et de compression est utilisé.

Cependant, pour obtenir de meilleurs résultats lors de l'optimisation des paramètres matériau, nous avons choisi d'utiliser des fonctions poids. En effet, lors du processus d'optimisation, chaque simulation élémentaire est comparée avec les données d'essais correspondantes et la distance entre les 2 courbes est évaluée ; ici la fonction évaluant cet écart est choisie sous la forme :

$$\mathcal{F}_i = \frac{1}{2(t^+ - t^-)} \int_{t^-}^{t^+} (y_{simu}(t) - y_{exp}(t))^2 dt, \quad (\text{II.152})$$

avec  $[t^+; t^-]$  l'intervalle de temps commun aux deux courbes comparées.

Puis, la fonction objectif  $\mathcal{F}$  à réduire est la somme de ces écarts pour l'ensemble des essais considérés. Par défaut, les écarts sont sommés sans introduction de poids ( $\alpha_i = 1 \forall i$ ) ; mais si l'on souhaite privilégier un essai par rapport à un autre ou normer les contributions de tous les essais, il est possible d'introduire des poids et donc de modifier l'évaluation de la fonction objectif  $\mathcal{F}$  qui s'écrit alors sous la forme :

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{F}_i, \quad (\text{II.153})$$

avec  $n$  le nombre d'essais considérés.

En effet, dans notre cas, les niveaux de contrainte et de modules associés aux essais de compression sont beaucoup plus élevés que ceux relatifs aux essais de cisaillement ; c'est pourquoi, pour que les données expérimentales relatives aux essais de cisaillement soient considérées de manière équivalente par l'optimiseur, celles-ci ont été pondérées avec des coefficients  $\alpha_i$  de l'ordre de 100.

### a) Identification du comportement d'équilibre sans plasticité

Ici, les 3 courbes d'équilibre de cisaillement identifiées au paragraphe II.4.1 ainsi que les 2 courbes d'équilibre de compression identifiées au paragraphe II.5.1 sont considérées



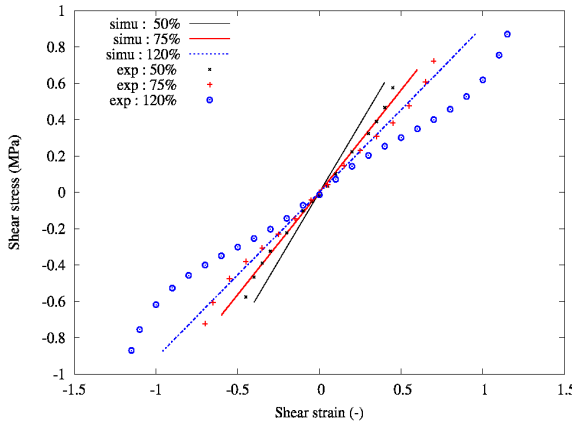
$\mu$	$N$	$A$	$v_{s0}$	$v_{ss}$
0.75	42	141.6	0.1	0.95

**Tab. II.15** – Synthèse des paramètres matériau optimaux associés à l'ensemble des essais

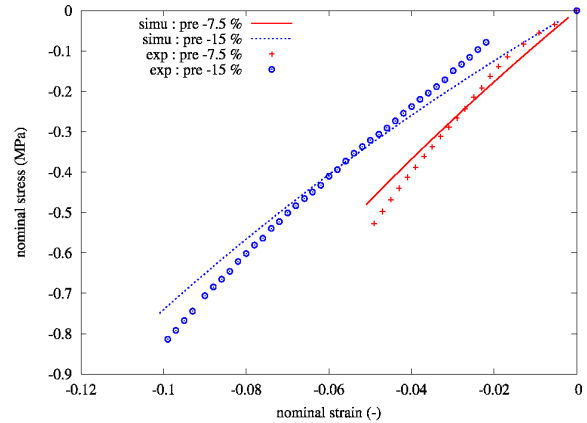
simultanément.

Le jeu de paramètres optimal obtenu est synthétisé dans le tableau II.15.

Les figures II.111 et II.112 illustrent les prédictions obtenues pour ces 5 courbes d'équilibre en comparaison avec les courbes identifiées expérimentalement.



**Fig. II.111** – Comparaison entre les courbes d'équilibre de cisaillement approxi-mées à partir des essais de préchargement et celle simulées



**Fig. II.112** – Comparaison entre les courbes d'équilibre de compression approxi-mées à partir des essais de préchargement et celle simulées

On constate alors que le modèle proposé permet difficilement de prédire le comportement indépendant du temps pour les deux types de sollicitations à la fois. La prédiction sur les courbes de compression reste comparable à celle obtenue pour l'identification sur les essais de compression seule mais celle des courbes de cisaillement est beaucoup moins juste notamment pour la déformation maximale de 120%.

Pour améliorer la simulation des courbes d'équilibre des deux modes de sollicitations avec un unique jeu de paramètres, une solution pourrait être d'intégrer à la modélisation de l'effet Mullins, et donc du comportement statique sans plasticité, de l'anisotropie.

En effet, les courbes d'équilibre associées aux essais de cisaillement ne sont pas suffisamment adoucies.

Pour tenir compte de cela, il faudrait peut-être pouvoir introduire deux lois d'évolution de la phase molle avec la déformation appliquée différentes (cf équation II.94) suivant la direction de sollicitation ou plutôt une loi d'évolution anisotrope. Une autre solution pourrait être d'utiliser le modèle proposé par Diani et ses collègues (Diani et al., 2006b) évoqué au paragraphe II.1.2 h) permettant de tenir compte de l'anisotropie induite par effet Mullins.

## b) identification du comportement dynamique et dissipatif

Les 5 paramètres optimisés sont ensuite laissés fixes puis les 7 paramètres de la branche dépendante du temps sont optimisés sur les courbes d'évolution des modules élastique et de perte sur l'ensemble des essais. Le jeu de paramètres optimum obtenus est synthétisé dans

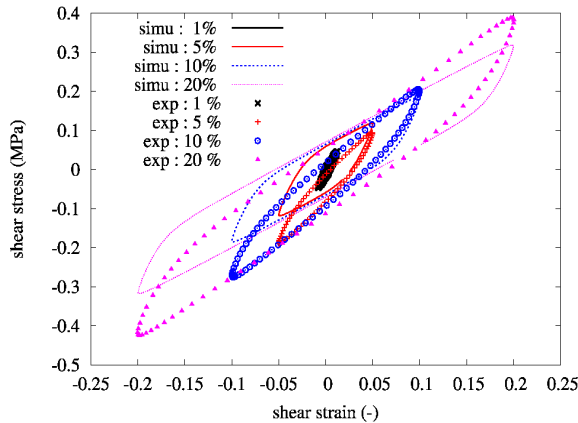
le tableau II.16. Dans la suite de cette section, les courbes simulées tracées ont toutes été obtenues avec ce jeu de paramètres.

$E$	$R_0$	$C_k$	$D_k$	$d_0$	$\sigma_0$	$n$
21.5	$1.22 \cdot 10^{-4}$	17.4	235	2530	1.79	3.07

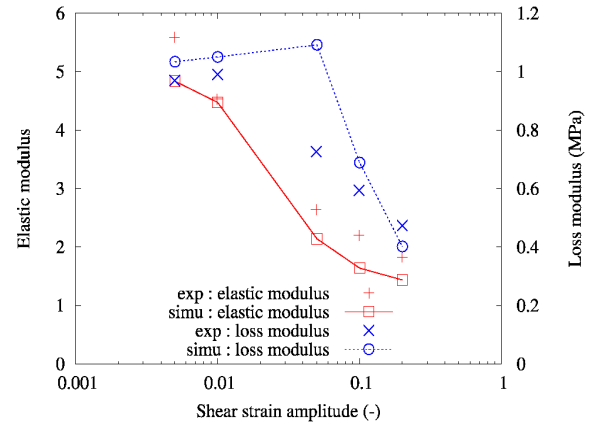
**Tab. II.16** – Synthèse des paramètres matériau associés à l'optimisation des paramètres associés à la dépendance en temps sur l'ensemble des essais

### Résultats obtenus concernant les essais de cisaillement

Sur les figures II.113 et II.114 sont comparées, pour des sollicitations dynamiques correspondant à un préchargement jusqu'à 50%, une déformation statique nulle, une fréquence de 15 Hz et des amplitudes de déformations allant de 0.5 à 20%, respectivement les boucles dynamiques expérimentales et simulées et les modules élastiques et de perte expérimentaux et simulés.



**Fig. II.113** – Comparaison entre les boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (50%, 0% , - , 15Hz)



**Fig. II.114** – Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (50%, 0% , - , 15Hz)

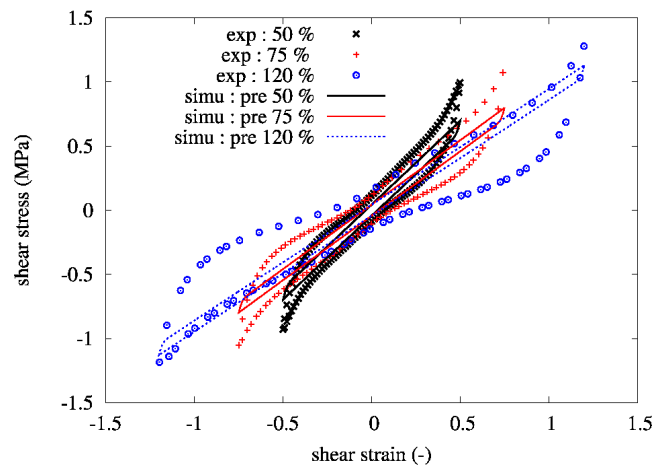
On constate que pour les essais de cisaillement, les tendances d'évolution des modules élastique et perte sont respectées, cependant une estimation assez moyenne est obtenue : le module élastique est sous-estimé et le module de perte, lui, surestimé.

Ensuite, la figure II.115 illustre les prédictions obtenues concernant les boucles stabilisées des préchargements.

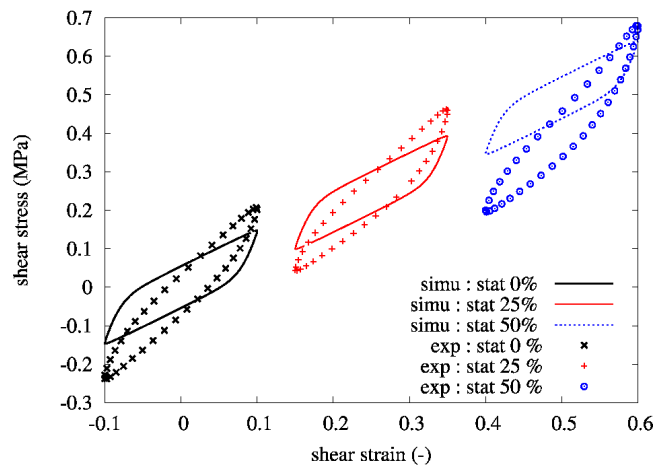
L'optimisation n'a pas été réalisée aux temps courts cependant on observe que la dissipation de celles-ci est sous-estimée notamment en comparaison avec les prévisions de ces boucles que nous avons pu obtenir précédemment (un seul cas de sollicitation).

Enfin, la prédiction d'essais dynamiques pour différents niveaux de déformation statique est illustrée sur la figure II.116.

Sur cette figure, les erreurs cumulées, liées à la prédiction de la courbe d'équilibre (et donc de la contrainte moyenne) et à la prédiction des modules élastique et de perte, est observée.



**Fig. II.115** – Comparaison entre les boucles stabilisées de préchargement expérimentales et simulées



**Fig. II.116** – Comparaison entre les boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (75%, - , 10%, 15Hz)

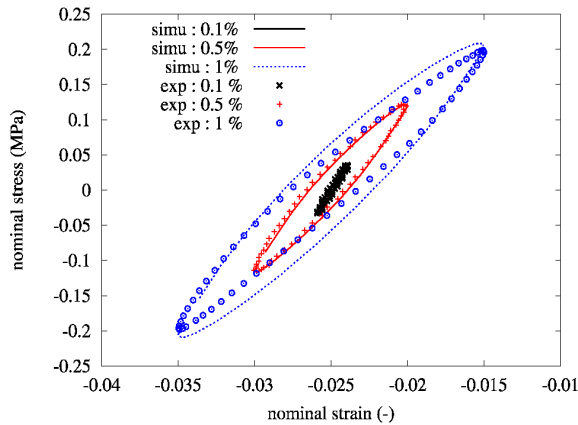
### Résultats obtenus concernant les essais de compression

Les figures II.117 et II.118 représentent, pour des sollicitations dynamiques de compression correspondant à un préchargement jusqu'à  $-7.5\%$ , une déformation statique de  $-2.5\%$ , une fréquence de 15 Hz et des amplitudes de déformation allant de 0.1 à 1%, respectivement les boucles dynamiques expérimentales et simulées et les modules élastique et de perte expérimentaux et simulés.

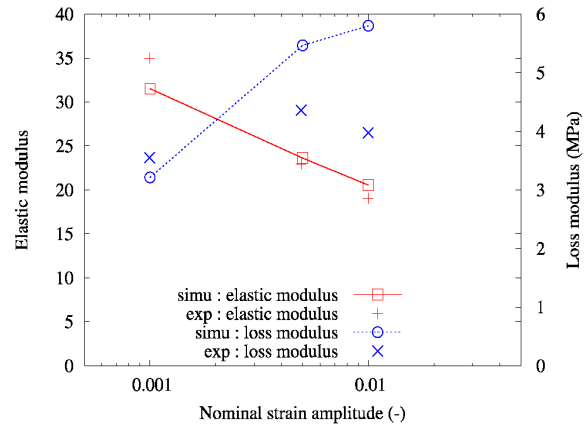
Dans le cas des essais de compression, on observe une bonne prévision des boucles dynamiques associées aux modules simulés. Ces résultats de simulation obtenus sont assez comparables avec ceux obtenus dans le paragraphe II.5.1 pour les seuls essais de compression.

Ensuite, la figure II.119 représente la simulation des boucles stabilisées des préchargements obtenue.

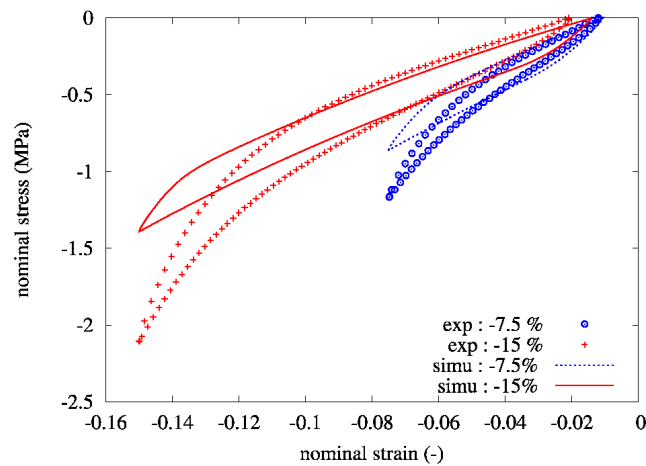
L'optimisation n'a pas été réalisée aux temps courts pourtant une simulation assez correcte de ces boucles est obtenue notamment pour les faibles et intermédiaires niveaux de déformation ; en revanche, pour les niveaux de déformation proches de la déformation maximale l'augmentation brutale de rigidité n'est pas prise en compte. Ce résultat est en relation



**Fig. II.117** – Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (  $-7.5\%$  ,  $-2.5\%$ , - ,  $15Hz$ )



**Fig. II.118** – Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = (  $-7.5\%$  ,  $-2.5\%$ , - ,  $15Hz$ )

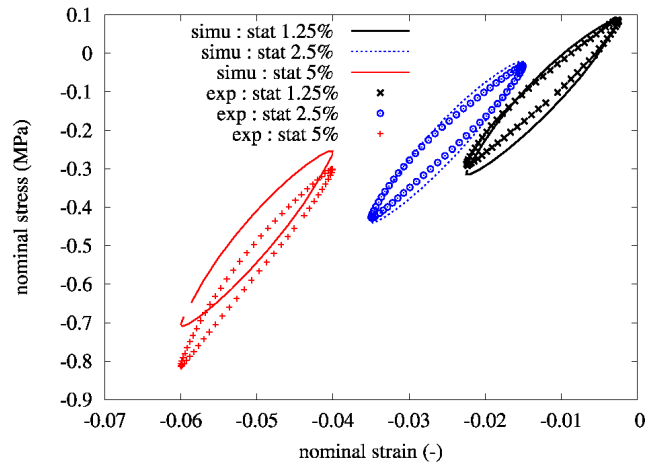


**Fig. II.119** – Comparaison entre les boucles stabilisées de préchargement expérimentales et simulées

directe avec la prédiction obtenue des courbes d'équilibre et notamment le fait que nous n'avons pas pris en compte la forte non-linéarité des courbes d'équilibre (voir paragraphe II.5.1 a)).

Enfin, la figure II.120 représente les prédictions obtenues pour différents niveaux de déformation statique.

On observe une assez bonne prédiction des boucles dynamiques montrant l'aptitude du modèle à simuler des sollicitations vibratoires de déformation statique non nulle.



**Fig. II.120** – Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées ( $\epsilon_{max}$ ,  $\epsilon_{moy}$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $f$ ) = ( -7.5% , - , 1% , 15Hz)

## II.6 Conclusion partielle

En proposant le modèle DyMPPIEC nous avons été capable de simuler la réponse dynamique d'un silicone chargé de silice puis d'une pièce anti-vibratoire en cisaillement. De plus, nous avons pu mettre en avant la capacité de modèle à rendre compte à la fois de l'effet Mullins et de l'effet Payne.

En effet, ce modèle de comportement repose sur la décomposition du comportement en une partie modélisant l'état d'équilibre sans plasticité et une autre la partie dynamique et dissipatives. La première partie permet de simuler les différents préchargements et donc l'effet Mullins; elle définit de plus les contraintes moyennes des boucles dynamiques pour une déformation statique donnée. La seconde partie, quant à elle, permet de simuler les boucles dynamiques à proprement dites et donc l'effet Payne. Ainsi, de la même manière que nous l'avons fait expérimentalement, l'effet Mullins est découplé de l'effet Payne.

Ensuite, nous avons pu observer la capacité du modèle proposé à simuler des sollicitations vibratoires de déformation statique non nulle.

Puis, nous avons simulé la réponse dynamique d'un silicone chargé de silice en compression. Nous sommes parvenus à obtenir des résultats assez satisfaisants concernant la modélisation des boucles dynamiques. Cependant, nous avons mis en avant constaté qu'une amélioration pourrait être effectuée concernant la simulation des courbes d'équilibre hyperélastiques avec Effet Mullins.

Enfin, nous avons identifié le modèle proposé à l'ensemble des essais dynamiques réalisés c'est-à-dire à la fois en cisaillement et en compression. Dans ce cas, il a été difficile de pouvoir simuler correctement les deux types de sollicitation à la fois et une amélioration concernant la prédiction des courbes d'équilibre hyperélastiques avec Mullins doit être apportée. Il semble que l'adoucissement des courbes d'équilibre par effet Mullins devrait être considéré de manière anisotrope.

Cependant, dans tous les cas, nous avons pu mettre en place un modèle capable de rendre compte de l'effet Payne. Les améliorations à apporter semblent plus être associées à la simulation de l'état d'équilibre du matériau et donc aux courbes hyperélastiques avec effet Mullins.

---

## Chapitre -III-

# CRÉATION DU MODÈLE DE SUBSTITUTION DE LA LIAISON SOUPLE À L'AIDE D'UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION D'ORDRE DE MODÈLE (ROM)

---

*D*ans ce chapitre, nous proposons une méthodologie afin de générer efficacement (c'est-à-dire rapidement et précisément) les surfaces de réponse permettant la définition du modèle de substitution de la liaison souple. Cette méthodologie est fondée sur l'utilisation d'une méthode de réduction d'ordre de modèle (ROM). Un état de l'art sur ces méthodes sera d'abord présenté puis la méthodologie sera présentée dans le cadre de la génération de deux bases de données associées à la rigidité et à la dissipation de la liaison souple pour différents chargements dynamiques appliqués.

