



HAL
open science

Interactions hydrodynamiques lors du transport de particules en fluide newtonien et non newtonien

Antoine Despeyroux

► **To cite this version:**

Antoine Despeyroux. Interactions hydrodynamiques lors du transport de particules en fluide newtonien et non newtonien. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Arts et Métiers ParisTech, 2011. Français. NNT : 2011ENAM0029 . pastel-00658705

HAL Id: pastel-00658705

<https://pastel.hal.science/pastel-00658705>

Submitted on 11 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Génie énergétique "

présentée et soutenue publiquement par

Antoine DESPEYROUX

le 20 octobre 2011

**Interactions hydrodynamiques lors du transport de particules en fluide
newtonien et non newtonien**

Directeur de thèse : **Abdelhak AMBARI**

Jury

M. ALOUI Fethi, Professeur, Université de Valenciennes
M. MUTABAZI Innocent, Professeur, LOMC, Université du Havre
M. SOUHAR Mohamed, Professeur, LEMTA, INPL Nancy
M. AMBARI Abdelhak, Professeur, LAMPA, Arts et Métiers ParisTech, Centre d'Angers
M. BAKIR Farid, Professeur, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech, Centre de Paris
M. CHHABRA Raj P., Professeur, IIT Kanpur, Inde
M. FEUILLEBOIS François, Directeur de recherche CNRS, LIMSI, Orsay
M. GUILLAUMAT Laurent, Professeur, LAMPA, Arts et Métiers ParisTech, Centre d'Angers

Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

**T
H
È
S
E**

A mon père, qui m'a toujours soutenu.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe ECPS du LAMPA à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers d'Angers, grâce à l'aide d'une allocation de recherche de la région des Pays de la Loire.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur Abdelhak Ambari, qui m'a insufflé la passion de la mécanique des fluides et sans qui, aujourd'hui, ces quelques lignes ne seraient pas. Depuis le jour où j'ai franchi pour la première fois la porte de ce laboratoire en tant qu'élève-ingénieur découvrant la mécanique des fluides, jusqu'à l'accomplissement de plusieurs années de travail de thèse, il m'a toujours accompagné en tant que scientifique et en tant qu'ami. Je n'ai jamais eu à regretter ce choix tant il m'a apporté sur le plan professionnel comme sur le plan personnel. Pour tout cela, merci.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres de l'équipe au sein de laquelle j'ai été heureux de mener ma thèse et qui s'est agrandie au fil des années, Stéphane Champmartin qui m'a accompagné depuis le début, Aimad Oukhlef avec qui j'ai partagé toutes les situations de la vie quotidienne de "thésard", Nicolas Roussel, Olivier Rabreau, Guillaume Malvault, Vincent Couanet et Raducu Chermaneanu pour la vie et la bonne humeur qu'ils m'ont fait partager autour de discussions scientifiques, ainsi que tous les étudiants de l'ENSAM d'Angers qui m'ont appris autant que j'espère leur avoir appris.

Je souhaite aussi remercier en particulier le professeur Abderrahim Ben Richou de la Faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal (Maroc) pour son accueil chaleureux et sa patience afin de partager son savoir-faire en calcul numérique.

Je tiens à remercier également Rosemary Voss pour sa patience et ses conseils précieux lors de la relecture des articles en anglais.

Je remercie les Professeurs Fethi Aloui, Innocent Mutabazi et Mohamed Souhar qui se sont intéressés à mon travail de thèse en tant que rapporteurs, et les Professeurs Farid Bakir, Raj P. Chhabra, François Feuillebois et Laurent Guillaumat qui ont accepté de participer à ma soutenance de thèse en tant que membres du jury, pour l'attention qu'ils ont portée à ce travail et leurs conseils.

En outre, je tiens à remercier ma famille qui m'a soutenu pendant toutes ces années, et tout particulièrement mes parents Marie-Noëlle et Bruno, ma soeur Emmanuelle et mon frère Olivier qui m'ont accompagné, chacun à leur manière, jusqu'à la dernière minute de ma soutenance.

Enfin, je souhaite remercier tout spécialement Junlin Yuan qui, malgré la distance, est toujours restée présente à mes côtés. 谢谢 我的 明明。

Table des matières

Table des matières	iii
Liste des tableaux	vii
Table des figures	ix
Nomenclature	xvii
Introduction générale	xix
1 Etude bibliographique	1
1.1 En fluide newtonien	1
1.2 En fluide non newtonien	8
1.2.1 Rhéologie du fluide étudié	8
1.2.2 Influence de la loi de puissance sur la force hydrodynamique en milieu infini	10
1.2.3 Influence de la loi de puissance sur les interactions hydrodynamiques	13
2 Force subie par une particule en milieu illimité dans un fluide d’Ostwald	15
2.1 Introduction	15
2.2 Estimation de la traînée par la méthode de dissipation minimale	17
2.3 Méthodes numériques	21
2.3.1 Formulation mathématique	21
2.3.2 Approche numérique	24
2.3.3 Méthode des volumes finis	24
2.4 Résultats et discussion	24
2.4.1 Cas d’une particule sphérique	24
2.4.2 Cas d’une particule cylindrique	33
2.5 Paradoxes de Whitehead et de Stokes	41
2.6 Conclusion	42
3 Sédimentation et transport de particules sphériques	45
3.1 Introduction	45

3.2	Approche numérique et asymptotique	46
3.2.1	Méthode numérique	46
3.2.2	Maillage dynamique	47
3.2.3	Méthode asymptotique	47
3.3	Résultats numériques et discussions	49
3.3.1	Force de traînée subie par une sphère dans un fluide d'Ostwald en milieu confiné	49
3.3.2	Effet du confinement sur la vitesse de sédimentation dans un tube	55
3.4	Effet du confinement sur le déficit de vitesse de transport	58
3.4.1	"Écoulement de Poiseuille" et méthode de superposition	58
3.4.2	Résultats et discussion	62
3.5	Conclusion	64
4	Sédimentation et transport de particules cylindriques	65
4.1	Introduction	65
4.2	Approche numérique et asymptotique	68
4.2.1	Méthode numérique	68
4.2.2	Maillage dynamique	69
4.2.3	Méthode asymptotique	69
4.3	Sédimentation dans un fluide d'Ostwald	70
4.3.1	Particules cylindriques dans un écoulement uniforme	70
4.3.2	Effet du confinement sur la vitesse de sédimentation	75
4.4	Effet du confinement sur la vitesse de transport d'une particule cylindrique	78
4.4.1	"Écoulement de Poiseuille" et méthode de superposition	79
4.4.2	Résultats et discussion	82
4.5	Conclusion	83
5	Force subie par une sphère se déplaçant vers un plan	85
5.1	Introduction	85
5.2	Formulation et approche numérique	87
5.3	Méthode asymptotique	89
5.4	Résultats et discussion	92
5.4.1	Fluide newtonien	92
5.5	Fluide non newtonien	94
5.6	Conclusion	101
6	Force subie par un cylindre se déplaçant vers un plan	103
6.1	Introduction	103
6.2	Formulation et approche numérique	105
6.3	Méthode asymptotique	106
6.4	Résultats et discussion	107
6.4.1	Fluide newtonien	107
6.5	Fluide non newtonien	110
6.6	Conclusion	117

Conclusion générale	119
Bibliographie	121
Annexes	128
A Méthode de dissipation minimale d'énergie	129
B Maillage et méthode numérique	131
B.1 Méthode des singularités	131
B.2 Procédure de maillage	134
B.3 Formulation (ψ, ω) et conditions aux limites dans l'espace (X, Y)	134
B.4 Technique de calcul	137
C Calcul asymptotique de la force subie par une sphère se déplaçant vers un plan	141
D Articles	145
D.1 The hydrodynamic interaction effects on the settling and the transportation of a sphere in power-law fluids	146
D.2 Wall effects on the transportation of a cylindrical particle in power-law fluids	159
D.3 The drainage of non-Newtonian fluids in the quasi-steady motion of a sphere towards a plane	169
D.4 Slow motion of a sphere towards a plane through confined non-Newtonian fluid	181

Liste des tableaux

- 1.1 Coefficients de la formule d'interpolation (1.15) [1]. 7
- 2.1 Comparaison entre les résultats de $\lambda(n, k = 0)$ 30
- 2.2 Comparaison entre différents résultats, obtenus numériquement et par
l'application du théorème de dissipation minimale, de $\lambda(n, k = 0)$ 40

Table des figures

1.1	Cette figure donne le facteur de correction de la force subie par une sphère se translatant parallèlement à un plan, et normalisée par la force de Stokes en milieu infini. Les résultats expérimentaux ont été obtenus à $Re = 10^{-3}$ avec un rhéomètre à bille en sustentation magnétique [2]. Les résultats expérimentaux sont comparés à ceux de O'Neill [3] et à ceux de Faxén [4] : $F_x = 6\pi\mu a U_x \left[1 - \frac{9}{16}k + \frac{k^3}{8} - \frac{45k^4}{256} - \frac{k^5}{16}\right]^{-1}$ où $k = a/b$ avec $b = d + a$ et d la distance entre la sphère et le plan. L'effet de saturation confondu avec la formule de Faxén est fortuit.	4
1.2	Schéma de la sphère se déplaçant vers un plan.	4
1.3	Effet du confinement frontal sur la force de traînée subie par une sphère se déplaçant vers un plan en fluide newtonien. Comparaison entre les résultats numériques, analytiques et asymptotiques.	5
1.4	Comparaison des résultats obtenus expérimentalement et numériquement pour le facteur de correction de la force de traînée subie par une sphère en translation uniforme dans l'axe d'un tube.	6
1.5	Evolution de la contrainte de cisaillement τ_{xy} en fonction du gradient de vitesse $\dot{\gamma}_{xy}$ pour différents comportements non newtoniens.	8
1.6	Evolution de la viscosité apparente en fonction du gradient de vitesse mesurée pour une solution de polyoxéthylène (résultats expérimentaux).	9
1.7	Comparaison entre les différents résultats expérimentaux de $\lambda(n, k = 0)$ donnés par [5, 6, 7, 8, 9].	11
1.8	Evolution de la force de traînée subie par un cylindre dans un fluide rhéofluidifiant dans le cas où le paradoxe de Stokes disparaît.	12
1.9	Comparaison des résultats obtenus pour $\lambda(n, k = 0)$ par différents auteurs dans le cas d'une sphère.	12
2.1	Schéma représentant le mouvement uniforme d'une particule sphérique (a) et cylindrique (b)	16
2.2	Evolution non monotone de la force de traînée subie par une sphère, obtenue à l'aide de la méthode variationnelle quand le fluide devient de plus en plus rhéofluidifiant ($n < 1$).	19
2.3	Evolution de la force de traînée subie par un cylindre dans un fluide rhéofluidifiant dans le cas où le paradoxe de Stokes disparaît.	20

2.4	Comparaison des résultats obtenus pour $\lambda(n, k = 0)$ par différents auteurs.	21
2.5	Influence du confinement sur le passage au régime inertiel dans le cas d'une sphère.	25
2.6	Isoviscosité $\mu_{ap}/(m(U_0/2a)^{n-1})$ extraite de la viscosité inhomogène dans le plan méridien d'une sphère en mouvement uniforme suivant l'axe d'un tube : (a) $k = 10^{-6}$, $n = 0.6$, (b) $k = 0.29$, $n = 0.6$, (c) $k = 10^{-6}$, $n = 1.4$, (d) $k = 0.29$, $n = 1.4$	26
2.7	Influence de la rhéologie du fluide sur l'apparition des effets inertiels en fonction du confinement : (a) $k = 10^{-6}$, (b) $k = 10^{-3}$	27
2.8	Evolution de la force de traînée subie par une sphère dans un fluide en loi de puissance et influence du confinement en régime non inertiel. . .	29
2.9	Comparaison des différents résultats obtenus pour $\lambda(n, k = 0)$ par différents auteurs avec ceux obtenus dans ce travail.	30
2.10	(a) Contributions de pression et de viscosité à la force de traînée totale subie par une sphère, (b) Rapport des forces de pression et de viscosité subies par une sphère.	31
2.11	Influence du confinement sur l'apparition du régime inertiel pour un cylindre.	34
2.12	Isoviscosité $\mu_{ap}/(m(U_0/2a)^{n-1})$ extraite de la viscosité inhomogène représentée dans une coupe transversale du cylindre : (a) $k = 10^{-6}$, $n = 0.5$, (b) $k = 0.44$, $n = 0.5$, (c) $k = 10^{-6}$, $n = 1.4$, (d) $k = 0.44$, $n = 1.4$	35
2.13	Influence de la rhéologie du fluide sur l'apparition des effets d'inertie en fonction du confinement : (a) $k = 10^{-6}$, (b) $k = 10^{-3}$	36
2.14	Evolution de la force de traînée subie par un cylindre en fluide d'Ostwald et influence du confinement en régime non inertiel.	38
2.15	(a) Contributions de pression et de viscosité à la force de traînée totale subie par un cylindre, (b) Rapport des forces de pression et de viscosité subies par un cylindre.	39
2.16	Facteur de correction de la force de traînée subie par une sphère et un cylindre dans un milieu infini rempli d'un fluide d'Ostwald montrant les valeurs critiques de n à partir desquelles les paradoxes de Whitehead et de Stokes prennent place.	41
2.17	Champ de vitesse au sein d'un milieu infini rempli d'un fluide en loi de puissance et évolution de la longueur d'écran hydrodynamique ξ en fonction de n : (a) sphère, (b) cylindre	42
3.1	Schéma représentant le transport d'une particule sphérique par un "écoulement de type Poiseuille" dans un fluide d'Ostwald.	46
3.2	Exemple de maillage utilisé avec la technique de maillage dynamique ($k = 0.29$).	47
3.3	Schéma du domaine annulaire de lubrification entre la sphère et le tube, où le backflow prend place.	48

3.4	Evolution du facteur de correction numérique de la force de traînée $\lambda_+(n, k)$ subie par une sphère au sein d'un milieu confiné rempli d'un fluide en loi de puissance, et concordance avec les résultats asymptotiques. [formule (3.5)].	49
3.5	Isovorticité réduite $\omega_+ = \omega U_0/a$, montrant la localisation des contraintes hydrodynamiques.	50
3.6	Evolution des contributions à la force de traînée subie par une sphère dans un milieu confiné rempli d'un fluide en loi de puissance (résultats numériques et asymptotiques) : (a) contribution de la pression $\lambda_{p+}(n, k)$ [formule (3.6)], (b) contribution de la viscosité $\lambda_{v+}(n, k)$ [formule (3.7)], (c) rapport des deux contributions $R(n, k) = \frac{F_p(n,k)}{F_v(n,k)}$ [formule (3.8)]. . .	52
3.7	Comparaison des exposants $f(n)$ et $g(n)$ du comportement en loi de puissance des différentes composantes de la force totale obtenus numériquement avec ceux obtenus asymptotiquement : (a) force de traînée totale et composante de pression, (b) composante de viscosité.	53
3.8	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour des valeurs de k faibles et modérées.	54
3.9	Evolution de la vitesse de sédimentation atteinte par différentes sphères dans un tube donné rempli d'un fluide en loi de puissance, en fonction de leur confinement k : (a) cas des fluides rhéofluidifiants ($n < 1$), (b) cas des fluides rhéoépaississants ($n > 1$). Les deux figures montrent l'existence d'un rayon critique d'une sphère pour laquelle la vitesse de sédimentation est maximale.	56
3.10	(a) Diminution monotone du rayon critique de la sphère pour laquelle la vitesse de sédimentation est maximale, en fonction de l'indice de fluidité n , (b) Mise en évidence d'une vitesse de sédimentation maximale pour $n \approx 1$ ($n \approx 0.75$).	57
3.11	Evolution de la force de traînée subie par une sphère soumise à "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, et concordance avec les résultats asymptotiques [formule (3.14)].	59
3.12	Evolution des contributions à la force totale subie par une sphère soumise à "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance (résultats numériques et asymptotiques) : (a) contribution de la pression $\lambda_{p+}^{Pois}(n, k)$ [formule (3.15)], (b) contribution de la viscosité $\lambda_{v+}^{Pois}(n, k)$ [formule (3.16)], (c) rapport des deux contributions $R^{Pois}(n, k) = \frac{F_p^{Pois}(n,k)}{F_v^{Pois}(n,k)}$ [formule (3.8)].	61
3.13	Evolution de la vitesse de transport atteinte par une particule libre non pesante, lors de son transport par "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé, en fonction de son confinement. Cette figure montre que le déficit de la vitesse de transport augmente avec l'indice de fluidité et le confinement.	62

3.14	Evolution de la vitesse de transport atteinte par une particule libre non pesante, lors de son transport par "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé, en fonction de l'indice de fluidité n	63
4.1	Schéma représentant le transport d'une particule cylindrique transportée par un "écoulement de type Poiseuille" entre deux plans, suivant son plan de symétrie.	66
4.2	Influence du confinement sur le nombre de Reynolds critique marquant l'apparition de l'inertie : (a) pour $n = 0.6$, (b) pour $n = 0.9$, (c) pour $n = 1.4$	68
4.3	Schéma du domaine de lubrification.	70
4.4	Evolution du facteur de correction numérique de la force de traînée $\lambda(n, k)$ subie par une particule cylindrique au sein d'un milieu confiné rempli d'un fluide en loi de puissance, et concordance avec les résultats asymptotiques. [formule (4.5)].	71
4.5	Evolution des contributions à la force de traînée subie par une particule cylindrique dans un milieu confiné rempli d'un fluide en loi de puissance (résultats numériques et asymptotiques) : (a) contribution de la pression $\lambda_p(n, k)$ [formule (4.6)], (b) contribution de la viscosité $\lambda_v(n, k)$ [formule (4.7)], (c) rapport des deux contributions $R(n, k) = \frac{F_p(n, k)}{F_v(n, k)}$ [formule (4.8)].	73
4.6	Comparaison des exposants $f(n)$ et $g(n)$ du comportement en loi de puissance des différentes composantes de la force totale obtenus numériquement avec ceux obtenus asymptotiquement : (a) force de traînée totale et composante de pression, (b) composante de viscosité.	74
4.7	Evolution de la vitesse de sédimentation prise par différentes particules cylindriques dans un canal donné, en fonction de leur confinement k : (a) quand le paradoxe de Stokes disparaît (b) quand le paradoxe de Stokes prend place.	76
4.8	(a) Diminution monotone du rayon critique de la particule cylindrique pour laquelle la vitesse de sédimentation est maximale, en fonction de l'indice de fluidité n , (b) Mise en évidence d'une vitesse de sédimentation maximale pour $n \approx 0.55$	77
4.9	Evolution de la force de traînée subie par un cylindre soumis à "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, et concordance avec les résultats asymptotiques [formule (4.16)].	80
4.10	Evolution des contributions à la force totale subie par une particule cylindrique soumise à "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance (résultats numériques et asymptotiques) : (a) contribution de la pression $\lambda_p^{Pois}(n, k)$ [formule (4.17)], (b) contribution de la viscosité $\lambda_v^{Pois}(n, k)$ [formule (4.18)], (c) rapport des deux contributions $R^{Pois}(n, k) = \frac{F_p^{Pois}(n, k)}{F_v^{Pois}(n, k)}$ [formule (4.8)].	81

4.11	Evolution de la vitesse de transport atteinte par une particule cylindrique libre non pesante, lors de son transport par "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé, en fonction de son confinement. Cette figure met en évidence l'augmentation du déficit de la vitesse de transport avec l'indice de fluidité et le confinement.	82
4.12	Evolution de la vitesse de transport atteinte par une particule cylindrique libre non pesante, lors de son transport par "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé, en fonction de l'indice de fluidité n	83
5.1	Définition des paramètres géométriques et dynamiques dans le cas d'une sphère en translation axiale vers le fond d'un tube cylindrique.	87
5.2	Exemple de maillage utilisé sous FLUENT. Le domaine correspondant au maillage structuré est déformé par le mouvement du plan vers la sphère, tandis que le domaine correspondant au maillage non structuré reste fixe et permet de maintenir l'homogénéité de la taille des cellules.	89
5.3	Champ de vitesse numérique dans l'interstice entre la sphère et le plan lorsque la sphère est au voisinage du plan ($\varepsilon = 10^{-2}$, $k = 10^{-2}$, $Re_n = 10^{-3}$) : (a) $n = 1$, (b) $n = 0.8$, (c) $n = 1.4$	90
5.4	Effet du confinement latéral sur le facteur de correction frontal de la force de traînée subie par une sphère se déplaçant axialement vers le fond d'un tube rempli d'un fluide newtonien. Les lignes discontinues correspondent à la valeur du plateau $\lambda(k)$	92
5.5	Influence de l'inertie sur la force de traînée subie par une sphère se déplaçant vers un plan ($k = 0.29$), et comparaison avec la relation asymptotique de Cox et Brenner [formule (5.15)] pour $Re = 1, 10$ et 100	93
5.6	Evolution de la traînée subie par une sphère approchant un plan en milieu presque illimité, en fluide non newtonien. Comparaison entre les résultats numériques (points) et asymptotiques (lignes).	94
5.7	Influence de l'indice de fluidité sur la force hydrodynamique subie par une sphère approchant le fond plat d'un tube rempli d'un fluide en loi de puissance, et comparaison entre les résultats numériques (points) et asymptotiques (lignes) : (a) $k = 0.29$, (b) $k = 0.44$	95
5.8	Absence de l'influence du confinement latéral sur la force de traînée subie par une sphère dans un fluide en loi de puissance, en régime de lubrification, pour deux indices de fluidité : (a) $n = 0.7$, (b) $n = 1.4$	96
5.9	Comparaison des distributions de pression numériques et asymptotiques dans l'interstice entre la sphère et le plan, pour différents indices de fluidité $n = 0.8$, $n = 1$ et $n = 1.4$, pour $Re_n = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$	97

5.10	Distribution en volume de la pression réduite $(p(r_+) - p_\infty) / m(U/2a)^n$ dans l'interstice entre la sphère et le plan montrant l'apparition d'un point selle dans l'axe pour $Re = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$: (a) $n = 1$, (b) $n = 0.8$, (c) $n = 1.4$	98
5.11	Comparaison des exposants $\alpha(n)$ du comportement en loi de puissance de la traînée en régime de lubrification obtenus numériquement et asymptotiquement.	99
5.12	La partie grisée correspond à la partie de la sphère sur laquelle s'exerce 95% de la force de traînée qu'elle subit lorsqu'elle se déplace vers un plan : (a) cas du fluide newtonien pour trois valeurs de la distance entre la sphère et le plan $\varepsilon = 0.01, 0.1, 1$; (b) cas du fluide en loi de puissance pour une distance entre la sphère et le plan donnée $\varepsilon = 0.01$, et trois indices de fluidité $n = 0.8, 1, 1.4$ correspondant respectivement aux fluides pseudoplastique, newtonien et dilatant.	100
5.13	Lignes de courant de l'écoulement dans le repère lié à la sphère pour différents indices de fluidité ($Re = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$) : (a) $n = 0.8$, (b) $n = 1$, (c) $n = 1.4$	101
6.1	Paramètres géométriques et dynamiques dans le cas d'un cylindre en translation dans le plan de symétrie vers le fond d'une cuve parallélépipédique très allongée.	104
6.2	Champ de vitesse de type Poiseuille dans l'interstice entre le cylindre et le plan lorsque le cylindre est au voisinage de ce dernier.	106
6.3	Comportements asymptotiques de la force de traînée subie par un cylindre approchant un plan en milieu infini dans un fluide newtonien et comparaison avec les résultats numériques ($k = 10^{-2}$).	108
6.4	Effet du confinement latéral sur le coefficient de correction frontal de la traînée subie par un cylindre se déplaçant vers le fond d'un conteneur rempli d'un fluide newtonien. Les lignes discontinues correspondent à la valeur du plateau $\lambda(k)$	108
6.5	Influence de l'inertie sur la force de traînée subie par un cylindre se déplaçant vers un plan ($k = 0.29$) pour $Re = 10^{-3}, 1, 10$ et 40	109
6.6	Comparaison de la distribution de pression latérale dans l'interstice entre le cylindre et le plan en régime de lubrification, calculée numériquement (points) et asymptotiquement [lignes correspondant à la formule (6.7)], en fluide newtonien.	109
6.7	Evolution de la force hydrodynamique subie par un cylindre approchant un plan en milieu presque illimité, en fluide non newtonien. Comparaison entre les résultats numériques (points) et asymptotiques (lignes).	111
6.8	Influence de l'indice de fluidité sur la force de traînée subie par un cylindre approchant le fond plat d'un conteneur rempli d'un fluide en loi de puissance, et comparaison entre les résultats numériques (points) et asymptotiques (lignes) : (a) $k = 0.29$, (b) $k = 0.44$	112

6.9	Absence de l'influence du confinement latéral sur la force de traînée subie par un cylindre dans un fluide en loi de puissance, en régime de lubrification, pour deux indices de fluidité : (a) $n = 0.8$, (b) $n = 1.4$. . .	113
6.10	Comparaison des distributions de pression numériques et asymptotiques dans l'interstice entre le cylindre et le plan, pour $Re_n = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $k = 10^{-2}$ et différents indices de fluidité : (a) $n = 0.8$ et (b) $n = 1.4$. . .	114
6.11	Distribution en volume de la pression réduite $(p(x_+) - p_\infty) / m(U/2a)^n$ dans l'interstice entre le cylindre et le plan montrant l'apparition d'un point selle dans l'axe pour $Re = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$: (a) $n = 1$, (b) $n = 0.8$, (c) $n = 1.4$	115
6.12	Comparaison des exposants $\alpha(n)$ du comportement en loi de puissance de la force de traînée en régime de lubrification obtenus numériquement (points) et asymptotiquement (ligne).	116
6.13	La partie sombre correspond à la partie du cylindre sur laquelle s'exerce 95% de la force hydrodynamique qu'il subit lors de son approche du plan : (a) concerne le fluide newtonien pour trois valeurs de la distance entre le cylindre et le plan $\varepsilon = 0.01, 0.1, 1$; (b) concerne le fluide d'Ostwald pour une distance entre le cylindre et le plan donnée $\varepsilon = 0.01$, et trois indices de fluidité $n = 0.8, 1, 1.4$ correspondant respectivement aux fluides pseudoplastique, newtonien et dilatant.	117
B.1	Géométrie utilisée pour le calcul de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible parfait autour d'une particule.	131
B.2	Exemple de maillage orthogonal pour différents confinements : (a) $k = 0.5$, (b) $k = 0.98$ correspondant aux lignes de courant et équipotentielles.	132
B.3	Segment inducteur $M_1^j M_2^j$	132
B.4	Domaine de calcul de l'écoulement d'un fluide parfait autour d'une particule et coordonnées (X, Y)	134
B.5	Portion du maillage.	138

Nomenclature

Symboles

a	rayon de la sphère, m
b	rayon du tube, m
C_d	coefficient de traînée, sans dimension
$\underline{\underline{D}}$	tenseur des taux de déformation, 1/s
\mathbf{e}_x	vecteur unitaire dans la direction x , sans dimension
\mathbf{e}_z	vecteur unitaire dans la direction z , sans dimension
\mathbf{F}	Force de traînée subie par une particule sphérique (dans la direction z) ou cylindrique (dans la direction x), N
d	distance minimale entre la particule et le plan, m
k	= a/b , coefficient de confinement latéral, sans dimension
m	consistance du fluide, Pa.s ⁿ
n	index de fluidité du fluide en loi de puissance, sans dimension
p	pression, Pa
r	coordonnée radiale, m
r_+	= r/a , coordonnée radiale réduite, sans dimension
Re	nombre de Reynolds, sans dimension
Re_n	nombre de Reynolds généralisé, sans dimension
U, U_0	vitesse de la particule, m/s
x	coordonnée longitudinale, m
z	coordonnée axiale, m

Symboles grecs

$\dot{\gamma}$	gradient de vitesse, 1/s
δ	facteur de correction frontal de la force de traînée subie par une particule approchant un plan, sans dimension
ε	= d/a , distance normalisée entre la particule et le plan, sans dimension
ε_1	= $a\varepsilon + a(1 - \cos\theta)$, distance courante entre la sphère et le plan, m
θ	coordonnée angulaire, rad
λ	facteur de correction latéral de la force de traînée subie par une particule en translation uniforme en milieu infini ou confiné, sans dimension
μ	viscosité du fluide newtonien, Pa.s
μ_{ap}	viscosité apparente du fluide en loi de puissance, Pa.s
ν	viscosité cinématique, m ² /s
ρ	masse volumique du fluide, kg/m ³
$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur des contraintes, Pa
$\underline{\underline{\tau}}$	tenseur des contraintes visqueuses, Pa

Introduction générale

Sous des aspects variés les suspensions sont omniprésentes aussi bien dans la nature que dans l'industrie (dans les écoulements fluviaux, les écoulements de boues, les gouttes de pluie, les écoulements sanguins, les peintures, les encres, les lits fluidisés, l'injection de matériaux composites de microsphères ou de fibres courtes, la papeterie, la filtration, la catalyse...). Celles-ci diffèrent par la nature de la phase du fluide qui les transporte (liquide ou gaz) ou par la nature de la phase en suspension (solide, liquide non miscible sous forme de gouttes, gaz sous forme de bulles). Elles peuvent être classées par la nature de leur dispersion (suspension, colloïde, émulsion, aérosols,...), par la dimension des particules ($< 0.1\mu m$: browniennes, $> 1\mu m$: non browniennes)... Dans le cas des suspensions dans les liquides, ce dernier peut avoir un comportement newtonien ou non newtonien. Le problème général des suspensions est la prédiction de leur comportement macroscopique à partir de la description détaillée du comportement de chacun des éléments qui les constituent. Dans le cas des suspensions de particules sphériques ou fibres courtes dans un fluide newtonien ou non newtonien, c'est principalement leur dynamique en interactions hydrodynamiques qui est à considérer aussi bien en régime semi-dilué qu'en régime concentré. Dans tous les cas, nous sommes concernés par l'écoulement d'un fluide incompressible newtonien ou non newtonien à faible nombre de Reynolds autour de ces particules en suspension. Les particules en question dans ce travail sont a priori non browniennes (c'est à dire de rayon supérieur à $1\mu m$).

Ces interactions hydrodynamiques, qui sont de longue portée dans le cas newtonien (car le champ de vitesse varie en $1/r$), affectent fortement les forces hydrodynamiques subies par chacune des particules et par conséquent la rhéologie de la suspension, et partant, sa dynamique. Cependant, dans le cas non newtonien, le comportement de ces suspensions dépend fortement de la rhéologie du fluide porteur qui peut affecter la longueur d'écran hydrodynamique autour de chacune des particules, rendant les interactions hydrodynamiques soit très faibles dans le cas où l'indice de fluidité $n < n_{cr}$, ou très fortes dans le cas où $n \geq n_{cr}$. La valeur de n_{cr} dépend de la dimensionnalité de la particule, $n_{cr} = 2$ pour une sphère (3D) et $n_{cr} = 1$ pour un cylindre (2D). Quant au cas des fluides viscoélastiques, qui peuvent entraîner des structurations particulières dans la suspension en fonction de la nature de l'écoulement auquel elle est soumise, ceux-là ne seront pas traités dans le cadre de ce mémoire. Néanmoins, le caractère rhéofluidifiant ou rhéoépaississant sera considéré dans le cadre d'un fluide de type Ostwald. Afin de garder une homogénéité du travail présenté, nous ne donnerons pas l'en-

semble de nos résultats qui ont porté sur d'autres sujets connexes, et qui ont fait l'objet de notre part de communications dans des congrès nationaux ou internationaux [10, 11, 12, 13, 14, 15].

Ainsi, la première partie de ce mémoire (Chapitre 2) est dédiée à la détermination de la force de type Stokes dans le cas des fluides de type loi de puissance en milieu infini. En effet, il s'est avéré d'après la bibliographie que la solution dans de telles conditions n'était pas encore disponible à cause des artefacts liés à l'apparition d'effets inertiels dans le cas des faibles confinements. En effet, nous allons montrer que les effets d'inertie sont liés à l'apparition du paradoxe de Whitehead dans le cas des fluides ayant un indice de fluidité $n \geq 2$ pour une particule sphérique. Par contre, dans le cas d'une particule cylindrique, nous montrerons que le paradoxe de Stokes disparaît pour les fluides rhéofluidifiants, mais prend place à partir du cas newtonien ($n \geq 1$). Dans ce cas aussi, la proximité de ce point critique rend le problème très sensible aux effets d'inertie. En prenant soin de nous assurer de l'absence d'inertie, nous allons montrer pourquoi les résultats de nombreux autres chercheurs qui ont étudié ce problème avant nous avaient manqué de précision. La partie deux (Chapitres 3 et 4) est entièrement consacrée aux effets du confinement latéral sur le mouvement et le transport des particules respectivement sphériques et cylindriques dans des fluides non newtoniens de type Ostwald. La troisième partie (Chapitres 5 et 6) est consacrée aux effets des confinements frontaux qui contrôlent la dynamique d'agrégation des particules respectivement sphériques et cylindriques. D'autres applications aux machines dynamiques à force de surface consacrées à la nanorhéologie sont aussi envisagées.

Chapitre 1

Etude bibliographique sur les interactions hydrodynamiques

1.1 En fluide newtonien

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction générale, les interactions hydrodynamiques, étant de longue portée, jouent un rôle crucial dans la dynamique des suspensions sphériques ou cylindriques (fibres). En fait, lorsqu'une particule de rayon a se déplace dans un fluide newtonien en régime de Stokes (c'est à dire non inertiel), celle-ci subit de la part du fluide un torseur hydrodynamique qui se décompose en une force \vec{F} et un couple $\vec{\Gamma}$, pouvant se déduire de la cinématique de cette particule, c'est à dire de sa vitesse de déplacement \vec{U} et de sa vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ par le biais d'une matrice de résistance $\underline{\underline{M}}$. La linéarité de cette relation provient de celle de la loi de comportement du fluide newtonien et de la linéarité de son régime d'écoulement (voir [16]).

$$\begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{\Gamma}/a \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{\Omega}a \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Cette matrice de résistance $\underline{\underline{M}}$ est symétrique [16]. Ainsi, en l'absence d'interactions hydrodynamiques, seuls les éléments diagonaux de cette matrice en milieu infini sont non nuls. Ils ont été déterminés, dans le cas de la sphère, par Stokes [17, 18] :

$$F_i = -6\pi\mu a U_i \quad (1.2)$$

$$\Gamma_i = -8\pi\mu a^3 \Omega_i \quad (1.3)$$

Afin d'étendre ces résultats en régime inertiel, Whitehead [19] a employé une technique de perturbation, dans laquelle le champ de vitesse solution des équations de Stokes \mathbf{u}_0 est utilisé pour approcher les termes inertiels des équations de Navier-Stokes. Cette technique permet ainsi de n'avoir plus qu'un système d'équations linéaires à résoudre :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 &= -\nabla p_1 + \mu \nabla^2 \mathbf{u}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 &= 0 \end{aligned}$$

où $\mathbf{u}_1|_{r=a} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{u}_1|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \mathbf{U}$. Les résultats donnés par cette méthode peuvent être étendus aux termes d'ordres supérieurs par un processus itératif. Cependant, Whitehead a trouvé qu'il n'existe pas de solution de \mathbf{u}_1 capable de satisfaire la condition d'écoulement uniforme à l'infini, ce qui constitue le paradoxe de Whitehead. Oseen [20] a montré que ce paradoxe provient du fait que les termes inertiels ne sont plus négligeables à de grandes distances de la sphère, et que le champ de vitesse donné par Stokes n'est alors plus une approximation valable. Afin de contourner cette difficulté, Oseen a proposé d'approcher le terme inertiel $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ par le terme $\rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}$ où \mathbf{U} est la vitesse de l'écoulement en champ lointain. L'extension de la solution de Stokes au régime faiblement inertiel est donc donnée par la résolution des équations suivantes, appelées équations d'Oseen :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

La solution d'Oseen ainsi obtenue est :

$$F_{Oseen}(Re) = -6\pi\mu a U \left[1 + \frac{3}{16} Re + O(Re^2) \right] \quad (1.4)$$

Complétant l'approximation d'Oseen (1.4) (linéarisation du terme convectif) par l'utilisation de la méthode des développements asymptotiques raccordés, Proudman et Pearson [21] ont donné la force subie par la sphère en mouvement de translation, tenant compte des premiers termes dus à l'inertie :

$$F_{Proudman}(Re) = -6\pi\mu a U \left[1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9}{160} Re^2 \ln Re + O(Re^2) \right] \quad (1.5)$$

où $Re = \rho U 2a / \mu$ est le nombre de Reynolds. Par contre, dans le cas d'un cylindre de longueur infinie en translation en milieu illimité, nous rappelons que, dans l'approximation du régime de Stokes, il n'est pas possible d'obtenir de solution (ceci constitue le paradoxe de Stokes). En effet, les équations du mouvement en régime de Stokes mènent à l'équation biharmonique $\nabla^4 \psi = 0$ dont la solution au voisinage du cylindre est donnée par une fonction de courant de la forme :

$$\psi = C \sin \theta \left(r \log r - \frac{1}{2} r + \frac{1}{2r} \right)$$

Mais il n'existe pas de valeur de C pour laquelle $\psi \sim r \sin \theta$ lorsque r est grand, et partant, la force par unité de longueur sur le cylindre tend vers zéro quand $Re \rightarrow 0$. Cependant, d'après les résultats de Batchelor [22], Russel *et al.* [23] et Stalnakier et Hussey [24] qui utilisent la théorie des "slender body", le paradoxe de Stokes disparaît pour un cylindre de rayon a et de longueur l finie. Ainsi, la traînée varie plus lentement que la longueur du cylindre l ($F \propto l^\beta$ avec $\beta < 1$). Dans ces conditions, la force de traînée est donnée par :

$$F = 4\pi\mu l U \epsilon (1 - 0.193\epsilon + 0.215\epsilon^2 + 0.97\epsilon^3) \quad (1.6)$$

avec $\epsilon = [\ln(l/a)]^{-1}$. Le même résultat a été obtenu par Keller et Rubinow [25]. Ce dernier résultat montre que la force subie par un cylindre par unité de longueur tend vers zéro pour un cylindre infini, autrement la force subie par un cylindre évolue moins vite que sa longueur [1]. Mais, dans l'approximation d'Oseen, la force subie par un cylindre est donnée par Lamb [26] :

$$F_{Lamb} = 4\pi\mu U/[1/2 - \gamma + \ln(8/Re)] \quad (1.7)$$

avec $\gamma = 0.5772\dots$ la constante d'Euler. Cependant, il est important de noter que le paradoxe de Stokes disparaît dans le cas d'un confinement même partiel.

Dans le cas de la rotation d'un cylindre en milieu infini, le couple est donné par la relation suivante (voir par exemple [18]) :

$$\Gamma = 4\pi\mu a^2\Omega \quad (1.8)$$

En régime de Stokes, en présence d'interactions hydrodynamiques soit entre deux particules, soit entre une particule et des parois, la matrice se remplit et tous les termes commencent à dépendre des différentes configurations géométriques liées aux différents confinements de la particule. Ces interactions hydrodynamiques peuvent se décomposer en interactions élémentaires qui, dans la majorité des cas, sont couplées. Dans le cas de l'interaction entre deux particules sphériques, la solution exacte a été donnée par Stimson et Jeffery [27] dans le cas où elles se déplacent l'une par rapport à l'autre axialement (d'autres situations d'interactions hydrodynamiques entre deux sphères ont été étudiées par Lin *et al.* [28] et Jeffrey et Onishi [29]). Pour cela, ils ont utilisé les coordonnées bipolaires. Mais dans le cas de l'interaction entre une particule et les parois, nous pouvons citer la solution exacte de l'interaction d'une particule sphérique se déplaçant parallèlement à un plan, donnée par O'Neill [3] (voir figure 1.1) et Chaoui et Feuillebois [30], ou se déplaçant perpendiculairement à celui-ci [31,32] et dont le facteur de correction frontal est donné par :

$$\frac{F}{6\pi\mu aU} = \frac{4}{3} \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left[\frac{2 \sinh(2n+1)\alpha + (2n+1) \sinh 2\alpha}{4 \sinh^2(n+\frac{1}{2})\alpha - (2n+1)^2 \sinh^2 \alpha} - 1 \right] \quad (1.9)$$

avec $\alpha = \cosh^{-1}(1 + \epsilon)$ et $\epsilon = d/a$ la distance entre la sphère et le plan réduite par le rayon de la sphère (voir figure 1.2). Sur la figure 1.3, on peut voir l'évolution de ce coefficient de correction comparativement à ses développements asymptotiques en régime de lubrification :

$$\delta(\epsilon) = \epsilon^{-1} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right) + 0.9712\epsilon \right) \quad (1.10)$$

Au premier ordre, on retrouve la formule de Taylor :

$$\delta(\epsilon) = \epsilon^{-1}$$

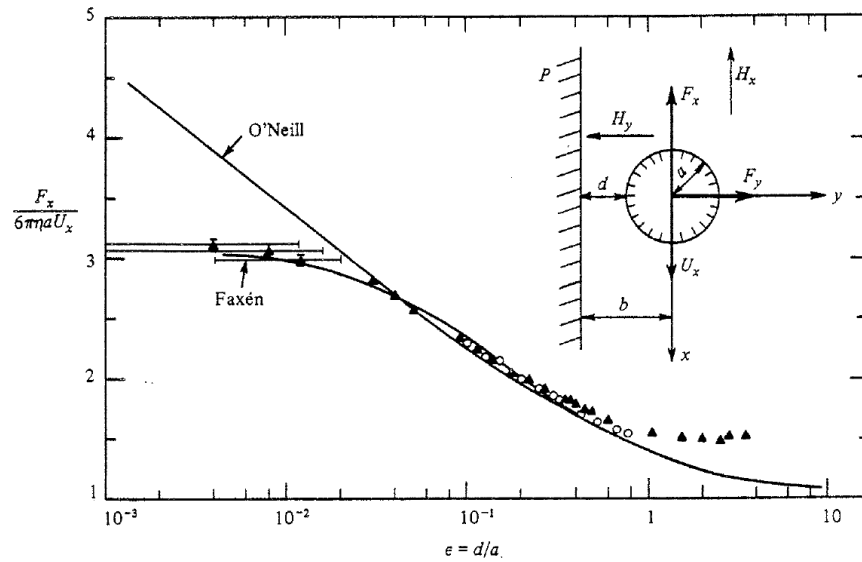


FIGURE 1.1 – Cette figure donne le facteur de correction de la force subie par une sphère se déplaçant parallèlement à un plan, et normalisée par la force de Stokes en milieu infini. Les résultats expérimentaux ont été obtenus à $Re = 10^{-3}$ avec un rhéomètre à bille en sustentation magnétique [2]. Les résultats expérimentaux sont comparés à ceux de O'Neill [3] et à ceux de Faxén [4] : $F_x = 6\pi\mu a U_x \left[1 - \frac{9}{16}k + \frac{k^3}{8} - \frac{45k^4}{256} - \frac{k^5}{16} \right]^{-1}$ où $k = a/b$ avec $b = d + a$ et d la distance entre la sphère et le plan. L'effet de saturation confondu avec la formule de Faxén est fortuit.

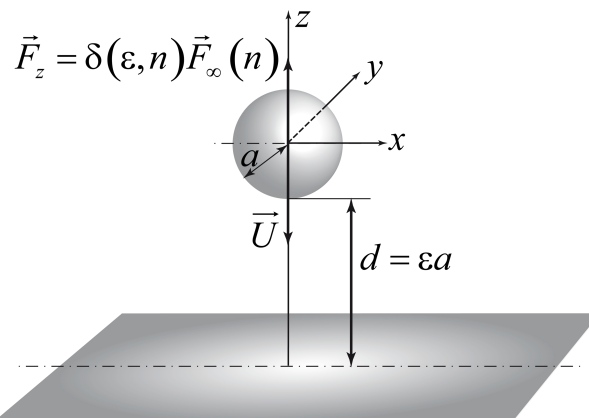


FIGURE 1.2 – Schéma de la sphère se déplaçant vers un plan.

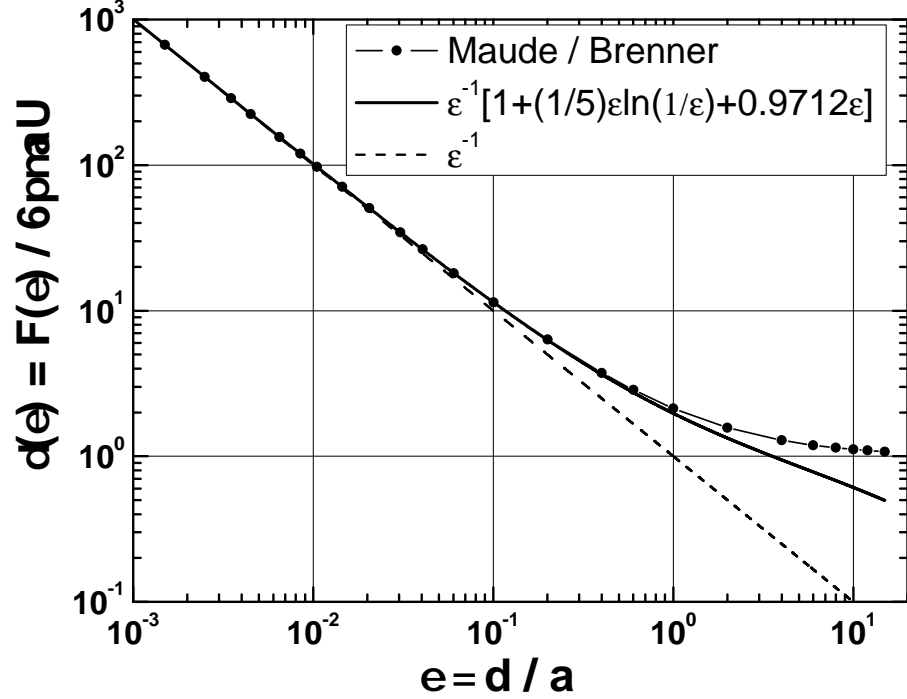


FIGURE 1.3 – Effet du confinement frontal sur la force de traînée subie par une sphère se déplaçant vers un plan en fluide newtonien. Comparaison entre les résultats numériques, analytiques et asymptotiques.

L'influence de l'inertie sur ce facteur de correction a été étudiée par Cox et Brenner [33] et est donnée par la formule suivante :

$$\delta(\varepsilon, Re) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{5} \left(1 + \frac{Re}{4} \right) \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 0.9712 \quad (1.11)$$

Les résultats correspondant à la même configuration précédente ont été obtenus par Jeffrey et Onishi [34] dans le cas d'un cylindre et d'un plan :

$$\delta(\varepsilon) = \frac{F}{4\pi\mu U} = \frac{1}{\ln \left(1 + \varepsilon + \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1} \right) - \frac{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}}{1 + \varepsilon}} \quad (1.12)$$

En régime de lubrification, cette formule se réduit à :

$$\delta(\varepsilon) = \frac{3}{2\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}} + \frac{63}{40\sqrt{2}\varepsilon^{1/2}} + \frac{747\varepsilon^{1/2}}{11200\sqrt{2}} - \frac{209\varepsilon^{3/2}}{32000\sqrt{2}} + \frac{1780491\varepsilon^{5/2}}{1379840000\sqrt{2}} + O\left(\varepsilon^{7/2}\right) \quad (1.13)$$

D'une manière générale, à part les configurations d'interaction entre deux sphères, une sphère (ou un cylindre) et un plan, les autres configurations n'ont pas de solution exacte

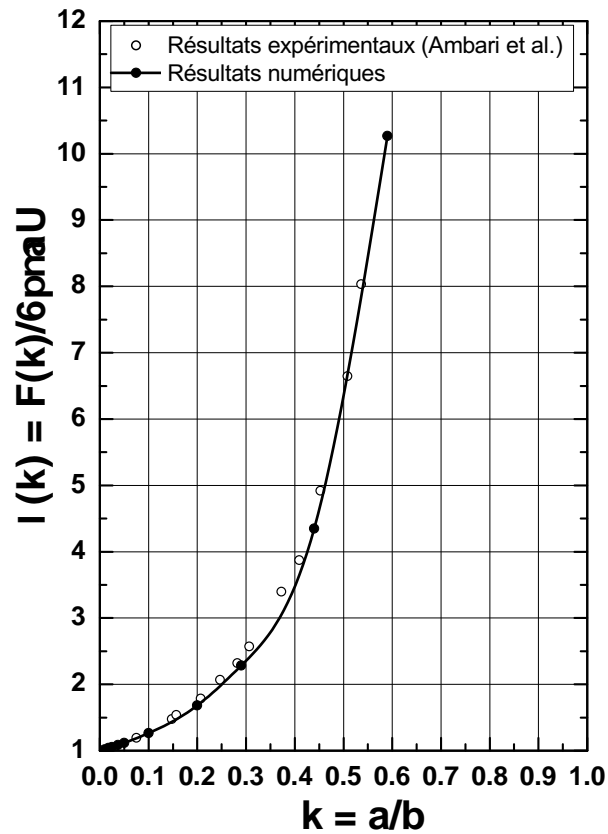


FIGURE 1.4 – Comparaison des résultats obtenus expérimentalement et numériquement pour le facteur de correction de la force de traînée subie par une sphère en translation uniforme dans l'axe d'un tube.

et sont souvent abordées par des méthodes asymptotiques ou numériques. Sur le plan expérimental, la plupart des résultats sont obtenus à des nombres de Reynolds modérés ou élevés, que l'on peut trouver résumés dans le livre de Clift [35]. Pour les très faibles nombres de Reynolds, dans le cas de l'interaction frontale d'une particule sphérique avec un plan, ou d'une sphère se translatant parallèlement à un plan, on peut citer les résultats expérimentaux de Ambari *et al.* [36,37] ainsi que ceux de Mongruel *et al.* [38] et Lecoq *et al.* [39]. Dans le cas d'un cylindre, l'ensemble des résultats obtenus pour des nombres de Reynolds faibles ou modérés sont résumés dans la thèse de Champmartin [40].

Une des configurations particulièrement intéressante est celle du confinement latéral où l'on assiste au confinement du backflow généré par la particule en mouvement. C'est le cas d'une sphère se déplaçant dans un tube en situation axiale centrée ou excentrée, et celle d'un cylindre se déplaçant entre deux plans. L'effet du confinement latéral dans le cas d'une sphère se déplaçant axialement dans un tube a été étudié asymptotiquement, numériquement et expérimentalement par de nombreux auteurs comme discuté dans

Ambari *et al.* [2]. Un calcul précis du facteur de correction de la force de Stokes subie par une sphère de rayon a se déplaçant axialement dans un tube de rayon b en fonction de son confinement latéral $k = a/b$ a été obtenu numériquement par Ben Richou *et al.* [41] et confirmé asymptotiquement pour $k \approx 1$. Ces résultats sont en parfait accord avec la formule asymptotique donnée par Bungay et Brenner [42]. Celle-ci a été obtenue par la combinaison du développement asymptotique obtenu par Bungay et Brenner au voisinage de $k = 1$ et du développement asymptotique au voisinage de $k = 0$ donné par Haberman et Sayre [43] :

$$\frac{F}{6\pi\mu aU} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} (1-k)^{-\frac{5}{2}} \left[1 - \frac{73}{60} (1-k) + \frac{77.293}{50.4} (1-k)^2 \right] - \frac{22.5083}{6\pi} - \frac{5.6117}{6\pi} k - \frac{0.3363}{6\pi} k^2 - \frac{1.216}{6\pi} k^3 + \frac{1.647}{6\pi} k^4 \quad (1.14)$$

Sur la figure 1.4, nous donnons une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux. Quant au cas excentré, nous l'avons étudié numériquement mais ces résultats ne sont pas mis dans ce mémoire pour maintenir l'unité et l'homogénéité du sujet traité. Dans ces travaux, nous avons obtenu l'ensemble des éléments de la matrice de résistance.

Le cas du cylindre se déplaçant en situation confinée entre deux plans parallèles en situation symétrique a été étudié par Champmartin *et al.* [1] et l'évolution de la force est donnée en fonction du confinement par :

$$F = \frac{\mu U}{\sum_{n=0}^{14} A_{2n} k^{2n} + B \ln k} \quad (1.15)$$

dont les coefficients A_n et B sont donnés par le tableau 1.1.

TABLE 1.1 – Coefficients de la formule d'interpolation (1.15) [1].

$A_0 = -0.0728436$	$A_{16} = 1656.05$
$A_2 = 0.136319$	$A_{18} = -2524.9$
$A_4 = -0.10011$	$A_{20} = 2728.73$
$A_6 = -0.56907$	$A_{22} = -2044.47$
$A_8 = 8.14218$	$A_{24} = 1010.47$
$A_{10} = -56.894$	$A_{26} = -296.412$
$A_{12} = 253.902$	$A_{28} = 39.0968$
$A_{14} = -773.113$	$B = -0.0795135$

1.2 En fluide non newtonien

Comme beaucoup de fluides transportant les suspensions, utilisés actuellement dans l'industrie, ont des comportements non newtoniens, nous nous sommes intéressés à déterminer l'influence de leur rhéologie sur les interactions hydrodynamiques entre particules. Les comportements les plus courants de ces fluides sont la rhéofluidification et le rhéoépaississement. Cependant, certains peuvent avoir un comportement viscoélastique si leur temps de relaxation est supérieur à l'inverse du gradient de vitesse élongationnel engendré par le mouvement de ces particules. Comme nous le montrerons dans les différents chapitres de ce mémoire, nous nous sommes placés dans la situation où cette dernière condition n'est pas vérifiée, et par conséquent, le fluide utilisé sera principalement viscoélastique.

1.2.1 Rhéologie du fluide étudié

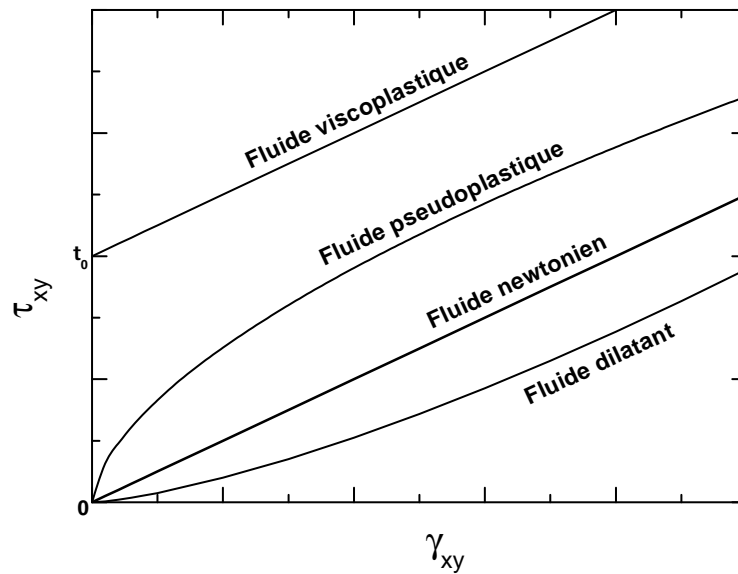


FIGURE 1.5 – Evolution de la contrainte de cisaillement τ_{xy} en fonction du gradient de vitesse $\dot{\gamma}_{xy}$ pour différents comportements non newtoniens.

Les fluides non newtoniens sont définis comme les fluides dont le comportement dévie du comportement newtonien décrit par $\underline{\underline{\tau}} = 2\mu\underline{\underline{D}}$ où $\underline{\underline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses (n'impliquant que des contraintes de cisaillement en réponse à un écoulement de cisaillement simple), $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{U} + \nabla^T\mathbf{U})$ est le tenseur des taux de déformation et μ la viscosité, à la fois constante pour une température et une pression données, et indépendante du temps. Ils peuvent être classés suivant différentes catégories (mais peuvent combiner plusieurs des comportements non newtoniens ci-dessous) :

1. les fluides dont la viscosité est indépendante du temps mais dépend de la vitesse de cisaillement en régime isotherme (voir figure 1.5), parmi lesquels on peut distinguer trois types de comportements :
 - le comportement rhéofluidifiant ou pseudoplastique
 - le comportement rhéoépaississant ou dilatant
 - le comportement viscoplastique
2. les fluides dont la viscosité apparente de cisaillement décroît (comportement thixotropique) ou augmente (comportement rhéopectique) avec le temps sous l'effet d'une contrainte constante.
3. les fluides viscoélastiques

Le modèle de fluide le plus utilisé pour tenir compte de ces deux comportements fondamentaux qui sont la rhéofluidification et le rhéoépaississement est celui d'Ostwald-de Waele appelé communément loi de puissance [44, 45]. Un exemple d'évolution de la viscosité apparente de cisaillement d'une solution non newtonienne de polyoxyéthylène WSR 301 est donnée ici sur la figure 1.6.

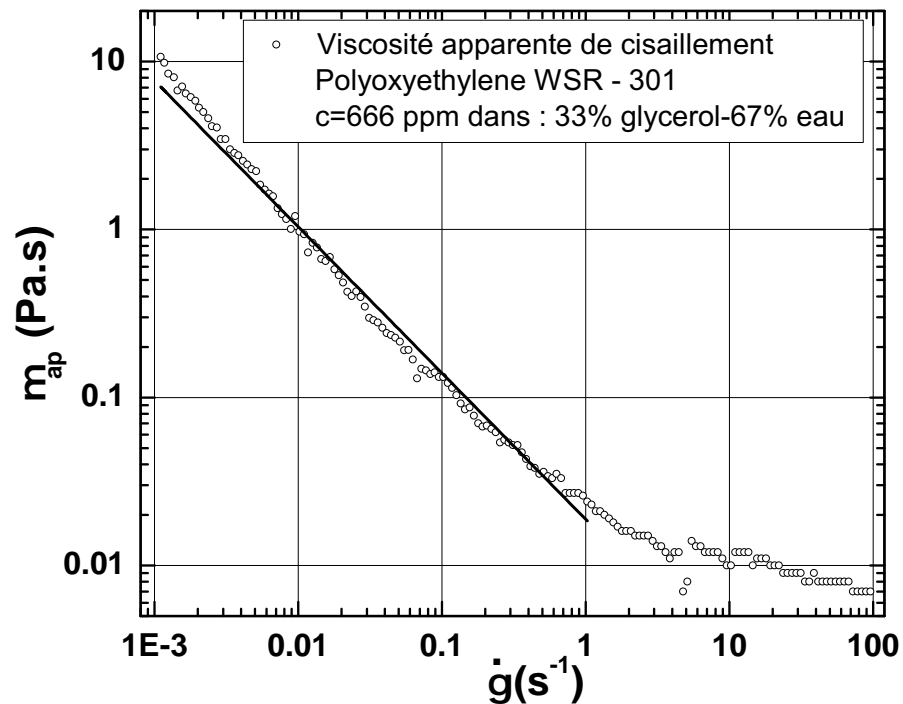


FIGURE 1.6 – Evolution de la viscosité apparente en fonction du gradient de vitesse mesurée pour une solution de polyoxyéthylène (résultats expérimentaux).

La loi constitutive de ce fluide est donnée par :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2 \left[m \left(\sqrt{2\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} \right)^{n-1} \right] \underline{\underline{D}} \quad (1.16)$$

où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{U} + \nabla^T\mathbf{U})$ est le tenseur des taux de déformation, m la consistance (Pa s^n) et n l'indice de fluidité. Nous avons préféré utiliser ce modèle parce qu'il fait intervenir un seul paramètre de contrôle : son indice de fluidité n . Sur une gamme très étendue de gradients de vitesse de cisaillement, il aurait été préférable d'utiliser un modèle du type Carreau-Yasuda [44] qui tient compte de l'apparition des deux paliers newtoniens, l'un aux faibles gradients et l'autre aux forts gradients. Or, dans la totalité des configurations d'écoulement que nous étudions, le gradient de vitesse de cisaillement est borné par une valeur maximale qui ne se situe pas nécessairement sur le deuxième palier newtonien, alors que les valeurs faibles de cisaillement conduisent à des contraintes faibles, même en cas de divergence de la viscosité, et se situent dans des zones qui n'interviennent pas dans le calcul des efforts hydrodynamiques qui nous intéressent en premier lieu dans notre étude. Néanmoins, à chaque étape, nous avons procédé à l'étude de l'effet d'une troncature du modèle d'Ostwald comme le feraient des modèles de type Carreau-Yasuda. La non utilisation de ce dernier est liée au fait que celui-ci introduit quatre paramètres de contrôle, rendant plus difficile l'interprétation physique des comportements non newtoniens sur les interactions hydrodynamiques. Par ailleurs, il faut rappeler que, dans le cas des fluides très fortement viscoélastiques, on peut assister à des structurations de mouvement de particules en écoulement [46, 47].

La plupart des études numériques effectuées dans le cadre des suspensions en fluide non newtonien ont été menées en utilisant soit un fluide en loi de puissance, soit un fluide de type Bingham, souvent régularisé [48]. La plupart de ces résultats sont résumés dans le livre de Chhabra [45].

1.2.2 Influence de la loi de puissance sur la force hydrodynamique en milieu infini

Le premier problème à résoudre dans l'étude des efforts hydrodynamiques subis par une particule dans un fluide en loi de puissance est la difficulté de déterminer ces efforts en milieu infini. En effet, cette difficulté est liée à la non linéarité du modèle qui rend improbable une solution analytique, et par conséquent, impose une étude numérique ou à la rigueur asymptotique. Dans les études numériques, on est souvent confronté à la limitation du domaine qui, dans le cas des fluides rhéoépaississants, nécessitent des tailles de domaine de calcul très grandes à cause de leur longueur d'écran hydrodynamique qui s'étend très loin de la particule. Cette difficulté a été souvent omise par les autres chercheurs, ce qui a souvent conduit à des résultats différents et non précis dans le cas des fluides rhéoépaississants. Par contre, pour les faibles valeurs d'indice de fluidité, la détermination des coefficients de correction de la force de Stokes est plus aisée à cause de la réduction de la longueur d'écran hydrodynamique dans ce cas. Ce coefficient est défini comme suit dans le cas des faibles nombres de Reynolds généralisés :

$$\lambda(n) = \frac{F(n)}{6\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} aU} \quad (1.17)$$

pour une sphère, et par :

$$\lambda(n) = \frac{F(n)/l}{4\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} U} \quad (1.18)$$

pour un cylindre. Pour les grands nombres de Reynolds, il est souhaitable d'exprimer ces effets non newtoniens en termes de facteur de correction $\lambda(n)$ par le biais du coefficient de traînée C_d :

$$C_d = \frac{24}{Re_n} \lambda(n) \quad (1.19)$$

où Re_n est donné par :

$$Re_n = \frac{\rho U^{2-n} (2a)^n}{m} \quad (1.20)$$

Cette notation est notamment utilisée par Chhabra qui a beaucoup travaillé sur ces problèmes à des nombres de Reynolds faibles et modérés [49, 50, 51]. Mais, il y a une telle dispersion dans les résultats expérimentaux (voir figure 1.7 et figure 3.2 dans [45]) et numériques de $\lambda(n)$ pour $n < 1$ (voir figures 1.8 et 1.9), tandis qu'il y a peu de résultats disponibles dans la littérature pour $n > 1$, que nous avons tenu à reprendre ces calculs tenant compte des effets d'inertie pouvant apparaître à cause de l'apparition du paradoxe de Whitehead pour $n \geq 2$ dans le cas de la sphère, et de Stokes pour $n \geq 1$ dans le cas du cylindre. En effet, dans le cas du cylindre, Tanner [52] a bien signalé l'existence d'une solution de type Stokes pour $n < 1$, contrairement au cas newtonien.

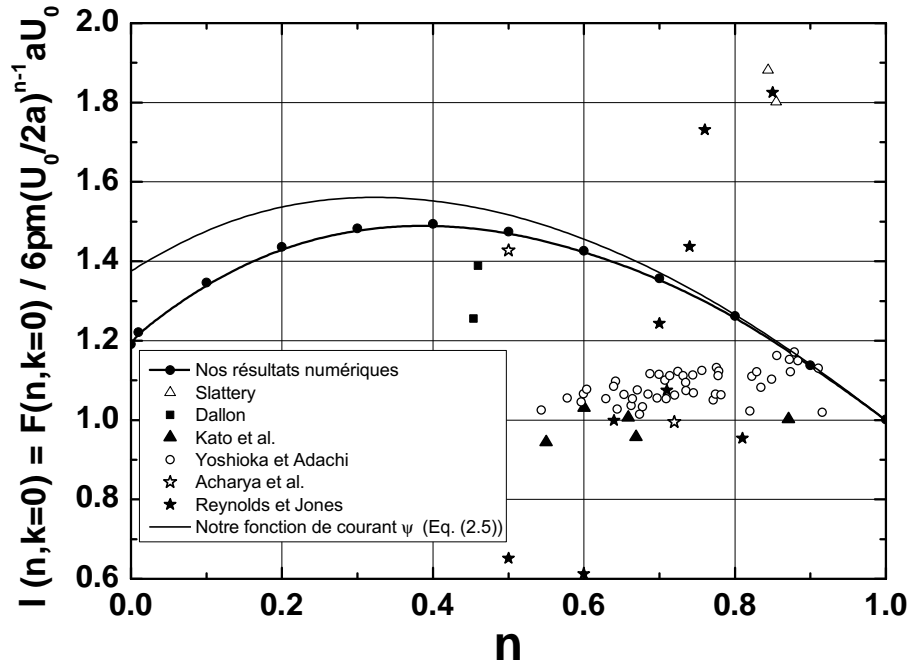


FIGURE 1.7 – Comparaison entre les différents résultats expérimentaux de $\lambda(n, k = 0)$ donnés par [5, 6, 7, 8, 9].

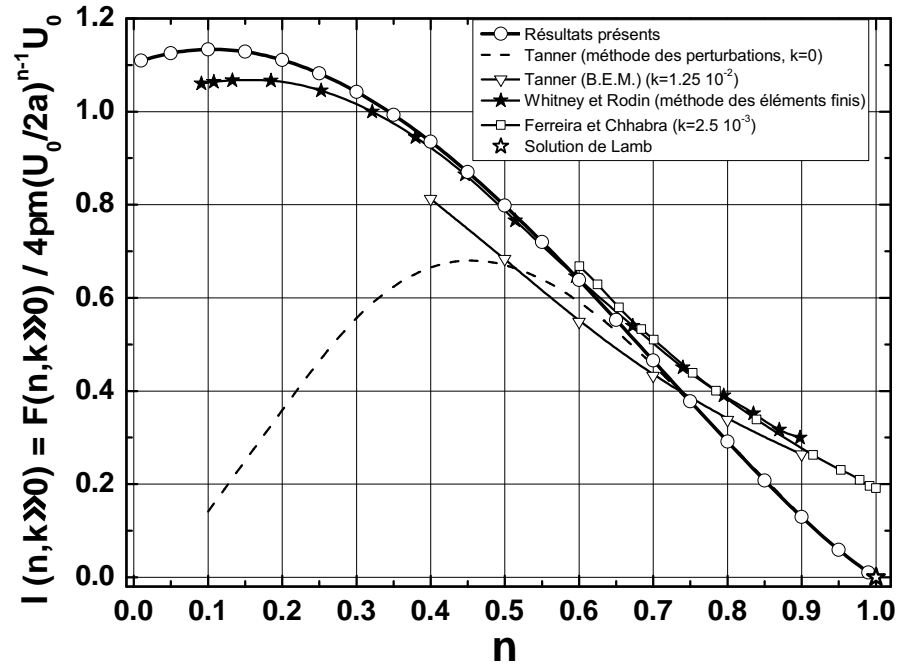


FIGURE 1.8 – Evolution de la force de traînée subie par un cylindre dans un fluide rhéofluidifiant dans le cas où le paradoxe de Stokes disparaît.

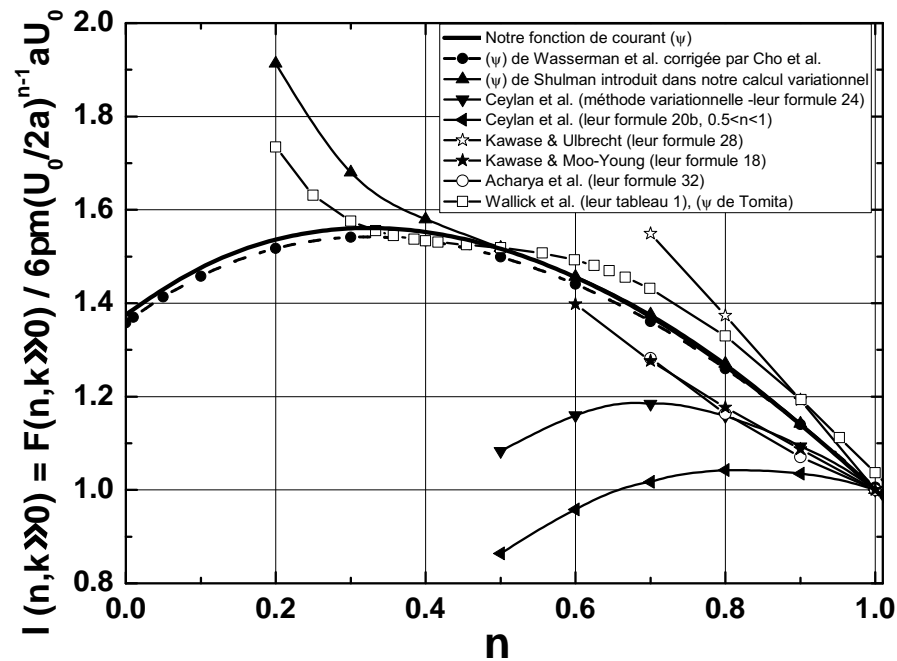


FIGURE 1.9 – Comparaison des résultats obtenus pour $\lambda(n, k = 0)$ par différents auteurs dans le cas d'une sphère.

Mais, ce paradoxe subsiste pour $n \geq 1$. La première conséquence de cela est que la force par unité de longueur, en milieu infini, en régime non inertiel, redevient nulle comme dans le cas des fluides newtoniens. La deuxième conséquence est la forte sensibilité à l'inertie pour $n \approx 1$. Dans le cas de la sphère, il est curieux que ce paradoxe prenne place pour $n \geq 2$ en milieu infini. Ce dernier résultat n'a jamais été vérifié numériquement mais cependant, il a été prévu mathématiquement par Marušić-Paloka [53]. Par ailleurs, il faut signaler que la méthode de dissipation minimale d'énergie, qui continue de s'appliquer dans le cas des fluides non newtoniens dont la viscosité apparente dépend uniquement du second invariant du tenseur taux de déformation (voir annexe A et [54, 55, 56, 57]), a été largement utilisée pour calculer le facteur de correction de la force de Stokes lié au caractère non newtonien du fluide en loi de puissance. Pour cette dernière raison, nous avons tenu à utiliser cette méthode en choisissant une fonction de courant plus appropriée afin de vérifier la précision de cette technique.

1.2.3 Influence de la loi de puissance sur les interactions hydrodynamiques

Munis des résultats sur le facteur de correction de la force de type Stokes dû à la rhéofluidification et au rhéoépaississement en milieu infini, il devient relativement simple dorénavant de calculer les effets du confinement. La plupart des études ont porté sur le confinement latéral défini par le déplacement d'une sphère axialement dans un tube cylindrique (voir [45]). Dans ces conditions, le facteur de correction dû au confinement latéral devient dépendant du facteur de confinement k et de l'indice de fluidité. Le fait de normaliser ce facteur de correction par celui obtenu en milieu infini permet de mieux appréhender les effets du confinement :

$$\lambda(n, k) = \frac{F(n, k)}{6\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} aU\lambda(n)} \quad (1.21)$$

Dans le cas du cylindre, le confinement le plus étudié est celui du déplacement du cylindre à mi-distance entre deux plans parallèles [58]. Relativement à la sphère, ce cas est très peu étudié. La même procédure de normalisation est utilisée dans le cas où $n < 1$ car la solution de type Stokes existe en milieu infini :

$$\lambda(n, k) = \frac{F(n, k)/l}{4\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} U\lambda(n)} \quad (1.22)$$

Rappelons que, dans le cas du confinement, les paradoxes de Stokes et de Whitehead disparaissent comme dans le cas newtonien pour le cylindre [1], et qu'une solution de type Stokes en milieu confiné différente de zéro peut toujours être calculée, à condition de faire attention à la forte sensibilité à l'inertie.

Comme la plupart des calculs effectués par les différents chercheurs sont souvent loin du régime de lubrification, nous avons, dans cette étude, effectué des calculs asymptotiques en régime de lubrification ($k \approx 1$) afin de confirmer la véracité de nos calculs.

A l'occasion de l'étude de ces interactions, nous avons pu résoudre le problème inverse consistant en la détermination de l'influence du confinement sur le mouvement réel d'une particule libre non pesante, sphérique ou cylindrique, transportée dans un écoulement de Poiseuille. Ce problème déjà résolu dans le cas newtonien par l'utilisation de la matrice de résistance [40,59], n'a jamais été résolu à notre connaissance dans le cas des fluides non newtoniens. L'autre application intéressante est la sédimentation dans un tube de diamètre fixe de différentes particules sphériques ou cylindriques. L'effet antagoniste entre l'évolution du poids de chaque particule et l'évolution du frottement supplémentaire induit par le backflow conduit à un effet surprenant jamais cité dans la bibliographie. Cet effet consiste en ce que la particule qui sédimente le plus vite dans un tel conteneur (tube dans la cas de la sphère, et cuve parallélépipédique dans le cas du cylindre) a une taille approximativement égale à celle restant pour le backflow.

Un autre type de confinement nous informant sur le temps de contact ou de séparation de deux particules et contrôlant le phénomène d'agrégation dans les dispersions, est le confinement frontal. Le cas newtonien a été discuté dans la section 1.1, cependant, le cas non newtonien n'a pas été étudié par d'autres chercheurs à notre connaissance. Nous avons donc, dans une première étape, donné les facteurs de correction dans le cas du confinement frontal correspondant à la sédimentation d'une sphère ou d'un cylindre vers un plan en calculant leurs coefficients de correction respectifs définis comme suit :

$$\delta(n, k, \varepsilon) = \frac{F(n, k, \varepsilon)}{6\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} aU\lambda(n)} \quad (1.23)$$

$$\delta(n, k, \varepsilon) = \frac{F(n, k, \varepsilon)/l}{4\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} U} \quad (1.24)$$

Les calculs numériques dans ces conditions nécessitent des techniques de maillage dynamique, à cause de l'instationnarité du régime étudié. Cette difficulté explique probablement pourquoi nous n'avons pas trouvé de résultat similaire dans la littérature. Afin de confirmer la validité de ces résultats et de la méthode utilisée, nous avons procédé à une étude asymptotique correspondant au drainage des films liquides entre la sphère ou le cylindre et le plan en régime de lubrification.

Ces derniers résultats trouvent une application originale dans l'utilisation des machines dynamiques à force de surface pour la nanorhéologie, comme décrit par les travaux de Cottin [60] et Restagno *et al.* [61].

Comme chaque chapitre contient une étude bibliographique détaillée, pour éviter la redondance, il suffit de se reporter aux introductions de chacun des chapitres.

Chapitre 2

Force de type Stokes subie par une particule sphérique ou cylindrique en milieu illimité dans un fluide d'Ostwald

2.1 Introduction

Dans une première approche, les effets non newtoniens du fluide porteur sur les interactions hydrodynamiques seront étudiés au travers de leur effet rhéofluidifiant ou rhéoépaississant. L'effet de la viscoélasticité qui peut induire des formations de structures [46, 47] dans ces suspensions peut être occulté dans une première approximation dans le cas des écoulements faiblement élongationnels. Ainsi, dans le cas d'une particule sphérique, le champ hydrodynamique généré par son mouvement relatif aux très faibles nombres de Reynolds décroît en $1/r$ dans un fluide newtonien. Dans le cas d'un fluide en loi de puissance, cette décroissance est en $1/r^{1/n}$ (où n est l'indice de fluidité du fluide). Comme nous allons le voir, le caractère rhéofluidifiant du fluide support entraîne une localisation de l'écoulement au voisinage de la particule rendant les effets d'interactions hydrodynamiques de courte portée. Par contre, dans le cas rhéoépaississant, la longueur d'écran hydrodynamique augmente fortement au voisinage d'un indice de fluidité critique (dépendant de la dimensionnalité de la particule) à partir duquel apparaît le paradoxe de Whitehead (3D) ou de Stokes (2D). Dans le cas d'une particule cylindrique, nous assistons au même phénomène physique à la différence près que le paradoxe de Stokes disparaît pour les fluides rhéofluidifiants, pour réapparaître à partir du cas du fluide newtonien. La détermination des efforts hydrodynamiques subis par une particule sphérique ou cylindrique dans un fluide en loi de puissance en milieu infini constitue un problème non linéaire difficile à résoudre analytiquement. Pour cette raison, nous avons adopté une approche numérique dont les résultats sont confortés par l'utilisation d'une méthode basée sur le théorème de dissipation minimale d'énergie. Ainsi, dans le cas d'une particule sphérique de rayon a , la relation non linéaire reliant

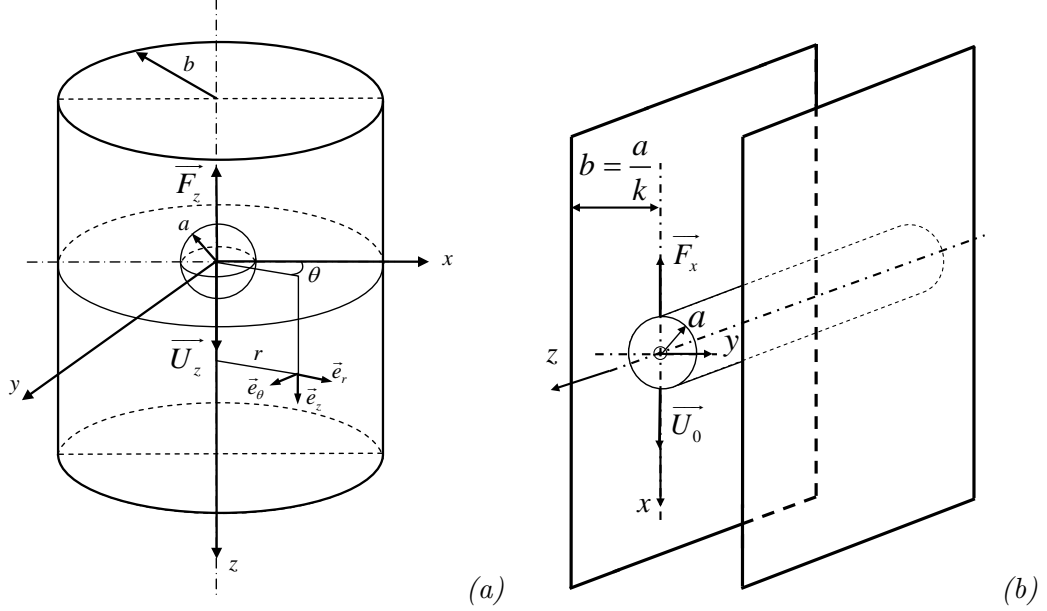


FIGURE 2.1 – Schéma représentant le mouvement uniforme d'une particule sphérique (a) et cylindrique (b)

la force de type Stokes exercée sur la particule à sa vitesse n'a pas été, à notre connaissance, complètement établie dans le cas des fluides en loi de puissance en milieu infini, et plus particulièrement dans le cas des fluides dilatants [45]. Cette première partie sera donc consacrée au calcul de la force de traînée subie par ces particules se déplaçant en translation uniforme dans des fluides rhéofluidifiants ou rhéoépaississants, en milieu infini et en régime non inertiel. La loi rhéologique du fluide d'Ostwald considérée peut être définie par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + 2 \left[m \left(\sqrt{2\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} \right)^{n-1} \right] \underline{\underline{D}} \quad (2.1)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes et $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla^T\mathbf{V})$ est le tenseur des taux de déformation, p la pression, m la consistance du fluide (Pa s^n) et n son indice de fluidité. Dans une approche numérique, nous considérons le déplacement uniforme de cette sphère dans l'axe d'un tube de rayon b (figure 2.1a). Dans ces conditions, le couplage entre l'effet de la rhéologie et le confinement est donné par le facteur de correction $\lambda(n, k)$ de la force de traînée subie par la sphère qui se déplace à la vitesse constante U_0 dans l'axe du tube. Ce coefficient s'introduit par le biais de la relation suivante, que l'on peut obtenir par analyse dimensionnelle :

$$\mathbf{F}(n, k) = -6\pi m \left(\frac{U_0}{2a} \right)^{n-1} aU_0\lambda(n, k)\mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

Les résultats concernant le milieu infini seront obtenus en faisant tendre le coefficient de confinement $k = a/b$ vers zéro. Rappelons que ce coefficient de correction $\lambda(n, k = 0)$

a été estimé par plusieurs auteurs dans le cas des fluides pseudoplastiques. L'ensemble de la littérature qui traite de ce problème, est résumé dans le livre de Chhabra [45]. Cependant, il s'avère que le cas des fluides rhéoépaississants n'a pas été calculé proprement en régime non inertiel, comme nous allons l'expliquer ci-dessous. Comme certains auteurs ont utilisé la méthode de dissipation minimale, car celle-ci reste applicable aux fluides dont la viscosité apparente est fonction du second invariant du tenseur des taux de déformation [62,56,63,57], nous avons tenu à en faire usage pour donner une solution approchée du facteur de correction $\lambda(n, k = 0)$ en milieu infini.

Dans le cas d'une particule cylindrique, nous adoptons le modèle d'un cylindre infini. En effet, en régime concentré, c'est à dire aux forts confinements, l'usage de ce modèle a été justifié par Champmartin *et al.* [1]. Pour comprendre physiquement cette justification, il faut se rappeler que, lorsque deux cylindres sont proches ou lorsqu'un cylindre est proche d'une paroi, les effets d'extrémités de chaque fibre deviennent négligeables. D'autre part, il faut rappeler que la solution de type Stokes existe en situation confinée. En effet, le confinement, qui provoque une coupure dans le champ lointain, fait disparaître le paradoxe de Stokes. Ceci dit, la solution recherchée dans le cas actuel de ce travail est une solution de type Stokes liée à un autre type de confinement, virtuel, dû à la réduction de la longueur d'écran hydrodynamique intervenant dans les fluides rhéofluidifiants. Dans ce cas, nous montrerons que le paradoxe de Stokes disparaît aussi, à l'instar de la situation précédente due au confinement. Ce comportement, qui a été prévu pour la première fois par Tanner [52] et démontré mathématiquement par Marušić [53], n'a pas été encore vérifié numériquement. Ainsi, pour $n < 1$, le facteur de correction de la force subie par le cylindre, par unité de longueur, en translation uniforme dans le plan de symétrie d'un canal rectangulaire très allongé (figure 2.1b), est donné par la relation suivante :

$$\mathbf{F}(n, k)/l = -4\pi m \left(\frac{U_0}{2a} \right)^{n-1} U_0 \lambda(n, k) \mathbf{e}_x \quad (2.3)$$

Cette solution de type Stokes peut être obtenue, comme pour la sphère, par l'analyse dimensionnelle. Quand le confinement $k = a/b$ tend vers zéro, la solution correspondant au milieu infini est alors approchée car celle-ci existe bien dans le cas des fluides pseudoplastiques ($n < 1$).

2.2 Estimation de la traînée par la méthode de dissipation minimale

Afin d'obtenir une solution approximative pour la force de traînée en milieu illimité, il est possible d'utiliser la méthode variationnelle basée sur la minimisation de l'énergie dissipée par le champ hydrodynamique, correspondant à une fonction de courant paramétrée ψ qui vérifie au préalable les conditions aux limites et l'équation de continuité. En effet, lorsque l'inertie est négligeable et les forces extérieures dérivent d'un potentiel, cette méthode montre que les équations du mouvement d'un fluide incompressible avec des conditions aux frontières données, sont équivalentes à la formulation que le

vrai champ de vitesses est celui qui réduit au minimum l'énergie dissipée totale lors du mouvement de la particule. Ce principe généralise celui de Helmholtz-Korteweg, appliqué aux fluides newtoniens, aux fluides en loi de puissance dont la viscosité apparente dépend du second invariant du tenseur des taux de déformation (voir l'annexe A, [54, 55, 56]).

Cette approche, utilisée par de nombreux chercheurs, semble dans ce cas particulier donner une bonne estimation du facteur de correction de la force $F(n, k = 0)$ subie par une particule sphérique en mouvement uniforme en milieu infini, qui est donné par l'expression suivante :

$$\lambda(n, k = 0) = \frac{F(n, k = 0)}{6\pi m \left(\frac{U_0}{2a}\right)^{n-1} a U_0} = \frac{2}{3} \frac{(2a)^{n-2}}{m U_0^{n+1}} \int_a^\infty \int_0^\pi \phi r^2 \sin \theta d\theta dr \quad (2.4)$$

où

$$\phi = m(2(d_{rr}^2 + d_{\theta\theta}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + d_{r\theta}^2)^{(n+1)/2}$$

est la fonction de dissipation de Rayleigh pour un fluide en loi de puissance et d_{ij} sont les composantes du tenseur des taux de déformation en coordonnées sphériques, avec :

$$d_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta \cot \theta}{r}, \quad d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_r)}{\partial \theta} \right)$$

calculées à partir de la fonction de courant ψ , et

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

La difficulté dans l'utilisation de ce principe vient de la méconnaissance de la bonne fonction ψ , c'est à dire du vrai champ de vitesse du problème. Une alternative consiste à utiliser une fonction de courant la plus réaliste possible, dépendant d'un paramètre donné σ et vérifiant les conditions aux limites et l'équation de continuité. Citons ici quelques fonctions de courant utilisées par différents auteurs. La première est celle donnée par Tomita [62]. En dépit de quelques corrections apportées par Wallick *et al.* [64] à ces résultats, l'évaluation de $\lambda(n, k = 0)$ continue de donner des résultats inadéquats (voir figure 2.2). La seconde approche a été effectuée par Wasserman *et al.* [65] qui introduisit un paramètre σ dans la fonction de courant de Tomita :

$$\psi = \frac{U_0}{2} r^2 \sin^2 \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^\sigma \right]^2$$

Dans cette approche la valeur du paramètre σ est déterminée par la minimisation de la fonction $\lambda(n, k = 0)$ obtenue par l'application du théorème de dissipation minimale d'énergie ($\partial \lambda(n, k = 0) / \partial \sigma = 0$). Après quelques corrections de $\lambda(n, k = 0)$, ce paramètre a été calculé seulement pour $0 < n \leq 1$ par Cho *et al.* [66] (figure 2.2). A notre connaissance, toutes les autres approches utilisées par Ceylan *et al.* [67], Kawase *et al.* [68, 69], Acharya *et al.* [70], Wallick *et al.* [64] donnent des résultats inexacts (voir figure 2.4). Pour utiliser la même approche, nous avons choisi une fonction de courant

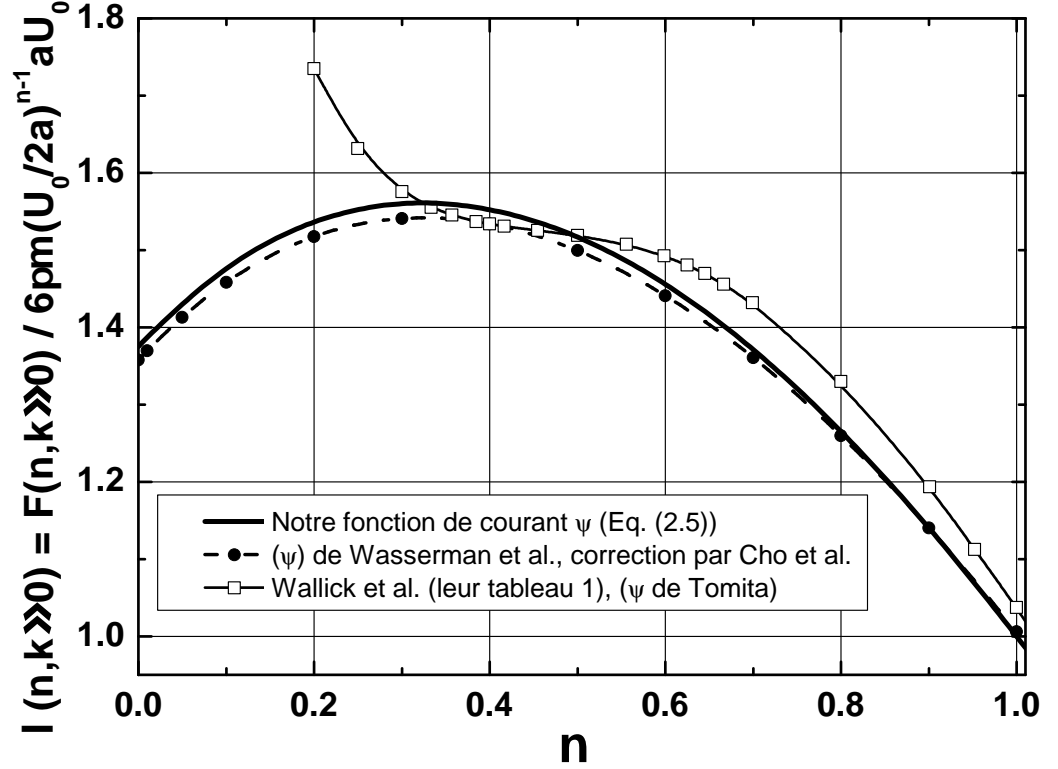


FIGURE 2.2 – Evolution non monotone de la force de traînée subie par une sphère, obtenue à l'aide de la méthode variationnelle quand le fluide devient de plus en plus rhéofluidifiant ($n < 1$).

paramétrée :

$$\psi = \frac{U_0}{2} r^2 \sin^2 \theta \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^{\sigma/n} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^{3\sigma/n} \right] \quad (2.5)$$

Il est à noter que le champ de vitesse correspondant à cette fonction de courant vérifie bien les conditions aux limites sur la sphère et à l'infini. Il vérifie aussi l'équation de continuité et se réduit dans le cas newtonien ($n = 1$) à la solution exacte, contrairement à la fonction de courant utilisée par Wasserman *et al.* [65]. Sur la figure 2.2, nous pouvons constater malgré tout le bon accord entre les résultats de Wasserman *et al.* [65] et les nôtres, obtenus par l'emploi de la fonction (2.5). La comparaison avec un succès relatif des résultats obtenus par cette méthode avec nos résultats numériques (voir § 2.4) permet de conclure que l'utilisation de cette technique ne peut constituer qu'une approximation de la solution du problème. Pour cela, utilisant différentes méthodes numériques, nous allons calculer les valeurs de $\lambda(n, k = 0)$ pour $0 \leq n < 2$.

