



**HAL**  
open science

# Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation.

Laura Taupin

► **To cite this version:**

Laura Taupin. Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation.. Acoustique [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2011. Français. NNT: . pastel-00653553

**HAL Id: pastel-00653553**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00653553>**

Submitted on 20 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE À  
**L'ÉCOLE DOCTORALE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

par Laura TAUPIN

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

---

**Modélisation des méthodes ultrasonores de surveillance de structures  
aéronautiques instrumentées en vue de leur optimisation**

---

**Jury composé de :**

**Rapporteurs**

- M. Sébastien Grondel, professeur, IEMN, Université de Valenciennes
- M. Mohamed Ichchou, professeur, École Centrale, Lyon

**Examineurs**

- M<sup>me</sup> Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, directrice de recherches au CNRS, ENSTA, Paris
- M. Philippe Gagnol, professeur émérite, Université de Technologie de Compiègne
- M. Alain Lhémy, expert senior CEA, Saclay
- M. Vincent Pagneux, directeur de Recherches au CNRS, Université du Maine
- M. Benoît Petitjean, ingénieur expert, EADS-IW, Suresnes



## REMERCIEMENTS

*Je souhaite remercier toutes les personnes qui ont permis la réalisation de cette thèse.*

*Les travaux présentés dans ce mémoire se sont déroulés dans le laboratoire de Modélisation et Simulation du département DISC du CEA dans le cadre d'une collaboration EADS IW-CEA LIST. Je tiens à remercier M. Philippe Benoist et Mme Clarisse Poidevin, mes chefs de département successifs, de m'avoir permis de réaliser cette thèse, ainsi que M. Steve Mahaut de m'avoir accueillie dans son laboratoire.*

*Je voudrais remercier chaleureusement Mme Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia d'avoir accepté de diriger ma thèse. Sa patience, sa disponibilité et sa grande pédagogie m'ont permis de m'initier aux mathématiques appliquées, domaine éloigné de mes connaissances initiales.*

*Je désire exprimer ma gratitude envers M. Sébastien Grondel et M. Mohamed Ichchou pour leur intérêt envers mon sujet d'étude et pour avoir accepté de rapporter mes travaux dans des délais très courts. Je tiens également à remercier très sincèrement M. Philippe Gatignol d'avoir présidé mon jury et M. Vincent Pagneux d'avoir accepté d'en faire partie.*

*J'adresse mes remerciements à mes encadrants successifs chez EADS IW, M. Guillaume Inquiété et M. Benoit Petitjean, pour leurs conseils avisés au cours de nos échanges.*

*Je remercie Vahan Baronian pour son aide, ses connaissances approfondies sur le sujet, et le temps qu'il m'a consacré. Mes remerciements vont également à Colin Chambeyron. Sa connaissance de Mélina, sa gentillesse, et sa disponibilité ont été des atouts précieux.*

*Pour finir je souhaite remercier très sincèrement M Alain Lhémy de m'avoir proposé ce sujet d'étude. Ses nombreux conseils, sa disponibilité et sa culture bibliographique sans limite m'ont permis de réaliser cette thèse dans les meilleures conditions possibles. Une fois encore je le remercie pour son investissement permanent, et m'excuse pour toutes ses corrections aoutiennes...*

*Un grand merci à toutes les personnes du DISC pour leur accueil ; particulièrement à Sophie, Benoit et Amira qui m'ont accueilli dès le début de mon stage. Je tiens à saluer tous les thésards successifs qui ont rendu cette thèse très agréable, Bo avec qui j'ai partagé les dernières étapes de thèse et Chiara mon italienne préférée !*

*J'adresse une pensée particulière pour Val et son éternelle soutien même si on ne se voit que trop peu ; pour Sarah que cette thèse m'a permis de connaître, merci pour tous les bons moments passés. Et bien évidemment à mon copain qui m'a supporté ces derniers mois et a rendu plus agréable cette période difficile.*

*J'adresse enfin mes remerciements à mes amis du « poney » pour tous ces bons moments passés à Chevreuse et en dehors ! Je ne pourrais pas tous les citer la liste est bien trop longue. J'ai une pensée particulière pour Julie et Manou, merci pour votre soutien, nos discussions MTW et pour vos encouragements (même si parfois un peu autoritaires).*

*Pour terminer, je souhaite remercier ma famille, spécialement mes parents sans qui rien de tout cela n'aurait été possible.*



# TABLE DES MATIERES

Introduction.....	9
Chapitre 0. Contexte SHM actuel et motivation industrielle.....	15
0.1 Contexte industriel général pour le SHM.....	17
0.2 SHM par ondes guidées.....	19
0.2.1 Les ondes guidées .....	19
0.2.2 Présentation des transducteurs généralement utilisés pour l'émission et la réception d'onde ultrasonore guidée.....	20
0.2.2.1 Transducteurs collés à la structure .....	20
0.2.2.2 Transducteurs intégrés à la structure.....	23
0.2.3 État de l'art de la détection de défaut par ondes guidées dans des structures composites et application au SHM .....	24
0.3 Structures aéronautiques composites viscoélastiques .....	26
0.3.1 Structures composites .....	26
0.3.1.1 Pli unidirectionnel .....	26
0.3.1.2 Le composite multicouche (stratifié).....	26
0.3.2 Existant au CEA pour l'homogénéisation : contrôle par ondes de volumes.....	28
0.3.3 Différentes méthodes de prise en compte de la viscoélasticité.....	29
0.4 Résumé du Chapitre .....	30
Partie I: modélisation et étude de la propagation guidée dans une structure de type plaque anisotrope composite multicouche viscoélastique. ....	32
Chapitre 1. Calcul des modes guidés dans une plaque anisotrope composite multicouche viscoélastique .....	35
1.1 Etat de l'art de la propagation guidée dans des structures composites multicouches viscoélastiques.....	37
1.1.1 Méthodes analytiques.....	37
1.1.2 Méthodes semi-analytiques.....	38
1.1.3 La méthode SAFE.....	39
1.2 Méthode SAFE : calcul semi-analytique/éléments finis .....	39
1.2.1 Développements déjà réalisés au CEA .....	39
1.2.2 Méthode SAFE pour la prise en compte de plaques composites multicouches viscoélastiques. ....	40
1.3 Développements réalisés .....	44
1.3.1 Notion de vitesse de phase, de lenteur et de vitesse de groupe.....	44
1.3.2 Vecteur de Poynting et vitesse d'énergie.....	46
1.3.3 Prise en compte de la colle pouvant se trouver entre deux plis d'une plaque composite .....	48
1.3.3.1 Un besoin lié à la construction des composites.....	48
1.3.3.2 Influence des couches de colles sur les ondes guidées.....	49

1.4	Résumé du chapitre .....	51
Chapitre 2.	Validation et étude numérique de la méthode .....	53
2.1	Nature des modes résultants de la méthode SAFE .....	55
2.2	Étude de la discrétisation du calcul éléments finis dans l'épaisseur .....	57
2.3	Validation par des résultats issus de la littérature .....	59
2.3.1	Comparaisons avec la méthode de matrice de transfert pour un composite multicouche élastique .....	60
2.3.2	Comparaisons par une méthode analytique pour un milieu anisotrope et viscoélastique .....	61
2.4	Étude comparative réalisée avec la méthode WFE .....	62
2.5	Résumé du Chapitre .....	64
Chapitre 3.	Exploitation de la méthode sur différentes plaques composites et conséquences pour le SHM .....	67
3.1	Intérêt de l'étude .....	69
3.2	Étude de la dispersion des ondes guidées dans une direction de propagation .....	70
3.3	Étude de la propagation dans le plan de la plaque .....	71
3.3.1	Lenteurs et vitesses d'énergie .....	71
3.3.2	Étude détaillée des modes dans l'épaisseur de la plaque composite .....	74
3.4	Influence de la répétition des plis d'orientation 45°, 0°, 135°, 90° sur l'anisotropie de la structure multicouche .....	76
3.5	Résumé du chapitre – conclusion pour le SHM .....	80
Partie II :	Diffraction des ondes guidées par un raidisseur en incidence oblique. ....	82
Chapitre 4.	Exploitation de l'invariance par translation : réduction à une famille de problèmes 2D. ....	85
4.1	Du problème 3D à la formulation 2D-3 composantes paramétrée en $\gamma$ .....	87
4.1.1	Mise en avant de l'invariance par translation des structures raidies étudiées .....	87
4.1.2	Écriture des équations des ondes paramétrées en $\gamma$ .....	88
4.2	Adaptation de la méthode SAFE au calcul des modes à $\gamma$ fixé .....	90
4.2.1	Illustration de la loi de Snell-Descartes .....	90
4.2.2	Une adaptation de la méthode SAFE : la méthode SAFE- $\gamma$ .....	91
4.2.3	Exemple d'application de la méthode SAFE- $\gamma$ pour des plaques multicouches composites anisotropes .....	92
4.3	Résumé du chapitre 4 .....	95
Chapitre 5.	Méthode hybride éléments finis/modale de résolution des problèmes 2D .....	97
5.1	Contraintes liées au modèle hybride .....	99
5.1.1	Raccordement modal et réflexions aux frontières .....	99
5.1.2	État de l'art .....	99
5.1.2.1	Méthode des couches absorbantes .....	99
5.1.2.2	Méthode PML ou méthode de couches parfaitement adaptées .....	100
5.1.2.3	Conditions transparentes aux frontières : de la limitation des DtN pour le cas vectoriel à la méthode YtX .....	101
5.2	Construction d'un opérateur de projection sur les modes .....	102

5.2.1	Décomposition modale et variables mixtes .....	102
5.2.2	Calcul des amplitudes modales lorsque la relation de Fraser est vérifiée.....	103
5.2.3	Calcul des amplitudes modales dans le cas général .....	103
5.2.3.1	Introduction de la matrice de Gram $\mathcal{O}$ .....	103
5.2.3.2	Formules de projection en fonction de $\mathbf{X}^y$ ou $\mathbf{Y}^y$ .....	104
5.2.3.3	Traitement des deux frontières $\Sigma^+$ et $\Sigma^-$ .....	105
5.3	Calcul hybride SAFE-EF.....	106
5.3.1	Conditions transparentes aux frontières entre le guide non-perturbé et le domaine éléments finis .....	106
5.3.2	Formulation variationnelle du problème à $\gamma$ fixé .....	109
5.4	Résumé du chapitre .....	113
Chapitre 6. Validation de la méthode et étude de stabilité numérique .....		115
6.1	Implémentation des conditions aux frontières transparentes et de la dépendance en $\gamma$ .....	117
6.2	Validation de la méthode hybride .....	117
6.2.1	Étude d'une plaque sans élément diffractant .....	118
6.2.2	Étude de la diffraction par un élément de forme complexe .....	121
6.3	Étude de la précision de la méthode hybride.....	123
6.3.1	Influence de la troncature de la série sur le calcul numérique .....	123
6.3.2	Étude du conditionnement de la matrice de Gram .....	125
6.4	Résumé du Chapitre .....	130
Chapitre 7. Études menées sur des cas réalistes .....		133
7.1	Présentation des résultats du Benchmark proposé par P.D. Wilcox à la conférence Review of Progress in QNDE 2011.....	135
7.1.1	Description de la plaque raidie.....	135
7.1.2	Comparaison des coefficients de diffraction pour le mode $S_0$ .....	136
7.1.3	Comparaison des réponses temporelles .....	140
7.2	Étude d'une structure raidie multicouche EADS .....	142
7.2.1	Présentation de la plaque raidie .....	142
7.2.2	Propagation guidée dans la plaque simple – méthode SAFE.....	143
7.2.3	Étude de la diffraction – méthode Hybride SAFE/FE .....	144
7.3	Résumé du Chapitre .....	153
Conclusion .....		155
Références Bibliographiques .....		159
Annexe .....		167





# INTRODUCTION

Dans le domaine aéronautique, et notamment pour EADS (European Aeronautic Defence and Space), un examen des structures régulier est une priorité pour s'assurer de leur bon état et donc de la sûreté de l'utilisation des appareils. Les techniques de contrôle non destructif (CND) sont très utilisées car elles permettent de vérifier l'intégrité des structures sans les altérer. Les procédures de contrôle et leur périodicité sont l'objet de réglementations spécifiques.

De nombreuses méthodes de contrôle sont mises en œuvre, parmi lesquelles les méthodes ultrasonores sont très largement utilisées. En effet, les longueurs d'onde sont millimétriques et permettent la détection de défauts de petite taille avec une très bonne résolution ; de plus, les ondes élastiques peuvent se propager dans le volume des pièces et sur de grandes distances. Si la mise en œuvre de ces méthodes est relativement simple, l'analyse des signaux reçus est en revanche complexe en général. Des outils de simulation peuvent aider à maîtriser cette complexité grâce à la prédiction de l'émission des ondes ultrasonores, de leur propagation, de leur interaction avec des défauts et de leur réception. Ainsi les techniques et configurations de CND par ultrasons peuvent être conçues de façon optimale et leur performance peut être démontrée.

Le Département d'Imagerie et de Simulation pour le Contrôle (DISC) du CEA (Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives) List (Laboratoire d'Intégration des Systèmes et des Technologies) développe depuis une vingtaine d'années une plate-forme logicielle, CIVA, de simulation de différentes méthodes de CND (ultrasons, courants de Foucault et radio- ou  $\gamma$ -graphie) et de traitement des résultats de tels contrôles. Ce logiciel est largement diffusé dans les industries qui développent ou utilisent des méthodes de CND comme c'est le cas d'EADS. Plusieurs collaborations entre EADS et le CEA ont été l'occasion de développements d'outils de simulation de CIVA adaptés aux configurations d'EADS, notamment pour ce qui concerne le contrôle de structures multicouches en matériaux composites.

En effet, ces dernières décennies, l'utilisation des matériaux composites s'est généralisée pour la fabrication des pièces et structures aéronautiques. Le contrôle de ces structures est particulièrement complexe du fait de l'anisotropie des propriétés des composites, de leur microstructure multicouche, de la présence de raidisseurs. De plus, des défauts spécifiques à ces matériaux doivent être recherchés (par exemple un décollement entre deux plis de la structure, appelé délaminage). Dans le cadre de cette collaboration, deux thèses [1], [2] ont été effectuées au CEA pour EADS portant sur la modélisation de contrôles de pièces épaisses en composite par ondes ultrasonores de volume. Les modèles développés ont été implémentés (ou sont en cours d'implémentation) dans CIVA. Les méthodes ultrasonores par ondes de volume ont pour principal inconvénient de nécessiter une immobilisation, voire un démantèlement partiel des structures à contrôler, ce qui est très coûteux en temps et en argent.

Pour éviter cela, les laboratoires de recherche d'EADS-IW (Innovation Works), notamment le laboratoire de dynamique des structures et de contrôle santé intégré, envisagent la mise en œuvre des techniques de contrôle santé intégré (structural health monitoring – SHM – dans la terminologie anglo-saxonne). Ces techniques visent à être intégrées de façon permanente à la structure, les inspections pouvant ainsi être réalisées à la fois de façon périodique mais également en service. La géométrie de certaines structures aéronautiques (plaques minces) est favorable à l'utilisation d'ondes élastiques guidées du fait de la capacité de ces ondes à se propager dans l'épaisseur de la plaque sur de longues distances. La complexité des caractéristiques de propagation de cette famille d'ondes ultrasonores est telle que les études de faisabilité de contrôles les mettant en œuvre nécessitent l'utilisation d'outils quantitatifs de simulation.

Nos travaux de thèse, menés en collaboration entre EADS-IW et le département DISC du CEA List ainsi qu'avec le laboratoire POEMS de l'ENSTA, s'inscrivent dans ce contexte. Le but principal est de développer les outils de simulation permettant de prédire la propagation et la diffraction des

ondes élastiques guidées dans des plaques raidies fabriquées en matériau composite multicouche viscoélastique, en vue de leur utilisation dans des études de faisabilité et d'optimisation de configurations de contrôle santé intégré.

Au CEA List, la problématique de CND par ondes guidées est déjà à l'étude et des outils de simulation sont en cours d'implémentation dans CIVA. Les travaux présentés dans ce manuscrit font suite aux thèses de Karim Jezzine [3] et de Vahan Baronian [4].

Les premiers développements ont été réalisés par Karim Jezzine. Son travail a consisté à développer deux formulations globales correspondant aux configurations en émission et réception séparées ou confondues dans un guide d'onde à direction guidante unique. Ces formulations permettent de prédire le signal électrique du transducteur récepteur (le signal mesuré lors des expériences) comme le produit de termes représentant les différentes étapes du contrôle : émission, propagation, diffraction, réception. Ainsi chaque phénomène peut-être traité séparément ; l'émission, la réception et la propagation des ondes dans la partie uniforme du guide sont traitées de façon modale (les ondes guidées pouvant être décomposées comme une somme de modes), leur diffraction par un défaut ou une variation locale du guide étant décrite par une matrice modale de diffraction. Seule la diffraction par un défaut plan perpendiculaire à la direction guidante  $y$  est traitée explicitement.

Comme complément à ce travail, Vahan Baronian a développé dans sa thèse au laboratoire POEMS en collaboration avec le CEA une méthode hybride pour le calcul de l'interaction d'une onde guidée avec un défaut quelconque dans un guide d'onde. Localement la diffraction par le défaut est traitée par éléments finis. Pour éviter les réflexions parasites aux frontières artificielles du domaine éléments finis avec le domaine définissant le guide uniforme, Vahan Baronian a développé des conditions aux frontières transparentes permettant de « mimer » un domaine infini. Cela permet en outre de minimiser la taille du domaine de calcul par éléments finis. L'écriture de ces conditions repose sur une relation de bi-orthogonalité, la relation de Fraser, qui permet de projeter un champ quelconque sur la décomposition modale des ondes guidées. Ainsi, il est possible de construire au sein du calcul par éléments finis la matrice de diffraction pour des défauts de forme et d'orientation quelconques.

Ces travaux sont mis en œuvre pour des guides d'ondes possédant une direction guidante unique et constitués de matériaux isotropes.

Les travaux de notre thèse ont été effectués pour répondre à l'objectif décrit précédemment, avec l'idée de conserver le cadre formel développé dans les travaux antérieurs de Jezzine et Baronian. Ils ont donc consisté à en étendre l'applicabilité au cas de la propagation des ondes guidées dans des directions de propagation quelconques dans des plaques en matériaux composites raidies, le raidisseur étant traité comme un objet diffractant ces ondes. En étendant ainsi des résultats antérieurs, il nous a été possible de bénéficier de développements théoriques, numériques et informatiques déjà réalisés.

Le manuscrit est composé d'un premier chapitre d'introduction générale à la problématique, et est suivi de deux parties distinctes. Ces parties se concentrent chacune sur un aspect du travail réalisé et se déclinent l'une et l'autre sous la forme de développements, de validations et d'utilisation des outils de simulation à la problématique de contrôle santé intégré.

Le chapitre d'introduction présente la problématique générale de contrôle santé intégré dans laquelle s'inscrivent ces travaux. Après une brève introduction aux ondes guidées, un état de l'art est réalisé, d'une part, sur les différents transducteurs à l'étude, et d'autre part, sur la détection de défaut dans des structures composites appliquée au contrôle santé intégré. Enfin, nous présentons les structures composites viscoélastiques typiques devant être traitées dans nos travaux.

La première partie porte sur la propagation guidée dans une plaque composite multicouche viscoélastique. Notre but est de pouvoir prédire la propagation dans toutes les directions de la plaque. Pour cela nous avons décidé d'utiliser la méthode SAFE (Semi-analytical Finite Element) déjà mise en œuvre au CEA. Cette méthode mixte élément finis et analytique permet de prendre en compte des composites multicouche quelconques tout en ne nécessitant qu'une discrétisation de l'épaisseur de la plaque.

Le premier chapitre présente tout d'abord un état de l'art de la modélisation de la propagation guidée dans une plaque multicouche. La mise en œuvre de la méthode SAFE est ensuite détaillée. Enfin, nous nous intéressons au calcul de la vitesse d'énergie et à l'influence des couches de colle, situées entre deux plis de composite, sur les modes guidés se propageant dans une plaque.

Le deuxième chapitre propose une étude de validation et de convergence de la méthode implémentée.

Enfin, dans le troisième chapitre, une étude détaillée de la propagation guidée dans une structure d'empilement  $[45^\circ/0^\circ/135^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ/135^\circ/90^\circ]_S$  est réalisée. Des conclusions relatives à la mise en place d'un système de contrôle intégré en sont déduites.

La deuxième partie traite de la diffraction par un raidisseur d'ondes guidées se propageant selon une direction quelconque. Il est important de préciser que les raidisseurs étudiés sont invariant dans leur longueur. L'étude fait donc suite à la première partie, et traite de la modélisation locale de la diffraction. Cette partie est composée de quatre chapitres.

Le quatrième chapitre met en place le cadre de l'étude de diffraction. La problématique de contrôle de plaque impose de réaliser une étude en trois dimensions pour prendre en compte toutes les directions de propagation. Mais la géométrie des plaques raidies nous permet de résoudre le problème de diffraction comme un problème en deux dimensions à trois composantes paramétré par la grandeur  $\gamma$ , composante du nombre d'onde suivant la direction du raidisseur. La méthode SAFE fait l'objet d'une adaptation pour effectuer les calculs à  $\gamma$  fixé.

Le cinquième chapitre, dans la continuité de la thèse de V. Baronian, présente le modèle éléments finis développé pour le calcul de la diffraction par le raidisseur d'une onde guidée se propageant selon une direction quelconque d'incidence. Ce modèle nécessite l'intégration de la dépendance en  $\gamma$  dans le calcul aux éléments finis. La relation de bi-orthogonalité utilisée par V. Baronian pour définir les frontières transparentes et les projections modales n'étant plus valables dans notre cadre d'étude, il nous est nécessaire d'inverser une matrice de Gram pour effectuer cette projection.

Ensuite, le sixième chapitre a pour but de valider la méthode développée et d'étudier sa stabilité numérique, en vérifiant notamment que le choix de matrice de Gram est optimal.

Pour finir, le septième chapitre présente des études réalisées à l'aide des outils développés. La première étude a été menée dans le cadre d'une session Benchmark de la conférence Review of Quantitative Nondestructive Evaluation. Elle traite de l'étude de la transmission d'une onde guidée dans une plaque isotrope à travers un raidisseur de forme carrée. Elle nous permet de valider nos résultats par comparaison avec des résultats expérimentaux. La deuxième étude porte sur la diffraction d'ondes guidées dans une plaque raidie composite multicouche par un raidisseur de forme oméga d'EADS. Certains résultats permettent de tirer des conclusions relatives à l'optimisation du positionnement des transducteurs utilisés pour un contrôle santé intégré.

Une conclusion générale est enfin proposée permettant de revenir sur les principaux résultats obtenus au cours de la thèse et de les mettre en perspective pour des études futures.

Certains résultats présentés dans cette thèse ont fait l'objet de publication.

Pour la première partie :

L. Taupin, A. Lhémercy and G. Inquiété (2011),

“A detailed study of guided wave propagation in a viscoelastic multilayered anisotropic plate”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **269**, 012002.

Pour la deuxième partie :

L. Taupin, A. Lhémery, V. Baronian and A.-S. Bonnet-BenDhia (2011),

“Scattering of obliquely incident guided waves by a stiffener bonded to a plate”, accepté pour publication dans *J. Phys.: Conf. Ser.*

L. Taupin, A. Lhémery, A.-S. Bonnet-BenDhia et B. Petitjean (2011),

“Diffraction des ondes élastiques guidées dans des plaques composites raidies – application au contrôle santé intégré de pièces aéronautiques”, actes du congrès COFREND 2011, publiés en CD-ROM, 11 pages.

Les résultats présentés dans le chapitre 7 ont fait l’objet de publications récentes. Le premier paragraphe du chapitre 7 est issu d’une collaboration avec Damien Ségur et Vahan Baronian.

L. Taupin, A. Lhémery, V. Baronian, A.-S. Bonnet-BenDhia and B. Petitjean (2011),

“Hybrid SAFE/FE Model for the Scattering of Guided Waves in a Stiffened Multi-layered Anisotropic Plate”, à paraître dans *Rev. Prog. QNDE 31*, eds. D.O. Thompson and D.E. Chimenti, AIP Conf. Proc.

Et le deuxième paragraphe de ce chapitre porte sur la prise en compte d’une plaque raidie anisotrope multicouche.

D. Ségur, V. Baronian and L.Taupin (2011),

“Ultrasonics guided wave benchmark: CEA simulation for the scattering of guided waves in a stiffened isotropic plate”, à paraître dans *Rev. Prog. QNDE 31*, eds. D.O. Thompson and D.E. Chimenti, AIP Conf. Proc.





## Chapitre 0. CONTEXTE SHM ACTUEL ET MOTIVATION INDUSTRIELLE

0.1	Contexte industriel général pour le SHM.....	17
0.2	SHM par ondes guidées.....	19
0.2.1	Les ondes guidées .....	19
0.2.2	Présentation des traducteurs généralement utilisés pour l'émission et la réception d'onde ultrasonore guidée.....	20
0.2.2.1	Traducteurs collés à la structure.....	20
0.2.2.2	Traducteurs intégrés à la structure.....	23
0.2.3	État de l'art de la détection de défaut par ondes guidées dans des structures composites et application au SHM .....	24
0.3	Structures aéronautiques composites viscoélastiques .....	26
0.3.1	Structures composites .....	26
0.3.1.1	Pli unidirectionnel .....	26
0.3.1.2	Le composite multicouche (stratifié).....	26
0.3.2	Existant au CEA pour l'homogénéisation : contrôle par ondes de volumes.....	28
0.3.3	Différentes méthodes de prise en compte de la viscoélasticité.....	29
0.4	Résumé du Chapitre .....	30

*Notre étude des ondes élastiques guidées, réalisée en collaboration EADS/POEMS/CEA, s'inscrit dans une problématique de contrôle santé intégré (SHM pour Structural Health Monitoring dans la terminologie anglo-saxonne). Elle vient d'une volonté d'EADS d'étudier la faisabilité d'un tel contrôle par ondes guidées des structures composites aéronautiques raidies.*

*Dans ce chapitre, un état de l'art concernant la problématique est présenté, ainsi qu'une introduction aux ondes guidées et aux traducteurs pouvant les générer et les recevoir.*

*Notre étude portant sur les matériaux composites, nous présentons ensuite les matériaux composites, spécialement les structures multicouches et la modélisation de la prise en compte de la viscoélasticité dans de tels matériaux. Des notations utiles à la suite de l'étude sont ainsi mises en place.*





## 0.1 Contexte industriel général pour le SHM

De nos jours, l'utilisation industrielle de structures complexes, dans le domaine aérospatial, ferroviaire, nucléaire..., demande un contrôle régulier de ces dernières pour s'assurer de la sûreté de leur fonctionnement. Pour les contrôles non destructifs (CND) actuellement utilisés, de nombreuses méthodes existent et peuvent fournir des résultats plus ou moins précis. Par exemple, le contrôle visuel est peu fiable car il ne permet pas de détecter les défauts en profondeur, et de taille minime. De même, le contrôle par pénétration de liquide (ressuage) ne permet qu'une détection surfacique. Des méthodes plus complexes sont également utilisées ; les courants de Foucault, qui ne peuvent être utilisés que pour le contrôle de matériaux conducteurs ont une pénétration limitée ; la radiographie permet la détection au sein de volumes de tailles limitées mais demande des moyens importants, aussi bien matériels que financiers. Enfin les méthodes ultrasonore et acoustique offrent de très bons résultats en CND.

Ce type de contrôle obtient certes une bonne détection et permet d'atteindre les stades de la localisation, de l'identification et du dimensionnement des défauts mais en général au prix d'une immobilisation de la structure, ce qui entraîne une perte d'exploitation, notamment dans le cas de structures aérospatiales. Pour lever cette difficulté, un nouveau type de contrôle, le contrôle santé intégré est à l'étude visant à l'intégration du système de contrôle aux structures, les traducteurs étant intégrés ou collés à la structure. Ils permettent une surveillance suivie et reproductible pouvant s'effectuer éventuellement en vol et sans nécessiter la présence de l'homme. Cependant des contrôles classiques de la structure peuvent toujours être imposés.

Dernièrement de nombreux travaux ont traité la problématique de SHM. Worden *et al.* [5] en ont décrit les principes généraux basés sur la littérature très développée de ces 30 dernières années. Ces principes se déclinent sous la forme de sept axiomes. Ces axiomes ne représentent pas ici des vérités au sens mathématique du terme, mais des affirmations fondamentales valables pour toutes les méthodologies SHM. Leur intention est de donner un point de départ clair aux chercheurs voulant étudier ce sujet et de stimuler les discussions autour de ces axiomes dans la communauté du contrôle santé intégré.

Boller *et al.* [6] ont présenté plus spécifiquement un état de l'art des différentes méthodes de contrôle santé intégré et leurs potentiels pour une application aux structures aéronautiques. Parmi, les différentes méthodes recensées, l'utilisation d'ondes ultrasonores élastiques fait l'objet de notre étude, et plus particulièrement celle des ondes guidées.

Ces dernières années, l'utilisation intensive des matériaux composites pour le domaine de l'aéronautique a orienté cette problématique vers une application aux structures composites. En effet, EADS et AIRBUS ont augmenté de façon significative la proportion de matériaux composites dans leurs derniers avions, 25% pour l'Airbus A380 et 53% pour l'airbus A350-XWB qui est actuellement en construction. Mais ces matériaux entraînent de nouvelles difficultés liées aux caractères complexes des structures composites. Il faut également prendre en compte les difficultés inhérentes au comportement complexe des ondes guidées dans ces structures, qui par ailleurs sont raidies, comme illustré Figure 0-1.



**Figure 0-1: structure aéronautique raidie (photographie fournie par EADS IW).**

Petitjean *et al.* [7] montrent les difficultés liées à cette problématique par des essais expérimentaux sur des structures en composite raidies.

Dans une optique de contrôle, Diamanti *et al.* [8] proposent un état de l'art des avancées et des méthodes développées pour le contrôle santé intégré par ondes guidées pour les structures aéronautiques composites.

Un des principaux intérêts des systèmes de contrôle santé intégré par ondes guidées est qu'ils peuvent fonctionner selon deux modes. Le mode actif, principalement utilisé pour des surveillances cycliques, repose sur une excitation ponctuelle d'une onde par un transducteur piézoélectrique ; l'onde reçue donne des informations sur l'intégrité de la ligne entre le récepteur et l'émetteur. À l'inverse, le mode passif est utilisé pour une surveillance en temps réel ; les transducteurs sont en écoute d'un signal provenant d'un endommagement évolutif, aucune onde n'est activement stimulée. Le mode passif présente de fortes analogies avec la méthode d'émission acoustique.

À terme, l'intérêt du contrôle santé réside dans l'intégration du système de contrôle à la structure. Nous verrons dans le paragraphe suivant les différents transducteurs pouvant être collés de façon permanente ou même intégrés au sein même du matériau composite. Les recherches industrielles sont donc menées vers le développement d'un contrôle complet automatisé ; il est donc nécessaire de mettre en place une chaîne d'acquisition et des logiciels de diagnostic adaptés. Dans cette optique, nous pouvons citer les travaux des scientifiques du groupe Acellent Technologies, qui développent un système complet basé sur l'utilisation de SMART Suitcase<sup>TM</sup> et SMART Layers<sup>TM</sup> [9] dont nous parlerons dans le paragraphe suivant. Dans une recherche moins technique, Kessler *et al.* [10] détaillent les éléments nécessaires à un système de contrôle santé intégré embarqué pour l'aéronautique ou l'aérospatial.

## 0.2 SHM par ondes guidées

### 0.2.1 Les ondes guidées

Lorsqu'une onde élastique se propage dans une structure mince (l'épaisseur étant de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde), elle subit de nombreuses réflexions sur les surfaces supérieures et inférieures de la structure. La propagation d'onde résultant de l'interférence de ces ondes est guidée par les surfaces de la plaque. Les ondes présentes sont appelées ondes guidées. Pour ce type d'ondes, il est nécessaire de prendre en compte le phénomène de dispersion fréquentielle, c'est-à-dire que les vitesses de phase et d'énergie, ainsi que l'atténuation, de l'onde sont fonction de la fréquence. Il est également important de mettre en avant le caractère multimodal des ondes guidées. Ces caractéristiques des ondes guidées sont présentées dans le Chapitre 1.

Les ondes dites de plaque, sont un cas particulier des ondes guidées où la propagation se fait dans une plaque avec des conditions limites de contraintes nulles.

Parmi ces ondes, il est nécessaire de distinguer les ondes de Lamb et les ondes transverses horizontales. Les ondes de Lamb correspondent à des modes symétriques et antisymétriques dont la polarisation se trouve dans un plan orthogonal au plan de la plaque, les déplacements se font dans l'épaisseur de la plaque. La première description de ces ondes a été faite par Lamb [11], mais il n'a jamais tenté de les produire. La déformation induite dans la plaque par les modes symétriques et antisymétriques est représentée ci-dessous Figure 0-2.

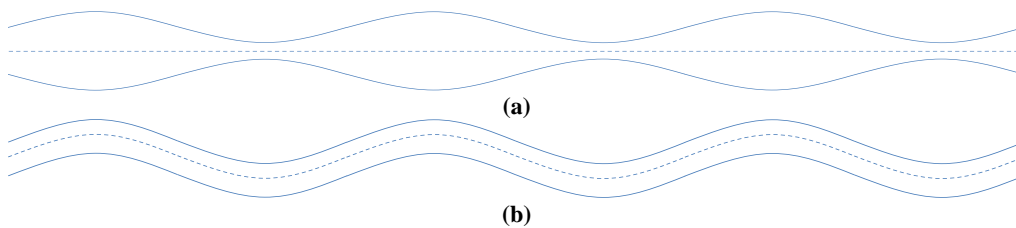


Figure 0-2: Déformation de la plaque par ondes de Lamb : mode symétrique (a) et mode antisymétrique (b).

Les ondes transverses horizontales, que nous appellerons ondes SH (Shear Horizontal dans la terminologie anglo-saxonne), sont polarisées dans le plan de la plaque, comme illustré Figure 0-3, où  $\mathbf{p}$  représente la polarisation de l'onde. Leurs profils de déplacement sont semblables à ceux d'ondes de cisaillement.

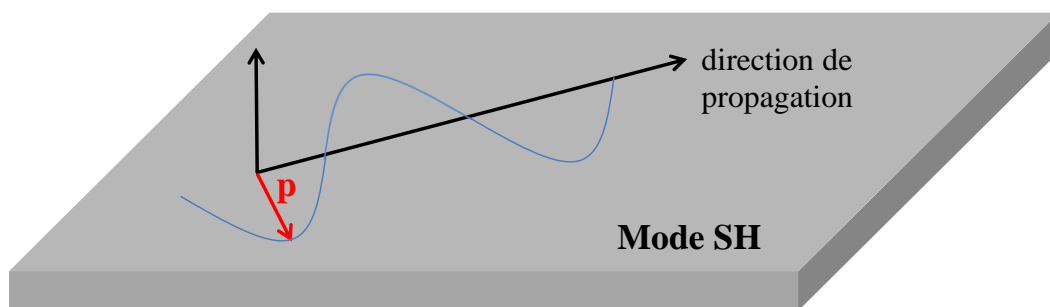


Figure 0-3: polarisation des modes SH.

Le SHM par onde de Lamb est particulièrement adapté à des structures aéronautiques. En effet, ces ondes se propagent dans le volume de la structure et sont peu atténuées. Le contrôle pourra donc se faire dans toute l'épaisseur et sur de longues distances, permettant ainsi de limiter le nombre de traducteurs présents. En effet, le problème de surcharge par les traducteurs de la structure doit également être considéré.

Nous avons évoqué la dispersion fréquentielle des ondes de Lamb. Mais, lors de la propagation d'onde dans une structure composite, il est également nécessaire de prendre en compte la dispersion angulaire liée au caractère anisotrope de ces structures. Ceci complexifie l'étude à mener.

## 0.2.2 Présentation des transducteurs généralement utilisés pour l'émission et la réception d'onde ultrasonore guidée

Comme nous l'avons dit précédemment, un des principaux intérêts du contrôle santé intégré est l'intégration totale du système à la structure, ce qui permet une surveillance permanente de celle-ci. Les transducteurs peuvent être collés ou même intégrés à la structure. Dans chacun des cas, une étude approfondie doit être menée afin de déterminer la géométrie et la taille des transducteurs pour les rendre sélectifs à des modes particuliers ou optimiser leur sensibilité à la directivité de l'onde. Ce type d'études n'est pas réalisé ici mais nous allons présenter les transducteurs les plus couramment utilisés pour l'émission et la réception dans des problématiques SHM. Il s'agit de transducteurs utilisant des matériaux piézoélectriques. En effet, les propriétés intrinsèques de ces matériaux permettent la génération (déformation sous l'effet d'un champ électrique) et la réception d'onde (inversement apparition d'un champ électrique sous l'effet d'une contrainte mécanique). De plus, ils paraissent particulièrement adaptés du fait de leur court temps de réponse, de leur faible poids ainsi que de leur faible coût.

### 0.2.2.1 Transducteurs collés à la structure

Il existe plusieurs types de transducteurs piézoélectriques (également appelés transducteurs car ils peuvent émettre et recevoir des ondes ultrasonore) ; les transducteurs de forme simple, cylindrique ou rectangulaire, dont la polarisation (ou coupe) est choisie pour que le mode élastique désiré soit préférentiellement excité, et les transducteurs de forme particulière, comme les transducteurs interdigités ou multi-éléments peignes.

Les plus couramment utilisés pour le domaine de l'aéronautique sont des pastilles piézoélectriques. Leur fonctionnement est très simple, le signal électrique envoyé au transducteur est converti en vibration par l'effet piézoélectrique inverse. Ainsi une contrainte est appliquée à la structure qui engendre à son tour des ondes guidées.

Des travaux ont montré [12] comment la prise en compte précise de l'interaction entre la pastille piézoélectrique et la structure est nécessaire pour améliorer la transmission et la réception d'ondes guidées. En effet, l'épaisseur du transducteur n'étant pas négligeable devant celle de la plaque, il est important de prendre en compte les phénomènes de couplage qui apparaissent entre le transducteur et la plaque. Des transducteurs PWAS (Piezoelectric Wafer Active Sensor) prenant en compte ce couplage ont été développés.

Huang *et al.* [13] présentent un état de l'art et les dernières avancées des différents modèles basés sur l'utilisation de PWAS. Ils citent notamment la méthode d'impédance électromécanique, basée sur l'étude des variations de la réponse dynamique de la structure, qui permet par exemple d'identifier le comportement d'une structure par l'étude de l'impédance électromécanique d'un transducteur PWAS.

Giurgiutiu *et al.* [14] ont développé et validé un modèle analytique 2D, prédisant la réponse de l'impédance électromécanique d'un PWAS pour une structure isotrope de géométrie plaque mince. Ils modélisent le couplage entre la structure et le transducteur par une force de raideur,  $k_{str}$ , représentée Figure 0-4.

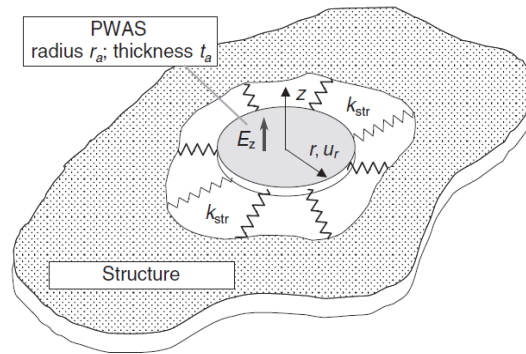


Figure 0-4: schématisation du couplage entre un traducteur PWAS et la structure [14].

Matt *et al.* [15] ont proposé une méthode de détection par utilisation de traducteurs rosettes dans des structures complexes isotropes ou anisotropes. Les traducteurs rosettes sont de forme rectangulaire, et possèdent une haute directivité qui permet une localisation du défaut sans nécessiter une connaissance de la vitesse de phase, propriété très intéressante lors de l'étude de matériaux anisotropes, où la vitesse de phase est très difficile à déterminer. Les résultats obtenus avec deux rosettes sont satisfaisants. Une utilisation de trois rosettes permet d'éliminer toutes les zones d'ombres.

Nous allons maintenant présenter brièvement les traducteurs de forme plus complexe.

Les traducteurs multi-éléments peigne permettent d'imposer la fréquence spatiale désirée ; le contrôle simultané de la fréquence du signal excitateur opère une sélection de mode. L'usage principal de ces traducteurs concerne la génération d'ondes de Lamb pour le contrôle actif. Une représentation de ce traducteur est donnée ci-dessous, Figure 0-5.

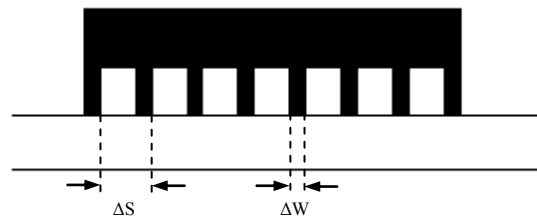


Figure 0-5: Schéma d'un traducteur multi-éléments peigne.

Les paramètres définis sur le schéma jouent un rôle important sur l'onde excitée :  $\Delta S$ , la périodicité spatiale, est liée à la sélection de mode et  $\Delta W$ , la longueur d'un élément du traducteur peigne, influe sur l'énergie et l'amplitude des modes. Plus  $\Delta W$  est petit, plus l'énergie transmise est petite et plus les modes sélectionnés ont une petite amplitude. Mais ces traducteurs possèdent des dimensions assez importantes, qui ne paraissent pas correspondre à une problématique de contrôle intégré.

Les traducteurs interdigités possèdent les mêmes caractéristiques de génération d'onde que les traducteurs multi-éléments peigne ; la périodicité spatiale du traducteur impose la périodicité spatiale des modes que l'on veut engendrer. La différence réside dans le fait que les traducteurs interdigités sont constitués de films piézoélectriques légers collés de façon permanente à la structure. Un schéma de ces traducteurs est présenté ci-dessous, Figure 0-6.



**Figure 0-6: Schéma d'un traducteur interdigité (a) rectangulaire (b) circulaire [16].**

Dans leurs travaux, Wilcox *et al.* [16] ont appliqué le principe de Huygens à des traducteurs interdigités pour modéliser le champ acoustique qu'ils produisent. Ils ont également mis en avant le fait qu'un traducteur interdigité circulaire peut focaliser le faisceau et permet ainsi une meilleure concentration de l'énergie.

Les traducteurs interdigités étant coûteux et difficile à produire, Wilcox *et al.* [17] proposent la mise en place de réseaux de traducteur. Ces réseaux sont formés de traducteurs piézoélectriques circulaires, leur principal avantage est qu'il ne possède pas une directivité ou focalisation unique, mais ces critères peuvent être choisis par post traitement des données. De plus ces réseaux de traducteur s'adaptent parfaitement à des structures non planes.

Ils peuvent être de différentes formes, par exemple circulaire ou linéaire ; un exemple de réseau circulaire est illustré ci-dessous Figure 0-7.



**Figure 0-7: exemple d'une configuration circulaire de STMR [27], le traducteur émetteur est au centre de la configuration.**

Ils peuvent être utilisés de deux manières. Soit un traducteur émet et tous les autres sont récepteurs, cette configuration est appelée réseau STMR (Single-Transmitter Multiple-Receiver), un exemple de réseau est présenté Figure 0-7 où le traducteur central joue le rôle d'émetteur. Dans l'autre configuration, appelée réseaux MTMR (Multiple-Transmitter Multiple-Receiver), tous les traducteurs émettent successivement et ils agissent également tous comme récepteurs.

### 0.2.2.2 Traducteurs intégrés à la structure

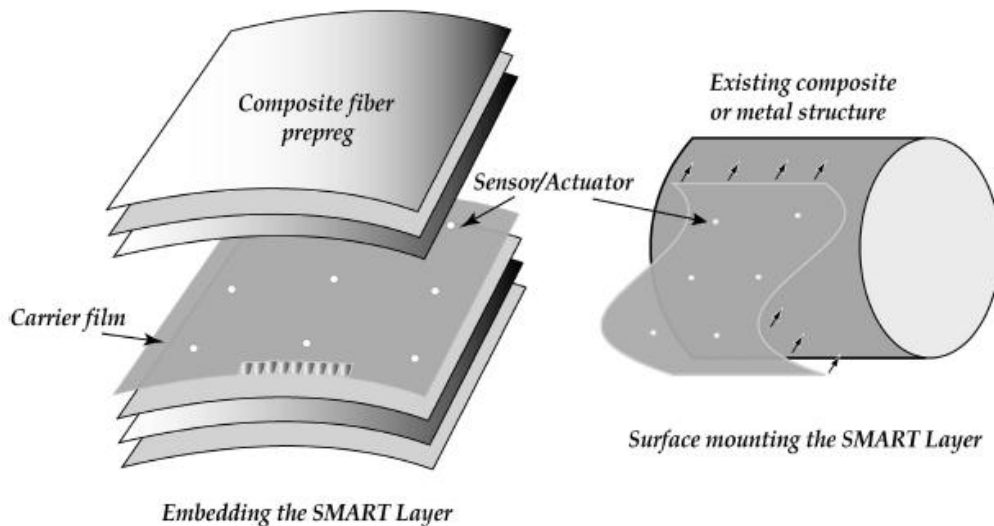
Les traducteurs piézoélectriques peuvent être intégrés au sein même de la structure pour détecter un défaut ou un endommagement quand la structure est en service. Il est donc nécessaire qu'ils n'affectent pas les propriétés mécaniques du matériau.

Des études ont été menées afin de déterminer la faisabilité de cette intégration et la nature des modes pouvant être excités. Moulin *et al.* [18] ont étudié ces problèmes de façons numérique et expérimentale. En effet, les propriétés anisotropes et piézoélectriques sont beaucoup trop complexes pour une analyse analytique. Le traducteur étudié ici est de forme cylindrique. Ils ont observé que l'intégration du traducteur ne modifie pas la nature du mode radial. Des expériences ont été menées sur un matériau composite quasi-isotrope, avec une orientation des fibres  $[\pm 45^\circ / 0^\circ / 90^\circ]$ . Les résultats expérimentaux présentent quelques différences comparés aux valeurs théoriques attendues, probablement dues à l'incertitude des coefficients d'élasticité du milieu, ou bien à la présence de défaut dans l'échantillon. Mais les modes obtenus dans les deux cas sont cependant comparables.

Moulin *et al.* [18] ont donc mis en évidence la possibilité de générer et de détecter des ondes de Lamb par des traducteurs intégrés, en sélectionnant le mode de vibration du traducteur ; il paraît même possible de privilégier la propagation de certains modes de Lamb. Enfin le mode radial apparaît le plus propice au contrôle santé intégré, par ses bonnes qualités de couplage électromécanique.

Les recherches concernant les traducteurs intégrés ont surtout été menées durant les années 90, mais de nos jours, elles sont particulièrement concentrées sur les traducteurs collés en surface.

Cependant, les SMART layers<sup>TM</sup> ont été dernièrement développées. Il s'agit d'une fine couche de diélectrique contenant un réseau de traducteurs. Lin *et al.* [19] ont étudié l'aspect mécanique et la fabrication de ces couches ; en effet la SMART layer<sup>TM</sup> est directement intégrée à l'intérieur de l'empilement du composite en tant que couche à part entière, ou bien collée sur la structure, composite ou non, en tant que couche intelligente, comme illustré ci-dessous Figure 0-8.



**Figure 0-8: SMART Layer<sup>TM</sup> intégré en tant que couche du composite (à gauche) et collé sur la structure (à droite) (Quing et al. [20])**

Ils ont montré que l'intégration de cette couche au composite ne dégradait pas l'intégrité de la structure hôte, et qu'elle apportait des avantages supplémentaires. En effet, de cette façon, le réseau de traducteurs est protégé des conditions environnementales et les mesures d'efforts sont plus précises, l'effort étant directement collecté dans le matériau.

Haywood *et al.* [21] ont étudié la localisation de défauts avec ce réseau de traducteurs, dans le but de mettre au point un système de contrôle de santé intégré automatique. Deux approches sont possibles, la première étant une localisation de l'impact à partir du signal reçu, et la deuxième



permet une localisation par triangulation après une analyse expérimentale de la vitesse des ondes créées par des impacts comme cela se fait dans les méthodes de contrôle par émission acoustique. Les deux méthodes sont en bon accord, leur degré de précision étant approximativement similaire.

Actuellement le choix d'EADS se porte sur des transducteurs piézoélectriques circulaires. Ils réalisent également des tests expérimentaux avec les SMART Layer<sup>TM</sup> mais en les collant sur la surface ; il n'est pour l'instant pas question de les intégrer en tant que couche à part entière de la structure composite.

### 0.2.3 État de l'art de la détection de défaut par ondes guidées dans des structures composites et application au SHM

Nous allons maintenant nous intéresser aux travaux existants traitant du contrôle santé intégré par ondes guidées pour des matériaux anisotropes.

Lemistre *et al.* [22] ont mis en place un système complet de contrôle, ayant la spécificité d'utiliser des transducteurs intégrés à la structure. Le diagnostic (localisation et caractérisation du défaut), basée sur l'étude des signaux émis et reçus, repose sur un procédé de multi résolution, utilisant une transformée en ondelette discrète. Ainsi, les différents modes présents dans le signal reçus sont isolés, et leurs temps de vol sont extraits. Des validations expérimentales ont été réalisées sur différents matériaux composites. Les transducteurs utilisés sont des SMART layer<sup>TM</sup> intégrées en tant que couche propre du composite. Les validations ont montré de bons résultats pour le premier mode antisymétrique et le premier mode SH. Il est intéressant de noter qu'ils ont montré que ce dernier est plus adapté à la détection d'un défaut situé près d'un bord de la plaque. En effet, ce mode est uniquement produit par la présence d'un défaut, il ne peut donc pas provenir d'une réflexion sur un bord. Enfin, une série de validation a été faite dans un laboratoire différent ce qui montre la portabilité du système.

Grondel *et al.* [23] ont développé un système de santé intégré destiné aux structures aéronautique de type plaque raidie. Des études expérimentales, en mode passif ou actif, sont menées pour vérifier ces performances à la détection d'impact ou de décollement entre le raidisseur et la structure composite. Ils ont montré que le mode actif possède une grande sensibilité aux décollements, ainsi qu'à la présence d'un défaut à la suite d'un impact. Ils valident également l'utilisation du mode passif lors de l'apparition d'un endommagement lié à un impact.

Ce système de contrôle santé intégré est donc viable et adapté au contrôle de structures aérospatiales, leur principale perspective étaient d'optimiser la sélection de modes de Lamb afin assurer une meilleure sensibilité aux ondes issues du défaut.

D'un autre point de vue, Mahadev Prasad *et al.* [24] ont démontré la faisabilité d'un système SHM basé sur des techniques de tomographie. Ils utilisent des modèles de reconstructions algébriques pour le post-traitement des données associées aux ondes de Lamb provenant de structures réalistes. Pour améliorer la qualité des résultats dans des matériaux composites, ils ont mis en place une nouvelle configuration de transducteur. Contrairement aux configurations de tomographie par onde de Lamb classique, les transducteurs sont dorénavant placés tout autour de la plaque. Enfin, ils ont utilisé un nouveau paramètre de reconstruction sur les données dans une plaque saine et plaque avec défaut permettant de différencier le bruit plus facilement.

Matt *et al.* [25] ont étudié plus particulièrement les joints composite/composite se trouvant au niveau de la liaison peau-raisseur. Trois défauts ont été simulés dans la structure, une zone où le décollement a été mal réparé et deux zones de décollement isolées de tailles différentes. Ils modélisent la propagation guidée par la méthode SAFE. Le décollement est caractérisé par les variations du vecteur de Poynting le long de la plaque, ce qui correspond à l'étude du coefficient de

transmission. Les résultats montrent que la sensibilité au défaut est meilleure lorsque les modes sont couplés (le couplage des modes à une certaine fréquence étant dû à l'amortissement ou aux effets géométriques pour les structures multicouches). Ils montrent également que le coefficient de transmission augmente lorsque la taille du défaut augmente. Ces résultats sont valables uniquement pour les joints examinés dans cet article. Ils réalisent également une étude qualitative pour le choix du mode le plus adapté à une détection dans les zones de collage. Les modes possédant le plus de ressemblance avec la plaque seule à une fréquence donnée sont sélectionnés.

Enfin, Matt *et al* [25] signalent l'importance de l'influence de la température dans l'étude des joints composite/composite.

Plus récemment de nombreux travaux ont été menés pour la détection de défaut par ondes guidées dans des structures composites dans une optique de SHM.

Staszewski *et al.* [26] présentent une méthode de contrôle passif. La localisation est basée sur une généralisation de la méthode de triangulation avec un algorithme génétique. Ils ont également mis en place une détection active utilisant un vibromètre laser pour localiser l'endommagement. Cette méthode ne nécessite aucun post-traitement complexe, mais ne paraît pas adapté pour des systèmes embarqués.

Vishnuvardhan *et al.* [27] ont étudié la validité d'un système de contrôle santé intégré utilisant des réseaux circulaires de traducteurs STMR. Ils ont utilisé un algorithme de reconstruction, basé sur une addition de phase, qui permet d'établir une cartographie précise aussi bien en champs proche qu'en champ lointain. Des validations expérimentales ont été menées sur une plaque composite quasi-isotrope de graphite-époxy. Ils ont pris en compte l'atténuation du milieu de façon simple par une correction basée sur la distance de propagation. Cela permet d'obtenir des signaux significatifs loin du réseau de traducteur sans introduire d'artéfact à proximité de ce dernier.

Moll *et al.* [28] présentent une nouvelle approche de contrôle santé intégré pour la localisation de défaut dans des milieux possédant une anisotropie quelconque. La localisation est obtenue par une généralisation de la méthode de l'ellipse pour les milieux anisotropes, méthode basée sur un procédé géométrique utilisant le temps de vol et validée pour des matériaux isotropes.

Toutes ces méthodes ont été validées de façon expérimentale, et montrent des résultats en accord avec l'expérience.

Dernièrement, Giurgiutiu *et al.* [12] s'intéressent à l'utilisation des PWAS pour le contrôle santé intégré de structure composite. Ils avaient déjà mené et validé leur utilisation pour des matériaux isotropes. Dans cet article, ils discutent de la validité de ces traducteurs pour la détection de défauts dans des matériaux plus complexes. Ils obtiennent des résultats en accord avec l'expérience et montrent notamment que le mode  $A_0$  semble plus adapté la détection de défaut que le mode  $S_0$ . Cependant, ils soulignent le fait qu'en pratique les matériaux composites montrent beaucoup plus de variabilité lors de la fabrication que les matériaux isotropes. Il est donc nécessaire de mener de nombreuses séries d'expérimentation pour s'assurer de la validité de la méthode.

Pour conclure, toutes ces méthodes sont encore à un stade expérimental, il n'existe actuellement pas de système SHM par ondes guidées embarqué et utilisé dans l'industrie aéronautique.

## 0.3 Structures aéronautiques composites viscoélastiques

Les structures objets de notre étude sont celles classiquement utilisées dans l'industrie aérospatiale et sont principalement des structures en matériaux composites. En effet, ces dernières années, l'utilisation des matériaux composites a connu un essor important dans ce domaine due à leurs propriétés particulières, faible poids, grande résistance en fatigue, résistance à la déformation variable selon la direction des fibres. Mais ces matériaux sont également très sensibles aux conditions de vol, comme des impacts en faible vitesse (collisions avec des oiseaux), aux procédés de fabrication, ainsi qu'à l'entretien. C'est pour cela qu'un contrôle régulier est nécessaire, bien que difficile, du fait du fort caractère anisotrope des composites.

Même si leur utilisation s'est fortement développée ces dernières années, ces matériaux posent des problèmes pour leur contrôle du fait de la complexité des phénomènes physiques de propagation et de diffraction des ondes guidées qui n'est pas entièrement maîtrisée.

### 0.3.1 Structures composites

#### 0.3.1.1 Pli unidirectionnel

Un matériau composite est par définition constitué d'au moins deux matériaux non miscibles, le renfort et la matrice. Le renfort correspond au « squelette » du composite, permettant de supporter les efforts mécaniques ; il est composé de fibres pouvant être placées de façon aléatoire ou parallèlement à une direction unique. La matrice, généralement une matière plastique, assure le liant dans le composite ; elle permet la transmission des efforts mécaniques aux renforts, et en assure également la protection vis-à-vis des conditions environnementales. Il existe deux sortes de composite : les composites homogènes (un seul types de renfort) et les composites hybrides, où il peut y avoir des renforts de natures différentes.

Les composites utilisés pour le domaine de l'aéronautique, notamment par EADS, sont des composites homogènes où les fibres sont alignées parallèlement à une direction. Ils sont composés de fibres de carbonnes dans une matrice en époxy. L'intérêt majeur des fibres de carbonnes est qu'elles possèdent une grande résistance mécanique pour un poids réduit.

Une couche de composite est donc appelée un pli. Les fibres étant orientées dans la même direction, il s'agit d'un pli unidirectionnel, représenté Figure 0-9.

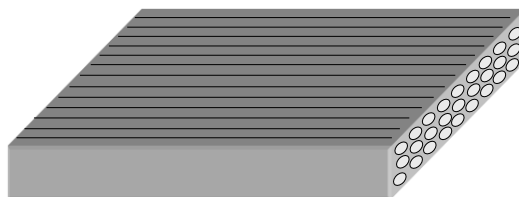


Figure 0-9 :représentation d'un pli unidirectionnel.

Généralement, les structures industrielles sont formées de composite stratifié ou composite multicouche.

#### 0.3.1.2 Le composite multicouche (stratifié)

Nous allons donc étudier des structures dites multicouches. En effet, il s'agit d'un empilement de plis unidirectionnels, pouvant subir des rotations autour d'un axe (axe suivant l'épaisseur du composite).

