



HAL
open science

Couplage pour l'aéroacoustique de schémas aux différences finies en maillage structuré avec des schémas de type éléments finis discontinus en maillage non structuré

Raphaël Léger

► **To cite this version:**

Raphaël Léger. Couplage pour l'aéroacoustique de schémas aux différences finies en maillage structuré avec des schémas de type éléments finis discontinus en maillage non structuré. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1030 . pastel-00679119

HAL Id: pastel-00679119

<https://pastel.hal.science/pastel-00679119>

Submitted on 14 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Spécialité

Mathématiques appliquées
(École Doctorale MSTIC)

Présentée par

M. Raphaël LÉGER

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Sujet de la thèse :

Couplage pour l'aéroacoustique entre méthode de Galerkin discontinue en maillage non-structuré et méthode de différences finies en maillage cartésien

soutenue le 05 décembre 2011,

devant le jury composé de :

M. Serge PIPERNO	Directeur de la Recherche à l'ENPC	Directeur de Thèse
M. Jean-Pierre CROISILLE	Professeur de l'Université de Metz	Rapporteur
M. Stéphane LANTERI	Directeur de recherche à l'INRIA	Rapporteur
M. Christophe BAILLY	Professeur à l'École centrale de Lyon	Examineur
M. Pascal FREY	Professeur de l'Université Paris VI	Examineur
M. Alois SENGISSSEN	Ingénieur de recherche à <i>Airbus</i>	Examineur
M. Christophe PEYRET	Ingénieur de recherche à l' <i>Onera</i>	Encadrant

Cette thèse a été financée par l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (Onera). Elle a été réalisée entre novembre 2008 et novembre 2011, au centre Onera de Châtillon, au Département de Simulation Numérique des écoulements et Aéroacoustique.

Résumé

Cette thèse vise à étudier le couplage entre méthodes de Galerkin Discontinue (DG) et méthodes de différences finies (DF) en maillages hybrides non structuré / cartésien, en vue d'applications en aéroacoustique numérique. L'idée d'une telle approche consiste à pouvoir tirer profit localement des avantages respectifs de ces méthodes, soit, en d'autres termes, à pouvoir prendre en compte la présence de géométries complexes par une méthode DG en maillage non structuré, et les zones qui en sont suffisamment éloignées par une méthode DF en maillage cartésien, plus efficace.

Plus précisément, il s'agit de concevoir un algorithme d'hybridation de ces deux types de schémas pour l'approximation des équations d'Euler linéarisées, puis d'évaluer avec attention le comportement numérique des solutions qui en sont issues. De par le fait qu'aucun résultat théorique ne semble actuellement accessible dans un cas général, cette étude est principalement fondée sur une démarche d'expérimentation numérique. Par ailleurs, l'intérêt d'une telle hybridation est illustré par son application à un calcul de propagation acoustique dans un cas réaliste.

Abstract

This PhD dissertation aims at studying coupling techniques between Discontinuous Galerkin (DG) and finite difference (FD) schemes in a non-structured / Cartesian hybrid-mesh context, in the framework of Aeroacoustics computations. The idea behind such an approach is the possibility to locally take advantage of the qualities of each method. In other words, the goal is to be able to deal with complex geometries using a DG scheme on a non-structured mesh in their neighborhood, while solving the rest of the domain using a FD scheme on a cartesian grid, in order to alleviate the needs in heavy computational resources.

More precisely, this work aims at designing an hybridization algorithm between these two types of numerical schemes, in the framework of the approximation of the solutions of the Linearized Euler Equations. Then, the numerical behaviour of hybrid solutions is cautiously evaluated. Due to the fact that no theoretical result seems achievable at the present time, this study is mainly based on numerical experiments. What's more, the interest of such an hybridization is illustrated by its application to an acoustic propagation computation in a realistic case.

Mots-clés : Méthode de Galerkin Discontinue, Méthode de différences finies, hybridation, couplage, aéroacoustique numérique, propagation d'ondes

Keywords : Discontinuous Galerkin methods, Finite Difference schemes, hybridization, coupling, computational aeroacoustics, wave propagation

Remerciements

À l'heure de mettre un point final à ce manuscrit, il me serait difficile de dire à quel point ces trois années de thèse furent riches, scientifiquement et humainement. J'ai été, je pense pouvoir le dire, un doctorant heureux à bien des égards. Aussi, il est un grand nombre de personnes auxquelles je souhaiterais, aujourd'hui, exprimer mes plus sincères remerciements.

Tout d'abord, j'aimerais exprimer ma plus grande gratitude à Serge PIPERNO, non seulement pour son implication dans la direction de ces travaux, mais aussi pour sa grande disponibilité ainsi que la gentillesse dont il a fait preuve à mon égard. Ce fut un réel plaisir d'avoir pu travailler avec lui - j'ai énormément appris à ses côtés et garderai, pour sûr, un excellent souvenir de nos échanges durant ces trois ans !

J'aimerais également remercier vivement messieurs Jean-Pierre CROISILLE et Stéphane LANTERI d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit, et d'avoir sù témoigner de leur intérêt pour ces travaux au travers de leurs diverses remarques et commentaires.

Un grand merci, de plus, à messieurs Christophe BAILLY, Pascal FREY, et Aloïs SENGISEN qui m'ont fait l'honneur d'accepter notre invitation à participer au jury de thèse.

Ces travaux doivent beaucoup à l'encadrement de Christophe PEYRET, que je tiens à remercier chaleureusement. Il s'est montré d'une grande patience et d'une grande gentillesse à mon égard. Au delà de ses nombreux conseils techniques, ses encouragements, son amitié, et son soutien dans les moments les moins faciles m'ont été extrêmement précieux.

Ceci m'amène naturellement à remercier les autres membres de notre unité : Michel BORREL, Philippe DELORME, Odile LABBÉ et Gilles RAHIER, pour la qualité de leur accueil, leur bienveillance ainsi que leurs nombreux conseils. Merci également à Guillaume DESQUESNES d'avoir accompagné mes premiers pas de doctorant à l'Onera. Ce fut un plaisir d'avoir pu passer ces trois années en votre compagnie !

J'aimerais étendre ces remerciements à l'ensemble du personnel du Département de Simulation Numérique des écoulement et Aéroacoustique, dont j'ai eu le plaisir de faire partie, et à son directeur, M. Jean-Marie LE GOUEZ.

Également, merci à Éric QUÉMERAIS, dont les travaux sur les aspects informatiques du couplage de solveurs m'ont été extrêmement précieux afin de réaliser les calculs décrits dans ce manuscrit.

Un grand merci à Ghislaine DENIS pour son efficacité, sa bonne humeur constante et communicative, ainsi que son aide précieuse et indispensable dans l'organisation de la soutenance !

Plus largement, je souhaiterais exprimer toute ma reconnaissance à ceux qui, d'une

manière ou d'une autre, au travers de leur aide, leurs conseils ou simplement de nos échanges, ont contribué à nourrir ma réflexion sur ces travaux (entre autres). Parmi eux, merci donc à Germain BILLET, T-H LÊ, Yann MAUFFREY, Emeric MARTIN, Juliette RYAN, Marc TERRACOL, Yoann VENTRIBOUT, et tout ceux - que malheureusement - j'aurais oublié... Ils se reconnaîtront !

Ces trois années n'auraient pas été si agréables sans la présence de mes nombreux camarades doctorants et stagiaires. Parmi eux, j'aimerais tout particulièrement remercier Célia pour sa bonne humeur et son amitié dans les bons moments comme dans les plus difficiles : je garderai un excellent souvenir de cette année et demi de cohabitation dans notre bureau partagé ! Merci également à Alexandra pour son dynamisme et sa contribution à ces travaux à l'occasion de son stage parmi nous, que j'ai eu plaisir à co-encadrer. Je lui souhaite une excellente continuation dans ses travaux de thèse ! À tous les autres, j'aimerais également dire la chance qui m'a été donnée de faire votre connaissance tout comme le plaisir que j'ai eu à évoluer en votre compagnie. Je tiens à vous remercier, en particulier, pour les nombreux moments de franche rigolade - construits ou carrément décosus - qui ont rythmé ces trois années... Merci donc, plus ou moins par ordre d'apparition, aux deux compères Benoît et Guillaume, Fabien, Manu, Sophie, Katia (ainsi que Julie et Mark), Matthieu (aussi pour nos escapades matinales en Mayenne), Nicolas, Maxime, Jean-Baptiste, Sébastien, ainsi qu'à tous les nombreux stagiaires dont je ne me risquerai pas à tenter de dresser la liste exhaustive, mais dont j'aurais également eu le grand plaisir de croiser la route - là encore, ils se reconnaîtront !

À tous, je vous souhaite bon vent.

Je souhaiterais remercier l'ensemble des amis, proches ou plus simples connaissances, qui ont accompagné mon quotidien au cours de ces trois années riches en rebondissements. Parmi eux, merci à Anne-Flore, Paul et Rémi de m'avoir fait l'amitié d'assister à ma soutenance.

Enfin, je tiens à remercier ma famille - Pascal, mes grands parents, ma sœur, mes parents - pour leur soutien intégral et constant à l'occasion de tous mes projets.

Châtillon, le 29/02/2012.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Démarche	3
2	Préliminaires	5
2.1	Modélisation	5
2.1.1	Équations de Navier-Stokes	5
2.1.2	Équations d'Euler	6
2.1.3	Équations d'Euler Linéarisées	7
2.2	Approximation numérique temporelle des équations	9
2.2.1	Méthodes de Runge-Kutta	9
2.2.2	Propriétés	10
2.3	Approximation en espace - Méthodes de différences finies	12
2.3.1	Formulation	12
2.3.2	Propriétés dispersives	14
2.3.3	Filtrage	15
2.3.4	Mise en œuvre	18
2.3.5	Validation	20
2.4	Approximation en espace - Méthodes de Galerkin discontinues	23
2.4.1	Formulation	23
2.4.2	Mise en œuvre	25
2.4.3	Propriétés dispersives	29
2.4.4	Validation	33
2.5	Méthodes DF et DG : propriétés et performances comparées en maillage cartésien	34
2.6	Conclusion	37
3	Différentes approches de couplage	39
3.1	Approche	39
3.1.1	Exemples de solveurs hybrides dans la littérature	39
3.1.2	Échange de données et stratégie de maillage	46
3.2	Problèmes théoriques	48
3.2.1	Cadre d'étude théorique de la consistance et de la stabilité	48
3.2.2	Régularité, contenu spectral des solutions, et stratégie de maillage	50
3.3	Conclusion	51

4	Étude d'un schéma hybride 1D	53
4.1	Position du problème	53
4.2	Formulation d'un schéma hybride DG/DF préservant l'énergie	54
4.2.1	Formulation du schéma	54
4.2.2	Conservation de l'énergie	57
4.3	Consistance du couplage	58
4.3.1	Propriétés dispersives des schémas autonomes	58
4.3.2	Approche retenue	59
4.3.3	Propriétés dispersives du schéma hybride DG/EF continu	60
4.3.4	Propriétés dispersives du schéma hybride DG/EF condensés	64
4.4	Expériences numériques	66
4.5	Conclusion	69
5	Schéma hybride 2D	71
5.1	Algorithme en recouvrement minimal	71
5.1.1	Description	71
5.1.2	Une première illustration	77
5.1.3	Validation en termes de précision	78
5.1.4	Validation en termes de stabilité	81
5.2	Algorithme en recouvrement total	85
5.2.1	Motivation et approche	85
5.2.2	Pré-traitement géométrique	85
5.2.3	Validation en terme de précision	87
5.2.4	Validation en terme de stabilité	89
5.2.5	Conclusion	90
5.3	Applications bidimensionnelles	90
5.3.1	Une première illustration	90
5.3.2	Cas d'épreuve acoustique	93
5.3.3	Prise en compte d'un champ porteur	100
5.4	Conclusion	103
6	Schéma hybride 3D - Une application	107
6.1	Schéma hybride 3D	107
6.1.1	Extension de l'approche bidimensionnelle	107
6.1.2	Validation	108
6.2	Diffraction d'une onde acoustique autour d'une nacelle de turboréacteur	110
6.2.1	Géométrie, stratégie de maillage et configuration du couplage	110
6.2.2	Résultats	114
6.3	Diffraction d'une onde acoustique autour de deux nacelles de turboréacteur	117
6.3.1	Stratégie de maillage et configuration du couplage	117
6.3.2	Résultats	117
6.4	Conclusion	118
7	Conclusion	123

Table des figures

2.1	Propriétés diffusives et dispersives des schémas RK d'ordre 1 à 8 en fonction de $\omega \in [0, \pi]$ pour un pas de temps fixé. Gauche : $ A(\omega) $, droite : $\arg(A(\omega))$.	11
2.2	Nombre d'onde numérique en fonction du nombre d'onde physique pour les schémas aux différences finies centrés d'ordre 1 à 8	15
2.3	Onde de longueur d'onde $\lambda = 2h$, causant les instabilités des schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé	16
2.4	Coefficient d'amplification $A(\tilde{k})$ introduit par le filtre haute-fréquences	18
2.5	Imposition de conditions aux limites par des points fantômes dans le cas de schémas DF centrés. Noir : Points physiques / Rouge : Points fantômes.	19
2.6	Champ de densité à l'instant initial pour un mode de cavité bidimensionnel $(n_x, n_y) = (5, 5)$	20
2.7	Représentation des degrés de liberté dans le triangle unité muni de fonctions de bases Lagrangiennes d'ordre 1 à 8.	28
2.8	Champ solution DG \mathcal{P}^1 sur des éléments triangulaires : la solution est affine élément par élément, et discontinue entre les mailles	29
2.9	Fonctions de base Lagrangiennes pour un schéma DG \mathcal{P}^1 en 1-D	30
2.10	Maillages de type Union Jack : 2D et 3D (surface colorée par les marqueurs de peau / coupe volumique).	33
2.11	Performances comparées : solveurs DG et DF cartésiens / Erreur L^2 vs. temps CPU (gauche) - Erreur L^2 vs. nb. degrés de liberté (droite)	36
3.1	Couplage de schémas 2D DF/FV et DF/EF - Abenius et al. [1]	41
3.2	Couplage de schémas 1D DF/FV - Remaki [36]	41
3.3	Couplage de schémas 3D DF/FV - Lalléchère et al. [26]	42
3.4	Couplage de schémas 2D DG/DF - Garcia et al. [20]	43
3.5	Couplage de schémas 2D DG/DF - Utzmann et al. [40]	44
4.1	Fonctions de base du schéma hybride DG (en gris, gauche) / éléments finis continus (rouge, droite), pour la résolution de (4.1)	55
4.2	Proposition de <i>mass lumping</i> pour \mathbf{M}_{EF}	57
4.3	Fonctions de base du schéma hybride éléments finis continus (rouge, gauche) / DG centré (gris, droite), pour la résolution de (4.1)	62
4.4	Solutions approchée (hybride, discrétisée par le schéma couplé DG \mathcal{P}^1 / DF) et analytique de l'équation des ondes 1D	67
4.5	Solutions approchée (hybride, discrétisée par le schéma couplé DG \mathcal{P}^1 / DF) et analytique de l'équation des ondes 1D	68

5.1	Configuration des maillages : approche par recouvrement minimal	72
5.2	Stencils d'interpolation des valeurs DF, pour $n = 2 \dots 5$, et un $\gamma_{(k)}$ fixé. . .	76
5.3	Comparaison entre un calcul de propagation DG (de référence) et couplé (recouvrement minimal entre les domaines). Propagation d'une onde acoustique imposée à la frontière gauche par un obstacle circulaire	78
5.4	Configuration géométrique des maillages DF et DG en vue des évaluations d'erreur dans le cas de modes propres de cavité	79
5.5	Convergence de l'erreur en maillage du solveur DG dans le cas d'un couplage avec interpolations d'ordres 1 et 6 sur la grille DF	81
5.6	Norme L^2 du champ solution (densité), $\epsilon_{\Omega_{DG}}^k$, et $\epsilon_{\Omega_{DF}}^k$, en fonction du nombre d'itérations / 1 point sur 10000	83
5.7	Configuration de maillages : approche par recouvrement total	84
5.8	Maillages totalement recouvrants	87
5.9	Maillages totalement recouvrants, sans prise en compte d'obstacles	88
5.10	Norme L^2 du champ solution (densité) $\epsilon_{\Omega_{DF}}^k$, en fonction du nombre d'itérations / 1 point sur 1000	89
5.11	Géométrie des obstacles circulaire et étoilé	91
5.12	Diffraction d'un monopôle par des obstacles circulaire et étoilé	93
5.13	Coupes 1D de la pression RMS le long des frontières amont et aval du domaine DF	94
5.14	Configurations géométriques des cas-tests	95
5.15	Stratégies de couplages possibles pour le traitement du cas-test [42]	96
5.16	Champ de pression instantané; iso-contours de valeurs comprises entre -10^{-5} et 10^{-5} , domaines DG surlignés en noir	97
5.17	Champ de pression RMS	98
5.18	Pressions RMS le long de l'axe de symétrie	99
5.19	Pressions RMS à la paroi des obstacles	100
5.20	Vitesses du champ porteur autour d'un profil de Joukovski ($M_\infty \approx 0.3$) . .	101
5.21	Diffraction d'un monopôle par un profil de Joukovski en présence d'un écoulement porteur	105
5.22	Calcul de référence DG	106
6.1	Validation du solveur couplé 3D : configurations de maillages (recouvrement minimal et total)	109
6.2	Maillage surfacique initial de l'entrée d'air d'une nacelle de réacteur, coloré par ses marqueurs de peau	110
6.3	Domaine volumique de calcul DG	112
6.4	Extension volumique des domaines DG (bleu) et DF (rouge)	112
6.5	Cellules \mathcal{P}^1 du domaine DG, colorées par le rayon de leur cercle inscrit . .	113
6.6	Champs de pression instantanée et RMS selon le plan de symétrie	114
6.7	Champ de pression instantanée et RMS selon la frontière de Ω_{DF}	115
6.8	Comparaison des champs de pression RMS issus d'un calcul de référence et d'un calcul couplé	116
6.9	Champs de pression instantanée et RMS, dans le cas de deux nacelles, selon le plan de symétrie	118

6.10	Champs de pression instantanée dans le cas de deux nacelles	119
6.11	Vitesse acoustique w_1 selon du plan de symétrie de normale $^t(0, 0, 1)$ - Valeurs comprises entre -2×10^{-6} et 2×10^{-6}	120
A.1	Maillages totalement recouvrants	130

Liste des tableaux

2.1	Coefficients des schémas aux différences finies centrés, donnés par (2.13)	13
2.2	Coefficients des schémas aux différences finies centrés optimisés, donnés par Bogey et al. [7]	13
2.3	Coefficients des schémas de filtrage centrés, donnés par (2.19) + (2.3.3)	17
2.4	Solveur aux différences finies : erreurs et ordres de convergence associés pour un mode de cavité 2D	22
2.5	Solveur aux différences finies : erreurs et ordres de convergence associés pour un mode de cavité 3D	22
2.6	Solveur DG : erreurs et ordres de convergence associés pour un mode de cavité 2D	35
2.7	Solveur DG : erreurs et ordres de convergence associés pour un mode de cavité 3D	35
5.1	Paramètres du calcul	77
5.2	Solveur hybride en recouvrement minimal : erreurs et ordres de convergence en Δx	80
5.3	Solveur hybride en recouvrement total : erreurs et ordres de convergence en Δx	88
5.4	Paramètres du calcul	92
5.5	Paramètres du calcul - Profil de Joukovski	102
6.1	Solveur hybride en recouvrement minimal 3D : erreurs et ordres de convergence en Δx	108
6.2	Solveur hybride en recouvrement total 3D : erreurs et ordres de convergence en Δx	110
6.3	Constantes physiques du calcul	111
6.4	Paramètres du calcul - Nacelle	113

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

La modélisation et la simulation en aéroacoustique font l'objet, à l'heure actuelle, d'un intérêt croissant dans nombre de secteurs de la recherche et de l'ingénierie. En effet, dans le domaine de l'aéronautique en particulier, tant les préoccupations environnementales qu'énergétiques motivent une connaissance fine de la phénoménologie du bruit d'origine aérodynamique. Cela recouvre, par exemple, des applications telles que le bruit de jet, de rotor d'hélicoptère, ou de train d'atterrissage. Si la mise en œuvre de dispositifs expérimentaux (par exemple en soufflerie) permet d'acquérir une meilleure compréhension des processus physiques qui gouvernent la génération et la propagation du son dans de telles applications, la simulation numérique en constitue un complément indissociable, pour des raisons logistiques, donc de coût.

Dans le domaine de la simulation en aéroacoustique, les schémas numériques sont soumis à des exigences strictes. En effet, les applications industrielles sur des configurations réalistes imposent de savoir capturer avec précision des phénomènes de nature et d'échelles spatiales et temporelles hautement hétérogènes. Il s'agit en particulier de savoir reproduire, avec précision, tant les phénomènes de génération d'ondes acoustiques que leur propagation sur de longues distances, en temps long. De fait, les schémas voués à permettre de telles simulations se doivent de montrer de bonnes propriétés, tant de diffusion et de dispersion, que de stabilité. De plus, leur capacité à prendre en compte des frontières géométriquement complexes est déterminante dans l'éventualité de traiter des cas réalistes. Enfin, ces schémas doivent pouvoir conduire à des solveurs efficaces en terme de rapport précision / ressources machines, dans le but de pouvoir traiter des problèmes de grande taille. Différentes familles de méthodes numériques ont été étudiées et sont employées à l'heure actuelle en aéroacoustique numérique industrielle. Basées sur des considérations théoriques de nature différentes, elles ont naturellement des avantages et des inconvénients qui leur sont propres.

Parmi elles, les méthodes de différences finies (DF), fondées sur des développements de Taylor des inconnues, et dont les bonnes propriétés numériques sont connues [7, 34, 38], sont couramment mises en œuvre. Ces schémas ne sont pas naturellement adaptés à la prise en compte de géométries hautement complexes, du fait que leur usage se restreint aux maillages structurés, cartésiens ou curvilignes, quasi-exclusivement. Si des stratégies

de calcul multigrille, en maillages structurés totalement ou partiellement recouverts dont les solutions sont couplées par interpolation (techniques dites "Chimère") ont été développées et mises en œuvre dans le but de pallier ce défaut [14], ces schémas restent tout particulièrement efficaces et simples à implémenter dans un contexte de maillage purement cartésien.

Parallèlement, les méthodes d'éléments finis, fondées sur une partition de l'espace discrétisé, s'appuient naturellement sur des maillages non-structurés et sont donc capables de s'adapter à des géométries complexes. Parmi elles, les méthodes de Galerkin discontinues (DG) ont été introduite de manière pratique par Reed & Hill en 1973 [35], puis formalisées mathématiquement par Lesaint & Raviart en 1974 [29] dans le cadre de la résolution des équations de la neutronique. Il s'agit de méthodes de type éléments finis dans lesquelles les fonctions de base sont supposées discontinues au travers des interfaces entre les mailles. Cela impose de connecter les inconnues maille par maille via un flux numérique. De ce fait, les schémas DG peuvent-ils également être appréhendés en tant qu'une généralisation des schémas aux volumes finis. Ce n'est que plus récemment que les méthodes DG ont été mises en œuvre dans le cadre de la mécanique des fluides numérique et de l'aéroacoustique. Une revue du développement de ces schémas peut être trouvée dans [9]. Les schémas DG sont particulièrement bien adaptés tant à la résolution de problèmes où les phénomènes convectifs jouent un rôle prédominant [9], grâce à la notion de décentrement local introduite par le flux numérique aux interfaces entre éléments, qu'à la prise en compte de géométries complexes, du fait que leur formulation est naturellement compatible avec l'utilisation de maillages non structurés. De plus, on peut aisément obtenir un ordre élevé de précision sur de tels types de maillages, de manière locale ou globale. En effet, la formulation de la méthode est compacte et l'ordre ne dépend que du choix des fonctions de base au sein d'une maille. En contrepartie ces schémas sont pénalisés par une algorithmique complexe ainsi que des critères de stabilité sévères pour des schémas explicites : ils mènent à des coûts de calcul relativement élevés pour une précision donnée.

Partant de ce constat est récemment née l'idée de pouvoir coupler ces deux types de schémas (DF et DG) dans le but de tirer profit de leurs avantages respectifs. Plus précisément, il s'agit de mettre en place une décomposition de domaine pour :

- d'une part, résoudre les zones en présence de frontières géométriquement complexes par une méthode DG en maillage non structuré d'ordre élevé,
- d'autre part, résoudre le reste du domaine par une méthode DF en grille cartésienne d'ordre élevée, moins coûteuse.

La motivation essentielle de cette approche réside dans le gain en ressources machine qui doit en découler pour une précision donnée, sur un domaine d'extension spatiale donnée. La littérature recèle un certain nombre de travaux concernant l'étude et la mise en œuvre de techniques d'hybridation DF / Eléments finis continus [1], DF / Volumes finis [36], DF / DG [20], dans le domaine de l'électromagnétisme. Dans le domaine de l'aéroacoustique numérique, un moindre nombre de communications font référence à une telle approche. Néanmoins, l'idée a été introduite dans ce cadre d'applications par Utzmann et al. [40, 41] au milieu des années 2000. Si ces derniers travaux ont montré des résultats qualitativement satisfaisants sur des cas tests académiques, le comportement numérique (en terme de précision et de stabilité) des solutions issues d'une telle hybridation reste, à l'heure actuelle, très peu connu. Aussi, ce manque de connaissance est-il la motivation essentielle

du présent travail.

1.2 Démarche

L'objet de la thèse consiste donc à étudier le comportement numérique des solutions issues d'un couplage entre une méthode de Galerkin discontinue en maillage non structuré et une méthode de différences finies en maillage cartésien d'une part, et à en illustrer l'utilité sur un cas réaliste d'autre part. Notons que dans cette étude, le cadre de travail est quasi-exclusivement réduit aux équations d'Euler linéarisées dans un souci de simplification. Elles modélisent des phénomènes linéaires de propagation d'ondes acoustiques au sein d'un champ porteur éventuellement hétérogène.

Il s'agit, dans un premier temps, de mettre au point un algorithme de couplage entre ces deux types de schémas. Une seconde partie de cette étude consiste à en évaluer tant la précision et l'ordre de convergence en maillage que la stabilité en temps long. Cet aspect du travail sera fondé sur une approche d'expérimentation numérique rigoureuse, dans le cadre de cas tests académiques bidimensionnels pour lesquels une solution analytique est connue. En effet, pour des raisons que l'on détaillera, il apparaît que l'obtention de résultats théoriques sur le comportement d'un schéma hybride DF/DG dans un cas général soit à l'heure actuelle hors de portée. Dans le cadre de ce travail, on s'intéressera néanmoins à l'étude théorique de l'hybridation de schémas DF/DG "bien choisis" dans un cadre restreint à l'équation d'advection linéaire monodimensionnelle. Cette étude, menée dans un cas très particulier, ne peut naturellement pas permettre de conclure quant à la consistance et à la stabilité d'un schéma hybride dans le cas général. En revanche, elle semble constituer la technique la plus abordable en vue de mettre en évidence, de manière théorique, le comportement du couplage entre ces schémas. Enfin, il s'agit d'illustrer les possibilités d'une telle technique de couplage en l'appliquant au cadre de calculs de grande taille concernant la propagation d'ondes acoustiques autour d'obstacles tridimensionnels et géométriquement complexes.

Ce mémoire est organisé comme suit. Après avoir rappelé des éléments de modélisation en aéroacoustique ainsi que le principe des méthodes numériques auxquelles on s'intéresse, on présente une brève analyse d'un schéma hybride DF/DG monodimensionnel. Dans un deuxième temps, on présente un algorithme de couplage DF/DG bi-dimensionnel ainsi que sa validation. Enfin, on présente son extension à la troisième dimension d'espace ainsi que son application à un cas tridimensionnel réaliste. Il s'agira de calculs de diffraction d'ondes acoustiques, autour de l'entrée d'une nacelle de réacteur dont la géométrie a été aimablement fournie par Airbus.

Chapitre 2

Préliminaires

Ce chapitre présente, dans un premier temps, les éléments de modélisation qui forment le cadre de notre étude. Dans un deuxième temps, il présente les méthodes DF et DG qui seront sujettes à l'hybridation dans la suite, ainsi que leur mise en œuvre au sein de solveurs distincts et dédiés. De plus, il détaille leurs validations individuelles préalables, indispensables à un couplage éventuel. Enfin, ce chapitre synthétise leurs propriétés comparées. Par ailleurs, il résume une étude de leurs performances comparées dans le cas de maillages cartésiens.

2.1 Modélisation

2.1.1 Équations de Navier-Stokes

La description macroscopique des phénomènes dynamiques au sein d'un fluide tel que l'air est fondée sur les équations de Navier-Stokes. Ces dernières rendent compte des principes de conservation de la quantité de matière, de la quantité de mouvement, et de l'énergie. Elles peuvent s'écrire comme suit, en trois dimensions d'espace (x, y, z) , au cours du temps (t) , et sous forme conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial \mathbf{F}_{ck}(\mathbf{U})}{\partial k} - \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial \mathbf{F}_{dk}(\mathbf{U})}{\partial k} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

avec :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{ck}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{x,k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{y,k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{z,k} p \\ (\rho e + p) u_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{dk}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{x,k} \\ \tau_{y,k} \\ \tau_{z,k} \\ \tau_{k,l} u_l \end{pmatrix}.$$

Ici, ρ représente la masse volumique, $\mathbf{u} = {}^t(u_1, u_2, u_3)$ le vecteur vitesse, e l'énergie totale, p la pression, δ le symbole de Kronecker et $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses. Ce dernier prend la forme d'une matrice (3×3) qui s'exprime comme suit dans le cas d'un fluide Newtonien tel que l'air ou l'eau :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu ((\nabla \times \mathbf{u}) + {}^t(\nabla \times \mathbf{u})) - \eta ((\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}_{(3 \times 3)}).$$

Sous l'hypothèse de Stokes, on peut relier la viscosité dynamique μ à la viscosité de volume η par la relation

$$\eta = \frac{2}{3}\mu.$$

Une relation de dépendance entre μ et la température T est quant à elle donnée, par exemple, par la loi de Sutherland :

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T + 110,4}{T_0 + 110,4},$$

où T_0 et μ_0 sont respectivement la température et la viscosité de référence. L'énergie totale e se décompose en tant que somme des énergies interne et cinétique. On peut l'écrire :

$$e = c_v T + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 = \frac{c_v p}{r \rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$$

sous l'hypothèse des gaz parfaits, où c_v désigne la chaleur spécifique à volume constant, et r la constante des gaz parfaits divisée par ρ . Le système d'équations (2.1) muni de ces lois est fermé.

Dans (2.1), \mathbf{F}_c représente les flux convectifs. Il décrit les phénomènes de déplacements advectifs de matière et d'information. Le terme \mathbf{F}_d est porteur de dérivées en espace du premier ordre et représente quant à lui les flux diffusifs. Il décrit des phénomènes irréversibles de transferts d'énergie des grandes structures de l'écoulement vers les petites, ainsi que de flux de chaleur au sein de fluide.

Si les solutions des équations de Navier-Stokes contiennent, de par les termes advectifs, les phénomènes de propagation acoustique auxquels on s'intéresse, l'approximation directe des solutions de (2.1) n'est pas en pratique une approche idéale en vue de leur simulation. En effet, l'approximation des solutions des équations de Navier-Stokes caractérise intégralement la dynamique du fluide d'intérêt. Cela inclut en particulier la génération d'ondes acoustiques, fondamentalement liée à la dynamique tourbillonnaire et au caractère turbulent de l'écoulement, autant que leur propagation. Dans la pratique, les différences d'échelles spatiales et temporelles entre ces deux phénomènes mènent à des calculs hautement exigeants en terme de précision, donc de coût.

2.1.2 Équations d'Euler

Une approche de modélisation alternative consiste à faire le choix de distinguer les zones où la génération d'ondes acoustiques est dominante, des zones où leur propagation est dominante. Une première étape en ce sens vise à négliger la viscosité du fluide dans ces dernières. Dans cette approximation ($\mu_0 = 0$), \mathbf{F}_d est réduit à $\mathbf{0}$. On obtient les équations d'Euler qui peuvent être réécrites comme suit en variables primitives, si l'écoulement est suffisamment régulier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + r}{c_v}$. Dans ce cadre, on néglige la présence éventuelle de phénomènes turbulents, producteurs d'onde acoustiques. En revanche, la dynamique tourbillonnaire liée aux interactions entre structures d'échelles correctement résolues est préservée par cette modélisation, tout comme les phénomènes strictement propagatifs. Notons que cette hypothèse physique mène naturellement à une stratégie a priori moins coûteuse que l'approximation des solutions de (2.1).

2.1.3 Équations d'Euler Linéarisées

On peut enfin étendre cette approche au cas où l'on souhaite exclusivement traiter les phénomènes propagatifs, de façon à leur consacrer l'intégralité de la précision des schémas numériques. Cette idée nécessite de formuler une décomposition du champ ${}^t(\rho, \mathbf{u}, p)$ en une partie porteuse connue, considérée comme donnée du problème, et une partie fluctuante à déterminer. Cela constitue une restriction forte sur laquelle on reviendra. Si de plus les fluctuations sont suffisamment petites en amplitude, on peut procéder à la linéarisation des équations d'Euler en y introduisant une telle décomposition. On écrit donc le champ inconnu de (2.2) en tant que somme d'un champ porteur et d'un champ de fluctuations :

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho_1, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1, \\ p &= p_0 + p_1,\end{aligned}$$

sous réserve que

$$\begin{aligned}\rho_1 &\ll \rho_0^{\max}, \\ |\mathbf{u}_1| &\ll c_0^{\max}, \\ p_1 &\ll p_0^{\max},\end{aligned}$$

où ρ_0^{\max} , c_0^{\max} et p_0^{\max} représentent respectivement les plus grandes valeurs de densité, de vitesse du son (2.3) et de pression du champ porteur. L'idée est d'introduire une telle décomposition dans (2.2), en supposant que ${}^t(\rho_0, \mathbf{u}_0, p_0)$ est lui-même Eulérien, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_0 &= -(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_0, \\ \partial_t \mathbf{u}_0 &= -(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0, \\ \partial_t p_0 &= -(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_0.\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1 + \rho_1 \mathbf{u}_0) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \nabla p_0 &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) p_1 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) p_0 + \gamma (p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + (p_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0) &= 0.\end{aligned}$$

On fait l'hypothèse d'isentropie, c'est-à-dire que l'entropie est uniforme et constante au cours du temps. Dans le cas d'un gaz parfait, cette hypothèse se manifeste par la relation :

$$p_1 = c_0^2 \rho_1, \tag{2.3}$$

en tout point et à tout instant, avec :

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}},$$

la vitesse de propagation acoustique. Cette hypothèse physique permet de s'affranchir de l'équation portant sur la variation en temps de la pression fluctuante, en remplaçant l'expression de p_1 (2.3) dans le système précédent, et en combinant la 1^{re} et la 3^e équation. Ainsi, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \sum_{k=x,y,z} \mathbf{A}_k \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial k} + \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\varphi} = {}^t \left(u_1, v_1, w_1, c_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) = {}^t \left(\mathbf{u}_1, c_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} \right),$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & c_0 \\ 0 & 0 & c_0 & w_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_x u_0 & \partial_y u_0 & \partial_z u_0 & -\partial_x c_0 \\ \partial_x v_0 & \partial_y v_0 & \partial_z v_0 & -\partial_y c_0 \\ \partial_x w_0 & \partial_y w_0 & \partial_z w_0 & -\partial_z c_0 \\ \frac{c_0}{\rho_0} \partial_x \rho_0 & \frac{c_0}{\rho_0} \partial_y \rho_0 & \frac{c_0}{\rho_0} \partial_z \rho_0 & (\gamma - 1) (\partial_x u_0 + \partial_y v_0 + \partial_z w_0) \end{pmatrix}.$$

On note que si les grandeurs du champ porteur sont homogènes, \mathbf{B} s'annule. Par ailleurs, on peut remarquer que si $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, en dérivant en temps l'équation portant sur la densité et en dérivant en espace les équations portant sur les vitesses on peut faire apparaître après substitution :

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho_1 = 0, \quad (2.5)$$

l'équation des ondes dont les propriétés de dispersion et de conservation d'énergie sont connues.

Le système (2.4) est donc une formulation des équations d'Euler linéarisées (LEE) autour de $\boldsymbol{\varphi}_0 = {}^t (u_0, v_0, w_0, \rho_0) = {}^t (\mathbf{u}_0, \rho_0)$, qui constitue une donnée du problème. Si cette modélisation semble a priori tout à fait adaptée à la simulation des phénomènes de propagation acoustique en présence d'un écoulement stationnaire, elle porte toutefois des limitations. Premièrement, des phénomènes d'instabilités hydrodynamiques sont solution des équations d'Euler linéarisées. En l'absence de viscosité, le caractère linéaire des équations leur permet d'évoluer librement. Deuxièmement, le fait de devoir formuler une décomposition entre champ porteur et champ fluctuant constitue une restriction forte à la simulation de la propagation de sources réalistes.

2.2 Approximation numérique temporelle des équations

2.2.1 Méthodes de Runge-Kutta

Dans le but d'étudier des phénomènes de propagation acoustiques éventuellement transitoires, on formule, dans le cadre de ce travail, une approximation des solutions des équations d'Euler linéarisées dans le domaine temporel. Ainsi, considérons une fonction du temps \mathbf{u} , dont la valeur \mathbf{u}^i est connue à un instant i , et dont la dérivée en temps est donnée par :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}).$$

Le principe des méthodes de Runge-Kutta explicites consiste à approcher la valeur de \mathbf{u} à l'instant $i + 1$ en un nombre fini d'itérations successives. Une écriture des schémas de Runge-Kutta explicites est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(0)} &= \mathbf{u}^i, \\ \mathbf{u}^{(k)} &= \mathbf{u}^{(0)} + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{(k)} f(\mathbf{u}^{(j)}) \text{ pour } k = 1, \dots, n, \\ \mathbf{u}^{i+1} &= \mathbf{u}^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où \mathbf{u}^i (respectivement \mathbf{u}^{i+1}) est la valeur de \mathbf{u} au pas de temps i (respectivement $i + 1$) et les $\gamma_j^{(k)}$, k jeux de coefficients réels. Une condition nécessaire sur le choix des $\gamma_j^{(k)}$ en vue d'atteindre l'ordre n est que l'expression de \mathbf{u}^{i+1} en fonction de \mathbf{u}^i vérifie le développement limité en temps :

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 \mathbf{u}^i}{\partial t^3} + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n \mathbf{u}^i}{\partial t^n} + O(\Delta t^n) \quad (2.7)$$

quand Δt tend vers 0. Notons que (2.7) présuppose que les dérivées de \mathbf{u} jusqu'à l'ordre n existent. On remarque également que cette contrainte n'est pas a priori suffisante à la détermination d'un unique ensemble de coefficients γ pour un ordre n donné. En effet, pour n fixé, on dénombre $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients d'une part, et n relations (une pour chaque terme du développement limité) d'autre part. Par exemple, dans le cas d'un schéma de Runge-Kutta à 3 sous-itérations ($n = 3$), on obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i &+ \left(\gamma_0^{(2)} + \gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)} \right) \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} \\ &+ \left(\gamma_1^{(2)} \gamma_0^{(0)} + \gamma_2^{(2)} \gamma_0^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \gamma_1^{(1)} \right) \Delta t^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{\partial t^2} \\ &+ \left(\gamma_2^{(2)} \gamma_1^{(1)} \gamma_0^{(0)} \right) \Delta t^3 \frac{\partial^3 \mathbf{u}^i}{\partial t^3}, \end{aligned}$$

ce qui mène à :

$$\begin{aligned} \left(\gamma_0^{(2)} + \gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)} \right) &= 1, \\ \left(\gamma_1^{(2)} \gamma_0^{(0)} + \gamma_2^{(2)} \gamma_0^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \gamma_1^{(1)} \right) &= \frac{1}{2}, \\ \left(\gamma_2^{(2)} \gamma_1^{(1)} \gamma_0^{(0)} \right) &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Dans la pratique, on utilise principalement les schémas de Runge-Kutta définis de manière simple par :

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(k)} &= \frac{1}{(n+1) - k}, \\ \gamma_m^{(k)} &= 0, \text{ pour tout } m < k. \end{aligned}$$

Ceci correspond à :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(0)} &= \mathbf{u}^i \\ \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{u}^i + \gamma_1^{(1)} \Delta t f(\mathbf{u}^{(0)}), \\ \mathbf{u}^{(2)} &= \mathbf{u}^i + \gamma_2^{(2)} \Delta t f(\mathbf{u}^{(1)}), \\ &\vdots \\ \mathbf{u}^{(n)} &= \mathbf{u}^i + \gamma_3^{(3)} \Delta t f(\mathbf{u}^{(n-1)}), \\ \mathbf{u}^{i+1} &= \mathbf{u}^{(n)}. \end{aligned}$$

Un bref calcul montre que ce choix satisfait effectivement à (2.7). Ces schémas sont donc d'ordre n , pour n sous itérations, dans les cas où $f(\mathbf{u})$ est linéaire et en l'absence de terme source additionnel ne dépendant que du temps. Leur principal avantage réside dans le fait qu'il n'est nécessaire de stocker en mémoire que la solution à l'instant i ainsi que la sous itération courante au cours des sous-itérations successives. Ceci n'est pas a priori le cas dans l'algorithme donné par la formulation générale (2.6).

2.2.2 Propriétés

On peut analyser les propriétés dispersives et de stabilité des schémas de Runge-Kutta en considérant le développement limité en temps qui en découle :

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 \mathbf{u}(t)}{\partial t^3} + \dots \quad (2.8)$$

On suppose que \mathbf{u} prend la forme d'une onde monochromatique d'amplitude 1 :

$$\mathbf{u}(t) = e^{-i\tilde{\omega}t}$$

qui s'écrit sous forme discrète :

$$\mathbf{u}^j = e^{-i\tilde{\omega}j\Delta t},$$

2.2 Approximation numérique temporelle des équations

où $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\Delta t}$ avec ω la pulsation adimensionnée par le pas de temps. En introduisant une telle solution dans (2.8), il vient :

$$e^{-i\tilde{\omega}(t+\Delta t)} = e^{-i\tilde{\omega}t} - \Delta t(i\tilde{\omega})e^{-i\tilde{\omega}t} + \frac{\Delta t^2}{2}(-i\tilde{\omega})^2 e^{-i\tilde{\omega}t} + \frac{\Delta t^3}{3!}(-i\tilde{\omega})^3 e^{-i\tilde{\omega}t} + \dots \quad (2.9)$$

soit :

$$e^{-i\tilde{\omega}(t+\Delta t)} = e^{-i\tilde{\omega}(t+\Delta t)} \underbrace{\left[\left(1 - i\omega + \frac{(-i\omega)^2}{2} + \frac{(-i\omega)^3}{3!} + \dots \right) e^{i\omega} \right]}_{A(\omega)}. \quad (2.10)$$

Cette expression indique que les schémas de Runge-Kutta fournissent une approximation de $\mathbf{u}(t+\Delta t) = e^{-i\tilde{\omega}(t+\Delta t)}$ à un facteur multiplicatif à valeurs complexes près que l'on appelle $A(\omega)$. L'étude de son module donne donc le coefficient d'amplification (ou de diffusion) introduit par le schéma en fonction de ω . En particulier, on est en présence d'un schéma stable si $|A(\omega)| \leq 1$. L'étude de son argument donne quant-à-lui le déphasage en fonction de ω . Ces propriétés sont représentées sur la figure 2.1 pour des schémas d'ordre 1 à 8. Précisons que les valeurs de ω proches de 0 correspondent à un pas de temps négligeable

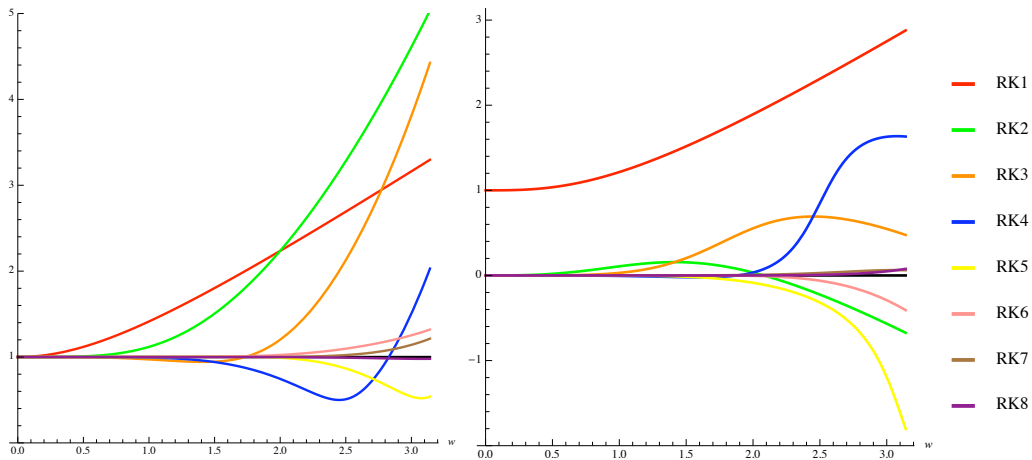


FIGURE 2.1 – Propriétés diffusives et dispersives des schémas RK d'ordre 1 à 8 en fonction de $\omega \in [0, \pi]$ pour un pas de temps fixé. Gauche : $|A(\omega)|$, droite : $\arg(A(\omega))$.

devant $T = 2\pi/\tilde{\omega}$, la période temporelle de la solution. La valeur $\omega = \pi$ correspond quant-à-elle au choix $\Delta t = T/2$. Le graphe des $|A(\omega)|$ pour différents ordres donne des indications sur la stabilité des schémas. En particulier les schémas d'ordre 1 et 2 amplifient l'intégralité des fréquences résolubles par la discrétisation en temps. Ils apparaissent en conséquence défavorables à une utilisation conjointe à des schémas en espace peu diffusifs. Si les schémas d'ordre 3, 4 et 5 montrent un caractère stable sur un certain domaine du spectre de la solution, il existe toujours un seuil ω_{\max} au delà duquel les fréquences sont amplifiées.

2.3 Approximation en espace - Méthodes de différences finies

2.3.1 Formulation

Considérons une fonction $u(x)$ de variable réelle à valeurs réelles. On appelle u_h sa discrétisation sur un maillage de pas constant h . Le principe des méthodes de différences finies explicites consiste à approcher les dérivées de u en chaque point i du maillage par une somme pondérée de ses valeurs aux points voisins. Cette approche peut s'écrire dans le cas général :

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{1}{h} \sum_{j=-n}^m \alpha_j u_h(x_i + jh), \quad (2.11)$$

où les $\alpha_i \in \mathbb{R}$, n et $m \in \mathbb{N}$. Le choix conjoint du jeu de coefficients $\{\alpha\}$, de n ainsi que de m conditionne l'ordre en h d'approximation des dérivées, ainsi que les propriétés dispersives et diffusives du schéma, comme présenté dans la section suivante. Ce choix est déterminé en formulant un développement de Taylor de u au point x_i , en chaque voisinage $(jh)_{j \in \{-n, m\}}$:

$$u_h(x_i + jh) = u_h(x_i) + jh \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{(jh)^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + \dots + \frac{(jh)^k}{k!} \frac{d^k u}{dx^k}(x_i) + o(h^k). \quad (2.12)$$

Ceci permet, en exprimant $\frac{du}{dx}(x_i)$ en fonction des autres quantités, d'établir un ensemble de conditions sur les coefficients α_i pour qu'un ordre de troncature maximal soit atteint à l'occasion de l'approximation (2.11). Plus précisément, on peut montrer [34] dans le cas de schémas centrés ($m = n$) et antisymétriques ($\alpha_j = -\alpha_{-j}$, $\alpha_0 = 0$), que l'on obtient une erreur d'approximation en $o(h^{2n})$ dans (2.11) si et seulement si les α_i sont solution de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & \dots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n+1} & \dots & n^{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

La résolution de systèmes tels que (2.13) mène ainsi à des schémas aux différences finies d'ordres de précision arbitrairement élevés (au prix, bien entendu, d'un temps de calcul plus important). Les coefficients des schémas d'ordre 2 à 10 sont donnés dans le tableau 2.1. Pour les équations d'advection monodimensionnelles de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0,$$

l'utilisation conjointe de schémas RK en temps et DF en espace consiste, pour chaque point i de la discrétisation spatiale, à appliquer l'algorithme (2.6), dans lequel la fonction

2.3 Approximation en espace - Méthodes de différences finies

-	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$o(h^2)$	1/2	-	-	-	-
$o(h^4)$	8/12	-1/12	-	-	-
$o(h^6)$	45/60	-9/60	1/60	-	-
$o(h^8)$	4704/5880	-1176/5880	224/5880	-21/5880	-
$o(h^{10})$	2100/2520	-600/2520	150/2520	-25/2520	2/2520

TABLE 2.1 – Coefficients des schémas aux différences finies centrés, donnés par (2.13)

-	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$o(h^8)$	0.841570125482	-0.244678631765	0.059463584768	-0.007650904064	-
$o(h^{10})$	0.872756993962	-0.286511173973	0.090320001280	-0.020779405824	0.002484594688
\vdots					

TABLE 2.2 – Coefficients des schémas aux différences finies centrés optimisés, donnés par Bogey et al. [7]

f est donnée par :

$$f(u(x_i)) = \frac{\partial u(x_i)}{\partial t} = -\frac{1}{h} \sum_{j=-n}^n \alpha_j F(u(x_i + jh)).$$

Il existe des variantes de ces schémas développées et mises en œuvre dans les domaines de l'aéroacoustique et de la mécanique des fluides numérique. L'idée consiste à optimiser les coefficients α_i de façon à minimiser l'erreur sur les propriétés de dispersion, pour un nombre de points par longueur d'onde fixé. La motivation de cette approche part du constat que si la précision des schémas donnés par le tableau 2.1 est régie par un résultat de convergence de l'erreur en raffinement du maillage, il n'est en revanche pas toujours possible de jouer sur ce paramètre en pratique. En particulier, dans le cadre de simulation en acoustique, Tam et al. [38] proposent une optimisation des paramètres α_i visant à minimiser l'erreur sur la vitesse de phase. Bogey et al. [7] proposent également une famille de schémas peu dispersifs et peu dissipatifs pour la résolution des équations de l'acoustique et de la dynamique des fluides. Dans le cadre de ce travail, nous mettrons en œuvre les schémas explicites standards décrits ci-dessus uniquement.

Une des principales caractéristiques de ces schémas est qu'ils supposent que u est très régulière. En effet, l'écriture de (2.12) suppose l'existence des dérivées jusqu'à l'ordre k . Ce peut être une hypothèse raisonnable dans des cas de simulation de la propagation linéaire de sources analytiques. Elle peut, en revanche, être a priori mise en défaut dans des cas de propagation non-linéaire ainsi que de capture de chocs, à l'occasion de la résolution de (2.2). Ceci mène à l'apparition d'oscillations non physiques, éventuellement instables.