Quant au cas d'un cylindre en translation uniforme dans un milieu illimité, le facteur de correction de la force subie $F(n, k = 0)$ par unité de longueur est définie par l'expression

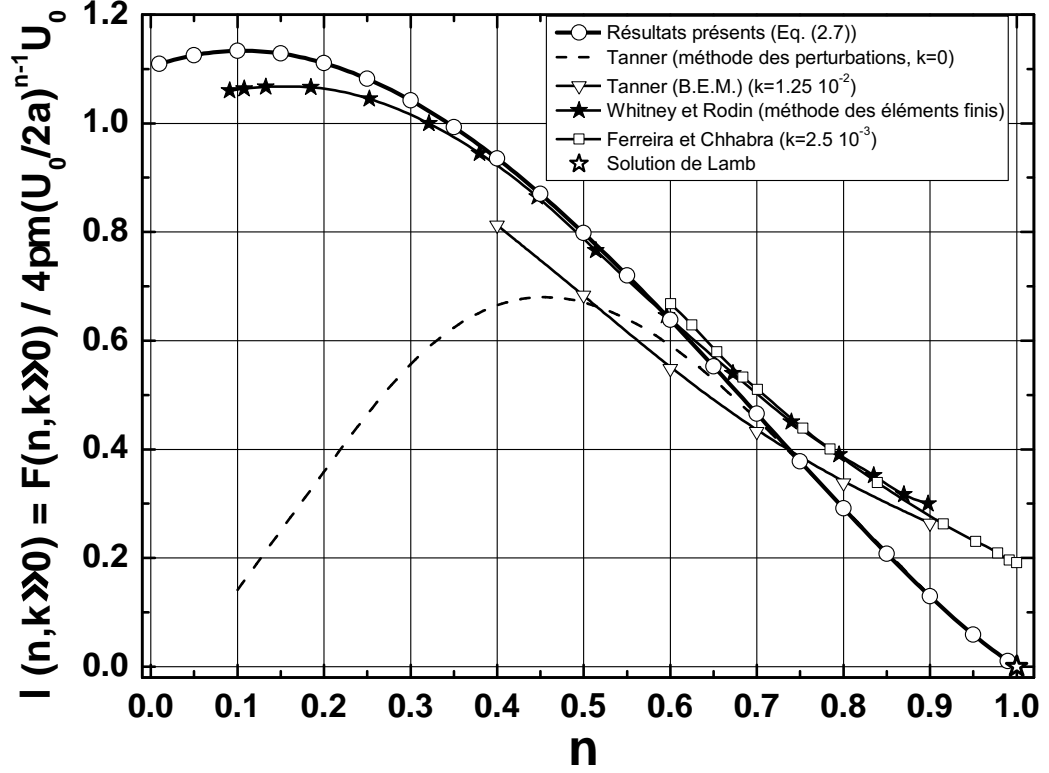


FIGURE 2.3 – Evolution de la force de traînée subie par un cylindre dans un fluide rhéofluidifiant dans le cas où le paradoxe de Stokes disparaît.

suivante :

$$\lambda(n, k = 0) = \frac{F(n, k = 0)}{4\pi m \left(\frac{U_0}{2a}\right)^{n-1} U_0} = \frac{(2a)^{n-1}}{2\pi m U_0^{n+1}} \int_a^\infty \int_0^\pi \phi r d\theta dr \quad (2.6)$$

où

$$\phi = m[4(d_{rr}^2 + d_{r\theta}^2)]^{(n+1)/2}$$

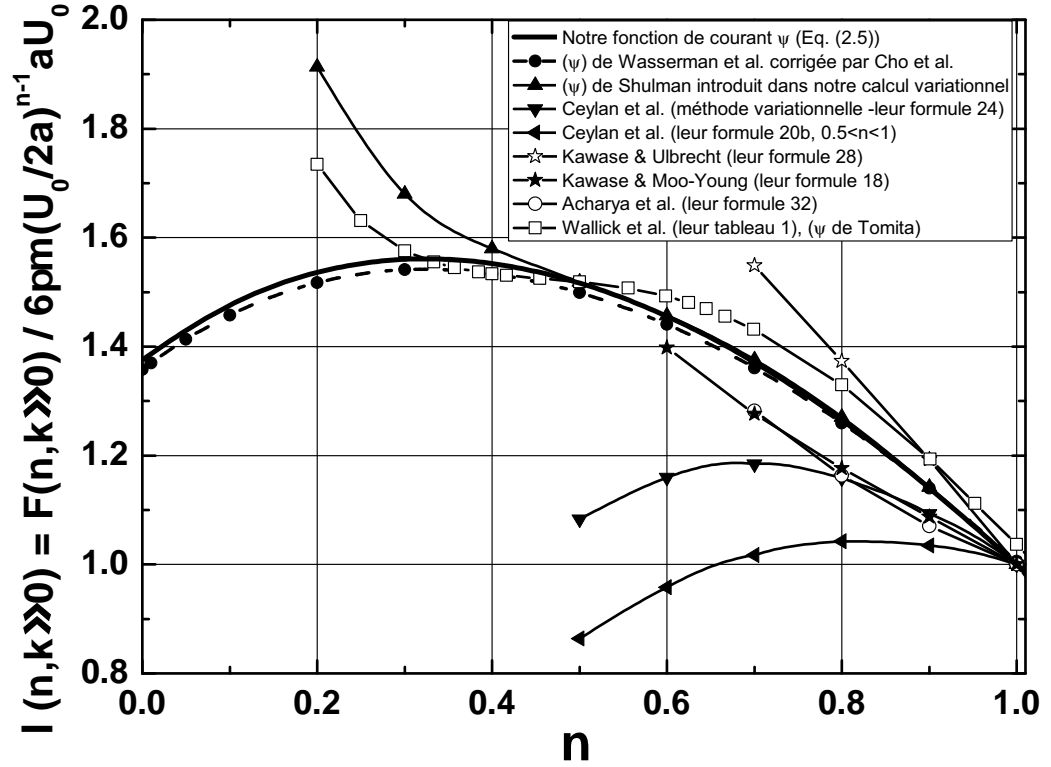
est la fonction de dissipation de Rayleigh pour un fluide en loi de puissance et d_{ij} sont les composantes du tenseur des taux de déformation en coordonnées cylindriques, avec :

$$d_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} = -d_{rr}, \quad d_{zz} = 0, \quad d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(V_r)}{\partial \theta} \right)$$

correspondant à la fonction de courant ψ et

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Dans le cas des particules cylindriques, nous avons employé la fonction de courant ψ utilisée par Tanner [52] dans son calcul des perturbations. Celle-ci vérifie les conditions

FIGURE 2.4 – Comparaison des résultats obtenus pour $\lambda(n, k = 0)$ par différents auteurs.

aux limites ainsi que l'équation de continuité, mais dépend de deux paramètres (p, q) . Nous avons donc appliqué le théorème de dissipation minimale d'énergie à cette fonction de courant biparamétrée :

$$\psi = U_0 r \sin \theta \left[1 + \frac{q}{p-q} \left(\frac{r}{a} \right)^p + \frac{p}{p-q} \left(\frac{r}{a} \right)^q \right] \quad (2.7)$$

La minimisation de $\lambda(n, k = 0)$ a été réalisée à l'aide du code "MATHEMATICA" dont les résultats seront comparés à ceux obtenus numériquement, présentés dans le § 2.4. Les résultats obtenus à l'aide de cette méthode de dissipation minimale semblent être corroborés par le fait qu'ils s'extrapolent exactement vers la solution de Lamb pour $n = 1$.

2.3 Méthodes numériques

2.3.1 Formulation mathématique

L'écoulement analysé est celui d'un fluide visqueux autour d'une sphère de rayon a , sédimentant dans un tube cylindrique de rayon b (voir figure 2.1a). Pour simplifier les

calculs, la sphère est supposée fixe, tandis que les parois du tube se déplacent à la même vitesse que le fluide $-U_0 \mathbf{e}_z$. Les deux configurations d'écoulement sont équivalentes, au moins dans le cas stationnaire. L'écoulement isotherme est régi par les équations usuelles de conservation de la masse et de quantité de mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, p la pression et $\underline{\underline{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses pour un fluide en loi de puissance. A très faible nombre de Reynolds généralisé $Re_n = \rho U_0^{2-n} (2a)^n / m$, les équations (2.8) et (2.9) sont écrites sous forme adimensionnelle en introduisant les variables sans dimension suivantes : $r = r^*/a$, $z = z^*/a$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}^*/U_0$, $t = t^*/\tau_v$, $p = ap^*/\mu_{ap0}U_0$, $\mu_{ap} = \mu_{ap}^*/\mu_{ap0}$, $\psi = \psi^*/a^2U_0$ et $\omega = \omega^*U_0/a$ où $\mu_{ap0} = m(U_0/a)^{n-1}$ et $\tau_v = \rho a^2/\mu_{ap0}$ est le temps caractéristique de diffusion de la vorticité, et l'exposant (*) représente les quantités dimensionnelles.

Dans ces conditions, le problème est défini par les trois paramètres suivants : le coefficient de confinement $k = a/b$, l'indice de fluidité de la loi de puissance n et le nombre de Reynolds généralisé Re_n . Dans le système de coordonnées cylindriques, les composantes du vecteur vitesse et la pression adimensionnées se réduisent à $V_r(r, z, t)$, $V_\theta(r, z, t) = 0$, $V_z(r, z, t)$ et $p(r, z, t)$ lorsque la sphère est positionnée dans l'axe du tube. Les équations sans dimension de Cauchy et de continuité sont ensuite écrites dans ce système de coordonnées avec les conditions aux limites et initiales qui leur sont associées. A $Re_n \ll 1$, ces équations peuvent être formulées en termes de fonction de courant ψ et vorticité ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{Re_n}{2^n} \left(\frac{\partial(V_r \omega)}{\partial r} + \frac{\partial(V_z \omega)}{\partial z} \right) = \mu_{ap} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + 2 \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + S \\ -r\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où,

$$S = \frac{\omega}{r} \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial r} + 2 \frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial z \partial r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial r^2} \right) ;$$

$$\mu_{ap} = \left[2 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} ;$$

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \text{et} \quad \omega = \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)$$

Les conditions initiales et aux limites sont données ci-dessous :

1. sur le tube : $\mathbf{V}(r = 1/k, z, t) = -\mathbf{e}_z$;
2. sur la sphère : $\mathbf{V} = \mathbf{0}$;
3. en amont et en aval : $\mathbf{V}(r, z \rightarrow \pm\infty, t) = -\mathbf{e}_z$;
4. pour $t \leq 0$ le fluide est au repos : $\mathbf{V}(r, z, t \leq 0) = \mathbf{0}$.

Dans le cas d'une particule cylindrique (figure 2.1b) animée d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $-U_0\mathbf{e}_x$ entre deux plans distants de $2b$, la même procédure que celle appliquée dans le cas d'une particule sphérique est utilisée. Toutefois, dans ce cas, le vecteur vitesse et la pression adimensionnés se réduisent à $\mathbf{V}[u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t) = 0]$ et $p(x, y, t)$ en coordonnées cartésiennes. De même, les coordonnées cartésiennes sont adimensionnées de la manière suivante : $x = x^*/a$, $y = y^*/a$. Les équations sans dimension de Cauchy et de continuité sont écrites en formulation fonction de courant ψ et vorticité ω à l'instar du cas de la sphère, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{Re_n}{2^n} \left(u \frac{\partial\omega}{\partial x} + v \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) = \mu_{ap} \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \right] \\ \qquad \qquad \qquad + 2 \frac{\partial\mu_{ap}}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial x} + 2 \frac{\partial\mu_{ap}}{\partial y} \frac{\partial\omega}{\partial y} + S \\ \qquad \qquad \qquad -\omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\qquad \qquad \qquad -\omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

où,

$$S = 2 \frac{\partial^2\mu_{ap}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2\mu_{ap}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\mu_{ap}}{\partial y^2} \right) ;$$

$$\mu_{ap} = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} ;$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \text{et} \quad \omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Les conditions aux limites et initiales sur la vitesse deviennent :

1. sur les parois planes : $\mathbf{V}(x, y = \pm 1/k, t) = -\mathbf{e}_x$ qui sont : $u(x, y = b/a) = \partial\psi/\partial y = -1$ et $v(x, y = b/a) = -\partial\psi/\partial x = 0$. Ainsi $\psi(x, y = b/a) = b/a$;
2. sur le cylindre fixe, la condition d'adhérence $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ conduit à $\psi(x, y) = \text{Cst}$ pour tous les points (x, y) sur le profil cylindrique. Du fait de la symétrie du problème, $\psi(x, y) = 0$ sur le plan médian ;
3. en amont et en aval, l'écoulement est uniforme de vitesse $\mathbf{V}(x, y \rightarrow \pm\infty, t) = -\mathbf{e}_x$ qui est $u(x \rightarrow \pm\infty, y) = \partial\psi/\partial y = -1$ et $v(x \rightarrow \pm\infty, y) = -\partial\psi/\partial x = 0$. Ainsi $\psi(x \rightarrow \pm\infty, y) = y$ et $\omega(x \rightarrow \pm\infty, y) = 0$;
4. pour $t \leq 0$ le fluide est au repos : $\mathbf{V}(x, y, t \leq 0) = \mathbf{0}$.

2.3.2 Approche numérique

Pour obtenir la solution pour ψ et ω dans le cas de l'écoulement autour de la sphère, les équations (2.10) et (2.11) sont réécrites en coordonnées curvilignes orthogonales (X, Y) , intégrant parfaitement les frontières constituées par les parois et la particule, et résolues suivant la procédure décrite en détails dans l'annexe B. Utilisant la méthode des singularités décrite dans l'annexe B, nous avons réalisé une transformation conforme des frontières en un domaine rectangulaire. Le maillage est alors construit par les lignes équipotentielles $X(z, r) = \text{Cst}$ et les lignes de courant $Y(z, r) = \text{Cst}$, correspondant à l'écoulement d'un fluide parfait.

Les solutions des équations de la fonction de courant et la vorticité sont obtenues par la méthode des différences finies, utilisant la technique de sur-relaxations successives (SOR) et le schéma implicite de directions alternées (ADI) [71, 72, 73, 74, 75] (voir annexe B). Finalement, la fonction de courant et de vorticité ont été obtenues pour une valeur donnée du coefficient de confinement k . Ceci nous permet de calculer la force de traînée et partant, le facteur de correction $\lambda(n, k)$. La même procédure est appliquée au cas de la particule cylindrique. Dans tous les cas, le critère de convergence sera vérifié par la relation suivante : $|1 - \lambda^l(n, k)/\lambda^{l+1}(n, k)| < 10^{-6}$.

2.3.3 Méthode des volumes finis

Afin de vérifier la précision de nos calculs numériques et de valider nos résultats, nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus à l'aide du code de type volumes finis FLUENT. L'algorithme SIMPLE a été utilisé avec le schéma QUICK sur un maillage structuré en adoptant le même critère de convergence que celui utilisé précédemment. Les résultats numériques obtenus par ce code de calcul sont en très bon accord avec ceux calculés par notre propre code décrit ci-dessus. La concordance de ces résultats constitue une confirmation de leur validité mutuelle. En outre, rappelons qu'à toutes les étapes de calcul, une condition supplémentaire sur la viscosité apparente a été prise en compte afin d'éviter la divergence de cette dernière aux faibles gradients de vitesse. Elle consiste à vérifier à chaque pas de temps que $10^{-20} \leq \mu_{ap} \leq 10^{20}$.

2.4 Résultats et discussion

2.4.1 Cas d'une particule sphérique

2.4.1.1 Influence du confinement et de l'inertie

Avant tout calcul en fluide en loi de puissance en régime non inertiel, il s' st avéré nécessaire de déterminer la transition entre le régime de type Stokes et le régime inertiel (correspondant au moment où la force de traînée $-\lambda(n, k)$ dévie de son régime plateau). Dans le cas newtonien, nous donnons dans la figure 2.5 l'évolution, en fonction du nombre de Reynolds, du facteur de correction $\lambda(n = 1, k)$ normalisé par sa valeur au plateau à faible nombre de Reynolds. Pour un confinement de $k = 10^{-3}$, nos résultats numériques semblent être en très bon accord avec les résultats expérimentaux donnés

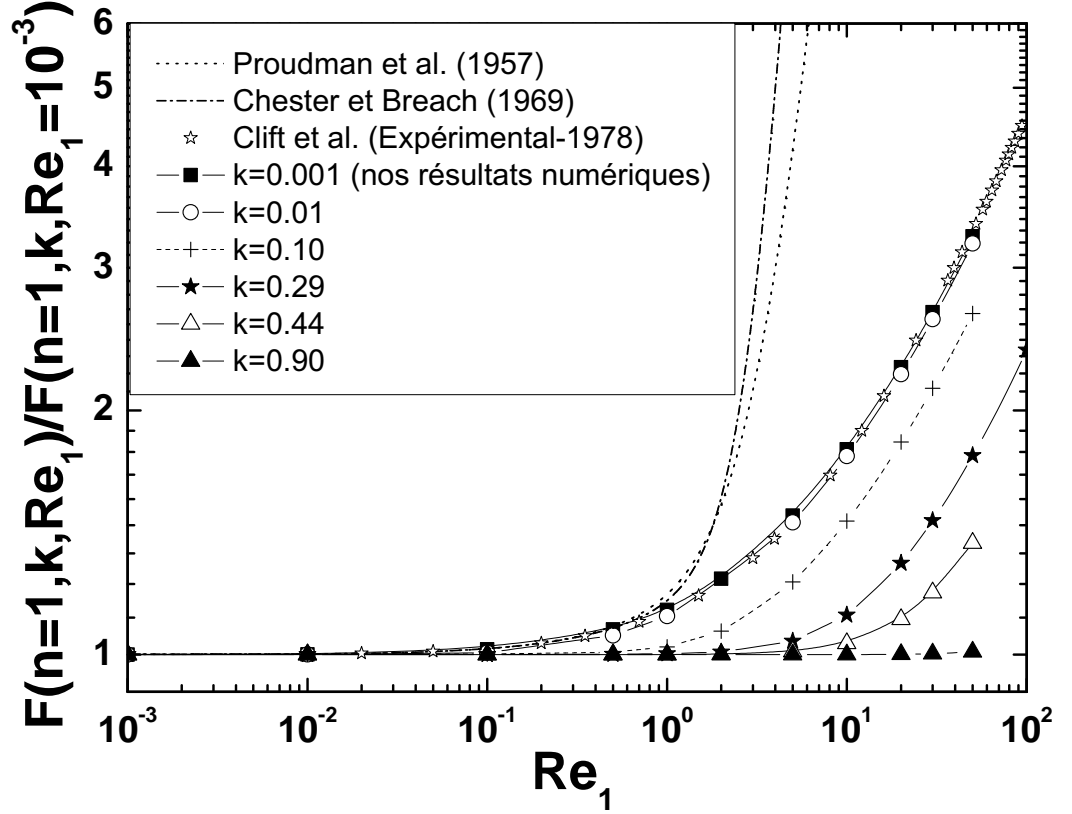


FIGURE 2.5 – Influence du confinement sur le passage au régime inertiel dans le cas d'une sphère.

par Clift *et al.* [35] :

$$\lambda_{Clift}(Re) = 1 + 0.1315Re^{0.82-0.05 \log Re}$$

D'une part, ceci montre qu'un tel confinement est suffisamment faible pour constituer un milieu infini dans le cas newtonien, car pour des confinements plus petits, une courbe limite est atteinte. D'autre part, ce bon accord confirme la validité des méthodes numériques utilisées. A cette occasion, nous avons tracé sur cette même figure les approximations asymptotiques données par Proudman *et al.* [21] :

$$\lambda_{Proudman}(Re) = 1 + \frac{3}{16}Re + \frac{9}{160}Re^2 \ln Re$$

et par Chester et Breach [76] :

$$\lambda_{Chest.} = 1 + \frac{3}{16}Re + \frac{9}{160}Re^2 \left[\ln Re + \gamma + \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{323}{360} \right] + \frac{27}{640}Re^3 \ln \left(\frac{Re}{2} \right) + O[Re^3]$$

avec $\gamma = 0.5772 \dots$ la constante d'Euler. Ces deux approximations ne s'avèrent valable que pour $Re < 0.5$. Toujours dans le cas newtonien, il est important de remarquer

que, d'après cette même figure 2.5, le confinement de la sphère (quand k augmente) retarde le départ de la force du régime de type Stokes (plateau), c'est à dire l'apparition du régime inertiel. Nous pouvons conclure de cette étude que les résultats correspondant au milieu infini peuvent être obtenus à partir d'un confinement $k \leq 10^{-3}$ pour les fluides newtoniens.

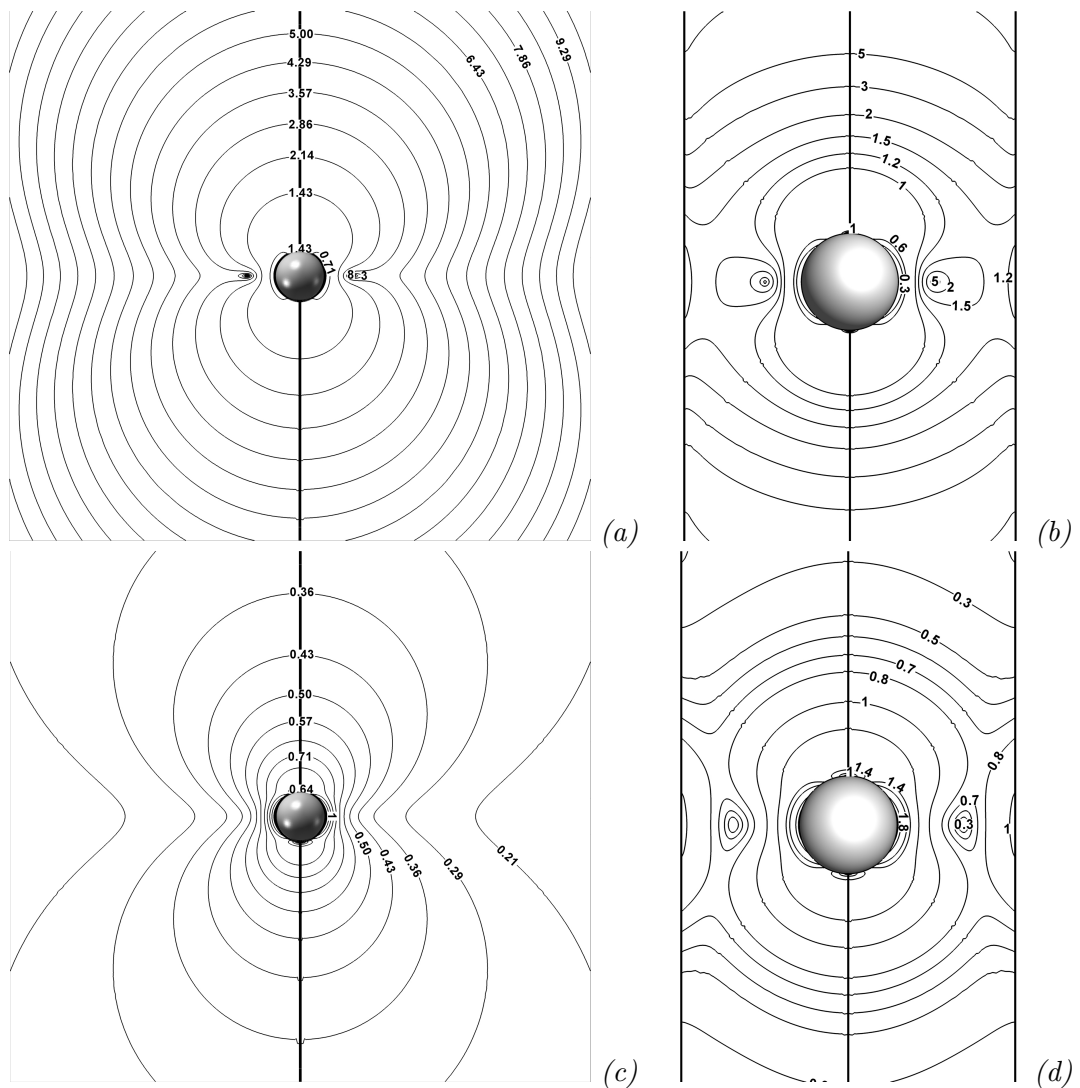
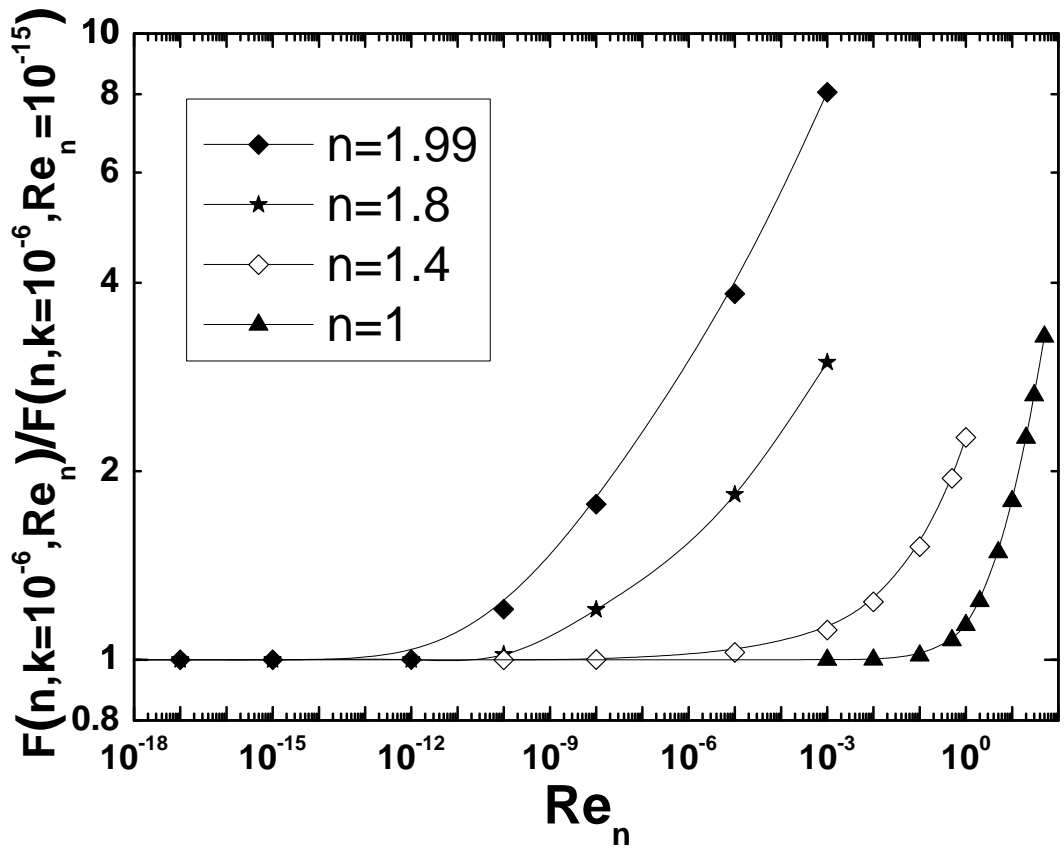
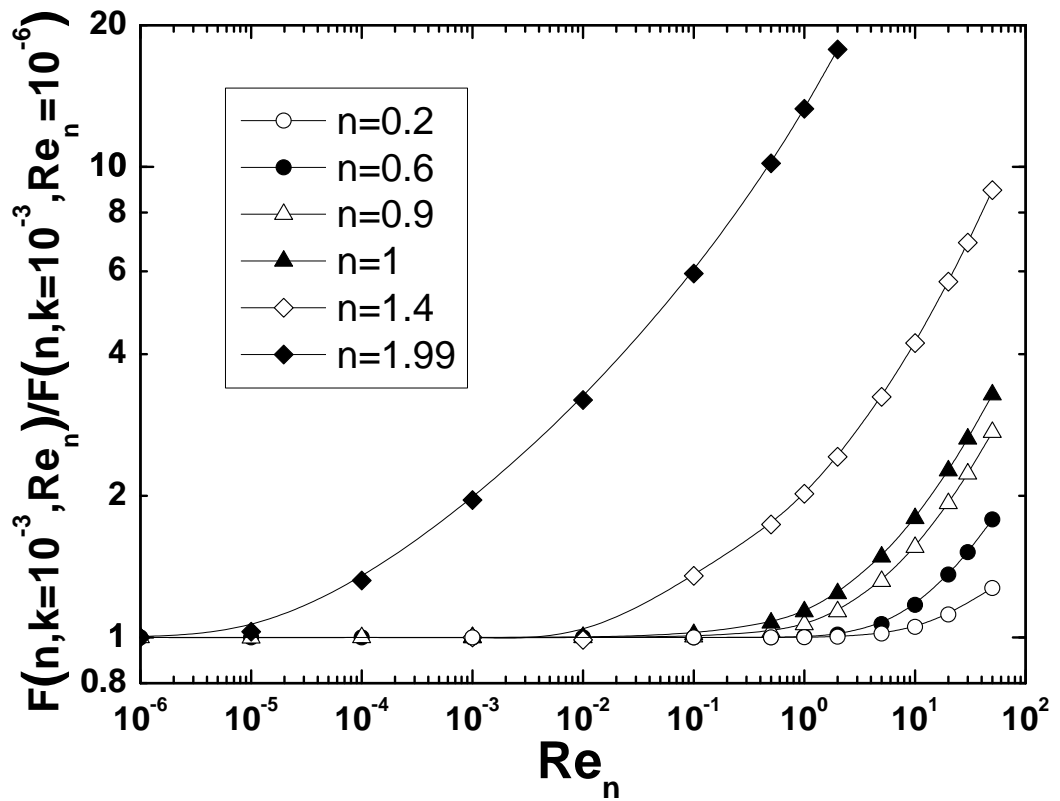


FIGURE 2.6 – Isoviscosité $\mu_{ap}/(m(U_0/2a)^{n-1})$ extraite de la viscosité inhomogène dans le plan méridien d'une sphère en mouvement uniforme suivant l'axe d'un tube : (a) $k = 10^{-6}$, $n = 0.6$, (b) $k = 0.29$, $n = 0.6$, (c) $k = 10^{-6}$, $n = 1.4$, (d) $k = 0.29$, $n = 1.4$.



(a)



(b)

FIGURE 2.7 – Influence de la rhéologie du fluide sur l'apparition des effets inertiels en fonction du confinement : (a) $k = 10^{-6}$, (b) $k = 10^{-3}$.

Dans le cas des fluides en loi de puissance, le comportement dilatant ou pseudo-plastique du fluide peut affecter la valeur critique de Re_n à partir de laquelle il n'est plus possible de négliger les effets inertiels. Notons que cette inertie est la conséquence du comportement rhéologique non linéaire du fluide en loi de puissance, qui conduit à une viscosité inhomogène du fluide autour de la sphère comme montré sur les figures 2.6(a,b,c,d). Dans cette situation hydrodynamique inhomogène en viscosité, le régime de type Stokes (caractérisé par un régime plateau) est défini par le comportement global de la force de traînée subie par la sphère. En effet, sur les figures 2.7a et 2.7b, nous avons tracé l'évolution de la traînée, toujours normalisée par sa valeur au plateau, en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_n , respectivement pour des confinements de $k = 10^{-6}$ et de $k = 10^{-3}$. Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.7b, pour les fluides rhéofluidifiants ($n < 1$), le départ du régime plateau est retardé par rapport au cas newtonien, tandis que l'on observe le comportement contraire pour les fluides rhéoépaississants ($n > 1$). Dans ce dernier cas, il est remarquable que le régime inertiel intervienne plus tôt que dans le cas newtonien pour de très faibles confinements (figures 2.7a et 2.7b). En effet, plus le fluide est rhéoépaississant ($n \rightarrow 2$), plus le régime inertiel apparaît tôt (à $Re_n = 10^{-14}$ pour $n = 1.99$). Ceci nous mène à conclure que les résultats de calcul de la force de traînée peuvent être surestimés du fait que les effets inertiels peuvent apparaître à de très faibles nombres de Reynolds lorsque le confinement décroît vers le milieu indéfini. Cet effet est exacerbé lorsque $n \rightarrow 2$. Ces résultats sont très importants pour la délimitation de l'intervalle de nombres de Reynolds qui définit le régime plateau (régime de type Stokes) où $\lambda(n, k)$ doit être calculé. Si ces effets ne sont pas pris en compte, le calcul de $\lambda(n, k = 0)$ sera surestimé comme nous allons le voir dans la section suivante. A notre connaissance, ces artefacts n'ont jamais été pris en considération par le passé. Cet état de fait nous oblige à calculer la force de type Stokes en milieu infini.

2.4.1.2 Force de type Stokes en milieu infini

Tenant compte de tous les résultats précédents, nous avons représenté sur la figure 2.8 l'évolution de la traînée normalisée pour différentes faibles valeurs du confinement k , calculée en régime de type Stokes. Pour $k = 10^{-6}$, le milieu semble être suffisamment grand pour atteindre la valeur de $\lambda(n, k = 0)$ correspondant au milieu infini. La première remarque que nous pouvons faire est que pour $n > 0.7$, les résultats numériques montrent clairement la très haute sensibilité de $\lambda(n, k \approx 0)$ au confinement k et sont proches d'une courbe limite $\lambda(n, k = 0)$ lorsque $k = 10^{-6}$ (et $Re_n = 10^{-15}$). En réalité, pour $n \approx 2$, pour satisfaire la condition de milieu infini, il est nécessaire de calculer $\lambda(n, k = 0)$ à $k \ll 10^{-6}$ et à $Re_n \ll 10^{-15}$. La deuxième remarque concerne le bon accord entre cette courbe limite et celle correspondant aux valeurs de $\lambda(n, k = 0)$ calculées à l'aide de la fonction de courant ψ (§ 2.2). Néanmoins, nous ne sommes pas sûrs d'avoir de bons arguments pour expliquer l'excellente prédiction de la méthode de dissipation minimale d'énergie dans le cas des fluides rhéoépaississants. Par ailleurs, sur cette même courbe 2.8, nous constatons que la force de type Stokes tend vers zéro lorsque $n \rightarrow 2$. Ce résultat est la conséquence de l'apparition du paradoxe de Whitehead

en milieu infini comme le prévoient les résultats théoriques de Marušić [53]. En effet, d'après ce dernier travail, le paradoxe de Whitehead apparaît dans le cas de la sphère en fluide dilatant pour $n \geq 2$. Cependant, sur cette figure, nous pouvons remarquer que, dans le cas où le confinement n'est pas très faible (milieu non infini), la solution de type Stokes continue d'exister au-delà de $n = 2$ comme dans le cas du cylindre en fluide newtonien et en milieu confiné [1]. Pour $n < 0.7$, les valeurs numériques semblent être

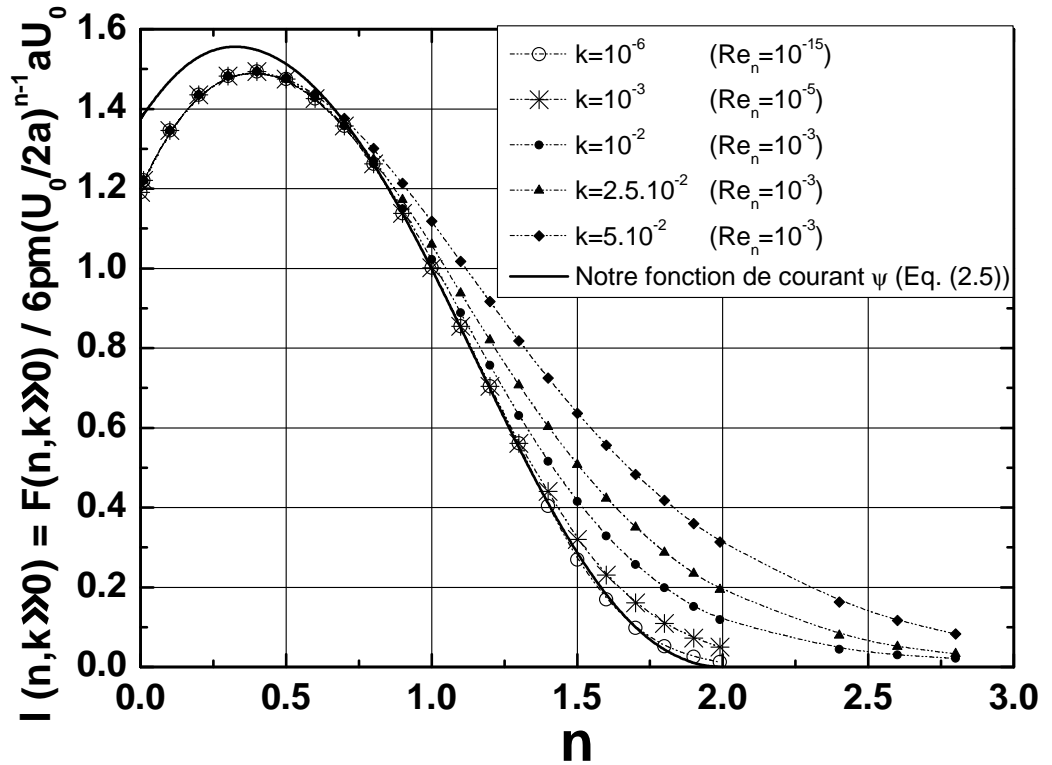


FIGURE 2.8 – Evolution de la force de traînée subie par une sphère dans un fluide en loi de puissance et influence du confinement en régime non inertiel.

moins sensibles au confinement (figure 2.8), et par ailleurs dévient légèrement (pour $n < 0.7$) de celles obtenues par la méthode de dissipation minimale qui, malgré tout, donne des résultats qui sont en très bon accord avec ceux numériques, avec une précision inférieure à 2% pour $0.7 \leq n \leq 1.7$ (tableau 2.1). A ce stade, nous pouvons comparer sur la figure 2.9 nos résultats numériques avec ceux obtenus numériquement par Dazhi *et al.* [77], et Missirlis *et al.* [78] pour $n < 1$. Tous ces résultats sont en bon accord mais restent toujours en-dessous des prédictions de la méthode variationnelle, ce qui confirme que c'est cette méthode qui est en cause et non les calculs numériques. Par ailleurs, nous regrettons que les seuls résultats disponibles à notre connaissance dans le cas des fluides dilatants ($n > 1$), obtenus par Tripathi *et al.* [50], ne soient pas exacts car ils surestiment les valeurs de la traînée à cause de l'inertie qui intervient dans leurs conditions de calcul qui sont : $Re_n = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$.

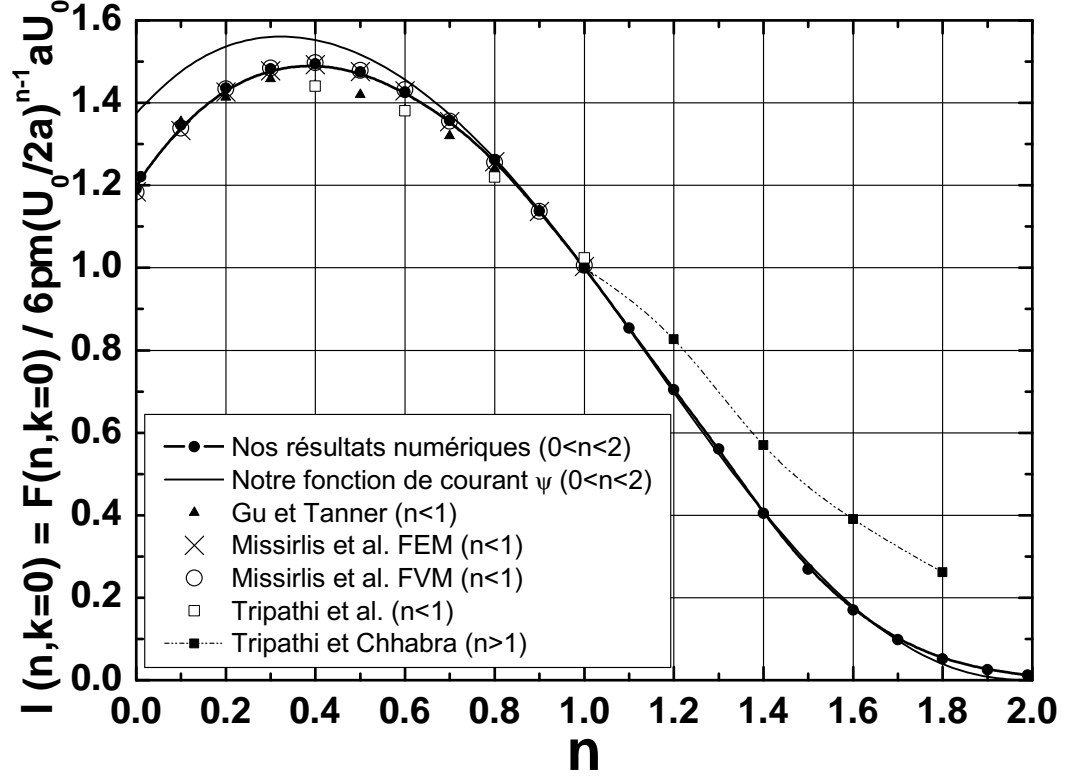
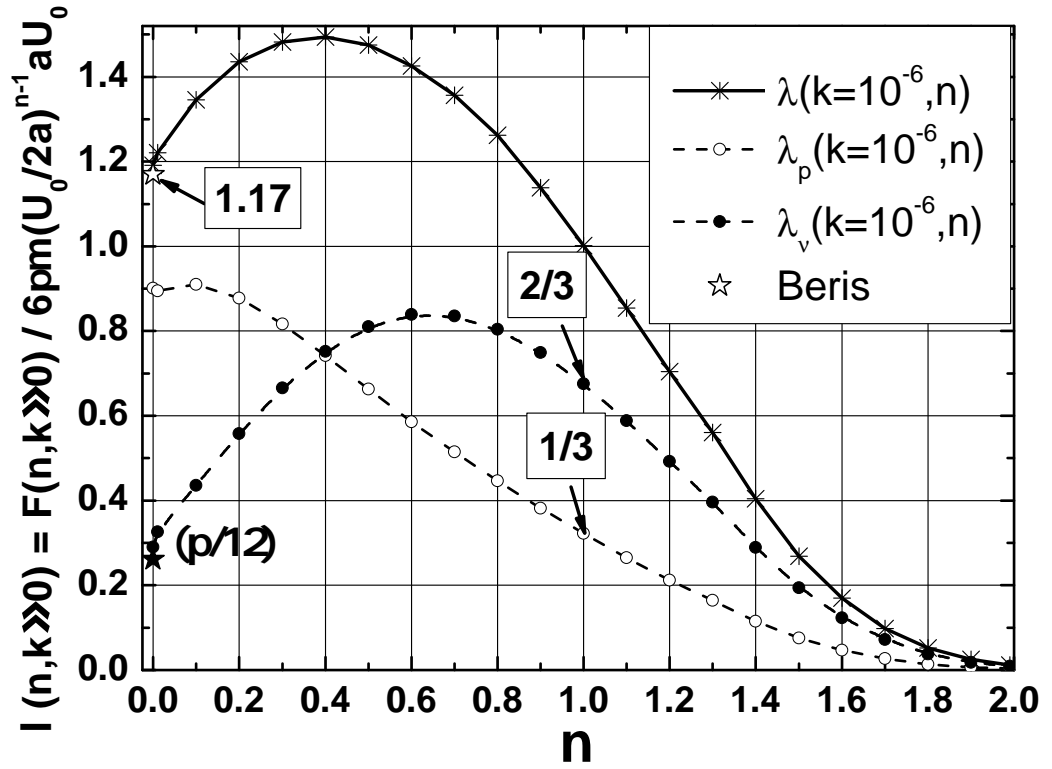


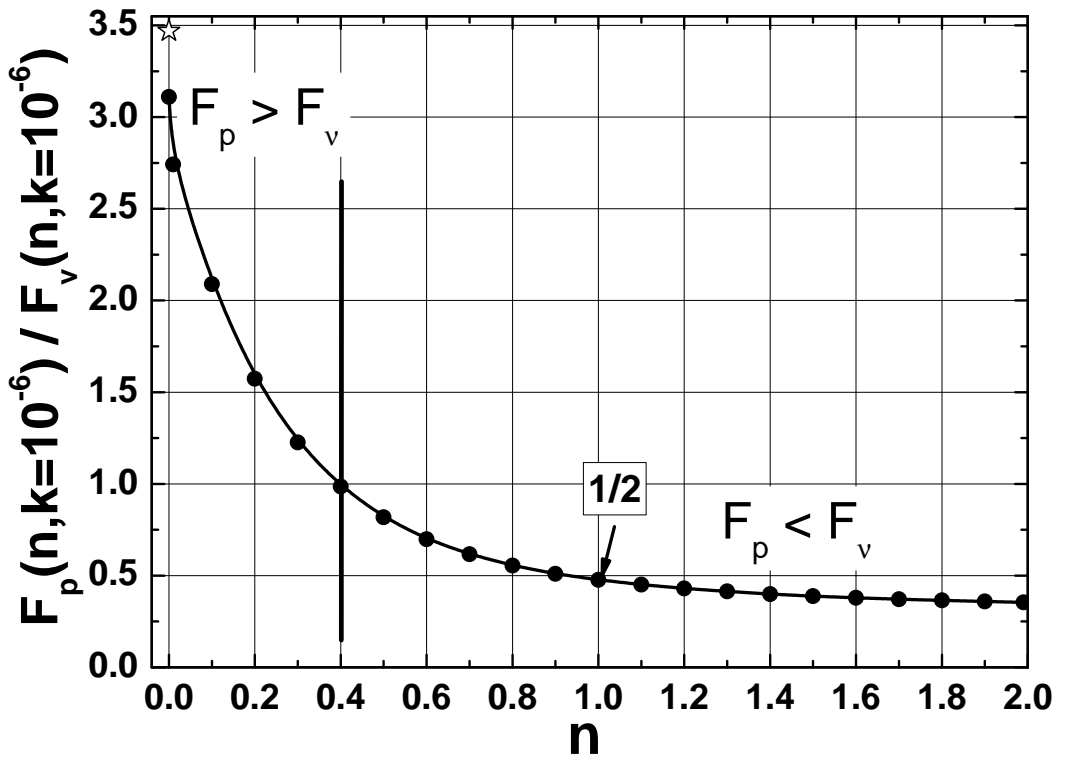
FIGURE 2.9 – Comparaison des différents résultats obtenus pour $\lambda(n, k = 0)$ par différents auteurs avec ceux obtenus dans ce travail.

n	Nos résultats numériques	Dissipation minimale	Err relative (%) col.2 et col.3	Formule (2.15)	Missirlis <i>et al.</i> (vol. finis)	Tripathi <i>et al.</i>	Dazhi <i>et al.</i>
0.0	1.1909	1.3749	15.4	1.1909	1.1834		
0.1	1.3459	1.4761	9.67	1.3460	1.3386		1.3540
0.2	1.4357	1.5364	7.01	1.4362	1.4334		1.4130
0.3	1.4827	1.5602	5.23	1.4818	1.4839		1.4580
0.4	1.4940	1.5524	3.91	1.4932	1.4973	1.4405	1.4420
0.5	1.4749	1.5167	2.84	1.4751	1.4787		1.4200
0.6	1.4259	1.4557	2.09	1.4291	1.4322	1.3805	1.3820
0.7	1.3569	1.3712	1.05	1.3563	1.3554		1.3200
0.8	1.2621	1.2650	0.23	1.2584	1.2558	1.2202	1.2400
0.9	1.1379	1.1399	0.17	1.1384	1.1371		1.1400
1.0	1.0015	1.0000	0.15	1.0008	1.0055	1.00004	1.0020
1.1	0.8541	0.8506	0.42	0.8519			
1.2	0.7042	0.6980	0.88	0.6986		0.8269	
1.3	0.5605	0.5486	2.12	0.5482			
1.4	0.4041	0.4087	1.13	0.4076		0.5694	
1.5	0.2690	0.2836	5.45	0.2830			
1.6	0.1699	0.1781	4.86	0.1785		0.3903	
1.7	0.0982	0.0960	2.30	0.0971			
1.8	0.0518	0.0395	23.8	0.0399		0.2615	
1.9	0.0249	0.0087	65.3	0.0076			
1.99	0.0120	0.00007	99.4	0.0008			

TABLE 2.1 – Comparaison entre les résultats de $\lambda(n, k = 0)$ obtenus numériquement et à l'aide de la méthode de dissipation minimale.



(a)



(b)

FIGURE 2.10 – (a) Contributions de pression et de viscosité à la force de traînée totale subie par une sphère, (b) Rapport des forces de pression et de viscosité subies par une sphère.

Afin de compléter ces résultats encourageants, nous avons tenu à présenter sur la figure 2.10a les contributions respectives de la composante de viscosité $\lambda_v(n, k = 0)$ et de la pression $\lambda_p(n, k = 0)$ à la force de traînée totale $\lambda(n, k = 0)$ calculées séparément comme indiqué dans l'annexe B. Comme pour $n = 0$ le fluide se comporte comme un fluide de Bingham avec une contrainte seuil $\tau_0 = m$, et une viscosité plastique μ (correspondant à de très grands nombres de Bingham $Bn = \tau_0 2a / \mu U_0$), il est possible de calculer analytiquement la force de viscosité subie par la sphère :

$$\lambda_v(n = 0, k = 0) = \frac{1}{F_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tau_{r\theta}|_{r=a} a^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{\pi}{12} \quad (2.14)$$

où $F_0 = 6\pi m (U_0/2a)^{n-1} aU_0 = 12\pi a^2 \tau_0$. Cette dernière valeur reportée sur la figure 2.10a, correspond parfaitement à celle calculée numériquement pour $n = 0$. Ceci confirme la validité des calculs de la composante visqueuse. Par ailleurs, la force totale a été calculée numériquement en utilisant le modèle de Bingham régularisé [48] afin d'éviter la singularité pour la valeur nulle du gradient de vitesse. Par ce dernier calcul, nous avons trouvé $\lambda(Bn \rightarrow \infty, k = 0) = 1.18$ qui est très proche de $\lambda(Bn, k = 0) = 1.17$ obtenue par Beris *et al.* [79] (figure 6 dans [79]) à la limite asymptotique de $Bn \rightarrow \infty$ et rappelée par Blackery *et al.* [80]. Cette valeur est en bon accord avec celle que nous avons obtenue numériquement avec le modèle d'Ostwald $\lambda(n = 0, k = 0) = 1.19$. Ainsi, $\lambda_p(n = 0, k = 0)$ doit prendre la valeur $1.19 - \pi/12 = 0.928$ qui correspond également à la valeur numérique limite calculée pour λ_p et tracée dans la figure 2.10a. Ces résultats confirment la validité de nos calculs numériques dans la limite où $n \approx 0$ et montrent la faiblesse de la méthode variationnelle dans cette plage d'indices de fluidité. A cette occasion, nous avons comparé les contributions de pression et de viscosité à la force hydrodynamique totale subie par la sphère pour différents indices n . Pour cela, nous avons représenté sur la figure 2.10b le rapport $F_p/F_v = \lambda_p(n, k = 0)/\lambda_v(n, k = 0)$ en fonction de n . Nous pouvons observer que dans le cas newtonien ($n = 1$), nous obtenons le résultat bien établi : $F_p = \frac{1}{2}F_v$ [81]. En effet, les valeurs calculées analytiquement [81] : $\lambda_p(n = 1, k = 0) = 1/3$ et $\lambda_v(n = 1, k = 0) = 2/3$ sont bien vérifiées. Un résultat supplémentaire est montré dans cette figure 2.10b : pour $n < 0.4$, la contribution de pression à la force totale domine la contribution visqueuse ($F_p > F_v$) ; ce résultat peut être expliqué par le fait que la viscosité décroît fortement lorsque le gradient de vitesse augmente, pour de très faibles valeurs de n . Au contraire, pour $n > 0.4$, la contribution prédominante est celle de la viscosité ($F_v > F_p$). Finalement, tous les calculs réalisés dans la limite où le fluide se comporte comme un fluide de Bingham, développée ci-dessus, donnent $(F_p/F_v)(n = 0, k = 0) \approx 3.5$.

Dans le tableau 2.1, nous donnons pour comparaison tous nos résultats pour $\lambda(n, k = 0)$ obtenus numériquement et par l'utilisation de la méthode variationnelle (décrite dans le § 2.2), ainsi que les résultats numériques provenant d'autres auteurs [78, 50, 77]. Ces derniers résultats sont en très bon accord avec les nôtres et confirment leur validité pour $n < 1$. Une concordance inattendue apparaît entre les résultats obtenus par la méthode variationnelle et nos résultats numériques pour $0.7 \leq n \leq 1.7$ (avec un écart relatif de moins de 2%) ; néanmoins, à cause de la haute sensibilité au confinement, nous supposons que, si le coefficient de confinement est réduit ($k < 10^{-6}$), nous obtiendrons

probablement la même très faible valeur que celle donnée par la méthode de dissipation minimale au voisinage de $n = 2$. Afin de donner une formule permettant le calcul des valeurs de $\lambda(n, k = 0)$, nous proposons le polynôme d'interpolation (2.15), qui donne des valeurs précises avec une erreur relative de moins de 1% pour $0 \leq n \leq 1.8$ (au voisinage de $n = 2$, comme la valeur calculée est très faible, l'erreur relative est très forte mais l'erreur absolue reste négligeable) :

$$\lambda(n, k = 0) = 1.191 + 1.978n - 4.916n^2 + 7.333n^3 - 8.717n^4 + 5.743n^5 - 1.838n^6 + 0.228n^7 \quad (2.15)$$

En conclusion, pour de très forts comportements rhéofluidifiants, à cause de la localisation de l'écoulement expliquée plus haut, le calcul de la force de traînée devient insensible au confinement géométrique, et le régime inertiel prend place pour des nombres de Reynolds généralisés relativement élevés. Par contre, dans le cas des fluides dilatants, quand l'indice de fluidité $n \rightarrow 2$, l'hydrodynamique devient de très longue portée et la détermination de la force sera très sensible au confinement géométrique. Le départ du régime non inertiel intervient donc à de très faibles nombres de Reynolds, comme c'est le cas pour le cylindre en fluide newtonien. Cette dernière remarque explique pourquoi le paradoxe de Whitehead apparaît pour $n \geq 2$ dans le cas d'une particule sphérique.

2.4.2 Cas d'une particule cylindrique

2.4.2.1 Effets du confinement et de l'inertie

Dans la continuité du cas de la sphère, nous avons étudié l'influence du confinement sur la sensibilité à l'inertie de la force de traînée subie par une particule cylindrique en fluide d'Ostwald. D'abord, il est nécessaire de rappeler que pour un cylindre en fluide newtonien, il n'y a pas de solution de type Stokes du fait que le paradoxe de Stokes prend place, et que la traînée a été calculée seulement dans l'approximation d'Oseen [26] prenant légèrement en compte les effets d'inertie :

$$F_x^{Lamb} = 4\pi\mu U_0 / [1/2 - \gamma + \ln(8/Re)]$$

avec $\gamma = 0.5772 \dots$ représentant la constante d'Euler. Quand $Re \rightarrow 0$, cette force de traînée par unité de longueur tend vers zéro. Ce résultat est corroboré par la théorie des corps élancés [22]. En effet, cette force de traînée varie plus lentement que la longueur du cylindre l ($F \propto l^\beta$ avec $\beta < 1$).

Pour mémoire, dans le cas des fluides newtoniens, le paradoxe de Stokes a fasciné les chercheurs depuis un siècle et demi. Ce paradoxe correspond à la non existence de solution de type Stokes dans le cas d'écoulements perpendiculaires à la génératrice d'objets cylindriques (2D) en milieu infini. En effet, l'équation de Stokes se réduit à une équation biharmonique $\nabla^4\psi = 0$ qui peut être résolue au voisinage du cylindre par la fonction de courant de la forme :

$$\psi = C \sin \theta \left(r \log r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r} \right)$$

Cependant, il s'avère impossible d'assurer la condition du champ lointain. En effet, il n'existe pas de C pour laquelle $\psi \sim r \sin \theta$ pour les grandes valeurs de r . La conséquence de ce paradoxe est que la force par unité de longueur sur le cylindre tend vers zéro quand $Re \rightarrow 0$.

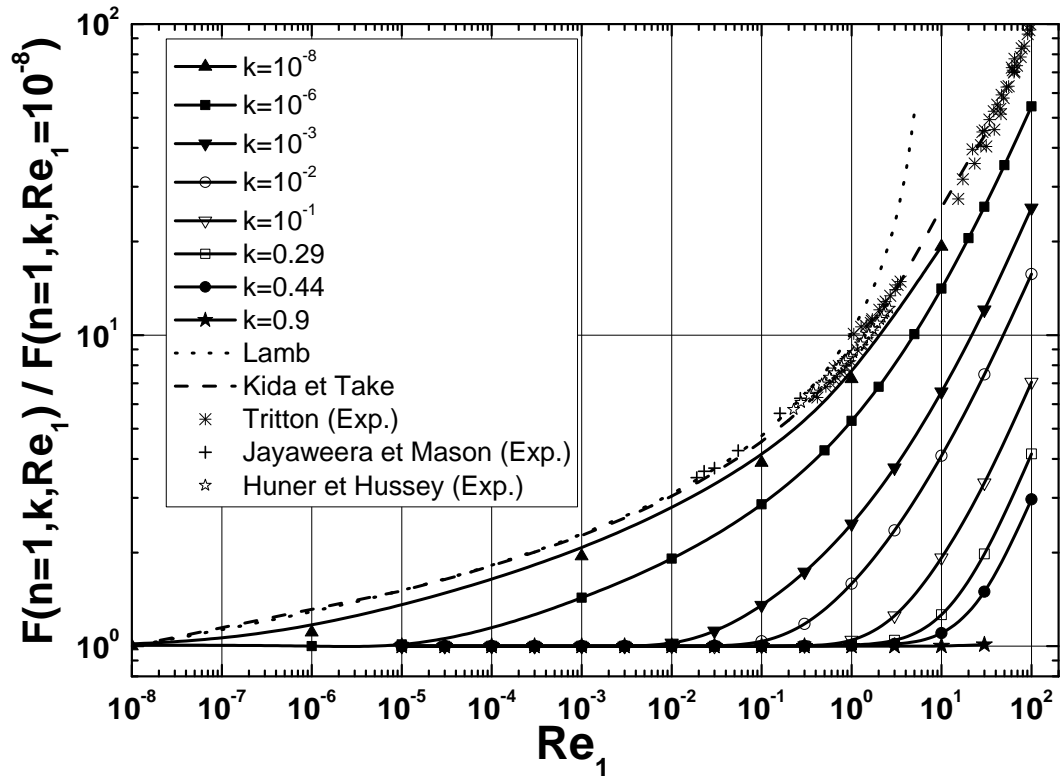


FIGURE 2.11 – Influence du confinement sur l'apparition du régime inertiel pour un cylindre.

Cependant, ce paradoxe de Stokes n'est pas à confondre avec la situation où une solution de type Stokes peut être obtenue dans le cas newtonien pour un cylindre en présence d'une paroi (le paradoxe de Stokes disparaît à cause du confinement géométrique). Pour montrer l'effet du confinement sur l'apparition de l'inertie dans le cas newtonien, nous avons tracé dans la figure 2.11 la force de traînée normalisée par sa valeur en régime plateau pour différents confinements k , sauf pour le cas du milieu infini $k = 0$, où les forces de Lamb [26] et Kida *et al.* [82,83] ont été normalisées par leurs valeurs à $Re = 10^{-8}$, à cause de l'inexistence d'un tel plateau. Cette figure montre que plus le confinement augmente, plus le nombre de Reynolds critique, à partir duquel le régime de type Stokes disparaît, croît de la même façon que dans le cas d'une particule sphérique. Au contraire, pour les très faibles confinements, l'inertie apparaît de plus en plus tôt.

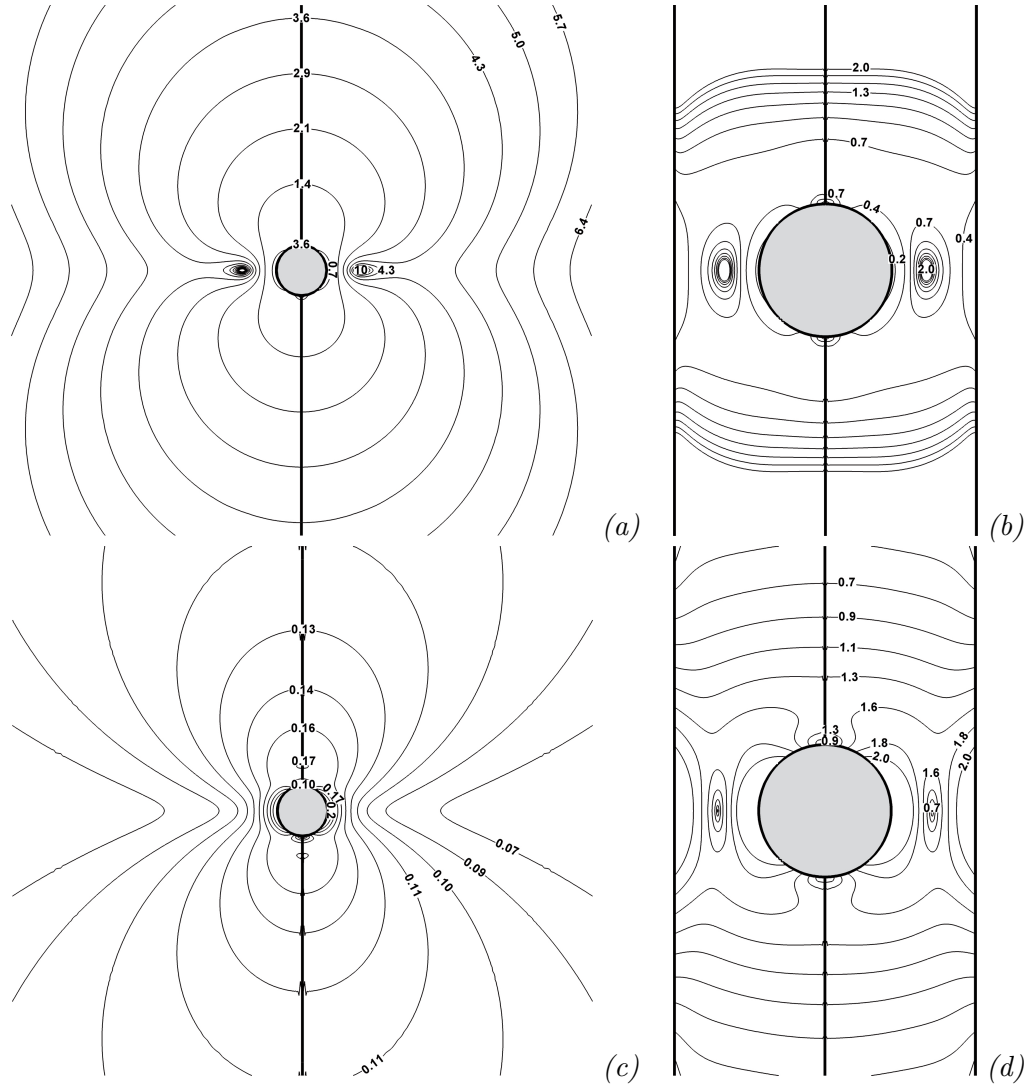
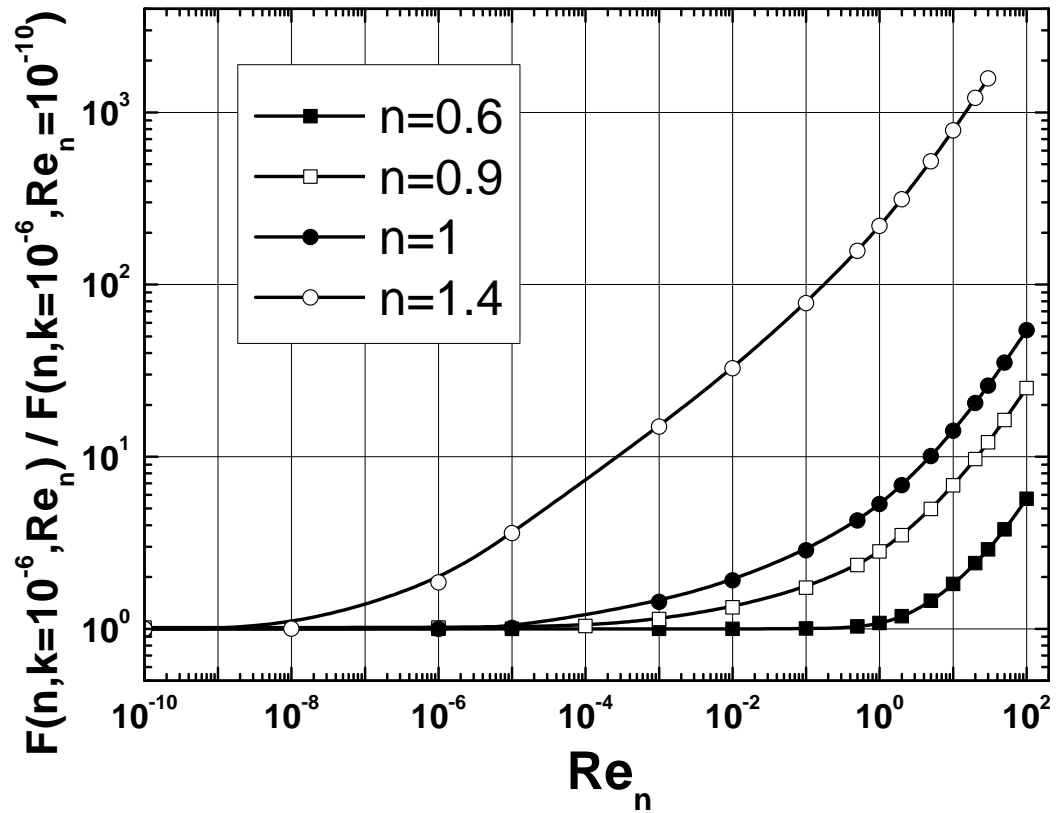
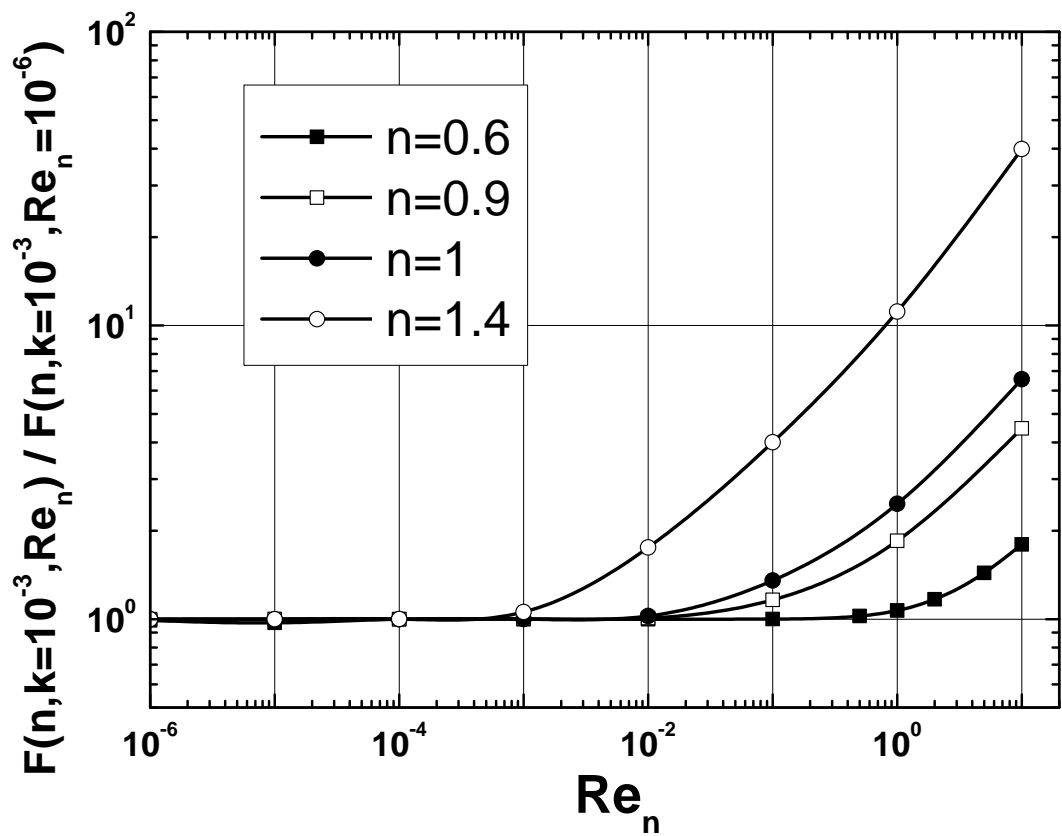


FIGURE 2.12 – Isoviscosité $\mu_{ap}/(m(U_0/2a)^{n-1})$ extraite de la viscosité inhomogène représentée dans une coupe transversale du cylindre : (a) $k = 10^{-6}$, $n = 0.5$, (b) $k = 0.44$, $n = 0.5$, (c) $k = 10^{-6}$, $n = 1.4$, (d) $k = 0.44$, $n = 1.4$.

Par ailleurs, sur cette même figure, nous avons représenté les résultats expérimentaux obtenus par Tritton [84], Jayaweera *et al.* [85] et Huner *et al.* [86]. Tous ces résultats semblent être en bon accord avec ceux obtenus par Kida *et al.* [82, 83] et Lamb [26] pour de faibles nombres de Reynolds. Quand le fluide porteur présente un comportement pseudoplastique ($0 \leq n < 1$), le champ hydrodynamique est localisé au voisinage du cylindre (figure 2.12a). Cette localisation, due à une diminution de la viscosité apparente avec le gradient de vitesse, rend possible la satisfaction des conditions aux limites en champ lointain et, par conséquent, l'obtention d'une solution de type Stokes en milieu infini [52, 53], qui peut être calculée numériquement.



(a)



(b)

FIGURE 2.13 – Influence de la rhéologie du fluide sur l'apparition des effets d'inertie en fonction du confinement : (a) $k = 10^{-6}$, (b) $k = 10^{-3}$

Il est aussi important de préciser que la solution de type Stokes existe a fortiori pour un confinement fini (figure 2.12b), comme dans le cas newtonien. Contrairement au cas rhéofluidifiant, la perturbation hydrodynamique est de très longue portée pour les fluides dilatants ($n > 1$) (figure 2.12c). Dans cette situation, le paradoxe de Stokes reprend place en milieu infini [52, 53]. Néanmoins, en milieu confiné géométriquement (figure 2.12d), une solution de type Stokes peut être obtenue comme dans tous les autres cas, indépendamment du comportement rhéologique du fluide.

En conclusion, pour des fluides en loi de puissance en situation confinée, le comportement dilatant ou pseudoplastique peut affecter la valeur critique de Re_n à partir de laquelle il n'est plus possible de négliger les effets d'inertie. Cette inertie est une conséquence de l'inhomogénéité de la viscosité du fluide à proximité du cylindre, comme cela est montré sur les figures 2.12b et 2.12d. En effet, dans les figures 2.13a et 2.13b, nous avons représenté l'évolution de la force de type Stokes normalisée par sa valeur en régime plateau, en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_n , respectivement pour des confinements de $k = 10^{-6}$ et $k = 10^{-3}$. Sur ces deux figures, il est notable que pour des fluides dilatants, l'inertie apparaît à de très faibles nombres de Reynolds quand le confinement diminue ($k \rightarrow 0$). Par exemple, pour $n = 1.4$, l'inertie apparaît à $Re_n = 10^{-8}$ pour $k = 10^{-6}$. Dans ces conditions, nous nous attendons à ce qu'il soit impossible d'atteindre le régime non inertiel de Stokes. En outre, pour $n \lesssim 1$, le départ du régime de type Stokes continue d'exister à très faible nombre de Reynolds quand $k \rightarrow 0$. Ce comportement explique la surestimation de la force de traînée pour $0.6 \leq n < 1$ par Whitney *et al.* [87] et Ferreira *et al.* [49] (figure 2.3). Ces remarques importantes permettent d'expliquer pourquoi il a été difficile de calculer numériquement avec précision la force de traînée subie par un cylindre pour $n \gtrsim 1$, à cause de la haute sensibilité au confinement. Toutefois, pour $n \ll 1$, il semble d'après les figures 2.13a et 2.13b que cette sensibilité diminue. Face à ces résultats, il apparaît important de déterminer la plage de nombres de Reynolds qui caractérise le régime plateau (ou régime de type Stokes) où la force de type Stokes subie par une particule cylindrique doit être calculée.

2.4.2.2 Force de type Stokes en milieu infini

Sur la figure 2.14, nous avons montré l'évolution de la force de traînée en fonction de l'indice de fluidité n pour plusieurs faibles valeurs du confinement k , obtenues en régime de type Stokes. Pour $n > 0.5$, les résultats numériques mettent en évidence la très haute sensibilité de la force au confinement évoquée précédemment, et tendent vers une courbe limite pour $k = 10^{-8}$ (à $Re_n = 10^{-15}$). Il est en réalité nécessaire de calculer $\lambda(n, k \approx 0)$ à $k \ll 10^{-8}$ et $Re_n \ll 10^{-15}$ pour respecter la condition de milieu infini. Cependant, comme cela a été obtenu dans le cas de la sphère, cette courbe limite est en très bon accord avec celle tracée à partir des valeurs de $\lambda(n, k = 0)$ calculées par l'utilisation de la fonction de courant ψ introduite au § 2.2 et du théorème de dissipation minimale. Rappelons qu'il a été démontré théoriquement que le paradoxe de Stokes n'existe plus en fluide pseudoplastique, tandis qu'il réapparaît pour tous les fluides dilatants ($n \geq 1$) pour une particule cylindrique, comme dans le cas newtonien [53].

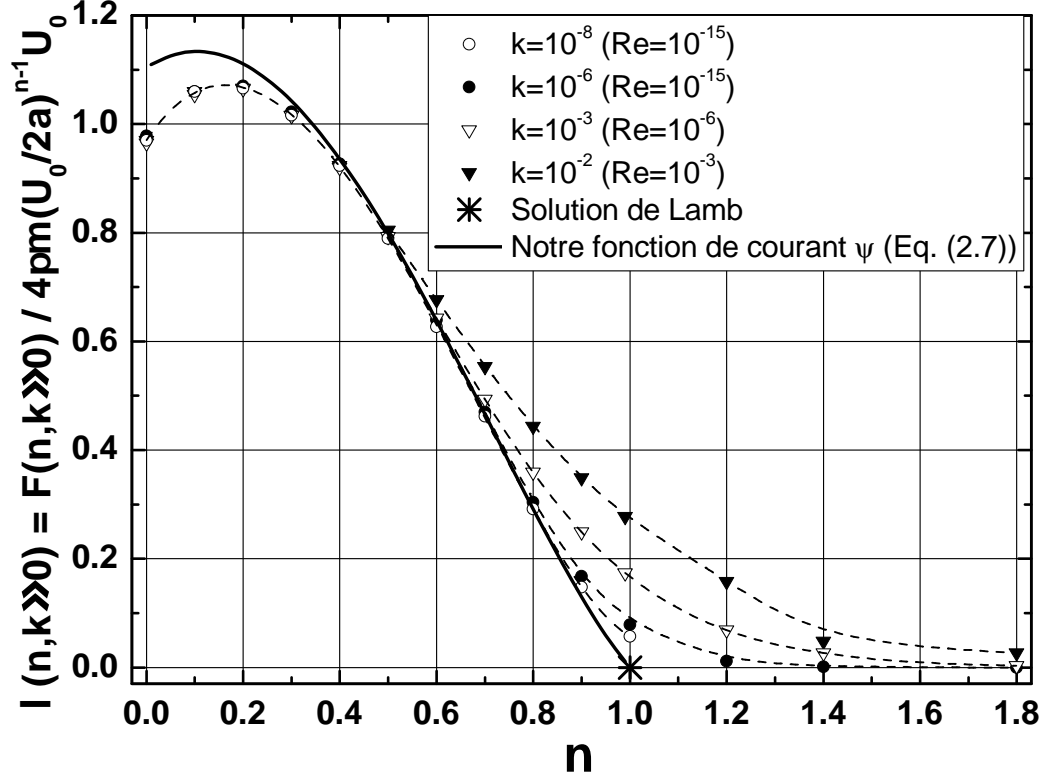
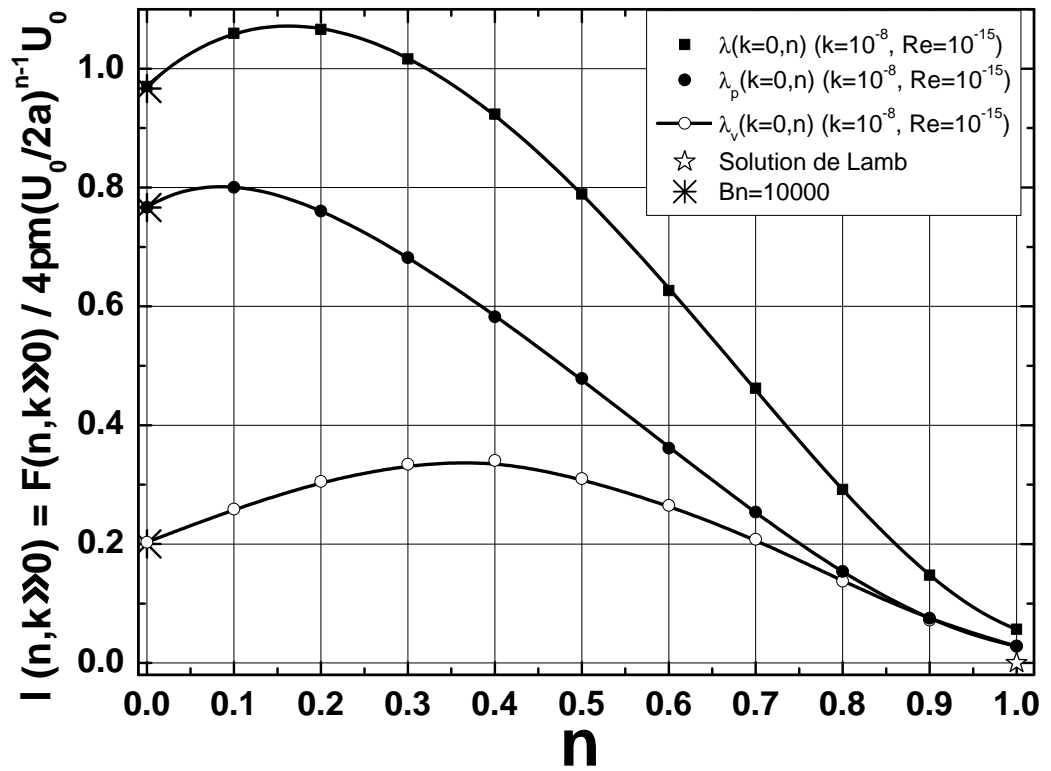
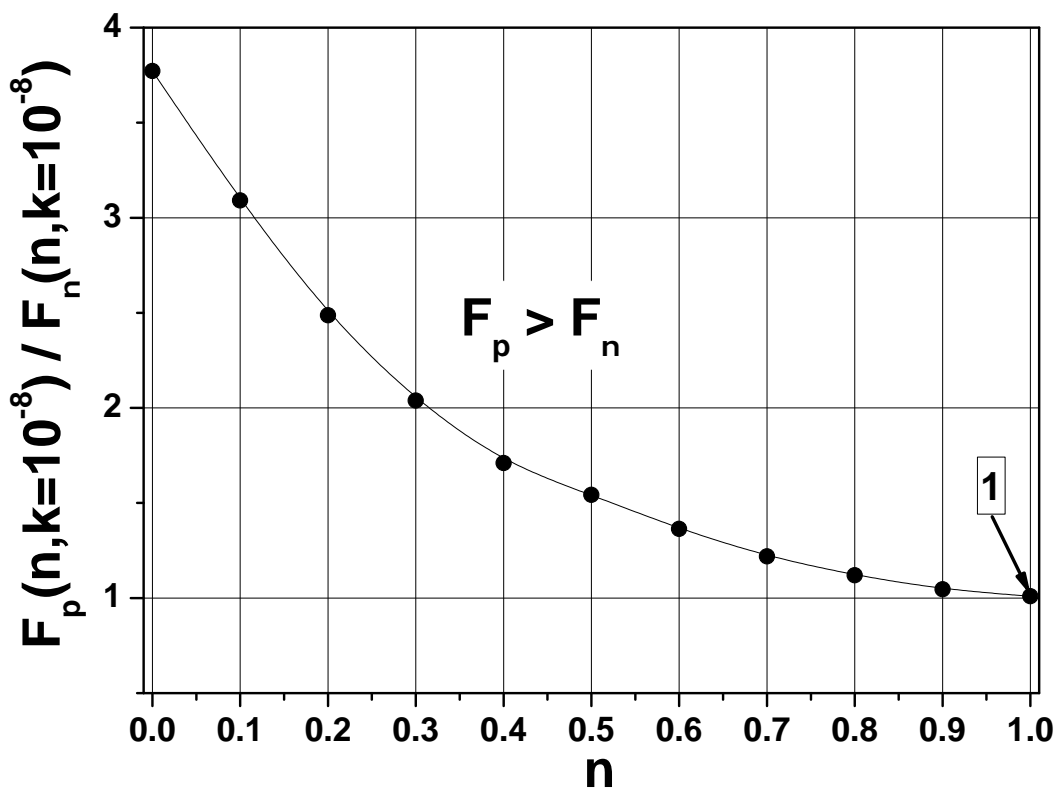


FIGURE 2.14 – Evolution de la force de traînée subie par un cylindre en fluide d'Ostwald et influence du confinement en régime non inertiel.

Cette réapparition du paradoxe de Stokes explique pourquoi $\lambda(n, k = 0) \rightarrow 0$ quand $n \geq 1$ pour les très faibles confinements. Par ailleurs, les valeurs de la traînée calculées pour des confinements supérieurs à $k = 10^{-8}$ et pour $n \geq 1$ sont différentes de zéro du fait que le paradoxe de Stokes disparaît aussi en fluide d'Ostwald en situation confinée, comme c'est le cas pour un cylindre en fluide newtonien. Pour $n < 0.5$, de la même façon que pour la sphère, les résultats semblent être moins sensibles au confinement (figure 2.14) mais s'écartent légèrement des valeurs prédites par la méthode variationnelle. Toutefois, cette dernière approche donne une bonne approximation de la force de traînée avec une erreur relative de moins de 2% pour $0.3 \leq n \leq 1$ (tableau 2.2). Par ailleurs, nous avons comparé dans ce tableau nos résultats numériques à ceux obtenus numériquement par Tanner [52] ($k = 1.25 \cdot 10^{-2}$), Whitney *et al.* [87], Ferreira *et al.* [49] ($k = 2.5 \cdot 10^{-3}$). Tous ces résultats diffèrent pour $0.6 \leq n < 1$, ce qui peut s'expliquer par la haute sensibilité de la force au confinement et aux effets inertiels. Les seuls résultats numériques qui sont en bon accord avec les nôtres, seulement dans l'intervalle $0.1 \leq n \leq 0.6$, sont ceux de Whitney *et al.* [87]. D'un autre côté, la méthode des perturbations utilisée par Tanner [52], pour $n \approx 1$, donne des résultats qui correspondent à nos résultats numériques seulement pour $0.7 \leq n \leq 0.9$.



(a)



(b)

FIGURE 2.15 – (a) Contributions de pression et de viscosité à la force de traînée totale subie par un cylindre, (b) Rapport des forces de pression et de viscosité subies par un cylindre.

n	Nos résultats numériques	Dissipation minimale	Formule (2.16)	Tanner (méth. pert.)	(B.E.M.)	Whitney <i>et al.</i>	Ferreira <i>et al.</i>
0.0	0.9700	1.1092	0.9784				
0.1	1.0593	1.1334	1.0597	0.2631		1.0619	
0.2	1.0659	1.1110	1.0704	0.6248		1.0635	
0.3	1.0163	1.0422	1.0221	0.9044		1.0173	
0.4	0.9233	0.9352	0.9268	1.0084	0.8128	0.9208	
0.5	0.7890	0.7980	0.7955	0.9482	0.6839	0.7881	
0.6	0.6266	0.6382	0.6384	0.7800	0.5484	0.6411	0.7011
0.7	0.4621	0.4656	0.4660	0.5608	0.4328	0.5013	0.5344
0.8	0.2918	0.2914	0.2906	0.3360	0.3378	0.3844	0.3998
0.9	0.1477	0.1296	0.1300	0.1402	0.2637	0.2968	0.2904
1.0	0.0569	0.0105	0.0104				0.1997

TABLE 2.2 – Comparaison entre différents résultats, obtenus numériquement et par l'application du théorème de dissipation minimale, de $\lambda(n, k = 0)$

Malgré les résultats encourageants et précis fournis par la méthode variationnelle pour $0.3 \leq n < 1$ (figure 2.14), cette approche ne peut pas constituer une validation de nos résultats numériques. Pour toutes ces raisons, nous avons tracé sur la figure 2.15a les deux composantes de pression $\lambda_p(n, k = 0)$ et de viscosité $\lambda_v(n, k = 0)$ de la force totale, calculées séparément. Dans la limite où $n = 0$, (qui correspond aux très grands nombres de Bingham $Bn = \tau_0 2a / \mu U_0$), il est possible de calculer les différentes composantes de la traînée numériquement par l'utilisation du modèle de Bingham régularisé. Nous avons trouvé $\lambda(Bn = 10^4, k = 0) = 0.966$. Cette valeur constitue une limite asymptotique pour $Bn \rightarrow \infty$ et est du même ordre que celle obtenue par Adachi *et al.* [88] : $\lambda(Bn = 10^3, k = 0) = 1.031$ (figure 2.15a). Les valeurs des composantes de la force de traînée ($\lambda, \lambda_p, \lambda_v$) que nous avons obtenues pour un fluide en loi de puissance d'indice $n \approx 0$ sont en bon accord avec celles obtenues pour un fluide de Bingham dans la limite où $Bn \rightarrow \infty$. Ceci renforce la validité de nos calculs numériques dans la limite où $n \approx 0$ et infirme la méthode de dissipation minimale dans cet intervalle d'indices n . A cette occasion, nous avons comparé les contributions de pression et de viscosité à la force hydrodynamique totale. Pour différents indices de fluidité n , nous avons tracé sur la figure 2.15b le rapport F_p/F_v en fonction de n . Nous pouvons observer que, dans la limite où $n = 1$ correspondant au fluide newtonien, les deux composantes de la force de traînée par unité de longueur tendent vers zéro de la même façon : $(F_p/F_v) \rightarrow 1$. Dans la figure 2.15b, contrairement au cas de la sphère, la force de pression domine la force de viscosité sur l'ensemble de l'intervalle $0 \leq n < 1$. Pour les faibles valeurs de n , la pression domine à cause de la diminution rapide de la viscosité avec le gradient de vitesse. Dans la limite ($n = 0, k = 0$) développée ci-dessus, nous obtenons $(F_p/F_v) \approx 3.8$.

Enfin, un bon accord est obtenu entre les résultats issus de la méthode variationnelle et nos résultats numériques pour $0.3 \leq n < 1$ (écart relatif moyen de moins de 2%). Néanmoins, du fait de la sensibilité au confinement, nous obtiendrions probablement les

mêmes valeurs faibles que celles données par la méthode énergétique pour $0.85 < n < 1$ si nous diminuons le confinement (les résultats déterminés par cette méthode s'extrapolant exactement vers la solution de Lamb pour $n = 1$). Afin de fournir une relation permettant le calcul de $\lambda(n, k = 0)$, en prenant en compte ces dernières remarques, nous proposons la formule d'interpolation polynômiale 2.16, donnant des valeurs qui présentent un écart relatif de moins de 1% avec nos résultats pour $0 \leq n < 1$.

$$\lambda(n, k = 0) = 0.978 + 1.202n - 4.047n^2 + 1.382n^3 + 1.925n^4 - 2.758n^5 + 1.328n^6 \quad (2.16)$$

2.5 Paradoxes de Whitehead et de Stokes dans le cas d'une particule dans un fluide en loi de puissance

Les résultats obtenus pour la force de traînée subie par une sphère et une particule cylindrique en fluide d'Ostwald sont récapitulés dans la figure 2.16.

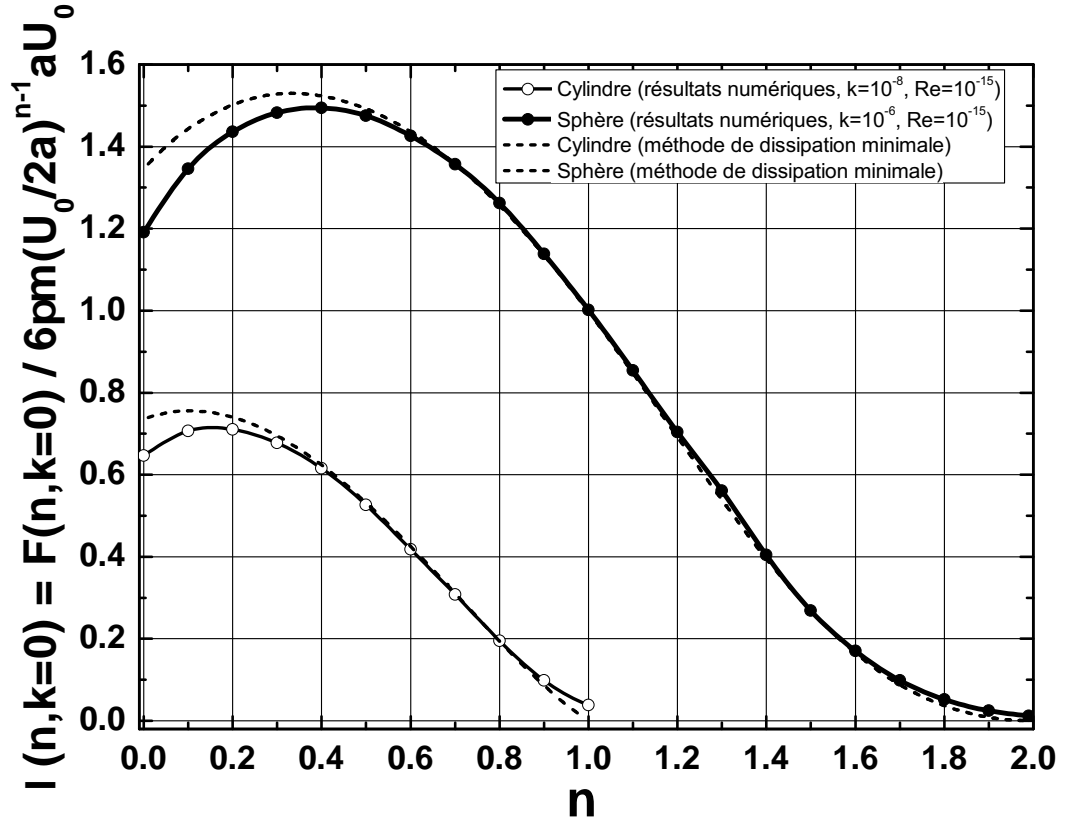


FIGURE 2.16 – Facteur de correction de la force de traînée subie par une sphère et un cylindre dans un milieu infini rempli d'un fluide d'Ostwald montrant les valeurs critiques de n à partir desquelles les paradoxes de Whitehead et de Stokes prennent place.

Ces courbes confirment les prévisions théoriques de Marušić [53] qui a prédit que dans le cas des fluides pseudoplastiques, les paradoxes de Whitehead et de Stokes n'apparaissent pour aucune particule (sphère ou cylindre) tandis que pour les fluides dilatants, ils prennent place pour une sphère quand $n \geq 2$, et quand $n \geq 1$ pour un cylindre. Pour comprendre physiquement l'effet de l'indice de fluidité sur les paradoxes de Whitehead et de Stokes qui conduit à annuler la force exercée par le fluide sur la particule, nous avons représenté sur les figures 2.17a et 2.17b le champ de vitesse respectivement pour une sphère et pour un cylindre. Le paramètre ξ_+ représenté sur ces deux figures correspond à la distance à la particule normalisée $r_+ = r/a$ pour laquelle la vitesse du fluide peut être considérée comme négligeable. Ainsi, pour une particule sphérique en fluide newtonien, la vitesse du fluide atteint 1% de sa valeur au niveau de la particule pour $\xi_+ \approx 76$. Dans le cas de la sphère, la longueur d'écran hydrodynamique tend vers l'infini pour $n = 2$ tandis que pour un cylindre, elle tend vers l'infini quand $n = 1$. Finalement, rappelons que lorsque le milieu est confiné, les paradoxes de Whitehead et de Stokes disparaissent dans tous les cas comme cela est montré dans les figures 2.8 et 2.14.