La structure composite obtenue est décrite par sa séquence d'empilement. La séquence renseigne sur le nombre de plis et sur leur orientation ; cela décrit la géométrie du composite multicouche. Par exemple, pour le composite présenté Figure 0-10, la séquence d'empilement est la suivante :

$$[90^\circ / -45^\circ / 0^\circ / 45^\circ / 90^\circ / -45^\circ / 0^\circ / 45^\circ]. \quad (0-1)$$

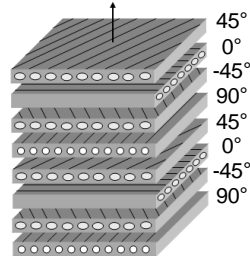


Figure 0-10: structure multicouche  $[45^\circ / 0^\circ / -45^\circ / 90^\circ / 45^\circ / 0^\circ / -45^\circ / 90^\circ]$

Il est important de noter que, dans la suite de l'étude, les composites multicouches seront généralement symétriques par rapport au plan médian de la plaque. Cette symétrie est notée de la façon suivante dans les séquences d'empilement :

$$[90^\circ / 135^\circ / 0^\circ / 45^\circ]_s, \quad (0-2)$$

où S indique la symétrie selon le plan médian de la plaque.

L'empilement précédent correspond à la séquence suivante sans notation distincte de symétrie :

$$[90^\circ / 135^\circ / 0^\circ / 45^\circ / 45^\circ / 0^\circ / 135^\circ / 90^\circ]. \quad (0-3)$$

Une dernière notation apparaît dans le manuscrit. Il s'agit de la répétition successive d'un pli de même orientation. Pour un composite stratifié possédant successivement quatre plis orientés à  $45^\circ$  et quatre plis orientés à  $-45^\circ$ , nous notons la séquence d'empilement comme suit :

$$[45^\circ_4 / -45^\circ_4]_s. \quad (0-4)$$

Une difficulté provenant du caractère multicouche du composite réside dans la prise en compte des coefficients d'élasticité. En effet, les constantes d'élasticité sont connues pour le pli homogénéisé. Nous ne ferons pas d'étude à une échelle plus petite, c'est-à-dire la prise en compte des coefficients d'élasticité des fibres et de la matrice. Ces constantes sont généralement données pour un pli unidirectionnel, dans le repère lié aux fibres. Des travaux d'homogénéisation des milieux composites ont été réalisés pour les études en ondes de volumes dans le département du DISC au CEA dans le cadre du logiciel CIVA. Nous les présenterons brièvement dans le paragraphe suivant. Mais dans notre étude, nous allons prendre en compte le milieu stratifié comme un milieu hétérogène ; il est donc nécessaire de connaître les constantes d'élasticité pour chaque pli dans le repère d'étude  $R=(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Le repère d'étude et celui lié à l'orientation du pli  $R_p=(O, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p)$  sont illustrés ci-dessous Figure 0-11.

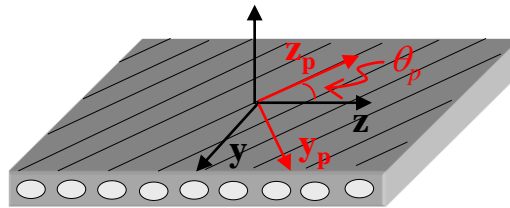


Figure 0-11: repères liés à la rotation des constantes d'élasticité.

Nous appelons  $\theta_p$  l'angle de rotation des fibres par rapport à l'axe  $\mathbf{z}$ .  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{C}}_\theta$  représentent respectivement le tenseur d'élasticité dans le repère lié au pli  $R_p$  et dans le repère d'étude  $R$ . La rotation de ce tenseur d'élasticité nécessite deux matrices,  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$ , exprimées ci-dessous, et définies (par exemple dans Bartoli *et al.* [29]). Ainsi, nous obtenons l'expression des constantes d'élasticité dans  $R$  :

$$\tilde{\mathbf{C}}_\theta = \mathbf{R}_1(\theta_p) \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{R}_2^{-1}(\theta_p), \quad (0-5)$$

avec,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & -2cs & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & 2cs & 0 & 0 \\ 0 & cs & -cs & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & -cs & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & cs & 0 & 0 \\ 0 & 2cs & -2cs & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}, \quad (0-6)$$

et,

$$\begin{cases} c = \cos \theta_p, \\ s = \sin \theta_p. \end{cases} \quad (0-7)$$

Les structures composites possèdent un amortissement intrinsèque que nous allons prendre en compte. Cette modélisation est présentée dans le paragraphe 0.3.3.

### 0.3.2 Existant au CEA pour l'homogénéisation : contrôle par ondes de volumes

La prise en compte de l'aspect multicouche d'une plaque composite est complexe. L'homogénéisation de ces structures semble pouvoir être une solution adéquate pour simplifier le problème. Cette thématique a déjà été abordée dans notre laboratoire pour la propagation d'onde de volume.

Dans sa thèse, Lonné [30] a développé une méthode d'homogénéisation pour obtenir les coefficients d'élasticité d'un pli à partir des caractéristiques des fibres et de la matrice du composite. La méthode rend compte en outre de l'atténuation liée aux phénomènes de diffusion multiple, aux pertes par viscosité et à leur couplage. Il a également présenté une adaptation d'une méthode statique d'homogénéisation de la structure multicouche globale ; cette dernière méthode se base sur les travaux de Gengembre [31]. Elle repose sur une hypothèse importante que le matériau homogénéisé est de symétrie cristalline orthotrope, *i.e.* le matériau possède deux plans de symétrie orthogonaux et donc neuf constantes d'élasticité indépendantes.

Cette méthode statique donne de bons résultats mais n'est pas adaptée aux fréquences de contrôle.

Deydier [1] a également travaillé sur cette thématique lors de sa thèse et présente une méthode d'homogénéisation basée sur la théorie des rayons actuellement utilisée pour le calcul de champs au CEA. L'objectif est de fournir un tenseur de constantes élastiques représentant un milieu homogène à la structure multicouche aux fréquences de calcul (aux alentours de 5MHz). La méthode développée repose sur l'hypothèse suivante : « il existe un milieu homogène de même épaisseur dans lequel la trajectoire de l'énergie des ondes planes est équivalente au trajet de l'énergie dans le stratifié ». Ces deux méthodes ont été validées et intégrées dans le logiciel CIVA.

Nous avons testé la méthode d'homogénéisation développée par Gengembre pour une application à la propagation guidée. L'objectif était de vérifier si elle était applicable aux ondes guidées en basses fréquences. Mais dès les basses fréquences, nous avons observé des divergences ; le comportement statique n'est pas applicable à ces ondes. Il est donc nécessaire de considérer le caractère multicouche de la structure. Nous montrerons l'importance de ce comportement dynamique dans le Chapitre 3.

### 0.3.3 Différentes méthodes de prise en compte de la viscoélasticité

Généralement, lors de la modélisation de la propagation guidée dans des matériaux, ces derniers sont considérés comme des milieux parfaitement élastiques. Mais la réalité nous impose de prendre en compte l'amortissement naturel du matériau.

Cet amortissement est aussi appelé viscoélasticité du milieu. Elle porte ce nom car l'amortissement est introduit dans les constantes d'élasticité par un coefficient visqueux, *i.e.* une partie imaginaire.

Les constantes d'élasticités interviennent dans l'expression de la loi de Hooke, reliant le tenseur des contraintes au tenseur de déplacement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (0-8)$$

avec,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (0-9)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  représente le tenseur des contraintes,  $\tilde{\mathbf{C}}$  le tenseur local d'élasticité,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des déformations,  $u_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante du déplacement, et  $x_j$  la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée du repère.

Dans un milieu considéré comme purement élastique, le tenseur local d'élasticité est réel :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}, \quad (0-10)$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité local dans un milieu purement élastique.

Prendre en compte la viscoélasticité du milieu revient à ajouter une partie imaginaire aux coefficients d'élasticité. Il existe plusieurs modèles pour intégrer la partie visqueuse. Les plus couramment utilisés sont les modèles hystérétiques et de Kelvin-Voigt.

Le premier est le plus simple à implémenter ; en effet la partie imaginaire des coefficients d'élasticité est constante et indépendante de la fréquence. Les coefficients de viscosité sont classiquement mesurés à une fréquence unique, appelé fréquence de caractérisation.

Cette méthode est fréquemment utilisée, notamment par Bartoli *et al.* [29] et Neau [32].

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + j\boldsymbol{\eta}, \quad (0-11)$$

$\boldsymbol{\eta}$  représente ici le tenseur de viscosité.

Un exemple de tenseur de viscoélasticité utilisant ce modèle est donné ci-dessous pour un pli orthotrope (c'est-à-dire possédant neuf constantes indépendantes) :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 13.7+0.11j & 7.1+0.1j & 6.6+0.1j & 0 & 0 & 0 \\ 7.1+0.1j & 13.7+0.11j & 7.3+0.2j & 0 & 0 & 0 \\ 6.6+0.1j & 7.3+0.2j & 121+0.7j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.1+0.03j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.7+0.1j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.3+0.03j \end{pmatrix}, \quad (0-12)$$

Le modèle de Kelvin-Voigt, notamment utilisé par Rose [33], repose sur une dépendance de la partie visqueuse avec la fréquence.

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + j\omega\boldsymbol{\eta}, \quad (0-13)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde.

Ces deux modèles ont été implémentés dans les développements réalisés, mais le modèle hystérétique a été principalement utilisé. De nombreux modèles [34] ont été développés pour prendre en compte la viscoélasticité d'un milieu, ces derniers pourraient être ajoutés dans les calculs développés sans coût supplémentaire de calcul.

## **0.4 Résumé du Chapitre**

La problématique industrielle ainsi qu'un état de l'art des avancées dans le domaine du SHM par ondes guidées dans les structures ont été présentés. Le contexte global de notre étude a également été présenté ainsi qu'une introduction aux ondes guidées et aux différents traducteurs pouvant émettre et recevoir ce type d'onde.

La problématique de SHM nécessite de connaître les phénomènes guidés pour l'optimisation du positionnement des traducteurs ainsi que pour le choix de la fréquence d'excitation et du mode de propagation adéquat pour le contrôle. Dans les prochaines parties, nous allons étudier les phénomènes guidés se produisant dans les structures aéronautiques composites présentées. Dans un premier temps, une modélisation de la propagation sera développée ; dans un second temps, nous regarderons quels modes peuvent être transmis et détectables après franchissement d'un raidisseur.





**PARTIE I : MODELISATION ET ETUDE DE LA  
PROPAGATION GUIDEE DANS UNE STRUCTURE DE TYPE  
PLAQUE ANISOTROPE COMPOSITE MULTICOUCHE  
VISCOELASTIQUE.**

Dans cette partie, nous nous intéressons à la propagation guidée dans une plaque saine en composite multicouche viscoélastique.

Classiquement, un champ ultrasonore de dépendance spatio-temporelle quelconque dans une structure guidante peut être décomposé par transformations de Fourier temporelle et spatiale en une somme de modes monochromatiques. Chaque mode possède une polarisation et un profil de déplacement propre. Cette formulation modale présente de nombreux intérêts ; en effet, le comportement de chaque mode peut être étudié plus aisément, les éventuels effets d'un élément perturbant le mode pris en compte mode-à-mode, puis par transformées de Fourier inverses, le champ total peut être ensuite recomposé. En outre, la notion de mode est couramment utilisée en pratique pour faciliter l'interprétation des résultats d'un contrôle. Ainsi, le CEA List développe un simulateur de contrôle par ondes ultrasonores guidées dont la première version sera disponible dans la plateforme logicielle CIVA à partir de sa version 10.1.; l'approche générale pour le développement du simulateur, décrite par Lhémy *et al.* [35], est basée sur la décomposition modale des ondes guidées.

Le calcul de ces modes guidés revient le plus souvent à résoudre un système aux valeurs propres, qu'il s'agisse de calculs reposant sur une discrétisation par élément finis, ou d'autres calculs plus analytiques consistant à trouver les zéros d'une équation de dispersion.

Le but du chapitre suivant est de prédire le comportement des différents modes dans des structures composites pouvant être fortement anisotropes. La prédiction de la propagation d'ondes dans ces structures particulières nécessite de prendre en compte le caractère multicouche de la structure, chaque pli étant lui-même fondamentalement anisotrope. Le comportement des ondes dans l'ensemble de la plaque est donc lui-même anisotrope, *i.e.*, il dépend de la direction de propagation considérée - on parle de dispersion angulaire.



# Chapitre 1. CALCUL DES MODES GUIDES DANS UNE PLAQUE ANISOTROPE COMPOSITE MULTICOUCHE VISCOELASTIQUE

1.1	Etat de l'art de la propagation guidée dans des structures composites multicouches viscoélastiques.....	37
1.1.1	Méthodes analytiques.....	37
1.1.2	Méthodes semi-analytiques.....	38
1.1.3	La méthode SAFE.....	39
1.2	Méthode SAFE : calcul semi-analytique/éléments finis .....	39
1.2.1	Développements déjà réalisés au CEA .....	39
1.2.2	Méthode SAFE pour la prise en compte de plaques composites multicouches viscoélastiques. ....	40
1.3	Développements réalisés .....	44
1.3.1	Notion de vitesse de phase, de lenteur et de vitesse de groupe.....	44
1.3.2	Vecteur de Poynting et vitesse d'énergie.....	46
1.3.3	Prise en compte de la colle pouvant se trouver entre deux plis d'une plaque composite	48
	1.3.3.1 Un besoin lié à la construction des composites.....	48
	1.3.3.2 Influence des couches de colles sur les ondes guidées.....	49
1.4	Résumé du chapitre .....	51

*Dans ce chapitre, la propagation guidée dans des structures composites anisotropes multicouches viscoélastiques est modélisée par la méthode SAFE : Il s'agit d'une méthode mixte semi-analytique et éléments finis. Cette méthode paraît optimale pour la prédiction des modes dans une plaque ; en effet, ne nécessitant qu'une discrétisation selon l'épaisseur de la plaque, les temps de calcul sont donc très courts. De plus, cette méthode s'adapte particulièrement bien aux structures de géométrie complexe (composites multicouches dans notre cas) discrétisées par éléments finis et à la prise en compte de l'amortissement intrinsèque du milieu, nécessaire dans notre étude.*

*Pour la localisation de défauts dans les applications CND, la connaissance de la direction d'énergie de l'onde est cruciale. Dans les matériaux anisotropes, on sait que la vitesse de groupe ou d'énergie diffère de la vitesse de phase suivant la direction de propagation. De plus, dans les matériaux absorbants, il est connu que, à cause de la viscosité, les relations classiques définissant la vitesse de groupe ne sont plus valides. Nous avons donc porté un intérêt particulier au calcul de la vitesse d'énergie, permettant l'obtention des fronts d'onde dans des plaques composites.*

*Enfin, nous nous sommes intéressés à étudier l'influence des couches de colle situées entre deux plis de composite sur les modes guidés se propageant dans une plaque.*



## 1.1 Etat de l'art de la propagation guidée dans des structures composites multicouches viscoélastiques

Il existe une littérature étendue qui offre de nombreuses méthodes théoriques ou numériques pour prédire la propagation guidée dans des structures composites multicouches de type plaque, Su *et al.* [36] proposent un résumé récent de l'ensemble des méthodes.

Nous allons brièvement présenter différentes méthodes utilisées, qu'elles soient analytiques, numériques ou hybrides.

### 1.1.1 Méthodes analytiques

Parmi les développements analytiques, les méthodes matricielles sont particulièrement bien adaptées aux structures stratifiées. Elles permettent le calcul des modes guidés par résolution d'une équation de dispersion, cependant elles sont limitées aux structures de types plaque, tube ou cylindre.

La méthode des matrices de transfert, développée en 1949 par Thomson [37] puis reprise en 1953 par Haskell [38], est également appelée méthode de Thomson-Haskell. Elle permet de calculer le champ de contrainte et de déplacement par multiplication de matrices en utilisant les conditions aux frontières. Les relations de continuité entre contraintes et déplacements pour deux plis successifs sont reliées par une matrice. Ainsi par multiplication de toutes les matrices, nous pouvons écrire une relation entre les plis supérieur et inférieur de la structure. L'équation de dispersion de la structure multicouche est alors obtenue. L'avantage de cette méthode réside dans l'indépendance de la taille du système avec le nombre de plis. Elle provoque cependant des problèmes numériques dus au facteur de propagation exponentiel qui, combiné avec les valeurs du premier ordre, produit des pertes de précision et peut dépasser les limites de calcul du système informatique utilisé. Elle est également instable lorsque les plis ont des épaisseurs trop importantes.

La méthode de la matrice globale repose elle aussi sur la continuité des champs de contraintes et de déplacements aux interfaces entre les plis. Cette méthode, énoncée par Lowe [39], est à la base du logiciel Disperse développé par l'Imperial College. Cependant, elle n'utilise pas des multiplications de matrice : les matrices sont ici concaténées, une matrice unique représente donc le système complet. L'équation de dispersion est obtenue en annulant le déterminant de la matrice globale. Cette méthode est toujours numériquement stable, mais sa complexité est fonction du nombre de plis.

Des approches semblables ont également été développées. Parmi elles, la méthode de la matrice de raideur de couche, notamment présentée par Wang et Rokhlin [40], nécessite un peu plus de calcul que la méthode des matrices de transfert d'un point de vue algorithmique, mais est préférable car parfaitement stable.

Il est également possible de relier les contraintes aux vitesses particulières transformant alors les matrices de raideur en matrice d'impédance. Nous évoquons ici la matrice d'impédance de surface, car elle nécessite beaucoup moins d'opérations que les méthodes de matrice d'impédance de couche et de matrice de transfert. De plus, elle est stable numériquement quelle que soit la fréquence, l'épaisseur, le nombre de pli et l'homogénéité des ondes. Une méthode dérivée de cette dernière [41] est à la base du logiciel PROPAG développé et implémenté par le laboratoire de mécanique physique de l'université Bordeaux 1.

Dans une problématique similaire à notre étude, Wang *et al.* [42] ont étudié en détail le comportement dispersif des ondes de Lamb dans des matériaux composites. Un formalisme a été étudié pour découpler les modes symétriques des modes antisymétriques, et une nouvelle méthode semi-exacte a été développée pour calculer la vitesse de groupe dans des matériaux composites, où la dépendance angulaire de la propagation des ondes est très importante. Cette dernière méthode permet de tracer les courbes de dispersion et les fronts d'onde pour des structures composites

d'empilement  $[+45/-45/0/90]_S$  et  $[45_6/-45_6]_S$ . Cette méthode, vérifiée expérimentalement, sera utilisée dans le paragraphe suivant pour la validation des développements effectués.

Enfin, lors de sa thèse, Neau [32] s'est intéressé à la propagation guidée dans une plaque composite monocouche et viscoélastique. Il a développé une méthode analytique pour le calcul des modes guidés. Dans cette étude, une attention particulière a été portée au calcul de la vitesse d'énergie et de la direction d'énergie dans des composites fortement anisotropes. Enfin, il a illustré expérimentalement les différents phénomènes étudiés dans sa thèse pour des composites viscoélastiques unidirectionnels.

### 1.1.2 Méthodes semi-analytiques

Les méthodes analytiques ne permettent de traiter que des situations canoniques simples et sont par ailleurs souvent complexes à mettre en œuvre numériquement. Pour pallier ces inconvénients, des méthodes semi-analytiques ont été développées. Elles consistent à prendre en compte la déformation de la plaque dans l'épaisseur de façon numérique et la propagation dans le plan de façon analytique.

La méthode SAFE est fréquemment utilisée dans le domaine de l'élasticité due à sa simplicité de mise en œuvre, ses faibles temps de calcul et aux possibilités d'extension pour la prise en compte de structures complexes. En effet, elle permet de caractériser les propriétés d'une onde se propageant dans un guide de section invariante. Les modes guidés et leurs mouvements dans la section sont calculés par la méthode des éléments finis, puis complétés par une prise en compte analytique dans la direction de propagation. Cette méthode a été étudiée de nombreuses fois, pour différentes structures et différentes propriétés de matériaux. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

Une alternative à la méthode SAFE apparaît dans la méthode WFE (Wave Finite Element). Mencik *et al.* [43] ont, notamment, développé cette méthode. Il s'agit d'une approche propagative modélisant la propagation dans des structures complexes. L'hypothèse principale repose sur une vision périodique de la structure. En effet, une section du guide est choisie et modélisée par éléments finis, puis le mouvement est recomposé dans la plaque par étude de la continuité des déplacements et de l'équilibre des forces. Cette méthode est illustrée ci-dessous Figure 1-1.

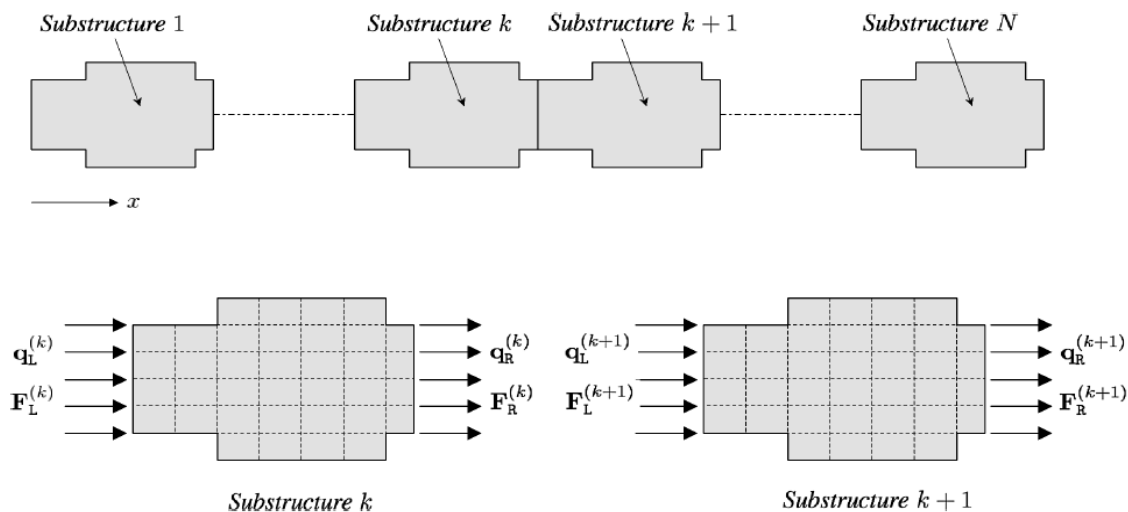


Figure 1-1: décomposition d'une structure périodique par la méthode WFE [43].

### 1.1.3 La méthode SAFE

Cette méthode est tout d'abord apparue dans les travaux de Dong *et al.* [44] et Shah *et al.* [45] sous le nom d'« extended Ritz technique » ou « infinite Layer method ». Ces relations ont ensuite été de nombreuses fois utilisées pour le calcul des modes dans des plaques multicouches, notamment par Liu *et al.* [46]. Puis une méthode qui en découle, la « Strip element method », a été développée par Liu *et al.* [47] et également appliquée au cas des composite stratifiés.

Cette méthode a ensuite pris le nom de méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Element) ; elle a été étudiée de nombreuses fois pour différentes structures et propriétés élastiques des matériaux. Shah *et al.* [48] discutent du comportement dynamique d'une plaque en la divisant en plusieurs lignes ; l'étude analytique est réalisée ici en effectuant une interpolation polynomiale pour représenter le champ élastodynamique de la plaque.

Mukdadi *et al.* [49] ont également étudié la propagation d'onde dans des composites multicouches. Dans un premier temps, une plaque de largeur finie est considérée, les fonctions d'interpolation éléments finis dépendent alors des coordonnées de la section du guide et la direction du vecteur d'onde est orientée selon la direction guidante (axe perpendiculaire à la section finie). Ensuite, ils ont considéré le cas d'une plaque infinie, et donc la nécessité de prendre en compte la dépendance angulaire de la propagation.

Predoi *et al.* [50] ont proposé une extension de la méthode SAFE pour des structures périodiques de largeur infinie. Le caractère infini est alors modélisé par l'utilisation de conditions aux frontières périodiques, sur les bords d'une section traitée par éléments finis, afin de la rendre infiniment répétée, à la manière de Mencik *et al.* [43].

Dans une volonté de mise en œuvre de la simulation d'un contrôle global, Jezzine [3] a utilisé la méthode SAFE pour la détermination des solutions modales de la propagation dans un guide d'onde de géométrie quelconque. Nous reparlerons de ces travaux dans le prochain paragraphe.

Enfin, Bartoli *et al.* [51] ont modélisé la propagation d'ondes guidées dans des matériaux composites amortis ou non par une extension de la méthode SAFE, en rendant la matrice de rigidité complexe pour les matériaux amortis. Les données, calculées par la méthode SAFE, permettent de tracer les courbes de dispersion et de déplacement des différents modes guidés. Leur étude est semblable à la nôtre, et cet article a été notre principale référence lors de la programmation de la méthode SAFE pour les structures de types plaques composite multicouche viscoélastiques.

## 1.2 Méthode SAFE : calcul semi-analytique/éléments finis

### 1.2.1 Développements déjà réalisés au CEA

Depuis quelques années, la simulation d'un contrôle de structure par ondes guidées est étudiée au CEA LIST [52]. Il a donc été nécessaire de modéliser la propagation guidée dans différents types de structures (plaque, tube, rail, structure hélicoïdale...). La méthode SAFE est rapidement apparue comme la méthode la mieux adaptée au calcul des modes guidés.

Elle a tout d'abord été introduite par Karim Jezzine lors de sa thèse [3]. Il a utilisé cette méthode pour calculer les modes pouvant se propager dans un guide d'onde isotrope, en choisissant une discrétisation 1D pour le cas d'une plaque ou l'étude des modes axisymétriques dans un cylindre, alors qu'une discrétisation 2D est nécessaire pour l'étude d'une section quelconque.

La méthode SAFE a ensuite été utilisée par Vahan Baronian [4] dans le cadre du développement d'une méthode hybride pour la diffraction des ondes guidées, et plus récemment, Warida Ben Khalifa [53] l'a étendue à la propagation guidée dans des structures dont la surface est courbe.

Dans l'idée de développer, un outil générique de simulation du CND par ondes guidées, il nous a paru naturel d'étendre ce modèle aux structures multicouches anisotropes.



### 1.2.2 Méthode SAFE pour la prise en compte de plaques composites multicouches viscoélastiques.

Nous présentons ici le formalisme de la méthode SAFE dans le cas de la propagation dans une plaque composite [29]. Comme il est nécessaire de prendre en compte l'anisotropie de l'onde, le calcul dépend maintenant de sa direction de propagation. Pour ce faire, la méthode SAFE classique est modifiée, l'angle  $\beta$ , caractérisant la direction de propagation et illustré Figure 1-2, est introduit et devient un paramètre du système.

La présentation du problème, ainsi que des différentes données géométriques du système SAFE, sont décrites par la Figure 1-2.

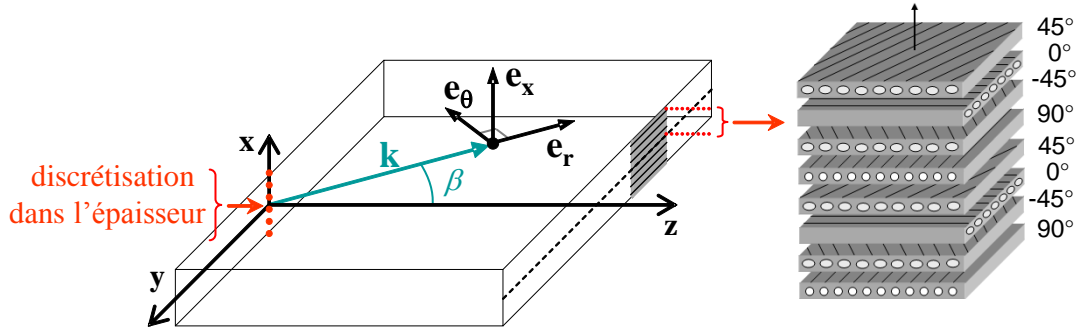


Figure 1-2: données géométriques du problème

Le vecteur d'onde s'exprime donc, dans le repère lié à la plaque  $R=(O; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , comme :

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_r = k_y \mathbf{y} + k_z \mathbf{z} = k \cos \beta \mathbf{z} - k \sin \beta \mathbf{y}. \quad (1-1)$$

Nous allons rappeler le formalisme général de la méthode; c'est pourquoi la dépendance en  $\beta$  sera introduite après les calculs génériques.

Soient  $\mathbf{u}$ , le champ de déplacements,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , le champ de déformations, et  $\boldsymbol{\sigma}$ , le champ de contraintes dans la plaque :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_x \quad u_y \quad u_z]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{yz} \quad 2\varepsilon_{xz} \quad 2\varepsilon_{xy}]^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}]^T. \end{aligned} \quad (1-2)$$

Le déplacement  $\mathbf{u}$  en un point  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  s'écrit :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x) e^{j[\omega t - (k_y y + k_z z)]}, \quad (1-3)$$

avec  $\mathbf{U}(x)$  représentant l'interpolation éléments finis du déplacement,  $\omega$  la pulsation de l'onde.

Afin d'expliciter de façon simple le calcul éléments finis, nous considérons un élément du maillage. Dans notre implémentation, les éléments considérés sont des éléments P2, c'est-à-dire des segments composés de trois nœuds. La discrétisation par éléments P2 est présentée Figure 1-3.

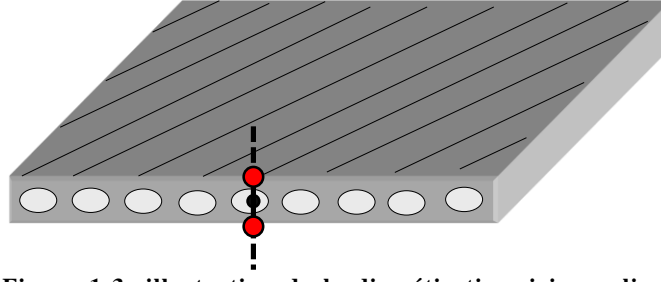


Figure 1-3: illustration de la discrétisation, ici un pli est discrétisé par un élément P2.

La formulation est présentée maintenant pour notre choix d'élément P2, mais elle s'adapte très bien quel que soit le nombre de nœuds compris dans un élément.

Le déplacement pour un élément  $e$  s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{d}^{(e)} e^{j[\omega t - (k_y y + k_z z)]}, \quad (1-4)$$

avec,

$$\mathbf{d}^{(e)} = \left[ d_x^{(e),1} \quad d_y^{(e),1} \quad d_z^{(e),1} \quad d_x^{(e),2} \quad d_y^{(e),2} \quad d_z^{(e),2} \quad d_x^{(e),3} \quad d_y^{(e),3} \quad d_z^{(e),3} \right]^T, \quad (1-5)$$

où,  $d_i^{(e),m}$  représente la  $i$ -ième composante du déplacement nodal au  $m$ -ième nœud de l'élément  $e$  pour  $z = 0$  et  $y = 0$ , et  $\mathbf{N}$  représente la matrice d'interpolation donnée par :

$$\mathbf{N}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & 0 & 0 & \varphi_2(x) & 0 & 0 & \varphi_3(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(x) & 0 & 0 & \varphi_2(x) & 0 & 0 & \varphi_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(x) & 0 & 0 & \varphi_2(x) & 0 & 0 & \varphi_3(x) \end{pmatrix}. \quad (1-6)$$

Les fonctions d'interpolation  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  sont définies par :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2(\xi(x) - 1)(\xi(x) - 0.5), \\ \varphi_2(x) = 4\xi(x)(1 - \xi(x)), \\ \varphi_3(x) = 2\xi(x)(\xi(x) - 0.5), \end{cases} \quad (1-7)$$

avec,

$$\xi(x) = \frac{(x - x_1^{(e)})}{\Delta}, \quad (1-8)$$

où,  $\Delta$  est à la longueur de l'élément.

Nous allons maintenant exprimer le champ de contraintes avec la décomposition éléments finis du champ de déplacement. Pour cela nous utilisons la loi de Hooke dans un matériau anisotrope, qui s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}}_0 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1-9)$$

Nous exprimons tout d'abord les déformations en fonction du déplacement par les matrices  $\mathbf{L}_x$ ,  $\mathbf{L}_y$  et  $\mathbf{L}_z$  suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathbf{u}. \quad (1-10)$$

Les matrices sont définies ci-dessous :

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1-11)$$

Après substitution de l'expression du déplacement dans (1-10), le champ de déformation s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\mathbf{B}_1 - jk_y \mathbf{B}_2 - jk_z \mathbf{B}_3] \mathbf{d}^{(e)} e^{j(\omega t - (k_y y + k_z z))}, \quad (1-12)$$

avec,

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \mathbf{L}_x \mathbf{N}_{,x}, \\ \mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_y \mathbf{N}, \\ \mathbf{B}_3 = \mathbf{L}_z \mathbf{N}. \end{cases} \quad (1-13)$$

$\mathbf{N}_{,x}$  représente la dérivée de  $\mathbf{N}$  par rapport à  $x$ .

Le principe des travaux virtuels est ensuite appliqué à un élément infinitésimal de la plaque :

$$\int_{\Sigma_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{t} dF = \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} (\rho \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}) dV + \int_{V_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV, \quad (1-14)$$

où  $\rho$  définit la masse volumique du matériau,  $\ddot{\mathbf{u}}$  la dérivée seconde du déplacement par rapport au temps,  $\mathbf{t}$  le vecteur des forces extérieures agissant sur l'élément, et  $V_e$  et  $\Sigma_e$  représentent respectivement le volume et la surface de l'élément  $e$ .

Nous considérons dans cette étude que la plaque n'est soumise à aucune force extérieure et les éléments sont des segments ; il en découle :

$$\int_{(e)} \delta \mathbf{u}^{(e)T} (\rho \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}) dx + \int_{(e)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dx = 0. \quad (1-15)$$

Le déplacement virtuel s'exprime sous la forme suivante :

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}^{(e)} e^{j(k_y y + k_z z)} e^{-j\omega t}. \quad (1-16)$$

$\delta \mathbf{u}$  correspond au conjugué de  $\mathbf{u}$ , et  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  correspond à la déformation appliqué à  $\delta \mathbf{u}$  selon l'équation (1-10).

Afin d'obtenir une relation en déplacement, le principe des travaux virtuels est exprimé en fonction de  $\mathbf{d}^{(e)}$ .

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{d}^{(e)T} \int_{(e)} (\mathbf{B}_1^T + jk_y \mathbf{B}_2^T + jk_z \mathbf{B}_3^T) \tilde{\mathbf{C}}_\theta^i (\mathbf{B}_1 - jk_y \mathbf{B}_2 - jk_z \mathbf{B}_3) \mathbf{d}^{(e)} dx \\ - \delta \mathbf{d}^{(e)T} \int_{(e)} \rho \omega^2 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{d}^{(e)} dx = 0. \end{aligned} \quad (1-17)$$

Pour un élément  $e$ , les matrices élémentaires sont définies comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{mn}^{(e)} &= \int_{(e)} \mathbf{B}_m^T \tilde{\mathbf{C}}_\theta^i \mathbf{B}_n dx, \\ \mathbf{m}^{(e)} &= \int_{(e)} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx. \end{aligned} \quad (1-18)$$

$\mathbf{k}_{mn}^{(e)}$  représentent les matrices élémentaires de raideurs et  $\mathbf{m}^{(e)}$  la matrice élémentaire de masse.

Les matrices globales sont construites par assemblage classique des matrices élémentaires. Ces matrices dépendant des constantes d'élasticité du pli contenant l'élément ( $e$ ), il est important de s'assurer qu'un élément ne peut pas appartenir à deux plis différents.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{mn} &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}_{mn}^{(e)}, \\ \mathbf{M} &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{m}^{(e)}.\end{aligned}\quad (1-19)$$

Finalement après assemblage des matrices, l'équation (1-17) donne :

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d} + [k_z^2 \mathbf{K}_{33} + k_y^2 \mathbf{K}_{22} + k_y k_z \mathbf{K}_{23} - j k_z \mathbf{K}_{13} - j k_y \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{11}] \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (1-20)$$

Les variables  $k_z$  et  $k_y$  sont maintenant remplacées pour obtenir un système ayant le nombre d'onde  $\mathbf{k}$  comme inconnue et l'angle  $\beta$  comme variable. Les substitutions suivantes sont donc effectuées :

$$\begin{cases} k_z = \cos \beta k, \\ k_y = -\sin \beta k. \end{cases} \quad (1-21)$$

Après substitution et factorisation du nombre d'onde, le système quadratique suivant, caractéristique du système SAFE pour un milieu anisotrope, est obtenu :

$$\begin{aligned}-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d} + [k^2 (\cos^2 \beta \mathbf{K}_{33} + \sin^2 \beta \mathbf{K}_{22} - \cos \beta \sin \beta \mathbf{K}_{23}) \\ - j k (\cos \beta \mathbf{K}_{13} - \sin \beta \mathbf{K}_{12}) + \mathbf{K}_{11}] \mathbf{d} = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (1-22)$$

Pour simplifier la résolution, le système quadratique est réécrit comme un système linéaire. Cette linéarisation est couramment utilisée dans la littérature [54], [55].

$$(\mathbf{A} - k \mathbf{D}) \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (1-23)$$

où,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ k \mathbf{d} \end{bmatrix}. \quad (1-24)$$

Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{D}$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{11} - \omega^2 \mathbf{M} \\ \mathbf{K}_{11} - \omega^2 \mathbf{M} & -j(\cos \beta \mathbf{K}_{13} - \sin \beta \mathbf{K}_{12}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} - \omega^2 \mathbf{M} & 0 \\ 0 & -(\sin^2 \beta \mathbf{K}_{22} + \cos^2 \beta \mathbf{K}_{33} - \cos \beta \sin \beta \mathbf{K}_{23}) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (1-25)$$

Même si le système est plus complexe, du fait de l'anisotropie, que celui mis en œuvre par Jezzine [3], nous nous sommes basés sur ses programmes pour développer notre propre code. Ce dernier avait également mis en place des optimisations générales pour la résolution du système linéaire, qui ont pu être réutilisés dans notre étude.

Les valeurs propres et vecteurs propres de ce système correspondent respectivement aux nombres d'ondes des modes se propageant dans la plaque et aux déplacements nodaux associés. Le système dépend directement de l'angle  $\beta$ . Donc, pour prédire le comportement des ondes guidées dans une plaque, il est nécessaire de résoudre le système pour chaque direction de propagation.

Un des principaux avantages de cette méthode est que la discrétisation est limitée à l'épaisseur de la plaque. Le calcul éléments finis se fait en une dimension, les temps de calculs sont donc très courts. Les dépendances en  $y$  et  $z$  interviennent dans le calcul analytique de la propagation. Nous obtenons donc un calcul global en 3 dimensions.

### 1.3 Développements réalisés

Le système SAFE nous permet d'obtenir les nombres d'ondes des modes pouvant se propager dans une plaque à une fréquence donnée, ainsi que les déplacements nodaux qui leur sont associés.

Des post-traitements sont nécessaires à l'étude de la propagation guidée. Classiquement, les courbes de dispersion permettent, comme leur nom l'indique, de représenter le caractère dispersif des ondes guidées, c'est-à-dire la variation des grandeurs caractéristiques (vitesse, atténuation...) avec la fréquence. Les grandeurs représentées sont généralement les nombres d'ondes, les vitesses de phase ou de groupe.

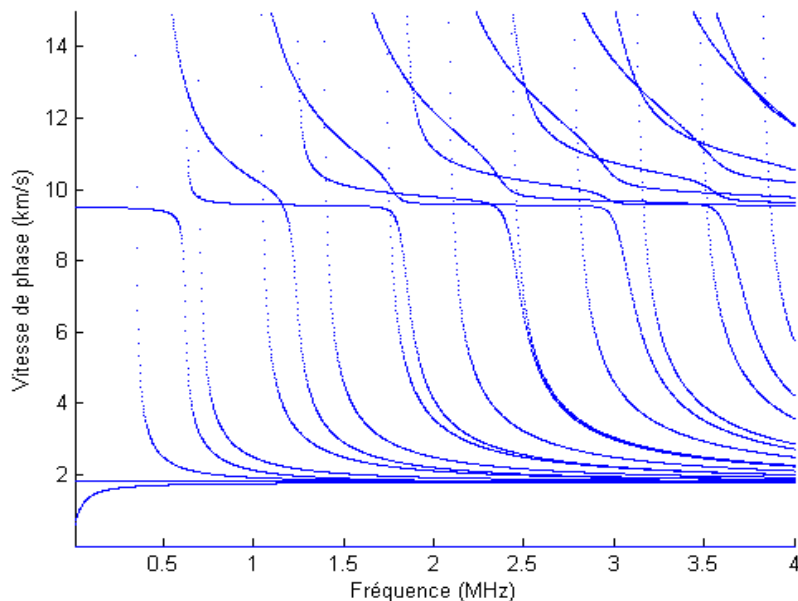
Des courbes dans le plan permettent de représenter ces différentes grandeurs en fonction de la direction de propagation ; la propagation dans le plan est donc mise en avant. Ces courbes n'ont pas d'utilité lors de l'étude d'une plaque isotrope, les différentes grandeurs ne dépendant pas de la direction de propagation, mais elles sont d'une grande utilité pour un matériau anisotrope.

#### 1.3.1 Notion de vitesse de phase, de longueur et de vitesse de groupe

La vitesse de phase correspond à la vitesse à laquelle l'onde monochromatique de pulsation  $\omega$  se propage dans le milieu.

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}. \quad (1-26)$$

Elle se calcule aisément à partir des valeurs des nombres d'onde à une fréquence donnée. Un exemple de courbe de dispersion est donné ci-dessous Figure 1-4, dans le cas d'un composite élastique unidirectionnel de séquence d'empilement  $[0^{\circ}_{16}]$  dans la direction  $\beta = 0^{\circ}$  :



**Figure 1-4:** courbes dispersion en vitesse de phase (en  $\text{km.s}^{-1}$ ) pour le composite EADS d'empilement  $[0]_{16}$ .

Il s'agit de fibres en carbone dans une matrice en époxy, les constantes d'élasticité utilisées sont données Tableau 3-1 (les constantes visqueuses n'ont pas été prises en compte dans cet exemple).

Il est clairement visible sur la Figure 1-4 que le nombre de modes guidés présents dans une plaque dépend de la fréquence d'étude. Les fréquences spécifiques où des modes supplémentaires apparaissent, sont appelées fréquences de coupure.

Dans un milieu isotrope, les modes sont classiquement notés en trois catégories selon leurs polarisations et leurs déplacements particuliers dans l'épaisseur : modes symétriques  $S_n$ , antisymétriques  $A_n$  et transverses horizontaux  $SH_n$ . L'indice  $n$  correspond à l'ordre d'apparition, propre à chaque type de modes.

Pour des plaques composites, les polarisations des modes dépendent de l'anisotropie du milieu et ne sont plus simplement colinéaires ou orthogonales à la direction de propagation ; cependant nous reconnaissons des polarisations dominantes. En prenant comme hypothèse que les structures multicouches sont symétriques par rapport à leurs plans médians (ce qui sera toujours le cas dans nos études), nous pouvons reconnaître des modes symétriques et antisymétriques. Ainsi, nous appelons les différents modes dans un milieu anisotrope : modes quasi-symétriques  $q-S_n$ , quasi-antisymétriques  $q-A_n$  et quasi-transverses horizontaux  $q-SH_n$ .

Par exemple, avant la première fréquence de coupure, il existe trois modes se propageant dans un guide d'onde. Les modes possédant la plus petite et la plus grande vitesse de phase correspondent respectivement au premier mode quasi-antisymétrique, noté  $q-A_0$ , et quasi-symétrique,  $q-S_0$ . Le mode correspondant à la deuxième valeur de vitesse de phase est le premier mode quasi transverse horizontal,  $q-SH_0$ .

Ensuite, la lenteur,  $s$ , d'une onde est définie comme l'inverse de la vitesse de phase :

$$s = \frac{1}{v_\phi} . \quad (1-27)$$

Les surfaces de lenteurs permettent de caractériser l'anisotropie des composites, avec la représentation des courbes dans le plan. Un exemple de surface de lenteur est présenté Figure 1-5 pour la même plaque composite élastique  $[0^\circ_{16}]$  à une fréquence de 300kHz, avant la première fréquence de coupure. Il y a donc trois modes se propageant dans la plaque. Pour ce calcul, nous avons utilisé les coefficients viscoélastiques données Tableau 3-1.

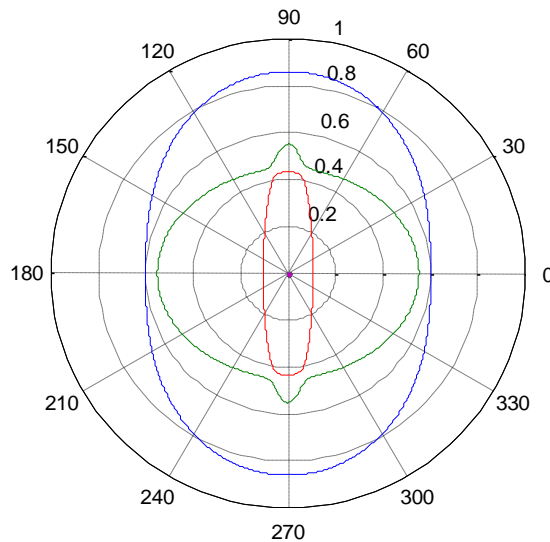


Figure 1-5: courbes de lenteur (en  $s.km^{-1}$ ) à 300kHz pour le composite EADS d'empilement  $[0]_{16}$ .

Il est clairement visible sur ce schéma que le composite unidirectionnel est fortement anisotrope.

Dans une problématique de contrôle, il est nécessaire de connaître la direction de la vitesse de l'énergie de l'onde, dans le but de prédire les fronts d'ondes. Pour des matériaux purement élastiques (*i.e.* sans atténuation), la vitesse de groupe est définie comme :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (1-28)$$

Elle correspond à la vitesse du paquet d'onde dans la plaque, c'est-à-dire la vitesse de l'énergie. Cependant, cette grandeur n'est plus définie pour des matériaux viscoélastiques, présentés dans le chapitre 0, où il est nécessaire de prendre en compte l'atténuation du matériau. La notion de vitesse d'énergie est donc introduite.

La présence de viscosité nous impose de connaître l'atténuation des ondes guidées, définie comme :

$$A = \text{Im}(k). \quad (1-29)$$

L'atténuation  $A$  s'exprime en Neper par mètre (Np/m).

### 1.3.2 Vecteur de Poynting et vitesse d'énergie

Dans les matériaux viscoélastiques, il est donc nécessaire de calculer la vitesse d'énergie. De plus, nous allons porter une attention particulière à la détermination de la direction de cette dernière. En effet, lors de la propagation dans un matériau isotrope, il n'est pas nécessaire de faire ce calcul spécifiquement, la direction de l'énergie de l'onde correspondant à la direction de la vitesse de phase, et donc à la direction de la propagation de l'onde. Mais cette propriété n'est plus valable lors de la propagation dans un matériau anisotrope. Cela se montre aisément de façon graphique.

Graphiquement, la direction d'énergie s'obtient en prenant la direction orthogonale à la tangente à la courbe de lenteur pour la valeur du nombre d'onde étudiée (direction de propagation étudiée), comme illustré par la Figure 1-6.

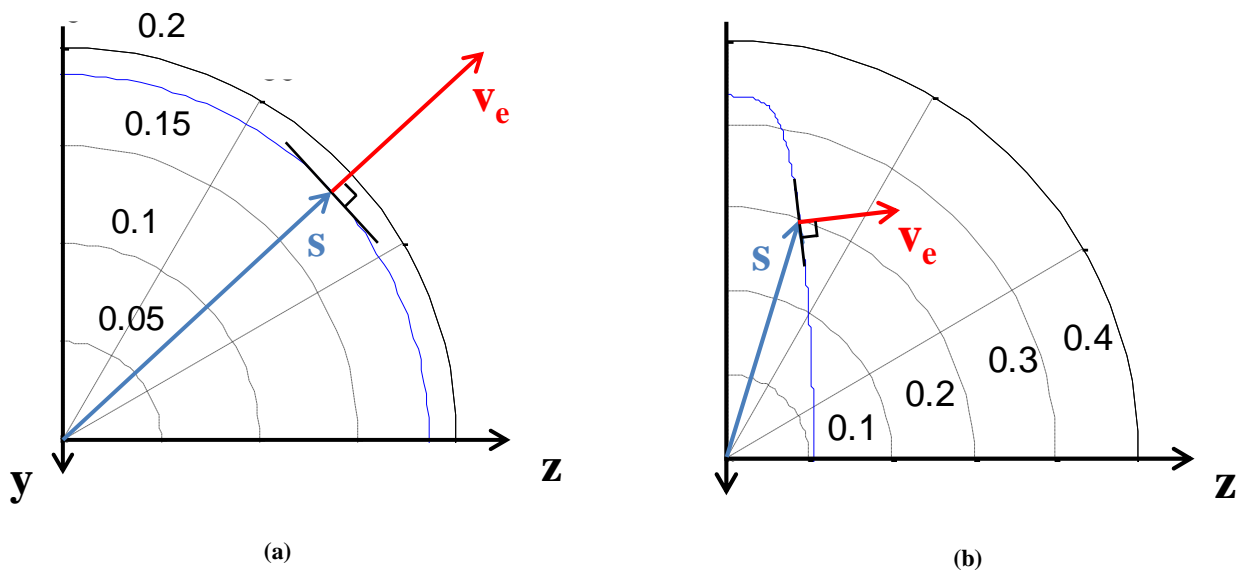


Figure 1-6: direction d'énergie pour un matériau (a) isotrope (b) anisotrope

Il est donc important de calculer chaque composante du vecteur d'énergie pour obtenir la direction de l'énergie de l'onde dans une plaque anisotrope. La vitesse d'énergie s'exprime comme [56] :

$$v_e = \frac{\mathbf{P}}{E_T}, \quad (1-30)$$

avec,

$$E_T = E_C + E_P \quad (1-31)$$

où  $\mathbf{P}$  représente le vecteur de Poynting,  $E_T$ ,  $E_C$  et  $E_P$  correspondent respectivement aux énergies totale, cinétique et potentielle.

Les expressions des énergies cinétique et potentielle sont données ci-dessous :

$$E_c = \frac{\omega^2}{4} \rho \mathbf{u}^T \mathbf{u}, E_p = \frac{1}{4} \text{Re}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{*T}). \quad (1-32)$$

Le vecteur de Poynting est obtenu par post-traitement des résultats de la méthode SAFE, sa composante  $k$  s'écrit comme [56] :

$$P_k = \frac{1}{2} \text{Re}(i\omega \sigma_{jk} u_j^*), j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad (1-33)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est obtenu par la loi de Hooke à partir du déplacement calculé par la méthode SAFE.

À titre d'exemple, les courbes en vitesse d'énergie sont représentées Figure 1-7 pour la plaque de séquence d'empilement  $[0^\circ_{16}]$ , les coefficients d'élasticité utilisés sont les mêmes que pour les surfaces de lenteur.

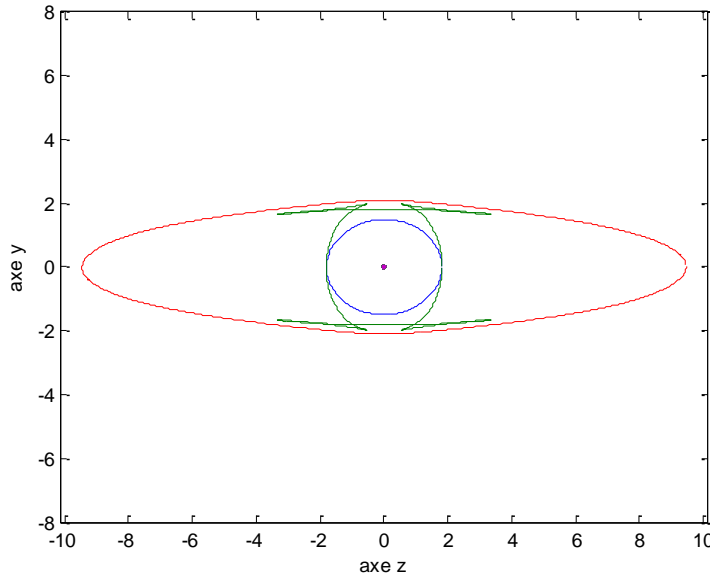


Figure 1-7: courbes d'énergie (en  $\text{km.s}^{-1}$ ) pour un composite multicouche  $[0]_{16}$ .

Nous observons que dans des plaques fortement anisotropes, une même direction d'énergie peut correspondre à différentes vitesses de phase. En effet, la présence de concavités sur les surfaces de lenteurs entraîne des rebroussements sur les courbes en vitesse d'énergie. Ce phénomène est mis en avant sur la Figure 1-8.



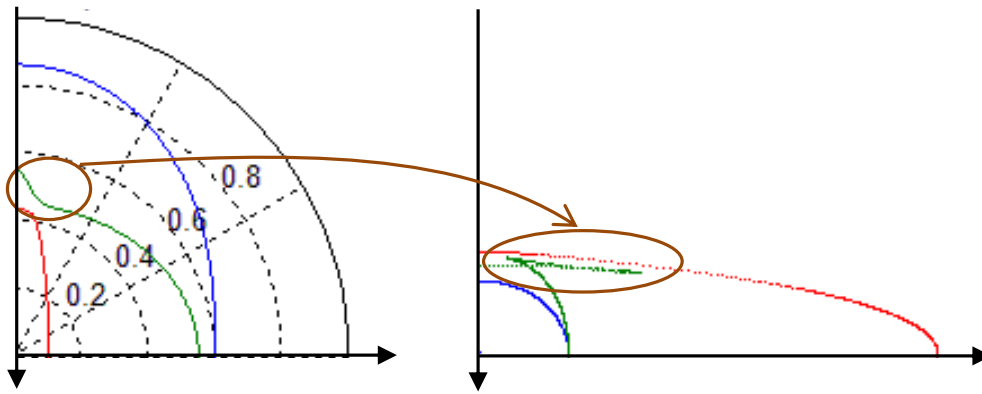


Figure 1-8: mise en avant des phénomènes de rebroussement sur les courbes en vitesse d'énergie. À gauche : surfaces de lenteur, à droite : surfaces d'énergie.

### 1.3.3 Prise en compte de la colle pouvant se trouver entre deux plis d'une plaque composite

#### 1.3.3.1 Un besoin lié à la construction des composites

Industriellement, les structures multicouches peuvent être fabriquées suivant différents procédés : compression des pré-imprégnés, injection, imprégnation, pultrusion (l'extrusion pour des matériaux composites)...

Les composites aéronautiques sont majoritairement fabriqués par la technique d'injection RTM (Resin Transfert Molding). Le pli est tout d'abord obtenu par assemblage de matrice et de renfort ; puis des motifs, représentant une structure de base propre à l'empilement, sont formés en désorientant les plis relativement les uns aux autres. Enfin les structures multicouches sont réalisées en assemblant les motifs pour former la séquence d'empilement désirée, comme illustrée Figure 1-9.

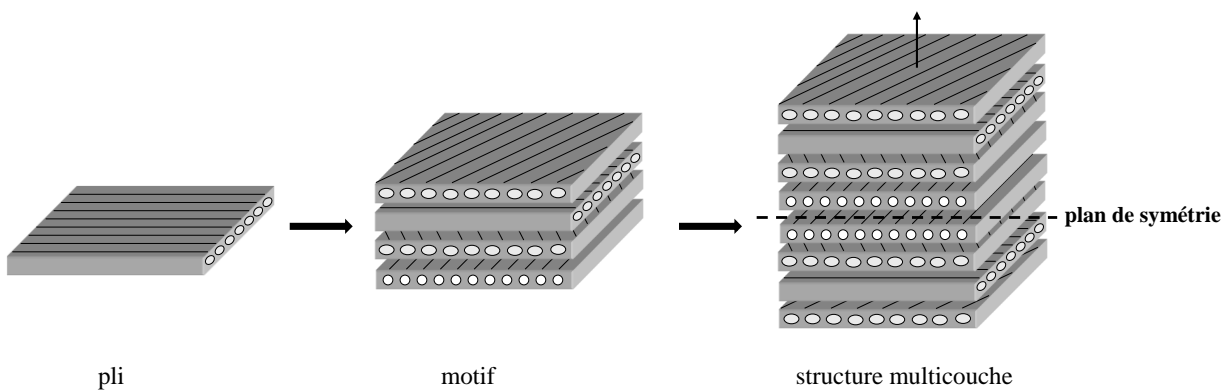


Figure 1-9: exemple de procédé de construction de structure multicouche.

Lors des deux dernières étapes, un ajout de colle permet de lier les différents plis (ou motifs) entre eux. Ces couches de colles sont schématisées sur la Figure 1-10.

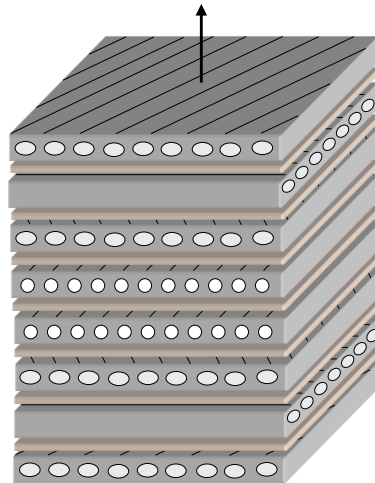


Figure 1-10: structure multicouche avec schématisation de la colle entre chaque pli.

Il importe d'étudier l'influence de ces couches de colles sur la propagation des ondes guidées. L'hypothèse faite pour effectuer ce calcul est que chaque couche de colle possède une épaisseur constante et que ses caractéristiques sont celles d'un matériau isotrope élastique.

### 1.3.3.2 Influence des couches de colles sur les ondes guidées

Des résultats obtenus sont présentés pour deux différentes séquences d'empilement,  $[45^\circ/0^\circ/135^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ/135^\circ/90^\circ]_S$  et  $[0^\circ]_{16}$ , que nous appellerons respectivement empilement 1 et 2 dans le reste du manuscrit. Pour un pli en carbone-époxy, nous utilisons les constantes d'élasticité (parties réelles uniquement) définies Tableau 3-1.