### Sommaire

---

<b>III.1</b>	PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE . . . . .	<b>138</b>
<b>III.2</b>	MÉTHODES DE RÉDUCTION DE MODÈLES : ETAT DE L'ART . . . . .	<b>139</b>
III.2.1	Définition générale . . . . .	139
III.2.2	Méthodes de réduction <i>a posteriori</i> . . . . .	139
III.2.3	Méthodes de réduction <i>a priori</i> . . . . .	143
III.2.4	Méthodes de réduction des variables internes . . . . .	145
III.2.5	Méthodes ROM appliquées à la résolution de problèmes paramétriques	147
<b>III.3</b>	RÉSOLUTION SIMULTANÉE DU PROBLÈME MULTIDIMENSIONNEL ASSOCIÉ À L'ÉTUDE DYNAMIQUE DE LA LIAISON SOUPLE . . . . .	<b>151</b>
III.3.1	Caractéristiques du problème multidimensionnel . . . . .	151
III.3.2	Modèle d'ordre réduit proposé . . . . .	151
III.3.3	Méthode de modélisation numérique . . . . .	159
III.3.4	Dépouillement des résultats . . . . .	161
<b>III.4</b>	Conclusion partielle . . . . .	<b>168</b>

---

### III.1 PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE

En dynamique des structures, pour simplifier et accélérer la simulation de grands systèmes mécaniques, l'utilisation de modèles de substitution de sous-système à comportement non-linéaire s'avère très efficace ((Rutherford, 2005), (Ansari et al., 2010)). En effet, les modèles de substitution ou macro-modèles sont des modèles simplifiés, constitués d'un ensemble de ressorts et d'amortisseurs, destinés à se substituer au modèle physique du sous-système. Dans les cas de comportement non-linéaire de sous-système, les caractéristiques du modèle de substitution dépendent de paramètres de sollicitation. Dans le cadre de notre étude, il s'agit de construire un modèle simplifié de la liaison souple qui viendra se substituer au modèle éléments finis incluant le modèle de comportement de Qi-Boyce modifié qui a été présenté dans le chapitre II. Ce modèle éléments finis permet de tenir compte de tous les paramètres physiques de la modélisation, qu'il s'agisse des paramètres matériau ou des paramètres géométriques.

Cependant, pour que cette représentation ait un sens et soit efficace, la construction du modèle de substitution est en étroite relation avec le modèle physique. Ainsi, pour définir les composantes de ce modèle simplifié, des bases de données associées aux prédictions de comportement obtenues par le modèle physique du sous-système sont nécessaires. Dans notre cas, deux caractéristiques définissent le macro-modèle : la rigidité et la dissipation en fonction de la vibration appliquée dans une direction donnée. Ces bases de données peuvent être issues de résultats expérimentaux et/ou numériques. Dans ce chapitre, nous allons chercher à construire numériquement deux bases de données respectivement associées à la rigidité et à la dissipation en fonction des caractéristiques du chargement dynamique appliqué qui restent les mêmes que celles définies dans le protocole expérimentale (voir section I.2.2) : la fréquence, l'amplitude de déformation, la déformation statique et la déformation maximale, soit 4 paramètres. Pour obtenir des bases de données représentatives tout en limitant le nombre de calcul, nous avons choisi d'utiliser une méthode de discrétisation de type plan factoriel complet c'est-à-dire en choisissant un nombre égal de variations pour chaque paramètre puis un choix aléatoire dans l'intervalle étudié pour chaque paramètre ce qui permet d'obtenir une bonne sélection de valeurs ((McKay et al., 1979),(Bilicz et al., 2010)). Nous prendrons trois valeurs par paramètres.

Pour représenter ces bases de données dans l'espace des paramètres, l'utilisation de surfaces de réponse est souvent employée. L'évolution de la caractéristique étudiée est ensuite extrapolée sur les domaines considérés pour chaque paramètre et servira pour définir les constituants du macro-modèle pour toutes sollicitations dynamiques comprises dans ces intervalles. L'avantage est qu'ensuite il n'est plus nécessaire d'avoir recours aux simulations coûteuses utilisant le modèle physique.

On pourra noter que ces surfaces de réponses sont aussi utilisées pour effectuer des études de sensibilité paramétrique (Atashi and Shiva, 2010) par exemple.

Ainsi, la construction de ces surfaces de réponse nécessite la résolution d'un problème paramétrique et donc un nombre important de simulations utilisant le modèle physique est à mener. Ces simulations sont des simulations similaires, elles diffèrent, dans notre cas, par le chargement appliqué et sont au nombre de 81 (3 valeurs pour chacun des 4 paramètres). Dans ce contexte, l'utilisation de méthodes standards comme les éléments finis sont alors très coûteuse en temps et en ressources informatiques ; c'est pourquoi la mise en place de méthodes de réduction comme les modèles d'ordre réduit (ROM) peut s'avérer très efficace. Elles permettent des gains en temps de calcul important tout en conservant une précision satisfaisante sur les résultats.

Dans ce chapitre, nous proposons l'utilisation d'une méthode de réduction de modèle : l'APHR (Ryckelynck, 2005) afin de construire efficacement les surfaces de réponse permettant la définition du modèle de substitution de la liaison souple. Dans un premier temps, un état de l'art sur les méthodes de réduction de modèles existantes est effectué. Puis le modèle de réduction proposé est défini et appliqué à la résolution de notre problème paramétrique.

## III.2 MÉTHODES DE RÉDUCTION DE MODÈLES : ETAT DE L'ART

Le domaine d'utilisation de ces méthodes étant très vaste, cet état de l'art n'est pas exhaustif; les bases modales et la méthode CSP (Computational Singular Perturbation) (Valorani et al., 2003) ne sont pas abordées dans cet état de l'art.

### III.2.1 Définition générale

Soit un système physique quelconque que l'on souhaite étudié. Pour cela, on dispose généralement d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles associées ( $\mathcal{S}$ ), et parfois d'une base de données expérimentales voire numériques le caractérisant pour certaines valeurs particulières.

Lorsque, pour l'étude de celui-ci, la résolution analytique n'est pas possible, il convient de discrétiser ( $\mathcal{S}$ ) et de le résoudre numériquement. Ainsi, l'étude de ce système physique revient à la considération du système discrétisé ( $\mathcal{S}_n$ ).

L'objectif des méthodes de réduction de modèle est de réduire le nombre d'équations nécessaire à la description du système ( $\mathcal{S}$ ) en cherchant un système ( $\widehat{\mathcal{S}}_n$ ) approximant ( $\mathcal{S}_n$ ). (Antoulas, 2005)

Le nouveau système ( $\widehat{\mathcal{S}}_n$ ) doit cependant satisfaire les propriétés suivantes :

- approcher ( $\mathcal{S}_n$ ) avec une erreur faible,
- préserver les propriétés de stabilité et passivité (pas de génération d'énergie) du système ( $\mathcal{S}_n$ ),
- et être stable numériquement.

De plus, la résolution numérique de ce système réduit ( $\widehat{\mathcal{S}}_n$ ) doit évidemment être efficace pour permettre un gain en temps de calcul notamment.

La seule étude du système ( $\widehat{\mathcal{S}}_n$ ) va alors permettre de simuler voire de contrôler ( $\mathcal{S}$ ). Ensuite, la distinction entre les différentes méthodes de réduction de modèles existantes se fait par la méthode d'approximation utilisée et par la nécessité ou non de la connaissance préalable de prévisions d'états possibles pour ( $\mathcal{S}$ ). Ainsi, nous évoquerons dans un premier temps les méthodes de réduction dites *a posteriori* qui s'appuie sur des prévisions préalables puis dans un second temps les méthodes *a priori* qui ne nécessitent pas de prévisions au préalable.

### III.2.2 Méthodes de réduction *a posteriori*

#### a) Ecriture du problème de minimisation

Approcher le système ( $\mathcal{S}_n$ ) revient à étudier le problème suivant :  
Comment approximer une fonction  $\mathbf{u}$  vectorielle ou non, dans notre cas par exemple il s'agit d'un champ de déplacements, dépendant des variables d'espace, notées  $\mathbf{x}$  appartenant au



domaine  $\Omega$  occupé par le système, et du temps  $t$ , par une somme finie de produits de fonctions à variables séparées du type :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{k=1}^P a_k(t) \cdot \Phi_k(\mathbf{x}). \quad (\text{III.1})$$

Cette décomposition n'est pas unique ; on relèvera en effet dans un premier temps la méthode des éléments finis qui permet d'obtenir une suite de solutions représentant l'état du système à différents instants telles que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot N_j(\mathbf{x}). \quad (\text{III.2})$$

où sont introduits  $N$  degrés de liberté  $(q_j(t))_{j=1..N}$  tel que chaque composante  $q_j(t)$  représente un déplacement nodal et où les fonctions  $N_j$  sont les fonctions de forme éléments finis. Nous ferons référence par la suite à ce modèle par l'expression " modèle détaillé ". Mais c'est cette décomposition que l'on souhaite réduire car en pratique, avec notamment le besoin de maillage raffiné, le nombre de degré de liberté  $N$  devient très vite supérieur à 100000.

Dans le cas des méthodes de réduction, on s'intéresse en fait à la meilleure approximation possible pour un nombre de fonctions  $P$  donné petit ( $< 50$ ) soit  $P \ll N$ .

On peut noter ensuite que pour une famille de fonctions  $(\Phi_k)$  orthonormales donnée on obtient les fonctions  $(a_k)$  associées par produit scalaire défini dans  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  (Bergmann and Cordier, 2006) :

$$a_k(t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \Phi_k(\mathbf{x}) dx = (\mathbf{u}_t, \Phi_k). \quad (\text{III.3})$$

Et que dans ce cas, les fonctions  $(a_k)$  ne dépendent que de la fonction  $\Phi$  d'ordre  $k$  associée.

Ainsi on en déduit que nous cherchons une famille de fonctions orthonormales  $(\Phi_k)_{k=1..P}$  telle que l'approximation (III.1) soit la meilleure possible pour un ordre  $P$  donné. On notera de plus que cette famille doit être complète, c'est à dire que pour  $P = \infty$  l'approximation de la fonction  $\mathbf{u}$  doit être exacte :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cdot \Phi_k(\mathbf{x}). \quad (\text{III.4})$$

Ensuite, en supposant connues des valeurs de la fonction  $\mathbf{u}$  en  $N_x$  localisations spatiales et  $N_t$  instants différents (d'où le *a posteriori*), il s'agit de résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\Phi_k} \sum_{i=1}^{N_t} \left\| \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) - \sum_{k=1}^P (\mathbf{u}_t, \Phi_k) \cdot \Phi_k(\mathbf{x}) \right\|^2, \text{ avec } (\Phi_i, \Phi_j) = \delta_{ij} \text{ et } \|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (\text{III.5})$$

De plus, l'ensemble des réalisations connues, ou encore snapshots,  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1..N_t}$  de la fonction  $\mathbf{u}$  peut être écrit sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t_1) & \cdots & \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}_{N_x}, t_1) & \cdots & \mathbf{u}(\mathbf{x}_{N_x}, t_{N_t}) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.6})$$

On notera que la matrice  $\mathbf{A}$  est communément appelée matrice des Snapshots et que ces réalisations peuvent par exemple être obtenues par un méthode éléments finis.

Alors la solution du problème de minimisation (III.5) est donnée par la Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD) de la matrice  $\mathbf{A}$  tronquée à l'ordre  $P$ .

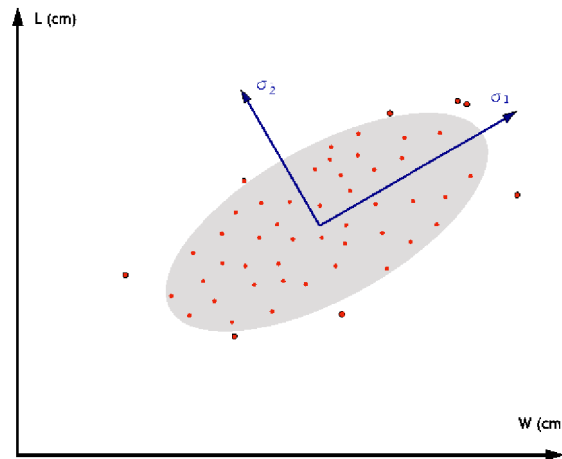
### b) Décomposition aux valeurs singulières (SVD)

Soit  $\mathbf{A}$  une matrice réelle ou complexe (nous formulerons le cas d'une matrice réelle) de dimension  $N_x \times N_t$  (donc non-nécessairement carrée) alors il existe une factorisation de la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (\text{III.7})$$

avec  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , matrices orthogonales respectivement de taille  $N_x \times N_x$  et  $N_t \times N_t$  et  $\mathbf{\Sigma}$  une matrice diagonale de taille  $N_x \times N_t$  à coefficients positifs ou nuls contenant les valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ , notées  $(\sigma_i)_{i=1..l}$ , avec  $l = \min(N_x, N_t)$ . Par convention, ces valeurs singulières sont généralement rangées par ordre décroissant.

Ainsi, les premières valeurs diagonales de  $\mathbf{\Sigma}$  sont représentatives des informations importantes contenu dans le jeu de données. Elles peuvent s'interpréter comme une étude statistique d'un ensemble de données ; prenons l'exemple d'une SVD réalisée sur l'ensemble de points de la figure III.1. On constate alors que les valeurs singulières  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  représentent alors respectivement le demi-grand axe et demi-petit axe d'une ellipse qui contient en moyenne tous les points de l'ensemble (Bergmann and Cordier, 2006).



**Fig. III.1** – SVD d'un ensemble de points (Bergmann and Cordier, 2006)

De plus, plus les valeurs  $\sigma_i$  décroissent rapidement et plus l'ensemble statistique est ordonné et pourra donc être très bien représenté par seulement quelques valeurs singulières.

Cette méthode permet donc, ayant un ensemble de données qui peut être conséquent, de faire une étude statistique de celles-ci.

### c) La méthode Proper Orthogonal Decomposition (POD)

La décomposition aux valeurs singulières devient un problème aux valeurs propres lorsque l'on applique celle-ci aux matrices carrées  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  et ainsi :

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{V}^T \quad (\text{III.8})$$

avec des matrices de dimension  $N_t \times N_t$ .

De même pour  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  avec des matrices de dimension  $N_x \times N_x$ .

De plus, les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{\Sigma}^2$  vérifient :  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ .

On constate que pour les cas particuliers  $N_t \ll N_x$  ou  $N_x \ll N_t$  la résolution du problème aux valeurs propres respectivement de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  ou de  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$  est moins coûteuse que la décomposition aux valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ .

Le cas  $N_t \ll N_x$  où le problème aux valeurs propres lié à  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  est résolu et est communément appelé méthode des snapshots. Cette méthode qui se rapproche de notre cas puisque  $N_x$  se rapporte aux déplacements aux noeuds dans les trois directions et est donc très souvent supérieur à  $N_t$ .

Ainsi, la méthode POD détermine la famille de fonctions orthogonales  $(\Phi_k)_{k=1..P}$  solution du problème de minimisation (III.5) par décomposition des valeurs propres de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  ou de  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$  tronquées à l'ordre  $P$ . Ainsi, à partir de champs considérés comme aléatoires, la POD extrait les réalisations les plus probables et donc des modes dominants caractérisant ces champs.

La méthode POD est aussi connue sous le nom de décomposition de Karhunen-Loeve (Références) ou analyse d'Hotelling. A l'origine celle-ci a donc été utilisée pour l'analyse de données comme nous l'avons évoqué précédemment mais cette méthode peut également être vue comme permettant une construction efficace de modèle d'ordre réduit.

Lumley (Lumley, 1967) puis Sirovich (Sirovich, 1987) ont mis à profit cette technique dans le cadre de la mécanique des fluides afin de réduire la masse de données collectées mais aussi afin d'extraire les structures cohérentes d'un écoulement turbulent. Ainsi, ils ont notamment mis en avant que ces fonctions propres  $(\Phi_k)$  sont représentatives d'un point de vue énergétique du système physique considéré. De suite, la considération des seules premières fonctions  $(\Phi_k)$  permet de rendre compte des principaux phénomènes énergétiques mis en jeu.

Ensuite, la POD permet également de fournir des fonctions de base qui peuvent être utilisées pour définir un sous-espace de faible dimension sur lequel on pourra projeter les équations d'état. Ainsi, si l'on revient au problème de départ : approximer le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  par une somme finie de produit de fonctions à variables séparées :  $\sum_{k=1}^P a_k(t) \cdot \Phi_k(\mathbf{x})$  connaissant un ensemble de réalisations  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1..N_t}$  ou snapshots, on cherche par la méthode POD les fonctions  $\Phi$  les mieux corrélées en moyenne aux réalisations  $\mathcal{U}$ . Ces fonctions sont alors celles qui ont, au sens des moindres carrés, la plus grande projection sur les observations et donc qui maximisent l'expression (Bergmann and Cordier, 2006) :

$$\max_{\Psi \in \mathcal{L}^2(\Omega)} \frac{\langle \mathbf{u}, \Psi \rangle^2}{\|\Psi\|^2} = \frac{\langle \mathbf{u}, \Phi \rangle^2}{\|\Phi\|^2} \quad (\text{III.9})$$

avec  $\langle \zeta(t) \rangle = \sum_{k=1}^{N_t} \zeta_i$ .

On peut ensuite quantifier l'erreur commise en ne retenant que les  $P$  premières fonctions  $\Phi$  en évaluant :

$$\varepsilon(P) = \|\mathbf{u}_t - \sum_{k=1}^P (\mathbf{u}_t, \Phi_k) \cdot \Phi_k\|^2 \quad (\text{III.10})$$

Ainsi, les fonctions  $\Phi_k$  déterminées par POD forment une base orthonormale, complète (lorsque toute la base est considérée la solution est exacte), optimale au sens de l'énergie et qui respecte les conditions aux limites et les symétries.

Cependant, une base POD est incapable de représenter une information qui n'était pas contenue initialement dans la base de données utilisée pour la déterminer. D'où le choix crucial des snapshots choisis dans le but de contenir le plus d'informations possibles sur le système physique. Ensuite, si un nouveau phénomène apparaît, qui n'était pas connu ou intégré *a posteriori*, il sera ignoré par la représentation POD. Ainsi, il est difficilement concevable

d'employer cette méthode pour du contrôle, de la régulation de système ou lorsque l'on ignore quel peut être l'effet de certains paramètres sur l'état du système ; ce qui est le cas dans cette étude.

### III.2.3 Méthodes de réduction *a priori*

Les méthodes *a posteriori* nécessitent de posséder des prévisions relatives au système étudié et de bien savoir les choisir. Cependant, certains problèmes, comme des problèmes de régulation ou de pilotage en temps réel par exemple, nécessitent la possibilité de prise en compte d'éléments nouveaux tels que des perturbations par exemple. C'est pourquoi des développements ont été mis en place visant à créer des méthodes de type *a priori* c'est à dire qui ne nécessitent pas de connaissances au préalable du système physique.

#### a) Méthodes POD adaptatives et “ A Priori Hyper-Reduction ” (APHR)

Pour palier à la principale lacune de la POD : l'impossibilité de représenter une information qui n'était pas présente dans la base de données, plusieurs auteurs ont eu l'idée de rendre possible la réactualisation de cette base au cours de la simulation et parlent d'adaptation (Ravindran, 2000), (Ryckelynck, 2005), (Ryckelynck et al., 2006).

Ravindran (Ravindran, 2000), puis Bergmann et Cordier (Bergmann and Cordier, 2008), entre autres, ont mis en place cette méthode dite de POD adaptative dans le cadre de la mécanique des fluides dans le contexte d'optimisation de débit de fluide en boucle de régulation et d'optimisation de forme afin de réduire au mieux les turbulences générées par cette forme notamment. L'étude de Bergmann et Cordier a beaucoup de similitudes avec la notre : en réduisant les turbulences générées (ou sillage) par un cylindre en rotation, leur objectif principal est de réduire le bruit. De plus, la rotation de ce cylindre est sinusoïdale et leurs paramètres d'intérêts pour réduire ce bruit sont la fréquence et l'amplitude de rotation. Comme dans notre cas, ils cherchent à mettre en place un modèle d'ordre faible permettant de représenter l'essentiel de la dynamique non-linéaire avec un coût de calcul limité. Ils utilisent pour cela le concept de région de confiance (trust-region algorithm), introduit par Fahl (Fahl, 2000), c'est à dire une partie de l'espace des paramètres sur laquelle on pourrait se restreindre pour approximer la réponse sur l'ensemble de l'espace des paramètres.

Un des points clefs des méthodes de réduction adaptative est de définir quand il est nécessaire de réactualiser, d'optimiser la base POD, ainsi, un critère permettant de contrôler la qualité de l'approximation doit être mis en place.

Dans le cadre des problèmes d'optimisation, Bergmann et Cordier (Bergmann and Cordier, 2008) proposent, avec la méthode à région de confiance, d'adapter la base réduite lorsqu'un minimum local est atteint.

Dans son étude appliquée à la résolution de problèmes de thermomécanique non-linéaires, Ryckelynck (Ryckelynck, 2005) propose une méthode de réduction de modèle dont une des caractéristiques principales est d'être adaptative : l'APHR (A Priori Hyper-Reduction). La vérification de la justesse de l'approximation est réalisée par l'évaluation du résidu des équations d'équilibre, noté  $R$ . Une valeur de justesse  $\varepsilon > 0$  est choisie par l'utilisateur, ainsi, lorsque  $R < \varepsilon$  la base POD courante est suffisante ; dans le cas contraire, la base doit être adaptée. Pour réaliser cette adaptation, un calcul à ce même instant est effectué avec le modèle détaillé (calcul FEM). Un nouveau snapshot est alors généré permettant d'enrichir la base POD. On notera cependant, que le recours au calcul détaillé ne doit pas être trop récurrent car son coût en terme de temps de calcul est lourd ce qui réduit l'efficacité de la méthode de réduction.