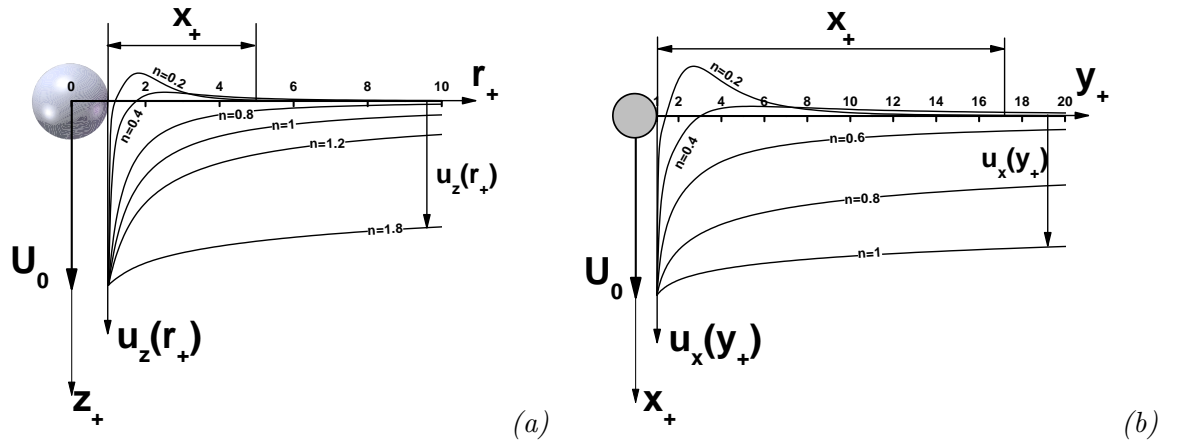


FIGURE 2.17 – Champ de vitesse au sein d'un milieu infini rempli d'un fluide en loi de puissance et évolution de la longueur d'écran hydrodynamique ξ en fonction de n : (a) sphère, (b) cylindre

2.6 Conclusion

En prenant soin d'éviter les pièges liés à l'inertie qui apparaît très tôt en milieu infini, nous avons fourni, dans ce premier chapitre, une solution numérique précise au problème de type Stokes concernant la force de traînée subie par une sphère ou un cylindre en mouvement uniforme dans un fluide en loi de puissance en milieu illimité. Ce problème a retenu l'attention de nombreux chercheurs dont les résultats n'ont pas été complètement établis en régime non inertiel, et plus particulièrement pour les fluides dilatants. Comme beaucoup d'études font usage de la méthode de dissipation minimale,

nous avons donné, seulement pour comparaison, les résultats obtenus à l'aide d'une fonction de courant qui vérifie toutes les conditions nécessaires. Pour une sphère, ces résultats sont, de manière surprenante, en bon accord dans le cas des fluides dilatants mais s'écartent légèrement des résultats numériques pour les faibles valeurs de l'indice de fluidité n pour les fluides rhéofluidifiants. De la même manière, dans le cas d'une particule cylindrique, malgré le bon accord avec nos résultats numériques, les valeurs obtenues par la méthode énergétique s'en écartent à nouveau pour les faibles valeurs de n . La comparaison avec succès des résultats obtenus par l'utilisation de méthodes numériques différentes permet de valider nos calculs. A cette occasion, nous confirmons les prédictions théoriques réalisées par Marušić [53] et donnons une explication physique de l'apparition du paradoxe de Whitehead pour une sphère à partir de $n = 2$ et de la disparition du paradoxe de Stokes dans le cas d'un cylindre seulement pour $n < 1$ en milieu infini.

Chapitre 3

Effets des interactions hydrodynamiques sur la sédimentation et le transport de particules sphériques en fluide d'Ostwald

3.1 Introduction

Lors du transport de particules en microfluidique, incluant la chromatographie hydrodynamique HDC [89] et les écoulements sanguins dans le réseau micro-vasculaire. . . , les particules sont souvent très confinées. Ce confinement nécessite de tenir compte dans leur transport des effets des interactions hydrodynamiques. Les fluides porteurs peuvent être non newtoniens (fluides biologiques. . .). Ce type de problème est aussi présent dans l'industrie lors de l'injection de thermdurcissables chargés de microsphères. Cette étude concerne ainsi le calcul de la vitesse de transport réelle d'une particule sphérique par un "écoulement de type Poiseuille" dans un fluide en loi de puissance. En effet, lors de la modélisation du transport de particules sphériques ou cylindriques, la plupart des chercheurs néglige les interactions hydrodynamiques et par conséquent, le retard de vitesse par rapport à la vitesse du fluide non perturbé. Cette hypothèse communément admise [90] n'est en effet valable que dans le cas d'une suspension en régime dilué. Cependant, dans les applications industrielles, il faut rappeler que les concentrations utilisées pour arriver, dans les matériaux composites, à dépasser le seuil de percolation mécanique afin d'obtenir un effet de renfort, sont des concentrations très élevées. Dans ces conditions, les interactions hydrodynamiques sont loin d'être négligeables, et la vitesse de transport de la particule par le fluide n'est pas la même que celle du fluide non perturbé. Pour répondre à une telle problématique non linéaire, nous sommes confrontés à la résolution du problème inverse qui consiste à déterminer, par approximations successives, la vitesse relative à imposer à la particule transportée dans son

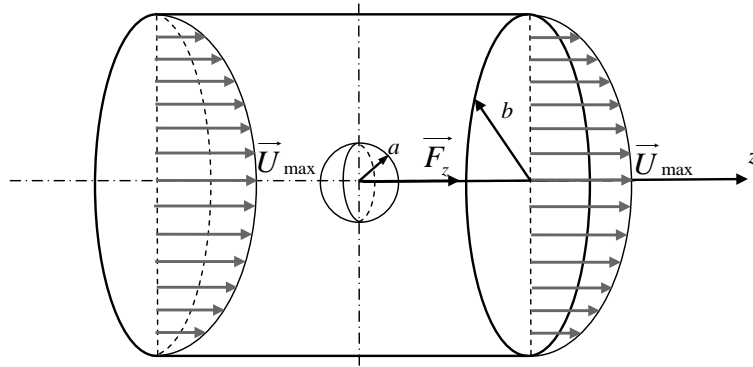


FIGURE 3.1 – Schéma représentant le transport d’une particule sphérique par un ”écoulement de type Poiseuille” dans un fluide d’Ostwald.

écoulement afin que la force hydrodynamique induite sur la particule soit nulle, correspondant à une particule libre (rappelons ici que le couple est identiquement nul du fait de la position axiale de la particule). Quoique, dans ce cas la méthode matricielle n’est pas utilisable, nous avons malgré tout testé, par curiosité, les résultats obtenus par cette technique dans l’espoir d’être dans un cas de faible non linéarité. A cette occasion, nous allons traiter le cas de la sédimentation de sphères de différents diamètres dans un tube de diamètre fixe, afin de comparer les effets antagonistes du poids apparent des particules et du frottement induit par les interactions hydrodynamiques via la concentration. Le problème du transport d’une particule sphérique par un ”écoulement de type Poiseuille” dans un fluide d’Ostwald est schématisé sur la figure 3.1. Afin de ne pas être redondant, rappelons que la loi rhéologique du fluide étudié est celle donnée par l’équation 2.1. Afin de normaliser nos résultats, nous aurons besoin tout le long de ce chapitre des valeurs de la force subie par cette sphère en écoulement uniforme en milieu infini.

$$\mathbf{F}(n, k = 0) = -6\pi m \left(\frac{U_0}{2a} \right)^{n-1} aU_0\lambda(n, k = 0)\mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

Ces valeurs sont données dans la figure 2.8 et dans le tableau 2.1.

3.2 Approche numérique et asymptotique

3.2.1 Méthode numérique

Concernant la formulation et l’approche numérique utilisées dans ce chapitre, celles-ci sont identiques à celles employées dans le chapitre 2.3, à part le fait que les conditions aux limites hydrodynamiques, dans ce problème, consistent à imposer un profil de vitesse de ”type Poiseuille” correspondant à l’écoulement non perturbé, suffisamment loin en amont et en aval (pour pouvoir négliger les effets de la particule). Cette dernière façon d’imposer les conditions aux limites évite d’introduire les effets d’entrée.

3.2.2 Maillage dynamique

Afin de résoudre le problème inverse décrit ci-dessus, notre première approche a été d'utiliser la méthode de maillage dynamique disponible dans le code de calcul FLUENT. La résolution numérique utilisée est la même que celle décrite dans le § 2.3.3. D'une manière générale, la technique du maillage dynamique implique d'imposer, pour chaque pas de temps, le déplacement rigide relatif de certaines frontières (qui peut être une translation ou une rotation). Le maillage est alors ajusté suivant la nouvelle position des frontières mobiles. Dans notre cas, à cause de la symétrie et de l'établissement

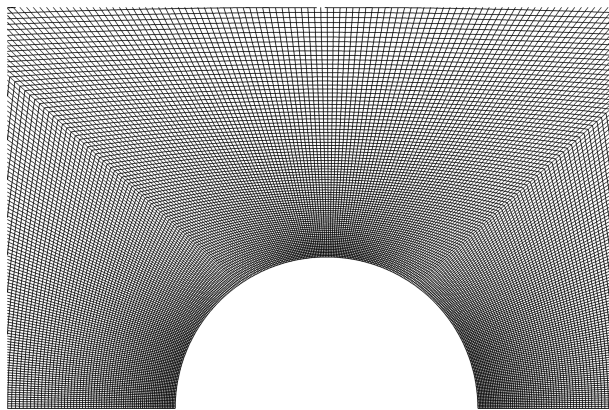


FIGURE 3.2 – Exemple de maillage utilisé avec la technique de maillage dynamique ($k = 0.29$).

de l'écoulement, la technique du maillage dynamique se réduit seulement à un glissement des cellules avec la particule conformément à l'invariance par translation de l'écoulement. Cette manière de faire évite toute déformation du maillage. La procédure utilisée pour résoudre le problème inverse cité ci-dessus consiste en la détermination par approximations successives de la vitesse de translation à donner à la particule afin que la force hydrodynamique qu'elle subit lors de son transport par l'écoulement soit nulle. C'est à dire que la particule est dans les conditions d'une particule libre. Cette vitesse critique correspond au déficit de vitesse d'une particule libre lors de son transport en interactions hydrodynamiques avec les parois du tube.

3.2.3 Méthode asymptotique

Dans le régime de lubrification (aux très faibles nombres de Reynolds), $\varepsilon(\theta)/a \ll 1$, la dissipation est principalement localisée dans la zone équatoriale située entre la sphère et le tube (figure 3.3). Dans cette configuration, les forces de traînée dues à la pression et à la viscosité induites par le backflow peuvent être calculées de la manière suivante. En effet, le gradient de pression engendré par cet écoulement peut être déduit à partir de "l'écoulement de type Poiseuille" du fluide d'Ostwald prenant place dans cet interstice :

$$\frac{dP}{dx} = \left[\frac{aU_0}{\cos \theta} \frac{1 + 2n}{n} \right]^n \frac{2m}{[\varepsilon(\theta)]^{2n+1}} \quad (3.2)$$

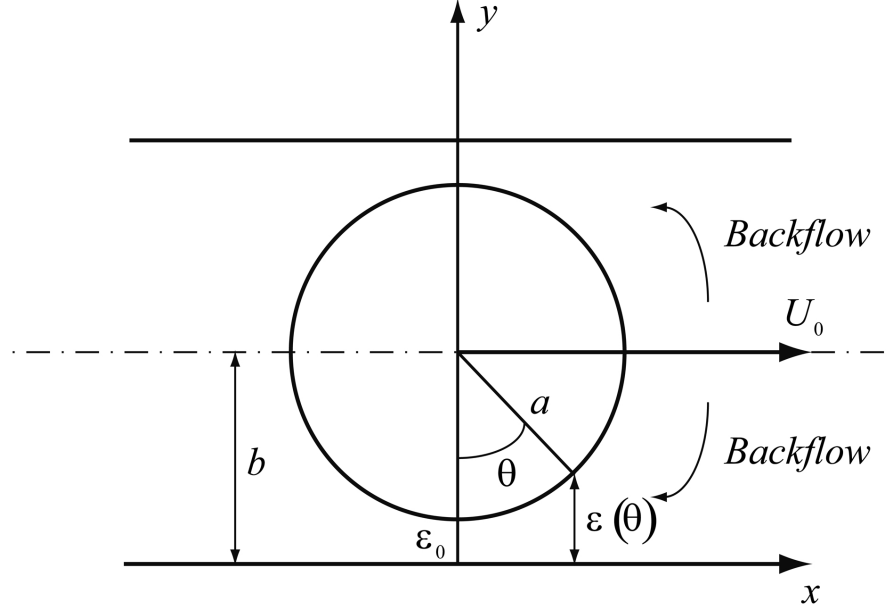


FIGURE 3.3 – Schéma du domaine annulaire de lubrification entre la sphère et le tube, où le backflow prend place.

où $\varepsilon(\theta) = \varepsilon_0 + a(1 - \cos\theta)$ et ε_0 est l'interstice minimum. Ainsi, par intégration de la pression différentielle totale dans cet interstice, nous obtenons la composante de pression de la force hydrodynamique subie par la particule :

$$\frac{F_p(n, k)}{F_p(n, k=0)} = \frac{2^{\frac{2n+1}{2}}}{3} \left[\frac{1+2n}{n} \right]^n \frac{1}{\lambda_p(n, k=0)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n+1)}{2}} \int_0^{X^*} \frac{dX}{(1+X^2)^{2n+1}} \quad (3.3)$$

La dernière intégrale, où $X^* = (a/2\varepsilon_0)^{1/2} \theta$, converge lorsque $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ vers :

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n + \frac{1}{2})}{2 \Gamma(2n + 1)}$$

Concernant la composante de viscosité qui est principalement due à l'intégrale des contraintes visqueuses induites par le backflow :

$$\frac{F_v(n, k)}{F_v(n, k=0)} = \frac{2^{\frac{2n+1}{2}}}{3} \left[\frac{1+2n}{n} \right]^n \frac{1}{\lambda_v(n, k=0)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n-1)}{2}} \int_0^{X^*} \frac{dX}{(1+X^2)^{2n}} \quad (3.4)$$

La dernière intégrale converge lorsque $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ vers :

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(2n)}$$

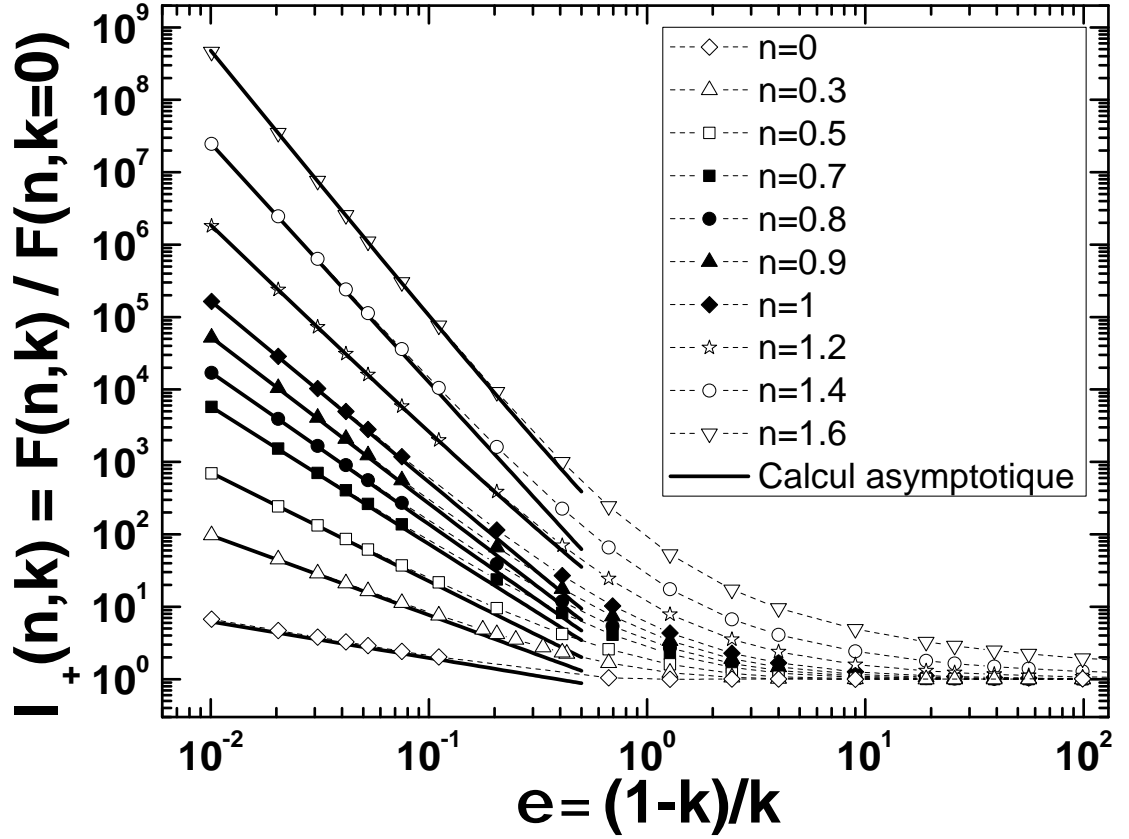


FIGURE 3.4 – Evolution du facteur de correction numérique de la force de traînée $\lambda_+(n, k)$ subie par une sphère au sein d'un milieu confiné rempli d'un fluide en loi de puissance, et concordance avec les résultats asymptotiques. [formule (3.5)].

Cette dernière expression n'est mathématiquement pas valable pour $n < 1/4$, du fait de la divergence de la fonction $\Gamma(2n - \frac{1}{2})$ pour cette valeur. Dans ces conditions, la force totale est la somme de chacune des deux composantes.

Des calculs similaires ont été effectués dans le cas d'un "écoulement de type Poiseuille" d'un fluide d'Ostwald dans lequel le backflow est remplacé par l'écoulement du fluide dans l'interstice lorsque la particule et les parois sont fixes. Les résultats de ce calcul asymptotique seront donnés respectivement dans les § 3.3.1 et 3.4.1.

3.3 Résultats numériques et discussions

3.3.1 Force de traînée subie par une sphère dans un fluide d'Ostwald en milieu confiné

Afin d'estimer la seconde correction due aux interactions entre particule et paroi, tout en tenant compte de la première correction due au comportement rhéologique non

linéaire du fluide en loi de puissance, nous avons employé deux approches numériques à ce problème. Sur la figure 2.17, nous avons représenté l'évolution de la composante $U_z(r/a)$ de la vitesse induite par le déplacement d'une sphère à la vitesse U_0 quand le fluide porteur présente un comportement rhéofluidifiant ou rhéoépaississant. Rappelons que cette figure met bien en évidence que la longueur d'écran ξ peut être fortement affectée par l'indice de fluidité. Par conséquent, les interactions hydrodynamiques entre particules ou entre particules et parois peuvent être réduites ou amplifiées selon le caractère pseudoplastique ou dilatant du fluide porteur. Comme il s'agit d'un problème couplé, il est préférable de normaliser tous les facteurs de correction par leurs valeurs respectives en milieu infini, afin que l'on puisse évaluer principalement l'effet des interactions hydrodynamiques. Sur la figure 3.4, nous avons tracé le facteur de correction de la force de traînée subie par une sphère en milieu confiné en fonction de la distance à la paroi normalisée : $\varepsilon = (1 - k)/k = (b - a)/a$. Rappelons qu'avant tout calcul conduisant aux résultats tracés dans cette courbe, nous nous sommes assurés d'être en régime de type Stokes (c'est à dire en régime non inertiel, comme discuté dans le § 2.4.1.1). Afin de vérifier la précision de nos résultats numériques, nous avons mené une approche asymptotique en régime de lubrification pour déterminer $\lambda(n, k)$ dans le cas où le diamètre de la sphère devient très proche de celui du tube ($k \rightarrow 1$). En effet, dans ces conditions, les contraintes hydrodynamiques de pression et de viscosité sont localisées dans la zone équatoriale de limite indéfinie entre la sphère et le tube (cela est confirmé par le calcul numérique de la vorticité dans un plan méridien du tube, voir figure 3.5). La première remarque sur la figure 3.4 est que la force hydrodynamique est

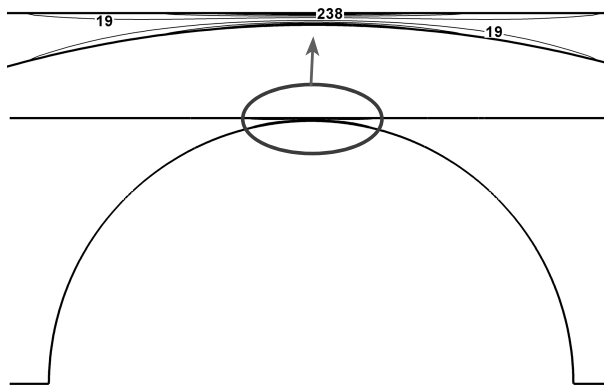


FIGURE 3.5 – Isovorticit  réduite $\omega_+ = \omega U_0/a$, montrant la localisation des contraintes hydrodynamiques.

moins sensible aux effets de paroi dans le fluide pseudoplastique, comme prévu sur la figure 2.17, qui montre une réduction de la longueur d'écran. A l'opposé, plus le fluide est rhéoépaississant, plus les interactions hydrodynamiques sont rehaussées car la longueur d'écran augmente de plus en plus. Au vu de ces deux remarques, lors de l'étude du transport des suspensions en fluide non newtonien, il est impératif de tenir compte des interactions hydrodynamiques dans le cas dilatant. Néanmoins, il est important de retenir que lorsque le fluide est pseudoplastique, les interactions hydrodynamiques sont

réduites par rapport au cas newtonien, d'autant plus que n diminue. Dans ce dernier cas, l'hypothèse de Tucker [90] continue d'être valable à l'instar du régime dilué. Le bon accord entre les résultats numériques et ceux obtenus par la méthode asymptotique [formule (3.5)] confirme la validité mutuelle des deux méthodes ainsi que leur précision. Afin d'évaluer séparément les composantes de pression et de viscosité de la force totale, nous avons comparé séparément sur les figures 3.6a et 3.6b nos calculs numériques de $\lambda_{p+}(n, k)$ et $\lambda_{v+}(n, k)$, et ceux asymptotiques donnés par les formules (3.6) et (3.7) qui ne sont valables que pour $\varepsilon_0 \ll 1$:

$$\lambda_+(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(2n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{1}{\lambda(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2},$$

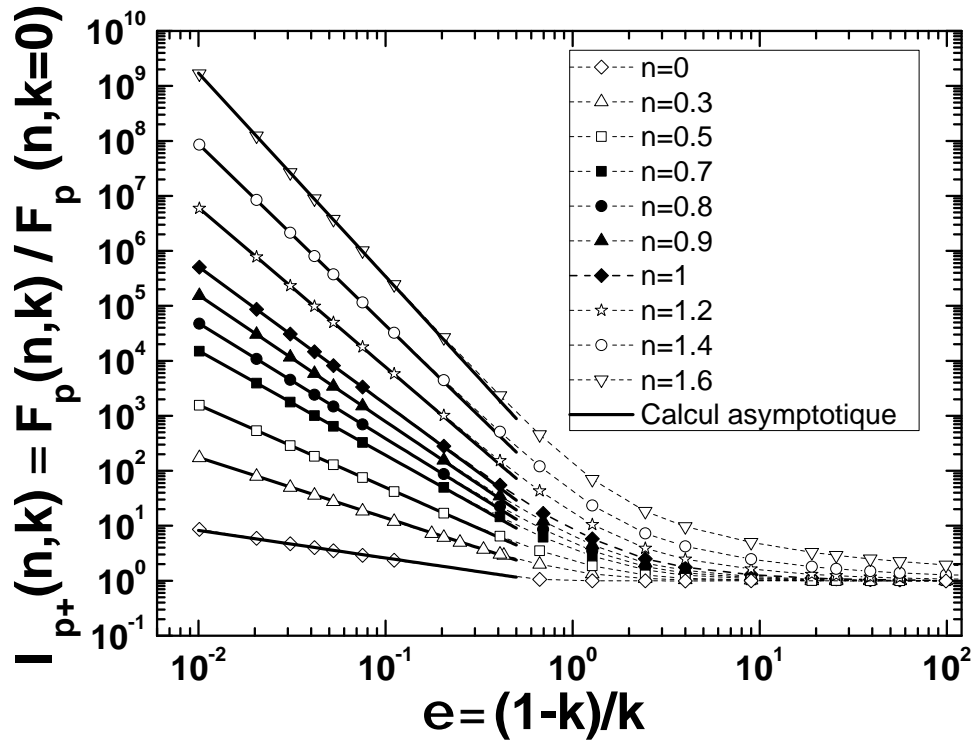
pour $0 \leq n \leq 2$ (3.5)

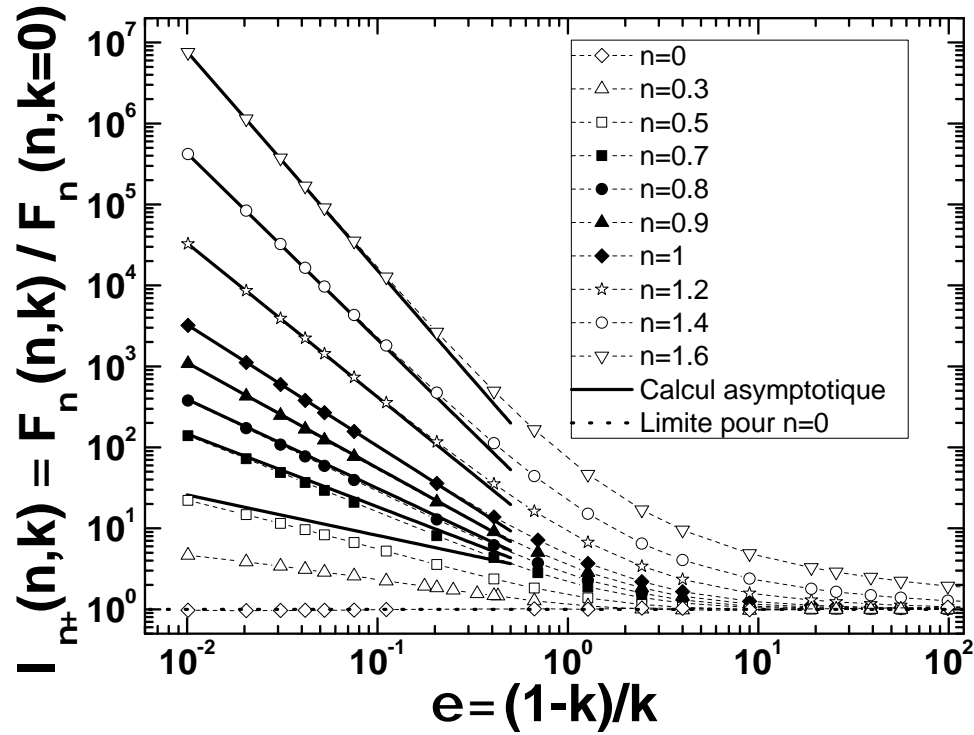
$$\lambda_{p+}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(2n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{1}{\lambda_p(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2},$$

pour $0 \leq n \leq 2$ (3.6)

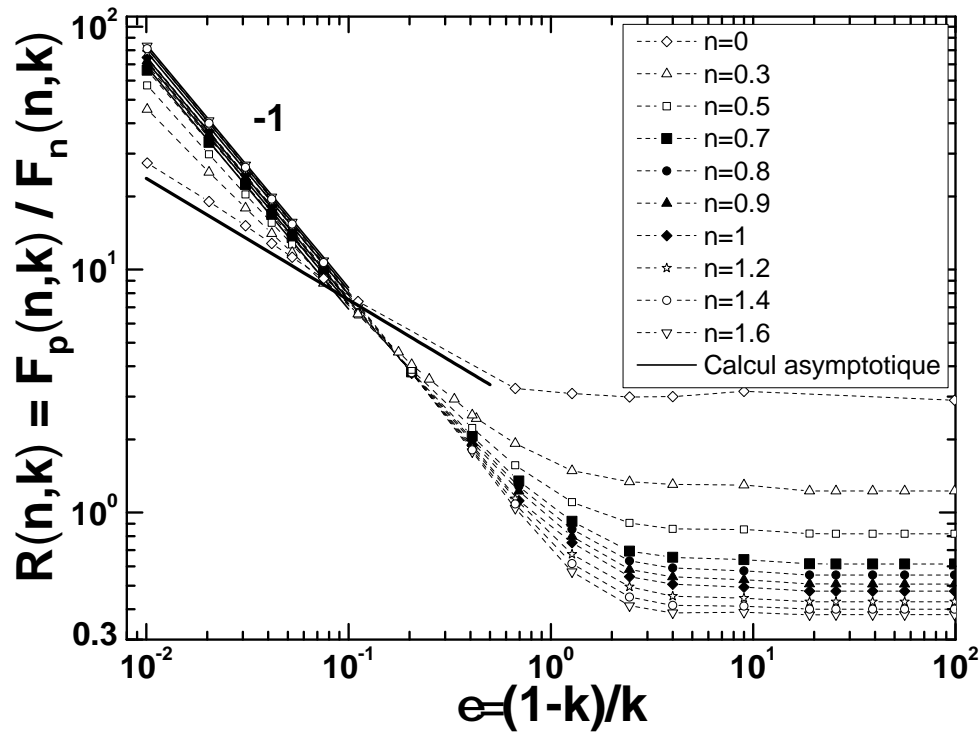
$$\lambda_{v+}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{1}{\lambda_v(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{\Gamma(2n)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n-1)/2},$$

pour $\frac{1}{4} < n \leq 2$ (3.7)



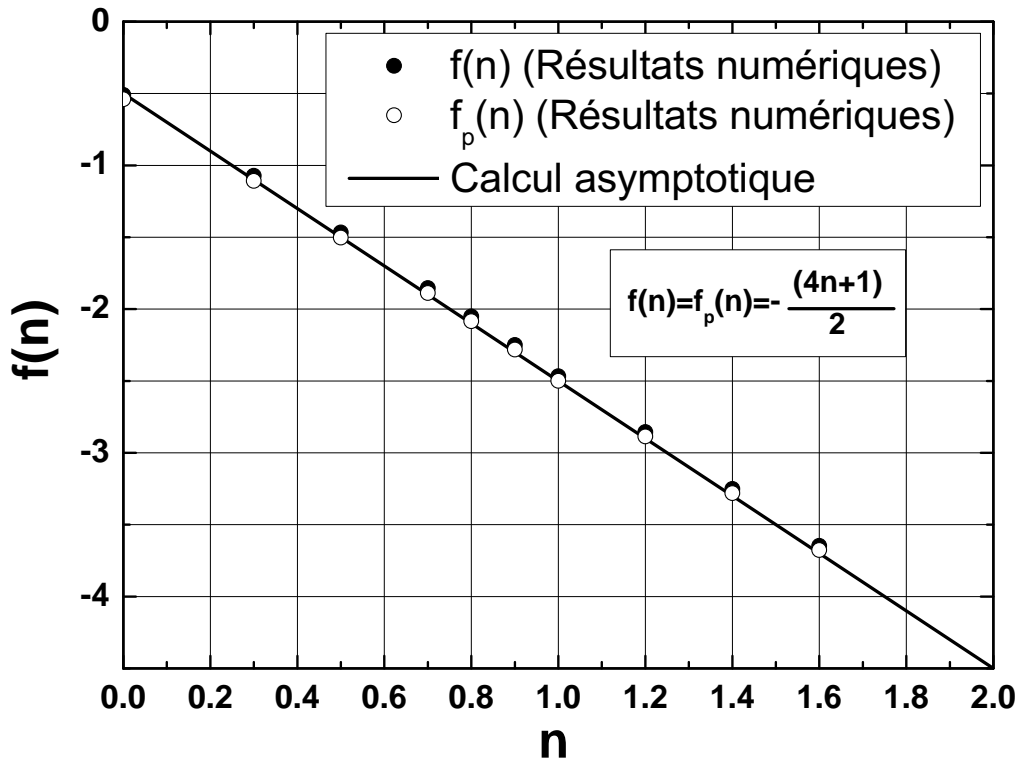


(b)

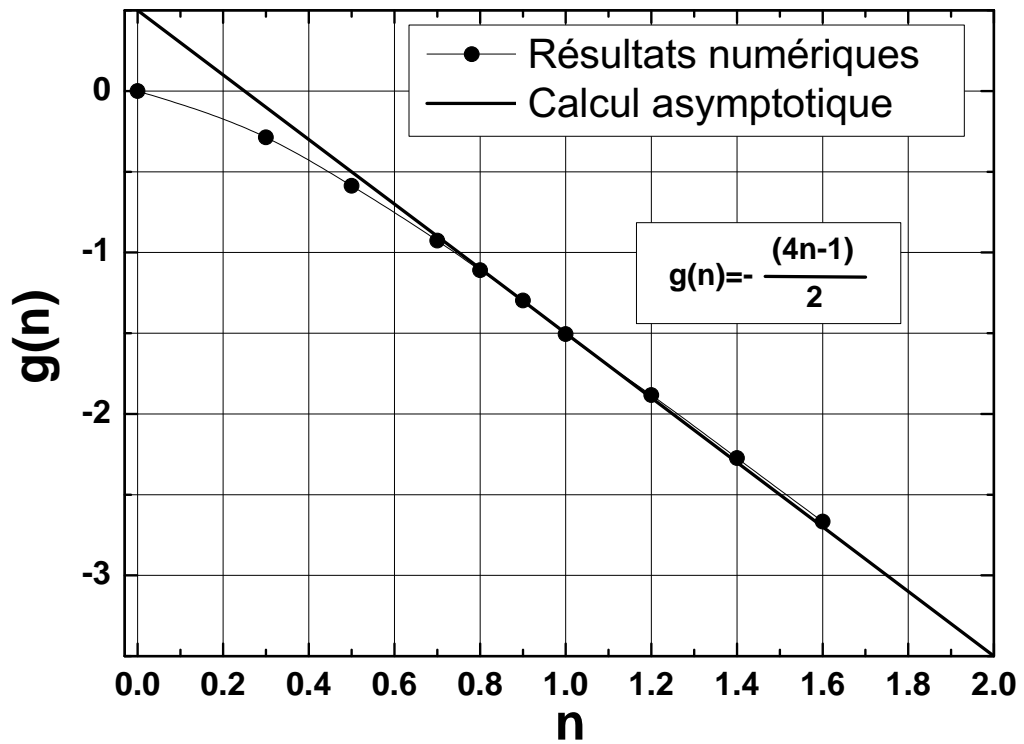


(c)

FIGURE 3.6 – Evolution des contributions à la force de traînée subie par une sphère dans un milieu confiné rempli d'un fluide en loi de puissance (résultats numériques et asymptotiques) : (a) contribution de la pression $\lambda_{p+}(n, k)$ [formule (3.6)], (b) contribution de la viscosité $\lambda_{v+}(n, k)$ [formule (3.7)], (c) rapport des deux contributions $R(n, k) = \frac{F_p(n, k)}{F_v(n, k)}$ [formule (3.8)].



(a)



(b)

FIGURE 3.7 – Comparaison des exposants $f(n)$ et $g(n)$ du comportement en loi de puissance des différentes composantes de la force totale obtenus numériquement avec ceux obtenus asymptotiquement : (a) force de traînée totale et composante de pression, (b) composante de viscosité.

La figure 3.6c montre clairement que pour les grands confinements, la composante de pression est toujours dominante.

$$R(n, k) = \frac{F_p(n, k \rightarrow 1)}{F_v(n, k \rightarrow 1)} = \frac{\lambda_p(n, k)}{\lambda_v(n, k)} = \left(\frac{4n-1}{4n} \right) \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-1}, \text{ pour } \frac{1}{4} < n \leq 2 \quad (3.8)$$

Sur la figure 3.6b, on remarque les limites de la méthode asymptotique à évaluer les forces de viscosité pour les très faibles valeurs de n . Ceci est dû à la forme singulière de la fonction $\Gamma(x)$ au voisinage de $x = 0$, correspondant à $n = 1/4$. Pour $n = 0$, l'asymptote obtenue à partir de la valeur de $\lambda_v(n = 0, k) = \pi/12$ semble être en bon accord avec celle obtenue analytiquement précédemment.

Finalement, sur la figure 3.7a, nous comparons l'exposant $f(n)$ de la loi de puissance d'évolution de $\lambda_+(n, k) = \lambda_{p+}(n, k) \propto (\varepsilon_0/a)^{f(n)}$ déterminé numériquement et celui prévu asymptotiquement : $f(n) = -(4n+1)/2$. Ces deux résultats sont en bon accord. A cette occasion, nous saisissons l'opportunité de donner une comparaison sur la figure 3.7b de l'exposant $g(n)$, obtenu numériquement, de la loi d'évolution de $\lambda_{v+}(n, k) \propto (\varepsilon_0/a)^{g(n)}$ avec celui prévu par le calcul asymptotique : $g(n) = -(4n-1)/2$. Sur cette courbe, nous assistons à une légère déviation de ces deux résultats pour les très faibles valeurs de n . Ceci est dû à la faiblesse d'estimation asymptotique de la composante visqueuse qui nécessite certainement de pousser les calculs aux termes d'ordre supérieur. Néanmoins, il faut retenir que les valeurs numériques restent exactes quel que soit n .

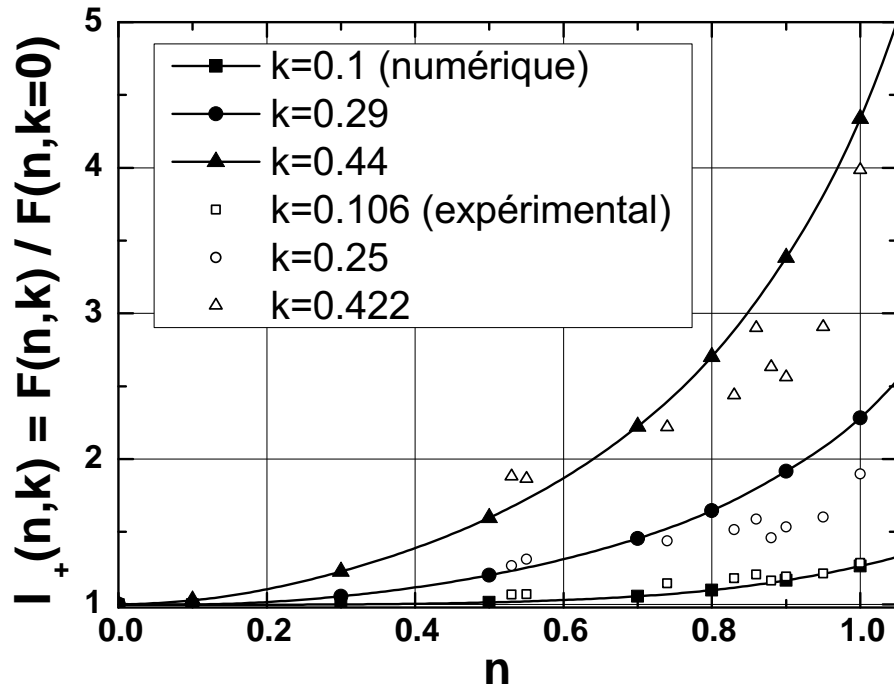


FIGURE 3.8 – Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour des valeurs de k faibles et modérées.

A titre de comparaison, nous avons tracé sur la figure 3.8 nos résultats numériques avec les seuls résultats expérimentaux disponibles, à notre connaissance, en milieu confiné, donnés par Chhabra *et al.* [91] pour $k \leq 0.422$. Ces derniers semblent cohérents avec les valeurs numériques.

A ce stade, nous allons donner une application de cette étude à l'analyse de l'effet du confinement sur la sédimentation d'une particule sphérique dans un tube de rayon fixé en fonction du rayon de la particule.

3.3.2 Effet du confinement sur la vitesse de sédimentation dans un tube

Considérons un tube cylindrique de diamètre $2b$ fixe et des particules sphériques de différents diamètres $2a$ qui sédimentent dans ce tube. Pour étudier l'influence de l'indice de fluidité n et du backflow sur la vitesse de sédimentation, nous présentons sur les figures 3.9 l'évolution de la vitesse de sédimentation de la particule sphérique, normalisée par celle obtenue en milieu infini $U(n, b, k = 0)$ de rayon b :

$$\alpha(n, k) = \frac{U(n, a, k)}{U(n, b, k = 0)} = \left(\frac{\lambda(n, k)}{\lambda(n, k = 0)} \right)^{-1/n} k^{(n+1)/n} \quad (3.9)$$

où

$$U(n, b, k = 0) = \left(\frac{2^n \Delta \rho g b^{n+1}}{9 m} \right)^{1/n} \lambda(n, k = 0)^{-1/n} \quad (3.10)$$

Dans cette figure, nous notons que, pour un diamètre de tube donné, la vitesse de sédimentation des particules passe par un maximum pour un diamètre critique $2a_{cr}$. Cette valeur critique dans le cas du fluide newtonien est de 42.5% du diamètre du tube. Ce curieux effet est dû à la compétition entre l'augmentation du poids apparent de la particule et l'évolution du frottement hydrodynamique, généré par les parois du cylindre, induit par le backflow et qui est proportionnel à : $a\lambda(n, a/b)$. Aux faibles confinements (petit diamètre de la particule), sur les figures 3.9a et 3.9b, comme le poids domine, la courbe asymptotique au voisinage de $k = 0$ est une loi de puissance du confinement : $\alpha(n, k) \propto k^{(n+1)/n}$. Dans le cas newtonien : $\alpha(n = 1, k \approx 0) \propto k^2$. Cependant, pour les grands confinements ($k \approx 1$), l'équation asymptotique (3.5) donne le comportement asymptotique de $\alpha(n, k)$:

$$\alpha(n, k) \sim A(n)(1 - k)^{(4n+1)/2n} \quad (3.11)$$

où

$$A(n) = \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left[\lambda(n, k = 0) \frac{3}{2^{(n-1)/2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} \right]^{1/n}$$

Ces comportements asymptotiques sont en bon accord avec nos résultats. Pour les fluides d'Ostwald, comme le backflow est affecté par l'indice de fluidité n , nous observons que plus n décroît des valeurs un à zéro, plus la position du maximum augmente (figure 3.10a). En fait, rappelons qu'aux faibles valeurs de n pour lesquelles

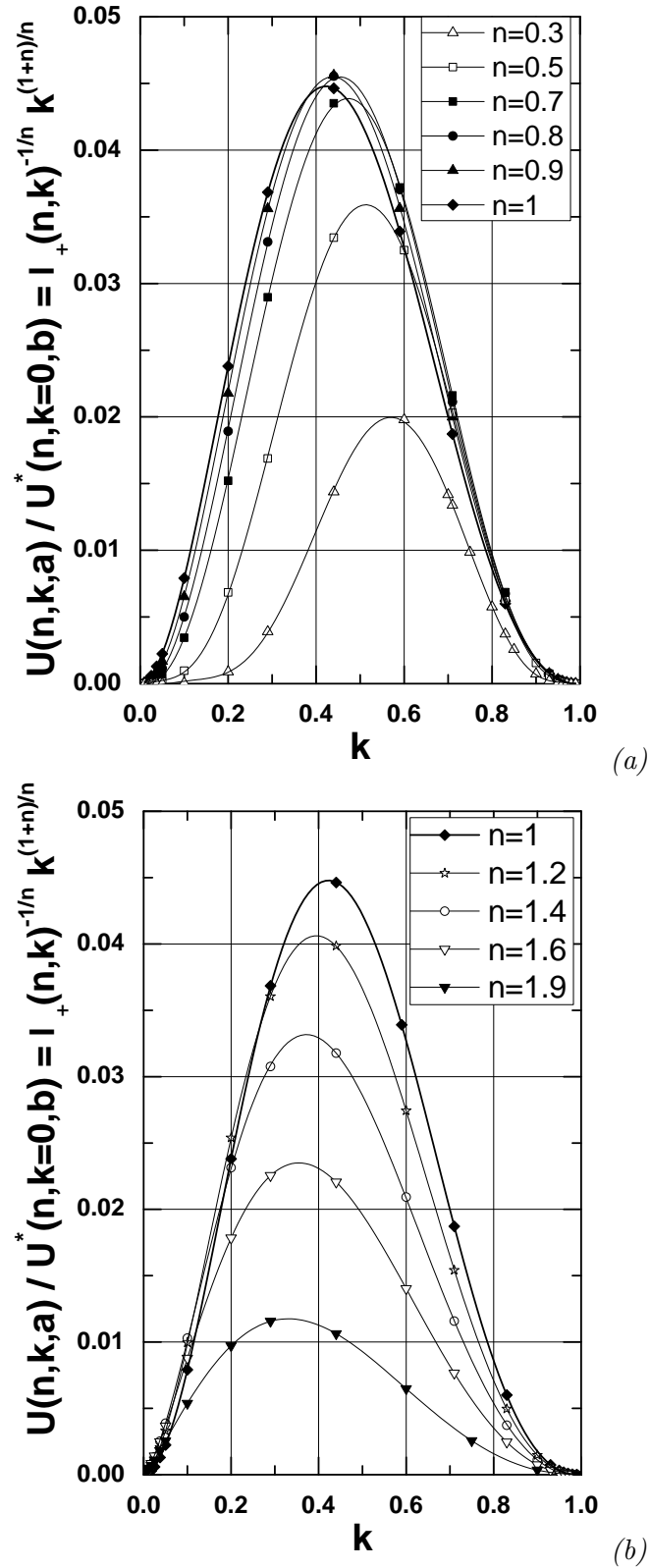
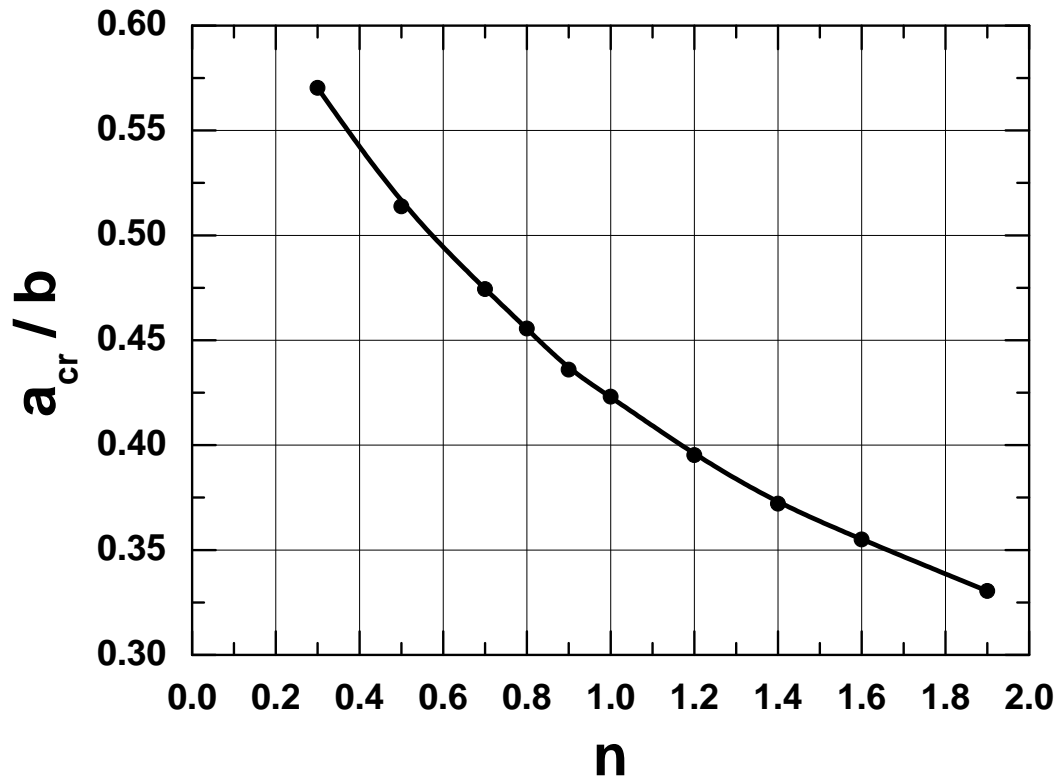
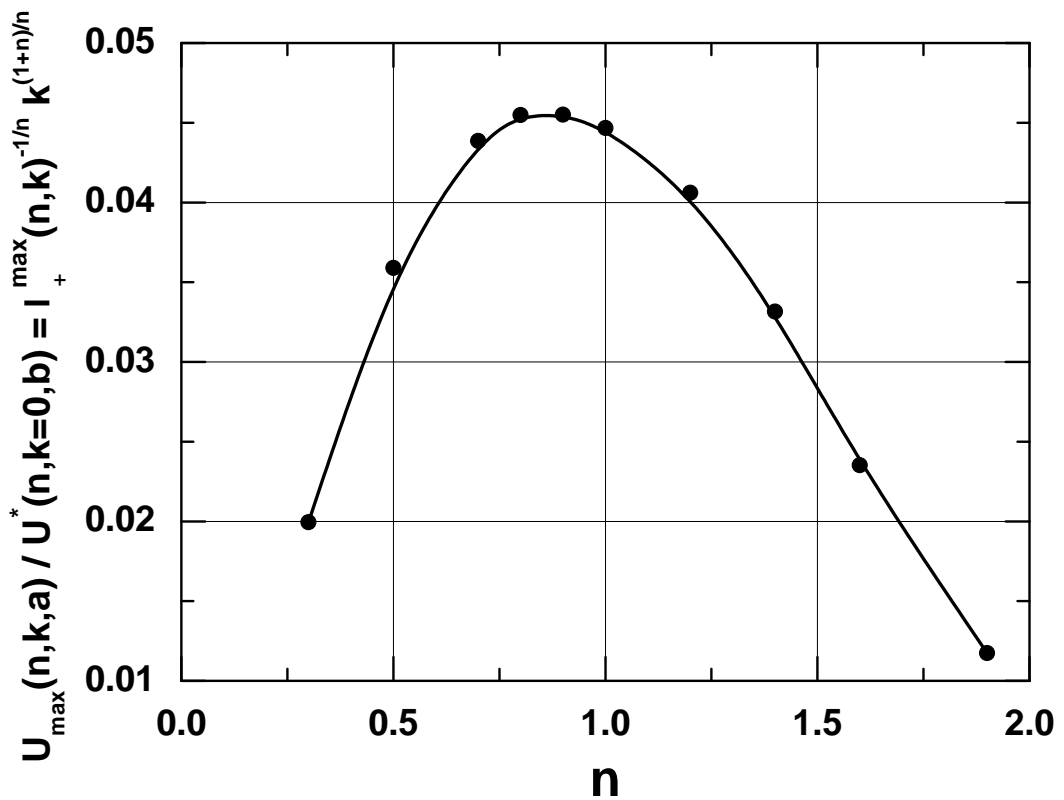


FIGURE 3.9 – Evolution de la vitesse de sédimentation atteinte par différentes sphères dans un tube donné rempli d'un fluide en loi de puissance, en fonction de leur confinement k : (a) cas des fluides rhéofluidifiants ($n < 1$), (b) cas des fluides rhéoépaississants ($n > 1$). Les deux figures montrent l'existence d'un rayon critique d'une sphère pour laquelle la vitesse de sédimentation est maximale.



(a)



(b)

FIGURE 3.10 – (a) Diminution monotone du rayon critique de la sphère pour laquelle la vitesse de sédimentation est maximale, en fonction de l'indice de fluidité n , (b) Mise en évidence d'une vitesse de sédimentation maximale pour $n \approx 1$ ($n \approx 0.75$).

la longueur d'écran est réduite, le backflow nécessite seulement un très faible entrefer entre la particule et le tube (figure 2.17). Aussi, lorsque n augmente de $n = 1$ à deux, la position du maximum décroît comme le montre la figure 3.10a. La valeur optimum du maximum de la vitesse de sédimentation est atteinte dans le cas des fluides presque newtoniens (figure 3.10b).

3.4 Effet du confinement sur le déficit de vitesse de transport

Pour vérifier la limite de validité de l'hypothèse de Tucker [90], concernant la vitesse de transport d'une particule neutre dans un écoulement d'un fluide en loi de puissance induit par un gradient de pression ΔP dans un tube de rayon b , nous sommes obligés de résoudre le problème inverse non linéaire qui consiste à déterminer la vitesse réelle que prend la particule, et qu'il faudrait lui imposer pour atteindre les conditions de particule libre, c'est à dire sur laquelle le torseur des forces hydrodynamiques se réduit à zéro. Cette résolution s'effectue par approximations successives au travers de l'utilisation d'un maillage dynamique décrit au § 3.2.2. Dans une deuxième étape, dans un souci de vérification de l'intensité de la non linéarité du problème aux faibles valeurs de n , nous avons effectué une tentative d'utilisation de la méthode de superposition. Comme celle-ci s'est avérée positive, nous en présentons ici les résultats.

3.4.1 "Écoulement de Poiseuille" et méthode de superposition

Dans l'approximation d'une très faible non linéarité du problème, nous pouvons utiliser la méthode de superposition (comme pour les fluides newtoniens [16]). En effet, celle-ci nécessite la détermination de la force subie par une particule sphérique placée axialement dans un tube, où un fluide en loi de puissance est mis en écoulement par un gradient de pression $\Delta P/L$ correspondant à un profil de vitesse imposé, solution de l'écoulement laminaire du fluide d'Ostwald dans un tube à l'amont et à l'aval de la particule (évitant les effets d'entrée) :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{z}}(r) = U_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \quad (3.12)$$

où U_{max} est la valeur maximale prise par la vitesse de l'écoulement dans l'axe du tube. Dans ces conditions, nous pouvons écrire, comme dans le cas de l'écoulement uniforme :

$$\mathbf{F}^{Pois}(n, k) = 6\pi m \left(\frac{U_{max}}{2a} \right)^{n-1} a U_{max} \lambda^{Pois}(n, k) \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \quad (3.13)$$

Dans cette partie, nous avons utilisé la même formulation et la même méthode numérique que celle employée précédemment (§ 3.2.1), avec le profil de vitesse, imposé à l'amont et à l'aval loin de la sphère, donné par la formule (3.12). Sur la figure 3.11, nous donnons le facteur de correction de la force de traînée $\lambda_+^{Pois}(n, k)$ normalisé par sa valeur en milieu infini pour une vitesse $U_0 = U_{max}$ (voir figure 2.16).

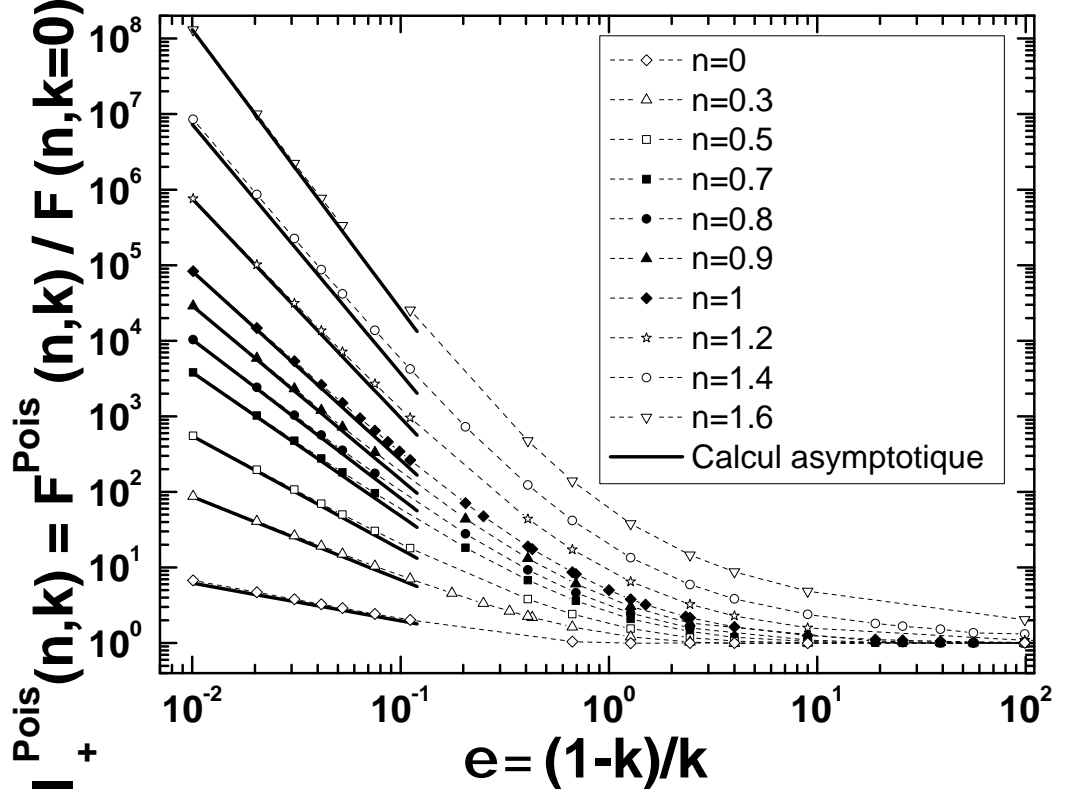


FIGURE 3.11 – Evolution de la force de traînée subie par une sphère soumise à "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, et concordance avec les résultats asymptotiques [formule (3.14)].

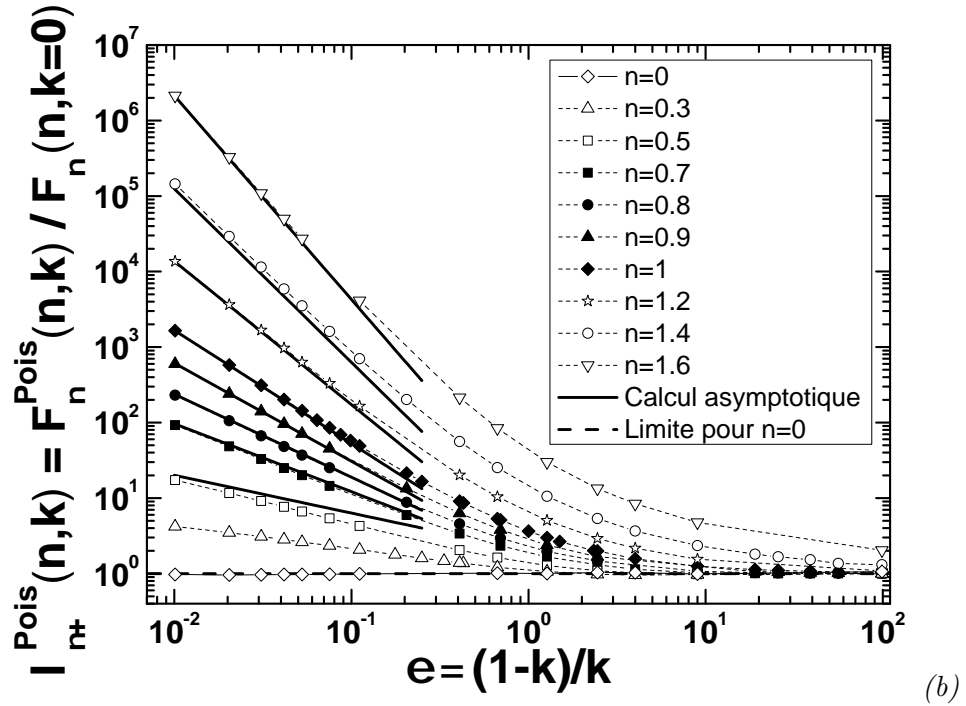
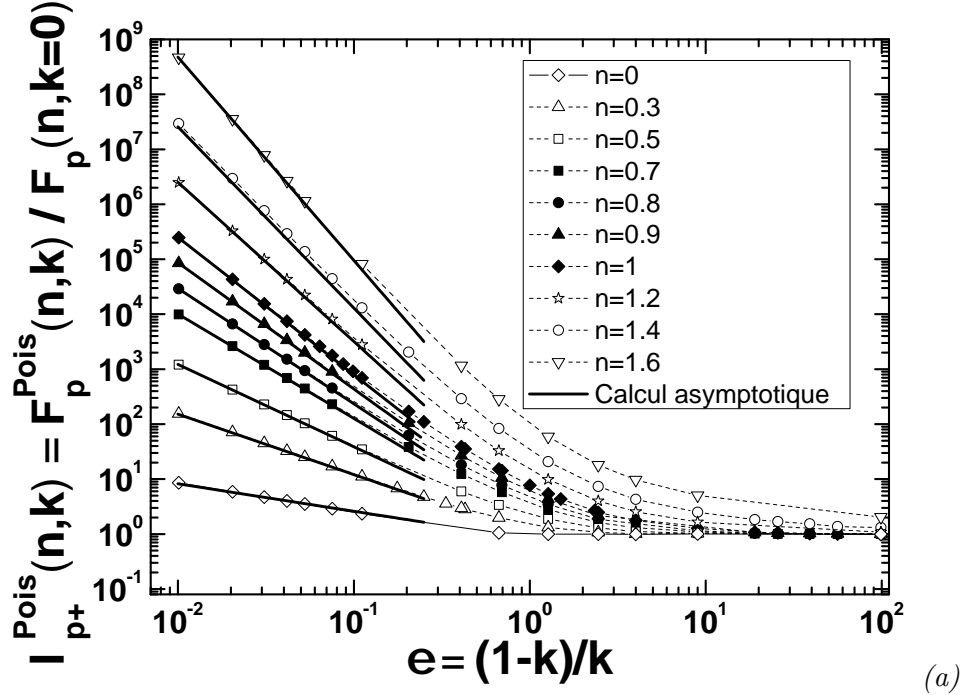
De la même manière, les composantes de pression $\lambda_{p+}^{Pois}(n, k)$ et de viscosité $\lambda_{v+}^{Pois}(n, k)$, ainsi que leur rapport sont donnés respectivement sur les figures 3.12a, 3.12b et 3.12c. Le succès de la comparaison entre nos résultats numériques et ceux asymptotiques donnés par les formules (3.14), (3.15), (3.16) prouve la validité de ces expressions.

$$\lambda_{+}^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{\frac{(2n-1)}{2}}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{(1+2n)(n+1)}{n(3n+1)} \right)^n \times \frac{1}{\lambda(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n+1)}{2}}, \text{ pour } 0 \leq n \leq 2 \quad (3.14)$$

$$\lambda_{p+}^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{\frac{(2n-1)}{2}}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{(1+2n)(n+1)}{n(3n+1)} \right)^n \times \frac{1}{\lambda_p(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n+1)}{2}}, \text{ pour } 0 \leq n \leq 2 \quad (3.15)$$

$$\lambda_{v+}^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{\frac{(2n-1)}{2}}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{(1+2n)(n+1)}{n(3n+1)} \right)^n \quad (3.16)$$

$$\times \frac{1}{\lambda_v(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{\Gamma(2n)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n-1)}{2}}, \text{ pour } \frac{1}{4} < n \leq 2$$



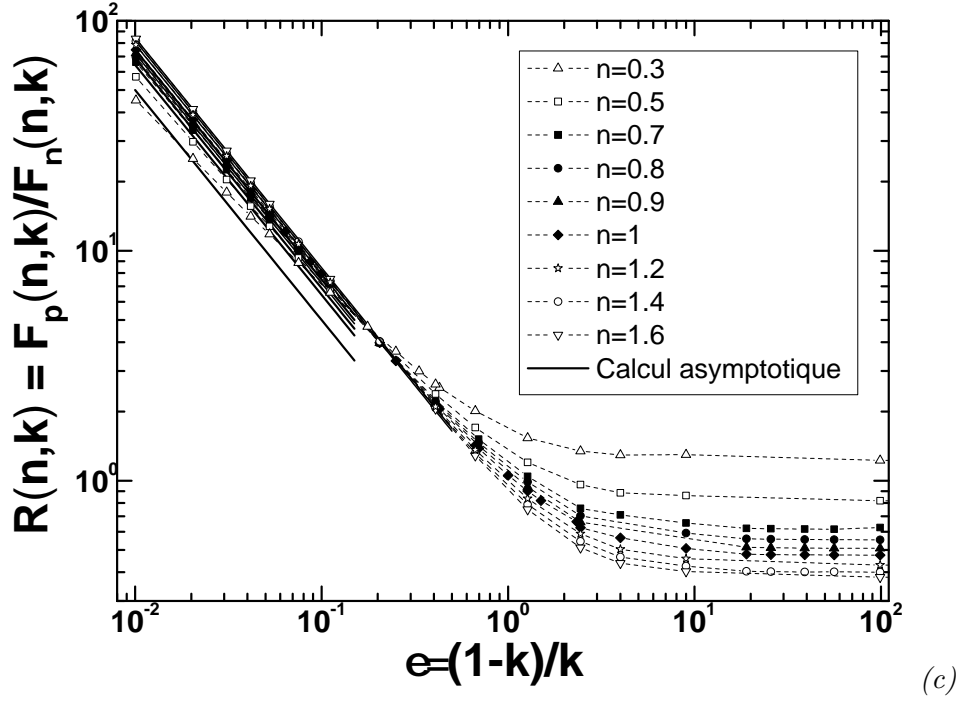


FIGURE 3.12 – Evolution des contributions à la force totale subie par une sphère soumise à "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance (résultats numériques et asymptotiques) : (a) contribution de la pression $\lambda_{p+}^{Pois}(n, k)$ [formule (3.15)], (b) contribution de la viscosité $\lambda_{v+}^{Pois}(n, k)$ [formule [3.16]], (c) rapport des deux contributions $R^{Pois}(n, k) = \frac{F_p^{Pois}(n, k)}{F_v^{Pois}(n, k)}$ [formule (3.8)].

Néanmoins, les mêmes remarques que celles effectuées dans le cas des écoulements uniformes, concernant le domaine de validité des calculs asymptotiques de la composante visqueuse, peuvent aussi s'appliquer. Là aussi, on peut appliquer la même analyse concernant les exposants $f(n)$ et $g(n)$ donnés sur les figures 3.7a et 3.7b. A ce stade, dans l'hypothèse de faible non linéarité de ce problème, la superposition d'états devrait être permise. Ainsi, les écoulements correspondant respectivement à l'écoulement uniforme et à "l'écoulement de type Poiseuille" sont superposés pour déterminer la vraie valeur de la vitesse de translation de la particule libre, pour laquelle la force de traînée est nulle. Ainsi :

$$F_z = -6\pi m \left(\frac{U_{particle}}{2a} \right)^{n-1} aU_{particle}\lambda(n, k) + 6\pi m \left(\frac{U_{max}}{2a} \right)^{n-1} aU_{max}\lambda^{Pois}(n, k) = 0 \quad (3.17)$$

Cette équation permet de calculer cette vitesse de la particule libre qui est différente de celle du fluide non perturbé en son centre de gravité ($U_{fluide} = U_{max}$).

3.4.2 Résultats et discussion

Sur la figure 3.13, nous avons reporté l'évolution de la vitesse de transport de la particule libre, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé au centre de la sphère, pour différents indices de fluidité en fonction du facteur de confinement.

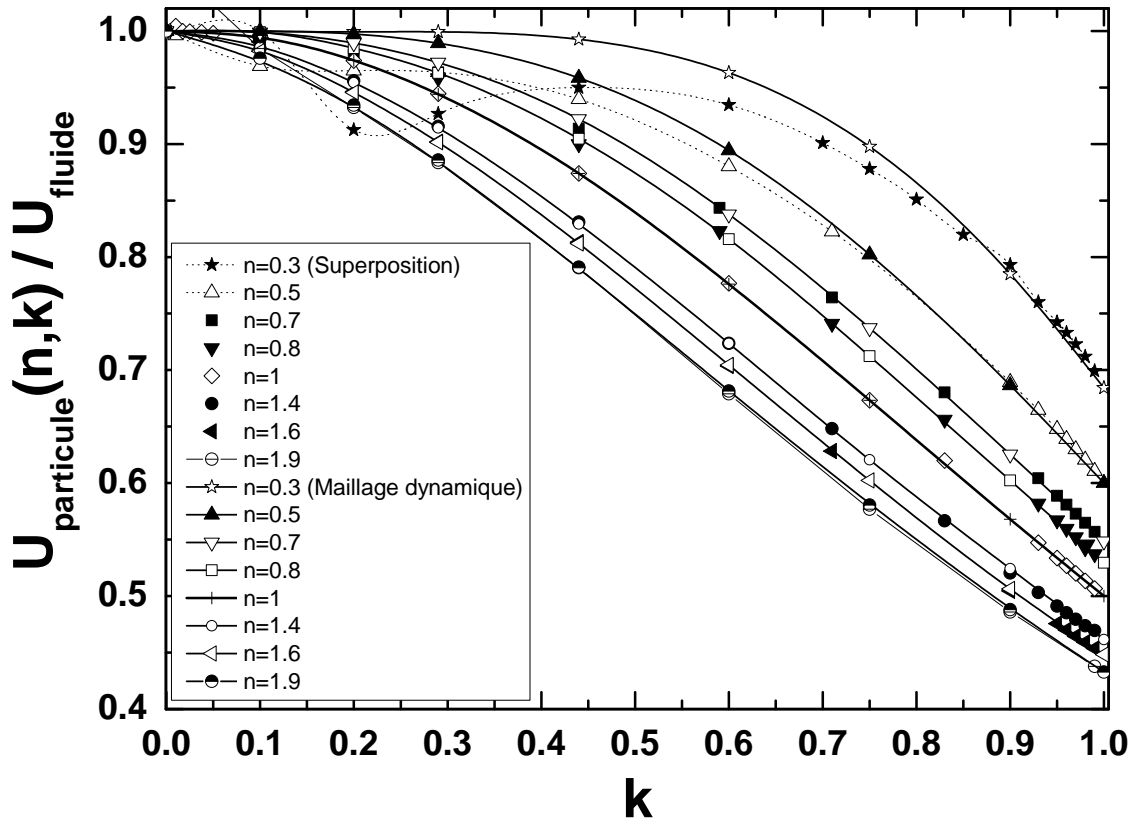


FIGURE 3.13 – Evolution de la vitesse de transport atteinte par une particule libre non pesante, lors de son transport par "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé, en fonction de son confinement. Cette figure montre que le déficit de la vitesse de transport augmente avec l'indice de fluidité et le confinement.

Nous remarquons que pour tous les indices de fluidité n , à cause des interactions hydrodynamiques avec les parois du tube, le déficit de vitesse de la particule augmente avec le confinement (c'est à dire avec la concentration $c \sim k^3$). Par ailleurs, il est intéressant et surprenant que les résultats obtenus par la méthode de superposition soient en bon accord avec ceux obtenus directement par la technique de maillage dynamique pour $0.7 \leq n \leq 1.9$. Ce résultat confirme a posteriori notre hypothèse de la faible non linéarité du problème dans cette situation (ceci n'est pas le cas d'autres problèmes car la matrice de résistance n'est pas totalement symétrique). Cependant, pour $n = 0.5$ et $n = 0.3$ (c'est à dire pour les faibles valeurs de n), nous constatons que les résultats

obtenus par la méthode de superposition ne semblent plus être acceptables à l'exception des grands confinements, pour $k \approx 1$. En effet, pour $k \approx 1$, les valeurs limites de la vitesse relative sont en excellent accord avec les prévisions du calcul asymptotique (voir figure 3.14) :

$$\frac{U_{particule}(n, k \approx 1)}{U_{fluide}} = \frac{n+1}{3n+1}$$

Ceci confirme que la particule se déplace bien à la même vitesse que le fluide en écoulement bouchon, c'est à dire \bar{U} . A noter aussi que dans la limite de $k \approx 0$ (régime très dilué), la particule a la même vitesse que le fluide non perturbé.

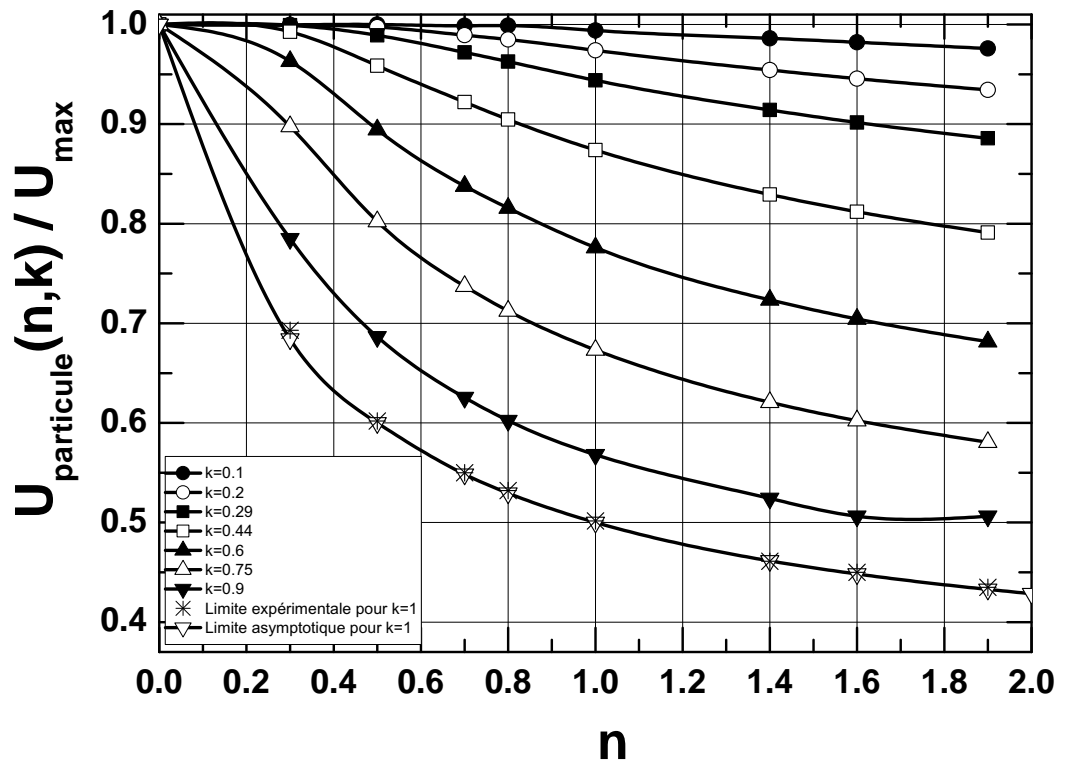


FIGURE 3.14 – Evolution de la vitesse de transport atteinte par une particule libre non pesante, lors de son transport par "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé, en fonction de l'indice de fluidité n .

Sur la figure 3.14, nous avons tracé l'évolution de cette vitesse relative en fonction de l'indice de fluidité pour différents confinements. Celle-ci montre que, pour un confinement donné, le déficit de vitesse augmente de façon monotone avec n . Finalement, les résultats portés sur la figure 3.13 montrent que le déficit de vitesse est amplifié dans le cas diluant et réduit dans le cas des fluides pseudoplastiques par rapport au cas newtonien. Cette dernière remarque laisse présager la validité de l'hypothèse de

Tucker [90] dans le cas de l'injection de particules sphériques avec les thermoplastiques. Cette même remarque est applicable au transport des particules, bulles et gouttes dans la microfluidique non newtonienne.

3.5 Conclusion

Par cette étude, nous espérons avoir fourni une solution numérique au problème de type Stokes concernant la traînée hydrodynamique subie par une sphère en milieu confiné d'un fluide en loi de puissance. Ce problème a reçu l'attention de nombreux chercheurs qui n'avaient pas pris en compte la sensibilité à l'inertie dans les fluides dilatants. Le grand soin que nous avons pris pour éviter les effets de l'inertie nous ont conduit à des résultats qui sont purement dans le régime de type Stokes, comparables avec succès à ceux obtenus asymptotiquement en régime de lubrification. Enfin, le premier effet surprenant est la très faible non linéarité de ce problème conduisant à la validité de la méthode de superposition pour tous les confinements à l'exception des très faibles valeurs de n . Le second effet est celui de l'évolution non monotone de la vitesse de sédimentation d'une particule en fonction de son diamètre dans un tube de rayon fixe. L'apparition d'un tel maximum est due à la compétition entre l'évolution du poids apparent de la bille proportionnellement au cube de la particule, et celui du frottement lié au backflow qui varie comme $a\lambda(n, a/b)$.

Chapitre 4

Effets de parois sur le transport de particules cylindriques en fluide d'Ostwald et paradoxe de Stokes

4.1 Introduction

Les propriétés mécaniques des matériaux plastiques sont rehaussées par l'adjonction de fibres qui peuvent prendre différents aspects. Ce sont plus particulièrement les fibres courtes qui sont utilisées dans les procédés d'injection de matériaux composites. Les propriétés mécaniques des pièces finales dépendent de la cinématique de l'écoulement au sein du procédé. Cette cinématique dépend, à son tour, des propriétés rhéologiques de la suspension, qui, elle-même, est tributaire de la dynamique de chaque particule. Cette dynamique, dans le cas du régime non dilué, dépend fortement des interactions hydrodynamiques avec les particules voisines ou les parois, à cause des longueurs d'écran hydrodynamiques plus ou moins grandes dans le cas des fluides en loi de puissance. Plus précisément, ces interactions contrôlent la fonction de distribution des orientations, qui ne sera pas discutée ici. Les effets de ces interactions ont été étudiés par plusieurs chercheurs [92]. Mais, dans cette étude, à cause de la complexité de ce problème, nous essaierons de donner une explication physique aux effets de ces interactions, dans les fluides en loi de puissance, qui sont souvent négligées lors des modélisations, en dépit des grandes concentrations utilisées dans les processus industriels. Le fait de négliger ces interactions constitue une hypothèse communément utilisée, alors qu'elle n'est vraie que pour le régime très dilué, et conduit à une fausse estimation de la vitesse réelle de transport et de rotation de chaque particule en régime concentré. Dans ces conditions, la première étape pour la compréhension de ces interactions nous conduit à l'étude de l'hydrodynamique à l'échelle d'une particule cylindrique transportée par un "écoulement de type Poiseuille", en situation confinée. La justification de l'utilisation de ce modèle en fluide newtonien aux fortes concentrations a été faite par Champmartin

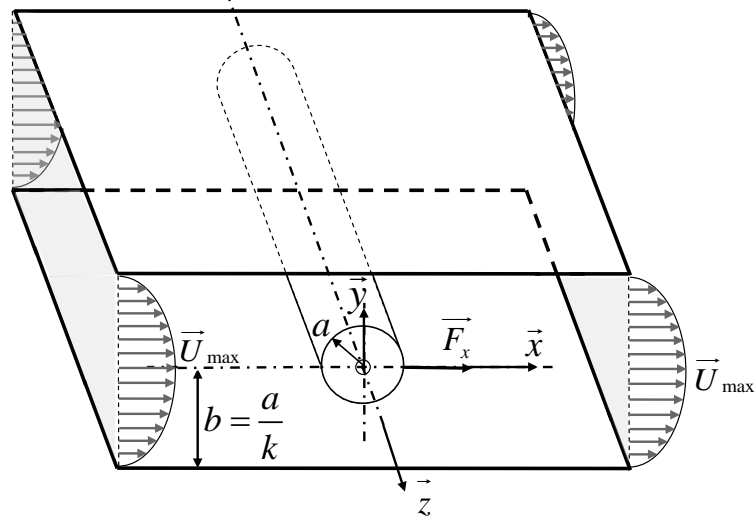
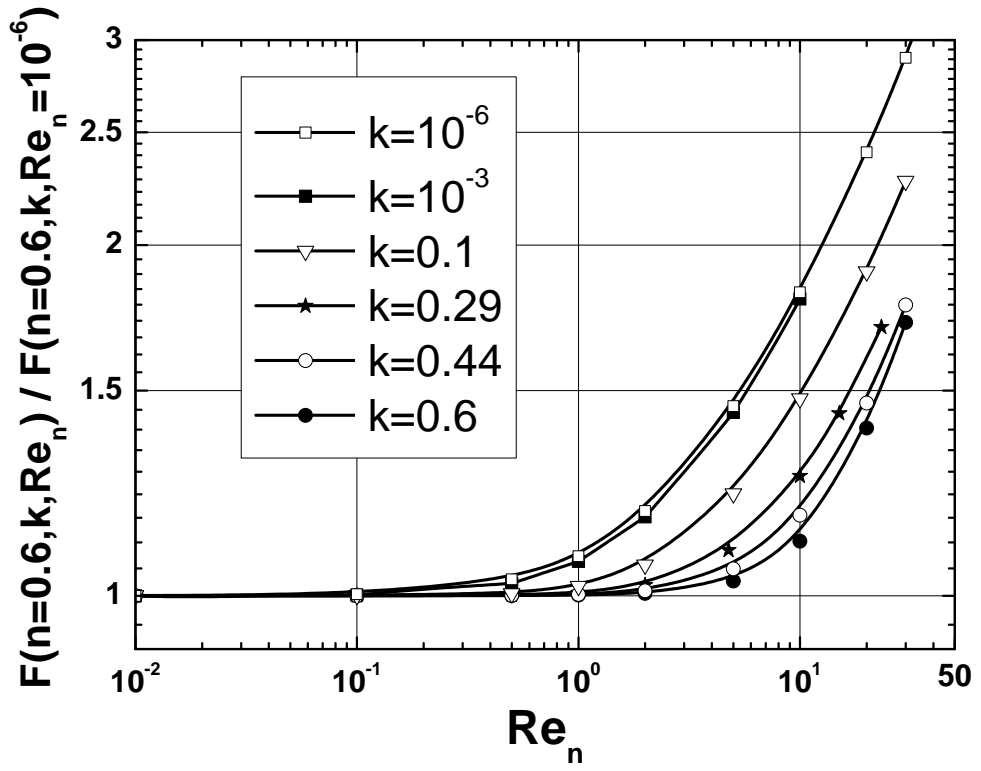


FIGURE 4.1 – Schéma représentant le transport d’une particule cylindrique transportée par un ”écoulement de type Poiseuille” entre deux plans, suivant son plan de symétrie.

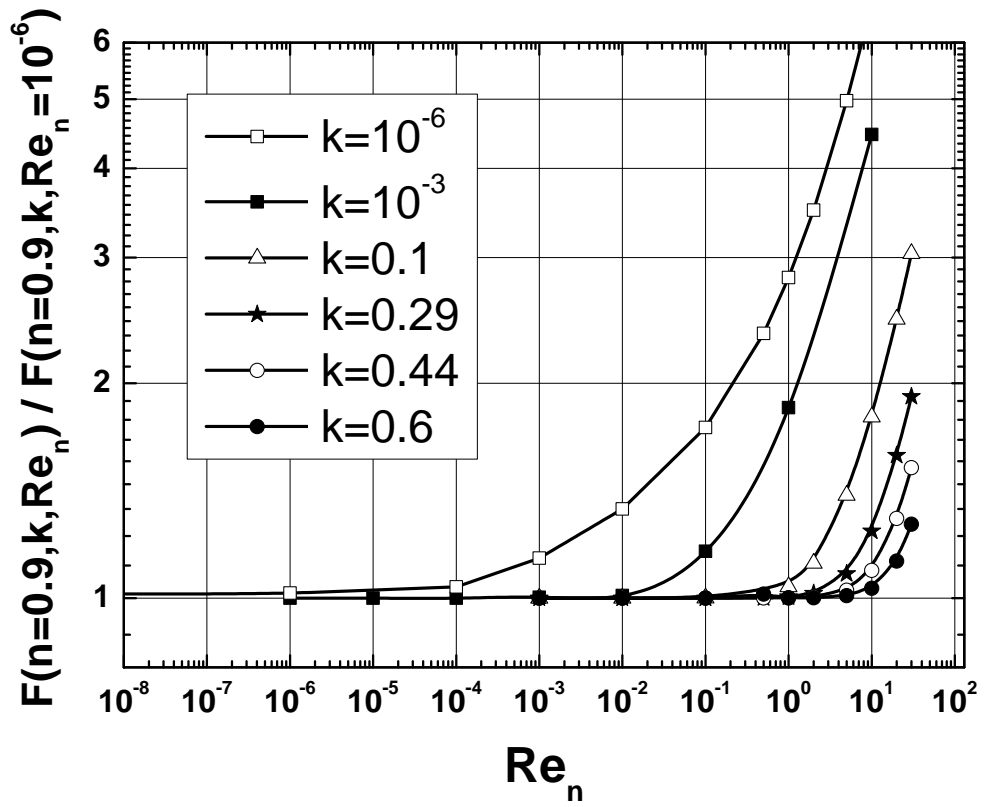
et al. [1]. Ainsi, nous allons étudier le modèle simple constitué par le cylindre circulaire de rayon a infiniment long, en translation uniforme perpendiculairement à son axe, dans le plan de symétrie entre deux plans parallèles distants de $2b$ (figure 4.1). Bien qu’il soit important de rappeler que quelques fluides viscoélastiques peuvent agir sur la formation de structures dans ce type de suspension [46, 47], dans la présente étude, nous allons seulement nous concentrer, dans une première étape, sur les effets induits par le comportement rhéofluidifiant ou rhéoépaississant des fluides non newtoniens porteurs sur ces interactions hydrodynamiques. Dans ce cas, la rhéologie de ces fluides est approximée par le plus commun des modèles qui est celui d’Ostwald-de Waele dont la loi constitutive est donnée dans le chapitre 2 [équation (2.1)]. Nous allons donc nous intéresser, dans ce chapitre, à la force de traînée subie par une particule cylindrique lorsqu’elle est transportée (confinée), à faible nombre de Reynolds, au sein d’un fluide en loi de puissance. Rappelons que cette force est nulle en milieu infini, lorsque la particule évolue au sein d’un fluide newtonien ou dilatant, du fait de l’existence du paradoxe de Stokes. Tandis qu’en fluide pseudoplastique, ce paradoxe disparaît, comme discuté au chapitre 2. Rappelons également que ce paradoxe disparaît dans tous les cas en milieu confiné, et que le problème reste très sensible à l’apparition de l’inertie. Comme dans le cas infini pseudoplastique, dans ce type d’écoulement confiné où la solution est toujours de type Stokes, en fluide pseudoplastique ou dilatant, la force de Stokes peut s’exprimer ainsi :

$$\mathbf{F}(n, k)/l = -4\pi m \left(\frac{U_0}{2a}\right)^{n-1} U_0 \lambda(n, k) \mathbf{e}_x \quad (4.1)$$

Avant tout calcul, nous avons étudié, comme dans le cas infini, la sensibilité à l’inertie en fonction du confinement.



(a)



(b)

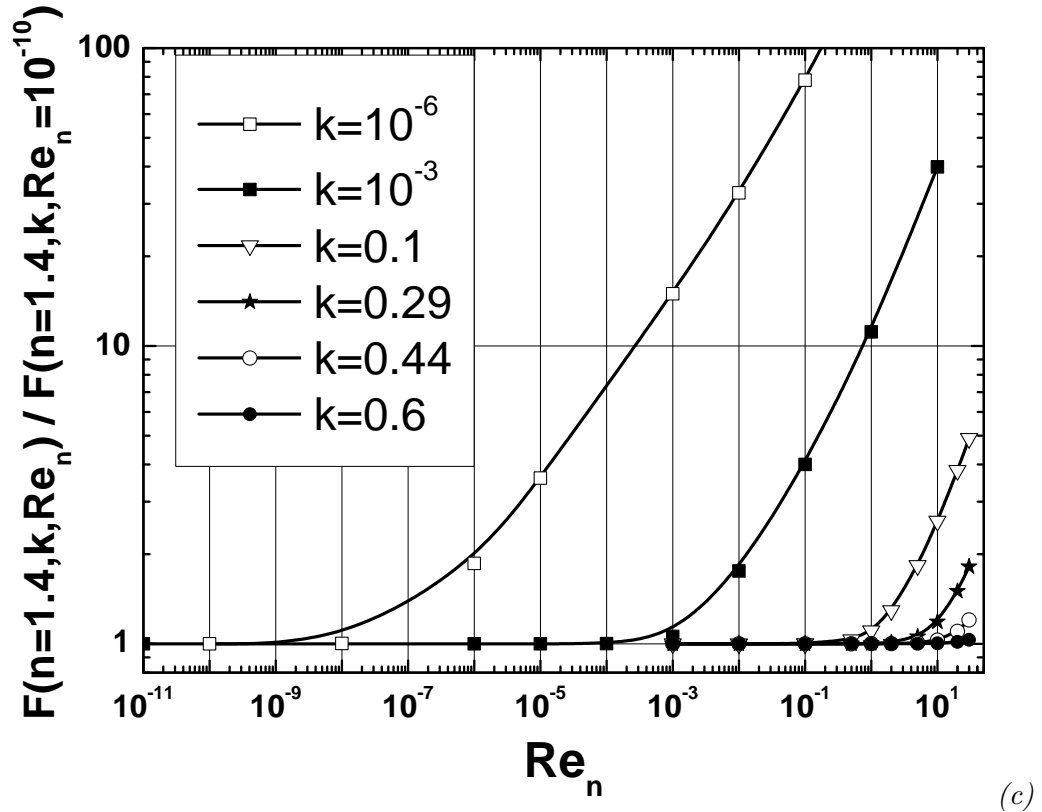


FIGURE 4.2 – Influence du confinement sur le nombre de Reynolds critique marquant l'apparition de l'inertie : (a) pour $n = 0.6$, (b) pour $n = 0.9$, (c) pour $n = 1.4$.

Ainsi, sur les figures 4.2a, 4.2b, 4.2c, on peut constater clairement l'effet retard de l'apparition de l'inertie donné par le confinement, quel que soit l'indice de fluidité du fluide. Par la suite, nous allons donner des résultats concernant la sédimentation d'une particule cylindrique en fluide en loi de puissance, ainsi que le transport de celle-ci dans un canal de section rectangulaire très allongée.

4.2 Approche numérique et asymptotique

4.2.1 Méthode numérique

La formulation et l'approche numérique utilisées dans ce chapitre, sont identiques à celles employées dans le chapitre 3.2.1 à part le fait que la géométrie de la particule est cylindrique et que le profil de vitesse de type "Poiseuille", correspondant à l'écoulement non perturbé, est celui obtenu dans un canal de section rectangulaire très allongée.

4.2.2 Maillage dynamique

Comme dans le cas précédent correspondant à la sphère, nous avons utilisé ici aussi la même technique de maillage dynamique décrite au chapitre 3.2.2 pour déterminer la vitesse relative de transport de la particule cylindrique neutre. En effet, rappelons que ce problème correspond à la détermination de la vitesse à donner au cylindre afin d'annuler les efforts hydrodynamiques subis par ce dernier.

4.2.3 Méthode asymptotique

En régime de lubrification, la dissipation est principalement localisée dans l'interstice restant entre le cylindre et les parois du canal. Dans ces conditions, la traînée peut être estimée à partir des forces de pression et de viscosité engendrées par le backflow. Ainsi, le gradient de pression que subit le cylindre par ce backflow, qui est naturellement du type "Poiseuille", est donné par :

$$\frac{dP}{dx} = \left[2aU_0 \frac{1+2n}{n} \right]^n \frac{2m}{[\varepsilon(\theta)]^{2n+1}} \quad (4.2)$$

où $\varepsilon(\theta) = \varepsilon_0 + a(1 - \cos \theta)$ et ε_0 est la distance minimale entre le cylindre et les parois. En intégrant ce gradient de pression local de part et d'autre du cylindre, nous obtenons la composante de la force de pression suivante :

$$\frac{F_p(n, k)}{4\pi m \left(\frac{U_0}{2a}\right)^{n-1} U_0} = \frac{2^{\frac{(4n+1)}{2}}}{\pi} \left(\frac{1+2n}{n}\right)^n \left(\frac{\varepsilon_0}{a}\right)^{-\frac{(4n+1)}{2}} \int_0^{X^*} \frac{dX}{(1+X^2)^{2n+1}} \quad (4.3)$$

Cette dernière intégrale, où $X^* = (a/2\varepsilon_0)^{1/2} \theta$ converge pour $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ vers :

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n + \frac{1}{2})}{2 \Gamma(2n + 1)}$$

Concernant la composante visqueuse de la traînée, celle-ci est principalement due à l'intégrale des contraintes de cisaillement engendrées par le backflow :

$$\frac{F_v(n, k)}{4\pi m \left(\frac{U_0}{2a}\right)^{n-1} U_0} = \frac{2^{\frac{(6n-3)}{2}}}{\pi} \left[\frac{1+2n}{n}\right]^n \left(\frac{\varepsilon_0}{a}\right)^{-\frac{(4n-1)}{2}} \int_0^{X^*} \frac{dX}{(1+X^2)^{2n}} \quad (4.4)$$

Cette dernière intégrale converge pour $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ vers :

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(2n)}$$

L'expression de cette force visqueuse n'est valable que pour $n > 1/4$, à cause du fait que la fonction $\Gamma(x)$ est singulière en $x = 0$. La force totale est la somme de chacune de ses deux composantes calculées ci-dessus.

La même procédure a été utilisée dans le cas de "l'écoulement de type Poiseuille" où le cylindre est maintenu fixe, mais le backflow dans ce cas est remplacé par le débit de "l'écoulement de Poiseuille" qui s'écoule dans l'interstice.

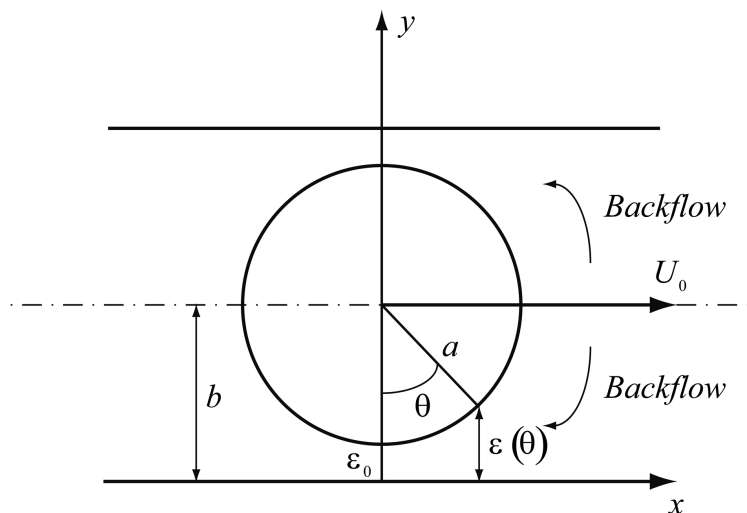


FIGURE 4.3 – Schéma du domaine de lubrification.