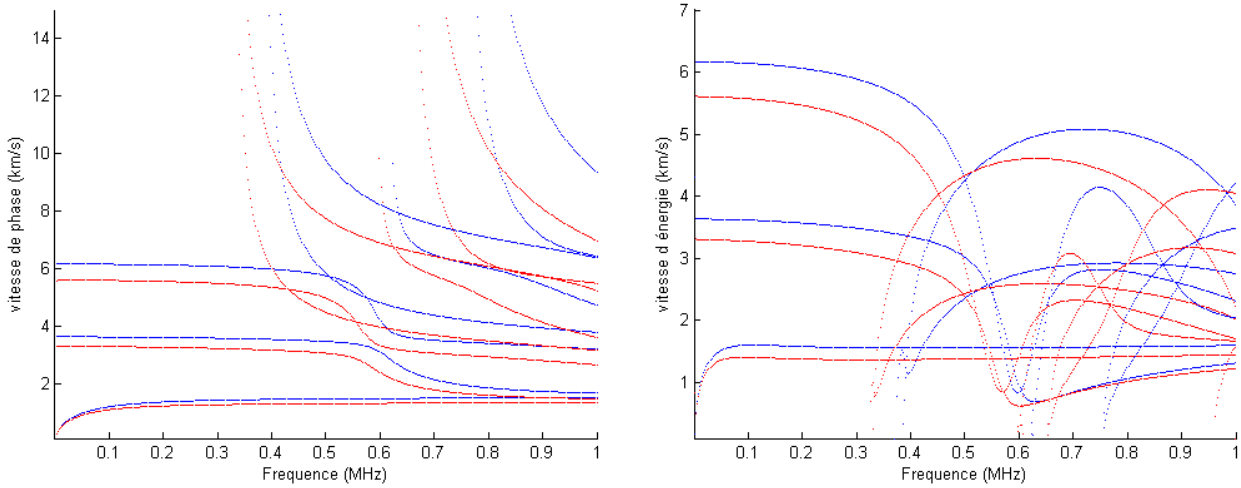
Lorsqu'il n'y a pas prise en compte de la colle, nous supposons que les plis ont une épaisseur de  $133.75\mu\text{m}$ , sachant que l'épaisseur globale de la plaque est de  $2.14\text{mm}$ .

Lors de la prise en compte de la colle, les plis ont une épaisseur de  $101.9\mu\text{m}$  et des couches d'époxy d'épaisseur  $34\mu\text{m}$  sont ajoutées entre chaque pli, l'épaisseur globale de la plaque restant égale à  $2.14\text{mm}$ . Les constantes d'élasticité et masse volumique de l'époxy sont données ci-dessous :

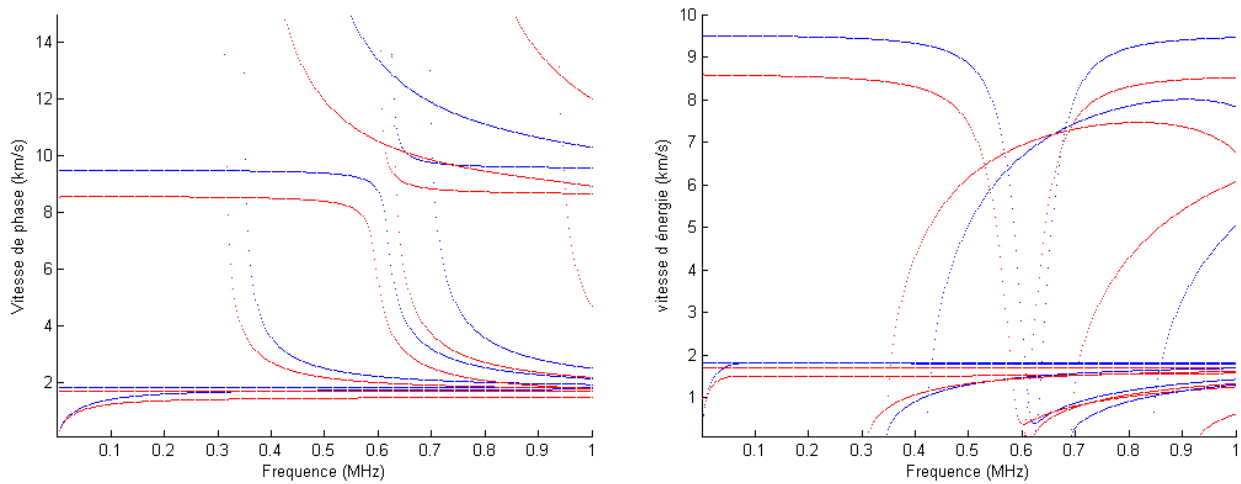
$C_{11}$	$C_{66}$	$\rho$
7.61	1.58	1230

Tableau 1-1 : propriétés élastiques d'un pli d'époxy (constante d'élasticité en GPa,  $\rho$  en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ).

Les courbes de dispersion en vitesse de phase et en vitesse d'énergie, dans la direction  $\beta=0^\circ$ , sont tracées pour les deux séquences d'empilement, elles sont représentées Figure 1-11 pour l'empilement 1, et Figure 1-12 pour l'empilement 2. Les courbes en bleu et rouge correspondent respectivement au composite sans présence de colle et au composite avec prise en compte de la colle.



**Figure 1-11: courbes de dispersion pour la plaque de séquence d'empilement 1 ; en bleu, sans couche de colle, et en rouge, avec couche de colle (époxy).**



**Figure 1-12: courbes de dispersion pour la plaque de séquence d'empilement 2 ; en bleu, sans couche de colle, et en rouge, avec couche de colle (époxy).**

Nous observons dans les deux cas que la présence de colle influe sur les valeurs de vitesses, mais que les allures des courbes restent identiques. Il est également noté que les différences entre les vitesses augmentent avec la fréquence, ce qui n'est pas surprenant au vue de la complexité de la propagation guidée dès le passage de la première fréquence de coupure.

Dans la suite de l'étude, la présence de couche de colle n'est pas prise en compte, car telles caractéristiques ne nous ont pas été fournies. Mais cette étude montre qu'il serait intéressant de considérer cette éventualité pour une problématique de contrôle.

## **1.4 Résumé du chapitre**

Dans ce chapitre, un état de l'art sur la propagation guidée dans des plaques anisotropes composites multicouche a été présenté. Parmi les différentes méthodes évoquées, la méthode SAFE permet un calcul rapide des modes guidés et de plus est facilement adaptable à des structures complexes.

Lors de travaux précédemment effectués dans notre département au CEA LIST, cette méthode avait été choisie pour modéliser la propagation guidée dans des guides isotropes possédant une direction guidante unique. Nous l'avons ici adaptée au cas des structures de type plaques anisotropes multicouches viscoélastiques.

Un post-traitement spécifique a été mis en place pour le calcul de vitesse d'énergie, imposé par la présence de viscoélasticité. La connaissance des fronts d'onde obtenus est très utile pour la problématique de contrôle, notamment pour ce qui concerne le choix du mode le mieux adapté à la détection de défauts dans une configuration donnée.

Nous avons finalement montré qu'il était possible de prendre en compte les couches de colle entre les plis d'un composite. Nous avons vu que ces couches jouent un rôle non négligeable dans la propagation guidée, bien qu'actuellement, elles ne soient pas prises en compte dans les études menées dans le Chapitre 3 par manque de données de la part du constructeur.



## Chapitre 2. VALIDATION ET ETUDE NUMERIQUE DE LA METHODE

2.1	Nature des modes résultants de la méthode SAFE.....	55
2.2	Étude de la discrétisation du calcul éléments finis dans l'épaisseur .....	57
2.3	Validation par des résultats issus de la littérature .....	59
2.3.1	Comparaisons avec la méthode de matrice de transfert pour un composite multicouche élastique .....	60
2.3.2	Comparaisons par une méthode analytique pour un milieu anisotrope et viscoélastique .....	61
2.4	Étude comparative réalisée avec la méthode WFE .....	62
2.5	Résumé du Chapitre .....	64

*Ce chapitre n'apporte pas de développements ou de résultats particuliers, mais présente une étape nécessaire lors de la mise en place d'une méthode de calcul, en l'occurrence, une étude de convergence et de validation.*

*Dans un premier temps, nous rappelons les différentes notions liées aux types des modes guidés : propagatifs, évanescents et inhomogènes. Les différents profils de déplacement analytiques (dans la direction de propagation) sont également présentés afin de comprendre le rôle de chaque mode sur le champ de déplacement total de la plaque. La compréhension et la différenciation de ces différents types de modes sera très importante pour la suite de l'étude.*

*Ensuite, nous présentons une brève étude sur la discrétisation minimale nécessaire afin d'avoir une convergence des résultats. Cette discrétisation choisie, liée à la structure multicouche des composites, sera utilisée pour les études qui suivent.*

*Plusieurs validations de la méthode sont également présentées. Elles sont menées par comparaison avec des résultats obtenus par des méthodes qui diffèrent de la méthode SAFE.*

*Pour finir, des travaux réalisés lors d'un stage à EADS IW consistant à comparer les résultats obtenus par la méthode SAFE à ceux obtenus par une autre méthode semi-analytique (WFE) sont brièvement présentés.*



## 2.1 Nature des modes résultants de la méthode SAFE

La méthode SAFE nous donne un nombre fini de valeur propres qui dépend de la discrétisation du maillage 1D. Nous obtenons ainsi différents types de modes guidés qui se répartissent en trois catégories : les modes propagatifs, les modes évanescents et les modes inhomogènes. Pour une bonne compréhension des phénomènes d'ondes guidées, il est important de bien différencier ces modes. Dans ce but, nous allons présenter ces différentes catégories, caractérisées par leur nombre d'onde et présenter leur profil de propagation dans la direction de l'onde.

Nous avons vu dans le Chapitre précédent que le déplacement d'un mode guidé s'écrit :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x)e^{j[\omega t - kr]} \quad (2-1)$$

Le mouvement particulière dans l'épaisseur représenté par  $\mathbf{U}(x)$ , correspond au vecteur propre du système SAFE. La propagation dans la direction liée à l'onde est donnée par le terme en exponentiel,  $e^{-jkr}$ , qui dépend du nombre d'onde.

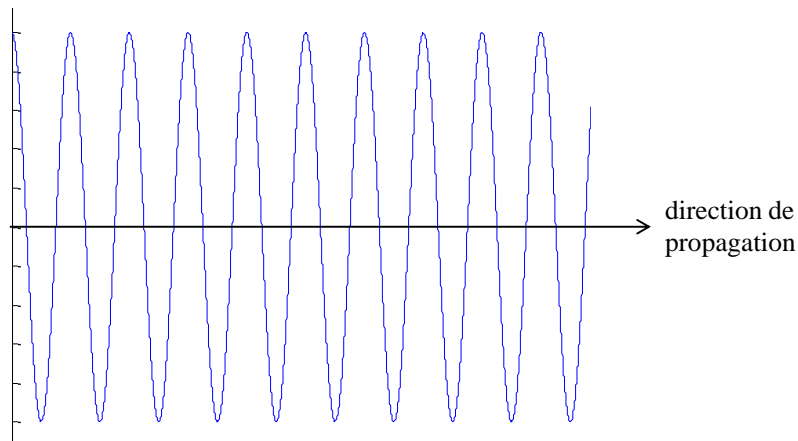
- **Les modes propagatifs**

Il existe un nombre fini de modes propagatifs dans une structure guidante ; ce nombre dépend du produit de l'épaisseur de la plaque avec la fréquence. Ces modes sont appelés propagatifs car ils se propagent sans s'atténuer. Dans le cas d'un guide d'onde élastique, leur nombre d'onde possède une valeur purement réelle.

$$k_e^{prop} = k_{R,e}^{prop} \quad (2-2)$$

où  $k_{R,e}^{prop}$  représente la partie réelle du nombre d'onde du mode propagatif dans un milieu élastique.

La propagation axiale correspond alors à celle d'une onde sinusoïdale qui ne s'amortit pas. Le profil de la propagation suivant la direction de d'observation est représenté ci-dessous Figure 2-1.



**Figure 2-1: profil de propagation pour un mode propagatif.**

Dans le cas d'un milieu atténuant, nous appelons encore modes propagatifs les modes qui sont faiblement amortis et peuvent donc en pratique se propager sur de grandes distances ; la valeur de cet amortissement dépend des phénomènes atténuants intrinsèques du matériau. Les nombres d'onde  $k_v^{prop}$  sont alors complexes mais possèdent une faible partie imaginaire :

$$k_v^{prop} = k_{R,v}^{prop} - jk_{I,v}^{prop} \quad (2-3)$$



$k_{R,v}^{prop}$  et  $k_{I,v}^{prop}$  représentent respectivement les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde en présence d'atténuation (ici, dans les composites, par viscoélasticité).

Ainsi on obtient un profil de propagation où la sinusoïde est amortie, représenté Figure 2-2.

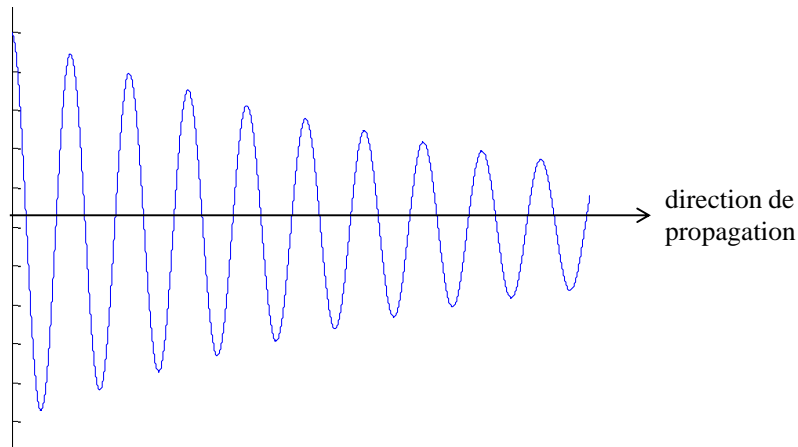


Figure 2-2: profil de propagation pour un mode propagatif dans un milieu viscoélastique.

- **Les modes évanescents**

Ces modes sont fortement atténués et n'ont d'amplitude significative que sur très courtes distances. En effet, leur nombre d'onde est imaginaire pur et donc correspond à un profil suivant la direction de propagation en exponentielle décroissante. Ce dernier, noté  $k^{éva}$ , est donné ci-dessous :

$$k^{éva} = -jk_I^{éva} , \quad (2-4)$$

où,  $k_I^{éva}$  représente la partie imaginaire du nombre d'onde d'un mode évanescent.

Nous représentons leur profil suivant la direction de propagation sur la Figure 2-3

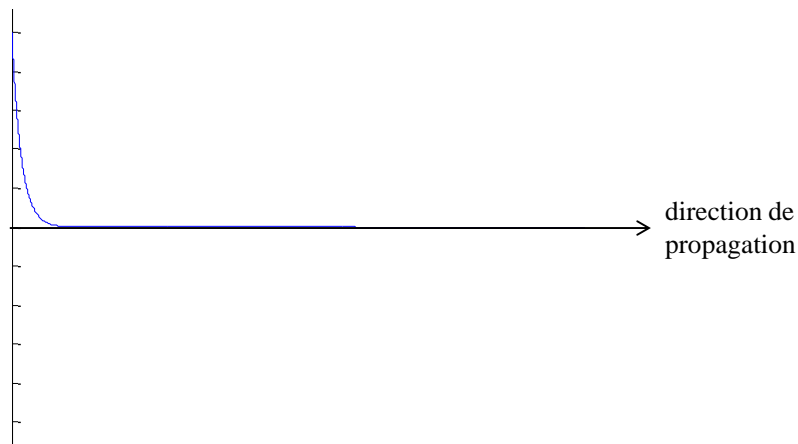


Figure 2-3: profil de propagation pour un mode imaginaire.

- **Les modes inhomogènes :**

Enfin les modes inhomogènes possèdent un nombre d'onde avec les parties réelles et imaginaires du même ordre de grandeur.

$$k^{lnH} = \pm k_R^{lnH} - jk_I^{lnH} . \quad (2-5)$$

$k_R^{InH}$  et  $k_I^{InH}$  représentent respectivement les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde d'un mode inhomogène.

Ces modes correspondent à des nombres d'ondes qui apparaissent lors de la résolution du système, et qui dépendent du maillage. Une infinité de ces modes peut exister dans une structure.

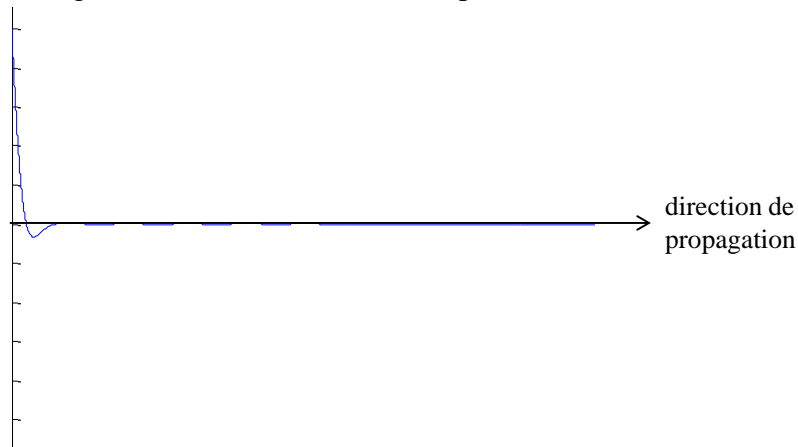


Figure 2-4: profil de propagation d'un mode inhomogène.

Pour conclure, seuls les modes propagatifs possèdent des déplacements axiaux significatifs, qui jouent un rôle sur le comportement des ondes guidées. Dans cette première partie, nous nous intéresserons donc seulement à ces modes. Nous verrons dans la partie II que les modes évanescents et inhomogènes jouent un rôle important lors de la mise en place de conditions aux frontières transparentes pour les phénomènes de diffraction.

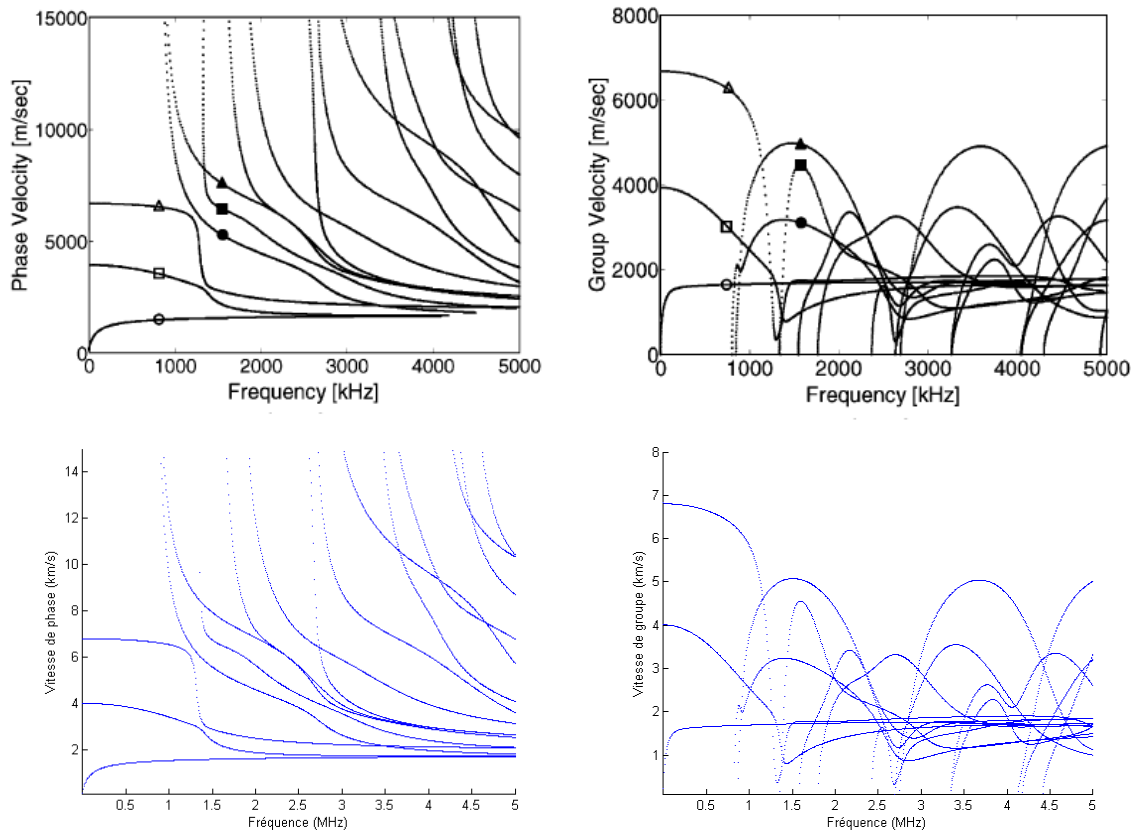
## 2.2 Étude de la discrétisation du calcul éléments finis dans l'épaisseur

Dans ce paragraphe, nous cherchons à déterminer une discrétisation minimale permettant un calcul numérique correct et rapide.

Comme nous l'avons énoncé dans le chapitre précédent, il est nécessaire que chaque élément appartienne à un pli de composite. Tout chevauchement doit être évité afin de vérifier les continuités des constantes d'élasticité.

Au vue des épaisseurs globales des plaques composites (de l'ordre du millimètre) et des plis associés (de l'ordre d'une centaine de micromètre), nous supposons qu'une discrétisation d'un élément par pli est suffisante pour obtenir une représentation précise des phénomènes guidés. Cette hypothèse est vérifiée par différentes simulations et comparaisons que nous présentons brièvement.

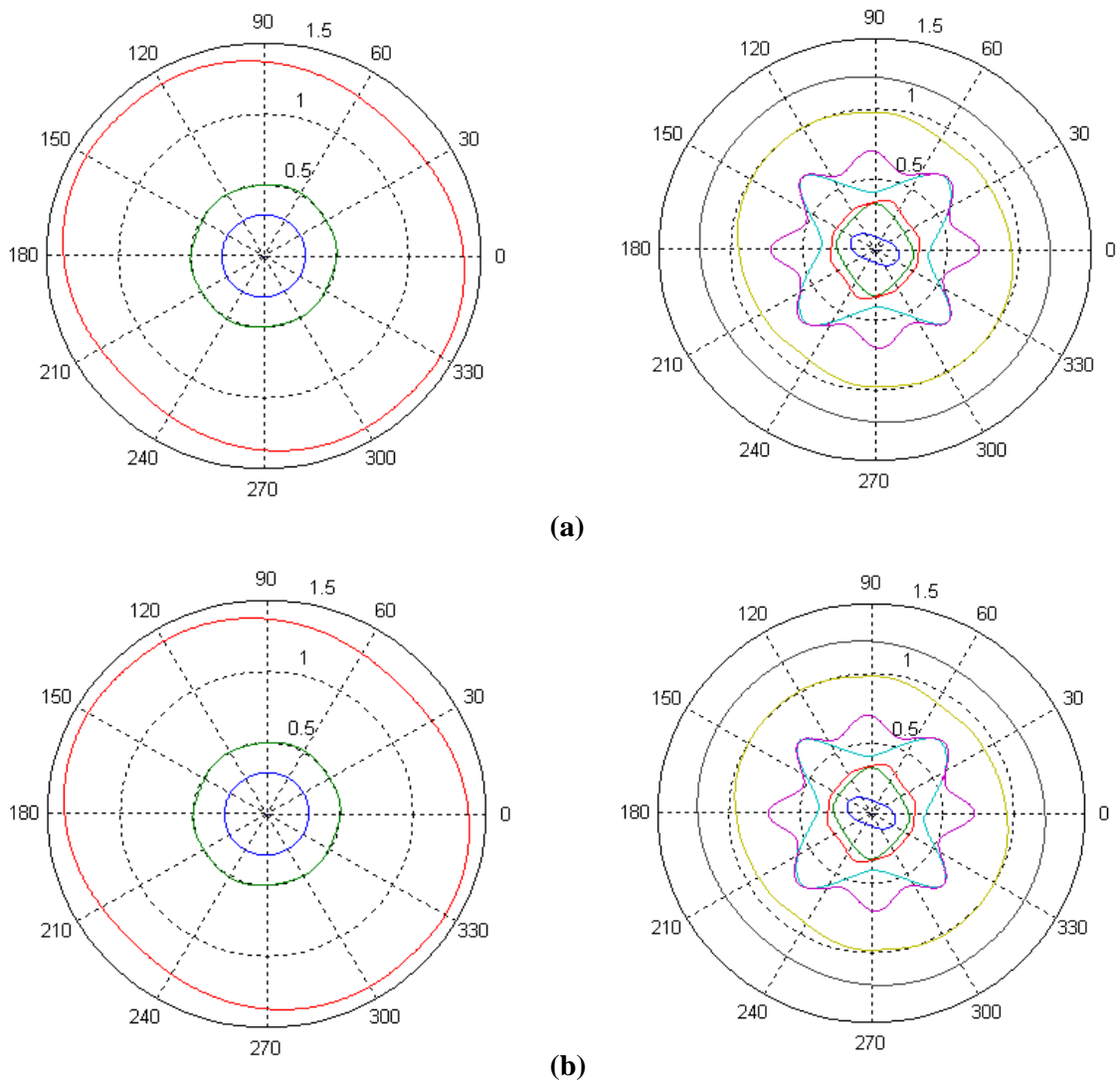
Dans un premier temps, les courbes de dispersion sont tracées pour une discrétisation d'un élément par pli et comparées aux courbes de référence issues de Bartoli *et al.*[29]. La structure étudiée est une plaque composite en fibre carbone - matrice époxy de séquence d'empilement  $[+45/-45/0/90]_s$ , ses constantes d'élasticité sont données dans [29]. Les courbes de dispersion en vitesse de phase et en vitesse de groupe sont présentées Figure 2-5.



**Figure 2-5:** courbes issues de Bartoli *et al.* [29] (en haut), courbes obtenues avec une discrétisation d'un élément par pli (en bas), pour un composite d'empilement [+45/-45/0/90]<sub>s</sub>.

Les résultats obtenus sont très proches de ceux de l'article de Bartoli *et al.* [29], les valeurs des fréquences de coupures commencent à différer à partir de 3MHz, où onze modes se propagent. Or, dans une optique de contrôle santé intégré, la plage de fréquence présente avant 3MHz offre une bande de fréquence suffisante, le caractère dispersif et multimodal des ondes guidées limitant l'intérêt d'utiliser des hautes fréquences. Cette limitation est étudiée plus en détail dans le prochain chapitre. La discrétisation avec un élément par pli semble donc acceptable pour une utilisation à fréquence modérée.

Nous avons également illustré cette étude de convergence par la représentation des courbes de lenteur dans le plan. Ci-dessous, Figure 2-6, les courbes de lenteur sont tracées pour deux fréquences,  $f_1=0.5\text{MHz}$ , avant la première fréquence de coupure (trois modes propagatifs présents), et  $f_2=1.7\text{MHz}$  (sept modes propagatifs). Pour chacune des fréquences, les courbes sont tracées pour une discrétisation d'un élément par pli puis une discrétisation de quinze éléments par pli.



**Figure 2-6: courbes de lenteurs obtenues par la méthode SAFE pour une discrétisation de (a) un élément par pli (b) quinze éléments par pli. À gauche:  $f=500\text{kHz}$ ; à droite:  $f=1.7\text{MHz}$**

Il est clairement visible que les courbes de lenteur sont similaires pour les deux discrétisations aux deux fréquences.

Des études plus quantitatives ont également été réalisées ; nous avons comparé les valeurs des nombres d'ondes pour une discrétisation d'un élément par pli avec des discrétisations supérieures (en gardant un multiple du nombre de plis). La précision a été testée dans des configurations typiques de contrôle, c'est-à-dire pour des fréquences d'excitation inférieures à 2MHz. Les erreurs relatives calculées sur les valeurs des nombres d'ondes propagatifs sont de l'ordre de  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$ . Ces résultats confirment la validité de notre hypothèse.

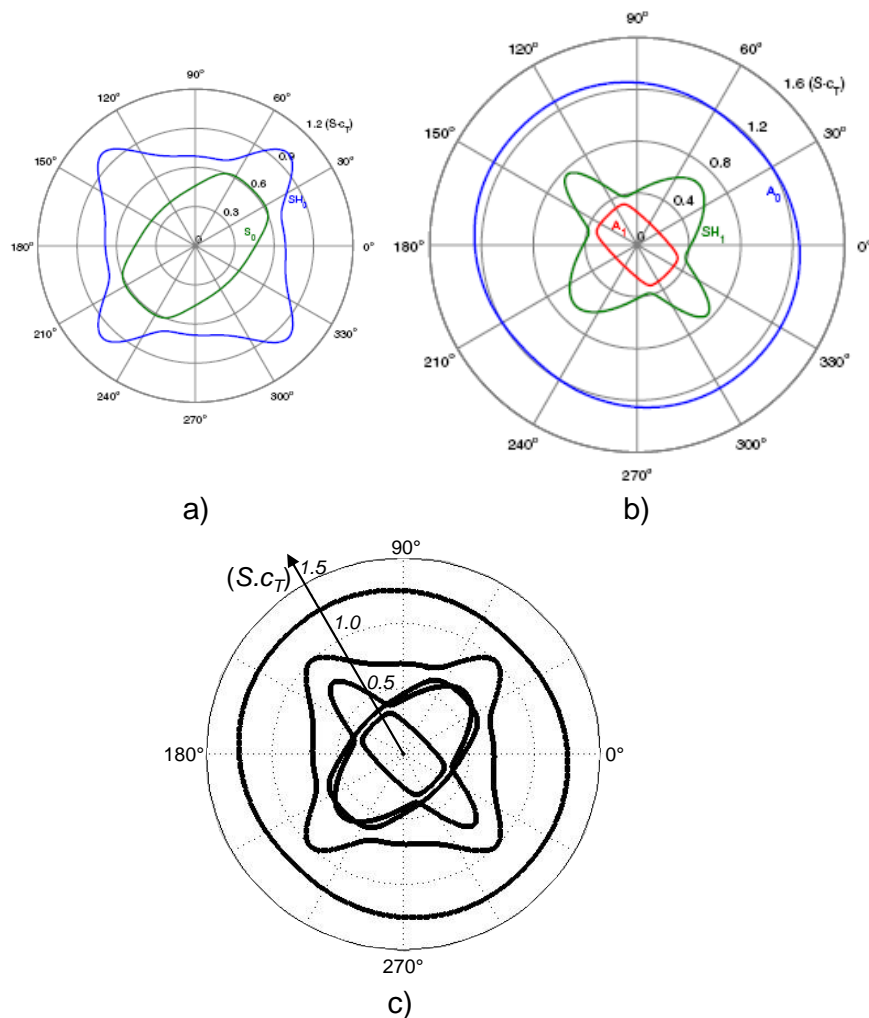
### 2.3 Validation par des résultats issus de la littérature

L'objectif du paragraphe précédent était de s'assurer de la bonne implémentation de la méthode au CEA en comparant les résultats obtenus par Bartoli *et al.* [29] utilisant la même méthode. Nous avons également pu vérifier qu'une discrétisation d'un élément par pli était suffisante. Dans ce paragraphe, nous présentons des validations par comparaison avec des méthodes différentes.

### 2.3.1 Comparaisons avec la méthode de matrice de transfert pour un composite multicouche élastique

La méthode développée est validée par comparaison avec la méthode de matrice de transfert développée par Wang *et al.* [42]. Wang *et al.* ont considéré des plaques multicouches avec différentes séquences d'empilement, chaque pli étant purement élastique. Des courbes de dispersion en vitesses de phase et de groupe ont été représentées, ainsi que des courbes de lenteur et de vitesse de groupe dans le plan.

Dans ce paragraphe, nous montrons les comparaisons des courbes de lenteur pour une séquence d'empilement  $[45^\circ_6/-45^\circ_6]_S$  d'épaisseur 3mm à 412,8kHz. À cette fréquence, cinq modes propagatifs existent dans la plaque ; il s'agit des modes  $A_0$ ,  $SH_0$ ,  $S_0$ ,  $SH_1$  et  $A_1$ . Ces courbes sont représentées sur les différents graphes de la Figure 2-7, tous tracés à la même échelle.



**Figure 2-7: courbes de lenteur à 412.8kHz pour un empilement  $[45^\circ_6/-45^\circ_6]$ . En haut : (a) modes symétriques et (b) mode antisymétrique de [42]. En bas : résultats obtenus (les modes symétriques et antisymétriques sont superposés).**

Les courbes issues de Wang *et al.* [42] sont présentées sur les graphiques (a) et (b) de la Figure 2-7, les résultats que nous obtenons sont représentés sur le graphique (c) de la Figure 2-7.

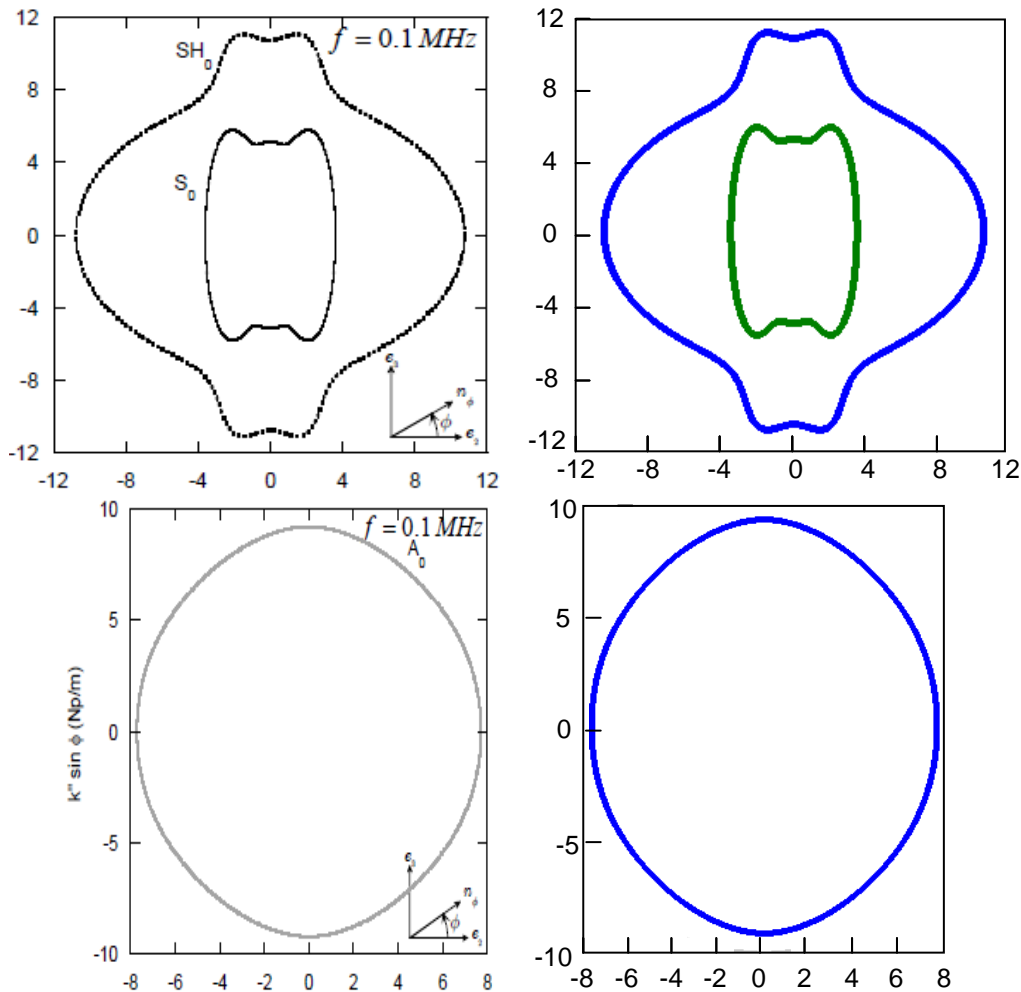
Le premier graphique (a) indique les modes  $S_0$  et  $SH_0$ , tandis que le second présente les modes  $A_0$ ,  $SH_1$  et  $A_1$ ; dans notre cas tous les modes sont représentés sur le même graphique. Malgré cela il est clairement visible que les résultats sont en très bon accord.

Wang *et al.* présentaient également des résultats pour un composite quasi-isotrope dans le plan d'empilement  $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_S$ , des comparaisons ont été menées pour cette plaque. Les résultats, ne sont pas présentés dans ce manuscrit, mais étaient également en très bon accord.

### 2.3.2 Comparaisons par une méthode analytique pour un milieu anisotrope et viscoélastique

Comme notre modèle nous permet de prendre en compte des plaques viscoélastiques, des comparaisons supplémentaires ont été menées en prenant comme référence les résultats obtenus par Neau dans sa thèse [32]. Ce dernier a mis en place une formulation analytique pour la propagation guidée dans une plaque composite monocouche viscoélastique.

Dans un premier temps, la comparaison des résultats porte sur une étude des courbes d'atténuation dans le plan. L'étude est faite pour une plaque d'épaisseur 3,6mm à 100kHz, dont les constantes d'élasticité sont données dans [32]. Les courbes sont représentées Figure 2-8, à gauche les graphes sont issus de Neau et nos résultats sont présentés à droite.



**Figure 2-8: courbes d'atténuation dans le plan (en Np/m) à 100kHz dans une plaque unidirectionnel viscoélastique. À gauche résultats issus de [32]. À droite: résultats obtenus. En haut :  $S_0$  (vert) et  $SH_0$  (bleu). En bas :  $A_0$ .**

Les résultats pour les courbes d'atténuation des deux méthodes sont en parfait accord. Mais la comparaison n'est faite qu'à une seule fréquence. Une dernière comparaison est effectuée pour ce composite mais cette fois pour plusieurs valeurs de fréquences. En effet, Neau a représenté les courbes d'énergie dans le plan pour le mode  $S_0$  à quatre fréquences différentes {300kHz ; 320kHz ; 345kHz ; 400kHz}. Nous avons donc reproduit ces configurations de simulation et comparé les résultats obtenus avec ceux de Neau. Les graphiques sont représentés ci-dessous Figure 2-9, avec à gauche les résultats de Neau et à droite les résultats que nous obtenons.

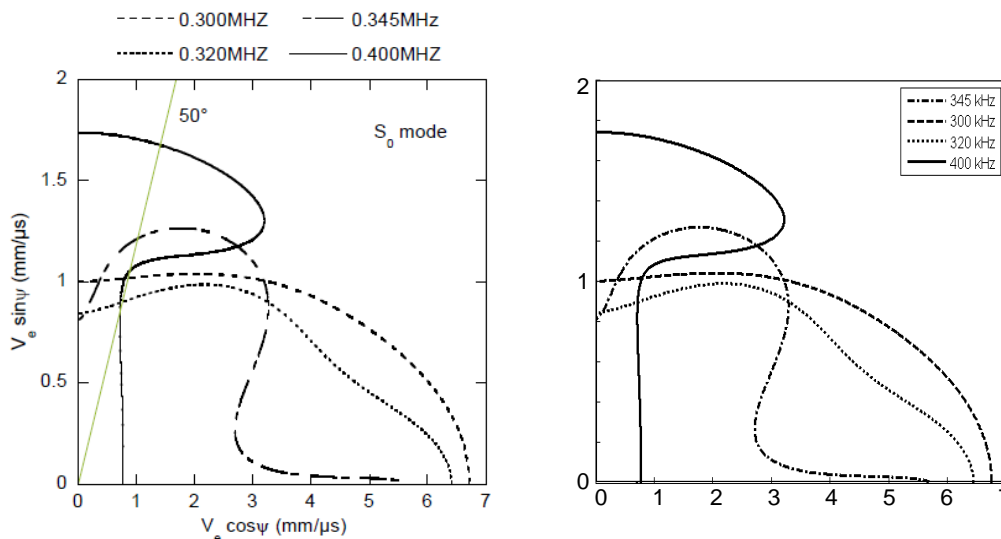


Figure 2-9: courbes dans le plan en vitesse d'énergie du mode  $S_0$  à quatre fréquences différentes. À gauche résultats tirés de [32]. À droite: résultats obtenus.

Nos prédictions sont à nouveau en accord avec les résultats de Neau, alors que les deux méthodes sont radicalement différentes. Cela nous permet de valider la modélisation de la viscoélasticité du milieu. De plus, du fait de la forte anisotropie du composite étudié, le calcul de la vitesse d'énergie, par post-traitement des résultats de la méthode SAFE est également validé.

## 2.4 Étude comparative réalisée avec la méthode WFE

Dans le cadre du stage de Mounir Benmrah, réalisé à EADS IW, l'outil développé dans le chapitre précédent a été pris en main par ce dernier. Le sujet, portant sur l'analyse numérique de la propagation guidée dans des structures composites, a, dans un premier temps, consisté en une étude comparative de résultats provenant de différentes méthodes numériques. Dans ce but, des simulations de la propagation guidée dans des plaques composites EADS ont été réalisées par la méthode SAFE et la méthode WFE. Cette dernière, reposant sur une vision périodique de la structure, a été présentée dans le chapitre précédent.

Différentes plaques aéronautiques ont été étudiées, dont une plaque composite d'épaisseur 1,6mm, en fibre de carbone dans une matrice d'époxy, de séquence d'empilement  $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_{2s}$ . Les constantes d'élasticité et la densité d'un pli sont données dans le rapport de stage de Mounir Benmrah [57]. Les courbes de dispersion en vitesse de phase sont illustrées Figure 2-10 pour une direction de propagation  $\beta=0^\circ$ .

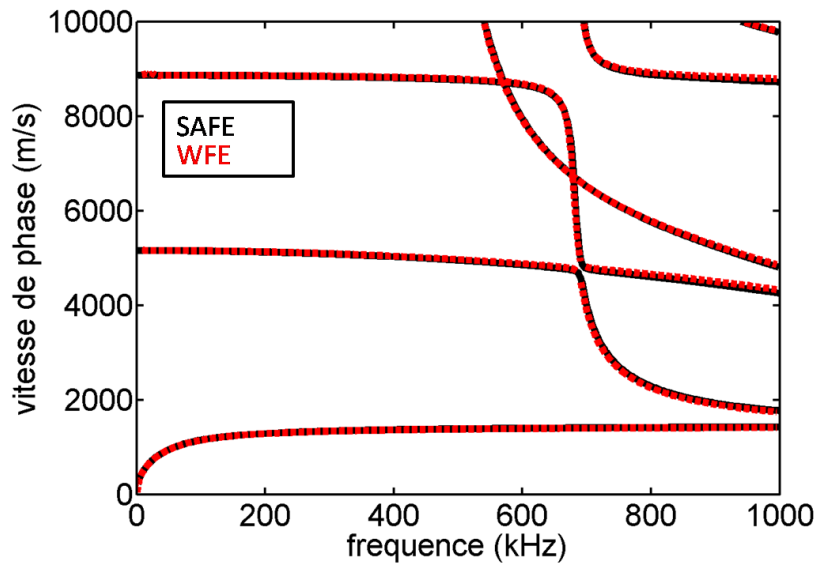


Figure 2-10 : comparaisons des courbes de dispersion en vitesse de phase issues de Benmrah [57], obtenues par la méthode SAFE (noir) et la méthode WFE (rouge), pour  $\beta=0^\circ$ .

Les résultats sont en très bon accord. Des représentations de front d'onde à 100kHz sont données Figure 2-11.

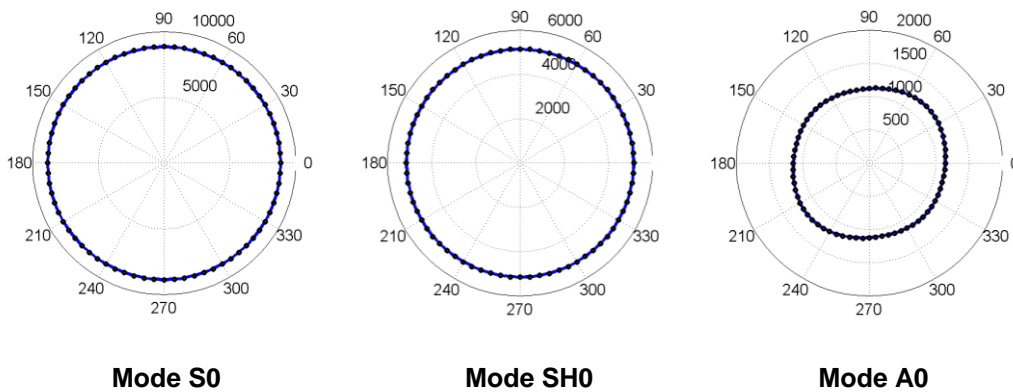


Figure 2-11: comparaisons des fronts d'onde (vitesses d'énergie) à 100kHz issues de Benmrah [57], obtenus par la méthode SAFE (-) et la méthode WFE (.).

Les phénomènes guidés prédits par les deux méthodes sont en parfait accord. Des résultats, obtenus pour une plus grande variété de plaque composite, sont présentés dans le rapport de stage de Mounir Benmrah [57].



## 2.5 Résumé du Chapitre

Après la présentation des différents modes obtenus par la méthode SAFE, nous avons proposé une étude de convergence pour les modes propagatifs. Cela nous a mené à vérifier qu'une discrétisation d'un élément par pli de composite est suffisante pour obtenir une bonne représentation de la propagation guidée.

Ensuite, la méthode SAFE mise en place a été validée par comparaison avec des méthodes analytiques. Wang *et al.* ont présenté des résultats pour différents empilements de composites élastiques. Nous avons montré ici les différentes comparaisons réalisées pour un milieu fortement anisotrope. Par ailleurs, Neau modélisant la propagation guidée dans des milieux viscoélastiques, nous avons pu valider notre calcul dans le cas d'un comportement viscoélastique.

Enfin, nous avons présenté brièvement une étude comparative réalisée dans le cadre du stage de Mounir Benmrah réalisé à EADS IW. Nous avons choisi de présenter une des comparaisons effectuées entre la méthode SAFE développée et la méthode WFE.

Toutes les comparaisons montrent que la méthode SAFE, telle que nous l'avons implémentée, permet de reproduire avec une excellente précision des résultats obtenus par des méthodes de calcul radicalement différentes de la méthode SAFE, les avantages spécifiques à la méthode SAFE ayant été présentés dans le chapitre précédent.





## Chapitre 3. EXPLOITATION DE LA METHODE SUR DIFFERENTES PLAQUES COMPOSITES ET CONSEQUENCES POUR LE SHM

3.1	Intérêt de l'étude.....	69
3.2	Étude de la dispersion des ondes guidées dans une direction de propagation .....	70
3.3	Étude de la propagation dans le plan de la plaque .....	71
3.3.1	Lenteurs et vitesses d'énergie .....	71
3.3.2	Étude détaillée des modes dans l'épaisseur de la plaque composite .....	74
3.4	Influence de la répétition des plis d'orientation 45°, 0°, 135°, 90° sur l'anisotropie de la structure multicouche .....	76
3.5	Résumé du chapitre – conclusion pour le SHM .....	80

*Dans ce chapitre, la méthode SAFE est utilisée afin de mener une étude détaillée de la propagation guidée dans une structure de type plaque composite multicouche viscoélastique. Les deux principaux objectifs de cette étude sont de déterminer les configurations optimales pour un contrôle de structure et de vérifier que pour des empilements, impliquant des plis orientés à 45°, 0°, 135° et 90°, il est nécessaire de prendre en compte le comportement dynamique de la structure.*

*Dans un premier temps, nous proposons l'étude d'une séquence d'empilement [45°/0°/135°/90°/45°/0°/135°/90°]<sub>s</sub>. Les courbes de dispersion et de propagation dans le plan de la plaque (lenteur, vitesses d'énergie et atténuation) permettent notamment de choisir les fréquences optimales pour un contrôle de structure. L'anisotropie des courbes de lenteurs présente des symétries liées à l'empilement de la structure composite. Une observation attentive des déplacements particuliers permet d'expliquer ces phénomènes.*

*Enfin, la propagation dans deux séquences d'empilement est comparée afin de déterminer l'influence du nombre de plis sur l'anisotropie de la structure multicouche.*



### 3.1 Intérêt de l'étude

Ce chapitre a pour but de comprendre le comportement des ondes guidées dans une plaque composite multicouche viscoélastique. Le contrôle santé intégré n'étant qu'au stade d'une étude de faisabilité pour les chercheurs d'EADS IW, ces derniers sont intéressés par des outils de simulation leur permettant de prédire le comportement des ondes guidées. Ainsi, ils souhaitent déterminer quels sont les modes guidés et les plages de fréquence les mieux adaptés à une problématique de contrôle intégré.

L'étude menée porte sur des plaques composites caractéristiques de celles utilisées dans des applications aéronautiques. Les ingénieurs aéronautiques utilisent de telles plaques pour la construction de nombreuses parties d'avion ; les séquences d'empilements sont choisies en fonction de la résistance requise pour les différentes parties de la structure.

Il existe de nombreux types de composites, définis selon les séquences d'empilement, matériaux utilisés, épaisseur... La méthode de calcul développée permet de prendre en compte toute sorte d'empilement et d'anisotropie. Nous présentons une étude approfondie d'une plaque composite de 16 plis et de séquences d'empilement  $S_{16}$  :

$$S_{16} = [45^\circ / 0^\circ / 135^\circ / 90^\circ / 45^\circ / 0^\circ / 135^\circ / 90^\circ]_s. \quad (3-1)$$

Les plaques composites de séquence d'empilement impliquant les rotations  $45^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $90^\circ$  sont très classiquement utilisées pour des structures aéronautiques.

Le composite de 16 plis étudié dans ce paragraphe est une plaque dont les caractéristiques ont été données par EADS IW. Le panneau, de dimensions 2.14 x 500 x 527 mm, est constitué de 16 plis de carbone-époxy d'épaisseur 133,75  $\mu\text{m}$  (le taux de fibres est de 60%). Seuls les coefficients de viscosité n'ont pas été fournis par EADS IW, ils ont été inspirés de la littérature, notamment [29] et [32], et adaptés aux coefficients d'élasticité donnés. Les propriétés d'un pli de carbone-époxy utilisées dans ce chapitre sont données Tableau 3-1. Comme nous l'avions énoncé dans le Chapitre 0, nous utilisons le modèle hystérétique pour tenir compte de la viscoélasticité.

$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$	$\rho$
11.5	5.258	5.0	11.5	5.0	145.5	5.2	5.2	3.5	1590

$\eta_{11}$	$\eta_{12}$	$\eta_{13}$	$\eta_{22}$	$\eta_{23}$	$\eta_{33}$	$\eta_{44}$	$\eta_{55}$	$\eta_{66}$
0.8	0.4	0.7	0.8	0.7	10	0.4	0.4	0.2

**Tableau 3-1 : propriétés viscoélastiques d'un pli en carbone-époxy (coefficient de viscoélasticité en GPa, masse volumique en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ).**

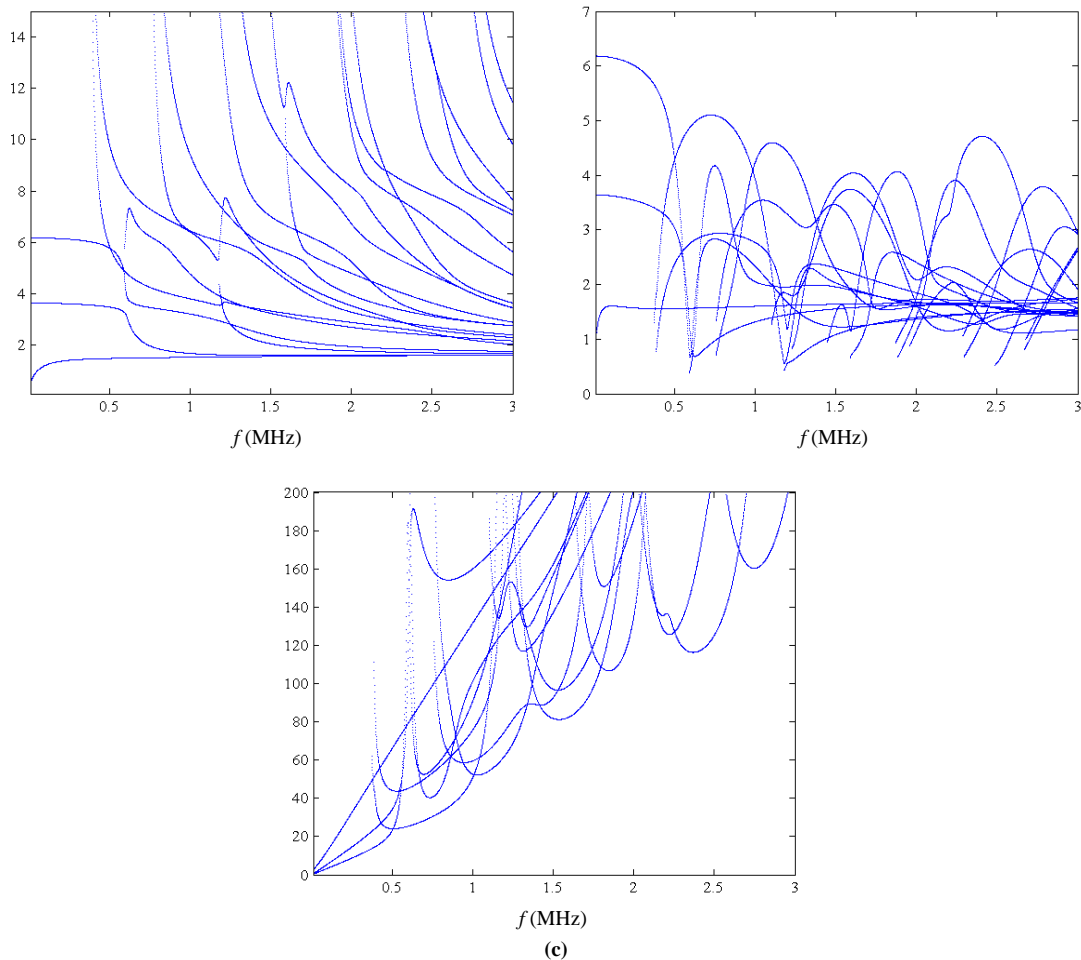
Nous faisons remarquer que la valeur de  $\eta_{33}$  est singulière. Ce choix, inspiré de la littérature, a été mis en doute par un travail très récent (juillet 2011) [58] réalisé au CEA. Pour la suite de l'étude, nous précisons que la valeur des coefficients de viscosité influe seulement sur le module des atténuations. Cela ne remet donc pas en doute les travaux réalisés dans ce chapitre avec la méthode développée.

Le calcul SAFE prenant en compte le détail de la structure multicouche n'est pas beaucoup plus coûteux qu'un calcul qui ne considérerait qu'une couche unique aux caractéristiques élastiques homogénéisées. Cependant, en statique, les ingénieurs considèrent des caractéristiques élastiques homogènes dans l'épaisseur ce qui simplifie grandement certains calculs de dimensionnement des pièces par exemple. Nous allons voir dans ce chapitre que l'étude détaillée de la propagation guidée dans une plaque multicouche montre qu'une telle simplification n'est pas possible dès lors que l'on se place dans une optique de contrôle utilisant ces ondes guidées. Seule la prise en compte détaillée de la structure permet d'en prédire le comportement réel.

### 3.2 Étude de la dispersion des ondes guidées dans une direction de propagation

Dans un premier temps, il est important d'étudier le comportement fréquentiel des ondes pour proposer une plage de fréquences adaptée à la problématique de contrôle. C'est pourquoi nous nous intéressons à la dispersion des ondes guidées dans la direction  $\beta = 0^\circ$ .

Pour une étude globale de la dispersion, il est intéressant de représenter les courbes de dispersion en vitesse de phase, vitesse d'énergie, et atténuation.



**Figure 3-1 :** courbes de dispersions en (a) vitesse de phase, (b) vitesse d'énergie et (c) atténuation dans la direction  $\beta=0^\circ$  (les vitesses sont exprimées en km.s<sup>-1</sup> et l'atténuation en Np.m<sup>-1</sup>).

Au vue de ces courbes, nous pouvons déjà faire quelques remarques intéressantes. Avant la première fréquence, les vitesses de phase et d'énergie présentent des profils peu dispersifs et seuls trois modes se propagent dans la plaque. Inversement, pour des fréquences supérieures, les vitesses varient fortement avec la fréquence. Dans ce cas, la dispersion et le caractère multimodal des ondes guidées entraîneraient de grandes difficultés d'interprétation de résultats expérimentaux qui pourraient comporter de nombreuses contributions temporellement très proches voire superposées. Pour ces raisons, il paraît judicieux de se placer avant la première fréquence de coupure pour une inspection de telles structures par ondes guidées.

Un autre avantage de cette plage de fréquence est que l'atténuation y est faible ; ainsi, les ondes peuvent se propager sur de grandes distances. De plus, l'atténuation des trois modes varie linéairement avec la fréquence. Les courbes de la Figure 3-1 (c) montrent également que, au dessus

de la première fréquence de coupure, l'atténuation varie fortement avec la fréquence et des valeurs importantes sont rapidement atteintes ; ces ondes ne peuvent se propager sur de longues distances, *a fortiori* si elles sont diffractées par un raidisseur comme nous le verrons par la suite.

Il est important de noter que cette conclusion relative au choix optimal des fréquences d'étude vaut pour toutes séquences d'empilement.

La suite de l'étude de la propagation dans le plan est plus spécifique et les conclusions qui pourront en être tirées ne seront valables que pour le type d'empilement considéré.

Nous avons présenté les courbes de dispersion pour  $\beta = 0^\circ$ , mais nous savons qu'elles varient avec la direction de propagation du fait du caractère anisotrope du milieu composite.

Cela nous amène à nous interroger sur la dépendance des fréquences de coupure avec la direction de propagation. La valeur de la première fréquence de coupure a donc été étudiée pour quatre directions différentes, les résultats obtenus sont donnés Tableau 3-2.

direction de propagation (°)	0	45	90	135
1 <sup>ère</sup> fréquence de coupure (kHz)	372.09	372.24	373.74	374.77

Tableau 3-2 : valeurs de la première fréquence de coupure avec la direction de propagation.