2.3.2 Propriétés dispersives

Pour étudier le comportement dispersif des schémas aux différences finies, on considère l'équation d'advection monodimensionnelle à vitesse c :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.14)$$

dans laquelle on introduit u sous la forme d'une onde plane monochromatique d'amplitude 1,

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}.$$

Ici, k représente le nombre d'onde théorique et ω la pulsation. Un bref calcul donne la relation de dispersion exacte :

$$\omega = kc.$$

L'idée est d'évaluer la relation de dispersion approchée par un schéma semi-discrétisé (en espace, mais pas en temps). Ceci mène à considérer u sous la forme :

$$u(x, t) = e^{i(k^{\text{num}}jh - \omega t)},$$

où k^{num} représente le nombre d'onde numérique. En appliquant l'approximation (2.11) à (2.14), on obtient, dans le cas du schéma DF centré à trois points :

$$-i\omega e^{i(k^{\text{num}}jh - \omega t)} + c \frac{e^{i(k^{\text{num}}(j+1)h - \omega t)} - e^{i(k^{\text{num}}(j-1)h - \omega t)}}{2h} = 0,$$

ce qui, après simplification par $e^{i(k^{\text{num}}jh - \omega t)}$, donne la relation de dispersion numérique :

$$\frac{\sin(k^{\text{num}}h)}{h} = k. \quad (2.15)$$

Cette relation peut être exploitée de deux manières. La première consiste, pour un nombre d'onde physique k fixé, à formuler un résultat de convergence de l'erreur en maillage en évaluant le comportement asymptotique du nombre d'onde numérique k^{num} lorsque $h \rightarrow 0$. Dans le cas du schéma centré à 3 points, on obtient :

$$\frac{k^{\text{num}}}{k} = 1 - \frac{k^2 h^2}{6} + O(h^4).$$

Ceci ne fait que confirmer l'ordre attendu du schéma, par construction. On note de plus que k^{num} est une grandeur réelle. Ceci est directement lié à l'antisymétrie du schéma, et traduit le fait qu'il ne produit aucune erreur diffusive. En effet, on peut interpréter la solution approchée en tant que solution exacte de l'équation équivalente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4) \right) = 0, \quad (2.16)$$

qui ne contient aucun terme diffusif (d'ordre pair). Ces observations s'étendent de manière naturelle aux schémas antisymétriques d'ordre plus élevé.

La seconde manière d'exploiter (2.15) est, pour un pas d'espace h fixé, d'étudier la dépendance du nombre d'onde numérique adimensionné \tilde{k}^{num} par rapport au nombre d'onde physique adimensionné \tilde{k} , défini par : $\tilde{k} = kh$. Cela suppose de reconsidérer :

$$u(x, t) = e^{i(j\tilde{k} - \omega t)},$$

et on obtient :

$$\tilde{k}^{\text{num}} = \sin \tilde{k},$$

pour le schéma d'ordre 2. On ne détaille pas les calculs pour les schémas d'ordre supérieur.

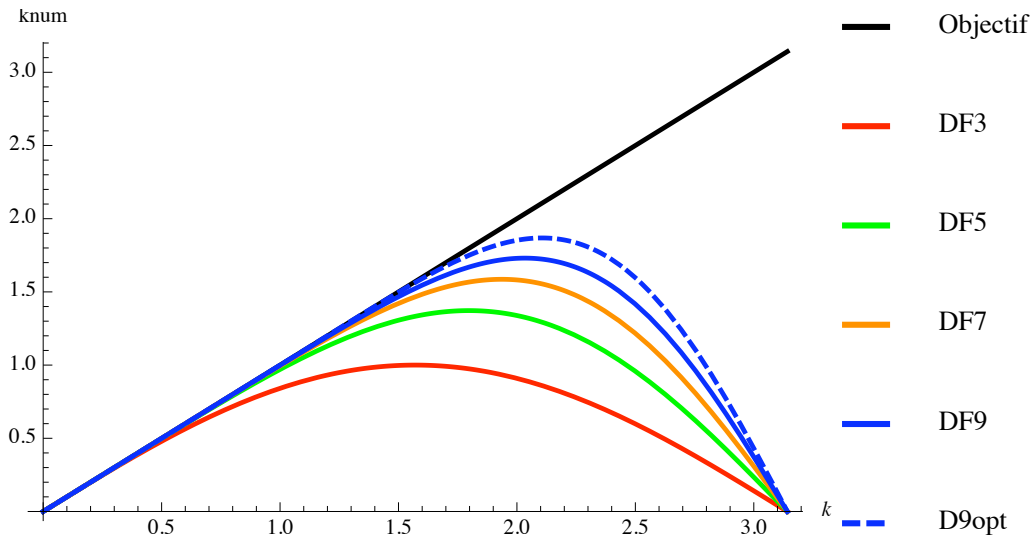


FIGURE 2.2 – Nombre d'onde numérique en fonction du nombre d'onde physique pour les schémas aux différences finies centrés d'ordre 1 à 8

La figure 2.2 représente \tilde{k}^{num} en fonction de $\tilde{k} \in [0, \pi]$ pour les schémas standards d'ordre 2 à 8. On leur a adjoint, à titre de comparaison, le schéma optimisé de Bogey & Bailly à 9 points. La valeur $\tilde{k} = 0$ correspond à une solution u constante, tandis que $\tilde{k} = \pi$ correspond à une solution de longueur d'onde $\lambda = 2h$ (car $k = 2\pi/\lambda$). Ces courbes mettent naturellement en évidence le gain en précision avec le raffinement en ordre d'une part, ainsi que le nombre de points par longueur d'onde d'autre part.

2.3.3 Filtrage

Si les schémas aux différences finies centrés d'ordre élevé présentent l'avantage d'être très peu dispersifs, leur caractère non-diffusif peut être problématique dans la pratique. Aussi peut-on montrer (cf. section Runge-Kutta) qu'ils ne se prêtent pas, a priori, à être utilisés conjointement à des schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé. En effet, on peut montrer que ces derniers sont instables dans la partie haute du spectre de leur résolution, quel que soit leur ordre. Une manière pragmatique de répondre à ces instabilités est d'appliquer un filtre des hautes fréquences spatiales à la solution [43]. Cette technique est couramment mise en œuvre en mécanique des fluides et en acoustique numérique [28, 7, 31].

L'idée est de formuler une approximation \hat{u} du champ solution u , d'ordre élevé, dans laquelle la plus haute fréquence résoluble par le maillage, c'est-à-dire $u_h(x_i) = (-1)^i$ (de longueur d'onde $\lambda = 2h$ représentée sur la figure 2.3) est annulée. Pour ce faire, on

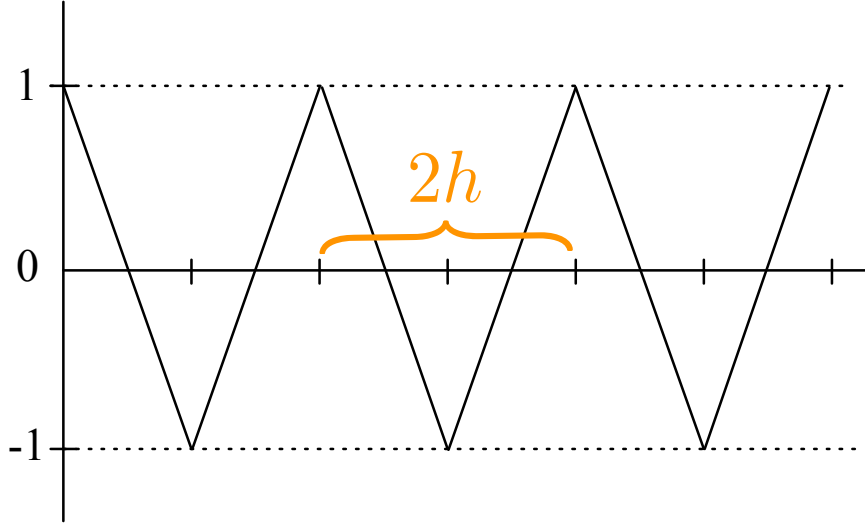


FIGURE 2.3 – Onde de longueur d'onde $\lambda = 2h$, causant les instabilités des schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé

considère un schéma de type différences finies, centrés, donné par :

$$\hat{u}_h(x_i) = \sum_{j=-n}^n \beta_j u_h(x_i + jh). \quad (2.17)$$

De la même manière que précédemment, en écrivant les développements limités (2.12) en chaque voisinage $(jh)_{j \in \{-n, n\}}$, on peut montrer que \hat{u}_h constitue une approximation de u d'ordre $2n$, sans erreur de dispersion (c'est-à-dire portant sur des dérivées d'ordre impair) si $\beta_{-j} = \beta_j, \forall j$, avec les β_j solution du système linéaire de taille $n \times (n + 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & n^{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

qui peut être réécrit sous forme d'un système $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^n & \dots & n^{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \beta_0}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

2.3 Approximation en espace - Méthodes de différences finies

-	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$o(h^2)$	2/4	1/4	-	-	-	-
$o(h^4)$	10/16	4/16	-1/16	-	-	-
$o(h^6)$	44/64	15/64	-6/64	1/64	-	-
$o(h^8)$	186/256	56/256	-28/256	8/256	-1/256	-
$o(h^{10})$	772/1024	210/1024	-120/1024	45/1024	-10/1024	1/1024

TABLE 2.3 – Coefficients des schémas de filtrage centrés, donnés par (2.19) + (2.3.3)

Ce système n'est pas fermé : on ne dispose que de n équations pour $n+1$ inconnues. On impose donc une dernière relation, qui formule la contrainte d'annulation de $u_h(x_i) = (-1)^i$, c'est-à-dire :

$$\forall i, \hat{u}_h(x_i) = \sum_{j=-n}^n \beta_j (-1)^{(i+j)} = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$\beta_0 + 2 \sum_{j=1}^n \beta_j (-1)^j = 0. \quad (2.20)$$

Les coefficients des schémas de filtrage standards sont donnés dans le tableau 2.3. On en étudie le comportement diffusif en introduisant, là encore, u sous la forme $u(x) = e^{ikx}$. Par exemple, pour le schéma à trois points, nous avons :

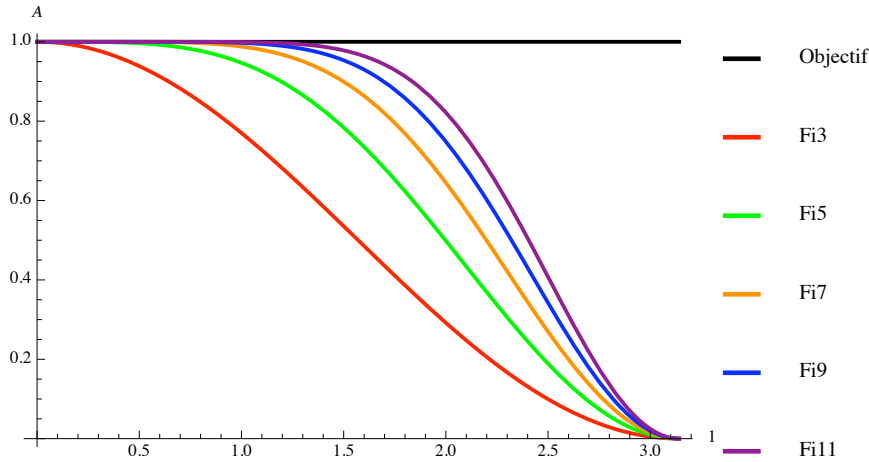
$$\hat{u}(x) = \frac{e^{ik(x-h)} + 2e^{ikx} + e^{ik(x+h)}}{4} = u(x) \frac{\cos(kh) + 1}{2} = u(x) \underbrace{\cos^2\left(\frac{kh}{2}\right)}_{A(h,k)}. \quad (2.21)$$

Ceci indique que la solution filtrée \hat{u} constitue une approximation de u à un facteur multiplicatif à valeur réelles près. Il n'introduit donc aucun déphasage, mais une erreur de diffusion. On peut vérifier son ordre, là encore, en formulant un développement limité de $A(h, k)$, pour un nombre d'onde fixé, quand $h \rightarrow 0$. Il donne :

$$A(h, k) = 1 - \frac{h^2 k^2}{4} + O(h^4),$$

ce qui confirme l'ordre attendu, de par (2.19). Si on ne présente pas l'intégralité des calculs ici, on note cependant que ces observations, tant le caractère non dispersif ($\text{Im}(A) = 0$) que l'ordre de précision en h construit via (2.19), se retrouvent pour les schémas construits comme décrits ci-dessus. On peut également étudier le comportement du filtre pour un h fixé, en fonction du nombre d'onde adimensionné $\tilde{k} = kh$, auquel cas on trouve

$$A(\tilde{k}) = \cos^2\left(\frac{\tilde{k}}{2}\right).$$


 FIGURE 2.4 – Coefficient d'amplification $A(\tilde{k})$ introduit par le filtre haute-fréquences

Le comportement de cette grandeur dans le cas des filtres d'ordre 2 à 10 est représenté sur la figure 2.4.

2.3.4 Mise en œuvre

Dans le cadre de ce travail, un solveur des équations d'Euler linéarisées en 2D et 3D a été développé. Il est muni des schémas d'avancée en temps, de différenciation et de filtrage centrés aux différences finies présentés précédemment. De plus, son utilisation est strictement restreinte aux maillages cartésiens à pas constant uniquement, pour des raisons d'efficacité. En effet, ce cadre permet de s'affranchir des coûts supplémentaires liés aux transformations des mailles déformées (curvilignes ou non) à la maille de référence, essentiellement utiles à la prise en compte des géométries complexes. Les conditions aux limites sont quant à elles traitées comme décrit dans ce qui suit.

Conditions aux limites

Dans le cas de l'utilisation de schémas aux différences finies centrés, la prise en compte de conditions aux limites impose, en règle générale, l'ajout de rangées de points supplémentaires par delà la frontière physique. Ces derniers, couramment appelés "points fantômes" portent des valeurs fictives qui permettent, à l'occasion de l'application des stencils de différenciation et de filtrage jusqu'à la frontière, de simuler le comportement physique pariétal que l'on souhaite modéliser. Leur nombre dépend de la taille du plus grand stencil intervenant dans le schéma. Plus précisément, si le plus grand stencil comporte $2n + 1$ points, n rangées de points fantômes seront nécessaires. Considérons les conditions de paroi rigide et de paroi souple qui sont respectivement modélisées par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial n} = 0, \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

Elles sont imposées comme suit. En reportant dans les points fantômes le symétrique, par rapport à la frontière physique, des valeurs d'une des composantes du champ solution, sa

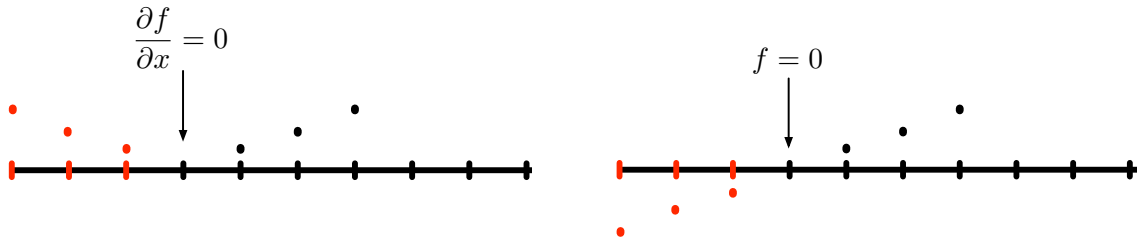


FIGURE 2.5 – Imposition de conditions aux limites par des points fantômes dans le cas de schémas DF centrés. Noir : Points physiques / Rouge : Points fantômes.

dérivée première est automatiquement annulée dans la direction normale à la paroi (c.f. figure 2.5). On vérifie aisément que ceci est dû au caractère antisymétrique des schémas de différentiation. En reportant l'opposé des valeurs, de la même manière, la valeur du champ est automatiquement portée à 0. On note qu'aucune valeur n'est fixée à la frontière à proprement parler.

La mise au point de conditions de non-réflexion efficaces et stables relève quant à elle d'un domaine de recherche à part entière. Dans la pratique, plusieurs stratégies coexistent. La première consiste à adjoindre des zones dites "éponges" au domaine physique, dans lesquelles le maillage est progressivement déraffiné, de façon à augmenter les effets dissipatifs et dispersifs du schéma de manière locale. Cette stratégie d'adaptation de maillage ne nous est pas accessible, car on a fait le choix de se restreindre à des maillages cartésiens à pas constant, pour des raisons d'efficacité. Classiquement, un terme de diffusion supplémentaire peut être ajouté à (2.4) de manière progressive (selon la profondeur) dans ces zones absorbantes. De plus, il est possible de dégrader localement l'ordre du filtre des hautes fréquences spatiales, de façon à accentuer les effets dissipatifs. Ces stratégies peuvent naturellement être utilisées de manière conjointe.

La technique dite des caractéristiques de Thompson [39] revient quant à elle à supposer que la solution suit, au bord, la caractéristique sortante au domaine de calcul, perpendiculairement à sa frontière en dimension 2 ou 3. Formellement, ceci implique, dans l'exemple de l'axe x , les relations :

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, n\Delta t) = \varphi(x - c\Delta t, y, z, (n + 1)\Delta t), & \text{dans le cas } \mathbf{n} = {}^t(1, 0, 0), \\ \varphi(x, y, z, n\Delta t) = \varphi(x + c\Delta t, y, z, (n + 1)\Delta t), & \text{dans le cas } \mathbf{n} = {}^t(-1, 0, 0), \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation acoustique, dans le cas d'un champ porteur au repos. Ceci permet de reconstruire, dans les points fantômes, des valeurs telles que le champ solution honore ce comportement. Le principal inconvénient est que cette technique impose la supposition forte que l'onde solution atteint la frontière en incidence normale, ce qui apparaît rarement en pratique. Son avantage est qu'elle est simple à implémenter, d'une part, et qu'elle ne nécessite pas l'introduction de zones éponges à proprement parler (donc de surcoût lié au nombre de points de maillage supplémentaires). Cette méthode a été retenue et implémentée dans le cadre de ce travail.

2.3.5 Validation

Modes de cavité

Le comportement numérique du solveur des équations (2.4) est évalué dans le cas de la simulation de modes propres de cavité, pour lesquels une solution analytique est connue. Ils sont définis comme suit. Dans le cas bidimensionnel, on considère un domaine d'extension $[L_x \times L_y] = [(x_{\max} - x_{\min}) \times (y_{\max} - y_{\min})]$, muni de conditions aux limites de type paroi rigides, dans lequel on résout (2.4) avec un champ porteur représentant un fluide au repos, et la condition initiale :

$$\varphi_0(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\left(\frac{k_x}{L_x}(x - x_{\min})\right) \cos\left(\frac{k_y}{L_y}(y - y_{\min})\right) \end{pmatrix}.$$

Dans cette dernière, $k_i = 2\pi/\lambda_i$, avec $\lambda_i = L_i/n_i$, $n_i \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{x, y\}$. La figure 2.6

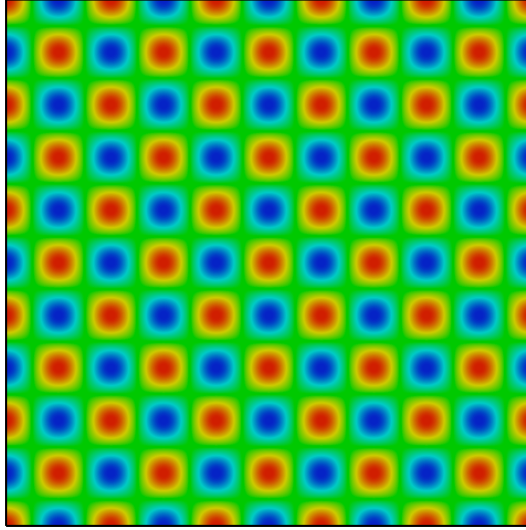


FIGURE 2.6 – Champ de densité à l'instant initial pour un mode de cavité bidimensionnel $(n_x, n_y) = (5, 5)$

représente son champ de densité dans le cas d'un mode donné par $n_x = n_y = 5$. La solution analytique de ce problème est donnée par :

$$\varphi^{\text{ana}}(x, y, t) = \varphi_0(x, y) \sin(\omega t),$$

où ω vérifie la relation de dispersion théorique :

$$\omega = c_0 \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Sa connaissance permet naturellement d'évaluer l'erreur entre solutions approchée et analytique, ainsi que ses normes L^1, L^2, L^∞ associées, dont on rappelle qu'elles sont respecti-

vement définies et approchées dans le cadre DF par :

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^1} &= \int_{\Omega} |\varphi - \varphi^{\text{ana}}| d\Omega \approx \frac{1}{N_{DF}} \sum_{i=1}^{N_{DF}} |\varphi_i - \varphi_i^{\text{ana}}|, \\ \|\varphi - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^2} &= \left(\int_{\Omega} |\varphi - \varphi^{\text{ana}}|^2 d\Omega \right)^{1/2} \approx \left(\frac{1}{N_{DF}} \sum_{i=1}^{N_{DF}} |\varphi_i - \varphi_i^{\text{ana}}|^2 \right)^{1/2}, \\ \|\varphi - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^\infty} &= \sup_{(x,y) \in \Omega} |\varphi - \varphi^{\text{ana}}| \approx \sup_{i \in [1, N_{DF}]} |\varphi_i - \varphi_i^{\text{ana}}|, \end{aligned}$$

où N_{DF} correspond au nombre de degrés de libertés, et φ_i représente la valeur de φ au degré de liberté i . On rappelle que l'erreur L^1 représente une évaluation du comportement moyen de la solution, que l'erreur L^2 représente une évaluation de son comportement énergétique et que l'erreur L^∞ , quant à elle, estime les imprécisions absolues locales. Par ailleurs, il est à noter qu'on fait le choix de mesurer des erreurs moyennées en temps au bout d'une période d'oscillation du mode. On s'intéressera tout particulièrement, dans ce cadre de validation, à l'évaluation de l'ordre de convergence k avec le raffinement en espace et en temps de l'erreur mesurée par ces normes. Il est évalué comme suit. Considérons tout d'abord que l'erreur prise en norme quelconque $\|\cdot\|_{L^X}$ est contrôlée par la taille des cellules, h , de la sorte :

$$\|\varphi - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^X} = C_\varphi h^k.$$

Dans cette écriture, C_φ dépend de la solution, mais pas de h . Des calculs de l'erreur pour des maillages successivement raffinés (de pas h_1 et h_2) mènent à :

$$\frac{\|\varphi^{h_1} - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^X}}{\|\varphi^{h_2} - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^X}} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^k,$$

et donc :

$$k = \frac{\ln \left(\frac{\|\varphi^{h_1} - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^X}}{\|\varphi^{h_2} - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^X}} \right)}{\ln \left(\frac{h_1}{h_2} \right)}.$$

Précisons que dans cette étude la condition initiale est implémentée en attribuant simplement à chaque nœud du maillage la valeur ponctuelle de la condition initiale, i.e. :

$$\varphi_{0_i} = \varphi_0(x_i, y_i),$$

où x_i et y_i sont les coordonnées du nœud i .

Le tableau 2.4 contient les erreurs sur la densité ainsi que les ordres de convergence observés dans le cas de la simulation d'un mode (13, 13), dans un carré de côté 1, pour des raffinements allant de 3.8 à 30.4 points par longueur d'onde. Ces expériences numériques montrent que l'on obtient la convergence attendue, pour des schémas DF en espace et RK en temps d'ordres identiques. On attribue la perte de convergence observée pour les maillages les plus fins dans le cas des schémas d'ordre 6 et 8 à un niveau d'erreur proche de la précision machine. Le cas 3D (pour lequel l'extension des expressions de φ_0 et ω est naturelle) est présenté dans le tableau 2.5. Il s'agit de la simulation d'un mode (5, 5, 5) dans un cube d'arête 1. Si, pour des raisons de ressources machine, un moindre nombre de calculs peut être réalisé dans ce cas, la convergence est néanmoins vérifiée.

Δx_{FD}	FD $\mathcal{O}4$ + RK 4					
	L^1		L^2		L^∞	
1/50	6,08E-08	-	7,47E-08	-	1,47E-07	-
1/75	2,25E-08	2,5	2,76E-08	2,5	5,45E-08	2,4
1/100	7,51E-09	3,8	9,24E-09	3,8	1,83E-08	3,8
1/150	1,50E-09	4,0	1,85E-09	4,0	3,68E-09	4,0
1/200	4,80E-10	4,0	5,91E-10	4,0	1,18E-09	4,0
1/300	9,37E-11	4,0	1,15E-10	4,0	2,31E-10	4,0
1/400	2,93E-11	4,0	3,62E-11	4,0	7,31E-11	4,0
Δx_{FD}	FD $\mathcal{O}6$ + RK 6					
	L^1		L^2		L^∞	
1/50	2,58E-08	-	3,17E-08	-	6,22E-08	-
1/75	2,21E-09	6,1	2,71E-09	6,1	5,36E-09	6,0
1/100	3,99E-10	5,9	4,91E-10	5,9	9,74E-10	5,9
1/150	3,52E-11	6,0	4,33E-11	6,0	8,70E-11	6,0
1/200	6,42E-12	5,9	7,90E-12	5,9	1,67E-11	5,7
1/300	5,75E-13	5,9	7,14E-13	5,9	2,44E-12	4,7
1/400	1,14E-13	5,6	1,57E-13	5,3	1,35E-12	2,0
Δx_{FD}	FD $\mathcal{O}8$ + RK 8					
	L^1		L^2		L^∞	
1/50	1,77E-08	-	2,17E-08	-	4,26E-08	-
1/75	8,07E-10	7,6	9,92E-10	7,6	1,96E-09	7,6
1/100	7,71E-11	8,2	9,48E-11	8,2	1,89E-10	8,1
1/150	2,71E-12	8,3	3,34E-12	8,3	7,46E-12	8,0
1/200	2,71E-13	8,0	3,41E-13	7,9	1,65E-12	5,2
1/300	2,41E-14	6,0	7,50E-14	3,7	1,14E-12	0,9

TABLE 2.4 – Solveur aux différences finies : erreurs et ordres de convergence associés pour un mode de cavité 2D

Δx_{FD}	FD $\mathcal{O}4$ + RK 4					
	L^1		L^2		L^∞	
1/25	1,08E-02	-	1,40E-02	-	3,74E-02	-
1/50	6,77E-04	4,0	8,80E-04	4,0	2,42E-03	4,0
1/100	3,93E-05	4,1	5,50E-05	4,0	1,53E-04	4,0
Δx_{FD}	FD $\mathcal{O}6$ + RK 6					
	L^1		L^2		L^∞	
1/25	1,83E-03	-	2,37E-03	-	6,43E-03	-
1/50	2,21E-05	6,4	2,88E-05	6,4	7,93E-05	6,3
1/100	3,22E-07	6,1	4,51E-07	6,0	1,39E-06	5,8
Δx_{FD}	FD $\mathcal{O}8$ + RK 8					
	L^1		L^2		L^∞	
1/25	1,44E-03	-	1,86E-03	-	5,02E-03	-
1/50	3,86E-06	8,5	5,02E-06	8,5	1,39E-05	8,5
1/100	1,34E-08	8,2	2,03E-08	7,9	1,87E-07	6,2

TABLE 2.5 – Solveur aux différences finies : erreurs et ordres de convergence associés pour un mode de cavité 3D

2.4 Approximation en espace - Méthodes de Galerkin discontinues

Les méthodes de Galerkin discontinues (DG) sont des méthodes de type éléments finis, basées sur une formulation variationnelle, dans laquelle les fonctions tests et la solution sont supposées discontinues au travers des interfaces entre éléments. Cette dernière caractéristique nécessite l'introduction de la notion de flux numérique aux interfaces afin d'obtenir une méthode de discrétisation complète. Ceci permet, en un certain sens sur lequel on reviendra, d'interpréter ces méthodes en tant qu'une extension des schémas aux volumes finis. On en présente le principe ci-après.

Pour plus de détails sur les aspects mathématiques de ces schémas, le lecteur est invité à consulter des écrits de référence tels que [18, 22]. Dans [23], Hesthaven & Warburton présentent en détails les aspects pratiques de la mise en œuvre de schémas DG munis de bases nodales.

Ces schémas ont été introduits pour la résolution des équations de la neutronique par Reed & Hill en 1973. Ils ont, par la suite, fait l'objet de nombreuses études et applications dans divers domaines d'intérêt. Dans [9], Cockburn et al. en retracent l'historique.

Dans le domaine de la propagation d'ondes linéaire en aéroacoustique auquel on s'intéresse particulièrement dans ce travail, on peut notamment citer les travaux de Bernacki et al. [5] portant sur la construction de schémas DG (dans le domaine temporel) non diffusifs, pour les équations d'Euler linéarisées. Dans [13], Delorme et al. présentent un schéma DG décentré auquel est adjoint un schéma de Runge-Kutta en temps, pour ces mêmes équations.

Par ailleurs, dans le cadre des équation d'Euler "complètes" et linéarisées, Dumbser et al. présentent le solveur *ADER-DG* dans [16]. Il est fondé sur des méthodes d'ordre élevé en espace, et de la procédure dite de Cauchy-Kovalevski en temps¹.

2.4.1 Formulation

On considère le problème d'évolution en temps d'inconnue \mathbf{u} , fonction de l'espace et du temps, donné par la formulation forte suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{m=1}^p \partial_m \mathbf{F}_m(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{C.L.} \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Dans (2.22), Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^p avec $p \in \{1, 2, 3\}$ et $\partial\Omega$ sa frontière. Notons qu'on ne fait aucune hypothèse sur le caractère linéaire ou non-linéaire de \mathbf{F} , si bien que (2.22) constitue une écriture générique des équations d'Euler (2.2) et de leur linéarisé (2.4). L'inconnue vectorielle \mathbf{u} est de dimension $p + 2$ (respectivement $p + 1$) dans le cas des équations d'Euler (respectivement des équations d'Euler linéarisées). Une formulation faible de ce problème est donnée en intégrant (2.22) contre une fonction test $\varphi \in V \subset$

1. On la présente brièvement dans le chapitre qui suit.

$H_{\text{loc}}^1(\Omega)$, l'ensemble des fonctions H^1 par morceaux, définies sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} , et consiste à chercher $\mathbf{u} \in V$ tel que :

$$\forall \varphi \in V, \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{m=1}^p \partial_m \mathbf{F}_m(\mathbf{u}) \right) \varphi \, dx = 0. \quad (2.23)$$

On considère \mathcal{T}_{Ω} une discrétisation de Ω , ω_j les mailles qui la composent et Γ_j leurs frontières. L'idée des méthodes de Galerkin discontinues consiste à considérer (2.23) de manière locale, en chaque maille ω_j . Cela revient à chercher la restriction de \mathbf{u} à ω_j , $\mathbf{u}_j \in V_j$ tel que :

$$\forall j, \forall \varphi_j \in V_j, \int_{\omega_j} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + \sum_{m=1}^p \partial_m \mathbf{F}_m(\mathbf{u}_j) \right) \varphi_j \, dx = 0. \quad (2.24)$$

Dans la pratique, l'espace $V_j \subset H^1(\omega_j)$ est approché par des sous espaces de fonctions polynômiales d'ordre $k \in \mathbb{N}$, qu'on note V_j^k . Afin de prendre en compte les contributions des mailles voisines, on procède à une intégration par parties du terme $\sum_{m=1}^p \partial_m \mathbf{F}_m(\mathbf{u}_j)$. Il vient :

$$\forall j, \forall \varphi_j \in V_j^k, \int_{\omega_j} \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} \varphi_j \, dx - \int_{\omega_j} \sum_{m=1}^p (\mathbf{F}_m(\mathbf{u}_j) \partial_m) \varphi_j \, dx + \int_{\Gamma_j} \mathbf{F}(\mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n} \varphi_j \, d\gamma = 0, \quad (2.25)$$

où, en notant n_m la m^{e} composante de la normale extérieure \mathbf{n} ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \sum_{m=1}^p (n_m \mathbf{F}_m(\mathbf{u})).$$

A ce stade, on note que si on a formulé des hypothèses de régularité sur les fonctions de V_j^k dans ω_j , aucune contrainte n'a en revanche été fixée sur leur continuité au travers des interfaces Γ_j . Ceci entraîne que l'intégrale de bord comprise dans (2.26) n'a pas de sens *a priori*, du fait que \mathbf{u}_j et φ_j peuvent prendre des valeurs différentes de part et d'autre de l'interface, selon la maille de référence. Aussi, l'analyse théorique des schémas DG montre-t-elle, d'une part, que le problème est mal posé à ce stade et que, d'autre part, il est nécessaire de définir un flux numérique $\mathcal{H}(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{n})$, où \mathbf{u}^+ (respectivement \mathbf{u}^-) est la valeur intérieure (respectivement extérieure) de \mathbf{u} afin de répondre à cette problématique. Ceci revient à imposer faiblement les conditions aux limites de la maille ω_j . On obtient la formulation faible locale :

$$\forall j, \forall \varphi_j \in V_j^k, \int_{\omega_j} \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} \varphi_j \, dx - \int_{\omega_j} \sum_{m=1}^p (\mathbf{F}_m(\mathbf{u}_j) \partial_m) \varphi_j \, dx + \int_{\Gamma_j} \underbrace{\mathcal{H}(\mathbf{u}_j^+, \mathbf{u}_j^-, \mathbf{n})}_{\text{Flux numérique}} \varphi_j \, d\gamma = 0. \quad (2.26)$$

Notons que $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot)$ doit vérifier une propriété de consistance :

$$\mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n},$$

et de conservativité, à savoir :

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = -\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{n}).$$

L'introduction de cette notion établit un lien direct entre les schémas DG et les schémas aux volumes finis (VF), dans le cadre desquels un grand nombre de flux numériques qui vérifient ces propriétés a été élaboré et mis en œuvre. La problématique du choix d'un tel flux aux interfaces est en réalité commune à ces deux types de schémas. Plus précisément, et en premier lieu, peut-on citer le flux dit centré qui consiste à prendre comme valeur au bord la moyenne des valeurs de part et d'autre de la frontière Γ_j :

$$\mathcal{H}_C(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(\mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}). \quad (2.27)$$

Comme on le verra dans la suite, ce dernier mène à des schémas dispersifs, mais non diffusifs. Les flux numériques dits décentrés privilégient quant à eux les propriétés dispersives au prix d'une certaine quantité de diffusion numérique. Nombre de stratégies ont été mises en œuvre en vue d'élaborer des flux qui contrôlent le caractère diffusif du schéma : elles mènent naturellement à des algorithmes d'autant plus onéreux que ce but est atteint.

Le flux Local Lax-Friedrichs est quant à lui relativement simple, peu onéreux mais considérablement diffusif. Il s'écrit :

$$\mathcal{H}_{LLF}(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(\mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} + \lambda (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)), \quad (2.28)$$

où λ est le max de la plus grande valeur propre (en valeur absolue) des matrices $\sum_{i=0}^d \mathbf{n}_i \mathbf{J}_i(\mathbf{u}^+)$ et $\sum_{i=0}^d \mathbf{n}_i \mathbf{J}_i(\mathbf{u}^-)$, avec \mathbf{J} la matrice jacobienne de $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$. Dans le cas des équations d'Euler linéarisées, la valeur de λ est donnée par :

$$\lambda = \max (|\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n} - c_0|, |\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}|, |\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n} + c_0|, |\mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} - c_0|, |\mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}|, |\mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} + c_0|),$$

où \mathbf{v}^+ (resp. \mathbf{v}^-) correspond à la somme des vecteurs vitesse porteur et acoustique : $\mathbf{v}_0^+ + \mathbf{v}_1^+$ (resp. $\mathbf{v}_0^- + \mathbf{v}_1^-$). Considérant que la diffusion introduite par le décentrement agit sur les sauts au travers des interfaces $(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)$, il est clair que ce flux est peu adapté aux schémas VF pour lesquels la solution est constante par éléments (les sauts y sont donc maximums). Il est nettement plus acceptable dans le cadre DG d'ordre élevé où l'amplitude des sauts est naturellement moindre. Notons de plus que le caractère diffusif est d'autant moins marqué que la solution est régulière.

On peut unifier l'écriture de ces deux flux numériques en définissant :

$$\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(\mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} + \alpha \lambda (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)), \quad (2.29)$$

où $\alpha \in [0, 1]$. Le choix de ce paramètre permet de passer continûment d'un flux centré à un flux localement décentré (respectivement $\alpha = 0$, $\alpha = 1$). Sauf mention contraire, on utilisera un flux décentré LLF dans les calculs réalisés dans cette étude ($\alpha = 1$).

2.4.2 Mise en œuvre

Problème discret

Le problème variationnel local lié aux schémas DG revient donc à chercher $\mathbf{u}_j \in V_j^k$, restriction de \mathbf{u} à la maille ω_j tel que (2.26) soit vérifiée. Comme on l'a évoqué

précédemment, V_j^k un sous-espace de V_j , de dimension finie N , composé de N fonctions polynômiales d'ordre au plus k qui en forment une base. On les nomme ψ_j^i , avec $i = 1 \dots N$. Les inconnues du problème DG discret local sont les \mathbf{u}_j^i , coordonnées de \mathbf{u}_j sur la base formée par les ψ_j , de telle sorte que, en tout point de ω_j :

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^i \psi_j^i. \quad (2.30)$$

Comme $\psi_j^i \in V_j^k$ par construction, $\mathbf{u}_j \in V_j^k$ et l'on approche (2.26) par le problème discret qui consiste à chercher les \mathbf{u}_j^i tels que :

$$\forall j, \forall \psi_j^l \in V_j^k, \quad \int_{\omega_j} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^i \psi_j^i \right) \psi_j^l dx \quad (2.31)$$

$$- \int_{\omega_j} \sum_{m=1}^p \left(\mathbf{F}_m \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^i \psi_j^i \right) \partial_m \right) \psi_j^l dx \quad (2.32)$$

$$+ \int_{\Gamma_j} \mathcal{H} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^{i+} \psi_j^{i+}, \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^{i-} \psi_j^{i-}, \mathbf{n} \right) \psi_j^l d\gamma = 0. \quad (2.33)$$

On admettra, ici, que l'union des \mathbf{u}_j sur l'intégralité des j converge effectivement vers la solution \mathbf{u} de (2.23) [18, 23].

On appelle $u_{q,j}$ la q^e composante de \mathbf{u}_j , $\mathbf{U}_{q,j}$ le vecteur de taille N composé des q^e composantes des degrés de liberté du schéma DG dans la maille j , $F_{q,m}(\mathbf{u}_j)$ la q^e composante de $\mathbf{F}_m(\mathbf{u}_j)$ et \mathcal{H}_q la q^e composante de \mathcal{H} . En sommant l'expression précédente sur l'indice l , on obtient, pour chaque composante q de l'inconnue numérique :

$$\mathbf{M}_j \frac{\partial \mathbf{U}_{q,j}}{\partial t} \quad (2.34)$$

$$- \begin{pmatrix} \int_{\omega_j} \sum_{m=1}^p \left(F_{q,m} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^i \psi_j^i \right) \partial_m \right) \psi_j^1 dx \\ \vdots \\ \int_{\omega_j} \sum_{m=1}^p \left(F_{q,m} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^i \psi_j^i \right) \partial_m \right) \psi_j^N dx \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$+ \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_j} \mathcal{H}_q \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^{i+} \psi_j^{i+}, \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^{i-} \psi_j^{i-}, \mathbf{n} \right) \psi_j^1 d\gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_j} \mathcal{H}_q \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^{i+} \psi_j^{i+}, \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^{i-} \psi_j^{i-}, \mathbf{n} \right) \psi_j^N d\gamma. \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Dans cette expression, \mathbf{M}_j représente la matrice de masse locale, dont les coefficients sont donnés par :

$$\mathbf{M}_j^{(i,l)} = \int_{\omega_j} \psi_j^i \psi_j^l dx. \quad (2.37)$$

En multipliant à gauche tous les termes par son inverse, on obtient l'expression de $\partial_t \mathbf{U}_{q,j}$; cette dernière est nécessaire en vue de l'application d'un schéma d'avancée en temps. Le problème discret dans \mathcal{T}_Ω réside dans l'assemblage de ces problèmes locaux.

Notons que dans le cas particulier où les \mathbf{F}_m sont linéaires, les termes (2.35) et (2.36) peuvent être vus comme l'application d'une matrice de rigidité et d'une matrice de "flux" (respectivement) au vecteur composé des degrés de liberté du schéma. Aussi, ces matrices étant constantes au cours de l'avancée en temps, il est possible de les pré-calculer et de les stocker en mémoire avant la première itération. C'est ce que l'on fait en pratique.

Avancée en temps : schéma RK-DG

L'idée d'associer les schémas DG à une avancée en temps de type RK a été introduite par Cockburn & Shu dans [10, 11]. On définit :

$$\partial_t \mathbf{U} = L(\mathbf{U}),$$

où \mathbf{U} correspond à l'assemblage de l'intégralité des inconnues du problème, et $L(\mathbf{U})$ correspond au vecteur donné par l'application de l'inverse de la matrice de masse globale à l'assemblage des vecteurs locaux (2.35) et (2.36). Il s'agit, afin d'avancer la solution d'un pas de temps Δt avec une précision d'ordre n dans le cas de problèmes linéaires, d'appliquer l'algorithme présenté à la section 2.2.1. Ceci donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(0)} &= \mathbf{U}^i, \\ \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^i + \gamma_1 \Delta t L(\mathbf{U}^{(0)}), \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \mathbf{U}^i + \gamma_2 \Delta t L(\mathbf{U}^{(1)}), \\ &\vdots \\ \mathbf{U}^{(n)} &= \mathbf{U}^i + \gamma_n \Delta t L(\mathbf{U}^{(n-1)}), \\ \mathbf{U}^{i+1} &= \mathbf{U}^{(n)}, \end{aligned}$$

avec :

$$\gamma_k = \frac{1}{(n+1) - k}.$$

Fonctions de base

Le solveur DG mis en œuvre dans le cadre de ce travail utilise des bases de polynômes de Lagrange, sur des cellules triangulaires ou tétraédrales. Il s'agit de bases dites nodales, au sens où chacun des polynômes (et degrés de liberté) qui la composent peut être associé à un point de l'espace physique, contenu dans l'élément. La figure 2.8 représente la répartition de ces derniers dans le cas du triangle de référence, donné par les sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Précisons que \mathcal{P}^j dénote une base de N polynômes ϕ_k d'ordre p , et tels que :

$$\phi_k(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

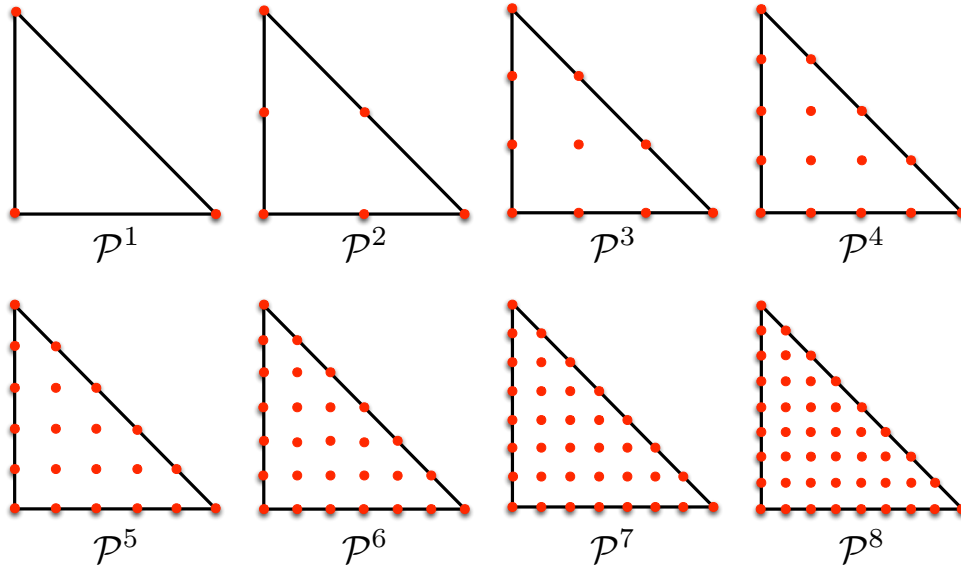


FIGURE 2.7 – Représentation des degrés de liberté dans le triangle unité muni de fonctions de bases Lagrangiennes d'ordre 1 à 8.

Leur définition exacte peut être trouvée dans [23]. Dans le cas d'éléments triangulaires, le nombre de fonctions de bases est lié à l'ordre p des polynômes par la relation

$$N = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

Dans le cas d'éléments tétraédraux, on a :

$$N = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}.$$

Méthodes de quadrature

La mise en œuvre de méthodes de quadratures est a priori nécessaire afin de calculer les coefficients de la matrice de masse, les coefficients de la matrice de rigidité dans le cas linéaire ou les intégrales contenant le flux convectif \mathbf{F} dans le cas non linéaire. Aussi, dans la présente étude, le solveur DG est-il muni :

- de quadratures de Gauss - Legendre classiques pour les intégrales linéiques (intégrales de frontière en 2D),
- de quadratures de Hammer pour les intégrales surfaciques et volumiques [21, 15].

Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont prises en compte, de manière faible, au travers du terme 2.36, lorsque pour une maille j donnée,

$$\Gamma_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Il s'agit alors d'imposer les grandeurs $\mathbf{u}_j^{i-} \psi_j^{i-}$, "extérieures" à ω_j :

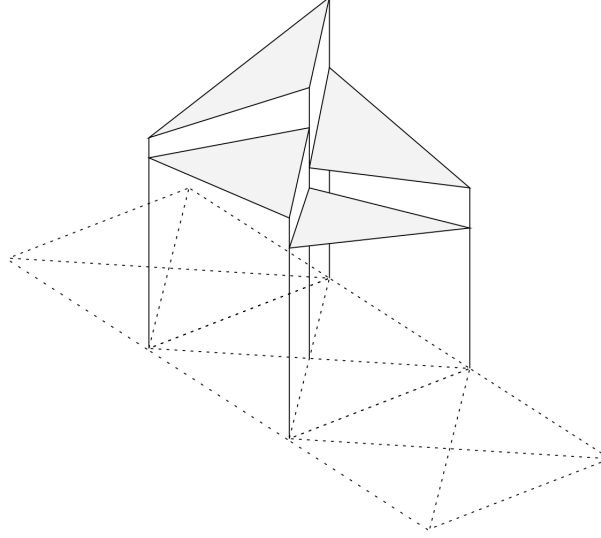


Illustration empruntée à Lowrie [30]

FIGURE 2.8 – Champ solution DG \mathcal{P}^1 sur des éléments triangulaires : la solution est affine élément par élément, et discontinue entre les mailles

- en fixant $\mathbf{u}_j^{i-} = \mathbf{u}_j^{i+}$, de manière à annuler automatiquement la composante normale du gradient de \mathbf{u}_j au bord,
- en fixant $\mathbf{u}_j^{i-} = -\mathbf{u}_j^{i+}$, de manière à annuler automatiquement \mathbf{u}_j au bord.

Par ailleurs, on utilisera des conditions de sortie fondées, comme dans le cas du solveur DF, sur la méthode des caractéristiques de Thompson [39].

2.4.3 Propriétés dispersives

Les propriétés dispersives des méthodes de Galerkin discontinues ont été étudiées en détail par Hu et al. [24] ainsi que Ainsworth [2], entre autres. Dans la suite, on se propose d'en retrouver les principales caractéristiques dans le cas de la résolution de l'équation d'advection scalaire monodimensionnelle,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.38)$$

par un schéma semi discrétisé muni de fonctions de base \mathcal{P}^1 . Soit u^j la solution discrete de (2.38) portée par la maille j . Dans un premier temps, on définit $u_g^j(t)$ (respectivement $u_d^j(t)$), la projection de u^j sur la fonction de base $\varphi_g(x)$ (respectivement $\varphi_d(x)$), de telle sorte que :

$$u^j(x, t) = u_g^j(t)\varphi_g(x) + u_d^j(t)\varphi_d(x). \quad (2.39)$$

En multipliant (2.38) par une fonction test polynômiale φ , puis en l'intégrant sur la maille j , on obtient après une intégration par parties :

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u^j(x, t)}{\partial t} \varphi(x) dx + c [u^j(x, t)\varphi(x)]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} - c \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} u^j(x, t) dx = 0. \quad (2.40)$$

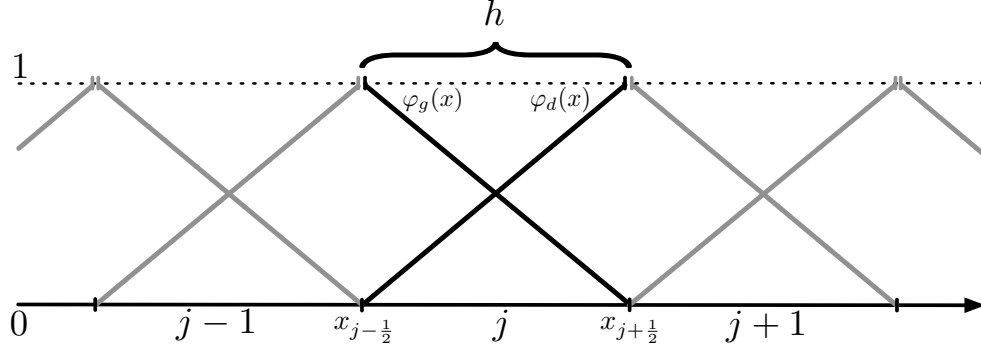

 FIGURE 2.9 – Fonctions de base Lagrangiennes pour un schéma DG \mathcal{P}^1 en 1-D

Schéma décentré amont

Le choix d'un flux décentré amont permet d'explicitier le terme de bord :

$$[w^j(x, t)\varphi(x)]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} = \left(u_d^j(x, t)\varphi(x_{j+\frac{1}{2}}) - u_d^{j-1}(x, t)\varphi(x_{j-\frac{1}{2}}) \right).$$

Pour un tel choix de flux numérique, on introduit u^j sous sa forme (2.39) dans (2.40). En y imposant $\varphi = \varphi_g$, puis $\varphi = \varphi_d$, on obtient les deux relations suivantes, tous calculs d'intégrales des fonctions de bases faits :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{3}u_g^j(t) + \frac{h}{6}u_d^j(t) \right) - cu_d^{j-1}(t) + c\frac{u_g^j(t) + u_d^j(t)}{2} &= 0, \text{ pour } \varphi = \varphi_g, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{6}u_g^j(t) + \frac{h}{3}u_d^j(t) \right) + cu_d^j(t) - c\frac{u_g^j(t) + u_d^j(t)}{2} &= 0, \text{ pour } \varphi = \varphi_d, \end{aligned}$$

soit, sous formulation matricielle :

$$h \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_g^j(t) \\ u_d^j(t) \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_g^j(t) \\ u_d^j(t) \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} u_d^{j-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.41)$$

Afin d'étudier les caractéristiques dispersives et diffusives de ce schéma, on introduit w^j sous la forme d'une onde plane, à savoir :

$$\begin{pmatrix} u_g^j(t) \\ u_d^j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix} e^{i(j\tilde{k}-\omega t)}, \quad (2.42)$$

où $\tilde{k} = kh$ est le nombre d'onde adimensionné par le pas d'espace, et ω la pulsation. Le système (2.41) devient :

$$-i\omega h \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - e^{-i\tilde{k}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

Après multiplication à gauche par l'inverse de la matrice de masse, on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 - 4e^{-i\tilde{k}} \\ -3 & 1 + 2e^{-i\tilde{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix} = i\tilde{k}_0 \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

où $\tilde{k}_0 = h \frac{\omega}{c}$ représente le nombre d'onde physique adimensionné. Le polynôme caractéristique lié au problème (2.44) donne la relation de dispersion numérique du schéma vérifiée par \tilde{k} , qui peut s'écrire :

$$e^{-i\tilde{k}} = -\frac{\tilde{k}_0^2 + 4i\tilde{k}_0 - 6}{2i\tilde{k}_0 + 6}. \quad (2.45)$$

Ce dernier admet deux racines, qui constituent deux valeurs propres simples $(i\tilde{k}_0^\varphi, i\tilde{k}_0^p)$ associées aux vecteurs propres $(\vec{\lambda}_\varphi, \vec{\lambda}_p)$, à savoir :

$$\begin{aligned} i\tilde{k}_0^\varphi &= 2 + e^{-i\tilde{k}}(1 - \delta), \\ i\tilde{k}_0^p &= 2 + e^{-i\tilde{k}}(1 + \delta), \\ \vec{\lambda}_\varphi &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-i\tilde{k}}(1 - e^{i\tilde{k}} + \delta) \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{\lambda}_p &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-i\tilde{k}}(1 - e^{i\tilde{k}} - \delta) \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec δ tel que :

$$\delta^2 = 1 + 10e^{i\tilde{k}} - 2e^{2i\tilde{k}}.$$

Leurs développements limités pour $\tilde{k} \rightarrow 0$ permettent de conclure sur l'ordre du schéma. Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} i\tilde{k}_0^\varphi &= i\tilde{k} + \frac{\tilde{k}^4}{72} + \frac{i\tilde{k}^5}{270} + O(\tilde{k}^6), \\ i\tilde{k}_0^p &= 6 - 3i\tilde{k} - \tilde{k}^2 + \frac{i\tilde{k}^3}{3} + O(\tilde{k}^4), \\ \vec{\lambda}_\varphi &= \begin{pmatrix} 1 - i\tilde{k} - \frac{\tilde{k}^2}{3} + \frac{i\tilde{k}^3}{9} + O(\tilde{k}^4) \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{\lambda}_p &= \begin{pmatrix} -1 + \frac{i\tilde{k}}{3} + O(\tilde{k}^4) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ces résultats indiquent tout d'abord que l'on est en présence d'une solution composée de deux modes. Le premier est physique, et représenté par le couple $(i\tilde{k}_0^\varphi, \vec{\lambda}_\varphi)$. Celui-ci approche la solution analytique avec une erreur de diffusion d'ordre 4 et une erreur de dispersion d'ordre 5, comme le montre le comportement asymptotique de $i\tilde{k}_0^\varphi$ pour \tilde{k} proche de 0. On note que ceci est en accord avec les travaux d'Ainsworth [2], qui démontrent que les schémas DG décentrés munis d'une base de polynômes d'ordre n sont précis à l'ordre $2n+2$ en diffusion et à l'ordre $2n+3$ en dispersion, dans le cas de l'équation d'advection scalaire sur maillage régulier. Le second est un mode parasite, représenté par le couple $(i\tilde{k}_0^p, \vec{\lambda}_p)$. Il décrit quant à lui une onde oscillante (en $(-1)^j$) qui se propage à la vitesse $3c$ vers les x décroissants. Le premier terme du développement limité de $i\tilde{k}_0^p$ montre qu'elle est exponentiellement dissipée avec le raffinement en maillage.