4.3 Sédimentation dans un fluide d'Ostwald

Afin d'étudier la sédimentation d'une particule cylindrique, nous avons besoin de déterminer la force hydrodynamique subie par une particule en mouvement uniforme, ou plus exactement placée dans un écoulement en mouvement uniforme par rapport à la particule. Ces deux situations sont équivalentes car la viscosité apparente des fluides en loi de puissance n'est pas sensible au sens de l'écoulement.

4.3.1 Particules cylindriques dans un écoulement uniforme

Comme nous sommes souvent concernés par l'étude de la sédimentation des fibres en fluide newtonien ou non newtonien lors des procédés d'injection des thermoplastiques, nous avons tenu à étudier la sédimentation d'une fibre perpendiculairement au champ de gravité dans un canal de section rectangulaire très allongée, d'épaisseur fixe $2b$. Pour donner une estimation de cette vitesse de sédimentation, nous représentons sur la figure 4.4 le facteur de correction de la force de traînée en fonction de l'interstice restant entre le cylindre et les parois $\varepsilon = (1 - k)/k = (b - a)/a$, pour différents indices de fluidité. Rappelons qu'à chaque fois, nous prenons soin de vérifier que nous sommes bien en régime non inertiel. Afin de vérifier la validité de nos calculs, nous avons procédé à une comparaison avec des résultats obtenus à partir d'une approche asymptotique en régime de lubrification, pour déterminer $\lambda(n, k)$ quand le diamètre du cylindre devient très proche de la distance entre les deux plans du canal ($k \rightarrow 1$). En effet, dans cette hypothèse, toute la dissipation est localisée dans l'interstice restant entre le cylindre et les plans. Cet effet a été confirmé par des calculs numériques concernant la vorticité dans la section transversale au cylindre. Sur cette figure 4.4, nous pouvons constater le bon accord entre nos résultats numériques et ceux asymptotiques, même pour les

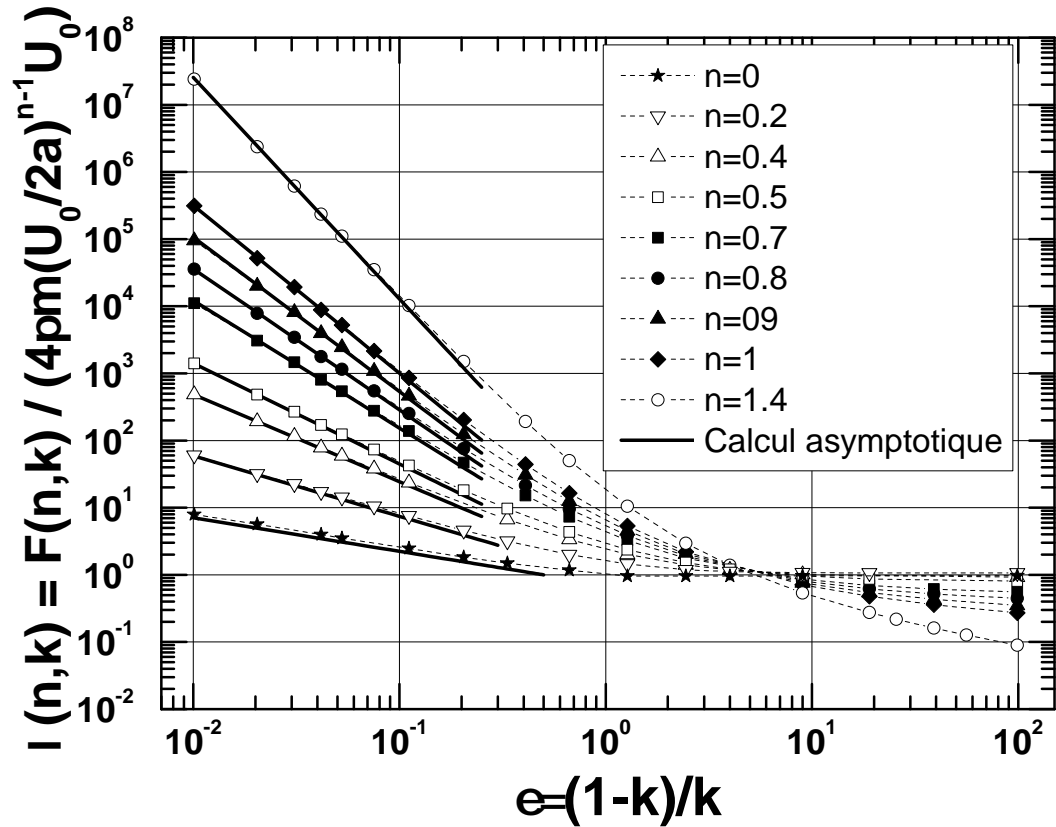


FIGURE 4.4 – Evolution du facteur de correction numérique de la force de traînée $\lambda(n, k)$ subie par une particule cylindrique au sein d'un milieu confiné rempli d'un fluide en loi de puissance, et concordance avec les résultats asymptotiques. [formule (4.5)].

fluides dilatants, où le paradoxe de Stokes disparaît à cause du confinement ($n = 1.4$). Nous remarquons aussi que, lorsque n décroît, la traînée est de moins en moins sensible aux interactions hydrodynamiques induites par les parois. Ceci s'explique par le fait que, plus le fluide est rhéofluidifiant, plus la longueur d'écran décroît (figure 2.17b). A partir de ces résultats, nous pouvons conclure que dans l'étude de la dynamique d'une suspension de fibres en fluide non newtonien, il est nécessaire de tenir compte des interactions hydrodynamiques, particulièrement dans le cas des fluides dilatants. Cependant, plus le fluide est rhéofluidifiant, plus ces interactions deviennent faibles, ce qui est favorable à l'hypothèse de Tucker [90]. Par ailleurs, il faut remarquer le bon accord de nos résultats numériques avec ceux obtenus asymptotiquement [formule (4.6)] et § 4.2.3). Afin d'évaluer les deux composantes visqueuse et de pression de la force de traînée, nous comparons sur les figures 4.5a et 4.5b les résultats numériques et ceux asymptotiques de $\lambda_p(n, k)$ et de $\lambda_v(n, k)$, donnés par les formules (4.6) et (4.7), dont nous avons limité le calcul au premier ordre en (ε_0/a) dans les conditions de

lubrification.

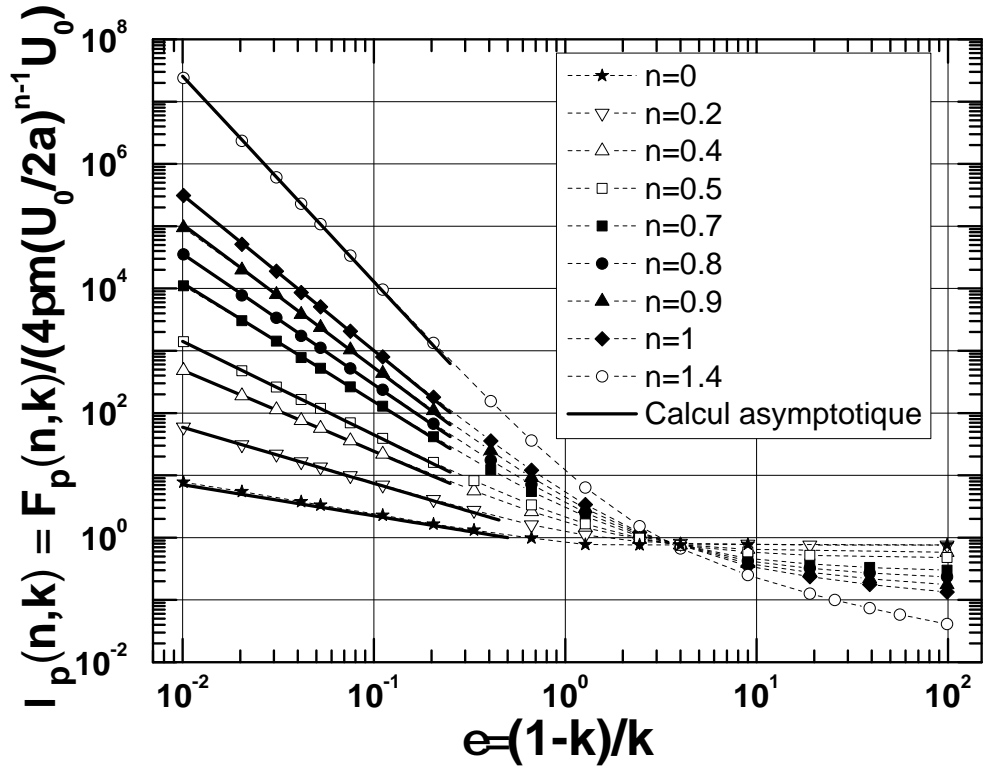
$$\lambda(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{\frac{(4n-1)}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n+1)}{2}}, \text{ pour } n \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\lambda_p(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{\frac{(4n-1)}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n+1)}{2}}, \text{ pour } n \geq 0 \quad (4.6)$$

$$\lambda_v(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{\frac{(6n-5)}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{\Gamma(2n)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n-1)2}, \text{ pour } n > \frac{1}{4} \quad (4.7)$$

Ces deux figures montrent que pour les grands confinements ($k \approx 1$), la composante de pression est dominante. En fait, F_p est plus grand que F_v à n'importe quel confinement dans les fluides pseudoplastiques, comme dans le cas des milieux infinis (§ 2). Dans la figure 4.5b, les limites de la méthode asymptotique pour évaluer les forces de viscosité trouvent leur origine dans le comportement asymptotique de $\Gamma(x)$ en $x = 0$, et probablement aussi dans la réduction à l'ordre un du développement asymptotique. De plus, la contribution relative de la pression par rapport à la viscosité est obtenue à partir du rapport suivant :

$$R(n, k) = \frac{F_p(n, k \rightarrow 1)}{F_v(n, k \rightarrow 1)} = \frac{\lambda_p(n, k)}{\lambda_v(n, k)} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{4n-1}{n} \right) \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-1}, \text{ pour } n > \frac{1}{4} \quad (4.8)$$



(a)

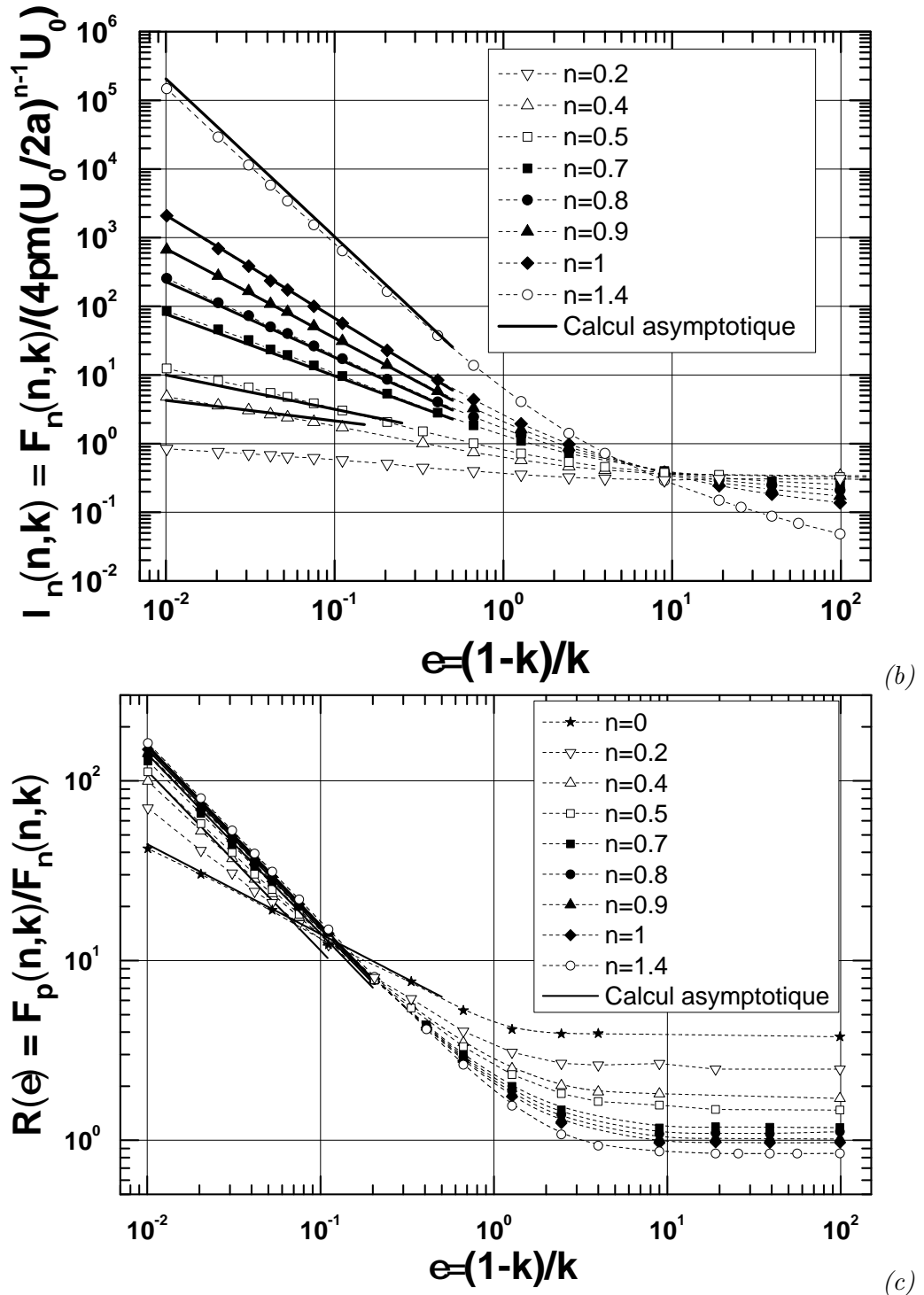


FIGURE 4.5 – Evolution des contributions à la force de traînée subie par une particule cylindrique dans un milieu confiné rempli d'un fluide en loi de puissance (résultats numériques et asymptotiques) : (a) contribution de la pression $\lambda_p(n, k)$ [formule (4.6)], (b) contribution de la viscosité $\lambda_v(n, k)$ [formule (4.7)], (c) rapport des deux contributions $R(n, k) = \frac{F_p(n, k)}{F_v(n, k)}$ [formule (4.8)].

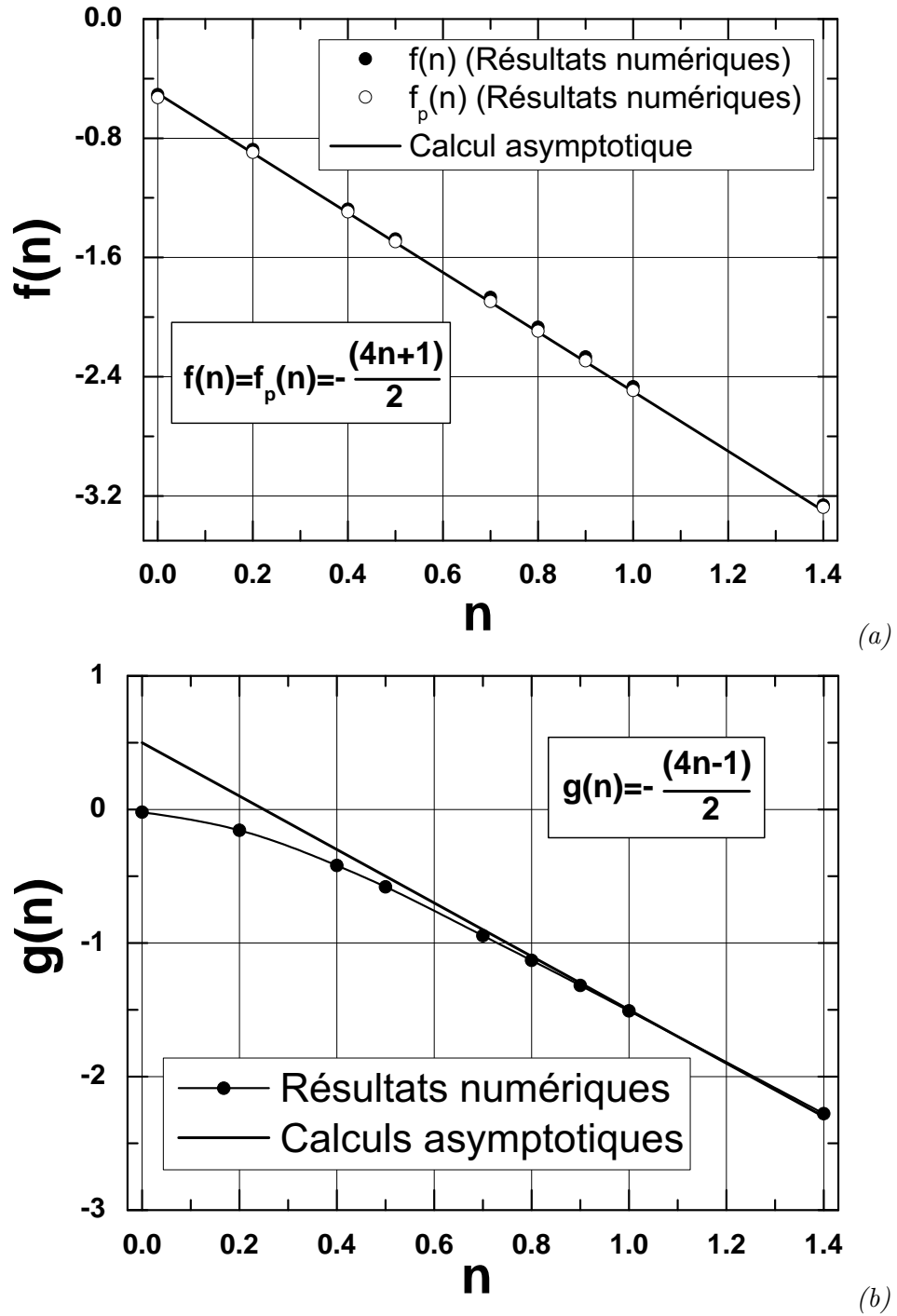


FIGURE 4.6 – Comparaison des exposants $f(n)$ et $g(n)$ du comportement en loi de puissance des différentes composantes de la force totale obtenus numériquement avec ceux obtenus asymptotiquement : (a) force de traînée totale et composante de pression, (b) composante de viscosité.

Finalement, sur la figure 4.6a, nous donnons une comparaison entre l'exposant $f(n)$ de la loi de puissance décrivant le comportement de $\lambda_p(n, k) = \lambda(n, k) \propto (\varepsilon_0/a)^{f(n)}$, correspondant aux résultats numériques, et celui prévu théoriquement par l'approche asymptotique : $f(n) = -(4n + 1)/2$. Ce bon accord confirme à nouveau l'exactitude des deux approches. A cette occasion, nous comparons sur la figure 4.6b l'exposant $g(n)$ de la loi de puissance d'évolution de $\lambda_v(n, k) \propto (\varepsilon_0/a)^{g(n)}$ à celui calculé asymptotiquement : $g(n) = -(4n - 1)/2$. Dans cette dernière courbe, les faibles écarts aux faibles indices de fluidité sont dus à la faiblesse de calcul de l'approche asymptotique, comme expliqué ci-dessus. Néanmoins, les valeurs numériques de cet exposant restent exactes car pour $n = 0$, $g(n)$ doit être égale à zéro du fait que $\lambda_v(n = 0, k)$ prend une valeur constante quel que soit k , égale à celle obtenue pour l'écoulement d'un fluide de Bingham aux très grands nombres de Bingham, comme dans le cas d'un milieu infini (§ 2). A cette étape, nous allons donner une application de ces résultats à la détermination des effets du backflow sur la vitesse de sédimentation d'une fibre.

4.3.2 Effet du confinement sur la vitesse de sédimentation

Considérons ici un canal de section rectangulaire très allongée d'épaisseur fixe $2b$, dans lequel une fibre de diamètre $2a$ sédimente perpendiculairement au vecteur gravité, en fonction de l'indice de fluidité, et pour différents diamètres du cylindre (figure 4.1). Si la particule cylindrique est suffisamment longue et confinée, il a été établi que les effets de bout sont négligeables [1,93]. Pour les fluides pseudoplastiques, pour lesquels la solution de type Stokes existe, nous traçons sur la figure 4.7a la vitesse de sédimentation normalisée par celle d'une particule cylindrique de diamètre $2b$ en milieu infini :

$$\frac{U(n, a, k)}{U(n, b, k = 0)} = \left(\frac{\lambda(n, k = 0)}{\lambda(n, k)} \right)^{1/n} k^{(n+1)/n} \quad (4.9)$$

où

$$U(n, b, k = 0) = \left(\frac{1}{\lambda(n, k = 0)} \frac{2^{n-3} \Delta \rho g b^{n+1}}{m} \right)^{1/n} \quad (4.10)$$

Dans cette courbe, nous montrons clairement que, pour une distance entre plans du canal choisie, la vitesse de sédimentation de fibres de différents diamètres passe par un maximum pour un diamètre critique de fibre égal à $2a_{cr}$. Ce curieux phénomène s'explique physiquement par la compétition entre l'augmentation du poids de la fibre proportionnellement au carré de son rayon, et le frottement hydrodynamique généré par le backflow qui est proportionnel à $a\lambda(n, a/b)$.

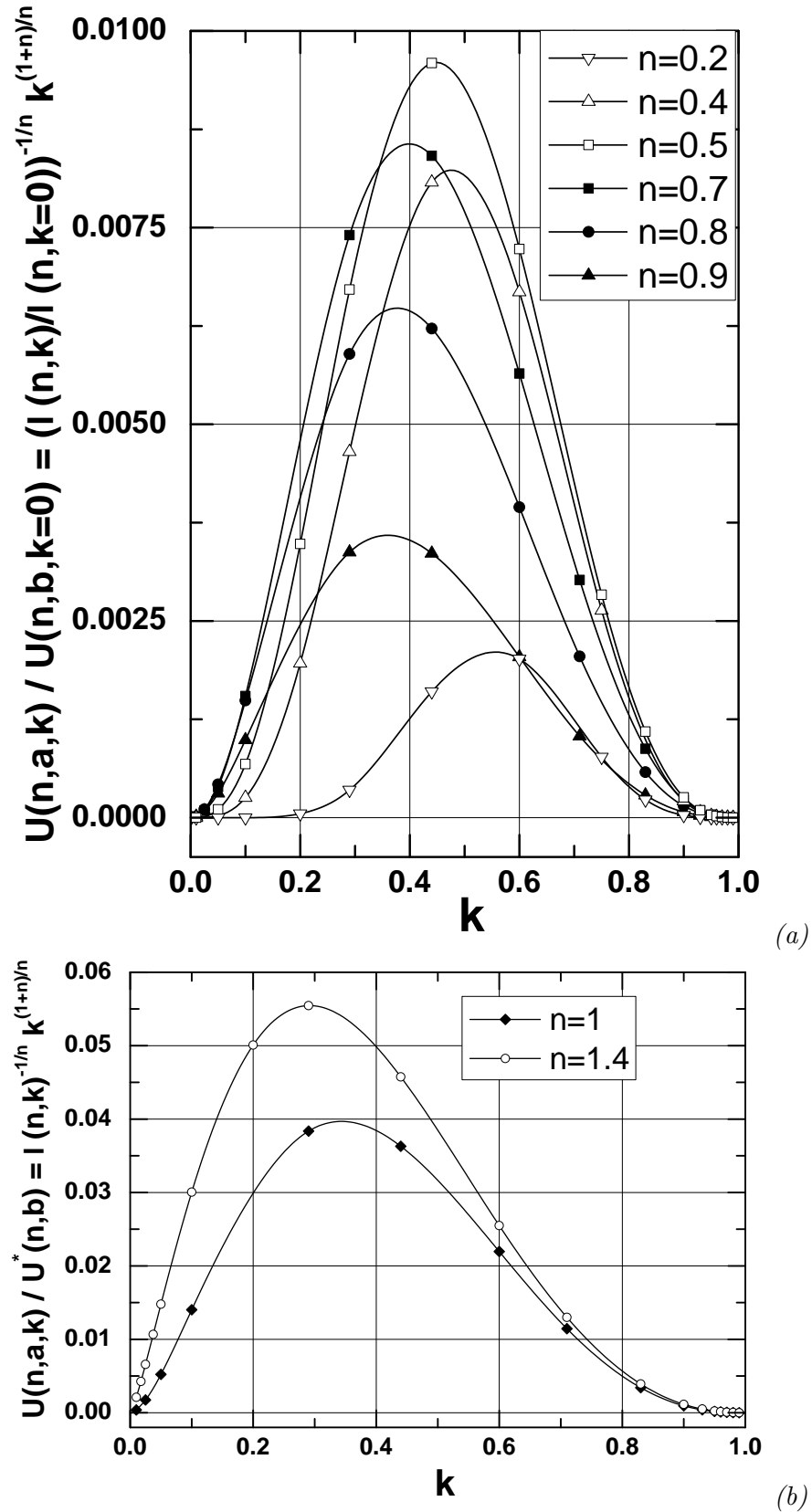
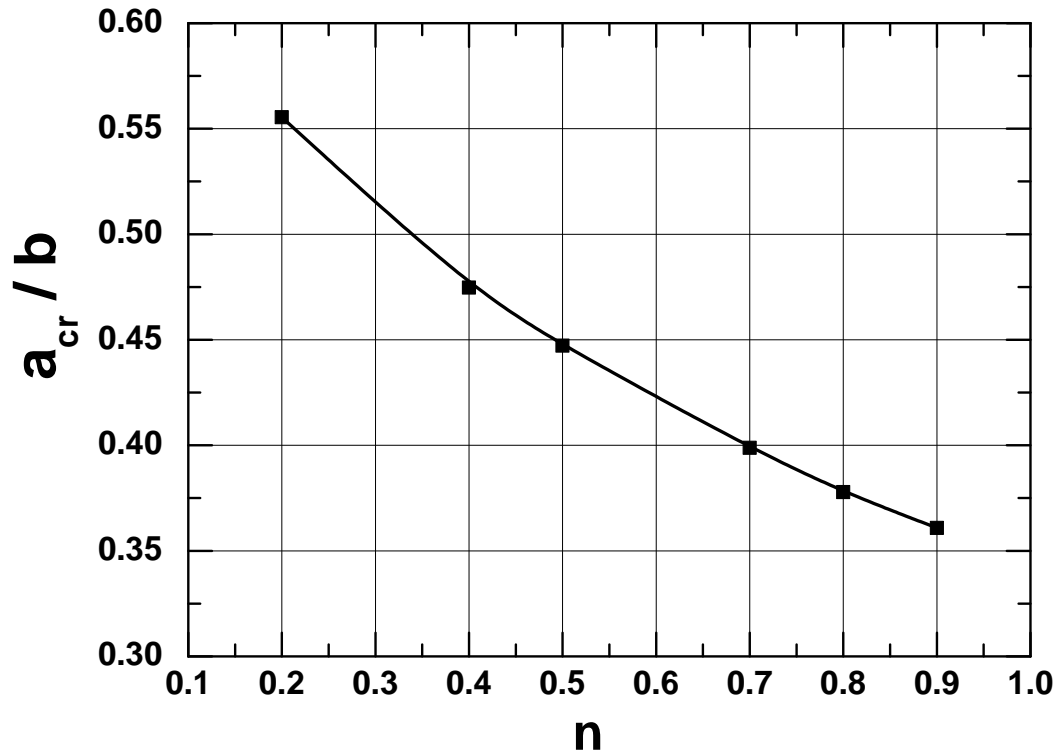
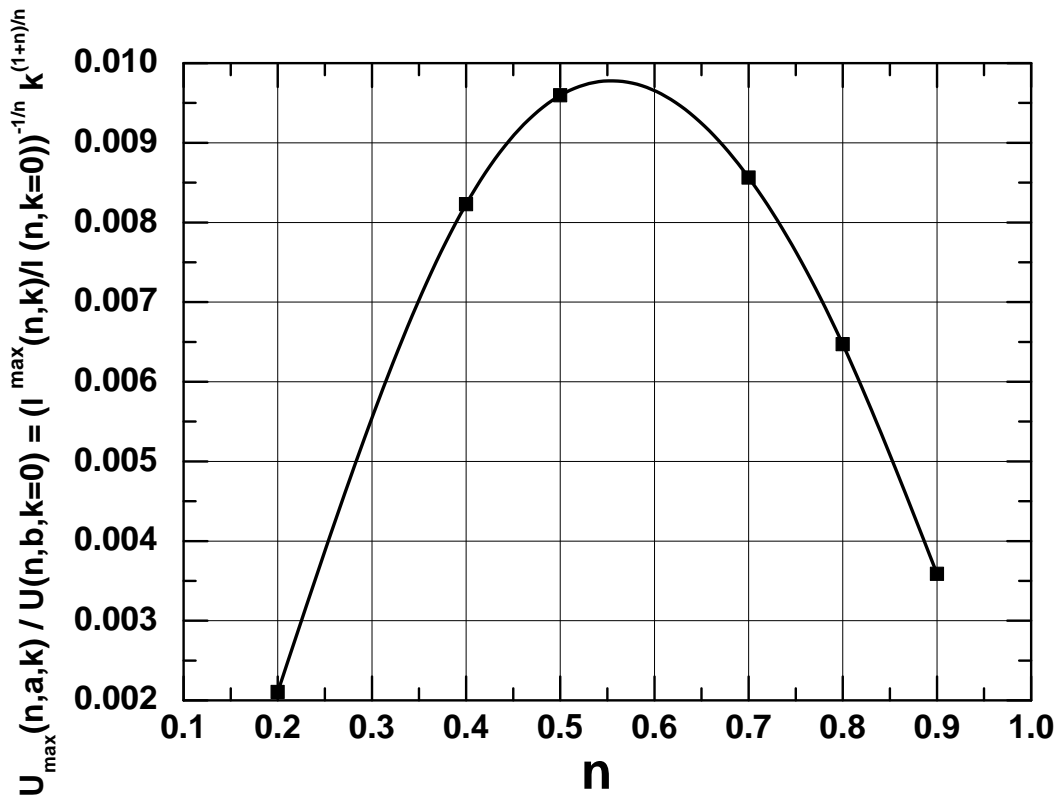


FIGURE 4.7 – Evolution de la vitesse de sédimentation prise par différentes particules cylindriques dans un canal donné, en fonction de leur confinement k : (a) quand le paradoxe de Stokes disparaît (b) quand le paradoxe de Stokes prend place.



(a)



(b)

FIGURE 4.8 – (a) Diminution monotone du rayon critique de la particule cylindrique pour laquelle la vitesse de sédimentation est maximale, en fonction de l'indice de fluidité n , (b) Mise en évidence d'une vitesse de sédimentation maximale pour $n \approx 0.55$.

Aux faibles confinements ($k \approx 0$), comme le poids de la fibre est dominant, la courbe asymptotique au voisinage de $k = 0$ est une loi de puissance du type $\alpha(n, k) \propto k^{(n+1)/n}$. Cependant, pour les grands confinements ($k \approx 1$, grandes concentrations), l'équation asymptotique (4.5) nous permet d'obtenir celle donnant la courbe asymptote en $k = 1$:

$$\frac{U(n, a, k)}{U(n, b, k = 0)} \sim A(n)(1 - k)^{(4n+1)/2n} \quad (4.11)$$

où

$$A(n) = \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left[\lambda(n, k = 0) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(4n-1)/2}} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} \right]^{1/n}$$

Ainsi, pour les fluides pseudoplastiques, comme le backflow dépend de l'indice de fluidité, nous observons que plus n tend vers zéro, plus la position critique à laquelle le maximum de la vitesse de sédimentation est atteint augmente (figure 4.8a). Effectivement, pour les faibles valeurs de n , le backflow ne nécessite qu'un très petit gap à cause de la décroissance de la longueur d'écran hydrodynamique (figure 2.17b). L'autre effet notable est que le maximum de la vitesse de sédimentation correspondant à cette situation critique varie de façon non monotone, passant par une valeur optimum pour $n = 0.55$. Par ailleurs, dans les conditions où le fluide est newtonien ou dilatant, en situation confinée, la solution de type Stokes existe, contrairement au milieu illimité, où la traînée est nulle à cause du paradoxe de Stokes. Dans ces conditions, la figure 4.7b montre le même comportement que celle de la vitesse de sédimentation discutée ci-dessus, à l'exception du fait que la normalisation est faite par l'utilisation d'une vitesse caractéristique correspondant à une fibre de rayon b :

$$\frac{U(n, a, k)}{U^*(n, b)} = \lambda(n, k)^{-1/n} k^{(n+1)/n} \quad (4.12)$$

où

$$U^*(n, b) = \left(\frac{2^{n-3} \Delta \rho g b^{n+1}}{m} \right)^{1/n} \quad (4.13)$$

4.4 Effet du confinement sur la vitesse de transport d'une particule cylindrique

Dans ce cas aussi, afin de vérifier la validité de l'hypothèse communément utilisée dans le transport de fibres (dans les procédés d'injection par exemple [90]), qui consiste à supposer que la fibre et le fluide vont à la même vitesse que celle de son centre de gravité dans le fluide non perturbé, nous étudions de la même façon que précédemment le transport d'une fibre non pesante dans un canal rectangulaire où un "écoulement de type Poiseuille" est assuré par un gradient de pression ΔP . La détermination de la vitesse réelle de cette fibre, tenant compte des interactions hydrodynamiques, est effectuée à l'instar du cas de la sphère, par l'utilisation d'un maillage dynamique décrit dans le § 4.2.2. Ici encore, dans un souci de vérification de l'intensité de la non linéarité du problème inverse, nous avons effectué une tentative d'utilisation de la méthode de superposition.

4.4.1 "Écoulement de Poiseuille" et méthode de superposition

Dans l'hypothèse d'une très faible non linéarité du problème, il est acceptable d'utiliser la méthode de superposition, comme dans le cas des fluides newtoniens. Cependant, cette procédure nécessite la détermination de la force subie par une fibre placée dans le plan de symétrie du canal, où le fluide d'Ostwald est mis en écoulement par un gradient de pression correspondant à un profil de type "Poiseuille" (solution de l'écoulement dans un canal rectangulaire), imposé loin à l'amont et à l'aval de la fibre (évitant la longueur d'entrée) :

$$\mathbf{u}_x(y) = U_{max} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{(1/n)+1} \right] \mathbf{e}_x \quad (4.14)$$

où U_{max} est la valeur maximale de la vitesse. Dans ces conditions, comme dans les cas précédents, on peut écrire :

$$\mathbf{F}^{Pois}(n, k)/l = 4\pi m \left(\frac{U_{max}}{2a} \right)^{n-1} U_{max} \lambda^{Pois}(n, k) \mathbf{e}_x \quad (4.15)$$

Comme dans le cas précédent de l'écoulement uniforme, nous donnons une comparaison dans les figures 4.9, 4.10a, 4.10b et 4.10c de nos résultats obtenus numériquement et ceux obtenus asymptotiquement, donnés par les formules (4.16), (4.17), (4.18).

$$\lambda^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(4n-1)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2}, \text{ pour } n \geq 0 \quad (4.16)$$

$$\lambda_p^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(4n-1)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2}, \text{ pour } n \geq 0 \quad (4.17)$$

$$\lambda_v^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(6n-5)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{\Gamma(2n)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n-1)/2}, \text{ pour } n > \frac{1}{4} \quad (4.18)$$

Néanmoins, la même remarque que celle effectuée dans le cas de l'écoulement uniforme, concernant le domaine de validité de la composante visqueuse, peut être appliquée ici. Par ailleurs, la même analyse concernant les exposants $f(n)$ et $g(n)$ est aussi applicable à ce type d'écoulement.

Finalement, si la superposition d'état est permise, alors la superposition des écoulements uniforme et de "Poiseuille" qui conduisent à une traînée hydrodynamique nulle peuvent nous permettre de déterminer la vraie vitesse de transport de la particule neutre :

$$\begin{aligned} F_x/l &= -4\pi m \left(\frac{U_{particle}}{2a} \right)^{n-1} U_{particle} \lambda(n, k) \\ &+ 4\pi m \left(\frac{U_{max}}{2a} \right)^{n-1} U_{max} \lambda^{Pois}(n, k) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

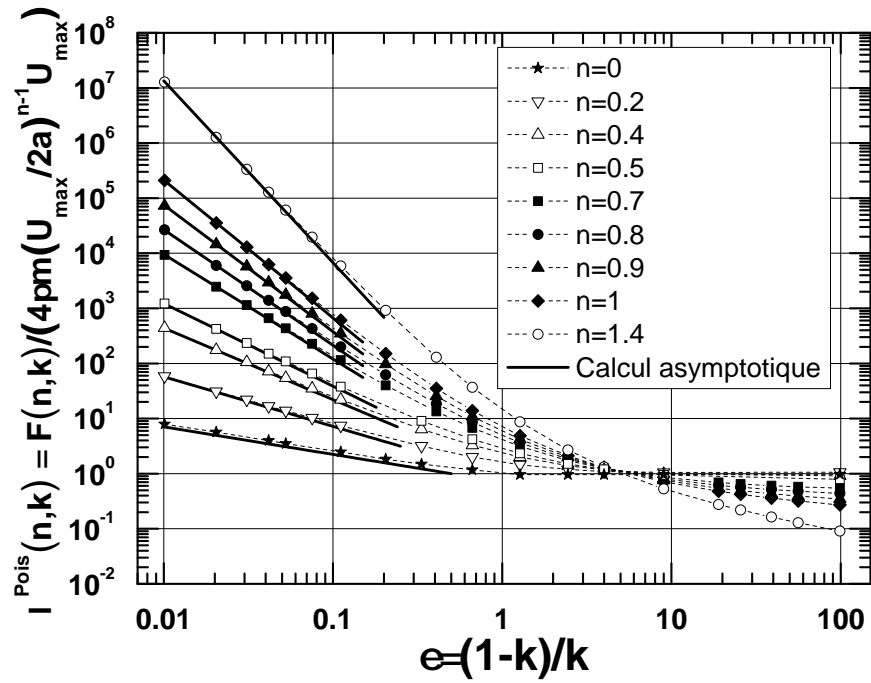
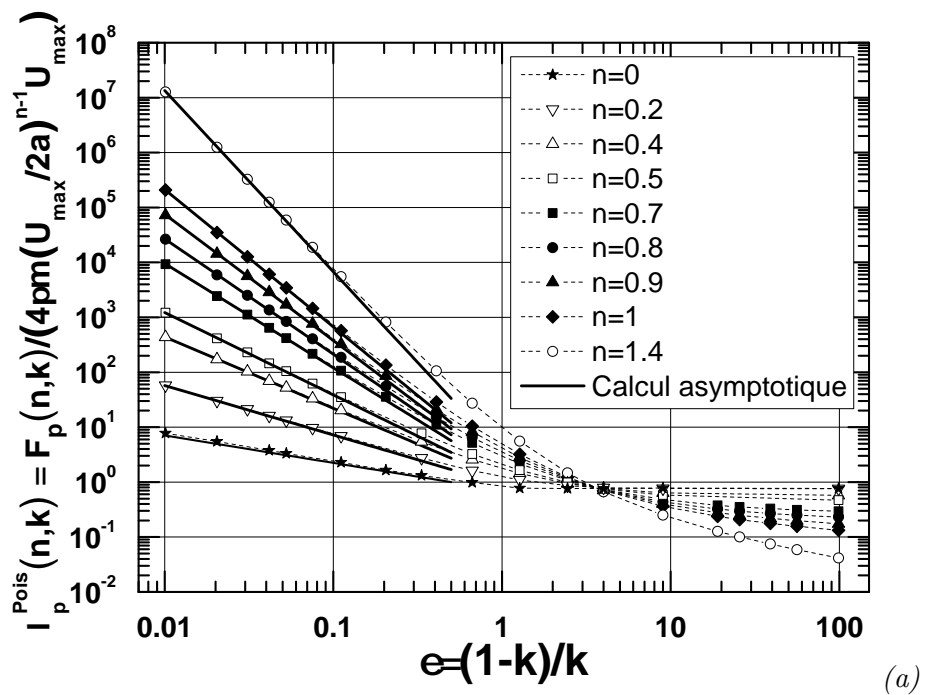
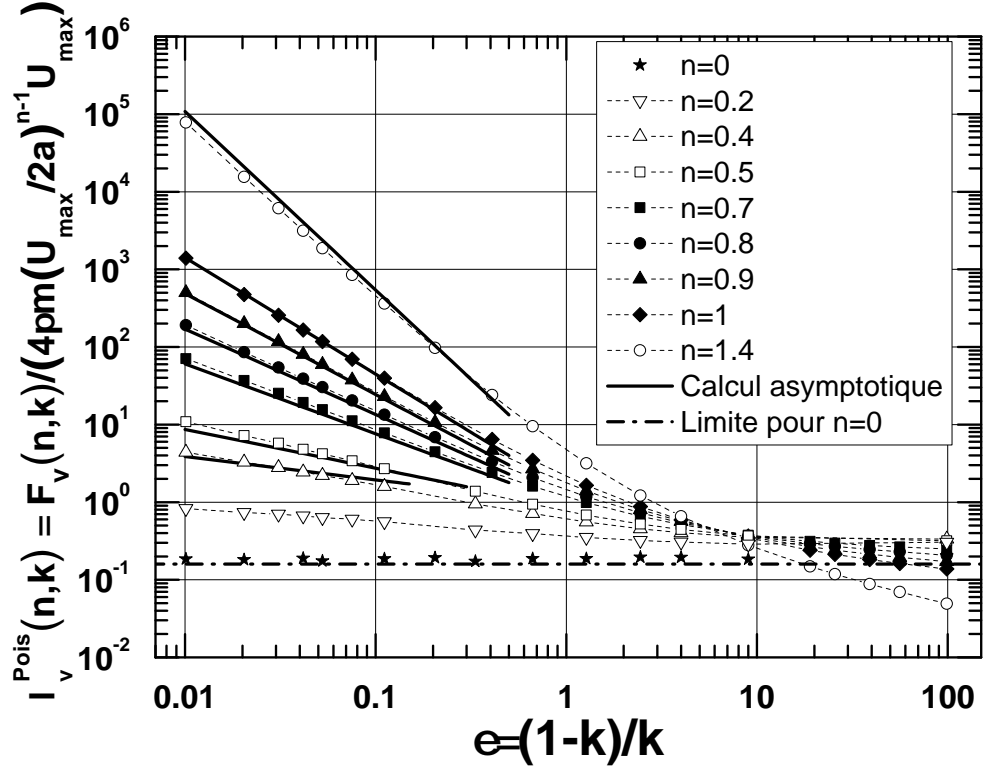


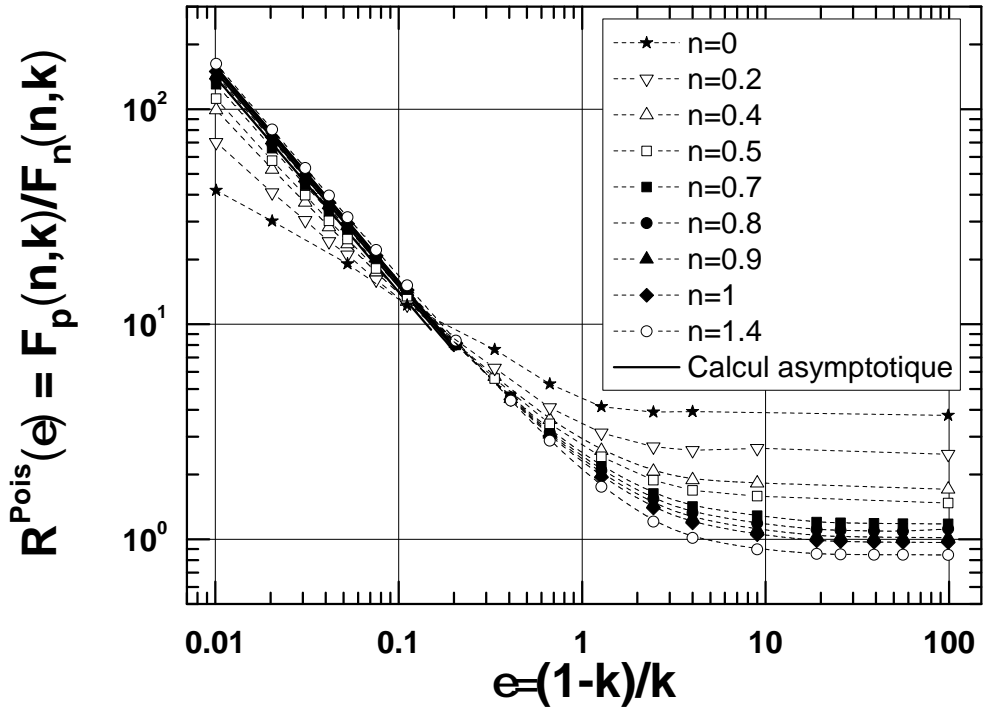
FIGURE 4.9 – Evolution de la force de traînée subie par un cylindre soumis à ”l’écoulement de type Poiseuille” d’un fluide en loi de puissance, et concordance avec les résultats asymptotiques [formule (4.16)].



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.10 – Evolution des contributions à la force totale subie par une particule cylindrique soumise à "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance (résultats numériques et asymptotiques) : (a) contribution de la pression $\lambda_p^{Pois}(n, k)$ [formule (4.17)], (b) contribution de la viscosité $\lambda_v^{Pois}(n, k)$ [formule (4.18)], (c) rapport des deux contributions $R^{Pois}(n, k) = \frac{F_p^{Pois}(n, k)}{F_v^{Pois}(n, k)}$ [formule (4.8)].

4.4.2 Résultats et discussion

La vitesse de transport de la particule cylindrique non pesante, normalisée par la vitesse non perturbée du fluide dans le plan de symétrie du canal $U_{fluid} = U_{max}$, est donnée sur la figure 4.11 en fonction de son confinement. Pour tous les indices de fluidité,

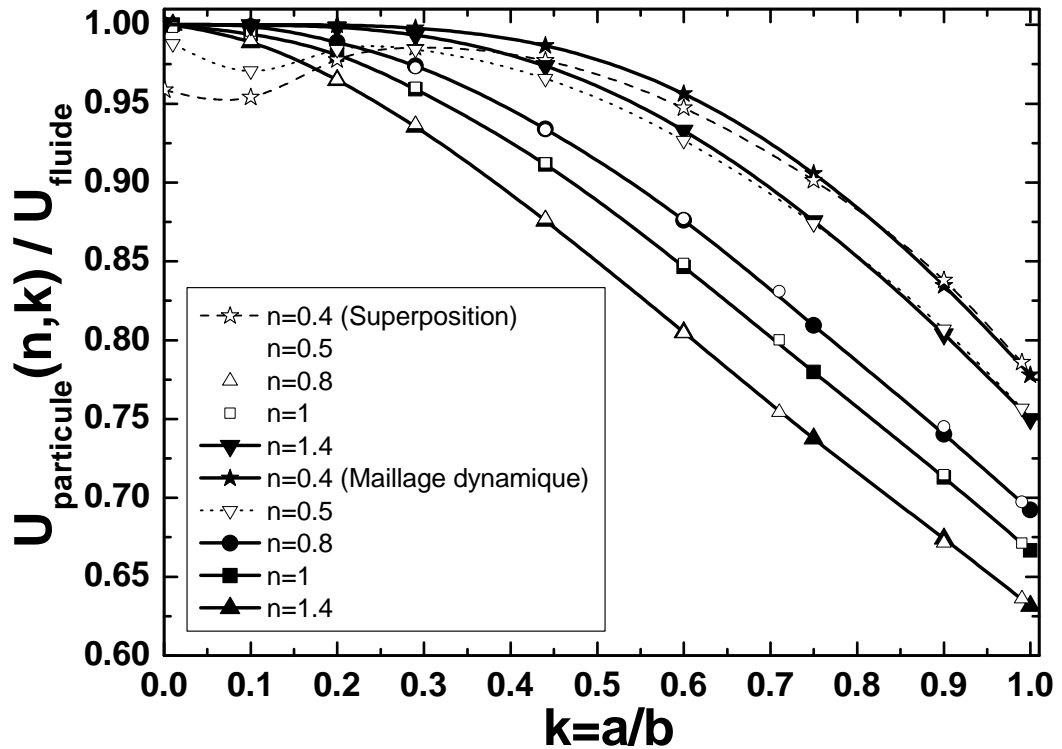


FIGURE 4.11 – Evolution de la vitesse de transport atteinte par une particule cylindrique libre non pesante, lors de son transport par "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé, en fonction de son confinement. Cette figure met en évidence l'augmentation du déficit de la vitesse de transport avec l'indice de fluidité et le confinement.

la vitesse de transport diminue fortement par rapport à celle du fluide en fonction du confinement (c'est à dire de la concentration $c \sim k^3$), à cause des interactions hydrodynamiques avec les parois. Par ailleurs, il est surprenant que les résultats obtenus par la méthode de superposition restent en bon accord avec ceux obtenus par la méthode de maillage dynamique pour $0.7 \leq n \leq 1.4$. Ce fait confirme la validité de notre hypothèse du comportement faiblement non linéaire de ce problème pour ces indices. Cependant, pour $n = 0.5$ et $n = 0.4$ (c'est à dire les faibles valeurs de n), le maillage dynamique semble continuer de donner de très bons résultats, mais la méthode de superposition cesse d'être applicable à l'exception des très forts confinements ($k \approx 1$). En fait, sur la figure 4.12, où nous donnons cette même vitesse en fonction de l'indice de fluidité du fluide pour différents confinements, nous pouvons voir que l'exactitude

de nos calculs peut être prouvée par les bonnes valeurs atteintes à la limite où $k \approx 0$ (très faibles concentrations). Nous pouvons voir aussi que, à la limite de l'écoulement bouchon ($k \approx 1$), la particule se déplace à la même vitesse que l'écoulement moyen dans le canal. Les résultats de la figure 4.11 prouvent finalement que le déficit de vitesse de

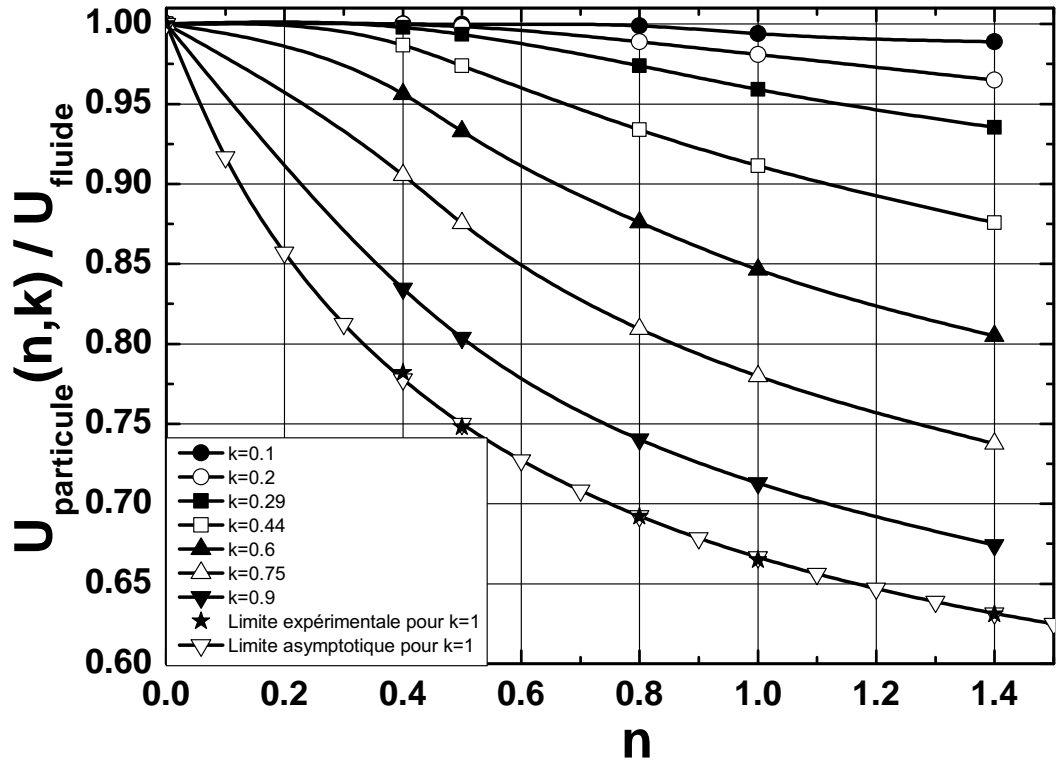


FIGURE 4.12 – Evolution de la vitesse de transport atteinte par une particule cylindrique libre non pesante, lors de son transport par "l'écoulement de type Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance, normalisée par la vitesse du fluide non perturbé, en fonction de l'indice de fluidité n .

la particule est d'autant plus important que l'indice de fluidité augmente, et qu'il est réduit lorsque le fluide devient rhéofluidifiant. La conséquence de ces résultats est que l'hypothèse de Tucker conduit à des erreurs moindres dans ce dernier cas.

4.5 Conclusion

Dans cette étude, où nous avons utilisé la même approche que celle appliquée au cas de la particule sphérique, nous avons pu donner une réponse détaillée sur l'influence de l'indice de fluidité sur la sédimentation des fibres en régime concentré d'une part. D'autre part, nous avons étudié avec minutie l'influence des interactions hydrodynamiques sur le transport des fibres tout en donnant les limites de validité de l'hypothèse de Tucker [90]. En effet, le résultat, dont l'intérêt pratique est indéniable, est celui qui

consiste à affirmer que les modélisations numériques effectuées sans tenir compte des interactions hydrodynamiques ne peuvent être considérées comme valables que pour les très faibles valeurs de n . Finalement, l'étude du cas de la particule sphérique et celui de la particule cylindrique (fibre) donnent des résultats équivalents, à la différence près des subtilités apparaissant dans l'apparition et la disparition du paradoxe de Stokes, à cause de l'augmentation ou de la diminution de la longueur d'écran.

Chapitre 5

Force hydrodynamique subie par une sphère se déplaçant vers un plan dans un fluide en loi de puissance

5.1 Introduction

La dynamique des suspensions diluées dépend fortement des interactions hydrodynamiques et particulièrement de leur interaction frontale. Ces dernières sont contrôlées par le drainage du film liquide se situant entre la particule et le plan. En effet, tant que la particule est en dehors du champ des forces moléculaires (à une distance supérieure à 10-15 nm [94]), c'est l'hydrodynamique qui contrôle le temps de contact ou de séparation de la particule du plan. Ce temps joue un rôle crucial dans l'agrégation des particules et la formation des écoulements bouchons comme décrit par de Gennes [95]. Ce problème représente un intérêt fondamental dans plusieurs applications industrielles comme la filtration, la fluidisation, la sédimentation... Dans un autre champ de la physique, on peut trouver cette problématique dans la récente application des machines à force de surface en régime dynamique (DSFA ¹) à la nanorhéologie [61, 60]. Cette dernière concerne l'étude du rôle de l'hydrophobisation des surfaces sur la condition d'adhérence et de glissement au niveau de la condition limite hydrodynamique [60]. Dans ces conditions, le problème à étudier se résume à la détermination de la force hydrodynamique subie par une particule sphérique de rayon a se déplaçant à vitesse constante U vers un plan horizontal rigide. Comme dans la plupart des situations expérimentales, la particule en suspension subit aussi l'effet du confinement latéral, nous avons choisi d'étudier l'influence de ce dernier effet sur le confinement frontal. Pour cela, nous avons choisi de déplacer la particule axialement vers le fond plat d'un tube de rayon b rempli d'un fluide newtonien ou non newtonien. Dans cette application, nous travaillerons à nombre de

1. Dynamic Surface Force Apparatus

Reynolds imposé contrairement au cas de la sédimentation, dans laquelle on peut voir apparaître d'autres effets comme celui de la masse ajoutée, les effets d'instationnarité (force de Basset), ainsi que tous les phénomènes liés au rebond [38, 96, 97, 98].

$\varepsilon Re \ll 1$ constitue la condition de quasi-stationnarité de l'écoulement. Cette condition peut être établie en exprimant que le temps de diffusion de la vortacité $(\varepsilon a)^2 / \nu$ dans l'interstice εa doit être beaucoup plus court que le temps de la convection instationnaire $\varepsilon a / U$. Ce n'est que dans ces dernières conditions et dans le cas où le nombre de Reynolds est faible que nous pouvons transposer nos résultats au cas de la sédimentation. Utilisant les coordonnées polaires, qui ont été introduites pour la première fois par Stimson et Jeffery [27], Brenner [31] et Maude [32] avaient calculé analytiquement le facteur de correction frontal de la force de Stokes dans le cas d'un fluide newtonien. Ce facteur est défini par la relation suivante :

$$\delta(\varepsilon) = \frac{F(\varepsilon)}{6\pi\mu a U} \quad (5.1)$$

Pour les faibles interstices εa , une expression asymptotique a été donnée de cette formule par Cox et Brenner [33] :

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 0.9712\varepsilon \right) \quad (5.2)$$

Celle-ci n'est valable que pour $\varepsilon \leq 0.6$. Cependant le développement asymptotique au premier ordre est donné par la loi attribuée à Taylor $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ et qui n'est valable que pour $\varepsilon \leq 0.04$. Ces expressions ont été vérifiées expérimentalement par Ambari *et al.* [37]. Cependant, excepté le calcul asymptotique réalisé par Rodin [99] en fluide en loi de puissance non confiné, dans le cas du mouvement d'approche mutuelle de deux sphères rigides quasiment en contact, cette étude n'a jamais été effectuée, à notre connaissance, dans le cas des fluides non newtoniens. En effet, seul l'effet du confinement latéral a été calculé numériquement par Ambari *et al.* [2] et Ben Richou *et al.* [41]. Dans ces conditions, nous allons analyser surtout l'effet non newtonien le plus courant, c'est à dire la rhéofluidification et le rhéoépaississement en ignorant dans une première étape la viscoélasticité du fluide (ceci sera justifié plus tard). Nous donnerons donc des résultats numériques et asymptotiques relatifs à ce problème dans le cas d'un fluide en loi de puissance dont la loi constitutive est rappelée :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2m|2d_{kl}d_{kl}|^{(n-1)/2}d_{ij} \quad (5.3)$$

où σ_{ij} est la composante du tenseur de contraintes de Cauchy, $d_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$ sont les composantes du tenseur taux de déformation, p la pression, m et n sont respectivement la consistance (Pa s^n) et l'indice de fluidité. Concernant la force hydrodynamique subie par la sphère lors de son approche du plan, celle-ci est principalement due à l'effet du drainage du fluide dans l'interstice en régime de lubrification. Dans ces conditions, le comportement du fluide dans un tel écoulement viscosimétrique peut être assimilé à celui d'Ostwald à cause de la très faible valeur du gradient élongationnel de vitesse due à

la faible vitesse de déplacement de la sphère. En effet, tant que le gradient élongationnel situé au voisinage de l'interstice minimal reste inférieur à l'inverse du temps de relaxation du fluide, la réaction élastique de ce dernier reste négligeable [100, 101, 102]. De plus, les résultats expérimentaux obtenus dans le cas de l'étude de la collision particule-plan dans des liquides polymériques par Ardekani *et al.* [103] justifient le choix de ce modèle. Par ailleurs, dans un tel écoulement, le gradient de vitesse de cisaillement est borné. Par conséquent, la contrainte de cisaillement l'est aussi, malgré le fait que le modèle de fluide diverge mathématiquement pour des gradients de vitesse faibles. Dans ces conditions, dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant, un éventuel plateau newtonien correspondant à des gradients de vitesse très faibles, situés au voisinage immédiat de l'axe et très loin de la particule, contribue très faiblement au calcul de la force hydrodynamique. Dans le cas des fluides rhéoépaississants, la même analyse est applicable. Ainsi, le modèle d'Ostwald, nécessitant un seul paramètre de contrôle n , constitue une bonne approximation du comportement de fluides non newtoniens pseudoplastiques ou dilatants, plus commode à l'interprétation physique que les modèles plus réalistes tels que le modèle de Carreau-Yasuda [44] qui malheureusement introduit quatre paramètres de contrôle, rendant ardue toute interprétation physique.

5.2 Formulation et approche numérique

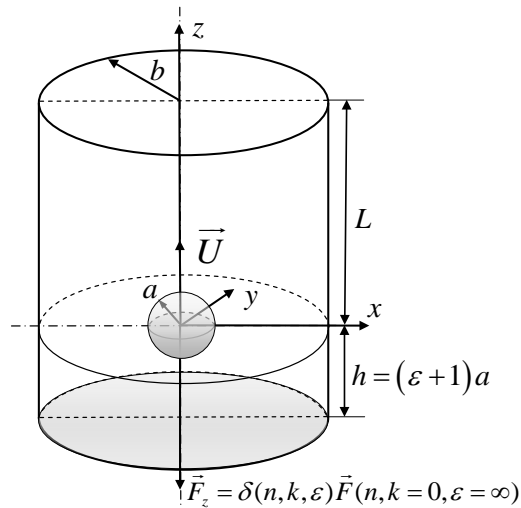


FIGURE 5.1 – Définition des paramètres géométriques et dynamiques dans le cas d'une sphère en translation axiale vers le fond d'un tube cylindrique.

Pour calculer le coefficient de correction frontal $\delta(n, k, \varepsilon)$ dans un milieu dont le confinement latéral est défini par k , nous considérons l'écoulement induit par une particule sphérique se tradant axialement vers le fond plat d'un tube cylindrique à la vitesse constante $\mathbf{u}_z = -U\mathbf{e}_z$, comme présenté schématiquement sur la figure 5.1. Ce

tube est rempli avec un fluide newtonien ou non newtonien. Pour adapter cette configuration au calcul numérique, nous considérons la configuration équivalente où la sphère est maintenue fixe et le contenant se déplace à la vitesse $+U\mathbf{e}_z$. L'écoulement est alors régi par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans des conditions isothermes, c'est à dire :

$$\rho(\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5.5)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, p la pression et $\underline{\underline{\tau}} = (\sigma_{ij} + p\delta_{ij})$ est le tenseur des contraintes correspondant au fluide d'Ostwald [voir équation (5.3)]. Les conditions aux frontières et les conditions initiales sont définies par : i) sur toutes les parois du cylindre : $\mathbf{U} = +U\mathbf{e}_z$; ii) sur la sphère : $\mathbf{U} = \mathbf{0}$; iii) pour $t \leq 0$ le fluide est au repos : $\mathbf{U} = \mathbf{0}$.

Aux faibles nombres de Reynolds généralisés $Re_n = \rho U^{2-n} (2a)^n / m$, le calcul des coefficients de correction frontal et latéral $\delta(n, k, \varepsilon)$ de la force hydrodynamique subie par la sphère en translation axiale dans le tube est donné par l'expression suivante, qui peut être obtenue par une analyse dimensionnelle :

$$\delta(n, k, \varepsilon) = \frac{F(n, k, \varepsilon)}{6\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} aU} \quad (5.6)$$

où $k = a/b$ est le facteur de confinement latéral et $\varepsilon = d/a$ est le facteur de confinement frontal. Rappelons que dans un milieu infini, le facteur de correction de la force de Stokes a été calculé dans le chapitre 2 et est donné par la formule (2.15).

La solution numérique de ce problème géométriquement instationnaire a été obtenue par la méthode de type volumes finis utilisant le maillage dynamique implémentée dans le code de calcul FLUENT dans lequel nous avons utilisé l'algorithme SIMPLE au second ordre. Les calculs ont été effectués sur un maillage globalement structuré sauf dans une zone située au voisinage du point de stagnation de la sphère, afin d'assurer une homogénéité de la taille des cellules lors de la déformation du maillage (voir figure 5.2). A chaque pas de temps, cette technique du maillage dynamique implique un mouvement rigide du haut et du fond du tube, respectivement loin et vers la sphère. Le maillage est alors ajusté conformément à la nouvelle position des frontières mobiles. Dans le domaine de maillage rectangulaire proche du fond du tube, la dynamique de maillage par couche enlève les cellules adjacentes à la frontière en mouvement (fond), basée sur la hauteur des couches voisines à la surface mobile. Pour cela, les cellules sont divisées (en haut) ou fusionnées (en bas) avec les cellules des couches voisines quand leur épaisseur a atteint une hauteur critique. L'épaisseur minimale du maillage non structuré au voisinage du point de stagnation de la sphère ($\varepsilon = 10^{-3}$, voir figure 5.2) correspond à la valeur minimale de l'interstice qui peut être atteinte par cette procédure. Rappelons qu'une centaine d'itérations ont été utilisées pour chaque pas de temps. La distance entre la sphère et le haut du tube L est prise égale à $60a$ pour éviter l'influence du haut du tube. Pour ces calculs numériques, nous avons utilisé un cluster de seize coeurs. La

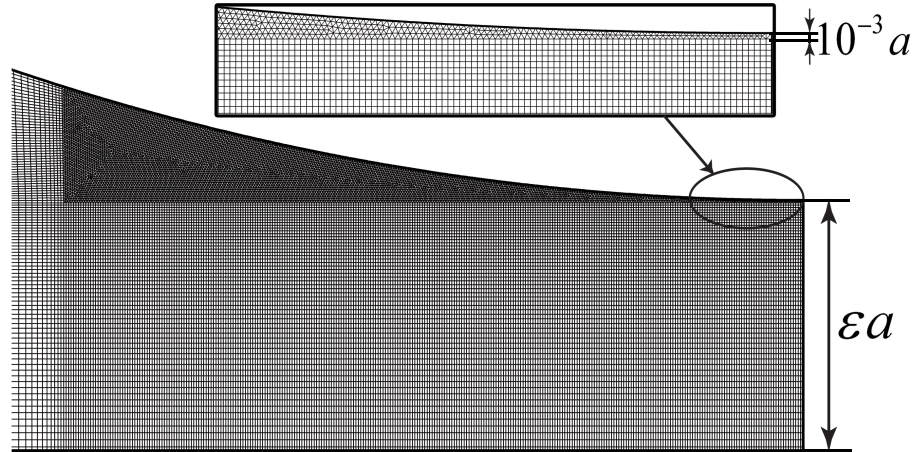


FIGURE 5.2 – Exemple de maillage utilisé sous FLUENT. Le domaine correspondant au maillage structuré est déformé par le mouvement du plan vers la sphère, tandis que le domaine correspondant au maillage non structuré reste fixe et permet de maintenir l’homogénéité de la taille des cellules.

convergence à chaque pas de temps l est vérifiée suivant le critère :

$$\left| 1 - \delta^l(n, k, \varepsilon) / \delta^{l+1}(n, k, \varepsilon) \right| < 10^{-6}. \quad (5.7)$$

Finalement, comme les domaines où le gradient de vitesse de cisaillement est négligeable ne contribuent pas au calcul de la force (comme signalé plus haut), nous avons procédé à une vérification de l’effet de la troncature du modèle d’Ostwald aux faibles et aux grands gradients de vitesse comme le ferait le modèle de Carreau-Yasuda [44]. Comme dans la plupart des expériences de mesure rhéologique, la variation de la viscosité apparente s’effectue souvent sur trois décades, nous avons imposé cette condition à notre modèle tronqué. Comme nous le verrons sur la figure 5.6 de la section 5.5, les résultats correspondant à ce modèle d’Ostwald tronqué restent confondus avec ceux donnés par le modèle d’Ostwald complet.

En régime de lubrification, nous allons procéder à une approche asymptotique pour vérifier la validité des résultats obtenus par cette méthode numérique de maillage dynamique.

5.3 Méthode asymptotique

Dans la limite du régime de lubrification, $\varepsilon \ll 1$ et pour de très faibles nombres de Reynolds, quand la sphère se déplace vers le plan en milieu latéralement infini (voir figure 5.3), la force de traînée qu’elle subit est principalement contrôlée par le processus de drainage du film liquide situé dans l’interstice restant entre la sphère et le plan. Dans ce cas, la force hydrodynamique exercée sur la sphère peut être calculée à partir de la force de pression induite par l’écoulement éjecté radialement. Notez que ce drainage qui

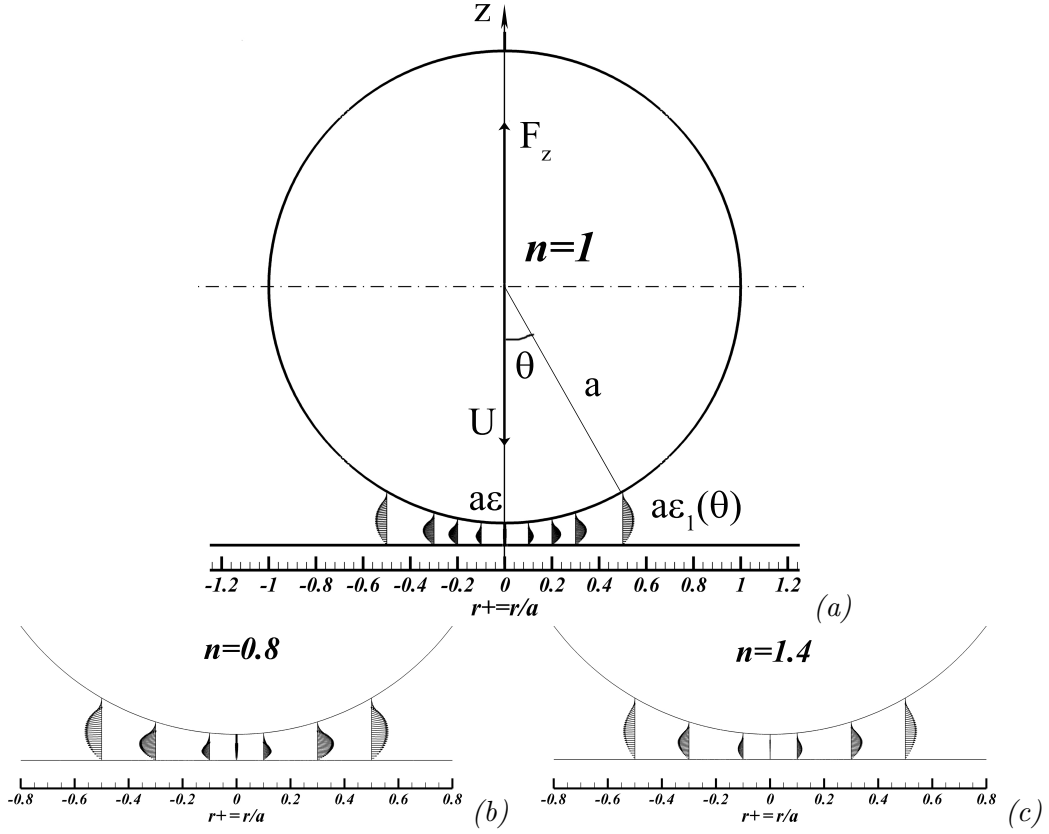


FIGURE 5.3 – Champ de vitesse numérique dans l’interstice entre la sphère et le plan lorsque la sphère est au voisinage du plan ($\varepsilon = 10^{-2}$, $k = 10^{-2}$, $Re_n = 10^{-3}$) : (a) $n = 1$, (b) $n = 0.8$, (c) $n = 1.4$.

prend place dans l’interstice pour un fluide en loi de puissance se réduit à un écoulement de type Poiseuille généralisé, comme observé sur la figure 5.3 où $a\varepsilon_1(\theta) = a\varepsilon + a(1 - \cos \theta)$ et $a\varepsilon$ sont les distances entre la sphère et le plan. Ainsi, par intégration des équations du mouvement en régime de lubrification, il est possible d’obtenir la distribution radiale de pression dans cet interstice :

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{m \left(\frac{U}{2a}\right)^n} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{2^{2+3n}}{1+3n}\right) (r_+)^{-(1+3n)} \times {}_2F_1\left(1+2n, \frac{1}{2}(1+3n); \frac{3}{2}(1+n); -2\frac{\varepsilon}{r_+^2}\right) \quad (5.8)$$

où p_∞ est la pression loin de l’interstice, $r_+ = r/a$ est la distance radiale normalisée comptée à partir du point de stagnation de l’écoulement et ${}_2F_1$ est la fonction hypergéométrique de Gauss. Pour $n = 1$, correspondant au fluide newtonien, cette expression se réduit à :

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{\mu \left(\frac{U}{2a}\right)} = \frac{6}{\left[\varepsilon + \frac{1}{2}r_+^2\right]^2} \quad (5.9)$$

qui est identique à celle correspondant au développement asymptotique donné par Pasol *et al.* [104], Chan et Horn [105], et Mongruel *et al.* [106]. Autrement, dans cette limite, Rodin [99] a donné une solution asymptotique pour le mouvement d'approche mutuelle de deux sphères presque en contact (S_1 de rayon a et S_2 de rayon βa) dans un fluide en loi de puissance. Afin de résoudre ce problème, il a utilisé la fonction de courant de Stokes axisymétrique et réalisé cette étude en utilisant les coordonnées étirées sans dimension. Il a calculé la solution asymptotique pour la pression, dans le cas de différentes valeurs du paramètre $\alpha = (1 + \beta) / 2\beta$, puis en a déduit la solution asymptotique pour la force de traînée subie par chacune des deux sphères en intégrant la pression communiquée par un cercle de rayon a centré à l'origine. Dans le cas de notre configuration d'une sphère approchant d'un plan, nous avons pris $\beta \rightarrow \infty$ donc $\alpha = 1/2$. En remplaçant dans son expression de la pression α par cette dernière valeur, nous obtenons la distribution radiale de pression retrouvée dans l'expression (5.8).

Dans notre approche asymptotique, détaillée dans l'annexe C, le facteur de correction de la traînée $\delta(n, k = 0, \varepsilon)$ subie par la sphère dans un milieu latéralement non confiné peut être calculé par l'intégration de la pression donnée par la formule (5.8) et appliquée sur la surface frontale en régime de lubrification :

$$\begin{aligned} \delta(n, k = 0, \varepsilon) &= \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{F(n, k = 0, \varepsilon \rightarrow \infty)} \\ &= \frac{2^{\frac{3n+3}{2}}}{3(9n^2 - 1)} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{3n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n-1}{2}}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Cette expression est équivalente à celle déterminée par Rodin [99] :

$$\begin{aligned} \delta_{Rodin}(n, k = 0, \varepsilon) &= \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{F(n, k = 0, \varepsilon \rightarrow \infty)} \\ &= \frac{2^{\frac{3n-1}{2}}}{3} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \beta \left(\frac{3+n}{2}, \frac{3n-1}{2}\right) \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n-1}{2}}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

où $\beta\left(\frac{3+n}{2}, \frac{3n-1}{2}\right) = \frac{4}{9n^2-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)}$ [107].

Il faut signaler que cette formule n'est mathématiquement valable que pour $n > 1/3$. Celle-ci se réduit à la formule classique de Taylor dans le cas newtonien :

$$\delta(n = 1, k = 0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \quad (5.12)$$

Autrement :

$$F(n, \varepsilon) = -ma^{(n+3)/2} \pi 2^{(n+7)/2} \frac{\delta(n, \varepsilon \rightarrow \infty)}{9n^2 - 1} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{3n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{h^{(3n-1)/2}} \left|\frac{dh}{dt}\right|^n \quad (5.13)$$

qui se réduit, dans le cas newtonien, à la relation classique [60, 108] :

$$F(n = 1, \varepsilon) = -\frac{6\pi\eta a^2}{h} \left|\frac{dh}{dt}\right| \quad (5.14)$$

5.4 Résultats et discussion

Dans une première étape, nous donnerons une comparaison entre nos résultats asymptotiques et numériques afin de les valider réciproquement dans le cas d'un confinement latéral négligeable. Nous donnerons, à l'occasion, l'effet du confinement latéral. Dans une seconde étape, nous appliquerons ces deux techniques pour le calcul du facteur de correction dans le cas d'un fluide non newtonien de type Ostwald en fonction de l'indice de fluidité et du confinement latéral.

5.4.1 Fluide newtonien

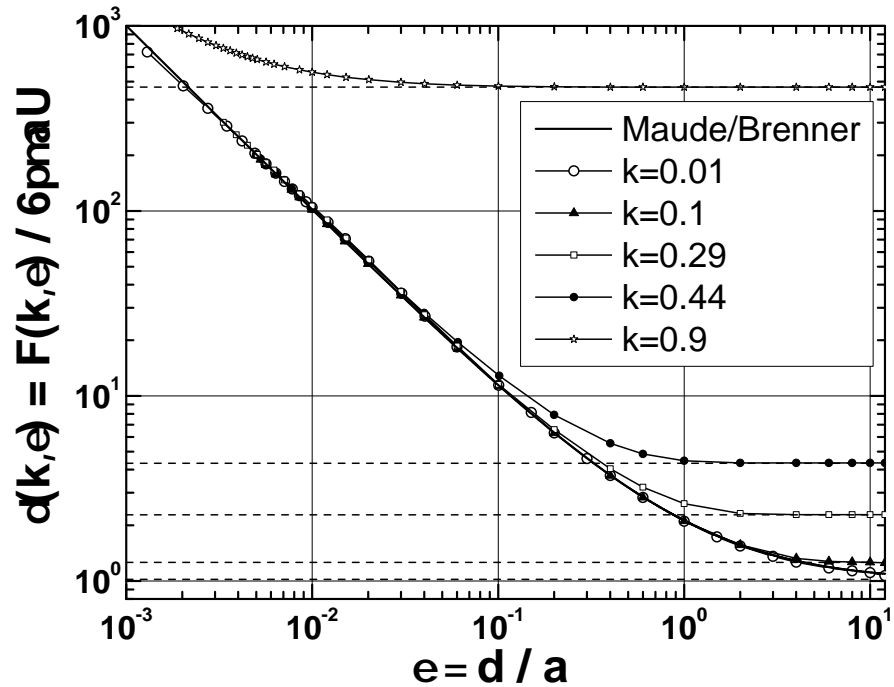


FIGURE 5.4 – Effet du confinement latéral sur le facteur de correction frontal de la force de traînée subie par une sphère se déplaçant axialement vers le fond d'un tube rempli d'un fluide newtonien. Les lignes discontinues correspondent à la valeur du plateau $\lambda(k)$.

Comme dans les expériences, une particule est souvent placée dans une situation de confinement frontal et latéral due à son voisinage constitué d'autres particules ou des parois d'un tube, nous avons obtenu, pour différents confinements $0.01 \leq k \leq 0.9$ à $Re = 10^{-3}$, les résultats représentés sur la figure 5.4. Ceux-ci montrent que lorsque le confinement latéral est faible, son effet ne se fait sentir que lorsque la sphère est beaucoup plus loin du plan. Ainsi, pour $k = 10^{-2}$, les résultats numériques sont en très bon accord avec ceux analytiques donnés par Maude [32] et Brenner [31]. Le succès de

cette comparaison confirme la validité de la méthode numérique utilisée dans le cas de ce problème instationnaire géométriquement. Les valeurs limites de $\delta(k, \varepsilon)$ atteintes loin du plan (plateau) sont en très bon accord avec celles calculées par Ben Richou *et al.* [41]. Cependant, pour tous les confinements, quand la sphère est en régime de lubrification, le comportement asymptotique de $\delta(k, \varepsilon)$ en milieu latéralement confiné est le même que celui en milieu latéralement infini. Ceci montre qu'en régime de lubrification, la correction latérale devient négligeable par rapport à la correction frontale. Profitant de la précision de cette méthode numérique, nous donnons sur la figure 5.5 les résultats concernant l'influence de l'inertie sur le facteur de correction frontal dans le cas d'un confinement $k = 0.29$ pour différents nombres de Reynolds $Re = 1, 10$ et 100 . Comme le confinement latéral est négligeable en régime de lubrification, nous avons comparé nos résultats numériques avec les calculs asymptotiques donnés par Cox et Brenner [33] :

$$\delta(\varepsilon, Re) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{5} \left(1 + \frac{Re}{4} \right) \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 0.9712 \quad (5.15)$$

L'accord entre ces deux résultats confirme pour la première fois à notre connaissance

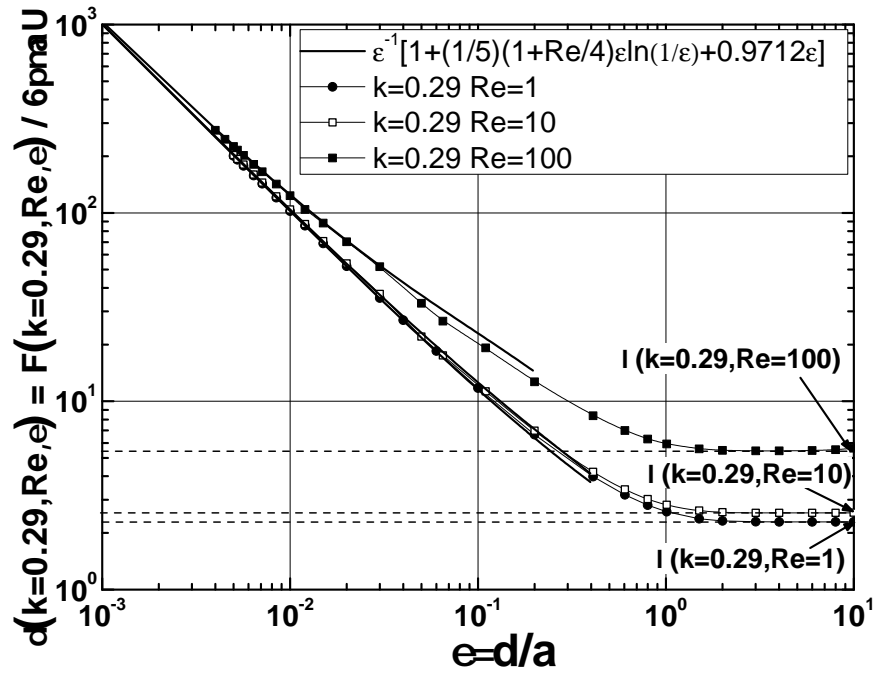


FIGURE 5.5 – Influence de l'inertie sur la force de traînée subie par une sphère se déplaçant vers un plan ($k = 0.29$), et comparaison avec la relation asymptotique de Cox et Brenner [formule (5.15)] pour $Re = 1, 10$ et 100 .

la validité de la formule (5.15). Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, l'influence du nombre de Reynolds sur la traînée devient négligeable car celle-ci est contrôlée par la condition $\varepsilon Re \ll 1$ comme suggéré par Cox et Brenner (voir introduction). En fait, la situation décrite

ci-dessus, où le nombre de Reynolds est fixe, diffère fondamentalement du cas de la sédimentation d'une sphère pesante dans laquelle le nombre de Reynolds loin du plan joue un rôle important à travers le nombre de Stokes $St = (1/9)(\rho_s/\rho_f)Re$ (où ρ_s et ρ_f sont respectivement les masses volumiques de la sphère et du fluide) dans la transition entre les régimes de rebond et de non rebond de la particule [38, 96, 97, 98].

5.5 Fluide non newtonien

Sur les figures 5.6, 5.7a and 5.7b, nous montrons l'influence de l'indice de fluidité sur le facteur de correction $\delta(n, k, \varepsilon)$ pour des confinements $k = 0.01$, $k = 0.29$ et $k = 0.44$. Pour chacun de ces confinements latéraux, le facteur de correction frontal correspond à la traînée subie par la sphère, à la distance εa du plan, normalisée par la même force dans le cas où le confinement latéral est négligeable, donnée par les équations (5.6) et (2.15). Sur ces figures, nous observons un très bon accord entre

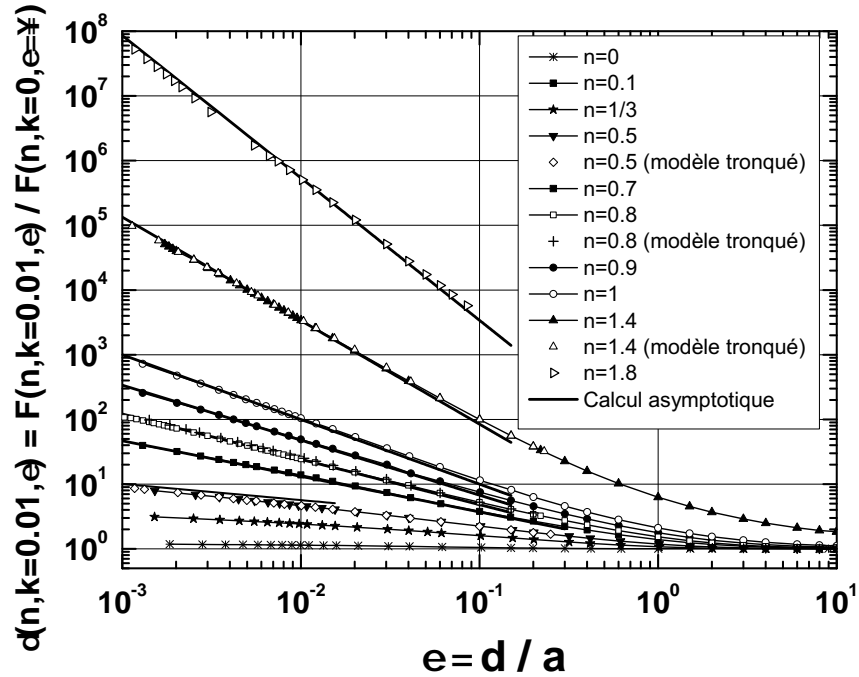


FIGURE 5.6 – Evolution de la traînée subie par une sphère approchant un plan en milieu presque illimité, en fluide non newtonien. Comparaison entre les résultats numériques (points) et asymptotiques (lignes).

les résultats numériques, pour tous les confinements, et ceux obtenus par l'approche asymptotique donnés par les équations (5.11) et (5.10) pour $n > 0.5$. En fait, l'influence du confinement latéral reste toujours faible en comparaison du confinement frontal en régime de lubrification, et ne dépend que de l'indice de fluidité du fluide [équations (5.11) et (5.10)], comme le montrent les figures 5.8a dans le cas des fluides

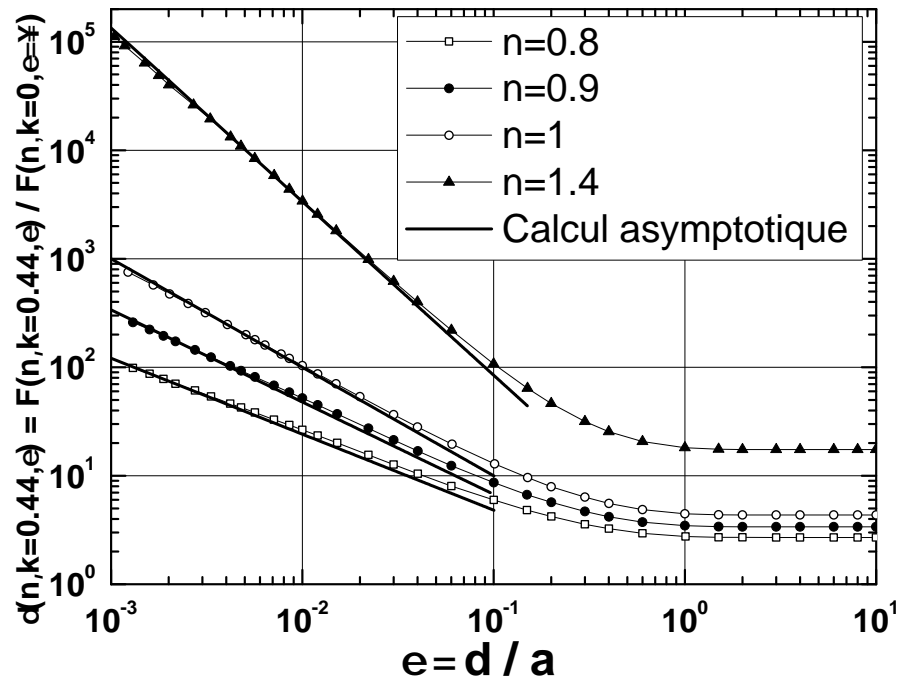
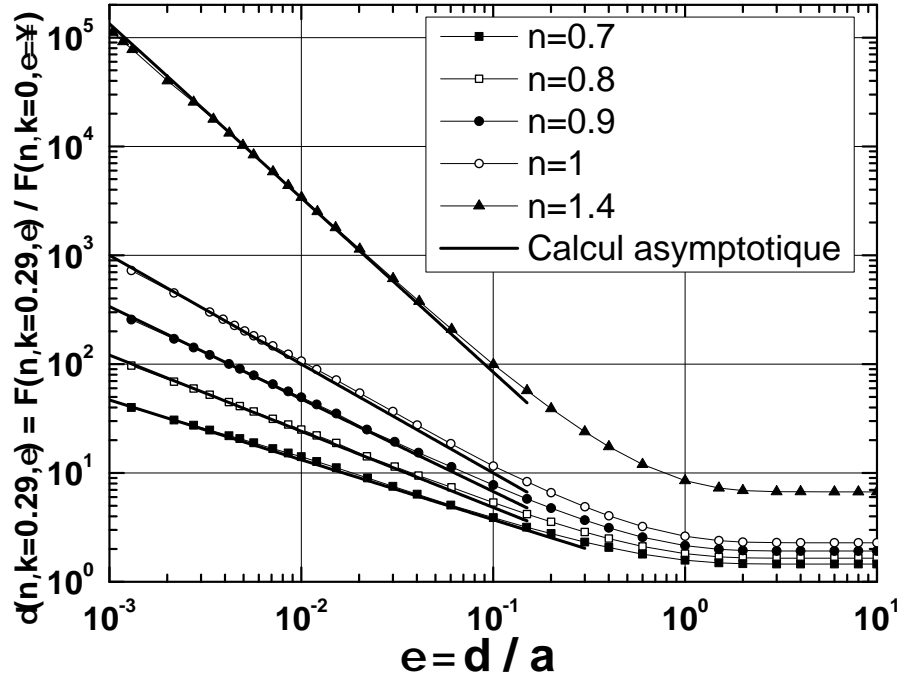


FIGURE 5.7 – Influence de l’indice de fluidité sur la force hydrodynamique subie par une sphère approchant le fond plat d’un tube rempli d’un fluide en loi de puissance, et comparaison entre les résultats numériques (points) et asymptotiques (lignes) : (a) $k = 0.29$, (b) $k = 0.44$.

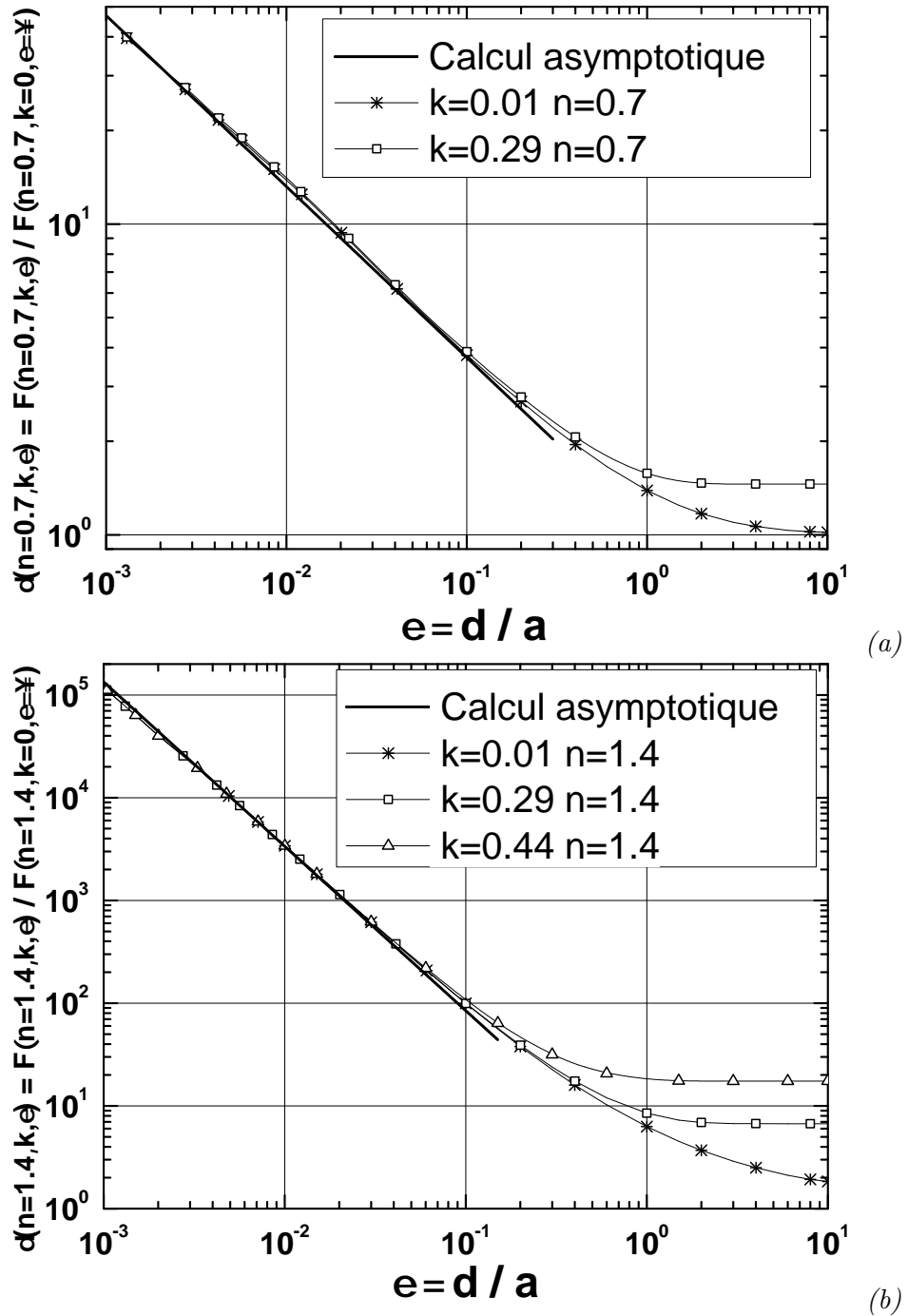


FIGURE 5.8 – Absence de l'influence du confinement latéral sur la force de traînée subie par une sphère dans un fluide en loi de puissance, en régime de lubrification, pour deux indices de fluidité : (a) $n = 0.7$, (b) $n = 1.4$.