Les variations observées sont très faibles, inférieures à 3 kHz soit 0,7 %. Les différentes fréquences de coupure peuvent donc être évitées en prenant une fréquence maximale de la plage de contrôle légèrement inférieure aux fréquences de coupure observées.

### 3.3 Étude de la propagation dans le plan de la plaque

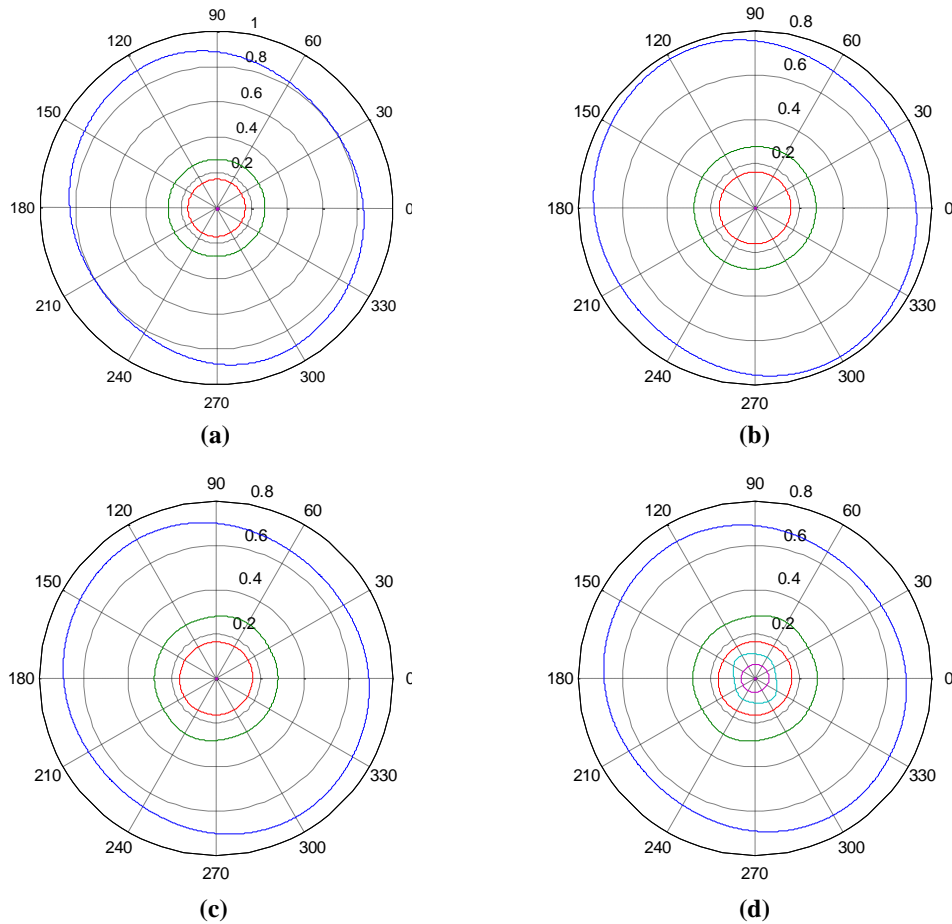
Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la propagation des ondes guidées dans le plan de la plaque. L'intérêt de cette étude est de comprendre le comportement des ondes dans le plan de la plaque, mais aussi dans l'épaisseur, et ainsi, de discuter de la validité d'un comportement isotrope à basses fréquences (étude statique).

#### 3.3.1 Lenteurs et vitesses d'énergie

L'étude se poursuit donc principalement à des fréquences inférieures à la première fréquence de coupure ; nous présentons cependant des résultats à une fréquence légèrement supérieure à celle-ci pour mettre en avant la complexité des phénomènes en dehors de la plage de fréquence choisie.

Les courbes de lenteur sont illustrées pour quatre valeurs de fréquences : 100 kHz, 200 kHz, 350 kHz et 410 kHz. Pour la dernière valeur, cinq modes propagatifs sont présents. Les modes q-A<sub>0</sub>, q-SH<sub>0</sub> et q-S<sub>0</sub> sont représentés respectivement en bleu, vert et rouge. Les modes tracés en cyan et en rose correspondent aux modes apparaissant après la 1<sup>ière</sup> fréquence de coupure.

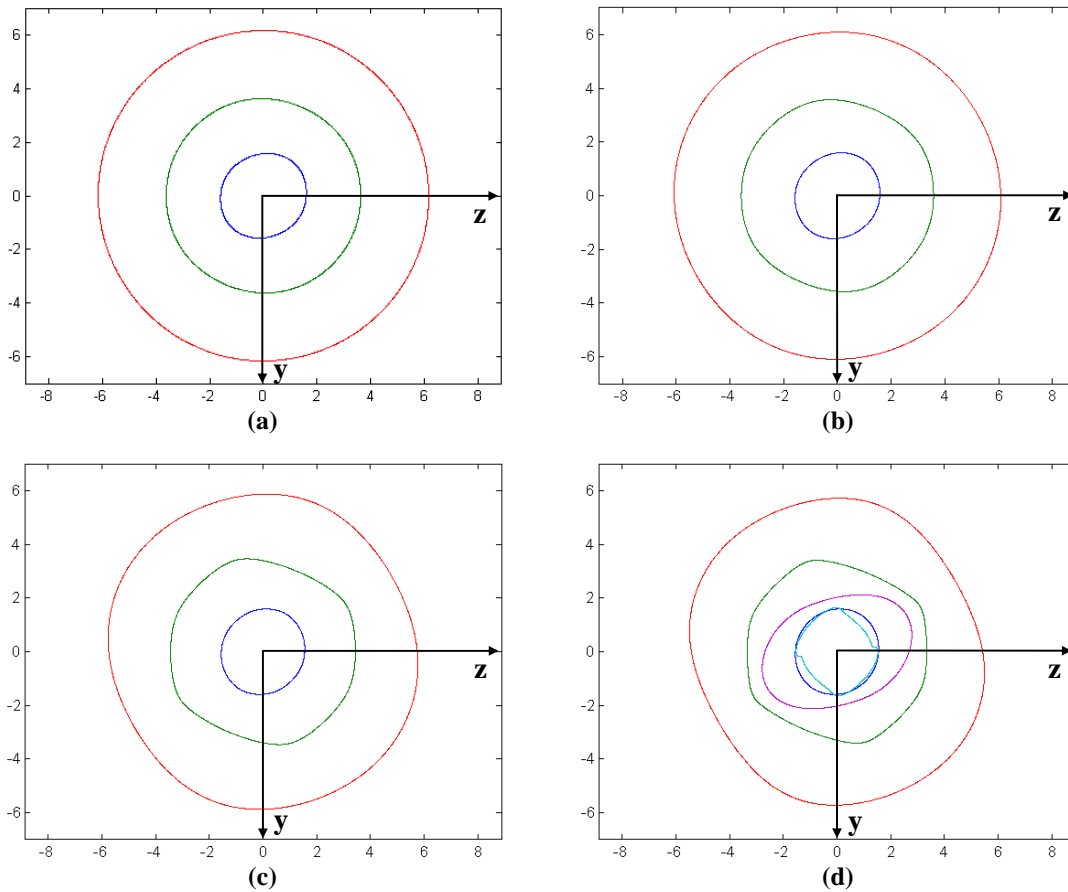




**Figure 3-2 ; courbes de lenteur (en s.km<sup>-1</sup>) pour une fréquence de (a) 100 kHz, (b) 200 kHz, (c) 350 kHz et (d) 410 kHz.**

Le mode q-S<sub>0</sub> se propage avec la plus petite lenteur (la plus grande vitesse). Nous remarquons que la courbe de lenteur est pratiquement circulaire, *i.e.*, la propagation de ce mode est quasiment isotrope. Aux fréquences les plus basses, le mode q-SH<sub>0</sub> est également presque isotrope, puis se déforme légèrement quand la fréquence se rapproche de la première fréquence de coupure. Enfin, le mode q-A<sub>0</sub> possède la plus grande lenteur. Sa dépendance avec la direction de propagation est marquée dès les basses fréquences ; la courbe de lenteur possède ses plus petites valeurs aux alentours 45° et 225°.

Les courbes de vitesse d'énergie sont maintenant présentées pour les quatre mêmes fréquences sur la Figure 3-3. L'intérêt de ces courbes est de représenter la direction de propagation d'énergie, c'est-à-dire l'allure du front d'onde.



**Figure 3-3 ; courbes de vitesse d'énergie (en  $\text{km.s}^{-1}$ ) pour une fréquence de (a) 100 kHz, (b) 200 kHz, (c) 350 kHz et (d) 410 kHz.**

Les courbes de vitesse d'énergie montrent que dès la plus basse fréquence le mode  $q-A_0$  a un comportement anisotrope. Et d'une façon générale, il est observé que le caractère anisotrope de la propagation augmente avec la fréquence.

L'étude à 410 kHz rend compte d'une forte anisotropie pour les modes apparaissant après la première fréquence de coupure.

Il nous semble donc intéressant d'étudier plus précisément les différentes symétries que possèdent ces courbes. Par abus de langage, nous appelons symétries, les symétries par rapport à un axe mais aussi les directions pour lesquelles les courbes présentent des minima et des maxima.

Dans un premier temps, la symétrie centrale des différentes courbes dans le plan est mise en avant. Cette symétrie n'est pas uniquement valable pour la séquence d'empilement étudiée ; en effet, elle s'applique à tous types de structures multicouches. Elle est due à la symétrie des plis de composite qui est invariante par une rotation de  $\pi$ . Ainsi, la séquence d'empilement complète est également invariante par rotation de  $\pi$ .

Nous avons cherché à quantifier les variations des symétries suivant la fréquence. Dans ce but, les directions de lenteur maximale, de vitesse d'énergie maximale et de lenteur minimale ont été déterminées. Les différentes valeurs sont données Tableau 3-3.

$f$ (kHz)	angle (°) de lenteur maximale			angle (°) de vitesse d'énergie maximale			angle (°) de lenteur minimale		
	q-A <sub>0</sub>	q-SH <sub>0</sub>	q-S <sub>0</sub>	q-A <sub>0</sub>	q-SH <sub>0</sub>	q-S <sub>0</sub>	q-A <sub>0</sub>	q-SH <sub>0</sub>	q-S <sub>0</sub>
100	110.8	67.3	29.3	47.5	107.4	151.5	36.9	107.2	151.6
200	116.2	67.3	29.2	55.1	107.6	150.4	40.7	107.4	150.9
350	123.0	67.2	29.0	58.9	108.1	145.9	44.9	107.7	148.6

Tableau 3-3 : dépendance des directions de lenteur et d'énergie avec la fréquence.

Les angles de valeurs maximales de phase et de vitesse d'énergie sont différents. Cela s'explique aisément du fait que dans un matériau anisotrope les directions des vitesses de phase et d'énergie ne sont pas colinéaires. Ce phénomène a été mis en avant dans le Chapitre 1 sur la Figure 1-6.

Nous remarquons également que les différents angles déterminés dépendent de la fréquence. Par exemple pour le mode q-A<sub>0</sub>, l'angle de valeur maximale de la lenteur varie de 110.8° à 123.0° ( $\Delta_{\max}= 12.2^\circ$ ) et celui de valeur minimale varie de 36.9° à 44.9° ( $\Delta_{\min}= 8.0^\circ$ ).

Il est intéressant de noter que les angles présentés ne sont pas alignés avec une direction d'orientation des fibres. Ce point est expliqué dans le prochain paragraphe en étudiant les déplacements particuliers dans l'épaisseur du composite des différents modes propagatifs.

### 3.3.2 Étude détaillée des modes dans l'épaisseur de la plaque composite

Nous avons vu que le mode q-A<sub>0</sub> est le plus anisotrope et cela dès les plus basses fréquences. Le Tableau 3-3 nous a permis de déterminer que les directions des lenteurs maximales et minimales ne sont pas alignées avec une direction de fibres, mais qu'elles sont proches respectivement des fibres à 135° et à 45°. Pour comprendre ce phénomène, nous représentons les composantes du déplacement particulière dans l'épaisseur de la plaque, pour le mode q-A<sub>0</sub> à 100 kHz et 350 kHz dans une direction alignée avec l'axe  $z$  ( $\beta = 0^\circ$ ).

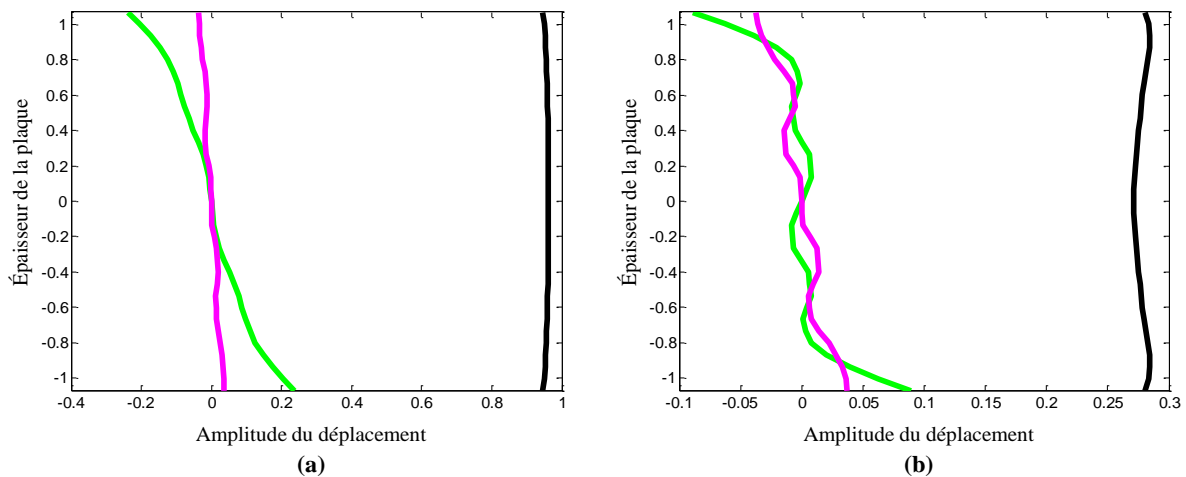


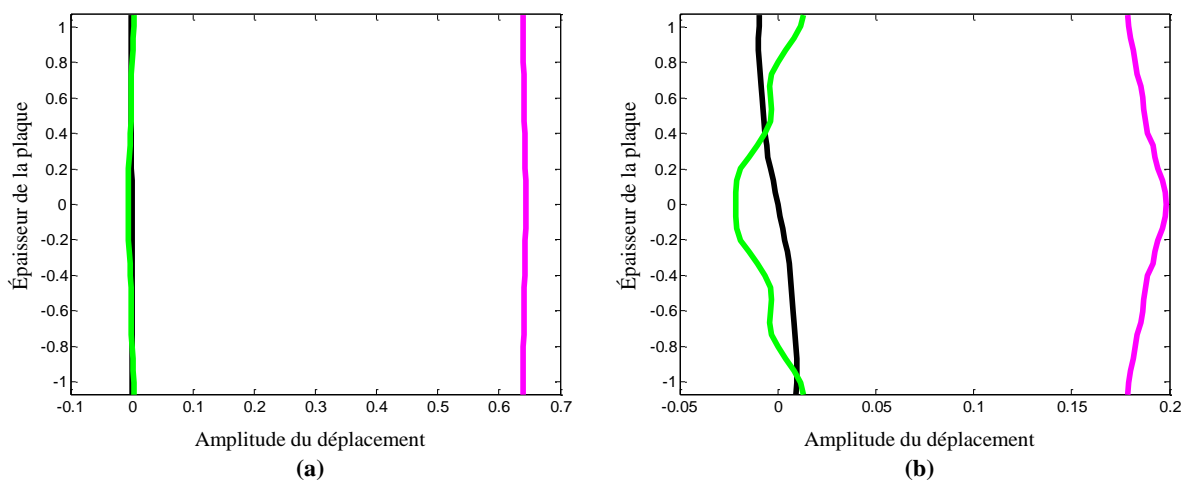
Figure 3-4: déplacement particulière dans l'épaisseur de la plaque du mode q-A<sub>0</sub> à (a) 100 kHz et (b) 350kHz. Les composantes selon  $e_r$ ,  $e_\theta$  et  $e_x$  sont tracées respectivement en vert, magenta et noir.

Les déplacements ont été normalisés par la racine carrée du vecteur de Poynting et sont représentés dans le repère lié à l'onde, illustré dans le Chapitre 1 par la Figure 1-2.

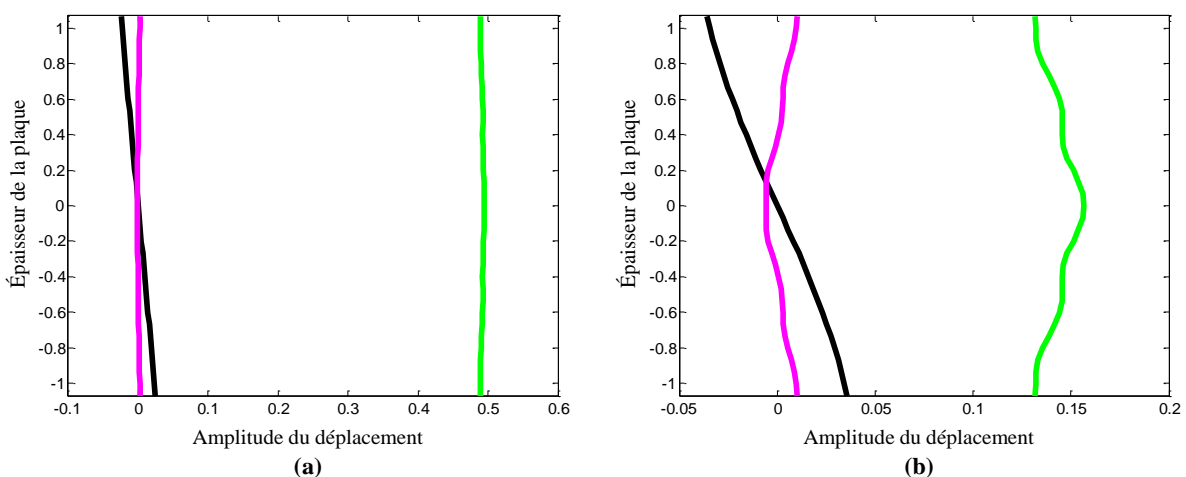
À 100 kHz, nous observons que les composantes  $e_\theta$  et  $e_x$  sont quasiment constantes dans l'épaisseur de la plaque, alors que la composante  $e_r$  prend ses plus grandes valeurs dans les plis proches des surfaces extérieures de la plaque. Il est intéressant de remarquer que le comportement multicouche de la structure n'est pas visible pour cette fréquence. Inversement, à 350 kHz, la structure multicouche est clairement perçue par les ondes guidées. En effet, les composantes  $e_r$  et  $e_\theta$  varient fortement dans l'épaisseur de la plaque.

Nous notons également que la plus grande amplitude de la composante  $e_r$  est toujours concentrée dans les plis extérieurs de la plaque. Cela influence donc directement le comportement global de l'onde dans la structure, car chaque pli est unidirectionnel et fortement anisotrope. Le mode q-A<sub>0</sub> possède son déplacement maximal dans les plis orientés à 45°, ce qui explique que les valeurs minimales de la lenteur se trouvent aux alentours de 45°.

Nous nous intéressons maintenant aux modes q-S<sub>0</sub> et q-SH<sub>0</sub>. Les composantes du déplacement particulière sont données ci-dessous Figure 3-5 et Figure 3-6.



**Figure 3-5:** courbes de déplacement particulière dans l'épaisseur de la plaque du mode q-SH<sub>0</sub> à (a) 100 kHz et (b) 350 kHz. Les conventions de couleurs sont les mêmes que Figure 3-4.



**Figure 3-6:** courbes de déplacement particulière dans l'épaisseur de la plaque du mode q-S<sub>0</sub> à (a) 100 kHz et (b) 350 kHz. Les conventions de couleurs sont les mêmes que Figure 3-4.

Les comportements, dans le plan de la plaque, faiblement anisotropes des modes q-SH<sub>0</sub> et q-S<sub>0</sub> peuvent donc être expliqués par la même étude détaillée de l'amplitude du déplacement. Dans ces

cas, il est clairement visible sur les Figure 3-5 et Figure 3-6 que l'amplitude maximale des différentes composantes du déplacement se trouve au centre de la plaque.

Nous remarquons également qu'à 100 kHz l'aspect multicouche de la structure n'est pas visible. Nous pouvons l'observer à 350 kHz, même si cet effet est moins marqué que celui constaté pour le mode q-A<sub>0</sub>.

Ces observations nous permettent donc de tirer des conclusions sur les structures de séquence d'empilement impliquant des plis orientés 0°, 45°, 90°, -45° symétrisé. L'influence de la répétition de ces plis est présentée dans le paragraphe suivant.

En effet, les symétries observées sur les différentes courbes (lenteur, vitesse d'énergie, atténuation..) et leur dépendance avec la fréquence montrent clairement que ces structures composites ne peuvent pas être considérées comme isotropes dans le plan de la plaque. De plus, même si l'étude est menée à une fréquence suffisamment basse (beaucoup plus faible que la première fréquence de coupure), la structure multicouche ne peut pas être ignorée. Elle est même responsable de l'anisotropie globale de la plaque et de la dépendance de celle-ci avec la fréquence.

### 3.4 Influence de la répétition des plis d'orientation 45°, 0°, 135°, 90° sur l'anisotropie de la structure multicouche

Pour démontrer l'importance de la structure interne des plaques composites, nous comparons la propagation guidée dans deux plaques avec des séquences d'empilement différentes : celle utilisée dans l'étude précédente S<sub>16</sub> (16 plis) et la séquence d'empilement S<sub>8</sub> définie ci-dessous constituée de 8 plis :

$$S_8 = [45^\circ / 0^\circ / 135^\circ / 90^\circ]_S, \quad (3-2)$$

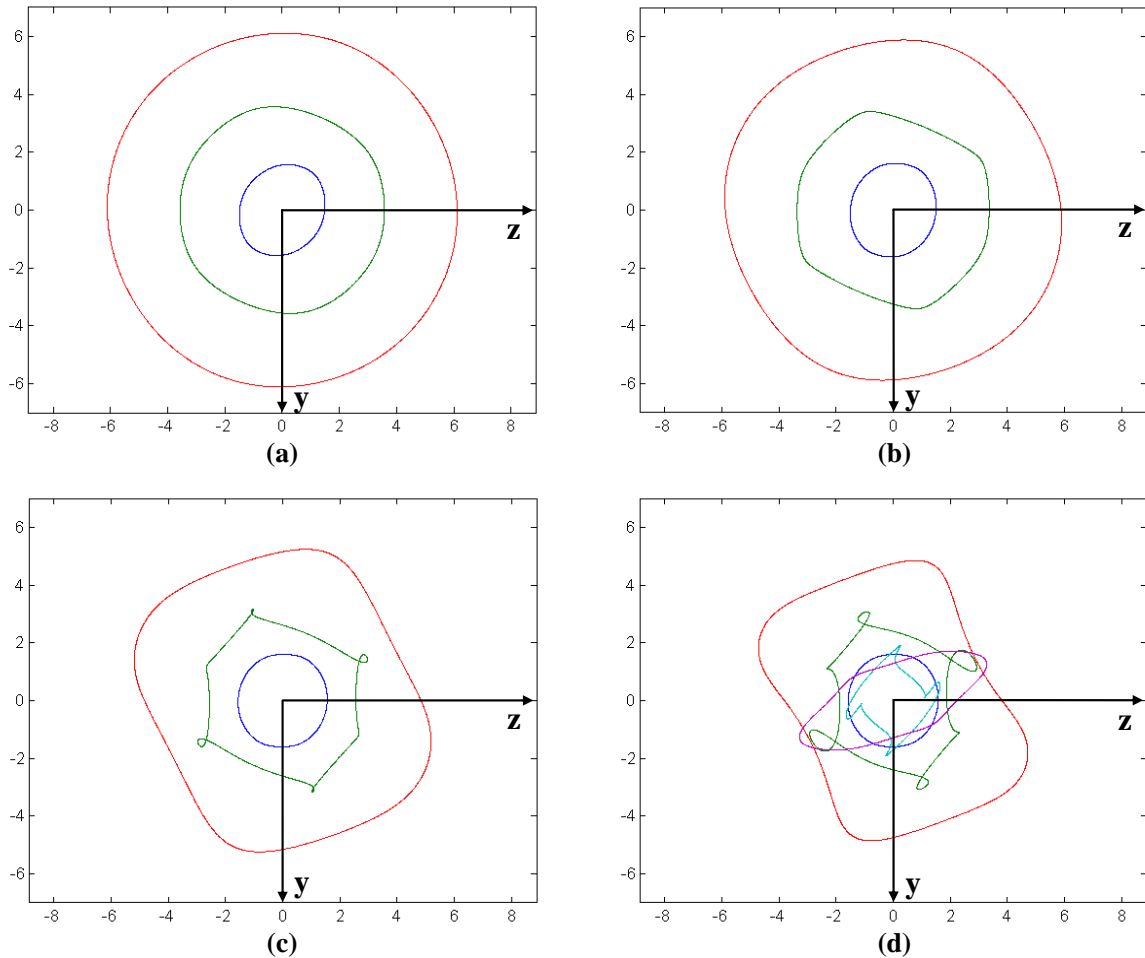
Pour simplifier la comparaison entre les différentes courbes, nous utilisons le même produit fréquence/épaisseur pour les différents calculs.

plaque de 8 plis ( $e = 1.07$ mm)		plaque de 16 plis ( $e = 2.14$ mm)	
fréquence (kHz)	angle (°)	fréquence (kHz)	angle (°)
200	118.1	100	110.8
700	132.5	350	123.0

**Tableau 3-4 : angles de valeur maximale de lenteur pour le mode q-A<sub>0</sub> pour les empilements S<sub>8</sub> et S<sub>16</sub> à différentes fréquences.**

Les directions pour lesquelles la lenteur du mode q-A<sub>0</sub> est maximale sont différentes pour les plaques composées de 8 et de 16 plis. Des résultats similaires ont été obtenus pour les deux autres modes, même si les différences sont plus faibles. Nous avons également observé que les directions pour lesquelles la vitesse d'énergie est maximale diffèrent selon la séquence d'empilement.

Les courbes de vitesses d'énergie pour l'empilement  $S_8$  sont présentées ci-dessous :



**Figure 3-7 : courbes de vitesse d'énergie (en  $\text{km.s}^{-1}$ ) de la plaque de séquence d'empilement  $S_8$  pour une fréquence de (a) 200 kHz, (b) 400 kHz, (c) 700 kHz et (d) 820 kHz.**

Il est très intéressant de noter que des singularités, sous forme de rebroussement, apparaissent pour des fréquences inférieures à la première fréquence de coupure. De telles singularités n'ont pas été observées pour l'empilement  $S_{16}$  à 350 kHz. Ces rebroussements rendraient très difficiles des applications de SHM. En effet, cela générerait des signaux temporels complexes avec de fortes variations dans la zone angulaire située autour des singularités.

La comparaison entre les séquences d'empilement montre également que les modes apparaissant après la première fréquence de coupure ont des comportements beaucoup plus anisotropes pour la plaque  $S_8$  que pour la plaque  $S_{16}$ .

Des études supplémentaires ont également été réalisées sur des structures possédant un nombre de plis plus important ; nous ne les détaillerons pas dans ce manuscrit. Notons ici que nous avons observé que les courbes d'énergies tendent vers un profil isotrope avec l'augmentation du nombre de plis ; ce résultat était attendu compte tenu des résultats présentés ici.

Il est également important de remarquer que pour les plus petites valeurs du produit fréquence  $\times$  épaisseur, les vitesses d'énergie des différentes séquences d'empilement possèdent approximativement la même valeur pour un mode et une direction donnés. Cette propriété est potentiellement intéressante pour les expérimentateurs.

Enfin, pour compléter l'étude, nous nous intéressons à la dépendance de l'atténuation avec la direction de propagation. Les Figure 3-8 et Figure 3-9 illustrent la variation de l'atténuation pour les séquences d'empilement  $S_{16}$  et  $S_8$  à différentes fréquences.

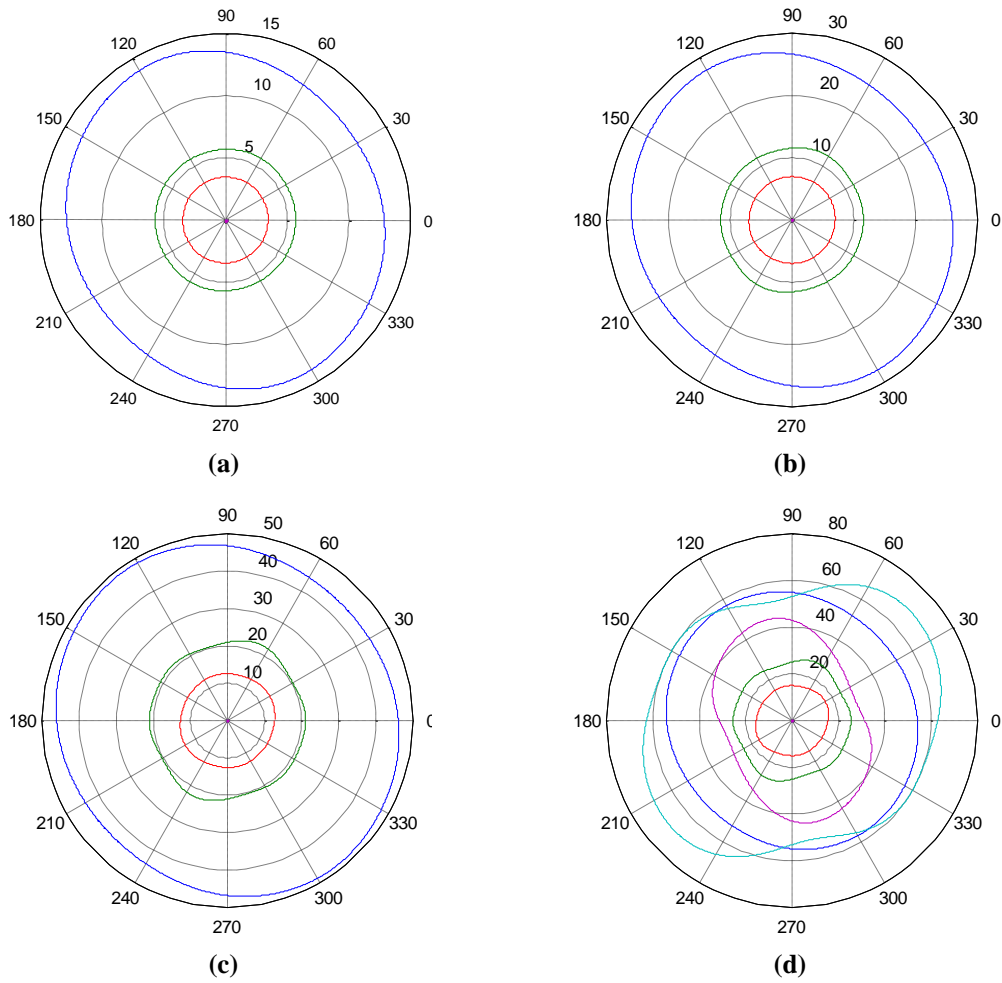
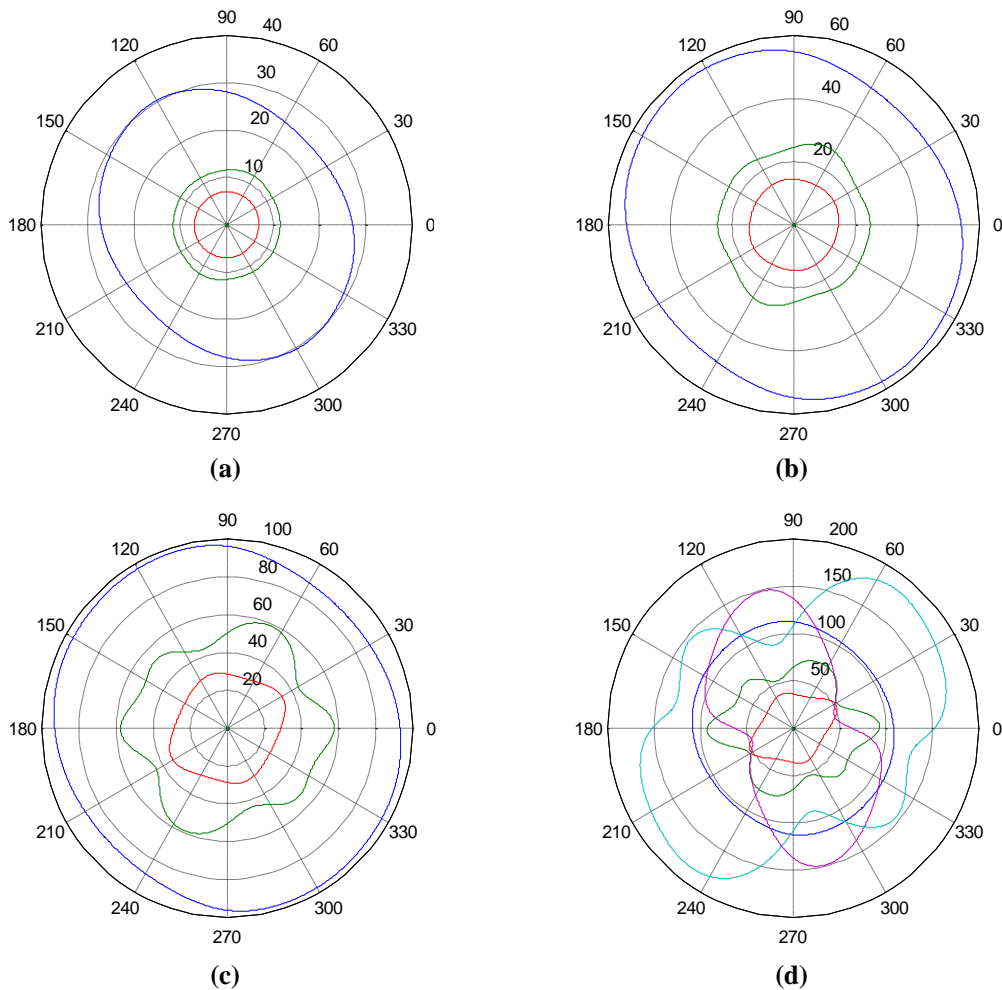


Figure 3-8 ; courbes d'atténuation (en  $Np.m^{-1}$ ) de la séquence d'empilement  $S_{16}$  pour une fréquence de (a) 100 kHz, (b) 200 kHz, (c) 350 kHz et (d) 410 kHz.



**Figure 3-9 ; courbes d'atténuation (en  $Np.m^{-1}$ ) de la séquence d'empilement  $S_8$  pour une fréquence de (a) 200 kHz, (b) 400 kHz, (c) 700 kHz et (d) 820 kHz.**

Dès lors que l'atténuation est concernée, les valeurs obtenues dépendent fortement de la fréquence comme nous l'avons observé auparavant Figure 3-1. Comme nous avons choisi de conserver les mêmes produits fréquence  $\times$  épaisseur, les valeurs obtenues pour l'atténuation sont bien plus importantes pour la plaque composée de 8 plis (étudiée à des fréquences plus élevées). Ainsi, les atténuations obtenues pour l'empilement  $S_{16}$  sont environ deux fois plus petites que celles de l'empilement  $S_8$ .

Sous la première fréquence de coupure, l'atténuation présente un profil d'autant plus anisotrope que la fréquence est élevée. Pour illustrer ce phénomène, nous pouvons nous référer à la Figure 3-8 (c) et Figure 3-9 (c), où l'anisotropie est beaucoup plus importante pour la plaque de 8 plis ( $f = 700$  kHz). Au-delà de la première fréquence de coupure, les atténuations des modes apparaissant sont fortement anisotropes pour la séquence d'empilement  $S_8$ .

Ces différentes observations confirment que pour des applications de SHM, l'utilisation de modes différents des trois modes fondamentaux ne peut pas être recommandée.



### **3.5 Résumé du chapitre – conclusion pour le SHM**

Dans ce chapitre, une étude détaillée de la propagation guidée a été menée dans une structure de type plaque multicouche viscoélastique. Pour cela, la méthode SAFE, présentée dans le Chapitre 1 et validée dans le Chapitre 2, a été utilisée pour prédire le comportement complexe des ondes guidées dans de telles structures.

De nombreuses conclusions ont été tirées de l'observation détaillée des résultats. Pour les séquences d'empilement présentées, classiquement utilisées dans l'aéronautique, le comportement des ondes guidées ne peut pas être considéré comme isotrope dans le plan de propagation et ce, dès les plus basses fréquences. Il est important de tenir compte pour les prédictions des effets engendrés par les multiples couches de la structure.

Dans une problématique de mise au point d'une méthode de contrôle de telles structures, il est important de tenir compte de l'augmentation de l'anisotropie avec la fréquence. Notamment, les modes apparaissant au-delà de la première fréquence de coupure possèdent des caractères complexes qui les rendent inutilisables en pratique. Il est également nécessaire de s'intéresser à l'atténuation des différents modes de la plaque ; les études menées nous ont montré que les plus faibles valeurs sont obtenues aux fréquences inférieures à la première fréquence de coupure, valeurs pour lesquelles l'atténuation varie linéairement avec la fréquence. Cette propriété permet de facilement prédire les distances sur lesquelles les ondes restent détectables.

De façon générale, quelle que soit la séquence d'empilement considérée, la plage de fréquence située sous la première fréquence de coupure est la mieux adaptée à un contrôle en ce qu'elle conduit au comportement modal le moins complexe et donc le plus facilement interprétable.

Cette étude montre bien que, pour concevoir un contrôle par ondes guidées, il est nécessaire d'étudier en détail la propagation des différents modes dans la structure. Notons que le choix des modes à privilégier pour le contrôle s'opère non seulement grâce à l'étude des caractéristiques de leur propagation, plus ou moins favorables, mais aussi par des contraintes de nature différente liées aux traducteurs utilisés qui, suivant leurs caractéristiques propres, sont susceptibles de privilégier le rayonnement de (et la sensibilité à) certains modes.

Pour conclure, nous avons mis en place un outil générique qui permet d'étudier le comportement modal des ondes guidées dans des plaques viscoélastiques. Pour la modélisation du comportement visqueux, nous avons choisi un modèle hystérétique, l'implémentation réalisée est basée sur le modèle de Kelvin-Voigt. Il est cependant possible de modéliser n'importe quel comportement d'atténuation dans la mesure où il est toujours possible de faire varier la partie imaginaire des constantes d'élasticité en fonction de la fréquence, un calcul élémentaire SAFE étant effectué à une fréquence donnée.

Dans la prochaine partie, nous présentons une méthode hybride développée pour la prise en compte de la diffraction des ondes guidées par un raidisseur, la propagation guidée dans la plaque hors du raidisseur étant prédite avec les outils maîtrisés qui ont été utilisés dans le présent chapitre.



**PARTIE II : DIFFRACTION DES ONDES GUIDEES PAR  
UN RAIDISSEUR EN INCIDENCE OBLIQUE.**

Dans cette partie, l'étude porte sur la diffraction des ondes guidées dans des structures aéronautiques raidies. La capacité de prédire ces phénomènes de diffraction offre la possibilité de comprendre et interpréter les phénomènes complexes qui prennent place. Compte tenu des obligations d'EADS de minimiser la masse ajoutée par les traducteurs et la complexité de leur mise en œuvre, pour que le contrôle santé intégré soit envisageable industriellement, les traducteurs utilisables en pratique doivent être de petite taille ; de ce fait, ils rayonnent (et réciproquement sont sensibles à) des ondes guidées se propageant dans toutes les directions de la plaque instrumentée. Pour simplifier l'étude, nous allons résoudre le problème de diffraction pour une onde plane monochromatique arrivant en incidence quelconque sur le raidisseur. En effet, le champ émis par une source arbitraire peut toujours être décomposé comme une somme d'ondes planes monochromatiques en utilisant les transformations de Fourier adaptées en espace et en temps. Ces ondes planes se propagent dans toutes les directions possibles du plan de la plaque, avec une amplitude définie par la forme et les caractéristiques de la source.

Le phénomène de diffraction des ondes guidées étant très complexe, un calcul analytique permettant l'obtention d'une solution exacte n'est pas envisageable et nous allons avoir recours à un calcul par la méthode des éléments finis.

Dans la première partie, la méthode SAFE a été présentée pour le calcul de la propagation guidée dans des plaques composites multicouches viscoélastiques. Combiner la méthode des éléments finis et la méthode SAFE est une stratégie efficace pour un calcul précis et rapide. En effet, un calcul de diffraction complet par la méthode des éléments finis ne pourrait se faire qu'en régime transitoire sur un domaine de calcul de grande taille, conduisant à une méthode coûteuse en temps de calcul.

Nous allons donc modéliser la diffraction des ondes guidées par une méthode hybride associant ces deux méthodes. La méthode SAFE est utilisée pour calculer les modes se propageant dans la plaque non-perturbée, alors que la méthode des éléments finis modélise la diffraction des ondes guidées par le raidisseur.

D'un point de vue global, nous avons déjà énoncé que les travaux réalisés dans cette thèse font partie d'une étude générale réalisée au CEA, de développement d'outils de simulation pour le CND par ondes guidées [35] en cours d'intégration à la plate-forme CIVA [52]. L'approche globale consiste à gérer toutes les étapes du contrôle comme une série de sous-problèmes qu'il est possible de connecter : le rayonnement et la réception des ondes guidées par un traducteur, la propagation dans une portion uniforme du guide où les ondes se propagent comme des ondes guidées en guide infini, la diffraction par un élément diffractant de géométrie quelconque (un défaut, un raidisseur, une jonction, etc...). La première partie du manuscrit a permis de modéliser la propagation guidée dans une plaque composite multicouche non perturbée. Les phénomènes complexes qui ont lieu à la traversée du raidisseur sont ensuite pris en compte par l'intermédiaire des coefficients de transmission et de réflexion des ondes guidées, appelés coefficients de diffraction, qui indiquent comment les amplitudes et les phases de ces différentes ondes sont modifiées. Dans cette partie, nous montrons comment le calcul par éléments finis dans la zone perturbée nous permet de calculer les coefficients de diffraction, dans le cas d'une onde arrivant en incidence oblique sur un raidisseur composite.



## Chapitre 4. EXPLOITATION DE L'INVARIANCE PAR TRANSLATION : REDUCTION A UNE FAMILLE DE PROBLEMES 2D

4.1	Du problème 3D à la formulation 2D-3 composantes paramétrée en $\gamma$ .....	87
4.1.1	Mise en avant de l'invariance par translation des structures raidies étudiées.....	87
4.1.2	Écriture des équations des ondes paramétrées en $\gamma$ .....	88
4.2	Adaptation de la méthode SAFE au calcul des modes à $\gamma$ fixé .....	90
4.2.1	Illustration de la loi de Snell-Descartes .....	90
4.2.2	Une adaptation de la méthode SAFE : la méthode SAFE- $\gamma$ .....	91
4.2.3	Exemple d'application de la méthode SAFE- $\gamma$ pour des plaques multicouches composites anisotropes .....	92
4.3	Résumé du chapitre 4 .....	95

*Dans cette partie, nous nous intéressons à la propagation des ondes guidées dans une structure aéronautique raidie. L'intérêt industriel d'étudier cette configuration est d'optimiser les paramètres liés au contrôle santé intégré (positionnement des traducteurs, choix du mode généré pour le contrôle, de la fréquence). La problématique de contrôle de plaque impose de prendre en compte une onde guidée arrivant en incidence oblique sur un raidisseur. La géométrie des pièces aéronautiques considérées et l'échelle des phénomènes étudiés nous conduisent à faire l'hypothèse simplificatrice que la plaque raidie est invariante par translation et infinie dans la direction d'invariance. Ceci permet de reformuler le problème comme une famille de problèmes 2D paramétrée par un coefficient  $\gamma$  lié à l'angle d'incidence. On montre ensuite comment modifier la méthode de calcul des modes guidés présentée dans le Chapitre 1 pour accéder directement aux modes à  $\gamma$  fixé, adaptés à cette nouvelle formulation.*



## 4.1 Du problème 3D à la formulation 2D-3 composantes paramétrée en $\gamma$

### 4.1.1 Mise en avant de l'invariance par translation des structures raidies étudiées.

Cette étude, menée dans le cadre d'une collaboration EADS-CEA, vise à fournir des informations sur la propagation guidée à travers des raidisseurs de formes spécifiques. Les profils de raidisseur sont caractérisés par leur géométrie dans la section (forme en oméga, T ou carré). Un profil de raidisseur en oméga est présenté Figure 4-1.

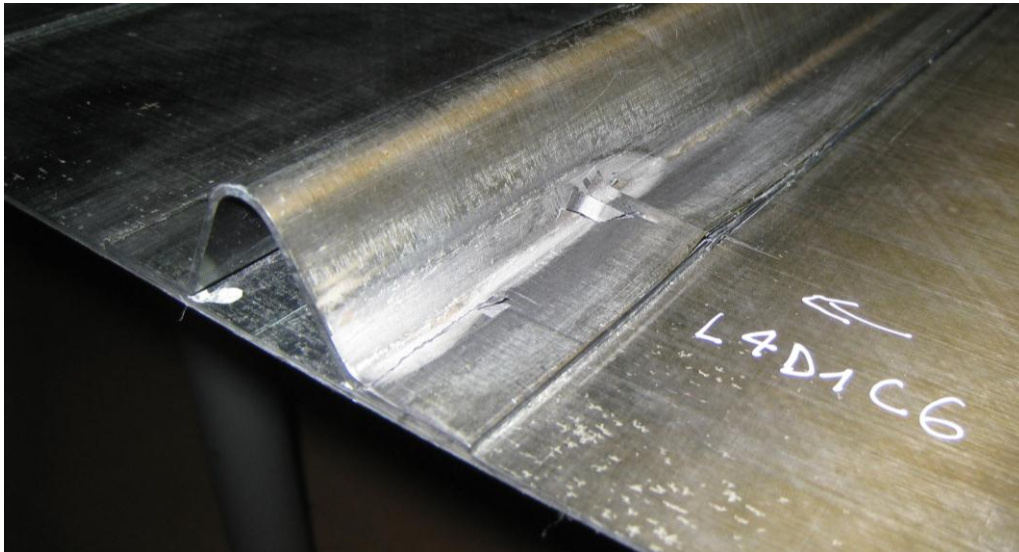


Figure 4-1 : plaque raidie en oméga utilisée par EADS.

Les raidisseurs sont collés et invariants sur toute la longueur de la plaque, et leur longueur est grande devant leurs dimensions dans la section.

Ces caractéristiques géométriques permettent de faire une hypothèse importante : nous allons supposer que les raidisseurs étudiés sont infinis et invariants dans une direction.

Dans la suite de l'étude, le raidisseur est l'élément diffractant du problème, nous l'appelons diffracteur. La géométrie de plaque étudiée est présentée Figure 4-2 pour un raidisseur de type  $\Omega$ .

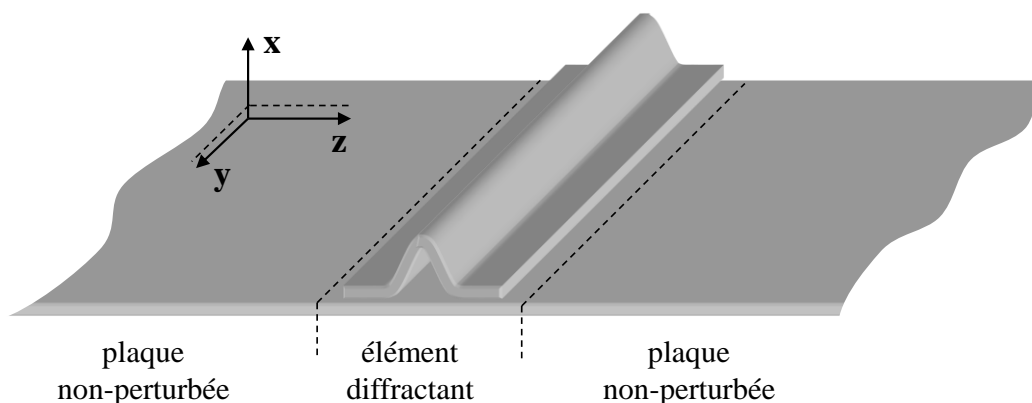


Figure 4-2 : géométrie d'une plaque raidie (raidisseur en oméga).

Sur la figure ci-dessus, un profil spécifique de raidisseur est représenté. Mais, dans la suite des travaux, l'élément diffractant possède un profil quelconque dans le plan  $(x, z)$ . La structure 3D du diffracteur est définie entièrement par sa trace 2D dans le plan  $(x, z)$ . La géométrie de la plaque



raidie est donc invariante par translation selon  $y$ . Il est maintenant nécessaire de s'intéresser aux caractéristiques des matériaux.

Les matériaux utilisés sont des composites multicouches anisotropes, présentés Chapitre 1. Tous les empilements possèdent une invariance des propriétés élastiques selon l'axe  $y$ , quel que soit leur niveau d'anisotropie. Il existe donc une invariance globale de géométrie et de propriétés élastiques de la plaque raidie selon l'axe  $y$ .

#### 4.1.2 Écriture des équations des ondes paramétrées en $\gamma$

En exploitant l'invariance globale selon l'axe  $y$ , nous allons mettre en avant dans ce paragraphe les simplifications résultant de ces hypothèses.

Les différentes notations utilisées sont données Figure 4-3.

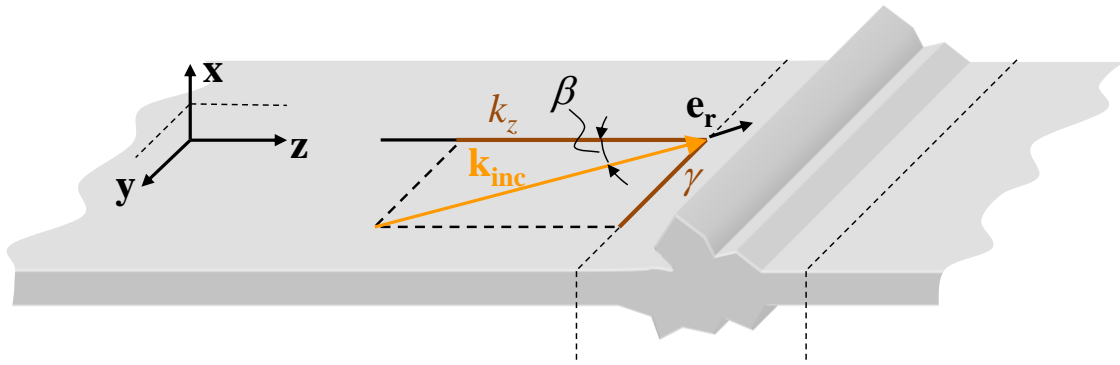


Figure 4-3 : représentation des différentes notations de l'étude.

Pour une onde plane incidente, le déplacement s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_{\text{inc}}(x, y, z) = \mathbf{U}_{\text{inc}}(x) e^{-j\mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{e}_r} = \mathbf{U}_{\text{inc}}(x) e^{-j(k_y^{\text{inc}} y + k_z^{\text{inc}} z)}. \quad (4-1)$$

Les notations suivantes sont adoptées :  $\mathbf{U}_{\text{inc}}(x)$  représente l'interpolation élément finis,  $\mathbf{k}_{\text{inc}}$  le vecteur d'onde de l'onde incidente et  $\mathbf{e}_r$  la direction de propagation pour l'onde incidente considérée. Ils ont été définis dans le Chapitre 1. Dans la suite, nous noterons  $\gamma$  la composante du vecteur d'onde du mode considéré selon l'axe  $y$ , car cette quantité va jouer un rôle important :

$$\gamma = k_y = -k \sin(\beta). \quad (4-2)$$

Le problème de diffraction dans la plaque avec raidisseur consiste à trouver un champ total solution des équations de l'élastodynamique homogène qui soit de la forme

$$\mathbf{u}_{\text{tot}}(x, y, z) = \mathbf{u}_{\text{inc}}(x, y, z) + \mathbf{u}_{\text{diff}}(x, y, z), \quad (4-3)$$

$\mathbf{u}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{u}_{\text{diff}}$  étant les champs de déplacement respectivement total et diffracté.

On remarque qu'une translation en  $y$  de longueur  $d$ , revient à effectuer le déphasage suivant du champ incident :

$$\mathbf{u}_{\text{inc}}(x, y + d, z) = \mathbf{U}_{\text{inc}}(x) e^{-jk_z^{\text{inc}} z} e^{-j\gamma(y+d)} = \mathbf{u}_{\text{inc}}(x, y, z) e^{-j\gamma d}. \quad (4-4)$$

L'invariance par translation de la plaque raidie et la linéarité des équations nous permettent de noter que les champs total et diffracté vérifieront la même relation. Ainsi, la dépendance en  $y$  peut être factorisée de façon à définir de nouvelles inconnues  $\mathbf{u}_{\text{tot}}^\gamma$  et  $\mathbf{u}_{\text{diff}}^\gamma$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\text{inc}}(x, y, z) = \mathbf{u}_{\text{inc}}^\gamma(x, z)e^{-j\gamma y} \\ \mathbf{u}_{\text{tot}}(x, y, z) = \mathbf{u}_{\text{tot}}^\gamma(x, z)e^{-j\gamma y} \\ \mathbf{u}_{\text{diff}}(x, y, z) = \mathbf{u}_{\text{diff}}^\gamma(x, z)e^{-j\gamma y} \end{cases} \quad (4-5)$$

Remarquons que ces nouvelles inconnues  $\mathbf{u}_{\text{tot}}^\gamma$  et  $\mathbf{u}_{\text{diff}}^\gamma$  ne dépendent que des deux variables  $x$  et  $z$ , mais conservent trois composantes.

Les opérateurs sont maintenant définis pour prendre en compte cette forme particulière des solutions. Par exemple, on introduit l'opérateur  $div-\gamma$  défini par :

$$div(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \left( \frac{\partial u_x^\gamma}{\partial x} - j\gamma u_y^\gamma + \frac{\partial u_z^\gamma}{\partial z} \right) e^{-j\gamma y} = div-\gamma(\mathbf{u}^\gamma) e^{-j\gamma y}. \quad (4-6)$$

Après factorisation et simplification du terme  $e^{-j\gamma y}$ , les équations du mouvement pour un domaine  $\Omega$ , de surface libre  $\partial\Omega$  sont écrites en fonction de  $\gamma$  :

$$\begin{cases} div-\gamma(\boldsymbol{\sigma}^\gamma(\mathbf{u}^\gamma)) = -\omega^2 \rho \mathbf{u}^\gamma & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^\gamma(\mathbf{u}^\gamma) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4-7)$$

où  $\omega$  représente la pulsation et  $\rho$  la masse volumique.

Le problème consiste maintenant à trouver  $\mathbf{u}_{\text{tot}}^\gamma$  solution de (4.8) tel que

$$\mathbf{u}_{\text{tot}}^\gamma(x, z) = \mathbf{u}_{\text{inc}}^\gamma(x, z) + \mathbf{u}_{\text{diff}}^\gamma(x, z) \quad (4-8)$$

Il est posé dans un domaine en deux dimensions mais, comme nous l'avons déjà dit, l'inconnue conserve ses trois composantes. Une représentation schématique du plan d'étude est faite ci-dessous, Figure 4-4.

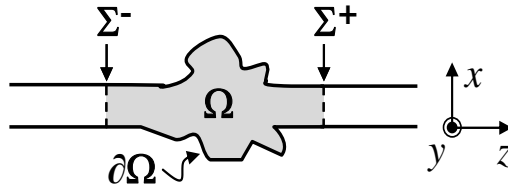


Figure 4-4 : vue du problème en 2 dimensions.

Les équations d'ondes dépendant de la grandeur  $\gamma$ , un programme éléments finis spécifique doit être écrit avec  $\gamma$  comme paramètre. Cette étude sera menée dans le Chapitre 5. La méthode hybride éléments finis/modale choisie impose par ailleurs la connaissance des modes guidés se propageant dans la plaque non perturbée à un  $\gamma$  donné. Nous allons traiter cet aspect dans le paragraphe suivant.

## 4.2 Adaptation de la méthode SAFE au calcul des modes à $\gamma$ fixé

### 4.2.1 Illustration de la loi de Snell-Descartes

Il découle du paragraphe précédent que les modes réfléchis et transmis à travers le diffracteur, résultant de l'interaction avec ce dernier d'une onde guidée incidente, ont en commun la composante suivant l'axe  $y$  de leur vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , appelée  $\gamma$ . Nous retrouvons ainsi une généralisation de la loi de Snell-Descartes : cette loi, notamment présentée par Auld [59], consiste en la conservation de la projection du vecteur d'onde sur une interface plane. Nous observons ici que la conservation de la projection du vecteur d'onde est valable dès qu'il existe une invariance globale du milieu dans une direction.

Grâce à cette loi, nous pouvons prévoir les directions des modes qui sont susceptibles d'être réfléchis par ou transmis à travers le raidisseur. Celles-ci peuvent être obtenues très simplement par un procédé géométrique utilisant les courbes de lenteur des différents modes. Dans un souci de simplification, nous allons tout d'abord illustrer la loi de Snell-Descartes dans le cas d'une plaque isotrope.

Pour une plaque isotrope en aluminium d'épaisseur 3 mm, les courbes de lenteur sont représentées ci-dessous, Figure 4-5, à une fréquence de 200 kHz, inférieure à la première fréquence de coupure.