Schéma centré

Un schéma DG centré s'obtient en imposant :

$$[u^j(x, t)\varphi(x)]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left((u_d^j + u_g^{j+1}) \varphi(x_{j+\frac{1}{2}}) - (u_g^j + u_d^{j-1}) \varphi(x_{j-\frac{1}{2}}) \right),$$

ce qui mène au système matriciel

$$h \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_g^j(t) \\ u_d^j(t) \end{pmatrix} + \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_g^j(t) \\ u_d^j(t) \end{pmatrix} + \frac{c}{2} \begin{pmatrix} -u_d^{j-1}(t) \\ u_g^{j+1}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.46)$$

En choisissant u^j sous la forme (2.42), il vient

$$-i\omega h \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix} + \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 - e^{-i\tilde{k}} \\ -1 + e^{i\tilde{k}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.47)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{i\tilde{k}} & 2 - 2e^{-i\tilde{k}} \\ -2 + 2e^{i\tilde{k}} & -1 + e^{-i\tilde{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix} = i\tilde{k}_0 \begin{pmatrix} A_g \\ A_d \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Là encore, la relation de dispersion numérique vérifiée par \tilde{k} est donnée par le caractéristique en \tilde{k}_0 :

$$e^{i\tilde{k}}(3 - \tilde{k}_0) + e^{-i\tilde{k}}(3 + \tilde{k}_0) = 6 - \tilde{k}_0^2. \quad (2.49)$$

Les valeurs propres et vecteurs propres de ce problème sont donnés par :

$$\begin{aligned} i\tilde{k}_0^p &= \frac{1}{2} (e^{-i\tilde{k}} - 1) (1 + e^{i\tilde{k}} + \delta), \\ i\tilde{k}_0^\varphi &= \frac{1}{2} (e^{-i\tilde{k}} - 1) (1 + e^{i\tilde{k}} - \delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-i\tilde{k}} (1 - e^{i\tilde{k}} + \delta) \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{\lambda}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-i\tilde{k}} (1 - e^{i\tilde{k}} - \delta) \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où δ est tel que :

$$\delta^2 = 1 + 14e^{i\tilde{k}} + e^{2i\tilde{k}}.$$

Le comportement lorsque \tilde{k} est proche de 0 des valeurs propres et vecteurs propres est donné par :

$$\begin{aligned} i\tilde{k}_0^p &= -3i\tilde{k} + \frac{5i\tilde{k}^3}{16} - \frac{83i\tilde{k}^5}{5120} + O(\tilde{k}^7), \\ i\tilde{k}_0^\varphi &= i\tilde{k} + \frac{i\tilde{k}^3}{48} - \frac{7i\tilde{k}^5}{15360} + O(\tilde{k}^7), \end{aligned}$$

$$\vec{\lambda}_p = \begin{pmatrix} -1 + \frac{i\tilde{k}}{4} + \frac{\tilde{k}^2}{32} + O(\tilde{k}^3) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3i\tilde{k}}{4} - \frac{9\tilde{k}^2}{32} + O(\tilde{k}^3) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres du problème (2.47) mettent là encore en évidence la présence d'une onde parasite et d'une onde physique, représentées respectivement par les couples $(i\tilde{k}_0^p, \vec{\lambda}_p)$ et $(i\tilde{k}_0^\varphi, \vec{\lambda}_\varphi)$. Les propriétés dispersives sont ici conservées à l'ordre 3. De plus, on note que le nombre d'onde physique est approché par une série de termes réels uniquement, ce qui traduit le fait que le schéma ne commet aucune erreur de diffusion.

2.4.4 Validation

De la même manière que précédemment, la convergence en maillage du solveur DG est évaluée dans le cas de modes de cavités. Afin de pouvoir contrôler le pas d'espace dans le but de mesurer l'ordre de convergence, les cavités sont discrétisées par des maillage triangulaires (2D) ou tétraédraux (3D), pseudo-structurés, de type "union jack" (figure 2.10). On note, de plus, que ces maillages offrent, par construction, un raffinement homogène et ne privilégient aucune direction d'espace en terme de précision. La champ solution est ici

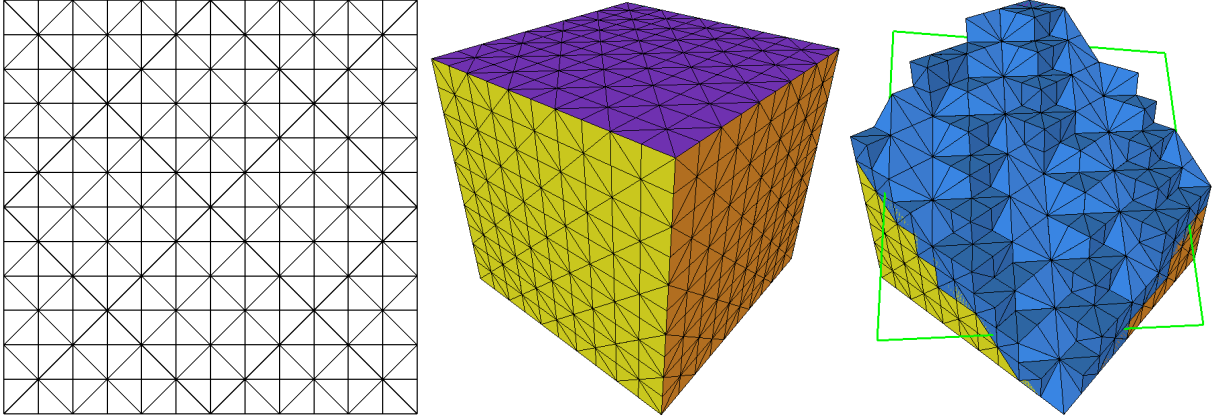


FIGURE 2.10 – Maillages de type Union Jack : 2D et 3D (surface colorée par les marqueurs de peau / coupe volumique).

initialisé en affectant à chaque degré de liberté DG i de chaque triangle (ou tétraèdre) T une approximation de la projection de la condition initiale φ_{0T} sur la fonction de base ψ_T^i qui correspond. On rappelle que cette projection est construite de telle sorte que :

$$\varphi_{0T} = \sum_{i=1}^{N_T} \varphi_{0T}^i \psi_T^i, \quad (2.50)$$

où N_T représente le nombre de fonctions de base dans l'élément T . Les projetés φ_{0T}^i sont calculés en considérant la somme sur j les intégrales des deux membres de (2.50) contre les fonction de base ψ_T^j :

$$\sum_{j=1}^{N_T} \int_T \varphi_{0T} \psi_T^j dx = \sum_{j=1}^{N_T} \int_T \left(\sum_{i=1}^{N_T} \varphi_{0T}^i \psi_T^i \right) \psi_T^j dx.$$

En définissant :

$$\overline{\varphi_{0T}} = \begin{pmatrix} \varphi_{0T}^1 \\ \vdots \\ \varphi_{0T}^{N_T} \end{pmatrix} \text{ et } \varphi_{0T}^* = \begin{pmatrix} \int_T \varphi_{0T} \psi_T^1 dx \\ \vdots \\ \int_T \varphi_{0T} \psi_T^{N_T} dx \end{pmatrix},$$

on peut reformuler cette égalité après y avoir identifié \mathbf{M}_T , la matrice de masse locale DG, comme :

$$\overline{\varphi_{0T}} = \mathbf{M}_T^{-1} \varphi_{0T}^*. \quad (2.51)$$

On note que ces expressions contiennent des intégrales volumiques de fonctions non polynômiales. Ces dernières sont évaluées par des méthodes de quadrature d'ordre élevé. On mesure en normes L^1 , L^2 , L^∞ l'écart, au bout d'une période d'oscillation, entre la solution approchée φ_T et le projeté de la solution analytique φ_T^* sur la base des ψ_T pour chaque élément T , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^1} &\approx \left(\sum_T \int_T \left| \sum_{i=1}^{N_T} (\varphi_T^i - \varphi_T^{*i}) \psi_T^i \right| d\Omega \right), \\ \|\varphi - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^2} &\approx \left(\sum_T \int_T \left| \sum_{i=1}^{N_T} (\varphi_T^i - \varphi_T^{*i}) \psi_T^i \right|^2 d\Omega \right)^{1/2}, \\ \|\varphi - \varphi^{\text{ana}}\|_{L^\infty} &\approx \sup_T \left(\left| \sum_{i=1}^{N_T} (\varphi_T^i - \varphi_T^{*i}) \psi_T^i \right| \right). \end{aligned}$$

Les intégrales liées aux calculs de ces normes sont évaluées par des méthodes de quadrature exactes pour des polynômes d'ordre n dans le cas L^1 , et pour des polynômes d'ordre $2n$ dans le cas L^2 .

Les tableaux 2.6 et 2.7 présentent les erreurs définies ci-dessus (là encore, moyennées en temps sur une période) et ordres de convergence mesurés dans le cas de modes tels que définis au paragraphe 2.3.5, 2D et 3D respectivement. Ces résultats sont issus de la mise en œuvre de schémas décentrés amont. Ils montrent que le solveur DG est précis à l'ordre $k + 1$ en espace pour une base de polynômes \mathcal{P}^k .

2.5 Méthodes DF et DG : propriétés et performances comparées en maillage cartésien

Si l'idée de la mise au point d'un couplage entre méthodes DF et DG est fondée sur l'économie en ressources machine qui doit en découler, elle génère, en contrepartie, des

2.5 Méthodes DF et DG : propriétés et performances comparées en maillage cartésien

Δx_{DG}	DG $\mathcal{P}^2 + \text{RK } 4$					
	L^1		L^2		L^∞	
1/12	7,72E-08	-	1,04E-07	-	4,09E-07	-
1/24	3,97E-08	1,0	4,57E-08	1,2	1,42E-07	1,5
1/48	6,57E-09	2,6	8,42E-09	2,4	5,49E-08	1,4
1/96	8,49E-10	3,0	1,15E-09	2,9	8,01E-09	2,8
1/192	9,74E-11	3,1	1,39E-10	3,1	1,09E-09	2,9
1/384	1,18E-11	3,0	1,71E-11	3,0	1,40E-10	3,0
Δx_{DG}	DG $\mathcal{P}^3 + \text{RK } 4$					
	L^1		L^2		L^∞	
1/12	8,13E-08	-	9,89E-08	-	3,70E-07	-
1/24	1,76E-08	2,2	2,16E-08	2,5	1,19E-07	1,6
1/48	1,24E-09	3,8	1,70E-09	3,7	1,37E-08	3,1
1/96	8,02E-11	4,0	1,10E-10	4,0	1,04E-09	3,7
1/192	4,92E-12	4,0	6,82E-12	4,0	7,02E-11	3,9
1/384	3,03E-13	4,0	4,24E-13	4,0	4,80E-12	3,9
Δx_{DG}	DG $\mathcal{P}^5 + \text{RK } 6$					
	L^1		L^2		L^∞	
1/12	1,73E-08	-	2,46E-08	-	2,18E-07	-
1/24	8,39E-10	4,4	1,16E-09	4,4	8,80E-09	4,6
1/48	1,53E-11	5,8	2,16E-11	5,7	2,42E-10	5,2
1/96	2,68E-13	5,8	3,69E-13	5,9	4,56E-12	5,7
1/192	7,60E-15	5,1	2,01E-14	4,2	4,00E-13	3,5

TABLE 2.6 – Solveur DG : erreurs et ordres de convergence associés pour un mode de cavité 2D

Δx_{DG}	DG $\mathcal{P}^2 + \text{RK } 4$					
	L^1		L^2		L^∞	
1/12	1,14E-08	-	2,69E-08	-	2,62E-07	-
1/24	1,58E-09	2,9	4,46E-09	2,6	3,19E-08	3,0
1/48	1,78E-10	3,2	5,52E-10	3,0	3,89E-09	3,0
Δx_{DG}	DG $\mathcal{P}^3 + \text{RK } 4$					
	L^1		L^2		L^∞	
1/6	1,44E-08	-	1,76E-08	-	1,24E-07	-
1/10	5,87E-09	1,8	2,48E-09	1,5	1,97E-08	0,9
1/20	4,13E-10	3,8	9,48E-10	3,1	5,04E-09	4,0
Δx_{DG}	DG $\mathcal{P}^5 + \text{RK } 6$					
	L^1		L^2		L^∞	
1/6	1,35E-08	-	3,62E-08	-	4,14E-07	-
1/10	1,25E-09	2,2	2,87E-09	2,5	3,12E-08	1,6
1/16	4,60E-11	3,8	2,10E-10	3,7	1,97E-09	3,1

TABLE 2.7 – Solveur DG : erreurs et ordres de convergence associés pour un mode de cavité 3D

questions théoriques difficiles à aborder. Ceci est dû (on y reviendra plus en détail par la suite) à l'absence de cadre théorique commun à l'étude de ces schémas. Une approche alternative et naturelle en vue d'atteindre le même objectif consisterait à formuler un couplage entre un solveur DG en maillage non structuré et un solveur DG en maillage explicitement cartésien (quadrangulaire ou hexahédral), a priori moins coûteux. Dans un tel cas, il serait possible de mettre en œuvre des outils d'analyse des schémas de type éléments finis en vue d'obtenir des résultats de consistance et de stabilité.

Ainsi, en tant que préliminaire à l'objet de ce travail de thèse, se pose la question des performances comparées des méthodes DF et DG, en maillages strictement cartésiens. Afin d'y répondre numériquement, deux solveurs DF et DG (muni de bases de Legendre) ad-hoc, structurellement analogues, ont été développés. Ils ont été mis en œuvre dans le cadre des équations d'Euler "complètes". Ce choix est motivé par le fait que si les couplages étudiés dans ce travail ont pour cadre les équations d'Euler linéarisées (pour des raisons de simplicité), ils ont pour vocation d'être appliqués, à terme, à des problèmes éventuellement non linéaires. Plus précisément, le cas-test retenu, présenté par Yee et al. dans [45], réside dans la simulation de l'advection passive d'un tourbillon dans un écoulement homogène. La figure 2.11 présente la comparaison du comportement de schémas DG décentré, \mathcal{P}^2

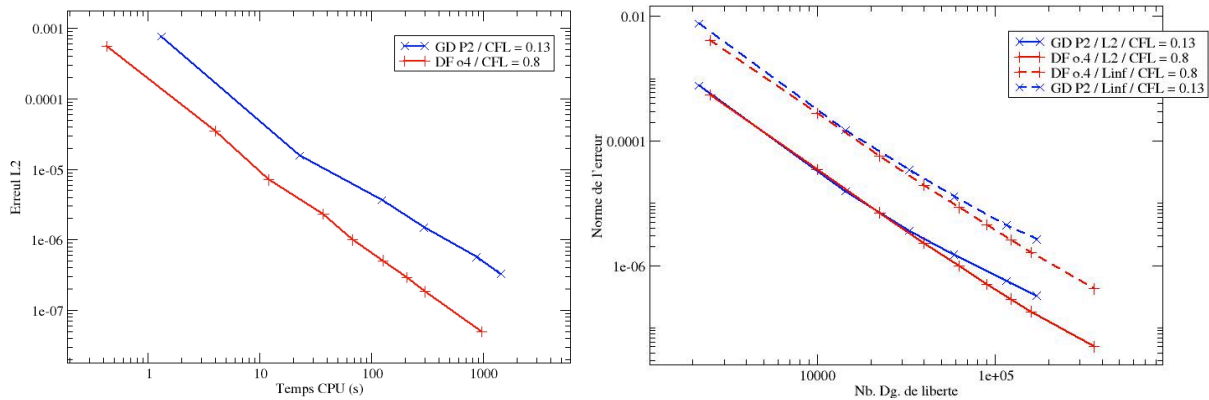


FIGURE 2.11 – Performances comparées : solveurs DG et DF cartésiens / Erreur L^2 vs. temps CPU (gauche) - Erreur L^2 vs. nb. degrés de liberté (droite)

(6 degrés de liberté par cellule) et DF centré d'ordre 4. Ces courbes montrent, d'une part, que ces méthodes génèrent une erreur L^2 quasi-identique à nombre de degrés de liberté équivalent. D'autre part, on observe un facteur compris entre 4 et 7 sur le temps CPU pour une valeur d'erreur L^2 fixée, à l'avantage du solveur DF. Il semble qu'une part significative de cet écart puisse être attribuée au coût important des méthodes de quadrature volumiques et de bord du solveur DG.

Bien entendu, ces résultats doivent être pris avec précaution : ils restent hautement dépendants de l'effort d'implémentation, de l'optimisation éventuelle des algorithmes, ainsi que de la compilation. Néanmoins, ils donnent une idée de l'avantage potentiel des méthodes DF face aux méthodes DG dans le cadre de couplages en maillages hybrides, notamment pour une qualité d'implémentation fixée.

2.6 Conclusion

Ce chapitre a, dans un premier temps, présenté le cadre physique de cette étude. On rappelle que l'on s'intéresse, dans ce travail, à des phénomènes linéaires de propagation d'ondes acoustiques exclusivement. Plus précisément, la modélisation associée à ces derniers est donnée par les équations d'Euler linéarisées (2.4). Elles portent sur la densité et les vitesses fluctuantes, en tenant compte d'un champ porteur qui constitue une donnée du problème.

Dans une seconde partie, on a décrit les schémas d'ordre élevé retenus en vue d'approcher les solutions de (2.4) ainsi que leurs propriétés dispersives. On rappelle qu'il s'agit, d'une part, de schémas de type différences finies centrés munis d'un filtre passe-bas, et, d'autre part, de méthodes de Galerkin discontinues munies d'un flux numérique décentré aux interfaces. L'avancée en temps est quant à elle réalisée grâce à des schémas de Runge-Kutta.

L'ordre de convergence en maillage de ces méthodes a été mesuré numériquement. Ces calculs ont montré que l'ordre théorique des méthodes DF était vérifié en pratique, d'une part, et que les schémas DG implémentés faisaient preuve d'un ordre de convergence égal à $k + 1$, pour une base de polynômes d'ordre k , dans les cas 2D et 3D. Notons que cette évaluation, tant des schémas que de leur implémentation, est nécessaire dans l'éventualité d'une étude numérique de l'ordre de convergence d'un schéma couplé.

Enfin, une brève étude des performances comparées des méthodes DG et DF en maillages cartésiens a montré la supériorité potentielle des méthodes DF en terme de temps CPU pour atteindre une erreur fixée, sous un effort d'implémentation fixé, dans ce cadre.

Dans le chapitre qui suit, on aborde les différentes approches de couplage en tant que telles. Il s'agira de rappeler les travaux existants dans la littérature de façon à motiver la stratégie retenue. De plus, on mettra en évidence les questions théoriques qui en découlent.

Chapitre 3

Différentes approches de couplage

On rappelle que l'idée du couplage qui fait l'objet de cette étude consiste à pouvoir résoudre les zones du domaine en présence de géométries complexes par une méthode DG non structurée d'une part, et le reste du domaine par une méthode DF en maillage cartésien d'autre part. Ceci implique de définir une décomposition de domaine en un certain sens, que l'on précise dans ce qui suit. Pour ce faire, on s'appuiera sur des travaux passés dans le domaine de la propagation d'ondes dans le domaine temporel, tant en électromagnétisme qu'en aéroacoustique. Notons que l'idée de tels couplages étant assez récente, elle n'apparaît que peu dans la littérature.

Ce chapitre mettra également en évidence les problèmes théoriques qui découlent de l'hybridation DF/DG. On verra en quoi ces derniers définissent notre stratégie de validation du schéma couplé.

Finalement, ce chapitre conclura sur l'approche retenue.

3.1 Approche

3.1.1 Exemples de solveurs hybrides dans la littérature

En électromagnétisme

Une contribution intéressante au développement et à l'étude de schémas couplés EF/DF et VF/DF en 2D réside dans les travaux d'Abenius, Andersson, Edelvik, Eriksson et Ledfelt, en 2000 [1]. Si les équations et les schémas mis en jeu dans cette étude diffèrent des nôtres, les motivations des auteurs sont similaires. Il s'agit, en effet, de pouvoir prendre en compte des géométries complexes grâce à une méthode VF ou EF en maillage non structurés, tout en propageant les ondes dans le reste du domaine par une méthode DF, quasi optimale en maillage cartésien.

Avant d'introduire leur technique de couplage, il convient de mettre en évidence les caractéristiques de leurs schémas. Tout d'abord, concernant le schéma DF, rappelons le système d'équations d'intérêt. Il s'agit de trouver, dans un domaine Ω borné, les composantes selon x et y de champ magnétique, H_x et H_y , ainsi que la composante selon z du

champ électrique E_z qui vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\sigma}{\epsilon} E_z, \end{array} \right.$$

où μ , ϵ et σ sont des constantes réelles fixées. Ce système décrit les phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu linéaire, isotrope, et non-dispersif. Comme souvent pour les méthodes dans le domaine temporel appliquées aux équations de Maxwell, les inconnues du problème discret DF sont localisées sur des grilles en quinconce (*staggered grids*). Plus précisément, H_x et H_y sont respectivement localisées au milieu des faces horizontales et verticales des quadrangles de la grille cartésienne. La grandeur E_z est quant-à-elle localisée aux nœuds du maillage. De la même manière, ces variables sont sujettes à une avancée en temps décalée. Cette approche de discrétisation est, par construction, bien adaptée à la formulation de schémas centrés en espace et en temps (saute mouton), dont on peut montrer qu'ils préservent l'énergie de la solution (en l'absence de terme source et de conditions aux limites absorbantes). Cette propriété fait classiquement partie du cahier des charges des méthodes numériques pour la propagation d'onde en électromagnétisme, du fait que maintes applications consistent à simuler le comportement de cavités fermées.

Le schéma EF ici sujet au couplage est appliqué à l'équation des ondes portant sur le vecteur $\mathbf{H} = {}^t(H_x, H_y)$. Cette dernière est obtenue en dérivant les équations du système précédent par rapport à l'espace ou au temps et en les recombinaut. Il s'agit d'un schéma muni d'une base \mathcal{P}^1 . Ainsi, \mathbf{H} est-il connu aux nœuds du maillage. L'avancée en temps est réalisée soit par un θ -schéma, soit par une méthode de type *backward difference* à deux sous-étapes.

Le schéma VF est quant-à lui fondé sur les lois de conservation d'Ampère et de Faraday. Ces dernières expriment la variation en temps de l'intégrale de \mathbf{H} dans un volume de contrôle fermé V en fonction de l'intégrale E_z sur ∂V et vice versa. Dans le cadre de la discrétisation en espace, ces volumes de contrôle s'identifient à un maillage triangulaire primal, dont les nœuds portent les valeurs de \mathbf{H} , et à un maillage dual quelconque, dont les nœuds relient les barycentres du maillage triangulaire. Ces nœuds portent les valeurs de E_z . L'avancée en temps est réalisée par un schéma d'Adams-Bashforth décalé, d'ordre 3.

Notons que ces trois formulations sont des expressions différentes d'une même modélisation physique.

L'idée du couplage entre ces méthodes est représentée dans la figure 3.1. Si on ne détaille pas ici les algorithmes d'hybridation, on note cependant qu'ils sont fondés sur un partage de degrés de libertés (et de leur localisation) entre les solveurs, à la frontière entre les sous-domaines. Cela revient à imposer une contrainte assez forte sur la configuration géométrique relative des cellules structurées et non structurées ; seules les configurations de maillage suggérées par 3.1 sont valides dans cette approche. Les auteurs ont montré, par

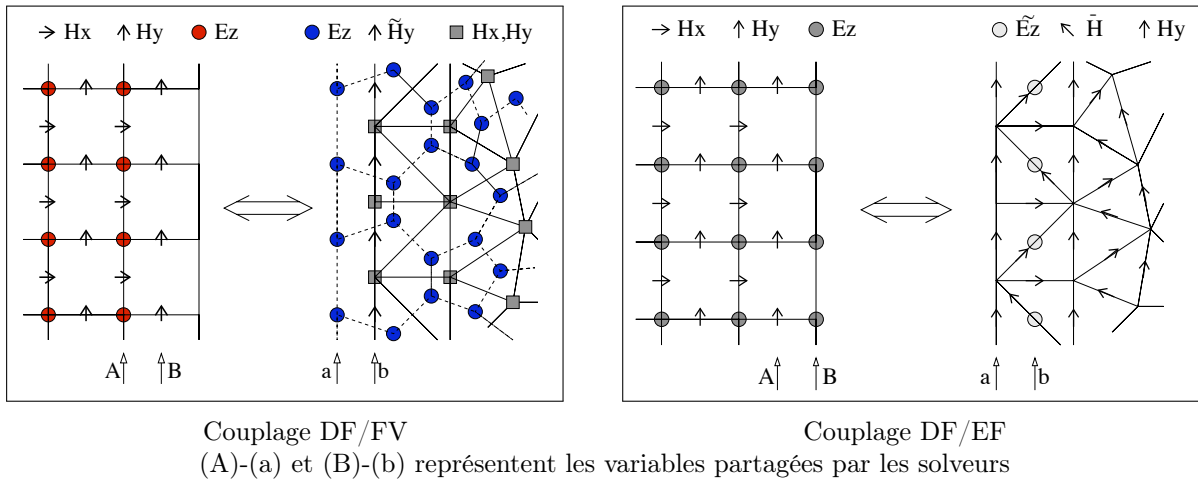


FIGURE 3.1 – Couplage de schémas 2D DF/FV et DF/EF - Abenius et al. [1]

l'expérience numérique, que ces schémas hybrides préservent l'ordre 2 de convergence en maillage. De plus, le couplage DF/VF montre de meilleures propriétés de stabilité que DF/EF, malgré la nécessité de définir un critère CFL plus exigeant.

En 1999, Remaki [36] a élaboré un schéma hybride entre le schéma aux différences finies de Yee [46], en grilles décalées, et un schéma de type volumes finis pour lequel les champs sont constants par cellules. Dans ce travail, l'avancée en temps est réalisée par un schéma centré. Cette technique est, là encore, fondée sur un partage des degrés de liberté

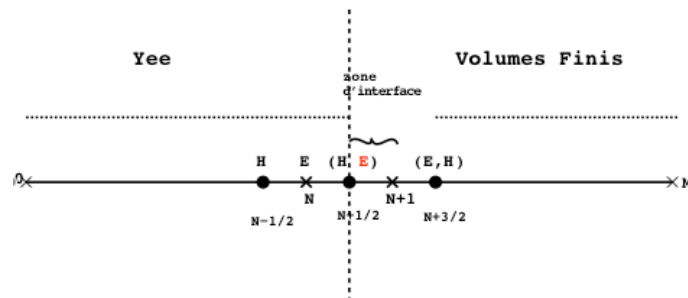


FIGURE 3.2 – Couplage de schémas 1D DF/FV - Remaki [36]

dans une zone de raccord donnée. Cette dernière est représentée sur la figure 3.2. Compte tenu de l'agencement de la zone de couplage, la dernière valeur DF du champ E (au nœud $N + 1$) est reconstruite grâce à une moyenne des valeurs de ce dernier aux centres des mailles VF voisines ($N + 1/2$, $N + 3/2$). Dans cette communication, l'auteur formule une démonstration théorique du caractère stable et non-diffusif de ce schéma hybride.

Plus récemment, Lalléchère et al. [26] ont proposé et mis en application une technique d'hybridation similaire, en 3D. Cette dernière a pour but de coupler le schéma DF de Yee (centré en espace et en temps, sur des grilles décalées) [46] à un schéma VF similaire au précédent. L'avancée en temps est réalisée grâce à des schéma saute-mouton (DF) et Lax-Wendroff (FV). La figure 3.3 représente un raccord entre ces deux schémas, en précisant la localisation géométrique des différentes inconnues. Notons que cette stratégie implique

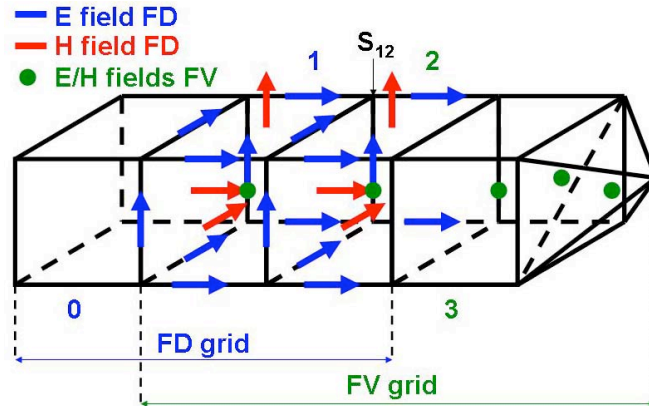


FIGURE 3.3 – Couplage de schémas 3D DF/FV - Lalléchère et al. [26]

un recouvrement de deux mailles hexahédrales ; ces dernières sont communes aux deux solveurs et sujettes à un traitement redondant DF - VF. Les auteurs ont montré par l'expérience, de manière qualitative, le bon comportement de cette hybridation en terme de conservativité et de précision.

En 2008, Garcia et al. [20] se sont intéressés à l'hybridation de schémas DG/DF 2D, en maillage hybride, munis d'un schéma saute-mouton en temps. Il s'agit d'un schéma DG \mathcal{P}^1 centré et, là encore, du schéma de Yee. Comme illustré dans la figure 3.4, cette approche est fondée sur des maillages conformes. De plus, l'idée est d'introduire une rangée de cellules DG \mathcal{P}^0 à l'interface entre les zones DG \mathcal{P}^1 et DF. Ceci semble bien adapté à la formulation d'un schéma hybride précis et stable. En effet, l'interfaçage entre deux domaines DG, \mathcal{P}^1 et \mathcal{P}^0 , mène à une discrétisation consistante du fait que l'adaptation locale de l'ordre mène à des schémas DG valides. De plus, le schéma DG \mathcal{P}^0 peut-il être interprété, au niveau discret, comme l'application d'un schéma DF modifié. Si les auteurs ne proposent pas de résultat théorique sur la consistance et la stabilité de cette stratégie, les résultats de calculs couplés montrent la supériorité du schéma hybride sur le schéma DF cartésien, en présence d'obstacles circulaires (cf. figure 3.4).

En aéroacoustique

Dans le domaine de l'aéroacoustique, une contribution majeure a été apportée par l'université de Stuttgart au travers des communications de Utzmann et al. ainsi que Birkfeld et al. [40, 41, 6]. Dans ces travaux, l'objectif du couplage de méthodes est double. Il s'agit tant :

- de pouvoir prendre en compte des géométries complexes (DG ou VF non structurés) tout en propageant les ondes acoustiques avec précision loin des obstacles (DF cartésiennes),
- que de pouvoir coupler des zones régies par des physiques différentes (CFD et génération d'ondes acoustiques par un écoulement turbulent - CAA et propagation uniquement dans les zones où l'écoulement n'est pas visqueux).

Ainsi, ces études invitent-elles à distinguer le couplage de méthodes dans le cas de la résolution d'équations différentielles (Navier-Stokes, Euler, Euler linéarisé) et dans le cas

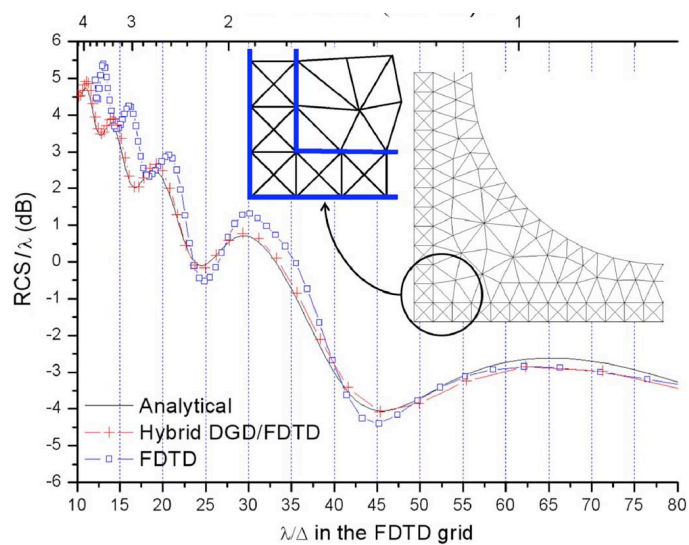
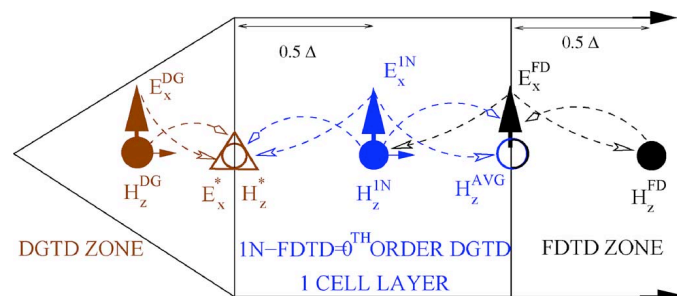
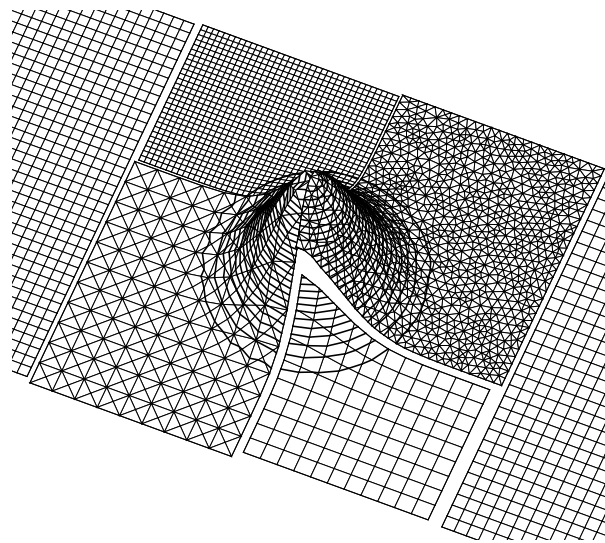
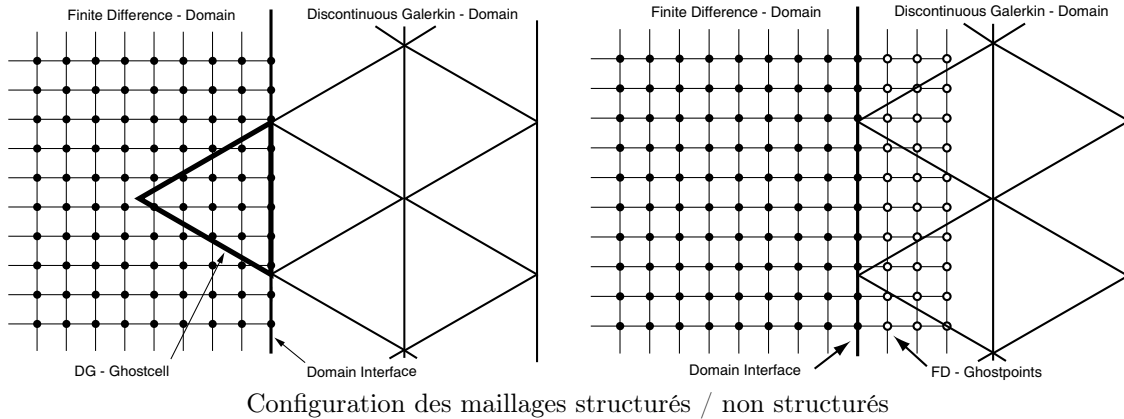


FIGURE 3.4 – Couplage de schémas 2D DG/DF - Garcia et al. [20]

d'équations identiques. Pour autant, la technique d'hybridation de schémas proposée par ces auteurs, dans une première approche, ne tient pas réellement compte de cette distinction. La figure 3.5 présente la configuration géométrique de la procédure 2D retenue, dans le cadre du couplage DG/DF. Tout d'abord, il convient de remarquer qu'à l'inverse



Advection d'un profil de densité Gaussien au travers de domaines 2D de caractéristiques hétérogènes

FIGURE 3.5 – Couplage de schémas 2D DG/DF - Utzmann et al. [40]

des travaux présentés plus haut, cette approche n'est pas fondée sur un partage des degrés de liberté entre les solveurs. De plus, ils ne sont fondés sur aucune hypothèse en termes de conformité des nœuds des maillages même si, dans l'illustration de la figure 3.5, les frontières des domaines DF et DG sont coïncidentes. Il s'agit de schémas DF *dispersion-relation preserving*, d'ordre élevé, introduits par Tam dans [38, 37] dont la méthode d'avancée en temps a été modifiée. Cette dernière est basée sur le procédé de Cauchy-Kovalevsky, présentée par ces mêmes auteurs dans [41]. L'idée consiste, dans le but de formuler un développement de Taylor de la solution au temps $t + \Delta t$, à calculer

frontalement les dérivées en temps successives du champ inconnu \mathbf{u} , grâce à la relation ¹ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}_x(\mathbf{u})}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_y(\mathbf{u})}{\partial y}.$$

La dérivée en temps de \mathbf{u} à l'ordre 1 est ainsi calculée, en appliquant les stencils DF d'ordre élevé aux grandeurs du membre de droite. Les dérivées d'ordre supérieur sont données, de la même manière, par la relation récursive :

$$\frac{\partial^{(k+1)} \mathbf{u}}{\partial t^{(k+1)}} = -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}_x \left(\frac{\partial^{(k)} \mathbf{u}}{\partial t^{(k)}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F}_y \left(\frac{\partial^{(k)} \mathbf{u}}{\partial t^{(k)}} \right),$$

obtenue en dérivant la relation précédente par rapport au temps, lorsque \mathbf{F}_x et \mathbf{F}_y sont linéaires. La méthode DG utilisée dans ce travail met en œuvre des bases de polynômes hiérarchiques, modales (contrairement au schéma DG présenté dans le chapitre précédent), d'ordre élevé, également munie du schéma d'avancée en temps décrite dans ce qui précède.

L'idée de ce couplage est d'affecter aux points fantômes de la grille DF des valeurs interpolées sur la base polynômiale locale de l'élément DG dans lesquels ils se trouvent. D'autre part, les auteurs définissent la contribution du domaine DF au domaine DG en tant qu'une condition aux limites imposée de manière *forte*. Pour ce faire, il s'agit de définir une rangée de mailles DG fantômes, sur la base desquelles il est nécessaire de projeter la solution DF. Comme le concept des méthodes DF est d'approcher de manière strictement ponctuelle les valeurs de la solution, la mise en œuvre de méthodes d'interpolation est indispensable en vue de répondre à la non-conformité des maillages et degrés de liberté.

Les auteurs ne proposent pas de preuve théorique de la viabilité d'une telle approche. En revanche, son application à des cas académiques a montré sa polyvalence dans le traitement de physiques différentes. De plus, les calculs couplés mènent à des résultats qualitativement valides. En particulier, il ne mettent pas en évidence la présence d'ondes parasites de grande amplitude qui proviendraient de la frontière de couplage. La figure 3.5 illustre ceci, en représentant un calcul de l'advection d'un profil Gaussien en 2D, au travers de domaines de caractéristiques hautement hétérogènes (schéma, maillage, équation).

Bilan

Ce qui précède a permis de mettre en évidence deux approches d'hybridation fondées sur des contraintes géométriques différentes : partage de degrés de liberté ou non-conformité des maillages. Nous reviendrons sur les causes et les implications de cette distinction dans la suite, dans le but de déterminer l'approche retenue dans le présent travail. Avant cela, il convient de mettre en évidence les caractéristiques communes des travaux et résultats passés.

Tout d'abord, nous n'avons pas trouvé, dans la littérature, de contribution théorique à l'étude de la convergence de tels schémas couplés. Pour autant, dans la plupart des cas, les auteurs ont montré, par l'expérience, la supériorité des méthodes de discrétisation hybrides sur les méthodes autonomes, en terme de rapport précision sur ressources machines. Si certains auteurs font référence à une détérioration du critère CFL (pour maintenir la

1. Qui constitue une réécriture formelle des équations d'Euler linéarisées sans terme source.

stabilité des couplages) et à la présence d'ondes parasites dans la zone de raccord, ces phénomènes (dont l'ampleur dépend intrinsèquement de la méthode de couplage choisie) restent encore assez mal connus.

3.1.2 Échange de données et stratégie de maillage

Stratégie de maillage

La connaissance de ces travaux met en évidence deux approches distinctes en terme de prise en compte réciproque de la contribution d'un sous-domaine à l'autre. La première d'entre elles est fondée sur l'utilisation de maillages non structurés / cartésiens conformes à la frontière de couplage. Le principal avantage de cette technique est qu'elle permet de s'affranchir de la mise en œuvre de techniques d'interpolation à la frontière. Cet avantage se manifeste non seulement par l'économie de calculs supplémentaires, mais également par la préservation, *a priori*, de bonnes propriétés de conservation. En effet, l'utilisation de schémas d'interpolations Lagrangiennes aux interfaces entre sous-domaines a tendance à générer des ondes parasites [14].

L'inconvénient majeur de cette stratégie est qu'elle constitue une contrainte forte sur la génération des maillages, tout particulièrement dans un contexte d'applications réalistes. De plus, elle est difficilement transposable au cadre des schémas DG et DF d'ordre élevé : les degrés de liberté DG ne sont alors plus restreints au nœuds du maillage (dans le cas Lagrangien), et les stencils DF explicites sont hautement non-compacts. L'utilisation de maillages non-structurés / cartésiens non-conformes dans la zone d'échange d'informations permet quant à elle de lever ces restrictions. Par ailleurs, ce cadre s'étend naturellement aux techniques dites *Chimères* [14, 3, 4], qui consistent à employer des maillages totalement recouvrants : on en mesurera l'utilité aux chapitres qui suivent. Bien entendu, cette flexibilité a pour prix la mise en œuvre de schémas d'interpolation en vue de reconstruire des valeurs en des points localisés de manière quelconque dans l'un ou l'autre des maillages, ce qui peut nuire à la conservativité de la frontière de couplage.

Échange de données en espace et en temps

Dans une première approche cependant, envisageons les contributions d'un sous-domaine à l'autre en terme de conditions aux bords. Les différences de formalisme dans la prise en compte de telles conditions entre les méthodes DG et DF impliquent de définir une procédure de couplage dissymétrique en un certain sens. En effet, il apparaît en premier lieu naturel de tenir compte de la contribution du sous-domaine DG au sous-domaine DF au travers de la notion de points fantômes (cf. section 2.3.4). Le fait que les méthodes DG soient fondées sur une formulation variationnelle offre deux possibilités quant à la prise en compte de la contribution du sous-domaine DF. La première consiste à imposer fortement les valeurs provenant du champ solution DF dans les cellules DG ayant au moins un bord à la frontière, comme proposé dans [40]. Ceci implique de projeter le champ DF interpolé sur la base polynômiale locale de chacune de ces cellules DG, via (2.51). On note qu'il s'agit donc, en vue d'approcher ces intégrales, d'affecter une valeur interpolée du champ DF à chaque point de Gauss du volume de la cellule. La seconde possibilité consiste à imposer faiblement la contribution du sous-domaine DF liée au couplage. Considérons

3.1 Approche

l'intégrale de bord d'un flux numérique donnée dans (2.26) pour une maille j , pour un bord $\bar{\Gamma}_j$ appartenant à la frontière discrétisée du domaine DG :

$$\int_{\bar{\Gamma}_j} \underbrace{\mathcal{H}(\mathbf{u}_j^+, \mathbf{u}_j^-, \mathbf{n})}_{\text{Flux numérique}} \varphi_j d\gamma.$$

Cette stratégie revient en un certain sens à attribuer des valeurs interpolées du champ solution DF aux points de Gauss du bord représentant la quantité \mathbf{u}_j^- (extérieure à j), en vue d'approcher cette intégrale par quadrature. Pour un maillage ainsi qu'un ordre de fonctions de bases fixés, cette stratégie est naturellement moins coûteuse que la précédente (il est moins coûteux de calculer des intégrales de bord que des intégrales de volume).

L'aspect temporel d'un tel couplage peut également être abordé de plusieurs manières. La première consiste à considérer que l'intégralité du domaine est résolu par un continuum de méthodes de discrétisation en espaces couplées, a priori muni d'une avancée en temps homogène (schéma et pas de temps), à l'image des références citées ci-dessus dans le domaine de l'électromagnétisme. Comme on souhaite, dans le cadre de ce travail, coupler des schémas DG et DF auxquels sont adjoints des méthodes RK d'ordre élevé identiques, il apparaît naturel de ce placer sous cette hypothèse. Notons que ceci mène, d'une part, à choisir le pas de temps global Δt_g a priori comme :

$$\Delta t_g = \min_{j \in [1 \dots \mathcal{N}]} \Delta t_j,$$

où j décrit les \mathcal{N} sous-domaines couplés et les Δt_j représentent les pas de temps qui leur sont liés de manière indépendante au couplage. On rappelle que ces derniers sont localement définis de façon à garantir la stabilité des schémas en fonction de c_0 , \mathbf{v}_0 et du maillage par une relation de type :

$$\Delta t_j = \alpha_j \frac{h_j^{\min}}{(c_0 + |\mathbf{v}_{0j}|_2^{\max})},$$

où α_j représente le critère CFL fixé, h_j^{\min} le plus petit des rayons des cercles inscrits aux cellules du maillage du sous-domaine j et $|\mathbf{v}_{0j}|_2^{\max}$ la plus grande des vitesses de l'écoulement porteur dans le sous-domaine j , prise en norme euclidienne. Ceci permet, d'autre part, d'envisager les échanges d'information entre les sous-domaines à chaque sous-itération de Runge-Kutta. La seconde manière d'aborder l'aspect temporel du couplage est de considérer que les schémas d'avancée en temps et pas de temps peuvent rester locaux après hybridation, comme dans [40]. Cette approche peut s'avérer utile dans les cas où il existe de très grandes différences de pas de temps a priori entre les sous-domaines. Ces situations peuvent se produire, soit à cause d'une grande variabilité de $|\mathbf{v}_{0j}|_2^{\max}$ d'un sous-domaine à l'autre, soit à cause de détails géométriques hautement complexes à mailler. Ces derniers entraînent la présence de très petites cellules DG, dont la taille contrôle directement le pas de temps dans l'intégralité du domaine (si toutefois aucune stratégie de pas de temps local DG n'est mise en œuvre). L'introduction de grilles d'avancée en temps non-conformes a pour avantage naturel, dans de telles situations, un gain immédiat en temps CPU pour un nombre de degrés de liberté en espace ainsi qu'un temps final fixés.

Bien entendu, la difficulté réside dans la mise en œuvre de stratégies suffisamment précises et peu coûteuses en vue de répondre aux non-conformités en temps. En particulier, on verra ultérieurement en quoi les schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé utilisés ici se révèlent intrinsèquement peu adaptés à la mise au point d'une méthode d'avancée en temps locale par sous-domaine préservant l'ordre de convergence en Δt .

3.2 Problèmes théoriques

3.2.1 Cadre d'étude théorique de la consistance et de la stabilité

La principale difficulté liée au couplage de schémas DGTD/FDTD tel qu'envisagé jusqu'à présent réside dans l'absence de résultat théorique sur ses propriétés numériques dans la littérature. Ce manque de connaissance est lié à la constatation simple qu'il n'existe, a priori, pas de cadre théorique commun à l'étude de ces deux types de méthodes. En effet, les méthodes DF ne sont pas basées sur une formulation variationnelle qui permettrait :

- d'une part, d'entreprendre une analyse de type "éléments finis" en vue d'étudier l'ordre de convergence du schéma couplé en fonction de l'ordre des fonctions de base utilisées, des propriétés de régularité de la solution, etc...
- d'autre part, d'étudier la stabilité du couplage en estimant des transferts d'énergie à travers la frontière des sous-domaines.

Ces deux points (conservation de l'ordre de convergence en Δx ainsi que Δt /stabilité) constituent légitimement les préoccupations majeures générées par l'idée d'une hybridation de méthodes.

Malgré l'absence de cadre théorique commun, les propriétés de stabilité du schéma hybride DGTD / FDTD en terme de comportement énergétique peuvent être appréhendées de manière intuitive comme suit. Si l'on considère, dans un premier temps, que les schémas vus de manière autonomes sont stables dans un domaine fixé et sous un critère CFL, on peut formuler l'existence d'une énergie ε dont la variation pour un pas de temps est négative ou nulle. Dans les cas de la résolution de systèmes linéaires, cette dernière prend la forme d'une forme quadratique définie positive des inconnues que l'on peut écrire, pour chaque schéma :

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{DF} &= -{}^t\mathbf{u}_{DF}N_{DF}\mathbf{u}_{DF}, \\ \Delta\varepsilon_{DG} &= -{}^t\mathbf{u}_{DG}N_{DG}\mathbf{u}_{DG}.\end{aligned}$$

On note que dans le cadre de cette étude, on utilise des schémas DG et DF diffusifs. Aussi, la diffusion numérique est-elle contrôlée par le décentrement du schéma DG, par le filtre appliqué à la solution DF, ainsi que l'action du schéma RK (sur certaines plages de fréquences). Cette observation permet de supposer, dans un souci de simplification, que

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{DF} &= -\delta \|\mathbf{u}_{DF}\|^2, \\ \Delta\varepsilon_{DG} &= -\gamma(\alpha) \|\mathbf{u}_{DG}\|^2,\end{aligned}$$

où $\delta > 0$ représente l'amortissement dû au filtre DF et $\gamma(\alpha) > 0$ la diffusion numérique introduite par le décentrement DG, piloté par le paramètre $0 < \alpha \leq 1$ défini dans (2.29). Considérant que le couplage génère une quantité d'énergie *a priori* inconnue, non nulle

3.2 Problèmes théoriques

et bilinéaire dans le domaine de calcul (sous la forme d'ondes parasites, par exemple), la variation d'énergie globale au travers un pas de temps peut s'écrire :

$$\Delta\varepsilon = - \underbrace{\delta \|\mathbf{u}_{DF}\|^2}_{\text{Contribution DF}} + \underbrace{C \|\mathbf{u}_{DF}\| \|\mathbf{u}_{DG}\|}_{\text{Couplage}} - \underbrace{\gamma(\alpha) \|\mathbf{u}_{DG}\|^2}_{\text{Contribution DG}},$$

où $C \geq 0$ doit dépendre de la technique de couplage retenue. Cette variation d'énergie globale ne peut être négative ou nulle que si :

$$C^2 - 4\delta\gamma(\alpha) \leq 0. \quad (3.1)$$

L'absence de cadre théorique commun pour l'étude des schémas DG et DF utilisés dans cette étude implique, entre autres, qu'il est impossible de statuer, de manière analytique, sur la vérification (ou non) d'une telle relation dans le cas général. Cette dernière, cependant, semble indiquer que la stabilité du couplage s'appuie nécessairement sur la quantité de diffusion numérique intrinsèque aux schémas (sauf si $C = 0$, c.-à-d. que le couplage conserve l'énergie). Cette condition ne peut pas être considérée comme suffisante a priori et devra être analysée, au moins numériquement.