Une méthode de réduction adaptative est donc principalement caractérisée à chaque pas de temps par une phase de prévision avec la base courante que l'on notera  $\{\Phi_k\}^{(n)}$  (c'est à dire la base POD obtenue après la  $n^{\text{ième}}$  correction), suivie d'une évaluation de la justesse de celle-ci et enfin, si besoin, une phase de correction de la base, grâce à un calcul avec le modèle détaillé à cet instant, générant une nouvelle base optimisée  $\{\Phi_k\}^{(n+1)}$  s'il y a eu correction.

### b) Algorithme glouton et “ Proper Generalized Decomposition ” (PGD)

Soit un champ inconnu (le déplacement par exemple) décrit par deux coordonnées  $x$  et  $y$  appartenant respectivement aux domaines  $\Omega_x$  et  $\Omega_y$ . Comme décrit dans l'article de Ammar et collègues (Ammar et al., 2010) ou dans les travaux de Lelievre (Lelievre, 2009) par exemple, ces méthodes consistent à approximer ce champ sous la forme :

$$\Psi(x, y) \approx \sum_{i=1}^{i=N} F^i(x) \cdot G^i(y). \quad (\text{III.11})$$

où les fonctions  $F^i$  et  $G^i$  sont cherchées de manière itérative. L'algorithme utilisé est le suivant : supposons ces fonctions connues jusqu'au rang  $i = n \ll N$ , l'itération suivante consiste à déterminer les meilleures fonctions  $R(x)$  et  $S(y)$  telles que :

$$\Psi(x, y) \approx \sum_{i=1}^{i=n} F^i(x) \cdot G^i(y) + R(x) \cdot S(y), \quad (\text{III.12})$$

et que la formulation faible soit vérifiée :

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y} \Psi^*(x, y) \cdot (\mathcal{K}(\Psi(x, y)) + \mathcal{L}(\Psi(x, y))) dx dy = 0, \quad (\text{III.13})$$

avec la formulation prise générique de l'équation aux dérivées partielles par exemple :

$$\mathcal{K}(\Psi(x, y)) + \mathcal{L}(\Psi(x, y)) = 0, \quad (\text{III.14})$$

où  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{L}$  sont deux opérateurs différentiels linéaires choisis ici associés respectivement aux dérivées en  $x$  et  $y$ .

La méthode PGD utilise l'algorithme glouton, également utilisé par Prud'homme et ses collègues (Prud'homme et al., 2002) pour construire des bases réduites, avec une hypothèse supplémentaire de séparabilité des variables permettant de réduire le domaine d'intégration. La PGD consiste ainsi à chercher à calculer  $R(x)$  connaissant  $S(y)$  d'une précédente itération puis  $S(y)$  connaissant le  $R(x)$  tout juste calculé ; ensuite le processus est répété de manière itérative jusqu'à convergence.

De manière plus détaillée, il s'agit de considérer  $S(y)$  comme connue, puis en choisir une fonction test  $\Psi^*(x, y)$  de la forme  $R^*(x) \cdot S(y)$ , et la formulation faible de l'équation (III.13) devient :

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^* \cdot S \cdot (\mathcal{K}(R) \cdot S + R \cdot \mathcal{L}(S)) dx dy = - \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^* \cdot S \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=n} (\mathcal{K}(F^i) \cdot G^i + F^i \cdot \mathcal{L}(G^i)) \right) dx dy. \quad (\text{III.15})$$

Or,  $S(y)$  étant connue et grâce à l'hypothèse de séparabilité des équations, l'équation (III.15) peut s'intégrer suivant la coordonnée  $x$  uniquement :

$$\int_{\Omega_x} R^* \cdot (\alpha^y \mathcal{K}(R) + \beta^y R) dx = - \int_{\Omega_x} R^* \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=n} (\alpha_i^y \mathcal{K}(F^i) + \beta_i^y F^i) \right) dx, \quad (\text{III.16})$$

avec  $\alpha^y = \int_{\Omega_y} S^2 dy$ ,  $\alpha_i^y = \int_{\Omega_y} S \cdot G^i dy$ ,  $\beta^y = \int_{\Omega_y} S \cdot \mathcal{L}(S) dy$  et  $\beta_i^y = \int_{\Omega_y} S \cdot \mathcal{L}(G^i) dy$ .

Le processus est le même suivant la coordonnée  $y$ , à l'itération suivante en considérant  $R(x)$  connue par la résolution de (III.16) et en prenant  $\Psi^*(x,y)$  de la forme  $R(x) \cdot S^*(y)$ . Ainsi, l'équation (III.16) et son équivalente en  $y$  sont résolues séquentiellement jusqu'à convergence.

La PGD nécessite donc de pouvoir appliquer l'hypothèse de séparabilité des variables ou encore si cela est possible elle nécessite un travail de réécriture des équations concernées.

Enfin, on remarquera que ces deux méthodes sont non-incrémentales : il faut donc être capable de prévoir une suite de transformations sur tout l'intervalle de temps. En effet, si l'une des coordonnées considérées est le temps, comme dans l'étude de Nouy par exemple (Nouy, 2010), dès le début l'intégration est effectuée sur tout l'intervalle de temps considéré.

### III.2.4 Méthodes de réduction des variables internes

La plupart du temps, les méthodes de réduction sont appliquées sur un champ inconnu qui n'est autre que le champ de déplacement mais il peut s'agir d'une autre variable d'état. Les deux méthodes décrites dans ce sous-paragraphe concernent la réduction de variables internes.

#### a) Méthodes d'homogénéisation à base de champ de transformations

Les méthodes d'homogénéisation sont utilisées pour déterminer le comportement effectif de matériaux au comportement non-linéaire et multiphasé. Les méthodes décrites dans ce paragraphe s'appliquent à des matériaux ayant des propriétés de linéarité géométrique et physiquement non-linéaire (comportement élastoviscoplasticité par exemple).

Dvorak et ses collègues (Dvorak et al., 1994) ont mis en place la méthode TFA, Transformation Field Analysis, méthode qui consiste à découper les phases en sous-domaines de champ de déformation plastique constant définissant une contrainte prise moyenne dans chaque phase. Cependant, la plupart du temps beaucoup de découpages sont nécessaires ce qui entraîne l'emploi d'un nombre important de variables internes à considérer et augmente alors les temps de calcul.

Michel et Suquet (Michel and Suquet, 2003) ont alors étendu la méthode TFA à la méthode NTFA, Nonuniform Transformation Field Analysis, en utilisant des champs de déformation plastique décrits par des champs fortement hétérogènes sur les différents constituants pour améliorer la réponse effective du matériau global.

Dans le cadre de cette méthode, Michel et Suquet cherchent à représenter les variables internes associées à de la plasticité ou de la viscoplasticité. Une méthode de type POD est alors utilisée pour décomposer le champ de déformation viscoplastique de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}_k^{vp}(t) \boldsymbol{\mu}_k(\mathbf{x}). \quad (\text{III.17})$$

où les fonctions  $\mu_k$  représentent des modes de déformation plastique.

Le choix de ces modes est important ; ceux-ci doivent rendre compte des aspects géométrique, physique et des interactions entre phases. Les fonctions  $\mu_k$  sont déterminées grâce à une base de calculs préliminaires réalisés sur la vraie microstructure.

On pourra noter que dans le cadre de cette méthode, il est nécessaire de chercher et de réécrire les lois d'états associées aux variables internes du matériau homogénéisé. De plus, ces méthodes étant basées sur des solutions en champ continu, elles sont indépendantes de la méthode de discrétisation choisie et donc les coûts de calcul sur le matériau homogénéisé sont indépendants de la taille de maillage utilisée. C'est pourquoi ces méthodes sont connues pour être très rapides.

Des résultats prometteurs ont été obtenus par Suquet et ses collègues (Michel and Suquet, 2003), (Roussette et al., 2009) sur des application en 2D de la méthode NTFA. De plus, une reformulation de cette méthode avec une application 3D a été réalisée par Fritzen et Bohlke (Fritzen and Bohlke, 2010) où les mêmes résultats ont pu être constatés.

### b) Hyper réduction

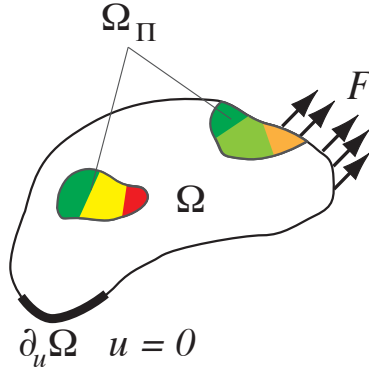
Pour tous les modèles réduits évoqués précédemment ainsi que pour le modèle détaillé, l'intégration des équations constitutives est effectuée en tout point du maillage discrétisant le système physique étudié. Ces maillages étant de plus en plus précis, les coûts en temps de calcul qui en résultent sont d'autant plus conséquents.

Pour réduire le nombre d'équations constitutives à résoudre, Ryckelynck (Ryckelynck, 2005), (Ryckelynck, 2009) propose avec la méthode APHR d'effectuer l'intégration sur un domaine réduit appelé RID (Reduce Integration Domain) et donc de supposer que l'approximation du système physique peut être faite en ne considérant que certaines zones, certains éléments du maillage : c'est l'hyper réduction. C'est la seconde caractéristique principale de l'APHR (la première, l'adaptation, a été abordée dans le paragraphe III.2.3 a)). Ainsi, les calculs en base réduite ne sont effectués que sur un nombre réduit d'éléments (domaine que l'on note  $\Omega_\pi$ , avec  $\Omega_\pi \subseteq \Omega$ ) ce qui permet de diminuer davantage les temps de calcul.

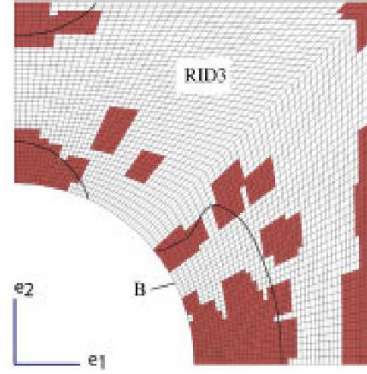
Cependant, ce modèle étant aussi adaptatif, des corrections en modèle détaillé sur l'ensemble du domaine peuvent être nécessaires, pour cela des prévisions définies sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  sont réalisées. La base réduite associée aux déplacements étant définie sur  $\Omega$ , la prévision des variables d'état réduites associées est suffisante pour obtenir une prévision des déplacements en tout point de  $\Omega$ . Les déplacements sont donc naturellement extrapolés à l'aide de la base POD. Concernant les variables internes, celles-ci doivent aussi pouvoir être extrapolées à partir des valeurs locales calculées dans  $\Omega = \overline{\Omega_\pi}$ . Pour cela, une seconde base POD  $\{Y_k\}$ , relative aux variables internes est générée sur le même principe que celle des déplacements ; elle permettra alors de pouvoir extrapoler les variables internes sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  en déterminant les coordonnées réduites des variables internes à l'aide d'un problème des moindres carrés défini sur  $\Omega_\pi$ .

Il est nécessaire de définir comment choisir les éléments qui vont constituer le RID et comment construire celui-ci. Les éléments du RID sont les plus représentatifs de la réponse du système. On choisit ceux où l'énergie est maximale. Ainsi, on retiendra les éléments où les niveaux de déformation sont les plus importants par l'intermédiaire de la première base POD  $\{\Phi_k\}$ , associée au champ de déplacement, puis on choisira les éléments où l'énergie interne associée aux variables internes est maximale grâce à la seconde base POD  $\{Y_k\}$  introduite précédemment. Ensuite, afin de ne pas obtenir la solution " 0=0 ", il est nécessaire d'inclure

au RID des éléments sur lesquels des conditions aux limites en effort sont appliquées. Le RID est alors constitué de l'ensemble de ces éléments et n'est pas forcément un domaine contigu. Ensuite on peut décider d'ajouter des éléments qui sont voisins directs des éléments retenus ou même une zone d'intérêt que l'on souhaite intégrer au RID. La figure III.2 schématise cette construction. La figure III.3 représente un exemple de domaine d'intégration réduit utilisé par Ryckelynck (Ryckelynck, 2009) dans son étude d'une plaque carrée constituée d'un matériau élastoviscoplastique percée d'un trou (ici un quart de la plaque est maillée) soumise à un effort variable suivant la direction  $e_2$  sur la partie supérieure de celle-ci.



**Fig. III.2** – Construction du domaine d'intégration réduit (RID)



**Fig. III.3** – Domaine d'intégration réduit (RID) (Ryckelynck, 2009)

On constate que le RID est effectivement constitué d'éléments liés aux conditions aux limites, d'éléments de la zone élastique et de la zone plastique (la zone plastique étant délimitée par les trois traits noirs sur la figure) sans couvrir la totalité d'aucun de ces domaines.

Enfin, on notera que dans le cas de l'hyper réduction la vérification de la qualité de la base au cours du calcul est effectuée sur le résidu tronqué c'est à dire le résidu sur le domaine  $\Omega_\pi$ , obtenu avec des fonctions test tronquées  $v^*$  telles que :

$$v^* \in \mathcal{V}_\pi = \{v \in \mathcal{V} \mid \exists w \in \mathcal{V}, v^* = b(\mathbf{X}) \cdot w(\mathbf{X}) \forall \mathbf{X} \in \Omega, \text{ avec } b(\mathbf{X}) = 0 \text{ sur } \overline{\Omega_\pi}\}, \quad (\text{III.18})$$

avec  $\mathcal{V}$  espace des champs admissibles à '0' et  $\overline{\Omega_\pi}$  partie complémentaire de  $\Omega_\pi$  :  $\Omega = \overline{\Omega_\pi} \cup \Omega_\pi$ .

### III.2.5 Méthodes ROM appliquées à la résolution de problèmes paramétriques

Lors d'études de sensibilité, d'optimisation ou pour générer une base de données numériques par exemple, en plus de la réponse du système dans le domaine espace et temps, on s'intéresse aussi à l'influence de paramètres extérieurs. Ces paramètres peuvent être relatifs à la géométrie, à des paramètres matériau, ou aux conditions aux limites par exemple. Ainsi, on n'étudie plus seulement un problème mais un ensemble de problèmes similaires se différenciant par la valeur de chacun de ces paramètres dans l'espace des paramètres noté  $\mathcal{P}$ . Le champ de déplacement est alors cherché sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \{p\}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in ]0, T], \quad \{p\} \in \mathcal{P} \quad (\text{III.19})$$

avec  $\{p\}$  le vecteur de paramètres considérés.



L'utilisation de méthodes de réduction de modèles est alors d'autant plus nécessaire que dans ce cas la dimension du problème en est largement augmentée et qu'il est nécessaire de résoudre un grand nombre de fois des problèmes similaires.

Afin de traiter ces problèmes, deux stratégies différentes sont principalement mises en place. Premièrement une résolution au cas par cas dans l'espace des paramètres et deuxièmement une résolution simultanée où toutes les valeurs de paramètres sont considérées en même temps.

### a) Résolution séquentielle ou au cas par cas

Une série de  $N_p$  problèmes physiques associée à un jeu de paramètres donné  $(\{p\}_\alpha)_{\alpha=1..N_p}$  est alors considérée et traitée au cas par cas (c'est-à-dire pour  $\alpha$  fixé, un jeu de paramètre à la fois). Avec cette stratégie, la taille du domaine d'intégration n'évolue pas et reste de la taille d'un problème élémentaire  $\Omega$  (si l'on considère que la taille de chaque problème est identique ce qui correspond à des paramètres  $\{p\}$  associés aux conditions aux limites ou à des coefficients matériaux par exemple). Nous noterons le domaine associé à chaque jeu de paramètre  $\Omega(\{p\}_\alpha)$  avec  $\dim\Omega = \dim\Omega(\{p\}_\alpha)$ .

Ainsi, traiter au cas par cas, pour chaque jeu de paramètre  $\{p\}_\alpha$  une base POD  $\Phi_k(\{p\}_\alpha)$  est construite et la famille  $a_k(t, \{p\}_\alpha)$  associée est recherchée telle que le champ de déplacement pour tout  $\{p\}_\alpha$  puisse être approché de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \{p\}_\alpha) = \sum_{k=1}^m a_k(t, \{p\}_\alpha) \cdot \Phi_k(\mathbf{x}, \{p\}_\alpha). \quad (\text{III.20})$$

Cependant, pour gagner en temps de calcul et tenter d'exploiter la similitude entre les problèmes élémentaires considérés en évitant de recalculer pour chaque paramètre  $\{p\}_\alpha$  la base POD  $\Phi_k(\{p\}_\alpha)$  correspondante, plusieurs auteurs ((Amsallem and Farhat, 2008), Lieu (Lieu and Lesoinne, 2004), Schmidt (Schmidt and Glauser, 2004)) ont mis au point des techniques visant à exploiter les base POD déjà construites pour résoudre le problème concernant un nouveau jeu de paramètres.

Avec la méthode POD globale (GPOD), utilisée notamment par Schmidt (Schmidt and Glauser, 2004), l'idée est d'utiliser une base POD  $\Phi_k(\{p\}_\alpha)$  pour résoudre un problème associé à un autre paramètre en enrichissant celle-ci par des snapshots associés à cet autre paramètre. Toutefois, cette méthode ne s'avère pas très fiable, comme l'on relevé Amsallem et Farhat (Amsallem and Farhat, 2008), surtout lorsque les modifications de comportement induites par le nouveau paramètre sont importantes.

Afin d'améliorer ce concept, des méthodes d'interpolation de bases POD  $\Phi_k(\{p\}_\alpha)$  déjà créés ont été développées. Il s'agit alors par interpolation des vecteurs de chaque base de constituer la base  $\Phi_k(\{p\}_{N_{p+1}})$  qui permettra de résoudre le problème associé à un jeu de paramètres  $\{p\}_{N_{p+1}}$  qui n'a jamais été traité. Amsallem et Farhat (Amsallem and Farhat, 2008) propose une interpolation utilisant l'espace tangent en un point, correspondant à un jeu de paramètres donné, à la variété de Grassmann (espace topologique). Ils ont pu obtenir des résultats satisfaisants concernant des calculs de poussée d'un chasseur F16 volant à mach 0.799 interpolés par rapport aux 4 bases POD calculés pour mach 0.650, 0.710, 0.850 et 0.875.

Cependant, comme nous l'avons souligné précédemment au paragraphe III.2.2c) la méthode POD nécessite la connaissance *a priori* de snapshots et la qualité de l'approximation dépend alors fortement du choix de ceux-ci ; de plus elle ne pourra pas contenir une information absente des réalisations choisies.

C'est pourquoi, Ryckelynck et ses collègues ont souhaité étendre la méthode APHR (décrite au paragraphe III.2.3 a)) à la résolution de problèmes paramétriques (Ryckelynck and Missoum Benziane, 2010), (Ryckelynck et al., 2010).

Les caractéristiques principales de la méthode APHR restent les mêmes : résolution *a priori*, adaptation et hyper réduction et les variables d'état sont alors cherchées sous la forme décrite dans l'équation (III.20). Cependant, avec cette approche, le processus adaptatif construit des bases réduites indépendantes de la valeur des paramètres : ces bases sont globales pour un ensemble de paramètres. Ainsi, les bases réduites générées :  $\Phi_k(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{Y}_k(\mathbf{x})$ , relatives respectivement au champ de déplacement et aux variables internes, sont calculées de manière incrémentale sur l'ensemble des jeux de paramètres considéré. De plus, un domaine d'intégration réduit est associé à chacun des problèmes similaires  $\{p\}_\alpha$ .

Dans (Ryckelynck et al., 2010), la résolution analytique est effectuée en parallèle. Et dans (Ryckelynck and Missoum Benziane, 2010), Ryckelynck l'applique dans le cadre des grandes déformations en plasticité polycristalline ; la considération du problème paramétrique lui permet d'étudier la sensibilité de la réponse à différentes conditions aux limites. Des résultats en terme de gain en temps de calcul y ont été très satisfaisants.

### b) Résolution simultanée - considération d'un problème multidimensionnel

La deuxième stratégie de résolution d'un problème paramétrique est de considérer le problème comme multidimensionnel c'est à dire d'augmenter la taille du domaine d'intégration en considérant en même temps tout l'espace des paramètres  $\mathcal{P}$ . De ce fait, le nombre de degrés de liberté associé au problème multidimensionnel devient énorme égal à  $N_p$  fois le nombre de degrés de liberté de chaque problème élémentaire. L'intérêt de ce type d'approche est d'exploiter la capacité des bases réduites à représenter efficacement les transformations synchrones.