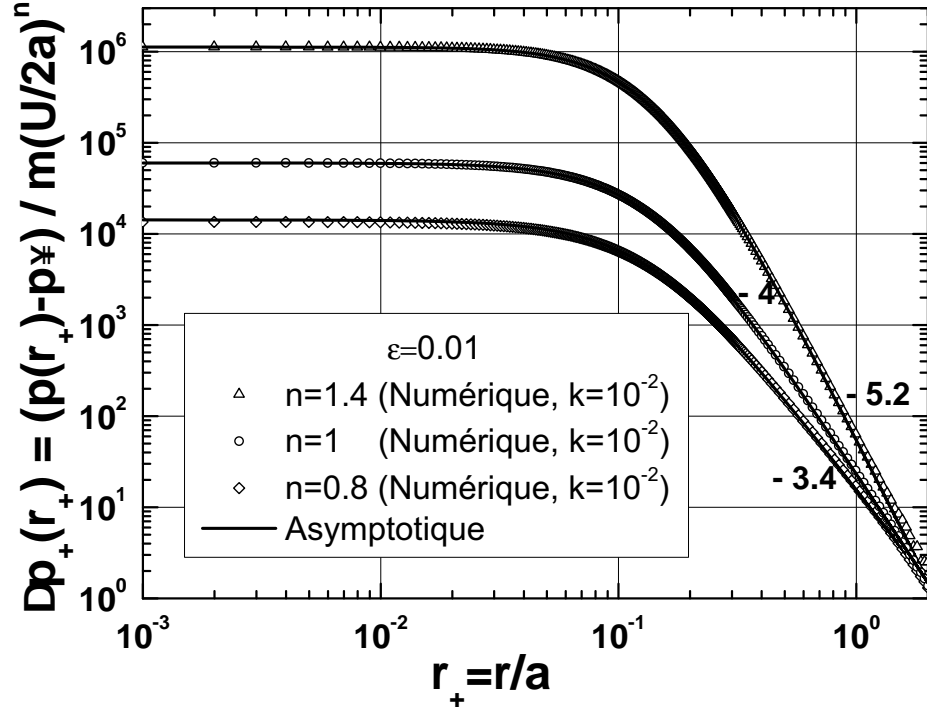


FIGURE 5.9 – Comparaison des distributions de pression numériques et asymptotiques dans l’interstice entre la sphère et le plan, pour différents indices de fluidité $n = 0.8$, $n = 1$ et $n = 1.4$, pour $Re_n = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$.

rhéofluidifiants ($n = 0.7$) et 5.8b dans le cas des fluides dilatants ($n = 1.4$). Par ailleurs, les figures 5.6, 5.7a, 5.7b montrent que l’accroissement du facteur de correction frontal quand la sphère s’approche du plan est d’autant plus réduit que le fluide est rhéofluidifiant. Dans ces conditions, on comprend mieux que l’agrégation des particules en suspension dans un fluide rhéofluidifiant soit plus facile que dans le cas newtonien (ceci dans le régime hydrodynamique, dans le cas des colloïdes, il ne faut pas oublier le potentiel zêta). Finalement, comme discuté dans la section 5.2, pour confirmer l’absence des effets d’une troncature, à faible et grand gradient de vitesse, introduite par l’apparition des deux plateaux newtoniens comme dans le modèle de Carreau-Yasuda [44], nous avons calculé numériquement ce même facteur de correction avec le modèle d’Ostwald tronqué, dans lequel la viscosité apparente varie sur trois décades (comme rencontré dans les expériences). Le bon accord de ces résultats, donnés sur la figure 5.6, obtenus avec ce modèle tronqué et ceux obtenus par le modèle complet, justifie l’utilisation de ce dernier.

Concernant la distribution radiale de pression dans l’interstice, nous avons comparé avec succès dans le cas newtonien, sur la figure 5.9, à $Re = 10^{-3}$ et $k = 10^{-2}$, les résultats numériques avec ceux donnés par la formule asymptotique (5.9). Ce bon accord confirme encore la validité des résultats numériques. Sur cette même figure, nous

avons comparé avec succès nos résultats numériques de la distribution de pression, toujours pour $k = 10^{-2}$, avec les résultats asymptotiques donnés par la formule (5.8) pour deux indices de fluidité, correspondant respectivement à des fluides dilatant ($n = 1.4$) et pseudoplastique ($n = 0.8$), pour $\varepsilon = 0.01$. Dans tous les cas, la comparaison est parfaite et confirme la validité de cette relation asymptotique. Cette même validité a été observée pour différentes valeurs de ε . Notez à l'occasion la décroissance en loi de puissance $(p(r_+) - p_\infty) \propto r_+^{-(1+3n)}$ identique à celle donnée par la formule (5.8).

Concernant la distribution en volume de la pression dans l'interstice, la figure 5.10

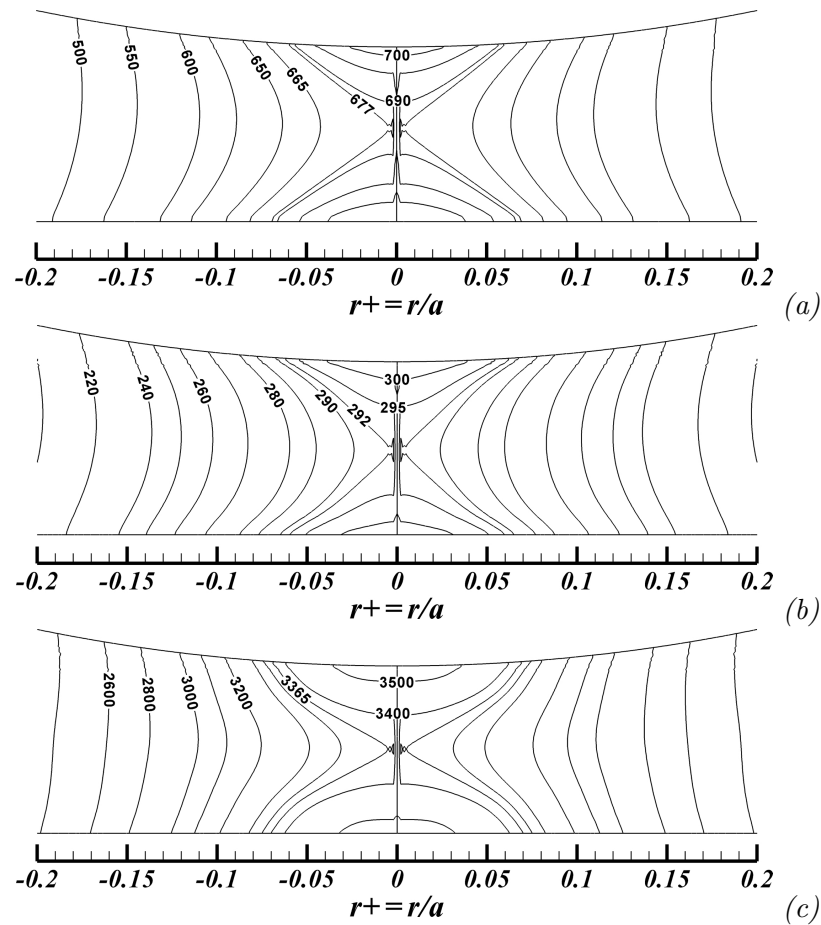


FIGURE 5.10 – Distribution en volume de la pression réduite $(p(r_+) - p_\infty) / m(U/2a)^n$ dans l'interstice entre la sphère et le plan montrant l'apparition d'un point selle dans l'axe pour $Re = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$: (a) $n = 1$, (b) $n = 0.8$, (c) $n = 1.4$.

montre que les plus grandes pressions atteintes dans cette zone se situent dans la ligne de plus petite distance entre la sphère et le plan, quel que soit l'indice de fluidité, le maximum absolu étant atteint au point de stagnation sur la sphère et sur le plan. Quant au minimum de pression, celui-ci est atteint au point selle situé au milieu du plus petit interstice, dans cet axe de symétrie. Finalement, il faut remarquer que pour le même

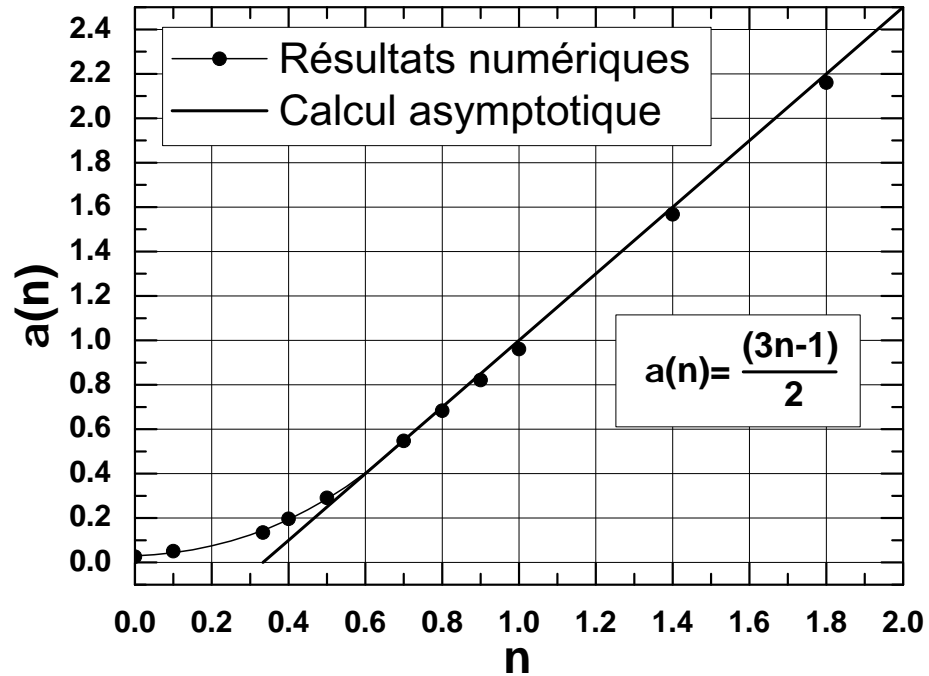


FIGURE 5.11 – Comparaison des exposants $\alpha(n)$ du comportement en loi de puissance de la traînée en régime de lubrification obtenus numériquement et asymptotiquement.

nombre de Reynolds généralisé $Re_n = 10^{-3}$, la pression réduite dans les fluides dilatants est plus grande que dans les fluides pseudoplastiques.

Par ailleurs, sur la figure 5.11, nous donnons une comparaison entre les exposants de la loi de puissance décrivant la divergence de la force de traînée $F(n, \varepsilon) \propto \varepsilon^{-\alpha(n)}$ calculés asymptotiquement $\alpha(n) = (3n - 1)/2$ et ceux déduits des résultats numériques donnés sur la figure 5.6. Cette comparaison confirme que les expressions asymptotiques (5.11) et (5.10) donnent de bons résultats pour $n > 0.5$ comme discuté dans la section 5.2. Pour $n < 0.5$, nous pouvons compléter nos résultats en nous contentant des valeurs numériques.

Toujours pour $n < 0.5$, comme l'accord entre l'asymptotique et le numérique n'est plus assuré par la formule asymptotique, nous avons procédé à la détermination de la hauteur du domaine de la sphère qui contribue à 95% de la force subie par celle-ci. Dans le cas newtonien, la figure 5.12a confirme que pour les confinements frontaux faibles, en régime de lubrification, cette hauteur est effectivement très réduite. Ceci vérifie que la forme de la particule en dehors de cette zone n'a aucune influence sur cette force comme dans le cas des sphérocyindres [106]. Cependant, dans le cas non newtonien, la figure 5.12b montre que dans le cas des fluides dilatants, cette zone est encore beaucoup plus réduite que dans le cas des fluides newtoniens, ce qui confirme la validité du modèle asymptotique pour $n > 1$. Par contre, dans le cas pseudoplastique, le domaine intervenant dans le calcul de la force devient de plus en plus grand quand n diminue.

Ceci explique la non validité du modèle asymptotique pour $n < 0.5$ et la nécessité de pousser les développements asymptotiques à des ordres beaucoup plus élevés. Enfin, nous avons vérifié numériquement que la hauteur $h_{95\%}$ de ce domaine, pour laquelle 95% de la force est atteinte, varie linéairement avec la distance entre la sphère et le plan pour les très faibles valeurs de εa .

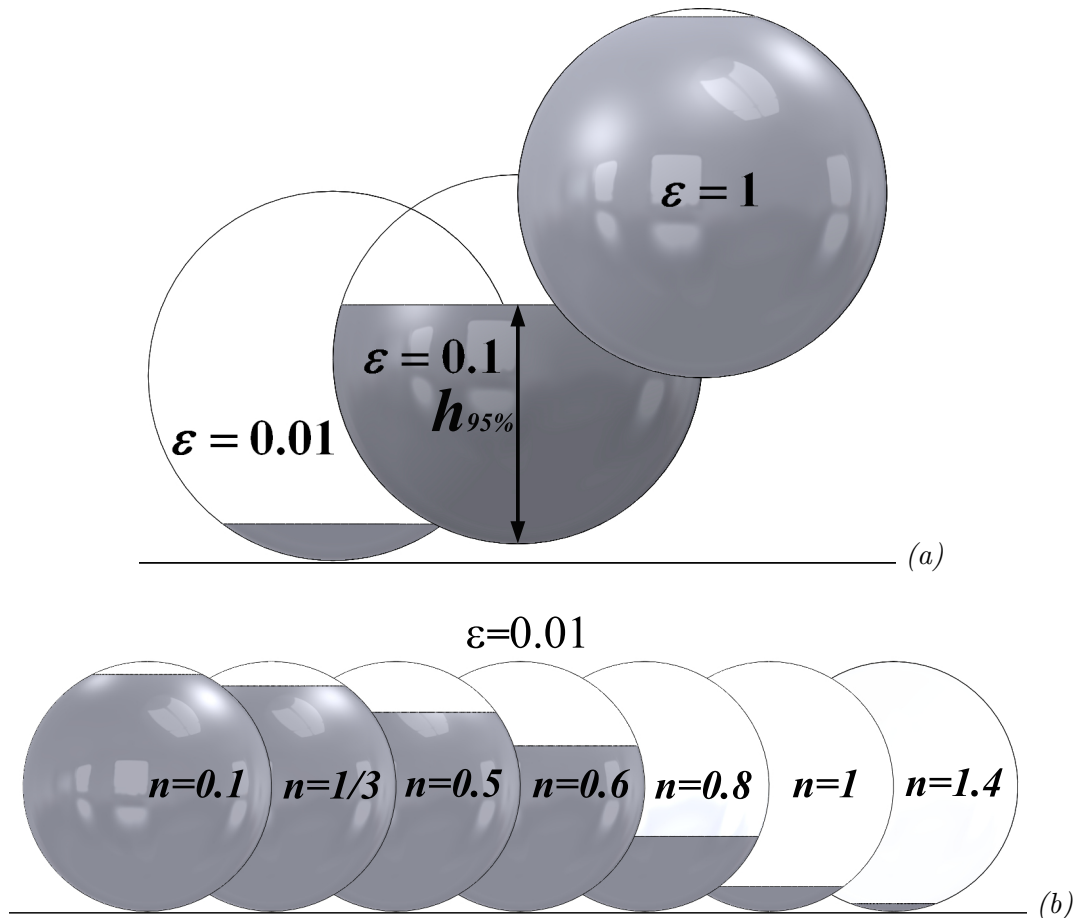


FIGURE 5.12 – La partie grisée correspond à la partie de la sphère sur laquelle s'exerce 95% de la force de traînée qu'elle subit lorsqu'elle se déplace vers un plan : (a) cas du fluide newtonien pour trois valeurs de la distance entre la sphère et le plan $\varepsilon = 0.01, 0.1, 1$; (b) cas du fluide en loi de puissance pour une distance entre la sphère et le plan donnée $\varepsilon = 0.01$, et trois indices de fluidité $n = 0.8, 1, 1.4$ correspondant respectivement aux fluides pseudoplastique, newtonien et dilatant.

Pour montrer de quelle manière l'écoulement est affecté par l'indice de fluidité, nous avons tracé respectivement sur les figures 5.13a, 5.13b et 5.13c les lignes de courant dans le repère lié à la sphère pour différents indices de fluidité $n = 0.8$, $n = 1$ et $n = 1.4$. Elles montrent l'apparition d'une ligne de courant singulière de l'écoulement, ainsi qu'un changement d'aspect de l'écoulement dans le cas des fluides dilatants.

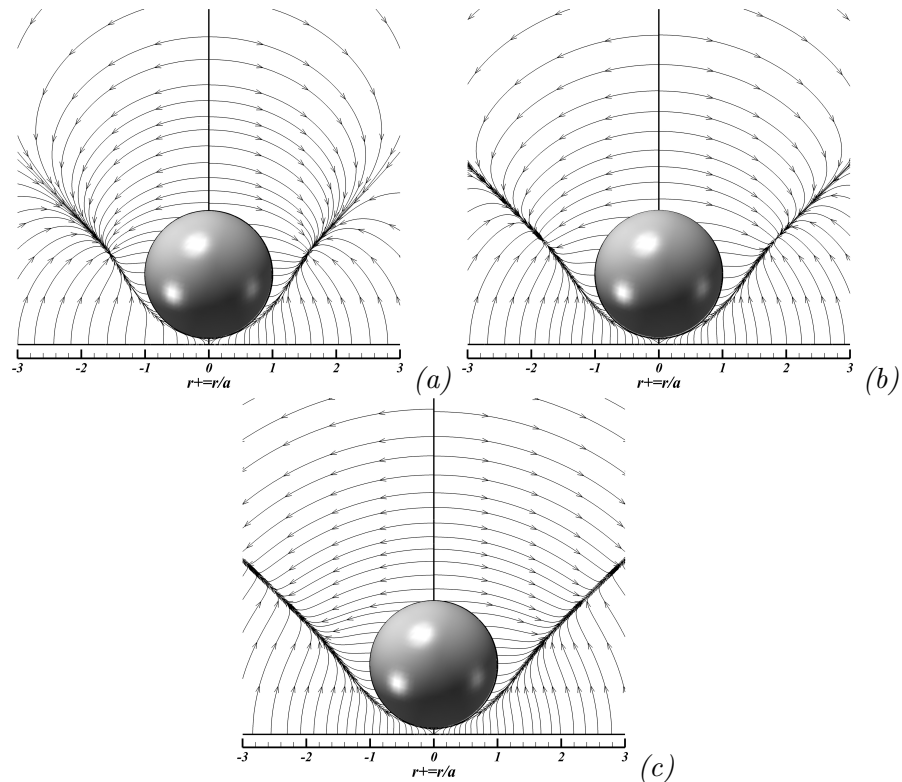


FIGURE 5.13 – Lignes de courant de l'écoulement dans le repère lié à la sphère pour différents indices de fluidité ($Re = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$) : (a) $n = 0.8$, (b) $n = 1$, (c) $n = 1.4$.

5.6 Conclusion

Comme on le rencontre dans le processus d'agrégation de particules au sein des dispersions ou lors de l'utilisation des machines à force de surface en nanorhéologie, avant le contact entre deux sphères ou entre une sphère et un plan, la force hydrodynamique diverge en régime de lubrification. La loi de puissance décrivant ce comportement a été déterminée numériquement et asymptotiquement en fluide newtonien et non newtonien, en milieu latéralement confiné ou non. La comparaison avec succès de ces résultats dans le cas newtonien avec ceux obtenus en l'absence de confinement latéral par Maude et Brenner confirme la validité de la méthode numérique, basée sur le maillage dynamique, employée pour la résolution de ce problème géométriquement instationnaire. Dans ces

conditions, nous avons d'abord étudié, toujours dans le cas newtonien, l'influence de l'inertie et du confinement latéral. L'exactitude des résultats obtenus à l'aide de cette méthode numérique nous ont ensuite encouragés à résoudre ce problème dans le cas d'un fluide non newtonien en loi de puissance, à faible nombre de Reynolds maintenu constant, et sous l'hypothèse d'une composante viscoélastique du fluide négligeable. Afin de corroborer ces résultats numériques, nous avons donné, en régime de lubrification, la loi d'évolution asymptotique de la divergence de la force de traînée et de la distribution de pression dans l'interstice entre la sphère et le plan. La confrontation avec succès de ces deux méthodes confirme réciproquement leur validité et l'exactitude des calculs. Ce nouveau résultat, qui à notre connaissance, est obtenu pour la première fois dans le cas non newtonien, peut trouver une application aussi bien dans l'étude de l'agrégation des particules au sein de dispersions, que dans les machines à force de surface pour la nanorhéologie.

Chapitre 6

Force hydrodynamique subie par un cylindre se déplaçant vers un plan dans un fluide en loi de puissance

6.1 Introduction

Le transport de fibres courtes constitue un enjeu majeur dans les procédés d'injection de matériaux composites renforcés [109]. Les propriétés rhéologiques de telles suspensions de particules cylindriques dépendent de leurs interactions hydrodynamiques qui contrôlent leur fonction de distribution d'orientation [110] et vice versa. Ce problème se complique dans le cas où le fluide support a un comportement non newtonien comme c'est le cas des polymères fondus. Parmi les difficultés rencontrées lors du transport de ces particules, nous pouvons citer l'agrégation de ces fibres conduisant à l'apparition d'amas rendant le matériau mécaniquement inhomogène. La dynamique de formation de ces amas est gérée par le temps de contact ou de séparation de deux particules cylindriques. Dans une première étape, nous allons étudier la situation la plus défavorable, c'est à dire l'interaction frontale entre une particule cylindrique et un plan en situation confinée ou non, en fluide newtonien et non newtonien. Rappelons que les interactions hydrodynamiques latérales ont été étudiées par Champmartin *et al.* [1], Ben Richou *et al.* [59, 111] et Despeyroux *et al.* [112]. Dans ces conditions, nous allons déterminer numériquement et asymptotiquement la force hydrodynamique subie par un cylindre, de rayon a , confiné entre deux plans distants de $2b$, et se déplaçant à la vitesse constante U vers un troisième plan rigide horizontal (voir figure 6.1). Aux faibles nombres de Reynolds, il faut rappeler que ce problème du cylindre a une solution de type Stokes (à cause du confinement) comme c'est le cas pour les particules très allongées (*slender body*) [22, 113]. En effet, Trahan *et al.* [113] ont montré qu'en régime de lubrification, les effets de bord sont négligeables et le modèle cylindrique se justifie bien dans ces conditions. A l'instar du problème précédemment traité au chapitre 5, ce problème

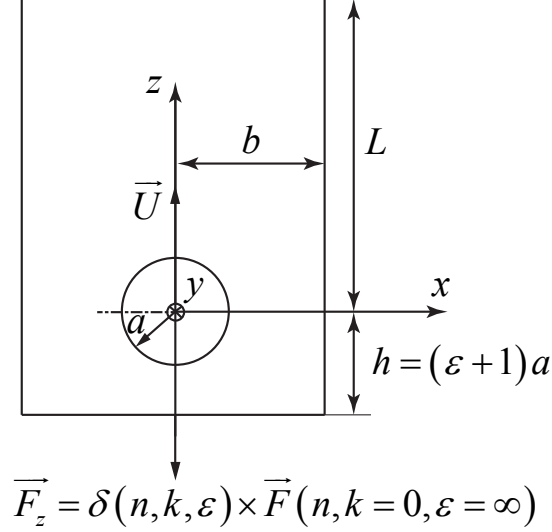


FIGURE 6.1 – Paramètres géométriques et dynamiques dans le cas d’un cylindre en translation dans le plan de symétrie vers le fond d’une cuve parallélépipédique très allongée.

est géométriquement instationnaire. Les effets dynamiques liés à cette instationnarité (forces de Basset et de masse ajoutée), ainsi que les effets de rebond, sont négligés dans les conditions où εRe est très petit par rapport à 1, comme justifié précédemment dans le cas de la sphère.

Utilisant les coordonnées bipolaires, Jeffrey et Onishi [34] avaient calculé analytiquement dans le cas newtonien le facteur de correction frontal de la force de type Stokes subie par le cylindre dans son mouvement vers le plan en situation non confinée latéralement. Ce facteur est donné par la relation suivante :

$$\delta(\varepsilon) = \frac{F}{4\pi\mu U} = \frac{1}{\ln\left(1 + \varepsilon + \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}\right) - \frac{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}}{1 + \varepsilon}} \quad (6.1)$$

où ε est l’épaisseur minimale de l’interstice se situant entre le cylindre et le plan, normalisée par le rayon du cylindre (voir figure 6.2). Afin de comparer cette formule avec nos résultats asymptotiques, nous donnons de cette expression un développement limité :

$$\delta(\varepsilon) = \frac{3}{2\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}} + \frac{63}{40\sqrt{2}\varepsilon^{1/2}} + \frac{747\varepsilon^{1/2}}{11200\sqrt{2}} - \frac{209\varepsilon^{3/2}}{32000\sqrt{2}} + \frac{1780491\varepsilon^{5/2}}{1379840000\sqrt{2}} + O\left(\varepsilon^{7/2}\right) \quad (6.2)$$

qui se réduit au premier ordre à :

$$\delta(\varepsilon) = \frac{3}{2\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}} \quad (6.3)$$

Cette divergence de la force est plus rapide que dans le cas de la sphère. Cette dernière formule n'est valable que pour $\varepsilon < 0.1$. Pour valider nos calculs numériques, nous les vérifierons à l'aide de cette solution exacte. Nous enrichirons ces résultats par l'étude de l'influence du confinement latéral dans le cas newtonien. Cependant, l'essentiel de notre travail consistera à étudier ce problème dans le cas où le fluide porteur est non newtonien, du type rhéofluidifiant ou rhéoépaississant (voir chapitre 5.1). Les raisons pour lesquelles nous n'avons pas tenu compte de l'élasticité éventuelle du fluide restent les mêmes que celles discutées précédemment. Nous révéifierons l'effet de troncature du modèle d'Ostwald et nous donnerons une comparaison de nos résultats numériques (obtenus par la méthode de maillage dynamique) avec ceux obtenus par un développement asymptotique, en régime de lubrification, que nous avons effectué dans le cadre de ce travail en situation non confinée latéralement. Le confinement latéral est ensuite étudié.

6.2 Formulation et approche numérique

Pour calculer numériquement le coefficient de correction de la force frontale $\delta(n, k, \varepsilon)$ subie par un cylindre se déplaçant dans le plan de symétrie entre deux plans parallèles d'une cuve (distants de $2b$) vers le fond plat de cette cuve parallélépipédique très allongée dans la direction de l'axe du cylindre parallèle au fond (voir figure 6.1). Le confinement latéral est défini par $k = a/b$. Le déplacement du cylindre s'effectuant à vitesse constante $\mathbf{u}_z = -U\mathbf{e}_z$, comme présenté schématiquement sur la figure 6.1. Cette cuve est remplie avec un fluide newtonien ou non newtonien. Pour simplifier, nous considérons la configuration équivalente où le cylindre est maintenu fixe et le contenant se déplace à la vitesse $+U\mathbf{e}_z$. L'écoulement est alors régi par les mêmes équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans des conditions isothermes, avec les mêmes conditions aux limites et la même loi de comportement d'Ostwald décrits précédemment dans le chapitre 5. Aux faibles nombres de Reynolds généralisés $Re_n = \rho U^{2-n} (2a)^n / m$, le coefficient de correction frontal et latéral $\delta(n, k, \varepsilon)$ de la force hydrodynamique subie par le cylindre en translation vers le fond de la cuve est donné par l'expression suivante, qui peut être obtenue par une analyse dimensionnelle :

$$\delta(n, k, \varepsilon) = \frac{F(n, k, \varepsilon)}{4\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} U} \quad (6.4)$$

où $k = a/b$ et $\varepsilon = d/a$ sont successivement les facteurs de confinement latéral et frontal. Pour obtenir la solution de ce problème géométriquement instationnaire dans les conditions hydrodynamiques quasi-stationnaires à nombre de Reynolds généralisé fixe, nous avons utilisé la même méthode de type volumes finis employant le maillage dynamique que celle décrite au chapitre 5.2. L'épaisseur minimale de l'interstice atteinte est de $10^{-3}a$ (voir figure 5.2). La distance entre le cylindre et le haut de la cuve L est prise égale à $60a$ pour éviter l'influence du haut de la cuve. La convergence à chaque pas de temps l est vérifiée suivant le critère :

$$\left| 1 - \delta^l(n, k, \varepsilon) / \delta^{l+1}(n, k, \varepsilon) \right| < 10^{-6} \quad (6.5)$$

La justification de l'utilisation du modèle d'Ostwald reste la même que celle décrite précédemment dans le cas de la sphère.

6.3 Méthode asymptotique

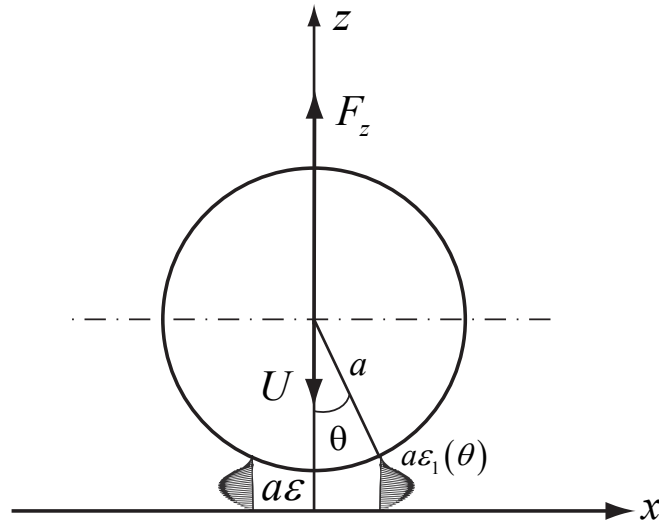


FIGURE 6.2 – Champ de vitesse de type Poiseuille dans l'interstice entre le cylindre et le plan lorsque le cylindre est au voisinage de ce dernier.

En régime de lubrification, $\varepsilon \ll 1$ et pour les très faibles nombres de Reynolds, quand le cylindre se déplace vers le plan en milieu latéralement non confiné (voir figure 6.2), la traînée qu'il subit est principalement contrôlée par le processus de drainage du film liquide situé dans l'interstice restant entre le cylindre et le plan. Dans ce cas, le calcul de cette force peut être effectué à partir de la force de pression induite par l'écoulement éjecté latéralement. Ce drainage qui prend place dans l'interstice pour un fluide en loi de puissance se réduit aussi dans ce cas à un écoulement de type Poiseuille généralisé, comme observé sur la figure 6.2 où $a\varepsilon_1(\theta) = a\varepsilon + a(1 - \cos\theta)$ et $a\varepsilon$ sont les distances entre le cylindre et le plan. Par intégration des équations du mouvement en régime de lubrification, il est aussi possible d'obtenir, dans cet interstice, la distribution latérale de pression :

$$\frac{p(x_+) - p_\infty}{m \left(\frac{U}{2a}\right)^n} = 2^n \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \frac{2^{2+3n}}{1+3n} \frac{1}{x_+^{1+3n}} \times {}_2F_1\left(1+2n, \frac{1}{2}(1+3n); \frac{3}{2}(1+n); -2\frac{\varepsilon}{x_+^2}\right) \quad (6.6)$$

où p_∞ est la pression loin de l'interstice, $x_+ = x/a$ est la distance latérale normalisée comptée à partir du point de stagnation de l'écoulement et ${}_2F_1$ est la fonction hypergéométrique de Gauss. Pour $n = 1$, correspondant au fluide newtonien, cette expression se réduit à :

$$\frac{p(x_+) - p_\infty}{\mu \left(\frac{U}{2a}\right)} = \frac{12}{\left[\varepsilon + \frac{1}{2}x_+^2\right]^2} \quad (6.7)$$

Il est à remarquer que, dans tous les cas, la relation (6.6) correspondant au cas du cylindre ne diffère de celle obtenue dans le cas de la sphère que d'un facteur multiplicatif 2^n . Dans ces conditions, le facteur de correction de la traînée $\delta(n, k = 0, \varepsilon)$ subie par le cylindre dans un milieu latéralement non confiné peut être calculé par l'intégration de la pression donnée par la formule (6.6) et appliquée sur la surface frontale du cylindre en régime de lubrification :

$$\delta(n, k = 0, \varepsilon) = \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{4\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} U} = \frac{2^{\frac{(5n-2)}{2}}}{\pi} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)}{\Gamma(1+2n)} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n}{2}}} \quad (6.8)$$

Cette dernière expression est équivalente à celle donnée par Rodin [99] dans le cas du mouvement d'approche mutuelle de deux cylindres parallèles quasiment en contact :

$$\delta_{Rodin}(n, k = 0, \varepsilon) = \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{4\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} U} = \frac{2^{\frac{(5n-2)}{2}}}{\pi} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \beta\left(\frac{2+n}{2}, \frac{3n}{2}\right) \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n}{2}}} \quad (6.9)$$

où $\beta\left(\frac{2+n}{2}, \frac{3n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)}{\Gamma(1+2n)}$ [107].

Il faut signaler le fait remarquable que cette formule est mathématiquement valable pour tout n et que celle-ci se réduit à la formule classique dans le cas newtonien :

$$\delta(n = 1, k = 0, \varepsilon) = 2^{-3/2} 3\varepsilon^{-3/2} \quad (6.10)$$

6.4 Résultats et discussion

Dans le cas newtonien, nous donnerons, dans le cas d'un confinement latéral négligeable, une comparaison entre nos résultats asymptotiques et numériques afin de les valider. A cette occasion, l'effet du confinement latéral est étudié. Nous appliquerons ensuite ces deux techniques pour le calcul du facteur de correction dans le cas d'un fluide de type Ostwald en fonction de l'indice de fluidité et du confinement latéral.

6.4.1 Fluide newtonien

Sur la figure 6.3, nous avons donné une comparaison entre nos résultats numériques obtenus dans le cas d'un confinement latéral $k = 10^{-2}$ avec la solution exacte obtenue par Jeffrey [34]. La concordance parfaite de ces résultats pour $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10$ confirme la validité de la méthode du maillage dynamique.

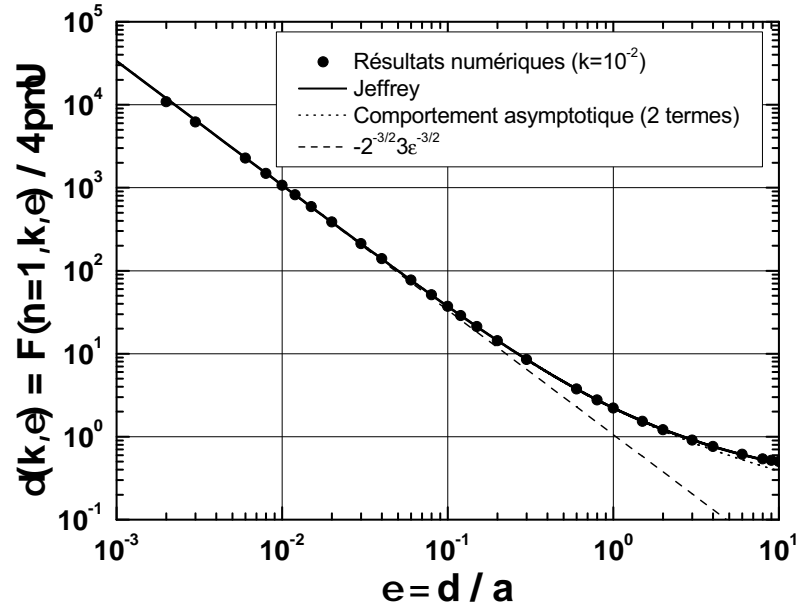


FIGURE 6.3 – Comportements asymptotiques de la force de traînée subie par un cylindre approchant un plan en milieu infini dans un fluide newtonien et comparaison avec les résultats numériques ($k = 10^{-2}$).

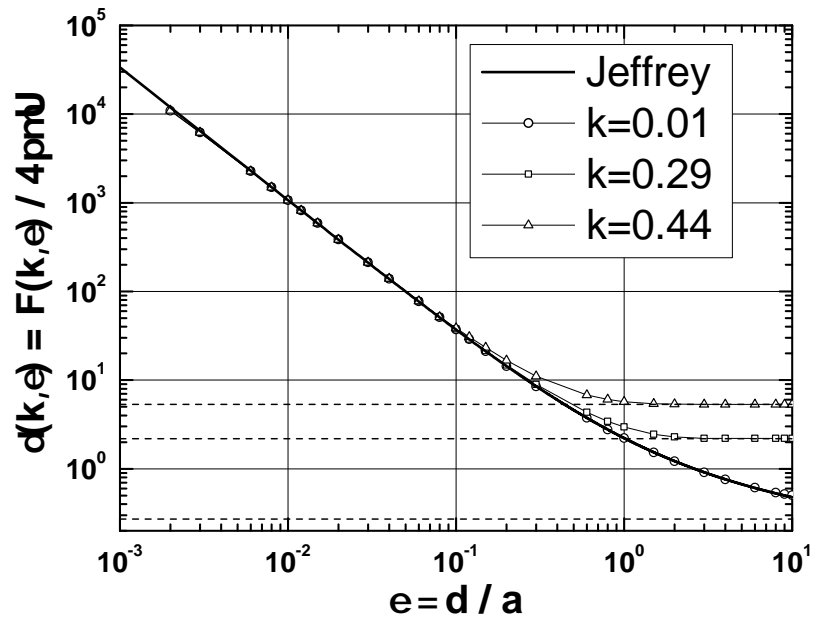


FIGURE 6.4 – Effet du confinement latéral sur le coefficient de correction frontal de la traînée subie par un cylindre se déplaçant vers le fond d'un conteneur rempli d'un fluide newtonien. Les lignes discontinues correspondent à la valeur du plateau $\lambda(k)$.

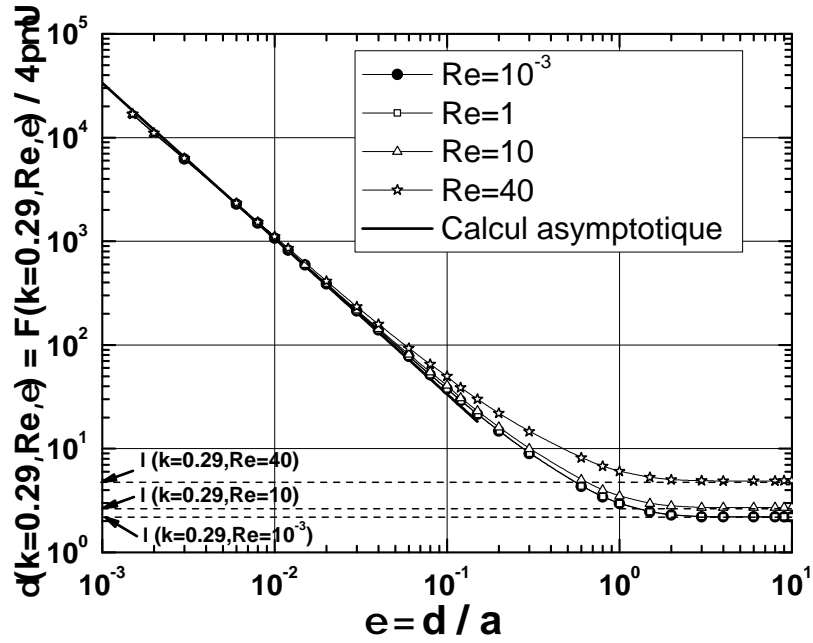


FIGURE 6.5 – Influence de l’inertie sur la force de traînée subie par un cylindre se déplaçant vers un plan ($k = 0.29$) pour $Re = 10^{-3}$, 1, 10 et 40.

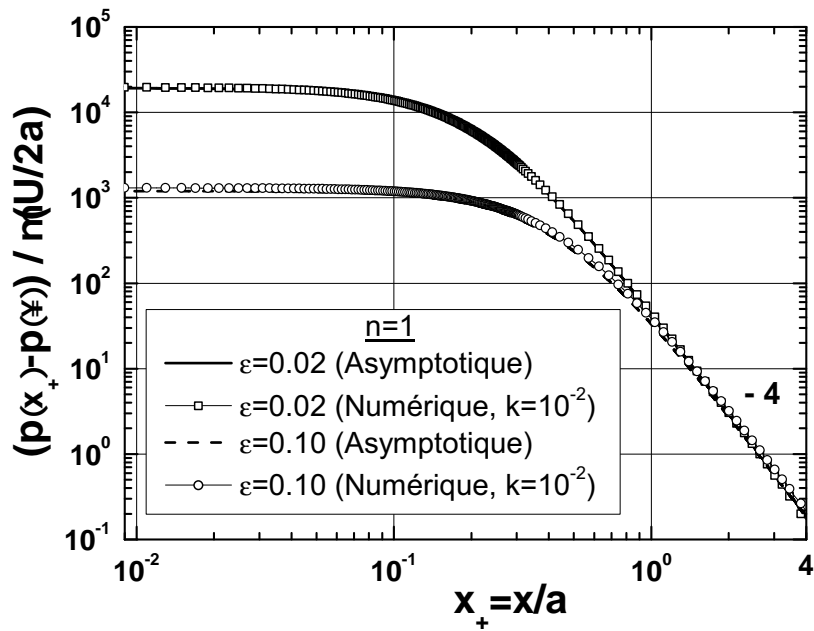


FIGURE 6.6 – Comparaison de la distribution de pression latérale dans l’interstice entre le cylindre et le plan en régime de lubrification, calculée numériquement (points) et asymptotiquement [lignes correspondant à la formule (6.7)], en fluide newtonien.

Le comportement asymptotique est bien décrit par le premier ordre du développement pour $\varepsilon < 10^{-1}$ alors qu'à l'ordre 2, la force est bien décrite pour $\varepsilon < 20$. Cependant, comme les fibres en sédimentation sont souvent placées dans une situation de confinement frontal et latéral induit par la présence des fibres voisines, nous avons étudié l'effet du confinement latéral pour $k = 0.01$, $k = 0.29$ et $k = 0.44$ à $Re = 10^{-3}$ (voir figure 6.4). Ces résultats montrent que, lorsque le confinement latéral est faible, son effet ne se fait sentir que lorsque le cylindre est beaucoup plus loin du plan. Pour $k = 10^{-2}$, l'effet du confinement latéral est négligeable pour $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10$. Autrement, dans tous les cas, lorsque l'on est en régime de lubrification, l'effet du confinement latéral devient négligeable. Les valeurs limites de $\delta(k, \varepsilon)$ atteintes loin du plan (plateau) sont en très bon accord avec celles calculées par Ben Richou *et al.* [111]. Profitant de la précision de cette méthode numérique, nous donnons sur la figure 6.5 les résultats concernant l'influence de l'inertie sur le facteur de correction frontal dans le cas d'un confinement $k = 0.29$ pour différents nombres de Reynolds $Re = 10^{-3}$, 1, 10 et 40. Comme le confinement latéral réduit l'effet de l'inertie, nous constatons que les résultats obtenus pour $Re = 10^{-3}$ et 1 sont parfaitement identiques pour $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10$. Pour $Re = 10$ et 40, l'influence de l'inertie due au confinement latéral ne se fait sentir que loin du plan, confirmant que l'effet de l'inertie frontale est bien contrôlée par εRe , qui reste très faible dans notre cas. En ce qui concerne le rebond du cylindre, dans le cas de la sédimentation libre, celui-ci est géré par la même physique que dans le cas de la sphère. Enfin, sur la figure 6.6, la comparaison avec succès de la distribution latérale de la pression dans le cas newtonien pour deux confinements $\varepsilon = 0.02$ et 0.1, obtenue numériquement et asymptotiquement, corrobore la validité mutuelle des calculs.

6.5 Fluide non newtonien

Sur les figures 6.7, 6.8a and 6.8b, nous montrons l'influence de l'indice de fluidité sur le facteur de correction $\delta(n, k, \varepsilon)$ pour des confinements $k = 0.01$, $k = 0.29$ et $k = 0.44$. Pour chacun de ces confinements latéraux, le facteur de correction frontal correspond à la traînée subie par le cylindre, à la distance εa du plan, normalisée par la force caractéristique donnée par la relation suivante : $F_c = 4\pi m (U/2a)^{n-1} U$. En effet, comme nous l'avons vu précédemment au chapitre 2, dû à la présence du paradoxe de Stokes pour $n \geq 1$, la force subie par le cylindre est nulle en régime de Stokes en milieu infini. Sur ces figures, nous observons un très bon accord entre les résultats numériques, pour tous les confinements, et ceux obtenus par l'approche asymptotique donnés par les équations (6.9) et (6.8) pour tout n . En fait, l'influence du confinement latéral reste toujours faible en comparaison avec le confinement frontal en régime de lubrification, et ne dépend que de l'indice de fluidité du fluide [équations (6.9) et (6.8)], comme le montrent les figures 6.9a dans le cas des fluides rhéofluidifiants ($n = 0.8$) et 6.9b dans le cas des fluides dilatants ($n = 1.4$). Par ailleurs, les figures 6.7, 6.8a, 6.8b montrent que l'accroissement du facteur de correction frontal quand le cylindre s'approche du plan est d'autant plus réduit que le fluide est rhéofluidifiant. Dans ces conditions, on comprend mieux que l'agrégation des fibres en suspension dans un fluide rhéofluidifiant soit

plus facile que dans le cas newtonien. Finalement, comme discuté précédemment dans la section 6.2, pour confirmer l'absence des effets d'une troncature, à faible et grand gradient de vitesse, introduite par l'apparition des deux plateaux newtoniens comme dans le modèle de Carreau-Yasuda [44], nous avons calculé numériquement ce même facteur de correction avec le modèle d'Ostwald tronqué, dans lequel la viscosité apparente varie sur trois décades (comme rencontré dans les expériences). Le bon accord de ces résultats, donnés sur la figure 6.7, obtenus avec ce modèle tronqué et ceux obtenus par le modèle complet, justifie l'utilisation de ce dernier.

Concernant la distribution latérale de pression dans l'interstice, nous avons comparé avec succès sur les figures 6.10a et 6.10b, à $Re_n = 10^{-3}$ et à $k = 10^{-2}$, nos résultats numériques avec ceux donnés par la formule asymptotique (6.6), respectivement pour les fluides pseudoplastiques ($n = 0.8$) et dilatants ($n = 1.4$), chacun pour deux confinements frontaux. Ce bon accord confirme encore la validité des résultats numériques et asymptotiques. Notez à l'occasion la décroissance en loi de puissance $(p(x_+) - p_\infty) \propto x_+^{-(1+3n)}$ identique à celle donnée par la formule (6.6).

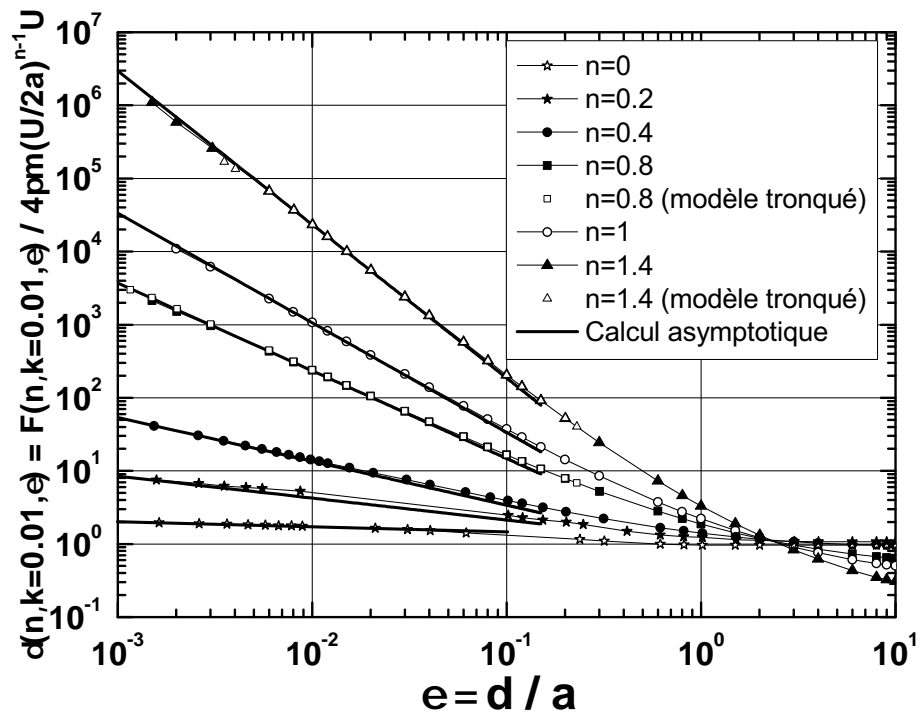


FIGURE 6.7 – Evolution de la force hydrodynamique subie par un cylindre approchant un plan en milieu presque illimité, en fluide non newtonien. Comparaison entre les résultats numériques (points) et asymptotiques (lignes).

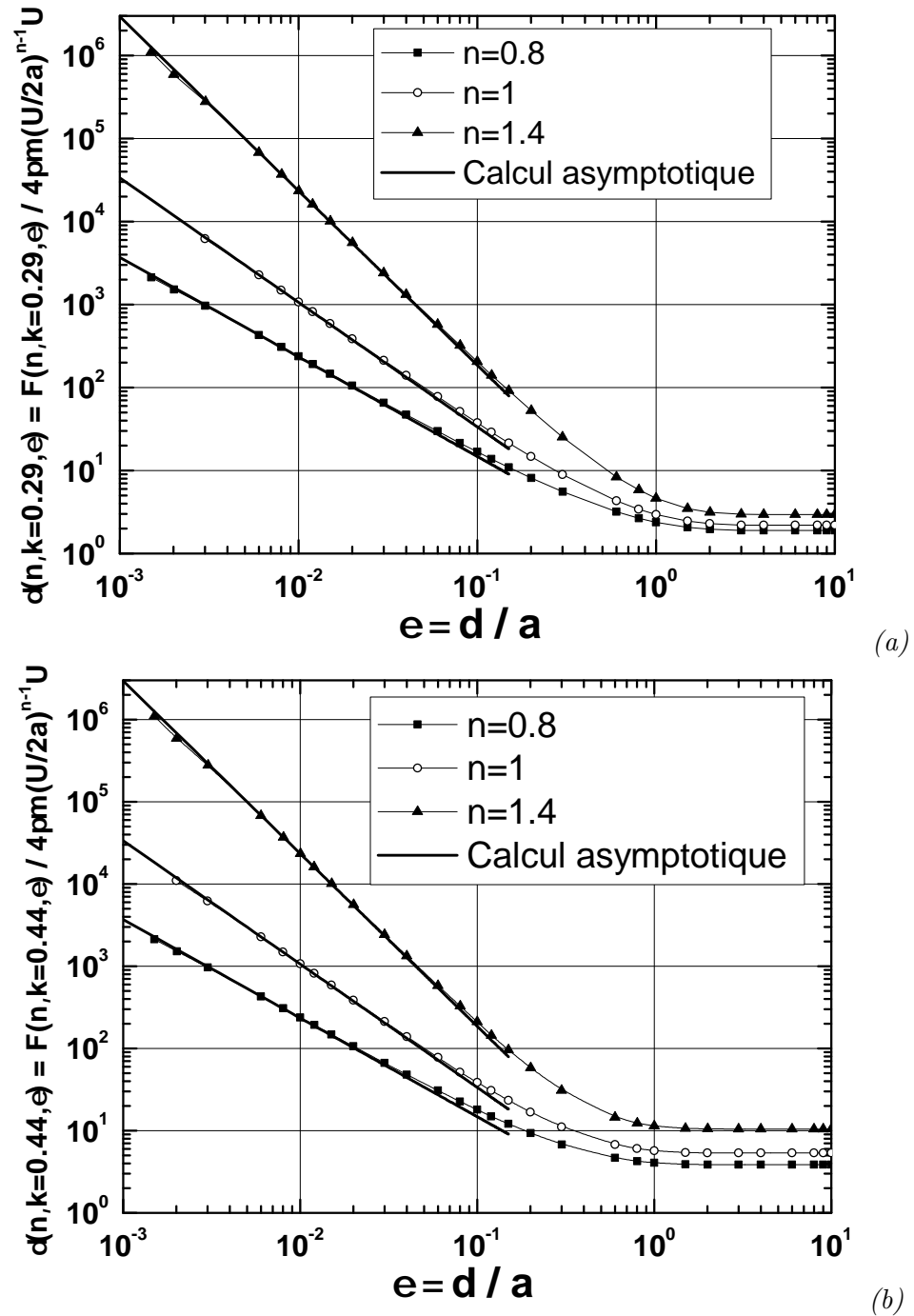
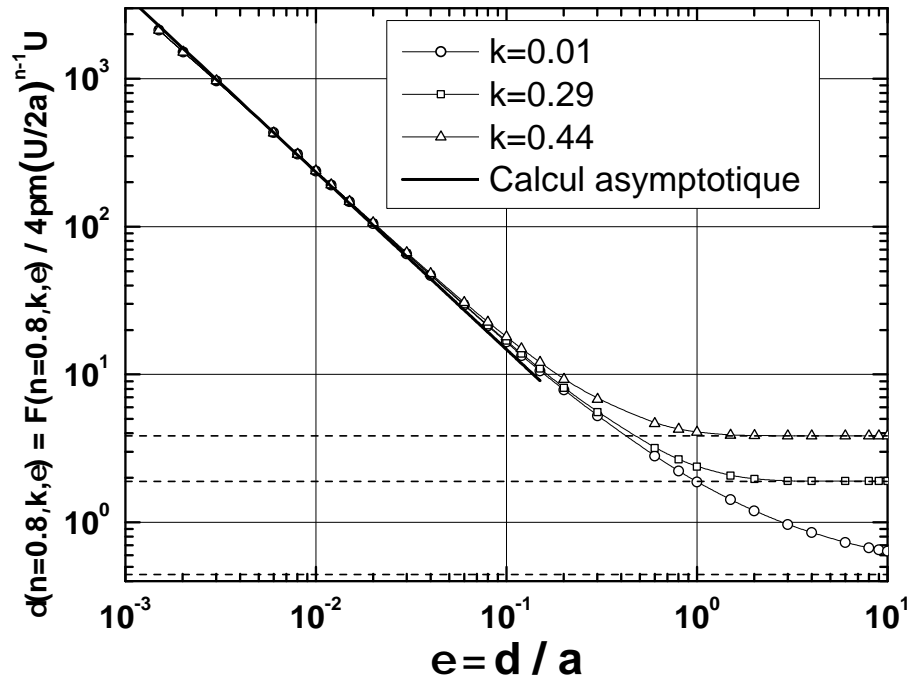
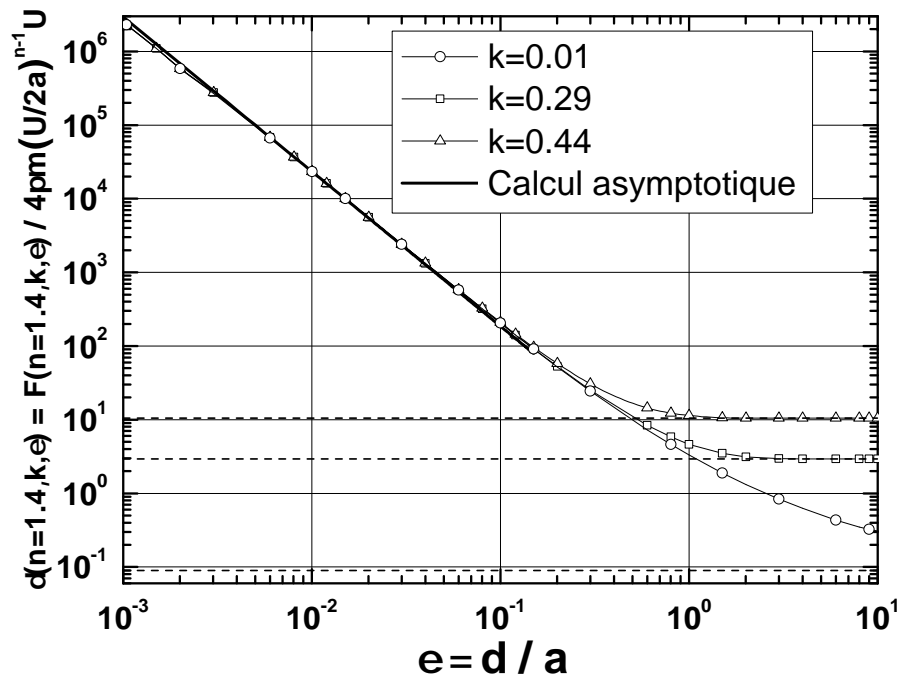


FIGURE 6.8 – Influence de l'indice de fluidité sur la force de traînée subie par un cylindre approchant le fond plat d'un conteneur rempli d'un fluide en loi de puissance, et comparaison entre les résultats numériques (points) et asymptotiques (lignes) : (a) $k = 0.29$, (b) $k = 0.44$.



(a)



(b)

FIGURE 6.9 – Absence de l’influence du confinement latéral sur la force de traînée subie par un cylindre dans un fluide en loi de puissance, en régime de lubrification, pour deux indices de fluidité : (a) $n = 0.8$, (b) $n = 1.4$.

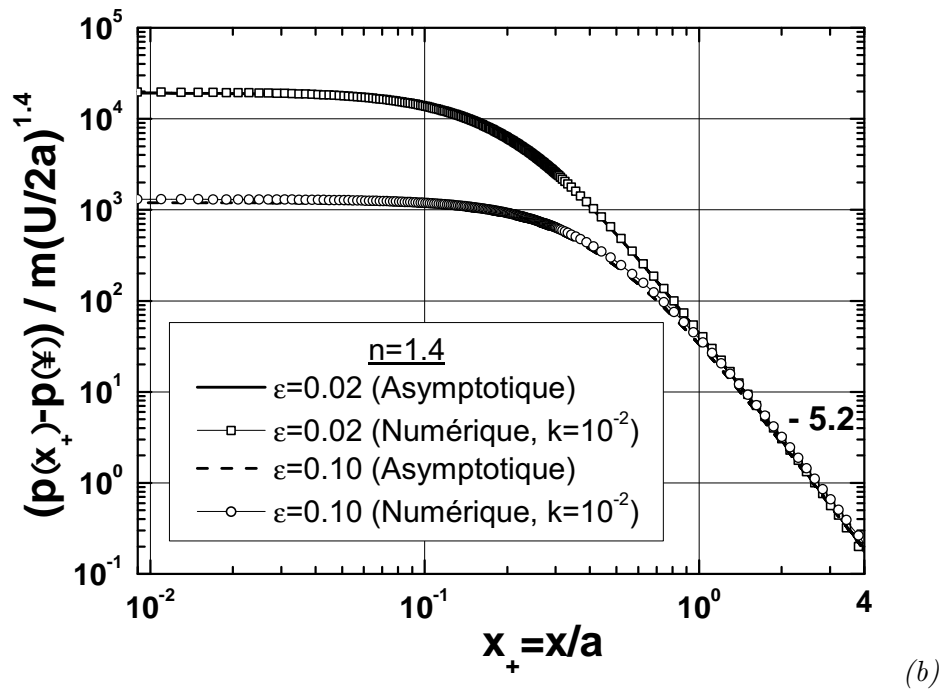
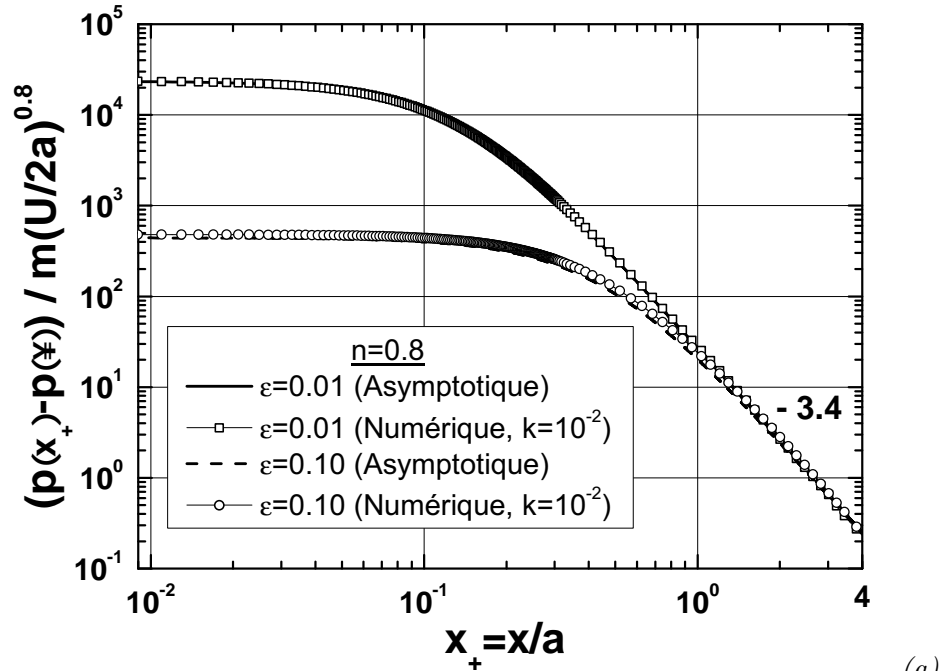


FIGURE 6.10 – Comparaison des distributions de pression numériques et asymptotiques dans l'interstice entre le cylindre et le plan, pour $Re_n = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $k = 10^{-2}$ et différents indices de fluidité : (a) $n = 0.8$ et (b) $n = 1.4$.

Concernant la distribution en volume de la pression dans l'interstice, la figure 6.11 montre que les plus grandes pressions atteintes dans cette zone se situent dans la ligne de plus petite distance entre le cylindre et le plan, quel que soit l'indice de fluidité, le maximum absolu étant atteint au point de stagnation sur le cylindre et sur le plan. Quant au minimum de pression, celui-ci est atteint au point selle situé au milieu du plus petit interstice, dans ce plan de symétrie. Il est à remarquer aussi que pour le même nombre de Reynolds généralisé $Re_n = 10^{-3}$, la pression réduite dans les fluides dilatants est plus grande que dans les fluides pseudoplastiques.

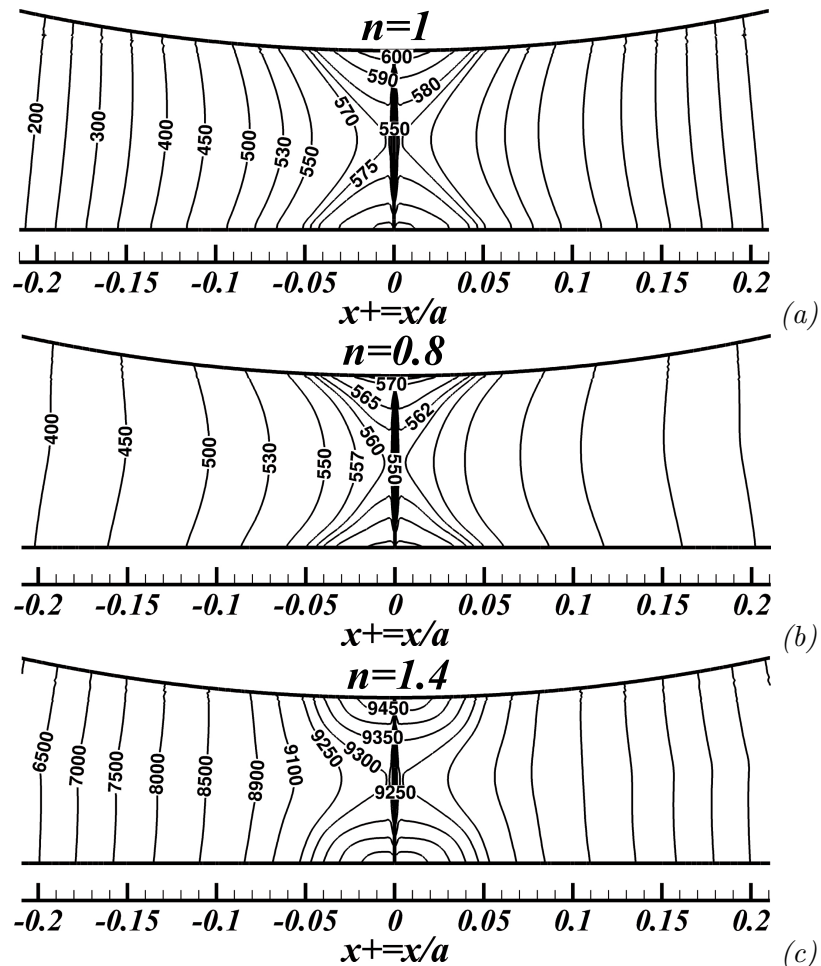


FIGURE 6.11 – Distribution en volume de la pression réduite $(p(x_+) - p_\infty) / m(U/2a)^n$ dans l'interstice entre le cylindre et le plan montrant l'apparition d'un point selle dans l'axe pour $Re = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $k = 10^{-2}$: (a) $n = 1$, (b) $n = 0.8$, (c) $n = 1.4$.

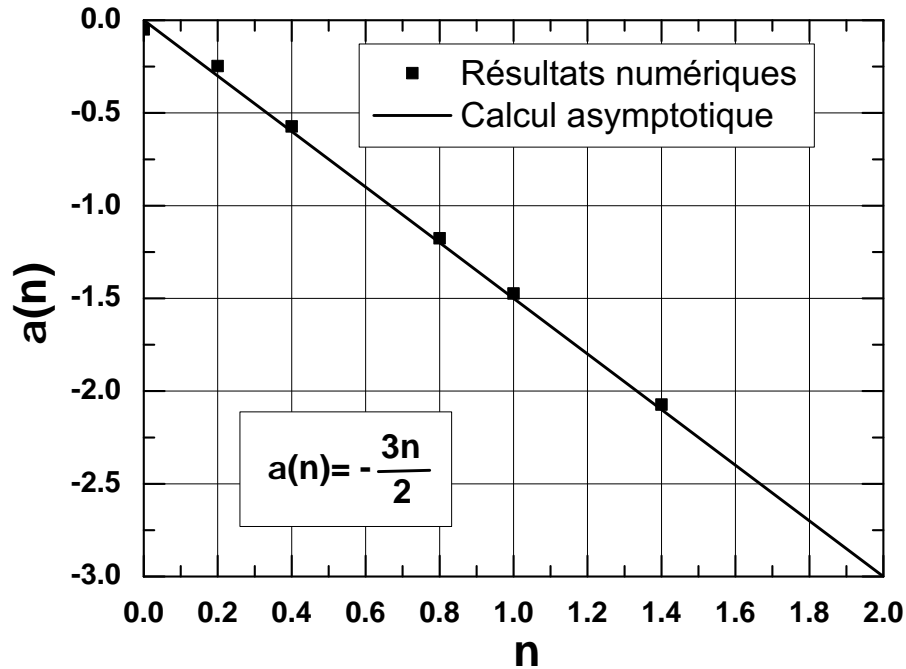


FIGURE 6.12 – Comparaison des exposants $\alpha(n)$ du comportement en loi de puissance de la force de traînée en régime de lubrification obtenus numériquement (points) et asymptotiquement (ligne).

Par ailleurs, sur la figure 6.12, nous donnons une comparaison entre les exposants de la loi de puissance décrivant la divergence de la traînée $F(n, \varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha(n)}$ calculés asymptotiquement $\alpha(n) = -3n/2$ et ceux déduits des résultats numériques donnés sur la figure 6.7. Cette comparaison confirme que les expressions asymptotiques (6.9) et (6.8) donnent de bons résultats pour tout n comme discuté précédemment, contrairement au cas de la sphère qui était limité à $n > 0.5$.

Pour vérifier les conditions de validité du calcul asymptotique, nous avons procédé à la détermination de la hauteur du domaine du cylindre qui contribue à 95% de la force subie par celui-ci. Dans le cas newtonien, la figure 6.13a confirme que pour les confinements frontaux faibles, en régime de lubrification, cette hauteur est effectivement très réduite. Ceci vérifie que la forme de la particule en dehors de cette zone n'a aucune influence sur cette force comme dans le cas des cylindres elliptiques. En effet, c'est le rayon de courbure du cercle osculateur en contact du plan qui est le paramètre pertinent. Cependant, dans le cas non newtonien, la figure 6.13b montre que dans le cas des fluides dilatants, cette zone est encore beaucoup plus réduite que dans le cas des fluides newtoniens, ce qui confirme la validité du modèle asymptotique pour $n > 1$. Cependant, contrairement à la sphère, dans le cas pseudoplastique, le domaine intervenant dans le calcul de la force reste suffisamment faible quand n diminue. Ceci explique la validité du modèle asymptotique pour les faibles valeurs de n et la non nécessité de pousser les développements asymptotiques à des ordres beaucoup plus élevés. Enfin, nous avons

vérifié numériquement que la hauteur de ce domaine, pour laquelle 95% de la force est atteinte, varie linéairement avec la distance entre le cylindre et le plan pour les très faibles valeurs de εa .

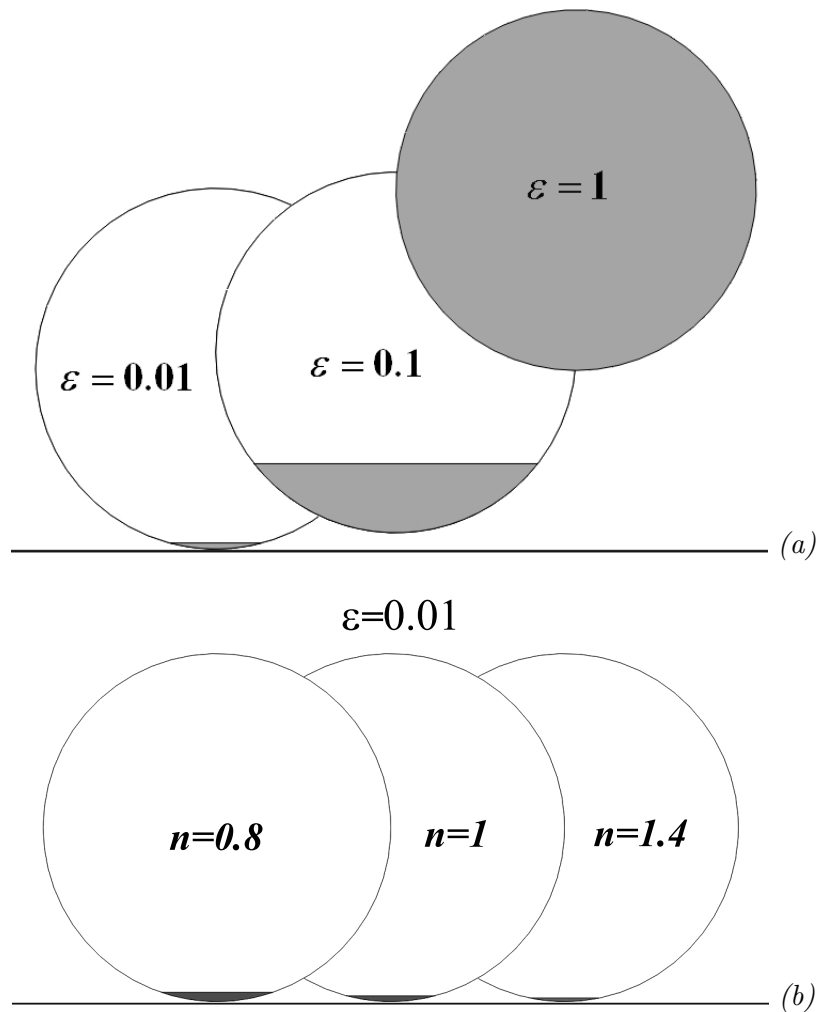


FIGURE 6.13 – La partie sombre correspond à la partie du cylindre sur laquelle s'exerce 95% de la force hydrodynamique qu'il subit lors de son approche du plan : (a) concerne le fluide newtonien pour trois valeurs de la distance entre le cylindre et le plan $\varepsilon = 0.01, 0.1, 1$; (b) concerne le fluide d'Ostwald pour une distance entre le cylindre et le plan donnée $\varepsilon = 0.01$, et trois indices de fluidité $n = 0.8, 1, 1.4$ correspondant respectivement aux fluides pseudoplastique, newtonien et dilatant.

6.6 Conclusion

Afin d'analyser le processus d'agrégation des fibres au sein d'une dispersion en sédimentation ou dans les processus d'injection de matériaux composites, nous avons

procédé à l'étude de la divergence de la force subie par un cylindre en sédimentation vers un plan en régime latéralement confiné ou non. Ce comportement a été étudié numériquement et asymptotiquement en fluide newtonien et non newtonien. La comparaison avec succès de ces deux types de résultats dans le cas newtonien et non newtonien, en l'absence de confinement latéral, a confirmé la validité des deux méthodes utilisées. Ce nouveau résultat peut trouver une application aussi bien dans l'étude de l'agrégation des fibres au sein des dispersions, que dans les machines à force de surface pour la nanorhéologie. La validation de la méthode numérique, basée sur le maillage dynamique, employée pour la résolution de ce problème géométriquement instationnaire, devra dans le futur nous permettre de résoudre beaucoup de problèmes de ce type dans le domaine des suspensions.

Conclusion générale

Ce travail, consacré à l'étude des effets des interactions hydrodynamiques sur le mouvement et le transport des particules sphériques et cylindriques dans les fluides newtoniens et non newtoniens, a abouti à des résultats importants pour la physique des suspensions en fluide non newtonien. Le choix du modèle non newtonien a été porté sur celui d'Ostwald qui met en jeu un seul paramètre, et qui décrit bien les effets de rhéofluidification et de rhéoépaississement qui caractérisent la plupart des fluides non newtoniens. Dans une première approche, nous avons montré qu'aux faibles nombres de Reynolds, il est possible d'ignorer la viscoélasticité de certains fluides ayant des temps de relaxation faibles à cause des gradients de vitesse élongationnels faibles intervenant dans ce type de problème. A chaque étape, nous avons justifié l'utilisation de ce modèle simple par rapport à ceux faisant intervenir des plateaux newtoniens comme celui de Carreau-Yasuda [44]. Le premier résultat important a été de montrer que le comportement de ces suspensions dépend fortement de l'indice de fluidité du fluide porteur. Celui-ci affecte la longueur d'écran hydrodynamique autour de chacune des particules sphériques ou cylindriques, rendant les interactions hydrodynamiques soit très faibles dans le cas où l'indice de fluidité $n < n_{cr}$, ou très fortes dans le cas où $n \geq n_{cr}$. La valeur de n_{cr} dépend de la dimensionnalité de la particule, $n_{cr} = 2$ pour une sphère (3D) et $n_{cr} = 1$ pour un cylindre (2D). Ce résultat nous a permis de donner les bonnes valeurs de la force hydrodynamique subie par une particule en milieu infini, et de montrer à l'occasion l'apparition du paradoxe de Whitehead dans le cas de la sphère à partir de $n = 2$ et de Stokes dans le cas du cylindre à partir de $n = 1$, et de montrer que, dans ces conditions, la force se réduit à zéro. Lorsque n est voisin de ces valeurs critiques, nous avons montré que la détermination des forces hydrodynamiques devient très sensible à l'inertie, comme dans le cas bien connu du cylindre en fluide newtonien. Le deuxième résultat important pour l'industrie de l'injection des matériaux composites, a été de montrer par une méthode inverse que les interactions hydrodynamiques pouvaient induire un retard plus ou moins important par rapport au cas newtonien dans le transport de particules. Ce résultat remet en cause l'hypothèse, communément utilisée dans les codes de calcul, selon laquelle les particules sont transportées à la vitesse du fluide non perturbé. L'exactitude de ces résultats a été prouvée par les résultats obtenus analytiquement en régime asymptotique. Ces résultats nous ont aussi permis de montrer que la vitesse de sédimentation de différentes particules de diamètres différents dans un tube de diamètre fixe évolue de façon non monotone en fonction du diamètre de ces particules. En effet, ce curieux comportement est dû aux effets antagonistes entre

l'augmentation du poids des particules en fonction de leur rayon au cube et l'accroissement de la résistance hydrodynamique induite par les parois latérales (backflow) qui augmente de façon progressive. Le troisième résultat important pour l'analyse des processus d'agrégation de particules sphériques ou cylindriques a été obtenu avec succès dans le cas d'une particule sphérique ou cylindrique en sédimentation vers un plan fixe. En effet, un calcul asymptotique dans le cas non newtonien en régime de lubrification, comparé avec succès à celui obtenu numériquement par la méthode de maillage dynamique, nous a permis d'obtenir les lois d'évolution de la force subie par ces particules entrant en contact avec un plan, et par conséquent, le temps de contact ou de séparation de ces particules lors de leur agrégation. Ces derniers résultats trouvent une application dans l'utilisation des machines dynamiques à force de surface dans le cadre de la nanorhéologie. La validation de la méthode de maillage dynamique, applicable aux problèmes instationnaires géométriquement, devrait dorénavant nous permettre de résoudre quelques problèmes dans le cadre des suspensions. En attendant, nous tenons à signaler que des problèmes liés au transfert de chaleur et de masse dans ce genre de situation, ainsi que ceux concernant les bulles ou les gouttes dans l'approximation d'Hadamard ont été résolus par les méthodes asymptotiques que nous avons utilisées. D'autres résultats sur l'effet du backflow en situation excentrée confinée ont été obtenus.

Bibliographie

- [1] S. Champmartin and A. Ambari. Kinematics of a symmetrically confined cylindrical particle in a "Stokes-type" regime. *Phys. of Fluids*, 19 :073303–1–073303–11, 2007.
- [2] A. Ambari, B. Gauthier-Manuel, and E. Guyon. Direct measurement of tube wall effect on the Stokes force. *Phys. of Fluids*, 28 :1559–1561, 1985.
- [3] M. E. O'Neill. A slow motion of viscous liquid caused by a slowly moving solid sphere. *Mathematika*, 121 :67–74, 1964.
- [4] H. Faxén. *Einwirkung der Gefäßwände auf den Widerstand gegen die Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit*. PhD thesis, Uppsala University, 1921.
- [5] J. C. Slattery. *Non-Newtonian flow about a sphere*. PhD thesis, University of Wisconsin, Madison, WI, 1959.
- [6] D. D. Dallon. *A drag coefficient correlation for spheres settling in Ellis fluids*. PhD thesis, University of Utah, Salt Lake City, 1967.
- [7] H. Kato, M. Tachibana, and K. Oikawa. On the drag of a sphere in polymer solutions. *Bull. JSME*, 15 :1556–1567, 1972.
- [8] N. Yoshioka and K. Adachi. Some deductions from the extremum principles for non-Newtonian fluids. *J. Chem. Eng. Jpn.*, 6 :134–140, 1973.
- [9] P. A. Reynolds and T. E. R. Jones. An experimental study of the settling velocities of single particles in non-Newtonian fluids. *Int. J. Mineral Process.*, 25 :47–77, 1989.
- [10] A. Despeyroux, A. Ambari, A. Ben Richou, and S. Champmartin. Consequences of the confinement on the mass or heat transfer on a spherical particle in non-Newtonian fluids. *Proceedings of ASME 2010 3rd Joint US-European Fluids Engineering Summer Meeting and 8th International Conference on Nanochannels, Microchannels, and Minichannels, Montreal (Canada)*, August 2010.
- [11] A. Despeyroux, A. Ambari, and A. Ben Richou. Interactions hydrodynamiques en fluide non newtonien et conséquences sur le transport de particules sphériques. *18^{eme} Congrès Français de Mécanique, Grenoble (France)*, August 2007.
- [12] A. Despeyroux, A. Ambari, and A. Ben Richou. Résistance hydrodynamique subie par une sphère fluide en mouvement uniforme dans l'axe d'un tube aux

- faibles nombres de Reynolds. 9^{ème} Congrès de Mécanique, Marrakech (Morocco), April 2009.
- [13] A. Despeyroux, A. Ambari, and A. Ben Richou. Force de type Stokes subie par une particule sphérique en fluide rhéofluidifiant ou rhéoépaississant. 9^{ème} Congrès de Mécanique, Marrakech (Morocco), April 2009.
- [14] A. Despeyroux, A. Ambari, and A. Ben Richou. Correction de la force subie par une bulle en fluide newtonien et non newtonien aux faibles nombres de Reynolds. Applications à la microfluidique. 19^{ème} Congrès Français de Mécanique, Marseille (France), August 2009.
- [15] A. Despeyroux, A. Ambari, A. Ben Richou, and S. Champmartin. Conséquences du confinement dans le transfert de chaleur sur une sphère dans un fluide non newtonien. Congrès SFT 2010, Le Touquet (France), May 2010.
- [16] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics : with special applications to particulate media*. Springer, 1983.
- [17] G. G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9(II) :8–106, 1851.
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, New York, second edition, 1987.
- [19] A. N. Whitehead. Second approximations to viscous fluid motion. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 23 :143–152, 1889.
- [20] C. W. Oseen. Über die Stokes'sche formel und über eine verwandte aufgabe in der hydrodynamic. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 6(1) :29, 1910.
- [21] I. Proudman and J. R. A. Pearson. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 2 :237–262, 1957.
- [22] G. K. Batchelor. Slender-body theory for particles of arbitrary cross section in Stokes flow. *J. Fluid Mech.*, 44(3) :419–440, 1970.
- [23] W. B. Russel, E. J. Hinch, L. G. Leal, and G. Tieffenbruck. Rods falling near a vertical wall. *J. Fluid Mech.*, 83 :273–287, 1977.
- [24] J. F. Stalnakier and R. G. Hussey. Wall effects on cylinder drag at low Reynolds number. *Phys. of Fluids*, 22 :603–613, 1979.
- [25] J. B. Keller and S. I. Rubinow. Slender-body theory for slow viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 75 :705–714, 1976.
- [26] H. Lamb. On the uniform motion of a sphere through a viscous fluid. *Philos. Mag.*, 21(121) :112–121, 1911.
- [27] M. Stimson and G. B. Jeffery. The motion of two spheres in a viscous fluid. *Proc. Royal Soc. London Ser. A*, 111 :110–116, 1926.
- [28] C. J. Lin, K. J. Lee, and N. F. Sather. Slow motion of two spheres in a shear field. *J. Fluid Mech.*, 43 :35–47, 1970.
- [29] D. J. Jeffrey and Y. Onishi. The forces and couples acting on two nearly touching spheres in low-Reynolds-number flow. *J. Appl. Maths Phys. (ZAMP)*, 35 :634–641, 1984.

- [30] M. Chaoui and F. Feuillebois. Creeping flow around a sphere in a shear flow close to a wall. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 56 :381–410, 2003.
- [31] H. Brenner. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chem. Eng. Sci.*, 16 :242–251, 1961.
- [32] A. D. Maude. End effects in a falling-sphere viscometer. *Br. J. Appl. Phys.*, 12 :293–295, 1961.
- [33] R. Cox and H. Brenner. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. Part II. Small gaps widths, including inertial effects. *Chem. Eng. Sci.*, 22 :1753–1777, 1967.
- [34] D. J. Jeffrey and Y. Onishi. The slow motion of a cylinder next to a plane wall. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 34 :129–137, 1981.
- [35] R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber. *Bubbles, drops and particles*. Academic Press, 1978.
- [36] A. Ambari, B. Gauthier Manuel, and E. Guyon. Effect of a plane wall on a sphere moving parallel to it. *J. Physique*, 44 :L-143–L-146, 1983.
- [37] A. Ambari, B. Gauthier-Manuel, and E. Guyon. Wall effects on a sphere translating at constant velocity. *J. Fluid Mech.*, 149 :235–253, 1984.
- [38] A. Mongruel, C. Lamriben, S. Yahiaoui, and F. Feuillebois. The approach of a sphere to a wall at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 661 :229–238, 2010.
- [39] N. Lecoq, F. Feuillebois, N. Anthore, R. Anthore, F. Bostel, and C. Petitpas. Precise measurement of particle-wall hydrodynamic interactions at low Reynolds number using laser interferometry. *Phys. of Fluids*, 5 :3–12, 1993.
- [40] S. Champmartin. *Matrice de résistance et description du mouvement d'une particule en interaction hydrodynamique et conséquences du confinement asymétrique sur les phénomènes de transfert*. PhD thesis, Université d'Angers, 2006.
- [41] A. Ben Richou, A. Ambari, and J. K. Naciri. Correction factor of the Stokes force undergone by a sphere in the axis of a cylinder in uniform and Poiseuille flows. *Eur. Phys. J. Phys.*, 24 :153–165, 2003.
- [42] P. M. Bungay and H. Brenner. The motion of a closely-fitting sphere in a fluid-filled tube. *Int. J. Multiphase Flow*, 1 :25–56, 1973.
- [43] W. L. Haberman and R. M. Sayre. Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes. Rep. 1143 pp.67, David W. Taylor Model Basin, 1958.
- [44] P. J. Carreau, D. C. R. De Kee, and R. P. Chhabra. *Rheology of polymeric systems : principles and applications*. Hanser Gardner Publications, 1997.
- [45] R. P. Chhabra. *Bubbles, drops and particles in non-Newtonian fluids*. CRC Press, 2006.
- [46] M. K. Lyon, D. W. Mead, R. E. Elliot, and L. G. Leal. Structure formation in moderately concentrated viscoelastic suspensions in simple shear flow. *J. Rheol.*, 45(4) :881–890, 2001.

- [47] R. Scirocco, J. Vermant, and J. Mewis. Effect of the viscoelasticity of the suspending fluid on structure formation in suspensions. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 117 :183–192, 2004.
- [48] T. C. Papanastasiou. Flows of materials with yield. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 70 :59–77, 1997.
- [49] J. M. Ferreira and R. P. Chhabra. Analytical study of drag and mass transfer in creeping power law flow across tube banks. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 43 :3439–3450, 2004.
- [50] A. Tripathi and R. P. Chhabra. Drag on spheroidal particles in dilatant fluids. *A.I.ChE.J.*, 41 :728–731, 1995.
- [51] S. D. Dhole, R. P. Chhabra, and V. Eswaran. Flow of power-law fluids past a sphere at intermediate Reynolds numbers. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 45 :4773–4781, 2006.
- [52] R. I. Tanner. Stokes paradox for power-law flow around a cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 50 :217–224, 1993.
- [53] E. Marušić-Paloka. On the Stokes paradox for power-law fluids. *Z. Angew. Math. Mech.*, 81(1) :31–36, 2001.
- [54] H. L. F. von Helmholtz. *Verhandl. Naturhist.-med.*, ser.5 :223–230, 1868.
- [55] D. J. Korteweg. *Phil. Mag.*, 16 :112–118, 1883.
- [56] R. B. Bird. New variational principle for incompressible non-Newtonian flow. *Phys. of Fluids*, 3 :539–541, 1960.
- [57] V. L. Berdichevsky. *Variational principles of continuum mechanics*, volume I. Fundamentals. Springer, 2009.
- [58] A. Tripathi and R. P. Chhabra. Slow power-law fluid flow relative to an array of infinite cylinders. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 31 :2754–2759, 1992.
- [59] A. Ben Richou, A. Ambari, and J. K. Naciri. Drag force on a circular cylinder midway between two parallel plates at very low Reynolds numbers—Part 1 : Poiseuille flow (numerical). *Chem. Eng. Sci.*, 59 :3215–3222, 2004.
- [60] C. Cottin-Bizonne. *Hydrodynamique à l'interface solide-liquide : étude par mesures de forces de surfaces et simulations de dynamique moléculaire*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon I, 2003.
- [61] F. Restagno, J. Crassous, E. Charlaix, C. Cottin-Bizonne, and M. Monchanin. A new surface apparatus for nanorheology. *Review of Scientific Instruments*, 73 :2292–2297, 2002.
- [62] Y. Tomita. On the fundamental formula of non-Newtonian flow. *Bull. Japan. Soc. Mech. Engrs.*, 2 :469–474, 1959.
- [63] M. W. Johnson. Some variational theorems for non-Newtonian flow. *Phys. of Fluids*, 3 :871–878, 1960.
- [64] G. C. Wallick, J. G. Savins, and D. R. Arterburn. Tomita solution for the motion of a sphere in a power-law fluid. *Phys. of Fluids*, 5 :367, 1962.

- [65] M. L. Wasserman and J. C. Slattery. Upper and lower bounds on the drag coefficient of a sphere in a power-law fluid. *A.I.ChE.J.*, 10 :383–388, 1964.
- [66] Y. I. Cho and J. P. Hartnett. Drag coefficient of a slowly moving sphere in non-Newtonian fluids. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 12 :243–247, 1983.
- [67] K. Ceylan, S. Herdem, and T. Abbasov. A theoretical model for estimation of drag force in the flow of non-Newtonian fluids around spherical solid particles. *Powder Technology*, 103 :286–291, 1999.
- [68] Y. Kawase and J. J. Ulbrecht. A power-law fluid past a porous sphere. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 20 :128–132, 1981.
- [69] Y. Kawase and M. Moo-Young. Approximate solutions for power-law fluid flow past a particle at low Reynolds number. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 21 :167–177, 1986.
- [70] A. Acharya, R. A. Mashelkar, and J. Ulbrecht. Flow of inelastic and viscoelastic fluids past a sphere - 1. drag coefficient in creeping and boundary-layer flows. *Rheol. Acta*, 15 :454–470, 1976.
- [71] R. Peyret and T. D. Taylor. *Computational methods for fluid flow*. Springer-Verlag, 1985.
- [72] L. Quartappelle. Vorticity conditioning in the computation of two dimensional viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 40 :453–477, 1981.
- [73] D. W. Peaceman and H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 3 :28–44, 1955.
- [74] J. Douglas and J. E. Gunn. A general formulation of alternating direction method. *Num. Mathematik*, 6 :428–453, 1964.
- [75] S. P. Frankel. Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. *Math. Tables Aids compt.*, 4 :65–75, 1950.
- [76] W. Chester, D. R. Breach, and I. Proudman. On the flow past a sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 37 :751–760, 1969.
- [77] G. Dazhi and R. I. Tanner. The drag on a sphere in a power-law fluid. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 17 :1–12, 1985.
- [78] K. A. Missirlis, D. Assimacopoulos, E. Mitsoulis, and R. P. Chhabra. Wall effects for motion of spheres in power-law fluids. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 96 :459–471, 2001.
- [79] A. N. Beris, J. A. Tsamopoulos, R. C. Armstrong, and R. A. Brown. Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic. *J. Fluid Mech.*, 158 :219–244, 1985.
- [80] J. Blackery and E. Mitsoulis. Creeping motion of a sphere in tubes filled with a Bingham plastic material. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 70 :59–77, 1997.
- [81] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport phenomena*. Wiley, second edition, 2001.