Une manière de se ramener à un cadre d'étude théorique viable consiste à identifier, au niveau discret, les schémas DF à des schémas possédant une formulation variationnelle. Par exemple, on note que le schéma de Yee [46], d'ordre 2, couramment employé électromagnétisme, peut être identifié à un schéma de type volume finis [36]. Dans notre contexte, défini par l'utilisation de schémas d'ordre plus élevé, une telle identification semble difficilement accessible dans le cas général. En effet, considérons un schéma aux différences finies explicites d'ordre quelconque donné en un point i du maillage par (2.11) :

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{1}{h} \sum_{j=-m}^m \alpha_j u_h(x_i + jh)$$

où h est le pas d'espace, que l'on applique à l'équation advection linéaire 1D :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

On note U le vecteur (infini) des inconnues portées par le maillage. Si l'on n'applique pas de discrétisation en temps, une écriture matricielle de ce schéma est donnée par :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{c_0}{h} \mathbf{K}U = \mathbf{0},$$

avec

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \dots & \alpha_{-3} & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Ce schéma peut être vu comme l'écriture matricielle d'un schéma de type éléments finis, dans lequel la matrice de masse serait la matrice identité, et la matrice de rigidité serait donnée par \mathbf{K} . L'identification du schéma aux différences finies initial à un schéma de type éléments finis revient à trouver l'unique jeu de fonctions de bases et répartition de degrés de liberté (support des fonctions de base) tel que :

- la matrice de masse liée à ces derniers puisse être condensée tout en préservant des propriétés numériques acceptables
- les intégrales des fonctions de base de type

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \varphi_l$$

sont égales aux $\pm\alpha_j$,

ce qui relève d'une certaine difficulté, dans le cas général. En revanche, il est possible de montrer l'équivalence entre le schéma aux différences finies centré, explicite, d'ordre 2, et le schéma de type éléments finis continus standards muni d'une base lagrangienne \mathcal{P}^1 avec condensation de masse. Nous y revenons plus en détail dans le chapitre qui suit.

3.2.2 Régularité, contenu spectral des solutions, et stratégie de maillage

Dans un premier temps, rappelons que les solutions issues des schémas DG et DF sont obtenues en formulant des hypothèses de régularité très différentes. En effet, les solutions DF sont issues d'une formulation fondée sur des développements de Taylor : elles sont donc a priori supposées de classe \mathcal{C}^n pour un schéma d'ordre n . A l'inverse, les solutions DG appartiennent à un espace de fonctions polynômiales par morceaux. Elles présentent, de fait, des discontinuités de manière explicite. A la lumière de cette constatation, le couplage de ces deux méthodes semble assez peu naturel. En effet, la mise en œuvre de cette hybridation revient, d'une certaine manière, à effectuer dans le voisinage de la frontière de couplage des projections entre deux espaces fonctionnels a priori incompatibles. Par ailleurs, l'étude théorique au niveau continu d'une telle procédure relève d'une certaine difficulté. Ces observations nous mènent, dans la suite, à préciser notre approche en terme de stratégie de maillage à l'interface. Au préalable, il convient de mettre en évidence les implications du caractère dissymétrique du couplage tel que présenté plus haut. On note, d'une part, que la prise en compte de la contribution du sous-domaine DF au sous-domaine DG en tant que condition au bord, imposée faiblement ou fortement, implique de projeter la solution DF sur les bases polynômiales locales des cellules DG concernées. D'une certaine manière, ceci 'force' la compatibilité de la contribution DF au schéma DG. D'autre part, la contribution réciproque implique d'attribuer des valeurs ponctuelles de la solution DG, explicitement discontinue, aux points fantômes DF, ce qui viole automatiquement la régularité supposée de la solution. On remarquera cependant que ceci peut ne pas être automatiquement réhibitoire pour autant. En effet, les sauts DG (discontinuités) sont d'autant plus petits que l'ordre des polynômes est élevé d'une part, et que la solution est régulière d'autre part.

On peut, de plus, compléter ces observations en établissant une distinction entre deux possibles cas physiques à traiter. Le premier consiste à chercher à résoudre une physique caractérisée par des temps et des longueurs caractéristiques homogènes dans l'intégralité du domaine. Ceci revient à mettre en œuvre des schémas de précision équivalente, menant à une résolution spectrale équivalente de part et d'autre de la frontière de couplage. Le second consiste à vouloir tenir compte de hautes fréquences spatiales dans une partie du domaine (typiquement : sources réalistes autour de géométries fines dans les domaines

DG), tout en ne propageant avec une précision fixée que des fréquences plus grandes qu'un certain seuil dans les autres parties (typiquement dans les domaines DF). Ce cas peut s'avérer plus difficile à traiter si l'on considère la possibilité de résolutions spectrales très différentes dans le voisinage de la frontière de couplage. En effet, ceci peut mener à fournir aux sous-domaines DF des champs-solutions fortement composés de hautes fréquences spatiales (c.-à-d. d'ondes de type "+1, -1" sur la grille DF). Ces derniers violent également la continuité supposée en tout point des solutions DF, ce qui peut résulter en la génération d'ondes parasites. Une manière de prévenir de telles situations est de jouer sur un déraffinement progressif des maillages et/ou de l'ordre local DG, de façon à obtenir une résolution spectrale homogène dans le voisinage de la zone d'échange de conditions au bord. Cette contrainte peut se traduire, en d'autres termes, par l'utilisation d'une discrétisation en espace caractérisée par une densité de degrés de liberté équivalente de part et d'autre de la frontière de couplage.

En résumé, les propriétés de régularité des solutions DG et DF ainsi que le couplage envisagé suggèrent de mettre en œuvre à l'interface des schémas et maillages 'compatibles' en un certain sens, c'est-à-dire :

- qui ne permettent pas au schéma DF de se voir attribué, au bord, un solution spectralement trop fine,
- et, pour autant, qui ne permettent pas aux stencils DF de s'appliquer à un champ contenant des sauts entre cellules DG.

Ces précautions ont pour but de préserver les très fortes propriétés de régularité des solutions DF. Bien entendu, elles ne dispensent pas d'études a posteriori du comportement numérique des solutions.

3.3 Conclusion

Ce chapitre a, d'une part, permis d'introduire la notion de couplage explicite entre méthodes DGTD et FDTD en maillage hybride, en s'appuyant sur les travaux passés présents dans la littérature. D'autre part, il a présenté tant les différentes approches envisageables que les problèmes théoriques qu'elles génèrent de manière naturelle. Ceci permet, à ce stade, de préciser à la fois la stratégie retenue en vue de mettre au point un algorithme de couplage à proprement parler, ainsi que sa méthode de validation.

A ce propos, et tout d'abord, compte tenu de l'absence de cadre théorique permettant de conclure sur la consistance et la stabilité d'un tel couplage dans le cas général, il est clair qu'il ne s'agit pas ici de mettre en œuvre un schéma qui, par construction, garantirait certaines propriétés a priori. Il s'agit davantage de proposer une manière de procéder, définie à la lumière des observations énoncées plus haut, puis d'en évaluer son comportement a posteriori.

En résumé, nous rappelons que l'approche retenue est fondée sur :

- l'utilisation de maillages non-structurés / cartésiens non conformes, partiellement, voire totalement recouvrants, dans le but de minimiser les contraintes sur la génération des maillages ;
- la prise en compte réciproque des contributions d'un sous-domaine à l'autre en tant que conditions aux limites : utilisation de points fantômes DF d'une part, et de flux

- à la frontière DG d'autre part ;
- la mise en œuvre d'interpolations en espace en vue de répondre à l'introduction de la non-conformité des maillages ;
- dans un premier temps, une avancée en temps explicite, identique et synchrone de tous les sous-domaines.

En outre, il apparaît crucial de s'atteler à vérifier numériquement l'ordre de convergence en maillage et en pas de temps du schéma couplé. En effet, on rappelle que le but reste de pouvoir utiliser des schémas d'ordre élevé dans l'intégralité du domaine. De plus, il semble indispensable de qualifier et de quantifier, là encore de manière numérique, les propriétés conservatives de la frontière de couplage. Il s'agira de statuer sur la présence éventuelle d'ondes parasites générées par l'hybridation ainsi que d'en évaluer l'amplitude.

Avant de mettre en œuvre cette démarche dans le cas 2D, on se propose, dans le chapitre qui suit, d'étudier un schéma couplé monodimensionnel dans un cas particulier permettant de conclure, de manière théorique, sur ses propriétés.

Chapitre 4

Étude d'un schéma hybride 1D

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier de manière théorique un schéma hybride DG/DF, en maillage régulier, dans le cadre de l'approximation des solutions de l'équation d'advection scalaire 1D.

4.1 Position du problème

On se place dans le cas de l'approximation des solutions de l'équation d'advection linéaire 1D :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

dans un domaine d'extension infinie, de façon à s'affranchir des questions qui pourraient être soulevées par la prise en compte de conditions aux limites. L'idée de cette étude est d'apporter une contribution théorique à la connaissance du comportement numérique de solutions issues d'une hybridation DG/DF. Comme on l'a évoqué dans le chapitre qui précède, ceci soulève des difficultés majeures. En particulier, le fait que la formulation des méthodes DF ne soit pas basée sur une formulation variationnelle ne permet pas d'appliquer les outils d'analyse classiques des méthodes de types éléments finis. Il est de plus très difficile, dans le cas général, d'identifier un schéma DF donné à l'expression discrète d'un schéma à formulation variationnelle, de manière à se ramener à tel cadre d'étude.

Ainsi, en lieu et place d'une analyse conventionnelle de type "éléments finis" du schéma hybride DG/DF (qui paraît hors de portée à l'heure actuelle), on se propose de mettre en œuvre une approche alternative fondée sur l'étude de la tendance d'un schéma couplé semi-discrétisé à produire des réflexions parasites à l'interface. Plus précisément, il s'agira de caractériser les coefficients de réflexion et de transmission intrinsèques à la zone de raccord (que l'on définit précisément dans ce qui suit).

4.2 Formulation d'un schéma hybride DG/DF préservant l'énergie

4.2.1 Formulation du schéma

Nous considérons donc l'équation (4.1) dans un domaine d'extension infinie. On suppose que le maillage est régulier, de pas constant noté h . Avant d'aller plus loin, il convient de s'atteler à construire le schéma hybride DG/DF discret amené à faire l'objet de cette étude. Pour fixer les idées, considérons que la gauche du domaine est discrétisée par un schéma DG \mathcal{P}^1 centré (tel que défini dans la section 2.4.3), et que la droite du domaine est discrétisée par un schéma DF standard, centré à 3 points. Cela implique la présence d'une zone de raccord dont on précise le sens dans ce qui suit. Formellement, ceci mène au schéma discret que l'on peut écrire :

$$\mathbf{M}_h (\partial_t \mathbf{U}_h) + \frac{c_0}{h} \mathbf{K}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{0}. \quad (4.2)$$

Le vecteur \mathbf{U}_h , représentant le vecteur de taille infinie des inconnues hybrides (DG/DF), ainsi que les matrices de ce schéma sont données de manière formelle par :

$$\mathbf{U}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\text{DG}} \\ \mathbf{U}_{\text{DF}} \end{pmatrix}, \mathbf{M}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{DG}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\text{C}} \\ & & \text{Id} \end{pmatrix}, \mathbf{K}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\text{DG}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{C}} \\ & & \mathbf{K}_{\text{DF}} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Les \mathbf{M}_{DG} et \mathbf{K}_{DG} représentent l'assemblage (de taille infinie) des matrices de masse et de rigidité du schéma DG (respectivement) sur la partie gauche du domaine. Le bloc de taille infinie \mathbf{K}_{DF} représente quant à lui l'application du stencil DF aux degrés de liberté qui correspondent. Les blocs \mathbf{M}_{C} et \mathbf{K}_{C} , indéterminés pour le moment, représentent le couplage à proprement parler entre degrés de liberté DG et DF, localisé dans la zone de raccord.

À ce stade, il est important de remarquer que la définition d'un couplage, au travers d'un choix des coefficients des sous-matrices \mathbf{M}_{C} et \mathbf{K}_{C} , n'est pas unique ni triviale *a priori*. La validité d'un tel choix est caractérisée par les propriétés de stabilité et de convergence en maillage du schéma (4.2) qui en découlent. Ainsi, on fait le choix de mettre en œuvre une démarche consistant, en priorité, à définir un schéma de la forme (4.2) préservant l'énergie de la solution discrète.

La stratégie consiste, dans un premier temps, à remarquer que le schéma DF explicite centré à 3 points est strictement équivalent à l'écriture discrète d'un schéma de type éléments finis continus \mathcal{P}^1 sujet à une condensation de la matrice de masse. Aussi, on se propose de s'appuyer sur cette analogie, dans le but de formuler un couple \mathbf{M}_{C} et \mathbf{K}_{C} que l'on peut espérer "valide". En réalité, il est important de noter que ceci résulte plus d'un démarche intuitive que d'un raisonnement démontré ; nous estimons en effet que l'on peut s'attendre¹ à ce qu'un schéma couplé DG \mathcal{P}^1 / EF \mathcal{P}^1 soit stable et d'ordre 2 pour le problème (4.1).

On se propose donc, dans le but de formuler complètement le schéma (4.3), de partir d'un schéma hybride DG/EF. La figure 4.1 représente le choix des fonctions de bases \mathcal{P}^1

1. On aura l'occasion d'infirmer ou de confirmer cette intuition dans la suite.

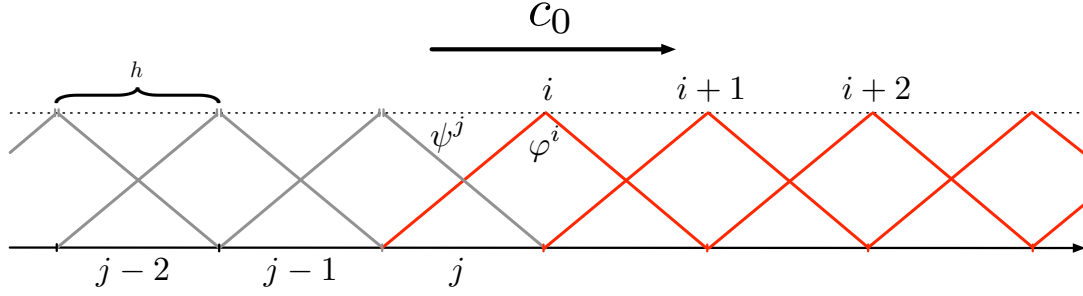


FIGURE 4.1 – Fonctions de base du schéma hybride DG (en gris, gauche) / éléments finis continus (rouge, droite), pour la résolution de (4.1)

liées aux degrés de liberté de ces schémas dans la zone de couplage. On peut adapter l'écriture de (4.2) à ce problème ; cela donne :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{DG}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\text{C}} \\ & & \mathbf{M}_{\text{EF}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\text{DG}} \\ \mathbf{U}_{\text{EF}} \end{pmatrix} + \frac{c_0}{h} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\text{DG}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{C}} \\ & & \mathbf{K}_{\text{EF}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\text{DG}} \\ \mathbf{U}_{\text{EF}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Il convient d'expliciter les différents blocs de ces matrices. On rappelle que les matrices de masse et de rigidité du schéma DG \mathcal{P}^1 centré sont données par les assemblages des matrices locales à la maille j :

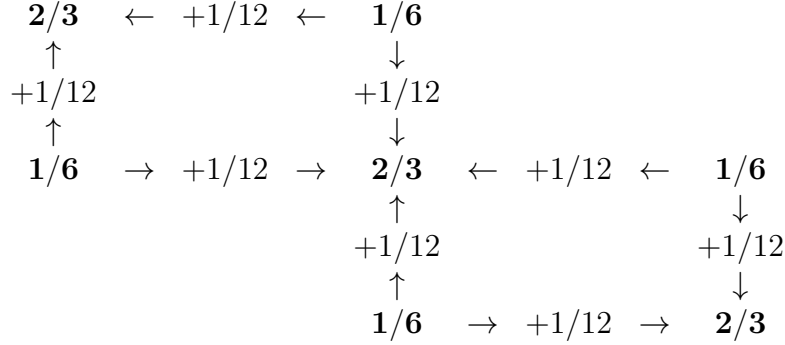
$$\mathbf{M}_{\text{DG}}^j = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\text{DG}}^j = \begin{bmatrix} \ddots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ainsi, \mathbf{M}_{DG} est-elle diagonale par blocs 2×2 , et \mathbf{K}_{DG} est tridiagonale. Par ailleurs, les matrices du schéma EF \mathcal{P}^1 sont données, tous calculs des intégrales des fonctions de base faits, par l'assemblage des matrices locales au nœud i :

$$\mathbf{M}_{\text{EF}}^i = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\text{EF}}^i = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

qui sont toutes deux tridiagonales. On remarquera que les matrices de rigidité \mathbf{K}_{DG}^j et \mathbf{K}_{EF}^j sont formellement identiques. Les matrices définies ci dessus ne s'appliquent pas *a priori* dans la zone de couplage entre degrés de liberté DG et DF. Il s'agit, de fait, de construire \mathbf{M}_{C} ; ses coefficients sont donnés par :

$$\mathbf{M}_{\text{C}} = \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} \psi^j \psi^j & \int_{\mathbb{R}} \psi^j \varphi^i & \int_{\mathbb{R}} \psi^j \varphi^{i+1} \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi^i \psi & \int_{\mathbb{R}} \varphi^i \varphi^i & \int_{\mathbb{R}} \varphi^i \varphi^{i+1} \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi^{i+1} \psi & \int_{\mathbb{R}} \varphi^{i+1} \varphi^i & \int_{\mathbb{R}} \varphi^{i+1} \varphi^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$


 FIGURE 4.2 – Proposition de *mass lumping* pour \mathbf{M}_{EF}

non diagonaux comme suggéré sur la figure 4.2. En arrêtant cette procédure au degré de liberté EF correspondant au nœud i , on obtient :

$$\mathbf{M}_{\text{C}}^l = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de couplage, partiellement condensée. Ainsi, nous considérons le schéma hybride DG/DF donné par :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{DG}} & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{M}_{\text{C}}^l & \\ \mathbf{0} & & \mathbb{I}d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\text{DG}} \\ \\ \mathbf{U}_{\text{DF}} \end{pmatrix} + \frac{c_0}{h} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \mathbf{0} \\ & -1/2 & 0 & 1/2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\text{DG}} \\ \\ \mathbf{U}_{\text{DF}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

4.2.2 Conservation de l'énergie

Une première étape dans l'évaluation de ce schéma hybride consiste à statuer sur ses propriétés énergétiques. Cette démarche est facilitée par la construction même des matrices \mathbf{M}_h et \mathbf{K}_h . En effet, appelons ϵ_h l'énergie discrète définie par :

$$\epsilon_h = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{U}_h \mathbf{M}_h \mathbf{U}_h.$$

Il s'agit d'une forme quadratique (des inconnues), définie positive. En effet, la matrice de masse \mathbf{M}_h , par construction, est symétrique et définie positive : elle résulte d'un assemblage de matrices symétriques définies positives³. Afin de caractériser *a priori* (nous restons dans le cas semi discret) la contribution de la discrétisation spatiale sur l'évolution de cette énergie dans le temps, nous évaluons $\partial_t \epsilon_h$. Ceci donne :

$$\partial_t \epsilon_h = \frac{1}{2} ({}^t \partial_t \mathbf{U}_h \mathbf{M}_h \mathbf{U}_h + {}^t \mathbf{U}_h \mathbf{M}_h \partial_t \mathbf{U}_h).$$

3. Le spectre de la matrice de masse locale DG est donné par $\{1/3, 1/6\}$ et le spectre de \mathbf{M}_{C}^l est donné par $\{1, (7 \pm \sqrt{13})/12\}$.

Comme \mathbf{M}_h est symétrique, on a :

$$\partial_t \epsilon_h = {}^t \mathbf{U}_h \mathbf{M}_h \partial_t \mathbf{U}_h = - {}^t \mathbf{U}_h \mathbf{K}_h \mathbf{U}_h.$$

La matrice \mathbf{K}_h étant antisymétrique, on obtient :

$$\partial_t \epsilon_h = 0.$$

Cette énergie est donc conservée tant par le schéma (4.8) que (4.4), dans le cas semi-discrétisé. Ainsi, l'introduction d'un schéma de type saute-mouton (centré) en temps conservera naturellement une énergie discrète. Cela implique sa stabilité en norme L^2 , sous un critère de type CFL. Ce dernier réside, plus précisément, en une condition pour que l'énergie discrète conservée reste effectivement une forme quadratique définie positive des inconnues.

4.3 Consistance du couplage

Afin d'étudier la consistance du couplage, on se propose de se focaliser sur la quantification de l'amplitude d'éventuelles ondes parasites générées par l'interface entre les domaines DG et DF. Avant de préciser cette démarche, il est nécessaire de mettre en évidence les solutions propres des schémas vus de manière autonome. C'est ce qu'on se propose de faire dans ce qui suit.

4.3.1 Propriétés dispersives des schémas autonomes

Schéma de type éléments finis continus \mathcal{P}^1

Le schéma EF semi discrétisé donne, au degré de liberté m , tous calculs d'intégrales des fonctions de base faits :

$$\frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} (u^{m-1} + 4u^m + u^{m+1}) + \frac{c_0}{2h} (u^{m+1} - u^{m-1}) = 0.$$

En y introduisant u sous la forme d'une onde plane : $u^m = e^{i(mkh - \omega t)}$, on trouve la relation de dispersion :

$$-i\tilde{k}_0 \left(\frac{\cos(\tilde{k}) + 2}{3} \right) + i \sin(\tilde{k}) = 0.$$

Dans cette relation (comme dans la suite du chapitre), $\tilde{k} = kh$ est le nombre d'onde numérique adimensionné et $\tilde{k}_0 = h\omega/c_0$ le nombre d'onde physique adimensionné. Sous forme exponentielle, la relation suivante donne :

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\tilde{k}_0 \right) e^{-i\tilde{k}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\tilde{k}_0 \right) e^{i\tilde{k}} - \frac{2i\tilde{k}_0}{3} = 0.$$

La relation qui précède revient à un polynôme du second degré en $X_{EF} = e^{i\tilde{k}}$. Ce dernier admet deux racines, qui sont données par :

$$X_{EF}^\varphi = \frac{-2\tilde{k}_0 + i\sqrt{9 - 3\tilde{k}_0^2}}{3i + \tilde{k}_0} \quad \text{et} \quad X_{EF}^p = \frac{-2\tilde{k}_0 - i\sqrt{9 - 3\tilde{k}_0^2}}{3i + \tilde{k}_0}.$$

Schéma aux différences finies à 3 points (éléments finis *lumpés*)

Le schéma DF centré à trois points est quant à lui donné, au point m , par :

$$\frac{\partial}{\partial t} (u^m) + \frac{c_0}{2h} (u^{m+1} - u^{m-1}) = 0.$$

De la même manière que précédemment, en y introduisant u sous la forme d'une onde plane, il vient la relation de dispersion :

$$e^{i\tilde{k}} - 2i\tilde{k}_0 - e^{-i\tilde{k}} = 0.$$

Cette dernière admet deux solutions propres de la forme $X_{DF} = e^{i\tilde{k}}$, données par

$$X_{DF}^\varphi = i\tilde{k}_0 + \sqrt{1 - \tilde{k}_0^2} \text{ et } X_{DF}^p = i\tilde{k}_0 - \sqrt{1 - \tilde{k}_0^2}.$$

Propriétés dispersives du schéma DG \mathcal{P}^1 muni de flux centrés

La section 2.4.3 présente les propriétés dispersives du schéma DG \mathcal{P}^1 centré. On rappelle que sa relation de dispersion (2.49) est donnée par :

$$e^{i\tilde{k}}(3 - \tilde{k}_0) + e^{-i\tilde{k}}(3 + \tilde{k}_0) = 6 - \tilde{k}_0^2,$$

elle admet, de plus, deux racines :

$$X_\varphi = \frac{\tilde{k}_0^2 - 6 + \tilde{k}_0 \sqrt{\tilde{k}_0^2 - 16}}{2(i\tilde{k}_0 - 3)} \text{ et } X_p = \frac{\tilde{k}_0^2 - 6 - \tilde{k}_0 \sqrt{\tilde{k}_0^2 - 16}}{2(i\tilde{k}_0 - 3)}.$$

Les vecteurs propres physique et parasite du schéma $(\vec{\lambda}_\varphi, \vec{\lambda}_p)$ s'écrivent quant à eux :

$$\vec{\lambda}_\varphi = \begin{pmatrix} \gamma_\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\lambda}_p = \begin{pmatrix} \gamma_p \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec :

$$\gamma_\varphi = \frac{1}{3} X_\varphi^{-1} \left(1 - X_\varphi + \sqrt{1 + 10X_\varphi - 2X_\varphi^2} \right),$$

et

$$\gamma_p = \frac{1}{3} X_p^{-1} \left(1 - X_p - \sqrt{1 + 10X_p - 2X_p^2} \right).$$

4.3.2 Approche retenue

Le schéma (4.8), qui fait l'objet de cette étude est sujet à une propriété de conservation d'une énergie semi-discrète, démontrée à la section 4.2.2. Il s'agit dorénavant de déterminer s'il permet de préserver l'ordre (en h) d'approximation de la relation de dispersion théorique. L'approche retenue, mise en œuvre, par exemple, par Canouet [8] (pour l'étude des propriétés dispersives des schémas DG en maillages hétérogènes), consiste à raisonner sur les coefficients de réflexion et de transmission de l'interface de couplage, pour une onde propre incidente donnée.

Pour ce faire, on se propose d'introduire, en amont de la zone de couplage, une solution propre du schéma DG de la forme :

$$\mathbf{u}_{DG}^j = \vec{\lambda}_\varphi e^{ij\theta_\varphi} + R \vec{\lambda}_p e^{ij\theta_p}, \quad (4.9)$$

où

$$\theta_\varphi = -i \ln(X_\varphi) \text{ et } \theta_p = -i \ln(X_p).$$

Il s'agit de la superposition d'une onde propre physique (qui se propage à vitesse c_0 vers les x croissants) d'amplitude 1 et d'une onde propre parasite (qui se propage à vitesse $3c_0$ vers les x décroissants) d'amplitude R , représentant le coefficient de réflexion dû au couplage.

En aval de la zone de couplage, on introduit une solution propre du schéma correspondant. Il s'agira, dans le cas du schéma (4.8), d'une solution propre du schéma aux différences finies de la forme :

$$u_{DF}^m = T e^{im\theta_{DF}},$$

où

$$\theta_{DF} = -i \ln(X_{DF}^\varphi).$$

La grandeur T correspond au coefficient de transmission de la zone de couplage. Afin de déterminer l'ordre de convergence en maillage du schéma hybride, il s'agit de déterminer le comportement asymptotique, quand h tend vers 0, des coefficients de réflexion et de transmission R et T . Pour cela, on introduit \mathbf{u}_{DG}^j ainsi que u_{DF}^m dans le système linéaire que vérifie la solution de (4.8). Plus précisément, on s'intéressera uniquement à l'application du bloc (qui représente l'action du couplage) \mathbf{M}_C^l aux inconnues discrètes, du fait que les autres équations sont automatiquement vérifiées par les solutions propres (par construction). On voit dans ce qui suit en quoi cela détermine de manière unique le couple (R, T) en fonction du nombre d'onde physique adimensionné \tilde{k}_0 . Par ailleurs, les développements limités de ces deux quantités quand $\tilde{k}_0 \rightarrow 0$ doivent permettre de conclure sur l'ordre du schéma couplé.

4.3.3 Propriétés dispersives du schéma hybride DG/EF continu

DG \rightsquigarrow EF

Avant de s'intéresser au couplage entre schémas DG \mathcal{P}^1 et EF condensés (i.e. DF centrés à 3 points), on se propose d'évaluer la consistance du schéma hybride DG \mathcal{P}^1 / EF \mathcal{P}^1 standard. Ce choix est justifié par l'intuition que le schéma DG \mathcal{P}^1 / EF continu \mathcal{P}^1 doit, *a priori*, présenter de meilleures propriétés qu'un couplage entre DG et EF dont la matrice de masse est partiellement condensée. Par "meilleures propriétés", nous entendons un ordre de convergence en maillage optimal; ce dernier constitue, en quelque sorte et dans une première approche, un objectif à atteindre en terme de précision. Ainsi, comme énoncé précédemment, nous choisissons une solution propre DG de la forme (4.9), et une solution propre EF continu de la forme :

$$u_{EF}^m = T e^{im\theta_{EF}},$$

4.3 Consistance du couplage

où

$$\theta_{EF} = -i \ln(X_{EF}^\varphi).$$

Nous introduisons ces solutions dans le schéma hybride donné par les matrices (4.6). Ce faisant, et par construction, quelles que soient les valeurs de T et de R , toutes les équations de ce système linéaire sont automatiquement vérifiées hormis les lignes qui couplent les degrés de liberté DG et EF. Elles correspondent au degré de liberté liés aux fonctions de base ψ^j et φ^i (c.f. figure 4.1). Ainsi, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{3} (u_{DG}^{j,g}) + \frac{1}{6} u_{EF}^m \right) + \frac{1}{2} (u_{EF}^m - u_{DG}^{j-1,d}) = 0, \\ -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{6} (u_{DG}^{j,g}) + \frac{2}{3} u_{EF}^m + \frac{1}{6} u_{EF}^{m+1} \right) + \frac{1}{2} (u_{EF}^{m+1} - u_{DG}^{j,g}) = 0. \end{cases}$$

Dans ce système, $u_{DG}^{j,g}$ (resp. $u_{DG}^{j,d}$) représente la projection de la solution sur le degré de liberté DG gauche (resp. droite) de la cellule j . On y introduit u_{DG} et u_{EF} sous la forme d'ondes décrites dans ce qui précède de façon à faire apparaître R et T . De plus, pour une raison de simplicité, nous fixons $j = 0$ et $m = 0$. On obtient :

$$\begin{cases} -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{3} (\gamma_\varphi + R\gamma_p) + \frac{1}{6} T \right) + \frac{1}{2} (T - (e^{-i\theta_\varphi} + R e^{-i\theta_p})) = 0, \\ -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{6} (\gamma_\varphi + R\gamma_p) + \frac{2}{3} T + \frac{1}{6} T e^{i\theta_{EF}} \right) + \frac{1}{2} (T e^{i\theta_{EF}} - (\gamma_\varphi + R\gamma_p)) = 0. \end{cases}$$

Cela mène au système linéaire 2×2 portant sur les inconnues R et T :

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\tilde{k}_0\gamma_p}{3} - \frac{X_p^{-1}}{2} & -\frac{i\tilde{k}_0}{6} + \frac{1}{2} \\ -\frac{i\tilde{k}_0\gamma_p}{6} - \frac{\gamma_p}{2} & -\frac{2i\tilde{k}_0}{3} - \frac{i\tilde{k}_0 X_{EF}^\varphi}{6} + \frac{X_{EF}^\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\tilde{k}_0\gamma_\varphi}{3} + \frac{X_\varphi^{-1}}{2} \\ \frac{i\tilde{k}_0\gamma_\varphi}{6} + \frac{\gamma_\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

Ce problème linéaire est résolu en appliquant l'inverse de la matrice à gauche de chaque membre de l'égalité (en s'appuyant sur un outil de calcul formel). Par ailleurs, le comportement asymptotique du couple solution (R, T) quand $\tilde{k}_0 \rightarrow 0$ est donné en y injectant les développements de Taylor des grandeurs qui participent au problème. A titre indicatif, ces derniers sont donnés à l'ordre 4, par :

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi &= 1 - \frac{3i\tilde{k}_0}{4} - \frac{9\tilde{k}_0^2}{32} + \frac{3i\tilde{k}_0^3}{32} + \frac{63\tilde{k}_0^4}{2048} + o(\tilde{k}_0^4), \\ \gamma_p &= -1 - \frac{i\tilde{k}_0}{12} + \frac{\tilde{k}_0^2}{288} - \frac{i\tilde{k}_0^3}{864} + \frac{17\tilde{k}_0^4}{165888} + o(\tilde{k}_0^4), \\ X_\varphi &= 1 + i\tilde{k}_0 - \frac{\tilde{k}_0^2}{2} - \frac{3i\tilde{k}_0^3}{16} + \frac{\tilde{k}_0^4}{16} + o(\tilde{k}_0^4), \\ X_p &= 1 - \frac{i\tilde{k}_0}{3} - \frac{\tilde{k}_0^2}{18} + \frac{i\tilde{k}_0^3}{432} - \frac{\tilde{k}_0^4}{1296} + o(\tilde{k}_0^4), \\ X_{EF}^\varphi &= 1 + i\tilde{k}_0 - \frac{\tilde{k}_0^2}{2} - \frac{i\tilde{k}_0^3}{6} + \frac{\tilde{k}_0^4}{24} + o(\tilde{k}_0^4), \end{aligned}$$

Finalement, le comportement asymptotique des coefficients de réflexion et de transmission quand $\tilde{k}_0 \rightarrow 0$ est donné par :

$$\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\tilde{k}_0}{8} + \frac{5\tilde{k}_0^2}{96} + \frac{29i\tilde{k}_0^3}{1536} + \frac{175\tilde{k}_0^4}{18432} + o(\tilde{k}_0^4) \\ 1 + \frac{i\tilde{k}_0}{8} + \frac{5\tilde{k}_0^2}{96} + \frac{29i\tilde{k}_0^3}{1536} + \frac{175\tilde{k}_0^4}{18432} + o(\tilde{k}_0^4) \end{pmatrix}.$$

EF \rightsquigarrow DG

Afin d'obtenir une caractérisation complète des ondes parasites générées par ce couplage, il convient d'étudier le passage d'une onde physique du domaine EF vers le domaine DG. Pour ce faire, nous considérons toujours l'équation (4.1). En revanche, on se base sur

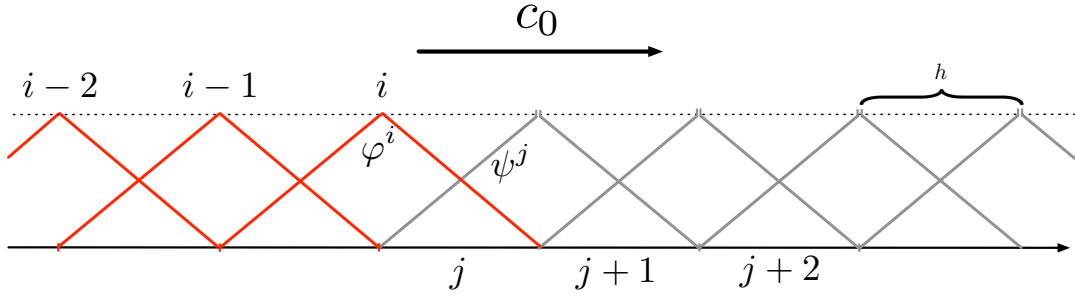


FIGURE 4.3 – Fonctions de base du schéma hybride éléments finis continus (rouge, gauche) / DG centré (gris, droite), pour la résolution de (4.1)

la discrétisation représentée par la figure 4.3, selon laquelle le schéma EF est appliqué en amont du couplage et le schéma DG est appliqué en aval. Cela ne revient qu'à "renverser" la matrice de masse \mathbf{K}_h et ne modifie pas la propriété de conservation d'énergie démontrée plus haut. Ceci mène, dans la zone de couplage, au système :

$$\begin{cases} -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{6}u_{EF}^{m-1} + \frac{2}{3}u_{EF}^m + \frac{1}{6}u_{DG}^{j,d} \right) + \frac{1}{2} \left(u_{DG}^{j,d} - u_{EF}^{m-1} \right) = 0, \\ -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{6}u_{EF}^m + \frac{1}{3} \left(u_{DG}^{j,d} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(u_{DG}^{j+1,g} - u_{EF}^m \right) = 0. \end{cases}$$

D'une manière analogue au cas précédent, on impose la solution amont (ici EF) sous en tant que somme d'une onde propre physique et d'une onde propre parasite :

$$u_{EF}^m = e^{im\theta_{EF}^\varphi} + Re^{im\theta_{EF}^p},$$

où

$$\theta_{EF}^\varphi = -i \ln(X_{EF}^\varphi) \text{ et } \theta_{EF}^p = -i \ln(X_{EF}^p).$$

La solution aval (ici DG) prend la forme :

$$\mathbf{u}_{DG}^j = T \vec{\lambda}_\varphi e^{ij\theta_\varphi}, \quad (4.10)$$

où

$$\theta_\varphi = -i \ln(X_\varphi).$$

En imposant $j = 0$ et $m = 0$, nous obtenons :

$$\begin{cases} -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{X_{EF}^\varphi} + \frac{R}{X_{EF}^p} \right) + \frac{2}{3}(1+R) + \frac{T}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(T - \left(\frac{1}{X_{EF}^\varphi} + \frac{R}{X_{EF}^p} \right) \right) = 0, \\ -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{6} (1+R) + \frac{1}{3}T \right) + \frac{1}{2} (T\gamma_\varphi X_{DG}^\varphi - (1+R)) = 0, \end{cases}$$

que l'on peut formaliser en tant que système d'inconnues R et T :

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\tilde{k}_0}{6X_{EF}^p} - \frac{2i\tilde{k}_0}{3} - \frac{1}{2X_{EF}^p} & -\frac{i\tilde{k}_0}{6} + \frac{1}{2} \\ -\frac{i\tilde{k}_0}{6} - \frac{1}{2} & -\frac{i\tilde{k}_0}{3} + \frac{\gamma_\varphi X_{DG}^\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\tilde{k}_0}{6X_{EF}^\varphi} + \frac{2i\tilde{k}_0}{3} + \frac{1}{2X_{EF}^\varphi} \\ \frac{i\tilde{k}_0}{6} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

L'obtention des développements limités de R et T nécessite la connaissance supplémentaire du comportement asymptotique de la quantité :

$$X_{EF}^p = -1 + \frac{i\tilde{k}_0}{3} + \frac{\tilde{k}_0^2}{18} + \frac{i\tilde{k}_0^3}{54} + \frac{5\tilde{k}_0^4}{648} + o(\tilde{k}_0^4).$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\tilde{k}_0}{4} - \frac{9\tilde{k}_0^2}{32} - \frac{37i\tilde{k}_0^3}{288} + \frac{311\tilde{k}_0^4}{18432} + o(\tilde{k}_0^4) \\ 1 + i\tilde{k}_0 - \frac{3\tilde{k}_0^2}{4} - \frac{145i\tilde{k}_0^3}{288} + \frac{71\tilde{k}_0^4}{288} + o(\tilde{k}_0^4) \end{pmatrix}.$$

Conclusion sur la consistance

Ces résultats indiquent que dans les deux cas (passage d'une onde de DG vers EF et vice-versa), le coefficient de réflexion approche 0 à l'ordre 1 en h pour un nombre d'onde physique k_0 fixé. Pareillement, le coefficient de transmission approche 1 au premier ordre uniquement. En effet, la relation de dispersion numérique que vérifie l'onde transmise EF, dans le cas de la figure 4.1 (par exemple) peut être formulée en calculant le développement de Taylor du nombre d'onde numérique induit par l'onde solution $u_{EF} = T e^{i\theta_{EF}^\varphi}$. On le nomme \tilde{k}_{EF}^T . Aussi, on obtient

$$\tilde{k}_{EF}^T = -i \ln(u_{EF}) = \frac{9\tilde{k}_0}{8} - \frac{23i\tilde{k}_0^2}{384} + \frac{3\tilde{k}_0^3}{256} - \frac{473i\tilde{k}_0^4}{49152} + o(\tilde{k}_0^4).$$

Ceci exprime effectivement que la grandeur k_{EF} constitue une approximation d'ordre 1 du nombre d'onde physique adimensionné, ou, en d'autres termes, que T introduit un déphasage d'ordre 1.

Il convient de remarquer que ce résultat est assez contre-intuitif. Il signifie que le couplage (en maillage conforme) entre schémas de type d'éléments finis discontinu (centré) et

continu, tous deux munis de bases \mathcal{P}^1 et d'ordre identique égal à 2 en maillages réguliers, fait perdre un ordre de précision en h dans l'approximation de la relation de dispersion théorique. Ceci semble être dû à une certaine incompatibilité des solutions propres respectives de ces schémas. Aussi, ce résultat peut-il être mis en lien avec le fait qu'un schéma DG \mathcal{P}^1 , centré, n'est que d'ordre 1 en maillage irrégulier [19, 23]. De manière analogue, l'introduction d'un couplage dégrade l'ordre de convergence attendu.

En définitive, si l'on considère qu'une condensation partielle de la matrice \mathbf{M}_{EF} revient à "dégrader" le schéma, on ne peut espérer *a priori* pouvoir obtenir un schéma hybride DG/DF d'ordre 2. On le vérifie dans la suite.

4.3.4 Propriétés dispersives du schéma hybride DG/EF condensés

Dans un deuxième temps, on s'intéresse au couplage entre le schéma DG et le schéma DF, donné par (4.8). Il s'agit de mettre en œuvre une méthode identique à celle employée dans ce qui précède.

DG \rightsquigarrow DF

Premièrement, on introduit en amont du couplage une solution DG sous la forme

$$\mathbf{u}_{DG}^j = \vec{\lambda}_\varphi e^{ij\theta_\varphi} + R \vec{\lambda}_p e^{ij\theta_p},$$

et, en aval de ce dernier, une solution DF (cf. section 4.3.1) que l'on écrit :

$$u_{DF}^m = T e^{im\theta_{DF}^\varphi},$$

où

$$\theta_{DF}^\varphi = -i \ln(X_{DF}^\varphi).$$

Comme précédemment, par construction, ces solutions vérifient le schéma (4.8) dans les zones qui correspondent. En introduisant ces ondes dans les équations relatives aux degrés de liberté DG/DF couplés, on obtient (pour le même choix d'indiciage que précédemment) :

$$\begin{cases} -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{3} (\gamma_\varphi + R\gamma_p) + \frac{1}{6} T \right) + \frac{1}{2} (T - (e^{-i\theta_\varphi} + R\gamma_p e^{-i\theta_p})) = 0, \\ -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{6} (\gamma_\varphi + R\gamma_p) + \frac{5}{6} T \right) + \frac{1}{2} (T e^{i\theta_{DF}^\varphi} - (\gamma_\varphi + R\gamma_p)) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\tilde{k}_0\gamma_p}{3} - \frac{\gamma_p X_p^{-1}}{2} & -\frac{i\tilde{k}_0}{6} + \frac{1}{2} \\ -\frac{i\tilde{k}_0\gamma_p}{6} - \frac{\gamma_p}{2} & -\frac{5i\tilde{k}_0}{6} + \frac{X_{DF}^\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\tilde{k}_0\gamma_\varphi}{3} + \frac{X_\varphi^{-1}}{2} \\ \frac{i\tilde{k}_0\gamma_\varphi}{6} + \frac{\gamma_\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

Le développement limité de X_{DF}^φ quand $\tilde{k}_0 \rightarrow 0$ étant donné par

$$X_{DF}^\varphi = 1 + i\tilde{k}_0 - \frac{\tilde{k}_0^2}{2} - \frac{\tilde{k}_0^4}{8} + o(\tilde{k}_0^5),$$

on obtient finalement :

$$\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\tilde{k}_0}{8} + \frac{7\tilde{k}_0^2}{32} + \frac{31i\tilde{k}_0^3}{512} + \frac{231\tilde{k}_0^4}{2048} + o(\tilde{k}_0^4) \\ 1 + \frac{i\tilde{k}_0}{8} + \frac{7\tilde{k}_0^2}{32} + \frac{31i\tilde{k}_0^3}{512} + \frac{231\tilde{k}_0^4}{2048} + o(\tilde{k}_0^4) \end{pmatrix}.$$

DF \rightsquigarrow DG

En se plaçant dans le second cas du passage d'une onde du domaine DF vers le domaine DG, (c.f. figure 4.3), on impose l'onde incidente sous la forme :

$$u_{DF}^m = e^{im\theta_{DF}^\varphi} + Re^{im\theta_{DF}^p},$$

où

$$\theta_{DF}^\varphi = -i \ln(X_{DF}^\varphi) \text{ et } \theta_{DF}^p = -i \ln(X_{DF}^p).$$

De plus, l'onde transmise DG s'écrit :

$$\mathbf{u}_{DG}^j = T \vec{\lambda}_\varphi e^{ij\theta_\varphi},$$

avec

$$\theta_\varphi = -i \ln(X_\varphi).$$

Nous obtenons les équations :

$$\begin{cases} -i\tilde{k}_0 \left(\frac{5}{6} (1+R) + \frac{1}{6} T \right) + \frac{1}{2} \left(T - \left(\frac{1}{X_{DF}^\varphi} + \frac{R}{X_{DF}^p} \right) \right) = 0, \\ -i\tilde{k}_0 \left(\frac{1}{6} (1+R) + \frac{1}{3} T \right) + \frac{1}{2} (T\gamma_\varphi X_\varphi - (1+R)) = 0. \end{cases}$$

Le calcul nécessite la connaissance du développement limité de X_{DF}^p :

$$X_{DF}^p = -1 + i\tilde{k}_0 + \frac{\tilde{k}_0^2}{2} + \frac{\tilde{k}_0^4}{8} + o(\tilde{k}_0^5).$$

Finalement, on obtient là encore des coefficients de réflexion et de transmission d'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\tilde{k}_0}{8} - \frac{\tilde{k}_0^2}{4} + \frac{i\tilde{k}_0^3}{512} - \frac{33\tilde{k}_0^4}{256} + o(\tilde{k}_0^4) \\ 1 + \frac{7i\tilde{k}_0}{8} - \frac{5\tilde{k}_0^2}{8} - \frac{161i\tilde{k}_0^3}{512} - \frac{9\tilde{k}_0^4}{512} + o(\tilde{k}_0^4) \end{pmatrix}.$$

Ces résultats indiquent que le couplage entre un schéma DG \mathcal{P}^1 et un schéma aux différences finies centré à 3 points n'approche la solution qu'à l'ordre 1 en espace. Ceci est en accord avec le résultat sur le couplage DG / EF continu obtenu précédemment.

Dans la suite, on se propose de compléter ces résultats par une brève étude numérique des solutions issus du couplage DG / DF introduit dans ce chapitre.

4.4 Expériences numériques

Dans le but de tester numériquement le comportement du schéma couplé DG / DF présenté dans ce qui précède, on se place dans le cadre de l'équation des ondes monodimensionnelle. Elle est donnée par le système de deux équations aux dérivées partielles à deux inconnues :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c_0 \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

Sous forme matricielle, ceci revient chercher l'inconnue vectorielle $\mathbf{w} = {}^t(u, v)$ de l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & c_0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x},$$

munie d'une condition initiale et de conditions aux limites. La raison pour laquelle on s'intéresse à l'équation des ondes et non pas à l'équation d'advection est qu'il est plus facile, dans ce cadre, de définir des conditions aux limites. Par ailleurs, ceci permet d'évaluer le couplage dans les cas où les ondes se propagent dans les deux sens : on est alors en effet, pour chaque sous-domaine, en présence de deux solutions propres physiques (ainsi que deux solutions propres parasites) ; l'une se propage vers les x croissants et l'autre vers les x décroissants, à vitesse c_0 .

L'avancée en temps est réalisée grâce à un schéma de type saute-mouton en grilles décalées. Ainsi, nous avons :

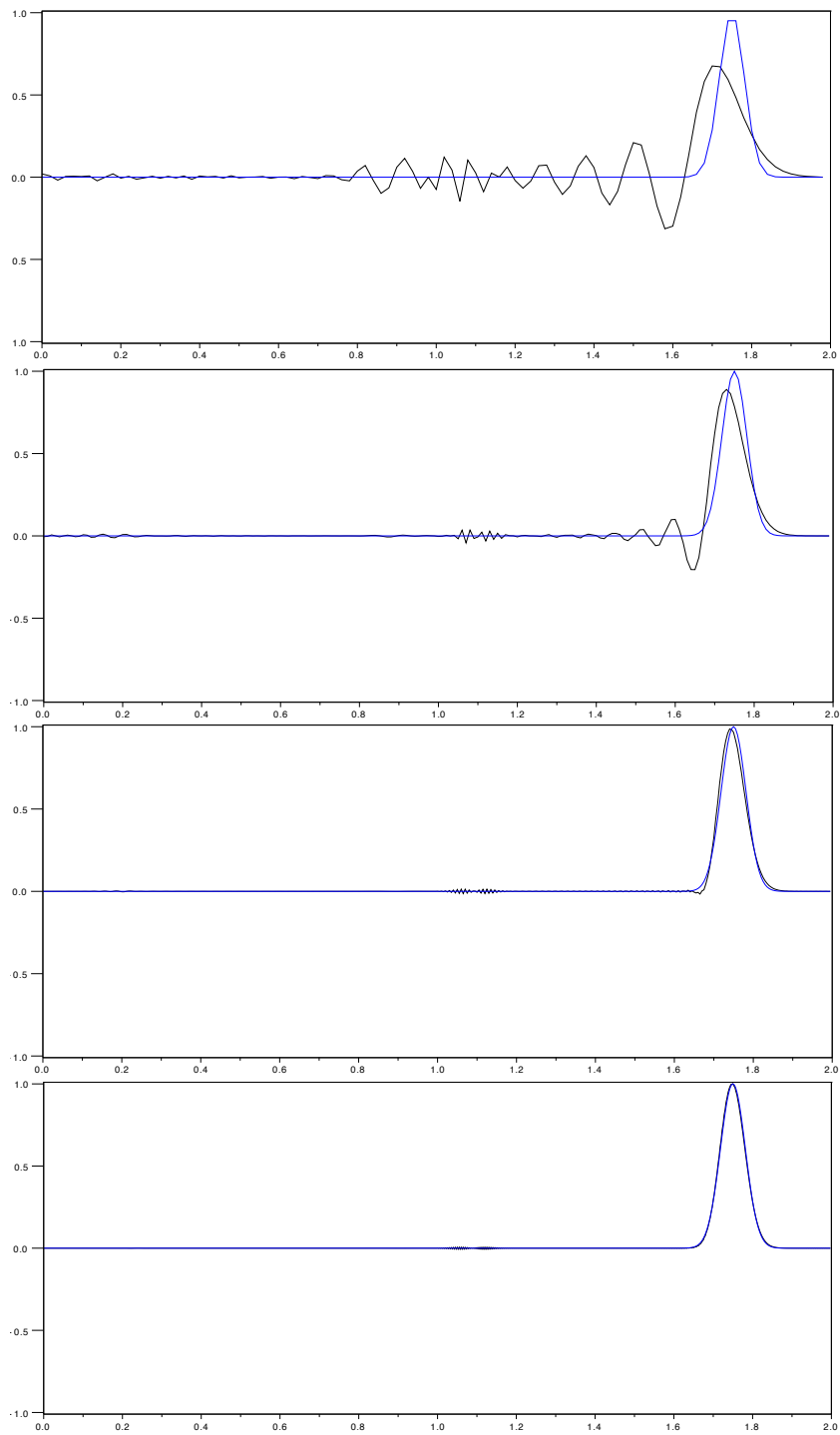
$$\begin{cases} \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta t c_0 \mathbf{M}_h^{-1} \mathbf{K}_h \left(\mathbf{v}^{i+\frac{1}{2}} \right), \\ \mathbf{v}^{i+\frac{3}{2}} = \mathbf{v}^{i+\frac{1}{2}} + \Delta t c_0 \mathbf{M}_h^{-1} \mathbf{K}_h \left(\mathbf{u}^{i+1} \right), \end{cases}$$

où \mathbf{u} et \mathbf{v} sont les vecteurs des inconnues numériques, et les matrices \mathbf{M}_h et \mathbf{K}_h sont les matrices du schéma hybride données dans (4.6). Notons que ce schéma est sujet à une erreur d'ordre 2 en Δt . Par ailleurs, il permet de préserver une énergie discrète [5] et est stable sous une condition CFL.