Pour résoudre ce type de problème, Ammar (Ammar et al., 2010), et Prulière (Pruliere et al., 2010) appliquent la méthode PGD (méthode décrite dans la section III.2.3 b)). L'écriture généralisée du champ de déplacement recherché s'écrit alors :

$$\mathbf{u}(X_1, \dots, X_d) \simeq \sum_{k=1}^m w_k^1(X_1) \cdots w_k^d(X_d) \quad (\text{III.21})$$

avec  $\{X_j\}_{j=1..d}$  les paramètres généralisés considérés qui regroupent à la fois les paramètres d'espace, de temps et les paramètres extérieurs notés  $\{p\}$  précédemment.

Cette méthode nécessite, comme nous l'avons déjà souligné, de pouvoir décrire le problème à l'aide d'équations séparables. Ensuite, la considération du problème à variables séparées permet de réduire le nombre de degrés de liberté à  $m$  fois la somme nombre des degrés de liberté de chaque problème élémentaire. Enfin, cette méthode est non-incrémentale.

Dans (Pruliere et al., 2010), la méthode est illustrée dans le cadre de la résolution paramétrique de l'équation de transfert de chaleur :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - k \Delta \mathbf{u} - f = 0, \quad (\text{III.22})$$

où 3 variables séparées sont considérées : l'espace  $\mathbf{x} \in \Omega$ , le temps  $t \in I$  et la conductivité  $k \in \mathcal{K}$ . La solution est recherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, k) \approx \sum_{i=1}^m X_i(\mathbf{x}) \cdot T_i(t) \cdot K_i(k). \quad (\text{III.23})$$

Ici, le vecteur  $\mathbf{x}$  de l'espace est considéré comme une seule variable vectorielle mais il est parfois séparé en trois variables scalaires.

La méthode de type algorithme glouton décrite au paragraphe III.2.3b) est alors appliquée aux trois domaines et connaissant la solution à la  $n^{\text{ième}}$  itération :

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t, k) = \sum_{i=1}^n X_i(\mathbf{x}) \cdot T_i(t) \cdot K_i(k). \quad (\text{III.24})$$

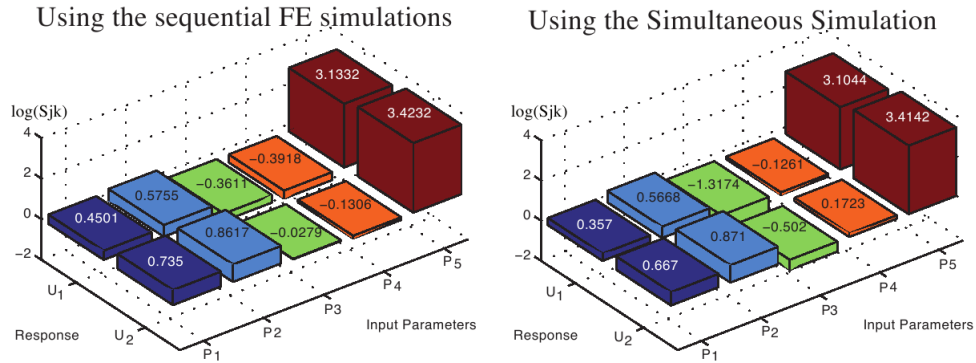
le produit de l'itération  $n + 1$  :  $R(\mathbf{x}) \cdot S(t) \cdot W(k)$  est cherché de manière itérative en utilisant séquentiellement les fonctions tests :  $\Psi^*(\mathbf{x}, t, k) = R^*(\mathbf{x}) \cdot S(t) \cdot W(k)$ ,  $S(t) \cdot W(k)$  étant connues puis  $\Psi^*(\mathbf{x}, t, k) = R(\mathbf{x}) \cdot S^*(t) \cdot W(k)$ ,  $R(\mathbf{x}) \cdot W(k)$  étant connu et enfin  $\Psi^*(\mathbf{x}, t, k) = R(\mathbf{x}) \cdot S(t) \cdot W^*(k)$ ,  $R(\mathbf{x}) \cdot S(t)$  étant connu. De plus, grâce à l'hypothèse de séparabilité des variables, l'intégration n'est effectuée, à chaque fois, que sur un des trois domaines  $\Omega$ ,  $I$  et  $\mathcal{K}$  et non sur l'ensemble du domaine multidimensionnel.

Sarbandi et ses collègues (Sarbandi et al., 2010) ont notamment mis en place une stratégie à variables séparées dans un cadre thermomécanique (étude du frittage) dans le but d'étudier la sensibilité du modèle viscoplastique utilisé avec les paramètres matériaux. Le champ de déplacement est cherché sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \{p\}) = \sum_{i=1}^{\gamma} \Phi_i(\mathbf{x}) \cdot g_i(\{p\}) \cdot a_i(t), \quad (\text{III.25})$$

avec  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\{p\} \in \mathcal{P}$  et  $t \in ]0, T]$ .

Toutefois, une approche incrémentale en temps a été souhaitée ; ainsi une méthode type algorithme gloutons restreinte aux ensembles espace et paramètres a été appliquée de manière incrémentale en temps.



**Fig. III.4** – Etude de sensibilité du modèle vis à vis de 5 paramètres matériaux (Sarbandi et al., 2010)

Il observe alors une sensibilité importante de son modèle avec le paramètre  $p_5$  relié à la viscosité. De plus, la précision de la méthode en comparaison avec une méthode éléments finis standard est plutôt bonne tout en réduisant de manière significative le nombre d'équations à résoudre et donc le temps de calcul. L'avantage d'utiliser ce type de méthode pour une étude de sensibilité est de pouvoir par un calcul rapide et efficace dégager les tendances principales, les points sur lesquels il faudra faire une étude rigoureuse.

Dans cette section visant à synthétiser les méthodes de réduction de modèles existantes, il a pu être constaté un intérêt certain au développement de ces méthodes et cela dans de nombreux domaines tels que la thermomécanique, la mécanique des fluides, la statistique ... Les développements possibles sont encore nombreux notamment en terme de temps de calcul pour des problèmes de pilotage en temps réel ou en terme de mise en oeuvre dans le cas de problèmes nécessitant un remaillage comme de la propagation de fissure par exemple. Dans le cadre de notre étude, nous allons tester l'applicabilité de la méthode APHR à la résolution d'un problème multidimensionnel en grandes déformations. De plus, nous proposons une méthode de résolution incrémentale simultanée utilisant la méthode APHR afin de générer, efficacement et à l'aide d'un seul calcul, la base de données numériques souhaitée.

### III.3 RÉOLUTION SIMULTANÉE DU PROBLÈME MULTIDIMENSIONNEL ASSOCIÉ À L'ÉTUDE DYNAMIQUE DE LA LIAISON SOUPLE

Dans ce paragraphe, la méthodologie générale sera présentée sur un cas académique (pièce test) et appliquée sur un modèle de comportement du matériau de type Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005) comme il a été décrit dans le Chapitre II section II.2 avec les paramètres matériaux obtenus dans cet article. En effet, le développement du modèle de comportement du silicone chargé de silice ayant été mené en parallèle avec l'étude de réduction de modèle, la méthodologie a été établie sur le modèle de comportement de base. Le développement de cette méthodologie a fait l'objet d'un article qui est en cours de révision.

#### III.3.1 Caractéristiques du problème multidimensionnel

Dans le cadre de cette étude, nous cherchons à générer une base de données numériques décrivant l'évolution des modules élastique et de perte en fonction de la sollicitation vibratoire appliquée. Ainsi, nous souhaitons résoudre un problème multidimensionnel pour lequel les paramètres considérés se rapportent aux conditions aux limites et plus précisément aux caractéristiques du chargement dynamique. Conformément à l'étude menée dans le cadre de ce projet, et à la définition des essais choisie au Chapitre I section I.2.2, le vecteur des paramètres  $\{p\}$  est composé du déplacement maximal, du déplacement moyen, de l'amplitude de déplacement et de la fréquence :

$$\{p\}^T = (U_{max}, U_{moy}, \Delta U, f). \quad (III.26)$$

La pièce test considérée pour cette étude est représentée sur la figure III.5, elle est composée de parties métalliques et de parties en thermoplastique polyuréthane élastomère (TPU) (les paramètres matériaux de l'article de Qi-Boyce concernant un TPU). Le domaine occupé par cette pièce est noté  $\Omega_0$ .

La sollicitation vibratoire décrite par un jeu de paramètres  $\{p\}_\alpha$  est appliquée dans la direction axiale (2) et nous avons décidé de plus d'imposer un chargement radial (direction 1) fixe pour représenter un éventuel défaut de coaxialité généré par la mise en position de la pièce. Ce chargement complexe est illustré par la figure III.6.

#### III.3.2 Modèle d'ordre réduit proposé

##### a) Mise en place de l'approche multidimensionnelle

Pour résoudre ce problème paramétrique, nous avons choisi une approche multidimensionnelle en mettant en place une extension de la méthode APHR.

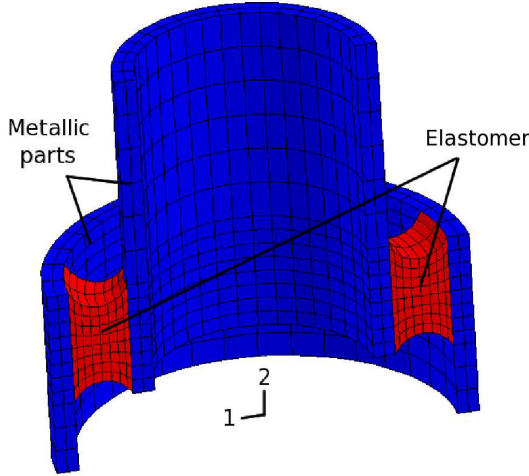
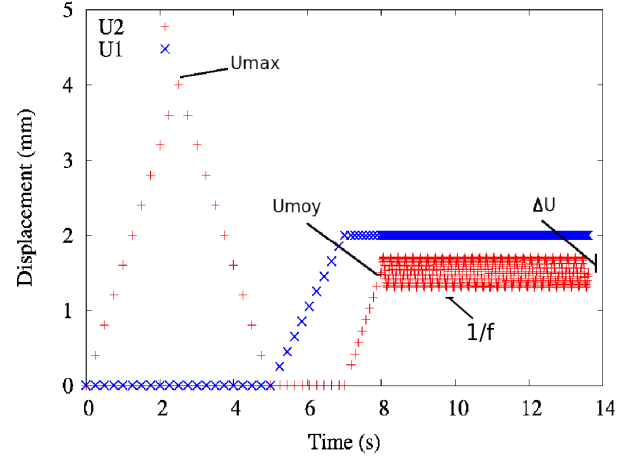

 Fig. III.5 – Pièce test ( $\Omega_0$ )


Fig. III.6 – Caractéristiques du chargement dynamique

Dans un premier temps, comme il a été abordé au paragraphe III.2.5 b), de la même manière que Prulière et ses collègues (Pruliere et al., 2010) l'ont proposé, les paramètres sont considérés comme coordonnées des variables d'état. Le champ de déplacement, par exemple, est alors décrit par le champ  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t, \{p\})$ .

Toutefois, nous avons souhaité conserver une approche incrémentale en temps et surtout proposer une méthode de réduction de modèle directement applicable au modèle de comportement matériau du silicone chargé de silice développé et présenté au Chapitre II. C'est pourquoi nous nous sommes basés sur la méthode proposée par Missoum et Ryckelynck (Ryckelynck and Missoum Benziane, 2010) dans laquelle le champ de déplacement d'un cas élémentaire (pour un jeu de paramètres  $\{p\}_\alpha$  donné) est exprimé sous la forme :

$$\mathbf{u}_{\text{élémentaire}}(\mathbf{X}, t) = \sum_{k=1}^s \Phi_k(\mathbf{X}) \cdot a_k(t) \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in \Omega_0 \times ]0, T], \quad (\text{III.27})$$

avec  $s$  de l'ordre de 10.

Ensuite, la principale extension que nous proposons est d'introduire une variable d'espace multidimensionnelle  $\mathbf{X}'$  telle que :

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{X}, \{p\}) \in \Omega_0 \times \mathcal{P}, \quad (\text{III.28})$$

décrivant la position d'un point pour un jeu de paramètre  $\{p\}_\alpha$  dans l'espace de toutes les configurations géométriques considérées pour l'étude paramétrique. Ainsi, l'ensemble des problèmes associé à l'ensemble des jeux de paramètres considéré est étudié simultanément.

C'est pourquoi nous proposons une représentation de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}', t) = \sum_{k=1}^s \Phi_k(\mathbf{X}') \cdot a_k(t) \quad \forall (\mathbf{X}', t) \in \Omega'_0 \times ]0, T] \quad \text{avec} \quad \Omega'_0 = \Omega_0 \times \mathcal{P}. \quad (\text{III.29})$$

Ainsi, nous proposons tout simplement d'étendre la méthode APHR à une représentation à variables séparées définie sur  $\Omega'_0$ . On remarquera de plus que dans ce cadre, les fonctions  $\Phi_k$  sont définies sur l'ensemble de l'espace des paramètres et quelles définissent une base ROM multidimensionnelle.

L'avantage est que l'algorithme défini dans (Ryckelynck and Missoum Benziane, 2010) reste le même,  $\mathbf{X}'$  étant substitué à  $\mathbf{X}$  et  $\Omega'_0$  à  $\Omega_0$ . De plus, l'emploi de la méthode APHR,

contrairement à une méthode PGD, ne nécessite pas un travail de réécriture des équations constitutives du modèle physique en variables séparées et la méthode proposée est donc applicable quel que soit le modèle physique étudié.

Enfin, nous avons choisi d'utiliser une résolution simultanée, et non au cas par cas, dans le but d'améliorer davantage les gains en temps de calcul en exploitant la similitude de ces problèmes. En effet, de part sa formulation, la méthode APHR est adaptée à la résolution efficace de problèmes contenant des transformations synchrones ; or en résolvant simultanément un ensemble de problèmes similaires, même découplés, on peut s'attendre à avoir un nombre plus important de transformations synchrones et donc à un gain en temps de calcul plus important. C'est pourquoi nous nous attendons à une meilleure efficacité de la méthode en considérant le problème comme multidimensionnel.

Cependant, pour mener à bien cette méthode, une distinction doit être faite dans l'ensemble des paramètres  $\mathcal{P}$  :

- ceux n'ayant aucune influence sur les temps caractéristiques des transformations synchrones du problème comme les paramètres liés au déplacement par exemple, on notera ces paramètres  $\{p_s\} \in \mathcal{P}_s$ ,
- et ceux modifiant les temps caractéristiques et donc le synchronisme comme la fréquence, on notera ces paramètres  $\{p_t\} \in \mathcal{P}_t$ .

On a donc  $\{p\} = \{p_s, p_t\}$  ; avec dans notre cas  $\{p_s\} = \{U_{max}, U_{moy}, \Delta U\}$  et  $\{p_t\} = \{f\}$ . Ainsi pour une meilleure efficacité de la méthode, la fréquence sera traitée à part, c'est-à-dire que l'on traitera simultanément le problème multidimensionnel restreint à  $\Omega'_0 = \Omega_0 \times \mathcal{P}_s$  à fréquence fixée puis on traitera les 2 autres valeurs de fréquences au cas par cas sur  $\Omega_0 \times \mathcal{P}_s$ . Ainsi, dans tout ce chapitre, la notation  $\Omega'_0$  fera référence à l'ensemble  $\Omega_0 \times \mathcal{P}_s$  et les modes empiriques  $\Phi_k$  seront donc calculés sur l'ensemble du domaine  $\Omega_0 \times \mathcal{P}_s$  puis ils seront réutilisés comme base initiale des problèmes traités au cas par cas.

### b) Formulation du modèle continu

Le modèle continu considéré est un modèle mécanique défini dans le cadre des transformations finies. Comme précisé au paragraphe précédent, la configuration de référence est notée  $\Omega'_0$ . Il peut s'agir du domaine à l'instant  $t = 0$  (formulation total Lagrangian) ou à l'instant  $t$  (formulation updated Lagrangian). Le système non-linéaire est étudié sur l'intervalle de temps  $]0, T]$ . Le champ de déplacement, quant à lui est défini à l'instant  $t$  sur  $\Omega'_0$  et est cherché sous la forme  $\mathbf{u}(\mathbf{X}', t)$  ; où  $\mathbf{X}'$  représente la position initiale d'un point matériel appartenant à  $\Omega'_0$ . Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S}$  est une fonction non-linéaire de l'histoire du gradient de la déformation  $\mathbf{F}_\tau$  que l'on peut synthétiser sous la forme :

$$\mathbf{S} = \Sigma(\mathbf{F}_\tau, \tau \leq t) \quad (\text{III.30})$$

où  $\Sigma$  représente un opérateur formel qui représente les équations constitutives définies au Chapitre II section II.2.

Dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, l'équation constitutive formelle (III.30) est définie en introduisant des variables internes que l'on notera  $\underline{z}$  et des équations différentielles ordinaires. Comme il a été synthétisé dans le Chapitre II paragraphe II.3.1 dans le tableau II.5, le modèle de Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005) nécessite l'utilisation de 3 variables internes :  $\mathbf{F}^e$ ,  $\mathbf{F}^v$  et  $\mathbf{v}_s$ . On notera que le modèle DyMPPIEC rajoute une variable interne :  $\alpha$ .

La frontière  $\delta\Omega'_0$  du domaine  $\Omega'_0$  peut être divisée en deux parties :  $\delta_U\Omega'_0$  et  $\delta_f\Omega'_0$ . Ces frontières sont définies pour toutes les valeurs de paramètres et l'on a :  $\delta\Omega'_0 = \delta\Omega_0 \times \mathcal{P}$ . Sur  $\delta_U\Omega'_0$  la condition de Dirichlet s'applique et l'on a  $\mathbf{u}(\cdot, \mathbf{t}) = \mathbf{u}_c(\cdot, \mathbf{t})$  pour tout  $t$ , où  $\mathbf{u}_c$  est donné

pour le champ de déplacement paramétrique. Sur  $\delta_f \Omega'_0$  un champ de force est appliqué  $\mathbf{f}(\cdot, t)$  dépendant à la fois du temps  $t$  et des variables multidimensionnelles. Le champ de déplacement admissible appartient à un espace de fonctions  $\mathcal{U}$  défini :

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}; H^1(\Omega_0)), \mathbf{v}|_{\delta_U \Omega_0 \times \mathcal{P}} = \mathbf{u}_c \} \quad (\text{III.31})$$

où

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{P}; H^1(\Omega_0)) = \left\{ \mathbf{v} : \mathcal{P} \rightarrow H^1(\Omega_0) \mid \int_{\mathcal{P}} \|\mathbf{v}(\cdot, \{p\})\|_{H^1(\Omega_0)}^2 d\{p\} < \infty \right\},$$

et où  $H^1(\Omega_0)$  est un espace de Sobolev de fonctions définies sur le domaine  $\Omega_0$ . L'espace vectoriel associé à  $\mathcal{U}$  est noté  $\mathcal{V}$  et est tel que :

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}; H^1(\Omega_0)), \mathbf{v}|_{\delta_U \Omega_0 \times \mathcal{P}} = \mathbf{0} \} \quad (\text{III.32})$$

Ensuite, le problème mécanique s'énonce de la manière suivante : on cherche à trouver une estimation du champ de déplacement  $\mathbf{u}(\cdot, \mathbf{t}) \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{t} \in ]\mathbf{0}, \mathbf{T}]$  satisfaisant les équations constitutives et le principe des travaux virtuels :

$$\int_{\Omega'_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) : \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}_\tau, \tau \leq t) d\mathbf{X}' - \int_{\delta_f \Omega'_0} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}', t) d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}, \quad (\text{III.33})$$

où  $\mathbf{u}^*$  est une fonction test et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  une fonction linéaire de  $\mathbf{u}^*$ . On a alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial u_k^*}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k^*}{\partial X_j} \right) \right). \quad (\text{III.34})$$

L'objectif principal de la méthode APHR est de remplacer  $\mathcal{V}$  par un sous-espace de fonctions de dimension finie dans le but d'approximer  $\mathbf{u}$ ; où la dimension de ce sous-espace est beaucoup plus petite que la dimension du sous-espace de fonctions utilisé dans le cas d'une approximation par éléments finis.

### c) Définition des espaces de fonctions relatifs au modèle multidimensionnel

Comme nous l'avons déjà précisé la méthode proposée est une extension de la méthode APHR (Ryckelynck and Missoum Benziane, 2010) appliquée à la résolution simultanée d'un problème multidimensionnel. En effet, le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  dépend non seulement des variables d'espace et du temps mais aussi des paramètres du chargement  $\{p\}$ .