- [82] T. Kida and T. Take. Integral approach of asymptotic expansions for low Reynolds number flow past an arbitrary cylinder. *JSME Int. J. , Ser. II*, 35(2) :138–143, 1992.
- [83] T. Kida and T. Take. Asymptotic expansions for low Reynolds number flow past a cylindrical body. *JSME Int. J. , Ser. II*, 35(2) :144–150, 1992.
- [84] D. J. Tritton. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 6 :547–567, 1959.
- [85] K. O. L. F. Jayaweera and B. J. Mason. The behaviour of freely falling cylinders and cones in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 22 :709–720, 1965.
- [86] B. Huner and R. G. Hussey. Cylinder drag at low Reynolds number. *Phys. of Fluids*, 20 :1211–1218, 1977.
- [87] M. J. Whitney and G. J. Rodin. Force-velocity relationships for rigid bodies translating through unbounded shear-thinning power-law fluids. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 36 :947–953, 2001.
- [88] K. Adachi and N. Yoshioka. On creeping flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder. *Chem. Eng. Sci.*, 28 :215–226, 1973.
- [89] M. T. Blom, E. Chmela, R. Tijssen J. G. E. Gardeniers, M. Elwenspoek, and A. van den Berg. Design and fabrication of a hydrodynamic chromatography chip. *Sens. Actuator B*, 82 :111–116, 2002.
- [90] C. L. Tucker. Flow regimes for fiber suspensions in a narrow gap. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 39 :239–268, 1991.
- [91] R. P. Chhabra, C. Tiu, and P. H. T. Uhlherr. Wall effect for sphere motion in inelastic non-Newtonian fluids. In *6th Australasian Hydraulics and Fluid Mechanics Conference*, pages 435–438, Adelaide, Australia, 5–9 December 1977.
- [92] M. Sefehr, G. Ausias, and J. P. Carreau. Rheological properties of short fibers filled propylene in transient shear flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 123 :19–32, 2004.
- [93] B. semin, J. P. Hulin, and H. Auradou. Influence of flow confinement on the drag force on a static cylinder. *Phys. of Fluids*, 21 :103604, 2009.
- [94] B. Bhushan. *Springer handbook of nanotechnology*. Springer, third edition, 2010.
- [95] P. G. de Gennes. Dynamics of concentrated dispersions : a list of problems. *Physico-Chem. Hydrodyn.*, 2 :31–44, 1981.
- [96] G. G. Joseph, R. Zenit, M. L. Hunt, and A. M. Rosenwinkel. Particle-wall collisions in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 433 :329–346, 2001.
- [97] P. Gondret, M. Lance, and L. Petit. Bouncing motion of spherical particles in fluids. *J. Fluid Mech.*, 14 :643–652, 2002.
- [98] J. O. Marston, W. Yong, and S. T. Thoroddsen. Direct verification of the lubrication force on a sphere travelling through a viscous film upon approach to a solid wall. *J. Fluid Mech.*, 655 :515–526, 2010.

- [99] G. J. Rodin. Squeeze film between two spheres in a power-law fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 63 :141–152, 1996.
- [100] P. G. de Gennes. Coil-stretch transition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients. *J. Chem. Phys.*, 60 :5030–5042, 1974.
- [101] A. Ambari, C. Deslouis, and B. Tribollet. Coil-stretch transition of macromolecules in laminar flow around a small cylinder. *Chem. Eng. Commun.*, 29 :63–78, 1984.
- [102] E. J. Hinch. Mechanical models of dilute polymer solutions for strong flows with large polymer deformations. In *Colloque Intern. CNRS : polymère et lubrification*, pages 241–247, Brest, France, 1974.
- [103] A. M. Ardekani, D. D. Joseph, D. Dunn-Rankin, and R. H. Rangel. Particle-wall collision in a viscoelastic fluid. *J. Fluid Mech.*, 633 :475–483, 2009.
- [104] L. Pasol, M. Chaoui, S. Yahiaoui, and F. Feuillebois. Analytical solutions for a spherical particle near a wall in axisymmetrical polynomial creeping flows. *Phys. of Fluids*, 17 :073602, 2005.
- [105] D. Y. Chan and R. G. Horn. The drainage of thin liquid films between solid surfaces. *J. Chem. Phys.*, 83 :5311–5324, 1985.
- [106] A. Mongruel, N. Lecoq, E. Wajnryb, B. Cichocki, and F. Feuillebois. Motion of a spherocylindrical particle in a viscous fluid in confined geometry. *Eur. J. Mech. B/ Fluids*, 30 :405–408, 2011.
- [107] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Tables of integrals, series, and products*. Academic Press, Inc., Orlando, fourth edition, 1983.
- [108] O. I. Vinogradova. Drainage of a thin liquid film confined between hydrophobic surfaces. *Langmuir*, 11 :2213–2220, 1995.
- [109] C. J. S. Petrie. The rheology of fibre suspensions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 87 :369–402, 1999.
- [110] G. B. Jeffery. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. A*, 102(715) :161–179, 1923.
- [111] A. Ben Richou, A. Ambari, and J. K. Naciri. Drag force on a circular cylinder midway between two parallel plates at $Re \ll 1$ —Part 2 : moving uniformly (numerical and experimental). *Chem. Eng. Sci.*, 60 :2535–2543, 2005.
- [112] A. Despeyroux, A. Ambari, and A. Ben Richou. Wall effects on the transportation of a cylindrical particle in power-law fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 166 :1173–1182, 2011.
- [113] J. F. Trahan and R. G. Hussey. The Stokes drag on a horizontal cylinder falling toward a horizontal plane. *Phys. of Fluids*, 28 :2961–2967, 1985.
- [114] T. S. Luu and T. A. Phuoc Loc. Développement d’une méthode numérique pour la détermination d’écoulement visqueux incompressible autour d’une grille d’aubes. *Journal de Mécanique des Fluides appliquées*, 5 :483–507, 1981.

- [115] T. S. Luu and G. Coulmy. Design problem relating to profile or a cascade of profiles and construction of orthogonal networks using the Riemann surfaces for the multiform singularities. In *Symposium on advanced boundary element methods : application in solid and fluid mechanics*, 13-16 April 1987.
- [116] T. S. Luu and G. Coulmy. Principe et application de la méthode des singularités à répartition discrétisée en hydro et aérodynamique. Notes et Documents LIMSI 90-11, LIMSI, B. P. 133, 91403 Orsay, France, November 1990.
- [117] J. Katz and A. Plotkin. *Low speed aerodynamics - From wing theory to panel methods*. Mc Graw-Hill series in Aeronautical and Aerospace Engineering, 1991.
- [118] J. Bousquet. *Méthode des singularités*. Cépaduès Edition, 1990.
- [119] M. Lavrentiev and B. Chabat. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. Ed. Mir, Moscou, 1972.

Annexe A

Méthode de dissipation minimale d'énergie

Nous rappelons dans cette annexe quelques éléments de démonstration de la validité de la méthode de dissipation minimale dans le cas des fluides non newtoniens dont la viscosité apparente est une fonction du second invariant du tenseur des taux de déformation. La validité de cette méthode a été démontrée par Bird [56] et Johnson [63], ainsi que Tomita [62] dans le cas particulier des fluides d'Ostwald.

Dans le cas de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ constante, non inertiel, pour lequel les forces extérieures dérivent d'un potentiel ϕ , les équations de continuité et de conservation de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & (\text{A.1}) \\ \mathbf{0} = -\nabla(p + \rho\phi) + \nabla \cdot (2\mu_{ap}\underline{D}) & (\text{A.2}) \end{cases}$$

où $\underline{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$ est le tenseur des taux de déformation, p la pression, $\mu_{ap} = m(2D_{II})^{\frac{n-1}{2}}$ la viscosité apparente qui est fonction du second invariant $D_{II} = (\underline{D} \cdot \underline{D})$, et m la consistance du fluide.

Or, selon le principe variationnel équivalent aux équations de continuité et de conservation de quantité de mouvement, le mouvement d'un fluide dont la viscosité apparente dépend du second invariant du tenseur des taux de déformation, respectant les conditions ci-dessus, est tel que l'intégrale suivante est un extremum :

$$B = \int \int \int F dx dy dz \quad (\text{A.3})$$

où $F = F_1 + F_2$ avec $F_1 = -(p + \rho\phi) D_I$ où $D_I = tr(\underline{D})$ est le premier invariant du tenseur des taux de déformation, $F_2 = \int_0^{D_{II}} \mu_{ap}(D_{II}) dD_{II} = \frac{2}{n+1} \Phi$ où $\Phi = \underline{\tau} \cdot \underline{D}$ est la fonction dissipation de Rayleigh. Pour les fluides incompressibles, $D_I = 0$ et B représente la dissipation visqueuse totale.

Les équations d'Euler-Lagrange correspondant au principe variationnel énoncé ci-dessus,

dans lesquelles la fonction variationnelle F est considérée dépendre de $x, y, z; p, u_x, u_y, u_z$, s'écrivent :

$$\frac{\partial F}{\partial p} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_y} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_z} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$(\text{A.8})$$

Notons que, dans l'équation (A.4), $\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$, tandis que dans les équations (A.5), (A.6) et (A.7), nous avons respectivement $\frac{\partial F}{\partial u_x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u_y} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial u_z} = 0$. Ainsi :

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -D_I \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = \frac{\partial u_x}{\partial D_{xx}} = \frac{dF_I}{dD_I} + 2D_{xx} \frac{dF_{II}}{dD_{II}} = -(p + \rho\phi) + 2\mu_{ap}D_{xx} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial D_{xy}} = 2D_{xy} \frac{dF_{II}}{dD_{II}} = 2\mu_{ap}D_{xy} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial D_{xz}} = 2D_{xz} \frac{dF_{II}}{dD_{II}} = 2\mu_{ap}D_{xz} \quad (\text{A.12})$$

$$(\text{A.13})$$

Lorsque l'expression (A.9) est insérée dans l'équation (A.4), on retrouve l'équation de continuité (A.1), tandis que l'insertion des expressions (A.10), (A.11) et (A.12) dans l'équation (A.5) mène à l'équation de conservation de quantité de mouvement (A.2) pour la composante suivant x . Cette dernière analyse peut être effectuée pour retrouver les composantes suivant y et z de l'équation (A.2), à l'aide des équations (A.6) et (A.7). Le principe variationnel énoncé ci-dessus est alors vérifié.

Annexe B

Maillage et méthode numérique

B.1 Méthode des singularités

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans le domaine $(ABCD)$ dans la direction \overrightarrow{AB} (figure B.1) conduit à la génération d'un maillage orthogonal.

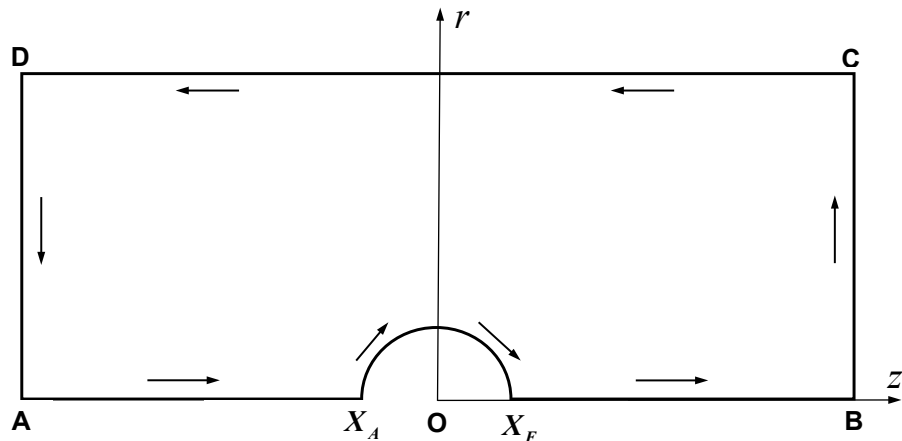


FIGURE B.1 – Géométrie utilisée pour le calcul de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible parfait autour d'une particule.

Ce maillage est constitué des lignes équipotentiels X et des lignes de courant Y d'un écoulement de fluide parfait (figure B.2). Cet écoulement peut être obtenu par une distribution de sources et de tourbillons le long des frontières de ce domaine. Les intensités de ces singularités sont à déterminer en fonction des conditions aux limites imposées [114,115,116,117,118]. BC et DA étant des équipotentiels, elles sont subdivisées en N segments sur chacun desquels on impose une distribution linéaire de sources d'intensité q_j . AB et CD étant des lignes de courant, on les subdivise en N segments sur chacun desquels on impose une distribution linéaire de tourbillons d'intensité γ_j [115]. Soit $[M_1^j(\tilde{z}_1), M_2^j(\tilde{z}_2)]$ le segment inductif de longueur Δs_j porteur

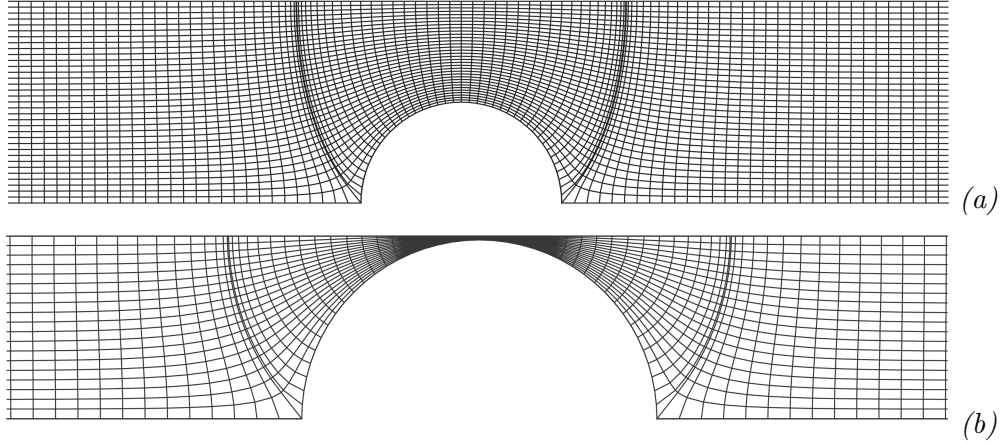


FIGURE B.2 – Exemple de maillage orthogonal pour différents confinements : (a) $k = 0.5$, (b) $k = 0.98$ correspondant aux lignes de courant et équipotentielles.

de singularités de type source (densité linéaire q_j) ou de type tourbillon (densité linéaire γ_j) (figure B.3). Ainsi, le potentiel complexe élémentaire créé par ce segment au point

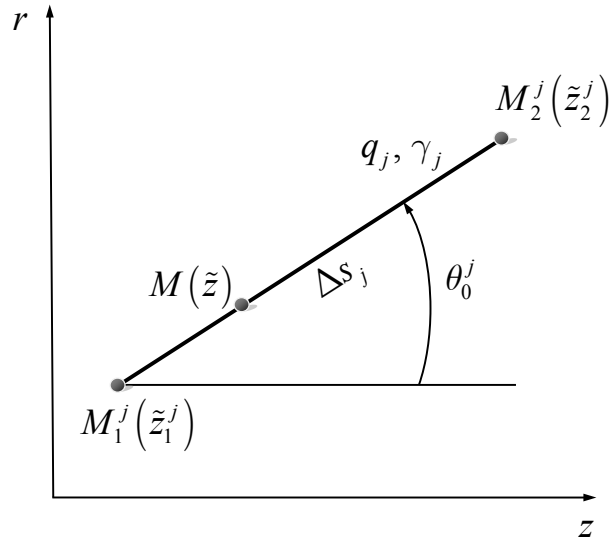


FIGURE B.3 – Segment inducteur $M_1^j M_2^j$.

$M(\tilde{z} = z + ir)$ est : $F_j(\tilde{z}) = (q_j + i\gamma_j) f_j(\tilde{z})$ où

$$f_j(\tilde{z}) = \frac{1}{2\pi} \left[(\tilde{z} - \tilde{z}_1^j) \exp(-i\theta_0^j) \ln \left(\frac{\tilde{z} - \tilde{z}_1^j}{\tilde{z} - \tilde{z}_2^j} \right) + \Delta s_j \ln(\tilde{z} - \tilde{z}_2^j) \right] \quad (\text{B.1})$$

avec $\theta_0^j = \arg(\tilde{z}_2^j - \tilde{z}_1^j)$ et $\Delta s_j = |\tilde{z}_2^j - \tilde{z}_1^j|$

Le potentiel complexe donné par la relation (B.1) est multiforme à cause du dernier

terme logarithmique. Pour le rendre uniforme, nous utilisons un artifice de calcul introduit par Luu *et al.* [115] qui consiste à remplacer ce terme par :

$$\Delta s_j \ln \left\{ (\tilde{z} - \tilde{z}_2^j) \exp \left[-i \left(\theta_0^j + \pi/2 \right) \right] \right\}$$

Le potentiel total induit par tous les segments inducteurs est donné par :

$$F(\tilde{z}) = X(z, r) + iY(z, r)$$

$$F(\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{2M} q_j f_j(\tilde{z}) + i \sum_{j=1}^{2N} \gamma_j f_j(\tilde{z}) \quad (\text{B.2})$$

où j est l'indice du segment inducteur et $i = \sqrt{-1}$. Pour calculer ce potentiel élémentaire, les segments inductifs sur les frontières sont parcourus dans le sens trigonométrique (figure B.1). Les fonctions potentiel X et de courant Y sont données par :

$$X(z, r) = \sum_{j=1}^{2M} q_j \operatorname{Re} [f_j(\tilde{z})] - \sum_{j=1}^{2N} \gamma_j \operatorname{Im} [f_j(\tilde{z})] \quad (\text{B.3})$$

$$Y(z, r) = \sum_{j=1}^{2N} \gamma_j \operatorname{Re} [f_j(\tilde{z})] + \sum_{j=1}^{2M} q_j \operatorname{Im} [f_j(\tilde{z})] \quad (\text{B.4})$$

où Re et Im sont respectivement les parties réelle et imaginaire de la fonction complexe f_j . Cette dernière est singulière pour \tilde{z}_1^j et \tilde{z}_2^j . Ainsi, elle est évaluée au point de contrôle $M_c(\tilde{z}_c)$. Ce point est situé au milieu du segment inducteur. Les conditions aux frontières, définies ci-dessous, sont vérifiées aux points de contrôle [115] :

1. En choisissant le segment de référence j_{AB} sur la ligne AB , on doit respecter les conditions suivantes : pour tout point $M_c(\tilde{z}_c)$ de AB nous devons avoir $Y(\tilde{z}_c^j) - Y(\tilde{z}_c^{j_{AB}}) = 0$, pour $j = 1, N$. Pour les points $M_c(\tilde{z}_c)$ de CD nous devons avoir $Y(\tilde{z}_c^j) - Y(\tilde{z}_c^{j_{AB}}) = Y_{\max}$, pour $j = 1, N$, où Y_{\max} est le débit entrant et sortant.
2. Le contour $(ABCD)$ étant fermé : $\sum_{AB+CD} \gamma_j \Delta s_j = 0$ où Δs_j est la longueur du segment j .
3. En choisissant les segments de référence j_{BC} et j_{DA} respectivement sur les lignes BC et DA , on doit avoir : pour tout point $M_c(\tilde{z}_c)$ de BC , $X(\tilde{z}_c^j) - X(\tilde{z}_c^{j_{BC}}) = 0$, pour $j = 1, M$. Et pour tout point $M_c(\tilde{z}_c)$ de DA , $X(\tilde{z}_c^j) - X(\tilde{z}_c^{j_{DA}}) = 0$, pour $j = 1, M$.
4. Les débits entrants et sortants sont donnés par :

$$\int_B^C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = - \int_D^A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = Y_{\max} \quad (\text{B.5})$$

En conclusion, le problème défini ci-dessus se réduit à un système de $2(N+M)$ équations linéaires où les intensités q_j et γ_j sont à calculer.

B.2 Procédure de maillage

La réalisation de ce type de maillage est effectuée par l'utilisation de la méthode des singularités rappelée ci-dessus associée à la méthode des différences finies [71, 72, 73, 74, 75]. Cette méthode des singularités nous permet de réaliser en fait une transformation conforme numérique du domaine courbe de l'écoulement en un domaine rectangulaire (figure B.4, voir aussi Ben Richou et Ambari [41]). Sur les noeuds des frontières du

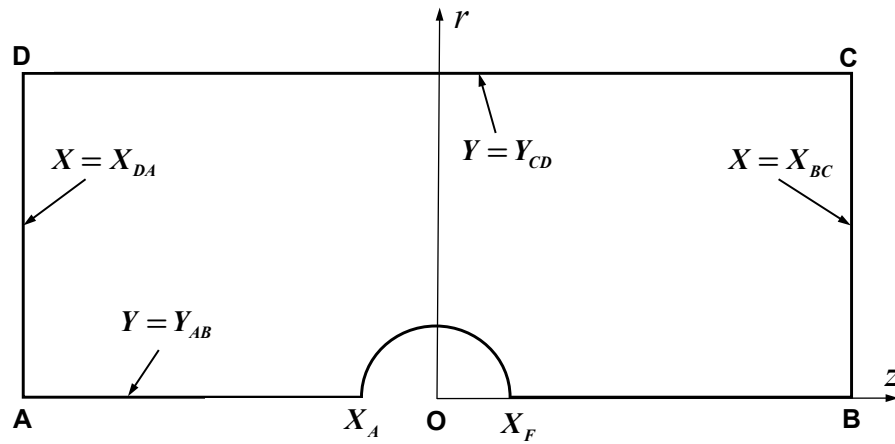


FIGURE B.4 – Domaine de calcul de l'écoulement d'un fluide parfait autour d'une particule et coordonnées (X, Y) .

domaine, sont calculées les équipotentiels X et les fonctions de courant Y . Comme $X(z, r) + iY(z, r)$ et $z(X, Y) + ir(X, Y)$ sont des fonctions analytiques réciproques conjuguées [119], les valeurs nodales (z, r) à l'intérieur du maillage (X, Y) sont calculées par la résolution d'un problème de type Dirichlet utilisant la méthode des différences finies avec SOR [71, 72, 73, 74, 75]. Sur les figures B.2a and B.2b, nous avons illustré le maillage obtenu respectivement pour les confinements $k = 0.5$ et $k = 0.98$. La même procédure a été appliquée dans le cas du cylindre en remplaçant les coordonnées (z, r) par les coordonnées (x, y) .

B.3 Formulation (ψ, ω) et conditions aux limites dans l'espace (X, Y)

Dans le cas de la sphère, les équations (2.10) et (2.11) décrivant les variations de la fonction de courant ψ et de la vorticit e ω dans le cas des fluides en loi de puissance

sont écrites dans le nouveau système de coordonnées (X, Y) (figure B.4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{Re_n}{2^n} \left(V_a \frac{\partial (V_r \omega)}{\partial X} + U_a \frac{\partial (V_z \omega)}{\partial X} + U_a \frac{\partial (V_r \omega)}{\partial Y} - V_a \frac{\partial (V_z \omega)}{\partial Y} \right) = \\ \mu_{ap} Q^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\mu_{ap} V_a}{r} + 2Q^2 \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial X} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X} \\ + \left(\frac{\mu_{ap} U_a}{r} + 2Q^2 \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\mu_{ap} \omega}{r^2} + S \\ -r\omega = Q^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{r} \left(V_a \frac{\partial \psi}{\partial X} + U_a \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

où,

$$\mu_{ap} = \left[2 \left(V_a \frac{\partial V_r}{\partial X} + U_a \frac{\partial V_r}{\partial Y} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left(U_a \frac{\partial V_z}{\partial X} - V_a \frac{\partial V_z}{\partial Y} \right)^2 + \left(V_a \frac{\partial V_z}{\partial X} + U_a \frac{\partial V_z}{\partial Y} + U_a \frac{\partial V_r}{\partial X} - V_a \frac{\partial V_r}{\partial Y} \right)^2 \right]^{(n-1)/2};$$

$$S = \frac{\omega}{r} \left(V_a \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial X} + U_a \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial Y} \right) + \left(\omega + 2V_a \frac{\partial V_z}{\partial X} + 2U_a \frac{\partial V_z}{\partial Y} \right) \alpha - 2 \left(\frac{V_r}{r} + 2U_a \frac{\partial V_z}{\partial X} - 2V_a \frac{\partial V_z}{\partial Y} \right) \beta;$$

avec :

$$U_a = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial r}; \quad V_a = \frac{\partial X}{\partial r} = -\frac{\partial Y}{\partial z}; \quad Q^2 = U_a^2 + V_a^2 \quad \text{et} \quad r = r(X, Y).$$

$$\alpha = \left[U_a \left(\frac{\partial U_a}{\partial X} - \frac{\partial V_a}{\partial Y} \right) - V_a \left(\frac{\partial V_a}{\partial X} + \frac{\partial U_a}{\partial Y} \right) \right] \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial X} + \left[V_a \left(\frac{\partial V_a}{\partial Y} - \frac{\partial U_a}{\partial X} \right) - U_a \left(\frac{\partial V_a}{\partial X} + \frac{\partial U_a}{\partial Y} \right) \right] \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial Y} + (U_a^2 - V_a^2) \left(\frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial Y^2} \right) - 4U_a V_a \frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial X \partial Y}$$

$$\beta = \left(V_a \frac{\partial U_a}{\partial X} + U_a \frac{\partial U_a}{\partial Y} \right) \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial X} - \left(V_a \frac{\partial V_a}{\partial X} + U_a \frac{\partial U_a}{\partial Y} \right) \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial Y} + U_a V_a \left(\frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial Y^2} \right) + (U_a^2 - V_a^2) \frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial X \partial Y}$$

Les conditions aux frontières des fonctions de courant et de la vorticité à l'amont et à l'aval sont définies par :

$$\psi [X(z \rightarrow \pm\infty, r), Y(z \rightarrow \pm\infty, r)] = \frac{r^2}{2} \quad (\text{B.8})$$

$$\omega [X(z \rightarrow \pm\infty, r), Y(z \rightarrow \pm\infty, r)] = 0 \quad (\text{B.9})$$

Sur le tube, les conditions vérifiées par ψ et ω sont définies par :

$$\psi(X, Y = Y_{CD}) = \frac{1}{2k^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\omega = -\frac{Q^2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \Big|_{Y=Y_{CD}} + \frac{U_a}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \Big|_{Y=Y_{CD}} \quad (\text{B.11})$$

où Y_{CD} est la valeur de la fonction de courant sur la ligne CD pour l'écoulement d'un fluide parfait.

Les conditions sur la sphère pour ψ et ω sont données par : pour $X_A \leq X \leq X_F$,

$$\psi(X, Y = Y_{AB}) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\omega = -\frac{Q^2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \Big|_{Y=Y_{AB}} + \frac{U_a}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \Big|_{Y=Y_{AB}} \quad (\text{B.13})$$

où Y_{AB} est la valeur de la fonction de courant sur la ligne AB pour l'écoulement d'un fluide parfait.

Dans l'axe de symétrie, les conditions pour ψ et ω sont données par : pour $X \in [X_{DA}, X_A \cup X_F, X_{BC}]$,

$$\psi(X, Y = Y_{AB}) = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\omega(X, Y = Y_{AB}) = 0 \quad (\text{B.15})$$

Dans le cas du cylindre, tenant compte des propriétés de la transformation conforme, les équations (2.12) et (2.13), décrivant l'évolution de la vorticit e ω et de la fonction de courant ψ pour un fluide en loi de puissance, sont écrites dans le nouveau syst eme de coordonn ees curvilignes (X, Y) (figure B.4). Rappelons que $U_a = \partial X / \partial x = \partial Y / \partial y$, $V_a = \partial X / \partial y = -\partial Y / \partial x$ et $Q^2 = U_a^2 + V_a^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{Re_n}{2^n} Q^2 \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \omega \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial X} \omega \right) \right] = \\ \mu_{ap} Q^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + 2Q^2 \left(\frac{\partial \mu_{ap}}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right) + S \\ -\omega = Q^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.16})$$

$$\left. \begin{array}{l} -\omega = Q^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{B.17})$$

o u,

$$\mu_{ap} = \left[2 \left(U_a \frac{\partial u}{\partial X} - V_a \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + 2 \left(V_a \frac{\partial v}{\partial X} + U_a \frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + \left(V_a \frac{\partial u}{\partial X} + U_a \frac{\partial u}{\partial Y} + U_a \frac{\partial v}{\partial X} - V_a \frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} ;$$

$$S = \left(\omega + 2V_a \frac{\partial u}{\partial X} + 2U_a \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \alpha - \left(4U_a \frac{\partial u}{\partial X} - 4V_a \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \beta$$

Les conditions aux frontières de la fonction de courant et de la vorticité à l'infini sont définies par (§ 2.3.1) :

$$\psi [X (x \rightarrow \pm\infty, y), Y (x \rightarrow \pm\infty, y)] = y \quad (\text{B.18})$$

$$\omega [X (x \rightarrow \pm\infty, y), Y (x \rightarrow \pm\infty, y)] = 0 \quad (\text{B.19})$$

Sur les parois planes, les conditions sur ψ et ω sont décrites par :

$$\psi(X, Y = Y_{CD}) = \frac{b}{a} \quad (\text{B.20})$$

qui donne d'après (B.17) :

$$\omega = -Q^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \Big|_{Y=Y_{CD}} \quad (\text{B.21})$$

où Y_{CD} est la valeur de la fonction de courant sur la ligne CD pour l'écoulement d'un fluide parfait.

Pour $X_A \leq X \leq X_F$, les conditions sur le cylindre pour ψ et ω sont données par :

$$\psi(X, Y = Y_{AB}) = 0 \quad (\text{B.22})$$

qui donne d'après (B.17) :

$$\omega = -Q^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \Big|_{Y=Y_{AB}} \quad (\text{B.23})$$

où Y_{AB} est la valeur de la fonction de courant sur la ligne AB pour l'écoulement d'un fluide parfait.

Dans le plan de symétrie, pour $X \in [X_{DA}, X_A \cup X_F, X_{BC}]$, les conditions sur ψ et ω sont données par :

$$\psi(X, Y = Y_{AB}) = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\omega(X, Y = Y_{AB}) = 0 \quad (\text{B.25})$$

B.4 Technique de calcul

La figure B.5 montre une portion du maillage. Soit l le nombre de pas de temps et Δt le pas de temps. Le schéma itératif de la solution à partir du temps $l\Delta t$ au temps $(l+1)\Delta t$ consiste à calculer la nouvelle valeur de la vorticité $\omega_{i,j}^{l+1}$ sur l'ensemble des noeuds par une approximation de type différences finies des équations (B.6)/(B.16), ainsi que des conditions aux frontières (B.9,B.11,B.13,B.15)/(B.19,B.21,B.23,B.25), des valeurs de la vorticité $\omega_{i,j}^l$ et de la fonction de courant $\psi_{i,j}^l$. La même procédure est appliquée à la fonction de courant $\psi_{i,j}^{l+1}$ à partir des équations (B.7)/(B.17), des conditions

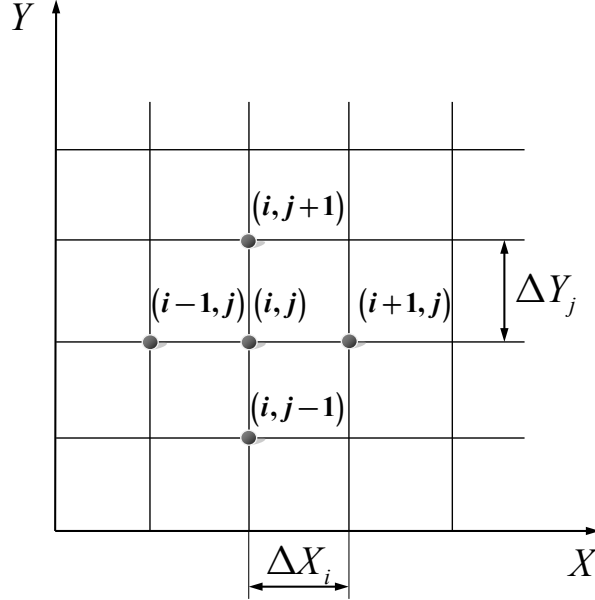


FIGURE B.5 – Portion du maillage.

aux limites (B.8,B.10,B.12,B.14)/(B.18,B.20,B.22,B.24) et des nouvelles valeurs de la vorticité $\omega_{i,j}^{l+1}$. La méthode implicite de directions alternées [71, 72, 73, 74] a été utilisée pour calculer les valeurs de la vorticité au nouveau pas de temps. Nous avons utilisé une approche pseudo instationnaire comme une alternative pour obtenir la solution de l'écoulement stationnaire. La solution des équations de la fonction de courant est obtenue par la méthode SOR [71, 75]. A chaque pas de temps, nous estimons que les équations (B.7)/(B.17) sont satisfaites quand le critère de convergence suivant est vérifié : $\text{Max} \left| 1 - \psi_{i,j}^{It+1} / \psi_{i,j}^{It} \right| < 10^{-4}$, où $\psi_{i,j}^{It}$ et $\psi_{i,j}^{It+1}$ sont les approximations de la fonction de courant à la $It^{\text{ème}}$ et $(It+1)^{\text{ème}}$ itérations.

Une fois que les fonctions de courant et de vorticité ont été calculées pour une valeur spécifiée du paramètre de confinement k , le facteur de correction de la force $\lambda(n, k)$, exercée par le fluide sur la sphère ou sur le cylindre, est obtenu par la normalisation respective des forces calculées par $F_0 = 6\pi m (U_0/2a)^{n-1} aU_0$ [voir équation (2.2)] et $F_0 = 4\pi m (U_0/2a)^{n-1} U_0$ [équation (2.3)]. Ces forces sont calculées par intégration des contraintes visqueuses et de pression sur la surface de la sphère ou du cylindre :

1. Dans le cas de la sphère :

$$\lambda(n, k) = \frac{F(n, k)}{F_0} = -\frac{1}{3} \int_{X_A}^{X_F} p \frac{x_c y_c}{Q} dX + \frac{1}{3} \int_{X_A}^{X_F} \mu_{ap} \omega \frac{y_c^2}{Q} dX + \frac{2}{3} \int_{X_A}^{X_F} \mu_{ap} U_a (x_c V_a - y_c U_a) \omega \frac{y_c}{Q^3} dX$$

où p la distribution de pression adimensionnelle autour de la surface sphérique

de la particule est donnée par :

$$p(X, Y = Y_{AB}) = - \int_{X_A}^X \frac{\mu_{ap} U_a}{r Q^2} \omega dX - \int_{X_A}^X \frac{\partial(\mu_{ap} \omega)}{\partial Y} dX \quad (\text{B.26})$$

La contribution adimensionnelle des forces de pression à $\lambda(n, k)$ est donnée par :

$$\lambda_p(n, k) = \frac{F_p(n, k)}{F_0} = -\frac{1}{3} \int_{X_A}^{X_F} p \frac{x_c y_c}{Q} dX \quad (\text{B.27})$$

La contribution adimensionnelle visqueuse $\lambda(n, k)$ est calculée de la manière suivante :

$$\lambda_v(n, k) = \frac{F_v(n, k)}{F_0} = \frac{1}{3} \int_{X_A}^{X_F} \mu_{ap} \omega \frac{y_c^2}{Q} dX + \frac{2}{3} \int_{X_A}^{X_F} \mu_{ap} U_a (x_c V_a - y_c U_a) \omega \frac{y_c}{Q^3} dX \quad (\text{B.28})$$

où (x_c, y_c) est un point du cercle physique, alors que X_A et X_F sont respectivement les valeurs de la fonction équipotentielle aux bords d'attaque et de fuite (voir figure B.4).

2. Dans le cas du cylindre :

$$\lambda(n, k) = \frac{F(n, k)}{F_0} = -\frac{2^{n-2}}{\pi} \left[\int_{X_A}^{X_F} p \frac{x_c}{Q} dX + \int_{X_A}^{X_F} \mu_{ap} \omega \frac{y_c}{Q} dX \right]$$

$$p(X, Y = Y_{AB}) = - \int_{X_A}^X \frac{\partial(\mu_{ap} \omega)}{\partial Y} \Big|_{Y=Y_{AB}} dX \quad (\text{B.29})$$

$$\lambda_p(n, k) = \frac{F_p(n, k)}{F_0} = -\frac{2^{n-2}}{\pi} \int_{X_A}^{X_F} p \frac{x_c}{Q} dX \quad (\text{B.30})$$

$$\lambda_v(n, k) = \frac{F_v(n, k)}{F_0} = -\frac{2^{n-2}}{\pi} \int_{X_A}^{X_F} \mu_{ap} \omega \frac{y_c}{Q} dX \quad (\text{B.31})$$

Dans les deux cas, la convergence des calculs est supposée atteinte lorsque le critère suivant est vérifié : $|1 - \lambda^l(n, k)/\lambda^{l+1}(n, k)| < 10^{-6}$.

Annexe C

Calcul asymptotique de la force subie par une sphère se déplaçant vers un plan

Aux très faibles nombres de Reynolds, lorsqu'une particule sphérique se déplace vers un plan à vitesse constante en milieu non confiné latéralement, dans la limite du régime de lubrification $\varepsilon \ll 1$ (voir figure 5.3), la force de traînée est supposée être principalement contrôlée par le processus de drainage du film liquide situé dans l'interstice entre la sphère et le plan. Ainsi, la force de traînée subie par une sphère peut être calculée à partir de la force de pression induite par l'écoulement éjecté radialement. Ce drainage, qui prend place dans cet interstice, se réduit à un écoulement radial de type Poiseuille, comme montré sur la figure 5.3, où $a\varepsilon_1(\theta) = a\varepsilon + a(1 - \cos\theta)$ et $a\varepsilon$ est la valeur minimale de l'espace entre la sphère et le plan. Ainsi, partant des équations de conservation de quantité de mouvement et de continuité suivantes dans la limite de la lubrification :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[m \left| \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial z} \right|^n \right] = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r(r, z)] + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.2})$$

Par intégrations successives de l'équation (C.1), en utilisant les conditions aux limites, on obtient :

$$u_r(r, z) = \frac{n}{n+1} \left[-\frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial r} \right]^{\frac{1}{n}} \left[\left| z - \frac{a\varepsilon_1(\theta)}{2} \right|^{1+\frac{1}{n}} - \left(\frac{a\varepsilon_1(\theta)}{2} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right] \quad (\text{C.3})$$

Puis, par intégration de l'équation de continuité (C.2) sur l'interstice en tenant compte du fait que la vitesse de la particule $u_z(r, z)|_{\text{sphère}} = -U$:

$$\frac{1}{r} \int_{-\frac{a\varepsilon_1}{2}}^{+\frac{a\varepsilon_1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} [r u_r(r, z)] dz + \int_{-\frac{a\varepsilon_1}{2}}^{+\frac{a\varepsilon_1}{2}} \frac{\partial u_z(r, z)}{\partial z} dz = 0 \quad (\text{C.4})$$

où $u_r(r, z)$ est donnée par l'équation (C.3), $u_z(r, z = +a\varepsilon_1/2) = -U$ sur la sphère, et $u_z(r, z = -a\varepsilon_1/2) = 0$ sur le plan, nous obtenons la distribution radiale de pression le long de l'interstice :

$$p(r_+) - p_\infty = -mU^n \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{a^n \varepsilon^{\frac{3n+1}{2}}} \right) \int_\infty^{\frac{1}{2\varepsilon} r_+^2} \frac{Y^{\frac{n-1}{2}}}{[Y+1]^{2n+1}} dY \quad (\text{C.5})$$

où $Y = \frac{1}{2\varepsilon} r_+^2$ et $r_+ = r/a$ est la distance radiale normalisée, mesurée à partir du point de stagnation sur la sphère. Par l'utilisation du code "MATHEMATICA", nous obtenons la distribution radiale de pression :

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{m \left(\frac{U}{2a} \right)^n} = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{2^{2+3n}}{1+3n} \right) {}_2F_1 \left(1+2n, \frac{1}{2}(1+3n); \frac{3}{2}(1+n); -2\frac{\varepsilon}{r_+^2} \right) (r_+)^{-(1+3n)} \quad (\text{C.6})$$

où p_∞ est la pression en champ lointain et ${}_2F_1$ est la fonction hypergéométrique. Nous pouvons remarquer que ce résultat est similaire à celui obtenu par Rodin [99]. Néanmoins, son expression de la pression dans l'axe (sa formule (23), [99]) n'est pas précise et doit être remplacée par :

$$\hat{p}(0) = \frac{\alpha^{\frac{1+3n}{2}} \pi \Gamma \left(\frac{3+3n}{2} \right)}{\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1-n}{2} \right) \Gamma(1+2n)} \quad (\text{C.7})$$

La pression dans l'axe est donnée, pour $n \neq 1$, par :

$$\frac{p(r_+ = 0) - p_\infty}{m \left(\frac{U}{2a} \right)^n} = \frac{\pi 2^{\frac{3+3n}{2}}}{1+3n} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\Gamma \left(\frac{3+3n}{2} \right)}{\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1-n}{2} \right) \Gamma(1+2n)} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1+3n}{2}}} \quad (\text{C.8})$$

Pour $n = 1$, la limite de la pression est égale à :

$$\frac{p(r_+ = 0) - p_\infty}{\mu \left(\frac{U}{2a} \right)} = \frac{6}{\varepsilon^2} \quad (\text{C.9})$$

qui est la même valeur pouvant être obtenue par l'équation (5.9).

Dans cette approche, le facteur de correction $\delta(n, k = 0, \varepsilon)$ de la force de traînée subie par une sphère peut être calculé en intégrant la pression donnée par la formule (C.6) sur la surface frontale de la sphère dans la limite de la lubrification :

$$\begin{aligned} \delta(n, k = 0, \varepsilon) &= \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{F(n, k = 0, \varepsilon \rightarrow \infty)} \\ &= \frac{2^{\frac{3n+3}{2}}}{3(9n^2 - 1)} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\Gamma \left(\frac{3n+3}{2} \right) \Gamma \left(\frac{n+3}{2} \right)}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n-1}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Cette formule, qui est valable mathématiquement seulement pour $n > 1/3$, se réduit à la formule (5.11) déduite du résultat donné par Rodin dans la limite $\beta = \infty$ (§ 5.3). En

fait, pour vérifier l'équivalence des deux formules, rappelons que [107] :

$$\frac{4}{9n^2 - 1} \frac{\Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n+3}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} = \beta\left(\frac{3+n}{2}, \frac{3n-1}{2}\right) \quad (\text{C.11})$$

De plus, pour $n = 1/3$, le champ de pression est donné par :

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{m \left(\frac{U}{2a}\right)^{\frac{1}{3}}} = 3 \times 5^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{2\varepsilon}{r_+^2} + 1\right)^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (\text{C.12})$$

Mais le calcul de la force par l'intégration de l'équation (C.12) est divergent. En outre la comparaison de nos résultats numériques avec la solution asymptotique donnée par Rodin pour $n = 1/3$:

$$\delta(n = 1/3, k = 0, \varepsilon) = \frac{2^{\frac{3n-1}{2}}}{3} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \log(\varepsilon^{-1}) \quad (\text{C.13})$$

et pour $n < 1/3$:

$$\delta(n < 1/3, k = 0, \varepsilon) = \frac{2^{\frac{3n-1}{2}}}{3} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n O(1) \quad (\text{C.14})$$

où $O(1)$ est une constante, prouve que ces derniers résultats ne sont pas valides.

Cependant, à cause de la dépendance de la force de traînée à l'écoulement autour de la moitié supérieure de la sphère, qui est montrée par les résultats numériques dans la figure 5.12b, il n'est pas possible de donner l'ordre supérieur nécessaire à notre calcul asymptotique. En effet, le calcul numérique s'avère nécessaire, comme cela est aussi confirmé par la figure 5.11. Ainsi, tous les résultats asymptotiques donnés par Rodin [99] et nous-mêmes ne peuvent plus s'appliquer aux valeurs de n inférieures à 0.6.

Un calcul similaire a été réalisé dans le cas du cylindre approchant un plan.

Annexe D

Articles

The hydrodynamic interaction effects on the settling and the transportation of a sphere in power-law fluids

A. Despeyroux,¹ A. Ambari,^{1, a)} and A. Ben Richou²

¹⁾*Arts et Métiers ParisTech, 2 bd du Ronceray, Angers, 49035, France*

²⁾*Faculté des Sciences et Techniques de Beni-Mellal, B. P. 523, Morocco*

(Dated: 22 November 2011)

This study deals with the calculation of the drag undergone by a sphere in a power-law fluid in unbounded and confined medium. In fact, the results obtained to date for this nonlinear problem have not been handled in non inertial regime particularly for dilatant fluids. Through this work, we try to provide a Stokes-type non inertial solution using numerical and asymptotical approaches. For that, we will present and compare successfully our results obtained by different methods to certify their accuracy. We will show how the influence of the fluidity index on the hydrodynamic interactions is closely related to the evolution of the hydrodynamic length screen. In this instance, we will show that the Whitehead paradox takes place, for a sphere, at $n \geq 2$. We will also show that the settling of a sphere in a given tube exhibits a critical radius of a sphere for which the settling velocity is maximum. This effect is the consequence of the competition between the variation of the weight with the radius of the particle and the friction due to the proximity of the tube walls. Finally, we will highlight that the solution of the nonlinear inverse problem concerning the transportation of the free particle in a power-law "Poiseuille flow" displays a deficit of its transportation velocity compared to the unperturbed fluid velocity. This last fundamental result seems to have a great influence on the injection of thermohardening reinforced with microspheres and in microfluidics.

PACS numbers: Valid PACS appear here

I. INTRODUCTION

The transportation of a suspension of rigid particles, drops, bubbles or a mixture of them in a continuous Newtonian or non-Newtonian phase, often takes place in various kinds of engineering processes as well as in nature. The study of the motion of these suspensions constitutes a physical problem with important applications in biology (blood flows, . . .), or in industry (injection of thermohardening reinforced with micro-spheres or fibers, . . .)¹⁻³. The transportation of particles in microfluidic devices⁴ is also significant for various applications including hydrodynamic chromatography HDC⁵ or flow cytometry⁶. In these microfluidic applications where the movement of the fluid takes place in channels with cross-sectional dimensions of the order of tens to hundreds of microns and used for different chemical and biological applications, particles are submitted to strong wall hydrodynamic interactions. Otherwise, the transportation or sedimentation of concentrated suspensions of spherical particles needs the understanding of hydrodynamic interactions due to the wall of the container or to other particles^{7,8}. The study of the dynamics of these suspensions in rheologically complex fluids is not easy.

In fact, in Newtonian fluids, the hydrodynamic field generated by the relative movement of each particle decreases as $1/r$. However, it decreases as $1/r^{1/n}$ in power law fluids which exhibit a shear-thinning or shear-thickening non-Newtonian rheology. Indeed, in the lack

of high velocity elongational gradient, the effect of the shear-thinning or the shear-thickening can be dominant enough to veil the viscoelastic behavior. In these conditions, it is worthwhile having a sufficient knowledge of the effect of these behaviors on the hydrodynamic interactions in suspensions. Both behaviors are commonly approximated by the Ostwald-de-Waele⁹ model. In fact, in this particular case of the calculation of the hydrodynamic drag undergone by a particle, we noticed as a preliminary that in this problem the velocity gradient is limited by its value reached in the side zones. In the shear thinning case as long as the maximum velocity gradient is not included in the second Newtonian plateau, and the first Newtonian plateau, corresponding to low velocity gradients situated in the fore and aft of the sphere zone which does not intervene in the calculation of the force, the Ostwald model can constitute a good approximation. The same analysis is applicable to shear thickening fluids. Concerning viscoelasticity, it is certain that as long as the maximum elongational velocity gradient upstream and downstream of the particle remains below the inverse of the relaxation time of the fluid¹⁰, this one behaves mainly like a pseudoplastic fluid. In fact, the elongational velocity gradient passes by a maximum value of the order of $\gamma_{max} = U_0/2a$. While the elasticity of the fluid intervenes only when the Deborah number $De = \tau/(2a/U_0) > 1$ ¹⁰⁻¹³. To fulfill this condition, the Reynolds number $Re = 2aU_0/\nu$ must be higher than $(2a)^2/\tau\nu$ which is higher than 1 in the case of a millimetric particle in a fluid whose relaxation time $\tau < 1$ s (this is common in the case of dilute solutions with macromolecules of molecular weight $\overline{M}_w < 10^7$, or semi-dilute solutions). So, as this study concerns the movement of

^{a)}Electronic mail: abdelhak.ambari@ensam.eu

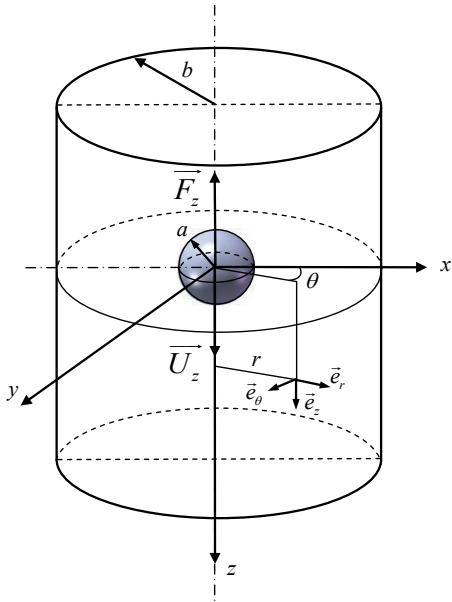


FIG. 1. Sketch of the motion of a sphere in a tube filled with a power-law fluid.

particles at very low Reynolds numbers, the condition above will not be fulfilled and the elasticity of the solutions will not be aroused by the elongational nature of the flow near the stagnation points. Indeed, the experiments of Acharya *et al.*¹⁴, for example, were made at Reynolds numbers of 86.2 and 96.4 which are high enough in order that the elasticity intervenes. Otherwise, in the conditions where a spherical particle settles towards a plane wall, Guala and Stocchino¹⁵ and Ardekani *et al.*¹⁶ confirm experimentally that the viscoelasticity does not intervene for the same reasons as those we have just described above. Under these conditions, the use of this simple model with only one parameter "n", contrary to that of more realistic models as Carreau-Yasuda², enables us to physically show the influence of the shear thinning and shear thickening behavior on the dynamics of a spherical particle. To understand the transportation of particles in non-Newtonian fluids and their hydrodynamic interactions, it is necessary to study those between individual particles or between the particle and walls at small Reynolds numbers.

In this paper we will focus on the evaluation of the drag undergone by a sphere transported through a power-law fluid in confined and unbounded media at low Reynolds numbers. The present results provide the accurate quantification of the hydrodynamic interactions numerically and asymptotically.

The logical and simple approach boils down to consider the case of a spherical particle of radius a moving uniformly or placed in a "Poiseuille" flow in the axis of a cylindrical tube of radius b (Fig. 1) filled with a shear thinning or shear thickening power-law fluid of density ρ . The rheology of the suspending fluid is described by the

following constitutive equation:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + 2 \left[m \left(\sqrt{2\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} \right)^{n-1} \right] \underline{\underline{D}} \quad (1)$$

where $\underline{\underline{\sigma}}$ is the Cauchy stress tensor and $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla^T \mathbf{V})$ is the rate of deformation tensor, p the pressure, m the power-law consistency coefficient (Pa s^n) and n the power-law index of the fluid. Then, the calculation of the wall correction factor $\lambda(n, k)$ of the drag undergone by a sphere translating at a constant velocity U_0 in the axis of the tube can be done by this expression which can be obtained by dimensional analysis:

$$\mathbf{F}(n, k) = -6\pi m \left(\frac{U_0}{2a} \right)^{n-1} a U_0 \lambda(n, k) \mathbf{e}_z \quad (2)$$

where $k = a/b$ is the confinement factor. In unbounded fluids ($k = 0$), $\lambda(n, k = 0)$ has been calculated by us numerically using the same method as the one presented in this paper and is given in Fig. 2(a). We propose a polynomial interpolation formula which gives correct values with an average relative error less than 1% for $0 \leq n \leq 1.8$:

$$\begin{aligned} \lambda(n, k = 0) = & 1.19086 + 1.97806n - 4.91651n^2 \\ & + 7.3332n^3 - 8.71739n^4 + 5.74246n^5 \\ & - 1.83801n^6 + 0.22818n^7 \end{aligned} \quad (3)$$

In the Fig. 2(a), we also give the value obtained by the minimum of dissipation method which is described in appendix A. The results given by this method, in the range of $0.7 \leq n < 2$, seem to be in good agreement with those obtained numerically. Otherwise, the drag force undergone by a sphere in a power-law fluid tends towards zero as shown in the Fig. 2(a) when $n \rightarrow 2$. This result corresponds to the appearance of the Whitehead paradox¹⁷ which takes place for dilatant fluids at $n \geq 2$ as expected by Marušić-Paloka¹⁸. In fact, this behavior can be explained by the increase of the hydrodynamic length screen as shown in Fig. 3. In order to compare the viscous and the pressure contributions to the drag force, we give in this same Fig. 2(a), the evolution of the correction factors λ_p and λ_v versus the index of the fluid. For the Newtonian fluid ($n = 1$), we obtained the well-known proportion between the two components ($\lambda_p = 1/3$, $\lambda_v = 2/3$)¹. Moreover, in the limit of $n = 0$, where the fluid behaves like a Bingham fluid with a yield stress $\tau_0 = m$, and a zero plastic viscosity μ (corresponding to a very high Bingham number $\text{Bn} = \tau_0 2a / \mu U_0$), it is possible to calculate analytically the viscous force undergone by the sphere $\lambda_v(n = 0, k) = \pi/12$ where $F_0 = 6\pi m (U_0/2a)^{n-1} a U_0 = 12\pi a^2 \tau_0$. As quoted in Chhabra's book⁷, many numerical approaches to this problem have been focused on the determination of $\lambda(n, k)$ for $n \leq 1$. Among all the numerical studies, one can cite the results obtained by Dazhi *et al.*¹⁹ which are in good agreement with our numerical ones. They used a large spherical domain configuration and a finite element

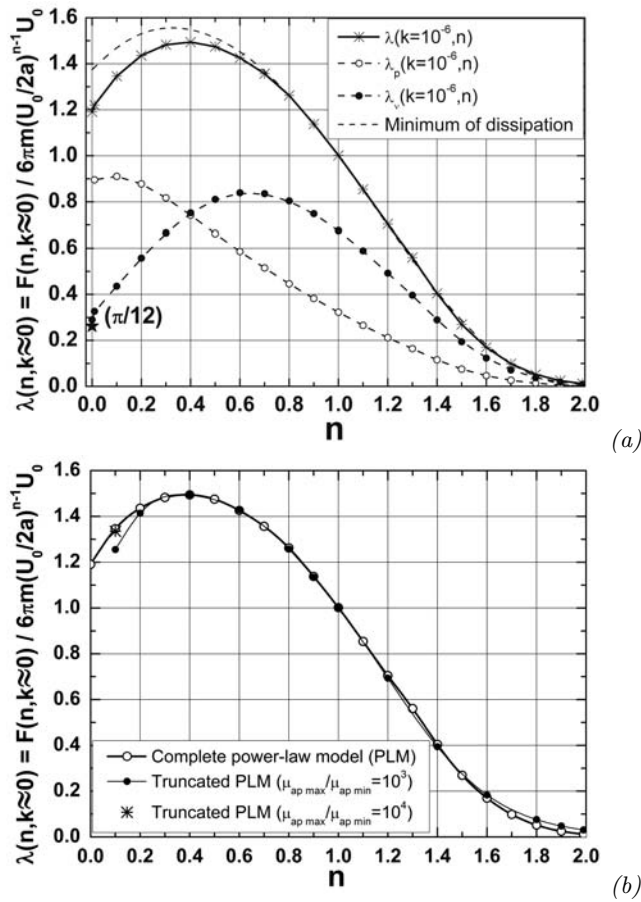


FIG. 2. (a) Total force and its both viscous and pressure components undergone by a sphere in an unbounded medium versus the fluidity index of a power-law fluid. It shows the force tends towards zero for $n = 2$ because the Whitehead paradox takes place; (b) Influence of a truncated Ostwald model over the results of the drag force undergone by a sphere in a power-law unbounded fluid.

method to compute the drag of a sphere in an unbounded medium by an extrapolation of these results to $k = 0$, for $0.1 \leq n \leq 1$. Furthermore, Missirlis *et al.*²⁰ used the finite element method (FEM) and the finite volume one (FVM) in the case where the sphere is translating in the axis of a cylinder for different confinements ($0 \leq k \leq 0.5$) and for $0 \leq n \leq 1$. The extrapolation of their results to $k = 0$ are also in good agreement with ours for $0 \leq n \leq 1$. As far as we know, the available results for dilatant fluids $n > 1$ are provided by Tripathi *et al.*²¹, who studied numerically the drag exerted on a spheroidal particle in dilatant fluids using a finite element method. But their results overestimate the value of $\lambda(n, k = 0)$, as shown in Fig. 4 because they led their calculations at relatively high confinement $k = 10^{-2}$ and $Re_n = 10^{-2}$. This overestimation is due to the rise of the sensitivity to the inertia induced by the increase of the length screen in the vicinity of the critical value of $n = 2$ for which the Whitehead paradox takes place (Fig. 3). To obtain the accurate results, as we will show, it is necessary to lead

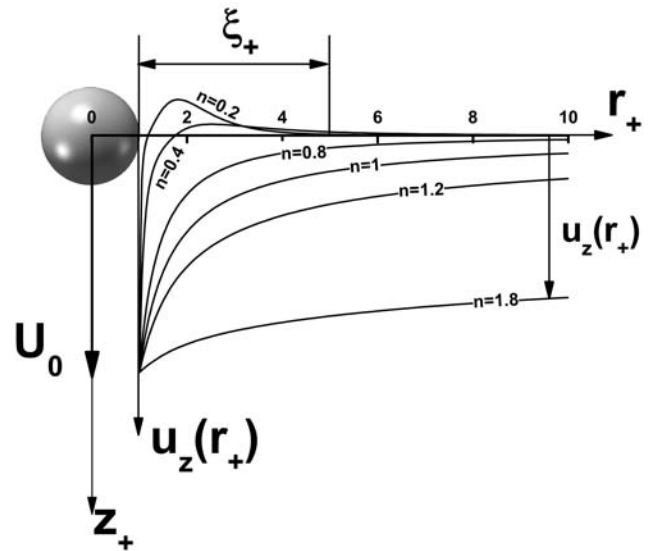


FIG. 3. Radial evolution of the velocity for different fluidity indexes, showing the localization of the flow near the sphere for $n \ll 1$ and the increase of the screen length when $n \rightarrow 2$.

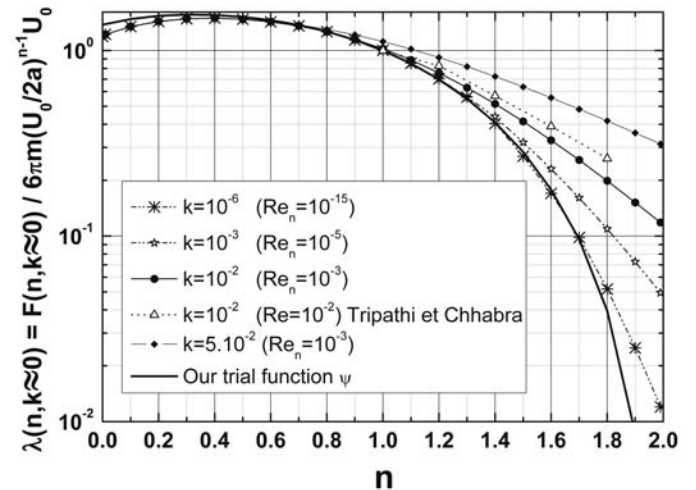


FIG. 4. Influence of the confinement on the drag undergone by a sphere in a power-law fluid in non inertial regime, highlighting the very low values of Re_n and k needed to reach the conditions of the unbounded medium.

the calculations at $Re_n \leq 10^{-15}$ in order to be in non inertial regime.

In fact, as the inertial regime can take place at very low generalized Reynolds numbers depending on the index n of the fluid, we proceeded to a preliminary study on the evolution of the drag force versus the generalized Reynolds number in order to determine the non inertial regime in which we led our numerical calculations (Fig. 4).

The sphere is fixed in the axial position in a tube. $\lambda(n, k)$ was calculated numerically for different values of the confinement $k = a/b$ and for $0 \leq n \leq 2$. The numerical

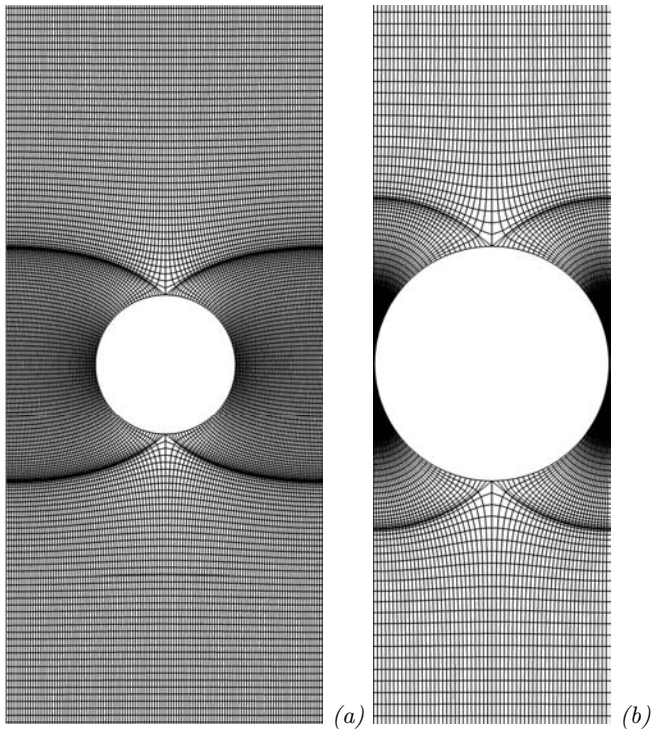


FIG. 5. Grids generated using the singularities method for two confinements: (a) $k=0.44$, (b) $k=0.99$.

matching perfectly the boundaries of the spherical particle and the cylindrical wall of the tube (see Ben Richou *et al.*²²). Using the singularities method we realize a conformal mapping from curved borders to a rectangular one. This grid is built with the equipotential lines $X(z, r) = \text{Cst}$ and streamlines $Y(z, r) = \text{Cst}$, corresponding to the flow of an inviscid fluid (Fig. 5 given here for two confinements: $k = 0.44$ and $k = 0.99$). The meshing is carried out by using a combination of the singularities method and the finite differences technique.

The resolution of the stream function equation is carried out by the finite differences method using the successive over-relaxation (SOR) and the alternating direction implicit (ADI) techniques²³⁻²⁷ respectively to calculate the functions ψ and ω of the fluid. Once these functions have been obtained for a given value of the confinement parameter k , the dimensionless wall correction factor of the drag $\lambda(n, k)$ exerted by the fluid on the particle, obtained by dividing the actual force by $F_0^{sphere} = 6\pi m (U_0/2a)^{n-1} aU_0$ [see Eq. (2)] is computed by integrating the viscous and pressure stresses over the surface of the sphere: $\lambda(n, k) = F(n, k)/F_0$.

The convergence of the computation is supposed to be reached when the following criterion is verified: $|1 - \lambda^l(n, k)/\lambda^{l+1}(n, k)| < 10^{-6}$.

C. Alternative numerical method

To check the validity of our numerical method, we verified the results using the finite volume CFD code FLUENT, where the SIMPLE algorithm was employed with a second order scheme on a structured mesh. The convergence criteria used is similar to the one used in our method. The results obtained by this CFD code corroborate our numerical technique. Thus, the accuracy of the two methods is mutually confirmed. It is important to notice that as we are concerned only by a bounded shear stress corresponding to a bounded shear rate in this particular flow, there is no singularity in the shear stress even if the apparent viscosity described by this model diverges for zero shear rate in the leading and trailing points of the sphere. Indeed, as these upstream and downstream zones do not introduce a significant contribution to the calculation of the drag, we proceeded to a verification of the effect of a truncated Ostwald model at low and high velocity gradients as done by the Carreau-Yasuda model with a variation of the apparent viscosity over three decades. In Fig. 2(b), The results corresponding to this truncated Ostwald model remain similar to those obtained using the complete Ostwald model and slightly deviate for the values of n near 0 and 2 which require just four decades in the evolution of the apparent viscosity.

III. RESULTS AND DISCUSSIONS

A. Drag undergone by a sphere in a confined uniform flow of a power-law fluid

We are often dealing with the study of the hydrodynamic interactions between particles and walls as they arise during the transportation of particles in microfluidic devices for example. In this case, we are concerned with the biological or chemical fluids in microchannels which can exhibit a non-Newtonian behavior and where the particles conveyed are strongly confined. The same physics is encountered during the transportation or sedimentation of concentrated suspensions of spherical particles in non-Newtonian fluids during the injection process of glass sphere reinforced thermoplastics. To give an estimation of the second correction due to particle-wall interactions, taking into account the first correction due to the nonlinear rheological behavior of the power-law fluid, numerical approaches of this problem have been used. In fact, in Fig. 3, we plotted the evolution of the velocity component $U_z(r/a)$ induced by the displacement of a sphere at the velocity U_0 when the suspending fluid exhibits a shear-thinning or shear-thickening non-Newtonian rheology. This figure shows clearly that the hydrodynamic screen length ξ may be strongly affected. Consequently, the hydrodynamic interactions between particles or between particles and walls can be reduced or enhanced according to whether the fluid is pseudoplastic or dilatant. As the problem is coupled, it is recommended to

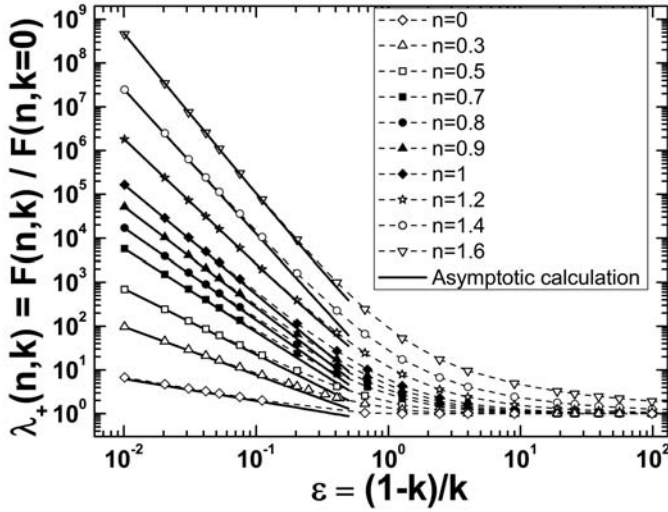


FIG. 6. Evolution of the drag numerical correction factor $\lambda_+(n, k)$ undergone by a sphere in a confined medium filled with a power-law fluid and the agreement with asymptotical results [Eq. (6)].

normalize all correction factors by their corresponding value in an unbounded medium in order to estimate the effect of hydrodynamic interactions. In Fig. 6, we plotted the correction factor of the drag undergone by a sphere in a confined medium over the normalized wall distance $\varepsilon = (1 - k)/k = (b - a)/a$. Let us recall that before any calculation given in this curve, we verified that we are in the Stokes-type regime (i. e. we are in the non inertial regime as discussed previously). To verify the accuracy of the numerical results for this problem, we proceed to an asymptotic approach in the lubrication regime to determine $\lambda(n, k)$ when the diameter of the sphere becomes very close to that of the cylinder ($k \rightarrow 1$). In this regime, the hydrodynamic effect on the pressure and viscous forces are localized in a small equatorial zone of unknown limit between the sphere and the cylinder (this is confirmed by the numerical calculation of the vorticity in a meridian section of the tube). The first remark is that our numerical calculations confirm that for low values of n , the drag force undergone by the sphere is less sensitive to the wall hydrodynamic interactions, confirming that the more the fluid is shear-thinning, the more the screen length decreases (Fig. 3). On the contrary, the more the fluid is shear-thickening, the more hydrodynamic interactions are enhanced due to the increase of the screen length (Fig. 3). Given these results, the approach of the dynamics of suspensions in non-Newtonian fluids has to take into account these interactions, especially when the fluid is dilatant. On the contrary, in pseudoplastic fluids, these hydrodynamic interactions are all the more reduced so that n is smaller than 1. The second point which must be highlighted is that the good agreement between our numerical computations and our asymptotical results [Eq. (6), appendix B], confirms reciprocally the accuracy of our calculations. In order to evaluate

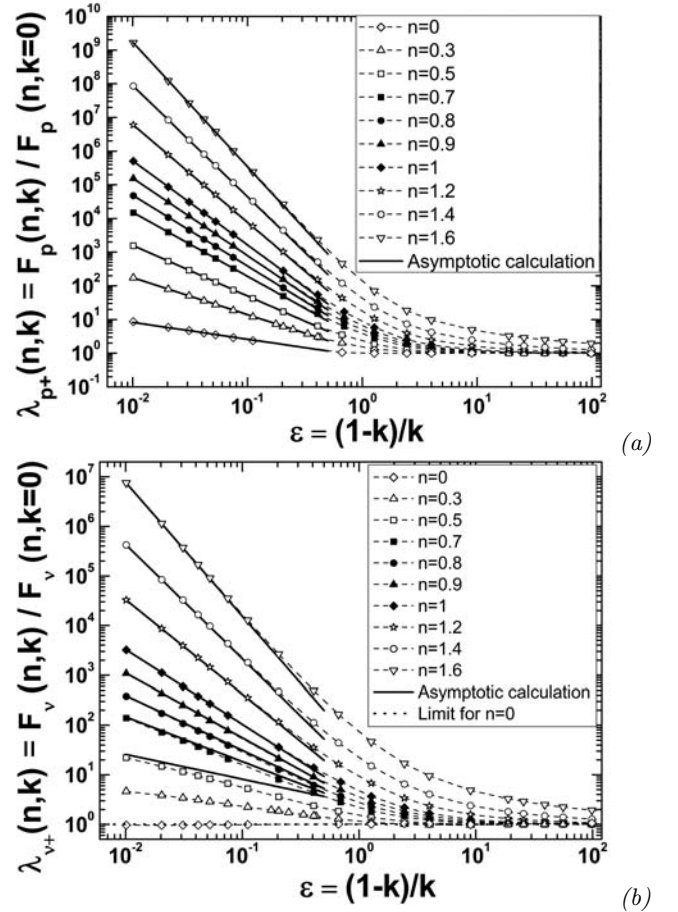


FIG. 7. Evolution of the contributions to the drag correction factor undergone by a sphere in a confined medium filled with a power-law fluid (numerical and asymptotical results): (a) pressure contribution $\lambda_{p+}(n, k)$ [Eq. (7)], (b) viscous contribution $\lambda_{v+}(n, k)$ [Eq. (8)].

separately the contribution of the pressure and viscosity forces on the total drag, we compared in the Figs. 7(a) and 7(b) our numerical results with our asymptotic calculations of $\lambda_{p+}(n, k)$ and $\lambda_{v+}(n, k)$ [Eqs. (7) and (8)] which are limited to the first term where ε_0 is the smallest gap between the sphere and the tube:

$$\lambda_+(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(2n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{1}{\lambda(n, k=0)} \times \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2}, \text{ for } 0 \leq n \leq 2 \quad (6)$$

$$\lambda_{p+}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(2n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{1}{\lambda_p(n, k=0)} \times \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2}, \text{ for } 0 \leq n \leq 2 \quad (7)$$

$$\lambda_{v+}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{1}{\lambda_v(n, k=0)} \\ \times \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{\Gamma(2n)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n-1)/2}, \text{ for } \frac{1}{4} < n \leq 2 \quad (8)$$

Both these Figs. 7(a) and 7(b) show that for high confinements ($k \approx 1$), the pressure component dominates and $\lambda_{p+}(n, k \rightarrow 1) = \lambda_+(n, k \rightarrow 1)$. This successful comparison between the asymptotic and the numerical results shows the accuracy of our computing code to evaluate the pressure and viscosity forces. In Fig. 7(b), the limit of the asymptotic method to evaluate the viscous force for very low values of n comes from the fact that the $\Gamma(x)$ function diverges in the vicinity of $x = 0$, corresponding to $n = 1/4$. Moreover, to compare the relative contribution of the pressure force over the viscosity one to the total drag, we give the ratio of $R(n, k) = F_p(n, k \rightarrow 1)/F_v(n, k \rightarrow 1)$ through the following asymptotical formula:

$$R(n, k) = \frac{F_p(n, k \rightarrow 1)}{F_v(n, k \rightarrow 1)} = \frac{\lambda_p(n, k)}{\lambda_v(n, k)} = \\ \left(\frac{4n-1}{4n} \right) \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-1}, \text{ for } \frac{1}{4} < n \leq 2 \quad (9)$$

For $n = 0$ the asymptote obtained from the value of $\lambda_v(n = 0, k) = \pi/12$ seems to be in accordance with the analytical approach as discussed previously. Finally in Fig. 8(a) we give a comparison of the exponent $f(n)$ of the power-law behavior of $\lambda_+(n, k) = \lambda_{p+}(n, k) \propto (\varepsilon_0/a)^{f(n)}$ determined numerically and the exponent expected asymptotically $f(n) = -(4n+1)/2$. The good agreement confirms again the accuracy of both approaches. At the same time, we take the opportunity to give a comparison in Fig. 8(b) between the exponent $g(n)$ of the power-law variation $\lambda_{v+}(n, k) \propto (\varepsilon_0/a)^{g(n)}$ to those predicted by the asymptotic calculation $g(n) = -(4n-1)/2$. In this curve, we can see the slight deviation of the results for low values of n . This is due to the weakness of the estimation of the viscosity component of the drag by the asymptotic approach which needs the calculation of the higher order terms for very low index values. Nevertheless, the numerical values are more accurate than the asymptotic ones in the vicinity of $n = 0$ because they give a good predicted slope $g(n) = 0$ for $n = 0$ [Fig. 7(b)].

At this stage, it is appropriate to study some applications. The first one is the effect of the confinement on the sedimentation velocity of a particle in pseudoplastic and dilatant fluids in a given tube. The second application is the determination of the effects of the non-Newtonian behavior on the relative transportation velocity of a particle in a "Poiseuille flow" induced by the hydrodynamic interactions.

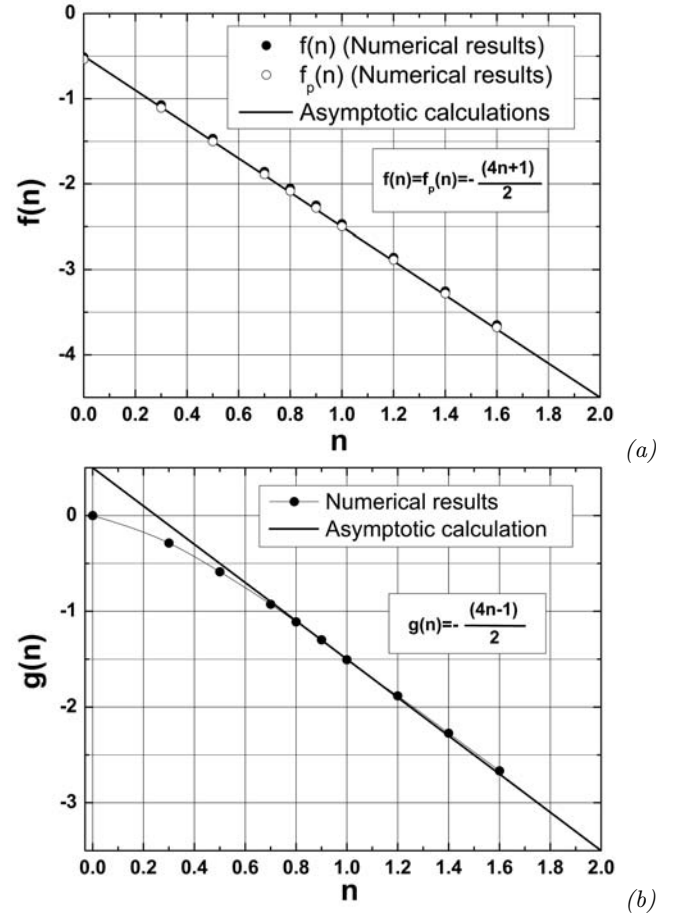


FIG. 8. Comparison of the exponents $f(n)$ and $g(n)$ of the power-law behavior obtained numerically with the asymptotic one: (a) total and pressure drag force, (b) viscosity drag force.

B. Effect of the confinement on the settling velocity in a fixed tube

We consider a tube of fixed diameter $2b$ and spherical particles of different diameters $2a$ which are settling down in this given tube. To study the influence of the fluidity (n) and the backflow on the settling velocity, we plot in Fig. 9 the normalized sedimentation velocity by that achieved in an infinite medium $U(n, b, k = 0)$ by a particle of radius b :

$$\alpha(n, k) = \frac{U(n, a, k)}{U(n, b, k = 0)} = \left(\frac{\lambda(n, k)}{\lambda(n, k = 0)} \right)^{-1/n} k^{(n+1)/n} \quad (10)$$

where

$$U(n, b, k = 0) = \left(\frac{2^n \Delta \rho g b^{n+1}}{9 m} \right)^{1/n} \lambda(n, k = 0)^{-1/n} \quad (11)$$

In this curve we note that for a given diameter of the tube $2b$ the sedimentation velocity of a particle passes through a maximum for a critical diameter value $2a_{cr}$. This crit-

ical value for a Newtonian fluid is about 42.5% of the diameter of the tube. This striking effect is principally due to the competition between the increase of the particle weight as a^3 and the hydrodynamic friction generated by the cylindrical wall and induced by the backflow which is proportional to $a\lambda(n, a/b)$. At very low confinements ($k \approx 0$), as the weight dominates in both Figs. 9(a) and 9(b), the asymptotic curve in the vicinity of $k = 0$ is a power-law of the confinement: $\alpha(n, k) \propto k^{(n+1)/n}$. For the Newtonian case, $\alpha(n = 1, k \approx 0) \propto k^2$. However, for high confinements ($k \approx 1$), the asymptotic Eq. (6) gives us the asymptotic behavior of $\alpha(n, k)$:

$$\alpha(n, k) \sim A(n)(1 - k)^{(4n+1)/2n} \quad (12)$$

where

$$A(n) = \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left[\lambda(n, k=0) \frac{3}{2^{(n-1)/2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} \right]^{1/n}$$

Those asymptotic behaviors are in good agreement with our results.

In the case of the power-law fluid, as the backflow is affected by the fluidity n of the fluid, we observe that the more n decreases from one to zero, the more the critical position of the maximum increases [Fig. 10(a)]. In fact, for lower values of n for which the decrease of the length screen is observed, the backflow needs only a very low gap between the particle and the tube (Fig. 3). Then, the more n increases from $n = 1$ to two, the more the critical position of the maximum decreases [Fig. 10(a)]. Whereas the maximum of the settling velocity corresponding to this critical situation seems to decrease when n deviates from the Newtonian case [Fig. 10(b)]. The optimum value for the maximum settling velocity is obtained in the vicinity of the Newtonian fluid.

IV. EFFECT OF THE CONFINEMENT ON THE TRANSPORTATION VELOCITY-SHIFT

In numerous studies concerning the transportation of spherical particles in injection processes or in microfluidics, the commonly used assumption consists in the free particle and the unperturbed fluid having the same velocity³. In order to verify the validity of this hypothesis, we study the transportation velocity of a free non buoyant particle in the flow of a power-law fluid induced by a pressure gradient ΔP in a tube of radius b . In fact, this assumption must be acceptable in dilute regime but as the concentrations used in industry are high enough, we expect that the hydrodynamic interactions coupled with the nonlinear rheological behavior induce a shift of this velocity, which has not been studied yet to our knowledge. As the problem is nonlinear, the determination of the real transportation velocity of the particle constitutes a nonlinear inverse problem which is difficult to solve. For all these reasons, we used first a dynamic mesh method described below. Secondly, we tried to use

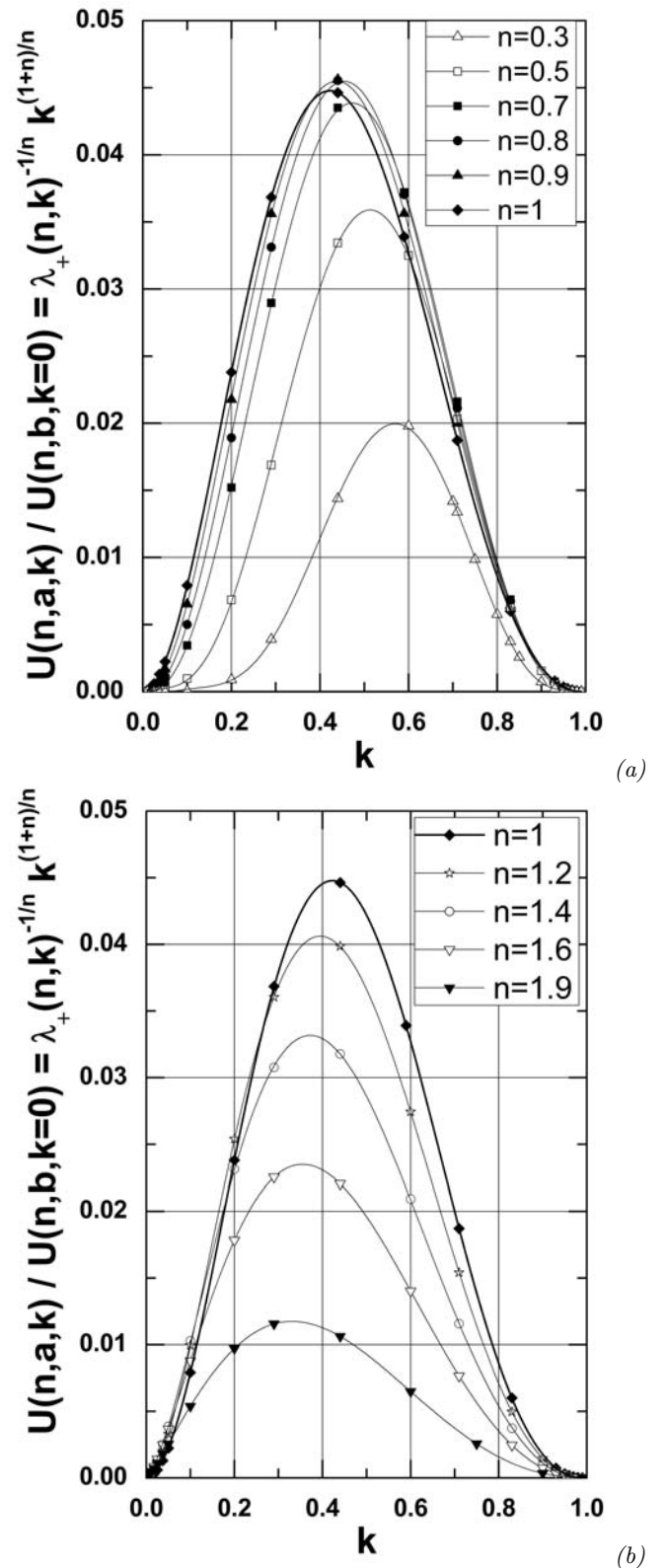


FIG. 9. Evolution of the settling velocity of different spheres in a given tube filled with a power-law fluid vs. its confinement factor k : (a) case of a shear-thinning fluid ($n < 1$), (b) case of shear-thickening fluid ($n > 1$). Both curves show the existence of a critical radius of a sphere for which the settling velocity is maximum.

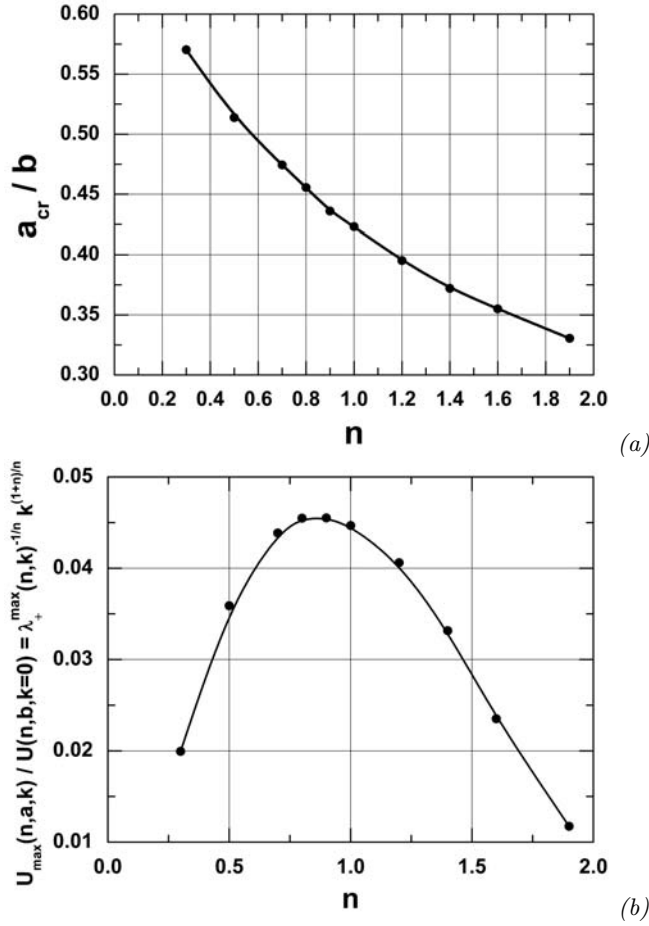


FIG. 10. (a) The monotonic decrease of the critical radius of a sphere for which the settling velocity is at its maximum vs. the fluidity index n , (b) Appearance of a maximum settling velocity for $n \approx 1$.

the superposition of states (matrix method) even if this procedure remains valid only for a very weak nonlinearity.

A. Dynamic mesh method

To solve this inverse problem, our first approach has been the use of the dynamic mesh method available in the CFD FLUENT code. The numerical resolution used is the same as described in subsection II C. Generally, this dynamic mesh technique implies, for each time step, the rigid motion (which can be a translation or a rotation) of some boundaries relative to others. The mesh is then adjusted according to the new position of the moving boundaries. In our case, due to the symmetry and the invariance of the kinematics of the flow under translation, the dynamic mesh technique consists only in moving the mesh cells with the particle in order to avoid any deformation of the grid. The procedure used to find the inverse solution of the problem consists in the

determination of the translation velocity superposed in successive approximations to the unperturbed power-law fluid flow at which the drag force applied to the sphere is reduced to zero, corresponding to the free motion of the particle (let us recall that the torque submitted by this particle is zero, due to its axial position). This critical velocity constitutes the transportation velocity shift.

B. Superposition method

In the approximation of a very weak nonlinearity, the second approach consists in the use of the superposition method (as for Newtonian fluids²⁸). To use it, it is necessary to determine the drag force undergone by a sphere placed axially in a tube where the power-law fluid is driven by a pressure gradient $\Delta P/L$ corresponding to an imposed velocity profile, solution of the power-law laminar flow in a tube, at the upstream and the downstream of the particle (avoiding the entrance effects):

$$\mathbf{u}_z(r) = U_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] \mathbf{e}_z \quad (13)$$

where U_{max} is the maximum value taken by the velocity in the power-law "Poiseuille flow". In these conditions, the forces exerted on a sphere can be written as:

$$\mathbf{F}^{Pois}(n, k) = 6\pi m \left(\frac{U_{max}}{2a} \right)^{n-1} a U_{max} \lambda^{Pois}(n, k) \mathbf{e}_z \quad (14)$$

In this part, we used the same formulation as described in Sec. II with the imposed velocity profile given in the Eq. (13) upstream and downstream far from the sphere. In Fig. 11, we plotted the normalized correction factor of the drag $\lambda_+^{Pois}(n, k)$ by its value in an unbounded medium for $U_0 = U_{max}$ [Fig. 2(a)]. In the same way, the parts of pressure $\lambda_{p+}^{Pois}(n, k)$ and viscous forces $\lambda_{v+}^{Pois}(n, k)$ are given respectively in Figs. 12(a) and 12(b). The successful comparison with our asymptotic results [Eqs. (15), (16), (17)] is to be noted.

$$\lambda_+^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(2n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{(1+2n)(n+1)}{n(3n+1)} \right)^n \quad (15)$$

$$\times \frac{1}{\lambda(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2}, \text{ for } 0 \leq n \leq 2$$

$$\lambda_{p+}^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(2n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{(1+2n)(n+1)}{n(3n+1)} \right)^n \quad (16)$$

$$\times \frac{1}{\lambda_p(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2}, \text{ for } 0 \leq n \leq 2$$

$$\lambda_{v+}^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(2n-1)/2}}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{(1+2n)(n+1)}{n(3n+1)} \right)^n \quad (17)$$

$$\times \frac{1}{\lambda_v(n, k=0)} \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{\Gamma(2n)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n-1)/2}, \text{ for } \frac{1}{4} < n \leq 2$$

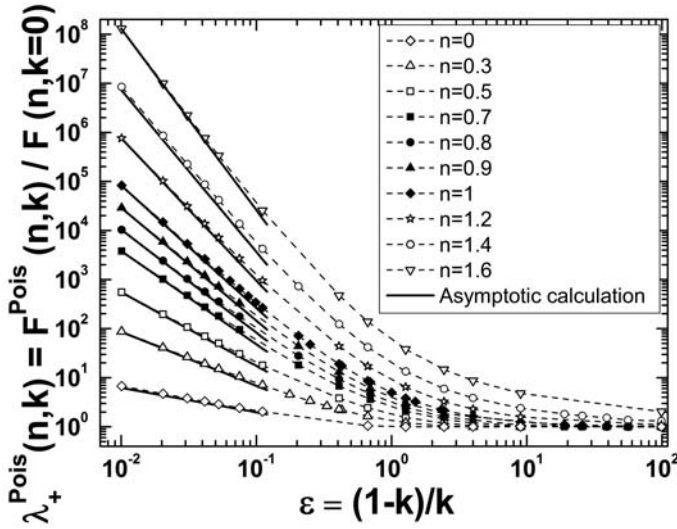


FIG. 11. Evolution of the drag numerical correction factor $\lambda_+^{Pois}(n, k)$ undergone by a sphere in a power-law "Poiseuille flow" and the agreement with asymptotical results [Eq. (15)].

Nevertheless, the same remarks as in the uniform flow concerning the range of validity of the viscosity component of the drag can be applied here. In this instance, the same plot analysis concerning the exponents $f(n)$ and $g(n)$ given in the Figs. 8(a) and 8(b) is obtained for the power-law "Poiseuille flow".

Now, in the assumption of a very weak nonlinearity of this problem, the superposition of states would be permitted. Then, the flows corresponding respectively to the uniform and the power-law "Poiseuille flow" are superposed to determine the actual translation velocity of a free particle at which the drag force is zero. Thus,

$$F_z = -6\pi m \left(\frac{U_{particle}}{2a} \right)^{n-1} a U_{particle} \lambda(n, k) + 6\pi m \left(\frac{U_{max}}{2a} \right)^{n-1} a U_{max} \lambda^{Pois}(n, k) = 0 \quad (18)$$

This equation gives the actual velocity of the free particle which is different from the velocity of the unperturbed fluid at its gravity center ($U_{fluid} = U_{max}$).

C. Results and discussion

In Fig. 13, we plotted against the confinement factor, the transportation velocity of the free particle normalized by the velocity of the unperturbed fluid at the center of the sphere $U_{fluid} = U_{max}$ in the power-law "Poiseuille flow". We can see that for all fluid indexes n , due to the hydrodynamic interactions with the walls of the tube, the velocity shift of the particle increases with the confinement (i.e. the concentration $c \sim k^3$). Otherwise, it is noticeable and surprising that the results obtained by the superposition method are in good agreement with

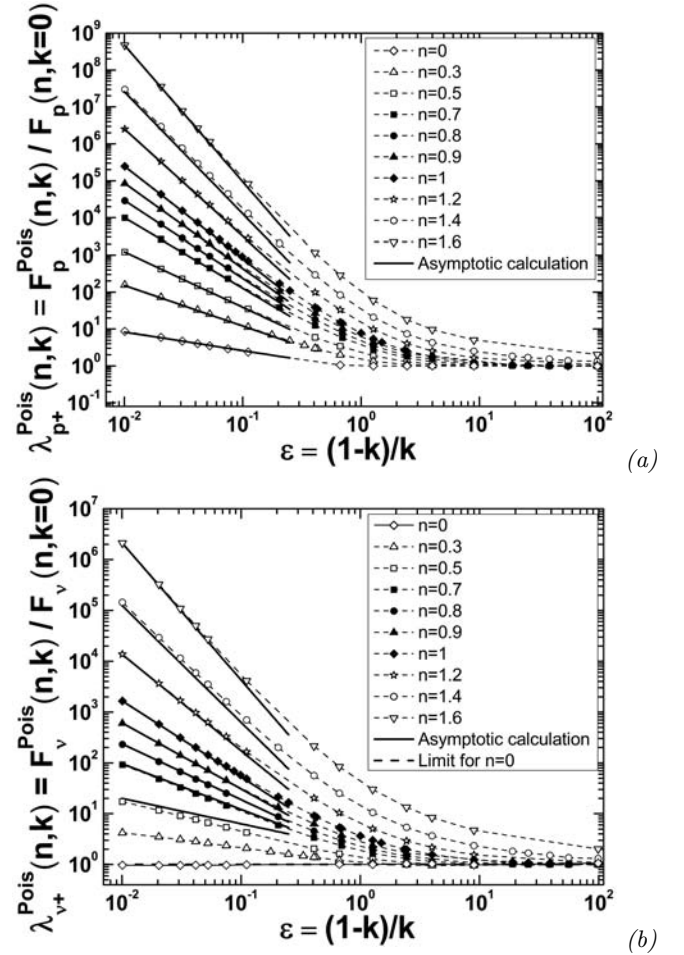


FIG. 12. Evolution of the contributions to the drag correction factor undergone by a sphere in a power-law "Poiseuille flow" (numerical and asymptotical results): (a) pressure contribution $\lambda_{p+}^{Pois}(n, k)$ [Eq. (16)], (b) viscous contribution $\lambda_{v+}^{Pois}(n, k)$ [Eq. (17)].

those obtained by the direct dynamic mesh technique for $0.7 \leq n \leq 1.9$. This fact confirms the validity of our hypothesis of the weak non linearity of the power-law fluid problem in this situation. However, for $n = 0.5$ and $n = 0.3$ (i.e. the low values of n), the dynamic mesh seems to give good results but the superposition method seems not to be usable anymore with the exception of $k \approx 1$. Notice that the accuracy of the calculations gives a good value in the limit of $k \approx 0$ (very dilute regime) where the particle has to move at the same velocity of the unperturbed particle fluid and in the limit of $k \approx 1$ where the particle must move at the same mean fluid velocity in the tube. The results given in Fig. 13 prove finally that the shift of the particle velocity relative to that of the fluid is more important in dilatant fluids and it is reduced for the pseudoplastic fluids in comparison with the Newtonian case. The consequence of these last results is that during the injection process of spherical particles in polymers, the error committed using Tucker's hypothesis³ is reduced when the fluid has a shear-thinning behavior.