On définit un domaine d'extension $[0, 2]$, discrétisé par $2n$ segments de longueur uniforme, $h = 1/n$. Le sous-domaine d'extension $[0, 1]$ est résolu par le schéma DG \mathcal{P}^1 , alors que le sous-domaine $[1, 2]$ est résolu par le schéma DF. On impose, à $t = 0$, un profil gaussien, centré en $x = 0.5$ (dans le domaine DG), sur u et v . Ce dernier se propage vers les x croissants à la vitesse c_0 que l'on fixe à 1. La figure 4.4 représente les profils de u numérique et analytique, au bout d'un temps de propagation $t_{\text{fin}} = 1.25$, pour différents raffinements spatiaux. Celle-ci permet d'observer l'atténuation avec le nombre de cellules des phénomènes dispersifs liés à la captation du profil gaussien. D'autre part, on remarque la présence d'une onde parasite localisée dans le voisinage de l'abscisse $x = 1.5$. Cette dernière correspond au mode parasite DG se propageant à vitesse 3 ; pour ce temps final fixé, cette dernière s'est réfléchi sur les frontières gauche, puis droite du domaine.

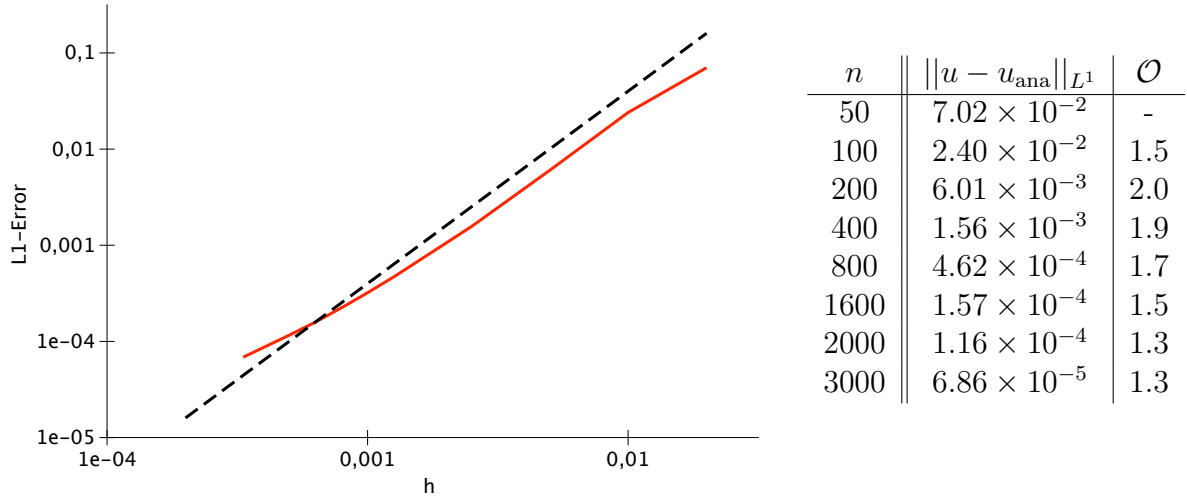
Afin de quantifier l'ordre de précision du schéma hybride, on mesure l'erreur en norme L^1 entre solutions approchée et analytique sur u , au temps t_{fin} , pour divers raffinements

4.4 Expériences numériques



Raffinements successifs : $n = 50$, $n = 100$, $n = 200$, $n = 400$
Noir : solution approchée / Bleu : solution analytique

FIGURE 4.4 – Solutions approchée (hybride, discrétisée par le schéma couplé DG \mathcal{P}^1 / DF) et analytique de l'équation des ondes 1D



Raffinements successifs : $n = 50, n = 100, n = 200, n = 400$
 Noir : solution approchée / Bleu : solution analytique

FIGURE 4.5 – Solutions approchée (hybride, discrétisée par le schéma couplé DG \mathcal{P}^1 / DF) et analytique de l'équation des ondes 1D

spatiaux. La figure 4.5 présente ces résultats. Ils témoignent, de manière assez inattendue, d'un ordre de convergence en h proche de 2 dans une partie importante de l'intervalle de raffinement. Toutefois, la pente de l'erreur a tendance à se dégrader et à se rapprocher de 1, quand h se rapproche de 0. L'expérience numérique montre qu'il ne s'agit pas, *a priori*, d'un effet dû aux erreurs d'arrondi. En effet, les schémas DF et DG autonomes préservent l'ordre 2 de convergence en maillage pour de telles valeurs d'erreur. Ceci tend à illustrer les résultats analytiques de la section précédente, selon lesquels le couplage entre ces deux schémas ne permet pas de préserver leur ordre de précision. Cependant, la raison pour laquelle le schéma hybride dépasse l'ordre 1 dans une partie de l'intervalle de raffinement reste à déterminer de manière précise.

Une manière d'expliquer ce comportement est de considérer le fait que l'analyse réalisée à la section précédente est fondée sur l'étude du comportement des solutions propres des schémas. Cette dernière, dans l'absolu, ne se substitue pas une analyse de type "élément finis" qui consisterait à estimer l'erreur, mesurée en une certaine norme, entre solutions approchée et exacte en fonction de h et de l'ordre de la base polynômiale utilisée; c'est pourtant ce que l'on a évalué à l'occasion de ces expériences numériques. Ainsi, il serait nécessaire de tenir compte de la projection de la solution initiale sur la base de solutions propres constituée par l'onde physique et l'onde parasite; aussi, l'amplitude d'une telle projection sur chacun de ces modes⁴ influe-t-elle sur l'erreur mesurée en norme L^1 (par exemple).

Une explication plausible des phénomènes observés est que la projection de la condition initiale (profil gaussien) sur la base des solutions propres des schémas (modifiée par l'in-

4. Elle dépend de la régularité de la solution.

roduction du couplage) favorise des termes d'erreur d'ordre deux, pour les raffinements les plus grossiers.

4.5 Conclusion

Dans le but d'apporter une contribution à l'étude théorique du couplage entre schémas DG et DF, ce chapitre a présenté une hybridation entre ces deux discrétisations spatiales, dans le cas monodimensionnel, pour l'équation d'advection linéaire dans un domaine infini. Par construction, le schéma proposé préserve une énergie semi-discrète, du fait que l'on utilise des schémas spatiaux centrés : on peut donc en démontrer la stabilité dans ce cas. Néanmoins, en étudiant analytiquement les coefficients de réflexion et de transmission (s'appliquant à des solutions propres des schémas DF et DG) de l'interface de couplage, on a montré que la technique retenue ne permettait pas, *a priori*, de préserver l'ordre 2 de convergence en maillage des schémas DG \mathcal{P}^1 d'une part, et DF centrées à 3 points d'autre part. Plus précisément, le coefficient de réflexion et de transmission R et T approchent respectivement 0 et 1 à l'ordre 1 en h .

Par ailleurs, l'expérience numérique a montré, dans le cas de l'équation des ondes monodimensionnelle et de l'utilisation d'un schéma saute-mouton en temps (d'ordre 2), que le schéma hybride 1D ne garantissait pas un ordre de convergence égal à deux dans une majeure partie de l'intervalle de raffinement.

Ces résultats invitent à porter une attention toute particulière à l'évaluation numérique de la précision du couplage DG/DF dans le cas bi-dimensionnel, en présence de maillages non conformes. Notons que dans ce cadre, il n'est pas envisageable de mettre en œuvre les outils analytiques utilisés dans le présent chapitre. Aussi, le chapitre qui suit présente-t-il la méthode de couplage 2D retenue ainsi que l'étude du comportement numérique des solutions qui en sont issues.

Chapitre 5

Schéma hybride 2D

L'objet de ce chapitre est, dans un premier temps, de présenter une technique de couplage entre méthodes DGTD et FDTD dans le cas bidimensionnel. Deux types de configurations de maillages distinctes (recouvrement minimal / recouvrement total) y sont traitées. Il s'agira, dans un deuxième temps, et pour chacune de ces stratégies de maillage possible, de mettre en évidence ses propriétés numériques (précision et stabilité) en vue de conclure sur sa viabilité. Pour cela, on s'appuiera essentiellement sur des expériences numériques dans le cadre de cas-tests pour lesquels une solution analytique est connue (modes propres de cavités). Ceci permet de mesurer des erreurs et ainsi de vérifier la préservation de l'ordre de convergence en maillage malgré l'hybridation. Enfin, on présente des applications de ce couplage à des cas académiques, notamment celui d'un cas d'épreuve acoustique sujet à un benchmark dédié au traitement des géométries complexes proposé dans [42].

5.1 Algorithme en recouvrement minimal

5.1.1 Description

Configuration de maillages

Dans une première approche, et dans le but d'appréhender les contributions réciproques d'un sous-domaine à l'autre en termes de conditions au bord, on considère la configuration de maillages donnée par la figure 5.1. Cette dernière représente la zone de raccord entre un domaine DG non structuré (à gauche) et un domaine DF cartésien (à droite). Notons la présence d'un recouvrement supplémentaire entre les deux domaines, si bien qu'il existe une zone comprise entre les deux frontières physiques, DF et DG, dans laquelle deux solutions redondantes DF et DG peuvent coexister. On reviendra sur la nécessité d'un tel choix dans la suite. Notons que les frontières des domaines sont parallèles, mais qu'aucune coïncidence entre degrés de liberté DF et DG n'est supposée. Dans la section qui suit, on détaille la technique de couplage retenue ainsi que les techniques d'interpolation visant à répondre à la non-conformité des maillages.

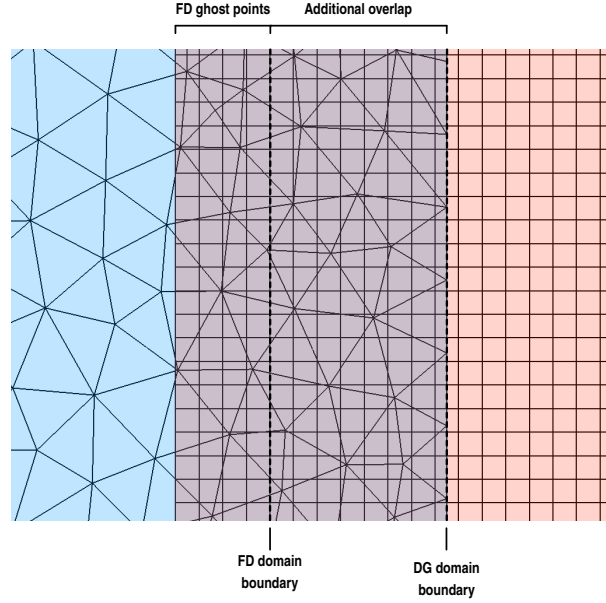


FIGURE 5.1 – Configuration des maillages : approche par recouvrement minimal

Hybridation

Dans un premier temps, on rappelle que l'avancée en temps est réalisée grâce à des schémas RK d'ordre élevé. Ceux-ci sont fondés sur le calcul de n sous-itérations successives en vue d'avancer la solution d'un pas Δt à l'ordre n . Cela revient, tant dans l'approche DGTD que dans l'approche FDTD, à réaliser n calculs des gradients du champ solution, en chaque degré de liberté de chaque sous-domaine. Il apparaît donc nécessaire, en vue de calculer des gradients valides, en particulier dans la zone de couplage, d'appliquer des conditions aux limites traduisant les contributions d'un solveur à l'autre à chacune de ces sous-étapes.

La contribution du sous-domaine DG au sous-domaine DF (représentés sur la figure 5.1) est prise en compte, de manière simple, au travers des points fantômes de la grille cartésienne. On rappelle que ces rangées de points fictifs sont communément ajoutées par delà les frontières physiques des domaines cartésiens afin d'imposer des conditions au bord tout en y appliquant des stencils centrés (cf. section 2.3.4). En chaque point fantôme de coordonnées (i, j) , $\gamma_{(i,j)}$, après avoir identifié une cellule ω_m telle que :

$$\gamma_{(i,j)} \in \omega_m,$$

on attribue au champ solution $\mathbf{u}_{\gamma_{(i,j)}}^{DF}$:

$$\mathbf{u}_{\gamma_{(i,j)}}^{DF} = \sum_{k=1}^{N_{\omega_m}} \mathbf{u}_{(k,m)}^{DG} \varphi_k^m(x_i, y_j), \quad (5.1)$$

où $\mathbf{u}_{(k,m)}^{DG}$ est le $k^{\text{ième}}$ degré de liberté DG, lié à la fonction de base lagrangienne φ_k^m , propre à la cellule ω_m . En toute rigueur, pour un point fantôme $\gamma_{(i,j)}$ donné, ω_m n'est pas

5.1 Algorithme en recouvrement minimal

forcément unique *a priori*. En effet, $\gamma_{(i,j)}$ peut être commun à deux cellules du maillage DG s'il appartient à une frontière inter-maillages, voire davantage s'il coïncide avec un nœud de ce dernier. Une manière naturelle de répondre à ces cas particuliers est d'attribuer à $\mathbf{u}_{\gamma_{(i,j)}}^{DF}$ une moyenne de valeurs interpolées sur les M cellules qui contiennent $\gamma_{(i,j)}$, soit :

$$\mathbf{u}_{\gamma_{(i,j)}}^{DF} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\sum_{k=1}^{N_{\omega_m}} \mathbf{u}_{(k,m)}^{DG} \varphi_k^m(x_i, y_j) \right). \quad (5.2)$$

Dans le cas où $\mathbf{u}_{\gamma_{(i,j)}}^{DF}$ coïncide avec un nœud du maillage DG que l'on nomme μ , et seulement si on utilise des bases de Lagrange, cette écriture se simplifie et donne :

$$\mathbf{u}_{\gamma_{(i,j)}}^{DF} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{u}_{(k_\mu, m)}^{DG}, \quad (5.3)$$

où k_μ représente, pour chaque m , la fonction de base associée au nœud μ . Une manière plus pragmatique de traiter ces problèmes est de se ramener à l'écriture (5.1) dans tous les cas, en sélectionnant arbitrairement une des cellules auxquelles appartient $\gamma_{(i,j)}$. C'est ce que l'on choisit de faire en pratique.

L'utilisation des bases polynômiales locales aux cellules DG permet, de manière naturelle, de préserver l'ordre d'approximation en $(k+1)$ de la solution. Notons que le coût de cette reconstruction de valeurs aux $\gamma_{(i,j)}$ dépend bien entendu :

- du nombre de points fantômes $\gamma_{(i,j)}$,
- de l'ordre local des cellules DG qui contiennent des points fantômes DF.

Par ailleurs, une telle condition n'est pas formellement identifiable à une condition aux limites qui porterait sur les valeurs et / ou les gradients tangentiel ou normal de \mathbf{u}^{DF} à la frontière physique du domaine DF. Aussi, une telle attribution de valeurs aux points fantômes doit-elle être appréhendée en tant qu'un prolongement fictif du domaine de calcul DF.

Ce n'est pas le cas de l'imposition de la contribution du domaine DF au domaine DG. En effet, on rappelle qu'il s'agit de tenir compte de cette dernière en imposant faiblement une condition aux limites à la frontière de couplage du domaine DG. Pour cela, il est nécessaire d'évaluer l'intégrale du flux numérique sur chaque arête $\bar{\Gamma}_j$ (de la maille j) appartenant à la frontière de couplage :

$$\int_{\bar{\Gamma}_j} \underbrace{\mathcal{H}(\mathbf{u}_j^+, \mathbf{u}_j^-, \mathbf{n})}_{\text{Flux numérique}} \varphi_j d\gamma, \quad (5.4)$$

où on rappelle que \mathbf{u}_j^+ et \mathbf{u}_j^- représentent respectivement les valeurs intérieure et extérieure (fictive) à j . Dès lors, il convient de distinguer deux cas. Dans le cas où l'on utilise une base nodale et où l'on traite des problèmes linéaires (comme dans le présent travail), il paraît naturel d'imposer la condition de couplage en reconstruisant une trace fictive au bord. Cela consiste à imposer les degrés de liberté Lagrangiens \mathbf{u}_j^- à partir de valeurs ponctuelles issues du champ-solution DF, localisées aux points de Lagrange qui correspondent. Cette méthode est bien adaptée à cette situation, car les intégrales (5.4) sont

précalculées préalablement à l'avancée en temps ; ceci résulte dans une matrice de flux qui reste constante au long du calcul. On choisit cette stratégie dans le cadre de ce travail.

À l'inverse, si l'on utilisait une base modale, il serait indispensable de projeter la solution DF sur les fonctions de base DG. Cela implique, pour ce faire, d'affecter des valeurs provenant de la solution DF aux points de Gauss de façon à évaluer les intégrales liées à ces projections par une méthode de quadrature. Ainsi, Utzmann et al. [41, 40] ont-ils mis en œuvre une approche similaire, en imposant la présence de mailles fictives DG et en projetant le champ solution DF sur les bases modales de ces dernières.

Par ailleurs, notons que dans les cas non-linéaires, les flux au bord ne peuvent prendre la forme d'une matrice constante au cours du calcul. Ainsi, il est nécessaire de recalculer (5.4) par quadrature à chaque sous-itération de Runge-Kutta. De fait, il est alors également préférable de prendre en compte la contribution du domaine DF au travers des points de Gauss de la formule de quadrature utilisée sur le bord.

Du fait que l'on souhaite attribuer des valeurs du champ DF aux points de Lagrange de la frontière de couplage du domaine DG, et en raison de la non-conformité des degrés de liberté DG/DF, il est nécessaire de formuler des interpolations spatiales des valeurs portées par la grille cartésienne. Plus précisément, la procédure retenue peut ainsi s'écrire simplement :

$$\mathbf{u}_{\gamma^{(k)}}^{DG} = \mathcal{I}_n^{\gamma^{(k)}}(\mathbf{u}^{DF}), \quad (5.5)$$

où, $\gamma^{(k)}$ est le $k^{\text{ième}}$ point de Lagrange, de coordonnées (x_k, y_k) à la frontière de l'élément considéré, \mathbf{u}^{DF} le champ solution DF, et \mathcal{I}_n un opérateur d'interpolation d'ordre n en espace que l'on définit dans ce qui suit.

Interpolations en espace

Pour des raisons de simplicité, on prend pour \mathcal{I}_n un interpolateur de Lagrange. Etant donné que ce dernier est voué à être appliqué à des grilles cartésiennes, il est formulé par une tensorisation bidimensionnelle d'interpolations Lagrangiennes 1D. Soit une fonction u , suffisamment régulière, définie dans l'intervalle $]x^0, x^1[$. Son interpolée u_l , d'ordre n , est construite par :

$$u_l(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u(x_i) L_i(x), \quad (5.6)$$

où les $u(x_i)$ représentent $n + 1$ valeurs ponctuelles (échantillons) de u aux points x_i , et les L_i sont les $n + 1$ polynômes de Lagrange d'ordre n donnés par

$$L_i(x) = \prod_{p=1, p \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_p)}{(x_i - x_p)}.$$

Les propriétés numériques d'une telle interpolation peuvent être abordées de plusieurs manières. Tout d'abord, il est légitime de s'intéresser à l'erreur de consistance entre u et u_l . Aussi peut-on montrer que cette dernière est contrôlée de la sorte :

$$u(x) - u_l(x) = C \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \text{ avec } \xi \in [x^0, x^1], \quad (5.7)$$

5.1 Algorithme en recouvrement minimal

C une constante réelle, et $h = |x^1 - x^0|$. Notons que cela présuppose l'existence de la dérivée $(n + 1)^{\text{ième}}$ de u . Cette expression montre le lien direct et précis entre l'erreur d'interpolation, la régularité de la solution, et le raffinement de l'échantillonnage. Une autre manière d'appréhender les effets de ces interpolations est présentée par Desquesnes dans [14]. D'une part, cette étude a montré, en mettant à l'œuvre des outils issus du traitement du signal, que ces interpolations génèrent des parasites. D'autre part, elle caractérise le spectre en fonction de la densité de l'échantillonnage.

La tensorisation en deux dimensions de (5.6) est donnée dans le cas d'une fonction U de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} par :

$$U_l(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U(x_i, y_j) L_i(x) L_j(y).$$

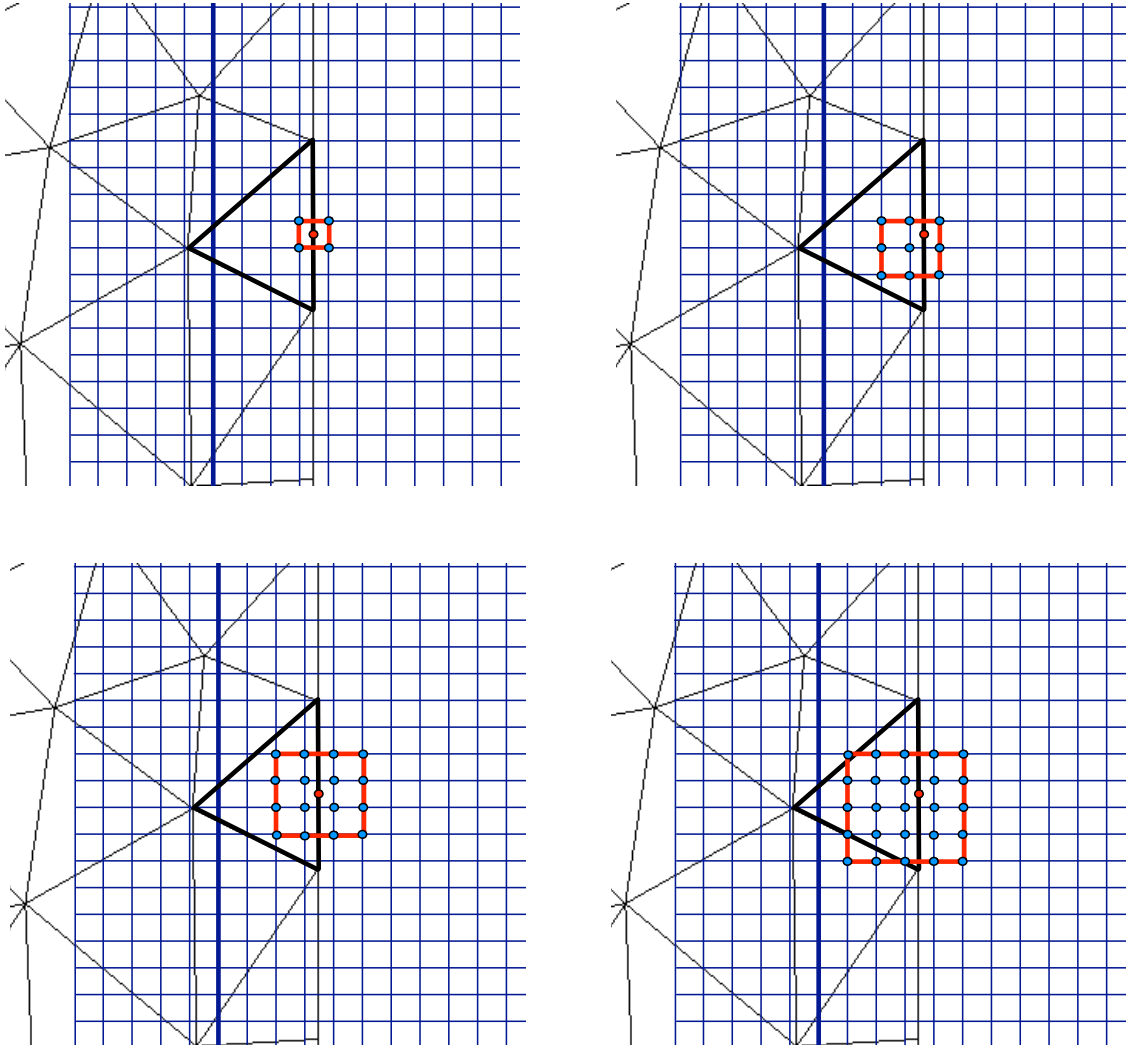
Ainsi, dans le cadre du couplage DF/DG en 2D, on peut préciser (5.5) :

$$\mathbf{u}_{\gamma(k)}^{DG} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{u}^{DF}(x_i, y_j) L_i(x_k) L_j(y_k)}_{\mathcal{I}_n^{\gamma(k)}(\mathbf{u}^{DF})}. \quad (5.8)$$

Cette écriture implique de formuler deux choix. Ils concernent tant l'ordre de l'interpolation, lié au nombre n de polynômes utilisés, que l'identification des n^2 nœuds (i, j) sur lesquels s'appuient ces derniers. Le choix de l'ordre d'interpolation est intuitivement piloté par deux critères. En effet, si l'on souhaite construire un couplage qui préserve l'ordre élevé de convergence en maillage propres aux schémas DG et DF, il semble judicieux de choisir n suffisamment élevé, en conséquence. Par ailleurs, il paraît également nécessaire de tenir compte de la régularité de \mathbf{u}^{DF} dont la dérivée $(n + 1)^{\text{ième}}$ contrôle l'erreur d'interpolation. Là encore, on peut distinguer deux situations. D'une part, cette dérivée peut prendre de grandes valeurs si \mathbf{u}^{DF} est intrinsèquement chahutée, de par la physique du problème. D'autre part, il faut garder à l'esprit que les solutions DF sont supposément au moins \mathcal{C}^m pour un schéma d'ordre m . Néanmoins, on n'a *a priori* aucune garantie sur la dérivée d'ordre $(m + 1)$. En effet, dans le cadre des différences finies, si pour un schéma d'ordre m , l'erreur sur la dérivée première a un comportement asymptotique en $O(h^{m+1})$, l'ordre de ce dernier décroît pour l'approximation des dérivées d'ordre supérieur. Plus précisément, l'erreur sur la dérivée $(m + 1)^{\text{ième}}$ se comporte en $O(1)$. Ceci fausse de manière naturelle le contrôle de l'erreur (5.7), du fait que cette dernière est proportionnelle à un terme représentant une dérivée d'ordre $n + 1$. Ainsi est-il souhaitable d'imposer $n \leq m$.

L'identification des points d'interpolations de la grille DF est également sujette à contraintes. En premier lieu, et comme suggéré dans (5.8), on utilise autant de points selon les axes x et y dans le but de ne privilégier aucune direction d'espace. Deuxièmement, on impose de choisir le stencil d'interpolation DF qui minimise la distance entre $\gamma(k)$ et son barycentre. Ceci permet d'utiliser des interpolations aussi centrées que possible. Enfin, on impose que, pour tout k , le stencil de $\mathcal{I}_n^{\gamma(k)}$ ne s'applique à aucun des points fictifs de la grille DF qui portent une valeur fournie par la solution DG, au travers du couplage. Ce type de contrainte, bien connu de la communauté *Chimère*, a pour but de prévenir un comportement instable en temps long. En effet, il paraîtrait intuitivement peu naturel,

dans notre cas, d'imposer une condition aux limites sur $\partial\Omega_{DG}$ à partir d'une certaine quantité d'information provenant de l'intérieur du domaine DG. Une manière de rendre ces deux dernières contraintes compatibles est d'imposer un recouvrement additionnel entre les frontières physiques DF et DG, comme l'anticipait la figure 5.1. La figure 5.2,



Degré de liberté Lagrangien DG ($\gamma_{(k)}$) $\rightarrow \bullet \bullet \leftarrow$ Stencil d'interpolation

FIGURE 5.2 – Stencils d'interpolation des valeurs DF, pour $n = 2 \dots 5$, et un $\gamma_{(k)}$ fixé.

quant à elle, représente des stencils d'interpolation de $\mathcal{L}_n^{\gamma_{(k)}}$ valides au sens des contraintes décrites ci-dessus, pour un $\gamma_{(k)}$ fixé et $n = 2 \dots 5$. On note en particulier qu'aucun des points du stencil ne se trouve par delà la frontière physique du domaine DF, représentée en gras.

Algorithme

En définitive, on peut formaliser l'algorithme de couplage comme suit.

-	Domaine DG	Domaine DF
Extension	$[0, 1] \times [0, 1]$	$[1, 2] \times [0, 1]$
Nombre de mailles	3638	40000
Ordre du schéma	\mathcal{P}^1	6
Degrés de liberté de couplage	100	1000

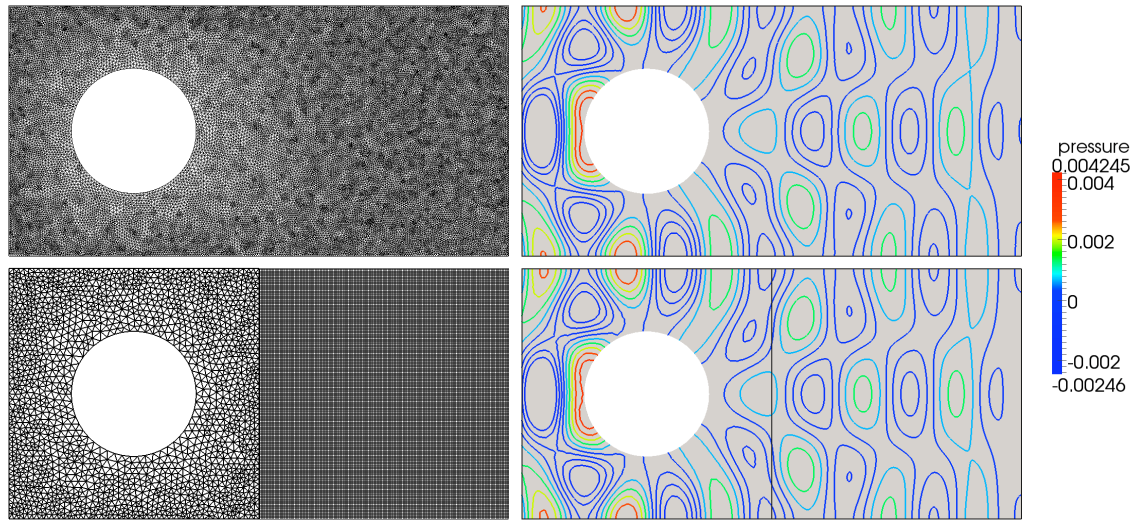
TABLE 5.1 – Paramètres du calcul

- **Étape 0** : Pré-traitement géométrique. Pour chaque point fantôme $\gamma_{(i,j)}$ de la grille DF appartenant au maillage DG, le solveur DG identifie une cellule ω_m telle que $\gamma_{(i,j)} \in \omega_m$. Pour chaque degré de liberté Lagrangien $\gamma_{(k)}$ à la frontière de couplage Γ_c du domaine DG, le solveur DF identifie le stencil d’interpolation de Lagrange en tenant compte des contraintes définies ci dessus.
- **Étape 1** : Début d’une sous-itération de RK. Le solveur DG calcule des valeurs interpolées pour chaque $\gamma_{(i,j)} : \mathbf{u}_{\gamma_{(i,j)}}^{DF} = \sum_{k=1}^{N_{\omega_m}} \mathbf{u}_{(k,m)}^{DG} \varphi_k^m(x_i, y_j)$. Le solveur DF calcule les interpolations de Lagrange pour chaque $\gamma_{(k)} : \mathbf{u}_{\gamma_{(k)}}^{DG} = \mathcal{I}_n^{\gamma_{(k)}}(\mathbf{u}^{DF})$, où $\mathcal{I}_n^{\gamma_{(k)}}$ est donné par (5.8).
- **Étape 2** : Les champs de valeurs $\mathbf{u}_{\gamma_{(i,j)}}^{DF}$ et $\mathbf{u}_{\gamma_{(k)}}^{DG}$ sont échangés au travers de messages MPI.
- **Étape 3** : **Si** la sous-itération du schéma RK est la première, le filtre des hautes fréquences spatiales DF est appliqué dans l’intégralité du domaine DF. **Sinon**, on passe à l’étape 4.
- **Étape 4** : Le solveur DF applique les stencils de différenciation partout. Le solveur DG calcule les gradients.
- **Étape 5** : La nouvelle sous-étape de RK est calculée simultanément par les deux solveurs.
- **Étape 6** : Retour à l’étape 1, N_{RK} fois.

5.1.2 Une première illustration

Dans un premier temps, on se propose d’appliquer l’algorithme de couplage introduit ci-dessus à un cas bidimensionnel simple. Ce calcul n’a pas tant pour but d’évaluer avec précision le comportement de la solution, que de fournir une première illustration des possibilités du couplage DG/DF.

Ainsi, on s’intéresse à la propagation d’un mode acoustique autour d’un obstacle de frontière circulaire. La figure 5.3 présente la configuration géométrique du problème ainsi que le maillage retenu. Le cas-test consiste à introduire de manière faible via des flux une onde acoustique à la frontière gauche du maillage DG et d’en étudier la propagation dans le reste du domaine ; aussi, ce dernier est-il partitionné par un sous-domaine DG d’extension $[0, 1] \times [0, 1]$ et un sous-domaine DF d’extension $[1, 2] \times [0, 1]$. Les frontières haute et basse sont munies de conditions aux limites de type paroi rigide. La frontière DF droite est quant-à-elle munie d’une condition de non-réflexion. Il convient de remarquer que, dans une première approche, le sous-domaine DF bénéficie d’une discrétisation beaucoup



haut : calcul DG de référence
bas : calcul couplé sur un maillage plus grossier

FIGURE 5.3 – Comparaison entre un calcul de propagation DG (de référence) et couplé (recouvrement minimal entre les domaines). Propagation d’une onde acoustique imposée à la frontière gauche par un obstacle circulaire

plus précise¹ que le sous-domaine DG, de manière à favoriser la bonne prise en compte des informations provenant de l’amont de la zone de couplage (par rapport au sens de propagation des ondes). De plus, on note que l’avancée en temps est réalisée par un schéma RK4, et que l’on utilise un interpolateur de Lagrange d’ordre 1. La comparaison à un temps final fixé entre la solution issue du schéma couplé et une solution de référence issue d’un calcul DG \mathcal{P}^3 sur un maillage plus fin témoigne du bon comportement de l’hybridation des schémas. En effet, les deux champs solutions sont, du moins visuellement, en très bon accord.

Si ce résultat est encourageant (tout en permettant de valider le cadre algorithmique et informatique), il ne peut prétendre conclure sur la viabilité d’un tel couplage. Il s’agit, en effet, d’évaluer tant son ordre de convergence en maillage que sa stabilité. C’est l’objet des sections qui suivent.

5.1.3 Validation en termes de précision

Une première étape dans la validation du couplage présenté dans ce qui précède consiste à vérifier numériquement s’il permet de conserver l’ordre de convergence en maillage des schémas DG et DF autonomes. Afin d’y parvenir, on se place à nouveau dans le cadre du cas-test des modes propres de cavité, en l’absence d’obstacle, présenté au Chapitre 2. Ce cadre est particulièrement adapté à l’étude de la précision du solveur hybride puisqu’il a permis de valider les solveurs indépendants. Ceci fournit naturellement une base de comparaison utile. Plus précisément, on considère deux domaines, Ω_{DG} et Ω_{DF} , de taille 1×1 , fixée pour le reste de cette étude. Une première étape consiste à construire le domaine de calcul global en imposant un recouvrement minimal entre Ω_{DG}

1. Le raffinement de la grille cartésienne représente environ 80 degrés de liberté par longueur d’onde.

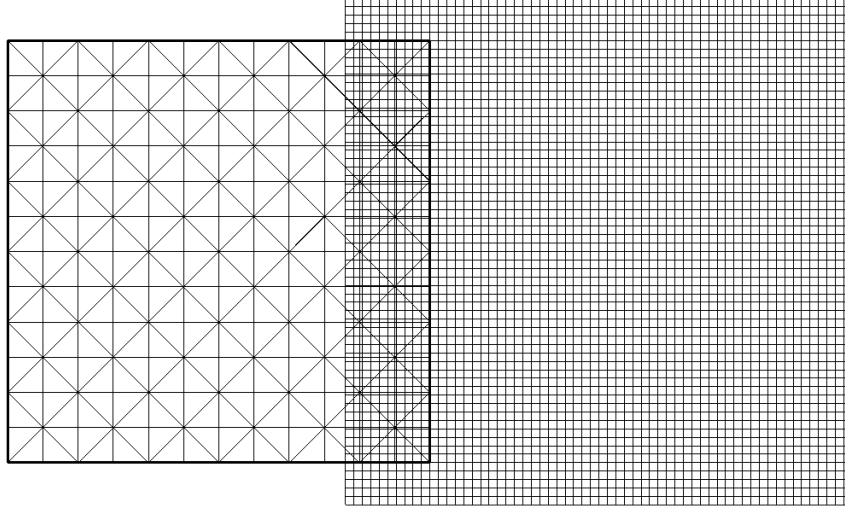


FIGURE 5.4 – Configuration géométrique des maillages DF et DG en vue des évaluations d’erreur dans le cas de modes propres de cavité

et Ω_{DF} . L’extension de ce dernier dépend, comme évoqué dans la section qui précède, de la taille du plus gros stencil de $\mathcal{I}_n^{\gamma(k)}$ que l’on souhaite mettre en œuvre. Elle est définie par n , et par la plus grosse taille de maille DF que l’on prévoit d’utiliser à l’occasion de ces expériences numériques. Si l’on note ϵ l’extension du recouvrement selon l’axe x (distance entre les frontières de couplage DF et DG) ainsi défini, le domaine de calcul global, donné par :

$$\Omega = \Omega_{DG} \cup \Omega_{DF},$$

a pour extension $\Omega = [0, 2 - \epsilon] \times [0, 1]$. On note qu’ainsi, au cours des raffinements successifs, la définition de Ω reste inchangée. Seul le nombre de nœuds DF compris dans le recouvrement varie. Dans la pratique, on fixe la valeur de ϵ à 0.1. Ainsi, $\Omega = [0, 1.9] \times [0, 1]$.

On choisit de simuler l’évolution du mode défini par $(n_x = 26, n_y = 13)$ au cours d’une période d’oscillation, puis d’évaluer les erreurs propres à chaque sous-domaine prises en norme L^1, L^2, L^∞ , moyennées en temps. Ici encore, le sous-domaine Ω_{DG} fait l’objet de maillages triangulaires de type union-jack. La figure 5.4 représente la configuration géométrique des maillages dans ce cas-test. Notons qu’on y a représenté l’intégralité des points fantômes DF.

Le tableau 5.2 présente les erreurs et ordres de convergence en maillage mesurés au cours de raffinements conjoints et successifs des maillages DG et DF. Le premier cas a consisté à coupler un schéma DG \mathcal{P}^3 , attendu d’ordre 4, à un schéma DF d’ordre 4. De plus, les deux sous-domaines sont munis du schéma RK4. On note que les raffinements relatifs des maillages DG et DF sont choisis de façon à obtenir une densité de degrés de liberté à peu près équivalente de part et d’autre de la frontière de couplage. Enfin, précisons que l’on a mis en œuvre l’interpolateur de Lagrange d’ordre 4, $\mathcal{I}_4^{\gamma(k)}$, en chaque $\gamma(k)$. Ces résultats montrent que les conditions et l’algorithme de couplage formulés plus haut permettent de préserver, du moins globalement, l’ordre de convergence en maillage des schémas individuels. S’il n’est pas absolument pertinent de comparer les niveaux d’erreurs avec 2.4 et 2.6, du fait que le nombre de degrés de liberté par longueur d’onde

Δx_{DG}	DGTD O4						FDTD O4						Δx_{FD}
	L^1		L^2		L^∞		L^1		L^2		L^∞		
1/12	8,77E-08	-	2,11E-07	-	4,53E-07	-	6,69E-08	-	8,25E-08	-	1,70E-07	-	1/50
1/24	1,69E-08	2,4	4,15E-08	2,4	1,62E-07	1,5	4,76E-09	3,8	6,02E-09	3,8	2,26E-08	2,9	1/100
1/36	4,13E-09	3,5	1,04E-08	3,4	3,64E-08	3,7	9,31E-10	4,0	1,18E-09	4,0	6,04E-09	3,3	1/150
1/48	1,30E-09	4,0	3,45E-09	3,9	1,38E-08	3,4	2,93E-10	4,0	3,71E-10	4,0	1,70E-09	4,4	1/200
1/72	2,55E-10	4,0	7,03E-10	3,9	3,25E-09	3,6	5,78E-11	4,0	7,29E-11	4,0	3,60E-10	3,8	1/300
1/96	7,96E-11	4,1	2,23E-10	4,0	1,10E-09	3,8	1,82E-11	4,0	2,28E-11	4,0	1,05E-10	4,3	1/400
Δx_{DG}	DGTD O6						FDTD O6						Δx_{FD}
	L^1		L^2		L^∞		L^1		L^2		L^∞		
1/12	3,63E-08	-	9,17E-08	-	4,35E-07	-	6,39E-09	-	8,50E-09	-	6,11E-08	-	1/75
1/24	1,32E-09	4,8	3,82E-09	4,6	2,06E-08	4,4	7,72E-11	6,4	1,55E-10	5,8	2,88E-09	4,4	1/150
1/36	1,20E-10	5,9	3,68E-10	5,8	2,32E-09	5,4	6,66E-12	6,0	1,40E-11	5,9	2,84E-10	5,7	1/225
1/48	1,79E-11	6,6	5,57E-11	6,6	3,91E-10	6,2	1,17E-12	6,0	2,40E-12	6,1	5,18E-11	5,9	1/300
1/72	1,75E-12	5,7	5,62E-12	5,7	4,31E-11	5,4	1,12E-13	5,8	2,15E-13	6,0	4,06E-12	6,3	1/450
1/96	3,30E-13	5,8	1,08E-12	5,7	9,66E-12	5,2	3,61E-14	4,0	1,21E-13	2,0	2,15E-12	0,9	1/600
Δx_{DG}	DGTD O3						FDTD O6						Δx_{FD}
	L^1		L^2		L^∞		L^1		L^2		L^∞		
1/12	9,56E-08	-	2,29E-07	-	2,99E-07	-	5,47E-08	-	6,80E-08	-	1,57E-07	-	1/50
1/24	3,71E-08	1,4	8,85E-08	1,4	2,17E-07	0,5	1,18E-09	5,5	3,43E-09	4,3	5,70E-08	1,5	1/100
1/36	1,24E-08	2,7	3,28E-08	2,4	1,30E-07	1,3	2,30E-10	4,0	1,18E-09	2,6	3,04E-08	1,6	1/150
1/48	5,58E-09	2,8	1,54E-08	2,6	6,11E-08	2,6	7,40E-11	3,9	4,65E-10	3,0	1,38E-08	2,7	1/200
1/72	1,81E-09	2,8	4,98E-09	2,8	1,83E-08	3,0	2,05E-11	3,2	1,39E-10	3,0	4,17E-09	2,9	1/300
1/96	7,64E-10	3,0	2,15E-09	2,9	8,20E-09	2,8	7,48E-12	3,5	5,21E-11	3,5	1,41E-09	3,8	1/400

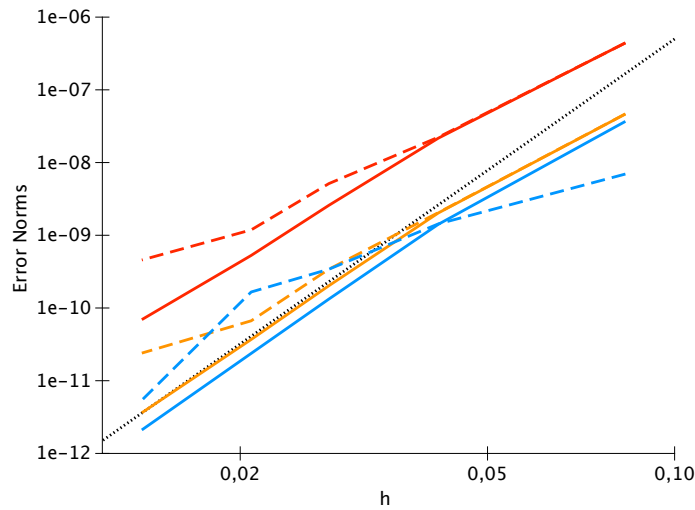
 TABLE 5.2 – Solveur hybride en recouvrement minimal : erreurs et ordres de convergence en Δx

diffère à cause du recouvrement ϵ , il paraît plus acceptable de mettre en regard les ordres de convergence. En particulier, ces derniers montrent un certain caractère fluctuant à l'occasion des calculs couplés, plus spécialement dans le cas de l'erreur L^∞ . La différence de comportement entre cette dernière et les erreurs L^1 , L^2 , indique la présence de phénomènes parasites très localisés. S'il semble que ces problèmes locaux sont liés à la configuration géométrique des degrés de liberté de couplage dans le voisinage de la frontière de raccord (qui varie naturellement avec les raffinements successifs), ces phénomènes restent difficiles à examiner en vue de statuer sur leur cause avec précision. L'amplitude de ces parasites reste acceptable et ne semble pas pour autant détériorer la convergence globale du solveur hybride.

Dans le second cas, on a évalué la convergence d'un couplage entre un schéma DG \mathcal{P}^5 , d'ordre 6, et un schéma DF d'ordre 6. On choisit également un schéma d'avancée en temps d'ordre 6 ainsi que l'interpolateur de Lagrange $\mathcal{I}_6^{\gamma(k)}$. Les résultats sont pareillement satisfaisants, et les conclusions semblables. On note que la perte de convergence pour les raffinements extrêmes dans le sous-domaine DF se produit également dans le cas d'une résolution DF autonome (c.f. tableau 2.4). Elle peut être liée à un niveau d'erreur proche de la précision machine.

Enfin, nous nous sommes intéressés au comportement de l'erreur dans le cas de l'hybridation de schémas d'ordres en espace différents. Il s'agit d'un schéma DG \mathcal{P}^2 d'ordre 3, d'un schéma DF d'ordre 6 muni de l'interpolateur de Lagrange $\mathcal{I}_3^{\gamma(k)}$. L'avancée en temps est réalisée grâce à un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. L'idée de vouloir coupler des schémas d'ordres différents trouve une justification pratique, en particulier dans le cas de la prise en compte d'obstacles à géométrie curviligne. Considérons que l'on ne dispose pas d'un solveur DG qui donnerait ni la possibilité de traiter des mailles triangulaires à frontière courbe, ni d'appliquer un ordre polynômial local. La stratégie de maillage la

plus adéquate consiste alors à discrétiser finement la frontière avec des éléments de bord linéaires (approcher la géométrie à l'ordre 1), et à utiliser un ordre polynômial faible, pour des raisons de coût. Le contenu des résultats est tout à fait intuitif, puisqu'on remarque, d'une part, que l'ordre dans le sous-domaine DG est conservé à 3, et d'autre part, que l'ordre dans le sous-domaine DF, théoriquement égal à 6, est nettement dégradé (surtout en norme L^∞ , car cette dernière porte l'influence directe de la précision du schéma DF). Toutefois, ce dernier reste proche de 3. En définitive, l'ordre du solveur le plus faible finit par dominer dans l'intégralité du domaine.



Trait plein : interpolation d'ordre 6 / Trait pointillé : interpolation d'ordre 1

Bleu : erreur L^1 / Orange : erreur L^2 / Rouge : erreur L^∞ / Noir : pente d'ordre 6 de référence

FIGURE 5.5 – Convergence de l'erreur en maillage du solveur DG dans le cas d'un couplage avec interpolations d'ordres 1 et 6 sur la grille DF

Ces évaluations d'erreur permettent également de justifier l'utilisation d'interpolations $\mathcal{I}_n^{\gamma(k)}$ d'ordre élevé. La figure 5.5 présente, sur un même graphique, les courbes de convergence de l'erreur dans le cas de calculs couplés DG/DF d'ordre 6, d'une part avec $\mathcal{I}_1^{\gamma(k)}$ et d'autre part avec $\mathcal{I}_6^{\gamma(k)}$. L'observation des courbes relatives aux erreurs L^2 et L^∞ montre clairement que l'ordre n'est pas maintenu dans le cas de l'interpolation d'ordre 1. L'erreur L^1 montre quant-à-elle un comportement assez curieux qui réside dans un net défaut de précision pour les maillages grossiers, et une convergence rapide pour les maillages les plus fins. Ceci montre, du moins dans le cas des modes propres de cavité, que l'utilisation de schémas d'interpolation d'ordre élevé est nécessaire à la préservation de l'ordre de convergence en maillage.

5.1.4 Validation en termes de stabilité

Une seconde étape dans la validation du schéma couplé consiste à étudier numériquement sa stabilité. En d'autres termes, cela revient, d'une certaine manière, à s'intéresser à la quantité d'ondes parasites générées par la frontière de raccord entre les domaines DG et DF. Rappelons qu'il s'agit également de vérifier l'intuition formalisée au chapitre précédent et aboutissant sur (3.1), selon laquelle une certaine quantité de diffusion numérique

intrinsèque aux schémas est nécessaire à l'obtention d'un schéma couplé stable.

Comme on résout ici un problème linéaire, on peut mettre le schéma hybride sous la forme d'un produit matrice-vecteur :

$$\mathbf{u}_H^{k+1} = \mathbb{M}\mathbf{u}_H^k,$$

où \mathbf{u}_H^k est un vecteur contenant l'intégralité des degrés de liberté DG et DF, au pas de temps k , et la matrice carrée \mathbb{M} rend compte de toutes les opérations sur les degrés de liberté nécessaires à avancer d'un pas de temps. Le schéma hybride est stable si le plus grand des modules des valeurs propres de \mathbb{M} reste inférieur ou égal à 1. Notons que la complexité, tant des schémas en espace (DG d'ordre élevé en maillage non structuré, DF d'ordre élevé non compactes + filtre, Runge-Kutta d'ordre élevé) que de la technique d'hybridation (interpolations Lagrangiennes sur les triangles DG et via des stencils non-compacts appliqués aux nœuds DF) ainsi que la présence de conditions aux limites impliquent que l'écriture même de \mathbb{M} n'est pas pratiquement tractable dans le cas général. A plus forte raison, l'étude théorique de son spectre en vue de conclure sur la stabilité n'y est pas envisageable.

La manière la plus pragmatique de répondre à ce problème, de façon numérique, est d'effectuer un grand nombre de pas de temps de manière à favoriser l'apparition d'instabilités en temps long, dues aux plus grandes valeurs propres de \mathbb{M} .

Pour ce faire, on se fixe un domaine de calcul hybride, DF/DG, Ω , défini comme précédemment, et muni de parois rigides. L'idée est de simuler l'évolution en temps long d'un profil initial \mathbf{u}^0 représentant un bruit blanc (de manière à exciter rapidement toutes les fréquences possibles dans la cavité). La définition de ce dernier consiste à imposer, à chaque degré de liberté du calcul :

$$\varphi_0(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \frac{\rho_1^*}{\rho_0} \end{pmatrix},$$

où ρ_1^* est tiré aléatoirement dans l'intervalle $[-1, 1]$. Le choix de conditions aux limites de type paroi-rigides associées aux équations d'Euler linéarisées sans terme source impose, qu'en théorie, l'énergie physique $\epsilon_\Omega(t=0)$ du profil initial doit être conservée indéfiniment dans le domaine de calcul global. Aussi, on propose de définir cette énergie à chaque instant par :

$$\epsilon_\Omega^k = \left\| c_0 \frac{\rho_1(k\Delta t)}{\rho_0} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

où k représente l'itération courante. La figure 5.6 représente les énergies propres aux sous-domaines distincts $\epsilon_{\Omega_{DG}}^k$, et $\epsilon_{\Omega_{DF}}^k$ pour des valeurs de k comprises entre 0 et 10^6 , dans le cadre de calculs couplés DG \mathcal{P}^3 sur un maillage union-jack comptant 12 éléments par frontière / DF d'ordre 4 sur une grille cartésienne 100×100 . Les ordres de l'avancée en temps et de l'interpolateur de Lagrange sont fixés à 4. Plus précisément, ces expériences numériques consistent en une étude paramétrique de l'influence du coefficient $\alpha \in]0, 1]$

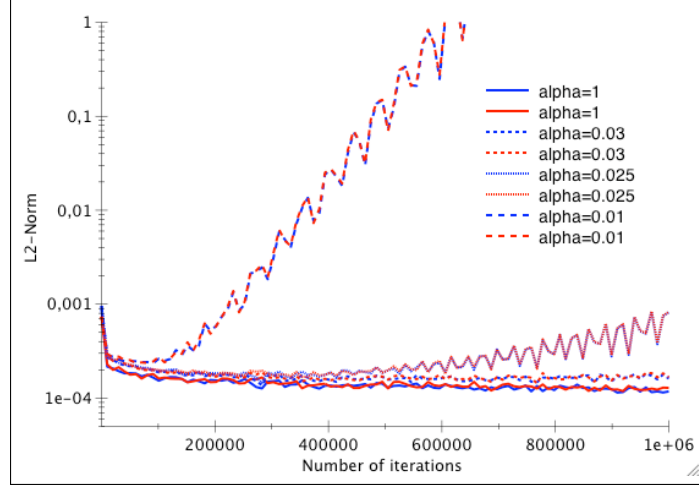


FIGURE 5.6 – Norme L^2 du champ solution (densité), $\epsilon_{\Omega_{DG}}^k$, et $\epsilon_{\Omega_{DF}}^k$, en fonction du nombre d'itérations / 1 point sur 10000

pilotant le décentrement du flux numérique DG :

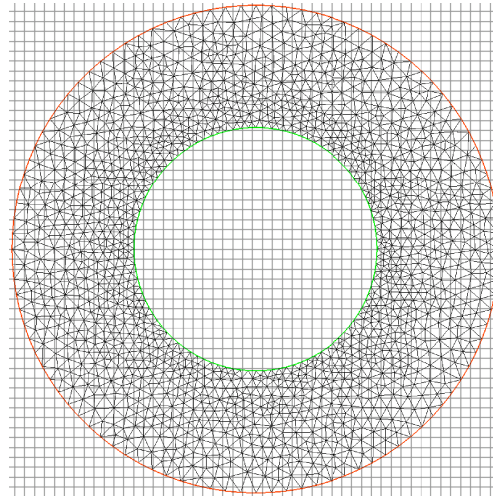
$$\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(\mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} + \alpha \lambda (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)) .$$

Rappelons que plus α est proche de 0, plus le schéma est centré et moins il est diffusif (et vice-versa).