Ainsi, à partir de l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  défini par l'équation (III.32), trois sous-espaces de fonctions sont introduits pour formuler la méthode proposée. Le premier espace vectoriel introduit est relatif à la solution simultanée du problème découplé utilisant la méthode des éléments finis. Ce sous-espace de  $\mathcal{V}$  est noté  $\mathcal{V}'_h$ . le modèle éléments finis utilise  $m_h$  degrés de liberté  $(q_j(t))_{j=1, \dots, m_h}$ . La composante  $q_j(t)$  représente le déplacement nodal à l'instant  $t$  associé à champ de déplacement par la fonction de forme  $\mathbf{N}_j$ . On notera que cette fonction de forme est définie sur  $\Omega'_0$  et c'est une fonction des paramètres constante par morceaux. Ainsi,  $\mathcal{V}'_h$  est tel que :

$$\mathcal{V}'_h = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \exists (q_j)_{j=1, \dots, m_h} \in \mathbb{R}, \mathbf{u}(\mathbf{X}') = \sum_{j=1}^{m_h} \mathbf{N}_j(\mathbf{X}') q_j \text{ dans } \Omega'_0 \} \quad (\text{III.35})$$

Nous supposons qu'il est simple d'extraire, à partir de la condition de Dirichlet, un champ de déplacement éléments finis  $\mathbf{u}_{ch}$  tel que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ch} + \mathbf{v} \in \mathcal{U} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}'_h \quad (\text{III.36})$$

La méthode APHR peut être vue comme une méthode POD incrémentale et adaptative. Le champ de déplacement est approché par une prévision ROM et par une correction éléments finis si nécessaire. Ainsi, de part le caractère adaptatif de la méthode proposée, la ROM est modifiée durant le traitement incrémental du problème multidimensionnel. C'est pourquoi, nous introduisons l'exposant  $(n)$  qui viendra représenter la  $n^{\text{ième}}$  adaptation de la ROM. L'espace vectoriel associé à cette base ROM est noté  $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$  et est défini par :

$$\mathcal{V}_{ROM}^{(n)} = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h \mid \exists (a_k)_{k=1, \dots, s^{(n)}} \in \mathbb{R}, \mathbf{u}(\mathbf{X}') = \sum_{k=1}^{s^{(n)}} \boldsymbol{\Psi}_k^{(n)}(\mathbf{X}') a_k \text{ dans } \Omega'_0 \} \quad (\text{III.37})$$

où  $\{ \boldsymbol{\Psi}_k^{(n)} \}_{k=1, \dots, s^{(n)}}$  sont les modes empiriques la base ROM multidimensionnelle. Ces modes peuvent être reliés aux fonction de formes éléments finis en utilisant la matrice  $\mathbf{A}^{(n)}$  par la relation :

$$\boldsymbol{\Psi}_k^{(n)}(\mathbf{X}') = \sum_{j=1}^{m_h} \mathbf{N}_j(\mathbf{X}') \mathbf{A}_{jk}^{(n)} \in \Omega'_0 \quad (\text{III.38})$$

L'espace des fonctions affines associé à la ROM est noté  $\mathcal{U}_{ROM}^{(n)}$  et est tel que :

$$\mathcal{U}_{ROM}^{(n)} = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n)}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_{ch} + \mathbf{v} \text{ dans } \Omega'_0 \} \quad (\text{III.39})$$

Ainsi, cette méthode de réduction de modèles permet de réduire la dimension du sous-espace de  $m_h$  à  $s^{(n)}$ , avec généralement  $s^{(n)} \ll m_h$ .

De plus, comme proposé dans (Ryckelynck, 2009) un domaine d'intégration réduit (RID) est introduit pour définir les équations d'équilibre associées à la base ROM selon la méthode d'Hyper-Réduction définie au paragraphe III.2.4 b). Le RID est noté  $\Omega'_{0\Pi}$ . L'idée de base est de sélectionner seulement quelques équations d'équilibre au noeud définissant le modèle éléments finis qui définiront les équations d'équilibre du modèle d'ordre réduit. Ainsi seulement quelques éléments vont définir cette formulation. Ces éléments forment le RID.

Soit  $[\Pi]$  la matrice rectangulaire de sélection des équations d'équilibre du modèle éléments finis définie par  $\Pi_{ij}$  égal à un si le degré de liberté numéro  $j$  est le  $i^{\text{ème}}$  degré de liberté sélectionné. Sinon,  $\Pi_{ij}$  est égal à zéro. Une fonction test tronquée  $\mathbf{u}_{\Pi}^*$  peut être associée à toutes les fonctions tests  $\mathbf{u}^* = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}^*$  par la relation :

$$\mathbf{u}_{\Pi}^* = \mathbf{N} \cdot [\Pi]^T \cdot [\Pi] \cdot \mathbf{q}^*. \quad (\text{III.40})$$

Ainsi, la propriété suivante est respectée : si  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_h$  alors  $\mathbf{u}_{\Pi}^* = \mathbf{N} \cdot [\Pi]^T \cdot [\Pi] \cdot \mathbf{q}^* \in \mathcal{V}_h$ . Et le RID  $\Omega'_{0\Pi}$  est défini par le support de tous les champs de fonctions tests tronquées :

$$\Omega'_0 = \overline{\Omega'_{0\Pi}} \oplus \Omega'_{0\Pi} \quad (\text{III.41})$$

$$\overline{\Omega'_{0\Pi}} = \{ \mathbf{X}' \in \Omega'_0 \mid \forall \mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^n, \| \mathbf{u}_{\Pi}^*(\mathbf{X}') \| + \| \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\Pi}^*, \mathbf{0})(\mathbf{X}') \| = 0 \} \quad (\text{III.42})$$

où  $\| \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\Pi}^*, \mathbf{0}) \|^2 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\Pi}^*, \mathbf{0}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\Pi}^*, \mathbf{0})$ . Les conditions définissant les équations d'équilibre hyper réduites sont obtenues en utilisant l'espace des fonctions  $\mathcal{V}_{\Pi}^{(n)}$  défini par :

$$\mathcal{V}_{\Pi}^{(n)} = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n)} \mid \exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{s^{(n)}}, \mathbf{u}(\mathbf{X}') = \sum_{j=1}^{s^{(n)}} \mathbf{N}_j(\mathbf{X}') q_j \in \Omega'_0, \text{ avec } \mathbf{q} = [\Pi]^T \cdot [\Pi] \cdot \mathbf{A}^{(n)} \cdot \mathbf{a} \}.$$

Les dimensions des espaces de fonctions  $\mathcal{V}_{\Pi}^{(n)}$  et  $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$  sont les mêmes, mais les fonctions associées n'ont pas le même support. L'espace fonctionnel  $\mathcal{V}_{\Pi}^{(n)}$  permet d'écrire les conditions



d'équilibre appropriées associées à la ROM en utilisant les fonctions tests tronquées et le RID. Naturellement, le RID doit être choisi de manière à obtenir un problème bien posé. Plus de détails peuvent être trouvés dans (Ryckelynck, 2009) concernant la procédure à suivre. On remarquera que le caractère multidimensionnel des modes empiriques n'affecte pas la procédure.

Celle-ci peut être résumé de la manière suivante. Le RID est formé par plusieurs boules ayant le même rayon égal à la dimension locale des éléments finis. Une sphere rend le chargement visible à travers le RID et est associée à chaque mode empirique  $\boldsymbol{\psi}_k$ . Leur centre est le point où la norme du tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{0})$  est maximum, chaque maximum étant cherché dans  $\Omega'_0$ .

Il est important de noter que  $\Omega'_{0\Pi}$  ne peut pas être assimilé à  $\Omega_{0\Pi} \times \mathcal{P}$ . En effet,  $\Omega'_{0\Pi}$  est un sous-domaine du domaine multidimensionnel et la répartition des éléments du RID sur l'ensemble des problèmes mécaniques considérés peut être différente d'un cas à un autre.

Ensuite, les modes empiriques de la base ROM étant globaux, le champ de déplacement est globalement estimé. Cependant, pour effectuer cette prévision sur l'ensemble du domaine, l'estimation des variables internes doit être étendue à partir du RID sur l'ensemble des éléments. Ainsi, comme proposé dans (Ryckelynck, 2009) la ROM APHR est constituée de deux bases, une associée aux déplacements et une associée aux variables internes. La seconde base est notée  $(\Upsilon_k^{(n)})_{k=1, \dots, \xi^{(n)}}$  et les variables internes sont extrapolées à partir du RID sur tout le domaine en ajustant les variables réduites internes à l'intérieur du RID. Comme pour le déplacement, les modes  $(\Upsilon_k^{(n)})_{k=1, \dots, \xi^{(n)}}$  sont définis sur  $\Omega'_0$  et sont des modes multidimensionnels.

Même si la dimension de la ROM peut évoluer durant la résolution incrémentale des équations, nous introduisons une notation simplifiée en remplaçant respectivement dans la suite de ce chapitre,  $s^{(n)}$  et  $\xi^{(n)}$  par  $s$  et  $\xi$ .

#### d) Description de l'algorithme APHR incrémental et adaptatif

L'algorithme incrémental multi-level développé dans (Ryckelynck and Missoum Benziane, 2010) est utilisé et réécrit en grandes déformations et adapté à l'approche multidimensionnelle choisie. L'approximation multi-level est la suivante à l'instant  $t = t_i$  :

$$\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{X}', t_i) = \underline{\mathbf{u}}_{ROM}^{(n)}(\mathbf{X}', t_i) + \delta \underline{\mathbf{u}}_h(\mathbf{X}', t_i) \quad (\text{III.43})$$

$$\underline{\mathbf{z}}(\mathbf{X}', t_i) = \underline{\mathbf{z}}_{ROM}^{(n)}(\mathbf{X}', t_i) + \delta \underline{\mathbf{z}}(\mathbf{X}', t_i) \quad (\text{III.44})$$

avec

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_h &\in \mathcal{V}'_h \\ \underline{\mathbf{u}}_{ROM}^{(n)}(\mathbf{X}', \mathbf{t}_i) &= \mathbf{u}_{ch} + \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(\mathbf{X}') \mathbf{a}_k^{(n)}(\mathbf{t}_i) \in \mathcal{U}_{ROM} \\ \underline{\mathbf{z}}_{ROM}^{(n)}(\mathbf{X}', \mathbf{t}_i) &= \sum_{k=1}^{\xi} \Upsilon_k^{(n)}(\mathbf{X}') \mathbf{b}_k^{(n)}(\mathbf{t}_i) \end{aligned}$$

En utilisant le schéma d'intégration numérique à un pas, les différents états du système peuvent être calculés à chaque instant. De part la formulation incrémentale, l'état mécanique multidimensionnel est supposé connu à l'instant  $t_i$  et les inconnues sont les variables d'état multidimensionnelles à l'instant  $t_{i+1}$ .

Ainsi cinq étapes sont introduites pour prédire l'état mécanique multidimensionnel sur l'intervall  $]t_i, t_{i+1}]$  :

• **Etape une ou étape de prédiction**, les inconnues sont les variables d'état réduites  $(a_k^{(n)}(t_{i+1}))_{k=1, \dots, s}$  et les variables internes  $z_{ROM}^{(n)}(\mathbf{X}', t_{i+1})$  sur  $\Omega'_{0\Pi}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'_{0\Pi}} \varepsilon(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}_{ROM}^{(n)}) : \Sigma(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{ROM}^{(n)}), \tau \leq t_{i+1}) \, d\mathbf{X}' \\ & - \int_{\partial_f \Omega'_{0\Pi}} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}', t_{i+1}) \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_{\Pi}^{(n)}, \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

où  $\partial_f \Omega'_{0\Pi} = \partial_f \Omega'_0 \cap \Omega'_{0\Pi}$ .

• **Etape deux ou étape d'extrapolation**, les inconnues sont les variables internes réduites  $(b_k^{(n)}(t_{i+1}))_{k=1, \dots, \xi}$  et les variables internes  $z_{ROM}(\mathbf{X}', t_{i+1})$  appartenant au domaine  $\bar{\Omega}'_{0\Pi}$  et l'on a :

$$\mathbf{b}^{(n)}(t_{i+1}) = \arg \min_{\mathbf{y}=\{y_k\}_k} H(\mathbf{y}) \quad (\text{III.46})$$

$$H(\mathbf{y}) = \int_{\Omega'_{0\Pi}} \left\| z_{ROM}^{(n)}(\mathbf{X}', t_{i+1}) - \sum_{k=1}^{\xi} \Upsilon_k^{(n)}(\mathbf{X}') y_k \right\|_2^2 \, d\mathbf{X}' \quad (\text{III.47})$$

$$z_{ROM}^{(n)}(\mathbf{X}', t_{i+1}) = \sum_{k=1}^{\xi} \Upsilon_k^{(n)}(\mathbf{X}') b_k^{(n)}(t_{i+1}) \quad \forall \mathbf{X}' \in \bar{\Omega}'_{0\Pi} \quad (\text{III.48})$$

• **Etape trois ou étape de vérification de la convergence**, évaluation de l'erreur  $\eta_{ROM}$  associée au résidu tronqué  $\{\tilde{R}\}$  :

$$\tilde{R}_j = \int_{\Omega'_{0\Pi}} \varepsilon(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}_{ROM}^{(n)}) : \Sigma(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{ROM}^{(n)}), \tau \leq t) \, d\mathbf{X}' - \int_{\partial_f \Omega'_0} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}', t) \, d\Gamma \quad (\text{III.49})$$

avec  $\mathbf{u}^* = \mathbf{N}_j(\mathbf{X}') (max_{\zeta} \Pi_{\zeta_j})$  et  $\eta_{ROM}^2 = \sum_{j=1}^{m_h} \tilde{R}_j^2$

• **Etape quatre ou étape de correction**, si  $\eta_{ROM} < \varepsilon_R \|\mathbf{f}\|$  alors  $\delta \mathbf{u}_h(\mathbf{X}', t_{i+1}) = 0$  et  $\delta z(\mathbf{X}', t_{i+1}) = 0$ , sinon les corrections à apporter sont les suivantes :

$$\int_{\Omega'_0} \varepsilon(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}_{ROM}^{(n)} + \delta \mathbf{u}_h) : \Sigma(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{ROM}^{(n)} + \delta \mathbf{u}_h), \tau \leq t_{i+1}) \, d\mathbf{X}' - \int_{\partial_f \Omega'_0} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}', t) \, d\Gamma = 0 \quad (\text{III.50})$$

$\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_h'$

et les variables internes sont calculées en tout point à l'aide de la loi de comportement.

• **Etape cinq ou étape d'adaptation de la ROM**, si  $\eta_{ROM} \geq \varepsilon_R$  alors le sous-espace  $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$  peut être adapté en utilisant  $\delta \mathbf{u}_h$ . Pour cela, nous considérons le résidu associé à la projection orthogonale de  $\delta \mathbf{u}_h$  sur  $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$ . Ce résidu est noté  $\delta_{\perp} \mathbf{u}_h$  et est défini par :

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} \mathbf{u}_h(\mathbf{X}', t_{i+1}) &= \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{X}', t_{i+1}) - \widehat{\delta \mathbf{u}_h}(\mathbf{X}', t_{i+1}) \\ \widehat{\delta \mathbf{u}_h}(\mathbf{X}', t_{i+1}) &= \sum_{k=1}^s \psi_k^{(n)}(\mathbf{X}') \delta a_k^{(n)}(t_{i+1}) \\ \delta \mathbf{a}^{(n)}(t_{i+1}) &= \arg \min_{\{y\}} \int_{\Omega'_0} \left\| \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{X}', t_{i+1}) - \sum_{k=1}^s \psi_k^{(n)}(\mathbf{X}') y_k \right\|_2^2 \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Alors la base étendue  $(\Psi_k^{(n+1/2)})_{k=1,\dots,s+1}$  est construite en préservant les prévisions précédentes de la manière suivante :

$$\Psi_k^{(n+1/2)} = \Psi_k^{(n)} \quad k \leq s \quad (\text{III.52})$$

$$\Psi_{s+1}^{(n+1/2)} = \frac{1}{\|\delta_{\perp} \mathbf{u}_h\|} \delta_{\perp} \mathbf{u}_h \quad (\text{III.53})$$

$$a_k^{(n+1/2)}(\tau) = a_k^{(n)}(\tau) \quad \tau \leq t_{i+1} \quad k \leq s \quad (\text{III.54})$$

$$a_{s+1}^{(n+1/2)}(\tau) = 0 \quad \tau < t_i \quad (\text{III.55})$$

$$a_{s+1}^{(n+1/2)}(t_{i+1}) = \|\delta_{\perp} \mathbf{u}_h\| \quad (\text{III.56})$$

Ensuite, une décomposition POD des variables réduites est réalisée afin d'éviter l'augmentation constante de la taille de la base ROM. Cette POD consiste à chercher les vecteurs  $(\mathbf{V}_l)_{l=1\dots s+1}$  maximisant la projection suivante sur la prédiction des variables d'états réduites :

$$\lambda_l^{(n+1)} = \frac{\int_0^{t_{j+1}} (\mathbf{a}^{(n+1/2)T}(t) \cdot \mathbf{V}_l)^2 dt}{\mathbf{V}_l^T \cdot \mathbf{V}_l} \quad (\text{III.57})$$

en respectant les conditions  $\|\mathbf{V}_l\| = 1$  et  $\lambda_l \geq \lambda_{l+1}$ . Les vecteurs  $(\mathbf{V}_l)_{l=1\dots s+1}$  sont des vecteurs propres de la matrice de covariance  $[\mathbf{C}]^{(n+1/2)}$  vérifiant :

$$[\mathbf{C}]^{(n+1/2)} = \int_0^{t_{j+1}} \mathbf{a}^{(n+1/2)}(t) \cdot \mathbf{a}^{(n+1/2)T}(t) dt \quad (\text{III.58})$$

La matrice de covariance prend en compte les résultats précédents afin de préserver la capacité de la ROM à simuler les états mécaniques correspondants. Ensuite, les événements principaux sont sélectionnés à l'aide du critère suivant :

$$\mathbf{W} = [\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\tilde{s}}] \quad \text{avec } \lambda_{\tilde{s}} > \varepsilon_{POD} \lambda_1 \text{ et } \lambda_{\tilde{s}+1} \leq \varepsilon_{POD} \lambda_1 \quad (\text{III.59})$$

$\tilde{s}$  étant la nouvelle taille de la ROM. A la fin, la nouvelle base ROM n'est autre qu'une réduction par POD de la précédente ROM :

$$\Psi_l^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{k=s+1} \Psi_k^{(n+1/2)} W_{kl} \quad \forall l = 1 \dots \tilde{s} \quad (\text{III.60})$$

$$a_l^{(n+1)}(t) = \sum_{k=1}^{k=s+1} a_k^{(n+1/2)}(t) W_{kl} \quad \forall l = 1 \dots \tilde{s} \quad (\text{III.61})$$

Une procédure similaire est utilisée pour construire  $(\Upsilon_k^{(n+1)}, b_k^{(n+1)})_{k=1\dots \xi}$  en utilisant  $\delta \mathbf{z}_h(\mathbf{X}', t_{i+1})$ . Cette adaptation termine le traitement de l'intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$ .

A la fin de chaque simulation une dernière POD est réalisée sur les variables d'états réduites.

Les paramètres de la méthode sont le RID et les coefficients  $\varepsilon_R$  et  $\varepsilon_{POD}$ . On pourra remarquer que la base ROM initiale  $((\Psi_k^{(0)}, a_k^{(0)})_{k=1\dots s}, (\Upsilon_k^{(0)}, b_k^{(0)})_{k=1\dots \xi})$  peut être vide ( $s = 0$  and  $\xi = 0$ ) ; d'où le caractère *a priori* de la méthode. Dans ce cas, le premier incrément de la simulation est un calcul éléments finis sur tout le domaine  $\Omega'_{0\Pi}$ . Enfin une réduction de modèle classique, type POD, sans hyper réduction et sans adaptation peut être obtenue en prenant respectivement  $\Omega'_{0\Pi} = \Omega'_0$  et une valeur assez grande de  $\varepsilon_R$ ,  $\varepsilon_R = 10$  par exemple.

Ainsi, les caractéristiques principales de la méthode APHR étendue sont premièrement la possibilité d'adapter la base ROM tout au long du calcul entraînant à chaque pas de temps

une vérification de la qualité de la base et une correction de celle-ci si besoin. On notera alors que plus le problème multidimensionnel est synchrone moins il y aura d'étapes de correction et donc d'adaptation. Dans un deuxième temps, grâce à l'hyper réduction, le calcul n'est effectué que sur un nombre réduit d'éléments constituant le RID ce qui permet d'accélérer considérablement la résolution des équations non-linéaires. Enfin, une résolution simultanée est réalisée de sorte que l'ensemble des problèmes mécaniques considérés est résolu en une seule simulation sur le large domaine  $\Omega'_0$ .