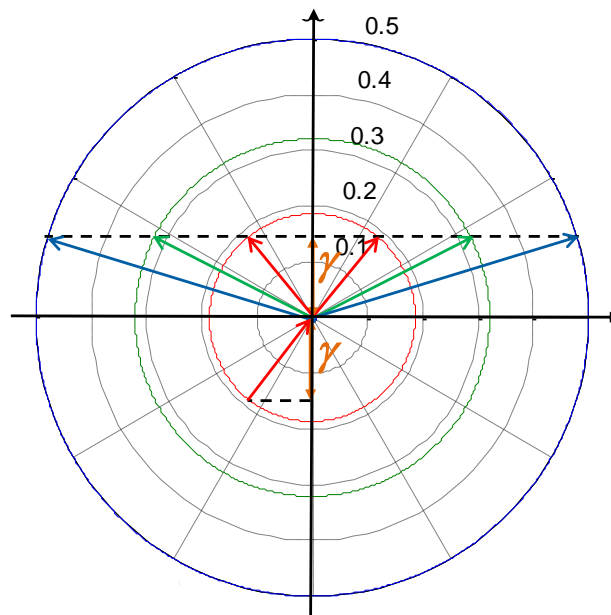


Figure 4-5: illustration des lois de Snell-Descartes par utilisation des courbes de lenteurs lors de la réflexion d'une onde plane par un bord libre.

Pour un mode incident connu, la valeur de  $\gamma$  est reportée et ainsi en utilisant les courbes de lenteurs, il est possible de retrouver le nombre d'onde et la direction des modes réfléchis et transmis. Sur la Figure 4-5, nous montrons l'exemple du mode  $S_0$  incident (en rouge). Pour cette valeur choisie de  $\gamma$ , les trois modes propagatifs peuvent être réfléchis et transmis. Nous observons que le mode  $S_0$  est réfléchi et transmis avec le même angle de propagation que l'onde incidente, alors que les modes  $SH_0$  (en vert) et  $A_0$  (en bleu) possèdent des directions de propagations différentes.

Dans le cas général d'une plaque anisotrope, il est coûteux de calculer l'ensemble des courbes de lenteur. Dans le paragraphe suivant, nous proposons une adaptation de la méthode SAFE qui permet de calculer directement les modes à  $\gamma$  fixé.

### 4.2.2 Une adaptation de la méthode SAFE : la méthode SAFE- $\gamma$

La méthode SAFE classique permet de calculer les modes guidés se propageant dans une plaque à un couple incidence-fréquence choisi. Les nombres d'ondes et leurs déplacements nodaux sont obtenus après résolution du système SAFE ; ils correspondent respectivement aux valeurs propres et aux vecteurs propres du système.

Dans ce paragraphe, nous allons développer une version spécifique de la méthode SAFE, que nous appellerons SAFE- $\gamma$ . La méthode SAFE- $\gamma$  permet de calculer tous les modes guidés pouvant exister dans la plaque à un  $\gamma$  fixé.

Cette fois, la donnée n'est plus l'angle  $\beta$ , mais la variable  $\gamma$ , qui représente la grandeur  $k_y$ . Les inconnues du système ne sont plus les nombres d'onde mais leurs projections  $k_z$ , et les vecteurs propres du système restent les déplacements nodaux associés aux modes calculés.

Le calcul par éléments finis de la méthode SAFE est un calcul en une dimension ; seule l'épaisseur de la plaque est discrétisée. En effet, les fonctions d'interpolation, définies dans le Chapitre 1, dépendent uniquement de la variable  $x$ . Nous utiliserons donc les calculs éléments finis effectués dans le Chapitre 1.

Le calcul analytique est modifié dans l'expression du vecteur d'onde :

$$\mathbf{k} = k_z \mathbf{z} + k_y \mathbf{y} = k_z \mathbf{z} + \gamma \mathbf{y}. \quad (4-9)$$

Nous reprenons donc l'équation dépendante des grandeurs  $k_z$  et  $k_y$  obtenue dans le Chapitre 1 :

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d} + [k_z^2 \mathbf{K}_{33} + k_y^2 \mathbf{K}_{22} + k_y k_z \mathbf{K}_{23} - j k_z \mathbf{K}_{13} - j k_y \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{11}] \mathbf{d} = 0. \quad (4-10)$$

Le paramètre  $\gamma$  est maintenant introduit :

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d} + [k_z^2 \mathbf{K}_{33} + \gamma^2 \mathbf{K}_{22} + \gamma k_z \mathbf{K}_{23} - j k_z \mathbf{K}_{13} - j \gamma \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{11}] \mathbf{d} = 0. \quad (4-11)$$

Après factorisation des termes en  $k_z$ , nous obtenons le système quadratique suivant:

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d} + [k_z^2 \mathbf{K}_{33} + k_z (\gamma \mathbf{K}_{23} - j \mathbf{K}_{13}) + \gamma^2 \mathbf{K}_{22} - j \gamma \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{11}] \mathbf{d} = 0 \quad (4-12)$$

Le système quadratique est réécrit sous forme d'un système linéaire de la même façon que pour la méthode SAFE classique. Nous obtenons alors le système linéaire suivant :

$$(\mathbf{A} - k_z \mathbf{D}) \mathbf{Q} = 0, \quad (4-13)$$

avec,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ k_z \mathbf{d} \end{bmatrix}, \quad (4-14)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 \mathbf{K}_{22} - j \gamma \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{11} - \omega^2 \mathbf{M} \\ \gamma^2 \mathbf{K}_{22} - j \gamma \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{11} - \omega^2 \mathbf{M} & (-j \mathbf{K}_{13} + \gamma \mathbf{K}_{23}) \end{bmatrix}, \quad (4-15)$$

et

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \gamma^2 \mathbf{K}_{22} - j \gamma \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{11} - \omega^2 \mathbf{M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{K}_{33} \end{bmatrix}. \quad (4-16)$$

Le système à résoudre est donc très semblable à celui à résoudre pour le calcul par la méthode SAFE classique. Les différentes sous-matrices  $\mathbf{K}_{ij}$  et  $\mathbf{M}$  sont toutes indépendantes de la fréquence et du paramètre  $\gamma$  et peuvent donc être calculées une fois pour toute. Il suffit ensuite de faire varier ces paramètres pour étudier en détail les modes guidés générés lors de l'interaction d'une onde incidente avec un diffracteur invariant suivant la direction perpendiculaire à  $\mathbf{z}$ .

### 4.2.3 Exemple d'application de la méthode SAFE- $\gamma$ pour des plaques multicouches composites anisotropes

Nous allons maintenant illustrer quelques résultats obtenus avec la méthode SAFE- $\gamma$ . Sur les figures suivantes, les résultats sont validés en superposant les courbes de lenteurs calculées par la méthode SAFE classique (en trait plein) et les valeurs de lenteurs données par la méthode SAFE- $\gamma$  (représentées par des points).

Les calculs sont menés pour une plaque composite d'empilement  $[45^\circ]_{16}$ , chaque pli est composé de fibres de carbone dans une matrice en époxy, les coefficients d'élasticité du matériau sont donnés Tableau 3-1. La fréquence de calcul est de 200 kHz, elle se trouve avant la première fréquence de coupure. L'intérêt de présenter une étude de la propagation guidée dans une telle plaque réside principalement dans la compréhension des phénomènes liés au caractère anisotrope du composite. En effet, cela permet de mettre en avant les difficultés pouvant être rencontrées lors de l'utilisation de matériaux anisotropes.

Le premier exemple montre, Figure 4-6, les modes se propageant pour un mode q-SH<sub>0</sub> incident, représenté en vert. Les comparaisons méthode SAFE / méthode SAFE- $\gamma$  ont été menées de façon quantitatives, même si dans le manuscrit nous ne représentons que des illustrations qualitatives.

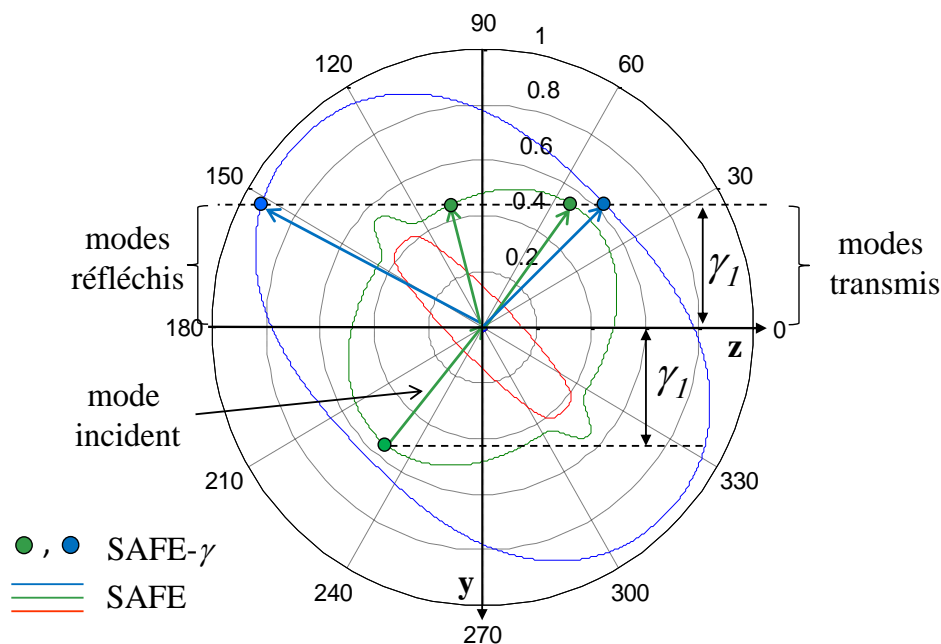


Figure 4-6: calcul SAFE- $\gamma$  dans une plaque composite unidirectionnelle pour le mode SH<sub>0</sub> incident.

Le premier cas étudié montre qu'à une valeur  $\gamma_1$ , le mode q-SH<sub>0</sub> peut générer quatre modes. Deux modes se propagent dans le sens des  $z$  croissants (modes transmis lors de la diffraction) et les deux autres modes se propagent dans le sens des  $z$  décroissants (mode réfléchis). Les modes se propageant dans les sens opposés ne sont pas identiques, du fait du caractère fortement anisotrope de la plaque composite.

Pour la valeur choisie du paramètre  $\gamma_1$ , le mode q-S<sub>0</sub> (en rouge sur la figure) ne peut être généré. En effet, la valeur  $\gamma_1$  est supérieure à la valeur critique de  $\gamma$  pour laquelle le mode q-S<sub>0</sub> n'existe plus dans la plaque. On retrouve ici la notion d'angle critique bien connue pour la réfraction entre milieux présentant des célérités différentes.

Nous allons maintenant présenter deux cas particuliers pouvant apparaître lors de l'utilisation de la méthode SAFE- $\gamma$  dans des matériaux anisotropes. Les calculs sont effectués pour deux valeurs appelées  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$ , les courbes sont représentées respectivement Figure 4-7 et Figure 4-9.

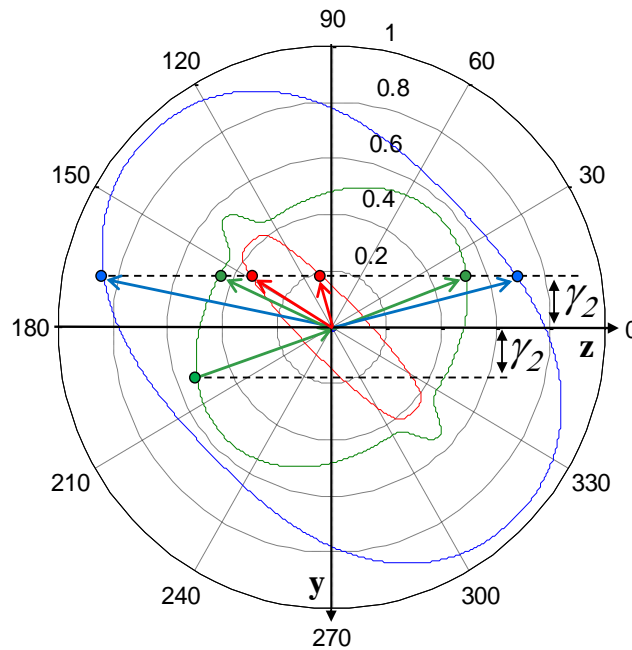


Figure 4-7: modes guides obtenus pour la plaque  $[45^\circ]_{16}$  dans le cas particulier de plusieurs modes identiques à une même valeur de  $\gamma$  pour un mode  $q-SH_0$  incident.

Sur la Figure 4-7, le mode  $q-SH_0$  est incident à la valeur  $\gamma_2$ . Cette valeur est telle que les trois modes propagatifs peuvent se propager dans la plaque. Nous observons que les deux valeurs de  $k_z$  associées au mode  $q-S_0$  sont négatives.

Il est donc nécessaire de différencier le sens de propagation des modes par l'étude de la vitesse d'énergie. En effet, les matériaux anisotropes peuvent posséder des modes ayant des projections du nombre d'onde et de la vitesse d'énergie de signe opposés ; ces modes sont appelés modes inverses. Ce phénomène est illustré ci-dessous, Figure 4-8.

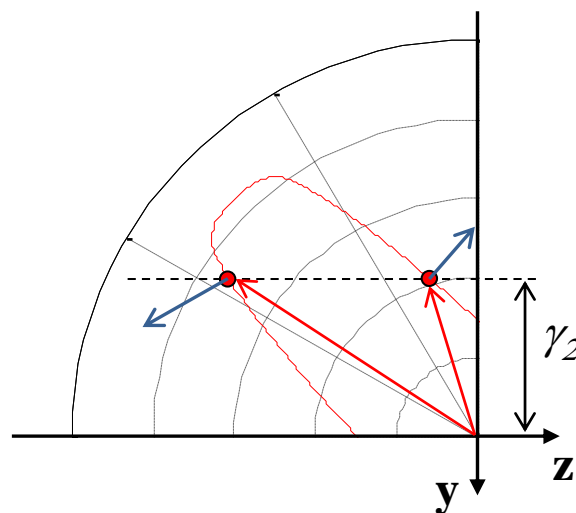


Figure 4-8: sens de propagation du mode  $q-S_0$  dans une plaque unidirectionnelle  $[45^\circ]_{16}$  - illustration avec sa courbe de lenteur.

Les lenteurs et les directions des vitesses d'énergie sont représentées respectivement en rouge et bleu sur la figure ci-dessus. La plus grande lenteur possède une valeur négative de la projection de sa vitesse d'énergie ; cela indique qu'il s'agit du mode  $q-S_0$  se propageant dans le sens des  $z$

décroissants. Inversement, la plus faible lenteur correspond au mode q-S<sub>0</sub> se propageant dans le sens des z croissants.

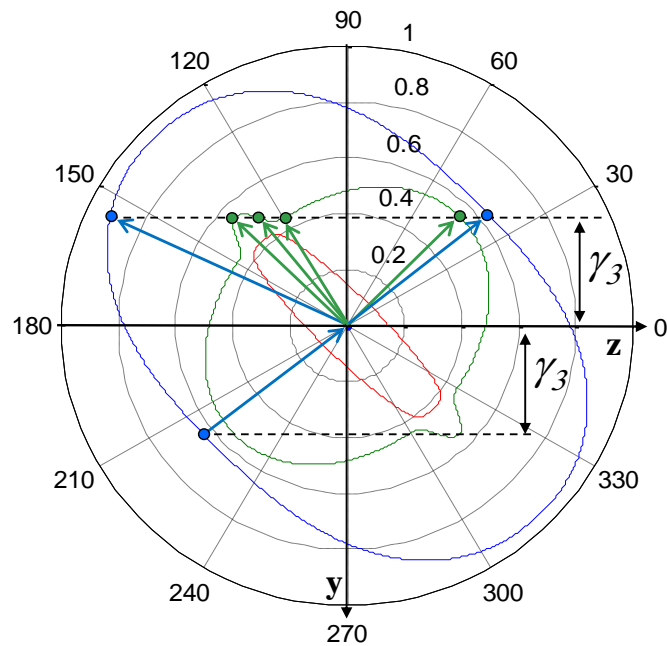


Figure 4-9: modes guidés obtenus pour la plaque [45°]<sub>16</sub> dans le cas particulier de plusieurs modes identiques à une même valeur de  $\gamma$  pour un mode q-A<sub>0</sub> incident.

Un dernier cas est présenté Figure 4-9 pour illustrer la complexité de la propagation dans un matériau anisotrope. Le mode q-A<sub>0</sub> incident à  $\gamma_3$  peut générer trois modes se propageant dans chaque direction de la plaque (suivant l'axe z) même si  $\gamma_3$  est supérieur au premier angle critique des ondes q-S<sub>0</sub>. En effet, dans ce cas particulier, pour chaque direction, deux valeurs de lenteur sont associées au mode q-SH<sub>0</sub>. Ce phénomène est illustré Figure 4-10, où les lenteurs et les directions des vitesses d'énergie sont représentées respectivement en vert et bleu.

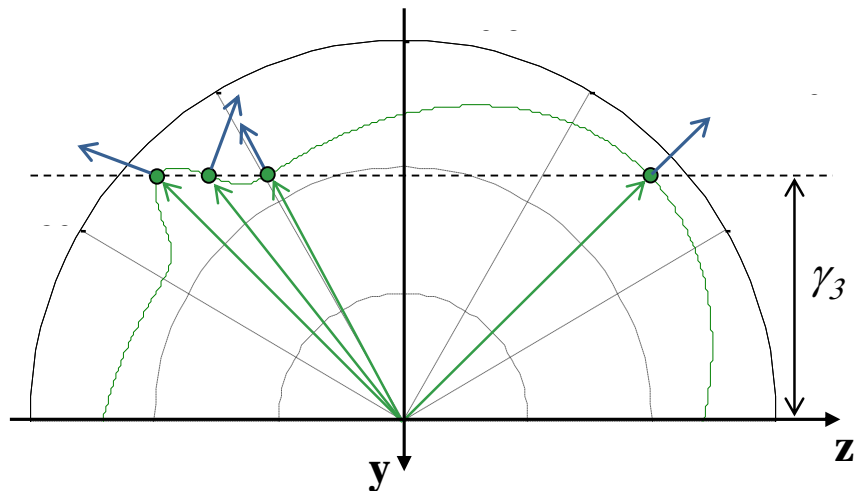


Figure 4-10 : sens de propagation du mode q-SH<sub>0</sub> dans une plaque unidirectionnelle [45°]<sub>16</sub> - illustration avec sa courbe de lenteur.

### **4.3 Résumé du chapitre 4**

Dans ce chapitre, le problème de diffraction des ondes guidées par des structures aéronautiques raidies a été abordé. La géométrie spécifique des raidisseurs aéronautiques a permis de simplifier le problème en trois dimensions par l'introduction d'un paramètre  $\gamma$ , correspondant à la projection du vecteur d'onde du mode incident dans la direction d'invariance. Les équations des ondes sont maintenant dépendantes de  $\gamma$ , et l'étude sera désormais menée en deux dimensions pour un champ inconnu à trois composantes.

La méthode SAFE classique a été modifiée afin de prédire les modes se propageant dans la plaque à une valeur fixée de  $\gamma$ . Des validations sur quelques cas particuliers de plaques composites ont été présentées.





## Chapitre 5.      METHODE                      HYBRIDE                      ELEMENTS FINIS/MODALE DE RESOLUTION DES PROBLEMES 2D

5.1	Contraintes liées au modèle hybride .....	99
5.1.1	Raccordement modal et réflexions aux frontières.....	99
5.1.2	État de l'art.....	99
5.1.2.1	Méthode des couches absorbantes.....	99
5.1.2.2	Méthode PML ou méthode de couches parfaitement adaptées .....	100
5.1.2.3	Conditions transparentes aux frontières : de la limitation des DtN pour le cas vectoriel à la méthode YtX .....	101
5.2	Construction d'un opérateur de projection sur les modes .....	102
5.2.1	Décomposition modale et variables mixtes .....	102
5.2.2	Calcul des amplitudes modales lorsque la relation de Fraser est vérifiée.....	103
5.2.3	Calcul des amplitudes modales dans le cas général.....	103
5.2.3.1	Introduction de la matrice de Gram $\mathcal{O}$ .....	103
5.2.3.2	Formules de projection en fonction de $\mathbf{X}^T$ ou $\mathbf{Y}^T$ .....	104
5.2.3.3	Traitement des deux frontières $\Sigma^+$ et $\Sigma^-$ .....	105
5.3	Calcul hybride SAFE-EF.....	106
5.3.1	Conditions transparentes aux frontières entre le guide non-perturbé et le domaine éléments finis.....	106
5.3.2	Formulation variationnelle du problème à $\gamma$ fixé .....	109
5.4	Résumé du chapitre .....	113

*Ce chapitre présente le modèle élément finis développé pour le calcul de la diffraction d'une onde guidée en incidence oblique sur un élément diffractant. Le calcul éléments finis impose l'utilisation de conditions aux limites afin d'éviter les réflexions parasites par les frontières du domaine nécessairement fini du calcul numérique. Naturellement, nous avons choisi d'étendre les conditions transparentes développées par Baronian lors de sa thèse POEMS/CEA. Ce dernier a mis en place une méthode hybride pour modéliser la diffraction d'une onde se propageant dans une structure isotrope à direction guidante unique. Cela correspond à une étude à  $\gamma=0$  en milieu isotrope dans notre problématique. Le couplage entre la zone éléments finis et les décompositions modales dans les zones non perturbées requiert de savoir projeter sur les modes un champ connu sous sa forme éléments finis. Baronian utilise pour cela la relation de bi-orthogonalité de Fraser, or cette relation n'est valable que pour des ondes se propageant dans la même direction dans un milieu isotrope. Dans ce chapitre, nous généralisons l'approche de Baronian au cas de milieux anisotropes et de l'incidence oblique. Pour cela, nous introduisons la matrice de Gram des modes, construite à l'aide de la relation de Fraser. La formulation variationnelle du problème à  $\gamma$  fixé est alors obtenue en inversant cette matrice de Gram.*



## 5.1 Contraintes liées au modèle hybride

### 5.1.1 Raccordement modal et réflexions aux frontières

Un modèle hybride permet un calcul précis et rapide des phénomènes physiques, à condition de minimiser les réflexions parasites qui peuvent se créer aux frontières du domaine éléments finis.

En effet, les équations de propagation étant définies pour des domaines non-bornés, l'utilisation d'un calcul éléments finis pour leur modélisation nécessite de borner le domaine de calcul. Des réflexions parasites provenant de la troncature du domaine d'étude peuvent alors apparaître aux frontières du domaine de calcul. Il est donc nécessaire de développer des conditions transparentes aux frontières des domaines pour éviter ces réflexions parasites.

De plus, la méthode SAFE permet l'obtention des modes se propageant dans la partie non-perturbée de la plaque. Cela nous conduit à mettre en place des conditions aux frontières permettant de raccorder la solution modale au calcul éléments finis.

Dans la littérature, différentes méthodes numériques ont été développées pour créer de telles frontières transparentes.

### 5.1.2 État de l'art

#### 5.1.2.1 Méthode des couches absorbantes

Cette méthode consiste à mettre en place des couches absorbantes aux frontières du domaine de calcul élément finis. Il s'agit de zones éléments finis visqueuses, où les ondes sortantes sont artificiellement atténuées afin d'éviter l'apparition de réflexions artificielles parasites à l'extrémité des couches. Les couches absorbantes possèdent la même masse volumique et les mêmes parties réelles des coefficients d'élasticité que celle du domaine de calcul; l'effet visqueux  $\gamma$  est intégré par ajout d'une partie imaginaire aux coefficients d'élasticité.

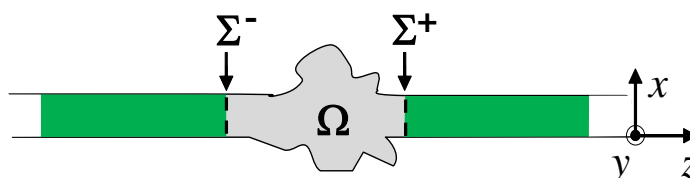


Figure 5-1 : représentation du problème avec des couches limites absorbantes.

Cette méthode, simple à implémenter (en particulier, elle ne nécessite pas le calcul préalable des modes), possède quelques inconvénients. Tout d'abord, des réflexions parasites peuvent être créées par les couches absorbantes elles-mêmes. En effet, les coefficients d'élasticité du domaine de calcul et des zones absorbantes n'étant pas identiques, cela crée une discontinuité d'impédance acoustique aux frontières de ces domaines. Dans la littérature, des méthodes ont été développées pour minimiser ce phénomène : Castaings *et al.* [60] font intervenir une loi d'atténuation progressive : la partie imaginaire des coefficients d'élasticité est fonction de la distance dans les couches absorbantes. Liu *et al.* [61] mettent en place une succession de  $n$  couches absorbantes où l'amortissement est augmenté progressivement ; la variation d'impédance acoustique n'étant plus brutale, une adaptation d'impédance supplémentaire est réalisée et les réflexions parasites dues aux couches absorbantes disparaissent.

L'inconvénient est que, les zones étant modélisées par éléments finis, cette méthode est coûteuse en temps de calcul. Il est donc nécessaire de faire un compromis entre la taille du domaine et l'atténuation de l'onde. Les couches absorbantes sont choisies de sorte que l'onde sortante soit suffisamment atténuée pour que sa réflexion sur la frontière extérieure des couches absorbantes soit négligeable. Généralement, la longueur de la zone est choisie proportionnelle à la longueur d'onde,

nécessitant une discrétisation importante, parfois sur une zone de taille supérieure à celle de la zone d'intérêt.

Enfin, cette méthode n'est pas précise à proximité des fréquences de coupures. En effet, les longueurs d'onde étant très grandes, tendant vers l'infini, cela nécessiterait des zones absorbantes très importantes voire de taille rédhibitoire.

Dans une problématique semblable à celle de notre étude, Castaings *et al.* [60] modélisent la diffraction des ondes guidées par un raidisseur en acier collé sur une plaque en Perspex. Leur but est de contrôler l'état de la colle entre le raidisseur et la plaque.

Wilcox *et al.* [62] étudient la diffraction des ondes guidées arrivant en incidence oblique sur un raidisseur isotrope. Plus généralement, ils développent une méthode globale modélisant l'émission d'onde guidée par des traducteurs EMAT (Electro-Magnetic Acoustic Transducer) et leur diffraction par une structure raidie [63]. Nous aurons l'occasion de revenir particulièrement sur ce travail puisque les résultats obtenus de cette publication ont fait l'objet d'une session benchmark lors de la dernière conférence Review of Progress in Quantitative Non Destructive Evaluation (2011), nous donnant l'occasion de valider nos propres résultats.

### 5.1.2.2 Méthode PML ou méthode de couches parfaitement adaptées

La méthode PML (Perfectly Matched Layers dans la littérature anglosaxonne), illustrée Figure 5-2, consiste également à ajouter des couches absorbantes aux frontières du domaine de calcul. A la différence des couches viscoélastiques décrites précédemment, ces couches PML sont parfaitement adaptées et donc ne produisent pas elles-mêmes de réflexions parasites.

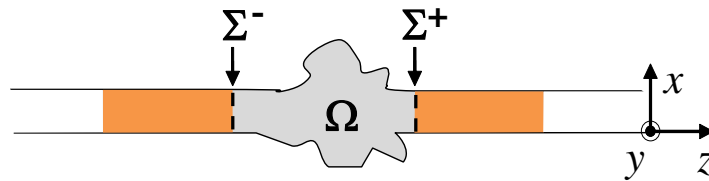


Figure 5-2 : représentation schématique de la méthode des PML.

Dans les couches PML, le prolongement analytique du champ diffracté  $\mathbf{u}$  est calculé en  $(z/\alpha, x)$ , où  $\alpha$  est un coefficient complexe. Il s'agit d'une méthode de dilatation analytique. Cela revient à effectuer la substitution suivante dans toutes les équations du problème :

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5-1)$$

avec,

$$\text{Re}(\alpha) > 0, \text{Im}(\alpha) < 0. \quad (5-2)$$

Cette méthode, introduite par Bérenger [64] pour l'électromagnétisme, a été de nombreuses fois mise en œuvre dans les domaines de l'électromagnétisme, de l'acoustique [65] et de l'élasticité [66] [67]. La méthode des PML fournit de bons résultats et est simple à implémenter. Tout comme la méthode des couches absorbantes, un avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas le calcul préalable des modes mais un inconvénient est qu'elle se détériore aux abords des fréquences de coupures, les longueurs d'onde étant alors trop importantes. Plus généralement, la précision des résultats requiert un réglage fin de la taille des couches et du paramètre  $\alpha$ . Mais la difficulté majeure (qui n'existait pas dans le cas des couches viscoélastiques) est que la méthode des PMLs peut générer des instabilités qui la rendent inexploitable.

Ainsi, dans un guide d'onde, il est connu que la méthode des PML est instable en présence de modes dit inverses ou rétrogrades, dont les vitesses de phase et de groupe sont de signes opposés [68]. Ces modes, présentés dans le Chapitre 4, existent déjà dans le cas le plus simple des matériaux isotropes, pour certaines gammes de fréquence. Des traitements spécifiques ont été proposés [68] [69] pour rétablir la stabilité de la méthode : ces traitements requièrent une connaissance fine des

modes inverses, ce qui rend la méthode moins attractive. Il est également bien connu que les PMLs peuvent être instables dans des structures non guidantes, dans le cas de matériaux anisotropes. Ce phénomène a été illustré Figure 4-9. Bécache *et al.* [66] présentent une étude mathématique de la stabilité des PML dans ces milieux. Dans notre cas qui combine structure guidante et matériau anisotrope, les cas d'instabilité sont fréquents, même pour des structures quasi-isotropes. Le calcul préalable des modes est inévitable. C'est pourquoi nous avons privilégié la méthode de type DtN que nous présentons dans le paragraphe suivant.

### 5.1.2.3 Conditions transparentes aux frontières : de la limitation des DtN pour le cas vectoriel à la méthode YtX

Une dernière méthode fréquemment utilisée pour borner le domaine de calcul éléments finis est la méthode DtN (Dirichlet to Neumann). L'intérêt de cette méthode, utilisée en acoustique dans [70], [71] et [72], est de construire des conditions transparentes exactes sur les frontières du domaine éléments finis. Il s'agit d'adapter la condition de rayonnement modal à l'infini (condition d'onde sortante) sur les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ . Les conditions de rayonnement étant localisées sur les frontières du domaine, cette méthode est également appelée méthode des éléments finis localisés.

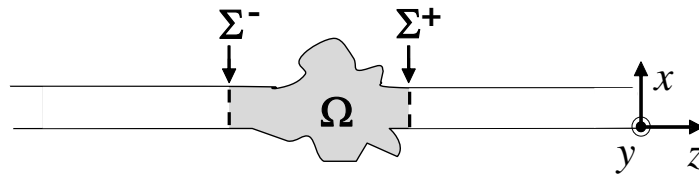


Figure 5-3: domaine éléments finis avec des frontières transparentes.

Elle consiste à utiliser la forme connue du champ extérieur décrite de façon modale, afin d'en déduire un opérateur reliant la dérivée du champ selon la normale à la frontière avec son expression sur la section.

L'extension naturelle aux problèmes de l'élasticité serait d'exprimer la contrainte normale d'un mode guidé en fonction des déplacements sur la frontière. Mais il n'existe pas de relation simple entre ces deux grandeurs. Cette problématique a été le sujet de la thèse de Baronian [4], thèse réalisée en collaboration POEMS/CEA. Il a étudié les problèmes de diffraction dans un guide d'onde isotrope ou orthotrope (s'il s'agit d'un guide d'onde possédant une direction guidante unique alignée avec les symétries cristallines du matériau) en trois dimensions, et il a développé pour cela des conditions aux frontières transparentes. Pour ce faire, il a mis en place des conditions utilisant des variables mixtes  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_s \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ u_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -\sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5-3)$$

Cette notation permet de ramener le problème de la recherche des modes à un problème aux valeurs propres linéaire. Ces variables ont été introduites par Pagneux et Maurel [73] pour l'étude de guides d'onde isotropes inhomogènes en deux dimensions. Ils ont utilisé ces notations pour étudier les propriétés des matrices de diffraction [74] associées aux ondes de Lamb. Plus récemment, ils ont modélisé la propagation des ondes de Lamb pour des structures d'épaisseur variable [75].

Baronian a étendu la définition de ces variables mixtes au cas tridimensionnel. Ceci lui a permis de proposer des conditions aux limites transparentes, via un opérateur de couplage (décompositions modales-éléments finis) YtX, basées sur une relation de bi-orthogonalité entre vecteurs,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ . Cette relation de bi-orthogonalité est une généralisation de la relation de Fraser [76] pour les modes guidés. Elle permet de projeter un champ acoustique sur les modes de façon simple. Par abus de

langage, nous appelons produit scalaire, dans la suite du manuscrit, toutes les relations utilisées pour la projection d'un champ sur les modes.

Le problème étudié par Baronian correspond, en 2D, à un cas particulier de notre étude : il s'agit du cas d'une plaque isotrope lorsque la direction de l'onde incidente est orthogonale au raidisseur (c'est le cas de l'incidence normale qui correspond à  $\gamma=0$ ).

La méthode développée par Baronian est étendue dans notre étude pour une onde en incidence oblique sur un élément diffractant. La principale difficulté provient de l'absence de relation de bi-orthogonalité entre les modes se propageant dans des directions différentes ou se propageant dans un matériau anisotrope. Pour y remédier, nous allons introduire une matrice de Gram qu'il nous faudra inverser pour la projection sur les modes.

## 5.2 Construction d'un opérateur de projection sur les modes

### 5.2.1 Décomposition modale et variables mixtes

La nature multimodale des ondes guidées est facilement mise en avant. En effet, dans la deuxième partie, nous avons montré qu'il existe une infinité de mode se propageant dans une plaque. Pour la construction d'un opérateur de projection sur les modes, nous ne prenons pas en compte tous les modes se propageant dans la plaque, mais seulement ceux orientés dans le même sens. Ainsi, nous différencions par l'appellation famille de mode, un ensemble de mode se propageant dans le même sens.

Le champ de déplacement est décomposé sur une famille de mode :

$$\mathbf{u}^\gamma(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{u}_n^\gamma(x) e^{ik_z^n z}, \quad (5-4)$$

avec  $a_n$  et  $\mathbf{u}_n^\gamma$  correspondant respectivement à l'amplitude et au déplacement dans l'épaisseur du mode  $n$ .

De la même façon, le champ de contrainte s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^\gamma(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \boldsymbol{\sigma}_n^\gamma(x) e^{ik_z^n z}. \quad (5-5)$$

Nous définissons l'amplitude globale  $A_n$  du mode  $n$  :

$$A_n(z) = a_n e^{ik_z^n z}. \quad (5-6)$$

Pour la suite de l'étude, les variables  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont adaptées pour un calcul à  $\gamma$  fixé. Les variables  $\mathbf{X}^\gamma$  et  $\mathbf{Y}^\gamma$  sont définies comme :

$$\mathbf{X}^\gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_s^\gamma \\ u_z^\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xz}^\gamma \\ \sigma_{yz}^\gamma \\ u_z^\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^\gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s^\gamma \\ t_z^\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x^\gamma \\ u_y^\gamma \\ -\sigma_{zz}^\gamma \end{pmatrix}. \quad (5-7)$$

Le déplacement et la contrainte des ondes guidées pouvant être écrits comme des séries modales, les variables mixtes  $\mathbf{X}^\gamma$  et  $\mathbf{Y}^\gamma$  sont donc exprimées de la même manière :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^\gamma(x, z) \\ \mathbf{Y}^\gamma(x, z) \end{pmatrix} = \sum_n A_n(z) \begin{pmatrix} \mathcal{X}_n^\gamma(x) \\ \mathcal{Y}_n^\gamma(x) \end{pmatrix}. \quad (5-8)$$

Dans ce paragraphe, nous voulons exprimer l'amplitude modale en fonction de la trace du champ sur une section  $S$ . Dans un premier temps, la démarche développée par Baronian est rappelée. Puis,

nous montrons comment ce calcul est étendu aux cas de l'incidence oblique et des matériaux anisotropes.

### 5.2.2 Calcul des amplitudes modales lorsque la relation de Fraser est vérifiée

Les variables  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont utilisées, leurs expressions sont données équation (5-3). Elles sont décomposées de façon modale :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}(x, z) \\ \mathbf{Y}(x, z) \end{pmatrix} = \sum_n A_n(z) \begin{pmatrix} \mathcal{X}_n(x) \\ \mathcal{Y}_n(x) \end{pmatrix}. \quad (5-9)$$

La relation de Fraser exprime la bi-orthogonalité entre deux modes se propageant dans la même direction. Elle a été généralisée par Baronian aux guides d'onde en trois dimensions. Pour deux modes  $m$  et  $n$ , la relation de bi-orthogonalité s'écrit :

$$(k_n^2 - k_m^2)(\mathcal{Y}_n | \mathcal{X}_m)_S = 0, \quad (5-10)$$

où

$$(\mathcal{Y}_n | \mathcal{X}_m)_S = \int_S (\mathbf{u}_{s,n} \mathbf{t}_{s,m} + u_{z,m} t_{z,n}) dS, \quad (5-11)$$

où  $S$  est la section du guide.

Deux modes différents sont donc « orthogonaux ». Le cas, où  $m=-n$ , ne peut se produire car le champ est projeté sur une famille de mode se propageant dans le même sens ( $z$  croissants ou décroissants).

La relation de Fraser s'énonce également, en terme de produit scalaire, comme :

$$(\mathcal{Y}_n | \mathcal{X}_m)_S = \delta_{nm} J_n. \quad (5-12)$$

Sur la frontière  $\Sigma$ , le champ  $\mathbf{Y}_\Sigma$  est projeté sur le mode  $\mathcal{X}_m$  :

$$(\mathbf{Y}_\Sigma | \mathcal{X}_m)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n (\mathcal{Y}_n | \mathcal{X}_m)_S. \quad (5-13)$$

Donc si le champ elastodynamique est connu, en utilisant la relation de bi-orthogonalité, l'amplitude du champ sur la frontière  $\Sigma$  pour un mode  $m$  est obtenue aisément comme :

$$A_m = \frac{(\mathbf{Y}_\Sigma | \mathcal{X}_m)_S}{J_m}. \quad (5-14)$$

### 5.2.3 Calcul des amplitudes modales dans le cas général

#### 5.2.3.1 Introduction de la matrice de Gram $\mathcal{O}$

Pour notre problématique, la relation de Fraser n'est plus valable car les modes se propagent dans des directions différentes, et cela même dans un milieu isotrope. De plus, pour des matériaux possédant une anisotropie quelconque, les modes de Lamb et SH ne sont plus découplés dès l'incidence normale. Nous ne pouvons donc pas procéder aussi simplement dans le cas général que dans le cas d'une onde en incidence normale dans milieu isotrope.

Dans un cadre plus général, la question de mettre en place des relations de bi-orthogonalité a fait l'objet d'un certains nombres de travaux, notamment ceux de Zacharov [77]. Cependant, à notre



connaissance, il n'existe pas de relation de bi-orthogonalité entre deux modes se propageant dans le même sens.

Nous avons donc décidé d'exploiter la relation de Fraser pour la projection d'un champ sur la famille modale. Mais cela nécessite l'introduction d'un ingrédient supplémentaire ; une matrice de Gram que nous appelons  $\mathcal{O}$  et dont nous allons maintenant préciser la définition.

$$[\mathcal{O}]_{nm} = (\mathcal{Y}_n^y | \mathcal{X}_m^y)_S. \quad (5-15)$$

Ce choix de projection nous semble le plus adapté, nous en discuterons dans le Chapitre 6.

### 5.2.3.2 Formules de projection en fonction de $\mathbf{X}^y$ ou $\mathbf{Y}^y$

La matrice de Gram nous permettant de projeter les modes, nous allons maintenant pouvoir exprimer les amplitudes modales. Pour cela, nous pouvons utiliser indifféremment les champs  $\mathbf{X}^y$  ou  $\mathbf{Y}^y$  sur la frontière  $\Sigma$ , les deux cas sont présentés.

Les variables mixtes sont exprimées sur la frontière  $\Sigma$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_\Sigma^y(x, z) \\ \mathbf{Y}_\Sigma^y(x, z) \end{pmatrix} = \sum_n A_n(z) \begin{pmatrix} \mathcal{X}_n^y(x) \\ \mathcal{Y}_n^y(x) \end{pmatrix}. \quad (5-16)$$

- **Calcul en prenant  $\mathbf{Y}_\Sigma^y$  comme donnée :**

Le champ  $\mathbf{Y}_\Sigma^y$  est projeté sur le mode  $\mathcal{X}_m$ :

$$(\mathbf{Y}_\Sigma^y | \mathcal{X}_m^y)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n (\mathcal{Y}_n^y | \mathcal{X}_m^y)_S. \quad (5-17)$$

Par définition de la matrice de Gram  $\mathcal{O}$ , ceci s'écrit encore :

$$(\mathbf{Y}_\Sigma^y | \mathcal{X}_m^y)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n (\mathcal{Y}_n^y | \mathcal{X}_m^y)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} [\mathcal{O}^T]_{nm} A_n. \quad (5-18)$$

Cette relation s'exprime de façon vectorielle comme :

$$\mathbf{Y}_\Sigma^p = \mathcal{O}^T \mathbf{A}, \quad (5-19)$$

avec,

$$\mathbf{Y}_\Sigma^p = \begin{pmatrix} (\mathbf{Y}_\Sigma^y | \mathcal{X}_1^y)_S \\ \dots \\ (\mathbf{Y}_\Sigma^y | \mathcal{X}_N^y)_S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_N \end{pmatrix}. \quad (5-20)$$

Donc nous obtenons :

$$\mathbf{A} = (\mathcal{O}^T)^{-1} \mathbf{Y}_\Sigma^p. \quad (5-21)$$

La série modale est infinie, et la matrice de Gram n'est ni diagonale ni unitaire. L'inversion de la matrice nécessite donc une troncature de la série modale. Cette troncature est importante pour l'exactitude des résultats, nous en discuterons dans le Chapitre 6.

Ainsi, l'amplitude modale du mode  $n$  est obtenu à partir du champ  $\mathbf{Y}^y$  sur la frontière  $\Sigma$  comme :

$$A_n = \sum_{m \in \mathbb{N}^L} [(\mathcal{O}^T)^{-1}]_{nm} (\mathbf{Y}_\Sigma^y | \mathcal{X}_m^y)_S. \quad (5-22)$$

- **Calcul en prenant  $\mathbf{X}_\Sigma^\gamma$  comme donnée :**

De la même façon que précédemment, nous calculons l'amplitude modale mais cette fois-ci en fonction du vecteur  $\mathbf{X}_\Sigma^\gamma$ .

Le champ  $\mathbf{X}_\Sigma^\gamma$  est projeté sur le mode  $\mathbf{y}_m$ :

$$\left(\mathbf{X}_\Sigma^\gamma | \mathbf{y}_m^\gamma\right)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \left(\mathbf{x}_n^\gamma | \mathbf{y}_m^\gamma\right)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \left(\mathbf{y}_m^\gamma | \mathbf{x}_n^\gamma\right)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} [\mathcal{O}]_{nm} A_n. \quad (5-23)$$

L'amplitude modale du mode  $n$  est obtenu sur la frontière  $\Sigma$  comme :

$$A_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[ (\mathcal{O})^{-1} \right]_{nm} \left(\mathbf{X}_\Sigma^\gamma | \mathbf{y}_m^\gamma\right)_S. \quad (5-24)$$

Nous remarquons que suivant le choix du vecteur pour le calcul de l'amplitude modale, la matrice de Gram ou sa transposée est utilisée.

### 5.2.3.3 Traitement des deux frontières $\Sigma^+$ et $\Sigma^-$

Dans le Chapitre 4, nous avons mis en avant que, lors de la propagation guidée dans un matériau anisotrope, les modes se propageant dans des sens inverses sont différents. Il est donc nécessaire de définir une matrice de Gram sur chaque frontière du domaine d'étude.

Nous définissons deux matrices  $\mathcal{O}_p$  sur  $\Sigma^+$  et  $\mathcal{O}_m$  sur  $\Sigma^-$ , construites respectivement avec les modes se propageant vers les  $z$  croissants ou décroissants. Dans la suite du manuscrit, nous notons avec l'indice  $n$  les modes se propageant dans le sens des  $z$  croissants, et  $-n$  ceux se propageant vers les  $z$  décroissants. Nous détaillons ci-dessous les expressions des matrices de Gram et des amplitudes modales, calculées à partir du champ  $\mathbf{Y}_\Sigma^\gamma$ , sur chacune des frontières.

- **Expression de l'amplitude modale sur  $\Sigma^+$**

La matrice de Gram  $\mathcal{O}_p$ , pour la famille de mode se propageant dans le sens des  $z$  croissants, est définie comme :

$$[\mathcal{O}_p]_{nm} = \left(\mathbf{y}_n^\gamma | \mathbf{x}_m^\gamma\right)_S. \quad (5-25)$$

Nous pouvons donc projeter le champ  $\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^\gamma$  sur le mode  $\mathbf{x}_m^\gamma$ :

$$\left(\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^\gamma | \mathbf{x}_m^\gamma\right)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \left(\mathbf{y}_n^\gamma | \mathbf{x}_m^\gamma\right)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} [\mathcal{O}_p^T]_{nm} A_n. \quad (5-26)$$

Ainsi, l'amplitude modale du mode  $n$  est obtenu sur la frontière  $\Sigma^+$  comme :

$$A_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} \left(\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^\gamma | \mathbf{x}_m^\gamma\right)_S. \quad (5-27)$$

- **Expression de l'amplitude modale sur  $\Sigma^-$**

De la même façon, la matrice de Gram  $\mathcal{O}_m$  est définie pour la famille de mode se propageant dans le sens des  $z$  décroissants par:

$$[\mathcal{O}_m]_{nm} = \left(\mathbf{y}_{-n}^\gamma | \mathbf{x}_{-m}^\gamma\right)_S. \quad (5-28)$$

Ensuite, le champ  $\mathbf{Y}_{\Sigma^-}^\gamma$  est projeté sur le mode  $\mathbf{x}_{-m}^\gamma$ :

$$\left( \mathbf{Y}_{\Sigma^-}^{\gamma \text{ ext}} | \mathcal{X}_{-m}^{\gamma} \right)_S = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_{-n} \left( \mathcal{Y}_{-n}^{\gamma} | \mathcal{X}_{-m}^{\gamma} \right)_S . \quad (5-29)$$

De la même façon que sur la frontière  $\Sigma^+$ , nous obtenons l'expression de l'amplitude modale pour un mode  $-n$  se propageant selon les  $z$  décroissants :

$$A_{-n} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[ \left( \mathcal{O}_m^T \right)^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{Y}_{\Sigma^-}^{\gamma} | \mathcal{X}_{-m}^{\gamma} \right)_S . \quad (5-30)$$

### 5.3 Calcul hybride SAFE-EF

#### 5.3.1 Conditions transparentes aux frontières entre le guide non-perturbé et le domaine éléments finis

La construction des opérateurs de couplage  $\mathbf{YtX}$ , définis à un  $\gamma$  fixé, est présentée dans ce paragraphe. Elle s'appuie sur la méthode développée par Baronian dans le cas de l'incidence normale [4]. L'écriture des opérateurs est détaillée sur la frontière  $\Sigma^+$ , où l'onde sortante est décomposée sur la famille des modes se propageant vers la droite ( $n > 0$ ).

L'expression de l'opérateur  $\Sigma^-$  est abordée plus brièvement à la fin du paragraphe.

- **Opérateur de couplage sur la frontière  $\Sigma^+$  :**

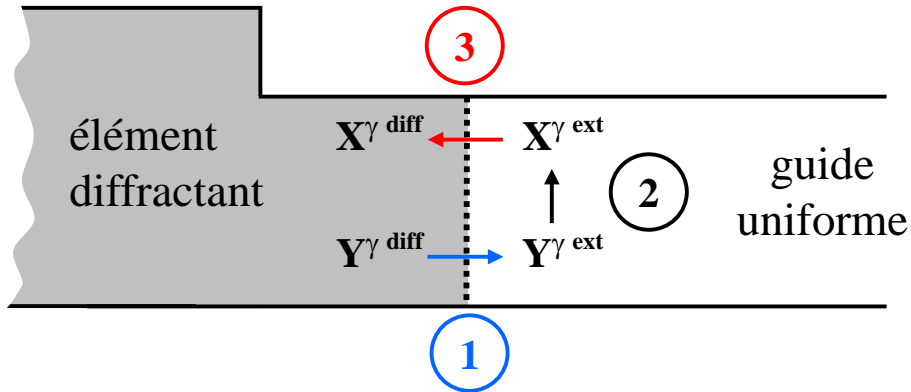


Figure 5-4: procédure pour le calcul de l'opérateur  $\mathbf{YtX}$  sur la frontière  $\Sigma^+$ , à une valeur fixé de  $\gamma$ .

Nous étudions le problème présenté ci-dessus Figure 5-4.

L'opérateur  $\mathbf{YtX}$  permet d'exprimer le champ diffracté  $\mathbf{X}^{\gamma \text{ diff}}$  à partir du champ diffracté  $\mathbf{Y}^{\gamma \text{ diff}}$  sur la frontière  $\Sigma^+$ . Le champ diffracté est obtenu par le calcul éléments finis. Il est également possible de construire un opérateur  $\mathbf{XtY}$  où inversement le champ  $\mathbf{Y}^{\gamma \text{ diff}}$  est exprimé à partir du champ  $\mathbf{X}^{\gamma \text{ diff}}$ .

Nous avons choisi de mettre en place un opérateur  $\mathbf{YtX}$ , mais la construction de l'opérateur  $\mathbf{XtY}$  sera brièvement présentée. La construction des opérateurs est faite en trois étapes, comme illustrée sur la Figure 5-4.

Les étapes 1 et 3 correspondent aux relations de continuité du déplacement et de la contrainte sur la frontière :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}(\mathbf{u}^{\gamma \text{ diff}}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}(\mathbf{u}^{\gamma \text{ ext}}) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma^+ . \\ \mathbf{u}^{\gamma \text{ diff}} = \mathbf{u}^{\gamma \text{ ext}} & \text{sur } \Sigma^+ . \end{cases} \quad (5-31)$$

Ces conditions sont équivalentes aux conditions suivantes dépendant des variables mixtes :

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{\gamma \text{diff}} = \mathbf{X}^{\gamma \text{ext}} & \text{sur } \Sigma^+ . \\ \mathbf{Y}^{\gamma \text{diff}} = \mathbf{Y}^{\gamma \text{ext}} & \text{sur } \Sigma^+ . \end{cases} \quad (5-32)$$

L'étape 2 consiste à exprimer le champ  $\mathbf{X}^{\gamma \text{ext}}$  à partir du champ  $\mathbf{Y}^{\gamma \text{ext}}$  considéré connu sur la frontière  $\Sigma^+$ . Le champ extérieur  $\mathbf{X}^{\gamma \text{ext}}$  est décomposé de façon modale sur la frontière  $\Sigma^+$  :

$$\mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n^+ \mathcal{X}_n^\gamma . \quad (5-33)$$

Les coefficients  $A_n^+$  ont été calculés précédemment. Nous pouvons donc écrire le champ  $\mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}$  comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n^+ \mathcal{X}_n^\gamma \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n^\gamma \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}} | \mathcal{X}_m^\gamma \right)_S \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n^\gamma \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}} | \mathcal{X}_m^\gamma \right)_S , \end{aligned} \quad (5-34)$$

où  $\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}$  correspond à l'expression du champ  $\mathbf{Y}^{\gamma \text{ext}}$  sur la frontière  $\Sigma^+$ .

Nous obtenons donc une relation entre les champs extérieurs que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}} = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+} (\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}) . \quad (5-35)$$

Où  $\mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+}$  représente l'opérateur de couplage sur la frontière  $\Sigma^+$  :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+} = \begin{pmatrix} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{S,n}^\gamma \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{T}_{S,m}^\gamma \right)_S & \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{S,n}^\gamma \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{U}_{z,m}^\gamma \right)_S \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{z,n}^\gamma \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{T}_{S,m}^\gamma \right)_S & \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{z,n}^\gamma \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{U}_{z,m}^\gamma \right)_S \end{pmatrix} , \quad (5-36)$$

avec  $\mathcal{U}_{z,m}^\gamma$  représentant le déplacement axial pour le mode  $m$ , et  $\mathcal{T}_{S,m}^\gamma$  représentant le vecteur suivant :

$$\mathcal{T}_{S,m}^\gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{xz,m}^\gamma \\ \sigma_{yz,m}^\gamma \end{pmatrix} . \quad (5-37)$$

Enfin, on a posé

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_S = \int_S \mathbf{v} \mathbf{w} dS , \quad (5-38)$$

où les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont des vecteurs quelconques.

Pour la suite de l'étude, les notations suivantes sont introduites :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+SS} & \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+SZ} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+ZS} & \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+ZZ} \end{pmatrix} , \quad (5-39)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+SS} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\mathbf{S},n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{T}_{\mathbf{S},m}^{\gamma} \right)_S, \\ \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+SZ} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\mathbf{S},n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{U}_{z,m}^{\gamma} \right)_S, \\ \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+ZS} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{z,n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{T}_{\mathbf{S},m}^{\gamma} \right)_S, \\ \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+ZZ} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{z,n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{U}_{z,m}^{\gamma} \right)_S. \end{array} \right. \quad (5-40)$$

Finalement, les relations de continuité, permettant de relier les champs intérieur et extérieur, nous amènent à l'expression du champ  $\mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{diff}}$  suivante :

$$\mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{diff}} = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+} (\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{diff}}). \quad (5-41)$$

La construction de cet opérateur nécessite une hypothèse de complétude des modes. il s'agit de vérifier que le champ  $\mathbf{Y}^{\gamma \text{ext}}$  peut être entièrement décomposé sur la famille de mode  $(\mathcal{Y}_n^{\gamma})_{n \in \mathbb{N}}$ . Cette hypothèse a été admise dans cette thèse ; bien qu'à notre connaissance, elle n'a pas été démontrée.

L'opérateur  $\mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+}$  a été choisi pour notre étude, mais il était également possible de construire l'opérateur de couplage  $\mathbf{T}_{\mathbf{XY}}^{\gamma+}$ .

➤ *Opérateur de couplage  $\mathbf{T}_{\mathbf{XY}}^{\gamma+}$  :*

Dans ce cas, la donnée du problème n'est plus le champ  $\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}$  mais le champ  $\mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}$ .

Le champ extérieur  $\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}$  est décomposé de façon modale:

$$\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n^+ \mathcal{Y}_n^{\gamma}. \quad (5-42)$$

Ici, c'est le champ  $\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}$  qui est exprimé en fonction du champ  $\mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n^+ \mathcal{Y}_n^{\gamma} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_n^{\gamma} \sum_{m \in \mathbb{N}^+} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}})^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma} | \mathcal{Y}_m^{\gamma} \right)_S \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_n^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}})^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma} | \mathcal{Y}_m^{\gamma} \right)_S. \end{aligned} \quad (5-43)$$

Nous obtenons donc une relation entre les champs extérieurs que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\mathbf{Y}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}} = \mathbf{T}_{\mathbf{XY}}^{\gamma+} (\mathbf{X}_{\Sigma^+}^{\gamma \text{ext}}), \quad (5-44)$$

où  $\mathbf{T}_{\mathbf{XY}}^{\gamma+}$  représente l'opérateur de couplage sur la frontière  $\Sigma^+$  :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{XY}}^{\gamma+} = \begin{pmatrix} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{\mathbf{S},n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{U}_{\mathbf{S},m}^{\gamma} \right)_S & \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{\mathbf{S},n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{T}_{z,m}^{\gamma} \right)_S \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{z,n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{U}_{\mathbf{S},m}^{\gamma} \right)_S & \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{z,n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{p}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{T}_{z,m}^{\gamma} \right)_S \end{pmatrix}. \quad (5-45)$$

• **Opérateur de couplage sur la frontière  $\Sigma^-$  :**

De la même manière que pour la frontière  $\Sigma^+$ , le champ  $\mathbf{X}_{\Sigma^-}^{\gamma \text{ ext}}$  est décomposé de façon modale:

$$\mathbf{X}_{\Sigma^-}^{\gamma \text{ ext}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n^- \mathcal{X}_{-n}^{\gamma}. \quad (5-46)$$

Et les coefficients  $A_n^-$  sont obtenus en inversant la matrice  $\mathcal{O}_{\mathbf{m}}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Sigma^-}^{\gamma \text{ ext}} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n^- \mathcal{X}_{-n}^{\gamma} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_{-n}^{\gamma} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{m}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{Y}_{\Sigma^-}^{\gamma \text{ ext}} | \mathcal{X}_{-m}^{\gamma} \right)_S \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_{-n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{m}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{Y}_{\Sigma^-}^{\gamma \text{ ext}} | \mathcal{X}_{-m}^{\gamma} \right)_S. \end{aligned} \quad (5-47)$$

Une relation entre les champs extérieurs est ainsi obtenue par l'opérateur de couplage  $\mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-}$  défini ci-dessous:

$$\mathbf{X}_{\Sigma^-}^{\gamma \text{ ext}} = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-} (\mathbf{Y}_{\Sigma^-}^{\gamma \text{ ext}}), \quad (5-48)$$

avec,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-} = \begin{pmatrix} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\mathbf{S},n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{m}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{T}_{\mathbf{S},m}^{\gamma} \right)_S & \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\mathbf{S},n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{m}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{U}_{z,-m}^{\gamma} \right)_S \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{z,-n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{m}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{T}_{\mathbf{S},m}^{\gamma} \right)_S & \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{z,-n}^{\gamma} \left[ (\mathcal{O}_{\mathbf{m}}^T)^{-1} \right]_{nm} \left( *, \mathcal{U}_{z,-m}^{\gamma} \right)_S \end{pmatrix}. \quad (5-49)$$

### 5.3.2 Formulation variationnelle du problème à $\gamma$ fixé

Le paragraphe précédent nous a permis de mettre en place les conditions transparentes aux frontières entre les domaines éléments finis de l'élément diffractant et la partie uniforme du guide.