Cette famille de courbes montre, premièrement, que ce couplage est stable dans le cas du schéma DG totalement décentré ($\alpha = 1$). De plus, des calculs successifs pour des valeurs de α de plus en plus proches de 0 permettent d'identifier une valeur seuil $\alpha^* \approx 2.5 \times 10^{-2}$, en deçà de laquelle l'énergie dans le domaine Ω n'est plus contrôlée, et croît indéfiniment². Ceci confirme la présence d'ondes parasites générées par le processus de couplage d'une part, et indique que la diffusion numérique intrinsèque aux schémas permet de les contrôler d'autre part. A ce stade, quelques remarques s'imposent.

Tout d'abord on note que la quantité de diffusion numérique nécessaire à obtenir un résultat stable dans ce cas est très faible. En effet, la valeur de α^* est très inférieure à 1, la valeur utilisée en pratique dans les calculs de propagation d'ondes. De plus, l'action diffusif du flux décentré est faible car l'ordre est élevé (\mathcal{P}^3) : ceci donne des sauts inter-mailles de faible amplitude. Toutefois, il convient de mettre en évidence le caractère spécifique de cette expérience numérique. Il réside dans le choix arbitraire du grand nombre d'itérations ainsi que dans la configuration de calcul retenue (configuration des maillages, taille du domaine, ordre des schémas). Si cette démarche ne propose pas un cadre suffisant pour déterminer une valeur "absolue" de α^* , elle permet, d'une part, de mettre en évidence l'influence de la diffusion numérique sur la stabilité, et d'autre part, de conclure sur le caractère viable (en termes de stabilité) de ces couplages. Nous estimons, en effet, que ce cas est suffisamment représentatif des applications, et exigeant en terme de nombre d'itérations pour pouvoir conclure.

2. N.B. : on aura pris soin, au préalable, de s'assurer que le schéma DG \mathcal{P}^3 centré ($\alpha = 0$) + RK4 est stable, de manière autonome.



Vert : frontière de l'obstacle

Rouge : frontière de couplage DG

FIGURE 5.7 – Configuration de maillages : approche par recouvrement total

Il est toutefois légitime, dans le cadre de ce travail, de mettre en évidence les paramètres dont peut dépendre α^* . Tout d'abord, il paraît naturel que α^* soit lié à la quantité de diffusion introduite par le filtre DF, donc à son ordre. En particulier, plus l'ordre du filtre est bas, plus il diffuse : α^* est alors amené à diminuer. De plus, α^* doit dépendre, pour une discrétisation spatiale fixée, de la taille du domaine, ou, pour une taille de domaine fixée, des ordres des deux schémas ainsi que des tailles respectives des mailles DG et DF. En effet, ces paramètres jouent directement sur la quantité de diffusion dans Ω et doivent faire varier α^* en conséquence.

Ces résultats invitent à constater que les schémas d'ordre élevé utilisés en aéroacoustique numérique et mis en œuvre dans cette étude semblent, *a posteriori*, particulièrement bien adaptés à ce type de couplages, du fait de leur caractère diffusif. En outre, il semble que cette stratégie de couplage non-conforme ne soit pas viable dans le cas de schémas centrés en espace et en temps tels que ceux couramment utilisés en électromagnétisme, conçus pour préserver exactement l'énergie de la solution. Ceci est compatible avec les résultats des travaux passés dans ce domaine, cités à l'occasion du Chapitre 2, pour lesquels l'approche est, contrairement à cette étude, fondée sur la conformité des degrés de liberté.

Enfin, des calculs additionnels dans ce cadre ont permis de montrer que l'on obtient effectivement des résultats instables en temps longs :

- si l'ordre de $\mathcal{I}_n^{\gamma(k)}$ dépasse l'ordre des schémas,
- ou si la taille du recouvrement ne satisfait pas aux critères a priori, présentés dans la section 4.1.

5.2 Algorithme en recouvrement total

5.2.1 Motivation et approche

Dans le but de permettre des calculs couplés sujets à des contraintes moins restrictives sur la stratégie de maillage à la frontière que celles suggérées par l'approche de la figure 5.1, on se propose d'étendre la stratégie précédente au cas de maillages intégralement recouvrants. Une telle situation est illustrée dans la figure 5.7. Cette dernière représente un obstacle circulaire, de frontière verte, dont le voisinage est discrétisé par un maillage non structuré. On note que l'intégralité de ce maillage DG est plongé dans une grille de fond cartésienne. Remarquons que si, pour des raisons de simplicité d'illustration et pour fixer les idées, on a représenté ici un obstacle et une frontière extérieure DG circulaires, on ne fait a priori aucune hypothèse sur la topologie de ces bords. Ceci doit permettre une certaine flexibilité d'utilisation. En vue d'applications, un autre avantage de cette approche géométrique est qu'elle permet de prendre en compte simplement un nombre arbitraire d'obstacles complexes, éloignés les uns des autres, en les connectant acoustiquement entre eux par une grille de fond cartésienne commune.

Nous parlons ici d'extension de l'approche précédente à de tels types de configurations géométriques, pourtant différentes par nature. Ceci est notamment permis par le fait que la stratégie initiale est basée sur la non-conformité des degrés de liberté. D'autre part, la procédure de couplage décrite précédemment est compatible avec de tels cas, du fait de sa dissymétrie en un certain sens. Premièrement, il est en effet toujours possible de prendre en compte la contribution du domaine DF au sous-domaine DG en tant que condition aux limites à sa frontière extérieure (surlignée en rouge sur l'exemple de la figure 5.7). Deuxièmement, il s'agit de transposer la notion de "points-fantômes" (traditionnellement utilisés de manière à imposer des conditions aux limites), de la frontière du domaine DF à l'intérieur de ce dernier. En réalité cela ne pose pas de difficulté particulière, compte tenu du fait que le concept de points fantômes peut être simplement vu comme un prolongement fictif du domaine de calcul DF, comme on l'a évoqué auparavant.

En définitive, la difficulté ne réside pas tant dans la nécessité de repenser une méthode de couplage à proprement parler. La majeure partie du travail consiste plutôt à généraliser à ce nouveau cadre les contraintes sur le recouvrement des sous-domaines formulés dans la section précédente. De manière pratique, on verra dans la suite en quoi cela consiste dans la formulation et la mise en œuvre d'un pré-traitement adéquat.

5.2.2 Pré-traitement géométrique

Pour fixer les idées, considérons à nouveau la configuration de maillages suggérée par la figure 5.7. Si l'on souhaite appliquer la même stratégie d'échange d'informations qu'auparavant, il convient de discriminer plusieurs ensembles de nœuds du maillage cartésien, selon leur situation géométrique et leur rôle attendu dans le calcul. Ainsi, considérons :

- $\mathcal{N}_{DF}^{\varphi}$, l'ensemble des points DF qui se situent à l'extérieur de tout domaine DG et de tout obstacle. Ces derniers doivent porter une solution physiquement valide, éventuellement calculée en partie à partir de valeurs fournies volumiquement par un sous-domaine DG.

- $\mathcal{N}_{DF}^{\bar{\varphi}}$, l'ensemble des points DF qui se situent à l'extérieur de tout domaine DG et n'appartiennent pas à $\mathcal{N}_{DF}^{\varphi}$: ils se trouvent à l'intérieur des obstacles et portent une solution qui ne doit pas être prise en compte.
- $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$, l'ensemble des points DF qui doivent contribuer à l'application de $\mathcal{I}_n^{\gamma(k)}$.
- $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$, l'ensemble des points DF dont la valeur est fournie par le champ solution du sous-domaine DG auquel ils appartiennent.
- \mathcal{N}_{DF}^T , l'ensemble des points DF appartenant à un sous-domaine DG, au voisinage des obstacles et qui portent, de fait, des valeurs non physiques.

La première contrainte consiste à imposer l'utilisation d'interpolateurs de Lagrange dont les stencils, appliqués aux points DF, sont centrés sur les $\gamma(k)$ de la frontière extérieure DG. La détermination de ces stencils, dont l'union forme $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$, utilise le même critère que précédemment. La seconde contrainte consiste à imposer que

$$\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}} \cap \mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}} = \emptyset,$$

de manière à ce qu'aucun point de $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$ ne porte de valeur fournie par un domaine DG. Dans une première approche, on pourrait définir $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$ en y incluant tous les points de la grille DF qui appartiennent à un domaine DG, mais pas à $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$. Ceci mènerait à des calculs très coûteux, particulièrement lors de l'extension de ces techniques en 3D. On se propose donc de définir $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$, préalablement au calcul, de la manière suivante :

- on parcourt les points de $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$,
- on applique virtuellement, à chacun d'eux, le stencil DF le plus grand (en pratique, le filtre),
- on sélectionne tous les points qui participent à ce stencil, qui appartiennent à un sous-domaine DG, mais pas à $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$.

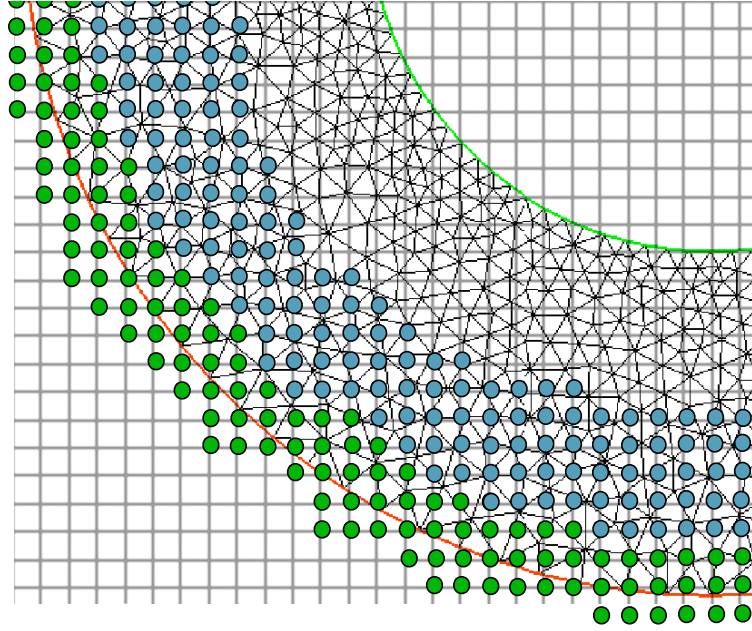
L'union de ces derniers définit complètement $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$. On note que, lors de la troisième étape, si au moins un des points du stencil appartient à $\mathcal{N}_{DF}^{\bar{\varphi}}$, alors "l'épaisseur" du maillage DG autour de l'obstacle n'est pas suffisante. Si l'on souhaite déterminer les $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$ selon les contraintes qui précèdent, une condition suffisante pour obtenir un recouvrement valide consiste à imposer une distance d_R entre la frontière de l'obstacle et la frontière de couplage égale à

$$d_R = \sqrt{2}\Delta x_{DF} (n_f + n_l),$$

où $\sqrt{2}\Delta x_{DF}$ représente la diagonale d'une maille cartésienne, n_f la taille du demi stencil DF le plus grand (filtre), et n_l le nombre de points, dans une direction donnée, sur lesquels on réalise des interpolations de Lagrange³. La figure 5.8 représente, dans le cas d'un recouvrement valide, les ensembles de points $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$ sélectionnés à partir d'une telle procédure. Dans cette illustration, les $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$ représentent les points nécessaires à l'application d'interpolateurs de Lagrange centrés d'ordre 2. Les $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$ permettent d'appliquer un filtre d'ordre 10 à l'intégralité des $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$.

Afin de préserver les propriétés vectorielles du calcul, il est préférable de ne pas briser les boucles de parcours de la grille cartésienne, nécessaires à l'applications des stencils. Aussi, on fait le choix d'appliquer le schéma DF en espace sur tous les points du maillage DF, y compris $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$, \mathcal{N}_{DF}^T et $\mathcal{N}_{DF}^{\bar{\varphi}}$. Tous ces points sont, de fait, amenés à prendre des

3. On note qu'aucune des contraintes formulées jusqu'à présent ne fait d'hypothèse sur la topologie de la frontière de couplage.



Frontière rouge : frontière de couplage DG

Frontière verte : paroi d'un obstacle

$$\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}} \longrightarrow \bullet \leftarrow \mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$$

FIGURE 5.8 – Maillages totalement recouvrants

valeurs non-physiques au cours du calcul. Cependant, on note que le fait que les $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{C}}$ sont mis à jour à chaque sous itération du schéma RK garantit que ni les $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$, $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{P}}$ ne s'en trouvent affectés.

Finalement, dans cette approche, l'algorithme de couplage à proprement parler est équivalent à celui de la section 5.1.1. Seule l'étape **0** est modifiée et consiste en la procédure d'identification des points décrite dans ce qui précède. On y revient dans l'annexe A.

5.2.3 Validation en terme de précision

Tout comme dans le cas de l'hybridation en recouvrement minimal, on se propose d'étudier l'ordre de convergence en maillage du schéma couplé dans cette approche en s'appuyant sur la simulation de modes propres de cavités. La configuration de calcul retenue est la suivante. On définit un domaine de calcul DF Ω_{DF} , d'extension $[0, 1] \times [0, 1]$, dans lequel est intégralement plongé un domaine DG Ω_{DG} qui, pour l'occasion, ne prend pas d'obstacle en compte. La géométrie de la frontière de couplage de ce dernier consiste en une approximation grossière (et quelconque) d'un cercle de centre $(0.5, 0.5)$ et de diamètre 0.5. Nous contrôlons le pas de raffinement du domaine DG malgré le caractère non-structuré de son maillage (afin de pouvoir calculer une pente de convergence des erreurs) en réalisant successivement une découpe en 4 de chaque triangle, à partir de la triangulation la plus grossière. Cela revient à diviser le pas d'espace par 2, de manière homogène. La figure 5.9 illustre ce procédé en représentant deux raffinements successifs de Ω_{DG} et Ω_{DF} .

On choisit de simuler l'évolution, sur une période, du mode $(n_x = 11, n_y = 11)$ dans

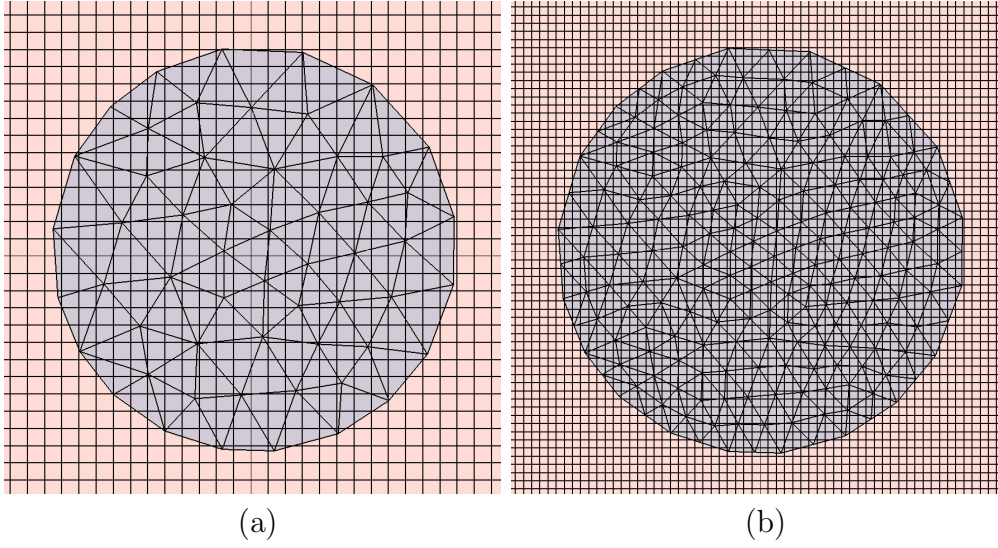


FIGURE 5.9 – Maillages totalement recouvrants, sans prise en compte d'obstacles

Δx_{DG}	DGTD $\mathcal{O}4$						FDTD $\mathcal{O}4$						Δx_{FD}
	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	
h	7,82E-09	-	4,42E-08	-	2,89E-07	-	4,46E-08	-	5,66E-08	-	1,40E-07	-	1/50
$h/2$	1,37E-10	5,8	1,02E-09	5,4	1,59E-08	4,2	2,39E-09	4,2	3,15E-09	4,2	7,82E-09	4,2	1/100
$h/4$	4,34E-11	1,7	2,85E-10	1,8	4,47E-09	1,8	1,63E-10	3,9	2,16E-10	3,9	1,40E-09	2,5	1/200
$h/8$	2,77E-12	4,0	1,90E-11	3,9	3,20E-10	3,8	1,01E-11	4,0	1,35E-11	4,0	1,18E-10	3,6	1/400
Δx_{DG}	DGTD $\mathcal{O}6$						FDTD $\mathcal{O}6$						Δx_{FD}
	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	
h	1,74E-09	-	1,37E-08	-	1,18E-07	-	4,30E-08	-	5,45E-08	-	1,14E-07	-	1/50
$h/2$	2,02E-11	6,4	1,59E-10	6,4	4,21E-09	4,8	3,25E-10	7,0	4,25E-10	7,0	1,14E-09	6,6	1/100
$h/4$	3,22E-13	6,0	2,83E-12	5,8	9,23E-11	5,5	3,95E-12	6,4	5,26E-12	6,3	2,02E-11	5,8	1/200
$h/8$	7,43E-15	5,4	9,08E-14	5,8	3,22E-12	4,8	8,20E-14	5,6	1,38E-13	5,3	1,48E-12	3,8	1/400
Δx_{DG}	DGTD $\mathcal{O}3$						FDTD $\mathcal{O}6$						Δx_{FD}
	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	L^1	L^2	L^∞	
h	1,34E-08	-	7,24E-08	-	3,36E-07	-	3,86E-08	-	5,38E-08	-	2,68E-07	-	1/50
$h/2$	2,72E-09	2,3	1,63E-08	2,2	1,59E-07	1,1	2,92E-09	3,7	7,40E-09	2,9	7,95E-08	1,8	1/100
$h/4$	3,62E-10	2,9	2,29E-09	2,8	3,17E-08	2,3	3,11E-10	3,2	8,74E-10	3,1	1,65E-08	2,3	1/200
$h/8$	4,62E-11	3,0	2,99E-10	2,9	3,76E-09	3,1	3,42E-11	3,2	9,76E-11	3,2	1,92E-09	3,1	1/400

 TABLE 5.3 – Solveur hybride en recouvrement total : erreurs et ordres de convergence en Δx

Ω_{DF} . Les erreurs L^1 , L^2 , L^∞ sont mesurées comme précédemment. Toutefois, les erreurs propres à Ω_{DF} ne sont calculées que sur l'ensemble des nœuds $\mathcal{N}_{DF}^\mathcal{F}$. Le tableau 5.3 présente les erreurs et ordres de convergence mesurés dans les trois cas explorés précédemment.

Tout d'abord, le cas d'un calcul issu du couplage de méthodes d'ordre homogène, égal à 4, et muni de $\mathcal{I}_4^{\gamma(k)}$, présente des caractéristiques intéressantes. Bien que l'ordre 4 soit globalement préservé (en moyenne au cours des raffinements successifs), on note des fluctuations importantes, notamment sur les erreurs propres à Ω_{DG} . Ceci semble mettre en évidence l'influence de la situation géométrique relative des mailles et degrés de liberté DG et DF dans la zone d'échange. Plus précisément, cela suggère, pour un ordre fixé, qu'il existe des configurations de maillages à l'interface plus favorables que d'autres en terme d'erreur. Par ailleurs, on remarque, comme dans le cas précédent, que l'on obtient une convergence moindre dans le cas de l'erreur L^∞ , ce qui traduit ici encore la présence de phénomènes parasites très localisés. Le cas du couplage de schémas d'ordre 6 présente

des résultats similaires, quoique plus satisfaisants en terme de régularité de la convergence. Enfin, le cas d'un couplage de schémas d'ordres hétérogènes montre là encore, que l'ordre le moins élevé est préservé et s'applique dans l'ensemble de Ω_{DF} .

Ces résultats sont satisfaisants, au sens où ils permettent de vérifier que l'extension de la technique de couplage initiale à des maillages entièrement recouvrants permet de préserver globalement le caractère convergent du tableau 5.2.

5.2.4 Validation en terme de stabilité

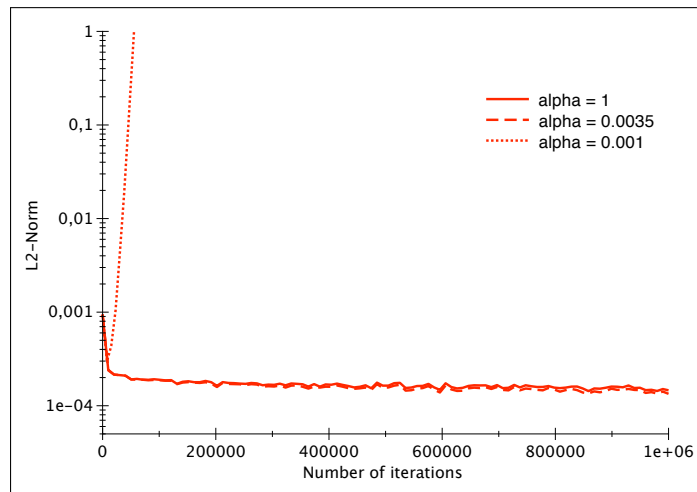


FIGURE 5.10 – Norme L^2 du champ solution (densité) $\epsilon_{\Omega_{DF}}^k$, en fonction du nombre d'itérations / 1 point sur 1000

Il convient également de vérifier que la procédure de couplage en maillages totalement recouvrants mène également à un schéma hybride stable, pour des schémas suffisamment diffusifs. Comme précédemment, on simule, pour plusieurs valeurs du coefficient α de décentrement DG, l'évolution d'un bruit blanc sur 10^6 itérations dans Ω_{DF} défini plus haut. La figure 5.10 présente ces résultats dans le cas de la configuration de maillages (b) de la figure 5.9. Dans celle-ci, le maillage DG est constitué de 364 éléments triangulaires et sa frontière de couplage comporte 38 faces. La grille de fond cartésienne comporte quant à elle 100×100 mailles. De plus, il s'agit d'un couplage entre méthodes d'ordres égal à 4, munies de l'interpolateur $\mathcal{I}_4^{\gamma(k)}$.

Les résultats obtenus sont conformes aux conclusions de la section 5.1.4. Toutefois, dans ce cas, on trouve une valeur de $\alpha^* = 1 \times 10^{-3}$, davantage proche de 0, et dont le caractère de seuil est nettement plus marqué. Les causes de ces différences sont assez difficiles à examiner. Cependant, si l'on considère qu'il existe des configurations de maillages défavorables en terme de présence de parasites qui génèrent des instabilités en temps longs, le cas de la section précédente peut intuitivement être perçu comme plus exigeant que celui-ci. En effet, la zone de couplage, dans le cas précédent, est fondée sur le recouvrement entre un maillage union-jack et un maillage cartésien. De fait, elle consiste en une répétition, selon l'axe y , de motifs géométriques identiques. Ceci doit avoir naturellement tendance à favoriser l'effet de situations géométriques impropres au couplage.

Cela ne pourrait pas se produire ici, car le maillage est réellement non-structuré. Une seconde approche, plus simple en vue d'expliquer une telle différence de comportement, est de constater que dans le cas précédent, le schéma DG impose sa diffusion numérique dans 50% du domaine global. Dans le cas présent, il l'impose dans environ 80% du domaine hybride. Cela permet d'intuiter une raison possible pour laquelle le contrôle du caractère stable par la diffusion numérique pilotée par α est sensiblement plus marqué dans ce cas.

5.2.5 Conclusion

Cette section a présenté l'extension du couplage DG/DF en maillage hybride introduit à la section 5.1 au cas de domaines totalement recouvrants. Si l'idée de la procédure de couplage reste identique, car fondée sur l'imposition de conditions aux limites faibles au bord des domaines DG ainsi que l'utilisation de points fantômes des domaines DF, cette stratégie est moins restrictive sur la génération des maillages. Le prix de cette flexibilité réside dans un pré-traitement adéquat consistant à identifier les points de couplage DF⁴, sous certaines contraintes portant sur l'épaisseur des domaines non-structurés autour des obstacles. Par ailleurs, les expériences numériques visant à caractériser la précision et la stabilité de cette technique ont montré des résultats tout à fait satisfaisants, similaires à la technique par recouvrement minimal.

Il est important de remarquer que si l'approche par recouvrement total est moins exigeante en termes de génération de maillages, elle est également plus légère en termes de mise en œuvre informatique. Elle permet en effet, pour un problème physique dans un domaine fixé, de minimiser le nombre de couplages (au sens informatique) à proprement parler. À l'inverse, le couplage par recouvrement minimal impose de définir une multitude de "patches" DF, autour d'un domaine DG, non-structuré, dont les frontières sont parallèles aux lignes de maillage de la grille cartésienne. Ceci implique donc de coupler informatiquement une multitude d'instances du solveur DF, entre elles, et avec le solveur DG.

Dans la section qui suit, on présente des applications du schéma couplé à des cas bidimensionnels qui illustrent ces aspects.

5.3 Applications bidimensionnelles

5.3.1 Une première illustration

Afin d'illustrer l'intérêt d'une telle technique de couplage, on se propose de réaliser un calcul de propagation acoustique 2D tenant compte d'un obstacle intrinsèquement complexe dans un domaine de grande taille. Plus précisément, l'idée est de calculer la diffraction d'une source monopolaire par un obstacle de forme étoilée représenté sur la figure 5.11. Dans la pratique, on peut identifier un tel objet à une coupe 2D d'un mât pour maquettes, utilisé en soufflerie. Ces supports sont pourvus de structures géométriques en pointes. Ces dernières favorisent l'absorption d'ondes acoustiques, dans le but de minimiser le caractère intrusif du dispositif expérimental. Ici, on ne s'intéresse pas

4. On y revient plus en détail dans l'annexe A.

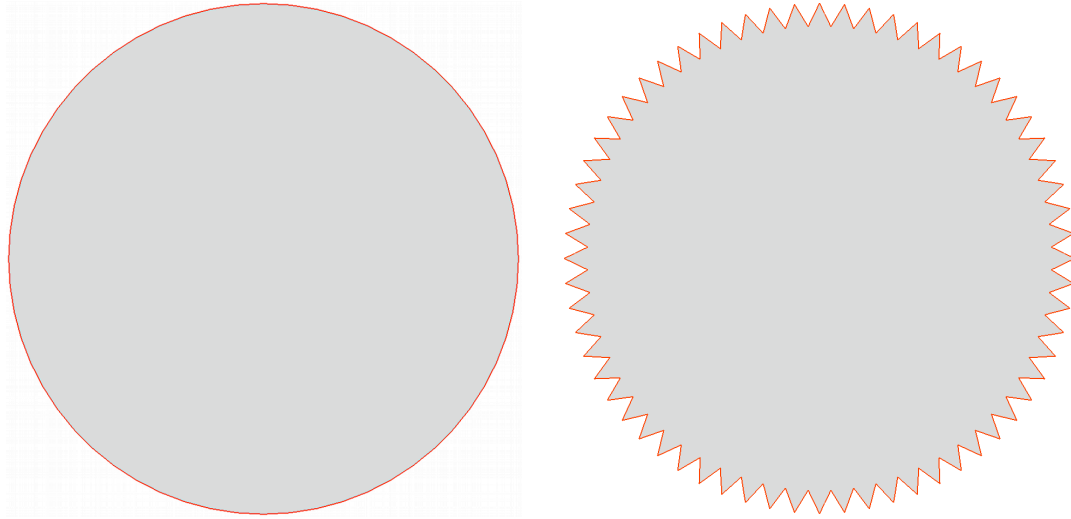


FIGURE 5.11 – Géométrie des obstacles circulaire et étoilé

tant au phénomène physique qui garantit une telle propriété : celui-ci est majoritairement contrôlé par la viscosité du fluide. On s'intéressera davantage à la réponse en diffraction d'une telle géométrie à une source harmonique. En particulier, on comparera les résultats obtenus au cas de la diffraction d'un obstacle circulaire.

Les géométries sont définies comme suit. On considère, dans un premier temps, un obstacle circulaire de rayon 1, 1. L'objet étoilé est obtenu en rognant cet obstacle, de façon à faire apparaître 64 points d'arêtes linéaires et de profondeur identique égale à 0, 1. Notons que si la prise en compte du cercle en vue de résoudre son voisinage par une méthode DF est réalisable en pratique grâce à un maillage curviligne [14], il n'en va pas de même pour l'objet en étoile. En effet, les maillages curvilignes ne présentent aucun intérêt dans ce cas et il n'existe pas, a priori, de stratégie de maillage cartésienne simple et économique d'une telle géométrie. Une manière de procéder serait, par exemple, de résoudre le voisinage de cet obstacle par une technique chimère en utilisant une grille de fond cartésienne, et un patch cartésien pour chaque pointe. Cela justifie l'utilisation d'un maillage non-structuré, qui permet de prendre en compte de manière simple et exacte une telle topologie, même avec des éléments non-curvilignes.

On se propose d'étudier la propagation d'une source monopolaire autour de ces objets, dans un domaine rectangulaire d'extension $[-9, 9] \times [-6, 6]$. La source est prise en compte en approchant les solutions des équations d'Euler linéarisées (2.4) adimensionnées (dans lesquelles on choisit $c_0 = 1$, $u_0 = v_0 = 0$),

$$\partial_t \varphi + \mathcal{A}_x \partial_x \varphi + \mathcal{A}_y \partial_y \varphi = \mathbf{S}(x, y, t),$$

auxquelles on adjoint un terme source \mathbf{S} donné par :

$$\mathbf{S}(x, y, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \exp(-\gamma((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)) \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Dans cette expression $x_0 = -4.5$, $y_0 = 0$, $\gamma \simeq 200$ et $\omega = 6\pi$. On choisit de discrétiser l'intégralité du domaine de calcul par une grille cartésienne munie de 600×400 mailles,

-	Cercle	Etoile	Grille Cartésienne
Nombre de mailles	986	4013	240000
Éléments de frontière extérieure	75	130	-
Éléments de frontière intérieure	75	256	-
Ordre du schéma	\mathcal{P}^3	\mathcal{P}^2	6
Δt intrinsèque	3.4×10^{-3}	2.7×10^{-3}	2.1×10^{-1}

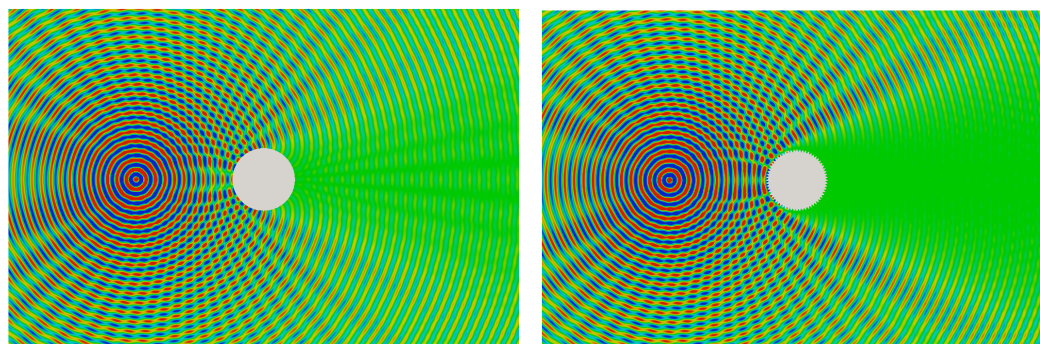
TABLE 5.4 – Paramètres du calcul

ce qui correspond à environ 11 degrés de liberté par longueur d'onde dans les directions x et y . On y applique un schéma DF d'ordre 6 ainsi qu'un filtrage d'ordre 10. Le voisinage des obstacles fait l'objet d'un maillage non structuré de frontière décrivant un cercle de rayon 2. Les caractéristiques de ces calculs sont résumées dans le tableau 5.4. L'avancée en temps est identique à tous les sous-domaines et réalisée par un schéma RK d'ordre 4 muni d'un pas de temps $\Delta t = 3.4 \times 10^{-3}$ dans le cas du cercle et $\Delta t = 2.7 \times 10^{-3}$ dans le cas de l'étoile. Ces choix correspondent respectivement à environ 98 et 123 pas de temps par période d'oscillation de la source. Enfin, notons que l'on utilise un interpolateur de Lagrange d'ordre 2 en vue de construire des valeurs du champ DF aux points de Lagrange des frontières extérieures DG. La figure 5.12 présente les résultats de ces calculs, une fois la convergence harmonique atteinte dans l'ensemble du domaine, après 15000 itérations. Ainsi a-t-on représenté dans les deux cas, un champ de densité instantané ainsi qu'un champ de pression RMS dans l'ensemble du domaine, puis un zoom de cette dernière dans le proche voisinage de l'obstacle. On rappelle que la pression RMS est définie en tout point de coordonnées (x, y) du domaine de calcul par :

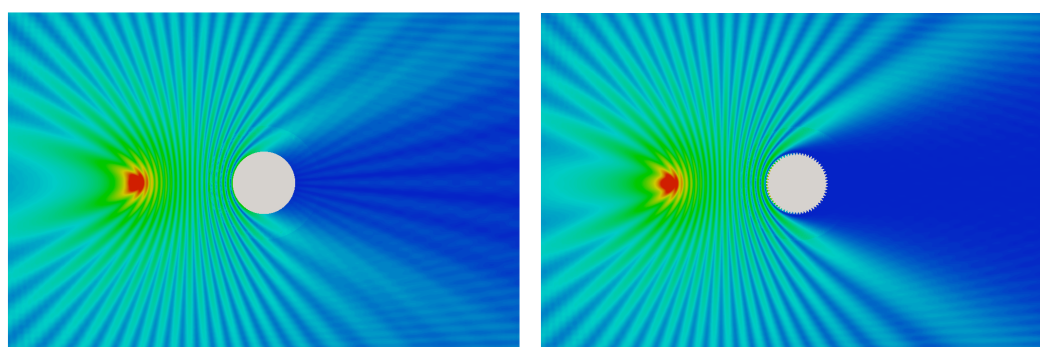
$$p_1^{\text{RMS}}(x, y) = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p_1(x, y, \tau)^2 d\tau \right)^{1/2},$$

où T est la période d'oscillation du mode, t_0 un temps fixé pour lequel la convergence harmonique est atteinte en tout point de l'espace et $p_1(x, y, t) = c_0^2 \rho_1(x, y, t)$ dans le cas général.

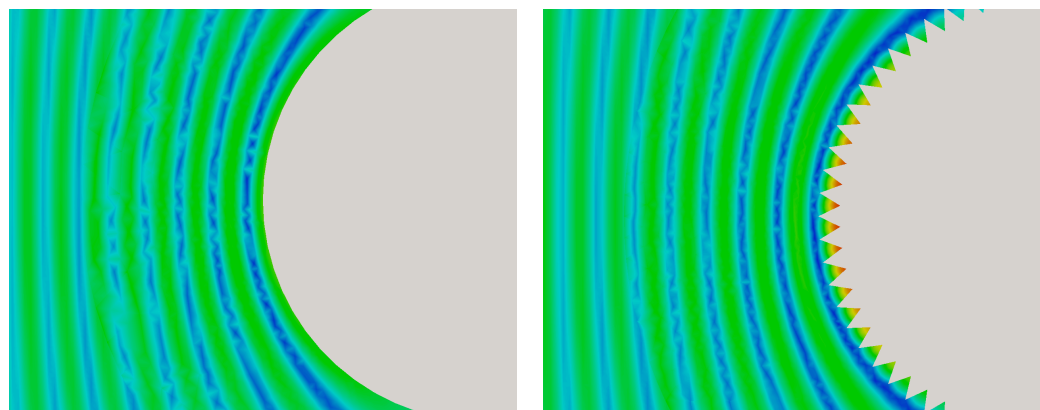
Si le comportement acoustique paraît similaire dans l'intégralité du domaine à première vue, un examen attentif montre une légère différence de niveau ainsi que de directivité, essentiellement dans la zone en aval de l'obstacle. Plus précisément, il apparaît que les détails géométriques de l'étoile ont tendance à favoriser la réflexion des ondes acoustiques en amont, vers la source, ce qui n'est pas contre-intuitif. La figure 5.13 illustre clairement cette tendance. Elle représente des coupes 1D de p_1^{RMS} le long des frontières amont et aval du domaine DF, $x = -9$ et $x = 9$. Un détail intéressant, dans ces résultats, réside dans la vue rapprochée de la pression RMS à la paroi amont des objets diffractants. En effet, cette dernière met en lumière une concentration d'énergie dans les détails géométriques en creux à la frontière du domaine étoilé. Ce phénomène n'a naturellement aucune raison d'être dans le cas d'une frontière lisse, et ne pourrait que difficilement être capturé en maillage structuré dans le cas de l'étoile, du fait de la topologie de la paroi rigide.



Champ de densité instantané, $-5 \cdot 10^{-3} < \rho_1 < 5 \cdot 10^{-3}$



Champ de densité RMS, $0 < \rho_1^{\text{RMS}} < 5 \cdot 10^{-3}$



Zoom sur le champ de densité RMS

FIGURE 5.12 – Diffraction d'un monopôle par des obstacles circulaire et étoilé

5.3.2 Cas d'épreuve acoustique

On se propose d'appliquer l'hybridation DG/DF à un cas-test proposé à l'occasion du *Fourth Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems* [42]. Il s'agit de calculer la propagation d'une source monopolaire dans un domaine 2D contenant un fluide au repos, et d'en étudier la diffraction par plusieurs obstacles circulaires, dans un domaine virtuellement non borné. Les auteurs de cet exercice proposent deux géométries distinctes à traiter. Elles sont présentées sur la figure 5.14.

L'intérêt de ce cas académique est qu'il présente plusieurs difficultés, de natures dif-

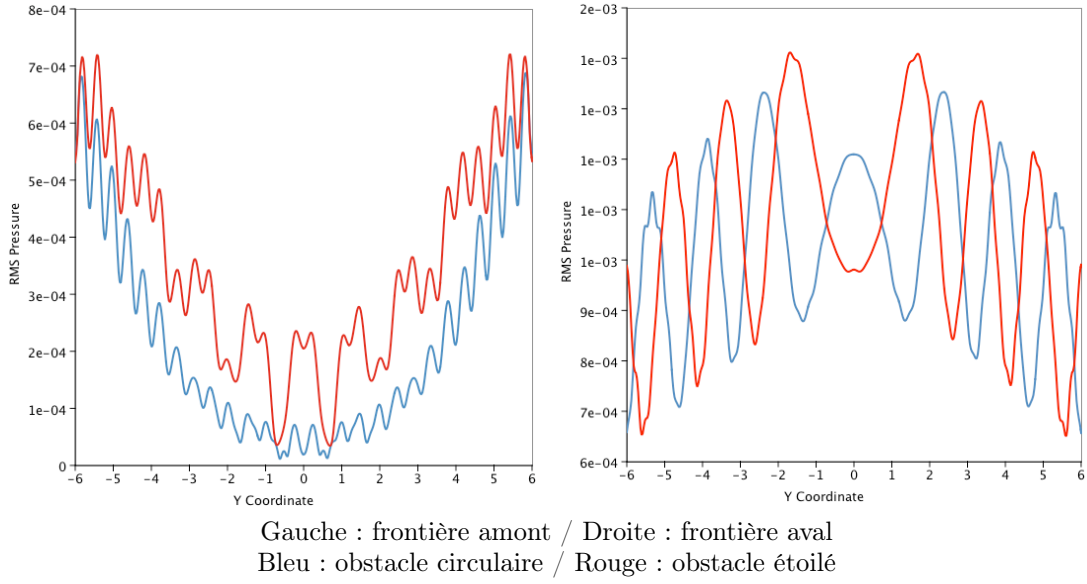


FIGURE 5.13 – Coupes 1D de la pression RMS le long des frontières amont et aval du domaine DF

férentes. La première réside dans la prise en compte conjointe de plusieurs obstacles, sensiblement éloignés les uns des autres. De plus, ces derniers sont relativement petits, tant devant la longueur d'onde imposée par la pulsation de la source que devant la taille du domaine de calcul proposé. Enfin, ce cas-test permet d'évaluer la stabilité du schéma, car il implique de réaliser un grand nombre d'itérations en vue d'atteindre un calcul harmoniquement convergé, et donc, un temps physique grand. En effet, il est demandé par les auteurs de calculer la pression RMS, le long de l'axe de symétrie du domaine (pour $x \in [-9, 9]$ dans le premier cas et $x \in [-8, 8]$ dans le second) ainsi que le long de la paroi des obstacles. Enfin, un des intérêts majeurs de ce cas d'application est qu'il existe une solution analytique des problèmes à traiter, également fournie dans [42].

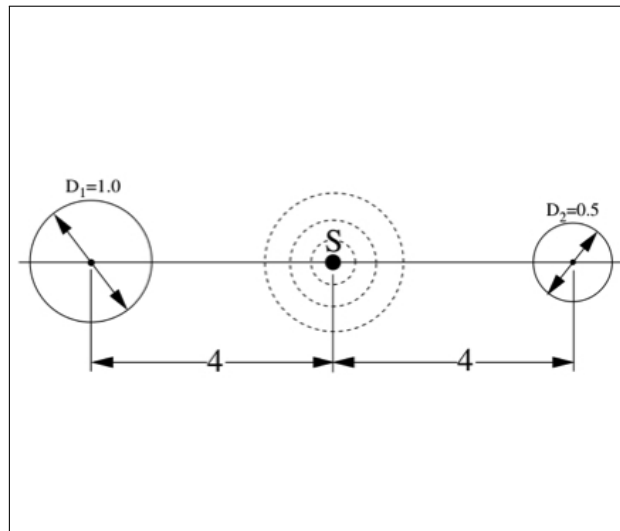
Il s'agit donc ici d'approcher les solutions des équations d'Euler linéarisées (2.4) adimensionnées (dans lesquelles on choisit $c_0 = 1$, $u_0 = v_0 = 0$), auxquelles on adjoint le terme source \mathbf{S} donné, en théorie, par :

$$\mathbf{S}(x, y, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \exp \left[-\ln(2) \left(\frac{x^2 + y^2}{b^2} \right) \right] \times \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

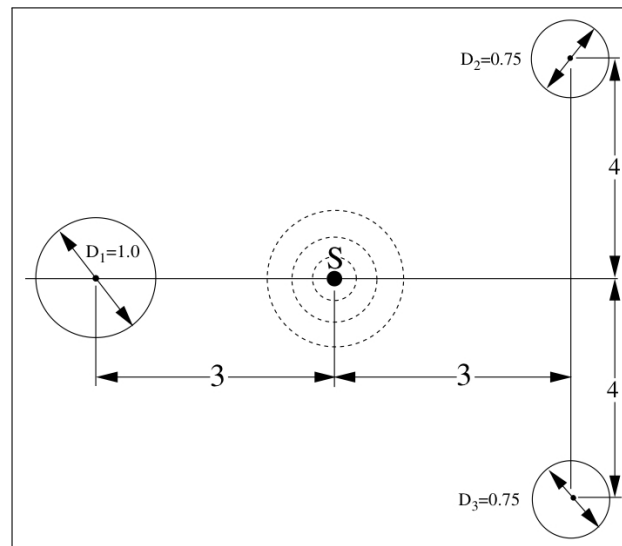
Dans cette expression, les paramètres b et ω sont respectivement fixés à 0.2 et 8π . Dans la pratique, et afin de minimiser l'apparition de parasites transitoires dus à l'activation de la source, \mathbf{S} est modulé par une rampe donnée par :

$$R(t) = \begin{cases} \sin \left(\frac{\pi ft}{2 \cdot 16} \right) & \text{si } t < \frac{16}{f}, \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{16}{f}, \end{cases}$$

où $f = \omega/2\pi$.



Cas (a)



Cas (b)

FIGURE 5.14 – Configurations géométriques des cas-tests

Afin de traiter ce cas d'épreuve, on se propose, dans un premier temps, de fixer l'extension du domaine de calcul global à :

$$\Omega = [-9, 9]^2.$$

Ses frontières sont munies de conditions aux limites non-réfléchissantes. Il convient alors de déterminer la stratégie de couplage à mettre en application. La figure 5.15 représente,

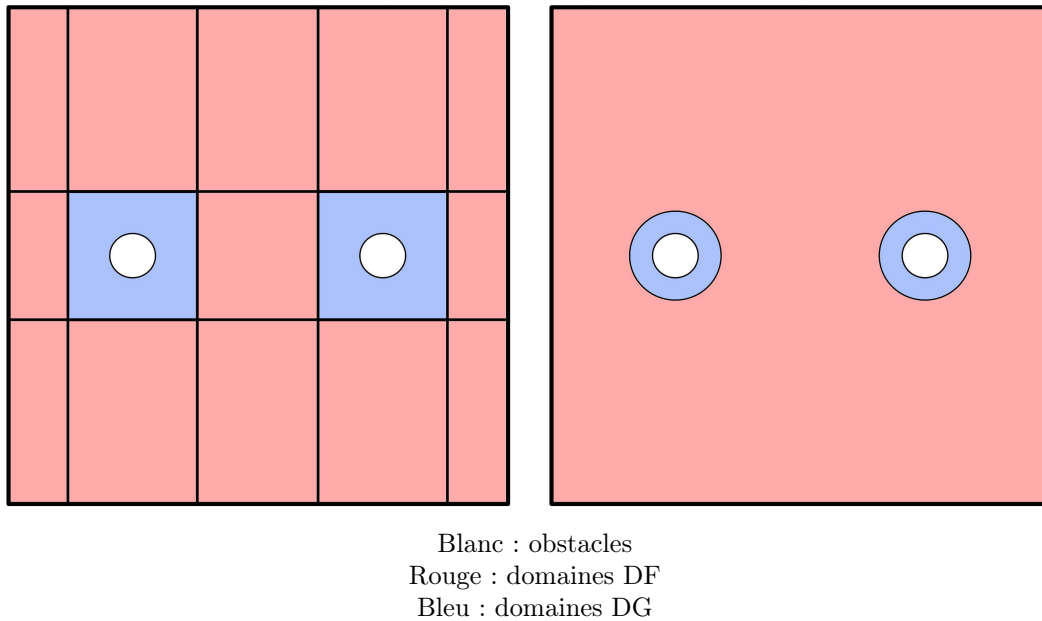


FIGURE 5.15 – Stratégies de couplages possibles pour le traitement du cas-test [42]

de manière schématique, les stratégies de décomposition de domaine impliquées par le couplage DG/DF respectivement en recouvrement minimal et en recouvrement total. Cette dernière option semble la plus appropriée d'un point de vue technique. Elle permet en effet, d'une part, de définir un maillage DG de frontière extérieure circulaire dans le voisinage des obstacles. Cela constitue un choix optimal, dans l'idée de minimiser la taille des domaines DG. D'autre part, cette technique implique de définir trois sous-domaines uniquement. Ceci n'est pas le cas de l'approche en recouvrement minimal, comme illustré⁵ sur 5.15, et mène à une mise en œuvre informatique beaucoup plus contraignante.

On définit donc une grille de fond cartésienne dans l'intégralité de Ω , ainsi que des maillages non-structurés dans le voisinage des obstacles. Pour un obstacle circulaire donné, de rayon r , le maillage non structuré associé consiste en une couronne de rayon intérieur r et de rayon extérieur $2r$. Dans le cas (a), le voisinage de l'obstacle de droite (resp. de gauche) fait l'objet d'un maillage comportant 200 éléments de frontière ; 100 à l'intérieur, 100 à l'extérieur (resp. 100 éléments de frontière ; 50 à l'intérieur, 50 à l'extérieur) et 2810 triangles (resp. 716 triangles). On utilise ces mêmes discrétisations pour les obstacles du

5. Dans cette illustration, on a fait l'hypothèse que l'on ne disposait pas, aux frontières des domaine DF, de conditions aux limites de couplages "mixtes", au sens où un bord donné pourrait recevoir à la fois une contribution d'un sous-domaine DG et d'un sous-domaine DF.

cas (b). Ces maillages sont fixés pour le reste de cet exercice. Pour ces derniers, le choix d'une base \mathcal{P}^1 ou \mathcal{P}^2 partout correspond à 8 ou 12 degrés de liberté par longueur d'onde respectivement, au niveau de la frontière de couplage. On choisit, par ailleurs, d'appliquer à la grille de fond cartésienne un schéma de différentiation d'ordre 6. Le raffinement de cette dernière est donné, dans le cas *fin*, par une grille comportant 865×865 nœuds, soit 12 points par longueur d'onde. On atteint 8 points par longueur d'onde en choisissant un grille de raffinement 577×577 .

Les figures 5.16 et 5.17 présentent les champs de pression instantanés et RMS (respectivement) dans une portion de Ω contenant les obstacles, une fois la convergence harmonique atteinte. Ces résultats sont issus du couplage, dans la configuration la plus fine, entre DG \mathcal{P}^2 et DF $\mathcal{O}6 / 12$ p.p. λ . Pour cette configuration de calculs, le pas de temps étant égal à environ $1,5 \times 10^{-3}$, il est nécessaire de réaliser approximativement 30000 itérations pour obtenir un calcul convergé. Qualitativement, ceci permet d'observer les zones d'ombre naturelles causées par les obstacles. De plus, on note que les champs solution DF et DG sont continus au travers de la frontière de couplage. Enfin, quantitativement, remarquons que l'amplitude du champ de pression dans l'intégralité du domaine est sujet à des échelles très différentes. En particulier, on mesure à peu près 3 ordres de grandeur de différence entre la pression moyenne de la source et des fluctuations dans le reste de Ω .

La comparaison entre les pressions moyennées en temps calculée et analytique est donnée par les figures 5.18 (axe de symétrie) et 5.19 (paroi des obstacles). Dans le but de quantifier l'influence de la précision des discrétisations DG et DF sur la précision du résultat, différentes configurations de calcul ont été appliquées à ce cas. Ceci a consisté à mettre en œuvre les 4 combinaisons possibles entre l'utilisation :

- d'un schéma DG \mathcal{P}^2 ou \mathcal{P}^1 , les maillages non structurés restant fixés,
- d'un schéma DF d'ordre 6, sur une grille contenant 865×865 ou 577×577 nœuds.