### III.3.3 Méthode de modélisation numérique

La méthode proposée n'est pas seulement une méthode numérique. C'est également une méthode de modélisation. Comme abordé au paragraphe III.1 nous avons choisi de résoudre le problème multidimensionnel en le discrétisant et en considérant 3 valeurs différentes pour chacun des 4 paramètres constituant  $\{p\}$  afin de générer les deux bases de données numériques associées aux 81 cas de sollicitations dynamiques différentes. Le tableau III.1 synthétise les différents jeux de paramètres retenus.

$U_{max}$ (mm)	2	4	6
$U_{moy}$ (mm)	0.5	1	1.5
$\Delta U$ (mm)	0.1	0.2	0.4
$f$ (Hz)	15	40	100

Tab. III.1 – Discrétisation des paramètres de chargement

Ensuite, comme il a été évoqué dans le paragraphe III.3.3 a), nous allons résoudre séquentiellement les trois problèmes multidimensionnels associés aux 3 paramètres de déplacement à fréquence fixée. Chaque problème multidimensionnel regroupe donc un ensemble de 27 cas de sollicitation vibratoire à résoudre simultanément.

Puisque les cas d'étude ne sont pas couplés par des liaisons mécaniques, pour construire le maillage associé au problème multidimensionnel, il suffit de dupliquer le maillage élémentaire d'un cas particulier (figure III.5), 27 fois dans notre cas. La figure III.7 représente ce maillage ; nous avons choisi de disposer les 27 maillages élémentaires le long du plan 12 cependant la position spatiale de ces maillages n'a aucune influence sur les résultats.

Ensuite, on associe à chaque maillage élémentaire son chargement dynamique spécifique correspondant à un jeu de paramètres  $\{p\}_\alpha$  donnés. Le domaine étendu de calcul  $\Omega'_0$  est alors défini.

Concernant la résolution de ce problème multidimensionnel, nous l'avons, dans un premier temps, résolu simultanément en utilisant le modèle APHR étendu décrit au paragraphe précédent. Cependant, malgré une très bonne précision sur les valeurs de modules obtenues par rapport à celles obtenues par la méthode éléments finis classique, les résultats en terme de gain en temps de calcul n'ont pas été suffisamment satisfaisants. C'est pourquoi, nous avons mis en place une méthode de modélisation en deux étapes :

- Première étape : résolution simultanée préliminaire avec un chargement simplifié dans le but de construire la base réduite et le domaine d'intégration réduit  $\Omega'_{0\Pi}$  associés à ce problème multidimensionnel,
- Deuxième étape : résolution simultanée du problème multidimensionnel sur le domaine d'intégration réduit  $\Omega'_{0\Pi}$  avec en donnée d'entrée la base réduite construite par le calcul préliminaire et en la conservant inchangée (pas d'adaptation de la base en cours de calcul,  $\epsilon_R = 10$ ).

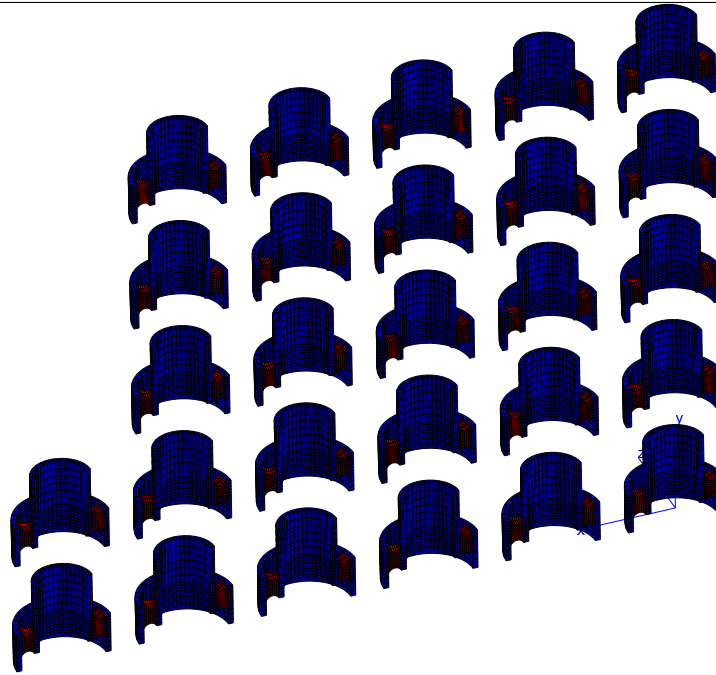


Fig. III.7 – Maillage du problème multidimensionnel ( $\Omega'_0$ )

La figure III.8 décrit le chargement associé au calcul préliminaire (première étape). La différence principale de celui-ci par rapport au chargement souhaité est le fait que l'on ne fasse qu'une seule période de vibration. En effet, en théorie, une seule vibration suffit pour extraire les modes associés à celle-ci.

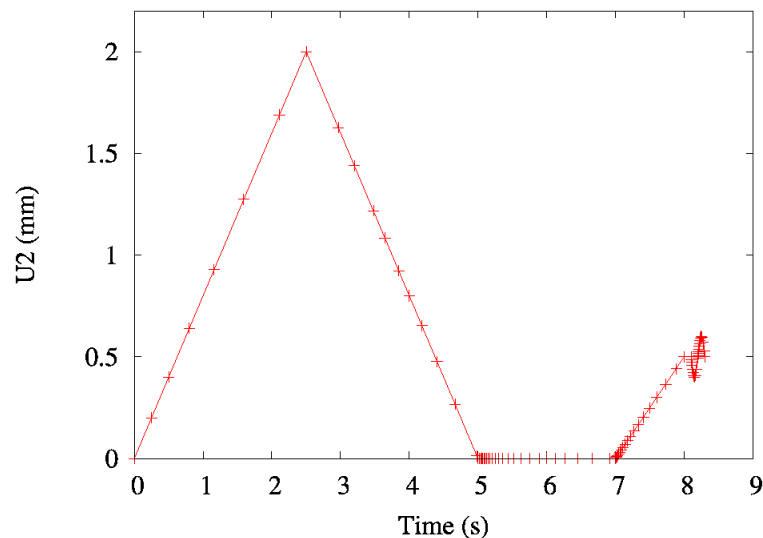


Fig. III.8 – Caractéristiques du calcul préliminaire (Observation concernant un des 27 calculs)

Lors de la deuxième étape, on travaille uniquement en base fixée sans possibilité d'adaptation à la manière d'un calcul *a posteriori* ; on suppose ainsi que cette base est suffisamment précise pour rendre compte des phénomènes prépondérants à ce calcul. On reste cependant dans le cadre d'une méthode APHR étendue, le calcul est effectué sur un nombre réduit

d'éléments appartenant au domaine  $\Omega'_{0\Pi}$  construit lors du calcul préliminaire.

Enfin, pour le traitement séquentiel des deux autres problèmes multidimensionnels, il suffit juste de fixer la valeur du paramètre de fréquence à la valeur suivante et de refaire un calcul du type de la deuxième étape, c'est à dire utiliser la base réduite et le RID calculé lors du calcul préliminaire et ne pas permettre d'adaptation  $\epsilon_R = 10$ . On remarquera alors qu'un seul calcul préliminaire est effectué.

### III.3.4 Dépouillement des résultats

Afin de valider la méthode proposée, nous avons comparé les résultats en terme de temps de calcul et de réponse en force obtenus par la méthode éléments finis classique et la méthode APHR. Les prévisions des modules élastique et de perte associés (après post-traitement) sont ensuite comparées.

On notera que les calculs ont été effectués sur un seul processeur.

Les trois paragraphes suivants concernent le dépouillement du problème multidimensionnel à 15 Hz. Le dernier paragraphe " Extension au problème fréquentiel " regroupe l'ensemble du problème à 4 paramètres.

#### a) Gain en temps de calcul

Les deux premières colonnes du tableau III.2 comparent les temps de calcul obtenus avec un calcul éléments finis et ceux obtenus par la méthode proposée. Pour obtenir le temps de calcul correspondant à la méthode APHR, il faut ajouter les temps de calcul du calcul préliminaire et du final (deuxième étape).

	with standard method (FEM)	with APHR method over $\Omega'_{0\Pi}$		with APHR without hyper reduction (over $\Omega'_0$ )	
		preliminary computation	final computation $\epsilon_R = 10$	preliminary computation	final computation $\epsilon_R = 10$
	1 case $\times$ 27				
CPU time (s)	11 116	57 427	37 875	57 427	326 258
Total CPU time for 27 cases (s)	300 132 ( $\simeq 83h$ )	95 302 ( $\simeq 26h$ )		383 685 ( $\simeq 107h$ )	

**Tab. III.2** – Comparaison des temps de calcul

On constate alors que la méthode proposée permet un gain en temps de calcul de 68% sur le calcul de 27 cas de sollicitation vibratoire soit un gain d'environ 18 calculs élémentaires par la méthode des éléments finis!

Dans un premier temps, ce gain peut être attribué à la réduction de la taille du problème. En effet, à la fin du calcul préliminaire, la base réduite  $\{\Phi_k\}$  contient 17 vecteurs au lieu des 20538 degrés de liberté du calcul éléments finis.

Cependant, comme le suggère la dernière colonne du tableau ??, la justification d'un tel gain est surtout associée à l'hyper-réduction ; lorsque l'on empêche la mise en place de celle-ci sur le calcul final (c'est-à-dire que le calcul est effectué sur le domaine  $\Omega'_0$ ), on observe que tout le gain de temps est perdu. En effet, grâce à l'hyper-réduction, le calcul à chaque pas de temps n'est effectué que sur un nombre restreint d'éléments. La figure III.9 représente en rouge les éléments de ce domaine d'intégration réduit (RID).

Ainsi, au lieu d'être effectué sur les 31212 éléments du domaine  $\Omega'_0$ , le calcul est réalisé sur seulement 2382 éléments. Parmi ces éléments, un domaine d'intérêt a été choisi, il s'agit des éléments de la partie supérieure métallique où le chargement dynamique est appliqué et de quelques éléments élastomères afin d'être en mesure de pouvoir avoir accès aux contraintes de ces éléments si besoin pour comparer la justesse des résultats localement.

La méthode proposée permet donc un gain important en temps de calcul.

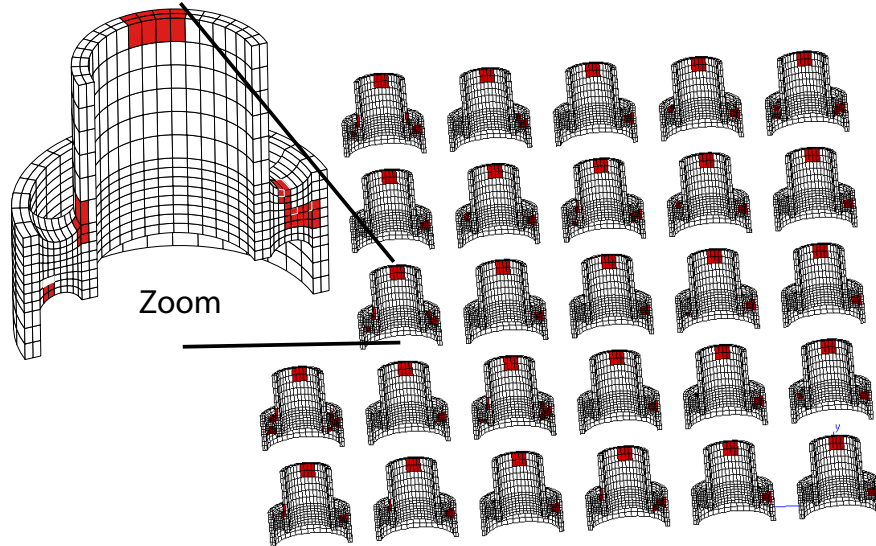


Fig. III.9 – Observation des éléments contenus dans le RID ( $\Omega'_{0\pi}$ )

### b) Précision sur les résultats

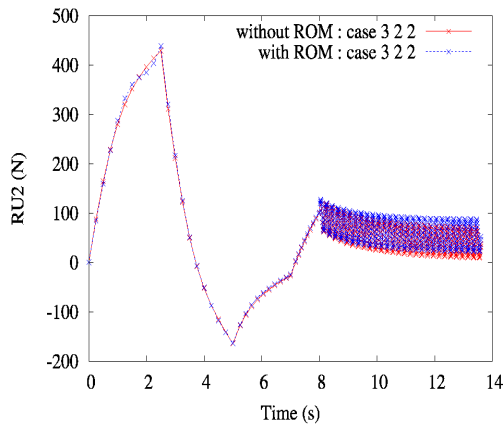
Il s'agit ensuite de vérifier si les résultats associés restent suffisamment précis par rapport à ceux obtenus par la méthode éléments finis classique.

Dans un premier temps, les réponses en force obtenues par la méthode proposée et la méthode éléments finis sont comparées. La figure III.10 représente, dans le cas particulier du cas 3-2-2 (c'est à dire en reprenant le tableau III.1, 3<sup>ème</sup> valeur du  $U_{max}$ , 2<sup>ème</sup> valeur du  $U_{moy}$  et 2<sup>ème</sup> valeur du  $\Delta U$ ) ces deux réponses. La figure III.11 représente les erreurs relatives en force à chaque incrément correspondant à la figure III.10.

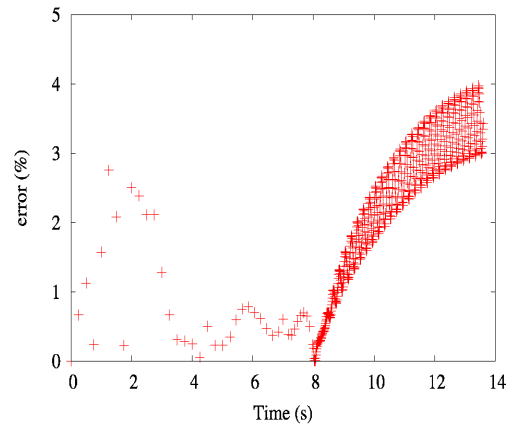
On constate que sur tout l'intervalle de chargement, préchargement compris, la prédiction de la réponse en force est plutôt bonne. On note toutefois un décalage en contrainte sur la partie dynamique qui sera discuté par la suite.

Dans le cadre de la génération de la base numérique donnant la rigidité et la dissipation associée à la liaison souple pour une sollicitation vibratoire donnée, nous sommes surtout intéressés par la précision sur le calcul des modules  $K'$  et  $K''$  associés aux boucles dynamiques finales. La figure III.12 illustre, dans le cas particulier du cas 3-2-2 toujours, les deux boucles dynamiques finales associées au calcul par éléments finis et à la méthode de réduction proposée.

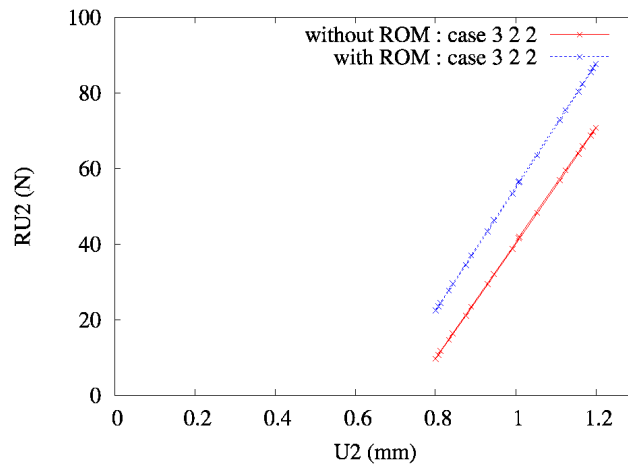
On observe dans un premier temps que ces boucles sont réduites à des droites et donc non-dissipatives, ceci est intrinsèquement lié au modèle de Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005) comme nous avons pu le constater au Chapitre II section II.2. Dans le cas particulier de cette application, tous les modules de perte sont donc nuls, nous ne vérifions donc que la précision de calcul sur les modules élastiques et donc globalement la pente de ces droites.



**Fig. III.10** – Comparaison de la réponse en force obtenue par FEM et avec la méthode APHR étendue



**Fig. III.11** – Erreur relative sur la réponse en force entre le calcul FEM et la méthode proposée correspondant à la figure III.10



**Fig. III.12** – Comparaison entre les boucles dynamiques obtenues par FEM et avec la méthode APHR

Sur la figure III.12, on constate que les pentes sont plutôt bien représentées, une erreur sur la contrainte moyenne est présente comme nous venons de le relever ; l'adoucissement de contrainte du matériau ne semble pas être pris en compte par notre modèle réduit. En effet, lors de la construction de la base réduite (calcul préliminaire), seule une période de vibration a été effectuée. Pour mieux représenter cet adoucissement, réaliser un calcul préliminaire avec quelques périodes semble nécessaire. Cependant, nous cherchons principalement à approximer la pente des boucles dynamiques et non leur valeur de la contrainte moyenne.

Le tableau III.3 synthétise les prédictions de module  $K'$  calculés par la méthode proposée ainsi que l'erreur par rapport aux valeurs obtenues par le calcul éléments finis pour les 27 cas de vibrations considérés.

On constate que pour la totalité des cas, l'erreur sur le calcul de la rigidité est inférieure à 20% dont 24 cas sur 27 (soit 89% des cas) avec une erreur inférieure à 10%. Ainsi, la précision obtenue par le calcul simultané de 27 cas de vibrations par méthode APHR étendue est donc des plus correctes compte-tenu du gain en temps de calcul obtenu.

En effet, il s'agit d'un compromis, gain en temps de calcul et précision souhaitée sur les résultats ; il est possible d'avoir plus de précision sur les résultats mais le gain en temps de



Numéro du cas	111	112	113	121	122	123	131	132	133
$K'$ ( $N/mm$ )	38.6	39.3	39.6	36.6	38.2	39.0	34.7	37.2	38.4
Erreur sur $K'$ (%)	2.82	1.0	0.04	8.62	4.22	1.84	13.96	7.27	3.66
Numéro du cas	211	212	213	221	222	223	231	232	233
$K'$ ( $N/mm$ )	42.7	41.0	40.1	40.7	40.0	39.6	38.9	39.1	39.1
Erreur sur $K'$ (%)	9.38	5.11	3.06	3.48	1.94	1.27	2.01	1.09	0.46
Numéro du cas	311	312	313	321	322	323	331	332	333
$K'$ ( $N/mm$ )	45.4	41.9	40.0	43.4	40.8	39.4	41.2	39.7	38.8
Erreur sur $K'$ (%)	19.14	9.99	5.44	13.1	6.77	3.58	6.89	3.36	1.61

**Tab. III.3** – Erreur sur le calcul de  $K'$

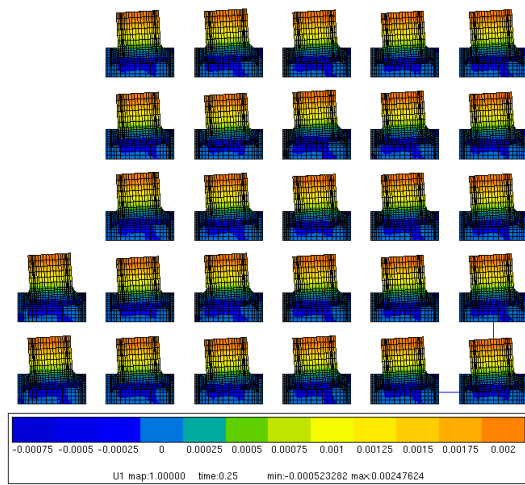
**c) Observation des modes empiriques  $\Phi_k$**

L'observation des modes empiriques constituant la base réduite qui a servi au calcul APHR étendu ne permet pas de valider ou non la pertinence de l'emploi de la méthode proposée, cependant il est intéressant de les examiner car ils permettent une meilleure compréhension du problème (ici multidimensionnel) considéré.

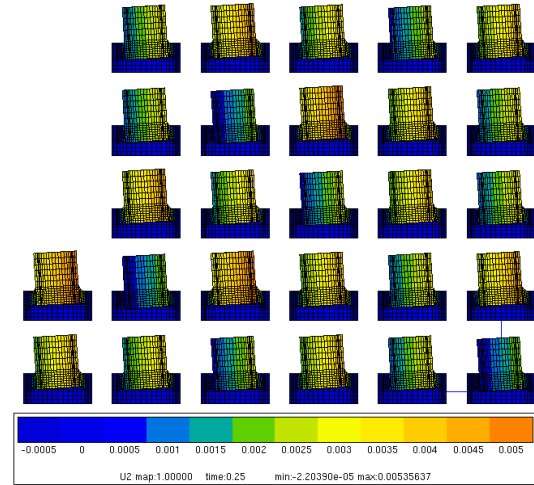
Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la base réduite multidimensionnelle est constituée de 17 fonctions. Par construction, dans une base réduite de type POD  $\Phi_k$ , les premières fonctions sont représentatives de modes globaux et ensuite plus  $k$  augmente plus ces modes sont associés à des phénomènes localisés et particularisés à des cas de sollicitation élémentaire.