Le problème de diffraction étudié s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}(\mathbf{u}^{\gamma})) = -\omega^2 \rho \mathbf{u}^{\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}(\mathbf{u}^{\gamma}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega - \Sigma^{+/-}, \\ \mathbf{X}_{\Sigma^{+/-}}^{\gamma \text{ diff}} = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+/-} (\mathbf{Y}_{\Sigma^{+/-}}^{\gamma \text{ diff}}) & \text{sur } \Sigma^{+/-}. \end{cases} \quad (5-50)$$

Nous considérons la première équation du système. Après multiplication par un champ test  $\mathbf{v}^{\gamma}$  et intégration sur le domaine  $\Omega$ , Nous cherchons le champ  $\mathbf{u}^{\gamma}$  tel que pour tout champ test:

$$-\int_V \operatorname{div}_{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}(\mathbf{u}^{\gamma})) \cdot \mathbf{v}^{\gamma} - \omega^2 \rho \int_V \mathbf{u}^{\gamma} \cdot \mathbf{v}^{\gamma} = 0. \quad (5-51)$$

Après développements et intégrations par partie, nous obtenons :

$$a_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma) = \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} (\boldsymbol{\sigma}^\gamma(\mathbf{u}^\gamma) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}^\gamma, \quad (5-52)$$

avec,

$$a_{\Omega_{\text{int}}}(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma) = a_0(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma) - i\gamma a_1(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma) + \gamma^2 a_2(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma) - \omega^2 \rho \int_V \mathbf{u}^\gamma \cdot \mathbf{v}^\gamma. \quad (5-53)$$

Les termes  $a_0(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma)$ ,  $a_1(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma)$  et  $a_2(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma)$  sont explicités dans l'annexe.

Nous allons maintenant exploiter les conditions aux limites pour modifier les termes associés aux frontières  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$ .

- **Sur la frontière transparente  $\Sigma^+$ :**

Le champ diffracté correspond à l'onde sortante sur cette frontière. Le champ de déplacement est donc égal au champ diffracté :

$$\mathbf{u}_{\text{tot}|\Sigma^-}^\gamma = \mathbf{u}_{\text{diff}|\Sigma^-}^\gamma. \quad (5-54)$$

La condition transparente sur la frontière donne donc :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}_S^\gamma \\ u_z^\gamma \end{pmatrix}_{\Sigma^+} = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^\gamma \\ t_z^\gamma \end{pmatrix}_{\Sigma^+}. \quad (5-55)$$

La formulation fait intervenir le terme en contrainte suivant :

$$\int_{\Sigma^+} (\boldsymbol{\sigma}^\gamma(\mathbf{u}^\gamma) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}^\gamma = \int_{\Sigma^+} (\mathbf{t}_S^\gamma \mathbf{v}_S^\gamma - t_z^\gamma v_z^\gamma), \quad (5-56)$$

avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la frontière  $\Sigma^+$ .

Il est donc nécessaire d'exprimer les contraintes sur la frontière. Pour cela, nous utilisons les conditions transparentes aux frontières. L'opérateur de couplage nous permet de déterminer les composantes tangentielles de la contrainte :

$$\mathbf{t}_{S|\Sigma^+}^\gamma = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+SS} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma) + \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+SZ} (t_{z|\Sigma^+}^\gamma), \quad (5-57)$$

Mais il n'est pas possible de déterminer la composante axiale de la contrainte. Cette composante doit donc être considérée comme une inconnue supplémentaire de la formulation variationnelle. Elle est appelée multiplicateur de Lagrange. Il est donc nécessaire d'utiliser une équation supplémentaire pour définir  $t_{z|\Sigma^+}^\gamma$  : il s'agit de la deuxième équation obtenu par l'opérateur de couplage reliant les différentes composantes du déplacement à la contrainte axiale :

$$u_{z|\Sigma^+} = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+ZS} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma) + \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma+ZZ} (t_{z|\Sigma^+}^\gamma). \quad (5-58)$$

Nous allons donc écrire une formulation variationnelle en deux dimensions couplant une inconnue vectorielle en déplacement existant sur l'ensemble du domaine de calcul et une inconnue scalaire, *i.e.* la contrainte axiale, définie sur les frontières artificielles du domaine,  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$ .

En utilisant les équations (5-56) et (5-57), la condition en contrainte sur  $\Sigma^+$  est écrite :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^+} (\boldsymbol{\sigma}^\gamma(\mathbf{u}^\gamma) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}^\gamma &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{T}_{S,n}^\gamma \right)_S \left[ \left( \mathcal{O}_p^T \right)^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{T}_{S,m}^\gamma \right)_S \\ &+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{T}_{S,n}^\gamma \right)_S \left[ \left( \mathcal{O}_p^T \right)^{-1} \right]_{nm} \left( t_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{U}_{z,m}^\gamma \right)_S - \left( t_{z|\Sigma^+}^\gamma, v_{z|\Sigma^+}^\gamma \right)_S. \end{aligned} \quad (5-59)$$

Ce qui donne :

$$\int_{\Sigma^+} (\boldsymbol{\sigma}^\gamma(\mathbf{u}^\gamma), \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}^\gamma = -a_{\Sigma^+}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma) - b_{\Sigma^+}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma) - (\mathbf{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{v}_{z|\Sigma^+}^\gamma)_S, \quad (5-60)$$

avec,

$$a_{\Sigma^+}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{T}_{S,n}^\gamma)_S \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{T}_{S,m}^\gamma)_S, \quad (5-61)$$

$$b_{\Sigma^+}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{T}_{S,n}^\gamma)_S \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} (\mathbf{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{U}_{z,m}^\gamma)_S. \quad (5-62)$$

L'équation ( 5-58 ) est multipliée par l'inconnue test  $\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma)_S &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{U}_{z,n}^\gamma)_S \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{T}_{S,m}^\gamma)_S \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{U}_{z,n}^\gamma)_S \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} (\mathbf{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{U}_{z,m}^\gamma)_S. \end{aligned} \quad (5-63)$$

Ce qui nous donne :

$$(\mathbf{u}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma)_S = -b_{\Sigma^+}(\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma) + c_{\Sigma^+}(\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma), \quad (5-64)$$

avec,

$$b_{\Sigma^+}(\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{U}_{z,n}^\gamma)_S \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{T}_{S,m}^\gamma)_S, \quad (5-65)$$

$$c_{\Sigma^+}(\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\tilde{\mathbf{t}}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{U}_{z,n}^\gamma)_S \left[ (\mathcal{O}_p^T)^{-1} \right]_{nm} (\mathbf{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathcal{U}_{z,m}^\gamma)_S. \quad (5-66)$$

- **Sur la frontière transparente  $\Sigma^-$ :**

Sur la frontière  $\Sigma^-$ , le champ diffracté s'exprime en fonction du champ total et du champ incident:

$$\mathbf{u}_{\text{diff}|\Sigma^-}^\gamma = \mathbf{u}_{\text{tot}|\Sigma^-}^\gamma - \mathbf{u}_{\text{inc}|\Sigma^-}^\gamma. \quad (5-67)$$

Le champ  $\mathbf{X}_\Sigma^{\gamma \text{int}}$  se décompose donc comme:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}_S^\gamma \\ \mathbf{u}_z^\gamma \end{pmatrix}_{\Sigma^-} = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^\gamma \\ \mathbf{t}_z^\gamma \end{pmatrix}_{\Sigma^-} + \begin{pmatrix} \mathbf{t}_S^\gamma \\ \mathbf{u}_z^\gamma \end{pmatrix}_{\Sigma^-}^{\text{inc}} - \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^\gamma \\ \mathbf{t}_z^\gamma \end{pmatrix}_{\Sigma^-}^{\text{inc}}. \quad (5-68)$$

Les deux équations liées à la formulation mixte sont les suivantes :

$$\mathbf{t}_{S|\Sigma^-}^\gamma = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-SS} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma) + \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-SZ} (\mathbf{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma) + \mathbf{t}_{z|\Sigma^-}^{\gamma \text{inc}} - \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-SS} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^{\gamma \text{inc}}) - \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-SZ} (\mathbf{t}_{z|\Sigma^-}^{\gamma \text{inc}}), \quad (5-69)$$

$$\mathbf{u}_{z|\Sigma^-}^\gamma = \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-ZS} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma) + \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-ZZ} (\mathbf{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma) + \mathbf{u}_{z|\Sigma^-}^{\gamma \text{inc}} - \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-ZS} (\mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^{\gamma \text{inc}}) - \mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma-ZZ} (\mathbf{t}_{z|\Sigma^-}^{\gamma \text{inc}}). \quad (5-70)$$

En utilisant la même démarche et les mêmes notations que définies précédemment pour le calcul sur la frontière  $\Sigma^+$  et sachant que le sens de la normal  $\mathbf{n}$  est inversé, nous obtenons les expressions suivantes :



$$\int_{\Sigma^-} (\boldsymbol{\sigma}^\gamma(\mathbf{u}^\gamma), \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}^\gamma dS = a_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma) + b_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^\gamma) - (\mathbf{t}_{S|\Sigma^-}^{\gamma inc}, \mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma)_S \quad (5-71)$$

$$- a_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^{\gamma inc}) - b_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^{\gamma inc}) + (t_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{v}_{z|\Sigma^-}^\gamma)_S,$$

$$\left( \mathbf{u}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma \right)_S = -b_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma) + c_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^\gamma) + \left( \mathbf{u}_{z|\Sigma^-}^{\gamma inc}, \tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma \right)_S \quad (5-72)$$

$$+ b_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^{\gamma inc}) - c_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^{\gamma inc}),$$

avec,

$$a_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathcal{T}_{S, \mathbf{n}}^\gamma \right)_S \left[ \left( \mathcal{O}_m^T \right)^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathcal{T}_{S, \mathbf{m}}^\gamma \right)_S, \quad (5-73)$$

$$b_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^\gamma) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathcal{T}_{S, \mathbf{n}}^\gamma \right)_S \left[ \left( \mathcal{O}_m^T \right)^{-1} \right]_{nm} \left( t_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathcal{U}_{z, -m}^\gamma \right)_S, \quad (5-74)$$

$$b_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathcal{U}_{z, -n}^\gamma \right)_S \left[ \left( \mathcal{O}_m^T \right)^{-1} \right]_{nm} \left( \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathcal{T}_{S, \mathbf{m}}^\gamma \right)_S, \quad (5-75)$$

$$c_{\Sigma^+}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^\gamma) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathcal{U}_{z, -n}^\gamma \right)_S \left[ \left( \mathcal{O}_m^T \right)^{-1} \right]_{nm} \left( t_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathcal{U}_{z, -m}^\gamma \right)_S. \quad (5-76)$$

• **Sur l'ensemble du domaine de calcul éléments finis :**

La formulation variationnelle générale s'écrit comme :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma) + b(\mathbf{v}^\gamma, t_{z|\Sigma}^\gamma) = l_1(\mathbf{v}^\gamma) & \forall \mathbf{v}^\gamma \in \Omega, \\ b(\tilde{t}_{z|\Sigma}^\gamma, \mathbf{u}_{|\Sigma}^\gamma) - c(\tilde{t}_{z|\Sigma}^\gamma, t_{z|\Sigma}^\gamma) = l_2(\tilde{t}_{z|\Sigma}^\gamma) & \forall \tilde{t}_{z|\Sigma}^\gamma \in \Sigma^{+/-}. \end{cases} \quad (5-77)$$

avec,

$$a(\mathbf{v}^\gamma, \mathbf{u}^\gamma) = a_{\Omega_{int}}(\mathbf{v}^\gamma, \mathbf{u}^\gamma) + a_{\Sigma^+}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma) - a_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma), \quad (5-78)$$

$$b(\mathbf{v}^\gamma, t_{z|\Sigma}^\gamma) = b_{\Sigma^+}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^+}^\gamma, t_{z|\Sigma^+}^\gamma) - b_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^\gamma) + (t_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{v}_{z|\Sigma^+}^\gamma)_S - (t_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{v}_{z|\Sigma^-}^\gamma)_S, \quad (5-79)$$

$$l_1(\mathbf{v}^\gamma) = -(\mathbf{t}_{S|\Sigma^-}^{\gamma inc}, \mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma)_S - a_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^{\gamma inc}) - b_{\Sigma^-}(\mathbf{v}_{S|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^{\gamma inc}), \quad (5-80)$$

$$b(\tilde{t}_{z|\Sigma}^\gamma, \mathbf{u}_{|\Sigma}^\gamma) = b_{\Sigma^+}(\tilde{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^+}^\gamma) - b_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^\gamma) + \left( \mathbf{u}_{z|\Sigma^+}^\gamma, \tilde{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma \right)_S - \left( \mathbf{u}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma \right)_S, \quad (5-81)$$

$$c(\tilde{t}_{z|\Sigma}^\gamma, t_{z|\Sigma}^\gamma) = c_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^\gamma) - c_{\Sigma^+}(\tilde{t}_{z|\Sigma^+}^\gamma, t_{z|\Sigma^+}^\gamma), \quad (5-82)$$

$$l_2(\tilde{t}_{z|\Sigma}^\gamma) = - \left( \mathbf{u}_{z|\Sigma^-}^{\gamma inc}, \tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma \right)_S - b_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, \mathbf{u}_{S|\Sigma^-}^{\gamma inc}) + c_{\Sigma^-}(\tilde{t}_{z|\Sigma^-}^\gamma, t_{z|\Sigma^-}^{\gamma inc}). \quad (5-83)$$

## 5.4 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, la formulation variationnelle pour l'étude de diffraction à  $\gamma$  fixé a été mise en place. Nous avons montré qu'il n'existe pas à notre connaissance de relation de bi-orthogonalité entre des modes se propageant dans des directions différentes. En particulier, les modes ne sont pas bi-orthogonaux pour la relation de Fraser généralisée. C'est pourquoi une matrice de Gram  $\mathcal{O}$  a été construite, basée sur cette relation, dont l'inversion permet de calculer les amplitudes modales d'un champ quelconque.

Ensuite les conditions transparentes et la formulation variationnelle à  $\gamma$  fixé ont été développées. Les conditions transparentes ont imposé l'ajout d'une inconnue scalaire dans le calcul éléments finis, il s'agit de la contrainte axiale qui joue le rôle de multiplicateur de Lagrange.

Nous obtenons donc une formulation variationnelle en deux dimensions couplant une inconnue vectorielle en déplacement existant sur l'ensemble du domaine de calcul et une inconnue scalaire, *i.e.* la contrainte axiale, définie sur les frontières artificielles du domaine,  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$ .



## Chapitre 6. VALIDATION DE LA METHODE ET ETUDE DE STABILITE NUMERIQUE

6.1	Implémentation des conditions aux frontières transparentes et de la dépendance en $\gamma$ .....	117
6.2	Validation de la méthode hybride .....	117
6.2.1	Étude d'une plaque sans élément diffractant .....	118
6.2.2	Étude de la diffraction par un élément de forme complexe .....	121
6.3	Étude de la précision de la méthode hybride.....	123
6.3.1	Influence de la troncature de la série sur le calcul numérique .....	123
6.3.2	Étude du conditionnement de la matrice de Gram.....	125
6.4	Résumé du Chapitre .....	130

*Les conditions aux frontières ont été développées dans le Chapitre précédent ; il est maintenant nécessaire de s'assurer de la validité de la méthode. Pour cela différentes études ont été menées et sont présentées dans ce chapitre.*

*Tout d'abord, une zone éléments finis, de même géométrie et caractéristiques élastiques qu'une plaque saine, est modélisée. Ainsi, il est vérifié que les conditions mises en place évitent toute réflexion parasite sur les frontières. Ensuite, un cas non trivial est étudié pour vérifier la conservation de l'énergie et l'invariance des coefficients de diffraction avec la position des frontières.*

*Nous nous sommes enfin intéressés à la précision de la méthode. La construction des opérateurs et la troncature de la matrice nécessitent de faire un choix sur le nombre de modes conservés pour la simulation. Nous discutons de ce choix, et corollairement du choix du produit scalaire permettant la construction des matrices de Gram, d'autres choix que celui effectué (relation de Fraser) pouvant être faits. Une étude du conditionnement des matrices de Gram obtenues à partir de différents produits scalaires nous permet de justifier ce choix a posteriori.*



## **6.1 Implémentation des conditions aux frontières transparentes et de la dépendance en $\gamma$**

La méthode hybride a été implémentée dans le logiciel Méлина, code éléments finis développé à l'IRMAR et à POEMS. Ce logiciel est constitué de briques plus ou moins élémentaires relatives à différents algorithmes classiques intervenant dans une méthode d'éléments finis (lecture de maillage, calcul de matrices élémentaires, assemblage, prise en compte de conditions essentielles, résolution de systèmes linéaires, calcul de valeurs propres, génération de fichier de sortie) et de briques spécifiques liées à la résolution de problèmes en domaine non borné (DtN, représentation intégrale). Il s'agit donc essentiellement d'une "boîte à outils" destinée à prototyper de nouvelles méthodes numériques de type éléments finis mises au point par des chercheurs.

Aujourd'hui, le logiciel Méлина est capable d'intégrer des formulations multi-inconnues scalaires et vectorielles en régime harmonique ou transitoire, de proposer des approximations par éléments finis de type Lagrange jusqu'à l'ordre 10 avec différents types d'éléments (triangle, quadrangle, tétraèdre, prisme, cube), de prendre en compte des conditions essentielles (en particulier des conditions de transmission) et des conditions aux limites transparentes non locales (représentation intégrale, représentation modale).

Le code Méлина (écrit en fortran 77) ainsi que sa documentation complète est en accès libre (licence LGPL) [78]. Il est largement utilisé par POEMS et l'IRMAR mais également par d'autres laboratoires (ENIT/Tunisie, UME/Ensta, Université de Dijon). Ce site [78] présente de nombreuses applications développées à l'aide de ce logiciel.

Dans le cadre de sa thèse, Vahan Baronian a implémenté la méthode hybride en milieu isotrope pour le cas de l'incidence normale (cas de  $\gamma=0$  dans notre étude) en 2D et 3D. Nous avons donc dû implémenter nos développements théoriques présentés aux chapitres précédents permettant de prendre en compte l'incidence oblique et l'anisotropie des composites. Tout d'abord, il a été nécessaire de mettre en place une formulation en 2D à trois composantes dépendant de  $\gamma$  dans le domaine de calcul  $\Omega$ . Cette formulation a été développée dans un premier temps pour un milieu isotrope, puis pour un milieu anisotrope. Ensuite, les plaques étudiées étant multicouches, nous avons adapté la prise en compte du tenseur d'élasticité à ces structures particulières, notamment dans le cas d'un raidisseur multicouche, que nous présenterons dans le paragraphe suivant, où les plis du composite suivent la géométrie du raidisseur.

Enfin, les conditions aux frontières transparentes étendues à l'incidence oblique ont nécessité principalement d'introduire la matrice de Gram  $\mathcal{O}$ . Nous noterons qu'une approche similaire, présentée dans [79], avait déjà été implémentée dans le code Méлина pour un problème d'inconnue scalaire.

Les développements dans le code Méлина ont été menés au CEA et à l'ENSTA en collaboration avec Colin Chambeyron (ingénieur d'études à POEMS).

La méthode SAFE- $\gamma$  ainsi que des programmes, permettant le post-traitement des données issues de Méлина, ont été implémentés sous MATLAB.

## **6.2 Validation de la méthode hybride**

Dans cette partie, des tests élémentaires ont été effectués pour vérifier l'exactitude de la méthode hybride proposée. Dans un premier temps, les validations consistent à prendre en compte une zone élément finis possédant la même géométrie et les mêmes caractéristiques que la plaque saine ; les résultats attendus devraient montrer que la propagation guidée, dans cette zone, n'est pas perturbée (pas de réflexions artificielles sur les frontières, ni de pertes d'énergie). La deuxième validation consiste à vérifier la conservation de l'énergie et la transparence des frontières en présence d'un élément diffractant non trivial.

Dans ce paragraphe, notre but est de s'assurer du bon développement des conditions transparentes. Nous avons donc choisi un nombre de modes important pour la construction des opérateurs aux frontières de sorte que les erreurs produites soient négligeables. Nous discuterons plus précisément de la troncature de la série modale dans la suite du chapitre.

### 6.2.1 Étude d'une plaque sans élément diffractant

L'utilisation d'une zone éléments finis sans éléments diffractant, c'est à dire semblable à la plaque, permet de vérifier de façon simple la transparence des frontières et donc l'absence de réflexions parasites artificielles. Pour une onde guidée incidente, nous attendons que la propagation de l'onde ne soit pas perturbée par le calcul éléments finis et donc qu'il y ait une transmission totale de l'onde incidente. Cela se traduit par l'absence de conversion de modes. Les champs de déplacement des modes calculés par la méthode SAFE- $\gamma$  doivent donc être égaux aux champs de déplacement après résolution du calcul éléments finis. Ces grandeurs seront comparées sur les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ .

Le spécimen étudié est une plaque multicouche composite d'épaisseur 3,2 mm et d'empilement  $[45^\circ/0^\circ/135^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ/90^\circ/135^\circ]_S$  ; les plis sont composés de fibres en carbone dans une matrice d'époxy. Les constantes élastiques utilisées sont celles des plis utilisés dans le Chapitre 3, données Tableau 3-1 (parties réelles uniquement). La zone éléments finis s'étend sur 7 mm ; la géométrie globale de la structure est présentée Figure 6-1 :

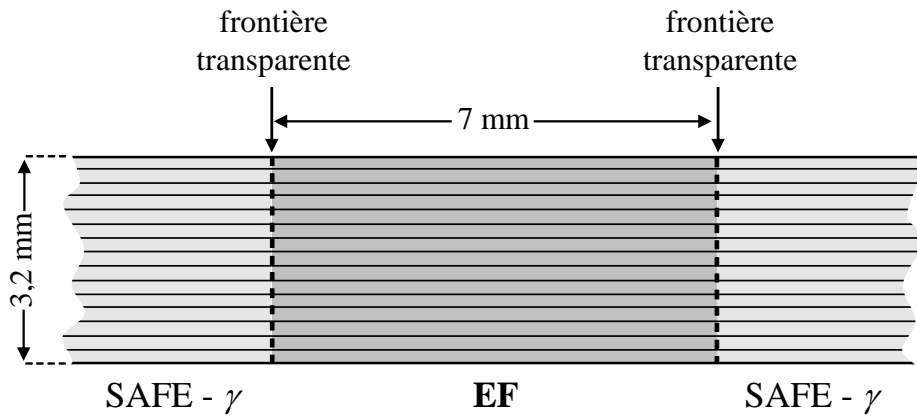


Figure 6-1: géométrie de la plaque saine pour la première validation de la méthode.

Pour une fréquence d'excitation de 400 kHz, il existe cinq modes propagatifs pouvant être présents dans la plaque non perturbée : trois modes de Lamb  $q-A_0$ ,  $q-S_0$  et  $q-A_1$  et deux modes SH,  $q-SH_0$  et  $q-SH_1$ . Chaque mode est successivement choisi comme mode incident pour différentes valeurs de  $\gamma$ . Dans cette étude nous avons conservé 15 modes pour l'opérateur de couplage YtX. Pour chaque simulation, l'erreur quadratique relative entre les champs obtenus par le calcul éléments finis et par la méthode SAFE- $\gamma$  est calculée sur les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ . Nous définissons l'erreur quadratique comme :

$$\varepsilon_{quad} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |u_{m,SAFE\Sigma}^\gamma - u_{m,EF\Sigma}^\gamma|^2}, \quad (6-1)$$

où,  $u_{m,SAFE\Sigma}^\gamma$  et  $u_{m,EF\Sigma}^\gamma$  représentent les déplacements au nœud  $m$  sur la frontière  $\Sigma$ , obtenus respectivement par la méthode SAFE et par résolution du problème éléments finis ;  $M$  correspond au nombre de nœuds sur la frontière  $\Sigma$ .

L'erreur quadratique relative (en %) est ensuite définie comme :

$$\varepsilon_{rel} = 200 \frac{\mathcal{E}_{quad}}{\|u_{SAFE\Sigma}\|_2 + \|u_{EF\Sigma}\|_2}, \quad (6-2)$$

où  $\|\cdot\|_2$  représente la norme 2 :

$$\|u_{SAFE\Sigma}^\gamma\|_2 = \sqrt{\sum_{m=1}^M |u_{m,SAFE\Sigma}^\gamma|^2}, \quad (6-3)$$

Nous précisons que le facteur 2 dans l'équation ( 6-2 ) provient du fait que l'erreur quadratique est divisée par la moyenne des normes 2 des déplacements.

Dans la suite, nous notons,  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_p$ , les erreurs quadratiques relatives respectivement aux frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ . Celles-ci sont représentées ci-dessous Figure 6-2 (sur la frontière  $\Sigma^-$ ) et Figure 6-3 (sur la frontière  $\Sigma^+$ ).

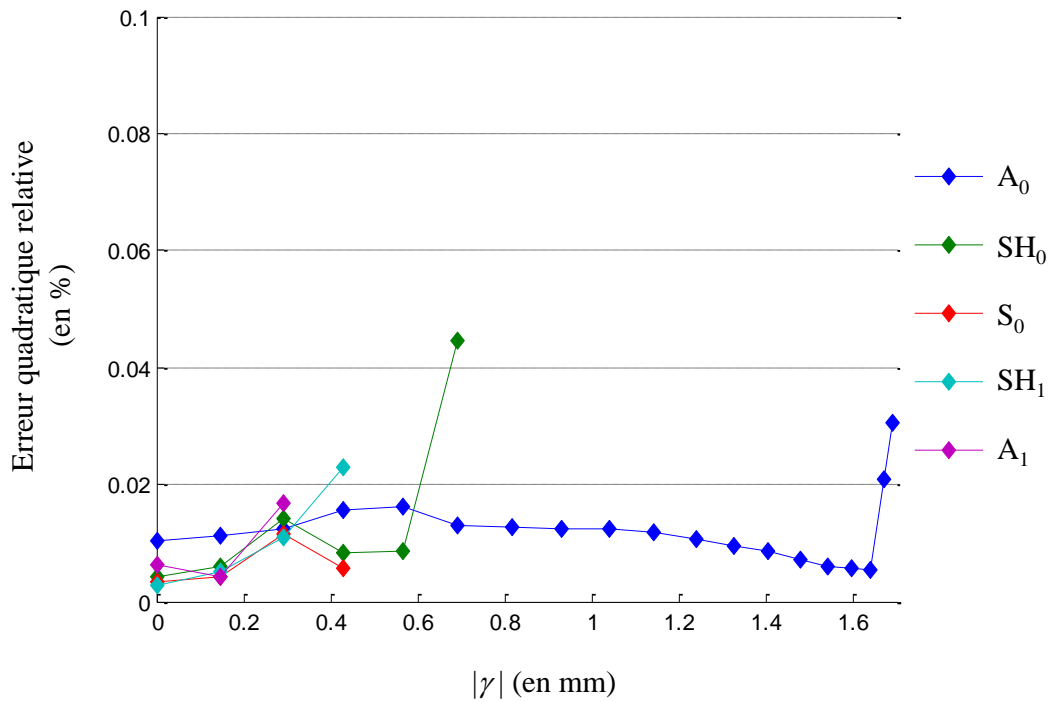


Figure 6-2: erreurs quadratiques en % sur le champ calculé sur la frontière  $\Sigma^-$  pour les cinq modes propagatifs présents à 400 kHz comme une fonction de  $\gamma$ .

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 4, il est clairement visible que le nombre de modes présents dans la plaque dépend de la valeur de  $\gamma$ . Ce phénomène a été illustré par la Figure 4-7. Nous rappelons que le mode q- $A_0$  possède le plus grand nombre d'onde, nous avons donc choisi la valeur maximale de  $\gamma$ , pour cette étude, telle qu'elle corresponde au mode q- $A_0$  incident à 89°.



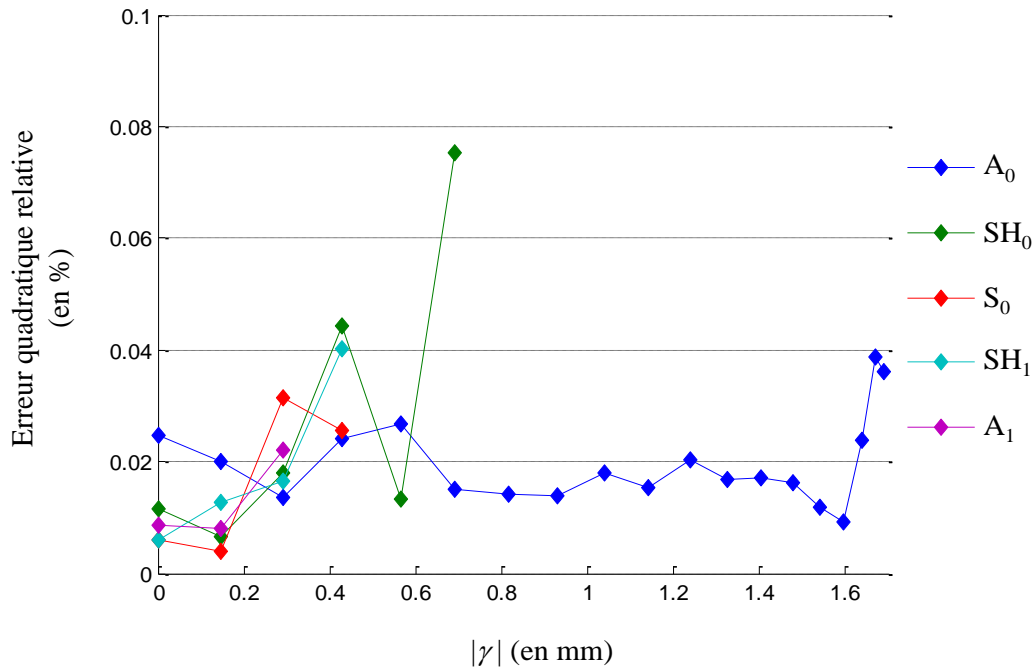


Figure 6-3 : erreurs quadratiques en % sur le champ calculé sur la frontière  $\Sigma^+$  pour les cinq modes propagatifs présents à 400 kHz comme une fonction de  $\gamma$ .

Toutes les valeurs des erreurs quadratiques sont inférieures à 0,08%. Les champs de déplacement calculés par les deux méthodes sont donc égaux à cette erreur près, et il n'y a donc pas de phénomène de réflexions créé par les frontières artificielles.

Nous avons précisé que la plus grande valeur de  $\gamma$  correspond à une incidence de  $89^\circ$  pour le mode q- $A_0$ . Des tests similaires, qui ne sont pas présentés ici, ont montré la validité de la méthode pour des angles allant jusqu'à  $89,5^\circ$ . Comme il peut être anticipé, le cas de l'incidence à  $90^\circ$  ne peut être pris en compte par notre modèle, mais ce cas de figure n'a pas de sens physique pour des applications de contrôle santé intégré.

Nous illustrons cette validation par la représentation du champ de déplacement du mode q- $A_0$  en incidence  $20^\circ$  à 400 kHz. Les différentes composantes sont présentées ci-dessous Figure 6-4.

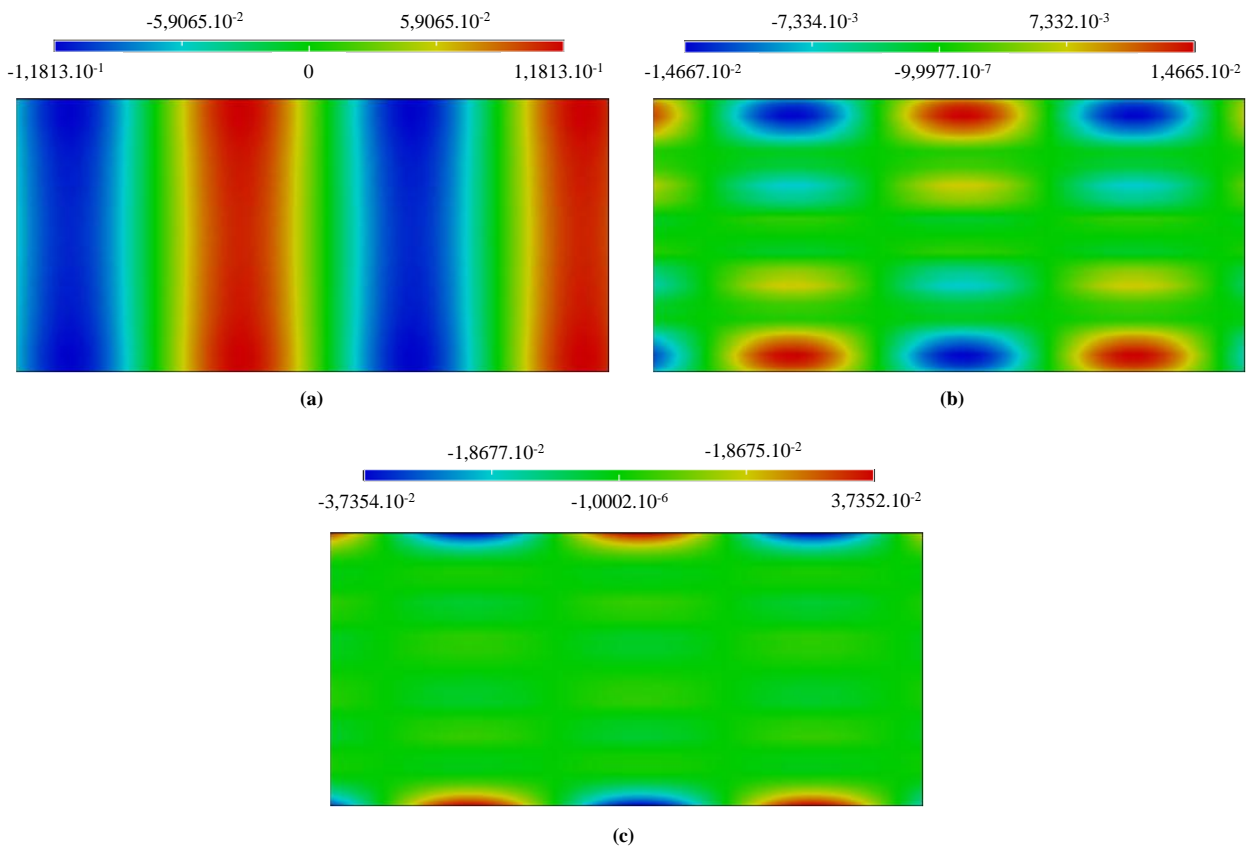


Figure 6-4: représentation des différentes composantes du champ de déplacement pour le mode  $q-A_0$  en incidence  $20^\circ$  à 400 kHz, partie réelle des composantes (a)  $u_x$ , (b)  $u_y$  et (c)  $u_z$ .

Cette figure illustre qualitativement le fait que la propagation guidée ne subit pas de réflexions parasites.

### 6.2.2 Étude de la diffraction par un élément de forme complexe

Nous allons maintenant considérer une plaque raidie multicouche en matériau composite. Le raidisseur possède une forme en oméga, la géométrie spécifique de la structure est présentée Figure 6-5. Il s'agit d'une structure aéronautique réaliste, dont les différentes caractéristiques ont été fournies par EADS IW.

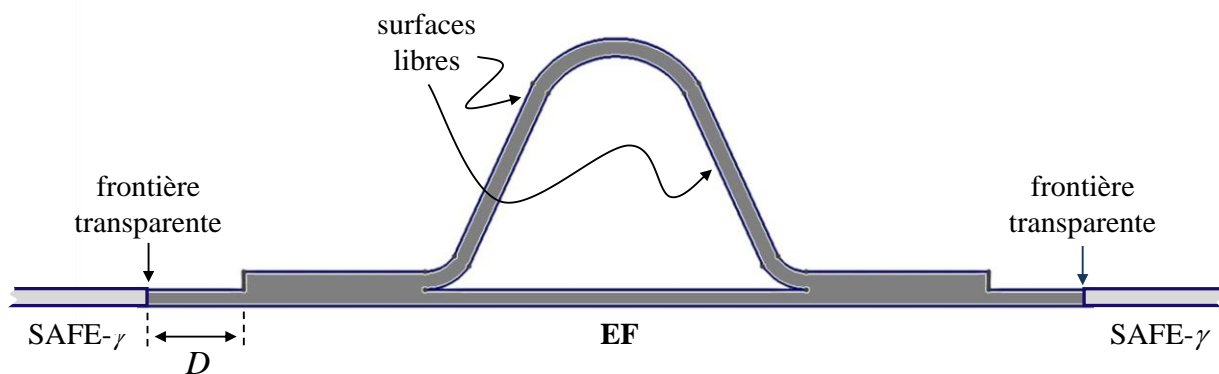


Figure 6-5: géométrie de la plaque raidie.

La plaque possède onze couches, de fibres de carbone dans une matrice en époxy, d'épaisseur  $133 \mu\text{m}$ . Le raidisseur est composé de douze couches du même pli de composite. La géométrie de la structure ainsi que les constantes d'élasticité du matériau composite seront données dans le chapitre 7 où une étude détaillée est réalisée.

Dans le cas présent, les phénomènes de réflexion et de transmission ne sont pas triviaux. Deux critères sont vérifiés pour s'assurer du bon développement des conditions transparentes : la conservation de l'énergie et l'influence de la position des frontières de la zone éléments finis. Les différentes validations et la suite de l'étude nécessitent l'introduction des coefficients de diffraction (réflexion et transmission) :

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{A_{i|\Sigma^-}^{ref}}{A_{j|\Sigma^-}^{inc}}, \\ t_{ij} &= \frac{A_{i|\Sigma^+}^{trans}}{A_{j|\Sigma^-}^{inc}}, \end{aligned} \quad (6-4)$$

où,  $r_{ij}$  (respectivement  $t_{ij}$ ) correspond au coefficient de réflexion (respectivement transmission) du mode réfléchi (respectivement transmis)  $i$  pour un mode incident  $j$ .

Dans la suite du manuscrit, ces coefficients sont normalisés par la racine carrée du rapport du flux du vecteur de Poynting de l'onde considérée et de celui de l'onde incidente. Les flux du vecteur de Poynting sont calculés à travers le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . On note alors  $R$  et  $T$  les coefficients normalisés :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= r_{ij} \sqrt{\frac{P_i}{P_j}}, \\ T_{ij} &= t_{ij} \sqrt{\frac{P_i}{P_j}}, \end{aligned} \quad (6-5)$$

où,  $R_{ij}$  (respectivement  $T_{ij}$ ) correspond au coefficient de réflexion (respectivement transmission) du mode réfléchi (respectivement transmis) normalisé  $i$  pour un mode incident  $j$ .

Un premier test consiste à étudier la conservation de l'énergie dans la zone éléments finis, il ne doit y avoir ni perte ni création d'énergie. Pour cela, la relation suivante doit être vérifiée :

$$E = E_{incidente} = E_{réfléchie} + E_{transmise} = \sum_i \left( |R_{ij}|^2 + |T_{ij}|^2 \right) = 1. \quad (6-6)$$

La deuxième vérification consiste à étudier l'invariance des coefficients de diffraction avec les positions des frontières du domaine éléments finis. Sur la Figure 6-5, nous appelons  $D$  la distance entre l'élément diffractant et la frontière du domaine.

Nous considérons trois maillages où les distances  $D$  valent 10 (I), 20 (II), 40 (III) mm.

Pour ces tests, nous avons choisi de conserver 25 modes pour la construction des opérateurs de couplage. Ce nombre est choisi arbitrairement mais suffisamment grand pour ne négliger aucun phénomène. Cependant, nous avons fait des simulations avec un nombre de modes très grand (60 modes) pour vérifier notre choix. Les erreurs relatives sur les coefficients de diffraction sont alors de l'ordre de 0.03%, ce qui nous paraît acceptable.

Donc le nombre de modes que nous avons retenu assure une bonne précision des conditions transparentes, mais il est cependant sûrement supérieur au nombre de mode minimal requis pour obtenir le même résultat.

La Figure 6-6 montre les coefficients de réflexion et de transmission ainsi que la conservation de l'énergie  $E$ , donnée par l'équation ( 6-6 ). Sur le graphique, nous représentons les différentes valeurs pour le mode q-S<sub>0</sub> incident mais des résultats équivalents ont été obtenus en considérant les différents modes incidents. La validation présentée a été réalisée à une fréquence de 100 kHz :

comme nous nous trouvons avant la première fréquence de coupure, trois modes peuvent se propager dans la plaque.

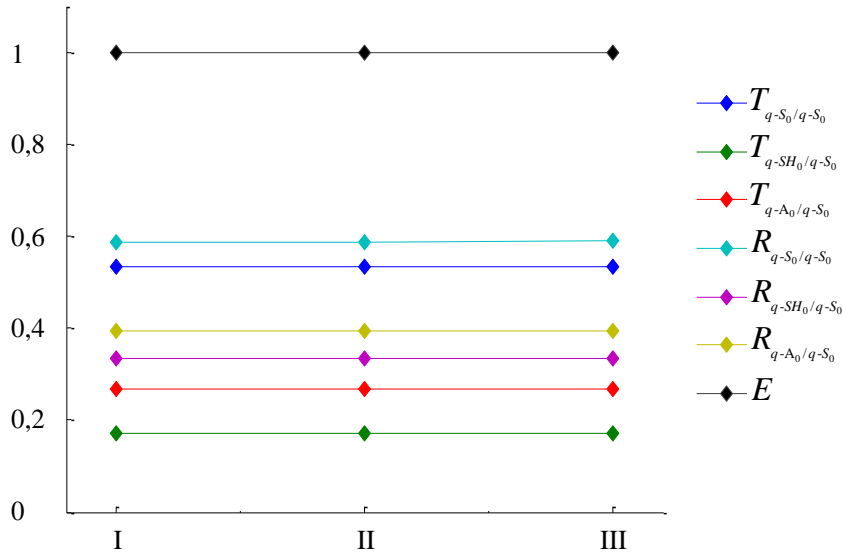


Figure 6-6: valeur des coefficients de diffraction en amplitude pour le mode S0 incident à 73,29°, le calcul étant fait à une fréquence de 100kHz.

Il est clairement visible que la position des frontières n'influe pas sur les valeurs des coefficients de diffraction, et que dans tous les cas, la conservation de l'énergie est respectée.

Des simulations ont également été réalisées pour différentes fréquences et incidences, la conservation de l'énergie et l'invariance des coefficients avec la position des frontières ont toujours été vérifiées.

## 6.3 Étude de la précision de la méthode hybride

Dans le paragraphe précédent, la méthode a été validée avec un nombre de modes important pour la construction des opérateurs  $\mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma}$ .

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la précision de la méthode numérique que nous avons développée : il convient d'étudier la dépendance de l'erreur vis-à-vis des deux paramètres de discrétisation que sont le pas du maillage  $h$  et le nombre  $N$  de modes utilisés pour la construction des opérateurs  $\mathbf{T}_{\mathbf{YX}}^{\gamma}$ . Nous allons discuter ici plus particulièrement la question de la convergence en fonction de  $N$ .

### 6.3.1 Influence de la troncature de la série sur le calcul numérique

Pour les différentes études menées, il est nécessaire de faire un compromis entre la distance du diffracteur aux frontières et le nombre de modes évanescents ou inhomogènes conservés pour la construction des opérateurs de couplage.

Nous savons que l'erreur introduite par la troncature de la série modale est proportionnelle à :

$$\varepsilon_N = e^{\text{Im}(k_{z,N+1})D}, \quad (6-7)$$

où,  $N$  représente le nombre de modes conservés pour la construction des opérateurs,  $D$ , la distance du diffracteur aux frontières et  $k_{z,N+1}$  la valeur de  $k_z$  correspondant au premier mode qui n'est pas pris en compte dans les calculs.

Dans un calcul où la frontière du domaine est proche du diffracteur, des modes évanescents peuvent avoir une contribution non négligeable sur les phénomènes. Il est donc nécessaire de les prendre en compte dans les opérateurs pour éviter une erreur  $\varepsilon_N$  importante.

Inversement, si la frontière transparente est placée à une grande distance du diffracteur, toutes les contributions des modes évanescents sont négligeables. La construction des opérateurs nécessite donc la prise en compte des seuls modes propagatifs. Cependant ce dernier cas nécessite une zone éléments finis plus grande ce qui conduit à une augmentation considérable des temps de calcul.

Signalons au préalable que cette question est peu sensible pour les applications traitées dans cette thèse. En effet, nous avons vu au chapitre 3 que les problématiques de contrôle imposaient de se placer à relativement basse fréquence, d'où un très faible nombre de modes propagatifs (3 pour les cas traités ici). Nous avons vérifié alors qu'il suffit de conserver quelques modes évanescents pour obtenir une très bonne précision, même si les frontières transparentes sont proches du défaut.

Nous illustrons ce phénomène sur la Figure 6-7 où les coefficients de transmission du mode  $q-S_0$  sont représentés pour le maillage présenté Figure 6-5. Les coefficients correspondent à une incidence du mode  $q-S_0$  à  $20^\circ$  pour une fréquence de 100 kHz. Nous comparons les résultats obtenus pour  $D = 2$  mm avec  $N = 3$  et  $N = 8$  modes conservés et  $D = 10$  mm avec  $N = 25$  modes.

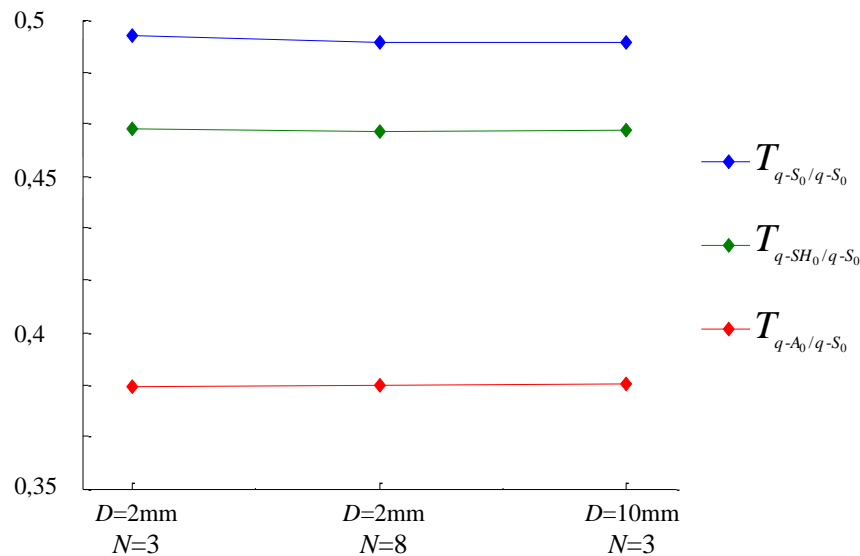


Figure 6-7: étude des coefficients de transmission du mode  $q-S_0$  à incidence de  $20^\circ$ , pour  $D$  et  $N$  qui varient.

Nous observons une légère erreur sur le coefficient de transmission  $T_{q-S_0/q-S_0}$  pour  $D = 2$  mm et  $N = 3$ . Pour plus de précision, nous représentons les coefficients  $T_{q-S_0/q-S_0}$  et  $T_{q-SH_0/q-S_0}$  avec une échelle plus fine en ordonnée.

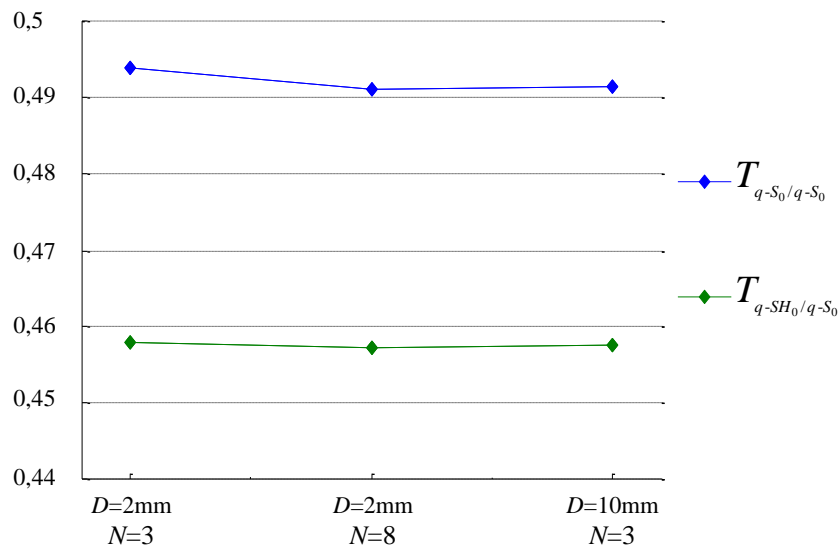


Figure 6-8: représentation des coefficients de transmission du mode  $q-S_0$  en mode  $q-S_0$  et  $q-SH_0$  à incidence de  $20^\circ$ , pour  $D$  et  $N$  qui varient.

Pour la distance  $D = 2$  mm, de très bon résultats sont obtenus avec 8 modes dans la série (3 modes propagatifs, 5 modes évanescents et inhomogènes).

Comme nous l'avons évoqué précédemment, ces graphiques montrent bien qu'il existe deux façons d'obtenir un résultat correct :  $D$  petit et  $N$  grand ou  $D$  grand et  $N$  petit.

### 6.3.2 Étude du conditionnement de la matrice de Gram

D'un point de vue théorique, et peut-être en vue d'autres applications (haute fréquence, petits défauts, très haute précision requise etc...), nous avons cherché des moyens d'évaluer l'impact de la troncature de la série modale sur la qualité de la solution calculée. Ceci nous a conduit à nous interroger sur la pertinence du choix qui a été fait de construire les matrices de Gram à l'aide de la relation de Fraser. En effet, dans des cas très défavorables, ce choix pourrait conduire à une matrice de Gram mal conditionnée, voire non inversible. Un mauvais conditionnement pourrait non seulement produire les effets usuels d'amplitude des erreurs d'arrondi, mais aussi amplifier l'erreur liée à la troncature modale. Ainsi, négliger un mode évanescent imperceptible sur les frontières artificielles pourrait détériorer la précision des amplitudes sur les modes d'intérêt. Pour quantifier de tels effets, nous avons calculé dans le cas isotrope le conditionnement de la matrice de Gram pour différentes valeurs de  $N$  et  $\gamma$ , ainsi que différents choix de produits scalaires.

Nous rappelons que le conditionnement d'une matrice mesure la dépendance de la solution d'un problème numérique par rapport à une perturbation des données. Dans un système linéaire de la forme " $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ", cela revient à étudier l'impact que produirait une perturbation de la matrice  $\mathbf{A}$  ou du second membre  $\mathbf{b}$  sur la solution  $\mathbf{x}$  du problème. Le conditionnement donne une borne maximale de l'erreur commise sur la solution  $\mathbf{x}$  lorsque les données  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  sont perturbées.

De façon générale, le conditionnement d'une matrice est une mesure de la difficulté à inverser cette matrice. Il est défini comme :

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2, \quad (6-8)$$

Une matrice possédant une valeur de conditionnement faible, proche de 1, est considérée comme bien conditionnée, alors qu'inversement une valeur de conditionnement élevée est associée à une matrice mal conditionnée.

Nous rappelons que dans notre cas, le système étudié ( 5-19 ) et ( 5-20 ) est le suivant :

$$\mathbf{Y}_\Sigma^p = \mathcal{O}^T \mathbf{A}, \quad (6-9)$$

avec,

$$\mathbf{Y}_\Sigma^p = \begin{pmatrix} \left( \mathbf{Y}_\Sigma^y | \mathcal{X}_1^y \right)_s \\ \dots \\ \left( \mathbf{Y}_\Sigma^y | \mathcal{X}_N^y \right)_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_N \end{pmatrix}. \quad (6-10)$$

$\mathbf{A}$  est l'inconnue du système et  $\mathbf{Y}_\Sigma^p$  correspond au second membre.

Rappelons que nous avons pu tronquer la série modale à un ordre donné  $N$  parce que les contributions des modes évanescents d'ordre supérieur à  $N$  sont exponentiellement petites sur les frontières artificielles, de sorte qu'elles ont été considérées négligeables (en fonction d'un niveau de précision requis). L'hypothèse sous-jacente est que l'erreur produite par cette troncature sur la solution du problème sera elle aussi négligeable. Or cette hypothèse pourrait ne plus être valide si la relation de produit scalaire, qui sert à construire les matrices de Gram, est mal choisie (conditionnement élevé).

En pratique, si la série modale est tronquée au rang  $N$ , nous aurons à inverser une matrice de Gram de taille  $N$ . Ceci est bien-sûr équivalent, pour les  $N$  premiers coefficients  $A_n$ , à inverser une plus grande matrice de Gram, de taille  $M > N$ , de sorte que :

$$\left( \mathbf{Y}_\Sigma^y | \mathcal{X}_n^y \right)_s = 0 \quad \text{pour } N+1 \leq n \leq M. \quad (6-11)$$

Autrement dit, une façon d'évaluer l'erreur produite par la troncature est d'étudier l'erreur faite sur l'inversion du grand système, de taille  $M$ , après avoir réalisé la substitution ( 6-11 ). C'est donc le calcul du conditionnement de la grande matrice de taille  $M$  qui nous permet de répondre à cette question. Ainsi, par définition du conditionnement, l'étude du système de taille  $M$ , en prenant en compte l'hypothèse ( 6-11 ), nous permet d'obtenir une majoration de l'erreur sur les coefficients  $A_n$  :

$$\varepsilon_{A_n} \leq \text{cond}(\mathcal{O}_M) \varepsilon_N, \quad (6-12)$$

où,  $\mathcal{O}_M$  représente la matrice de taille  $M$ .

Dans la suite, nous avons calculé le conditionnement de matrices de Gram de taille  $M = 40$ , alors que  $N$  a toujours été pris plus petit ou égal à 25 dans les tests réalisés dans le reste de la thèse.

Nous rappelons que nous avons choisi d'utiliser la matrice  $\mathcal{O}$ , car la relation de Fraser est la relation optimale pour un milieu isotrope en incidence normale. En effet, dans ce cas particulier, après normalisation adaptée, la matrice  $\mathcal{O}$  est la matrice identité.

Les différents produits scalaires étudiés et comparés en performance à la matrice de Gram  $\mathcal{O}$  sont définis ci-dessous :

$$\mathcal{U}_{nm} = \int_S (u_x^n u_x^m + u_y^n u_y^m + u_z^n u_z^m) dS, \quad (6-13)$$

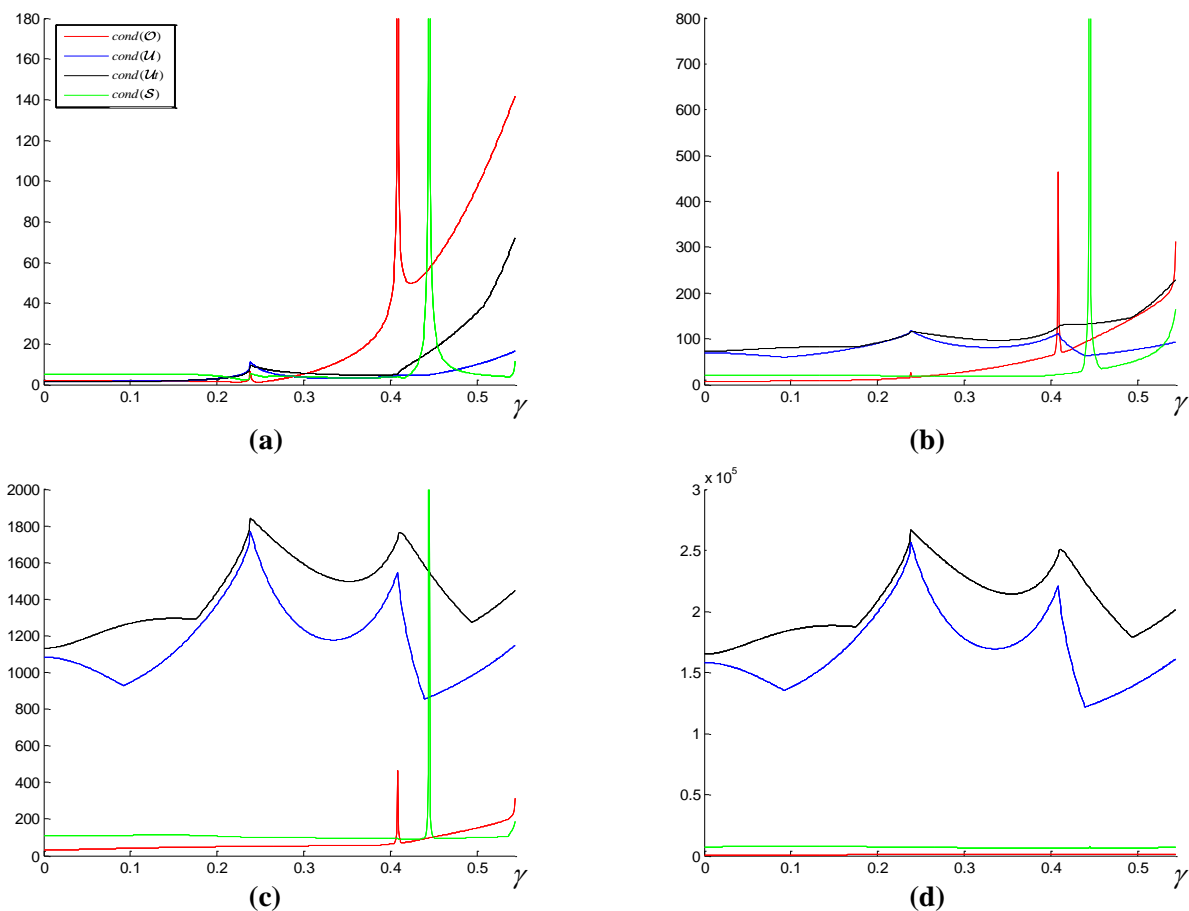
$$\mathcal{U}t_{nm} = \int_S (u_x^n \bar{u}_x^m + u_y^n \bar{u}_y^m + u_z^n \bar{u}_z^m) dS, \quad (6-14)$$

$$\mathcal{S}_{nm} = \int_S (\sigma_{xz}^n u_x^m + \sigma_{yz}^n u_y^m + \sigma_{zz}^n u_z^m) dS. \quad (6-15)$$

La matrice  $\mathbf{Ut}$  définit un produit scalaire hermitien. La matrice  $\mathbf{S}$  correspond à la définition du vecteur de Poynting (intégration du produit contraintes  $\times$  déplacements sur la section). Enfin, la matrice  $\mathbf{U}$  ne peut pas être associée à une signification physique particulière, il s'agit de l'intégration sur la section d'un produit déplacements  $\times$  déplacements.