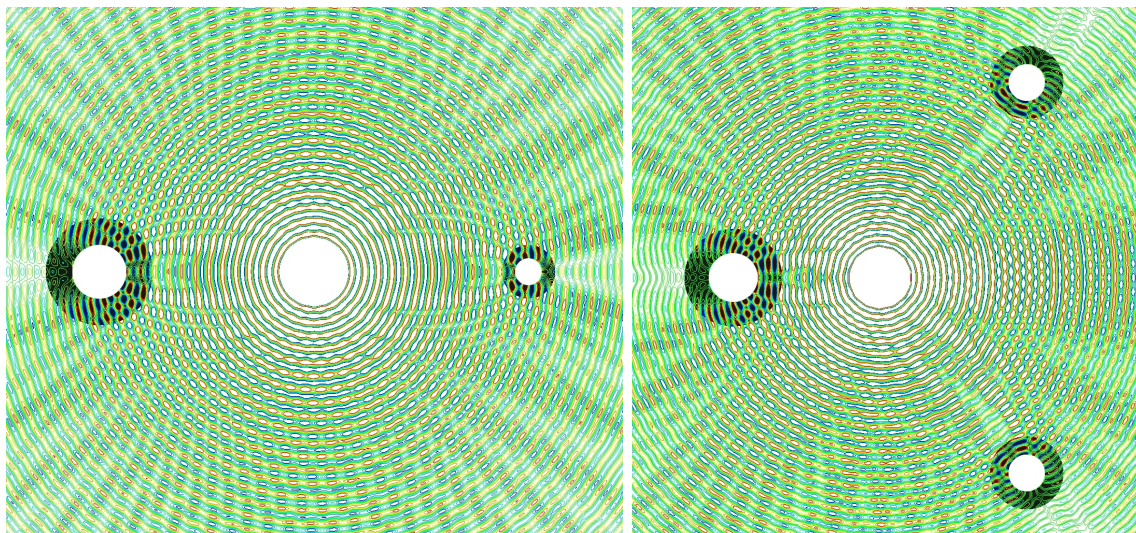


FIGURE 5.16 – Champ de pression instantané; iso-contours de valeurs comprises entre -10^{-5} et 10^{-5} , domaines DG surlignés en noir

Ces résultats montrent que la solution issue du schéma couplé DG \mathcal{P}^2 - DF $\mathcal{O}6 / 12$ p.p. λ se compare de manière très satisfaisante à la solution analytique, tant dans le cas

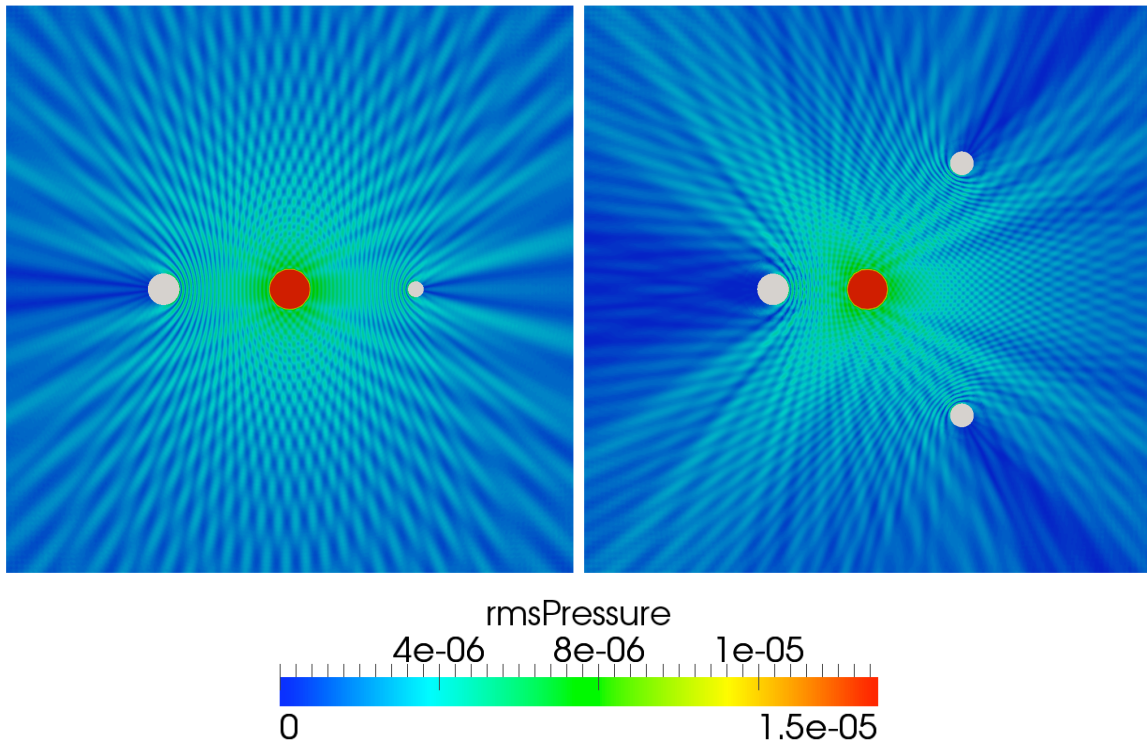


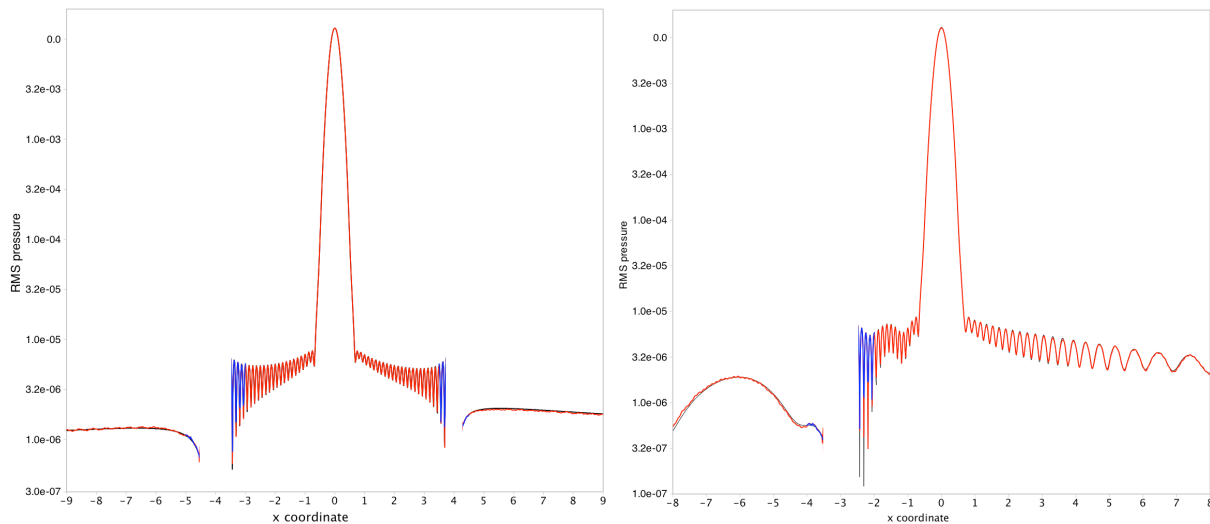
FIGURE 5.17 – Champ de pression RMS

(a) que le cas (b). Cette comparaison est d'autant plus encourageante que la géométrie des obstacles n'est approchée qu'à l'ordre 1 uniquement. En effet, on rappelle qu'on ne peut pas traiter de maillages non-structurés à éléments courbes dans le cadre de notre solveur DG. La figure 5.18 présente également le résultat de Desquesnes [14], dans le cas (a). Cette simulation, issue de travaux antérieurs, est fondée sur un couplage de schémas DF en maillages curvilignes / cartésien ; ce qui est particulièrement adapté au traitement de géométries circulaires. Pour un nombre de degrés de liberté par longueur d'onde équivalent (12 p.p. λ), les résultats issus des deux approches se comparent de façon tout-à-fait convenable. Ceci montre que la quantité de parasites générés par le couplage DG/DF est acceptable dans cette application. Toutefois, il convient de remarquer que le pas de temps utilisé dans ce calcul est approximativement 4 fois inférieur au pas de temps utilisé dans [14]. Ceci est dû au fait qu'on a fait le choix d'approcher finement la paroi des cylindres par des éléments droits. Par ailleurs, il est possible qu'en conséquence, nos calculs soient favorisés en termes de précision liée à l'avancée en temps.

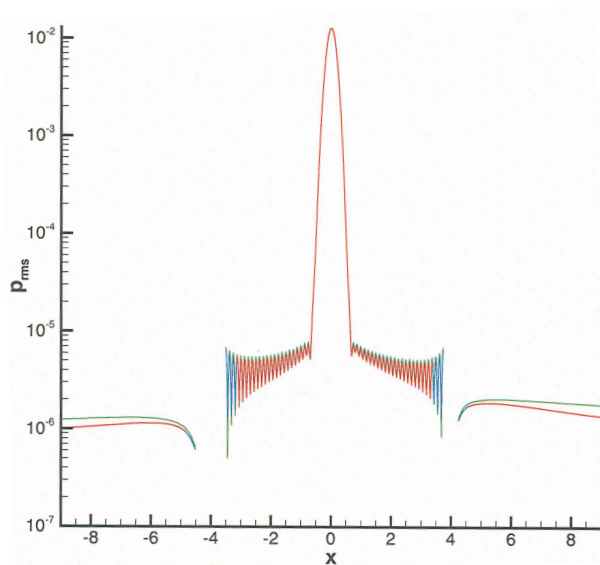
La comparaison entre la solution couplée \mathcal{P}^2 - DF $\mathcal{O}6$ / 12 p.p. λ et la solution analytique le long de la paroi des obstacles dénote également un très bon comportement du solveur hybride, en terme de précision pour un raffinement fixé. On remarque la présence d'oscillations sur la pression RMS, comprises entre les angles 0 et 90° dans le cas (a). On attribue ces dernières à l'influence d'un phénomène transitoire résiduel, dû à l'activation de la source \mathcal{S} , qui se réfléchit indéfiniment à la paroi des obstacles, le long de l'axe de symétrie.

De manière naturelle, on observe une dégradation du résultat, dans les deux cas,

5.3 Applications bidimensionnelles



Gauche : cas (a) / Droite : cas (b)
Rouge : domaine DF / Bleu : domaine DG / Noir : solution analytique



Résultat de Desquesnes [14] pour le cas (a) issu d'un couplage entre schémas DF en maillages curvilignes et cartésiens
Vert : solution analytique / Rouge : grille de fond cartésienne / Bleu : maillage curviligne

FIGURE 5.18 – Pressions RMS le long de l'axe de symétrie

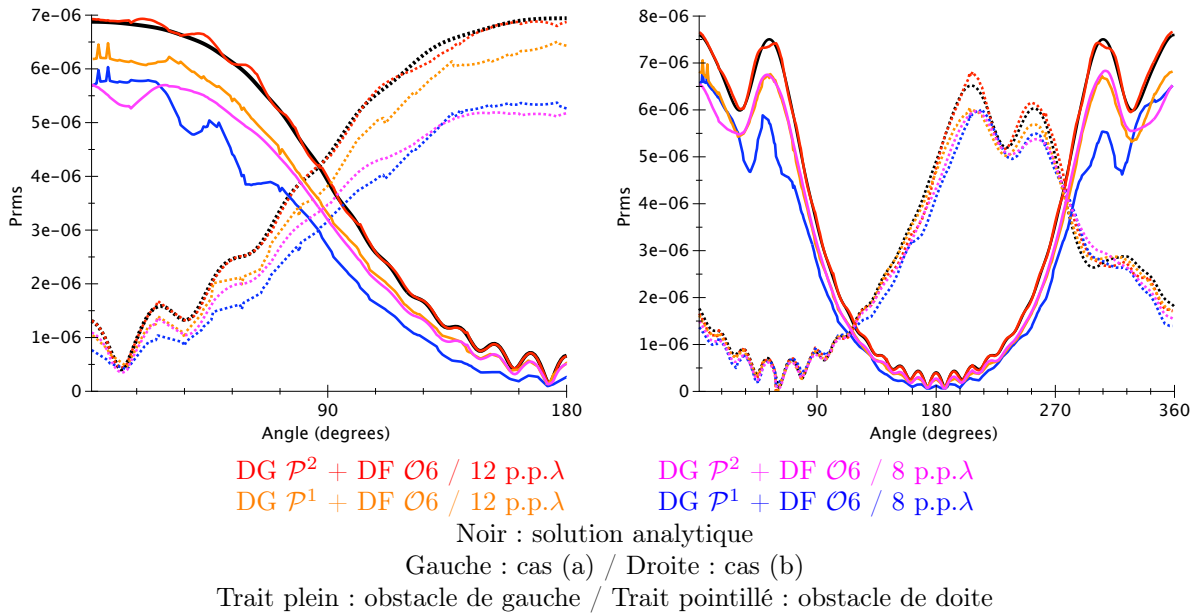


FIGURE 5.19 – Pressions RMS à la paroi des obstacles

lorsque l'on dégrade la précision de l'un et/ou l'autre des schémas. Si l'on peut considérer que les valeurs restent acceptables, même dans le cas le plus grossier correspondant à une discrétisation d'approximativement 8 degrés de liberté par longueur d'onde partout, ces résultats montrent, dans ce cas, une influence prédominante du raffinement de la grille DF sur la qualité de l'approximation.

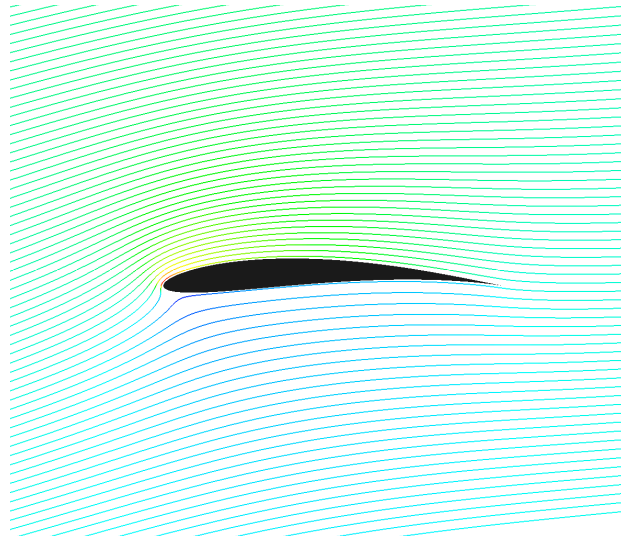
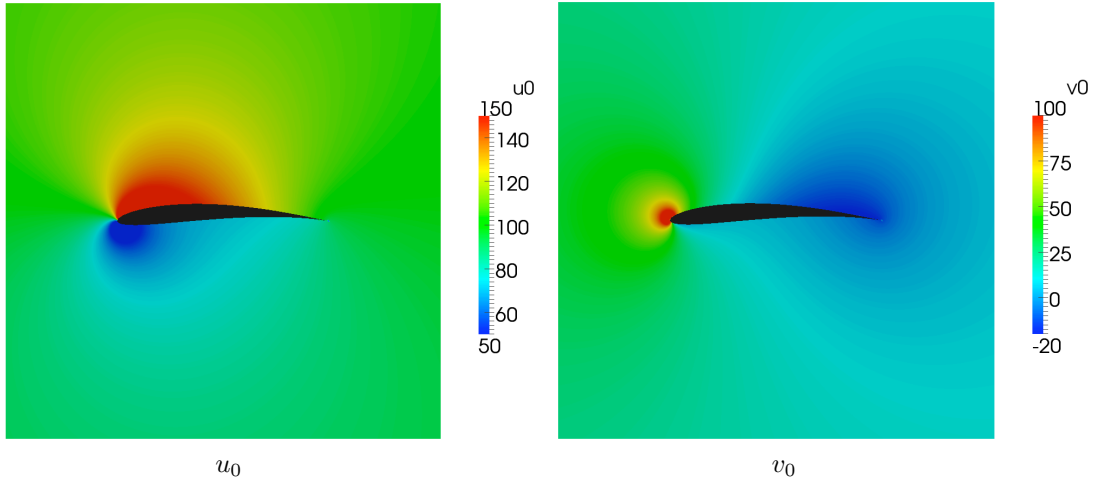
5.3.3 Prise en compte d'un champ porteur

L'objet du cas qui suit est de vérifier, par l'expérience, la capacité du solveur hybride à prendre en compte un champ porteur hétérogène. Pour ce faire, on choisit de simuler la propagation d'une source harmonique autour d'un profil de Joukovski, autour duquel un écoulement porteur Eulerien stationnaire est connu de manière analytique [47]. Il consiste en une donnée de notre problème. La figure 5.20 représente les vitesses selon les axes x et y de ce champ moyen. Notons que la vitesse selon x à l'infini est choisie égale à 100 m.s^{-1} , de telle sorte que le nombre de Mach à l'infini est donné par ⁶ :

$$M_\infty \approx 0.3.$$

Ainsi, le champ porteur est-il suffisamment régulier pour pouvoir être pris en compte par la modélisation formalisée par les équations d'Euler linéarisées (2.4). En effet, on rappelle que la matrice 3×3 (en 2D) \mathbf{B} qui prend en compte les hétérogénéités du champ porteur

6. Ici, les équations d'Euler linéarisées sont dimensionnées, de sorte que $c_0 = 340 \text{ m.s}^{-1}$



Lignes de courant colorées par la norme euclidienne du vecteur vitesse

FIGURE 5.20 – Vitesses du champ porteur autour d'un profil de Joukowski ($M_\infty \approx 0.3$)

s'écrit :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_x u_0 & \partial_y u_0 & -\partial_x c_0 \\ \partial_x v_0 & \partial_y v_0 & -\partial_y c_0 \\ \frac{c_0}{\rho_0} \partial_x \rho_0 & \frac{c_0}{\rho_0} \partial_y \rho_0 & (\gamma - 1) (\partial_x u_0 + \partial_y v_0) \end{pmatrix}.$$

Cette dernière contient les dérivées des grandeurs u_0 , v_0 , c_0 et ρ_0 , qui n'auraient pas de sens si l'écoulement présentait des chocs.

La configuration géométrique du calcul est la suivante. La frontière du profil de Joukowski a pour coordonnées extrémales $[-1, 1] \times [-0.04, 0, 162]$. Aussi, on fait le choix de résoudre la propagation des ondes acoustiques dans un domaine d'extension $[-2, 2] \times [2, 2]$. Pour ce faire, on met en œuvre le soldeur hybride en recouvrement total. Ainsi, on propose de résoudre le voisinage du profil par une méthode DG, dans un maillage non-structuré

-	Domaine DG	Domaine DF	Calcul DG de référence
Nombre de mailles	10498	90000	62758
Elements de frontière extérieure	112	-	316
Elements de frontière intérieure	340	-	376
Ordre du schéma	\mathcal{P}^2	6	\mathcal{P}^3
Δt intrinsèque	7.1×10^{-7}	1.4×10^{-5}	4.5×10^{-7}

TABLE 5.5 – Paramètres du calcul - Profil de Joukovski de frontière extérieure rectangulaire d’extension $[-1.5, 1.5] \times [-0.5, 0.5]$. Nous imposons un terme source harmonique, localisé dans le domaine DG, et donné par :

$$\mathbf{S}(x, y, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \exp[-b((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)] \sin(2\pi ft) \end{pmatrix},$$

avec $x_0 = -1$, $y_0 = -0.25$, $b = 170$ et $f = 1682$.

Les paramètres exacts du calcul sont résumés dans le tableau 5.5. On précise qu’on fait le choix de définir une grille cartésienne munie de 300×300 mailles, dans le but de pouvoir capturer avec environ 12 points par longueur d’onde la plus grande fréquence spatiale susceptible de se présenter. Enfin, l’avancée en temps est réalisée grâce à un schéma de Runge-Kutta d’ordre 4. D’autre part, le maillage DG fait l’objet d’un raffinement significatif entre la frontière de couplage et la géométrie de l’obstacle.

La figure 5.21 présente les résultats d’un calcul mené sur 15 000 itérations, afin d’atteindre la convergence harmonique. Tout d’abord, on a représenté le champ de densité instantané dans l’ensemble du domaine, ainsi que dans la zone du bord d’attaque. Ce résultat permet de mettre en évidence l’effet du champ porteur sur la propagation. En particulier, on distingue clairement une différence de longueur d’onde entre l’aval et l’amont de la source par rapport à la direction de la vitesse du champ porteur à l’infini. On notera, de plus, la bonne continuité des champs au travers de la frontière de couplage DG. Dans un deuxième temps, on a représenté la composante selon y du champ de vitesse acoustique. Cela permet d’identifier la présence d’une source secondaire située au bord de fuite. Sa présence est due au fait que ce dernier consiste en un point de rebroussement. En conséquence, les vitesses en x et y du champ porteur sont localement cisailées dans cette zone. Ceci a pour effet, au passage d’une onde acoustique, de générer une instabilité de Kelvin-Helmholtz. Celle-ci consiste en l’excitation d’un mode rotationnel dont l’amplitude croît indéfiniment en présence d’un cisaillement⁷. En l’absence de ce dernier, les tourbillons ainsi générés sont simplement advectés par le champ porteur. En outre, ces tourbillons créent des fluctuations de densité acoustique au bord de fuite. En conséquence, ce dernier se comporte comme une source harmonique secondaire, dont on peut remarquer que la contribution est également transmise au domaine DF. On note que cela n’est pas le cas du mode rotationnel advecté par l’écoulement. Cela n’est pas dû au fait que la simulation n’aurait pas atteint un temps physique suffisamment long. En réalité, le déraffinement du maillage non structuré entre le bord de fuite et la frontière de couplage

7. Cette instabilité est solution des Equations d’Euler linéarisées.

du domaine DG en aval par rapport à l'écoulement a pour effet de dissiper ces structures hautes-fréquences (en espace). Ceci nous renvoie à la discussion de la section 3.2.2, qui suggérait de jouer sur le déraffinement progressif des maillages DG pour éviter de fournir aux stencils DF des champs hautes-fréquences, auxquels ces schémas sont sensibles. Finalement, on a représenté la norme euclidienne du vecteur vitesse acoustique, qui permet également de mettre en lumière ce phénomène, ainsi que son influence sur le rayonnement global. Ce calcul hybride a permis de montrer que la prise en compte d'un champ porteur hétérogène (et dont les gradients ne sont pas nuls à la frontière de couplage) ne représente pas une difficulté spécifique pour l'algorithme de couplage présenté dans ce chapitre. Les champs solutions DG et DF sont continus au travers des zones de raccord, et n'ont pas été sujets à des instabilités de nature numérique. De plus, une comparaison avec un calcul DG autonome suffisamment fin pour être considéré comme un calcul de référence sur le domaine global (présenté sur la figure 5.22), montre que le comportement physique de la solution est correctement reproduit. Par ailleurs, ces résultats comparés illustrent en quoi, dans le cadre de ces couplages, une stratégie de déraffinement de maillage adaptée peut permettre de ne conserver que la physique d'intérêt (propagation d'ondes - modes acoustiques de l'écoulement). Ceci peut être vu, en quelque sorte, comme une étape de filtrage implicite des hautes fréquences indésirables, tant du point de vue de la modélisation que dans le souci de ne pas fournir au sous-domaine DF une solution trop irrégulière.

5.4 Conclusion

Ce chapitre a consisté, en premier lieu, à élaborer une procédure de couplage entre des schémas DG décentrés en maillage non-structuré et des schémas aux différences finies centrés en maillage cartésien, dans le cas 2D. Aussi, la méthode proposée dans le cadre de ce travail consiste :

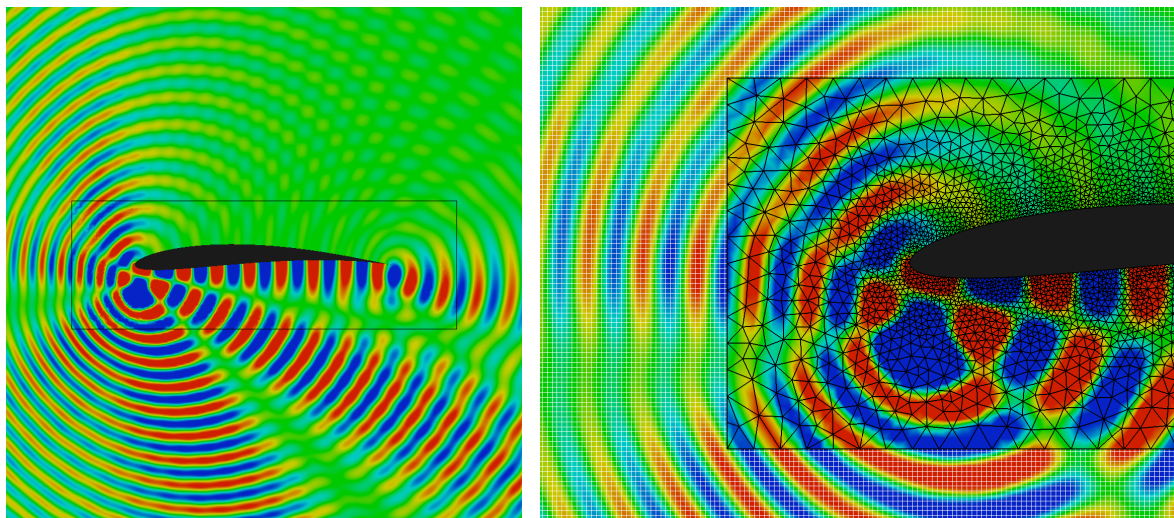
- d'une part, à prendre en compte les contributions des domaines cartésiens aux sous-domaines DG en reconstruisant une trace fictive sur leur frontière extérieure,
- d'autre part, à prendre en compte les contributions réciproques en s'appuyant sur la notion de points fictifs du maillage cartésien, communément utilisés afin d'appliquer des conditions aux limites tout en utilisant des schémas centrés.

Elle implique, de plus, l'utilisation d'un interpolateur de Lagrange en vue de répondre à la non-conformité des degrés de liberté. Enfin, deux approches complémentaires en termes de stratégie de maillage et de couplage ont été proposées : d'une part en supposant un recouvrement minimal entre les maillages, d'autre part en recouvrement total. Deuxièmement, ce chapitre a présenté une étude numérique de la précision du solveur hybride. Ceci a permis de montrer qu'il était possible de construire un couplage préservant globalement l'ordre élevé des discrétisations spatiales DF et DG autonomes (munies de schémas RK en temps) couramment mises en œuvre en aéroacoustique numérique. Toutefois, ces expériences numériques ont également mis en évidence la présence de phénomènes parasites très localisés (convergence en maillage moindre en norme L^∞). Si ces derniers semblent liés à des configurations géométriques spécifiques des nœuds de couplage DF par rapport aux interfaces entre mailles DG, leur cause n'a pu être déterminée de manière exacte dans cette étude. Par ailleurs, la stabilité du couplage dans le cas d'une cavité fermée,

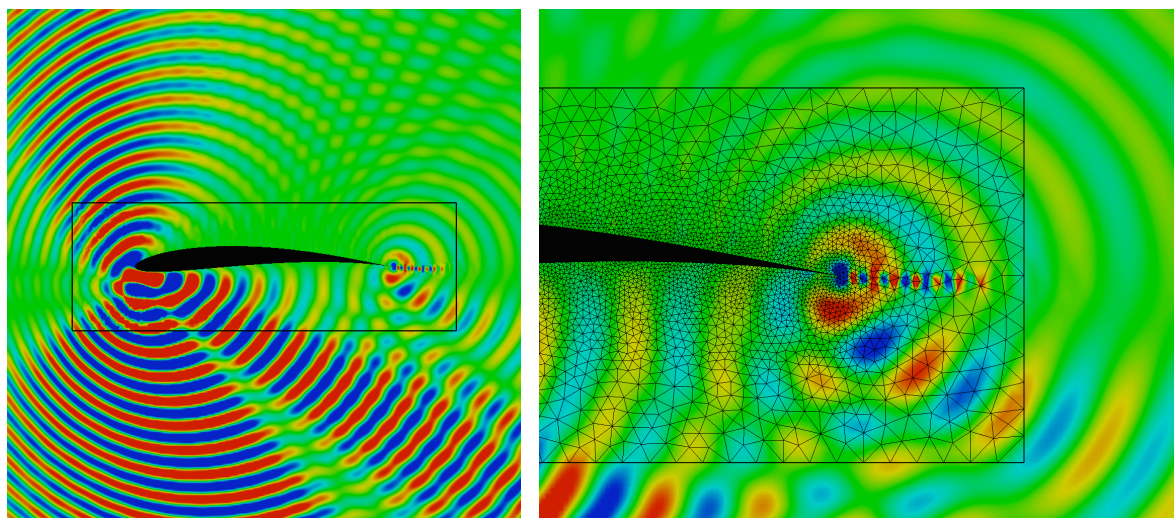
préservant l'énergie, a été évaluée numériquement. Ces calculs ont montré que la faible quantité de diffusion numérique intrinsèque aux schémas (décentrement du flux DG et filtre DF) suffisait à maintenir une énergie bornée en temps long. Cela revient à conclure que la frontière de couplage génère des parasites d'une amplitude acceptable (et qui, par ailleurs, décroît selon l'ordre du schéma couplé).

Enfin, on a présenté des applications tant illustratives de l'objectif du couplage qu'utiles à sa validation. En particulier, les résultats du traitement d'un cas d'épreuve acoustique (section 5.3.2) ont permis de quantifier la précision "brute" du couplage, pour un nombre de degrés de liberté par longueur d'onde fixé. Ainsi a-t-on pu observer que la précision du couplage DG/DF se compare de manière très convenable aux travaux passés de divers auteurs, dédiés à ce cas-test, pour les discrétisations spatiales retenues. Ces applications ont contribué à mettre en évidence l'intérêt d'une telle stratégie de couplage. Toutefois, il est attendu que leur apport en termes de gains en ressources machine pour un problème et une précision donnés doit en particulier se manifester, de manière claire, dans les cas tridimensionnels.

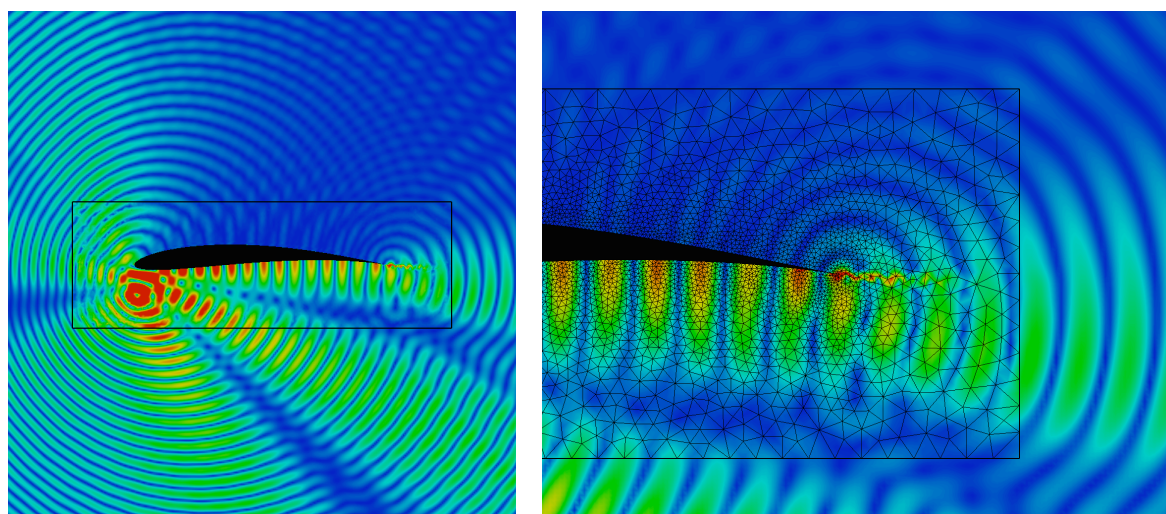
Ainsi, le chapitre qui suit présente l'extension de la méthode de couplage à la troisième dimension d'espace ainsi que son application à un cas d'intérêt industriel.



Champ de densité instantané, $-1.10^{-3} < \rho_1 < 1.10^{-3}$

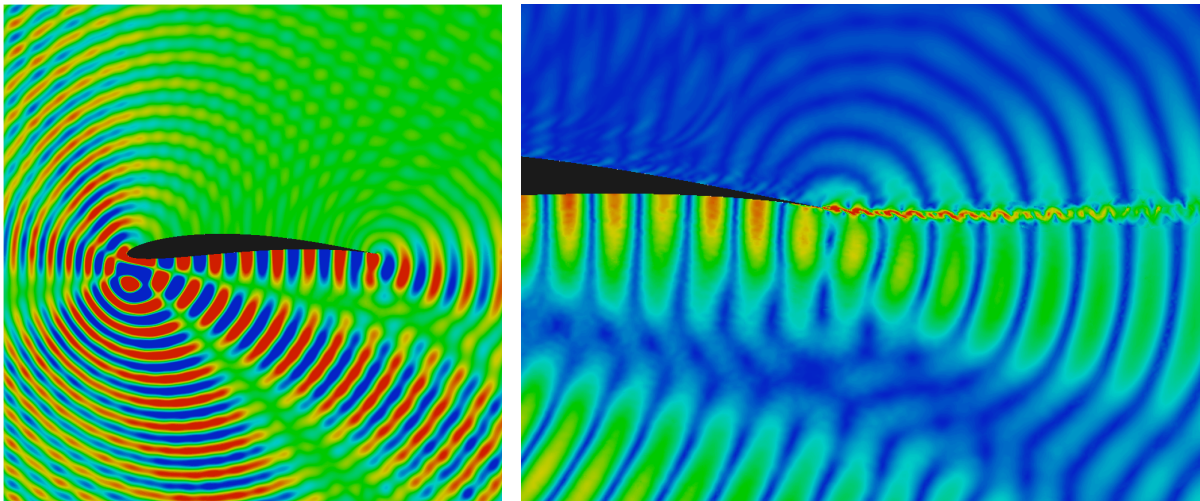


Champ de vitesse acoustique selon y , $-5 \times 10^{-5} < \mathbf{v}_1^y < 5 \times 10^{-5}$



Norme euclidienne du vecteur vitesse acoustique, $0 < |\mathbf{v}_1| < 2 \times 10^{-3}$

FIGURE 5.21 – Diffraction d'un monopôle par un profil de Joukovski en présence d'un écoulement porteur



Champ de densité instantané / Norme euclidienne du vecteur vitesse acoustique

FIGURE 5.22 – Calcul de référence DG

Chapitre 6

Schéma hybride 3D - Une application

Dans le but de mettre en évidence l'intérêt pratique de l'approche développée dans le cadre de ce travail, ce chapitre présente une application du schéma couplé DG/DF à un cas tridimensionnel présentant un obstacle réaliste et géométriquement complexe. Il s'agit de l'entrée d'une nacelle de turboréacteur, dont le maillage de peau a été fourni par Airbus. Plus précisément, il s'agira d'étudier la diffraction d'une source analytique harmonique autour de cet objet, dans un domaine de grande taille. Avant cela, on présente brièvement l'extension à la troisième dimension d'espace de la technique de couplage introduite au chapitre 5.

6.1 Schéma hybride 3D

6.1.1 Extension de l'approche bidimensionnelle

Il s'agit, dans un premier temps, de préciser en quoi l'algorithme de couplage 2D se généralise à la troisième dimension d'espace. En réalité, ceci ne pose aucun obstacle conceptuel :

- La contribution du domaine DF au domaine DG est toujours prise en compte en imposant une condition aux limites de manière faible sur $\partial\Omega_{DG}$. L'écriture (5.5) :

$$\mathbf{u}_{\gamma(k)}^{DG} = \mathcal{I}_n^{\gamma(k)}(\mathbf{u}^{DF}),$$

reste inchangée. Dans cette dernière, les $\gamma(k)$ représentent dorénavant les points de Lagrange sur les faces triangulaires décrivant la frontière de couplage. De plus, l'interpolateur $\mathcal{I}_n^{\gamma(k)}$ est construit en tant qu'une tensorisation (en 3D) d'interpolations monodimensionnelles, c'est à dire :

$$\mathbf{u}_{\gamma(k)}^{DG} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbf{u}^{DF}(x_i, y_j, z_l) L_i(x_k) L_j(y_k) L_l(z_k)}_{\mathcal{I}_n^{\gamma(k)}(\mathbf{u}^{DF})}.$$

Les indices i, j, l parcourent des nœuds d'interpolation de Lagrange uniformément répartis dans des hexahédres de la grille DF.

Δx_{DG}	DGTD O4						FDTD O4						Δx_{FD}
	L^1		L^2		L^∞		L^1		L^2		L^∞		
1/6	4,11E-08	-	8,96E-08	-	5,10E-07	-	1,44E-09	-	3,39E-09	-	5,33E-08	-	1/34
1/12	3,12E-09	3,7	7,15E-09	3,6	4,92E-08	3,4	9,66E-11	3,9	3,17E-10	3,4	5,85E-09	3,2	1/68
1/24	2,18E-10	3,8	5,39E-10	3,7	4,97E-09	3,3	4,98E-12	4,3	1,49E-11	4,4	6,01E-10	3,2	1/136
Δx_{DG}	DGTD O6						FDTD O6						Δx_{FD}
	L^1		L^2		L^∞		L^1		L^2		L^∞		
1/12	6,73E-09	-	1,61E-08	-	1,95E-07	-	2,73E-10	-	9,70E-10	-	1,49E-08	-	1/34
1/24	8,17E-11	6,4	2,29E-10	6,1	3,49E-09	5,8	2,83E-12	6,6	1,09E-11	6,5	2,40E-10	6,0	1/68

 TABLE 6.1 – Solveur hybride en recouvrement minimal 3D : erreurs et ordres de convergence en Δx

- La contribution du domaine DG au domaine DF est également fondée sur la notion de points fantômes, qui se transpose naturellement du cas 2D au cas 3D. Aussi, on impose à ces derniers des valeurs reconstruites à partir de la base polynômiale locale des tétraèdres dans lesquels ils se trouvent :

$$\mathbf{u}_{\gamma(i,j,l)}^{DF} = \sum_{k=1}^{N_{\omega_m}} \mathbf{u}_{(k,m)}^{DG} \varphi_k^m(x_i, y_j, z_l).$$

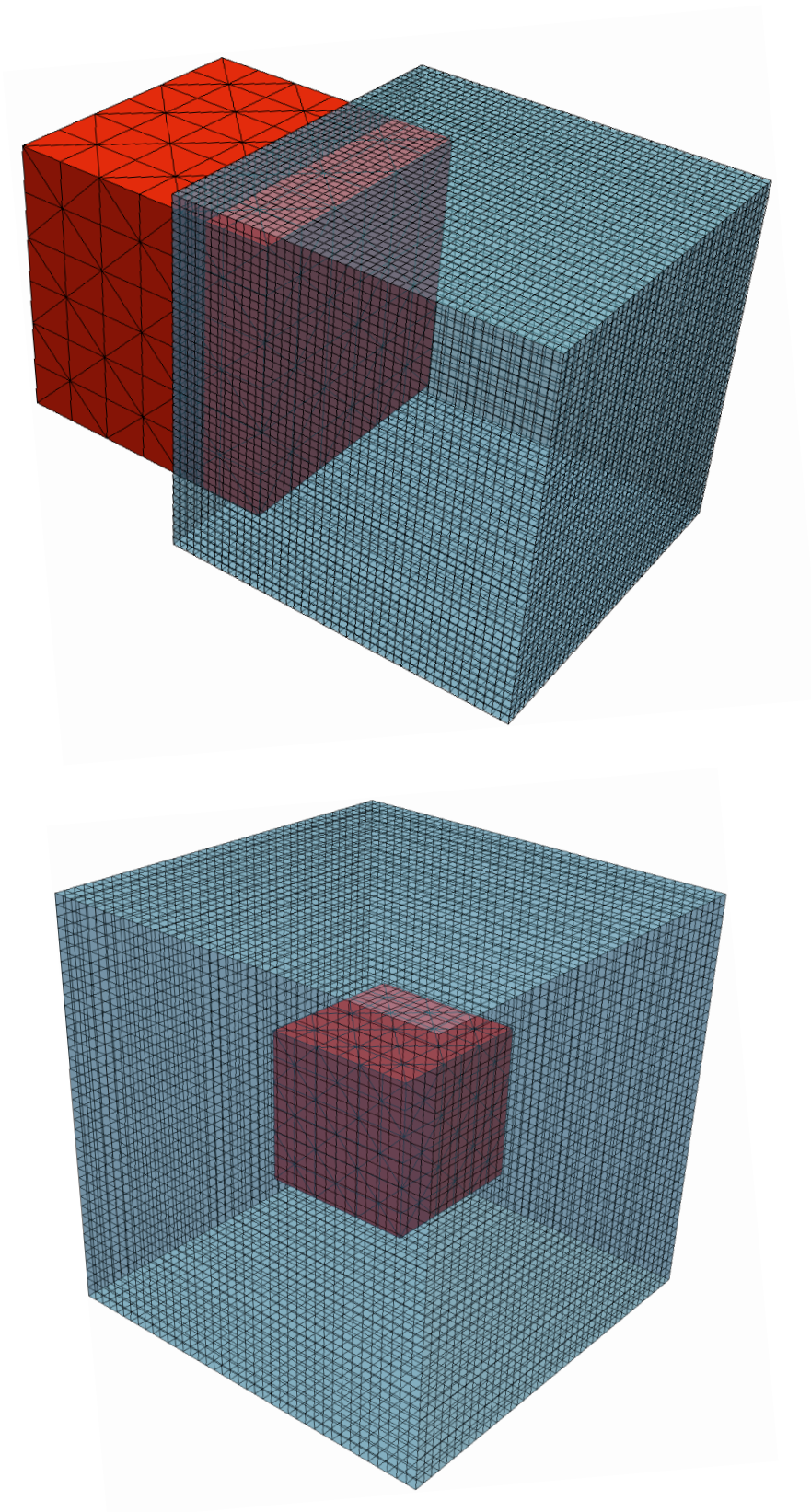
La procédure de couplage reste inchangée. Toutefois, il convient de remarquer que son coût augmente naturellement avec le passage à la troisième dimension. Ce dernier reste acceptable¹ dans le cas du recouvrement total, si, comme suggéré dans la section 5.2.2, on prend la précaution de ne pas définir les points de couplage \mathcal{N}_{DF}^C en sélectionnant l'intégralité des points de la grille DF qui appartiennent à un domaine DG.

6.1.2 Validation

Avant de mettre en application le solveur hybride tridimensionnel sur un cas d'intérêt industriel, on se propose d'évaluer sa précision dans le cas de modes propres de cavités. Notons que du fait de la lourdeur des calculs, il est en pratique difficile de réaliser un nombre important de mesures d'erreur. De la même manière, une évaluation de la stabilité en réalisant un très grand nombre d'itérations n'est pas facilement abordable.

Le tableau 6.1 présente les erreurs mesurées et ordres de convergence associés dans le cas du couplage en recouvrement minimal. La configuration des maillages de ces calculs est représentée par la figure 6.1. Ces mesures d'erreur sont issues de la simulation, sur une période d'oscillation, du mode (6, 3, 3) dans un domaine d'extension $[0, 1.9] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Ces calculs montrent des résultats tout à fait acceptables ; ils restent globalement conformes au comportement observé dans le cas 2D. Le tableau 6.2, quant à lui, contient les résultats des calculs de validation dans le cas d'un recouvrement total. Il s'agit là d'un mode (4, 4, 4) dans un domaine global DF d'extension $[-0.5, 1.5]^3$. Le domaine DG entièrement recouvert a pour extension $[0, 1]^3$. Ces résultats mettent en évidence une convergence moindre dans le cas de l'erreur L^∞ . Comme précédemment, ceci nous invite à considérer la présence de parasites très localisés.

1. Relativement petit devant le coût de calcul des gradients dans le volume.



N.B. : Tous les points fantômes DF sont représentés.

FIGURE 6.1 – Validation du solveur couplé 3D : configurations de maillages (recouvrement minimal et total)

Δx_{DG}	DGTD $\mathcal{O}4$						FDTD $\mathcal{O}4$						Δx_{FD}
	L^1		L^2		L^∞		L^1		L^2		L^∞		
1/6	2,54E-08	-	5,57E-08	-	3,16E-07	-	1,85E-08	-	2,51E-08	-	7,98E-08	-	1/50
1/12	1,68E-09	3,9	4,02E-09	3,8	2,56E-08	3,6	1,11E-09	4,1	1,51E-09	4,1	5,91E-09	3,8	1/100
1/24	1,16E-10	3,9	2,93E-10	3,8	3,35E-09	2,9	6,99E-11	4,0	1,01E-10	3,9	2,33E-09	1,3	1/200

Δx_{DG}	DGTD $\mathcal{O}3$						FDTD $\mathcal{O}6$						Δx_{FD}
	L^1		L^2		L^∞		L^1		L^2		L^∞		
1/6	4,87E-08	-	1,18E-07	-	6,51E-07	-	4,54E-09	-	1,02E-08	-	1,54E-07	-	1/50
1/12	8,86E-09	2,5	2,78E-08	2,1	3,11E-07	1,1	6,88E-10	3,7	4,87E-09	2,9	2,09E-07	1,8	1/100
1/24	9,21E-10	3,3	2,69E-09	3,4	2,87E-08	3,4	6,65E-11	3,2	2,94E-10	3,1	1,82E-08	2,3	1/200

TABLE 6.2 – Solveur hybride en recouvrement total 3D : erreurs et ordres de convergence en Δx

6.2 Diffraction d'une onde acoustique autour d'une nacelle de turboréacteur

6.2.1 Géométrie, stratégie de maillage et configuration du couplage

On se propose donc d'appliquer le schéma couplé DG/DF tridimensionnel à un objet de géométrie réaliste, dans le but d'illustrer son potentiel dans des cas d'intérêt industriel. Ainsi la figure 6.2 représente-t-elle le maillage surfacique de l'entrée d'une nacelle de

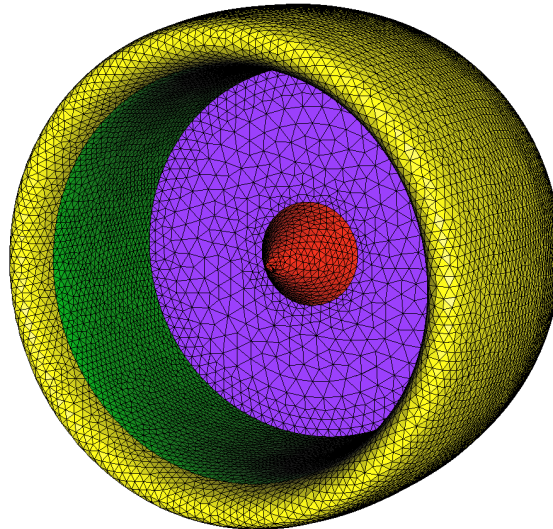


FIGURE 6.2 – Maillage surfacique initial de l'entrée d'air d'une nacelle de réacteur, coloré par ses marqueurs de peau

turboréacteur², coloré par ses marqueurs de peau. Cette géométrie, mise à disposition par *Airbus*, a fait l'objet de travaux antérieurs consistant à étudier son comportement acoustique en présence - ou non - d'un écoulement. Plus précisément, le problème que l'on considère dans ce travail consiste à simuler la propagation d'une onde acoustique issue de la surface transverse et plane représentant la localisation des aubes du moteur.

2. Dont l'arrière est fermé par une demi-sphère.

ρ_0	1.227119
p_0	101325 Pa
c_0	340 m.s ⁻¹
$ \mathbf{v}_0 $	0 m.s ⁻¹

TABLE 6.3 – Constantes physiques du calcul

Cette dernière est représentée en violet sur 6.2. Pour des raisons de simplicité, on choisit, d'une part, d'étudier la propagation d'une onde plane, et d'autre part, de faire l'hypothèse que cette géométrie se trouve plongée dans un fluide au repos. Les constantes physiques qui conditionnent le dimensionnement des résultats sont données dans le tableau 6.3.

Notons l'intérêt que présente l'utilisation d'un maillage non-structuré pour prendre en compte une telle géométrie. Cela est essentiellement dû à la présence de la pointe colorée par le marqueur rouge, dont la surface serait plus difficile à prendre en compte de manière précise avec un maillage structuré.

Afin de mettre en évidence l'intérêt du couplage de schémas en maillage hybride étudié jusqu'à présent, on se fixe un domaine physique d'intérêt Ω de taille arbitrairement grande par rapport à la taille caractéristique de la nacelle (donnée par le diamètre de son entrée D). Les coordonnées extrémales de la géométrie de la figure 6.2 étant données par $x_{min} = -1.9$, $x_{max} = 1.6$, $y_{min} = -1.9$, $y_{max} = 1.9$, $z_{min} = -1.9$, $z_{max} = 1.9$, on définit le domaine de calcul

$$\Omega = [-3, 12] \times [-7.5, 7.5] \times [-7.5, 7.5].$$

Notons que le plan via lequel la source analytique est introduite est le plan d'équation $x = 0$. On se propose, de plus, de fixer la fréquence d'oscillation de l'onde plane d'intérêt à $f = 390\text{Hz}$ ainsi que son amplitude à $[-1, 1]$ sur p_1 . La vitesse du son dans l'air étant donnée par $c_0 = 340\text{m.s}^{-1}$, il convient de noter qu'il s'agit, pour le schéma hybride, de conserver les fluctuations de pression sur une quinzaine de périodes (selon l'axe x). Pour ce faire, on fixe le nombre de degrés de liberté par longueur d'onde à 12 pour la grille cartésienne, dans les directions x, y, z . Dans un souci de simplicité en terme de mise en œuvre informatique, on choisit de résoudre le voisinage de l'objet dans un domaine DG entièrement recouvert par la grille DF.