Les figures III.13 et III.14 représentent respectivement les composantes suivant la direction 1 et 2 (voir figure III.5 pour les directions) du mode 1 ( $\Phi_1$ ).

On peut remarquer que les ordres de grandeur des déplacements dans les deux directions sont les mêmes ; ainsi ce premier mode peut être associé à un mode mixte de traction-flexion. De plus, si l'on compare les champs de déplacements de chacun des 27 cas, on observe que dans la direction 1 le champ de déplacement est indépendant des paramètres  $\{p\}_\alpha$  alors que dans la direction 2 celui-ci en dépend. En effet, les 3 paramètres de déplacements caractérisent le déplacement axial (direction 2 imposée).

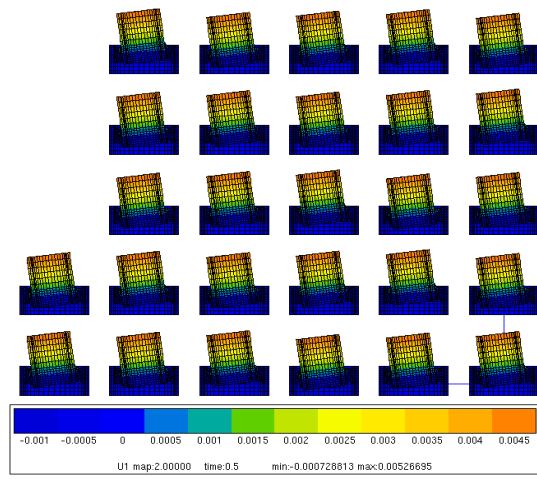


**Fig. III.13** – Composante suivant 1 du premier mode

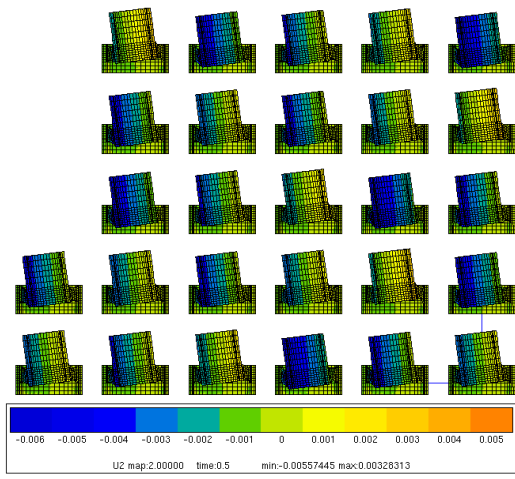


**Fig. III.14** – Composante suivant 2 du premier mode

Les figures III.15 et III.16 représentent respectivement les composantes suivant la direction 1 et 2 du mode 2  $\Phi_2$ .



**Fig. III.15** – Composante suivant 1 du deuxième mode



**Fig. III.16** – Composante suivant 2 du deuxième mode

Pour ce second mode, les mêmes observations peuvent être faites : il s'agit d'un second mode mixte flexion-traction.

Les figures III.17 et III.18 représentent respectivement les composantes suivant la direction 1 et 2 du mode 3  $\Phi_3$ .

Pour ce 3<sup>ème</sup> mode, on peut constater que la composante suivant la direction 2 est 3 à 10 fois supérieure à celle suivant 1 : ce mode se rapproche alors d'un mode de traction désaxée. Sur la figure III.18, on peut nettement distinguer une dépendance du mode avec les paramètres  $\{p\}_\alpha$ . De plus, il est possible de noter des similitudes entre les cas élémentaires (les trois cas en bleu foncé par exemple). On observe aussi que vis-à-vis de ce mode certains cas ont des contributions opposées (si l'on compare les bleus foncés et les oranges foncés par exemple).

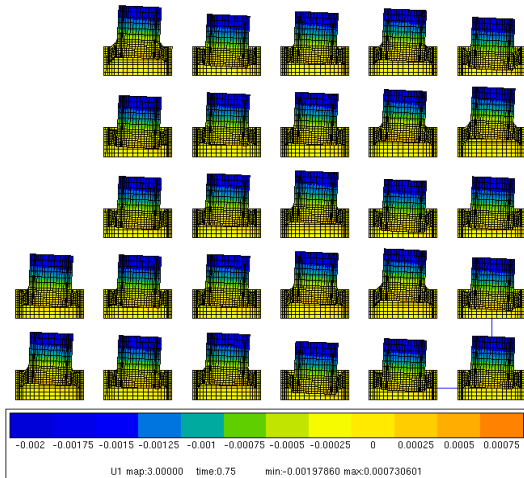


Fig. III.17 – Composante suivant 1 du troisième mode

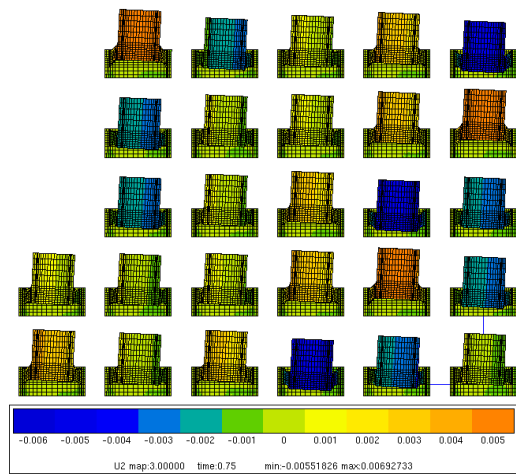


Fig. III.18 – Composante suivant 2 du troisième mode

Ces trois premiers modes sont des modes empiriques globaux. Ensuite les modes supérieurs représentent des modes de plus en plus localisés. La figure III.19 illustre un zoom de la composante suivant 2 du mode 5.

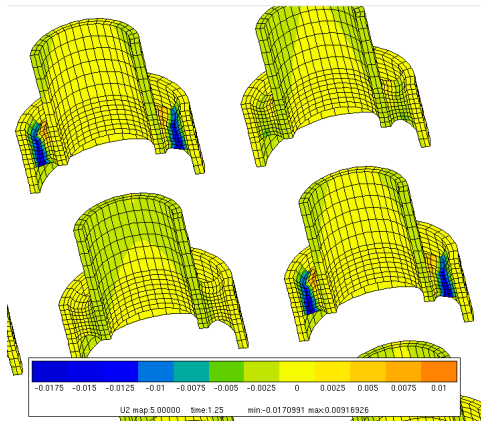


Fig. III.19 – Composante suivant la direction 2 du mode 5

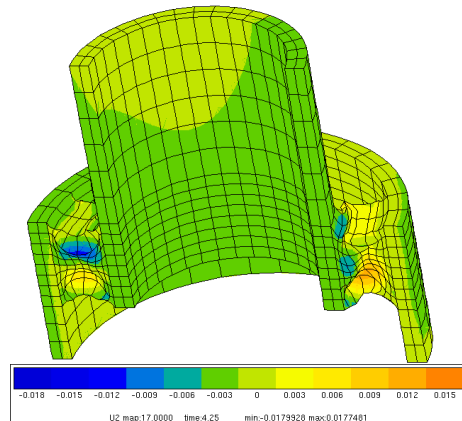


Fig. III.20 – Composante suivant la direction 2 du mode 17

Ce mode représente un gradient de déformation local dans la partie élastomère. Cependant ce gradient ne concerne pas tous les cas étudiés.

Enfin, la figure III.20 concerne le 17<sup>ème</sup> et dernier mode ; il s'agit d'un zoom sur un cas élémentaire. On constate que ce mode est très localisé : certains éléments sont énormément déformés.

Le nombre de modes empiriques formant la base réduite dépend étroitement de la précision choisie et donc du coefficient  $\epsilon_{POD}$ . Or on peut conclure ici qu'il n'est pas forcément judicieux de conserver un grand nombre de modes pour avoir la meilleure efficacité. En effet, comme nous venons de le voir, plus l'on avance dans les modes et plus ceux-ci sont représentatifs de modes très localisés voire d'instabilités qui peuvent ensuite entraîner des problèmes de divergence de calcul.

**d) Extension au problème fréquentiel**

Comme nous l'avions mis en avant en introduction de ce chapitre, pour une meilleure efficacité, seuls les paramètres  $\{p_s\}$  n'ayant aucune influence sur le caractère synchrone des transformations sont considérés pour la résolution simultanée. Le paramètre de fréquence  $f$  modifie les temps caractéristiques des transformations et est traité à part. Nous proposons de le considérer de manière séquentielle, au cas par cas.

L'avantage de la méthode est que la base réduite construite lors du calcul préliminaire du premier problème multidimensionnel peut être réutilisée en tant que base initiale des autres problèmes multidimensionnels. Pour résoudre le problème en fréquence, il va donc suffir de résoudre séquentiellement les deux autres problèmes en utilisant la même base réduite. Le tableau III.4 synthétise les temps de calcul correspondant à la génération de la base de données associée aux 81 cas de vibrations par méthode éléments finis classique et par la méthode proposée.

	with standard method (FEM)	with APHR method	
	1 case $\times$ 81	preliminary computation	final computation
de calcul time (s)	11 116	57427	$37875 \times 3$ $= 113625$
Total de calcul time for 81 cases (s)	900396 ( $\simeq 250h \simeq 10,5j$ )	171052 ( $\simeq 48h \simeq 2j$ )	

**Tab. III.4** – Comparaison des temps de calcul sur le calcul des 81 cas de vibration

Pour le calcul des temps de calcul concernant la méthode proposée, le calcul préliminaire n'est donc compté qu'une seule fois et l'on y ajoute 3 fois le temps de résolution d'un problème multidimensionnel (ici de 27 cas). Le gain en temps de calcul s'élève alors à 81%! Le temps de résolution des 81 cas de sollicitation vibratoire avec la méthode APHR étendue correspond approximativement à seulement 16 résolutions séquentielles par méthode éléments finis classiques.

L'erreur sur les résultats est équivalente à celle obtenue lors de la résolution du premier problème multidimensionnel soit majoritairement inférieure à 10% avec quelques cas entre 10 et 20%.

### III.4 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthodologie permettant de résoudre efficacement un problème paramétrique. Une méthode de réduction d'ordre de modèles basée sur la méthode APHR a été utilisée et une approche multidimensionnelle a été mise en place. Des résultats prometteurs en terme de temps de calcul, allant jusqu'à 80%, ont été obtenus tout en conservant une précision satisfaisante sur la rigidité.

L'avantage de la méthode proposée est qu'elle peut s'appliquer quel que soit le modèle de comportement considéré sans avoir à réécrire les équations constitutives le définissant.

Dans ce chapitre, les caractéristiques de la méthode ont été présentées sur un cas test en utilisant le modèle de Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005). Cependant, des résultats similaires ont été obtenus sur la pièce réelle Paustra (pièce présentée au Chapitre II section II.4.4 et ayant servi de validation) en utilisant le modèle de comportement DyMPPIEC détaillé au Chapitre II.

La résolution du problème paramétrique permet d'obtenir deux bases de données numériques associées respectivement à la rigidité et à la dissipation de la liaison souple pour 81 cas de sollicitations vibratoires. Il s'agit ensuite d'utiliser une méthode d'interpolation adéquate, par exemple linéaire, pour extrapoler ces valeurs de rigidité et de dissipation sur l'ensemble du domaine considéré. Ces données peuvent être représentées sous forme de surfaces de réponse par exemple.

Ensuite, pour définir le modèle de substitution de la liaison souple, il suffit, en fonction des caractéristiques de la sollicitation vibratoire appliquée, de chercher dans la surface de réponse les valeurs de rigidité et de dissipation correspondantes. Ainsi, il n'est plus nécessaire d'avoir recours à un calcul coûteux utilisant le modèle physique.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Afin de mieux prévoir la réponse dynamique de pièces anti-vibratoires en élastomère chargé, notamment en tenant compte de l'effet Payne, nous avons, dans un premier temps, caractérisé expérimentalement un silicone chargé de silice par un ensemble d'essais vibratoires de cisaillement et de compression.

Pour définir ces essais vibratoires, nous avons choisi d'utiliser quatre paramètres : la fréquence, l'amplitude de déformation, la déformation statique et la déformation maximale. Chaque sollicitation vibratoire à proprement dite définie par les trois premiers paramètres a donc été précédée par un préchargement cyclique jusqu'à une déformation maximale donnée jusqu'à stabilisation du matériau. Cette procédure permet non seulement de découpler l'effet Mullins de la réponse dynamique observée et donc de l'effet Payne mais de plus elle permet d'obtenir des boucles d'hystérésis dynamiques de forme quasiment elliptique et de contrainte moyenne constante pour une déformation statique donnée.

Après avoir calculé pour chaque sollicitation vibratoire les modules élastique et de perte associés, traduisant respectivement la rigidité et la dissipation du matériau, nous avons pu observer la forte dépendance de ces modules avec l'amplitude de déformation à fréquence fixée communément appelée effet Payne.

Puis, l'ensemble de ces données expérimentales nous a servi de base pour identifier le modèle de comportement matériau DyMPPIEC que nous avons mis en place.

Ensuite, pour développer un modèle de comportement matériau du silicone chargé de silice, nous avons choisi de nous appuyer sur un modèle existant : le modèle hyperviscoplastique de Qi-Boyce (Qi and Boyce, 2005). Ce modèle de comportement, développé pour un thermoplastique élastomère, a l'avantage de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes physiques que nous souhaitons simuler : l'hyperélasticité, la viscosité, l'effet Mullins, l'amplification des déformations engendrée par la présence de charges ou encore la compressibilité. Cependant, ce modèle n'avait pas été appliqué à des chargements de type vibratoire.

Nous avons constaté que le modèle de Qi-Boyce ne permet pas de prévoir l'effet Payne et donc tenté d'améliorer celui-ci. Pour cela, nous avons rajouté à celui-ci de l'érouissage cinématique non-linéaire. Cet ajout a permis non seulement de simuler globalement les tendances d'évolution des modules élastique et de perte engendrées par l'effet Payne mais aussi de pouvoir représenter les boucles stabilisées de préchargement.

Ainsi, le modèle de comportement DyMPPIEC permet de tenir compte à la fois de l'effet Mullins et de l'effet Payne. De plus, par construction, de la même manière que nous l'avons souhaité expérimentalement, les deux effets sont découplés. Le premier est simulé par la branche du modèle proposé définissant l'état d'équilibre sans plasticité du matériau et est entièrement défini par la donnée du préchargement. Le second est simulé par la branche du modèle proposé définissant le comportement dynamique et dissipatif.

Le modèle proposé a ensuite été identifié séparément sur les essais de cisaillement et de compression réalisés. Nous sommes arrivés à des résultats satisfaisants concernant la simulation des boucles dynamiques et de leurs modules élastique et de perte ; et donc de l'effet Payne. De plus, le modèle permet de simuler la réponse à des sollicitations vibratoires de déformation statique non nulle et prévoit la boucle stabilisée de préchargement. Cependant nous avons relevé qu'une amélioration concernant la prévision des courbes d'équilibre hyperélastiques notamment en compression pourrait être apportée.

Enfin, pour que le modèle de comportement proposé pour simuler la réponse dynamique de pièces anti-vibratoires puisse être intégré à la modélisation d'un plus grand système, comme celui de l'avion par exemple, nous avons proposé une méthodologie permettant de construire efficacement des bases de données qui permettront de définir un modèle de substitution à peu de degrés de liberté de ce dernier.

En effet, pour simplifier et accélérer la simulation de grands systèmes mécaniques, l'utilisation de modèles de substitution de sous-système à comportement non-linéaire s'avère très efficace. Cependant, pour que cette représentation ait un sens et soit efficace, la construction du modèle de substitution doit être en étroite relation avec le modèle physique. Ainsi, pour définir les composantes de ce modèle simplifié, des bases de données associées aux prédictions de comportement obtenues par le modèle physique du sous-système sont nécessaires. Pour les générer, un problème paramétrique doit être considéré et donc un grand nombre de problèmes utilisant le modèle proposé doit être résolu.

C'est pourquoi, nous avons proposé une méthodologie basée sur une méthode de réduction d'ordre de modèle : l'APHR permettant de résoudre efficacement un problème paramétrique. Ainsi, en mettant en place une approche multidimensionnelle en étendant la méthode APHR, nous sommes parvenus à des résultats prometteurs en terme de temps de calcul, allant jusqu'à 80% tout en conservant une précision satisfaisante sur les prédictions de rigidité par exemple. La méthodologie proposée est incrémentale et a l'avantage de pouvoir s'appliquer quel que soit le modèle de comportement considéré sans avoir à réécrire les équations constitutives le définissant.

# Résultats complémentaires

---

## Résultats complémentaires concernant la simulation des essais de cisaillement

Les graphiques de cette annexe viennent compléter les observations de la simulation des essais de cisaillement sur VER par le modèle DyMPPIEC abordées au Chapitre II section II.4. Les paramètres matériau utilisés sont ceux synthétisés dans les tableaux II.11 et II.12.

La figure A.1 représente la prévision du cycle stabilisé du préchargement jusqu'à  $\epsilon_{max} = 50\%$ .

Cette figure permet de faire une comparaison avec la figure II.93 : simulation obtenue sur la pièce de validation.

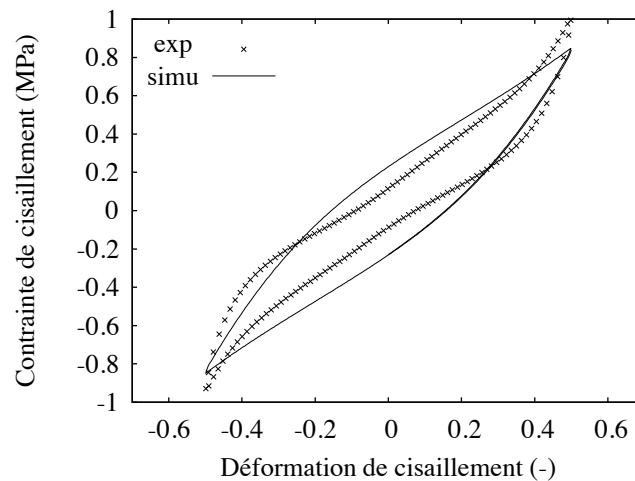
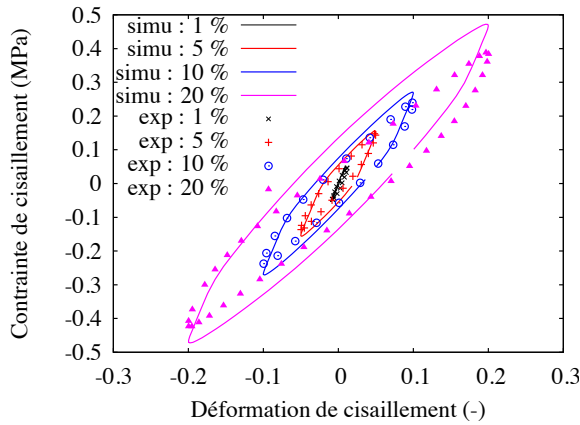


Fig. A.1 – Simulation du préchargement jusqu'à 50%

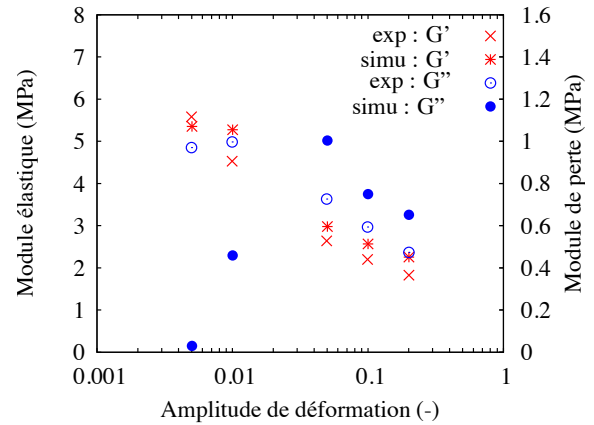


Sur les figures A.2 et A.3 sont comparées, pour des sollicitations dynamiques correspondant à un préchargement jusqu'à 50%, une déformation statique nulle, une fréquence de 15 Hz et des amplitudes de déformations allant de 0.5 à 20%, respectivement les boucles dynamiques expérimentales et simulées et les modules élastique et de perte expérimentaux et simulés.

Ces figures permettent de faire une comparaison avec les figures II.94, II.95, II.96 et II.97 : simulations obtenues sur la pièce de validation.