Nous allons donc calculer le conditionnement des matrices associées aux différents produits scalaires, et les comparer pour différentes valeurs de  $N$  et de  $\gamma$ .

L'étude est menée dans un milieu isotrope, pour un produit fréquence  $\times$  épaisseur de la plaque égal à 1 kHz.m. Pour ce produit, il existe trois modes propagatifs dans la plaque. Les résultats sont présentés sur la Figure 6-9 pour  $N = \{3, 10, 20, 40\}$ , les conditionnements des matrices  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{Ut}$  et  $\mathbf{S}$  sont représentés respectivement en rouge, bleu, noir et blanc.



**Figure 6-9:** représentation du conditionnement des différents matrices de produit scalaire à 200 kHz avec (a)  $N=3$ , (b)  $N=10$ , (c)  $N=20$  et (d)  $N=40$ .

Sur les différents graphiques, nous observons des pics de valeur de conditionnements. Hormis pour le conditionnement de la matrice  $\mathbf{S}$ , les pics correspondent à des valeurs critiques de  $\gamma$  (définies dans le chapitre 4). Physiquement, une valeur  $\gamma_c$  correspond à un mode en incidence  $90^\circ$ , or nous avons vu que notre modèle ne prend pas en compte ce cas de figure qui n'a pas d'intérêt dans une problématique de SHM. Les mauvais conditionnements pour ces valeurs de  $\gamma$  ne devraient donc pas nous poser problème. Néanmoins, nous pourrions nous trouver dans un cas d'étude proche d'une valeur critique, il serait donc intéressant de faire une étude plus approfondie à proximité de ces valeurs de  $\gamma$ .



Nous attirons l'attention sur les échelles des ordonnées qui varient fortement suivant les simulations. Ces graphiques montrent que pour  $N = 3$  ou  $N = 10$ , les valeurs de conditionnement sont du même ordre de grandeur entre les différentes matrices, et sont relativement faibles. Dans le cas  $N = 20$ , nous observons une séparation entre les valeurs de conditionnement des matrices  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}t$  et celles des matrices  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{S}$ . Cette tendance est confirmée pour le cas  $N = 40$  où les valeurs de conditionnement de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}t$  deviennent importantes.

Nous rappelons que ce dernier cas n'est pas utilisé lors des simulations, mais son intérêt est de donner une idée de l'erreur maximale que nous pourrions obtenir. Dans un souci de clarté, nous représentons ci-dessous, Figure 6-10, les conditionnements de  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{S}$  pour  $N = 40$  de façon plus précise.

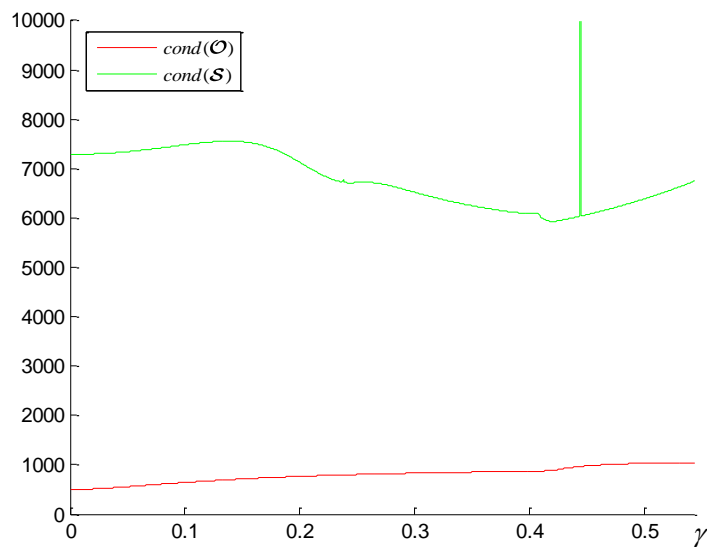


Figure 6-10: représentation du conditionnement des différentes matrices  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{S}$  à 200kHz avec  $N=40$ .

Nous observons que la valeur de conditionnement de la matrice  $\mathcal{O}$  reste relativement peu élevée, et que le conditionnement de  $\mathcal{S}$  est environ dix fois plus grand que celui de  $\mathcal{O}$ . La comparaison des différents courbes montre donc que notre choix (matrice de Gram construite avec la relation de Fraser) est pertinent.

Des résultats sont maintenant présentés pour un produit fréquence x épaisseur de la plaque égal à 4 kHz.m. Pour ce produit, huit modes sont propagatifs.

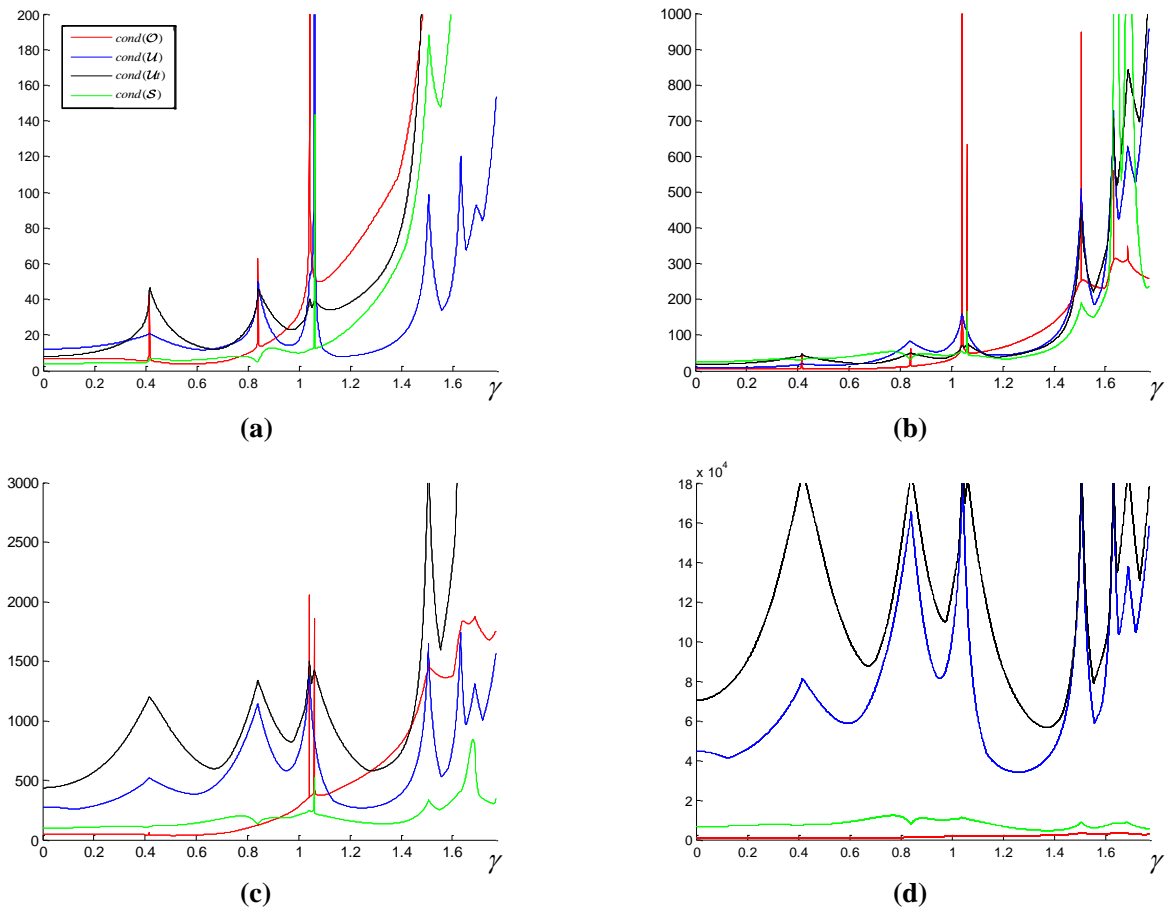


Figure 6-11: représentation du conditionnement des différents matrices de produit scalaire à 800kHz avec (a)  $N=8$ , (b)  $N=10$ , (c)  $N=20$  et (d)  $N=40$ .

Nous observons des variations des valeurs de conditionnement équivalentes à celles présentées pour un produit de 1 kHz.m. Pour  $N = 40$ , la séparation entre les conditionnements des matrices  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}t$  et ceux des matrices  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{S}$  reste clairement visible.

Nous remarquons cependant que les courbes ont une tendance à subir de fortes variations en fonction de la valeur de  $\gamma$ .

Une étude similaire devra être réalisée pour les milieux anisotropes considérés dans notre travail pour pouvoir confirmer cette tendance.

## **6.4 Résumé du Chapitre**

Dans ce chapitre, la méthode développée a été testée sur deux cas de validations : le premier cas est l'étude de la diffraction par une zone identique à la plaque ; le second cas est celui d'une plaque multicouche raidie. Dans le premier cas, nous avons vu que la propagation dans la zone éléments finis n'est pas perturbée : les frontières entre les domaines de calcul SAFE et de calcul éléments finis ne créent pas de réflexions artificielles. Le deuxième cas d'étude, nous a permis de vérifier la conservation de l'énergie lors du calcul éléments finis ainsi que l'indépendance des coefficients de diffraction avec la position des frontières. Ces tests ont été réalisés en prenant un nombre de modes important dans la construction de l'opérateur aux frontières.

Après ces tests de validation, nous nous sommes intéressés à l'étude de la précision de la méthode, et notamment l'influence du nombre de modes  $N$ . Dans notre cas, il n'est pas nécessaire de prendre en compte beaucoup de modes, mais une étude plus approfondie devrait être menée pour des problématiques de contrôle à hautes fréquences ou pour des détections de défauts de petites dimensions. Cette étude nous a également amené à nous interroger sur le choix du produit scalaire intervenant dans la définition de la matrice de Gram. Une étude du conditionnement des matrices obtenues avec différentes définitions du produit scalaire a été menée ; elle confirme la validité de notre choix.





## Chapitre 7. ÉTUDES MENEES SUR DES CAS REALISTES

7.1	Présentation des résultats du Benchmark proposé par P.D. Wilcox à la conférence Review of Progress in QNDE 2011.....	135
7.1.1	Description de la plaque raidie.....	135
7.1.2	Comparaison des coefficients de diffraction pour le mode $S_0$ .....	136
7.1.3	Comparaison des réponses temporelles .....	140
7.2	Étude d'une structure raidie multicouche EADS .....	142
7.2.1	Présentation de la plaque raidie .....	142
7.2.2	Propagation guidée dans la plaque simple – méthode SAFE.....	143
7.2.3	Étude de la diffraction – méthode Hybride SAFE/FE .....	144
7.3	Résumé du Chapitre .....	153

*Dans ce chapitre, les différents développements réalisés des chapitres précédents sont appliqués à des problèmes réalistes de contrôle.*

*La première étude a été menée dans le cadre d'une session Benchmark de la conférence Review of Quantitative Nondestructive Evaluation qui a eu lieu en juillet 2011. Le sujet a été proposé par P.D. Wilcox, de l'université de Bristol (U.K.). La problématique est de modéliser la transmission du mode  $S_0$  par une plaque raidie en aluminium sous différentes incidences, et de comparer les résultats obtenus aux signaux expérimentaux fournis par Wilcox. Nous verrons que les résultats obtenus avec la méthode hybride développée pour la diffraction en incidence oblique sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux.*

*Dans une deuxième partie, l'étude menée porte sur la diffraction des ondes guidées dans une plaque raidie composite multicouche. La description de la plaque étudiée a été fournie par EADS, leur souhait est de pouvoir comprendre les différents phénomènes guidés, mais surtout de pouvoir en tirer des outils d'optimisation pour les problématiques de contrôle. La méthode SAFE est utilisée pour modéliser la propagation dans la plaque saine où les traducteurs sont positionnés. Ensuite la diffraction est traitée comme un phénomène local par la méthode hybride SAFE/EF, qui nous permet d'obtenir les coefficients de diffraction des différents modes. Un exemple d'utilisation pour l'optimisation de contrôle santé intégré est finalement présenté.*



## 7.1 Présentation des résultats du Benchmark proposé par P.D. Wilcox à la conférence Review of Progress in QNDE 2011

Dans le cadre de la conférence Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (Burlington Juillet 2011), Wilcox a proposé un benchmark ayant comme problématique la transmission du mode guidé  $S_0$  arrivant en incidence oblique sur un raidisseur.

Des mesures expérimentales ont été réalisées par Wilcox et son équipe à l'université de Bristol ; ils ont utilisé des traducteurs EMAT pour l'émission et la réception des ondes. L'intérêt du benchmark est de pouvoir comparer les différentes méthodes développées avec l'expérimentation.

Comme nous l'avons évoqué dans le Chapitre 5, Wilcox *et al.* [62] utilisent une méthode éléments finis associée à des couches absorbantes pour modéliser les phénomènes de diffraction. Dans cet article, ils présentent la méthode en question et plus précisément les coefficients de transmission du mode  $S_0$  pour différentes fréquences et incidences. Nous allons ainsi pouvoir comparer directement les coefficients de transmission obtenus par la méthode hybride développée possédant des conditions transparentes exactes aux frontières.

Cette étude a été réalisée en collaboration avec Damien Ségur, qui a ré-implémenté le modèle développé par Wilcox *et al.* [63] pour la prise en compte d'un traducteur EMAT. Les formulations modales globales développées par Jezzine [3] sont ensuite utilisées pour calculer l'amplitude du signal reçu par le traducteur. Ainsi par transformées de Fourier inverses adaptées, des représentations temporelles du signal (amplitude en fonction du temps) sont obtenues que l'on appelle classiquement A-scan. Nous avons également calculé les amplitudes du signal par convolution du signal de référence et des coefficients de transmission ; nous pouvons ainsi comparer les résultats en évitant de rajouter des incertitudes liées au modèle d'EMAT.

Le cadre général de cette thèse étant la diffraction des ondes guidées, nous présenterons seulement les résultats obtenus par convolution du signal de référence. Pour plus de détails sur le modèle EMAT développé et les résultats obtenus dans ce cas, nous citerons la publication de Ségur *et al.*[80].

### 7.1.1 Description de la plaque raidie

La géométrie globale de la plaque raidie est présentée Figure 7-1. La plaque possède une largeur de 1 m et une longueur de 1,25 m. Le raidisseur est collé à la structure parallèlement à la largeur de la plaque, et est positionné à 0,5 m d'un des bords. Les ondes sont émises et reçues par deux traducteurs EMAT en spirales espacés de 300 mm. Les caractéristiques des traducteurs EMAT sont données précisément dans Wilcox *et al.* [63] ou encore dans Ségur *et al.*[80].

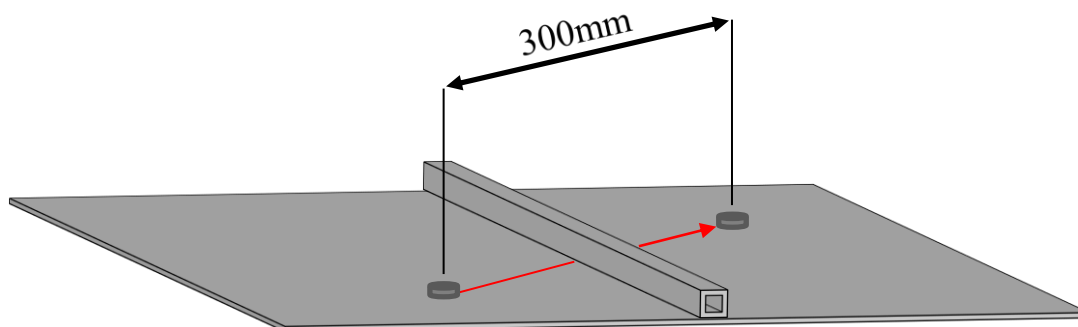


Figure 7-1 : géométrie du problème proposée lors du Benchmark onde guidée par Wilcox.

La plaque et le raidisseur sont des milieux isotropes (aluminium). Le raidisseur étant collé sur la plaque, cette étude prend également en compte cette couche de colle. Les densités, modules de Young et coefficients de Poisson pour l'aluminium et pour la colle sont donnés ci-dessous :



	aluminium	colle
Densité ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	2700	1200
Module de Young (GPa)	70	2.64
Coefficient de Poisson (GPa)	1/3	1/3

Tableau 7-1 : constantes élastiques de l'aluminium et de la colle pour la plaque raidie.

Les dimensions du raidisseur dans la section sont présentées Figure 7-2.

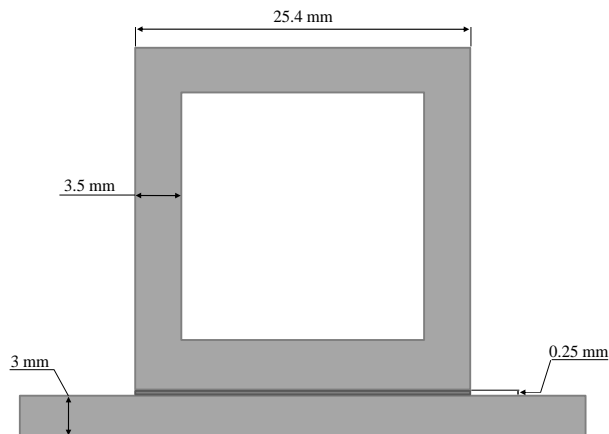


Figure 7-2: dimensions caractéristiques de la plaque et du raidisseur dans la section.

### 7.1.2 Comparaison des coefficients de diffraction pour le mode $S_0$

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au calcul des coefficients de transmission du mode  $S_0$ , ainsi qu'à leur comparaison avec les résultats de Wilcox *et al.* [62]. Le modèle développé a été adapté à la prise en compte de la colle.

La section du raidisseur est reproduite à l'aide du mailleur 3D GMSH, développé par Christophe Geuzaine et Jean-François Remacle [81]. Le maillage utilisé est présentée Figure 7-3.

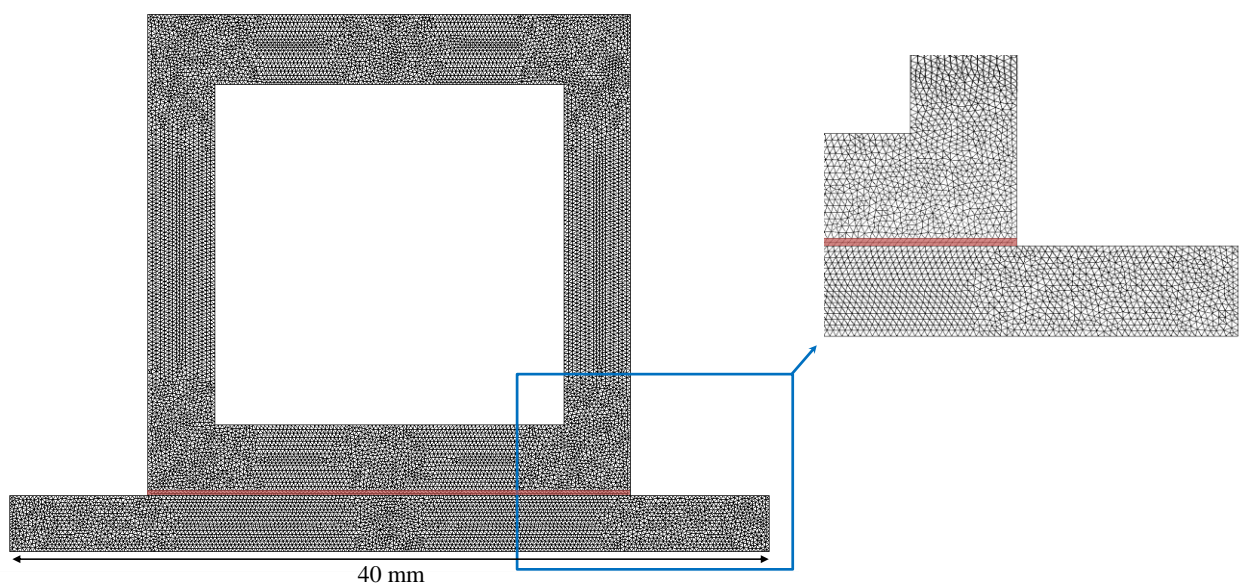
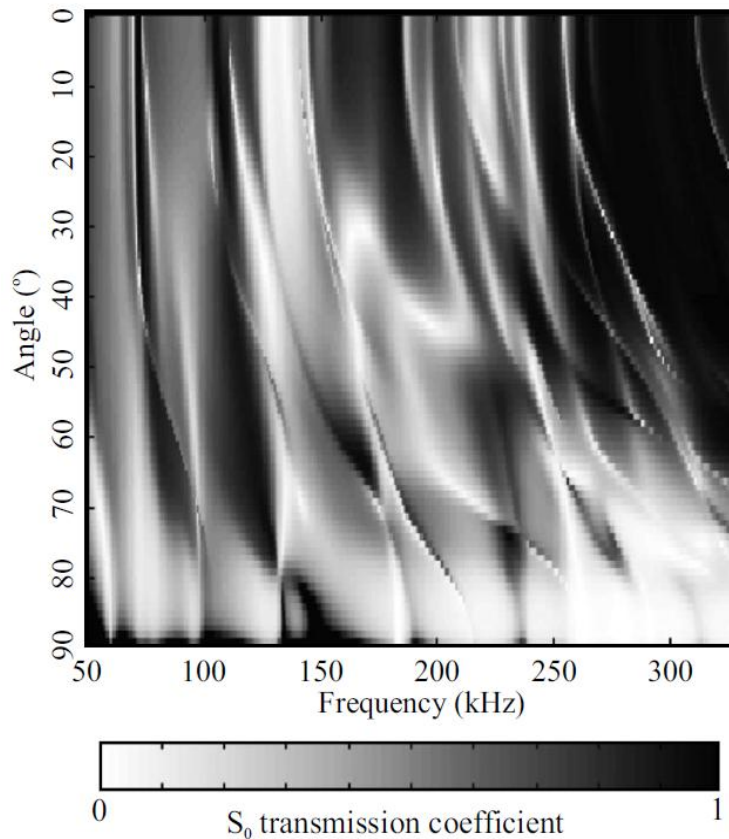


Figure 7-3: discrétisation utilisée pour la section de la plaque raidie isotrope.

La couche de colle est représentée en rouge sur le maillage, discrétisée avec deux éléments dans son épaisseur. Le nombre de degré de liberté du maillage global est d'environ 143 000.

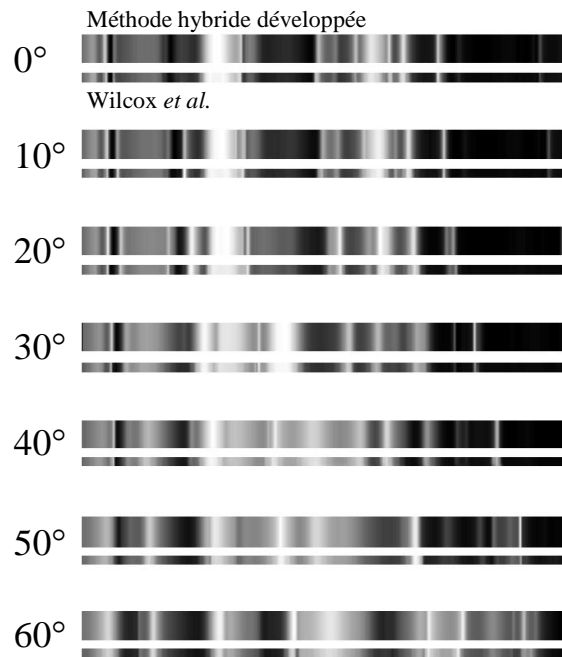
Dans leur étude de la diffraction du mode  $S_0$ , Wilcox *et al.* [62] présentent une cartographie du coefficient de transmission du mode  $S_0$  en fonction de la fréquence et de l'angle d'incidence ( $\beta$ ). Les simulations ont été menées de 50 kHz à 330 kHz avec un pas de 1 kHz, et pour une incidence allant de  $1^\circ$  à  $90^\circ$  par pas de  $1^\circ$ . Cela correspond à 25 390 combinaisons d'angle et de fréquence.



**Figure 7-4:** cartographie du coefficient de transmission du mode  $S_0$  en fonction de la fréquence et de l'angle d'incidence tiré de Wilcox *et al.* [62].

Par manque de temps, nous n'avons pas reproduit toute la cartographie. Les simulations ont été réalisées pour  $\beta=\{0^\circ ; 10^\circ ; 20^\circ ; 30^\circ ; 40^\circ ; 50^\circ ; 60^\circ\}$  pour lesquelles des résultats expérimentaux ont été présentés à l'occasion du benchmark.

Sur la Figure 7-5, nous comparons les valeurs des coefficients de transmission du mode  $S_0$  obtenues avec celles obtenues par Wilcox *et al.*. Nous conservons la même échelle de niveaux de gris pour les coefficients de transmission que celle utilisée Figure 7-4.



**Figure 7-5 : comparaison des coefficients de transmission du mode  $S_0$  pour six incidences différentes.**

La comparaison des deux méthodes montre un excellent accord entre les résultats. Une étude quantitative n'a pas pu être réalisée, les coefficients de transmission obtenus par Wilcox *et al.* ne faisant pas partie des données du benchmark.

Il est important de mettre en avant la complexité des phénomènes guidés et leur dépendance avec la fréquence et l'incidence. En effet, les deux figures précédentes montrent bien les fortes variations du coefficient de transmission pour de faibles variations des deux paramètres (fréquence et incidence).

Nous représentons les parties réelles des différentes composantes du champ de déplacement du mode  $S_0$  à une fréquence de 200 kHz pour les incidences  $\beta = 20^\circ$  et  $\beta = 40^\circ$ . L'étude détaillée, au cas par cas, de la propagation complexe des ondes élastiques dans le raidisseur rendue possible par de telles images du champ peut permettre de mieux appréhender les raisons physiques des variations complexes des coefficients de diffraction.

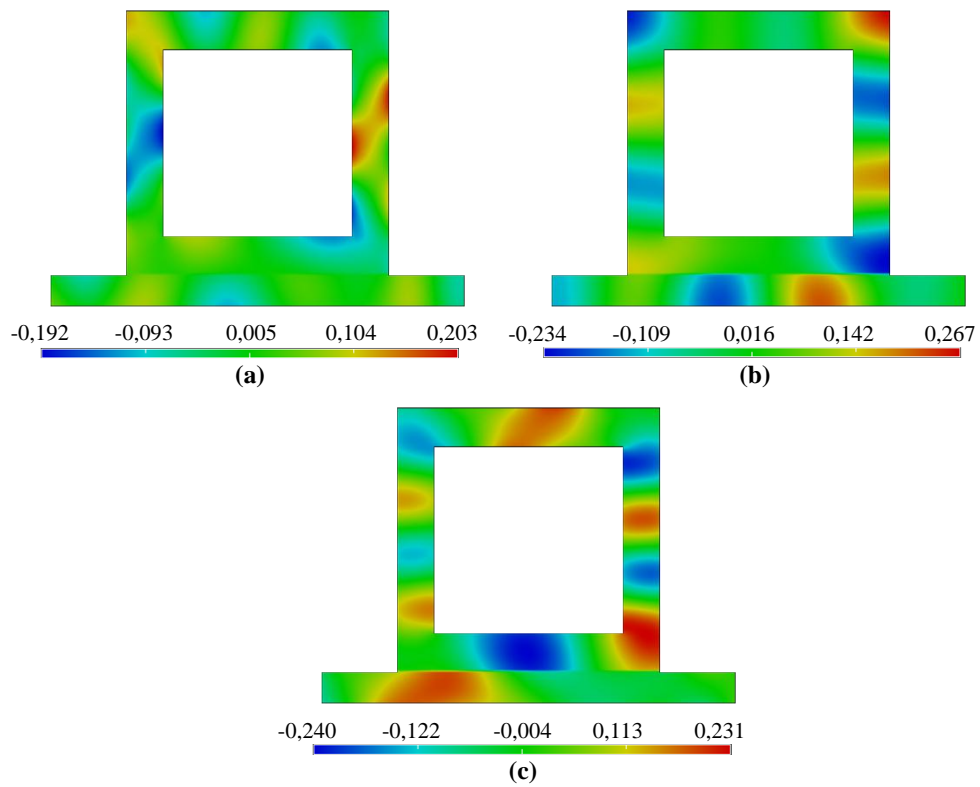


Figure 7-6 : représentation des parties réelles des composantes du champ de déplacement pour le mode  $S_0$  incident à  $\beta = 20^\circ$ , à la fréquence de 200 kHz, (a)  $u_x$ , (b)  $u_y$  et (c)  $u_z$ .

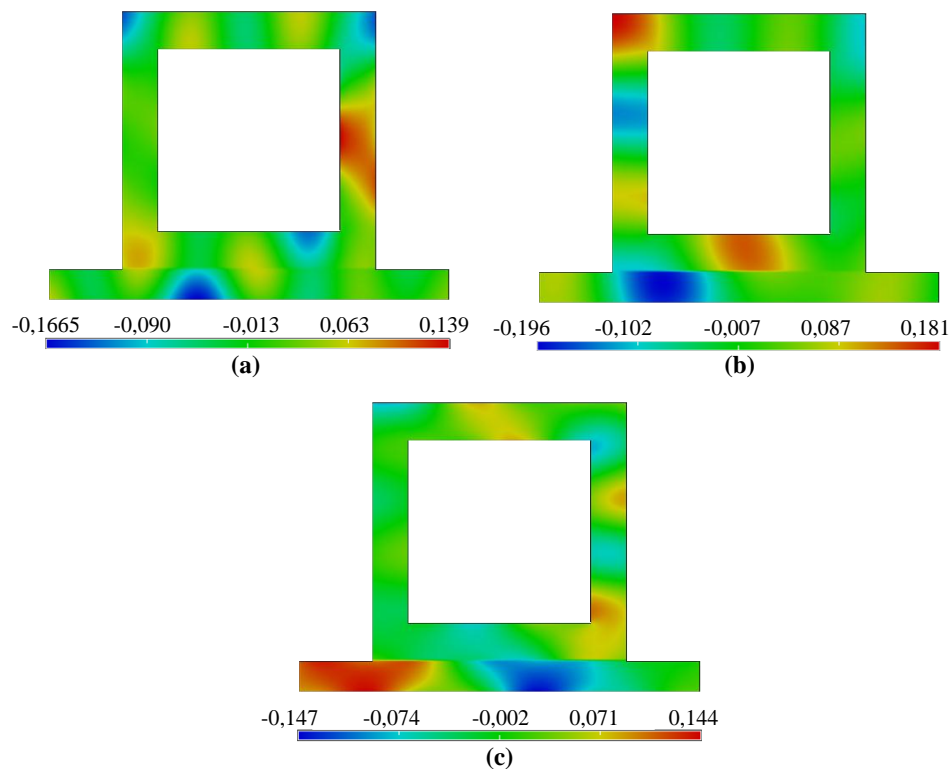


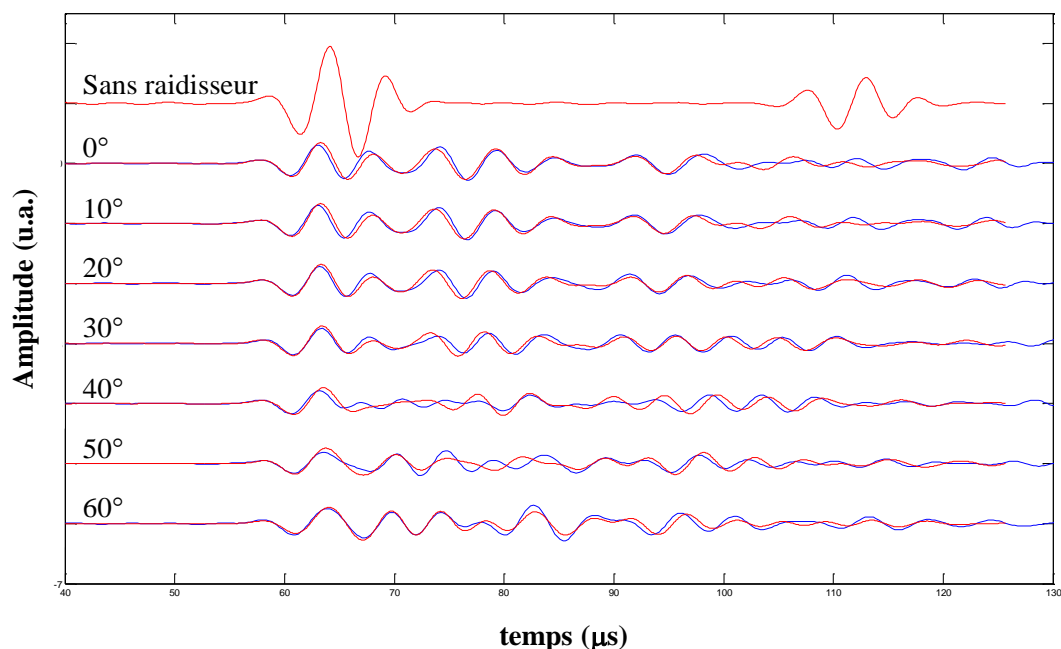
Figure 7-7 : représentation des parties réelles des composantes du champ de déplacement pour le mode  $S_0$  incident à  $\beta = 40^\circ$ , à la fréquence de 200 kHz, (a)  $u_x$ , (b)  $u_y$  et (c)  $u_z$ .

### 7.1.3 Comparaison des réponses temporelles

Le but de ce benchmark est de confronter les résultats temporels obtenus aux résultats expérimentaux. Le signal de référence correspond à une sinusoïde de fréquence centrale 200 kHz fenêtrée par une fenêtre de Hanning pour former trois cycles.

Comme nous l'avons précisé, nous présenterons uniquement les résultats obtenus par multiplication des coefficients de transmissions, provenant du modèle hybride, avec la transformée de Fourier du signal de référence. Ainsi par transformée de Fourier inverse, nous obtenons les représentations temporelles du signal reçu par le traducteur pour une incidence donnée. Cette modélisation est possible car les conversions de modes ont été négligées. De fait, seul le mode  $S_0$  est à prendre en compte, car les traducteurs EMAT rayonnent (par réciprocité, sont sensibles) presque exclusivement ce mode.

Les signaux, représentés Figure 7-8, sont normalisés par l'amplitude maximale du signal de référence. Les résultats expérimentaux et simulés sont représentés respectivement en rouge et en bleu.



**Figure 7-8 : comparaisons des courbes expérimentales (en rouge) et des courbes théoriques (en bleu) obtenues en prenant la transformée de Fourier inverse du produit des coefficients avec le spectre du signal de référence.**

Dans un premier temps, nous attirons l'attention sur le signal expérimental dans la plaque sans raidisseur. Le signal du mode  $S_0$  apparaît clairement à partir  $t = 40 \mu\text{s}$ . Un deuxième signal apparaît aux alentours de  $t = 105 \mu\text{s}$ ; ce signal correspond à la réflexion du mode  $S_0$  sur un bord libre de la plaque. Les comparaisons entre simulation et expérimentation seront donc valables pour un temps inférieur à  $105 \mu\text{s}$ , car les simulations ne prennent pas en compte la réflexion des modes sur les bords.

Les comparaisons sont en excellent accord excepté pour les incidences à  $40^\circ$  et  $50^\circ$ . Cependant, nous remarquons sur la Figure 7-4 que, autour de ces valeurs angulaires, les variations du coefficient de transmission du mode  $S_0$  sont importantes pour une fréquence de 200 kHz. Les différences entre les signaux pourraient donc provenir d'une limite de l'hypothèse d'onde plane; les traducteurs EMAT ne génèrent pas une composante unique d'onde plane mais un certain spectre angulaire autour d'une direction donnée de propagation. Si le coefficient de transmission varie

beaucoup autour de la direction considérée, la prise en compte des composantes du spectre angulaire pourrait sans doute améliorer les prédictions.

Il serait donc intéressant de compléter cette étude par une prise en compte de la variation angulaire du coefficient de transmission à l'aide de transformé de Fourier inverse en espace.

Ce benchmark nous a permis de valider notre méthode par des comparaisons avec des résultats expérimentaux et avec une méthode hybride (couches absorbantes/ éléments finis) développée par Wilcox *et al.*[62]. Cependant, le cas étudié étant celui d'une plaque isotrope, ce benchmark ne nous a pas permis de valider notre formulation dans le cas plus complexe des plaques multicouches anisotropes. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter une étude numérique de la propagation d'ondes guidées dans une structure raidie composite multicouches.

## 7.2 Étude d'une structure raidie multicouche EADS

Dans ce paragraphe, la diffraction des ondes guidées est présentée pour une structure composite aéronautique. Les différentes caractéristiques géométriques et élastiques de la plaque et du raidisseur ont été fournies par EADS. La structure réaliste possède un raidisseur avec un profil en oméga.

Dans un premier temps, la géométrie spécifique de la plaque est présentée de façon détaillée, puis une étude est menée pour comprendre la propagation dans la plaque sans raidisseur. Enfin, nous présentons les résultats numériques obtenus pour l'étude de la diffraction des ondes guidées. Cela nous fournit des informations intéressantes pour l'optimisation d'une méthode de contrôle de cette structure.

### 7.2.1 Présentation de la plaque raidie

Dans cette étude, les structures sont faites à partir de plis unidirectionnels, de fibres de carbone dans une matrice en époxy, d'épaisseur  $133.3 \mu\text{m}$ . Les constantes d'élasticité ainsi que la densité des plis sont données dans le tableau suivant :

$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$	$\rho$
11.357	5.214	4.971	11.357	4.971	131.793	4.969	4.969	3.313	1590

Tableau 7-2 : propriétés élastiques d'un pli de composite (coefficient d'élasticité en GPa,  $\rho$  en  $\text{kg.m}^{-3}$ )

La géométrie de la structure a été présentée dans le chapitre 6, nous la rappelons ci-dessous :

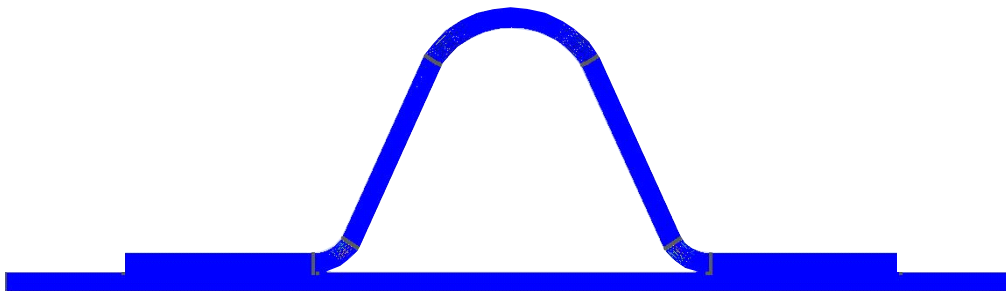


Figure 7-9 : géométrie de la plaque raidie dans la section.

Dans cet exemple, la plaque et le raidisseur ne possèdent pas les mêmes séquences d'empilement, ni les mêmes épaisseurs. Nous appelons respectivement,  $S_p$  et  $S_r$ , les séquences d'empilement de la plaque et du raidisseur :

$$S_p = [90^\circ / -45^\circ / 45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 0^\circ / -45^\circ / 45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 90^\circ], \quad (7-1)$$

$$S_r = [90^\circ / -45^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 45^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 45^\circ / 0^\circ / 0^\circ / -45^\circ / 90^\circ]. \quad (7-2)$$

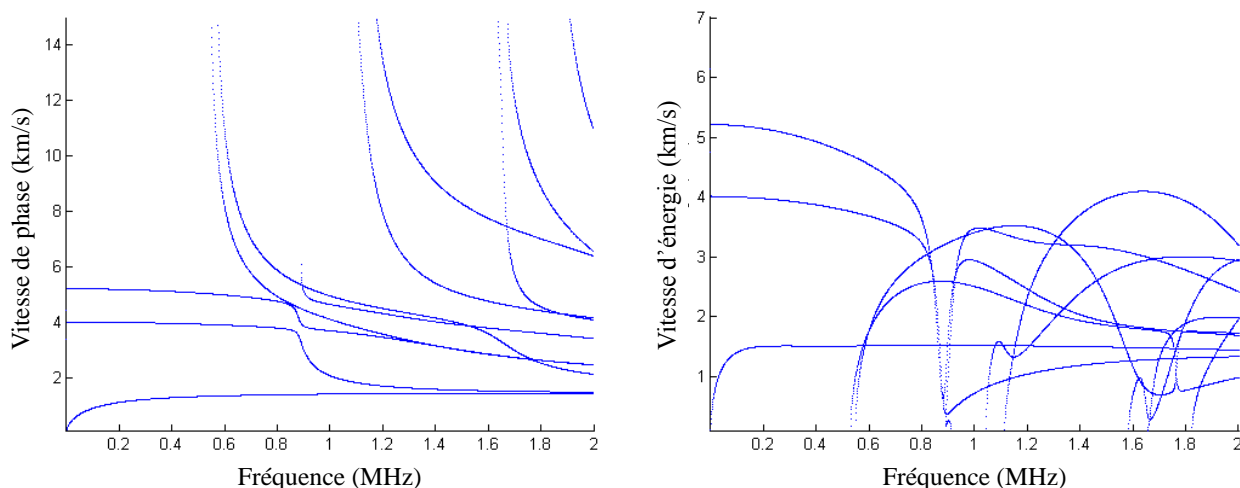
Ainsi la plaque, d'épaisseur 1.47 mm, est composée de onze plis et le raidisseur (d'épaisseur 1.6 mm) possède 12 plis.

Le maillage a été réalisé avec le logiciel libre GMSH, les éléments surfaciques sont des triangles. Nous utilisons la discrétisation minimale requise, c'est-à-dire un élément par pli de composite.

### 7.2.2 Propagation guidée dans la plaque simple – méthode SAFE

Nous allons tout d'abord nous intéresser au comportement des ondes guidées dans la plaque composite en l'absence de raidisseur pour déterminer quels sont les modes et quelle est la plage de fréquences les plus adaptés au contrôle.

Les courbes de dispersion en vitesse de phase et vitesse d'énergie sont représentées Figure 7-10 pour une propagation dans la direction  $\beta = 0^\circ$ .



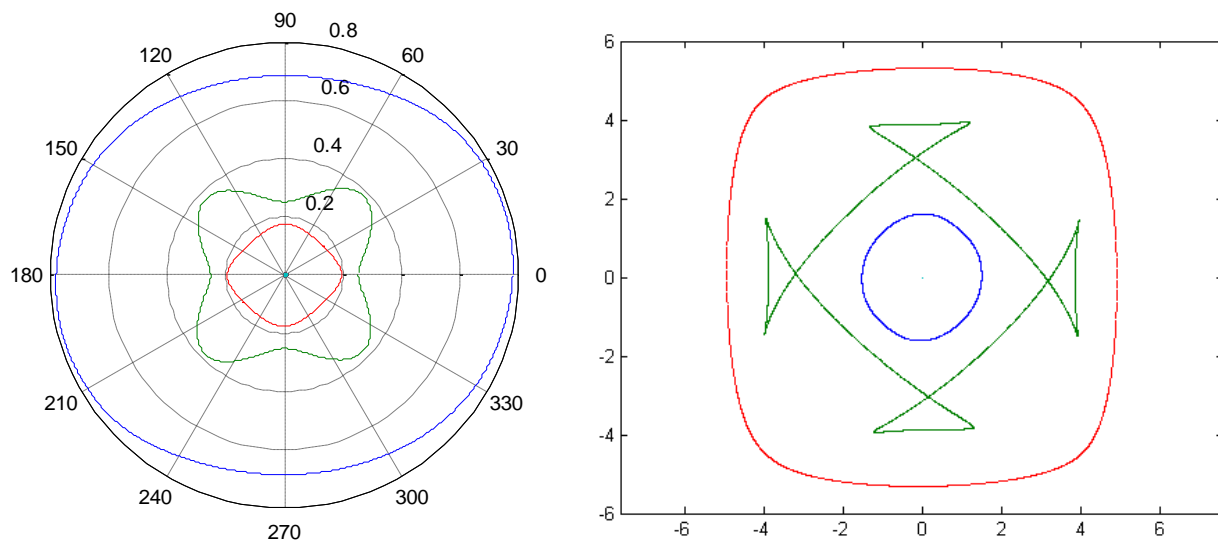
**Figure 7-10: courbes de dispersion dans la direction  $\beta=0^\circ$ , à droite en vitesse de phase, à gauche en vitesse d'énergie.**

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la plage de fréquences en dessous de la première fréquence de coupure est la mieux adaptée à un contrôle. Cette hypothèse est vérifiée sur les courbes de dispersion ; en effet sur la plage fréquentielle considérée, seuls trois modes sont propagatifs et ces modes sont peu dispersifs. Pour la caractérisation de défauts, il serait cependant intéressant de choisir une des fréquences les plus élevées de cette plage; une longueur d'onde plus petite permettant une meilleure résolution spatiale des phénomènes de diffraction.

Les courbes de dispersion nous permettent également de déterminer la première fréquence de coupure pour une incidence  $\beta = 0^\circ$  ; sa valeur est légèrement supérieure à 500 kHz.

Pour nous assurer que l'étude ne sera pas menée à proximité d'une fréquence de coupure et cela dans toutes les directions, nous avons choisi de travailler à une fréquence de 400 kHz. Pour vérifier notre choix et aussi pour comprendre la propagation guidée dans toutes les directions possibles de propagation dans ce composite, nous représentons, sur la Figure 7-1, les surfaces de lenteurs et les fronts d'ondes (courbes de vitesse d'énergie dans le plan) à 400 kHz.





**Figure 7-11: surfaces de lenteur (en  $s.km^{-1}$ ) (à gauche) et fronts d'onde (en  $km.s^{-1}$ ) (à droite) dans la plaque composite sans raidisseur à 400kHz.**

Les modes  $q-S_0$ ,  $q-SH_0$  et  $q-A_0$  sont tracés respectivement en rouge, vert et bleu. Nous observons que le mode  $q-A_0$  a un comportement quasi-isotrope dans le plan ; le mode  $q-S_0$  présente un profil de propagation de forme carrée mais qui ne semble pas poser de problème pour une détection expérimentale. Inversement, le mode  $q-SH_0$  montre un fort caractère anisotrope. Sa surface de lenteur contient des concavités ce qui provoque des rebroussements sur les fronts d'onde. Ce phénomène avait été présenté pour une plaque composite différente dans le Chapitre 1.

Pour le contrôle de structure, ces phénomènes complexes sur le mode  $q-SH_0$  ne nous posent pas de problèmes. En effet, les traducteurs classiquement utilisés par EADS pour des applications de SHM ne génèrent pas de mode à polarisation transverse horizontale et n'y sont également pas sensibles. C'est pour cela que dans la suite de l'étude, nous ne nous intéresserons qu'à la diffraction d'un mode  $q-S_0$  et  $q-A_0$  incident.

### 7.2.3 Étude de la diffraction – méthode Hybride SAFE/FE

Afin de modéliser la diffraction dans une structure composite de cette géométrie, il a été nécessaire de faire des développements supplémentaires dans le code Mélina. La difficulté principale provient du fait que les plis du composite formant le raidisseur suivent sa géométrie (en oméga). Il est donc nécessaire de connaître précisément l'orientation de chaque pli pour adapter les rotations des coefficients d'élasticité. Or la notion de repère local ne peut pas être utilisée ; il a donc été nécessaire de contourner cette difficulté. Une approche multi-domaines aurait permis d'avoir des conditions de continuité parfaites entre chaque pli, mais cette structure aurait imposé de définir 95 domaines et entraîné des problèmes de capacité de mémoire ; nos tentatives en la matière n'ont donc pas pu aboutir. Nous avons donc mis en place un critère géométrique lié aux plis pour effectuer les rotations nécessaires des constantes d'élasticité (double rotation nécessaire dans ce cas). Cependant cette approche ne permet pas de mettre en place des conditions parfaites. Nous rediscuterons de l'erreur qu'a pu créer cette approximation dans la suite de l'étude.

- **Étude angulaire de la diffraction**

Les différentes études de la diffraction ont été menées pour deux fréquences en dessous de la première fréquence de coupure,  $f_1 = 100$  kHz et  $f_2 = 400$  kHz, et pour les modes  $q-S_0$  ou  $q-A_0$  incidents.

Nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus lorsque le mode q-S<sub>0</sub> est incident. Ce mode possède la plus petite valeur de lenteur, comme le montre la Figure 7-11 ; cela implique que pour toutes incidences, le mode incident peut être diffracté en mode q-S<sub>0</sub>, q-SH<sub>0</sub> et q-A<sub>0</sub>. Les comportements des coefficients de diffraction sont présentés en fonction de l'incidence sur les Figure 7-12 et Figure 7-13. Les calculs sont réalisés pour des angles β de 0° à 85° par pas de 5°.

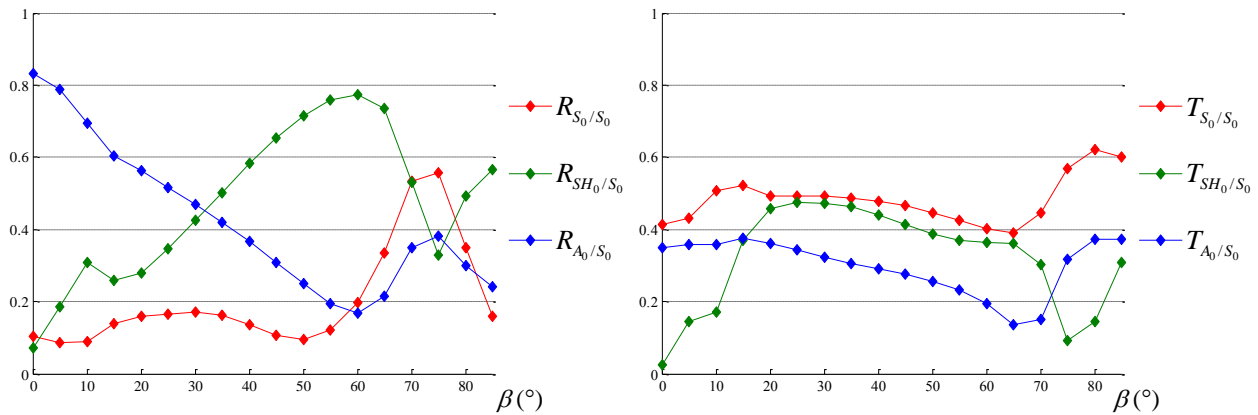


Figure 7-12 : variations des coefficients de réflexion (à gauche) et de transmission (à droite) en fonction de l'angle d'incidence à la fréquence f<sub>1</sub> pour le mode q-S<sub>0</sub> incident.

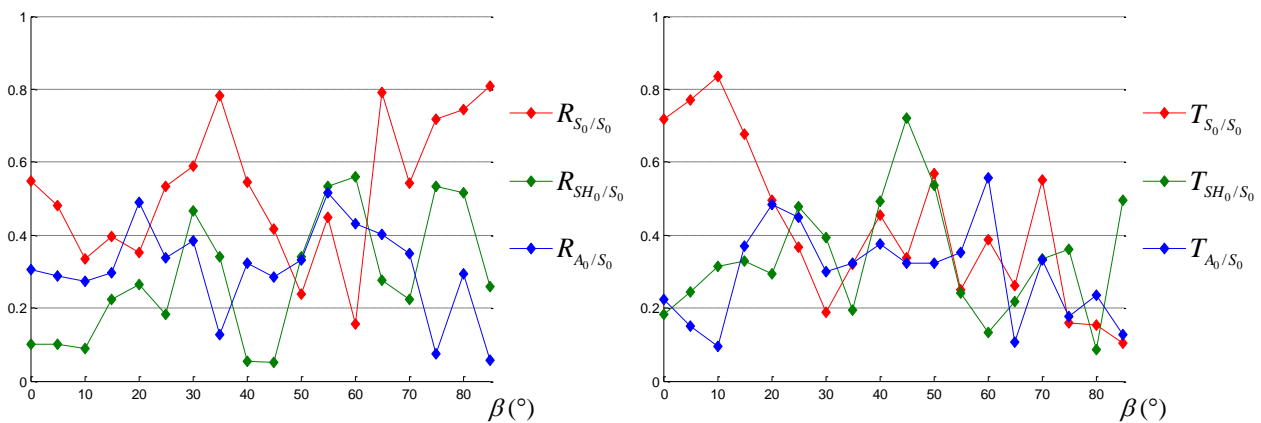


Figure 7-13 : variations des coefficients de réflexion (à gauche) et de transmission (à droite) en fonction de l'angle d'incidence à la fréquence f<sub>2</sub> pour le mode q-S<sub>0</sub> incident.

Il est clairement visible que les variations des coefficients de diffraction avec l'angle d'incidence augmentent fortement avant la fréquence. À 100 kHz, nous remarquons que le mode q-S<sub>0</sub> possède le plus grand coefficient de transmission pour toutes les incidences. Inversement à 400 kHz, les coefficients de transmission subissent de telles variations qu'il sera difficile de déterminer le mode optimal pour une utilisation expérimentale.

Les figures Figure 7-14 et Figure 7-15 montrent les résultats équivalents quand le mode q-A<sub>0</sub> est incident.

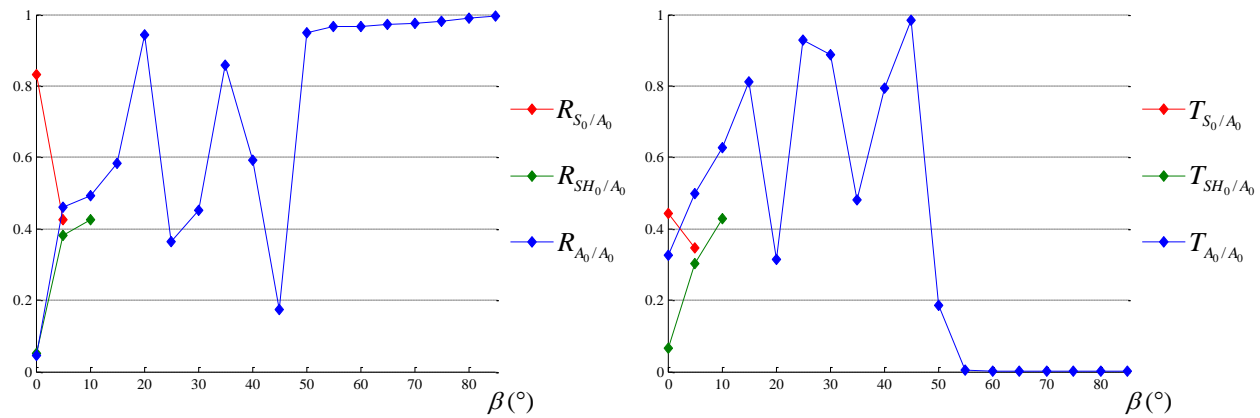


Figure 7-14 : variations des coefficients de réflexion (à gauche) et transmission (à droite) en fonction de l'angle d'incidence à la fréquence  $f_1$  pour le mode q-A<sub>0</sub> incident.

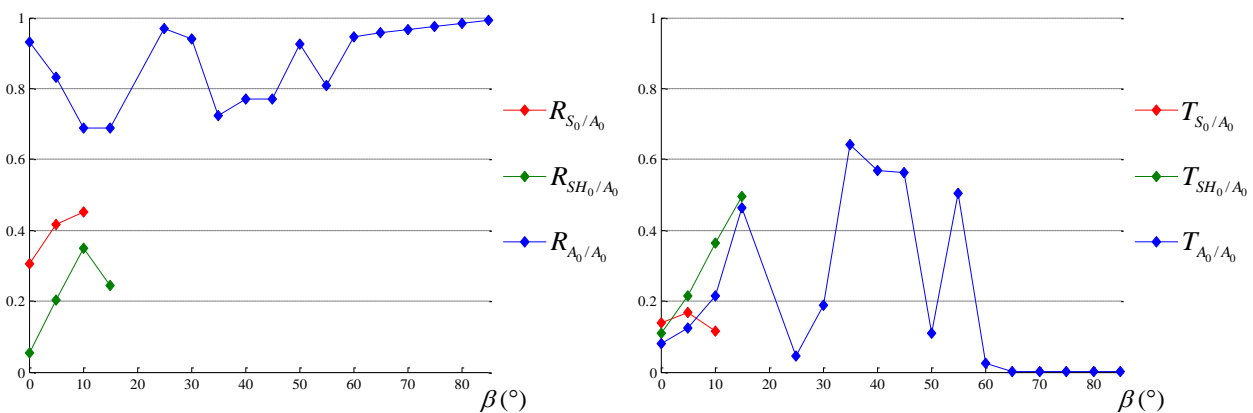


Figure 7-15 : variations des coefficients de réflexion (à gauche) et transmission (à droite) en fonction de l'angle d'incidence à la fréquence  $f_2$  pour le mode q-A<sub>0</sub> incident.

Le mode q-A<sub>0</sub> étant le plus lent, Figure 7-11, nous observons, sur les Figure 7-14 et Figure 7-15, les deux angles critiques liés aux modes q-S<sub>0</sub> et q-SH<sub>0</sub>.

Il est intéressant de remarquer que pour les deux fréquences considérées, le mode q-A<sub>0</sub> subit une réflexion totale à partir d'un certain angle, environ 55° pour  $f_1$  et 62° pour  $f_2$ . Nous reviendrons sur ce phénomène de réflexion totale dans la suite du chapitre.

Les deux graphiques montrent encore une fois la forte dépendance des coefficients avec l'angle d'incidence. Nous observons, qu'à la fréquence  $f_2$ , le mode q-A<sub>0</sub> est pratiquement toujours réfléchi quelle que soit l'incidence.

En s'intéressant à la conservation de l'énergie (relation ( 6-6 ) du Chapitre 6), nous pouvons définir momentanément une erreur numérique comme un écart à la conservation de l'énergie ; il suffit de calculer l'écart relatif de la somme des deux coefficients élevés au carré par rapport à la valeur de l'énergie totale égale à 1.