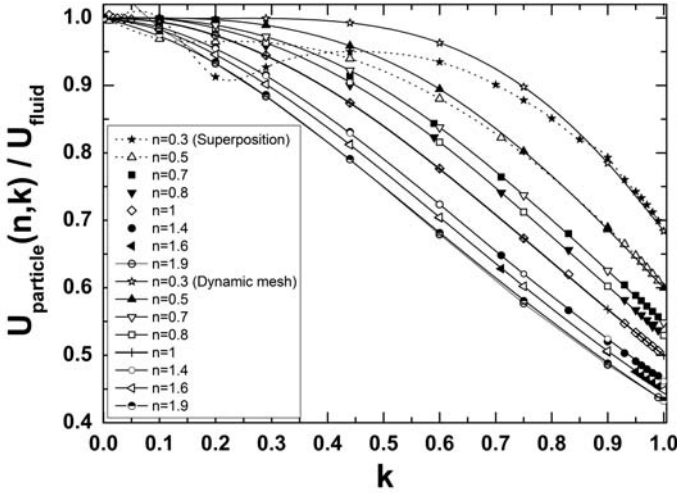


FIG. 13. Evolution of the transportation velocity taken by a free non buoyant particle transported in a power-law "Poiseuille flow" normalized by the unperturbed fluid velocity vs. its confinement. This figure shows that the deficit of this transportation velocity increases when the index of the fluid and the confinement grow.

However, for dilatant fluids this error is amplified. The same remark concerning the shift velocity can be applied to the transportation of particles, bubbles or drops in non-Newtonian microfluidics.

V. CONCLUSION

Through this study, we hope to have provided an accurate numerical solution to the Stokes-type problem concerning the drag submitted by a sphere in unbounded and confined power-law fluids. This problem received the attention of many researchers who have not taken into account the high sensitivity to the inertia in dilatant fluids. For comparison, we give some results obtained by the use of the minimum dissipation method. The care to avoid the effect of the inertia led us to show clearly that the Whitehead paradox takes place in the case of a sphere at $n \geq 2$. The successful comparison of the results obtained by different numerical methods and by our asymptotical approach certifies their accuracy. Furthermore the study of the effect of the dilatant or pseudoplastic behavior on hydrodynamic interactions shows clearly that they are reduced in pseudoplastic fluids and enhanced in dilatant ones. The consequences of these results on the transportation of particles are the reduction of the relative velocity with that of the non perturbed fluid particle for pseudoplastic fluids and its increase for dilatant ones. Finally the first striking effect is the very weak nonlinearity of this last problem leading to the validity of the superposition method for all confinements except for very low values of n . The second one is the non monotonic evolution of the sedimentation velocity of a particle versus

its diameter due to the competition between the friction induced by the backflow and the weight of the particle.

Appendix A: Estimation of the drag by the energy method

It is possible to use a variational principle to describe the steady pure viscous power-law fluid for which the apparent viscosity is a function of the second invariant of the rate of deformation tensor as introduced by Tomita²⁹ and developed by Bird³⁰, Johnson³¹ and Berdichevsky³². In fact, under this condition and when the inertia is neglected and external forces derive from a potential, this method formulates that the equations of motion of an incompressible fluid with given boundary conditions, are equivalent to the statement which expresses that the actual motion induces the minimum value of the total energy dissipation. This principle generalizes the Helmholtz-Korteweg one applied for Newtonian fluids to power-law ones^{30,33,34}. In order to obtain an approximate solution for the drag force in an unbounded medium, we use this variational method consisting in the minimization of the energy corresponding to a given parametric stream function ψ verifying the boundary conditions and the continuity equation. This approach currently used seems in this instance to give an estimation of the correction factor for the drag $F(n, k = 0)$ of a sphere translating uniformly in an unbounded medium defined by the following expression:

$$\begin{aligned} \lambda(n, k = 0) &= \frac{F(n, k = 0)}{6\pi m \left(\frac{U_0}{2a}\right)^{n-1} aU_0} \\ &= \frac{2}{3} \frac{(2a)^{n-2}}{mU_0^{n+1}} \int_a^\infty \int_0^\pi \phi r^2 \sin\theta d\theta dr \quad (\text{A1}) \end{aligned}$$

where:

$$\phi = m [2(d_{rr}^2 + d_{\theta\theta}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + d_{r\theta}^2]^{(n+1)/2}$$

is the Rayleigh dissipation function for a power-law fluid and d_{ij} are the rate of deformation tensor components in spherical coordinates, where:

$$\begin{aligned} d_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r}; \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{U_r}{r} + \frac{U_\theta \cot \theta}{r}; \\ d_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (U_r)}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

calculated by the stream function ψ and

$$U_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad U_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

The difficulty to use this principle arises from the non-knowledge of the right ψ , i.e. the velocity field solution to the problem. In this case, we propose the trial parametric stream function:

$$\psi = \frac{U_0}{2} r^2 \sin^2 \theta \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^{\sigma/n} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^{3\sigma/n} \right]$$

The velocity field described by this stream function verifies the boundary conditions on the sphere and in the far field. It verifies the continuity equation and reduces to the Newtonian one for $n = 1$. The value of the σ parameter is determined by the minimization of the function $\lambda(n, k = 0)$ obtained by the application of the minimum of energy dissipation theorem ($\partial\lambda(n, k = 0)/\partial\sigma = 0$).

Appendix B: Asymptotic method

In the limit of the lubrication regime $\varepsilon(\theta)/a \ll 1$ and for very low Reynolds numbers, the dissipation is located principally in the minimum gap remaining between the sphere and the tube (Fig. 14). In this configuration, the drag forces can be calculated from the pressure and viscous forces induced by the backflow. Then, the pressure gradient can be deduced from the power-law "Poiseuille flow" taking place in this gap and given by:

$$\frac{dP}{dx} = \left[\frac{aU_0}{\cos\theta} \frac{1+2n}{n} \right]^n \frac{2m}{[\varepsilon(\theta)]^{2n}} \quad (\text{B1})$$

where $\varepsilon(\theta) = \varepsilon_0 + a(1 - \cos\theta)$ and ε_0 is the minimum gap. Then by integrating the total differential pressure over the interstice, we obtained the pressure force component:

$$\frac{F_p(n, k)}{F(n, k = 0)} = \frac{2^{\frac{2n+1}{2}}}{3} \left[\frac{1+2n}{n} \right]^n \frac{1}{\lambda(n, k = 0)} \times \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n+1)}{2}} \int_0^{X^*} \frac{dX}{(1+X^2)^{2n+1}} \quad (\text{B2})$$

The last integral where $X^* = (a/2\varepsilon_0)^{1/2} \theta$, converges at $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ to:

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n + \frac{1}{2})}{2 \Gamma(2n + 1)}$$

Concerning the viscosity component which is principally due to the integral of the shear stress induced by the backflow:

$$\frac{F_v(n, k)}{F(n, k = 0)} = \frac{2^{\frac{2n+1}{2}}}{3} \left[\frac{1+2n}{n} \right]^n \frac{1}{\lambda(n, k = 0)} \times \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-\frac{(4n-1)}{2}} \int_0^{X^*} \frac{dX}{(1+X^2)^{2n}} \quad (\text{B3})$$

The last integral here converges at $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ to:

$$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(2n)}$$

which is valid only for $n > 1/4$. Then the total force is the sum of each component.

The similar calculations are made in the case of the power-law "Poiseuille flow" but the backflow must be replaced by the flow rate of the power-law "Poiseuille flow".

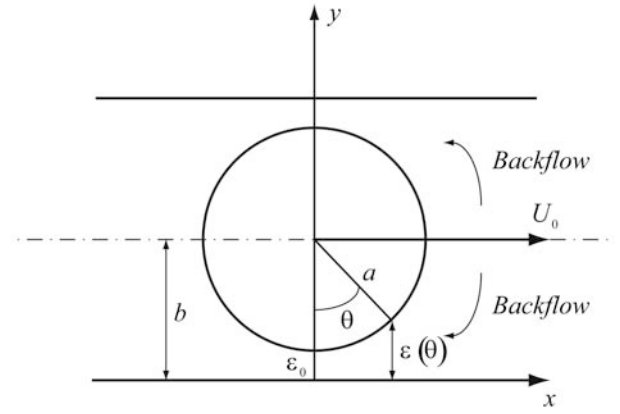


FIG. 14. Sketch of the annular lubrication domain between a sphere and the tube where the backflow takes place.

- ¹R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber, *Bubbles, drops and particles* (Academic Press, 1978).
- ²P. J. Carreau, D. C. R. De Kee, and R. P. Chhabra, *Rheology of polymeric systems: principles and applications* (Hanser Gardner Publications, 1997).
- ³C. L. Tucker, "Flow regimes for fiber suspensions in a narrow gap," *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.* **39**, 239–268 (1991).
- ⁴B. W. Roberts and W. L. Olbricht, "The distribution of freely suspended particles at microfluidic bifurcations," *A.I.Ch.E.J.* **52**, 199–206 (2006).
- ⁵M. T. Blom, E. Chmela, R. Tijssen, J. G. E. Gardeniers, M. El-wenspoek, and A. van den Berg, "Design and fabrication of a hydrodynamic chromatography chip," *Sens. Actuator B* **82**, 111–116 (2002).
- ⁶S. Eyal and S. R. Quake, "Velocity-independent microfluidic flow cytometry," *Electrophoresis* **23**, 2653–2657 (2002).
- ⁷R. P. Chhabra, *Bubbles, drops and particles in non-Newtonian fluids* (CRC Press, 2006).
- ⁸A. Ambari, B. Gauthier-Manuel, and E. Guyon, "Wall effects on a sphere translating at constant velocity," *J. Fluid Mech.* **149**, 235–253 (1984).
- ⁹R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids*, 2nd ed., Vol. 1 (Wiley, New York, 1987).
- ¹⁰A. Ambari, C. Deslouis, and B. Tribollet, "Coil-stretch transition of macromolecules in laminar flow around a small cylinder," *Chem. Eng. Commun.* **29**, 63–78 (1984).
- ¹¹P. G. de Gennes, *Scaling concepts in polymer physics* (Cornell University Press, London, 1979).
- ¹²P. G. de Gennes, "Coil-stretch transition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients," *J. Chem. Phys.* **60**, 5030–5042 (1974).
- ¹³E. J. Hinch, "Mechanical models of dilute polymer solutions for strong flows with large polymer deformations," in *Colloque Intern. CNRS: polymère et lubrification* (Brest, France, 1974) pp. 241–247.
- ¹⁴A. Acharya, R. A. Mashelkar, and J. Ulbrecht, "Flow of inelastic and viscoelastic fluids past a sphere - 1. drag coefficient in creeping and boundary-layer flows," *Rheol. Acta* **15**, 454–470 (1976).
- ¹⁵M. Guala and A. Stocchino, "Large-scale flow structures in particle-wall collision at low Deborah numbers," *Eur. J. Mech. B/Fluids* **26**, 511–530 (2007).
- ¹⁶A. M. Ardekani, R. H. Rangel, and D. D. Joseph, "Motion of a sphere normal to a wall in a second-order fluid," *J. Fluid Mech.* **587**, 163–172 (2007).
- ¹⁷A. N. Whitehead, "Second approximations to viscous fluid motion," *Quart. J. Pure Appl. Math.* **23**, 143–152 (1889).
- ¹⁸E. Marušić-Paloka, "On the Stokes paradox for power-law fluids," *Z. Angew. Math. Mech.* **81**, 31–36 (2001).

- ¹⁹G. Dazhi and R. I. Tanner, "The drag on a sphere in a power-law fluid," *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.* **17**, 1–12 (1985).
- ²⁰K. A. Missirlis, D. Assimacopoulos, E. Mitsoulis, and R. P. Chhabra, "Wall effects for motion of spheres in power-law fluids," *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.* **96**, 459–471 (2001).
- ²¹A. Tripathi and R. P. Chhabra, "Drag on spheroidal particles in dilatant fluids," *A.I.ChE.J.* **41**, 728–731 (1995).
- ²²A. Ben Richou, A. Ambari, and J. K. Naciri, "Correction factor of the stokes force undergone by a sphere in the axis of a cylinder in uniform and poiseuille flows," *Eur. Phys. J. Phys.* **24**, 153–165 (2003).
- ²³R. Peyret and T. D. Taylor, *Computational Methods for fluid flow* (Springer-Verlag, 1985).
- ²⁴L. Quartappelle, "Vorticity conditioning in the computation of two dimensional viscous flows," *J. Comput. Phys.* **40**, 453–477 (1981).
- ²⁵D. W. Peaceman and H. H. Rachford, "The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation," *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **3**, 28–44 (1955).
- ²⁶J. Douglas and J. E. Gunn, "A general formulation of alternating direction method," *Num. Mathematik* **6**, 428–453 (1964).
- ²⁷S. P. Frankel, "Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations," *Math. Tables Aids compt.* **4**, 65–75 (1950).
- ²⁸J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics: with special applications to particulate media* (Springer, 1983).
- ²⁹Y. Tomita, "On the fundamental formula of non-newtonian flow," *Bull. Japan. Soc. Mech. Engrs.* **2**, 469–474 (1959).
- ³⁰R. B. Bird, "New variational principle for incompressible non-newtonian flow," *Phys. of Fluids* **3**, 539–541 (1960).
- ³¹M. W. Johnson, "Some variational theorems for non-newtonian flow," *Phys. of Fluids* **3**, 871–878 (1960).
- ³²V. L. Berdichevsky, *Variational Principles of Continuum Mechanics*, Vol. I. Fundamentals (Springer, 2009).
- ³³H. L. F. von Helmholtz, *Verhandl. Naturhist.-med.* **ser.5**, 223–230 (1868).
- ³⁴D. J. Korteweg, *Phil. Mag.* **16**, 112–118 (1883).



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics

journal homepage: <http://www.elsevier.com/locate/jnnfm>

Wall effects on the transportation of a cylindrical particle in power-law fluids

A. Despeyroux, A. Ambari*, A. Ben Richou

Arts et Métiers ParisTech, 2 bd du Ronceray, Angers 49035, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 4 May 2011

Received in revised form 16 June 2011

Accepted 12 July 2011

Available online 23 July 2011

Keywords:

Power-law fluid

Cylinder

Stokes-type force

Hydrodynamic interactions

Non-Newtonian fluids

Stokes' paradox

ABSTRACT

The present work deals with the numerical calculation of the Stokes-type drag undergone by a cylindrical particle perpendicularly to its axis in a power-law fluid. In unbounded medium, as all data are not available yet, we provide a numerical solution for the pseudoplastic fluid. Indeed, the Stokes-type solution exists because the Stokes' paradox does not take place anymore. We show a high sensitivity of the solution to the confinement, and the appearance of the inertia in the proximity of the Newtonian case, where the Stokes' paradox takes place. For unbounded medium, avoiding these traps, we show that the drag is zero for Newtonian and dilatant fluids. But in the bounded one, the Stokes-type regime is recovered for Newtonian and dilatant fluids. We give also a physical explanation of this effect which is due to the reduction of the hydrodynamic screen length, for pseudoplastic fluids. Once the solution of the unbounded medium has been obtained, we give a solution for the confined medium numerically and asymptotically. We also highlight the consequence of the confinement and the backflow on the settling velocity of a fiber perpendicularly to its axis in a slit. Using the dynamic mesh technique, we give the actual transportation velocity in a power-law "Poiseuille flow", versus the confinement parameter and the fluidity index, induced by the hydrodynamic interactions.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Mechanical properties of plastics are enhanced by the addition of fibers which can take different aspects. In particular, short fibers filled thermoplastics are often employed in the injection of composite materials processes. The mechanical properties of the composite parts obtained depend on the kinematics of the process flow. In turn, this kinematics depends on the rheological properties of the suspension, which itself relies on the dynamics of each particle. This dynamics has to take into account of their hydrodynamic interactions with the wall of the container and with other particles. Indeed, these effects are often neglected in modeling despite the high concentrations used in industrial processes. This commonly used hypothesis (which is true only in dilute regime) leads to the wrong estimation of the real velocity of transportation and rotation of the particle, particularly in concentrated regime. Let us also recall that these interactions control the orientation distribution function of fibers, which is not discussed here. In fact, the effect of these interactions has been tackled by many researchers, as Seppehr et al. [1]. But in this study, due to the complexity of the problem, we tried to give a physical understanding of the effect of these interactions in a power-law fluid, which can induce a more or less high range of the screen length velocity field, controlled through the fluidity index. Then, the first step to understand these

interactions leads us to study the basic hydrodynamics related to the transportation of an individual circular cylindrical particle in a confined situation. The justification of the use of this model in Newtonian fluids at high concentration has been made by Champmartin and Ambari [2]. To do so, we have chosen a simple model constituted by an infinitely long circular cylinder of radius a , translating uniformly midway perpendicularly to its axis, between two parallel plane walls distant of $2b$ (Fig. 1). It is important to recall that some viscoelastic fluids are able to act on the structure formation in suspensions [3,4]. In the present study, as the elongational strain rates upstream and downstream of the particle are low enough (low Deborah number), we are concerned in a first step only by the effect of the shear thinning or shear thickening behavior on these hydrodynamic interactions, in a non-Newtonian suspending fluid. In this case, the rheology of the suspending fluid is approximated by the most commonly used Ostwald–de Waele law.

First of all, in an unlimited medium, there is no solution for the Stokes equation for a cylinder in Newtonian fluid [5–7]. The consequence of this paradox is that the drag per unit length of the cylinder tends towards zero when $Re \rightarrow 0$ as confirmed by Lamb's solution [7]. $F_x^{Lamb} = 4\pi\mu U_x / [1/2 - \gamma + \ln(8/Re)]$ with $\gamma = 0.5772 \dots$ the Euler constant. Nevertheless, we showed in Newtonian fluid that the Stokes-type solution is obtained in the confined medium at low Reynolds numbers. Otherwise, the Stokes-type solution is also obtained for a finite length rod in the approximation of the slender body theory given by Batchelor [8]. Besides, when the suspending fluid exhibits a shear thinning or shear thickening non-Newtonian rheology, the hydrodynamic screen length is strongly

* Corresponding author. Tel.: +33 241207362; fax: +33 241207362.

E-mail addresses: ambari@ensam.eu, abdelhak.ambari@angers.ensam.fr (A. Ambari).

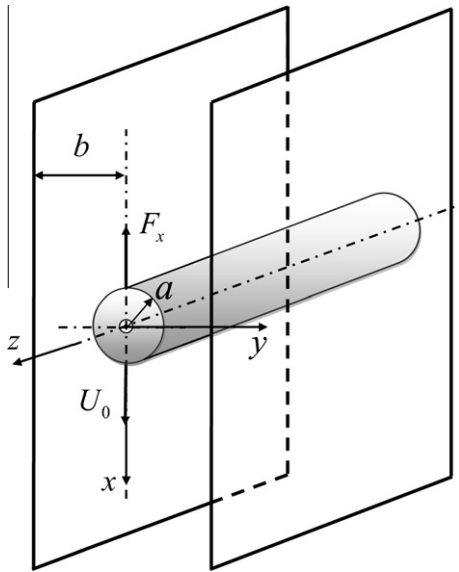


Fig. 1. Sketch of the motion of a cylinder perpendicularly to its axis in the midplane position between two parallel walls.

affected. Then, as we will see, in the shear thinning case, the localization of the flow near the cylinder leads to expect the disappearance of the Stokes' paradox for $n < 1$ as the confinement does. However, in the Newtonian and shear thickening fluids, the increase of the long range hydrodynamic perturbation around a cylinder should imply the existence of Stokes' paradox. The first person expecting this behavior was Tanner [9] followed by Marušić-Paloka [10].

Finally, in this study, we are dealing with the evaluation of the drag undergone by a cylindrical particle, transported through a power-law fluid in confined media at low Reynolds numbers. Then, we provide an accurate calculation of the effect of the hydrodynamic interactions numerically and asymptotically.

Taking into account of all these results, and particularly the sensitivity to the inertia, we will give a study on the drag submitted by a cylinder in a confined situation and we will calculate the relative velocity of the transportation of a free cylindrical particle in a power-law "Poiseuille flow".

2. Mathematical formulation and numerical approach

2.1. Mathematical formulation

The problem we are dealing with is the flow of a fluid around a cylinder, of radius a , falling midway and parallel to two planes distant of $2b$, shown schematically in Fig. 1. For easiness of the calculations, it is assumed that the cylinder is set and both walls are moving with the fluid velocity $-U_0 \mathbf{e}_x$. In fact, as the apparent viscosity of the power-law fluid does not depend on the sign of the velocity gradient, both procedures are equivalent. The flow is governed by the usual conservation equations for mass and momentum under isothermal conditions, i.e.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \rho(\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}} \end{cases}$$

where ρ is the fluid density, p the pressure and $\underline{\underline{\tau}}$ the extra-stress tensor for the power-law fluid. At very low generalized Reynolds numbers $Re_n = \rho U_0^{2-n} (2a)^n / m$, the governing equations are written in a dimensionless form using the following dimensionless variables: $x = x^*/a, y = y^*/a, \mathbf{V} = \mathbf{V}^*/U_0, t = t^*/\tau_v, p = ap^*/\mu_{ap0} U_0, \mu_{ap} = \mu_{ap}^*/\mu_{ap0}, \psi = \psi^*/a^2 U_0$ and $\omega = \omega^* U_0 / a$ where $\mu_{ap0} = m(U_0/a)^{n-1}$

and $\tau_v = \rho a^2 / \mu_{ap0}$ is the characteristic time of vorticity diffusion and the superscript (*) represents the dimensional quantities. Under these conditions the problem is controlled by the three following parameters: the aspect ratio $k = a/b$ which is the geometrical confinement parameter, the power-law fluidity index n and the generalized Reynolds number Re_n . At low Reynolds numbers, these equations can be expressed in the stream function ψ and vorticity ω formulation as:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{Re_n}{2^n} \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \mu_{ap} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + 2 \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_{ap}}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + S \quad (1)$$

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (2)$$

where,

$$S = 2 \frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu_{ap}}{\partial y^2} \right)$$

$$\mu_{ap} = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{(n-1)/2}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{and} \quad \omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

The velocity boundary conditions become:

- (i) on the plane walls: $\mathbf{V}(x, y = \pm 1/k, t) = -\mathbf{e}_x$. Thus $\psi(x, y = b/a) = b/a$;
- (ii) on the cylinder, the no-slip boundary condition $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ on the fixed cylinder conducts to $\psi(x, y) = \text{Cst}$ for all points (x, y) of the circular profile;
- (iii) upstream and downstream, the flow is uniform of velocity $\mathbf{V}(x, y \rightarrow \pm \infty, t) = -\mathbf{e}_x$. Thus $\psi(x \rightarrow \pm \infty, y) = y$ and $\omega(x \rightarrow \pm \infty, y) = 0$.

2.2. Numerical method

To compute solutions for ψ and ω corresponding to the flow around a cylindrical particle, the governing Eqs. (1) and (2) are rewritten in a curvilinear and orthogonal frame (X, Y) matching perfectly the boundaries of the cylinder and the walls [11]. Using the singularities method we generate a conformal mapping from curved borders to a rectangular one. This grid is built with the equipotential lines $X(x, y) = \text{Cst}$ and streamlines $Y(x, y) = \text{Cst}$, corresponding to the flow of an inviscid fluid (see Fig. 2, given here for the confinements $k = 0.99$ and $k = 0.44$) [11]. The meshing is performed using a combination of the singularities method and the finite differences technique.

The computation of the stream and vorticity functions equations is carried out by the finite differences method using the successive over-relaxation (SOR) and the alternating direction implicit (ADI) techniques [12–16] respectively to calculate the functions ψ and ω of the fluid. For a given confinement parameter k , once the stream function and the vorticity have been obtained, the dimensionless wall correction factor of the drag $\lambda(n, k)$ exerted by the fluid on the particle, is obtained by the normalization of the actual force by the characteristic one $F_0 = 4\pi m(U_0/2a)^{n-1} U_0$ (Eq. (3)). The total actual drag is computed by integrating the viscous and pressure stresses over the surface of the cylinder:

$$\lambda(n, k) = F(n, k) / F_0$$

For the computation, we used a sixteen parallelized core cluster and we successfully checked the influence of the spatial resolution for

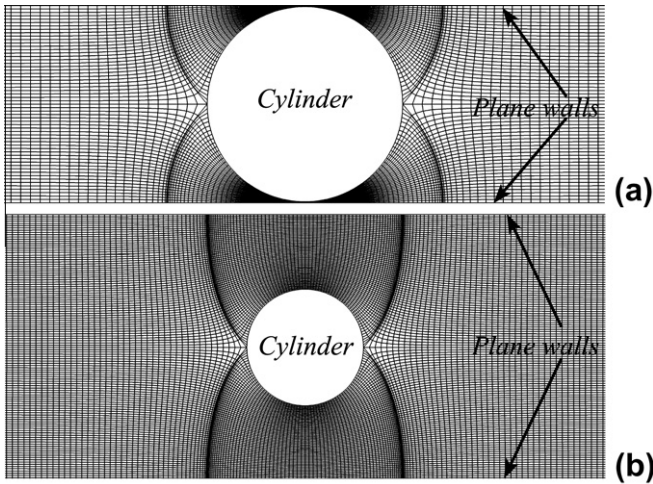


Fig. 2. The orthogonal grid structure for different aspect ratios: (a) $k = 0.99$, (b) $k = 0.44$ corresponding to the equipotential and the streamlines.

each confinement. The convergence of the computation is supposed to be reached when the following criterion is checked:

$$\left| 1 - \lambda^l(n, k) / \lambda^{l+1}(n, k) \right| < 10^{-6}$$

2.3. Alternative numerical method

To validate this numerical method, we verified the numerical results by the use of the finite volume CFD code FLUENT, where the SIMPLE algorithm was employed with a second order scheme on a structured mesh. The convergence criteria used is the same as the one used previously. All the data obtained by this CFD code corroborate our numerical technique. Thus, the accuracy of the two numerical methods is mutually confirmed.

3. Stokes-type force in unbounded medium

In this problem, we give first the results concerning the unbounded medium and why the problem is sensitive to the inertia when Stokes' paradox would take place. So, when the "Stokes-type solution" exists, it is not difficult to establish, using dimensional analysis, that the correction factor $\lambda(n, k)$ of the force undergone by the cylinder translating at a constant velocity in the midplane (Fig. 1) is given by:

$$\mathbf{F}(n, k) / l = -4\pi m \left(\frac{U_0}{2a} \right)^{n-1} U_0 \lambda(n, k) \mathbf{e}_x \quad (3)$$

where $k = a/b$ is the confinement factor, m and n are respectively the consistency coefficient ($\text{Pa } s^n$) and the power-law index of the fluid corresponding to the following constitutive equation:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2m|2d_{kl}|^{(n-1)/2} d_{ij} \quad (4)$$

where σ_{ij} are the Cauchy stress tensor components, $d_{ij} = \frac{1}{2}(V_{ij} + V_{ji})$ are the rate of deformation tensor components and p the pressure. To normalize the results, we calculated numerically, in unbounded medium, the correction factor $\lambda(n, k = 0)$ using the numerical method presented in Sections 2.1 and 2.2. In fact, the correction factor for the drag in unbounded medium for a cylindrical particle $\lambda(n, k = 0)$ has not received as much attention as in the case of a spherical particle. In the Fig. 3, we compared the numerical results to those obtained first by Tanner [9] (who used a perturbation method). His first results, for $k = 0$, are in agreement with the present numerical results only for $0.7 \leq n < 1$. But his second results, obtained by the

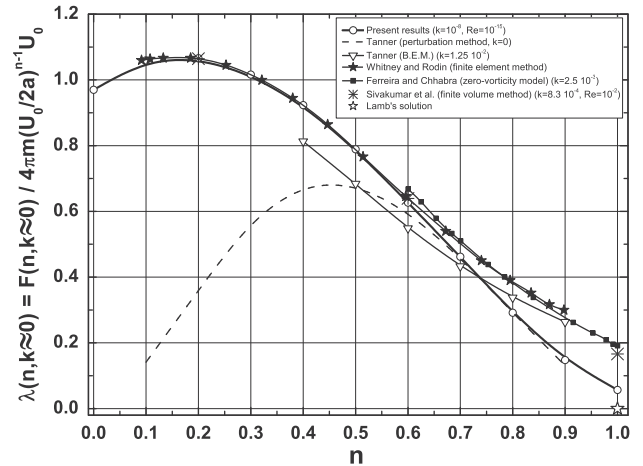


Fig. 3. Comparison between the present numerical results and those obtained previously by different authors.

boundary element method for $k \approx 10^{-2}$, are not in accordance with the present results. Ferreira and Chhabra ($k = 2.5 \cdot 10^{-3}$) [17], who give values for $0.6 \leq n < 1$, overestimate the calculation of $\lambda(n, k = 0)$, probably due to the effect of the confinement, as we will show in this section. Whitney and Rodin [18], using finite element method, also overestimate the calculation of this correction factor for $0.6 \leq n \leq 0.9$, but give numerical results in good accordance with the present ones, for $0.1 \leq n < 0.6$, as shown in this same figure. Similar results have been obtained by Sivakumar et al. [19] and are added on the Fig. 3. Faced to this situation, we try to give an accurate numerical result, taking into account of the difficulty related to the influence of the confinement and the inertia which appears earlier at low generalized Reynolds numbers for $n \approx 1$. In fact, for low values of n ($n = 0.6$), we show in the Fig. 4a that the inertia appears at relatively high Reynolds numbers (at $Re_n = 10^{-1}$, we deviate from the plateau regime), and the low confinement needed to achieve the unbounded medium is at least about 10^{-3} . Indeed, due to the inhomogeneity of the viscosity, the non-inertial regime takes place while we do not leave the plateau regime. Contrary to the previous case, for $n = 0.9$, which is in the vicinity of the Newtonian case, the Fig. 4b shows that the inertia takes place above $Re_n = 10^{-6}$. This fact is due to the increase of the sensitivity to the inertia in the proximity of the critical point where the Stokes' paradox takes place. Faced to both results, it is easy to understand why low values of the confinement and the Reynolds number are needed to obtain an unbounded medium, as shown in the Fig. 5. Thus, the overestimation of the correction factor may be due either to the higher confinement or the higher generalized Reynolds number. This same figure shows also that the drag force is not zero for $n \geq 1$ for relatively high confinements, in contrary to the expected results in this range of n where the Stokes' paradox takes place and the drag force must be zero. This result shows that the Stokes type force exists in this last range in a bounded medium, as in the Newtonian case. The proof of this result is given in the Fig. 4c, showing that the plateau regime can be achieved. Moreover, for information only, in the Fig. 5, we also give the values of $\lambda(n, k = 0)$ obtained by the classical minimum of dissipation method which was applied by Tomita [20] and Wasserman and Slattery [21], where the approximate stream function ψ used by Tanner [9] for its perturbation calculation, depending on two parameters (p, q), is employed:

$$\psi = U_0 r \sin \theta \left[1 + \frac{q}{p-q} \left(\frac{r}{a} \right)^p + \frac{p}{p-q} \left(\frac{r}{a} \right)^q \right] \quad (5)$$

The approximate solution for the force in an unbounded medium was obtained by the minimization of the energy dissipation. The

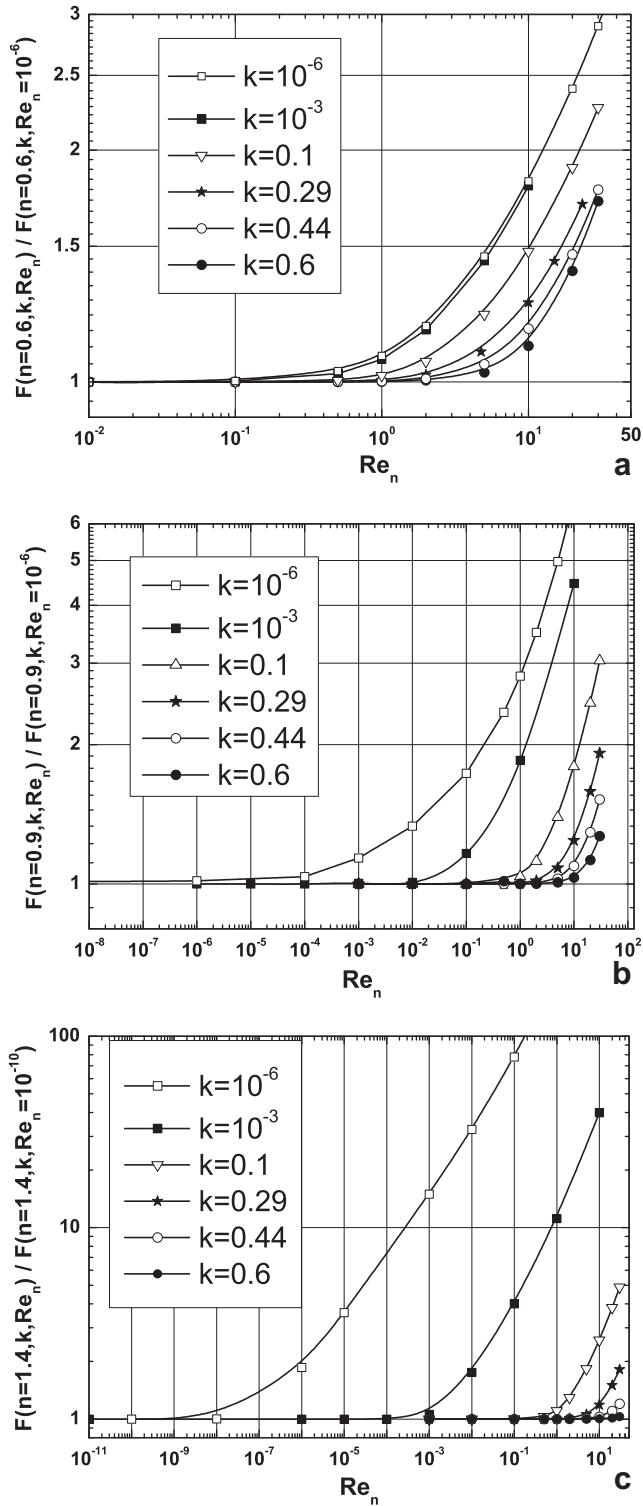


Fig. 4. Influence of the confinement on the critical Reynolds number marking the rise of the inertia: (a) for $n = 0.6$, (b) for $n = 0.9$, (c) for $n = 1.4$.

correction factor for the drag $F(n, k = 0)$ is then given by the following expression:

$$\lambda(n, k = 0) = \frac{(2a)^{n-1}}{2\pi m U_0^{n+1}} \int_a^\infty \int_0^\pi \phi r d\theta dr \quad (6)$$

where:

$$\phi = m[4(d_{rr}^2 + d_{r\theta}^2)]^{(n+1)/2}$$

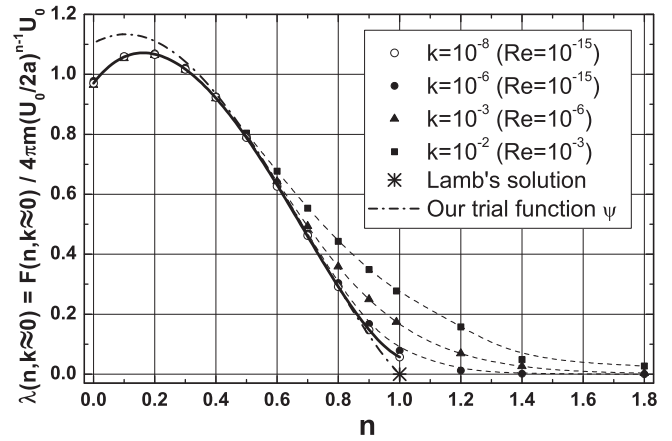


Fig. 5. Correction factor of the drag force undergone by a cylinder versus the index of fluidity n , showing the appearance of a Stokes-type solution due to the removal of the Stokes' paradox in shear thinning fluids and that due to the sensitivity to confinement for $n \geq 1$.

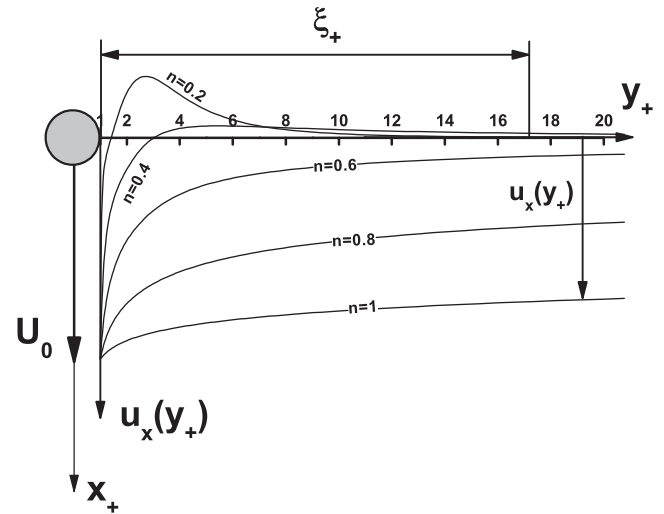


Fig. 6. Evolution of the velocity field and the screen length vs. the radial distance for different indexes n in unbounded medium.

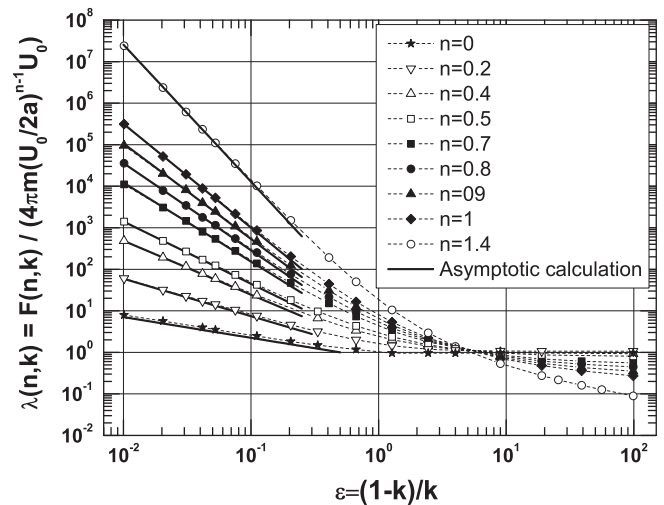


Fig. 7. Evolution of the drag correction factor $\lambda(n, k)$ undergone by a cylinder in a confined medium filled with a power-law fluid (numerical and asymptotical results).

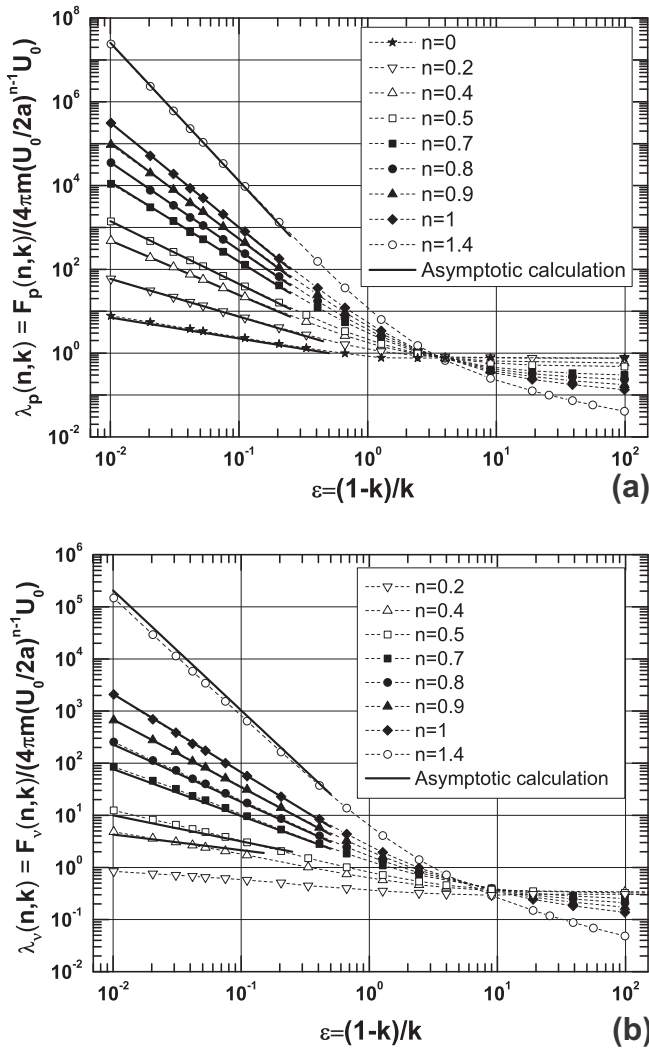


Fig. 8. Evolution of the contributions to the drag correction factor undergone by a cylinder in a confined medium filled with a power-law fluid (numerical and asymptotic results): (a) pressure contribution $\lambda_p(n, k)$, (b) viscous contribution $\lambda_v(n, k)$.

is the Rayleigh dissipation function for a power-law fluid. The minimization of $\lambda(n, k = 0)$ was made by the use of “Mathematica”. For $0.4 \leq n < 1$, this method gives results which are in good agreement with the numerical ones and seems to give more accurate results for $0.9 \leq n \leq 1$, because they converge to the zero-value expected by Lamb’s solution. Unfortunately, the results obtained by this method overestimate slightly the numerical results for $0 \leq n < 0.4$. For this reason, we adopted the numerical procedure.

In conclusion, faced to all the results obtained, we propose a polynomial interpolation formula giving the values of $\lambda(n, k = 0)$ for $0 \leq n \leq 1$:

$$\lambda(n, k = 0) = 0.978 + 1.202n - 4.047n^2 + 1.382n^3 + 1.925n^4 - 2.758n^5 + 1.328n^6 \quad (7)$$

Finally, in unbounded medium, the Fig. 5 shows that the drag force is zero for $n \geq 1$, where the Stokes’ paradox takes place, due to the increase of the hydrodynamic screen length as shown in Fig. 6. This last figure also explains why, for $n < 1$, the Stokes’ paradox disappears as in a bounded medium, due to the decrease of the hydrodynamic screen length. Taking into account of all these results, and particularly the sensitivity to the inertia, we will give a study on the drag submitted by a cylinder in a confined situation,

and we will calculate the relative velocity of the transportation of a free cylindrical particle in a power-law “Poiseuille flow”. But before, let us give some results on the influence of the fluidity index on the sedimentation velocity of a fiber perpendicularly to its axis in two configurations.

4. Sedimentation in power-law fluids

4.1. Cylindrical particles in a uniform bounded flow

We are often concerned by the study of the hydrodynamic interactions between particles and walls as they arise during their sedimentation in Newtonian or non-Newtonian fluids, for example during the injection process of fiber-reinforced thermoplastics. To provide an estimation of the correction factor of this settling velocity, we give in Fig. 7 the correction factor for the drag undergone by a cylindrical particle in confined situation versus the normalized wall distance $\varepsilon = (1 - k)/k = (b - a)/a$ for different fluidity indexes. Taking into account of the previous discussion concerning the sensitivity to the inertia, before any calculation, we verified that we are in the Stokes-type regime. To check the accuracy of the numerical results obtained in this problem, we proceed to an asymptotic approach in the lubrication regime to determine $\lambda(n, k)$ when the diameter of the cylinder becomes very close to the distance between both plane walls ($k \rightarrow 1$). In this situation, all the dissipation is localized in the smallest gap, between the cylinder and the plane walls, of unknown limit (this effect has been confirmed by the numerical calculation of the vorticity in the transversal section of the cylinder). In this case, the drag forces can be estimated from the pressure and viscous forces induced by the backflow. In this Fig. 7, we can show the good agreement between the numerical calculations and the asymptotical ones, formula (8), even in dilatant fluids where the Stokes’ paradox does not take place anymore due to the confinement ($n = 1.4$). We also remark that when n decreases, the drag force is less and less sensitive to the wall hydrodynamic interactions, confirmed by the fact that the more the fluid is shear thinning, the more the screen length decreases (Fig. 6). Given these results, the study of the dynamics of fiber suspensions in non-Newtonian fluids has to take account of these interactions, especially when the fluid is dilatant. But, in pseudoplastic fluids, these interactions are all the more reduced so that n is far smaller than one. In order to evaluate separately the contributions of the pressure and viscosity forces on the total drag, we compared in Fig. 8a and b the numerical and asymptotic calculations of $\lambda_p(n, k)$ and $\lambda_v(n, k)$ (formulas (8) and (9)) which are limited to the first term where ε_0/a is the smallest gap between the cylinder and the walls:

$$\lambda(n, k \rightarrow 1) = \lambda_p(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(4n-1)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \times \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n + 1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n+1)/2}, \quad \text{for } n \geq 0 \quad (8)$$

$$\lambda_v(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(6n-5)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \times \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{\Gamma(2n)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{-(4n-1)/2}, \quad \text{for } n > \frac{1}{4} \quad (9)$$

Both Figs. 8a and b show that for high confinements ($k \approx 1$), the pressure component dominates. In fact, F_p dominates F_v at any confinement in pseudoplastic fluids as in an unbounded medium. In the lubrication limit, we obtain a large pressure drop over the long length of the gap, much higher than the local viscous shear stresses. This pressure is exerted over the entire front and back surfaces of the cylinder, which is an area much greater than the one located in the small gap where the viscous shear stresses act. Thus the

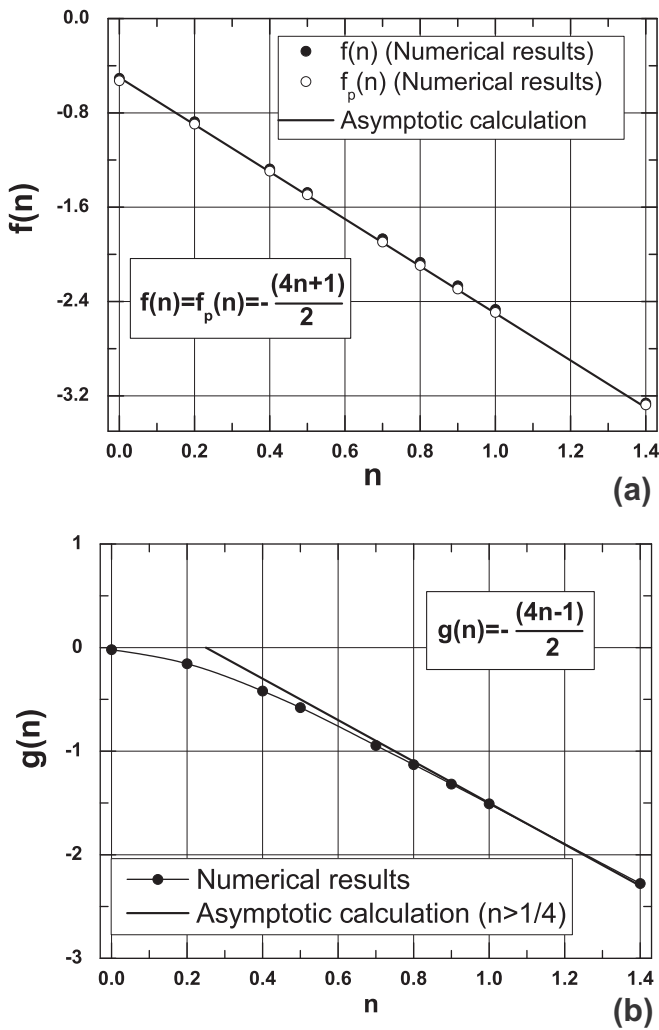


Fig. 9. Comparison of the numerical slopes $f(n)$ and $g(n)$ of the power-law behavior with the asymptotic one: (a) total and pressure drag force, (b) viscosity drag force.

pressure contribution to the drag force dominates the viscous contribution by orders of magnitude. In Fig. 8b, the limit of the asymptotic method to evaluate the viscous force for very low values of n comes from the singular behavior of $\Gamma(x)$ function, which diverges at $x = 0$ corresponding to $n = 1/4$. Besides, the relative contribution of the pressure force over the viscosity one in the lubrication regime can be obtained by the ratio $R(n, k) = F_p(n, k \rightarrow 1) / F_v(n, k \rightarrow 1)$ through the following asymptotic formula:

$$R(n, k) = \frac{F_p(n, k \rightarrow 1)}{F_v(n, k \rightarrow 1)} = \frac{\lambda_p(n, k)}{\lambda_v(n, k)} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{4n-1}{n} \right) \left(\frac{\epsilon_0}{a} \right)^{-1}, \quad \text{for } n > \frac{1}{4} \quad (10)$$

Finally, in Fig. 9a, we give a comparison of the exponent $f(n)$ of the power-law behavior of $\lambda_p(n, k) = \lambda(n, k) \propto (\epsilon_0/a)^{f(n)}$ corresponding to the numerical results and the exponent expected theoretically by the asymptotical approach: $f(n) = -(4n + 1)/2$. The good agreement confirms again the accuracy of both approaches. At the same time, we also compare in Fig. 9b the exponent $g(n)$ of the power-law variation $\lambda_v(n, k) \propto (\epsilon_0/a)^{g(n)}$ to those predicted by the asymptotic calculation $g(n) = -(4n - 1)/2$. In this curve, the slight deviation at low values of indexes of fluidity is due to the weakness of the estimation of the viscosity component by the asymptotic approach which probably needs the calculation of the higher order terms in

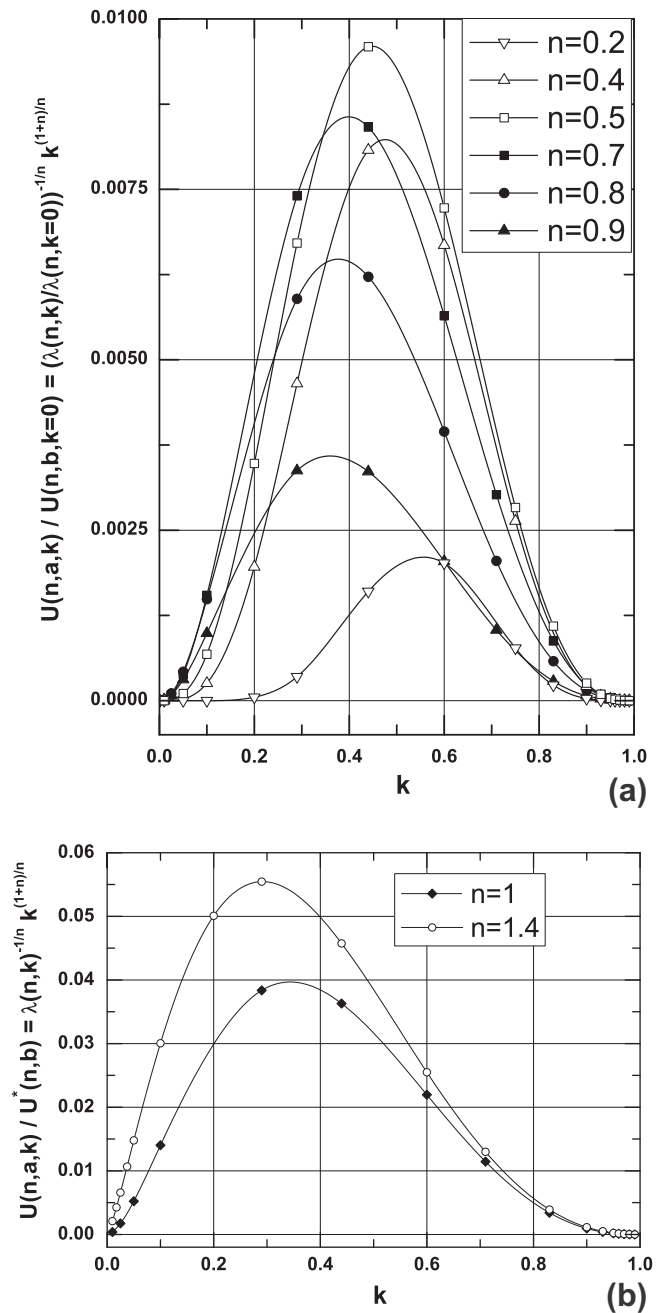


Fig. 10. Evolution of the normalized sedimentation velocity of a cylinder in a given container filled with a power-law fluid vs. its confinement factor k : (a) when the Stokes' paradox does not take place, (b) when the Stokes' paradox appears in unbounded medium.

this range of n . In fact, for very shear-thinning fluids, those with $n < 0.25$, the very high shear rates in the thin gap make the thinned viscosity negligibly small. In this condition, the leading contribution to the viscous stresses no longer comes from the small gap, but comes from the region away from the gap. Nevertheless, the numerical values remain accurate. In fact, for $n = 0$, $g(n)$ must be equal to zero because $\lambda_v(n = 0, k)$ is constant and equal to the value we obtained for the flow of a Bingham fluid at very high Bingham numbers as in an unbounded medium. At this step, we will give some applications of these results. The first one concerns the effect of the backflow on the settling velocity of a cylindrical particle in power-law fluids for a fixed distance between two walls. The second one concerns the sedimentation of a given cylindrical particle in a bounded medium for different confinements.

4.2. Effect of the backflow on the particle settling velocity for different diameters in a given container

We consider a slit of rectangular cross section constituted by two parallel planes positioned at fixed distance $2b$ and cylindrical particles of different diameters $2a$ which are settling down perpendicularly to the gravity vector (Fig. 1). If this cylindrical particle is very long and highly confined, it has been established that the end effects are negligible [2,22]. For pseudoplastic fluids, for which the Stokes' type solution exists, we study the influence of the fluidity (n) and the backflow on the settling velocity. We plot in Fig. 10a the normalized sedimentation velocity by that achieved in an infinite medium $U(n, b, k = 0)$ by a cylindrical particle of radius b , where the density difference is held constant:

$$\frac{U(n, a, k)}{U(n, b, k = 0)} = \left(\frac{\lambda(n, k = 0)}{\lambda(n, k)} \right)^{1/n} k^{(n+1)/n} \tag{11}$$

$$\text{with } U(n, b, k = 0) = \left(\frac{2^{n-3}}{\lambda(n, k = 0)} \frac{\Delta \rho g b^{n+1}}{m} \right)^{1/n} \tag{12}$$

In this curve, we show that, for a given distance between the parallel walls $2b$, the sedimentation velocity of a cylindrical particle passes through a maximum for a critical diameter value $2a_{cr}$. This striking effect is physically due to the competition between the increase of the particle weight as a^2 and the hydrodynamic friction generated by the backflow which is proportional to $a\lambda(n, a/b)$. At very low confinements ($k \approx 0$), as the weight dominates, the asymptotic curve in the vicinity of $k = 0$ is a power-law of the confinement: $\alpha(n, k) \propto k^{(n+1)/n}$. However, for high confinements ($k \approx 1$), the asymptotic Eq. (8) gives us the asymptotic behavior:

$$\frac{U(n, a, k)}{U(n, b, k = 0)} \sim A(n)(1 - k)^{(4n+1)/2n} \tag{13}$$

where

$$A(n) = \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left[\lambda(n, k = 0) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(4n-1)/2}} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} \right]^{1/n}$$

In the pseudoplastic fluid, as the backflow depends on the fluidity index n , we observe that the more n decreases from one to zero, the more the critical position of the maximum increases (Fig. 11a). Indeed, for lower values of n , the backflow needs only a very low gap between the particle and the wall because of the decrease of its hydrodynamic screen length (Fig. 6). The other noticeable effect is that the maximum of the settling velocity corresponding to this critical situation varies non-monotonically, passing through an optimum value for $n = 0.55$. Besides, in the conditions where the Newtonian or dilatant fluid is confined, a solution of the Stokes-type exists but in an unbounded medium, the drag force is zero due to the fact that the Stokes' paradox takes place. In these conditions, the Fig. 10b shows the same behavior for the settling velocity as discussed above except the fact that the normalization is made by the use of a characteristic velocity $U^*(n, b)$ corresponding to a cylindrical particle of radius b :

$$\frac{U(n, a, k)}{U^*(n, b)} = \lambda(n, k)^{-1/n} k^{(n+1)/n} \tag{14}$$

where

$$U^*(n, b) = \left(\frac{2^{n-3} \Delta \rho g b^{n+1}}{m} \right)^{1/n} \tag{15}$$

The consequence of these results is that during the sedimentation of polydisperse suspension, we expect fluctuations of settling velocity of each particle, all the more larger so that the confinement is important.

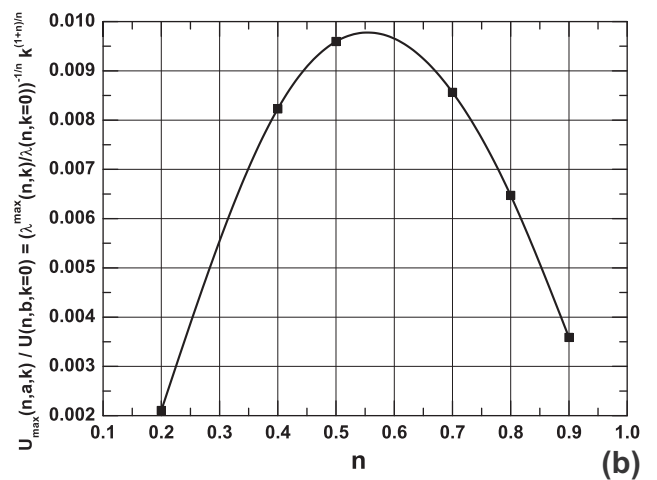
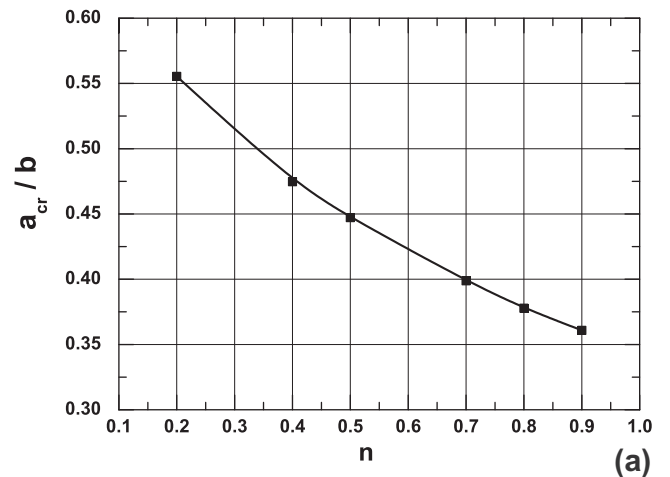


Fig. 11. (a) Evolution of the normalized critical radius of a cylinder sedimenting at its maximum velocity vs. the index n , (b) Evolution of the maximum normalized sedimentation velocity vs. the fluid index n .

Otherwise, to study the influence of the concentration on the settling velocity for a pseudoplastic fluid, we give in Fig. 12, for $0.4 \leq n < 1$, the evolution of the effect of the confinement on the sedimentation velocity of a given cylindrical particle in a slit of rectangular cross section constituted by two parallel walls at different distances $2b$. These results show that when the fluid becomes slightly shear thinning, the sedimentation velocity of fibers decreases strongly with the confinement. But this decrease is reduced when the fluid becomes more shear thinning ($n \ll 1$).

5. Effect of the confinement on the transportation velocity-shift

In order to verify the validity of the assumption commonly used in some studies concerning the transportation of fibers (in injection processes for example), which consists in the free particle and the unperturbed fluid having the same velocity [23], we study the transportation velocity of a free non-buoyant cylindrical particle in the power-law fluid flow induced by a pressure gradient ΔP in a slit of aperture $2b$. This hypothesis must be acceptable in dilute regime but as the concentrations used in industry are high, we expect that the hydrodynamic interactions coupled to the nonlinear rheological behavior induce a shift of this velocity which has not been studied yet to our knowledge. As the problem is fundamentally nonlinear, the determination of the real transportation velocity of the particle constitutes a nonlinear inverse problem which is difficult to solve. For these reasons, we first used a dynamic mesh

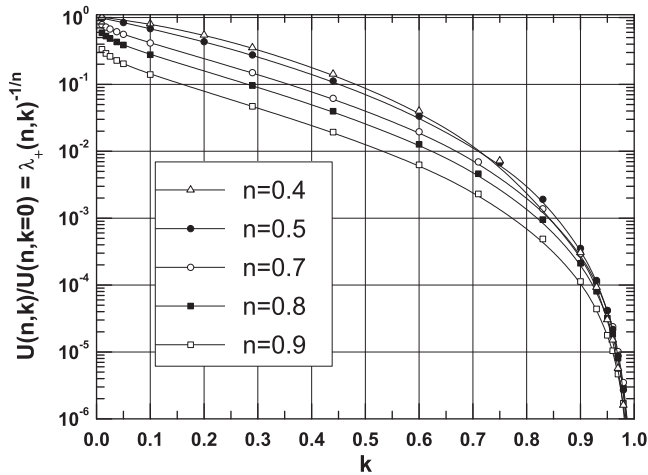


Fig. 12. Evolution of the settling velocity of a confined cylindrical particle, relative to the velocity achieved in unbounded medium.

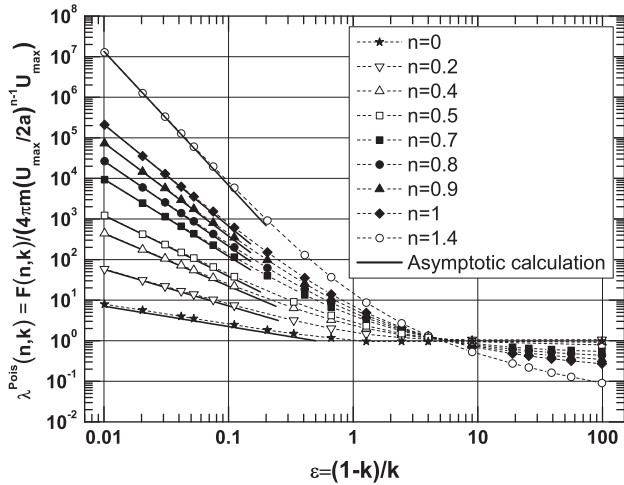


Fig. 13. Evolution of the drag correction factor $\lambda^{Pois}(n, k)$ undergone by a confined cylinder in the “Poiseuille type flow” of a power-law fluid (numerical and asymptotical results).

method described below. Even if the problem seems to be nonlinear, we tried to verify the validity of the use of the superposition of states.

5.1. Dynamic mesh method

To solve numerically this inverse problem, we used the dynamic mesh method available in the CFD FLUENT code. The numerical resolution used here is the same as described in Section 2.3. This dynamic mesh technique implies, for each time step, the rigid motion (which can be a translation or a rotation) of some boundaries relative to others. The mesh is then adjusted according to the new position of the moving boundaries. In this case, due to the symmetry and the invariance of the kinematics of the flow under translation, the dynamic mesh technique consists only in moving the mesh cells with the particle in order to avoid any deformation of the grid. The procedure used to solve this inverse problem consists in the determination of the translation velocity needed to be superposed to the unperturbed power-law fluid flow at which the drag force applied to the cylinder is reduced to zero corresponding to the free motion of the cylindrical particle. This critical velocity constitutes the actual transportation velocity shift.

5.2. Cylindrical particle in a “Poiseuille” flow

In the assumption of a very weak nonlinearity, the second method consists in the use of the superposition technique (as for Newtonian fluids [24]). The use of this method needs to determine the drag force undergone by a cylindrical particle placed in the symmetry plane in a power-law “Poiseuille cross flow”. The fluid is driven by a pressure gradient $\Delta P/L$ corresponding to an imposed velocity profile, solution of the laminar flow of a power-law fluid in a slit, at the upstream and the downstream of the cylinder (avoiding the entrance effects):

$$u_x(y) = U_{max} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{(1/n)+1} \right] e_x \tag{16}$$

where U_{max} is the maximum value taken by the velocity in the power-law “Poiseuille flow”. In these conditions, the forces exerted on a cylinder can be also written as:

$$F^{Pois}(n, k)/l = 4\pi m \left(\frac{U_{max}}{2a} \right)^{n-1} U_{max} \lambda^{Pois}(n, k) e_x \tag{17}$$

In this section, to calculate the drag force, we used the same formulation and numerical method as described in Section 2, with an

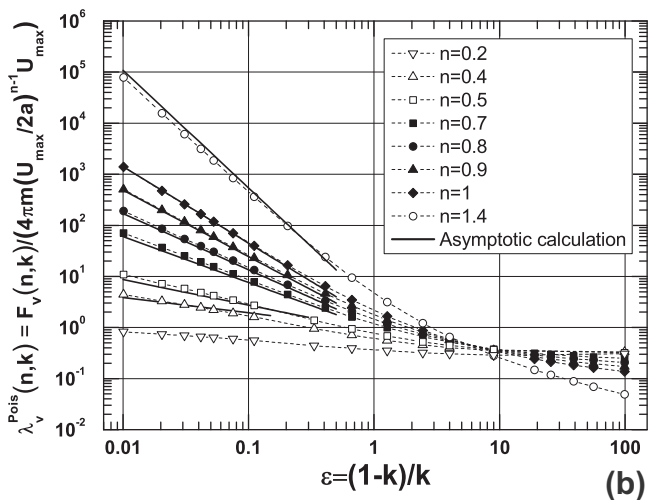
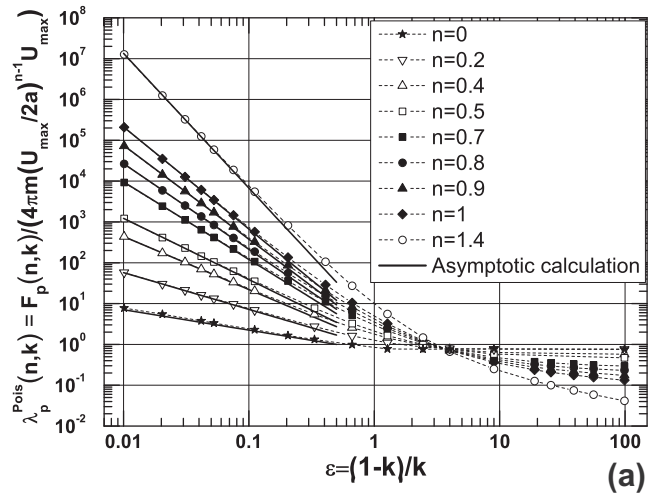


Fig. 14. Evolution of the contributions to the drag correction factor undergone by a confined cylinder in the “Poiseuille type flow” of a power-law fluid (numerical and asymptotical results): (a) pressure contribution $\lambda_p^{Pois}(n, k)$, (b) viscous contribution $\lambda_v^{Pois}(n, k)$.

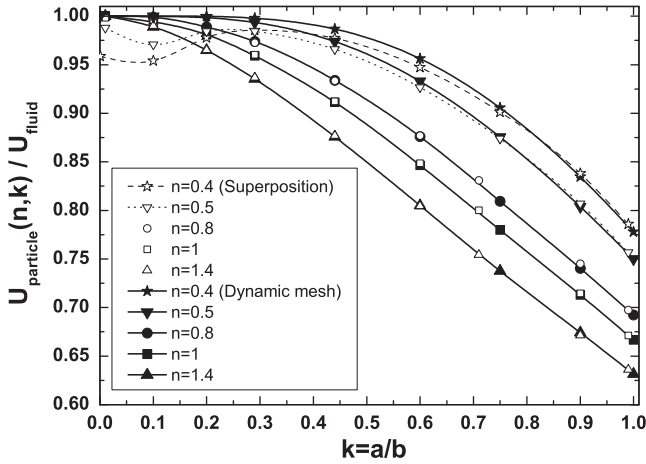


Fig. 15. Evolution of the velocity taken by a cylindrical particle transported in a “Poiseuille type flow” of a power-law fluid normalized by the unperturbed fluid velocity vs. its confinement.

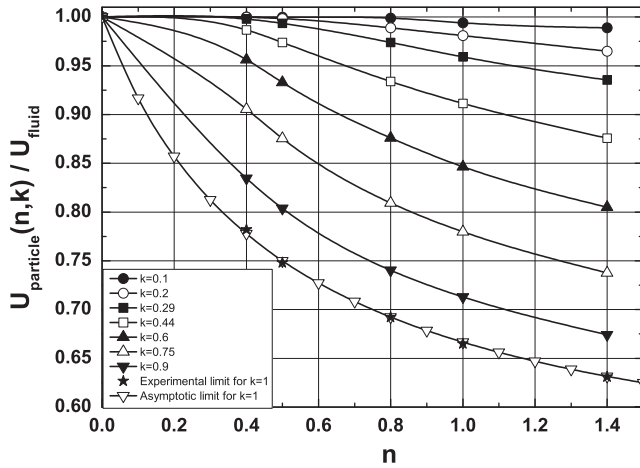


Fig. 16. Evolution of the velocity taken by a cylindrical particle transported in a “Poiseuille type flow” of a power-law fluid normalized by the unperturbed fluid velocity vs. its fluidity index n .

imposed velocity profile given in the formula (16) upstream and downstream far from the cylinder. In Fig. 13, we plotted the correction factor of the drag $\lambda^{Pois}(n, k)$. In the same way, the components of the pressure $\lambda_p^{Pois}(n, k)$ and the viscosity $\lambda_v^{Pois}(n, k)$ are given respectively in Fig. 14a and b. The successful comparison with the asymptotic formulas (18), (19) in this power-law “Poiseuille flow” confirms again the accuracy of the numerical results.

$$\lambda_p^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \lambda_v^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(4n-1)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a}\right)^{-(4n+1)/2}, \quad \text{for } n \geq 0 \quad (18)$$

$$\lambda_v^{Pois}(n, k \rightarrow 1) = \frac{2^{(6n-5)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{\Gamma(2n)} \left(\frac{\varepsilon_0}{a}\right)^{-(4n-1)/2}, \quad \text{for } n > \frac{1}{4} \quad (19)$$

Nevertheless, the same remarks as in the uniform flow concerning the range of n of validity of the viscosity component of the drag can be applied here. Otherwise, the same plot analysis concerning the slopes $f(n)$ and $g(n)$ given in the Fig. 9a and b is obtained for the power-law “Poiseuille flow”.

Finally, if the superposition of states was permitted, then the flows corresponding respectively to the uniform and the power-law “Poiseuille flow” can be superposed to determine the translation velocity of a free particle at which the drag force is zero.

$$F_x/l = -4\pi m \left(\frac{U_{particle}}{2a}\right)^{n-1} U_{particle} \lambda(n, k) + 4\pi m \left(\frac{U_{max}}{2a}\right)^{n-1} U_{max} \lambda^{Pois}(n, k) = 0 \quad (20)$$

Then, the transportation velocity of the free particle normalized by the velocity of the unperturbed fluid at the symmetry plane of the slit $U_{fluid} = U_{max}$ in the power-law “Poiseuille flow” is plotted against the confinement factor in Fig. 15. For all fluidity indexes n , the velocity shift of the particle increases with the confinement (i.e. the concentration) due to the hydrodynamic interactions with the plane walls. Otherwise, it is surprising that the results obtained by the superposition method are in good agreement with those obtained by the direct dynamic mesh technique for $0.7 \leq n \leq 1.4$. This fact confirms the validity of the hypothesis of the weak nonlinearity of the power-law fluid problem. However, for $n = 0.5$ and $n = 0.4$ (i.e. the low values of n), the dynamic mesh seems to give good results but the superposition method seems not to be usable anymore with the exception of $k \approx 1$. In fact, in the Fig. 16, where we give this shift velocity versus the index of fluidity for different confinements, we can show that the accuracy of the calculation can be proved by the good value obtained in the limit of $k \approx 0$ (very dilute regime). We show also that in the limit of $k \approx 1$, the particle moves at the same mean fluid velocity in the slit in which:

$$\frac{U_{particle}}{U_{fluid}} = \frac{n+1}{2n+1} \quad (21)$$

The results in Fig. 15 prove finally that the shift of the particle velocity relative to that of the fluid is more important than the Newtonian fluid in dilatant fluids but it is reduced for high concentrations in pseudoplastic fluids when the fluid becomes more and more shear thinning. The consequence of these last results is that during the injection of the fibers in polymers, the error committed using Tucker’s hypothesis is reduced for very low values of n . However, for dilatant fluids, this error is amplified. These remarks concerning the shift of velocity can be applied to the transportation of any particle in non-Newtonian fluids having a shear thinning or shear thickening behavior.

6. Conclusion

In this study, we provided a numerical solution to the Stokes-type problem concerning the drag submitted by a cylinder in a power-law fluid. Indeed, once the sensitivity to the inertia and the confinement has been clarified, we showed that in a pseudo-plastic unbounded medium, the Stokes-type solution exists due to the fact that the Stokes’ paradox does not take place anymore. Then, we give numerical results for this problem, for which all the data are not available yet. At this occasion, we give a physical explanation of this surprising effect which is due to the “virtual hydrodynamic confinement” of the flow induced by the reduction of the hydrodynamic screen length when $n < 1$. Besides, in dilatant fluids, we show that the drag force in unbounded medium is zero due to the Stokes’ paradox which still takes place for $n \geq 1$. This is due to the increase of the screen length for Newtonian and dilatant fluids. When the problem is confined geometrically, we showed that the drag force is not anymore zero due to the existence of the Stokes-type solution as established in the Newtonian case [2]. Otherwise, once the solution for the unbounded medium is established, we give a solution for the confined medium

numerically and asymptotically. The successful comparison, which confirms the validity of the calculation, leads us to give a solution of the settling of a fiber perpendicularly to the gravity vector, and particularly in a given slit. Using the dynamic mesh technique, we solved the inverse nonlinear problem consisting on the determination of the shift velocity of a non-buoyant cylindrical particle conveyed by a power-law “Poiseuille flow”, induced by the hydrodynamic interactions. These results show that, the more n decreases, the more the shift velocity is reduced in comparison to the Newtonian case. To verify the strength of the nonlinearity of this problem, we compare the numerical results with those obtained by the technique of superposition which is valid only for very weak nonlinearities. This assumption seems to be acceptable only for large values of n . The consequence of this last result on the transportation of particles is that during the injection process of fibers, the attenuation of the relative velocity with that of the non-perturbed fluid particle for pseudoplastic fluids reduces the effect of hydrodynamic interactions.

References

- [1] M. Sepehr, G. Ausias, J.P. Carreau, Rheological properties of short fibers filled propylene in transient shear flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 123 (2004) 19–32.
- [2] S. Champmartin, A. Ambari, Kinematics of a symmetrically confined cylindrical particle in a stokes-type regime, *Phys. Fluids* 19 (2007) 073303-1–073303-11.
- [3] M.K. Lyon, D.W. Mead, R.E. Elliot, L.G. Leal, Structure formation in moderately concentrated viscoelastic suspensions in simple shear flow, *J. Rheol.* 45 (4) (2001) 881–890.
- [4] R. Scirocco, J. Vermant, J. Mewis, Effect of the viscoelasticity of the suspending fluid on structure formation in suspensions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 117 (2004) 183–192.
- [5] G.G. Stokes, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Camb. Philos. Soc.* 9 (II) (1851) 8–106.
- [6] C.W. Oseen, Über die stokesche formel und ber eine verwandte aufgabe in der hydrodynamic, *Ark. Mat. Astron. Fys.* 6 (1) (1910) 29.
- [7] H. Lamb, On the uniform motion of a sphere through a viscous fluid, *Philos. Mag.* 21 (121) (1911) 112–121.
- [8] G.K. Batchelor, Slender-body theory for particles of arbitrary cross section in stokes flow, *J. Fluid Mech.* 44 (3) (1970) 419–440.
- [9] R.I. Tanner, Stokes paradox for power-law flow around a cylinder, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 50 (1993) 217–224.
- [10] E. Marušić-Paloka, On the stokes paradox for power-law fluids, *Z. Angew. Math. Mech.* 81 (1) (2001) 31–36.
- [11] A. Ben Richou, A. Ambari, J.K. Naciri, Drag force on a circular cylinder midway between two parallel plates at very low reynolds numbers – part 1: Poiseuille flow (numerical), *Chem. Eng. Sci.* 59 (2004) 3215–3222.
- [12] R. Peyret, T.D. Taylor, *Computational Methods for fluid flow*, Springer-Verlag, 1985.
- [13] L. Quartappelle, Vorticity conditioning in the computation of two dimensional viscous flows, *J. Comput. Phys.* 40 (1981) 453–477.
- [14] D.W. Peaceman, H.H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 3 (1955) 28–44.
- [15] J. Douglas, J.E. Gunn, A general formulation of alternating direction method, *Num. Mathematik* 6 (1964) 428–453.
- [16] S.P. Frankel, Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, *Math. Tables Aids Comput.* 4 (1950) 65–75.
- [17] J.M. Ferreira, R.P. Chhabra, Analytical study of drag and mass transfer in creeping power law flow across tube banks, *Ind. Eng. Chem. Res.* 43 (2004) 3439–3450.
- [18] M.J. Whitney, G.J. Rodin, Force-velocity relationships for rigid bodies translating through unbounded shear-thinning power-law fluids, *Int. J. Non-Linear Mech.* 36 (2001) 947–953.
- [19] P. Sivakumar, R.P. Bharti, R.P. Chhabra, Steady flow of power-law fluids across an unconfined elliptical cylinder, *Chem. Eng. Sci.* 62 (2007) 1682–1702.
- [20] Y. Tomita, On the fundamental formula of non-newtonian flow, *Bull. Japan. Soc. Mech. Eng.* 2 (1959) 469–474.
- [21] M.L. Wasserman, J.C. Slattery, Upper and lower bounds on the drag coefficient of a sphere in a power-law fluid, *AIChE J.* 10 (1964) 383–388.
- [22] B. semin, J.P. Hulin, H. Auradou, Influence of flow confinement on the drag force on a static cylinder, *Phys. Fluids* 21 (2009) 103604.
- [23] C.L. Tucker, Flow regimes for fiber suspensions in a narrow gap, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 39 (1991) 239–268.
- [24] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics: with special applications to particulate media*, Springer, 1983.

*The drainage of non-Newtonian fluids
in the quasi-steady motion of a sphere
towards a plane*

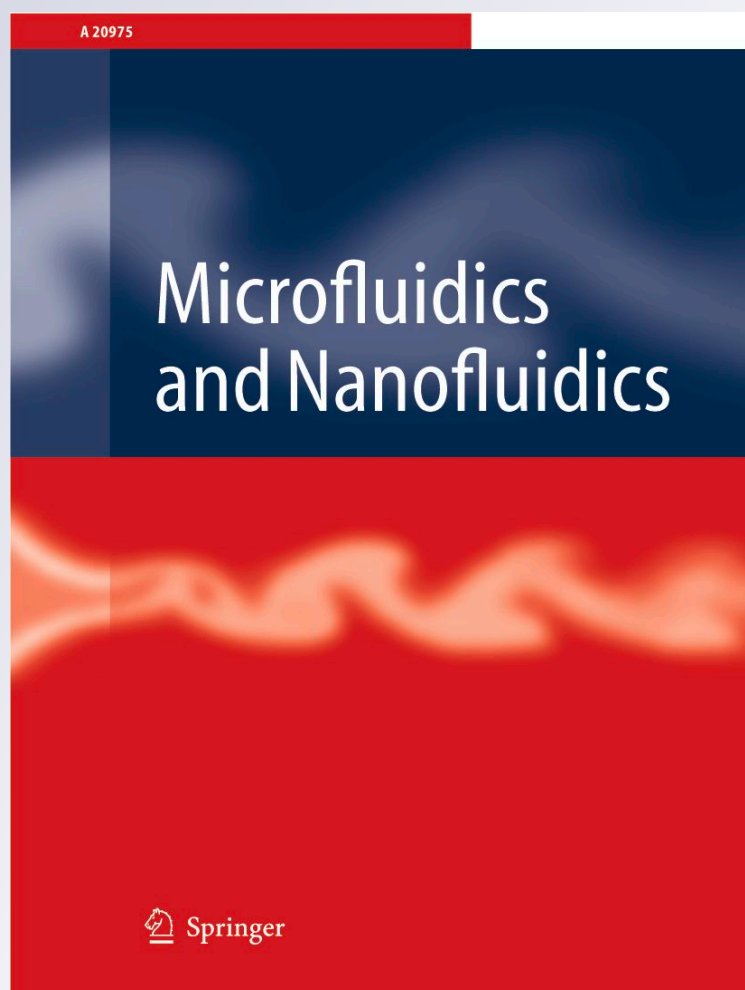
A. Despeyroux & A. Ambari

Microfluidics and Nanofluidics

ISSN 1613-4982

Microfluid Nanofluid

DOI 10.1007/s10404-011-0906-2



Your article is protected by copyright and all rights are held exclusively by Springer-Verlag. This e-offprint is for personal use only and shall not be self-archived in electronic repositories. If you wish to self-archive your work, please use the accepted author's version for posting to your own website or your institution's repository. You may further deposit the accepted author's version on a funder's repository at a funder's request, provided it is not made publicly available until 12 months after publication.

The drainage of non-Newtonian fluids in the quasi-steady motion of a sphere towards a plane

A. Despeyroux · A. Ambari

Received: 17 July 2011 / Accepted: 18 September 2011
© Springer-Verlag 2011

Abstract In the lubrication limit, the time needed for the drainage of the liquid film between two particles or between particles and walls is of industrial importance, because it controls the dynamics and aggregation of non-dilute suspensions. This problem is also of fundamental interest in the application of the dynamic surface force apparatus to nanorheology. Even if this problem has an exact solution in Newtonian fluid when the sphere moves steadily and slowly towards or away from a plane wall, this problem remains, to our knowledge, without any exact analytical solution in non-Newtonian fluids with negligible viscoelastic components. But Rodin, using the method of asymptotic expansions, gives an asymptotic solution to this problem in the lateral unbounded power-law fluid. Therefore, in this study, we give a numerical result using the dynamic mesh technique and an asymptotic analytical formula valid in the lubrication regime, for a fluidity index $0.5 < n \leq 1.8$. The comparison between the two results confirms their mutual validity.

Keywords Dynamic surface force apparatus · Non-Newtonian fluids · Power-law fluids · Sphere towards a plane · Hydrodynamic interactions

List of symbols

a Radius of the sphere, m
 b Radius of the tube, m
 \underline{D} Rate of strain tensor, 1/s
 \mathbf{e}_z Unit vector in z -direction, dimensionless
 \mathbf{F} Drag force undergone by the sphere in z -direction, N

h Minimum distance between the sphere and the plane, m
 k = a/b , lateral confinement coefficient, dimensionless
 m Consistency of the fluid, Pa.sⁿ
 n Fluidity index of the power-law fluid, dimensionless
 p Pressure, Pa
 r Radial coordinate, m
 r_+ = r/a , reduced radial coordinate, dimensionless
 Re_n Generalized Reynolds number, dimensionless
 U Sphere velocity, m/s
 z Axial coordinate, m

Greek symbols

δ Perpendicular correction factor of the drag force undergone by a sphere approaching a plane, dimensionless
 ε = h/a , normalized minimum distance between the sphere and the plane, dimensionless
 ε_1 = $a\varepsilon + a(1 - \cos \theta)$, local distance between the sphere and the plane, m
 η Newtonian viscosity, Pa.s
 ν Kinematic viscosity, m²/s
 θ Angular coordinate, rad
 ρ Fluid density, kg/m³
 $\underline{\underline{\tau}}$ Stress tensor, Pa

1 Introduction

The interactions between solid particles in dispersions are mainly due to the hydrodynamic drainage processes as long as the distance between the macroscopic surfaces in liquid are above 10–15 nm (Bhushan 2010). In fact, due to the smaller value of the Hamaker constants for molecular interaction in liquid than in vacuum (Bhushan 2010), the Van der Waals forces go into action in a very thin layer (10–15 nm). Outside of this zone, the hydrodynamic

A. Despeyroux · A. Ambari (✉)
 Arts et Métiers ParisTech, 2 bd du Ronceray,
 49035 Angers, France
 e-mail: ambari@ensam.eu

drainage of the liquid between particles controls their approach until the other molecular forces take over, as in the coagulation of colloids (Hocking 1973; Potanin et al. 1988). In another field, recent applications of dynamic surface force apparatus (DSFA) in nanorheology (Restagno et al. 2002) need the knowledge of this kind of hydrodynamic interaction. The study of the adherence properties of a liquid near a solid interface i.e. the flow boundary condition and the role of hydrophobization of a solid surface on the fluid/wall slippage, is carried out by the use of a DSFA which consists of the measure, in the quasi-steady and oscillatory regime, of the hydrodynamic force undergone by a sphere moving towards one flat wall (Cottin-Bizonne 2003). The use of this DSFA as a nanorheometer is very promising and needs the knowledge of the relation between the hydrodynamic force undergone by a sphere and its displacement towards the plane in the lubrication approximation for Newtonian and non-Newtonian fluids (Cottin-Bizonne 2003; Luengo et al. 1997; Horn et al. 2000). Moreover, the time needed for the contact of two spheres in Newtonian or non-Newtonian fluid plays an important role in the aggregation and the formation of the plug flow during the transport of suspensions. Another application concerns the particle–particle or particle–wall collision in non-Newtonian fluids, which takes place in particle-laden flows (Stocchino and Guala 2005; Guala and Stocchino 2007; Ardekani et al. 2009; Marston et al. 2010). Therefore, this study deals with the calculation of the Stokes-type law correction factor, for the hydrodynamic resistance of a sphere of radius a moving at steady velocity U , towards or away from a plane wall in power-law fluids.

As carried out by the DSFA, we will focus on the case where the moving velocity U is maintained constant during the approach to the rigid plane (at fixed low Reynolds number) in incompressible Newtonian or power-law fluid of a given apparent viscosity, which is dependent only on the strain rate. Under this condition, as the geometry of the problem changes over time, due to the linear variation of the distance $h = \varepsilon a$ between the sphere and the plane wall in time, we assume first that a quasi-steady solution applies, and the added mass force and the history force are irrelevant in this configuration.

The condition of quasi-static flow was expressed by Cox and Brenner (1967) as $\varepsilon Re \ll 1$ where $Re = 2aU/\nu$ and ν the kinematic viscosity. This condition can be found by assuming that the velocity field in the gap induced by the relative motion of the sphere with respect to the wall must establish itself in a characteristic time shorter than the unsteady convective time $\varepsilon a/U$.

In lateral unbounded Newtonian fluid, this correction factor $\delta(\varepsilon)$ has been calculated analytically by Brenner (1961) and Maude (1961). They used bipolar coordinates

which had been first employed by Stimson and Jeffery (1926).

$$\mathbf{F}(\varepsilon) = -6\pi\eta a U \delta(\varepsilon) \mathbf{e}_z \tag{1}$$

The asymptotic expansion of their formula for small gap εa between the plane and the sphere is given by Cox and Brenner (1967):

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \left(1 - \frac{1}{5} \varepsilon \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 0.9712\varepsilon \right) \tag{2}$$

which is valid for $\varepsilon \leq 0.6$ (see Fig. 3). The first term of this asymptotic expansion is the well-known Taylor law

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \tag{3}$$

which is valid only for $\varepsilon \leq 0.04$ (see Fig. 3). The Brenner formula has been successfully verified experimentally by Ambari et al. (1984b).

However, as far as we know, there are no exact analytical or numerical results concerning the calculation of this perpendicular correction factor of the drag undergone by a sphere translating at constant velocity towards a plane wall in non-Newtonian fluids. In the limit of lubrication, using the asymptotic expansions method, an asymptotic solution is given to this problem by Rodin (1996) in lateral unbounded power-law fluid, for the squeezing motion of two nearly touching rigid spheres (where the case of a sphere moving towards a plane is deduced by setting the radius of one sphere to an infinite value). Then as a first approximation of the non-Newtonian behaviour of the fluid, in this study, we try to give a numerical and asymptotical solution for this problem, using the Reynolds lubrication equations, in power-law fluids whose behaviour can be described by the following constitutive equation. Note that this model constitutes one type of generalized Newtonian fluid whose apparent viscosity depends only on its second invariant of the strain tensor.

$$\underline{\underline{\tau}} = 2 \left[m \left(\sqrt{2\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} \right)^{n-1} \right] \underline{\underline{D}} \tag{4}$$

where $\underline{\underline{\tau}}$ is the stress tensor and $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U})$ is the strain rate tensor, m the power-law consistency coefficient (Pa s^n) and n the fluidity index of the power-law fluid (called Ostwald–de Waele fluid). For shear flow, Eq. (4) is reduced to $\tau_{xy} = m \dot{\gamma}^n$ where $\dot{\gamma} = \partial u_x / \partial y$ is the shear rate. In this case, the apparent viscosity is given by $m \dot{\gamma}^{n-1}$. When $n < 1$, this apparent viscosity decreases, the fluid is called shear thinning or pseudoplastic; for $n > 1$, the apparent viscosity increases and the fluid is called shear thickening or dilatant. For $n = 1$, the fluid has a Newtonian behaviour. In fact, in this particular case of the calculation of the hydrodynamic drag experienced by a particle moving towards a plane, the force is due to the drainage effect in the lubrication regime. In this condition, the non-

Newtonian behaviour which dominates in this drainage flow may be of a power-law type (for many non-Newtonian fluids). This is due to the weakness of the elongational velocity gradient (induced by the very low moving velocity of the particle in DSFA), which is able to arouse the viscoelasticity of the fluid. In fact, in this work, we consider non-Newtonian fluid with a relaxation time much lower than the inverse of the maximum of the normal and radial elongational velocity gradient (low Deborah numbers); located in the vicinity of the stagnation point, the effect of the viscoelasticity is negligible (de Gennes 1974; Hinch 1974; Ambari 1979). Under this condition, the behaviour of the fluid in this almost Poiseuille-type flow (viscometric one) can be modelled in first approximation by a power-law fluid, which takes account of a possible shear thinning behaviour. Furthermore, recent experimental results on particle–wall collision in polymeric liquids (Guala and Stocchino 2007; Ardekani et al. 2009) confirmed that the viscoelasticity of the fluid was negligible relative to its shear thinning character at low Deborah numbers, supporting the choice of the power-law model in this particular flow. Moreover, as the drag is principally due to the pressure induced by the drainage flow, the shear velocity gradient is limited by its value reached near the axis of symmetry. Indeed, most non-Newtonian fluids exhibit Newtonian plateaus at low and high shear rate, in the evolution of their viscosity with the velocity gradient, and their behaviour can be described by the widely used Carreau–Yasuda model (Carreau et al. 1997). In the present configuration of a sphere approaching a plane in the shear thinning case, as long as the maximum velocity gradient is not included in the possible second Newtonian plateau of the power-law fluid, and as long as the low shear velocity gradient corresponding to the first Newtonian plateau, situated in the extreme vicinity and far from the axis of the sphere, has very little contribution to the calculation of the drag, the Ostwald model can constitute a good approximation. A similar analysis is applicable to shear thickening fluids. Under these conditions, the use of this simple model with only one control parameter which is the fluidity index n , contrary to that of a more realistic model such as Carreau–Yasuda introducing four control parameters (Carreau et al. 1997), enables us to clearly and physically show the influence of the shear thinning and the shear thickening behaviour on the drag undergone by this particle.