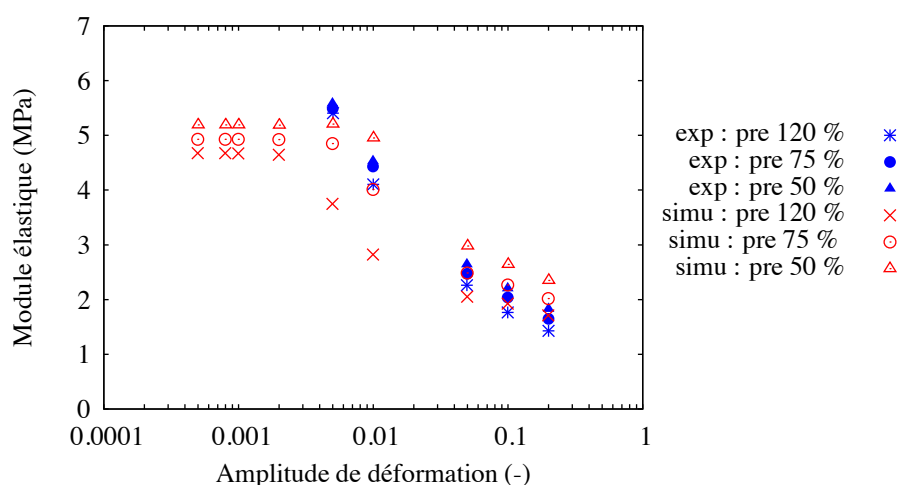


**Fig. A.2** – Comparaison des boucles dynamiques expérimentales et simulées  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (50\%, 0\%, -, 15Hz)$

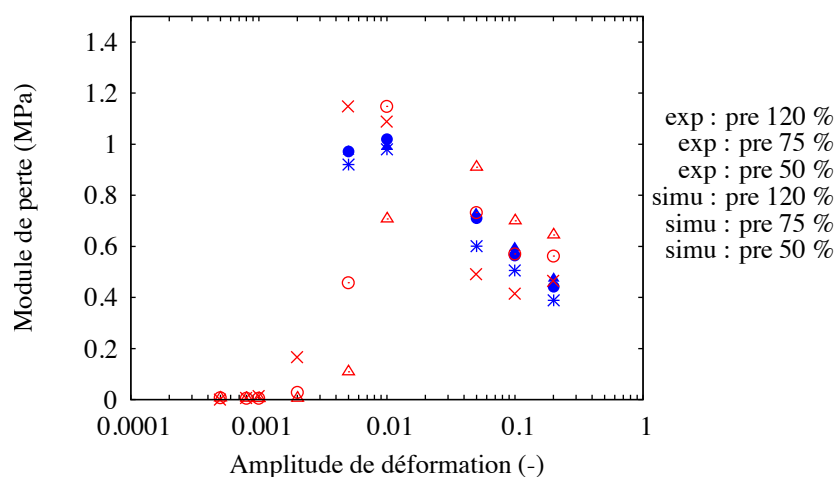


**Fig. A.3** – Comparaison des modules élastique et de perte expérimentaux et simulés  
 $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (50\%, 0\%, -, 15Hz)$

Les figures A.4 et A.5 illustrent la simulation des courbes de Payne obtenues pour différents niveaux de déformation maximale ( $\epsilon_{max}$ ).



**Fig. A.4** – Simulation de l'évolution du module élastique pour différents niveaux de déformation maximale de préchargement ( $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (-, 0\%, -, -, 15Hz)$ )



**Fig. A.5** – Simulation de l'évolution du module de perte pour différents niveaux de déformation maximale de préchargement ( $(\epsilon_{max}, \epsilon_{moy}, \Delta\epsilon, f) = (-, 0\%, -, -, 15Hz)$ )

On peut constater qu'en comparaison avec les observations expérimentales, le modèle accentue la dépendance avec le niveau de déformation maximale. En effet, par construction les trois courbes d'équilibre sont de plus en plus adoucies lorsque  $\epsilon_{max}$  augmente et cela modifie donc la valeur du palier de module élastique aux petites amplitudes de déformation ; celui-ci dépendant de la somme de deux contributions : la valeur du paramètre  $E$  et du module tangent aux courbes d'équilibre.



# Bibliographie

- Amin, A., Lion, A. Sekita, S., and Okui, Y. (2006). Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear : experimental identification and numerical verification. *Int. J. of Plasticity*, 22 :1610–1657.
- Ammar, A., Chinesta, F., Diez, P., and Huerta, A. (2010). An error estimator for separated representations of highly multidimensional models. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 199 :1872–1880.
- Amsallem, D. and Farhat, C. (2008). An interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 46 :1803–1813.
- Ansari, H., Tupy, M., and *al.* (2010). Construction and use of surrogate models for the dynamic analysis of multibody systems. *SAE Int. J. of Passenger Cars-Mechanical Systems*, 3 :8–20.
- Antoulas, A. (2005). An overview of approximation methods for large-scale dynamical systems. *Annual Reviews in Control*, 29 :181–190.
- Arruda, E. and Boyce, M. (1993). A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Sol.*, 41 :389–412.
- Arruda, E. and Boyce, M. (2000). Constitutive models of rubber elasticity : a review. *Rubber Chem. Tech.*, 73 :504–523.
- Atashi, H. and Shiva, M. (2010). Statistical analysis, modeling an optimization of silica, rubber ratio, and sulfur levels in truck tire tread compound. *Asian Journal of Chemistry*, 22 :6451–6470.
- Beda, T. (2007). Modeling hyperelastic behavior of rubber : a novel invariant-based and a review of constitutive models. *Journal of Polymer Science B*, 45 :1713–1732.
- Bergmann, M. and Cordier, L. (2006). Réduction de dynamique par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Optimisation et contrôle des écoulements et des transferts, Ecole de printemps OCET, Aussois. 1-57.
- Bergmann, M. and Cordier, L. (2008). Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and pod reduced-order models. *J. of Computational Physics*, 227 :7813–7840.
- Bergström, J. and Boyce, M. (1998). Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Sol.*, 46 :931–954.
- Bergström, J. and Boyce, M. (1999). Mechanical behavior of particle-filled elastomers. *Rubber Chem. Tech.*, 72 :633–656.
- Bergström, J. S. (1999). *Large strain time-dependence behavior of elastomeric materials*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.

- Bhuiyan, A., Okui, Y., Mitamura, H., and Imai, T. (2009). A rheology model of high damping rubber bearings for seismic analysis : identification of nonlinear viscosity. *Int. J. Solids Structures*, 46 :1778–1792.
- Bilicz, S., Lambert, M., and Gyimóthy, S. (2010). Kriging-based generation of optimal databases as forward and inverse surrogate models. *Inverse problems*, 26(7) :074012, 15 p.
- Biron, M. (2007). Silicones et siloxanes. *Techniques de l'ingénieur*, N2880.
- Bueche, F. (1961). Mullins effect and rubber-filler interaction. *Journal of Applied Polymer Science*, 5 :271–281.
- Cantournet, S. and Desmorat, R. (2003). Modélisation thermodynamique du frottement interne et de l'hystérésis d'un élastomère. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(4) :265–270.
- Cantournet, S., Desmorat, R., and Besson, J. (2009). Mullins effect and cyclic stress softening of filled elastomer by internal sliding and friction thermodynamics model. *Int. J. Solids Structures*, 46 :2255–2264.
- Chazeau, L., Brown, J., Yanyo, L., and Sternstein, S. (2000). Modulus recovery kinetics and other insights into the payne effect for filled elastomers. *Polymer composites*, 21 :202–222.
- Clement, F., Bokobza, L., and Monnerie, L. (2005). Investigation of the payne effect and its temperature dependence on silica-filled polydimethylsiloxane networks. part ii : test of quantitative models. *Rubber Chem. Tech.*, 78 :232–244.
- Diani, J., Brieu, M., and Gilormini, P. (2006a). Observation and modeling of the anisotropic visco-hyperelastic behavior of a rubberlike material. *Int. J. Solids Structures*, 43 :3344–3056.
- Diani, J., Brieu, M., and Vacherand, J.-M. (2006b). A damage directional constitutive model for mullins effect with permanent set and induced anisotropy. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 25 :483–496.
- Diani, J., Brieu, M., Vacherand, J.-M., and Rezgui, A. (2004). Directional model for isotropic and anisotropic hyperelastic rubber-like materials. *Mech. of Materials*, 36 :313–321.
- Diani, J., Fayolle, B., and Gilormini, P. (2009). A review on the mullins effect. *Eur. Polymer J.*, 45 :601–612.
- Doll, D. and Schweizerhof, K. (2000). On the developpement of volumetric strain energy functions. *Journal of applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 67 :17–21.
- Donnet, J. and Vidal, A. (1986). Carbon black : surface properties and interactions with elastomers. *Advances in Polymer Science*, 76 :103–127.
- Dutta, N. and Tripathy, D. (1992). Effects of types of fillers on the molecular relaxation characteristics, dynamical, and physical properties of rubber vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, 44 :1635–1648.
- Dvorak, G., Wafa, A., and Bahei-El-Din, Y. (1994). Implementation of the transformation field analysis for inelastic composite materials. *Computational Mechanics*, 14 :201–228.
- Fahl, M. (2000). *Trust-region methods for flow control based on reduced order modeling*. PhD thesis, Trier University.
- Flory, P. and Erman, B. (1982). Theory of elasticity of polymer networks 3. *Macromolecules*, 15(3) :800–806.
- Fritzen, F. and Bohlke, T. (2010). Three-dimensional finite element implementation of the nonuniform transformation field analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 84 :803–829.
- Gent, A. (1996). A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chem. Tech.*, 69 :59–61.

- Gent, A. and Thomas, A. (1958). Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber. *Journal of Polymer Science*, 28(118) :625–628.
- Govindjee, S. and Simo, J. (1991). A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating mullins' effect. *J. Mech. Phys. Sol.*, 39(1) :87–112.
- Guth, E. (1945). Theory of filler reinforcement. *J. Appl. Phys.*, 16 :20–25.
- Hamed, G. and Hatfield, S. (1989). On the role of bound rubber in carbon-black reinforcement. *Rubber Chem. Tech.*, 62 :143–156.
- Harwood, J. and Payne, A. (1966). Stress softening in natural rubber vulcanizates. part iii. carbon black filled vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, pages 315–324.
- Hofer, P. and Lion, A. (2009). Modelling of frequency -and amplitude- dependent material properties of filler-reinforced rubber. *J. Mech. Phys. Sol.*, 57 :500–520.
- Jean, A. (2009). *Etude d'un élastomère chargé, de la nanostructure au macro-comportement*. PhD thesis, Mines ParisTech.
- Kraus, G. (1984). Mechanical losses in carbon-black-filled rubbers. *J. Appl. Polym. Sci. : Appl. Polym. Symp.*, 39 :75–92.
- Lambert-Diani, J. and Rey, C. (1999). New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 18(6) :1027–1043.
- Lelievre, T. (2009). *Analyse mathématique et numérique de modèles pour les matériaux, de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique*. HDR, Université Paris IX Dauphine.
- Lieu, T. and Lesoinne, M. (2004). Parameter adaptation of reduced order models for three-dimensional flutter analysis. *42<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, 888 :1–9.
- Lion, A. (1998). Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories : experiments and theory. *J. Mech. Phys. Sol.*, 46 :895–930.
- Lion, A. (1999). Strain-dependent dynamic properties of filled rubber : a non-linear viscoelastic approach based on structural variables. *Rubber Chem. Tech.*, 72 :410–429.
- Lion, A., Kardelky, C., and Haupt, P. (2003). On the frequency and amplitude dependence of the payne effect : theory and experiments. *Rubber Chem. Tech.*, 76 :533–547.
- Lumley, J. (1967). The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation, Nauka, Moscow*, pages 166–178.
- Maier, P. and Goritz, D. (1996). Molecular interpretation of the payne effect. *Kautschuk und Gummi, Kunststoffe*, 49 :18–21.
- McKay, M., Beckman, R., and Conover, W. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21 :239–245.
- Michel, J. and Suquet, P. (2003). Nonuniform transformation field analysis. *Int. J. Solids Structures*, 40 :6937–6955.
- Montes, H., Chaussée, T., Papon, A., Lequeux, F., and Guy, L. (2010). Particles in model filled rubber : Dispersion and mechanical properties. *Eur. Phys. J. E*, 31 :263–268.
- Montes, H., Lequeux, F., and Berriot, J. (2003). Influence of the glass transition temperature gradient on the nonlinear viscoelastic behavior in reinforced elastomers. *Macromolecules*, 36(21) :8107–8118.
- Mooney, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.*, 11 :582–592.

- Mullins, L. (1947). Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research*, 45 :275–289.
- Mullins, L. (1969). Softening of rubber by deformation. *Rubber Chem. Tech.*, 42 :339–362.
- Mullins, L. and Tobin, N. (1957). Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber. *Rubber Chem. Tech.*, 30 :555–571.
- Mullins, L. and Tobin, N. (1965). Stress softening in rubber vulcanizates. part 1 : use of a strain amplification factor to describe elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber. *Journal of Applied Polymer Science*, 9 :2993–3009.
- Nouy, A. (2010). A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 199 :1603–1626.
- Ogden, M. (1972). Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proc. Royal Soc. London A*, 326 :567–583.
- Payne, A. (1960). A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, 3 :127.
- Payne, A. (1966). Effect of dispersion on dynamic properties of filler-loaded rubbers. *Rubber Chem. Tech.*, 39 :365–374.
- Payne, A. (1974). Hysteresis in rubber vulcanizates. *Journal of Polymer Science : Polymer Symposia*, 48 :169–196.
- Ponte Castaneda, P. (1989). The overall constitutive behaviour of nonlinearly elastic composites. *Proc. Royal Soc. London A*, 422 :147–171.
- Prud'homme, C., Rovas, D., Veroy, K., and *al.* (2002). Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations : Reduced-basis output bounds methods. *Journal of Fluids Engineering*, 124 :70–80.
- Pruliere, E., Chinesta, F., and Ammar, A. (2010). On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the proper generalized decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, page à paraître.
- Qi, H. and Boyce, M. (2004). Constitutive model for stretch-induced softening of the stress-stretch behavior of elastomeric materials. *J. Mech. Phys. Sol.*, 52 :2187–2205.
- Qi, H. and Boyce, M. (2005). Stress-strain behaviour of thermoplastic polyurethanes. *Mech. of Materials*, 37 :817–839.
- Ravindran, S. (2000). Reduced-order adaptative controllers for fluid flows using pod. *J. of Scientific Computing*, 15 :457–478.
- Rendek, M. and Lion, A. (2010). Amplitude dependence of filler-reinforced rubber : experiments, constitutive modelling and fem - implementation. *Int. J. Solids Structures*, 47 :2918–2936.
- Robertson, C., Bogoslovov, R., and Roland, C. (2007). Effect of structural arrest on poisson's ratio in nanoreinforced elastomers. *Physical Review E*, 75(051403).
- Robertson, C. and Roland, C. (2008). Influence of particle size and polymer-filler coupling on viscoelastic glass transition of particle-reinforced polymers. *Macromolecules*, 41 :2727–2731.
- Roussette, S., Michel, J., and Suquet, P. (2009). Nonuniform transformation field analysis of elastic-viscoplastic composites. *Composite Science Technology*, 69 :22–27.
- Rutherford, A. (2005). Use of response surface metamodels for identification of stiffness and damping coefficients in a simple dynamic system. *Shock and Vibration*, 12 :317–331.

- Ryckelynck, D. (2005). A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Int. J. of Computational Physics*, 202 :346–366.
- Ryckelynck, D. (2009). Hyper reduction of mechanical models involving internal variables. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 77(1) :75–89.
- Ryckelynck, D., Chinesta, F., Cueto, E., and Ammar, A. (2006). On the a priori model reduction : overview and recent developments. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 13(1) :91–128.
- Ryckelynck, D., Missoum, D., Musienko, A., and Cailletaud, G. (2010). Toward “green” mechanical simulations in materials science : hyper-reduction of a polycrystal plasticity model. *Eur. J. Computational Mech.*, 19(4) :365–388.
- Ryckelynck, D. and Missoum Benziane, D. (2010). Multi-level a priori hyper reduction of mechanical models involving internal variables. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 199 :1134–1142.
- Sarbandi, B., Cartel, S., Besson, J., and Ryckelynck, D. (2010). Truncated integration for simultaneous simulation of sintering using a separated representation. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 17(4) :455–463.
- Schmidt, R. and Glauser, M. (2004). Improvements in low dimensional tools for flow-structure interaction problems : using global pod. *42<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, 889.
- Simo, J. (1987). On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 60(2) :153–173.
- Sirovich, L. (1987). Turbulence and the dynamics of coherent structures parti : coherent structures , partii : symmetries and tranformations and partiii : dynamics and scaling. *Quaterly of applied mathematics*, 65 :561–590.
- Treloar, L. R. G. (1949). *The physics of rubber elasticity*. Oxford University Press.
- Valorani, M., Najm, H., and Goussis, D. (2003). Csp analysis of a transient flame-vortex interaction : time scales and manifolds. *Combustion and Flame*, 134 :35–53.
- Wang, X. and Robertson, C. (2005). Strain-induced nonlinearity of filled rubbers. *Physical Review E*, 72(031406).







## Du modèle matériau à la mécanique des systèmes : étude dynamique d'une liaison souple en silicone chargé de silice

**Résumé :** Grâce à leur propriété d'amortissement, les élastomères chargés sont couramment utilisés dans l'industrie pour réaliser des pièces anti-vibratoires. Cependant, des phénomènes complexes et couplés, comme l'effet Mullins et l'effet Payne, rendent le comportement de ces matériaux fortement non-linéaire. Peu de modèles permettent de prédire la réponse dynamique de ces pièces quelle que soit la sollicitation appliquée.

L'objectif principal de cette étude est de proposer un modèle de comportement mécanique du matériau intégrant la prise en compte de l'effet Payne afin de mieux prévoir la réponse dynamique de pièces anti-vibratoires en élastomère chargé et de permettre notamment une meilleure conception de ces pièces en fonction de leur utilisation (fréquence à atténuer, charge statique supportée ...). Ensuite, nous avons développé une chaîne de modèles allant du modèle de comportement matériau au modèle de substitution de la liaison souple intégrable dans un modèle dynamique de grand système, comme un avion par exemple. Pour cela, une méthode de réduction d'ordre de modèle a notamment été développée pour résoudre efficacement le problème paramétrique relatif à la construction du modèle de substitution.

Ainsi, dans un premier temps, une campagne d'essais dynamiques, caractérisés par une fréquence, une amplitude de déformation et une déformation statique, sur éprouvettes à la fois en cisaillement puis en compression a été menée. Ceux-ci ont notamment permis de caractériser l'effet Payne vis à vis de ces différents paramètres.

Ensuite, nous avons cherché à développer un modèle de comportement matériau permettant de simuler ces essais et donc de prédire la réponse dynamique de la liaison souple, notamment en terme de rigidité et de dissipation, quelles que soient les sollicitations statiques et dynamiques appliquées. Pour cela, un modèle de comportement hyperviscoplasticité : le modèle DyMPPIEC, basé sur celui de Qi-Boyce, a été enrichi au Centre des Matériaux. Les paramètres matériau, associés au modèle développé, ont été identifiés à partir des données expérimentales sur un élément de volume représentatif puis le modèle a été validé sur une structure réelle.

Enfin, la capacité de ce modèle à prévoir l'effet Payne même pour des sollicitations dynamiques de déformation statique non nulle tout en intégrant l'effet Mullins a été mise en avant.

**Mots clés :** élastomère chargé, effet Payne, étude dynamique, effet Mullins, méthode APHR

## From the material model to systems mechanic : dynamical analysis of a flexible link in silicone with silica

**Abstract:** Thanks to their damping property, filled elastomers are commonly used to make anti-vibration devices. Nevertheless, their behavior is highly non-linear due to complex and coupled phenomena, such as Mullins effect and Payne effect. Thus, few models make it possible to predict the dynamical response of those devices for all kind of loading.

The main goal of this study is to build a constitutive model able to take into account of the Payne effect in order to better predict the dynamical response of filled elastomers under dynamical loading and then optimize the design of those devices regarding to their use. Then we went through a series of models from a behavior model to a surrogate model integrable in the model of a larger structure, such as an airplane for instance. To this aim, we made use of a reduction order model method, the APHR, to efficiently solve the parametric problem associated to the definition of the surrogate model.

To characterize the material behavior, many dynamical tests have been carried out with different frequencies, strain amplitude and static strain on both shear and compression samples. Thanks to those tests, we were able to point out Payne effect features regarding to the different parameters.

Then, the aim was to be able to simulate those tests with a constitutive model in order to predict the dynamical response of filled elastomer especially in terms of rigidity and damping. That is why an hyperviscoplastic model : the DyMPPIEC model, based on the Qi-Boyce model, was enriched at "Centre des Matériaux". The model parameters of this model have been identified from the experimental tests and then the model has been checked on a real structure.

With this model we not only make it possible to take into account of the Payne effect in the prediction of the dynamical response but also to simulate the response of vibration loading with a non zero static level of strain. Furthermore, the Mullins effect is also predicted by the model.

**Keywords:** filled elastomer, Payne effect, dynamical study, Mullins effect, APHR method