Cette erreur, dépendant de l'angle d'incidence, est facilement visible lorsqu'un seul mode se propage dans la plaque. Par exemple, pour le mode q-A<sub>0</sub> à 400 kHz, l'erreur relative sur  $E$  est de 8,1% pour  $\beta=30^\circ$ , et de 1% pour  $\beta=85^\circ$ . Il est cependant intéressant de noter que cette erreur est faible lorsque au moins deux modes se propagent dans la plaque ; pour le mode q-A<sub>0</sub> à 400kHz, l'erreur relative est de 0.4% pour  $\beta=10^\circ$  (deux modes présents) et de 0,6% pour  $\beta=15^\circ$  (deux modes présents).

Nous expliquons cette erreur sur l'énergie par les approximations mises en place pour décrire la structure complexe, que nous avons évoquées au début de ce paragraphe.

Nous voulons attirer l'attention sur les difficultés de contrôle liées à l'anisotropie de la structure. Sur les courbes précédentes, nous n'avons pas représenté l'incidence à  $20^\circ$  car elle correspond à une valeur spécifique de  $\gamma$  où le mode q-SH<sub>0</sub> possède deux nombres d'onde se propageant dans chaque direction. Ce cas particulier avait été mis en avant dans le Chapitre 4 sur la Figure 4-10. Il est également illustré Figure 7-16, pour la structure présentée dans ce paragraphe. Les flèches tracées en rouge correspondent aux directions de l'énergie pour les nombres d'ondes du mode q-SH<sub>0</sub>.

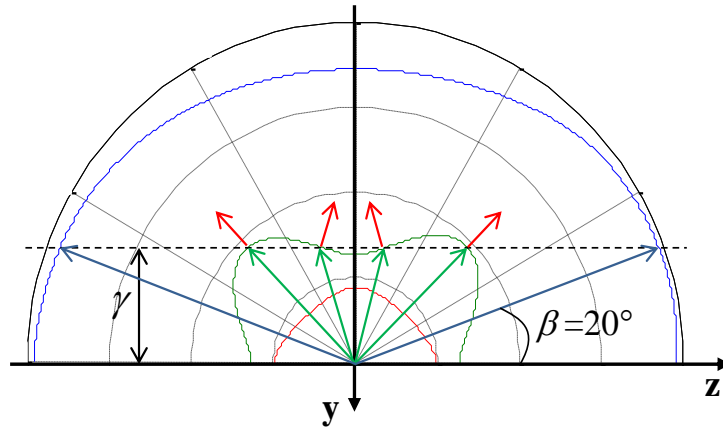


Figure 7-16: mise en avant de la présence de deux nombres d'onde liés au mode q-SH<sub>0</sub>.

À cette fréquence, nous obtenons donc deux coefficients de transmission et de réflexions associés au mode q-SH<sub>0</sub>. L'ensemble des coefficients est pris en compte dans le bilan énergétique pour cette valeur de  $\gamma$ .

Les figures précédentes présentent les valeurs des coefficients de diffraction pour une variation angulaire par pas de  $5^\circ$ . Au vue des variations importantes observées, nous avons voulu affiner la description des phénomènes par l'étude de la variation angulaire des coefficients par pas de  $1^\circ$ . Nous étudions à nouveau la diffraction du mode q-A<sub>0</sub> incident,  $\beta$  variant de  $25^\circ$  à  $45^\circ$ .

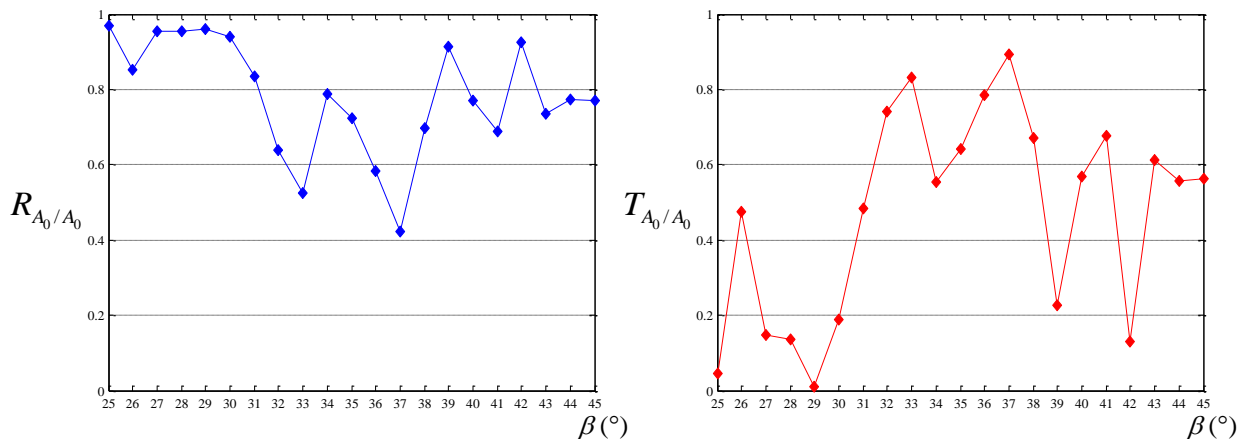


Figure 7-17: variation des coefficients de diffraction du mode q-A<sub>0</sub> en fonction de l'angle d'incidence pour  $f=400$  kHz.

Les courbes confirment que la diffraction d'une onde plane dépend fortement de l'angle d'incidence. Un pas angulaire fin est donc nécessaire à une bonne prédiction de la diffraction.

Les résultats présentés peuvent être accompagnés de la représentation des différentes composantes du déplacement dans la plaque raidie. Ces graphiques permettent de mieux comprendre les phénomènes de diffraction. Ainsi, les différentes parties réelles des composantes du champ (total) d'ondes élastiques pour un mode q-A<sub>0</sub> incident à 100 kHz avec  $\beta = 45^\circ$  sont présentées sur Figure 7-18, et celles pour le mode q-S<sub>0</sub> incident à 400 kHz et  $\beta=10^\circ$ , sur la Figure 7-19.

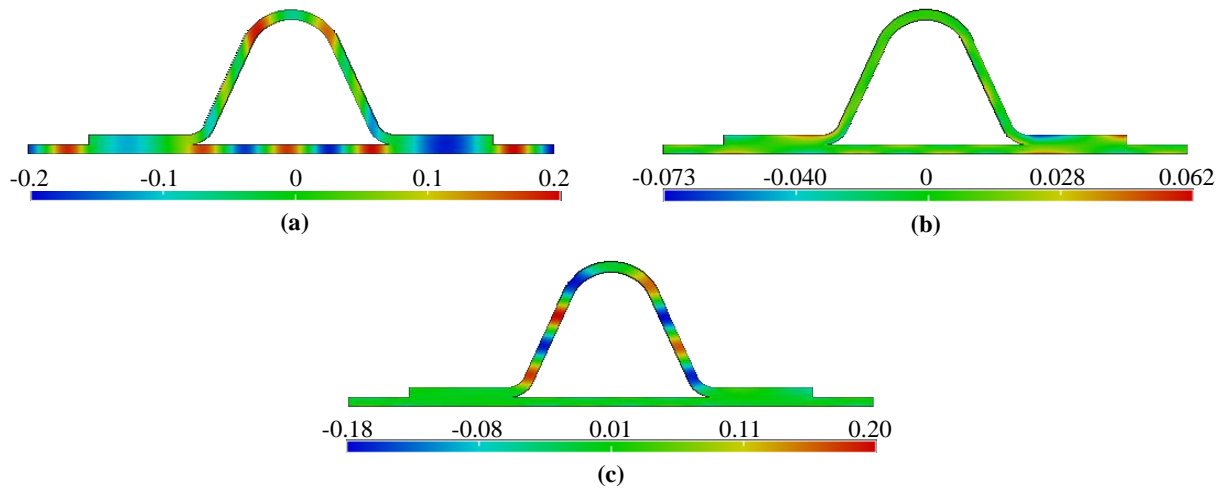


Figure 7-18: partie réelle des composantes du déplacement à 100kHz et  $\beta=45^\circ$  : (a)  $u_x$ , (b)  $u_y$  (c)  $u_z$ .

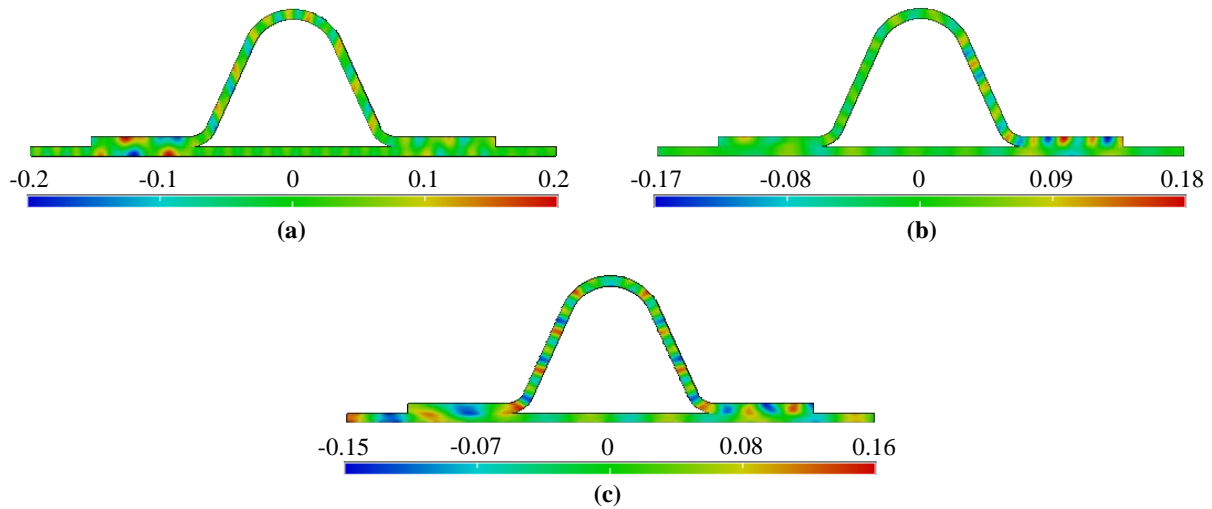


Figure 7-19: partie réelle des composantes du déplacement à 400kHz et  $\beta=10^\circ$  : (a)  $u_x$ , (b)  $u_y$  (c)  $u_z$ .

Par exemple, les Figure 7-18 et Figure 7-19 permettent d'observer que l'énergie des ondes guidées se propage à la fois dans le raidisseur et dans la plaque.

Dans la suite de l'étude, nous nous intéressons surtout à un mode  $q-A_0$  incident. En effet, dans une optique de contrôle, l'expérimentation favorise l'exploitation du mode  $q-A_0$  qui est plus facilement généré en n'ayant accès qu'à l'un des deux côtés de la plaque. En effet, ce mode antisymétrique peut être excité par une pastille piézoélectrique seule, alors que la génération d'un mode symétrique nécessite une excitation simultanée de deux pastilles piézoélectriques de part et d'autre de la plaque.

- **Étude fréquentielle de la diffraction**

Nous avons présenté la variation des coefficients de diffraction en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence donnée. Nous allons maintenant nous intéresser à la variation de ces coefficients avec la fréquence. Les courbes sont tracées pour  $\beta = 25^\circ$ , Figure 7-20, et  $\beta = 40^\circ$ , Figure 7-21, avec le mode  $q-A_0$  incident ; pour ces deux valeurs, seul le mode  $q-A_0$  peut se propager. Nous représentons en rouge le coefficient de transmission et en bleu le coefficient de réflexion.

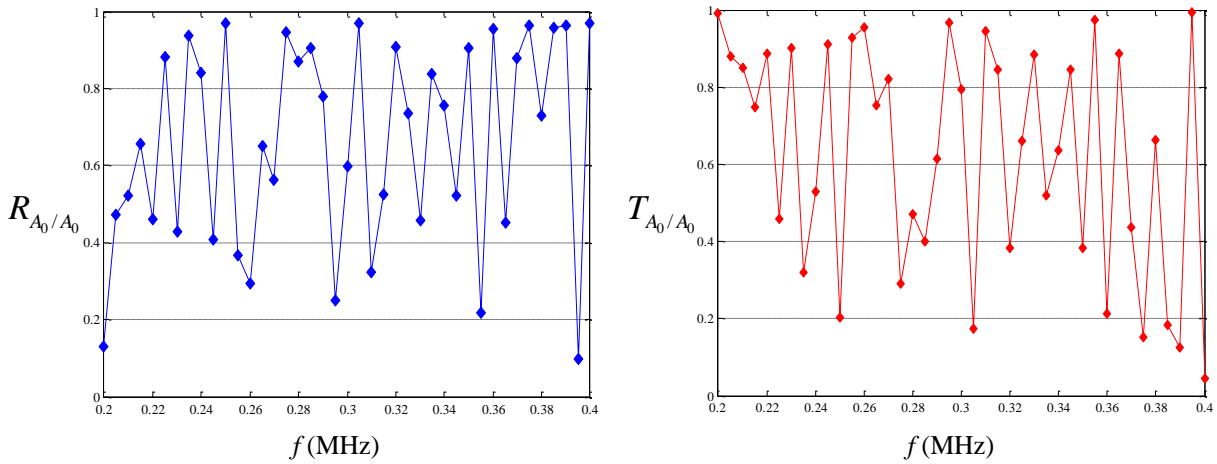


Figure 7-20: variation des coefficients de diffraction du mode  $q-A_0$  en fonction de la fréquence pour  $\beta=25^\circ$ .

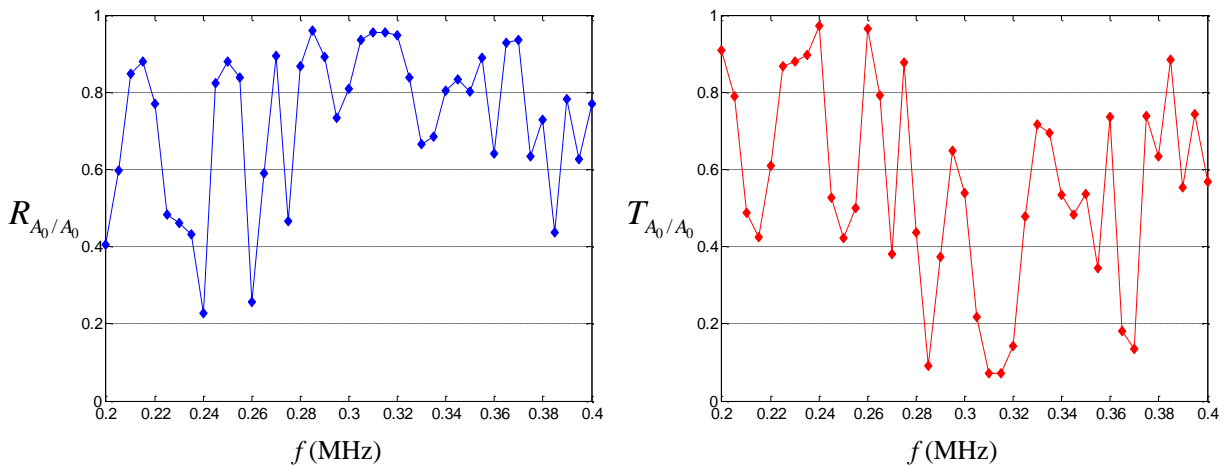


Figure 7-21: variation des coefficients de diffraction du mode  $q-A_0$  en fonction de la fréquence pour  $\beta=40^\circ$ .

La Figure 7-20 montre de très fortes variations des coefficients de diffraction avec la fréquence. Pour une incidence à  $40^\circ$ , les valeurs des coefficients dépendent également fortement de la fréquence, même si les courbes sont plus lisses.

Les Figure 7-20 et Figure 7-21 représentent les variations des coefficients de diffraction sur une plage de fréquence de 200 kHz. Une discrétisation de 5 kHz a été choisie pour limiter les temps de calcul ; mais pour obtenir une bonne résolution de ces courbes il nous a paru nécessaire d'affiner la discrétisation en fréquence.

Nous avons donc mené une étude sur une plage de fréquence de 20 kHz (de 200 kHz à 220 kHz) avec une discrétisation de 0.4 kHz. Les résultats obtenus sont présentés Figure 7-22 et nous semblent résolus en fréquence.

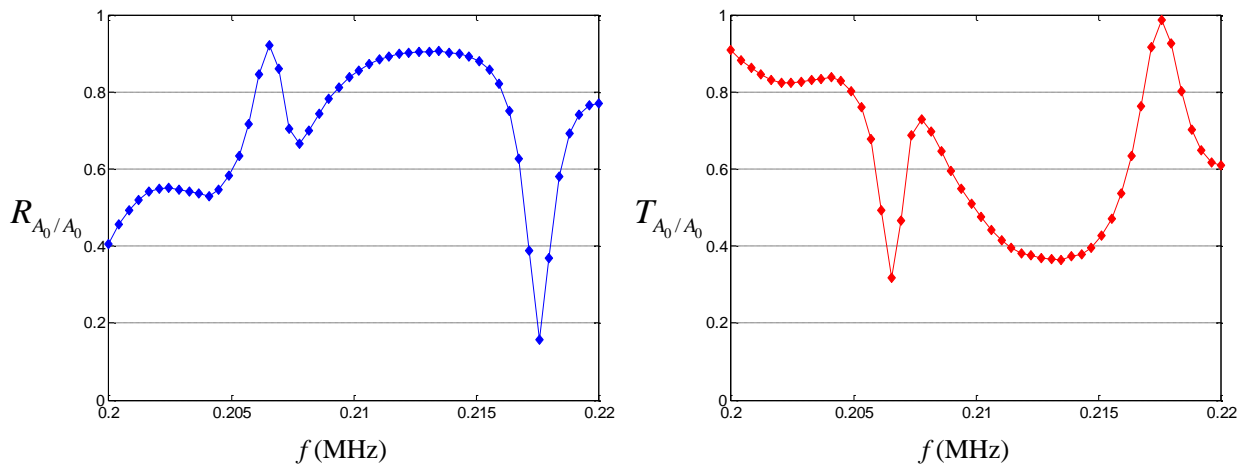


Figure 7-22: variation des coefficients de diffraction du mode  $q-A_0$  en fonction de la fréquence avec un pas fréquentiel affiné pour  $\beta=40^\circ$ .

On constate que les fluctuations importantes des coefficients se font pour de petites variations fréquentielles. Ces résultats complexes laissent à penser qu'une étude approfondie de ces variations doit être menée au cas par cas dans le cadre de l'optimisation d'une configuration de SHM. Disposer d'un outil de simulation tel que celui que nous avons développé semble indispensable pour appréhender la complexité des phénomènes mis en jeu.

Dans ce cas particulier, l'erreur numérique, définie précédemment comme un écart à la conservation de l'énergie, a pour valeur moyenne sur l'intervalle fréquentiel considéré 3% avec un écart type de 1,4%. Cette erreur est donc faible et peu fluctuante.

- Étude de la réflexion totale du mode  $q-A_0$

Sur les Figure 7-14 et Figure 7-15, nous avons observé que le mode  $q-A_0$  subissait une réflexion totale (à partir de  $55^\circ$  pour  $f_1$  et  $62^\circ$  pour  $f_2$ ). Le but de cette étude est d'expliquer ce phénomène. C'est pourquoi nous représentons les parties réelles des différentes composantes du déplacement dans la plaque raidie à 400 kHz pour une incidence de  $80^\circ$ , où l'onde est complètement réfléchie.

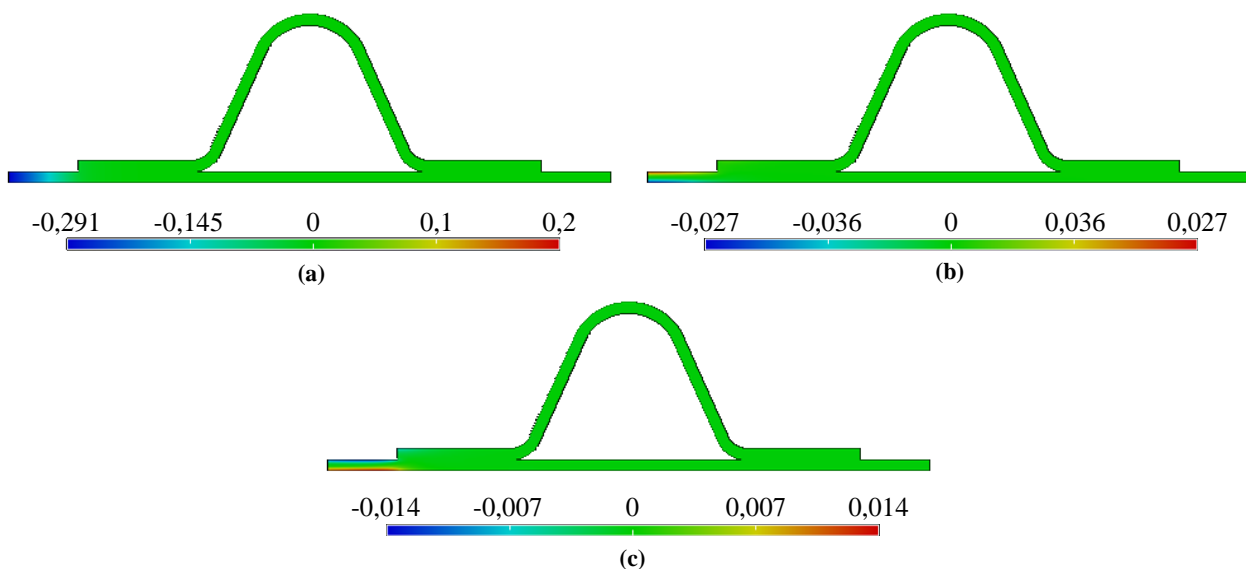


Figure 7-23: partie réelle des composantes du déplacement à 400kHz et  $\beta=80^\circ$ .

Au vue des représentations de la Figure 7-23, il semble que la réflexion totale de l'onde prenne son origine au niveau de la partie horizontale du raidisseur, où localement on peut considérer que l'on passe d'une épaisseur égale à celle de la plaque à celle d'une plaque de 23 plis. De fait, le phénomène est également observé lorsque l'on étudie la diffraction pour la structure composée de deux plaques composites collées, représentée ci-dessous :



Figure 7-24: structure composée de deux plaques superposées.

Nous choisissons les séquences d'empilement et propriétés élastiques identiques à celles de la plaque raidie EADS. La longueur de la plaque supérieure est égale à la longueur d'une extrémité à l'autre du raidisseur.

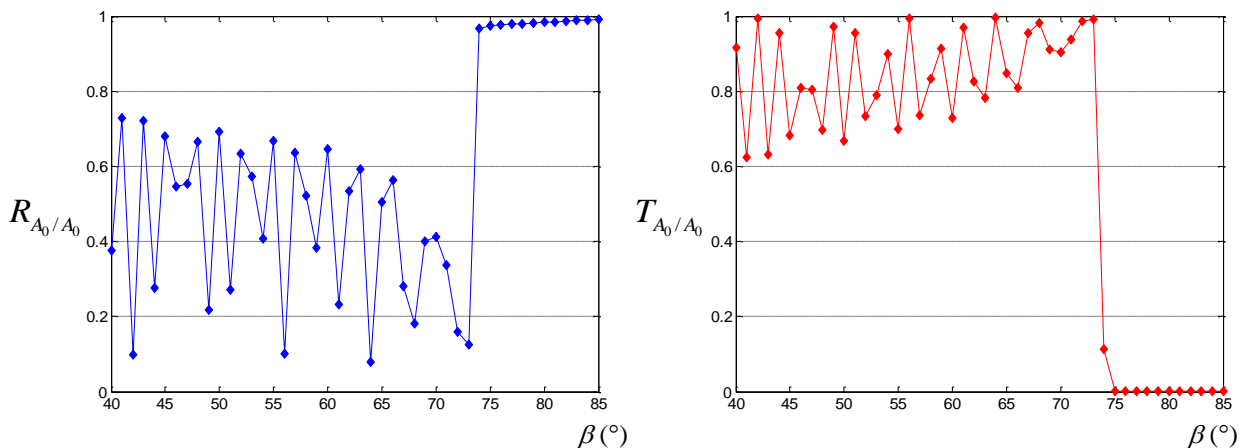


Figure 7-25 : variations des coefficients de réflexion (à gauche) et transmission (à droite) pour la structure de deux plaques composites collées à la fréquence  $f_2$  pour le mode q- $A_0$  incident.

Les courbes de la Figure 7-25 montrent que le mode q- $A_0$  est complètement réfléchi à partir de  $\beta = 75^\circ$  pour cette structure. Ainsi, le phénomène de réflexion totale observé dans le cas du raidisseur en oméga est partiellement explicable par ce phénomène de réflexion à l'endroit du changement d'épaisseur en raison de l'angle droit ; mais d'autres phénomènes interviennent dans la mesure où les deux angles à partir desquels la réflexion est totale sont différents dans un cas et dans l'autre.

- **Conséquences des phénomènes de réflexion totale sur la configuration de contrôle**

Le phénomène de réflexion totale qui arrive à un angle variant avec la fréquence et le type de raidisseur considéré est important à prendre en compte pour placer de façon optimale les différents transducteurs. Par exemple, supposons qu'une onde plane q- $A_0$  à 400 kHz se propage dans une plaque renforcée par deux raidisseurs (de mêmes géométrie et séquence d'empilement que celles étudiées dans cette partie du chapitre), générée par un transducteur placé entre les deux raidisseurs, nous savons que son angle limite de réflexion totale est  $\beta_L = 62^\circ$ . Pour des transducteurs uniquement sensibles au mode antisymétrique, nous pouvons déjà délimiter les zones de la plaque où le contrôle n'est pas possible. Ces zones, que l'on peut dénommer "zones d'ombre", sont schématisées en hachuré bordeaux sur la Figure 7-26.



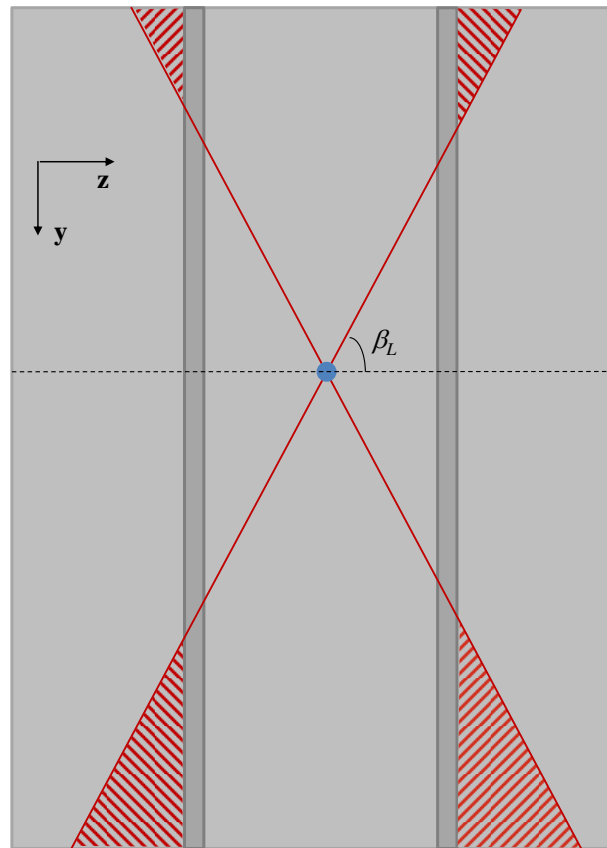


Figure 7-26 : schématisation des zones de contrôles possible par une onde plane  $q-A_0$  à 400 kHz pour une plaque renforcée par deux raidisseurs.

L'étude de la combinaison des différentes zones d'ombre apparaissant aux différentes fréquences doit être menée afin de positionner les traducteurs suivant un maillage suffisant pour qu'un traducteur ne soit pas situé dans l'ombre des autres traducteurs.

Dans un souci de simplification, nous avons présenté les zones d'ombre présentes pour une émission d'onde avec un seul traducteur. Mais l'étude menée permettrait de choisir le nombre de traducteurs nécessaires et leur position afin de contrôler toute la structure à une fréquence donnée. Seule l'étude précise des coefficients de diffraction dans la bande passante des traducteurs peut permettre d'optimiser les paramètres d'un contrôle global d'une structure donnée.

### 7.3 Résumé du Chapitre

Ce chapitre a présenté deux études approfondies sur la diffraction des ondes guidées. La participation à la session Benchmark lors de la conférence Review of Progress in QNDE a permis de vérifier la validité du calcul en incidence oblique pour un matériau isotrope. Les résultats que nous avons obtenus ont été successivement confrontés à ceux obtenus par Wilcox *et al.* [62] (coefficients de transmission), et aux résultats expérimentaux également obtenus par Wilcox et son équipe (amplitude du signal reçu par un traducteur). Les différentes comparaisons ont montré un très bon accord, que ce soit entre simulation et essais expérimentaux, et, simulation éléments finis avec couches absorbantes et simulation éléments finis avec conditions transparentes aux frontières. La deuxième étude, réalisée à la demande d'EADS, a été menée sur une plaque raidie composite multicouches. Elle a mis en avant la complexité de la diffraction dans de telles structures. L'étude a été menée dans une problématique d'optimisation d'un contrôle santé intégré. Il nous paraît avantageux de se placer en dessous de la première fréquence de coupure, et d'utiliser le mode  $q-A_0$  classiquement généré et reçu par les pastilles piézo-électriques utilisées en SHM. Nous avons montré que l'étude des coefficients de diffraction peut aider au positionnement des traducteurs afin d'éviter les zones d'ombres. Une brève illustration de ce que sont les zones d'ombre a été présentée.

Le comportement des coefficients de réflexion sur et de transmission à travers un raidisseur peut donc être prédit à l'aide du modèle hybride développé. Il apparaît que les résultats sont fortement dépendants des différents paramètres en jeu. Ainsi, les conclusions qui peuvent être tirées pour une configuration donnée ne sont *a priori* valables que pour cette seule configuration. Chaque nouvelle configuration (différentes séquences d'empilements, différentes géométries de raidisseur etc...) doit faire l'objet d'une étude approfondie par simulation si l'on souhaite concevoir une méthode optimale pour son contrôle.



# CONCLUSION

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans une étude de faisabilité du contrôle santé intégré pour les structures aéronautiques composites. Dans ce but, nous avons développé des outils de simulation permettant de prédire et de comprendre la propagation des ondes guidées dans des plaques en matériaux composites et leur diffraction par des raidisseurs.

Dans la première partie, la méthode SAFE a été mise en œuvre et validée par comparaisons avec des résultats calculés par d'autres méthodes issues de la littérature. Nous avons proposé, dans le chapitre 3, une étude de la propagation guidée dans une plaque composite multicouche viscoélastique. Cela nous a tout d'abord permis de mettre en avant l'importance de l'anisotropie de la propagation guidée engendrée par les multiples couches de la structure, et ce, même dans le cas d'une structure paraissant quasi-isotrope dans le plan en statique.

Cette étude, menée dans la problématique générale de contrôle intégré, permet de choisir les fréquences optimales d'inspection. Nous rappelons que le choix d'un mode optimal doit tenir compte des caractéristiques de propagation de chaque mode, mais également des contraintes liées aux traducteurs utilisés. Au vue des différentes courbes de dispersion et de propagation dans le plan, la plage de fréquence en dessous de la première fréquence de coupure semble la plus adaptée. En effet, nous avons observé que pour ces fréquences:

- seuls les trois modes fondamentaux se propagent dans la structure, le caractère multimodal observé pour des fréquences plus élevées est rapidement très complexe, et n'est donc pas adapté à une détection expérimentale de signaux.
- Les vitesses et atténuation sont peu dispersives et peu anisotrope, leurs valeurs dépendent donc peu de la fréquence et de la direction de propagation.
- Les valeurs d'atténuation sont faibles et varient linéairement avec la fréquence ; ainsi, il est plus facile de prédire les distances sur lesquelles les ondes sont encore détectables.

Ce chapitre montre que la conception d'un contrôle par ondes guidées impose la connaissance détaillée de la propagation guidée des différents modes, et que les outils développés ici répondent à cet impératif.

Dans la deuxième partie, la méthode développée par Vahan Baronian, lors de sa thèse, a été adaptée et étendue pour traiter la diffraction par un raidisseur d'ondes guidées se propageant selon une direction quelconque d'incidence.

Les plaques raidies possédant une direction d'invariance selon l'axe du raidisseur, le problème général a été ramené à une famille de problèmes en deux dimensions à trois composantes paramétrés par la grandeur  $\gamma$ . La méthode SAFE a été adaptée pour le calcul des modes se propageant dans une plaque à une valeur fixée de  $\gamma$  (notée ici SAFE- $\gamma$ )

Le modèle global développé consiste en un calcul hybride couplant la méthode SAFE- $\gamma$  avec un calcul aux éléments finis pour traiter la diffraction. Des conditions transparentes spécifiques aux frontières entre les domaines de calcul ont été développées qui permettent d'éviter des réflexions artificielles, de minimiser les dimensions de la zone de calcul EF et d'obtenir les coefficients modaux de diffraction par le raidisseur sans aucun post-traitement.

Enfin, de nombreux développements ont été nécessaires pour tenir compte de l'anisotropie des milieux et de leur structure multicouche (notamment dans le raidisseur où les plis de matériaux composites suivent le profil géométrique du raidisseur).

Le chapitre 6 a permis de valider la méthode hybride développée et de discuter de sa stabilité numérique.

Enfin, nous avons présenté dans le chapitre 7 deux études. Tout d'abord, le benchmark, réalisé lors de la conférence Review of Progress in QNDE, a permis de s'assurer de la validité du calcul en incidence oblique pour un matériau isotrope. Ensuite, une étude quantitative a ensuite été réalisée

pour une plaque composite raidie dont les caractéristiques étaient fournies par EADS. L'étude a été menée dans une problématique de contrôle santé intégré. Il nous a donc paru avantageux de se placer en dessous de la première fréquence de coupure et d'utiliser le mode  $q-A_0$ , particulièrement adapté aux pastilles piézo-électriques utilisées pour le SHM. Dans cette partie, nous avons mis en avant le caractère complexe de la diffraction d'ondes guidées, et montré que l'étude des coefficients de diffraction permet d'optimiser le positionnement des traducteurs, par exemple, pour éviter des zones d'ombres.

Pour conclure, une fois les outils de simulation développés, les résultats obtenus nous ont permis d'apporter des conclusions pertinentes pour le contrôle. Il apparaît cependant nécessaire d'approfondir l'étude de la diffraction en affinant la discrétisation angulaire et fréquentielle. Ces études doivent être menées prochainement par EADS IW. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux sont également prévues.

Lors de la présentation des résultats du Benchmark, nous avons évoqué une limitation de l'hypothèse d'onde plane. Il serait donc judicieux de prendre en compte l'effet d'ouverture des traducteurs émetteurs. Pour cela, nous proposons de ne plus effectuer le calcul de diffraction pour une direction unique d'émission d'onde, mais de prendre en compte un spectre angulaire permettant de corriger les imprécisions résultant de l'hypothèse d'onde plane.

Enfin, nous avons traité le cas spécifique d'un raidisseur possédant une direction infinie d'invariance. La continuité naturelle de ces travaux est donc d'étendre la méthode mise en œuvre pour le cas d'un élément diffractant quelconque. Une thèse en collaboration POEMS-CEA débutera en octobre 2011. Antoine Tonnoir traitera de la simulation numérique de la diffraction d'ondes ultrasonores par un défaut localisé dans une plaque élastique anisotrope.





## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] S. Deydier (2008),  
"Modélisation par une méthode d'homogénéisation de la propagation ultrasonore dans les composites multicouches – Application à la simulation du contrôle non destructif", thèse de doctorat de l'Université Paris 7.
- [2] S. Journiac (soutenance prévue 2011),  
"Simulation des contrôles non destructifs par ultrasons dans les composites carbonés époxy", thèse de doctorat de l'université du Maine.
- [3] K. Jezzine (2007),  
"Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées", thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I.
- [4] V. Baronian (2009),  
"Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées", thèse de doctorat de l'École Polytechnique.
- [5] K. Worden, C. R. Farrar, G. Manson and G. Park (2007),  
"The fundamental axioms of structural health monitoring", *Proc. R. Soc. Lond. A* **463**, pp. 1639-1664.
- [6] C. Boller and N. Meyendorf (2008),  
"State-of-the-art in Structural Health monitoring for aeronautics", *Proc. International Symposium on NDT in Aerospace* (Fürth, Germany). 8 pages. Actes publiés en ligne : <http://www.ndt.net/article/aero2008/>
- [7] B. Petitjean, S. Barut and D. Simonet (2007),  
"Impact damage detection on aeronautical composite parts: Issues and challenges ", *Structural Health Monitoring 2007*, eds. F. K. Chang, **2**, (6th International Workshop on Structural Health Monitoring, Stanford Univ, 2007), pp. 1127-1133.
- [8] K. Diamanti and C. Soutis (2010),  
"Structural health monitoring techniques for aircraft composite structures ", *Progress in Aerospace Sciences* **46**, pp. 342-352.
- [9] M. Lin, X. Qing, A. Kumar and S. J. Beard (2001),  
"Smart layer and smart suitcase for structural health monitoring applications", in *Smart Structures and Materials 2001*, Proc. SPIE **4332**, pp. 98-106.
- [10] S. S. Kessler and S. M. Spearing (2002),  
"Design of a piezoelectric-based structural health monitoring system for damage detection in composite materials", in *Smart Structures and Materials 2002*, Proc. SPIE **4701**, pp. 86-96.
- [11] H. Lamb (1917),  
"On waves in an elastic plane", *Proc. R. Soc. Lond. A* **648**, pp. 114-128.



- [12] V. Giurgiutiu and G. Santoni-Bottai (2011),  
"Structural Health Monitoring of composite structures with piezoelectric-wafer active sensors", *AIAA J.* **49**, pp. 565-581.
- [13] G. Huang, F. Song and X. Wang (2010),  
"Quantitative modeling of coupled piezo-elastodynamic behavior of piezoelectric actuators bonded to an elastic medium for structural health monitoring: a review", *Sensors* **10**, pp. 3681-3702.
- [14] V. Giurgiutiu and A. Zagrai (2005),  
"Damage detection in thin plates and aerospace structures with the electro-mechanical impedance method", *Structural Health Monitoring* **4**, pp. 99-118.
- [15] H. Matt and F. Lanza di Scalea (2007),  
"Macro-fiber composite piezoelectric rosettes for acoustic source location in complex structures", *Materials Struct.* **16**, pp. 1489-1499.
- [16] P. D. Wilcox, R. Monkhouse, M. J. S. Lowe and P. Cawley (1998),  
"The use of Huygens' principle to model the acoustic field from interdigital Lamb wave transducers", in *Review of Progress in QNDE*, eds. D. O. Thompson and D. E. Chimenti, **17**, (Plenum, N.-Y.), pp. 915-922.
- [17] P. D. Wilcox, M. J. S. Lowe and P. Cawley (2000),  
"Lamb and SH wave transducer arrays for the inspection of large areas of thick plates", in *Review of Progress in QNDE*, eds. D. O. Thompson and D. E. Chimenti, **19**, (AIP Conf. Proc., N.-Y.), pp. 1049-1056.
- [18] E. Moulin, J. Assaad, C. Delebarre, H. Kaczmarek and D. Balageas (1997),  
"Piezoelectric transducer embedded in a composite plate: Application to Lamb wave generation", *J. Appl. Phys.* **82**, pp. 2049-2055.
- [19] M. Lin and F.- K. Chang (2002),  
"The manufacture of composite structures with a built-in network of piezoceramics", *Composites Science Technology* **62**, pp. 919-939.
- [20] X. P. Qing, S. J. Beard, A. K. Kumar, H.- L. Chan and R. Ikegami (2006),  
"Advances in the development of built-in diagnostic system for filament wound composite structures", *Composites Science Technology* **66**, pp. 1694-1702.
- [21] J. Haywood, P. T. Coverley, W. J. Staszewski and K. Worden (2005),  
"An automatic impact monitor for a composite panel employing smart sensor technology", *Smart. Mater. Struct.* **14**, pp. 265-271.
- [22] M. Lemistre and D. Balageas (2001),  
"Structural health monitoring system based on diffracted Lamb wave analysis by multiresolution processing", *Smart Mater. Struct.* **10**, pp. 504-511.
- [23] S. Grondel, J. Assaad, C. Delebarre and E. Moulin (2004),  
"Health monitoring of a composite wingbox structure", *Ultrasonics* **42**, pp. 819-824.

- [24] S. Mahadev Prasad, R. Jagannathan, K. Balasubramaniam and C. V. Krishnamurthy (2004), "Structural health monitoring of anisotropic layered composite plates using guided ultrasonic lamb wave data", in *Review of Progress in QNDE*, eds. D. O. Thompson and D. E. Chimenti, **23**, (AIP Conf. Proc., N.-Y.), pp. 1460-1467.
- [25] H. Matt, I. Bartoli and F. Lanza di Scalea (2005), "Ultrasonic guided wave monitoring of composite wing skin-to-spar bonded joints in aerospace structures", *J. Acoust. Soc. Am.* **118**, pp. 2240-2252.
- [26] W. J. Staszewski, S. Mahzan and R. Traynor (2009), "Health monitoring of aerospace composite structures – Active and passive approach", *Composites Science and Technology* **69**, pp. 1678-1685.
- [27] J. Vishnuvardan, A. Muralidharan, C. V. Krishnamurthy and K. Balasubramaniam (2009), "Structural health monitoring of anisotropic plates using ultrasonic guided wave STMR array patches", *NDT&E Int.* **42**, pp. 193-198.
- [28] J. Moll, R. T. Schulte, B. Hartmann, C.- P. Fritzen and O. Nelles (2010), "Multi-site damage localization in anisotropic plate-like structures using an active guided wave structural health monitoring system", *Smart. Mater. Struct.* **19**.
- [29] I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea and E. Viola (2006), "Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section", *J. Sound Vib.* **295**, pp. 685-707.
- [30] S. Lonné (2003), "Modélisation de la propagation ultrasonore dans les matériaux composites obtenus par le procédé de fabrication RTM (Resin Transfer Molding)", thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I.
- [31] N. Gengembre, P. Calmon, O. Pétilion and S. Chatillon (2003), "Prediction of ultrasonic fields into composite multi-layered structures: homogenization approach for the direct field and statistical approach for the inner reflections", in *Review of Progress in QNDE* **22**, eds. D. O. Thompson and D. E. Chimenti, **22**, (AIP Conf. Proc., N.-Y.), pp. 957-965.
- [32] G. Neau (2003), "Onde de Lamb dans des plaques anisotropes viscoélastiques. Études des fronts d'onde et atténuation", thèse de doctorat de l'Université Bordeaux I.
- [33] J. L. Rose (2004), *Ultrasonics waves in solid media*, (Cambridge University Press), pp. 289.
- [34] R. E. Challis, F. Blarel, M. E. Unwin, J. Paul and X. Guo (2009), "Models of ultrasonic wave propagation in epoxy materials", *IEEE Trans. UFFC* **56**, pp. 1225-1237.

- [35] A. Lhémy, V. Baronian, K. Jezzine and A.-S. Bonnet-Ben Dhia (2010),  
 "Simulation of inspections of elastic waveguides of arbitrary section containing arbitrary local discontinuities or defects", in *Review of Progress in QNDE*, eds. D. O. Thompson and D. E. Chimenti, **29**, (AIP Conf. Proc., N.-Y.), pp. 145-152.
- [36] Z. Su, L. Ye and Y. Lu (2006),  
 "Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review", *J. Sound Vib.* **295**, pp. 753-780.
- [37] W. T. Thomson (1950),  
 "Transmission of elastic waves through a stratified medium", *J. Appl. Phys.* **21**, pp. 89-93.
- [38] N. A. Haskell (1953),  
 "The dispersion of surface waves on multilayered media", *Bull. Seismol. Soc. Am.* **43**, pp. 17-34.
- [39] M. J. S. Lowe (1995),  
 "Matrix techniques for modelling ultrasonic waves in multilayered media", *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **42**, pp. 525-542.
- [40] L. Wang and S. I. Rokhlin (2001),  
 "Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media", *Ultrasonics* **39**, pp. 413-424.
- [41] B. Hosten and M. Castaings (2003),  
 "Surface impedance matrices to model the propagation in multilayered media", *Ultrasonics* **41**, pp. 501-507.
- [42] L. Wang and F. G. Yuan (2007),  
 "Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments", *Composites Science and Technology* **67**, pp. 1370-1384.
- [43] J.- M. Mencik and M. N. Ichchou (2005),  
 "Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements", *European J. Mechanics A/Solids* **24**, pp. 877-898.
- [44] S. B. Dong and R. B. Nelson (1972),  
 "On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates", *J. Appl. Mech.* **39**, pp. 739-745.
- [45] A. H. Shah and S. K. Datta (1982),  
 "Harmonic waves in a periodically laminated medium", *Int. J. Sol. Struct.* **18**, pp. 397-410.
- [46] G. R. Liu, J. Tani, T. Ohyoshi and K. Watanabe (1991),  
 "Characteristic wave surface in anisotropic laminated plates", *J. Vib. Acoust.* **113**, pp. 279-285.

- [47] G. R. Liu and J. D. Achenbach (1994),  
"A Strip element method for stress analysis of anisotropic linearly elastic solids", *J. Appl. Mech.* **62**, pp. 607-613.
- [48] A. H. Shah, W. Zuang, N. Popplewell and J. B. C. Rogers (2001),  
"Guided waves in thin-walled structural members", *J. Vib. Acoust.* **123**, pp. 376-382.
- [49] O. M. Mukdadi and S. K. Datta (2003),  
"Transient ultrasonic guided waves in layered plates with rectangular cross section", *J. Appl. Phys.* **93**, pp. 9360-9370.
- [50] M. Predoi, M. Castaings, B. Hosten and C. Bacon (2007),  
"Wave propagation along transversely periodic structures", *J. Acoust. Soc. Am.* **121**, pp. 1935-1944.
- [51] I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea and E. Viola (2006),  
"Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section", *J. Sound Vib.* **295**, pp. 685-707.
- [52] CIVA software platform for simulating NDT techniques (UT, EC, RT) <http://www-civa.cea.fr>
- [53] W. Ben Khalifa (2009),  
"Ondes guidées par des structures à courbure(s) non nulle(s)", mémoire de master de l'Université de Valenciennes, Master 2 recherche électronique, instrumentation et télécoms, option ultrasons et microsystemes.
- [54] H. Taweel, S. B. Dong and M. Kazic (2000),  
"Wave reflection from the free end of a cylinder with an arbitrary cross-section", *Int. J. Sol. Struct.* **37**, pp. 1701-1726.
- [55] T. Hayashi, W. J. Song and J. L. Rose (2003),  
"Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example", *Ultrasonics* **41**, pp. 175-183.
- [56] B. A. Auld (1973),  
*Acoustic fields and waves in solids vol II*, (Krieger publishing company, Malabar, Florida), pp. 155.
- [57] M. Benmrah (2009),  
"Analyse numérique et expérimentale de la propagation des ondes de Lamb dans les composites stratifiés", mémoire de master de l'Université de Valenciennes, Master 2 recherche électronique, instrumentation et télécoms, option ultrasons et microsystemes.
- [58] M. Hollette, A. Lhémy and C. Aristégui (2012),  
"Full dynamic homogenization of a unidirectionnal viscoelastic composite", à paraître dans *Review of Progress in QNDE*, eds. D.O. Thompson and D.E. Chimenti, **31**, (AIP Conf. Proc., N.-Y.).

- [59] B. A. Auld (1973),  
*Acoustic fields and waves in solids vol II*, (Krieger publishing company, Malabar, Florida), Chapter 9.
- [60] M. Castaings and M. J. S. Lowe (2008),  
 "Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media", *J. Acoust. Soc. Am.* **123**, pp. 696-708.
- [61] G. R. Liu and S. S. Quek Jerry (2003),  
 "A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method", *Finite Element Anal. Des.* **39**, pp. 403-417.
- [62] P. D. Wilcox, A. Velichko, B. W. Drinkwater, A. J. Croxford and M. D. Todd (2010),  
 "Scattering of plane guided waves obliquely incident on a straight feature with uniform cross-section", *J. Acoust. Soc. Am.* **128**, pp. 2715-2725.
- [63] P. D. Wilcox, M. J. S. Lowe and P. Cawley (2005),  
 "The excitation and detection of lamb waves with planar coil electromagnetic acoustic transducers", *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* **52**, pp. 2370-2383.
- [64] J.- P. Bérenger (1994),  
 "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *J. Comp. Phys.* **114**, pp.185-200.
- [65] E. Bécache, A.- S. Bonnet-Ben Dhia and G. Legendre (2004)  
 "Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation", *SIAM J. Numer. Anal.* **42**, pp. 409-433.
- [66] E. Bécache, S. Fauqueux and P. Joly (2003),  
 "Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves", *J. Comp. Phys.* **188**, pp. 399-433.
- [67] K. C. Meza-Fajardo and A. S. Papageorgiou (2008),  
 "A nonconvolutionnal, split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media: stability analysis", *Bull. Seism. Soc. Am.* **98**, pp. 1811-1836.
- [68] E. A. Skelton, S. M. D. Adams and R. V. Craster (2007),  
 "Guided elastic waves and perfectly matched layers", *Wave Motion* **44**, pp. 573-592.
- [69] A.-S. Bonnet-Ben Dhia and G. Legendre (2011),  
 "An alternative to Dirichlet-to-Neumann maps for waveguides", à paraître dans *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*
- [70] I. Harari, I. Patlashenko and D. Givoli (1998),  
 "Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded wave guides", *J. Comp. Phys.* **143**, pp. 200-223.

- [71] B. Ouédraogo, E. Redon et J.- F. Mercier (2010),  
 "Opérateur DtN pour les guides cylindriques à paroi traitée en présence d'un écoulement uniforme", *actes du 10<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique (Lyon, 2010)*, publié en ligne : <http://cfa.sfa.asso.fr/cd1/data/index.html> , 6 pages.
- [72] E. Redon, B. Ouedraogo, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, J.- F. Mercier and C. Chambeyron (2008),  
 "Transparent boundary condition for acoustic propagation in lined guide with mean flow", in *Proc. Acoustics '08 (Paris, 2008)*, pp. 2987-2992.
- [73] V. Pagneux and A. Maurel (2002),  
 "Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides", *Proc. R. Soc. Lond. A* **458**, pp. 1913-1930.
- [74] V. Pagneux and A. Maurel (2004),  
 "Scattering matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids", *J. Acoust. Soc. Am.* **116**, pp. 1913-1920.
- [75] V. Pagneux and A. Maurel (2006),  
 "Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness", *Proc. R. Soc. Lond. A* **462**, pp. 1315-1339.
- [76] W. B. Fraser (1976),  
 "Orthogonality relation for the Rayleigh-Lamb modes of vibration of a plate", *J. Acoust. Soc. Am* **59**, pp. 215-216.
- [77] D. D. Zakharov (2010),  
 "Dirichlet-Neumann conditions and the orthogonality of three-dimensional guided waves in layered solids", *Comp. Math. Math. Phys.* **50**, pp. 1598-1612.
- [78] D. Martin, on line documentation of MELINA, <http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/>
- [79] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, J.-F. Mercier, and E. Redon (2011),  
 "Non-reflecting boundary conditions for acoustic propagation in ducts with acoustic treatment and mean flow ", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **86**, pp. 1360-1378.
- [80] D. Ségur, V. Baronian and L.Taupin (2012),  
 "Ultrasonics guided wave benchmark: CEA simulation for the scattering of guided waves in a stiffened isotropic plate", à paraître dans *Review of Progress in QNDE*, eds. D. O. Thompson and D. E. Chimenti, **31**, (AIP Conf. Proc., N.-Y.).
- [81] C. Geuzaine, and J.- F. Remacle, on line documentation and download of GMSH, <http://geuz.org/gmsh/>



## ANNEXE

Les différents termes de l'équation ( 5-53 ) sont explicités ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 a_0(\mathbf{u}^y, \mathbf{v}^y) = & C_{11} \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial x} \frac{\partial v_x^y}{\partial x} dx dz + C_{16} \left[ \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial x} \frac{\partial v_x^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial x} \frac{\partial v_y^y}{\partial x} dx dz \right] \\
 & + C_{15} \left[ \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial x} \frac{\partial v_x^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial z} \frac{\partial v_x^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial x} \frac{\partial v_x^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial x} \frac{\partial v_z^y}{\partial x} dx dz \right] \\
 & + C_{14} \left[ \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial z} \frac{\partial v_x^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial x} \frac{\partial v_y^y}{\partial z} dx dz \right] + C_{13} \left[ \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial z} \frac{\partial v_x^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial x} \frac{\partial v_z^y}{\partial z} dx dz \right] \\
 & + C_{56} \left[ \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial x} \frac{\partial v_x^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial z} \frac{\partial v_y^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial x} \frac{\partial v_y^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial x} \frac{\partial v_z^y}{\partial x} dx dz \right] \\
 & + C_{55} \left[ \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial z} \frac{\partial v_x^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial x} \frac{\partial v_x^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial x} \frac{\partial v_z^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial z} \frac{\partial v_z^y}{\partial x} dx dz \right] \\
 & + C_{45} \left[ \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial z} \frac{\partial v_x^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial x} \frac{\partial v_y^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial z} \frac{\partial v_y^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial z} \frac{\partial v_z^y}{\partial x} dx dz \right] \\
 & + C_{35} \left[ \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial z} \frac{\partial v_x^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial z} \frac{\partial v_z^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_x^y}{\partial z} \frac{\partial v_z^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial x} \frac{\partial v_z^y}{\partial z} dx dz \right] \\
 & + C_{66} \left[ \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial x} \frac{\partial v_y^y}{\partial x} dx dz \right] + C_{46} \left[ \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial z} \frac{\partial v_y^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial x} \frac{\partial v_y^y}{\partial z} dx dz \right] \\
 & + C_{36} \left[ \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial z} \frac{\partial v_y^y}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial x} \frac{\partial v_z^y}{\partial z} dx dz \right] + C_{44} \left[ \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial z} \frac{\partial v_y^y}{\partial z} dx dz \right] \\
 & + C_{34} \left[ \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial z} \frac{\partial v_y^y}{\partial z} dx dz + \int \int \frac{\partial u_y^y}{\partial z} \frac{\partial v_z^y}{\partial z} dx dz \right] + C_{33} \left[ \int \int \frac{\partial u_z^y}{\partial z} \frac{\partial v_z^y}{\partial z} dx dz \right],
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
a_1(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma) = & C_{16} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma \frac{\partial v_x^\gamma}{\partial x} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_x^\gamma}{\partial x} v_x^\gamma dx dz \right] + C_{14} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma \frac{\partial v_x^\gamma}{\partial x} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_x^\gamma}{\partial x} v_z^\gamma dx dz \right] \\
& + C_{12} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma \frac{\partial v_x^\gamma}{\partial x} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_x^\gamma}{\partial x} v_y^\gamma dx dz \right] + C_{66} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma \frac{\partial v_y^\gamma}{\partial x} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_y^\gamma}{\partial x} v_x^\gamma dx dz \right] \\
& + C_{56} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma \frac{\partial v_y^\gamma}{\partial z} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_y^\gamma}{\partial z} v_x^\gamma dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_x^\gamma}{\partial z} v_y^\gamma dx dz + \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma \frac{\partial v_z^\gamma}{\partial x} dx dz \right] \\
& + C_{25} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma \frac{\partial v_x^\gamma}{\partial z} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_x^\gamma}{\partial z} v_y^\gamma dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_z^\gamma}{\partial x} v_y^\gamma dx dz + \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma \frac{\partial v_z^\gamma}{\partial x} dx dz \right] \\
& + C_{45} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma \frac{\partial v_x^\gamma}{\partial z} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_x^\gamma}{\partial z} v_z^\gamma dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_z^\gamma}{\partial x} v_y^\gamma dx dz + \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma \frac{\partial v_z^\gamma}{\partial x} dx dz \right] \\
& + C_{46} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma \frac{\partial v_y^\gamma}{\partial x} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_y^\gamma}{\partial z} v_x^\gamma dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_y^\gamma}{\partial x} v_z^\gamma dx dz + \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma \frac{\partial v_y^\gamma}{\partial z} dx dz \right] \\
& + C_{26} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma \frac{\partial v_y^\gamma}{\partial x} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_y^\gamma}{\partial x} v_y^\gamma dx dz \right] + C_{24} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma \frac{\partial v_y^\gamma}{\partial z} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_y^\gamma}{\partial z} v_y^\gamma dx dz \right] \\
& + C_{44} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma \frac{\partial v_y^\gamma}{\partial z} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_y^\gamma}{\partial z} v_z^\gamma dx dz \right] + C_{36} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma \frac{\partial v_z^\gamma}{\partial z} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_z^\gamma}{\partial z} v_x^\gamma dx dz \right] \\
& + C_{23} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma \frac{\partial v_z^\gamma}{\partial z} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_z^\gamma}{\partial z} v_y^\gamma dx dz \right] + C_{34} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma \frac{\partial v_z^\gamma}{\partial z} dx dz - \int_{z \ x} \int_{z \ x} \frac{\partial u_z^\gamma}{\partial z} v_z^\gamma dx dz \right],
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
a_2(\mathbf{u}^\gamma, \mathbf{v}^\gamma) = & C_{66} \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma v_x^\gamma dx dz + C_{26} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma v_x^\gamma dx dz + \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma v_y^\gamma dx dz \right] + C_{46} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma v_x^\gamma dx dz + \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_x^\gamma v_z^\gamma dx dz \right] \\
& + C_{24} \left[ \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma v_z^\gamma dx dz + \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma v_y^\gamma dx dz \right] + C_{44} \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_z^\gamma v_z^\gamma dx dz + C_{22} \int_{z \ x} \int_{z \ x} u_y^\gamma v_y^\gamma dx dz.
\end{aligned}$$