2 Formulation and numerical approach

The flow of a fluid around a sphere, of radius a , moving towards a plane at constant velocity $\mathbf{u}_z = -U\mathbf{e}_z$ is shown schematically in Fig. 1. For the needs of the numerical calculations, the sphere moves axially inside a very large

cylindrical tube of radius b towards its bottom. This container is filled with a Newtonian or power-law fluid. For simplicity of the calculations, we consider an equivalent situation where it is assumed that the sphere is set and the walls of the cylinder (bottom, top and lateral walls) move at the velocity $U\mathbf{e}_z$. The flow is governed by the usual conservation equations for mass and momentum under isothermal conditions, i.e.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \\ \rho[\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}] = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \end{cases}$$

where ρ is the fluid density, p is the pressure and $\underline{\underline{\tau}}$ is the stress tensor for the power-law fluid (formula 4). The velocity boundary and initial conditions are:

1. On all the walls of the cylinder: $\mathbf{U} = -U\mathbf{e}_z$;
2. On the sphere: $\mathbf{U} = \mathbf{0}$;
3. For $t \leq 0$ the fluid is at rest: $\mathbf{U} = \mathbf{0}$.

At very low generalized Reynolds numbers $Re_n = \rho U^{2-n} (2a)^n / m$, the calculation of the wall correction factor $\delta(n, \varepsilon)$ of the drag experienced by a sphere translating towards a plane in the axis of the tube can be expressed by the following expression, which can be obtained by dimensional analysis:

$$\mathbf{F}(n, \varepsilon) = -6\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} aU\delta(n, \varepsilon)\mathbf{e}_z \quad (5)$$

where $\varepsilon = h/a$ is the normalized distance between the sphere and the wall. Let us recall that we gave an accurate numerical solution (Despeyroux et al. 2011) to the problem concerning the drag force undergone by a sphere in power-law fluids in unbounded medium, whose results had not been definitively established in non-inertial regime and particularly for dilatant fluids. The polynomial interpolation formula which gives correct values of this coefficient with an average relative error less than 1% for $0 \leq n \leq 1.8$ is given by:

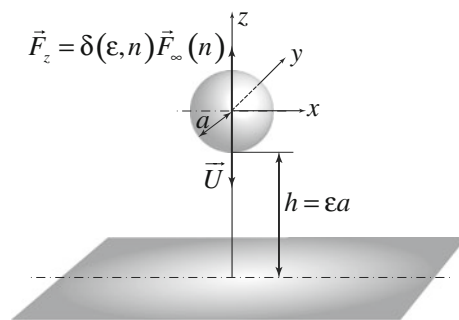


Fig. 1 Geometrical and hydrodynamical parameters for a sphere moving towards a plane

$$\delta(n, \varepsilon = \infty) = 1.1909 + 1.9781n - 4.9165n^2 + 7.3332n^3 - 8.7174n^4 + 5.7425n^5 - 1.8380n^6 + 0.22818n^7 \tag{6}$$

To obtain a solution for this problem whose geometry changes over time, it is not possible to use the steady classical numerical method. For this reason, we used the dynamic mesh method in the finite volume CFD FLUENT code where the SIMPLE algorithm was employed with a second-order scheme. These computations are carried out on a structured mesh, and a nonstructured one only in the vicinity of the stagnation point of the sphere to ensure a homogeneous fixed mesh size during the deformation of the mesh. In fact, this dynamic mesh technique implies, for each time step, the rigid motion of the bottom of the container towards the boundary of the sphere. The mesh is then adjusted according to the new position of the moving boundaries. In our case, in the rectangular mesh zone near the bottom, the dynamic layering removes layers of cells adjacent to the moving boundary, based on the height of the layer adjacent to the moving surface. In fact, the cell is split or merged with the layer of cell next to it when its layer attains a critical height. The minimum gap which can be reached through this procedure is the minimum thickness of the nonstructured mesh zone at the stagnation point of the sphere ($\varepsilon = 10^{-3}$). For this computation, we used a 16-core cluster. The convergence of the computation at each step l is supposed to be reached when the following criterion is verified: $|1 - \delta^l(n, \varepsilon) / \delta^{l+1}(n, \varepsilon)| < 10^{-6}$. Let us recall that a 100 iterations are used for each time step. Moreover, it is noticeable that as we are concerned only with a bounded shear stress τ_{rz} corresponding to a bounded shear rate $0 \leq \dot{\gamma}_{rz} \leq \dot{\gamma}_{rzmax}$ in this particular flow, where $\dot{\gamma}_{rzmax}$ is reached all the closer to the minimum gap as the sphere approaches the plane, there is no singularity in the shear stress even if the apparent viscosity described by this model mathematically diverges for zero shear rate. Indeed, as the zones where the velocity gradient is negligible do not introduce a significant contribution to the calculation of the drag, we proceeded to a verification of the effect of a truncated Ostwald model at low and high velocity gradients as in the Carreau–Yasuda model (Carreau et al. 1997), with a variation of the apparent viscosity over three decades in accordance with most rheological experiments (Carreau et al. 1997). Then the variation we imposed was centred around the value corresponding to the mean velocity gradient. As seen in Fig. 7 in Sect. 4.2, the results corresponding to this truncated Ostwald model remain the same as those obtained using the complete Ostwald model. To check the validity of the results obtained by the numerical method employed in this study, we proceeded to their comparison with those obtained by the exact solution in Newtonian fluid and an asymptotic approach in the limit of the lubrication regime in non-Newtonian fluid.

3 Asymptotic approach

When the sphere moves towards the plane, in the limit of the lubrication regime $\varepsilon \ll 1$ (see Fig. 2) and for very low Reynolds numbers, the dissipation would be located principally in the minimum gap remaining between the sphere and the plane. In this configuration, the drag force undergone by a sphere can be calculated from the pressure force induced by the radial drainage flow (Cox 1974; Vinogradova 1995). Otherwise, in this limit, Rodin (1996) gave an asymptotic solution for the squeezing motion of two nearly touching rigid spheres (S_1 of radius a and S_2 of radius βa) in a power-law fluid. To solve this problem, he used the asymptotic expansions of the axisymmetric Stokes stream function and the asymptotic problem was analyzed in nondimensional stretched coordinates. He calculated the solution to the pressure for different values of the $\alpha = (1 + \beta)/2\beta$ parameter and deduced the drag submitted by each sphere by integrating the pressure transmitted by a horizontal circle of radius a centred at the origin. Concerning our configuration of the sphere settling towards a plane, we took $\beta \rightarrow \infty$ then $\alpha = 1/2$. When we replace this α value in his expression for the pressure, we obtain this radial distribution of the pressure:

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{m \left(\frac{U}{2a}\right)^n} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{2^{2+3n}}{1+3n}\right) (r_+)^{-(1+3n)} \times {}_2F_1\left(1+2n, \frac{1}{2}(1+3n); \frac{3}{2}(1+n); -2\frac{\varepsilon}{r_+^2}\right) \tag{7}$$

where $r_+ = r/a$ is the normalized radial distance from the stagnation point, p_∞ the pressure far from the gap and ${}_2F_1$ is the Gaussian hypergeometric function. For $n = 1$ corresponding to the Newtonian fluid, this expression reduces to:

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{\mu \left(\frac{U}{2a}\right)} = \frac{6}{\left[\varepsilon + \frac{1}{2}r_+^2\right]^2} \tag{8}$$

which is the same as the classical lubrication solution (Pasol et al. 2005; Chan and Horn 1985; Mongruel et al. 2011). In this approach, the correction factor $\delta(n, k = 0, \varepsilon)$ can also be obtained for $\beta = 1/2$ in the expression of the force given by Rodin (1996):

$$\delta(n > 1/3, k = 0, \varepsilon) = \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{F(n, k = 0, \varepsilon \rightarrow \infty)} = \frac{2^{\frac{3n-1}{2}}}{3} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \times \beta \left(\frac{3+n}{2}, \frac{3n-1}{2}\right) \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n-1}{2}}} \tag{9}$$

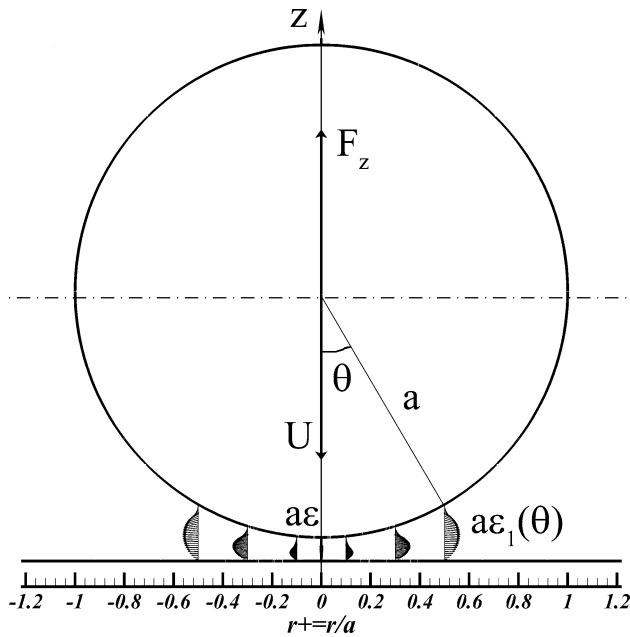


Fig. 2 Numerical velocity field in the gap between the sphere and the plane wall in the lubrication regime ($\varepsilon = 10^{-2}$) for $n = 0.8$

This formula is valid mathematically only for $n > 1/3$. For $n = 1/3$, he obtained:

$$\delta(n = 1/3, k = 0, \varepsilon) = \frac{2^{\frac{3n-1}{2}}}{3} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \log(\varepsilon^{-1}) \quad (10)$$

and for $n < 1/3$, he gave:

$$\delta(n < 1/3, k = 0, \varepsilon) = \frac{2^{\frac{3n-1}{2}}}{3} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n O(1) \quad (11)$$

where $O(1)$ is a constant. These two last results will be discussed in Sect. 4.2. For the Newtonian case, the solution 9 reduces to the classical Taylor solution:

$$\delta(n = 1, k = 0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \quad (12)$$

Moreover, we propose in the appendix a simple asymptotic solution, using the Reynolds lubrication equations, corresponding to the sphere moving towards a plane in the limit of the lubrication regime and avoiding the use of the streamfunction. This calculation gives the similar asymptotic solution as obtained from Rodin's formula corresponding to $\beta = \infty$.

4 Results and discussion

Hereafter, we first give a comparison of the numerical and asymptotical results obtained for Newtonian fluid with the aim of giving a validation of the numerical method and asymptotical approach used in this work. In a second step,

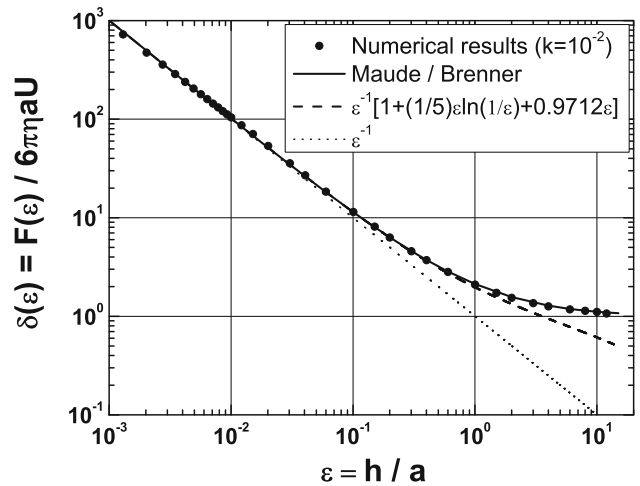


Fig. 3 Validation of the numerical calculation of the effect of the frontal confinement on the drag force undergone by a moving sphere towards a bottom of a tube filled with a Newtonian liquid at lateral confinement $k = 10^{-2}$. Comparison between the analytical and asymptotic results for a lateral unbounded medium

we give the non-Newtonian correction factor numerically and asymptotically in the case of the power-law fluid for different indexes of fluidity.

4.1 Newtonian fluid and validation

In the numerical simulation, the sphere has to move towards a plane in a very large cylinder of radius b . Our first concern was the study of the effect of the lateral confinement defined by the ratio $k = a/b$. In fact, Fig. 3 shows the good accordance between the numerical results of the perpendicular correction factor obtained numerically for $k = 10^{-2}$ and those obtained by the exact analytical solution given by Brenner (1961) and Maude (1961) in lateral unbounded medium. This agreement is all the more perfect as the sphere is in the lubrication regime ($\varepsilon \rightarrow 0$), and the drag becomes independent from the lateral confinement. In Fig. 4, the radial distribution of the pressure calculated numerically for $k = 10^{-2}$ and $\varepsilon = 10^{-2}$, at low Reynolds number ($Re = 10^{-3}$), is also in good agreement with that calculated asymptotically for lateral unbounded medium and given by the formula 8.

Finally, we note the accuracy of the slope of the power-law decrease of the pressure with the radial distance ($p(r_+) - p_\infty \propto r_+^{-4}$). This successful comparison in the Newtonian case supports the validity of the numerical method used in this work.

4.2 Non-Newtonian fluid

First of all, as we consider in this work the case where the possible relaxation time of the fluid is much lower than the

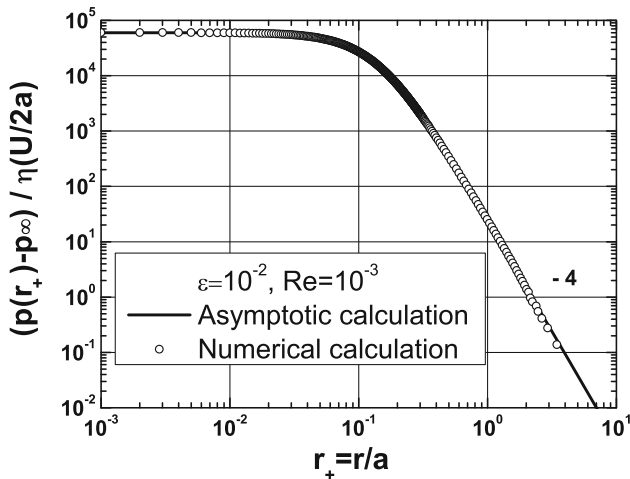


Fig. 4 Comparison of the evolution of the pressure in the gap between the sphere and the plane wall in lubrication regime ($\epsilon = 10^{-2}$), calculated numerically and asymptotically (formula 8) for Newtonian fluids

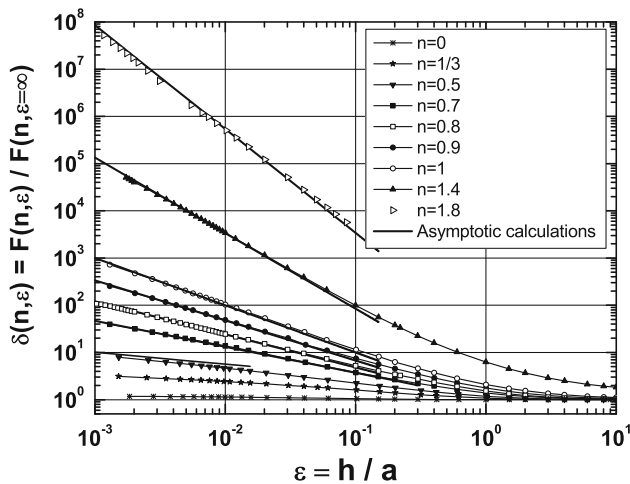


Fig. 5 Influence of the fluidity index on the drag undergone by a sphere approaching a plane in a power-law fluid (straight lines asymptotic, scatter plot numeric)

inverse of the maximum of the radial elongational velocity gradient near the stagnation point and consequently the effect of a possible viscoelasticity is negligible (de Gennes 1974; Ambari et al. 1984a), the behaviour of the fluid in this almost Poiseuille-type flow in the lubrication limit (Fig. 2) can be modeled in first approximation by a power-law fluid.

So, in Fig. 5, we give the influence of the index of fluidity n on the drag intensification factor $\delta(n, \epsilon)$ in the condition of lateral unbounded medium ($k = 10^{-2}$). This perpendicular correction factor corresponds to the normalization of the force undergone by a sphere at a distance $h = \epsilon a$ from the plane, by the same force in unbounded

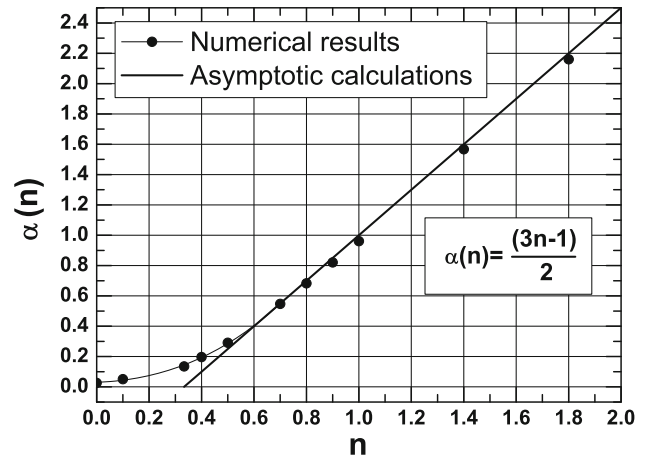


Fig. 6 Comparison of the exponents $\alpha(n)$ of the power-law behaviour obtained numerically and those obtained asymptotically

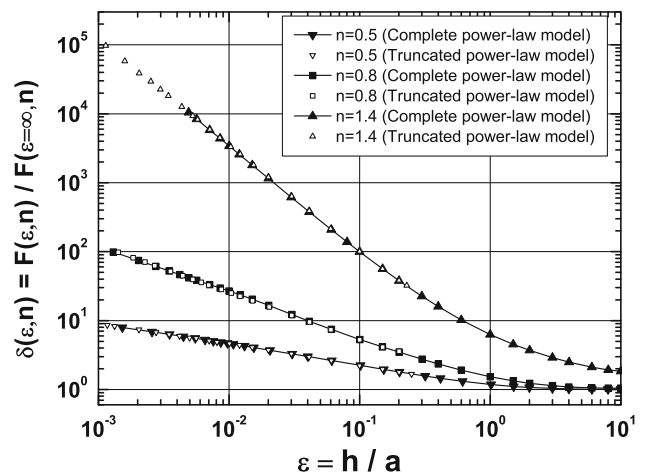


Fig. 7 Comparison of the drag force undergone by a sphere approaching a plane in a complete power-law fluid and that obtained with the truncated Ostwald model

power-law medium (far from the plane) given by the formulas 5 and 6.

The first remark is the good agreement for $0.6 \leq n \leq 1.8$, between the numerical results for different confinements and those obtained by the asymptotic approach given by the formula 22 for the lateral unbounded medium. This agreement no longer persists for $n < 0.5$, for which the asymptotic calculation needs to be performed at higher order as we will show below. The second remark concerning Fig. 5 is that the more the fluid is shear thinning, the more the drainage is facilitated (the easier the particles aggregate in dispersions).

Furthermore, Fig. 6, where we give a comparison between the exponent of the power-law behaviour of the drag: $F(n, \epsilon) \propto \epsilon^{-\alpha(n)}$ calculated asymptotically: $\alpha(n) = (3n - 1)/2$ and that deduced from the numerical curve (in

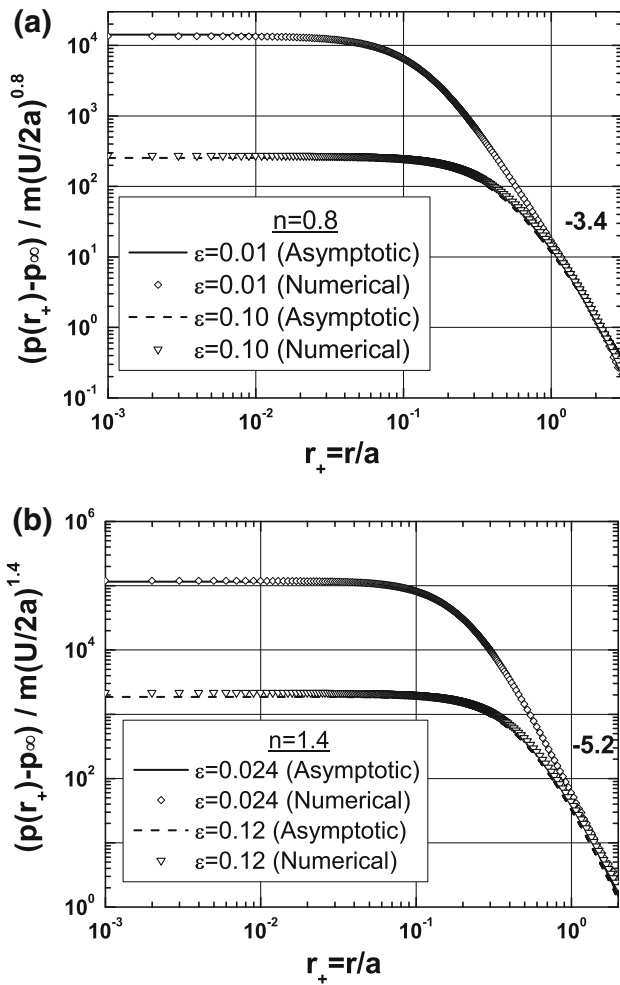


Fig. 8 Comparison of the numerical and the asymptotic pressure distribution in the gap between the sphere and the plane wall for two distances to the wall and different indexes. **a** $n = 0.8$, **b** $n = 1.4$

the lubrication regime) given in Fig. 5, confirms that the asymptotic expression 22 gives accurate results for $n > 0.5$.

As mentioned in Sect. 2, to verify the effect of a truncation at low and high velocity gradients induced by the appearance of both Newtonian plateaus as done by the Carreau–Yasuda model (Carreau et al. 1997), we proceeded to a numerical calculation with an Ostwald truncated model with a variation of the apparent viscosity over three decades (commonly encountered in experiments). The results obtained with this truncated Ostwald model, given in Fig. 7, remain the same as those obtained using a complete Ostwald model and justify its use in this study.

Concerning the radial distribution of the pressure in the gap, in the power-law fluid, we compare successfully in Fig. 8a, b the numerical and asymptotic results (formula 18) for two indexes of fluidity, $n = 0.8$ and $n = 1.4$, corresponding respectively to pseudoplastic and dilatant fluids and two values of the gap. In all cases, the results for

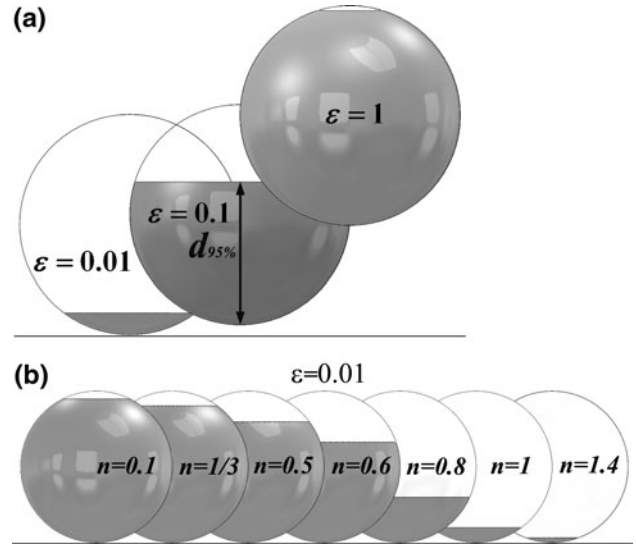


Fig. 9 The dark colored surface corresponds to the area contributing to 95% of the drag undergone by a spherical particle moving towards a plane. **a** Concerns the Newtonian case for three gaps: $\epsilon = 0.01, 0.1, 1$. **b** Concerns the power-law fluid for a gap $\epsilon = 0.01$, for three indexes of fluidity $n = 0.8, 1, 1.4$ corresponding respectively to pseudoplastic, Newtonian and dilatant fluids

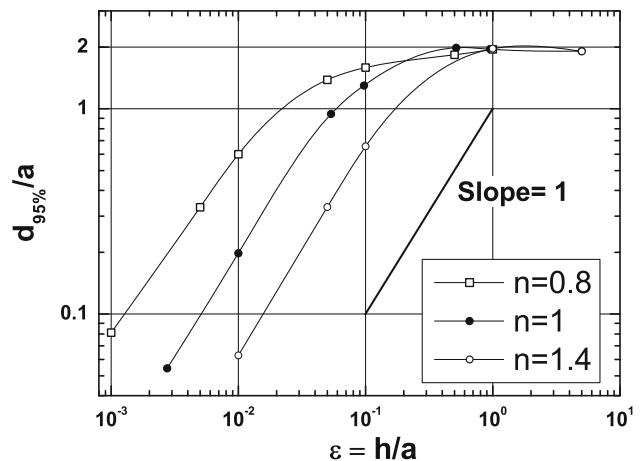


Fig. 10 Linear variation of the liquid film thickness needed to get 95% of the total force which would be undergone by an immersed sphere, versus the normalized distance between the plane and the sphere ϵ , for different indexes of fluidity n

Newtonian and power-law fluids confirm the validity of the asymptotic relation 18.

From an experimental point of view, as dynamic surface force apparatus uses a thin liquid film between the spherical tip and the plane, we wanted to know the necessary thickness of this film which allows the use of the formula 22. This height corresponds to that of the part of the sphere, which accounts for 95% of the force undergone by the sphere. Indeed, in Fig. 9a, we show in the Newtonian case

that the thickness of this region is all the lower as the gap is small, confirming the lubrication hypothesis. This result confirms that the applicability of the asymptotic law in the lubrication limit depends only on the fore spherical geometry of any particle, as confirmed experimentally for a spherocylinder by Mongrue et al. (2011). However, Fig. 9b corresponding to the power-law fluid (and $\varepsilon = 10^{-2}$) shows that when the fluid is shear thickening ($n = 1.4$), the height of this zone is significantly reduced. This result confirms the validity of the lubrication hypothesis and explains why the asymptotic calculations are in very good agreement with the numerical calculations for dilatant fluids. On the other hand, in the case where the fluid is shear thinning, this zone increases when the fluidity index n decreases (for a given gap), whence the nonvalidity of the asymptotic calculations at the first order for $0 \leq n \leq 0.5$, due to the nonvalidity of the lubrication hypothesis. In this range of fluidity indexes n , it would be necessary to pay attention to use a higher thickness of film. Finally, we verified numerically in Fig. 10 that the height $d_{95\%}$ at which 95% of the force is achieved varies linearly in accordance with the gap for its very low values.

5 Conclusion

As encountered in the aggregation process of particles in dispersions or in the dynamic surface force apparatus used in nanorheology, before the contact of the sphere with another sphere or a plane wall, the hydrodynamic force diverges in the lubrication limit. The power-law which describes this behaviour is given numerically for Newtonian fluids. The comparison with the exact solution given by Maude (1961) and Brenner (1961) confirms the validity of the dynamic mesh method used in this geometrically unsteady problem. This successful comparison led us to give a solution to the same problem, under the quasi-steady state assumption, to the Ostwald–de Waele fluid. In this case, the power-law of the divergence of the force and the distribution of the pressure in the gap are given asymptotically in the lubrication limit and compared successfully to the numerical results for $0.5 < n \leq 1.8$. These asymptotic and numerical solutions show clearly that, when the sphere moves towards the plane, the more the fluid shows a shear thinning behaviour, the lower the increase in the perpendicular correction factor. Then the aggregation of particles is facilitated in shear thinning fluids, with regard to the Newtonian case. The inverse effect occurs in the case of the shear thickening fluid. This new result can also find an application in the study of aggregation of dispersions and surface force apparatus for nanorheology in power-law fluids.

6 Asymptotic results

At very low Reynolds numbers, when the sphere approaches the wall at constant velocity in unbounded lateral medium, in the limit of the lubrication regime $\varepsilon \ll 1$ (see Fig. 2), the drag force is assumed to be controlled principally by the drainage process of the liquid film located in the gap remaining between the sphere and the plane. So the drag force submitted by a sphere can be calculated from the pressure force induced by the radially ejected flow. This drainage taking place in this gap, for power-law fluid, is reduced to a “radial power-law Poiseuille flow” as shown in Fig. 2 where $a\varepsilon_1(\theta) = a\varepsilon + a(1 - \cos \theta)$ and $a\varepsilon$ is the minimum gap between the sphere and the plane. In fact, starting from the following reduced momentum and continuity equations in the lubrication limit:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[m \left| \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial z} \right|^n \right] = \frac{\partial p}{\partial r} \tag{13}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [ru_r(r, z)] + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

By successive integrations of Eq. (13) and using the boundary conditions, one can obtain:

$$u_r(r, z) = \frac{n}{n+1} \left[-\frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial r} \right]^{\frac{1}{n}} \times \left[\left| z - \frac{a\varepsilon_1(\theta)}{2} \right|^{1+\frac{1}{n}} - \left(\frac{a\varepsilon_1(\theta)}{2} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right] \tag{15}$$

So by integrating the continuity Eq. (14) over the gap and taking into account that the velocity of the particle $u_z(r, z)|_{sphere} = -U$

$$\frac{1}{r} \int_{-\frac{a\varepsilon_1}{2}}^{+\frac{a\varepsilon_1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} [ru_r(r, z)] dz + \int_{-\frac{a\varepsilon_1}{2}}^{+\frac{a\varepsilon_1}{2}} \frac{\partial u_z(r, z)}{\partial z} dz = 0 \tag{16}$$

where $u_r(r, z)$ is given by Eq. (15), $u_z(r, z = +a\varepsilon_1/2) = -U$ on the sphere and $u_z(r, z = -a\varepsilon_1/2) = 0$ on the plane, we obtain the radial pressure distribution along the gap which is given by:

$$p(r_+) - p_\infty = -mU^n \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \times \left(\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{a^n \varepsilon^{\frac{3n+1}{2}}} \right) \int_{+\infty}^{\frac{1}{2}r_+^2} \frac{Y^{\frac{n-1}{2}}}{[Y+1]^{2n+1}} dY \tag{17}$$

where $Y = \frac{1}{2\varepsilon} r_+^2$ and $r_+ = r/a$ is the normalized radial distance from the stagnation point. Using the “MATHEMATICA” code, the normalized radial distribution of the pressure is given by:

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{m\left(\frac{U}{2a}\right)^n} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{2^{2+3n}}{1+3n}\right) \times {}_2F_1\left(1+2n, \frac{1}{2}(1+3n); \frac{3}{2}(1+n); -2\frac{\varepsilon}{r_+^2}\right) (r_+)^{-(1+3n)} \quad (18)$$

where p_∞ is the pressure in the farfield and ${}_2F_1$ is the hypergeometric function. Note that this result is similar to that obtained from Rodin's formula 7 and recalled in Sect. 3. Nevertheless, his expression of the pressure at the axis (his formula 23, Rodin (1996)) is not accurate and must be replaced by:

$$\hat{p}(0) = \frac{\alpha^{\frac{1+3n}{2}} \pi \Gamma\left(\frac{3+3n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) \Gamma(1+2n)} \quad (19)$$

Then the pressure in the axis is given by, for $n \neq 1$:

$$\frac{p(r_+ = 0) - p_\infty}{m\left(\frac{U}{2a}\right)^n} = \frac{\pi 2^{\frac{3+3n}{2}}}{1+3n} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \times \frac{\Gamma\left(\frac{3+3n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) \Gamma(1+2n)} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1+3n}{2}}} \quad (20)$$

For $n = 1$, the limit of the pressure in this Newtonian case is equal to:

$$\frac{p(r_+ = 0) - p_\infty}{\eta\left(\frac{U}{2a}\right)} = \frac{6}{\varepsilon^2} \quad (21)$$

which is the same value that can be obtained from Eq. (8). In this approach, the correction factor $\delta(n, k = 0, \varepsilon)$ of the drag undergone by a sphere can be calculated by integrating the pressure given by formula 18 over the frontal surface of the sphere in the lubrication limit:

$$\delta(n, k = 0, \varepsilon) = \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{F(n, k = 0, \varepsilon \rightarrow \infty)} = \frac{2^{\frac{3n+3}{2}}}{3(9n^2 - 1)} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \times \frac{\Gamma\left(\frac{3n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n-1}{2}}} \quad (22)$$

This formula, which is valid mathematically only for $n > 1/3$, reduces to the formula 9 deduced from Rodin's result in the limit of $\beta = \infty$ (Sect. 3). In fact, to verify the equivalency between both formulae, let us recall that (Gradshteyn and Ryzhik 1983):

$$\frac{4}{9n^2 - 1} \frac{\Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n+3}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} = \beta \left(\frac{3+n}{2}, \frac{3n-1}{2}\right) \quad (23)$$

In addition, for $n = 1/3$, the pressure field is given by:

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{m\left(\frac{U}{2a}\right)^{\frac{1}{3}}} = 3 \times 5^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{2\varepsilon}{r_+} + 1\right)^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (24)$$

But the calculation of the force from integration of Eq. (24) is divergent. Furthermore, the comparison of our numerical results with the asymptotic solution given by Rodin (formulae 10 and 11) proves that these last results are no longer valid. However, due to the dependence of the drag on the flow in the upper half of the sphere, shown by the numerical results in Fig. 9b, it is not possible to give the required higher order to our asymptotic calculation. In fact, the numerical calculation turns out to be necessary as also confirmed by Fig. 6. So all the asymptotic results given by Rodin (1996) and us are no longer applicable for $n < 0.6$. Therefore,

$$F(n, \varepsilon) = -ma^{(n+3)/2} \pi 2^{(n+7)/2} \frac{\delta(n, \varepsilon \rightarrow \infty)}{9n^2 - 1} \times \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{3n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{h^{(3n-1)/2}} \left|\frac{dh}{dt}\right|^n \quad (25)$$

which reduces, in the Newtonian case, to the classical relation (Vinogradova 1995):

$$F(n = 1, \varepsilon) = -\frac{6\pi\eta a^2}{h} \left|\frac{dh}{dt}\right| \quad (26)$$

References

- Ambari A (1979) Ecoulement des solutions aqueuses diluées de polyoxyéthylène dans une fente rectangulaire très allongée en mince paroi. C R Acad Sci Paris Série B 289:511–530
- Ambari A, Deslouis C, Tribollet B (1984a) Coil-stretch transition of macromolecules in laminar flow around a small cylinder. Chem Eng Commun 29:63–78
- Ambari A, Gauthier-Manuel B, Guyon E (1984b) Wall effects on a sphere translating at constant velocity. J Fluid Mech 149: 235–253
- Ardekani AM, Joseph DD, Dunn-Rankin D, Rangel RH (2009) Particle-wall collision in a viscoelastic fluid. J Fluid Mech 633:475–483
- Bhushan B (2010) Springer handbook of nanotechnology, 3rd edn. Springer
- Brenner H (1961) The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. Chem Eng Sci 16:242–251
- Carreau PJ, Kee DCRD, Chhabra RP (1997) Rheology of polymeric systems: principles and applications. Hanser Gardner Publications
- Chan DY, Horn RG (1985) The drainage of thin liquid films between solid surfaces. J Chem Phys 83:5311–5324
- Cottin-Bizonne C (2003) Hydrodynamique à l'interface solide-liquide: étude par mesures de forces de surfaces et simulations de dynamique moléculaire. Ph.D. thesis, Université Claude Bernard Lyon I

- Cox R, Brenner H (1967) The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. part ii. small gaps widths, including inertial effects. *Chem Eng Sci* 22:1753–1777
- Cox RG (1974) The motion of suspended particles almost in contact. *Int J Multiphase Flow* 1:343–371
- de Gennes PG (1974) Coil-stretch transition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients. *J Chem Phys* 60:5030–5042
- Despeyroux A, Ambari A, Ben Richou A (2011) The hydrodynamic interaction effects on the settling and the transportation of a sphere in power-law fluids. *Phys Fluids* (under revision)
- Gradshteyn IS, Ryzhik IM (1983) *Tables of integrals, series, and products*, 4th edn. Academic Press, Inc., Orlando
- Guala M, Stocchino A (2007) Large-scale flow structures in particle-wall collision at low Deborah numbers. *Eur J Mech B Fluids* 26:511–530
- Hinch EJ (1974) Mechanical models of dilute polymer solutions for strong flows with large polymer deformations. In: *Colloque Intern. CNRS: polymère et lubrification*, Brest, pp 241–247
- Hocking LM (1973) The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and of two adjacent spheres. *J Eng Math* 7:207–221
- Horn RG, Vinogradova OI, Mackay ME, Phan-Thien N (2000) Hydrodynamic slippage inferred from thin film drainage measurements in a solution of nonadsorbing polymer. *J Chem Phys* 112:6424–6433
- Luengo G, Schmitt FJ, Hill R, Israelachvili J (1997) Thin film rheology and the tribology of confined polymer melts: contrasts with bulk properties. *Macromolecules* 30:2482–2494
- Marston JO, Yong W, Thoroddsen ST (2010) Direct verification of the lubrication force on a sphere travelling through a viscous film upon approach to a solid wall. *J Fluid Mech* 655:515–526
- Maude AD (1961) End effects in a falling-sphere viscometer. *Br J Appl Phys* 12:293–295
- Mongruel A, Lecoq N, Wajnryb E, Cichocki B, Feuillebois F (2011) Motion of a spherocylindrical particle in a viscous fluid in confined geometry. *Eur J Mech B Fluids* 30:405–408
- Pasol L, Chaoui M, Yahiaoui S, Feuillebois F (2005) Analytical solutions for a spherical particle near a wall in axisymmetrical polynomial creeping flows. *Phys Fluids* 17:073,602
- Potantin AA, Ur'ev NB, Muller VM (1988) *Kolloidn Zh* 50:493
- Restagno F, Crassous J, Charlaix E, Cottin-Bizonne C, Monchanin M (2002) A new surface apparatus for nanorheology. *Rev Sci Instrum* 73:2292–2297
- Rodin GJ (1996) Squeeze film between two spheres in a power-law fluid. *J Non Newtonian Fluid Mech* 63:141–152
- Stimson M, Jeffery GB (1926) The motion of two spheres in a viscous fluid. *Proc R Soc Lond Ser A* 111:110–116
- Stocchino A, Guala M (2005) Particle-wall collision in shear thinning fluids. *Exp Fluids* 38:476–484
- Vinogradova OI (1995) Drainage of a thin liquid film confined between hydrophobic surfaces. *Langmuir* 11:2213–2220



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics

journal homepage: <http://www.elsevier.com/locate/jnnfm>

Slow motion of a sphere towards a plane through confined non-Newtonian fluid

Antoine Despeyroux, Abdelhak Ambari*

Arts et Métiers ParisTech, 2 bd du Ronceray, B.P. 3525, 49035 Angers, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 19 July 2011

Received in revised form 3 October 2011

Accepted 5 October 2011

Available online xxx

Keywords:

Sphere towards a plane

Non-Newtonian fluids

Frontal hydrodynamic interactions

Lubrication

Aggregation

Drainage film

ABSTRACT

The time needed for the contact of two spheres or a sphere with a rigid plane is mainly controlled by the hydrodynamic drainage of the film located in the gap as long as its thickness is out of range of the Van der Waals interactions. In fact, this time controls the dynamics of aggregation of concentrated dispersions. This fundamental problem has an exact solution in Newtonian fluid which has been used to confirm the validity of the numerical dynamic mesh method employed in this geometrically unsteady problem. Following this validation, we applied it to calculate the correction factor of the drag undergone by a sphere approaching a plane, at constant Reynolds number, in a cylindrical tube filled with a non-Newtonian fluid having negligible viscoelastic component and roughly behaving as a power-law fluid. After a justification for using this useful model, we studied the influence of the lateral confinement on the frontal correction factor of the drag. In the lubrication limit, we recall the asymptotic solution of Rodin to this problem in lateral unbounded power law fluid. The comparison of both asymptotical and numerical results confirms their validity. The results obtained in this study may find an application to Dynamic Surface Force Apparatus for nanorheology.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

The dynamics of non dilute suspensions of particles depends greatly on the hydrodynamic interactions between particles or particles and walls. Among these interactions, those which take place in a frontal way control the time of their contact or separation. This time plays a main role in the aggregation and the formation of the plug flow during the transportation of these suspensions as stressed in particular by de Gennes [1]. This problem is of fundamental interest in many industrial situations (e.g. in filtration, fluidization, sedimentation, etc.). Then, this study deals with the calculation of the Stokes type law correction factor, for the hydrodynamic resistance of a sphere of radius a moving at steady velocity U , towards or away from a plane in Newtonian or non-Newtonian fluids. Note that recent applications of Dynamic Surface Force Apparatus (DSFA) in nanorheology [2,3] need the knowledge of this kind of hydrodynamic interaction.

We will focus on the case where the moving velocity U is maintained constant at fixed low Reynolds number in a non-Newtonian fluid of a given apparent viscosity which is dependent only on the second invariant of the strain rate tensor. As the problem is geometrically unsteady, due to the linear variation of the approach distance $d = \varepsilon a$ of the sphere to the plane in time, we assume that a quasi-steady solution applies and the history force and the added mass force are irrelevant in this case.

$\varepsilon Re \ll 1$ constitutes the condition of quasi-steady flow, as expressed by Cox and Brenner [4], where $Re = 2aU/\nu$ and ν is the kinematic viscosity. This condition can be found by assuming that the vorticity in the gap induced by the relative motion of the sphere with respect to the plane, must be established in a characteristic time $(\varepsilon a)^2/\nu$ lower than the unsteady convective one $\varepsilon a/U$. The results given in this paper may be applicable to the sedimentation of a particle in the case where the added mass and the history forces, as the inertia, are negligible. Using bipolar coordinates which were first used by Stimson and Jeffrey [5], in the lateral unbounded Newtonian fluid, Brenner [6] and Maude [7] calculated analytically the correction factor $\delta(\varepsilon)$ defined by:

$$\delta(\varepsilon) = \frac{F(\varepsilon)}{6\pi\mu aU} \quad (1)$$

For the small gap εa between the plane and the sphere, the asymptotic expansion of their formula is given by Cox and Brenner [4]: $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} (1 - \frac{1}{5}\varepsilon \ln(\frac{1}{\varepsilon}) + 0.9712\varepsilon)$ which is valid for $\varepsilon \leq 0.6$. The first term of this asymptotic expansion is the well-known Taylor law $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ which is valid only for $\varepsilon \leq 0.4$. Experimentally, the Brenner formula has been successfully verified by Ambari et al. [8].

As the sedimentation often occurs in a confined situation due to the presence of lateral walls or other particles, we will quantify the influence of the lateral hydrodynamic interaction relative to the frontal correction factor. Still in the Newtonian case, the effect of the lateral confinement induced by the wall of an infinitely long circular cylinder has been calculated numerically and experimentally by Ambari et al. [9] and Ben Richou et al. [10]. Apart from

* Corresponding author. Tel.: +33 241207362; fax: +33 241207362.

E-mail address: ambari@ensam.eu (A. Ambari).

the asymptotic calculation given by Rodin [11] in lateral unbounded power-law fluid, for the squeezing motion of two nearly-touching rigid spheres, there are other similar asymptotic solutions for non-Newtonian fluids [12] to the same problem. Otherwise, as far as we know, there are no numerical results given in non-Newtonian fluid concerning the calculation of the drag undergone by a sphere translating at constant velocity towards a plane. To study the first non-Newtonian effect, we focused on the shear thinning or shear thickening behavior of these fluids. Then we give a numerical solution to this problem in power-law fluids whose constitutive equation can be described as follows:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2m|2d_{kl}d_{kl}|^{(n-1)/2}d_{ij} \quad (2)$$

where σ_{ij} are the Cauchy stress tensor components, $d_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$ the rate of deformation tensor components, p the pressure, m and n are respectively the consistency coefficient (Pa·sⁿ) and the power-law index of the fluid. Concerning the drag undergone by a particle moving towards a plane, this is mainly due to the fluid drainage in the gap in the lubrication regime. Then, the non-Newtonian behavior of the fluid which takes place in this drainage flow may be, in first approximation, modeled by a power-law fluid because of the weakness of the elongational gradient, which is able to arouse the viscoelasticity of the fluid, due to the very low velocity of the particle as made by Sherwood [13]. Moreover, experimental results on particle-wall collision in polymeric liquids given by Ardekani et al. [14] also justify the choice of the power-law model for this problem. Note that the pressure induced by the drainage flow is the main contributory factor to the drag, and the shear velocity gradient is limited by its maximum value achieved near the symmetry axis. When the fluid has a shear thinning behavior, a possible first Newtonian plateau corresponding to low shear velocity gradient, situated in the extreme vicinity and far from the axis of the sphere, has very little contribution in the calculation of the force. So the Ostwald model can constitute a good approximation. For the shear thickening fluids, a similar analysis is applicable. The use of the Ostwald handy model involving only one control parameter, which is the fluidity index n , contrary to that of a more realistic model such as Carreau-Yasuda introducing four control parameters [15], enables us to clearly and physically show the influence of the shear thinning and the shear thickening behavior on the drag undergone by this particle.

2. Formulation and numerical methodology

To calculate the frontal correction factor $\delta(n, k, \varepsilon)$ in lateral confined medium defined by k , we consider the flow induced by a spherical particle, of radius a , translating axially towards the bottom at constant velocity $\mathbf{u}_z = -U\mathbf{e}_z$ inside a cylindrical tube of radius b , as shown schematically in Fig. 1. This container is filled with a Newtonian or non-Newtonian fluid. To make easier the numerical calculations, we consider an equivalent configuration where the sphere is set and the container is moving at the velocity $+U\mathbf{e}_z$. The flow is governed by the momentum and mass conservation equations under isothermal conditions, i.e.

$$\rho(\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

where ρ is the fluid density, p the pressure and $\underline{\underline{\tau}} = (\sigma_{ij} + p\delta_{ij})$ the extra-stress tensor for the power-law fluid (see Eq. (2)). The velocity boundary and initial conditions are defined by: (i) on all the walls of the cylinder: $\mathbf{U} = +U\mathbf{e}_z$; (ii) on the sphere: $\mathbf{U} = 0$; (iii) for $t \leq 0$ the fluid is at rest: $\mathbf{U} = 0$.

At low and fixed generalized Reynolds numbers $Re_n = \rho U^{2-n}(2a)^n/m$, the frontal and lateral correction factor $\delta(n, k, \varepsilon)$, due to the presence of the lateral and frontal walls, of the drag

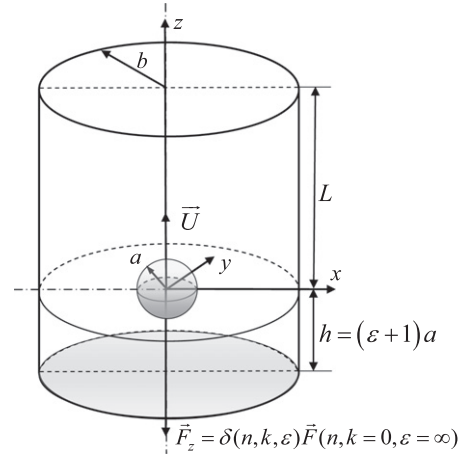


Fig. 1. Geometrical and dynamical parameters definition of the sphere moving towards the bottom in the axis of a cylindrical tube.

undergone by a sphere translating towards the plane bottom in the axis of the cylinder is calculated through the following expression obtained by dimensional analysis:

$$\delta(n, k, \varepsilon) = \frac{F(n, k, \varepsilon)}{6\pi m \left(\frac{U}{2a}\right)^{n-1} aU} \quad (5)$$

where $k = a/b$ is the lateral confinement factor and $\varepsilon = d/a$ is the frontal. In unbounded fluids, $\delta(n, k = 0, \varepsilon = \infty)$ has been calculated by us numerically [16]. In this case, the correct values of this coefficient are given with an average relative error of less than 1% for $0 \leq n \leq 1.8$ by the polynomial interpolation formula:

$$\delta(n, k = 0, \varepsilon = \infty) = 1.191 + 1.978n - 4.916n^2 + 7.333n^3 - 8.717n^4 + 5.743n^5 - 1.838n^6 + 0.228n^7 \quad (6)$$

The numerical solution of this geometrically unsteady problem is obtained using the dynamic mesh method in the finite volume CFD FLUENT code where the SIMPLE algorithm was employed with a second order scheme. In the integral form, the continuity and momentum equations are solved through the dynamic mesh technique in FLUENT [17, p. 36], on a control volume V , involving a moving boundary ∂V :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{U} dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{U} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_g) \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\partial V} p \underline{\underline{I}} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\partial V} \underline{\underline{\tau}} \cdot d\mathbf{S} \quad (7)$$

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (8)$$

where ρ is the fluid density, \mathbf{U} the fluid velocity, \mathbf{U}_g the moving mesh velocity, p the pressure, $\underline{\underline{I}}$ the identity matrix, and $\underline{\underline{\tau}}$ the extra-stress tensor. The time-derivative term is computed using a first-order backward formula:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{U} dV = \frac{(\rho \mathbf{U} V)^{l+1} - (\rho \mathbf{U} V)^l}{\Delta t} \quad (9)$$

where l and $l + 1$ denote, respectively the quantity at the current and following step. The volume V^{l+1} is obtained through the relation:

$$V^{l+1} = V^l + \frac{dV}{dt} \Delta t \quad (10)$$

where

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\partial V} \mathbf{U}_g \cdot d\mathbf{S} = \sum_j^{N_f} \mathbf{U}_{g,j} \cdot \mathbf{S}_j \quad (11)$$

where N_f is the number of faces of the control volume V , S_j is the j face area vector, and $\mathbf{U}_{g,j} \cdot \mathbf{S}_j = \frac{\delta V_j}{\Delta t}$ with δV_j the volume covered by the face j over the time step Δt . These calculations are carried out on a structured mesh and a non structured one only in the vicinity of the stagnation point of the sphere to ensure a homogeneous fixed mesh size during the deformation of the mesh. For each time step, this dynamic mesh technique involves the rigid motion of the top and bottom of the container, respectively, away from and towards the boundary of the sphere. The mesh is then adjusted according to the new position of the moving boundaries. In the rectangular mesh domain near the bottom, the dynamic layering removes layers of cells adjacent to the moving boundary (bottom), based on the height of the layer adjacent to the moving surface. For this reason, the cells are split (top) or merged (bottom) with the layer of cells next to them when their layer attains a critical height. The minimum thickness of the non structured mesh zone at the stagnation point of the sphere ($\varepsilon = 10^{-3}$) corresponds to the minimum gap which can be reached through this procedure. Let us recall that a hundred iterations for each time step is used. The distance from the sphere to the top of the tube L is given equal to $60a$ to avoid the influence of the top of the tube on the drag. For this computation, we used a sixteen core cluster. The computation at each step l is supposed to be converged when the following criterion is verified: $|1 - \delta^l(n, k, \varepsilon) / \delta^{l+1}(n, k, \varepsilon)| < 10^{-6}$. Furthermore, it is important to note that as far as we are concerned, in this particular flow, by a bounded shear stress τ_{rz} corresponding to a bounded shear rate $0 \leq \dot{\gamma}_{rz} \leq \dot{\gamma}_{rzmax}$, there is no singularity in the shear stress, even if the apparent viscosity described by this model mathematically diverges at a zero shear rate. Finally, note that the domains in which the velocity gradient (then the shear stress) is negligible do not introduce a significant contribution to the calculation of the drag. In this condition, we proceeded to a verification of the effect of a truncated Ostwald model at low and high velocity gradients as it would be obtained by the Carreau-Yasuda model [15]. Indeed, according to most of the rheological experimental results [15] showing Newtonian plateaus, we imposed a variation of the apparent viscosity over three decades truncated at low and high shear velocity gradients. This variation, centered around the value corresponding to the mean velocity gradient achieved at $\theta = \pi/2$, has been imposed. As we will see in Fig. 5a in Section 4.2, all the results corresponding to this truncated Ostwald model remain the same as those obtained using the complete Ostwald model.

In the lubrication regime, we proceeded to an asymptotic approach to check the validity of the results obtained by the dynamic mesh numerical method employed in this study.

3. Asymptotic results

In the limit of the lubrication regime $\varepsilon \ll 1$ and for very low Reynolds numbers, when the sphere moves towards the plane in unbounded lateral medium (see Fig. 2), the drag force is controlled principally by the drainage process of the liquid film located in the minimum gap remaining between the sphere and the plane. Otherwise, in this limit, Rodin [11] has given an asymptotic solution for the squeezing motion of two nearly-touching rigid spheres (S_1 of radius a and S_2 of radius βa) in a power-law fluid. To solve this problem, he used the axisymmetric Stokes stream function so the asymptotic problem is analyzed in non dimensional stretched coordinates. He calculated the asymptotic solution for the pressure for different values of the $\alpha = (1 + \beta)/2\beta$ parameter, and deduced the asymptotic solution for the drag undergone by each sphere, by integrating the pressure transmitted by a horizontal circle of radius a centered at the origin. Concerning our configuration of the sphere settling towards a plane, we took $\beta \rightarrow \infty$ then $\alpha = 1/2$. When we replace this α value in his solution for the pressure we obtain this radial distribution of the pressure:

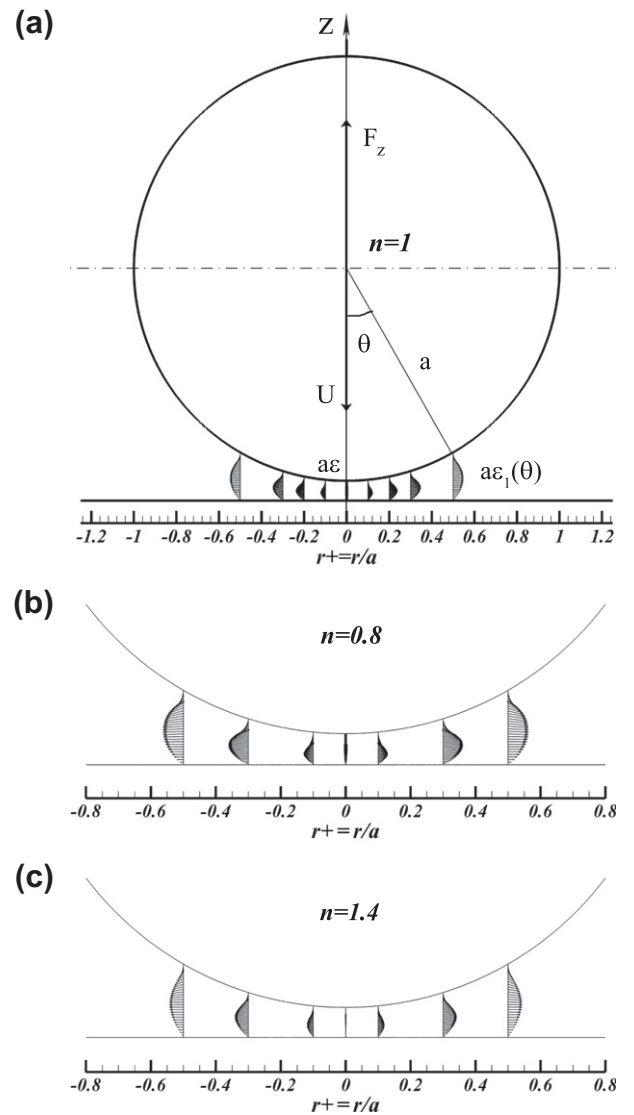


Fig. 2. Numerical velocity field in the gap between the sphere and the plane when the sphere is in the vicinity of the bottom ($\varepsilon = 10^{-2}, k = 10^{-2}, Re_n = 10^{-3}$): (a) $n = 1$, (b) $n = 0.8$, and (c) $n = 1.4$.

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{m \left(\frac{U}{2a}\right)^n} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{2^{2+3n}}{1+3n}\right) (r_+)^{-(1+3n)} \times {}_2F_1\left(1+2n, \frac{1}{2}(1+3n); \frac{3}{2}(1+n); -2\frac{\varepsilon}{r_+^2}\right) \quad (12)$$

where p_∞ is the pressure far from the gap, $r_+ = r/a$ is the normalized radial distance from the stagnation point and ${}_2F_1$ is the Gaussian hypergeometric function. For $n = 1$ corresponding to the Newtonian fluid, this expression reduces to:

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{\mu \left(\frac{U}{2a}\right)} = \frac{6}{\left[\varepsilon + \frac{1}{2}r_+^2\right]^2} \quad (13)$$

which is the same as the classical lubrication solution [18–20]. In this approach, the correction factor $\delta(n, k = 0, \varepsilon)$ can also be obtained for $\alpha = 1/2$ in the expression of the force given by Rodin [11]:

$$\delta(n, k = 0, \varepsilon) = \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{F(n, k = 0, \varepsilon \rightarrow \infty)} = \frac{2^{\frac{3n-1}{2}}}{3} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \beta \left(\frac{3+n}{2}, \frac{3n-1}{2}\right) \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n-1}{2}}} \quad (14)$$

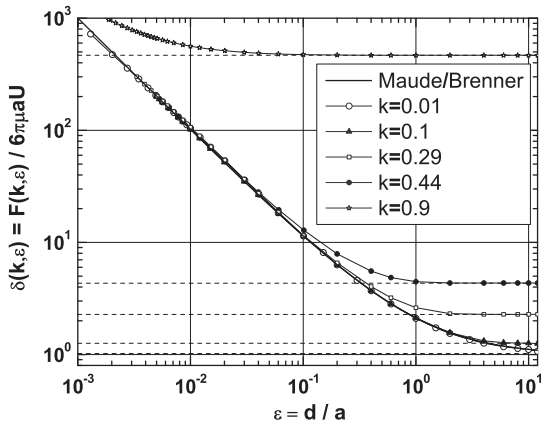


Fig. 3. The effect of lateral confinement on the frontal correction factor of the drag force undergone by a sphere moving axially towards the bottom of a tube filled with a Newtonian fluid. The dashed plateau lines represent $\lambda(k)$.

Table 1

Critical thicknesses of the minimum gap ε_c at which the drag deviates (of 1%) from its plateau corresponding to its value achieved far from the bottom of the tube.

k	0.01	0.1	0.29	0.44	0.9
ε_c	62	6.7	2.2	1.28	0.114

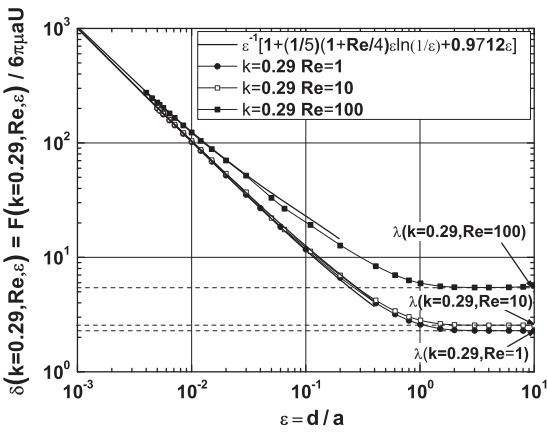


Fig. 4. Influence of the inertia on the drag undergone by a sphere moving towards a plane ($k=0.29$), and comparison with Cox and Brenner's asymptotic relation (Eq. (17)) for $Re = 1, 10$ and 100 .

This formula which is valid mathematically only for $n > 1/3$ in the Newtonian case, reduces to the classical Taylor solution:

$$\delta(n = 1, k = 0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \quad (15)$$

Otherwise we propose in Appendix A a simple asymptotic solution corresponding to the sphere moving towards a plane in the limit of the lubrication regime and avoiding the use of the stream function. This calculation gives a similar asymptotic solution to that obtained from Rodin's formula corresponding to $\beta = \infty$.

4. Results and discussion

First, we give a comparison of the numerical and asymptotical results obtained for Newtonian fluid with the aim of giving a mutual validation of the numerical method and asymptotical approach, followed by the results concerning the relative effect between both lateral and frontal confinements. In the second step,

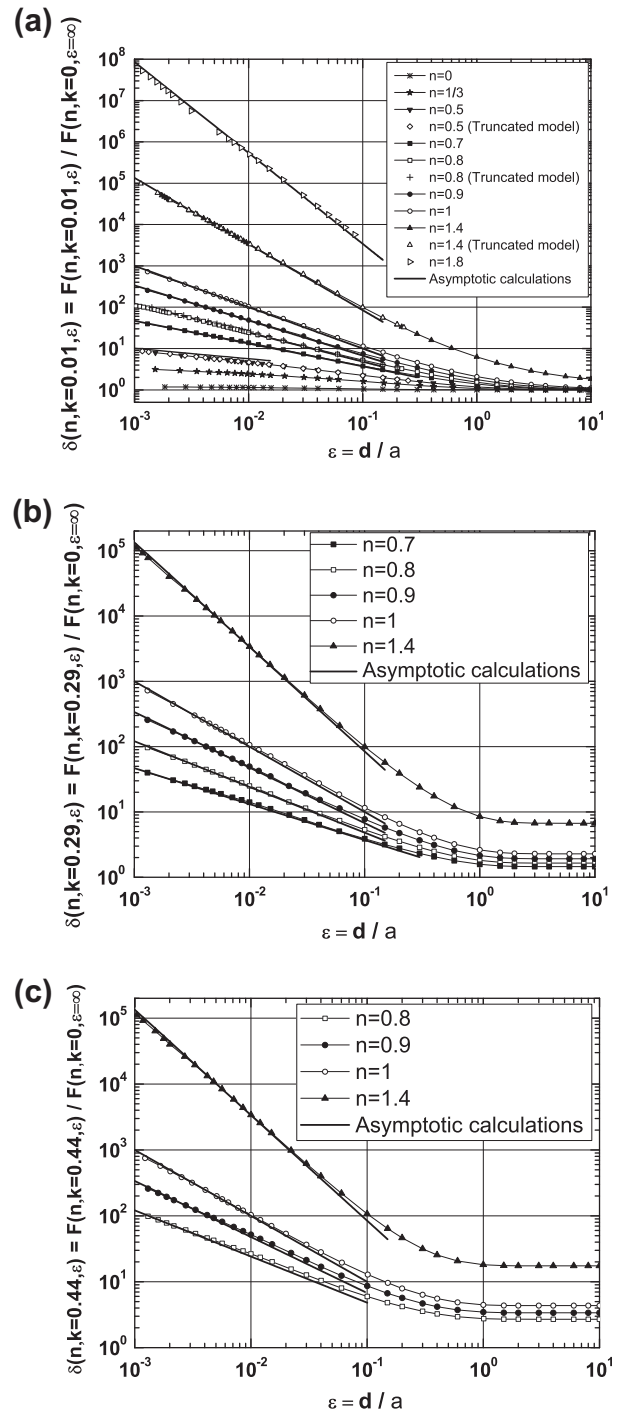


Fig. 5. Influence of the fluidity index on the drag undergone by a sphere approaching axially the plane bottom of a tube filled with a power-law fluid, for different confinements and comparison between the numeric (scatter) and asymptotic (solid line) results: (a) $k = 0.01$, (b) $k = 0.29$, and (c) $k = 0.44$.

we give the non-Newtonian correction factor numerically and asymptotically in the case of the power-law fluid for different indexes of fluidity and different confinements.

4.1. Newtonian fluid

As in most experiments, the sphere has to move towards a plane in confined situation according to the sketch Fig. 1, the drag force must be corrected from the effect of the lateral confinement, de-

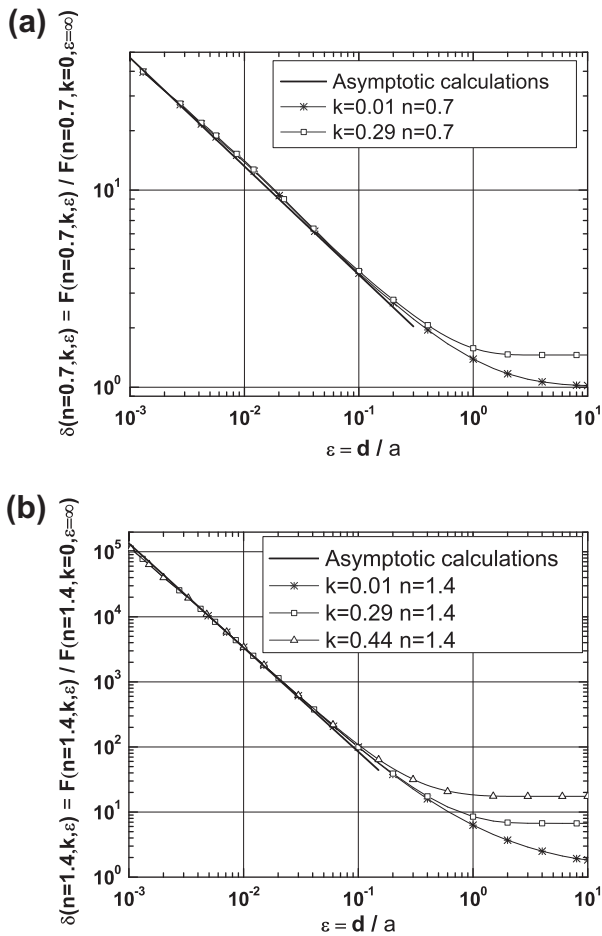


Fig. 6. Absence of the influence of the lateral confinement on the drag undergone by a sphere in a power-law fluid in the lubrication limit, for two fluidity indexes: (a) $n = 0.7$, and (b) $n = 1.4$.

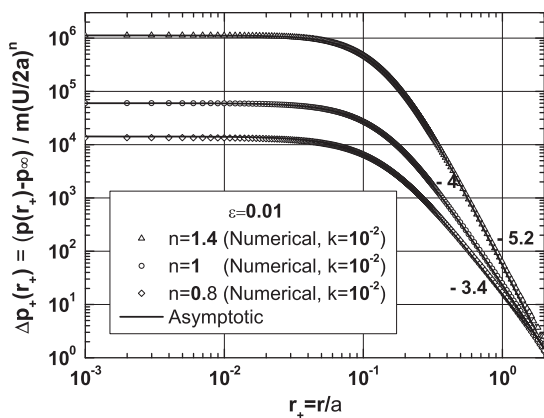


Fig. 7. Comparison of the numerical and the asymptotical pressure distribution in the gap between the sphere and the plane for different fluidity indexes $n = 0.8$, $n = 1$ and $n = 1.4$, for $Re = 10^{-3}$, $\epsilon = 10^{-2}$ and $k = 10^{-2}$.

Table 2

Comparison of the exponents $\beta(n)$ of the power-law behavior obtained numerically and those obtained asymptotically.

n	0	0.1	1/3	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1	1.4	1.8	2
$g(n)$ (Numeric)	-0.03	-0.05	-0.13	-0.20	-0.29	-0.55	-0.68	-0.82	-0.98	-1.57	-2.16	-
$g(n)$ (Asymptotic)	-	-	-	-0.10	-0.25	-0.55	-0.70	-0.85	-1	-1.60	-2.20	-2.5

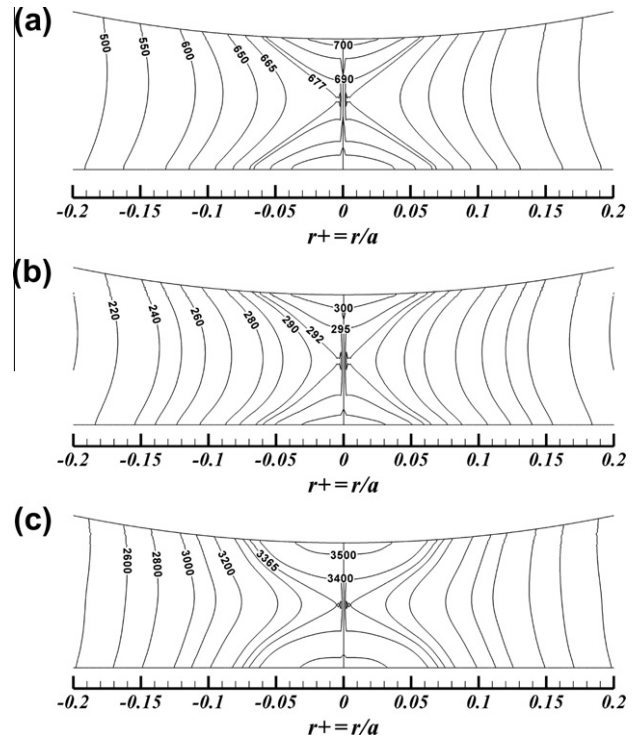


Fig. 8. Bulk normalized pressure distribution $(p(r_+) - p_\infty)/m(U/2a)^n$ in the gap between the sphere and the bottom showing the appearance of a saddle point in the axis for $Re = 10^{-3}$, $\epsilon = 10^{-2}$ and $k = 10^{-2}$: (a) $n = 1$, (b) $n = 0.8$, and (c) $n = 1.4$.

defined by the ratio $k = a/b$, and the frontal one defined by the gap $\epsilon = d/a$. The numerical results obtained for different lateral confinements at $Re = 10^{-3}$, for $0.01 \leq k \leq 0.9$ given in Fig. 3, show clearly that when the sphere moves towards the bottom of the container, the effect of the frontal correction factor takes place further from the plane, all the more so that k is low. For $k = 10^{-2}$, the numerical results we obtained are in good agreement with the exact analytical solution from Maude [7] and Brenner [6]. For this lateral confinement ($k = 10^{-2}$), at least at a distance of ten sphere radii to the bottom, the lateral correction factor is negligible ($\lambda(k = 10^{-2}, \epsilon \rightarrow \infty) = F(k = 10^{-2}) / (6\pi\mu a U) = 1.017$ [10] and $\delta(\epsilon = 10) = 1.109$). This successful result confirms the validity of the dynamic mesh numerical method used for this unsteady problem. Moreover, the limit of $\delta(k, \epsilon)$ (its value in the plateau) when ϵ is greater than a critical value ϵ_c (at which the drag deviates from the plateau depending on the lateral confinement see Table 1) is also in good agreement with the obtained value of the lateral correction factor $\lambda(k, \epsilon \rightarrow \infty) = F(k) / 6\pi\mu a U$ [10].

$$\delta(k, \epsilon > \epsilon_c) \rightarrow \lambda(k) \quad (16)$$

However, for all confinements, when the sphere is approaching the plane in the lubrication limit, the asymptotic behavior of $\delta(k, \epsilon)$ is the same as in the lateral unbounded medium. This effect is due to the fact that the lateral correction factor becomes negligible in comparison with the frontal one, in the lubrication regime when $\epsilon \rightarrow 0$. Moreover, in Fig. 7, the radial distribution of the pressure calculated numerically, at low Reynolds number ($Re = 10^{-3}$) and

low lateral confinement ($k = 10^{-2}$), is in good agreement with that calculated asymptotically (Eq. (13)). This agreement corroborates the validity of the numerical method. Taking advantage of the accuracy of this method, we give in Fig. 4 the influence of the inertia on the correction factor $\delta(\varepsilon, k)$ and its asymptotic behavior for a given lateral confinement $k = 0.29$ and $Re = 1, 10$, and 100 . As the correction of the lateral confinement is negligible in the lubrication regime (see above), the comparison of the numerical results and those given by Cox and Brenner [4] shows a good agreement and confirms, for the first time, to our knowledge, the validity of their asymptotic expression:

$$\delta(\varepsilon, Re) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{5} \left(1 + \frac{Re}{4} \right) \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 0.9712 \quad (17)$$

When $\varepsilon \rightarrow 0$, the influence of the Reynolds number becomes negligible, confirming that the inertia in the lubrication regime is mainly controlled by εRe , as pointed out above. Otherwise, this situation, where the Reynolds number is fixed, differs fundamentally from the sedimentation of a buoyant sphere, where its settling velocity decreases continuously, and thus the Reynolds number far from the plane plays an important role, through the Stokes number $St = (1/9)(\rho_s/\rho_f)Re$ (where ρ_s and ρ_f are respectively the densities of the sphere and the fluid), in the transition from the non bouncing to the bouncing regime [21–24].

4.2. Non-Newtonian fluid

To justify the use of the power-law fluid model, let us recall that, in this work, as we consider non-Newtonian fluid with a relaxation time lower than the inverse of the maximum of the normal and radial elongational velocity gradient (located in the vicinity of the stagnation point), the effect of a possible viscoelasticity is negligible [25–27]. In this condition, the behavior of the fluid in this almost Poiseuille-type flow (viscometric one) can be modeled in first approximation by a power-law fluid. Then, in Fig. 5a–c, we show the influence of the index of fluidity n on the correction factor $\delta(n, k, \varepsilon)$ for $k = 0.01, k = 0.29$ and $k = 0.44$. For each of these lateral confinements, the frontal correction factor corresponding to the drag undergone by a sphere at a distance εa from the plane, normalized by the same force in unbounded power-law medium, is given by the Eqs. (5) and (6). In Fig. 5a–c, we observe for all confinements, a good agreement between the numerical results and those obtained by the asymptotic approach given by the Eqs. (14) and (A.7) corresponding to the lateral unbounded medium for $n > 0.5$. In fact, the influence of the lateral confinement in comparison to the frontal one is very weak in the lubrication regime and depends only on the fluidity index of the fluid through the Eqs. (14) and (A.7), as shown in Fig. 6a for the pseudoplastic fluid ($n = 0.7$) and in Fig. 6b for the shear thickening fluid ($n = 1.4$).

Otherwise, concerning Fig. 5a–c, we show that, when the sphere moves towards the plane, the more the fluid is shear thinning, the lower the increase in the frontal correction factor is. Thus, the aggregation of particles in suspensions is facilitated in shear thinning fluids, relative to the Newtonian case. Finally, as discussed in Section 2, to confirm the absence of the effect of a truncation at low and high velocity gradients introduced by the appearance of both Newtonian plateaus as in the Carreau-Yasuda model [15], we numerically calculated the same correction factor with an Ostwald truncated model whose apparent viscosity varies over three decades (as encountered in experiments). The good agreement of the results, given in Fig. 5a, obtained with this truncated Ostwald model with those obtained by employing a complete one, justifies its use in this study.

Concerning the radial distribution of the pressure in the gap, we observe a power-law decrease in the pressure with the radial

distance, as in the Newtonian case where $(p(r_+) - p_\infty) \propto r_+^{-4}$. As with the Newtonian fluid, we compare successfully in Fig. 7 the

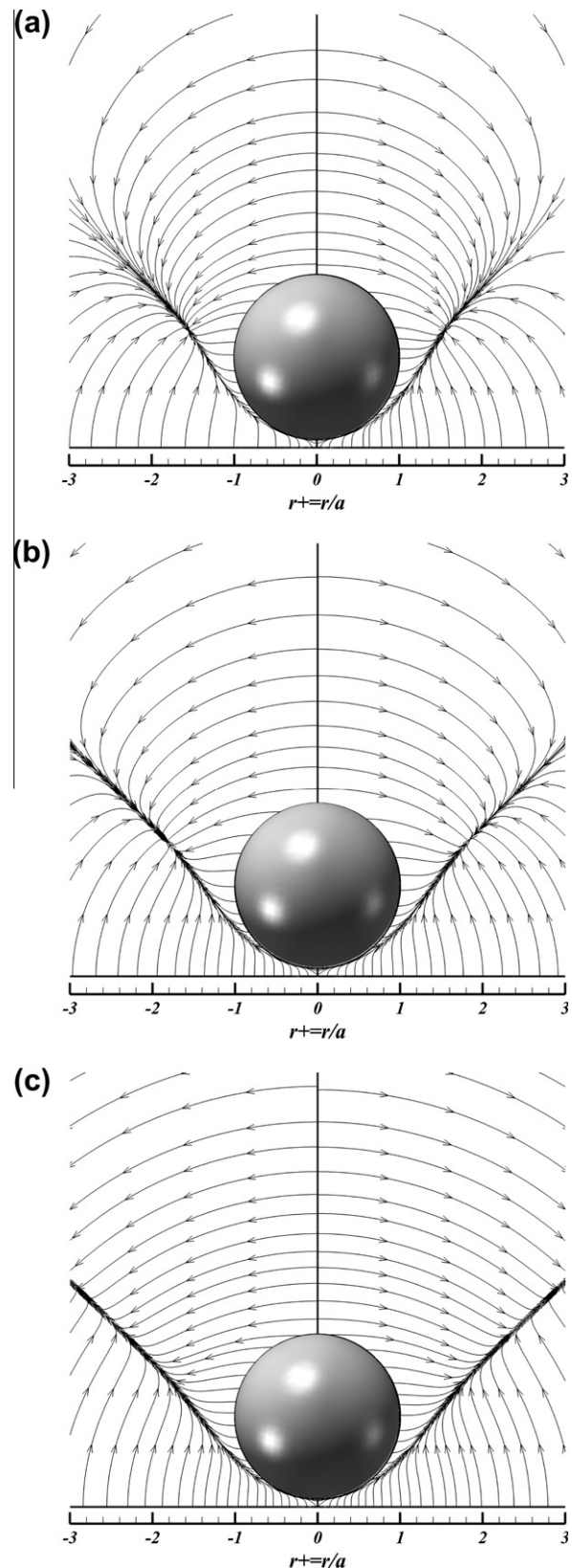


Fig. 9. Instantaneous streamlines of the flow in the frame related to the sphere for different indexes of fluidity ($Re = 10^{-3}, \varepsilon = 10^{-2}$ and $k = 10^{-2}$): (a) $n = 0.8$, (b) $n = 1$, and (c) $n = 1.4$.

non-Newtonian numerical ($k = 10^{-2}$) and asymptotical results (Eqs. (12) and (A.6)) for two indexes of fluidity, corresponding respectively to dilatant ($n = 1.4$) and pseudoplastic ($n = 0.8$) fluids for $\varepsilon = 0.01$. In all cases, the numerical results for Newtonian and power-law fluids confirm the validity of the asymptotic relations (12) and (A.6). The same agreement is shown for different ε . Concerning the bulk distribution of the pressure in the gap, Fig. 8 shows that the high pressure domain is located in the lowest gap, for different indexes of fluidity. Then, it is observed that an absolute maximum pressure is attained at the stagnation point of the sphere and at the bottom. The minimum pressure is attained at the saddle point located in the middle of the lowest gap in the symmetry axis. Finally, let us remark that, for the same Reynolds number $Re_n = 10^{-3}$, the pressure is reduced in the pseudoplastic fluid and increased in the dilatant one, in comparison to the Newtonian case. Otherwise, concerning the power-law evolution of the drag force in the lubrication regime, we give in Table 2 the exponent of this power-law deduced from the numerical curve given in Fig. 5a and that calculated asymptotically: $g(n) = -(3n - 1)/2$. The comparison of both results confirms that the asymptotic expressions (14) and (A.7) give accurate results only for $n > 0.5$ as discussed above. For $n < 0.5$, the agreement no longer remains because the asymptotic calculation needs to be performed at higher asymptotic order. Indeed, for the shear thinning fluid, the part of the sphere which contributes to the drag force is all the more increased as the fluidity index decreases.

To show how the flow field is affected by the fluidity, we give some examples of the instantaneous streamlines of the flow in the frame related to the sphere for different indexes of fluidity $n = 0.8$, $n = 1$ and $n = 1.4$ in Fig. 9. They show the appearance of the singular instantaneous streamline of the flow and a change of the flow aspect in the dilatant fluid case.

5. Conclusion

The power-law which describes the divergence of the drag force undergone by a sphere moving towards a plane, has been numerically and asymptotically studied in Newtonian and non-Newtonian fluids in lateral confined media. The successful confrontation with the exact solution given for a lateral unbounded medium by Maude and Brenner, confirms the validity of the dynamic mesh method employed in this geometrically unsteady problem. Thereby we investigate in the Newtonian case, the effect of inertia and the influence of the lateral confinement. These successful results, obtained by this dynamic mesh numerical method, led us to give a solution to this problem for non-Newtonian power-law fluids, at constant very low Reynolds number and under the negligible viscoelastic components of the fluid assumption. To corroborate the numerical results, we gave the divergence law of the drag and the distribution of the pressure in the gap asymptotically in the lubrication limit. The successful confrontation of both methods confirms their validity. This new result may find an application in the physics of aggregation of particles in dispersions as well as in the measurement made with the Dynamic Surface Force Apparatus for nanorheology.

Appendix A. Asymptotic results

In the limit of the lubrication regime $\varepsilon \ll 1$ and at very low Reynolds numbers, when the sphere approaches the wall at constant velocity in unbounded lateral medium (see Fig. 2), the drag force is controlled principally by the drainage process of the liquid film located in the minimum gap remaining between the sphere and the plane. In this situation, the drag force undergone by a sphere can be calculated from the pressure force induced by the radially

ejected flow. Note that this drainage taking place in this gap, for the power-law fluid, is reduced to a “radial power-law Poiseuille flow” as shown in Fig. 2 where $a\varepsilon_1(\theta) = a\varepsilon + a(1 - \cos\theta)$ and $a\varepsilon$ is the minimum gap between the sphere and the plane. Indeed, starting from the following reduced momentum and continuity equations in the lubrication limit:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[m \left| \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial z} \right|^n \right] = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (A.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [ru_r(r, z)] + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (A.2)$$

By successive integrations and using the boundary conditions, one can obtain:

$$u_r(r, z) = \frac{n}{n+1} \left[-\frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial r} \right]^{\frac{1}{n}} \left[\left| z - \frac{a\varepsilon_1(\theta)}{2} \right|^{1+\frac{1}{n}} - \left(\frac{a\varepsilon_1(\theta)}{2} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right] \quad (A.3)$$

Then by integrating the continuity Eq. (A.2) over the gap and taking into account that the velocity of the particle $u_z(r, z)|_{\text{sphere}} = -U$

$$\frac{1}{r} \int_{-\frac{a\varepsilon_1}{2}}^{+\frac{a\varepsilon_1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} [ru_r(r, z)] dz + \int_{-\frac{a\varepsilon_1}{2}}^{+\frac{a\varepsilon_1}{2}} \frac{\partial u_z(r, z)}{\partial z} dz = 0 \quad (A.4)$$

where $u_r(r, z)$ is given by Eq. (A.3) and $u_z(r, z = +a\varepsilon_1/2) = -U$ on the sphere and $u_z(r, z = -a\varepsilon_1/2) = 0$ on the plane, it is possible to obtain the radial pressure distribution along the gap which is given by:

$$p(r_+) - p_\infty = -mU^n \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \times \left(\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{a^n \varepsilon^{\frac{3n+1}{2}}} \right) \int_\infty^{\frac{1}{2r^2} + \frac{Y^{\frac{n-1}{2}}}{[Y+1]^{2n+1}}} dY \quad (A.5)$$

where $Y = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{r}{a} \right)^2$. Using the MATHEMATICA code, the normalized radial distribution of the pressure is given by:

$$\frac{p(r_+) - p_\infty}{m \left(\frac{U}{2a} \right)^n} = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{2^{2+3n}}{1+3n} \right) (r_+)^{-(1+3n)} \times {}_2F_1 \left(1+2n, \frac{1}{2}(1+3n); \frac{3}{2}(1+n); -2 \frac{\varepsilon}{r_+^2} \right) \quad (A.6)$$

where p_∞ is the pressure far from the gap, $r_+ = r/a$ is the normalized radial distance from the stagnation point and ${}_2F_1$ is the Gaussian hypergeometric function. Note that this result is similar to that obtained from Rodin's formula (12) in Section 3. In this approach, the correction factor $\delta(n, k = 0, \varepsilon)$ of the drag undergone by a sphere in lateral unbounded medium can be calculated by integrating the pressure given by formula (A.6) over the frontal surface of the sphere in the lubrication limit:

$$\delta(n, k = 0, \varepsilon) = \frac{F(n, k = 0, \varepsilon)}{F(n, k = 0, \varepsilon \rightarrow \infty)} = \frac{2^{\frac{3n+3}{2}}}{3(9n^2 - 1)} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \times \frac{\Gamma(\frac{3n+3}{2}) \Gamma(\frac{n+3}{2})}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3n-1}{2}}} \quad (A.7)$$

This formula, which is valid mathematically only for $n > 1/3$, reduces to the formula (14) deduced from Rodin's result in the limit of $\beta = \infty$ (Section 3). In fact, to verify the equivalency between both formulae, let us recall that [28]:

$$\frac{4}{9n^2 - 1} \frac{\Gamma(\frac{3+n}{2}) \Gamma(\frac{3n+3}{2})}{\Gamma(2n+1)} = \beta \left(\frac{3+n}{2}, \frac{3n-1}{2} \right) \quad (A.8)$$

References

- [1] P.G. de Gennes, Dynamics of concentrated dispersions: a list of problems, Physico-Chem. Hydrodyn. 2 (1981) 31–44.

- [2] F. Restagno, J. Crassous, E. Charlaix, C. Cottin-Bizonne, M. Monchanin, A new surface apparatus for nanorheology, *Rev. Scient. Instrum.* 73 (2002) 2292–2297.
- [3] C. Cottin-Bizonne, Hydrodynamique à l'interface solide-liquide: étude par mesures de forces de surfaces et simulations de dynamique moléculaire, Ph.D. thesis, Université Claude Bernard Lyon I, 2003.
- [4] R. Cox, H. Brenner, The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. Part ii. Small gaps widths, including inertial effects, *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 1753–1777.
- [5] M. Stimson, G.B. Jeffery, The motion of two spheres in a viscous fluid, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 111 (1926) 110–116.
- [6] H. Brenner, The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface, *Chem. Eng. Sci.* 16 (1961) 242–251.
- [7] A.D. Maude, End effects in a falling-sphere viscometer, *Br. J. Appl. Phys.* 12 (1961) 293–295.
- [8] A. Ambari, B. Gauthier-Manuel, E. Guyon, Wall effects on a sphere translating at constant velocity, *J. Fluid Mech.* 149 (1984) 235–253.
- [9] A. Ambari, B. Gauthier-Manuel, E. Guyon, Direct measurement of tube wall effect on the stokes force, *Phys. Fluids* 28 (1985) 1559–1561.
- [10] A. Ben Richou, A. Ambari, J.K. Naciri, Correction factor of the stokes force undergone by a sphere in the axis of a cylinder in uniform and poiseuille flows, *Eur. Phys. J. Phys.* 24 (2003) 153–165.
- [11] G.J. Rodin, Squeeze film between two spheres in a power-law fluid, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 63 (1996) 141–152.
- [12] A.M. Ardekani, R.H. Rangel, D.D. Joseph, Motion of a sphere normal to a wall in a second-order fluid, *J. Fluid Mech.* 587 (2007) 163–172.
- [13] J.D. Sherwood, Squeeze flow of a power-law fluid between non-parallel plates, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 166 (2011) 289–296.
- [14] A.M. Ardekani, D.D. Joseph, D. Dunn-Rankin, R.H. Rangel, Particle-wall collision in a viscoelastic fluid, *J. Fluid Mech.* 633 (2009) 475–483.
- [15] P.J. Carreau, D.C.R.D. Kee, R.P. Chhabra, *Rheology of Polymeric Systems: Principles and Applications*, Hanser Gardner Publications, 1997.
- [16] A. Despeyroux, A. Ambari, A. Ben Richou, The hydrodynamic interaction effects on the settling and the transportation of a sphere in power-law fluids, *Phys. Fluids* in June 2011, in preparation.
- [17] ANSYS, Inc., ANSYS FLUENT Theory Guide (November 2010).
- [18] L. Pasol, M. Chaoui, S. Yahiaoui, F. Feuillebois, Analytical solutions for a spherical particle near a wall in axisymmetrical polynomial creeping flows, *Phys. Fluids* 17 (2005) 073602.
- [19] D.Y. Chan, R.G. Horn, The drainage of thin liquid films between solid surfaces, *J. Chem. Phys.* 83 (1985) 5311–5324.
- [20] A. Mongruel, N. Lecoq, E. Wajnryb, B. Cichocki, F. Feuillebois, Motion of a spherocylindrical particle in a viscous fluid in confined geometry, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 30 (2011) 405–408.
- [21] A. Mongruel, C. Lamriben, S. Yahiaoui, F. Feuillebois, The approach of a sphere to a wall at finite reynolds number, *J. Fluid Mech.* 661 (2010) 229–238.
- [22] G.G. Joseph, R. Zenit, M.L. Hunt, A.M. Rosenwinkel, Particle-wall collisions in a viscous fluid, *J. Fluid Mech.* 433 (2001) 329–346.
- [23] P. Gondret, M. Lance, L. Petit, Bouncing motion of spherical particles in fluids, *J. Fluid Mech.* 14 (2002) 643–652.
- [24] J.O. Marston, W. Yong, S.T. Thoroddsen, Direct verification of the lubrication force on a sphere travelling through a viscous film upon approach to a solid wall, *J. Fluid Mech.* 655 (2010) 515–526.
- [25] P.G. de Gennes, Coil-stretch transition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients, *J. Chem. Phys.* 60 (1974) 5030–5042.
- [26] A. Ambari, C. Deslouis, B. Tribollet, Coil-stretch transition of macromolecules in laminar flow around a small cylinder, *Chem. Eng. Commun.* 29 (1984) 63–78.
- [27] E.J. Hinch, Mechanical models of dilute polymer solutions for strong flows with large polymer deformations, in: *Colloque Internatioanl CNRS: polymère et lubrification*, Brest, France, 1974, pp. 241–247.
- [28] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, series, and products*, 4th ed., Academic Press, Inc., Orlando, 1983.

INTERACTIONS HYDRODYNAMIQUES LORS DU TRANSPORT DE PARTICULES EN FLUIDE NEWTONIEN ET NON NEWTONIEN

RESUME : Ce mémoire est consacré à l'étude des effets des interactions hydrodynamiques sur le mouvement et le transport des particules sphériques et cylindriques dans les fluides non newtoniens. Des résultats importants ont été obtenus pour expliquer la physique des suspensions en fluide non newtonien. Le modèle non newtonien choisi est celui d'Ostwald car il décrit bien les effets de rhéofluidification et de rhéoépaississement qui caractérisent la plupart des fluides non newtoniens. Le premier résultat a été de montrer comment l'indice de fluidité affecte le comportement des suspensions par le biais de la longueur d'écran hydrodynamique autour de chaque particule. Ceci nous a permis de donner les bonnes valeurs de la traînée subie par chaque particule en milieu infini, et de montrer l'apparition du paradoxe de Whitehead dans le cas de la sphère à partir de $n=2$ et de Stokes dans le cas du cylindre à partir de $n=1$. Lorsque n est voisin de ces valeurs critiques, la détermination des forces hydrodynamiques devient très sensible à l'inertie. Le deuxième résultat important pour l'industrie de l'injection des matériaux composites, a été de montrer par une méthode inverse que les interactions hydrodynamiques pouvaient induire un retard plus ou moins important par rapport au cas newtonien dans le transport de particules. Le troisième résultat important pour l'analyse des processus d'agrégation de particules sphériques ou cylindriques a été obtenu dans le cas d'une particule sphérique ou cylindrique en sédimentation vers un plan fixe. Un calcul asymptotique dans le cas non newtonien en régime de lubrification, comparé avec succès à celui obtenu numériquement par la méthode de maillage dynamique, nous a permis d'obtenir les lois d'évolution de la force subie par ces particules entrant en contact avec un plan. Ces derniers résultats trouvent une application dans l'utilisation des machines dynamiques à force de surface dans le cadre de la nanorhéologie.

Mots clés : interactions hydrodynamiques, fluide non newtonien, suspensions, sédimentation, agrégation, machines dynamiques à force de surface.

HYDRODYNAMIC INTERACTION AND TRANSPORTATION OF PARTICLES IN NEWTONIAN AND NON-NEWTONIAN FLUIDS

ABSTRACT : This work deals with the study of the hydrodynamic interactions effects on the movement and the transport of spherical and cylindrical particles in non-Newtonian fluids. Some important results were obtained to explain the physics of suspensions in non-Newtonian fluid. We used the Ostwald model which describes well the effects of shear-thinning and shear-thickening which characterize most non-Newtonian fluids. The first result was to show how the fluidity index affects the behavior of suspensions by the means of the hydrodynamic screen length around each particle. This enabled us to give the accurate values of the drag undergone by each particle in infinite medium, and to show the appearance of the Whitehead paradox in the case of the sphere starting from $n=2$ and of the Stokes paradox in the case of the cylinder starting from $n=1$. When n is close to these critical values, the determination of the hydrodynamic forces becomes very sensitive to inertia. The second important result for the industry of the injection of composite materials, was to show, using an inverse method, that the hydrodynamic interactions could induce a more or less important delay compared to the Newtonian case in the transport velocity of particles. The third important result for the analysis of the processes of aggregation of spherical or cylindrical particles, was obtained in the case of a spherical or cylindrical particle in sedimentation towards a fixed plane. An asymptotic calculation in the non-Newtonian case in the lubrication limit, compared successfully with that obtained numerically by the dynamic mesh method, enabled us to obtain the laws of evolution of the force undergone by these particles making contact with a plane. These last results find an application in the use of the dynamic surface force apparatus within the framework of the nanorheology.

Keywords : hydrodynamic interactions, non-Newtonian fluids, suspensions, sedimentation, aggregation, dynamic surface force apparatus.