Ainsi, le domaine Ω est intégralement discrétisé par une grille cartésienne comptant $170 \times 170 \times 170$ nœuds (i.e. $h \approx 8.82 \times 10^{-2}$). En outre, on lui attribue un schéma DF d'ordre 8. On fixe l'extension spatiale du domaine de calcul DG à :

$$\Omega_{DG} = [-2.9, 2.6] \times [-2.9, 2.9] \times [-2.9, 2.9],$$

en s'assurant que les contraintes sur la validité du recouvrement sont vérifiées. Le volume Ω_{DG} est représenté sur la figure 6.3. Par ailleurs, la figure 6.4 représente l'extension spatiale des deux domaines DF et DG. Le volume Ω_{DG} est représenté sur la figure 6.3. Par ailleurs, la figure 6.4 représente l'extension spatiale des deux domaines DF et DG. Il fait l'objet d'un maillage non-structuré composé de 108581 tétraèdres, de façon à capturer la peau donnée par la figure 6.2 de manière convenable. En contrepartie, et en particulier du fait de la complexité à prendre en compte avec précision la "pointe" surlignée en rouge, la taille des mailles (mesurée par le rayon du cercle inscrit) présente de fortes hétérogénéités. En effet, les valeurs extrémales des rayons des cercles inscrits aux cellules sont données

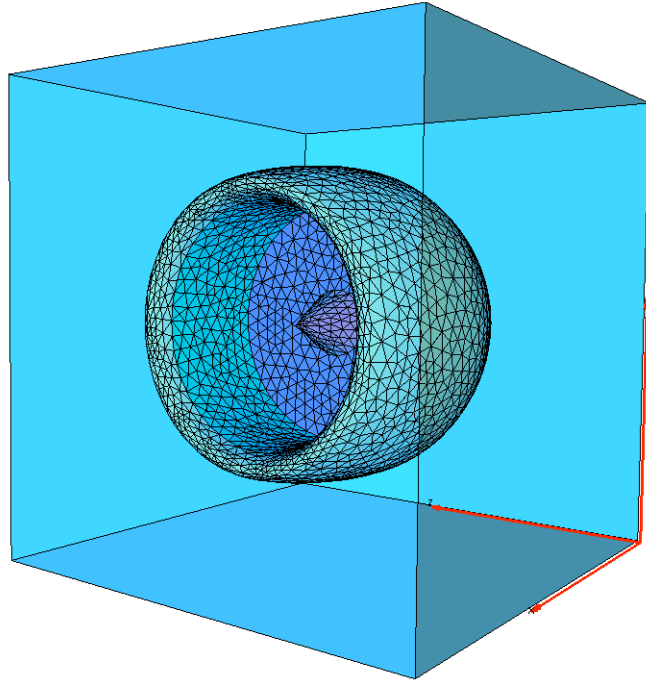


FIGURE 6.3 – Domaine volumique de calcul DG

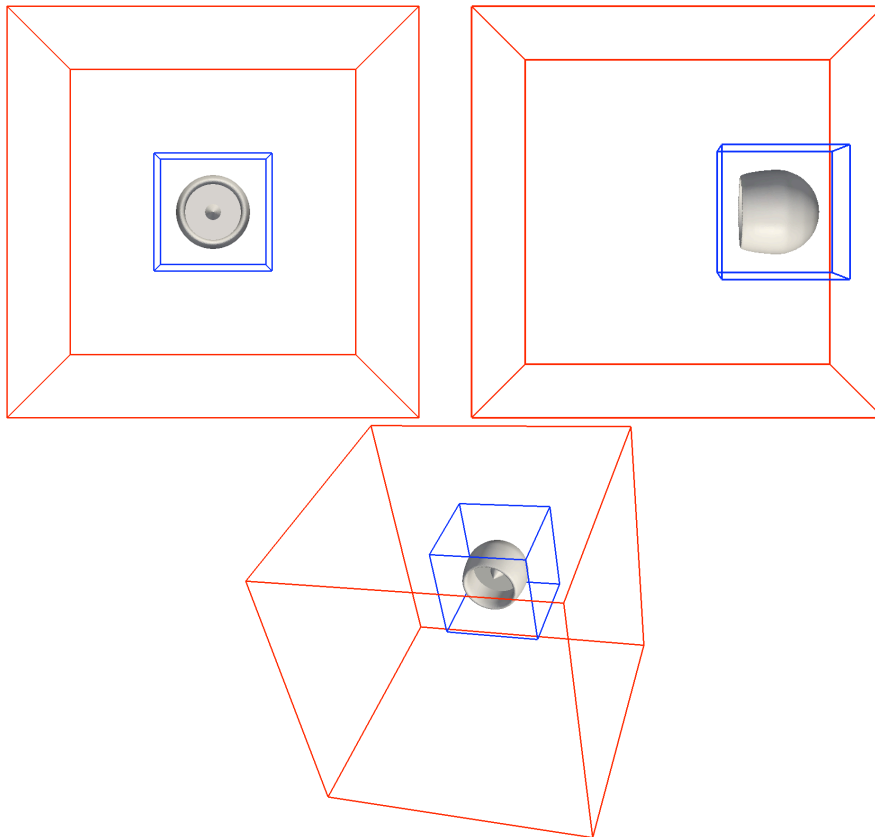
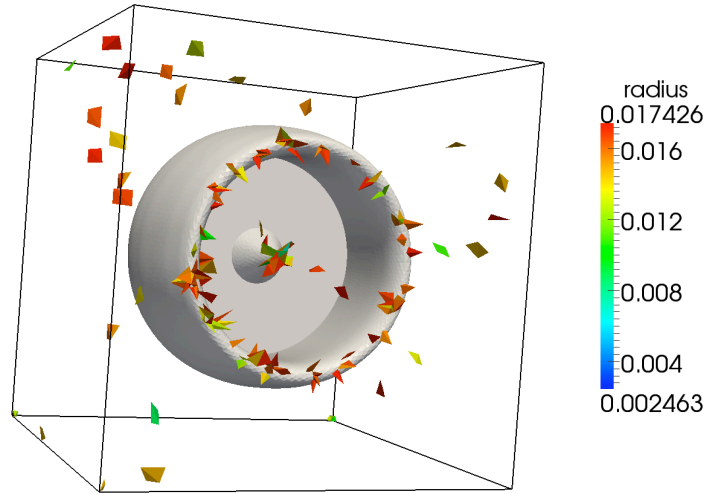


FIGURE 6.4 – Extension volumique des domaines DG (bleu) et DF (rouge)


 FIGURE 6.5 – Cellules \mathcal{P}^1 du domaine DG, colorées par le rayon de leur cercle inscrit

-	Domaine DG	Domaine DF	Calcul DG de référence
Nombre de mailles	108581	4913000	472878
Elements de frontière extérieure	14038	-	31034
Elements de frontière intérieure	5622	-	5622
Ordre du schéma	\mathcal{P}^{1-3}	8	\mathcal{P}^{1-3}
Δt intrinsèque	2.5×10^{-6} s	2.1×10^{-4} s	4.5×10^{-7} s

TABLE 6.4 – Paramètres du calcul - Nacelle

par : $r^{\min} = 2.46 \times 10^{-2}$ et $r^{\max} = 7.04 \times 10^{-2}$. Pour un ordre fixé, ceci mène à des pas de temps faibles en regard de la discrétisation spatiale dans la plupart du volume. En conséquence, et du fait que le critère de stabilité définit le pas de temps dans l'intégralité du domaine à partir de l'ordre de la base polynômiale et de la taille la plus petite cellule, il est souhaitable d'appliquer une stratégie d'adaptation p [13]. Cette dernière mène à l'utilisation d'un schéma DG \mathcal{P}^1 sur les plus petites cellules³ dans le voisinage de l'obstacle, puis progressivement $\mathcal{P}^2/\mathcal{P}^3$ selon le diamètre des cellules dans le reste du domaine. Ainsi, le maillage comporte 0.22% de cellules \mathcal{P}^1 (représentées sur la figure 6.5), 11,83% de cellules \mathcal{P}^2 et 87,95% de cellules \mathcal{P}^3 .

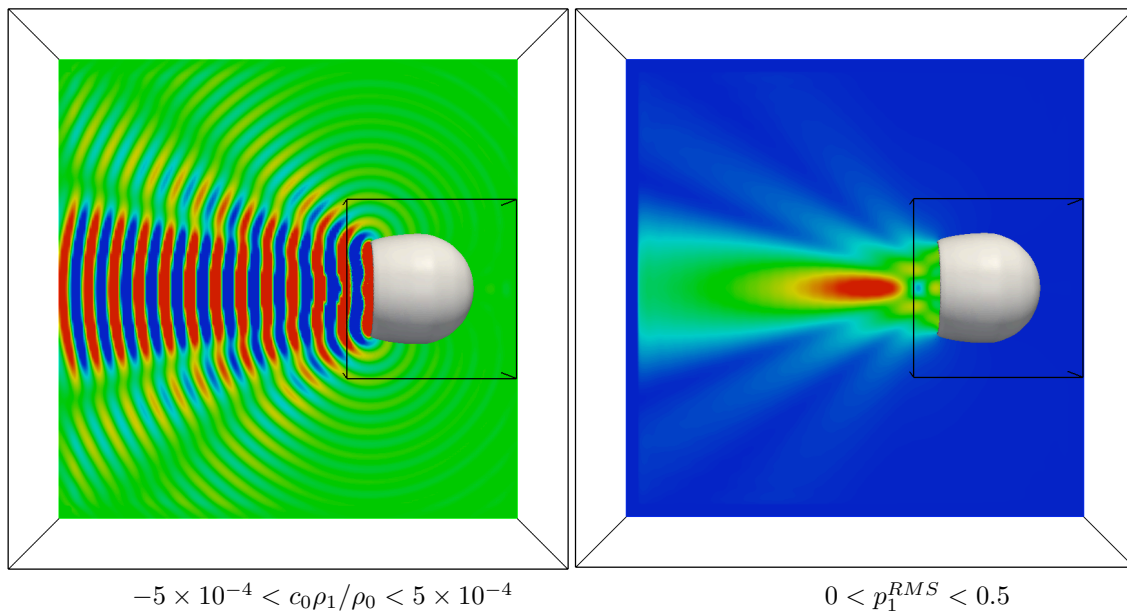
Le tableau 6.4 récapitule la configuration du calcul couplé. À ces informations, on ajoute que l'avancée en temps est réalisée par un schéma RK4. Le pas de temps global est imposé par la discrétisation DG et vaut $\Delta t = 2.5 \times 10^{-6}$ s. Il convient de remarquer que ceci correspond à environ 1040 pas de temps par période d'oscillation (car $T = 1/390 \approx 2.6 \times 10^{-3}$ s). Compte tenu du volume du domaine de calcul considéré, il s'agit donc de réaliser environ 30 000 itérations, au minimum, en vue d'atteindre un calcul harmoniquement convergé. Par ailleurs, on fixe la précision de l'interpolateur du champ DF aux points de Lagrange DG à l'ordre 2. La frontière de Ω est munie de conditions aux limites de non réflexion.

3. Le solveur DG utilisé dans le cadre de ce travail ne dispose pas du schéma DG \mathcal{P}^0 .

6.2.2 Résultats

Les calculs qui suivent ont été menés en parallèle sur une configuration machine fixée, munie de 6 processeurs de type *Intel Xeon* cadencés à 2.8 GHz, 4 processeurs de type *Intel Nehalem* cadencés à 2.26 GHz (pour un total de 40 cœurs), et 96 Go de mémoire vive disponible. Il est à noter que la répartition des ressources machines et nœuds de calcul entre les deux domaines est en majeure partie déterminée par les besoins en mémoire de chacun. En effet, du fait que l'on traite un problème linéaire et dans le but d'optimiser les performances en terme de temps CPU, le solveur DG stocke en mémoire les matrices de masse, de rigidité, et de flux, précalculées et triées une fois pour toute avant la première itération. Pour la discrétisation spatiale mise en œuvre dans ce calcul (~ 110000 tétraèdres + ordre local entre 1 et 3), le solveur DG requiert ~ 25 Go disponibles. En comparaison, le solveur DF ne nécessite que ~ 5 Go. Il est important de noter que ceci indique, en particulier, qu'une simulation équivalente DG dans l'intégralité de Ω à densité de degrés de liberté identique ne serait pas réalisable pour cette configuration machine donnée⁴. En définitive, le solveur DF est affecté à un nœud de calcul⁵ comportant 8 cœurs. Le domaine DG, dans tous les cas, est résolu en parallèle sur les 6 nœuds restants.

Afin d'obtenir un calcul harmoniquement convergé, on choisit de réaliser 40 000 itérations, ce qui correspond à une simulation sur une plage de temps physique de 1×10^{-1} s. Cela nécessite un temps de calcul d'approximativement 110 heures sur la configuration machine décrite plus haut. La figure 6.6 représente les champs de densité et de pression

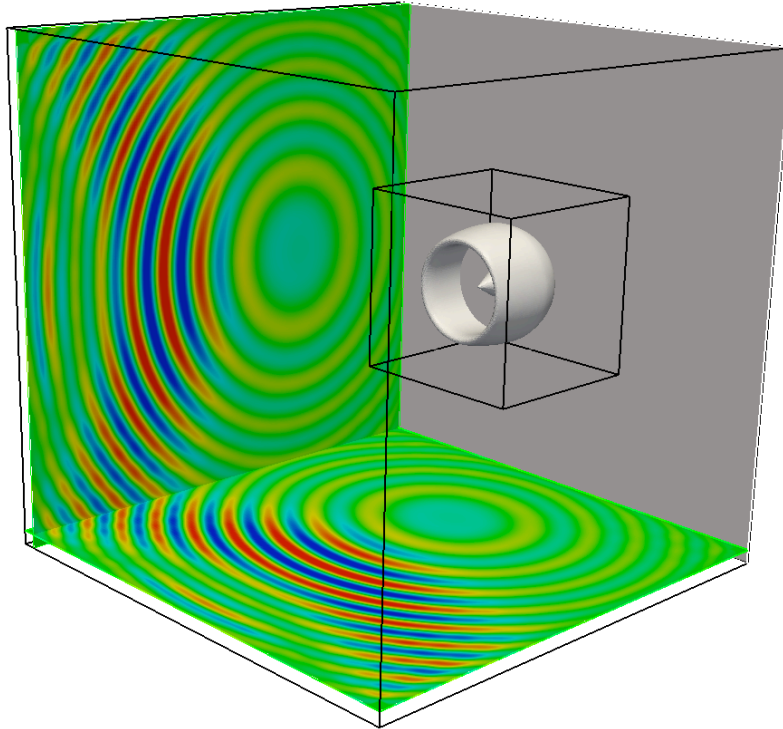


Gauche : champ de pression instantané couplé
Droite : champ de pression RMS couplé

FIGURE 6.6 – Champs de pression instantanée et RMS selon le plan de symétrie

4. Notons que si le stockage des matrices du schéma est une possibilité qui a été mise en application dans le cadre du solveur DG de cette étude, il ne constitue pas pour autant une pratique des plus générales.
5. Il n'a pas été parallélisé à l'occasion de ce travail.

RMS selon un des plans de symétrie de la géométrie de la nacelle (ainsi que les extensions spatiales des domaines DG et DF). Ceci permet, dans un premier temps, de remarquer la bonne continuité des champs au travers de la frontière de couplage DG. De plus, cela permet de s'assurer que la solution est effectivement symétrique (du fait de la symétrie axiale de la géométrie et du mode imposé). La figure 6.7 permet également de le vérifier,



$$-5 \times 10^{-5} < c_0 \rho_1 / \rho_0 < 5 \times 10^{-5}$$

Droite : champ de pression RMS de référence issue d'un calcul DG dans le domaine rouge
Gauche : champ de pression RMS couplé DG (domaine noir) DF (reste du domaine)

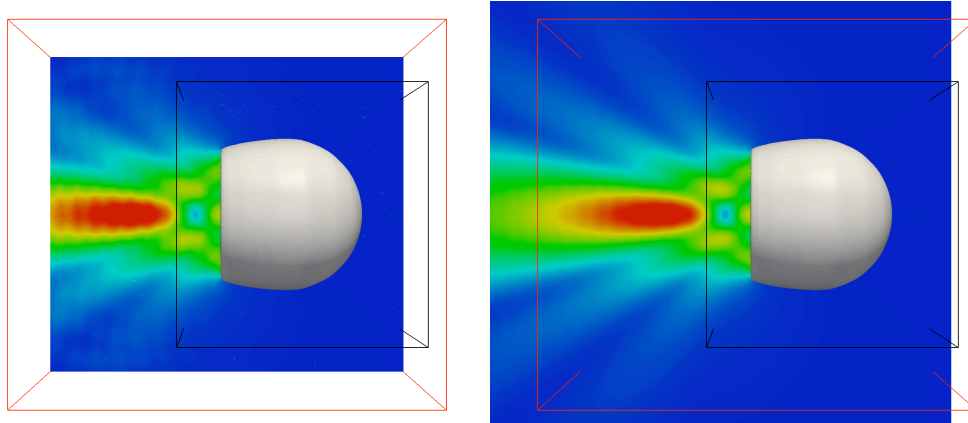
FIGURE 6.7 – Champ de pression instantanée et RMS selon la frontière de Ω_{DF}

en représentant une partie de la trace du champ de densité instantané sur $\partial\Omega$.

Afin de s'assurer de manière plus précise de la validité de ce résultat et du fait que nous ne disposons pas d'une solution analytique dans ce cas, il convient de réaliser une comparaison à un calcul de référence. Comme on l'a évoqué auparavant, il n'est pas possible de réaliser un calcul DG à précision attendue équivalente pour un coût en mémoire raisonnable sur l'intégralité du domaine Ω . Ainsi, on choisit d'effectuer un calcul de propagation dans un domaine Ω_{REF} donné par :

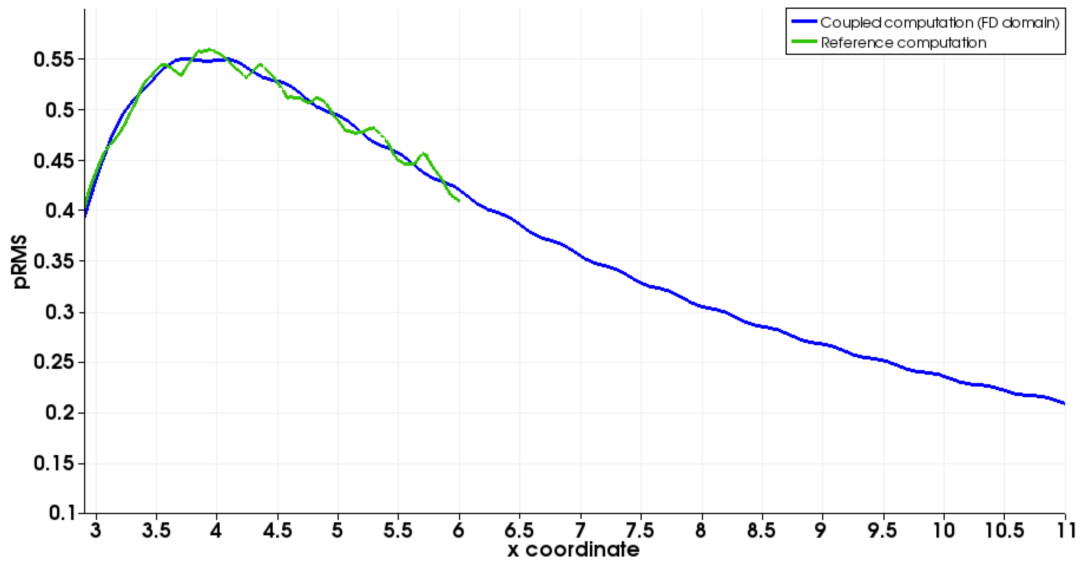
$$\Omega_{\text{REF}} = [-3, 6] \times [-4, 4] \times [-4, 4].$$

Ainsi, la figure 6.8 présente la comparaison entre les champs de pression RMS issus du calcul couplé et du calcul de référence DG. Il s'agit là de s'intéresser en particulier aux valeurs de la solution localisées dans le volume commun aux domaines DF et Ω_{REF} . Visuellement, la pression moyennée en temps montre un comportement ainsi que des valeurs semblables dans les deux cas. Ceci permet de confirmer la présence d'un lobe de



$$0 < p_1^{RMS} < 0.5$$

Droite : champ de pression RMS de référence issue d'un calcul DG dans le domaine rouge
 Gauche : champ de pression RMS couplé DG (domaine noir) DF (reste du domaine)



Pression RMS selon l'axe de rotation de la géométrie, pour $x \in [2.9, 11]$

FIGURE 6.8 – Comparaison des champs de pression RMS issus d'un calcul de référence et d'un calcul couplé

directivité principal (selon l'axe x) et de deux lobes secondaires, qui ne sont pas dus à des parasites générés par le couplage. On a également représenté une comparaison entre les pressions RMS couplées et de référence le long de l'axe x . Celle ci montre un bon accord entre les deux solutions. En particulier, le solveur couplé semble reproduire fidèlement la décroissance de la pression RMS avec l'éloignement de la source. La présence d'oscillations sur cette grandeur à l'occasion du calcul de référence est très vraisemblablement due aux réflexions non physiques de la condition aux limites de Thompson, non-adaptée aux ondes d'incidence rasante par rapport aux parois.

6.3 Diffraction d'une onde acoustique autour de deux nacelles de turboréacteur

L'objectif de ce dernier calcul consiste à illustrer la flexibilité de la méthode par recouvrement total ; un de ses intérêts réside dans la possibilité d'ajouter un nombre arbitraire d'obstacles dans une grille de fond résolue par une méthode DF. Ainsi, on se propose, en conservant la grille cartésienne définie précédemment, d'étudier le champ d'interférences entre deux géométries données par la figure 6.2. Aussi, chacune d'entre elle reste munie d'une source analytique donnée par une onde plane de fréquence $f = 390\text{Hz}$, que l'on choisit en phase.

6.3.1 Stratégie de maillage et configuration du couplage

On propose de disposer les deux nacelles sur un même plan, en les éloignant selon l'axe y d'approximativement 2 diamètres. La géométrie ainsi que la fréquence d'intérêt restant identiques, il ne s'agit que de dupliquer le maillage non-structuré volumique. En conséquence, le pas de temps reste identique et égal à 2.5×10^{-6} s. Chacun des sous-domaines non-structurés est traité en parallèle par une instance différente du solveur DG, et couplé avec le solveur DF cartésien. Il est intéressant de remarquer que si, de manière naturelle, les besoins en mémoire augmentent considérablement par rapport au cas précédent (ils passent de 30 Go à 55 Go), le temps CPU nécessaire à réaliser 40 000 itérations est identique (et approximativement égal à 110 heures).

6.3.2 Résultats

Les figures 6.9 et 6.10 représentent les champs d'interférences résultant de la présence de deux nacelles dans le domaine Ω . Si, dans ce cas, il n'a pas été possible de réaliser un calcul de référence DG du fait que les deux obstacles sont trop éloignés, il est possible de quantifier l'erreur numérique en s'appuyant sur le caractère symétrique de la solution. En effet, ceci impose que les gradients normaux de la densité doivent être nuls sur le plan de symétrie de normale $(0, 0, 1)$. En conséquence, la vitesse acoustique selon l'axe z , w_1 , doit y être égale à 0. La figure 6.11 représente cette grandeur ; elle permet de remarquer que cette dernière montre un caractère dissymétrique et prend des valeurs de l'ordre de 2×10^{-6} . À titre de comparaison, la valeur physique maximale (en valeur absolue) de w_1 dans Ω est égale à 8.7×10^{-4} . Il convient de noter, de plus, que cette erreur ne peut être

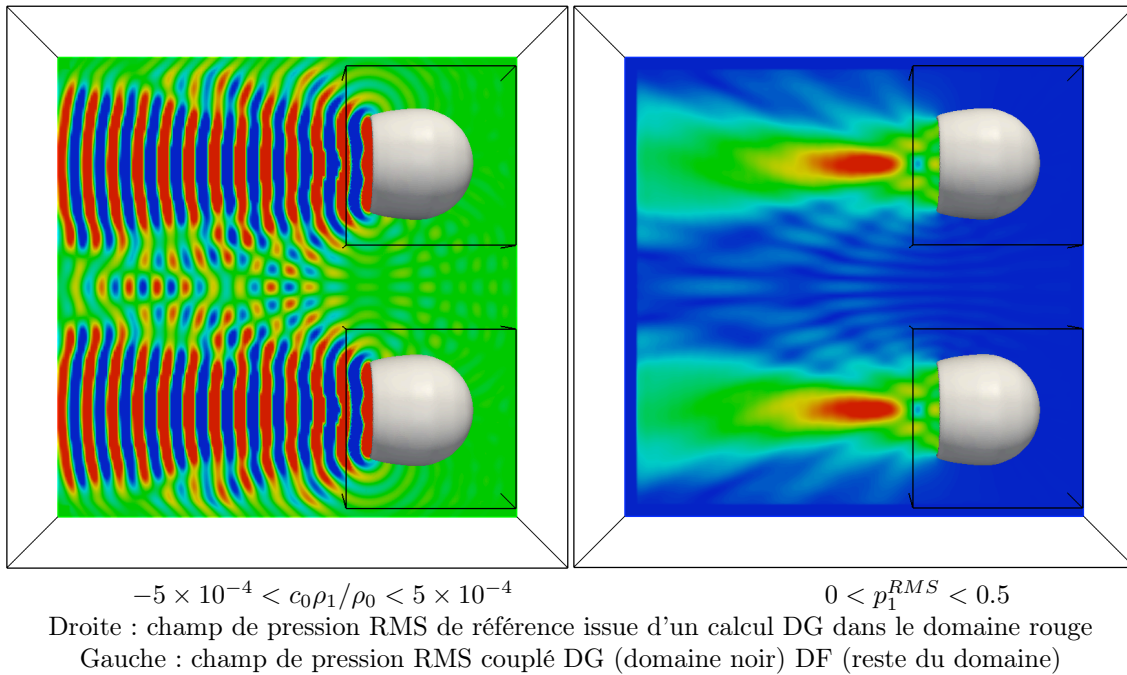


FIGURE 6.9 – Champs de pression instantanée et RMS, dans le cas de deux nacelles, selon le plan de symétrie

intégralement attribuée au couplage. Elle provient également, de manière naturelle, tant des imprécisions intrinsèques aux schémas DG et DF, qu'aux réflexions éventuelles des conditions aux limites de Ω .

6.4 Conclusion

Ces calculs ont permis d'illustrer en quoi le couplage DG / DF en maillages hybrides peut être utile aux cas d'intérêt industriel. Il a permis de traiter un problème de propagation acoustique autour d'un objet géométriquement complexe dans un domaine de grande taille ; aussi, une comparaison à un calcul de référence DG sur un domaine de taille intermédiaire a montré le bon comportement de la solution hybride (pour le raffinement choisi).

Par ailleurs, ces résultats ont mis en évidence les avantages de la méthode de couplage en recouvrement total en termes de flexibilité sur la génération des maillages. En effet, on a vu en quoi l'ajout d'obstacles supplémentaires dans la grille de fond cartésienne ne représentait pas une difficulté particulière au couplage des solveurs.

Il est important de remarquer que, pour la configuration machine fixée dans le cadre de cette étude, des simulations à précision équivalente ne sont pas réalisables via une discrétisation DG en maillage non-structuré sur l'intégralité du domaine. Ceci est dû, dans le contexte d'équations linéaires, à la quantité de mémoire nécessaire à stocker les matrices de masse, de rigidité et de flux du schéma DG. La réduction de la taille du domaine DG et l'utilisation d'un schéma DF en maillage cartésien permettent de lever une telle restriction. Toutefois, notons que cette stratégie (stockage des matrices constantes

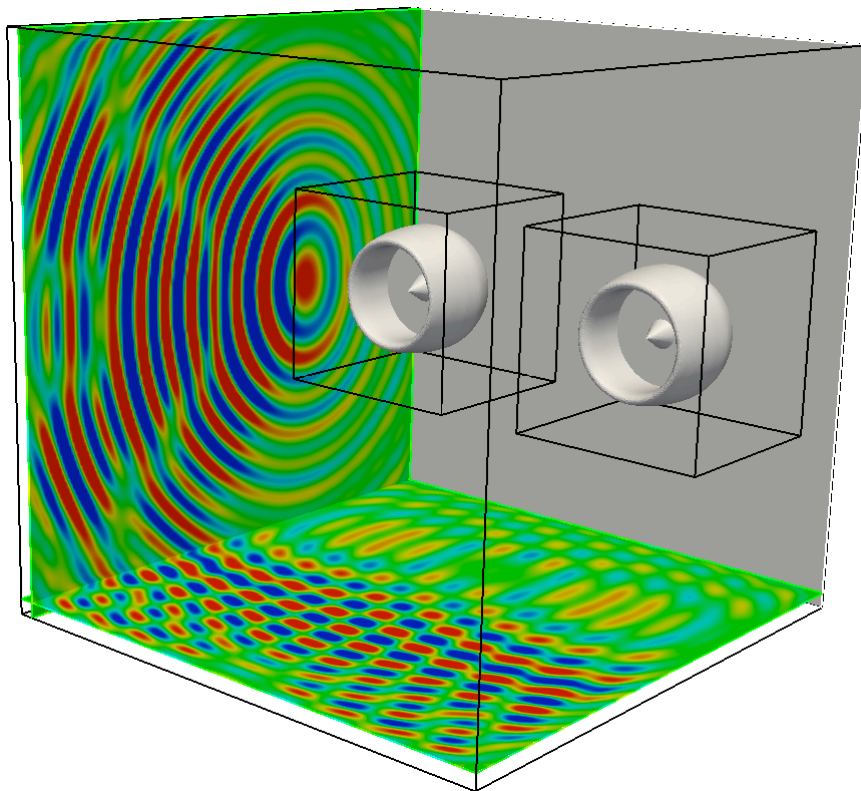


FIGURE 6.10 – Champs de pression instantanée dans le cas de deux nacelles

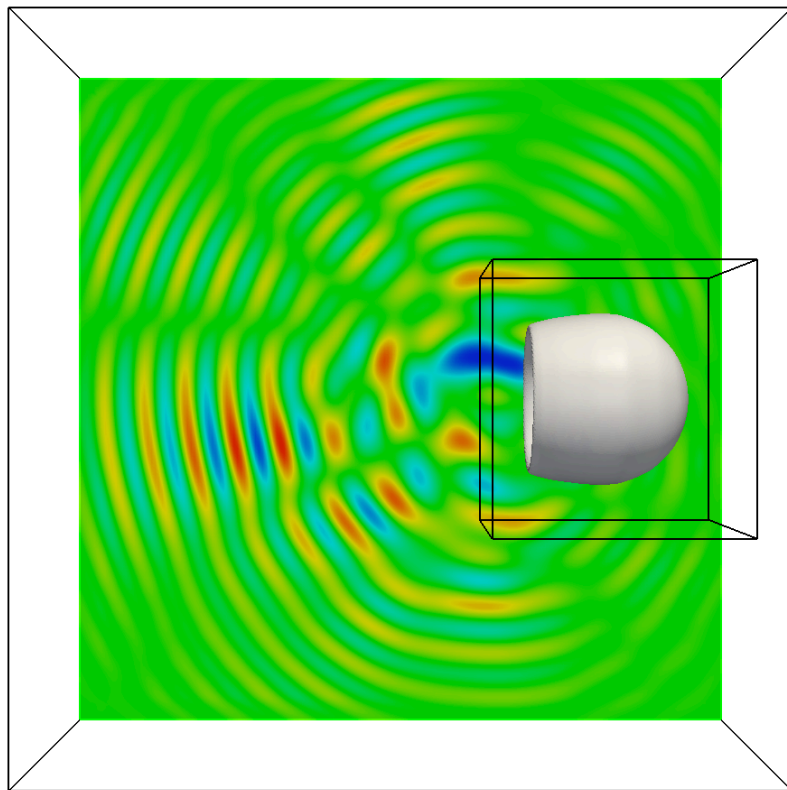


FIGURE 6.11 – Vitesse acoustique w_1 selon du plan de symétrie de normale ${}^t(0, 0, 1)$ - Valeurs comprises entre -2×10^{-6} et 2×10^{-6}

6.4 Conclusion

DG dans le cas de problèmes linéaires) ne constitue pas un usage universel. Si l'on avait privilégié l'idée de calculer les flux à chaque sous-itération de Runge-Kutta, les contraintes liées à la configuration machine auraient, semble-t-il, plutôt porté sur le temps de calcul que sur la mémoire requise. Le couplage DG/DF doit également permettre de répondre à ce problème, qui, du reste, doit se manifester dans les cas non-linéaires où le stockage des matrices du schéma n'est pas possible.

Chapitre 7

Conclusion

L'objectif de cette thèse a été d'élaborer et d'évaluer une technique de couplage entre méthodes de Galerkin Discontinue en maillage non-structuré et de différences finies en maillage cartésien, en vue d'applications réalistes en aéroacoustique dans le cadre de calculs dans le domaine temporel. Pour une raison de simplicité, la modélisation dans cette étude se limite aux équations d'Euler linéarisées.

Résultats principaux

En premier lieu, on s'est concentré sur l'apport d'une contribution à l'étude théorique des couplages DG/DF. Aussi, après avoir proposé un schéma couplé résultant de l'hybridation de discrétisations spatiales DG et DF centrées, on a montré analytiquement que ce dernier ne permettait pas de préserver l'ordre 2 des schémas vus de manière autonome.

Deuxièmement, ce travail a permis de montrer qu'il était néanmoins possible de mettre au point une technique de couplage entre les schémas DG et DF couramment utilisés dans la simulation en aéroacoustique, qui permette de conserver globalement l'ordre élevé de convergence en maillage. Pour ce faire, l'expérience numérique a également montré que les schémas d'interpolation spatiale, par ailleurs nécessaires et suffisante afin de répondre à la non-conformité des maillages, devaient être également d'ordre élevé (en cohérence avec l'ordre des discrétisations en espace).

De plus, cette étude a mis en évidence le fait qu'il était possible d'aboutir à un schéma hybride préservant le caractère borné en temps long de l'énergie, dans le cas de domaines spatialement limités par des parois rigides (et à plus forte raison dans le cas de domaines virtuellement non-bornés), en l'absence de terme source. En outre, ces expériences numériques indiquent qu'une faible quantité de diffusion numérique intrinsèque aux schémas (représentée par le décentrement du flux DG ainsi que le filtre DF) semble constituer une condition nécessaire pour obtenir des résultats stables en temps long (en dissipant les parasites générés par la frontière de couplage), dans de tels cas.

En outre, la précision (à maillage fixé) du schéma couplé a été évaluée en réalisant un cas d'épreuve acoustique dédié à la simulation de phénomènes de propagation d'ondes linéaires, en présence de géométries complexes. La comparaison entre les résultats issus du solveur développé dans cette étude et les résultats passés produits par divers auteurs ont montré que l'hybridation DF/DG présentait un comportement convenable.

Enfin, on a montré en quoi la procédure de couplage élaborée dans le cas 2D s'étendait naturellement à la troisième dimension d'espace. De plus, son application à un problème de propagation autour d'une géométrie de nature industrielle dans un domaine de grande taille a mis en évidence le bien-fondé de cette approche. En effet, un calcul entièrement DG pour une précision équivalente sur la configuration machine retenue s'avère difficilement réalisable, pour des questions de ressources informatiques.

Si les principaux résultats de ce travail, rappelés ci-dessus, sont encourageants au sens où ils tendent à indiquer que ce couplage est viable, il reste, bien évidemment, des questions ouvertes ainsi que des pistes de recherches qu'il serait intéressant d'approfondir.

Discussion et perspectives

Tout d'abord, l'aspect théorique de l'étude du couplage entre ces méthodes reste largement à explorer. En effet, l'absence de cadre d'étude commun à ces deux types de méthodes rend inaccessible, à l'heure actuelle, une éventuelle démonstration théorique de la validité de ces hybridations dans le cas général. Dans le cas monodimensionnel appréhendé dans le cadre de ce travail, il serait intéressant d'étudier la possibilité d'optimiser le schéma proposé : il s'agirait par exemple de chercher les coefficients des matrices du schéma tels que les coefficients de réflexion et de transmission soient effectivement d'ordre deux. Cette possibilité pourrait être d'une certaine utilité à la communauté de la simulation numérique de phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques, pour laquelle les schémas centrés, préservant l'énergie, sont amplement utilisés.

Deuxièmement, si l'on a pu conclure que le schéma couplé 2D préservait globalement l'ordre des schémas autonomes, l'expérience numérique a en revanche mis en lumière la présence de phénomènes parasites de nature locale. Ces derniers se manifestent par une quantité importante d'erreur (qui converge peu en maillage), portée par des nœuds DF dont le stencil prend en compte des points de couplage. Si ces phénomènes semblent conjointement liés au caractère discontinu de la solution DG et aux localisations des nœuds de couplage par rapport aux interfaces inter-maillages, leur cause n'est pas réellement comprise à l'heure actuelle (car difficile à déterminer de manière expérimentale). L'expérience a cependant montré que ces phénomènes ne semblent pas rédhibitoires en vue d'applications sur des cas tests académiques et réalistes.

De plus, il serait intéressant de compléter ce travail en se focalisant sur une optimisation de l'erreur générée par le solveur hybride, pour un nombre de degrés de liberté par longueur d'onde fixé. Pour ce faire, une idée pourrait consister à étudier le couplage entre un schéma DG et les différences finies centrées optimisées de Bogey et al. [7]. On pourrait également envisager d'évaluer le couplage muni, pour l'avancée en temps, de schémas RK peu dispersifs et peu dissipatifs (LDDRK) proposés par Hu et al. [25].

Par ailleurs, du fait que l'on a fait l'hypothèse d'un pas de temps identique pour tous les sous-domaines, les régions DF peuvent se retrouver pénalisées par un critère CFL effectif faible¹. Aussi, la mise en œuvre d'une méthode de pas de temps local par sous-domaine conservant l'ordre élevé doit pouvoir mener à des gains significatifs en termes de temps de calcul. Liu et al. [44] ont proposé une stratégie d'avancée en temps locale pour des schémas RK-DG, préservant l'ordre de convergence en Δt . Il serait intéressant

1. Le pas de temps global est, en pratique et le plus souvent, déterminé par la plus petite maille DG.

de l'étendre au couplage DG/DF ; toutefois, il faut noter que cette méthode implique de stocker en mémoire toutes sous-itérations de RK (du moins au bord des domaines), ce qui n'est pas l'idée des algorithmes d'avancée de temps implémentés dans cette thèse. Il est important de remarquer qu'une autre manière de répondre à cette difficulté serait d'appliquer une technique de pas de temps local intrinsèque au solveur DG. Un exemple d'une telle technique dans le cas de schémas non dissipatifs réside dans les travaux de Piperno [33].

Les perspectives du couplage étudié dans ce travail s'étendent au delà de la modélisation liée aux équations d'Euler linéarisées. En effet, il est important de rappeler que ce dernier s'inscrit dans le cadre d'études visant à concevoir des outils numériques pour la simulation unifiée des phénomènes de génération et de propagation d'ondes acoustiques [32], en présence éventuelle de géométries complexes. Aussi, dans un souci de gain en ressources machine pour une précision fixée, cette approche est-elle fondée sur l'idée de pouvoir coupler des sous-domaines faisant l'objet de modélisation différentes (équations de Navier-Stokes, équations d'Euler, équations d'Euler linéarisées) dont les solutions sont approchées par des schémas différents. Ainsi, il paraît naturel de considérer une extension du présent travail aux équations d'Euler non linéaires. Ceci permettrait, à plus long terme, d'envisager un couplage entre un schéma DG résolvant les équations de Navier-Stokes en maillage non-structuré et un schéma DF résolvant les équation d'Euler en maillage cartésien, dans une zone où les effets visqueux sont négligeables. Par ailleurs, à l'occasion de ce type de couplages, la modélisation fondée sur les équations d'Euler complètes semble préférable : même dans les cas où les fluctuations de pression sont faibles, cette dernière permet de s'affranchir d'une décomposition *a priori* empirique entre champ porteur et champ fluctuant.

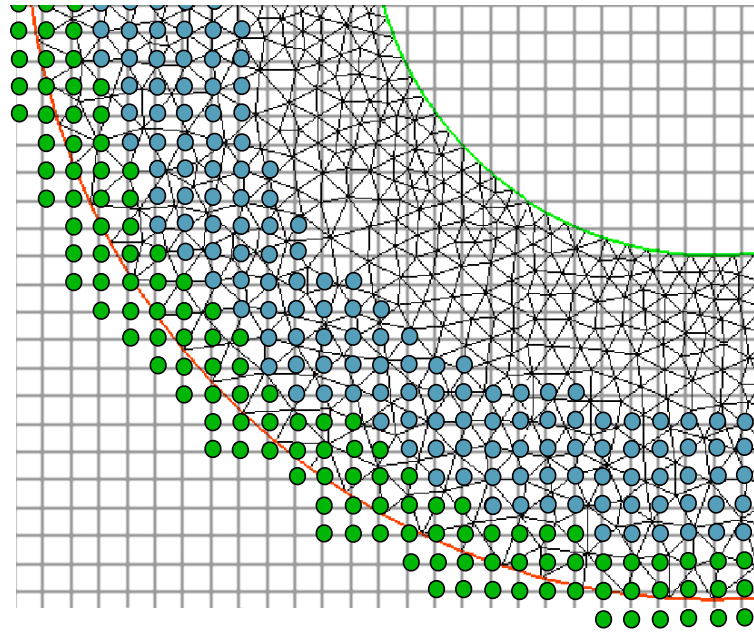
ANNEXES

Annexe A

Identification des points de couplage

L'objectif de cette annexe est de préciser l'algorithme mis en œuvre afin d'identifier les points de couplage de la grille DF, dans le cas de la méthode d'hybridation en recouvrement total.

- **Étape 1** : Détermination des points de la grille DF qui appartiennent à un domaine DG
Une manière très simple mais couteuse de procéder est la suivante.
 - Parcourir les points de la grille DF qui appartiennent à la "bounding-box" (c-à-d. $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$) du maillage DG.
 - Pour chacun de ces points, parcourir les cellules du maillage DG.
 - Pour chacune des cellules DG, calculer les coordonnées barycentriques du noeud DF d'intérêt.
 - Si on trouve une cellule DG pour laquelle toutes les coordonnées barycentriques sont comprises entre 0 et 1, alors le noeud DF est considéré comme appartenant au maillage DG.
- **Étape 2** : Détermination des $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$
 - On parcourt les points de Lagrange des faces constituant la frontière de couplage du domaine DG.
 - Pour chacun de ces points, on détermine la cellule DF à laquelle il appartient. Cette opération est très simple dans le cas d'un maillage DF cartésien à pas constant.
 - On identifie le stencil d'interpolation dédié à ce point de la frontière DG (les $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$) en sélectionnant, compte tenu de l'ordre d'interpolation choisi au préalable, les noeuds DF localisé dans le voisinage immédiat de cette cellule DF.
- **Étape 3** : Détermination des points de couplage
 - On parcourt l'intégralité des $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$.
 - À chacun de ces points, on applique virtuellement le plus large des stencils utilisés par le schéma DF (typiquement, le stencil de filtrage à 11 points par direction).
 - Les noeuds de la grille DF qui participent à ce stencil et qui :
 - n'appartiennent pas à $\mathcal{N}_{DF}^{\mathcal{L}}$,
 - appartiennent au maillage DF (ce caractère est déterminé à l'étape 1), sont les



Frontière rouge : frontière de couplage DG

Frontière verte : paroi d'un obstacle

$$\mathcal{N}_{DF}^L \longrightarrow \bullet \bullet \longleftarrow \mathcal{N}_{DF}^C$$

FIGURE A.1 – Maillages totalement recouvrants

points de couplage \mathcal{N}_{DF}^C .

Premièrement, il convient de remarquer que cet algorithme ne permet pas de s'assurer que la contrainte de recouvrement minimal évoquée à la section 5.2.2 est vérifiée. Dans notre cadre de travail, cette précaution doit être prise au préalable, et de manière non-automatisée. Deuxièmement, il faut noter que la procédure décrite plus haut est simple mais coûteuse. Ceci n'est pas rédhibitoire, compte tenu du fait que cette opération ne doit être réalisée qu'une seule fois, au préalable à l'avancée en temps (hormis dans le cas de maillages mobiles, ce qui sort du cadre du présent travail).

Communications

Article paru dans revue à comité de lecture

2012 - AIAA Journal - R. LÉGER, C. PEYRET, S.PIPERNO [27]

Study of a Discontinuous Galerkin / Finite Difference solver on hybrid meshes for Computational Aeroacoustics

Communications orales

25/07/2011 - Waves (Vancouver)

A coupled Discontinuous Galerkin / Finite Difference scheme on hybrid meshes for Computational Aeroacoustics

01/2011 - 9^{èmes} Journées des doctorants de l'Onera - Branche Mécanique des fluides et Énergétique

12/2010 - Séminaire "méthodes numériques" - Département de simulation numérique des écoulements et aéroacoustique - Onera

09/06/2010 - 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (Stockholm)

Study of a Discontinuous Galerkin / Finite Difference solver on hybrid meshes for Computational Aeroacoustics

01/2010 - 8^{èmes} Journées des doctorants de l'Onera - Branche Mécanique des fluides et Énergétique

Communications murales

12/2009 - Journées scientifiques de l'Onera : Méthodes numériques de haute précision et leur application à des problèmes physiques complexes (Toulouse)

05/2009 - SMAI 2009 (La Colle sur Loup)

Étude comparée des performances de méthodes de différences finies et de Galerkin discontinues en maillage cartésien pour les équations d'Euler en perturbations

01/2009 - 7^{èmes} Journées des doctorants de l'Onera - Branche Mécanique des fluides et Énergétique

Bibliographie

- [1] ABENIUS, E., ANDERSSON, U., EDELVIK, F., ERIKSSON, L., AND LEDFELT, G. Hybrid time domain solvers for the Maxwell equations in 2d. Tech. rep., Royal Institute of Technology and Uppsala University, Feb 2000.
- [2] AINSWORTH, M. Dispersive behaviour of high-order discontinuous Galerkin finite element methods. Journal of Computational Physics (2004).
- [3] BENEK, J., STEGER, J., AND DOUGHERTY, F. A flexible grid embedding technique with applications to the Euler equations. AIAA Paper (1983).
- [4] BENEK, J., STEGER, J., AND DOUGHERTY, F. A 3-D Chimera grid embedding technique. AIAA Paper (1985).
- [5] BERNACKI, M., AND PIPERNO, S. A dissipation-free time-domain discontinuous Galerkin method applied to three-dimensional linearized Euler equations around a steady-state non-uniform inviscid flow. Journal of Computational Acoustics (Dec 2006).
- [6] BIRKEFELD, A., UTZMANN, J., AND MUNZ, C. A hybrid method for caa. In 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference) (May 2009).
- [7] BOGEY, C., AND BAILLY, C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. Journal of Computational Physics 194 (2004), 194–214.
- [8] CANOUE, N. Méthodes de Galerkin Discontinu pour la résolution du système de Maxwell sur des maillages localement raffinés non-conformes. PhD thesis, ENPC, Dec 2003.
- [9] COCKBURN, B., KARNIADAKIS, G., AND SHU, C. The development of discontinuous Galerkin methods. Lecture Notes in Computational Science and Engineering (2000).
- [10] COCKBURN, B., AND SHU, C. The Runge-Kutta local projection \mathcal{P}^1 - discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws. RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (1991), 337–361.
- [11] COCKBURN, B., AND SHU, C. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. Tech. rep., 2000.
- [12] COHEN, G., JOLY, P., AND TORDJMAN, N. Éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes en dimension 1. Tech. Rep. 2323, INRIA, Aug 1994.
- [13] DELORME, P., MAZET, P.-A., PEYRET, C., AND VENTRIBOUT, Y. Computational aeroacoustics applications based on a discontinuous Galerkin method. Comptes rendus de l'académie des sciences (jul 2006).
- [14] DESQUESNES, G. Couplage par recouvrement de maillages curviligne / cartésien pour la simulation en aéroacoustique. PhD thesis, UPMC, 2007.
- [15] DHATT, G., AND TOUZOT, G. Une présentation de la méthode des éléments finis. Université de Compiègne, 1984.

-
- [16] DUMBSER, M., AND MUNZ, C. Ader discontinuous Galerkin schemes for aeroacoustics. C.R. Mécanique (2005).
- [17] ELMKIES, A., AND JOLY, P. Éléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell : le cas 3D. Tech. rep., INRIA, 1998.
- [18] ERN, A., AND PIETRO, D. D. Mathematical aspects of Discontinuous Galerkin Methods. Springer-Verlag, 2011.
- [19] FEZOU, L., LANTERI, S., LOHRENGEL, S., AND PIPERNO, S. Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3d heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes. M2AN 39, 6 (2005).
- [20] GARCIA, S. G., PANTOJA, M. F., DE JONG VAN COEVORDEN, C. M., BRETONES, A. R., AND MARTIN, R. G. A new hybrid DGTD/FDTD method in 2-D. In IEEE Microwave and wireless components letters (Dec 2008), vol. 18.
- [21] HAMMER, P., AND STROUD, A. Numerical integration over simplexes. 137–139.
- [22] HARTMANN, R. Numerical analysis of higher order discontinuous Galerkin finite element methods. VKI lecture series (Oct 2008).
- [23] HESTAVEN, J. S., AND WARBURTON, T. Nodal discontinuous Galerkin Methods. Springer, 2008.
- [24] HU, F., AND ATKINS, H. Eigensolution analysis of the discontinuous Galerkin method with non-uniform grids. part 1 : One space dimension. Journal of Computational Physics 182 (2002), 516–545.
- [25] HU, F. Q., HUSSAINI, M. Y., AND MANTHEY, J. Low-dissipation and dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics. Tech. rep., 1994.
- [26] LALLECHERE, S., GIRARD, S., VERNET, R., BONNET, P., AND PALADIAN, F. Fdtd/fvtd methods and hybrid schemes applied to reverberation chambers studies. In EuCAP (Nov 2006).
- [27] LÉGER, R., PEYRET, C., AND PIPERNO, S. Study of a high-order discontinuous Galerkin / finite difference scheme on hybrid meshes for computational aeroacoustics. AIAA Journal (2012).
- [28] LELE, S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. Journal of Computational Physics 103 (1992), 16–42.
- [29] LESANT, P., AND RAVIART, P.-A. On a finite element method solving the neutron transport equation in mathematical aspects of finite element in pde. Academic Press (1974).
- [30] LOWRIE, R. B. Compact higher-order numerical methods for hyperbolic conservation laws. PhD thesis, University of Michigan, 1996.
- [31] MOIN, P., AND MAHESH, K. Direct numerical simulation; a tool in turbulent research. Annual Review in Fluid Mechanics 30 (1998), 539 – 578.
- [32] PEYRET, C., LABBÉ, O., AND RAHIER, G. An aerodynamic / acoustic splitting method through a coupling boundary located in turbulent flows. In WAVES conference proceedings (Jul 2011).
- [33] PIPERNO, S. Symplectic local time-stepping in non-dissipative dgtd methods applied to wave propagation problems. M2AN 40, 5 (2006), 815–841.
- [34] REDONNET, S. Simulation de la propagation acoustique en présence d'écoulements quelconques et de structures solides par résolution numérique des équations d'Euler. PhD thesis, Bordeaux 1, 2001.

-
- [35] REED, W., AND HILL, T. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Tech. Rep. LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [36] REMAKI, M. Méthodes numériques pour les équations de Maxwell en milieu hétérogène. PhD thesis, ENPC, 1999.
- [37] TAM, C. Numerical methods in computational aeroacoustics. VKI lecture series (1996).
- [38] TAM, C., AND WEBB, J. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes in computational acoustics. Journal of Computational Physics (Aug 1993).
- [39] THOMPSON, K. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. Journal of Computational Physics 89 (1990), 439–461.
- [40] UTZMANN, J., LORCHER, F., DUMBSER, M., AND MUNZ, C. Aeroacoustic simulations for complex geometries based on hybrid meshes. In 12th AIAA/CEAS aeroacoustics conference (2006).
- [41] UTZMANN, J., SCHWARTZKOPFF, T., DUMBSER, M., AND MUNZ, C. Heterogeneous domain decomposition for computational aeroacoustics. AIAA Journal (Oct 2006).
- [42] VISBAL, M. R. Benchmark problems : category 2 complex geometry. In Fourth Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems (2004).
- [43] VISBAL, M. R., AND GAITONDE, D. M. Computation of aeroacoustic fields on general geometries using compact differencing and filtering schemes. AIAA Paper (1999).
- [44] XIU, L., XIAODONG, L., AND HU, F. Nonuniform time-step Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for computational aeroacoustics. Journal of Computational Physics, 229 (2010), 6874–6897.
- [45] YEE, H., SANDHAM, N., AND DJOMEHRI, M. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters. Journal of Computational Physics (Mar 1999).
- [46] YEE, K. Numerical simulation of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas Propagat., 14 (May 1966), 302–307.
- [47] ZINGG, D. W. Low mach number Euler computations. Tech. rep., Nasa, Oct 1989.

Résumé

Cette thèse vise à étudier le couplage entre méthodes de Galerkin Discontinue (DG) et méthodes de différences finies (DF) en maillages hybrides non structuré / cartésien, en vue d'applications en aéroacoustique numérique. L'idée d'une telle approche consiste à pouvoir tirer profit localement des avantages respectifs de ces méthodes, soit, en d'autres termes, à pouvoir prendre en compte la présence de géométries complexes par une méthode DG en maillage non structuré, et les zones qui en sont suffisamment éloignées par une méthode DF en maillage cartésien, plus efficace.

Plus précisément, il s'agit de concevoir un algorithme d'hybridation de ces deux types de schémas pour l'approximation des équations d'Euler linéarisées, puis d'évaluer avec attention le comportement numérique des solutions qui en sont issues. De par le fait qu'aucun résultat théorique ne semble actuellement accessible dans un cas général, cette étude est principalement fondée sur une démarche d'expérimentation numérique. Par ailleurs, l'intérêt d'une telle hybridation est illustré par son application à un calcul de propagation acoustique dans un cas réaliste.

Abstract

This PhD dissertation aims at studying coupling techniques between Discontinuous Galerkin (DG) and finite difference (FD) schemes in a non-structured / Cartesian hybrid-mesh context, in the framework of Aeroacoustics computations. The idea behind such an approach is the possibility to locally take advantage of the qualities of each method. In other words, the goal is to be able to deal with complex geometries using a DG scheme on a non-structured mesh in their neighborhood, while solving the rest of the domain using a FD scheme on a cartesian grid, in order to alleviate the needs in heavy computational resources.

More precisely, this work aims at designing an hybridization algorithm between these two types of numerical schemes, in the framework of the approximation of the solutions of the Linearized Euler Equations. Then, the numerical behaviour of hybrid solutions is cautiously evaluated. Due to the fact that no theoretical result seems achievable at the present time, this study is mainly based on numerical experiments. What's more, the interest of such an hybridization is illustrated by its application to an acoustic propagation computation in a realistic case.

Mots-clés : Méthode de Galerkin Discontinue, Méthode de différences finies, hybridation, couplage, aéroacoustique numérique, propagation d'ondes

Keywords : Discontinuous Galerkin methods, Finite Difference schemes, hybridization, coupling, computational aeroacoustics, wave propagation